



HAL
open science

Controllability of of some kinetic equations, of parabolic degenerated equations and of the Schrödinger equation via domain transformation.

Iván Moyano Garcia

► **To cite this version:**

Iván Moyano Garcia. Controllability of of some kinetic equations, of parabolic degenerated equations and of the Schrödinger equation via domain transformation.. Analysis of PDEs [math.AP]. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. English. NNT : 2016SACLX062 . tel-01496831

HAL Id: tel-01496831

<https://pastel.hal.science/tel-01496831v1>

Submitted on 27 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



NNT : 2016SACLX062

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE À
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE DOCTORALE 574
École doctorale de mathématiques Hadamard
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Par

Iván MOYANO

Contrôlabilité de quelques équations cinétiques,
paraboliques dégénérées et de Schrödinger

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 29 septembre 2016.

Après avis des rapporteurs :

CLÉMENT MOUHOT Université de Cambridge
MARIUS TUCSNAK Université de Bordeaux I

Composition du jury :

| | | |
|------------------|---------------------------|---------------------|
| KARINE BEAUCHARD | ENS Rennes | Directrice de thèse |
| OLIVIER GLASS | Université Paris-Dauphine | Examinateur |
| DANIEL HAN-KWAN | CNRS, Ecole polytechnique | Directeur de thèse |
| FRÉDÉRIC HÉRAU | Université de Nantes | Examinateur |
| LUC ROBBIANO | Université de Versailles | Président |
| MARIUS TUCSNAK | Université de Bordeaux I | Rapporteur |



**Contrôlabilité de quelques équations cinétiques,
paraboliqnes dégénérées et de Schrödinger**

Iván Moyano

CENTRE DE MATHÉMATIQUES LAURENT SCHWARTZ, ECOLE POLYTECHNIQUE,
CNRS, UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, 91128, PALAISEAU, FRANCE
E-mail address: ivan.moyano-garcia@polytechnique.edu

*A mis padres, por su infinito cariño
e inagotable paciencia
con su hijo loco
que quería ser doctor en matemáticas*

Illud in his quoque te rebus cognoscere avemus,
Corpora cum deorsum rectum per inane feruntur,
Ponderibus propriis, incerto tempore ferme,
Incertisque locis, spatio decedere paullum,
220 Tantum quod momen mutatum dicere possis.
Quod nisi declinare solerent, omnia deorsum,
Imbris uti guttae, caderent per inane profundum,
Nec foret offensus natus, nec plaga creata
Principiis, ita nil unquam natura creasset.

*Que les atomes ne
tumbent pas droit
contrebas*

225 Quod si forte aliquis credit graviora potesse
Corpora, quo citius rectum per inane feruntur,
Incidere ex supero levioribus, atque ita plagas
Gignere, quae possint genitales reddere motus :
Avius a vera longe ratione recedit.

*Qu'ils ne peuvent enjandrer
tumbans les unes
sur les autres*

230 Nam per aquas quaecumque cadunt atque aera deorsum,
Haec, pro ponderibus, casus celerare necessest,
Propterea quia corpus aquae naturaeque tenuis
Aeris haud possunt aequae rem quamque morari
Sed citius cedunt gravioribus exsuperata,

*Ce qui faict que
les choses poisantes
tumbent plus a coup
c'est que l'air ou l'eau
qu'elles ont a perser*

235 At contra nulli, de nulla parte, neque ullo
Tempore, inane potest vacuum subsistere rei,
Quin sua quod natura petit concedere pergat.
Omnia quapropter debent per inane quietum
Aequae ponderibus non aequis concita ferri.

*leur resiste plus
malaiseemant
par le vuide
tout iroit d'un trein*

240 Haud igitur poterunt levioribus incidere unquam
Ex supero graviora, neque ictus gignere per se,
Qui variant motus, per quos natura gerat res.
Quare etiam atque etiam paullum inclinare necessest
Corpora, nec plus quam minimum, ne fingere motus

*Mouvemant a cartier
fort legier et ridicule
que les atomes font*

245 Obliquos videamur, et id res vera refutet.
Namque hoc in promptu manifestumque esse videmus,
Pondera, quantum in sest, non posse obliqua meare,
Ex supero cum praecipitant, quod cernere possis.
Sed nil omnino recta regione viai

*Il faut que ce mouvemant
a coste soit bien delicat
de peur de faire un
mouvemant de travers*

250 Declinare, quis est qui possit cernere sese ?

LUCRÈCE, *De Rerum Natura*,

Livre II, vs. 216-250.

Éxemplaire anotée par MICHEL DE MONTAIGNE.

de l'édition par D. Lambin

(Titii Lucretii Cari. De rerum natura, Paris-Lyon, G. et Ph. Rouillé, 1563),

Bibliothèque de l'Université de Cambridge (Montaigne.1.4.4)¹, pages 118-120.

1. Édition par A. Legros, disponible sur montaigne.univ-tours.fr/lucrece/.

216 A ce propos, il est encore un fait que nous désirons te faire connaître : dans la chute en ligne droite qui emporte les atomes à travers le vide, en vertu de leur poids propre, ceux-ci, à un moment indéterminé, en un endroit indéterminé, s'écartent tant soit peu de la verticale, **220** juste assez pour qu'on puisse dire que leur mouvement se trouve modifié. Sans cette déclinaison, tous, comme des gouttes de pluie, tomberaient de haut en bas à travers les profondeurs du vide ; entre eux nulle collision n'aurait pu naître, nul choc se produire ; et jamais la nature n'eût rien créé.

225 Que si l'on va croire que les atomes les plus lourds peuvent, grâce à la vitesse plus grande qui les emporterait verticalement à travers le vide, tomber d'en haut sur les plus légers, et produire ainsi des chocs capables de provoquer des mouvements créateurs, on s'écarte et se fourvoie bien loin de la vérité. **230** Sans doute tous les corps qui tombent à travers l'eau ou le fluide rare de l'air, doivent accélérer leur chute à proportion de leur pesanteur ; car les éléments de l'eau et la nature de l'air subtil ne peuvent retarder également tous les corps, et cèdent plus vite à la pression victorieuse des plus pesants. **235** Mais pour le vide, en aucun lieu, en aucun temps il ne saurait se trouver sous aucun corps, sans continuer de lui céder, comme l'exige sa nature. Aussi tous les atomes, emportés à travers le vide inerte, doivent se mouvoir avec une égale vitesse malgré l'inégalité de leurs poids. **240** Les plus lourds ne pourront donc jamais se précipiter d'en haut sur les plus petits, ni engendrer par eux-mêmes les chocs qui déterminent les mouvements divers que la nature emploie pour accomplir sa tâche.

Aussi, je le répète encore, il faut que les atomes s'écartent un peu de la verticale ; mais à peine et le moins possible, que nous n'ayons pas l'air d'imaginer des **245** mouvements obliques ; ce que réfuterait la réalité. Car c'est chose visible, manifeste, évidente que les corps pesants ne peuvent d'eux-mêmes prendre une direction oblique en tombant, pour autant que nous puissions le discerner. **250** Mais qu'ils ne dévient absolument pas de la verticale, qui donc pourrait s'en apercevoir ?

LUCRÈCE, *De la Nature (De Rerum Natura)*,
Tome 1, livres I-III, éd. et trad. par A. Ernout.
Les Belles Lettres, Paris, 1920 (*CUF - Collection Budé*).

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier du fond du coeur mes directeurs de thèse, qui m'ont formé comme mathématicien, ce qui n'a pas dû être facile. J'ai eu l'extraordinaire chance de travailler avec Karine Beauchard et Daniel Han-Kwan, deux chercheurs d'immenses qualités humaines et scientifiques, qui ont su me soutenir et me guider constamment et en tout moment, en me transmettant leurs méthodes et idées. Karine a su m'initier depuis le début de ma thèse et mon stage de M2 aux difficiles et étroites, mais nécessaires, voies de la rigueur, à la concision, et au goût des calculs précis, des arguments clairs et limpides. Elle a fait preuve d'une grande patience dans mon apprentissage, en me rappelant les objectifs, les bases, les buts et en me transmettant un esprit d'efficacité, d'exigence et de performance. Elle m'a, enfin, appris à lire et à écrire (mathématiquement), ce pour quoi je lui serai reconnaissant toute ma carrière. Daniel a su partager avec moi toute son incroyable créativité, sa souplesse incomparable, sa générosité sans borne. Pour moi cela a été un vrai plaisir d'essayer de suivre ses raisonnements au tableau, pour me rendre compte quelques mois plus tard que toutes ses prédictions étaient vraies. Daniel m'a complètement *cinétisé*, en me faisant découvrir un domaine de recherche qui m'a ravi depuis le début. Il m'a transmis le goût des arguments profonds, des visions d'ensemble, de l'enthousiasme créatif. J'ai pu bénéficier de la combinaison des grandes qualités de mes deux directeurs, qui sont pour moi des modèles pour le futur.

Je souhaiterais ensuite remercier Jérôme Le Rousseau, avec qui j'ai eu l'énorme chance de travailler sur un article. En tant que collaborateur et chercheur senior, il a su m'initier aux inégalités de Carleman et au calcul pseudodifférentiel. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Je remercie chaleureusement Clément Mouhot et Marius Tucsnak d'avoir accepté de rapporter ma thèse. C'est un grand honneur pour moi et un vrai privilège. Je leur en suis très reconnaissant. Leurs remarques ont sans aucun doute amélioré le contenu de la thèse. Je remercie aussi Olivier Glass, Frédéric Hérau et Luc Robbiano de me faire l'honneur de faire partie de mon jury.

Je voudrais remercier ensuite tous les membres du CMLS, où j'ai eu la chance de travailler pendant mes trois ans de thèse. Le CMLS a été pour moi un endroit très stimulant, où je me suis senti bien accueilli et apprécié. Les repas de midi, les cafés, les goûters et les pique-niques ont toujours été des moments de partage convivial avec les collègues, doctorants, post-doctorants et permanents. Je voudrais remercier tout particulièrement Charles Favre, qui s'est occupé de moi comme un père spirituel, en me donnant toujours de bons conseils (avec une grande affection) que j'ai infiniment appréciés. Je souhaite aussi remercier spécialement François Golse, avec qui j'ai eu de très stimulantes conversations dans des domaines aussi variés que les mathématiques, l'histoire et bien d'autres, au CMLS et à Cambridge. J'ai

eu aussi la grande chance de profiter du passage d'Isabelle Tristani au laboratoire, avec qui j'ai eu une profonde complicité cinétique qui nous suivra, je l'espère, dans le Vème (merci pour la relecture et les repas de famille). Je pense aussi à Fabrice (eskerrik asko!), Yann, Yvan, Evelyne, Raphaël, Philippe, Patrick, Benjamin, Paul, Pascale H. (à qui je dois aussi les excellentes conditions de mon monitorat à l'X)... Je voudrais témoigner une gratitude spéciale pour Pascale F., Marine et Carole, à l'efficacité hors pair, et aux informaticiens David, Danh et Jean-Luc. Je pense aussi, bien évidemment, aux doctorants et amis qui ont partagé avec moi cet espace privilégié : Rita (ma chère compatriote), Bac, Benoît, René, Fabio, Matthieu, Yakine, Hsueh-Yung, Jacek, Thomas, Sandrine... et mes cobureaux Tatiana et Matilde.

Ensuite, je voudrais remercier la communauté de contrôle, qui m'a accueilli comme une deuxième famille. On pourrait commencer par Jean-Michel, notre inspiration et modèle à tous, dont le GdT des vendredis a créé un espace de partage sans égal. Cet espace et l'interaction avec des personnes comme Thomas Alazard (que je remercie pour d'excellentes discussions philosophiques et mathématiques), Emmanuel Trélat, Lionel Rosier ou Piermarco Cannarsa, m'ont décidé à faire du contrôle et m'ont confirmé dans mon choix. Je remercie chaleureusement mes amis et collègues contrôleurs Pierre (qui mérite un chapitre de remerciements à lui seul), Camille L. (mon guide spirituel), Diego, Vincent, Morgan, Sylvain E., Maya, Matthieu L., Fabricio M., Enrique F.C., Manolo G. B., Eduardo C., Axel O. (avec lesquels il est possible de parler de contrôle en espagnol), Guillaume, Guilherme, Michel, Roberto, Mamadou et bien d'autres que j'aurais voulu citer. Plus tard, j'ai commencé à interagir et à collisionner gentiment avec des cinéticiens, à Paris, Bordeaux et Cambridge. Je pense à Ludovic C., Marc, Kléber, Nathalie, Freda, Aymann, Arianne...

Je voudrais aussi remercier les doctorants et post-doctorants du LJLL et de Dauphine, chez qui j'ai passé une bonne partie de mon temps, et avec qui j'ai visité le Vème en des circonstances très diverses : Sarah, Giacomo, Carlo, Aurora, Jiamin, Matthew, Mehdi, Ryadh, Shuh-Yang, Maxime, Jean, Camille, Dario... Je voudrais aussi remercier Fabrice Bethuel, qui m'a très bien guidé lors de mon M2 à Jussieu. En tant qu'appendices naturels de Jussieu, je ne peux pas oublier certains établissements comme le Baker Street, le 2bis, ou le Mayflower, où j'ai échangé mon stress contre des heures de joie, d'histoires inconcevables et une excellente compagnie.

Il y a eu des moments où les intégrales et les inégalités ont été une dure épreuve. Pour ces moments, j'ai eu la grande chance d'intégrer l'orchestre des Planches à Musique (PAM), de forme parfois plus silencieuse que prévue. J'y ai trouvé des moments de sérénité, de folie, de néolithisme et de décadence qu'il me fallait. Je remercie chaleureusement Gulihem, Sylvain (le décor m'oblige à passer sous silence les souvenirs communs avec ces derniers), Florent, Nathanaël, Émilien, Rémy, Mélanie, Jérémy, Mathias, Marjorie, Camille (qui m'a fait découvrir ma nature de crétin des Pyrénées), Grégoire, Louise, Arthur, Claire...

Cette thèse n'aurait pas du tout été possible sans le soutien inconditionnel et constant de mes amis. J'ai l'immense chance de pouvoir en citer quelques uns sans hésiter : Alvaro Cancela et Miguel Querejeta, mes amis fraternels et inestimables, avec qui j'ai partagé une bonne partie de ma vie et de mon chemin depuis l'Espagne et qui méritent deux longs chapitres de remerciements. Je pense aussi à Javier Hernández et Borja Ibáñez. Je pense évidemment à mes deux amis et

colo(co)cataires Ludovick Gagnon et Thibault Louard qui ont partagé avec moi d'innombrables choses à Paris et lors de conférences. Je dois ma francophilie et mon choix de Paris comme destination obligée (ainsi que beaucoup d'heures de conversation et son excellente bibliothèque) à Carlos Fernández Pérez, qui m'a chaleureusement et vivement encouragé à me plonger dans la recherche depuis mon époque d'étudiant à Madrid. Je pense aussi à mes amis d'Aranda : Raquel, Quique, Dani, Bego, Sergio, Sara (A y H), lors de passages parfois fugaces mais plaisants. Je dois un grand merci à Annie Hulmer, qui m'a guidé dans la vie parisienne dès les premiers jours de cette aventure et qui a toujours su m'encourager pour aller plus loin. Je ne pourrais pas finir mes remerciements sans mentionner les personnes qui m'ont accompagné dans ce chemin de la forme la plus intime : Laura Pilbeam, qui m'a aidé à commencer cette thèse et qui m'a accompagné à Paris, et Océane Sipan, qui m'a aidé à la finir.

Ma famille a été dans cette aventure un pilier solide et un point de repère constant. Je remercie mes parents, Juan et Teresa, ma soeur Tata (te debo ochenta y mil), mon frère Pedro et leurs conjoints José et Sonia, leur soutien constant, leur patience, leur affection et leurs bons conseils. Mes neveux, Sergio et Nerea m'ont beaucoup aidé à clarifier les choses dans ma tête avec leurs questions intelligentes et profondes et m'ont accompagné dans cette aventure avec leurs fous rires et leurs jeux. Mon neveu Jaime, le nouvel arrivant, qui est né quand cette thèse commençait, m'a aidé aussi à comprendre que le temps passe... Pour lui, il n'y a rien de plus normal qu'avoir un oncle mathématicien à Paris.

Préface / Abstract

Préface en français : Ce mémoire présente les travaux réalisés au cours de ma thèse dans le but d'étudier la contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la contrôlabilité de quelques équations cinétiques en différents régimes. Dans un régime collisionnel, nous étudions la contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov, un modèle de type Fokker-Planck cinétique, posée dans l'espace de phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Nous obtenons la contrôlabilité à zéro de cette équation grâce à l'utilisation d'une inégalité spectrale associée à l'opérateur Laplacien dans tout l'espace. Dans un régime non-collisionnel, nous étudions la contrôlabilité de deux systèmes de couplage fluide-cinétique, les systèmes de Vlasov-Stokes et de Vlasov-Navier-Stokes, comportant des non-linéarités dues au terme de couplage. Dans ces cas, l'approche repose sur la méthode du retour.

Dans la deuxième partie nous étudions la contrôlabilité d'une famille d'équations paraboliques dégénérées 1-D par la méthode de platitude, qui permet la constructions de contrôles explicites.

La troisième partie porte sur le problème de la contrôlabilité de l'équation de Schrödinger par la forme du domaine, c'est-à-dire, en utilisant le domaine comme variable de contrôle. Nous obtenons un résultat de ce type dans le cas du disque unité bidimensionnel. Nos méthodes sont basées sur un résultat de contrôle exact local autour d'une certaine trajectoire, obtenu grâce au théorème d'inversion locale.

Mots clés : contrôlabilité ; modèles cinétiques ; équations paraboliques dégénérées ; équation de Schrödinger.

Abstract in English : This memoir presents the results obtained during my PhD, whose goal is the study of the controllability of some Partial Differential Equations.

The first part of this thesis is concerned with the study of the controllability of some kinetic equations undergoing different regimes. Under a collisional regime, we study the controllability of the Kolmogorov equation, a particular case of kinetic Fokker-Planck equation, in the phase space $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. We obtain the null-controllability of this equation thanks to the use of a spectral inequality associated to the Laplace operator in the whole space. Under a non-collisional regime, we study the controllability of two fluid-kinetic models, the Vlasov-Stokes system and the Vlasov-Navier-Stokes system, which exhibit nonlinearities due to the coupling terms. In those cases, the strategy relies on the Return method.

In the second part, we study the controllability of a family of 1-D degenerate parabolic equations by the flatness method, which allows the construction of explicit controls.

The third part is focused on the problem of the controllability of the Schrödinger equation via domain deformations, i.e., using the domain as a control. We obtain a result of this kind in the case of the two-dimensional unit disk, for radial data. Our methods are based on a local exact controllability result around a certain trajectory, obtained thanks to the Inverse Mapping theorem.

Key words : controllability ; kinetic models ; degenerate parabolic equations ; Schrödinger equation.

Liste des travaux rassemblés dans la thèse

Les chapitres de ce mémoire se composent des travaux suivants :

- Chapitre 1 : écrit en collaboration avec J. Le Rousseau.
Null-controllability of the Kolmogorov equation in the whole phase space.
Journal of Differential Equations Vol.260, pp. 3193-3233, 2016 (cf. [104]).
- Chapitre 2 :
On the controllability of the 2-D Vlasov-Stokes system.
Communications in Mathematical Sciences, à paraître (cf. [125]).
- Chapitre 3 :
Local null-controllability of the 2-D Vlasov-Navier-Stokes system.
Soumis pour publication. *arXiv :1607.05578* (cf. [126]).
- Chapitre 4 :
Flatness for a strongly degenerate 1-D parabolic equation.
Mathematics of Control, Signals and Systems, à paraître (cf. [124]).
- Chapitre 5 :
Local exact controllability of a quantum particle in a time-varying 2D disc
with radial data.
Soumis pour publication. *arXiv :1611.10192* (cf. [127]).

Table des Matières

| | |
|--|----------|
| Un texte inspirateur | iii |
| Remerciements | vii |
| Préface / Abstract | xi |
| Liste des travaux rassemblés dans la thèse | xiii |
| partie 1. Introduction | 1 |
| Chapitre I. Quelques notions de théorie du contrôle | 3 |
| I.1. La problématique de la théorie du contrôle | 3 |
| I.2. Quelques méthodes de résolution de problèmes de contrôle | 3 |
| I.2.1. La méthode HUM | 3 |
| I.2.2. La méthode de linéarisation | 7 |
| I.2.3. La méthode du retour | 8 |
| Chapitre II. Contrôlabilité des équations cinétiques | 11 |
| II.1. Présentation des modèles | 11 |
| II.1.1. L'équation de Fokker-Planck cinétique | 11 |
| II.1.2. Quelques modèles de couplage fluide-cinétique | 13 |
| II.2. Cadre général de la contrôlabilité des équations cinétiques | 16 |
| II.3. Cas hypoelliptique : contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov | 17 |
| II.3.1. Travaux précédents sur Kolmogorov | 18 |
| II.3.2. Contrôlabilité de l'équation de la chaleur et inégalités de Carleman | 19 |
| II.3.3. Conditions géométriques pour l'observabilité sur des domaines non bornés | 26 |
| II.3.4. Résultats nouveaux (Chapitre 1) | 27 |
| II.3.5. Quelques perspectives | 29 |
| II.4. Cas non-collisionnel : contrôlabilité des systèmes fluide-cinétique | 30 |
| II.4.1. Travaux précédents : contrôlabilité des équations de Vlasov non linéaires | 30 |
| II.4.2. Résultats nouveaux pour le système de Vlasov-Stokes (Chapitre 2) | 33 |
| II.4.3. Résultats nouveaux pour le système de Vlasov-Navier-Stokes (Chapitre 3) | 36 |
| Chapitre III. Contrôlabilité d'équations paraboliques dégénérées par la méthode de platitude | 43 |
| III.1. Équations paraboliques dégénérées | 43 |
| III.1.1. Un système modèle en 1-D | 43 |
| III.2. La méthode de platitude | 45 |

| | |
|---|-----------|
| III.2.1. La méthode de platitude pour l'équation de la chaleur | 45 |
| III.3. Résultats nouveaux (Chapitre 4) | 47 |
| Chapitre IV. Contrôlabilité de l'équation de Schrödinger par la forme du domaine | 51 |
| IV.1. Modèle physique | 51 |
| IV.2. Le problème du contrôle quantique | 52 |
| IV.2.1. Contrôle linéaire | 52 |
| IV.2.2. Contrôle bilinéaire | 53 |
| IV.2.3. Résultats nouveaux (Chapitre 5) | 58 |
| Part 2. Presentation of results | 63 |
| Chapter 1. Null-controllability of the Kolmogorov equation in the whole phase space | 65 |
| 1.1. Introduction | 65 |
| 1.1.1. Main Results | 65 |
| 1.1.2. Existing results and techniques | 66 |
| 1.1.3. Open questions and perspectives | 68 |
| 1.1.4. Outline | 69 |
| 1.1.5. Notation | 69 |
| 1.2. Well-posedness and exponential decay rate | 70 |
| 1.3. A spectral inequality | 71 |
| 1.3.1. A global elliptic Carleman estimate | 72 |
| 1.3.2. Proof of the spectral inequality | 79 |
| 1.4. Null-controllability of the Kolmogorov equation | 82 |
| 1.4.1. Observability of one Fourier mode | 82 |
| 1.4.2. Observability of Fourier packets | 90 |
| 1.4.3. Construction of the control function | 91 |
| 1.5. Proofs of the semigroup and well-posedness properties | 92 |
| 1.5.1. Proof of Proposition 1.2.1 | 92 |
| 1.5.2. Proof of Proposition 1.2.2 | 94 |
| 1.5.3. Proof of Proposition 1.2.3 | 97 |
| Chapter 2. On the controllability of the 2-D Vlasov-Stokes system | 99 |
| 2.1. Introduction | 99 |
| 2.1.1. Main result | 99 |
| 2.1.2. Previous work | 100 |
| 2.1.3. Strategy of the proof | 101 |
| 2.2. Some remarks on the characteristic equations | 103 |
| 2.3. Construction of a reference trajectory | 106 |
| 2.3.1. Large velocities | 106 |
| 2.3.2. Low velocities | 110 |
| 2.3.3. Description of the reference trajectory | 112 |
| 2.4. Fixed point argument | 114 |
| 2.4.1. Definition of the operator | 114 |
| 2.4.2. Existence of a fixed point | 120 |
| 2.4.3. Uniqueness | 122 |
| 2.5. End of the proof | 124 |

| | |
|---|-----|
| 2.6. Conclusion and perspectives | 127 |
| Chapter 3. Local null-controllability of the 2-D Vlasov-Navier-Stokes system | 129 |
| 3.1. Introduction | 129 |
| 3.1.1. Main results | 129 |
| 3.1.2. Previous work | 131 |
| 3.2. Some remarks on the characteristic equations | 135 |
| 3.3. Construction of a reference trajectory | 135 |
| 3.3.1. Global exact controllability of the Navier-Stokes system | 136 |
| 3.3.2. Proof of Proposition 3.3.1 | 137 |
| 3.4. Fixed-point argument | 139 |
| 3.4.1. Definition of the operator | 139 |
| 3.4.2. Navier-Stokes system with a drag force interaction term | 140 |
| 3.4.3. Absorption | 148 |
| 3.4.4. Extension | 149 |
| 3.4.5. Existence of a fixed point | 150 |
| 3.5. Stability for the Vlasov-Navier-Stokes system | 153 |
| 3.6. Proof of Theorem 3.1.3. Controllability. | 157 |
| 3.7. Proof of Theorem 3.1.3. Uniqueness. | 162 |
| 3.8. Perspectives and comments | 163 |
| Chapter 4. Flatness for a strongly degenerate 1-D parabolic equation | 165 |
| 4.1. Introduction | 165 |
| 4.1.1. Main result | 165 |
| 4.1.2. Previous work | 166 |
| 4.1.3. Open questions and perspectives | 166 |
| 4.1.4. Structure of the article | 167 |
| 4.1.5. Notation | 167 |
| 4.2. Well-posedness | 167 |
| 4.3. Explicit solution | 168 |
| 4.3.1. Heuristics | 168 |
| 4.3.2. Pointwise solutions | 169 |
| 4.3.3. Convergence | 169 |
| 4.4. Spectral Analysis | 172 |
| 4.5. Regularising effect | 174 |
| 4.6. Construction of the control | 177 |
| Chapter 5. Local exact controllability of a quantum particle in a time-varying 2D disc with radial data. | 179 |
| 5.1. Introduction | 179 |
| 5.1.1. Change of variables | 180 |
| 5.1.2. Functional setting | 181 |
| 5.1.3. Main result | 182 |
| 5.1.4. Previous work | 182 |
| 5.1.5. Strategy and outline | 182 |
| 5.2. Well-posedness and smoothing effect | 183 |
| 5.2.1. Smoothing effect | 184 |
| 5.3. \mathcal{C}^1 -regularity of the end-point map | 186 |
| 5.4. Controllability of the linearised system around $(\varphi^\#, u \equiv 0)$ | 187 |

| | |
|--|------------|
| 5.4.1. Proof of Lemma 5.4.2 | 189 |
| 5.5. Proof of Theorem 5.1.4 | 191 |
| 5.6. Comments and perspectives | 191 |
| Part 3. Appendices | 193 |
| Chapter A. Auxiliary results on harmonic approximation | 195 |
| A.1. Results for high velocities | 195 |
| A.2. Results for low velocities | 195 |
| Chapter B. Review of the Stokes system | 197 |
| B.1. Stationary Stokes system | 197 |
| B.2. Non stationary Stokes system | 198 |
| Chapter C. Review of the Navier-Stokes system on the 2-dimensional torus | 199 |
| C.1. Existence results | 199 |
| C.2. A stability result | 199 |
| C.3. A propagation of regularity result | 200 |
| Chapter D. Some properties of the Gamma function | 201 |
| Chapter E. Some properties of Bessel functions | 203 |
| E.1. Definition and Differential relations | 203 |
| E.2. Properties of the zeros | 203 |
| E.3. Orthogonality | 203 |
| E.4. Asymptotic behaviour | 204 |
| E.5. A non resonance result | 205 |
| Chapter F. Moment problem | 207 |
| Références | 210 |
| Bibliography | 211 |

Première partie

Introduction

Quelques notions de théorie du contrôle

I.1. La problématique de la théorie du contrôle

L'objectif de la théorie du contrôle est de répondre à la question suivante : étant données la loi d'évolution d'un système (physique, biologique ou autre), un état initial et une cible, est-il possible de guider l'évolution du système, via une action extérieure, de l'état initial à la cible ?

Cette notion peut s'énoncer plus précisément à l'aide du formalisme suivant. Soient X, \mathcal{U} deux espaces normés. On considère un système gouverné par une loi d'évolution de la forme

$$(I.1.1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \mathcal{F}(t, y, u), \\ y|_{t=0} = y_0, \end{cases}$$

pour une certaine fonction $\mathcal{F} : (0, T) \times X \times \mathcal{U} \rightarrow X$ et $y_0 \in X$. Étant donné y_0 et une cible y_f , on cherche u tel que la solution de (I.1.1) satisfasse $y|_{t=T} = y_f$.

Dans cette thèse nous nous intéressons à plusieurs situations décrites par des équations aux dérivées partielles différentielles : équations cinétiques, paraboliques dégénérées et de Schrödinger.

I.2. Quelques méthodes de résolution de problèmes de contrôle

Les méthodes de résolution utilisées dans la littérature sont très variées. Dans cette section, nous décrivons les méthodes utilisées dans cette thèse : la méthode HUM, dans le cas linéaire, et les méthodes de linéarisation et du retour dans le cas non linéaire.

I.2.1. La méthode HUM. Cette méthode, appelée *Hilbert uniqueness method*, a été introduite par J.-L. Lions dans [110] et [111], comme généralisation des travaux précédents (voir, par exemple, [137]), dans le but d'exploiter la dualité entre la contrôlabilité d'un système et l'observabilité de son système adjoint dans un sens à préciser. Cette dualité permet de caractériser les propriétés de contrôlabilité en termes d'une inégalité fonctionnelle. Cette méthode s'est avérée extrêmement puissante dans l'étude de la contrôlabilité des équations classiques, comme la chaleur ou les ondes, dans le cas d'un contrôle placé à l'intérieur du domaine, mais aussi dans le cas d'un contrôle frontière.

Nous allons expliquer la méthode HUM dans le cas général, même si nous nous intéressons dans cette thèse au cas particulier du contrôle interne (on renvoie à [141] pour d'autres applications).

Considérons un espace de Hilbert \mathcal{H} et un opérateur linéaire à domaine $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, possiblement non borné. On suppose que $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe d'opérateurs continus dans \mathcal{H} , que

l'on appelle $(S(t))_{t \geq 0}$. Dans ce contexte, on considère une loi d'évolution linéaire donnée par

$$\mathcal{F}(t, y, u) := Ay + Bu, \quad \forall (y, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{U}, \quad t \in [0, T],$$

pour un certain $T > 0$, où \mathcal{U} est un espace de Hilbert et

$$B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, D(A^*)'),$$

où $D(A^*)'$ est l'espace dual de $D(A^*)$ pour l'espace pivot \mathcal{H} ¹. En accord avec (I.1.1), le système étudié a la forme

$$(I.2.2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + Bu, & t \in (0, T), \\ y|_{t=0} = y_0 \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

Nous supposons aussi que l'espace de contrôles a la forme $\mathcal{U} = L^2(0, T; U)$, pour un certain espace de Hilbert U , et que la propriété suivante,

$$(I.2.3) \quad \forall T > 0, \exists C_T > 0 \text{ tel que } \int_0^T \|B^* S(t)^* z\|_U^2 dt \leq C_T \|z\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall z \in D(A^*),$$

est vérifiée. Dans ce cadre, on peut définir une notion de solution faible pour le système (I.2.2).

DÉFINITION I.2.1 (Solution faible). *Soit $T > 0$, $y_0 \in \mathcal{H}$ et $u \in L^2(0, T; U)$. Une solution faible du système (I.2.2) est une fonction $y \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{H})$ telle que*

$$(I.2.4) \quad (y(t), z)_{\mathcal{H}} - (y_0, S(t)^* z)_{\mathcal{H}} = \int_0^t (u(s), B^* S(t-s)^* z)_U ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$ et tout $z \in \mathcal{H}$.

Sous les hypothèses sur A et B décrites ci-dessus, il est possible de démontrer que pour tout $T > 0$ et $u \in L^2(0, T; U)$ il existe une unique solution faible du système (I.2.2), grâce à des arguments de la théorie des semi-groupes (cf [50, Thm. 2.37, p.53]).

En outre, ce formalisme permet de donner un sens précis à la question de contrôlabilité énoncée en §I.1 (cf. [50, Def. 2.39, p.55]).

DÉFINITION I.2.2 (Contrôlabilité exacte). *Le système (I.2.2) est exactement contrôlable en temps $T > 0$ avec des contrôles dans $L^2(0, T; U)$ si pour tout $y_0 \in \mathcal{H}$ et tout $y_f \in \mathcal{H}$, il existe un contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ tel que la solution de (I.2.2) vérifie*

$$y|_{t=T} = y_f.$$

Afin de répondre à cette question, introduisons l'application linéaire

$$(I.2.5) \quad \begin{array}{ccc} \Theta_T : L^2(0, T; U) & \rightarrow & \mathcal{H} \\ u & \mapsto & y|_{t=T}, \end{array}$$

1. Précisons que, \mathcal{H} étant un espace de Hilbert, on peut définir l'opérateur

$$A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

En plus, $(D(A^*), \|\cdot\|_{D(A^*)})$ est un espace de Hilbert avec la norme

$$\|f\|_{D(A^*)} := \|f\|_{\mathcal{H}} + \|A^* f\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in D(A^*).$$

où y est la solution faible de (I.2.2) avec $u \in L^2(0, T; U)$ et $y_0 = 0$. La contrôlabilité exacte de (I.2.2) est donc équivalente à la surjectivité de (I.2.5)².

Lorsque $(S(t))_{t \geq 0}$ présente un effet régularisant, l'application Θ_T ne peut pas être surjective, car $S(T)\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{H}$. Ce sera le cas de l'équation de la chaleur, par exemple, i.e., $A = \Delta$. Dans ce cas, nous étudions la contrôlabilité à zéro (cf. [50, Def. 2.39, p.55]).

DÉFINITION I.2.3 (Contrôlabilité à zéro). *On dit que le système (I.2.2) est contrôlable à zéro en temps $T > 0$ avec des contrôles dans $L^2(0, T; U)$ si pour tout $y_0 \in \mathcal{H}$ et tout $\hat{y} \in \mathcal{H}$, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que la solution de (I.2.2) satisfasse*

$$y|_{t=T} = S(T)\hat{y},$$

où $(S(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe engendré par A .

Autrement dit, la contrôlabilité à zéro de (I.2.2) est équivalente à ce que $S(T)\mathcal{H} \subset \text{Im}(\Theta_T)$.

Précisons que le nom de cette notion provient du fait que la linéarité de (I.2.2) permet de montrer que l'on peut prendre $\hat{y} = 0$ dans la définition I.2.3 sans perte de généralité, en faisant donc de zéro l'unique cible nécessaire.

Afin d'analyser l'ensemble $\text{Im}(\Theta_T)$, on utilise la propriété suivante ([50, Lemma 2.48, p. 58]).

LEMME I.2.4. *Soient X_1, X_2, X_3 trois espaces de Hilbert et soient $L_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$ et $L_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$. Alors,*

$$\text{Im}L_1 \subset \text{Im}L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists C > 0, \|L_1^*z\|_{X_1} \leq C\|L_2^*z\|_{X_3}, \forall z \in D(L_2^*).$$

Étudions l'application adjointe de Θ_T , définie dans (I.2.5), c'est-à-dire,

$$\Theta_T^* : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(0, T; U).$$

On peut trouver une expression explicite de Θ_T^* grâce au calcul suivant. Soit $\zeta \in D(A^*) \subset \mathcal{H}$. En utilisant (I.2.4), on obtient

$$\begin{aligned} (\Theta_T u, \zeta)_{\mathcal{H}} &= (y|_{t=T}, \zeta)_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^T (u(s), B^*S(t-s)^*\zeta)_{\mathcal{H}} ds = (u(\cdot), B^*S(T-\cdot)^*\zeta)_{L^2(0, T; U)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(I.2.6) \quad \begin{array}{ccc} \Theta_T^* : \mathcal{H} & \rightarrow & L^2(0, T; U) \\ \zeta & \mapsto & B^*S(T-\cdot)^*\zeta, \end{array}$$

puisque $D(A^*)$ est dense dans \mathcal{H} et $B^* \in \mathcal{L}(D(A^*), \mathcal{U})$.

2. En effet, la définition I.2.2 entraîne trivialement la surjectivité de Θ_T .

On détaille la réciproque. Soient $y_0, y_f \in \mathcal{H}$ et supposons que Θ_T est surjective. Alors, il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que $\Theta_T(u) = y_f - S(T)y_0$. Cela veut dire que la solution faible du système

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bu, \quad z|_{t=0} = 0,$$

satisfait $z|_{t=T} = y_f - S(T)y_0$. Définissons $y \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{H})$ par

$$y(t) := S(t)y_0 + z(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Par conséquent, y ainsi défini satisfait (I.2.2) au sens faible et $y|_{t=T} = y_f$.

I.2.1.1. *La méthode HUM pour la contrôlabilité à zéro.* On applique le Lemme I.2.4 avec

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathcal{H}, & X_2 &= \mathcal{H}, & X_3 &= L^2(0, T; U), \\ L_1 &: y \mapsto S(T)y, & L_2 &= \Theta_T, \end{aligned}$$

ce qui fournit l'équivalence

$$(I.2.7) \quad S(T)\mathcal{H} \subset \text{Im}\Theta_T \Leftrightarrow \exists C > 0, \|S(T)^*z\|_{\mathcal{H}} \leq C\|\Theta_T^*z\|_{L^2(0, T; U)}, \forall z \in D(A^*).$$

Introduisons le système adjoint de (I.2.2), c'est à dire,

$$(I.2.8) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = A^*z, & t \in (0, T), \\ z|_{t=0} = z_0 \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

qui a comme solution $z(t) = S(t)^*z_0$, pour tout $t \in [0, T]$ et $z_0 \in \mathcal{H}$. Par conséquent, grâce à (I.2.6), l'inégalité (I.2.7) est équivalente à la propriété suivante : il existe $C_{obs} > 0$ telle que pour tout $z_0 \in \mathcal{H}$ la solution de (I.2.8) satisfait

$$(I.2.9) \quad \|z|_{t=T}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{obs}^2 \int_0^T \|B^*z(t)\|_U^2 dt.$$

L'inégalité (I.2.9) est l'inégalité d'observabilité évoquée précédemment. Cet argument permet donc de conclure que (I.2.2) est contrôlable à zéro si et seulement si (I.2.9) est vérifiée.

I.2.1.2. *La méthode HUM pour la contrôlabilité exacte.* Dans ce cas, on utilise le Lemme I.2.4 avec

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathcal{H}, & X_2 &= \mathcal{H}, & X_3 &= L^2(0, T; U), \\ L_1 &= \text{Id}_{\mathcal{H}}, & L_2 &= \Theta_T, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$(I.2.10) \quad \mathcal{H} \subset \text{Im}\Theta_T \Leftrightarrow \exists C > 0, \|z\|_{\mathcal{H}} \leq C\|\Theta_T^*z\|_{L^2(0, T; U)}, \forall z \in D(A^*).$$

Afin de mieux comprendre cette inégalité, introduisons le problème adjoint rétrograde de (I.2.2),

$$(I.2.11) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = -A^*z, & t \in (0, T), \\ z|_{t=T} = z^T \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

Alors, $z(t) = S(T-s)^*z^T$ et donc, grâce à (I.2.6), la contrôlabilité exacte de (I.2.2) est équivalente à la propriété suivante : il existe une constante $C_{obs} > 0$ telle que pour tout $z^T \in \mathcal{H}$, la solution de (I.2.11) satisfait

$$\|z|_{t=0}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{obs}^2 \int_0^T \|B^*z(t)\|_U^2 dt.$$

I.2.1.3. *Une application de HUM.* La méthode HUM, parmi d'autres applications, permet l'obtention de résultats de contrôle interne. Afin d'expliquer cette notion, considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert régulier et $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide. Le but du problème de contrôle interne est de montrer la contrôlabilité de (I.2.2) avec un contrôle localisé sur ω . Pour ce faire, on choisit $B = \chi_\omega$, l'opérateur de multiplication par χ_ω , où χ_ω est la fonction caractéristique de ω .

Il est possible d'aborder avec cette méthode la contrôlabilité interne de plusieurs équations classiques, comme la chaleur (voir §II.3.2 où ceci est expliqué en détail), l'équation de Schrödinger (cf. §IV.2.1) ou l'équation des ondes.

Dans l'étude de la contrôlabilité interne de l'équation des ondes linéaire, C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch ont développé dans [11] une condition de contrôle géométrique de profonde importance.

DEFINITION I.2.5 (Bardos, Lebeau et Rauch). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, un ouvert régulier. On dit que $\omega \subset \Omega$ satisfait la condition de contrôle géométrique s'il existe un temps $T > 0$ tel que tout rayon de l'optique géométrique (généralisé) dans Ω à vitesse unité intersecte ω en temps $T > 0$.*

En présence d'un bord régulier $\partial\Omega$, on supposera que les rayons de l'optique géométrique sont reflétés suivant la loi de Descartes.

C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch ont montré dans [11] que cette condition est suffisante pour la contrôlabilité de l'équation des ondes. Plus tard, N. Burq et P. Gérard ont montré dans [33] que la condition de contrôle géométrique est en fait nécessaire pour la contrôlabilité.

À titre d'exemple de ce type de résultats de contrôlabilité exacte, rappelons aussi que K.D. Phung dans [130] a démontré que les équations de Maxwell sont exactement contrôlables, dès que la condition de contrôle géométrique ci-dessus est satisfaite.

Dans cette thèse, on utilisera la méthode HUM dans le Chapitre 1.

I.2.2. La méthode de linéarisation. Lorsque la loi d'évolution dans (I.1.1) comporte une non-linéarité, soit par rapport à l'état, soit par rapport au contrôle, il faut développer d'autres méthodes. En raison de la non-linéarité de (I.1.1), l'application

$$(I.2.12) \quad \begin{aligned} \vartheta_T : X \times \mathcal{U} &\rightarrow X \times X \\ (y_0, u) &\mapsto (y_0, y|_{t=T}), \end{aligned}$$

sera à son tour non linéaire.

Une première stratégie consiste à étudier la surjectivité locale de ϑ_T , à l'aide du théorème d'inversion locale. Pour ce faire, on fixe une trajectoire (\hat{y}, \hat{u}) du système (I.1.1) et l'on considère le système linéarisé autour de cette trajectoire,

$$(I.2.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \partial_y \mathcal{F}(t, \hat{y}, \hat{u})(x, v) + \partial_u \mathcal{F}(t, \hat{y}, \hat{u})(x, v), & t \in (0, T), \\ x|_{t=0} = x_0, \end{cases}$$

pour analyser l'application

$$(I.2.14) \quad \begin{aligned} d\vartheta_T(\hat{y}, \hat{u}) : X \times \mathcal{U} &\rightarrow X \times X \\ (x_0, v) &\mapsto (x_0, x|_{t=T}). \end{aligned}$$

La méthode de linéarisation repose donc sur deux ingrédients :

- (1) la contrôlabilité du système (I.2.13), c'est à dire, $d\vartheta_T(\hat{y}, \hat{u})$ est surjective dans X par rapport au deuxième argument,
- (2) l'application ϑ_T est de classe \mathcal{C}^1 avec le même choix d'espaces X et \mathcal{U} que dans le point antérieur.

Si ces deux points peuvent être démontrés, alors le théorème d'inversion locale fournit la contrôlabilité locale de (I.1.1) autour de (\hat{y}, \hat{u}) .

DÉFINITION I.2.6. *Le système (I.1.1) est localement contrôlable autour de la trajectoire (\hat{y}, \hat{u}) en temps $T > 0$ dans X avec des contrôles dans \mathcal{U} s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous $y_0 \in X$ et $y_f \in X$ avec*

$$\|\hat{y}|_{t=0} - y_0\|_X < \epsilon, \quad \|\hat{y}|_{t=T} - y_f\|_X < \epsilon,$$

il existe un contrôle $u \in \mathcal{U}$ avec

$$\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{U}} < \epsilon,$$

tel que la solution de (I.1.1) satisfait

$$y|_{t=T} = y_f.$$

À titre d'exemple, on pourra citer le problème de contrôle bilinéaire pour l'équation de Schrödinger. En dimension 1 en espace, et étant donné un temps $T > 0$ et une fonction régulière μ , le problème consiste à trouver une amplitude du champ électrique $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ telle que la solution de

$$(I.2.15) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\partial_{xx} \psi + u(t)\mu(x)\psi, & (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & (0, T), \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & (0, 1), \end{cases}$$

avec $\psi_0 \in X$, un espace à préciser, satisfasse $\psi|_{t=T} = \psi^f$, où $\psi^f \in X$ est une cible donnée à l'avance.

Ce problème a été résolu par K. Beauchard et C. Laurent dans [16], où les auteurs démontrent la contrôlabilité locale pour ce système autour de la trajectoire $(e^{-i\lambda_1 t} \varphi_1, u \equiv 0)$, où φ_1 est la première fonction propre de $-\partial_{xx}$ et λ_1 est la valeur propre associée. Dans ce contexte, la méthode de linéarisation fonctionne avec le choix d'espace $X = D\left((-\partial_{xx})^{\frac{3}{2}}\right)$, qui permet d'utiliser le théorème d'inversion locale classique. Nous verrons plus en détail ce résultat dans la section §IV.2.2.

Soulignons que trouver le bon cadre fonctionnel est un point crucial et parfois très délicat de l'approche par inversion locale.

Dans cette thèse, on présentera un exemple d'application de la méthode de linéarisation dans le Chapitre 5.

I.2.3. La méthode du retour. Parfois la méthode de linéarisation ne s'applique pas parce que le système linéarisé n'est pas contrôlable.

Ce problème peut parfois être contourné en utilisant des développements de (I.2.12) jusqu'à un ordre supérieur, c'est-à-dire, en étudiant les problèmes quadratiques ou cubiques associés à $d^2\Theta_T$, $d^3\Theta_T$, etc. En revanche, cette stratégie, appelée méthode de développement en puissances, présente un grand nombre de difficultés dans la mise en pratique.

Une autre stratégie, appelée méthode du retour, a été proposée par Jean-Michel Coron (voir, par exemple, [50] où [71]). Elle consiste à construire une autre trajectoire du système non-linéaire autour de laquelle le linéarisé est contrôlable. Cette construction utilise de manière cruciale la non-linéarité du système, contrairement aux méthodes précédentes, qui cherchent un lien avec un système linéaire. La méthode du retour exploite la non-linéarité au lieu d'essayer de l'éliminer.

Plus précisément, on construit une trajectoire du système (I.1.1), appelée trajectoire de référence et notée (\bar{y}, \bar{u}) , telle que

$$\bar{y}|_{t=0} = 0, \quad \bar{y}|_{t=T} = 0,$$

d'où le nom de retour, et telle que le linéarisé associé soit contrôlable. Ceci permet d'obtenir des résultats de contrôlabilité locale (voir Définition I.2.6).

Cette méthode a été utilisée énormément dans la littérature et en particulier par Olivier Glass et Daniel Han-Kwan dans le contexte des systèmes de Vlasov-Poisson et de Vlasov-Maxwell relativiste, comme on expliquera dans §II.4.1.

Dans cette thèse, on utilisera la méthode du retour dans les Chapitres 2 et 3.

Contrôlabilité des équations cinétiques

II.1. Présentation des modèles

L'objet de la théorie cinétique consiste à décrire des gaz, plasmas ou d'autres systèmes composés d'un grand nombre de particules, en étudiant la fonction de distribution de l'ensemble des particules dans l'espace des phases, $f(t, x, v)$. De manière générale, on peut interpréter la quantité

$$\int_{\Omega} \int_V f(t, x, v) dx dv, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^d,$$

comme la probabilité de trouver des particules placées dans la région Ω et ayant une vitesse comprise dans V à l'instant t .

Les principaux modèles d'intérêt prennent en compte l'action de plusieurs mécanismes d'interaction entre les particules et sur l'ensemble des particules. En particulier, deux phénomènes sont d'une grande importance :

- (1) les collisions entre particules ou avec le milieu,
- (2) l'action d'une force macroscopique sur les particules.

Partant de la description microscopique de la dynamique des particules, la théorie cinétique cherche à décrire le comportement de l'ensemble des particules de manière statistique. Ce passage de la dynamique microscopique à l'étude statistique de la fonction de distribution dans l'espace des phases, ce que l'on appelle *échelle mésoscopique*, dont on verra des exemples plus loin, est l'une des bases de la théorie cinétique. En outre, l'échelle mésoscopique permet d'obtenir, sous certains régimes, une limite macroscopique, en variables d'espace et de temps, typiquement un système provenant de la mécanique des fluides. On renvoie à [122] pour une exposition détaillée de la théorie cinétique.

Les résultats de cette thèse se concentrent uniquement au niveau mésoscopique, où la dynamique de la fonction de distribution est fréquemment décrite par une équation de Vlasov (voir [74, Chapter 1])

$$(II.1.16) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = \mathcal{C}(f),$$

où $F(t, x)$ représente l'action de la force macroscopique sur les particules, alors que $\mathcal{C}(f)$ représente les collisions entre particules ou avec le milieu. Bien évidemment, différents F et \mathcal{C} donnent lieu à des dynamiques très différentes. L'un des objectifs de cette thèse est d'analyser les propriétés de contrôlabilité de (II.1.16) avec différents choix de F et \mathcal{C} , issus de la littérature physique.

II.1.1. L'équation de Fokker-Planck cinétique. Il s'agit d'un modèle linéaire tenant compte des collisions des particules décrites par f avec un milieu (par exemple, d'autres particules non décrites par f) dans un certain régime particulier

et sous l'action d'un potentiel externe, $V(x)$. Cette équation, qui admet la forme suivante

$$(II.1.17) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V(x) \cdot \nabla_v f - \Delta_v f - \operatorname{div}_v(vf) = 0, & (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & \Omega \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

pour un certain domaine spatial, typiquement le tore \mathbb{T}^d ou \mathbb{R}^d , peut se dériver à partir des équations de Langevin (voir [46]), qui font apparaître l'opérateur de Fokker-Planck en vitesse, $\mathcal{L}_{FP} = \Delta_v + \operatorname{div}_v(v \cdot)$, comme résultat des collisions des particules avec le milieu au niveau microscopique.

L'équation de Fokker-Planck cinétique présente, au premier abord, une compétition entre le terme de transport $v \cdot \nabla_x$ et le terme de collisions \mathcal{L}_{FP} , ce qui a priori devrait engendrer de la diffusion uniquement en vitesse.

Malgré la séparation apparente entre espace et vitesse, un certain effet régularisant se produit aussi en x et non seulement en vitesse. Ceci a été mis en évidence par A.N. Kolmogorov dans [95] dans le cas d'une certaine classe d'équations. L'exemple le plus simple des équations étudiées par Kolmogorov est

$$(II.1.18) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f = 0, & (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & \Omega \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

qui porte désormais son nom, et qui peut être vue comme un cas particulier de (II.1.17). Nous allons traiter en détail l'équation de Kolmogorov en §II.3 et dans le Chapitre 1.

Le mécanisme permettant ce transfert de régularité, basé sur le *mélange de phase*, est l'hypoellipticité, étudiée de manière systématique par L. Hörmander dans [85]. Dans le cas des équations cinétiques l'hypoellipticité a été étudiée dans plusieurs situations, dont on pourra citer [82, 30, 87], parmi d'autres exemples.

Vu que la structure de (II.1.17) fournit un certain effet régularisant par rapport aux deux variables, on pourrait alors s'interroger sur ses propriétés de dissipation par rapport à x et v . Cette question a été traitée systématiquement par C. Villani dans [145], donnant lieu à la notion d'hypocoercivité, qui permet de récupérer une dissipation en les deux variables x et v alors qu'a priori, on pouvait s'attendre à une dissipation partielle uniquement en vitesse. L'un des aspects essentiels de l'hypocoercivité réside dans la possibilité d'obtenir des estimations décrivant la convergence vers l'équilibre de la solution d'une équation. Par exemple, dans le cas de (II.1.17), les équilibres satisfaisant $\iint f_\infty(x, v) dx dv = 1$ sont de la forme

$$f_\infty(x, v) = ce^{-V(x)} \mathcal{M}(v), \quad \mathcal{M}(v) := \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}},$$

où \mathcal{M} est une distribution Maxwellienne normalisée et c est un paramètre de normalisation. Sous certaines conditions sur V , L. Desvillettes et C. Villani ont démontré dans [58] que la solution de (II.1.17) converge vers l'équilibre avec un taux polynomial. Il est possible d'améliorer ce résultat pour obtenir un taux de convergence exponentiel dans certains espaces de Sobolev (voir [82, 83, 145, 123] pour plus de détails). Finalement, grâce à des arguments abstraits, J. Dolbeault, C. Mouhot et C. Schmeiser ont obtenu dans [60] des résultats de convergence exponentielle vers l'équilibre pour une classe assez large d'équations cinétiques, contenant (II.1.17). Dans le cas de Fokker-Planck, les auteurs montrent que la convergence exponentielle vers l'équilibre a lieu dans l'espace à poids $L^2(d\mu)$, avec $d\mu := \frac{dx dv}{f_\infty}$.

II.1.2. Quelques modèles de couplage fluide-cinétique. Dans cette thèse, nous considérons deux modèles de ce type. Dans un premier temps, on considère l'interaction d'un nuage de particules immergées dans un fluide incompressible, dont la dynamique est décrite par les équations de Stokes stationnaires. Ceci conduit au système de Vlasov-Stokes

$$(II.1.19) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \lambda \operatorname{div}_v [(u - v)f] = 0, & (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ -\Delta_x u + \nabla_x p = j_f, & (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \Omega, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & \Omega \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un coefficient de friction, Ω est \mathbb{T}^d ou \mathbb{R}^d , pour $d = 2, 3$, et

$$j_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} v f(t, x, v) dv.$$

Dans un deuxième temps, on tient compte des effets de la convection et de l'évolution du champ de forces, ce qui conduit au système de Vlasov-Navier-Stokes,

$$(II.1.20) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = 0, & (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta_x u + \nabla_x p = j_f - \rho_f u, & (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \Omega, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & \Omega \times \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & \Omega, \end{cases}$$

avec

$$\rho_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv.$$

Ces deux modèles peuvent être obtenus comme limite de champ moyen à partir de la dynamique de sphères dures immergées dans un fluide, comme expliqué ensuite dans §II.1.2.1. On finit la présentation de ces modèles par une description de leurs propriétés qualitatives, dans §II.1.2.2.

II.1.2.1. *Dérivation de modèles fluides-cinétiques.* Le but de cette section est d'évoquer la dérivation formelle des systèmes (II.1.19) et (II.1.20). Nous décrivons d'abord l'approximation de champ moyen et son application aux deux modèles considérés.

Approximation de champ moyen.

Nous allons décrire comment la méthode de champ moyen permet de trouver un système mésoscopique limite à partir de la dynamique microscopique. On pourra consulter [75] pour la méthode de champ moyen dans d'autres contextes.

Au niveau microscopique, on s'intéresse à la dynamique de N particules dans une partie de l'espace $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, représentées par N sphères de rayon $\epsilon > 0$. Cette situation se décrit mathématiquement en admettant que les particules occupent les boules $B_{x_i(t), \epsilon}$, de centre $x_i(t)$, dépendant du temps, pour $i = 1, \dots, N$. La vitesse et position de chaque particule sont données par un système du type

$$(II.1.21) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), & t \geq 0, \\ \dot{v}_i(t) = F_i(t, x_i, v_i), & t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

où F_i est la force agissant sur chaque particule. Dans le cas du couplage fluide-cinétique, les forces F_i seront créées par le fluide dans lequel les particules sont immergées.

Tandis que la dynamique des particules est décrite par (II.1.21), une fois les forces F_i connues, l'évolution du fluide sera affectée à son tour par les particules. Dans cette thèse, nous nous concentrons dans le cas où le fluide considéré est visqueux et incompressible, remplissant un ouvert régulier Ω (en pratique, le tore \mathbb{T}^d ou \mathbb{R}^d), excepté la partie du domaine occupée par les particules en mouvement, c'est-à-dire,

$$(II.1.22) \quad \Omega_\epsilon := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N B_{x_i(t), \epsilon}.$$

Le cas le plus général pour l'évolution du champ de vitesses est donc décrit par le système

$$(II.1.23) \quad \begin{cases} \rho_f (\partial_t u + u \cdot \nabla_x u) + \nabla_x p = \Delta_x u, & (0, T) \times \Omega_\epsilon, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \Omega_\epsilon, \\ u|_{\partial B_{x_i(t), \epsilon}} = v_i(t) + \Omega_i(t) \wedge (x - x_i(t)), & (0, T), \\ u|_{\partial \Omega} = 0, & (0, T), \end{cases}$$

où Ω_i est la vitesse angulaire de la i -ème particule et ρ_f est la densité du fluide, supposée constante.

Un système comme (II.1.23) est le point de départ pour étudier la dynamique du mouvement de plusieurs corps solides dans un fluide, ce qui est l'objet de l'étude fluide-structure (voir par exemple [57, 138]). En revanche, le but de la théorie cinétique est de regarder cette dynamique du point de vue mésoscopique, dans la situation où le nombre de particules tend vers l'infini, alors que son rayon tend vers zéro. Ceci se fait via l'obtention d'un système limite, dans l'espace de phases, tenant compte de l'évolution de la fonction de distribution des particules et du fluide, reliées par un couplage non-linéaire.

Décrivons ensuite deux approximations de champ moyen pour la question du couplage entre (II.1.21) et (II.1.23), dans de régimes particuliers.

Le système de Vlasov-Stokes.

Le système (II.1.19) a été proposé par P. E. Jabin et B. Perthame dans [88] comme limite formelle de la situation décrite précédemment, sous des hypothèses utilisées en la littérature mécanique, issues de l'étude des aérosols et des modèles de suspensions. Ces hypothèses garantissent que les particules sont très diluées dans le fluide, de manière à pouvoir négliger les collisions. En plus, on admettra que les effets de convection sont aussi négligeables. Ceci conduit au système

$$(II.1.24) \quad \begin{cases} -\Delta_x u + \nabla_x p = 0, & (0, T) \times \Omega_\epsilon, \\ \operatorname{div}_x u = 0, & (0, T) \times \Omega_\epsilon, \\ u|_{\partial B_{x_i(t), \epsilon}} = v_i(t) + \Omega_i(t) \wedge (x - x_i(t)), & t \in (0, T), \end{cases}$$

avec la notation (II.1.22), qui est une version simplifiée de (II.1.23), alors que (II.1.21) devient

$$(II.1.25) \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \dot{v}_i(t), & t \geq 0, \\ \dot{v}_i(t) = F_i = -\frac{\rho_f}{m_p} \int_{\partial B_{x_i(t), \epsilon}} (\sigma \cdot n) \, dS, & t \geq 0 \\ \dot{\Omega}_i(t) = -\frac{j_p}{j_f} \int_{\partial B_{x_i(t), \epsilon}} (x - x_i(t)) \wedge (\sigma \cdot n) \, dS, & t \geq 0, \end{cases}$$

où $m_f = \frac{4\pi}{3} \epsilon^3 \rho_f$ et $\sigma = pI + \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur de stress de Cauchy.

Dans ces conditions, B. Perthame et P. E Jabin, ont proposé une approximation des forces F_i dans (II.1.25) de la forme

$$F_i(t) := -\lambda v_i(t) + \frac{\mu}{N} \sum_{i \neq j} A(x_i - x_j) v_j,$$

où λ est un paramètre de friction, $\mu = \frac{3}{4}\epsilon^2 N$, et A est la matrice

$$A(x) := -\frac{1}{|x|} \left(I + \frac{x \otimes x}{|x|^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

autrement dit, la solution fondamentale de l'opérateur de Stokes en dimension 3. Finalement, en considérant une mesure empirique de la forme

$$(II.1.26) \quad f_N(t, x, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)} \otimes \delta_{v_i(t)},$$

le couple (f_N, u_ϵ) engendrée par (II.1.24) et (II.1.25) admet comme limite formelle la solution (f, u) du système (II.1.19) lorsque $N \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$, sous la contrainte $\mu = cste$.

Précisons que la dérivation rigoureuse de la dynamique complète (II.1.19) est un problème ouvert.

Le système de Vlasov-Navier-Stokes.

Dans cette partie, nous allons présenter l'obtention d'un système limite pour la dynamique du couplage (II.1.23) et (II.1.21) lorsque l'on tient compte de l'action d'un terme de convection $u \cdot \nabla u$. Dans ce cas (voir [32]), le modèle de système limite proposé par la littérature physique est le système de Vlasov-Navier Stokes (II.1.20).

À l'heure actuelle, la justification rigoureuse des approximations de champ moyen de ce système est un problème ouvert de grande difficulté.

Cependant, il est possible d'obtenir une justification partielle du problème. Dans [59], L. Desvillettes, F. Golse et V. Ricci ont obtenu le système de Navier-Stokes stationnaire avec une force de Brinkman,

$$(II.1.27) \quad \begin{cases} (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = 6\pi\nu(j - \rho u), & \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

comme limite de champ moyen de l'interaction de N sphères dures immergées dans un fluide incompressible remplissant un domaine borné Ω de \mathbb{R}^3 , sous certaines hypothèses. Admettons que les effets des rotations des particules sont négligés, que la vitesse des particules est petite, de manière à pouvoir utiliser une approximation quasi-statique du champ de vitesses, et que l'effet des forces de trainée sur chaque sphère est du même ordre de magnitude que le champ de forces extérieure qui gouverne le fluide. Par conséquent, le système (II.1.23) sous ces hypothèses s'écrit

$$(II.1.28) \quad \begin{cases} (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, & \Omega_\epsilon, \\ \operatorname{div} u = 0, & \Omega_\epsilon, \\ u|_{\partial B_{x_i, \epsilon}} = v_i, & i = 1, \dots, N, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

en utilisant la notation (II.1.22). Si l'on considère la mesure empirique (II.1.26) avec

$$\rho_N(x) := \int_{\mathbb{R}^3} f_N(x, v) \, dv, \quad j_N(x) := \int_{\mathbb{R}^3} v f_N(x, v) \, dv,$$

et sous l'hypothèse

$$\sup_{N \geq 1} \iint |v|^2 f_N \, dx \, dv < \infty,$$

il est démontré dans ([59, Theorem 2]) que si u_ϵ est la solution de (II.1.28) et $(\rho_N, j_N) \rightarrow (\rho, j)$ au sens des mesures, alors $u_\epsilon \rightarrow u$, dans $L^2(\Omega)$, solution de (II.1.27), lorsque $N \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$ avec

$$\epsilon N = 1, \quad \inf_{1 \leq i \leq N} d(x_i, \partial\Omega) > \epsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Ce résultat fournit donc un premier pas rigoureux vers (II.1.20).

II.1.2.2. Propriétés qualitatives des systèmes fluides-cinétiques. Décrivons quelques propriétés qualitatives de (II.1.19). Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$, P.E. Jabin a démontré dans [89] l'existence et l'unicité des solutions faibles. Cette approche repose sur la méthode de propagation des moments, basée sur l'utilisation des lemmes de moyenne [66]. Un aspect important de la dynamique de (II.1.19) mis en évidence dans [89] est l'effet de friction, via le terme de couplage $\operatorname{div}_v[(u-v)f]$. Ceci a pour conséquence qu'en temps long, la fonction de distribution a tendance à se concentrer autour d'un profil de vitesse nulle, de la forme $\rho_{eq}(x) \otimes \delta_{v=0}$, avec une configuration macroscopique ρ_{eq} indéterminée. Le point clé pour l'obtention de cette limite en temps long est la dissipation de l'énergie cinétique $E_{cin}(t) := \iint |v|^2 f \, dx \, dv$.

Ce comportement en temps long motive en quelque sorte le besoin d'un résultat de contrôlabilité, dans la mesure où le seul moyen d'éviter la concentration des particules autour d'un état gelé en vitesse est d'agir sur le système. Nous donnerons un cadre général pour ce type de problèmes dans §II.2 et une application concrète à ce système dans §II.4.2 et le Chapitre 2.

Précisons qu'un autre système du type Vlasov-Stokes a été traité par K. Hamdache dans [79], tenant compte de l'évolution temporaire du fluide et d'une force d'interaction du type $j - \rho u$. Malgré l'intérêt de ce système, nous considérerons ensuite un système plus sophistiqué, qui englobe celui-ci dans un certain sens.

Concernant (II.1.20) du point de vue de l'existence de solutions, ce système a été considéré par L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont et A. Moussa dans [31], lorsque $\Omega = \mathbb{T}^3$. Dans ce contexte, il est possible d'obtenir l'existence de solutions faibles. En revanche, les questions d'unicité et régularité sont limitées par les difficultés profondes associées au système de Navier-Stokes en dimension 3.

La question du passage du niveau mésoscopique au macroscopique pour (II.1.20) a été traitée par T. Goudon, P. E. Jabin et A. Vasseur dans [77] et [78] où des limites hydrodynamiques pour ce système sont obtenues, sous l'effet des collisions, dans certains régimes.

II.2. Cadre général de la contrôlabilité des équations cinétiques

Avant de décrire en détail les résultats obtenus pour les systèmes (II.1.18), (II.1.19) et (II.1.20), nous allons faire quelques commentaires généraux sur le type de questions que l'on se pose et auxquelles on essaye de répondre.

Dans cette thèse, nous limitons à considérer des cas où la variable d'espace se trouve dans le tore \mathbb{T}^d ou dans \mathbb{R}^d , avec $d \geq 1$, ce qui exclut l'influence des bords. Notre but consiste à modifier l'évolution d'une fonction de distribution associée à (II.1.16), en agissant sur l'ensemble des particules. Plus précisément, on peut considérer idéalement un dispositif théorique permettant l'absorption où l'émission de particules depuis une partie de l'espace, un ouvert ω_x de \mathbb{T}^d ou \mathbb{R}^d . Ceci représente un terme source supplémentaire dans l'équation de Vlasov (II.1.16),

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = \mathcal{C}(f) + \chi_{\omega_x \times \mathbb{R}^d} G,$$

où G est la fonction d'absorption-émission, autrement dit, le contrôle. On voudra donc, en accord avec le cadre présenté en §I.1, trouver un G adéquat, dans des espaces adéquats, de manière à modifier l'évolution de ce système depuis l'état initial f_0 vers une configuration finale f_1 fixée par avance. En outre, on pourra considérer aussi des contrôles localisés en vitesse, c'est-à-dire, une région de contrôle de la forme $\omega_x \times \omega_v$.

Dans cette thèse, nous allons résoudre ces problèmes dans certaines situations évoquées précédemment :

- (1) dans un cas hypoelliptique, pour l'équation de Kolmogorov (Chapitre 1),
- (2) dans un cas non-collisionnel, en présence de forces extérieures, pour les systèmes de Vlasov-Stokes et de Vlasov-Navier-Stokes, dans les Chapitres 2 et 3.

Signalons que, dans certains cas, on pourra modifier aussi la dynamique du champ de forces, ainsi que de la fonction de distribution. Ce sera le cas dans le Chapitre 3.

II.3. Cas hypoelliptique : contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov

On considère l'équation de Kolmogorov dans l'espace de phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$(II.3.29) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f = \chi_\omega u, & (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d}), \end{cases}$$

où $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ est un ouvert et u est le contrôle agissant sur le système. Le but des travaux détaillés au Chapitre 1 est de montrer la contrôlabilité à zéro (cf. Définition I.2.3) pour ce système dans $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ avec des contrôles dans $L^2((0, T) \times \Omega)$.

Grâce à la méthode HUM (cf. §I.2.1), la contrôlabilité dudit système est équivalente à l'observabilité du système adjoint

$$(II.3.30) \quad \begin{cases} \partial_t g - v \cdot \nabla_x g - \Delta_v g = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}, \\ g|_{t=0} = g_0(x, v), & \mathbb{R}^{2d}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, à l'existence d'une constante $C_{obs} > 0$ telle que pour tout $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ la solution de (II.3.30) satisfasse

$$(II.3.31) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g(T, x, v)|^2 dx dv \leq C_{obs}^2 \int_0^T \iint_\omega |g(t, x, v)|^2 dt dx dv.$$

Cette approche, quoique classique, présente deux difficultés dans notre contexte :

- (1) L'opérateur de Kolmogorov $\mathcal{K} := \partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v$ est dégénéré du type hypoelliptique, contrairement à l'opérateur de la chaleur, qui est uniformément parabolique, ce qui empêche l'utilisation des méthodes classiques.

- (2) Dans l'espace de phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, la région de contrôlabilité ω doit être suffisamment grande pour garantir (II.3.31), ce qui est un problème peu compris dans la littérature, même dans le cas uniformément parabolique.

La difficulté (1) est d'ordre structurelle et concerne la nature de l'évolution de la dynamique associée à \mathcal{K} , où un phénomène de transport entre en compétition avec une diffusion en vitesse.

La difficulté (2) est de caractère géométrique. Comme on le verra dans la section §II.3.3, il existe des obstructions à l'observabilité de l'équation de la chaleur sur une région trop localisée. On devra surmonter cette difficulté en introduisant une condition géométrique adéquate.

II.3.1. Travaux précédents sur Kolmogorov. La littérature contient deux travaux sur la contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov : [15, 18], en domaine borné et non borné.

Dans [15], K. Beauchard et E. Zuazua considèrent le système (II.3.29) avec $d = 1$. A cause de la difficulté (2) énoncée dans la section précédente, la région d'observabilité est choisie de la forme $\omega = \omega_x \times \omega_v$, avec $\omega_x = \mathbb{R}$ et $\omega_v = \mathbb{R} \setminus [a, b]$, pour $a < b$. Cette configuration permet aux auteurs de montrer la contrôlabilité à zéro de (II.3.29) dans ce cas.

Afin de palier à la difficulté (1), relative à la structure de l'opérateur de Kolmogorov, les auteurs introduisent l'idée de découpler la variable d'espace de la variable de vitesse grâce à la transformée de Fourier partielle. En effet, si l'on note \mathcal{F}_x la transformée de Fourier partielle par rapport à x , et ξ la variable de Fourier associée, (II.3.30) entraîne

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{F}_x(g) - i\xi \cdot v \mathcal{F}_x(g) - \Delta_v \mathcal{F}_x(g) = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ \mathcal{F}_x(g)|_{t=0} = \mathcal{F}_x(g_0), & \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

ce qui peut s'interpréter comme une famille d'équations de la chaleur avec un potentiel, indexées par la variable ξ . La stratégie des auteurs dans [15], avec $d = 1$, consiste donc à montrer l'observabilité de ces systèmes sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, pour chaque ξ , à l'aide d'une inégalité de Carleman appropriée pour l'opérateur $\partial_t - i\xi \cdot v - \Delta_v$ (cf. §II.3.2 pour ce type d'inégalités). Afin de pouvoir obtenir une inégalité d'observabilité en variables (x, v) , un contrôle précis de la dépendance par rapport à ξ est nécessaire. Un ingrédient essentiel dans ce point est le suivant.

PROPOSITION II.3.1. *Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Alors, la solution de (II.3.29) avec $u \equiv 0$ satisfait*

$$\|\mathcal{F}_x(f)(t, \xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-\frac{|\xi|^2 t^3}{12}} \|\mathcal{F}_x(f_0)(\xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ce résultat, démontré dans [15] pour $d = 1$, et étendu à la dimension quelconque dans le Chapitre 1 (voir Proposition 2.2, Chapitre 1), donne une estimation quantitative du taux de décroissance en fréquence de l'évolution libre de (II.3.29).

Une première remarque sur ce résultat concerne la région d'observabilité, laquelle n'est pas localisée en la variable x , mais uniquement en v , et cela sur presque tout le domaine.

K. Beauchard a considéré à nouveau une équation de Kolmogorov dans [18], cette fois dans un domaine borné avec des conditions aux bords adaptées. Concrètement,

elle démontre dans [18] que le système

$$(II.3.32) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla f - \Delta_v f = \chi_\omega u, & (0, T) \times \mathbb{T} \times (-1, 1), \\ f(t, x - t, -1) = f(t, x + t, 1), & (0, T) \times \mathbb{T}, \\ \partial_v f(t, x - t, -1) = \partial_v f(t, x + t, 1), & (0, T) \times \mathbb{T}, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{T} \times (-1, 1)), \end{cases}$$

est contrôlable à zéro lorsque $\omega \subset \mathbb{T} \times (-1, 1)$ est un ouvert arbitraire. L'ingrédient principal utilisé pour réduire le support du contrôle ω est la stratégie de Lebeau-Robbiano, que l'on expliquera en détail en §II.3.2.1.

Le but de notre travail sera donc d'essayer d'appliquer cette stratégie dans tout l'espace de phases, de manière à améliorer la région d'observabilité par rapport à [15]. Comme on le verra plus loin, cette stratégie n'a jamais été utilisée en domaine non borné, ce qui motive notre travail et impose l'introduction de nouvelles techniques, comme on expliquera dans §II.3.4 et dans le Chapitre 1.

II.3.2. Contrôlabilité de l'équation de la chaleur et inégalités de Carleman. Le but de cette section est de rappeler les méthodes classiques permettant d'aborder la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur en domaine borné. Essentiellement, nous suivrons deux méthodes, devenues classiques :

- (1) la méthode de Lebeau-Robbiano, via des inégalités spectrales,
- (2) la méthode de Fursikov-Imanuvilov, via des inégalités de Carleman paraboliques globales.

Les deux approches permettent d'obtenir le même résultat, montré dans [107, 65].

THÉORÈME II.3.2 (Lebeau-Robbiano, Fursikov-Imanuvilov). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, un ouvert régulier et borné. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide quelconque. Alors, pour tout $T > 0$ et tout $y_0 \in L^2(\Omega)$ il existe un contrôle $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ tel que la solution de*

$$(II.3.33) \quad \begin{cases} \partial_t y - \Delta y = \chi_\omega u, & (0, T) \times \Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, & (0, T), \\ y|_{t=0} = y_0, & \Omega, \end{cases}$$

satisfait $y|_{t=T} = 0$.

Observons que, grâce à la méthode HUM (cf. §I.2.1), ce résultat est équivalent à l'observabilité du système

$$(II.3.34) \quad \begin{cases} \partial_t z - \Delta z = 0, & (0, T) \times \Omega, \\ z|_{\partial\Omega} = 0, & (0, T), \\ z|_{t=0} = z_0, & \Omega, \end{cases}$$

c'est-à-dire, à l'existence d'une constante $C_{obs} > 0$ telle que, pour tout $z_0 \in L^2(\Omega)$, la solution de (II.3.34) correspondante satisfasse

$$(II.3.35) \quad \int_{\Omega} |z(T, x)|^2 dx \leq C_{obs}^2 \int_0^T \int_{\omega} |z(t, x)|^2 dt dx.$$

II.3.2.1. *La méthode de Lebeau-Robbiano.* Dans cette section, nous nous proposons d'expliquer comment l'utilisation d'une inégalité spectrale pour le laplacien avec des conditions de Dirichlet permet de démontrer le Théorème II.3.2.

Prenons $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, un ouvert borné régulier. Grâce au théorème spectral, le laplacien admet une famille spectrale $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ satisfaisant

$$(II.3.36) \quad \begin{cases} -\Delta e_k = \lambda_k e_k, & \Omega, \\ e_k|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

En outre, cette famille est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, ce qui permet d'écrire

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)_{L^2(\Omega)} e_k, \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

pour tout $f \in L^2(\Omega)$, avec

$$(II.3.37) \quad \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)_{L^2(\Omega)}|^2.$$

Considérons maintenant un ouvert $\omega \subset \Omega$ non vide. En connexion avec l'observabilité (II.3.35), on voudrait localiser l'information dans ω de manière à pouvoir estimer complètement la norme $L^2(\Omega)$ à partir de la norme $L^2(\omega)$. Au premier abord, on observe que, la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'étant pas orthogonale dans $L^2(\omega)$, une relation comme (II.3.37) ne sera pas vérifiée sur ω .

En revanche, il est possible de mesurer quantitativement la perte d'orthogonalité des $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur ω , au prix de considérer uniquement les basses fréquences $\lambda_k \leq \mu$. C'est là le contenu des inégalités spectrales.

THÉORÈME II.3.3. *Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert quelconque. Il existe une constante $C = C(\Omega, \omega) > 0$, dépendant uniquement de Ω et ω , telle que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et tout $\mu > 0$, on a*

$$(II.3.38) \quad \sum_{\lambda_k \leq \mu} |(f, e_k)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \left\| \sum_{\lambda_k \leq \mu} (f, e_k)_{L^2(\Omega)} e_k \right\|_{L^2(\omega)}^2.$$

L'inégalité (II.3.38), appelée inégalité spectrale, apparaît dans le travail de G. Lebeau et L. Robbiano [107]. Plus tard, les inégalités spectrales de ce type ont été exploitées par D. Jerison et G. Lebeau dans [93] pour étudier la mesure de Hausdorff des ensembles nodaux de sommes finies de fonctions propres de certains opérateurs de la forme $-\Delta + V(x)$. À nouveau dans le contexte de la théorie du contrôle, l'utilisation d'inégalités spectrales a été cruciale dans l'étude du système de la thermoélasticité linéaire par G. Lebeau et E. Zuazua dans [108]. Toujours en domaine borné, des inégalités spectrales pour des opérateurs différents du laplacien ont été obtenues par M. Léautaud dans [105].

Dans le contexte de cette thèse, on s'intéresse au lien entre (II.3.38) et le Théorème II.3.2, suivant l'article [103].

Observons d'abord que la méthode de Lebeau-Robbiano ne vise pas à montrer directement l'inégalité (II.3.35) pour toute donnée initiale. En revanche, la stratégie consiste à exploiter et combiner deux ingrédients essentiels :

- (1) l'observabilité de (II.3.35) pour les basses fréquences, grâce à (II.3.38),

- (2) le taux de décroissance haute fréquence de (II.3.33) lorsque $u \equiv 0$, c'est-à-dire, de l'évolution libre.

On examine ensuite comment la combinaison de (1) et (2) conduit à une preuve du Théorème II.3.2.

Premier ingrédient : observabilité des basses fréquences. On considère, grâce à (II.3.36), pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'espace

$$E_j := \text{span} \{e_k; \lambda_k \leq 2^{2j}\},$$

ainsi que la projection orthogonale associée, $\Pi_{E_j} : L^2(\Omega) \rightarrow E_j$. Avec ces notations, considérons (II.3.33) dans sa version basses fréquences, c'est-à-dire,

$$(II.3.39) \quad \begin{cases} \partial_t y^j - \Delta y^j = \Pi_{E_j}(\chi_\omega u), & (0, T) \times \Omega, \\ y^j = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ y^j|_{t=0} = \Pi_{E_j} y_0 \in E_j, & \Omega, \end{cases}$$

pour chaque $j \in \mathbb{N}$. Par dualité, le système adjoint s'écrit

$$(II.3.40) \quad \begin{cases} \partial_t z^j - \Delta z^j = 0, & (0, T) \times \Omega, \\ z^j = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ z^j|_{t=0} = \Pi_{E_j} z_0 \in E_j, & \Omega, \end{cases}$$

Alors, pour tout $z_0 \in L^2(\Omega)$, la dissipation de l'équation de la chaleur¹ et l'inégalité spectrale (II.3.38) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} T \|z^j|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_0^T \|z^j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \int_0^T \left\| \sum_{\lambda_k \leq 2^{2j}} (z^j(t), e_k) e_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq C e^{C2^j} \int_0^T \left\| \sum_{\lambda_k \leq 2^{2j}} (z^j(t), e_k) e_k \right\|_{L^2(\omega)}^2 dt \\ &= C e^{C2^j} \int_0^T \|z^j(t)\|_{L^2(\omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

ce qui donne l'observabilité de (II.3.40). Par conséquent, grâce à la méthode HUM, on en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION II.3.4. *Soit $y_0 \in L^2(\Omega)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout temps $\tau_j > 0$, il existe un contrôle $u_j \in L^2((0, \tau_j) \times \Omega)$ tel que la solution de (II.3.39) satisfait*

$$\Pi_{E_j} y|_{t=\tau_j} = 0.$$

1. En effet, la méthode d'énergie habituelle appliquée à (II.3.40) fournit la dissipation

$$\frac{d}{dt} \|z^j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z^j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

ce qui entraîne

$$\|z^j|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|z^j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall t \geq 0,$$

d'où

$$T \|z^j|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^T \|z^j|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \|z^j(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

De plus,

$$(II.3.41) \quad \|u_j\|_{L^2((0,\tau_j)\times\Omega)} \leq \frac{C e^{C2^j}}{\tau_j} \|\Pi_j y_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

On notera que le coût du contrôle partiel u_j , donné par (II.3.41), dépend de la fréquence considérée, comme conséquence de (II.3.38). Afin d'atténuer la croissance de cette norme par rapport à j , on essaye d'exploiter les propriétés de dissipation de l'évolution libre.

Deuxième ingrédient : taux de décroissance des hautes fréquences du système libre. Lorsque $u \equiv 0$, la dynamique de (II.3.33) est décrite par le semi-groupe associé. En particulier, lorsque y_0 ne présente que des hautes fréquences, par exemple, si $\Pi_{E_j} y_0 = 0$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$(II.3.42) \quad \begin{aligned} \|S(t)y_0\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \sum_{\lambda_k \geq 2^{2j}} e^{-\lambda_k t} (y_0, e_k) e_k \right\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{\lambda_k \geq 2^{2j}} e^{-2\lambda_k t} |(y_0, e_k)|^2} \\ &\leq e^{-2^{2j} t} \sqrt{\sum_{\lambda_k \geq 2^{2j}} |(y_0, e_k)|^2} \leq e^{-2^{2j} t} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Construction du contrôle. Les deux ingrédients décrits antérieurement sont les éléments de base pour la construction d'un contrôle pour (II.3.33), ce qui permet de démontrer le Théorème II.3.2. On rappelle ici les étapes de cette construction.

Soit $T > 0$. On découpe l'intervalle de temps sous la forme

$$(0, T) = \bigcup_{j=0}^{\infty} (a_j, a_{j+1}),$$

avec

$$a_0 := 0, \quad a_{j+1} := a_j + 2T_j, \quad \forall j \geq 0,$$

pour une suite $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ bien choisie. Dans chaque intervalle (a_j, a_{j+1}) , on procède de la façon suivante :

Mode actif : sur $(a_j, a_j + T_j)$, on utilise un contrôle u_j permettant d'éliminer les fréquences inférieures à 2^{2j} . Ceci modifie l'énergie de la solution selon (II.3.41).

Mode passif : sur $(a_j + T_j, a_{j+1})$, on tire profit de la décroissance des fréquences restantes, ce qui permet d'équilibrer l'effet du contrôle partiel de la partie précédente.

Ce procédé fournit un contrôle $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ tel que

$$\|y|_{t=T}\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|y|_{t=a_j}\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

ce qui conduit au Théorème II.3.2.

II.3.2.2. *Comment obtenir une inégalité spectrale ?* À la suite des travaux [107, 93, 108], la stratégie essentielle pour obtenir (II.3.38) passe par l'utilisation d'une inégalité d'interpolation adéquate, obtenue à son tour via des inégalités de Carleman elliptiques locales.

Considérons l'opérateur elliptique

$$(II.3.43) \quad P := -\partial_s^2 - \Delta_x, \quad (s, x) \in \mathcal{Z} := (0, S_0) \times \Omega,$$

pour un certain $S_0 > 0$. L'inégalité d'interpolation en question est la suivante.

THÉORÈME II.3.5. *Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide. Il existe $C > 0$ et $\delta \in (0, 1)$ tels que pour tout $u \in H^2(\mathcal{Z})$ satisfaisant $u|_{\partial\Omega} = 0$ et $u|_{s=0} = 0$, on a*

$$(II.3.44) \quad \|u\|_{H^1(Y)} \leq C \|u\|_{H^1(\mathcal{Z})}^\delta (\|Pu\|_{L^2(\mathcal{Z})} + \|\partial_s u(0, \cdot)\|_{L^2(\omega)})^{1-\delta},$$

où $Y := (\alpha, S_0 - \alpha) \times \Omega$, pour un certain $\alpha \in (0, \frac{S_0}{2})$.

Expliquons l'intérêt de (II.3.44). Cette inégalité permet de dominer l'énergie de u sur $Y \subset \mathcal{Z}$ en interpolant deux termes : d'une part, l'énergie totale de u sur \mathcal{Z} et d'une autre part, la quantité $\|Pu\|_{L^2(\mathcal{Z})}$ et un terme localisé sur ω . Ce dernier peut être vu comme un terme d'observation.

En particulier, cette inégalité permet de montrer (II.3.38). En effet, soit $\mu > 0$ et soit $f \in L^2(\Omega)$ avec $f = \sum_{\lambda_k \leq \mu} (f, e_k) e_k$. Alors, prenons

$$u(s, x) := \sum_{\lambda_k \leq \mu} \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_k} s)}{\sqrt{\lambda_k}} (f, e_k) e_k, \quad (s, x) \in \mathcal{Z}.$$

Cette fonction satisfait $Pu = 0$ et en plus, $\partial_s u|_{s=0} = f$. Par ailleurs, il est possible de montrer que, grâce à ce choix,

$$\|u\|_{H^1(Y)} \geq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|u\|_{H^1(\mathcal{Z})} \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

pour une constante $C > 0$, ce qui donne (II.3.38) grâce à (II.3.44).

L'obtention de (II.3.44) repose sur des inégalités de Carleman locales pour l'opérateur elliptique (II.3.43). Afin de détailler cette méthode, nous allons décrire dans §II.3.2.3 un exemple d'obtention d'une inégalité de ce type.

Un ingrédient crucial dans l'obtention de (II.3.44) à partir de ces inégalités de Carleman est le caractère borné de Ω , puisqu'il permet un argument de propagation de certaines inégalités intermédiaires conduisant à (II.3.44). Cependant, nous serons capables de montrer une inégalité spectrale pour le laplacien dans tout le domaine \mathbb{R}^d , en contournant la limitation apparente du défaut de compacité du domaine, comme on le verra dans la section §II.3.4.

II.3.2.3. Une inégalité de Carleman elliptique locale. Dans cette section nous nous proposons d'expliquer le principe d'obtention de certaines inégalités de Carleman, qui sont un objet très important en théorie du contrôle, ainsi qu'en d'autres domaines, comme l'étude de la continuation unique où les problèmes inverses.

En particulier, notre but est de donner quelques détails de la preuve des inégalités de Carleman elliptiques locales nécessaires pour l'obtention de l'inégalité d'interpolation (II.3.44). Le contenu de cette section est inspiré de l'article [103].

Les inégalités de Carleman sont des inégalités d'énergie pour un opérateur différentiel, obtenues grâce à l'utilisation d'un poids convenable et d'un paramètre suffisamment grand. L'introduction du poids permet de minorer la norme de l'action de l'opérateur étudié par les normes des termes d'ordre inférieur, pondérées par rapport au paramètre choisi.

Afin de détailler cette idée, nous allons voir un exemple d'inégalité de Carleman pour l'opérateur elliptique défini par (II.3.43) en sa version semi-classique². Cette inégalité résultante permet de démontrer (II.3.44).

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert régulier et définissons l'opérateur

$$P = -\partial_{ss} - \Delta_x, \quad (s, x) \in (0, S) \times \Omega.$$

Soit une fonction régulière $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on précisera plus tard. Considérons un paramètre $h > 0$ et définissons l'opérateur conjugué de P par rapport à φ ,

$$P_\varphi := h^2 e^{\frac{\varphi}{h}} P e^{-\frac{\varphi}{h}}.$$

L'intérêt de cette conjugaison réside justement dans le fait que P_φ admet la décomposition suivante

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \frac{P_\varphi + P_\varphi^*}{2} + i \frac{P_\varphi - P_\varphi^*}{2i} \\ &= h^2 \Delta - |\nabla \varphi|^2 + h \Delta \varphi + 2h \nabla \varphi \cdot \nabla = Q_2 + iQ_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, une décomposition en somme d'une partie autoadjointe et une partie antisymétrique, ce qui permet de séparer les ordres zéro et deux (dans Q_2) des termes d'ordre 1 (dans Q_1). Cette remarque motive aussi l'utilisation des méthodes pseudodifférentielles, qui permettent de manipuler les opérateurs impliqués précédemment en termes de ses symboles associés. En particulier, le symbole de p_φ s'écrit

$$p_\varphi = |\xi|^2 - |\nabla \varphi|^2 + \Delta \varphi + 2\nabla \varphi \cdot \xi,$$

où la variable de Fourier associée à (s, x) est représentée par ξ , avec le scaling semiclassique.

Considérons maintenant $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Z})$. On remarque que, en posant $v := e^{\frac{\varphi}{h}} u$, $Pu = f$ est équivalent à ce que $h^2 P_\varphi v = e^{\frac{\varphi}{h}} f$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} h^4 \|e^{\frac{\varphi}{h}} P v\|_{L^2(\mathcal{Z})}^2 &= \|Q_2 v\|_{L^2(\mathcal{Z})}^2 + \|Q_1 v\|_{L^2(\mathcal{Z})}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle Q_2 v, iQ_1 v \rangle_{L^2(\mathcal{Z})} \\ &= \langle (Q_2^2 + Q_1^2 + i[Q_2, Q_1]) v, v \rangle_{L^2(\mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le commutateur. Insistons encore une fois sur le but cherché : on veut minorer la quantité $\|e^{\frac{\varphi}{h}} P v\|_{L^2}$ par les termes d'ordre inférieur, c'est-à-dire, une

2. La version semi-classique est utile afin de tenir compte d'un paramètre $h \in (0, h_0)$, tendant vers zéro, dans le sens où il est possible de définir un calcul pseudodifférentiel adapté, pour lequel le symbole de l'opérateur $D = \frac{h}{i} \partial$ est ξ . En particulier, via le même scaling, l'opérateur associé au symbole $a(x, \xi, h)$ est

$$\operatorname{Op}(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i x \cdot y}{h}} a(x, \xi, h) \hat{u}\left(\frac{x}{h}\right) d\xi, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

pourvu que a satisfasse $a(\cdot, h) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$, pour tout $h \in (0, h_0)$ et la condition de décroissance à l'infini

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha, \beta} : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{m - |\beta|}, \quad \forall (x, \xi, h) \in \mathbb{R}^{2d} \times (0, h_0),$$

pour un certain $m \in \mathbb{R}$, qui est appelé ordre du symbole a . On notera $a \in S^m$.

Ce formalisme permet de définir des espaces de Sobolev adaptés au scaling. Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s} := \left\| \operatorname{Op} \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \right) u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors, on définit l'espace de Sobolev associé en posant

$$\mathcal{H}^s := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d); \|u\|_{\mathcal{H}^s} < \infty \right\}.$$

combinaison de $\|v\|_{L^2}$ et $\|\nabla v\|_{L^2}$. Au vu de l'égalité ci-dessus, ceci revient à minorer le produit scalaire $\langle (Q_2^2 + Q_1^2 + i[Q_2, Q_1])v, v \rangle$, ce qui peut se faire, par exemple, grâce à l'inégalité de Garding, pourvu que le symbole principal³ de l'opérateur $Q_2^2 + Q_1^2 + i[Q_2, Q_1]$, que l'on note σ_φ , soit positif.

Examinons donc ledit symbole. En notant $\sigma(Q_2) = q_2$ et $\sigma(Q_1) = q_1$, le calcul symbolique (voir, par exemple, [103]) permet d'écrire

$$\sigma_\varphi = q_2^2 + q_1^2 + h\{q_2, q_1\},$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ est le crochet de Lie. Précisons que l'importance du poids φ devient cruciale, puisque ce choix modifie le symbole σ_φ . On impose donc des conditions sur φ pour que l'inégalité de Garding s'applique :

$$(II.3.45) \quad \exists C > 0, \forall (x, s, \xi) \in \bar{\mathcal{V}} \times \mathbb{R}^{d+1}, p_\varphi(x, s, \xi) = 0 \Rightarrow \{q_2, q_1\}(x, s, \xi) \geq C,$$

où p_φ est le symbole de P_φ . Cette condition sur φ est connue sous le nom de condition d'hypoellipticité de Hörmander. Il existe des conditions suffisantes pour (II.3.45), comme la suivante :

$$\varphi := e^{\lambda\psi}, \quad \text{avec } \lambda \text{ grand et } \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}), \text{ telle que } |\nabla\psi| > 0 \text{ dans } \bar{\mathcal{V}}.$$

Sous la condition (II.3.45), il est possible de montrer que

$$\sigma_\varphi \geq C(1 + |\xi|^2)^2, \quad \forall (x, s, \xi) \in \bar{\mathcal{V}} \times \mathbb{R}^{d+1},$$

ce qui implique, via l'inégalité de Garding, que, pour une certaine constante $C > 0$, pour un certain $h_0 > 0$, l'inégalité

$$\begin{aligned} \|e^{\frac{\varphi}{h}}v\|_{L^2(\mathcal{Z})}^2 &\geq C\|v\|_{\mathcal{H}^2(\mathcal{Z})}^2 \\ &\geq C\left(h\|e^{\frac{\varphi}{h}}u\|_{L^2(\mathcal{Z})} + h^3h\|e^{\frac{\varphi}{h}}\nabla u\|_{L^2(\mathcal{Z})}^2\right) \end{aligned}$$

soit vérifiée pour tout $h < h_0$. Celle-ci est l'inégalité de Carleman cherchée.

En choisissant adéquatement un poids φ , (voir [103] pour plus de détails), cette inégalité de Carleman conduit à (II.3.44) en utilisant un argument de propagation qui consiste à recoller plusieurs inégalités d'interpolation locales intermédiaires. On renvoie à [103] et [107] pour une dérivation complète.

II.3.2.4. *La méthode de Fursikov-Imanuvilov.* Il existe une autre méthode pour montrer le Théorème II.3.2, due à A. Fursikov et Yu. Imanuvilov, qui repose également sur l'utilisation des inégalités de Carleman.

Contrairement à la stratégie présentée précédemment, cette approche vise à démontrer l'inégalité d'observabilité (II.3.35) directement. Pour ce faire, on montre une inégalité de Carleman pour l'opérateur de la chaleur

$$\mathcal{Q} := \partial_t - \Delta_x, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

Observons que cet opérateur est parabolique, contrairement au cas traité dans la partie précédente. En outre, on veut que l'inégalité de Carleman correspondante soit applicable à des fonctions définies dans $(0, T) \times \bar{\Omega}$, ce qui oblige à tenir compte du bord $\partial\Omega$. Pour ces deux raisons, le type d'inégalité obtenue par Fursikov et Imanuvilov s'appelle inégalité de Carleman parabolique globale.

3. Le symbole principale d'un opérateur pseudodifférentiel correspond, grosso modo, à la partie du symbole d'ordre le plus élevé. Par exemple, dans notre cas, $\sigma(P_\varphi) = |\xi|^2 - |\nabla\varphi'|^2 + 2\nabla\varphi \cdot \xi$ (voir [103] pour une exposition complète).

Malgré ces différences, le but est le même que dans le cas elliptique : obtenir une minoration de la norme de $\|Qu\|_{L^2}^2$, pour u assez régulier, à partir des normes des termes d'ordre inférieur, pondérés par un paramètre, avec un poids bien choisi. Par contre, la prise en compte des termes sur le bord fera apparaître un terme d'observation supplémentaire.

Le choix des poids fait dans [65] est désormais classique : il s'agit d'un poids du type $\phi(t, x) := \theta(t)\varphi(x)$, avec

$$\theta(t) := \frac{1}{t(T-t)}, \quad t \in (0, T),$$

c'est à dire, un poids singulier en $t = 0, T$. La méthode impose des conditions sur φ , qui devront assurer un certain comportement du poids par rapport au bord $\partial\Omega$ et à la région d'observabilité ω . En particulier, on choisit φ tel que (cf. [101, Assumption 4.6.8])

$$(II.3.46) \quad \varphi|_{\partial\Omega} = \text{cst}, \quad \partial_n \varphi|_{\partial\Omega} < 0, \quad |\nabla \varphi(x)| > 0, \quad x \in \Omega \setminus \omega.$$

Ces conditions permettent d'obtenir une inégalité de Carleman parabolique globale pour Q , ce qui conduit à (II.3.35). On renvoie à [101] pour plus de détails.

II.3.3. Conditions géométriques pour l'observabilité sur des domaines non bornés. Considérons un ouvert Ω , possiblement non borné de \mathbb{R}^d , qui pourrait avoir un bord $\partial\Omega$. Dans cette section, on s'intéresse aux conditions sur ω permettant de montrer des inégalités d'observabilité du type (II.3.35).

Lorsque Ω est non borné, contrairement au cadre du Théorème II.3.2, il existe des régions d'observabilité pour lesquelles (II.3.35) est fausse.

Citons quelques exemples. Dans [116], S. Micu et E. Zuazua ont montré qu'il n'y a pas d'observabilité lorsque ω est un compact de \mathbb{R}^+ . Cette direction a été développée par L. Escauriaza, G. Seregin et V. Sverák dans [61], où il est démontré que (II.3.35) ne peut pas être vraie lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $\omega = B(0, R)$, avec $R > 0$. En revanche, il est possible de démontrer (II.3.35) lorsque la région d'observabilité est suffisamment grande, comme V. Cabanillas, S. de Menezes et E. Zuazua ont montré dans [35] pour le choix $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $\omega = \mathbb{R}^d \setminus K$, avec $K \subset \mathbb{R}^d$ compact.

Les résultats précédents exhibent des cas extrêmes pour l'observabilité ou la non observabilité. Ceci motive la recherche de régions d'observabilité pour lesquelles (II.3.35) soit vrai sans imposer que ω soit le complémentaire d'un compact. Dans cette direction, Luc Miller a montré dans [117] une condition nécessaire et quelques exemples d'observabilité lorsque Ω présente un bord.

Il a été observé par P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble dans [38] que la question de l'observabilité ne dépend pas uniquement de la géométrie de ω , mais aussi du cadre fonctionnel choisi. Les auteurs ont montré que, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^+$, il est possible d'obtenir une inégalité d'observabilité sur un ouvert de la forme

$$\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n), \quad 0 < a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $a_n \rightarrow \infty$, au prix de remplacer l'espace ambiant par un espace à poids $L^2(\mathbb{R}^+; \rho(x) dx)$. Il est même possible d'imposer $|\omega| < \infty$, pourvu que le poids ρ satisfasse des conditions supplémentaires.

Dans le cas sans bord, les travaux de Luc Miller dans [118] ont conduit à une condition géométrique, basée sur les propriétés du noyau de la chaleur sur des

variétés, qui pourrait être suffisante pour l'observabilité de la chaleur. En revanche, on ne sait pas comment s'en servir pour montrer l'observabilité.

La question a été traitée aussi par M. González Burgos et L. de Teresa dans [76], avec un changement de perspective par rapport au problème : une région d'observabilité est favorable dans la mesure où elle permet de montrer des inégalités de Carleman conduisant à (II.3.35).

Comme on le verra dans la section suivante, nous allons reprendre la condition exhibée par L. Miller et l'exploiter afin de montrer des inégalités de Carleman, ce qui nous permettra de montrer des inégalités d'observabilité.

II.3.4. Résultats nouveaux (Chapitre 1). L'objectif de mon travail avec Jérôme Le Rousseau, repris dans le Chapitre 1, est de montrer un résultat de contrôlabilité à zéro pour l'équation de Kolmogorov dans tout l'espace de phases, c'est-à-dire, pour le système (II.3.29), en dimension $d \geq 1$ quelconque et sous les hypothèses les plus générales possibles sur la région de contrôle $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$. Dans ce but, la condition géométrique suivante sera essentielle.

DÉFINITION II.3.6 (Définition 1.1, Chapitre 1). *Un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble d'observabilité dans tout l'espace si $\exists \delta, r > 0$ tels que $\forall p \in \mathbb{R}^d, \exists q \in \mathbb{R}^d$ tels que $B_{\mathbb{R}^d}(q, r) \subset \omega$ et $|p - q| \leq \delta^4$.*

THÉORÈME II.3.7 (Théorème 1.2, Chapitre 1). *Soit $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ de la forme $\omega = \omega_x \times \omega_v$ avec $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ et $\omega_v \subset \mathbb{R}^d$ satisfaisant à la Définition II.3.6. Alors, pour tout $T > 0$ et $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$, il existe un contrôle $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})$ tel que la solution de (II.3.29) vérifie $f|_{t=T} = 0$.*

Comme mentionné dans §II.3, la structure de l'opérateur $\mathcal{K} = \partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v$ ne permet pas une approche directe via l'observabilité du système adjoint, puisque les estimations de Carleman globales pour \mathcal{K} sont un problème ouvert.

En revanche, nous allons suivre l'idée de simplifier l'opérateur \mathcal{K} en séparant les variables x et v via la transformation de Fourier partielle en x . Notre stratégie repose sur la méthode de Lebeau-Robbiano, expliquée dans la section §II.3.2.1, qui comporte deux ingrédients essentiels :

- (1) l'observabilité des basses fréquences,
- (2) l'estimation du taux de décroissance des hautes fréquences du système libre.

Comme on le verra plus tard, la fréquence dans notre cas est celle donnée par la variable de Fourier par rapport à x , que l'on note ξ .

Le deuxième ingrédient a déjà été mentionné dans Proposition II.3.1. Donnons les éléments de l'observabilité des basses fréquences.

Observabilité des basses fréquences. Comme dans le cas classique, traité dans §II.3.2.1, l'observabilité des basses fréquences repose sur une inégalité spectrale pour le laplacien. Nous aurons donc besoin de démontrer une telle inégalité spectrale dans l'espace entier \mathbb{R}^d , ce que l'on pourra faire grâce à la condition géométrique de la définition II.3.6.

THÉORÈME II.3.8 (Théorème 3.1, Chapitre 1). *Soit $\omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble d'observabilité dans tout l'espace. Alors, $\exists C = C(\omega) > 0$ tel que*

$$(II.3.47) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{C(N+1)} \|f\|_{L^2(\omega)},$$

4. On peut remarquer que, si $\delta < r$, alors $\omega = \mathbb{R}^d$. Le cas intéressant est donc $r < \delta$.

pour tout $N \geq 0$ et toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tels que $\text{supp}(\mathcal{F}f) \subset \overline{B(0, N)}$, où $B(0, N)$ est la boule fermée de rayon N et centre 0 et \mathcal{F} est la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^d .

Nous allons dériver (II.3.47) d'une inégalité de Carleman elliptique globale, suivant une approche introduite dans [24, 28, 102]. Pour ce faire, nous devons construire un poids adéquat.

PROPOSITION II.3.9 (Proposition 3.2, Chapitre 1). *Soit $S > 0$, $Q = (0, S) \times \mathbb{R}^d$. Supposons que $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ satisfait la condition de la Définition II.3.6. Alors, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^3([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^+)$ telle que*

$$(II.3.48) \quad \begin{aligned} \psi &\in W^{3, \infty}([0, S] \times \mathbb{R}^d), \\ |\nabla_{s,x} \psi(s, x)| &\geq C, \quad \forall (s, x) \in Q, \\ \partial_s \psi|_{s=0} &\geq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_x, \\ \partial_s \psi|_{s=S} &\leq -C < 0, \quad \psi|_{s=S} = 0, \end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Précisons que les conditions sur ce poids sont une adaptation au cas du domaine Q des conditions (II.3.46) demandées sur le poids de Carleman dans la méthode de Fursikov-Imanuvilov. Dans le cas non borné l'obtention de la condition (II.3.48) repose sur des arguments très techniques, dû à la perte de compacité du domaine, et qui exploitent la condition géométrique sur ω_x .

Une fois qu'un tel poids a été construit, nous sommes en mesure de démontrer l'inégalité de Carleman elliptique globale mentionnée précédemment. Soit

$$P := -\Delta_{s,x} = -\partial_s^2 - \Delta_x, \quad Q = (0, S) \times \mathbb{R}^d.$$

PROPOSITION II.3.10 (Inégalité de Carleman elliptique globale, Proposition 3.3, Chapitre 1). *Soit $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble d'observabilité dans tout l'espace. Soient ψ donné par la Proposition II.3.9 et $\varphi(s, x) = \exp(\lambda\psi(s, x))$, pour λ suffisamment grand. Alors, il existe $C > 0$, $\tau_0 \geq 1$, et $\lambda_0 \geq 1$ tels que*

$$(II.3.49) \quad \begin{aligned} &\tau^3 \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi} \nabla_{s,x} u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi(0)} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + \tau e^{2\tau} \|\partial_s u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau^3 e^{2\tau} \|u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi} P u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau e^{2\tau} \|\nabla_x u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi(s=0)} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2 \right), \end{aligned}$$

pour tout $\tau \geq \tau_0$ et $u \in \mathcal{C}^2([0, S]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$ tel que $u|_{s=0} \equiv 0$.

Cette inégalité permet de démontrer (II.3.47) grâce à un choix de $u(s, x)$ adéquat, inspiré de la construction classique. En effet, soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\text{supp}(\mathcal{F}f) \subset \overline{B(0, N)}$. On définit

$$u(s, x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, N)} \frac{\sinh(\xi s)}{\xi} \mathcal{F}f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad (s, x) \in (0, S) \times \mathbb{R}^d.$$

Alors, $Pu = 0$ et $u|_{s=0} = 0$, ce qui permet d'appliquer (II.3.49) pour obtenir

$$\tau^2 \|e^{\tau\varphi} u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|e^{2\tau\varphi} \nabla_x u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|e^{2\tau\varphi} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2.$$

Puisque $\partial_s u|_{s=0} = f$ et puisqu'il est possible de montrer que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \|\nabla_x u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \|u|_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

un choix de τ suffisamment grand et indépendant de N conduit à (II.3.47).

Traitons maintenant la localisation en variable v . L'utilisation de la transformée de Fourier partielle en x fournit la famille d'opérateurs

$$P_\xi = \partial_t - \Delta_v + i\xi \cdot v, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

La nouveauté par rapport à [15] repose encore une fois sur la condition géométrique de la Définition II.3.6, qui permet la construction de poids pour obtenir des inégalités de Carleman pour P_ξ adéquates. Ainsi, une construction similaire à celle de la Proposition II.3.9 permet de démontrer une inégalité de Carleman parabolique globale pour chaque opérateur P_ξ à ξ fixé. Ceci conduit à l'observabilité de chaque mode ξ via la méthode de Fursikov-Imanuvilov.

PROPOSITION II.3.11 (Proposition 4.1, Chapitre 1). *Soit $\omega_v \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert d'observabilité dans tout l'espace. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que la solution du système*

$$\begin{cases} \partial_t g_\xi - iv \cdot \xi g_\xi - \Delta_v g_\xi = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ g_\xi|_{t=0} = g_{0,\xi} & \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

avec $T > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, et $g_{0,\xi} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ satisfait

$$(II.3.50) \quad \|g_\xi|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{C(1+\frac{1}{T}+\sqrt{|\xi|})} \|g_\xi\|_{L^2((0,T)\times\omega_v)}.$$

La combinaison de (II.3.47) et (II.3.50) conduit à l'observabilité des basses fréquences (voir la preuve de la Proposition 4.7, Chapitre 1). Par dualité, ceci produit un contrôle qui élimine les basses fréquences avec un coût dépendant de la fréquence, de l'ordre e^{CN} .

PROPOSITION II.3.12 (Proposition 4.6, Chapitre 1). *Il existe $C_{\text{obs}} > 0$ tel que pour tout $T > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ il existe un contrôle $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})$ tel que la solution de (II.3.29) satisfait*

$$\text{supp}(\hat{f}(T, \cdot, \cdot)) \subset (\mathbb{R}^d \setminus B_{\mathbb{R}^d}(0, N)) \times \mathbb{R}^d$$

avec

$$(II.3.51) \quad \|u\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^{2d})} \leq e^{C_{\text{obs}}(1+\frac{1}{T}+N)} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

La combinaison de la contrôlabilité des basses fréquences donnée par la Proposition II.3.12 et l'estimation du taux de décroissance des hautes fréquences donné par la Proposition II.3.1 permet de construire un contrôle pour (II.3.29), en alternant un mode actif avec un mode passif dans l'esprit de la construction classique de Lebeau-Robbiano (cf. §II.3.2.1). Nous détaillons cette construction dans la section 4.3 du Chapitre 1. Ceci permet de démontrer le Théorème II.3.7.

II.3.5. Quelques perspectives. Dans la section §II.3.4 nous avons évoqué les éléments de preuve d'un résultat de contrôlabilité à zéro pour l'équation de Kolmogorov dans tout l'espace des phases, le Théorème II.3.7. Bien que celui-ci soit le résultat qui motive la démarche du Chapitre 1, le résultat le plus important que l'on a obtenu dans ce travail est l'inégalité spectrale (II.3.47).

En effet, cette inégalité spectrale, complètement nouvelle dans l'espace entier, est un apport essentiel vers la compréhension de la contrôlabilité d'autres modèles cinétiques collisionnels. Ceci a déjà été confirmé par K. Beauchard et K. Pravda-Starov, dans [23], où l'inégalité spectrale (II.3.47) permet l'étude d'une large famille d'opérateurs hypoelliptiques, dont la classe d'Orstein-Uhlenbeck d'opérateurs de la forme

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [Q \nabla_x^2] - \langle Bx, \nabla_x \rangle,$$

pour Q et B matrices d'ordre $2d$ satisfaisant certaines conditions.

Une autre direction de recherche possible, où les techniques développées dans le Chapitre 1 pourraient être importantes, est l'étude d'opérateurs contenant une diffusion fractionnaire, comme le cas de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck fractionnaire,

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (-\Delta_v)^\sigma f + \operatorname{div}_v(vf) = \chi_\omega u, & (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}, \\ f|_{t=0} = f_0, & \mathbb{R}^{2d}, \end{cases}$$

où $(-\Delta_v)^\sigma$ désigne, pour $\sigma \in (0, 1)$, le laplacien fractionnaire. Ceci fait l'objet d'un travail en cours avec I. Tristani. Cette direction devra probablement exploiter les liens entre contrôlabilité et hypocoercivité pour des systèmes non hypoelliptiques, qui ont déjà été mises en évidence par D. Han-Kwan et M. Léautaud dans [81].

II.4. Cas non-collisionnel : contrôlabilité des systèmes fluide-cinétique

Dans cette section, nous détaillons les résultats obtenus pour les systèmes fluide-cinétiques (II.1.19) et (II.1.20), du point de vue de la contrôlabilité, repris dans les Chapitres 2 et 3. Dans les deux cas, on considère l'évolution de particules dans le tore bidimensionnel⁵, ce qui conduit à l'espace de phases $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. L'optique de ces deux problèmes de contrôlabilité rentre dans le cadre décrit en §II.2.

Signalons quelques caractéristiques importantes de (II.1.19) et (II.1.20), ce qui fournira des indications pour la stratégie de nos preuves. Tout d'abord, on observe que la dynamique des deux systèmes est fortement influencée par le terme de couplage $\operatorname{div}_v[(u - v)f]$, ce qui éloigne l'équation de Vlasov de son comportement linéaire. En plus, dans le cas du système de Vlasov-Navier-Stokes, l'équation du champ de vitesses contient une non-linéarité caractéristique du système de Navier-Stokes, le terme de convection $(u \cdot \nabla)u$. Malgré les obstacles que cette dynamique non linéaire oppose au premier abord, l'utilisation des termes non linéaires sera essentielle dans la résolution des deux problèmes de contrôlabilité, grâce à la méthode du retour (cf. §I.2.3). Dans ce but, nous nous inspirerons des techniques développées par Olivier Glass et Daniel Han-Kwan pour les équations du type Vlasov non linéaires, dans le contexte des systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell relativiste.

II.4.1. Travaux précédents : contrôlabilité des équations de Vlasov non linéaires. Afin d'exposer les techniques qui seront utiles dans notre traitement des systèmes de Vlasov-Stokes et de Vlasov-Navier-Stokes, nous allons expliquer deux approches permettant d'aborder la contrôlabilité d'une équation de Vlasov

5. La restriction au cas bidimensionnel est motivée par les difficultés liées à la théorie de Cauchy pour le système de Navier-Stokes en dimension trois. Le choix de la dimension deux pour le système de Stokes sera expliqué plus tard (cf. §II.4.2).

En outre, on pourrait considérer d'autres espace de phases, comme $\Omega \times \mathbb{R}^d$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Par contre, le possible bord de Ω impose certaines difficultés techniques.

couplée avec un champ de forces. On distinguera selon que le champ associé soit stationnaire ou non-stationnaire.

II.4.1.1. *Champ stationnaire : le système de Vlasov-Poisson.* L'étude de la contrôlabilité des équations de Vlasov non linéaires a ses origines dans le travail d'Olivier Glass [70] sur le système de Vlasov-Poisson

$$(II.4.52) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E^f(t, x) \cdot \nabla_v f = \chi_{\omega \times \mathbb{R}^d} G, & (0, T) \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \\ E^f(t, x) = \nabla_x \phi^f(t, x), \quad -\Delta_x \phi^f(t, x) = \rho_f(t, x) - \int_{\mathbb{T}^d} \rho_f dx, & (0, T) \times \mathbb{T}^d, \\ f|_{t=0} = f_0, & \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $\omega \subset \mathbb{T}^d$ est la région de contrôle et $d \geq 2$. Le système (II.4.52) est un modèle de référence dans l'étude des plasmas, décrivant la dynamique d'une population de particules chargées, typiquement des ions ou des électrons, sous l'influence d'un champ électrique E^f induit par la densité des particules, ρ_f .

La non-linéarité de (II.4.52) repose sur le terme de couplage $E^f \cdot \nabla_v f$. On notera que l'équation pour le champ électrique, de type Poisson, est stationnaire, alors que le terme source dépend du temps.

Une des premières difficultés associées à (II.4.52) est le défaut de contrôlabilité du problème linéarisé. En effet, si l'on considère le linéarisé formel de ce système autour de la trajectoire triviale $(f, \phi) = (0, 0)$, on obtient une équation du transport

$$(II.4.53) \quad \begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \chi_{\omega \times \mathbb{T}^d} \mathcal{G}, & (0, T) \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d, \\ F|_{t=0} = F_0, & \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

D'après la méthode des caractéristiques, la solution de (II.4.53) admet l'expression

$$(II.4.54) \quad F(t, x, v) = F_0(x - (t-s)v, v) + \int_0^t \chi_{\omega \times \mathbb{R}^d} \mathcal{G}(s, x - ts, v) ds,$$

ce qui exprime clairement le fait que l'action du contrôle sur F dépend de la manière dont $\chi_{\omega \times \mathbb{R}^d} \mathcal{G}$ se comporte le long des caractéristiques $\{x + tv; t \geq 0\}$. Au vu de cette remarque, deux obstructions importantes à la contrôlabilité se dégagent naturellement :

Mauvaises directions : il peut exister des directions $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ telles que les caractéristiques de la forme $x + te$, avec $x \in \mathbb{T}^d$, n'arrivent dans ω pour aucune valeur de $t \geq 0$.

Basses vitesses : lorsque la vitesse $|v|$ est trop petite, il est possible que la caractéristique $x + tv$ associée n'arrive pas dans ω en temps $T > 0$.

La conclusion que l'on tire de ces remarques est double : d'une part, le système (II.4.53) n'est pas contrôlable à cause des deux obstructions signalées. D'autre part, si l'on veut contrôler ce système, il faut absolument éliminer les basses vitesses et les mauvaises directions.

Afin de traiter ces obstructions, Olivier Glass a proposé dans [70] la construction d'une trajectoire de référence $(\bar{f}, \bar{\phi})$ de (II.4.52) adaptée, en exploitant l'action du champ électrique $\bar{E} = \nabla_x \bar{\phi}$ sur la dynamique des caractéristiques associées. Considérons le système caractéristique

$$(II.4.55) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(t) \\ \bar{E}(t, X(t)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X(0) \\ V(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix},$$

et désignons par $(X, V)(t, 0, x, v)$ ses solutions. Le but de la construction de la trajectoire de référence est de trouver \bar{E} tel que les caractéristiques associées passent par la zone de contrôle ω pour tout $(x, v) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

Ensuite, il est possible d'obtenir une solution du système non linéaire (II.4.52) avec $f|_{t=0} = f_0$ fixé grâce à un argument de point fixe, basé sur la trajectoire de référence $(\bar{f}, \bar{\phi})$. Afin d'obtenir la contrôlabilité, on prescrit un processus d'absorption pour les caractéristiques arrivant dans ω .

Grâce à cette stratégie, O. Glass a obtenu deux types de résultats pour le système (II.4.52) :

- (1) contrôlabilité locale (c'est-à-dire, pour des données petites) avec $d = 2$ et ω un ouvert quelconque du tore \mathbb{T}^2 ,
- (2) contrôlabilité globale (c'est-à-dire, pour des données arbitraires) en dimension quelconque avec ω satisfaisant une condition géométrique.

La condition géométrique mentionnée ci-dessus est la suivante.

DÉFINITION II.4.1. *On dit qu'un ouvert $\omega \subset \mathbb{T}^d$ satisfait la condition de bande lorsqu'il existe un hyperplan de \mathbb{R}^d , H , tel que $s(H) \subset \omega$, par la surjection canonique $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$.*

La preuve du résultat global fait un usage essentiel des propriétés d'invariance de (II.4.52) par changement d'échelle. Puisque les systèmes (II.1.19) et (II.1.20) ne possèdent pas des propriétés semblables, nous nous concentrerons uniquement sur le résultat local.

Généralisations. La méthode évoquée ci-dessus admet plusieurs extensions. En plus de la version globale, en dimension quelconque et sous l'hypothèse de bande de la Définition II.4.1, il est possible d'adapter cette méthode de preuve pour traiter des dynamiques plus complexes.

En particulier, O. Glass et D. Han-Kwan ont adapté la méthode au traitement de forces extérieures bornées sans avoir besoin d'hypothèses supplémentaires. L'argument essentiel consiste à comparer la dynamique de $E^f + F(t, x)$, lorsque $F \in L_t^\infty W_x^{1,\infty}$, à celle de E^f en temps court.

En outre, les techniques développées dans [72] par les mêmes auteurs permettent de traiter le cas de forces du type Lorentz, produites par l'action d'un champ magnétique, de la forme $F = B \wedge v$ et qui, contrairement au cas précédent, ne peuvent pas être étudiées de manière perturbative. En dimension 2, cette force s'écrit $F = b(x)v^\perp$, où b est une fonction scalaire telle que $b \geq 0$, ce qui permet de décrire les dynamiques des caractéristiques associées à partir de quelques trajectoires circulaires. L'utilisation de la méthode du retour dans ce cas repose sur l'hypothèse géométrique suivante : l'ensemble $\{x \in \mathbb{T}^2; b(x) > 0\}$ satisfait la condition de contrôle géométrique de la Définition I.2.5.

La stratégie esquissée précédemment nous permettra d'aborder le système de Vlasov-Stokes dans §II.4.2 et dans le Chapitre 2.

II.4.1.2. *Champ non-stationnaire : le système de Vlasov-Maxwell relativiste.* La stratégie du cas Vlasov-Poisson est insuffisante en présence d'un champ de forces non-stationnaire. En revanche, O. Glass et D. Han-Kwan ont développé dans [73] une méthode permettant d'aborder cette question dans le contexte du système de Vlasov-Maxwell relativiste.

Cette nouvelle approche consiste à construire une trajectoire de référence à l'aide d'un résultat de contrôlabilité pour l'équation du champ de forces, le système de Maxwell dans ce cas. En effet, le résultat de contrôle exact pour les équations de Maxwell évoqué en §I.2.1 (cf. [130]) permet de modifier le champ de forces afin d'obliger les trajectoires des caractéristiques associées à arriver dans la zone de contrôle, ce qui permet l'argument de point fixe et le processus d'absorption. Cette technique est cruciale dans notre traitement du système de Vlasov-Navier-Stokes, comme on le verra dans §II.4.3.

II.4.2. Résultats nouveaux pour le système de Vlasov-Stokes (Chapitre 2). Le but de cette section est d'expliquer les éléments de la preuve du résultat principal du Chapitre 2, lequel garantit la contrôlabilité locale pour des données régulières petites du système

$$(II.4.56) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = \chi_{\omega \times \mathbb{R}^2} G, & (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ -\Delta_x u + \nabla_x p = j_f, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} u(t, x) dx = 0, & (0, T), \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Le résultat précis est le suivant ⁶.

THÉORÈME II.4.2 (Théorème 1.1, Chapitre 2). *Soient $T > 0$, $\gamma > 2$ et $\omega \subset \mathbb{T}^2$ un ouvert arbitraire non vide. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap W^{1, \infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ satisfaisant*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) dx dv &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, v) dx dv, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v f_0(x, v) dx dv &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v f_1(x, v) dx dv = 0, \end{aligned}$$

et tels que, pour $i = 0, 1$,

$$(II.4.57) \quad \begin{aligned} \|f_i\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_i\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} &\leq \epsilon, \\ \exists \kappa > 0, \quad \sup_{(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} (1 + |v|)^{\gamma+1} (|\nabla_x f_i| + |\nabla_v f_i|)(x, v) &\leq \kappa, \end{aligned}$$

il existe un contrôle $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ tel que la solution de (II.4.56) avec $f|_{t=0} = f_0$ satisfait

$$(II.4.58) \quad f|_{t=T} = f_1.$$

La stratégie de la preuve de ce résultat repose sur la méthode utilisée dans [70] et [72] et expliquée dans §II.4.1.1. Le but du Chapitre 2 est d'adapter ces techniques dans le cas du couplage avec l'équation de Stokes.

En accord avec la stratégie précédente, notre objectif est de construire une solution de référence pour (II.4.56) afin d'éliminer les obstructions à la contrôlabilité de l'équation de Vlasov, qui sont les mauvaises directions et les basses vitesses. Nous allons procéder en deux étapes :

6. Un résultat similaire pourrait être démontré en dimension $d \geq 3$, lorsque ω satisfait la condition géométrique de la Définition II.4.1, en suivant le schéma de [70] en dimension supérieure. Le choix de la dimension deux est important ici pour utiliser certains résultats d'approximation harmonique, ce qui permet de choisir comme région de contrôle ω un ouvert non vide quelconque.

Étape 1 : construire une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) telle que

$$\bar{f}|_{t=0} = 0, \quad \bar{f}|_{t=T} = 0,$$

et telle que les caractéristiques associées à $-v + \bar{u}$ arrivent dans ω en temps $T > 0$.

Étape 2 : construire une solution de (II.4.56) proche de (\bar{f}, \bar{u}) , grâce à un schéma de point fixe, telle que $f|_{t=0} = f_0$ et

$$(II.4.59) \quad f|_{t=T} = 0, \quad \text{en dehors de } \omega.$$

Afin d'assurer cette configuration finale en $t = T$, on utilisera un processus d'absorption dans ω .

On notera que la condition (II.4.59) est suffisante pour conclure (II.4.58), grâce à la remarque suivante. Si l'on considère le problème rétrograde de (II.4.56) via la transformation

$$\tilde{f}(t, x, v) := f(T - t, x, -v), \quad \tilde{u}(t, x, v) = u(T - t, x, -v),$$

on trouve un problème similaire à (II.4.56) (voir les détails dans le Chapitre 2). Ceci permet de traiter le problème rétrograde en modifiant très superficiellement le schéma suivi pour le problème direct. Par conséquent, pour passer de f_0 à l'état final f_1 , il suffit de prendre

- f_0 comme donnée initiale et une cible satisfaisant (II.4.59),
- $f_1(x, -v)$ comme donnée initiale et une cible satisfaisant (II.4.59), via le problème rétrograde.

Construction de la solution de référence.

Le système que \bar{u} doit satisfaire est

$$(II.4.60) \quad \begin{cases} -\Delta_x \bar{u} + \nabla_x \bar{p} = j_{\bar{f}}, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x \bar{u}(t, x) = 0, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \bar{u}(t, x) dx = 0, & [0, T]. \end{cases}$$

Une remarque très utile est la suivante : puisque l'on travaille en dimension 2, et sous l'hypothèse d'incompressibilité, l'utilisation du rotationnel conduit à l'équation de Poisson. En effet, soit $\omega := \operatorname{rot} \bar{u}$. Alors, (II.4.60) est équivalent au système

$$(II.4.61) \quad \begin{cases} -\Delta_x \omega = \operatorname{rot} j_{\bar{f}}, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \omega(t, x) dx = 0, & [0, T]. \end{cases}$$

Ceci nous permet d'adapter les résultats d'approximation harmonique exploités dans le cas de Vlasov-Poisson par O. Glass dans [70]. Par conséquent, la seule hypothèse nécessaire sur ω est que ce soit un ouvert non vide. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{T}^2$ et $r_0 > 0$ tels que

$$B(x_0, 2r_0) \subset \omega.$$

Étape 1 : traitement des mauvaises directions. On construit un champ de vitesses capable de modifier les trajectoires caractéristiques associées aux grandes vitesses afin de les conduire dans ω .

PROPOSITION II.4.3 (Proposition 3.1, Chapitre 2). *Soit $\tau > 0$. Il existe $u_1 \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ et $\bar{m} > 0$ tels que*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u_1 &= 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \left(\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, \frac{r_0}{10}) \right), \\ \operatorname{supp} u_1 &\subset (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_1(t, x) dx = 0, \quad [0, \tau],$$

et tels que les caractéristiques associées à $-v + u_1$, (X^1, V^1) , satisfont la propriété suivante : pour tout $m \geq \bar{m}$ et tout $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ avec $|v| \geq m$, il existe $t \in (\frac{\tau}{4}, \frac{3\tau}{4})$ tel que

$$X^1(t, 0, x, v) \in B(x_0, \frac{r_0}{4}), \quad |V^1(t, 0, x, v)| \leq \frac{m}{e^{2\tau}}.$$

Etape 2 : traitement des basses vitesses. On construit un champ de vitesses capable d'accélérer les trajectoires des caractéristiques associées aux basses vitesses, grâce au résultat suivant.

PROPOSITION II.4.4 (Proposition 3.4, Chapitre 2). *Soient $\tau > 0$ et $M > 0$. Il existe $u_2 \in \mathcal{C}^\infty([0, \tau] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ tel que*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u_2 &= 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, r_0)), \\ \operatorname{supp} u_2 &\subset (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} u_2(t, x) dx &= 0, \quad [0, \tau], \end{aligned}$$

et tels que pour un certain $M^\sharp > M + 1$, les caractéristiques associées à $-v + u_2$ satisfont la propriété suivante : pour tout $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times B_{\mathbb{R}^2}(0; M)$, il existe $t \in (0, \tau)$ tel que

$$M + 1 \leq |V(t, 0, x, v)| \leq M^\sharp.$$

Etape 3 : Conclusion. Fixons $T > 0$. Les Propositions II.4.3 et II.4.4 permettent de construire un champ de vitesses \bar{u} tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{u} &= 0, \quad \mathbb{T}^2 \setminus \omega, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \bar{u}(t, x) dx &= 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

et tel que les caractéristiques associées à $-v + \bar{u}$ satisfont

$$(II.4.62) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists t \in (0, T) \text{ tel que } \bar{X}(t, 0, x, v) \in B(x_0, r_0).$$

Il faut ensuite construire une fonction de distribution \bar{f} associée, telle que (II.4.60) soit vérifié. Pour ce faire, on choisit $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$(II.4.63) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_1 dv = \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_2 dv = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_1 dv = - \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_2 dv = 1, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_1 dv = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_2 dv = 0, \end{cases}$$

ce qui permet de définir, pour tout $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$\bar{f}(t, x, v) := \mathcal{Z}_1(v) \partial_{x_1} \operatorname{rot} \bar{u}(t, x) + \mathcal{Z}_2(v) \partial_{x_2} \operatorname{rot} \bar{u}(t, x).$$

Grâce aux conditions (II.4.63), on obtient (II.4.61), ce qui entraîne (II.4.60).

Nous avons donc construit une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) telle que (II.4.62) est satisfait.

Schéma de point fixe. Suivant la démarche décrite dans la section §II.4.2, on définit un domaine $\mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, dépendant d'un paramètre $\epsilon > 0$.

Sans rentrer dans les détails, une fonction hölderienne appartient à \mathcal{S}_ϵ lorsqu'elle est ϵ -proche de \bar{f} dans une norme de type Hölder. Ensuite, on définit un opérateur \mathcal{V}_ϵ en trois étapes.

- (1) On associe à chaque élément $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ le champ de vitesses u^g , solution de

$$\begin{cases} -\Delta_x u^g + \nabla_x p^g = j_g, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u^g(t, x) = 0, & [0, T] \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} u^g(t, x) dx = 0, & [0, T]. \end{cases}$$

Afin de pouvoir utiliser les caractéristiques associées à u^g , on devra exploiter la régularité elliptique du système de Stokes. On montrera que, puisque $j_g \in \mathcal{C}_t^0 L_x^p$ pour $p > 2$, alors $u^g(t) \in W^{2,p}(\mathbb{T}^2)$ pour tout $t \in [0, T]$, ce qui implique $u \in \mathcal{C}_t^0 \mathcal{C}_x^1$.

- (2) Grâce aux caractéristiques associées à $-v + u^g$, (X^g, V^g) , on résout l'équation de Vlasov dans (II.4.56) en imposant une absorption dans ω chaque fois que X^g passe par ω .
- (3) Le processus d'absorption introduit des discontinuités, ce qui peut être corrigé en utilisant un opérateur d'extension.

Ces trois points fournissent un opérateur $\mathcal{V}_\epsilon : \mathcal{S}_\epsilon \rightarrow \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ continu satisfaisant $\mathcal{V}_\epsilon(\mathcal{S}_\epsilon) \subset \mathcal{S}_\epsilon$. Grâce au théorème de Leray-Schauder, on montrera que \mathcal{V}_ϵ possède un point fixe, g^* , lorsque $\epsilon > 0$ est suffisamment petit.

Afin de pouvoir démarrer le processus d'absorption, il faut garantir que X^{g^*} arrive dans ω en temps T . Pour ce faire, on utilise (II.4.62) et l'estimation suivante

$$\sup_{t,x,v} \|(X^{g^*}, V^{g^*}) - (\bar{X}, \bar{V})\| \lesssim \epsilon,$$

que l'on obtient grâce à la régularité elliptique du système de Stokes. Il suffit donc de prendre $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour conclure (II.4.59), d'où (II.4.58).

D'ailleurs, la condition (II.4.57) permet de montrer que le point fixe trouvé, g^* , est unique dans une certaine classe.

II.4.3. Résultats nouveaux pour le système de Vlasov-Navier-Stokes (Chapitre 3). Le but de cette section est d'expliquer les éléments de la preuve du résultat principal du Chapitre 3. Nous nous intéressons à la contrôlabilité du système

$$(II.4.64) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = \chi_{\omega \times \mathbb{R}^2} G, & (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta_x u + \nabla_x p = j_f - \rho_f u, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

En raison de la nature non linéaire de ce système, il est nécessaire de préciser ce que l'on entend par solution. Puisque nous utiliserons les caractéristiques associées au champ $-v + u$, on voudra travailler avec des solutions suffisamment régulières.

DÉFINITION II.4.5 (Définition 1.1, Chapitre 3). *Soient $T > 0$, $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $u_0 \in H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{div}_x u_0 = 0$ et $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$. On dit que (f, u) est une solution forte du système (II.4.64) si les conditions suivantes sont satisfaites.*

$$(II.4.65) \quad f \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2),$$

(II.4.66) *l'équation de Vlasov est satisfaite ponctuellement,*

$$(II.4.67) \quad \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |v|^2) f(t, x, v) \, dx \, dv < \infty,$$

$$(II.4.68) \quad u \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)),$$

$$(II.4.69) \quad \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

et pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T]; H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$ avec $\operatorname{div}_x \psi(t, x) = 0$ et $t \in (0, T]$, on a

$$(II.4.70) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} u(t)\psi(t) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (\nabla u : \nabla \psi - u \otimes u \cdot \nabla \psi - u \partial_t \psi) \, ds \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} u_0 \psi(0) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (j_f(s) - \rho_f(s)u(s)) \psi(s) \, ds \, dx, \end{aligned}$$

où

$$\nabla u : \nabla \psi := \sum_{j,k=1}^2 \partial_j u^k \partial_j \psi^k, \quad u \otimes u \cdot \nabla \psi := \sum_{j,k=1}^2 u^j u^k \partial_j \psi^k.$$

Précisons que, sous la condition d'incompressibilité, le terme de convection satisfait $(u \cdot \nabla)u = \operatorname{div}(u \otimes u)$, avec les notations précédentes.

Le résultat principal du Chapitre 3, que l'on énonce en détail ci-dessous, est un théorème de contrôlabilité à zéro pour des données petites. Plus précisément, on montre qu'il est possible de modifier les solutions fortes de (II.4.64), pourvu qu'elles soient petites, de manière à atteindre la distribution nulle et le champ de vitesses zéro en temps long. On devra faire l'hypothèse d'une condition géométrique sur la zone de contrôle.

THÉORÈME II.4.6 (Théorème 1.3, Chapitre 3). *Soient $\gamma > 2$ et $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfaisant la condition de bande de la Définition II.4.1. Il existe $\epsilon > 0$, $M > 0$ et $T_0 > 0$ tels que pour tout $T \geq T_0$, $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ et u_0 satisfaisant les conditions*

$$u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2) \cap H^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2), \quad \operatorname{div}_x u_0 = 0, \quad \|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)} \leq M,$$

et

$$\begin{aligned} & \|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \leq \epsilon, \\ & \exists \kappa > 0, \quad \sup_{(x,v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} (1 + |v|)^{\gamma+1} (|\nabla_x f_i| + |\nabla_v f_i|)(x, v) \leq \kappa, \end{aligned}$$

il existe un contrôle $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ tel que la solution forte de (II.4.64) avec $f|_{t=0} = f_0$ et $u|_{t=0} = u_0$ existe, est unique et satisfait

$$(II.4.71) \quad f|_{t=T} = 0, \quad u|_{t=T} = 0.$$

La stratégie de la preuve de ce résultat est basée sur le schéma de preuve décrit précédemment pour le système de Vlasov-Stokes, en incorporant quelques idées de la stratégie pour le système de Vlasov-Maxwell relativiste dans [73], comme l'utilisation d'un résultat de contrôle pour l'équation du champ afin de construire des solutions de référence. Plus précisément, nous devons construire une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) du système (II.4.64) de telle sorte que les caractéristiques associées à

$-v + \bar{u}$ arrivent dans la zone de contrôle, malgré l'existence de mauvaises directions et basses vitesses.

En revanche, l'adaptation de cette stratégie au cas du système (II.4.64) est très délicate, en raison des difficultés engendrées par le système de Navier-Stokes et le terme d'interaction $j_f - \rho_f u$.

Nous allons suivre les trois étapes suivantes. Soient $T_2 > T_1 > 0$ suffisamment grands.

Étape 1 : on construit une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) adéquate et telle que $(\bar{f}, \bar{u})|_{t=0} = 0$ et $(\bar{f}, \bar{u})|_{t=T} = 0$.

Étape 2 : on construit une solution de (II.4.64) proche de (\bar{f}, \bar{u}) grâce à un schéma de point fixe, telle que $(f, u)|_{t=0} = (f_0, u_0)$ et

$$(II.4.72) \quad f|_{t=T_1} = 0, \quad \text{en dehors de } \omega.$$

Étape 3 : on modifie la solution construite grâce à un résultat de contrôle pour le système de Navier-Stokes, ce qui permet de passer de $(u|_{t=T_1}, f|_{t=T_1})$ à $(0, 0)$ en temps $T_2 - T_1$.

Dans le cas du système (II.4.64), on ne pourra pas utiliser le système rétrograde ni un argument de réversibilité, à cause de la nature parabolique du système de Navier-Stokes. Les cibles raisonnables sont donc $(0, 0)$ ou les trajectoires libres du système, comme pour le système de Navier-Stokes.

Construction de la solution de référence.

Le point clé pour la construction d'une solution de référence est l'utilisation d'un résultat de contrôle pour le système de Navier-Stokes, dû à J.-M. Coron et A. Fursikov ([49]) (voir Théorème 3.2, Chapitre 3). Ce résultat garantit qu'étant donné un temps $\tau > 0$, un état initial u_{in} et une solution régulière du système de Navier-Stokes u_{NS} , il est possible de trouver un contrôle w à support dans $(0, \tau) \times \omega$, tel que la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = w, & (t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \tau) \times \mathbb{T}^2, \\ u|_{t=0} = u_{in}(x), & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

satisfasse $u|_{t=\tau} = u_{NS}|_{t=\tau}$. On utilise ce résultat pour éliminer les obstructions liées aux basses vitesses et aux mauvaises directions.

Dans ce cas, il faut utiliser l'hypothèse géométrique sur ω . D'après la Définition II.4.1, il existe une unique mauvaise direction, n_H^\perp , ce qui suggère de chercher un champ de vitesses capable d'accélérer les trajectoires des caractéristiques associées dans la direction n_H . Nous pouvons faire ceci en trois étapes.

Premièrement, on utilise le théorème de Coron-Fursikov pour passer de zéro à la solution stationnaire n_H . Deuxièmement, on maintient la solution stationnaire suffisamment de temps pour accélérer toutes les basses vitesses dans la direction du champ. C'est à ce stade que l'on a besoin d'imposer un temps long. Finalement, on récupère la configuration à vitesse zéro grâce au théorème cité.

Ces trois étapes fournissent un contrôle \bar{w} , essentiel pour la modification du champ de vitesses \bar{u} que l'on vient de décrire. Nous allons utiliser ce contrôle pour construire la fonction de distribution associée, via le couplage $\bar{w} = j_{\bar{f}} - \rho_{\bar{f}} \bar{u}$. Choisissons deux fonctions $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in (\mathbb{R}^2)$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_1 \, dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_1 \, dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_1 \, dv = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_2 \, dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_2 \, dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_2 \, dv = 0.$$

Ensuite, on définit

$$f_2(t, x, v) := (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)(v) \cdot \bar{w}(t, x), \quad \forall (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

Ceci nous conduit au résultat suivant.

PROPOSITION II.4.7 (Proposition 3.1, Chapitre 3). *Soit $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfaisant la Définition II.4.1. Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$, il existe une solution de référence (\bar{f}, \bar{u}) du système (II.4.64) telle que*

$$\begin{aligned} \bar{f} &\in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)), \\ \bar{u} &\in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2), \\ (\bar{f}, \bar{u})|_{t=0} &= (0, 0), \quad (\bar{f}, \bar{u})|_{t=T} = (0, 0), \\ \text{supp}(\bar{f}) &\subset (0, T) \times \omega \times \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

et telle que les caractéristiques associées à $-v + \bar{u}$ satisfont

$$(II.4.73) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists t \in \left[\frac{T}{12}, \frac{11T}{12} \right] \text{ tel que } \bar{X}(t, 0, x, v) \in \omega.$$

Schéma de point fixe.

Nous suivrons essentiellement les mêmes étapes que dans le cas de Vlasov-Stokes décrites en §II.4.2. On définit $\mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ un domaine de fonctions hôlderiennes ϵ -proches de \bar{f} . Ensuite, on définit un opérateur sur \mathcal{S}_ϵ en trois étapes : association d'un champ de vitesses, absorption et extension. Les deux derniers points sont semblables au cas de Vlasov-Stokes. En revanche, le premier point présente des difficultés importantes, dues au caractère non linéaire de Navier-Stokes, et que l'on décrit plus en détail.

1ère étape : association d'un champ de vitesses. A chaque $g \in \mathcal{S}_\epsilon$, on associe la solution du système

$$(II.4.74) \quad \begin{cases} \partial_t u^g + (u^g \cdot \nabla) u^g - \Delta_x u^g(t) + \nabla_x p^g(t) = j_g(t) - \rho_g(t) u^g, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \text{div}_x u^g(t, x) = 0, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ u^g|_{t=0} = u_0, & \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

ce qui est possible en vertu du résultat suivant.

PROPOSITION II.4.8 (Proposition 4.1, Chapitre 3). *Soit $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ et soit $\epsilon \leq \epsilon_0$ suffisamment petit. Alors, il existe une unique solution faible du système (II.4.74). En plus, cette solution satisfait, pour tout $t \in [0, T]$,*

$$\begin{aligned} \|u^g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \|\nabla u^g(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \, ds \\ \leq 2e^T \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^2))}^2) \right). \end{aligned}$$

La notion de solution faible pour (II.4.74) est une adaptation de la notion de solution faible de Leray en présence du terme d'interaction $j_g - \rho_g u$. La preuve de ce résultat se fait en exploitant le résultat d'existence et d'unicité en dimension 2 pour le système de Navier-Stokes, ce qui permet de voir $j_g - \rho_g u$ comme un terme source via un schéma itératif, puis de passer à la limite dans la formulation faible.

2^{ème} étape : *absorption*. Dans cette étape, nous avons besoin des caractéristiques associées à $-v + u^g$, qui sont bien définies et régulières pourvu que u^g soit suffisamment régulier. Afin d'obtenir cette régularité pour u^g , il est nécessaire d'utiliser des résultats de régularité pour Navier-Stokes en dimension 2 sous l'hypothèse $j_g - \rho_g u^g \in L_t^2 H_x^{-\frac{1}{2}}$, ce qui permet de montrer que $u^g \in L_t^2 H_x^{\frac{3}{2}}$. Puis, nous utilisons un argument de bootstrap, qui donne $u^g \in \mathcal{C}_t^0 H_x^1 \cap L_t^2 H_x^2$, puisque $(u^g \cdot \nabla) u^g \in L_t^2 L_x^2$. Ensuite, on continue l'argument de bootstrap à l'aide de la régularité du système de Stokes dans les espaces $L_t^s L_x^p$, dû à Y. Giga et H. Sohr [69]. Nous montrons que $(u^g \cdot \nabla) u^g \in L_t^2 L_x^3$, ce qui implique $u^g \in L_t^2 W_x^{2,3}$, et par injection de Sobolev, on conclut $u^g \in L_t^2 \mathcal{C}_x^1$.

Cet argument permet de définir les caractéristiques associées à $-v + u^g$, que l'on note (X^g, V^g) . Comme dans le cas de Vlasov-Stokes (cf. II.4.2), on résout l'équation de Vlasov dans (II.1.20) en imposant une absorption dans ω chaque fois que X^g passe par ω .

3^{ème} étape : *extension*. On suit les lignes décrites dans §II.4.2.

Comme dans le cas de Vlasov-Stokes, le théorème de Leray-Schauder permet de démontrer que l'opérateur \mathcal{V}_ϵ possède un point fixe, g^* , dans \mathcal{S}_ϵ , lorsque ϵ est suffisamment petit.

En revanche, l'estimation permettant de rapprocher uniformément les caractéristiques (X^{g^*}, V^{g^*}) des caractéristiques de référence (\bar{X}, \bar{V}) est beaucoup plus difficile à obtenir que dans les cas précédents, où l'on pouvait disposer de la régularité elliptique (Poisson et Stokes) ou de la linéarité du champ (Maxwell). Dans le cas de Navier-Stokes, nous obtiendrons les estimations pour les caractéristiques à partir du résultat de stabilité suivant.

PROPOSITION II.4.9 (Proposition 5.1, Chapitre 3). *Soient (g, u^g) et (f, u^f) deux solutions fortes du système (II.4.64), en accord avec la Définition II.4.5, pour des données initiales $u^g|_{t=0} = u_0^g$, $g|_{t=0} = g_0$ et $u^f|_{t=0} = u_0^f$, $f|_{t=0} = f_0$. Supposons que*

$$\sup_{t,x} (|\rho_g(t,x)| + |\rho_f(t,x)|) < \infty.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in (0, T]$,

$$\begin{aligned} & \| (u^g - u^f)(t) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \| \nabla (u^g - u^f)(s) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 ds \\ & \leq e^{C(t)} \left(\| u_0^g - u_0^f \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \| j_{g-f} - \rho_{g-f} u^f \|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 ds \right), \end{aligned}$$

avec

$$C(t) := \int_0^t \left(1 + \| \rho_f(s) \|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \| \rho_f(s) \|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}^2 \right) ds.$$

Ceci permet d'écrire

$$\sup_{t,x,v} \| (X^{g^*}, V^{g^*}) - (\bar{X}, \bar{V}) \| \lesssim \epsilon,$$

ce qui garantit que X^{g^*} arrive dans la zone de contrôle pourvu que ϵ soit suffisamment petit. Par conséquent, le processus d'absorption permet d'atteindre une configuration telle que

$$g^* = 0 \text{ en dehors de } \omega.$$

Finalement, une autre application du théorème de Coron-Fursikov mène cette solution à l'état final (II.4.71).

Précisons aussi que la Proposition II.4.9 est cruciale pour démontrer que la solution g^* construite est unique dans une certaine classe.

Contrôlabilité d'équations paraboliques dégénérées par la méthode de platitude

III.1. Équations paraboliques dégénérées

Nous nous concentrons dans cette partie sur la contrôlabilité de quelques équations paraboliques dégénérées. Plus précisément, on considère un ouvert régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$, et un opérateur différentiel sur Ω de la forme

$$\mathcal{P} := \operatorname{div}_x [A(x)\nabla] + b(x) \cdot \nabla, \quad (0, T) \times \Omega,$$

avec

$$A \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad b \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), \quad A(x) \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

La dégénérescence vient du fait que la matrice A peut s'annuler dans Ω ou sur $\partial\Omega$, contrairement au cas uniformément elliptique.

Dans cette thèse, on s'intéresse à des systèmes du type

$$(III.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f = \mathcal{P}f, & (0, T) \times \Omega, \\ BC(f) = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ f|_{t=0} = f_0, & \Omega, \end{cases}$$

où la condition $BC(f) = 0$ représente les conditions aux bords associées à l'opérateur \mathcal{P} . L'étude de ce type d'équations est motivé notamment par des connexions avec la géométrie sous-riemannienne (voir, par exemple, [25]).

Les questions de contrôlabilité présentes dans la littérature concernent le contrôle interne de (III.1.1), ainsi que le contrôle frontière, dont on verra un exemple dans le Chapitre 4.

III.1.1.1. Un système modèle en 1-D. Décrivons un problème modèle¹ qui sera traité dans le Chapitre 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et considérons l'opérateur

$$\mathcal{P}_\alpha := \partial_x (x^\alpha \partial_x), \quad x \in (0, 1),$$

qui rentre dans le cadre général de la partie précédente avec $\Omega = (0, 1)$, $A(x) = x^\alpha$ et $b = 0$. On considère l'équation parabolique associée

$$(III.1.2) \quad \begin{cases} \partial_t f = \mathcal{P}_\alpha f, & (0, T) \times (0, 1), \\ BC(\alpha, f) = 0, & t \in (0, T), \\ f|_{x=1} = 0, & t \in (0, T), \\ f|_{t=0} = f_0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

1. L'intérêt de l'étude de ce modèle est académique dans le sens où il représente l'exemple plus simple d'équation parabolique dégénérée, où certaines pathologies du contexte dégénéré sont déjà visibles. C'est donc un premier pas vers la compréhension de modèles plus significatifs (Grushin, Heisenberg, etc).

Le caractère bien posé de (III.1.2) a été étudié par P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble dans [39], suivant l'approche abstraite de [36]. Dans ce travail, les auteurs ont déterminé qu'il est nécessaire de distinguer les conditions aux bords associées à \mathcal{P}_α par rapport à la valeur de α :

- (1) *cas faiblement dégénéré* : lorsque $\alpha \in (0, 1)$, $BC(\alpha, f) = f|_{x=0}$,
- (2) *cas fortement dégénéré* : lorsque $\alpha \in [1, \infty)$, $BC(\alpha, f) = (x^\alpha \partial_x f)|_{x=0}$.

Ceci introduit des différences importantes entre les deux cas, spécialement au niveau du cadre fonctionnel associé au caractère bien posé.

Du point de vue de la contrôlabilité, les mêmes auteurs ont étudié dans [39, 40] la contrôlabilité de (III.1.2) avec un contrôle interne, c'est-à-dire,

$$(III.1.3) \quad \begin{cases} \partial_t f - \partial_x (x^\alpha \partial_x f) = \chi_\omega u, & (0, T) \times (0, 1), \\ BC(\alpha, f) = 0, & t \in (0, T), \\ f|_{x=1} = 0, & t \in (0, T), \\ f|_{t=0} = f_0, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

où $\omega \subset (0, 1)$ est un ouvert. Le résultat obtenu est le suivant.

THÉORÈME III.1.1 (P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble, [40]).
Soit $\alpha \in (0, 2)$, $T > 0$ et soit $\omega \subset (0, 1)$ un intervalle. Alors, pour tout $f_0 \in L^2(0, 1)$, il existe $u \in L^2((0, T) \times (0, 1))$ tel que la solution de (III.1.3) avec $f|_{t=0} = f_0$ satisfait

$$f|_{t=T} = 0.$$

La preuve de ce résultat se fait grâce à la méthode HUM (cf. §I.2.1), en passant par une inégalité d'observabilité pour le système adjoint. Pour ce faire, les auteurs développent des nouvelles techniques pour obtenir des inégalités de Carleman globales pour l'opérateur parabolique

$$\mathcal{Q}_\alpha := \partial_t - \partial_x (x^\alpha \partial_x), \quad (0, T) \times (0, 1).$$

La dégénérescence en $x = 0$ fait que le poids classique de la méthode de Fursikov-Imanuvilov (cf. §II.3.2.4) n'est pas utilisable. En revanche, les auteurs trouvent dans [40] un nouveau poids de la forme

$$(III.1.4) \quad \sigma(t, x) := \theta(t)p(x), \quad \theta(t) := \frac{1}{t^4(T-t)^4}, \quad p(x) := \frac{2-x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2},$$

qui tient compte de la dégénérescence. L'obtention d'inégalités de Carleman avec ce poids, combinée avec des inégalités du type Hardy, conduit à l'observabilité du système adjoint et donc au Théorème III.1.1.

Dans le cas $\alpha \geq 2$, les mêmes auteurs ont démontré dans [37] que le système (III.1.3) n'est pas contrôlable. En effet, un changement de variables permet de transformer (III.1.3) en une équation du type chaleur sur \mathbb{R}^+ , alors que la région de contrôle ω est transformée en un intervalle borné. La non contrôlabilité du système résultant suit alors de celle du système de [61], évoqué en §II.3.3.

Concernant la contrôlabilité frontière de (III.1.2), lorsque le contrôle se place sur le bord $x = 1$, la contrôlabilité du système

$$(III.1.5) \quad \begin{cases} \partial_t f - \partial_x (x^\alpha \partial_x f) = 0, & (0, T) \times (0, 1), \\ BC(\alpha, f) = 0, & t \in (0, T), \\ f|_{x=1} = u(t), & t \in (0, T), \\ f|_{t=0} = f_0, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

découle du Théorème III.1.1, grâce à la méthode d'extension. En outre, il est possible de traiter le cas où le contrôle se place sur le bord $x = 0$, du moins dans le cas faiblement dégénéré. Dans ce cas, la contrôlabilité approchée a été démontrée dans [43], tandis que la contrôlabilité exacte a été obtenue dans [68].

Dans le Chapitre 4, nous allons donner une preuve alternative de la contrôlabilité de (III.1.5) via la méthode de platitude, qui permet l'obtention de contrôles explicites.

III.2. La méthode de platitude

Cette méthode a été développée par M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon dans [64], dans le contexte des systèmes de dimension finie, avec des applications en Automatique. Cette méthode est importante car elle permet la construction de contrôles explicites. Cette approche a été adaptée à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles, comme la chaleur ou Schrödinger ([97, 113, 114, 115]).

Afin d'expliquer les éléments de cette méthode, considérons un système de contrôle de la forme

$$(III.2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{F}(t, f), & (0, T) \times \Omega, \\ Bf = \chi_\Gamma u(t), & (0, T) \times \partial\Omega, \\ f|_{t=0} = f_0, & \Omega, \end{cases}$$

où le contrôle u est localisé sur Γ , une partie de la frontière $\partial\Omega$. On dit que le système (III.2.6) est plat lorsqu'il est possible de paramétrer toute trajectoire (y, u) par rapport à une famille de fonctions dans un espace adapté, appelées sorties plates.

L'obtention d'une telle paramétrisation permet de construire une sortie plate particulière destinée à mener le système (III.2.6) à zéro.

III.2.1. La méthode de platitude pour l'équation de la chaleur. Décrivons l'application de cette méthode à l'équation de la chaleur, suivant [113]. Cette approche est le modèle de notre stratégie dans le Chapitre 4.

Considérons l'équation de la chaleur avec des conditions aux bords du type Neumann

$$(III.2.7) \quad \begin{cases} \partial_t f - \partial_{xx} f = 0, & (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_x f(t, 0) = 0, & t \in (0, T), \\ \partial_x f(t, 1) = u(t), & t \in (0, T), \\ f|_{t=0} = f_0, & (0, 1). \end{cases}$$

Dans [113] les auteurs montrent que le système (III.2.7) est plat, via la paramétrisation

$$(III.2.8) \quad f|_{x=0} = y(t), \quad t \in (0, T),$$

qui permet de construire toute trajectoire de (III.2.7) à partir de la donnée initiale f_0 et de la sortie plate y . Afin d'assurer que cette paramétrisation est bien définie, il faut choisir les sorties plates dans une classe de fonctions régulières, la classe de Gevrey.

DEFINITION III.2.1. Soit $s \in \mathbb{R}^+$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avec $t_1 < t_2$. Une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty([t_1, t_2])$ est Gevrey d'ordre s sur $[t_1, t_2]$ si

$$\exists M, R > 0 \text{ tels que } \sup_{t_1 \leq r \leq t_2} |h^{(n)}(r)| \leq \frac{M(n!)^s}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dans ce cas, on écrit $h \in \mathcal{G}^s([t_1, t_2])$.

Le résultat obtenu grâce à la méthode de platitude est le suivant.

THÉORÈME III.2.2 (P. Martin, L. Rosier et P. Rouchon, [113]). *Soit $f_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$, $\tau \in (0, T)$ et $s \in (1, 2)$. Alors, il existe $y \in \mathcal{G}^s([\tau, T])$ telle que le contrôle*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t)}{(2k-1)!}, & \tau < t \leq T, \end{cases}$$

mène le système (III.2.7) à zéro en temps $T > 0$.

Expliquons les éléments de la preuve de ce résultat. D'abord, l'utilisation d'une série formelle du type

$$(III.2.9) \quad f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \frac{x^k}{k!}, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, 1),$$

pour une suite $(a_k(t))_k$ à déterminer, permet d'obtenir la paramétrisation de (III.2.7) par une sortie plate.

En effet, en injectant (III.2.9) dans (III.2.7), il vient

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+2} - \dot{a}_k)(t) \frac{x^k}{k!} = 0,$$

ce qui fournit la relation de récurrence $a_{k+2} = \dot{a}_k$, pour tout $k \geq 0$. De plus, puisque la condition au bord impose $a_1 = 0$, cela donne, grâce à (III.2.8), la solution formelle

$$(III.2.10) \quad f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} y^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, 1),$$

et la fonction de contrôle est donnée par la série formelle

$$(III.2.11) \quad u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t)}{(2k-1)!}, \quad t \in (0, T).$$

Afin d'assurer la convergence de ces séries, il est nécessaire de considérer des sorties plates dans les espaces $\mathcal{G}^s([0, T])$, avec $s \in (0, 2)$.

Ensuite, il faut construire une sortie plate de manière à mener (III.2.7) à zéro en temps $T > 0$. Pour ce faire, on doit exploiter l'effet régularisant de l'équation de la chaleur avec $u = 0$, ce qui permet d'écrire la solution de (III.2.7) pour une donnée initiale $f_0 \in L^2(0, 1)$ sous la forme

$$f(\tau, x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in (0, 1),$$

pour un certain $\tau \in (0, T)$. Le but est donc de construire une sortie plate $y \in \mathcal{G}^s([\tau, T])$ telle que

$$(III.2.12) \quad y^{(k)}(\tau) = y_k, \quad y^{(k)}(T) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cette construction est possible grâce à l'utilisation de la fonction

$$(III.2.13) \quad \phi_s(t) := \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ \frac{e^{-(1-t)^{-\frac{1}{s-1}}}}{e^{-(1-t)^{-\frac{1}{s-1}}} + e^{-t^{-\frac{1}{s-1}}}}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t \geq 1, \end{cases}$$

qui appartient à $\mathcal{G}^s([0, 1])$ et satisfait

$$(III.2.14) \quad \phi_s(0) = 1, \phi_s(1) = 0, \quad \phi_s^{(i)}(0) = \phi_s^{(i)}(1) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci permet de définir, pour $s \in (1, 2)$, la sortie plate

$$y(t) := \phi_s \left(\frac{t - \tau}{T - \tau} \right) \sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{(t - \tau)^k}{k!}, \quad t \in (\tau, T),$$

qui satisfait (III.2.12). Ceci conduit au Théorème III.2.2.

III.3. Résultats nouveaux (Chapitre 4)

Le but de cette section est de présenter le théorème principal du Chapitre 4, qui donne un résultat de contrôlabilité frontière, ainsi que des contrôles explicites, pour le système

$$(III.3.15) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - \partial_x (x^\alpha \partial_x) f(t, x) = 0, & (0, T) \times (0, 1), \\ (x^\alpha \partial_x) f(t, x)|_{x=0} = 0, & t \in (0, T), \\ f(t, 1) = u(t), & t \in (0, T), \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

dans le cas fortement dégénéré où $\alpha \in [1, 2)$.

THÉORÈME III.3.1 (Théorème 1.1, Chapitre 4). *Soit $\alpha \in [1, 2)$. Soient $f_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$, $\tau \in (0, T)$ et $s \in (1, 2)$. Alors, il existe une sortie plate $y \in \mathcal{G}^s([\tau, T])$ telle que le contrôle*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t)}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k (j + \frac{\alpha-1}{2})}, & \tau < t \leq T, \end{cases}$$

mène à zéro la solution faible du système (III.3.15) en temps T .

La notion de solution faible utilisée est détaillée dans la Définition 1.2 du Chapitre 4.

Précisons que le cas faiblement dégénéré ($\alpha \in (0, 1)$) a été traité dans [114].

Donnons quelques éléments de la preuve de ce Théorème, qui se concentrent en trois étapes :

Étape 1 : détermination des sorties plates, via des solutions formelles,

Étape 2 : étude de l'effet régularisant du système libre,

Étape 3 : construction d'une sortie plate pour le contrôle à zéro.

Étape 1 : afin de déterminer la sortie plate permettant la paramétrisation du système (III.3.15), nous utilisons le développement formel suivant :

$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(t) \left(x^{1-\frac{\alpha}{2}} \right)^{2k}, \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, 1),$$

pour une suite $(c_{2k}(t))_k \in \mathbb{N}$ de coefficients à déterminer. Ceci donne, formellement,

$$\begin{aligned} \partial_x (x^\alpha \partial_x f)(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2(k+1)}(t) (2-\alpha)^2 (k+1) \left[k+1 + \frac{\alpha-1}{2-\alpha} \right] \left(x^{1-\frac{\alpha}{2}} \right)^{2k}, \\ \partial_t f(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{c}_{2k}(t) \left(x^{1-\frac{\alpha}{2}} \right)^{2k}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si f est solution formelle de (III.3.15), l'équation impose la relation de récurrence suivante sur les $(c_{2k}(t))_k$:

$$(III.3.16) \quad \begin{aligned} c_0(t) &:= f(t, 0), \\ c_{2(k+1)}(t) &= \frac{\dot{c}_{2k}(t)}{(2-\alpha)^2(k+1)\left(k+1+\frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Alors, en choisissant une sortie plate de la forme

$$(III.3.17) \quad y(t) := f(t, 0) = c_0(t), \quad \forall t \in (0, T),$$

et en itérant dans (III.3.16), il vient

$$c_{2k}(t) = \frac{y^{(k)}(t)}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}, \quad \forall t \in (0, T), \forall k \in \mathbb{N}.$$

On en déduit la solution formelle

$$(III.3.18) \quad f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)},$$

et la fonction de contrôle donnée par la série formelle

$$(III.3.19) \quad u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t)}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}.$$

Il faut ensuite montrer que les expressions (III.3.18) et (III.3.19) sont bien définies, ce qui revient à étudier le problème de convergence des séries correspondantes. On montre (Proposition 3.3, Chapitre 4) que si la sortie plate y appartient à une certaine classe de fonctions Gevrey (cf. Définition III.2.1), alors la fonction f donnée par (III.3.18) est solution ponctuelle (cf. Définition 3.1, Chapitre 4) de (III.3.15) avec le contrôle (III.3.19).

Étape 2 : dans le cas du système (III.3.15), l'utilisation de l'effet régularisant de l'équation parabolique est plus compliqué que dans le cas de la chaleur.

Dans le but d'analyser quantitativement cet effet régularisant, nous déterminons (Proposition 4.1, Chapitre 4) la famille spectrale associée à l'opérateur $P_\alpha = \partial_x(x^\alpha \partial_x)$. On obtient les fonctions propres

$$(III.3.20) \quad \varphi_k(x) = \frac{\sqrt{2-\alpha}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu(j_{\nu,k} x^{1-\frac{\alpha}{2}}), \quad \forall x \in (0, 1), k \in \mathbb{N}^*,$$

avec les valeurs propres

$$(III.3.21) \quad \lambda_k := \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 j_{\nu,k}^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

où J_ν désigne la fonction de Bessel d'ordre $\nu = \frac{\alpha-1}{2-\alpha}$ et $(j_{\nu,k})_k$ la suite de ses zéros. On montre aussi que la famille $(\varphi_k)_k$ est une base hilbertienne de $L^2(0, 1)$. Par conséquent, la solution faible de (III.3.15) avec $u = 0$ et $f|_{t=0} = f_0 \in L^2(0, 1)$

s'écrit ²

$$(III.3.22) \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \langle f_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad \text{dans } L^2(0, 1), \forall t \in [0, T].$$

Une analyse approfondie de cette série permet d'obtenir le résultat suivant.

PROPOSITION III.3.2 (Proposition 5.1, Chapitre 4). *Soient $f_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(0, 1))$ la solution faible du système (III.3.15) avec $u = 0$. Alors, il existe $Y \in \mathcal{C}^\infty((0, T])$ tel que pour tout $\sigma \in (0, T)$,*

$$Y \in \mathcal{G}^1([\sigma, T])$$

et

$$(III.3.23) \quad f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^{(n)}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2n}}{(2-\alpha)^{2n} n! \prod_{j=1}^n \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)},$$

pour tout $(t, x) \in [\sigma, T] \times [0, 1]$.

Étape 3 : La Proposition III.3.2 permet alors la construction d'une sortie plate adéquate, en utilisant encore une fois la fonction définie par (III.2.13). On pose

$$y(t) := \phi_s \left(\frac{t-\tau}{T-\tau} \right) Y(t), \quad t \in (0, T],$$

pour un certain $\tau \in (0, T)$. Cette sortie plate génère une solution faible de (III.3.15) sur $[\sigma, T]$, f , telle que $f|_{t=T} = 0$, grâce à (III.2.14). En plus, un argument d'unicité pour les solutions faibles permet de passer à la limite en $\sigma \rightarrow 0^+$, ce qui entraîne $f|_{t=0} = f_0$. Ceci conduit au Théorème III.3.1.

2. L'étude de ce développement permet aussi une approche de la contrôlabilité de (III.3.15) par la méthode des moments, dans l'esprit de [63]. Cette direction a été exploitée dans [42] en connexion avec le problème de la caractérisation des états atteignables pour $\alpha \in (0, 1)$.

Contrôlabilité de l'équation de Schrödinger par la forme du domaine

IV.1. Modèle physique

Considérons la dynamique d'une particule quantique de masse $m = 1$ dans l'espace \mathbb{R}^d , avec $d = 1, 2, 3$. Selon le premier principe de la Mécanique Quantique (voir [12, Sec. 2.1.1, p. 35]), il est possible de décrire complètement l'état quantique à l'instant $t \geq 0$ grâce à une fonction, appelée fonction d'onde,

$$\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}.$$

En particulier, la probabilité de trouver ladite particule dans la région $D \subseteq \mathbb{R}^d$ à l'instant $t \geq 0$ est

$$\int_D |\psi(t, x)|^2 dx.$$

L'évolution de la dynamique de la particule quantique libre est décrite, grâce au deuxième principe (voir [12, Sec. 2.2.3, p. 38]), par l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta_x \psi, & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Dans le cas où il existe une interaction de la particule avec un élément extérieur, par exemple un champ de forces, le deuxième principe établit aussi (voir [12, Sec. 2.5.1, p.48]) que la dynamique dans ce cas est décrite par l'équation

$$(IV.1.1) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta_x \psi + V(t, x)\psi, & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où $V(t, x)$ est le potentiel d'interaction. On note par $H = -\Delta_x + V$ l'hamiltonien du système.

L'utilisation de certains potentiels, comme les puits de potentiel infinis, conduit au confinement d'une particule quantique dans une partie de l'espace (voir [12, Sec. 4.3.4, p. 88]). Plus précisément, si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert régulier, il existe des potentiels $V(t, x)$ tels que (IV.1.1) s'écrit comme un problème aux limites sur Ω ,

$$(IV.1.2) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta_x \psi + V(t, x)\psi, & \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \psi = 0, & \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

avec la condition de normalisation

$$\int_{\Omega} |\psi(t, x)|^2 dx = 1, \quad t \geq 0.$$

Cette condition exprime le fait que la probabilité de trouver la particule quantique en dehors de Ω ou sur le bord $\partial\Omega$ est zéro.

IV.2. Le problème du contrôle quantique

Considérant la dynamique décrite par (IV.1.1), et en connexion avec la problématique de la section §I.1, nous nous proposons de modifier la trajectoire d'une particule quantique en faisant agir un contrôle sur le système. En fonction de la nature de cette action extérieure, on peut distinguer plusieurs approches.

IV.2.1. Contrôle linéaire. L'action sur le système se fait via une source extérieure localisée sur une partie du domaine (contrôle interne) ou via un terme de bord localisé sur une partie de la frontière (contrôle frontière). Dans le premier cas, le problème modèle est

$$(IV.2.3) \quad \begin{cases} i\partial_t\psi = -\Delta_x\psi + \chi_\omega u, & (0, T) \times \Omega, \\ \psi = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0, & \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert régulier et $\omega \subset \Omega$. Ce problème a été étudié en utilisant différentes méthodes, basées sur l'approche HUM (cf. §I.2.1), avec plusieurs choix de Ω et ω .

Le premier résultat dans cette direction est dû à S. Jaffard, qui a démontré dans [92] que le système (IV.2.3) avec $\Omega = \mathbb{T}^2$ est exactement contrôlable avec ω un ouvert quelconque. Ce résultat, qui repose sur l'analyse des séries de Fourier lacunaires, a été étendu à la dimension quelconque dans [96]. On pourra citer aussi les travaux de N. Burq et M. Zworski [34] pour des géométries plus complexes en l'absence de bord.

Dans le cas d'un ouvert Ω avec un bord $\partial\Omega$, G. Lebeau a démontré dans [106] la contrôlabilité de (IV.2.3) lorsque $\partial\Omega$ est analytique et ω satisfait la condition de contrôle géométrique de la Définition I.2.5. Les outils développés dans ce travail, basés sur l'analyse microlocale, permettent aussi le traitement du problème de contrôle frontière. Un autre résultat dans cette même direction a été démontré par E. Machtyngier dans [112] grâce à la méthode des multiplicateurs.

Précisons qu'il existe une connexion profonde entre la contrôlabilité interne de l'équation de Schrödinger et celle de l'équation des ondes

$$(IV.2.4) \quad \begin{cases} \partial_{tt}w - \Delta_x w = \chi_\omega g, & (0, T) \times \Omega, \\ \partial w = 0 & (0, T) \times \partial\Omega, \\ w|_{t=0} = w_0, \quad \partial_t w|_{t=0} = w_1, & \Omega, \end{cases}$$

pour (w_0, w_1) suffisamment réguliers et g un contrôle localisé en ω . Il est possible de démontrer (voir [141, Section 6.7, p.200]) que la contrôlabilité exacte de (IV.2.4) implique la contrôlabilité exacte de (IV.2.3). Par conséquent, les hypothèses sur la régularité de Ω présentes dans [33], c'est à dire, $\partial\Omega$ de classe \mathcal{C}^∞ , sans points de contact d'ordre infini avec ses tangents et ω satisfaisant la condition de contrôle géométrique de la définition I.2.5, sont suffisantes pour la contrôlabilité de (IV.2.3).

Les problèmes de contrôlabilité linéaire du type (IV.2.3), ne possèdent pas une interprétation physique évidente en relation avec le modèle de §IV.1. En revanche, l'intérêt purement mathématique de cet approche est très grand. Par exemple, la compréhension du problème linéaire (IV.2.3) est essentiel dans l'étude de certains modèles non linéaires, comme dans [56, 133, 134, 135, 98, 99]. On renvoie à [100] pour plus de détails dans cette direction.

L'étude des systèmes du type (IV.2.3) permet aussi d'établir des connexions entre l'observabilité et des propriétés ergodiques de certaines familles spectrales (voir par exemple [5]).

IV.2.2. Contrôle bilinéaire. Lorsque l'on veut agir sur un système quantique de manière effective, en vue des applications physiques (voir, par exemple, [54, p.xii]), il faut remplacer le terme de contrôle interne par un contrôle appartenant au hamiltonien du système, en tant que potentiel. Ceci conduit à une équation du type

$$(IV.2.5) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = (-\Delta + V(t, x))\psi + w(t, x)\psi, & (0, T) \times \Omega, \\ \psi = 0, & (0, T) \times \partial\Omega, \\ \psi|_{t=0} = \psi_0, & \Omega. \end{cases}$$

Le problème de contrôle bilinéaire consiste donc à trouver un potentiel w capable de changer la dynamique de (IV.2.5) pour arriver à une cible fixée à l'avance. On précisera que le terme $w\psi$ fait que l'application

$$\tilde{\Theta}_T : w \rightarrow \psi|_{t=T},$$

où ψ est la solution de (IV.2.5) avec $\psi_0 = 0$ n'est pas linéaire par rapport à w .

Le but de cette section est de donner quelques détails sur les techniques du contrôle bilinéaire pour l'équation de Schrödinger, qui seront utiles dans le Chapitre 5.

IV.2.2.1. Résultats de contrôlabilité exacte. Le premier résultat de contrôle bilinéaire, dû à J. M. Ball, J. Marsden et M. Slemrod, via une approche abstraite, a exhibé des obstructions importantes à la contrôlabilité. Plus précisément, les auteurs ont montré des exemples où l'ensemble des états atteignables possède un complémentaire dense dans l'espace d'états. En revanche, comme il a été montré par K. Beauchard dans [13], ces restrictions sont dues uniquement au choix du cadre fonctionnel. Expliquons cette problématique plus en détail.

Nous nous concentrerons sur le cas $d = 1$, où la particule quantique est confinée dans un segment. Le problème que l'on considère est alors le suivant :

$$(IV.2.6) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = (-\partial_{xx} + V(x))\psi + u(t)\mu(x)\psi, & (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

avec un contrôle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ et une fonction $\mu : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ fixée. Physiquement, on peut interpréter u comme l'amplitude du champ extérieur, alors que μ représente le moment dipolaire de la particule.

Lorsque V est suffisamment régulier¹, on note $(\lambda_{k,V})_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante de vecteurs propres de l'opérateur

$$A_V := -\partial_{xx} + V(x), \quad D(A_V) = H^2 \cap H_0^1((0, 1); \mathbb{C}),$$

et $(\varphi_{k,V})_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite de ses fonctions propres, qui forme une base hilbertienne de $L^2(0, 1; \mathbb{C})$. Pour tout $s > 0$, on définit l'espace

$$H_{(V)}^s(0, 1; \mathbb{C}) := D\left((-\partial_{xx} + V)^{\frac{s}{2}}\right),$$

1. Par exemple, $V \in L^\infty((0, 1); \mathbb{C})$ et minoré uniformément. Dans cette thèse, on s'intéresse au cas $V \equiv 0$.

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s(V)} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,V}^s |(f, \varphi_{k,V})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in H^s(V),$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans $L^2(0, 1; \mathbb{C})$. On note par \mathbb{S} la sphère unité dans $L^2(0, 1; \mathbb{C})$.

Décrivons quelques résultats de contrôle pour (IV.2.6). Suivant la direction de [7] évoquée précédemment, G. Turinici a démontré dans [142] que l'ensemble des états atteignables pour ce système avec des contrôles dans $L^2(0, T; \mathbb{R})$ est d'intérieur vide dans $H_{(0)}^2 \cap \mathbb{S}$.

En revanche, K. Beauchard a montré dans [13] plusieurs résultats positifs de contrôlabilité locale pour (IV.2.6) autour de certaines trajectoires, grâce à un choix différent de cadre fonctionnel. Ces résultats reposent sur le théorème de Nash-Moser, dû au fait que les espaces de contrôlabilité pour le problème linéaire et le problème non linéaire ne sont pas les mêmes, ce qui empêche d'appliquer le théorème d'inversion locale classique (cf. §I.2.2).

Cette perte de régularité apparente a été compensée plus tard par K. Beauchard et C. Laurent dans [16], ce qui a permis de déterminer le cadre fonctionnel optimal pour la contrôlabilité locale exacte autour de l'état fondamental $\varphi_{1,0}$.

Pour énoncer ce résultat, on prend $V = 0$, ce qui conduit au système

$$(IV.2.7) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\partial_{xx} \psi + u(t)\mu(x)\psi, & (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

Dans ce cas, on note $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les fonctions propres de $-\partial_{xx}$ avec des conditions de Dirichlet sur $(0, 1)$. Les valeurs propres associées sont donc $\lambda_k = \pi^2 k^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On note par ψ_k les paquets d'ondes associés, c'est-à-dire, $\psi_k(t) := e^{-i\lambda_k t} \varphi_k$. Finalement, (\cdot, \cdot) note le produit scalaire dans $L^2(0, 1; \mathbb{C})$.

THÉORÈME IV.2.1 (K. Beauchard et C. Laurent, [16]). *Soit $\mu \in H^3(0, 1; \mathbb{R})$ tel que*

$$(IV.2.8) \quad \exists C > 0, \text{ telle que } |(\mu \varphi_1, \varphi_k)| \geq \frac{C}{k^3}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $T > 0$. Il existe $\delta > 0$ et une application de classe \mathcal{C}^1

$$\Gamma : \mathcal{V}_T \rightarrow L^2(0, T; \mathbb{R})$$

avec

$$\mathcal{V}_T := \left\{ \psi_f \in \mathbb{S} \cap H_{(0)}^3; \|\psi_f - \psi_1(T)\|_{H_{(0)}^3} < \delta \right\},$$

telle que $\Gamma(\psi_1(T)) = 0$ et pour tout $\psi_f \in \mathcal{V}_T$, la solution de (IV.2.6) avec $\psi_0 = \varphi_1$ et contrôle $u = \Gamma(\psi_f)$ satisfait

$$\psi|_{t=T} = \psi_f.$$

Ce résultat, évoqué dans §I.2.2 comme modèle d'utilisation de la méthode de linéarisation, est aussi d'une importance capitale dans le contexte du contrôle bilinéaire et particulièrement dans le Chapitre 5 de cette thèse. Il est donc important de donner quelques détails sur sa preuve, qui repose sur deux éléments : la

contrôlabilité du système linéarisé et le caractère \mathcal{C}^1 de l'application

$$(IV.2.9) \quad \Theta_T : u \mapsto \psi|_{t=T},$$

où ψ est solution de (IV.2.7) avec $\psi|_{t=0} = \varphi_1$.

Le premier point repose sur l'hypothèse (IV.2.8) et la méthode des moments. En effet, considérons le problème linéarisé autour de $(\psi_1, u \equiv 0)$, qui est

$$(IV.2.10) \quad \begin{cases} i\partial_t \Psi = -\partial_{xx} \Psi + v(t)\mu(x)\psi_1(t), & (0, T) \times (0, 1), \\ \Psi(t, 0) = \Psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \Psi(0, x) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Nous pouvons écrire la solution de ce système comme

$$\Psi(t) = -i \sum_{k=1}^{\infty} (\mu\varphi_1, \varphi_k) \int_0^t v(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_1)s} ds \psi_k(t).$$

La condition $\Psi|_{t=T} = \Psi_f$ est donc équivalente au problème de moments

$$\int_0^T v(t) e^{i(\lambda_k - \lambda_1)t} dt = \frac{i(\Psi_f, \psi_k(T))}{(\mu\varphi_1, \varphi_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Ce problème de moments admet une solution $v \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ pour tout $T > 0$ lorsque

- (1) les fréquences $\mu_k = \lambda_k - \lambda_1$ sont deux à deux distinctes et ont un “gap” asymptotique infini, c'est-à-dire, $\liminf_{k \rightarrow +\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \infty$,
- (2) le membre de droite $\left(\frac{i(\Psi_f, \psi_k(T))}{(\mu\varphi_1, \varphi_k)} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N}^*; \mathbb{C})$,

(voir [96] ou [16, Appendix B]). Dans le cas étudié, l'hypothèse sur les fréquences est vérifiée car $\lambda_k = \pi^2 k^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Le deuxième point est vérifié lorsque (IV.2.8) est satisfait et $\Psi_f \in H_{(0)}^3$. Ceci garantit la contrôlabilité du problème linéarisé (IV.2.10) dans $H_{(0)}^3$ avec des contrôles dans $L^2(0, T; \mathbb{R})$.

Le deuxième ingrédient de la preuve du Théorème IV.2.1 repose sur un effet régularisant pour le problème (IV.2.6).

PROPOSITION IV.2.2 ([16]). *Soient $V \in L^2(0, T; H^3 \cap H_{(0)}^1)$ et $\psi_0 \in H_{(0)}^3$. Alors, il existe une unique solution du système*

$$(IV.2.11) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\partial_{xx} \psi + V(t, x)\psi, & (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

telle que $\psi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0)}^3)$.

Précisons que ce résultat suppose un effet régularisant pour le système (IV.2.11) dans le sens où le potentiel V étant moins régulier que $H_{(0)}^3$, le terme $V\psi$ n'a pas de raison d'appartenir à $H_{(0)}^3$. Or, la Proposition IV.2.2 garantit que $\psi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0)}^3)$.

Grâce à cet effet régularisant, la Proposition IV.2.2 permet d'obtenir le caractère \mathcal{C}^1 de l'application (IV.2.9) entre les espaces $L^2(0, T; \mathbb{R})$ et $H_{(0)}^3(0, 1; \mathbb{C})$, ce qui conduit à la contrôlabilité locale du Théorème IV.2.1 via le théorème d'inversion locale classique.

Le résultat du Théorème [IV.2.1](#) admet plusieurs extensions. Une direction concerne l'hypothèse [\(IV.2.8\)](#) : il a été montré par K. Beauchard et M. Morancey dans [\[17\]](#) qu'il est possible d'affaiblir cette hypothèse, au prix d'introduire un temps minimal pour la contrôlabilité.

Il est aussi possible de combiner ces techniques avec la méthode du retour pour contrôler plusieurs équations de Schrödinger de manière simultanée, comme montré par M. Morancey dans [\[119\]](#).

En revanche, l'extension du Théorème [IV.2.1](#) à la dimension supérieure est un problème encore ouvert. Bien que l'effet régularisant de la Proposition [IV.2.2](#) ait pu être adapté à la dimension quelconque par J.-P. Puel dans [\[131\]](#), le cadre fonctionnel pour la contrôlabilité du linéarisé reste encore inconnu.

IV.2.2.2. Contrôle par la forme du domaine. Nous avons mentionné en [§IV.1](#) la possibilité d'utiliser un potentiel confinant, sous la forme d'un puit de potentiel infini, de manière à enfermer une particule quantique dans une partie de l'espace. Bien que dans la plupart des cas, ce potentiel soit fixe, il est possible de le faire varier au cours de temps, ce qui conduit à une dynamique sur un domaine variable. Cette idée s'appuie sur la littérature physique (voir [\[8, 128\]](#), par exemple).

Du point de vue de la théorie du contrôle, la possibilité de modifier le domaine à l'aide d'un potentiel conduit à utiliser la forme du domaine comme un contrôle. Plus précisément, on voudra faire changer la dynamique d'une particule quantique en faisant varier le domaine où elle est confinée selon une cible préfixée (voir [\[132\]](#)).

On peut donner un sens à ce problème de la manière suivante. Considérons un ouvert régulier de référence $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$. Ensuite, on fixe un temps $T > 0$ et on considère une famille de difféomorphismes de la forme

$$\mathcal{U}_T := \{u \in \mathcal{C}^1([0, T]; \text{Diff}(\mathbb{R}^d)); u|_{t=0} = u|_{t=T} = \text{id}_{\mathbb{R}^d}\}.$$

Ceci permet de définir une évolution de l'ouvert de référence via

$$\Omega(t) := u(t)(\Omega_0), \quad t \in [0, T],$$

pour un certain $u \in \mathcal{U}_T$. Considérons ensuite l'évolution d'une particule quantique dans $\Omega(t)$, dont la dynamique est décrite par l'équation de Schrödinger sur un domaine variable

$$(IV.2.12) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta_x \psi, & (0, T) \times \Omega(t), \\ \psi = 0, & (0, T) \times \partial\Omega(t), \\ \psi|_{t=0} = \psi_0, & \Omega_0, \end{cases}$$

pour un état initial défini sur Ω_0 .

La question de la contrôlabilité par la forme du domaine est la suivante : étant donné un ouvert Ω_0 , un temps $T > 0$ et ψ_0, ψ_f deux éléments d'un espace de fonctions sur Ω_0 , est-il possible de trouver un contrôle $u \in \mathcal{U}_T$ tel que la solution de [\(IV.2.12\)](#) satisfasse

$$\psi|_{t=T} = \psi_f, \quad \text{dans } \Omega_0?$$

Une première remarque concerne la notion de solution de [\(IV.2.12\)](#). À l'heure actuelle, on ne dispose pas d'un cadre mathématique général satisfaisant (voir [\[94\]](#)). En revanche, on pourra travailler dans des cas particuliers où il est possible de surmonter cette difficulté apparente, via une transformation adéquate qui permet de se ramener à un domaine fixe.

Travaux précédents. Le premier résultat de contrôlabilité de l'équation de Schrödinger par la forme du domaine a été obtenu par K. Beauchard dans [14], en dimension 1, pour l'ouvert de référence donné par l'intervalle unité $\Omega_0 = (0, 1)$.

Considérons un puit de potentiel de largeur variable, $l(\tau)$, donnée par une fonction régulière

$$\begin{aligned} l : [0, \tau_f] &\rightarrow (0, \infty) \\ \tau &\mapsto l(\tau), \end{aligned}$$

pour un certain $\tau_f > 0$, avec la contrainte

$$(IV.2.13) \quad l(0) = l(\tau_f) = 1.$$

On considère l'évolution d'une particule quantique dans le domaine variable $\Omega(\tau) = (0, l(\tau))$, ce qui conduit à une fonction d'onde $\phi(\tau, l(\tau))$ satisfaisant

$$\int_0^{l(\tau)} |\phi(\tau, z)|^2 dz = 1, \quad \forall \tau \in [0, \tau_f],$$

et dont la dynamique est décrite par le système

$$(IV.2.14) \quad \begin{cases} i\partial_\tau \phi = -\partial_{zz} \phi, & (\tau, z) \in (0, \tau_f) \times (0, l(\tau)), \\ \phi(\tau, 0) = \phi(\tau, l(\tau)) = 0, & \tau \in (0, \tau_f). \end{cases}$$

La stratégie suivie dans [14] consiste à transformer le problème posé en domaine variable en un problème en domaine fixe, le segment $(0, 1)$, grâce à un changement de variables. En effet, la transformation

$$(IV.2.15) \quad \xi(t, x) := \phi(\tau, z), \quad x := \frac{z}{l(\tau)}, \quad t := \int_0^\tau \frac{d\sigma}{l(\sigma)^2},$$

conduit au système

$$(IV.2.16) \quad \begin{cases} i\partial_t \xi = -\partial_{xx} \xi + i4u(t)x\partial_x \xi, & (0, T) \times (0, 1), \\ \xi(t, 0) = \xi(t, 1) = 0, & (0, T), \end{cases}$$

avec $T := \int_0^{\tau_f} \frac{d\sigma}{l(\sigma)^2}$ et $u(t) := 4\dot{l}(\tau)l(\tau)$. Ensuite, le changement de phase

$$\phi(t, x) := \xi(t, x) e^{-iu(t)x^2 + 2i \int_0^t u(s) ds}$$

fournit le système équivalent

$$(IV.2.17) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\partial_{xx} \psi + (\dot{u}(t) - 4u(t)^2) x^2 \psi, & (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & (0, T), \end{cases}$$

que l'on peut interpréter comme un problème de contrôle bilinéaire, avec un contrôle $\dot{u} - 4u^2$. En revanche, il faut tenir compte de la contrainte géométrique (IV.2.13), qui impose $u(0) = u(T)$ et

$$(IV.2.18) \quad \int_0^T u(s) ds = 0.$$

Les techniques de contrôle bilinéaire évoquées en §IV.2.2 permettent de montrer un résultat de contrôlabilité locale pour (IV.2.17) autour des certaines trajectoires. Ceci fournit, grâce à la surjectivité de la transformation $u \mapsto l$, un résultat de contrôlabilité par la forme du domaine pour (IV.2.14).

Ces techniques ont permis à K. Beauchard, H. Lange et H. Teismann d'obtenir un résultat de contrôle par la forme du domaine dans le cas d'un problème non linéaire 1-D, décrivant la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein (cf. [20]), à l'aide d'une analyse spectrale très fine.

IV.2.3. Résultats nouveaux (Chapitre 5). Le but de cette section est d'expliquer les éléments de la preuve du résultat principal du Chapitre 5, qui garantit la contrôlabilité locale de l'équation de Schrödinger dans le disque unité en dimension 2 par déformations du domaine pour des données radiales.

Considérons, pour un certain $T^* > 0$, une fonction $R \in \mathcal{C}^0([0, T^*]; \mathbb{R}_*^+)$. On définit les disques de rayon variable

$$D_{R(\tau)} := \{(z, w) \in \mathbb{R}^2; z^2 + w^2 < R(\tau)^2\}, \quad \forall \tau \in [0, T^*],$$

Considérons l'évolution d'une particule quantique sur ces disques variables, dont la dynamique est décrite par l'équation

$$(IV.2.19) \quad \begin{cases} i\partial_\tau \phi = -\Delta_{z,w} \phi, & (\tau, z, w) \in (0, T^*) \times D_{R(\tau)}, \\ \phi = 0, & (\tau, z, w) \in (0, T^*) \times \partial D_{R(\tau)}, \end{cases}$$

avec la normalisation

$$\int_{D_{R(\tau)}} |\phi(\tau, z, w)|^2 dz dw = 1, \quad \forall \tau \in [0, T^*].$$

Notre objectif est d'étudier la contrôlabilité du système (IV.2.19) via des déformations des disques $D_{R(\tau)}$, où le contrôle est le rayon $R(\tau)$. On choisit le disque unité, D , comme ouvert de référence, ce qui impose

$$(IV.2.20) \quad R(0) = R(T^*) = 1.$$

Comme dans [14], il est possible de transformer (IV.2.19) en un problème de contrôle bilinéaire sur un domaine fixe. En revanche, dans le cas bidimensionnel, ceci est possible uniquement si l'on considère des données radiales. Sous cette hypothèse, (IV.2.19) s'écrit

$$(IV.2.21) \quad \begin{cases} i\partial_\tau \phi = -\Delta_\rho \phi, & (\tau, \rho) \in (0, T^*) \times (0, R(\tau)), \\ \phi(\tau, R(\tau)) = 0, & \tau \in (0, T^*), \end{cases}$$

où $\Delta_\rho := \partial_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\partial_\rho$ est le laplacien en coordonnées polaires pour des données radiales.

Le changement de variables

$$\xi(t, r) := \phi(\tau, \rho), \quad r := \frac{\rho}{R(\tau)}, \quad t := \int_0^\tau \frac{d\sigma}{R(\sigma)^2},$$

et de phase

$$\psi(t, r) := \xi(t, r) e^{-iu(t)r^2 + 4i \int_0^t u(s) ds},$$

avec $u(t) := \frac{1}{4} \dot{R}(\tau) R(\tau)$, conduit au système équivalent

$$(IV.2.22) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta_r \psi + (\dot{u}(t) - 4u(t)^2) r^2 \psi, & (t, r) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \end{cases}$$

pour $T := \int_0^{T^*} \frac{d\sigma}{R(\sigma)^2}$ et

$$(IV.2.23) \quad \Delta_r := \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r.$$

On notera la similitude avec le système (IV.2.16). La nouveauté de ce cas provient du fait que l'opérateur (IV.2.23) est différent, ce qui fait changer la famille spectrale associée et le comportement des valeurs propres.

La famille spectrale associée à (IV.2.23) est donnée par les fonctions de Bessel d'ordre zéro, J_0 , et ses zéros, $(j_{0,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ (cf. Appendix E). Les fonctions propres sont, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(IV.2.24) \quad \varphi_k(r) := \frac{J_0(j_{0,k}r)}{\sqrt{\pi}|J_1(j_{0,k})|}, \quad \forall r \in [0, 1],$$

où J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1. La famille $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme une base hilbertienne de $L^2(0, 1; r dr)$ avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(r)\overline{g(r)}r dr, \quad \forall f, g \in L^2(0, 1; r dr).$$

Les valeurs propres sont

$$(IV.2.25) \quad \lambda_k := j_{0,k}^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Dans le cas radial, ceci permet de définir les espaces

$$H_{(0),rad}^s(D; \mathbb{C}) := D((-\Delta_r)^{\frac{s}{2}}), \quad s > 0,$$

avec les normes

$$\|f\|_{H_{(0),rad}^s} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |j_{0,k}^s \langle f, \varphi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Afin d'expliquer le résultat principal du Chapitre 5, qui garantit la contrôlabilité locale autour d'une certaine trajectoire, considérons l'ensemble suivant

$$(IV.2.26) \quad \mathcal{D} := \{(\theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^2; \theta_2, \theta_3 > 0, \theta_2 + \theta_3 < 1\},$$

et les combinaisons d'états fondamentaux

$$(IV.2.27) \quad \varphi^\sharp := \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3} \varphi_1 + \sqrt{\theta_2} \varphi_2 + \sqrt{\theta_3} \varphi_3, \quad (\theta_2, \theta_3) \in \mathcal{D}.$$

Pour chaque $\tau > 0$, considérons le paquet d'ondes associé

$$(IV.2.28) \quad \psi^\sharp(\tau) := e^{-i\lambda_1\tau} \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3} \varphi_1 + e^{-i\lambda_2\tau} \sqrt{\theta_2} \varphi_2 + e^{-i\lambda_3\tau} \sqrt{\theta_3} \varphi_3, \quad \tau \geq 0.$$

L'introduction de ces états permet de démontrer la contrôlabilité locale exacte autour de la trajectoire $(\psi^\sharp(\tau), u \equiv 0)$, ce qui constitue le résultat principale du Chapitre 5.

THÉORÈME IV.2.3 (Théorème 1.4, Chapitre 5). *Soit $T > 0$. Il existe $\delta > 0$ et une application de classe \mathcal{C}^1*

$$\Gamma : V_0 \times V_T \rightarrow \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R}),$$

avec

$$(IV.2.29) \quad V_0 := \left\{ \psi_0 \in \mathbb{S} \cap H_{(0),rad}^3(D; \mathbb{C}); \|\psi_0 - \varphi^\sharp\|_{H_{(0)}^3} < \delta \right\},$$

$$(IV.2.30) \quad V_T := \left\{ \psi_f \in \mathbb{S} \cap H_{(0),rad}^3(D; \mathbb{C}); \|\psi_f - \psi^\sharp(T)\|_{H_{(0)}^3} < \delta \right\},$$

telle que $\Gamma(\varphi^\sharp, \psi^\sharp(T)) = 0$ et pour tout $(\psi_0, \psi_f) \in V_0 \times V_T$, la solution de (IV.2.22) avec $\psi|_{t=0} = \psi_0$ et contrôle $u = \Gamma(\psi_0, \psi_f)$ satisfait

$$\psi|_{t=T} = \psi_f.$$

La preuve de ce résultat se fait en suivant les étapes de la méthode de linéarisation, expliquée dans §I.2.2. Par conséquent, considérons l'application

$$(IV.2.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_T : \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R}) \times H_{(0), rad}^3(D; \mathbb{C}) \rightarrow H_{(0), rad}^3(D; \mathbb{C}) \times H_{(0), rad}^3(D; \mathbb{C}), \\ (u, \psi_0) \mapsto (\psi_0, \psi|_{t=T}), \end{array} \right.$$

où ψ est la solution de (IV.2.22) avec $\psi|_{t=0} = \psi_0$. En accord avec §I.2.2, nous devons montrer

- (1) que le linéarisé de (IV.2.22) autour de $(\psi^\sharp(t), u \equiv 0)$ est contrôlable,
- (2) que l'application Θ_T est de classe \mathcal{C}^1 dans ce cadre fonctionnel.

Dans ce but, nous allons adapter les techniques développées par K. Beauchard et C. Laurent dans [16], expliquées dans §IV.2.2.

Commençons par détailler l'heuristique conduisant au point (1). Le problème linéarisé est

$$(IV.2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} i\partial_t \Psi = -\Delta_r \Psi + \dot{v}(t)r^2\psi^\sharp(t), \quad (t, r) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \Psi(t, 1) = 0, \quad t \in (0, T), \\ \Psi(0, r) = 0, \quad r \in (0, 1). \end{array} \right.$$

Comme dans §IV.2.2, on essaie de conclure la contrôlabilité de (IV.2.32) grâce à la méthode des moments. Pour ce faire, on écrit la solution de ce système sous la forme

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & -i\sqrt{1-\theta_2-\theta_3} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dot{v}(s)e^{i(\lambda_k-\lambda_1)s} ds a_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} \\ & - i\sqrt{\theta_2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dot{v}(s)e^{i(\lambda_k-\lambda_2)s} ds b_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} \\ & - i\sqrt{\theta_3} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dot{v}(s)e^{i(\lambda_k-\lambda_3)s} ds c_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t}, \end{aligned}$$

où $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est la famille spectrale donnée par (IV.2.24) et (IV.2.25) et

$$(IV.2.33) \quad a_k := \langle r^2 \varphi_1, \varphi_k \rangle, \quad b_k := \langle r^2 \varphi_2, \varphi_k \rangle, \quad c_k := \langle r^2 \varphi_3, \varphi_k \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

La condition $\Psi|_{t=T} = \Psi_f$ conduit à un problème de moments pour la famille $\{e^{i(\lambda_k-\lambda_j)t}; k \in \mathbb{N}^*, j = 1, 2, 3\}$, qui est le suivant :

$$(IV.2.34) \quad \int_0^T \dot{v}(s)e^{i(\lambda_2-\lambda_1)s} ds = \frac{(i\langle \Psi_f, \varphi_2 \rangle e^{i\lambda_2 T} - \sqrt{\theta_3} c_2 \bar{C})}{a_2 \sqrt{1-\theta_2-\theta_3}},$$

$$(IV.2.35) \quad \int_0^T \dot{v}(s)e^{i(\lambda_3-\lambda_1)s} ds = \frac{(i\langle \Psi_f, \varphi_3 \rangle e^{i\lambda_3 T} - \sqrt{\theta_2} b_3 \bar{C})}{a_3 \sqrt{1-\theta_2-\theta_3}},$$

$$(IV.2.36) \quad \int_0^T \dot{v}(s)e^{i(\lambda_3-\lambda_2)s} ds = C,$$

$$(IV.2.37) \quad \int_0^T \dot{v}(s)e^{i(\lambda_k-\lambda_1)s} ds = \frac{i\sqrt{1-\theta_2-\theta_3}}{a_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 4,$$

$$(IV.2.38) \quad \int_0^T \dot{v}(s)e^{i(\lambda_k-\lambda_2)s} ds = \frac{i\sqrt{\theta_2}}{b_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 4,$$

$$(IV.2.39) \quad \int_0^T \dot{v}(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_3)s} ds = \frac{i\sqrt{\theta_3}}{c_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 4,$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{C}$ satisfaisant

$$(IV.2.40) \quad 2ib_3 \sqrt{\theta_2 \theta_3} \operatorname{Re} C = \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3} \langle \Psi_f, \varphi_1 \rangle e^{i\lambda_1 T} \\ + \sqrt{\theta_2} e^{-i\lambda_2 T} \overline{\langle \Psi_f, \varphi_2 \rangle} + \sqrt{\theta_3} e^{-i\lambda_3 T} \overline{\langle \Psi_f, \varphi_3 \rangle}.$$

Précisons que les relations (IV.2.34)–(IV.2.36) sont utiles pour séparer les fréquences $\lambda_k - \lambda_j$ pour $k, j = 1, 2, 3$, ce qui peut se faire grâce au choix de la constante auxiliaire (IV.2.40).

En outre, les contraintes géométriques sur le contrôle imposent des conditions supplémentaires dans le problème de moments, qui sont

$$(IV.2.41) \quad \int_0^T \dot{v}(s) ds = 0, \quad \int_0^T s \dot{v}(s) ds = 0.$$

Comme dans §IV.2.2, le problème de moments (IV.2.34)–(IV.2.39), (IV.2.41) se résout si les fréquences $\{\lambda_k - \lambda_j; k \in \mathbb{N}^*, j = 1, 2, 3\}$ satisfont une condition de “gap” uniforme et si la suite formée par les membres de droite des équations (IV.2.34)–(IV.2.39) appartient à $\ell^2(\mathbb{N}^*; \mathbb{C})$.

Le premier point se démontre à l’aide des propriétés des fonctions de Bessel et de leur zéros (voir Appendices E et F). Le deuxième point, en revanche, est plus délicat. Afin d’analyser l’asymptotique des $(\langle r^2 \varphi_j, \varphi_k \rangle)_{j=1,2,3}$ par rapport à $k \in \mathbb{N}^*$, nous sommes amenés au résultat suivant, dont la preuve est technique.

LEMME IV.2.4 (Lemma 3.4, Chapitre 5). *Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ et $k, l \in \mathbb{N}^*$ avec $k \neq l$, on a*

$$(IV.2.42) \quad \int_0^1 r^3 J_\nu(j_{\nu,l} r) J_\nu(j_{\nu,k} r) dr = \frac{4j_{\nu,k} j_{\nu,l} J_{\nu+1}(j_{\nu,k}) J_{\nu+1}(j_{\nu,l})}{(j_{\nu,k}^2 - j_{\nu,l}^2)^2}.$$

Ce résultat permet de déduire l’asymptotique suivante, qui est l’adaptation dans notre cas de (IV.2.8) :

$$(IV.2.43) \quad \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle r^2 \varphi_j, \varphi_k \rangle| \geq \frac{c}{j_{0,k}^3}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, si on impose $\Psi_f \in H_{(0),rad}^3(D; \mathbb{C})$, le membre de droite dans (IV.2.34)–(IV.2.39) est une suite appartenant à $\ell^2(\mathbb{N}^*; \mathbb{C})$, ce qui garantit que le problème de moments correspondant a une solution. Ceci donne la contrôlabilité de (IV.2.32).

Ensuite, on montre le caractère \mathcal{C}^1 de l’application Θ_T dans (IV.2.31) grâce à l’effet régularisant de [131] (voir Proposition 2.4, Chapitre 5). Finalement, le théorème d’inversion locale classique permet de conclure la preuve du Théorème IV.2.3.

Part 2

Presentation of results

Null-controllability of the Kolmogorov equation in the whole phase space

KEYWORDS: controllability; unbounded domain; Carleman estimates; spectral inequality.¹

1.1. Introduction

1.1.1. Main Results. For $d \geq 1$ and $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ an open subset, we consider the Kolmogorov equation,

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v)f(t, x, v) = u(t, x, v)1_\omega(x, v), \quad (t, x, v) \in (0, T) \times \Omega,$$

where ω is an open subset of Ω , whose characteristic function is denoted by 1_ω . This is a control system, where the function $f(t, x, v)$ represents the state and the source term $u(t, x, v)$, supported in ω , is the control. Here, $x \cdot y$ denotes the Euclidean inner product in \mathbb{R}^d .

The null-controllability of this system has been studied with various configurations of (Ω, ω) (see Section 1.1.2 below). Here, we consider the case $\Omega = \mathbb{R}^{2d}$ and an unbounded control/observation region $\omega \subset \Omega$. To be precise, we consider the Cauchy problem

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v)f(t, x, v) = 1_\omega(x, v)u(t, x, v), & (t, x, v) \in (0, T) \times \Omega, \\ f|_{t=0}(x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \Omega, \end{cases}$$

where ω contains a product open set,

$$(1.1.2) \quad \omega_x \times \omega_v \subseteq \omega,$$

with both ω_x and ω_v open subsets of \mathbb{R}^d satisfying the following property.

DEFINITION 1.1.1. *We say that an open set \mathcal{O} of \mathbb{R}^d is an observability open set on the whole space if there exist $\delta > 0$ and $r > 0$ such that*

$$(1.1.3) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \exists y' \in \mathcal{O} \text{ such that } B_{\mathbb{R}^d}(y', r) \subset \mathcal{O} \text{ and } |y - y'| \leq \delta.$$

Here, $B_{\mathbb{R}^d}(y', r)$ denotes the open Euclidean ball of radius r centered at y' . This property states that the open set \mathcal{O} is sufficiently spread out throughout the whole space \mathbb{R}^d .

The aim of the present article is to prove the following null-controllability result.

1. Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Jérôme Le Rousseau. Son contenu a fait l'objet d'une publication dans *J. Differential Equations* (cf. [104]).

THEOREM 1.1.2. *Let $\Omega = \mathbb{R}^{2d}$ and assume that ω satisfies 1.1.2 with both ω_x and ω_v fulfilling property 1.1.3. Then, for every $T > 0$ and $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$, there exists a control $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})$ such that the solution of (1.1.1) satisfies $f|_{t=T} \equiv 0$.*

As we shall see below in Section 1.2, the solution of (1.1.1), to be understood in the sense of distributions, is unique in $\mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$. The initial condition, at $t = 0$, and the final condition, at $t = T$, are thus unambiguously well defined.

REMARK 1.1.3. *The condition we impose on the set $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ is sufficient to obtain the null-controllability result. Any improvement on this condition is of interest (see Section 1.1.3).*

The common structure of ω_x and ω_v permits the derivation of observability inequalities of the solutions of an elliptic equation, in the x variable, and a parabolic equation, in the v variable. Those observability inequalities are based on Carleman estimates, and the structure of Definition 1.1.1 that we assume allows us to construct the weight functions associated with these estimates. Carleman estimates for elliptic and parabolic operators are essentially of the same nature. This may help the reader understand why we impose the same structure on both ω_x and ω_v .

A classical duality result (see for instance [50, Lemma 2.48]) shows that Theorem 1.1.2 above is equivalent to an observability inequality involving the adjoint system of (1.1.1), namely,

$$(1.1.4) \quad \begin{cases} (\partial_t - v \cdot \nabla_x - \Delta_v) g(t, x, v) = 0, & (t, x, v) \in (0, T) \times \Omega, \\ g|_{t=0}(x, v) = g_0(x, v), & (x, v) \in \Omega. \end{cases}$$

THEOREM 1.1.2'. *Let $\Omega = \mathbb{R}^{2d}$ and assume that ω satisfies (1.1.2) with both ω_x and ω_v fulfilling property (1.1.3). Then, for every $T > 0$, there exists $C_{\text{obs}} > 0$ such that for every $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$, the solution of (1.1.4) satisfies*

$$(1.1.5) \quad \|g|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq C_{\text{obs}} \|g\|_{L^2((0, T) \times \omega)}.$$

Note in particular that the constant C_{obs} is such that the null-controllability of (1.1.1) can be achieved with a control function u that satisfies

$$\|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})} \leq C_{\text{obs}} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

1.1.2. Existing results and techniques. The null-controllability of parabolic equations has been extensively studied. For the heat equation, the problem is well understood in bounded domains since the seminal works of G. Lebeau and L. Robbiano [107], and of A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov [65]. For results on the null-controllability of the heat equation on unbounded domains, we mention the works of L. Miller [117, 118], M. González-Burgos and L. de Teresa [76], V. Barbu [10], and references therein. A result in a different functional framework was obtained by P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble in [38], where the observability region can be taken of finite measure, provided that an observability inequality holds in some weighted L^2 -space. Note that, in one dimension, the control/observation region given in [76, Example 2 of Section 2], expressly fulfills the condition given in Definition 1.1.1.

The Kolmogorov equation was first proposed in 1934 by A.N. Kolmogorov in [95]. It was subsequently studied by L. Hörmander in [85] as a model of a

hypoelliptic operator. Controllability questions for the Kolmogorov equation have been studied in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, where the controlled equation reads

$$(1.1.6) \quad (\partial_t + v\partial_x - \partial_v^2)f(t, x, v) = u(t, x, v)1_\omega(x, v), \quad (t, x, v) \in (0, T) \times \Omega,$$

and null-controllability was proven for various choices of (Ω, ω) .

On a bounded domain $\Omega = \mathbb{T} \times (-1, 1)$, null-controllability holds in the following cases.

- The nonempty open subset ω of Ω is arbitrary and the Kolmogorov equation (1.1.6) is associated with periodic-type boundary conditions in the v variable that are adapted to the transport part of the equation [18]:

$$f(t, x - t, -1) = f(t, x + t, 1), \quad \partial_v f(t, x - t, -1) = \partial_v f(t, x + t, 1),$$

for $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}$.

- The nonempty open subset ω of Ω is a horizontal strip, $\omega = \mathbb{T} \times (a, b)$, with $-1 < a < b < 1$, and the Kolmogorov equation (1.1.6) is associated with homogeneous Dirichlet-type boundary conditions in the v variable [18]:

$$f(t, x, \pm 1) = 0 \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}.$$

With such boundary conditions, arbitrary control region ω may not be appropriate (see [21]), which hints towards a strong influence of the boundary conditions.

In the case of the whole phase-space, that is $\Omega = \mathbb{R}^2$, null controllability is proven in [15], in the case $\omega = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus [a, b])$, that is, ω is the complement set of a horizontal strip. The goal of the present article is to improve upon this last result by proving the null-controllability of (1.1.1) in the case of more general control regions ω in, possibly, higher dimension, that is $d \geq 1$.

The first step of the strategy used in [18, 15, 21], where $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$, consists in applying a partial Fourier transform or Fourier decomposition, with respect to the x variable. In the case $x \in \mathbb{R}$, with

$$\hat{f}(t, \xi, v) := \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) e^{-ix\xi} dx, \quad (t, \xi, v) \in (0, T) \times \mathbb{R}^2,$$

this reduces the study of the Kolmogorov equation (1.1.6) to the study of a family of one-dimensional parabolic equations

$$(1.1.7) \quad (\partial_t - iv\xi - \partial_v^2)\hat{f}(t, \xi, v) = \hat{u}(t, \xi, v)1_{\omega_v}(v), \quad (t, v) \in (0, T) \times \mathbb{R},$$

with the Fourier frequency ξ treated as a parameter. Such a transformation is possible if, for instance, ω takes the form $\omega = \mathbb{R} \times \omega_v$, for some $\omega_v \subset \Omega_v$.

Then, the proof of the null-controllability relies on the following two ingredients:

- (1) A precise dependency of the decay rate in times of the free solution of (1.1.7), with respect to the Fourier variable ξ .
- (2) A precise estimate of the ‘cost’ of the null-controllability of (1.1.7), in particular with respect to the Fourier variable ξ .

If the control region ω is also localized in the x variable, these two ingredients can be coupled by means of the Lebeau-Robbiano control strategy as done in [18] following an idea of [24]. This strategy relies on a spectral inequality. In one dimension, on a bounded domain, it takes the following form.

PROPOSITION 1.1.4. *Let $c, d \in \mathbb{R}$ be such that $0 < d - c \leq 2\pi$. There exists $C > 0$ such that, for every $N \in \mathbb{N}$ and $(b_n)_{|n| \leq N} \in \mathbb{C}^{2N+1}$, the following inequality holds*

$$(1.1.8) \quad \sum_{n=-N}^{n=N} |b_n|^2 \leq e^{C(N+1)} \int_c^d \left| \sum_{n=-N}^{n=N} b_n e^{inx} \right|^2 dx.$$

The functions $x \mapsto e^{inx}/\sqrt{2\pi}$ on 2π are orthonormal eigenfunctions of the Laplace operator ∂_x^2 .

In arbitrary dimension, for a second-order symmetric elliptic operator, typically the Laplace-Beltrami operator Δ_g on a bounded Riemannian manifold \mathcal{M} of dimension d , with or without boundary, the spectral inequality takes the form

$$(1.1.9) \quad \|u\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \|u\|_{L^2(\omega)}, \quad u \in \text{span}\{\phi_j; \mu_j \leq \mu\},$$

where $\omega \subset \mathcal{M}$ is an open subset and where the functions ϕ_j form a Hilbert basis of $L^2(\mathcal{M})$ of eigenfunctions of $-\Delta_g$ associated with the nonnegative eigenvalues μ_j , $j \in \mathbb{N}$, counted with their multiplicities. (In the case of a manifold with boundary, one can consider homogeneous Dirichlet or Neuman boundary conditions.) This was proven in [107, 108, 93]. For instance, it allows one to prove the null-controllability of the heat equation (see [103] for a presentation). It was adapted much later to the case of separated variables, for the null-controllability of parabolic equation in stratified media in [24]. Therein, in one direction, one has observability by means of a Carleman estimate for a one-dimensional parabolic operator with parameter, and, in the transverse direction, a spectral inequality such as (1.1.9) is used. This later approach was successfully transposed to the study of the null-controllability of the Kolmogorov equation in [18]. We follow this latter method in the present article, here in the case of an unbounded domain. Hence, one of the goals of the present article is to perform the Lebeau-Robbiano control strategy on an unbounded domain. We shall thus prove an adapted spectral inequality; see Theorem 1.3.1 below.

REMARK 1.1.5. *The idea of exploiting a cartesian product form of the geometry can also be found in [76]. Therein, the authors prove that, if a Carleman estimate holds for the heat equation in $(0, T) \times \mathbb{R}^{d_1}$ (resp. $(0, T) \times \mathbb{R}^{d_2}$) with an observation region $(0, T) \times \omega_1$ (resp. $(0, T) \times \omega_2$), then a similar estimate holds for the same equation in $(0, T) \times \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ with $(0, T) \times \omega_1 \times \omega_2$ as an observation region.*

1.1.3. Open questions and perspectives. An open (and most likely difficult) question is the proof of the null-controllability of the Kolmogorov equation in \mathbb{R}^{2d} with a control region $\omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ arbitrary located, without imposing the product structure we assumed here. An assumption similar to that stated in Definition 1.1.1 seems, however, to be a reasonable assumption to make on the open subset ω . For such a study, a profound analysis of the properties of the Kolmogorov operator is necessary. Here, the product structures of both Ω and ω allow one to circumvent this difficulty. This open question is relevant because of the following proposition.

PROPOSITION 1.1.6 (L. Hillairet [80]). *Let $d \geq 1$. There exists an open set \mathcal{O} of \mathbb{R}^{2d} which is an observability open set in the whole \mathbb{R}^{2d} , that is, satisfying the property of Definition 1.1.1, and, yet, does not contain any cartesian product $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, where \mathcal{O}_1 and \mathcal{O}_2 are both observability open sets in the whole \mathbb{R}^d .*

PROOF. We exhibit an example in the case $d = 1$. We let $0 < R < 1/2$ and consider first the following open set $\tilde{\mathcal{O}} = \cup_{n \in \mathbb{Z}^2} B(n, 2R)$ that satisfies (1.1.3) in the whole \mathbb{R}^2 , with $\delta = \sqrt{2}$ and $r = 2R$. If one replaces each ball $B(n, 2R)$, with $n = (n_1, n_2)$, by either $B_{\text{left}}(n) = B((n_1 - R, n_2), R)$ or $B_{\text{right}}(n) = B((n_1 + R, n_2), R)$, then the resulting open set \mathcal{O} is also an observability open set in the whole \mathbb{R}^2 . For each $n_1 \in \mathbb{Z}$, we pick the ‘left’ or the ‘right’ ball according the following rule: if $|n_2| = 0$ we pick the left ball, and

$$\begin{cases} \text{we pick the right ball} & \text{if } 2^{2k} \leq |n_2| < 2^{2k+1}, k \in \mathbb{N}, \\ \text{we pick the left ball} & \text{if } 2^{2k+1} \leq |n_2| < 2^{2k+2}, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Assume now that $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}$, and let $x \in \mathcal{O}_1$. Observe that, with the construction made for \mathcal{O} , the set $\{x\} \times \mathbb{R}$ only intersects ‘left’ type or ‘right’ type balls. In either case, it shows that the complement set of \mathcal{O}_2 contains arbitrary large intervals. Thus, \mathcal{O}_2 cannot satisfy the property of Definition 1.1.1. \square

Another interesting question would be the study of the influence on the condition imposed on the control region of the addition of an unbounded potential function in the Kolmogorov equation.

Following the works of K. Beauchard et al. [18, 21], the controllability properties of evolution operators of the form $\partial_t - |v|^{\gamma-1}v \cdot \nabla_x - \Delta_v$, with $\gamma > 1$, in an unbounded domain, would be of interest. More generally, one would also be interested in operators of the form $\partial_t - r(x, v)v \cdot \nabla_x + A(x, v, \partial_v)$, where the scalar function $r(x, v)$ is homogeneous of degree $\gamma - 1$ with respect to v , and the operator $A(x, v, \partial_v)$, that only acts in the v direction, is elliptic and positive with respect to that variable. For $\gamma > 1$, in a bounded domain, controllability can only be proven for sufficiently large time. In fact, the natural L^2 -norm decay of the Kolmogorov equation degrades as γ increases. This feature is an important obstacle in the case of a bounded domain [18, 21]. Additionally, in an unbounded domain, the term $|v|^{\gamma-1}v$ will yield unbounded coefficients in the derivation of Carleman estimates, if $\gamma > 1$. The derivation of a Carleman estimate may then require the use of weighted norms that take this behavior into account.

1.1.4. Outline. The article is organized as follows. In Section 1.2, we present the well-posedness result in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ for system (1.1.1) and the decay estimate of the L^2 -norm of the solutions of (1.1.7). In Section 1.3, we prove an elliptic global Carleman estimate and the Lebeau-Robbiano spectral inequality. In Section 1.4, we prove a parabolic global Carleman estimate, the observability of Fourier-mode packets and we finally construct a control, which leads to Theorem 1.1.2.

1.1.5. Notation. We collect here some of the notation we use throughout the article.

The Euclidean inner product in \mathbb{R}^d is denoted by $x \cdot y$, whereas the Hermitian inner product in $L^2(Q; \mathbb{C})$ is noted by (\cdot, \cdot) . Let $T > 0$. We shall sometimes write $Q := (0, T) \times \mathbb{R}^d$ for simplicity.

If ∂ denotes the derivation with respect to the variables s, x or v , we shall use the standard notation $D := \frac{1}{i}\partial$. For $F \in \mathcal{C}^2(Q; \mathbb{R})$, we define

$$\nabla F(s, x) = (\partial_s F, \partial_{x_1} F, \dots, \partial_{x_d} F)^t(s, x), \quad F''(s, x) := (\partial_{ij}^2 F)_{0 \leq i, j \leq d}(s, x),$$

for $(s, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d$. We also write $\Delta F(s, x) := (\partial_s^2 F + \Delta_x^2 F)(s, x)$. For concision, in particular in the course of a proof, we shall often write F' in place of ∇F .

We define $\partial Q := \{0, T\} \times \mathbb{R}^d$. If $w \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, the derivative with respect to n , the normal outward vector of ∂Q , is denoted by $\partial_n w := \nabla w \cdot n$.

For a function $f(t, x, v)$ defined on $(0, T) \times \mathbb{R}^{2d}$, we denote by $\hat{f}(t, \xi, v)$ its partial Fourier transformation with respect to $x \in \mathbb{R}^d$:

$$(1.1.10) \quad \hat{f}(t, \xi, v) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad (t, \xi, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d}.$$

Applying this transformation, the (adjoint) Kolmogorov (1.1.4) equation becomes

$$(1.1.11) \quad (\partial_t - iv \cdot \xi - \Delta_v) \hat{g}(t, \xi, v) = 0, \quad (t, \xi, v) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

We shall denote by $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ the space of complex valued functions of Schwartz class.

In what follows the letter C will always denote a constant whose value may change from one line to another. If we wish to keep track of the precise value of a constant we shall use another letter. Often, to avoid the introduction of such a generic constant, especially in the course of proofs, we shall use the usual notation $A \lesssim B$ to be read as $A \leq CB$ for some $C > 0$.

1.2. Well-posedness and exponential decay rate

In the whole phase-space, a fundamental solution for the evolution Kolmogorov operator can be derived explicitly [86, Section 7.6]. Here, we provide semigroup properties that yield the well-posedness of the evolution Kolmogorov equation. We also provide a decay rate for the free solution, that is used in the proof of the null-controllability in Section 1.4. Proofs are provided in Section 1.5.

PROPOSITION 1.2.1. *The Kolmogorov operator*

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : L^2(\mathbb{R}^{2d}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d}) \\ f &\mapsto v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f, \end{aligned}$$

with domain $D(\mathcal{K}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^{2d}); v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f \in L^2(\mathbb{R}^{2d})\}$, generates a strongly continuous semigroup of contraction $S(t)$ on $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. The semigroup $S(t)$ is not differentiable for any positive time.

PROPOSITION 1.2.2. *Let \mathcal{K} be the Kolmogorov operator as defined above.*

- (1) *Let $f_0 \in D(\mathcal{K})$ and let $F \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$. Assume moreover that $F \in L^1(0, T; D(\mathcal{K}))$ or $F \in W^{1,1}((0, T); L^2(\mathbb{R}^{2d}))$. Then, there exists a unique $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; D(\mathcal{K})) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$ solution of*

$$(\partial_t + \mathcal{K})f = F, \quad t \in [0, T], \quad f|_{t=0} = f_0.$$

- (2) *Let $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ and let $F \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$. There exists a unique $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$ solution of*

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v)f = F \text{ in } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^{2d}), \quad f|_{t=0} = f_0.$$

- (3) *In both cases, the solution is given by the Duhamel formula*

$$(1.2.1) \quad f(t) = S(t)f_0 + \int_0^t S(t-s)F(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

We shall use the second case of the previous proposition in what follows. The solutions we shall consider are thus weak solutions and are given by the so-called *mild solution* provided in (1.2.1).

The next proposition describes the natural decay of the L^2 -norm of a free solution of the Kolmogorov equation. This will be used in the proof of the null-controllability in Section 1.4.

PROPOSITION 1.2.3. *Let $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. If $f(t, x, v) = (S(t)f_0)(x, v)$, we have*

$$(1.2.2) \quad \|\hat{f}(t, \xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\hat{f}_0(\xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} e^{-|\xi|^2 t^3/12}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, t \geq 0.$$

REMARK 1.2.4. *The decay rate obtained for the homogeneous Cauchy problem in Proposition 1.2.3 is somewhat analogous², in the ξ variable, to that of the heat equation. Note, however, that such a decay rate does not hold when considering Kolmogorov-type equations on a rectangle with Dirichlet boundary conditions in v [18, 21], since a weaker decay in the ξ variable occurs. Null-controllability, with arbitrary control support, may then not hold.*

1.3. A spectral inequality

The goal of this section is to prove the following result, which states an inequality that is the counterpart of (1.1.8) in our context.

THEOREM 1.3.1 (Spectral inequality). *Let $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ be an observability open set on the whole space \mathbb{R}^d as in Definition 1.1.1. Then, there exists a constant $C > 0$ such that*

$$(1.3.1) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{C(N+1)} \|f\|_{L^2(\omega_x)}$$

for $N \geq 0$ and $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ such that $\text{supp}(\hat{f}) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)}$, the closed ball of radius N and center 0.

Inequalities (1.1.8) and (1.1.9) have appeared in several settings [107, 108, 93]. In the case of a bounded domain, the original proof is based on an interpolation inequality that can be found in [107]. Some details can be found in the expository article [103]. The proof of the interpolation inequality is based on *local* Carleman estimates for an augmented elliptic operator, that first imply local versions of the interpolation inequality. These local inequalities are then concatenated using compactness arguments thanks to the boundedness of the domain. Here such an argument is not possible as we consider unbounded domains. However, we circumvent this difficulty by proving a global Carleman estimate for the augmented elliptic operator. This approach for the proof of the spectral inequality was introduced in [102], in the case of bounded domains, and later successfully applied to the case of discrete elliptic operators [28]. Here, we extend this approach to the case of an unbounded domain.

2. This analogy remains limited as the semigroup $S(t)$ is not analytic here, nor differentiable. The L^2 -norm of the solutions does decay. Yet, solutions do not become more regular as the evolution time grows, as opposed to what can be observed for parabolic equations. See Section 1.5 for details.

1.3.1. A global elliptic Carleman estimate. Our proof of the spectral inequality (1.3.1) follows from a global elliptic Carleman estimate for the operator $D_s^2 + D_x \cdot D_x$ in $(0, S) \times \Omega$, for some $S > 0$, which is stated in Proposition 1.3.3 below. We need first to construct an appropriate weight function. To that purpose, we adapt an argument by A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, that can be found in [50, Lemma 2.68, p.80] and [65, p.20-21], to the case of unbounded domains.

PROPOSITION 1.3.2 (Weight function for the elliptic Carleman estimate). *Let $T > 0$, $Q = (0, T) \times \mathbb{R}^d$, and let $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ be an observability open set on the whole space \mathbb{R}^d , as in Definition 1.1.1. There exists a function $\psi \in \mathcal{C}^3([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^+)$ such that*

$$(1.3.2) \quad \psi \in W^{3, \infty}([0, T] \times \mathbb{R}^d),$$

$$(1.3.3) \quad |\nabla_{s,x} \psi(s, x)| \geq C, \quad \forall (s, x) \in Q,$$

$$(1.3.4) \quad \partial_s \psi|_{s=0} \geq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_x,$$

$$(1.3.5) \quad \partial_s \psi|_{s=0} \leq -C < 0, \quad \psi|_{s=T} = 0,$$

for some real constant $C > 0$.

We ought to stress that the properties required on ψ are precisely the same as those in the case of a bounded domain (in the x variable): the gradient of the weight function may not vanish and its norm is bounded from below, and various derivatives of the weight function are bounded. Here, the difficulty is precisely to obtain uniform bounds. In the case of a bounded domain, such uniformity immediately follows from compactness. In the proof below, some compactness in \mathbb{R}^d is enforced by starting from a periodic function; the function is then “deformed” so as to achieve the required properties.

PROOF. Let $L > 2(\delta + r)$ and let us define the following smooth function

$$\tilde{\psi}(s, x) := \frac{4s(S-s)}{S^2} \prod_{j=1}^d \left(2 + \sin\left(\frac{\pi x_j}{L}\right) \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Observe that

$$\partial_s \tilde{\psi}(0, x) \geq \frac{4}{S} \quad \text{and} \quad \partial_s \tilde{\psi}(S, x) \leq -\frac{4}{S}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

We note that $\nabla_{s,x} \tilde{\psi}(s, x) = 0$ if and only if $s = \frac{S}{2}$ and $x \in w + LZ^d$, with $w = (\frac{L}{2}, \dots, \frac{L}{2}) \in \mathbb{R}^d$.

Firstly, we define the following periodicity cells in \mathbb{R}^d ,

$$\mathcal{K}_\alpha := \mathcal{T}_\alpha(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K} := [0, 2L]^d, \quad \mathcal{T}_\alpha(x) := x + 2L\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d.$$

Then, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}_\alpha$. We decompose the model cell \mathcal{K} into the following subcells,

$$\mathcal{K}_\beta := \mathcal{T}'_\beta(K), \quad K := [0, L]^d, \quad \mathcal{T}'_\beta(x) := x + L\beta, \quad \beta \in \{0, 1\}^d.$$

We introduce

$$\mathcal{K}_{\alpha, \beta} := \mathcal{T}_\alpha(\mathcal{K}_\beta) = \mathcal{T}_{\alpha, \beta}(K), \quad \mathcal{T}_{\alpha, \beta} := \mathcal{T}_\alpha \circ \mathcal{T}'_\beta, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d, \quad \beta \in \{0, 1\}^d.$$

We also define the following translation operators in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$\tilde{\mathcal{T}}_\alpha(s, x) := (s, \mathcal{T}_\alpha(x)), \quad \tilde{\mathcal{T}}'_\beta(s, x) := (s, \mathcal{T}'_\beta(x)), \quad \tilde{\mathcal{T}}_{\alpha, \beta}(s, x) := (s, \mathcal{T}_{\alpha, \beta}(s, x)),$$

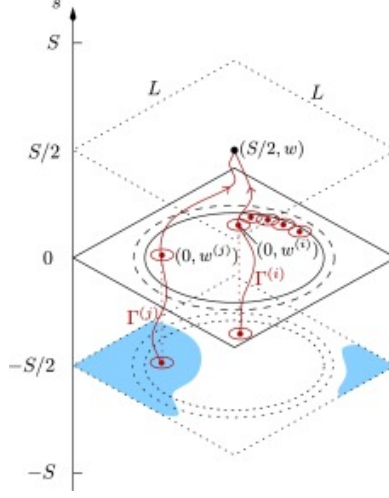


FIGURE 2. Local geometry in the s, x variables for the construction of the weight function.

We denote by $\chi^{(i)}(t, s, x)$ the flow associated to $V^{(i)}$. We set

$$\phi^{(i)}(s, x) := \chi^{(i)}(1, s, x), \quad (s, x) \in K,$$

which is a diffeomorphism of $(-S, S) \times B_{\mathbb{R}^d}(w, \delta)$ onto itself and coincides with $\text{Id}_{\mathbb{R}^{1+d}}$ outside the support of $V^{(i)}$. In particular, $\phi^{(i)}$ leaves unchanged a neighborhood of $\partial([-S, S] \times K)$. We have $\phi^{(i)}(-S/2, w^{(i)}) = (S/2, w)$.

On the compact K we define

$$\psi_\beta^{(i)} := \tilde{\psi}_\beta \circ \phi^{(i)}, \quad i \in I, \beta \in \{0, 1\}^d,$$

and we observe that $\nabla_{s,x} \psi_\beta^{(i)}(s, x) = 0$ if and only if $(s, x) = (-S/2, w^{(i)})$. As $\#I < +\infty$, there exists $C_0 > 0$ such that

$$|\nabla_{s,x} \psi_\beta^{(i)}(s, x)| \geq C_0, \quad \text{in } ([-S, S] \times K) \setminus B_{\mathbb{R}^{1+d}}(-S/2, w^{(i)}, \rho),$$

for $i \in I$ and $\beta \in \{0, 1\}^d$. Note that, in particular,

$$|\nabla_{s,x} \psi_\beta^{(i)}(s, x)| \geq C_0, \quad \text{for } (s, x) \in [0, S] \times [0, L]^d, \quad i \in I, \beta \in \{0, 1\}^d.$$

As $\#I < +\infty$, there exists also C_1 such that $\|d^k \psi_\beta^{(i)}\|_{L^\infty} \leq C_1$, for $0 \leq k \leq 3$, $i \in I, \beta \in \{0, 1\}^d$.

Thirdly, let $\alpha \in \mathbb{Z}^d, \beta \in \{0, 1\}^d$. We consider the sets $\mathcal{O}_{\alpha,\beta} := K_{\alpha,\beta} \cap \mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'_{\alpha,\beta} := \mathcal{T}_{\alpha,\beta}^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha,\beta})$. Since \mathcal{O} is an observability open set in \mathbb{R}^d , there exists $y \in \mathcal{O}'_{\alpha,\beta}$ such that $|y-w| \leq \delta$ and $B_{\mathbb{R}^d}(y, r) \subset \mathcal{O}'_{\alpha,\beta}$, using that $2(\delta+r) < L$ and the fact that the property of Definition 1.1.1 is translation invariant. As a consequence of (1.3.6), there exists $j \in I$ such that $y \in B_{\mathbb{R}^d}(w^{(j)}, \rho)$. Since $0 < \rho \leq r/2$, we then have

$$(1.3.7) \quad B_{\mathbb{R}^d}(w^{(j)}, \rho) \subset B_{\mathbb{R}^d}(y, r) \subset \mathcal{O}'_{\alpha,\beta}.$$

This is illustrated in Figures 1 and 2. We introduce the following function on the cell $K_{\alpha,\beta}$,

$$\psi_{\alpha,\beta}(s, x) := \psi_{\beta}^{(j)} \circ \mathcal{T}_{\alpha,\beta}^{-1}(s, x),$$

which is well defined, for $\mathcal{T}_{\alpha,\beta} : K \rightarrow K_{\alpha,\beta}$. We deduce

$$(1.3.8) \quad |\nabla_{s,x} \psi_{\alpha,\beta}(s, x)| \geq C_0 \text{ and } |d^k \psi_{\alpha,\beta}(s, x)| \leq C_1, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad \text{on } [0, S] \times K_{\alpha,\beta}.$$

We also have $\psi_{\alpha,\beta}(0, x) = \tilde{\psi}_{\alpha,\beta}(0, x)$, $\forall x \in K_{\alpha,\beta} \setminus \mathcal{O}$ and $\psi_{\alpha,\beta}(S, x) = \tilde{\psi}_{\alpha,\beta}(S, x)$, $\forall x \in K_{\alpha,\beta}$. Finally, we define $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, S] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ by

$$\psi(s, x) := \psi_{\alpha,\beta}(s, x), \quad (s, x) \in [0, S] \times K_{\alpha,\beta},$$

and (1.3.2)–(1.3.5) hold by the above construction, according to (1.3.7) and (1.3.8). \square

We now state a global Carleman estimate for the augmented elliptic operator

$$P := -\Delta_{s,x} = -\partial_s^2 - \Delta_x = D_s^2 + D_x \cdot D_x \quad \text{in } Q = (0, T) \times \mathbb{R}^d.$$

PROPOSITION 1.3.3 (Global elliptic Carleman estimate). *Let $\omega_x \subset \mathbb{R}^d$ be an observability open set on the whole \mathbb{R}^d in the sense of Definition 1.1.1. Let ψ be as given by Proposition 1.3.2. For $\varphi(s, x) = \exp(\lambda\psi(s, x))$, there exist $C > 0$, $\tau_0 \geq 1$, and $\lambda_0 \geq 1$ such that*

$$(1.3.9) \quad \begin{aligned} & \tau^3 \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi} \nabla_{s,x} u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi(0)} \partial_s u_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \quad + \tau e^{2\tau} \|\partial_s u_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau^3 e^{2\tau} \|u_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq C \left(\|e^{\tau\varphi} P u\|_{L^2(Q)}^2 + \tau e^{2\tau} \|\nabla_x u_{s=S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi_{s=0}} \partial_s u_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2 \right), \end{aligned}$$

for $\tau \geq \tau_0$, $\lambda = \lambda_0$, and $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$ such that $u_{s=0} \equiv 0$.

We follow essentially the derivation made in [101, section 2.1.2], which is adapted from the original proof of [65].

PROOF. We define the conjugated operator $P_\varphi := e^{\tau\varphi} P e^{-\tau\varphi}$, where $\tau \geq 1$. This can be written as follows

$$\begin{aligned} P_\varphi &= e^{\tau\varphi} P e^{-\tau\varphi} = (D_s + i\tau \partial_s \varphi)^2 + (D_x + i\tau \nabla_x \varphi) \cdot (D_x + i\tau \nabla_x \varphi) \\ &= P - \tau^2 |\varphi'|^2 + i\tau (D_s \partial_s \varphi + \partial_s \varphi D_s + D_x \cdot \nabla_x \varphi + \nabla_x \varphi \cdot D_x) \\ &= P - \tau^2 |\varphi'|^2 + 2i\tau \varphi' \cdot D + \tau \Delta \varphi. \end{aligned}$$

We then write $P_\varphi = A + i\tilde{B}$, with

$$A = A_1 + A_2, \quad \tilde{B} = B_1 + \tilde{B}_2,$$

where $A_1 = P$, $A_2 = -\tau^2 |\varphi'|^2$, $B_1 = 2\tau \varphi' \cdot D$, $\tilde{B}_2 = -i\tau \Delta \varphi$. We introduce yet another parameter $\mu > 0$ to be chosen below and we write

$$(1.3.10) \quad P_\varphi + \tau \mu \Delta \varphi = A + iB,$$

where $B = B_1 + B_2$, and $B_2 = -i(1 + \tau)\mu \Delta \varphi$.

Let $v \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C}))$. From (1.3.10), taking the L^2 -norm and applying the triangular inequality, we have

$$(1.3.11) \quad \begin{aligned} & \|Av\|_{L^2(Q)}^2 + \|Bv\|_{L^2(Q)}^2 + 2\operatorname{Re}(Av, iBv)_{L^2(Q)} \\ & \lesssim \|P_\varphi v\|_{L^2(Q)}^2 + \tau^2 \mu^2 \|v\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Developing the scalar product we write

$$(1.3.12) \quad \operatorname{Re}(Av, iBv)_{L^2(Q)} = \sum_{1 \leq j, k \leq 2} I_{jk}, \quad \text{with } I_{jk} = \operatorname{Re}(A_j v, iB_k v)_{L^2(Q)}.$$

We first compute the terms $I_{j,k}$ separately. In the various computations we shall perform below we shall obtain interior integral terms over $Q = (0, T) \times \mathbb{R}^d$ and boundary integral terms over $\partial Q = \{0, T\} \times \mathbb{R}^d$.

Term I_{11} . Integrating by parts twice, we obtain

$$(1.3.13) \quad \begin{aligned} I_{11} &= \operatorname{Re}(A_1 v, iB_1 v)_{L^2(Q)} = \operatorname{Re}(Pv, 2i\tau\varphi' \cdot Dv)_{L^2(Q)} \\ &= -2\tau \operatorname{Re}(\Delta v, \varphi' \cdot v')_{L^2(Q)} \\ &= 2\tau \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \nabla(\varphi' \cdot \bar{v}') \, dx \, ds - 2\tau \operatorname{Re} \int_{\partial Q} \partial_n v \varphi' \cdot \bar{v}' \, dx \\ &= 2\tau \operatorname{Re} \int_Q (v' \cdot \varphi'' \bar{v}' + v' \cdot \bar{v}'' \varphi') \, dx \, ds - 2\tau \operatorname{Re} \int_{\partial Q} \partial_n v \varphi' \cdot \bar{v}' \, dx \\ &= 2\tau \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \varphi'' \bar{v}' \, dx \, ds + \tau \int_Q \nabla |v'|^2 \cdot \varphi' \, dx \, ds \\ &\quad - 2\tau \operatorname{Re} \int_{\partial Q} \partial_n v \varphi' \cdot \bar{v}' \, dx \\ &= J_{11} + BT_{11}, \end{aligned}$$

where

$$J_{11} := 2\tau \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \varphi'' \bar{v}' \, dx \, ds - \tau \int_Q \Delta \varphi |v'|^2 \, dx \, ds,$$

and

$$BT_{11} := \tau \int_{\partial Q} |v'|^2 \partial_n \varphi \, dx - 2\tau \operatorname{Re} \int_{\partial Q} \partial_n v \varphi' \cdot \bar{v}' \, dx.$$

Term I_{12} . Integrating by parts once, we obtain

$$(1.3.14) \quad \begin{aligned} I_{12} &= \operatorname{Re}(A_1 v, iB_2 v)_{L^2(Q)} = -\tau(1 + \mu) \operatorname{Re}(\Delta v, \Delta \varphi v)_{L^2(Q)} \\ &= \tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \nabla(\Delta \varphi \bar{v}) \, dx \, ds - \tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_{\partial Q} \partial_n v \Delta \varphi \bar{v} \, dx \\ &= J_{12} + BT_{12}, \end{aligned}$$

where

$$J_{12} := \tau(1 + \mu) \int_Q \Delta \varphi |v'|^2 \, dx \, ds + \tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \nabla(\Delta \varphi) \bar{v} \, dx \, ds,$$

and

$$BT_{12} := -\tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_{\partial Q} \partial_n v \Delta \varphi \bar{v} \, dx.$$

Term I_{21} . Analogously, integrating by parts once, we obtain

$$(1.3.15) \quad \begin{aligned} I_{21} &= \operatorname{Re}(A_2 v, iB_1 v)_{L^2(Q)} = \operatorname{Re}(-\tau^2 |\varphi'|^2 v, 2i\tau\varphi' \cdot Dv)_{L^2(Q)} \\ &= -2\tau^3 \operatorname{Re} \int_Q |\varphi'|^2 v \varphi' \cdot \bar{v}' \, dx \, ds \\ &= -\tau^3 \int_Q |\varphi'|^2 \varphi' \cdot \nabla |v|^2 \, dx \, ds \end{aligned}$$

$$= J_{21} + BT_{21},$$

where

$$J_{21} := \tau^3 \int_Q \operatorname{div}(|\varphi'|^2 \varphi') |v|^2 \, dx \, ds \quad \text{and} \quad BT_{21} := -\tau^3 \int_{\partial Q} \partial_n \varphi |\varphi'|^2 |v|^2 \, dx.$$

Term I_{22} . We obtain directly

$$(1.3.16) \quad \begin{aligned} I_{22} &= \operatorname{Re}(A_2 v, iB_2 v)_{L^2(Q)} = \operatorname{Re}(-\tau^2 |\varphi'|^2 v, \tau(1 + \mu) \Delta \varphi v)_{L^2(Q)} \\ &= -\tau^3 (1 + \mu) \operatorname{Re} \int_Q |\varphi'|^2 \Delta \varphi |v|^2 \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Collecting (1.3.12)–(1.3.16), we obtain

$$\operatorname{Re}(Av, iBv) = J + BT,$$

with $J := J_{11} + J_{12} + J_{21} + I_{22}$ and $BT := BT_{11} + BT_{12} + BT_{21}$.

We now treat separately the interior terms collected in J and the boundary terms collected in BT .

Interior terms. We write

$$(1.3.17) \quad \begin{aligned} J &= \tau^3 \int_Q (\operatorname{div}(|\varphi'|^2 \varphi') - (1 + \mu) |\varphi'|^2 \Delta \varphi) |v|^2 \, dx \, ds + \tau \mu \int_Q \Delta \varphi |v'|^2 \, dx \, ds \\ &\quad + 2\tau \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \varphi'' \bar{v}' \, dx \, ds + \tau(1 + \mu) \int_Q v' \cdot \nabla(\Delta \varphi) \bar{v} \, ds \, dx \\ &= \tau^3 \int_Q \gamma_0 |v|^2 \, dx \, ds + \tau \int_Q \gamma_1 |v'|^2 \, dx \, ds + X, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_0 &:= \operatorname{div}(|\varphi'|^2 \varphi') - (1 + \mu) |\varphi'|^2 \Delta \varphi, & \gamma_1 &:= \mu \Delta \varphi, \\ X &:= 2\tau \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \varphi'' \bar{v}' \, dx \, ds + \tau(1 + \mu) \int_Q v' \cdot \nabla(\Delta \varphi) \bar{v} \, ds \, dx. \end{aligned}$$

As in [101, Lemma 2.10], if we choose $\mu \in (0, 2)$, the coefficients γ_0 and γ_1 satisfy,

$$(1.3.18) \quad \gamma_0 \gtrsim \lambda^4 \varphi^3, \quad \gamma_1 \gtrsim \lambda^2 \varphi.$$

For a proof of this fact, we follow [101, section 8.5]. Indeed, according to the form of the weight function φ , taking derivatives with respect to s and x , we obtain that

$$\partial_{x_i x_j}^2 \varphi = (\lambda^2 \partial_{x_i} \psi \partial_{x_j} \psi + \lambda \partial_{ij}^2 \psi) \varphi, \quad i, j = 1, 2.$$

This allows one to write

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \operatorname{div}(\lambda^3 \varphi^3 |\psi'|^2 \psi') - (1 + \mu) \lambda^2 \varphi^2 |\psi'|^2 (\lambda^2 |\psi'|^2 \varphi + \lambda(\Delta \psi) \varphi) \\ &= 3\lambda^4 \varphi^3 |\psi'|^4 + \lambda^3 \varphi^3 |\psi'|^2 \Delta \psi + \lambda^3 \varphi^3 \nabla(|\psi'|^2) \psi' \\ &\quad - (1 + \mu) (\lambda^4 |\psi'|^4 \varphi^3 + \lambda^3 \varphi^3 |\psi'|^2 \Delta \psi) \\ &= (2 - \mu) \lambda^4 |\psi'|^4 \varphi^3 + \lambda^3 \varphi^3 (\nabla(|\psi'|^2) \psi' - \mu |\psi'|^2 \Delta \psi) \\ &\gtrsim \lambda^4 \varphi^3, \end{aligned}$$

using (1.3.2) and (1.3.3), choosing $\mu \in (0, 2)$, and taking $\lambda \geq 1$ sufficiently large. Analogously, we write

$$\gamma_1 = \mu \Delta \varphi = \mu (\lambda^2 |\psi'|^2 + \lambda \Delta \psi) e^{\lambda \psi} \gtrsim \lambda^2 \varphi,$$

for $\lambda \geq 1$ chosen sufficiently large.

We proceed now with the terms bound together in X , that will be 'absorbed' by the two other terms composing J in (1.3.17) thanks to the estimates (1.3.18). We write

$$\begin{aligned} X &= 2\tau\lambda^2 \int_Q \varphi |\psi' \cdot v'|^2 dx ds + 2\tau\lambda \operatorname{Re} \int_Q \varphi v' \cdot \psi'' \bar{v}' dx ds \\ &\quad + \tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \nabla(\Delta\varphi) \bar{v} dx ds \\ &\geq 2\tau\lambda \operatorname{Re} \int_Q \varphi v' \cdot \psi'' \bar{v}' dx ds + \tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_Q v' \cdot \nabla(\Delta\varphi) \bar{v} dx ds \\ &=: Y. \end{aligned}$$

Using that $\psi \in W^{3,\infty}$, we have $|\psi''| \lesssim 1$ and $|\nabla(\Delta\varphi)| \lesssim \lambda^3\varphi$, and the Young inequality gives

$$\begin{aligned} |Y| &\lesssim \tau \|\varphi^{1/2} v'\|_{L^2(Q)}^2 + \tau\lambda^3 \int_Q \varphi |v'| |v| dx ds \\ &\lesssim (1 + \varepsilon\lambda^2) \tau \|\varphi^{1/2} v'\|_{L^2(Q)}^2 + \varepsilon^{-1} \tau\lambda^4 \|\varphi^{1/2} v\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Choosing $\varepsilon > 0$ sufficiently small, τ and λ sufficiently large we have

$$(1.3.19) \quad J \gtrsim \tau^3 \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|v'\|_{L^2(Q)}^2.$$

Boundary terms. We consider the different terms composing the compound BT defined above.

Term BT_{11} . From Proposition 1.3.2 we have $\varphi|_{s=S} = 1$ and since $v|_{s=0} = 0$ we obtain

$$\begin{aligned} BT_{11} &= \tau \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s \varphi|_{s=T} |v'|_{s=T}|^2 dx - 2\tau \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s \varphi|_{s=T} |\partial_s v|_{s=T}|^2 dx \\ &\quad + \tau \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s \varphi|_{s=T} |\partial_s v|_{s=T}|^2 dx \\ &= \tau\lambda(E + F), \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} E &= - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s \psi|_{s=T} |\partial_s v|_{s=T}|^2 dx, \\ F &= \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi \partial_s \psi)|_{s=0} |\partial_s v|_{s=0}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s \psi|_{s=T} |\nabla_x v|_{s=T}|^2 dx. \end{aligned}$$

Using (1.3.5), we have

$$E \gtrsim \|\partial_s v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Using again (1.3.2), (1.3.4) and (1.3.5), we obtain

$$\begin{aligned} F &= \int_{\omega_x} (\varphi \partial_s \psi)|_{s=0} |\partial_s v|_{s=0}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \omega_x} (\varphi \partial_s \psi)|_{s=0} |\partial_s v|_{s=0}|^2 dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s \psi|_{s=T} |\nabla_x v|_{s=T}|^2 dx \\ &\geq C \|\varphi^{1/2} \partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \omega_x)}^2 - C' (\|\varphi^{1/2} \partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2 + \|\nabla_x v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2), \end{aligned}$$

for some $C, C' > 0$. This yields

$$(1.3.20) \quad \begin{aligned} BT_{11} &\geq C\tau\lambda(\|\partial_s v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\varphi^{1/2}\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \omega_x)}^2) \\ &\quad - C'\tau\lambda(\|\varphi^{1/2}\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2 + \|\nabla_x v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2). \end{aligned}$$

Term BT_{12} . Since $v|_{s=0} = 0$, using (1.3.5), we find

$$\begin{aligned} BT_{12} &= -\tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_s^2 \varphi \bar{v} \partial_s v)|_{s=T} \, dx \\ &= -\tau(1 + \mu) \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} ((\lambda \partial_s^2 \psi + \lambda^2 (\partial_s \psi)^2) \bar{v} \partial_s v)|_{s=T} \, dx. \end{aligned}$$

We then have, for $\lambda \geq 1$, by (1.3.2),

$$(1.3.21) \quad \begin{aligned} |BT_{12}| &\lesssim \tau\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_s v|_{s=T}|v|_{s=T}| \, dx \\ &\lesssim \tau^{\frac{1}{2}}\lambda \|\partial_s v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}}\lambda^3 \|v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Term BT_{21} . Since $v|_{s=0} = 0$, using (1.3.5), we obtain

$$(1.3.22) \quad \begin{aligned} BT_{21} &= -\tau^3 \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi'_{s=T}|^2 \partial_s \varphi|_{s=T}|v|_{s=T}|^2 \, dx \\ &= -\tau^3 \lambda^3 \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_s \psi|_{s=T})^3 |v|_{s=T}|^2 \, dx \gtrsim \tau^3 \lambda^3 \|v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Collecting estimations (1.3.20)–(1.3.22), we obtain

$$(1.3.23) \quad \begin{aligned} BT &\geq C\tau^3 \lambda^3 \|v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + C\tau\lambda(\|\partial_s v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\varphi^{1/2}\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \omega_x)}^2) \\ &\quad - C'\tau\lambda(\|\nabla_x v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\varphi^{1/2}\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2), \end{aligned}$$

choosing τ chosen sufficiently large.

We may now put together the estimates obtained for the interior and the boundary terms. From (1.3.11), (1.3.19) and (1.3.23) we obtain

$$\begin{aligned} &\tau^3 \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|v'\|_{L^2(Q)}^2 + \tau^3 \|v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau(\|\partial_s v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2) \\ &\lesssim \|P_\varphi v\|_{L^2(Q)}^2 + \tau^2 \mu^2 \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \tau(\|\nabla_x v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2). \end{aligned}$$

For $\tau \geq \tau_0$, with τ_0 chosen sufficiently large, we find

$$\begin{aligned} &\tau^3 \|v\|_{L^2(Q)}^2 + \tau \|v'\|_{L^2(Q)}^2 + \tau^3 \|v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tau(\|\partial_s v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2) \\ &\lesssim \|P_\varphi v\|_{L^2(Q)}^2 + \tau(\|\nabla_x v|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\partial_s v|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2). \end{aligned}$$

If we now set $v = e^{\tau\varphi}u$ for $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}))$ we obtain the desired inequality by classical arguments. \square

1.3.2. Proof of the spectral inequality. We now give the proof of the spectral inequality (1.3.1) of Theorem 1.3.1.

PROOF OF THEOREM 1.3.1. Let $N \geq 0$ and $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ be such that $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)}$. In particular, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. We introduce the function

$$(1.3.24) \quad u(s, x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} \frac{\sinh(\xi s)}{\xi} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} \, d\xi,$$

which belongs to $\mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \cap H^2(Q; \mathbb{C})$ and satisfies $Pu = 0$ in Q , for $P = D_s^2 + D_x \cdot D_x$, and $u|_{s=0} \equiv 0$. The Carleman inequality (1.3.9) of Proposition 1.3.3 holds for functions in $H^2(Q; \mathbb{C})$ by density. It can thus be applied to the function $u(s, x)$. This yields

$$(1.3.25) \quad L\tau^2 e^{2\tau} \|u|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq e^{2\tau} \|\nabla_x u|_{s=0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|e^{\tau\varphi} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2,$$

for $\tau \geq \tau_0$ and $L > 0$. By the Plancherel equality we have

$$\begin{aligned} \|\nabla_x u|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} |\xi \hat{u}(T, \xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{N^2}{(2\pi)^d} \|\hat{u}|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = N^2 \|u|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Thus, (1.3.25) gives

$$(L\tau^2 - N^2) e^{2\tau} \|u|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|e^{\tau\varphi} \partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2.$$

Now, we choose τ such that $\tau \geq \tau_0 \geq 1$ and $L\tau^2 - N^2 \geq 1$. For instance, we choose $\tau^2 = \max(\tau_0^2, L^{-1})(N+1)^2$. Then, we have

$$(1.3.26) \quad e^{2\tau} \|u|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq e^{2\tau \sup_{\mathbb{R}^d} \varphi|_{s=0}} \|\partial_s u|_{s=0}\|_{L^2(\omega_x)}^2.$$

By the Plancherel equality, we have

$$\begin{aligned} \|u|_{s=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{T^2}{(2\pi)^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} \left| \frac{\sinh(\xi T)}{\xi T} \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\geq \frac{T^2}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = T^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Note that $\partial_s u(0, \cdot) = f$. Thus, (1.3.26) reads

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{T^2} e^{2\tau(\sup_{\mathbb{R}^d} \varphi|_{s=0} - 1)} \|f\|_{L^2(\omega_x)}^2,$$

which proves the result, using the value chosen for τ above. Note that $T > 0$ is chosen arbitrary here and kept fixed. \square

A natural question at this stage can be the following: in the spectral inequality of Theorem 1.3.1, can one replace the factor $e^{C(N+1)}$ by some factor $e^{g(N)}$ with $g(N) \ll N+1$, as $N \rightarrow \infty$, e.g. $g(N) = (N+1)^\alpha$, with $\alpha \in [0, 1)$, or $g(N) = (N+1)/\ln(N+2)$, etc.? The answer is in fact negative as described in the following proposition: one can construct a sequence of functions $(f_N)_N$ that saturates the inequality with the form given in Theorem 1.3.1, up to some constant.

PROPOSITION 1.3.4. *Let $A \subset \mathbb{R}^d$ be such that $\bar{A} \neq \mathbb{R}^d$. There exist $C_0 > 0$ and $N_0 > 0$ such that $\forall N \geq N_0$, $\exists f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ with $\text{supp}(\hat{f}) \subset B_{\mathbb{R}^d}(0, N)$ and*

$$(1.3.27) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq e^{C_0 N} \|f\|_{L^2(A)}.$$

This result is the counterpart of Proposition 5.5 in [103]. The proof is inspired by the argument developed therein.

PROOF. At several places we shall use the following simple estimate

$$(1.3.28) \quad \int_{|x| \geq \alpha} e^{-|x|^2} dx \leq C_d e^{-\alpha^2/2}, \quad \alpha \geq 1.$$

In fact if $d = 1$ we simply write

$$\int_{|x| \geq \alpha} e^{-x^2} dx \leq \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha^2}, \alpha > 0.$$

If $d \geq 2$, we write

$$\int_{|x| \geq \alpha} e^{-|x|^2} dx = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{r \geq \alpha} r^{d-1} e^{-r^2} dr \leq C_d \int_{r \geq \alpha} r e^{-r^2/2} dr = C_d e^{-\alpha^2/2}.$$

Since $\bar{A} \neq \mathbb{R}^d$, there exists $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus A$ such that

$$(1.3.29) \quad d_0 := \text{dist}(x_0, A) > 0.$$

We may assume, without any loss of generality, that $x_0 = 0$. We consider the heat kernel $\phi_s(x) := (4\pi s)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4s}}$, for $s > 0$ and $x \in \mathbb{R}^d$, whose Fourier transform is given by

$$(1.3.30) \quad \hat{\phi}_s(\xi) = e^{-|\xi|^2 s}, \quad s > 0, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

We define $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ by its Fourier transform as follows

$$\hat{f}(\xi) := e^{-\frac{|\xi|^2}{N}} \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq N\}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad N > 0.$$

We first give an estimation of the L^2 -norm of f over the whole domain \mathbb{R}^d ; we have

$$(1.3.31) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \gtrsim N^{d/4}.$$

In fact, with the Plancherel theorem, (1.3.30), and the inverse Fourier transformation, we write

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} e^{-\frac{2|\xi|^2}{N}} d\xi \\ &= \phi_{s=\frac{2}{N}}(0) - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq N} e^{-\frac{2|\xi|^2}{N}} d\xi. \end{aligned}$$

Then, with a change of variables and (1.3.28) we obtain

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \left(\frac{N}{8\pi}\right)^{d/2} - \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\frac{N}{2}\right)^{d/2} \int_{|\xi| \geq \sqrt{2N}} e^{-|\xi|^2} d\xi \gtrsim N^{d/2},$$

by using (1.3.28) and by choosing N sufficiently large.

We now wish to estimate the L^2 -norm of f over the subset A . Again, the inverse Fourier transformation gives

$$(1.3.32) \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \leq N} e^{-\frac{|\xi|^2}{N} + ix \cdot \xi} d\xi = \phi_{s=\frac{1}{N}}(x) - R(x),$$

with $R(x) := (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \geq N} e^{-\frac{|\xi|^2}{N} + ix \cdot \xi} d\xi$. For the first term in (4.5.28), we use (1.3.29) and we write, with a change of variables,

$$\begin{aligned} \|\phi_{s=\frac{1}{N}}\|_{L^2(A)}^2 &\leq \int_{|x| > d_0} (\phi_{s=\frac{1}{N}}(x))^2 dx = \left(\frac{N}{4\pi}\right)^d \int_{|x| > d_0} e^{-\frac{N|x|^2}{2}} dx \\ &= \frac{(2N)^{d/2}}{(4\pi)^d} \int_{|x| \geq d_0 \sqrt{\frac{N}{2}}} e^{-|x|^2} dx. \end{aligned}$$

This yields, by using (1.3.28), $\|\phi_{s=\frac{1}{N}}\|_{L^2(A)} \lesssim N^{d/4} e^{-d_0^2 N/8}$. For the second term in (4.5.28), the Plancherel theorem gives

$$\|R\|_{L^2(A)}^2 \leq \|R\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|\xi| \geq N} e^{-\frac{2|\xi|^2}{N}} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\frac{N}{2}\right)^{d/2} \int_{|\xi| \geq \sqrt{2N}} e^{-|\xi|^2} d\xi,$$

which gives, with (1.3.28), $\|R\|_{L^2(A)} \lesssim N^{d/4} e^{-N/2}$. Setting $C_1 = \min(1/2, d_0^2/8)$, we thus obtain

$$(1.3.33) \quad \|f\|_{L^2(A)} \lesssim N^{d/4} e^{-C_1 N},$$

and we conclude the proof with (1.3.31)–(1.3.33) and by choosing C_0 such that $0 < C_0 < C_1$. \square

1.4. Null-controllability of the Kolmogorov equation

This section is devoted to the proof of the main result of this article, Theorem 1.1.2, that is the null-controllability of the Kolmogorov equation (1.1.1) in the whole phase space with a control region as given in (1.1.2)–(1.1.3).

The proof is first carried out in the Fourier domain with respect to the space variable x .

1.4.1. Observability of one Fourier mode. Here, we consider the Fourier transformed (adjoint) Kolmogorov equation, as in (1.1.10)–(1.1.11).

We set $\mathcal{M}_\xi = -iv \cdot \xi - \Delta_v$, acting on $L^2(\mathbb{R}^d)$, with $\xi \in \mathbb{R}^d$ viewed as a parameter, with domain

$$D(\mathcal{M}_\xi) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d); -iv \cdot \xi f - \Delta_v f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Adapting the results of Proposition 1.2.1 and of Appendix ?? to the case where ξ is only considered as a parameter³, and using a partial Fourier transformation in the variable v , we find that \mathcal{M}_ξ generates a strongly continuous semigroup of contraction $e^{-t\mathcal{M}_\xi}$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$. This gives the well-posedness of the adjoint equation (1.1.11). This semigroup $e^{-t\mathcal{M}_\xi}$ is not differentiable for any positive time.

We shall now prove the following result, that states the observability of the Fourier transformed (adjoint) Kolmogorov equation. Most important, we make explicit the dependency of the observability constant upon the Fourier variable ξ , dual to the variable x .

3. In Section 1.5, change ξ into $-\xi$ as we consider the adjoint operator here.

PROPOSITION 1.4.1 (Observability inequality). *Let $\omega_v \subset \mathbb{R}^d$ be an observability open set on the whole space \mathbb{R}^d as in Definition 1.1.1. Then, there exists a constant $C > 0$ such that the solution of*

$$\begin{cases} \partial_t g_\xi - iv \cdot \xi g_\xi - \Delta_v g_\xi = 0 & \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ g_\xi|_{t=0} = g_{0,\xi} & \text{in } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

for $T > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, and $g_{0,\xi} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ satisfies

$$(1.4.1) \quad \|g_\xi|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{C(1+\frac{1}{T}+\sqrt{|\xi|})} \|g_\xi\|_{L^2((0,T)\times\omega_v)}.$$

The proof of inequality (1.4.1) follows from a global Carleman estimate for the following parabolic operator

$$(1.4.2) \quad P_\xi = \partial_t - iv \cdot \xi - \Delta_v = iD_t - iv \cdot \xi + D_v \cdot D_v$$

on $\mathcal{Q} = (0, T) \times \mathbb{R}^d$, where the frequency $\xi \in \mathbb{R}^d$ acts as a parameter here. In the following proposition, constants can be chosen *uniform* with respect to the parameter ξ and to the time T . This is an important feature of the Carleman estimate that will be essential in the proof of the null-controllability of the Kolmogorov equation in Section 1.4.3.

PROPOSITION 1.4.2 (Global parabolic Carleman estimate). *We set $\theta = (t(T-t))^{-1}$ and $\tilde{\tau}(t) = \tau\theta(t)$. Let $\omega_v \subset \mathbb{R}^d$ be an observability open set on the whole space \mathbb{R}^d as in Definition 1.1.1. There exist a negative weight function $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $C > 0$, and $\tau_0 \geq 1$ such that*

$$(1.4.3) \quad \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} \nabla_v u\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq C(\|e^{\tilde{\tau}\varphi} P_\xi u\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2((0,T)\times\omega_v)}),$$

for $\xi \in \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $\tau \geq \tau_0(T + T^2 + \sqrt{|\xi|}T^2)$, and for $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$.

An analogous result was proven in [18]. Here, as we consider the whole phase-space we need to construct an adapted weight function. The property of ω_v as given in Definition 1.1.1 turns out to be crucial in this construction. In the proof of Proposition 1.4.2 we shall follow the derivation of a Carleman estimate as given in [103].

Note that the weight function we build in Lemma 1.4.4 below satisfies in fact $\varphi \in W^{k,\infty}$ for any $k \in \mathbb{N}$.

In the proof of Proposition 1.4.2 we shall need the following result which enables us to choose open subsets of ω_v that satisfy the same properties as those of Definition 1.1.1.

LEMMA 1.4.3. *Let $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ be an observability open set on the whole space \mathbb{R}^d as in Definition 1.1.1. Then, there exists $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ that is also an observability open set on the whole space \mathbb{R}^d satisfying (1.1.3), with different values of $\delta > 0$ and $r > 0$, and moreover $\text{dist}(\tilde{\mathcal{O}}, \partial\mathcal{O}) > 0$.*

PROOF. Let $y \in \mathbb{Z}^d$. There exists $y' = y'(y) \in \mathcal{O}$ such that $B_{\mathbb{R}^d}(y', r) \subset \mathcal{O}$ and $|y - y'| \leq \delta$. We then set $\tilde{\mathcal{O}}$ as the following open subset

$$\tilde{\mathcal{O}} := \bigcup_{y \in \mathbb{Z}^d} B_{\mathbb{R}^d}(y'(y), r/2).$$

We have $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ and $\text{dist}(\tilde{\mathcal{O}}, \partial\mathcal{O}) \geq r/2$ by construction. Next, for $z \in \mathbb{R}^d$ there exists $y \in \mathbb{Z}^d$ such that $|y - z| \leq \sqrt{d}/2$. Then, $y'(y)$, as introduced above, is such that $y'(y) \in \tilde{\mathcal{O}}$ and

$$B_{\mathbb{R}^d}(y'(y), r/2) \subset \tilde{\mathcal{O}} \text{ and } |z - y'(y)| \leq \delta + \sqrt{d}/2.$$

We thus have the properties of Definition 1.1.1 for the values $\delta + \sqrt{d}/2$ and $r/2$ of the two parameters. \square

The following lemma provides the details of the construction of an weight function associated with an observability set \mathcal{O} that will fits our needs for the derivation of the Carleman estimate of Proposition 1.4.2 for a well chosen $\mathcal{O} \subset \omega_v$.

LEMMA 1.4.4. *Let \mathcal{O} be an observability open set on the whole \mathbb{R}^d , in the sense of Definition 1.1.1. Then, there exist $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ and $C > 0$ such that $\psi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$, for any $k \in \mathbb{N}$, and $|\psi'(v)| \geq C$ for $v \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$.*

The proof is very much connected to that of Proposition 1.3.2. At places we refer to that proof so as to avoid too much redundancy. Some redundancy is, however, necessary for the sake of readability, as this constuction is technical.

PROOF. If \mathcal{O} is an observability open set on \mathbb{R}^d we let δ and r be the positive constants used in Definition 1.1.1. Letting $L > 2(\delta + r)$ we set

$$\tilde{\psi}(v) := \prod_{j=1}^d (2 + \sin(\pi v_j/L)), \quad v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d.$$

This function is $2L$ -periodic in each direction associated with the canonical basis of \mathbb{R}^d . Observe that $\tilde{\psi}'(v) = 0$ if and only if $v \in w + L\mathbb{Z}^d$ with $w = (L/2, \dots, L/2)$.

Firstly, the reader should recall the definition of

$$\mathcal{K}, \mathcal{K}_\alpha, K, K_\beta, K_{\alpha,\beta}, \mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}'_\beta, \mathcal{T}_{\alpha,\beta}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d, \beta \in \{0, 1\}^d,$$

from the proof of Proposition 1.3.2. For $\beta \in \{0, 1\}^d$, we then define the following function $\tilde{\psi}_\beta(v) = \tilde{\psi} \circ \mathcal{T}'_\beta(v)$, for v in the compact set K . This is a translated version of the function $\tilde{\psi}|_{K_\beta}$ and also of $\tilde{\psi}|_{K_{\alpha,\beta}}$ for any $\alpha \in \mathbb{Z}^d$.

Secondly, we consider the elementary compact cell K . For any $\beta \in \{0, 1\}^d$, the only point in K where the gradient of $\tilde{\psi}_\beta$ vanishes is $w = (L/2, \dots, L/2)$. Using compactness, for $0 < \rho < r/2$ and some $w^{(i)} \in B_{\mathbb{R}^d}(w, \delta)$, $i \in I$ with $\#I < \infty$, we have

$$(1.4.4) \quad \overline{B_{\mathbb{R}^d}(w, \delta)} \subset \bigcup_{i \in I} B_{\mathbb{R}^d}(w^{(i)}, \rho).$$

Let $i \in I$. We pick a smooth path $\gamma^{(i)}(t)$, $t \in [0, 1]$ such that $\gamma^{(i)}(0) = w^{(i)}$ and $\gamma^{(i)}(1) = w$. The geometry we describe is illustrated in Figure 3. We also choose a smooth vector field $V^{(i)} \in \mathcal{C}_c^\infty(B_{\mathbb{R}^d}(w, \delta); \mathbb{R}^d)$ such that $V^{(i)}(\gamma^{(i)}(t)) = (\gamma^{(i)})'(t)$ for $t \in [0, 1]$ and we denote by $\chi^{(i)}(t, v)$ the flow associated with the vector field $V^{(i)}$. We then set $\phi^{(i)}(v) = \chi^{(i)}(1, v)$ that is a smooth diffeomorphism of $B_{\mathbb{R}^d}(w, \delta)$ onto itself as it coincides with the identity outside the support of $V^{(i)}$. In particular it leaves unchanged a neighborhood of ∂K . We have $\phi^{(i)}(w^{(i)}) = w$. On the compact set K we define

$$\psi_\beta^{(i)} = \tilde{\psi}_\beta \circ \phi^{(i)}, \quad v \in K, \quad i \in I, \beta \in \{0, 1\}^d,$$

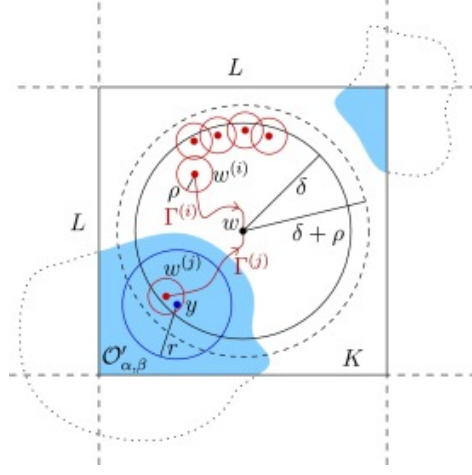


FIGURE 3. Local geometry for the construction of the weight function.

and we observe that the gradient of $\psi_\beta^{(i)}$ only vanishes at $w^{(i)}$. As $\#I < \infty$ there exists $C_0 > 0$ such that

$$(1.4.5) \quad |(\psi_\beta^{(i)})'(v)| \geq C_0, \quad v \in K \setminus B_{\mathbb{R}^d}(w^{(i)}, \rho) \quad i \in I, \beta \in \{0, 1\}^d,$$

and for all $k \in \mathbb{N}$, there exists $C_k > 0$ such that

$$(1.4.6) \quad |d^k \psi_\beta^{(i)}(v)| \leq C_k, \quad v \in K \quad i \in I, \beta \in \{0, 1\}^d.$$

Thirdly, let $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ and $\beta \in \{0, 1\}^d$. We consider the set $\mathcal{O}_{\alpha,\beta} = K_{\alpha,\beta} \cap \mathcal{O}$ and

$$\mathcal{O}'_{\alpha,\beta} = \mathcal{T}_{\alpha,\beta}^{-1}(\mathcal{O}_{\alpha,\beta}) \subset K.$$

As \mathcal{O} is an observability open set there exists $y \in \mathcal{O}'_{\alpha,\beta}$ such that $|y - w| \leq \delta$ and $B_{\mathbb{R}^d}(y, r) \subset \mathcal{O}'_{\alpha,\beta}$, using that $2(\delta + r) < L$ and the fact that the property of Definition 1.1.1 is translation invariant. There exists some $j \in I$ such that $y \in B_{\mathbb{R}^d}(w^{(j)}, \rho)$ because of the finite covering of $\overline{B_{\mathbb{R}^d}(w, \delta)}$ introduced in (1.4.4). Then, as $\rho < r/2$, we have $B_{\mathbb{R}^d}(w^{(j)}, \rho) \subset B_{\mathbb{R}^d}(y, r) \subset \mathcal{O}'_{\alpha,\beta}$; see Figure 3. We now define the following function on the cell $K_{\alpha,\beta}$

$$\psi_{\alpha,\beta}(v) = \psi_\beta^{(j)} \circ \mathcal{T}_{\alpha,\beta}^{-1}(v), \quad v \in K_{\alpha,\beta},$$

which is well defined as $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ maps K onto $K_{\alpha,\beta}$. We find that $|\psi'_{\alpha,\beta}| \geq C_0$ on $K_{\alpha,\beta} \setminus \mathcal{O}$ by (1.4.5) and $\|d^k \psi_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \leq C_k$ on $K_{\alpha,\beta}$ by (1.4.6), for any $k \in \mathbb{N}$. Observe also that $\psi_{\alpha,\beta}$ coincides with $\tilde{\psi}|_{K_{\alpha,\beta}}$ in a neighborhood of $\partial K_{\alpha,\beta}$. Finally we define the following function ψ on \mathbb{R}^d by

$$\psi(v) = \psi_{\alpha,\beta}(v) \quad \text{if } v \in K_{\alpha,\beta}.$$

We have $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ and $|\psi'| \geq C_0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$, and $\|d^k \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_k$, for any $k \in \mathbb{N}$. \square

PROOF OF PROPOSITION 1.4.2. Let $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d))$ and set $z = e^{\tilde{\tau}\varphi}u$ and the conjugated operator $P_\varphi = e^{\tilde{\tau}\varphi}P_\xi e^{-\tilde{\tau}\varphi}$. We have

$$P_\varphi = i(D_t + i\tau\theta'\varphi) + (D_v + i\tilde{\tau}\varphi') \cdot (D_v + i\tilde{\tau}\varphi') - i\xi \cdot v.$$

We define the following two symmetric differential operators

$$Q_2 = (P_\varphi + P_\varphi^*)/2, \quad Q_1 = (P_\varphi - P_\varphi^*)/(2i),$$

which gives

$$Q_2 = D_v \cdot D_v - |\tilde{\tau}\varphi'|^2 - \tau\theta'\varphi, \quad Q_1 = D_t + \tilde{\tau}(D_v \cdot \varphi' + \varphi' \cdot D_v) - \xi \cdot v,$$

and $P_\varphi = Q_2 + iQ_1$. We denote by η and σ the Fourier variables associated with v and t respectively. We set $\mu^2 = \tilde{\tau}^2 + |\eta|^2$. Using μ as an order function in the (cotangent) phase space associated with the variable v , thus giving the same strength to $\tilde{\tau}$ and a differentiation w.r.t. v , the principal symbols⁴ of these operators are

$$q_2 = |\eta|^2 - |\tilde{\tau}\varphi'|^2 - \tau\theta'\varphi, \quad q_1 = \sigma + 2\tilde{\tau}\eta \cdot \varphi' - \xi \cdot v.$$

Note that the commutator $i[Q_2, Q_1]$ is a differential operator that only acts in the v variable. Its principal symbol of is given by the Poisson bracket $\{q_2, q_1\}$.

We pick three open sets $\omega_v^{(0)}$, $\omega_v^{(1)}$, and $\omega_v^{(2)}$, all satisfying the properties of Definition 1.1.1 such that $\omega_v^{(0)} \Subset \omega_v^{(1)} \Subset \omega_v^{(2)} \Subset \omega_v$ and such that

$$(1.4.7) \quad \text{dist}(\omega_v^{(j)}, \partial\omega_v^{(j+1)}) > 0, \quad j = 0, 1, \quad \text{and} \quad \text{dist}(\omega_v^{(2)}, \partial\omega_v) > 0,$$

which can be done according to Lemma 1.4.3. We now build the weight function φ using the following lemma whose proof is given below.

LEMMA 1.4.5. *There exists a negative function $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that $\varphi \in W^{k, \infty}(\mathbb{R}^d)$, for any $k \in \mathbb{N}$, and for some $\nu_0 > 0$, $\tau_1, C > 0$ such that $\nu_0 q_2^2 + \tilde{\tau}\{q_2, q_1\} \geq C\mu^4$, for $v \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}$, $\eta \in \mathbb{R}^d$, and for $\tau \geq \tau_1(T + T^2\sqrt{|\xi|})$.*

Using (1.4.7), we can build $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ be such that $0 \leq \chi(v) \leq 1$, $\text{supp}(\chi) \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(1)}$, and $\chi \equiv 1$ in $\mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(2)}$ and all its successive derivatives are bounded in \mathbb{R}^d (for instance adapt the proof of Theorem 1.4.1 in [86] to the non compact case using (1.4.7)). We write, by integration by parts,

$$(1.4.8) \quad \begin{aligned} \|P_\varphi \chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 &= \|Q_2 \chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \|Q_1 \chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + 2 \text{Re}(Q_2 \chi z, Q_1 \chi z)_{L^2(\mathcal{Q})} \\ &\geq \|\nu_0^{1/2} \tilde{\tau}^{-1/2} Q_2 \chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + i([Q_2, Q_1] \chi z, \chi z)_{L^2(\mathcal{Q})} \\ &= ((\nu_0 \tilde{\tau}^{-1} Q_2^2 + i[Q_2, Q_1]) \chi z, \chi z)_{L^2(\mathcal{Q})}, \end{aligned}$$

as z vanishes at $t = 0^+$ and $t = T^-$ at all orders, because of the sign of the weight function, and where $\nu_0 \tilde{\tau}^{-1} \leq 1$ by choosing $\tau/(\nu_0 T^2)$ sufficiently large. We have

4. Here, to be precise we consider operators in a semi-classical setting. When considering the v variable, using t only as a parameter, then the (pseudo-)differential calculus is understood with the following metric in the (v, η) cotangent phase space $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$: $g = |dv|^2 + |d\eta|^2/\mu^2$. Observe that the polynomial growth of q_1 w.r.t. v has no impact on the calculus operations performed in the remainder of the proof. For example, this polygonal growth is not present in the symbol $\{q_2, q_1\}$ computed in the proof of lemma 1.4.5. This behavior in the symbol q_1 can thus be perfectly admitted. Here, quantification of the time derivative in q_1 is purely formal, as the dual variable σ does not occur in the calculus estimations that are performed below. We could only consider a symbol quantification in the v variable and preserve the D_t form. This, however, gives an awkward presentation that we chose to avoid here following [103].

used that $Q_j^* = Q_j$, $j = 1, 2$, and $[\tilde{\tau}, Q_2] = 0$ as Q_2 is a differential operator that only acts in the v direction. The parameter ν_0 is chosen as in Lemma 1.4.5 above. The principal symbol of the operator $\nu_0 \tilde{\tau}^{-1} Q_2^2 + i[Q_2, Q_1]$, that is differential only in the v variable, is given by $\nu_0 \tilde{\tau}^{-1} q_2^2 + \{q_2, q_1\}$. Let $\tilde{\chi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ be such that $0 \leq \tilde{\chi}(v) \leq 1$, $\text{supp}(\tilde{\chi}) \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}$, and $\tilde{\chi} \equiv 1$ in $\mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(1)}$. In particular, $\tilde{\chi} \equiv 1$ in a neighborhood of $\text{supp}(\chi)$. With the symbol ellipticity given in Lemma 1.4.5, we have

$$(\nu_0 q_2^2 + \tilde{\tau}\{q_2, q_1\})\tilde{\chi} + \mu^4(1 - \tilde{\chi}) \gtrsim \mu^4, \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

for $\tau \geq \tau_1(T + T^2 \sqrt{|\xi|})$. Writting

$$(\nu_0 \tilde{\tau}^{-1} Q_2^2 + i[Q_2, Q_1])\chi z = ((\nu_0 \tilde{\tau}^{-1} Q_2^2 + i[Q_2, Q_1])\tilde{\chi} + \text{Op}(\tilde{\tau}^{-1} \mu^4)(1 - \tilde{\chi}))\chi z,$$

the Gårding inequality (in the v variable only with the time variable t regarded as a parameter) yields

$$((\nu_0 \tilde{\tau}^{-1} Q_2^2 + i[Q_2, Q_1])\chi z, \chi z)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \gtrsim \tilde{\tau}^{-1} \|\text{Op}(\mu^2)\chi z(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

uniformly w.r.t. $t \in [0, T]$, for $\tilde{\tau}$ chosen sufficiently large, by choosing τ/T^2 sufficiently large. We thus choose $\tau \geq \tau_2(T + T^2 + \sqrt{|\xi|}T^2)$ with τ_2 large enough. Integrating w.r.t. t , we then obtain, using (1.4.8),

$$\|P_\varphi \chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})} \gtrsim \|\tilde{\tau}^{-1/2} \text{Op}(\mu^2)\chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})} \gtrsim \|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)\chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})},$$

Adding the term $\|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)(1 - \chi)z\|_{L^2(\mathcal{Q})}$ on both sides, we obtain

$$\|P_\varphi \chi z\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)(1 - \chi)z\|_{L^2(\mathcal{Q})} \gtrsim \|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)z\|_{L^2(\mathcal{Q})}.$$

Next, writing $P_\varphi \chi = \chi P_\varphi + [P_\varphi, \chi]$, where the commutator is a first-order semiclassical differential operator in the v variable, we find

$$\begin{aligned} \|P_\varphi z\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)(1 - \chi)z\|_{L^2(\mathcal{Q})} \\ + \|\text{Op}(\mu)z\|_{L^2(\mathcal{Q})} \gtrsim \|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)z\|_{L^2(\mathcal{Q})}. \end{aligned}$$

Chosing $\tilde{\tau}$ sufficiently large, we thus obtain

$$\|P_\varphi z\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)(1 - \chi)z\|_{L^2(\mathcal{Q})} \gtrsim \|\tilde{\tau}^{1/2} \text{Op}(\mu)z\|_{L^2(\mathcal{Q})},$$

which implies

$$\begin{aligned} \|P_\varphi z\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{3/2} z\|_{L^2((0, T) \times \omega_v^{(2)})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} \nabla_v z\|_{L^2((0, T) \times \omega_v^{(2)})} \\ \gtrsim \|\tilde{\tau}^{3/2} z\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} \nabla_v z\|_{L^2(\mathcal{Q})}. \end{aligned}$$

Moving back to the unknown function u we obtain

$$\begin{aligned} \|e^{\tilde{\tau}\varphi} P u\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2((0, T) \times \omega_v^{(2)})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} \nabla_v u\|_{L^2((0, T) \times \omega_v^{(2)})} \\ \gtrsim \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2(\mathcal{Q})} + \|\tilde{\tau}^{1/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} \nabla_v u\|_{L^2(\mathcal{Q})}. \end{aligned}$$

We now remove the gradient term on the l.h.s. of this estimate. This is a fairly classical argument, which we provide for completeness. We choose $\chi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that $0 \leq \chi_0(v) \leq 1$, $\text{supp}(\chi_0) \subset \omega_v$ and $\chi_0 \equiv 1$ in $\omega_v^{(2)}$. Setting $f = P_\xi u$, after multiplication by $e^{2\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 \bar{u}$, and integration over \mathcal{Q} , we obtain

$$(1.4.9) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} e^{2\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 \partial_t |u|^2 \, dt \, dv - \text{Re}(\Delta_v u, e^{2\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 u)_{L^2(\mathcal{Q})}$$

$$= \operatorname{Re}(e^{\tilde{\tau}\varphi} f, e^{\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 u)_{L^2(\mathcal{Q})}.$$

For the first term I_1 an integration by parts in t yields

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} e^{2\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 \partial_t |u|^2 \, dt \, dv \right| = \left| \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \partial_t \tilde{\tau} (1 + 2\tilde{\tau}\varphi) e^{2\tilde{\tau}\varphi} \chi_0 |u|^2 \, dt \, dv \right| \\ &\lesssim \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2((0,T) \times \omega_v)}^2, \end{aligned}$$

since $\partial_t \tilde{\tau} = \tau \theta'$ and $\theta' \lesssim T\theta^2$ and $1 \lesssim T^2\theta$ yielding

$$|\partial_t \tilde{\tau}| \lesssim \tau T \theta^2 \lesssim \tau T^3 \theta^3 \lesssim \tilde{\tau}^3, \quad |\partial_t \tilde{\tau}| \tilde{\tau} \lesssim \tau T \theta^2 \tilde{\tau} \lesssim \tilde{\tau}^3,$$

as $\tau \gtrsim T + T^2$. The third term can be estimated as

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \operatorname{Re}(e^{\tilde{\tau}\varphi} f, e^{\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 u)_{L^2(\mathcal{Q})} \right| \lesssim \|e^{\tilde{\tau}\varphi} f\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \|e^{\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 u\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 \\ &\lesssim \|e^{\tilde{\tau}\varphi} f\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2((0,T) \times \omega_v)}^2, \end{aligned}$$

as $1 \lesssim T^2\theta \lesssim \tau\theta = \tilde{\tau}$, since $\tau \gtrsim T^2$. For the second term, with integration by parts in v , we have

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathcal{Q}} e^{2\tilde{\tau}\varphi} \tilde{\tau} \chi_0 |\nabla_v u|^2 \, dt \, dv + \operatorname{Re} \int_{\mathcal{Q}} \tilde{\tau} \bar{u} \nabla_v (e^{2\tilde{\tau}\varphi} \chi_0) \cdot \nabla_v u \, dt \, dv \\ &\geq \|\tilde{\tau}^{1/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} \nabla_v u\|_{L^2((0,T) \times \omega_v^{(2)})}^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \tilde{\tau} \Delta_v (e^{2\tilde{\tau}\varphi} \chi_0) |u|^2 \, dt \, dv, \end{aligned}$$

and $\left| \int_{\mathcal{Q}} \tilde{\tau} \Delta_v (e^{2\tilde{\tau}\varphi} \chi_0) |u|^2 \, dt \, dv \right| \lesssim \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2((0,T) \times \omega_v)}^2$, as $\varphi \in W^{2,\infty}$. The previous estimates and (1.4.9) then yield

$$\|\tilde{\tau}^{1/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} \nabla_v u\|_{L^2((0,T) \times \omega_v^{(2)})}^2 \lesssim \|e^{\tilde{\tau}\varphi} P_\xi u\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} u\|_{L^2((0,T) \times \omega_v)}^2.$$

The proof is complete. \square

PROOF OF LEMMA 1.4.5. The Poisson bracket of q_2 and q_1 reads:

$$\{q_2, q_1\} = \ell + 4\tilde{\tau}\tau\theta' |\varphi'|^2 + \tau\theta'' \varphi - 2\eta \cdot \xi.$$

with $\ell(v, t, \eta, \tau) = 4\tilde{\tau}(\eta \cdot \varphi'' \eta + \tilde{\tau}^2 \varphi' \cdot \varphi'' \varphi')$.

According to Lemma 1.4.4 there exists a function $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ such that $\psi \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$, for any $k \in \mathbb{N}$, and $|\psi'(v)| \geq C > 0$ for $v \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}$, for some $C > 0$. For $\lambda \geq 1$ we set $\phi = \exp(\lambda\psi)$ and $\varphi = \phi - \exp(\lambda M)$, with $M > \|\psi\|_\infty$. We have $\varphi < 0$. We set $\tilde{q}_2 = q_2 + \tau\theta' \varphi = |\eta|^2 - |\tilde{\tau}\varphi'|^2$ and we claim, as proven below, that we have the following property

$$(1.4.10) \quad \nu \tilde{q}_2^2 + \tilde{\tau} \ell \geq C\mu^4, \quad (t, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}, \quad \eta \in \mathbb{R}^d, \quad \tau \geq 1,$$

for some $C > 0$, if λ and ν are chosen sufficiently large.

In fact, first observe that we have

$$\partial_{v_j} \varphi = \partial_{v_j} \phi = \lambda \phi \partial_{v_j} \psi, \quad \partial_{v_j v_k}^2 \varphi = \lambda \phi \partial_{v_j v_k}^2 \psi + \lambda^2 \phi \partial_{v_j} \psi \partial_{v_k} \psi,$$

yielding, with $\hat{\tau} = \tilde{\tau} \lambda \phi > 0$,

$$\begin{aligned} \ell &= 4(\tilde{\tau} \lambda \phi)^3 (\psi' \cdot \psi'' \psi' + \lambda |\psi'|^4) + 4\tilde{\tau} \lambda \phi (\eta \cdot \psi'' \eta + \lambda \psi' \cdot \eta^2) \\ &\geq 4\hat{\tau}^3 (\psi' \cdot \psi'' \psi' + \lambda |\psi'|^4) + 4\hat{\tau} \eta \cdot \psi'' \eta. \end{aligned}$$

Using that $0 < C \leq |\psi'|$ in $\mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}$ and $\psi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, we obtain, for λ sufficiently large,

$$(1.4.11) \quad \ell \geq C\hat{\tau}^3\lambda - C'\hat{\tau}|\eta|^2, \quad \text{for } v \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}.$$

We have $\tilde{q}_2 = |\eta|^2 - |\hat{\tau}\psi'|^2$. We set $\hat{\mu} = \hat{\tau}^2 + |\eta|^2$ and we consider two cases: $|\tilde{q}_2| < \varepsilon\hat{\mu}^2$ and $|\tilde{q}_2| \geq \varepsilon\hat{\mu}^2$, for $\varepsilon > 0$ to be set just below.

Case $|\tilde{q}_2| < \varepsilon\hat{\mu}^2$: Then, we have $C\hat{\tau}^2 - \varepsilon\hat{\mu}^2 < |\eta|^2 < C'\hat{\tau}^2 + \varepsilon\hat{\mu}^2$ using that $0 < 1/C \leq \psi' \leq C$. For $\varepsilon > 0$ chosen sufficiently small and *kept fixed*, we obtain $\hat{\tau} \lesssim |\eta| \lesssim \hat{\tau}$. Then, by (1.4.11), for λ chosen sufficiently large and *kept fixed*, we have $\ell \gtrsim \hat{\tau}^3$ for $v \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}$. We thus have

$$\nu|\tilde{q}_2|^2 + \tilde{\tau}\ell \geq \tilde{\tau}\ell \gtrsim \hat{\tau}^4 \gtrsim \hat{\mu}^4 \gtrsim \mu^4 \quad \text{for } v \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}.$$

Case $|\tilde{q}_2| \geq \varepsilon\hat{\mu}^2$: Here the values of ε and λ are kept fixed with the values chosen in the previous case. Observing that $|\ell| \lesssim \hat{\mu}^3$ (using that λ is now fixed), we then have

$$\nu|\tilde{q}_2|^2 + \tilde{\tau}\ell \geq \nu\varepsilon^2\hat{\mu}^4 - C\tilde{\tau}\hat{\mu}^3 \geq \hat{\mu}^4(\nu\varepsilon^2 - C').$$

Thus, for ν chosen sufficiently large we have $\nu|\tilde{q}_2|^2 + \tilde{\tau}\ell \gtrsim \mu^4$, for $v \in \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}$.

We have thus obtain the property claimed in (1.4.10).

We observe that we have

$$1 \lesssim T^2\theta, \quad |\theta'| \lesssim T\theta^2, \quad |\theta''| \lesssim T^2\theta^3.$$

We thus find

$$|4\tilde{\tau}\tau\theta'(\varphi')^2 + \tau\theta''\varphi - 2\eta \cdot \xi| \lesssim \tilde{\tau}^3 \left(\frac{T}{\tau} + \frac{T^2}{\tau^2} \right) + |\eta|\tilde{\tau}^2 \frac{|\xi|T^4}{\tau^2}.$$

Similarly we find

$$q_2^2 \geq \frac{1}{2}\tilde{q}_2^2 - (\tau\theta'\varphi)^2 \geq \frac{1}{2}\tilde{q}_2^2 - C\tilde{\tau}^4 \frac{T^2}{\tau^2}.$$

From (1.4.10), for $\tau \geq \tau_1(T + \sqrt{|\xi|T^2})$, with τ_1 chosen sufficiently large, we hence obtain

$$(1.4.12) \quad 2\nu q_2^2 + \tilde{\tau}\{q_2, q_1\} \gtrsim \mu^4, \quad (t, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \setminus \omega_v^{(0)}, \quad \eta \in \mathbb{R}^d.$$

This concludes the proof of Lemma 1.4.5. \square

Now, we can prove Proposition 1.4.1.

PROOF OF PROPOSITION 1.4.1. Let $t_1 = T/3$ and $t_2 = 2T/3$. For $t \in [t_1, t_2]$, we have $C_1/T^2 \leq \theta(t) \leq C_2/T^2$, with $C_1 = 4$ and $C_2 = 9/2 > C_1$. With $\tilde{\tau}$ and φ as given by Proposition 1.4.2 we then have, $e^{C_2\tau \min \varphi/T^2} \leq e^{\tilde{\tau}\varphi} \leq e^{C_1\tau \max \varphi/T^2}$ recalling that $\varphi < 0$; thus we find

$$(1.4.13) \quad \frac{\tau^{3/2}}{T^3} e^{C_2 \frac{\tilde{\tau}}{T^2} \min \varphi} \lesssim \tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau}\varphi} \lesssim \frac{\tau^{3/2}}{T^3} e^{C_1 \frac{\tilde{\tau}}{T^2} \max \varphi}, \quad (t, v) \in [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^d.$$

With the parabolic decay of Proposition 1.2.3 and (1.4.13), we have

$$(t_2 - t_1) \|g_{\xi}|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|g_{\xi}\|_{L^2((t_1, t_2) \times \mathbb{R}^d)}^2$$

$$\lesssim \frac{T^6}{\tau^3} e^{-2C_2 \frac{\tau}{T^2} \min \varphi} \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau} \varphi} g_\xi\|_{L^2((t_1, t_2) \times \mathbb{R}^d)}^2.$$

The Carleman estimate of Proposition 1.4.2 gives

$$\begin{aligned} \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau} \varphi} g_\xi\|_{L^2((t_1, t_2) \times \mathbb{R}^d)}^2 &\lesssim \|\tilde{\tau}^{3/2} e^{\tilde{\tau} \varphi} g_\xi\|_{L^2((0, T) \times \omega_v)}^2 \\ &\lesssim \frac{\tau^3}{T^6} e^{2C_1 \frac{\tau}{T^2} \max \varphi} \|g_\xi\|_{L^2((0, T) \times \omega_v)}^2, \end{aligned}$$

for $\tau \geq \tau_0(T + T^2 + T^2 \sqrt{|\xi|})$. We thus obtain

$$\|g_\xi|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{\tau}{T^2} (C_1 \max \varphi - C_2 \min \varphi)} \|g_\xi\|_{L^2((0, T) \times \omega_v)}.$$

Setting $\tau = \tau_0(T + T^2 + T^2 \sqrt{|\xi|})$ the observability inequality (1.4.1) follows. \square

1.4.2. Observability of Fourier packets. Here, we shall prove the following result that makes precise the cost of the control of the Kolmogorov equation (1.1.1) when one only aims to bring to zero a bounded part of the spectrum of the solution.

PROPOSITION 1.4.6. *There exists $C_{\text{obs}} > 0$ such that for every $T > 0$, $N \in \mathbb{N}$ and $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ there exists a control $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})$ such that the solution of Problem (1.1.1) satisfies*

$$\text{supp}(\hat{f}(T, \cdot, \cdot)) \subset (\mathbb{R}^d \setminus B_{\mathbb{R}^d}(0, N)) \times \mathbb{R}^d$$

and

$$(1.4.14) \quad \|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})} \leq e^{C_{\text{obs}}(1 + \frac{1}{T} + N)} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

By duality, this result is equivalent to the following observability inequality for the adjoint problem (1.1.4), in the case of an initial data whose Fourier transform is compactly-supported. This result is a consequence of the spectral inequality of Theorem 1.3.1.

PROPOSITION 1.4.7. *There exists $C_{\text{obs}} > 0$ such that, for $T > 0$, $N \in \mathbb{N}$, and $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ with $\text{supp}(\hat{g}_0) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} \times \mathbb{R}^d$, the solution of (1.1.4) satisfies*

$$(1.4.15) \quad \|g|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq e^{C_{\text{obs}}(1 + \frac{1}{T} + N)} \|g\|_{L^2((0, T) \times \omega)}.$$

The constant C_{obs} is the same as in Proposition 1.4.6.

PROOF OF PROPOSITION 1.4.7. Because of the linearity we have $\text{supp}(\hat{g}(t, \cdot, \cdot)) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} \times \mathbb{R}^d$ for $t \in [0, T]$. With the Plancherel equality, Proposition 1.4.1, and Theorem 1.3.1 we obtain

$$\begin{aligned} \|g|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(T, \xi, v)|^2 dv d\xi \\ &\lesssim \int_{B_{\mathbb{R}^d}(0, N)} e^{C(1 + \frac{1}{T} + \sqrt{|\xi|})} \int_0^T \int_{\omega_v} |\hat{g}(t, \xi, v)|^2 dv dt d\xi \\ &= e^{C(1 + \frac{1}{T} + \sqrt{N})} \int_0^T \int_{\omega_v} \|\hat{g}(t, \cdot, v)\|_{L^2(B_{\mathbb{R}^d}(0, N))}^2 dv dt \end{aligned}$$

$$\leq e^{C(1+\frac{1}{T}+\sqrt{N})} \int_0^T \int_{\omega_v} e^{2C'(N+1)} \|g(t, \cdot, v)\|_{L^2(\omega_x)}^2 dv dt.$$

This proves (1.4.15) with, for instance, $C_{\text{obs}} = C + C'$. \square

1.4.3. Construction of the control function. The aim of this section is to prove Theorem 1.1.2. The type of control construction we use was originally performed in [107]. Here we base our construction on the presentations given in [18, section 3.3], [24, section 3], and [103, section 6.2].

PROOF OF THEOREM 1.1.2. We consider, for any $j \in \mathbb{N}$, the space

$$E_j := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^{2d}) : \text{supp}(\hat{f}) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^d}(0, 2^j)} \times \mathbb{R}^d \right\},$$

where the Fourier transform is taken with respect to the variable x only, as in (1.1.10). This space is closed in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Accordingly, let Π_{E_j} denote the projection of $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ onto E_j .

Let $\rho \in \mathbb{R}$ be such that $0 < \rho < \frac{1}{3}$ and set $T_j = C_\rho 2^{-\rho j}$, $j \in \mathbb{N}$, with C_ρ such that $\sum_{j=0}^{\infty} T_j = T/2$. We also define the time sequence $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ by

$$a_0 := 0, \quad a_{j+1} := a_j + 2T_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

We now define a control u for $t \in (0, T)$ as follows

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}_j(t - a_j), & \text{if } t \in (a_j, a_j + T_j), \\ 0, & \text{if } t \in (a_j + T_j, a_{j+1}], \end{cases}$$

where \tilde{u}_j is the control given by Proposition 1.4.6 with

$$(1.4.16) \quad T = T_j, \quad N = 2^j, \quad f_0 = f(a_j).$$

Then, $\Pi_{E_j} f(a_j + T_j) \equiv 0$ and

$$(1.4.17) \quad \|\tilde{u}_j\|_{L^2((a_j, a_j + T_j) \times \omega)} \leq e^{C_{\text{obs}}(1+\frac{1}{T_j}+2^j)} \|f(a_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

We have also that, by the Duhamel formula stated in Proposition 1.2.2,

$$\|f(a_j + T_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq \left(1 + \sqrt{T_j} e^{C(1+\frac{1}{T_j}+2^j)}\right) \|f(a_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

By Proposition 1.2.3 we deduce that

$$\begin{aligned} \|f(a_{j+1})\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} &\leq e^{-\frac{2^{2j}T_j^3}{12}} \|f(a_j + T_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \\ &\leq \left(1 + \sqrt{T_j} e^{C(1+\frac{1}{T_j}+2^j)}\right) e^{-\frac{2^{2j}T_j^3}{12}} \|f(a_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}. \end{aligned}$$

Hence, iterating this inequality, we obtain, for $j \geq 1$,

$$\|f(a_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq e^{-\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})},$$

with

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2^{2k}T_k^3}{12} - \ln \left(1 + \sqrt{T_k} e^{C(1+\frac{1}{T_k}+2^k)}\right) \\ &\geq \frac{2^{2k}T_k^3}{12} - C' \left(1 + \frac{1}{T_k} + 2^k\right) \\ &\geq 2^{k(2-3\rho)} \frac{C_\rho^3}{12} - C' \left(1 + \frac{2^{\rho k}}{C_\rho} + 2^k\right), \end{aligned}$$

using the value given to T_k above. As $0 < \rho < 1/3$, we see that we have

$$(1.4.18) \quad \alpha_k \geq C'' 2^{k(2-3\rho)},$$

for $C'' > 0$ and k sufficiently large, and thus the series $\sum_k \alpha_k$ diverges to $+\infty$ yielding $\|f|_{t=T}\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = 0$, for $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$.

Furthermore, the control u built above belongs to $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})$. In fact by (1.4.17) we have

$$\|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{u}_j\|_{L^2((a_j, a_j+T_j) \times \mathbb{R}^{2d})}^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} e^{C(1+\frac{1}{T_j}+2^j)} \|f(a_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2.$$

We thus find

$$\|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})}^2 \leq \left(e^{C(2+\frac{1}{T_0})} + \sum_{j=1}^{\infty} e^{C(1+\frac{1}{T_j}+2^j) - \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k} \right) \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}^2.$$

Using (1.4.18), we obtain

$$\begin{aligned} C(1 + \frac{1}{T_j} + 2^j) - \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k &\leq C(1 + \frac{1}{T_j} + 2^j) - \alpha_{j-1} \\ &\leq C(1 + \frac{2^{\rho j}}{C_\rho} + 2^j) - C'' 2^{(j-1)(2-3\rho)} \\ &\leq -C''' 2^{j(2-3\rho)} \end{aligned}$$

for $C''' > 0$ and for j sufficiently large, as $0 < \rho < 1/3$. Hence we find that $\|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^{2d})} \leq C \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}$, which concludes the proof. \square

1.5. Proofs of the semigroup and well-posedness properties

1.5.1. Proof of Proposition 1.2.1. We set $\mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d})$, with domain

$$D(\mathcal{L}) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^{2d}); -\xi \cdot \nabla_\eta g(\xi, \eta) + |\eta|^2 g(\xi, \eta) \in L^2(\mathbb{R}^{2d})\},$$

and defined by $\mathcal{L}g = -\xi \cdot \nabla_\eta g + |\eta|^2 g$.

We denote by \mathcal{F} the Fourier transformation in the x, v variables. Observe that $\mathcal{F}D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L})$ and that $\mathcal{L} = \mathcal{F}\mathcal{H}\mathcal{F}^{-1}$. If we prove the well-posedness property of $\partial_t + \mathcal{L}$, we can thus deduce that of $\partial_t + \mathcal{H}$, because of the isometry property of \mathcal{F} on $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. In particular, below, we prove that \mathcal{L} is the generator of a C_0 -semigroup of contraction $\Sigma(t)$ on $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. We thus deduce that \mathcal{H} is the generator of a C_0 -semigroup of contraction $S(t)$ on $L^2(\mathbb{R}^{2d})$, given by $S(t) = \mathcal{F}^{-1}\Sigma(t)\mathcal{F}$.

Let $g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ and assume that $G(t, \xi, \eta)$ is solution to

$$(\partial_t + \mathcal{L})G = 0, \quad G|_{t=0} = g(\xi, \eta).$$

We first proceed heuristically. Introducing $H(t, \xi, \eta) = G(t, \xi, \eta - t\xi)$, we find

$$\partial_t H + |\eta - t\xi|^2 H = 0, \quad H|_{t=0} = g(\xi, \eta),$$

yielding $H(t, \xi, \eta) = g(\xi, \eta) \exp(-\int_0^t |\eta - s\xi|^2 ds)$. The form of G should thus be

$$(1.5.19) \quad G(t, \xi, \eta) = g(\xi, \eta + t\xi) e^{-\int_0^t |\eta + (t-s)\xi|^2 ds} = g(\xi, \eta + t\xi) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds}.$$

We find $G(t, \cdot, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Thus, we set $\Sigma(t) : L^2(\mathbb{R}^{2d}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2d})$ as $(\Sigma(t)g)(\xi, \eta) = G(t, \xi, \eta)$.

LEMMA 1.5.1. *The map $\Sigma(t)$ is a C_0 -semigroup of contraction on $L^2(\mathbb{R}^{2d})$.*

PROOF. Let $g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Considering the formula (1.5.19) we have $\Sigma(0)g = g$, and we write $\Sigma(t)g - g = I_t + J_t$, with

$$\begin{aligned} I_t(\xi, \eta) &= (g(\xi, \eta + t\xi) - g(\xi, \eta))e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds}, \\ J_t(\xi, \eta) &= g(\xi, \eta)(e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds} - 1). \end{aligned}$$

With the Parseval formula we have, with $h(\xi, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-iv \cdot \eta)g(\xi, \eta) d\eta$,

$$\|I_t\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq \|g(\xi, \eta + t\xi) - g(\xi, \eta)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \lesssim \|(e^{it\xi \cdot v} - 1)h(\xi, v)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})},$$

and we find that $\|I_t\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0^+$ by the Lebesgue dominated convergence theorem. We also directly see that $\|J_t\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0^+$ by the same theorem.

Let $t, t' \geq 0$. As we have $(\Sigma(t')g)(\xi, \eta) = g(\xi, \eta + t'\xi) \exp(-\int_0^{t'} |\eta + s\xi|^2 ds)$, we find

$$(\Sigma(t) \circ \Sigma(t')g)(\xi, \eta) = g(\xi, \eta + (t + t')\xi) e^{-\int_0^{t'} |\eta + (s+t)\xi|^2 ds} e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds},$$

and, as $\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds + \int_0^{t'} |\eta + (s+t)\xi|^2 ds = \int_0^{t+t'} |\eta + s\xi|^2 ds$, we conclude that we have the semigroup property $\Sigma(t) \circ \Sigma(t') = \Sigma(t + t')$. Finally, the contraction property on $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ is clear from (1.5.19). \square

We denote by A the generator of $\Sigma(t)$ which is an unbounded operator on $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Here, we use the convention $\Sigma(t) = e^{-tA}$.

LEMMA 1.5.2. *Let $g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. We have $(\Sigma(t)g - g)/t \rightarrow \xi \cdot \nabla_\eta g - |\eta|^2 g$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d})$, as $t \rightarrow 0^+$.*

PROOF. The result follows from the convergence of $(g(\xi, \eta + t\xi) - g(\xi, \eta))/t$ to $\xi \cdot \nabla_\eta g(\xi, \eta)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d})$, as $t \rightarrow 0^+$. This can be proven by writing,

$$\begin{aligned} \langle g(\xi, \eta + t\xi) - g(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta) \rangle &= \langle g(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta - t\xi) - \varphi(\xi, \eta) \rangle \\ &= -t \langle g(\xi, \eta), \xi \cdot \nabla_\eta \varphi(\xi, \eta) \rangle \\ &\quad + t^2 \left\langle g(\xi, \eta), \int_0^1 d_\eta^2 \varphi(\xi, \eta - t\sigma\xi)(\xi, \xi) d\sigma \right\rangle, \end{aligned}$$

for $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$. \square

Consequently, if $g \in D(A)$, that is, if $g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ and $(\Sigma(t)g - g)/t$ converges in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ as $t \rightarrow 0^+$, then $Ag = -\xi \cdot \nabla_\eta g + |\eta|^2 g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. We thus have $D(A) \subset D(\mathcal{L})$, and the operators A and \mathcal{L} coincide on $D(A)$.

PROPOSITION 1.5.3. *We have $D(A) = D(\mathcal{L})$ and thus \mathcal{L} is the generator of the C_0 -semigroup $\Sigma(t)$.*

PROOF. Let $g \in D(\mathcal{L})$. We prove that $g \in D(A)$. By Lemma 1.5.2 we have

$$(1.5.20) \quad (\Sigma(t)g - g)/t \rightarrow \xi \cdot \nabla_\eta g - |\eta|^2 g \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}).$$

We claim that $(\Sigma(t)g - g)/t$ is bounded in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. With (1.5.20), this implies that $(\Sigma(t)g - g)/t$ converges weakly to $\xi \cdot \nabla_\eta g - |\eta|^2 g = -\mathcal{L}g$ in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Then,

$(\Sigma(t)g - g)/t$ converges to $-\mathcal{L}g$ in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$, as its weak convergence is equivalent to its strong convergence by Theorem 1.3 in [129, Section 2.1]. And thus $g \in D(A)$.

We now prove the claim made above. First, we assume that $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ and observe that $M(t, \xi, \eta) = (\Sigma(t)g)(\xi, \eta)$ is smooth. As we have

$$\begin{aligned} \partial_t M(t, \xi, \eta) &= (\xi \cdot \nabla_\eta g(\xi, \eta + t\xi) - |\eta + t\xi|^2 g(\xi, \eta + t\xi)) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds} \\ &= -\mathcal{L}g(\xi, \eta + t\xi) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds}, \end{aligned}$$

writing a first-order Taylor formula gives

$$\begin{aligned} (\Sigma(t)g - g)(\xi, \eta) &= M(t, \xi, \eta) - M(0, \xi, \eta) = t \int_0^1 \partial_t M(\sigma t, \xi, \eta) d\sigma \\ &= -t \int_0^1 \mathcal{L}g(\xi, \eta + t\sigma\xi) e^{-\int_0^{\sigma t} |\eta + s\xi|^2 ds} d\sigma. \end{aligned}$$

We then deduce

$$\|\Sigma(t)g - g\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} \leq t \int_0^1 \|\mathcal{L}g(\xi, \eta + t\sigma\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} d\sigma = t \|\mathcal{L}g\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

This gives the claim, as $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ is dense in $D(\mathcal{L})$, which can be seen by adapting classical arguments (for instance, one can adapt the argument in Theorem 31.5 and Lemma 31.1 in [140]). \square

We finally consider the non-differentiability property of the semigroup $S(t)$. It is equivalent to that of $\Sigma(t)$. For $g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$, we have $(\Sigma(t)g)(\xi, \eta) = G(t, \xi, \eta)$, as given in (1.5.19). If $\Sigma(t)$ were to be differentiable for $t > t_0$, then $\Sigma(t)g$ would be in the domain of the operator \mathcal{L} , by Lemma 2.4.2 in [129]. In the sense of distributions, we find

$$(1.5.21) \quad (-\xi \cdot \nabla_\eta + |\eta|^2)G(t, \xi, \eta) = k(\xi, \eta + t\xi) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds},$$

with $k = (-\xi \cdot \nabla_\eta + |\eta|^2)g$. In fact, we have

$$\begin{aligned} \xi \cdot \nabla_\eta G(t, \xi, \eta) &= (\xi \cdot \nabla_\eta g(\xi, \eta + t\xi) - 2g(\xi, \eta + t\xi) \int_0^t \xi \cdot (\eta + s\xi) ds) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds} \\ &= (\xi \cdot \nabla_\eta g(\xi, \eta + t\xi) - (t|\xi|^2 + 2t\xi \cdot \eta)g(\xi, \eta + t\xi)) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds}, \end{aligned}$$

and thus

$$\begin{aligned} (-\xi \cdot \nabla_\eta + |\eta|^2)G(t, \xi, \eta) &= (-\xi \cdot \nabla_\eta g(\xi, \eta + t\xi) + |\eta + t\xi|^2 g(\xi, \eta + t\xi)) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds}, \end{aligned}$$

which gives (1.5.21).

If we choose $g \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ lacking smoothness be such that $k \notin L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2d})$, it leads to $(-\xi \cdot \nabla_\eta + |\eta|^2)G(t, \xi, \eta) \notin L^2(\mathbb{R}^{2d})$, independently of the value of $t > 0$.

1.5.2. Proof of Proposition 1.2.2. The first case of the proof, as well as the Duhamel form (1.2.1) of the solution in this case, follows for instance from [45, Lemma 4.1.1 and Proposition 4.1.6].

We now consider the second case, that is $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ and $F \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$. We set

$$f_1(t) = S(t)f_0, \quad f_2(t) = \int_0^t S(t-s)F(s) ds.$$

We have $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$ with $f_1|_{t=0} = f_0$ and $f_2|_{t=0} = 0$.

We start with the following result.

LEMMA 1.5.4. *Let $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(0, T)$. We have $\int_0^\infty \chi(t)f_j(t) dt \in D(\mathcal{A})$, $j = 1, 2$, and moreover*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \int_0^T \chi(t)f_1(t) dt &= \int_0^T \chi'(t)f_1(t) dt, \\ \mathcal{A} \int_0^T \chi(t)f_2(t) dt &= \int_0^T (\chi'(t)f_2(t) + \chi(t)F(t)) dt. \end{aligned}$$

PROOF. For $h > 0$ we compute

$$F_h = h^{-1}(S(h) - \text{Id}) \int_0^T \chi(t)f_1(t) dt = h^{-1} \int_0^T \chi(t)(S(t+h) - S(t))f_0 dt.$$

Observe that, for $0 < h < 1$,

$$\int_0^T \chi(t)S(t+h)f_0 dt = \int_h^{T+h} \chi(t-h)S(t)f_0 dt = \int_0^{T+1} \chi(t-h)S(t)f_0 dt,$$

because of the support of χ . We thus obtain

$$F_h = h^{-1} \int_0^{T+1} (\chi(t-h) - \chi(t))f_1(t) dt.$$

With the continuity of $t \mapsto f_1(t)$, in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$, the Lebesgue dominated convergence theorem yields,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F_h = - \int_0^{T+1} \chi'(t)f_1(t) dt = - \int_0^T \chi'(t)f_1(t) dt.$$

Consequently, by the very definition of the generator of a semigroup (see e.g. (1.2) and (1.3) in [129, Chapter 1]⁵), $\int_0^T \chi(t)f_1(t) dt \in D(\mathcal{A})$ and $\mathcal{A} \int_0^T \chi(t)f_1(t) dt = \int_0^T \chi'(t)f_1(t) dt$.

We now turn to the term $f_2(t)$. Similarly, for $h > 0$, we set

$$\begin{aligned} F_h &= h^{-1}(S(h) - \text{Id}) \int_0^T \chi(t)f_2(t) dt \\ &= h^{-1} \int_0^T \chi(t) \int_0^t (S(t+h-s) - S(t-s))F(s) ds dt. \end{aligned}$$

Writing

$$\int_0^T \chi(t) \int_0^t S(t+h-s)F(s) ds dt = \int_0^{T+1} \chi(t-h) \int_0^{t-h} S(t-s)F(s) ds dt,$$

we obtain

$$F_h = h^{-1} \int_0^{T+1} (\chi(t-h) - \chi(t))f_2(t) dt$$

5. Observe here that we consider $S(t) = e^{-t\mathcal{A}}$ whereas one has $e^{+t\mathcal{A}}$ in [129].

$$-h^{-1} \int_0^{T+1} \chi(t-h) \int_{t-h}^t S(t-s)F(s) ds dt.$$

With the Lebesgue dominated convergence theorem we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} F_h &= - \int_0^{T+1} (\chi'(t)f_2(t) + \chi(t)F(t)) dt \\ &= - \int_0^T (\chi'(t)f_2(t) + \chi(t)F(t)) dt. \end{aligned}$$

Consequently, $\int_0^T \chi(t)f_2(t) dt \in D(\mathcal{K})$ and

$$\mathcal{K} \int_0^T \chi(t)f_2(t) dt = \int_0^T (\chi'(t)f_2(t) + \chi(t)F(t)) dt,$$

which concludes the proof. \square

Let $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(0, T)$ and $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$. With Lemma 1.5.4, we find

$$\left\langle \mathcal{K} \int_0^T \chi(t)f_1(t) dt, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})} = \left\langle \int_0^T \chi'(t)f_1(t) dt, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})},$$

yielding

$$\int_0^T \left\langle \chi(t)f_1(t), {}^t\mathcal{K}\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})} dt = \int_0^T \left\langle \chi'(t)f_1(t), \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2d}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})} dt,$$

and thus

$$\left\langle f_1, {}^t\mathcal{K}\chi(t)\varphi(x, v) \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{Q}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Q})} = \left\langle f_1, \chi'(t)\varphi(x, v) \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{Q}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Q})},$$

with $\mathcal{Q} = (0, T) \times \mathbb{R}^{2d}$. This implies that f_1 satisfies $(\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v)f_1 = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$. Similarly we find

$$\begin{aligned} \left\langle f_2, {}^t\mathcal{K}\chi(t)\varphi(x, v) \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{Q}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Q})} &= \left\langle f_2, \chi'(t)\varphi(x, v) \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{Q}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Q})} \\ &\quad + \left\langle F, \chi(t)\varphi(x, v) \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{Q}), \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{Q})}, \end{aligned}$$

yielding $(\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v)f_2 = F$ in $\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$. We have thus obtained the existence part of the result with a solution given by the mild solution (1.2.1).

To prove uniqueness, as the equation is linear, it is sufficient to assume that $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$ is such that

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v)f = 0 \text{ in } \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^{2d}), \quad f|_{t=0} = 0,$$

and to prove that $f = 0$. This function is only defined for $0 \leq t \leq T$. We set

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0, \\ f(t) & \text{if } 0 \leq t \leq T, \\ S(t-T)f(T) & \text{if } T < t. \end{cases}$$

We have $w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$ and we have, using the above argument,

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v)w = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d}).$$

Next, we choose $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ with $\text{supp}(\chi) \subset [-1, 1]$ and such that $\int_{\mathbb{R}} \chi(t) dt = 1$.

We set $w_\varepsilon = w *^t \chi_\varepsilon$ (convolution in time) with $\chi_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \chi(t/\varepsilon)$. We have

$$(1.5.22) \quad (\partial_t + v \cdot \nabla_x - \Delta_v) w_\varepsilon = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d}),$$

and $\text{supp}(w_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}^{2d}$ by the support theorem. We have $w_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^{2d}))$ and thus using (1.5.22) we find $w_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; D(\mathcal{A}))$ and the Kolmogorov equation (1.5.22) holds in the sense of functions. By the uniqueness part of the first item of the proposition we find that w_ε vanishes. Since $\chi_\varepsilon \rightarrow \delta$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ we finally find that w also vanishes indentially. This gives the uniqueness result for the second item of the proposition.

1.5.3. Proof of Proposition 1.2.3. We denote by \mathcal{F} the Fourier transformation in the x, v variables. We set $g = \mathcal{F} f_0$ and $G(t) = \mathcal{F} f = \mathcal{F}(S(t) f_0)$.

The proof of Proposition 1.2.1 gives by (1.5.19)

$$G(t, \xi, \eta) = g(\xi, \eta + t\xi) e^{-\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds}.$$

Observing that $\int_0^t |\eta + s\xi|^2 ds = t(|\eta + t\xi/2|^2 + t^2|\xi|^2/12)$ we find

$$\|G(t, \xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq e^{-t^3|\xi|^2/6} \int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi, \eta + t\xi)|^2 d\eta = e^{-t^3|\xi|^2/6} \|g(\xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

which yields the result by the Parseval formula.

On the controllability of the 2-D Vlasov-Stokes system

KEYWORDS: Vlasov-Stokes system; kinetic theory ; kinetic-fluid model; controllability; return method. ¹

2.1. Introduction

We consider the Vlasov-Stokes system in the 2-dimensional torus $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, which writes, for $T > 0$ and $\omega \subset \mathbb{T}^2$,

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \lambda \operatorname{div}_v [(U - v)f] = 1_\omega(x)G, & (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ -\Delta_x U + \nabla_x p = j_f, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x U(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} U(t, x) dx = 0, & t \in (0, T), \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

where $\lambda > 0$ is a friction coefficient and

$$(2.1.2) \quad j_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} v f(t, x, v) dv.$$

This is a control system in which the state is the distribution function $f(t, x, v)$ and the control is the source term $1_\omega(x)G(t, x, v)$, located in $[0, T] \times \omega \times \mathbb{R}^2$.

The Vlasov-Stokes system studied in this paper is an adaptation to the case of the 2-dimensional torus of the system obtained by P.E. Jabin and B. Perthame in [88]. System (2.1.1) is a kinetic-fluid model describing the behaviour of a large cloud of particles, represented by the distribution function $f(t, x, v)$, interacting with an incompressible fluid, whose velocity field is given by $U(t, x)$, under the hypothesis that the effects of convection are negligible. The quantity $f(t, x, v) dx dv$ can be interpreted as the number of particles at time t whose position is close to x and whose velocity is close to v . This model is especially convenient when describing sprays and aerosols, bubbly flows or suspension and sedimentation phenomena. This system is also important in biological applications, such as the transport in the respiratory tract (see Section 2.1.2.2 for more details).

2.1.1. Main result. We are interested in the controllability properties of system (2.1.1), by means of an internal control. The controllability problem that we want to solve is the following. Given f_0 and f_1 in a suitable function space and

1. Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'une publication à paraître dans *Communications in Mathematical Sciences* (cf. [125]).

given $T > 0$, is it possible to find a control G steering the solution of (2.1.1) from f_0 to f_1 , in time T ? In other words, we want to find G such that

$$(2.1.3) \quad f(T, x, v) = f_1(x, v), \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Let us observe that a natural constraint regarding the control G is in order. Indeed, since the Vlasov-Stokes system preserves the total mass when $G \equiv 0$, i.e.,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) \, dx \, dv = \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dx \, dv, \quad \forall t \in [0, T],$$

we shall prescribe the condition

$$\int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} G(t, x, v) \, dx \, dv = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

More precisely, we obtain the following controllability result.

THEOREM 2.1.1. *Let $T > 0$, $\gamma > 2$, $\lambda = 1$ and let ω be an arbitrary non empty open subset of \mathbb{T}^2 . There exists $\epsilon > 0$ such that for every $f_0, f_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ satisfying that*

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dx \, dv &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, v) \, dx \, dv, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v f_0(x, v) \, dx \, dv &= \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v f_1(x, v) \, dx \, dv = 0, \end{aligned}$$

and that, for $i = 0, 1$,

$$(2.1.5) \quad \|f_i\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_i\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \leq \epsilon,$$

$$(2.1.6) \quad \exists \kappa > 0, \quad (|\nabla_x f_i| + |\nabla_v f_i|)(x, v) \leq \frac{\kappa}{(1 + |v|)^{\gamma+1}}, \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

there exists a control $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ such that the solution of (2.1.1) with $f|_{t=0} = f_0$ exists, is unique and satisfies (2.1.3).

REMARK 2.1.2. *Condition (2.1.4) in the previous statement can be seen as a natural compatibility condition needed for the well-posedness of the Stokes system with sources j_{f_0} and j_{f_1} .*

2.1.2. Previous work.

2.1.2.1. *The controllability of kinetic equations.* There exist some results on the controllability of nonlinear kinetic equations. The first one was obtained by O. Glass for the Vlasov-Poisson system on the torus (see [70]). The strategy of this work consists on the construction of a reference solution, in the spirit of the return method introduced by J.-M. Coron (see Section 2.1.3.2 below). This allows to conclude the existence and uniqueness of a controlled solution by means of the Leray-Schauder theorem.

The strategy of [70] permits to obtain two types of results:

- In dimension 2, with arbitrary control region, one can obtain a local controllability result, i.e., a small-data result.
- In any dimension and with a geometric assumption, precisely that the control region $\omega \subset \mathbb{T}^n$ contains a hyperplane of \mathbb{R}^n by the canonical surjection, one can obtain a global exact controllability result, i.e., an arbitrary-data result. However, the use of the invariant scaling of the Vlasov-Poisson system is crucial in this case.

This strategy was later extended in [72] by O. Glass and D. Han-Kwan to the Vlasov-Poisson system under external and Lorentz forces. The authors obtain both local and global exact controllability results in the case of bounded external forces, which requires some new ideas to construct the reference trajectories. Precisely, the authors exploit the fact that the dynamics under the external force and without it are similar in small time. In the case of Lorentz forces, a precise knowledge of the magnetic field and a geometric control condition in the spirit of [11] allow to obtain a local exact controllability result. The functional framework of [70, 72] is the one given by the classical solution of the Vlasov-Poisson system, that is, some appropriate Hölder spaces.

A remarkably different strategy has been developed by [73] in the context of the Vlasov-Maxwell system. In this case, the authors combine the classical strategy described previously with some controllability results for the Maxwell system, under the geometric control condition of [11]. They also obtain a local result for ω containing a hyperplane, using the convergence towards the Vlasov-Poisson system under a certain regime.

2.1.2.2. *A short review on the Vlasov-Stokes system.* The Vlasov-Stokes system has been derived from the dynamics of a system of particles in a fluid by P. E Jabin and B. Perthame in [88]. The system derived in this result, using the method of reflections and the dipole approximation, is set in the whole phase space $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. In this setting, some regularity results can be found in [66]. The limit when $\lambda \rightarrow \infty$ has been studied in [90, 91]. Moreover, a major feature emphasised in these works is that friction plays a very important role in the dynamics of the Vlasov-Stokes system. More precisely, friction entails the dissipation of the kinetic energy. Consequently, as it has been proven by P. E. Jabin in [89], when $t \rightarrow \infty$, we recover a macroscopic limit of the form $\bar{\rho}(x)\delta_{v=0}$. On the other hand, very little information concerning the density $\bar{\rho}$ is known.

The non-stationary Vlasov-Stokes system on a domain with boundary has been considered by K. Hamdache in [79]. The author gives a well-posedness result in Sobolev spaces in the case of Dirichlet boundary condition for the velocity field and specular reflexion boundary conditions for the distribution function.

A derivation of a model considering also the effects of convection has been obtained by L. Desvillettes, F. Golse and V. Ricci in [59].

For more concrete biological models, let us cite [32] and the references therein.

2.1.3. Strategy of the proof.

2.1.3.1. *Obstructions to controllability.* Since Theorem 2.1.1 is of local nature around the steady state $(f, U, p) = (0, 0, 0)$, a first step to achieve its proof could be the use of the linear test (see [50]). Following the classical scheme, the controllability of the linearised system around the trivial trajectory and the classical inverse mapping theorem between proper functional spaces would imply the controllability of the nonlinear system (2.1.1).

Indeed, the formal linearised equation around the trajectory $(f, U, p) = (0, 0, 0)$ is

$$(2.1.7) \quad \begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F - v \cdot \nabla_v F - 2F = 1_\omega(x)\tilde{G}, \\ F(0, x, v) = f_0(x, v), \end{cases}$$

which is a transport equation with friction. By the method of characteristics, we can give an explicit solution of (2.1.7), which writes

$$(2.1.8) \quad F(t, x, v) = e^{2t} f_0(x + (1 - e^t)v, e^t v) + \int_0^t e^{2(t-s)} (1_\omega \tilde{G})(s, x + (1 - e^{t-s})v, e^{t-s}v) ds.$$

As pointed out in [70], there exist two obstructions for controllability, which are

Small velocities: A certain $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ can have a "good direction" with respect to the control region ω , in the sense that $x + (1 - e^{-t})v$ meets ω at some time. However, if $|v|$ is not sufficiently large, the trajectory of the characteristic beginning at this point would possibly not reach ω before a fixed time. In our case, the effects of friction could enhance this difficulty.

Large velocities: The obstruction concerning large velocities is of geometrical nature. There exist some "bad directions" with respect to ω , in the sense that a characteristic curve parting from $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ would never reach ω , no matter how large $|v|$ is.

As a result of this, and considering again equation (2.1.8), we deduce that the linearised system is not controllable in general.

2.1.3.2. *The return method.* In order to circumvent these difficulties, we use the return method, due to J.-M. Coron.

The idea of this method, in the case under study, is to construct a reference trajectory $(\bar{f}, \bar{U}, \bar{p})$ starting from $(0, 0, 0)$ and coming back to $(0, 0, 0)$ at some fixed time in such a way the linearised system around it is controllable. This method allows to avoid the problems discussed in the previous section.

We refer to [50, 71] for presentations and examples on the return method.

2.1.3.3. *Strategy of the proof of Theorem 2.1.1.* The strategy of this work follows very closely the scheme of [70, 72]. More precisely, it relies on two ingredients.

Step 1: We build a reference solution $(\bar{f}, \bar{U}, \bar{p})$ of system (2.1.1) with a control \bar{G} , located in ω , starting from $(0, 0, 0)$ and arriving at $(0, 0, 0)$ outside ω at time $T > 0$ and such that the characteristics associated to the field $-v + \bar{U}$ meet ω before $T > 0$.

Step 2: We build a solution (f, U, p) close to $(\bar{f}, \bar{U}, \bar{p})$ parting from (f_0, U_0, p_0) and arriving at $(0, 0, 0)$ outside ω at time $T > 0$. This can be done by means of a fixed-point argument involving an absorption operator in the control region.

Furthermore, let us note that in the proof of Theorem 2.1.1 we can assume that

$$(2.1.9) \quad f_1(x, v) = 0, \quad \forall (x, v) \in (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2.$$

To justify this assumption, we observe that, if f is solution of (2.1.1), then the functions

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, x, v) &:= f(T - t, x, -v), & \tilde{G}(t, x, v) &:= G(T - t, x, -v), \\ \tilde{U}(t, x) &:= U(T - t, x), & \tilde{p}(t, x) &:= p(T - t, x), \end{aligned}$$

for every $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, satisfy the backwards Vlasov-Stokes system (2.1.10)

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f} + v \cdot \nabla_x \tilde{f} + \lambda \operatorname{div}_v [(\tilde{U} + v)\tilde{f}] = 1_\omega(x)\tilde{G}, & (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ -\Delta_x \tilde{U} + \nabla_x \tilde{p} = -j_{\tilde{f}}, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x \tilde{U}(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{U}(t, x) \, dx = 0, & t \in [0, T], \\ \tilde{f}(T, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

Consequently, given f_0, f_1 as in Theorem 2.1.1, it is sufficient to consider

- f_0 as initial datum and \hat{f}_1 satisfying (2.1.9) as a final state,
- $f_1(x, -v)$ as initial datum and again \hat{f}_1 satisfying (2.1.9) as a final state.

If we are able to solve these problems, a simple composition of them gives a solution with initial datum f_0 and final state f_1 . We observe, as it will be clear from the proofs, that (2.1.10) can be treated like the forward problem without significant modifications. As a consequence, we shall only treat specifically the forward problem with final state satisfying (2.1.9).

2.1.3.4. *Notation.* Let $T > 0$. We denote $Q_T := [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ and $\Omega_T := [0, T] \times \mathbb{T}^2$. If Ω is a domain, for any $\sigma \in (0, 1)$, $\mathcal{C}_b^{0, \sigma}(\Omega)$ denotes the space of bounded σ -Hölder functions, equipped with the norm

$$(2.1.11) \quad \|f\|_{\mathcal{C}_b^{0, \sigma}(\Omega)} := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{(t, x, v) \neq (t', x', v')} \frac{|f(t, x, v) - f(t', x', v')|}{|(t, x, v) - (t', x', v')|^\sigma}.$$

We shall also use the Sobolev spaces $W^{m, p}(\Omega)$, with $m \in \mathbb{N}^*$ and $p \in [1, \infty]$ (see the Appendix B for more details). If X is a Banach space, we will sometimes use, for simplicity, the notations $L_t^p X_x$ or $\mathcal{C}_t^0 X_x$ to refer to $L^p(0, T; X)$ or $\mathcal{C}^0([0, T]; X)$.

For $x \in \mathbb{T}^2$ and $r > 0$, we denote by $B(x, r)$ the open ball in \mathbb{T}^2 with centre x and radius r . Analogously, $S(x, r) = \partial B(x, r)$. We denote by $B_{\mathbb{R}^2}$ and $B_{\mathbb{S}^1}$ the balls in different settings. We will also admit that $\int_{\mathbb{T}^2} dx = 1$ without specifying the normalisation.

In dimension two, given a vector field $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, with $V(x) = (V_1, V_2)(x)$ we recall the usual operator

$$\operatorname{curl} V(x) := \partial_1 V_2(x) - \partial_2 V_1(x).$$

Given a function $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, we recall

$$\nabla^\perp \phi(x) := \begin{pmatrix} -\partial_2 \phi(x) \\ \partial_1 \phi(x) \end{pmatrix}.$$

2.1.3.5. *Structure of the article.* In Section 2.2 we set some features of the characteristic equations. In Section 2.3 we construct the reference trajectory, treating separately the large velocities and the low ones. In Section 2.4 we define the fixed-point operator and we show that it has a fixed point. We prove next that this fixed point is the unique solution of system (2.1.1) within a certain class. In Section 2.5 we show that this solution satisfies the controllability property (2.1.3), which ends the proof of Theorem 2.1.1.

2.2. Some remarks on the characteristic equations

Let be given a fixed $U(t, x)$. Let $s, t \in [0, T]$, $(x, v) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. We denote by $(X(t, s, x, v), V(t, s, x, v))$ the characteristics associated with the field $-v + U(t, x)$,

i.e., the solution of the system

$$(2.2.12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(t) \\ -V(t) + U(t, X) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} \Big|_{t=s} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \end{cases}$$

We observe that if $U \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$, system (2.2.12) has a unique solution, thanks to the Cauchy-Lipschitz theorem. Moreover, one has the explicit formulae

$$(2.2.13) \quad \begin{cases} X(t, s, x, v) = x + (1 - e^{-t+s})v + \int_s^t \int_s^{t'} e^{\tau-t'} U(\tau, X(\tau, s, x, v)) \, d\tau \, dt', \\ V(t, s, x, v) = e^{-t+s}v + \int_s^t e^{\tau-t} U(\tau, X(\tau, s, x, v)) \, d\tau. \end{cases}$$

Using the method of characteristics, given an initial datum $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, the solution of the transport equation with friction

$$(2.2.14) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(U - v)f] = 0, & (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

has the explicit solution

$$(2.2.15) \quad f(t, x, v) = e^{2t} f_0((X, V)(0, t, x, v)),$$

where (X, V) are given by (2.2.13).

The following result is an adaptation of [70, Lemma 1, p. 337] to the case with friction. It will be used to obtain some Hölder estimates in Section 4.

LEMMA 2.2.1. *Let $U \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$. Then, the characteristics associated to the field $-v + U$ satisfy that for some $C = C(T, \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}) > 0$,*

$$\begin{aligned} & |(X, V)(t, s, x, v) - (X, V)(t', s', x', v')| \\ & \leq C(1 + |v|) |(t, s, x, v) - (t', s', x', v')|, \end{aligned}$$

whenever $(t, s, x, v), (t', s', x', v') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, with $|v - v'| < 1$.

PROOF. We shall divide the proof in four cases.

Step 1: Assume $s = s', x = x', v = v'$. We can suppose that $t' \leq t$. Then, using (2.2.13), we write

$$\begin{aligned} & V(t, s, x, v) - V(t', s, x, v) \\ & = (e^{-t} - e^{-t'})e^s v + \int_s^t e^{\tau-t} U(\tau, X(\tau, s, x, v)) \, d\tau \\ & \quad - \int_s^{t'} e^{\tau-t'} U(\tau, X(\tau, s, x, v)) \, d\tau \\ & = (e^{-t} - e^{-t'})e^s v + \int_s^t e^{\tau} (e^{-t} - e^{-t'}) U(\tau, X(\tau, s, x, v)) \, d\tau \\ & \quad - \int_{t'}^t e^{\tau-t'} U(\tau, X(\tau, s, x, v)) \, d\tau. \end{aligned}$$

This yields,

$$\begin{aligned} & |V(t, s, x, v) - V(t', s, x, v)| \\ & \leq |e^{-t} - e^{-t'}| \left(e^T |v| + T e^T \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}} \right) + |t - t'| e^T \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}} \end{aligned}$$

$$\leq C(T)(1 + |v|)(1 + \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}})|t - t'|.$$

The same argument gives, through (2.2.13),

$$|X(t', s, x, v) - X(t, s, x, v)| \leq C(T)(1 + |v|)(1 + \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}})|t - t'|.$$

Step 2: Assume $t = t'$, $s = s'$. Then, again by (2.2.13), we have

$$\begin{aligned} X(t, s, x, v) - X(t, s, x', v') &= (x - x') + (1 - e^{-t+s})(v - v') \\ &\quad + \int_s^t \int_s^\sigma e^{\sigma-\tau} (U(\tau, X(\tau, s, x, v)) - U(\tau, X(\tau, s, x', v'))) d\tau d\sigma, \end{aligned}$$

which gives, since U is Lipschitz in x ,

$$\begin{aligned} |X(t, s, x, v) - X(t, s, x', v')| &\leq (e^T + 1)(|x - x'| + |v - v'|) \\ &\quad + Te^T \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}} \int_s^t |X(\tau, s, x, v) - X(\tau, s, x', v')| d\tau. \end{aligned}$$

Then, by Gronwall's lemma, we obtain

$$\begin{aligned} |X(t, s, x, v) - X(t, s, x', v')| &\leq (e^T + 1)(|x - x'| + |v - v'|) (1 + Te^T \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}) Te^{T^2 e^T \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}} \\ &\leq C(T)(|x - x'| + |v - v'|) (1 + \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}) e^{T^2 e^T \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}}. \end{aligned}$$

This allows to obtain an analogue estimate for V .

Step 3: Assume that $t = t'$, $x = x'$, $v = v'$. We observe that

$$(X, V)(t, s', x, v) = (X, V)(t, s, X(s, s', x, v), V(s, s', x, v)).$$

Thus, Step 2 allows to write

$$\begin{aligned} |(X, V)(t, s, x, v) - (X, V)(t, s', x, v)| &\leq C(T)(|x - X(s, s', x, v)| + |v - V(s, s', x, v)|) (1 + \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}) e^{T^2 e^T \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}}. \end{aligned}$$

On the other hand, putting $(x, v) = (X, V)(s', s', x, v)$, Step 1 allows to write

$$\begin{aligned} |x - X(s, s', x, v)| + |v - V(s, s', x, v)| &\leq |s - s'| C(T)(1 + |v|)(1 + \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}), \end{aligned}$$

which together with the previous inequality gives

$$\begin{aligned} |(X, V)(t, s, x, v) - (X, V)(t, s', x, v)| &\leq C(T)(1 + |v|)(1 + \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}})^2 e^{T^2 e^T \|U\|} |s - s'|. \end{aligned}$$

Step 4: In the general case, we write

$$\begin{aligned} (X, V)(t, s, x, v) - (X, V)(t', s', x', v') &= (X, V)(t, s, x, v) - (X, V)(t, s', x, v) \\ &\quad + (X, V)(t, s', x, v) - (X, V)(t, s', x', v') \\ &\quad + (X, V)(t, s', x', v') - (X, V)(t', s', x', v'), \end{aligned}$$

which allows to use the previous estimates to conclude. \square

2.3. Construction of a reference trajectory

2.3.1. Large velocities. The key result for the treatment of large velocities is the following one, which is an adaptation of [70, Proposition 1, p. 340] to the friction case. We will need some results on harmonic approximation, gathered in the Appendix A.

PROPOSITION 2.3.1. *Let $\tau > 0$. Given $x_0 \in \mathbb{T}^2$ and $r_0 > 0$ a sufficiently small number, there exist $U \in \mathcal{C}^\infty([0, \tau] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ and $\underline{m} > 0$ such that*

$$(2.3.16) \quad \operatorname{curl}_x U(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, \tau] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \overline{B}(x_0, r_0/10)),$$

$$(2.3.17) \quad \operatorname{supp} U \subset (0, \tau) \times \mathbb{T}^2,$$

$$(2.3.18) \quad \int_{\mathbb{T}^2} U(t, x) \, dx = 0, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Moreover, the characteristics (X, V) associated to the field $-v + U$ satisfy that, for every $m \geq \underline{m}$,

$$(2.3.19) \quad \begin{aligned} & \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \text{ with } |v| \geq m, \exists t \in \left(\frac{\tau}{4}, \frac{3\tau}{4}\right) \text{ such that} \\ & X(t, 0, x, v) \in B\left(x_0, \frac{r_0}{4}\right) \text{ and } |V(t, 0, x, v)| \geq \frac{m}{2e^\tau}. \end{aligned}$$

Following O. Glass (see [70]), we characterise the bad directions in the following sense.

DEFINITION 2.3.2 (Bad directions). *Given $x_0 \in \mathbb{T}^2$ and $r_0 > 0$ a small number, $e \in \mathbb{S}^1$ is a bad direction if*

$$\{(x + te); t \in \mathbb{R}^+\} \cap B(x_0, r_0/4) = \emptyset,$$

in the sense of \mathbb{T}^2 .

REMARK 2.3.3. *It can be shown, thanks to Bézout's theorem, that for any $x_0 \in \mathbb{T}^2$ and $r_0 > 0$ small, there exists only a finite number of such bad directions, namely $\{e_1, \dots, e_N\}$ (see [70, Appendix A, p. 373]).*

PROOF OF PROPOSITION 2.3.1. Given $\tau > 0$ and $N \in \mathbb{N}^*$, the number of bad directions, let us define

$$(2.3.20) \quad t_j := \frac{\tau}{4} + \frac{j\tau}{2(N+1)}, \quad \forall j \in \left\{i + \frac{k}{4}; i = 0, \dots, N, k = 0, 1, 2, 3\right\}.$$

We consider

$$(2.3.21) \quad \eta \in \mathcal{C}_c^\infty(0, 1) \text{ such that } 0 \leq \eta \leq 1, \text{ and } \int_0^1 \eta(t) \, dt = 1.$$

Let $A, \nu > 0$ so that

$$(2.3.22) \quad \nu < \frac{\tau}{8(N+1)}, \quad A > e^{\frac{\tau}{8(N+1)}} \left(\frac{12(N+1)}{\tau} + 2 + \frac{\tau}{4(N+1)} \right).$$

Let $\epsilon > 0$ to be chosen later on and set, according to Proposition A.1.2, the following vector field

$$(2.3.23) \quad \begin{cases} U(t, x) = \frac{A}{\nu} \eta \left(\frac{t-t_{i+\frac{1}{4}}}{\nu} \right) \nabla^\perp \theta^i(x), & (t, x) \in [t_{i+\frac{1}{4}}, t_{i+\frac{1}{2}}] \times \mathbb{T}^2, \\ U(t, x) = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

With this definition, we readily have (2.3.16) and (2.3.17), using (A.1.2) and (2.3.21). Condition (2.3.18) follows from the definition of U above. We have to show that (2.3.19) is satisfied with this construction.

To prove the second point of (2.3.19), (2.2.13) yields

$$\begin{aligned} |V(t, 0, x, v)| &\geq e^{-t}|v| - \tau \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0} \\ &\geq e^{-\tau} m - \tau \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0} \geq e^{-\tau} \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

provided that m is large enough.

To show the first part of (2.3.19), we distinguish several cases, according to $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. More precisely, if $e = \frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^1$, we shall show that

- (1) if $x \in \mathbb{T}^2$ and $e \in \mathbb{S}^1 \setminus \{e_1, \dots, e_N\}$, with $|v|$ large enough, then (2.3.19) follows by comparison with the free transport without friction,
- (2) if $x \in B(x_0, \frac{r_0}{5}) + \mathbb{R}e_i$ and $e \in B_{\mathbb{S}^1}(e_i; \epsilon_1)$, for some $i \in \{1, \dots, N\}$ and $\epsilon_1 > 0$, then (2.3.19) still holds if $|v|$ is large enough,
- (3) if $x \in \mathbb{T}^2$, $e \in B_{\mathbb{S}^1}(e_i; \epsilon_2)$ for some $i \in \{1, \dots, N\}$ and $\epsilon_2 > 0$ small enough, then for $|v|$ large enough, we shall deduce that $(X, V)(\sigma, 0, x, v)$, with some $\sigma \in [t_i, t_{i+\frac{3}{4}}]$, satisfies the hypotheses of the case (2).

Let us now treat in detail the three cases below.

First case: Let $e \in \mathbb{S}^1 \setminus \{e_1, \dots, e_N\}$. Since e is not a bad direction, from Definition 2.3.2, there exists $m > 0$ such that if $|v| \geq m$, then,

$$x + t|v|e \in B\left(x_0, \frac{r_0}{4}\right),$$

for a certain $t \in [t_0, t_1]$. In particular, $\exists t_{trans} \in [t_0, t_1]$ such that

$$(2.3.24) \quad x + t_{trans}(1+m)e \in B\left(x_0, \frac{r_0}{4}\right).$$

We shall prove next that, by augmenting the minimal speed required, we can conclude in the friction case. Indeed, consider

$$m_0 := \frac{t_1(1+m)}{1-e^{-t_1}}.$$

and for any $v^b \in \mathbb{R}^2$ with $|v^b| \geq m_0$, set the function

$$t \mapsto f_b(t) := (1-e^{-t})|v^b|,$$

which is continuous from \mathbb{R}^+ to \mathbb{R}^+ . Since $f_b(0) = 0$ and $f_b(t_1) \geq t_1(1+m)$, by the intermediate value theorem, $\exists t^* \in (0, t_1)$ such that $f_b(t^*) = t_{trans}(1+m)$. Whence, by (2.3.24),

$$(2.3.25) \quad x + (1-e^{-t^*})|v^b|e = x + f_b(t^*)e = x + t_{trans}(1+m)e \in B\left(x_0, \frac{r_0}{4}\right).$$

This shows (2.3.19) in this case, since $U(t, x) = 0$ for $t \in [t_0, t_1]$, and thus, $X(t^*, 0, x, v) = x + (1-e^{-t^*})v$.

Second case: Let us suppose that $x \in B(x_0, \frac{r_0}{5}) + \mathbb{R}e_i$ for some $i \in \{1, \dots, N\}$. Let $e \in \mathcal{V}_1(e_i) := B_{\mathbb{S}^1}(e_i; \epsilon_1)$. If $\epsilon_1 > 0$ is small enough and $|v| \geq m_1$ is large enough, then there exists $0 < s \leq t \leq \frac{C}{|v|}$, for some constant $C > 0$, independent of $(x, e) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$, such that

$$x + (1 - e^{-t+s})|v|e \in B\left(x_0, \frac{9r_0}{40}\right).$$

To justify this, we point out that this holds for the free transport (see [70, p.375]), which implies, by a similar argument as before, that this also holds in the friction case. Whence, from (2.2.13) and for any $s', s'' \in [0, \tau]$,

$$|X(s'', s', x, v) - x - (1 - e^{-s'+s''})|v| \leq C(T, \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0})|s' - s''| = O\left(\frac{1}{m_1}\right).$$

Then, if m_1 is large enough, this entails in particular

$$X(s, t_i, x, v) \in B\left(x_0, \frac{r_0}{4}\right), \text{ for some } s \in [t_i, t_{i+1}].$$

Third case: Let $x \in \mathbb{T}^2$, $|v| \geq m_2$, large enough. Let $e \in \mathcal{V}_2(e_i) := B_{\mathbb{S}^1}(e_i; \epsilon_2)$, for some $i \in \{1, \dots, N\}$ and $\epsilon_2 > 0$ small enough. We have to show that $\exists t \in [t_i, t_{i+\frac{3}{4}}]$ such that

$$(2.3.26) \quad X(t, t_i, x, v) \in B\left(x_0, \frac{r_0}{5}\right) + \mathbb{R}e_i,$$

$$(2.3.27) \quad \frac{V(t, t_i, x, v)}{|V(t, t_i, x, v)|} \in B_{\mathbb{S}^1}(e_i; \epsilon_1), \text{ with } |V(t, t_i, x, v)| \geq m_1.$$

Then, we can use the analysis of the second case to conclude.

We prove first (2.3.26) by means of the orthogonal projection on the direction e_i^\perp . Let

$$\begin{aligned} P_{e_i^\perp} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto P_{e_i^\perp}(v) := \langle v, e_i^\perp \rangle. \end{aligned}$$

We distinguish two cases.

Firstly, let $v \in \mathbb{R}^2$ such that $|P_{e_i^\perp}(v)| > \frac{6(N+1)}{\tau}$. Then, for a large enough speed $|v| \geq m_2$, (2.3.26) is satisfied, as follows by comparison with the free transport case.

Secondly, if $|P_{e_i^\perp}(v)| < \frac{6(N+1)}{\tau}$, let us suppose that $X(t, t_i, x, v)$ does not meet $B(x_0, r_0/5) + \mathbb{R}e_i$ during $[t_{i+\frac{1}{4}}, t_{i+\frac{1}{2}}]$. Then, by (2.3.23) and Proposition A.1.2, we have

$$(2.3.28) \quad \begin{aligned} &\left\| U(t, X(t, t_i, x, v)) - \frac{A}{\nu} \eta \left(\frac{t - t_{i+\frac{1}{4}}}{\nu} \right) e_i^\perp \right\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0} \\ &\leq \frac{A}{\nu} \|\eta\|_{\mathcal{C}_t^0} \|\nabla^\perp \theta^i - e_i^\perp\|_{\mathcal{C}_x^0} < \frac{A\epsilon}{\nu}. \end{aligned}$$

We choose $\epsilon > 0$ small enough so that $\frac{A\epsilon}{\nu} < 1$. Then, by (2.2.13),

$$(2.3.29) \quad \begin{aligned} &|P_{e_i^\perp}(V(t_{i+\frac{1}{2}}, t_i, x, v))| = |\langle V(t_{i+\frac{1}{2}}, t_i, x, v), e_i^\perp \rangle| \\ &\geq -|P_{e_i^\perp}(v)|(t_{i+\frac{1}{2}} - t_i) + \left| \left\langle \int_{t_{i+\frac{1}{4}}}^{t_{i+\frac{1}{2}}} e^{s-t_{i+\frac{1}{2}}} U(s, X(s, t_i, x, v)) ds, e_i^\perp \right\rangle \right|. \end{aligned}$$

For the first term, by (2.3.20) and the hypothesis on $P_{e_i^\perp}(v)$,

$$(2.3.30) \quad -|P_{e_i^\perp}(v)|(t_{i+\frac{1}{2}} - t_i) = -|P_{e_i^\perp}(v)|\frac{\tau}{4(N+1)} \geq -\frac{3}{2}.$$

For the second term, we write

$$(2.3.31) \quad \left| \left\langle \int_{t_{i+\frac{1}{4}}}^{t_{i+\frac{1}{2}}} e^{s-t_{i+\frac{1}{2}}} U(s, X(s, t_i, x, v)) \, ds, e_i^\perp \right\rangle \right| \\ = |\langle \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2, e_i^\perp \rangle| \geq -|\langle \mathcal{T}_1, e_i^\perp \rangle| + |\langle \mathcal{T}_2, e_i^\perp \rangle|,$$

with

$$\mathcal{T}_1 := \int_{t_{i+\frac{1}{4}}}^{t_{i+\frac{1}{2}}} e^{s-t_{i+\frac{1}{2}}} \left(U(s, X(s, t_i, x, v)) - \frac{A}{\nu} \eta \left(\frac{s-t_{i+\frac{1}{4}}}{\nu} \right) e_i^\perp \right) \, ds, \\ \mathcal{T}_2 := \frac{A}{\nu} \int_{t_{i+\frac{1}{4}}}^{t_{i+\frac{1}{2}}} e^{s-t_{i+\frac{1}{2}}} \eta \left(\frac{s-t_{i+\frac{1}{4}}}{\nu} \right) e_i^\perp \, ds.$$

Then, using (2.3.28) and (2.3.20),

$$(2.3.32) \quad |\langle \mathcal{T}_1, e_i^\perp \rangle| \leq 2(t_{i+\frac{1}{2}} - t_{i+\frac{1}{4}}) \left\| U - \frac{A}{\nu} \eta e_i^\perp \right\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0} \\ \leq \frac{\tau}{4(N+1)}$$

For the second term, using (2.3.20) and (2.3.21), we get

$$|\langle \mathcal{T}_2, e_i^\perp \rangle| \geq e^{-\frac{\tau}{8(N+1)}} A$$

Combining last inequality with (2.3.32), (2.3.31), (2.3.30) and (2.3.29), the choice of A and ν in (2.3.22), this yields

$$|P_{e_i^\perp}(V(t_{i+\frac{1}{2}}, t, x, v))| \geq \frac{6(N+1)}{\tau}.$$

Whence, by the previous point, $\exists t \in [t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{3}{4}}]$ such that

$$X(t, t_i, x, v) \in B\left(x_0, \frac{r_0}{5}\right) + \mathbb{R}e_i,$$

which shows (2.3.26). We have to show next (2.3.27). Indeed, from (2.2.13), we deduce

$$|V(t, t_i, x, v) - e^{-t+t_i} v| \leq |t - t_i| \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0},$$

which implies, by (2.3.20), that

$$(2.3.33) \quad e^{-t+t_i} |v| - |V(t, t_i, x, v)| \leq \frac{3\tau \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0}}{8(N+1)}.$$

Then, choosing m_2 large enough, we get the second point of (2.3.27). On the other hand, we observe that

$$(2.3.34) \quad \left| \frac{V(t, t_i, x, v)}{|V(t, t_i, x, v)|} - e_i \right| \leq \left| \frac{V(t, t_i, x, v)}{|V(t, t_i, x, v)|} - \frac{v}{|v|} \right| + \left| \frac{v}{|v|} - e_i \right|.$$

By definition of $\mathcal{V}_2(e_i)$, $\left| \frac{v}{|v|} - e_i \right| < \epsilon_2$. With the other term, using (2.2.13), we find

$$\begin{aligned} & \left| \frac{V(t, t_i, x, v)}{|V(t, t_i, x, v)|} - \frac{v}{|v|} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-t+t_i}|v| + \int_{t_i}^t e^{t-s} U(s, X(s, t_i, x, v)) \, ds}{|V(t, t_i, x, v)|} - \frac{v}{|v|} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{-t+t_i}|v|}{|V(t, t_i, x, v)|} - \frac{v}{|v|} \right| + \frac{\tau e^\tau \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0}}{|V(t, t_i, x, v)|} \\ &= \frac{|e^{-t+t_i}|v| - |V(t, t_i, x, v)|}{|V(t, t_i, x, v)|} + \frac{\tau e^\tau \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0}}{|V(t, t_i, x, v)|} \\ &\leq \frac{2\tau e^\tau \|U\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0}}{|V(t, t_i, x, v)|}. \end{aligned}$$

This shows, by (2.3.34), that

$$\left| \frac{V(t, t_i, x, v)}{|V(t, t_i, x, v)|} - e_i \right| \leq O\left(\frac{1}{|V(t, t_i, x, v)|}\right) + \epsilon_2,$$

which entails, by (2.3.33), that (2.3.27) holds choosing m_2 large enough and $\epsilon_2 > 0$ small enough. \square

2.3.2. Low velocities. The goal of this section is to prove the following result, which is the key ingredient for the treatment of low velocities. The main difficulty is to adapt the construction made in [70, Proposition 2] to the case with friction.

PROPOSITION 2.3.4. *Let $\tau > 0$, $M > 0$. Given $x_0 \in \mathbb{T}^2$ and $r_0 > 0$ a small positive number, there exists $U \in \mathcal{C}^\infty([0, \tau] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ satisfying*

$$(2.3.35) \quad \operatorname{curl}_x U(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, \tau] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \overline{B}(x_0, r_0)),$$

$$(2.3.36) \quad \operatorname{supp} U \subset (0, \tau) \times \mathbb{T}^2,$$

$$(2.3.37) \quad \int_{\mathbb{T}^2} U(t, x) \, dx = 0, \quad \forall t \in [0, \tau],$$

and such that, for some $\overline{M} > 0$, the characteristics associated to $-v + U$ satisfy that, for every $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times B_{\mathbb{R}^2}(0, M)$, there exists $t \in (0, \tau)$ such that

$$(2.3.38) \quad V(t, 0, x, v) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \overline{M}) \setminus B_{\mathbb{R}^2}(0, M + 1).$$

PROOF. Let θ be as in Proposition A.2.1. Since $\operatorname{Ind}_{S(x_0, r_0)}(\nabla\theta) = 0$, possibly after a continuous extension, we may define

$$(2.3.39) \quad m := \inf_{x \in \mathbb{T}^2} |\nabla\theta(x)| > 0.$$

Let $a, b \in \mathbb{R}$, to be chosen later on, and such that $c := \frac{a}{b}$ is fixed. Let η be as in (2.3.21). Then, we define the field

$$U(t, x) := a\eta(bt)\nabla^\perp\theta(x), \quad \forall (t, x) \in [0, \tau] \times \mathbb{T}^2.$$

Conditions (2.3.35)–(2.3.37) follow from the definition of U and the properties of θ , given by Proposition A.2.1. We have to show (2.3.38). Indeed, from (2.2.13), we find that, for every $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times B_{\mathbb{R}^2}(0, M)$,

$$(2.3.40) \quad V(t, 0, x, v) = e^{-t}v + a \int_0^t e^{\sigma-t} \eta(b\sigma) \nabla^\perp \theta(X(\sigma, 0, x, v)) \, d\sigma.$$

This gives, changing variables and using (2.3.21),

$$\begin{aligned} |V(t, 0, x, v) - e^{-t}v| &\leq \frac{a}{b} \|\nabla^\perp \theta\|_{\mathcal{C}_x^0} \int_0^{bt} e^{\frac{s}{b}-t} \eta(s) \, ds \\ &\leq c \|\nabla \theta\|_{\mathcal{C}_x^0}, \end{aligned}$$

whenever $t \leq \frac{1}{b}$. Consequently,

$$(2.3.41) \quad \begin{aligned} |X(t, 0, x, v) - x| &\leq \int_0^t |V(s, 0, x, v) - e^{-s}v| \, ds + \int_0^t |e^{-s}v| \, ds \\ &\leq \frac{c}{b} \|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} + \frac{M}{b}, \end{aligned}$$

for every $t \leq \frac{1}{b}$. Thus, from (2.3.40),

$$\begin{aligned} &\left| V\left(\frac{1}{b}, 0, x, v\right) - e^{-\frac{1}{b}}v - c\nabla^\perp \theta(x) \right| \\ &= \left| a \int_0^{\frac{1}{b}} e^{s-\frac{1}{b}} \eta(bs) \nabla^\perp \theta(X(s, 0, x, v)) \, ds - c\nabla^\perp \theta(x) \right| \leq I_1 + I_2, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left| a \int_0^{\frac{1}{b}} e^{s-\frac{1}{b}} \eta(bs) \nabla^\perp \theta(X(s, 0, x, v)) \, ds - c \int_0^1 e^{\frac{\sigma-1}{b}} \eta(\sigma) \nabla^\perp \theta(X(\frac{\sigma}{2b}, 0, x, v)) \, d\sigma \right|, \\ I_2 &:= \left| c \int_0^1 e^{\frac{\sigma-1}{b}} \eta(\sigma) \nabla^\perp \theta(X(\frac{\sigma}{2b}, 0, x, v)) \, d\sigma - c\nabla^\perp \theta(x) \right|. \end{aligned}$$

We note that the introduction of the term $X(\frac{\sigma}{2b}, 0, x, v)$ is intended to take into account the exponential in the first integral.

For the first term, we write, changing variables,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| a \int_0^{\frac{1}{b}} e^{s-\frac{1}{b}} \eta(bs) \left(\nabla^\perp \theta(X(s, 0, x, v)) - \nabla^\perp \theta(X(\frac{s}{2}, 0, x, v)) \right) \, ds \right| \\ &\leq a \|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} \int_0^{\frac{1}{b}} e^{s-\frac{1}{b}} \eta(bs) \left| X(s, 0, x, v) - X(\frac{s}{2}, 0, x, v) \right| \, ds \\ &\leq 2c \|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} \left(\frac{c}{b} \|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} + \frac{M}{b} \right) = O\left(\frac{1}{b}\right), \end{aligned}$$

as a consequence of (2.3.41). For the second term, by (2.3.21), we have

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left| c \int_0^1 e^{\frac{\sigma-1}{b}} \eta(\sigma) \left(\nabla^\perp \theta(X(\frac{\sigma}{2b}, 0, x, v)) - \nabla^\perp \theta(x) \right) \, d\sigma \right| \\ &\quad + \left| c \int_0^1 \left(e^{\frac{\sigma-1}{b}} - 1 \right) \eta(\sigma) \nabla^\perp \theta(x) \, d\sigma \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c\|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} \int_0^1 e^{\frac{\sigma-1}{b}} \eta(\sigma) \left| X\left(\frac{s}{2}, 0, x, v\right) - x \right| ds + c\|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} |e^{-\frac{1}{b}} - 1| \\
&\leq c\|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} \left(\frac{c}{b} \|\theta\|_{\mathcal{C}_x^1} + \frac{M}{b} \right) + O\left(\frac{1}{b}\right) = O\left(\frac{1}{b}\right),
\end{aligned}$$

using again (2.3.41). This allows to choose b large enough so that

$$\left| V\left(\frac{1}{b}, 0, x, v\right) - e^{-\frac{1}{b}}v - c\nabla^\perp\theta(x) \right| < \frac{1}{2}.$$

Whence, by (2.3.39),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &> \left| V\left(\frac{1}{b}, 0, x, v\right) - e^{-\frac{1}{b}}v - c\nabla^\perp\theta(x) \right| \\
&\geq c|\nabla^\perp\theta(x)| - \left| V\left(\frac{1}{b}, 0, x, v\right) \right| - |v| \\
&\geq cm - \left| V\left(\frac{1}{b}, 0, x, v\right) \right| - M,
\end{aligned}$$

which gives, choosing $c := \frac{2(M+1)}{m}$,

$$\left| V\left(\frac{1}{b}, 0, x, v\right) \right| > M + \frac{3}{2}.$$

This concludes the proof. \square

2.3.3. Description of the reference trajectory. Since ω is a nonempty open set in \mathbb{T}^2 , there exist $x_0 \in \omega$ and $r_0 > 0$ such that

$$B(x_0, 2r_0) \subset \omega.$$

We can define a suitable vector field \bar{U} using the constructions made in the previous sections. Firstly, we apply Proposition 2.3.1 with $\tau := \frac{T}{3}$, which gives a vector field \bar{U}_1 and $\underline{m}_1 > 0$ such that (2.3.19) is verified.

For reasons that will be clear in Section 2.5, we set the following parameters. Let

$$(2.3.42) \quad \alpha := \max \left\{ T\|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}} + \frac{5}{2}, \frac{\mathcal{C}_{r_0,T}\|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}}{4} \right\},$$

where $\mathcal{C}_{r_0,T} > 0$ is a constant chosen large enough so that

$$(2.3.43) \quad \log \left(1 + \frac{9r_0}{\mathcal{C}_{r_0,T}\|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}} \right) < \frac{T}{200}.$$

We set

$$(2.3.44) \quad M_1 := \max \{ \underline{m}_1, 2\alpha \} + \frac{T}{3} \|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}.$$

With this choice of parameters, we apply Proposition 2.3.4 with $\tau = \frac{T}{3}$ and $M = M_1$, which gives \bar{U}_2 and \bar{M} .

This allows to set

$$(2.3.45) \quad \bar{U}(t, x) := \begin{cases} \bar{U}_1(t, x), & (t, x) \in [0, \frac{T}{3}] \times \mathbb{T}^2, \\ \bar{U}_2(t - \frac{T}{3}, x), & (t, x) \in [\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}] \times \mathbb{T}^2, \\ \bar{U}_1(t - \frac{2T}{3}, x), & (t, x) \in [\frac{2T}{3}, T] \times \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

By construction,

$$(2.3.46) \quad \operatorname{curl}_x \bar{U}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega),$$

$$(2.3.47) \quad \operatorname{supp} \bar{U} \subset (0, T) \times \omega,$$

$$(2.3.48) \quad \operatorname{div}_x \bar{U}(t, x) = 0,$$

$$(2.3.49) \quad \int_{\mathbb{T}^2} \bar{U}(t, x) \, dx = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

We set

$$(2.3.50) \quad \bar{W}(t, x) := \operatorname{curl}_x \bar{U}(t, x).$$

Let us consider the functions

$$\mathcal{Z}_1(v) := -k_1 v_2 e^{-\frac{|v|^2}{2}}, \quad \mathcal{Z}_2(v) := k_2 v_1 e^{-\frac{|v|^2}{2}}, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2,$$

where $k_1, k_2 > 0$ are normalisation constants. These functions satisfy that

$$(2.3.51) \quad \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

where $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ stands for the space of real-valued Schwartz functions in \mathbb{R}^d . Moreover, choosing k_1, k_2 adequately, we have

$$(2.3.52) \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_1(v) \, dv = \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_2(v) \, dv = 0,$$

$$(2.3.53) \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_1(v) \, dv = - \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_2(v) \, dv = 1,$$

$$(2.3.54) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_1(v) \, dv = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_2(v) \, dv = 0.$$

We thus define, for any $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$(2.3.55) \quad \bar{f}(t, x, v) := \mathcal{Z}_1(v) \partial_{x_1} \bar{W}(t, x) + \mathcal{Z}_2(v) \partial_{x_2} \bar{W}(t, x).$$

From (2.3.47) and (2.3.50), we have

$$(2.3.56) \quad \bar{f}|_{t=0} = 0, \quad \bar{f}|_{t=T} = 0.$$

Thanks to (2.3.54),

$$(2.3.57) \quad \rho_{\bar{f}}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

Furthermore, by construction and using (2.3.52) and (2.3.53) we find

$$-\Delta_x \bar{W} = \operatorname{curl}_x \int_{\mathbb{R}^2} v \bar{f} \, dv.$$

Moreover, thanks to (2.3.55),

$$(2.3.58) \quad \int_{\mathbb{T}^2} j_{\bar{f}}(t, x) \, dx = 0.$$

Hence, for some $\bar{p} \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R})$,

$$(2.3.59) \quad -\Delta_x \bar{U}(t, x) = \nabla_x \bar{p}(t, x) + \int_{\mathbb{R}^2} v \bar{f} \, dv.$$

Furthermore, from (2.3.55), (2.3.46) and (2.3.50), we deduce that

$$(2.3.60) \quad \begin{aligned} \partial_t \bar{f} + v \cdot \nabla_x \bar{f} + \operatorname{div}_v [(\bar{U} - v)\bar{f}] &= 0, & \forall (t, x, v) \in [0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2, \\ \bar{f}(t, x, v) &= 0, & \forall (t, x, v) \in [0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

To sum up, we have constructed a reference solution $(\bar{f}, \bar{U}, \bar{p})$ of system (2.1.1) with (2.3.56) and such that the characteristics associated to $-v + \bar{U}$ satisfy (2.3.19).

2.4. Fixed point argument

Let $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ be fixed, with ϵ_0 to be chosen later on. We shall define an operator \mathcal{V}_ϵ acting on a domain $\mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ to be precised below. The goal of this section is to show that \mathcal{V}_ϵ has a fixed point.

2.4.1. Definition of the operator. We describe the set \mathcal{S}_ϵ . Let $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, to be precised later on, and $\gamma > 2$. Then, set

$$(2.4.61) \quad \delta_1 := \frac{\gamma}{2(\gamma + 3)}, \quad \delta_2 := \frac{\gamma + 2}{\gamma + 3}.$$

According to the notation of Section 2.1.3.4, we define

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\epsilon := & \left\{ g \in \mathcal{C}_b^{0, \delta_2}(Q_T); \right. \\ & \text{(a) } \left\| \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{f} - g) \, dv \right\|_{\mathcal{C}_b^{0, \delta_1}(\Omega_T)} \leq c_3 \epsilon, \\ & \text{(b) } \|(1 + |v|)^{\gamma+2} (\bar{f} - g)\|_{L^\infty(Q_T)} \\ & \quad \leq c_1 (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)}), \\ & \text{(c) } \|(\bar{f} - g)\|_{\mathcal{C}_b^{0, \delta_2}(Q_T)} \\ & \quad \leq c_2 (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)}), \\ & \text{(d) } \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v g(t, x, v) \, dx \, dv = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ & \text{(e) } \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(t, x, v) \, dx \, dv = \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dx \, dv, \quad \forall t \in [0, T] \left. \right\}, \end{aligned}$$

where c_1, c_2, c_3 are constants depending only on $T, \omega, \gamma, \delta_1$ and δ_2 (see (2.4.90), (2.4.93) and (2.4.94) for details). We observe that, for c_1, c_2, c_3 large enough and $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, with high moments in v , satisfying

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dv \right\|_{\mathcal{C}_b^{0, \delta_1}(\Omega_T)} \leq c_3 \epsilon,$$

we trivially have that $\bar{f} + f_0 \in \mathcal{S}_\epsilon$. Thus, $\mathcal{S}_\epsilon \neq \emptyset$.

In order to describe the operator \mathcal{V}_ϵ we have to introduce some definitions. Let (see [70, p. 342])

$$\begin{aligned} \gamma^- &:= \left\{ (x, v) \in S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2; |v| \geq \frac{1}{2}, \langle v, \nu(x) \rangle \leq -\frac{|v|}{10} \right\}, \\ \gamma^{2-} &:= \left\{ (x, v) \in S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2; |v| \geq 1, \langle v, \nu(x) \rangle \leq -\frac{|v|}{8} \right\}, \\ \gamma^{3-} &:= \left\{ (x, v) \in S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2; |v| \geq 2, \langle v, \nu(x) \rangle \leq -\frac{|v|}{5} \right\}, \end{aligned}$$

$$\gamma^+ := \{(x, v) \in S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2; \langle v, \nu(x) \rangle \leq 0\},$$

where $\nu(x)$ denotes the outward unit normal at $S(x_0, r_0)$ at x . It can be shown that

$$(2.4.62) \quad \text{dist}([S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2] \setminus \gamma^{2-}; \gamma^{3-}) > 0.$$

Consequently, we may choose an absorption function $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^\infty \cap W^{1,\infty}(S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}^+)$ such that

$$(2.4.63) \quad \begin{aligned} 0 \leq \mathcal{A}(x, v) \leq 1, & \quad \forall (x, v) \in S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{A}(x, v) = 1, & \quad \forall (x, v) \in [S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2] \setminus \gamma^{2-}, \\ \mathcal{A}(x, v) = 0, & \quad \forall (x, v) \in \gamma^{3-}. \end{aligned}$$

We also choose a truncation function $\mathcal{Y} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ such that

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(t) = 0, & \quad \forall t \in \left[0, \frac{T}{48}\right] \cup \left[\frac{47T}{48}, T\right], \\ \mathcal{Y}(t) = 1, & \quad \forall t \in \left[\frac{T}{24}, \frac{23T}{24}\right]. \end{aligned}$$

We describe the operator \mathcal{V}_ϵ in three steps.

1. Stokes system. Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$. We associate to g the pair $(U^g(t), p^g(t))$, for every $t \in [0, T]$, solution of

$$(2.4.64) \quad \begin{cases} -\Delta_x U^g(t) + \nabla_x p^g(t) = j_g(t), & x \in \mathbb{T}^2, \\ \text{div}_x U^g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} U^g(t, x) dx = 0, & t \in [0, T], \end{cases}$$

where

$$j_g(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} v g(t, x, v) dv.$$

We shall prove that this association is well defined, thanks to point (d) and the following result.

LEMMA 2.4.1. *Let $\epsilon > 0$. Then, there exists a constant $K_1 = K_1(\gamma) > 0$ such that, for every $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ and every $t \in [0, T]$,*

$$\|j_g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)^2} \leq K_1 \sqrt{1 + c_1^2 \epsilon^2}.$$

PROOF. We write, by the triangular inequality,

$$(2.4.65) \quad \begin{aligned} \|j_g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v g(t, x, v) dv \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v (g - \bar{f} + \bar{f})(t, x, v) dv \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |g - \bar{f}| dv + \int_{\mathbb{R}^2} |v| |\bar{f}| dv \right)^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{T}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |g - \bar{f}| dv \right)^2 dx + 2 \int_{\mathbb{T}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |\bar{f}| dv \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Let us note that, from (2.3.55), (2.3.51) and the properties of Schwartz functions, we have that

$$(2.4.66) \quad \mathcal{I}_1 := \int_{\mathbb{T}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |\bar{f}| \, dv \right)^2 \, dx < \infty,$$

is a positive constant, independent from g .

We have to treat the first part of (2.4.65). Indeed, by point (b),

$$(2.4.67) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |(g - \bar{f})(t, x, v)| \, dv \right)^2 \, dx \\ & \leq c_1^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v| \, dv}{(1 + |v|)^{\gamma+2}} \right)^2 (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty})^2, \\ & \leq \mathcal{I}_2 c_1^2 \epsilon^2, \end{aligned}$$

where we have used (2.1.5) and

$$\mathcal{I}_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v| \, dv}{(1 + |v|)^{\gamma+2}} \right)^2 < \infty.$$

Finally, putting together (2.4.67), (2.4.66) and (2.4.65), we obtain the result by choosing

$$K_1 := \sqrt{2 \max\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}}.$$

□

We observe that the previous lemma shows that $j_g(t) \in L^2(\mathbb{T}^2)^2$, for every $t \in [0, T]$. Then, using point (d), we get from Proposition B.1.1 (see Appendix B for notation) the solution of (2.4.64),

$$(U^g(t), p^g(t)) \in (H_0^2(\mathbb{T}^2)^2 \cap \mathcal{V}_\sigma) \times L^2(\mathbb{T}^2), \quad \forall t \in [0, T].$$

Consequently, the association given by (2.4.64) is well defined.

Let us show some consequences that will be important in next sections. We will assume from now on that the choice of ϵ is made according to

$$(2.4.68) \quad \epsilon_0 \leq \min \left\{ \frac{1}{c_1}, 1 \right\}.$$

LEMMA 2.4.2. *There exists a constant $K_2 = K_2(T, \gamma) > 0$ such that for any $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ and U^g given by (2.4.64), we have*

$$(2.4.69) \quad \|U^g\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq K_2(T, \gamma).$$

Moreover,

$$(2.4.70) \quad U^g \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)).$$

PROOF. Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$. Then, by (B.2.10), the Sobolev embedding theorem and (2.4.68),

$$(2.4.71) \quad \begin{aligned} \|U^g\|_{L^\infty(\Omega_T)} & \leq C_S \|U^g\|_{L_t^\infty(H_x^2)} \\ & \leq C_S C_1 \|j_g\|_{L_t^\infty(L_x^2)} \leq C_S C_1 \sqrt{2} K_1, \end{aligned}$$

which gives (2.4.69) for a constant $K_2 := \sqrt{2} C_S C_1 K_1 > 0$, independent from g .

Let us show (2.4.70). Indeed, by similar arguments as those in Lemma 2.4.1, we deduce that $j_g(t) \in L^\infty(\mathbb{T}^2)^2$, for every $t \in [0, T]$. Then, by interpolation between the L^p spaces, we deduce that

$$j_g(t) \in L^p(\mathbb{T}^2)^2, \quad \forall t \in [0, T], p \in [2, \infty].$$

Consequently, using Proposition B.1.2 with source term $j_g(t) \in L^p(\mathbb{T}^2)^2$, we deduce that

$$U^g(t) \in W^{2,p}(\mathbb{T}^2)^2, \quad \forall t \in [0, T], p \in [2, \infty].$$

Finally, choosing $2 < p < \infty$, the Sobolev embedding theorem in this case (see [109, Corollaire 9.1, p.52]) implies that

$$U^g(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2)^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

We have to show the continuity w.r.t. the time variable. Let $t, s \in [0, T]$. Then, $W(t, s) := U^g(t) - U^g(s)$, $p(t, s) := p^g(t) - p^g(s)$, satisfy

$$\begin{cases} -\Delta_x W(t, s) + \nabla_x p(t, s) = j_g(t) - j_g(s), & x \in \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x W(t, s) = 0, & x \in \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} W(t, s) dx = 0. \end{cases}$$

On the one hand, we have

(2.4.72)

$$\begin{aligned} & \|j_g(t) - j_g(s)\|_{L^p(\mathbb{T}^2)^2}^p \\ & \leq C(p) \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v(g(t, x, v) - g(s, x, v)) dv \right| \\ & \leq C(p) \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \|g(t, x) - g(s, x)\|_{L^\infty}^{1-\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |g(t, x, v) - g(s, x, v)|^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} dv \right). \end{aligned}$$

Furthermore, using point (b), we have, for any $x \in \mathbb{T}^2$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} |v| |g(t, x, v) - g(s, x, v)|^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} dv \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^2} |v| |g(t, x, v) - \bar{f}(t, x, v)|^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} dv + \int_{\mathbb{R}^2} |v| |\bar{f}(t, x, v) - \bar{f}(s, x, v)|^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} dv \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^2} |v| |\bar{f}(s, x, v) - g(s, x, v)|^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} dv \\ & \leq 2 \left[c_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)})^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v| dv}{(1 + |v|)^{\gamma+1}} \right. \\ & \quad \left. + C(\bar{f}, \gamma) \right] \\ & \leq C(c_1, f_0, \gamma, \bar{f}), \end{aligned}$$

thanks to (2.3.55) and (2.3.51). This yields, from (2.4.72) and using the fact that $g \in \mathcal{C}^{0, \delta_2}(Q_T)$,

$$\begin{aligned} & \|j_g(t) - j_g(s)\|_{L^p(\mathbb{T}^2)^2}^p \\ & \leq C(p, c_1, f_0, \gamma, \bar{f}) \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \|g(t, x) - g(s, x)\|_{L^\infty}^{1-\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} \\ & \leq C(p, c_1, f_0, \gamma, \bar{f}) \|g\|_{\mathcal{C}^{0, \delta_2}(Q_T)}^{1-\frac{\gamma+1}{\gamma+2}} |t - s|^{\frac{1}{\gamma+3}}. \end{aligned}$$

Then, combining this with (B.2.10), we deduce

$$\|W(t, s)\|_{W^{2,p}(\mathbb{T}^2)^2} \leq C|t - s|^{\frac{1}{p(\gamma+3)}}, \quad \forall t, s \in [0, T].$$

This implies, again by the Sobolev embedding,

$$\lim_{|t-s| \rightarrow 0} \|U^g(t) - U^g(s)\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2)^2} = 0,$$

which gives (2.4.70). □

We also deduce the following property for the backwards characteristics associated to $-v + U^g$.

LEMMA 2.4.3. *Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ and let (X^g, V^g) be the characteristics associated to the field $-v + U^g$, according to (2.4.64). Then, there exists a constant $K_3 = K_3(T, \gamma) > 0$, independent of g , such that*

$$(2.4.73) \quad |e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)| \leq K_3,$$

for any $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

PROOF. By (2.2.13), we have

$$\begin{aligned} |e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)| &\leq |V^g(0, t, x, v) - e^t v| \\ &= \left| \int_0^t e^s U^g(s, X^g(0, s, x, v)) ds \right| \\ &\leq C(T) \|U^g\|_{L_{t,x}^\infty} \\ &\leq C(T) K_2(T, \gamma), \end{aligned}$$

using (2.4.69). This allows to conclude, choosing $K_3 := C(T)K_2(T, \gamma)$. □

2. Absorption. To give a sense to the procedure of absorption we need first the following result, which asserts that the number of times the characteristics associated to the Stokes velocity field of the previous part meet γ^- is finite.

LEMMA 2.4.4. *Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ and let U^g be given by (2.4.64) accordingly. Let (X^g, V^g) be the characteristics associated to the field $-v + U^g$. Then, for any $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, there exists $n(x, v) \in \mathbb{N}$ such that there exist $0 < t_1 < \dots < t_{n(x,v)} < T$ such that*

$$(2.4.74) \quad \{(X^g, V^g)(t, 0, x, v); t \in [0, T]\} \cap \gamma^- = \{t_i\}_{i=1}^{n(x,v)},$$

$$(2.4.75) \quad \exists s > 0 \text{ s.t. } (t_i - s, t_i + s) \cap (t_j - s, t_j + s) = \emptyset, \quad \forall i, j = 1, \dots, n(x, v),$$

with the convention that $n(x, v) = 0$ and $\{t_i\}_{i=1}^{n(x,v)} = \emptyset$ if $\{(X^g, V^g)\} \cap \gamma^- = \emptyset$.

For more details on this result, see [70, p.348] and [72, p.5468]. In the friction case, this holds true without further modification, thanks to Lemma 2.4.2 and Lemma 2.4.3.

The previous lemma allows to define the following quantities. Let $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ and let $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. Then, for every t_i , with $i = 1, \dots, n(x, v)$, we have $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (X^g, V^g)(t_i, 0, x, v) \in \gamma^-$. Moreover, let

$$(2.4.76) \quad f(t^-, \tilde{x}, \tilde{v}) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v)),$$

$$(2.4.77) \quad f(t^+, \tilde{x}, \tilde{v}) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v)).$$

We define $f := \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ to be the solution of

$$(2.4.78) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + U^g \cdot \nabla_v f - \operatorname{div}_v(vf) = 0, & (t, x, v) \in [0, T] \times [\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2] \setminus \gamma^{2-} \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ f(t^+, x, v) = (1 - \mathcal{Y}(t))f(t^-, x, v) + \mathcal{Y}(t)\mathcal{A}(x, v)f(t^-, x, v), & (t, x, v) \in [0, T] \times \gamma^-. \end{cases}$$

Let us explain how the absorption procedure works. From (2.4.70), the characteristics associated to the field $-v + U^g$ are regular. Thus, outside ω , the system above defines a function $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ of class \mathcal{C}^1 . Moreover, the exact value of $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ is given by these characteristics through (2.2.15) and (2.2.13). When the characteristics (X^g, V^g) meet γ^- at time t , $f(t^+, \cdot, \cdot)$ is fixed according to the last equation in (2.4.78). We can see the function $\mathcal{Y}(t)\mathcal{A}(x, v)$ as an opacity factor depending on time and on the incidence of the characteristics on $S(x_0, r_0)$. Indeed, $f(t^+, \cdot, \cdot)$ can take values varying from $f(t^-, \cdot, \cdot)$, in the case of no absorption, to 0, according to the angle of incidence, the modulus of the velocity and time.

3. Extension. The function $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ is not necessarily continuous around $[0, T] \times \gamma^- \subset [0, T] \times B(x_0, 2r_0)$. To avoid this problem we shall use some extension operators preserving regularity.

Let us first consider a linear extension operator

$$\bar{\pi} : \mathcal{C}_b^0(\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)) \rightarrow \mathcal{C}_b^0(\mathbb{T}^2),$$

such that for any $\sigma \in (0, 1)$, a $\mathcal{C}_b^{0, \sigma}$ function is mapped onto a $\mathcal{C}_b^{0, \sigma}$ function. This allows to define another linear extension operator by

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathcal{C}_b^0([0, T] \times [\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)] \times \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathcal{C}_b^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \\ f &\mapsto \tilde{\pi}f(t, x, v) = \bar{\pi}[f(t, \cdot, v)](x). \end{aligned}$$

We modify $\tilde{\pi}$ in the following way. Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ such that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_1 \, dx \, dv &= 0, & \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v \mu_1 \, dx \, dv &= 1, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_2 \, dx \, dv &= 1, & \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v \mu_2 \, dx \, dv &= 0. \end{aligned}$$

Then, set

$$\pi(f) := \tilde{\pi}(f) - \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v \tilde{\pi}(f) \, dx \, dv \mu_1 + \left[\int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (f_0 - \tilde{\pi}(f)) \, dx \, dv \right] \mu_2.$$

Thus, π is an affine extension satisfying the following properties: for every $f \in \mathcal{C}_b^0([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)) \times \mathbb{R}^2)$, we have

$$(2.4.79) \quad \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \pi f(t, x, v) \, dx \, dv = \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dx \, dv, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(2.4.80) \quad \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} v \pi f(t, x, v) \, dx \, dv = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(2.4.81) \quad \exists C_\pi > 0 \text{ such that}$$

$$\|(1 + |v|)^{\gamma+2} \pi(f)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_\pi \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f\|_{L^\infty([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2)},$$

$$(2.4.82) \quad \forall \sigma \in (0, 1), \exists C_{\pi, \sigma} > 0 \text{ such that}$$

$$\|\pi(f)\|_{\mathcal{C}_b^{0,\sigma}(Q_T)} \leq C_{\pi,\sigma} \|(1+|v|)^{\gamma+2} f\|_{\mathcal{C}_b^{0,\sigma}([0,T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2)},$$

We introduce another truncation in time. Let $\tilde{\mathcal{Y}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; [0, 1])$ such that

$$(2.4.83) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{Y}}(t) &= 0, & t \in \left[0, \frac{T}{100}\right], \\ \tilde{\mathcal{Y}}(t) &= 1, & t \in \left[\frac{T}{48}, T\right]. \end{aligned}$$

Finally, we set

$$(2.4.84) \quad \begin{aligned} \Pi : \mathcal{C}_b^0([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)) \times \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathcal{C}_b^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2), \\ f &\mapsto \Pi f = (1 - \tilde{\mathcal{Y}}(t))f + \tilde{\mathcal{Y}}(t)\pi f. \end{aligned}$$

This allows to define the fixed point operator by

$$(2.4.85) \quad \mathcal{V}_\epsilon[g] := \bar{f} + \Pi \left(\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[f] \Big|_{([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)) \times \mathbb{R}^2) \cup ([0, \frac{T}{48}] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right),$$

for every $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

2.4.2. Existence of a fixed point. We shall apply the Leray-Schauder fixed point theorem (see [67, Theorem 1.11, p. 279]). To do this, we have to verify that

- (1) The set \mathcal{S}_ϵ is convex and compact in $\mathcal{C}_b^0(Q_T)$,
- (2) $\mathcal{V}_\epsilon : \mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}_b^0(Q_T) \rightarrow \mathcal{C}_b^0(Q_T)$ is continuous,
- (3) $\mathcal{V}_\epsilon(\mathcal{S}_\epsilon) \subset \mathcal{S}_\epsilon$.

The first point is straightforward, since the convexity of \mathcal{S}_ϵ is clear and the compactness is a consequence of Ascoli's theorem (see, for instance, [136, Theorem 11.28, p. 245]). The second point is similar to [70, Section 3.3] and holds without further modification, thanks to Lemma 2.4.4, Lemma 2.4.3 and Lemma 2.2.1.

We need to show that point (3) holds. Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$. We have to prove that $\mathcal{V}_\epsilon[g] \in \mathcal{S}_\epsilon$, i.e. points (a)–(c), since points (d) and (e) follow by the construction of \mathcal{V}_ϵ , using (2.4.80) and (2.4.79).

2.4.2.1. *Proof of point (b).* By construction of \mathcal{V}_ϵ , we have

$$(2.4.86) \quad \begin{aligned} &\|(1+|v|)^{\gamma+2} (\mathcal{V}_\epsilon[f] - \bar{f})\|_{L^\infty(Q_T)} \\ &= \left\| (1+|v|)^{\gamma+2} \Pi \left(\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g] \Big|_{([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)) \times \mathbb{R}^2) \cup ([0, \frac{T}{48}] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right) \right\|_{L^\infty(Q_T)} \\ &\leq C_\pi \left\| (1+|v|)^{\gamma+2} \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g] \right\|_{L^\infty(Q_T)}, \end{aligned}$$

where we have used (2.4.81). Moreover, by (2.4.78) and (2.4.63),

$$|f(t^+, x, v)| \leq |f(t^-, x, v)|,$$

which implies, through (2.2.15),

$$|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v)| \leq |e^{2t} f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v))|.$$

On the other hand,

$$(2.4.87) \quad \begin{aligned} &|f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v))| \\ &= \left(\frac{1 + |V^g(0, t, x, v)|}{1 + |V^g(0, t, x, v)|} \right)^{\gamma+2} |f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v))| \\ &\leq \frac{\|(1+|v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + |V^g(0, t, x, v)|)^{\gamma+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + [e^t|v| - (e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)|)])^{\gamma+2}} \\
&\leq \frac{(1 + |e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)|)^{\gamma+2} \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + e^t|v|)^{\gamma+2}} \\
&\leq \frac{(1 + K_3(T, \gamma))^{\gamma+2} \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + e^t|v|)^{\gamma+2}},
\end{aligned}$$

where we have used (2.4.73) and the inequality (see [70, Eq. (3.33), p. 347].

$$(2.4.88) \quad \frac{1}{1 + |x - x'|} \leq \frac{1 + |x'|}{1 + |x|}, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^2.$$

Furthermore, since

$$(1 + |v|)^{\gamma+2} |\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v)| \leq (1 + e^t|v|)^{\gamma+2} |\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v)|,$$

for every $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, we have

$$(2.4.89) \quad \begin{aligned} \|(1 + |v|)^{\gamma+2} \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]\|_{L^\infty(Q_T)} \\ \leq e^{2T} (1 + K_3(T, \gamma))^{\gamma+2} (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

This gives that $\mathcal{V}_\epsilon[g]$ satisfies point (b), thanks to (2.4.86) and choosing

$$(2.4.90) \quad c_1 \geq C_\pi e^{2T} (1 + K_3(T, \gamma))^{\gamma+2}.$$

2.4.2.2. *Proof of point (c).* We need the following technical result, which can be adapted from [70, Lemma 2, p. 347], thanks to Lemma 2.2.1 and (2.4.70).

LEMMA 2.4.5. *For any $g \in \mathcal{S}_\epsilon$, one has $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g] \in \mathcal{C}^1(Q_T \setminus \Sigma_T)$, with $\Sigma_T := [0, T] \times \gamma^-$. Moreover, there exists a constant $K_4 = K_4(\gamma, \omega) > 0$ such that*

$$\frac{|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')|}{(1 + |v|)|t, x, v) - (t', x', v')|} \leq K_4 (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}),$$

for any $(t, x, v), (t', x', v') \in [0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2$ with $|v - v'| < 1$. Furthermore, if f_0 satisfies (2.1.6), we also have

$$(2.4.91) \quad \begin{aligned} \|(1 + |v|)^{\gamma+1} \nabla_{x,v} \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]\|_{L^\infty} \\ \leq K_5 (\|(1 + |v|)^{\gamma+1} \nabla_{x,v} f_0\|_{L^\infty(Q_T)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty}), \end{aligned}$$

for some constant $K_5 = K_5(\kappa, g) > 0$.

Let δ_2 be given by (2.4.61). Again, by construction of \mathcal{V}_ϵ and (2.4.82), we deduce

$$(2.4.92) \quad \|\mathcal{V}_\epsilon[g] - \bar{f}\|_{\mathcal{C}_b^{0, \delta_2}(Q_T)} \leq C_{\pi, \delta_2} \|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]\|_{\mathcal{C}_b^{0, \delta_2}([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)) \times \mathbb{R}^2)}.$$

Then, interpolating (2.4.89) and Lemma 2.4.5, we have

$$\begin{aligned}
&\frac{|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')|}{|(t, x, v) - (t', x', v')|^{\delta_2}} \\
&= \left(\frac{|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')|}{(1 + |v|)|t, x, v) - (t', x', v')|} \right)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+3}} \\
&\quad \times \left((1 + |v|)^{\gamma+2} |\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')| \right)^{1 - \frac{\gamma+2}{\gamma+3}}
\end{aligned}$$

$$\leq K_4^{\frac{\gamma+2}{\gamma+3}} K_6^{1-\frac{\gamma+2}{\gamma+3}} (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1+|v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}),$$

with

$$K_6 = 2e^{2T} (1 + K_3(T, \gamma))^{\gamma+2}.$$

Whence, by (2.4.92), this gives that $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ satisfies point (c), choosing

$$(2.4.93) \quad c_2 \geq C_{\pi, \delta_2} K_4(\gamma, \omega)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+3}} K_6(T, \gamma)^{1-\frac{\gamma+2}{\gamma+3}}.$$

2.4.2.3. *Proof of point (a).* We show first the L^∞ estimate. Using (2.3.57) and point (b), we find

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{V}_\epsilon[g] - \bar{f}) \, dv \right\|_{L^\infty(\Omega_T)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v)) \, dv \right\|_{L^\infty(\Omega_T)} \\ &= \sup_{(t, x) \in \Omega_T} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v)| \, dv \\ &\leq K_7 (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1} + \|(1+|v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty}), \end{aligned}$$

with

$$K_7 := c_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dv}{(1+|v|)^{\gamma+2}}.$$

To show the Hölder estimate, we interpolate (2.4.89) and (c). Indeed, if δ_1 is given by (2.4.61) and $\tilde{\gamma} := 2 + \frac{\gamma}{2}$, we have

$$\begin{aligned} &(1+|v|)^{\tilde{\gamma}} \frac{|\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v) - \mathcal{V}_\epsilon[g](t', x', v)|}{|(t, x, v) - (t', x', v)|^{\delta_1}} \\ &= ((1+|v|)^{\gamma+2} |\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v) - \mathcal{V}_\epsilon[g](t', x', v)|)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma+2}} \\ &\quad \times \left(\frac{|\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v) - \mathcal{V}_\epsilon[g](t', x', v)|}{|(t, x, v) - (t', x', v)|^{\delta_2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma+2}} \\ &\leq c_1^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma+2}} c_2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma+2}} (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1+|v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}). \end{aligned}$$

Consequently, choosing

$$(2.4.94) \quad c_3 := K_7 + c_1^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma+2}} c_2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma+2}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dv}{(1+|v|)^{\tilde{\gamma}}},$$

and thanks to (2.1.5), we have that $\mathcal{V}_\epsilon[g]$ satisfies point (a).

Let us choose ϵ_0 sufficiently small and satisfying (2.4.68). Then, the smallness assumption (2.1.5) and the properties of \mathcal{V}_ϵ and Π allow to conclude. Thus, if $\epsilon \leq \epsilon_0$, thanks to Leray-Schauder theorem, there exists $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ such that $\mathcal{V}_\epsilon[g] = g$.

2.4.3. Uniqueness. The goal of this section is to show that the solution of (2.1.1) obtained in the previous section is unique within a certain class.

Indeed, let $\epsilon \leq \epsilon_0$ and $g = \mathcal{V}_\epsilon[g]$. Then, if $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ satisfies (2.1.6), Lemma 2.4.5 gives (2.4.91). By the construction of \bar{f} and $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon$, and since Π preserves regularity, we deduce that

$$(2.4.95) \quad g \in \mathcal{C}^1(Q_T),$$

$$(2.4.96) \quad \exists \kappa' > 0, (|g| + |\nabla_{x,v} g|)(t, x, v) \leq \frac{\kappa'}{(1+|v|)^{\gamma+1}}, \quad \forall (t, x, v) \in Q_T,$$

$$(2.4.97) \quad \int_{\mathbb{T}^2} j_g(t, x) \, dx = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Next result, inspired from [143, Section 8], shows that the solution in this class is unique.

PROPOSITION 2.4.6. *Let $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ satisfying (2.1.6) and let $G \in \mathcal{C}^0(Q_T)$. Then, the solution of system (2.1.1) satisfying conditions (2.4.95), (2.4.96) and (2.4.97) is unique.*

PROOF. Let $f_1 = \tilde{V}_\epsilon[f_1]$, for $\epsilon \leq \epsilon_0$. Let us suppose that (f^2, U^2, p^2) is a solution of system (2.1.1) with initial datum f_0 and control G such that (2.4.95) and (2.4.96) are satisfied.

Let $W := U^1 - U^2$, $g := f^1 - f^2$, $\pi := p^1 - p^2$. Then, (g, W, π) satisfies

$$(2.4.98) \quad \begin{cases} \partial_t g + v \cdot \nabla_x g + \operatorname{div}_v [(U^1 - v)g] = -W \cdot \nabla_v f^2, & (t, x, v) \in Q_T, \\ -\Delta_x W + \nabla_x \pi = j_g, & (t, x) \in \Omega_T, \\ \operatorname{div}_x W = 0, & (t, x) \in \Omega_T, \\ \int_{\mathbb{T}^2} W(t, x) dx = 0, & t \in [0, T], \\ g|_{t=0} = 0, & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Using Proposition B.1.1, we get, for every $t \in [0, T]$,

$$\|W(t)\|_{(H_x^2)^2} \leq C \|j_g(t)\|_{(L_x^2)^2}.$$

Moreover, the Sobolev embedding theorem gives, for every $t \in [0, T]$,

$$(2.4.99) \quad \|W(t)\|_{(L_x^\infty)^2} \leq C' \|j_g(t)\|_{(L_x^2)^2}.$$

On the other hand, we observe that condition (2.4.96) gives

$$\begin{aligned} (1 + |v|) |\nabla_{x,v} f^2(t, (X^1, V^1)(0, t, x, v))| \\ \leq \frac{\kappa'(1 + |v|)}{(1 + |V^1(0, t, x, v)|)^{\gamma+1}} \\ \leq \frac{C(\kappa', \gamma)}{(1 + |v|)^\gamma}, \end{aligned}$$

proceeding in the same fashion as in (2.4.87). As a result,

$$(2.4.100) \quad \sup_{(t,x) \in \Omega_T} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |v|) |\nabla_v f^2(t, (X^1, V^1)(0, t, x, v))| dv \leq \tilde{C}(\kappa', \gamma),$$

for some constant $\tilde{C}(\kappa', \gamma) > 0$. Consequently, from the Vlasov equation in (2.4.98), by the method of characteristics, we have

$$\begin{aligned} |g(t, x, v)| &\leq e^{2T} \left| \int_0^t W(s, X^1(0, s, x, v)) \cdot \nabla_v f^2(s, (X^1, V^1)(0, s, x, v)) ds \right| \\ &\leq e^{2T} \int_0^t \|W(s, \cdot)\|_{L_x^\infty} |\nabla_v f^2(s, (X^1, V^1)(0, s, x, v))| ds. \end{aligned}$$

Thus,

$$(1 + |v|) |g(t, x, v)| \leq \int_0^t \|W(s, \cdot)\|_{L_x^\infty} (1 + |v|) |\nabla_v f^2(s, (X^1, V^1)(0, s, x, v))| ds,$$

which implies, thanks to (2.4.100) and (2.4.99),

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} |j_g(t, x)| \leq C \int_0^t \|W(s, \cdot)\|_{L_x^\infty} ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq C' \int_0^t \|j_g(s)\|_{(L_x^2)^2} ds \\
&\leq C'' \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{T}^2} |j_g(s)| ds, \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned}$$

which, by Gronwall's lemma entails, since $j_g(0) = 0$, that

$$j_g(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

Moreover, using again system (2.4.98) we deduce from this that the difference $W(t) = (U^1 - U^2)(t)$ satisfies, for every $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} -\Delta_x W(t) + \nabla_x \pi(t) = 0, & x \in \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x W(t) = 0, & x \in \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} W(t) dx = 0, \end{cases}$$

which, according to Proposition B.1.1 must imply that $U^1 = U^2$ in Ω_T . In particular, the characteristics associated to $-v + U^1$ and to $-v + U^2$ coincide and thus, $f^1 = f^2$ in Q_T . \square

2.5. End of the proof

In order to conclude the proof of Theorem 2.1.1 we have to show that if we choose $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ with ϵ_1 small enough, then the fixed point g found in the previous section satisfies (2.1.3). To do this, we show that $\mathcal{V}_\epsilon[g]|_{t=T} = 0$ in $(\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2$ (see the strategy of proof in Section 2.1.3). The key result is the following.

PROPOSITION 2.5.1. *There exists $\epsilon_1 > 0$ such that the characteristics (X^g, V^g) associated to the field $-v + U^g$ meet γ^{3-} for some time in $[\frac{T}{24}, \frac{23T}{24}]$.*

PROOF. Let us define

$$\gamma^{4-} := \left\{ (x, v) \in S(x_0, r_0) \times \mathbb{R}^2; \quad |v| \geq \frac{5}{2}, \langle v, \nu(x) \rangle \leq -\frac{|v|}{4} \right\}.$$

We proceed in two steps. In a first time, we show the result for the characteristics associated to $-v + \bar{U}$, given by (2.3.45). In a second time, we show that, thanks to the first step, the result for (X^g, V^g) follows by choosing $\epsilon_1 > 0$ small enough.

Step 1: Let us consider the characteristics (\bar{X}, \bar{V}) associated to the field $-v + \bar{U}$. We claim that

$$(2.5.101) \quad \exists \sigma \in \left[\frac{T}{12}, \frac{3T}{12} \right] \cup \left[\frac{9T}{12}, \frac{11T}{12} \right] \text{ such that } \bar{X}(\sigma, 0, x, v) \in \gamma^{4-}.$$

To show this claim, we need to prove the following

$$(2.5.102) \quad \exists t \in \left[\frac{T}{12}, \frac{3T}{12} \right] \cup \left[\frac{9T}{12}, \frac{11T}{12} \right] \text{ s.t } \bar{X}(t, 0, x, v) \in B\left(x_0, \frac{r_0}{4}\right), |\bar{V}(t, 0, x, v)| \geq \alpha,$$

where α is given by (2.3.42). Indeed, let M_1 be given by (2.3.44) and let us consider two cases.

Case 1: If $|\bar{V}(\frac{T}{3}, 0, x, v)| \geq M_1$, then using (2.2.13), one obtains that

$$|v| \geq e^{\frac{T}{3}} \left| \bar{V}\left(\frac{T}{3}, 0, x, v\right) \right| - e^{\frac{T}{3}} \left| \int_0^{\frac{T}{3}} e^{\tau - \frac{\tau}{3}} \bar{U}_1(\tau, \bar{X}(\tau, 0, x, v)) d\tau \right|$$

$$\geq e^{\frac{T}{3}} M_1 - \frac{T}{3} e^{\frac{T}{3}} \|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}.$$

Then, by the choice (2.3.44), this implies

$$(2.5.103) \quad |v| \geq e^{\frac{T}{3}} \max\{\underline{m}_1, 2\alpha\}.$$

Hence, in particular, we get $|v| \geq \underline{m}_1$. This allows to apply Proposition 2.3.1, which gives that $\exists t \in [\frac{T}{12}, \frac{3T}{12}]$ such that $\bar{X}(t, 0, x, v) \in B(x_0, \frac{r_0}{4})$.

Moreover, we deduce from (2.5.103) that

$$|v| \geq 2e^{\frac{T}{3}} \alpha,$$

which entails, thanks to (2.3.19), that $|\bar{V}(t, 0, x, v)| \geq \alpha$. Thus, (2.5.102) is satisfied in this case.

Case 2: If $|\bar{V}(\frac{T}{3}, 0, x, v)| < M_1$, then Proposition 2.3.4 implies that

$$\left| \bar{V}\left(\frac{2T}{3}, 0, x, v\right) \right| \geq 1 + M_1.$$

Proceeding as in the previous case, this yields (2.5.102) with some $t \in [\frac{9T}{12}, \frac{11T}{12}]$.

This shows (2.5.102).

Let us prove (2.5.101). We choose $s > 0$ with

$$s < \log\left(1 + \frac{9r_0}{4\alpha}\right) < \frac{T}{200},$$

thanks to (2.3.42) and (2.3.43), and such that

$$(2.5.104) \quad \bar{X}(t, 0, x, v) + (1 - e^s)\bar{V}(t, 0, x, v) \in S(x_0, 2r_0),$$

$$(2.5.105) \quad \langle \bar{V}(t, 0, x, v), \nu(x) \rangle \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} |\bar{V}(t, 0, x, v)|.$$

The last point follows from the fact that any straight line arising from $B(x_0, \frac{r_0}{4})$ cuts $S(x_0, r_0)$ forming an angle with $\nu(x)$ of value at most $\frac{\pi}{6}$. To see (2.5.104), we observe that, choosing $s_0 := \log\left(1 + \frac{9r_0}{4\alpha}\right)$ one has

$$\begin{aligned} & |\bar{X}(t, 0, x, v) + (1 - e^{s_0})\bar{V}(t, 0, x, v) - x_0| \\ & \geq (e^{s_0} - 1)\alpha - |\bar{X}(t, 0, x, v) - x_0| \\ & \geq \frac{9r_0}{4} - \frac{r_0}{4} = 2r_0. \end{aligned}$$

Hence, by the intermediate value theorem, there exists s with $0 < s \leq s_0$ such that (2.5.104) holds.

Moreover, we deduce from (2.2.13) and (2.5.102) that

$$\begin{aligned} & |\bar{X}(t, 0, x, v) + (1 - e^s)\bar{V}(t, 0, x, v) - \bar{X}(t - s, 0, x, v)| \\ & = |\bar{X}(t, 0, x, v) + (1 - e^s)\bar{V}(t, 0, x, v) - \bar{X}(t - s, t, (\bar{X}, \bar{V})(t, 0, x, v))| \\ & = \left| \int_t^{t-s} \int_t^\sigma e^{\sigma-z} \bar{U}_1(z, \bar{X}(z, \bar{X}(t, 0, x, v))) dz d\sigma \right| \\ & \leq T e^T s \|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0} \\ & \leq C(T) \log\left(1 + \frac{9r_0}{4\alpha}\right) \|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0} \end{aligned}$$

$$\leq C'(T) \frac{9r_0}{4\alpha} \|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0} \leq \frac{C(T, r_0)}{\mathcal{C}_{r_0, T}},$$

using (2.3.42) and the fact that $\log(1+x) \leq x$ for x small. We may choose $\mathcal{C}_{r_0, T}$ large enough, together with (2.3.43), so that

$$|\bar{X}(t, 0, x, v) + (1 - e^s)\bar{V}(t, 0, x, v) - \bar{X}(t - s, 0, x, v)| < \frac{r_0}{2},$$

which allows to deduce, thanks to (2.5.104), that

$$\bar{X}(t - s, 0, x, v) \notin B(x_0, r_0).$$

Hence, by the intermediate value theorem, there exists $\sigma \in [t - s, t]$ such that

$$\bar{X}(\sigma, 0, x, v) \in S(x_0, r_0).$$

Moreover, by (2.2.13) and (2.5.102), we have

$$\begin{aligned} |\bar{V}(\sigma, 0, x, v)| &= |\bar{V}(\sigma, t, (\bar{X}, \bar{V})(t, 0, x, v))| \\ &\geq e^{t-\sigma} |\bar{V}(t, 0, x, v)| - T e^{t-\sigma} \|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}} \\ &= e^{t-\sigma} (\alpha - T \|\bar{U}_1\|_{\mathcal{C}_{t,x}^{0,1}}). \end{aligned}$$

Then, the choice of α in (2.3.42) yields

$$|\bar{V}(\sigma, 0, x, v)| \geq \frac{5}{2}.$$

Thus, (2.5.101) follows.

Step 2: Let us denote by (X^g, V^g) the characteristics associated to $-v + U^g$.

We have

$$(2.5.106) \quad \sup_{(t,x,v) \in Q_T} |((X^g, U^g) - (\bar{X}, \bar{V}))(t, 0, x, v)| \leq C \|U^g - \bar{U}\|_{\mathcal{C}_{t,x}^0}.$$

Observe that, thanks to (2.4.64), (2.3.59), (2.3.49) and (2.3.58), $(U^g - \bar{U})(t)$ satisfy

$$\begin{cases} -\Delta_x (U^g - \bar{U})(t) + \nabla_x (p^g - \bar{p})(t) = j_{g-\bar{f}}(t), & x \in \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x (U^g - \bar{U})(t) = 0, & x \in \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} (U^g - \bar{U})(t) \, dx = 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Using the Sobolev embedding theorem and Proposition B.1.1, we deduce

$$\begin{aligned} \|U^g - \bar{U}\|_{(L_{t,x}^\infty)^2} &\leq C \|U^g - \bar{U}\|_{L_t^\infty (H_x^2)^2} \\ &\leq C \|j_{g-\bar{f}}\|_{L_t^\infty L^2(\mathbb{T}^2)^2} \leq C\epsilon, \end{aligned}$$

using point (b). Hence, choosing ϵ_1 small enough, from (2.5.101) and (2.5.106), the conclusion follows. \square

PROOF OF THEOREM 2.1.1. By the previous sections, choosing $\epsilon \leq \min\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$, where ϵ_0 satisfies (2.4.68) and ϵ_1 is given by Proposition 2.5.1, there exists $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ such that $\mathcal{V}_\epsilon[g] = g$ and such that Proposition 2.5.1 applies.

The fact that g satisfies system (2.1.1) follows from the construction of \mathcal{V}_ϵ and (2.4.78). Since $g \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, thanks to Lemma 2.4.5, (2.3.60) and the fact that Π preserves regularity, we deduce that

$$\partial_t g + v \cdot \nabla_v g - \operatorname{div}_v [(U^g - v)g] = 1_\omega(x)G,$$

for some $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$.

To show (2.1.3), we observe that from the construction of \mathcal{V}_ϵ and (2.3.56), we have

(2.5.107)

$$\mathcal{V}_\epsilon[g](T, x, v) := \Pi \left(\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[f]_{|([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus B(x_0, 2r_0)) \times \mathbb{R}^2) \cup ([0, \frac{T}{48}] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right) (T, x, v).$$

In particular, for any $(x, v) \in (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2$, it comes from the definition of Π that

$$\mathcal{V}_\epsilon[g](T, x, v) = \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](T, x, v).$$

Moreover, by (2.4.78) and (2.2.15),

$$\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](T, x, v) = e^{2T} f_0((X^g, V^g)(0, T, x, v)).$$

Hence, the absorption procedure described by (2.4.78) and (2.4.63) and Proposition 2.5.1 allow to conclude that $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](T, x, v) = 0$ in $(\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2$. □

2.6. Conclusion and perspectives

We have proved in Theorem 2.1.1 a local controllability result for the Vlasov equation coupled with the stationary Stokes system. Some possible extensions are possible.

We could consider the Vlasov-Stokes system on a bounded domain with boundary, as in [79], with Dirichlet boundary conditions for the vector field and specular boundary conditions for the distribution function. In this case, with an internal control, the construction of a reference trajectory given in Section 2.3 is no longer effective, because of the specular reflection on the boundary of the characteristic flow. In particular, the distinction between good and bad directions should be refined. A geometric control condition could be very useful in this context. The boundary control problem may necessitate a very technical approach.

Other fluid-kinetic models could possibly be studied with similar techniques, such as the Vlasov-Navier-Stokes system. This is a matter of current work.

Local null-controllability of the 2-D Vlasov-Navier-Stokes system

KEYWORDS: Vlasov-Navier-Stokes system; kinetic theory ; kinetic-fluid model; controllability; return method. ¹

3.1. Introduction

We consider the Vlasov-Stokes system in the 2-dimensional torus $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, which writes, for $T > 0$ and $\omega \subset \mathbb{T}^2$,

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = 1_\omega(x)G, & (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x) u - \Delta_x u + \nabla_x p = j_f - \rho_f u, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

where

$$(3.1.2) \quad j_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} v f(t, x, v) dv, \quad \rho_f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv.$$

We shall suppose throughout the article that the Lebesgue measure of the torus is normalised, i.e., $\int_{\mathbb{T}^2} dx = 1$.

3.1.1. Main results. Before stating our main results, we give the notion of solution that we use in this work and we explain the controllability problem that we want to solve.

3.1.1.1. *Strong solutions.*

DEFINITION 3.1.1. *Let $T > 0$. Let $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ and $u_0 \in H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ with $\operatorname{div}_x u_0 = 0$. Let $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$. We say that (f, u) is a strong solution of system (3.1.1) if the following conditions are satisfied.*

$$(3.1.3) \quad f \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2),$$

$$(3.1.4) \quad \text{the Vlasov equation is satisfied for every } (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

$$(3.1.5) \quad \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |v| + |v|^2) f(t, x, v) dx dv < \infty,$$

$$(3.1.6) \quad u \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)),$$

$$(3.1.7) \quad \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

1. Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'une prépublication (cf. [126]).

and for any $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T]; H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$ with $\operatorname{div}_x \psi(t, x) = 0$ and $t \in (0, T]$, one has

$$(3.1.8) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} u(t)\psi(t) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (\nabla u : \nabla \psi - u \otimes u \cdot \nabla \psi - u \partial_t \psi) \, ds \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} u_0 \psi(0) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (j_f(s) - \rho_f(s)u(s)) \psi(s) \, ds \, dx, \end{aligned}$$

where

$$\nabla u : \nabla \psi := \sum_{j,k=1}^2 \partial_j u^k \partial_j \psi^k, \quad u \otimes u \cdot \nabla \psi := \sum_{j,k=1}^2 u^j u^k \partial_j \psi^k.$$

Let us recall that, under the incompressibility condition, the convection term satisfies that $(u \cdot \nabla)u = \operatorname{div}(u \otimes u)$, with the previous notation.

3.1.1.2. The controllability problem. We are interested in the controllability properties of system (3.1.1), by means of an internal control, in the following sense. Given f_0 and f_1 in a suitable function space and given $T > 0$, is it possible to find a control G steering the solution of (3.1.1) from f_0 to f_1 , in time T ? In other words, we want to find G such that

$$(3.1.9) \quad f(T, x, v) = f_1(x, v), \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Another interesting point is to find G in such a way it could modify not only the dynamics of the distribution function G but also the evolution of the field u from u_0 to a given u_1 in time T .

In this article, we shall give a positive answer to this question for $f_1 = 0$ and $u_1 = 0$. We shall need a geometric assumption on the region ω , stated in [70] and used in [73, Definition 1.2, p.699].

DEFINITION 3.1.2 (Strip assumption). *An open set $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfies the strip assumption if there exists a straight line of \mathbb{R}^2 whose image H by the canonical surjection $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ is closed and included in ω . We shall call n_H a unit vector orthogonal to H , in such a way $H = \{x \in \mathbb{R}^2; x \cdot n_H = 0\}$. For any $l > 0$, we denote*

$$H_l := H + [-l, l]n_H.$$

Let us observe that, as H is closed in \mathbb{T}^2 , there exists $\delta > 0$ such that

$$(3.1.10) \quad H_{2\delta} \subset \omega$$

and such that 4δ is smaller than the distance between two successive lines in $s(H)$.

Under this geometric assumption and suitable hypothesis on the data u_0 , f_0 and f_1 , we obtain the following local null-controllability result in large time.

THEOREM 3.1.3. *Let $\gamma > 2$, and let $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfy the strip assumption of Definition 3.1.2. There exists $\epsilon > 0$, $M > 0$ and $T_0 > 0$ such that for every $T \geq T_0$, $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ and u_0 satisfying that*

$$(3.1.11) \quad u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2) \cap H^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2), \quad \operatorname{div}_x u_0 = 0, \quad \|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)} \leq M,$$

and that

$$(3.1.12) \quad \|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \leq \epsilon,$$

$$(3.1.13) \quad \exists \kappa > 0, \quad \sup_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} (1 + |v|)^\gamma (|\nabla_x f_0| + |\nabla_v f_0|)(x, v) \leq \kappa,$$

there exists a control $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ such that a strong solution of (3.1.1) with $f|_{t=0} = f_0$ and $u|_{t=0} = u_0$ exists, is unique and satisfies

$$(3.1.14) \quad f|_{t=T} = 0, \quad u|_{t=T} = 0.$$

The techniques developed in this article allow to obtain, in absence of the control term $1_\omega(x)G$, that the strong solutions of the homogeneous Vlasov-Navier-Stokes

$$(3.1.15) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = 0, & (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x) u - \Delta_x u + \nabla_x p = j_f - \rho_f u, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ f|_{t=0} = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

are unique within a certain class. The result is the following.

THEOREM 3.1.4. *Let $\gamma > 2$ and $T > 0$. Then, for any $M > 0$, there exists $\epsilon > 0$ such that for every $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap W^{1, \infty}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ and u_0 satisfying that*

$$u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2) \cap H^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2), \quad \operatorname{div}_x u_0 = 0, \quad \|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)} \leq M,$$

and that

$$(3.1.16) \quad \|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \leq \epsilon,$$

$$(3.1.17) \quad \exists \kappa > 0, \quad \sup_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} (1 + |v|)^\gamma (|\nabla_x f_0| + |\nabla_v f_0|)(x, v) \leq \kappa,$$

there exists a unique strong solution of (3.1.15) with $f|_{t=0} = f_0$ and $u|_{t=0} = u_0$.

REMARK 3.1.5. *Theorem 3.1.3 is a local null-controllability result in the sense that the smallness conditions (3.1.12) and (3.1.11) are essential to prove the controllability. On the other hand, condition (3.1.13) is only useful to ensure the uniqueness of the corresponding solution.*

Theorem 3.1.4 shows the existence of strong solutions of (3.1.15) with small-data in any time. We show that under condition (3.1.17) this strong solution is unique.

3.1.2. Previous work.

3.1.2.1. The controllability of non-linear kinetic equations. The controllability of non-linear equations, typically described by the coupling of a Vlasov equation and a system for a vector field, originated from the work of O. Glass for the Vlasov-Poisson system in [70]. In this work, the idea of combining the return method (see Section 3.1.2.4 for details) with a Leray-Schauder fixed-point argument involving an absorption procedure was successfully employed for the first time.

This strategy was later extended in [72] by O. Glass and D. Han-Kwan to the Vlasov-Poisson system under external and Lorentz forces. The authors obtain both local and global exact controllability results in the case of bounded external forces, which requires some new ideas to construct the reference trajectories. Precisely, the authors exploit the fact that the free dynamics and the dynamics under the external force are similar in small time. In the case of Lorentz forces, a precise knowledge of the magnetic field and a geometric control condition in the spirit of [11] allow to

obtain a local exact controllability result. The functional framework of [70, 72] is the one given by the classical solution of the Vlasov-Poisson system, that is, some appropriate Hölder spaces, according to [143]. To end up, let us mention that the systems considered in these results present a coupling with a Poisson equation, which is stationary, allowing the use of techniques from Harmonic approximation to construct the reference trajectories.

In the case in which the Vlasov equation is coupled with a non-stationary equation, the construction of a reference trajectory has to be achieved in a different way. In this direction, a new strategy has been developed by [73] in the context of the Vlasov-Maxwell system. In this case, the authors use some controllability results for the Maxwell system, under the geometric control condition of [11], which allows to construct suitable reference trajectories. In a second step, the Leray-Schauder fixed-point procedure must be reformulated in order to respect some conservation laws. This gives a local controllability result for the distribution function. This result holds in some appropriate Sobolev spaces, according to the functional framework of [6, 146].

Furthermore, their strategy allows to obtain a local controllability result for the distribution function and the electric field under the assumption that ω contains a hyperplane, using the convergence towards the Vlasov-Poisson system under a certain regime.

Finally, the methods of [70] and [72] have been applied by the author to a kinetic-fluid system in [125], the Vlasov-Stokes system, where a Vlasov equation is coupled with a stationary Stokes system, which can be seen as a simplified version of (3.1.1).

3.1.2.2. *A short review on the Vlasov-Navier-Stokes system.* This system is a model to describe the behaviour of a large cloud of particles interacting with a viscous incompressible fluid. Typically, the coupling is made through two mechanisms. The action of the fluid on the particles is taken into account in the Vlasov equation, where the field appears multiplying the gradient in velocity of the distribution function. Secondly, the action of the particles on the fluid gives rise to a drag force appearing in the Navier-Stokes system as a source term. For more details on the model, we refer to [32].

The field equation in System (3.1.1), under the influence of the drag force $j - \rho u$, has been rigorously derived as a mean-field limit of a large cloud of particles by L. Desvillettes, F. Golse and V. Ricci in [59], using homogenisation techniques and under a strong non-collision hypothesis.

The well-posedness character of a simplified system has been done in [79]. The existence of weak solutions to (3.1.1) in the three-dimensional torus has been achieved by L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont and A. Moussa in [31]. Other related systems, considering variable density or compressible fluids have been studied in [48], along with its asymptotic behaviour under strong hypothesis.

Finally, the question of hydrodynamical limits under certain regimes has been treated by T. Goudon, P. E. Jabin and A. Vasseur in [77, 78], considering also the effects of collisions between particles.

3.1.2.3. *Obstructions to controllability.* Since Theorem 3.1.3 is of local nature around the steady state $(f, u) = (0, 0)$, a first step to achieve its proof could be the use of the linear test (see [50]). Following the classical scheme, the controllability of the linearised system around the trivial trajectory and the classical inverse mapping

theorem between proper functional spaces would imply the controllability of the nonlinear system (3.1.1).

Indeed, the formal linearised equation around the trajectory $(f, u) = (0, 0)$ is

$$(3.1.18) \quad \begin{cases} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F - v \cdot \nabla_v F - 2F = 1_\omega(x) \tilde{G}, \\ F(0, x, v) = f_0(x, v), \end{cases}$$

which is a transport equation with friction. By the method of characteristics, we can give an explicit solution of (3.1.18), which writes

$$(3.1.19) \quad F(t, x, v) = e^{2t} f_0(x + (1 - e^t)v, e^t v) + \int_0^t e^{2(t-s)} (1_\omega \tilde{G})(s, x + (1 - e^{t-s})v, e^{t-s}v) ds.$$

As pointed out in [70], there exist two obstructions for controllability, which are:

Small velocities: a certain $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ can have a "good direction" with respect to the control region ω , in the sense that $x + (1 - e^{-t})v$ meets ω at some time. However, if $|v|$ is not sufficiently large, the trajectory of the characteristic beginning at this point would possibly not reach ω before a fixed time. In our case, the effects of friction could enhance this difficulty.

Large velocities: the obstruction concerning large velocities is of geometrical nature. There exist some "bad directions" with respect to ω , in the sense that a characteristic curve parting from $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ would never reach ω , no matter how large $|v|$ is.

As a result of this, and considering again equation (3.1.19), we deduce that the linearised system is not controllable in general.

3.1.2.4. *The return method.* In order to circumvent these difficulties, we use the return method, due to J.-M. Coron.

The idea of this method, in the case under study, is to construct a reference trajectory (\bar{f}, \bar{u}) starting from $(0, 0)$ and coming back to $(0, 0)$ at some fixed time in such a way the linearised system around it is controllable. This method, which makes a crucial use of the nonlinearity of the system, allows to avoid the obstructions discussed in the previous section.

We refer to [50, 71] for presentations and examples on the return method.

3.1.2.5. *Strategy of the proof of Theorem 3.1.3.* The strategy of this work follows the scheme of [73]. More precisely, it relies on two ingredients.

Step 1: We build a reference solution (\bar{f}, \bar{u}) of system (3.1.1) with a control \bar{G} , located in ω , starting from $(0, 0)$ and arriving at $(0, 0)$ outside ω at a sufficiently large time $T > 0$ and such that the characteristics associated to the field $-v + \bar{u}$ meet ω before $T > 0$. In doing this, the non-linear coupling will be essential, thanks to the use of controllability results for the Navier-Stokes system.

Step 2: We build a solution (f, u) close to (\bar{f}, \bar{u}) parting from (f_0, u_0) and arriving at $(0, 0)$ outside ω at time $T > 0$. This can be done by means of a fixed-point argument involving an absorption operator in the control region.

3.1.2.6. *Outline of the paper.* In Section 3.2, we recall some results on the characteristics equation that will be important in the sequel. In Section 3.3, we

construct a suitable reference trajectory of system (3.1.1). In Section 3.4, we construct a strong solution of this system, thanks to a fixed-point argument. In Section 3.5 we prove some stability estimates for the Navier-Stokes system. In Section 3.6, we show that this strong solution satisfies the controllability property. In Section 3.7, we prove that this strong solution is unique within a certain class.

3.1.2.7. *Notation and functional framework.* Let $T > 0$ and set $Q_T := [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ and $\Omega_T := [0, T] \times \mathbb{T}^2$. If $\sigma \in [0, 1]$, $\mathcal{C}_b^{0,\sigma}(\Omega)$ denotes the space of bounded σ -Hölder functions in Q_T , equipped with the norm

$$(3.1.20) \quad \|f\|_{\mathcal{C}_b^{0,\sigma}(\Omega)} := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{(t,x,v) \neq (t',x',v')} \frac{|f(t,x,v) - f(t',x',v')|}{|(t,x,v) - (t',x',v')|^\sigma},$$

for any $f \in \mathcal{C}_b^{0,\sigma}(Q_T)$. We shall also consider the spaces $\mathcal{C}_b^{0,\sigma}(\Omega_T)$, with analogous definitions.

We will also use the Sobolev spaces $W^{m,p}$, with $m \in \mathbb{N}^*$ and $p \in [1, \infty]$. In the particular case of the flat torus \mathbb{T}^2 , the Fourier series allow to write

$$(3.1.21) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{ik \cdot x}, \quad \text{in } L^2(\mathbb{T}^2), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}^2),$$

with

$$(3.1.22) \quad c_k = c_k(f) := \int_{\mathbb{T}^2} f(x) e^{ik \cdot x} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2.$$

Thus, for any $s > 0$, we may write

$$H^s(\mathbb{T}^2) = \left\{ f \in L^2; f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{ik \cdot x}, \bar{c}_k = c_{-k}, \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (1 + |k|^2)^s |c_k|^2 < \infty \right\},$$

$$H_0^s(\mathbb{T}^2) = \left\{ f \in H^s(\mathbb{T}^2); \int_{\mathbb{T}^2} f(x) dx = 0 \right\},$$

which allows to equip these spaces, respectively, with the norms

$$(3.1.23) \quad \|f\|_{H^s} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (1 + |k|^2)^s |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_{H_0^s} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |k|^{2s} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

with equivalence of norms in the case of H_0^s as a subspace of H^s .

In the case of vector fields, we shall use $(W^{m,p}(\mathbb{T}^2))^2$, with the product norm. Let us introduce, as usual, the space of solenoidal vector fields in L^2 , i.e.,

$$\mathcal{H} := \{F \in L^2(\mathbb{T}^2)^2; \operatorname{div}_x F = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2\},$$

where the operator div_x is taken in the distributional sense. Analogously, let us use the following notations, following [47],

$$\mathcal{V}_\sigma := \{F \in H^1(\mathbb{T}^2)^2; \operatorname{div}_x F = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2\},$$

$$\mathcal{V}'_\sigma := \{F \in H^{-1}(\mathbb{T}^2)^2; \operatorname{div}_x F = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2\},$$

$$\mathcal{V}' := \{F \in H^{-1}(\mathbb{T}^2)^2\}.$$

We shall also denote by $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ the space of Schwartz functions in \mathbb{R}^2 .

Finally, if X is a Banach space and $p \geq 1$, we will sometimes use, for simplicity, the notations $L_t^p X_x$ or $\mathcal{C}_t^0 X_x$ to refer to $L^p(0, T; X)$ or $\mathcal{C}^0([0, T]; X)$.

To simplify some computations, we shall use the symbol \lesssim to denote that a multiplicative constant is omitted.

We shall refer to Appendices **B** and **C** to recall some notation and important results on the non-stationary Stokes system and the Navier-Stokes system.

3.2. Some remarks on the characteristic equations

Let be given a fixed $u(t, x)$. Let $s, t \in [0, T]$, $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. We denote by $(X(t, s, x, v), V(t, s, x, v))$ the characteristics associated with the field $-v + u(t, x)$, i.e., the solution of the system

$$(3.2.24) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(t) \\ -V(t) + u(t, X) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} \Big|_{t=s} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \end{cases}$$

We observe that if $u \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$, system (3.2.24) has a unique solution, thanks to the Cauchy-Lipschitz theorem. Moreover, one has the explicit formulae

$$(3.2.25) \quad \begin{cases} X(t, s, x, v) = x + (1 - e^{-t+s})v + \int_s^t \int_s^{t'} e^{\tau-t'} u(\tau, X(\tau, s, x, v)) d\tau dt', \\ V(t, s, x, v) = e^{-t+s}v + \int_s^t e^{\tau-t} u(\tau, X(\tau, s, x, v)) d\tau. \end{cases}$$

REMARK 3.2.1. *The same result is still valid if one considers vector field in the class $u \in L^1(0, T; \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$. This will be important in Section 3.4. For details, see [53, Remark 1.2.3, p.13]. In that case, the associated characteristics are still given by (3.2.25), well-defined for every $t \in [0, T]$ and differentiable also in time.*

Using the method of characteristics, given an initial datum $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, the solution of the transport equation with friction

$$(3.2.26) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v [(u - v)f] = 0, & (t, x, v) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

has the explicit solution

$$(3.2.27) \quad f(t, x, v) = e^{2t} f_0((X, V)(0, t, x, v)),$$

where (X, V) are given by (3.2.25).

The proof of the following result, under the hypothesis that the field belongs to $\mathcal{C}_t^0 \mathcal{C}_x^1$, can be found in [125, Lemma 1, Section 3] (see Lemma 2.2.1 in Chapter 2). The adaptation to the case in which the field belongs to $L_t^1 \mathcal{C}_x^{0,1}$ is straightforward.

LEMMA 3.2.2. *Let $u \in L^1(0, T; \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$. Then, the characteristics associated to the field $-v + u$ satisfy that for some $C = C(T, \|u\|_{L_t^1 \mathcal{C}_x^{0,1}}) > 0$,*

$$\begin{aligned} & |(X, V)(t, s, x, v) - (X, V)(t', s', x', v')| \\ & \leq C(1 + |v|) |(t, s, x, v) - (t', s', x', v')|, \end{aligned}$$

whenever $(t, s, x, v), (t', s', x', v') \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, with $|v - v'| < 1$.

3.3. Construction of a reference trajectory

The aim of this section is to construct a reference solution (\bar{f}, \bar{u}) of system (3.1.1), according to the return method, in such a way the characteristics associated to \bar{u} , say (\bar{X}, \bar{V}) verify the following property

$$\forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists t \in \left[\frac{T}{12}, \frac{11T}{12} \right] \text{ such that}$$

$$(3.3.28) \quad \bar{X}(t, 0, x, v) \in H, \text{ with } |\bar{V}(t, 0, x, v) \cdot n_H| \geq 5.$$

PROPOSITION 3.3.1. *Let $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfy the strip assumption of Definition 3.1.2. There exists $T_0 > 0$ such that for any $T \geq T_0$, there exists a reference solution (\bar{f}, \bar{u}) of system (3.1.1) such that*

$$(3.3.29) \quad \bar{f} \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)),$$

$$(3.3.30) \quad \bar{u} \in \mathcal{C}^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2),$$

$$(3.3.31) \quad (\bar{f}, \bar{u})|_{t=0} = (0, 0), \quad (\bar{f}, \bar{u})|_{t=T} = (0, 0),$$

$$(3.3.32) \quad \text{supp}(\bar{f}) \subset (0, T) \times \omega \times \mathbb{R}^2,$$

and such that the characteristics associated to \bar{u} satisfy (3.3.28).

3.3.1. Global exact controllability of the Navier-Stokes system. We recall a result due to Jean-Michel Coron and Andrei Fursikov, that guarantees the global exact controllability of the Navier-Stokes system on a surface without boundary (see [49]).

More precisely let (M, g) be a connected, two-dimensional, orientable, compact, smooth Riemannian manifold without boundary. Let us denote by $T_x M$, as usual, the tangent space to M at $x \in M$ and let $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$. For the definition of the differential operators div , Δ and $\nabla \cdot$ on the manifold M used below, we refer to [49, Section 2].

Let us choose and fix a particular solution of the Navier-Stokes system in M , i.e., let $\hat{y} \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty) \times M; TM)$ be such that

$$(3.3.33) \quad \hat{y}(t, x) \in T_x M, \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times M,$$

$$(3.3.34) \quad \text{div}_x \hat{y}(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times M,$$

and such that $\exists \hat{p} \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty) \times M; \mathbb{R})$ for which

$$\partial_t \hat{y} - \Delta \hat{y} + \nabla_{\hat{y}} \cdot \hat{y} + \nabla \hat{p} = 0, \quad \text{in } (0, \infty) \times M.$$

Then, we have the following controllability result.

THEOREM 3.3.2 (Coron-Fursikov [49]). *Let $\tau > 0$, let $M_0 \subset M$ be an arbitrary open set and let $y_0 \in \mathcal{C}^\infty(M; TM)$ satisfying $y_0(x) \in T_x M$, for all $x \in M$, and that $\text{div}_x y_0 = 0$. Then, there exists a control $w \in \mathcal{C}^\infty(M \times [0, \infty); TM)$ verifying*

$$(3.3.35) \quad \text{supp } w \subset (0, \tau) \times M_0$$

and such that the solution of the system

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y + \nabla_y \cdot y + \nabla p = w, & (t, x) \in (0, \infty) \times M, \\ \text{div}_x y(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times M, \\ y|_{t=0} = y_0(x), & x \in M, \end{cases}$$

satisfies

$$y|_{t=\tau} = \hat{y}|_{t=\tau}.$$

This result guarantees that, given a fixed trajectory of the Navier-Stokes system, namely \hat{y} , given a time τ , given an arbitrary initial state y_0 and given any open set $M_0 \subset M$, we can find a suitable force w , acting on M_0 , allowing to pass from the initial state y_0 to the solution \hat{y} in time τ . We shall exploit Theorem 3.3.2 to construct a reference trajectory in the case of the torus.

3.3.2. Proof of Proposition 3.3.1. Let us consider some T_1, T_2, T_3, T_4 with T_3 large enough, to be chosen later on, and

$$(3.3.36) \quad 0 := T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4.$$

We shall work separately on each interval (T_i, T_{i+1}) , for $i = 0, \dots, 3$. Let us fix from now on the values $0 < T_1 < T_2$.

Step 1. The reference solution in $[0, T_1]$.

We set $(f_1, u_1) = (0, 0)$, which trivially solves (3.1.1).

Step 2. The reference solution in $[T_1, T_2]$.

At this step we use Theorem 3.3.2 to modify the reference trajectory in a convenient way.

Indeed, since $\omega \subset \mathbb{T}^2$ satisfies the strip assumption, let us consider the constant vector field $\hat{y}(t, x) \equiv n_H$, where n_H is given by Definition 3.1.2. Thus, \hat{y} is a stationary solution of the Navier-Stokes system in \mathbb{T}^2 . Let us apply Theorem 3.3.2 with

$$\tilde{y} = n_H, \quad M = \mathbb{T}^2, \quad M_0 = \omega, \quad \tau := T_2 - T_1, \quad y_0 \equiv 0.$$

This yields a control

$$(3.3.37) \quad w_2 \in \mathcal{C}^\infty([0, T_2 - T_1] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$$

with

$$(3.3.38) \quad \text{supp } w_2 \subset (0, T_2 - T_1) \times \omega$$

and such that the corresponding solution to the Navier-Stokes system under this force, say u_2 , satisfies

$$u_2|_{t=T_2-T_1} = n_H.$$

To construct the associated distribution function, let us consider $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ such that

$$(3.3.39) \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_1 \, dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_1 \, dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_1 \, dv = 0,$$

$$(3.3.40) \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_1 \mathcal{Z}_2 \, dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} v_2 \mathcal{Z}_2 \, dv = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Z}_2 \, dv = 0.$$

Then, define

$$(3.3.41) \quad f_2(t, x, v) := (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)(v) \cdot w_2(t, x), \quad \forall (t, x, v) \in (0, T_2 - T_1) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

which gives

$$(3.3.42) \quad f_2 \in \mathcal{C}^\infty([0, T_2 - T_1] \times \mathbb{T}^2; \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)), \\ j_{f_2}(t, x) = w_2(t, x), \quad \rho_{f_2}(t, x) = 0.$$

Consequently,

$$(3.3.43) \quad \partial_t u_2 + (u_2 \cdot \nabla) u_2 - \Delta u_2 + \nabla p_2 = j_{f_2} - \rho_{f_2} u_2, \quad (0, T_2 - T_1) \times \mathbb{T}^2,$$

and using (3.3.38),

$$(3.3.44) \quad \partial_t f_2 + v \cdot \nabla_x f_2 + \text{div}_v [(u_2 - v) f_2] = 0, \quad \text{in } (0, T_2 - T_1) \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2.$$

Step 3. The reference solution in $[T_2, T_3]$.

Let us choose $T_3 > T_2$ large enough, to be chosen later on. During the interval $[T_2, T_3]$, we use the stationary solution n_H to accelerate all the particles in the direction of n_H , as explained in detail in Step 5.

Step 4. The reference solution in $[T_3, T_4]$.

Working as in Step 2, we use again Theorem 3.3.2 to steer the Navier-Stokes system from n_H to 0 in time $T_4 - T_3$. This provides a control

$$w_4 \in \mathcal{C}^\infty([0, T_4 - T_3] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$$

and

$$\text{supp } w_4 \subset (0, T_4 - T_3) \times \omega,$$

such that the corresponding solution of the Navier-Stokes system under the force w_4 , say u_4 , satisfies

$$(3.3.45) \quad \begin{aligned} u_4 &\in \mathcal{C}^\infty([0, T_4 - T_3] \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2), \\ u_4|_{t=0} &= n_H, \quad u_4|_{t=T_4-T_3} = 0. \end{aligned}$$

Thus, choosing \mathcal{Z}_1 and \mathcal{Z}_2 as in (3.3.39) and (3.3.40), we define

$$(3.3.46) \quad f_4(t, x, v) := (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)(v) \cdot w_4(t, x), \quad \forall (t, x, v) \in (0, T_4 - T_3) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

By the same arguments as before, this yields

$$(3.3.47) \quad \partial_t u_4 + (u_4 \cdot \nabla) u_4 - \Delta u_4 + \nabla p_4 = j_{f_4} - \rho_{f_4} u_4, \quad \text{in } (0, T_4 - T_3) \times \mathbb{T}^2,$$

$$(3.3.48) \quad \partial_t f_4 + v \cdot \nabla_x f_4 + \text{div}_v [(u_4 - v) f_4] = 0, \quad \text{in } (0, T_4 - T_3) \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2.$$

Step 5. Conclusion.

Let us introduce the following parameters

$$(3.3.49) \quad \Lambda_0 := \max \left\{ \frac{d_0}{1 - e^{-\frac{T_1}{2}}}, 5e^{T_1} \right\}, \quad d_0 := \max_{y \in \mathbb{T}^2} d(y, H),$$

where d_0 is finite thanks to the compactness of \mathbb{T}^2 and the fact that H is closed. Let us choose next $T_3 > T_2$ large enough so that

$$(3.3.50) \quad \frac{1}{8}(T_3 - 3T_2)^2 - T_3 \|u_2\|_{L^1(0, T_2 - T_1; L^\infty(\mathbb{T}^2))} \geq \Lambda_0 + d_0,$$

$$(3.3.51) \quad T_3 \geq 3T_2 + 2(\Lambda_0 + \|u_2\|_{L^1(0, T_2 - T_1; L^\infty(\mathbb{T}^2))}) + 10,$$

where u_2 is defined as in Step 2.

Next, according to (3.3.36), let us define the vector field

$$(3.3.52) \quad \bar{u}(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, T_1], \\ u_2(t - T_1), & t \in [T_1, T_2], \\ n_H, & t \in [T_2, T_3], \\ u_4(t - T_3), & t \in [T_3, T_4], \end{cases}$$

and the distribution function

$$\bar{f}(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, T_1], \\ f_2(t - T_1), & t \in [T_1, T_2], \\ 0, & t \in [T_2, T_3], \\ f_4(t - T_3), & t \in [T_3, T_4]. \end{cases}$$

Thanks to the previous definitions and using (3.3.43), (3.3.44), (3.3.47) and (3.3.48), we have, for $T = T_4$,

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} - \Delta \bar{u} + \nabla \bar{p} &= j_{\bar{f}} - \rho_{\bar{f}} \bar{u}, \quad \text{in } (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \partial_t \bar{f} + v \cdot \nabla_x \bar{f} + \text{div}_v [(\bar{u} - v) \bar{f}] &= 0, \quad \text{in } (0, T) \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Let us now prove (3.3.28).

Let $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. We shall distinguish two cases.

Case 1. (High velocities): Let us assume that $|v \cdot n_H| \geq \Lambda_0$.

Thus, for any $s \in (\frac{T_1}{2}, T_1)$, we have

$$\begin{aligned} |(\bar{X}(s, 0, x, v) - x) \cdot n_H| &= |(1 - e^{-s})v \cdot n_H| \\ &\geq (1 - e^{-\frac{T_1}{2}})|v \cdot n_H| > d_0, \end{aligned}$$

thanks to the choice (3.3.49). Thus, thanks to the intermediate value theorem, there exists $t \in (0, T_1)$ such that $\bar{X}(t, 0, x, v) \in H$. Moreover,

$$|\bar{V}(t, 0, x, v) \cdot n_H| = |e^{-t}v \cdot n_H| > e^{-T_1}\Lambda_0,$$

which shows (3.3.28) in this case.

Case 2. (Low velocities): Let us assume that $|v \cdot n_H| < \Lambda_0$.

Taking $s \in (T_2, T_3)$, we can write, thanks to (3.2.25) and (3.3.52),

$$(3.3.53) \quad \bar{V}(s, 0, x, v) = e^{-s}v + \int_0^{T_2} u_2(\tau, \bar{X}(\tau)) d\tau + \int_{T_2}^s d\tau n_H,$$

which, combined with (3.3.50) entails

$$\begin{aligned} &|(\bar{X}(s, 0, x, v) - x) \cdot n_H| \\ &= \left| (1 - e^{-s}) \cdot v \cdot n_H + s \int_{T_1}^{T_2} u_2(\sigma, \bar{X}(\sigma)) d\sigma + \int_0^s \int_{T_2}^\sigma d\tau d\sigma \right| \\ &= \left| (1 - e^{-s}) \cdot v \cdot n_H + s \int_{T_1}^{T_2} u_2(\sigma, \bar{X}(\sigma)) d\sigma + \frac{(s - T_2)^2}{2} \right| \\ &\geq -|v \cdot n_H| - T_3 \|u_2\|_{L_t^1 L_x^\infty} + \frac{(s - T_2)^2}{2} \\ &> d_0, \end{aligned}$$

whenever $s > \frac{T_3 - T_2}{2}$. Consequently, by the intermediate value theorem, there exists $t \in (T_2, T_3)$ such that $\bar{X}(t, 0, x, v) \in H$. Moreover, the choice (3.3.51) gives, through (3.3.53), that $|\bar{V}(t, 0, x, v) \cdot n_H| \geq 5$, which entails (3.3.28).

3.4. Fixed-point argument

Let $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ be fixed, with ϵ_0 to be chosen later on. We shall define an operator \mathcal{V}_ϵ acting on a domain $\mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ to be defined below. The goal of this section is to show that \mathcal{V}_ϵ has a fixed point.

Throughout all this section, we fix f_0 and u_0 as given in the statement of Theorem 3.1.3.

3.4.1. Definition of the operator. In order to describe the set \mathcal{S}_ϵ , let $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, to be precised later on, and $\gamma > 2$. Then, set

$$(3.4.54) \quad \delta_1 := \frac{\gamma}{2(\gamma + 3)}, \quad \delta_2 := \frac{\gamma + 2}{\gamma + 3}.$$

According to the notation of Section 3.1.2.7, we define

$$\mathcal{S}_\epsilon := \{g \in \mathcal{C}^{0, \delta_2}(Q_T);$$

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \|\rho_g\|_{\mathcal{C}^{0,\delta_1}(\Omega_T)} \leq c_3\epsilon, \\
\text{(b)} \quad & \|(1+|v|)^{\gamma+2}(\bar{f}-g)\|_{L^\infty(Q_T)} \\
& \leq c_1 \left(\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1+|v|)^{\gamma+2}f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right), \\
\text{(c)} \quad & \|(\bar{f}-g)\|_{\mathcal{C}^{0,\delta_2}(Q_T)} \\
& \leq c_2 \left(\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1+|v|)^{\gamma+2}f_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right), \\
\text{(d)} \quad & \left. \int_{\mathbb{T}^2} \rho_g(t,x) \, dx = \int_{\mathbb{T}^2} \rho_{f_0}(x) \, dx, \quad \forall t \in [0, T] \right\},
\end{aligned}$$

where c_1, c_2, c_3 are constants depending only on $T, \omega, \gamma, \delta_1$ and δ_2 (see (3.4.111), (3.4.114) and (3.4.115) for details). We observe that, for c_1, c_2, c_3 large enough and $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$, with high moments in v , satisfying

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dv \right\|_{\mathcal{C}^{0,\delta_1}(\Omega_T)} \leq c_3\epsilon,$$

we trivially have that $\bar{f} + f_0 \in \mathcal{S}_\epsilon$. Thus, $\mathcal{S}_\epsilon \neq \emptyset$.

We describe the operator \mathcal{V}_ϵ in three steps:

- (1) First, we associate to each $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ the solution of a suitable Navier-Stokes system, namely u^g .
- (2) Secondly, we solve a Vlasov equation thanks to the field u^g , forcing the absorption of particles in ω , which produces $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$.
- (3) Thirdly, we perform a regular extension of $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$, which gives $\mathcal{V}_\epsilon[g]$.

We shall describe next these three steps in detail.

3.4.2. Navier-Stokes system with a drag force interaction term. Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$. The aim of this section is to give a sense to the associated Navier-Stokes system

$$(3.4.55) \quad \begin{cases} \partial_t u^g + (u^g \cdot \nabla) u^g - \Delta_x u^g(t) + \nabla_x p^g(t) = j_g(t) - \rho_g(t)u^g, & \text{in } \Omega_T, \\ \operatorname{div}_x u^g(t, x) = 0, & \text{in } \Omega_T, \\ u^g|_{t=0} = u_0, & \text{in } \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

where

$$j_g(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} v g(t, x, v) \, dv, \quad \rho_g(t, x) := \int_{\mathbb{R}^2} g(t, x, v) \, dv,$$

and u_0 satisfies (3.1.11). Let us observe that the interaction between the fluid and the distribution function is taken into account through the term $j_g - \rho_g u$.

DEFINITION 3.4.1. *A time-dependent vector field u is a weak solution of (3.4.55) whenever*

$$(3.4.56) \quad u \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma) \cap L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma),$$

and for any $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$ and $t \in (0, T]$, one has

$$\begin{aligned}
(3.4.57) \quad & \int_{\mathbb{T}^2} u(t)\psi(t) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (\nabla u : \nabla \psi - u \otimes u \cdot \nabla \psi - u \partial_t \psi) \, ds \, dx \\
& = \int_{\mathbb{T}^2} u_0 \psi(0) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (j_g(s) - \rho_g(s)u(s)) \psi(s) \, ds \, dx.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.4.2. *Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ and let $\epsilon \leq \epsilon_0$ be small enough and suppose that the initial data f_0 and u_0 satisfy (3.1.12) and (3.1.11). Then, there exists a unique weak solution of system (3.4.55) in the sense of Definition 3.4.1. Moreover, this solution satisfies, for any $t \in [0, T]$,*

$$(3.4.58) \quad \|u^g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \|\nabla u^g(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 ds \leq 2e^T \left(M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}^2))}^2) \right),$$

where $M > 0$ is given by (3.1.11).

Let us show a property of j_g that will be important in the proof of the result above.

LEMMA 3.4.3. *For any $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ with ϵ small enough, we have*

$$(3.4.59) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|j_g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq 2 \left(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^2))}^2 \right).$$

PROOF. We write, by the triangular inequality,

$$(3.4.60) \quad \begin{aligned} \|j_g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v g(t, x, v) dv \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v (g - \bar{f} + \bar{f})(t, x, v) dv \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^2} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^2} v (g - \bar{f}) dv \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} v \bar{f} dv \right| \right)^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{T}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |g - \bar{f}| dv \right)^2 dx + 2 \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v \bar{f} dv \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Let us note that, from (3.3.29), we have

$$(3.4.61) \quad \|j_{\bar{f}}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^2))}^2 := \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v \bar{f}(t) dv \right|^2 dx < \infty,$$

is a positive constant, independent from g .

We have to treat the first part of (3.4.60). Indeed,

$$(3.4.62) \quad \begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v| |(g - \bar{f})(t, x, v)| dv \right)^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v| dv}{(1 + |v|)^{\gamma+2}} \right)^2 \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \mathcal{I}^2 c_1^2 \epsilon^2, \end{aligned}$$

where we have used (3.1.12) and point (b) and

$$\mathcal{I} := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v| dv}{(1 + |v|)^{\gamma+2}} < \infty.$$

Finally, putting together (3.4.62), (3.4.61) and (3.4.60), we obtain the result by choosing $\epsilon \leq \frac{1}{\mathcal{I}c_1}$. \square

PROOF OF PROPOSITION 3.4.2. Firstly, we construct a solution, which proves the existence part. Secondly, we show that this solution must be unique.

1. *Existence.* Let us consider the following iterative scheme, for every $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \partial_t u^{n+1} + (u^{n+1} \cdot \nabla) u^{n+1} - \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = j_g - \rho_g u^n, & (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div} u^{n+1} = 0, & t \in (0, T), \\ u^{n+1}|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

We observe that, since $g \in \mathcal{S}_\varepsilon$, we have $j_g \in L^2(0, T; \mathcal{V}'_\sigma)$. In addition, since $u_0 \in \mathcal{V}_\sigma$ by (3.1.11), Theorem C.1.2 yields

$$u^1 \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma).$$

Thus, by induction,

$$u^n \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Furthermore, according to Definition C.1.1, we deduce that for any $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}_\sigma)$, and any $t \in (0, T]$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{T}^2} u^{n+1}(t) \psi(t) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (\nabla u^{n+1} : \nabla \psi - u^{n+1} \otimes u^{n+1} \cdot \nabla \psi - u^{n+1} \partial_t \psi) \, ds \, dx \quad (3.4.63)$$

$$= \int_{\mathbb{T}^2} u_0 \psi(0) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} (j_g(s) - \rho_g(s) u^n(s)) \psi(s) \, ds \, dx.$$

Moreover, the energy estimate (C.1.14) gives, for any $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \|u^{n+1}(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u^{n+1}(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\ (3.4.64) \quad & \leq e^t \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|j_g(s)\|_{L^2}^2 + \|\rho_g u^n(s)\|_{L^2}^2) \, ds \right). \end{aligned}$$

Our aim is to obtain uniform estimates with respect to $n \in \mathbb{N}$.

Indeed, choosing

$$(3.4.65) \quad \epsilon_0 \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{I c_1}, \frac{1}{c_3 \sqrt{T}}, \frac{M}{c_3 \sqrt{2T e^T [M^2 + T(1 + \|j_{\mathcal{F}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2)]}} \right\},$$

where $M > 0$ is given by (3.1.11) and I is given by (3.4.62), one has

$$(3.4.66) \quad \begin{aligned} & \|u^n(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u^n(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\ & \leq 2e^T \left[M^2 + T(1 + \|j_{\mathcal{F}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

To prove this claim, let us proceed by induction. Indeed, for $n = 0$, (3.4.64) yields, thanks to point (a), (3.1.11), (3.1.12) and Lemma 3.4.3,

$$\begin{aligned} & \|u^1(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u^1(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\ & \leq e^T \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|j_g(s)\|_{L^2}^2 \, ds + T \|\rho_g\|_{L^\infty}^2 \|u_0\|_{L^2}^2 \right) \\ & \leq e^T \left(M^2 + 2T(1 + \|j_{\mathcal{F}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) + T c_3^2 \epsilon^2 M^2 \right) \end{aligned}$$

$$\leq 2e^T \left[M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right],$$

using the choice (3.4.65).

Let now be any $N \in \mathbb{N}^*$ and suppose that (3.4.66) holds for any $n \in \mathbb{N}$ up to $N - 1$. Thus, in the same fashion as before, (3.4.64) yields

$$\begin{aligned} & \|u^N(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u^N(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq e^T \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|j_g(s)\|_{L^2}^2 ds + T\|\rho_g\|_{L^\infty}^2 \|u^{N-1}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \right) \\ & \leq e^T \left(M^2 + 2T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) + Tc_3^2 \epsilon^2 \|u^{N-1}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \right) \\ & \leq 2e^T \left[M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right]. \end{aligned}$$

This shows (3.4.66).

Consequently, $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is uniformly bounded in $L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma)$, which implies that $\exists u \in L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma)$ such that

$$(3.4.67) \quad u^n \rightharpoonup u \text{ in } L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma),$$

$$(3.4.68) \quad u^n \rightarrow u \text{ in } L^2(0, T; \mathcal{H}),$$

thanks to Banach-Alaoglu's theorem and Rellich's theorem. Thus, a compactness argument allows to pass to the limit in (3.4.63), which gives (3.4.57). This can be done in detail following [47, Section 2.2.4].

Moreover, (3.4.67) and (3.4.68), combined with (3.4.66), gives (3.4.58).

2. *Uniqueness.* Let us prove next that the solution constructed above is unique. Consider another solution of (3.4.55), namely v . Thus, by Theorem C.2.1, $u - v$ satisfies the estimate

$$\begin{aligned} & \|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla(u - v)(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq \exp(T + cE(t)^2) \int_0^t \|\rho_g(u - v)(s)\|_{L^2}^2 ds, \end{aligned}$$

for some constant $c > 0$ and

$$(3.4.69) \quad E(t) := e^T \|u_0\|_{L^2}^2 + e^T \min \left\{ \int_0^T \|j_g - \rho_g u\|_{L^2}^2 ds, \int_0^T \|j_g - \rho_g v\|_{L^2}^2 ds \right\}.$$

We shall prove that $E(t)$ can be bounded independently from u or v . Indeed, since v is a solution of (3.4.55), the estimate (C.1.14) gives

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \leq e^T \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|j_g(s)\|_{L^2}^2 ds + \|\rho_g\|_{L^\infty}^2 \int_0^t \|v(s)\|_{L^2}^2 ds \right).$$

Thus, (3.1.12), Lemma 3.4.3 and point (a) combined with Gronwall's lemma give

$$(3.4.70) \quad \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}(T, \gamma, \bar{f}),$$

for some constant $\tilde{C} > 0$. This, using (3.4.58), yields

$$(3.4.71) \quad \sup_{t \in [0, T]} E(t) \leq C,$$

for some constant $C > 0$. Then, we find, by point (a),

$$\|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla(u - v)(s)\|_{L^2}^2 ds \lesssim \int_0^t \|(u - v)(s)\|_{L^2}^2 ds,$$

for any $t \in [0, T]$, which, thanks to Gronwall's lemma allows to write

$$\sup_{t \in [0, T]} \|(u - v)(t)\|_{L^2} \leq 0.$$

Henceforth, $u \equiv v$. □

We now provide further regularity properties of u^g that will be important to define the characteristics associated to $-v + u^g$, used in the sequel.

PROPOSITION 3.4.4. *Let $\epsilon \leq \epsilon_0$ be small enough. Then, there exists a constant $K_2 > 0$, such that for any $g \in \mathcal{S}_\epsilon$, the solution of (3.4.55) satisfies*

$$(3.4.72) \quad \|u^g\|_{L^2(0, T; L^\infty(\mathbb{T}^2))} \leq K_1.$$

Moreover,

$$(3.4.73) \quad u^g \in L^2(0, T; \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{V}_\sigma) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^2)).$$

PROOF. We shall prove first (3.4.72), by using a regularity result for the Navier-Stokes system (Theorem C.3.1). Secondly, we prove (3.4.73) thanks to the regularity properties of the Stokes system (Theorem B.2.1).

1. *Estimate $L_t^2 L_x^\infty$.* Let us consider, for any fixed $g \in \mathcal{S}_\epsilon$, the solution of (3.4.55) given by Proposition 3.4.2, that we note u . We observe that Theorem C.3.1 is stated under the mean-free assumption, which requires to take care of the mean of u in our case. Let us set

$$(3.4.74) \quad \hat{u}(t, x) := u(t, x) - m_u(t), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2,$$

with

$$(3.4.75) \quad m_u(t) := \int_{\mathbb{T}^2} u(t, x) dx.$$

We deduce from (3.4.56) that, according to (3.1.22),

$$(3.4.76) \quad \hat{u} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H} \cap L_0^2) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma \cap H_0^1).$$

Moreover, \hat{u} satisfies the system

$$(3.4.77) \quad \begin{cases} \partial_t \hat{u} + (\hat{u} \cdot \nabla) \hat{u} - \Delta \hat{u} + \nabla p = F_{hom}(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div} \hat{u} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} \hat{u}(t, x) dx = 0, & t \in (0, T), \\ \hat{u}|_{t=0} = u_0 - \int_{\mathbb{T}^2} u_0 dx, & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

with

$$(3.4.78) \quad F_{hom}(t, x) := j_g - \int_{\mathbb{T}^2} j_f dx + \rho_g u - \int_{\mathbb{T}^2} \rho_g u dx + (m_u(t) \cdot \nabla) u.$$

Our goal is to apply Theorem C.3.1 to system (3.4.77). In what follows, we shall use (3.1.23) systematically.

Firstly, let us observe that

$$\|\hat{u}|_{t=0}\|_{H_0^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 \leq \|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 < M^2,$$

according to (3.1.11).

In order to treat the source term, we write

$$(3.4.79) \quad F_{hom} := \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3,$$

with

$$\mathcal{T}_1 := j_g - \int_{\mathbb{T}^2} j_g \, dx, \quad \mathcal{T}_2 := \rho_g u - \int_{\mathbb{T}^2} \rho_g u \, dx, \quad \mathcal{T}_3 := (m_u(t) \cdot \nabla) u.$$

For the first term, Lemma 3.4.3 allows to write

$$(3.4.80) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{T}_1\|_{L^\infty(0,T;H_0^{-\frac{1}{2}})}^2 &= \sup_{t \in [0,T]} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |j_{g,k}(t)|^2 \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |j_{g,k}(t)|^2 \\ &= \|j_g\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 < 2 \left(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Analogously, using (3.1.12), point (a) and (3.4.58), we obtain

$$(3.4.81) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{T}_2\|_{L^\infty(0,T;H_0^{-\frac{1}{2}})} &= \sup_{t \in [0,T]} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |(\rho_g u)_k(t)|^2 \\ &\leq \|\rho_g\|_{L^\infty(Q_T)}^2 \sup_{t \in [0,T]} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |u_k(t)|^2 \leq c_1^2 \epsilon^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \\ &\leq c_3^2 \epsilon^2 2e^T \left(M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right). \end{aligned}$$

Finally, we show that $\mathcal{T}_3 \in L^2(0, T; L_0^2)$ which, a fortiori, implies $\mathcal{T}_3 \in L^2(0, T; H_0^{-\frac{1}{2}})$. Indeed, for any $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|m_u(t) \cdot \nabla u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} \left| \sum_{i,j=1,2} m_u^i(t) \partial_i u^j(t) \right|^2 dx \\ &\leq \sup_{t \in [0,T]} |m_u^i(t)|^2 \sum_{i,j=1,2} \int_{\mathbb{T}^2} |\partial_j u^i(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

On the other hand, by Jensen's inequality and (3.4.58), we get, for any $t \in [0, T]$,

$$(3.4.82) \quad \begin{aligned} |m_u(t)|^2 &\leq \int_{\mathbb{T}^2} |u(t, x)|^2 dx \\ &= \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq 2e^T \left(M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right). \end{aligned}$$

Thus, we obtain

$$(3.4.83) \quad \begin{aligned} \int_0^T \|m_u(t) \cdot \nabla u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 dt &\lesssim 2e^T \left(M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right) \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 dt \\ &\lesssim 4e^{2T} \left(M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right)^2, \end{aligned}$$

thanks again to (3.4.58).

Hence, from (3.4.79), we deduce that $F_{hom} \in L^2(0, T; H_0^{-\frac{1}{2}})$ and then, Theorem C.3.1 entails

$$(3.4.84) \quad \hat{u} \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_0^{\frac{1}{2}}) \cap L^2(0, T; H_0^{\frac{3}{2}})$$

and gives that, for every $t \in [0, T]$,

$$(3.4.85) \quad \begin{aligned} & \|\hat{u}(t)\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|\nabla \hat{u}(s)\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 ds \\ & \leq \exp\left(C \int_0^t \|\nabla \hat{u}\|_{L^2}^2 ds\right) \left(\|\hat{u}_0\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|F_{hom}(s)\|_{H_0^{-\frac{1}{2}}}^2 ds\right). \end{aligned}$$

In addition, combining (3.4.79), (3.4.80) and (3.4.81) and (3.4.83), yields

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|F_{hom}(s)\|_{H_0^{-\frac{1}{2}}}^2 ds \\ & \leq T \left(\|\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2\|_{L^\infty(0, T; H^{-\frac{1}{2}})}\right) + \int_0^t \|(m_u(t) \cdot \nabla) u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 ds \\ & \leq C(T, M, \bar{f}). \end{aligned}$$

Consequently, injecting this in (3.4.85) and using (3.4.58), we find

$$(3.4.86) \quad \|\hat{u}(t)\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|\nabla \hat{u}(s)\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 ds \leq e^{CT} C(T, M, \bar{f}).$$

Finally, using the injection $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T}^2)$, we deduce

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|u(s)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}^2 ds \leq C_S \int_0^t \|u(s)\|_{H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 ds \\ & \lesssim \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (1 + |k|^2)^{\frac{3}{2}} |u_k(s)|^2 ds \\ & \lesssim \int_0^t |m_u(s)|^2 ds + \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |k|^3 |\hat{u}_k(s)|^2 ds \\ & \lesssim T \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \int_0^T \|\nabla \hat{u}(s)\|_{H_0^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 ds \\ & \lesssim C(T, M, \bar{f}), \end{aligned}$$

thanks to (3.4.82) and (3.4.86). This gives (3.4.72).

2. $L_t^2 \mathcal{C}_x^1$ regularity. Let us show next (3.4.73), thanks to the regularity properties of the Stokes system. Indeed, we may rewrite (3.4.55) as

$$(3.4.87) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = F_{source}(t, x), & (t, x) \in \Omega_T, \\ \operatorname{div} u(t, x) = 0, & (t, x) \in \Omega_T, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

with

$$(3.4.88) \quad F_{source} := j_g - \rho_g u - (u \cdot \nabla) u.$$

According to the previous discussion, $j_g - \rho_g u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^2))$. Consequently, we have to estimate the convection term $u \cdot \nabla u$. In order to do so, we use the following argument.

Let $r \in \mathbb{N}$ with $r \geq 2$. Then, by Hölder's inequality, and the Cauchy-Schwarz's inequality, we have

$$\begin{aligned}
(3.4.89) \quad & \| (u(t) \cdot \nabla) u(t) \|_{L^r(\mathbb{T}^2)}^r \lesssim \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{i,j=1,2} |u^i(t) \partial_i u^j(t)|^r dx \\
& \lesssim \int_{\mathbb{T}^2} \left(\sum_{i=1,2} |u^i(t)|^{2r} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1,2} |\partial_i u^j(t)|^{2r} \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
& \lesssim \left(\int_{\mathbb{T}^2} \sum_{i=1,2} |u^i(t)|^{2r} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{T}^2} \sum_{i,j=1,2} |\partial_j u^i(t)|^{2r} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \lesssim \|u(t)\|_{L^{2r}(\mathbb{T}^2)}^r \|\nabla u(t)\|_{L^{2r}(\mathbb{T}^2)},
\end{aligned}$$

for any $t \in [0, T]$. Then, choosing $r = 2$ in the estimate above, the injection $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^4(\mathbb{T}^2)$ (see [47, p.81]), allows to deduce

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \| (u(t) \cdot \nabla) u(t) \|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 dt \\
& \lesssim \int_0^T \|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 \|\nabla u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 dt \\
& \lesssim \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 dt < \infty,
\end{aligned}$$

thanks to (3.4.86). Thus, $F_{source} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^2))$.

Consequently, as u_0 is regular enough by (3.1.11), Theorem B.2.1 with the choice $s = q = 2$, yields

$$u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{T}^2) \cap \mathcal{V}_\sigma) \quad \text{and} \quad \partial_t u \in L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

This allows to deduce ([29, Théorème II.5.13, p.96]) that

$$(3.4.90) \quad u \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{V}_\sigma).$$

Let us perform next a bootstrap argument. Let us choose $r = 3$ in (3.4.89), which allows to deduce

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u \cdot \nabla u(t)\|_{L^3(\mathbb{T}^2)}^3 dt & \lesssim \int_0^T \|u(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^2)}^3 \|\nabla u(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^2)}^3 dt \\
& \lesssim \|u\|_{L_t^\infty L_x^6}^3 \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^6(\mathbb{T}^2)}^3 dt \\
& \lesssim \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^3 \|u\|_{L_t^2 H_x^2}^3,
\end{aligned}$$

as $H^1(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^2)$ for any $p \geq 2$ ([62, Th. 5.6.6, p. 270]). Thus, we deduce that $u \cdot \nabla u \in L^2(0, T; L^3(\mathbb{T}^2))$.

In addition, using points (c) and (a), we have

$$\begin{aligned}
j_g & \in L^2(0, T; L^p(\mathbb{T}^2)), \quad \forall p \geq 2, \\
\rho_g & \in L^\infty(\Omega_T),
\end{aligned}$$

which entails that

$$j_g - \rho_g u \in L^2(0, T; L^3(\mathbb{T}^2)),$$

as $u \in L^2(0, T; L^3(\mathbb{T}^2))$, thanks to (3.4.90). Then, applying Theorem B.2.1 to system (3.4.87) with $s = 2, q = 3$, as u_0 is regular enough, thanks to (3.1.11), we deduce that

$$u \in L^2(0, T; W^{2,3}(\mathbb{T}^2)) \text{ and } \partial_t u \in L^2(0, T; L^3(\mathbb{T}^2)).$$

Finally, the injection $W^{2,3}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2)$ ([62, Th. 5.6.6, p. 270]) gives (3.4.73). \square

3.4.3. Absorption. In order to describe the absorption procedure, we have to introduce some definitions (see [70, p. 369]). According to Definition 3.1.2, there exists $\delta_0 > 0$ such that $H_{2\delta_0} \subset \omega$. Let us choose

$$(3.4.91) \quad \delta := \min \left\{ \delta_0, \frac{1}{2}, e^{\frac{\pi}{200}} - 1, \frac{1}{4K_1^2} \right\},$$

where K_1 is given by (3.4.72). The choice of this parameter will be useful in Section 3.6. According to this choice of δ , we set

$$(3.4.92) \quad \begin{aligned} \gamma^- &:= \{(x, v) \in \partial H_\delta \times \mathbb{R}^2; v \cdot n_H^{ext} \leq -1\}, \\ \gamma^{2-} &:= \left\{ (x, v) \in \partial H_\delta \times \mathbb{R}^2; v \cdot n_H^{ext} \leq -\frac{3}{2} \right\}, \\ \gamma^{3-} &:= \{(x, v) \in \partial H_\delta \times \mathbb{R}^2; v \cdot n_H^{ext} \leq -2\}, \\ \gamma^+ &:= \{(x, v) \in \partial H_\delta \times \mathbb{R}^2; v \cdot n_H^{ext} \geq 0\}, \end{aligned}$$

where n_H^{ext} is $\pm n_H$, taken in the outward direction with respect to $\partial H_{2\delta}$. It can be shown that

$$(3.4.93) \quad \text{dist}([\partial H_\delta \times \mathbb{R}^2] \setminus \gamma^{2-}; \gamma^{3-}) > 0.$$

Consequently, we may choose an absorption function $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^\infty \cap W^{1,\infty}(\partial H_\delta \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}^+)$ such that

$$(3.4.94) \quad \begin{aligned} 0 \leq \mathcal{A}(x, v) \leq 1, & \quad \forall (x, v) \in \partial H_\delta \times \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{A}(x, v) = 1, & \quad \forall (x, v) \in [\partial H_\delta \times \mathbb{R}^2] \setminus \gamma^{2-}, \\ \mathcal{A}(x, v) = 0, & \quad \forall (x, v) \in \gamma^{3-}. \end{aligned}$$

We also choose a truncation function $\mathcal{Y} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ satisfying

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(t) = 0, & \quad \forall t \in \left[0, \frac{T}{48}\right] \cup \left[\frac{47T}{48}, T\right], \\ \mathcal{Y}(t) = 1, & \quad \forall t \in \left[\frac{T}{24}, \frac{23T}{24}\right]. \end{aligned}$$

To give a sense to the procedure of absorption we need first the following result, which asserts that the number of times the characteristics associated to the Navier-Stokes velocity field of the previous part meet γ^- is finite.

LEMMA 3.4.5. *Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ and let u^g be given by (3.4.55) accordingly. Let (X^g, V^g) be the characteristics associated to the field $-v + u^g$. Then, for any $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, there exists $n(x, v) \in \mathbb{N}$ such that there exist $0 < t_1 < \dots < t_{n(x,v)} < T$ such that*

$$(3.4.95) \quad \{(X^g, V^g)(t, 0, x, v); t \in [0, T]\} \cap \gamma^- = \{t_i\}_{i=1}^{n(x,v)},$$

$$(3.4.96) \quad \exists s > 0 \text{ s.t. } (t_i - s, t_i + s) \cap (t_j - s, t_j + s) = \emptyset, \forall i, j = 1, \dots, n(x, v),$$

with the convention that $n(x, v) = 0$ and $\{t_i\}_{i=1}^{n(x, v)} = \emptyset$ if $\{(X^g, V^g)\} \cap \gamma^- = \emptyset$.

For more details on this result, see [70, p.348] and [72, p.5468]. In the friction case, this holds true without further modification.

The previous lemma allows to define the following quantities. Let $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ and let $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$. Then, for every t_i , with $i = 1, \dots, n(x, v)$, we have $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (X^g, V^g)(t_i, 0, x, v) \in \gamma^-$. Moreover, let

$$(3.4.97) \quad f(t^-, \tilde{x}, \tilde{v}) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v)),$$

$$(3.4.98) \quad f(t^+, \tilde{x}, \tilde{v}) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v)).$$

We define $f := \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ to be the solution of

$$(3.4.99) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + u^g \cdot \nabla_v f - \operatorname{div}_v(vf) = 0, & (t, x, v) \in [0, T] \times [\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2] \setminus \gamma^{2-}, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \\ f(t^+, x, v) = (1 - \mathcal{Y}(t))f(t^-, x, v) + \mathcal{Y}(t)\mathcal{A}(x, v)f(t^-, x, v), & (t, x, v) \in [0, T] \times \gamma^-. \end{cases}$$

Let us explain how the absorption procedure works. From (3.4.73), the characteristics associated to the field $-v + u^g$ are regular. Thus, outside ω , the system above defines a function $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ of class \mathcal{C}^1 . Moreover, the exact value of $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ is given by these characteristics through (3.2.27) and (3.2.25). When the characteristics (X^g, V^g) meet γ^- at time t , $f(t^+, \cdot, \cdot)$ is fixed according to the last equation in (3.4.99). We can see the function $\mathcal{Y}(t)\mathcal{A}(x, v)$ as an opacity factor depending on time and on the incidence of the characteristics on ∂H_δ . Indeed, $f(t^+, \cdot, \cdot)$ can take values varying from $f(t^-, \cdot, \cdot)$, in the case of no absorption, to 0, according to the angle of incidence, the modulus of the velocity and time.

3.4.4. Extension. The function $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ is not necessarily continuous around $[0, T] \times \gamma^- \subset [0, T] \times H_\delta$. To avoid this problem we shall use some extension operators preserving regularity.

Let us first consider a linear extension operator

$$\bar{\pi} : \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2),$$

such that for any $\sigma \in (0, 1)$, a $\mathcal{C}^{0, \sigma}$ function is mapped onto a $\mathcal{C}^{0, \sigma}$ function. This allows to define another linear extension operator by

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathcal{C}^0([0, T] \times [\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta] \times \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \\ f &\mapsto \tilde{\pi}f(t, x, v) = \bar{\pi}[f(t, \cdot, v)](x). \end{aligned}$$

We modify $\tilde{\pi}$ in the following way. Let $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ such that

$$\int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mu \, dx \, dv = 1.$$

Then, set

$$\pi(f) := \tilde{\pi}(f) + \left[\int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} (f_0 - \tilde{\pi}(f)) \, dx \, dv \right] \mu.$$

Thus, π is an affine extension satisfying the following properties: for every $f \in \mathcal{C}^0([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2)$, we have

$$(3.4.100) \quad \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \pi f(t, x, v) \, dx \, dv = \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_0(x, v) \, dx \, dv, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(3.4.101) \quad \exists C_\pi > 0 \text{ such that}$$

$$\begin{aligned}
(3.4.102) \quad & \|(1 + |v|)^{\gamma+2}\pi(f)\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C_\pi \|(1 + |v|)^{\gamma+2}f\|_{L^\infty([0,T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2)}, \\
& \forall \sigma \in (0, 1), \exists C_{\pi, \sigma} > 0 \text{ such that} \\
& \|\pi(f)\|_{\mathcal{C}^{0, \sigma}(Q_T)} \leq C_{\pi, \sigma} \|(1 + |v|)^{\gamma+2}f\|_{\mathcal{C}^{0, \sigma}([0,T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

We introduce another truncation in time. Let $\tilde{\mathcal{Y}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; [0, 1])$ such that

$$(3.4.103) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{Y}}(t) &= 0, & t \in \left[0, \frac{T}{100}\right], \\ \tilde{\mathcal{Y}}(t) &= 1, & t \in \left[\frac{T}{48}, T\right]. \end{aligned}$$

Finally, we set

$$(3.4.104) \quad \begin{aligned} \Pi : \quad & \mathcal{C}^0([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2), \\ & f \mapsto \Pi f = (1 - \tilde{\mathcal{Y}}(t))f + \tilde{\mathcal{Y}}(t)\pi f. \end{aligned}$$

This allows to define the fixed point operator by

$$(3.4.105) \quad \mathcal{V}_\epsilon[g] := \bar{f} + \Pi \left(\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[f] \Big|_{([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2) \cup ([0, \frac{T}{48}] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right),$$

for every $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

3.4.5. Existence of a fixed point. The goal of this section is to prove the following result.

PROPOSITION 3.4.6. *Let $T > T_0$, where $T_0 > 0$ is given by Proposition 3.3.1. There exists $\epsilon_0 > 0$ such that the operator defined by (3.4.105) in the domain \mathcal{S}_ϵ has a fixed point $g^* \in \mathcal{S}_\epsilon$. Furthermore, if u^{g^*} denotes the solution of (3.4.55) associated to g^* , the pair (g^*, u^{g^*}) is a strong solution of (3.1.1), with initial data f_0 and u_0 , for a certain source term $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$.*

We shall carry out the proof of this result in several steps. The main idea is to apply the Leray-Schauder fixed-point theorem. To do this, we have to verify that

- (1) The set \mathcal{S}_ϵ is convex and compact in $\mathcal{C}^0(Q_T)$,
- (2) $\mathcal{V}_\epsilon : \mathcal{S}_\epsilon \subset \mathcal{C}^0(Q_T) \rightarrow \mathcal{C}^0(Q_T)$ is continuous,
- (3) $\mathcal{V}_\epsilon(\mathcal{S}_\epsilon) \subset \mathcal{S}_\epsilon$.

The first point is straightforward, since the convexity of \mathcal{S}_ϵ is clear and the compactness is a consequence of Ascoli's theorem. The second point is similar to [70, Section 3.3] and holds without further modification, thanks to Lemma 3.4.5 and Lemma 3.2.2.

We need to show that point (3) holds. In other words, we have to prove that, for any $g \in \mathcal{S}_\epsilon$, $\mathcal{V}_\epsilon[g] \in \mathcal{S}_\epsilon$, i.e, points (a)–(c), since point (d) follows by the construction of \mathcal{V}_ϵ , using (3.4.100).

3.4.5.1. *Proof of point (b).* At this stage, we shall need the following property for the backwards characteristics associated to $-v + u^g$.

LEMMA 3.4.7. *Let $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ and let (X^g, V^g) be the characteristics associated to the field $-v + u^g$, according to (3.4.55) and Proposition 3.4.2. Then, there exists a constant $K_2 = K_2(T, \gamma) > 0$, independent of g , such that*

$$(3.4.106) \quad |e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)|| \leq K_2,$$

for any $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

PROOF. By (3.2.25), we have

$$\begin{aligned}
& |e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)| \\
& \leq |V^g(0, t, x, v) - e^t v| \\
& = \left| \int_0^t e^{t-s} u^g(s, X^g(0, s, x, v)) \, ds \right| \\
& \leq C(T) \int_0^t \|u^g(s)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \, ds \\
& \leq C(T) \|u^g\|_{L^2(0, T; L^\infty(\mathbb{T}^2))} \leq C(T) K_1,
\end{aligned}$$

using (3.4.72). This allows to conclude, choosing $K_2 \geq C(T)K_1(T, \gamma)$. \square

By construction of \mathcal{V}_ϵ , we have

$$\begin{aligned}
(3.4.107) \quad & \|(1 + |v|)^{\gamma+2} (\mathcal{V}_\epsilon[f] - \bar{f})\|_{L^\infty(Q_T)} \\
& = \left\| (1 + |v|)^{\gamma+2} \Pi \left(\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g] \Big|_{([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2 \cup [0, \frac{T}{48}] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right) \right\|_{L^\infty(Q_T)} \\
& \leq C_\pi \left\| (1 + |v|)^{\gamma+2} \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g] \right\|_{L^\infty(Q_T)},
\end{aligned}$$

where we have used (3.4.101). Moreover, by (3.4.99) and (3.4.94),

$$|f(t^+, x, v)| \leq |f(t^-, x, v)|,$$

which implies, through (3.2.27),

$$|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v)| \leq |e^{2t} f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v))|.$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}
(3.4.108) \quad & |f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v))| \\
& = \left(\frac{1 + |V^g(0, t, x, v)|}{1 + |V^g(0, t, x, v)|} \right)^{\gamma+2} |f_0((X^g, V^g)(0, t, x, v))| \\
& \leq \frac{\|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + |V^g(0, t, x, v)|)^{\gamma+2}} \\
& = \frac{\|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + [e^t|v| - (e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)|)])^{\gamma+2}} \\
& \leq \frac{(1 + |e^t|v| - |V^g(0, t, x, v)|)^{\gamma+2} \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + e^t|v|)^{\gamma+2}} \\
& \leq \frac{(1 + K_2(T, \gamma))^{\gamma+2} \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}}{(1 + e^t|v|)^{\gamma+2}},
\end{aligned}$$

where we have used (3.4.106) and the inequality (see [70, Eq. (3.33), p. 347].

$$(3.4.109) \quad \frac{1}{1 + |x - x'|} \leq \frac{1 + |x'|}{1 + |x|}, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^2.$$

Furthermore, since

$$(1 + |v|)^{\gamma+2} |\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v)| \leq (1 + e^t|v|)^{\gamma+2} |\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v)|,$$

for every $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, we have

$$(3.4.110) \quad \|(1 + |v|)^{\gamma+2} \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]\|_{L^\infty(Q_T)}$$

$$\leq e^{2T} (1 + K_2(T, \gamma))^{\gamma+2} (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty}).$$

This gives that $\mathcal{V}_\epsilon[g]$ satisfies point (b), thanks to (3.4.107) and choosing

$$(3.4.111) \quad c_1 \geq C_\pi e^{2T} (1 + K_2(T, \gamma))^{\gamma+2}.$$

3.4.5.2. *Proof of point (c).* We need the following technical result, which can be adapted from [70, Lemma 2, p. 347], thanks to Lemma 3.2.2 and (3.4.73).

LEMMA 3.4.8. *For any $g \in \mathcal{S}_\epsilon$, one has $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g] \in \mathcal{C}^1(Q_T \setminus \Sigma_T)$, with $\Sigma_T := [0, T] \times \gamma^-$. Moreover, there exists a constant $K_4 = K_4(\gamma, \omega) > 0$ such that*

$$\frac{|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')|}{|(1 + |v|)|(t, x, v) - (t', x', v')|} \leq K_3 (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}),$$

for any $(t, x, v), (t', x', v') \in [0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2$ with $|v - v'| < 1$. Furthermore, if f_0 satisfies (3.1.13), we also have

$$(3.4.112) \quad \begin{aligned} & \|(1 + |v|)^{\gamma+1} \nabla_{x,v} \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]\|_{L^\infty} \\ & \leq K_4 (\|(1 + |v|)^{\gamma+1} \nabla_{x,v} f_0\|_{L^\infty(Q_T)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty}), \end{aligned}$$

for some constant $K_4 = K_4(\kappa, g) > 0$.

Let δ_2 be given by (3.4.54). Again, by construction of \mathcal{V}_ϵ and (3.4.102), we deduce

$$(3.4.113) \quad \|\mathcal{V}_\epsilon[g] - \bar{f}\|_{\mathcal{C}^{0,\delta_2}(Q_T)} \leq C_{\pi,\delta_2} \|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]\|_{\mathcal{C}^{0,\delta_2}([0,T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2)}.$$

Then, interpolating (3.4.110) and Lemma 3.4.8, we have

$$\begin{aligned} & \frac{|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')|}{|(t, x, v) - (t', x', v')|^{\delta_2}} \\ & = \left(\frac{|\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')|}{(1 + |v|)|(t, x, v) - (t', x', v')|} \right)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+3}} \\ & \quad \times \left((1 + |v|)^{\gamma+2} |\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t, x, v) - \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g](t', x', v')| \right)^{1 - \frac{\gamma+2}{\gamma+3}} \\ & \leq K_4^{\frac{\gamma+2}{\gamma+3}} K_5^{1 - \frac{\gamma+2}{\gamma+3}} (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}), \end{aligned}$$

with

$$K_5 = e^{2T} (1 + K_2(T, \gamma))^{\gamma+2}.$$

Whence, by (3.4.113), this gives that $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g]$ satisfies point (c), choosing

$$(3.4.114) \quad c_2 \geq C_{\pi,\delta_2} K_4(\gamma, \omega)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+3}} K_5(T, \gamma)^{1 - \frac{\gamma+2}{\gamma+3}}.$$

3.4.5.3. *Proof of point (a).* We show first the L^∞ estimate. Using the fact that $\rho_{\bar{f}} = 0$ and point (b), we find

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{V}_\epsilon[g] - \bar{f}) \, dv \right\|_{L^\infty(\Omega_T)} & = \left\| \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v)) \, dv \right\|_{L^\infty(\Omega_T)} \\ & \leq \sup_{t,x \in \Omega_T} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v)| \, dv \\ & \leq K_6 (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1} + \|(1 + |v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty}), \end{aligned}$$

with

$$K_6 := c_1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dv}{(1+|v|)^{\gamma+2}}.$$

To show the Hölder estimate, we interpolate (3.4.110) and (c). Indeed, if δ_1 is given by (3.4.54) and $\tilde{\gamma} := 2 + \frac{\gamma}{2}$, we have

$$\begin{aligned} & (1+|v|)^{\tilde{\gamma}} \frac{|\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v) - \mathcal{V}_\epsilon[g](t', x', v)|}{|(t, x, v) - (t', x', v)|^{\delta_1}} \\ &= ((1+|v|)^{\gamma+2} |\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v) - \mathcal{V}_\epsilon[g](t', x', v)|)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma+2}} \\ & \quad \times \left(\frac{|\mathcal{V}_\epsilon[g](t, x, v) - \mathcal{V}_\epsilon[g](t', x', v)|}{|(t, x, v) - (t', x', v)|^{\delta_2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma+2}} \\ & \leq c_1^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma+2}} c_2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma+2}} (\|f_0\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} + \|(1+|v|)^{\gamma+2} f_0\|_{L^\infty(Q_T)}). \end{aligned}$$

Consequently, choosing

$$(3.4.115) \quad c_3 := K_6 + c_1^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma+2}} c_2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma+2}},$$

and thanks to (3.1.12), we have that $\mathcal{V}_\epsilon[g]$ satisfies point (a).

Let us choose ϵ_0 sufficiently small. Then, the smallness assumption (3.1.12) and the properties of \mathcal{V}_ϵ and Π allow to conclude that if $\epsilon \leq \epsilon_0$, thanks to the Leray-Schauder theorem, there exists $g \in \mathcal{S}_\epsilon$ such that $\mathcal{V}_\epsilon[g] = g$. This ends the proof of Proposition 3.4.6.

3.5. Stability for the Vlasov-Navier-Stokes system

The goal of this section is to prove the following stability estimate for the strong solutions of (3.1.1), that will be crucial in the proof of Theorem 3.1.3, both for the controllability as well as for uniqueness.

PROPOSITION 3.5.1. *Let (g, u^g) and (f, u^f) be two strong solutions of system (3.1.1), according to Definition 3.1.1, for initial data*

$$\begin{aligned} u^g|_{t=0} &= u_0^g, & g|_{t=0} &= g_0, \\ u^f|_{t=0} &= u_0^f, & f|_{t=0} &= f_0. \end{aligned}$$

Assume further that

$$(3.5.116) \quad \sup_{(t,x) \in \Omega_T} (|\rho_g(t, x)| + |\rho_f(t, x)|) < \infty.$$

Then, there exists a constant $C > 0$ such that for any $t \in (0, T]$,

$$(3.5.117) \quad \begin{aligned} & \|(u^g - u^f)(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \|\nabla(u^g - u^f)(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 ds \\ & \leq e^{C(t)} \left(\|u_0^g - u_0^f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)}^2 + \int_0^t \|j_{g-f} - \rho_{g-f} u^f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 ds \right), \end{aligned}$$

where

$$C(t) := \int_0^t \left(1 + \|\rho_f(s)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|\rho_f(s)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}^2 \right) ds.$$

PROOF. We observe that the difference $w := u^g - u^f$ satisfies the system

$$(3.5.118) \quad \begin{cases} \partial_t w - \Delta w + \nabla \pi = -u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f + j_{g-f} - \rho_g u^g + \rho_f u^f, & \text{in } \Omega_T, \\ \operatorname{div}_x w = 0, & \text{in } \Omega_T, \\ w|_{t=0} = u_0^g - u_0^f, & \text{in } \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

Thanks to (3.1.6), the difference $u^g - u^f$ belongs at least to $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$, which allows, up to a regularisation in time argument, to use it as a test function. Indeed, multiplying the equation in (3.5.118) by $u^g - u^f$ and taking the $H^{\frac{1}{2}}$ scalar product, we find

$$(3.5.119) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(u^g - u^f)(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \|\nabla(u^g - u^f)(t)\|_{H^{\frac{3}{2}}}^2 \\ \leq \left| (-u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f, u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\ + \left| (j_{g-f} - \rho_g u^g + \rho_f u^f, u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right|. \end{aligned}$$

We then have to estimate the two terms of the right-hand side. For the first one, according to (3.1.23), one has

(3.5.120)

$$\begin{aligned} & \left| (-u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f, u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (-u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f)_n (1 + |n|^2)^{\frac{1}{2}} (u^g - u^f)_n \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (-u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f)_n (1 + |n|^2)^{\frac{1}{2}} (u^g - u^f)_n \right| \\ &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |(-u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f)_n| |n| |(u^g - u^f)_n| \\ &\lesssim \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |(-u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^2 |(u^g - u^f)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \| -u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f \|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^2 |(u^g - u^f)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

thanks to the Cauchy-Schwarz's inequality.

With the second term in the expression above, we have, for every $n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, and for any $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} |n|^2 |(u^g - u^f)_n| &\lesssim \frac{1}{\eta} |n| |(u^g - u^f)_n|^2 + \eta |n|^3 |(u^g - u^f)_n|^2 \\ &\lesssim \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} |n|^{\frac{1}{2}} |(u^g - u^f)_n| + \sqrt{\eta} |n|^{\frac{3}{2}} |(u^g - u^f)_n| \right)^2 \end{aligned}$$

This gives, thanks to Minkowski's inequality,

(3.5.121)

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^2 |(u^g - u^f)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} |n|^{\frac{1}{2}} |(u^g - u^f)_n| + \sqrt{\eta} |n|^{\frac{3}{2}} |(u^g - u^f)_n| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \lesssim \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n| |(u^g - u^f)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\eta} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^3 |(u^g - u^f)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \|u^g - u^f\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\eta} \|\nabla(u^g - u^f)\|_{H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

On the other hand, in the same fashion as in (3.4.89) with $r = 2$, we can estimate the convection term as follows.

$$\begin{aligned}
\|u^g \cdot \nabla u^g - u^f \cdot \nabla u^f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &= \|(u^f - u^g) \cdot \nabla \bar{u} + u^g \cdot \nabla(u^f - u^g)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \\
&\leq \|(u^f - u^g) \cdot \nabla u^f\|_{L^2} + \|u^g \cdot \nabla(u^f - u^g)\|_{L^2} \\
&\lesssim \|u^f - u^g\|_{L^4} \|\nabla u^f\|_{L^4} + \|u^g\|_{L^4} \|\nabla(u^f - u^g)\|_{L^4} \\
&\lesssim \left(\|\nabla u^f\|_{L^4} + \|u^g\|_{H^{\frac{1}{2}}} \right) \left(\|u^f - u^g\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|\nabla(u^f - u^g)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&\lesssim \|u^f - u^g\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|\nabla(u^f - u^g)\|_{H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

thanks to (3.4.86). Hence, combining this with (3.5.120) and (3.5.121), we obtain

$$\begin{aligned}
(3.5.122) \quad & \left| (-u^g \cdot \nabla u^g + u^f \cdot \nabla u^f, u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\
& \leq C(u^f, T) \left(\|u^f - u^g\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|\nabla(u^f - u^g)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \|u^f - u^g\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\eta} \|\nabla(u^f - u^g)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \right) \\
& \lesssim \frac{1}{\sqrt{\eta}} \|u^f - u^g\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \sqrt{\eta} \|\nabla(u^f - u^g)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2.
\end{aligned}$$

Let us treat next the other term in the right-hand side of (3.5.119). We proceed as follows

(3.5.123)

$$\begin{aligned}
& \left| (j_{g-f} - \rho_g u^g + \rho_f u^f, u^f - u^g)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\
& \leq \left| (j_{g-f} - \rho_{g-f} u^g, u^f - u^g)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| + \left| (\rho_f (u^g - u^f), u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\
& = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (j_{g-f} - \rho_{g-f} u^g)_n (1 + |n|^2)^{\frac{1}{2}} (\bar{u} - u)_n \right| + \left| (\rho_f (u^g - u^f), u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\
& \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left| (j_{g-f} - \rho_g u)_n (1 + |n|^2)^{\frac{1}{2}} (\bar{u} - u)_n \right| + \left| (j_{g-f} - \rho_g u)_0 (\bar{u} - u)_0 \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| (\rho_f(u^g - u^f), u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\
\lesssim & \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left| (j_{\bar{f}-g} - \rho_g u)_n \right|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^2 |(\bar{u} - u)_n|^2 \\
& + \left| \int_{\mathbb{T}^2} (j_{g-\bar{f}} - \rho_g u) \, dx \int_{\mathbb{T}^2} (\bar{u} - u) \, dx \right| + \left| (\rho_f(u^g - u^f), u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right| \\
= & \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3,
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 & := \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left| (j_{\bar{f}-g} - \rho_g u)_n \right|^2 + \left| \int_{\mathbb{T}^2} (j_{g-\bar{f}} - \rho_g u) \, dx \int_{\mathbb{T}^2} (\bar{u} - u) \, dx \right|, \\
\mathcal{B}_2 & := \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^2 |(\bar{u} - u)_n|^2, \\
\mathcal{B}_3 & := \left| (\rho_f(u^g - u^f), u^g - u^f)_{H^{\frac{1}{2}}} \right|.
\end{aligned}$$

For the first term, we write

$$\begin{aligned}
(3.5.124) \quad \mathcal{B}_1 & \lesssim \|j_{g-f} - \rho_{g-f} u^g\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |j_{g-f} - \rho_{g-f} u^g|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |u^f - u^g|^2 \, dx \\
& \lesssim \frac{3}{2} \|j_{g-f} - \rho_{g-f} u^g\|_{L^2}^2 + \|u^g - u^f\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2.
\end{aligned}$$

For the second term, using the Cauchy-Schwarz's inequality, one finds

$$\begin{aligned}
(3.5.125) \quad \mathcal{B}_2 & = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} |(u^f - u^g)_n|^2 \\
& \lesssim \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n| |(u^f - u^g)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^3 |(u^f - u^g)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \lesssim \frac{1}{\eta} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n| |(u^f - u^g)_n|^2 + \eta \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^3 |(u^f - u^g)_n|^2 \\
& \lesssim \frac{1}{\eta} \|u^f - u^g\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \eta \|\nabla(u^f - u^g)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2,
\end{aligned}$$

for some $\eta > 0$ to be chosen later on. For the third term, we have, thanks to (3.5.116),

(3.5.126)

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3 & \lesssim \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} (\rho_f(u^g - u^f))_n (1 + |n|^2)^{\frac{1}{2}} (u^g - u^f)_n \\
& + \left| \int_{\mathbb{T}^2} \rho_f(u^g - u^f) \, dx \int_{\mathbb{T}^2} (u^g - u^f) \, dx \right| \\
& \lesssim \frac{1}{\eta} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |(\rho_f(u^g - u^f))_n|^2 + \eta \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |n|^2 |(u^g - u^f)_n|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\rho_f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \left(\int_{\mathbb{T}^2} |u^g - u^f| \, dx \right)^2 \\
& \lesssim \left(\frac{\|\rho_f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}}{\eta} + 1 \right) \|\rho_f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|u^g - u^f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \eta \|\nabla(u^g - u^f)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2,
\end{aligned}$$

thanks to Jensen's inequality.

Next, combining this with (3.5.124), (3.5.125) and (3.5.119), we obtain

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|(u^g - u^f)(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \|\nabla(u^g - u^f)(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \\
& \lesssim \left(1 + \|\rho_f\|_{L^\infty} + \frac{1}{\eta} (2 + \|\rho_f\|_{L^\infty}) \right) \|u^g - u^f\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \\
& \quad + \eta \|\nabla(u^g - u^f)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \|j_{g-f} - \rho_{g-f} u^g\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Thus, choosing $\eta > 0$ small enough, and integrating in time, this yields

$$\begin{aligned}
& \|(u^g - u^f)(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|\nabla(u^g - u^f)(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \, ds \\
& \lesssim \|u_0^g - u_0^f\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|j_{g-f}(s) - \rho_{g-f}(s) u^g(s)\|_{L^2}^2 \, ds \\
& \quad + \int_0^t \left(1 + \|\rho_f\|_{L^\infty} + \frac{1}{\eta} (2 + \|\rho_f(s)\|_{L^\infty}) \right) \|(u^g - u^f)(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \, ds
\end{aligned}$$

By Gronwall's inequality, we obtain (3.5.117). \square

3.6. Proof of Theorem 3.1.3. Controllability.

Let us denote by g the fixed point of the operator \mathcal{V}_ϵ , found in Section 3.4, for $\epsilon \leq \epsilon_0$. The purpose of the following result is to establish that, choosing $\epsilon \leq \epsilon_1$ possibly smaller, the characteristics associated to $-v + u^g$ meet H_δ at a sufficient speed.

PROPOSITION 3.6.1. *There exists $\epsilon_1 > 0$ and $M_1 > 0$ such that for any $\epsilon \leq \epsilon_1$ and $M \leq M_1$ the characteristics associated to $-v + u^g$, where u^g is given by Proposition 3.4.2, namely (X^g, V^g) , satisfy the following property*

$$(3.6.127) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists t \in \left[\frac{T}{48}, \frac{47T}{48} \right] \text{ s.t. } (X^g, V^g)(t, 0, x, v) \in \gamma^{3-},$$

where γ^{3-} is defined in (3.4.92).

PROOF. In order to prove (3.6.127), we proceed in two steps.

Step 1. Stability argument. We shall show that the characteristics (X^g, V^g) are uniformly close to (\bar{X}, \bar{V}) whenever ϵ and M are chosen sufficiently small.

Indeed, from (3.2.25), we have, for every $(t, x, v) \in Q_T$,

$$\begin{aligned}
(3.6.128) \quad & \bar{X}(t, 0, x, v) - X^g(t, 0, x, v) \\
& = \int_0^t \int_0^s e^{\tau-s} (\bar{u}(\tau, \bar{X}(\tau, 0, x, v)) - u^g(\tau, X^g(\tau, 0, x, v))) \, d\tau \, ds \\
& = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2,
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &:= \int_0^t \int_0^s e^{\tau-s} (\bar{u}(\tau, \bar{X}(\tau, 0, x, v)) - \bar{u}(\tau, X^g(\tau, 0, x, v))) \, d\tau \, ds, \\ \mathcal{J}_2 &:= \int_0^t \int_0^s e^{\tau-s} (\bar{u}(\tau, X^g(\tau, 0, x, v)) - u^g(\tau, X^g(\tau, 0, x, v))) \, d\tau \, ds.\end{aligned}$$

For the first term above, using (3.3.30), we find

$$(3.6.129) \quad |\mathcal{J}_1| \leq C(T, \bar{u}) \int_0^t |\bar{X}(\tau, 0, x, v) - X^g(\tau, 0, x, v)| \, d\tau.$$

For the second term above, we have

$$(3.6.130) \quad |\mathcal{J}_2| \leq C(T) \|\bar{u} - u^g\|_{L_t^2 L_x^\infty}.$$

Consequently, we have to obtain a precise estimate of the difference $u^g - \bar{u}$ in $L_t^2 L_x^\infty$.

In order to do this, we shall use Proposition 3.5.1 with the solutions u^g and \bar{u} . Let us observe that, thanks to point (a) and the fact that $\rho_{\bar{f}} \equiv 0$, hypothesis (3.5.116) is satisfied in this case. Thus, (3.5.117) yields

$$(3.6.131) \quad \begin{aligned}\|(u^g - \bar{u})(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 &+ \int_0^t \|\nabla(u^g - \bar{u})(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \, ds \\ &\lesssim \|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|j_{g-\bar{f}} - \rho_g u^g\|_{L^2}^2 \, ds,\end{aligned}$$

thanks to (3.3.31).

Firstly, we observe that, thanks to (3.4.62),

$$\|j_{g-\bar{f}}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v(g - \bar{f}) \, dv \right|^2 \, dx \lesssim \epsilon^2$$

Secondly, using point (a) and (3.4.58),

$$\begin{aligned}\sup_{t \in [0, T]} \|\rho_g(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &\leq 2c_3^2 \epsilon^2 e^T \left(M^2 + T(1 + \|j_{\bar{f}}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2) \right) \\ &\lesssim \epsilon^2.\end{aligned}$$

Then, for any $t \in (0, T]$,

$$\int_0^t \|j_{g-\bar{f}} - \rho_g u^g\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \, ds \leq \epsilon^2,$$

Thus,

$$\begin{aligned}\|(\bar{u} - u)(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 &+ \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla(\bar{u} - u)(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \, ds \lesssim \|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 + \epsilon^2 \\ &\lesssim M^2 + \epsilon^2,\end{aligned}$$

thanks to (3.1.11). To conclude, using the injection $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T}^2)$, we deduce

$$\begin{aligned}\int_0^T \|(\bar{u} - u)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}^2 \, dt \\ \lesssim \int_0^T \|(\bar{u} - u)(t)\|_{H^{\frac{3}{2}}}^2 \, dt \lesssim M^2 + \epsilon^2,\end{aligned}$$

which gives the $L_t^2 L_x^\infty$ estimate.

We have, from (3.6.128), (3.6.129), (3.6.130) and the previous inequalities,

$$\begin{aligned} & |\bar{X}(t, 0, x, v) - X(t, 0, x, v)| \\ & \leq |\mathcal{J}_1| + |\mathcal{J}_2| \\ & \lesssim \int_0^t |\bar{X}(s, 0, x, v) - X(s, 0, x, v)| \, ds + \|\bar{u} - u\|_{L_x^2 L_x^\infty} \\ & \lesssim \int_0^t |\bar{X}(s, 0, x, v) - X(s, 0, x, v)| \, ds + \sqrt{M^2 + \epsilon^2}. \end{aligned}$$

Whence, thanks to Gronwall's lemma,

$$(3.6.132) \quad \sup_{Q_T} |(\bar{X} - X)(t, 0, x, v)| \lesssim \sqrt{M^2 + \epsilon^2}.$$

Using (3.2.25), we also deduce

$$(3.6.133) \quad \sup_{Q_T} |(\bar{V} - V)(t, 0, x, v)| \lesssim \sqrt{M^2 + \epsilon^2}.$$

Step 2. Conclusion. Let us choose $\epsilon > 0$ and $M > 0$ small enough so that

$$\sup_{Q_T} \|(\bar{X} - X^g)(t, x, v)\| + \sup_{Q_T} \|(\bar{V} - V^g)(t, x, v)\| < \frac{\delta}{2},$$

with the choice (3.4.91). Thus, combining (3.3.28) with (3.6.132) and (3.6.133), we obtain the following property.

For every $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, there exists $t_{(x,v)} \in \left[\frac{T}{48}, \frac{47T}{48} \right]$ such that

$$(3.6.134) \quad X^g(t_{(x,v)}, 0, x, v) \in H_{\frac{\delta}{2}},$$

$$(3.6.135) \quad |V^g(t_{(x,v)}, 0, x, v) \cdot n_H| > \frac{7}{2}.$$

We shall show that this entails (3.6.127).

Indeed, let us set

$$s_0 := \log(1 + \delta).$$

Let $(x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ and let $t_{(x,v)}$ be given by (3.6.134). Then, we have the following

$$\begin{aligned} & |(X^g(t_{(x,v)}, 0, x, v) + (1 - e^{s_0})V^g(t_{(x,v)}, 0, x, v)) \cdot n_H| \\ & \geq -|X^g(t_{(x,v)}, 0, x, v) \cdot n_H| + (e^{s_0} - 1)|V^g(t_{(x,v)}, 0, x, v) \cdot n_H| \\ & \geq -\frac{\delta}{2} + \frac{7}{2}(e^{s_0} - 1) \\ & > 2\delta, \end{aligned}$$

using (3.6.134), (3.6.135) and the choice (3.4.91). Thus, thanks to the previous inequality and (3.2.25), and denoting $X^g(t) := X(t, 0, x, v)$ and $V^g(t) := V^g(t, 0, x, v)$ for (x, v) fixed, we get

$$\begin{aligned} & |(X^g(t_{(x,v)}) + (1 - e^{s_0})V^g(t_{(x,v)}) - X^g(t_{(x,v)} - s_0)) \cdot n_H| \\ & = |(X^g(t_{(x,v)}) + (1 - e^{s_0})V^g(t_{(x,v)}) - X^g(t_{(x,v)} - s_0, t_{(x,v)}, (X^g, V^g)(t_{(x,v)}))) \cdot n_H| \\ & = \left| \int_{t_{(x,v)}}^{t_{(x,v)} - s_0} \int_{t_{(x,v)}}^\eta e^{z-\eta} u^g(z, X^g(z)) \, dz \, d\eta \right| \\ & \leq s_0^{\frac{3}{2}} \|u^g\|_{L^2 L_x^\infty} \end{aligned}$$

$< \delta$,

thanks to Cauchy-Schwarz's inequality and (3.4.91). Let us observe that this entails that

$$X^g(t_{(x,v)} - s_0, 0, x, v) \notin H_\delta.$$

Combining this with (3.6.134) and thanks to the intermediate value theorem, we deduce that there exists $\sigma_{(x,v)} \in (t_{(x,v)} - s_0, t_{(x,v)})$ such that

$$(3.6.136) \quad X^g(\sigma_{(x,v)}, 0, x, v) \in \partial H_\delta.$$

Let us observe that, thanks to (3.4.91),

$$(3.6.137) \quad \sigma_{(x,v)} \in \left[\frac{T}{48}, \frac{47T}{48} \right], \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Finally, thanks to (3.2.25) and (3.6.135), we deduce

$$\begin{aligned} & |V^g(\sigma_{(x,v)}, 0, x, v) \cdot n_H| \\ &= |V^g(\sigma_{(x,v)}, t_{(x,v)}, (X^g, V^g)(t_{(x,v)}, 0, x, v)) \cdot n_H| \\ &\geq e^{t_{(x,v)} - \sigma_{(x,v)}} |V^g(t_{(x,v)}, 0, x, v)| - \sqrt{s_0} \|u^g\|_{L_t^2 L_x^\infty} \\ &\geq 3, \end{aligned}$$

where we have used the Cauchy-Schwarz's inequality and (3.4.91). Thus, combining last inequality with (3.6.136) and (3.6.137), we find (3.6.127). \square

PROOF OF THEOREM 3.1.3. CONTROLLABILITY PART. Let us choose $\epsilon \leq \min\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$, where ϵ_0 is given by Proposition 3.4.6, and ϵ_1 is given by Proposition 3.6.1. Let us consider $T \geq T_0$, according to Proposition 3.3.1, and $\tau_1, \tau_2 > 0$. Thus, define

$$T_f = T + \tau_1 + \tau_2.$$

We shall prove that (3.1.14) in a large enough time $T_f > 0$, which will be done in three steps.

Step 1. From the initial configuration to a confinement in ω .

By the choice of ϵ , we apply Proposition 3.4.6 in time $T > 0$ large enough, which provides a fixed point of \mathcal{V}_ϵ , that we denote g^* and a strong solution (g^*, u^{g^*}) of (3.1.1) for some $G \in \mathcal{C}^0([0, T] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$. We observe that from the construction of \mathcal{V}_ϵ and (3.3.31), we have

$$(3.6.138) \quad \mathcal{V}_\epsilon[g^*](T, x, v) := \Pi \left(\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g^*]_{|([0, T] \times (\mathbb{T}^2 \setminus H_\delta) \times \mathbb{R}^2) \cup ([0, \frac{T}{48}] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)} \right) (T, x, v).$$

In particular, it comes from the definition of Π that

$$(3.6.139) \quad \mathcal{V}_\epsilon[g^*](T, x, v) = \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g^*](T, x, v), \quad \forall (x, v) \in (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2,$$

$$(3.6.140) \quad \mathcal{V}_\epsilon[g^*](0, x, v) = f_0(x, v), \quad \forall (x, v) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Moreover, by (3.4.99) and (3.2.27),

$$\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g^*](T, x, v) = e^{2T} f_0((X^{g^*}, V^{g^*})(0, T, x, v)).$$

Hence, since $\epsilon \leq \epsilon_1$, Proposition 3.6.1 applies, which implies, thanks to the absorption procedure described by (3.4.99) and (3.4.94) that $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[g^*](T, x, v) = 0$ in $(\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2$. Thus, by (3.6.139), we get

$$(3.6.141) \quad g^*(T, x, v) = 0, \quad \forall (x, v) \in (\mathbb{T}^2 \setminus \omega) \times \mathbb{R}^2.$$

Step 2. From the confinement in ω to the zero distribution.

Let $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ such that $0 \leq \zeta \leq 1$ and

$$(3.6.142) \quad \zeta(t) = 1, \quad \forall t \leq 0,$$

$$(3.6.143) \quad \zeta(t) = 0, \quad \forall t \geq 1.$$

Then, let us define

$$f_b(t, x, v) := \zeta\left(\frac{t}{\tau_1}\right) g^*(T, x, v), \quad \forall (t, x, v) \in (0, \tau_1) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Thus,

$$f_b|_{t=0} = g^*|_{t=T}, \quad \text{and} \quad f_b|_{\tau_1} = 0,$$

We associate to f_b the velocity field u_b obtained by solving the associated system (3.4.55), which is possible thanks to Proposition 3.4.2, as f_b has the same regularity in (x, v) as g^* at any time τ_1 . We observe that $u_b(0) = u^{g^*}(T)$ by construction.

Step 3. From the zero distribution to the stationary fluid

According to Step 2, after a time τ_1 , the field evolves from $u^{g^*}(T)$ to u_b . Then, Theorem 3.3.2 allows to modify the field in order to reach zero in time τ_2 . Meanwhile, the distribution function can be modified accordingly, keeping the particles confined in ω . Let us apply Theorem 3.3.2 with

$$\tau = \tau_2, \quad M = \mathbb{T}^2, \quad M_0 = \omega, \quad \hat{y} \equiv 0, \quad y_0 = u_b(\tau_1).$$

This provides a control $w_\sharp \in \mathcal{C}^\infty([0, \tau_2] \times \mathbb{T}^2)$ such that

$$(3.6.144) \quad \text{supp } w_\sharp \subset (0, \tau_2) \times \omega$$

and such that the solution of

$$(3.6.145) \quad \begin{cases} \partial_t u_\sharp + u_\sharp \cdot \nabla u_\sharp - \Delta u_\sharp + \nabla p_\sharp = w_\sharp, & (t, x) \in (0, \tau_2) \times \mathbb{T}^2, \\ \text{div}_x u_\sharp = 0, & (t, x) \in (0, \tau_2) \times \mathbb{T}^2, \\ u_\sharp|_{t=0} = u_b(\tau_1), & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

satisfies

$$(3.6.146) \quad u_\sharp|_{t=\tau_2} \equiv 0.$$

We thus define the associated distribution function as

$$f_\sharp(t, x, v) := (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)(v) \cdot w_\sharp(t, x), \quad \forall (t, x, v) \in (0, \tau_2) \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

where \mathcal{Z}_1 and \mathcal{Z}_2 are given by (3.3.39) and (3.3.40). As a consequence of (3.6.144) and step 2,

$$f_\sharp|_{t=0} = f_b|_{t=\tau_1} = 0, \quad f_\sharp|_{t=\tau_2} = 0.$$

Conclusion. We put together these steps to construct a suitable solution. Let us define

$$(3.6.147) \quad f(t) := \begin{cases} g^*(t), & t \in [0, T], \\ f_b(t - T), & t \in [T, T + \tau_1], \\ f_\sharp(t - T - \tau_1), & t \in [T + \tau_1, T + \tau_1 + \tau_2], \end{cases}$$

and

$$(3.6.148) \quad u(t) := \begin{cases} u^{g^*}(t), & t \in [0, T], \\ u_b(t - T), & t \in [T, T + \tau_1], \\ u_\sharp(t - T - \tau_1), & t \in [T + \tau_1, T + \tau_1 + \tau_2]. \end{cases}$$

According to the previous arguments, (f, u) is a strong solution of (3.1.1) and satisfies (3.1.14). \square

3.7. Proof of Theorem 3.1.3. Uniqueness.

The goal of this section is to show that the strong solution of (3.1.1) obtained in Section 3.4 is unique within a certain class.

Indeed, let $\epsilon \leq \epsilon_0$ and $g = \mathcal{V}_\epsilon[g]$. Then, if $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ satisfies (3.1.13), Lemma 3.4.8 gives (3.4.112). By the construction of \tilde{f} and $\tilde{\mathcal{V}}_\epsilon$, and since Π preserves regularity, we deduce that

$$(3.7.149) \quad g \in \mathcal{C}^1(Q_T),$$

$$(3.7.150) \quad \exists \kappa' > 0, (|g| + |\nabla_{x,v}g|)(t, x, v) \leq \frac{\kappa'}{(1 + |v|)^{\gamma+1}}, \quad \forall (t, x, v) \in Q_T.$$

Next result, inspired from [143, Section 8], shows that the solution in this class is unique.

PROPOSITION 3.7.1. *Let $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$ satisfying (3.1.13) and let $G \in \mathcal{C}^0(Q_T)$. Then, the strong solution of system (3.1.1), according to Definition 3.1.1, and satisfying conditions (3.7.149) and (3.7.150) is unique.*

PROOF. Let $f_1 = \tilde{\mathcal{V}}_\epsilon[f_1]$, for $\epsilon \leq \epsilon_0$. Let us suppose that (f^2, u_2) is a strong solution of system (3.1.1) with initial datum f_0 and control G and such that (3.7.149) and (3.7.150) are satisfied.

Let $w := u_1 - u_2$, $g := f^1 - f^2$. We shall use Proposition 3.5.1 on the difference w . Observe that, thanks to point (a) and (3.7.150), we have

$$\sup_{(t,x) \in \Omega_T} (|\rho_{f^1}| + |\rho_{f^2}|) < \infty.$$

Thus, (3.5.117) yields in this case

$$\|w\|_{L_t^2 H_x^{\frac{3}{2}}} \lesssim \left(\|j_g\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\rho_g\|_{L_t^\infty L_x^2} \|u_2\|_{L_t^2 L_x^\infty} \right).$$

Moreover, the Sobolev embedding theorem gives,

$$(3.7.151) \quad \|w\|_{L_t^2 L_x^\infty} \lesssim \left(\|j_g\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\rho_g\|_{L_t^\infty L_x^2} \|u_2\|_{L_t^2 L_x^\infty} \right).$$

On the other hand, we observe that condition (3.7.150) gives

$$\begin{aligned} & (1 + |v|) |\nabla_{x,v} f^2(t, (X^1, V^1)(0, t, x, v))| \\ & \leq \frac{\kappa'(1 + |v|)}{(1 + |V^1(0, t, x, v)|)^{\gamma+1}} \\ & \leq \frac{C(\kappa', \gamma)}{(1 + |v|)^\gamma}, \end{aligned}$$

proceeding in the same fashion as in (3.4.108). As a result,

$$(3.7.152) \quad \sup_{(t,x) \in \Omega_T} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |v|) |\nabla_v f^2(t, (X^1, V^1)(0, t, x, v))| dv \leq \tilde{C}(\kappa', \gamma),$$

for some constant $\tilde{C}(\kappa', \gamma) > 0$.

Next, we observe that the difference of the distribution functions, g , satisfies the following Vlasov equation

$$\partial_t g + v \cdot \nabla_x g + \operatorname{div}_v [(u_1 - v)g] = -w \cdot \nabla_v f^2, \quad \forall (t, x, v) \in Q_T.$$

Consequently, by the method of characteristics, we have

$$\begin{aligned} |g(t, x, v)| &\leq e^{2T} \left| \int_0^t w(s, X^1(0, s, x, v)) \cdot \nabla_v f^2(s, (X^1, V^1)(0, s, x, v)) \, ds \right| \\ &\lesssim \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{L_x^\infty} |\nabla_v f^2(s, (X^1, V^1)(0, s, x, v))| \, ds. \end{aligned}$$

Thus,

$$(1 + |v|)|g(t, x, v)| \leq \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{L_x^\infty} (1 + |v|) |\nabla_v f^2(s, (X^1, V^1)(0, s, x, v))| \, ds,$$

which implies, thanks to (3.7.152) and (3.7.151),

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{T}^2} (|j_g(t, x)| + |\rho_g(t, x)|) &\lesssim \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{L_x^\infty} \, ds \\ &\lesssim \int_0^t (\|j_g(s)\|_{L_x^2} + \|\rho_g(s)\|_{L_x^2}) \, ds \\ &\lesssim \int_0^t \sup_{x \in \mathbb{T}^2} (|j_g(s)| + |\rho_g(s)|) \, ds, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

which, by Gronwall's lemma entails, since $\rho_g(0) = j_g(0) = 0$, that

$$\rho_g(t, x) = 0, \quad j_g(t, x) = 0, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T.$$

Moreover, we deduce from this that the difference $w(t) = (u_1 - u_2)(t)$ satisfies, for every $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta_x w(t) + \nabla_x \pi(t) = -(u_1 \cdot \nabla)u_1 + (u_2 \cdot \nabla)u_2 + \rho_{f^1}(t)w(t), & \Omega_T, \\ \operatorname{div}_x w(t) = 0, & \Omega_T, \end{cases}$$

which, according to Theorem C.2.1 must imply that $u_1 = u_2$ in Ω_T . In particular, the characteristics associated to $-v + u_1$ and to $-v + u_2$ coincide. Then, $f^1 = f^2$ in Q_T . \square

3.8. Perspectives and comments

We have proved in Theorem 3.1.3 a null-controllability result for the Vlasov-Navier-Stokes system in dimension 2. Let us make some comments about the possible limitations of this result.

First of all, we observe that a natural limitation concerning dimension comes from the difficulties presented by the three-dimensional Navier-Stokes system. In particular, since the uniqueness of weak solutions for this system is still unknown, there is no hope, a priori, to obtain better results when considering the coupling with a Vlasov equation.

On the other hand, the Navier-Stokes in dimension 2 allows the use of fine stability estimates and a certain regularising effect, which permits the definition of classical characteristics associated with the velocity field. This is essential to describe the absorption procedure of Section 3.4.

Let us emphasise that the controllability result of Theorem 3.1.3 allows to control at the same time the distribution function of particles and the motion of the fluid in which they are immersed. This can be done thanks to the return method, by exploiting in a crucial manner the two coupling terms of the system: the

friction term in the Vlasov equation and the drag force term present in the Navier-Stokes system. Furthermore, we can achieve the control of all the components with a scalar control acting only on the Vlasov equation. This kind of feature is already well understood in the case of the Navier-Stokes system [51, 52], where the controlled component is arbitrary. In the VNS case, our methods work only if the controlled component is the distribution function.

The result of Theorem 3.1.3 can be seen as a kinetical limit case of the result obtained for a fluid-structure system in [26] (see [27] for a three-dimensional result). Indeed, whereas the fluid-structure problems aims at controlling the trajectory of a macroscopic body immersed in a fluid, the kinetic approach allows to treat the dynamics of a cloud of microscopic particles in a fluid, replacing the individual effects of particles by a mesoscopic description.

Flatness for a strongly degenerate 1-D parabolic equation

Keywords— partial differential equations; degenerate parabolic equation; boundary control; null-controllability; motion planning; flatness.¹

4.1. Introduction

We consider the following control system

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - \partial_x (x^\alpha \partial_x) f(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ (x^\alpha \partial_x) f(t, x)|_{x=0} = 0, & t \in (0, T), \\ f(t, 1) = u(t), & t \in (0, T), \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

where the state is the solution $f(t, x)$ and the control is the function $u(t)$. The parameter $\alpha \in [1, 2)$ is fixed through the whole article.

The aim of this work is to construct explicit controls u for the null-controllability of system (4.1.1) in finite time $T > 0$, using the flatness method.

4.1.1. Main result. We will make use of the Gevrey class of functions.

DEFINITION 4.1.1. *Let $s \in \mathbb{R}^+$ and $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ with $t_1 < t_2$. A function $h \in \mathcal{C}^\infty([t_1, t_2])$ is said to be Gevrey of order s if*

$$\exists M, R > 0 \text{ such that } \sup_{t_1 \leq r \leq t_2} |h^{(n)}(r)| \leq \frac{M(n!)^s}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

We then write $h \in \mathcal{G}^s([t_1, t_2])$.

Before stating the main result, we have to recall the notion of weak solutions of the inhomogeneous system (4.1.1).

DEFINITION 4.1.2 (Weak solutions). *Let $f_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$ and $u \in H^1(0, T)$. A weak solution of system (4.1.1) is a function $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(0, 1))$ such that for every $t' \in [0, T]$ and for every*

$$(4.1.2) \quad \psi \in \mathcal{C}^1([0, t']; L^2(0, 1)) \cap \mathcal{C}^0([0, t']; H^2(0, 1))$$

such that

$$(4.1.3) \quad (x^\alpha \partial_x) \psi(t, x)|_{x=0} = \psi(t, 1) = 0, \quad \forall t \in [0, t'],$$

one has

$$\int_0^{t'} \int_0^1 f(t, x) (\partial_t \psi + \partial_x (x^\alpha \partial_x \psi))(t, x) dt dx$$

1. Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'une publication à paraître dans *Mathematics of Control, Signals and Systems* (cf. [124]).

$$= \int_0^1 f(t', x)\psi(t', x) dx - \int_0^1 f_0(x)\psi(0, x) dx + \int_0^{t'} u(t)\partial_x\psi(t, 1) dt.$$

As we show in Section 4.2 (see Corollary 4.2.2), system (4.1.1) has a unique weak solution under suitable assumptions. Our main result is the following.

THEOREM 4.1.3. *Let $f_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$, $\tau \in (0, T)$ and $s \in (1, 2)$. Then, there exists a flat output $y \in \mathcal{G}^s([\tau, T])$ such that the control*

$$(4.1.4) \quad u(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \in [0, \tau], \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t)}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k (j + \frac{\alpha-1}{2})}, & \text{if } t \in (\tau, T], \end{cases}$$

steers to zero at time T the weak solution of system (4.1.1). Furthermore, the control u belongs to $\mathcal{G}^s([0, T])$.

4.1.2. Previous work.

4.1.2.1. *Null-controllability.* The null-controllability of system

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) - \partial_x (x^\alpha \partial_x) f(t, x) = 1_\omega(x)v(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ (x^\alpha \partial_x) f(t, x)|_{x=0} = 0, & t \in (0, T), \\ f(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

where $\omega \subset (0, 1)$, has been studied by P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble in [40]. Their strategy relies on appropriate Carleman estimates. To deal with the degeneracy at $\{x = 0\}$, they use an adequate functional framework that we recall in Section 4.2, and Hardy-type inequalities.

The null-controllability of system (4.1.1) is a consequence of the internal null-controllability and the extension principle, since the control is located on $\{x = 1\}$, away from the degeneracy. The interest of the present article is to provide explicit controls.

In the case of a control located on $\{x = 0\}$, an approximate controllability result for $\alpha \in [0, 1)$ has been proven by P. Cannarsa, J. Tort and M. Yamamoto in [43] using Carleman estimates. The exact controllability was later proven by M. Gueye in [68] again in the weakly degenerate case $\alpha \in [0, 1)$ by using the transmutation method.

Other related one-dimensional problems have been treated: see [37, 39, 2], see [44] for a non-divergence setting, see [144] for a system with a singular potential. A multi-dimensional case has been studied in [41].

4.1.2.2. *The flatness method.* The main interest of the flatness method is to provide explicit controls. It has been developed for finite-dimensional systems (see [64]) and then generalised to some infinite-dimensional systems; see [113] for the heat equation on a cylindrical domain with boundary control, [114] for one-dimensional parabolic equations with varying coefficients and [115] for the one-dimensional Schrödinger equation. However, the strongly degenerate case $\alpha \in [1, 2)$ considered in Theorem 4.1.3 does not belong to the class concerned in [114]. Our goal is to adapt the flatness method to this case.

4.1.3. Open questions and perspectives. The flatness method may also be successful on similar equations, for instance in non-divergence form as in [44]. For the time being, this is an open problem.

4.1.4. Structure of the article. In Section 4.2 we recall a well-posedness result and the functional framework. In Section 4.3 we derive, thanks to an heuristic method, an explicit solution of system (4.1.1) consisting on a formal series development. We prove its convergence, provided that the corresponding flat output is in a Gevrey class. In Section 4.4 we discuss the spectral analysis of the associated stationary problem. In Section 4.5 we study the regularising effect of system (4.1.1) when $u = 0$. In Section 4.6 we construct an appropriate flat output steering the solution of (4.1.1) to zero, which concludes the proof of Theorem 4.1.3.

4.1.5. Notation. Since all the functions appearing in the article are real-valued, we omit any explicit mention by writing, for instance, $L^2(0, 1)$ instead of $L^2((0, 1); \mathbb{R})$. If $h \in \mathcal{C}^k([t_1, t_2])$, for some $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ with $t_1 < t_2$ and $k \in \mathbb{N}^*$, we will denote by $h'(t)$ and $h''(t)$ its first and second derivatives and by $h^{(n)}(t)$, for every $n \in \mathbb{N}$, $2 < n \leq k$, the n -th derivative.

If $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are two real-valued functions and $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$, we will write $h_1 \sim h_2$ as $x \rightarrow \mu$ to denote that $\lim_{t \rightarrow \mu} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = 1$.

We will denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the inner product in $L^2(0, 1)$.

4.2. Well-posedness

We consider, for $T > 0$ and $f_0 \in L^2(0, 1)$, the following system

$$(4.2.5) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - \partial_x (x^\alpha \partial_x) f(t, x) = h(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ (x^\alpha \partial_x) f(t, x)|_{x=0} = 0, & t \in (0, T), \\ f(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

We recall below a well-posedness result for system (4.2.5) proven originally in [39]. The strategy of the proof consists in a semigroup approach and the introduction of adequate weighted Sobolev spaces, that we recall below. We refer to [39, 36] for further details.

We introduce the weighted Sobolev space

$$H_\alpha^1(0, 1) := \{f \in L^2(0, 1); f \text{ is loc. absolutely continuous on } (0, 1], \\ x^{\frac{\alpha}{2}} f' \in L^2(0, 1) \text{ and } f(1) = 0\},$$

endowed with the norm

$$\|f\|_{H_\alpha^1(0,1)}^2 := \|f\|_{L^2(0,1)}^2 + \|x^{\frac{\alpha}{2}} f'\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \forall f \in H_\alpha^1(0, 1).$$

We remark that $H_\alpha^1(0, 1)$ is a Hilbert space with the scalar product

$$(4.2.6) \quad \langle f, g \rangle_{H_\alpha^1} := \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 x^\alpha f'(x)g'(x) dx, \quad \forall f, g \in H_\alpha^1(0, 1).$$

PROPOSITION 4.2.1 ([39], Proposition 3.2 and Theorem 3.1). *Let*

$$(4.2.7) \quad \begin{cases} D(A) := \{f \in H_\alpha^1(0, 1); x^\alpha f' \in H^1(0, 1)\}, \\ Af := -(x^\alpha f')'. \end{cases}$$

Then, $A : D(A) \rightarrow L^2(0, 1)$ is a closed self-adjoint positive operator with dense domain. As a consequence, A is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup, and for any $f_0 \in L^2(0, 1)$, and $h \in L^2((0, T) \times (0, 1))$ there exists a

unique weak solution of system (4.2.5), i.e., a function $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_\alpha^1(0, 1))$ such that

$$f(t) = S(t)f_0 + \int_0^t S(t-s)h(s) ds, \quad \text{in } L^2(0, 1), \quad \forall t \in [0, T].$$

As a consequence, using classical arguments (see for instance [50, Section 2.5.3]), we deduce the following result.

COROLLARY 4.2.2. *Let $T > 0$, $f_0 \in L^2(0, 1)$ and $u \in H^1(0, T)$. Then, system (4.1.1) has a unique weak solution (see Definition 4.1.2).*

PROOF. Let $f_0 \in L^2(0, 1)$, $u \in H^1(0, T)$ and

$$\theta(x) := x^2, \quad x \in [0, 1].$$

We consider the system

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x(x^\alpha \partial_x))g(t, x) = H(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ (x^\alpha \partial_x)g(t, x)|_{x=0} = 0, & t \in (0, T), \\ g(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ g(0, x) = f_0(x) - u(0)\theta(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

with

$$H(t, x) := -u'(t)\theta(x) - u(t)A\theta(x), \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, 1).$$

Since $H \in L^2((0, T) \times (0, 1))$, by Proposition 4.2.1 there exists a unique weak solution $g \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_\alpha^1(0, 1))$ of this problem. We set

$$f(t, x) := g(t, x) + u(t)\theta(x).$$

Then, using the integral formulation associated to g , one shows that f is a weak solution of system (4.1.1) in the sense of Definition 4.1.2.

The uniqueness follows since, if f_1 and f_2 are weak solutions of (4.1.1), then $f_1 - f_2$ is the unique weak solution of system (4.2.5) with $h \equiv 0$, and then by Proposition 4.2.1, $f_1 - f_2 = 0$. \square

4.3. Explicit solution

4.3.1. Heuristics. We consider the following formal expansion

$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}, \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, 1).$$

where $(c_{2k}(t))_{k \in \mathbb{N}}$ is a sequence of real numbers. We formally have

$$\begin{aligned} \partial_x(x^\alpha \partial_x f)(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2(k+1)}(t) (2-\alpha)^2 (k+1) \left[k+1 + \frac{\alpha-1}{2-\alpha} \right] (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}, \\ \partial_t f(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c'_{2k}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}. \end{aligned}$$

If f solves (4.1.1), then the following recurrence relation holds

$$c_{2(k+1)}(t) = \frac{c'_{2k}(t)}{(2-\alpha)^2 (k+1) \left(k+1 + \frac{\alpha-1}{2-\alpha} \right)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Choosing a flat output $c_0(t) := y(t)$ and iterating, we readily have

$$c_{2k}(t) = \frac{y^{(k)}(t)}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}, \quad \forall t \in (0, T), \forall k \in \mathbb{N}.$$

This gives a formal solution of (4.1.1),

$$(4.3.8) \quad f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)},$$

and a control given by $u(t) = f(t, 1)$, which is

$$(4.3.9) \quad u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t)}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}.$$

4.3.2. Pointwise solutions. The goal of this section is to introduce a notion of pointwise solution of system (4.1.1) to give a sense to the heuristics made in the previous section.

We define

$$\mathcal{C}_\alpha^2(0, 1) := \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \cap \mathcal{C}^2((0, 1)) \text{ such that } x^\alpha f'(x) \in \mathcal{C}^0([0, 1])\}.$$

DEFINITION 4.3.1 (Pointwise solution). *Let $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ with $t_1 < t_2$. Let $f_{t_1} \in \mathcal{C}^0(0, 1)$ and $u \in \mathcal{C}^0([t_1, t_2])$. A pointwise solution of system*

$$(4.3.10) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - \partial_x (x^\alpha \partial_x f)(t, x) = 0, & (t, x) \in (t_1, t_2) \times (0, 1), \\ x^\alpha \partial_x f(t, x)|_{x=0} = 0, & t \in (t_1, t_2), \\ f(t, 1) = u(t), & t \in (t_1, t_2), \\ f(t_1, x) = f_{t_1}(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

is a function $f \in \mathcal{C}^0([t_1, t_2] \times [0, 1]) \cap \mathcal{C}^1((t_1, t_2) \times (0, 1))$ such that

- (1) $f(t, \cdot) \in \mathcal{C}_\alpha^2(0, 1)$, $\forall t \in (t_1, t_2)$,
- (2) $\partial_t f - \partial_x (x^\alpha \partial_x f) = 0$ pointwisely in $(t_1, t_2) \times (0, 1)$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \partial_x f(t, x) = 0$, $\forall t \in (t_1, t_2)$,
- (4) $f(t, 1) = u(t)$, $\forall t \in (t_1, t_2)$,
- (5) $f(t_1, x) = f_{t_1}(x)$, $\forall x \in (0, 1)$.

REMARK 4.3.2. *The usual energy argument proves that, given $u \in \mathcal{C}^0([t_1, t_2])$, the pointwise solution of system (4.3.10) is unique. We observe that, changing parameters adequately in Definition 4.1.2 a pointwise solution of (4.3.10) is also a weak solution.*

4.3.3. Convergence. The goal of this section is the proof of the following result.

PROPOSITION 4.3.3. *Let $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, with $t_1 < t_2$. If $y \in \mathcal{G}^s([t_1, t_2])$ for some $s \in (0, 2)$, then*

- (1) *the control u given by (4.3.9) is well defined and belongs to $\mathcal{G}^s([t_1, t_2])$,*

- (2) the function given by (4.3.8) is a pointwise solution (see Definition 4.3.1) of system (4.3.10) in $(t_1, t_2) \times (0, 1)$ with u given by (4.3.9) and initial datum

$$f_{t_1}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t_1) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

PROOF. Let $M, R > 0$ be such that $|y^{(n)}(t)| \leq \frac{Mn!^s}{R^n}$, for any $n \in \mathbb{N}$, $t \in [t_1, t_2]$.

Step 1: We prove that u is well defined and belongs to $\mathcal{C}^\infty([t_1, t_2])$.

For any $t \in [t_1, t_2]$, $k \in \mathbb{N}^*$, we have, as $\frac{\alpha-1}{2-\alpha} \geq 0$,

$$\frac{|y^{(k)}(t)|}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)} \leq \frac{Mk!^s}{R^k (2-\alpha)^{2k} k!^2} = \frac{M}{R^k (2-\alpha)^{2k} k!^{2-s}}.$$

Hence, the series in (4.3.9) converges uniformly w.r.t. $t \in [t_1, t_2]$ and $u \in \mathcal{C}^0([t_1, t_2])$. Furthermore, for any $n \in \mathbb{N}^*$, the function $\xi_{n,k}(t) := \frac{y^{(k+n)}(t)}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}$ satisfies

$$|\xi_{n,k}(t)| \leq \frac{M(k+n)!^s}{R^{n+k} (2-\alpha)^{2k} k!^2}, \quad \forall t \in [t_1, t_2], k, n \in \mathbb{N}.$$

Thus, $\sum_k \xi_{n,k}(t)$ converges uniformly w.r.t. $t \in [t_1, t_2]$. Whence, $u \in \mathcal{C}^\infty([t_1, t_2])$ and for every $n \in \mathbb{N}$, $t \in [t_1, t_2]$, $u^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{n,k}(t)$.

Step 2: We prove that u is Gevrey of order s .

Let $n \in \mathbb{N}$. We deduce from last inequality that

$$\begin{aligned} |u^{(n)}(t)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M(k+n)!^s}{R^{n+k} (2-\alpha)^{2k} k!^2} \\ (4.3.11) \quad &\leq M \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^{2-s}} \left(\frac{2^s}{R(2-\alpha)^2} \right)^k \right] \left(\frac{2^s}{R} \right)^n n!^s, \end{aligned}$$

where we have used (D.0.21). The D'Alembert criterium for entire series shows that, whenever $s \in (0, 2)$, the series above converges, which shows that $u \in \mathcal{G}^s([t_1, t_2])$.

Step 3: We show that the function f given by (4.3.8) is well defined and $f \in \mathcal{C}^0([t_1, t_2] \times [0, 1]) \cap \mathcal{C}^1((t_1, t_2) \times (0, 1))$.

Let, for every $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k(t, x) := \frac{y^{(k)}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}, \quad \forall (t, x) \in [t_1, t_2] \times [0, 1].$$

Then,

$$|f_k(t, x)| \leq \frac{M}{k!^{2-s}} \left(\frac{1}{R(2-\alpha)} \right)^k, \quad \forall (t, x) \in [t_1, t_2] \times [0, 1].$$

This proves that $\sum_k f_k$ converges uniformly w.r.t. $(t, x) \in [t_1, t_2] \times [0, 1]$. Thus, $f \in \mathcal{C}^0([t_1, t_2] \times [0, 1])$.

We observe that $\exists k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}^*$ such that $(2 - \alpha)k_0 \geq 1$. Then, for every $k \geq k_0$, $f_k(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ and

$$\begin{aligned} |\partial_x f_k(t, x)| &= \left| \frac{y^{(k)}(t) 2k \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) x^{-\frac{\alpha}{2}} \left(x^{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{2k-1}}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)} \right| \\ &\leq 2M \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{k}{k!^{2-s}} \left(\frac{1}{R(2-\alpha)^2}\right)^k, \quad \forall x \in [0, 1], \end{aligned}$$

since $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(2k-1) - \frac{\alpha}{2} \geq 0$. This proves that $\sum_{k \geq k_0} \partial_x f_k$ converges uniformly w.r.t. $(t, x) \in [t_1, t_2] \times [0, 1]$. Thus, $f(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1((0, 1])$ for every $t \in [t_1, t_2]$. Note that f may not be differentiable w.r.t. x at $x = 0$ because of the finite number of terms $\sum_{k=0}^{k_0} \partial_x f_k$. Moreover, $\partial_x f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_x f_k(t, x)$ for every $(t, x) \in (t_1, t_2) \times (0, 1)$.

A similar argument shows that, for every $x \in (0, 1)$, $f(\cdot, x) \in \mathcal{C}^1(t_1, t_2)$ and

$$(4.3.12) \quad \partial_t f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_t f_k(t, x), \quad \forall (t, x) \in (t_1, t_2) \times (0, 1).$$

Finally, since the partial derivatives of f exist and are continuous in $(t_1, t_2) \times (0, 1)$, $f \in \mathcal{C}^1((t_1, t_2) \times (0, 1))$.

Step 4: We show that $f(t, \cdot) \in \mathcal{C}_\alpha^2(0, 1)$, for every $t \in (t_1, t_2)$.

Let $k_1 = k_1(\alpha) \in \mathbb{N}^*$ such that $k_1(2 - \alpha) \geq 2$. Working as in Step 3, we see that $\sum_{k \geq k_1} \partial_x^2 f_k$ converges uniformly w.r.t. $(t, x) \in (t_1, t_2) \times (0, 1)$. Thus, $f(t, \cdot) \in \mathcal{C}^2(0, 1)$, $\forall t \in (t_1, t_2)$. Furthermore,

$$(4.3.13) \quad \partial_x (x^\alpha \partial_x f)(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t) \left(x^{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^{2(k-1)}}{(2-\alpha)^{2(k-1)} (k-1)! \prod_{j=1}^{k-1} \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}.$$

for every $(t, x) \in (t_1, t_2) \times (0, 1)$. From Step 3, we obtain

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial_x f(t, x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t) 2k \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) x^{2k\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+\alpha-1}}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)} \right| \\ &\leq 2M \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k}{k!^{2-s}} \left(\frac{1}{R(2-\alpha)^2}\right)^k \right] x, \end{aligned}$$

for all $(t, x) \in (t_1, t_2) \times (0, 1)$, which implies, since $\alpha \in [1, 2)$, that

$$x^\alpha \partial_x f(t, x) \rightarrow 0, \quad \text{as } x \rightarrow 0^+.$$

Therefore, $f(t, \cdot) \in \mathcal{C}_\alpha^2$, for every $t \in (t_1, t_2)$.

Step 5: According to (4.3.12) and (4.3.13), an straightforward computation shows that the equation in (4.3.10) is satisfied.

□

4.4. Spectral Analysis

The goal of this section is to give the explicit expression of the eigenfunctions and eigenvalues of the spectral problem

$$(4.4.14) \quad \begin{cases} A\varphi(x) = \lambda\varphi(x), & x \in (0, 1), \\ (x^\alpha\varphi')|_{x=0} = \varphi(1) = 0, \end{cases}$$

where A is given by (4.2.7). We will make use of several results about Bessel functions recalled in Appendix E. From now on, we use the notation

$$(4.4.15) \quad \nu := \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha}.$$

PROPOSITION 4.4.1. *Let*

$$(4.4.16) \quad \varphi_k(x) = \frac{\sqrt{2-\alpha}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}), \quad \forall x \in (0, 1), k \in \mathbb{N}^*.$$

Then,

- (1) $\varphi_k \in D(A)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
- (2) φ_k satisfies (4.4.14) with

$$(4.4.17) \quad \lambda_k := \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 j_{\nu,k}^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

- (3) $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is a Hilbert basis of $L^2(0, 1)$,
- (4) for every $f_0 \in L^2(0, 1)$ the solution of (4.2.5) with $h = 0$ writes

$$(4.4.18) \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \langle f_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad \text{in } L^2(0, 1), \forall t \in [0, T].$$

PROOF. We will note for simplicity $b_k := \frac{\sqrt{2-\alpha}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|}$ and $\tilde{\varphi}_k := \frac{1}{b_k} \varphi_k$, for every $k \in \mathbb{N}^*$.

Step 1: We prove that $\varphi_k \in D(A)$, for every $k \in \mathbb{N}^*$ and that $A\varphi_k - \lambda_k\varphi_k = 0$.

Let $k \in \mathbb{N}^*$. We observe that $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty((0, 1]) \cap \mathcal{C}^0([0, 1])$, for any $k \in \mathbb{N}^*$ and $x \in (0, 1)$. We have

$$(4.4.19) \quad \tilde{\varphi}'_k(x) = \frac{1-\alpha}{2} x^{-\frac{1+\alpha}{2}} J_\nu(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) + j_{\nu,k} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) x^{\frac{1}{2}-\alpha} J'_\nu(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}).$$

Whence, using (E.1.25) and Lemma E.4.2, we deduce

$$x^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{\varphi}'_k = (1-\alpha) \underset{x \rightarrow 0^+}{O} \left(x^{\frac{\alpha}{2}-1}\right) + \underset{x \rightarrow 0^+}{O} \left(x^{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

It follows that $x^{\frac{\alpha}{2}} \varphi'_k \in L^2(0, 1)$. Thus $\varphi_k \in H^1_\alpha(0, 1)$. Moreover, from (4.4.19), a direct computation shows

$$(4.4.20) \quad \begin{aligned} (x^\alpha \tilde{\varphi}'_k)' &= - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 x^{\frac{\alpha-3}{2}} J_\nu(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 j_{\nu,k} x^{-\frac{1}{2}} J'_\nu(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &\quad + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 j_{\nu,k}^2 x^{\frac{1-\alpha}{2}} J''_\nu(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}). \end{aligned}$$

Then, evaluating equation (E.1.24) at $z = j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}$ and multiplying by $x^{\frac{\alpha-3}{2}}$, it follows

$$\begin{aligned} & j_{\nu,k}^2 x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\nu}''(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= -j_{\nu,k}x^{-\frac{1}{2}} J_{\nu}'(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) - j_{\nu,k}^2 x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\nu}(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &+ \left(\frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)^2 x^{\frac{\alpha-3}{2}} J_{\nu}(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}). \end{aligned}$$

Substituting in (4.4.20), this gives

$$-(x^{\alpha}\tilde{\varphi}'_k)' = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 j_{\nu,k}^2 x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\nu}(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) = \lambda_k \tilde{\varphi}_k.$$

Then, we readily have $(x^{\alpha}\tilde{\varphi}'_k)' \in H_{\alpha}^1(0,1) \subset L^2(0,1)$. Thus, $\varphi_k \in D(A)$. Moreover, $A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$.

Step 2: We check the boundary condition of (4.4.14) at $x = 0$.

We observe first that the case $\alpha = 1$ is straightforward. From (4.4.19), (E.1.25) and Lemma E.4.2, we have

$$|x^{\alpha}\tilde{\varphi}'_n(x)| = O_{x \rightarrow 0^+}(x^{\alpha-1}).$$

Then, it follows that $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha}\tilde{\varphi}'_n(x) = 0$. This shows, combined with Step 1, that φ_k satisfies (4.4.14).

Step 3: We prove that $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is an orthonormal family in $L^2(0,1)$.

Let $n, m \in \mathbb{N}^*$. Then, changing variables and using (E.3.32), we get

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x) dx \\ &= (2-\alpha) \int_0^1 x^{1-\alpha} \frac{J_{\nu}(j_{\nu,n}x^{1-\frac{\alpha}{2}})}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,n})|} \frac{J_{\nu}(j_{\nu,m}x^{1-\frac{\alpha}{2}})}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,m})|} dx \\ &= \frac{2}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,n})||J_{\nu+1}(j_{\nu,m})|} \int_0^1 y J_{\nu}(j_{\nu,n}y) J_{\nu}(j_{\nu,m}y) dy = \delta_{n,m}, \end{aligned}$$

where $\delta_{n,m}$ stands for the Kronecker delta.

Step 4: We prove that $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is a Hilbert basis of $L^2(0,1)$ by checking the Bessel equality. Let $f \in L^2(0,1)$ and let

$$(4.4.21) \quad a_k := \int_0^1 f(x)\varphi_k(x) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Then, using Lemma E.3.1 and changing variables twice, we get

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(x) \frac{\sqrt{2-\alpha}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_{\nu}(j_{\nu,k}x^{1-\frac{\alpha}{2}}) dx \right|^2 \\ &= \frac{2}{2-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 y^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha} + \frac{1}{2}} f(y^{\frac{2}{2-\alpha}}) \frac{\sqrt{2y}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} J_{\nu}(j_{\nu,k}y) dy \right|^2 \\ &= \frac{2}{2-\alpha} \int_0^1 y^{\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha} + 1} \left| f(y^{\frac{2}{2-\alpha}}) \right|^2 dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 |f(z)|^2 dz = \|f\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Step 5: Finally, (4.4.18) is a consequence of [3, Theorem 8.2.3, pp.237–240].

□

4.5. Regularising effect

We use the orthonormal basis obtained in Proposition 4.4.1 and some properties of Bessel functions to quantify the smoothing of the solution of system (4.1.1) when $u \equiv 0$.

PROPOSITION 4.5.1. *Let $f_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$ and let $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(0, 1))$ be the unique weak solution of system (4.2.5) when $h = 0$, according to Proposition 4.2.1. Then, there exists $Y \in \mathcal{C}^\infty((0, T])$ such that for every $\sigma \in (0, T)$,*

$$Y \in \mathcal{G}^1([\sigma, T])$$

and

$$(4.5.22) \quad f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^{(n)}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2n}}{(2-\alpha)^{2n} n! \prod_{j=1}^n \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right)}, \quad \forall (t, x) \in [\sigma, T] \times [0, 1].$$

Moreover, f solves system (4.3.10) pointwisely (see Definition 4.3.1) in $(\sigma, T) \times (0, 1)$ with $u = 0$ and initial datum $f_\sigma(x) = f(\sigma, x)$.

PROOF. Let ν be given by (4.4.15) and a_k as in (4.4.21). Let $\sigma \in (0, T)$ be fixed but arbitrary. Let $t \in [\sigma, T]$ be fixed. By (4.4.18) and (E.1.23), we have, for a.e. $x \in [0, 1]$,

$$(4.5.23) \quad \begin{aligned} f(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \frac{a_k \sqrt{2-\alpha}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} x^{\frac{1-\alpha}{2}} J_\nu(j_{\nu,k} x^{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \frac{a_k \sqrt{2-\alpha}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} x^{\frac{1-\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{j_{\nu,k} x^{1-\frac{\alpha}{2}}}{2}\right)^{2n+\nu} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,k}(t, x), \end{aligned}$$

where, for every $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$B_{n,k}(t, x) := e^{-\lambda_k t} b_k \frac{(-1)^n j_{\nu,k}^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+1+\nu) 2^{2n+\nu}} \frac{(x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2n}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|},$$

and $b_k := a_k \sqrt{2-\alpha}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Step 1: We show that

$$(4.5.24) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |B_{n,k}(t, x)| \right) < \infty, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Indeed, since $\lambda_k > 0$, we have for every $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ and $x \in [0, 1]$,

$$|B_{n,k}(t, x)| \leq \frac{|b_k| j_{\nu,k}^{2n+\nu} e^{-\lambda_k \sigma}}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+1+\nu) |J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|}$$

$$(4.5.25) \quad \leq \frac{C_1 |b_k| e^{-\lambda_k \sigma} j_{\nu,k}^{2n+\nu+\frac{1}{2}}}{2^{2n} n! \Gamma(n+1+\nu)},$$

for a constant $C_1 > 0$, using Lemma E.4.3.

We fix $n \in \mathbb{N}$ and we define the function $h_n^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ by

$$h_n^\alpha(x) := e^{-(1-\frac{\alpha}{2})^2 x^2 \sigma} x^{2n+\nu+\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

which satisfies that

$$(4.5.26) \quad \frac{d}{dx} h_n^\alpha(x) > 0, \quad \forall x \in (0, N_n^\alpha) \quad \text{and} \quad \frac{d}{dx} h_n^\alpha(x) < 0, \quad \forall x \in (N_n^\alpha, \infty),$$

where $N_n^\alpha := \frac{2}{2-\alpha} \sqrt{\frac{1}{\sigma} \left(n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} \right)}$. Hence, from (4.5.25) and (4.4.17),

$$(4.5.27) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B_{n,k}(t, x)| \leq \frac{C_1 \sup_k |b_k|}{2^{2n} n! \Gamma(n+1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} h_n^\alpha(j_{\nu,k})$$

Introducing $K_n^\alpha := \sup \{k \in \mathbb{N}^*; j_{\nu,k} \leq N_n^\alpha\}$, we write

$$(4.5.28) \quad \sum_{k=1}^{\infty} h_n^\alpha(j_{\nu,k}) = h_n^\alpha(j_{\nu, K_n^\alpha}) + h_n^\alpha(j_{\nu, K_n^\alpha+1}) + \sum_{k \in \mathbb{N}^* - \{K_n^\alpha, K_n^\alpha+1\}} h_n^\alpha(j_{\nu,k})$$

On one hand, we have

$$(4.5.29) \quad \begin{aligned} h_n^\alpha(j_{\nu, K_n^\alpha}) + h_n^\alpha(j_{\nu, K_n^\alpha+1}) &\leq 2h_n^\alpha(N_n^\alpha) \\ &\leq 2e^{-(n+\frac{\alpha}{4(2-\alpha)})} \left(n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} \right)^{n+\frac{\alpha}{4(2-\alpha)}} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{2}{2-\alpha} \right)^2 \right]^{n+\frac{\alpha}{4(2-\alpha)}} \\ &\leq C_2 \Gamma \left(n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{1}{\sigma} \left(\frac{2}{2-\alpha} \right)^2 \right]^{n+\frac{\alpha}{4(2-\alpha)}}, \end{aligned}$$

for a constant $C_2 > 0$, using Lemma D.0.2 with $a = 1, b = \frac{1}{2}$. On the other hand, using (4.5.26), we write

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{N}^* - \{K_n^\alpha, K_n^\alpha+1\}} h_n^\alpha(j_{\nu,k}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{K_n^\alpha-1} \frac{1}{j_{\nu,k+1} - j_{\nu,k}} \int_{j_{\nu,k}}^{j_{\nu,k+1}} h_n^\alpha(x) dx + \sum_{k=K_n^\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{j_{\nu,k} - j_{\nu,k-1}} \int_{j_{\nu,k-1}}^{j_{\nu,k}} h_n^\alpha(x) dx \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{j_{\nu,k+1} - j_{\nu,k}} \right\} \left(\int_{j_{\nu,1}}^{j_{\nu, K_n^\alpha}} h_n^\alpha(x) dx + \int_{j_{\nu, K_n^\alpha+1}}^{\infty} h_n^\alpha(x) dx \right) \\ &\leq C_3 \int_0^{\infty} h_n^\alpha(x) dx, \end{aligned}$$

for a constant $C_3 > 0$, using (E.2.30). Moreover, we have

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} h_n^\alpha(x) dx &= \int_0^{\infty} e^{-(1-\frac{\alpha}{2})^2 x^2 \sigma} x^{2n+\frac{\alpha}{2(2-\alpha)}} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{2}{2-\alpha} \sqrt{\frac{t}{\sigma}} \right)^{2n+\frac{\alpha}{2(2-\alpha)}} \frac{1}{2\sqrt{\sigma t}} \left(\frac{2}{2-\alpha} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{2}{2-\alpha} \right) \right]^{2n + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)} + 1} \int_0^\infty e^{-t} t^{n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} - \frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{2}{2-\alpha} \right) \right]^{2n + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)} + 1} \Gamma \left(n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} + \frac{1}{2} \right),
\end{aligned}$$

where we have used (D.0.18) with $p = n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} + \frac{1}{2}$. Hence, combining this with (4.5.28) and (4.5.29), we get

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_n^\alpha(j_{\nu,k}) \leq \left(C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\sigma}(2-\alpha)} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{2}{2-\alpha} \right) \right]^{2n + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}} \Gamma \left(n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} + \frac{1}{2} \right),$$

which, according to (4.5.27), implies

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_{n,k}(t, x)| \leq C_4 \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{2}{2-\alpha} \right) \right]^{2n + \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}} \frac{\Gamma \left(n + \frac{\alpha}{4(2-\alpha)} + \frac{1}{2} \right)}{2^{2n} n! \Gamma(n + \nu + 1)}.$$

Henceforth, the D'Alembert criterium for entire series gives (4.5.24).

Step 2: We find $Y \in \mathcal{G}^1([\sigma, T])$ such that (4.5.22) holds.

Thanks to Fubini's theorem, (4.5.23) and (D.0.19), we may write

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2n}}{(2-\alpha)^{2n} n! \prod_{j=1}^n (j + \nu)},$$

where, for every $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n(t) := \frac{(-1)^n \sqrt{2-\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{2n}}{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} \frac{j_{\nu,k}^{2n+\nu}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|}, \quad \forall t \in [\sigma, T],$$

and ν is given by (4.4.15). Putting

$$(4.5.30) \quad Y(t) := \frac{\sqrt{2-\alpha}}{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k j_{\nu,k}^\nu}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} e^{-(1-\frac{\alpha}{2})^2 j_{\nu,k}^2 t}, \quad t \in [\sigma, T],$$

we have that, since $\sigma > 0$, Y is analytic in $[\sigma, T]$. Moreover,

$$Y^{(n)}(t) = y_n(t), \quad \forall t \in [\sigma, T], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hence, we obtain (4.5.22) with this choice. Since $\sigma \in (0, T)$ is arbitrary, we have in addition that $Y \in \mathcal{C}^\infty((0, T])$.

Furthermore, applying Proposition 4.3.3 to (4.5.22) with $t_1 = \sigma$ and $t_2 = T$, we deduce that f solves (4.1.1) pointwisely in $(\sigma, T) \times (0, 1)$ with $u = 0$ and $f_\sigma(x) = f(\sigma, x)$.

□

4.6. Construction of the control

Let $s \in \mathbb{R}$ with $s > 1$. The function (see [113, Section 2] and [147, Theorem 11.2, p.48])

$$(4.6.31) \quad \phi_s(t) := \begin{cases} 1, & \text{if } t \leq 0, \\ \frac{e^{-(1-t)^{-\frac{1}{s-1}}}}{e^{-(1-t)^{-\frac{1}{s-1}}} + e^{-t^{-\frac{1}{s-1}}}}, & \text{if } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{if } t \geq 1, \end{cases}$$

belongs to $\mathcal{G}^s([0, 1])$ and satisfies

$$(4.6.32) \quad \phi_s(0) = 1, \phi_s(1) = 0, \quad \phi_s^{(i)}(0) = \phi_s^{(i)}(1) = 0, \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

PROOF OF THEOREM 4.1.3. Let $f_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$. Let f and Y be given by Proposition 4.5.1.

We pick $\tau \in (0, T)$, $s \in (1, 2)$ and we set the flat output

$$y(t) := \phi_s \left(\frac{t - \tau}{T - \tau} \right) Y(t), \quad \forall t \in (0, T],$$

which belongs to $\mathcal{C}^\infty(0, T)$. Moreover, for every $\sigma \in (0, T)$, $y \in \mathcal{G}^s([\sigma, T])$, as it is a product of two functions in $\mathcal{G}^s([\sigma, T])$. We define accordingly the function

$$\tilde{f}(t, x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t) (x^{1-\frac{\alpha}{2}})^{2k}}{(2-\alpha)^{2k} k! \prod_{j=1}^k \left(j + \frac{\alpha-1}{2-\alpha} \right)}, \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times [0, 1],$$

and the control

$$(4.6.33) \quad u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau], \\ \tilde{f}(t, 1), & t \in (\tau, T]. \end{cases}$$

Since $y \in \mathcal{G}^s([\sigma, T])$ for some $s \in (1, 2)$, Proposition 4.3.3 shows that

$$(4.6.34) \quad \forall \sigma \in (0, T), \tilde{f} \text{ is the pointwise solution of (4.3.10) with } t_1 = \sigma, t_2 = T, f_{t_1} = f(\sigma, \cdot) \text{ and (4.6.33).}$$

As a consequence of (4.6.32), we have

$$(4.6.35) \quad \begin{aligned} y(t) &= Y(t), \quad \forall t \in (0, \tau], \\ y(T) &= 0. \end{aligned}$$

Whence, $\tilde{f}(t, x) = f(t, x)$, for every $(t, x) \in (0, \tau) \times (0, 1)$. Thus, as $f \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(0, 1))$, we deduce

$$(4.6.36) \quad \tilde{f} \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(0, 1)),$$

$$(4.6.37) \quad \tilde{f}(0) = f_0 \quad \text{in } L^2(0, 1).$$

We have to check that \tilde{f} is the weak solution of system (4.1.1) on $(0, T)$. To do so, and according to Definition 4.1.2, let $t' \in (0, T)$ and let ψ satisfying (4.1.2) and (4.1.3). Then, by (4.6.34) and since a pointwise solution is a weak solution (see Remark 4.3.2), we have, for every $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma}^{t'} \int_0^1 \tilde{f}(t, x) (\partial_t \psi + \partial_x (x^\alpha \partial_x \psi))(t, x) dt dx \\ &= \int_0^1 \tilde{f}(t', x) \psi(t', x) dx - \int_0^1 \tilde{f}(\sigma, x) \psi(\sigma, x) dx + \int_{\sigma}^{t'} u(t) (x^\alpha \partial_x \psi)(t, 1) dt. \end{aligned}$$

Then, from (4.6.33), (4.6.36), (4.6.37) and (4.1.2), taking $\sigma \rightarrow 0^+$, we get the conclusion.

Finally, by construction (4.6.35) implies that $\tilde{f}(T, x) = 0$, for every $x \in (0, 1)$. \square

Local exact controllability of a quantum particle in a time-varying 2D disc with radial data.

Keywords– Schrödinger equation; controllability; bilinear control. ¹

5.1. Introduction

Let us consider, for some $T^* > 0$, a function $R \in \mathcal{C}^0([0, T^*]; \mathbb{R}_*^+)$. We define the time-varying open discs

$$D_{R(\tau)} := \{(z, w) \in \mathbb{R}^2; z^2 + w^2 < R(\tau)^2\}, \quad \forall \tau \in [0, T^*],$$

and we set the Schrödinger equation on this variable domain, which reads

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} i\partial_\tau \phi = -\Delta \phi, & (\tau, z, w) \in (0, T^*) \times D_{R(\tau)}, \\ \phi = 0, & (\tau, z, w) \in (0, T^*) \times \partial D_{R(\tau)}. \end{cases}$$

REMARK 5.1.1. *An appropriate notion of solution of this problem will be defined in Section 5.2, thanks to a convenient change of variables, described in Section 5.1.1, that transforms (5.1.1) into a system set on a fixed domain.*

This is a control system in which the state is the wave function $\phi(\tau, z, w)$, with

$$\int_{D_{R(\tau)}} |\phi(\tau, z, w)|^2 dz dw = 1, \quad \forall \tau \in [0, T^*],$$

and the control is the radius of the disc $D_{R(\tau)}$, with the condition

$$(5.1.2) \quad R(0) = R(T^*) = 1.$$

We are interested in the following notion of controllability.

DEFINITION 5.1.2 (Controllability via domain transformations). *System (5.1.1) is controllable in the space \mathbb{X} if for any $\phi_0, \phi_f \in \mathbb{X}$, there exists $T^* > 0$ and $R \in \mathcal{C}^0([0, T^*]; \mathbb{R}^+)$ satisfying (5.1.2) and such that the solution of (5.1.1) with initial datum $\phi|_{t=0} = \phi_0$ satisfies $\phi|_{t=T^*} = \phi_f$.*

The controllability of the Schrödinger equation via domain transformations has been treated, in the one-dimensional case, by K. Beauchard in [14]. The goal of this article is to explore the analogous question in the disc, as a first example of a two-dimensional case. Indeed, we shall prove a controllability result, according to Definition 5.1.2, for regular enough radial data.

More precisely, assuming the mentioned hypothesis, system (5.1.1) writes

$$(5.1.3) \quad \begin{cases} i\partial_\tau \phi = -\Delta_\rho \phi, & (\tau, \rho) \in (0, T^*) \times (0, R(\tau)), \\ \phi(\tau, R(\tau)) = 0, & \tau \in (0, T^*), \end{cases}$$

1. Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'une prépublication (cf. [127]).

where $\Delta_\rho := \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho$ is the Laplacian operator in polar coordinates with radial data.

5.1.1. Change of variables. Following [8, 14, 20], let us introduce the new variables

$$(5.1.4) \quad \xi(t, r) := \phi(\tau, \rho), \text{ with } r := \frac{\rho}{R(\tau)}, t := \int_0^\tau \frac{d\sigma}{R(\sigma)^2},$$

and the change of phase

$$\psi(t, r) := \xi(t, r) \exp\left(-iu(t)r^2 + 4i \int_0^t u(s) ds\right),$$

where

$$(5.1.5) \quad u(t) := \frac{1}{4}\dot{R}(\tau)R(\tau).$$

This change of variables transforms system (5.1.3) into the following one, posed on a fixed domain,

$$(5.1.6) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta_r \psi + (i(t) - 4u(t)^2)r^2 \psi, & (t, r) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \end{cases}$$

for $T := \int_0^{T^*} \frac{d\sigma}{R(\sigma)^2}$ and

$$(5.1.7) \quad \Delta_r := \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r.$$

System (5.1.6) is a bilinear control system in which the state is the function ψ with $\psi(t) \in \mathbb{S}$, for any $t \in [0, T]$, where \mathbb{S} is the unit sphere of $L^2(D; \mathbb{C})$, and the control is the real-valued function $u \in \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R})$, with

$$\dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R}) := \left\{ u \in H_0^1(0, T; \mathbb{R}), \int_0^T u(s) ds = 0 \right\}.$$

Thanks to the change of variables described above, we find that the controllability of system (5.1.6) implies the controllability of system (5.1.3), according to Definition 5.1.2, via the application $u \mapsto R$. Indeed, this can be proved thanks to the following result (see [20, Proposition 1] for a proof).

PROPOSITION 5.1.3 ([20]). *Let $T > 0$, $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R})$ extended by zero in $(-\infty, 0) \cup (T, \infty)$ and such that $\int_0^T u(s) ds = 0$. The unique maximal solution of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} g'(\tau) = 4e^{-2 \int_0^{g(\tau)} u(s) ds}, \\ g(0) = 0, \end{cases}$$

is defined for every $\tau \geq 0$, strictly increasing and satisfies

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau) = +\infty.$$

Thus, $T^* = g^{-1}(T)$ is well-defined and if R is defined by

$$R(\tau) := e^{\int_0^{g(\tau)} u(s) ds},$$

then (5.1.2) and (5.1.5) are satisfied.

5.1.2. Functional setting. Let D be the unit disc of \mathbb{R}^2 . We shall work on the space $L^2(D; \mathbb{C})$, with scalar product

$$(5.1.8) \quad \langle f, g \rangle_{L^2(D)} := \int_D f(x, y) \overline{g(x, y)} \, dx \, dy, \quad \forall f, g \in L^2(D; \mathbb{C}).$$

Let $(A, D(A))$ be the operator defined by

$$(5.1.9) \quad \begin{cases} D(A) := H^2 \cap H_0^1(D; \mathbb{C}), \\ A\psi := -\Delta\psi, \quad \forall \psi \in D(A). \end{cases}$$

Let us recall that the eigenfunctions of this operator write, in polar coordinates, as follows ([55, Ch.6, p.130])

$$(5.1.10) \quad \varphi_{\nu, k}(r, \theta) := \frac{J_\nu(j_{\nu, k} r) e^{ik\theta}}{\sqrt{\pi} |J_{\nu+1}(j_{\nu, k})|}, \quad \forall (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi),$$

for every $(\nu, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, with eigenvalues

$$(5.1.11) \quad \lambda_{\nu, k} := j_{\nu, k}^2, \quad \forall (\nu, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,$$

where J_ν is the Bessel function of the first kind and order $\nu \geq 0$ and $\{j_{\nu, k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ is the sequence of its zeros (see the Appendix E).

Since the radial case will be particularly important in this article, we will write, for simplicity,

$$(5.1.12) \quad \varphi_k := \varphi_{0, k}, \quad \lambda_k := \lambda_{0, k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Thus, from (5.1.7), one has

$$-\Delta_r \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

According to (5.1.10), we introduce the spaces

$$H_{(0)}^s(D; \mathbb{C}) := D(A^{\frac{s}{2}}), \quad \forall s > 0,$$

endowed with the norm

$$(5.1.13) \quad \|f\|_{H_{(0)}^s} := \left(\sum_{(\nu, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} |j_{\nu, k}^s \langle f, \varphi_{\nu, k} \rangle_{L^2(D)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H_{(0)}^s(D; \mathbb{C}),$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(D)}$ is given by (5.1.8). In the case $s = 1$, we simply write $H_0^1(D)$, as usual, as well as $H^{-1}(D)$ for its dual space. In the radial case, we set

$$H_{(0), rad}^s(D; \mathbb{C}) := \left\{ f \in H_{(0)}^s(D; \mathbb{C}); f \text{ is radial} \right\}, \quad \forall s > 0,$$

and $L_{rad}^2(D)$ when $s = 0$. Furthermore, if $f \in H_{(0), rad}^s(D; \mathbb{C})$, by changing variables, the norm (5.1.13) reduces to

$$\|f\|_{H_{(0), rad}^s} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |j_k^s \langle f, \varphi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

up to a universal constant, with the scalar product

$$(5.1.14) \quad \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(r) \overline{g(r)} r \, dr, \quad \forall f, g \in L^2(D) \text{ radial}.$$

We observe that $H_{(0), rad}^s$ is a closed subspace of $H_{(0)}^s$.

5.1.3. Main result. The main result of this article is a local exact controllability result of system (5.1.6) around a well-chosen trajectory. To describe these states, let us introduce the set

$$(5.1.15) \quad \mathcal{D} := \{(\theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^2; \quad \theta_2, \theta_3 > 0, \theta_2 + \theta_3 < 1\},$$

and the family of states

$$(5.1.16) \quad \varphi^\sharp := \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3} \varphi_1 + \sqrt{\theta_2} \varphi_2 + \sqrt{\theta_3} \varphi_3, \quad (\theta_2, \theta_3) \in \mathcal{D},$$

according to (5.1.12). In this setting, we consider the associated wave packets

$$(5.1.17) \quad \psi_\tau^\sharp := e^{-i\lambda_1\tau} \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3} \varphi_1 + e^{-i\lambda_2\tau} \sqrt{\theta_2} \varphi_2 + e^{-i\lambda_3\tau} \sqrt{\theta_3} \varphi_3, \quad \tau \geq 0.$$

Thus, $\psi_0^\sharp = \varphi^\sharp$ and let $\psi_t^\sharp = e^{-it\Delta} \varphi^\sharp$, for $t \geq 0$.

With this notation, the main result of this section is as follows.

THEOREM 5.1.4. *Let $T > 0$. There exists $\delta > 0$ and a \mathcal{C}^1 -map*

$$\Gamma : V_0 \times V_T \rightarrow \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R}),$$

where

$$(5.1.18) \quad V_0 := \left\{ \psi_0 \in \mathbb{S} \cap H_{(0),rad}^3(D; \mathbb{C}); \|\psi_0 - \varphi^\sharp\|_{H_{(0)}^3} < \delta \right\},$$

$$(5.1.19) \quad V_T := \left\{ \psi_f \in \mathbb{S} \cap H_{(0),rad}^3(D; \mathbb{C}); \|\psi_f - \psi_T^\sharp\|_{H_{(0)}^3} < \delta \right\},$$

such that $\Gamma(\varphi^\sharp, \psi_T^\sharp) = 0$ and for any $(\psi_0, \psi_f) \in V_0 \times V_T$, the solution of (5.1.6) with $\psi|_{t=0} = \psi_0$ and control $u = \Gamma(\psi_0, \psi_f)$ satisfies

$$\psi|_{t=T} = \psi_f.$$

5.1.4. Previous work. The evolution of a quantum particle in a time-dependent domain has been studied from a physical point of view in [8], in connection with adiabatic phenomena. This system, among other quantum dynamics in a variable domain, has been also treated in [128] and [94].

From a mathematical point of view, the question of controllability via deformations of the domain was considered in [132]. This problem has been solved in the one-dimensional case

- by K. Beauchard in [14] for the free evolution,
- by K. Beauchard, H. Lange and H. Teismann in [20] for a Bose-Einstein condensate.

In both cases, the problem of controllability via domain transformations can be handled thanks to a suitable change of variables, which reduces the problem into a bilinear control system under constraints. Then, the techniques developed by K. Beauchard and C. Laurent in [16] allow to prove local exact controllability results thanks to the Inverse Mapping Theorem and a certain smoothing effect. This approach simplifies the original proofs in [14], which use the Nash-Moser theorem.

5.1.5. Strategy and outline. In this work, we shall follow this strategy to prove a local exact controllability result, exploiting the connection with bilinear control problems under constraints for the control. More precisely, the strategy of the proof of Theorem 5.1.4, according to the linear test, has three main ingredients:

- we prove first that the linearised system around $(\psi_t^\sharp, u \equiv 0)$ is controllable,

- secondly, we prove that the end-point map (see Section 5.3 for the definition) is of class \mathcal{C}^1 between some adequate spaces,
- finally, we deduce the local exact controllability from the Inverse Mapping Theorem.

5.1.5.1. *Outline of the article.* In Section 5.2 we recall the well-posedness of system (5.1.6) and state a smoothing effect. In Section 5.3 we use the smoothing effect to prove that the end-point map is of class \mathcal{C}^1 . In Section 5.4 we show that the linearised system around $(\psi_t^\#, u \equiv 0)$ is controllable, thanks to a key result proven in Section 5.4.1. In Section 5.5 we conclude the prove of Theorem 5.1.4. In Section 5.6 we gather some comments and perspectives.

5.2. Well-posedness and smoothing effect

The goal of this section is to prove a well-posedness result in an appropriate functional setting for the system

$$(5.2.20) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta_r \psi + u(t)r^2\psi + f(t, r), & (t, r) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \end{cases}$$

where Δ_r is given by (5.1.7).

Let us recall that the Schrödinger operator iA , where A is given by (5.1.9), generates a group of isometries in $H_{(0)}^s(D)$, for $s \geq 0$, that we denote $(e^{-it\Delta})_{t \geq 0}$. Furthermore, thanks to (5.1.12), for any $\psi_0 \in H_{(0),rad}^s(D)$, one has

$$(5.2.21) \quad e^{-it\Delta} \psi_0 := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-i\lambda_k t} \langle \psi_0, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

PROPOSITION 5.2.1. *Let $T > 0$. For every $\psi_0 \in H_{(0),rad}^3(D)$, $f \in L^2(0, T; H^3 \cap H_{0,rad}^1(D))$, $u \in L^2((0, T); \mathbb{R})$, there exists a unique weak solution of system (5.2.20) with $\psi|_{t=0} = \psi_0$, i.e., $\psi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0),rad}^3(D))$ such that*

$$(5.2.22) \quad \psi(t) = e^{-i\Delta t} \psi_0 + i \int_0^t e^{-i\Delta(t-s)} [u(s)r^2\psi + f(s, r)] ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Furthermore, for every $M > 0$ there exists a constant $C_1 = C_1(T, M) > 0$, such that if $\|u\|_{L^2(0, T)} < M$, then

$$(5.2.23) \quad \|\psi\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0),rad}^3)} \leq C_1(T, M) \left(\|\psi_0\|_{H_{(0),rad}^3} + \|f\|_{L^2(0, T; H^3 \cap H_{0,rad}^1)} \right),$$

and such that $C_1(t, M)$ is uniformly bounded on any bounded interval. Moreover, if $f = 0$, we have

$$(5.2.24) \quad \|\psi(t)\|_{L^2(D)} = \|\psi_0\|_{L^2(D)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

The proof of this result relies on the smoothing effect of Section 2.1.

REMARK 5.2.2. *Proposition 5.2.1 allows to use the following notation. For any $\psi_0 \in H_{(0),rad}^3(D)$, $T > 0$ and any $u \in \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R})$, we shall denote by $\mathcal{U}(T, \psi_0, u)$ the solution of system (5.1.6) evaluated at time $t = T$.*

REMARK 5.2.3 (Time reversibility). *Using the notation introduced in the previous remark, let us suppose that $\mathcal{U}(T, \bar{\psi}_f, u) = \bar{\psi}_0$ for some $\psi_0, \psi_f \in H_{(0),rad}^3(D; \mathbb{C})$, $u \in \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R})$ and $T > 0$. Then, $\mathcal{U}(T, \psi_0, w) = \psi_f$, where $w(t) := u(T - t)$.*

5.2.1. Smoothing effect. As it was shown by K. Beauchard and C. Laurent in the one-dimensional case in [16, Proposition 2], a certain smoothing effect can be expected for $(e^{-it\Delta})_{t \geq 0}$ in a suitable functional framework. This has been extended to a large class of smooth domains in any space dimension by J.P. Puel in [131]. To be precise, in the case of the unit disc $D \subset \mathbb{R}^2$, let

$$(5.2.25) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta \psi + f(t, x, y), & (t, x, y) \in (0, T) \times D, \\ \psi = 0, & (t, x, y) \in (0, T) \times \partial D. \end{cases}$$

Then, the following has been proved (see [131, Theorem 2.1]).

PROPOSITION 5.2.4 ([131]). *Let $T > 0$. For every $\psi_0 \in H_{(0)}^3(D)$ and for every $f = g + h$, where*

$$(5.2.26) \quad g \in L^1(0, T; H_{(0)}^3(D))$$

and

$$(5.2.27) \quad h \in L^2(0, T; H^2 \cap H_0^1(D)), \quad \Delta^2 h = 0, \quad \Delta h|_{\partial D} \in L^2(0, T; L^2(\partial D)),$$

the solution of (5.2.25) with $\psi|_{t=0} = \psi_0$ satisfies $\psi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0)}^3(D))$ and there exists a constant $C > 0$, independent of ψ_0 , g or h , such that

$$(5.2.28) \quad \|\psi\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0)}^3)} \leq C \left(\|\psi_0\|_{H_{(0)}^3} + \|g\|_{L^1(0, T; H_{(0)}^3)} + \|\Delta h|_{\partial D}\|_{L^2(0, T; L^2(\partial D))} \right).$$

PROOF OF PROPOSITION 5.2.1. Let $T > 0$, $\psi_0 \in H_{(0), rad}^3(D)$ and $f \in L^2(0, T; H^3 \cap H_{0, rad}^1(D))$. We consider the map

$$(5.2.29) \quad \begin{cases} F : \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D)) & \rightarrow \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D)) \\ \psi & \mapsto \xi, \end{cases}$$

where ξ is the solution of

$$(5.2.30) \quad \begin{cases} i\partial_t \xi(t, r) = -\Delta_r \xi(t, r) + u(t)r^2 \psi(t, r) + f(t, r), & (t, r) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \xi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \xi(0, r) = \psi_0(r), & r \in (0, 1). \end{cases}$$

Our aim is to prove that this map has a fixed point. We divide the proof in several steps.

Step 1: We show that (5.2.29) is well-defined.

By direct computation, we observe that, as $u \in L^2((0, T); \mathbb{R})$, for every $\psi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D))$, we have $u(t)r^2 \psi \in L^2(0, T; H^3 \cap H_{(0), rad}^1(D))$.

As a result, $\tilde{f} := u(t)r^2 \psi + f$ belongs to $L^2(0, T; H^3 \cap H_{(0), rad}^1(D))$.

We can decompose \tilde{f} as in Proposition 5.2.4. Indeed, let us consider, for a.e. $t \in (0, T)$ the following elliptic problem

$$(5.2.31) \quad \begin{cases} \Delta^2 g(t) = \Delta^2 \tilde{f}(t), & \text{in } D, \\ g(t) = \Delta g(t) = 0, & \text{on } \partial D, \end{cases}$$

where Δ^2 stands for the Bilaplacian operator. Since $\Delta^2 \tilde{f}(t) \in H^{-1}(D)$ for a.e. $t \in (0, T)$, by elliptic regularity results (see [109, Th. 5.1, p. 166]), we deduce

$$(5.2.32) \quad g \in L^2(0, T; H_{(0)}^3(D)).$$

Let us define next

$$(5.2.33) \quad h := \tilde{f} - g.$$

Since $\Delta \tilde{f} \in L^2(0, T; H^1(D))$, and using (5.2.32), we have

$$(5.2.34) \quad h \in L^2(0, T; H^2 \cap H_0^1(D)),$$

$$(5.2.35) \quad \Delta_r h \in L^2(0, T; H^1(D)).$$

Hence, from (5.2.31),

$$(5.2.36) \quad \Delta^2 h(t)|_{\partial D} = 0 \text{ and } h(t)|_{\partial D} = 0, \quad \text{a.e } t \in (0, T).$$

Moreover, using trace results (see [109, Th.8.3, p.44]), (5.2.35) implies

$$(5.2.37) \quad \Delta h \in L^2(0, T; L^2(\partial D)).$$

Thanks to (5.2.33), (5.2.32) and (5.2.34)–(5.2.37), we can apply Proposition 5.2.4 to system (5.2.30). This implies in particular that, as all data are radial and Δ^2 is invariant by rotations, we deduce $\xi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0),rad}^3(D))$.

Step 2: We derive an appropriate energy estimate for system (5.2.30). We claim that

$$(5.2.38) \quad \|\xi\|_{\mathcal{C}^0([0,T]; H_{(0),rad}^3)} \leq C(T) \left(\|\psi_0\|_{H_{(0),rad}^3} + \|\tilde{f}\|_{L^2(0,T; H^3 \cap H_{(0),rad}^1)} \right),$$

for some constant $C(T) > 0$ which is bounded on bounded intervals $(0, T)$.

Indeed, according to (5.2.28), we have

$$\begin{aligned} & \|\xi\|_{\mathcal{C}^0([0,T]; H_{(0),rad}^3)} \\ & \leq C \left(\|\psi_0\|_{H_{(0),rad}^3} + \|g\|_{L^1(0,T; H_{(0),rad}^3)} + \|\Delta h|_{\partial D}\|_{L^2(0,T)} \right). \end{aligned}$$

We treat the two last terms separately. For the first one, we observe, using (5.2.31), elliptic regularity (see [109, Th. 5.1, p. 166]) and the Cauchy-Schwarz inequality, it follows

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1(0,T; H_{(0),rad}^3)} & \leq C_1 \|\Delta^2 \tilde{f}\|_{L^1(0,T; H^{-1})} \\ & \leq C_2 \|\tilde{f}\|_{L^1(0,T; H^3 \cap H_{(0),rad}^1)} \\ & \leq C_3 \sqrt{T} \|\tilde{f}\|_{L^2(0,T; H^3 \cap H_{(0),rad}^1)}. \end{aligned}$$

For the other term, using (5.2.31), (5.2.36) and the continuity of the trace map (see [109, Th.8.3, p.44]),

$$\begin{aligned} \|\Delta h|_{\partial D}\|_{L^2(0,T)} & = \|\Delta \tilde{f}|_{\partial D}\|_{L^2(0,T)} \\ & \leq C_4 \|\Delta \tilde{f}\|_{L^2(0,T; H_{rad}^1(D))} \\ & \leq C_5 \|\tilde{f}\|_{L^2(0,T; H^3 \cap H_{(0),rad}^1(D))}. \end{aligned}$$

Putting these estimates together, we obtain (5.2.38).

Step 3: We show that F is a contraction in $\mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0),rad}^3(D))$.

Let $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D))$. Then, by linearity of system (5.2.30), $\eta := \psi_1 - \psi_2$ satisfies

$$(5.2.39) \quad \begin{cases} i\partial_t \eta(t, r) = -\Delta_r \eta(t, r) + u(t)r^2(\psi_1 - \psi_2)(t, r), & (t, r) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \eta(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \eta(0, r) = 0, & r \in (0, 1). \end{cases}$$

Using (5.2.38), we deduce

$$\begin{aligned} & \|F[\psi_1] - F[\psi_2]\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D))} \\ &= \|\eta\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D))} \\ &\leq C(T) \|u(t)r^2(\psi_1 - \psi_2)\|_{L^2(0, T; H^3 \cap H_{0, rad}^1(D))} \\ &\leq C'(T) \|u\|_{L^2(0, T)} \|r^2(\psi_1 - \psi_2)\|_{L^\infty(0, T; H^3 \cap H_{0, rad}^1(D))} \\ &\leq C''(T) \|u\|_{L^2(0, T)} \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D))}, \end{aligned}$$

where $C''(T) > 0$ is a constant which remains bounded on bounded intervals.

If $C''(T) \|u\|_{L^2} < 1$, this estimate shows that F is a contraction in $\mathcal{C}^0([0, T]; H_{(0), rad}^3(D))$, which is a Banach space, since $H_{(0), rad}^3(D)$ is closed in $H_{(0)}^3(D)$. The Banach fixed-point theorem gives then the existence of a unique fixed point of F . Moreover, (5.2.38) gives (5.2.23) in this case.

In order to extend the result to arbitrary $u \in L^2(0, T)$, we choose $N \in \mathbb{N}^*$ and a partition of $[0, T]$, namely $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$ and such that $\|u\|_{L^2(T_i, T_{i+1})}$ is small enough $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. We then apply the preceding arguments in each interval $[T_i, T_{i+1}]$.

Finally, whenever $f \equiv 0$ and $u \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{R})$, identity (5.2.24) follows by classical arguments. This allows to extend (5.2.24) to the case $u \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ by density. \square

5.3. \mathcal{C}^1 -regularity of the end-point map

In order to define the end-point map, we shall need the following definitions. Let, for $s > 0$,

$$(5.3.40) \quad \mathcal{X}^s := H_{(0), rad}^s(D; \mathbb{C}) \cap \mathbb{S}.$$

Setting $T > 0$, let us fix $\xi \in \mathbb{S}$ and let us consider the tangent space

$$(5.3.41) \quad T_\xi \mathbb{S} := \{f \in L^2(D; \mathbb{C}); \operatorname{Re}\langle f, \xi \rangle_{L^2(D)} = 0\}.$$

Then, we consider, thanks to Proposition 5.2.1, the end-point map

$$(5.3.42) \quad \left| \begin{array}{ll} \Theta_T : \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{X}^3 & \rightarrow \mathcal{X}^3 \times \mathcal{X}^3, \\ (u, \psi_0) & \mapsto (\psi_0, \psi|_{t=T}), \end{array} \right.$$

where ψ is the solution of (5.1.6) with control u and initial condition ψ_0 .

Let

$$(5.3.43) \quad \mathcal{X}_0 := H_{(0), rad}^3(D; \mathbb{C}) \cap T_{\varphi^\#} \mathbb{S}, \quad \mathcal{X}_T := H_{(0), rad}^3(D; \mathbb{C}) \cap T_{\psi_T^\#} \mathbb{S}.$$

Then, we have the following.

PROPOSITION 5.3.1. *Let $T > 0$. The map Θ_T defined by (5.3.42) is of class \mathcal{C}^1 . Moreover, for all $(v, \Psi_0) \in \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R}) \times \mathcal{X}_0$, we have*

$$(5.3.44) \quad d\Theta_T(0, \varphi^\sharp) \cdot (v, \Psi_0) = (\Psi_0, \Psi|_{t=T}) \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_T,$$

where Ψ is the solution of the linearised system around $(0, \varphi^\sharp)$, i.e.,

$$(5.3.45) \quad \begin{cases} i\partial_t \Psi = -\Delta_r \Psi + \dot{v}(t)r^2\psi_t^\sharp, & (t, r) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \Psi(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ \Psi(0, r) = \Psi_0, & r \in (0, 1), \end{cases}$$

and $(\psi_t^\sharp)_{t \in (0, T)}$ is given by (5.1.17).

The proof of this result can be carried out as in [16, Proposition 3, p.531], with minor modifications, thanks to Proposition 5.2.1. We omit the details.

5.4. Controllability of the linearised system around $(\varphi^\sharp, u \equiv 0)$

PROPOSITION 5.4.1. *Let $T > 0$. There exists a continuous linear map*

$$\mathcal{L} : \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_T & \rightarrow & \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R}) \\ (\Psi_0, \Psi_f) & \mapsto & v, \end{array}$$

such that for any $\Psi_0 \in \mathcal{X}_0$ and $\Psi_f \in \mathcal{X}_T$, the solution of system (5.3.45) with initial condition Ψ_0 and control $v = \mathcal{L}(\Psi_0, \Psi_f)$ satisfies $\Psi|_{t=T} = \Psi_f$.

The proof of this result relies on the following lemma.

LEMMA 5.4.2. *For every $\nu \in \mathbb{N}$ and $k, l \in \mathbb{N}^*$ such that $k \neq l$,*

$$(5.4.46) \quad \int_0^1 r^3 J_\nu(j_{\nu, l} r) J_\nu(j_{\nu, k} r) dr = \frac{4j_{\nu, k} j_{\nu, l} J_{\nu+1}(j_{\nu, k}) J_{\nu+1}(j_{\nu, l})}{(j_{\nu, k}^2 - j_{\nu, l}^2)^2}.$$

Since the proof of Lemma 5.4.2 is technical, we postpone it until Section 5.4.1. Let us give next the proof of Proposition 5.4.1.

PROOF OF PROPOSITION 5.4.1. By linearity, we may suppose that $\Psi_0 \equiv 0$. Thus, the solution of system (5.3.45) admits the following expansion, for any $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & -i\sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dot{v}(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_1)s} ds a_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} \\ & - i\sqrt{\theta_2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dot{v}(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_2)s} ds b_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} \\ & - i\sqrt{\theta_3} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \dot{v}(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_3)s} ds c_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t}, \end{aligned}$$

where $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ and $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ are given by (5.1.12) and

$$(5.4.47) \quad a_k := \langle r^2 \varphi_1, \varphi_k \rangle, \quad b_k := \langle r^2 \varphi_2, \varphi_k \rangle, \quad c_k := \langle r^2 \varphi_3, \varphi_k \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

In particular, we observe that given $\Psi_f \in \mathcal{X}_T$, the equality $\Psi_{t=T} = \Psi_f$ with a control $v \in \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R})$ is equivalent to the following trigonometric moment problem

$$(5.4.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \dot{v}(s) \, ds = 0, \\ \int_0^T s \dot{v}(s) \, ds = 0, \\ \int_0^T \dot{v}(s) e^{i(\lambda_2 - \lambda_1)s} \, ds = \frac{1}{a_2 \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3}} (i \langle \Psi_f, \varphi_2 \rangle e^{i\lambda_2 T} - \sqrt{\theta_3} c_2 \bar{C}), \\ \int_0^T \dot{v}(s) e^{i(\lambda_3 - \lambda_1)s} \, ds = \frac{1}{a_3 \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3}} (i \langle \Psi_f, \varphi_3 \rangle e^{i\lambda_3 T} - \sqrt{\theta_2} b_3 C), \\ \int_0^T \dot{v}(s) e^{i(\lambda_3 - \lambda_2)s} \, ds = C, \\ \int_0^T \dot{v}(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_1)s} \, ds = \frac{i\sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3}}{a_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 4, \\ \int_0^T \dot{v}(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_2)s} \, ds = \frac{i\sqrt{\theta_2}}{b_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 4, \\ \int_0^T \dot{v}(s) e^{i(\lambda_k - \lambda_3)s} \, ds = \frac{i\sqrt{\theta_3}}{c_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, \quad \forall k \geq 4, \end{array} \right.$$

where $C \in \mathbb{C}$ satisfies

$$(5.4.49) \quad 2ib_3 \sqrt{\theta_2 \theta_3} \operatorname{Re} C = \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3} \langle \Psi_f, \varphi_1 \rangle e^{i\lambda_1 T} \\ + \sqrt{\theta_2} e^{-i\lambda_2 T} \overline{\langle \Psi_f, \varphi_2 \rangle} + \sqrt{\theta_3} e^{-i\lambda_3 T} \overline{\langle \Psi_f, \varphi_3 \rangle}.$$

Note that the choice of $C \in \mathbb{C}$ is possible, since $\Psi_f \in T_{\psi_f^\#} \mathcal{S}$. We observe that the trigonometric moment problem (5.4.48) can be solved by using Proposition F.0.2. In order to justify this, we claim that there exist $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$, positive constants such that

$$(5.4.50) \quad C_1 \leq j_{0,k}^3 |a_k| \leq D_1, \quad C_2 \leq j_{0,k}^3 |b_k| \leq D_2, \quad C_3 \leq j_{0,k}^3 |c_k| \leq D_2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Indeed, let $k > 1$, the case $k = 1$ being straightforward. Identity (5.4.46) with $\nu = 0, l = 1$, allows to write, through (5.4.47) and (5.1.10), that

$$|a_k| = \frac{1}{|J_1(j_{0,1})| |J_1(j_{0,k})|} \left| \int_0^1 r^3 J_0(j_{0,1}r) J_0(j_{0,k}r) \, dr \right| \\ = \frac{4j_{0,1} j_{0,k}}{(j_{0,k} - j_{0,1})^2 (j_{0,k} + j_{0,1})^2},$$

and thus,

$$j_{0,k}^3 |a_k| = \frac{4j_{0,1} j_{0,k}^4}{(j_{0,k} - j_{0,1})^2 (j_{0,k} + j_{0,1})^2}, \\ \geq 4j_{0,1} \frac{(j_{0,k} - j_{0,1})^2}{(j_{0,k} - j_{0,1})^2} \frac{j_{0,k}^2}{(j_{0,k} + j_{0,k})^2} \geq j_{0,1}.$$

The majoration follows by the same arguments. Then, (5.4.50) is proved for $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Let us observe that the other two cases can be done in the same way.

Next, let us consider the sequence

$$d_k := \begin{cases} 0, & \text{if } k = 0, \\ \frac{1}{a_2 \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3}} (i \langle \Psi_f, \varphi_2 \rangle e^{i\lambda_2 T} - \sqrt{\theta_3} c_2 \bar{C}), & \text{if } k = 1, \\ \frac{1}{a_3 \sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3}} (i \langle \Psi_f, \varphi_3 \rangle e^{i\lambda_3 T} - \sqrt{\theta_2} b_3 C), & \text{if } k = 2, \\ C, & \text{if } k = 3, \\ \frac{i\sqrt{\theta_3}}{c_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, & \text{if } k \in 4 + 3\mathbb{N}, \\ \frac{i\sqrt{\theta_2}}{b_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, & \text{if } k \in 5 + 3\mathbb{N}, \\ \frac{i\sqrt{1 - \theta_2 - \theta_3}}{a_k} \langle \Psi_f, \varphi_k \rangle e^{i\lambda_k T}, & \text{if } k \in 6 + 3\mathbb{N}, \end{cases}$$

for C given by (5.4.49). We observe that the assumption $\Psi_f \in H_{(0),rad}^3(D, \mathbb{C})$, combined with (5.4.50), gives that $d := (d_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$.

This allows to apply Proposition F.0.2, which provides a function $w := \mathcal{M}(0, d) \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ with

$$(5.4.51) \quad \int_0^T w(\sigma) \, d\sigma = 0, \quad \int_0^T \sigma w(\sigma) \, d\sigma.$$

Consequently, setting

$$(5.4.52) \quad t \mapsto v(t) := \int_0^t w(\sigma) \, d\sigma$$

we find a control $v \in \dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R})$ solving (5.4.48). Moreover, the application $(0, \Psi_f) \mapsto v$ thus defined is continuous, thanks to Proposition F.0.2. \square

REMARK 5.4.3. *At this point, we can justify further the choice of the family of states φ^\sharp given by (5.1.16). Indeed, choosing, for instance, $(\theta_2, \theta_3) = (0, 0) \notin \mathcal{D}$, we get $\varphi^\sharp = \varphi_1$. However, in this case, the corresponding linearised system around $(0, \varphi_1)$ is not controllable with controls in $\dot{H}_0^1(0, T; \mathbb{R})$, because of the constraint $\int_0^T v(s) \, ds = 0$.*

5.4.1. Proof of Lemma 5.4.2.

PROOF OF LEMMA 5.4.2. Let us define, for every $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(5.4.53) \quad W_{\nu,k}^2(r) := r^2 J_\nu(j_{\nu,k}r), \quad \forall r \in (0, 1).$$

From (E.1.24), we deduce that $W_{\nu,k}^2$ satisfies the following equation

$$(5.4.54) \quad \frac{d^2}{dr^2} W_{\nu,k}^2(r) - \frac{3}{r} \frac{d}{dr} W_{\nu,k}^2(r) + \left(j_{\nu,k}^2 + \frac{4 - \nu^2}{r^2} \right) W_{\nu,k}^2(r) = 0, \quad \forall r \in (0, 1).$$

This implies

$$(5.4.55) \quad \begin{aligned} & \int_0^1 r^3 J_\nu(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr = \int_0^1 W_{\nu,k}^2(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &= -\frac{1}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{4 - \nu^2}{r^2} \right) W_{\nu,k}^2(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &= -\frac{1}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) W_{\nu,k}^2(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &+ \frac{4}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) W_{\nu,k}^2(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr. \end{aligned}$$

For the last integral, we have, by (5.4.53), (E.3.32) and (E.1.27),

$$(5.4.56) \quad \begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) W_{\nu,k}^2(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &= j_{\nu,k} \int_0^1 r^2 J'_\nu(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr \\ &= j_{\nu,k} \int_0^1 r^2 J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr. \end{aligned}$$

For the other integral in (5.4.55), we have, integrating by parts and using (E.1.24),

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) W_{\nu,k}^2(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr = -j_{\nu,l}^2 \int_0^1 W_{\nu,k}^2(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr.$$

Combining this equality with (5.4.55) and (5.4.56) yields

$$(5.4.57) \quad \left(1 - \frac{j_{\nu,l}^2}{j_{\nu,k}^2} \right) \int_0^1 r^3 J_\nu(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr = \frac{4}{j_{\nu,k}} \int_0^1 r^2 J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr.$$

To calculate the last integral, let us define

$$(5.4.58) \quad W_{\nu-1,k}^1(r) := r J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r), \quad \forall r \in (0, 1).$$

According to (E.1.24), we have, for every $r \in (0, 1)$,

$$\frac{d^2}{dr^2} W_{\nu-1,k}^1(r) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} W_{\nu-1,k}^1(r) + \left(j_{\nu,k}^2 + \frac{1 - (\nu - 1)^2}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) = 0.$$

Then,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 r^2 J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr = \int_0^1 W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &= -\frac{1}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2\nu - \nu^2}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &= -\frac{1}{j_{\nu,k}^2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ & \quad + \frac{1}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 \left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2\nu}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr. \end{aligned}$$

Integrating by parts, and recalling that $J_\nu(0) = 0$, for any $\nu \in \mathbb{N}^*$, we find

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &= -\frac{1}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 W_{\nu-1,k}^1(r) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr \\ & \quad + \frac{j_{\nu,l}}{j_{\nu,k}^2} W_{\nu-1,k}^1(1) J'_\nu(j_{\nu,l}) \\ &= \left(\frac{j_{\nu,l}}{j_{\nu,k}} \right)^2 \int_0^1 W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr + \frac{j_{\nu,l}}{j_{\nu,k}^2} J_{\nu-1}(j_{\nu,k}) J'_\nu(j_{\nu,l}). \end{aligned}$$

This gives

$$(5.4.59) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{j_{\nu,l}^2}{j_{\nu,k}^2} \right) \int_0^1 W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ &= \frac{1}{j_{\nu,k}^2} \int_0^1 \left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2\nu}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\ & \quad + \frac{j_{\nu,l}}{j_{\nu,k}^2} J_{\nu-1}(j_{\nu,k}) J'_\nu(j_{\nu,l}). \end{aligned}$$

We treat the last integral separately. Integrating by parts and using (5.4.58) and (E.1.27), it comes

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2\nu}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr \\
&= -2j_{\nu,l} \int_0^1 W_{\nu-1,k}^1(r) J'_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr - 2\nu \int_0^1 J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr \\
&= -2j_{\nu,l} \int_0^1 r J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r) \left[J_{\nu-1}(j_{\nu,l}r) - \frac{\nu}{j_{\nu,l}r} J_\nu(j_{\nu,l}r) \right] \, dr \\
&\quad - 2\nu \int_0^1 J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr \\
&= -2j_{\nu,l} \int_0^1 r J_{\nu-1}(j_{\nu,k}r) J_{\nu-1}(j_{\nu,l}r) \, dr.
\end{aligned}$$

Hence, using (E.3.33), we deduce.

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2\nu}{r^2} \right) W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr = 0.$$

Consequently, from (5.4.59), we get

$$\left(1 - \frac{j_{\nu,l}^2}{j_{\nu,k}^2} \right) \int_0^1 W_{\nu-1,k}^1(r) J_\nu(j_{\nu,l}r) r \, dr = \frac{j_{\nu,l}}{j_{\nu,k}^2} J_{\nu-1}(j_{\nu,k}) J'_\nu(j_{\nu,l}).$$

Combining this with (5.4.57) we find

$$\left(1 - \frac{j_{\nu,l}^2}{j_{\nu,k}^2} \right) \int_0^1 r^3 J_\nu(j_{\nu,k}r) J_\nu(j_{\nu,l}r) \, dr = \frac{4j_{\nu,l} J_{\nu-1}(j_{\nu,k}) J'_\nu(j_{\nu,l})}{j_{\nu,k} (j_{\nu,k}^2 - j_{\nu,l}^2)}$$

Hence, this yields (5.4.46), since (E.1.27) and (E.1.26) imply that $J'_\nu(j_{\nu,k}) = -J_{\nu+1}(j_{\nu,k})$ and $J_{\nu-1}(j_{\nu,l}) = -J_{\nu+1}(j_{\nu,l})$. \square

5.5. Proof of Theorem 5.1.4

Following [16, Section 2.4], Theorem 5.1.4 is a consequence of the Inverse Mapping Theorem, combining Proposition 5.4.1 and Proposition 5.3.1. We omit the details.

5.6. Comments and perspectives

In this paper we have proved a controllability result via domain deformations for the Schrödinger equation in the unit disc of \mathbb{R}^2 . This work, the first of this kind in a two-dimensional domain, shows that the geometry of the domain under study is essential. Indeed, our result is possible thanks to the particular geometry of the disc, which allows to exploit the radial symmetry. This yields a simplified situation to which the tools from one-dimensional bilinear control can be adapted. Even if some extensions in this direction are still possible, this feature of our result seems quite limiting.

On the other hand, a major difficulty of this result was to determine the functional framework in which controllability holds, since, to the best of our knowledge, the bilinear control for the Schrödinger equation in 2D is almost entirely unexplored.

Any advance in a more general setting would be utterly interesting. The consideration of more general domains and data may lead, very likely, to the use of more general controls, probably space-dependent. Consequently, the tools from bilinear control, very useful in the one-dimensional case and in the present work, will be no longer convenient, in profit of other approaches.

Part 3

Appendices

CHAPTER A

Auxiliary results on harmonic approximation

We gather some results needed for the construction of the reference trajectory in Chapter 2.

A.1. Results for high velocities

As it has been done in by O. Glass in [70], the treatment of large velocities relies on a result on harmonic approximation due to T. Bagby and P. Blanchet (see [9]).

PROPOSITION A.1.1 ([9]). *Let \mathcal{F} be a closed subset of an orientable compact Riemannian manifold Ω , and \mathcal{U} an open subset of $\Omega \setminus \mathcal{F}$. Suppose that \mathcal{U} meets every connected component of $\Omega \setminus \mathcal{F}$. For f harmonic in a neighborhood of \mathcal{F} and $\epsilon > 0$, there is a Newtonian function u on Ω , whose poles lie in \mathcal{U} , and such that*

$$(A.1.1) \quad \sup_{\mathcal{F}} |u - f| < \epsilon.$$

This result allows to show the following, which is a minor variation of [70, Lemma A.1, p. 374]. Let $\{e_1, \dots, e_N\}$ be given by Definition 2.3.2.

PROPOSITION A.1.2. *For any $i \in \{1, \dots, N\}$ and any $\epsilon > 0$, there exists $\theta^i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$ such that*

$$(A.1.2) \quad \Delta \theta^i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^2 \setminus B\left(x_0, \frac{r_0}{10}\right),$$

$$(A.1.3) \quad \|\nabla \theta^i - e_i\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^2 \setminus [B(x_0, r_0/10) + \mathbb{R}e_i])} \leq \epsilon.$$

A.2. Results for low velocities

For the treatment of low velocities, we need the following result, proved by O. Glass in [70, Lemma 3, p. 356].

PROPOSITION A.2.1 (O. Glass [70]). *For any nonempty open set $\mathcal{O} \subset \mathbb{T}^2$, there exists $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$ such that*

$$(A.2.4) \quad \Delta \theta(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{O},$$

$$(A.2.5) \quad |\nabla \theta(x)| > 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{O}.$$

CHAPTER B

Review of the Stokes system

The well-posedness theory for the Stokes system is classical, especially in the case of L^2 with possibly Dirichlet boundary conditions. However, we shall need to precise an energy estimate used in Chapter 2 and a regularity result in L^p spaces. In the non stationary case, we review a regularity result used in Chapter 3.

Following [139, Ch.2], we set the appropriate functional setting. We shall work with the usual Sobolev spaces $W^{m,p}(\mathbb{T}^2)$, with $m \in \mathbb{N}$ and $1 \leq p \leq \infty$. When $p = 2$, we can write, thanks to the Fourier series,

$$H^m(\mathbb{T}^2) = \left\{ f \in L^2; f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} c_n e^{in \cdot x}, \bar{c}_n = c_{-n}, \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (1 + |n|^2)^m |c_n|^2 < \infty \right\},$$

$$H_0^m(\mathbb{T}^2) = \left\{ f \in H^m(\mathbb{T}^2); \int_{\mathbb{T}^2} f(x) dx = 0 \right\},$$

which allows to equip these spaces, respectively, with the norms

$$\|f\|_{H^m} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (1 + |n|^2)^m |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_{H_0^m} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |n|^{2m} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

with equivalence of norms in the case of H_0^m as a subspace of H^m .

In the case of vector fields, we shall use $(W^{m,p}(\mathbb{T}^2))^2$, with the product norm. Let us introduce, as usual,

$$\mathcal{V}_\sigma := \{ F \in H^1(\mathbb{T}^2)^2; \operatorname{div}_x F = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \},$$

where the operator div_x is taken in the distributional sense (see Section 3.1.2.7 for more details).

B.1. Stationary Stokes system

This setting allows to treat the system (see [139, Section 2.2])

$$(B.1.6) \quad \begin{cases} -\Delta_x u + \nabla_x p = f, & x \in \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u = 0, & x \in \mathbb{T}^2, \\ \int_{\mathbb{T}^2} u dx = 0. \end{cases}$$

PROPOSITION B.1.1 ([139]). *Let $f \in L^2(\mathbb{T}^2)^2$ such that $\int_{\mathbb{T}^2} f(x) dx = 0$. Then, the Stokes system (B.2.9) has a unique solution $(u, p) \in (H_0^2(\mathbb{T}^2)^2 \cap \mathcal{V}_\sigma) \times H^1(\mathbb{T}^2)$. Moreover, there exists a constant $C_0 > 0$ such that*

$$(B.1.7) \quad \|u\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} \leq C_0 \|f\|_{L^2}.$$

The following regularity result in L^p spaces is an adaptation of [4, Theorem 3, p. 172] to the case of the flat torus \mathbb{T}^2 .

PROPOSITION B.1.2 ([4]). *Let $r \in (1, \infty)$ and $m \in \mathbb{N}$. For each $f \in W^{m,r}(\mathbb{T}^2)$ satisfying $\int_{\mathbb{T}^2} f(x) dx = 0$, the Stokes system (B.2.9) has a unique solution $u \in W^{m+2,r}(\mathbb{T}^2)$, $p \in W^{m+1,r}(\mathbb{T}^2)$. Moreover,*

$$(B.1.8) \quad \|u\|_{W^{m+2,p}(\mathbb{T}^2)^2} + \|p\|_{W^{m+1,p}(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{T}^2)^2},$$

for a constant $C_1 > 0$.

B.2. Non stationary Stokes system

Let us recall a well-posedness result for the non-stationary Stokes system, i.e.,

$$(B.2.9) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u + \nabla_x p = f, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div}_x u = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{T}^2, \end{cases}$$

due to Y. Giga and H. Sohr (see [69, Theorem 2.8, p.82]). This result gives a very general framework for the $L_t^s L_x^q$ well-posedness, under suitable assumptions on the data. Particularly, in the case of initial data, we are lead to the following spaces (see [69, p.77]). Let

$$D^{\alpha,s}(A) := \left\{ u \in L^q(\mathbb{T}^2); \|u\|_{L^q} + \left(\int_0^\infty \|t^{1-\alpha} A e^{-tA} u\|_{L^q} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} < \infty \right\},$$

where $\alpha \in (0, 1)$, $s \in [1, \infty)$, and A is the Stokes operator $A = \mathcal{P}(-\Delta)$, \mathcal{P} being the Leray projector. In this context, the result is as follows.

THEOREM B.2.1 ([69]). *Let $1 < s < \infty$ and $1 < q < \infty$. For any $f \in L^s(0, T; L^q(\mathbb{T}^2))$ and $u_0 \in D(A)_q^{1-\frac{1}{s}, s}$, there exists a unique solution of system (B.2.9), satisfying $u \in L^s(0, T; W^{2,q}(\mathbb{T}^2))$ and $\partial_t u \in L^s(0, T; L^q(\mathbb{T}^2))$. Moreover, there exists a constant $C_0 > 0$ such that*

$$(B.2.10) \quad \int_0^T \|\partial_t u(t)\|_{L^q}^s dt + \int_0^T \|D^2 u\|_{L^q}^s dt \leq C \left(\int_0^T \|f\|_{L^q}^s dt + \|u_0\|_{D(A)^{1-\frac{1}{s}, s}} \right).$$

Review of the Navier-Stokes system on the 2-dimensional torus

We have used in Chapter 3 some classical results on the Navier-Stokes, that we gather here for reference. For Notation see [3.1.2.7](#).

C.1. Existence results

Let us consider $F \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$ and $u_0 \in \mathcal{H}$ and the Navier-Stokes system

$$(C.1.11) \quad \begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \Delta u + \nabla p = F, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{T}^2, \\ \operatorname{div} u(t, x) = 0, & t \in (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

Following [\[47, p.42\]](#), we shall use the following notion of solution.

DEFINITION C.1.1. *A time-dependent vector field u is a solution of [\(C.1.11\)](#) whenever*

$$(C.1.12) \quad u \in \mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{V}'_\sigma) \cap L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}_\sigma)$$

and for any $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{V}_\sigma)$ and $t \in (0, T]$, one has

$$(C.1.13) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} u(t)\psi(t) \, dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} \nabla u : \nabla \psi - u \otimes u \cdot \nabla \psi - u \partial_t \psi \, ds \, dx \\ & = \int_{\mathbb{T}^2} u_0 \psi(0) \, dx + \int_0^t \langle F(s), \psi(s) \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \, ds. \end{aligned}$$

We have the following classical result, due to J. Leray (see [\[47, Theorem 2.3\]](#)).

THEOREM C.1.2. *Let $F \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$ and $u_0 \in \mathcal{H}$. There exists a unique global solution of [\(C.1.11\)](#), i.e., for any $T > 0$, in the sense of [Definition C.1.1](#). Moreover, this solution satisfies the energy estimate*

$$(C.1.14) \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq e^t \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|F(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 \, ds \right).$$

C.2. A stability result

In the 2-dimensional case, we also have some stability estimates (see [\[47, Theorem 3.2, p.56\]](#)).

THEOREM C.2.1. *Let u and v be two solutions of system [\(C.1.11\)](#) associated to (u_0, F) and (v_0, G) respectively. Then,*

$$e^{-t} \|(u - v)(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla(u - v)(s)\|_{L^2}^2 \, ds$$

$$(C.2.15) \quad \leq e^{CE^2(t)} \left(\|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|(F - G)(s)\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 ds \right),$$

with

$$E(t) := e^t \min \left\{ \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|F(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 ds, \|v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|G(s)\|_{\mathcal{V}'}^2 ds \right\}.$$

C.3. A propagation of regularity result

In the specific case of the 2-dimensional torus, we have the following result of propagation of regularity (see [47, Theorem 3.7, p. 80]).

THEOREM C.3.1. *Let $u_0 \in H_0^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2) \cap \mathcal{H}$ and $F \in L^2(0, T; H_0^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2))$. Then the unique solution of (C.1.11) satisfies*

$$(C.3.16) \quad u \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_0^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(0, T; H_0^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2))$$

and

$$(C.3.17) \quad \begin{aligned} & \|u(t, x)\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 ds \\ & \leq \exp \left(c \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \left(\|u_0\|_{H_0^{\frac{1}{2}}}^2 + \int_0^t \|F(s)\|_{H_0^{-\frac{1}{2}}}^2 ds \right). \end{aligned}$$

CHAPTER D

Some properties of the Gamma function

For any $p \in \mathbb{R}^+$, the Gamma function is defined (see [1, 6.1.1, p.254]) by

$$(D.0.18) \quad \Gamma(p) := \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt,$$

which is a monotone increasing function on $(0, \infty)$. Furthermore, (see [1, 6.1.15, p.256])

$$(D.0.19) \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x \in (0, \infty).$$

We have the following asymptotics of the Gamma function.

LEMMA D.0.2 ([1], 6.1.39). *Let $a \in \mathbb{R}^+$ and $b \in \mathbb{R}$. Then,*

$$(D.0.20) \quad \Gamma(ax+b) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi} e^{-ax} (ax)^{ax+b-\frac{1}{2}}.$$

We show an inequality used in Proposition 4.3.3 of Chapter 4.

LEMMA D.0.3.

$$(D.0.21) \quad (n+k)! \leq 2^{k+n} n! k!, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

PROOF. Let us observe first that

$$(D.0.22) \quad (2n)! \leq 2^{2n} n!^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

This inequality follows by induction, since, for every $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (2(n+1))! &= (2n)!(2n+1)(2n+2) \\ &\leq (2n)! 2^2 (n+1)^2 \leq 2^{2(n+1)} (n+1)!. \end{aligned}$$

To show (D.0.21), we assume, w.l.o.g., that $n < k$. Then, using (D.0.22),

$$\begin{aligned} (n+k)! &= (2n)! \prod_{j=1}^{k-n} (2n+j) \\ &\leq (2n)! 2^{k-n} \prod_{j=1}^{k-n} (n+j) \leq 2^{n+k} n! k!. \end{aligned}$$

□

Some properties of Bessel functions

We have used the Bessel functions in Chapters 4 and 5. We gather here some definitions and results.

E.1. Definition and Differential relations

Let $\nu \in \mathbb{R}$. The Bessel function of order ν of the first kind is ([1, 9.1.10, p.360])

$$(E.1.23) \quad J_\nu(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad \forall z \in [0, \infty).$$

We recall that $\forall \nu \in \mathbb{R}$, the Bessel function J_ν satisfies the following differential equation (see [1, 9.1.1, p.358])

$$(E.1.24) \quad z^2 J_\nu''(z) + z J_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0, \quad \forall z \in (0, +\infty),$$

and the relations (see [1, 9.1.27, p.361]),

$$(E.1.25) \quad 2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z), \quad \forall z \in (0, +\infty),$$

$$(E.1.26) \quad J_\nu'(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z), \quad z \in (0, +\infty),$$

$$(E.1.27) \quad J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z), \quad z \in (0, +\infty).$$

E.2. Properties of the zeros

We denote by $\{j_{\nu,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ the increasing sequence of zeros of J_ν , which are real for any $\nu \geq 0$ and enjoy the following properties (see [1, 9.5.2, p.360] and [96, Lemma 7.8, p.135]).

$$(E.2.28) \quad \nu < j_{\nu,k} < j_{\nu,k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

$$(E.2.29) \quad j_{\nu,k} \rightarrow +\infty, \quad \text{as } k \rightarrow +\infty,$$

$$(E.2.30) \quad j_{\nu,k+1} - j_{\nu,k} \rightarrow \pi, \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

$$(E.2.31) \quad (j_{0,k+1} - j_{0,k})_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ is a strictly increasing sequence.}$$

E.3. Orthogonality

We also have the integral formula ([1, 11.4.5, p.485])

$$(E.3.32) \quad \int_0^1 y J_\nu(j_{\nu,n} y) J_\nu(j_{\nu,m} y) dy = \frac{1}{2} |J_{\nu+1}(j_{\nu,n})|^2 \delta_{n,m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*.$$

and (see [1, 11.3.29, p. 484])

$$(E.3.33) \quad (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 r J_\nu(\alpha r) J_\nu(\beta r) dr = \alpha J_{\nu+1}(\alpha) J_\nu(\beta) - \beta J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\beta),$$

for any $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, with $\alpha \neq \beta$.

This allows to show the following.

LEMMA E.3.1. [84, p.40] *Let $\nu \geq 0$. The family $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ defined by*

$$w_n(z) := \frac{\sqrt{2z}}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,n})|} J_{\nu}(j_{\nu,n}z), \quad \forall z \in (0, 1),$$

is an orthonormal basis of $L^2(0, 1)$. In particular, if $f \in L^2(0, 1)$ and $d_n := \int_0^1 f(z)w_n(z) dz, \forall n \in \mathbb{N}^$, then $\|f\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2$.*

E.4. Asymptotic behaviour

We recall the asymptotic behaviour of J_{ν} for large arguments and near zero.

LEMMA E.4.1. [96, Lemma 7.2, p.129] *For any $\nu \in \mathbb{R}$,*

$$J_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z\sqrt{z}}\right).$$

LEMMA E.4.2. [1, 9.1.7, p.360] *For any $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{-\mathbb{N}^*\}$,*

$$J_{\nu}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}.$$

The following asymptotic result is important in the proof of Proposition 4.5.1 in Chapter 4. We give the proof for the sake of completeness.

LEMMA E.4.3. *Let $\nu \in \mathbb{R}^+$. Then,*

$$(E.4.34) \quad \sqrt{j_{\nu,k}} |J_{\nu+1}(j_{\nu,k})| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j_{\nu,k}}\right).$$

In particular, there exists a constant $C_1 > 0$ such that for all $k \in \mathbb{N}^$,*

$$\frac{1}{|J_{\nu+1}(j_{\nu,k})|} \leq C_1 \sqrt{j_{\nu,k}}.$$

PROOF. Using Lemma E.4.1, for $\nu+1$ and $x = j_{\nu,k}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{j_{\nu,k}} |J_{\nu+1}(j_{\nu,k})| &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \cos\left(j_{\nu,k} - \frac{\pi(\nu+1)}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j_{\nu,k}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \sin\left(j_{\nu,k} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j_{\nu,k}}\right). \end{aligned}$$

Using again Lemma E.4.1 with ν and $x = j_{\nu,k}$, we have that

$$\cos\left(j_{\nu,k} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{j_{\nu,k}}\right),$$

which gives

$$\left| \sin\left(j_{\nu,k} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| = \sqrt{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j_{\nu,k}^2}\right)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j_{\nu,k}}\right)$$

and then (E.4.34). □

E.5. A non resonance result

The properties of the zeros allow to prove the following non-resonance result, used in Chapter 5.

PROPOSITION E.5.1. *Let $\lambda_n := j_{0,n}^2$ for any $n \in \mathbb{N}^*$. Then, for any $n, m \in \mathbb{N}^*$ and $p, q \in \{1, 2, 3\}$, we have*

$$(E.5.35) \quad \lambda_n - \lambda_p \neq \lambda_m - \lambda_q, \quad \forall n \neq m, p \neq q.$$

PROOF. Let us assume that $n, m \geq 4$, property (E.5.35) being obvious otherwise.

Working by contradiction, let us suppose that there exist $m, n \geq 4$ and $p, q \leq 3$ such that

$$(E.5.36) \quad \lambda_n - \lambda_p = \lambda_m - \lambda_q.$$

Moreover, we may assume, without loss of generality, that

$$(E.5.37) \quad n > m > p > q.$$

We shall distinguish two cases.

Case 1: Let us suppose that $p = q + 1$.

Then, thanks to (E.2.31), we have

$$\begin{aligned} \lambda_n - \lambda_m &= (j_{0,n} - j_{0,m})(j_{0,n} + j_{0,m}) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} (j_{0,k+1} - j_{0,k})(j_{0,n} + j_{0,m}) \\ &> (n - m)(j_{0,p} - j_{0,q})(j_{0,n} + j_{0,m}). \end{aligned}$$

Thus, combining this with (E.5.36), we get

$$\lambda_p - \lambda_q > (n - m)(j_{0,p} - j_{0,q})(j_{0,n} + j_{0,m}).$$

This implies

$$j_{0,p} + j_{0,q} > j_{0,n} + j_{0,m},$$

which is incompatible with (E.5.37), which shows (E.5.35) in this case.

Case 2: Let us suppose that $p = q + 2$.

Firstly, let us assume that $n = m + 1$. Then, by claim (E.5.36) and using (E.2.31) twice, this yields

$$\begin{aligned} j_{0,m+1} + j_{0,m} &< \frac{(j_{0,p} - j_{0,q})(j_{0,p} + j_{0,q})}{j_{0,m+1} - j_{0,m}} \\ &< \frac{(j_{0,p} - j_{0,q})(j_{0,p} + j_{0,q})}{j_{0,p} - j_{0,q+1}} \\ &< \left(1 + \frac{j_{0,q+1} - j_{0,q}}{j_{0,p} - j_{0,q+1}}\right) (j_{0,p} + j_{0,q}) < 2(j_{0,p} + j_{0,q}). \end{aligned}$$

But this is impossible, since $j_{0,4} + j_{0,3} > 2(j_{0,3} + j_{0,1})$, as can be seen from the exact values of these zeros.

Secondly, let us suppose that $n - m \geq 2$, i.e., $\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor \geq 1$, where $\lfloor \cdot \rfloor$ stands for the floor function. Thus,

$$\begin{aligned}
 j_{0,n} - j_{0,m} &> \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor - 1} (j_{0,m+2(i+1)} - j_{0,m+2i}) \\
 \text{(E.5.38)} \quad &\geq \lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor (j_{0,p} - j_{0,q}) \geq (j_{0,p} - j_{0,q}).
 \end{aligned}$$

Thus, (E.5.36) yields

$$j_{0,n} + j_{0,m} < j_{0,p} + j_{0,q},$$

which is in contradiction with (E.5.37).

□

CHAPTER F

Moment problem

We prove in this section that the moment problem encountered in Chapter 5 is solvable. We refer to [16, Appendix B] for further details on Riesz basis and minimal families.

Let us introduce the space

$$\ell_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \{(d_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}); d_0 \in \mathbb{R}\}.$$

PROPOSITION F.0.2. *Let $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be the increasing sequence defined by*

$$(F.0.39) \quad \{\omega_k; k \in \mathbb{N}\} = \{0\} \cup \{j_{0,n}^2 - j_{0,p}^2; p = 1, 2, 3, n \geq p + 1\},$$

with $\omega_0 = 0$. Then, for any $T > 0$, there exists a continuous linear map

$$\mathcal{M} : \mathbb{R} \times \ell_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbb{R}),$$

such that for every $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ and $d = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, the function $w := \mathcal{M}(\tilde{d}, d)$ satisfies

$$(F.0.40) \quad \begin{cases} \int_0^T w(t) e^{i\omega_k t} dt = d_n, & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \int_0^T t w(t) dt = \tilde{d}. \end{cases}$$

For the proof of this result, we combine arguments coming from [16, Appendix B, Corollary 2] and [120, Appendix, Proposition 6.1].

PROOF. Let us set, according to the statement, $\omega_{-n} := \overline{\omega_n}$, for any $n \in \mathbb{N}$. Then, define the family $\mathcal{F} := \{e^{i\omega_n t}; n \in \mathbb{Z}\}$. We shall proceed in several steps.

Step 1: We prove that \mathcal{F} is a Riesz basis of $H_0 := \text{Adh}_{L^2(0, T)}(\text{span} \mathcal{F})$.

Let us consider D^+ the upper density of the sequence $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, i.e.,

$$D^+ := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n^+(r)}{r},$$

where $n^+(r)$ is the largest number of elements of (ω_n) belonging to an interval of length $r > 0$.

Let us observe that the Beurling's theorem (see [96, Theorem 9.2]) guarantees that the uniform gap condition

$$(F.0.41) \quad \omega_{n+1} - \omega_n \geq \gamma,$$

for some $\gamma > 0$, implies that $\{e^{i\omega_n t}; n \in \mathbb{Z}\}$ is a Riesz basis of H_0 for $T > 2\pi D^+$.

Consequently, we shall prove that (F.0.41) holds in our case and $D^+ = 0$.

Indeed, let us observe that (E.2.29) and (E.2.30) imply that

$$(F.0.42) \quad \omega_n \rightarrow \infty, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Moreover, we observe that, for a sufficiently large $n_0 \in \mathbb{N}$, the frequencies $(\omega_n)_{n \geq n_0}$ can be gathered in successive three-element packets of the form

$$(F.0.43) \quad j_{0,n_0+n}^2 - j_{0,3}^2 < j_{0,n_0+n}^2 - j_{0,2}^2 < j_{0,n_0+n}^2 - j_{0,1}^2.$$

Consequently, the gap between the elements of each packet must be

$$(F.0.44) \quad \tilde{\gamma} = \min \{j_{0,3}^2 - j_{0,2}^2, j_{0,2}^2 - j_{0,1}^2\} > 0.$$

In addition, the gap between the elements of successive packets must be

$$j_{0,n_0+n+1}^2 - j_{0,n_0+n}^2 + j_{0,1}^2 - j_{0,3}^2,$$

which tends to ∞ as $n \rightarrow \infty$, thanks to (E.2.29) and (E.2.30). In addition, the non-resonance property (E.5.35) ensures that $\omega_k \neq \omega_n$, for any $n \neq k$. This allows to deduce that (F.0.41) holds.

Finally, let us remark that, again by (E.2.29) and (E.2.30), we must have $D^+ = 0$. Thus, Beurling's theorem allows to conclude.

Step 2: We prove that the family $\tilde{\mathcal{F}} := \{t, e^{i\omega_n t}; n \in \mathbb{Z}\}$ is minimal in $L^2(0, T)$ for any $T > 0$.

Working by contradiction, let us assume that $\tilde{\mathcal{F}}$ is not minimal in $L^2(0, T)$, for some $T > 0$. Then, the previous step implies that

$$t \in \text{Adh}_{L^2(0,T)}(\text{span}\mathcal{F}).$$

Then, by successive integrations, one checks that

$$t^j \in \text{Adh}_{\mathcal{C}^0[0,T]}(\text{span}\tilde{\mathcal{F}}), \quad \forall j \in \mathbb{N}, j \geq 2.$$

But the Stone-Weierstrass theorem guarantees that the family $\{1, t^j; j \in \mathbb{N}, j \geq 2\}$ is dense in $\mathcal{C}^0[0, T]$. Thus, we deduce that

$$(F.0.45) \quad \text{span}\tilde{\mathcal{F}} \text{ is dense in } L^2(0, T).$$

On the other hand, let us choose some $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. The previous step, combined with Ingham's theorem (see [16, Theorem 6, Appendix B]), entails that $\{e^{i\omega t}\} \cup \mathcal{F}$ is minimal in $L^2(0, T)$. But then, we must have

$$e^{i\omega t} \notin \text{Adh}_{L^2(0,T)}(\text{span}\tilde{\mathcal{F}}),$$

which is a contradiction with (F.0.45).

Step 3: Resolution of (F.0.40).

For $k < 0$, let $d_k := \overline{d_{-k}}$. Let $\{\tilde{\xi}_k, \xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ be the biorthogonal family to $\tilde{\mathcal{F}}$ (see [16, Proposition 18, Appendix B]). From Ingham's theorem ([16, Theorem 6, Appendix B]), there exists a constant $C > 0$ and a unique $u \in \text{Adh}_{L^2(0,T)}(\text{span}\mathcal{F})$ satisfying

$$\int_0^T u(t) e^{i\omega_k t} dt = d_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

and such that

$$\|u\|_{L^2(0,T)} \leq C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Moreover, u is real-valued thanks to the uniqueness.

Let us set

$$w := \mathcal{M}(\tilde{d}, d) = u + \left(\tilde{d} - \int_0^T tu(t) dt \right) \tilde{\xi}.$$

Thus, w solves (F.0.40) and is also real-valued, since u and $\tilde{\xi}$ are so. Moreover, proceeding exactly as in [16, Corollary 2, Appendix B], one shows that the map \mathcal{M} is continuous.

□

Bibliography

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun. Handbook of mathematical functions. *Nat. B. of Standards*. 1964.
- [2] F. Alabau-Boussourira, P. Cannarsa, G. Fragnelli. Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications to null controllability. *J. Evol. Equ.* vol. 6:2, pp. 161-204. 2006.
- [3] G. Allaire. Introduction to Numerical Analysis and Optimization. *Oxford Univ. Press*. 2007.
- [4] C. Amrouche and V. Girault. On the existence and regularity of the Stokes problem in arbitrary dimension. *Proc. Japan. Acad.* vol. 67, Ser. A. 1991.
- [5] N. Anantharaman and G. Rivière. Dispersion and controllability for the Schrödinger equation on negatively curved manifolds. *Analysis and PDE*. Vol. 5:2. pp.165-181. 2012.
- [6] K. Asano. On local solutions of the Cauchy problem for the Vlasov-Maxwell Equation. *Commun. Math. Phys.* vol.106, pp. 551-568. 1986.
- [7] J.M. Ball, J. Marsden and M. Slemrod. Controllability of distributed bilinear systems. *SIAM J. of Contr. and Opt.* Vol. 20:4, pp. 575-597 . 1982.
- [8] Y. Band, B. Malomed, M. Trippenbach. Adiabaticity in nonlinear quantum dynamics: Bose-Einstein condensate in a time varying box. *Phys. Rev. A*. 65:033607. 2002.
- [9] T. Bagby and P. Blanchet. Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds. *J. Anal. Math.* vol. 62. pp. 47-76. 1994.
- [10] V. Barbu. Exact null internal controllability for the heat equation on unbounded convex domains. *ESAIM Control Opt. Calc. Var.* vol. 20:1, pp.222-235, 2014.
- [11] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. Sharp Sufficient Conditions for the Observation, Control, and Stabilization of Waves from the Boundary. *SIAM J. Control Optim.* vol. 30:5, pp. 1024–1065. 1992.
- [12] J.-L. Basdevant and J. Dalibard. Mécanique Quantique. Cours de l'Ecole polytechnique. *Éds. de l'Ecole polytechnique*. 2012.
- [13] K. Beauchard. Local controllability of a 1D Schrödinger equation. *J. Math. Pures et Appl.* Vol. 84. pp. 851-956. 2005.
- [14] K. Beauchard. Controllability of a quantum particle in a 1D variable domain. *ESAIM:COCV*. Vol. 14:1. pp. 105-147. 2008.
- [15] K. Beauchard and E. Zuazua. Some controllability results for the 2D Kolmogorov equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, vol. 26, pp. 1793-1815, 2009.
- [16] K. Beauchard, C. Laurent. Local controllability of linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control. *J. Math. Pures et Appl.* Vol. 94:5, 2010, pp 520-554.
- [17] K. Beauchard and M. Morancey. Local controllability of 1D Schrödinger equations with bilinear control and minimal time. *Math. Control Relat. Fields*. Vol.4:2. 2014.
- [18] K. Beauchard. Null controllability of Kolmogorov-type equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 26:1, pp. 145-176, 2014.
- [19] K. Beauchard, P. Cannarsa and R. Guglielmi. Null controllability of Grushin-type operators in dimension two. *J. Europ. Math. Soc.* Vol. 16:1. pp. 67–101. 2014.
- [20] K. Beauchard, H. Lange, H. Teismann. Local exact controllability of a Bose-Einstein condensate in a 1D time-varying box. *SIAM Journal on Control and Optimization*. Vol. 53:5, 2781-2818. 2015.

- [21] K. Beauchard, B. Helffer, R. Henry and L. Robbiano. Degenerate parabolic operators of Kolmogorov type with a geometric control condition. *ESAIM Control Opt. Calc. Var.* Vol.21. pp. 487–512. 2015.
- [22] K. Beauchard, L. Miller and M. Morancey. 2D Grushin-type equations: minimal time and null controllable data. *J. Diff. Eq.* Vol. 259:11. 2015.
- [23] K. Beauchard and K. Pravda-Starov. Null-controllability of hypoelliptic quadratic differential equations. *Preprint*. 2016.
- [24] A. Benabdallah, Y. Dermenjian, J Le Rousseau. On the controllability of linear parabolic equations with an arbitrary control location for stratified media. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, vol. 344:6, pp. 357-362, 2007.
- [25] U. Boscain and C. Laurent. The Laplace-Beltrami operator in almost-Riemannian Geometry. *Ann. de l'Inst. Fourier*. Vol. 63:5. pp. 1739-1770. 2013.
- [26] M. Boulakia and A. Osses. Local null controllability of a two-dimensional fluid-structure interaction problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* vol. 14:1. pp. 1-42. 2008.
- [27] M. Boulakia and S. Guerrero. Local null controllability of a fluid-solid interaction problem in dimension 3. *J. European Math. Society*, vol. 15:3. pp. 825-856. 2013.
- [28] F. Boyer, F. Hubert and J. Le Rousseau. Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations. *J. Math. Pures Appl.* vol. 93, pp. 240-276, 2010.
- [29] F. Boyer and P. Fabrie. Mathematical tools for the study of incompressible Navier-Stokes equations and related models. *Springer series in Appl. Math*, vol. 143. 2013.
- [30] F. Bouchut. Hypocoelliptic regularity in kinetic equations. *J. Math. Pures Appl.*, vol. 81:11. pp. 1135–1159. 2002.
- [31] L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont and A. Moussa. Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations. *Diff. and Int. Eq.*, vol. 22:11-12, 2009.
- [32] L. Boudin, C. Grandmont, A. Lorz and A. Moussa. Modelling and numerics for respiratory aerosols. To appear in *Comm. in Comput. Physics*. 2015.
- [33] N. Burq and P. Gérard. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. *C. Rend Acad. Sc.*. t. 325, Série.I, pp.749-752. 1997.
- [34] N. Burq and M. Zworski. Control in the presence of a black box. *J. of the A.M.S.* Vol.17. pp. 443-471. 2004.
- [35] V. Cabanillas, S. de Menezes and E. Zuazua. Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradient terms. *J. Optim. Theory Appl.* vol. 110, pp. 245-264. 2001,
- [36] M. Campiti, G. Metafuno, D. Pallara. Degenerate self-adjoint evolution equations on the unit interval. *Semigroup Forum*. vol. 57. pp. 1-36. 1998.
- [37] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble. Persistent regional null controllability for a class of degenerate parabolic equations. *Comm. in Pure and Applied Anal.* vol. 3:4, pp. 607-635.
- [38] P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble. Null controllability of the heat equation in unbounded domains by a finite measure control region. *ESAIM Control Opt. Calc. Var.*, vol. 10:3, pp. 381-408, 2004.
- [39] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble. Null controllability of degenerate heat equations. *Adv. in Diff. Eq.* vol. 10:2, pp.153-190. 2005.
- [40] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble. Carleman estimates for a class of degenerated parabolic operators. *SIAM J. Control Optim.* vol. 47:1, pp.1-19, 2008.
- [41] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble. Carleman estimates and null controllability for boundary-degenerate parabolic operators. *C. R. Acad. Sci. Sér. I Math.* vol. 347, pp. 147-152. 2009.
- [42] P. Cannarsa, P. Martinez, J. Vancostenoble. The cost of controlling degenerate parabolic equations by boundary controls. Preprint. *arXiv:1511.06857*. 2015.
- [43] P. Cannarsa, J. Tort, M. Yamamoto. Unique continuation and approximate controllability for a degenerate parabolic equation. *Applicable Analysis*. vol. 91:8, pp. 1409-1425. 2012.

- [44] P. Cannarsa, G. Fragnelli, D. Rocchetti. Controllability results for a class of one-dimensional degenerate parabolic problems in nondivergence form. *Discr. and Cont. Din. Syst. Series S.* vol. 6:3, pp. 687-701. 2013.
- [45] T. Cazenave, A. Haraux. An Introduction to Semilinear Evolution Equations. Oxford University Press, 1998.
- [46] S. Chandrasekharan. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Rev. Mod. Phys.* vol. 15:1. 1943.
- [47] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier. Mathematical Geophysics. Clarendon Press, Oxford. 2006.
- [48] Y. Choi and B. Kwon. Global well-posedness and large-time behavior for the inhomogeneous Vlasov-Navier-Stokes equations. *Nonlinearity.* vol. 28. pp. 3309-3336. 2015.
- [49] J.-M. Coron and A. Fursikov. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics,* vol.4:4, p. 429-448, 1996.
- [50] J.-M. Coron. Control and Nonlinearity. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136. American Mathematical Society, 2007.
- [51] J.-M. Coron and S. Guerrero. Local null controllability of the two-dimensional Navier-Stokes system in the torus with a control force having a vanishing component. *J. Math. Pures et Appl.* Vol. 92:9. pp. 528-545. 2009.
- [52] J.-M. Coron and P. Lissy. Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components. *Invent. Math.* Vol. 198:3. pp 833-880. 2015.
- [53] G. Crippa. The flow associated to weakly differentiable vector fields. *PhD Dissertation.* 2007.
- [54] D. D'Alessandro. Introduction to Quantum Control and Dynamics. *Chapman and Hall / CRC.* 2008.
- [55] E.B. Davies. Spectral Theory and Differential Operators. *Cambridge Univ. Press.* 1995.
- [56] B. Dehman, P. Gérard and G. Lebeau. Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface. *Mathematische Zeitschrift,* vol. 254:4. pp. 729-749. 2006.
- [57] B. Desjardins and M.J. Esteban, On weak solutions for fluid-rigid structure interaction: compressible and incompressible models. *Comm. Partial Differential Equations.* vol. 25:7-8. pp. 1399-1413. 2000.
- [58] L. Desvillettes and C. Villani. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous systems. Part I: the linear Fokker-Planck equation. *Comm. in Pure and App. Math.* vol.54: 1, pp. 1-42. 2001.
- [59] L. Desvillettes, F. Golse and V. Ricci. The mean-field limit for solid particles in a Navier-Stokes flow. *J. Statistical Physics.* vol. 131:5, pp. 941-967. 2008.
- [60] J. Dolbeault, C. Mouhot and C. Schmeiser. *Trans. Amer. Math. Soc.* 367. pp. 3807-3828. 2015.
- [61] L. Escauriaza, G. Seregin and V. Sverák. Backward Uniqueness for Parabolic Operators. *Arch. Rational Mech. Anal.* vol.169. pp. 147-157. 2003.
- [62] L. C. Evans. Partial Differential Equations. *Graduate Studies in Mathematics. AMS,* vol. 19, 1998.
- [63] H. O. Fattorini and D. L. Russell. Exact controllability for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.* vol. 43, pp. 272-292. 1971.
- [64] M. Fliess, J. L. Lévine, P. Martin, P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Int. J. of Control.* vol. 61:6, pp. 1327-1361, 1995.
- [65] A.V. Fursikov and O.Yu. Imanuvilov. Controllability of evolution equations. *Lecture Note Series, Seoul National University. Research Institute of Mathematical Global Analysis,* vol. 34. Seoul. 1996.
- [66] I. Gasser, P. E. Jabin and B. Perthame. Regularity and propagation of moments in some nonlinear Vlasov systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A,* vol. 130, pp.1259-1273. 2000.
- [67] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer.* vol. 224. 1998.

- [68] M. Gueye. Exact boundary controllability of 1-D parabolic and hyperbolic degenerate equations. *SIAM J. Control Opt.* 52:4, pp. 2037-2054. 2014.
- [69] Y. Giga and H. Sohr. Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains. *J. Funct. Anal.* Vol.102:1, pp. 72-94. 1991.
- [70] O. Glass. On the controllability of the Vlasov-Poisson system. *J. Diff. Eq.* vol. 195, pp. 332-379. 2003.
- [71] O. Glass. La méthode du retour en contrôlabilité et ses applications en mécanique des fluides (d'après J.-M. Coron et al.) *Séminaire Bourbaki*. Novembre 2010.
- [72] O. Glass and D. Han-Kwan. On the controllability of the Vlasov-Poisson system in the presence of external force fields. *J. Diff. Eq.* vol. 252. pp. 5453-5491. 2012.
- [73] O. Glass and D. Han-Kwan. On the controllability of the relativistic Vlasov-Maxwell system. *J. Math. Pures et Appl.* vol. 103. pp. 695-740. 2015.
- [74] R.T. Glassey. The Cauchy problem in Kinetic theory. *SIAM*. 1996.
- [75] F. Golse. On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit. <http://arxiv.org/abs/1301.5494>. 2013.
- [76] M. González-Burgos and L. de Teresa. Some results on controllability for linear and non linear heat equations in unbounded domain. *Adv. Diff. Eq.* vol. 12:11, pp.1201-1240, 2007.
- [77] T. Goudon, P.E. Jabin and A. Vasseur. Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations: Part I: Light Particles Regime. *Indiana Univ. Math. J.*, vol.53, pp.1495-1513. 2004.
- [78] T. Goudon, P.E. Jabin and A. Vasseur. Hydrodynamic limits for Vlasov-Stokes equations: Part II: Fine Particles Regime, *Indiana Univ. Math. J.*, vol.53, pp.1517-1536. 2004.
- [79] K. Hamdache. Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Japan J. Industr. Appl. Math.* vol. 15. pp. 51-74. 1998.
- [80] L. Hillairet. Personnel communication.
- [81] D. Han-Kwan and M. Léautaud. Geometric analysis of the linear Boltzmann equation I. Trend to equilibrium. To appear in *Ann. of PDE*. 2016.
- [82] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. *Arch. Rat. Mech. An.* vol. 171:2. pp. 151-218 .2004.
- [83] F. Hérau. Short and long time behavior of the Fokker-Planck equation in a confining potential and applications. *J. Funct. Anal.* Vol. 244:1. pp. 95-118. 2007.
- [84] J. R. Higgins. Completeness and basis properties of sets of special functions. *Cambridge Univ. Press. Cambridge Tracts in Mathematics*, Vol. 72. 1978.
- [85] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Mathematica*. vol. 119:1, pp. 147-171, 1967.
- [86] L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Volume 1, Springer-Verlag, Second printing, 1990
- [87] C. Imbert and C. Mouhot. Hölder continuity of solutions to hypoelliptic equations with bounded measurable coefficients. <http://arxiv.org/abs/1505.04608>. 2015.
- [88] P. E. Jabin and B. Perthame. Notes on mathematical problems on the dynamics of dispersed particles interacting through a fluid. Modelling in applied sciences, a kinetic theory approach. *Model. Simul. Sci. Eng. Tech.* Birkhauser. Boston. 2000.
- [89] P. E. Jabin. Large time concentrations for solutions to kinetic equations with energy dissipation. *Comm. Partial Differential Equations*. vol.25, pp. 541-557. 2000.
- [90] P. E. Jabin. Macroscopic limit of Vlasov type equation with friction. *Ann. IHP Anal. Non Lineaire*. vol.17, pp. 651-672. 2000.
- [91] P. E. Jabin. Various levels of models for aerosols. *Math. Models Methods Appl. Sci.* vol. 12, pp. 903-919. 2002.
- [92] S. Jaffard. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque rectangulaire. *Portugaliae Mathematicae*. Vol. 47. pp. 423-429. 1990.
- [93] D. Jerison and G. Lebeau. Nodal sets of sums of eigenfunctions. In *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)* Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 223-239, 1999.

- [94] E. Knobloch and R. Krechetnikov. Problems on time-varying domains: formulation, dynamics, and challenges. *Acta Appl. Math.* vol.137, pp.123-157. 2015.
- [95] A.N. Kolmogorov, Zufällige Bewegungen, *Ann. of Math.* vol. 2:35, pp. 116–117, 1934.
- [96] V. Komornik, P. Loreti. Fourier series in Control Theory. *Springer*. 2005.
- [97] B. Laroche, P. Martin, P. Rouchon. Motion planning for the heat equation. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 10:8, pp. 629-643, 2000.
- [98] C. Laurent. Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on an interval. *ESAIM-COCV*, Vol. 16:2. pp. 356–379, 2010.
- [99] C. Laurent. Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrödinger equation on some compact manifolds of dimension 3. *SIAM J. on Math. Anal.* Vol. 42:2. pp. 785-832. 2010.
- [100] C. Laurent. Internal control of the Schrödinger equation. *Math. Contr. Relat. Fields.* Vol. 4:2. 2014.
- [101] J. Le Rousseau. Carleman estimates and some application to control theory. *Lecture Notes in Mathematics / C.I.M.E. Foundation Subseries* J.-M. Coron and P. Cannarsa editors. Springer. 2010.
- [102] J. Le Rousseau. Représentation Microlocale de Solutions de Systèmes Hyperboliques, Application à l’Imagerie, et Contributions au Contrôle et aux Problèmes Inverses pour des Équations Paraboliques. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches. *Universités d’Aix-Marseille, Université de Provence*, 2007.
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201887/fr/>
- [103] J. Le Rousseau and G. Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* vol. 18, pp. 712-747, 2012.
- [104] J. Le Rousseau and I. Moyano. Null-controllability of the Kolmogorov equation in the whole phase space. *J. Differential Equations.* Vol. 260. pp. 3193-3233. 2016.
- [105] M. Léautaud. Spectral inequalities for non-selfadjoint elliptic operators and application to the null-controllability of parabolic systems. *J. Funct. Anal.* vol.258, pp.2739-2778. 2010.
- [106] G. Lebeau. Contrôle de l’équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl.* Vol. 71. pp. 267-291. 1992.
- [107] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l’équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 20, pp. 335-356, 1995.
- [108] G. Lebeau and E. Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 141, pp. 297-329, 1998.
- [109] J.-L. Lions and E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes, vol.1. Dunod, Paris, 1968.
- [110] J.-L. Lions. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués: Perturbations. Masson. 1988.
- [111] J.-L. Lions. The Hilbert Uniqueness Method. John von Neumann lecture. *SIAM rev.* 1988.
- [112] E. Machtyngier. Exact controllability for the Schrödinger equation. *SIAM J. Contr. and Opt.* Vol.32:1. pp. 24-34. 1994.
- [113] P. Martin, L. Rosier, P. Rouchon. Null controllability of the heat equation using flatness. *Automatica*, vol. 50, pp. 3067-3076. 2014.
- [114] P. Martin, L. Rosier, P. Rouchon. Null controllability of one-dimensional parabolic systems using flatness. *arXiv:1410.2588*. 2014.
- [115] P. Martin, L. Rosier, P. Rouchon. Controllability of the 1D Schrodinger equation by the flatness method. *arXiv:1404.0814*. 2014.
- [116] S. Micu and E. Zuazua. On the lack of null controllability of the heat equation on the half-line. *Transactions of the A.M.S.* vol. 353:4. pp. 1635-1659. 2000.
- [117] L. Miller. On the null controllability of the heat equation in unbounded domains. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 129:2, pp.175-185. 2005

- [118] L. Miller. Unique continuation estimates for the Laplacian and the heat equation on non-compact manifolds. *Math. Res. Lett.* vol. 12:1, pp. 37-47, 2005.
- [119] M. Morancey. Simultaneous local exact controllability of 1D bilinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.* 31:3, pp. 2014.
- [120] M. Morancey and V. Nersesyan. Simultaneous global exact controllability of an arbitrary number of 1D bilinear Schrödinger equations, *J. Math. Pures et Appl.*, vol. 103:1, pp.228–254. 2015.
- [121] M. Morancey. Approximate controllability for a 2D Grushin equation with potential having an internal singularity. *Ann. Inst. Fourier.* Vol. 65:4. 2015.
- [122] C. Mouhot and C. Villani. Kinetic Theory. In *Princeton Companion to Applied Mathematics*, N.J. Higham ed. 2015.
- [123] C. Mouhot. Quelques résultats d’hypocoercitivité en théorie cinétique collisionnelle. Séminaire d’EDPs Laurent Schwartz. 2007–2008, Exp. No. XVI. Ecole polytechnique.
- [124] I. Moyano. Flatness for a strongly degenerate 1-D parabolic equation. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, à paraître. 2016.
- [125] I. Moyano. On the controllability of the 2-D Vlasov-Stokes system. *Communications in Mathematical Sciences*, à paraître. 2016.
- [126] I. Moyano. Local null-controllability of the 2-D Vlasov-Navier-Stokes system. Soumis pour publication. *arXiv:1607.05578*. 2016.
- [127] I. Moyano. Controllability of a 2D quantum particle in a time-varying disc with radial data. Soumis pour publication. *arXiv:1611.10192*. 2016.
- [128] A. Munier, J.R. Bourgan, M. Feix and E. Fijalkow. Schrödinger equation with time-dependent boundary conditions. *J. Math. Phys.* vol.22, pp. 1219-1223. 1981.
- [129] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [130] K.D. Phung. Contrôle et stabilisation d’ondes électromagnétiques. *ESAIM : COCV.* vol. 5. pp. 87-137. 2000.
- [131] J.P. Puel. A regularity property for Schrödinger equations on bounded domains. *Rev. Mat. Complutense.* vol. 26:1, pp. 183-192, 2013.
- [132] P. Rouchon. Control of a quantum particle in a moving potential well, *2nd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, Seville, 2003.
- [133] L. Rosier and B.-Y. Zhang. Exact boundary controllability of the nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations.* vol. 246:10. pp. 4129-4153. 2009.
- [134] L. Rosier and B.-Y. Zhang. Exact Controllability and Stabilizability of the Nonlinear Schrödinger Equation on a Bounded Interval. *SIAM J. Control Optim.* vol. 48:2. pp. 972-992. 2009.
- [135] L. Rosier and B.-Y. Zhang. Control and Stabilization of the Nonlinear Schrödinger Equation on Rectangles. *Math. Models Methods Appl. Sci.* vol.20:12. pp. 2293-2347. 2010.
- [136] W. Rudin. Real and Complex Analysis. *McGraw-Hill.* 3rd ed. 1987.
- [137] D. Russell. Some recent results on the controllability of Partial Differential Equations. *SIAM rev.* 1978.
- [138] J. A. San Martín, V. Starovoitov and M. Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.* vol. 161. pp. 113-147. 2002.
- [139] R. Temam. Navier-Stokes equations and Nonlinear Functional Analysis. *CBMS-NSF Reg. Conf in Appl. Math. SIAM.* 1983.
- [140] F. Trèves. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, New York, 1967.
- [141] M. Tucsnak and G. Weiss. Observation and Control for Operator Semigroups. *Birkhäuser Adv. Text.* Basel. 2009.
- [142] G. Turinici. On the controllability of bilinear quantum systems, in *Mathematical Models and Methods for Ab Initio Quantum Chemistry*, C. Le Bris and M. Defranceschi Eds., Lect. Notes Chemistry 74, Springer. 2000.

- [143] S. Ukai and T. Okabe. On classical solutions in the large in time of two-dimensional Vlasov's equation. *Osaka J. Math.* vol. 15:2. pp. 245-261. 1978.
- [144] J. Vancostenoble. Improved Hardy-Poincaré inequalities and sharp Carleman estimates for degenerate/singular parabolic problems. *Discr. and Cont. Din. Syst. Series S.* vol. 4:3, pp. 761-790. 2011.
- [145] C. Villani, Hypocoercivity. *Mem. AMS.* 2008.
- [146] S. Wollman. Local existence and uniqueness theory of the Vlasov-Maxwell theorem. *J. Math, Anal. and Appl.* vol. 127. pp. 103-121. 1987.
- [147] D.V. Widder. The Heat Equation. *Academic Press. Pure and Applied Mathematics series,* Vol. 67. 1975.

Contrôlabilité de quelques équations cinétiques, paraboliques dégénérées et de Schrödinger

Résumé. Ce mémoire présente les travaux réalisés au cours de ma thèse dans le but d'étudier la contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la contrôlabilité de quelques équations cinétiques dans différents régimes. Dans un régime collisionnel, nous étudions la contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov, un modèle de type Fokker-Planck cinétique, posée dans l'espace de phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Nous obtenons la contrôlabilité à zéro de cette équation grâce à l'utilisation d'une inégalité spectrale associée à l'opérateur Laplacien dans tout l'espace. Dans un régime non-collisionnel, nous étudions la contrôlabilité de deux systèmes de couplage fluide-cinétique, les systèmes de Vlasov-Stokes et de Vlasov-Navier-Stokes, comportant des non-linéarités dues au terme de couplage. Dans ces cas, l'approche repose sur la méthode du retour.

Dans la deuxième partie nous étudions la contrôlabilité d'une famille d'équations paraboliques dégénérées 1-D par la méthode de platitude, qui permet la construction de contrôles explicites.

La troisième partie porte sur le problème de la contrôlabilité de l'équation de Schrödinger par la forme du domaine, c'est-à-dire, en utilisant le domaine comme variable de contrôle. Nous obtenons un résultat de ce type dans le cas du disque unité bidimensionnel. Nos méthodes sont basées sur un résultat de contrôle exact local autour d'une certaine trajectoire, obtenu grâce au théorème d'inversion locale.

Mots clés : contrôlabilité ; modèles cinétiques ; équations paraboliques dégénérées ; équation de Schrödinger.

Controllability of some kinetic equations, parabolic degenerate equations and Schrödinger equations

This memoir presents the results obtained during my PhD, whose goal is the study of the controllability of some Partial Differential Equations.

The first part of this thesis is concerned with the study of the controllability of some kinetic equations undergoing different regimes. Under a collisional regime, we study the controllability of the Kolmogorov equation, a particular case of kinetic Fokker-Planck equation, in the phase space $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. We obtain the null-controllability of this equation thanks to the use of a spectral inequality associated to the Laplace operator in the whole space. Under a non-collisional regime, we study the controllability of two fluid-kinetic models, the Vlasov-Stokes system and the Vlasov-Navier-Stokes system, which exhibit nonlinearities due to the coupling terms. In those cases, the strategy relies on the Return method.

In the second part, we study the controllability of a family of 1-D degenerate parabolic equations by the flatness method, which allows the construction of explicit controls.

The third part is focused on the problem of the controllability of the Schrödinger equation via domain deformations, i.e., using the domain as a control. We obtain a result of this kind in the case of the two-dimensional unit disk, for radial data. Our methods are based on a local exact controllability result around a certain trajectory, obtained thanks to the Inverse Mapping theorem.

Key words: controllability; kinetic models; degenerate parabolic equations; Schrödinger equation.