



**HAL**  
open science

# Réduction dimensionnelle pour la simulation de la fatigue des métaux

Mohamed Aziz Nasri

► **To cite this version:**

Mohamed Aziz Nasri. Réduction dimensionnelle pour la simulation de la fatigue des métaux. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2017. Français. NNT : 2017ENAM0016 . tel-01533317

**HAL Id: tel-01533317**

**<https://pastel.hal.science/tel-01533317>**

Submitted on 6 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

2017-ENAM-0016

École Doctorale n° 432: Science des Métiers de l'ingénieur

## Doctorat ParisTech

# THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité « Mécanique-Matériaux »**

Présentée et soutenue publiquement par

**Mohamed Aziz Nasri**

le 02 mai 2017

## Réduction dimensionnelle pour la simulation de la fatigue des métaux

Directeur de thèse: **Franck morel**

Co-encadrement de la thèse: **Camille Robert, Amine Ammar, Saber EL Arem**

### Jury

<b>M. Francisco CHINESTA</b> , Professeur, GEM, École Centrale de Nantes	Président
<b>M. David NÉRON</b> , Professeur, LMT, ENS Cachan	Rapporteur
<b>M. Elias CUETO</b> , Professeur, GEMM, Université de Saragosse	Rapporteur
<b>M. Habibou MAITOURNAM</b> , Professeur, IMSIA, ENSTA Paristech	Examinateur
<b>M. Franck MOREL</b> , Professeur, LAMPA, Arts et Métiers ParisTech - Centre d'Angers	Examinateur
<b>M. Camille ROBERT</b> , Ingénieur de Recherche, LAMPA, Arts et Métiers ParisTech - Centre d'Angers	Examinateur
<b>M. Amine Ammar</b> , Professeur, LAMPA, Arts et Métiers ParisTech - Centre d'Angers	Examinateur
<b>M. Saber EL AREM</b> , Maître de conférences, Arts et Métiers ParisTech - Centre d'Angers	Examinateur

T  
H  
È  
S  
E



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Franck Morel pour m'avoir proposé et accordé sa confiance pour ces travaux de thèse qui traite un sujet pluridisciplinaire et ouvert, puis, qui m'a amené à une rigueur et une maturité scientifiques exceptionnelles. Je tiens à saluer ses conseils avisés, son présence, son soutien et son encouragement durant ces années. Merci aussi pour avoir partagé vos connaissances sur la fatigue.

Je me fais un devoir d'être reconnaissants à l'égard de Camille Robert. C'est avec beaucoup d'estime que je le remercie pour me faire partager ces grandes qualités scientifiques de modélisation et pour son aide précieuse au chantier ambitieux de la programmation permettant d'avoir une grande quantité de développements numériques présentée dans le cadre de cette thèse.

Je tiens à remercier sincèrement Amine Ammar pour m'avoir encadré pendant ces trois années et pour m'avoir fait découvrir les méthodes de réduction de modèle. Je salue vivement sa gentillesse, son calme, ses conseils judicieux et toute l'aide qu'il m'a apporté quand j'avais besoin de lui. Aussi, vous étiez très disponible pour mes nombreuses questions, mes passages à votre bureau et parfois les réunions téléphoniques lorsque vous étiez en déplacement. J'espère être à la hauteur de ses attentes et de sa confiance. C'est un honneur d'avoir profité de ses compétences et de ses dons pédagogiques et humains. Enfin Amine veuillez accepter ici toute ma reconnaissance et ma gratitude à votre personne. Toutes ces paroles c'est peu devant tous les services que vous m'avez offert tout au long de la thèse, l'aide morale, la culture scientifique et le conseil. Vous êtes un grand Professeur (avec un grand P!) et mon exemple préféré à suivre.

J'exprime toute ma gratitude à Saber El Arem qui n'a pas cessé de me prodiguer ses conseils et n'a épargné aucun effort pour contribuer à la réussite de ce travail. Merci pour toutes tes idées claires, pertinentes et encourageantes et aussi parce que tu étais toujours un guide audacieux et si disponible, toujours présent et très réactif.

Je tiens aussi à manifester ma gratitude à Monsieur Francisco Chinesta d'avoir accepté de présider le jury ainsi que pour ses remarques et sa bonne humeur. Je tiens à remercier vivement Messieurs David Néron et Elias Cueto d'avoir accepté la lourde charge de rapporteur. Merci pour vos rapports complets et enrichissants et pour vos questions pertinentes. Un grand merci à Monsieur Habibou Maitournam d'avoir accepté d'examiner mes travaux et apporté des remarques intéressantes.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Hédi Hamdi, Professeur au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes à l'ENISE, qui m'a proposé et initié ma carrière comme chercheur. Un grand merci de m'avoir accueilli au LTDS pour mon tout premier stage de PFE ainsi que pour mon deuxième stage de master. Je retiendrai de vous, Hédi, votre patience, votre extraordinaire pédagogie ainsi que vos encouragements qui ont fait de moi un jeune ingénieur chercheur ambitieux prêt à conquérir le monde.

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire Angevin de Mécanique, Procédés et innovAtion (LAMPA) de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers à Angers. Tout au long de ma thèse, j'ai pu apprécier l'ambiance qui y règne. Je souhaite également remercier tous les membres de l'équipe LAMPA, les professeurs, maitres de conférences, ingénieurs de recherches secrétaires, post-docs, et notamment Charles, Daniel, Etienne, Guénaël, Eliane, Yessine, Aude, Anne, Laurent, Julien, Christina, Marine, ...

Je ne saurais oublier de remercier les anciens et nouveaux doctorants ainsi que les stagiaires pour l'ambiance exceptionnelle qu'ils ont su établir au sein et en dehors du laboratoire, et notamment Wael (service économique), Mohamed (HD le vrai service financier), Bessam (le chère frère et voisin), Foued (le chef), Atef (james), Salah (salih), Jihed (Djo 5€), Edouard (Chékib forza Barça et ASSE), Benjamin, Duc (Dandouuk), Raphaël (la vie est belle), Mariem (mimou), Housseem, Rou Du (Hssèn), Ghazi (hni), Fares, Ahmed, Montassar, Imed, Hela, Chiraz (Chichi), Myriam, Marouen (lol), Sabrine, Housseem, Ali, Walid, Mohamed, Javier ...

Je remercie également mes parents et je dédie ce travail pour eux. Vous avez veillé sur moi depuis ma naissance jusqu'à ce que je suis ; vous m'avez assuré une vie digne ; vous avez manifesté beaucoup de sacrifices afin de me voir grandir devant vos yeux. Aujourd'hui, vient mon tour pour vous remercier. Vous avez toujours voulu que je sois ce que je suis, et aujourd'hui, ce travail est le fruit de vos sacrifices. Mon père, par tes qualités de cœur et d'esprit, tu représente pour moi la parfaite définition de grand homme. Maman, mes mots ne pourraient rien ajouter à cet ange, tu es tout pour moi.

Et maintenant, j'exprime toute ma gratitude à mes sœurs Dorsaf et Sawssen et mon beau frère Kaïs ainsi que leurs enfants (les 3M et ALL) qui n'ont pas cessé de me prodiguer leurs conseils, pour leurs soutiens moral tout au long de cette période malgré la distance. J'apprécie beaucoup la grande affection que vous tenez pour moi. A cette reconnaissance, je vous manifeste mes meilleurs sentiments en vous offrant le fruit de mon travail.

Je remercie également toute ma famille ainsi que mes amis qui m'ont toujours soutenu. Chacun de vous sait la place qu'il tient dans mon cœur. Cette thèse vous est dédiée, faible témoignage de ma profonde affection.

A vous tous, Merci...

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Revue bibliographique</b>	<b>7</b>
1 Introduction . . . . .	8
2 Modélisation par Éléments Finis . . . . .	8
2.1 Problème de référence . . . . .	8
2.2 Formulation par Éléments Finis . . . . .	9
2.3 Algorithme de la méthode incrémentale . . . . .	12
2.4 Synthèse et applications . . . . .	13
3 Méthodes numériques accélérées de détermination de l'état stabilisé . . . . .	15
3.1 Méthode à grand incrément de temps (LATIN) . . . . .	15
3.2 Méthode cyclique directe . . . . .	16
3.3 Méthode des sauts de cycles . . . . .	19
4 Méthodes de réduction de modèle . . . . .	20
4.1 Introduction . . . . .	20
4.2 Méthodes de réduction a posteriori . . . . .	22
4.3 Méthodes de réduction a priori . . . . .	31
5 Synthèse et conclusion . . . . .	41
<b>II Réduction dimensionnelle appliquée au chargement cyclique de matériaux à comportement élasto-plastique</b>	<b>45</b>
1 Introduction . . . . .	46
2 Méthode cyclique directe et méthode des sauts de cycles . . . . .	46
2.1 Présentation du modèle . . . . .	46
2.2 Loi de comportement élasto-plastique . . . . .	47
2.3 Résultats en contrainte cyclique imposée . . . . .	48
2.4 Résultats en déformation cyclique imposée . . . . .	50
2.5 Influence du type de comportement . . . . .	53
2.6 Bilan . . . . .	58
3 Méthode incrémentale droite . . . . .	58
3.1 Principe général . . . . .	58
3.2 Formulation du problème . . . . .	59
3.3 Démarche de la méthode . . . . .	60
3.4 Algorithme de la méthode . . . . .	62
3.5 Variante de la méthode . . . . .	62
4 La méthode PGD . . . . .	63
4.1 Introduction . . . . .	63
4.2 Implémentation de la méthode PGD dans le cadre de la plasticité . . . . .	64
4.3 La première version de la PGD . . . . .	69

4.4	La deuxième version de la PGD . . . . .	72
5	La méthode APR cyclique . . . . .	74
5.1	Introduction . . . . .	74
5.2	Implémentation de la méthode APR cyclique . . . . .	76
5.3	Stabilité de la base APR . . . . .	83
5.4	Variantes de la méthode APR cyclique . . . . .	84
6	Conclusion du chapitre . . . . .	86
<b>III Application à un cas élasto-plastique sous chargement cyclique</b>		<b>89</b>
1	Introduction . . . . .	90
2	Moyens et outils de calculs . . . . .	90
3	Description du modèle numérique . . . . .	90
3.1	Modèle géométrique continu et discret . . . . .	91
3.2	Conditions aux limites . . . . .	91
3.3	Matériau et modèle de comportement . . . . .	93
4	Résultats de la méthode PGD . . . . .	95
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Convergence de la méthode PGD . . . . .	95
4.3	Influence de l'enrichissement de la méthode PGD . . . . .	97
4.4	Réponse mécanique de la méthode PGD . . . . .	101
5	Résultats de la méthode APR cyclique . . . . .	107
5.1	Introduction . . . . .	107
5.2	Étude de stabilité de la base APR cyclique . . . . .	108
5.3	Influence du choix d'initialisation de la base . . . . .	111
5.4	Réponse mécanique de la méthode APR cyclique . . . . .	114
6	Analyse du temps de calcul . . . . .	123
6.1	Résultats . . . . .	129
6.2	Discussions . . . . .	133
7	Conclusion du chapitre . . . . .	138
<b>IV Simulation numérique d'agrégats polycristallins tridimensionnels</b>		<b>141</b>
1	Introduction . . . . .	142
2	Mécanismes de déformation du monocristal . . . . .	142
3	Modélisation micromécanique du comportement . . . . .	142
3.1	Présentation du matériau utilisé . . . . .	144
3.2	Modélisation du comportement monocristallin . . . . .	144
4	Description du modèle géométrique . . . . .	146
4.1	Description du maillage . . . . .	146
4.2	Conditions aux limites . . . . .	148
5	Prédictions de la méthode PGD . . . . .	149
5.1	Convergence de la méthode PGD . . . . .	149
5.2	Influence de l'enrichissement sur la réponse PGD . . . . .	150
5.3	Réponse mécanique macroscopique de la méthode PGD . . . . .	154
5.4	Réponse mécanique mésoscopique de la méthode PGD . . . . .	159
6	Résultats de la méthode APR cyclique . . . . .	164
6.1	Étude de stabilité de la base APR cyclique . . . . .	164
6.2	Influence du choix de l'initialisation de la base réduite . . . . .	164
6.3	Convergence de la méthode APR cyclique . . . . .	166
6.4	Réponse mécanique macroscopique de la méthode APR cyclique . . . . .	169
6.5	Réponse mécanique mésoscopique de la méthode APR cyclique . . . . .	171

7	Analyse du temps de calcul . . . . .	179
7.1	Résultats . . . . .	180
7.2	Discussions . . . . .	188
8	Conclusion du chapitre . . . . .	192
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>195</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>199</b>
<b>A Description de la méthode LATIN</b>		<b>217</b>
1	Équations du problème . . . . .	218
2	Principe de la méthode . . . . .	219
<b>B Méthode de Zarka</b>		<b>223</b>
1	Principe de la méthode . . . . .	224
2	Détermination de l'état limite . . . . .	226
2.1	Cas du comportement adapté . . . . .	226
2.2	Cas du comportement accommodé . . . . .	227
<b>C Stratégie incrémentale, non-incrémentale et PGD</b>		<b>229</b>
1	Convergence de la méthode Cyclique . . . . .	230
2	Temps de calcul à l'échelle macroscopique . . . . .	230
3	Temps de calcul à l'échelle de la microstructure . . . . .	233





# Table des figures

1	Différents types de réponse cyclique d'une structure ou d'un matériau présentant un comportement élasto-plastique : (a) adaptation élastique, (b) accommodation plastique, (c) rochet (ou fluage cyclique) . . . . .	2
I.1	Structure étudiée [134] . . . . .	9
I.2	Stratégie de résolution d'équilibre avec un chargement élasto-plastique . . . . .	13
I.3	Algorithme de la méthode incrémentale . . . . .	14
I.4	Principe de la méthode LATIN . . . . .	16
I.5	Principe et étapes de la méthode cyclique directe . . . . .	17
I.6	Principe de la méthode des sauts de cycles . . . . .	21
I.7	La compression d'image avec une SVD tronquée pour plusieurs modes $r$ . . . . .	24
I.8	L'erreur entre l'image d'origine et l'image compression en fonction du nombre de modes . . . . .	24
I.9	Les dix premiers modes associés aux valeurs propres d'une décomposition de Karhunen-Loève [42] . . . . .	31
I.10	Exemple du domaine RID pour la méthode APHR [46] . . . . .	35
I.11	Algorithme associé à la méthode PGD progressive pondérée . . . . .	42
II.1	Description géométrique du modèle 2D d'une plaque trouée . . . . .	47
II.2	Maillage et étude de sensibilité . . . . .	47
II.3	Cycles stabilisés $\Sigma_{11} - E_{11}$ et $\Sigma_{22} - E_2$ pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA pour une plaque trouée sollicitée en traction en contrainte imposée avec $R_\sigma = -1$ et $R_\sigma = 0$ . . . . .	49
II.4	Évolution de la déformation plastique accumulée avec la méthode incrémentale ABAQUS en fonction du nombre de cycles en contrainte imposée et avec $R_\sigma = -1$ et $R_\sigma = 0$ . . . . .	50
II.5	Cycles stabilisés $\Sigma_{11} - E_{11}$ et $\Sigma_{22} - E_2$ pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA pour une plaque trouée sollicitée en traction avec $R_\epsilon = -1$ et $R_\epsilon = 0$ . . . . .	52
II.6	Évolution de la déformation plastique cumulée avec la méthode incrémentale ABAQUS en fonction du nombre de cycles en déformation imposée avec $R_\epsilon = -1$ et $R_\epsilon = 0$ . . . . .	52
II.7	Cycles stabilisés $\Sigma_{33} - E_{33}$ pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA sur un élément de volume sollicité en traction et en contrainte imposée . . . . .	55
II.8	Comparaison des résultats des cycles stabilisés $\Sigma_{33} - E_{33}$ pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA sur un élément de volume sollicité en traction et en déformation imposée . . . . .	56
II.9	Cycles stabilisés $\Sigma_{13} - E_{13}$ pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA sur un élément de volume sollicité en cisaillement . . . . .	57
II.10	Algorithme de la méthode incrémentale droite . . . . .	62

II.11 Comparaison des courbes de convergence de l'algorithme PGD pour un problème de transfert de chaleur étudié avec deux types de décompositions [22]	66
II.12 Principe de résolution du point fixe	70
II.13 Deuxième principe de résolution du point fixe	70
II.14 Algorithme de la méthode PGD-V1	73
II.15 Algorithme de la méthode PGD-V2	75
II.16 Stratégie d'initialisation de la base APR	78
II.17 Stratégies d'adaptation de la base réduite	82
II.18 Stratégie d'initialisation et d'adaptation de la base réduite avec la méthode APR	83
II.19 Principe général et les étapes de la méthode APR-V1	84
II.20 Algorithme d'adaptation de la méthode APR-V1	85
II.21 Algorithme d'adaptation de la méthode APR-V2	87
III.1 Description géométrique du modèle utilisé pour la modélisation 3D	91
III.2 Maillage de la structure présentant un défaut modéliser en 3D avec deux types de discrétisations spatiales M1 et M2	92
III.3 Évolution du chargement appliqué avec une déformation macroscopique purement alternée	93
III.4 Conditions aux limites appliquées en traction sur une structure présentant un défaut modélisé en 3D	94
III.5 Évolution des fonctions de la base temporelle avec les six premiers modes du premier cycle avec le modèle M1 pour un chargement en traction-compression de $E_{11} = 0.2\%$	96
III.6 Évolution des fonctions des bases spatiales avec six premiers modes du premier cycle avec le modèle M1 pour un chargement en traction-compression de $E_{11} = 0.2\%$	96
III.7 Convergence de la méthode PGD-V1 en termes de contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques moyennées sur toute la structure avec le premier cycle pour le modèle M1 et avec un chargement en traction-compression de $E_{11} = 0.2\%$	97
III.8 Réponses macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ du dernier cycle (après 100 cycles) et évolution du temps CPU pour le modèle M1 obtenus avec deux valeurs de tolérance proposées $10^{-3}$ et $10^{-4}$	99
III.9 Réponses macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ du dernier cycle (après 100 cycles) et évolution du temps CPU pour le modèle M2 obtenus avec deux valeurs de tolérance proposées $10^{-3}$ et $10^{-4}$	100
III.10 Nombre de modes nécessaires à la convergence en fonction du nombre de cycles obtenus par les deux critères de convergences et pour $E_{11} = 0.2\%$	101
III.11 Comparaison des résultats contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques du dernier cycle obtenus par le calcul incrémental et la PGD sous différentes amplitudes de déformation imposées et avec les modèles M1 et M2	102
III.12 Distribution des contraintes de von Mises obtenues par les méthodes incrémentales et les méthodes PGD pour le modèle M1 et M2 avec un chargement de $0.2\%$	103
III.13 Champs de déformation plastique obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes PGD avec le modèle M1 et M2 pour un chargement de $0.2\%$	104

III.14	Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques du 100 <sup>ème</sup> cycle dans les éléments <i>a</i> , <i>b</i> et <i>c</i> obtenus par le calcul incrémental et la PGD pour une déformation imposée 0.2% et avec les modèles M1 et M2 . . . . .	105
III.15	Diagrammes contrainte-déformation $\Sigma_{12} - E_{12}$ macroscopiques en cisaillement du 100 <sup>ème</sup> cycle obtenus par le calcul incrémental et la PGD sous différentes amplitudes de déformation imposées et avec les modèles M1 et M2 . . . . .	106
III.16	Contraintes de von Mises obtenues par les méthodes incrémentales et les méthodes PGD pour les modèles M1 et M2 et avec un chargement en cisaillement de 0.2% . . . . .	107
III.17	Champs de déformations plastiques obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes PGD avec les modèles M1 et M2 pour un chargement en cisaillement de 0.2% . . . . .	108
III.18	Évolution de la taille du modèle réduit en fonction du nombre de cycles pour la méthode APR cyclique . . . . .	109
III.19	Évolution du nombre d'enrichissement par cycle avec les méthodes APR-V3 et APR-V4 pour le modèle M1 avec trois amplitudes de déformation macroscopique appliquées . . . . .	110
III.20	Influence de l'initialisation de la base réduite pour les résultats macroscopiques du 100 <sup>ème</sup> cycle obtenus pour plusieurs valeurs de déformation imposées et avec le modèle M1 et M2 . . . . .	112
III.21	Influence de l'initialisation de la base réduite sur le temps CPU obtenu après 100 cycles pour différentes valeurs de déformations macroscopiques appliquées avec les modèles M1 et M2 . . . . .	113
III.22	Nombre de modes enrichis et nécessaires à l'adaptation de la base réduite pour les deux cas d'initialisation de la base proposés . . . . .	115
III.23	Comparaison des réponses contrainte-déformation macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ du 100 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle M1 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique sous différentes amplitudes de déformation imposées . . . . .	116
III.24	Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ du 100 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle M2 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique sous différentes amplitudes de déformation imposées . . . . .	117
III.25	Distributions des contraintes de von Mises obtenues à la fin du 100 <sup>ème</sup> cycle par la méthode incrémentale et la APR cyclique pour une amplitude de déformation appliquée de 0.2% avec le modèle M1 . . . . .	118
III.26	Distributions des contraintes de von Mises obtenues à la fin du 100 <sup>ème</sup> cycle par les méthodes incrémentales et la APR cyclique pour une amplitude de déformation appliquée de 0.2% avec le modèle M2 . . . . .	119
III.27	Champs de déformation plastique $E_{11}^p$ obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M1 et pour un chargement de 0.2% . . . . .	119
III.28	Champs de déformation plastique $E_{11}^p$ obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M2 et pour un chargement de 0.2% . . . . .	120
III.29	Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ du 100 <sup>ème</sup> cycle dans les éléments <i>a</i> , <i>b</i> et <i>c</i> obtenus par le calcul incrémental et APR cyclique pour une déformation imposée 0.2% avec le modèle M1 . . . . .	121
III.30	Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ du 100 <sup>ème</sup> cycle dans les éléments <i>a</i> , <i>b</i> et <i>c</i> obtenus par le calcul incrémental et APR cyclique pour une déformation imposée 0.2% avec le modèle M2 . . . . .	122

III.31	Comparaison des résultats contrainte-déformation $\Sigma_{12} - E_{12}$ macroscopiques en cisaillement du 100 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle M1 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique pour différentes amplitudes de déformation imposées	124
III.32	Comparaison des résultats contrainte-déformation $\Sigma_{12} - E_{12}$ macroscopiques en cisaillement du 100 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle M2 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique pour différentes amplitudes de déformation imposées	125
III.33	Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ du 100 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle M2 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique sous différentes amplitudes de déformation imposées . . . . .	126
III.34	Distributions des contraintes de von Mises en cisaillement obtenues à la fin du 100 <sup>ème</sup> cycle par la méthode incrémentale et la APR cyclique pour un chargement de 0.2% et le modèle M1 . . . . .	127
III.35	Distributions des contraintes de von Mises en cisaillement obtenues à la fin du 100 <sup>ème</sup> par la méthode incrémentale et la APR cyclique pour un chargement de 0.2% et le modèle M2 . . . . .	127
III.36	Champs de déformation plastique $E_{12}^p$ obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M1 pour un chargement en cisaillement de 0.2% . . . . .	128
III.37	Champs de déformation plastique $E_{12}^p$ obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M2 pour un chargement en cisaillement de 0.2% . . . . .	128
III.38	Évolution des temps de calcul des différentes méthodes après 100 cycles de chargement et une déformation macroscopique appliquée $E_{11} = 0.2\%$ . . . . .	130
III.39	Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles après 1000 cycles de chargement pour le modèle M1 et M2 avec une variété d'amplitudes de déformation macroscopique appliquées . . . . .	132
III.40	Évolution du temps CPU par cycle, nombre d'itérations et nombre de fonctions enrichies pour les deux méthodes PGD après 100 cycles de chargement pour les différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées avec le modèle M1 . . . . .	134
III.41	Nombre de modes enrichis de la base réduite pour les différentes amplitudes de déformation appliquées avec les deux discrétisations spatiales . . . . .	136
III.42	Évolution du temps de calcul et temps par cycle des différentes versions de la méthode APR cyclique vis-à-vis à la méthode incrémentale droite après 30 cycles et pour un chargement de $E_{11} = 0.2\%$ . . . . .	137
IV.1	(a) Structure cristalline d'un réseau Cubique à Faces Centrées CFC [44] (b) Illustration du mouvement d'une famille de dislocation . . . . .	143
IV.2	Représentation schématique des différentes directions de glissement dans le plan (111) avec un réseau cristallin CFC [91] . . . . .	143
IV.3	Maillage d'un agrégat polycristallin contenant 512 grains discrétisés avec une variété de nombre d'éléments hexaédriques . . . . .	148
IV.4	Évolution des fonctions de bases temporelles avec les neufs premiers modes du premier cycle . . . . .	150
IV.5	Évolution des fonctions de base spatiales avec les neufs premiers modes du premier cycle . . . . .	151
IV.6	Convergence de la méthode PGD-V1 en termes de contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques avec le premier cycle . . . . .	152

IV.7	Convergence de la méthode PGD-V2 en termes de contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques ainsi nombre de fonctions et itérations nécessaires à la convergence . . . . .	152
IV.8	Influence du nombre de modes enrichis sur les résultats macroscopiques $\Sigma_{11} - E_{11}$ et mésoscopiques ( $\langle \sigma_{11} \rangle_G$ et $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ ) du dernier cycle obtenus pour un agrégat polycristallin contenant $8^3$ et $16^3$ éléments pour différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées . . . . .	153
IV.9	Influence du nombre de modes enrichis pour les résultats macroscopiques et mésoscopiques du dernier cycle obtenus pour des agrégats polycristallins contenant $8^3$ et $16^3$ éléments avec différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées . . . . .	155
IV.10	Comparaison de la distribution des champs de contrainte et déformation pour un chargement $E_{11} = 0.2\%$ obtenus avec la méthode incrémentale et PGD lors du 1 <sup>er</sup> quart de cycle du 50 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle d'agrégat $8^3$ . . . . .	156
IV.11	Comparaison de la distribution des champs de contrainte et déformation pour un chargement $E_{11} = 0.2\%$ obtenus avec la méthode incrémentale et PGD lors du 1 <sup>er</sup> quart de cycle du 50 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle d'agrégat $16^3$ . . . . .	157
IV.12	Comparaison de la distribution des champs de contrainte et déformation pour un chargement $E_{11} = 0.2\%$ obtenus avec la méthode incrémentale et PGD lors du 1 <sup>er</sup> quart de cycle du 20 <sup>ème</sup> cycle avec le modèle d'agrégat $32^3$ . . . . .	157
IV.13	Comparaison des réponses contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques au 100 <sup>ème</sup> cycle par le calcul incrémental et les méthodes PGD pour différentes amplitudes de déformation imposées et pour un agrégat composé de $8^3$ et $16^3$ éléments . . . . .	158
IV.14	Comparaison des réponses contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques obtenues par le calcul incrémental et les méthodes PGD lors du 30 <sup>ème</sup> et 20 <sup>ème</sup> cycle respectivement pour des amplitudes de déformation $E_{11} = 0.1\%$ et $E_{11} = 0.2\%$ . . . . .	159
IV.15	Comparaison des valeurs moyennes $\langle \sigma_{11} \rangle_G$ et $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ dans les grains obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes PGD pour les différentes amplitudes de chargement . . . . .	160
IV.16	Distribution des erreurs relatives entre les déformations mésoscopiques obtenues par la méthode PGD-V2 et la méthode incrémentale pour un chargement de $E_{11} = 0.3\%$ avec le modèle d'agrégat $16^3$ . . . . .	161
IV.17	Évolution de l'erreur maximale et moyenne en fonction du nombre de cycles entre les résultats de la méthode incrémentale et PGD-V2 au niveau de la déformation mésoscopique . . . . .	162
IV.18	Distribution des contraintes et déformations $\langle \sigma_{11} \rangle_G - \langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ moyennes dans les grains obtenue avec la méthode incrémentale et les méthodes PGD pour différentes amplitudes de chargement . . . . .	163
IV.19	Nombre d'enrichissements par cycle avec les méthodes APR-V3 et APR-V4 pour le modèle $16^3$ éléments avec une amplitude de déformation macroscopique appliquée $E_{11} = 0.1\%$ . . . . .	165
IV.20	Influence de l'initialisation de la base réduite pour la réponse mécanique et le temps de calcul pour un agrégat contenant $8^3$ éléments et une amplitude de déformation macroscopique imposée $E_{11} = 0.2\%$ . . . . .	167
IV.21	Nombre de modes de la base réduite pour les différentes amplitudes de déformation appliquées . . . . .	169

IV.22	Comparaison des résultats contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques du 100 <sup>ème</sup> cycle par le calcul incrémental et les méthodes APR cycliques sous différentes amplitudes de déformation imposées et pour un agrégat composé de 8 <sup>3</sup> et 16 <sup>3</sup> éléments . . . . .	172
IV.23	Comparaison des résultats contrainte-déformation $\Sigma_{11} - E_{11}$ macroscopiques obtenus par le calcul incrémental et les méthodes APR cycliques lors du 30 <sup>ème</sup> et 20 <sup>ème</sup> cycle respectivement pour une amplitude de déformation $E_{11} = 0.1\%$ et $E_{11} = 0.2\%$ . . . . .	173
IV.24	Comparaison de la distribution des champs de contrainte pour un chargement $E_{11} = 0.2\%$ obtenue avec la méthode incrémentale et APR cyclique lors du 1 <sup>er</sup> quart de cycle du 50 <sup>ème</sup> cycle pour les modèles 8 <sup>3</sup> et 16 <sup>3</sup> et 1 <sup>er</sup> quart de cycle du 20 <sup>ème</sup> avec le modèle 32 <sup>3</sup> . . . . .	174
IV.25	Comparaison de la distribution des champs de déformation pour un chargement $E_{11} = 0.2\%$ obtenue avec la méthode incrémentale et APR cyclique lors du 1 <sup>er</sup> quart de cycle du 50 <sup>ème</sup> cycle pour les modèles 8 <sup>3</sup> et 16 <sup>3</sup> et 1 <sup>er</sup> quart de cycle du 20 <sup>ème</sup> avec le modèle 32 <sup>3</sup> . . . . .	175
IV.26	Comparaison des valeurs de contraintes $\langle \sigma_{11} \rangle_G$ mésoscopiques obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques pour les différentes amplitude de chargement . . . . .	176
IV.27	Comparaison des valeurs de déformations $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ mésoscopiques obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques pour les différentes amplitudes de chargement . . . . .	177
IV.28	Distribution des erreurs relatives en $\langle \sigma_{11} \rangle_G$ entre les prédictions des méthodes APR et celles de la méthode incrémentale pour $E_{11} = 0.3\%$ avec le modèle 16 <sup>3</sup> . . . . .	178
IV.29	Distribution des erreurs relatives en $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ entre les prédictions des méthodes APR et celles de la méthode incrémentale pour $E_{11} = 0.3\%$ avec le modèle 16 <sup>3</sup> . . . . .	178
IV.30	Évolution de l'erreur relative maximale et moyenne en $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ après 2000 cycles entre les résultats de la solution incrémentale et ceux des méthodes APR cycliques avec le modèle d'agrégat 8 <sup>3</sup> . . . . .	180
IV.31	Évolution de l'erreur relative maximale et moyenne en $\langle \sigma_{11} \rangle_G$ après 2000 cycles entre les résultats de la solution incrémentale et ceux des méthodes APR cycliques avec le modèle d'agrégat 8 <sup>3</sup> . . . . .	181
IV.32	Distributions des contraintes et déformations $\langle \sigma_{11} \rangle_G - \langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ moyennes dans les grains obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques pour deux amplitudes de chargements . . . . .	182
IV.33	Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles pour les différents modèles d'agrégats polycristallins et amplitudes de chargement appliquée . . . . .	183
IV.34	Temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté . . . . .	184
IV.35	Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles pour les différents modèles d'agrégats polycristallin et amplitudes de chargement appliquées . . . . .	186
IV.36	Temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté après 1000 cycles de chargement . . . . .	187
IV.37	Temps par cycle et temps solveur de la méthode incrémentale et incrémentale droite pour les 10 premiers cycles obtenus avec un agrégat polycristallin constitué de 32 <sup>3</sup> éléments . . . . .	188

IV.38	Évolution du temps par cycle, du nombre d'itérations et du nombre de fonctions enrichies pour les deux méthodes PGD après 100 cycles de chargement pour les différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées et avec le modèle d'agrégat polycristallin contenant $8^3$ éléments . . . . .	190
IV.39	Évolution du temps de calcul et temps par cycle des différentes versions de la méthode APR cyclique vis-à-vis à la méthode incrémentale droite après 30 cycles pour une modélisation d'un agrégat contenant $16^3$ éléments avec deux amplitudes de chargement . . . . .	191
A.1	Principe de la méthode LATIN . . . . .	221
B.1	Nature de l'état limite de la structure avec la méthode Zarka [115] . . . . .	226
B.2	Construction du paramètre de transformée avec la règle de projection . . . . .	227
B.3	Construction du paramètre de transformée dans le cadre d'une accommodation . . . . .	228
C.1	Évolution du temps CPU par cycle et nombre d'itérations de la méthode Cyclique après 100 cycles de chargement pour les différents niveaux de chargement avec les modèles M1 et M2 . . . . .	231
C.2	Évolution du temps CPU par cycle et nombre d'itérations de la méthode Cyclique après 100 cycles de chargement pour les différents niveaux de chargement avec les modèles d'agrégats de type $8^3$ , $16^3$ et $32^3$ éléments . . . . .	232
C.3	Évolution du temps de calcul des méthodes incrémentale droite, Cyclique et PGD-V2 en fonction du nombre de cycles après 1000 cycles avec le modèle M1 et 400 cycles avec le modèle M2 et pour différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées . . . . .	234
C.4	Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles pour différents modèles d'agrégats polycristallin et différentes amplitudes de chargement appliquées . . . . .	236
C.5	Temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de ddl après 1000 cycles de chargement . . . . .	237





# Liste des tableaux

II.1	Paramètres identifiés par Agbessi [5] pour la loi de comportement élasto-plastique à écrouissage mixte non linéaire d'un cuivre pur . . . . .	48
II.2	Performances des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en contrainte imposée	51
II.3	Temps de calcul pour le cas $R_\sigma = -1$ . . . . .	51
II.4	Temps de calcul pour le cas $R_\sigma = 0$ . . . . .	51
II.5	Performances des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en déformation imposée . . . . .	53
II.6	Temps de calcul pour un chargement en $R_\varepsilon = -1$ . . . . .	53
II.7	Temps de calcul pour un chargement $R_\varepsilon = 0$ . . . . .	53
II.8	Paramètres des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en traction et à $R_\sigma$	54
II.9	Paramètres des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en traction et en $R_\varepsilon$	56
II.10	Paramètres des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en cisaillement . . .	57
III.1	Paramètres du matériau AISI 316L identifiés par [91] pour la loi de comportement élasto-plastique . . . . .	94
III.2	Temps CPU ainsi que les différents gains obtenus par rapport à la méthode incrémentale avec le modèle M1 et M2 pour un chargement de $E_{11} = 0.2\%$ après 100 cycles de chargement . . . . .	131
III.3	Temps CPU et les différents gains obtenus par rapport à la méthode incrémentale droite après 1000 cycles avec le modèle M1 pour les différentes amplitudes de chargement . . . . .	131
III.4	Temps CPU et les différents gains obtenus par rapport à la méthode incrémentale droite après 1000 cycles avec le modèle M1 pour les différentes amplitudes de chargement . . . . .	133
III.5	Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale droite et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué avec une modélisation avec le modèle M1 . . . . .	135
III.6	Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale droite et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué avec une modélisation avec le modèle M2 . . . . .	137
IV.1	Système de glissement des les structures de type CFC selon la convention de Schmid et Boas [227] . . . . .	143
IV.2	Composition chimique (% massique) de la nuance de l'acier 316L déterminée par Guerchais [91] . . . . .	144
IV.3	Directions de glissement $l^s$ et plans de glissement $n^s$ associés aux 12 systèmes de glissement d'une structure CFC . . . . .	145
IV.4	Matrice d'interaction des systèmes de glissement d'une structure CFC . . . .	147
IV.5	Paramètres matériau utilisés pour les modélisations d'agrégat polycristallin tridimensionnel identifiés par Guerchais pour l'acier 316L [91] . . . . .	147

IV.6	Comparaison du nombre de modes enrichis avec les méthodes APR-V3 et APR-V4 pour les deux stratégies d'initialisation de la base réduite . . . . .	166
IV.7	Nombre de modes initialisés dans la base réduite en fonction du nombre d'éléments et de l'amplitude de chargement appliquée . . . . .	168
IV.8	Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué pour le modèle $8^3$ . . . . .	170
IV.9	Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué pour le modèle $16^3$ . . . . .	170
IV.10	Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué pour le modèle $32^3$ . . . . .	170

# Notations

## Tenseurs et matrices

$A$	: Scalaire
$\{A\}$	: Vecteur
$[A]$	: Matrice
$\underline{A}$	: Tenseur d'ordre 1 (vecteur)
$\underline{\underline{A}}$	: Tenseur d'ordre 2
$\mathbb{A}$	: Tenseur d'ordre 4
$\{0\}$	: Vecteur nul

## Opérateurs mathématiques

$[A]^T$	: Transposée de la matrice $[A]$
$[A^{-1}]$	: Inverse de la matrice $[A]$
$\langle A \rangle$	: Transposé du vecteur $A$
$\cdot$	: Produit simplement contracté
$:$	: Produit doublement contracté
$\otimes$	: Produit tensoriel
$\nabla$	: Opérateur gradient
$\frac{\partial}{\partial x}$	: Dérivée partielle par rapport à $x$
$\ A\ $	: Norme de $A$
$\langle A \rangle$	: Moyenne de $A$
$\text{sign}(A)$	: Signe de $A$

## Paramètres et variables du comportement

$\sigma_0$	: Limite d'élasticité
$Q, b$	: Paramètres d'écroissage isotrope
$c, d$	: Paramètres d'écroissage cinématique
$r^s$	: Écroissage isotrope sur le système $s$
$x^s$	: Écroissage cinématique sur le système $s$
$\dot{\lambda}$	: Multiplicateur plastique

$p$	: Déformation plastique accumulée
$\varepsilon$	: Déformation totale
$\varepsilon^e$	: Déformation élastique
$\varepsilon^p$	: Déformation plastique
$\dot{\varepsilon}^p$	: Vitesse de déformation plastique
$\tau^s$	: Cission résolue sur le système $s$
$\dot{\gamma}^s$	: Vitesses de glissement sur le système $s$
$\nu^r$	: Glissement plastique cumulé sur le système $r$
$h_{rs}$	: Matrice d'interaction entre les systèmes de glissement
$h_i$	: Coefficients de la matrice d'interaction $h_{rs}$
$m^s$	: Tenseur d'orientation du système $s$
$l^s$	: Direction du glissement du système $s$
$n^s$	: vecteur unitaire normal au plan de glissement du système $s$
$\nu$	: Coefficient de poisson
$E$	: Module de Young

## Autres paramètres et variables

$\Omega$	: Domaine spatial
$\mathcal{I}$	: Intervalle temporel
$N$	: Dimension du problème $\Omega \times \mathcal{I}$
$N_x$	: Dimension spatiale
$N_t$	: Dimension temporelle
$[\Phi]$	: Base spatiale
$[\Psi]$	: Base temporelle
$X$	: Ensemble des variables spatiales
$\phi_i$	: Ensemble des vecteurs propres
$\lambda_i$	: Ensemble des valeurs propres
$dev \underline{\underline{A}}$	: Déviateur du tenseur $\underline{\underline{A}}$
$F_d$	: Efforts surfaciques imposés
$f_d$	: Efforts volumiques imposés
$F^{ext}$	: Forces externes
$Q^p$	: Forces nodales résultantes du champ de déformation plastique
$F^{nl}$	: Terme non linéaire du second membre
$\mathcal{A}$	: Opérateur linéaire
$\mathcal{F}$	: Second membre
$\sigma^e$	: Contrainte élastique
$\mathbb{C}^{nl}$	: opérateur non linéaire des modules d'élasticité

$[C^{el}]$	: Matrice d'élasticité
$[N]$	: Fonctions de forme
$[B]$	: Matrice élémentaire d'interpolation des déformations
$[K_T]$	: Matrice de rigidité tangente
$[K]$	: Matrice de rigidité
$[\mathcal{R}]$	: Matrice des corrélations entre deux points
$\mathbf{I}$	: Matrice d'identité
$\mathcal{K}^i$	: Sous-espace de Krylov d'ordre $i$
$Res$	: Résidu de la méthode incrémentale
$\mathcal{R}_{APR}$	: Résidu de la méthode APR
$\mathcal{R}_{PGD}$	: Résidu de la méthode PGD
$\mathcal{R}_{pf}$	: Résidu de l'algorithme du point fixe
$\epsilon_{tol}$	: Tolérance de la méthode incrémentale
$\epsilon_{POD}$	: Tolérance de la méthode POD
$\epsilon_{APR}$	: Tolérance de la méthode APR
$\epsilon_{PGD}$	: Tolérance de la méthode PGD
$\epsilon_{pf}$	: Tolérance de la méthode point fixe
$\Delta N$	: Nombre de cycles à sauter
$\eta$	: Paramètre de précision de la méthode des sauts de cycles
$R_\sigma$	: Rapport de charge en contrainte imposée
$R_\epsilon$	: Rapport de charge en déformation imposée
$[110]$	: Direction de glissement 011
$\langle 110 \rangle$	: Famille de direction de type 011
$(111)$	: Plan de glissement 111
$\{111\}$	: Famille de plan de type 111

## Abréviations

APR-V1	: Méthode APR cyclique première version
APR-V2	: Méthode APR cyclique deuxième version
APR-V3	: Méthode APR cyclique troisième version
APR-V4	: Méthode APR cyclique quatrième version
CA	: Cinématiquement Admissible
CC	: Cubique centrée
CFC	: Cubique à Faces Centrées
DCA	: Méthode cyclique directe
ddl	: degré de liberté
inc droite	: Méthode incrémentale droite

PA : Plastiquement Admissible  
PGD-V1 : Méthode PGD première version  
PGD-V2 : Méthode PGD Deuxième version  
QC : Quadratique centrée  
SA : Statiquement Admissible  
2D : Bidimensionnel  
3D : Tridimensionnel

# Introduction générale

A l'heure actuelle, un des enjeux majeurs de la mécanique des matériaux est d'accéder à la réponse mécanique aux différentes échelles et ceci en des temps raisonnables. D'un point de vue numérique, cette problématique entraîne de nombreuses difficultés pour des problèmes fortement non linéaires définis dans de grands intervalles de temps en utilisant des pas de temps relativement petits. Le calcul dans ce cas reste encore loin d'être trivial et conduit inévitablement à des problèmes d'efficacité et de précision. Ce problème est fréquemment rencontré dans de nombreuses applications académiques ou industrielles. A titre d'exemple, on peut citer les domaines des procédés de mise en forme impliquant des transformations plastiques irréversibles, de la caractérisation rhéologique des matériaux visco-élastiques, de la modélisation de l'usinage et enfin celui de la tenue en fatigue. Le travail présenté dans ce rapport s'intéresse au cas de la simulation numérique en fatigue où la structure présente des comportements assez complexes (à l'échelle de la microstructure) et subit un chargement cyclique de faible amplitude défini sur une grande échelle de temps.

La fatigue est un phénomène caractérisé par l'application de chargements en contrainte ou en déformation périodiques dans le temps. La sollicitation appliquée a pour effet de modifier les propriétés locales du matériau conduisant ainsi souvent à la naissance de fissures dont la propagation cause la rupture finale. Dans ce contexte, trois domaines qui définissent le processus de la fatigue sont généralement distingués :

- La fatigue oligocyclique : la rupture survient pour un faible nombre de cycles (par exemple pour des durées de vie inférieures à 10 000 cycles) ;
- La fatigue à grand nombre de cycles (FGNC) : dans ce domaine, la rupture survient pour des durées de vie comprises entre  $10^5$  et  $10^7$  cycles ;
- La fatigue gigacyclique : les recherches relatives à ce domaine sont plus récentes. Il est caractérisé pour des chargements au delà de  $10^9$  cycles.

Même si un très grand nombre de travaux ont été conduits depuis de nombreuses années pour caractériser et modéliser l'endommagement en fatigue, il n'en reste pas moins que la complexité et la variabilité des mécanismes associés sont telles qu'il s'agit encore d'un problème ouvert. Ce dernier suscite néanmoins un grand intérêt des différents secteurs industriels en proie avec des risques de rupture sous chargement cyclique.

Dans le régime de la FGNC, où la phase d'amorçage est souvent prédominante, la prise en compte de l'amorçage et de la propagation se heurte aux difficultés inhérentes à l'échelle où les mécanismes moteurs prennent place, c'est-à-dire l'échelle de la microstructure. Plus exactement, après amorçage, les microfissures passent une fraction importante de la durée de vie totale à se propager à travers trois ou quatre grains avant de bifurquer vers un autre mode de propagation. A cette échelle, la plasticité locale, les hétérogénéités microstructurales ainsi que les orientations cristallines jouent un rôle primordial sur l'évolution du dommage. De plus, au cours de l'application du chargement, l'endommagement concerne plusieurs échelles successives jusqu'à l'obtention de la fissure principale à l'origine de la rupture du composant étudié. Ainsi, afin de tenir compte des différents phénomènes mis



en jeux ainsi, il est nécessaire de connaître l'historique des différentes quantités mécaniques dans la zone d'amorçage de la fissure. Cela nécessite une connaissance des états mécaniques cycliques stabilisés de la structure (appelés aussi la réponse asymptotique). D'un point de vue pratique, une structure soumise à un chargement cyclique peut conduire, selon la nature du comportement, à trois types de réponses stabilisées :

- Une adaptation élastique (figure 1a) ;
- Une accommodation plastique (figure 1b) ;
- Un comportement de type rochet (figure 1c)

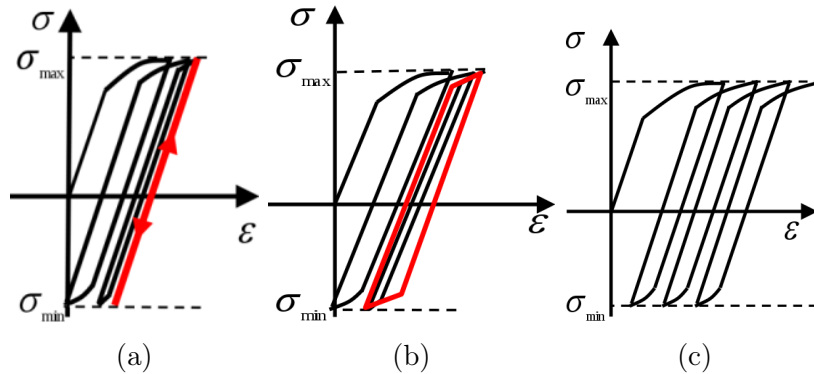


FIGURE 1 – Différents types de réponse cyclique d'une structure ou d'un matériau présentant un comportement élasto-plastique : (a) adaptation élastique, (b) accommodation plastique, (c) rochet (ou fluage cyclique)

L'adaptation élastique correspond au cas où la réponse de la structure tend vers un état purement élastique. Les champs de déformation plastique peuvent se développer pendant les premiers cycles mais tendent vers une limite constante. Pour l'accommodation plastique, la réponse globale de la structure tend vers un état périodique. Le comportement cyclique dans ce cas se stabilise sur un cycle élasto-plastique, qui varie périodiquement dans le temps. L'effet rochet se caractérise par une réponse de la structure avec une augmentation du champ de déformation plastique qui ne se stabilise jamais. Cet état limite dépend du comportement du matériau et du type de chargement appliqué. Il conduit à une rupture rapide de la structure. Quelle que soit la réponse asymptotique obtenue, des critères de fatigue peuvent être appliqués à partir de l'état stabilisé permettant ainsi une bonne estimation de la tenue en fatigue.

D'un point de vue numérique, un simple calcul avec un chargement monotone ne suffit pas pour le dimensionnement d'une structure en fatigue. Il est nécessaire de simuler toute ou partie de l'histoire cyclique. Grâce à la puissance croissante des moyens de calcul, les modélisations numériques des matériaux à l'échelle de la microstructure se sont fortement développées au cours des deux dernières décennies. En pratique, différentes méthodes numériques ont été utilisées pour modéliser explicitement un polycristal : la méthode des Éléments Finis [4, 260], la méthode spectrale (FFT) [159, 138] et la méthode auto-cohérente [158, 140]. Afin d'obtenir des résultats précis avec des chargements complexes tout en tenant compte des paramètres importants en fatigue (effet d'une surface libre, présence d'un défaut géométrique, etc ..), la méthode des Éléments finis est la plus utilisée pour la simulation numérique d'agrégats polycristallins. Elle a recours à une résolution incrémentale pour l'histoire du chargement. Cette méthode est généralement prise comme référence et est couramment utilisée dans les codes de calcul commerciaux et académiques. Dans le cadre

des agrégats polycristallins, les modélisations peuvent être conduites avec des volumes élémentaires représentatifs associés au comportement macroscopique. Le calcul de durée de vie en fatigue se base ensuite sur la mise en équation de quantités mécaniques calculées aux échelles macroscopiques ou mésoscopiques (à titre d'exemple, des critères d'amorçage de fissures en FGNC de Dang Van [245], Morel et Huyen [164, 165] se basent sur des hypothèses exprimées à l'échelle mésoscopique). La pertinence des quantités choisies est validée par la capacité du modèle à reproduire fidèlement les résultats expérimentaux. Malheureusement, il est souvent constaté que très peu de modèles prennent en compte la nature exacte des différents mécanismes moteurs à l'origine de l'endommagement en fatigue. S'il est question de la simulation de l'apparition des microfissures au sein d'un agrégat polycristallin, une prédiction multi-échelle en espace (homogénéisation) doit être complétée par une prédiction multi-échelle en temps. Le très grand nombre de cycles que peut subir le matériau peut induire un très grand nombre de pas de calcul et par conséquent une simulation très gourmande en temps CPU. Ainsi, la recherche de l'histoire des différentes quantités mécaniques de l'agrégat à l'état asymptotique avec une méthode classique peut conduire à des temps de calcul extrêmement longs, voire impossible à réaliser à l'heure actuelle. Pour cette raison, les simulations numériques d'agrégats polycristallins pour des applications en fatigue ne sont réalisées que pour quelques cycles. Elles permettent néanmoins de confirmer, ou de mettre en échec, certaines hypothèses utilisées dans les critères de fatigue multi-échelles.

A l'échelle de la microstructure, la limite du temps de calcul avec une résolution classique est due à la complexité du modèle. A titre d'exemple, le volume élémentaire représentatif doit souvent contenir plusieurs centaines de grains afin que les propriétés mécaniques soient représentatives, ce qui entraîne une augmentation du nombre de degrés de liberté (ddl) du problème. Aussi, la complexité du comportement et de la morphologie des grains rendent la résolution d'une loi de type plasticité cristalline non triviale. Le nombre de paramètres physiques pris en compte à cette échelle peut être également très important. Dans ce contexte, si on utilise une méthode classique avec des discrétisations temporelles incrémentales, le système linéaire doit être résolu au moins à chaque pas de temps. Autrement dit, la factorisation de la matrice tangente doit être prise en compte à chaque incrément et correction de l'état mécanique. Aussi, lorsque l'intervalle de temps devient trop faible en raison des exigences de stabilité et que l'intervalle de temps de simulation est suffisamment important, les simulations incrémentales classiques deviennent inefficaces. D'où l'intérêt de s'orienter vers d'autres techniques. L'objectif prioritaire de cette thèse essentiellement numérique est de développer de nouvelles méthodes permettant de résoudre, en un temps CPU raisonnable, des problèmes à grand nombre de ddl avec des comportements de type élasto-visco-plastique fortement non linéaires (des comportements en plasticité cristalline) sous chargement cyclique. L'apport de ces méthodes sera utile pour le traitement des problèmes de FGNC.

Il est important de souligner que, pour résoudre des problèmes de mécanique ou de physique, de nombreux auteurs cherchent à développer des méthodes accélérées de calcul pour réduire le temps CPU. Ces méthodes peuvent être associées ou non à la méthode des Éléments Finis. Elles peuvent être classées en trois familles :

- (i) Méthodes qui traitent l'évolution des variables locales à chaque point de la structure : méthode cyclique directe [156], méthode des sauts de cycles [226], méthode de Zarka [253] et méthode LATIN [127] ;
- (ii) Méthodes qui ne calculent les variables locales qu'au point critique de la structure : les méthodes du type Neuber [169] ;
- (iii) Méthodes basées sur la réduction de modèle [22, 57, 212]

La première famille permet de prédire les états stabilisés avec une description des variables en tous les points de la structure. La méthode des sauts de cycles, selon une résolution incrémentale, cherche à réduire les temps de simulation en réduisant le nombre de cycles simulés. La méthode cyclique directe consiste à déterminer directement le cycle stabilisé par le calcul d'un seul cycle de chargement. Elle s'appuie sur l'hypothèse de la périodicité de la solution avec une résolution de l'équilibre et les variables du problème par une décomposition en série de Fourier. La méthode de Zarka permet de déterminer en temps réduit le cycle stabilisé à partir d'un calcul linéaire élastique et sans suivre l'évolution du chargement. Par ailleurs, une méthode à caractère non-incrémental a été également développée connue sous le nom de LArge Time INcrement : LATIN. Elle est basée généralement sur la convergence d'un processus itératif qui contrôle l'intersection de deux espaces de résolution découplés. Un espace global pour la résolution de l'équilibre sur l'histoire de l'intervalle temporel permet de fournir les solutions statiquement et cinématiquement admissibles. Un deuxième espace local consiste à la résolution des équations de comportement pour la correction plastique. L'ensemble de ces différentes méthodes est généralement utilisé pour des comportements de matériaux élasto-plastique du type von-Mises (échelle macroscopique) allant de l'écroutissage cinématique linéaire à l'écroutissage mixte non linéaire. Bien que ces méthodes soient efficaces en termes de gain de temps, elles ne sont pas utilisées à notre connaissance pour des simulations d'agrégats polycristallins.

La deuxième famille consiste à calculer l'état stabilisé d'une structure dans le cadre de la plasticité confinée. En effet, si le point critique est connu à l'avance, le calcul des différentes variables est effectué à ce point. Ce type de méthodes est difficile à utiliser dans le cadre de la modélisation des agrégats polycristallins car les champs de contrainte et de déformation sont fortement hétérogènes. Ce type d'approche ne sera pas abordé dans le cadre de nos travaux.

La troisième famille concerne les méthodes de réduction de modèles. Ces méthodes utilisent souvent les techniques dites non-incrémentales pour la résolution numérique selon un processus itératif. Le concept de base de ces méthodes est de réduire le nombre de ddl du problème et par conséquent le coût de calcul tout en gardant une précision fiable. La résolution est effectuée selon des bases réduites sur lesquelles la solution est projetée. Comme ces bases impliquent généralement un faible nombre de fonctions par rapport aux bases d'approximation standard (dans lesquelles une fonction d'interpolation est attachée à chaque nœud d'un maillage), un modèle discret réduit doit être considéré dont la solution peut être souvent résolue en temps réel. Au cours de ces dernières années, les techniques de réduction de modèle ont ouvert des nouvelles perspectives permettant d'avoir une simulation précise et rapide pour une variété de domaines d'application en mécanique. Ce type de méthodes a été généralement utilisé avec succès dans le cadre des problèmes linéaires contenant un grand nombre de ddl ou de paramètres. L'application de ces méthodes dans le cadre de la mécanique des solides non linéaires a été récemment discutée par quelques auteurs [217, 202, 201]. Dans le cas d'une modélisation par Éléments Finis contenant un comportement de matériau de type élasto-plastique ou élasto-visco-plastique non linéaire, ces méthodes ne sont appliquées que très rarement. Ce sujet devient une préoccupation académique et industrielle d'importance puisqu'il est loin d'être trivial de trouver le bon rapport entre efficacité et précision.

L'idée de ce travail consiste à explorer l'apport des méthodes de réduction de modèle pour la simulation numérique d'agrégats polycristallins soumis à un chargement de fatigue. Du fait de la complexité de la modélisation relative à ce type de problème, il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode simple pour simuler le très grand nombre de cycles en tenant compte des différents paramètres importants dans le cadre des paramètres moteurs de l'endommagement

en fatigue. Les méthodes de réduction de modèle seront ainsi couplées avec la méthode des Éléments Finis pour la résolution numérique d'un problème élasto-plastique ou élasto-visco-plastique fortement non linéaire. On essaie en particulier de mettre en place une approche présentant une précision acceptable tout en réduisant la complexité et le temps de calcul. La potentialité des méthodes de réduction de modèle pour traiter des problèmes à grand nombre de ddl est indéniable. Cependant, la résolution dans le cas des comportements non linéaires reste encore difficile quand on veut utiliser ces techniques. Les questions principales auxquelles nous allons tenter de répondre à travers ces travaux de thèse sont donc :

- Quelle est la technique de réduction de modèle la plus adaptée au traitement des problèmes de fatigue ?
- Comment faire évoluer certaines méthodes existantes pour tenir compte de comportements élasto-visco-plastiques nécessaires à la modélisation de la réponse sous chargement cyclique ?
- Quels sont les gains en termes de précisions et de temps de calcul avec des méthodes optimisées ?

Le travail présenté se divise en quatre chapitres :

- Le chapitre I décrit tout d'abord le problème de référence avec une résolution Éléments Finis. Les équations des problèmes spatial et temporel sont présentées. La première famille des méthodes numériques accélérées est ensuite décrite. Les méthodes de réduction de modèle "*a posteriori*" et "*a priori*" sont alors présentées. Enfin, un bilan est mis en place sur les différentes méthodes évoquées et leurs applications dans le cadre de la fatigue.
- Le chapitre II présente une étude préliminaire sur deux méthodes accélérées de la bibliographie dans le cadre de la plasticité  $J_2$  afin d'analyser leurs pertinences au niveau de la précision et du temps CPU. A l'issue des analyses conduites, deux méthodes numériques sont proposées en s'appuyant sur les méthodes de réduction de modèles couplée à la méthode des Éléments finis. La première utilise l'apport de la méthode de Décomposition Généralisée en modes Propres (PGD) et la deuxième s'appuie sur le principe de la méthode de Réduction A Priori (APR). Pour chaque méthode, plusieurs variantes sont proposées.
- Le chapitre III présente la mise en application des différentes méthodes proposées pour un cas élasto-plastique avec un chargement cyclique. Deux types de chargement sont testés : traction et cisaillement avec différents niveaux de chargement. La réponse mécanique des différentes méthodes est analysée tout d'abord en comparaison avec la méthode de référence. Des études de sensibilité de quelques paramètres des méthodes sont évoquées parallèlement. Enfin, une analyse du temps de calcul associé aux différentes méthodes est détaillée.
- Le chapitre IV présente l'application des méthodes proposées à l'échelle de la micro-structure. Il s'agit de la simulation numérique d'un agrégat polycristallin tridimensionnel. La présentation des travaux de ce chapitre suit une démarche similaire à celle du chapitre III. La mise en place du modèle numérique de l'agrégat est ensuite présentée. Cette partie est accompagnée par une synthèse des modèles de comportement cristallin de la littérature. Les réponses mécaniques macroscopique et mésoscopique des différentes méthodes sont ensuite comparées à la méthode de référence. Enfin une analyse des temps de calcul est détaillée.

Le rapport s'achève avec une conclusion générale accompagnée de quelques perspectives.



# Chapitre I

## Revue bibliographique

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation par Éléments Finis</b>	<b>8</b>
2.1	Problème de référence	8
2.2	Formulation par Éléments Finis	9
2.3	Algorithme de la méthode incrémentale	12
2.4	Synthèse et applications	13
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques accélérées de détermination de l'état stabilisé</b>	<b>15</b>
3.1	Méthode à grand incrément de temps (LATIN)	15
3.2	Méthode cyclique directe	16
3.3	Méthode des sauts de cycles	19
<b>4</b>	<b>Méthodes de réduction de modèle</b>	<b>20</b>
4.1	Introduction	20
4.2	Méthodes de réduction a posteriori	22
4.3	Méthodes de réduction a priori	31
<b>5</b>	<b>Synthèse et conclusion</b>	<b>41</b>

---

# 1 Introduction

Un calcul par Éléments Finis d'une structure soumise à un cycle de sollicitation nécessite généralement un nombre important d'incrémentes. De plus, pour des problèmes de grande dimension, la résolution du système linéaire ( $\{U\} = [K^{-1}]\{F\}$ ) est très coûteuse en temps CPU. Ainsi la simulation sur plusieurs milliers de cycles d'une structure modélisée avec un nombre élevé de ddl n'est pas réalisable dans des délais de temps raisonnables avec une méthode classique. Afin de déterminer numériquement la réponse stabilisée de la structure soumise à un chargement cyclique, il est donc nécessaire de développer des méthodes accélérées pour la résolution du problème par la méthode des Éléments Finis.

Ce chapitre présente une analyse bibliographique des méthodes existantes permettant d'éviter les calculs longs et coûteux induits par la méthode incrémentale. Dans un premier temps, cette méthode sera présentée en mettant un accent particulier sur le problème de temps CPU. Le deuxième volet est dédié aux différentes méthodes accélérées existantes dans la littérature permettant la détermination du cycle stabilisé. Le but de cette partie est de comprendre leurs principes, de connaître les avantages et limites afin de choisir une ou des méthodes qui peuvent être appliquées dans un cadre général. La troisième partie de ce chapitre concerne une autre famille de méthodes : les méthodes de réduction de modèle où la solution est recherchée avec une forme séparée sous une base réduite de taille bien inférieure au problème de référence à résoudre.

## 2 Modélisation par Éléments Finis

La méthode des Éléments Finis [4, 205, 244, 261, 260, 176] est la méthode la plus utilisée pour résoudre des problèmes mécaniques. L'objectif est d'établir un algorithme pour calculer une solution approchée en utilisant les principes variationnelles et une formulation faible. Grâce à la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, la résolution de nombreux problèmes académique et industrielle en mécanique des solides est traitée de la sorte.

Avec cette méthode, la structure étudiée est discrétisée en un nombre fini d'éléments et de nœuds. Chaque nœud possède un nombre déterminé de degrés de liberté. Le modèle Éléments Finis qui représente toute la structure contient donc un nombre fini de ddl et cela implique que la condition d'équilibre ne peut être satisfaite à chaque point du milieu continu étudié. Une formulation faible de l'équilibre est donc utilisée pour satisfaire l'équilibre global de la structure [80]. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [205, 175, 176, 30, 111]. Dans ce qui suit, la mise en œuvre de la méthode des Éléments Finis sera décrite dans le cadre d'un problème mécanique sous un chargement quelconque.

### 2.1 Problème de référence

Soit une structure quelconque occupant un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  sollicitée sous un chargement qui évolue sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . Sa frontière sera notée  $\partial\Omega$ . Le modèle de comportement est considéré relevé du cadre de l'élasticité non linéaire (cadre général) et la solution sera déterminée dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (HPP) [224]. Ce chargement appliqué peut être des efforts volumiques  $f_d$  imposés dans  $\Omega$ , des efforts surfaciques  $F_d$  imposés sur la partie  $\partial_2\Omega$  de  $\partial\Omega$  ou des déplacements appliqués sur la partie  $\partial_1\Omega$  de  $\partial\Omega$ . Le déplacement ainsi que l'effort ne peuvent pas être imposés sur la même partie de la structure et dans la même direction. Ainsi les surfaces  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  forment une partition de  $\partial\Omega$  telle que  $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  et  $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$  comme représenté sur la figure I.1.

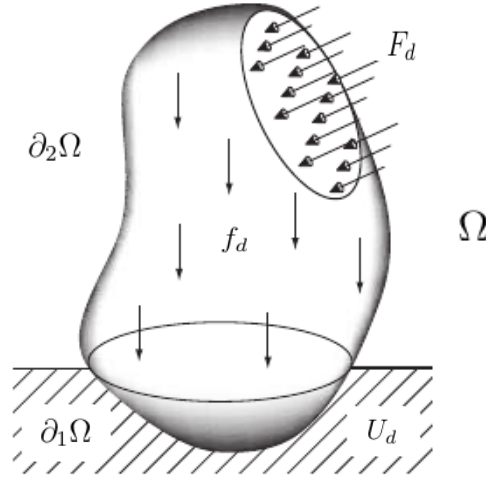


FIGURE I.1 – Structure étudiée [134]

L'objectif est de déterminer la réponse mécanique de la structure, en chaque point et à chaque instant de l'intervalle du chargement. Cette réponse traduit le champ de déplacement, le champ de déformation et déformation plastique notés respectivement  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^p$ , le champ de contrainte noté  $\sigma$  ainsi que les variables et les forces internes. Ces réponses sont calculées par la résolution des équations d'équilibre (Eq.I.1), de compatibilité (Eq.I.2) et de comportement (Eq.I.3) à tout instant de l'intervalle de temps étudié. Les conditions aux limites et les conditions initiales (Eq.I.4 et I.5) doivent également être prises en compte.

$$\underline{\nabla}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}(x, t) + \rho \underline{f}_d(x, t) = 0 \quad \forall (x \in \Omega), (t \in [0, T]) \quad (\text{I.1})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x, t) = \text{sym}(u(t) \otimes \underline{\nabla}_x) \quad \forall (x \in \Omega), (t \in [0, T]) \quad (\text{I.2})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, t) = \mathbb{C}^{nl} : \underline{\underline{\varepsilon}}(x, t) \quad \forall (x \in \Omega), (t \in [0, T]) \quad (\text{I.3})$$

$$\underline{u}(x, t) = \underline{u}_d(x, t) \quad \forall (x \in \partial_1 \Omega) \quad (\text{I.4})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, t) \cdot \underline{n}(x, t) = \underline{F}_d(x, t) \quad \forall (x \in \partial_2 \Omega) \quad (\text{I.5})$$

où  $\underline{n}$  est la direction normale à la surface orientée vers l'extérieur de la frontière  $\partial_2 \Omega$  et  $\mathbb{C}^{nl}$  traduit un opérateur non linéaire qui permet de relier le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  à la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  à travers la loi de comportement. Il est à noter que les équations I.1 à I.5 traduisent la formulation forte du problème d'équilibre en élasticité tandis que la formulation faible sera présentée dans la section 2.2. Ces équations sont ensuite discrétisées en temps et en espace pour la résolution numérique, et dans notre cas, par la méthode des Éléments Finis pour le problème spatial et la méthode incrémentale pour le problème temporel.

## 2.2 Formulation par Éléments Finis

La méthode des Éléments Finis consiste à chercher une solution approchée. La première étape consiste à écrire l'équation I.1 sous une forme intégrale équivalente appelée formulation



faible. En multipliant par un champ de déplacement virtuel  $\underline{u}^*$ , l'équation I.1 s'écrit :

$$\int_{\Omega} (\nabla_x \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{f}_d) \underline{u}^* dV = 0 \quad (\text{I.6})$$

En appliquant le théorème de la divergence avec une intégration par partie, la formulation faible de l'équation I.6 s'écrit :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} (\rho \underline{f}_d) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* dS \quad (\text{I.7})$$

où  $\underline{\varepsilon}^*$  est le champ de déformation provenant du champ de déplacement virtuel (Eq. I.2). L'équation I.7 se réfère au principe des puissances virtuelles (PPV) appliqué au cas de l'équilibre. En tenant compte des conditions aux limites (Eq. I.4 et I.5) le (PPV) de l'équation I.7 s'écrit :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} (\rho \underline{f}_d) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial_1\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* dS + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \quad (\text{I.8})$$

En prenant le champ virtuel cinématiquement admissible égale à zéro (i.e. dans la zone  $\partial_1\Omega$ ), la formulation faible de l'équilibre s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} (\rho \underline{f}_d) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \quad (\text{I.9})$$

La méthode des Éléments Finis est basée sur la construction d'une approximation des grandeurs de champ  $\underline{u}$  à travers un sous-domaine. On utilise des valeurs approximatives du champ au niveau des nœuds de l'élément. En d'autres termes, au lieu de calculer la solution du problème sur un ensemble infini de possibilités, l'espace de recherche sera limité à un ensemble fini de fonctions définies par un nombre de ddl, et des fonctions de base donnant le champ de déplacement  $\underline{u}$  et  $\underline{u}^*$  en tout point de la structure [40]. Ainsi en notation matricielle :

$$\{u\} = [N] \cdot \{U\} \quad \text{et} \quad \{u^*\} = [N] \cdot \{U^*\} \quad (\text{I.10})$$

où  $\{U\}$  et  $\{U^*\}$  sont les vecteurs de déplacement nodaux du maillage et  $[N]$  traduit les fonctions de base appelées fonctions de forme [177]. Les champs de déformation  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\varepsilon}^*$  en tout point de la structure étudiée peuvent être écrits comme une fonction du champ de déplacement en utilisant l'équation I.2. Ainsi :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon^*\} = [B] \cdot \{U^*\} \quad (\text{I.11})$$

où  $[B]$  est la matrice élémentaire d'interpolation des déformations déduite des dérivées spatiales des fonctions de forme. Selon les expressions ci-dessus des tenseurs de déformation, les équations I.7 et I.9 s'écrivent :

$$\int_{\Omega} \langle \sigma \rangle \{ \varepsilon^* \} dV = \langle u^* \rangle \int_{\Omega} [B] \{ \sigma \} dV = \langle u^* \rangle \{ F^{int} \} \quad (\text{I.12})$$

$$\int_{\Omega} \rho \langle f_d \rangle \{ u^* \} dV + \int_{\partial_2\Omega} \langle F_d \rangle \{ u^* \} dS = \langle u^* \rangle \{ F^{ext} \} \quad (\text{I.13})$$

où  $\{ F^{int} \}$  et  $\{ F^{ext} \}$  sont respectivement les forces internes et externes du problème étudié. En utilisant la relation I.3, l'équation I.12 s'écrit :

$$\int_{\Omega} \langle \sigma \rangle \{ \varepsilon^* \} dV = \langle u^* \rangle \int_{\Omega} [B]^T [C^{nl}] [B] dV \{ U \} = \langle u^* \rangle \{ F^{int} \} \quad (\text{I.14})$$

Ainsi la formulation de l'équilibre de l'équation I.9, s'écrit :

$$\int_{\Omega} [B]^T [C^{nl}] [B] dV \{U\} = \int_{\Omega} \rho [N] \{f_d\} dV + \int_{\partial_2 \Omega} [N] \{F_d\} dS \quad (\text{I.15})$$

En d'autres termes, l'équilibre s'écrit :

$$[K] \{U\} = \{F^{ext}\} \quad (\text{I.16})$$

avec :

- $[K] = \int_{\Omega} [B]^T [C^{nl}] [B] dV$  la matrice de rigidité
- $\{F^{ext}\} = \int_{\Omega} \rho [N] \{f_d\} dV + \int_{\partial_2 \Omega} [N] \{F_d\} dS$  les forces externes
- $\{U\}$  champ de déplacement solution du problème étudié

La résolution du problème temporel de l'équation I.16 est effectuée généralement par la méthode incrémentale. Toutefois, l'intervalle d'étude est discrétisé en incrément de temps (ou de chargement) relativement petit.

Il est à noter que l'objectif de la résolution numérique du système linéaire I.16 est de trouver, à chaque incrément de temps, les solutions du champ de déplacement résultant de l'approximation par Éléments Finis et satisfaisant l'équilibre d'une structure élastique non linéaire. Autrement dit, la résultante des forces internes doit équilibrer les forces externes. Ceci conduit à une représentation vectorielle donnée par les valeurs du champ de déplacement  $\{U\}$  afin de minimiser un résidu  $\{R\}$  :

$$\{R(U)\} = \{K(U)\} - \{F^{ext}\} \approx \{0\} \quad (\text{I.17})$$

En d'autres termes, le résidu s'écrit :

$$\langle u^* \rangle \{R(u)\} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* dV - \int_{\Omega} (\rho \cdot \underline{f}_d) \underline{u}^* dV + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* dS \quad (\text{I.18})$$

La relation I.17 est une équation non linéaire qui nécessite une procédure numérique itérative pour la minimisation de  $\{R(U)\}$  à chaque incrément de temps. Pour cela, un schéma de type Newton-Raphson [3, 39, 176] est utilisé. A titre indicatif, dans le cadre de l'élasticité linéaire, la relation I.17 est linéaire, et dans ce cas, aucune linéarisation de type Newton-Raphson ou de discrétisation temporelle n'est requise.

La méthode de Newton-Raphson possède un caractère itératif et la solution est calculée sous forme d'une suite de solutions approchées. La limite est la solution  $\{U\}$  de l'équation I.17 issue d'une modélisation par Éléments Finis [38]. Ainsi, à chaque itération, un développement limité d'ordre 1 du résidu est appliqué :

$$\{R(U)\}^{j+1} \approx \{R(U)\}^j + \frac{\partial R}{\partial U}(\{U\}^j) \{\delta U\}^j \quad (\text{I.19})$$

où  $j$  est l'indice d'itération de Newton-Raphson,  $\{R(U)\}^j$  est le résidu donné à l'itération  $j$ . Le terme  $\{\delta U\}^j$  est la correction ajoutée à la solution à l'itération courante, soit :

$$\{U\}^{j+1} = \{U\}^j + \{\delta U\}^j \quad (\text{I.20})$$

Le procédé de correction à travers  $\{\delta U\}^j$  est répété afin de trouver la quantité de  $\{U\}^{j+1}$  la plus proche de  $\{U\}^j$  qui minimise la relation I.19, autrement dit la résolution du système linéaire suivant :

$$\{R(U)\}^j + [K_T]^j \{\delta U\}^j = \{0\} \quad (\text{I.21})$$

Ainsi la correction à l'itération  $j$  est :

$$\{\delta U\}^j = [K_T^{-1}]^j \{R\}^j \quad (\text{I.22})$$

où  $[K_T]$  traduit la matrice de rigidité tangente [110, 231, 107] exprimée à chaque itération  $j$  par :

$$[K_T]^j = \nabla_U \{R(U)\}^j = \frac{\partial R}{\partial U} (\{U\}^j) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} : \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)^j : \varepsilon^* dV = \int_{\Omega} [B]^T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right]^j [B] \cdot \{\varepsilon^*\} dV \quad (\text{I.23})$$

L'algorithme de Newton-Raphson est répété jusqu'à ce que la convergence soit atteinte, permettant la résolution de l'équation non linéaire I.17. Posons  $\{\Delta U\}$  l'incrément du champ de déplacement. En tenant compte des relations précédentes, la relation incrémentale de l'équilibre I.16 est donnée par :

$$[K_T]^j \{\Delta U\}_i^j = \{\Delta F^{ext}\}^j \quad (\text{I.24})$$

La stratégie de calcul consiste à appliquer à l'instant  $i$  un incrément de chargement  $\{\Delta F^{ext}\}$  afin de calculer l'incrément du champ de déplacement correspondant à l'itération  $j$ . À partir du champ de déplacement calculé à cette itération, le champ de contrainte, la déformation plastique ainsi que les variables internes sont ensuite calculés par la résolution de la loi de comportement. Si la convergence est obtenue à cette itération, on passe à l'incrément suivant  $i + 1$ . Sinon, un nouvel incrément de déplacement est calculé à l'itération suivante  $j + 1$  (Eq. I.20) à partir d'un nouveau résidu  $\{R(U)\}^{j+1}$  (Eq. I.19). Cette stratégie est présentée à la figure I.2.

Par ailleurs, la méthode de Newton-Raphson est appliquée pour résoudre le problème à l'itération  $j$  faisant apparaître des déformations inélastiques finies, la linéarisation de la formulation faible est effectuée. Avec cette linéarisation, il est toutefois nécessaire de calculer la matrice tangente [251]. Pour des problèmes fortement non linéaires et contenant un grand nombre de ddl, la factorisation de la matrice de rigidité tangente, à chaque itération, engendre un coût de calcul important, ce qui rend la résolution du système linéaire très coûteuse en temps CPU. Ce temps de calcul est également proportionnel à la discrétisation temporelle et donc au nombre de cycles simulés.

### 2.3 Algorithme de la méthode incrémentale

La figure I.3 présente l'algorithme général de cette méthode qui résume les différentes étapes à suivre.

La résolution de la loi de comportement de la deuxième étape permet de calculer les champs de contrainte, de déformation plastique ainsi que les variables internes. La dernière étape consiste à la vérification de la convergence des résultats par :

$$\|Res\| = \frac{\|R\|}{\|F^{ext}\|} < \epsilon_{tol} \quad (\text{I.25})$$

où  $\epsilon_{tol}$  est un paramètre fixé par l'utilisateur et  $Res$  est appelé résidu. Si la norme de ce résidu est inférieure ou égale à  $\epsilon_{tol}$ , l'algorithme est convergé, sinon il faut faire une autre itération et revenir à la première étape. Ce schéma itératif est répété jusqu'à la convergence de la solution pour chaque incrément de temps.

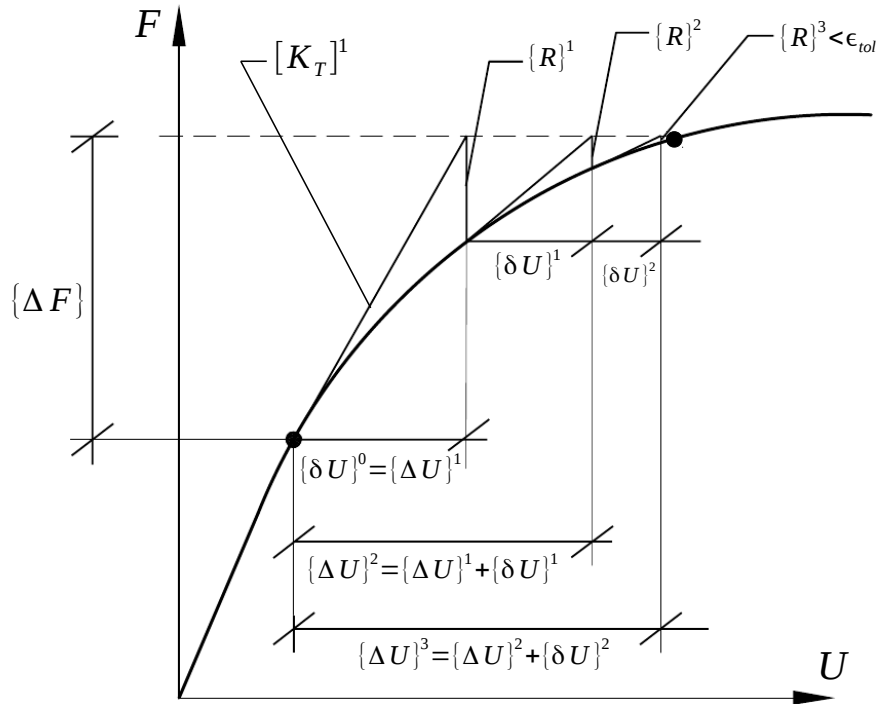


FIGURE I.2 – Stratégie de résolution d'équilibre avec un chargement élasto-plastique

## 2.4 Synthèse et applications

La méthode des Éléments Finis est généralement prise comme référence pour le calcul non linéaire des structures. Elle est couramment utilisée dans les codes de calcul commerciaux et académiques (Abaqus [1], ZeBuLoN [43], ANSYS [23], ...). Pour la modélisation numérique des agrégats polycristallins, la méthode des Éléments Finis est la méthode la plus utilisée. Il existe néanmoins d'autres méthodes plus performantes en termes de temps de calcul telles que : la méthode spectrale (FFT) [166, 159, 138, 139] et la méthode auto-cohérente [158, 140, 162, 179]. Contrairement à la méthode des éléments finis, la méthode spectrale FFT nécessite à la fois une microstructure et des conditions aux limites périodiques. Ainsi pour tenir compte de l'effet d'une surface libre dans le cadre de la fatigue, il est nécessaire de conduire une modélisation ingénieuse [91]. Pour la méthode auto-cohérente, malgré la possibilité de modéliser le polycristal en fatigue à grand nombre de cycles, il n'est pas aisé de traduire les géométries complexes des grains et l'interaction entre les grains [259] (comportement d'un grain par rapport à son voisinage). La solution calculée avec la méthode auto-cohérente est une approximation obtenue en regroupant les grains de même orientation cristalline dans des "phases", chacune étudiée comme une inclusion (souvent sphérique ou ellipsoïdale) avec des conditions homogènes équivalentes reproduisant les propriétés du polycristal [178]. Ce type de méthode ne permet pas de prendre en compte l'effet de certains paramètres importants pour la simulation dans le cadre de la fatigue (défaut géométrique, effet de voisinage, ...). D'autre part, les travaux de Robert et Mareau [208] ont montré qu'il y a des écarts au niveau des champs mécaniques mésoscopiques (moyennés par grain) d'un polycristal obtenus par les méthodes FFT et auto-cohérente comparés à ceux obtenus par la méthode des Éléments Finis. Concernant le temps de calcul, la méthode FFT permet des gains sensibles, mais le gain avec la méthode auto-cohérente est plus intéressant ce qui offre la possibilité de travailler à grand nombre de cycles.

D'une manière générale, pour modéliser les effets de microstructure sur la réponse en fatigue, la méthode des Éléments Finis reste la plus utilisée. Guilhem et al. [94, 95, 93] ont

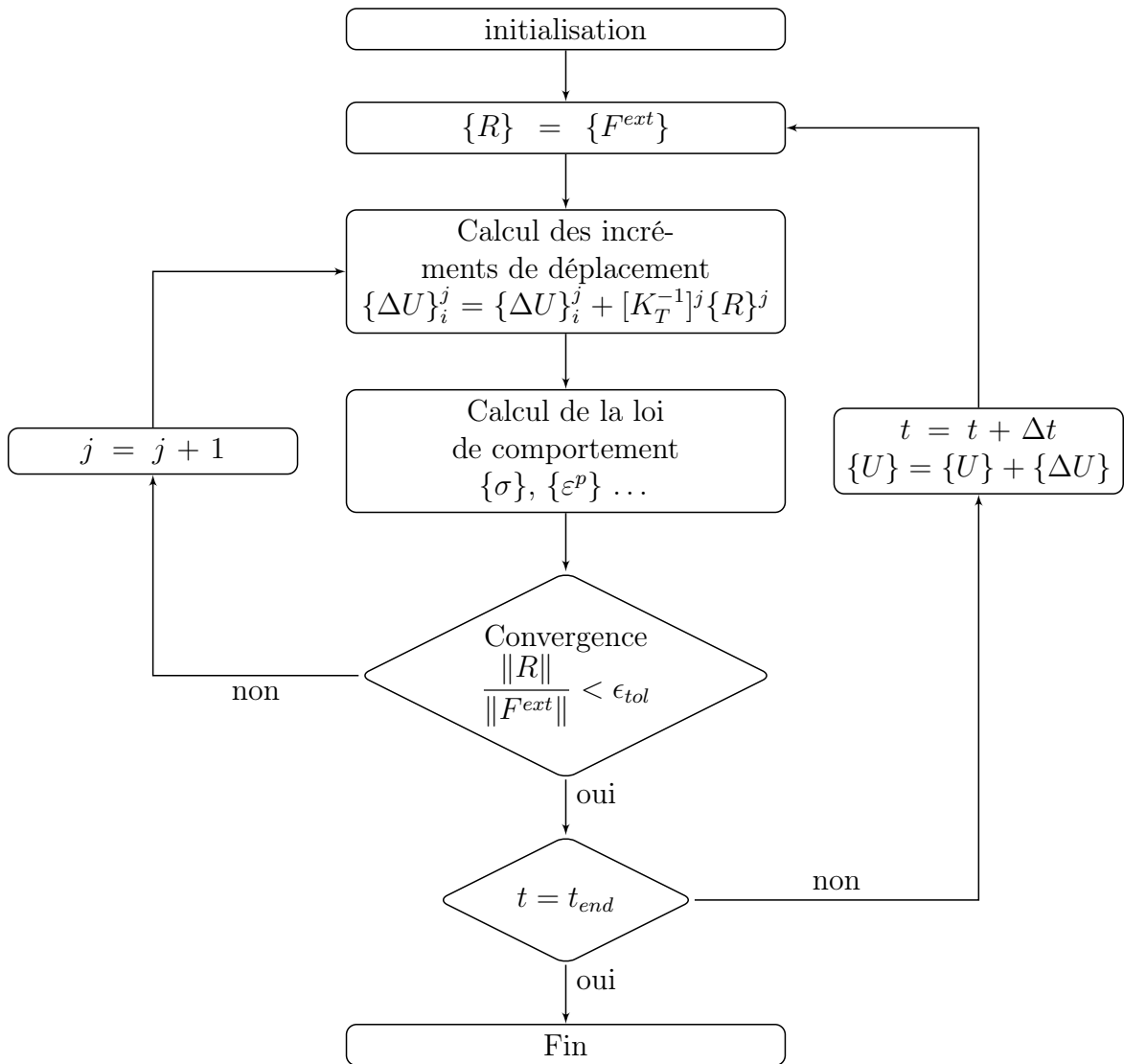


FIGURE I.3 – Algorithme de la méthode incrémentale

étudié les effets de surface libre, de joints de grain ainsi que de l'anisotropie du comportement élasto-plastique sur le phénomène d'amorçage des fissures en fatigue. Hor et al. [104] ont étudié la sensibilité de la microstructure en termes de morphologie, orientation et texture des grains en fatigue multiaxiale. Guerchais et al. [89, 90, 87] ont étudié la méthode des éléments finis pour modéliser des agrégats polycristallins contenant des défauts géométriques pour étudier leur influence sur le comportement en FGNC. D'autres auteurs ont utilisé cette méthode [32, 145, 230, 198] afin d'analyser les champs mécaniques locaux pour traiter les problèmes d'amorçage de fissures en fatigue. Malheureusement, pour des problèmes à grand nombre de ddl et fortement non linéaires, cette méthode semble contraignante vu le temps de calcul important. Au plus, les simulations d'agrégats polycristallins sont conduites sur quelques dizaines de cycles [209, 88], alors que pour la FGNC, il est nécessaire de simuler toute la durée de vie qui est souvent aux alentours de  $10^6$  cycles. D'où la nécessité de s'orienter vers les méthodes accélérées afin d'atteindre numériquement la réponse stabilisée.

### 3 Méthodes numériques accélérées de détermination de l'état stabilisé

De nombreux auteurs cherchent à développer des méthodes accélérées pour réduire le coût de calcul de la méthode des éléments finis. Ces méthodes sont de différentes natures : des méthodes qui traitent l'évolution des variables locales en tout point de la structure telle que la méthode LATIN, la méthode des sauts de cycles, la méthode cyclique directe, la méthode de Zarka et des méthodes pouvant donner une approximation des variables locales au point critique telle que les méthodes du type Neuber. Bien que théoriquement bien établies, les méthodes du type Neuber [169] ne seront pas présentées dans ce document, car elles ne se limitent qu'à de la plasticité confinée. En d'autres termes, les variables ne sont calculées pour tous les pas de temps qu'au point critique. Dans le cadre de la modélisation des agrégats polycristallins, les champs de contraintes et déformations sont fortement hétérogènes (au sein d'un même grain ou entre les différents grains). Ainsi, il est difficile de connaître a priori un point critique où la fissure s'amorce. Pour plus de détail sur les méthodes du type Neuber, le lecteur pourra se référer aux travaux de [100, 210, 211]. La méthode de Zarka, même si elle permet de donner la réponse asymptotique d'une structure avec des économies de temps de calcul conséquents par rapport à une méthode classique, elle est développée avec un écoulement cinématique linéaire. Ce qui n'est pas le cas du comportement à l'échelle des grains. La méthode de Zarka est présentée en Annexe B. Trois méthodes accélérées, méthode à grand incrément de temps, cyclique directe et la sauts de cycles seront présentées.

#### 3.1 Méthode à grand incrément de temps (LATIN)

La méthode à grand incrément de temps (LArge Time INcrement : LATIN) a été développée par Ladevèze et al. [126, 127, 36, 63, 129] pour étudier les problèmes d'évolution non linéaires physique ou géométrique. Contrairement à la méthode incrémentale présentée précédemment, la solution est recherchée d'une façon itérative sur tout l'intervalle temporel étudié. Avec cette méthode, on propose de séparer les équations du problème en deux espaces dits global et local et de les résoudre indépendamment.

Le caractère non-incrémental de la méthode ainsi que la notion de séparation des équations du problème constituent un aspect fondamental de la méthode LATIN. La littérature est riche en propositions de modélisation issues de la méthode LATIN avec une variété de stratégies de séparation des équations selon le contexte étudié [48, 135, 188, 75, 132]. Le détail de la méthode LATIN est un peu long pour être développé ici. Elle est présentée en annexe A selon une stratégie de séparation définie par deux espaces contenant l'ensemble des solutions (Fig. I.4) :

- Espace global : contient les équations d'équilibres, linéaire et globale en espace
- Espace local : contient les équations de comportement, non linéaire et locale en espace

Cette technique de séparation est aussi retenue pour l'utilisation de la méthode PGD dans le chapitre II. Chaque itération de la méthode LATIN fournit une approximation de la solution sur toute l'histoire temporelle. Une itération contient donc deux étapes (globale et locale) et le passage entre elles est effectué à travers des directions de recherche  $E^+$  et  $E^-$ . La solution du problème  $S_{ref}$  est définie par l'intersection de deux espaces global et local (Fig. I.4).

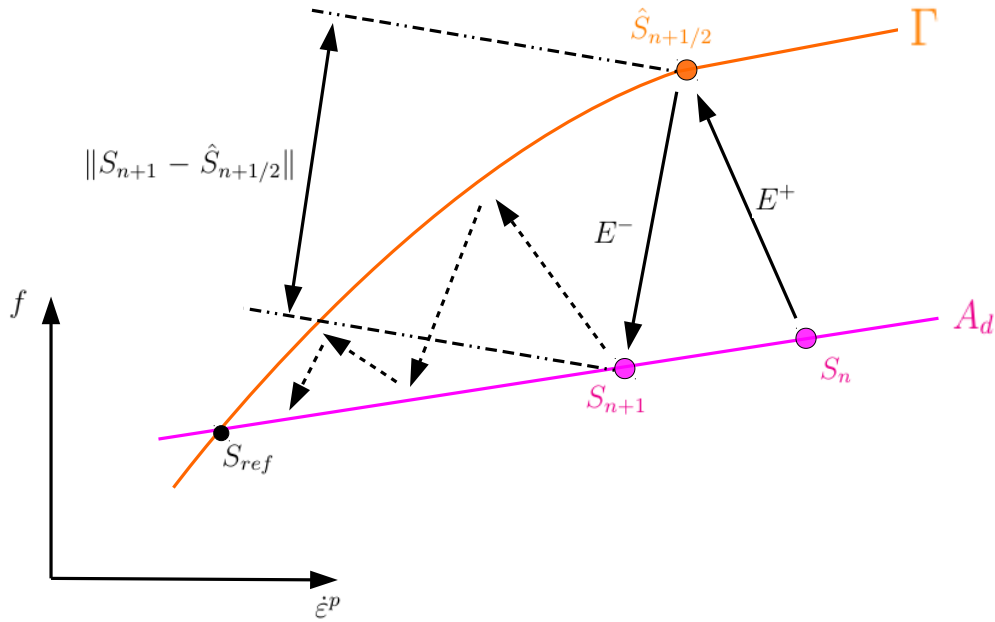


FIGURE I.4 – Principe de la méthode LATIN

### 3.2 Méthode cyclique directe

Cette méthode a été développée par Maouche et al.[156] et Pommier et al.[194]. Elle est conçue pour la résolution des problèmes non linéaires avec des structures soumises à des chargements mécaniques et thermomécaniques à caractère cyclique. Le but de cette méthode (appelée aussi DCA : Direct Cycle Analysis) est de déterminer directement la solution asymptotique du problème. Elle se base sur quelques points-clés :

- étude d'un seul cycle de chargement ;
- séparation de la résolution des équations dites globales et locales comme dans le cadre de la méthode LATIN ;
- condition de périodicité temporelle.

#### 3.2.1 Principe de la méthode DCA

Cette technique de résolution se base sur la détermination directe de la réponse asymptotique ainsi que l'évolution des grandeurs mécaniques sur le cycle stabilisé. Elle s'appuie sur un processus itératif sur un cycle de chargement et se décompose en quatre étapes (figure I.5) :

1. L'étape globale. Cette partie traite la résolution des équations d'équilibre par un système global sur toute la structure pour trouver les champs cinématiquement (CA) et statiquement admissibles (SA) ;
2. L'étape locale. Les solutions de l'étape globale sont utilisées à ce stade pour la recherche des champs qui vérifient la loi de comportement. Il s'agit de la résolution des équations, généralement non linéaires, locale en chaque point d'intégration de la structure ;
3. La condition de périodicité. Cette étape consiste à affecter les valeurs des variables internes et des déformations plastiques, calculées à l'étape locale à la fin du cycle, à celles calculées au début du cycle ;
4. La condition d'arrêt. Une fois la convergence désirée obtenue, cette étape permet d'arrêter le processus itératif.

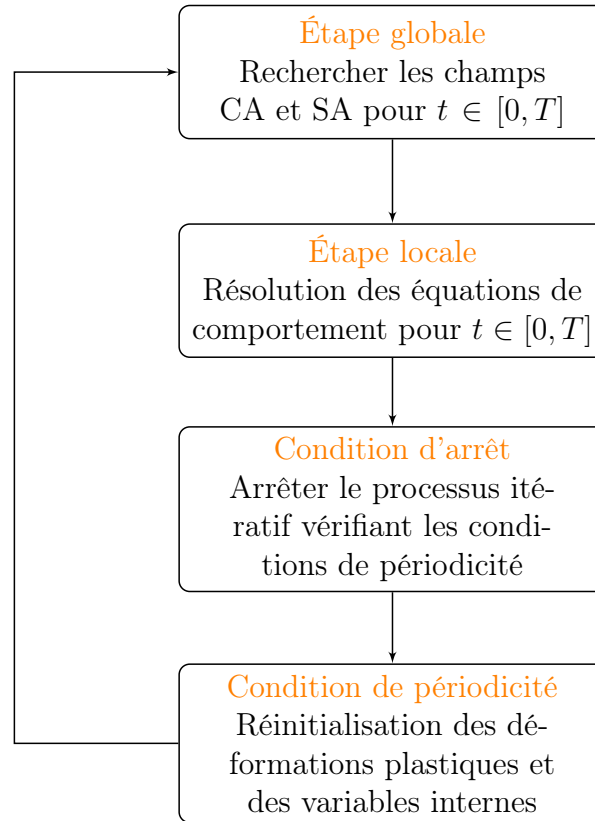


FIGURE I.5 – Principe et étapes de la méthode cyclique directe

Les détails de chaque étape dans l’application de la méthode cyclique directe sont maintenant présentés.

### 3.2.2 Étape globale

Cette étape consiste à déterminer les solutions statiquement et cinématiquement admissibles. A Contrario de la méthode incrémentale qui résout à la fois les équations locales et globales, la méthode cyclique directe découple les problèmes en supposant les champs de déformation plastique connus sur tout le cycle et en tout point de la structure. Les champs de déformation plastique seront ensuite calculés dans l’étape suivante (étape locale). Ainsi, l’étape globale consiste à la résolution de l’équation d’équilibre 1.26 donnée à chaque pas de temps appartenant à l’intervalle  $[0, T]$ .

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{Q^p\} \quad (\text{I.26})$$

avec :

- $[K]$  la matrice de rigidité élastique, qui dépend éventuellement du temps ;
- $\{U\}$  le vecteur des déplacements aux nœuds de la structure ;
- $\{F\}$  le vecteur des efforts nodaux dus aux forces volumiques et surfaciques ;
- $\{Q^p\}$  le vecteur des forces nodales résultantes du champ de déformation plastique  $\{\varepsilon^p\}$ .

Le vecteur  $\{Q^p\}$  est défini par l’équation 1.27. Soit :

$$\{Q^p\} = \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] \{\varepsilon^p\} d\Omega \quad (\text{I.27})$$

avec  $[B]$  la matrice élémentaire d’interpolation des déformations et  $[C^{el}]$  le tenseur d’élasticité. Il est à noter qu’en pratique, la résolution de l’équilibre 1.26 est effectuée en gardant la



matrice  $[K]$  constante sur tout le cycle. Cette écriture sera ensuite détaillée et utilisée dans la section 3 du chapitre II.

### 3.2.3 Étape locale

C'est l'étape de la résolution des équations non linéaires locales en chaque point d'intégration, qui vérifient la loi de comportement à partir des solutions trouvées dans l'étape globale.

La solution de l'étape locale donne, pour tous les pas de temps, les champs de déformation plastique, de contraintes plastiquement admissibles et les variables internes vérifiant la loi de comportement à tous les instants.

### 3.2.4 Condition de périodicité

L'hypothèse forte de cette méthode est la périodicité de la solution. Pour imposer cette périodicité, les valeurs des déformations plastiques ainsi que les variables internes, calculées à l'étape locale au début du cycle, sont prises égales à celles calculées à la fin du cycle. Ce changement d'état initial n'a pas d'influence sur l'adaptation, mais peut influencer l'état résiduel [192]. Pour résoudre ce problème, Pommier et al.[194] proposent d'effectuer cinq itérations avant d'appliquer la condition de périodicité.

### 3.2.5 Condition d'arrêt

Cette condition est liée principalement à la notion de stabilisation. Une fois la convergence désirée obtenue, cette étape permet d'arrêter le processus itératif. Elle permet de vérifier, à la fin de l'étape globale, l'admissibilité plastique des contraintes (vérification du critère de plasticité) ainsi que la périodicité des champs de déformation plastique et les variables internes issues de l'étape locale (leurs valeurs doivent être identiques au premier et au dernier instant du cycle). Cette périodicité définit la réponse asymptotique stabilisée de la structure. Si la convergence n'intervient jamais, alors la structure possède un comportement du type rochet.

### 3.2.6 Variante de la méthode

La première version de la DCA a été réalisée par Maouche et al.[156, 157] avec une résolution incrémentale pour l'étape globale. Une version plus efficace en termes de temps CPU a été proposée par Pommier et al.[194, 195]. Cette version se base sur une réduction de modèle pour l'étape globale. Une décomposition en série de Fourier est utilisée. Les variables des efforts et les variables plastiques, sur un cycle, sont décomposées en série de Fourier.  $U(t)$ ,  $F(t)$  et  $Q(t)$  s'écrivent alors sous la forme :

$$U_k = \frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} (U_n^c \cos(nwt_k) + U_n^s \sin(nwt_k)) \quad (\text{I.28})$$

$$F_k = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} (F_n^c \cos(nwt_k) + F_n^s \sin(nwt_k)) \quad (\text{I.29})$$

$$Q_k = \frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} (Q_n^c \cos(nwt_k) + Q_n^s \sin(nwt_k)) \quad (\text{I.30})$$

Les coefficients de développement en série de Fourier des déplacements, des forces ainsi que des variables plastiques sont donnés par :

$$U_n^c = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{N-1} (U_{k+1} \cos(nwt_{k+1}) + U_k \cos(nwt_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} \quad (\text{I.31})$$

$$U_n^s = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{N-1} (U_{k+1} \sin(nwt_{k+1}) + U_k \sin(nwt_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} \quad (\text{I.32})$$

$$F_n^c = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{N-1} (F_{k+1} \cos(nwt_{k+1}) + F_k \cos(nwt_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} \quad (\text{I.33})$$

$$F_n^s = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{N-1} (F_{k+1} \sin(nwt_{k+1}) + F_k \sin(nwt_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} \quad (\text{I.34})$$

$$Q_n^c = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{N-1} (Q_{k+1} \cos(nwt_{k+1}) + Q_k \cos(nwt_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} \quad (\text{I.35})$$

$$Q_n^s = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{N-1} (Q_{k+1} \sin(nwt_{k+1}) + Q_k \sin(nwt_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2} \quad (\text{I.36})$$

L'équation I.26 peut alors se calculer non plus avec  $N_t$  pas de temps, mais en utilisant les fréquences de Fourier. Ensuite, les champs de déplacement obtenus sont recalculés dans le domaine temporel pour la résolution locale des équations de comportement. En général, au cours des premières itérations, un nombre peu élevé de termes de Fourier est utilisé pour donner une approximation grossière, puis augmente progressivement au cours de la convergence [195].

### 3.3 Méthode des sauts de cycles

La méthode des sauts de cycles permet de calculer un grand nombre de cycles par interpolations successives. Elle a été développée par Savalle et Culié [226] et Lesne et Savalle [143]. Le principe de cette méthode est d'exprimer l'évolution des variables internes en fonction du nombre de cycles et non en fonction du temps.

Soit  $\{Y\}$  le vecteur ayant comme composantes les variables internes exprimées en fonction du nombre de cycles et  $\{y\}$  le vecteur ayant comme composantes les mêmes variables internes mais exprimées en fonction du temps. Soit un instant particulier  $\tau$  dans le cycle ( $0 \leq \tau \leq T$ ), de préférence dans le domaine élastique, avec  $T$  la période. La valeur de  $\{Y\}$  au cycle  $N$  est donnée par :

$$\{Y(N)\} = \{y\}((N - 1)T + \tau) \quad (\text{I.37})$$

Un développement de Taylor au second ordre de  $\{Y(N)\}$  est utilisé pour représenter l'évolution des variables internes au cours des cycles. Le  $\Delta N$  est choisi pour que le développement de Taylor soit représentatif. Soit :

$$\{Y(N + \Delta N)\} = \{Y(N)\} + \{Y'(N)\}\Delta N + \{Y''(N)\} \frac{(\Delta N)^2}{2} \quad (\text{I.38})$$

Il faut déterminer tout d'abord  $\{Y'(N)\}$  et  $\{Y''(N)\}$ . Soit 3 cycles  $M$ ,  $N$  et  $K$  (voir figure I.6) tel que  $M < N < K$  pour lesquels les composantes de  $\{Y(M)\}$ ,  $\{Y(N)\}$ , et  $\{Y(K)\}$  sont connues.  $\{Y'\}$  peut être écrit en différence finie par :

$$\{Y'(N)\} = \frac{\{Y(N)\} - \{Y(K)\}}{N - K} \quad (\text{I.39})$$

Si on pose :

$$N = M + \Delta N \quad (\text{I.40})$$

l'expression de la dérivé seconde s'écrit alors :

$$\{Y''(N)\} = \frac{2}{(N - M)^2} [\{Y(M)\} - \{Y(N)\} + (N - M)\{Y'(N)\}] \quad (\text{I.41})$$

Il est tout à fait envisageable de faire l'hypothèse que le terme de second ordre du développement de Taylor soit négligeable devant le premier, et ceci, pour chaque composante du vecteur  $\{Y(N)\}$ . Ce qui revient à :

$$\frac{1}{2}\{Y''(N)\}(N - M)^2 \ll \{Y'(N)\}(N - M) \quad (\text{I.42})$$

ou bien :

$$(N - M) = \Delta N \ll \frac{2\{Y'(N)\}}{\{Y''(N)\}} \quad (\text{I.43})$$

En introduisant un facteur de précision  $\eta$ , qui doit être faible,  $\Delta N$  s'écrit :

$$\Delta N = 2\eta \min \left\{ \frac{Y'(N)}{Y''(N)} \right\} \quad (\text{I.44})$$

Ainsi  $\Delta N$  de l'équation I.44 traduit le nombre de cycles à sauter. La précision des résultats dépend donc directement du facteur de précision  $\eta$ . Il doit être inférieur à 1, et en pratique, ce facteur est pris égale à 0.01 pour avoir des résultats satisfaisants [223].

## 4 Méthodes de réduction de modèle

### 4.1 Introduction

La modélisation numérique d'un problème mécanique non linéaire défini sur un grand domaine et sur une grande échelle de temps est coûteuse en temps CPU et en mémoire informatique en utilisant la méthode classique. Il est donc nécessaire de développer et d'utiliser des outils et méthodes numériques robustes et modulables pour résoudre ce problème. Il existe une famille de méthodes accélérées différentes de celles présentées précédemment, appelée méthodes de réduction de modèle, qui consistent à chercher la solution sous la forme d'une approximation à variables séparées sur des bases de taille réduite. Soit  $U$  la solution d'une équation définie dans un espace de dimension  $N$  et de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . L'écriture de l'approximation de la solution avec la forme séparée est donnée par :

$$U(x_1, \dots, x_N) \approx \sum_{i=1}^{n_x} F_{x_1}^i \otimes \dots \otimes F_{x_N}^i \quad (\text{I.45})$$

où  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  peuvent définir des variables tensorielles (espace, temps ou des paramètres).  $F_k^i$  sont les fonctions définies dans l'espace  $x_k$  avec  $k = 1, 2, \dots, N$ .  $n_x$  est appelé

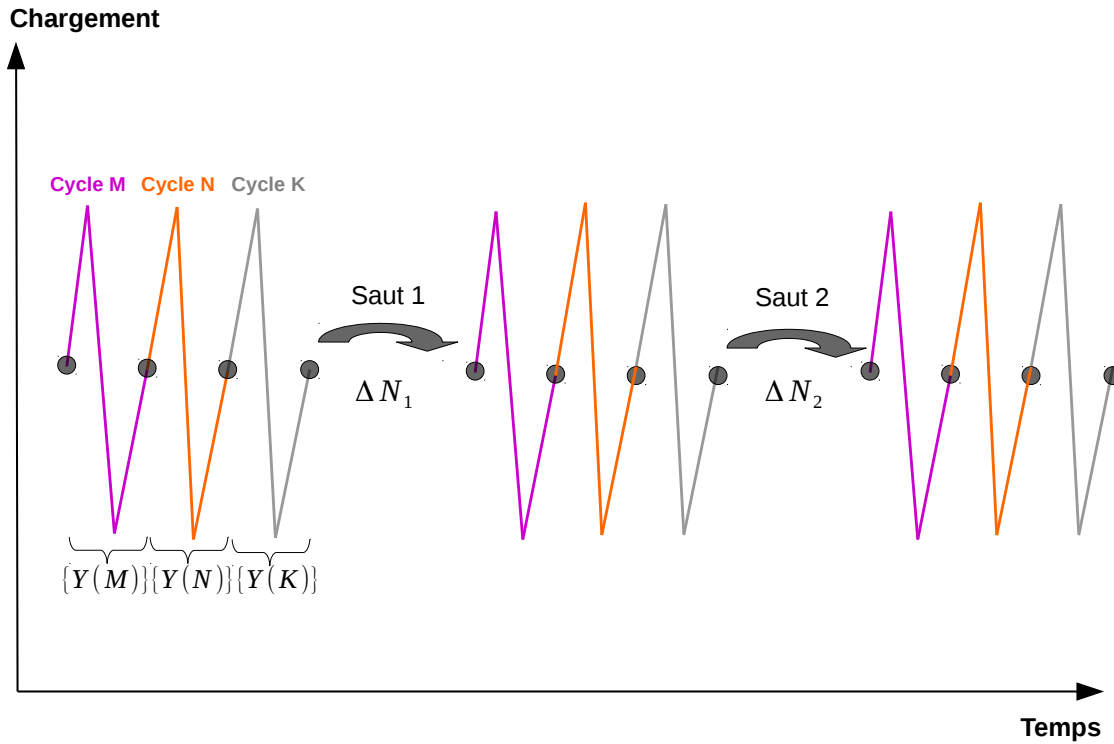


FIGURE I.6 – Principe de la méthode des sauts de cycles

rang de séparation permettant de représenter la solution sous une forme séparée. Dans ce cas, le nombre de ddl du problème à résoudre devient  $n_x$  et n'est plus lié au nombre des nœuds. Ainsi, si  $n_x$  est négligeable devant le nombre des nœuds, ceci permet de réduire la taille du modèle à résoudre et notamment les coûts numériques.

L'utilisation de l'écriture séparée I.45 a été appliquée depuis quelques années dans beaucoup de domaines et avec une variété d'algorithmes de décomposition. Dans notre cas, l'étude portera sur les problèmes espace/temps avec une représentation séparée donnée par :

$$U(\underline{X}, t) \approx \sum_{i=1}^{n_u} F_{\underline{X}}^i \otimes F_t^i \quad (\text{I.46})$$

où  $F_{\underline{X}}^i$  et  $F_t^i$  sont les fonctions respectivement définies dans l'espace  $\underline{X}$  et  $t$  qui peuvent être déterminées pour  $i = 1, 2, \dots, n_u$  pour une représentation de la solution sous une forme séparée.

Le principe général des méthodes de réduction de modèle consiste dans un premier temps à construire une base réduite de taille inférieure au nombre de ddl du problème. Ces méthodes d'approximation peuvent être classées en deux catégories selon la solution recherchée. Parmi les méthodes dites "*a posteriori*" où la construction de la base réduite est effectuée avec une connaissance de la solution ou parfois une partie de la solution, nous présenterons dans ce chapitre la Décomposition en valeurs singulières (Singular Value Decomposition - SVD), la Décomposition Orthogonale en modes Propres (Proper Orthogonal Decomposition - POD) et la Décomposition de Karhunen-Loève (Karhunen-Loève Decomposition - KLD). La deuxième catégorie de méthodes de réduction de modèles est dite "*a priori*". Dans ce cas, la construction de la base réduite ne nécessite aucune connaissance de la solution. Parmi ces méthodes, nous présenterons la méthode A Priori Reduction (APR), la A Priori HyperReduction method (APHR) ainsi que la Proper Generalized Decomposition (PGD). Dans ce qui suit, les différents techniques dédiées à ces méthodes seront présentées ainsi que leurs cadres d'applications.

## 4.2 Méthodes de réduction a posteriori

### 4.2.1 La Décomposition en valeurs singulières (SVD)

La décomposition en valeurs singulières (SVD) est devenue depuis quelques dizaines d'années un outil idéal pour un nombre croissant de problèmes linéaires. Cette décomposition a été proposée il y a plus de cent ans, avec les travaux de Beltram (1873) et Jordan (1874) sur les formes quadratiques [84] avec matrices à coefficients réels, puis a été généralisée pour tout type de matrice en 1939 par Eckhart et Young. Au cours de son développement, la SVD a été réinventée par d'autres auteurs pour une variété d'applications. Différents noms lui ont été donnés. En statique [190, 78], elle s'est appelée Analyse en Composantes Principales (PCA). Par la suite, Karhunen [116] et Loève [149] ont proposé une technique d'approximation appelée la Décomposition de Karhunen-Loève (KLD) avec une base orthonormée dans des espaces de dimension infinie. Enfin, la SVD est utilisée sous l'abréviation de la Proper Orthogonal Decomposition (POD) en turbulence [151]. La SVD a été appliquée dans plusieurs domaines par exemple en thermique [7, 8], en traitement des signaux [69] et en compression d'image [242]. Dans ce qui suit, le principe de la SVD sera présenté pour des matrices à coefficients réels et complexes.

#### Principe de la SVD

Soit  $U(x, t)$  un champ solution tel que  $x \in \Omega$  et  $t \in \mathcal{I}$ . Le but de la SVD est de minimiser l'écart entre la solution exacte et sa représentation séparée réduite  $U_{SVD}$  :

$$\min \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_x} \|U(x_j, t_i) - U_{SVD}(x_j, t_i)\| \quad (\text{I.47})$$

Soit une matrice  $[A]$  de dimension  $(N_x \times N_t)$  qui contient des snapshots (i.e. un nombre de réalisations ou clichés) d'un champ de déplacement  $U$ . Soit :

$$A = \begin{pmatrix} U_1(x_1) & \dots & U_{N_t}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_1(x_{N_x}) & \dots & U_{N_t}(x_{N_x}) \end{pmatrix} \quad (\text{I.48})$$

Appliquer la SVD sur  $[A]$  consiste à décomposer cette matrice sous la forme suivante :

$$[A] = [U].[S].[V]^T \quad (\text{I.49})$$

où  $[U]$  est une matrice orthogonale de dimension  $(N_x \times N_x)$  avec  $[U][U]^T = \mathbf{I}$ ,  $[V]$  est une matrice orthogonale de dimension  $(N_t \times N_t)$  avec  $[V][V]^T = \mathbf{I}$  et  $[S]$  est une matrice diagonale de dimension  $(N_x \times N_t)$ . Les matrices  $[U]$  et  $[V]$  contiennent respectivement les vecteurs singuliers droits et gauches de  $[A]$  avec un rang  $a$  qui correspond au nombre de valeurs singulières non nulles de cette matrice. La multiplication de l'équation I.49 par  $[A]^T$  donne les relations suivantes :

$$[A] [A]^T = ([U][S][V]^T)([U][S][V]^T)^T = [U][S][V]^T[V]^T[S]^T[U]^T \quad (\text{I.50})$$

$$[A]^T[A] = ([U][S][V]^T)^T([U][S][V]^T) = [V][S]^T[U]^T[U][S][V]^T \quad (\text{I.51})$$

Les matrices  $[U]$  et  $[V]$  sont orthogonales et  $[S]$  est une matrice diagonale. Ainsi, en utilisant ces propriétés, les équations I.50 et I.51 peuvent s'écrire :

$$[A] [A]^T = [U][S]^2[U]^T \quad (\text{I.52})$$

$$[A]^T[A] = [V][S]^2[V]^T \quad (\text{I.53})$$

Les équations I.52 et I.53 présentent bien un problème aux valeurs propres associés respectivement aux matrices  $[A]$   $[A]^T$  de taille  $(N_x \times N_x)$  et  $[A]^T[A]$  de taille  $(N_t \times N_t)$  telles que les colonnes de  $[U]$  sont les vecteurs propres de  $[A][A]^T$  et les colonnes de  $[V]$  sont les vecteurs propres de  $[A]^T[A]$ . Si la SVD est appliquée pour une matrice de dimension très grande (i.e.  $N_x$  et  $N_t$  grand), la résolution classique de la SVD (équation I.49) pourrait engendrer des problèmes au niveau du temps de calcul et en mémoire de stockage. Pour s'affranchir de ce problème, il existe trois versions réduites de la SVD qu'il est recommandé d'utiliser [163].

### La SVD Fine

Cette version est recommandée lorsque  $N_x \gg N_t$ . Dans ce cas, les vecteurs colonnes de  $[U]$  utilisés correspondent au nombre de vecteurs colonnes de  $[V]$ . Au lieu de travailler avec une matrice  $[U]$  de dimension  $(N_x \times N_x)$ , le calcul est effectué avec une matrice de dimension  $(N_x \times N_t)$  et les matrices  $[S]$  et  $[V]$  sont de dimension  $(N_t \times N_t)$ . Donc l'équation I.49 s'écrit :

$$[A] \approx [U]_{(N_x \times N_t)} [S]_{(N_t \times N_t)} [V]_{(N_t \times N_t)}^T \quad (\text{I.54})$$

La comparaison entre les équations I.49 et I.54 montre que le coût de stockage des matrices avec la SVD fine est plus économique qu'avec la SVD classique. Donc si  $(N_x \gg N_t)$  est vérifié, le mieux est d'utiliser cette version.

### La SVD compacte

La diagonale de  $[S]$  contient  $n = \min(N_x, N_t)$  valeurs  $(S_1, \dots, S_n) \in \mathbb{R}$  telles que  $S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_a > S_{a+1} = S_{a+2} = \dots = 0$  ( $a$  est le rang de  $[A]$ ). Avec la SVD compacte, le calcul sera effectué avec les  $a$  premiers vecteurs colonnes de  $[U]$  et vecteurs lignes de  $[V]$  qui traduisent les valeurs singulières non nulles de  $[S]$ . Ainsi, les matrices  $[U]$  et  $[V]$  seront respectivement de dimensions  $(N_x \times a)$  et  $(N_t \times a)$ . Soit  $[S_a] = \text{diag}(S_1, \dots, S_a)$ , l'équation I.49 s'écrit encore :

$$[A] \approx [U]_{(N_x \times a)} [S_a] [V]_{(N_t \times a)}^T \quad (\text{I.55})$$

Si  $a < N_t$  la dimension des matrices avec la SVD Compacte est plus faible que dans le cas de la SVD fine ( $(N_x \times a) \ll (N_x \times N_t)$  par exemple). Ainsi l'utilisation de cette version de la SVD est favorable en termes de rapidité et de stockage si la condition  $a < N_t$  est vérifiée.

### La SVD Tronquée

Posons  $r$  la valeur qui correspond aux plus grandes valeurs singulières de  $[S_a]$  c'est à dire les valeurs les plus grandes au sens énergétique. Ce choix est effectué à partir d'un paramètre  $\epsilon_{SVD}$  définie par l'utilisateur tel que le nombre de modes retenus soit  $r = S_i/S_1 \geq \epsilon_{SVD}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Cette version de la SVD ne s'intéresse qu'aux  $r$  vecteurs colonnes de  $[U]$  et vecteurs lignes de  $[V]$  et les dimensions de ces deux matrices sont respectivement  $(N_x \times r)$  et  $(N_t \times r)$ . Notons  $[S_r] = \text{diag}(S_1, \dots, S_r)$ , l'équation I.49 s'écrit :

$$[A] \approx [U]_{(N_x \times r)} [S_r] [V]_{(N_t \times r)}^T \quad (\text{I.56})$$

Si  $r < a$  le coût de stockage de la SVD tronquée est plus avantageux qu'avec la SVD Compacte et Fine. Si cette condition est vérifiée, les calculs à effectuer avec l'utilisation de cette version seront plus rapides et plus économiques. Un exemple de compression d'image avec la SVD tronquée est donnée en figure I.7 pour une matrice de dimension  $(760 \times 482)$

(figure I.7a). Les résultats montrent qu'il est possible d'obtenir une approximation de la matrice d'entrée sur un nombre réduit de modes (avec 130 modes fig.I.9h). La figure I.8 montre que l'erreur entre l'image d'origine et l'image compressée décroît en fonction du nombre de mode et devient négligeable pour un nombre de modes réduit.

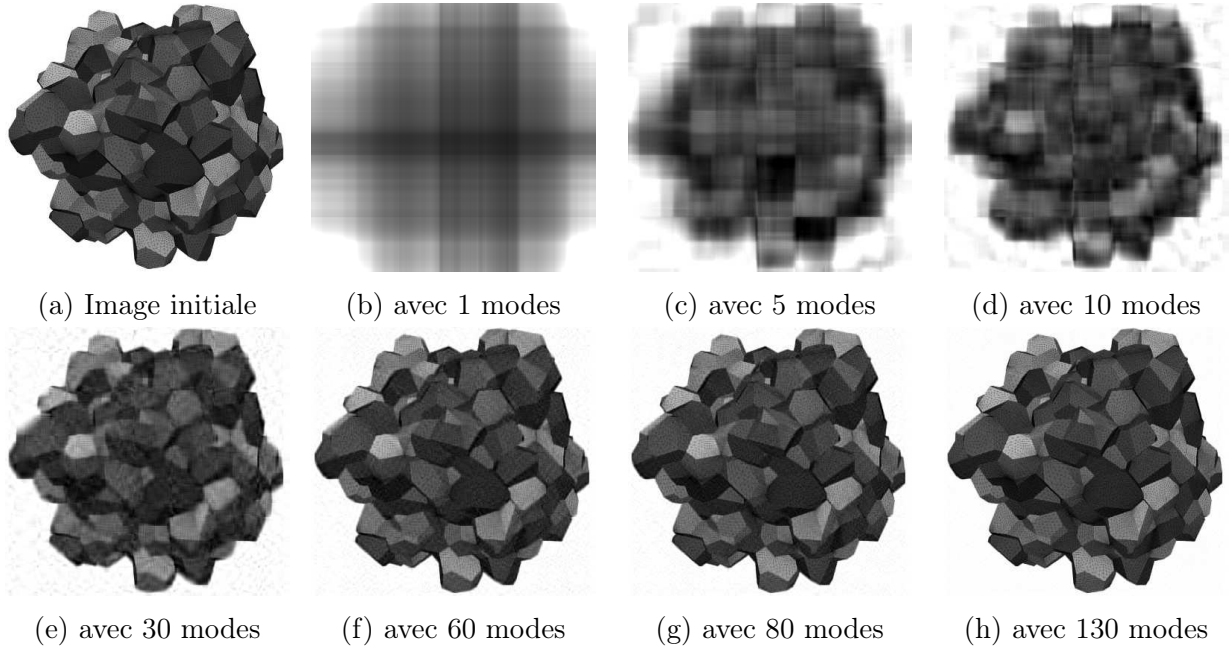


FIGURE I.7 – La compression d'image avec une SVD tronquée pour plusieurs modes  $r$

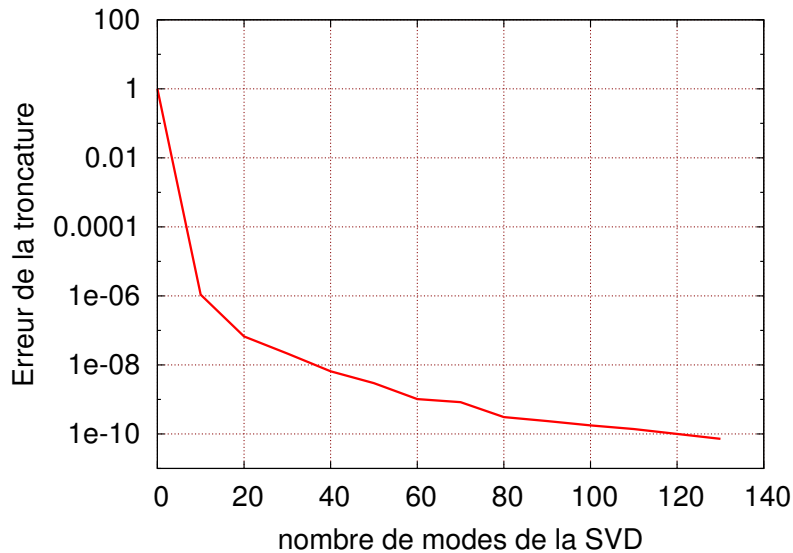


FIGURE I.8 – L'erreur entre l'image d'origine et l'image compression en fonction du nombre de modes

En utilisant l'une des versions de la SVD, il est possible d'obtenir une décomposition spatio-temporelle d'un champ donné  $A(x, t)$ . En effet, les colonnes de la matrice  $[U]$  seront équivalentes à une base spatiale de  $[A]$  et les lignes de la matrice  $[V]$  seront homogènes à une base temporelle de  $[A]$ . Ainsi, l'approximation de la solution s'écrit :

$$A(x, t) \approx \sum_{i=1}^r A_x^i(x) A_t^i(t) \quad (\text{I.57})$$

Cette décomposition de l'équation I.57 est la meilleure approximation de  $[A]$  et optimale au sens énergétique par un nombre de fonction  $r$  réduit. Par ailleurs, en fonction de la définition de  $[A]$ , il est possible d'utiliser la méthode SVD dans le cas de décomposition espace-espace [74], séparation temps-espace ainsi que dans le cas des problèmes multidimensionnels [85, 136].

#### 4.2.2 La Décomposition Orthogonale en modes Propres (POD)

La décomposition orthogonale en modes propres (Proper Orthogonal Decomposition-POD) a été introduite par Lumley [153] pour traiter des problèmes de mécanique des fluides. Ces dernières années, elle a été la méthode de réduction de modèle la plus utilisée dans de nombreux champs disciplinaires tels que la mécanique des fluides [180, 65], les problèmes liés à la turbulence [103, 102], les problèmes de thermique [29], le traitement d'image [236]

...

Le concept original de la méthode POD remonte à Pearson [189] au XXIème siècle. Toutefois, il est possible de considérer la POD de différentes manières selon le contexte d'étude : comme une décomposition de Karhunen–Loève [116, 149], comme une technique d'Analyse en composantes Principales [105]. Elle présente également des liens avec la décomposition en Valeurs singulières (SVD). La POD permet de fournir, d'une manière optimale ordonnée, des fonctions de base nécessaires pour obtenir une approximation satisfaisante pour un ensemble de données théoriques, expérimentales ou pour des calculs avec une dimension réduite à travers un sous espace de faible dimension. Ce modèle d'ordre réduit est alors obtenu en tronquant une base optimale au sens énergétique. Cette dernière est calculée à partir d'une sélection de valeurs propres d'une matrice de corrélation qui définit le nombre de réalisation des paramètres d'entrées.

Soit  $U$  la solution d'un problème spatio-temporelle défini sur  $N = \Omega \times \mathcal{I}$ . Le but de la POD est de trouver une approximation  $U_m$  de la solution  $U$  pour un ordre optimal  $m$ . Soit :

$$[U] \approx [U_m] \approx \sum_{i=1}^m \Phi_x^i \otimes \Psi_t^i \quad (\text{I.58})$$

avec  $x \in \Omega$  et  $t \in \mathcal{I}$  et  $m < N$ . L'ensemble de la base  $\Phi_x^i$  est ici homogène à une base spatiale réduite de  $\underline{U}$  définie sur  $\Omega$  par  $m$  fonctions.  $\Psi_t^i$  est une base temporelle réduite de  $\underline{U}$  définie sur  $\mathcal{I}$  par  $m$  fonctions. La solution donnée par la POD (écriture I.58) permet de traduire une représentation séparée du problème qui minimise à l'ordre  $m$  la distance par rapport à la solution exacte par :

$$\|[U] - [U_m]\|^2 = \min \|[U] - \sum_{i=1}^m \Phi_x^i \otimes \Psi_t^i\|^2 \quad (\text{I.59})$$

où  $\|\cdot\|$  traduit la norme définie sur  $\Omega \times \mathcal{I}$ . Dans ce qui suit, le principe de la méthode POD permettant de construire la base réduite optimale (Eq. I.59) sera présenté.

#### Principe de la méthode POD

Soit  $[U(x, t)]$  la solution d'un problème défini sur  $N = \Omega \times \mathcal{I}$  et soit  $X$  une variable spatio-temporelle.  $[U(x, t)] = [U(X)]$  représente l'ensemble de réalisations (ou aussi snapshots) défini sur tout l'intervalle temporel  $\mathcal{I} = [0, T]$  et spatial  $\Omega$ . Le problème à résoudre consiste à trouver, à partir des champs  $[U(X)]$ , une base orthonormée  $[\Phi]$  au sens des moindres carrés qui possède la plus grande projection de l'ensemble des données [62]. Le but sera de



maximiser sous une contrainte moyenne l'expression suivante :

$$\frac{\langle ([U], [\Phi])^2 \rangle}{([\Phi], [\Phi])} \quad (\text{I.60})$$

avec  $(,)$  le produit scalaire canonique sur un espace de Hilbert et  $\langle \cdot \rangle$  l'opérateur de moyenne qui permet de distinguer les deux versions de la POD présentées dans la suite. Dans l'espace de Hilbert  $H$ , la base  $[\Phi]$  est déterminée par le problème suivant :

$$\frac{\langle ([U], [\Phi])^2 \rangle}{([\Phi], [\Phi])} = \max_{\Psi \in H} \frac{\langle ([U], [\Psi])^2 \rangle}{([\Psi], [\Psi])} \quad (\text{I.61})$$

Le problème I.61 est déterminé avec la contrainte  $([\Phi], [\Phi]) = 1$ . Ainsi, le problème de maximisation précédent peut se ramener au problème aux valeurs propres suivant :

$$\langle ([U], [\Phi])[U] \rangle = \lambda[\Phi] \quad (\text{I.62})$$

avec  $\lambda$  l'ensemble des valeurs propres. Le tenseur des corrélations  $\mathcal{R}$  entre deux points  $X$  et  $X'$  est défini par :

$$[\mathcal{R}(X, X')] = \langle U_{\underline{x}} \otimes U_{\underline{x}'} \rangle \quad (\text{I.63})$$

Ainsi, le problème de l'équation I.62 revient à chercher dans l'espace de Hilbert, l'ensemble des fonctions  $[\Phi]$  et valeurs propres  $\lambda$  par la résolution de l'intégrale de Fredholm :

$$[\mathbf{R}][\Phi(X)] = \int_N [\mathcal{R}(X, X')][\Phi(X')] dX' = \{\lambda\}[\Phi(X)] \quad (\text{I.64})$$

où  $[\mathbf{R}]$  est un opérateur défini dans l'espace de Hilbert. Les fonctions propres  $[\Phi(X)]$ , solutions du problème I.64, constituent une base POD. Les travaux de Holmes et al. [103] ont concerné l'optimalité de cette base d'un point de vue énergétique. Pour un modèle d'ordre  $N$ , les  $m$  premiers modes d'une base POD est capable de représenter l'approximation d'une solution  $[U]$  avec une bonne précision.

Par ailleurs, l'opérateur de moyenne, introduit précédemment, permet de différencier les deux versions de la méthode POD. En effet, l'intégrale de Fredholm de l'équation I.64 est définie sur tout le domaine  $N$ . Par conséquent, la taille du stockage du tenseur des corrélations peut alors devenir très important pour des problèmes de grande taille et dans certains cas impossible à le réaliser. Des études ont été effectuées pour le développement de la méthode POD afin de résoudre ce type de problème. Les travaux de Lumley en 1967 ont introduit la POD classique avec une moyenne temporelle tandis que Sirovich en 1987 a proposé la POD des snapshots avec une moyenne spatiale.

### La POD classique

La version de la POD classique proposée par Lumley [152] consiste à construire une base POD optimale  $[\Phi]^i$  avec une moyenne temporelle. Dans ce cas, la variable  $X$ , décrivant le tenseur des corrélations, traduit que l'ensemble des variables spatiales sont définies dans  $\Omega$ . Prenons comme exemple un problème défini en espace sur  $\Omega$  dans le cas 3D (le maillage sera défini dans la direction  $x, y, z$ ). La variable  $X$  sera remplacée par  $x = (x, y, z)$ . Par la suite, le tenseur des corrélations de l'équation I.63 ainsi que l'intégrale de Fredholm s'écrivent :

$$[\mathcal{R}(x, x')] = \frac{1}{T} \int_{\mathcal{I}} [U_{\underline{x}}(t)] \otimes [U_{\underline{x}'}(t)] dt \quad (\text{I.65})$$

$$\int_{\Omega} [\mathcal{R}(x, x')] [\Phi(x')] dx' = \{\lambda\} [\Phi(x)] \quad (\text{I.66})$$

La solution de l'équation I.66 permet d'obtenir les vecteurs propres qui constituent une base spatiale du problème défini sur toute la dimension spatiale  $\underline{\Phi}^i(x)$ . En revanche, l'opérateur  $[\mathbf{R}]$  du problème aux valeurs propres est linéaire, auto-adjoint et positif [62]. Ainsi, les valeurs propres solutions du problème I.66 peuvent être rangées de façon croissante :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{x_{\Omega}} \geq 0 \quad (\text{I.67})$$

Puisque la base POD est optimale d'un point de vue énergétique, une troncature sera effectuée sur la base spatiale globale ce qui permet d'obtenir une base réduite constituée des  $m$  premiers modes permettant de représenter la solution. Enfin, la valeur de  $m$  est déterminée par :

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \geq \epsilon_{POD}, \quad i \in \{1, 2, \dots, x_m\} \quad (\text{I.68})$$

où  $\epsilon_{POD}$  est une tolérance introduite par l'utilisateur. Ainsi, la base spatiale optimale est traduite par l'ensemble de  $[\Phi_x] = \{\phi_x^1\}, \{\phi_x^2\}, \dots, \{\phi_x^m\}$ , il reste maintenant à déterminer la base temporelle réduite décrite par  $[\Psi_t] = \{\Psi_t^1\}, \{\Psi_t^2\}, \dots, \{\Psi_t^m\}$  en projetant le champ initial  $[U(X, t)]$  sur les fonctions propres spatiales. Soit :

$$[\Psi_t] = ([U(X, t)], [\Phi]) \quad (\text{I.69})$$

Ainsi, la forme séparée du problème est donnée par :

$$[U] \approx \sum_{i=1}^m \{\Phi_x\}^i \otimes \{\Psi_t\}^i \quad (\text{I.70})$$

Cette version de la POD est conseillée lorsque le nombre de discrétisation spatiale est inférieur à la discrétisation temporelle. En revanche, si on considère un problème éléments finis défini avec une dimension spatiale très importante de taille  $N_x$ , la taille du problème POD aux valeurs propres sera égale au nombre de degré de liberté  $N_x$  et la dimension de la matrice des corrélations  $[\mathcal{R}]$  sera alors  $(N_x \times N_x)$ . Dans ce cas, le coût de l'algorithme de la POD classique devient important en termes de résolution et de stockage. Dans ce cas, l'utilisation de la POD des snapshots sera plus intéressante.

### La POD des snapshots

Contrairement à la POD classique, cette version introduite par Sirovich [233, 234, 235] consiste à extraire la base POD avec une moyenne spatiale. Dans ce cas, la variable  $X$  du tenseur des corrélations entre deux points traduit la variable  $t \in \mathcal{I}$  et  $N_t$  représente le nombre de réalisations temporels. Ainsi, la base spatiale est donnée sous la forme d'une combinaison linéaire de  $U(X, t)$  par :

$$[\Phi_x] = \sum_{i=1}^{N_t} \Psi(t_i) U(X, t_i) \quad (\text{I.71})$$

où  $[\Psi(t_i)]$  traduit la base temporelle calculée à partir du problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\mathcal{I}} [\mathcal{R}(t, t')] [\Psi(t')] dt' = \{\lambda\} [\Psi(t)] \quad (\text{I.72})$$

$\mathcal{R}$  est le tenseur des corrélations entre  $t$  et  $t'$  donné par :

$$[\mathcal{R}(t, t')] = \frac{1}{T} \int_{\Omega} [U(x, t)] \otimes [U(x, t')] dt \quad (\text{I.73})$$

Comme dans la POD classique, la base est optimale d'un point de vue énergétique et les valeurs propres sont rangées de façon croissante. La troncature de ces modes à l'aide d'un paramètre de tolérance  $\epsilon_{POD}$  permet de décrire la base spatiale avec les  $m$  premières fonctions  $[\Phi_x] = \{\phi_x^1\}, \{\phi_x^2\}, \dots, \{\phi_x^m\}$  et de représenter la solution sous la forme de l'équation I.70. Dans l'exemple du problème Élément Finis avec une dimension spatiale élevée, la matrice des corrélations sera de dimension  $(N_t \times N_t)$  et la dimension du problème aux valeurs propres sera moins importante que dans le cadre de la POD classique.

Pour conclure, si le nombre de réalisations spatiales est très important par rapport à la discrétisation temporelle, la POD des snapshots sera un bon compromis pour réduire le coût numérique du problème aux valeurs propres et la taille du problème sera égale à  $N_t$ . Dans le cas contraire, la POD classique est conseillée.

### La POD Galerkin

Une autre possibilité consiste à utiliser les modes de la POD pour construire une base réduite d'une solution transitoire qui évolue dans un intervalle de temps assez petit par rapport à l'intervalle global dans lequel le problème est défini. Cette base réduite est ensuite utilisée pour calculer la solution qui évolue dans le reste de l'intervalle temporel [52]. Toutefois, il est à noter que la base construite est considérée comme une base d'approximation à la fois adaptative et réduite pour offrir une meilleure approximation réduite pour le reste de l'intervalle traité.

Afin de comprendre le principe de cette méthode, prenons comme exemple un problème physique présenté par l'équation I.74 qui dépend du temps et de l'espace. L'objectif est de calculer  $U(X, t) \in \Omega \times [0, T]$  tel que :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u) = \mathcal{F} \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (\text{I.74})$$

avec  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire et  $\mathcal{F}$  un second membre. Supposons maintenant que le champ de solution est connu pour tout  $X_i$  avec  $i = \{1, \dots, N_x\} \in \Omega$  et pour un premier intervalle de temps  $[0, T_k] \in [0, T]$ . Une application de la POD sur les premiers snapshots  $U^k(X, t)$  permet d'exprimer cette solution à l'instant  $T_k$  sous la forme séparée avec une base réduite  $[\Phi_x]^k = (\{\phi_x^1\}, \{\phi_x^2\}, \dots, \{\phi_x^m\})^k$  contenant les  $m$  premiers vecteurs propres associés aux valeurs propres  $[\Psi_t]^k = (\{\lambda_t^1\}, \{\lambda_t^2\}, \dots, \{\lambda_t^m\})^k$ , ainsi :

$$U^k(X, t) \approx \sum_{i=1}^m \phi_i(X) \lambda_i(t) \quad (\text{I.75})$$

Pour calculer la solution  $U^{k+1}$  au temps  $k+1$ , le problème I.74 peut s'écrire :

$$[\mathcal{A}]^k \{U\}^{k+1} = \{\mathcal{F}\}^k \quad (\text{I.76})$$

La forme séparée I.75 à l'instant  $k+1$  est obtenue par la projection de  $\{U\}^{k+1}$  sur le sous-espace engendré par la base optimale d'ordre  $m$  à l'instant  $k$  :

$$U^{k+1}(X, t) \approx \sum_{i=1}^m \phi_i(X) \lambda_i^{k+1}(t) = [\Phi] \{\lambda\}^{k+1} \quad (\text{I.77})$$

En utilisant l'équation précédente, le problème [I.76](#) au temps  $k + 1$  s'écrit :

$$[\mathcal{A}]^k [\Phi] \{\lambda\}^{k+1} = \{\mathcal{F}\}^k \quad (\text{I.78})$$

Le modèle d'ordre réduit est alors obtenu par la multiplication de [I.78](#) par  $[\Phi]^T$ , soit :

$$[\Phi]^T [\mathcal{A}]^k [\Phi] \{\lambda\}^{k+1} = [\Phi]^T \{\mathcal{F}\}^k \quad (\text{I.79})$$

La nouvelle solution  $\{\lambda\}^{k+1}$  est obtenue par la résolution d'un système réduit d'ordre plus faible que le problème initial. En effet,  $([\Phi]^T [\mathcal{A}]^k [\Phi])$  est de dimension  $(m \times m)$  avec  $m < N_x$  et les dimensions de  $\{\lambda\}^{k+1}$  et  $([\Phi]^T \{\mathcal{F}\}^k)$  sont  $(m \times 1)$ . Ainsi, la résolution de l'équation [I.79](#) est plus rapide en raison de sa taille réduite.

La modélisation du problème d'ordre réduit basée sur une approximation POD ne permet pas de représenter, dans la majorité des cas, l'évolution de la solution pour les instants futurs  $[T_{k+1}, T]$ . Ainsi, il est nécessaire de mettre en place une approche adaptative au cours de la simulation permettant de garantir l'approximation de la solution pour des intervalles de temps plus grands. Des critères d'adaptation de la base POD ont été proposés pour corriger l'approximation de la solution à tout instant de l'intervalle étudié. Une technique d'enrichissement connue sous le nom de réduction de modèle "*a priori*" a été initialement proposée par Ryckelynck et al. [[212](#), [215](#)] et est basée sur l'utilisation de certains sous-espaces de Krylov [[120](#), [207](#)] générés par une équation résiduelle. Il existe également une autre technique d'adaptation de la base utilisant la méthode (APR) [[222](#), [247](#)]. Le détail des différentes techniques d'adaptation est donné dans la section [4.3.1](#) et la section [5.2.3](#) du chapitre II. A titre d'exemple, les travaux de Ammar et al. [[20](#)], dans le cadre de la théorie cinétique, contiennent plusieurs exemples de validation numérique de la modélisation du problème d'ordre réduit basé sur une approximation POD, telle que l'étude d'un problème de cisaillement transitoire 2D et 3D d'une suspension de chaînes de polymères (à partir d'une distribution de chaînes aux repos), en utilisant toutefois l'enrichissement de sous-espaces de Krylov pour l'adaptation de la base.

### 4.2.3 La Décomposition de Karhunen-Loève (KLD)

La Décomposition de Karhunen-Loève (Karhunen-Loève Decomposition-KLD) a été développée dans les années 1940 par Karhunen [[116](#), [117](#)] et Loève [[149](#), [150](#)] pour un problème d'approximation de processus stochastiques en temps continu. Cette méthode et la méthode POD portent deux noms différents mais elles ont été développées sur le même principe. Elles fournissent des fonctions de base qui traduisent les vecteurs propres d'un ensemble de corrélations de données connues. Elle est aussi étroitement liée à la La Décomposition en valeurs singulières (SVD) et à l'Analyse en Composantes Principale (PCA). L'application d'une KLD fournit un ensemble optimal de fonctions de base orthonormées permettant la reconstruction de la solution initiale avec un petit nombre de fonctions possibles et d'un certain niveau de précision [[42](#)]. Ces fonctions de base sont généralement appelées l'ensemble des vecteurs propres.

La méthode de Karhunen-Loève permet d'exprimer des solutions avec une approximation précise et un coût de calcul faible. Cet avantage permet de couvrir un large spectre d'applications. En effet, les travaux de Aubry et al. [[27](#)], Sirovich et Park [[237](#), [181](#)] utilisent cette méthode en combinaison avec la méthode de Galerkin pour le développement des modèles approximatifs pour les fluides turbulents. Chen et al. [[182](#)] ont utilisé les modes de KLD des données expérimentales pour contrôler les modes spatio-temporels. Park et al. [[183](#)] ont développé une KL Galerkin pour l'estimation des paramètres de l'équation de chaleur non

linéaire. Par ailleurs, la KLD est utilisée en mécanique des fluides [184, 185, 186], dans les problèmes de radiation [187], en formulation de volumes finis [141], ...

Le Principe de la Décomposition de Karhunen-Loève est le suivant. Soit  $U(X, t)$  un champ solution d'un problème quelconque défini dans l'espace  $\Omega$  avec une évolution temporelle sur l'intervalle  $\mathcal{I} = [0, T]$ . La motivation de la décomposition KL est d'obtenir une série de  $m$  fonctions orthonormées  $\{\Phi_{\underline{X}}\}^i$  de telle sorte que :

$$\int_{\Omega} \{\Phi_{\underline{X}}\}^i \{\Phi_{\underline{X}}\}^j dX = \delta_{ij} \quad (\text{I.80})$$

avec  $X \in \Omega$  et  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $m < N_x$ . L'idée est d'obtenir la meilleure base  $[\Phi_{\underline{X}}]$  à partir de  $[U(X, t)]$  permettant d'avoir une approximation de la solution pour toute l'histoire spatio-temporelle  $U(X_i, t^k) = U_i^k = U^k(X_i)$  avec  $i \in \Omega$  et  $k \in \mathcal{I}$ . Cela revient à maximiser  $\lambda$  à partir des fonctions  $\Phi_x$  telle que :

$$\lambda = \max_{\Phi_{\underline{X}}} \left[ \frac{\sum_{k=1}^{k=N_t} \left( \sum_{i=1}^{i=N_x} \{\Phi_{\underline{X}}\}^i U^k(X_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^{i=N_x} (\{\Phi_{\underline{X}}\}^i)^2} \right] \quad (\text{I.81})$$

La maximisation de l'expression précédente conduit à :

$$\sum_{k=1}^{k=N_t} \left[ \left( \sum_{i=1}^{i=N_x} \{\tilde{\Phi}_{\underline{X}}\}^i U^k(X_i) \right) \left( \sum_{j=1}^{j=N_x} \{\Phi_{\underline{X}}\}^j U^k(X_j) \right) \right] = \lambda \sum_{i=1}^{i=N_x} \{\tilde{\Phi}_{\underline{X}}\}^i \{\Phi_{\underline{X}}\}^i \quad \forall \tilde{\Phi} \quad (\text{I.82})$$

L'équation I.82 peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=N_x} \left\{ \sum_{j=1}^{j=N_x} \left( \sum_{k=1}^{k=N_t} U^k(X_i) U^k(X_j) \{\Phi_{\underline{X}}\}^j \right) \{\tilde{\Phi}_{\underline{X}}\}^i \right\} = \lambda \sum_{i=1}^{i=N_x} \{\tilde{\Phi}_{\underline{X}}\}^i \{\Phi_{\underline{X}}\}^i \quad \forall \tilde{\Phi} \quad (\text{I.83})$$

Soit  $\{\Phi_{\underline{X}}\}$  un vecteur tel que la  $i^{\text{ème}}$  composante est  $\{\Phi_{\underline{X}}\}^i$ . L'équation I.83 prend la forme matricielle suivante :

$$\langle \tilde{\Phi} \rangle [\mathcal{R}] \{\Phi_{\underline{X}}\} = \lambda \langle \tilde{\Phi} \rangle \{\Phi_{\underline{X}}\} \quad \forall \tilde{\Phi} \quad (\text{I.84})$$

Ainsi :

$$[\mathcal{R}] \{\Phi_{\underline{X}}\} = \lambda \{\Phi_{\underline{X}}\} \quad (\text{I.85})$$

avec  $[\mathcal{R}]$  la matrice des corrélations entre deux points. Elle a les mêmes caractéristiques que celles données par la méthode POD (Eq.I.65). Elle est symétrique, définie positive et exprimée par :

$$[\mathcal{R}] = \sum_{k=1}^{k=N_t} U^k(X_i) U^k(X_j) = \sum_{k=1}^{k=N_t} \{U_{\underline{X}}\}^k \langle U_{\underline{X}} \rangle^k \quad (\text{I.86})$$

Ainsi, maximiser  $\lambda$  est équivalent à un problème aux valeurs propres qui constitue une base optimale  $[\Phi_{\underline{X}}] = \{\phi_X^1\}, \{\phi_X^2\}, \dots, \{\phi_X^m\}$  à partir des corrélations de  $U^k(X)$  et qui contient les  $m$  premiers vecteurs propres associés aux valeurs propres rangées de façon croissante. Les travaux de Brooks et al. [42] utilisent une décomposition de Karhunen-Loève de l'équation d'Euler pour l'écoulement supersonique autour d'un corps contondant. La figure I.9 présente l'évolution des dix premiers modes  $\{\Phi_x^i\}_{i=1, \dots, 10}$  associés aux valeurs propres de la KLD. Cette figure montre qu'il y a une décroissance logarithmique de la grandeur des valeurs propres.

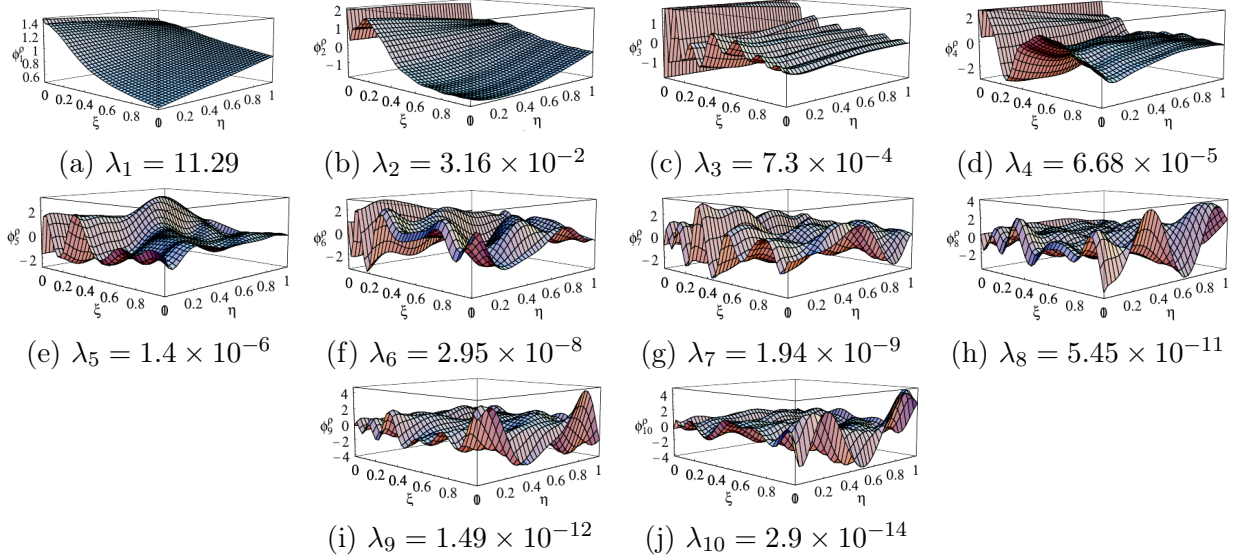


FIGURE I.9 – Les dix premiers modes associés aux valeurs propres d’une décomposition de Karhunen-Loève [42]

### 4.3 Méthodes de réduction a priori

Cette partie a pour objectif de présenter une autre famille de méthodes de réduction de modèle appelée méthodes "a priori". A l’aide d’un processus itératif, ces méthodes permettent de représenter une base représentative décrivant la solution sans la nécessité d’une connaissance préalable de la base ou de la solution. La méthode de Réduction A Priori (APR) est basée sur la POD-Galerkin et est détaillée dans un premier temps. Dans un second temps, la méthode A Priori Hyper-Reduction (APHR) sera présentée. La troisième partie sera dédiée à la présentation et la description de la méthode de Décomposition Généralisée en modes Propres (PGD).

#### 4.3.1 La méthode de Réduction A Priori (APR)

La méthode de réduction a priori (APR) est une méthode qui ne nécessite aucune connaissance préalable de la solution pour construire la base. Elle est introduite par Rykkelnyck [222, 215] pour résoudre des problèmes thermomécaniques non linéaires. Le principe de cette approche est basée sur la POD-Galerkin. La projection du problème discrétisé est effectuée sur une base afin d’obtenir un modèle réduit. Ensuite, cette base est corrigée à l’aide d’un processus itératif jusqu’à avoir une base qui représente correctement la solution du problème considéré sur tout l’intervalle de temps étudié. L’originalité de la méthode APR réside dans la façon avec laquelle la base est construite. En effet, l’adaptation de la base est effectuée à la fois à travers un enrichissement par les sous-espaces de Krylov ainsi qu’une sélection des modes les plus significatifs afin d’améliorer l’ancienne base. Cette méthode a déjà été appliquée avec succès pour une variété d’applications tels que les problèmes avec des modèles d’éléments de frontière [216], la construction d’un système dynamique d’ordre réduit [248, 247], la résolution des équations de Navier-Stokes [249] ou l’équation de Burgers monodimensionnelle [9].

Afin de présenter cette méthode, prenons comme exemple le problème physique présenté par l’équation I.74. L’objectif de la méthode APR est de chercher la solution du problème,

à l'aide d'un processus itératif, sous la forme séparée suivante :

$$U(X, t) \approx \sum_{i=1}^m \phi_i(X) \lambda_i(t) \quad (\text{I.87})$$

avec  $m$  le nombre de fonctions nécessaires pour représenter la base spatiale  $[\Phi_x] = \{\phi_x^1\}, \{\phi_x^2\}, \dots, \{\phi_x^m\}$  et la base temporelle  $[\Psi_t] = \{\lambda_t^1\}, \{\lambda_t^2\}, \dots, \{\lambda_t^m\}$ . L'algorithme de la méthode APR se résume en trois étapes : l'initiation de la base réduite, la construction et la résolution du système réduit ainsi que la mise à jour de la base.

### Initiation de la Base

Afin de calculer les solutions du modèle d'ordre réduit sans connaissance a priori de la solution et avec un schéma itératif, il faut initialiser ce processus et imposer une base initiale. Les travaux de Ryckelnyck [222] ont montré que le choix de la base initiale n'a pas d'influence sur la qualité de la solution mais sur la vitesse de convergence de l'algorithme itératif. Ainsi, il a proposé de débiter avec une base d'ordre faible constituée par exemple des conditions initiales ou par une autre base construite pour un problème similaire. D'autre part, Verdon [249] a proposé d'utiliser les conditions initiales du problème en tant que base initiale. En effet, des cas test avec ce choix de base par rapport à une base totalement non-physique n'ont conduit qu'à une différence de temps CPU, l'erreur de la solution trouvée étant similaire.

### Construction et résolution du système réduit

Après l'initialisation, la deuxième étape de l'algorithme APR consiste à construire un système d'ordre réduit ainsi que sa résolution sur tout l'intervalle d'étude. Comme il a été indiqué précédemment, le principe de l'APR est basé sur la POD-Galerkin. En effet, la construction du système réduit consiste à appliquer une POD-Galerkin sur tous les pas de temps  $t \in [0, T]$ . Supposant que nous sommes à la  $k^{\text{ème}}$  itération de la méthode APR. La forme de la solution du problème I.74 ainsi que le modèle d'ordre réduit s'écrivent respectivement :

$$U^k(X, t) \approx \sum_{i=1}^{m_k} \Phi_{\underline{X}}^i \otimes \Psi_t^i = \sum_{i=1}^{m_k} \phi_i(X) \lambda_i(t) \quad (\text{I.88})$$

$$([\Phi]^T)^k [\mathcal{A}]^k [\Phi]^k \{\lambda\}^{k+1} = ([\Phi]^T)^k \mathcal{F}^k \quad (\text{I.89})$$

où  $m_k$  est le nombre de modes retenus à la  $k^{\text{ème}}$  itération. Ainsi, pour calculer la solution  $[U(X, t)]$  pour tous les pas de temps, il suffit d'introduire les coefficients temporels  $\{\lambda_i(t)\}_{(i=1, \dots, m)}$ , calculés à partir de l'équation I.89, dans l'équation I.88. Enfin, le résidu  $\mathcal{R}_{APR}$  du modèle complet, qui vérifie la validité de la base  $[\Phi]$  pour tous les instants  $t_i (i = 1, \dots, N_t)$ , est donné par :

$$\mathcal{R}_{APR}(X, t) = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^m \phi_i(X) \lambda_i(t) \right) - \mathcal{F} \quad (\text{I.90})$$

Ce résidu traduit le critère de convergence de la méthode APR et permet d'arrêter le processus itératif de la méthode. Ainsi, si la norme du  $\mathcal{R}_{APR}$  est inférieure à une tolérance  $\epsilon_{APR}$ , introduite par l'utilisateur, la convergence pour la base est obtenue. Dans ce cas, la solution est donnée par l'équation I.88 pour tout l'intervalle de temps. Dans le cas contraire, la prévision de la base n'est pas satisfaisante pour représenter la solution. Il faut mettre alors à jour la base et refaire cette étape avec une nouvelle base.

### Adaptation et enrichissement de la base

Cette étape consiste à corriger l'estimation de la base APR afin d'avoir une solution satisfaisante dans l'étape précédente. Cela est effectué en deux étapes : phase d'amélioration et une phase d'enrichissement.

**1) Phase d'amélioration** Supposons que nous sommes à la  $k^{\text{ème}}$  itération de la méthode APR. L'amélioration de la base est effectuée par l'application d'une décomposition de Karhunen-Loève sur l'ensemble des coefficients  $\lambda(t_i)$  ( $i = 1, \dots, N_t$ ) afin de ne garder que les coefficients les plus représentatifs d'un point de vue énergétique. Cela peut se ramener au problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathcal{C}][\mathcal{B}] = \{\tilde{\lambda}\}[\mathcal{B}] \quad (\text{I.91})$$

avec  $[\mathcal{C}]$  la matrice des corrélations définie par :

$$[\mathcal{C}] = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} \lambda_i(t_k) \lambda_j(t_k) \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, m_k \quad (\text{I.92})$$

$m_k$  est le nombre de modes à la  $k^{\text{ème}}$  itération de la méthode APR. La solution de l'équation I.91 permet d'avoir les vecteurs propres qui constituent une autre base spatiale définie par  $[\mathcal{B}]^i$  associée aux nouvelles valeurs propres rangées de façon croissante  $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2 > \dots > \tilde{\lambda}_{m_k}$ . Ensuite une troncature est effectuée pour avoir les  $p$  premiers modes significatifs. Finalement la nouvelle base améliorée est donnée par :

$$[\tilde{\Phi}] = \sum_{i=1}^{m_k} \phi_i \mathcal{B}_i^k \quad (\text{I.93})$$

où  $k = 1, \dots, p$ .  $\mathcal{B}^k$  désigne le vecteur propre associé à la valeur propre  $\tilde{\lambda}_k$ . Une fois l'ancienne base améliorée, il faut passer à la phase d'enrichissement à partir du résidu I.90.

**2) Phase d'enrichissement** Après avoir amélioré l'ancienne base, cette étape consiste à enrichir la nouvelle base à partir des sous-espaces de Krylov. Pour cela, le résidu  $\mathcal{R}_{APR}$  du modèle complet de l'étape précédente est utilisé. Ainsi, le sous-espace de Krylov d'ordre  $q$  est constitué par :

$$\mathcal{K}^q = \{\mathcal{R}_{APR}, [\mathbf{J}]\mathcal{R}_{APR}, [\mathbf{J}^2]\mathcal{R}_{APR}, \dots, [\mathbf{J}^{q-1}]\mathcal{R}_{APR}\} \quad (\text{I.94})$$

avec  $[\mathbf{J}]$  la matrice jacobienne du problème. La nouvelle base pour l'itération suivante  $k + 1$  de l'algorithme APR est donnée par :

$$[\Phi]^{k+1} = \left[ [\tilde{\Phi}], \mathcal{K}^q \right] \quad (\text{I.95})$$

En pratique, l'ordre du sous-espace de Krylov est pris égale à 1 ( $q = 1$ ). Pour conclure, la mise à jour de la base APR est effectuée par une phase d'amélioration et une phase d'enrichissement, ensuite par un calcul de la solution en utilisant la nouvelle base adaptée (étape 2). Ce schéma est répétitif jusqu'à la convergence ( $\|\mathcal{R}_{APR}\| < \epsilon_{APR}$ ).

La méthode a permis d'obtenir des gains au niveau de la vitesse de calcul avec une bonne précision en comparaison avec les modèles complets. Toutefois, l'algorithme de la méthode APR a été utilisé avec une autre stratégie qui diffère par la philosophie de contrôle



de l'adaptation de la base. Il s'agit d'une stratégie incrémentale adaptative proposée par Ryckelynck [222] avec le caractère a priori itératif. Cette version a été ensuite utilisée par Ammar et al. [20] pour les problèmes d'élasticité non linéaire ainsi que dans les travaux de Chinesta et al. [58] pour la résolution des modèles de la théorie cinétique. Ces différentes techniques d'adaptation seront décrites dans le chapitre II.

### 4.3.2 La méthode A Priori Hyper-Reduction (APHR)

La méthode A Priori Hyper-Reduction (APHR) est une méthode de réduction "*a priori*" qui ne nécessite aucune information initiale sur la solution recherchée. Il s'agit d'une méthode de réduction à caractère adaptative à l'aide d'un schéma d'intégration incrémental. L'idée de cette méthode a été introduite par Ryckelynck [222, 221, 213, 218] et résulte de l'ajout de l'Hyper Réduction dans la méthode de Réduction A Priori (APR). Le principe du terme Hyper Réduction implique l'échantillonnage d'une partie des points d'intégration du modèle complet afin de représenter l'évolution des variables d'états réduites. Ainsi, la connexion entre méthode APHR et la méthode APR est assurée par le principe de l'Hyper Réduction, et en absence de ce dernier, la méthode APHR nous conduit à la méthode APR. Cette méthode a été utilisée ces dernières années dans le cadre du calcul numérique en mécanique : problèmes de type élasto-visco-plastique [218], avec des modèles d'endommagement [219, 225], pour le calcul multidimensionnel [220] et pour la modélisation de la rupture [118]. Dans ce manuscrit, seul le principe général sera expliqué, mais pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de thèse de Cartel [46] pour la résolution des problèmes paramétriques ainsi que ceux de Courtier [64].

La méthode APHR est basée sur un processus adaptatif à travers une approche "*a priori*" pour calculer la solution d'un problème à l'aide d'un modèle d'ordre réduit. Le principe de la méthode est basé sur trois points :

- Construction et résolution du modèle d'ordre réduit,
- Hyper-réduction,
- Adaptation des bases réduite et actualisation du domaine réduit d'intégration.

Le premier point consiste à construire un système de résolution d'ordre réduit en adoptant une démarche "*a posteriori*" tout comme dans la méthode APR. Pour cela, il faut utiliser une stratégie d'adaptation des bases réduites en cours de simulation permettant d'introduire des corrections de type Éléments Finis aux prévisions réduite et du domaine réduit d'intégration. L'apport de cette méthode est basé sur l'approche Hyper-réduction et la prévision est obtenue par deux étapes. Tout d'abord, la résolution de l'équilibre du modèle d'ordre réduit est réalisée à partir d'un domaine restreint. Ensuite, une reconstruction par extrapolation des champs mécaniques sur tout le domaine est effectuée.

Soit le problème proposé dans I.74 et défini dans le domaine  $\Omega$ . L'équation du modèle hyper réduit est donnée par :

$$[\Phi]^T [Z]^T [Z] [\mathcal{A}] [\Phi] \{\lambda\} = [\Phi]^T [Z]^T [Z] \{\mathcal{F}\} \quad (\text{I.96})$$

avec  $[Z]$  une matrice d'identité tronquée c'est-à-dire qui ne comporte que quelques lignes de la matrice identité. Cette méthode vise à mettre en place le calcul sur un sous domaine défini par quelques nœuds de contrôle associé à quelques éléments appartenant à ces nœuds. Ce sous-domaine noté  $\Omega_Z$  est appelé RID (Reduced Integration Domain). La figure I.10 illustre un exemple d'un domaine réduit d'intégration pour la méthode APHR. Les conditions aux limites entre le RID et le reste du domaine spatial  $\Omega$  sont données par  $\Gamma = \partial\Omega_Z \cap \partial(\Omega \setminus \Omega_Z)$ .

Une fois les coefficients  $\{\lambda\}$  calculés, le champ de déplacement est obtenu par l'équation I.75. En revanche il faut choisir un RID raisonnable pour pouvoir bien représenter le

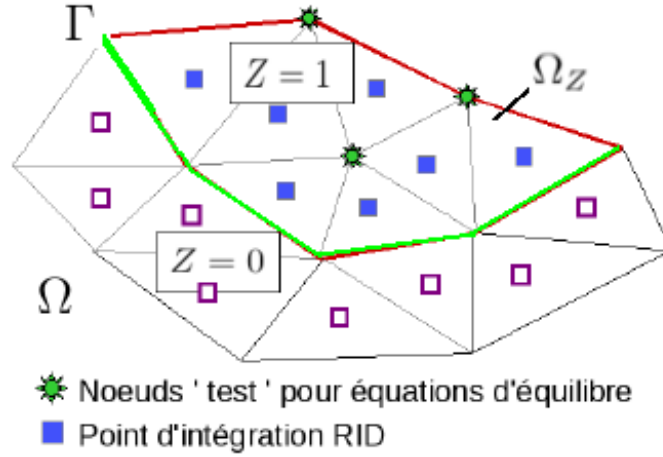


FIGURE I.10 – Exemple du domaine RID pour la méthode APHR [46]

problème de l'équation I.96. La résolution des équations constitutives locales est effectuée avec les seuls points d'intégration définies dans le RID (Fig. I.10). Ce qui permet d'avoir un domaine d'ordre réduit local. La qualité de la solution du modèle d'ordre réduit est évaluée en considérant le résidu tronqué du modèle complet. A chaque correction, les nœuds de contrôle du sous domaine seront actualisés.

### 4.3.3 La Décomposition Généralisée en modes Propres (PGD)

Tout comme la méthode APR et APHR, la PGD (Proper Generalized Decomposition en anglais) est parmi les méthodes de réduction de modèle "a priori" non incrémentale où la base de la solution est construite à l'aide d'un schéma itératif. Cette base offre une approximation de la solution sous une forme séparée écrite sous la forme continue suivante :

$$U(x_1, \dots, x_N) \approx \sum_{i=1}^{n_x} \prod_{j=1}^N \alpha^i U_j^i = \sum_{i=1}^{n_x} \alpha^i (U_1^i(x_1) \times \dots \times U_N^i(x_N)) \quad (\text{I.97})$$

La représentation séparée de l'équation précédente est construite par une stratégie itérative basée sur des étapes d'enrichissement et de projection. Pour cela, il est préférable d'écrire la forme séparée sous une forme tensorielle en utilisant les valeurs nodales de chaque fonction :

$$U(x_1, \dots, x_N) \approx \sum_{i=1}^{n_x} \alpha^i U_{x_1}^i \otimes U_{x_2}^i \otimes \dots \otimes U_{x_N}^i \quad (\text{I.98})$$

L'idée de la PGD a été initialement introduite dans les années 80 par Ladevèze [126, 130, 101] au sein de la méthode LATIN pour les modèles élasto-plastiques sous le nom de l'approximation radiale en temps et espace (radial time-space approximation) ou encore la Décomposition en Chargement Radial (Radial Loading Decomposition-RLD). L'idée était de développer un solveur non-incrémental avec une décomposition spatio-temporelle. Le couplage de la méthode PGD avec la méthode LATIN a été introduit essentiellement pour pouvoir alléger la résolution du problème linéaire. En effet, l'étape locale contient les équations non linéaires mais locales en temps et en espace. Le coût de sa résolution est modique. Cependant, l'étape globale contient l'ensemble des équations linéaires mais globales et donc coûteuses en temps CPU et en espace mémoire. L'introduction de la PGD a permis de découpler le problème en espace et en temps ce qui permet d'obtenir une grande réduction du

temps de calcul. La représentation séparée espace-temps de la PGD a été l'une des principales idées constituant la méthode LATIN et elle a été appliquée avec succès dans plusieurs applications avec une variété d'algorithmes selon le contexte utilisé. Champaney et al. [48] utilisent cette méthode pour analyser des situations complexes d'assemblage en 3D de structures à comportement plastique ou visco-plastique avec plusieurs contacts et aussi pour faire l'analyse paramétrique des joints boulonnés conçus pour des applications aérospatiales [47]. Cognard et al. [59] ont utilisé la PGD/LATIN pour la résolution des problèmes de matériaux visco-plastiques isothermes dans un contexte non linéaire. Dans leur étude, Boisse et al. [35] adoptent cet algorithme pour des problèmes de plasticité à des structures sous chargement cyclique afin de réduire le coût numérique du calcul. Par ailleurs, la PGD a été appliquée avec la stratégie du LATIN afin de résoudre des problèmes à différentes échelles avec une théorie d'homogénéisation. Dans ce contexte beaucoup d'applications ont été réalisés dans [168, 66, 131, 173] avec des résultats satisfaisants en temps CPU.

Un peu plus tard, la PGD a été proposée sous une nouvelle forme plus généralisée. Ammar et al. [16, 17] introduisent une nouvelle décomposition, pas seulement spatio-temporelle, mais totalement séparée pour résoudre les problèmes multidimensionnels. L'idée de cette décomposition vient de la complexité de résolution des modèles définis dans des espaces de grande dimension. En effet, prenons un exemple d'un modèle défini dans un espace de dimension  $D$  et soit  $M$  le nombre des nœuds utilisés pour la discrétisation pour chaque espace de coordonnées. Ainsi, le nombre des nœuds résultant atteint une valeur de  $M^D$ . Prenons comme exemple un nombre de maillage  $M \approx 100$  (maillage grossier) et  $D \approx 50$  (un nombre faible pour beaucoup de problèmes en mécanique). Donc le problème conduit à  $100^{50}$  ddl. Il est donc intéressant de disposer d'une stratégie permettant de traiter des problèmes fortement multidimensionnels. Dans ce cadre, Ammar et al. [16] diminue la complexité de la résolution de l'équation de Fokker-Planck de  $10^{40}$  ddl avec la méthode des Éléments Finis à  $10^5$  avec la PGD. La complexité d'un modèle PGD croît linéairement avec sa dimension alors qu'elle augmente de façon exponentielle avec la méthode des éléments finis. Cette caractéristique fait que la PGD a été utilisée dans beaucoup d'applications et notamment pour des problèmes à dimension élevée.

Les travaux de Ammar [22, 19] relatifs à la théorie cinétique ont montré la puissance de la PGD pour résoudre des problèmes hautement multidimensionnels. De nombreux problèmes dans la modélisation paramétrique nécessitent également le calcul d'un très grand nombre de solution, et lorsque le nombre de paramètres augmente le calcul devient impossible. Pour cette raison, Chinesta et al. [53] ajoutent un nouveau paramètre de contrôle en rapport avec l'espace global et local dans le cas d'une décomposition spatio-temporelle. Cela leur permet de traiter, avec une seule simulation, des différents espaces par paramètres avec un modèle cinétique. Dans le cas d'une résolution paramétrique, d'autres travaux [18, 144] ont été aussi effectués. Prulière et al. [197] utilisent une approche multidimensionnelle paramétrique afin de résoudre l'équation de transfert thermique. Chinesta et al. utilisent la représentation séparée de la PGD dans le cadre de la chimie quantique [51], dans la résolution des équations stochastiques [55] ainsi que dans la résolution de l'équation de Fokker-Planck et de Schrödinger [54]. Dans leurs études, Ammar et al. montrent que la résolution avec la méthode PGD converge vers la solution issue du méthode standard [14], et traitent la précision de la représentation séparée de la méthode PGD pour les problèmes hautement multidimensionnels. Ils proposent un autre estimateur d'erreur représenté à l'aide d'un problème dual [13]. Une autre manière pour appliquer la PGD a été proposée par Nouy pour la résolution des problèmes stochastiques linéaires [171, 172] et non linéaires [174] sous le nom de "Generalized Spectral Decomposition". Il a montré dans [172] des résultats satisfaisants pour le temps de calcul par rapport aux méthodes de type Krylov. La PGD a été utilisée dans de

nombreuses disciplines : problèmes d'homogénéisation [56, 12], résolution de l'équation de Schrödinger [10], couplage avec la méthode des Éléments Finis [11], problèmes à comportement viscoélastique [21], en mécanique des fluides [72, 73] et en biologie moléculaire [15], ...

La PGD est une méthode "a priori" non incrémentale et la solution est recherchée de manière itérative sous une forme séparée comme à l'équation I.98. Cette écriture séparée de la solution conduit en premier lieu à bien choisir les coordonnées à séparer. Soit  $U$  une solution d'un problème quelconque défini sur un domaine spatial par  $X = (x, y) \in \Omega$  et en temps par  $t \in \mathcal{I}$ . En pratique, nous pouvons considérer les cas suivants :

1. Des problèmes peuvent être définis par une décomposition spatio-temporelle avec :

$$[U] \approx \sum_{i=1}^m U_{\underline{X}}^i \otimes U_t^i \quad (\text{I.99})$$

Cette décomposition a été proposée par Ladevèze [126] dans le cadre de la méthode LATIN en mécanique des structures. L'inconvénient de cette décomposition consiste à faire une résolution d'un système de dimension élevé si la taille de  $\Omega$  est important. Elle a été utilisée aussi dans le cadre du couplage multiéchelle par Chinesta et al. [53] et aussi dans le contexte des modèles multi-échelles par Ammar et al. [12].

2. Une seconde possibilité de décomposition consiste à faire une décomposition entièrement séparée, soit :

$$[U] \approx \sum_{i=1}^m U_x^i \otimes U_y^i \otimes U_t^i \quad (\text{I.100})$$

Cette décomposition a été introduite pour résoudre le problème de la séparation spatio-temporelle. Les travaux de Ammar [22] montrent que le nombre de fonctions nécessaires à la convergence est plus important par rapport à la décomposition précédente.

3. Un autre type de séparation consiste à faire la décomposition sur les variables d'espace et appliquer un schéma incrémental. Ainsi, à chaque pas de temps on a :

$$[U] \approx \sum_{i=1}^m U_x^i \otimes U_y^i \quad (\text{I.101})$$

Cette décomposition a été utilisée en mécanique des fluides dans les travaux de Dumon et al. [72] dans le cadre de la résolution des équations de Navier–Stokes.

4. La dernière possibilité est la décomposition d'un modèle multidimensionnel paramétrique où la forme séparée de la solution est donnée par :

$$U(x, y, p_1, p_2, \dots, p_Q) \approx \sum_{i=1}^m U_x^i \otimes U_y^i \otimes F_{p_1}^i \otimes F_{p_2}^i \otimes \dots \otimes F_{p_Q}^i \quad (\text{I.102})$$

Avec  $p_i$  les différents paramètres du problème qui peuvent représenter des conditions initiales, des conditions aux limites, des paramètres matériaux ...

La décomposition spatio-temporelle est celle qui sera utilisée dans le cadre de cette thèse, et sera donc détaillée dans la partie qui suit. Cette décomposition possède plusieurs versions pour calculer la solution d'un problème sous la forme séparée : la PGD progressive, PGD avec mise à jours et la PGD progressive pondérée. Nous n'allons développer que la PGD progressive pondérée qui sera utilisée dans le cadre de ce travail. Cette version est considérée comme la plus efficace et optimale en matières de convergence [163].

### PGD progressive pondérée spatio-temporelle

Afin de comprendre le principe de cette méthode, prenons l'exemple du problème donné par l'équation I.74 défini dans  $\Omega \times [0, T]$ . La solution  $U(X, t)$ , dans le cadre de la décomposition spatio-temporelle, est représentée par l'équation suivante :

$$[U] \approx \sum_{i=1}^m \alpha^i (U_{\underline{X}}^i \otimes U_t^i) \quad (\text{I.103})$$

$U_{\underline{X}}^i$  et  $U_t^i$  traduisent respectivement la base spatiale et temporelle (ou les fonctions spatiale et temporelle),  $m$  représente le nombre de fonctions qui définit l'ordre de la solution (ou encore le nombre d'itérations de la méthode PGD) dont la précision de la solution est vérifiée pour chaque ordre et  $\alpha^i$  définit les coefficients de pondération.

La solution est donnée sous une forme séparée spatio-temporelle. Cela exige l'écriture des opérateurs du problème ( $[\mathcal{A}]$  et  $\{\mathcal{F}\}$ ) comme une somme de produits de fonctions également avec une décomposition espace-temps :

$$[\mathcal{A}] = \sum_{k=1}^{n_{\mathcal{A}}} [A_{\underline{X}}]^k \otimes [A_t]^k \quad \{\mathcal{F}\} = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \{F_{\underline{X}}\}^j \otimes \{F_t\}^j \quad (\text{I.104})$$

L'opérateur linéaire  $[\mathcal{A}]$  est exprimé comme la somme des produits des fonctions d'opérateurs  $[A_{\underline{X}}]$  et  $[A_t]$  définis respectivement dans  $\Omega$  et  $\mathcal{I} = [0, T]$ .  $n_{\mathcal{A}}$  est le nombre de fonctions nécessaires pour représenter la forme séparée de  $\mathcal{A}$ . Le second membre  $\mathcal{F}$  est exprimé en fonction de la somme des vecteurs  $\{F_{\underline{X}}\}$  et  $\{F_t\}$  également définis dans le temps et l'espace et  $n_{\mathcal{F}}$  représente le nombre de fonctions nécessaires pour la décomposition. Parfois, la forme séparée des données du problèmes n'est pas triviale à effectuer. Pour s'affranchir de ce problème, une utilisation de la SVD ou POD permet d'offrir tout type de décomposition. En introduisant les formes séparées I.103 et I.104 dans I.74, le problème à l'ordre  $m$  s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n_{\mathcal{A}}} \sum_{i=1}^m \alpha^i ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \otimes [A_t]^k \{U_t\}^i) = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \{F_{\underline{X}}\}^j \otimes \{F_t\}^j + [\mathcal{R}_{PGD}] \quad (\text{I.105})$$

avec  $[\mathcal{R}_{PGD}]$  un résidu qui traduit l'erreur de la solution. La méthode PGD est itérative, et pour calculer  $\{U_{\underline{X}}\}^i$ ,  $\{U_t\}^i$  et  $\{\alpha\}^i$  à chaque itération, nous devons achever trois étapes : (i) étape d'enrichissement (ii) de projection (iii) vérification de la convergence.

**1) Étape d'enrichissement** A chaque itération de l'algorithme PGD, la base est enrichie par un seul nouveau produit de fonctions du fait du caractère progressif de la méthode. Ainsi et à l'ordre  $m$ , les  $m - 1$  premières fonctions  $\{U_{\underline{X}}\}^i$  et  $\{U_t\}^i$  ainsi que les coefficients  $\alpha^i$  sont connus. Le nouvel enrichissement est donné par :

$$[U_m] \approx \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha^i \{U_{\underline{X}}\}^i \otimes \{U_t\}^i) + \{U_{\underline{X}}\}^m \otimes \{U_t\}^m \quad (\text{I.106})$$

où  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  et  $\{U_t\}^m$  sont les nouveaux vecteurs enrichis à calculer. L'étape d'enrichissement consiste à enrichir la base de la solution avec des nouveaux  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  et  $\{U_t\}^m$  si l'algorithme de la PGD n'a pas convergé. Ainsi, en utilisant l'approximation de I.106, la nouvelle écriture de l'équation I.105 est :

$$\sum_{k=1}^{n_{\mathcal{A}}} ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^m \otimes [A_t]^k \{U_t\}^m) = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \{F_{\underline{X}}\}^j \otimes \{F_t\}^j - \sum_{k=1}^{n_{\mathcal{A}}} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \otimes [A_t]^k \{U_t\}^i) + [\mathcal{R}_{PGD}]^{m-1} \quad (\text{I.107})$$

## CHAPITRE I. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Pour calculer les nouveaux vecteurs enrichis, l'équation I.107 est projetée sur chacune des inconnues  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  et  $\{U_t\}^m$  avec :

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^{n_A} ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^m \otimes [A_t]^k \{U_t\}^m), \{U_t\}^m \right\rangle_{L^2([0,T])} = \\ & \left\langle \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \{F_{\underline{X}}\}^j \otimes \{F_t\}^j - \sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \otimes [A_t]^k \{U_t\}^i), \{U_t\}^m \right\rangle_{L^2([0,T])} + \langle \{\mathcal{R}_{PGD}\}^{m-1}, \{U_t\}^m \rangle_{L^2([0,T])} \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{k=1}^{n_A} ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^m \otimes [A_t]^k \{U_t\}^m), \{U_{\underline{X}}\}^m \right\rangle_{L^2([0,T])} = \\ & \left\langle \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \{F_{\underline{X}}\}^j \otimes \{F_t\}^j - \sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \otimes [A_t]^k \{U_t\}^i), \{U_{\underline{X}}\}^m \right\rangle_{L^2([0,T])} + \langle \{\mathcal{R}_{PGD}\}^{m-1}, \{U_{\underline{X}}\}^m \rangle_{L^2([0,T])} \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2([0,T])}$  sont les produits scalaires en norme 2 définis sur  $\Omega$  et  $[0, T]$ . Afin d'obtenir une optimalité de la base de la solution au sens de Galerkin, nous imposons que le résidu soit orthogonal à  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  et  $\{U_t\}^m$ . Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n_A} \langle U_t \rangle^m [A_t]^k \{U_t\}^m [A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^m = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \langle U_t \rangle^m \{F_t\}^j \{F_{\underline{X}}\}^j - \sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i (\langle U_t \rangle^m [A_t]^k \{U_t\}^i [A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i) \quad (\text{I.110})$$

$$\sum_{k=1}^{n_A} \langle U_{\underline{X}} \rangle^T [A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^m [A_t]^k \{U_t\}^m = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \langle U_{\underline{X}} \rangle^T \{F_{\underline{X}}\}^j \{F_t\}^j - \sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i (\langle U_{\underline{X}} \rangle^T [A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i [A_t]^k \{U_t\}^i) \quad (\text{I.111})$$

Il reste maintenant à faire la résolution des systèmes I.110 et I.111 pour calculer les nouveaux vecteurs enrichis. Il est clair que ce sont deux équations à deux inconnues  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  et  $\{U_t\}^m$ . Dans ce cas, un algorithme de point fixe est utilisé. C'est un algorithme itératif avec une stratégie simple : à chaque itération la fonction  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  (respectivement  $\{U_t\}^m$ ) est calculée à partir de l'équation I.110 (respectivement I.111) en prenant  $\{U_t\}^m$  (respectivement  $\{U_{\underline{X}}\}^m$ ) égal à celui obtenu à l'itération précédente du point fixe. Cet algorithme est répété jusqu'à la convergence conditionnée par :

$$\| (\{U_{\underline{X}}\}^m \{U_t\}^m)^q - (\{U_{\underline{X}}\}^m \{U_t\}^m)^{q-1} \| < \epsilon_{pf} \quad (\text{I.112})$$

où  $\epsilon_{pf}$  est une tolérance introduite par l'utilisateur. Les nouvelles fonctions obtenues sont ensuite normalisées :

$$\{U_{\underline{X}}\}^m = \frac{\{U_{\underline{X}}\}^m}{\|\{U_{\underline{X}}\}^m\|} \quad \text{et} \quad \{U_t\}^m = \frac{\{U_t\}^m}{\|\{U_t\}^m\|} \quad (\text{I.113})$$

**2) Étape de projection** La spécificité de cette version de la PGD consiste à pondérer chaque ajout de produit de fonctions  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  et  $\{U_t\}^m$  calculées à l'étape précédente tout

en gardant la condition d'orthogonalité du résidu. Cela est effectué par le calcul d'un ensemble de coefficients  $\{\alpha^i\}_{i=1,\dots,m}$  à chaque itération de la méthode PGD afin de rendre la décomposition optimale au sens de la projection de Galerkin.

A ce stade, les  $m$  premières fonctions de  $\{U_{\underline{X}}\}^i$  et  $\{U_t\}^i$ , solutions de l'étape précédente, sont connues. Le vecteur des coefficients de pondération est calculé par la projection de l'équation I.105 sur chaque fonction  $\{U_{\underline{X}}^i U_t^i\}$ , soit :

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^m \alpha^i ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \otimes [A_t]^k \{U_t\}^i), \{U_{\underline{X}}\}^j \{U_t\}^j \right\rangle_{L^2(\Omega \times [0,T])} = \left\langle \sum_{k=1}^{n_{\mathcal{F}}} \{F_{\underline{X}}\}^k \otimes \{F_t\}^k, \{U_{\underline{X}}\}^j \{U_t\}^j \right\rangle_{L^2(\Omega \times [0,T])} + \langle \mathcal{R}_{PGD}^m, \{U_{\underline{X}}\}^j \{U_t\}^j \rangle_{L^2(\Omega \times [0,T])} \quad (\text{I.114})$$

De plus, le résidu doit être orthogonal à  $\{U_{\underline{X}}^i U_t^i\}$ . Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^m \langle U_{\underline{X}} \rangle^j [A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \langle U_t \rangle^j [A_t]^k \{U_t\}^i \cdot \alpha^i = \sum_{k=1}^{n_{\mathcal{F}}} \langle U_{\underline{X}} \rangle^j \{F_{\underline{X}}\}^k \langle U_t \rangle^j \{F_t\}^k \quad (\text{I.115})$$

Posons :

$$\begin{aligned} - M_{ij} &= \sum_{k=1}^{n_A} \langle U_{\underline{X}} \rangle^j [A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \langle U_t \rangle^j [A_t]^k \{U_t\}^i \\ - D_j &= \sum_{k=1}^{n_{\mathcal{F}}} \langle U_{\underline{X}} \rangle^j \{F_{\underline{X}}\}^k \langle U_t \rangle^j \{F_t\}^k \\ - \langle \alpha \rangle &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \end{aligned}$$

Ainsi, selon l'équation I.115, le calcul des coefficients  $\{\alpha\}$  nous amène à résoudre le système linéaire suivant :

$$[M]\{\alpha\} = \{D\} \quad (\text{I.116})$$

où  $[M]$  est une matrice de dimension  $(m \times m)$ . Généralement, le nombre de fonctions enrichies dans la base spatio-temporelle est faible. Ceci rend la résolution du système linéaire I.116 à faible coût de calcul à chaque enrichissement d'un nouveau produit de fonctions.

**3) Estimation de la convergence** Après avoir calculé à l'ordre  $m$  les fonctions  $\{U_{\underline{X}}\}^m$  et  $\{U_t\}^m$  ainsi que le coefficient de pondération  $\{\alpha\}$ , cette étape permet d'arrêter le processus itératif de la méthode. Elle permet de vérifier la validité de la base PGD afin d'avoir une meilleure représentation de la solution. Pour cela, nous estimons une convergence globale définie par :

$$\mathcal{R}_{PGD}^m = \|[A]\{U\} - \{F\}\| \quad (\text{I.117})$$

La convergence globale est atteinte lorsque l'erreur  $\mathcal{R}_{PGD}^m$  devient assez petite. Soit :

$$\|\mathcal{R}_{PGD}^m\| = \left\| \sum_{k=1}^{n_A} \sum_{i=1}^m \alpha^i ([A_{\underline{X}}]^k \{U_{\underline{X}}\}^i \otimes [A_t]^k \{U_t\}^i) - \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{F}}} \{F_{\underline{X}}\}^j \otimes \{F_t\}^j \right\| < \epsilon_{PGD} \quad (\text{I.118})$$

avec  $\epsilon_{PGD}$  une tolérance introduite par l'utilisateur qui traduit le critère d'arrêt global. Si le résidu  $\mathcal{R}_{PGD}^m$  vérifie ce critère (c'est-à-dire  $\|\mathcal{R}_{PGD}^m\| < \epsilon_{PGD}$ ), la convergence est obtenue à cet ordre et la solution du problème est donnée par l'équation I.103. Dans le cas contraire, la procédure d'enrichissement (étape 1) doit se poursuivre avec d'autres produits de fonctions  $\{U_{\underline{X}}\}$  et  $\{U_t\}$  jusqu'à la convergence globale (Eq.I.118). La figure II.11 illustre la stratégie de résolution de la méthode PGD progressive pondérée dans le cadre d'une décomposition spatio-temporelle.

La PGD est une méthode approximative *a priori* et la qualité de la solution dépend du nombre de fonctions utilisées dans les enrichissements successifs. Toutefois, le nombre de modes spatio-temporels utilisés dépend fortement du critère d'arrêt global (Eq. I.118). En pratique, la valeur de la tolérance  $\epsilon_{PGD}$  est généralement prise égale à  $10^{-4}$  mais elle dépend fortement du problème étudié et de la convergence désirée. Dans notre cadre d'étude, l'influence de ce critère sera étudié dans le chapitre III (section 4.3) dans le cas d'un modèle élasto-plastique macroscopique ainsi que dans le chapitre IV (section 5.2) avec un modèle à l'échelle de la microstructure.

## 5 Synthèse et conclusion

Dans cette première partie bibliographique, différentes méthodes numériques en mécanique ont été présentées afin de mettre en place les éléments de base de notre travail. La méthode des Éléments Finis avec une résolution incrémentale a été considérée comme méthode de référence. Elle permet certes d'offrir une meilleure modélisation des agrégats polycristallins dans le cadre de la fatigue, mais elle est contraignante au regard des temps de calcul numérique avec des chargements à grand nombre de cycles.

Les différentes techniques de résolution de la littérature, permettant de réduire le temps de calcul, ont été ensuite présentées. Ces méthodes peuvent être utilisées en plus ou à la place de la méthode des Éléments Finis et ont été classées en deux grandes familles : la famille des méthodes numériques accélérées et la famille des méthodes de réduction de modèle. Étant donné l'importance du gain en temps CPU, ces méthodes ont été, et restent, très actives dans de nombreux champs disciplinaires, et notamment pour le calcul numérique en fatigue. La méthode LATIN a été utilisée par Arzt [24] et Cognard et Ladevèze [60] pour des applications de calculs non linéaires avec des chargements cycliques et un comportement visco-plastique grâce à l'implémentation de fonctions à deux échelles de temps (un temps court et un temps long). La même stratégie a été ensuite utilisée par Cognard et Ladevèze [59] et Ladevèze et al. [125] avec la prise en compte de la dépendance à la température des paramètres inélastiques. Cependant, cette méthode est extrêmement gourmande en mémoire à cause du stockage des matrices spatio-temporelles. La littérature [49, 156, 154, 61, 71] propose également des applications avec la méthode cyclique directe (DCA) dans le cadre du calcul numérique en fatigue afin de déterminer directement la réponse asymptotique, à partir duquel la durée de vie de la structure en fatigue peut être estimée. Cette méthode donne des avantages indéniables en termes de temps de calcul. En revanche, elle présente parfois un décalage en contrainte moyenne à déformation répétée comme l'a montré Herbland [100]. La méthode des sauts de cycles a été utilisée pour la modélisation en fatigue afin d'atteindre un maximum possible de cycles en temps réduit. Cette méthode a été mise en application par Kruch [123] pour la modélisation des structures visco-plastiques à grand nombre de cycles, et aussi par Sai [223] avec un comportement élasto-visco-plastique. Elle a été également utilisée pour des applications en fatigue [142, 34, 191, 206] avec des modèles d'endommagement et aussi par CAO [45] pour la modélisation du comportement des interfaces dans le cas de pieux chargés axialement pour un très grand nombre de cycles. Les résultats des différentes applications prouvent que cette méthode est rapide en terme de temps de calcul avec un comportement en plasticité de type von Mises (endommageable ou non), le calcul du nombre de cycles à sauter se faisaient d'une façon automatique.

Pour ce qui est des méthodes de réduction de modèle, peu sont utilisées dans le cadre du calcul numérique en fatigue. L'utilisation de ces méthodes dans le cadre d'une modélisation avec un modèle de comportement non linéaire devient aujourd'hui un enjeu majeur. Ganapathysubramanian et Zabarar [82] ont utilisé la POD pour modéliser l'évolution de



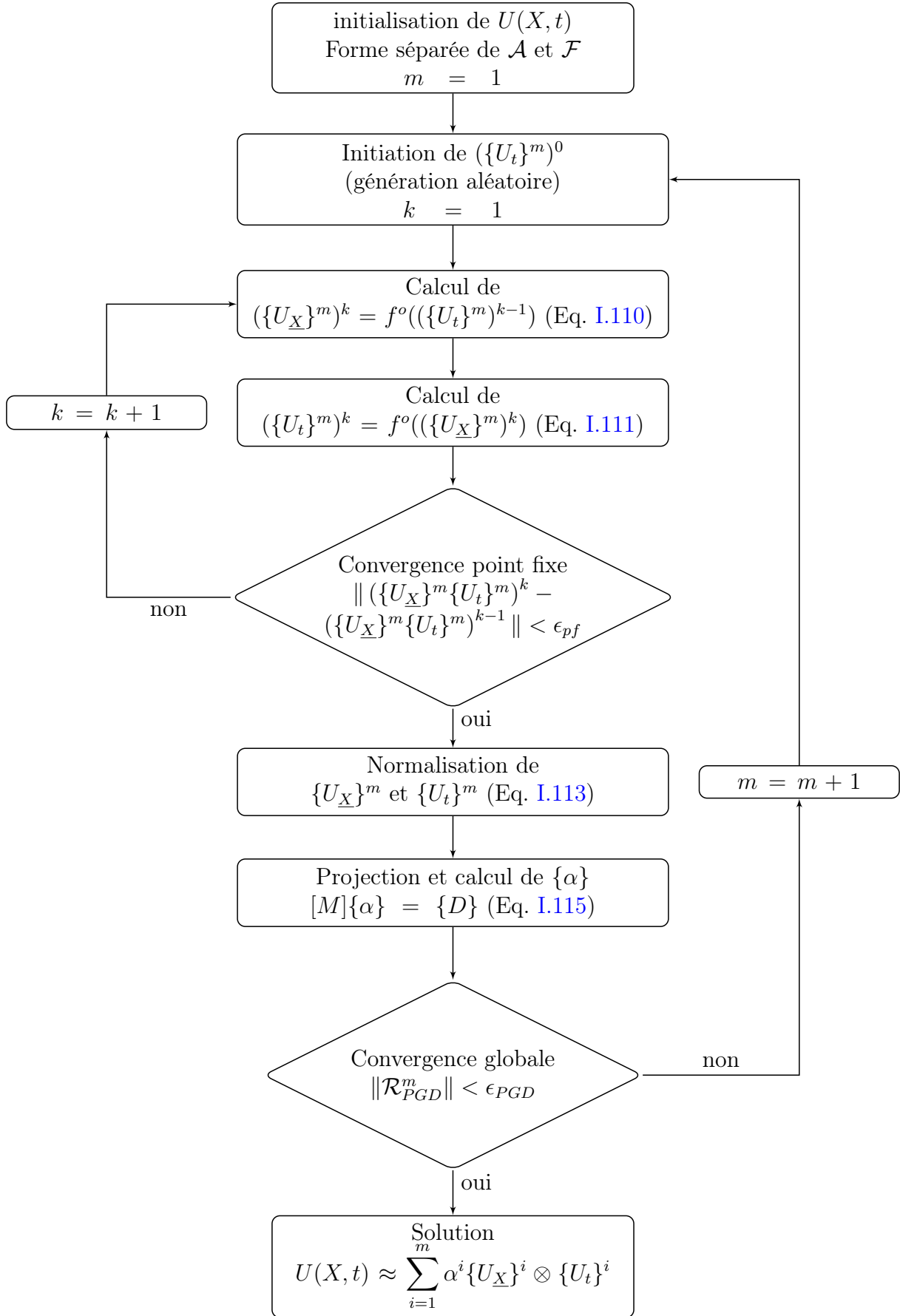


FIGURE I.11 – Algorithme associé à la méthode PGD progressive pondérée

la microstructure d'un polycristal décrite par une fonction de distribution des orientations cristallines. Yvonnet et al. [252] utilisent une méthode multi-échelle (*R3M*) qui consiste à appliquer la méthode POD-Galerkin pour la résolution d'équilibre du problème microscopique dans le cadre d'un modèle d'homogénéisation appliqué à des solides hyperélastiques. Bolzon et Buljak [37] proposent le couplage de la méthode POD avec une interpolation des fonctions de bases radiales (RBF) afin d'analyser la capacité des modèles à base réduite de produire la réponse mécanique non linéaire d'un matériau élasto-plastique. Radermacher et Reese [202] proposent des stratégies de réduction de modèles SPOD et A-SPOD en combinant l'apport de la méthode POD et des méthodes de décomposition du domaine pour la modélisation du procédé de formage incrémental d'une structure élasto-plastique. Les travaux dans [81, 118, 214] concernent l'utilisation de la POD dans le cadre d'une résolution réduite et hyper-réduite pour des structures élasto-plastiques non linéaires. Le but est de réduire le coût de la méthode Éléments Finis pour l'étude des problèmes de propagation des fissures en fatigue, des problèmes fortement non linéaires ainsi que des problèmes de traitement des variables internes. Il est à noter que l'ensemble de ces méthodes restent dans le cadre de la plasticité confinée. Des travaux récentes de Ryckelynck et al. [217] utilisent la méthode APHR pour des simulations avec un chargement cyclique afin d'atteindre le cycle stabilisé d'une structure modélisée par un comportement élasto-plastique. Cette méthode a permis de réduire le maillage de 900 éléments à 550 éléments avec une erreur sur la prédiction de la déformation plastique (et sur les contraintes) inférieure à 3% et un temps de calcul réduit d'un facteur 5. La méthode PGD a été utilisée dans les travaux de Hammoud et al. [98] pour des problèmes visco-élastiques avec des chargements cycliques. Un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation sont utilisés pour traiter des problèmes en fatigue des polymères. Les travaux de Ammar et al. [21] utilisent également une décomposition spatio-temporelle de la méthode PGD pour la résolution du système linéaire avec des modèles visco-élastiques.

Pour conclure, les méthodes présentées dans ce chapitre ont bien évidemment des avantages et des inconvénients. Les méthodes numériques accélérées sont généralement utilisées pour des comportements élasto-plastiques du type von Mises allant de l'écroutissage cinématique linéaire à l'écroutissage mixte non linéaire. Les méthodes de réduction de modèle ne sont pas encore utilisées à notre connaissance pour le calcul numérique en plasticité à l'exception de la méthode APHR. En revanche, l'implémentation de cette méthode est effectuée à partir d'un domaine restreint. Ceci pourrait être une limite dans le cadre d'un comportement hétérogène. Ainsi, le choix d'une méthode ou d'une autre n'est pas trivial, et nécessitera sans aucun doute quelques modifications. Rappelons que l'objectif est de simuler de grands domaines dimensionnels fortement non linéaires, et ce, pour un espace temps important. D'où la nécessité de développer des méthodes accélérées pour résoudre le problème du temps de calcul tout en gardant une bonne précision des résultats. Au vu des avantages et limites constatés, nous faisons le choix de retenir quelques méthodes qui vont être utilisées dans le chapitre suivant :

- Méthode des sauts de cycles
- Méthode cyclique directe
- Méthode PGD
- Résolution du modèle d'ordre réduit de la méthode APR
- Méthodes de séparation des variables SVD, POD et KLD

Le chapitre suivant présente la mise en application de deux méthodes accélérées de la bibliographie (sauts de cycles et cyclique directe) afin d'analyser leurs pertinence. Suite à ces résultats, nous allons proposer deux nouvelles méthodes en utilisant l'apport des méthodes de réduction de modèle.

## 5. SYNTHÈSE ET CONCLUSION

# Chapitre II

## Réduction dimensionnelle appliquée au chargement cyclique de matériaux à comportement élasto-plastique

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>46</b>
<b>2</b>	<b>Méthode cyclique directe et méthode des sauts de cycles</b>	<b>46</b>
2.1	Présentation du modèle	46
2.2	Loi de comportement élasto-plastique	47
2.3	Résultats en contrainte cyclique imposée	48
2.4	Résultats en déformation cyclique imposée	50
2.5	Influence du type de comportement	53
2.6	Bilan	58
<b>3</b>	<b>Méthode incrémentale droite</b>	<b>58</b>
3.1	Principe général	58
3.2	Formulation du problème	59
3.3	Démarche de la méthode	60
3.4	Algorithme de la méthode	62
3.5	Variante de la méthode	62
<b>4</b>	<b>La méthode PGD</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction	63
4.2	Implémentation de la méthode PGD dans le cadre de la plasticité	64
4.3	La première version de la PGD	69
4.4	La deuxième version de la PGD	72
<b>5</b>	<b>La méthode APR cyclique</b>	<b>74</b>
5.1	Introduction	74
5.2	Implémentation de la méthode APR cyclique	76
5.3	Stabilité de la base APR	83
5.4	Variantes de la méthode APR cyclique	84
<b>6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>86</b>

---

## 1 Introduction

La détermination de l'état limite d'une structure soumise à un chargement cyclique avec la méthode classique incrémentale nécessite un temps CPU élevé. Il existe donc un intérêt certain à s'orienter vers les méthodes accélérées.

Ce chapitre est composé de deux parties : la première est consacrée à l'analyse des performances de deux méthodes numériques issues de la littérature. Il s'agit de la méthode cyclique directe implémentée dans ABAQUS, et la méthode des sauts de cycles intégrée dans ZeBuLoN. Le but est de comparer ces deux méthodes en termes de précision des résultats et de temps CPU. Différents types de chargement cyclique et de comportement seront considérés.

Dans la seconde partie, de nouvelles méthodes de calcul, basées sur les techniques de réduction de modèles couplées à la méthode des éléments finis, seront proposées.

## 2 Méthode cyclique directe et méthode des sauts de cycles

Nous choisissons pour commencer d'aborder deux méthodes : la méthode des sauts de cycles et la méthode cyclique directe. La méthode de Zarka ne sera pas utilisée et appliquée ici car elle a été développée uniquement pour un comportement à écrouissage cinématique linéaire associé au critère de plasticité de von Mises.

Dans ce qui suit, les résultats de ces deux méthodes seront présentés pour le cas d'un modèle comprenant un défaut géométrique qui induit une concentration de contrainte. Deux types de chargement sont appliqués : contrainte cyclique imposée et déformation totale cyclique imposée. La méthode des sauts de cycles et la méthode cyclique directe sont comparées au calcul incrémental. Puisque ces deux méthodes sont implémentées dans deux codes différents, le calcul incrémental est effectué sur ABAQUS et sur ZeBuLoN pour avoir une solution de référence en adéquation avec le code utilisé. En effet, il sera montré dans la suite que les résultats de référence peuvent varier légèrement entre ces deux codes de calcul. La cause en est les tolérances numériques qui ne sont pas nécessairement identiques.

### 2.1 Présentation du modèle

Considérons donc le cas d'une plaque trouée (Figure II.1) bidimensionnelle avec un chargement mécanique de traction-compression cyclique. La présence d'importants gradients des champs mécaniques rend ce problème intéressant pour la mise en œuvre de méthodes numériques.

Les symétries du problème (chargement et conditions aux limites) permettent de ne considérer que le quart du maillage (Figure II.1). Le chargement est cyclique. Il s'agit d'appliquer, selon le cas d'étude, une force ou un déplacement sur le côté supérieur de la plaque. La plaque est maillée par des éléments finis triangulaires à 3 nœuds (Figure II.2) avec l'hypothèse des déformations planes (élément CPE3). Une étude de sensibilité au maillage a été effectuée pour choisir la discrétisation spatiale appropriée. La courbe de la figure II.2 présente les valeurs de contrainte extrapolées aux nœuds en fonction de la distance au côté inférieur de la plaque. A partir d'une discrétisation avec 960 éléments (qui correspond à 520 nœuds) la convergence est assurée. Cette discrétisation est donc utilisée. Les résultats sont analysés pour trois nœuds présentés à la figure II.2 (nœud 1, nœud 2 et nœud 3).

# CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

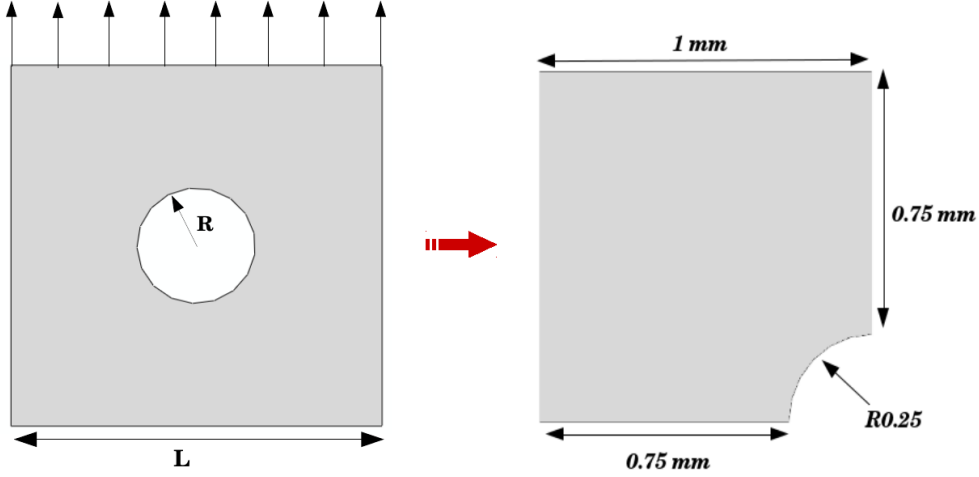


FIGURE II.1 – Description géométrique du modèle 2D d'une plaque trouée

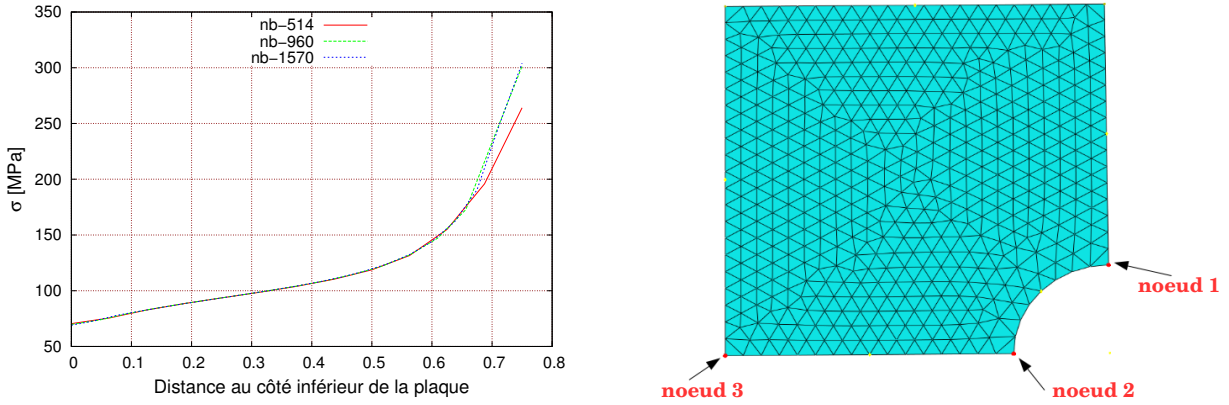


FIGURE II.2 – Maillage et étude de sensibilité

## 2.2 Loi de comportement élasto-plastique

Le matériau considéré est un cuivre pur. Le modèle de comportement macroscopique est de type élasto-plastique [108] avec un écrouissage mixte non linéaire (isotrope et cinématique non linéaires) sans tenir compte de l'effet de la viscosité. Les différents paramètres de cette loi ont été identifiés par Agbessi [5] sur les boucles d'hystérésis relatives à la moitié de la durée de vie totale lors d'essais à grand nombre de cycles. Les caractéristiques élastiques du matériau sont considérées indépendantes de la température. Le modèle est décrit par les équations (II.1–II.4) où  $f$  désigne la surface de charge donnée par le critère de von Mises,  $R$  la variable d'écrouissage isotrope non linéaire et  $\underline{X}$  l'écrouissage cinématique non linéaire. Les paramètres de cette loi sont donnés dans le tableau II.1.

$$f(\underline{\sigma}, \underline{X}, R) = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - \sigma_0 \quad (\text{II.1})$$

$$\underline{X} = c\underline{\alpha} \quad (\text{II.2})$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = \underline{\dot{\varepsilon}}^p - d\lambda\underline{\alpha} \quad (\text{II.3})$$

$$R = Q(1 - e^{-bp}) \quad (\text{II.4})$$

## 2. MÉTHODE CYCLIQUE DIRECTE ET MÉTHODE DES SAUTS DE CYCLES

Élasticité isotrope		Écrouissage isotrope			Écrouissage cinématique	
$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_0$ (MPa)	$Q$ (MPa)	$b$	$c$ (MPa)	$d$
120	0.3	15	56	90	52000	680

TABLE II.1 – Paramètres identifiés par Agbessi [5] pour la loi de comportement élasto-plastique à écrouissage mixte non linéaire d’un cuivre pur

$\dot{\lambda}$  désigne le multiplicateur plastique et  $p$  la déformation plastique accumulée vérifiant  $p = \varepsilon^p$  dans le cas de la traction monotone. Les paramètres  $Q$  et  $b$  représentent l’écrouissage isotrope non linéaire.  $c$  et  $d$  traduisent les paramètres de l’écrouissage cinématique non linéaire.

### 2.3 Résultats en contrainte cyclique imposée

Pour ce type de chargement, les calculs ont été effectués pour deux rapports de charge :  $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$  avec  $R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ . Les simulations ont été réalisées pour 1000 cycles de chargement avec une amplitude de contrainte de  $\sigma_a = 90$  MPa. Le choix de la valeur de  $\sigma_a$  correspond à la limite de fatigue déterminée expérimentalement par Agbessi [5]. Les composantes des contraintes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  et des déformations  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  ainsi que l’évolution de la déformation plastique accumulée sont analysées en fonction du nombre de cycles.

Les courbes contrainte/déformation pour les trois nœuds (Fig. II.2) obtenues avec la méthode incrémentale et les deux méthodes accélérées sont illustrées à la figure II.3 avec un chargement en  $R_\sigma = -1$  (figure II.3a, II.3c et II.3e) et un chargement en  $R_\sigma = 0$  (figure II.3b, II.3d et II.3f). Ces courbes montrent le cycle stabilisé pour la méthode des sauts de cycles, la méthode cyclique directe et le calcul incrémental avec ZeBuLoN et avec ABAQUS.

La figure II.3 montre que les résultats obtenus avec la méthode des sauts de cycles sont très proches de la méthode de référence pour tous les cas traités (avec moyenne ou non). En revanche, les résultats de la méthode cyclique directe montrent un décalage au niveau de la valeur moyenne des contraintes et des déformations même si l’amplitude est souvent bien prédite.

La figure II.4 représente l’évolution de la déformation plastique accumulée en fonction du nombre de cycles en contrainte imposée pour les deux types de chargement et pour les trois nœuds. Ces résultats correspondent au calcul incrémental avec ABAQUS. Cette figure permet de confirmer la nature de l’état limite de la structure obtenue au cycle stabilisé. Tout d’abord, une adaptation élastique est observée au nœud 1 pour  $R_\sigma = -1$  (Fig. II.4b), et au nœud 3 pour  $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$  (respectivement Fig. II.4e et II.4f). Ces observations de l’état limite confirment les boucles d’hystérésis du cycle stabilisé obtenues précédemment avec les figures II.3b, II.3c et II.3d. Par ailleurs, une accommodation plastique est observée au nœud 1 pour  $R_\sigma = -1$  (Fig. II.4a) et au nœud 2 pour  $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$  (respectivement Fig. II.4c et II.4d). Le comportement du matériau évolue donc vers deux états : adaptation élastique ou bien accommodation plastique.

Le tableau II.2 résume l’essentiel des résultats numériques obtenus par la méthode cyclique directe et par la méthode des sauts de cycles pour une simulation de 1000 cycles. Pour la méthode des sauts de cycles, le nombre de cycles effectivement calculés est de 256 au lieu de 1000 lorsque  $R_\sigma = -1$ . Ce nombre atteint 471 cycles quand  $R_\sigma = 0$  avec un coefficient de précision  $\eta$  élevé (0.5). Ainsi, en absence de contrainte moyenne, le nombre de sauts de cycles effectués est moins important. Pour la méthode cyclique directe, le nombre

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

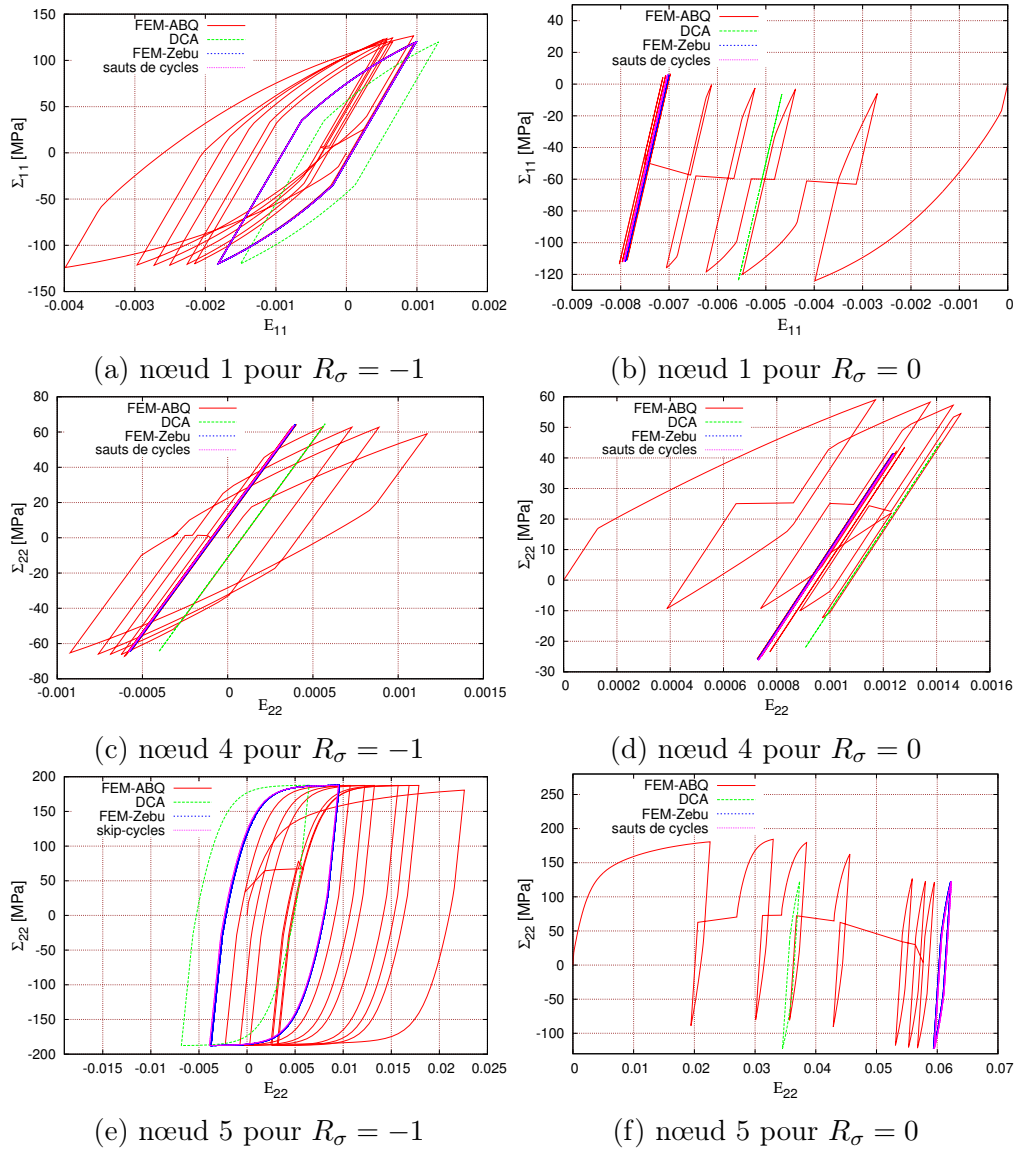


FIGURE II.3 – Cycles stabilisés  $\Sigma_{11} - E_{11}$  et  $\Sigma_{22} - E_{22}$  pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA pour une plaque trouée sollicitée en traction en contrainte imposée avec  $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$

de termes de Fourier utilisés est de 30 pour les deux cas de chargement. Ici, le cycle stabilisé est atteint après 340 itérations pour  $R_\sigma = -1$  et 857 itérations pour  $R_\sigma = 0$ . La méthode cyclique directe converge donc plus rapidement dans le cas où  $R_\sigma = -1$ .

En ce qui concerne le temps de calcul, les deux méthodes ont montré un gain de temps de calcul considérable. Lorsque  $R_\sigma = -1$ , la méthode cyclique directe est 9 fois plus rapide que le calcul incrémental sous ABAQUS et 4 fois plus rapide dans le cas  $R_\sigma = 0$ . De même, sous ZeBuLoN, la méthode des sauts de cycles est 7 fois plus rapide que la méthode incrémentale pour  $R_\sigma = -1$ , et 2 fois plus rapide pour  $R_\sigma = 0$ . Les tableaux II.3 et II.4 résument l'ensemble de ces résultats.

A ce stade, la méthode cyclique directe paraît plus rapide que la méthode des sauts de cycles pour les deux rapports de charges considérés ( $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$ ). Néanmoins, elle prédit le cycle stabilisé avec un écart au niveau des moyennes (de contrainte et de déformation).



## 2. MÉTHODE CYCLIQUE DIRECTE ET MÉTHODE DES SAUTS DE CYCLES

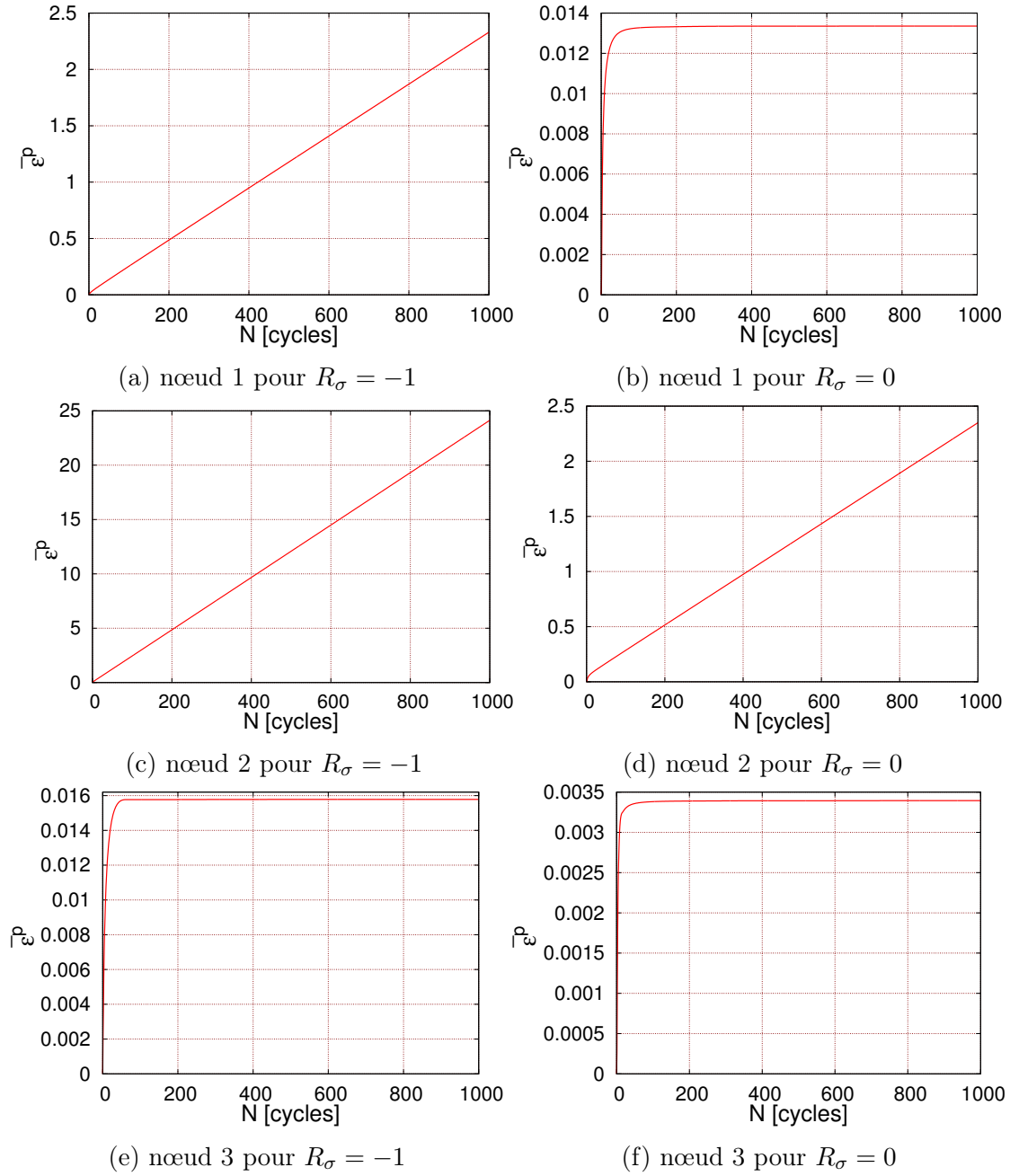


FIGURE II.4 – Évolution de la déformation plastique accumulée avec la méthode incrémentale ABAQUS en fonction du nombre de cycles en contrainte imposée et avec  $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$

### 2.4 Résultats en déformation cyclique imposée

Pour le chargement à déformation imposée, l'amplitude est fixée à 0.00131. Elle est égale à la valeur de la déformation correspondant à la contrainte maximale dans le premier cycle du cas précédent (contrainte imposée). Les simulations sont réalisées à un rapport de  $R_\varepsilon = 0$  et de  $R_\varepsilon = -1$  avec un nombre de cycles égal à 1000 (qui suffit pour obtenir l'état stabilisé). Les composantes des contraintes et des déformations ainsi que l'évolution de la déformation plastique cumulée en fonction du nombre de cycles sont analysées.

La figure II.5 représente les boucles d'hystérésis pour un chargement en traction-compression obtenues par les différentes méthodes avec un chargement à  $R_\varepsilon = -1$  (figure II.5a, II.5c et

CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

Type de chargement	nombre de termes de Fourier	nombre d'itérations	$\eta$	nombre de sauts
$R_\sigma = -1$	30	340	0.5	256
$R_\sigma = 0$	30	857	0.5	471

TABLE II.2 – Performances des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en contrainte imposée

Méthode utilisée	incrémentale ABAQUS	incrémentale ZeBuLoN	Sauts de cycles	DCA
Temps (min)	214.41	263.86	36	23.97
Gain (%)			87	89

TABLE II.3 – Temps de calcul pour le cas  $R_\sigma = -1$

Méthode utilisée	incrémentale ABAQUS	incrémentale ZeBuLoN	Sauts de cycles	DCA
Temps (min)	176.88	262	112.79	48.55
Gain (%)			57	73

TABLE II.4 – Temps de calcul pour le cas  $R_\sigma = 0$

II.5e) et un chargement à  $R_\varepsilon = 0$  (figure II.5b, II.5d et II.5f). Ces résultats montrent une bonne précision de la méthode des sauts de cycles dans tous les cas étudiés. La méthode cyclique directe prédit la bonne forme du cycle stabilisé. En revanche, à l'exception des résultats pour  $R_\varepsilon = -1$ , un écart au niveau des moyennes (de contrainte et de déformation) est observé.

L'état stabilisé tend vers une accommodation plastique comme montré sur les deux exemples de la figure II.6. En effet, l'évolution de la déformation plastique accumulée en fonction du nombre de cycles est linéaire, que ce soit pour un chargement en  $R_\varepsilon = -1$  (figure II.6a) ou bien en  $R_\varepsilon = 0$  (figure II.6b).

Le tableau II.5 résume l'essentiel des résultats numériques issus des deux méthodes accélérées pour une simulation de 1000 cycles en déformation imposée. Les calculs par la méthode des sauts de cycles ont été effectués avec un coefficient de précision de 0.3 en  $R_\varepsilon = -1$  et de 0.2 en  $R_\varepsilon = 0$ . Le nombre de cycles sautés est respectivement de 667 et de 642 pour un total de 1000 cycles. Contrairement au cas du chargement en contrainte imposée, les nombres de sauts sont ici presque égaux pour les deux rapports de charge mais avec des coefficients de précision différents. Par ailleurs, la méthode cyclique directe converge vers une solution stabilisée en 368 itérations lorsque  $R_\varepsilon = -1$  et en 974 itérations quand  $R_\varepsilon = 0$ . Le nombre de termes de Fourier utilisé est égal à 35 pour les deux types de chargement. Comme pour le cas précédent (chargement en contrainte imposée), la méthode cyclique directe nécessite moins d'itérations pour atteindre la convergence désirée pour le cas où  $R_\varepsilon = -1$ .

Pour ce qui est des temps CPU, les deux méthodes accélérées ont montré un gain intéressant. En effet, la méthode cyclique directe est 8 fois plus rapide que la méthode incrémentale en  $R_\varepsilon = -1$ , et 4 fois plus rapide avec un chargement en  $R_\varepsilon = 0$ . La méthode des sauts de

## 2. MÉTHODE CYCLIQUE DIRECTE ET MÉTHODE DES SAUTS DE CYCLES

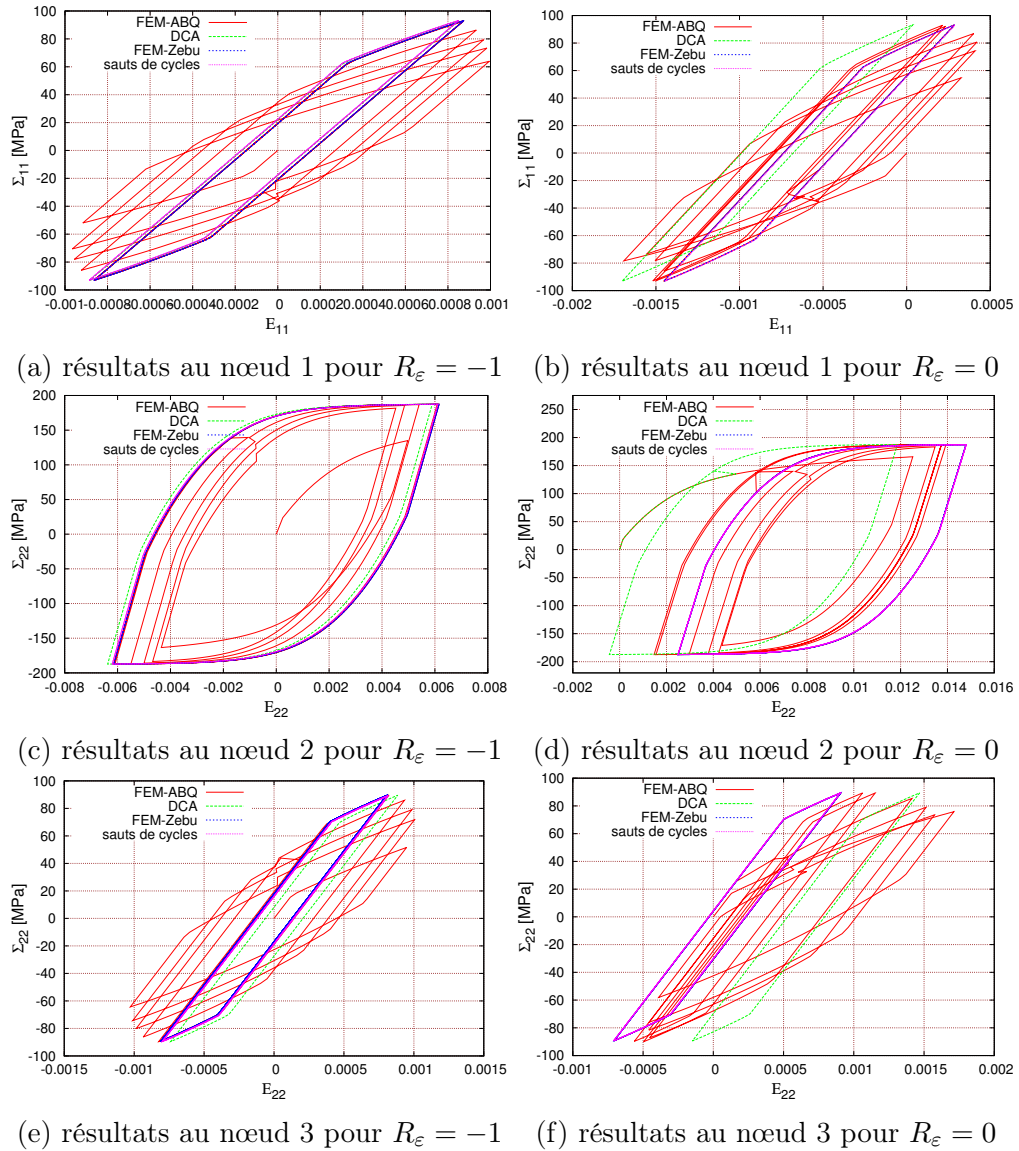


FIGURE II.5 – Cycles stabilisés  $\Sigma_{11} - E_{11}$  et  $\Sigma_{22} - E_2$  pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA pour une plaque trouée sollicitée en traction avec  $R_\varepsilon = -1$  et  $R_\varepsilon = 0$

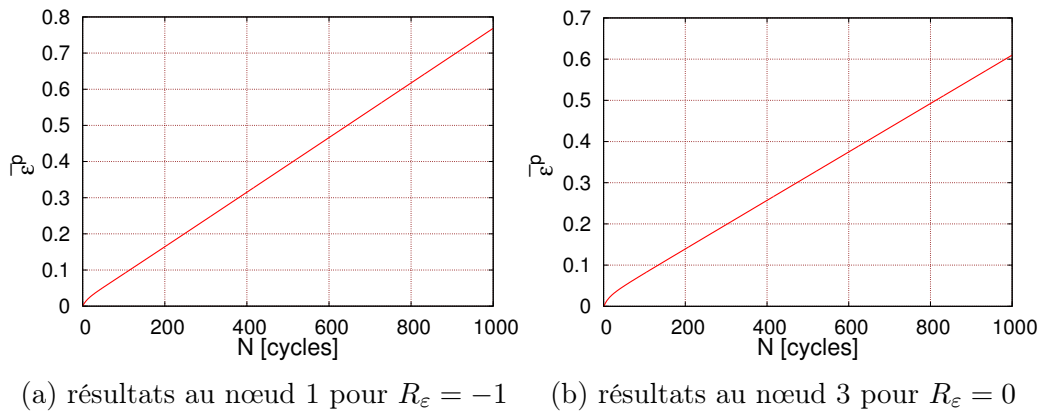


FIGURE II.6 – Évolution de la déformation plastique cumulée avec la méthode incrémentale ABAQUS en fonction du nombre de cycles en déformation imposée avec  $R_\varepsilon = -1$  et  $R_\varepsilon = 0$

cycles, quant à elle, réduit le temps de calcul par rapport à la méthode de référence d'un

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

Type de chargement	nombre de termes de Fourier	nombre d'itérations	$\eta$	nombre de sauts
$R_\varepsilon = -1$	35	368	0.3	667
$R_\varepsilon = 0$	35	974	0.2	642

TABLE II.5 – Performances des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en déformation imposée

Méthode utilisée	incrémentale ABAQUS	incrémentale ZeBuLoN	Sauts de cycles	DCA
Temps (min)	216	291	52.43	26.20
Gain (%)			82	83

TABLE II.6 – Temps de calcul pour un chargement en  $R_\varepsilon = -1$

Méthode utilisée	incrémentale ABAQUS	incrémentale ZeBuLoN	Sauts de cycles	DCA
Temps (min)	218.45	411.44	80.90	60.91
Gain (%)			81	73

TABLE II.7 – Temps de calcul pour un chargement  $R_\varepsilon = 0$

facteur 6 en  $R_\varepsilon = -1$ , et d'un facteur 5 en  $R_\varepsilon = 0$ . Les tableaux II.6 et II.7 résument les différents temps de calcul.

La méthode cyclique directe offre donc une plus grande rapidité par rapport à la méthode des sauts de cycles. Il est néanmoins possible de constater des écarts au niveau de la moyenne en déformation répétée ( $R_\varepsilon = 0$ ). Une bonne adéquation des réponses issues de la méthode des sauts de cycles avec les réponses de la méthode incrémentale est observée. La valeur du coefficient de précision  $\eta$  n'est pas connue a priori, et elle diffère d'un cas à un autre. Il est nécessaire de conduire plusieurs cas test pour caler correctement la valeur de  $\eta$  en fonction du problème étudié et de la convergence souhaitée.

### 2.5 Influence du type de comportement

Dans cette partie, la réponse mécanique issue des deux méthodes accélérées est étudiée en fonction du type de comportement et de chargement. Les résultats présentés précédemment ont été réalisés avec un comportement non linéaire. Il nous a donc semblé utile d'étudier la pertinence des deux méthodes en fonction de la non linéarité du comportement. Pour ce faire, plusieurs cas test sont réalisés sur un élément de volume (un seul élément fini) afin de réduire le temps de calcul. L'élément de volume est sollicité en traction et en cisaillement. Deux cas de chargement sont considérés :

1. contrainte imposée (en  $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$ )
2. déformation imposée (en  $R_\varepsilon = -1$  et  $R_\varepsilon = 0$ )

Le matériau considéré est le cuivre pur (même matériau) avec un comportement élasto-plastique (Eq. II.1 - II.4). Plusieurs types d'érouissage sont utilisés :

- érouissage isotrope non linéaire ( $c$  et  $d = 0$ ) ;

## 2. MÉTHODE CYCLIQUE DIRECTE ET MÉTHODE DES SAUTS DE CYCLES

- écouissage cinématique linéaire ( $Q$  et  $d = 0$ ) ;
- écouissage cinématique non linéaire ( $Q = 0$ ) ;
- écouissage mixte : isotrope non linéaire et cinématique linéaire ( $d = 0$ ) ;
- écouissage mixte : isotrope non linéaire et cinématique non linéaire.

La modélisation utilisant le modèle à écouissage mixte isotrope non linéaire et cinématique linéaire sera appelée dans la suite écouissage mixte linéaire. Le modèle à écouissage mixte isotrope non linéaire et cinématique non linéaire sera appelée écouissage mixte non linéaire.

### 2.5.1 Résultats en traction cyclique à contrainte imposée

Pour le chargement uniaxial, les calculs ont été effectués pour les deux rapports de charge :  $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$ , pour 1000 cycles et une contrainte imposée  $\sigma_a = 90$  MPa. La figure II.7 présente les courbes contrainte-déformation du dernier cycle pour différents cas selon la direction du chargement.

Les figures II.7b et II.7d montrent (pour un chargement avec  $R_\sigma = 0$ ) une adaptation élastique prédite avec la méthode incrémentale ou les méthodes accélérées. Avec un chargement en  $R_\sigma = -1$ , une accommodation plastique est prédite (figures II.7a et II.7c).

Les résultats de la méthode des sauts de cycles sont très proches de la méthode de référence pour tous les cas traités. Cependant, pour une modélisation avec un écouissage mixte non linéaire et  $R_\sigma = -1$ , un léger écart est observé au niveau de la moyenne des déformations (figure II.7a). Par ailleurs, les prédictions de la méthode cyclique directe laissent parfois à désirer. Si les prédictions sont parfois bonnes (figure II.7d et II.7f), un décalage au niveau de la valeur moyenne des déformations est souvent observé. Enfin, pour une modélisation avec un écouissage isotrope non linéaire (figure II.7e), la méthode cyclique directe prédit une accommodation plastique, ce qui n'est pas théoriquement possible.

La table II.8 présente les différents paramètres numériques utilisés ainsi que le nombre de sauts réalisés par la méthode de sauts de cycles. Il est important de noter que pour les comportements à écouissage cinématique non linéaire et mixte non linéaire, le paramètre de précision  $\eta$  a été réduit pour avoir des résultats corrects. Le nombre de sauts est très élevé (plus de 90%). Néanmoins, il est moins important dans le cas de l'écouissage mixte non linéaire à cause de la plus forte non linéarité.

Type d'écouissage	nombre de termes de Fourier	$\eta$ pour $R_\sigma = -1$	$\eta$ pour $R_\sigma = 0$	nombre de sauts $R_\sigma = -1$	nombre de sauts $R_\sigma = 0$
isotrope non linéaire	49	0.01	0.01	958	958
cinématique linéaire	49	0.01	0.01	958	958
cinématique non linéaire	49	0.0001	0.0001	914	870
mixte linéaire	49	0.01	0.01	914	914
mixte non linéaire	49	0.0001	0.0001	841	930

TABLE II.8 – Paramètres des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en traction et à  $R_\sigma$

### 2.5.2 Résultats en traction cyclique avec déformation imposée

Les simulations ont été réalisées pour un chargement de 1000 cycles avec une amplitude de déformation de 0.00131 (tout comme dans le cas précédent) selon la troisième direction. Deux rapports de charge ont été appliqués : en déformation alternée ( $R_\varepsilon = -1$ ) et en déformation répétée ( $R_\varepsilon = 0$ ).

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

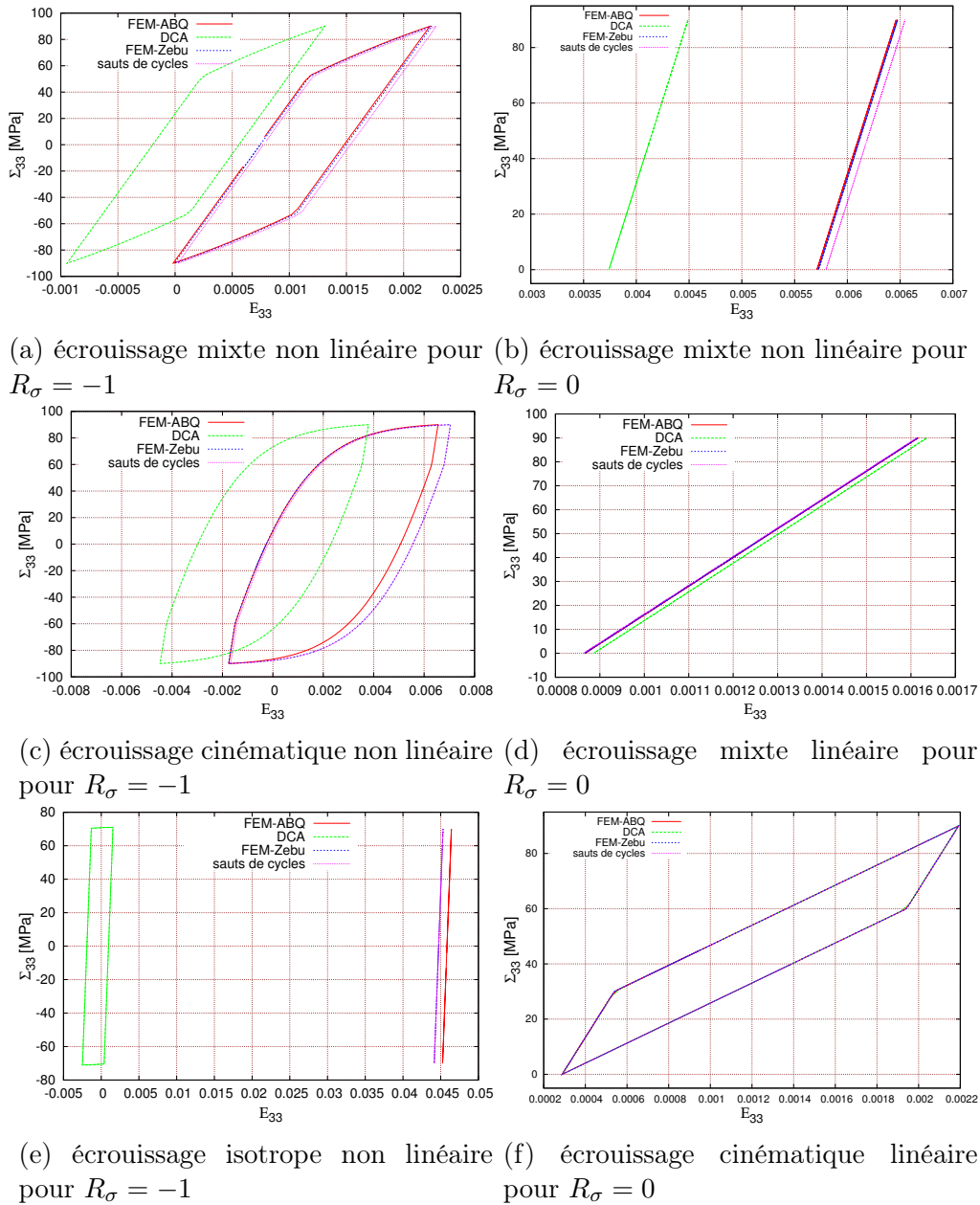


FIGURE II.7 – Cycles stabilisés  $\Sigma_{33} - E_{33}$  pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA sur un élément de volume sollicité en traction et en contrainte imposée

La figure II.8 montre des résultats en traction et en déformation imposée nettement meilleurs que ceux obtenus en contrainte imposée. En effet, les réponses des deux méthodes accélérées sont très satisfaisantes en comparaison avec les résultats de la méthode incrémentale.

La table II.9 présente l'essentiel des résultats numériques obtenus par les deux méthodes accélérées. Comme pour le cas précédent, pour les comportements à écouissage cinématique non linéaire et mixte non linéaire, le paramètre de précision  $\eta$  de la méthode des sauts de cycles a été considérablement réduit pour obtenir des résultats satisfaisants. Le nombre de sauts est également très élevé. Cependant, il atteint sa plus petite valeur dans le cas de l'écouissage mixte non linéaire. En d'autres termes, le nombre de sauts décroît avec la non linéarité du comportement ce qui conduit à l'augmentation du temps de calcul.

## 2. MÉTHODE CYCLIQUE DIRECTE ET MÉTHODE DES SAUTS DE CYCLES

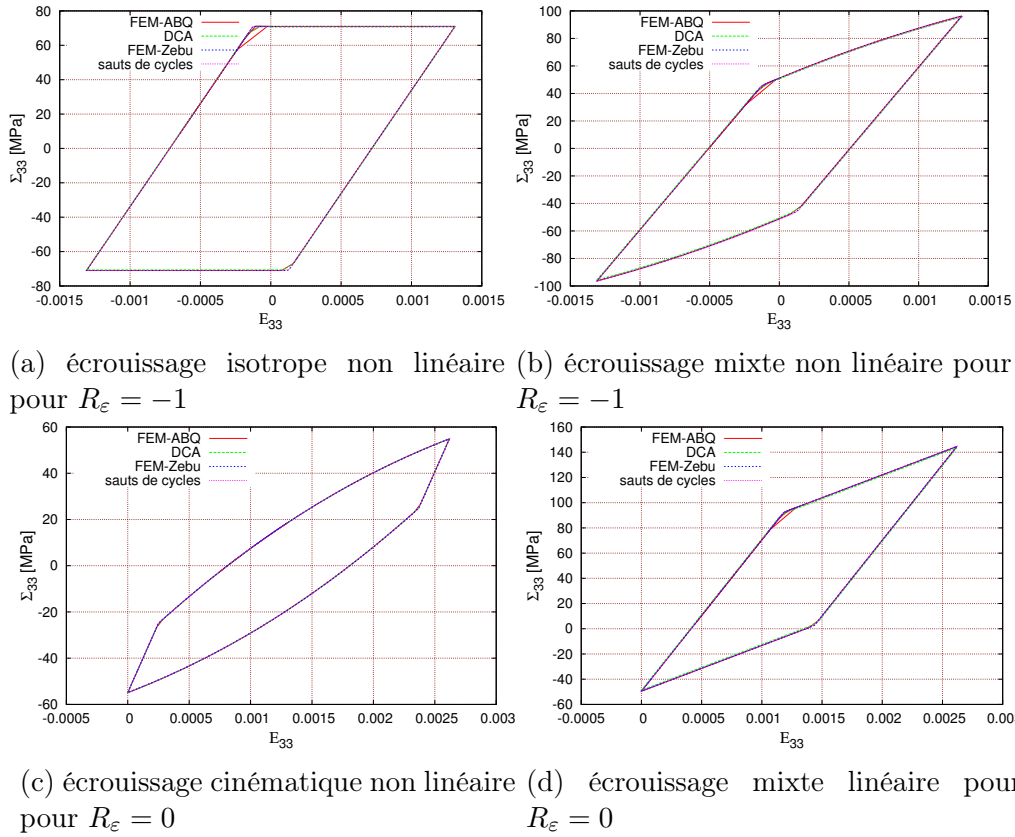


FIGURE II.8 – Comparaison des résultats des cycles stabilisés  $\Sigma_{33} - E_{33}$  pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA sur un élément de volume sollicité en traction et en déformation imposée

Type d'écrouissage d'écrouissage	nombre de termes de Fourier	$\eta$ pour $R_\varepsilon = -1$	$\eta$ pour $R_\varepsilon = 0$	nombre de sauts $R_\varepsilon = -1$	nombre de sauts $R_\varepsilon = 0$
isotrope non linéaire	49	0.01	0.01	925	964
cinématique linéaire	49	0.01	0.01	928	958
cinématique non linéaire	49	0.0001	0.0001	895	909
mixte linéaire	49	0.01	0.01	914	899
mixte non linéaire	49	0.0001	0.0001	778	782

TABLE II.9 – Paramètres des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en traction et en  $R_\varepsilon$

### 2.5.3 Présentation des résultats en cisaillement

Cette partie présente les résultats des simulations numériques sur un élément de volume sollicité en cisaillement. Deux types de chargement ont été appliqués : à contrainte imposée ( $R_\sigma = -1$  et  $R_\sigma = 0$ ) et à déformation imposée ( $R_\varepsilon = -1$  et  $R_\varepsilon = 0$ ). Le modèle de comportement considéré est un modèle élasto-plastique avec un écouissage isotrope non linéaire et cinématique non linéaire. Les simulations ont été effectuées sur 1000 cycles avec les mêmes amplitudes de chargement utilisées précédemment. La comparaison de l'hystérésis de l'état stabilisé entre la méthode incrémentale, la méthode des sauts de cycles ainsi que la méthode cyclique directe apparaît en figure II.9.

Au vu des résultats en contrainte imposée, le comportement du matériau évolue vers deux états limites : une accommodation plastique (en  $R_\sigma = -1$  figure II.9a) et une adaptation

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

élastique (en  $R_\sigma = 0$  figure II.9b). La méthode des sauts de cycles donne le cycle stabilisé avec une bonne précision, pour un coefficient  $\eta$  faible et avec un saut très important de cycles. Par ailleurs, le cycle stabilisé calculé par la méthode cyclique directe diffère de celui donné par le calcul incrémental. En effet, une différence au niveau de la moyenne est observée en  $R_\sigma = -1$  (figure II.9a) et en  $R_\sigma = 0$  (figure II.9a). Pour ce type de chargement, le nombre de termes de Fourier utilisés ainsi que le nombre de cycles sautés sont donnés au tableau II.10.

Pour les résultats en déformation cyclique imposée, une accommodation plastique est prédite que ce soit à  $R_\varepsilon = -1$  (figure II.9c) ou à  $R_\varepsilon = 0$  (figure II.9d). La méthode des sauts de cycles, avec un coefficient de précision faible, conduit à un cycle stabilisé en accord avec le calcul incrémental. Par ailleurs, une moins bonne adéquation des résultats issus de la méthode cyclique directe, au niveau de la moyenne et de la forme du cycle stabilisé, est constatée. Le tableau II.10 présente les différents paramètres numériques utilisés pour les deux méthodes accélérées ainsi que le nombre de sauts de la méthode des sauts de cycles pour les deux rapports de charge.

Type de chargement	nombre de termes de Fourier	$\eta$ pour $R = -1$	$\eta$ pour $R = 0$	nombre de sauts $R = -1$	nombre de sauts $R = 0$
$R_\sigma$	49	0.00003	0.00003	917	922
$R_\varepsilon$	49	0.0001	0.0001	887	895

TABLE II.10 – Paramètres des deux méthodes, DCA et sauts de cycles, en cisaillement

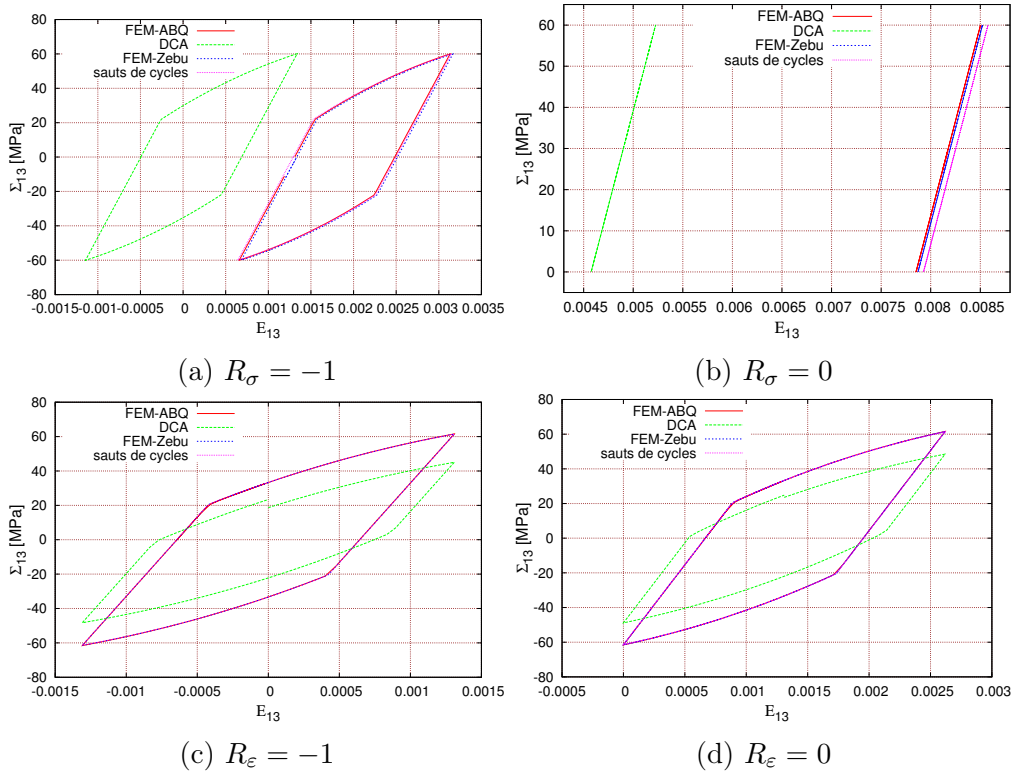


FIGURE II.9 – Cycles stabilisés  $\Sigma_{13} - E_{13}$  pour les méthodes incrémentales, sauts de cycles et DCA sur un élément de volume sollicité en cisaillement



## 2.6 Bilan

Les différentes simulations numériques, présentées dans cette première partie, visent à comparer deux méthodes numériques accélérées : la méthode cyclique directe et la méthode des sauts de cycles. Ces simulations ont été réalisées pour les cas suivants :

- matériau élasto-plastique avec différents types d'écrouissage ;
- en traction et en cisaillement, avec et sans moyenne ;
- chargements en contrainte et déformation imposées ;
- avec et sans gradient de contrainte

Les deux méthodes permettent un gain non négligeable en temps CPU. Généralement, le gain avec la méthode cyclique directe est supérieur à celui obtenu avec la méthode des sauts de cycles pour tous les cas étudiés. La méthode cyclique directe prédit mal les valeurs moyennes des contraintes et des déformations. Ceci peut s'expliquer par la condition de périodicité imposée sur le processus itératif. En effet, les travaux de [254, 192] ont montré que le changement de l'état initial n'influe pas sur l'adaptation mais sur l'état résiduel. Pour s'affranchir de ce problème, Pommier et al. [194] proposent d'effectuer cinq itérations avec un calcul à grand incrément de temps avant d'appliquer la condition de périodicité. Néanmoins, suite aux cas tests effectués, cette solution n'a pas permis de résoudre le problème de la moyenne qui est un paramètre important pour les critères de fatigue. Comme l'évolution de la solution est importante au cours des premiers cycles, nous proposons d'appliquer la condition de périodicité, surtout pour des problèmes fortement non linéaires, après un nombre plus important de cycles avec le calcul incrémental.

Les gains en temps CPU avec la méthode des sauts de cycles sont intéressants. Toutefois, le nombre de cycles sautés dépend fortement du type de comportement utilisé. En effet, les différents tests effectués ont montré que le nombre de sauts décroît avec les non linéarités du problème. Ainsi, le gain en temps CPU dépend de la non linéarité du modèle utilisé, ce qui peut être défavorable avec des comportements en plasticité cristalline (fortement non linéaire). Le coefficient de précision de la méthode des sauts de cycles n'est pas connu à l'avance, et sa valeur est déterminée a priori. Dans ce cas, il faut apporter une attention particulière au choix du coefficient de précision, car il influe beaucoup sur les résultats, et sa valeur reste difficile à trouver. Enfin, les deux méthodes analysées ne permettent pas d'avoir une description fine de l'état transitoire de la structure.

Pour conclure, les différents cas tests réalisés n'ont pas permis de choisir une méthode de calcul "optimale" pour un comportement à l'échelle microscopique. Jusqu'à maintenant aucune de ces méthodes n'est complètement satisfaisante. Suite à ce constat, il nous a semblé utile de nous orienter vers le développement de nouvelles méthodes permettant de résoudre, en un temps CPU raisonnable, des problèmes à grand nombre de ddl avec des comportements de type élasto-visco-plastique fortement non linéaires. Il s'agit de problèmes définis sur une grande échelle de temps pour lesquels on souhaite garder l'historique des variables locales en tout point de la structure.

## 3 Méthode incrémentale droite

### 3.1 Principe général

Comme évoqué précédemment dans la présentation de la méthode des Éléments Finis (chapitre I), la factorisation de la matrice de rigidité engendre un coût de calcul important dans le cas de problèmes non linéaires à grand nombre de ddl. Afin de réduire ce temps de

calcul, la première idée est de maintenir la matrice de rigidité constante après la première factorisation. Pour ce faire, les seules non linéarités sont supposées uniquement dues à la loi de comportement. Dans ce cas, il est possible de mettre le terme non linéaire  $\mathbb{C}^{nl}$  dans le second membre du système linéaire I.16 et de considérer la matrice de rigidité calculée avec les propriétés élastiques du matériau. Autrement dit, le terme non linéaire  $\mathbb{C}^{nl}$  de la matrice tangente sera remplacé par le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}^{el}$ .

Cette écriture a été utilisée avec la méthode cyclique directe [157, 195]. Soit avec une résolution à grands incréments de temps ou à l'aide d'une décomposition en série de Fourier. Spiliopoulos et al. [239, 240] adoptent cette écriture dans leur méthode directe pour traiter en particulier le cas de chargement cyclique en fluage. Spiliopoulos et al. [241] estiment également le comportement d'une structure élastique parfaitement plastique soumise à un chargement cyclique. Ce travail consiste à utiliser une approche de résolution incrémentale qui résulte d'une version particulière de la méthode incrémentale. Elle sera décrite dans ce qui suit sous le nom de la méthode incrémentale droite. Une application des méthodes de réduction de modèle, autres que la FFT, est décrite plus loin (section 4 et 5) afin de découpler les dimensions spatiale et temporelle.

### 3.2 Formulation du problème

Afin de bien définir la problématique, prenons le cas du problème de référence (figure I.1). Il s'agit d'une structure occupant un domaine  $\Omega$  et sollicitée par un chargement qui évolue dans un intervalle temporel  $\mathcal{I} = [0, T]$ . La structure est supposée à comportement élasto-plastique. Le chargement appliqué conduit à une réponse en termes de déplacement, déformation, déformation plastique et de contrainte définies à chaque instant de l'intervalle temporel et en tout point de la structure.

L'introduction du tenseur de rigidité élastique  $\mathbb{C}^{el}$  permet de relier le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  au champ de déformation totale  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  à travers la relation non linéaire suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^{el} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (\text{II.5})$$

A titre de rappel, la formulation de l'équilibre est donnée par :

$$\int_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} dV = \{F^{ext}\} \quad (\text{II.6})$$

avec  $[B]$  la matrice élémentaire d'interpolation des déformations déduite des dérivées spatiales des fonctions de forme  $[N]$ , et  $\{F^{ext}\}$  les forces externes. En utilisant la relation II.5, l'équilibre II.6 s'écrit :

$$\int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^p\}) dV = \{F^{ext}\} \quad (\text{II.7})$$

ou bien :

$$\int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] \{\varepsilon\} dV - \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] \{\varepsilon^p\} dV = \{F^{ext}\} \quad (\text{II.8})$$

En utilisant l'équation I.11, reliant le champ de déformation au champ de déplacement, l'équation ci-dessus (II.8) s'écrit :

$$\int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] [B] dV \{U\} = \{F^{ext}\} + \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] \{\varepsilon^p\} dV \quad (\text{II.9})$$

Ainsi, l'équation d'équilibre I.16 devient :

$$[K] \{U\} = \{F^{ext}\} + \{Q^p\} \quad (\text{II.10})$$

Avec :

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] [B] dV$$

$$\{F^{ext}\} = \int_{\Omega} [N](\rho\{f_d\}) dV + \int_{\partial_2\Omega} [N]\{F_d\} dS$$

$$\{Q^p\} = \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}]\{\varepsilon^p\} dV$$

où  $[K]$  représente la matrice de rigidité,  $\{F^{ext}\}$  est le vecteur des forces nodales dues aux efforts volumiques et surfaciques,  $\{Q^p\}$  représente le vecteur des forces nodales résultant du champ de déformation plastique  $\{\varepsilon^p\}$ .  $\{U\}$  est le vecteur du champ de déplacement solution du problème. Ainsi,  $\{Q^p\}$  représente le terme non linéaire de l'équation d'équilibre II.10.

Dans ce cas, la matrice  $[K]$  représente la matrice de rigidité élastique. En faisant l'hypothèse des petites perturbations, la matrice élémentaire d'interpolation  $[B]$  est constante. De plus, en supposant que les propriétés élastiques du matériaux sont indépendantes du temps, la matrice  $[K]$  est constante. Ainsi, maintenir une matrice de rigidité constante permet de faire une seule factorisation lors de la première itération du calcul. Cela permet d'économiser un temps de calcul important par rapport à la méthode incrémentale classique.

### 3.3 Démarche de la méthode

Cette partie présente les différents étapes à suivre pour la résolution d'un problème mécanique non linéaire soumis à un chargement cyclique en utilisant la méthode incrémentale droite. La discrétisation spatiale est réalisée par la méthode des éléments finis et la résolution du problème temporel est effectué par la méthode incrémentale. Soit  $\mathcal{I} = [0, T]$  l'intervalle de temps d'un cycle. Il est discrétisé en  $N_t$  incréments de temps  $i$  tel que  $[i, i + 1]$  est relativement petit. Un incrément de la méthode incrémentale droite comprend 3 étapes : étape globale, étape locale et condition de convergence.

#### 3.3.1 Étape globale

Tout comme dans la méthode cyclique directe, l'étape globale consiste à calculer, à chaque incrément de temps, les champs de déplacement et de déformation cinématiquement admissibles et les champs de contrainte statiquement admissibles.

Connaissant l'incrément du champ de déformation plastique  $\{\Delta\varepsilon^p\}$ , la première étape consiste à faire la résolution de l'équation d'équilibre avec un système global sur toute la structure. Soit :

$$[K]\{\Delta U\}_j^i = \{\Delta F^{ext}\}^i + \{\Delta Q^p\}_j^i \quad (\text{II.11})$$

où  $j$  est l'indice d'itération de la convergence à l'incrément  $i$ . D'un point de vue pratique, l'initialisation de l'incrément des forces nodales résultant du champ de déformation plastique se fait avec :

$$\{\Delta Q^p\}^I = \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}]\{\Delta\varepsilon^p\}^I dV = \{0\} \quad (\text{II.12})$$

où  $\{\Delta\varepsilon^p\}^I$  traduit l'incrément du champ de déformation plastique initial qui est nul pour la première itération. Ainsi, la stratégie de calcul consiste à appliquer un incrément d'effort  $\{\Delta F^{ext}\}$  afin de calculer l'incrément de déplacement  $\{\Delta U\}_j^i$  cinématiquement admissible par la résolution du système linéaire II.11. Un champ de déplacement est cinématiquement admissible s'il satisfait les conditions de continuité ainsi que les conditions cinématiques c'est-à-dire les conditions aux limites en déplacement (Eq. I.4). La résolution du système

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

linéaire II.11 est effectuée en gardant la matrice de rigidité  $[K]$  constante et sa factorisation n'est effectuée qu'à la première itération du calcul.

Ensuite, à partir de l'incrément du champ de déplacement cinématiquement admissible, il est possible de déterminer l'incrément du champ de déformation cinématiquement admissible  $\{\Delta\varepsilon^{CA}\}$  par l'équation II.13. De même, l'incrément du champ de contraintes statiquement admissible  $\{\Delta\sigma^{SA}\}$  est calculé par l'équation II.14.

$$\{\Delta\varepsilon^{CA}\} = [B]\{\Delta U\} \quad (\text{II.13})$$

$$\{\Delta\sigma^{SA}\} = [C^{el}](\{\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p\}) \quad (\text{II.14})$$

Un champ de déformation est cinématiquement admissible s'il vérifie les conditions cinématiques. Autrement dit, s'il satisfait les équations de compatibilités et s'il est dérivable à partir d'un champ de déplacement cinématiquement admissible. Par ailleurs, un champ de contraintes est statiquement admissible s'il vérifie les conditions statiques. En d'autres termes, s'il satisfait l'équation d'équilibre et s'il permet de valider les conditions aux limites en contrainte (Eq. I.5).

### 3.3.2 Étape locale

La solution d'un problème mécanique non linéaire est obtenue par la résolution de deux types d'équation : des équations linéaires qui sont généralement les équations d'équilibre global en espace, et des équations de comportement non linéaires et locales en espace. Ainsi, cette étape consiste à la résolution des équations locales en chaque point de Gauss de la structure. Ceci est effectué par la résolution des équations de comportement à partir des solutions calculées à l'étape précédente (étape globale). Cette étape permet de déterminer les champs plastiquement admissibles qui vérifient la relation de comportement.

À l'instant  $i$  du chargement, la déformation plastique  $\{\varepsilon^p\}^{i-1}$  ainsi que l'incrément de la déformation  $\{\Delta\varepsilon\}^i$  entre  $i$  et  $i-1$  sont connus et donnés par l'étape globale. Il s'agit alors de déterminer le nouvel incrément de déformation plastique  $\{\Delta\varepsilon^p\}^i$  afin de définir la nouvelle déformation plastique  $\{\varepsilon^p\}^i$  à l'instant  $i$ . L'incrément du champ de contrainte plastiquement admissible  $\{\Delta\sigma^{PA}\}^i$  ainsi que les variables internes sont déterminés à l'instant  $i$ . Ceci est effectué par la résolution du modèle de comportement utilisé de manière implicite par un algorithme de retour radial.

Enfin, le terme non linéaire du second membre sera mis à jour en utilisant le nouvel incrément de la déformation plastique  $\{\Delta\varepsilon^p\}^i$ , donné par la résolution de la loi de comportement. Il sera utilisé au début de l'étape globale pour la résolution de l'équation d'équilibre II.11 avec les nouvelles corrections de l'état mécanique.

### 3.3.3 La condition de convergence

Cette étape est liée à la vérification de la convergence des résultats. Elle permet de vérifier, à la fin de l'étape locale, la validité de la solution à chaque itération  $j$  de l'incrément  $i$  du chargement. Nous pouvons dire que la solution est satisfaite lorsqu'à la fin de l'incrément, les champs de contrainte plastiquement admissibles, calculés par la loi de comportement, sont statiquement admissibles. Ainsi, le critère de convergence est donné par :

$$\frac{\|\Delta F^{SA} - \Delta F^{PA}\|}{\|\Delta F^{SA}\|} = \frac{\|\int_{\Omega}([B]^T\{\Delta\sigma^{SA}\})dV - \int_{\Omega}([B]^T\{\Delta\sigma^{PA}\})dV\|}{\|\int_{\Omega}([B]^T\{\Delta\sigma^{SA}\})dV\|} < \epsilon_{tol} \quad (\text{II.15})$$

où  $\epsilon_{tol}$  est une tolérance introduite par l'utilisateur,  $\{\Delta F^{SA}\}$  traduit les forces nodales dues à l'incrément du champ de contrainte statiquement admissible.  $\{\Delta F^{PA}\}$  représente les forces nodales dues à l'incrément du champ de contrainte plastiquement admissible. Ce schéma est itératif et répété jusqu'à la convergence des résultats pour chaque incrément du cycle.

### 3.4 Algorithme de la méthode

La figure II.10 illustre l'algorithme de la méthode incrémentale droite qui décrit les étapes de la démarche.

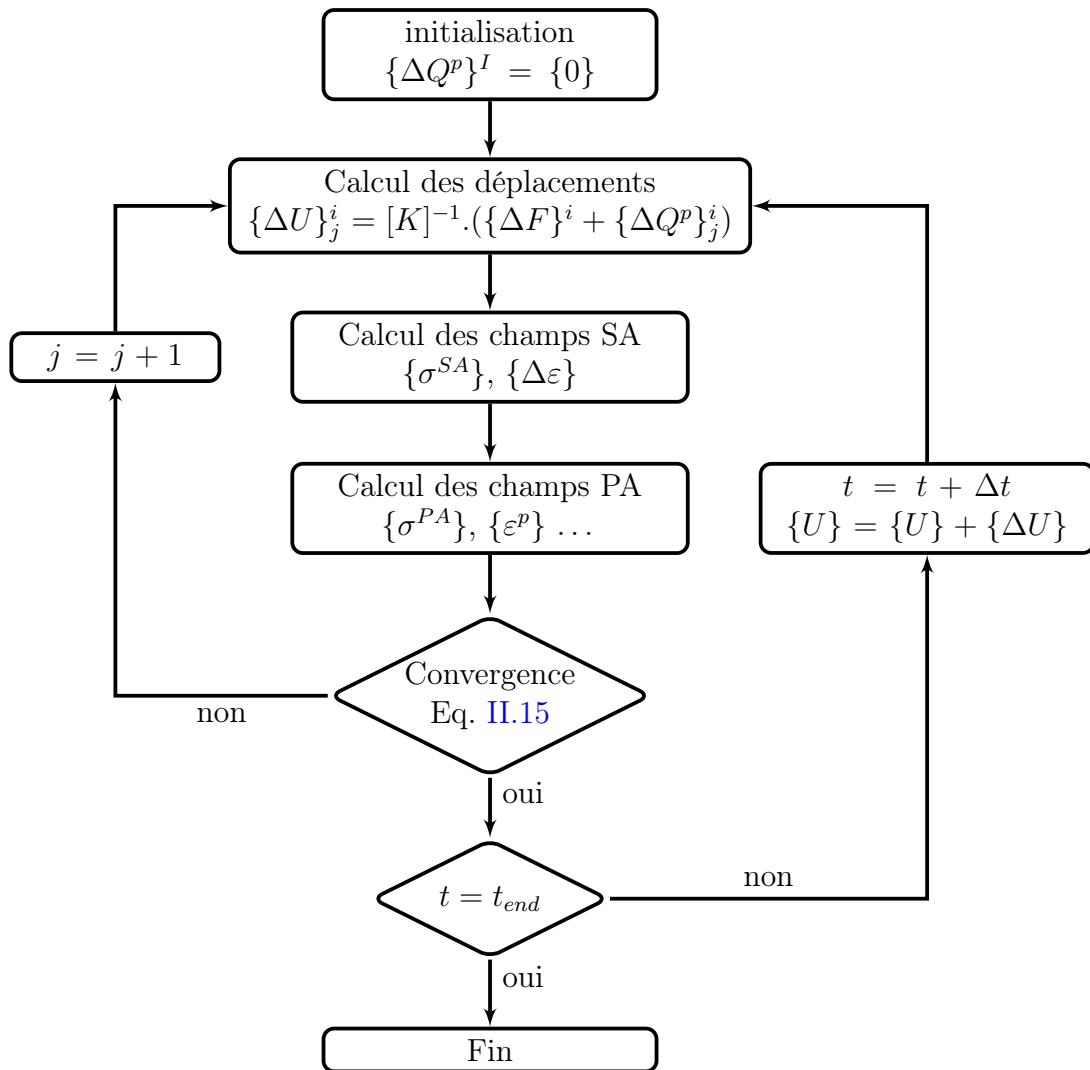


FIGURE II.10 – Algorithme de la méthode incrémentale droite

### 3.5 Variante de la méthode

La solution du problème, calculée par la méthode incrémentale droite, est constituée d'une part d'un champ de déplacement cinématiquement admissible, et d'autre part d'un champ de contrainte plastiquement admissible donné par la loi de comportement et qui vérifie l'admissibilité statique. Les champs cinématiquement admissibles sont calculés à partir de la résolution du système linéaire II.11 en gardant la matrice de rigidité constante au cours du temps. Par ailleurs, il est à noter que le caractère incrémental de la méthode consiste à

résoudre à la fois les équations locales et globales. Les solutions entre les différents instants sont ensuite déterminées par interpolation linéaire. Il existe également une deuxième possibilité d'utilisation de cette méthode. Elle consiste à découpler les équations du problème et de les résoudre séparément sur tout l'intervalle de chargement. C'est le principe de séparation des équations proposé par Ladevèze et al. [127, 36] avec la méthode LATIN.

Considérons  $N_t$  incréments de temps dans le cycle. L'équation d'équilibre de l'étape globale est résolue pour tout l'intervalle temporel. Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} [K]\{\Delta U\}_1 = \{\Delta F^{ext}\}_1 + \{\Delta Q^p\}_1 \\ [K]\{\Delta U\}_2 = \{\Delta F^{ext}\}_2 + \{\Delta Q^p\}_2 \\ \vdots \\ [K]\{\Delta U\}_{N_t} = \{\Delta F^{ext}\}_{N_t} + \{\Delta Q^p\}_{N_t} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Connaissant le champ de déformation plastique, le champ de déplacement cinématiquement admissible défini sur  $\Omega \times \mathcal{I}$  est calculé à partir du système II.16. Ensuite, les champs de déformation cinématiquement admissibles et les champs de contrainte statiquement admissibles peuvent être déterminés pour toute l'histoire de chargement. Les solutions de l'étape globale sont ensuite utilisées pour la résolution de l'étape locale afin de construire les champs qui vérifient la loi de comportement à chaque instant et en tout point de Gauss. Enfin, la vérification de la validité de la solution est déterminée par la relation II.15 à l'itération courante.

Cette méthode sera appelée la méthode Cyclique. Elle est extrêmement gourmande en mémoire à cause du stockage des matrices spatio-temporelles. Ainsi, la résolution du système linéaire et des équations constitutives (i.e. équations du comportement) sera plus coûteuse en temps CPU par rapport à la version incrémentale droite, et notamment pour une structure modélisée avec un nombre élevé de ddl. Ces constats ont été établis à l'aide d'une comparaison entre un solveur incrémental, non-incrémental et la méthode PGD (C).

Les deux méthodes présentées dans cette partie permettent d'atteindre la réponse mécanique d'une structure sous chargement cyclique. Afin de réduire le temps de calcul, le point clé consiste à maintenir la matrice de rigidité constante. La deuxième idée proposée dans ce travail consiste à explorer l'apport des méthodes de réduction de modèle, que nous allons maintenant aborder.

## 4 La méthode PGD

### 4.1 Introduction

Après avoir maintenu la matrice de rigidité constante, la deuxième idée consiste à utiliser une méthode de réduction de modèle afin d'avoir une base plus riche. Récemment, les techniques de réduction de modèle ont ouvert de nouvelles perspectives quant à une simulation précise et rapide pour une variété de domaines d'application en mécanique. Cependant, la résolution avec des comportements non linéaires reste encore aujourd'hui difficiles même pour ces techniques. Comme précisé dans le premier chapitre, Ryckelynck [222, 221] a développé une méthode de réduction *a priori* adaptative appelée APHR qui utilise un schéma d'intégration en temps classique, incrémental. Cette méthode a été utilisée avec succès pour la simulation d'un comportement de type élasto-plastique sous chargement cyclique [217]. Elle a permis de prédire les résultats avec un gain de temps important. Afin de pouvoir travailler sur des modèles de grande dimension, nous avons choisi d'utiliser une autre stratégie

basée sur une représentation séparée spatio-temporelle dans une formulation élasto-viscoplastique sous chargement cyclique. Pour ce faire, la Décomposition Généralisée en modes Propres (PGD) a été choisie comme méthode de réduction de modèle. Cette méthode, qui s'appuie sur une approximation radiale, a montré son efficacité pour la résolution des problèmes à grand nombre de ddl. Dans ce qui suit, l'application de la méthode PGD dans le cadre de la plasticité sera présentée.

## 4.2 Implémentation de la méthode PGD dans le cadre de la plasticité

### 4.2.1 Introduction

Les méthodes numériques classiques consistent à résoudre, par une stratégie incrémentale, les équations du problème à l'aide d'un schéma d'intégration implicite ou explicite. Lors de l'utilisation de la technique incrémentale, l'intervalle de temps est discrétisé en un ensemble d'incrémentes assez petits, et la résolution des équations globales et locales est effectuée simultanément. Par ailleurs, il existe des techniques dites non-incrémentales permettant d'itérer entre l'histoire des champs de contrainte et de déplacement qui vérifient respectivement les équations locales et globales. Ces techniques sont souvent utilisées par les méthodes de réduction de modèle. En effet, la difficulté principale associée à l'approche classique est son caractère incrémental progressif. Ceci rend difficile l'utilisation des techniques de réduction de modèles basées sur des représentations séparées. La représentation spatio-temporelle au sein de la Décomposition Généralisée en modes Propres (PGD) permet la réalisation d'une telle intégration découplée [126, 127]. La méthode LATIN, proposée par Pierre Ladevèze dans les années 80, procède en supposant une représentation séparée espace/temps à la fois pour les champs de déformation et les champs de contrainte. Ainsi, la solution du problème est définie par l'intersection de deux espaces : le premier contient les équations globales et linéaires, tandis que le deuxième contient les équations locales et non linéaires. Une itération de la méthode LATIN contient donc deux étapes (globale et locale) et le passage entre elles est effectué à travers des directions de recherche. Dans le présent travail, la stratégie de l'intégration proposée évite l'utilisation d'une telle direction de recherche en considérant la représentation séparée de l'espace et du temps à travers la méthode PGD. Deux algorithmes de résolution non-incrémentale seront présentés. Ces algorithmes sont décrits pour être utilisés dans le cadre de l'écriture séparée afin de résoudre le problème défini à l'étape globale.

### 4.2.2 Formulation et forme séparée du problème

L'étape de résolution d'un système linéaire contenant l'ensemble des degrés de liberté de la structure est la plus coûteuse en temps CPU. Une autre philosophie de résolution de système linéaire de type  $[\mathcal{A}][\mathcal{U}] = [\mathcal{F}]$  a alors été proposée. L'originalité réside dans l'écriture de  $[\mathcal{A}]$ ,  $[\mathcal{U}]$  et  $[\mathcal{F}]$  sous forme séparée. Dans ce contexte, la PGD qui est une solution de type "a priori" semble être adaptée pour calculer les champs  $\{\mathcal{U}\}$  du système linéaire.

Dans notre cas d'étude, le but est de calculer les champs de déplacements  $U(X, t)$ , définis dans  $\Omega \times [0, T]$ , solutions du système linéaire en utilisant la stratégie évoquée précédemment. Ceci permet de découpler les variables spatiale et temporelle. Notons  $\{\Delta F^{nl}\} = \{\Delta F^{ext}\} + \{\Delta Q^p\}$  le terme du second membre. Si l'on considère  $N_t$  intervalles de temps, l'équilibre

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

global peut être donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K]\{\Delta U\}_1 = \{\Delta F^{nl}\}_1 \\ [K]\{\Delta U\}_2 = \{\Delta F^{nl}\}_2 \\ \vdots \\ [K]\{\Delta U\}_{N_t} = \{\Delta F^{nl}\}_{N_t} \end{array} \right. \quad (\text{II.17})$$

Ainsi, l'approximation spatio-temporelle du champ de déplacement avec la méthode PGD, exprimée sous la forme non-incrémentale séparée, est donnée par :

$$[\Delta U]_{(X,t)} \approx [\Delta U_{PGD}]_{(X,t)} = \sum_{i=1}^m \alpha^i \{\Delta U_{\underline{X}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i \quad (\text{II.18})$$

avec  $\{\Delta U_{\underline{X}}\}^i$  un vecteur qui traduit la base spatiale de taille égale aux ddl de l'espace.  $\{\Delta U_t\}^i$  représente la base temporelle de taille égale au nombre de pas de temps.  $\alpha$  est un facteur de pondération de la méthode et  $m$  représente le nombre de modes nécessaires pour approximer la solution.

Avant d'achever les différentes étapes de résolution de la méthode PGD, il faut écrire le problème II.17 sous sa forme séparée à travers une décomposition espace/temps. La variable spatiale  $X$  est définie dans le cas d'un problème 3D avec trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . D'un point de vue pratique, il a été mentionné dans la section 4.3.3 du premier chapitre, que ce type de problème peut être défini soit par :

- une décomposition espace ( $X = (x, y, z)$ -temps) appelée décomposition spatio-temporelle et donnée par :

$$[\Delta U]_{(X,t)} = \sum_{i=1}^{N_U} \alpha^i (\{\Delta U_{\underline{X}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i) \quad (\text{II.19})$$

- soit par une décomposition entièrement séparée donnée par :

$$[\Delta U]_{(x,y,z,t)} = \sum_{i=1}^{F_U} \alpha^i (\{\Delta U_x\}^i \otimes \{\Delta U_y\}^i \otimes \{\Delta U_z\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i) \quad (\text{II.20})$$

Malgré le fait que la décomposition II.20 ne traite que les espaces à une dimension et évite le problème de résolution d'un système de dimension élevé, le choix se porte sur la décomposition espace  $X = (x, y, z)$ -temps. En effet, la figure II.11 présente les travaux de Ammar [22] pour un problème de transfert de chaleur résolu avec une décomposition spatio-temporelle et une décomposition entièrement séparée. Ces résultats montrent que le nombre de fonctions ajoutées, nécessaires à la convergence de l'algorithme PGD, est plus important dans le cas d'une décomposition entièrement séparée. Ainsi, le choix se porte sur la décomposition II.19 afin de limiter le nombre de fonctions enrichies. Autrement dit, moins de résolutions du système linéaire (Eq. II.36) à chaque enrichissement.

La décomposition spatio-temporelle du problème II.17 est donc donnée par :

$$[K] = \sum_{s=1}^{N_K} [K_{\underline{X}}]^s \otimes [K_t]^s \quad (\text{II.21})$$

$$[\Delta F^{nl}] = \sum_{j=1}^{N_F} \{\Delta F_{\underline{X}}^{nl}\}^j \otimes \{\Delta F_t^{nl}\}^j \quad (\text{II.22})$$



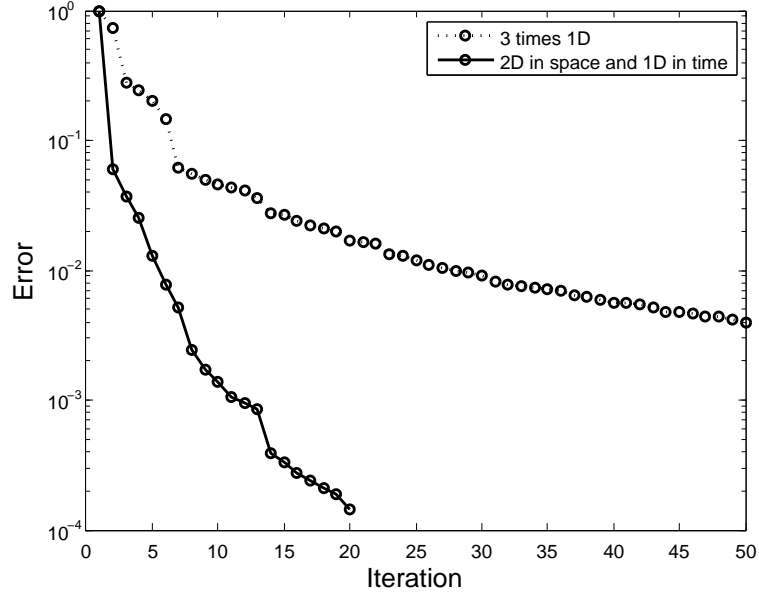


FIGURE II.11 – Comparaison des courbes de convergence de l'algorithme PGD pour un problème de transfert de chaleur étudié avec deux types de décompositions [22]

$$[\Delta U] = \sum_{i=1}^{N_U} \alpha^i (\{\Delta U_{\underline{X}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i) \quad (\text{II.23})$$

avec  $\{\Delta F_{\underline{X}}^{nl}\}^j$  le vecteur des forces dans la base spatiale qui correspond à la dimension d'espace.  $\{\Delta F_t^{nl}\}^j$  représente le vecteur des forces dans la base temporelle qui correspond à la dimension temporelle. La matrice de rigidité est représentée sous la forme de produit tensoriel des opérateurs  $[K_{\underline{X}}]^s$  et  $[K_t]^s$  qui traduisent respectivement la base spatiale et temporelle de cette matrice.  $N_F$  et  $N_K$  représentent respectivement le nombre de modes nécessaires pour définir le second membre et la matrice de rigidité.

La séparabilité des opérateurs du problème (équations II.21 et II.22) permet d'exprimer  $[K]$  et  $[\Delta F^{nl}]$  comme une somme de produits de fonctions. Cependant, la question de la séparabilité n'est pas triviale, à l'exception des opérateurs constants au cours du temps. Dans notre cas, la matrice de rigidité est constante. Ainsi, elle peut être décomposée avec un seul mode. L'équation II.21 s'écrit alors :

$$[K] = [K_{\underline{X}}] \otimes [K_t] \quad (\text{II.24})$$

avec  $[K_{\underline{X}}]$  la matrice de rigidité de dimension égale au nombre de ddl et  $[K_t]$  une matrice identité de dimension égale au nombre de discrétisations temporelles. Le second membre  $[\Delta F^{nl}]$  est variable au cours de l'intervalle discrétisé. Pour sa décomposition, il est nécessaire de travailler sur toute l'histoire du cycle et d'appliquer une méthode permettant de l'écrire sous une forme séparée espace-temps. Soit  $N_t$  le nombre de réalisations temporelles du cycle, l'histoire de second membre est donnée par :

$$[\Delta F^{nl}] = \begin{pmatrix} (\Delta F^{nl})_1^1 & (\Delta F^{nl})_1^2 & \dots & (\Delta F^{nl})_1^{N_t} \\ (\Delta F^{nl})_2^1 & (\Delta F^{nl})_2^2 & \dots & (\Delta F^{nl})_2^{N_t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\Delta F^{nl})_{N_x}^1 & (\Delta F^{nl})_{N_x}^2 & \dots & (\Delta F^{nl})_{N_x}^{N_t} \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Certaines méthodes *a posteriori*, telle que la SVD et la POD, permettent d'obtenir une décomposition spatio-temporelle d'un champ donné. Cette décomposition est donnée par la

somme de produits de fonctions d'une base spatiale et d'une base temporelle optimales et définies pour un nombre de modes réduit. Dans notre cas, le problème spatial est discrétisé à l'aide de la méthode des éléments finis. Il est à noter que l'expression II.25, pour tout les instants du cycle, est extrêmement grande avec un nombre de ddl important. L'utilisation d'une POD classique ou une SVD classique peut donc devenir très coûteuse en stockage. En effet, la matrice des corrélations  $\mathcal{R}(x, x')$  de la POD classique est une matrice pleine de dimension  $(N_x \times N_x)$ . Il est impossible de stocker  $\mathcal{R}$  pour un nombre de ddl élevé. La résolution du problème aux valeurs propres devient aussi très coûteuse. L'application d'une SVD classique consiste, en premier lieu, à écrire la matrice  $[\Delta F^{nl}]$  sous la forme d'un produit de trois matrices  $[U][S][V]$  dont  $[U]$  est de dimension  $(N_x \times N_x)$ . Ces difficultés sont les mêmes que la POD classique. Pour s'affranchir de ce problème, une utilisation de la POD snapshots ou bien une SVD tronquée est proposée pour l'écriture séparée spatio-temporelle du second membre II.25.

### La POD snapshots

Soit  $[\Delta F^{nl}]$  l'histoire de la plasticité du second membre donnée par l'équation II.25. Le cycle  $\mathcal{I} = [0, T]$  est discrétisé en  $N_t$  instants. La base spatiale est donnée sous la forme d'une combinaison linéaire de  $\Delta F^{nl}(X, t)$  par :

$$\Delta F^{nl}(X) = \sum_{j=1}^{N_t} \Delta F_t^{nl}(t_j) \Delta F^{nl}(X, t_j) \quad (\text{II.26})$$

où  $\Delta F_t^{nl}(t_j)$  traduit l'ensemble de la base temporelle calculée à partir du problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\mathcal{I}} \mathcal{R}(t, t') \Delta F_t^{nl}(t') dt' = \lambda \Delta F_t^{nl}(t) \quad (\text{II.27})$$

$[\mathcal{R}]$  est la matrice des corrélations entre deux instants  $t$  et  $t'$ . Dans le cadre de la POD snapshots, la base POD est extraite avec une moyenne spatiale. Ainsi, le tenseur  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\mathcal{R}(t, t') = \frac{1}{T} \int_{\Omega} \Delta F^{nl}(X, t) \otimes \Delta F^{nl}(X, t') dt = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{N_t} \Delta F_t^{nl}(t_j) \Delta F_t^{nl}(t'_j) \quad (\text{II.28})$$

La solution de l'équation II.27 donne accès à des vecteurs propres constituant une base temporelle  $\{\Delta F_t^{nl}\}_{j=1, \dots, N_t}$  associée à des valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant. Soit :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_t} \quad (\text{II.29})$$

Une troncature est alors effectuée sur l'histoire de la base temporelle. Cela permet d'obtenir la meilleure approximation du second membre avec un nombre de modes réduit  $N_F$ . La valeur de  $N_F$  est calculée par :

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \geq \epsilon_{POD}, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_F\} \quad (\text{II.30})$$

Enfin, la base temporelle optimale est donnée par l'ensemble de :

$$[\Delta F_t^{nl}]^j = [\{\Delta F_t^{nl}\}^1, \{\Delta F_t^{nl}\}^2, \dots, \{\Delta F_t^{nl}\}^{N_F}] \quad (\text{II.31})$$

Il reste maintenant à construire la base spatiale POD en utilisant l'équation II.26. La forme séparée du second membre est donnée par l'équation II.22.

L'utilisation de la POD des snapshots permet d'avoir une matrice des corrélations de dimension (nombre d'incrémentes  $\times$  nombre d'incrémentes). Avec ce genre d'application, le nombre d'incrémentes par cycle est acceptable. Ainsi, la dimension du problème aux valeurs propres sera moins importante que dans le cadre de la POD classique permettant une résolution en un temps CPU raisonnable.

### La SVD tronquée

La deuxième possibilité d'écriture de la forme tensorielle séparée du second membre consiste à utiliser une SVD tronquée. La matrice donnée par l'équation II.26 contient l'ensemble des snapshots du second membre et est de taille  $(N_x \times N_t)$ . Appliquer une SVD tronquée consiste à décomposer  $[\Delta F^{nl}]$  sous la forme suivante :

$$[\Delta F^{nl}] = [\Delta F_{\underline{X}}^{nl}][S][\Delta F_t^{nl}] \quad (\text{II.32})$$

Les matrices  $[\Delta F_{\underline{X}}^{nl}]$  et  $[\Delta F_t^{nl}]$  contiennent respectivement les vecteurs singuliers droits et gauches de la matrice  $[\Delta F^{nl}]$ .  $[S]$  est une matrice diagonale qui contient les  $N_F$  plus grandes valeurs singulières de  $\underline{S}$ , c'est à dire les valeurs optimales au sens énergétique. Ce choix est effectué à partir d'une troncature qui dépend d'un opérateur  $\epsilon_{SVD}$  et donnée comme dans le cas de l'équation II.30. Il est ainsi possible d'obtenir une décomposition spatio-temporelle du second membre dont les matrices  $[\Delta F_{\underline{X}}^{nl}]$  et  $[\Delta F_t^{nl}]$  sont équivalentes à une base spatiale et temporelle respectivement de dimensions  $(N_x \times N_F)$  et  $(N_t \times N_F)$  et ceci avec un coût de stockage très avantageux.

#### 4.2.3 Résolution du problème avec la PGD

Après avoir écrit l'équilibre global sous une forme séparée espace/temps, il est possible maintenant de décrire les trois étapes de résolution de la méthode PGD. En tenant compte des propriétés du produit tensoriel, l'équilibre peut s'écrire alors :

$$([K_{\underline{X}}] \otimes [K_t]) \sum_{i=1}^{N_U} \alpha^i (\{\Delta U_{\underline{X}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i) = \sum_{j=1}^{N_F} \{\Delta F_{\underline{X}}^{nl}\}^j \otimes \{\Delta F_t^{nl}\}^j + [\mathcal{R}_{PGD}] \quad (\text{II.33})$$

avec  $\mathcal{R}_{PGD}$  un résidu qui traduit l'erreur de la solution. La résolution du problème II.33 avec la méthode PGD se fait avec une procédure itérative qui nécessite trois étapes à chaque itération :

- Étape 1 : Enrichissement. L'ordre  $m$  est calculé à partir de la connaissance de l'ordre  $m - 1$
- Étape 2 : Projection. Les coefficients de pondération sont calculés grâce à des projections successives sur chaque mode
- Étape 3 : Estimation de la convergence. L'erreur de l'approximation est calculée à l'ordre  $m$  par la vérification de l'égalité de l'équation II.33.

La résolution avec la méthode PGD est réalisée successivement jusqu'à la convergence du champ de déformation plastique. Cependant, le terme non linéaire du second membre  $\{\Delta Q^p\}$ , dépendant de  $\{\Delta \varepsilon^p\}$ , n'est pas connu. A l'initialisation,  $\{\Delta Q^p\}$  prend la valeur donnée par II.12, ensuite il est calculé d'une façon itérative. Pour cela, deux possibilités sont proposées pour mettre en œuvre la méthode PGD. Dans la suite, les deux variantes de la PGD permettant de résoudre le problème seront décrites.

### 4.3 La première version de la PGD

A chaque itération du calcul incrémental ou non-incrémental, si la convergence n'est pas obtenue, le terme non linéaire  $[\Delta Q^p]$  est mis à jour à partir des champs de déformation plastique calculés à l'étape locale. L'idée de la première version de la méthode PGD consiste à mettre à jour le terme non linéaire pour un champ de déplacement calculé pour un seul enrichissement. Ainsi, dans cette version, le terme non linéaire est calculé incrémentalement et la résolution numérique du problème est effectuée de façon itérative. Chaque itération du calcul conduit aux 4 étapes suivantes : (i) Enrichissement (ii) projection (iii) étape locale (iv) estimation de la convergence. Dans ce qui suit, cette méthode sera appelée PGD-V1.

#### 4.3.1 Étape d'enrichissement

La première étape de la PGD-V1 consiste à calculer le champ de déplacement, de l'équation II.33, avec l'ajout d'une seule fonction supplémentaire. Supposons que l'enrichissement est à l'ordre  $m$ . Les  $m - 1$  premières fonctions de  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^i$  et  $\{\Delta U_t\}^i$  ainsi que les coefficients  $\alpha^i$  sont connus. A ce stade, la solution s'écrit :

$$[\Delta U]_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i (\{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i) + \{\Delta U_{\underline{x}}\}^m \otimes \{\Delta U_t\}^m \quad (\text{II.34})$$

avec  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$  et  $\{\Delta U_t\}^m$  les nouveaux vecteurs enrichis. En introduisant l'équation II.34 dans II.33, il est possible d'écrire :

$$[K_{\underline{x}}]\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m \otimes [K_t]\{\Delta U_t\}^m = \sum_{j=1}^{N_F} \{\Delta F_{\underline{x}}^{nl}\}^j \otimes \{\Delta F_t^{nl}\}^j - ([K_{\underline{x}}] \otimes [K_t]) \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i (\{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i) + [\mathcal{R}_{PGD}] \quad (\text{II.35})$$

Pour calculer les nouveaux vecteurs enrichis, l'équation II.35 est projetée sur  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$  et  $\{\Delta U_t\}^m$ . Le résidu est imposé orthogonal sur ces deux composantes afin d'obtenir une optimalité de la base de la solution au sens de Galerkin. Un système d'équations est alors obtenu :

$$\begin{aligned} (\langle \Delta U_t \rangle^m [K_t] \{\Delta U_t\}^m [K_{\underline{x}}]) \{\Delta U_{\underline{x}}\}^m &= \sum_{j=1}^{N_F} \langle \Delta U_t \rangle^m \{\Delta F_t^{nl}\}^j \{\Delta F_{\underline{x}}^{nl}\}^j \\ &- \sum_{i=1}^{m-1} \langle \Delta U_t \rangle^m [K_t] \{\Delta U_t\}^i \alpha_i [K_{\underline{x}}] \{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{aligned} (\langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^m [K_{\underline{x}}] \{\Delta U_{\underline{x}}\}^m [K_t]) \{\Delta U_t\}^m &= \sum_{j=1}^{N_F} \langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^m \{\Delta F_{\underline{x}}^{nl}\}^j \{\Delta F_t^{nl}\}^j \\ &- \sum_{i=1}^{m-1} \langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^m [K_{\underline{x}}] \{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \alpha_i [K_t] \{\Delta U_t\}^i \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Il reste maintenant à calculer les nouveaux vecteurs enrichis à partir de la résolution des équations II.36 et II.37. Autrement dit, le calcul de  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$  et  $\{\Delta U_t\}^m$  revient à la résolution des deux problèmes linéaires couplés :

$$\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m = f^o(\{\Delta U_t\}^m) : \text{calcul de } \{\Delta U_{\underline{x}}\}^m \text{ en supposant } \{\Delta U_t\}^m \text{ connu (Eq. II.36)}$$

$$\{\Delta U_t\}^m = f^o(\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m) : \text{calcul de } \{\Delta U_t\}^m \text{ en supposant } \{\Delta U_{\underline{x}}\}^m \text{ connu (Eq. II.37)}$$

Pour ce faire, un algorithme de point fixe est utilisé. Le schéma II.12 illustre le principe de résolution de cet algorithme. En effet, le couple du vecteur enrichi  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$  et  $\{\Delta U_t\}^m$  est calculé à partir du couple de l'itération précédente. Cette opération est répétée jusqu'à la convergence conditionnée par :

$$\|\mathcal{R}_{pf}\| = \|(\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m \{\Delta U_t\}^m)^q - (\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m \{\Delta U_t\}^m)^{q-1}\| < \epsilon_{pf} \quad (\text{II.38})$$

où  $\mathcal{R}_{pf}$  représente le résidu de l'algorithme du point fixe et  $\epsilon_{pf}$  un paramètre fixé par l'utilisateur.

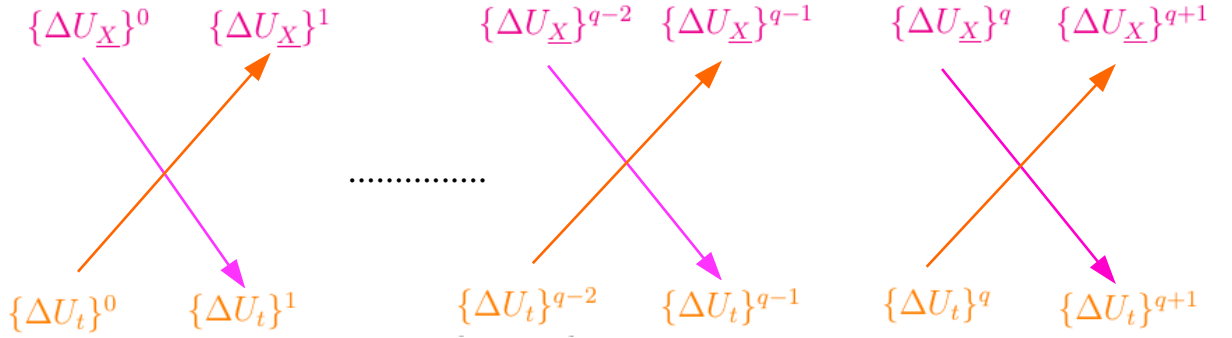


FIGURE II.12 – Principe de résolution du point fixe

Il existe une autre stratégie pour calculer les nouveaux vecteurs enrichis. Elle consiste à calculer  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$  (respectivement  $\{\Delta U_t\}^m$ ) à partir de la dernière valeur de  $\{\Delta U_t\}^m$  (respectivement  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$ ) calculée. Le principe est illustré à la figure II.13.

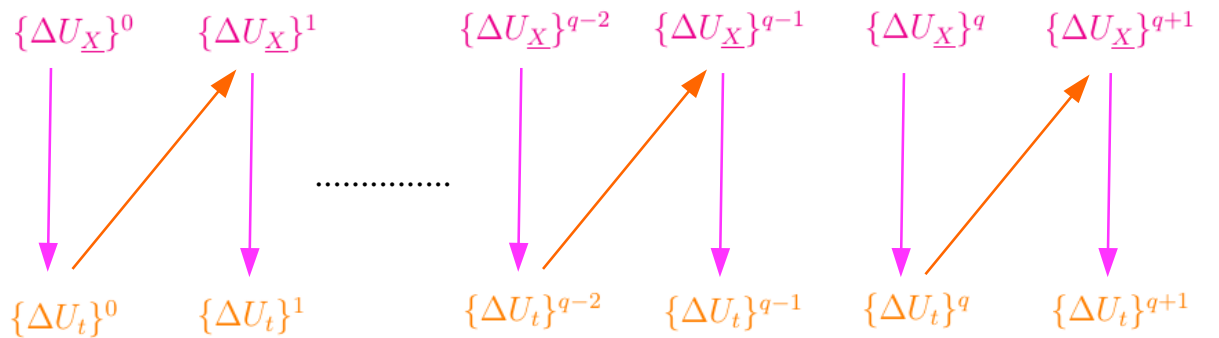


FIGURE II.13 – Deuxième principe de résolution du point fixe

Les deux méthodes conduisent presque aux mêmes résultats. En revanche, il semble que la deuxième méthode soit légèrement plus performante. D'autre part, il est à noter que la matrice de rigidité  $[K_{\underline{x}}]$  est constante, à l'exception de la première itération du calcul. De plus, le terme  $((\Delta \langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^m [K_{\underline{x}}] \{\Delta U_{\underline{x}}\}^m)$  est un scalaire et  $[K_t]$  une matrice identité. Ainsi, la résolution des systèmes linéaires II.36 et II.37 à chaque itération n'est pas coûteuse en temps CPU.

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

Enfin, après avoir calculé  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$  et  $\{\Delta U_t\}^m$ , ces nouvelles fonctions sont normalisées par rapport à leurs normes :

$$\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m = \frac{\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m}{\|\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m\|} \quad \text{et} \quad \{\Delta U_t\}^m = \frac{\{\Delta U_t\}^m}{\|\{\Delta U_t\}^m\|} \quad (\text{II.39})$$

### 4.3.2 Étape de projection

A ce stade, les  $m$  premières fonctions de  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^{\{i=1,\dots,m\}}$   $\{\Delta U_t\}^{\{i=1,\dots,m\}}$  sont connues. Cette étape consiste à déterminer les coefficients  $\alpha^i$  qui approchent au mieux la solution. Cela est effectué par la projection de l'équation II.33 sur chaque fonction  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^j$  et  $\{\Delta U_t\}^j$  en gardant le résidu orthogonal. Ainsi nous obtenons :

$$(\langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^j [K_{\underline{x}}] \{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \langle \Delta U_t \rangle^j [K_t] \{\Delta U_t\}^i) \cdot \alpha^i = \sum_{k=1}^{N_F} \langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^j \{\Delta F_{\underline{x}}^{nl}\}^k \langle \Delta U_t \rangle^j \{\Delta F_t^{nl}\}^k \quad (\text{II.40})$$

Autrement dit, le problème II.40 est équivalent à une résolution du système linéaire suivant :

$$[M]\{\alpha\} = \{D\} \quad (\text{II.41})$$

Avec :

$$M_{ij} = \langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^j [K_{\underline{x}}] \{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \langle \Delta U_t \rangle^j [K_t] \{\Delta U_t\}^i$$

$$D_j = \sum_{k=1}^{N_F} \langle \Delta U_{\underline{x}} \rangle^j \{\Delta F_{\underline{x}}^{nl}\}^k \langle \Delta U_t \rangle^j \{\Delta F_t^{nl}\}^k$$

$$\langle \alpha \rangle = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m\}$$

La matrice  $[M]$  est de dimension  $(m \times m)$ . La PGD nécessite successivement dans sa résolution une centaine de fonctions pour une bonne représentation de la solution. Ainsi, le système linéaire II.41 est trivial à résoudre.

Les deux étapes présentées précédemment permettent de construire le champ de déplacement cinématiquement admissible sur tous les instants du cycle et à l'ordre  $m$ . Il est maintenant possible de déduire les champs de déplacement et de contrainte cinématiquement et statiquement admissibles qui seront utiles pour l'étape suivante.

### 4.3.3 Étape locale

Cette étape consiste à la résolution des équations de comportement. Ceci permet de déterminer les champs plastiquement admissibles à tous les instants du cycle et localement en chaque point d'intégration. Ensuite, il est nécessaire de mettre à jour le terme non linéaire  $\{\Delta Q^p(t)\}$ . En effet, à l'ordre  $m$  de l'enrichissement, la déformation plastique  $\{\varepsilon^p\}^{m-1}$  à l'ordre  $m-1$  est connue et a été utilisée à l'étape d'enrichissement et de projection afin de déterminer les champs de déplacement. Il faut maintenant utiliser la nouvelle valeur de la déformation plastique afin de déterminer le terme non linéaire au nouvel ordre  $m$ . Soit :

$$\{Q^p(t)\}^m = \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] \{\varepsilon^p(t)\}^m dV \quad (\text{II.42})$$

Si la convergence de la solution n'est pas achevée, le second membre sera mis à jour pour l'itération suivante.

#### 4.3.4 Estimation de la convergence

La résolution avec la méthode PGD est effectuée à l'aide d'un processus itératif pour représenter la solution du problème. Pour chaque itération du processus, il est nécessaire d'introduire un critère pour tester la convergence des résultats. Ce critère consiste à vérifier la qualité de la solution pour chaque cycle. Ainsi, la convergence de la PGD-V1 à l'ordre  $m$  est effectuée en évaluant l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{R}_{PGD}^m\| = \frac{\|([K_{\underline{x}}] \otimes [K_t]) \sum_{i=1}^m \alpha^i (\{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i) - \sum_{j=1}^{N_F} \{\Delta F_{\underline{x}}^{nl}\}^j \otimes \{\Delta F_t^{nl}\}^j\|}{\|\sum_{j=1}^{N_F} \{\Delta F_{\underline{x}}^{nl}\}^j \otimes \{\Delta F_t^{nl}\}^j\|} < \epsilon_{PGD} \quad (\text{II.43})$$

avec  $\epsilon_{PGD}$  une tolérance fixée par l'utilisateur. Si l'inégalité précédente est vérifiée, alors l'algorithme de la méthode a convergé à cet ordre  $m$  et le calcul se poursuit pour le cycle de chargement suivant. Sinon, il faut revenir à l'étape d'enrichissement et enrichir à nouveau la base à l'ordre  $m + 1$  en ajoutant un nouveau produit de fonctions  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^{m+1}$  et  $\{\Delta U_t\}^{m+1}$  et refaire toutes les étapes jusqu'à la convergence des résultats.

La stratégie de la méthode PGD-V1 est représentée par l'algorithme de la figure II.14.

## 4.4 La deuxième version de la PGD

Avec la méthode PGD-V1, la résolution des équations globales et locales est effectuée d'une façon successive, et le terme non linéaire est recalculé pour chaque enrichissement jusqu'à la convergence de l'algorithme itératif. L'idée dans cette deuxième version consiste d'abord à découpler les équations du problème (global et local). Ensuite, la résolution est effectuée séparément sur tout l'intervalle du chargement en utilisant la méthode PGD comme un solveur de l'étape globale. Dans ce cas, l'actualisation du terme non linéaire  $\{\Delta Q^p\}$  est effectuée à partir d'un champ de déplacement  $[\Delta U(X, t)]$  convergé pour un second membre donné. Dans la suite du travail, cette méthode sera appelée PGD-V2.

La résolution numérique de cette méthode est effectuée d'une façon itérative jusqu'à la convergence des résultats d'un cycle à l'autre. Chaque itération comprend ces trois étapes : (i) étape globale PGD (ii) étape locale (iii) estimation de la convergence. Dans ce qui suit, le principe de résolution de ces différentes étapes sera décrit.

### 4.4.1 Étape globale PGD

Cette étape consiste à calculer les champs de déplacement cinématiquement admissibles par la résolution de l'équation d'équilibre. Cette résolution est achevée en utilisant l'algorithme PGD jusqu'à la convergence. Ainsi, la solution du champ de déplacement, définie sur  $\Omega \times [0, T]$ , est donnée sous forme de produits de fonctions spatio-temporelles pour tous les modes nécessaires.

Connaissant le champ de déformation plastique, la résolution de l'équation d'équilibre avec la méthode PGD se fait en trois étapes :

- Étape d'enrichissement. Supposons qu'à l'ordre  $m - 1$ , le champ de déplacement est connu. Le nouvel ordre  $m$  est donné par l'équation II.34. Après projection, les nouveaux vecteurs enrichis  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^m$  et  $\{\Delta U_t\}^m$  sont calculés par la résolution des équations II.36 et II.37. Pour ce faire, un algorithme itératif de point fixe est utilisé

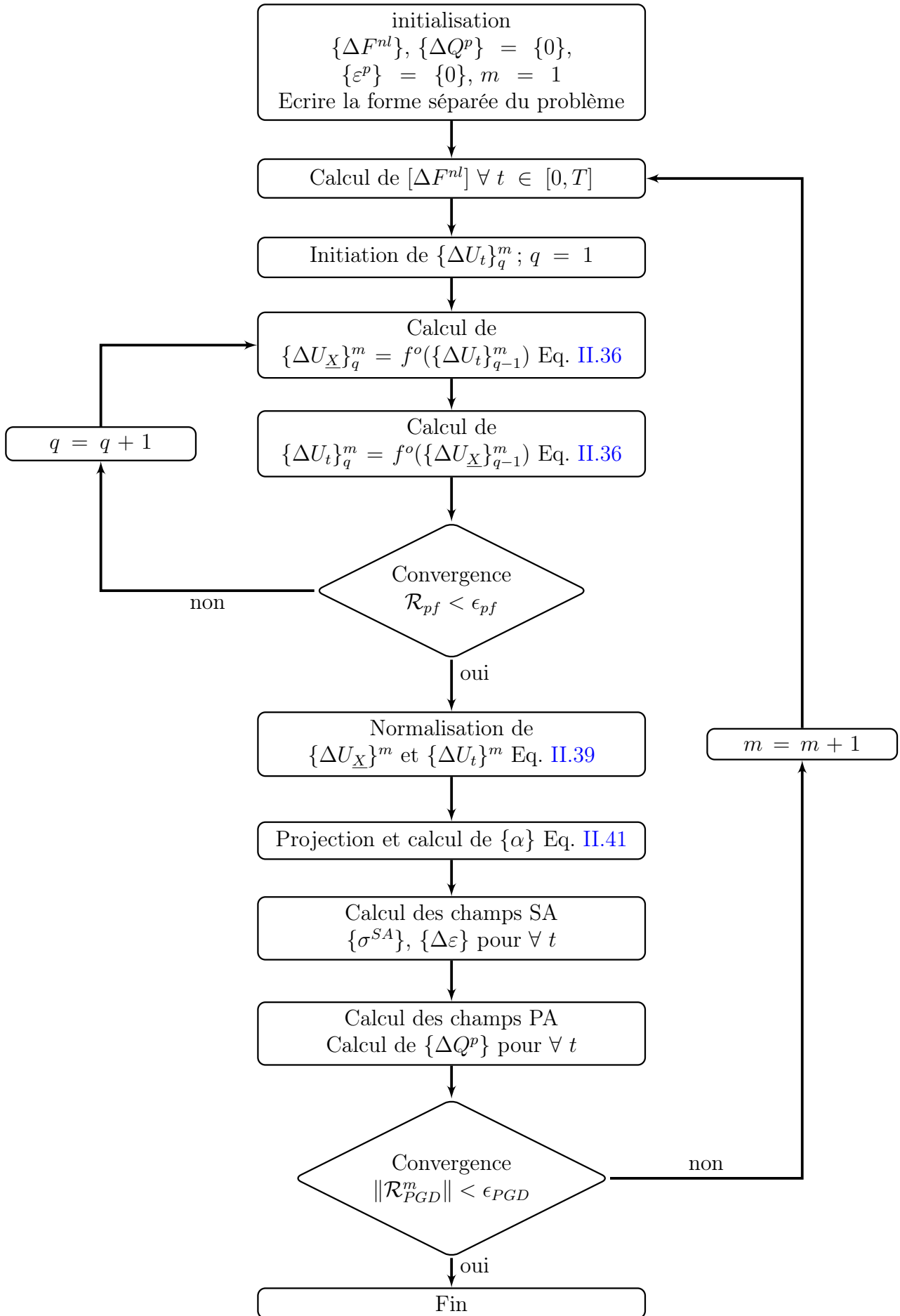


FIGURE II.14 – Algorithme de la méthode PGD-V1



jusqu'à la convergence. Enfin, les nouvelles fonctions sont normalisées par rapport à la norme de ces mêmes fonctions (Eq. II.39).

- Étape de projection. Après avoir déterminé l'enrichissement à l'ordre  $m$ , cette étape consiste à calculer les coefficients de pondération par la résolution d'un système linéaire donné par l'équation II.41.
- Vérification de la Convergence. Une fois la convergence obtenue, cette étape permet d'arrêter le processus d'enrichissement de la PGD. Cette condition est liée principalement à la vérification de la qualité du champ de déplacement à l'ordre  $m$ . Ceci est effectué en utilisant l'inégalité de l'équation II.43. Si cette condition n'est pas vérifiée, il faut enrichir à nouveau la base de solution à l'ordre  $m + 1$  et refaire les trois étapes jusqu'à la convergence.

La connaissance du champ de déplacement par la méthode PGD à l'itération  $i$ , sur tout l'intervalle de chargement et en tout point de la structure, permet d'obtenir les champs de déformation cinématiquement admissibles et de contrainte statiquement admissibles tout au long du cycle.

#### 4.4.2 Étape locale

A l'itération  $i$  du calcul, la déformation totale se calcule avec la connaissance du champ de déplacement. Il s'agit maintenant de déterminer  $\{\varepsilon^p\}^i$ , les champs de contrainte plastiquement admissibles ainsi que les variables internes associées par la loi de comportement. Ensuite, le terme non linéaire du second membre est mis à jour à l'itération en cours :

$$\{Q^p(t)\}^i = \int_{\Omega} [B]^T [C^{el}] \{\varepsilon^p(t)\}^i dV \quad (\text{II.44})$$

#### 4.4.3 Estimation de la convergence

Cette convergence est liée au critère d'admissibilité plastique des contraintes. En d'autres termes, il faut assurer que les champs de contrainte plastiquement admissibles, calculés à l'étape locale, sont statiquement admissibles. Ainsi, avec la méthode PGD-V2, l'estimation de la convergence des résultats pour chaque cycle est vérifiée par l'équation II.15. Si cette condition n'est pas vérifiée, il faut faire une autre itération et revenir à la première étape. L'algorithme de la méthode PGD-V2 est itératif et répété jusqu'à la convergence des résultats pour toute l'histoire temporelle du cycle.

L'algorithme de la méthode PGD-V2 qui résume la démarche et la stratégie de cette méthode est présenté à la figure II.15.

Après avoir présenté la méthode PGD dans le cadre du calcul en plasticité sous chargement cyclique, une autre méthode de réduction de modèle appelée APR a été choisie. Le but est de résoudre le problème avec un domaine réduit. La section suivante présente les détails de cette méthode.

## 5 La méthode APR cyclique

### 5.1 Introduction

La troisième idée proposée consiste à utiliser une autre méthode de réduction adaptative *a priori* à caractère incrémental. Il s'agit d'appliquer l'apport de la méthode de réduction APR comme un solveur pour la résolution de l'étape globale.

CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

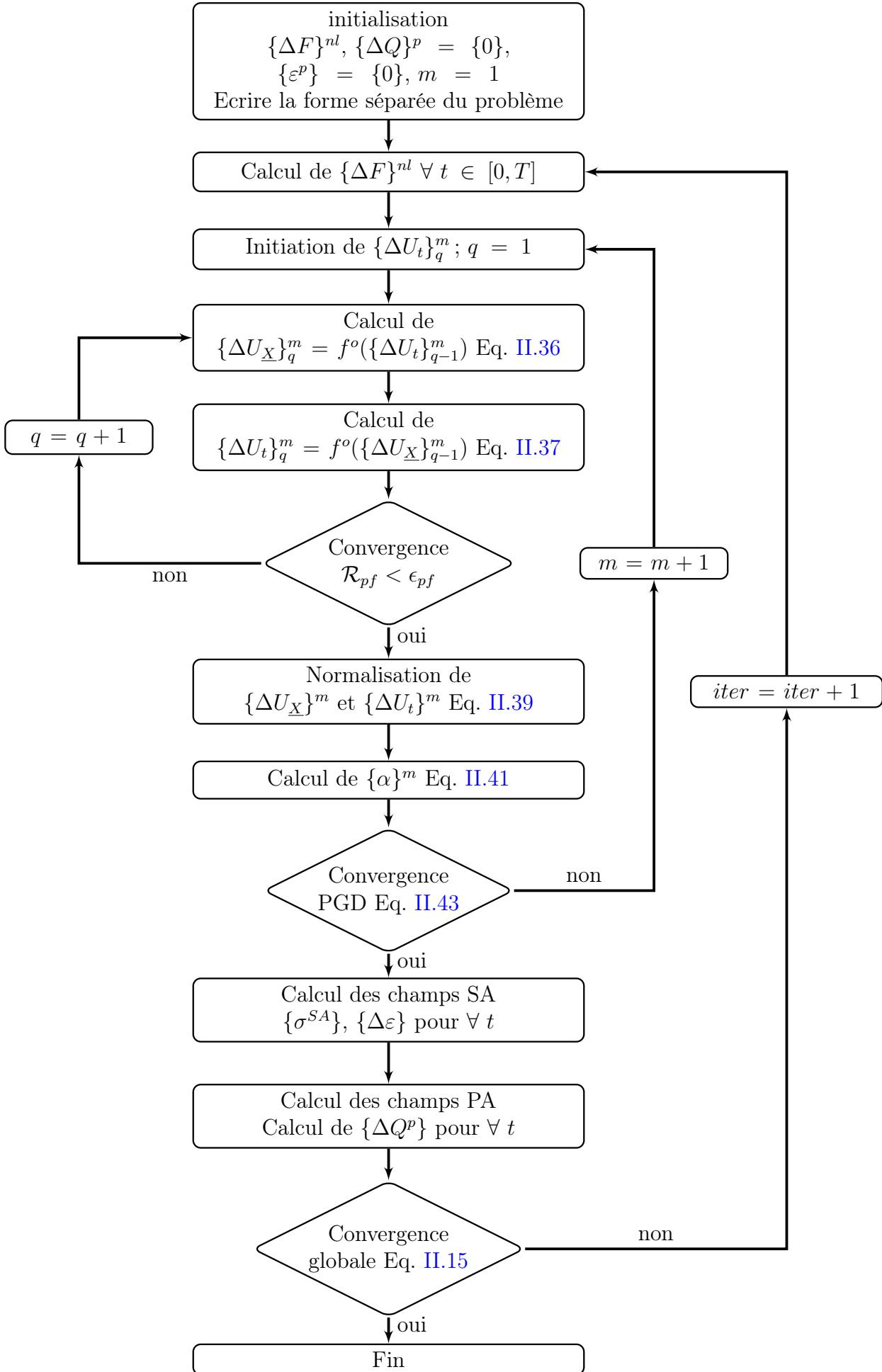


FIGURE II.15 – Algorithme de la méthode PGD-V2

Afin d'éviter des calculs assez coûteux en temps, cette méthode itérative permet de résoudre le problème en réduisant le nombre d'inconnus. La précision de la prévision de sa base réduite est toutefois améliorée, au cours de la simulation, sur un intervalle de temps donné. La première version adaptative a été proposée en 2002 par Ryckelynck [222] de manière non incrémentale dans le cadre de la méthode LATIN. Néanmoins, la propriété non incrémentale du LATIN ne facilite pas l'application de la méthode pour tout modèle de comportement utilisé. Pour cela, une autre version incrémentale *a priori* itérative de l'APR a été proposée par Ryckelynck [212]. Elle consiste à adapter la base par une phase d'amélioration suivie de l'enrichissement de la nouvelle base trouvée. D'autre part, Markovinovic et al. [161] ont utilisé un algorithme très similaire à celui proposé par Ryckelynck ; une différence peut être notée au niveau de l'initiation de la base. Alors que Ryckelynck [212] utilise une POD, Markovinovic et al. [161] appliquent une SVD. Par ailleurs, le principe de la méthode APR a été utilisé avec plusieurs techniques d'adaptation de la base d'estimation afin de corriger l'approximation dans l'intervalle étudié.

Dans le cadre de ce travail, cette méthode a été adoptée afin de calculer les champs de déplacement cinématiquement admissibles par la résolution d'un système linéaire d'ordre réduit. L'application de cette méthode s'effectue avec une procédure itérative constituée de trois étapes :

1. Initialisation de la base
2. Construction et résolution du système réduit
3. Adaptation et enrichissement de la base

Dans les parties qui suivent, les détails de ces trois étapes avec lesquelles la méthode APR a été implémentée pour la résolution d'un problème non linéaire avec chargement cyclique seront présentés.

## 5.2 Implémentation de la méthode APR cyclique

Tout comme dans le cadre de la méthode PGD, la méthode APR est utilisée afin de réduire les coûts engendrés par la résolution incrémentale classique. Au vu de ce qui a été évoqué dans la section 4.3.1 du premier chapitre, cette méthode est basée sur la résolution d'une POD-Galerkin suivie d'une adaptation de la base si nécessaire.

La méthode APR permet d'obtenir une décomposition du champ de déplacement  $U(X, t)$ , solution de l'équation d'équilibre, sur une base spatiale d'ordre  $r$  très faible comparée à la taille  $N_x$  du problème Éléments Finis discrétisé. Par ailleurs, la différence entre la méthode APR par rapport à la POD, la SVD ou bien la KLD vient du fait qu'il n'existe pas pour ces dernières une procédure adaptative permettant de corriger l'estimation de la base réduite à partir d'un indicateur d'erreur.

Le problème pour lequel la méthode APR est utilisée concerne la résolution du système linéaire II.11 qui dépend du temps. A titre de rappel, ce problème est défini par des non linéarités dans le second membre du système linéaire et avec matrice de rigidité constante au cours du temps. La solution est donnée par un champ de déplacement  $\{\Delta U\}$  défini sur toute la structure  $\Omega$  et à chaque instant  $t_i \in \mathcal{I}$  du cycle. Dans le cadre d'une simulation avec la méthode des Éléments Finis, cette variable est exprimée à partir des fonctions de forme  $N_i$  et des vecteurs de déplacement nodaux  $U_i$  du maillage définis par un nombre des ddl  $N_x$ , soit :

$$u(X, t) = \sum_{i=1}^{N_x} N_i(X)U_i(t) \quad \forall X \in \Omega, t \in \mathcal{I} \quad (\text{II.45})$$

L'utilisation de la méthode APR pour ce problème permet de fournir par une réduction à l'ordre  $r$  une base spatiale  $[\Phi_x] = [\{\phi_x^1\}, \{\phi_x^2\}, \dots, \{\phi_x^r\}]$ . Elle permet de représenter les fonctions de forme du champ de déplacement reliées par des déplacements réduits  $[\Psi_t] = [\{\lambda_t^1\}, \{\lambda_t^2\}, \dots, \{\lambda_t^r\}]$ . Ainsi, le champ de déplacement de l'équation II.45 s'écrit :

$$\{U\} \approx \{U_{APR}\} = [\Phi_x]\{\lambda\} \quad (\text{II.46})$$

L'incrément du vecteur de déplacement est déterminé à partir des déplacements réduits  $\{\Delta\lambda\}^i$  par une formulation POD-Galerkin. Soit :

$$\{\Delta U\} = [\Phi_x]\{\Delta\lambda\}^i \quad (\text{II.47})$$

avec  $[\Phi_x]$  une matrice qui collecte les modes empiriques permettant d'approcher au mieux le champ de déplacement. En cours de simulation, la méthode APR est capable de corriger et d'adapter l'estimation de la base réduite à partir d'une correction donnée par un calcul Éléments Finis. Cependant, le caractère *a priori* de la méthode APR consiste en premier lieu à définir la base du modèle d'ordre réduit à adapter à partir des calculs préliminaires. Le but est de construire les fonctions de forme du modèle réduit. Ainsi, avant de procéder à la stratégie adaptative, la première étape de l'algorithme APR consiste à initialiser la base réduite. Dans ce qui suit, nous présentons les étapes de cette approche de réduction.

### 5.2.1 Initialisation de la base

La première étape de l'algorithme itératif APR consiste à initialiser une base réduite associée au champ de déplacement  $\{\Delta U\}$  permettant d'exprimer les fonctions de forme Éléments Finis. En pratique, Ryckelynck [222] a proposé de débiter avec une base d'ordre faible par exemple les conditions initiales ou une base construite à partir d'un problème similaire. Dans ce travail, une démarche *a posteriori* a été utilisée et appliquée à un calcul éléments finis incrémental pour un nombre de cycles donné. Ainsi une estimation réduite POD sera appliquée à des snapshots du champ de déplacement calculé incrémentalement. Afin d'avoir un moindre coût en temps CPU du calcul incrémental, nous avons proposé d'utiliser la méthode incrémentale droite.

Par ailleurs, les travaux de Ryckelynck [222] et Verdon dans [249] ont montré que le choix de base initiale n'a pas d'influence sur la qualité de la solution. En revanche, plus l'initialisation est de qualité, plus rapide est la convergence. Puisque nous nous intéressons tout d'abord à la qualité des résultats, une étude sur l'influence du choix de la base initiale a été effectuée dans la section 5.3 du chapitre III avec un modèle macroscopique et dans la partie 6.2 du chapitre IV avec une modélisation à l'échelle des grains. Suite aux résultats constatés, la démarche pour l'initiation de la base APR, d'une manière générale, est la suivante : un calcul incrémental droite avec une mémorisation des snapshots du champ de déplacement pour un nombre de cycles donné. Enfin, une démarche *a posteriori* sera appliquée sur l'histoire du champ de déplacement stocké. Cette stratégie d'initialisation de la base réduite est donnée à la figure II.16 avec un exemple d'un calcul incrémental de six cycles et la mémorisation est effectuée pour les trois derniers cycles. A titre indicatif, il est à noter que le nombre de cycles pour la mémorisation POD peut être considéré comme un paramètre de la méthode APR cyclique.

Soit  $N_t$  le nombre de réalisations temporelles pour la mémorisation POD et  $N_x$  la dimension spatiale. La matrice  $[Q]$  contenant l'histoire du champ de déplacement stocké, est

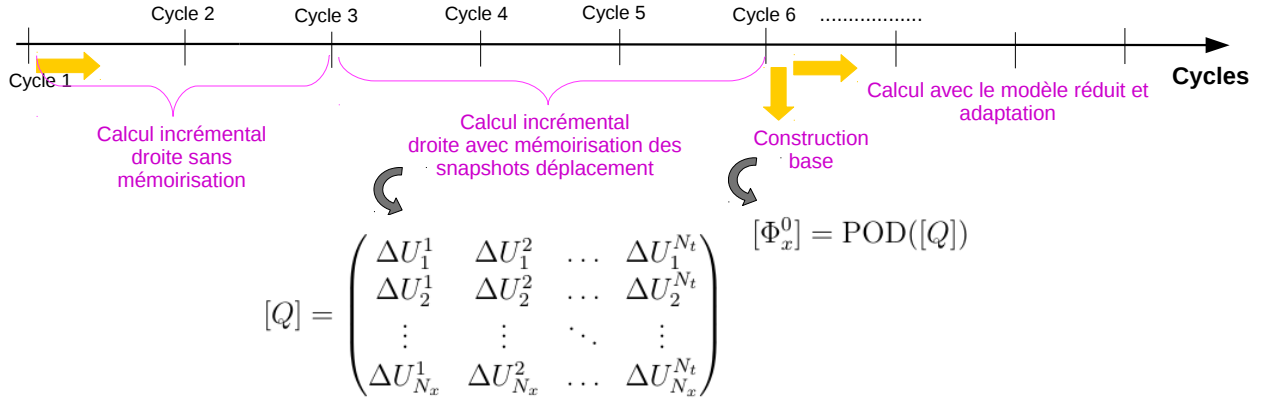


FIGURE II.16 – Stratégie d’initialisation de la base APR

donnée par :

$$[Q] = \begin{pmatrix} \Delta U_1^1 & \Delta U_1^2 & \dots & \Delta U_1^{N_t} \\ \Delta U_2^1 & \Delta U_2^2 & \dots & \Delta U_2^{N_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta U_{N_x}^1 & \Delta U_{N_x}^2 & \dots & \Delta U_{N_x}^{N_t} \end{pmatrix} \quad (\text{II.48})$$

Afin d’extraire une base initiale au de champ de déplacement, l’application d’une POD classique avec la matrice II.48 est très coûteuse en temps CPU. L’utilisation d’une SVD tronquée ou une POD snapshots peut résoudre ce problème. Néanmoins, pour un nombre d’incrément important et un nombre de cycles donné, la POD snapshots peut devenir aussi coûteuse avec la matrice II.48. Pour s’affranchir de ce problème, nous proposons d’appliquer la SVD tronquée ou bien de s’orienter vers une POD des snapshots incrémentale présentée dans le paragraphe suivant.

**La POD des snapshots incrémentale** Cette idée consiste à appliquer une POD des snapshots par intervalle de temps  $\mathcal{I}_k = [0, T_k]$ . Ce dernier appartient à l’intervalle temporel global  $\mathcal{I} = [0, T]$  afin de générer le moindre coût pour la construction de la base POD.

Soit  $N_t^1$  qui représente le nombre d’incrément du premier intervalle  $\mathcal{I}_1 = [0, T_1]$  tel que  $N_t^1 < N_t$ . Il est important de noter que  $N_t^1$  doit être raisonnable, c’est-à-dire pas trop grand pour ne pas avoir un problème de mémoire et pas trop petit pour pouvoir extraire une base réduite. Un stockage au cours de la simulation des " $N_t^1$ " premières solutions de  $\{\Delta U\}$  est réalisé dans une matrice  $[Q_1]$  :

$$[Q_1] = [\{\Delta U\}^1, \{\Delta U\}^2, \dots, \Delta\{\Delta U\}^{N_t^1}] \quad (\text{II.49})$$

Ensuite, en utilisant la résolution de la POD des snapshots, une première base temporelle POD est calculée avec la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\mathcal{I}_1} [\mathcal{R}(t, t')] [Q_1(t')] dt' = \lambda [Q_1(t)] \quad (\text{II.50})$$

La matrice des corrélations  $[\mathcal{R}]$  entre deux instants  $t$  et  $t'$  est donnée par :

$$[\mathcal{R}(t, t')] = \frac{1}{T} \int_{\Omega} [Q_{1\mathbf{x}}(t)] \otimes [Q_{1\mathbf{x}}(t')] dt = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{N_t^1} [Q_1(t_j)] [Q_1(t'_j)] \quad (\text{II.51})$$

La résolution du problème II.50 s’effectue de la sorte avec une matrice des corrélations de petite dimension ( $N_t^1 \times N_t^1$ ). Ensuite, une troncature est appliquée sur l’ensemble des valeurs

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

propres obtenues avec II.50 afin de choisir les vecteurs les plus significatifs pour former la première base temporelle donnée par :

$$[\Psi_t^1] = [\{\lambda_1^1\}, \{\lambda_2^1\}, \dots, \{\lambda_{r_1}^1\}]_{(r_1, N_t^1)} \quad \text{avec} \quad r_1 \ll N_t^1 \quad (\text{II.52})$$

Enfin la première base spatiale réduite est donnée sous la forme d'une combinaison linéaire de  $[Q_1]$  par :

$$[\Phi_x^1] = [Q_1][\Psi_t^1]^T = [\{\phi_1^1\}, \{\phi_2^1\}, \dots, \{\phi_{r_1}^1\}]_{(N_x, r_1)} \quad (\text{II.53})$$

Après avoir calculé la première base réduite  $[\Phi_x^1]$  à partir des " $N_t^1$ " premières solutions de  $\{\Delta U\}$ , un stockage d'une autre série de fonctions  $[Q_2]$  appartenant à  $[N_{t+1}^1, N_t^2]$  est effectué :

$$[Q_2] = [\{\Delta U^{N_{t+1}^1}\}, \{\Delta U^{N_{t+2}^1}\}, \dots, \{\Delta U^{N_t^2}\}] \quad (\text{II.54})$$

Avec la même démarche que celle utilisée avec  $[Q_1]$ , c'est-à-dire appliquer une POD des snapshots sur  $[Q_2]$ , la deuxième base réduite temporelle est donnée par :

$$[\Psi_t^2] = [\{\lambda_1^2\}, \{\lambda_2^2\}, \dots, \{\lambda_{r_2}^2\}]_{(r_2, N_t^2)} \quad \text{avec} \quad r_2 \ll N_t^2 \quad (\text{II.55})$$

La deuxième base spatiale réduite est donnée sous la forme d'une combinaison linéaire de  $[Q_2]$  par :

$$[\Phi_x^2] = [Q_2][\Psi_t^2]^T = [\{\phi_1^2\}, \{\phi_2^2\}, \dots, \{\phi_{r_2}^2\}]_{(N_x, r_2)} \quad (\text{II.56})$$

La totalité des bases réduites spatiale et temporelle est constituée à partir des deux informations précédentes par :

$$[\Phi_x] = [[\Phi_x^1], [\Phi_x^2]] = [\{\phi_1^1\}, \{\phi_2^1\}, \dots, \{\phi_{r_1}^1\}, \{\phi_1^2\}, \{\phi_2^2\}, \dots, \{\phi_{r_2}^2\}] \quad (\text{II.57})$$

$$[\Psi_t] = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \dots & \dots & \lambda_{r_1}^1 & 0_{(N_t^2, 1)} & \dots & \dots & 0_{(N_t^2, 1)} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0_{(N_t^1, 1)} & \dots & \dots & 0_{(N_t^1, 1)} & \lambda_1^2 & \dots & \dots & \lambda_{r_2}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.58})$$

Cette démarche de construction de base se poursuit jusqu'à la fin de l'intervalle temporel. Il est possible que l'opérateur de la base spatiale  $[\Phi_x]$  puisse contenir des fonctions redondantes avec les enrichissements successifs. Ainsi, une projection de type Karuhen Loève sur le système  $[\Phi_x], [\Psi_t]$  peut être effectuée de temps en temps afin de supprimer ces redondances.

D'un point de vue pratique, l'application d'une SVD tronquée ou une POD des snapshots incrémentale permettent l'initialisation d'une base réduite pour le problème II.48 avec un temps raisonnable. Dans la stratégie de la méthode APR cyclique, une SVD tronquée sera utilisée.

### 5.2.2 Construction et résolution du système réduit

Après avoir déterminé une base initiale du champ de déplacement, le calcul se poursuit suivant une stratégie incrémentale en utilisant une formulation POD-Galerkin pour la résolution du système linéaire II.11.

Après initialisation, le calcul est conduit au premier instant du cycle noté  $t_0$ . Soit  $r$  les premiers vecteurs propres permettant de représenter la base réduite initiale du champ de

déplacement notée  $[\Phi_x^0]$ . L'estimation de l'incrément du champ de déplacement est alors donnée par :

$$\{\Delta U\}^0 = [\Phi_x^0]\{\Delta\lambda\}^0 = \begin{pmatrix} \phi_1(X_1) & \phi_2(X_1) & \dots & \dots & \phi_r(X_1) \\ \phi_1(X_2) & \phi_2(X_2) & \dots & \dots & \phi_r(X_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \phi_1(X_{N_x}) & \phi_2(X_{N_x}) & \dots & \dots & \phi_r(X_{N_x}) \end{pmatrix}^0 \{\Delta\lambda\}^0 \quad (\text{II.59})$$

Le système linéaire à résoudre résultant de la discrétisation d'Éléments Finis avec une stratégie incrémentale est donné par :

$$[K]\{\Delta U\}^i = \{\Delta F^{nl}\}^i \quad (\text{II.60})$$

où  $\{\Delta F^{nl}\}$  est le vecteur des forces externes contenant la non linéarité du matériaux et donné par :

$$\{\Delta F^{nl}\} = \{\Delta F^{ext}\} + \{\Delta Q^p\} \quad (\text{II.61})$$

Connaissant l'incrément de déformation plastique, la résolution du système linéaire II.60 est effectuée pour tous les incréments  $i$  du cycle en utilisant la forme séparée II.59. La matrice de rigidité  $[K]$  est constante à l'exception de la première itération du calcul. Ainsi, la solution du champ de déplacement, à instant  $t_i$  (i.e. incrément  $i$ ), est obtenue par la projection de  $\{\Delta U\}^i$  sur le sous-espace engendré par la base optimale d'ordre  $r$  à l'instant  $t_0$  :

$$\{\Delta U\}^i \approx [\Phi_x^0]\{\Delta\lambda\}^i \quad (\text{II.62})$$

En utilisant l'écriture II.62 dans II.60, l'équilibre à l'instant  $t_i$  est donné par :

$$[K][\Phi_x^0]\{\Delta\lambda\}^i = \{\Delta F^{nl}\}^i \quad (\text{II.63})$$

En multipliant l'équation II.63 par  $[\Phi_x^0]^T$ , le modèle d'ordre réduit de la méthode APR cyclique s'écrit :

$$[\Phi_x^0]^T[K][\Phi_x^0]\{\Delta\lambda\}^i = [\Phi_x^0]^T\{\Delta F^{nl}\}^i \quad (\text{II.64})$$

Le problème II.64 est résolu de façon incrémentale. Chaque incrément de temps permet de calculer l'incrément du champ de déplacement réduit  $\{\Delta\lambda\}$ . Ce dernier sera ensuite utilisé pour déterminer l'incrément de déplacement global du modèle complet par l'équation II.62. Posons  $[K_r] = [\Phi_x^0]^T[K][\Phi_x^0]$  et  $\{\Delta F_r^{nl}\} = [\Phi_x^0]^T\{\Delta F^{nl}\}$ , le système linéaire II.64 réduit s'écrit :

$$[K_r]\{\Delta\lambda\}^i = \{\Delta F_r^{nl}\}^i \quad (\text{II.65})$$

La résolution incrémentale du système réduit II.65 est plus rapide qu'avec une résolution classique d'un modèle complet grâce à sa taille réduite. En effet, la matrice de rigidité réduite  $[K_r]$  est de dimension  $(r \times r)$  avec  $r \ll N_x$  au lieu de  $(N_x \times N_x)$  du modèle complet. La dimension du vecteur déplacement réduit  $\{\Delta\lambda\}$  ainsi que les forces externes non linéaires  $\{\Delta F_r^{nl}\}$  sont respectivement  $(r \times 1)$  au lieu de  $(N_x \times 1)$ . De plus, l'utilisation de la formulation réduite pour une matrice de rigidité constante conduit à une résolution plus économique en temps CPU.

Maintenant, il faut estimer la validité de la base réduite afin de garantir l'approximation de la solution  $\{\Delta U\}$  pour tout l'intervalle temporel. En effet, la base initiale réduite  $[\Phi_x^0]$  est optimale d'un point de vue énergétique pour l'instant  $t_0$  du cycle. Dans la majorité des cas, le choix de ces snapshots n'est pas capable de représenter l'évolution de la solution pour les futures instants  $t_i$  du cycle. Pour cela, le caractère adaptatif de cette méthode permet de corriger la validité de l'approximation réduite au cours de la simulation.

### 5.2.3 Adaptation et enrichissement de la base

Cette étape consiste d'une part à l'évaluation des erreurs de l'estimation réduite, et d'autre part à la possibilité d'adapter la base d'approximation. Cette dernière est réalisée en introduisant de nouvelles fonctions capables de décrire les caractéristiques de la solution. Pour ce faire, un résidu  $\mathcal{R}_{APR}$  sera calculé à la fin d'un incrément donné  $i$  permettant de vérifier la qualité de la solution sur  $\Omega$ , par :

$$\|\mathcal{R}_{APR}\| = \|[K]([\Phi_x^0]\{\Delta\lambda\}^i) - \{\Delta F^{nl}\}^i\| \quad (\text{II.66})$$

La valeur de ce résidu permet d'arrêter le processus adaptatif de la base. Ainsi, si  $\|\mathcal{R}_{APR}\| < \epsilon_{APR}$ , l'estimation de la base réduite est valide à l'incrément courant. Dans le cas contraire, il faut adapter la base afin de bien représenter la solution. Étant donné que le modèle d'éléments finis reste inchangé au cours de la procédure de réduction du système linéaire, la correction ne sera effectuée qu'à la base réduite  $[\Phi_x^0]$  utilisée précédemment.

La difficulté majeure de cette méthode adaptative est le choix des points de contrôle de la base réduite. En effet, il existe plusieurs stratégies d'adaptation. Ryckelynck [212] propose trois stratégies présentées à la figure II.17. Soit  $[t_i, t_{i+\beta}]$  la période d'adaptation. Chaque choix de la valeur de  $\beta$  conduit à définir une stratégie d'adaptation présentée ci-dessous.

**1<sup>ère</sup> stratégie :** Le point de contrôle ainsi que l'adaptation des fonctions de forme de la base réduite sont effectués à chaque pas de  $[t_i, t_{i+\beta}]$ . Ensuite, le calcul se poursuit pour une autre période  $[t_{i+\beta}, t_{i+\beta+1}]$  avec une petite valeur de  $\beta$  ( $\beta = 1$  par exemple). Cette stratégie a été utilisée par Borouchaki et al. [41] pour la simulation numérique de la coupe orthogonale. De même, Askes et al. [25] l'utilise pour des phénomènes de localisation de la déformation avec une intégration ALE et un schéma dynamique explicite.

**2<sup>ème</sup> stratégie :** Cette procédure d'adaptation a été proposée par Ryckelynck et al. [212, 215]. Le contrôle et la correction de la base POD sont effectués par intervalle de temps  $[t_i, t_{i+\beta}]$  et la valeur de  $\beta$  est inférieure à  $N_t$ . La procédure de contrôle est la suivante. Supposons que le calcul est à l'instant  $t_i$  sachant qu'à l'instant  $t_{i-1}$  la base a été adaptée. Le calcul avec le modèle réduit se poursuit pour un autre ensemble de  $\beta$  incréments sans modifier l'approximation de la base  $[\Phi_x^m]$ . L'exposant  $m$  indique le nombre de fois où la base a été mise à jour jusqu'à présent. Après chaque  $\beta$  instant, le résidu  $\mathcal{R}_{APR}$  est évalué par l'équation II.66 afin de vérifier la qualité de la solution pour l'intervalle temporel  $[t_i, t_{i+\beta}]$  choisi. Si,  $\|\mathcal{R}_{APR}\| < \epsilon_{APR}$ , le calcul continue pour un autre intervalle  $[t_{i+\beta}, t_{i+\beta+\beta}]$  ou  $[t_{i+\beta}, t_{i+\beta+2\beta}]$  en utilisant la même base d'approximation  $[\Phi_x^m]$ . Dans le cas où  $\|\mathcal{R}_{APR}\| > \epsilon_{APR}$ , la valeur de  $\beta$  prend  $\beta = \frac{\beta}{2}$  et le calcul pas à pas avec le modèle réduit recommence à partir de  $t_i$  avec une correction. L'adaptation de la base s'effectue en deux étapes :

- La base est enrichie en utilisant certains sous-espaces de Krylov ;
- La sélection des informations les plus représentatives extraites à partir des solutions réduites  $\{\Delta\lambda^m\}$  stockées précédemment est conduite.

Le deuxième point consiste à appliquer une décomposition de KL ou bien une POD. Les nouveaux modes propres les plus représentatifs sont obtenus dans une matrice  $[V]$ . Ensuite, le calcul peut se poursuivre pour d'autres instants  $\beta$  en utilisant la nouvelle base enrichie et définie par :

$$[\Phi_x^{m+1}] = \{[\Phi_x^m][V], \{\mathcal{R}_{APR}\}, [K]\{\mathcal{R}_{APR}\}, [K]^2\{\mathcal{R}_{APR}\}\} \quad (\text{II.67})$$

De même, à chaque adaptation de la base réduite, les anciennes solutions réduites  $\{\Delta\lambda^m\}$  doivent être projetées sur la nouvelle base par :

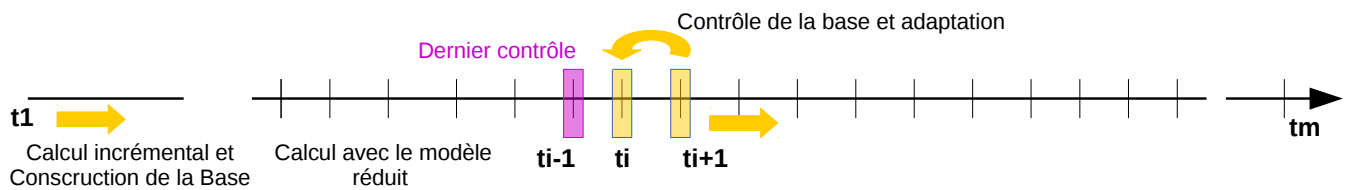
$$\{\Delta\lambda^{m+1}\} = ([\Phi_x^{m+1}]^T[\Phi_x^{m+1}])^{-1} [\Phi_x^{m+1}]^T[\Phi_x^m]\{\Delta\lambda^m\} \quad (\text{II.68})$$



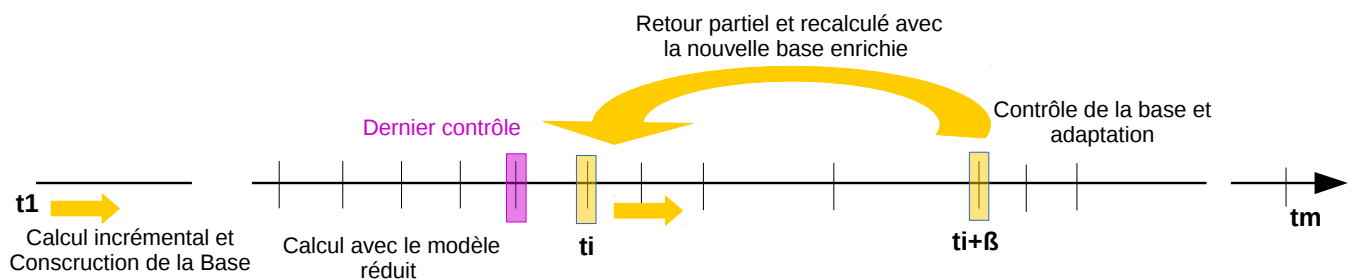
Il est à noter que plus l'intervalle  $[t_i, t_{i+\beta}]$  est petit, plus la prévision de la base réduite est meilleure. Cette stratégie a été utilisée avec succès dans plusieurs travaux [20, 57, 215].

**3<sup>ème</sup> stratégie :** Avec cette stratégie, le contrôle de la base ainsi que son adaptation sont effectués pour toute l'histoire de l'intervalle étudié. Cette stratégie est également très pratique pour les calculs non-incrémentaux telle que la méthode LATIN. La procédure de contrôle et l'adaptation de cette stratégie est présentée par la méthode APR du premier chapitre. Pour chaque itération, la base est adaptée en premier lieu à l'aide d'une décomposition de Karhunen-Loève, ensuite elle est enrichie à l'aide des vecteurs de Krylov.

### 1ère Stratégie : Contrôle Incrément par incrément



### 2ème Stratégie : Contrôle par intervalle



### 3ème Stratégie : Contrôle sur toute l'histoire

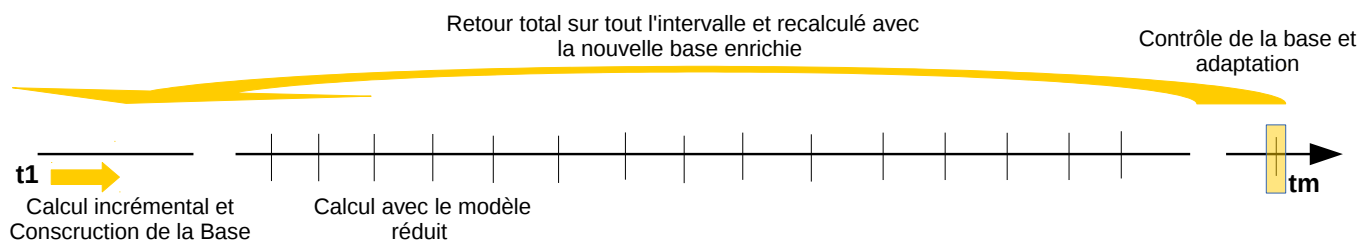


FIGURE II.17 – Stratégies d'adaptation de la base réduite

Dans ce travail, la première stratégie a été choisie. Elle consiste à évaluer les erreurs de l'estimation réduite incrément par incrément à partir du premier instant de la résolution avec le modèle réduit. En effet, dans notre cas d'étude, la précision de la prévision de la base réduite, et notamment la qualité de la solution, dépend fortement de l'évolution de l'état mécanique tout au long de l'intervalle temporel du cycle. Ainsi, pour des problèmes fortement non linéaires, il est difficile de corriger la qualité de la prévision réduite du champ de déplacement pour toute l'histoire du chargement (3<sup>ème</sup> stratégie), vu que le comportement est évolutif au cours de cet intervalle. De même, il est difficile a priori de définir, en cours de simulation, des intervalles temporelles (2<sup>ème</sup> stratégie) dans lequel la précision de la base réduite est insuffisante, notamment avec des modèles de comportement complexes.

## CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

Pour conclure, à partir du premier instant après initialisation, la résolution de l'équilibre est effectuée en utilisant le modèle d'ordre réduit II.65 suivant une stratégie incrémentale. Ensuite, pour chaque incrément de temps, l'estimation de la base réduite est vérifiée en utilisant le critère II.66. Si  $\|\mathcal{R}_{APR}\| < \epsilon_{APR}$ , le calcul se poursuit pour un autre incrément en gardant la même base. Sinon, la base est enrichie à partir des sous-espaces de Krylov définis par :

$$[\mathcal{K}^q] = [\{\mathcal{R}_{APR}\}, [K]\{\mathcal{R}_{APR}\}, [K]^2\{\mathcal{R}_{APR}\}, \dots, [K]^{q-1}\{\mathcal{R}_{APR}\}] \quad (\text{II.69})$$

où  $q$  est l'ordre de l'espace de Krylov. En pratique, le sous-espace de Krylov d'ordre 1 est utilisé. Soit  $m$  le nombre de fois où la base a été mise à jour, la nouvelle base enrichie pour l'itération suivante est donnée par :

$$[\Phi_x^{m+1}] = [\Phi_x^m, \{\mathcal{K}^1\}] = [\Phi_x^m, \{\mathcal{R}_{APR}\}] \quad (\text{II.70})$$

La procédure d'enrichissement de la base est répétée jusqu'à  $\|\mathcal{R}_{APR}\| < \epsilon_{APR}$  pour chaque incrément.

### 5.3 Stabilité de la base APR

La stratégie adaptative incrémentale proposée consiste à enrichir la base, si besoin, par un ensemble de sous-espaces de Krylov. Ceci peut conduire à une augmentation de la taille du modèle réduit II.65 au cours de la simulation, et peut atteindre parfois la taille globale du modèle éléments finis. Pour s'affranchir de ce problème, Ryckelynck et al. [212, 215] proposent de combiner l'enrichissement de la base avec une application d'une décomposition KL ou bien une POD afin de diminuer le nombre de fonctions d'approximation ajoutées. Dans le cadre de ce travail, une étude de stabilité de la base enrichie a été effectuée et présentée dans les sections 5.2 (chapitre III) et 6.1 (chapitre IV) respectivement avec des applications aux échelles macroscopique et microscopique. Les résultats ont conduit à la stratégie suivante : le contrôle et l'enrichissement de la base réduite ne sont plus effectués pour toute l'histoire à modéliser, mais uniquement pour un certain nombre de cycles après initialisation. La figure II.18 présente cette stratégie pour un exemple de trois cycles adaptés. Par ailleurs, il à de noter que le nombre de cycles enrichis peut être considéré comme un paramètre de la méthode APR cyclique car il dépend de la non linéarité du comportement.

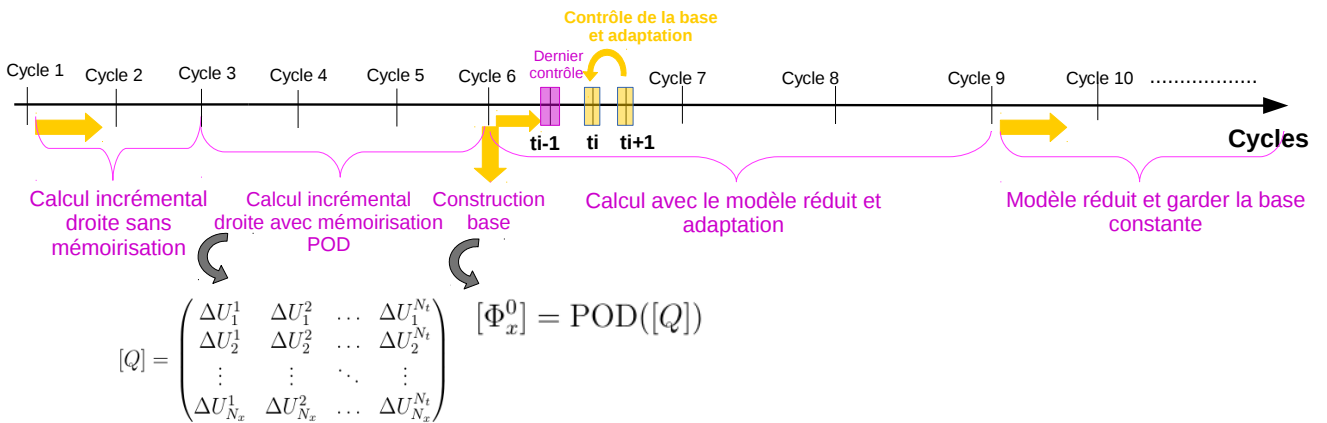


FIGURE II.18 – Stratégie d'initialisation et d'adaptation de la base réduite avec la méthode APR

## 5.4 Variantes de la méthode APR cyclique

Tout comme la méthode PGD, l'implémentation de la méthode APR cyclique dans le cadre d'un calcul non linéaire avec un chargement cyclique nous a conduit à plusieurs possibilités d'implémentation. L'idée vient du fait que la solution du problème est vérifiée à chaque incrément de temps par deux critères : un critère pour la convergence de la base réduite (équation II.66) avec une formulation POD-Galerkin, et un critère pour vérifier l'état mécanique du problème par une approximation EF-Galerkin. A titre de rappel, la condition de convergence globale avec cette méthode est basée sur l'évaluation du résidu donné par :

$$\|\mathcal{R}\| = \frac{\|\{F^{SA}\} - \{F^{PA}\}\|}{\|\{F^{SA}\}\|} < \epsilon_{tol} \quad (\text{II.71})$$

La convergence de l'état mécanique est satisfaite pour chaque incrément si les contraintes plastiquement admissibles sont statiquement admissibles. Dans ce qui suit, les différentes versions de la méthode APR cyclique proposées seront décrites.

### 5.4.1 APR-V1

Le critère de convergence global de l'équation II.71 n'est vérifié que lorsque la prévision de la base du champ de déplacement réduit est satisfaisante à l'incrément courant ( $\|\mathcal{R}_{APR}\| < \epsilon_{APR}$ ). En tenant compte du critère de stabilité de la base APR proposée, cette stratégie n'est appliquée que pour un certain nombre de cycles après initialisation de la base réduite  $[\Phi_x^0]$ . La figure II.20 présente l'algorithme de cette stratégie d'adaptation.

Il est également encore possible de diminuer le nombre de modes ajoutés après la phase d'adaptation. Ceci est réalisé par une POD (ou une KLD) appliquée sur l'histoire de la base réduite finale. A titre d'exemple, supposons que la base a été adaptée pour 3 cycles et  $p$  le nombre total de modes enrichis. L'application d'une POD sur  $[\Phi_x]$  conduit à obtenir une nouvelle base  $[\tilde{\Phi}_x]$  de dimension  $(N_x \times p')$  telle que  $p' < p$ . Dans ce cas, le calcul se poursuit avec un modèle d'ordre plus réduit avec une nouvelle base stable  $[\tilde{\Phi}_x]$  qui contient les modes les plus représentatifs de  $[\Phi_x]$ . La figure II.19 présente les étapes ainsi que le principe général de la méthode APR-V1.

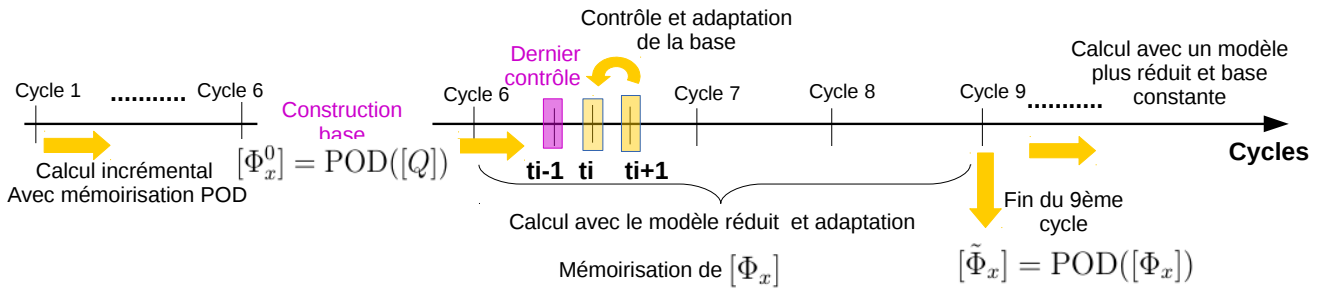


FIGURE II.19 – Principe général et les étapes de la méthode APR-V1

### 5.4.2 APR-V2

Le principe général de la méthode APR-V2 est similaire à celui de la APR-V1. La seule différence est au niveau de la stratégie d'adaptation de la base réduite  $[\Phi_x]$  après l'initialisation. Dans ce cas, le critère de convergence de la base (équation II.66) n'est vérifié que lorsque l'état mécanique du problème est corrigé par une estimation Éléments Finis à

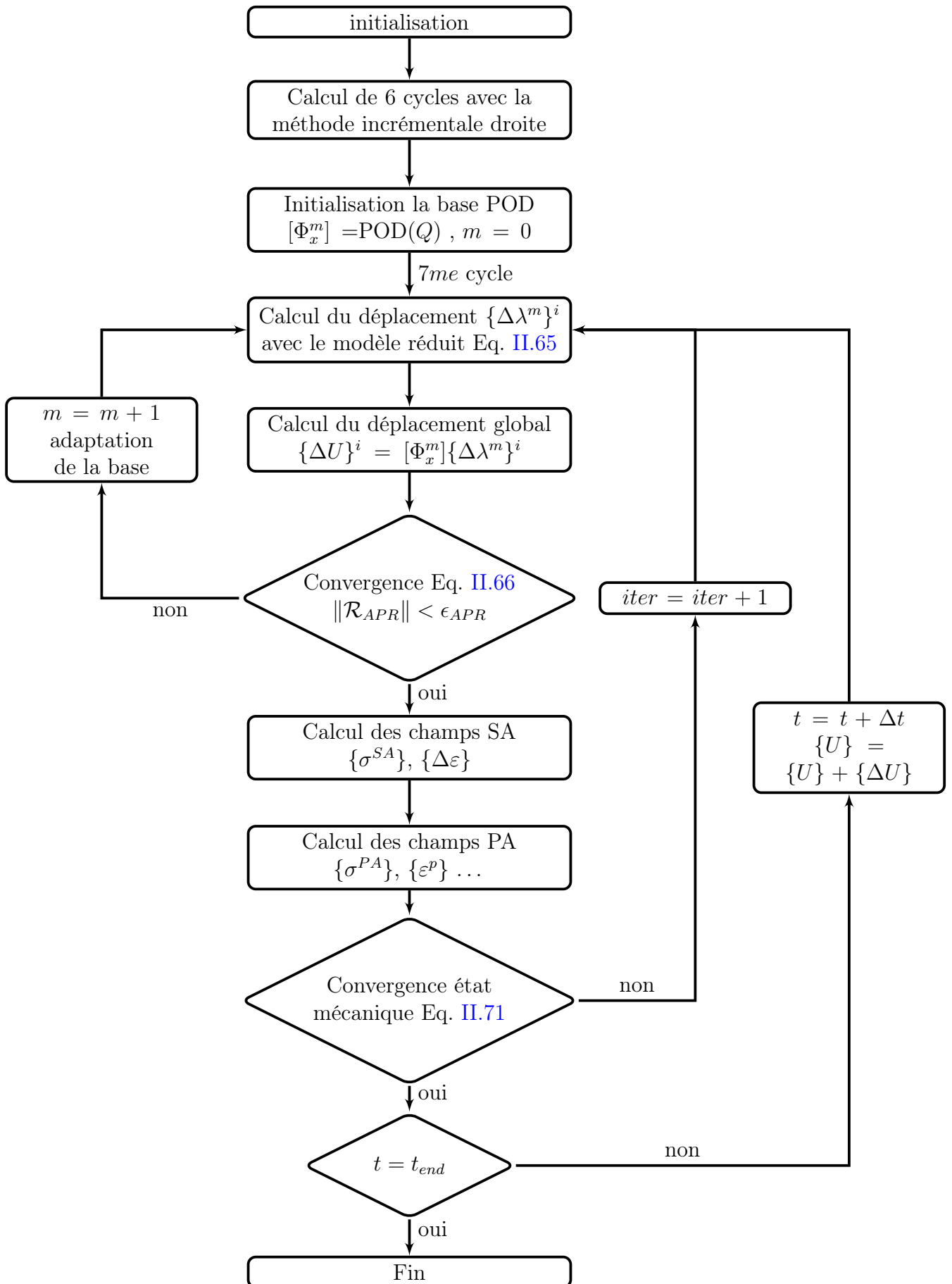


FIGURE II.20 – Algorithme d'adaptation de la méthode APR-V1

l'incrément courant ( $\|\mathcal{R}\| < \epsilon_{tol}$ ). De même, une sélection des modes les plus représentatifs de la base finale est effectuée par une application d'une POD sur  $[\Phi_x]$ . Ceci conduit à un modèle d'ordre plus réduit avec une nouvelle base  $[\tilde{\Phi}_x]$ . Cette dernière sera constante pour le reste du calcul. La figure II.21 présente l'algorithme de cette stratégie d'adaptation.

### 5.4.3 APR-V3 et APR-V4

La méthode APR-V3 est une méthode APR-V1 en termes de stratégie de convergence, mais la base  $[\Phi_x]$  obtenue après adaptation est utilisée pour le reste de calcul. En d'autres termes, il n'y a pas d'application d'une POD pour avoir un modèle d'ordre plus réduit. De même pour la méthode APR-V4, une APR-V2 utilisant la base enrichie  $[\Phi_x]$  est appliquée pour le reste du calcul. Le principe général de ces deux versions est donné par la figure II.18. La stratégie d'adaptation et de convergence est donnée par l'algorithme II.19 pour la méthode APR-V3, et l'algorithme II.21 pour la méthode APR-V4.

L'apport de ces deux versions APR-V3 et APR-V4 concerne l'influence de la sélection des modes les plus représentatifs d'une base déjà enrichie au niveau de la réponse mécanique ainsi que du temps CPU.

## 6 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis, en premier lieu, de présenter une étude qui vise à comparer deux méthodes pour la détermination du cycle stabilisé en fatigue : la méthode cyclique directe (DCA) et la méthode des sauts de cycles. La DCA a l'avantage d'être la plus rapide, mais prédit mal les grandeurs moyennes. La méthode des sauts de cycles donne de bonnes prédictions, mais le gain en temps est très dépendant de la non linéarité du matériau. Cette limite peut être défavorable avec des comportements fortement non linéaires. De plus, la valeur adéquate du facteur de précision reste difficile à trouver.

Suite aux résultats obtenus, aucune des méthodes étudiées n'apporte entière satisfaction pour une utilisation avec un comportement à l'échelle microscopique. Au vu de ce constat, le développement d'autres méthodes numériques couplées à la méthode des éléments finis a été effectué. Le but étant de simuler des comportements fortement non linéaires de type élasto-visco-plastique soumis à des chargements cycliques pour un grand nombre de ddl et sur une grande période de temps.

Afin de réduire le temps de calcul, essentiellement dû à la factorisation de la matrice de rigidité, la première idée est de la maintenir constante. Dans ce cas, les seules non linéarités sont dues à la loi de comportement élasto-visco-plastique. Il est par exemple possible de mettre ce terme non linéaire dans le second membre du système linéaire et d'utiliser la matrice de rigidité calculée avec les propriétés élastiques du matériau. Un premier algorithme à été écrit dans ce sens avec une résolution incrémentale et une autre version non-incrémentale. Cette dernière est appelée méthode incrémentale droite.

Ensuite, une combinaison de la version non-incrémentale avec une méthode de réduction de modèle a été effectuée afin d'avoir une base plus riche. La Décomposition Généralisée en modes Propres (PGD) a été choisie. Le principe général consiste à chercher la solution du système linéaire définie sur l'ensemble du domaine espace-temps sous la forme d'une somme de produits de fonctions de chaque variable. Cette utilisation offre la possibilité de découpler les variables spatiales et temporelles et les champs de déplacement ne sont calculés que pour un certain nombre de modes. La résolution est réalisée successivement jusqu'à la

CHAPITRE II. RÉDUCTION DIMENSIONNELLE APPLIQUÉE AU CHARGEMENT CYCLIQUE DE MATÉRIAUX À COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE

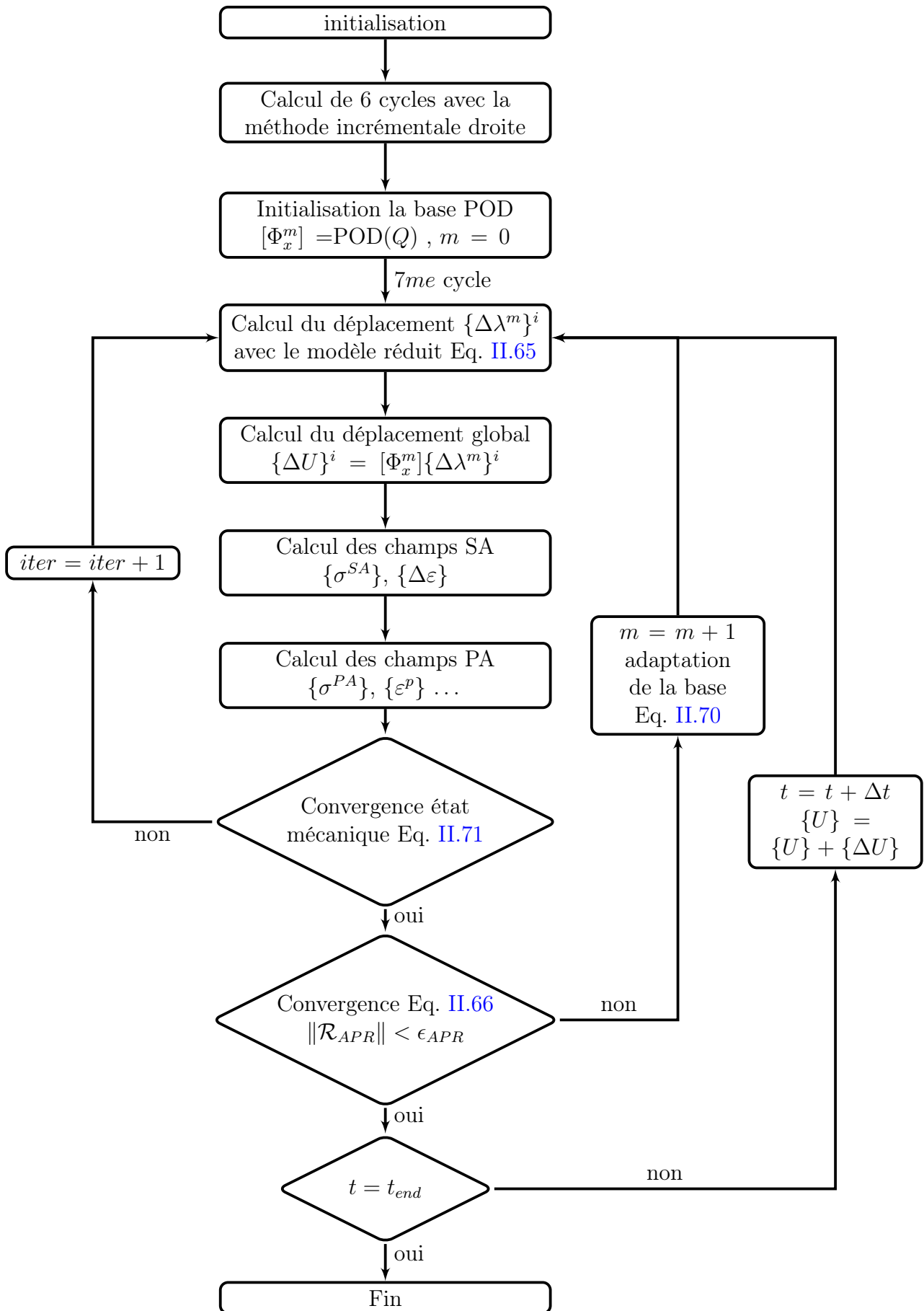


FIGURE II.21 – Algorithme d’adaptation de la méthode APR-V2

## 6. CONCLUSION DU CHAPITRE

convergence du champ de déformation plastique du second membre, qui n'est pas connu a priori. Deux possibilités d'utilisation de la méthode PGD ont été proposées.

Enfin, une troisième idée a été proposée dans ce chapitre et consiste à utiliser une autre méthode de réduction adaptative *a priori* à caractère incrémental. Ceci a été effectué par l'application de la stratégie de réduction adaptative APR comme solveur. L'avantage étant de résoudre le système linéaire avec un modèle d'ordre réduit, en termes de nombre de ddl, tout en gardant la matrice de rigidité constante. Une stratégie incrémentale d'amélioration de la qualité de la base a été proposée dans ce cadre. Elle ne s'applique que pour un certain intervalle de temps choisi. Le caractère adaptatif de la méthode a conduit à plusieurs possibilités d'utilisation de la méthode APR cyclique selon la stratégie d'adaptation de la base souhaitée.

Après avoir présenté les différentes méthodes numériques proposées dans ce travail, le prochain chapitre concernera la mise en application de ces méthodes pour un cas élasto-plastique avec chargement cyclique.

# Chapitre III

## Application à un cas élasto-plastique sous chargement cyclique

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>2</b>	<b>Moyens et outils de calculs</b>	<b>90</b>
<b>3</b>	<b>Description du modèle numérique</b>	<b>90</b>
3.1	Modèle géométrique continu et discret	91
3.2	Conditions aux limites	91
3.3	Matériau et modèle de comportement	93
<b>4</b>	<b>Résultats de la méthode PGD</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction	95
4.2	Convergence de la méthode PGD	95
4.3	Influence de l'enrichissement de la méthode PGD	97
4.4	Réponse mécanique de la méthode PGD	101
<b>5</b>	<b>Résultats de la méthode APR cyclique</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction	107
5.2	Étude de stabilité de la base APR cyclique	108
5.3	Influence du choix d'initialisation de la base	111
5.4	Réponse mécanique de la méthode APR cyclique	114
<b>6</b>	<b>Analyse du temps de calcul</b>	<b>123</b>
6.1	Résultats	129
6.2	Discussions	133
<b>7</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>138</b>

---



## 1 Introduction

Après avoir proposée, dans le chapitre précédent, des méthodes numériques accélérées pour la détermination du cycle stabilisé en fatigue notamment des méthodes de réduction de modèle, ce chapitre présente les résultats de calcul obtenus par ces méthodes avec un modèle mécanique particulier.

Avant d’analyser les pertinences des différentes méthodes proposées sur un cas très complexe (simulation d’un agrégat polycristallin), il nous a semblé utile de faire une étude numérique sur un cas plus simple en plasticité  $J_2$  (le deuxième invariant du déviateur de contrainte) avec une structure homogène soumise à un chargement cyclique. Le but est de comparer les performances de ces méthodes quant à la précision des résultats et du temps CPU par rapport à la solution obtenue avec un calcul incrémental. Afin de mieux analyser la convergence de ces méthodes, deux tailles de modèle et différents niveaux de chargement sont étudiés.

La stratégie adoptée pour mettre en place les calculs avec le modèle numérique proposé est tout d’abord présentée. Les réponses mécaniques des deux variantes de la méthode PGD sont ensuite analysées. Une étude de sensibilité est réalisée sur le critère de convergence de la PGD-V2. Par ailleurs, les résultats des différentes variantes de la méthode APR cyclique sont détaillés. On s’appuie pour cela sur les réponses mécaniques obtenues comparées à la solution incrémentale. Des études concernant l’influence de deux paramètres de la méthode APR cyclique sont également explorées. Enfin, le temps de calcul avec les différentes méthodes est présenté et les résultats obtenus sont discutés.

## 2 Moyens et outils de calculs

Toutes les méthodes numériques proposées ont été implémentées dans un code de calcul académique développé au Laboratoire Angevin de Mécanique, Procédés et innovAtion (LAMPA) par Robert et Mareau [208]. Ce code nous a permis d’effectuer la validation numérique de différentes méthodes avec des modèles à l’échelle macroscopique, présentés dans ce chapitre, et à l’échelle de la microstructure élaborés dans le chapitre IV.

Les différentes méthodes utilisent la même procédure numérique pour l’intégration du modèle de comportement : un schéma d’intégration de temps implicite. Pour tous les systèmes d’équation linéaire, la résolution a été réalisée par le solveur MUMPS [6]. Les calculs ont été effectués avec un seul cœur sur un serveur de calcul de type DELL PowerEdge R710.

## 3 Description du modèle numérique

La validation numérique des différentes méthodes en plasticité  $J_2$  a été effectuée avec un problème classique de la mécanique des milieux continus : il s’agit de l’étude d’une structure en trois dimensions présentant un défaut sphérique. Il est intéressant d’utiliser ce genre de modèle pour la validation numérique des différentes méthodes puisque la structure comporte un défaut avec des gradients importants sur les champs mécaniques. Ce type de modèle regroupe des difficultés et des problématiques qui peuvent être rencontrées pour des applications académiques et industrielles.

### 3.1 Modèle géométrique continu et discret

Les calculs ont été effectués avec un modèle géométrique donné à la figure III.1. Pour des raisons de temps de calcul, la modélisation se résume au  $(\frac{1}{8})^{\text{ème}}$  de la géométrie grâce aux conditions de symétrie. Avec les dimensions présentées, la structure possède un défaut de rayon 1mm.

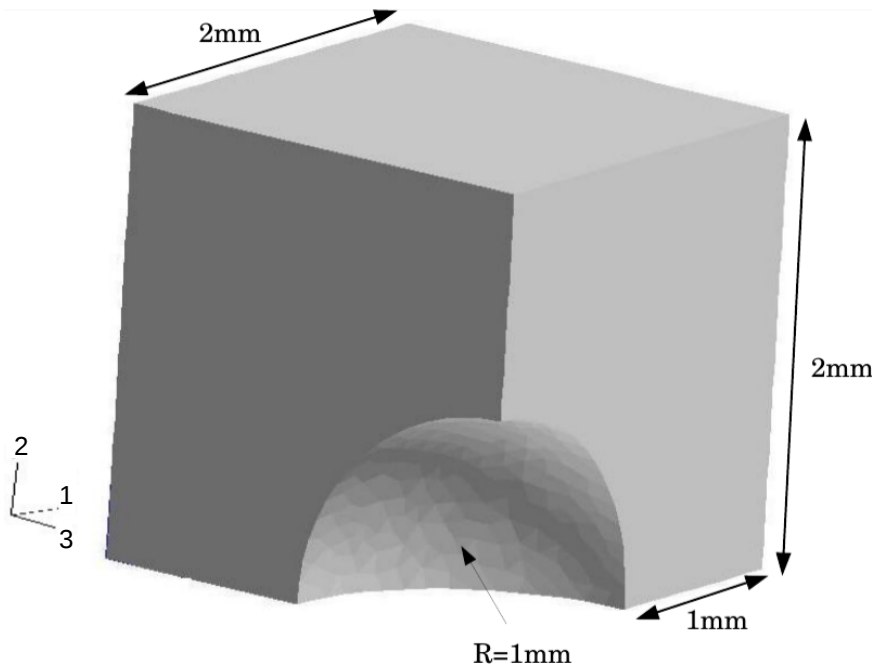


FIGURE III.1 – Description géométrique du modèle utilisé pour la modélisation 3D

Le maillage de la structure est représenté à la figure III.2 avec des éléments tridimensionnels. La structure est maillée par des éléments volumiques tétraédriques à 4 nœuds de type C3D4.

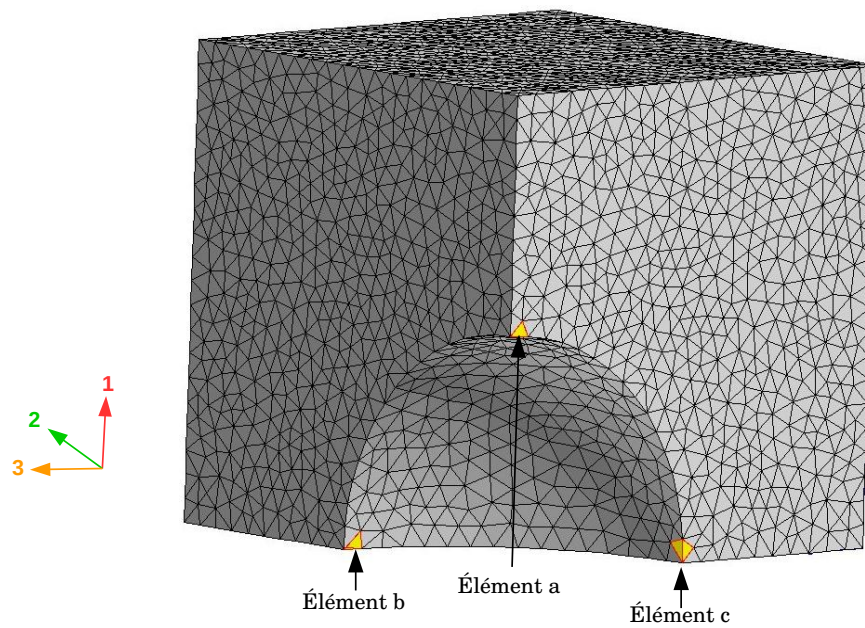
Afin d'analyser les différentes méthodes proposées en termes de temps de calcul, la structure est maillée avec deux types de discrétisation spatiale : un modèle contenant 19809 ddl ( $\simeq$  6601 nœuds et 30086 éléments) présenté à la figure III.2a, et un deuxième modèle plus raffiné qui contient 196668 ddl ( $\simeq$  65556 nœuds et 362206 éléments) illustré à la figure III.2b. Les résultats seront analysés en termes de contraintes et déformations moyennées sur toute la structure ainsi que pour trois éléments choisis contenant des gradients importants relatifs aux champs mécaniques. Ces éléments sont présentés à la figure III.2 et appelés élément *a*, élément *b* et élément *c*.

La modélisation utilisant le modèle contenant 30086 éléments sera appelée dans la suite modèle M1. La deuxième discrétisation spatiale sera appelée modèle M2.

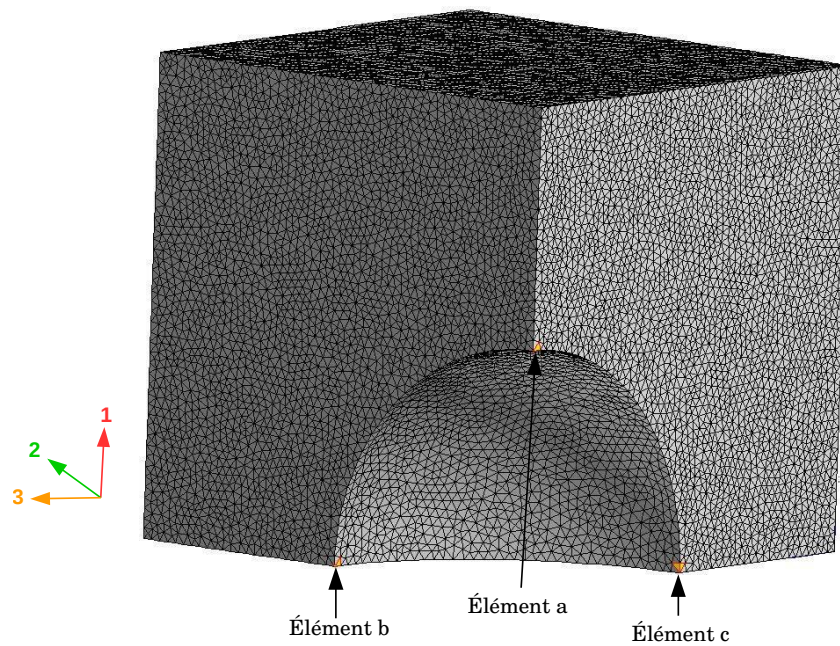
### 3.2 Conditions aux limites

Les calculs ont été effectués avec un chargement de traction-compression cyclique en déformation imposée et aussi en cisaillement cyclique. Il s'agit d'appliquer un champ de déplacement sur le côté de l'ensemble des nœuds de la surface supérieure (023) suivant la direction 1 en traction (figure III.4) et la direction 2 en cisaillement. Les simulations ont été

### 3. DESCRIPTION DU MODÈLE NUMÉRIQUE



(a) Maillage du modèle M1



(b) Maillage du modèle M2

FIGURE III.2 – Maillage de la structure présentant un défaut modéliser en 3D avec deux types de discrétisations spatiales M1 et M2

réalisées avec un rapport de charge  $R_\epsilon = \frac{\epsilon_{min}}{\epsilon_{max}} = -1$ , et pour un nombre de cycles égal à 100.

Le chargement cyclique appliqué est symétrique, avec différentes valeurs d'amplitude utilisées allant de 0.2% jusqu'à 0.4%. La discrétisation temporelle est de 200 incréments par cycle. Un exemple d'évolution du chargement est présenté à la figure III.3.

Compte tenu de la géométrie d'un  $(\frac{1}{8})^{\text{ème}}$  de la structure, il est nécessaire de prendre en compte les symétries du problème pour la modélisation. Les conditions aux limites du problème en traction sont présentées sur la figure III.4. Il est appliqué :

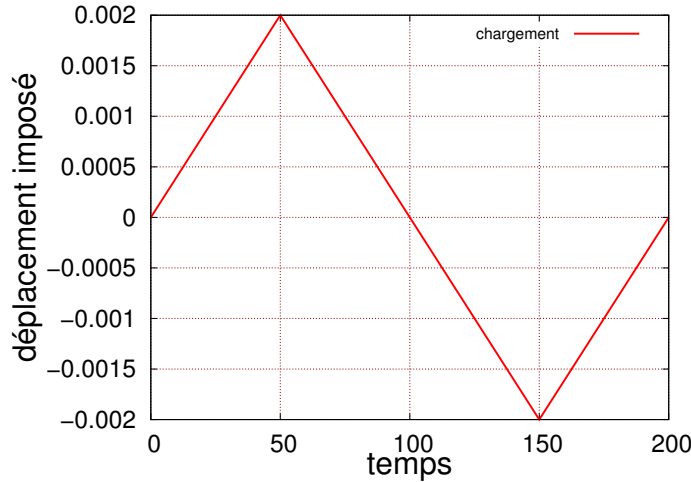


FIGURE III.3 – Évolution du chargement appliqué avec une déformation macroscopique purement alternée

- Un champ de déplacement macroscopique purement alterné sur l'ensemble des nœuds de la surface supérieure (023) appelé  $X_{max}$  selon la direction 1 ;
- Un blocage en déplacement sur l'ensemble des nœuds de la surface (023) du côté inférieur appelé  $X_{min}$  selon la direction 1 ;
- Un blocage en déplacement sur l'ensemble des nœuds de la surface (013) du côté inférieur appelé  $Y_{min}$  selon la direction 2 ;
- Un blocage en déplacement sur l'ensemble des nœuds de la surface (012) du côté inférieur appelé  $Z_{min}$  selon la direction 3

En cisaillement, il est appliqué :

- Un champ de déplacement macroscopique purement alterné sur l'ensemble des nœuds de la surface supérieure  $X_{max}$  selon la direction 2 ;
- Un blocage en déplacement sur l'ensemble des nœuds de la surface supérieure  $X_{max}$  selon la direction 1 ;
- Un blocage en déplacement sur l'ensemble des nœuds de la surface inférieure  $X_{min}$  selon la direction 1, 2 et 3 ;

### 3.3 Matériau et modèle de comportement

La loi de comportement utilisée dans ce travail est le modèle de comportement élasto-plastique [108] à écrouissage cinématique non linéaire et isotrope non linéaire avec de l'élasticité isotrope.

La relation entre les contraintes et déformations élastiques est définie par la loi de Hooke généralisée (Eq. III.1). La déformation totale est donnée sous la forme d'une somme des déformations élastique et plastique (Eq. III.2). La fonction de charge utilisée est celle de von Mises représentée par l'équation III.3. Elle est décrite par une variable d'écrouissage isotrope  $R$  présentée à l'aide de l'équation III.6, et une variable cinématique  $\underline{X}$  donnée par l'équation III.4.

$$\{\sigma\} = [C^{el}]\{\varepsilon^e\} \quad (\text{III.1})$$

### 3. DESCRIPTION DU MODÈLE NUMÉRIQUE

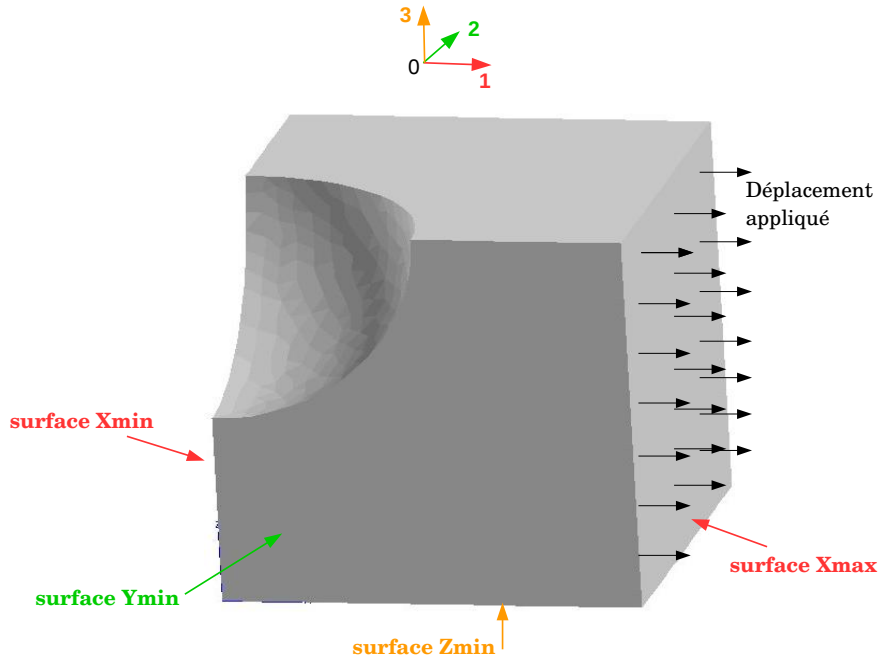


FIGURE III.4 – Conditions aux limites appliquées en traction sur une structure présentant un défaut modélisé en 3D

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^p\} \quad (\text{III.2})$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, R) = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R - \sigma_0 \quad (\text{III.3})$$

$$\underline{\underline{X}} = c \underline{\underline{\alpha}} \quad (\text{III.4})$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^p} - d \dot{\lambda} \underline{\underline{\alpha}} \quad (\text{III.5})$$

$$R = Q(1 - e^{-bp}) \quad (\text{III.6})$$

Le matériau utilisé dans les différentes modélisations est un acier inoxydable austénitique AISI 316L. Les différents paramètres matériau de la loi élasto-plastique ont été identifiés par Guerchais [91] à l'aide d'essais cycliques à amplitude de déformation totale imposée. Les paramètres matériau identifiés sont reportés dans le tableau III.1.

Élasticité isotrope		Écrouissage isotrope			Écrouissage cinématique	
$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_0$ (MPa)	$Q$ (MPa)	$b$	$c$ (MPa)	$d$
194	0.284	129	142	6.88	$7.05 \cdot 10^5$	$3.08 \cdot 10^3$

TABLE III.1 – Paramètres du matériau AISI 316L identifiés par [91] pour la loi de comportement élasto-plastique

Dans ce qui suit, nous commençons par une étude qui vise à comparer la précision des résultats macroscopiques avec les différentes méthodes proposées au chapitre II par rapport à la solution obtenue par un calcul incrémental. Ensuite, une étude sur le temps de calcul sera conduite.

## 4 Résultats de la méthode PGD

### 4.1 Introduction

Cette partie présente les résultats de la méthode PGD avec le modèle présenté précédemment. A titre de rappel, deux versions de la méthode PGD ont été proposées : PGD-V1 ( $\{\Delta Q^p\}$  calculé incrémentalement) et PGD-V2 ( $\{\Delta Q^p\}$  calculé avec  $\{\Delta U\}$  convergé).

Les résultats sont évoqués de la façon suivante. Dans un premier temps la convergence de la méthode PGD-V1 sera étudiée avec le premier cycle. Ensuite, une étude sur le critère de convergence de la PGD-V2 sera abordée. Le but est d'analyser l'influence de l'enrichissement de la base spatio-temporelle sur la réponse mécanique ainsi que sur le temps de calcul. Enfin, les résultats en termes de réponse mécanique pour les deux versions de la PGD seront présentés et comparés à la solution incrémentale.

### 4.2 Convergence de la méthode PGD

Afin de bien appréhender les résultats obtenus avec la PGD, les figures III.5, III.6 et III.7 illustrent la convergence de la méthode PGD-V1. Ils se réfèrent aux résultats des six premiers modes du premier cycle issus du modèle qui comporte 30086 éléments avec un chargement en traction-compression et une déformation macroscopique imposée de 0.2%.

Il est important de rappeler qu'avec la deuxième version de la PGD, le terme non linéaire est calculé incrémentalement. Autrement dit,  $\{\Delta Q^p\}$  est mis à jour pour un champ de déplacement calculé pour un seul enrichissement de la PGD. L'approximation spatio-temporelle du champ de déplacement exprimée sous la forme séparée, pour les six premiers modes, est donnée par :

$$[\Delta U_{PGD}] = \sum_{i=1}^{m=6} \alpha^i \{\Delta U_{\underline{X}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i \quad (\text{III.7})$$

La figure III.5 présente l'évolution des six premiers modes temporels du champ de déplacement  $\{\Delta U_t\}^i$ , et la figure III.6 illustre les six premiers modes spatiaux  $\{\Delta U_{\underline{X}}\}^i$  qui traduisent la représentation tensorielle III.7 de la solution.

Pour chaque enrichissement du champ de déplacement (Eq. III.7), la figure III.7 présente les résultats de la réponse mécanique en termes de contrainte-déformation moyennées sur toute la structure. La figure III.7a illustre l'évolution de la solution, avec les six premiers modes, qui converge vers une solution finale présentée à la figure III.7b avec 75 modes. Nous pouvons remarquer que le premier enrichissement (Fig. III.7a) donne une réponse particulière (proche du linéaire), ce qui est logique étant donné que le terme non linéaire n'est pas connu a priori (et donc nul pour cet enrichissement). Le reste des enrichissements tendent à se rapprocher de la courbe à la convergence (Fig. III.7b). Aussi, il est à noter que la réponse est toujours éloignée de la solution avec des incréments de temps particuliers (sauf au début et à la fin) du fait du calcul incrémental de la loi de comportement.

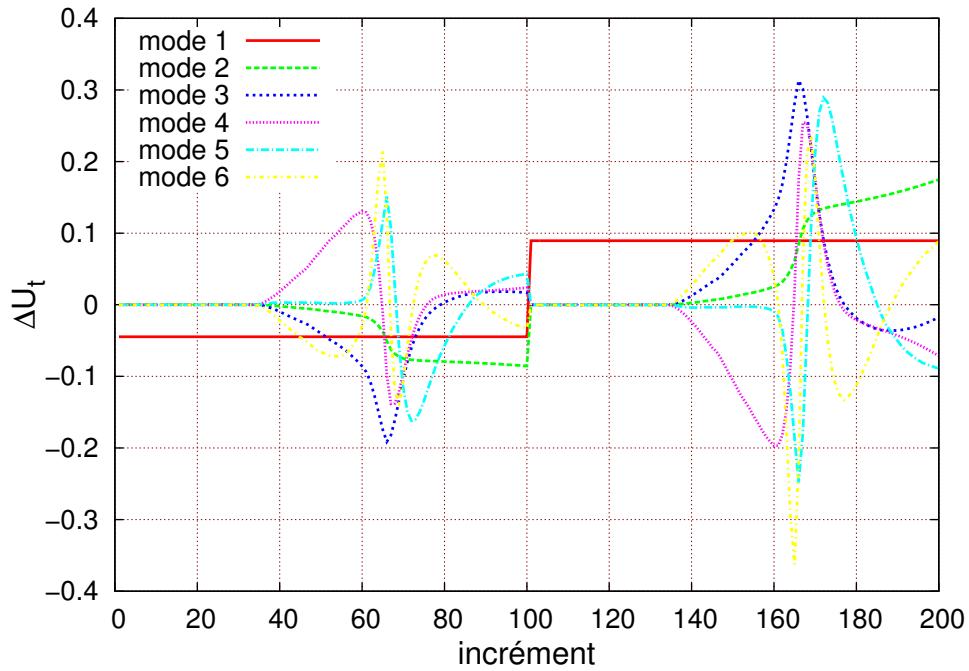


FIGURE III.5 – Évolution des fonctions de la base temporelle avec les six premiers modes du premier cycle avec le modèle M1 pour un chargement en traction-compression de  $E_{11} = 0.2\%$

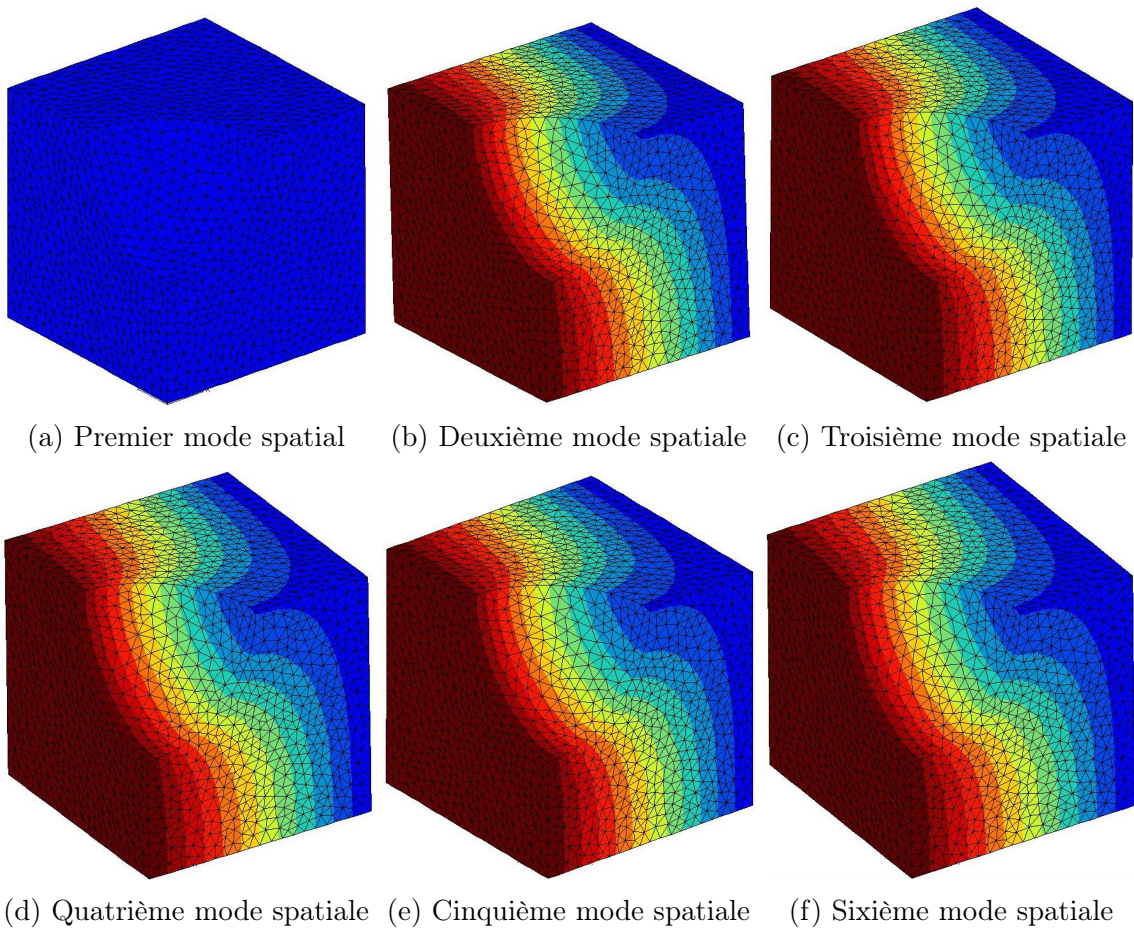


FIGURE III.6 – Évolution des fonctions des bases spatiales avec six premiers modes du premier cycle avec le modèle M1 pour un chargement en traction-compression de  $E_{11} = 0.2\%$

## CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

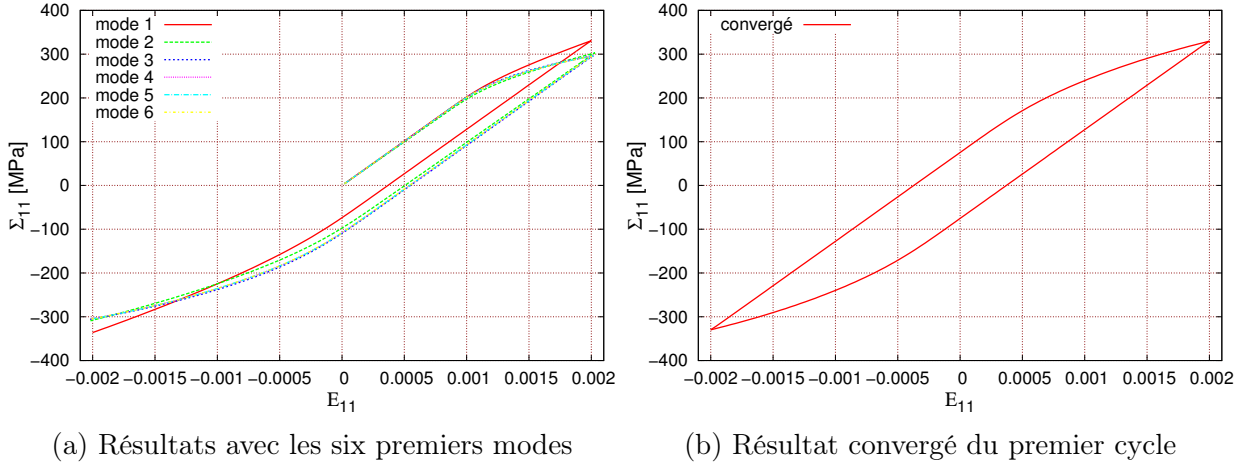


FIGURE III.7 – Convergence de la méthode PGD-V1 en termes de contrainte-déformation  $\Sigma_{11} - E_{11}$  macroscopiques moyennées sur toute la structure avec le premier cycle pour le modèle M1 et avec un chargement en traction-compression de  $E_{11} = 0.2\%$

### 4.3 Influence de l'enrichissement de la méthode PGD

La résolution avec la méthode PGD est effectuée à partir d'une approximation en espace et en temps suivant une stratégie itérative non-incrémentale. Ainsi, le schéma numérique proposé est basé sur un critère de convergence permettant de vérifier la validité de la solution spatio-temporelle à la fin de chaque cycle.

Avec la première version de la PGD, la résolution numérique du problème est effectuée itérativement (la non linéarité  $\{\Delta Q^p\}$  est calculée fonction par fonction). Pour chaque ajout d'une fonction supplémentaire, le critère de convergence vérifiant les nouvelles fonctions d'enrichissement est basé sur un seul processus itératif en évaluant l'équilibre du problème. Dans ce cas, le paramètre de la tolérance PGD-V1 est fixé à  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$  (même valeur que celle de la méthode incrémentale).

Contrairement à la PGD-V1, à chaque itération, la convergence mécanique du problème avec la PGD-V2 est effectuée avec un champ de déplacement vérifiant la convergence pour toutes les fonctions nécessaires. Dans ce cas, deux processus itératifs sont introduits afin de vérifier la qualité de la solution finale. Chacun est lié à un critère de convergence vérifiant la validité de la solution. Le premier critère concerne principalement la qualité du champ de déplacement, enrichi à un ordre  $m$ , en vérifiant l'inégalité de l'équation II.43 ( $\mathcal{R}_{PGD} < \epsilon_{PGD}$ ). Ce critère permet d'arrêter le processus d'enrichissement. Le deuxième critère sert à évaluer l'équilibre du problème donné par le champ de déplacement, enrichi jusqu'à la convergence de la base PGD, en vérifiant l'équation II.15 ( $Res_{droite} < \epsilon_{tol}$ ). Si cette condition n'est pas vérifiée, le problème est recalculé pour une itération supplémentaire afin de corriger la prévision de la base spatio-temporelle en utilisant une correction de type Éléments Finis. Comme le critère  $\epsilon_{PGD}$  permet d'arrêter le processus d'enrichissement de la base spatiale et temporelle, il est notamment lié, d'une part, à la qualité de la prévision de la base PGD, et d'autre part au temps CPU par le fait que le nombre de modes enrichis est proportionnel au temps de calcul. Cette étude vise à tester l'influence de ce paramètre pour deux valeurs de critère de convergence  $\epsilon_{PGD}$ . Pour ce faire, deux cas de figure avec la méthode PGD-V2 sont examinés :

1<sup>er</sup> cas :  $\{\Delta Q^p\}$  calculé avec  $\{\Delta U\}$  convergé pour  $\|\mathcal{R}_{PGD}\| < \epsilon_{PGD} = 10^{-4}$

2<sup>ime</sup> cas :  $\{\Delta Q^p\}$  calculé avec  $\{\Delta U\}$  convergé pour  $\|\mathcal{R}_{PGD}\| < \epsilon_{PGD} = 10^{-3}$

Pour les deux cas présentés, l'équilibre du problème avec la PGD-V2 est vérifié pour une



## 4. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE PGD

valeur de tolérance fixée à  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$  (même valeur que celle de la méthode incrémentale). Afin d'étudier les deux cas proposés, des simulations sont effectuées pour 100 cycles de chargement avec les deux discrétisations spatiales. Une variété d'amplitude de déformation macroscopique est appliquée allant de 0.2% jusqu'à 0.6%.

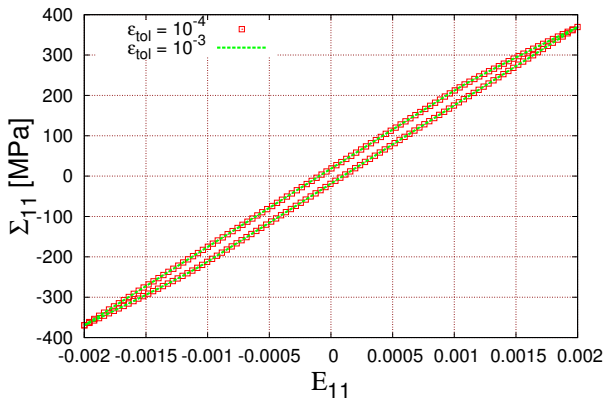
Les réponses mécaniques contrainte-déformation macroscopiques du dernier cycle avec le modèle M1 et M2 sont présentées respectivement aux figures III.8 et III.9. Chaque ligne correspond à un niveau de chargement appliqué. Le temps de calcul est aussi présenté en fonction du nombre de cycles, pour les deux valeurs de tolérance utilisées.

Quel que soit le cas de chargement, les réponses contrainte-déformation macroscopiques du 100<sup>ème</sup> cycle montrent que la solution obtenue avec une tolérance  $10^{-3}$  est quasiment la même que à celle avec une tolérance de  $10^{-4}$ . Cependant, les résultats pour le modèle M1 sont donnés jusqu'à  $E_{11} = 0.6\%$  de déformation imposée, alors que pour le modèle M2 ils le sont jusqu'à  $E_{11} = 0.4\%$ . Cela est dû au fait que la méthode PGD-V2 diverge avec un critère de convergence égale à  $10^{-3}$  pour un modèle contenant un grand nombre de ddl et une valeur de déformation macroscopique appliquée au delà de  $E_{11} = 0.5\%$ . Le nombre de fonctions utilisées pour la convergence du champ de déplacement, limité par  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ , n'est en effet pas suffisant pour obtenir la convergence mécanique. Dans ce cas, le calcul diverge dans le sens où la solution évolue toujours d'une itération à l'autre sans se stabiliser. Ces résultats sont observés avec le modèle M1 pour un chargement appliqué au delà de  $E_{11} = 0.6\%$  en utilisant un critère de convergence plus restrictif ( $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ ). Ainsi, en augmentant la non linéarité du comportement, il faut un nombre minimum de fonctions dans la base spatio-temporelle pour approcher au mieux la solution à la convergence.

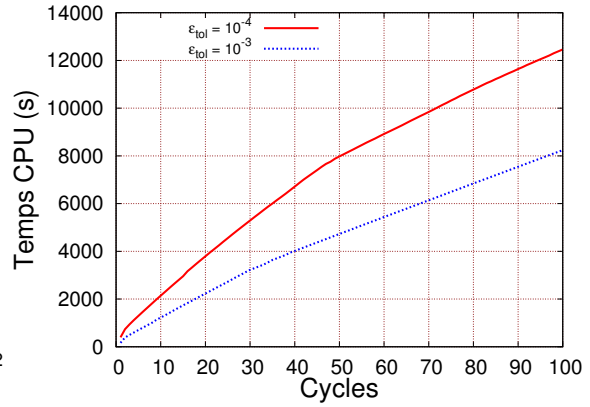
Les figures III.8b, III.8d, III.8f et III.8h illustrent l'évolution du temps de calcul, pour les deux valeurs de tolérance, en fonction du nombre de cycles avec le modèle M1. Pour la deuxième discrétisation spatiale utilisée, ces résultats sont représentés sur les figures III.9b, III.9d et III.9f. Au vu de ces résultats, il est clair que, pour tous les cas étudiés, la méthode PGD-V2 avec un critère de convergence  $10^{-3}$  est plus rapide qu'avec  $10^{-4}$ . En effet, pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  avec le modèle M1, un gain de temps de 34% est obtenu avec  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  par rapport au  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ . Ces gains sont aussi obtenus avec le modèle M2, où le deuxième cas réduit le temps de calcul par un facteur 3 pour  $E_{11} = 0.2\%$ . Ces gains sont intéressants et ils peuvent être expliqués par le fait qu'une diminution de la précision de convergence entraîne une réduction du nombre d'enrichissement nécessaire. Les figures III.10a, pour  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ , et III.10b, pour  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ , présentent l'évolution du nombre de modes PGD utilisés en fonction du nombre de cycles pour les deux critères de convergence et un chargement  $E_{11} = 0.2\%$ . Ces résultats correspondent au nombre de modes cumulés pour toutes les itérations nécessaires par cycle. L'évolution de la convergence de la solution, pour le modèle M1, nécessite une centaine de fonctions au cours des 50 premiers cycles avec  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ , alors qu'avec  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ , la solution converge à la fin de chaque cycle en moyenne avec une vingtaine de fonctions. Une diminution du nombre d'enrichissements d'un cycle à l'autre est observée, pour les deux cas étudiés, jusqu'à atteindre, au 100<sup>ème</sup> cycle, 74 modes avec le premier cas et 14 modes avec le second. Cette différence en nombre d'enrichissements conduit à un gain en temps CPU obtenu en utilisant une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ . Autrement dit, le nombre de modes enrichis dans la base spatio-temporelle est fortement lié au nombre d'opérations concernant le calcul des deux systèmes linéaires de l'étape d'enrichissement de la PGD. Par ailleurs, il est clair que le gain en temps CPU avec le deuxième critère est plus significatif en augmentant la discrétisation spatiale du modèle, vu le nombre de modes utilisés (figure III.10).

La modélisation avec une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  peut entraîner une augmentation

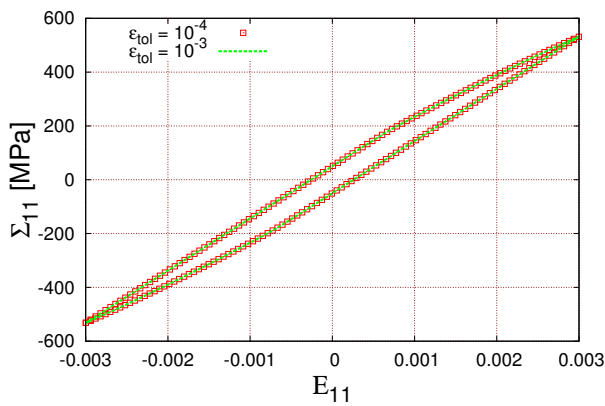
CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE



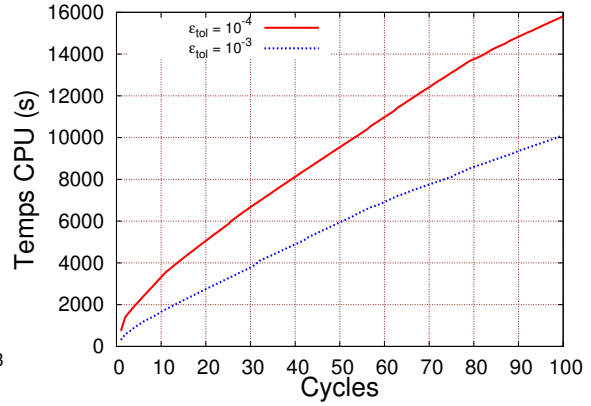
(a) courbe  $\Sigma_{11} - E_{11}$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



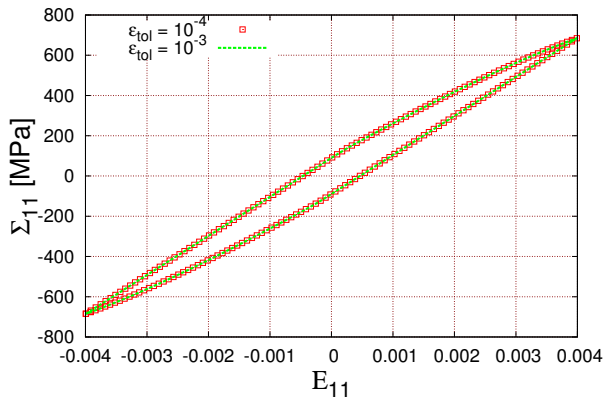
(b) temps CPU pour  $E_{11} = 0.2\%$



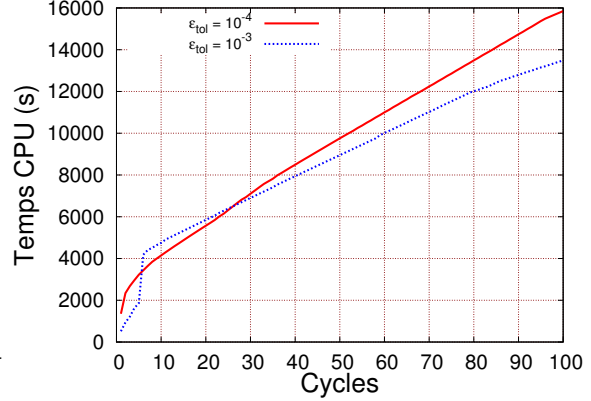
(c) courbe  $\Sigma_{11} - E_{11}$  pour  $E_{11} = 0.3\%$



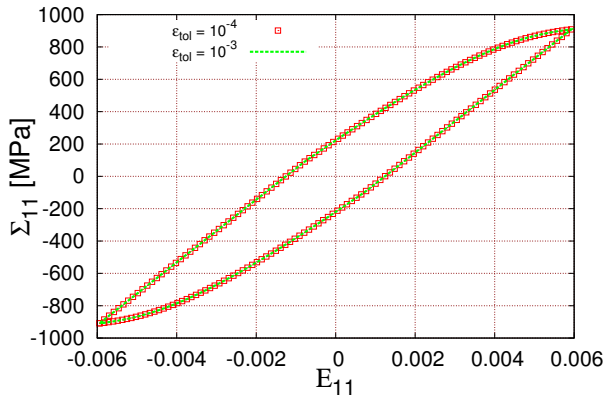
(d) temps CPU pour  $E_{11} = 0.3\%$



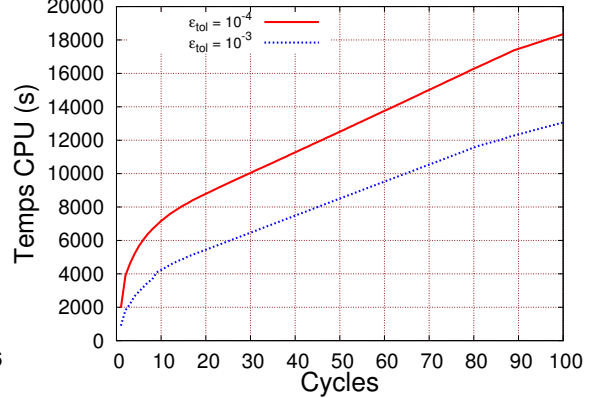
(e) courbe  $\Sigma_{11} - E_{11}$  pour  $E_{11} = 0.4\%$



(f) temps CPU pour  $E_{11} = 0.4\%$



(g) courbe  $\Sigma_{11} - E_{11}$  pour  $E_{11} = 0.6\%$



(h) temps CPU pour  $E_{11} = 0.6\%$

FIGURE III.8 – Réponses macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  du dernier cycle (après 100 cycles) et évolution du temps CPU pour le modèle M1 obtenus avec deux valeurs de tolérance proposées  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$

#### 4. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE PGD

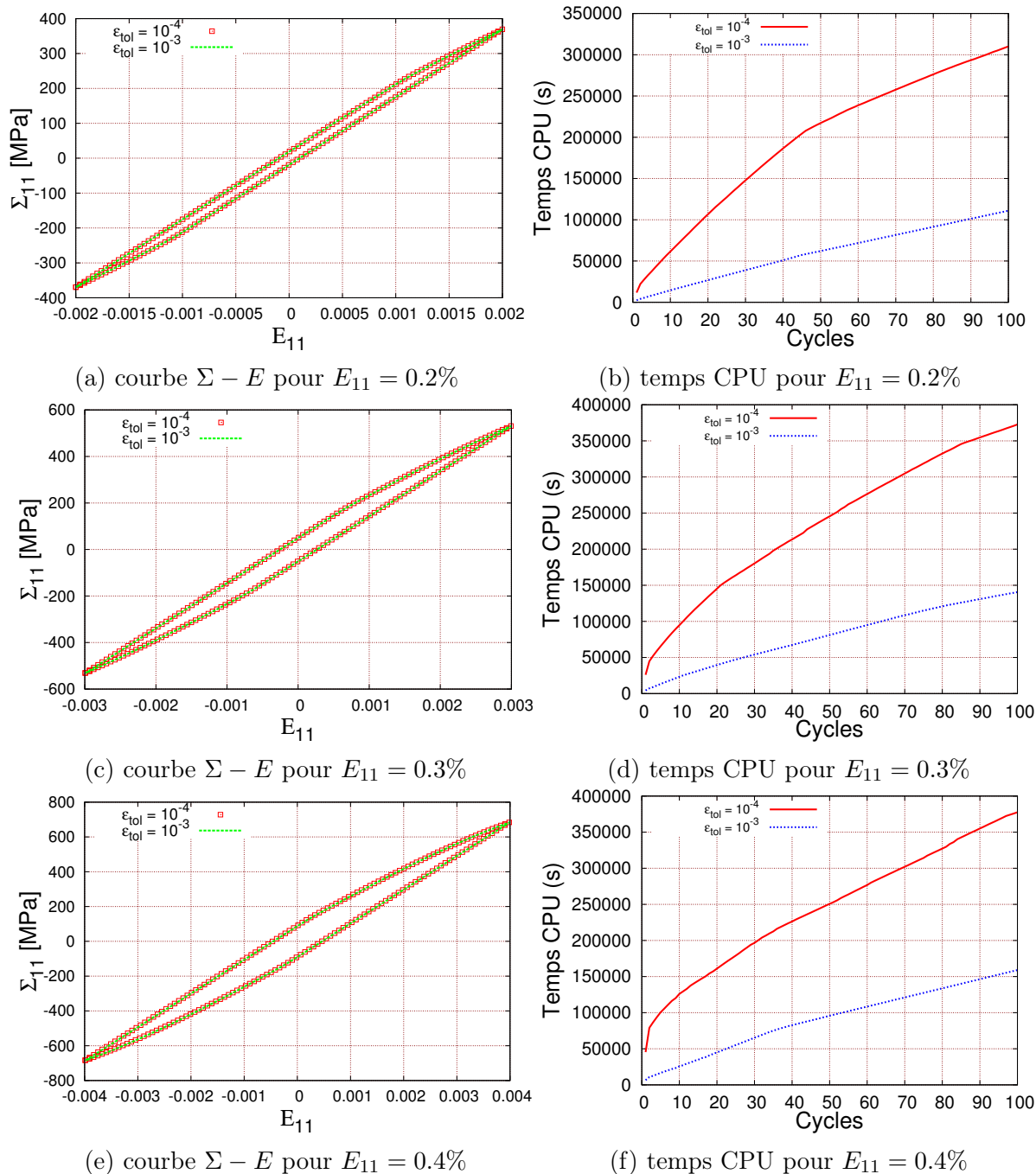


FIGURE III.9 – Réponses macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  du dernier cycle (après 100 cycles) et évolution du temps CPU pour le modèle M2 obtenus avec deux valeurs de tolérance proposées  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$

du temps de calcul au cours de la simulation par rapport à  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$  (figure III.8f). Cela s'explique par une augmentation du nombre d'itérations nécessaires à la convergence mécanique avec le deuxième cas. En effet, la prévision de la base spatio-temporelle avec un nombre réduit de modes n'est pas satisfaisante pour bien représenter le champ de déplacement résultant du système linéaire. Cela entraîne davantage de corrections de type Éléments Finis afin de bien corriger l'état mécanique du problème.

Pour conclure, les différentes simulations effectuées ont permis d'analyser l'influence de l'enrichissement PGD sur la réponse mécanique, le temps de calcul ainsi que la convergence de l'état mécanique. La méthode PGD-V2 avec une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  n'est pas

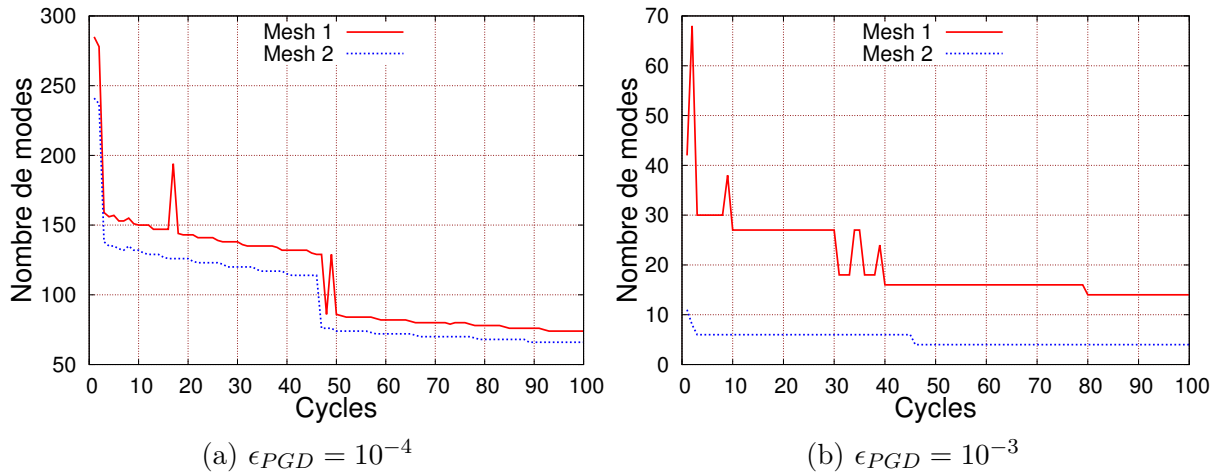


FIGURE III.10 – Nombre de modes nécessaires à la convergence en fonction du nombre de cycles obtenus par les deux critères de convergences et pour  $E_{11} = 0.2\%$

toujours applicable pour tous les niveaux de chargement utilisés. En revanche, au vu du gain de temps de calcul observé, cette version de la méthode PGD-V2 est plus efficace et intéressante avec une non linéarité faible du comportement (pour un maximum de déformation macroscopique appliquée  $E_{11} = 0.5\%$ ). Ainsi, dans ce qui suit, les résultats de la réponse mécanique ainsi que le temps CPU pour la méthode PGD-V2 seront présentés avec une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ .

## 4.4 Réponse mécanique de la méthode PGD

Cette partie présente les résultats des deux variantes de la méthode PGD en termes de réponse mécanique macroscopique. Ces résultats seront comparés à ceux du calcul incrémental et de la méthode incrémentale droite avec deux types de chargement : traction et cisaillement.

### 4.4.1 Résultats en traction

La figure III.11 illustre les courbes contrainte-déformation moyennées sur toute la structure suivant la direction de chargement pour le modèle M1 (1<sup>ère</sup> colonne) et M2 (2<sup>ème</sup> colonne).

Au vu de ces résultats, les réponses obtenues par les méthodes PGD avec le modèle M1 sont équivalentes à celles du calcul incrémental et incrémental droite en termes de déformation et contrainte moyennes de la solution, pour les différents cas de chargement :  $E_{11} = 0.2\%$  (Fig. III.11a),  $E_{11} = 0.3\%$  (Fig. III.11c) et  $E_{11} = 0.4\%$  (Fig. III.11e). Tout comme dans le cas précédent, les résultats issus du modèle M2 montrent une bonne précision de la réponse macroscopique obtenue avec les méthodes PGD en comparaison avec la méthode incrémentale pour les différents cas étudiés :  $E_{11} = 0.2\%$  (Fig. III.11b),  $E_{11} = 0.3\%$  (Fig. III.11d) et  $E_{11} = 0.4\%$  (Fig. III.11f).

La figure III.12a illustre les distributions des champs de contrainte de von Mises, à la fin du 100<sup>ème</sup> cycle, données par la méthode incrémentale et les deux méthodes PGD. Elles sont obtenues pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  et avec le modèle M1. Les résultats des différentes méthodes sont très proches. De plus, il apparaît clairement que les fortes valeurs de contrainte sont obtenues au pied du défaut. Ces résultats sont présentés à la figure III.12b pour le modèle M2 avec la même condition du chargement. En raison de la concentration

#### 4. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE PGD

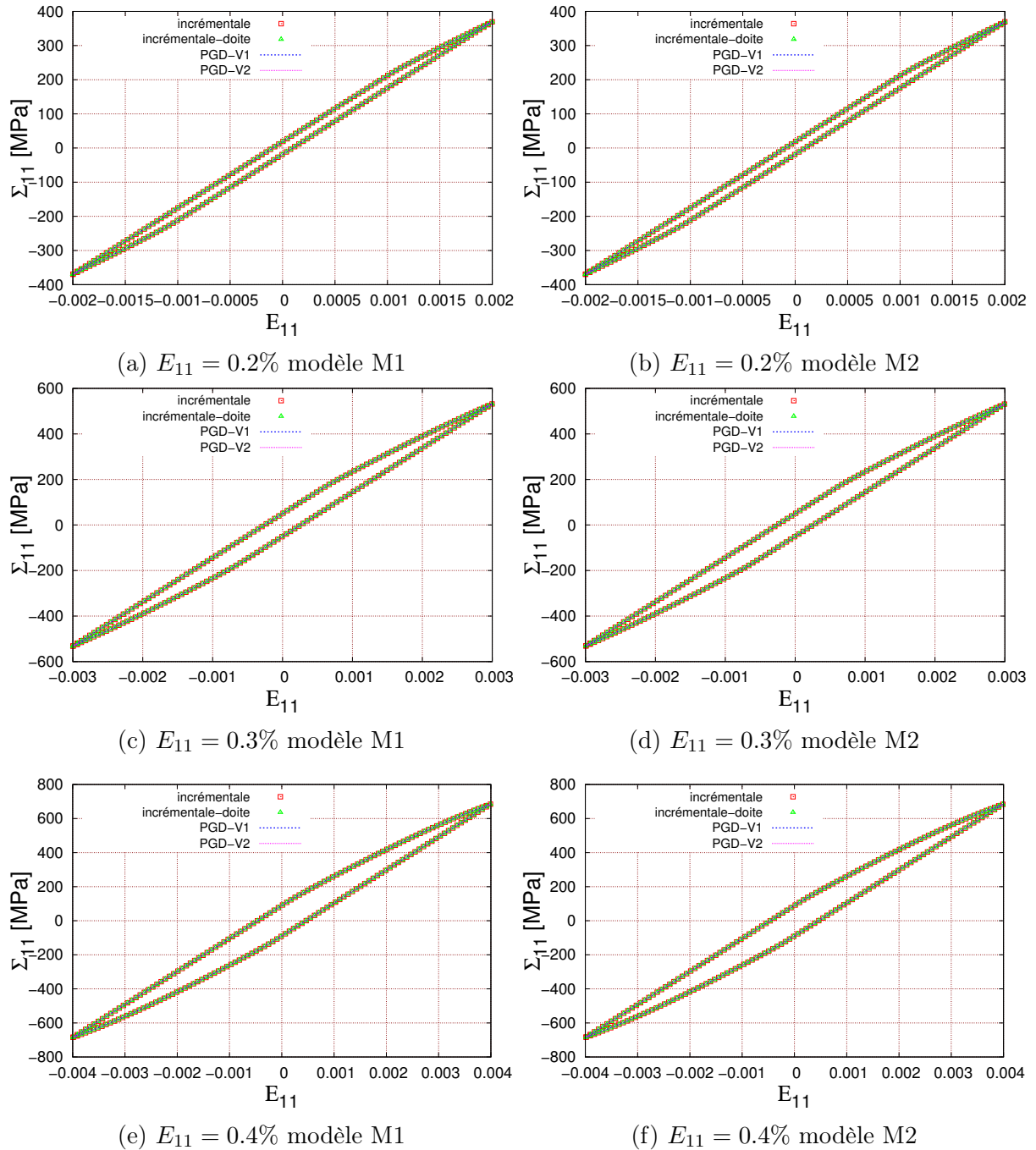


FIGURE III.11 – Comparaison des résultats contrainte-déformation  $\Sigma_{11} - E_{11}$  macroscopiques du dernier cycle obtenus par le calcul incrémental et la PGD sous différentes amplitudes de déformation imposées et avec les modèles M1 et M2

## CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

de contrainte, les champs de contrainte de von Mises les plus élevés sont présents autour du défaut. De plus, les iso-valeurs obtenues par les méthodes PGD sont satisfaisantes par rapport au calcul incrémental.

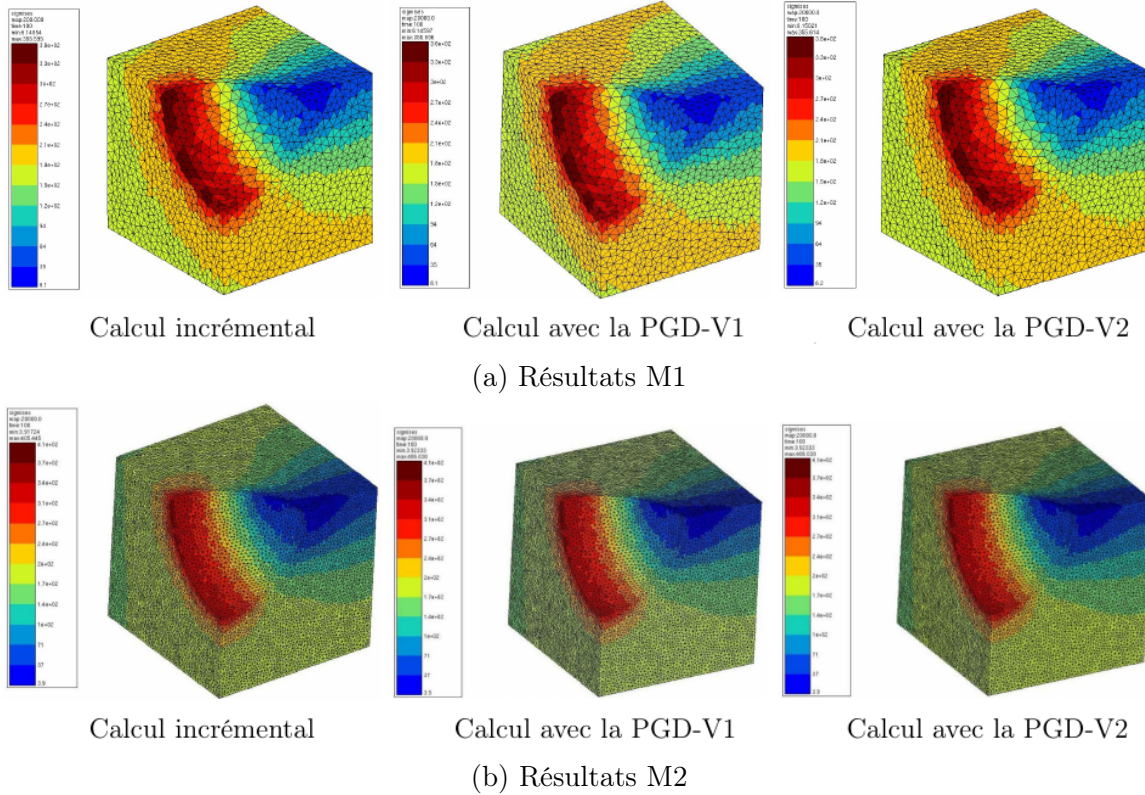


FIGURE III.12 – Distribution des contraintes de von Mises obtenues par les méthodes incrémentales et les méthodes PGD pour le modèle M1 et M2 avec un chargement de 0.2%

La figure III.13a illustre les distributions du champ de déformation plastique obtenues avec le modèle M1 et la méthode incrémentale ou les deux variantes de la PGD. Ces résultats sont donnés à la fin de la première séquence du 100<sup>ème</sup> cycle et pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ . Ce graphique montre que les champs de déformation plastique maximales apparaissent en surface du trou et les iso-valeurs prédites par les méthodes PGD sont très proches de la méthode incrémentale. Ces résultats sont aussi observés en figure III.13b avec la deuxième discrétisation spatiale. Des écarts sont constatés au niveau des extremums du champ de déformation plastique avec un écart relatif maximum inférieur à 8%.

Les réponses mécaniques macroscopiques obtenues dans les éléments choisis précédemment (élément  $a$ ,  $b$  et  $c$ ) sont présentées dans des diagrammes contrainte-déformation en figure III.14 pour le dernier cycle de chargement. Les composantes des contraintes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  et des déformations  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  sont analysées pour le modèle avec les configurations M1 (Fig III.14a, III.14c et III.14e) et M2 (Fig III.14b, III.14d et III.14f). L'amplitude de déformation macroscopique appliquée est de  $E_{11} = 0.2\%$ . Au vu des diagrammes contrainte-déformation, une bonne adéquation entre les boucles d'hystérésis issues des méthodes incrémentale et incrémentale droite et celles prédites par les deux versions de la méthode PGD est observée.

### 4.4.2 Résultats en cisaillement

Cette partie présente les résultats en cisaillement des deux méthodes PGD en comparaison avec les méthodes incrémentale et incrémentale droite. Tout comme dans le cas de la

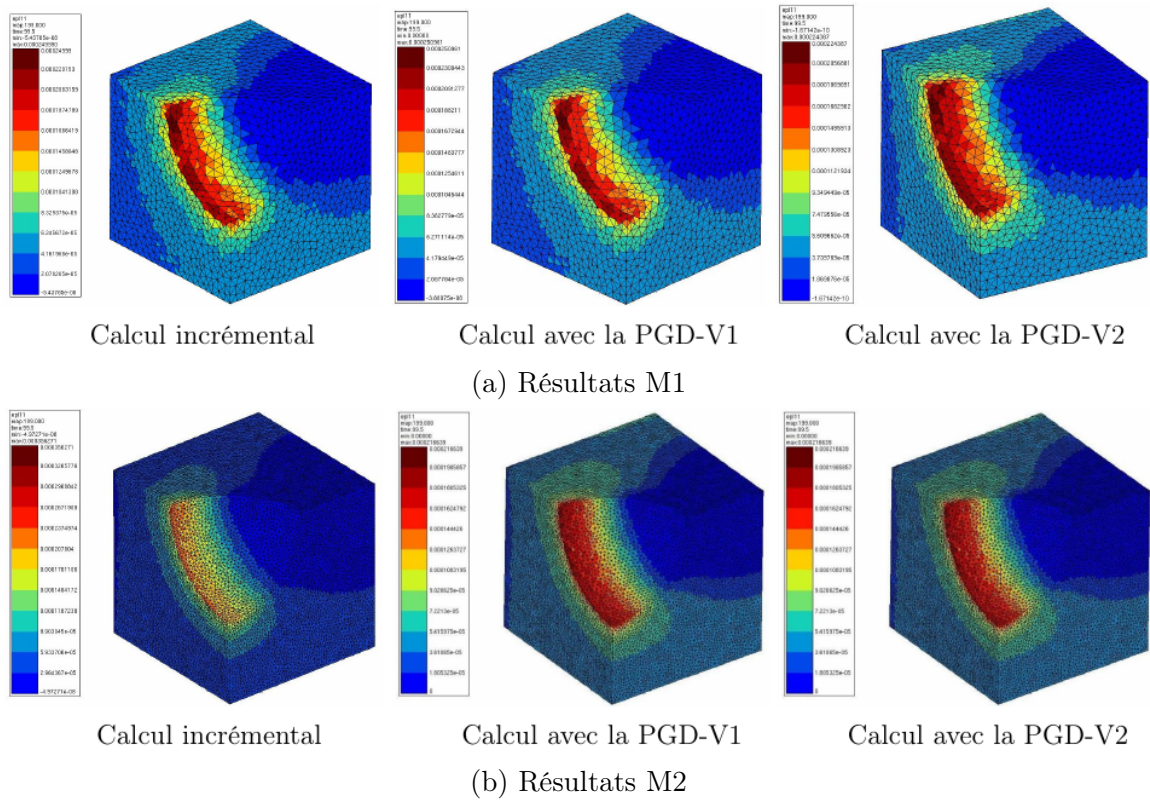


FIGURE III.13 – Champs de déformation plastique obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes PGD avec le modèle M1 et M2 pour un chargement de 0.2%

traction, 100 cycles ont été simulés avec une discrétisation de 200 incréments par cycle. Les composantes de cisaillement en contrainte ( $\Sigma_{12}$ ) et en déformation ( $E_{12}$ ) sont analysées.

Les réponses mécaniques macroscopiques moyennées sur toute la structure, selon la direction du chargement, sont présentées dans un diagramme contrainte-déformation en figure III.15. Ces résultats sont obtenus lors du dernier cycle de chargement pour chaque condition de chargement ainsi que pour les deux discrétisations spatiales. Au vu de ces résultats, les réponses mécaniques des deux méthodes incrémentales sont correctement prédites par les deux méthodes PGD.

Les champs de contrainte de von Mises donnés suivant la direction de chargement, par la méthode incrémentale ainsi que les méthodes PGD, sont présentés à la figure III.16a avec le modèle M1. Ces résultats sont obtenus à la fin du dernier cycle et pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ . Pour la deuxième discrétisation spatiale, ces résultats sont illustrés à la figure III.16b. Ces graphiques montrent que les deux variantes de la méthode PGD donnent des résultats très proches de ceux de la méthode incrémentale.

Les figures III.17a (modèle M1) et III.17b (modèle M2) illustrent la distribution des champs de déformation plastique prédites par les différentes méthodes suivant la direction de chargement. Ces résultats sont obtenus à la fin de la dernière séquence du dernier cycle et pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ . Au vu de ces résultats, il est clair que les gradients importants apparaissent autour du défaut. Aussi, une bonne corrélation est notée entre les champs de déformation plastique donnés par la méthode incrémentale et par les méthodes PGD. Dans le cadre du modèle M2, des écarts sont constatés avec la PGD-V2 pour les extrêmes iso-valeurs de la déformation plastique avec un écart relatif maximal qui n'excède pas 5%.

Suite aux différents résultats analysés, nous pouvons conclure que la méthode PGD

CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

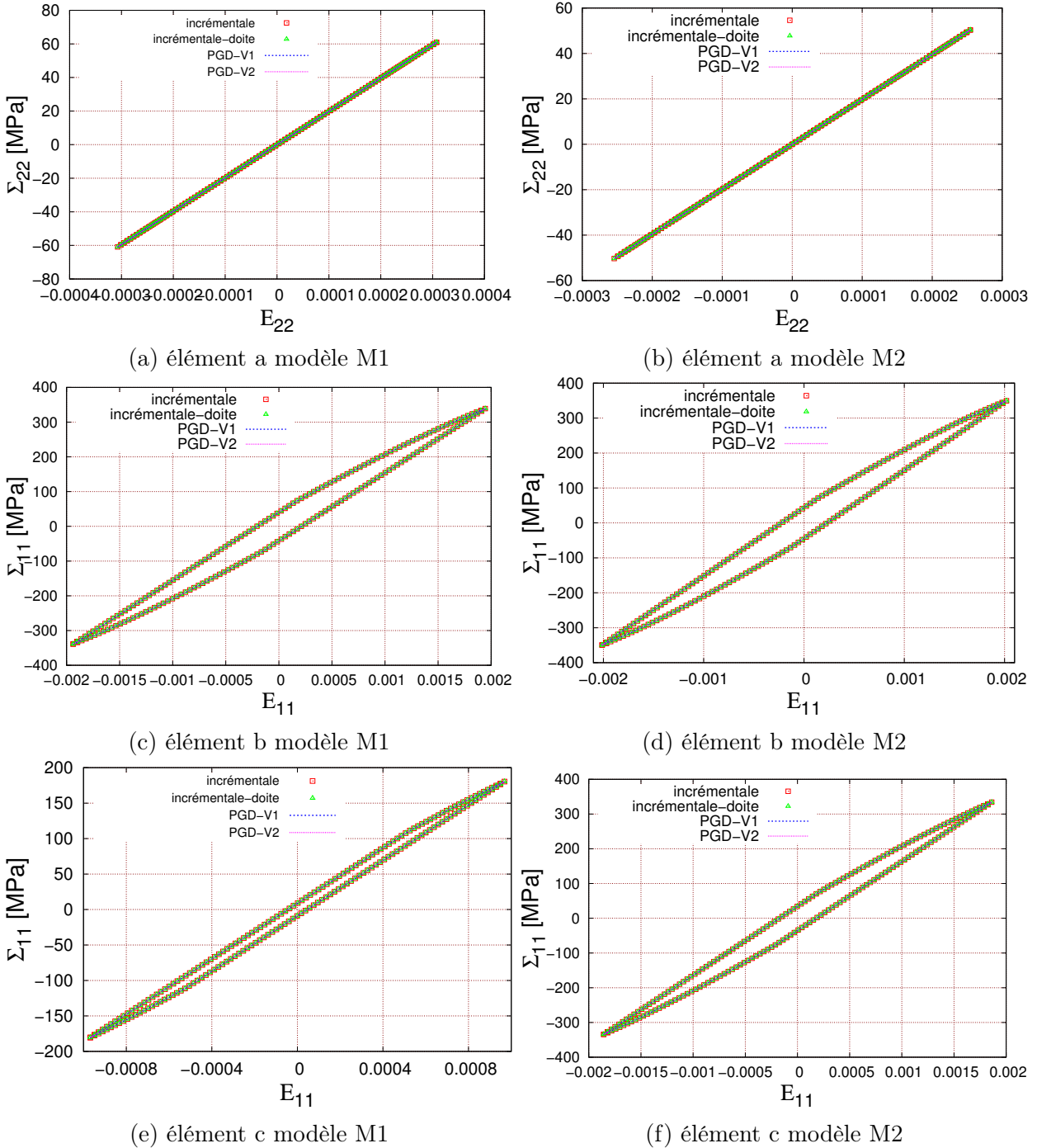


FIGURE III.14 – Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques du 100<sup>ème</sup> cycle dans les éléments a, b et c obtenus par le calcul incrémental et la PGD pour une déformation imposée 0.2% et avec les modèles M1 et M2



#### 4. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE PGD

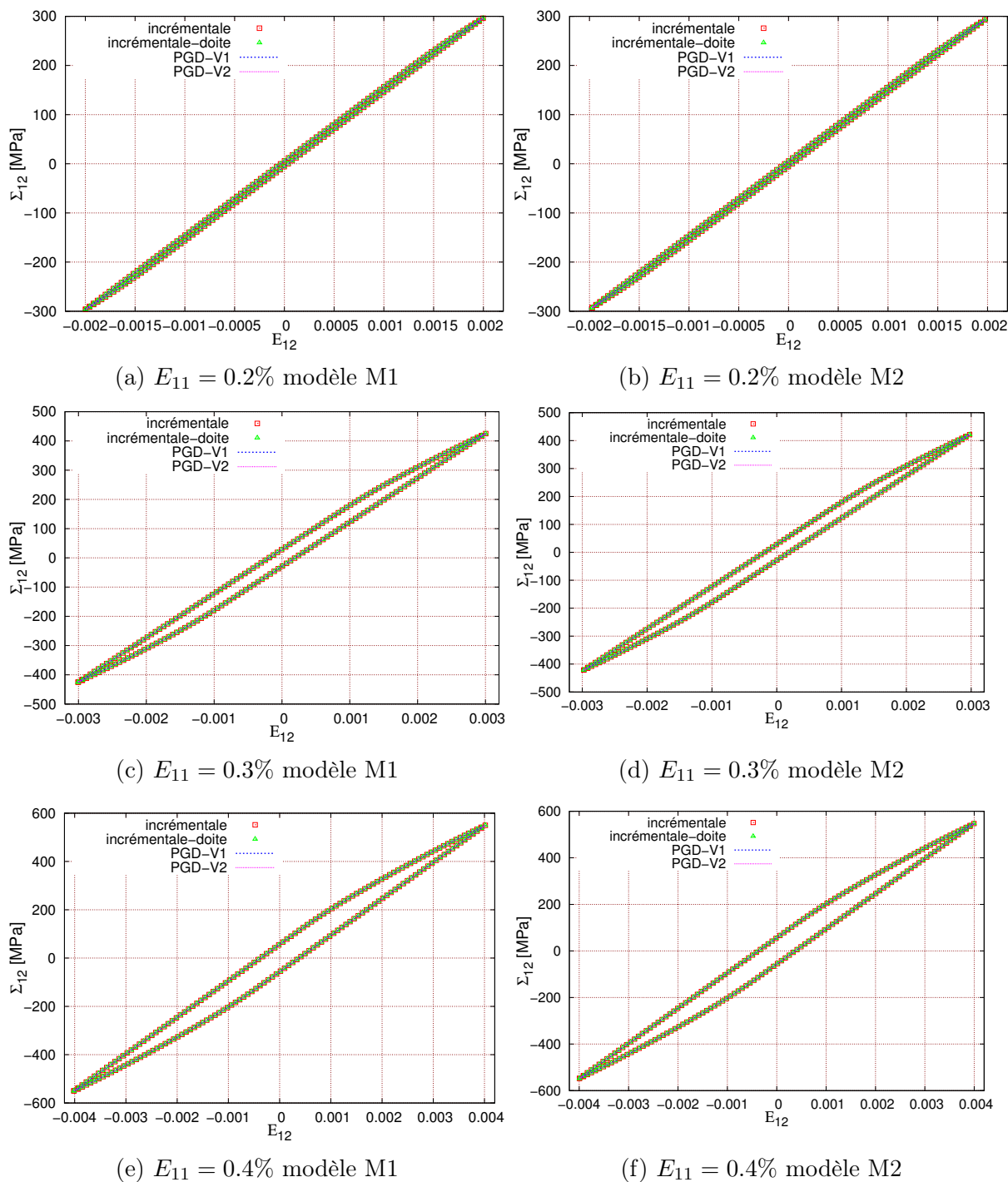


FIGURE III.15 – Diagrammes contrainte-déformation  $\Sigma_{12} - E_{12}$  macroscopiques en cisaillement du 100<sup>ème</sup> cycle obtenus par le calcul incrémental et la PGD sous différentes amplitudes de déformation imposées et avec les modèles M1 et M2

## CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

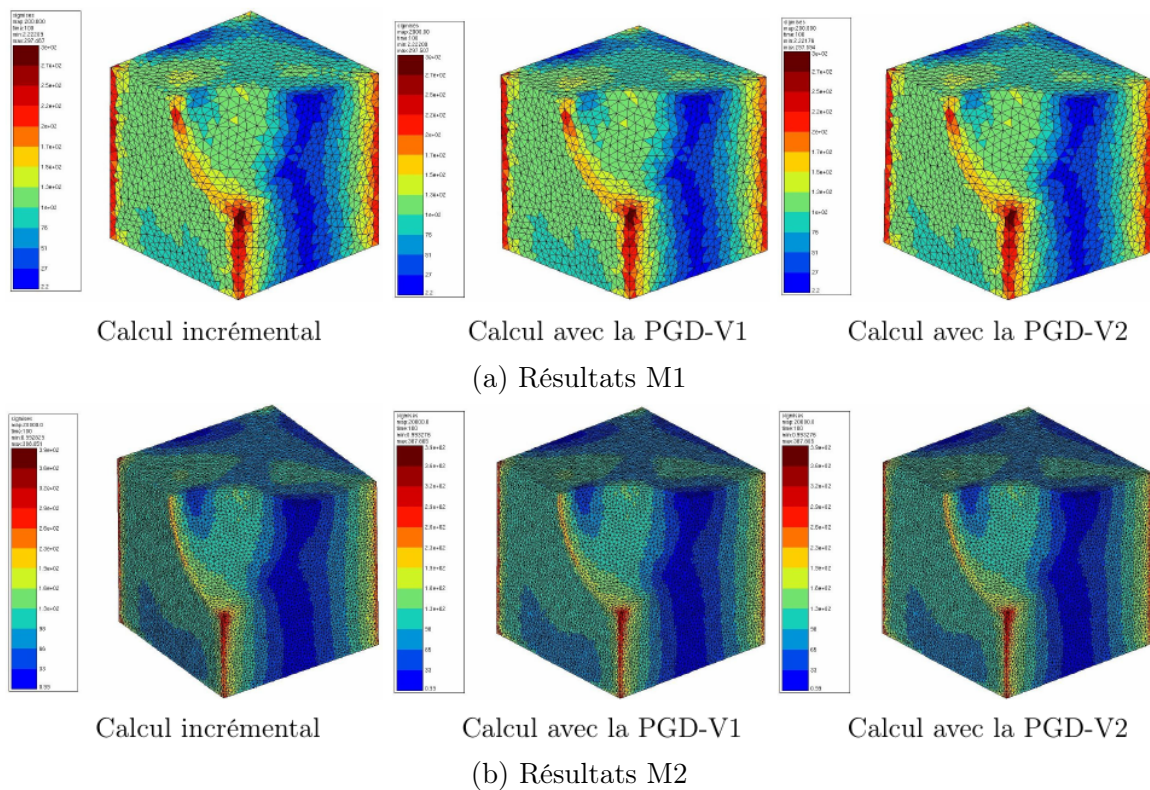


FIGURE III.16 – Contraintes de von Mises obtenues par les méthodes incrémentales et les méthodes PGD pour les modèles M1 et M2 et avec un chargement en cisaillement de 0.2%

prédit bien les réponses mécaniques en traction et en cisaillement cycliques avec un modèle de comportement en plasticité  $J_2$ . Ces constats sont faits pour une variété d'amplitudes de chargement en déformations macroscopiques et pour deux types de discrétisation du maillage.

Après avoir présenté les différents résultats des deux versions de la méthode PGD, la section suivante illustre la même démarche pour les différentes versions de la méthode APR cyclique.

## 5 Résultats de la méthode APR cyclique

### 5.1 Introduction

L'autre idée proposée dans ce travail consiste à utiliser le principe de la méthode APR pour des problèmes mécaniques non linéaires sous chargements cycliques.

La méthode APR est utilisée pour la résolution de l'étape globale avec un système d'ordre réduit afin de diminuer le coût numérique de la résolution du système linéaire. La base réduite est construite à partir d'une approximation SVD formée par les vecteurs propres les plus optimaux. Cette base est déduite à partir des snapshots d'un calcul Éléments Finis complet (calcul avec la méthode incrémentale droite) des premiers cycles. Toutefois, une stratégie adaptative incrémentale de la base a été proposée afin de corriger l'estimation de la base réduite au cours de la simulation. Les inconnues sont les variables réduites  $\{\Delta\lambda\}$  du champ de déplacement et la nouvelle base enrichie  $[\Phi_x]$  pour chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . Tout comme pour la méthode PGD, suivant la stratégie itérative proposée, plusieurs versions d'implémentation de cette méthode ont été proposées :

## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

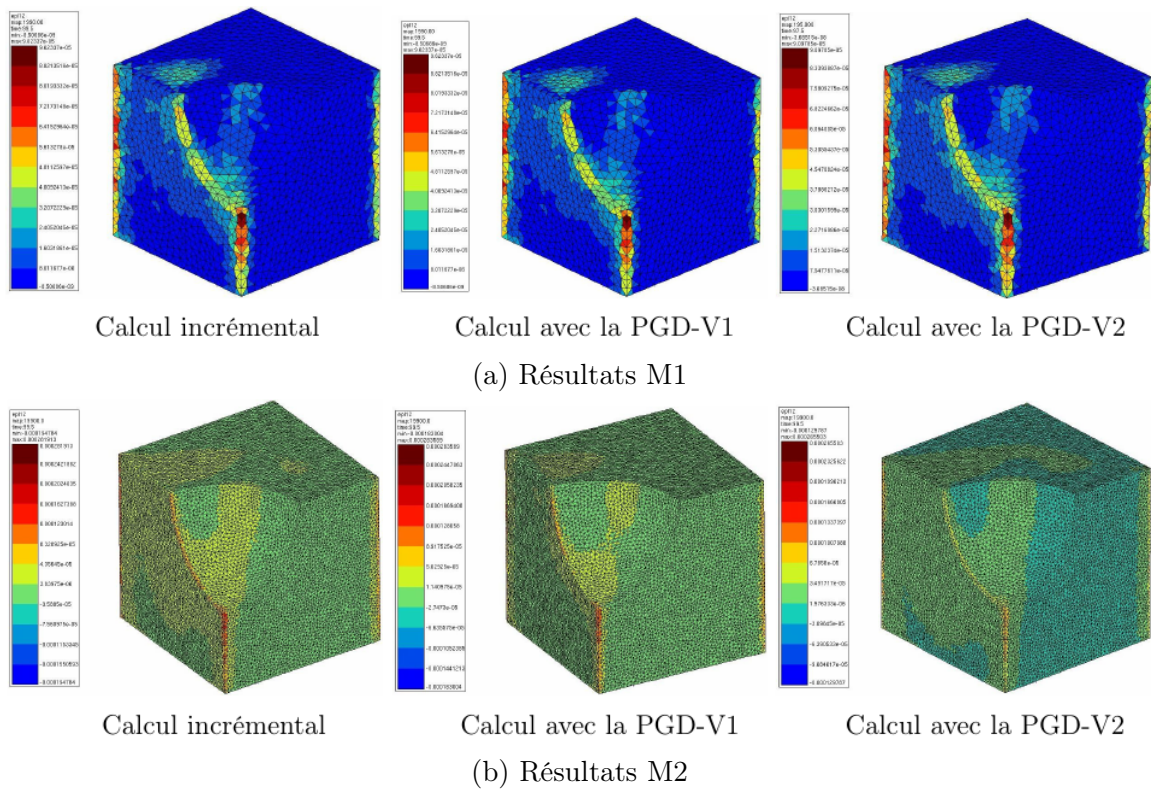


FIGURE III.17 – Champs de déformations plastiques obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes PGD avec les modèles M1 et M2 pour un chargement en cisaillement de 0.2%

**APR-V1** : État mécanique corrigé avec une estimation réduite adaptée à chaque incrément. A la fin de l'adaptation, une diminution du nombre de modes enrichis est obtenue par l'application d'une POD ou une KLD sur la base adaptée.

**APR-V2** : Une adaptation de la base réduite pour un état mécanique corrigé à chaque incrément. Une diminution du nombre de modes enrichis est ensuite obtenue par l'application d'une POD ou une KLD sur la base adaptée

**APR-V3** : APR-V1 sans l'application d'une POD ou KLD à la fin des cycles adaptés (dernière étape de la APR-V1)

**APR-V4** : APR-V2 sans l'application d'une POD ou KLD à la fin des cycles adaptés (dernière étape de la APR-V2)

Les résultats des différentes stratégies décrites ci-dessus sont présentés de la façon suivante. Dans un premier temps, une étude de stabilité de la base réduite est proposée. Ensuite, une étude sur l'influence du choix de l'initialisation de la base réduite est conduite. L'influence de l'amplitude de chargement appliquée sur le comportement de la méthode APR cyclique en termes de réponse mécanique, est aussi analysée. Enfin, les résultats en termes de réponse mécanique macroscopique sont présentés et comparés à la solution obtenue par la méthode incrémentale.

### 5.2 Étude de stabilité de la base APR cyclique

La modélisation avec la méthode APR cyclique consiste à résoudre un système linéaire d'ordre réduit, grâce à une approximation d'une base spatiale. Une stratégie d'adaptation

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

de la base réduite est utilisée à chaque pas de temps afin de corriger, si nécessaire, l'estimation réduite du champ de déplacement à l'incrément courant. La taille du modèle d'ordre réduit est évolutif et peut atteindre parfois la taille globale du modèle Éléments Finis. La figure III.18 présente un exemple d'évolution de la taille du modèle réduit après 50 cycles de chargement pour le modèle M1. La résolution du système linéaire réduit a débuté avec un nombre de modes qui vaut 118 et atteint 1610 après 50 cycles. Par ailleurs, le caractère itératif adaptatif de la méthode, en termes de nombre de calculs du résidu II.66 ainsi que d'enrichissement à chaque incrément de temps, engendre un coût de calcul significatif et proportionnel au nombre de cycles et dépendant du modèle de comportement utilisé. Pour éviter cet écueil, une solution a été proposée (c.f. section 5.3 chapitre II) consistant à maintenir la base stable après un certain nombre d'enrichissements.

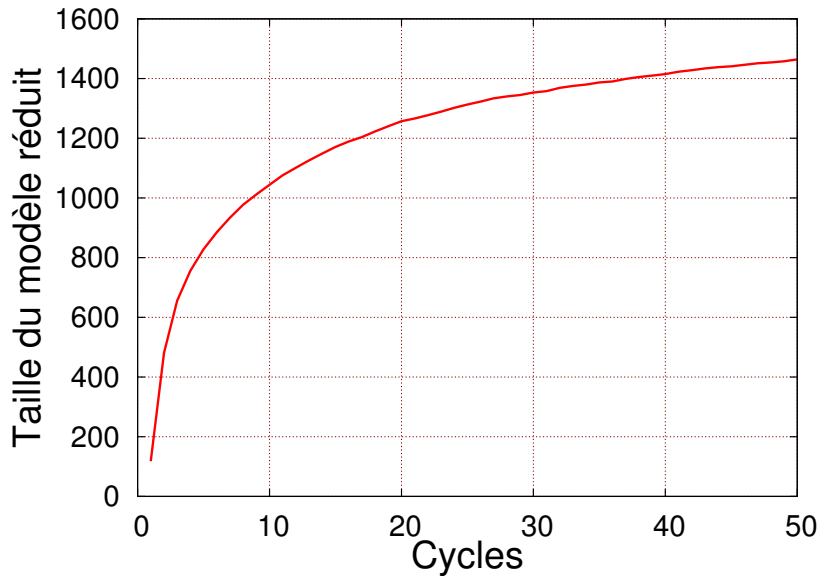


FIGURE III.18 – Évolution de la taille du modèle réduit en fonction du nombre de cycles pour la méthode APR cyclique

La figure III.19 illustre le nombre de modes enrichis par cycle pour les deux stratégies d'adaptation (APR-V3 1<sup>ère</sup> colonne et APR-V4 2<sup>ème</sup> colonne) durant 30 cycles de chargement. L'initialisation de la base est effectuée avec une SVD appliquée pour plusieurs cas : au 1<sup>er</sup>, 3<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> cycle. Ces résultats sont issus d'une modélisation avec le modèle M1 pour trois amplitudes de déformation macroscopique appliquées :  $E_{11} = 0.2\%$  (1<sup>ère</sup> ligne),  $E_{11} = 0.3\%$  (2<sup>ème</sup> ligne) et  $E_{11} = 0.4\%$  (3<sup>ème</sup> ligne). Chaque cycle est discrétisé avec 200 incréments de temps.

Ces résultats montrent que quel que soit le cas de chargement, seuls les premiers cycles, avec une résolution du modèle d'ordre réduit, sont les cycles dans lesquels il y a le plus d'enrichissement. En particulier, l'enrichissement est effectué principalement au premier cycle. Ensuite, il devient plus stable lorsque l'évolution de la solution devient plus faible. Plus le nombre de cycles augmente, plus le comportement s'adapte. Cela conduit à une taille du problème rapidement stabilisée. A titre d'exemple, pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$  et une SVD au sixième cycle avec la stratégie APR-V3, 68 fonctions ont été enrichies durant le premier cycle. Ensuite, ce nombre évolue dans une deuxième phase vers 20 fonctions à partir du 3<sup>ème</sup> cycle d'adaptation. Enfin, le nombre de fonctions enrichies diminue au fur et à mesure que le nombre de cycles augmente et atteint en moyenne 7 fonctions enrichies par cycle à partir du 24<sup>ème</sup> cycle. Suite à ces résultats, la stratégie d'adaptation de la base réduite avec la méthode APR cyclique est la suivante : après initialisation de  $[\Phi_x^0]$ , les contrôles de

## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

la précision de la base et de l'enrichissement, à chaque incrément de temps, ne sont effectués que pour les trois premiers cycles après l'initialisation. Cette stratégie d'adaptation est présentée à la figure II.18. Le reste des résultats de la réponse mécanique ainsi que le temps CPU seront présentés en utilisant cette technique de résolution.

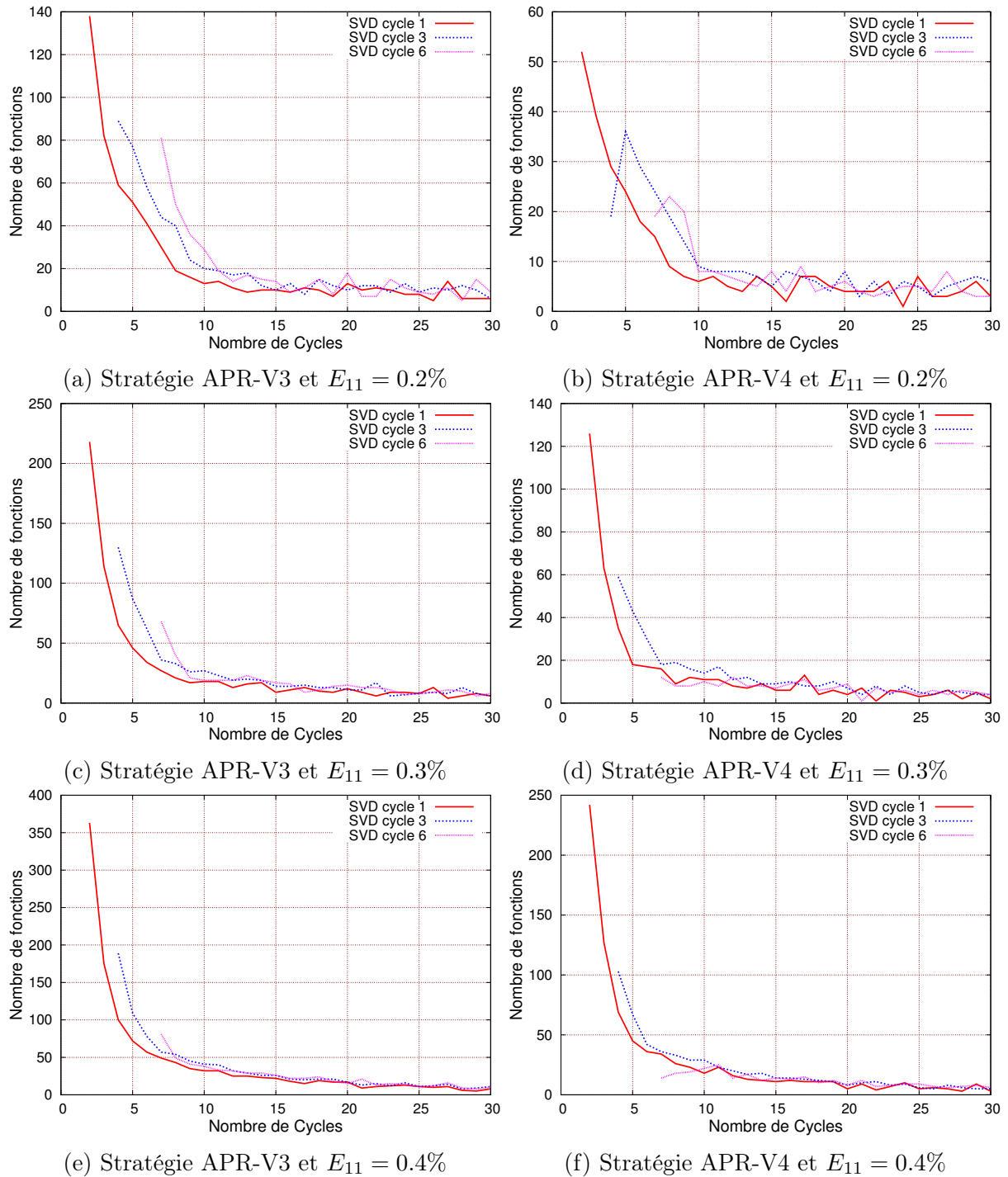


FIGURE III.19 – Évolution du nombre d'enrichissement par cycle avec les méthodes APR-V3 et APR-V4 pour le modèle M1 avec trois amplitudes de déformation macroscopique appliquées

### 5.3 Influence du choix d'initialisation de la base

La méthode APR cyclique permet d'exprimer le champ de déplacement  $\{\Delta U\}$  à partir d'une base spatiale réduite  $[\Phi_x]$  qui traduit les fonctions de formes reliées à des champs de déplacement réduits  $\{\Delta \lambda\}$ . Avec cette méthode, l'initialisation la base  $[\Phi_x^0]$  est effectuée en utilisant une démarche *a posteriori* sur l'histoire du champ de déplacement. Ce dernier est calculé à partir d'un calcul complet de type Éléments Finis par la méthode incrémentale droite. Par ailleurs, les travaux de Ryckelynck [222] et Verdon [249] ont montré que le choix de l'initialisation de la base est directement lié à la vitesse de convergence de l'algorithme et non à la qualité de la solution. Cette partie vise à présenter l'influence du choix de l'initialisation de cette base sur la réponse mécanique ainsi que sur le gain en temps CPU pour un modèle de comportement en plasticité macroscopique. Pour ce faire, deux stratégies de calcul de la méthode APR cyclique ont été comparées :

**Premier cas** Une estimation de  $[\Phi_x^0]$  est réalisée pour l'histoire du premier cycle :

- Calcul incrémental du premier cycle avec une mémorisation de l'histoire du champ de déplacement  $[\Delta U(X, t)]$
- SVD tronquée appliquée sur  $[\Delta U(X, t)]$
- Adaptation de la base réduite, si nécessaire, pour les trois premiers cycles qui succèdent à l'initialisation

**Deuxième cas** Une estimation de  $[\Phi_x^0]$  est conduite à la fin du sixième cycle :

- Calcul incrémental de six cycles avec une mémorisation de l'histoire du champ de déplacement  $[\Delta U(X, t)]$  effectuée à partir du 4<sup>ème</sup> cycle
- SVD tronquée appliquée sur  $[\Delta U(X, t)]$
- Adaptation de la base réduite, si nécessaire, pour les trois premiers cycles qui succèdent à l'initialisation

Les réponses mécaniques macroscopiques, obtenues lors du 100<sup>ème</sup> cycle de chargement sont présentées dans les diagrammes contrainte-déformation en figure III.20 pour les méthodes APR-V3 et APR-V4 avec les deux stratégies citées ci-dessus. Ces résultats correspondent à une variété d'amplitudes de déformation macroscopique appliquées et pour les deux modèles M1 (Fig. III.20a, III.20c, III.20e) et M2 (Fig. III.20b, III.20d).

Au vu de ces résultats, et pour toutes les valeurs de chargement appliquées, les méthodes APR-V3 et APR-V4 avec la stratégie du 2<sup>ème</sup> cas prédisent les mêmes réponses mécaniques macroscopiques que celles du 1<sup>ère</sup> cas. L'initialisation de la base réduite pour la méthode APR cyclique n'a pas d'influence sur la qualité des résultats macroscopiques pour un modèle de comportement en plasticité macroscopique.

L'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de cycles est illustrée en III.21. Le but est d'étudier l'influence du critère d'initialisation de la base réduite sur le gain en temps CPU. Ces résultats sont présentés pour les différentes conditions de chargement et avec les deux discrétisations spatiales. Il est clair que, pour tous les cas étudiés, les deux méthodes de l'APR cyclique avec la stratégie du deuxième cas proposée est plus rapide par rapport à celle du premier cas. En effet, pour une faible discrétisation spatiale du modèle et un chargement de  $E_{11} = 0.4\%$ , le deuxième cas avec l'APR-V3 permet un gain de temps de 34% par rapport au premier cas (Fig. III.21c) et un gain de 25% avec la méthode APR-V4 (Fig. III.21d) pour une solution après 100 cycles. Pour le modèle M2 et un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , les méthodes APR-V3 et APR-V4 avec une base initiale construite au sixième cycle permettent un gain de temps respectivement de 27% et 23% (Fig. III.21g et III.21h) par rapport à une base construite à la fin du premier cycle.

Au vu des résultats en temps CPU pour les différentes amplitudes de chargement appliquées, il est clair que plus la non linéarité du comportement est grande plus l'influence de

## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

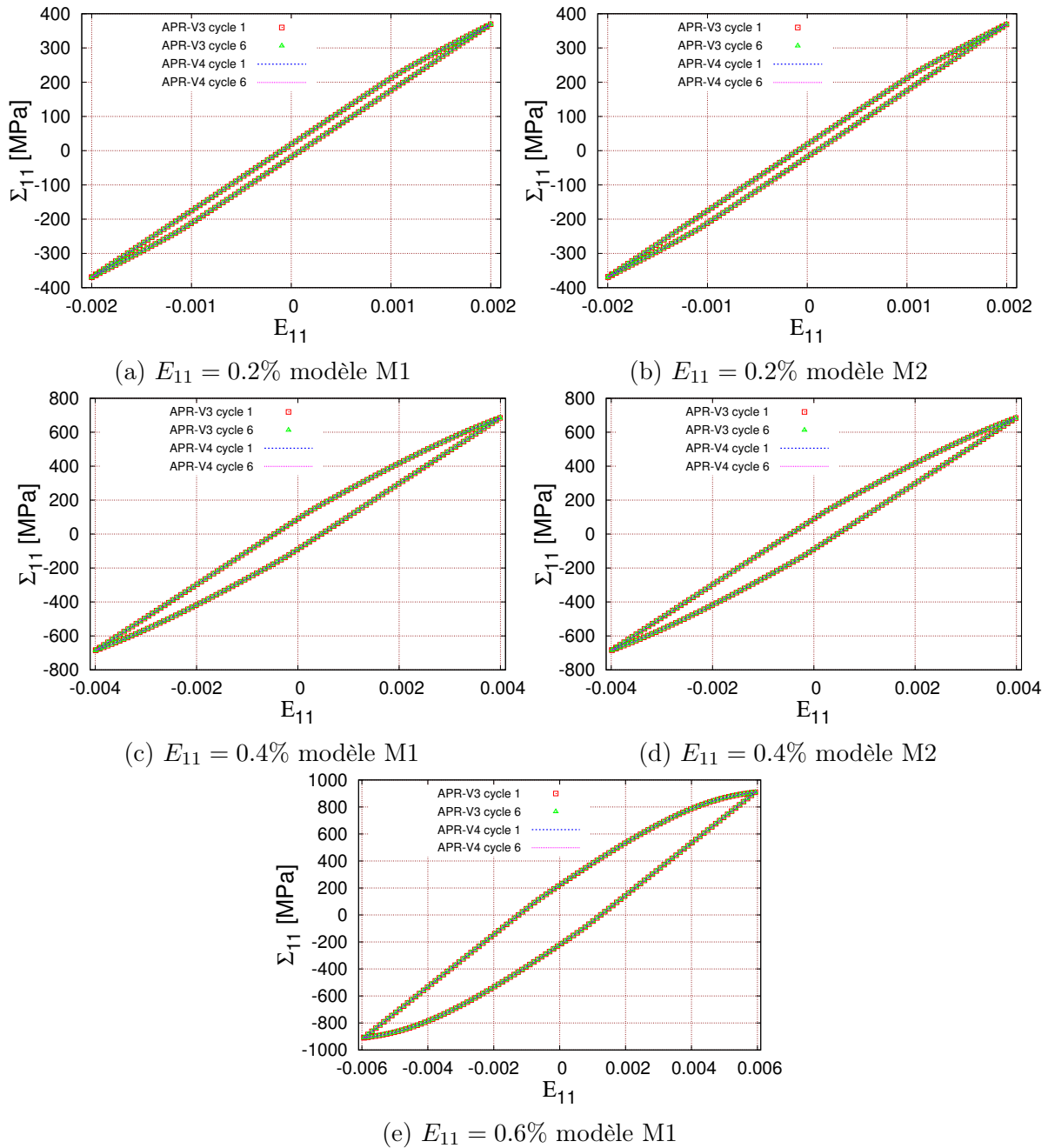


FIGURE III.20 – Influence de l’initialisation de la base réduite pour les résultats macroscopiques du 100<sup>ème</sup> cycle obtenus pour plusieurs valeurs de déformation imposées et avec le modèle M1 et M2

l’initialisation de la base réduite est significative en terme de rapidité. Pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , la méthode APR-V3 avec la 2<sup>ème</sup> stratégie proposée conduit à des gains de temps de 20% par rapport à la 1<sup>ère</sup> stratégie (Fig. III.21a). Elle permet de réduire le temps de calcul d’un facteur 2 pour le cas du chargement  $E_{11} = 0.6\%$  (Fig. III.21e). Un gain de temps légèrement plus important est observé avec la méthode APR-V4 pour les deux stratégies d’initialisation : 18% de gain pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  (Fig. III.21b) et 55% pour un chargement de  $E_{11} = 0.6\%$  (Fig. III.21f).

Pour conclure, le choix de la construction de la base réduite initiale pour la méthode APR cyclique n’a pas d’influence sur la qualité de la réponse mécanique pour un modèle de comportement en plasticité macroscopique. En revanche, une différence intéressante sur le

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

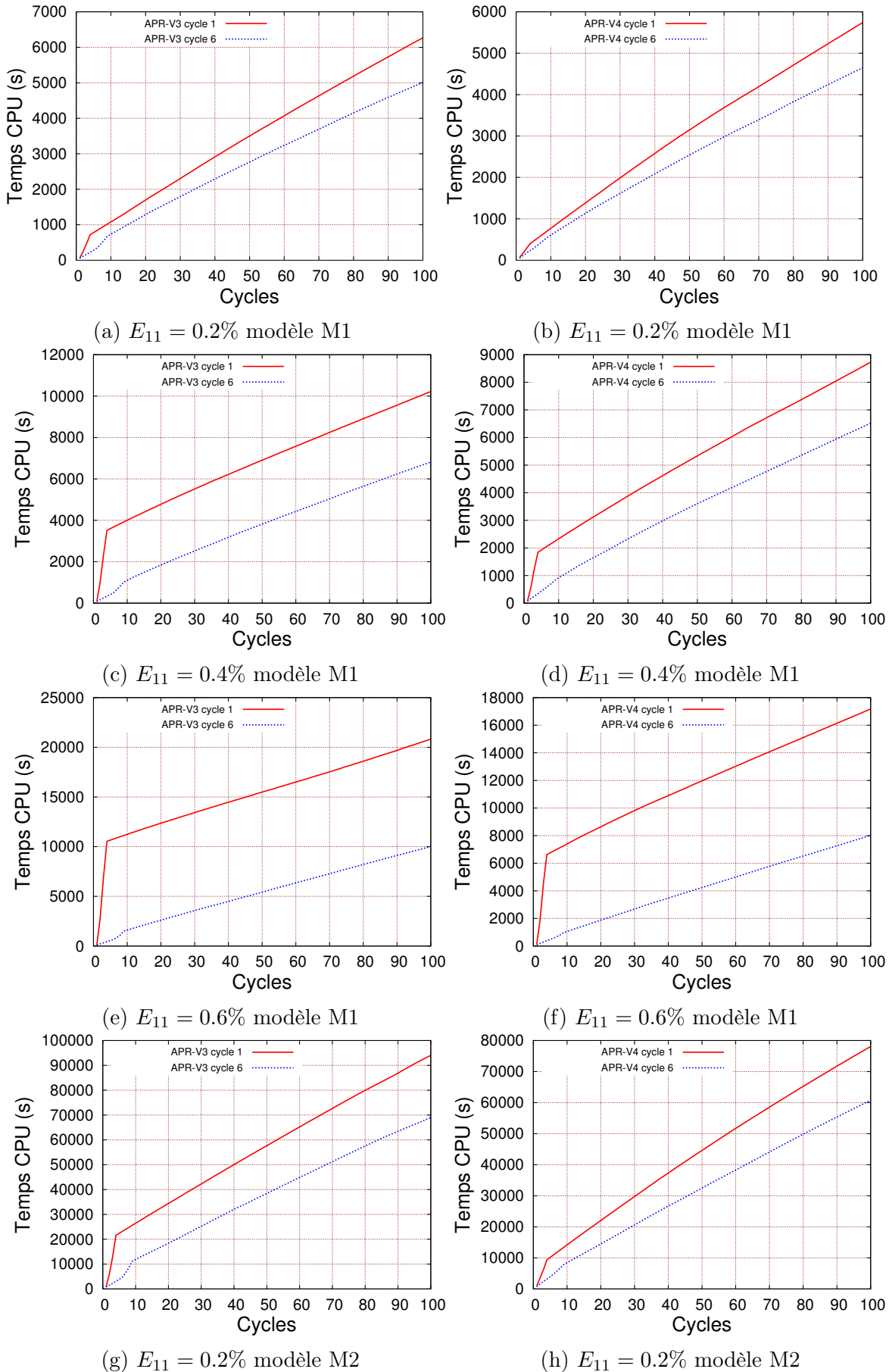


FIGURE III.21 – Influence de l’initialisation de la base réduite sur le temps CPU obtenu après 100 cycles pour différentes valeurs de déformations macroscopiques appliquées avec les modèles M1 et M2



## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

gain en temps CPU est constatée. En effet, les résultats issus d'une APR cyclique avec une base initiale construite à la fin du sixième cycle est plus rapide que dans le cas où la prévision du champ de déplacement réduit est effectuée à partir de l'histoire spatio-temporelle du premier cycle. Cela s'explique par le nombre d'enrichissements de la base réduite, effectués lors des trois cycles d'adaptation, qui diffère entre les deux cas étudiés. En effet, la figure III.22 présente le nombre de fonctions enrichies et cumulées dans la base  $[\Phi_x]$  pour chaque incrément de temps. Ces résultats montrent bien que l'évolution de la base réduite, lors des trois premiers cycles, est plus significative avec le premier cas d'initialisation proposée. Dans le cas du chargement  $E_{11} = 0.6\%$  avec le modèle M1 (fig. III.22d), la résolution de la méthode APR-V3 débute avec une base initiale  $[\Phi_x^0]$  comprenant 111 modes pour les deux cas. Ensuite, l'adaptation de la base évolue rapidement lors du premier cycle : le 1<sup>er</sup> cas nécessite 543 modes pour converger, tandis que 101 modes sont nécessaires pour faire converger le 2<sup>ème</sup> cas. Dans une deuxième phase, l'évolution du nombre de modes devient moins importante avec l'adaptation du cycle suivant (3<sup>ème</sup> cycle pour le premier cas proposé et 8<sup>ème</sup> cycle pour la deuxième). A la fin du troisième cycle d'adaptation, la résolution du système linéaire réduite atteint une dimension de 1050 pour la matrice de rigidité réduite du premier cas et 375 pour le deuxième. Ces écarts peuvent s'expliquer par le fait que pour le premier cycle, l'évolution de la solution est plus rapide. Puis elle devient de plus en plus lente au fur et à mesure que le nombre de cycles augmente. Dans ce cas, l'enrichissement de la base sera plus important avec le premier cas afin de bien prédire la qualité de la solution avec le modèle réduit.

La vitesse de convergence de l'algorithme APR cyclique est directement liée au temps pris par la phase d'enrichissement et aussi par la taille du système réduit final. Ce temps augmente considérablement avec le nombre de ddl et la non linéarité du comportement modélisé dont dépend le nombre de modes nécessaires à la convergence. Cela confirme le gain en temps CPU observé dans la figure III.21 pour 100 cycles de chargement entre les deux cas étudiés.

Dans ce qui suit, les résultats des différentes versions de la méthode APR cyclique seront présentés avec une initialisation de la base réduite effectuée à la fin du sixième cycle (2<sup>ème</sup> cas).

### 5.4 Réponse mécanique de la méthode APR cyclique

Cette partie vise à comparer les réponses mécaniques obtenues, lors du dernier cycle de chargement et pour les différentes versions de la méthode APR cyclique, par rapport aux résultats des simulations incrémentales.

Comme pour la méthode PGD, les simulations ont été effectuées avec un chargement en traction et en cisaillement cyclique. Différentes amplitudes de déformation macroscopique imposées ont été utilisées avec un rapport de charge  $R_\epsilon = -1$ . Pour chaque valeur de chargement, 100 cycles ont été simulés avec une discrétisation de 200 incréments par cycle. Les résultats sont comparés à la solution incrémentale, pour les deux modèles M1 et M2, en termes de réponse contrainte-déformation macroscopique moyennée sur toute la structure et pour les trois éléments les plus chargés (élément  $a$ ,  $b$  et  $c$ ). Les distributions du champ de contrainte de von Mises ainsi que du champ de déformation plastique, obtenues au dernier cycle, seront également présentées.

## CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

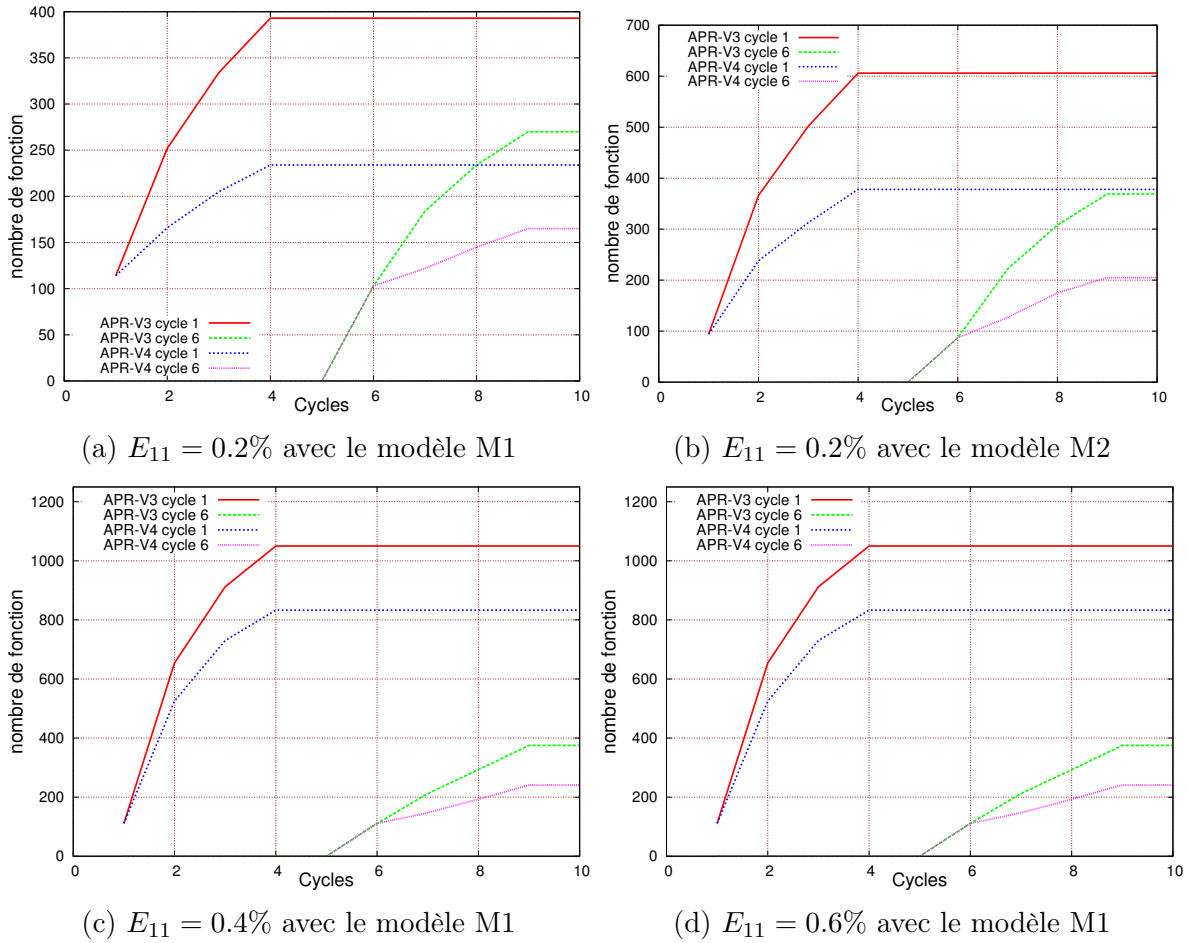


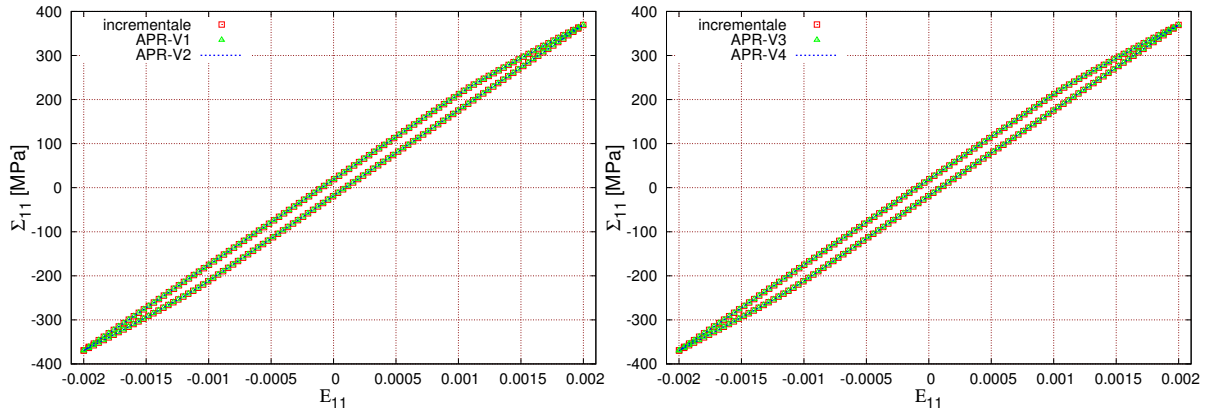
FIGURE III.22 – Nombre de modes enrichis et nécessaires à l’adaptation de la base réduite pour les deux cas d’initialisation de la base proposés

### 5.4.1 Résultats en traction

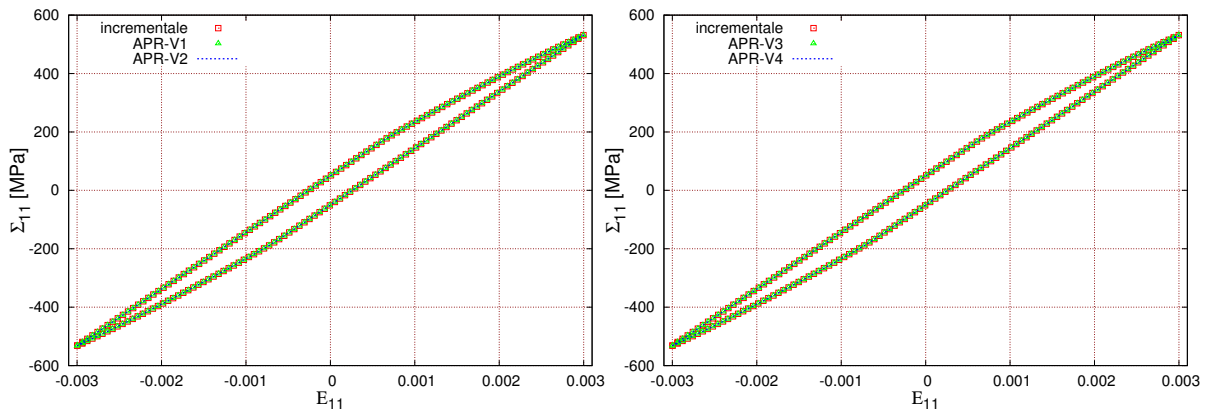
La figure III.23 illustre les diagrammes contrainte-déformation macroscopiques moyennées sur toute la structure obtenus par la méthode incrémentale et la méthode APR cyclique pour le modèle M1. Différentes amplitudes de chargement sont présentées sur chaque ligne : 0.2%, 0.3% et 0.4%. Ces résultats montrent bien que quelle que soit la valeur de la déformation appliquée, les différentes versions de la méthode APR cyclique développées permettent d’obtenir des résultats similaires à ceux obtenus avec la méthode incrémentale. La figure III.33 présente les résultats obtenus avec le modèle M2. Tout comme dans le cas du modèle M1, la méthode APR cyclique développée prévoit la bonne forme de l’hystérésis du dernier cycle obtenu. Pour la précision de la méthode, les résultats sont très proches de la méthode incrémentale pour les différents cas étudiés :  $E_{11} = 0.2\%$  (Fig. III.24a),  $E_{11} = 0.3\%$  (Fig. III.24b) et  $E_{11} = 0.4\%$  (Fig. III.33b).

La distribution des champs de la contrainte de von Mises obtenus à la fin du 100<sup>ème</sup> cycle est présentée à la figure III.25 avec le modèle M1. Ces résultats sont donnés pour  $E_{11} = 0.2\%$ . D’après cette figure, les gradients importants sont observés à la surface du défaut. Les mêmes résultats sont aussi constatés avec le modèle M2 (Fig. III.26). Pour ce qui est de la précision des différentes méthodes, la figure III.25 montre que les champs de la contrainte de von Mises à la fin du 100<sup>ème</sup> cycle sont quasi-équivalents à ceux obtenus par la méthode incrémentale. Toutefois, il est possible d’observer dans le cas du modèle M2 (Fig. III.26) des écarts avec les méthodes APR-V1 (Fig III.26b) et APR-V2 (Fig. III.26c)

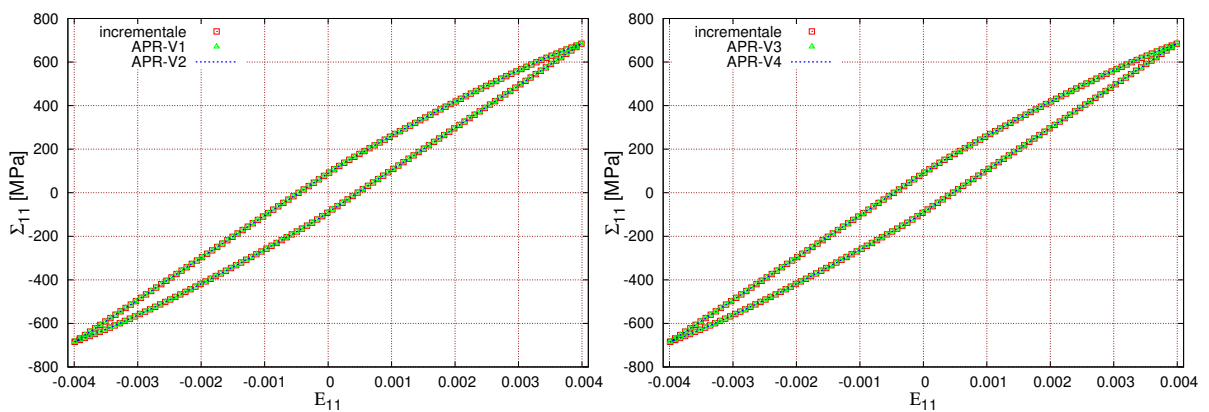
## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE



(a)  $E_{11} = 0.2\%$



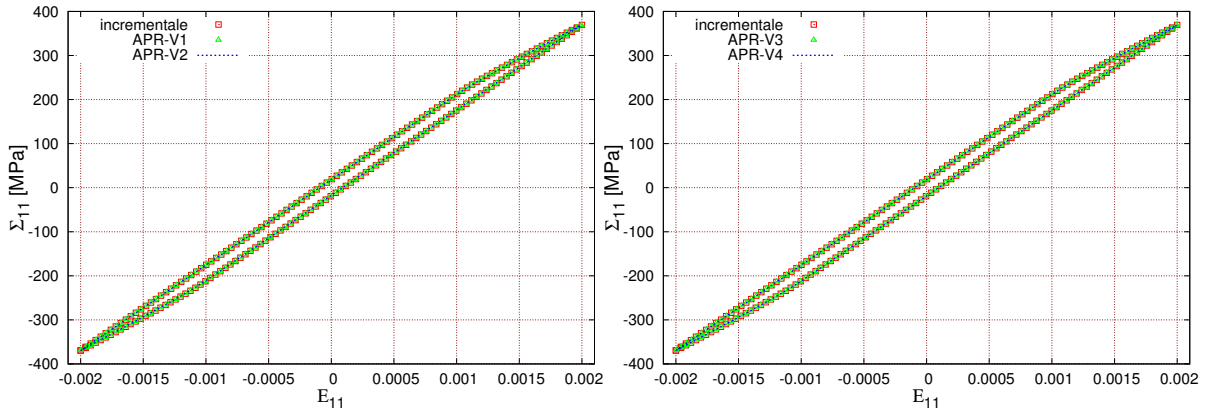
(b)  $E_{11} = 0.3\%$



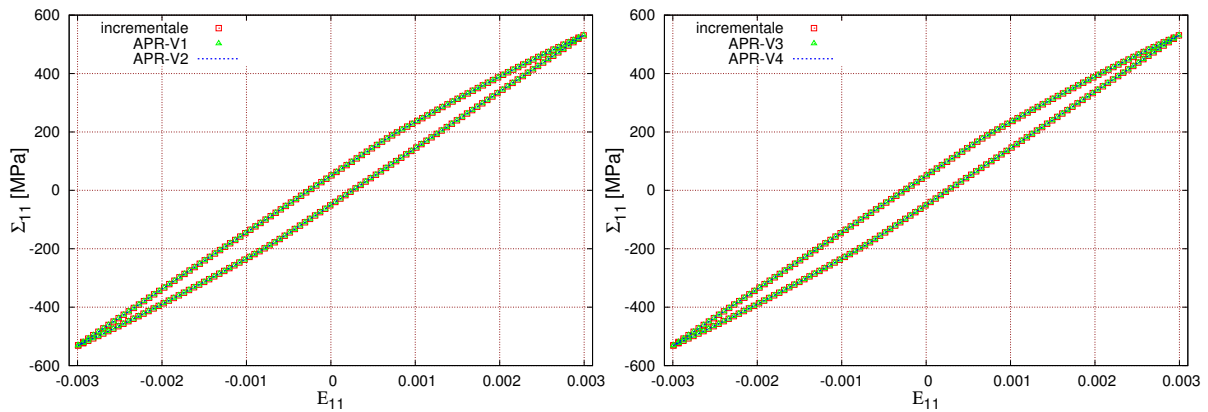
(c)  $E_{11} = 0.4\%$

FIGURE III.23 – Comparaison des réponses contrainte-déformation macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  du 100<sup>ème</sup> cycle avec le modèle M1 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique sous différentes amplitudes de déformation imposées

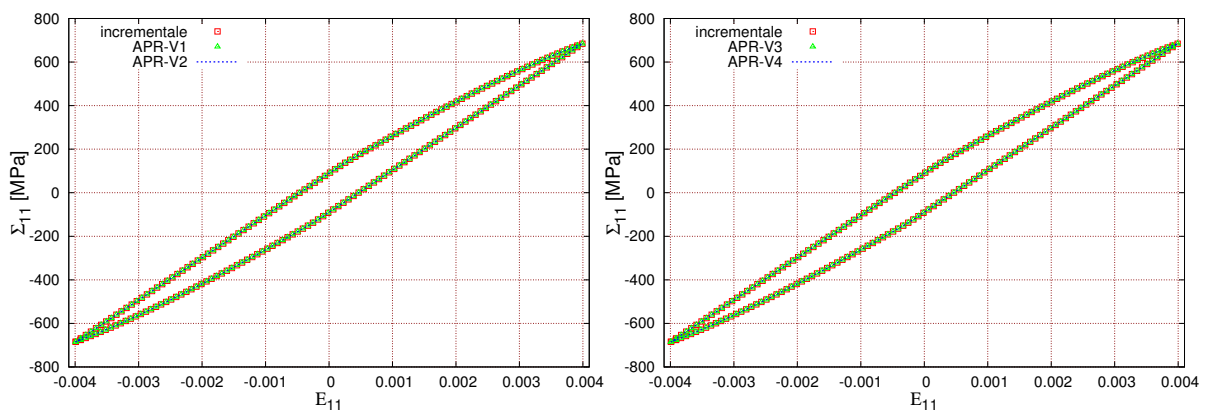
# CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE



(a)  $E_{11} = 0.2\%$



(b)  $E_{11} = 0.3\%$



(c)  $E_{11} = 0.4\%$

FIGURE III.24 – Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  du 100<sup>ème</sup> cycle avec le modèle M2 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique sous différentes amplitudes de déformation imposées

## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

pour les extremums de contrainte de von Mises. En effet, les extremums de la solution incrémentale et de la méthode APR-V1 sont respectivement 405 et 455 MPa, alors que la méthode APR-V3 (même stratégie de convergence que APR-V1) prédit 402 MPa. Cela peut être expliqué par le fait que la réduction du nombre de modes enrichis, à la fin du dernier cycle d'adaptation, a une influence sur la précision de la prévision du champ de déplacement réduit. En revanche, les simulations avec la méthode APR-V3 sont effectuées avec une base réduite totalement enrichie pour les trois cycles d'adaptation.

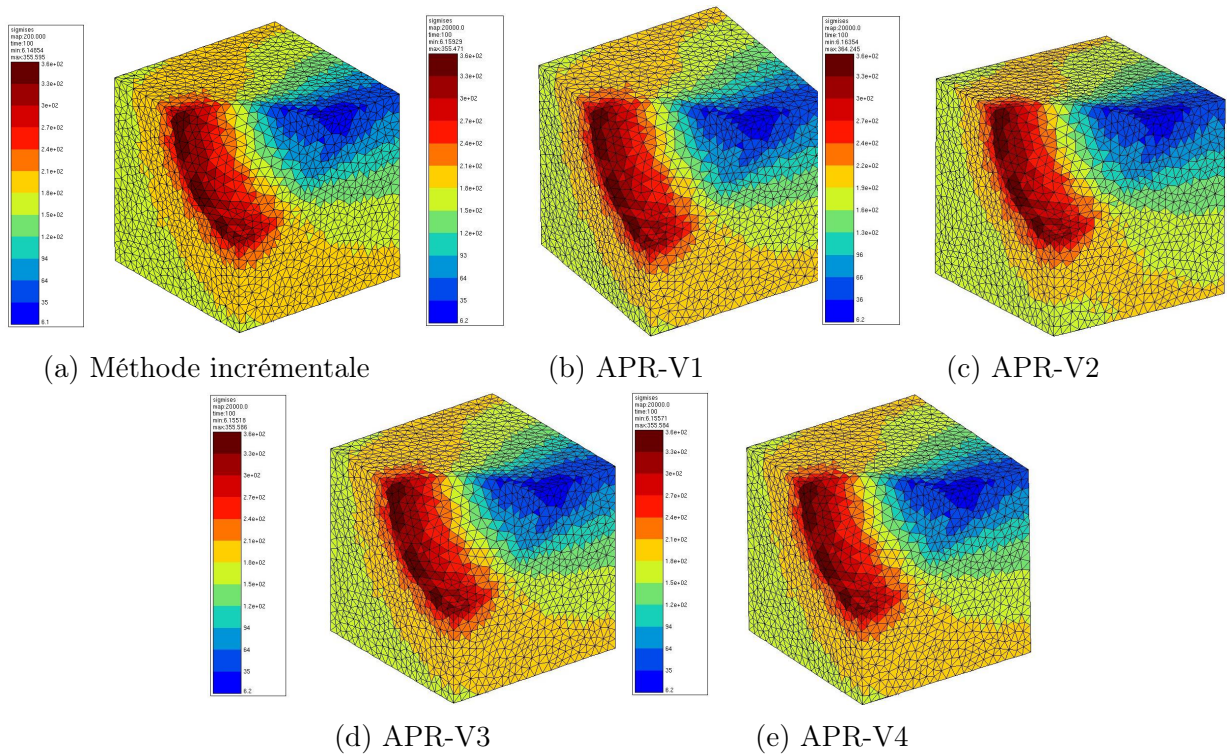


FIGURE III.25 – Distributions des contraintes de von Mises obtenues à la fin du 100<sup>ème</sup> cycle par la méthode incrémentale et la APR cyclique pour une amplitude de déformation appliquée de 0.2% avec le modèle M1

La distribution des champs de déformation plastique suivant la direction du chargement avec le modèle M1 est illustrée par la figure III.27 issue de la méthode incrémentale ainsi que les méthodes APR cycliques. Ces résultats sont obtenus à la fin de la première séquence du dernier cycle et pour une déformation macroscopique appliquée de 0.2%. Ce graphique montre que les résultats des différentes méthodes sont très proches. Du fait de la concentration des champs mécaniques dans la zone trouée, les champs de déformation plastique maximales sont obtenus en surface du défaut. La figure III.28 présente les mêmes résultats avec le modèle M2. Les plus grandes valeurs du champ de déformation plastique sont concentrées en surface du défaut. De plus, les iso-valeurs obtenues avec les méthodes de l'APR cyclique sont proches de celles prédites par la méthode incrémentale avec un écart relatif maximum inférieur à 6% pour les valeurs maximales de la déformation plastique.

La figure III.29 présente les résultats contrainte-déformation macroscopiques, du dernier cycle, dans les trois éléments choisis (élément *a*, *b* et *c*) avec le modèle M1. Le chargement appliqué est de  $E_{11} = 0.2\%$ . Seules la direction  $\Sigma_{22} - E_{22}$  pour l'élément *a* (Fig. III.29a et III.29b) et la direction  $\Sigma_{11} - E_{11}$  pour les éléments *b* (Fig. III.29c et III.29d) et *c* (Fig. III.29e et III.29f) sont analysées. Ces résultats montrent que, généralement, les solutions issues des différentes versions de la méthode APR cyclique sont proches de la solution obtenue par

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

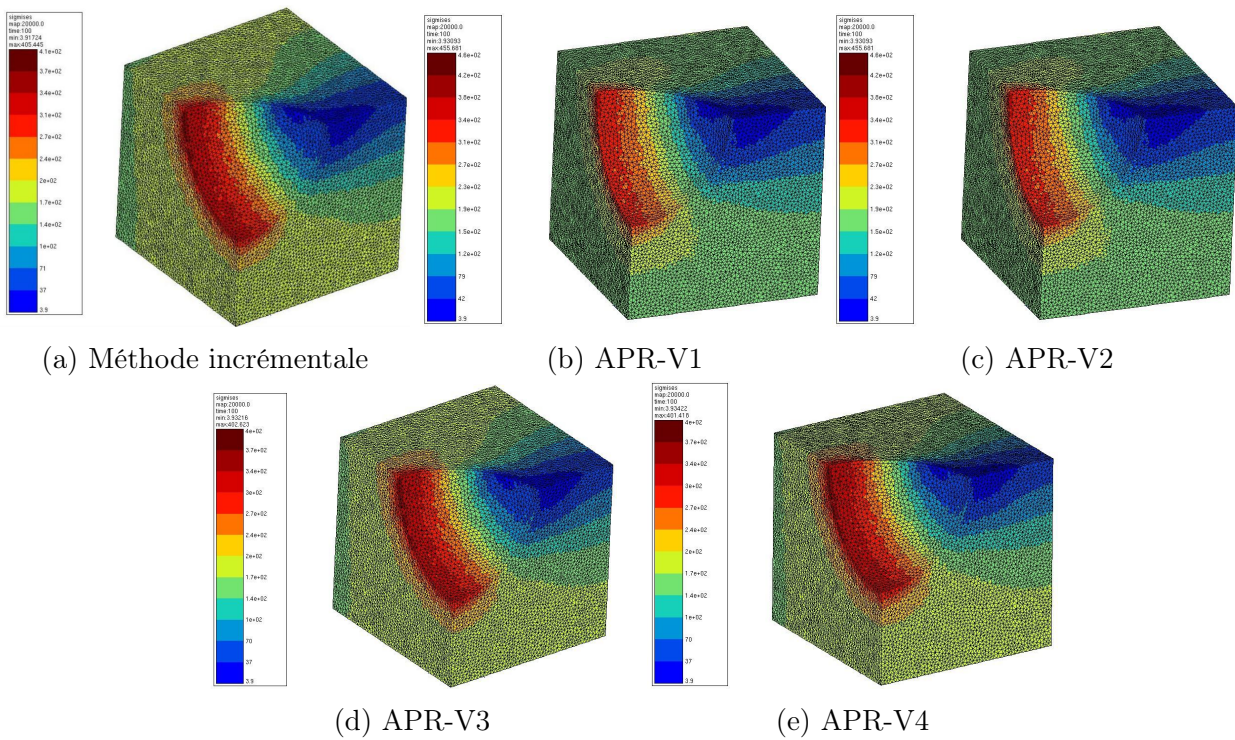


FIGURE III.26 – Distributions des contraintes de von Mises obtenues à la fin du 100<sup>ème</sup> cycle par les méthodes incrémentales et la APR cyclique pour une amplitude de déformation appliquée de 0.2% avec le modèle M2

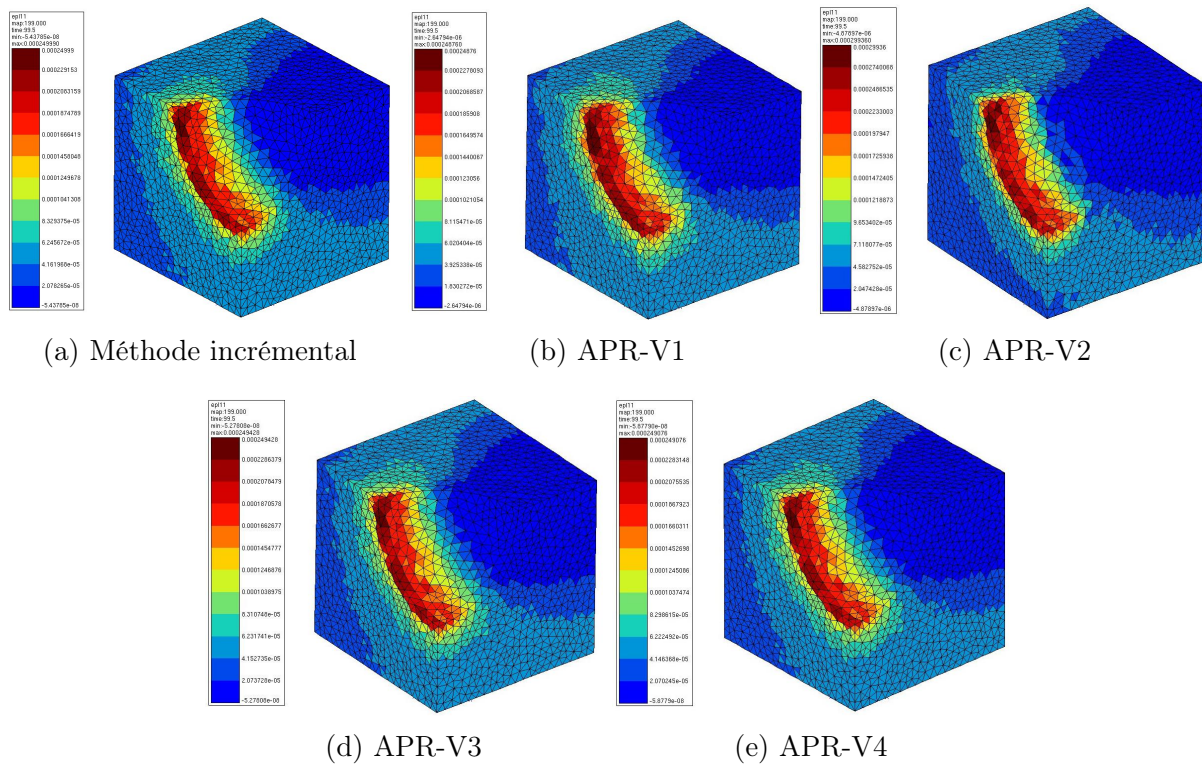


FIGURE III.27 – Champs de déformation plastique  $E_{11}^p$  obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M1 et pour un chargement de 0.2%

le calcul incrémental. En particulier, un écart relatif entre l'extremum de la solution incrémentale et la APR-V2 dans l'élément  $c$  (Fig. III.29e) est de l'ordre de 0.2%. De plus, des

## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

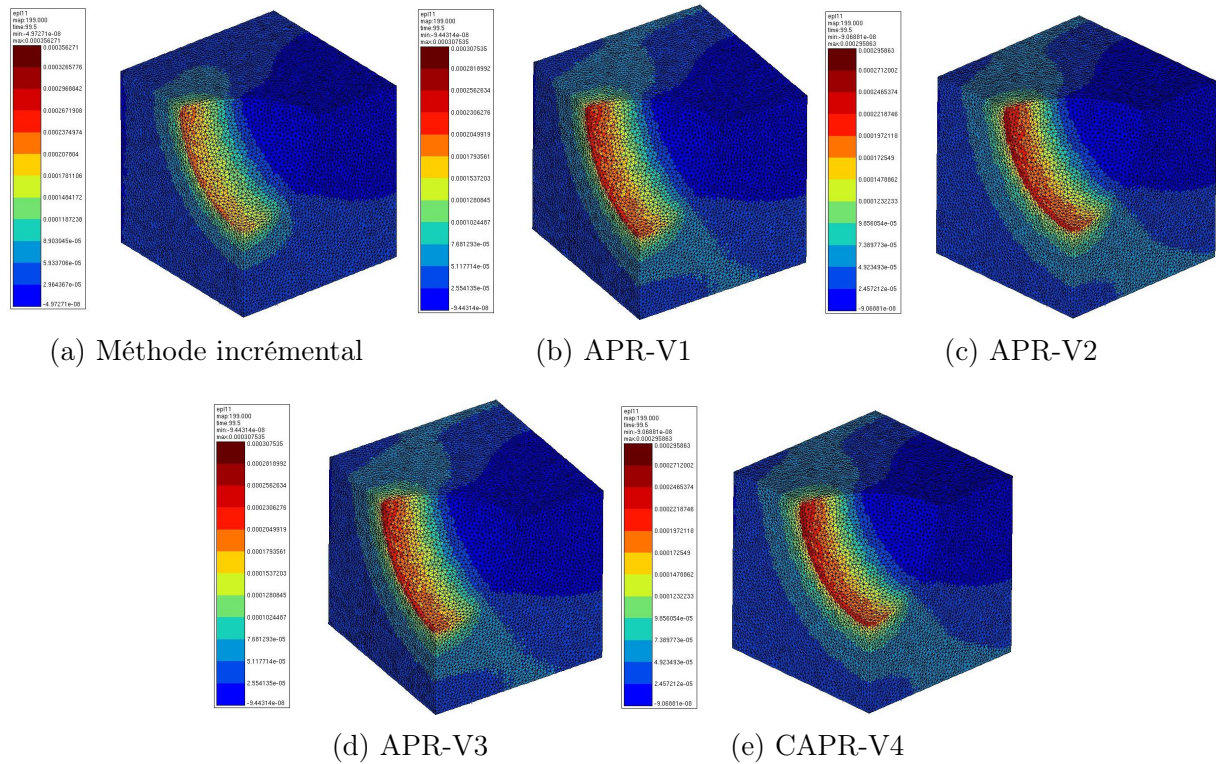


FIGURE III.28 – Champs de déformation plastique  $E_{11}^p$  obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M2 et pour un chargement de 0.2%

écarts légèrement plus importants sont observés au niveau des valeurs moyennes (contrainte et déformation) entre la méthode incrémentale et les méthodes APR-V1 et APR-V2 dans l'élément  $b$  (Fig. III.29c) : 2% d'écart pour les valeurs moyennes en contrainte pour la méthode APR-V2 et 0.5% pour les valeurs moyennes en déformation pour la méthode APR-V1. Une bonne adéquation entre les boucles d'hystérésis issues de la méthode incrémentale et celles issues des différentes versions de la méthode APR cyclique est constatée. Pour le modèle contenant le plus de ddl (modèle M2), la figure III.30 illustre les courbes contrainte-déformation dans les trois éléments du dernier cycle. Ces résultats sont présentés avec la même condition de chargement et pour les composantes des contraintes  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  et des déformations  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  macroscopiques. Ces graphiques montrent qu'il y a une bonne corrélation entre les champs de contrainte et de déformation, au niveau des éléments les plus chargés, obtenus par un calcul incrémental et par les différentes versions de la méthode APR cyclique développées. En particulier, on constate quelques décalages entre la réponse réelle et la solution prédite par l'APR-V1 et l'APR-V2. Même si la méthode APR-V1 est satisfaisante pour tous les cas, il arrive qu'un faible décalage en valeur moyenne soit observé par rapport à la solution incrémentale pour les résultats de l'élément  $b$  (Fig. III.30c) : 0.6% en déformation et 0.3% en contrainte. Ces mêmes écarts sont aussi constatés avec la méthode APR-V2 pour les résultats de l'élément  $b$ . Des écarts plus importants sont observés avec l'APR-V2 entre les extremums des résultats donnés par l'élément  $a$  : 3% pour la contrainte maximale et 2% pour la contrainte minimale (Fig. III.30a). Par ailleurs, une bonne représentation des boucles d'hystérésis du 100<sup>ème</sup> cycle prédites par les différentes méthodes APR cycliques comparées à celles de la méthode incrémentale apparaît.

Pour conclure, les quatre versions de la méthode APR cyclique prédisent bien les réponses mécaniques en traction avec un modèle de comportement en plasticité  $J_2$ . Ces constats

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

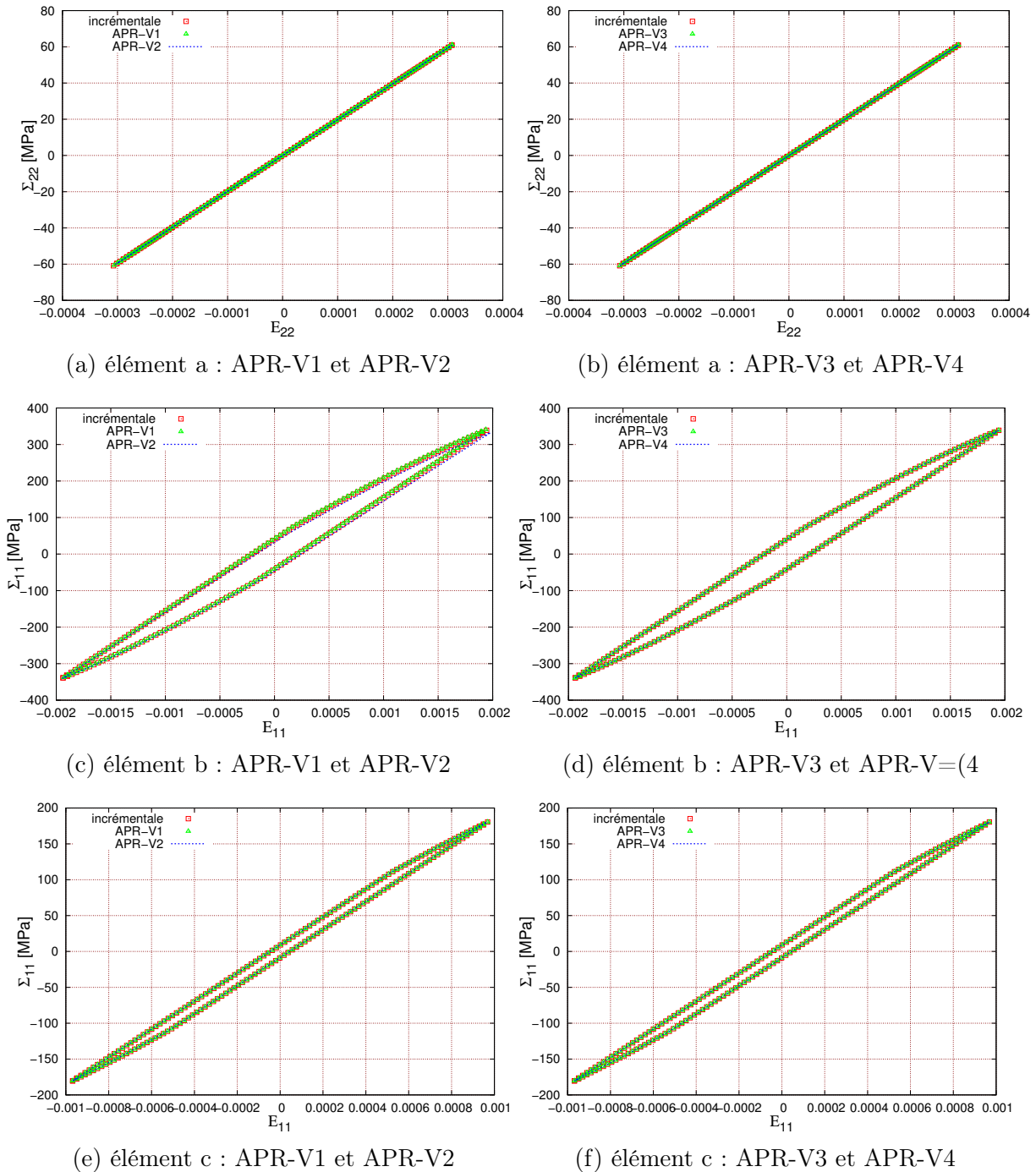
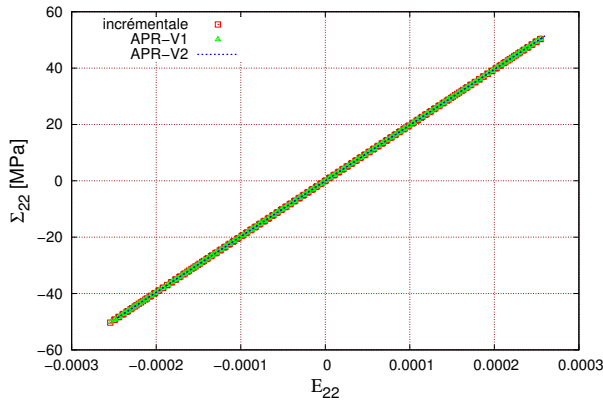


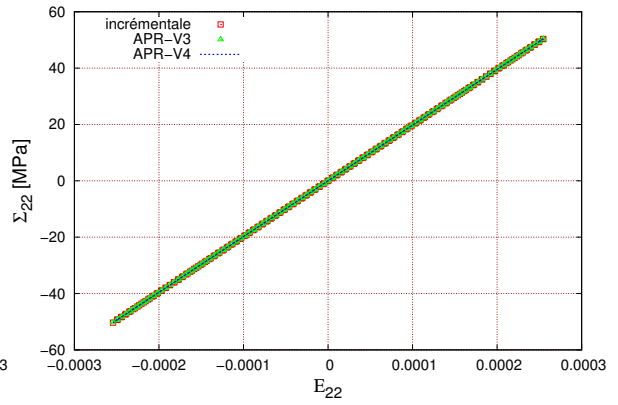
FIGURE III.29 – Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  du 100<sup>ème</sup> cycle dans les éléments *a*, *b* et *c* obtenus par le calcul incrémental et APR cyclique pour une déformation imposée 0.2% avec le modèle M1



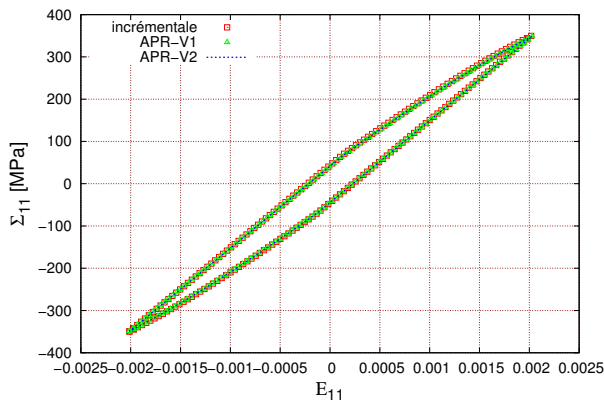
## 5. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE



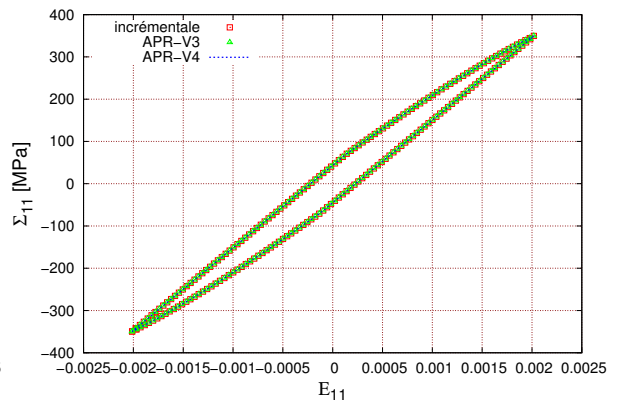
(a) élément a : APR-V1 et APR-V2



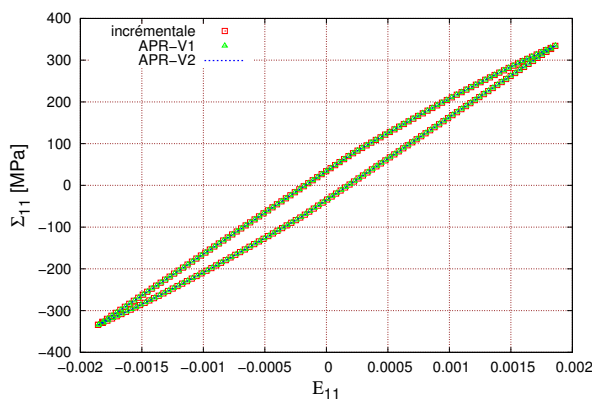
(b) élément a : APR-V3 et APR-V4



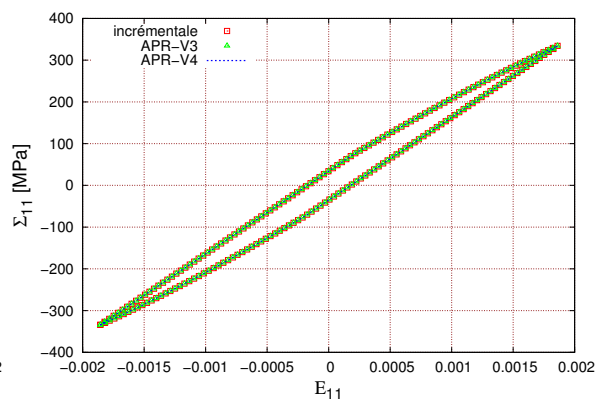
(c) élément b : APR-V1 et APR-V2



(d) élément b : APR-V3 et APR-V4



(e) élément c : APR-V1 et APR-V2



(f) élément c : APR-V3 et APR-V4

FIGURE III.30 – Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  du 100<sup>ème</sup> cycle dans les éléments *a*, *b* et *c* obtenus par le calcul incrémental et APR cyclique pour une déformation imposée 0.2% avec le modèle M2

## CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

concernent différentes valeurs d'amplitude de déformation appliquée. Certes, les méthodes APR-V1 et APR-V2 donnent une erreur plus importante, mais n'excèdent pas les 3%. Cela peut s'expliquer par le fait que la base plus réduite considérée est insuffisante pour une description fine de la réponse mécanique.

### 5.4.2 Résultats en cisaillement

Cette partie présente les résultats obtenus avec le chargement de cisaillement. Les composantes de cisaillement en contrainte  $\Sigma_{12}$  et en déformation  $E_{12}$  obtenues avec les méthodes APR cycliques ont été analysées.

La figure III.31 présente les réponses mécaniques moyennées sur toute la structure du modèle M1 selon la direction du chargement. Ces résultats sont obtenus lors du 100<sup>ème</sup> cycle pour les trois niveaux de chargement. La figure III.32 illustre les mêmes résultats avec le modèle M2. Au vu des diagrammes contrainte-déformation, et tout comme dans le cadre du chargement en traction, les méthodes APR cycliques prévoient les mêmes résultats que ceux obtenus avec la méthode incrémentale pour les différents cas étudiés. Une bonne corrélation pour les boucles d'hystérésis du dernier cycles est obtenue.

La figure III.34 présente la distribution des champs de contrainte de von Mises, obtenue à la fin du dernier cycle et selon la direction du chargement, avec le modèle M1. Les mêmes résultats sont aussi présentés en figure III.35 pour le modèle M2. Ces résultats montrent que les iso-valeurs du champ de contrainte de von Mises sont correctement prédites par les méthodes APR cycliques par rapport à celles de la méthode incrémentale. Il est cependant possible de constater de faibles écarts avec les APR-V1 et APR-V2 au niveau des iso-valeurs maximales. Ces derniers restent tout à fait acceptables et n'excèdent pas 1%.

Les champs de déformation plastique obtenus avec les méthodes APR cycliques et la méthode incrémentale sont présentés à la figure III.37 pour le modèle M1. Tout comme dans le cas du chargement en traction, ces résultats sont obtenus à la fin de la première séquence du dernier cycle. L'amplitude de la déformation macroscopique appliquée est de 0.2%. Les gradients de déformation plastique maximales sont obtenus autour du défaut. En ce qui concerne la précision des différentes méthodes, les iso-valeurs de la déformation plastique issues des méthodes APR cycliques sont très proches de celles de la méthode incrémentale. Un décalage est observé avec la méthode APR-V1 au niveau de l'extremum avec un écart relatif maximal de 8%. Par ailleurs, la figure III.37 présente les mêmes résultats pour la deuxième discrétisation spatiale. En raison de la concentration des champs mécaniques dans la zone trouée, les déformations les plus grandes sont obtenues autour du trou. Les iso-valeurs maximales sont correctement prédites par les méthodes APR cycliques. Les écarts relatifs maximum, comparés à ceux de la méthode incrémentale, ne dépassent pas les 6%.

## 6 Analyse du temps de calcul

Après avoir validé les résultats de la réponse mécanique, cette partie présente les résultats en termes de temps de calcul obtenus avec les différentes méthodes développées. Ces résultats seront présentés en utilisant les différents paramètres des méthodes étudiées précédemment. Le but étant de comparer les performances de la méthode incrémentale droite, des deux variantes de la PGD ainsi que des différentes méthodes de l'APR cyclique pour des simulations avec un modèle de comportement en plasticité  $J_2$ . Une discussion sur les différents gains en temps CPU obtenus sera également effectuée.

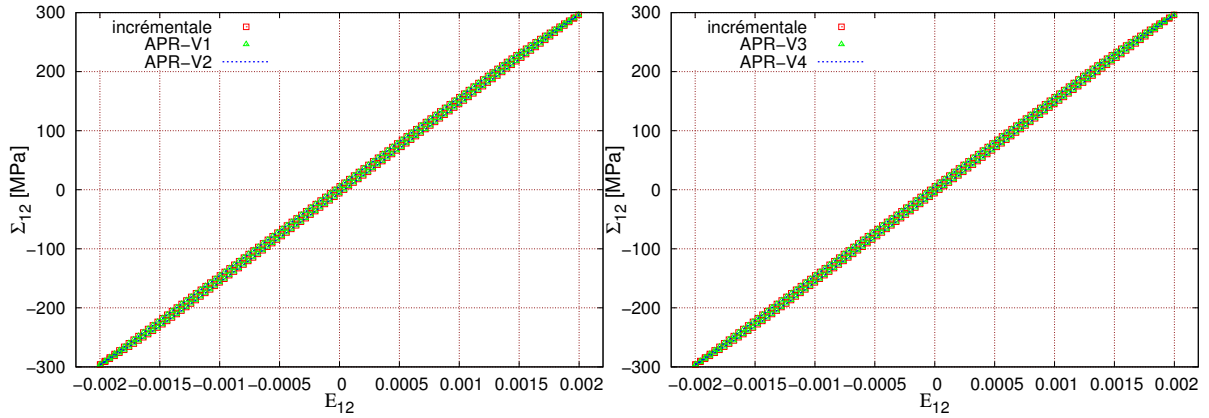
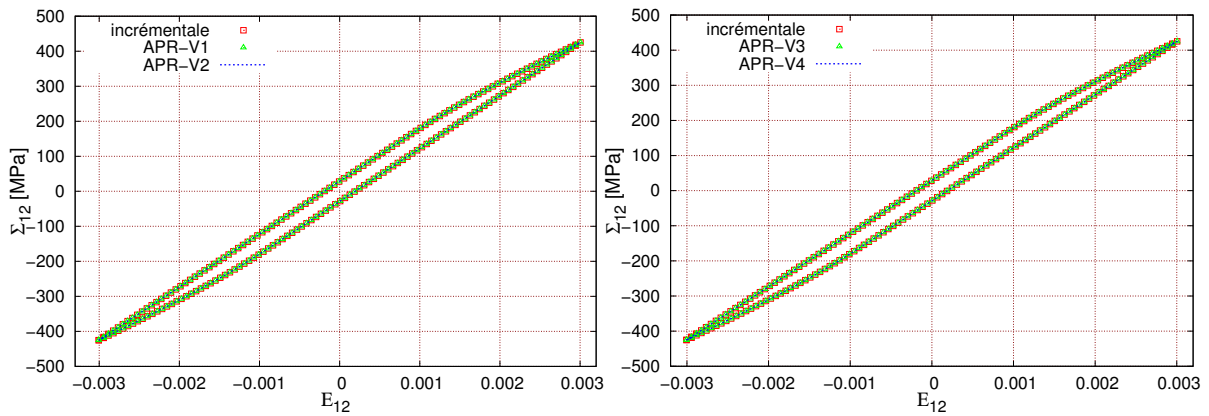
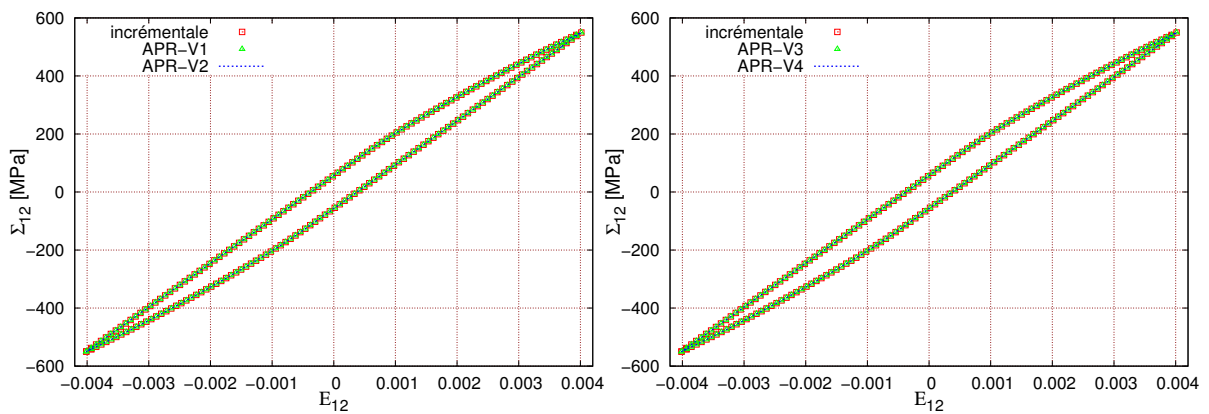
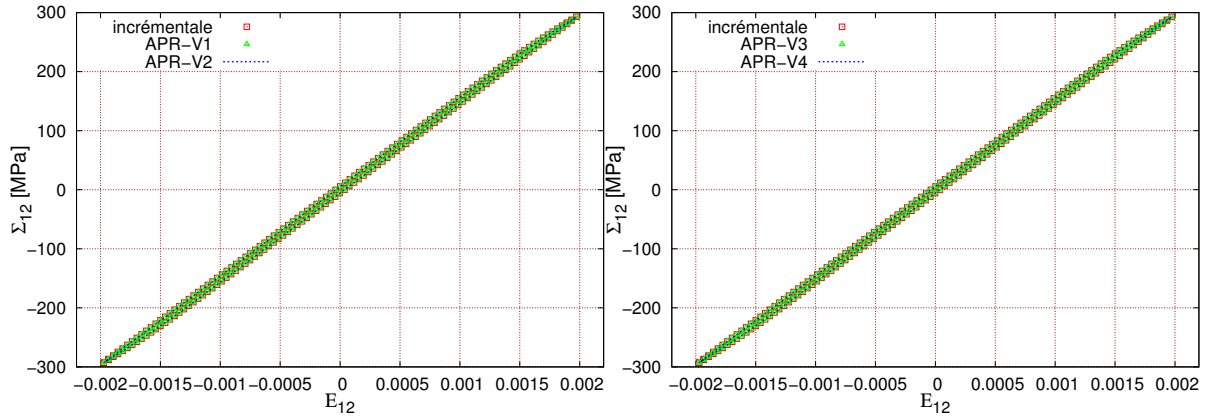
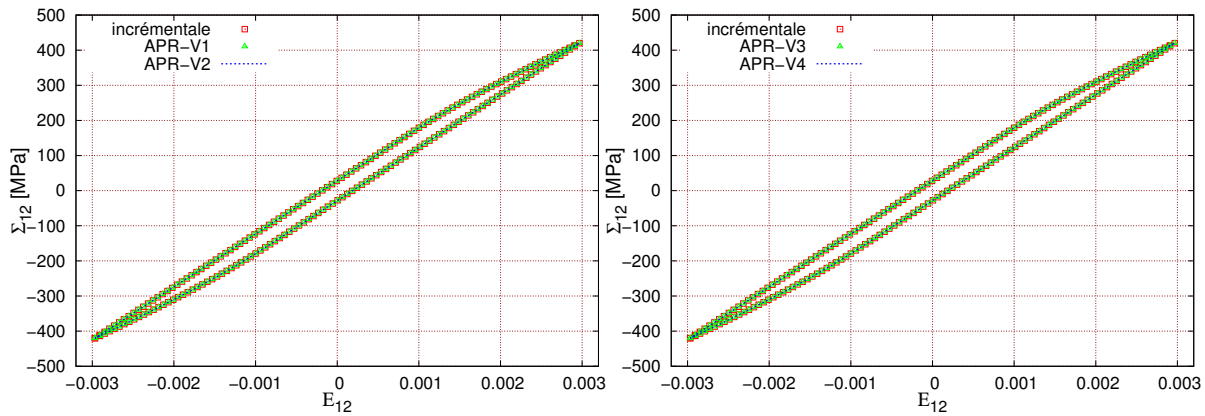
(a)  $E_{12} = 0.2\%$ (b)  $E_{12} = 0.3\%$ (c)  $E_{12} = 0.4\%$ 

FIGURE III.31 – Comparaison des résultats contrainte-déformation  $\Sigma_{12}-E_{12}$  macroscopiques en cisaillement du 100<sup>ème</sup> cycle avec le modèle M1 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique pour différentes amplitudes de déformation imposées

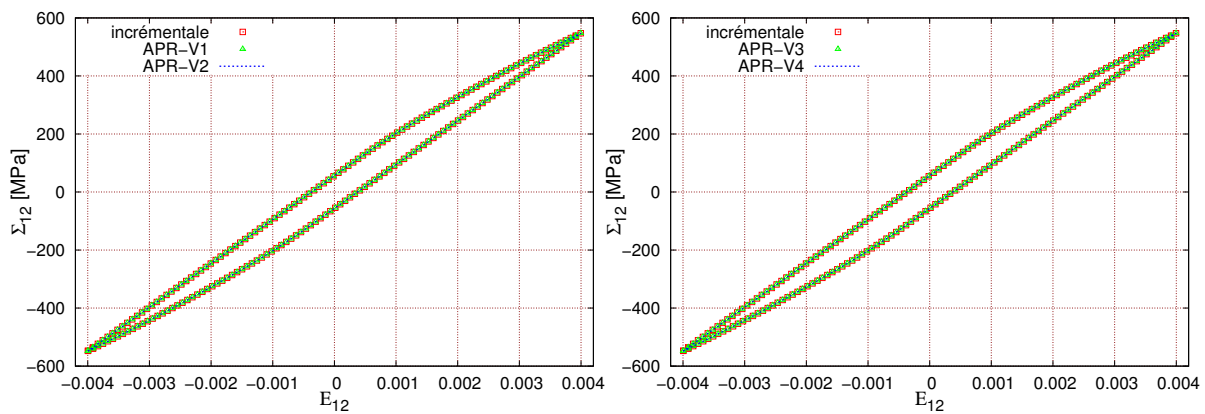
### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE



(a)  $E_{12} = 0.2\%$



(b)  $E_{12} = 0.3\%$



(c)  $E_{12} = 0.4\%$

FIGURE III.32 – Comparaison des résultats contrainte-déformation  $\Sigma_{12} - E_{12}$  macroscopiques en cisaillement du 100<sup>ème</sup> cycle avec le modèle M2 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique pour différentes amplitudes de déformation imposées

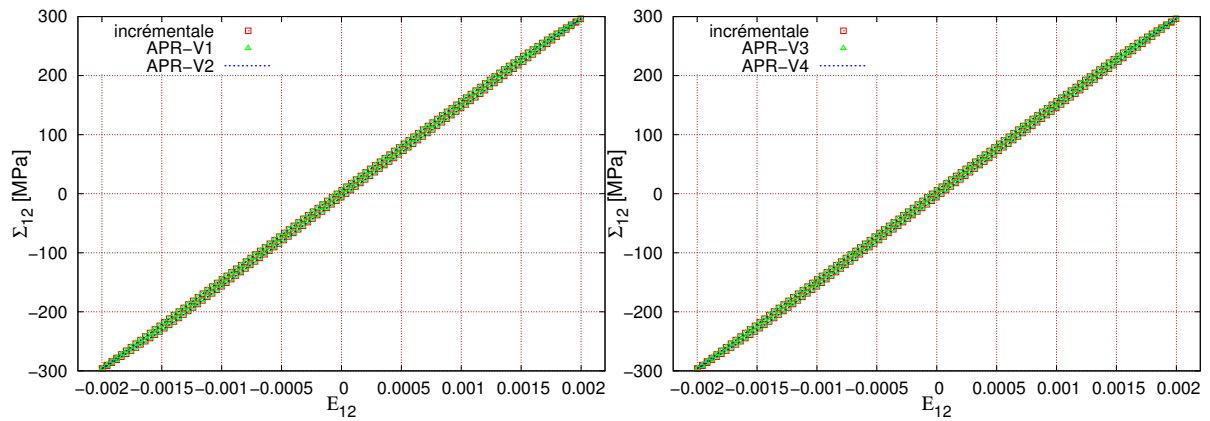
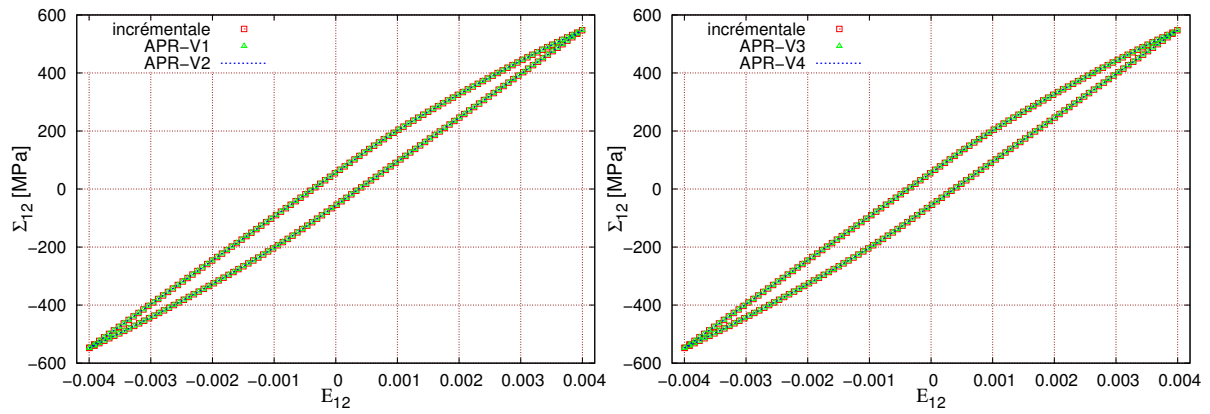
(a)  $E_{11} = 0.2\%$  Modèle M1(b)  $E_{11} = 0.4\%$  Modèle M2

FIGURE III.33 – Diagrammes contrainte-déformation macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  du 100<sup>ème</sup> cycle avec le modèle M2 obtenus par le calcul incrémental et la APR cyclique sous différentes amplitudes de déformation imposées

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

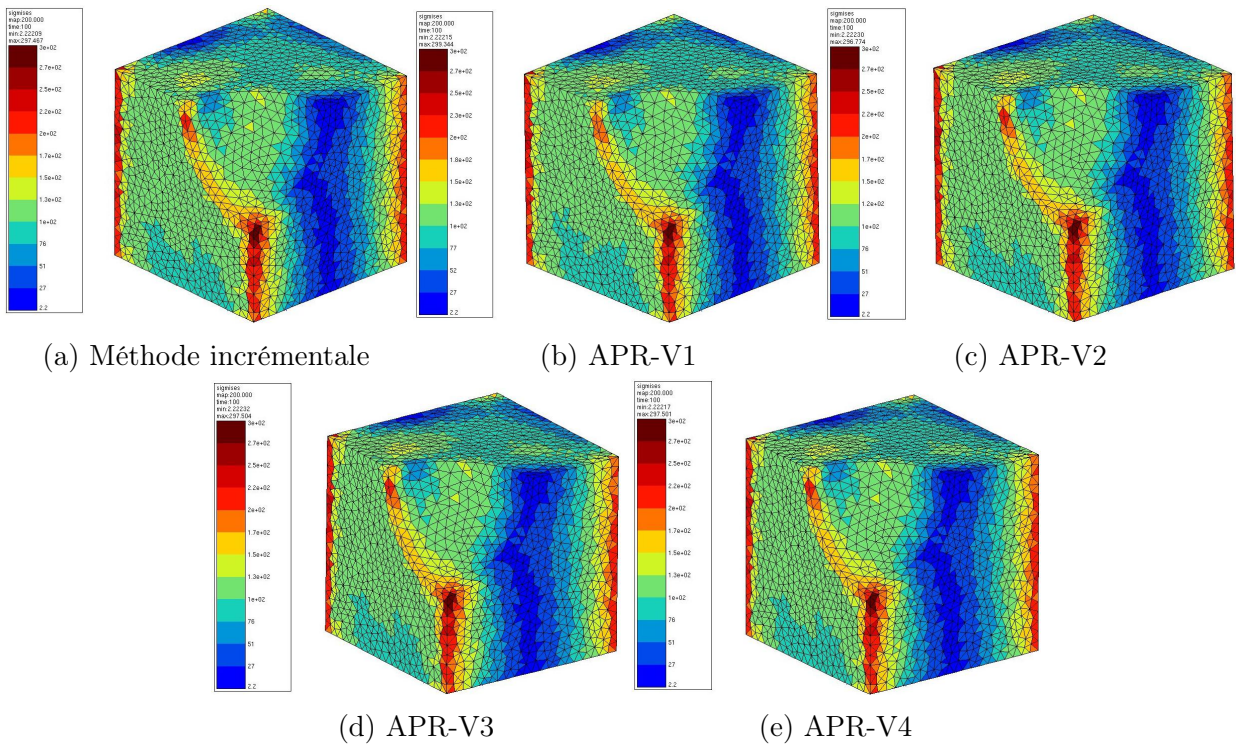


FIGURE III.34 – Distributions des contraintes de von Mises en cisaillement obtenues à la fin du 100<sup>ème</sup> cycle par la méthode incrémentale et la APR cyclique pour un chargement de 0.2% et le modèle M1

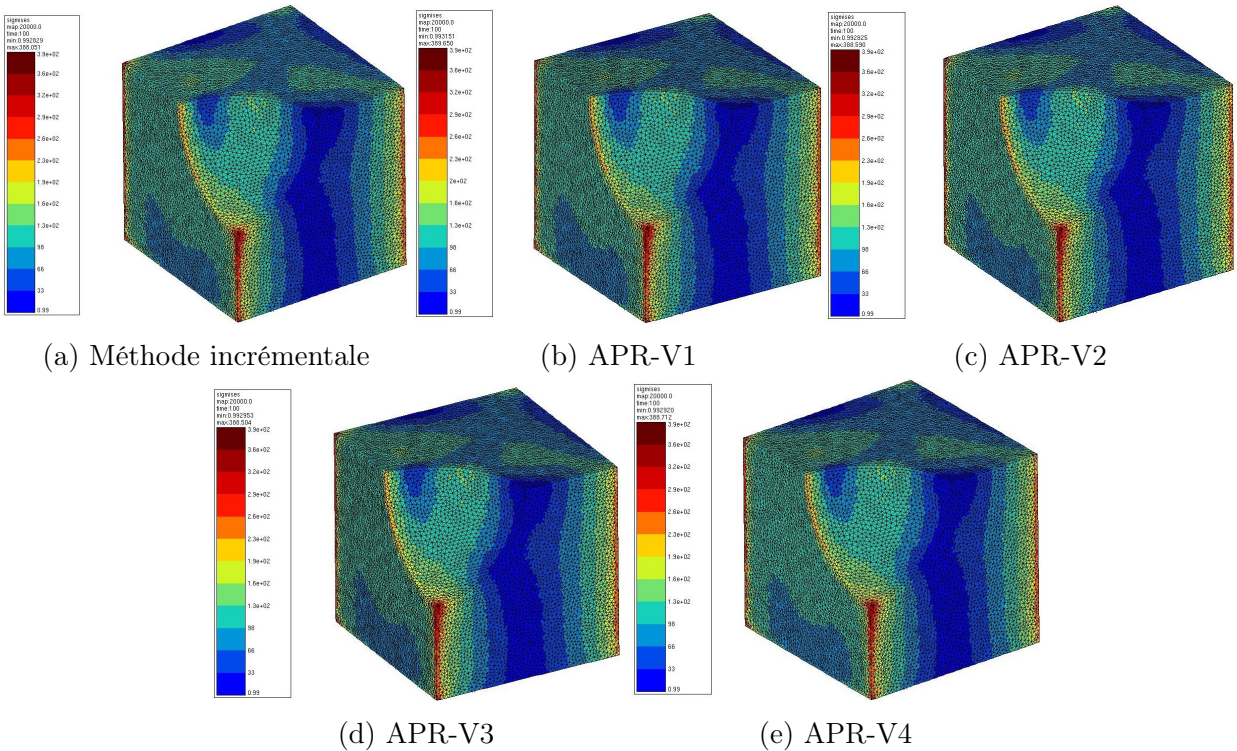


FIGURE III.35 – Distributions des contraintes de von Mises en cisaillement obtenues à la fin du 100<sup>ème</sup> par la méthode incrémentale et la APR cyclique pour un chargement de 0.2% et le modèle M2

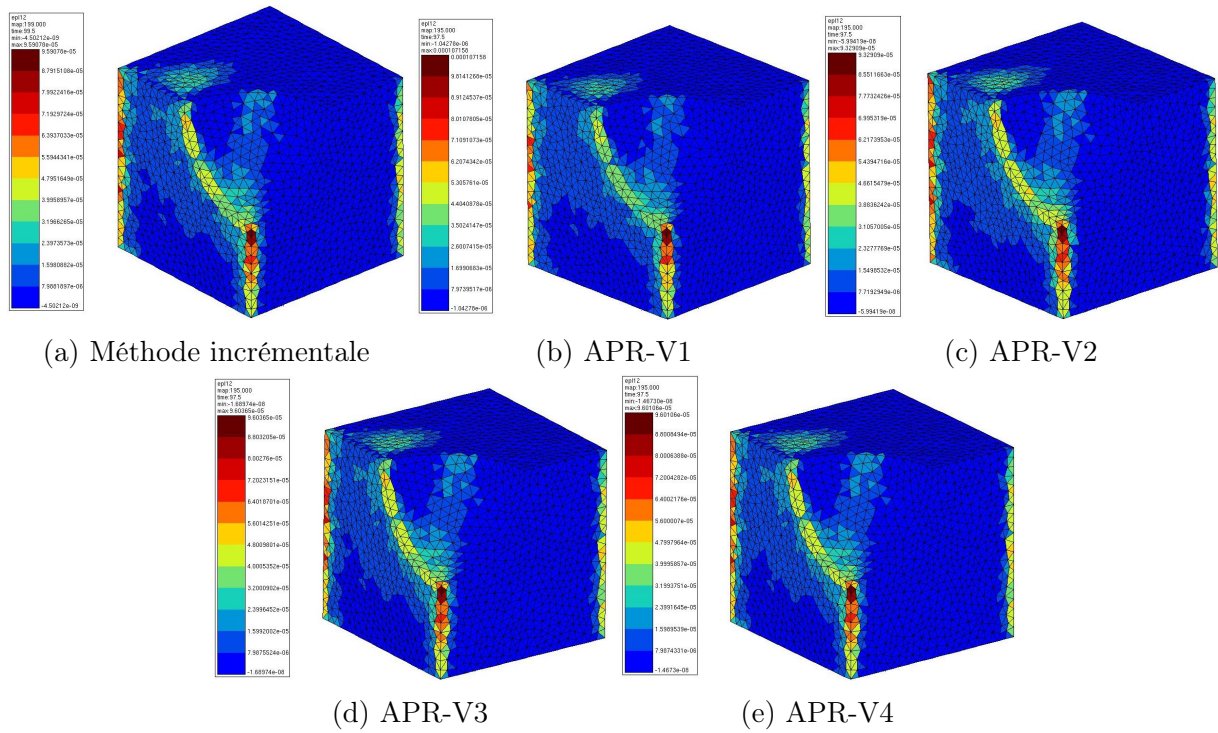


FIGURE III.36 – Champs de déformation plastique  $E_{12}^p$  obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M1 pour un chargement en cisaillement de 0.2%

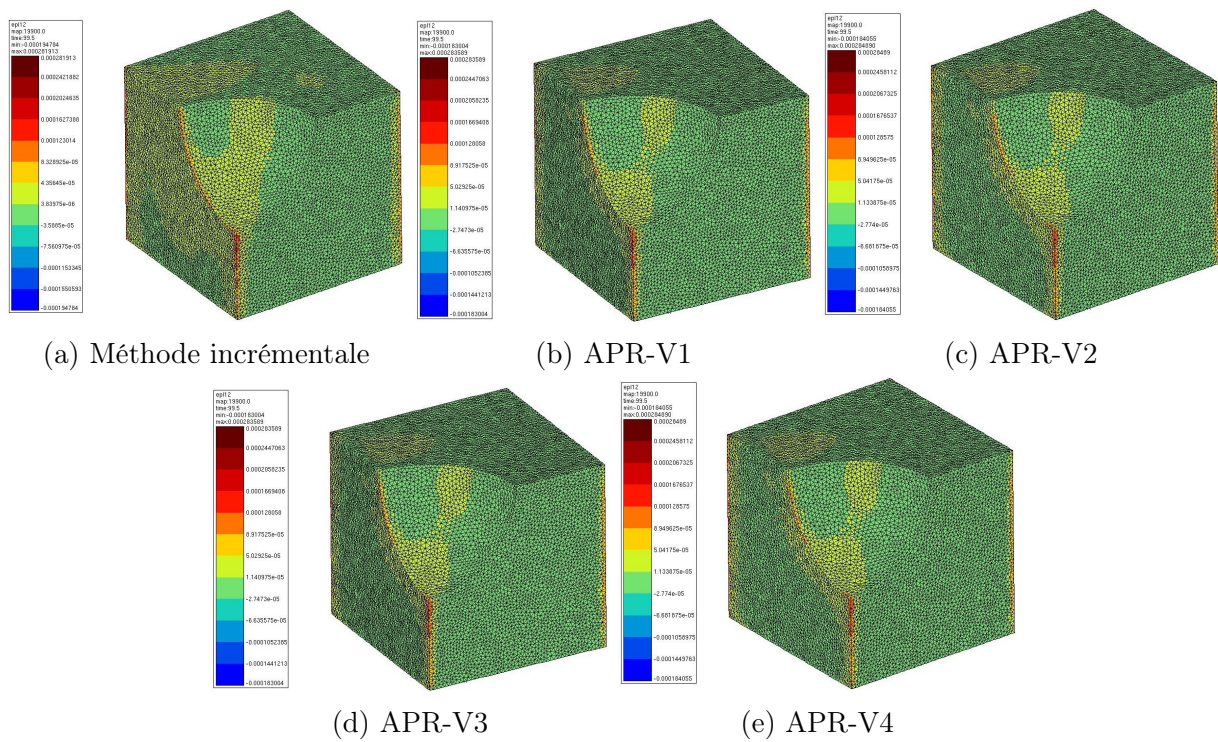


FIGURE III.37 – Champs de déformation plastique  $E_{12}^p$  obtenus par la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques avec le modèle M2 pour un chargement en cisaillement de 0.2%

## 6.1 Résultats

La figure III.38 illustre l'évolution des temps de calcul de la méthode incrémentale droite, des méthodes PGD ainsi que des méthodes APR cycliques en fonction du nombre de cycles. Ces résultats sont obtenus pour les deux discrétisations spatiales du modèle et avec les mêmes conditions que le calcul incrémental : simulation de 100 cycles avec une amplitude de déformation totale macroscopique appliquée  $E_{11} = 0.2\%$ .

Au vu de ces résultats, on note que le temps CPU est moins important avec la méthode incrémentale droite qu'avec le calcul avec la méthode incrémentale classique. A titre d'exemple, le rapport de temps de calcul pour le modèle M1 (Fig. III.38a) montre que la méthode incrémentale droite est 11 fois plus rapide que la méthode de référence et 39 fois plus rapide dans le cas du modèle M2 (Fig. III.38b). Cela montre l'intérêt de maintenir la matrice de rigidité constante.

En ce qui concerne la méthode PGD, il est clair que la version V2 conduit à un temps de calcul très faible par rapport à la méthode incrémentale après 100 cycles. La modélisation avec la méthode PGD-V2 pour le modèle M1 (Fig. III.38a) permet un gain de temps d'un facteur 7 par rapport au calcul incrémental et d'un facteur 26 avec le modèle M2 (Fig. III.38b). Une augmentation de la discrétisation spatiale du modèle permet un gain de temps plus intéressant avec la méthode PGD2-V2. Quant à la méthode PGD-V1, elle montre un gain de temps avec le modèle M2. Elle est presque 3 fois plus rapide que la méthode incrémentale. Cependant, dans le cas d'une faible discrétisation spatiale (Fig. III.38a), la PGD-V1 n'a pas montré une grande efficacité vis-à-vis du calcul incrémental. En effet, elle est 2 fois plus lente après 100 cycles de chargement. Au vu de ces résultats, la deuxième version de la méthode PGD est considérée plus efficace en temps CPU que la PGD-V1 dans le cadre d'une modélisation avec un modèle de comportement en plasticité  $J_2$ . Ces résultats montrent aussi que les performances de la méthode PGD-V2 sont légèrement plus faibles par rapport à la méthode incrémentale droite. Elle est 1.6 fois moins rapide dans le cadre du modèle M1 et 1.44 fois plus lente avec le modèle M2 après 100 cycles de chargement.

Les figures III.38c, pour le modèle M1, et III.38b, pour le modèle M2, présentent le temps CPU des différentes versions de la méthode APR cyclique en comparaison avec la méthode de référence et la méthode incrémentale droite. La méthode APR cyclique montre un gain important par rapport à la méthode incrémentale pour toutes les versions étudiées. En effet, la méthode APR-V1 permet un gain de temps d'un facteur 10 avec le modèle M1 et d'un facteur 41 avec le modèle M2. Des gains de temps plus importants sont constatés avec la méthode APR-V4 pour les deux discrétisations spatiales : 12 fois plus rapide avec le modèle M1 et 46 fois plus performante avec le modèle M2. Les méthodes APR-V2 et APR-V3, quant à elles, réduisent le temps de calcul de la méthode incrémentale d'un facteur 11 dans le cas du modèle M1, et respectivement d'un facteur 35 et 45 pour le modèle M2. Une augmentation du nombre de ddl permet un gain de temps plus conséquent en utilisant une résolution avec un modèle d'ordre réduit. Certaines versions de la méthode APR cyclique sont légèrement plus performantes que la méthode incrémentale droite après 100 cycles de chargement. En effet, la modélisation avec la APR-V4 permet un gain de temps de 3% avec le modèle M1 et un gain plus important de 13% avec le modèle M2 (Fig. III.38d). La méthode APR-V3 conduit à un temps de calcul légèrement plus grand (de l'ordre de 2%) avec le modèle M1. En revanche, elle a montré un gain de temps plus conséquent de l'ordre de 13% avec le modèle M2 par rapport à la méthode incrémentale droite. La deuxième version de l'APR cyclique est légèrement moins rapide pour les deux discrétisations spatiales : d'un facteur 1.02 avec le modèle M1 et d'un facteur 1.13 avec le modèle M2. Cet écart a été observé avec la méthode APR-V1 pour le modèle M1 (moins rapide d'un facteur 1.05), mais elle a permis un gain de 4% avec un maillage plus fin.



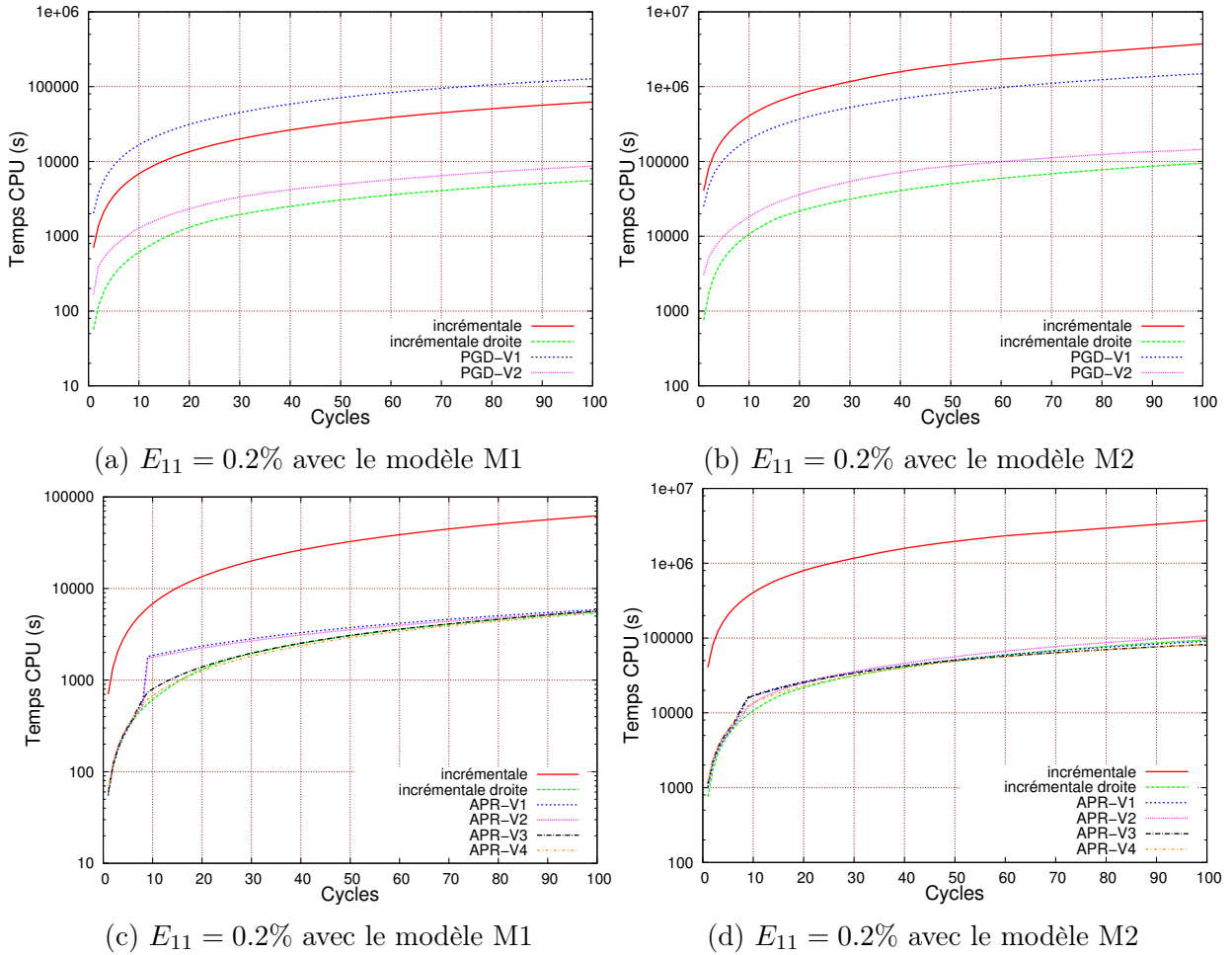


FIGURE III.38 – Évolution des temps de calcul des différentes méthodes après 100 cycles de chargement et une déformation macroscopique appliquée  $E_{11} = 0.2\%$

Au vu des résultats présentés, les gains de temps obtenus avec la méthode PGD-V2 ainsi que les différentes versions de l'APR cyclique par rapport à la méthode incrémentale sont très intéressants (allant jusqu'à un facteur 46 pour les cas traités). En revanche, le gain en temps CPU avec la méthode PGD-V1 est relativement faible. L'idée de mettre les non linéarités dans le second membre par une résolution incrémentale permet, dans certains cas, un gain de temps plus conséquent. Ces constats sont faits pour une modélisation de 100 cycles et une amplitude de chargement  $E_{11} = 0.2\%$ . Le tableau III.2 résume les différents temps de calcul ainsi que les gains obtenus par rapport à la méthode incrémentale. Il est important d'étudier le gain en temps CPU, entre ces différentes méthodes, en augmentant la non linéarité du problème ainsi que le nombre de cycles simulés. Pour ce faire, la figure III.39 présente l'évolution du temps de calcul de la méthode incrémentale droite et les méthodes de réduction de modèle après 1000 cycles de chargement. Chaque colonne de la figure correspond à une discrétisation spatiale. Ces résultats sont illustrés avec une variété d'amplitudes de déformation macroscopique appliquées présentées sur chaque ligne :  $E_{11} = 0.2\%$ ,  $E_{11} = 0.3\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$ . Les résultats de la méthode incrémentale ainsi que la méthode PGD-V1 ne sont pas présentés dans cette figure car les temps de calcul sont trop longs.

D'après la figure III.39, le temps CPU de la méthode PGD-V2 est moins important que le calcul incrémental droite pour une faible discrétisation spatiale. En effet, pour des chargements de  $E_{11} = 0.3\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$ , la méthode PGD-V2 réduit le temps de calcul respectivement d'un facteur 2 et 1.2. En revanche, pour un modèle contenant un grand

CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

Méthode utilisée	Temps CPU (s)		Gain (%)	
	modèle M1	modèle M2	modèle M1	modèle M2
incrémentale	$6.227 \cdot 10^4$	$3.726 \cdot 10^6$	–	–
inc droite	$5.554 \cdot 10^3$	$9.471 \cdot 10^4$	91	97
PGD-V1	$1.276 \cdot 10^5$	$1.487 \cdot 10^6$	–	60
PGD-V2	$8.688 \cdot 10^3$	$1.446 \cdot 10^5$	86	96
APR-V1	$5.883 \cdot 10^3$	$9.066 \cdot 10^4$	90	97
APR-V2	$5.629 \cdot 10^3$	$1.070 \cdot 10^5$	91	97
APR-V3	$5.677 \cdot 10^3$	$8.217 \cdot 10^4$	90	98
APR-V4	$5.386 \cdot 10^3$	$8.194 \cdot 10^4$	91	98

TABLE III.2 – Temps CPU ainsi que les différents gains obtenus par rapport à la méthode incrémentale avec le modèle M1 et M2 pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  après 100 cycles de chargement

nombre de ddl, des résultats différents sont obtenus par rapport à ce qui a été constaté précédemment. En effet, pour tous les niveaux de chargements, le temps CPU est plus important avec le calcul PGD-V2 (allant jusqu'à un facteur 2.3 pour  $E_{11} = 0.4\%$ ). De plus, pour ce type de modèle, une augmentation de la non linéarité du problème rend la méthode PGD-V2 moins robuste (facteurs temps de 1.18 et 2.3 respectivement pour  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$ ). Cela s'explique par le fait que la méthode PGD-V2 nécessite plus de fonctions et d'itérations pour la convergence.

Les modélisations avec un modèle d'ordre réduit ont montré une certaine efficacité pour prédire les résultats avec un temps de calcul plus réduit que la méthode incrémentale droite. En particulier, le gain de temps est plus conséquent pour la méthode APR-V2 dans la majorité des cas (allant jusqu'à un facteur 2.8). Il est à noter qu'une augmentation de l'amplitude du chargement permet un gain de temps plus important. Aussi, ces résultats montrent que les méthodes APR cyclique sont plus performantes que la méthode PGD-V2 dans le cadre d'une modélisation en plasticité  $J_2$ . Le temps de calcul obtenu avec le modèle M1 pour les différentes méthodes associé à chaque simulation ainsi que les gains constatés par rapport à la méthode incrémentale droite sont rapportés dans le tableau III.3. Ces résultats sont aussi illustrés dans le tableau III.4 avec le modèle M2.

Méthode utilisée	Temps CPU (s)			Gain (%)		
	$E_{11} = 0.2\%$	$E_{11} = 0.3\%$	$E_{11} = 0.4\%$	$E_{11} = 0.2\%$	$E_{11} = 0.3\%$	$E_{11} = 0.4\%$
inc droite	$4.360 \cdot 10^4$	$1.256 \cdot 10^5$	$6.919 \cdot 10^4$	–	–	–
PGD-V2	$6.172 \cdot 10^4$	$6.260 \cdot 10^4$	$6.163 \cdot 10^4$	–	50	10.92
APR-V1	$3.966 \cdot 10^4$	$4.629 \cdot 10^4$	$5.613 \cdot 10^4$	9	63.11	18.87
APR-V2	$3.907 \cdot 10^4$	$4.505 \cdot 10^4$	$4.813 \cdot 10^4$	10.3	64.13	30.34
APR-V3	$4.349 \cdot 10^4$	$5.332 \cdot 10^4$	$6.342 \cdot 10^4$	0.25	42.45	8.33
APR-V4	$4.255 \cdot 10^4$	$4.974 \cdot 10^4$	$6.123 \cdot 10^4$	2.4	60.39	11.5

TABLE III.3 – Temps CPU et les différents gains obtenus par rapport à la méthode incrémentale droite après 1000 cycles avec le modèle M1 pour les différentes amplitudes de chargement

## 6. ANALYSE DU TEMPS DE CALCUL

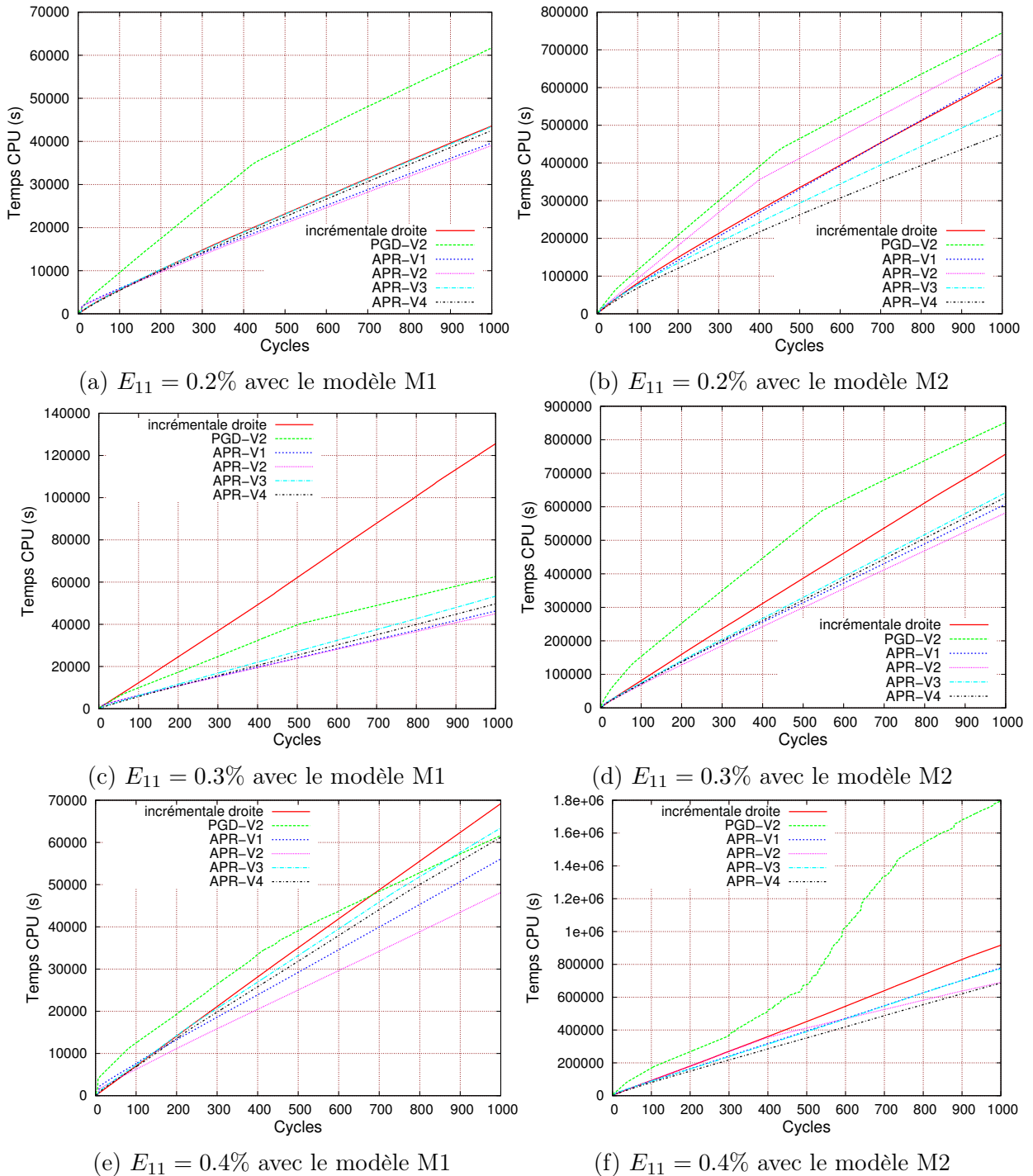


FIGURE III.39 – Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles après 1000 cycles de chargement pour le modèle M1 et M2 avec une variété d'amplitudes de déformation macroscopique appliquées

Méthode utilisée	Temps CPU (s)			Gain (%)		
	$E_{11} = 0.2\%$	$E_{11} = 0.3\%$	$E_{11} = 0.4\%$	$E_{11} = 0.2\%$	$E_{11} = 0.3\%$	$E_{11} = 0.4\%$
inc droite	$6.268 \cdot 10^5$	$7.572 \cdot 10^5$	$9.168 \cdot 10^5$	—	—	—
PGD-V2	$7.453 \cdot 10^5$	$8.516 \cdot 10^5$	$1.798 \cdot 10^6$	—	—	—
APR-V1	$6.340 \cdot 10^5$	$6.082 \cdot 10^5$	$7.792 \cdot 10^5$	—	19.67	15
APR-V2	$6.899 \cdot 10^5$	$5.819 \cdot 10^5$	$6.899 \cdot 10^5$	—	23.15	24.74
APR-V3	$5.413 \cdot 10^5$	$6.421 \cdot 10^5$	$7.735 \cdot 10^5$	13.64	15.20	15.63
APR-V4	$4.766 \cdot 10^5$	$6.291 \cdot 10^5$	$6.863 \cdot 10^5$	24	17	25.14

TABLE III.4 – Temps CPU et les différents gains obtenus par rapport à la méthode incrémentale droite après 1000 cycles avec le modèle M1 pour les différentes amplitudes de chargement

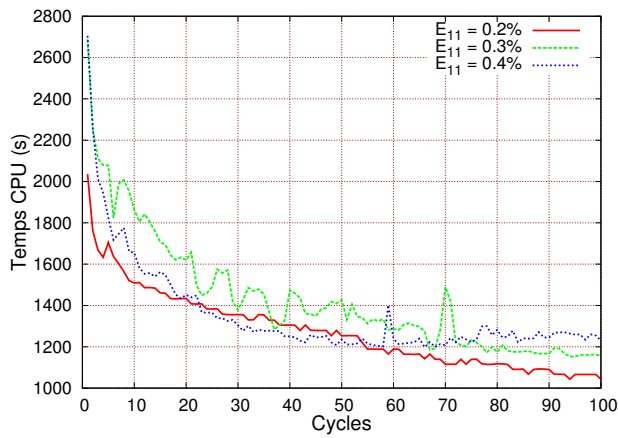
## 6.2 Discussions

Les gains en temps de calcul obtenus par la méthode incrémentale droite vis-à-vis de la méthode incrémentale classique sont intéressants. Ces constats montrent que le temps de calcul de la méthode incrémentale est fortement lié à la factorisation de la matrice tangente à chaque itération du calcul. En effet, la résolution du système linéaire est très coûteuse en temps CPU. Par ailleurs, la taille de la matrice tangente est proportionnelle à la taille du maillage du modèle. En d'autres termes, une augmentation du nombre de degrés de liberté augmente le temps de factorisation de la matrice tangente à chaque itération. Un gain de temps encore plus important est donc observé avec une matrice de rigidité constante.

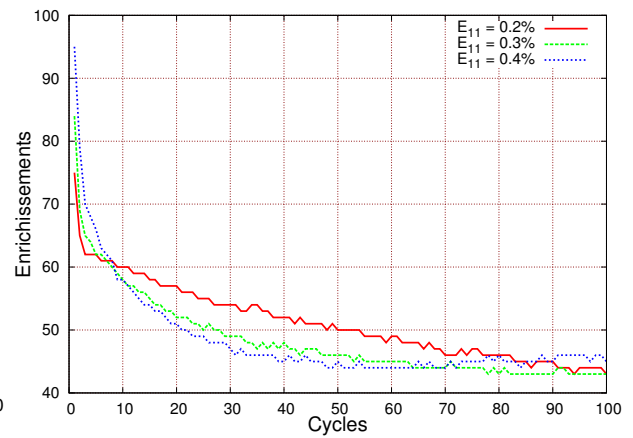
La figure III.40 montre le nombre d'itérations ainsi que le nombre de fonctions de la PGD-V1 et PGD-V2 nécessaires à la convergence pour chaque cycle tout au long des 100 cycles de chargement. Pour ce qui est du nombre d'itérations de la méthode PGD-V2, les premiers cycles sont les plus coûteux, car le comportement évolue de manière conséquente d'un cycle à l'autre. A partir d'un certain nombre de cycles, par exemple le 4<sup>ème</sup> cycle pour  $E_{11} = 0.3\%$  (Fig. III.40d), environ 3 itérations suffisent pour obtenir la convergence et seulement 2 itérations à partir du 80<sup>ème</sup> cycle sont suffisantes. Ces constats sont aussi faits pour le nombre de fonctions enrichies par cycle avec les deux méthodes PGD (Fig. III.40b et III.40e). En effet, la base est reconstruite à chaque cycle et l'enrichissement est effectué principalement durant les premiers cycles. Ensuite, plus le nombre de cycles augmente, plus le comportement se stabilise ce qui conduit à une diminution du nombre de modes nécessaires à la convergence. Pour ce qui est du temps de calcul par cycle (III.40a et III.40c), il est logiquement proportionnel au nombre d'itérations et d'enrichissements. Par ailleurs, ces résultats montrent bien que le nombre de modes nécessaires à la convergence pour la méthode PGD-V1 est plus important qu'avec la PGD-V2. Concernant la performance de la méthode PGD-V2, les résultats des différents cas traités ont montré que la PGD-V2 nécessite un temps de calcul plus important que la méthode incrémentale droite, à l'exception des résultats illustrés après 1000 cycles et pour une faible discrétisation spatiale. Cela peut être expliqué par :

- La stabilisation du comportement après 1000 cycles
- Seulement 8 fonctions sont nécessaires pour l'enrichissement de la base à partir du 700<sup>ème</sup> et 500<sup>ème</sup> cycle respectivement pour  $E_{11} = 0.3\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$
- A partir du 500<sup>ème</sup>, une seule itération suffit à la convergence.

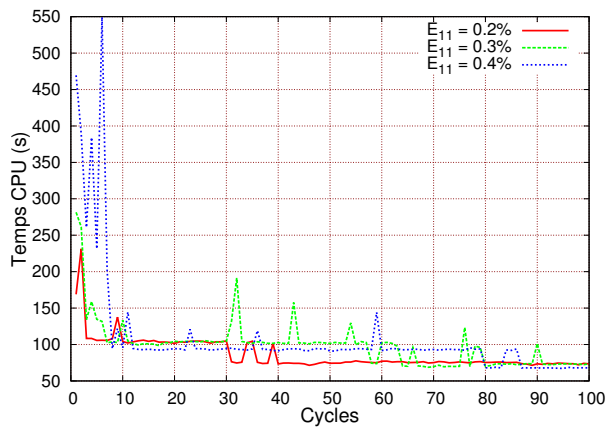
## 6. ANALYSE DU TEMPS DE CALCUL



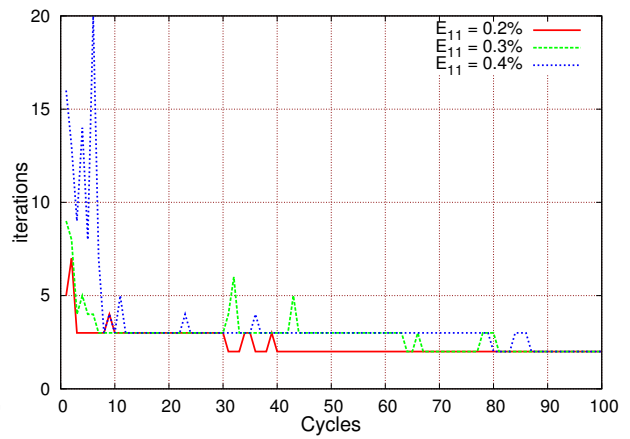
(a) Temps par cycle PGD-V1



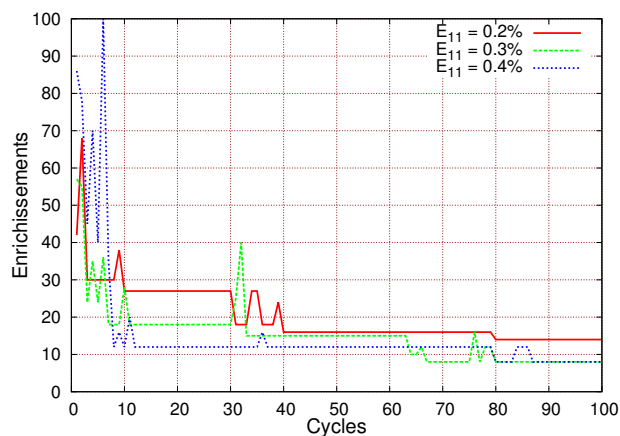
(b) Nombre de fonctions PGD-V1



(c) Temps par cycle PGD-V2



(d) Itération par cycle PGD-V2



(e) Nombre de fonctions PGD-V2

FIGURE III.40 – Évolution du temps CPU par cycle, nombre d'itérations et nombre de fonctions enrichies pour les deux méthodes PGD après 100 cycles de chargement pour les différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées avec le modèle M1

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

Pour la méthode APR cyclique, la figure III.41 présente l'évolution du nombre de fonctions cumulées de la base réduite  $[\Phi_x]$  à chaque incrément de temps pour les différents cas traités. La première remarque est que l'évolution du nombre de fonctions est plus important lors du premier cycle d'adaptation de la base à cause des changements rapides des solutions ayant lieu. Aussi, il est à noter que l'enrichissement avec les méthodes APR-V1 et APR-V3, pour les trois cycles d'adaptation, est plus important qu'avec les méthodes APR-V2 et APR-V4. Cette augmentation du nombre de modes est proportionnelle au temps de calcul. Ainsi, l'adaptation de la précision APR cyclique avec une stratégie de correction de la base réduite pour un état mécanique corrigé (APR-V2 et APR-V4) est plus rapide que dans le cas contraire (APR-V1 et APR-V4). Une diminution du nombre de modes est observée avec les méthodes APR-V1 et APR-V2 par l'application d'une POD à la fin de l'adaptation.

La figure III.42 présente l'évolution du temps par cycle et le temps CPU cumulé des 30 premiers cycles de la méthode incrémentale droite ainsi que les méthodes APR cycliques. Ces résultats sont illustrés pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  et chaque colonne correspond à une discrétisation spatiale. Les méthodes APR-V1 et APR-V3 (respectivement la APR-V2 et APR-V4) ont la même évolution du temps de calcul pour les 8 premiers cycles car elles sont identiques. Durant la phase d'adaptation, le temps CPU des méthodes APR cycliques augmente par rapport à la méthode incrémentale (Fig. III.42a et III.42b) à cause des processus itératifs de correction du modèle réduit. Les temps par cycle des méthodes APR-V1 et APR-V3 sont supérieurs à ceux prédits par les méthodes APR-V2 et APR-V4. Une augmentation du temps de calcul est toutefois observée avec la méthode APR-V1 (APR-V2) par rapport à la méthode APR-V3 (APR-V4) à la fin du dernier cycle d'adaptation. Cela est dû à l'application d'une POD sur l'histoire de la base réduite adaptée. A partir du 10<sup>ème</sup> cycle, le calcul se poursuit avec un modèle d'ordre réduit pour la APR-V3 et APR-V4, et aussi avec un modèle d'ordre plus réduit pour la APR-V1 et APR-V2. Dans ce cas, le temps CPU par cycle des méthodes APR cycliques diminue (Fig. III.42a et III.42b) et devient moins élevé que pour la méthode incrémentale droite. Cela est dû à l'apport de la résolution incrémentale d'un système linéaire réduit. En effet, les dimensions du modèle réduit utilisé (après adaptation), pour les différentes amplitudes de chargement appliquées, sont listées dans les tableaux III.5 et III.6 pour les modélisations avec le modèle M1 et M2 respectivement. Grâce à la taille réduite des méthodes APR cycliques, ces résultats résument le gain en temps CPU par cycle présentés aux figures III.42d et III.42c.

Chargement appliqué	Taille du problème				
	Modèle complet	APR-V1	APR-V2	APR-V3	APR-V4
0.2%	19803	167	67	270	167
0.3%	19803	129	28	246	145
0.4%	19803	171	51	295	175

TABLE III.5 – Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale droite et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué avec une modélisation avec le modèle M1

D'une manière plus générale, les gains en temps obtenus avec les méthodes APR cycliques par rapport à la méthode incrémentale droite sont intéressants pour plusieurs centaines de cycles. Ces gains montrent l'intérêt d'un modèle d'ordre réduit pour la résolution du système linéaire grâce à une base réduite adaptée. Pour une faible discrétisation spatiale,

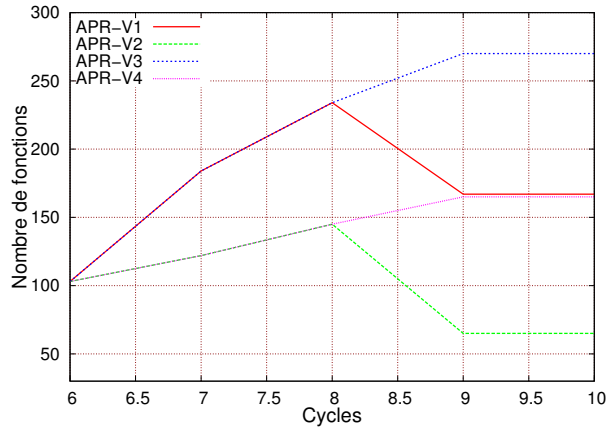
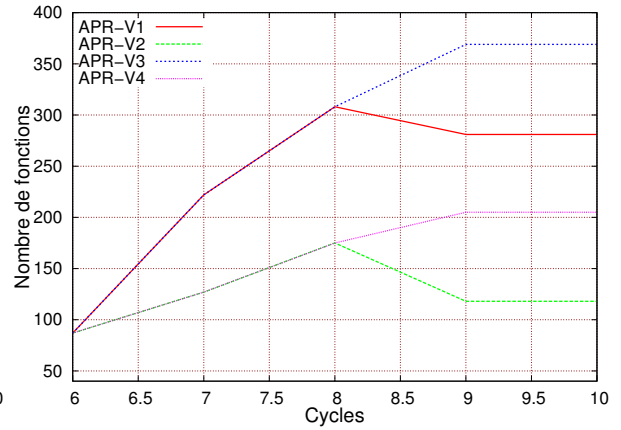
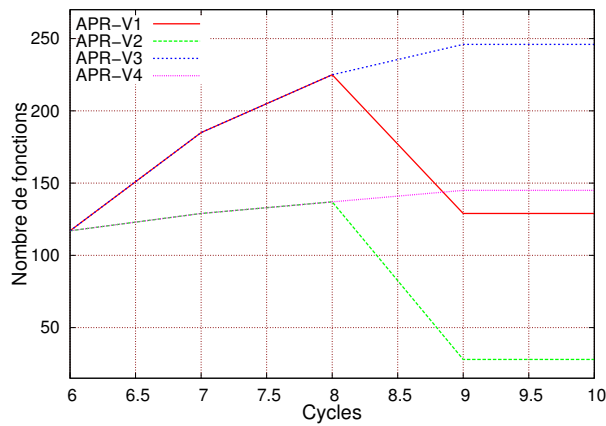
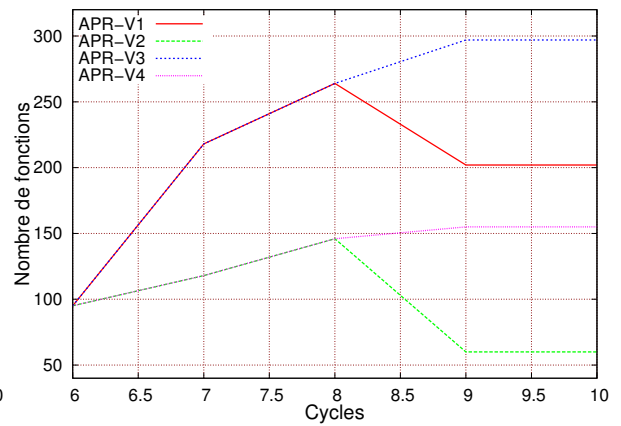
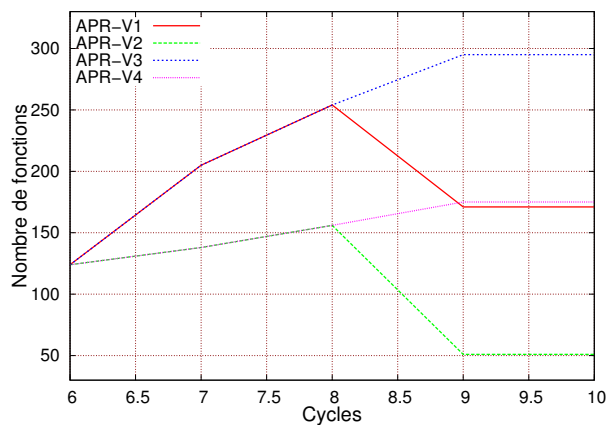
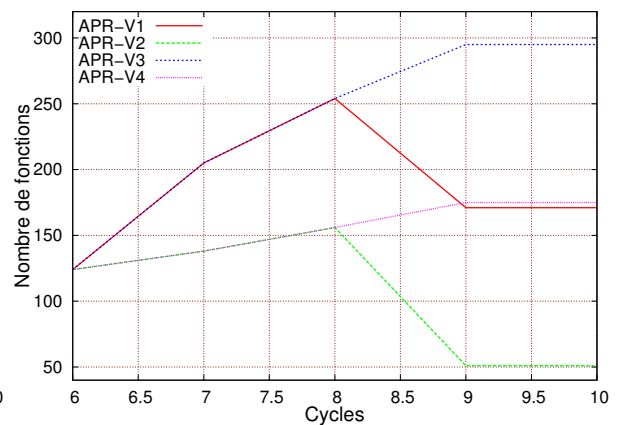
(a) Modèle M1  $E_{11} = 0.2\%$ (b) Modèle M2  $E_{11} = 0.2\%$ (c) Modèle M1  $E_{11} = 0.3\%$ (d) Modèle M2  $E_{11} = 0.3\%$ (e) Modèle M1  $E_{11} = 0.4\%$ (f) Modèle M2  $E_{11} = 0.4\%$ 

FIGURE III.41 – Nombre de modes enrichis de la base réduite pour les différentes amplitudes de déformation appliquées avec les deux discrétisations spatiales

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

Chargement appliqué	Taille du problème				
	Modèle complet	APR-V1	APR-V2	APR-V3	APR-V4
0.2%	196668	281	118	369	205
0.3%	196668	202	60	297	155
0.4%	196668	309	114	406	211

TABLE III.6 – Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale droite et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué avec une modélisation avec le modèle M2

les méthodes APR-V1 et APR-V2 (avec POD) sont plus rapides que les autres versions, et en particulier avec la APR-V2. Pour les modélisations avec un nombre plus important de ddl, les méthodes APR-V3 et APR-V4 (sans POD) semblent aussi pertinentes vis-à-vis des méthodes APR-V1 et APR-V2, et en particulier la APR-V4. Cela s'explique par une représentativité insuffisante de la solution déduite à partir d'un modèle d'ordre très réduit. Cela nécessite un plus grand nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'état mécanique désiré.

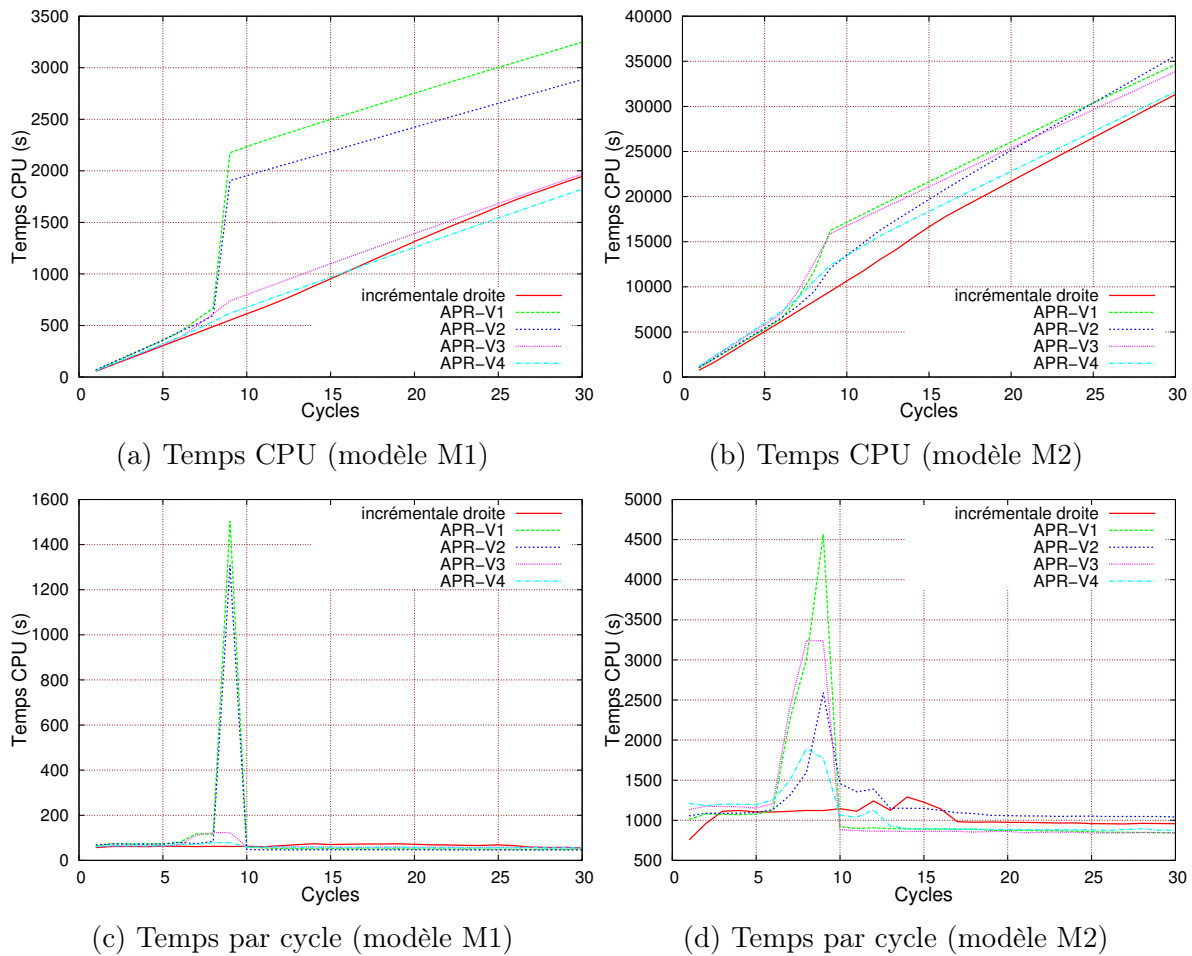


FIGURE III.42 – Évolution du temps de calcul et temps par cycle des différentes versions de la méthode APR cyclique vis-à-vis à la méthode incrémentale droite après 30 cycles et pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$



## 7 Conclusion du chapitre

Afin d'analyser les performances des différentes méthodes de réduction de modèle dans le cadre de la plasticité  $J_2$ , des cas tests ont été effectués sur un problème classique tridimensionnel présentant un défaut sphérique. Deux densités de maillage ont été considérées. Le chargement cyclique appliqué est une déformation totale macroscopique avec trois valeurs d'amplitude et un rapport de charge de  $-1$ . Le modèle de comportement utilisé est de type élasto-plastique avec un écrouissage mixte. Les résultats sont comparés avec la méthode incrémentale classiquement utilisée dans les codes de calculs commerciaux.

Dans un premier temps, une étude sur le critère de convergence de l'étape globale de la méthode PGD-V2 a été conduite. Les résultats ont montré une bonne prédiction de l'état mécanique avec un gain en temps de calcul conséquent. Toutefois, il est important de noter que la valeur de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  ne peut être utilisée qu'avec un maximum de déformation macroscopique appliquée  $E = 0.5\%$ . Les résultats des deux méthodes PGD ont été ensuite analysés en termes de contrainte-déformation macroscopiques moyennées sur toute la structure ainsi que pour trois éléments fortement chargés. Deux cas d'étude ont été présentés : en traction et en cisaillement. Les différentes analyses effectuées ont permis de s'assurer que les méthodes PGD-V1 et PGD-V2 prédisent bien les réponses mécaniques pour les différentes amplitudes de chargement imposées.

Les résultats obtenus avec les différentes versions de la méthodes APR cyclique ont été ensuite présentés pour les différentes conditions de chargement. Tout d'abord, une étude sur deux paramètres de la méthode APR cyclique a été mise en œuvre : l'influence du choix de l'initialisation de la base réduite ainsi qu'une étude de stabilité. Il a été constaté que le choix de l'initialisation n'a pas d'influence sur la réponse mécanique. En revanche, la vitesse de convergence de l'algorithme APR cyclique est plus significative avec une initialisation à la fin du 6<sup>ème</sup> cycle en comparaison avec l'histoire spatio-temporelle du premier cycle. Pour la stratégie d'adaptation, il a été proposé de contrôler la précision de la base et de ne l'enrichir que pour trois cycles après adaptation. Pour les diagrammes contrainte-déformation moyennées sur toute la structure, les méthodes APR cycliques prévoient la solution incrémentale avec une bonne précision. Pour les solutions locales, les résultats ont montré que les méthodes APR cycliques estiment la solution obtenue par un calcul incrémental. Cependant, des écarts ont été observés avec les méthodes APR-V1 et APR-V2 avec une erreur maximale qui n'excède pas 3%.

Le temps de calcul obtenu avec toutes les méthodes a été présenté pour les deux discrétisations spatiales ainsi que pour les différentes amplitudes de chargement appliquées. Après 100 cycles de chargement, des résultats très favorables en terme de temps de calcul ont été observés avec la méthode PGD-V2 ainsi que pour les méthodes APR cyclique en comparaison avec la méthode incrémentale (allant jusqu'à un facteur 46 pour les cas traités). En revanche, la méthode PGD-V1 n'a pas montré une grande efficacité en termes de rapidité par rapport à la méthode incrémentale. Mettre les non linéarités dans le second membre avec une résolution incrémentale a montré, dans certains cas, un gain en temps CPU plus important. Cependant, pour un nombre plus important de cycles (1000 cycles), des gains en temps ont été observés avec les méthodes APR cycliques par rapport à la méthode incrémentale droite pour tous les cas traités. Ces résultats ont été constatés avec la méthode PGD-V2 avec un modèle contenant un faible nombre de ddl. Il est néanmoins nécessaire d'atteindre une stabilisation du comportement car le nombre de fonctions nécessaires à la convergence de la méthode PGD-V2 diminue.

Après avoir présenté les différentes méthodes numériques proposées avec un modèle de comportement en plasticité  $J_2$ , le chapitre suivant sera consacré à la mise en application de

### CHAPITRE III. APPLICATION À UN CAS ÉLASTO-PLASTIQUE SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

ces méthodes à l'échelle de la microstructure.

## 7. CONCLUSION DU CHAPITRE

# Chapitre IV

## Simulation numérique d'agrégats polycristallins tridimensionnels

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>142</b>
<b>2</b>	<b>Mécanismes de déformation du monocristal</b> . . . . .	<b>142</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation micromécanique du comportement</b> . . . . .	<b>142</b>
3.1	Présentation du matériau utilisé . . . . .	144
3.2	Modélisation du comportement monocristallin . . . . .	144
<b>4</b>	<b>Description du modèle géométrique</b> . . . . .	<b>146</b>
4.1	Description du maillage . . . . .	146
4.2	Conditions aux limites . . . . .	148
<b>5</b>	<b>Prédictions de la méthode PGD</b> . . . . .	<b>149</b>
5.1	Convergence de la méthode PGD . . . . .	149
5.2	Influence de l'enrichissement sur la réponse PGD . . . . .	150
5.3	Réponse mécanique macroscopique de la méthode PGD . . . . .	154
5.4	Réponse mécanique mésoscopique de la méthode PGD . . . . .	159
<b>6</b>	<b>Résultats de la méthode APR cyclique</b> . . . . .	<b>164</b>
6.1	Étude de stabilité de la base APR cyclique . . . . .	164
6.2	Influence du choix de l'initialisation de la base réduite . . . . .	164
6.3	Convergence de la méthode APR cyclique . . . . .	166
6.4	Réponse mécanique macroscopique de la méthode APR cyclique . . . . .	169
6.5	Réponse mécanique mésoscopique de la méthode APR cyclique . . . . .	171
<b>7</b>	<b>Analyse du temps de calcul</b> . . . . .	<b>179</b>
7.1	Résultats . . . . .	180
7.2	Discussions . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Conclusion du chapitre</b> . . . . .	<b>192</b>

---

## 1 Introduction

Ce chapitre présente la mise en application des méthodes de réduction de modèle proposées précédemment, dans le cas de la simulation numérique d'agrégats polycristallins. Cette dernière offre un cadre pertinent pour analyser les effets locaux en bien avec la microstructure dans plusieurs domaines tels que la mise en forme [50], l'usinage [28] et le comportement en fatigue [89, 209]. L'idée est ici de mettre en avant la pertinence des différentes méthodes proposées en termes de précision de la réponse mécanique et de performance en temps CPU.

Les travaux exposés en utilisent une démarche similaires à celle du chapitre précédent. La mise en place du modèle numérique de l'agrégat utilisé ainsi que du modèle de comportement est d'abord présentée. Cette partie est accompagnée par une étude bibliographique relative au différents mécanismes mis en jeux en plasticité cristalline. Les réponses mécaniques des agrégats polycristallins obtenues à l'aide des deux méthodes PGD ainsi que des méthodes APR cycliques sont analysées à travers les quantités macroscopiques et mésoscopiques. Le dernier volet porte sur l'analyse du temps de calcul.

## 2 Mécanismes de déformation du monocristal

Les modèles d'agrégat polycristallin permettent de tenir compte d'un certain nombre de phénomènes et caractéristiques à l'échelle de la microstructure tels le glissement plastique et les orientations cristallographiques. Avant de débiter la discussion sur la modélisation du comportement cristallin, il est intéressant de présenter certaines caractéristiques de ces mécanismes. Ici, on ne présente que le mécanisme de déformation par glissement des dislocations.

### Dislocations et systèmes de glissement cristallographiques

Le matériau utilisé dans cette partie est un acier inoxydable austénitique 316L (c.f. section 3.1) qui possède une structure cristalline de type Cubique à Faces Centrées CFC (figure IV.1a). D'une manière générale, les propriétés mécaniques des métaux, en particulier les mécanismes de déformation du monocristal par glissement des dislocations, dépendent de leurs structures cristallines (CFC, CC, QC, ect ...). Les dislocations glissent sur des plans et des directions bien définies (figure IV.1b). Un système de glissement est ainsi défini par un plan et une direction de glissement. Il est à noter que toutes les dislocations ne sont pas nécessairement mobiles et que leurs répartitions spatiales ne sont pas forcément homogènes.

Dans le cas d'un réseau de type CFC, les dislocations se déplacent sur des plans appartenant à la famille  $\{111\}$  et des directions appartenant à la famille  $\langle 110 \rangle$ . Il existe dans les réseaux CFC 12 systèmes de glissement notés  $s$  avec 4 plans de glissement, chaque plan présentent 3 directions de glissement. La figure IV.2a présente une description schématique des différentes directions dans le plan (111) pour un réseau cristallin de type CFC. Les différents systèmes de glissement sont listés dans le tableau IV.1.

## 3 Modélisation micromécanique du comportement

La modélisation numérique des agrégats polycristallins passe par la mise en place d'un modèle de plasticité cristalline qui décrit le comportement de la microstructure. Cette section présente le matériau utilisé ainsi qu'une synthèse des modèles de monocristaux permettant la modélisation du comportement des grains de l'agrégat.

CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS  
POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

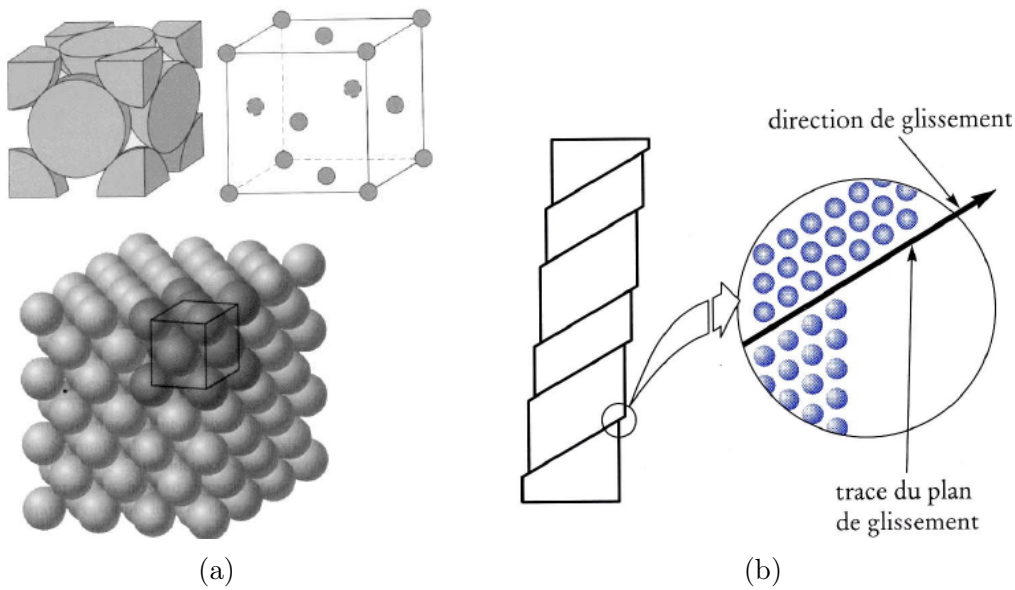


FIGURE IV.1 – (a) Structure cristalline d'un réseau Cubique à Faces Centrées CFC [44] (b) Illustration du mouvement d'une famille de dislocation

Plan de glissement	Direction de glissement					
	[011]	[0 $\bar{1}$ 1]	[101]	$\bar{1}$ 01]	$\bar{1}$ 10]	[110]
( $\bar{1}$ 11)		A2	A3			A6
(111)		B2		B4	B5	
( $\bar{1}\bar{1}$ 1)	C1		C3		C5	
(1 $\bar{1}$ 1)	D1			D4		D6

TABLE IV.1 – Système de glissement des les structures de type CFC selon la convention de Schmid et Boas [227]

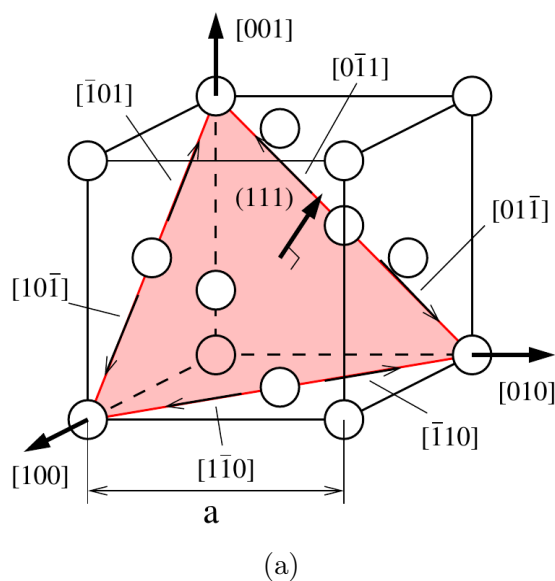


FIGURE IV.2 – Représentation schématique des différentes directions de glissement dans le plan (111) avec un réseau cristallin CFC [91]

### 3.1 Présentation du matériau utilisé

Les simulations à l'échelle de la microstructure ont été effectuées pour un acier inoxydable austénitique AISI 316L. Les différents paramètres du modèle de comportement élasto-plastique du monocristal ont été identifiés dans le cadre de la thèse de Guerchais [91] réalisée au LAMPA. La composition chimique de l'acier inoxydable austénitique 316L, déterminée par spectrométrie d'émission à étincelle, est spécifiée dans le tableau IV.2. Ce dernier présente le pourcentage massique des teneurs des différents éléments d'addition constituant cet acier. Cet acier est composé en majorité d'une phase austénitique  $\gamma$ .

Élément	C	Cr	Ni	Mo	Mn
%masse	0.02	18.96	15.00	3.01	1.87

TABLE IV.2 – Composition chimique (% massique) de la nuance de l'acier 316L déterminée par Guerchais [91]

### 3.2 Modélisation du comportement monocristallin

Le glissement des dislocations, dans les structures cristallines, se fait suivant les directions et les plans denses en produisant une déformation plastique. Les activités de recherche concernant la mise en place des modèles de plasticité à l'échelle du grain se sont fortement développées au cours des deux dernières décennies. Le but est d'élaborer des modèles qui décrivent les différents mécanismes responsables de la plasticité. Dans la littérature, il existe une variété de modèles de plasticité cristalline permettant de décrire le comportement des monocristaux. La loi de comportement cristalline employée dans ce travail a été introduite par Méric et Cailletaud [167] pour décrire le comportement plastique des grains.

Pour l'étude des problèmes en fatigue, le modèle de comportement des monocristaux est élaboré dans le cadre des petites déformations. Le tenseur des petites déformations  $\{\varepsilon\}$ , pour lequel les rotations de réseau sont négligeables, peut être décomposé en deux parties : élastique  $\{\varepsilon^e\}$  et visco-plastique  $\{\varepsilon^p\}$ . Soit :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^p\} \quad (\text{IV.1})$$

Dans un modèle de plasticité cristalline, le comportement élastique est représenté par un comportement anisotrope des grains. L'acier 316L utilisé dans ce travail est composé généralement d'une phase austénitique  $\gamma$  (voir tableau IV.2) qui conduit à une structure cristalline de type CFC. En tenant compte de la symétrie du réseau cristallin, le comportement élastique des grains est décrit par une matrice d'élasticité  $[C^{el}]$  cubique définie dans le repère du cristal  $B_c$  par trois coefficients  $C_{1111}$ ,  $C_{1122}$  et  $C_{1212}$ . Ainsi, le comportement élastique anisotrope des grains est décrit par la loi de Hooke qui relie les contraintes et les déformations élastiques :

$$\{\sigma\} = [C^{el}]\{\varepsilon^e\} \quad \text{avec} \quad [C^{el}] = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Les modélisations d'agrégat polycristallin sont basées sur l'anisotropie élastique des grains, donnée par l'équation IV.2, et la visco-plasticité cristalline. D'une manière générale, les modèles de plasticité cristalline reposent sur l'hypothèse que la plasticité est due au mécanismes

## CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

de glissement irréversibles. Ainsi, la relation entre le tenseur des taux de déformation plastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  et la somme des vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^s$  sur l'ensemble des systèmes est donnée par :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^p = \sum_{s=1}^k \dot{\gamma}^s \underline{\underline{m}}^s \quad (\text{IV.3})$$

où  $k$  présente le nombre de systèmes de glissement d'une structure cristalline. Dans notre cas d'étude, la structure CFC possède 12 systèmes listés dans le tableau IV.3, soit  $k = 12$ . Le tenseur  $\underline{\underline{m}}^s$  représente le tenseur d'orientation du système  $s$ . Il est défini par le vecteur unitaire normal au plan de glissement  $\underline{n}^s$  et le vecteur directeur unitaire  $\underline{l}^s$  responsable de la direction du glissement du système  $s$ , soit :

$$\underline{\underline{m}}^s = \frac{(\underline{n}^s \otimes \underline{l}^s + \underline{l}^s \otimes \underline{n}^s)}{2} \quad (\text{IV.4})$$

La modélisation de la visco-plasticité cristalline repose sur les grandeurs définissant les glissements, donnés par l'équation IV.3, ainsi que les cissions résolues  $\tau^s$  pour chaque système  $s$ . Celles ci sont déterminées par l'intermédiaire de la loi de Schmid en fonction des tenseurs des contraintes locales  $\underline{\underline{\sigma}}$  suivant les plans et les directions denses du cristal. Soit :

$$\tau^s = \underline{\underline{m}}^s : \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{IV.5})$$

Au final, la relation de passage entre les vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^s$  et les cissions résolues  $\tau^s$  pour chaque système  $s$  est déterminée en utilisant un modèle de comportement du monocristal.

$s$	$l^s$	$n^s$	$s$	$l^s$	$n^s$	$s$	$l^s$	$n^s$
1	[01 $\bar{1}$ ]	(111)	5	[101]	( $\bar{1}$ 11)	9	[ $\bar{1}$ 10]	( $\bar{1}$ 1 $\bar{1}$ )
2	[ $\bar{1}$ 01]	(111)	6	[ $\bar{1}$ 10]	( $\bar{1}$ 11)	10	[011]	(11 $\bar{1}$ )
3	[1 $\bar{1}$ 0]	(111)	7	[011]	( $\bar{1}$ 1 $\bar{1}$ )	11	[1 $\bar{1}$ 0]	(11 $\bar{1}$ )
4	[01 $\bar{1}$ ]	( $\bar{1}$ 11)	8	[10 $\bar{1}$ ]	( $\bar{1}$ 1 $\bar{1}$ )	12	[011]	(11 $\bar{1}$ )

TABLE IV.3 – Directions de glissement  $l^s$  et plans de glissement  $n^s$  associés aux 12 systèmes de glissement d'une structure CFC

Le modèle Méric et Cailletaud est couramment utilisé pour la simulation numérique d'agrégats polycristallins et notamment pour l'étude des problèmes en fatigue sous sollicitation cyclique [209, 88, 89]. L'expression de la vitesse de glissement plastique  $\dot{\gamma}^s$  est donnée par une loi d'écoulement de type visco-plastique à seuil, exprimée par :

$$\dot{\gamma}^s = \left\langle \frac{|\tau^s - x^s| - r_0 - r^s}{K} \right\rangle^n \text{sign}(\tau^s - x_s) \quad (\text{IV.6})$$

avec :

$$\text{sign}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \langle X \rangle = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 0 \\ 0 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

Les deux paramètres  $K$  et  $n$  caractérisent la viscosité et représentent la sensibilité à la vitesse de déformation. La loi d'écoulement IV.6 fait intervenir deux types d'écrouissage : l'écrouissage isotrope non linéaire défini sur chaque système de glissement  $s$  décrit par la



## 4. DESCRIPTION DU MODÈLE GÉOMÉTRIQUE

variable  $r^s$ , et l'écroissage cinématique non linéaire décrit par la variable  $x^s$  pour le même système de glissement  $s$ .

L'écroissage isotrope non linéaire décrit l'évolution de la cission critique sur un système de glissement  $s$  en fonction des glissements plastiques cumulés des différents systèmes de glissement. La loi de Voce est adoptée pour l'évolution de l'écroissage isotrope, définie par :

$$r^s = r_0 + Q \sum_r h^{rs} (1 - e^{(-b\nu^r)}) \quad \text{avec} \quad \dot{\nu}^r = |\dot{\gamma}^r| \quad (\text{IV.7})$$

La saturation de la cission critique est assurée par le terme exponentiel présent dans IV.7. Cette loi permet de prendre en compte les 12 interactions des différents systèmes en introduisant une matrice d'interaction  $h^{rs}$  décrivant l'écroissage. Elle permet de relier la cission critique d'un système  $s$  et le glissement plastique cumulé  $\nu^r$  de chaque système de glissement  $r$ . A cause de la symétrie d'une structure cristalline de type CFC, le nombre de coefficients d'interaction est réduit à six correspondant à l'une des interactions suivantes :

- $h_0$  : auto-écroissage,
- $h_1$  : interaction coplanaire,
- $h_2$  : jonctions de Hirth,
- $h_3$  : interaction colinéaire,
- $h_4$  : jonctions glissiles,
- $h_5$  : jonctions de Lomer

Les différentes interactions sont présentées dans le tableau IV.4. Les paramètres  $r_0$ ,  $b$  et  $Q$  sont utilisés pour la modélisation de l'écroissage isotrope.  $r_0$  représente la cission critique initiale,  $b$  traduit la sensibilité du matériau vis-à-vis de la saturation et le terme  $Q \sum_r h^{rs}$  représente l'augmentation maximale de la cission critique d'un système de glissement  $s$ .

Le modèle introduit par Méric et Cailletaud possède aussi un écroissage cinématique non linéaire permettant de prendre en considération les interactions, à longue distance entre les dislocations. L'écroissage cinématique est défini par :

$$x^s = c\alpha^s \quad \text{avec} \quad \dot{\alpha}^s = \dot{\gamma}^s - d\dot{\nu}^s\alpha^s \quad (\text{IV.8})$$

où  $c$  et  $d$  sont des paramètres de l'écroissage cinématique. Les différents paramètres du modèle de Méric et Cailletaud pour l'acier 316L utilisé ont été identifiés par Guerchais [91] et reportés dans le tableau IV.5.

## 4 Description du modèle géométrique

Il existe dans la littérature [94, 148, 87, 89, 31, 208, 70, 95, 91] plusieurs propositions de modélisation d'agrégats polycristallins. Dans ce travail, l'étude numérique concerne des calculs d'agrégats polycristallins tridimensionnels par Éléments Finis avec un modèle de plasticité cristalline sous chargements cycliques.

### 4.1 Description du maillage

De manière générale, il existe deux types de maillage pour la modélisation par la méthode des Éléments Finis des agrégats polycristallins : maillage régulier et maillage libre. Les maillages réguliers sont généralement décrits avec des éléments cubiques pour les modélisations tridimensionnelles de l'agrégat et des éléments carrés pour les modélisations en 2D. Les maillages libres sont généralement présentés par des éléments triangulaires et tétraédriques respectivement pour les modélisations en 2D et 3D. L'avantage de l'utilisation

CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS  
POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

	A2	A3	A6	B2	B4	B5	C1	C3	C5	D1	D4	D6
A2	$h_0$	$h_1$	$h_1$	$h_3$	$h_4$	$h_4$	$h_2$	$h_4$	$h_5$	$h_2$	$h_5$	$h_4$
A3	$h_1$	$h_0$	$h_1$	$h_4$	$h_2$	$h_5$	$h_4$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_2$	$h_4$
A6	$h_1$	$h_1$	$h_0$	$h_4$	$h_5$	$h_2$	$h_5$	$h_4$	$h_2$	$h_4$	$h_4$	$h_3$
B2	$h_3$	$h_4$	$h_4$	$h_0$	$h_1$	$h_1$	$h_2$	$h_5$	$h_4$	$h_2$	$h_4$	$h_5$
B4	$h_4$	$h_2$	$h_5$	$h_1$	$h_0$	$h_1$	$h_5$	$h_2$	$h_4$	$h_4$	$h_3$	$h_4$
B5	$h_4$	$h_5$	$h_2$	$h_1$	$h_1$	$h_0$	$h_4$	$h_4$	$h_3$	$h_5$	$h_4$	$h_2$
C1	$h_2$	$h_4$	$h_5$	$h_2$	$h_5$	$h_4$	$h_0$	$h_1$	$h_1$	$h_3$	$h_4$	$h_4$
C3	$h_4$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_2$	$h_4$	$h_1$	$h_0$	$h_1$	$h_4$	$h_2$	$h_5$
C5	$h_5$	$h_4$	$h_2$	$h_4$	$h_4$	$h_3$	$h_1$	$h_1$	$h_0$	$h_4$	$h_5$	$h_2$
D1	$h_2$	$h_5$	$h_4$	$h_2$	$h_4$	$h_5$	$h_3$	$h_4$	$h_4$	$h_0$	$h_1$	$h_1$
D4	$h_5$	$h_2$	$h_4$	$h_4$	$h_3$	$h_4$	$h_4$	$h_2$	$h_5$	$h_1$	$h_0$	$h_1$
D6	$h_4$	$h_4$	$h_3$	$h_5$	$h_4$	$h_2$	$h_4$	$h_5$	$h_2$	$h_1$	$h_1$	$h_0$

TABLE IV.4 – Matrice d'interaction des systèmes de glissement d'une structure CFC

$K$ [MPa.s <sup>1/n</sup> ]	$n$ [-]	$r_0$ [MPa]	$Q$ [MPa]	$b$ [-]	$c$ [MPa]	$d$ [-]
10	10	87	1.06	4.88	$2.04 \times 10^3$	$3.63 \times 10^3$

$h_0$ [-]	$h_1$ [-]	$h_2$ [-]	$h_3$ [-]	$h_4$ [-]	$h_5$ [-]	$C_{1111}$ [GPa]	$C_{1122}$ [GPa]	$C_{1212}$ [GPa]
1	1	0.438	77.2	4.31	2.41	198	125	122

TABLE IV.5 – Paramètres matériau utilisés pour les modélisations d'agrégat polycristallin tridimensionnel identifiés par Guerchais pour l'acier 316L [91]

d'un maillage régulier réside dans le fait qu'il soit simple à générer et que la réalisation d'un maillage périodique avec l'application des conditions aux limites en déplacement soit aisée. Ce type de maillage a été utilisé dans le cadre de ce travail.

L'agrégat polycristallin utilisé dans les simulations numériques est visible en figure IV.3. Il est constitué de 512 grains. La géométrie des grains est cubique. La discrétisation spatiale de l'agrégat est faite par un maillage régulier et périodique avec des éléments finis hexaédriques à interpolation linéaire. Afin de mieux tester l'efficacité des différentes méthodes proposées, plusieurs densités de maillage sont réalisées :

- 1<sup>ère</sup> configuration (Fig. IV.3a) :  $8^3$ . Dans ce cas, l'agrégat est composé d'un seul élément par grain, ce qui donne pour l'ensemble de l'agrégat un maillage contenant 512 éléments.
- 2<sup>ème</sup> configuration (Fig. IV.3b) :  $16^3$ . Dans ce cas, l'agrégat est composé de 8 éléments par grain, ce qui donne pour l'ensemble de l'agrégat un maillage contenant 4096 éléments.
- 3<sup>ème</sup> configuration (Fig. IV.3c) :  $32^3$ . Dans ce cas, l'agrégat est composé de 64 éléments par grain, ce qui donne pour l'ensemble de l'agrégat un maillage contenant 32768 éléments.

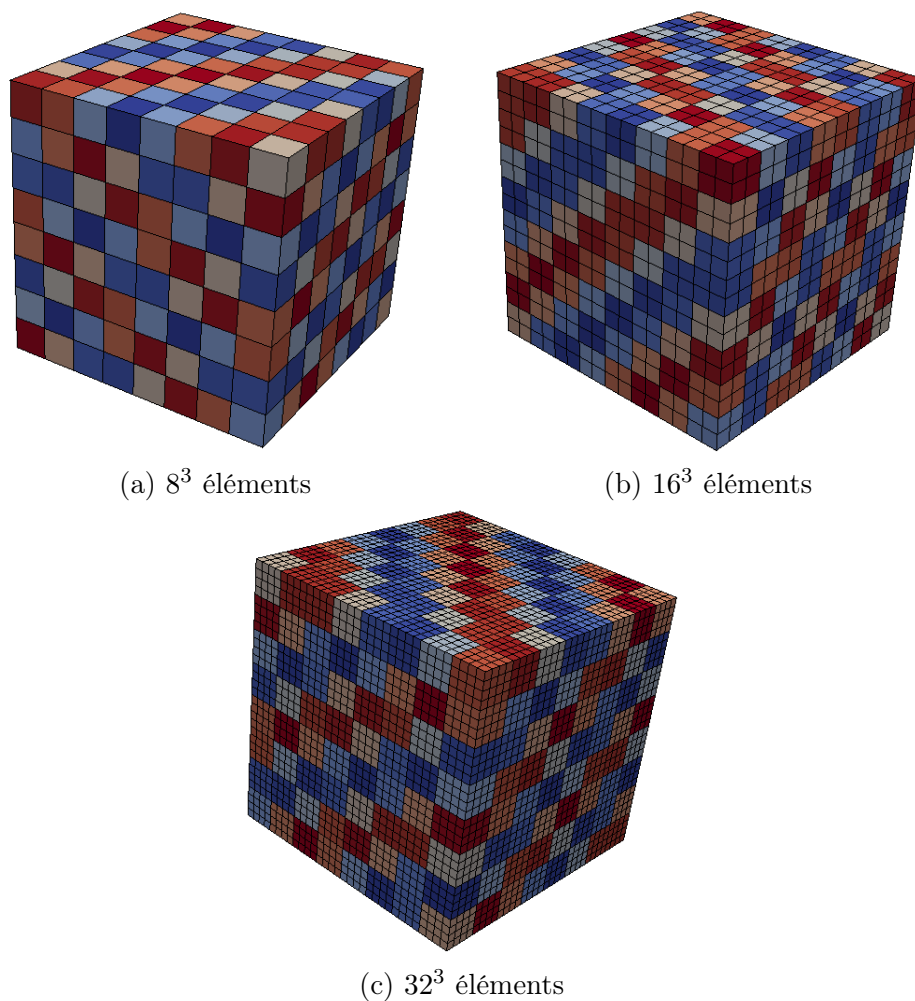


FIGURE IV.3 – Maillage d'un agrégat polycristallin contenant 512 grains discrétisés avec une variété de nombre d'éléments hexaédriques

## 4.2 Conditions aux limites

D'une manière générale, les conditions aux limites homogènes ou périodiques sont prescrites à l'élément de volume pour répondre à la procédure de calcul de moyenne. Pour cela, nous allons imposer des conditions aux limites en s'appuyant sur l'hypothèse de périodicité en déplacement sur les frontières de l'agrégat. Les différentes modélisations ont été réalisées avec un chargement cyclique de type traction-compression piloté en déformation imposée. Ce chargement est appliqué en imposant la moyenne volumique de déformation sur l'agrégat. L'évolution de la déformation macroscopique uniaxiale appliquée est symétrique, avec différentes valeurs d'amplitude imposées allant de 0.1% à 0.3% et une discrétisation temporelle de 200 incréments par cycle. Un exemple d'évolution associée à ce type de chargement est présenté à la figure III.3. Pour tous les cas de chargement étudiés, le rapport de charge  $R_\epsilon = \frac{\epsilon_{min}}{\epsilon_{max}}$  imposé est de  $-1$ .

Les résultats des différentes méthodes seront présentés avec les agrégats polycristallins décrits précédemment. Dans un premier temps, une étude qui vise à comparer la précision des méthodes de réduction de modèle en termes de réponse mécanique sera présentée. Enfin, une étude sur le temps de calcul sera proposée.

## 5 Prédications de la méthode PGD

A titre de rappel, la méthode PGD a été implémentée selon deux stratégies itératives : PGD-V1 et PGD-V2. Avant de commencer la discussion sur la réponse mécanique, il est intéressant de présenter le comportement de ces deux versions vis-à-vis de la convergence pour des simulations numériques d'agrégats polycristallins. Une analyse sur l'influence de l'enrichissement de la base spatio-temporelle vis-à-vis de la réponse mécanique et le temps CPU est ensuite abordée. Une comparaison de ces deux méthodes en termes de quantités mécaniques macroscopiques et mésoscopiques est ensuite conduite.

### 5.1 Convergence de la méthode PGD

Soit  $m$  le nombre de fonctions nécessaires à la convergence de la solution à un cycle donné. L'approximation spatio-temporelle du champ de déplacement, exprimée sous la forme séparée, est donnée par :

$$[\Delta U_{PGD}] \approx \sum_{i=1}^m \alpha^i \{\Delta U_{\underline{x}}\}^i \otimes \{\Delta U_t\}^i \quad (\text{IV.9})$$

Pour la méthode PGD-V1, les figures IV.4, IV.5 et IV.6 présentent la convergence pour les neuf premiers modes du premier cycle. Ces résultats sont obtenus avec un agrégat polycristallin contenant un élément par grain (modèle  $8^3$ ) et sollicité avec un chargement uniaxial simple pour une amplitude de déformation macroscopique appliquée de 0.2%. L'ensemble de la figure IV.4 illustre la solution du champ de déplacement donnée dans la base temporelle pour les neuf premières fonctions  $\{\Delta U_t\}^i$ . La figure IV.5, quant à elle, présente l'évolution de la solution spatiale du champ de déplacement donnée pour le même nombre de modes  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^i$ . La somme de produits tensoriels de ces deux solutions donne la formulation tensorielle du champ de déplacement IV.9 pour  $m = 9$ . La figure IV.6 montre les résultats de la réponse mécanique macroscopique de l'agrégat calculés à partir de la représentation séparée du champ de déplacement. La figure IV.6a présente l'évolution de la solution macroscopique avec les neuf premières fonctions. L'opération d'enrichissement est répétitive jusqu'à la convergence des résultats après 244 modes (Fig. IV.6b). Il est clair que le premier mode enrichi ( $m = 1$ ) converge vers une réponse presque linéaire (fig. IV.6a) (du fait que la résolution avec la première itération est effectuée avec un comportement élastique). L'évolution de la solution commence à s'approcher de la solution convergée (fig. IV.6b) grâce au caractère itératif de la méthode PGD.

Afin de mieux appréhender les résultats obtenus avec la méthode PGD-V2, la figure IV.7a présente la convergence, au niveau de la contrainte macroscopique, pour un chargement monotone. Ces résultats sont prédits avec le même agrégat polycristallin utilisé précédemment. La figure IV.7b, quant à elle, illustre le nombre de fonctions enrichies à chaque itération et nécessaires à cette convergence. La première itération donne une réponse macroscopique proche du linéaire (courbe rouge), ce qui est logique étant donné que le vecteur  $\Delta \underline{Q}^p$  n'est pas connu a priori (et donc nul pour la première itération). Ce premier résultat est donné par un seul enrichissement suffisant (Fig. IV.7b) pour la convergence de la base spatio-temporelle du champ de déplacement puisque la réponse est quasi-linéaire. Les itérations suivantes tendent à se rapprocher de la courbe à la convergence (courbe bleu) après 23 itérations et avec une moyenne d'enrichissement de 98 fonctions. Il est important de noter, qu'à chaque itération, les derniers incréments de temps sont toujours les plus éloignés de la solution du fait du calcul incrémental de la loi de comportement.

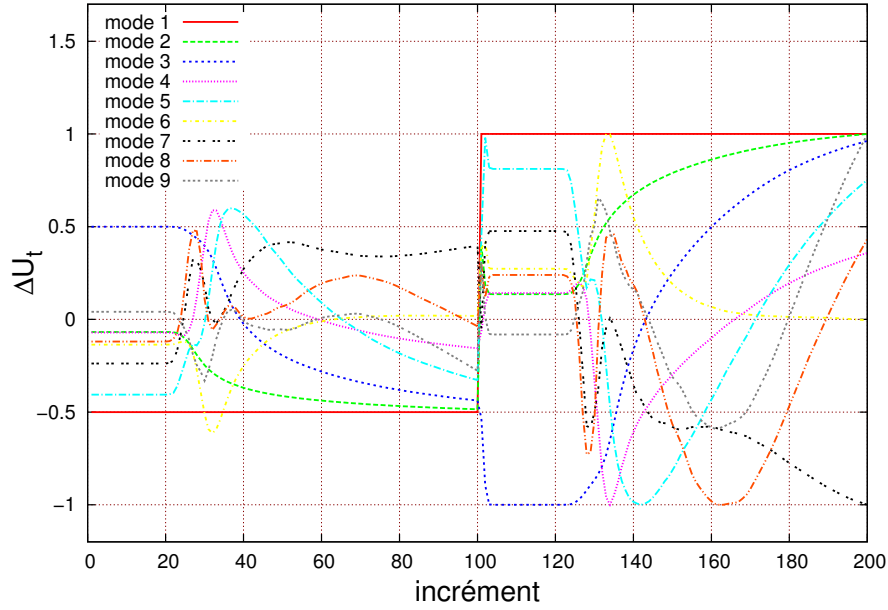


FIGURE IV.4 – Évolution des fonctions de bases temporelles avec les neuf premiers modes du premier cycle

## 5.2 Influence de l'enrichissement sur la réponse PGD

Cette partie présente une étude de sensibilité sur le critère de convergence de la méthode PGD-V2. Le but est de trouver la tolérance optimale  $\epsilon_{PGD}$  en termes de qualité du résultat mécanique et temps CPU. A titre de rappel, ce type d'étude a été déjà conduit dans la section 4.3 du chapitre III dans le cadre d'un modèle de comportement élasto-plastique macroscopique.

Le paramètre  $\epsilon_{PGD}$  est lié principalement à la vérification de la qualité du champ de déplacement, enrichie à un ordre  $m$ , en vérifiant à la fin de l'étape globale l'inégalité de l'équation II.43 ( $\mathcal{R}_{PGD} < \epsilon_{PGD}$ ). Ainsi, pour tester l'influence de ce paramètre, deux cas de figure sont analysés :

- 1<sup>er</sup> cas :  $\{\Delta Q^p\}$  calculé avec  $\{\Delta U\}$  convergé pour  $\|\mathcal{R}_{PGD}\| < \epsilon_{PGD} = 10^{-4}$
- 2<sup>ème</sup> cas :  $\{\Delta Q^p\}$  calculé avec  $\{\Delta U\}$  convergé pour  $\|\mathcal{R}_{PGD}\| < \epsilon_{PGD} = 10^{-3}$

Afin de limiter les temps de calcul, les différents cas test ont été effectués avec l'agrégat polycristallin contenant un seul élément par grain (modèle 8<sup>3</sup>) et 8 éléments par grain (modèle 16<sup>3</sup>). Les agrégats sont soumis à une déformation macroscopique purement alternée sur 100 cycles pour un maximum d'amplitude appliquée  $E_{11} = 0.4\%$ . En effet, au-delà de cette amplitude, la méthode PGD-V2 diverge en utilisant  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ , et ceci car le nombre de fonctions enrichies conduit à une estimation spatio-temporelle du champ de déplacement insuffisante pour obtenir un état mécanique convergé. Il est donc à noter que dans le cadre d'une modélisation en plasticité cristalline, l'utilisation d'une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  avec la PGD-V2 est limitée à une amplitude de déformation macroscopique appliquée valant  $E_{11} = 0.4\%$ . Ces constatations ont été aussi faites dans le cas d'un modèle de comportement en plasticité  $J_2$  (c.f. section 4.3), mais pour une amplitude de déformation appliquée  $E_{11} = 0.5\%$  (voire  $E_{11} = 0.6\%$  pour des modèles contenant un faible nombre de ddl).

La figure IV.8a montre l'évolution de la courbe contrainte-déformation macroscopique obtenue, lors du dernier cycle de chargement, avec les deux cas proposés. Ces résultats ne sont

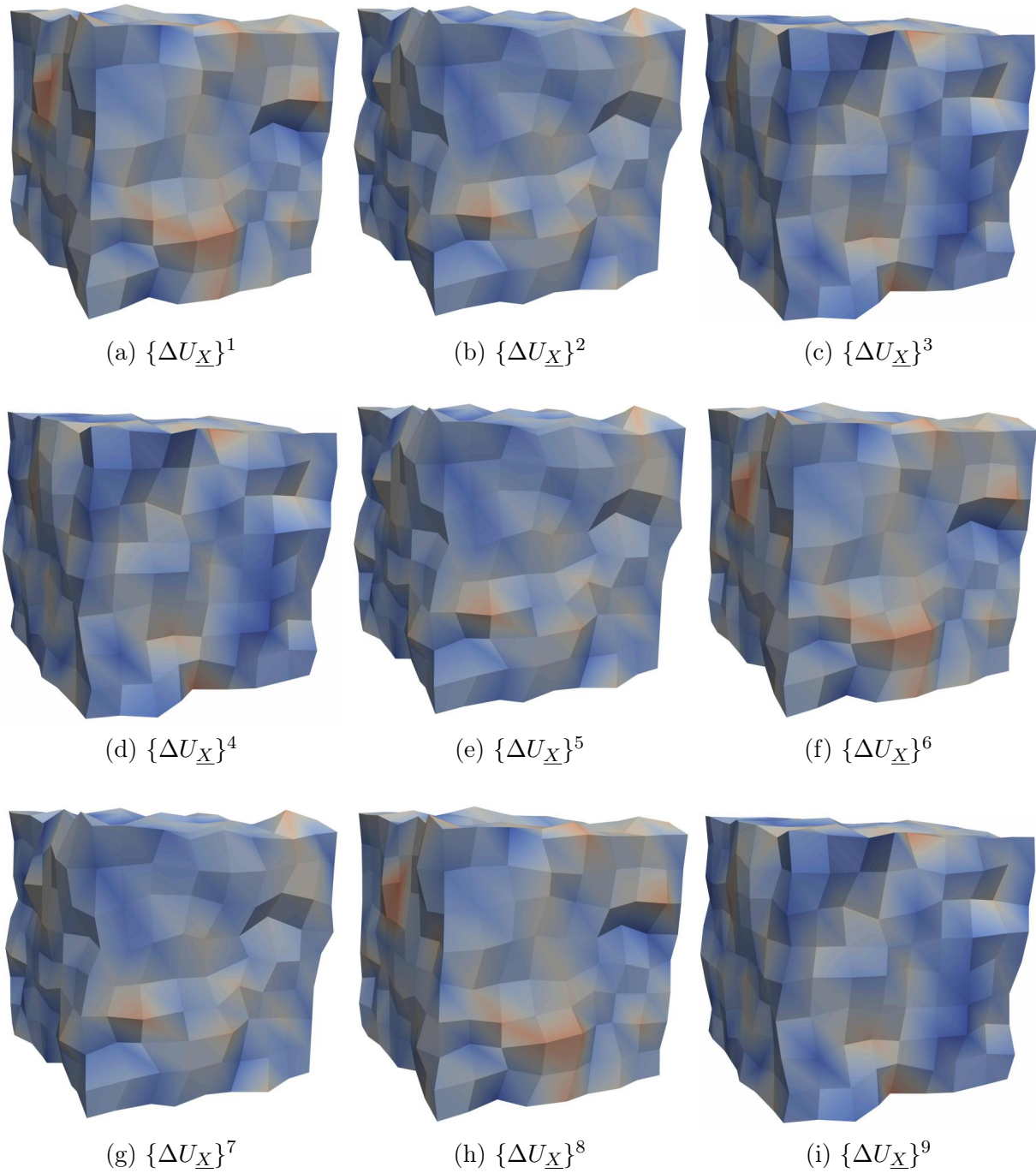


FIGURE IV.5 – Évolution des fonctions de base spatiales avec les neuf premiers modes du premier cycle

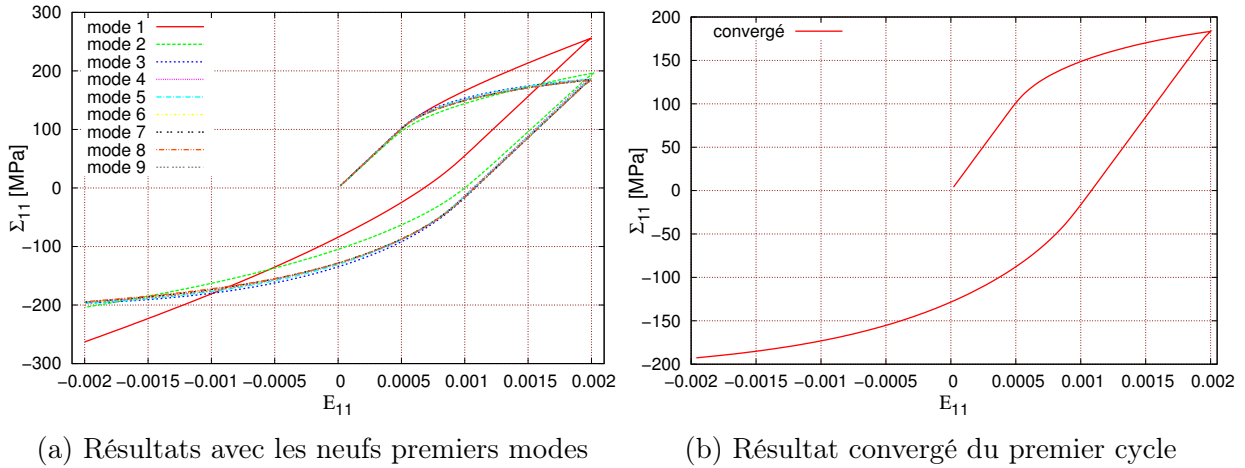


FIGURE IV.6 – Convergence de la méthode PGD-V1 en termes de contrainte-déformation  $\Sigma_{11} - E_{11}$  macroscopiques avec le premier cycle

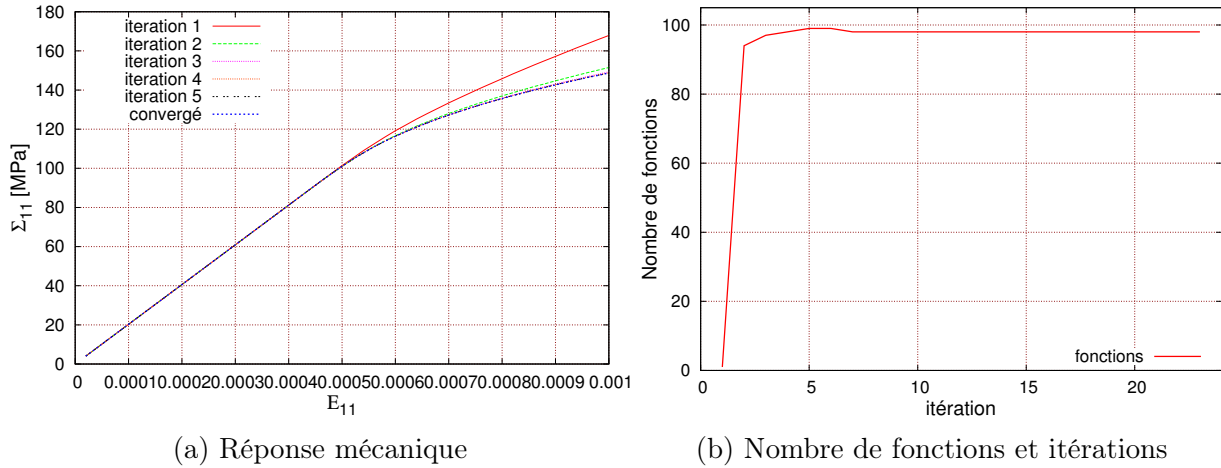


FIGURE IV.7 – Convergence de la méthode PGD-V2 en termes de contrainte-déformation  $\Sigma_{11} - E_{11}$  macroscopiques ainsi nombre de fonctions et itérations nécessaires à la convergence

illustrés que pour quelques cas parmi tous les cas traités : la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> colonne présentent respectivement l'hystérésis des résultats d'un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$  avec le modèle  $8^3$ , et la 3<sup>ème</sup> colonne présente le cas du chargement  $E_{11} = 0.4\%$  avec l'agrégat  $16^3$ . Au vu de ces résultats, il semble que les solutions macroscopiques de la méthode PGD-V2 obtenues pour les deux valeurs de tolérance sont équivalentes, et que la boucle d'hystérésis du dernier cycle est la même. Il est à noter que ces mêmes résultats ont été aussi observés pour les autres cas. La figure IV.8b montre les résultats, à la fin du dernier cycle, en termes de contrainte mésoscopique pour les grains qui composent l'agrégat (Eq. IV.10) pour un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$  et  $E_{11} = 0.2\%$  avec le modèle  $8^3$  et  $E_{11} = 0.3\%$  avec le modèle  $16^3$ . La figure IV.8c présente les résultats de déformation mésoscopique (Eq. IV.11) pour l'agrégat  $8^3$  avec un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  (1<sup>ère</sup> colonne), et une amplitude de  $E_{11} = 0.3\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$  (respectivement 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> colonne) avec l'agrégat  $16^3$ . Ces deux figures montrent bien que la méthode PGD-V2 avec une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  donne la même réponse mécanique dans les grains qu'avec une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ , pour tous les cas étudiés. Pour conclure, la méthode PGD-V2 avec un critère de convergence de l'étape globale plus petit, fournit des bonnes prédictions aux échelles macroscopique et mésoscopique pour une limite de chargement de  $E_{11} = 0.4\%$ .

# CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

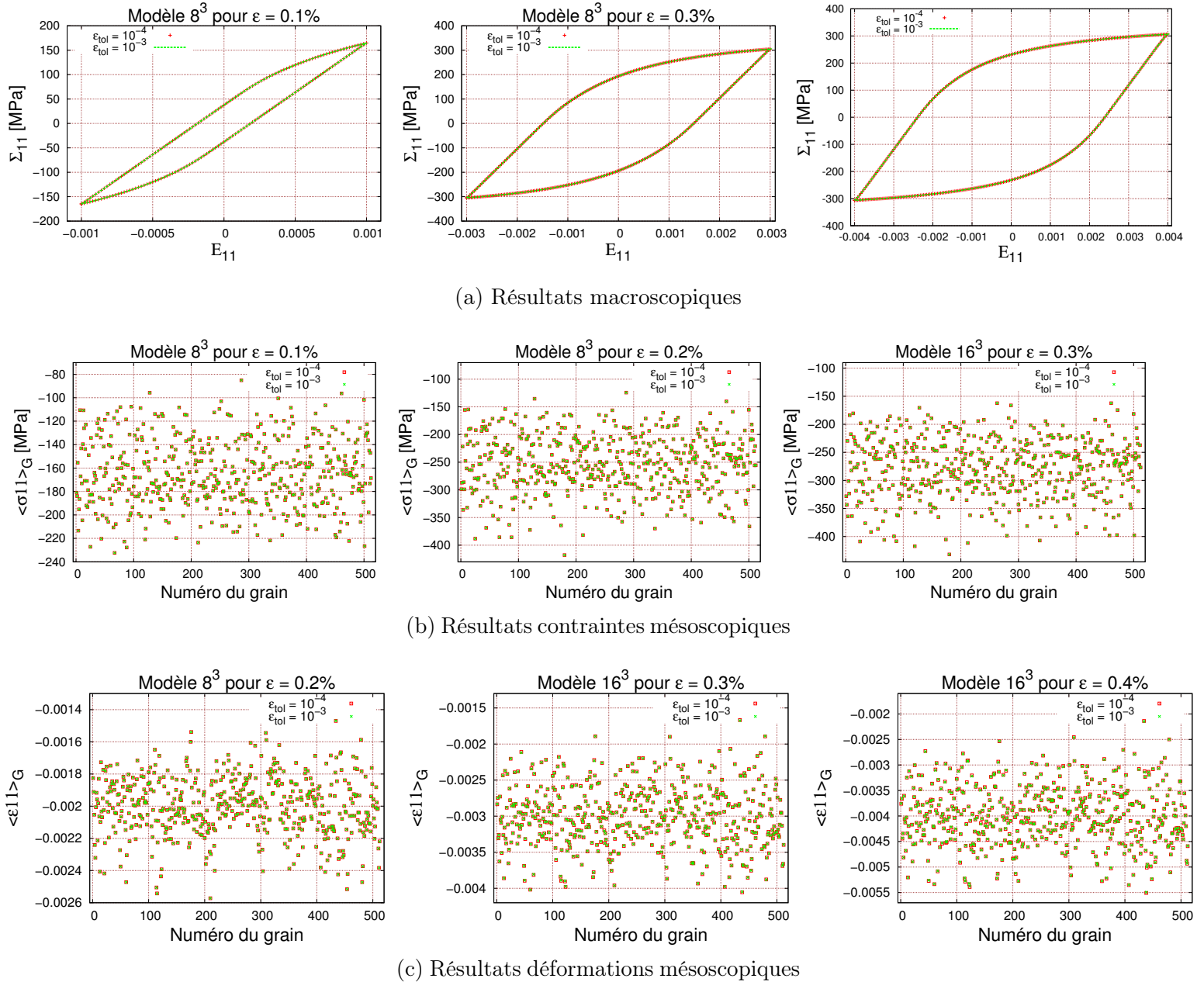


FIGURE IV.8 – Influence du nombre de modes enrichis sur les résultats macroscopiques  $\Sigma_{11} - E_{11}$  et mésoscopiques ( $\langle \sigma_{11} \rangle_G$  et  $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$ ) du dernier cycle obtenus pour un agrégat polycristallin contenant  $8^3$  et  $16^3$  éléments pour différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées



La diminution du nombre d'enrichissement des vecteurs spatio-temporels, notamment  $\{\Delta U_{\underline{x}}\}^i$  et  $\{\Delta U_t\}^i$ , permet d'augmenter la vitesse de convergence de la méthode PGD-V2. Les figures IV.9a et IV.9c illustrent une comparaison entre l'évolution des temps de calcul en fonction du nombre de cycles des deux critères de convergence respectivement pour les modèles d'agrégats  $8^3$  et  $16^3$ . Afin de mieux analyser les réponses temporelles, ces résultats sont accompagnés par une comparaison portant sur le nombre de fonctions enrichies et présentées aux figures IV.9b et IV.9d. Au vu des temps de calcul obtenus, il est clair que quel que soit le chargement appliqué, la résolution de la méthode PGD-V2 avec une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  est plus rapide qu'avec  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ . En effet, pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  avec l'agrégat composé de  $8^3$  éléments, le nouveau critère permet un gain en temps de 36% par rapport au premier critère pour 100 cycles. Ces gains de temps sont aussi observés avec le modèle  $16^3$  de l'agrégat. Avec une tolérance  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , le temps de calcul de la méthode PGD-V2 est réduit d'un facteur proche de 2 par rapport au premier critère.

Les différents gains de temps obtenus peuvent être expliqués par la diminution du nombre de modes spatio-temporels enrichis nécessaires à la convergence. Dans le cas d'un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  avec le modèle  $8^3$ , le nombre de modes présentés à la figure IV.9b (1<sup>ère</sup> colonne) montre que la méthode PGD-V2 avec  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$  nécessite en moyenne une centaine de fonctions au cours des 50 premiers cycles. Seulement 50 fonctions sont nécessaires avec  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ . Une diminution du nombre d'enrichissements, pour les deux cas étudiés, est observée d'un cycle à l'autre. Ce nombre atteint au dernier cycle 80 modes avec le premier critère et 40 modes avec le second. Cette différence conduit à une réduction du nombre de résolutions des deux systèmes linéaires de l'étape d'enrichissement, permettant ainsi un gain en temps CPU intéressant. Il est clair que ce gain avec le nouveau critère est plus significatif en augmentant la non linéarité du problème ainsi que la discrétisation spatiale du modèle. Pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  avec l'agrégat composé de  $8^3$  et  $16^3$  éléments, l'utilisation d'une tolérance de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  conduit à un gain de temps respectivement de 36% et 40% par rapport au  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ . Pour un chargement de  $E_{11} = 0.4\%$  les gains en temps observés respectivement sont 51% et 55% (Fig. IV.9a et IV.9c).

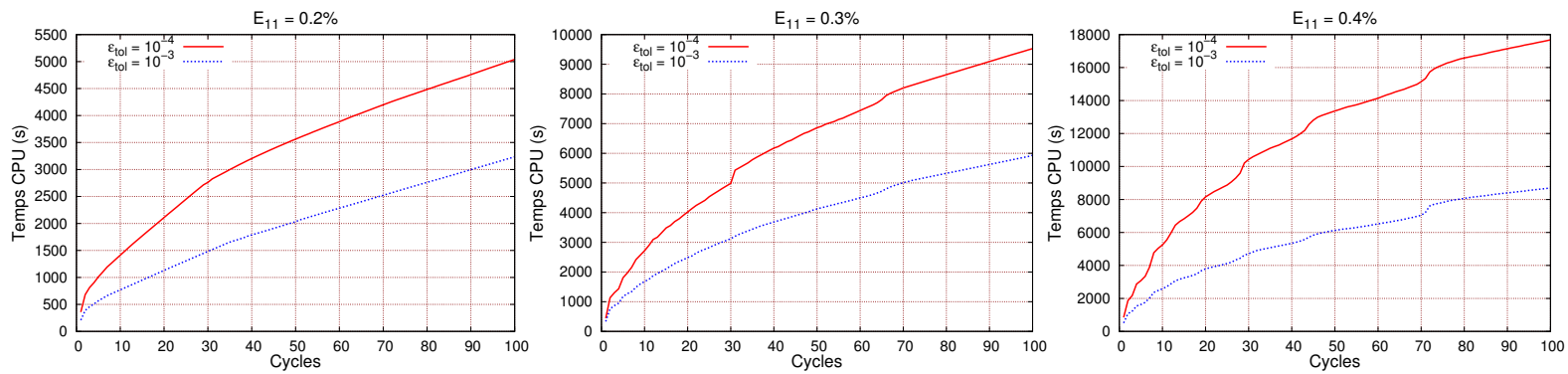
D'une manière générale, la diminution du critère de convergence de l'étape globale permet une bonne estimation des valeurs macroscopiques (moyennes dans l'agrégat) et mésoscopiques (moyennes dans les grains) avec un gain en temps intéressant vis-à-vis de l'ancien critère. Toutefois, ce type de modélisation peut difficilement prendre en compte les différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées, avec un maximum de  $E_{11} = 0.4\%$  dans le cadre d'une modélisation en plasticité cristalline. Dans ce qui suit, les résultats de la réponse mécanique ainsi que les temps de calculs seront présentés avec  $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$ .

### 5.3 Réponse mécanique macroscopique de la méthode PGD

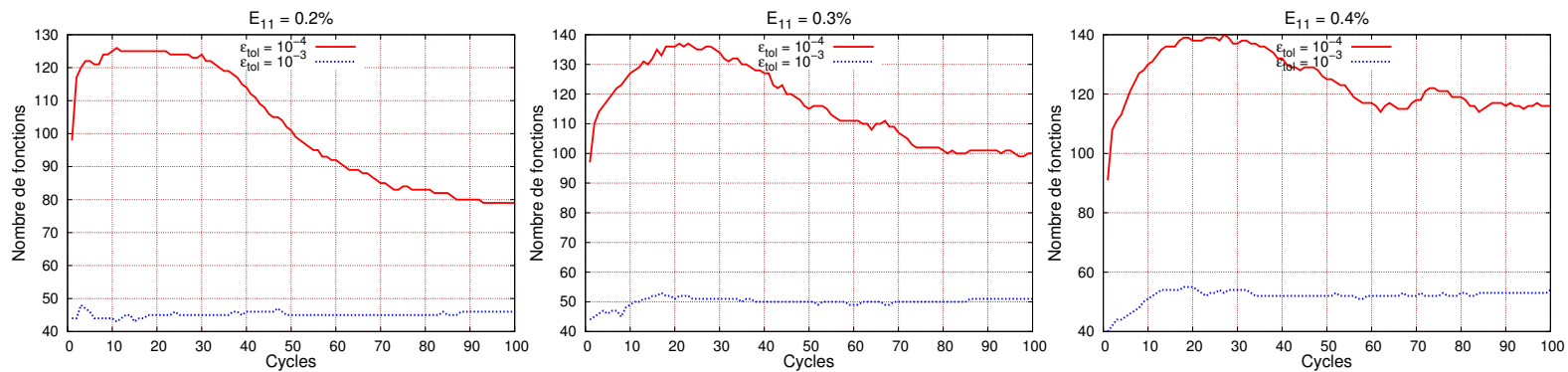
Cette partie présente une comparaison entre les solutions mécaniques macroscopiques obtenues par la méthode incrémentale et incrémentale droite et celles issues des deux méthodes PGD. Les résultats sont exposés pour les trois configurations d'agrégats présentées dans la section 4.1 et une sollicitation en traction purement alternée à différentes amplitudes de déformations totales macroscopiques. Les simulations d'agrégats polycristallins ont été effectuées pour 100 cycles de chargement avec les modèles  $8^3$  et  $16^3$ . En revanche, pour des raisons de temps de calcul élevé lors de l'utilisation de la méthode incrémentale, les calculs avec le modèle  $32^3$  n'ont été réalisés que pour 20 et 30 cycles.

Une analyse sur les iso-valeurs des champs de contrainte et de déformation est exposée aux figures IV.10, IV.11 et IV.12 pour les différentes configurations des agrégats donnés par

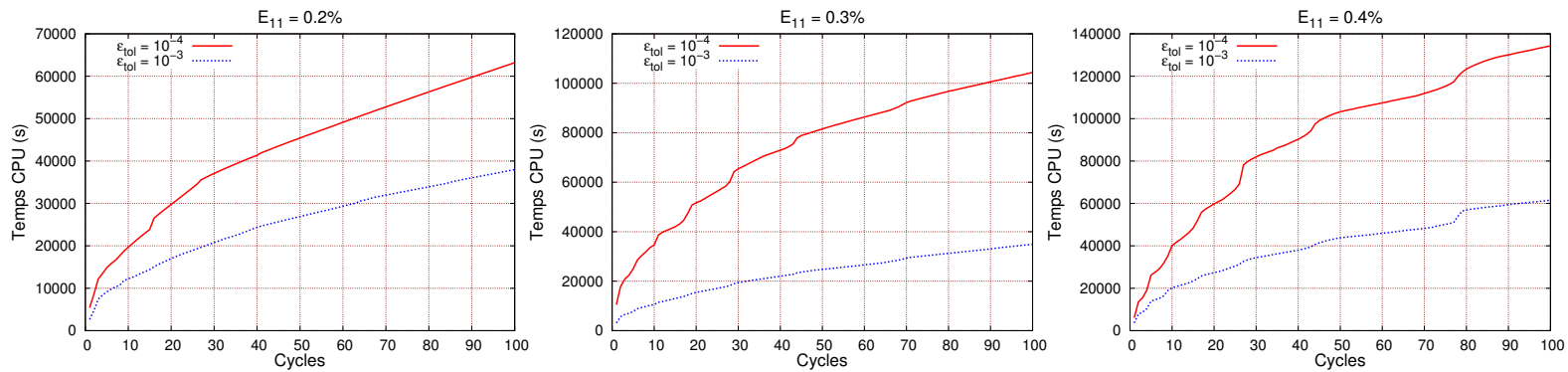
# CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS



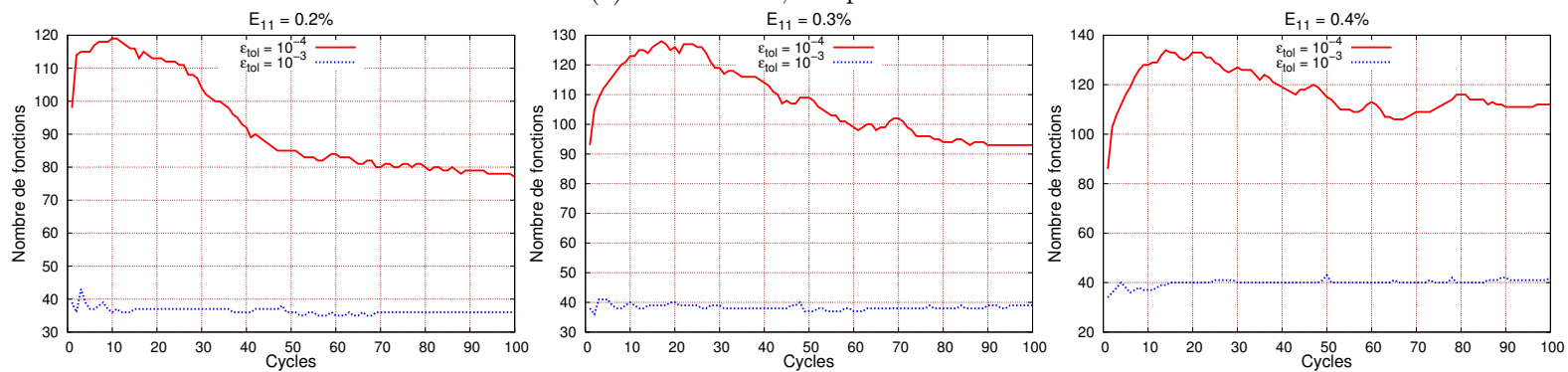
(a) Modèle  $8^3$ ; temps CPU



(b) Modèle  $8^3$ ; nombre de fonctions



(c) Modèle  $16^3$ ; temps CPU



(d) Modèle  $16^3$ ; nombre de fonctions

FIGURE IV.9 – Influence du nombre de modes enrichis pour les résultats macroscopiques et mésoscopiques du dernier cycle obtenus pour des agrégats polycristallins contenant  $8^3$  et  $16^3$  éléments avec différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées

## 5. PRÉDICTIONS DE LA MÉTHODE PGD

la méthode incrémentale et les méthodes PGD. Les figures IV.10 et IV.11 représentent les résultats des simulations obtenus à la fin du premier quart du 50<sup>ème</sup> cycle de chargement respectivement pour les modèles 8<sup>3</sup> et 16<sup>3</sup>. La figure IV.12 correspond aux résultats obtenus à la fin du premier quart de cycle du 20<sup>ème</sup> cycle de chargement. Il est à noter que l'ensemble des graphiques exposés sur la première ligne correspond à la distribution des champs de contrainte et l'ensemble de la deuxième ligne contient les champs de déformation dans l'agrégat. Pour tous les cas présentés, les agrégats polycristallins sont sollicités avec une amplitude de déformation macroscopique appliquée  $E_{11} = 0.2\%$ .

On remarque que la distribution des champs de contrainte dans les agrégats sont fortement hétérogènes au sein des grains et entre les grains. Cette hétérogénéité est aussi constatée avec la distribution des champs de déformation dans les agrégats. Toutefois, il est à noter que la distribution des différentes hétérogénéités intergranulaire et intragranulaire (en contrainte et déformation) sont parfaitement représentées avec une discrétisation de la microstructure raffinée (Fig. IV.11 et IV.12) au contraire du cas d'un maillage grossier (Fig. IV.10). Les distributions des champs mécaniques dans les agrégats polycristallins données par la méthode incrémentale sont correctement prédites par les méthodes PGD-V1 et PGD-V2. De faibles écarts sont constatés avec la méthode PGD-V1 pour les extremums iso-valeurs de déformation qui n'excèdent pas 0.4%. Dans le cas de la la méthode PGD-V2, des écarts plus importants sont observés pour un maximum d'erreur en contrainte égal à 1.8%.

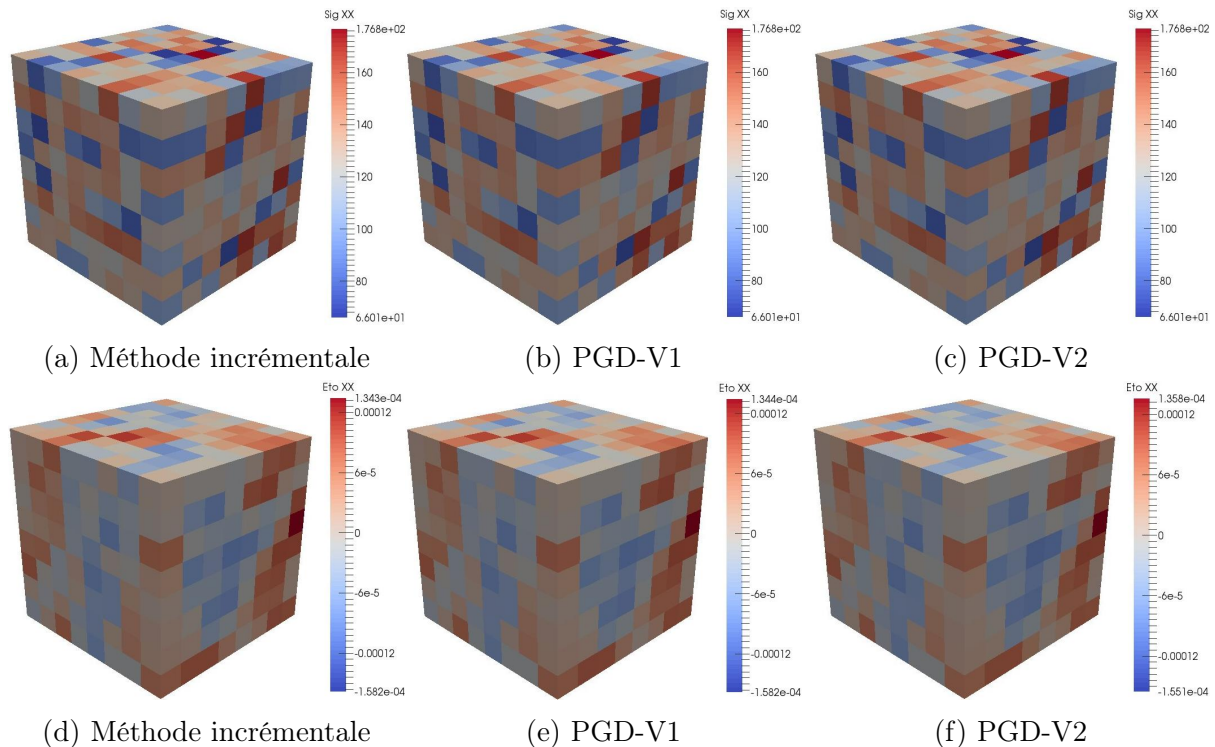


FIGURE IV.10 – Comparaison de la distribution des champs de contrainte et déformation pour un chargement  $E_{11} = 0.2\%$  obtenus avec la méthode incrémentale et PGD lors du 1<sup>er</sup> quart de cycle du 50<sup>ème</sup> cycle avec le modèle d'agrégat 8<sup>3</sup>

Les réponses mécaniques macroscopiques obtenues, lors du dernier cycle de chargement, pour les discrétisations 8<sup>3</sup> et 16<sup>3</sup> éléments sont reportées à la figure IV.13. Les niveaux de déformation sont de  $E_{11} = 0.1\%$ ,  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$ . Ces résultats montrent une bonne adéquation des réponses mécaniques macroscopiques issues des deux méthodes de réduction de modèle PGD vis à vis de la résolution incrémentale et incrémentale droite. La

CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

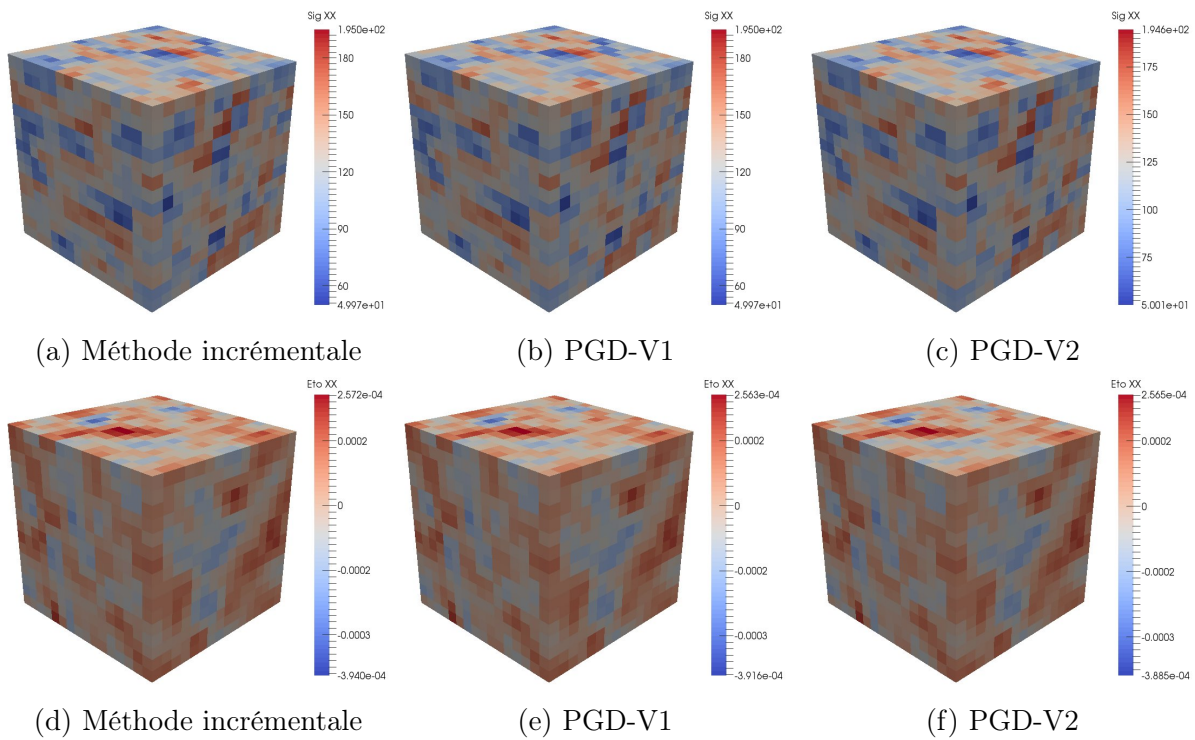


FIGURE IV.11 – Comparaison de la distribution des champs de contrainte et déformation pour un chargement  $E_{11} = 0.2\%$  obtenus avec la méthode incrémentale et PGD lors du 1<sup>er</sup> quart de cycle du 50<sup>ème</sup> cycle avec le modèle d'agrégat  $16^3$

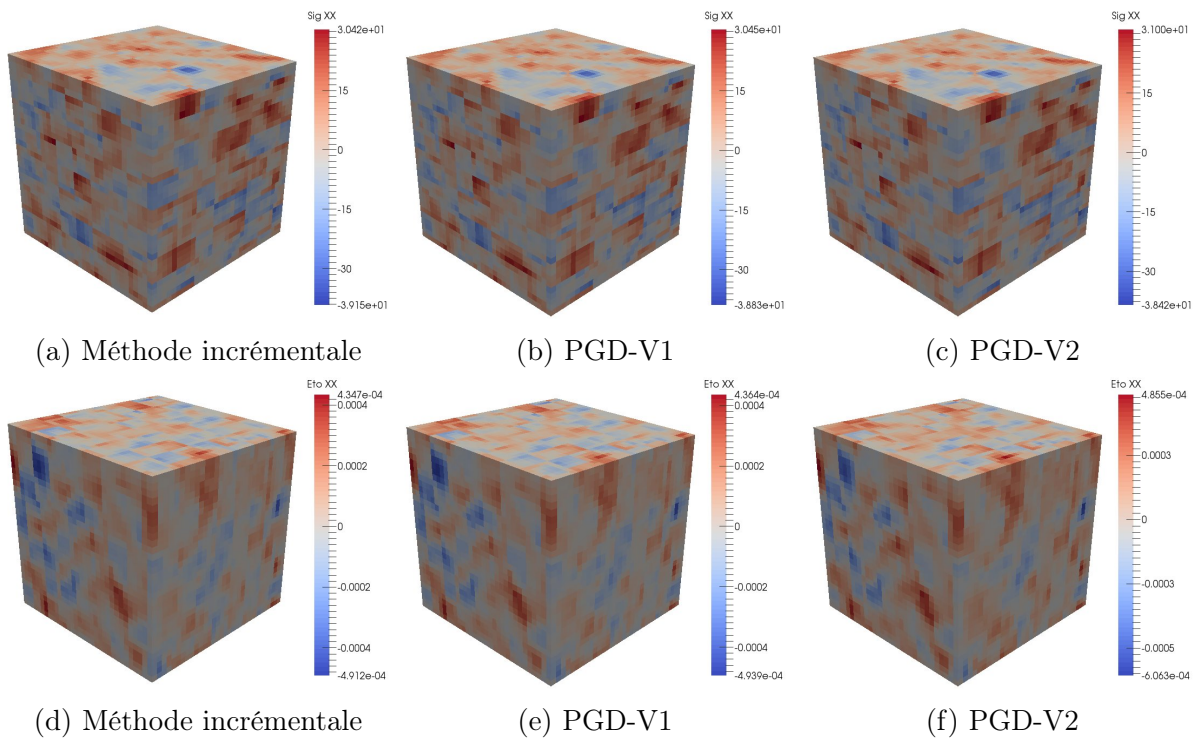


FIGURE IV.12 – Comparaison de la distribution des champs de contrainte et déformation pour un chargement  $E_{11} = 0.2\%$  obtenus avec la méthode incrémentale et PGD lors du 1<sup>er</sup> quart de cycle du 20<sup>ème</sup> cycle avec le modèle d'agrégat  $32^3$

## 5. PRÉDICTIONS DE LA MÉTHODE PGD

figure IV.14 présente, quant à elle, les deux solutions contrainte-déformation macroscopiques suivant la direction du chargement pour l'agrégat polycristallin composé de  $32^3$  éléments. Comme il a été mentionné précédemment, afin de limiter les temps de calculs, seuls les résultats avec un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$  après 30 cycles (Fig. IV.14a) et un chargement  $E_{11} = 0.2\%$  après 20 cycles (Fig. IV.14b) sont présentés. Suite à ces résultats, il est clair que les solutions obtenues par la méthode PGD-V1 et PGD-V2 sont bien équivalentes par rapport au calcul incrémental et incrémental droite quant à la contrainte moyenne. De même, une bonne représentation de l'hystérésis de chaque dernier cycle est observée.

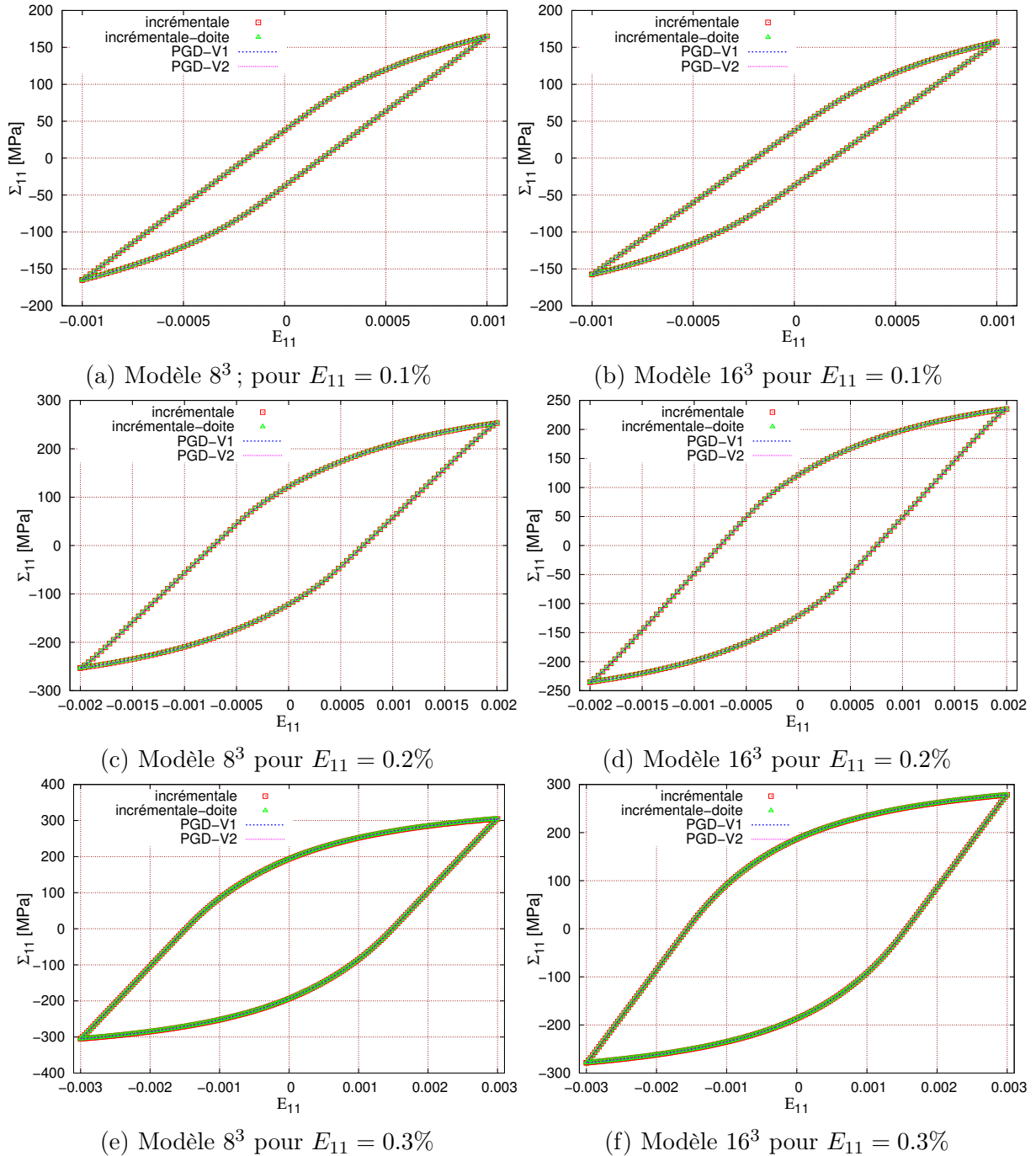


FIGURE IV.13 – Comparaison des réponses contrainte-déformation  $\Sigma_{11} - E_{11}$  macroscopiques au 100<sup>ème</sup> cycle par le calcul incrémental et les méthodes PGD pour différentes amplitudes de déformation imposées et pour un agrégat composé de  $8^3$  et  $16^3$  éléments

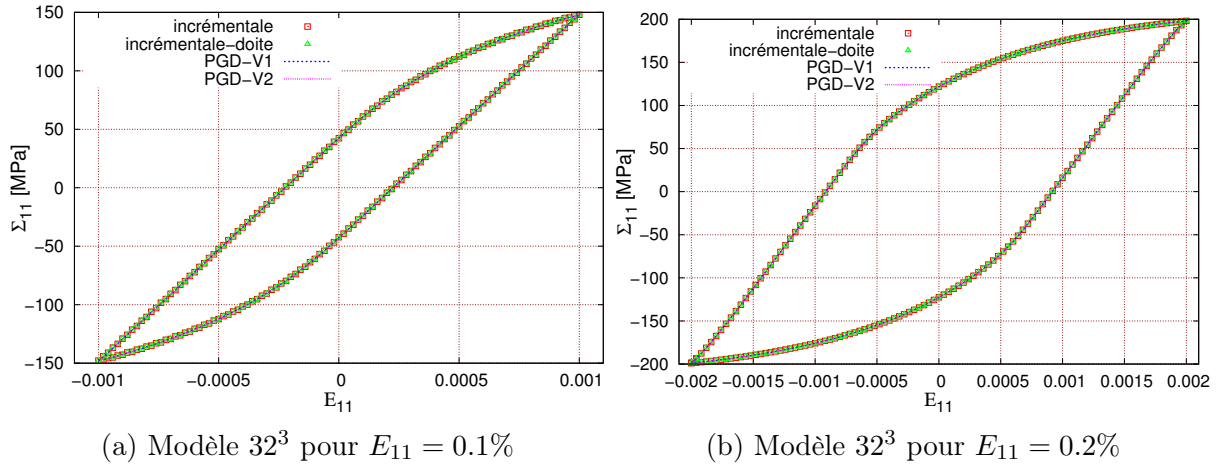


FIGURE IV.14 – Comparaison des réponses contrainte-déformation  $\Sigma_{11} - E_{11}$  macroscopiques obtenues par le calcul incrémental et les méthodes PGD lors du 30<sup>ème</sup> et 20<sup>ème</sup> cycle respectivement pour des amplitudes de déformation  $E_{11} = 0.1\%$  et  $E_{11} = 0.2\%$

## 5.4 Réponse mécanique mésoscopique de la méthode PGD

Dans le cadre de la modélisation des agrégats polycristallins, il est nécessaire de tenir compte de la réponse des champs mécaniques à l'échelle des grains, notamment pour l'étude des problèmes en fatigue. Cette partie présente une comparaison entre les solutions prédites par la méthode incrémentale et les deux méthodes PGD à cette échelle. Les valeurs moyennées dans chaque grain de l'agrégat sont données par :

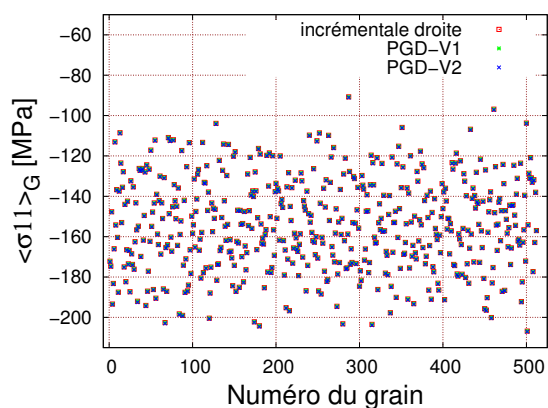
$$\langle \sigma \rangle_G = \frac{1}{V_G} \int_{V_G} \sigma dV \quad (\text{IV.10})$$

$$\langle \varepsilon \rangle_G = \frac{1}{V_G} \int_{V_G} \varepsilon dV \quad (\text{IV.11})$$

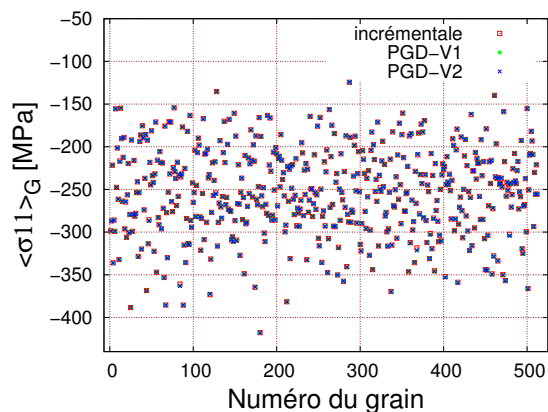
avec  $V_G$  le volume du grain  $G$ . Pour tous les cas étudiés, les agrégats sont soumis aux mêmes chargements considérés précédemment.

La figure IV.15 présente les résultats des calculs PGD et incrémentale, à la fin du dernier cycle, pour les contraintes et déformations mésoscopiques des 512 grains qui composent l'agrégat. Chaque point correspond à un grain. Les résultats montrent bien que les méthodes de réduction de modèle développées permettent d'obtenir des résultats très proches de la méthode incrémentale pour tous les cas étudiés. Il est cependant possible de constater de faibles écarts au niveau de la déformation mésoscopique entre la solution PGD-V2 et la solution incrémentale avec un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  (Fig. IV.15f et IV.15g). En revanche, les erreurs observées n'excèdent pas 0.56% et 0.88% respectivement avec l'agrégat contenant  $8^3$  et  $16^3$  éléments. Dans le cas d'un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$ , des écarts plus importants sont constatés pour la déformation mésoscopique, présentés dans le cas du modèle  $16^3$  (Fig. IV.15h). Ces différences restent tout à fait acceptables avec une erreur relative maximale inférieure à 1.3%. La figure IV.16 illustre la distribution des erreurs relatives de la déformation mésoscopique entre la PGD-V2 et la méthode incrémentale. Ces résultats correspondent aux décalages observés en figure IV.15h. Au vu de ces résultats, il est clair que dans la majorité des grains constituant l'agrégat, on observe une erreur maximale de 0.7%. Ces différences peuvent être atténuées en diminuant la tolérance de convergence de la solution mécanique de la méthode PGDV2 (donnée par l'équation II.15), mais dans ce cas, le temps de calcul augmente significativement.

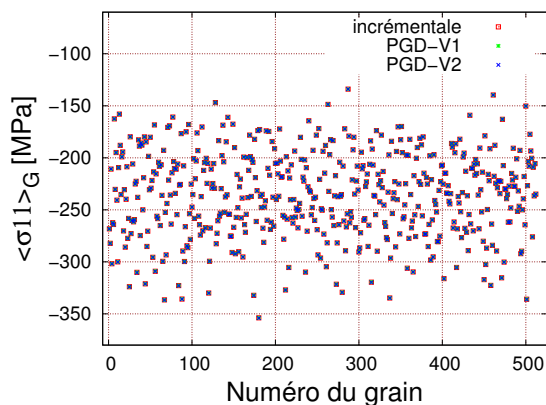
## 5. PRÉDICTIONS DE LA MÉTHODE PGD



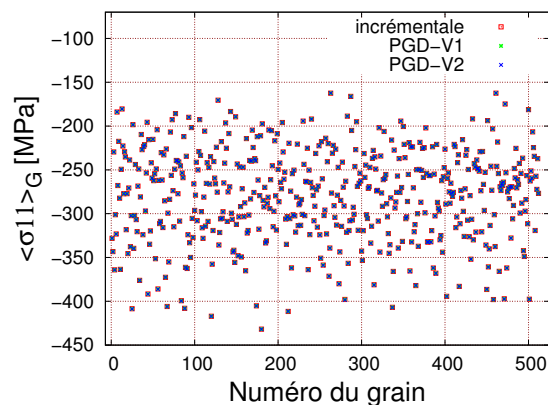
(a) Modèle  $32^3$  pour  $E_{11} = 0.1\%$



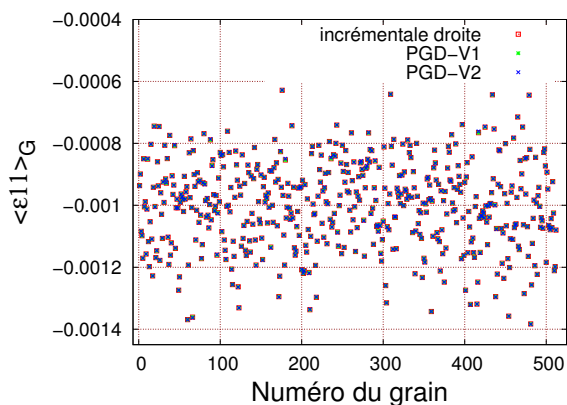
(b) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



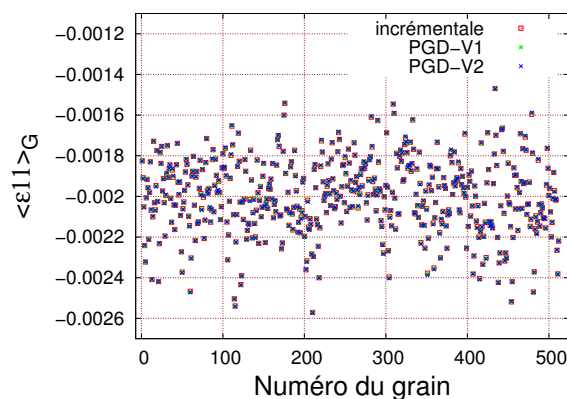
(c) Modèle  $16^3$  pour  $\varepsilon = 0.2\%$



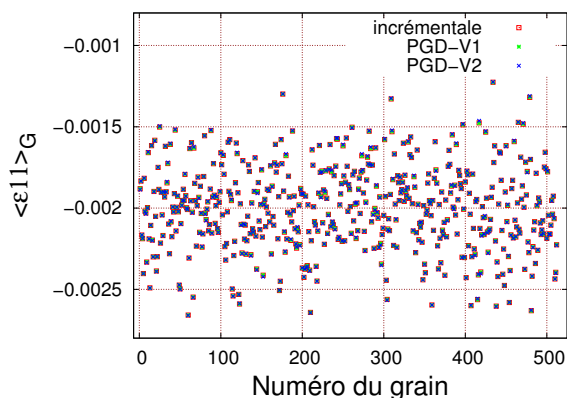
(d) Modèle  $16^3$  pour  $E_{11} = 0.3\%$



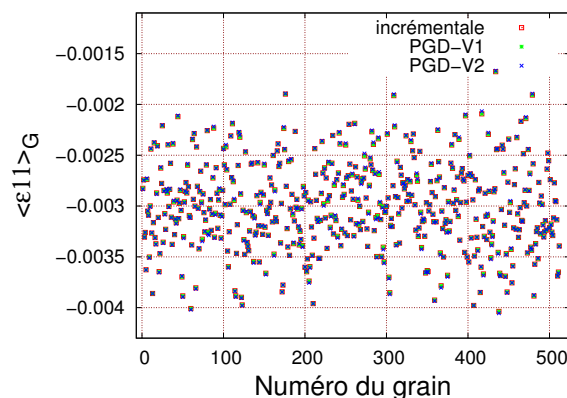
(e) Modèle  $32^3$  pour  $E_{11} = 0.1\%$



(f) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



(g) Modèle  $16^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



(h) Modèle  $16^3$  pour  $E_{11} = 0.3\%$

FIGURE IV.15 – Comparaison des valeurs moyennes  $\langle \sigma_{11} \rangle_G$  et  $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$  dans les grains obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes PGD pour les différentes amplitudes de chargement

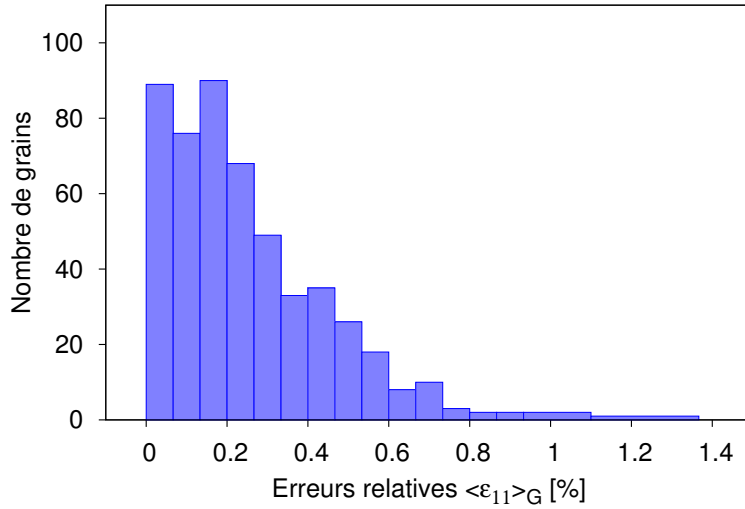


FIGURE IV.16 – Distribution des erreurs relatives entre les déformations mésoscopiques obtenues par la méthode PGD-V2 et la méthode incrémentale pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$  avec le modèle d'agrégat  $16^3$

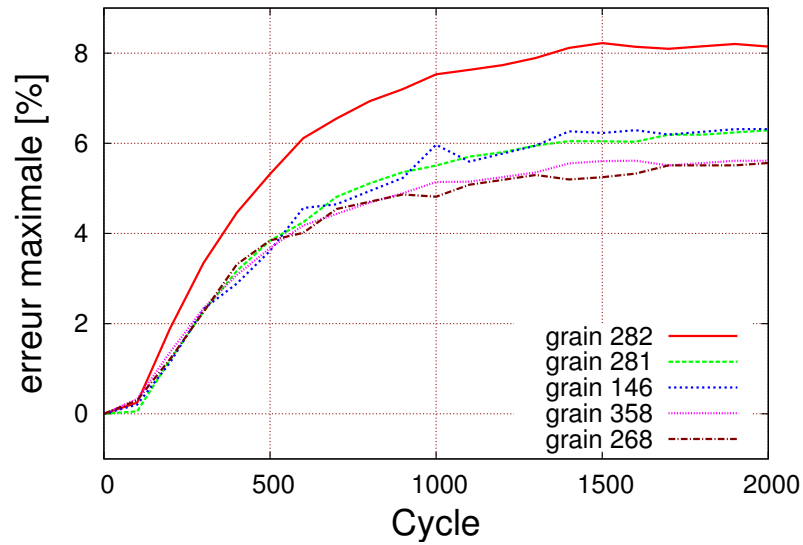
Il est parfois observée que les écarts au niveau de la déformation mésoscopique augmentent au fur et à mesure de l'application du nombre de cycles. Des simulations numériques d'agrégats polycristallins ont été conduites jusqu'à 2000 cycles afin de mieux comprendre l'évolution de ce décalage. La figure IV.17 représente les erreurs relatives maximales dans 5 grains ainsi que l'erreur moyenne dans les 512 grains. Ces résultats sont déterminés à la fin de chaque 100 cycles et pour  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$  avec l'agrégat contenant un seul élément par grain. Ces résultats montrent que quel que soit le niveau du chargement appliqué, l'erreur relative maximale subit une évolution rapide dans un premier temps jusqu'à 7.53% (grain 282) après 1000 cycles pour  $E_{11} = 0.2\%$  (Fig. IV.17b) et 2.8% (grain 262) après 1100 cycles pour  $E_{11} = 0.3\%$  (Fig. IV.17c). Ensuite, l'évolution de l'erreur devient beaucoup plus lente jusqu'à atteindre une saturation à partir du 1500<sup>ème</sup> et 1600<sup>ème</sup> cycle respectivement pour  $E_{11} = 0.2\%$ , avec 8.14% d'erreur, et  $E_{11} = 0.3\%$  pour un écart de 2.95%. La figure IV.17c montre que l'erreur moyenne pour les 512 grains présente une saturation après 1300 cycles de chargement. L'écart maximal constaté est de 1.51% et 0.65% respectivement pour  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$ . La méthode PGD-V2 prédit donc bien les valeurs de déformation moyenne et l'écart observé tend vers une stabilisation au fur et à mesure que le nombre de cycles augmente.

La figure IV.18 présente les résultats des distributions de la contrainte et de la déformation moyennées dans chaque grain  $\langle \sigma_{11} \rangle_G - \langle \varepsilon_{11} \rangle_G$  pour les trois amplitudes de chargement. Ces résultats correspondent bien à ce qui a été constaté précédemment. En effet, les calculs avec la méthode PGD fournissent une bonne description des résultats mésoscopiques vis-à-vis de la méthode incrémentale. Les faibles écarts constatés précédemment au niveau de la déformation mésoscopique avec la méthode PGD-V2 sont aussi observés avec des amplitudes de chargement  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$  pour une discrétisation de la microstructure respectivement avec un seul élément et 8 éléments par grain (Fig. IV.18b et IV.18c).

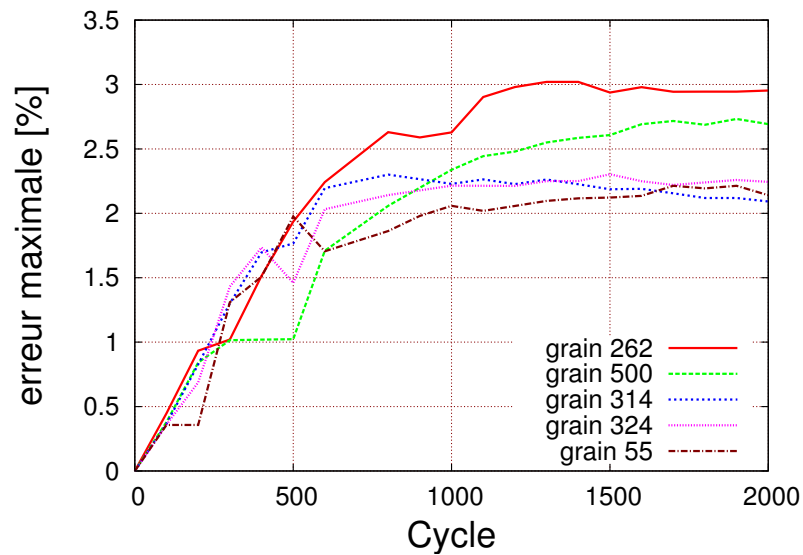
Pour conclure, une bonne adéquation des résultats à l'échelle des grains entre les réponses issues d'une résolution incrémentale et les deux méthodes de réduction de modèle PGD est observée. Ces constats valent pour différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées ainsi que pour les trois discrétisations. Une moins bonne adéquation des déformations mésoscopiques est rencontrée, en particulier avec la méthode PGD-V2, pour des amplitudes de chargement au-delà de  $E_{11} = 0.2\%$ . Ces différences restent néanmoins



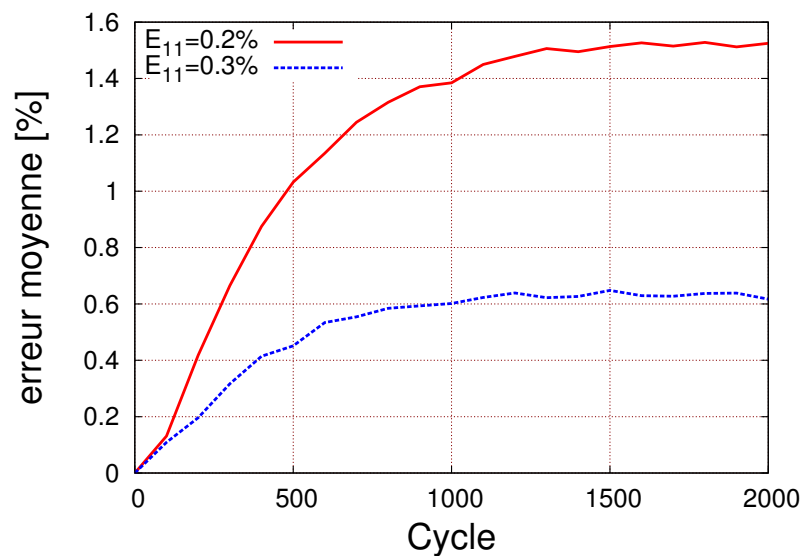
## 5. PRÉDICTIONS DE LA MÉTHODE PGD



(a) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



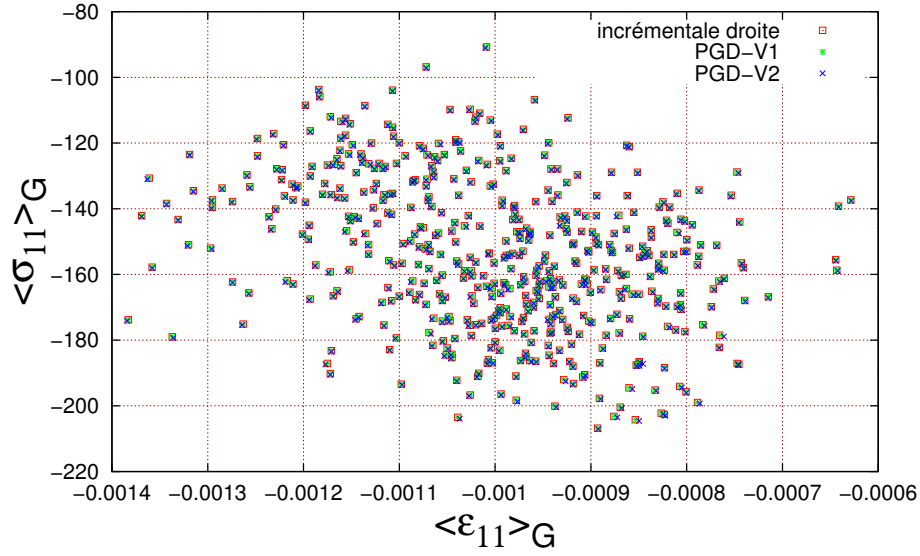
(b) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.3\%$



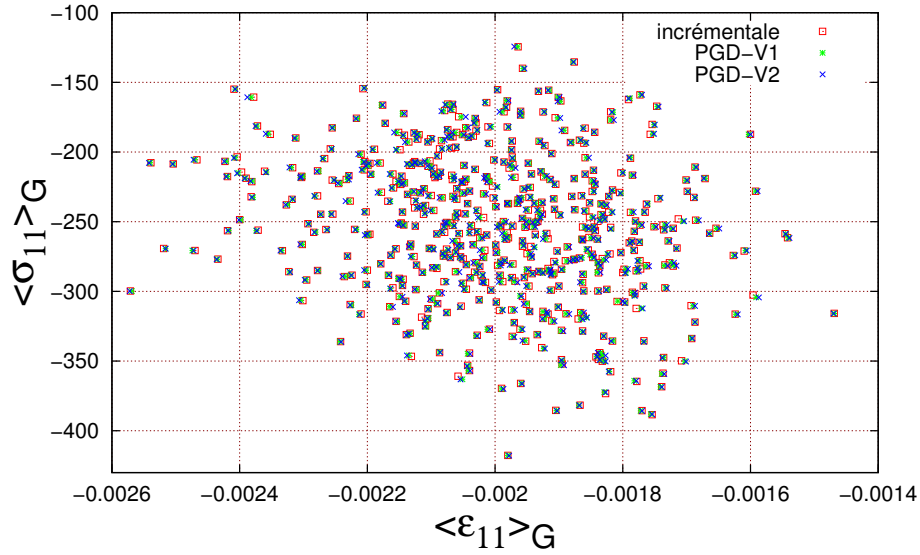
(c) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$

FIGURE IV.17 – Évolution de l'erreur maximale et moyenne en fonction du nombre de cycles entre les résultats de la méthode incrémentale et PGD-V2 au niveau de la déformation mésoscopique

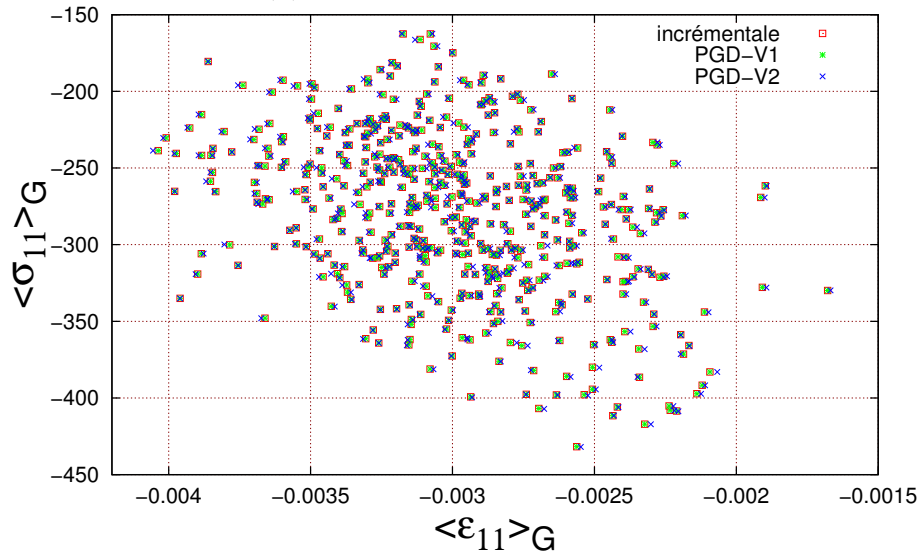
CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS  
POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS



(a) Modèle  $32^3$  pour  $E_{11} = 0.1\%$



(b) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



(c) Modèle  $16^3$  pour  $E_{11} = 0.3\%$

FIGURE IV.18 – Distribution des contraintes et déformations  $\langle \sigma_{11} \rangle_G - \langle \varepsilon_{11} \rangle_G$  moyennes dans les grains obtenue avec la méthode incrémentale et les méthodes PGD pour différentes amplitudes de chargement

tout à fait acceptables car l'évolution de l'erreur est quasiment stable après une modélisation de 2000 cycles.

Après avoir présenté les différents résultats des deux versions de la méthode PGD avec le modèle de plasticité cristalline, la section suivante illustre le même travail abordé pour les différentes versions de la méthode APR cyclique.

## 6 Résultats de la méthode APR cyclique

Cette section présente les résultats de la méthode APR cyclique avec les modèles d'agrégats polycristallins sous chargement cyclique. Avant de commencer l'analyse sur les différentes quantités mécaniques, une étude sur la stabilité et l'initialisation de la base réduite sera présentée. Ensuite, une étude sur la convergence des différentes stratégies en termes d'initialisation de la base, procédé correction-adaptation et calcul réduit sera exposée. Enfin, la réponse mécanique des agrégats polycristallins prédite par les différentes versions de la méthode APR cyclique sera analysée en comparaison avec la méthode incrémentale à l'échelle macroscopique dans un premier temps, et à l'échelle des grains dans un second temps.

### 6.1 Étude de stabilité de la base APR cyclique

La stratégie incrémentale de l'adaptation de la base consiste à enrichir la base, au besoin, par un ensemble de sous-espaces de Krylov. Ceci peut conduire à un coût de calcul important et proportionnel au nombre de cycles. Dans le cadre d'une modélisation en plasticité  $J_2$  (c.f. section 5.2 chapitre III), seuls les trois premiers cycles après l'initialisation sont adaptés. Cette partie présente une étude sur ce thème dans le cadre d'une modélisation en utilisant la plasticité cristalline.

Les figures IV.19a et IV.19b, respectivement pour la APR-V3 et APR-V4, illustrent le nombre de fonctions enrichies par cycle pour la base réduite durant 30 cycles de chargement. Ces résultats sont obtenus avec une modélisation d'agrégats polycristallins contenant  $16^3$  éléments et un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$ . L'initialisation de la base est effectuée avec plusieurs cas : au 1<sup>er</sup>, 3<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> cycle. Chaque cycle est discrétisé avec 200 incréments de temps. Ces résultats montrent que seuls les premiers cycles, avec une résolution du modèle réduit, sont les cycles les plus enrichis. En particulier, l'enrichissement est effectué principalement au premier cycle après initialisation. Ensuite, il devient plus stable avec les cycles suivants et la taille du problème est rapidement stabilisée.

Comme dans le cadre d'une modélisation en plasticité  $J_2$ , on propose de contrôler la validité de la base et de l'enrichir à l'aide de sous-espaces de Krylov pour les trois premiers cycles après initiation. La stratégie d'initiation ainsi que l'adaptation de la base réduite est présentée à la figure II.18.

### 6.2 Influence du choix de l'initialisation de la base réduite

La première étape de l'algorithme de la méthode APR cyclique consiste à initialiser une base réduite  $[\Phi_x^0]$ . Cette base sera utilisée dans la suite du calcul pour la résolution du système linéaire réduit suivant une stratégie de résolution et d'adaptation incrémentale.

La base  $[\Phi_x^0]$  est définie généralement à partir des calculs préliminaires afin de construire les fonctions de forme du modèle réduit. D'un point de vue pratique, des auteurs [222, 249] ont montré que le choix de l'initialisation de la base réduite n'a pas l'influence sur la qualité

## CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

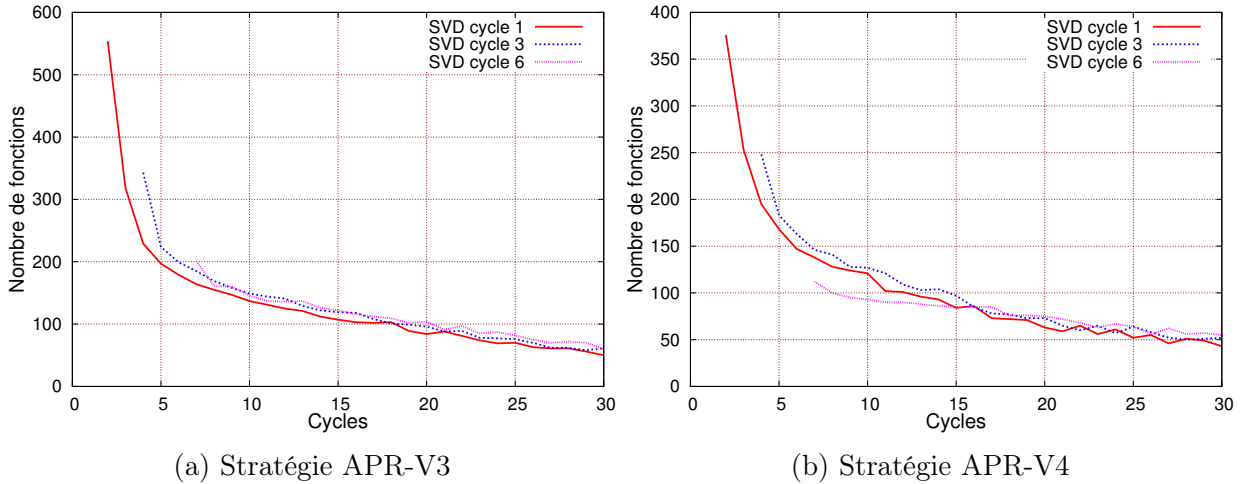


FIGURE IV.19 – Nombre d’enrichissements par cycle avec les méthodes APR-V3 et APR-V4 pour le modèle  $16^3$  éléments avec une amplitude de déformation macroscopique appliquée  $E_{11} = 0.1\%$

des résultats mais sur la vitesse de convergence de l’algorithme. Ces résultats ont été observés dans le cadre de la modélisation avec un comportement macroscopique (c.f. section 5.3 chapitre III). L’initialisation de la base à partir du 6<sup>ème</sup> cycle conduit à des résultats plus rapides qu’avec une base extraite au premier cycle tandis que la précision de la réponse mécanique est la même. Cette partie repose sur l’étude du choix de l’initialisation de la base réduite dans le cadre d’une modélisation à l’échelle des grains avec les deux stratégies d’adaptation de la base réduite. Pour cela, deux cas de figures sont analysés :

**Premier cas** Une base initiale extraite pour l’histoire du premier cycle à partir de :

- Calcul incrémental du premier cycle avec une mémorisation de l’histoire du champ de déplacement à chaque incrément de temps
- Une SVD tronquée appliquée sur l’histoire de  $[\Delta U(X, t)]$
- Calcul avec le modèle réduit et adaptation de la base réduite si nécessaire des trois premiers cycles après initialisation

**Deuxième cas** Une base initiale extraite après six cycles à partir de :

- Calcul incrémental de six cycles avec une mémorisation de l’histoire du champ de déplacement effectuée à partir du 4<sup>ème</sup> cycle
- Une SVD tronquée appliquée sur l’histoire de  $[\Delta U(X, t)]$
- Calcul avec le modèle réduit et adaptation de la base réduite si nécessaire des trois premiers cycles après initialisation

L’ensemble des figures IV.20 présentent les résultats obtenus avec la méthode APR cyclique pour les deux stratégies d’initialisation proposées. La réponse mécanique est illustrée à travers les valeurs macroscopiques (moyennes dans l’agrégat) et mésoscopiques (moyennes dans les grains) obtenues lors du 100<sup>ème</sup> cycle de chargement. L’évolution du temps de calcul est aussi présentée afin d’étudier l’influence du critère d’initialisation de la base réduite sur la vitesse de convergence. Les résultats illustrés dans une même colonne correspondent aux résultats avec la même stratégie d’adaptation de la base réduite. Ces derniers sont obtenus à partir d’une simulation d’un agrégat polycristallin contenant 512 éléments et une déformation macroscopique appliquée  $E_{11} = 0.2\%$ .

Au vu des diagrammes contrainte-déformation macroscopiques (Fig. IV.20a et IV.20b), la méthode APR cyclique avec une base extraite au 6<sup>ème</sup> cycle permet d’obtenir des résultats proches de la méthode incrémentale. Un décalage entre les extremums de contrainte et de

## 6. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

déformation ne dépasse pas respectivement 0.7% et 0.56% avec la APR-V3 et 0.75% et 0.66% avec la APR-V4. Cependant, des écarts plus importants sont observés avec la réponse APR cyclique pour une base initialisée à la fin du premier cycle. En effet, les contraintes et les déformations macroscopiques maximales prédites par la méthode APR cyclique, avec la stratégie du premier cas, surestiment les contraintes et déformations maximales prédites par le calcul incrémental avec un décalage de 2.9% et 3.2% en contrainte et 2.8% et 3.2% en déformation respectivement pour les APR-V-3 et APR-4.

Pour les valeurs de déformation moyennées dans chaque grain (Fig. IV.20c et IV.20d), des écarts sont constatés avec la première stratégie d'initialisation, écart relatif maximum de l'ordre de 3.7% et 4.39% dans le grain 479 respectivement pour la APR-V3 et APR-V4 ainsi que 2.8% et 3.2% d'erreur moyenne prédite par l'ensemble des grains de l'agrégat. Une amélioration de la qualité des résultats est observée dans le cas d'une modélisation en utilisant la deuxième proposition d'initialisation. Une meilleure représentation des valeurs moyennes des déformations avec la méthode APR cyclique est rencontrée pour une erreur relative maximale inférieure à 1% pour les deux stratégies d'adaptation. L'erreur moyenne donnée par l'ensemble des grains est de l'ordre de 0.38% avec la APR-V3 et 0.42% avec la APR-V4 par rapport au calcul incrémental.

L'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de cycles est présentée aux figures IV.20e et IV.20f. Ces résultats visent à comparer le temps de calcul nécessaire pour atteindre 100 cycles avec les deux stratégies d'initialisation proposées. Au vu de ces résultats, il est clair que la méthode APR cyclique avec la deuxième stratégie permet un gain en temps de 14% et 18% respectivement pour la APR-V3 et APR-V4 par rapport à la première stratégie d'initialisation. Cela s'explique par le nombre de fonctions enrichies dans la base réduite, lors des trois cycles d'adaptation, plus significatif dans le cas du premier cas proposé. Ces derniers sont listés au tableau IV.6.

Stratégie utilisée	Premier cas			Deuxième cas		
	2 <sup>ème</sup> cycle	3 <sup>ème</sup> cycle	4 <sup>ème</sup> cycle	7 <sup>ème</sup> cycle	8 <sup>ème</sup> cycle	9 <sup>ème</sup> cycle
nombre de fonctions enrichies avec APR-V3	673	331	215	490	267	189
nombre de fonctions enrichies avec APR-V4	492	278	197	276	207	170

TABLE IV.6 – Comparaison du nombre de modes enrichis avec les méthodes APR-V3 et APR-V4 pour les deux stratégies d'initialisation de la base réduite

Pour conclure, de meilleurs résultats de la réponse mécanique prédits avec la méthode APR cyclique sont observés pour une base extraite au 6<sup>ème</sup> cycle plutôt que pour une initialisation à la fin du premier cycle. L'enrichissement de la base issue de l'histoire du champ de déplacement du premier cycle est plus significatif par rapport à une base initiale extraite à partir du sixième cycle. Cela est expliqué par les changements rapides des solutions dans le premier cas, qui conduit à une augmentation du temps de calcul. Tout comme dans le cadre du chapitre III, la stratégie d'initialisation de la base réduite utilisée avec la méthode APR cyclique pour une modélisation à l'échelle des grains est celle du deuxième cas proposé.

### 6.3 Convergence de la méthode APR cyclique

Cette partie présente une étude de la méthode APR cyclique vis-à-vis de la convergence de son algorithme itératif dans le cadre de la modélisation des agrégats polycristallins.

CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS  
POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

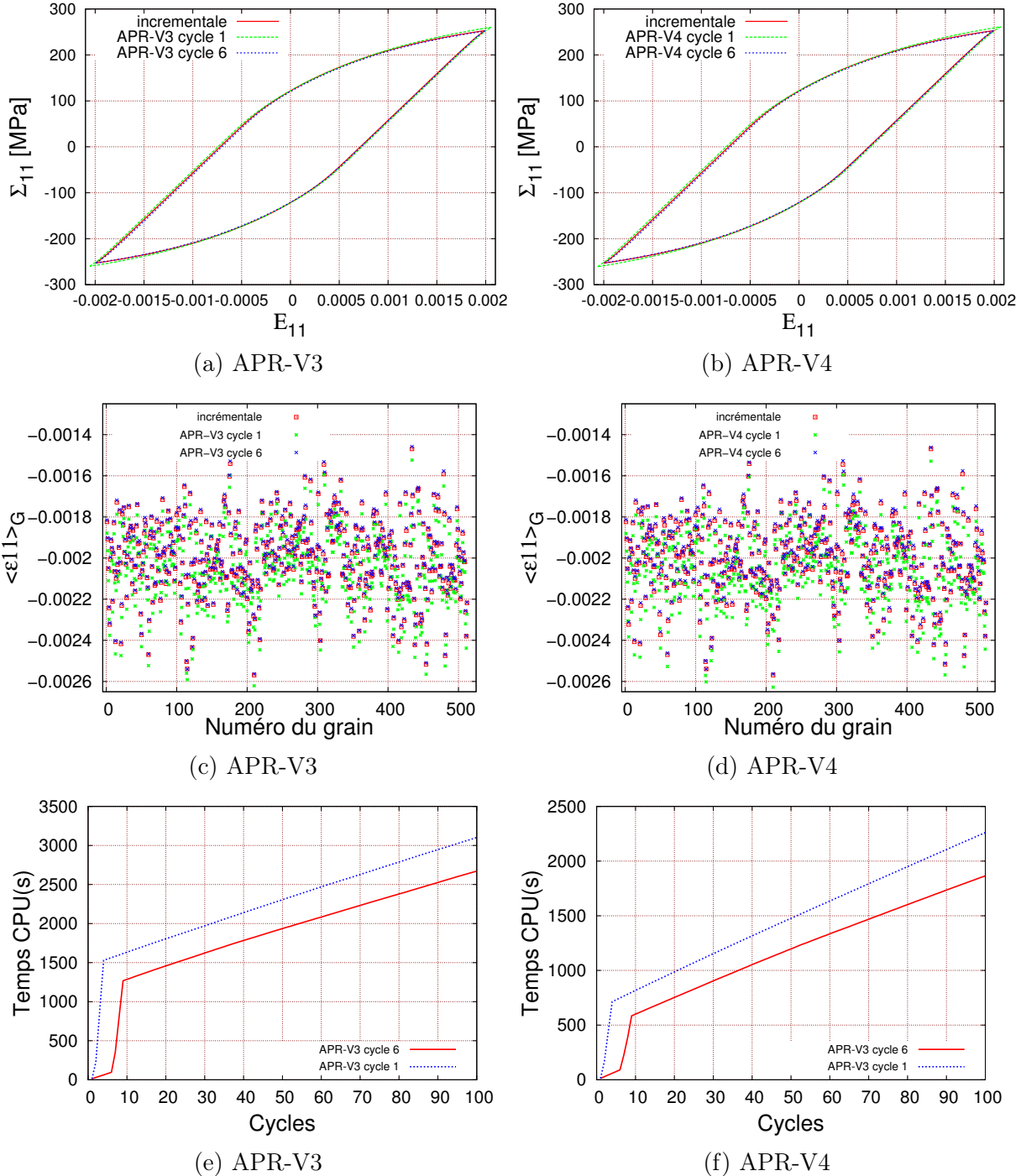


FIGURE IV.20 – Influence de l'initialisation de la base réduite pour la réponse mécanique et le temps de calcul pour un agrégat contenant  $8^3$  éléments et une amplitude de déformation macroscopique imposée  $E_{11} = 0.2\%$

### Initialisation de la base APR cyclique

La stratégie d'initialisation de la base réduite consiste à appliquer une SVD tronquée sur l'ensemble des réalisations spatio-temporelles du champ de déplacement tirés à partir des simulations précédentes (un calcul incrémental droite des six premiers cycles dont la mémorisation de l'histoire de  $[\Delta U(X, t)]$  n'est effectuée que pour les trois derniers cycles). La sélection des modes contenant les valeurs les plus optimales au sens énergétique est effectuée avec une troncature de  $\epsilon_{SVD} = 10^{-6}$ . Le nombre de modes obtenus dans la base initiale  $[\Phi_x^0]$  sont listés dans le tableau IV.7 pour les différents modèles d'agrégat et le chargement utilisés. D'après ces résultats, il est clair que la taille du problème initial augmente avec la valeur du chargement appliqué ainsi qu'avec la discrétisation spatiale de la microstructure.

Modèle et chargement	Modèle 8 <sup>3</sup>			Modèle 16 <sup>3</sup>			Modèle 32 <sup>3</sup>		
	0.1%	0.2%	0.3%	0.1%	0.2%	0.3%	0.1%	0.2%	0.3%
nombre de modes initial	329	490	526	345	509	545	405	528	565

TABLE IV.7 – Nombre de modes initialisés dans la base réduite en fonction du nombre d'éléments et de l'amplitude de chargement appliquée

### Calcul réduit avec adaptation

A partir du premier instant du 7<sup>ème</sup> cycle, le calcul avec la méthode APR cyclique se poursuit en utilisant la résolution du système réduit. Cependant, cette base n'est pas capable de représenter l'évolution de la solution pour les futures simulations. Une stratégie d'adaptation incrémentale a donc été proposée section 5.2.3 du chapitre II. Elle consiste à évaluer les erreurs induites par l'estimation réduite du système linéaire ainsi que par l'ajout, si nécessaire, de nouvelles fonctions capables de décrire la solution à chaque instant. La figure IV.21 présente le nombre de fonctions cumulées de la base réduite, lors de la phase d'adaptation, avec les différentes amplitudes de chargement. Tout comme dans le cadre du modèle élasto-plastique macroscopique, l'enrichissement avec la stratégie des méthodes APR-V3 et APR-V1 est plus important qu'avec la stratégie des méthodes APR-V2 et APR-V4 pour tout les cas traités. A titre d'exemple, pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$  avec l'agrégat contenant 512 éléments (Fig. IV.21c), la méthode APR-V3 nécessite 982 fonctions pour l'adaptation de la base alors que la APR-V4 requiert 790 fonctions. Ces résultats montrent que toute augmentation de la discrétisation spatiale induit une faible augmentation du nombre de modes adaptés. Une augmentation plus importante est constatée lorsque le chargement appliqué devient plus significatif. Cela peut s'expliquer par le fait que lorsque le comportement devient plus non linéaire, l'ajout de plus de fonctions est nécessaire. Une diminution du nombre de fonctions est observée avec les méthodes APR-V1 et APR-V2 par l'application d'une POD à la fin de l'adaptation.

# CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

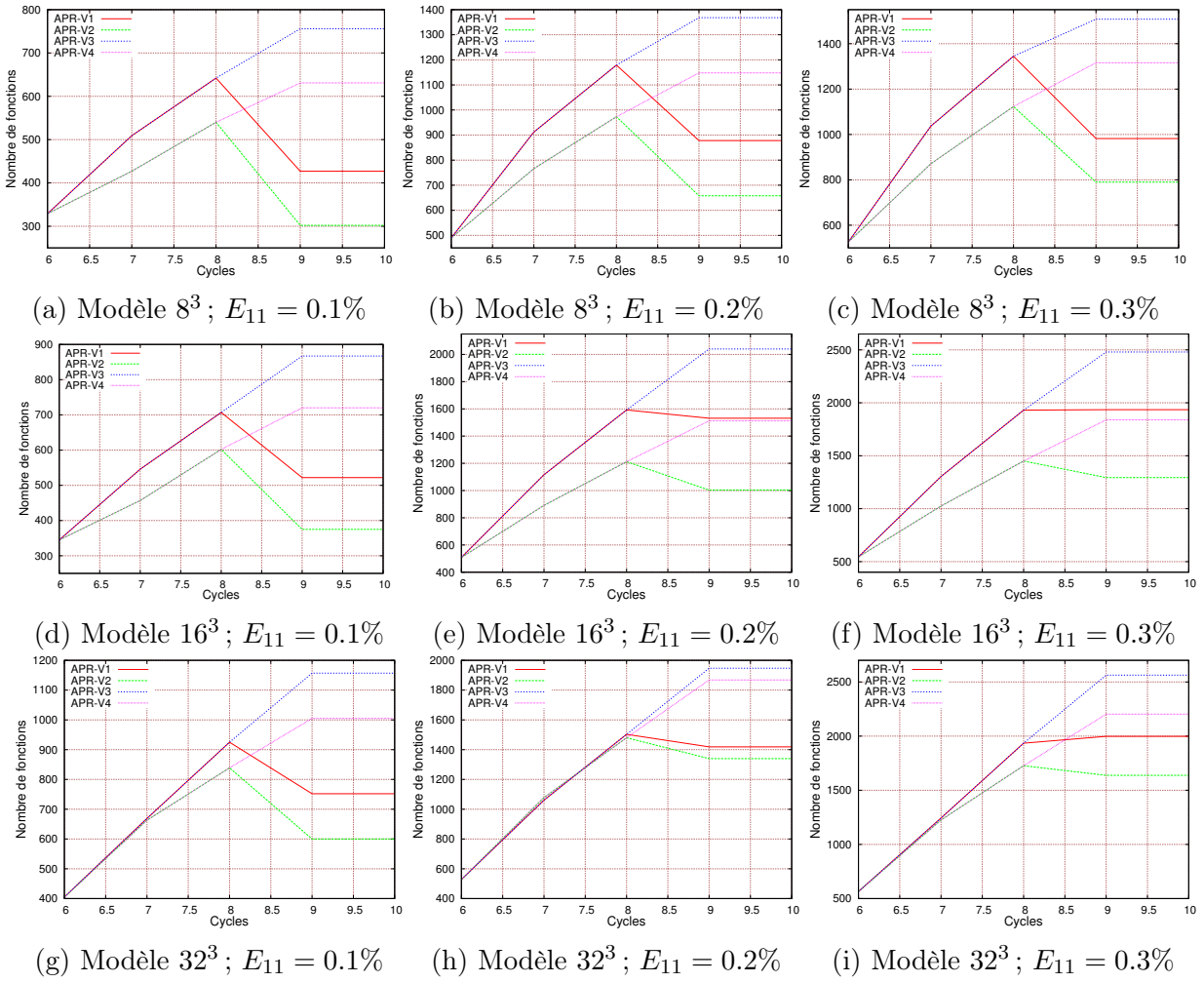


FIGURE IV.21 – Nombre de modes de la base réduite pour les différentes amplitudes de déformation appliquées

## Calcul avec des modèles réduits constants

Après avoir adapté la base réduite pour trois cycles, les simulations avec la méthode APR cyclique se poursuivent avec une base réduite qui n'évolue plus afin d'accélérer les calculs. Les dimensions du modèle réduit sont listées dans les tableaux IV.8, IV.9 et IV.10 pour les modélisations avec les modèles  $8^3$ ,  $16^3$  et  $32^3$  et en fonction du niveau de chargement appliqué. Pour un faible nombre de ddl, la taille du modèle réduit est proche de celle utilisée par le modèle complet. En effet, pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$  et avec l'agrégat  $8^3$  (tableau IV.8), la taille de la matrice du problème est de 1508 et 1316 respectivement pour les méthodes APR-V3 et APR-V4 tandis que pour une modélisation avec le modèle complet elle est de 1542. Une augmentation du nombre d'éléments (et donc intrinsèquement du nombre de ddl) permet de satisfaire la condition  $r \ll N_x$ .

## 6.4 Réponse mécanique macroscopique de la méthode APR cyclique

Dans cette partie, la réponse mécanique des agrégats polycristallins avec les différentes stratégies de la méthode APR cyclique est étudiée à l'échelle macroscopique à travers les quantités mécaniques moyennées dans l'agrégat. Le but est de comparer la fiabilité de ces méthodes en termes de précision des résultats par rapport à la méthode incrémentale. Les



## 6. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

Méthode utilisée	Taille du problème $8^3$		
	$E_{11} = 0.1\%$	$E_{11} = 0.2\%$	$E_{11} = 0.3\%$
Modèle Complet	1542	1542	1542
APR-V1	427	878	982
APR-V2	302	658	790
APR-V3	756	1368	1508
APR-V4	631	1148	1316

TABLE IV.8 – Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué pour le modèle  $8^3$

Méthode utilisée	Taille du problème $16^3$		
	$E_{11} = 0.1\%$	$E_{11} = 0.2\%$	$E_{11} = 0.3\%$
Modèle Complet	12294	12294	12294
APR-V1	752	1419	1935
APR-V2	600	1340	1294
APR-V3	1157	1947	2480
APR-V4	1005	1868	1839

TABLE IV.9 – Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué pour le modèle  $16^3$

Méthode utilisée	Taille du problème $32^3$		
	$E_{11} = 0.1\%$	$E_{11} = 0.2\%$	$E_{11} = 0.3\%$
Modèle Complet	98310	98310	98310
APR-V1	281	1419	1998
APR-V2	118	1340	1638
APR-V3	369	1947	2563
APR-V4	205	1868	2203

TABLE IV.10 – Comparaison entre la taille du problème résolu avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques en fonction du chargement appliqué pour le modèle  $32^3$

mêmes cas qu'avec la méthode PGD sont analysés.

L'ensemble des résultats de la figure IV.22 concerne les réponses mécaniques macroscopiques obtenues, lors du 100<sup>ème</sup> cycle de chargement, avec les différentes amplitudes de déformation appliquées. Au vu de ces diagrammes contrainte-déformation, les solutions macroscopiques de l'agrégat prédites par les quatre versions de la méthode APR cyclique estiment bien les solutions obtenues par un calcul incrémental. Pour des amplitudes de chargement au delà de  $E_{11} = 0.2\%$ , des écarts sont observés au niveau des valeurs moyennes (contrainte et déformation). Pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  avec le modèle  $8^3$  (Fig.

IV.22c), de faibles écarts entre les extremums de contrainte et de déformation sont constatés. Ils ne dépassent pas respectivement 0.43% et 0.6% avec la APR-V4. Ces écarts sont constatés aussi avec le modèle de type  $16^3$  (Fig. IV.22d) pour un maximum de 0.6% en contrainte et 0.65% en déformation avec la APR-V3. Pour une amplitude de  $E_{11} = 0.3\%$ , des décalages légèrement plus importants sont observés au niveau des valeurs moyennes. Un écart relatif maximum de 0.79% en contrainte et 0.97% en déformation est constaté avec la méthode APR-V2 pour le modèle de type  $8^3$  (Fig. IV.22e). Des écarts qui n'excèdent pas 0.75% en contrainte et 0.87% en déformation apparaissent avec la méthode APR-V3 pour le modèle de type  $16^3$  (Fig. IV.22f). Une bonne représentation des boucles d'hystérésis du dernier cycle issue des différentes méthodes de l'APR cyclique comparées à celle de la méthode incrémentale est observée.

Les diagrammes contrainte-déformation avec le modèle contenant 64 éléments par grain sont présentés à la figure IV.23. Ces derniers sont obtenus après 20 cycles et 30 cycles de chargement. Ces résultats montrent que la réponse mécanique macroscopique est correctement prédite par les méthodes APR cycliques avec une bonne adéquation des boucles d'hystérésis du dernier cycle.

Afin de mieux appréhender les résultats précédents, une brève analyse sur les distributions des champs de contrainte et de déformation, selon la direction du chargement, est présentée aux figures IV.24 et IV.25. Ces résultats sont donnés pour la méthode incrémentale et les méthodes de l'APR cyclique pour les différentes configurations d'agrégats (modèles  $8^3$ ,  $16^3$  et  $32^3$ ). Pour tous les cas présentés, les agrégats polycristallins sont sollicités avec une amplitude de déformation macroscopique appliquée  $E_{11} = 0.2\%$ . Les résultats des différentes discrétisations spatiales de la microstructure sont illustrés dans la même colonne. Il est à noter que pour les modèles contenant un élément et huit éléments par grain, les résultats sont présentés avec des simulations obtenues à la fin du premier quart du 50<sup>ème</sup> cycle de chargement. Les résultats de l'agrégat composé de 64 éléments par grain sont présentés à la fin du premier quart du 20<sup>ème</sup> cycle de chargement.

Les distributions des champs de contrainte (Fig. IV.24) et de déformation (Fig. IV.25) fournies par la méthode incrémentale sont fortement hétérogènes. Cette distribution est donnée au sein du même grain ou bien entre les grains voisins. L'hétérogénéité intergranulaire et intragranulaire observée est correctement prédite par les différentes versions de la méthode APR cyclique. Pour toutes les méthodes, la distribution des différentes hétérogénéités des champs de contrainte et de déformation sont mieux représentées avec une discrétisation fine de la microstructure.

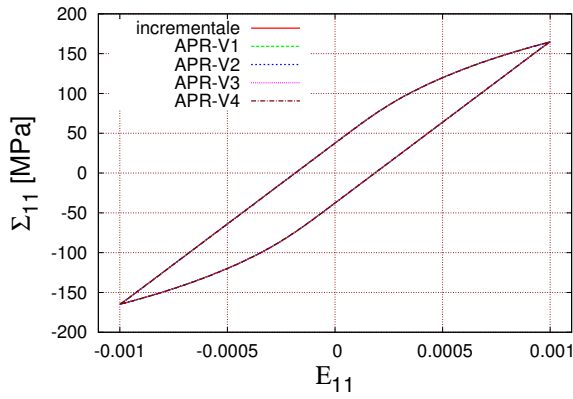
La distribution des valeurs maximales en contrainte et en déformation prédites par les méthodes APR cycliques est de bonne qualité pour les différentes discrétisations spatiales. Pour des simulations avec 50 cycles, il est possible de constater quelques écarts obtenus avec les méthodes APR cycliques pour les iso-valeurs maximales : un maximum de 1.2% en contrainte avec la APR-V2 et un maximum de 8% en déformation avec la APR-V3, pour la modélisation contenant un élément par grain.

## 6.5 Réponse mécanique mésoscopique de la méthode APR cyclique

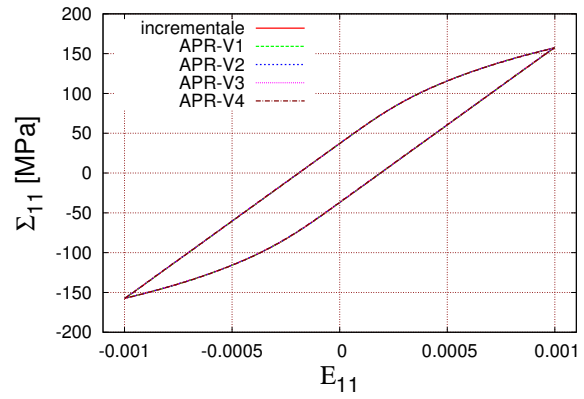
Afin d'étudier la pertinence des méthodes APR cycliques pour les réponses mécaniques à l'échelle des grains, une comparaison par rapport aux solutions incrémentales est effectuée. Cette comparaison porte sur les réponses mécaniques mésoscopiques à travers les valeurs moyennées dans chaque grain données par les équations IV.10 et IV.11. Les mêmes cas que dans la section précédente sont étudiés.

L'ensemble des graphiques de la figure IV.26 concerne les contraintes moyennes dans

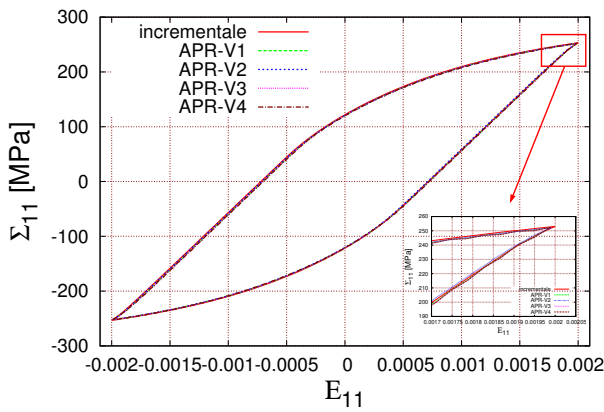
## 6. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE



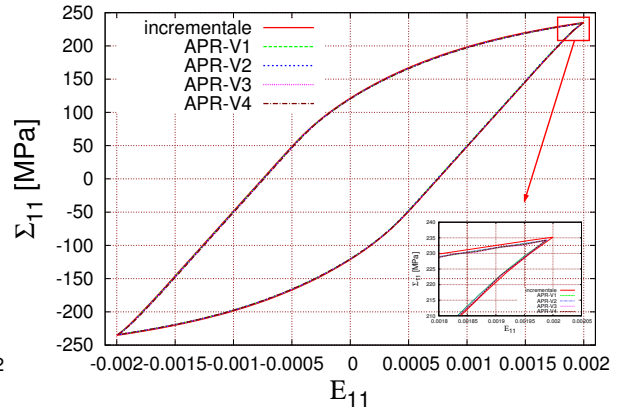
(a) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.1\%$



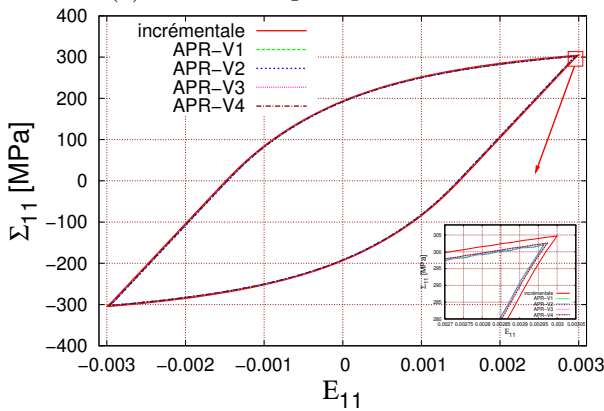
(b) Modèle  $16^3$  pour  $E_{11} = 0.1\%$



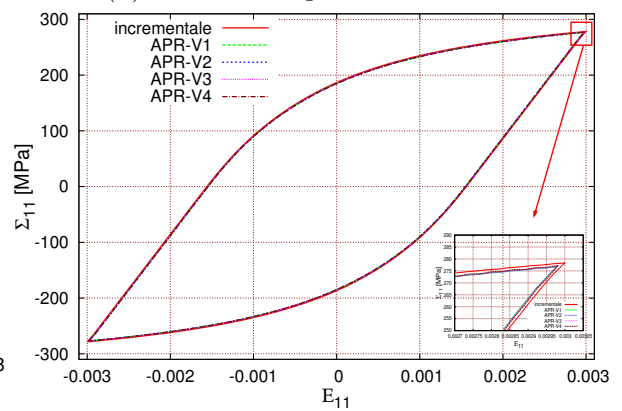
(c) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



(d) Modèle  $16^3$  pour  $E_{11} = 0.2\%$



(e) Modèle  $8^3$  pour  $E_{11} = 0.3\%$



(f) Modèle  $16^3$  pour  $E_{11} = 0.3\%$

FIGURE IV.22 – Comparaison des résultats contrainte-déformation  $\Sigma_{11}-E_{11}$  macroscopiques du 100<sup>ème</sup> cycle par le calcul incrémental et les méthodes APR cycliques sous différentes amplitudes de déformation imposées et pour un agrégat composé de  $8^3$  et  $16^3$  éléments

## CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

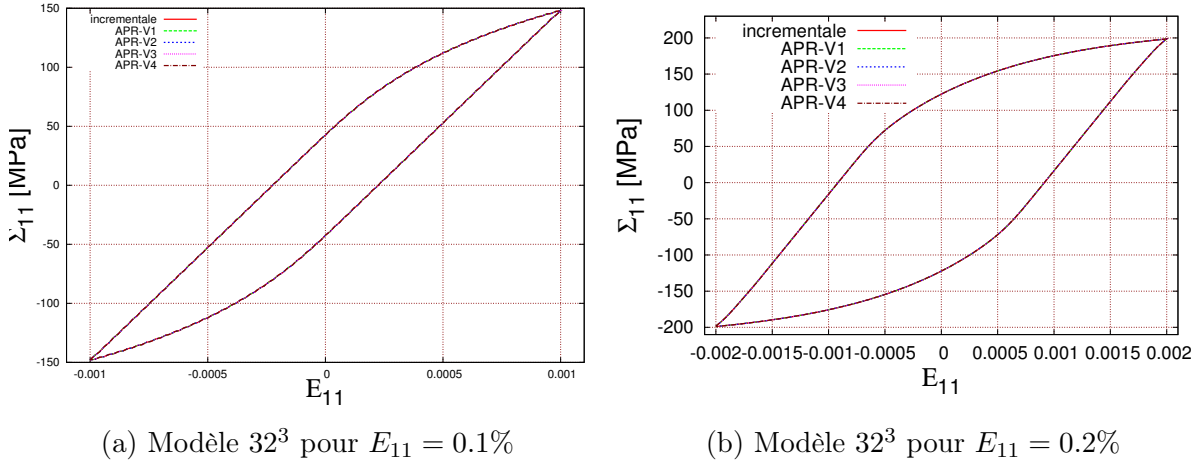


FIGURE IV.23 – Comparaison des résultats contrainte-déformation  $\Sigma_{11} - E_{11}$  macroscopiques obtenus par le calcul incrémental et les méthodes APR cycliques lors du 30<sup>ème</sup> et 20<sup>ème</sup> cycle respectivement pour une amplitude de déformation  $E_{11} = 0.1\%$  et  $E_{11} = 0.2\%$

chaque grain à la fin du dernier cycle. Au regard de ces résultats, il est clair que les méthodes APR cycliques permettent d'obtenir des résultats équivalents à la méthode incrémentale. Cependant, il est possible de constater quelques écarts pour des amplitudes de chargement au delà de  $E_{11} = 0.2\%$  mais qui restent tout à fait acceptables. Pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  avec le modèle  $8^3$  (Fig. IV.26b), on observe des écarts relatifs maximaux de 1.9%, 1.79% et 1.75% respectivement pour les grains numéro 310, 340 et 93 avec la méthode APR-V2. La moyenne d'erreur par tous les grains est de 0.49%. Des décalages légèrement plus importants sont constatés pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$  (Fig. IV.26d) : des écarts maximaux de 2.64%, 2.23% et 2.11% respectivement pour les grains numéro 169, 472 et 317 avec la méthode APR-V1. L'erreur relative moyenne est de 0.76% par tous les grains.

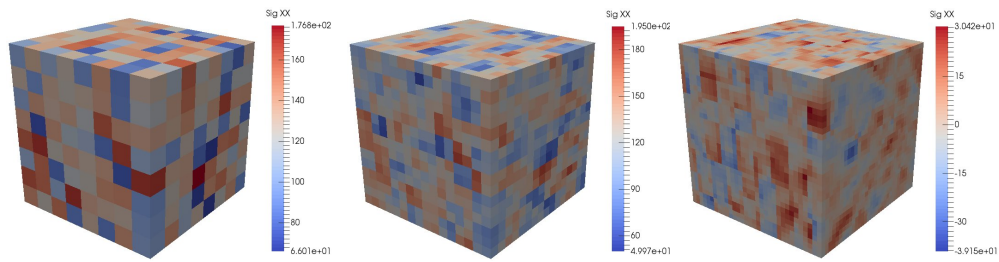
La figure IV.28 illustre la distribution des erreurs relatives, en termes de contraintes moyennes, entre les méthodes APR cycliques et la méthode incrémentale. Ces résultats montrent que la majorité des grains qui composent l'agrégat possède un écart maximal de 1.5%. Ces constats sont faits pour les quatre versions de la méthode APR cyclique.

La figure IV.27 présente les résultats à la fin du dernier cycle en termes de déformation mésoscopique pour chacun des 512 grains constituant l'agrégat. Les réponses obtenues avec un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$  (Fig. IV.27a) montrent bien que les méthodes APR cycliques permettent d'obtenir des résultats très proches de la méthode incrémentale. Cependant, pour des chargements au delà de  $E_{11} = 0.2\%$ , les résultats ne sont pas aussi bons. En effet, avec un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , l'erreur relative moyenne pour tous les grains n'excèdent pas les 0.69% avec la APR-V2. Des décalages légèrement plus importants sont observés pour une amplitude de  $E_{11} = 0.3\%$ . A titre d'exemple, pour le modèle d'agrégat  $16^3$  (Fig. IV.27d), l'erreur relative moyenne issue de tous les grains est de 1% pour toutes les versions développées.

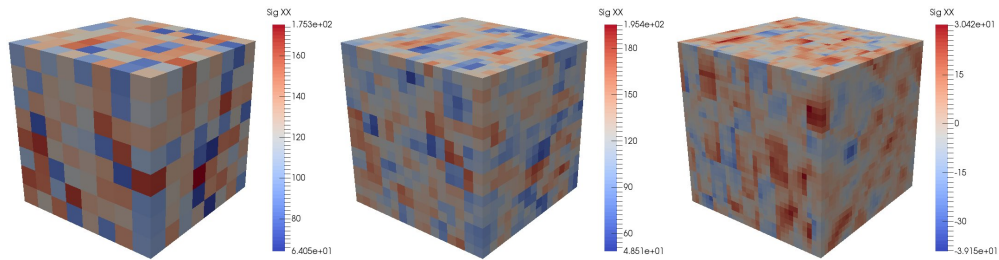
L'ensemble des figures IV.29 présente la distribution des erreurs relatives entre la réponse prédite par les méthodes APR cyclique et la méthode incrémentale. On remarque que :

- les méthodes APR-V1 et APR-V2 présentent un écart maximal de l'ordre de 4%, légèrement plus important que les méthodes APR-V3 et APR-V4. Cela peut être expliqué par le fait qu'une réduction du nombre de modes enrichis de la base réduite influe sur la réponse mécanique ;
- Les méthodes APR-V3 et APR-V4 prévoient un écart maximal de l'ordre de 3.75% ;
- Une grande partie de l'erreur relative en déformation, pour tous les grains, est forte-

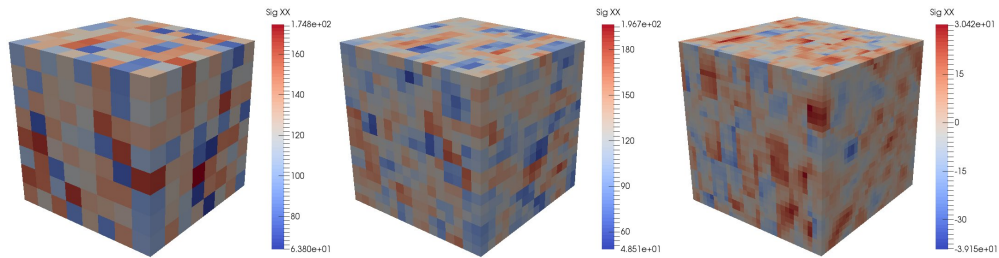
## 6. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE



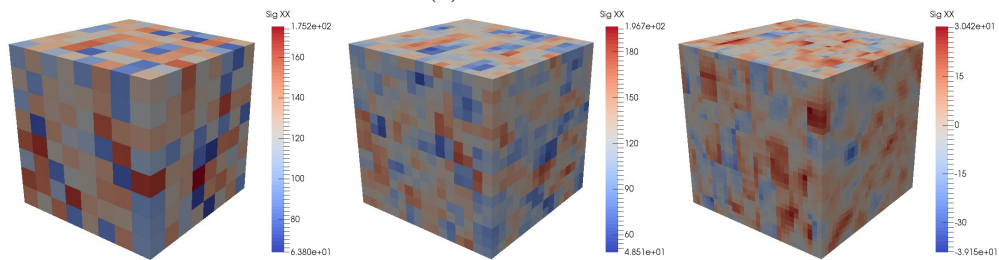
(a) Méthode incrémentale



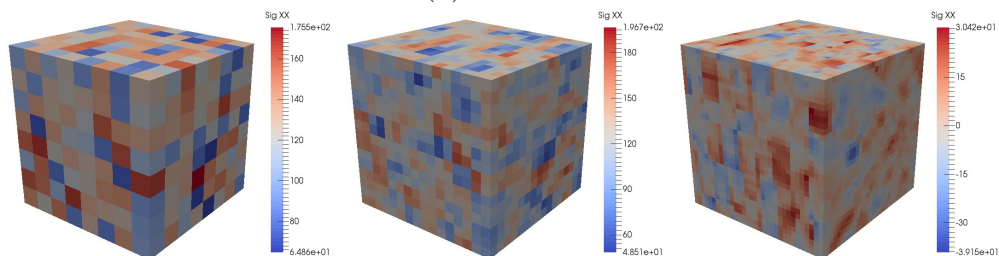
(b) APR-V1



(c) APR-V2



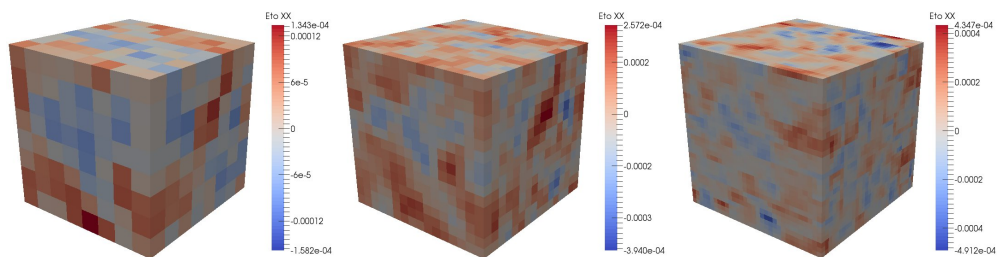
(d) APR-V3



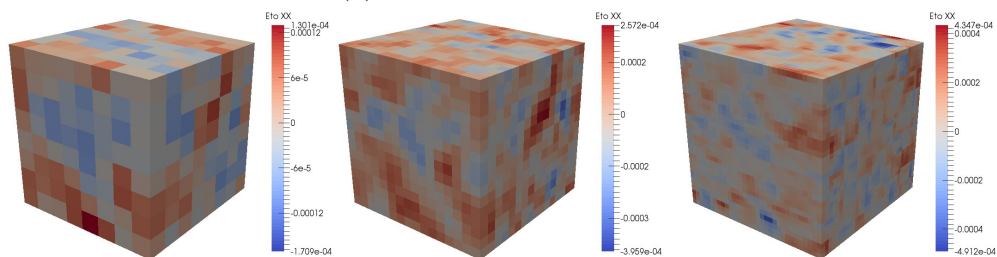
(e) APR-V4

FIGURE IV.24 – Comparaison de la distribution des champs de contrainte pour un chargement  $E_{11} = 0.2\%$  obtenue avec la méthode incrémentale et APR cyclique lors du 1<sup>er</sup> quart de cycle du 50<sup>ème</sup> cycle pour les modèles  $8^3$  et  $16^3$  et 1<sup>er</sup> quart de cycle du 20<sup>ème</sup> avec le modèle  $32^3$

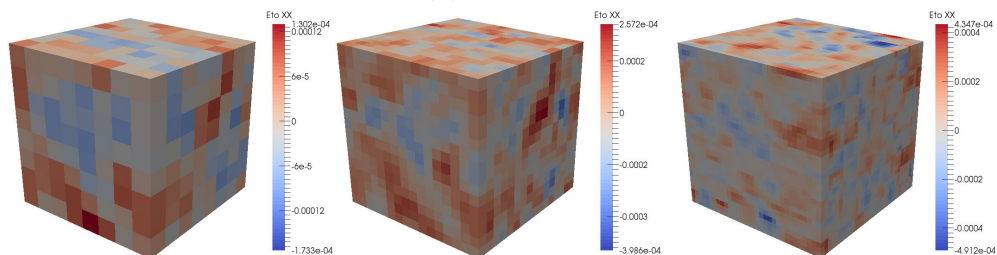
# CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS



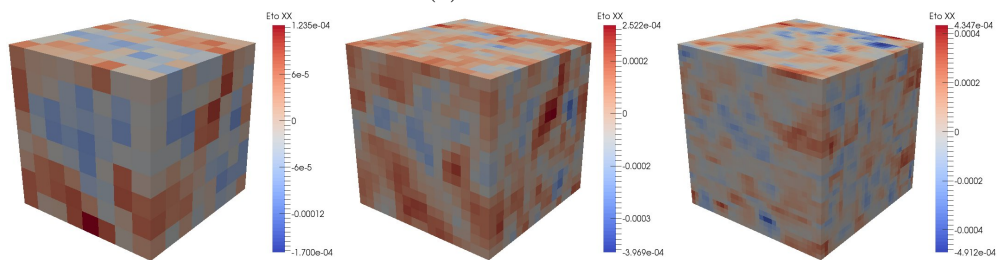
(a) Méthode incrémentale



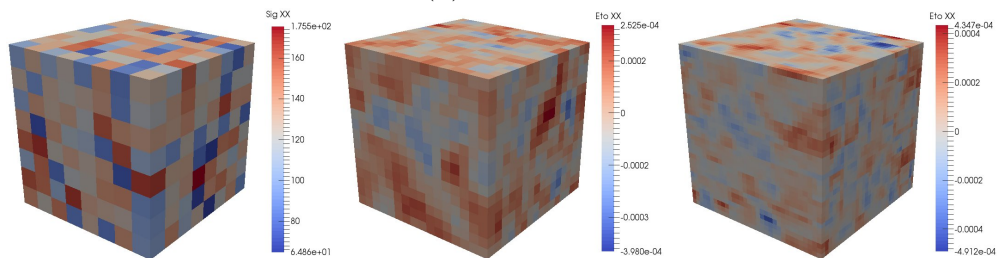
(b) APR-V1



(c) APR-V2



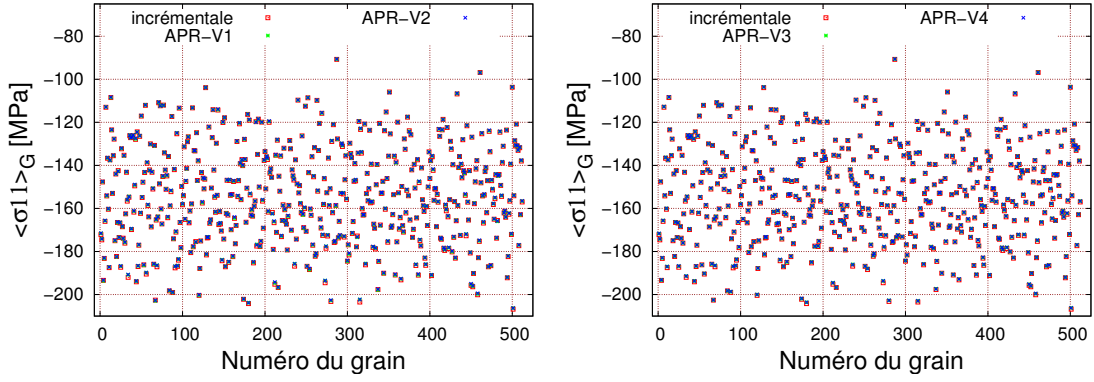
(d) APR-V3



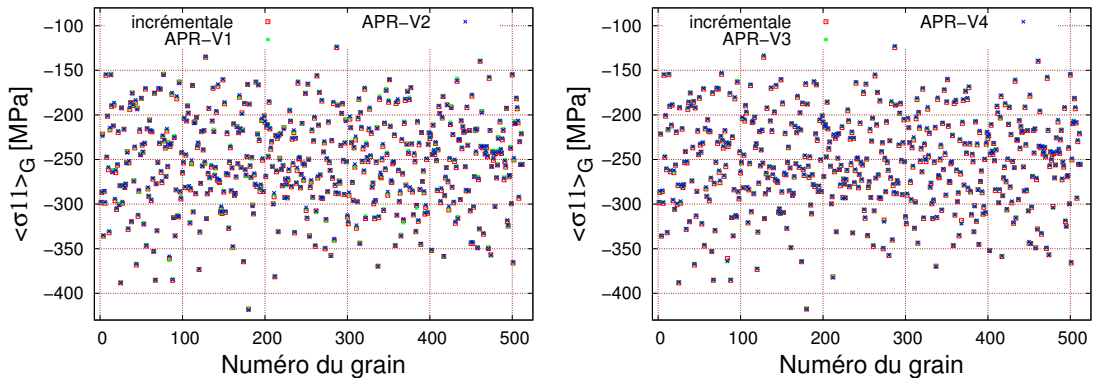
(e) APR-V4

FIGURE IV.25 – Comparaison de la distribution des champs de déformation pour un chargement  $E_{11} = 0.2\%$  obtenue avec la méthode incrémentale et APR cyclique lors du 1<sup>er</sup> quart de cycle du 50<sup>ème</sup> cycle pour les modèles  $8^3$  et  $16^3$  et 1<sup>er</sup> quart de cycle du 20<sup>ème</sup> avec le modèle  $32^3$

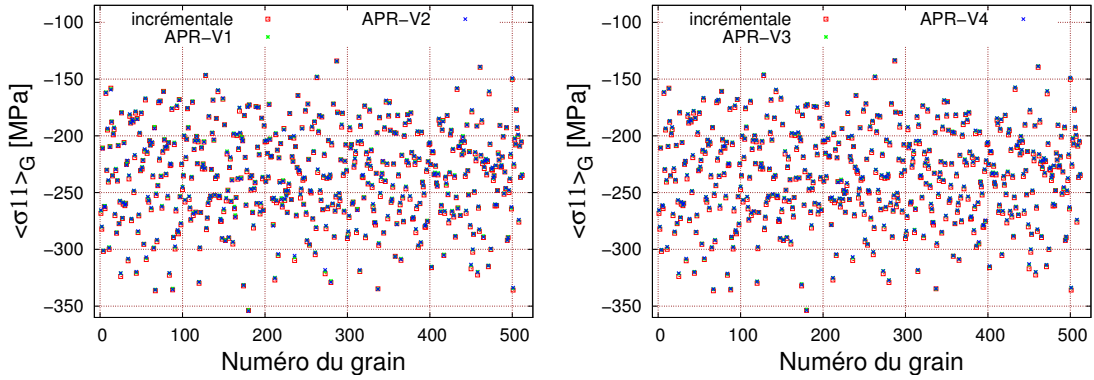
## 6. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE



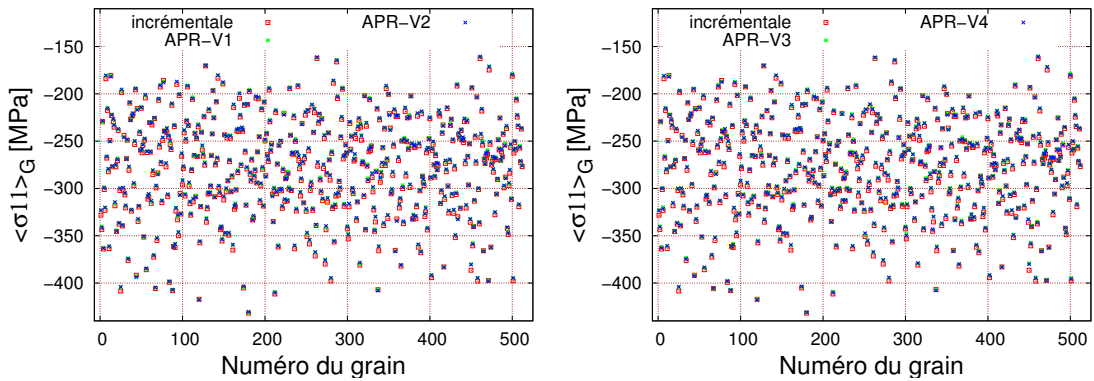
(a)  $E_{11} = 0.1\%$ ; modèle  $32^3$



(b)  $E_{11} = 0.2\%$ ; modèle  $8^3$



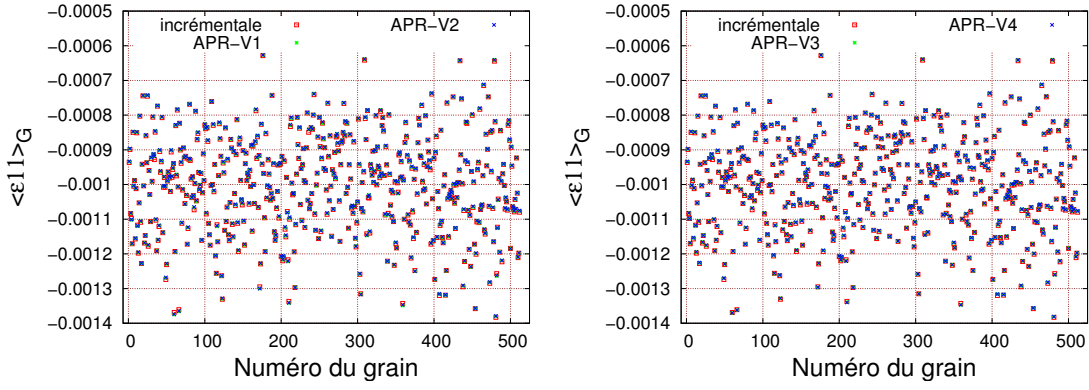
(c)  $E_{11} = 0.2\%$ ; modèle  $16^3$



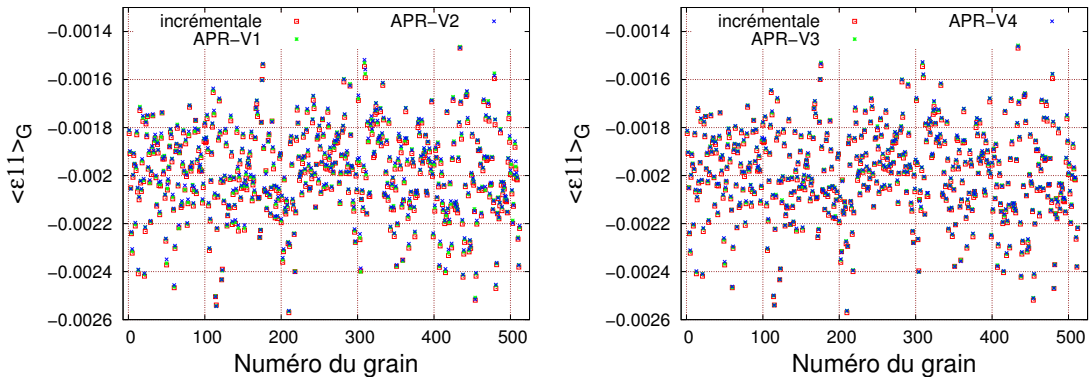
(d)  $E_{11} = 0.3\%$ ; modèle  $16^3$

FIGURE IV.26 – Comparaison des valeurs de contraintes  $\langle \sigma_{11} \rangle_G$  mésoscopiques obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques pour les différentes amplitude de chargement

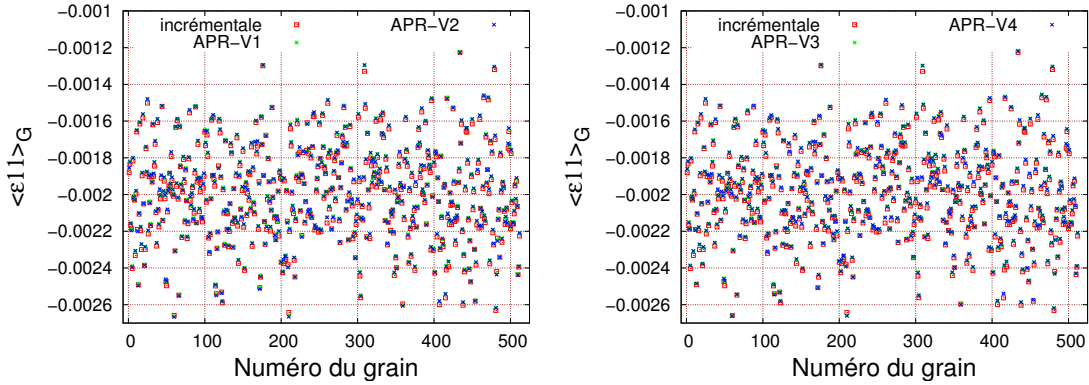
CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS  
POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS



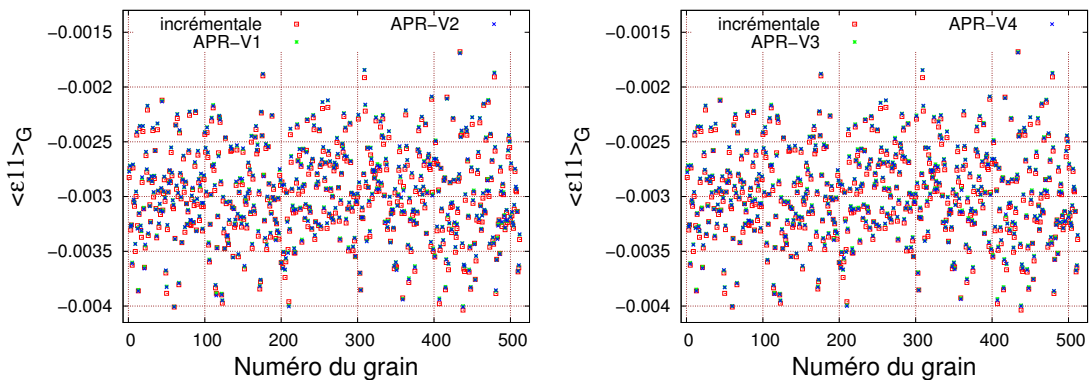
(a)  $E_{11} = 0.1\%$ ; modèle  $32^3$



(b)  $E_{11} = 0.2\%$ ; modèle  $8^3$



(c)  $E_{11} = 0.2\%$ ; modèle  $16^3$



(d)  $E_{11} = 0.3\%$ ; modèle  $16^3$

FIGURE IV.27 – Comparaison des valeurs de déformations  $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$  mésoscopiques obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques pour les différentes amplitudes de chargement



## 6. RÉSULTATS DE LA MÉTHODE APR CYCLIQUE

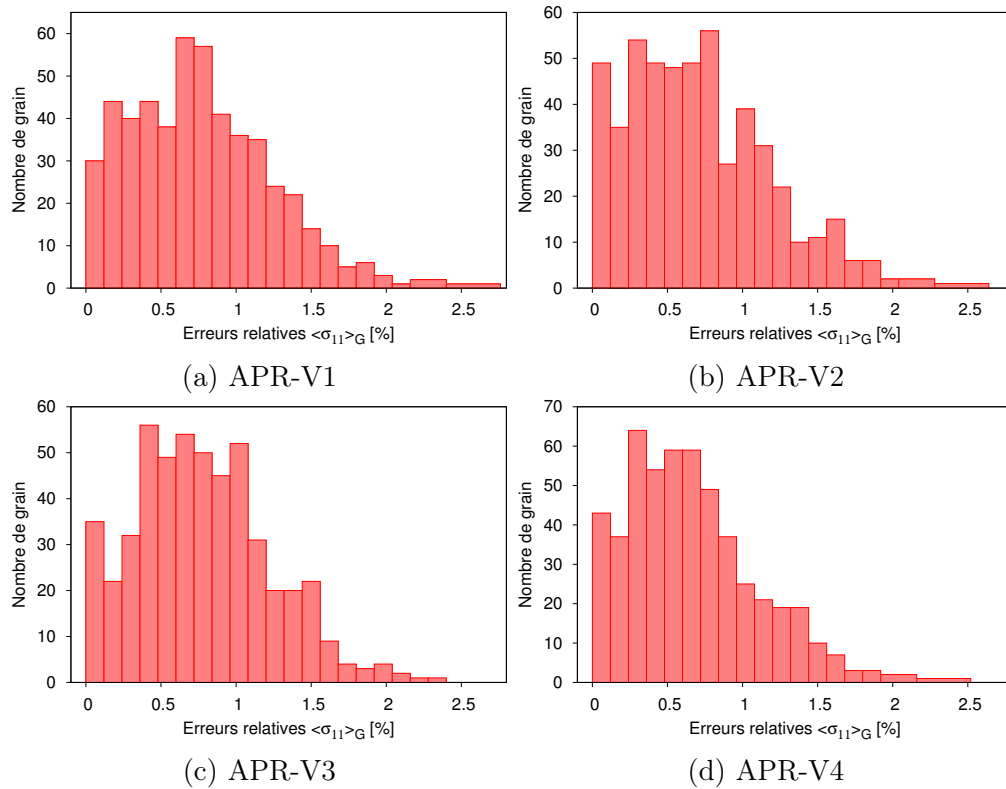


FIGURE IV.28 – Distribution des erreurs relatives en  $\langle \sigma_{11} \rangle_G$  entre les prédictions des méthodes APR et celles de la méthode incrémentale pour  $E_{11} = 0.3\%$  avec le modèle  $16^3$

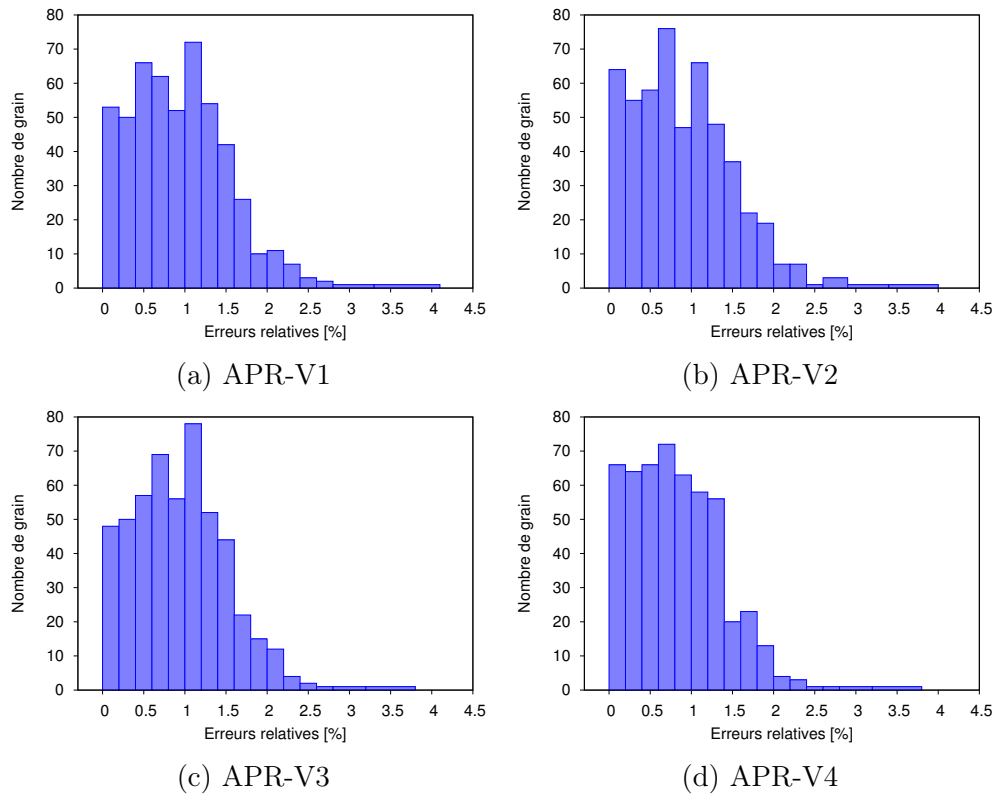


FIGURE IV.29 – Distribution des erreurs relatives en  $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$  entre les prédictions des méthodes APR et celles de la méthode incrémentale pour  $E_{11} = 0.3\%$  avec le modèle  $16^3$

ment localisée dans un intervalle qui ne dépasse pas 1.7%.

A partir de ces observations, on peut dire que les résultats en déformation mésoscopique de l'APR cyclique restent tout à fait acceptables après 100 cycles de chargement.

Tout comme dans le cadre de la méthode PGD, des simulations d'agrégats polycristallins sont effectuées jusqu'au 2000 cycles de chargement en vue d'étudier l'évolution des écarts de la déformation mésoscopique constatées précédemment. Les résultats de cette étude sont exposés en figure IV.30. L'ensemble des graphiques illustre l'évolution de l'erreur relative maximale dans un grain, en termes de déformation mésoscopique, ainsi que l'erreur moyenne donnée par l'ensemble des 512 grains qui composent l'agrégat. Ces résultats sont donnés à la fin de chaque 100 cycles pour deux amplitudes de chargement  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$  avec le modèle d'agrégat de type  $8^3$ . Au vu de ces résultats, on remarque que :

- les erreurs maximales et moyennes prédites par les quatre versions sont quasiment équivalentes, à l'exception de la méthode APR-V2 avec un chargement  $E_{11} = 0.2\%$  (Fig. IV.30a) ;
- l'évolution de l'écart relatif maximal est rapide au cours des premier cycles : 12% avec la APR-V1 pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  après 1000 cycles, et 6.8% avec la APR-V3 pour  $E_{11} = 0.3\%$  après 700 cycles de chargement ;
- l'écart constaté évolue ensuite beaucoup plus lentement ;
- une saturation de l'évolution des erreurs est observée à partir du 1500<sup>ème</sup> cycle et 1300<sup>ème</sup> cycle respectivement pour les amplitudes de chargement  $E_{11} = 0.2\%$ , pour un écart maximal qui converge vers 13% avec la APR-V3 (Fig. IV.30a), et  $E_{11} = 0.3\%$  avec un maximum d'écart de 7.5% avec la APR-V3 (Fig. IV.30b) ;
- l'erreur relative moyenne prédite par tous les grains (figures IV.30c et IV.30d) subit une évolution qui tend vers une saturation constatée pour toutes les méthodes : 2.8% de décalage maximal observé avec la APR-V3 pour  $E_{11} = 0.2\%$  et 2.2% avec la APR-V1 pour une amplitude de  $E_{11} = 0.3\%$

Ces constats permettent de s'assurer que les écarts observés tendent vers une stabilisation lorsque le nombre de cycles augmentent. Les décalages restent tout à fait acceptables avec un maximum de 3% prédit pour l'ensemble de tous les grains. Ces résultats présentés en figure IV.31 sont aussi observés pour la contrainte mésoscopique. A titre d'exemple, pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$ , l'erreur relative maximale se stabilise à partir du 1400<sup>ème</sup> cycle pour un écart relatif maximal de 7.97% avec la APR-V2.

Les résultats de la méthode APR cyclique à l'échelle mésoscopique sont accompagnés d'une comparaison des distributions de la contrainte moyenne et de la déformation moyenne dans chaque grain  $\langle \sigma_{11} \rangle - \langle \varepsilon_{11} \rangle$ . Ils sont illustrés à la figure IV.32 pour deux amplitudes de chargement  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$  respectivement pour les modèles d'agrégat  $8^3$  et  $16^3$ . Il est clair que ces résultats correspondent bien à ce qui a été constaté précédemment. La modélisation avec les méthodes APR cycliques donne des réponses mésoscopiques proches de la méthode incrémentale avec de faibles décalages de la réponse moyenne.

## 7 Analyse du temps de calcul

L'étude des réponses mécaniques des agrégats polycristallins, présentée dans les sections précédentes, a permis de valider la fiabilité des différentes méthodes étudiées. L'objectif est ici de présenter une analyse des temps de calculs obtenus. Dans une première phase, les performances de chaque méthode développée seront exposées. Dans un second temps, une discussion sur les différents gains obtenus sera proposée.

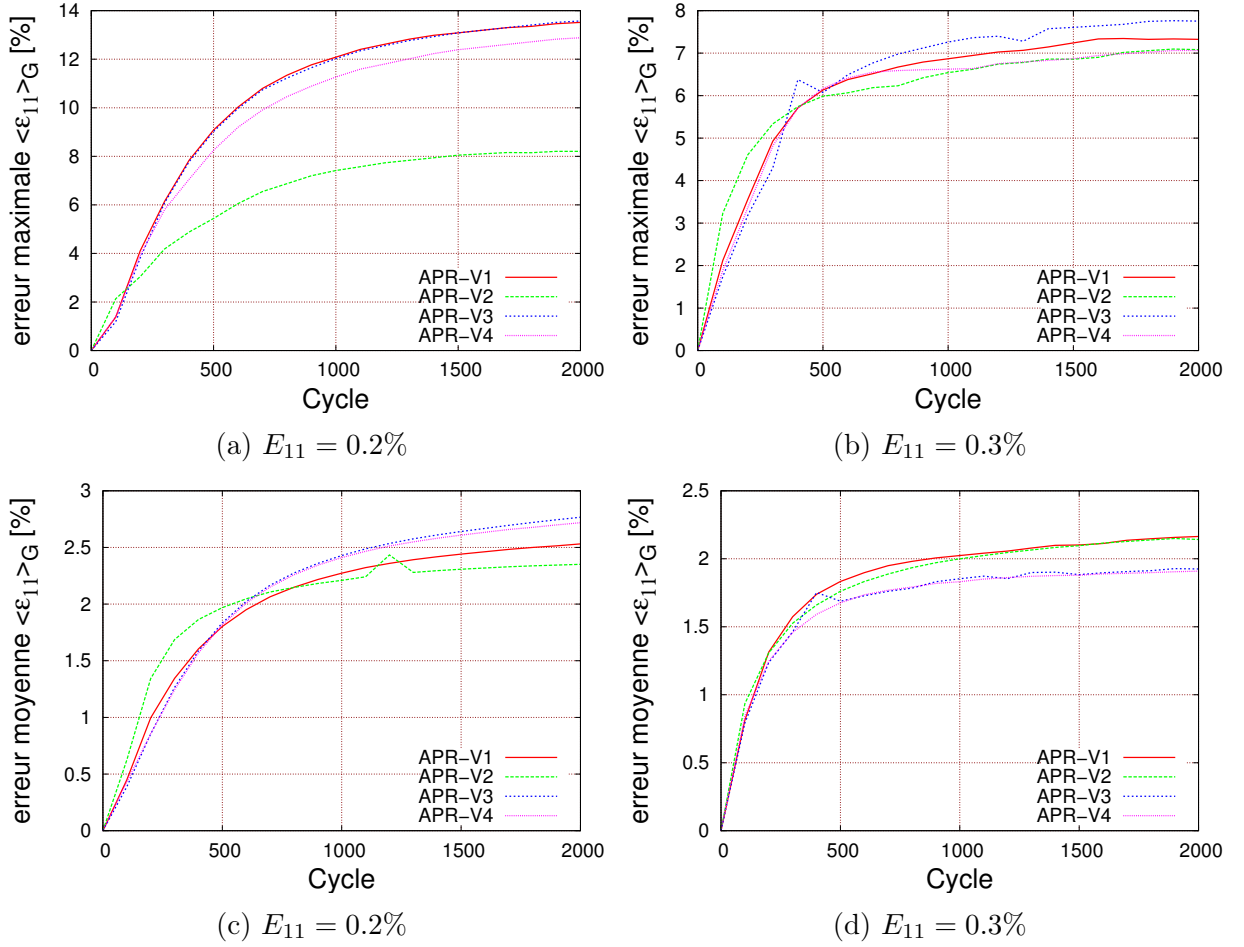


FIGURE IV.30 – Évolution de l’erreur relative maximale et moyenne en  $\langle \varepsilon_{11} \rangle_G$  après 2000 cycles entre les résultats de la solution incrémentale et ceux des méthodes APR cycliques avec le modèle d’agrégat  $8^3$

## 7.1 Résultats

Les temps de calcul de la méthode incrémentale, de la méthode incrémentale droite, des deux méthodes PGD ainsi que des méthodes APR cycliques sont reportés à la figure IV.33. Il est à noter que, pour tous les résultats présentés, une seule discrétisation temporelle est utilisée avec 200 incréments par cycle. Sur ce graphique, les résultats obtenus sont présentés pour les différentes amplitudes de déformation macroscopique. En raison du temps de calcul de la méthode incrémentale, les résultats sont présentés après 100 cycles de chargement avec les modèles d’agrégats  $8^3$  et  $16^3$ , et avec 50 et 30 cycles de chargement pour le modèle  $32^3$ .

Au vu de ces résultats, la méthode incrémentale droite par rapport à la méthode incrémentale classique :

- permet de prédire les résultats avec un temps CPU moins important quelle que soit la discrétisation spatiale et le chargement appliqués. Pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$  avec le modèle d’agrégat  $16^3$  (Fig. IV.33b), le rapport de temps de calcul entre les deux méthodes montre des gains respectivement d’un facteur 14 et 17 avec la méthode incrémentale droite ;
- est plus rapide quand la non linéarité du problème croît ;
- conduit à un gain de temps plus important avec une augmentation de la discrétisation spatiale. A titre d’exemple, le rapport de temps de calcul pour  $8^3$  éléments avec un

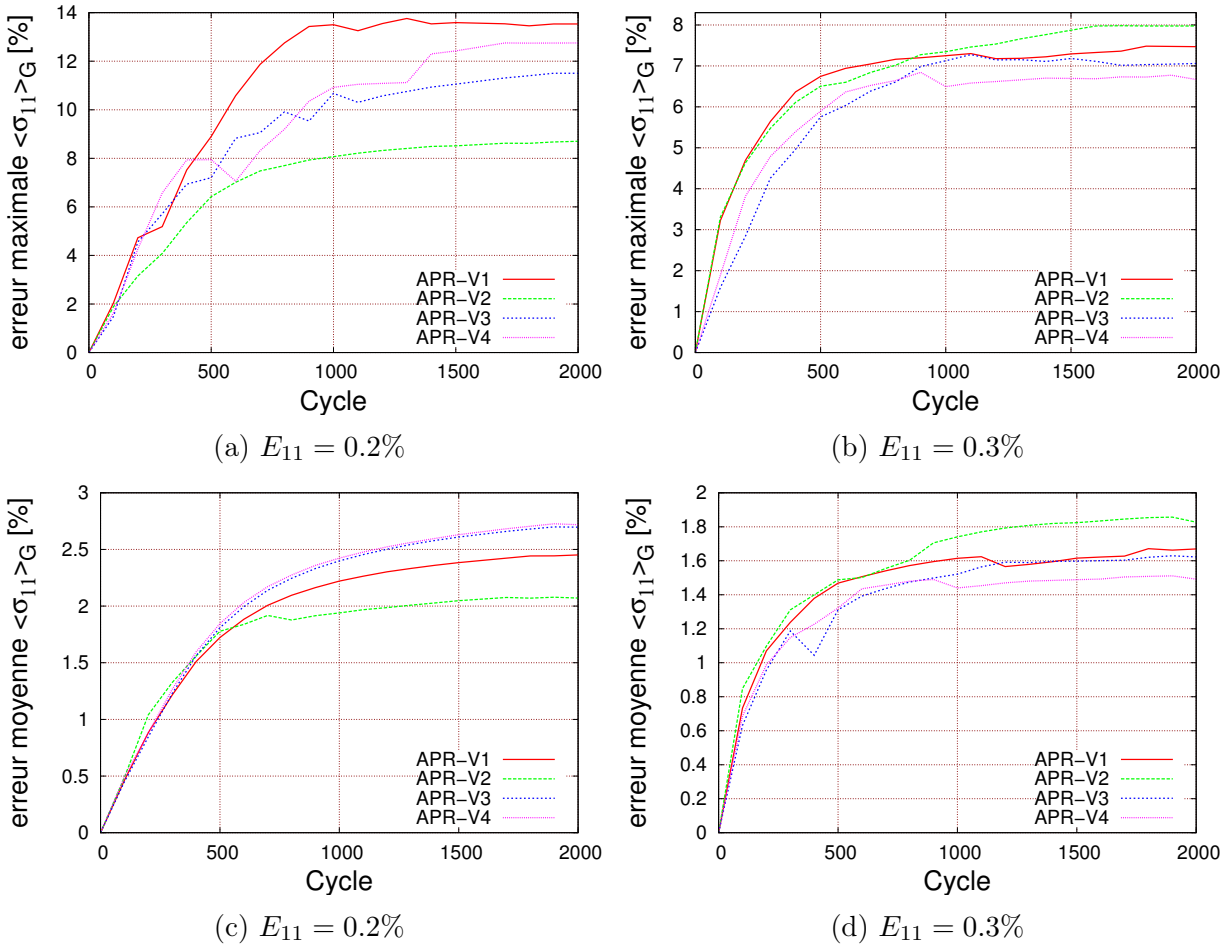


FIGURE IV.31 – Évolution de l’erreur relative maximale et moyenne en  $\langle \sigma_{11} \rangle_G$  après 2000 cycles entre les résultats de la solution incrémentale et ceux des méthodes APR cycliques avec le modèle d’agrégat  $8^3$

chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  est 7 fois plus rapide après 30 cycles de chargement. En revanche, elle est 14 fois plus rapide dans le cas de  $16^3$  éléments et 61 fois plus rapide avec une discrétisation de  $32^3$  éléments.

Par ailleurs, pour la méthode PGD-V1 développée, on remarque que :

- Elle n’a pas montré, dans la majorité des cas, une efficacité vis-à-vis de la méthode incrémentale. En effet, pour une modélisation d’agrégats contenant  $8^3$  et  $16^3$  éléments et un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$ , elle est respectivement 12 et 6 fois moins rapide par rapport à la méthode incrémentale pour 100 cycles de chargement ;
- Dans le cas d’une microstructure contenant  $32^3$  éléments (Fig. IV.33c), elle a montré une efficacité relativement faible par rapport la méthode incrémentale. Des gains en temps de 1.8 et 1.4 respectivement pour un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$  après 50 cycles et un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  après 30 cycles sont atteints ;
- Les résultats de la figure IV.34 montrent que la modélisation avec un faible nombre de ddl n’est pas le cas la plus favorable pour la méthode PGD-V1.

Les résultats de la figure IV.33 montrent que :

- La PGD-V2 est plus performante que la méthode de référence pour tous les cas testés. Pour le modèle d’agrégat  $16^3$  et pour les chargements  $E_{11} = 0.1\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$ , la PGD-V2 est respectivement 5.3 et 5.7 fois plus rapide ;
- Il est à souligner que l’augmentation du nombre d’éléments constituant l’agrégat

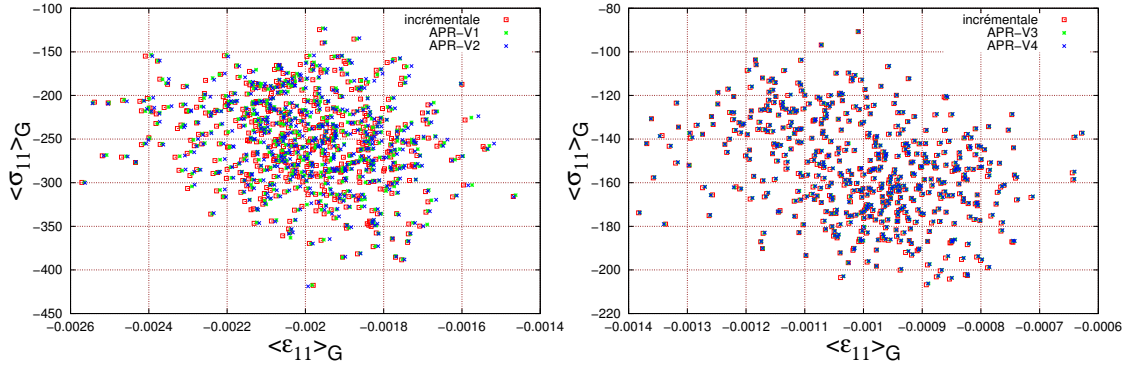
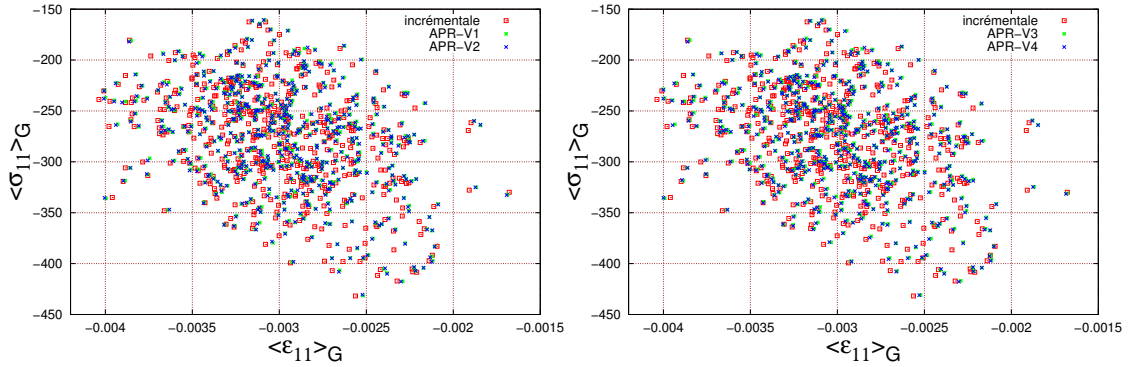
(a)  $E_{11} = 0.2\%$ ; modèle  $8^3$ (b)  $E_{11} = 0.3\%$ ; modèle  $16^3$ 

FIGURE IV.32 – Distributions des contraintes et déformations  $\langle \sigma_{11} \rangle_G - \langle \varepsilon_{11} \rangle_G$  moyennes dans les grains obtenues avec la méthode incrémentale et les méthodes APR cycliques pour deux amplitudes de chargements

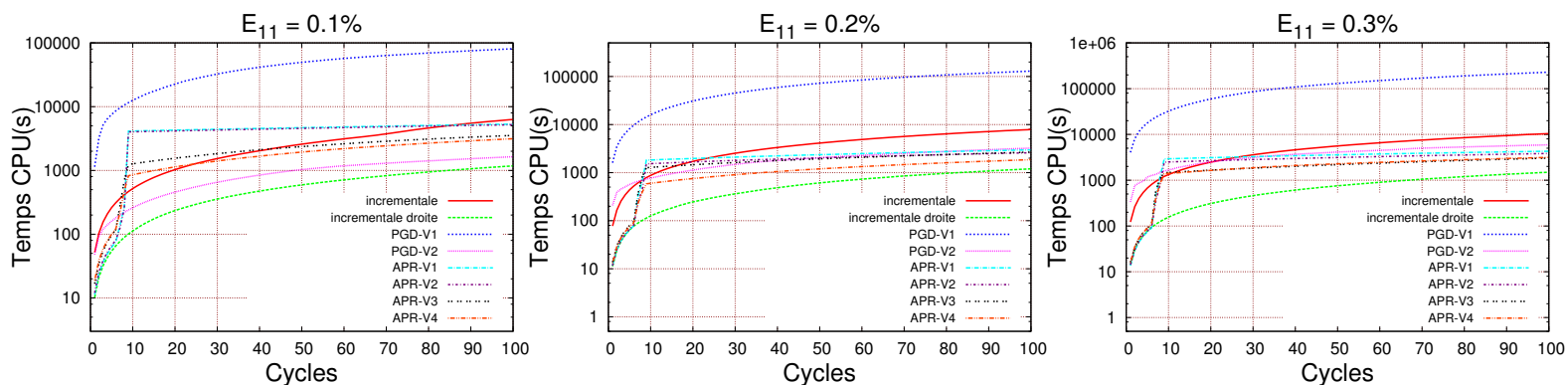
conduit à un gain de temps plus important (figure IV.34). Pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  après 30 cycles de chargement, la PGD-V2 permet de réduire le temps de calcul d'un facteur 1.7 avec le modèle d'agrégat  $8^3$ . Avec les modèles d'agrégats  $16^3$  et  $32^3$ , des facteurs temps plus importants sont observés respectivement de 2.4 et 12 ;

- En contrepartie de ce gain de temps, une utilisation de mémoire plus importante est nécessaire ;
- Le gain obtenu avec la PGD-V2 est plus faible que celui constaté avec la méthode incrémentale droite. A titre d'exemple, la méthode PGD-V2 est 2.7 moins rapide pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$  avec une discrétisation spatiale de  $8^3$  éléments et 3 fois moins rapide pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$  et un agrégat de  $16^3$  éléments.

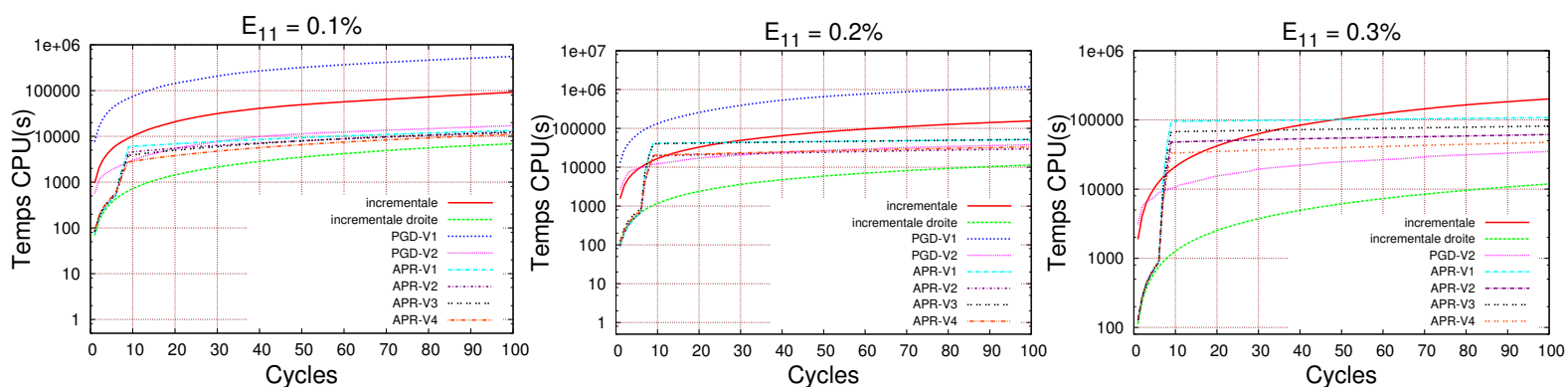
En ce qui concerne les quatre versions de la méthode APR cyclique, l'ensemble des résultats de la figure IV.33 montre que :

- Cette méthode est plus rapide que la méthode incrémentale ;
- Pour des modélisations avec un agrégat contenant un seul élément par grain, des gains de temps CPU relativement faibles sont constatés ;
- Les gains en temps sont généralement plus significatifs avec la stratégie d'adaptation de l'APR-V2 et l'APR-V4. Pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , les facteurs temps sont 2.6 avec la APR-V1, 3.2 avec la APR-V2, 2.9 avec la APR-V3 et 4.22 avec la APR-V4

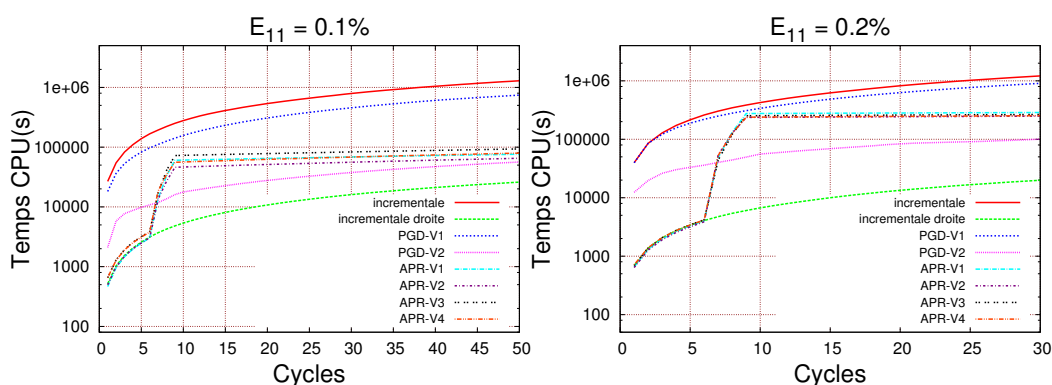
# CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS



(a) Modèle d'agrégat  $8^3$



(b) Modèle d'agrégat  $16^3$



(c) Modèle d'agrégat  $32^3$

FIGURE IV.33 – Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles pour les différents modèles d'agrégats polycristallins et amplitudes de chargement appliquée

- Une augmentation du nombre de ddl permet un gain de temps plus conséquent par rapport à la méthode incrémentale en utilisant une résolution incrémentale réduite. Ces résultats sont présentés en figure IV.34. Pour le modèle d'agrégat  $8^3$  et un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , les méthodes APR-V1 et APR-V3 sont respectivement 1.2 et 1.55 fois plus rapides après 30 cycles de chargement, alors qu'elles sont 4.22 et 4.56 fois plus rapides avec le modèle à  $32^3$  éléments. Les méthodes APR-V2 et APR-V4 réduisent le temps de calcul respectivement d'un facteur 4.87 et 4.78 avec une discrétisation de  $32^3$  éléments. En revanche, elles sont 1.4 et 2.8 fois plus rapides avec le modèle d'agrégat  $8^3$ .
- L'augmentation des non linéarités du problème diminue l'efficacité des méthodes APR cycliques par rapport à la méthode incrémentale. A titre d'exemple, pour  $8^3$  éléments et un chargement de  $E_{11} = 0.1\%$ , les méthodes APR-V3 et APR-V4 sont respectivement 7.32 et 8.32 fois plus rapides que la méthode de référence après 30 cycles de chargement. Néanmoins, elles sont 2.47 et 4.24 fois plus rapides pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$ . Cela peut être expliqué par le fait qu'une augmentation de la non linéarité du problème conduit à un enrichissement plus important de la base du modèle réduit. Cela implique une augmentation de la taille du modèle réduit.
- Il est à noter que les performances des méthodes APR cycliques sont moins bonnes que celles de la méthode incrémentale droite, et dans certains cas, que celles de la méthode PGD-V2 après 100 cycles de chargements.

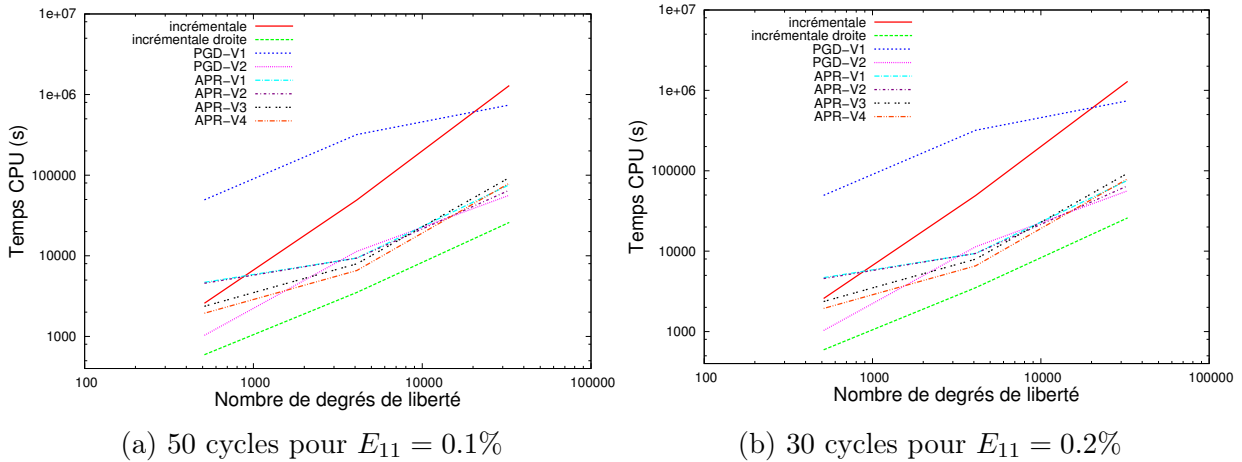


FIGURE IV.34 – Temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté

Les analyses précédentes montrent que les gains en temps CPU obtenus avec les méthodes de réduction de modèle (PGD-V2 et APR cyclique) sont intéressants par rapport à la méthode incrémentale (allant jusqu'à un facteur 12 pour les cas traités). Les gains sont plus significatifs avec des maillages plus fins. La résolution incrémentale du problème avec une matrice de rigidité constante conduit à un gain de temps CPU encore plus intéressant (allant jusqu'à un facteur 61) pour tous les cas traités. Il est à noter que ces résultats sont observés après 100 cycles de chargement (sauf pour le cas du modèle  $32^3$ ). L'ensemble des résultats de la figure IV.35 illustre l'évolution des temps de calcul pour 2000 cycles avec le modèle contenant 512 éléments, 1000 cycles dans le cas des modèles  $16^3$  et  $32^3$  éléments. A cause des temps CPU très importants, les résultats de la méthode incrémentale ainsi que la méthode PGD-V1 ne sont pas étudiés.

À partir de ces figures, il est clair que la méthode PGD-V2 nécessite plus de temps

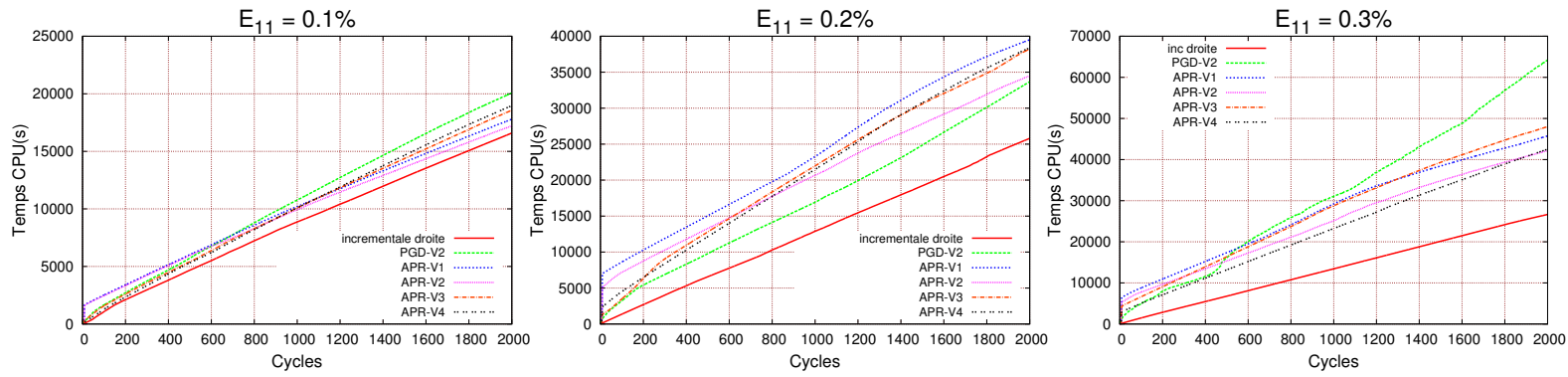
## CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

de calcul par rapport à la méthode incrémentale droite dans tous les cas traités (allant jusqu'à un facteur 3). La performance de la méthode PGD-V2 diminue considérablement avec une augmentation de l'amplitude du chargement, et donc implicitement avec la non linéarité du problème. A titre d'exemple, avec les modèles  $16^3$  et  $32^3$  éléments, la méthode incrémentale droite est respectivement 1.10 et 1.58 fois plus rapide que la méthode PGD-V2 pour  $E_{11} = 0.1\%$  après 1000 cycles de chargement. Pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$ , elle est respectivement 1.61 et 3 fois plus rapide. Des résultats similaires ont été observés dans le cas d'une augmentation du nombre de ddl du problème. La figure IV.36 illustre le temps CPU des différentes méthodes en fonction du nombre de ddl après 1000 cycles et pour les trois niveaux de chargement.

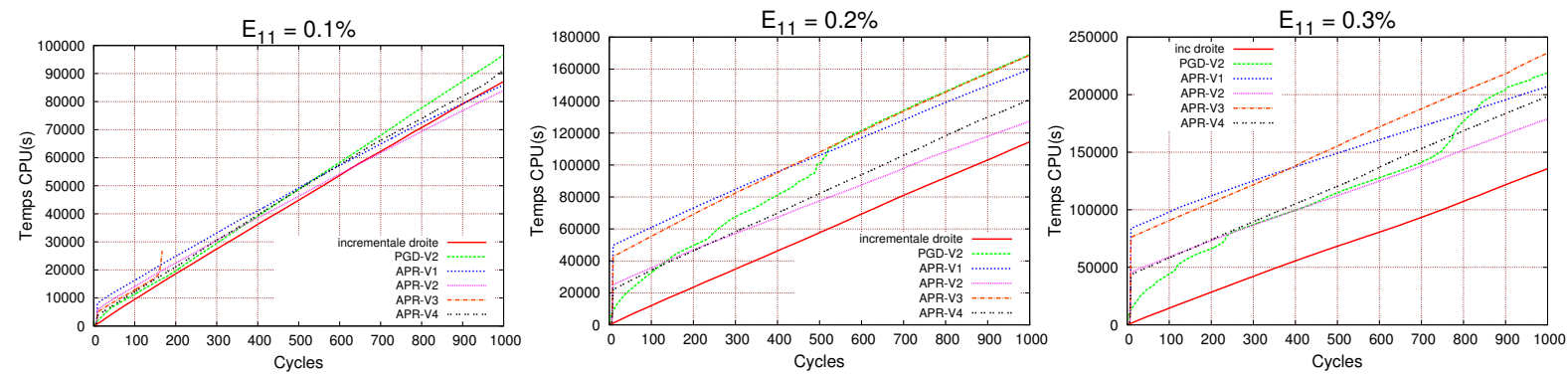
Les modélisations avec un modèle d'ordre réduit montrent que les gains en temps CPU de ces méthodes restent toujours faibles par rapport à la méthode incrémentale droite. Une augmentation de la non linéarité du problème diminue les performances des méthodes APR cycliques vis-à-vis de la méthode incrémentale droite. En effet, pour le modèle d'agrégat  $8^3$ , les méthodes APR-V1 et APR-V2 sont respectivement 1.3 et 1.53 moins rapides pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ . Ces facteurs passent à 1.71 et 1.58 pour une amplitude de  $E_{11} = 0.3\%$ . La figure IV.36 montre, après une simulation sur 1000 cycles, une diminution du gain de temps de calcul de la méthode incrémentale droite par rapport à une résolution avec un modèle réduit quand le nombre de ddl du problème croît. Il est à noter que la méthode APR cyclique avec la stratégie d'adaptation de l'APR-V2 et l'APR-4 est légèrement plus rapide qu'avec celle de l'APR-V1 et l'APR-V3. Le temps CPU des différentes méthodes de l'APR cyclique est moins important que la méthode PGD-V2 pour la majorité des cas. Cela est clairement visible quand la non linéarité du problème augmente.



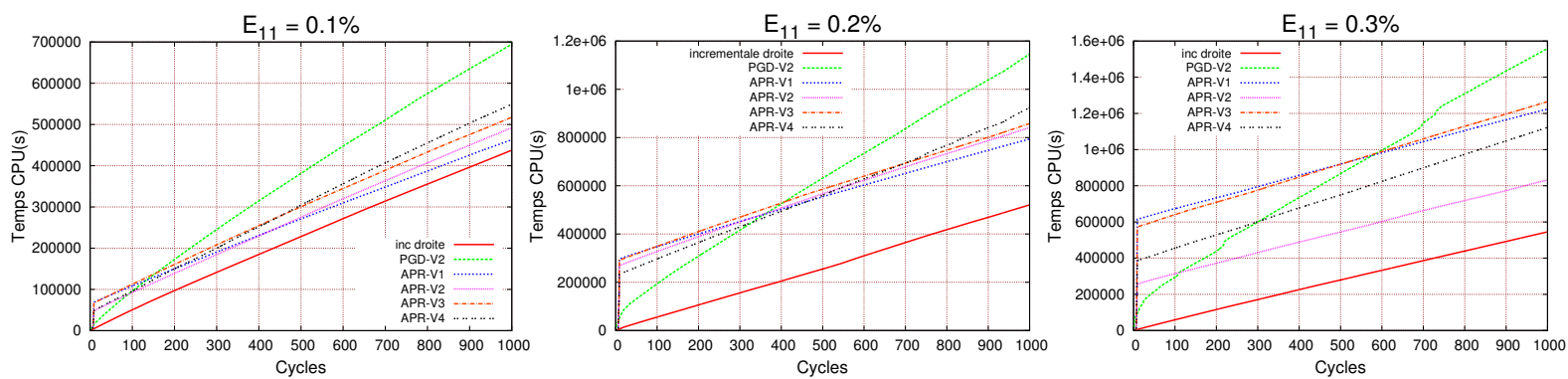
## 7. ANALYSE DU TEMPS DE CALCUL



(a) Modèle d'agrégat  $8^3$



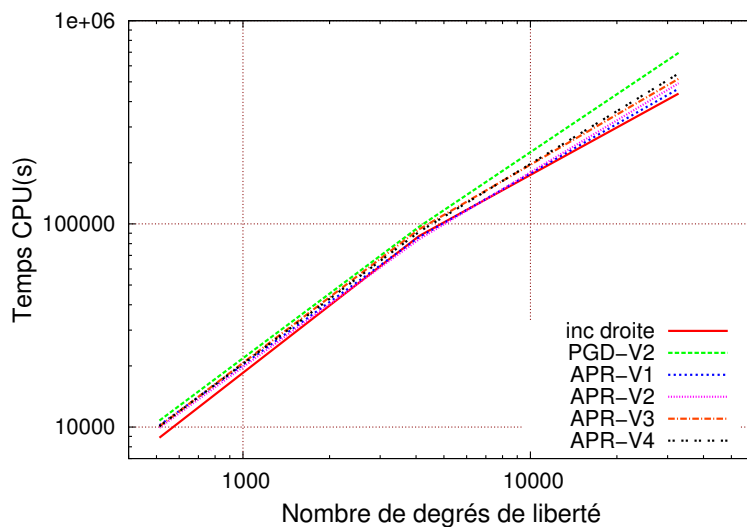
(b) Modèle d'agrégat  $16^3$



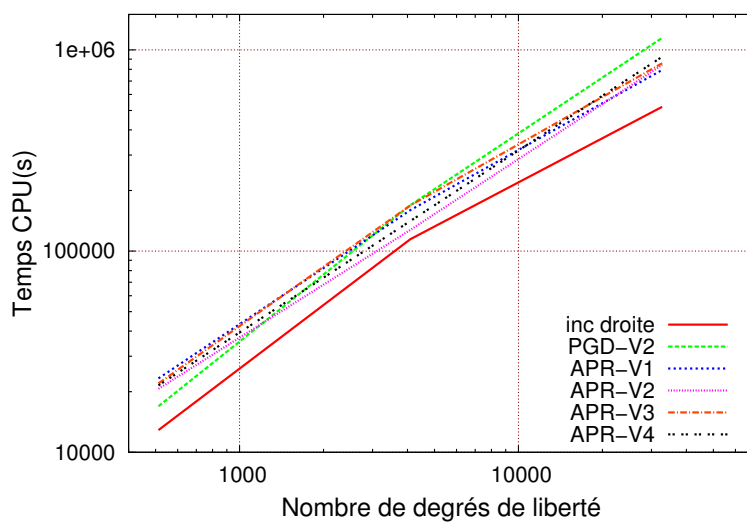
(c) Modèle d'agrégat  $32^3$

FIGURE IV.35 – Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles pour les différents modèles d'agrégats polycristallin et amplitudes de chargement appliquées

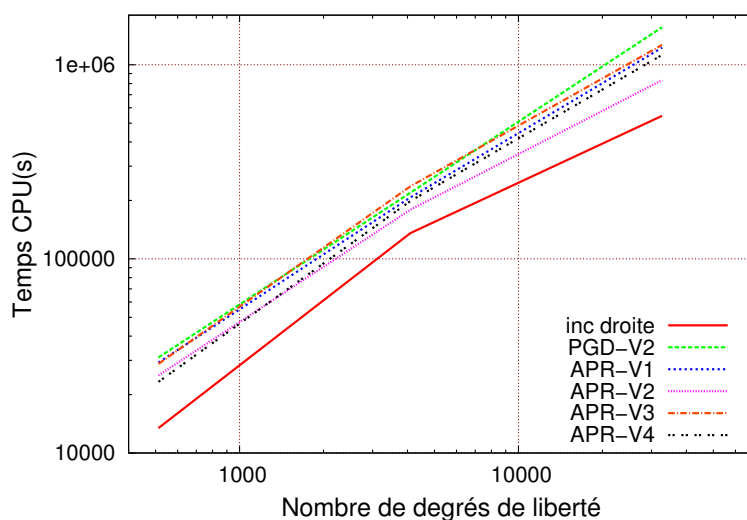
CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS  
POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS



(a)  $E_{11} = 0.1\%$



(b)  $E_{11} = 0.2\%$



(c)  $E_{11} = 0.3\%$

FIGURE IV.36 – Temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté après 1000 cycles de chargement

## 7.2 Discussions

Comme constaté avec les modélisations à l'échelle macroscopique du chapitre III, les simulations numériques d'agrégats polycristallins avec les méthodes proposées conduisent à des résultats mécaniques satisfaisants et un temps de calcul réduit.

Le gain en temps CPU obtenu avec une résolution incrémentale droite est dû au gain de temps lors de la factorisation, à chaque itération, de la matrice tangente. Une seule factorisation est effectuée avec la méthode incrémentale droite. La figure IV.37 présente une comparaison entre le temps par cycle et le temps solveur (qui représente le temps nécessaire pour résoudre l'étape globale) obtenus par les méthodes incrémentale et incrémentale droite. Ces résultats sont présentés pour une modélisation des 10 premiers cycles avec le modèle d'agrégat contenant  $32^3$  éléments. Ils montrent que le temps de l'inversion du système linéaire par cycle de la méthode incrémentale représente en moyenne 90% du temps de calcul par cycle (Fig. IV.37a). En revanche, pour la méthode incrémentale droite, ce temps représente en moyenne 22% du temps de cycle (Fig. IV.37b) (à l'exception du premier cycle car une factorisation est nécessaire à la première itération). Le temps de factorisation de la matrice tangente est proportionnel à la dimension du problème étudié. Ainsi, toute augmentation de la discrétisation spatiale conduit à un gain de temps plus conséquent de la méthode incrémentale droite. Aussi, il a été constaté que le gain en temps obtenu est plus important avec une augmentation de l'amplitude de chargement. Ce constat s'explique par le fait que lorsque la non linéarité croît, un nombre plus important d'itérations est nécessaire, à chaque incrément, afin de converger. Plus de factorisations de la matrice tangente sont nécessaires avec la méthode incrémentale.

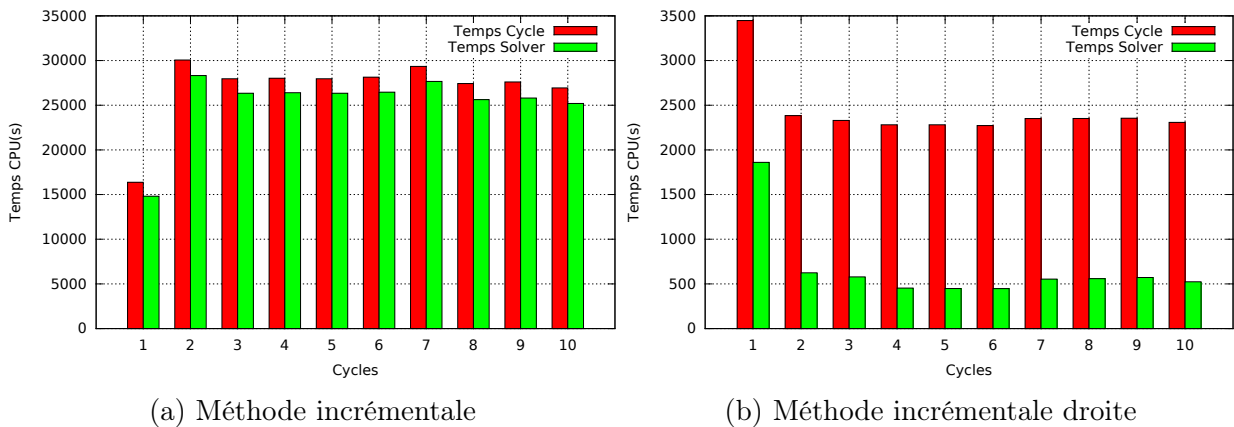


FIGURE IV.37 – Temps par cycle et temps solveur de la méthode incrémentale et incrémentale droite pour les 10 premiers cycles obtenus avec un agrégat polycristallin constitué de  $32^3$  éléments

Pour la méthode PGD, les nombres de fonctions et itérations par cycle, présentés à la figure IV.38, sont issus d'une modélisation d'un agrégat polycristallin composé de  $8^3$  éléments après 100 cycles. Ces résultats sont illustrés pour trois amplitudes de déformation macroscopique appliquées. Il est à noter que le nombre de fonctions par cycle de la méthode PGD-V2 (Fig. IV.38d) correspond au nombre total de fonctions enrichies pour toutes les itérations nécessaires par cycle (Fig. IV.38c).

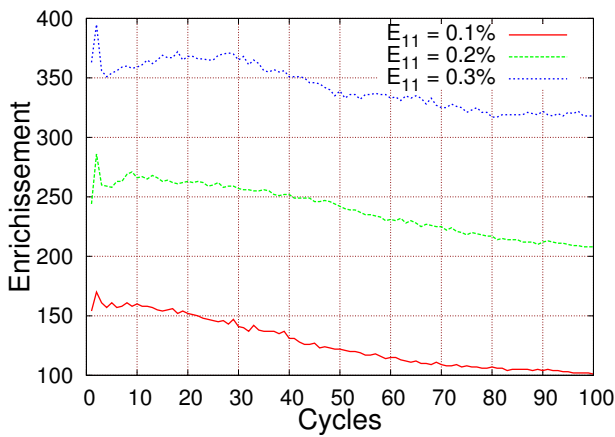
Les résultats montrent que les nombres d'itérations de la méthode PGD-V2 (Fig. IV.38d), pour les trois amplitudes de déformation appliquées, sont plus significatifs au cours des premiers cycles de chargement. Ceci est dû au fait que le comportement durant cette phase

évolue de manière conséquente d'un cycle à l'autre, ce qui conduit à un nombre plus important d'itérations afin de calculer le terme non linéaire. A partir d'un certain nombre de cycles (5<sup>ème</sup> cycle pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ ), seulement 3 itérations par cycle sont nécessaires pour obtenir la convergence. Ceci est également observé avec le nombre de fonctions enrichies par cycle pour les deux méthodes PGD (Fig. IV.38a et IV.38d). L'adaptation de la base PGD est effectuée principalement durant les premiers cycles. Ensuite, plus le nombre de cycles augmente, plus le comportement tend à se stabiliser. Cela conduit ainsi à une diminution de nombre de fonctions nécessaires à la convergence. Ces résultats sont accompagnés des temps de calcul par cycle des deux méthodes PGD (Fig. IV.38b et IV.38e) qui sont proportionnels au nombre d'itérations et au nombre d'enrichissements.

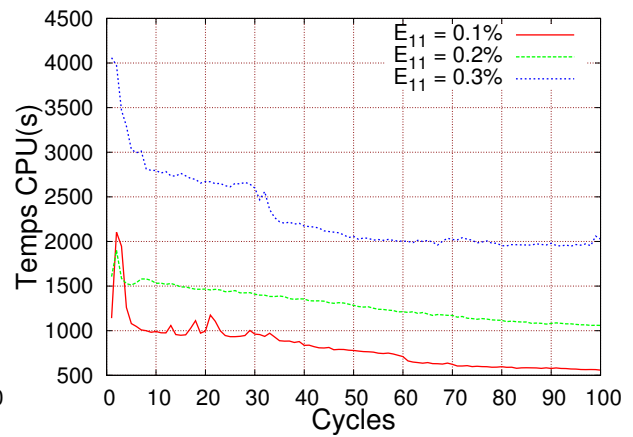
De manière générale, toute augmentation de la complexité du problème, en termes de non linéarité, affaiblit la performance de la méthode PGD vis-à-vis d'une résolution incrémentale contenant une matrice de rigidité constante. Plusieurs arguments peuvent expliquer ces conclusions :

- La résolution du problème avec la méthode PGD est conduite à l'aide d'un enrichissement successif de la base jusqu'à la convergence du champ de déformation plastique. Les figures IV.38a et IV.38d montrent ainsi que la PGD nécessite des centaines de fonctions pour atteindre la convergence à chaque cycle. Toutefois, il est à noter que le nombre de modes traduit le nombre de fois où le système linéaire II.36 de l'étape d'enrichissement est exécuté. Cette résolution est réalisée en tenant compte du nombre d'itérations de l'algorithme du point fixe (dans notre cas fixé à 3). A titre d'exemple, pour le 10<sup>ème</sup> cycle avec un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , les méthodes PGD-V1 et PGD-V2 nécessitent respectivement 266 et 132 fonctions pour la convergence. La résolution du système linéaire est effectuée  $266 \times 3$  et  $135 \times 3$  fois tandis qu'avec la méthode incrémentale droite elle est exécutée 340 fois pour toutes les itérations nécessaires.
- Afin de calculer le terme non linéaire du second membre à chaque itération (PGD-V2) ou à chaque enrichissement (PGD-V1), il est nécessaire d'effectuer la résolution de la loi de comportement. Cette dernière est résolue pour toute l'histoire spatio-temporelle, au vu du caractère non-incrémental de la méthode PGD. Ainsi, cette résolution nécessite plus de temps de calcul, notamment avec une loi de comportement de type plasticité cristalline.
- Comme abordé précédemment, il apparaît que toute augmentation de l'amplitude du chargement accroît le gain de la méthode incrémentale droite par rapport à la méthode PGD-V2. Les figures IV.38a, IV.38c et IV.38d montrent que le nombre d'itérations ainsi que le nombre de fonctions enrichies de la méthode PGD augmente considérablement avec le chargement appliquée. Plus le problème est non linéaire, plus la performance de la méthode PGD diminue.

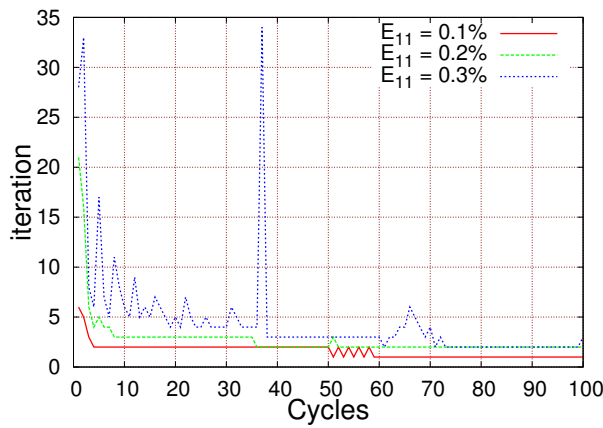
Dans le cas des modélisations avec les méthodes APR cycliques, la figure IV.39 présente l'évolution du temps CPU cumulé ainsi que le temps par cycle durant les 30 premiers cycles. Ces résultats correspondent aux modélisations d'un agrégat polycristallin contenant 8 éléments par grain et pour deux niveaux de chargement  $E_{11} = 0.1\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$ . Les résultats montrent que les versions de la méthode APR cyclique qui possèdent la même stratégie d'adaptation ont les mêmes évolutions du temps CPU durant les 8 premiers cycles. Une augmentation du temps de calcul de ces méthodes par rapport à la méthode incrémentale droite est observée durant cette phase. A chaque ajout d'une nouvelle fonction, il est nécessaire de faire la résolution du système linéaire réduit ainsi que la mise à jour du comportement. L'adaptation avec la stratégie de l'APR-V1 et APR-V3 nécessite plus de



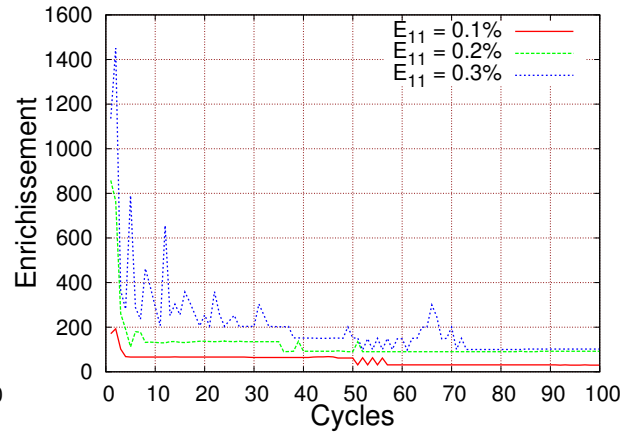
(a) nombre de fonctions PGD-V1



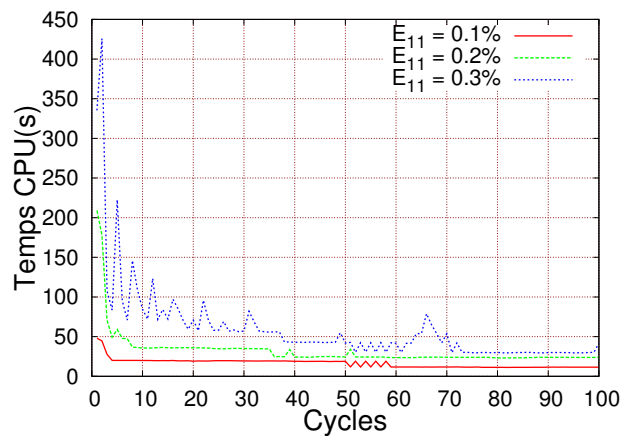
(b) temps par cycle PGD-V1



(c) itération par cycle PGD-V2



(d) nombre de fonctions PGD-V2



(e) temps par cycle PGD-V2

FIGURE IV.38 – Évolution du temps par cycle, du nombre d'itérations et du nombre de fonctions enrichies pour les deux méthodes PGD après 100 cycles de chargement pour les différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées et avec le modèle d'agrégat polycristallin contenant  $8^3$  éléments

fonctions que dans le cadre de l'APR-V2 et APR-V4. Les figures IV.39c et IV.39d montrent que le temps par cycle des méthodes APR-V2 et APR-V4 est bien inférieur à celle des méthodes APR-V1 et APR-V3. A la fin du dernier cycle d'adaptation, le temps de calcul de la méthode APR-V1 et APR-V2 augmente par rapport à ceux du APR-V3 et APR-V4. Ceci est lié au fait qu'une application d'une POD sur l'histoire de la base réduite adaptée augmente le temps de calcul.

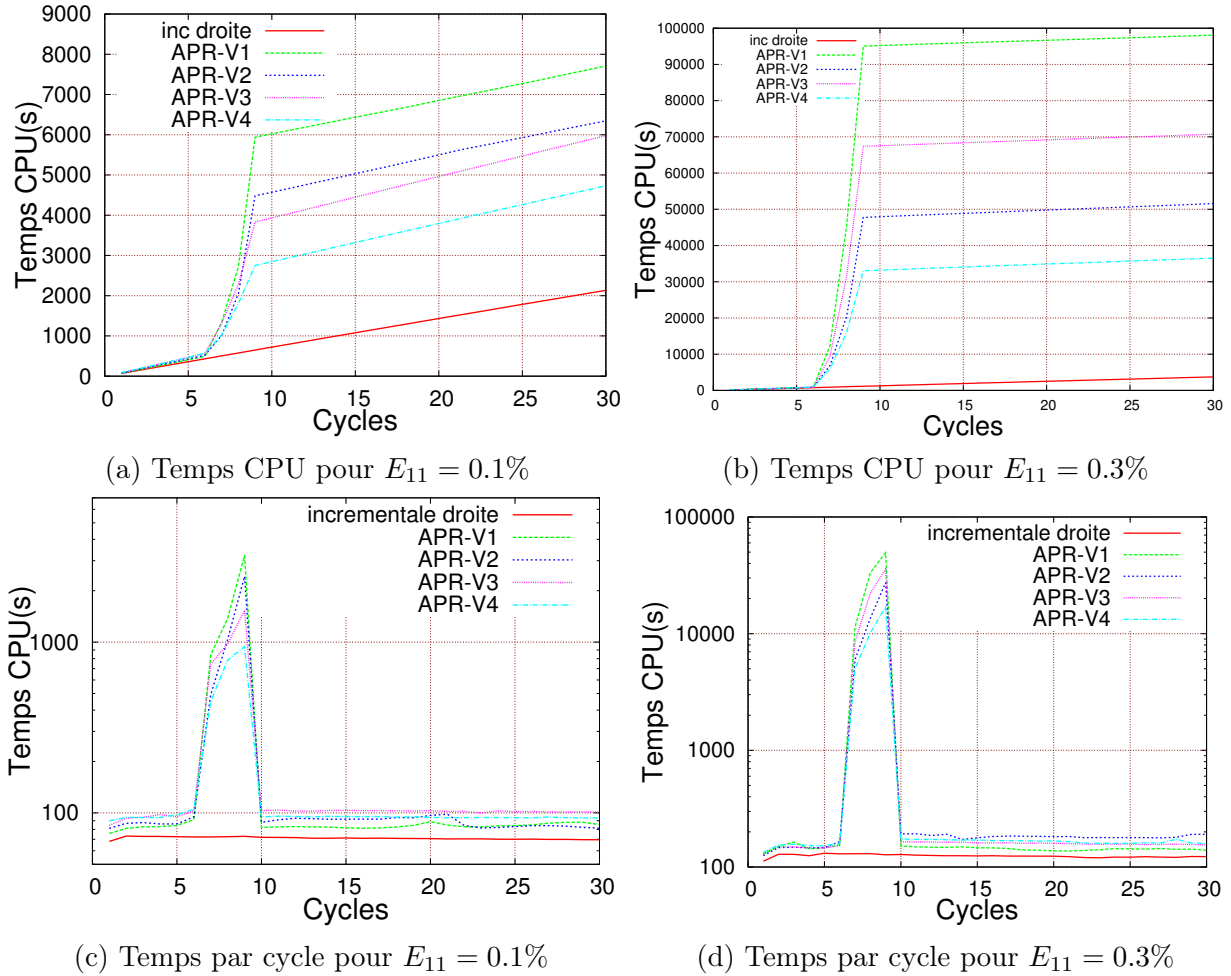


FIGURE IV.39 – Évolution du temps de calcul et temps par cycle des différentes versions de la méthode APR cyclique vis-à-vis à la méthode incrémentale droite après 30 cycles pour une modélisation d'un agrégat contenant  $16^3$  éléments avec deux amplitudes de chargement

De manière générale, les temps CPU des méthodes APR cycliques ne sont pas similaires à ceux constatés au chapitre III. Un gain en temps de calcul avec ces méthodes a été constaté par rapport à la méthode incrémentale et incrémentale droite pour une modélisation d'un problème macroscopique. A l'échelle de la microstructure, les performances des méthodes APR cycliques sont moins importantes que la méthode incrémentale droite. Plusieurs raisons peuvent justifier ces constats :

- Une augmentation de la non linéarité du problème nécessite plus de fonctions afin de corriger la prévision réduite du champ de déplacement. Cela conduit à une augmentation du temps de calcul de la phase d'adaptation ainsi que la dimension réduite du problème.
- L'approche itérative adaptative, pour chaque pas de temps, nécessite plus de calculs de la loi de comportement. Cela entraîne une augmentation du temps CPU lié à la

forte non linéarité de la loi de plasticité cristalline.

- La résolution incrémentale d'un système linéaire réduit avec une base constante permet un gain de temps par rapport à une résolution d'un modèle complet. Cela est dû à sa taille réduite. Ces résultats ont été observés dans le cadre d'une modélisation macroscopique du chapitre III. Dans le cadre de la modélisation des agrégats polycristallins, même si la taille du système linéaire est réduite, la courbe du temps de calcul augmente linéairement avec le nombre de cycles. Un argument peut expliquer ces résultats : pour une modélisation fortement non linéaire, la précision de la prévision réduite du champ de déplacement devient insuffisante. Cela conduit à davantage d'itérations pour faire converger l'état mécanique à chaque instant. Ces constats sont clairement illustrés à travers les résultats des figures IV.39c et IV.39d. En effet, le temps par cycle des méthodes APR cycliques, à partir du 10<sup>ème</sup> cycle, reste toujours supérieur à celui de la méthode incrémentale droite.

## 8 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a porté sur des simulations réalisées sur un agrégat polycristallin soumis à une déformation macroscopique purement alternée et composé de 512 grains de géométrie cubique. Plusieurs densités de maillage ont été choisies et trois niveaux de chargement ont été appliqués.

Une analyse sur le critère de convergence de la méthode PGD-V2 a été effectuée afin de réduire l'enrichissement de la base spatio-temporelle. Il a été constaté que, pour une limite de chargement de  $E_{11} = 0.4\%$ , la PGD-V2 permet une bonne estimation des réponses macroscopique et mésoscopique. Le gain de temps a été plus conséquent avec un critère plus restrictif ( $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  au lieu de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ ). La réponse mécanique macroscopique (moyenne dans l'agrégat) est bien prédite par les deux méthodes PGD pour les différentes amplitudes de déformation appliquées et pour les trois modèles d'agrégats. Dans le cas des réponses mésoscopiques, les méthodes PGD ont permis d'obtenir des résultats très proches de la méthode incrémentale. Cependant, Il a été constaté des écarts plus importants au niveau de la déformation mésoscopique, en particulier avec la méthode PGD-V2 et pour un chargement au delà de  $E_{11} = 0.2\%$ . Ces écarts restent néanmoins tout à fait acceptables (écarts relatifs maximum inférieurs à 1.2%). Il est à souligner que pour une modélisation au delà de 100 cycles, l'évolution de l'erreur est faible et reste constante à partir du 150<sup>ème</sup> cycle. Ces écarts peuvent être atténués en diminuant la tolérance, mais dans ce cas, le temps de calcul augmente significativement.

Dans un second temps, les réponses mécaniques macroscopique et mésoscopique des agrégats polycristallins, obtenues avec les méthodes APR cycliques après 100 cycles, ont été analysées. Pour les courbes contrainte-déformation macroscopiques, un bon accord est généralement constaté pour les différentes discrétisations spatiales. Cependant, des écarts au niveau des valeurs moyennes (contrainte et déformation) sont observés pour un chargement au delà de  $E_{11} = 0.2\%$ . Une bonne adéquation des valeurs moyennes en contrainte et en déformation dans chaque grain est observée. Les écarts moyens constatés, prédits dans les 512 grains, ne dépassent pas les 1% en contrainte et 2% en déformation. Pour un nombre plus important de cycles (2000 cycles), l'erreur relative en déformation mésoscopique tend vers une stabilisation et reste tout à fait acceptable avec un écart maximum moyen n'excédant pas 3%.

Le temps CPU issu des différentes modélisations a été présenté dans le dernier volet de ce chapitre. La modélisation avec la méthode PGD-V1 a conduit à un gain en temps relativement faible vis-à-vis de la méthode incrémentale. Ce gain n'a été constaté que dans

## CHAPITRE IV. SIMULATION NUMÉRIQUE D'AGRÉGATS POLYCRISTALLINS TRIDIMENSIONNELS

le cas d'une microstructure raffinée. En revanche, les gains avec la PGD-V2 et les méthodes APR cycliques sont très importants par rapport à la méthode incrémentale (allant jusqu'à un facteur 12 pour la PGD et un facteur 9 pour la APR). Il a été constaté que toute augmentation du nombre d'éléments (et donc implicitement du nombre de ddl) permet un gain de temps encore plus important. Dans le cadre d'une modélisation avec la méthode incrémentale droite, un gain de temps plus important a été obtenu pour tous les cas traités. Le nombre de fonctions de la méthode PGD ainsi que la complexité de la résolution de la loi de comportement de type plasticité cristalline à chaque itération (PGD-V2) ou enrichissement (PGD-V1) sont préjudiciables au temps de calcul. L'approche adaptative de la méthode APR cyclique ainsi que la résolution du modèle d'ordre réduit à base constante semblent défavorables en terme de temps CPU étant donné le nombre de modes enrichis, la forte non linéarité de la loi plasticité cristalline et le nombre d'itérations pour converger à chaque incrément avec une base constante.



## 8. CONCLUSION DU CHAPITRE

# Conclusion générale et perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit traitent principalement du problème de temps de calcul de la méthode des Éléments finis pour une modélisation à l'échelle de la microstructure et un grand nombre de cycles. Pour répondre au problème posé, une application des solveurs incrémentaux et non-incrémentaux avec des représentations séparées spatio-temporelles est utilisée à travers des méthodes de réduction de modèle couplées à des modèles Éléments Finis décrivant des comportements fortement non linéaires. L'avantage principal des méthodes de réduction de modèle réside dans le fait que l'espace et le temps sont discrétisés indépendamment et qu'une résolution fine des deux discrétisations peut être envisagée. Afin de mieux décrire ces propositions, des simulations numériques d'un modèle élasto-plastique macroscopique ainsi qu'élasto-visco-plastique microscopique sont mis en œuvre. En s'appuyant sur des exemples, on a essayé de comprendre l'efficacité de ces techniques pour limiter les temps de calculs.

La première partie est consacrée à une étude bibliographique relative aux différentes méthodes numériques en rapport avec notre étude. Le problème de référence est tout d'abord décrit à travers une formulation Éléments finis du problème mécanique associé à une résolution incrémentale en temps. Les méthodes numériques accélérées dont l'évolution des variables est traitée en tout point de la structure sont ensuite présentées. Les principes de la méthode LATIN, méthode cyclique directe et la méthode des sauts de cycles sont décrits. Les méthodes de réduction de modèle dites "*a posteriori*" où la construction de la base réduite est effectuée avec une connaissance de la solution sont abordées avec la SVD, les différentes variantes de la POD ainsi que la KLD. Les méthodes dites "*a priori*" sont évoquées. La construction de la base réduite ne nécessite aucune connaissance de la solution. La technique de la méthode APR et le principe de la méthode APHR sont passés en revue. La méthode PGD est discutée dans le cadre d'une résolution progressive pondérée spatio-temporelle. Enfin, leurs applications dans le cadre de la fatigue sont abordées.

La seconde partie de ce travail consiste à proposer des méthodes numériques accélérées pour des problèmes élasto-visco-plastiques cycliques. Parmi les techniques présentées dans la bibliographie, le choix se porte tout d'abord sur la méthode cyclique directe et la méthode des sauts de cycles. Ces deux méthodes sont testées dans le cadre d'un modèle de comportement en plasticité  $J_2$  avec différents types de chargement cycliques et de types de comportement. Au regard des résultats trouvés, ces deux méthodes ne semblent pas bien adaptées pour la simulation numérique des agrégats polycristallins. Même si les deux méthodes ont l'avantage d'être rapides, la méthode cyclique directe prédit mal les moyennes. La méthode des sauts de cycles, quant à elle, donne de bonnes prédictions mais le gain en temps est très dépendant de la non linéarité du comportement. Le développement d'autres méthodes numériques est donc entrepris en utilisant des méthodes de réduction de modèle. Afin de réduire le temps de calcul essentiellement dû à la factorisation de la matrice de rigidité, la première idée est de la maintenir constante. Un premier algorithme est écrit dans ce sens avec une résolution incrémentale, appelée méthode incrémentale droite, et une autre version non-incrémentale,

appelée cyclique, en gardant le terme non linéaire dans le second membre du système linéaire. La méthode PGD est ensuite appliquée avec une résolution itérative non-incrémentale. Cela conduit à deux possibilités d'utilisation de cette méthode :

- La PGD-V1 dont le terme non linéaire est mis à jour pour un champ de déplacement calculé pour un seul enrichissement ;
- La PGD-V2 où l'actualisation est effectuée à partir d'un champ de déplacement vérifiant la convergence pour un second membre donné.

D'autres méthodes sont également proposées en se basant sur le principe de la résolution d'un système d'ordre réduit. La précision de la base est corrigée au cours de la simulation selon une stratégie incrémentale à partir des nouvelles fonctions capables de décrire les caractéristiques de la solution. À cause du caractère adaptatif "*a priori*" de la méthode, quatre possibilités d'utilisation ont été proposées. Tout le travail entrepris est implémenté dans un code académique développé au sein du laboratoire LAMPA.

L'analyse des performances des différentes méthodes proposées est effectuée tout d'abord sur un problème classique tridimensionnel présentant un défaut sphérique, présentée dans le troisième chapitre. Le modèle de comportement modélisé est de type élasto-plastique avec un écrouissage mixte non linéaire. Deux discrétisations spatiales ainsi que différents types et niveaux de chargements sont considérés. Les résultats de la réponse mécanique en comparaison avec la méthode de référence sont d'abord présentés. Quel que soit le chargement appliqué, les différentes analyses effectuées ont permis de s'assurer que les méthodes proposées prédisent bien les réponses mécaniques, tant pour les courbes contrainte-déformation macroscopiques moyennées sur toute la structure que pour trois éléments fortement chargés. Il est à noter que la PGD-V2 avec une tolérance de l'enrichissement plus faible ( $\epsilon_{PGD} = 10^{-3}$  au lieu de  $\epsilon_{PGD} = 10^{-4}$ ), donne une prédiction de l'état mécanique avec un gain en temps de calcul conséquent. Cette condition ne peut être utilisée qu'avec un maximum de déformation macroscopique appliquée  $E = 0.5\%$ . L'initialisation de la base réduite de la méthode APR cyclique n'a pas d'influence sur la réponse mécanique. En revanche, la vitesse de convergence de ces méthodes est plus significative avec une initialisation à la fin du 6<sup>ème</sup> cycle en comparaison avec celle du premier cycle. Afin de garder une base constante et non évolutive, nous avons adapté la précision de la base uniquement pour les trois premiers cycles. Les gains en temps de calcul par rapport à la méthode incrémentale après 100 cycles sont présentés en section 6. Les résultats obtenus ont montré l'intérêt des méthodes de réduction de modèle (allant jusqu'à un facteur 46 pour les cas traités) à l'exception de la PGD-V1. La comparaison des résultats pour 1000 cycles par rapport à une résolution incrémentale droite ont montré une efficacité de la méthode PGD-V2 uniquement avec un modèle contenant un faible nombre de ddl. De plus, dans le cas raffiné, une augmentation de la non linéarité du problème a rendu la méthode PGD-V2 moins robuste. En revanche, les méthodes APR cycliques ont montré des gains intéressants par rapport à la méthode incrémentale droite pour tous les cas traités. En particulier, le gain de temps est plus important pour la méthode APR-V2 dans la majorité des cas. Ces gains de temps sont plus élevés quand on augmente l'amplitude du chargement.

Une deuxième validation des méthodes proposées à l'échelle de la microstructure est présentée dans le dernier volet de ce travail. Les résultats de cette partie apportent les éléments de réponse sur l'objectif principal de cette thèse. Des simulations d'un agrégat polycristallin tridimensionnel, avec plusieurs densités de maillage ainsi que trois niveaux de chargement, a été mis en œuvre afin d'étudier qualitativement la pertinence de la réponse mécanique des différentes méthodes ainsi que le temps de simulation. La réponse mécanique macroscopique (moyenne dans l'agrégat) a été bien prédite par les deux méthodes PGD. Les réponses mé-

soscopiques obtenues sont très proches de celles issues de la méthode incrémentale. En effet, les écarts avec la PGD-V2 n'excèdent pas 1.2% au niveau de la déformation mésoscopique. Des simulations avec 2000 cycles ont montré que l'évolution de l'erreur est faible et reste constante. Pour une limite de chargement en déformation de  $E = 0.4\%$ , il est possible d'appliquer un critère de convergence plus restrictif pour la PGD-V2 afin d'obtenir un gain de temps plus important. Par ailleurs, pour les méthodes APR cycliques, il a été montré qu'il est possible d'utiliser la même stratégie d'initialisation et d'adaptation de la base que celle discutée au chapitre III. Pour les courbes contrainte-déformation macroscopiques, un bon accord a été généralement constaté pour les différentes discrétisations spatiales (avec des écarts qui n'excèdent pas 1%). Une bonne adéquation des valeurs moyennes en contrainte et en déformation dans chaque grain a été observée avec des écart moyens ne dépassant pas 1% en contrainte et 2% en déformation. Il a été montré que ces écarts tendent vers une stabilisation et restent tout à fait acceptables pour un nombre plus important de cycle. Le temps des simulations a été réduit par les méthodes PGD-V2 et APR cyclique (avec un facteur allant jusqu'à 12), mais le gain est plus faible avec la PGD-V1 (un facteur de 1.4). Les gains sont plus importants quand on augmente la taille des maillages et la non linéarité du problème. L'idée de garder la matrice de rigidité constante avec une résolution incrémentale permet néanmoins un gain de temps plus important. Le nombre de fonctions enrichies et la complexité de la loi de comportement diminue l'intérêt de la méthode PGD. Le nombre important d'itérations à la convergence avec une base constante ainsi que le nombre de contrôle de la base, vu la non linéarité de la loi plasticité cristalline, rendent moins intéressants la méthode APR cyclique.

Au vu de ces différentes analyses, l'application des représentations séparées spatio-temporelles à des équations spatio-temporelles décrivant des comportements non linéaires doit être encore optimisée afin d'atteindre l'objectif des grands nombres de cycles à l'échelle des grains. Il peut en particulier être envisagé d'apporter des améliorations à l'aspect global et local :

- Aspect global : il est possible d'utiliser la méthode cyclique directe avec une représentation séparée spatio temporelle. Le principe s'oriente alors vers l'étude d'un seul cycle de chargement afin de déterminer directement la réponse stabilisée du problème. L'étape globale peut être résolue avec la même technique de résolution que celle proposée avec la PGD pour la réduction du temps de calcul en rajoutant la condition de périodicité à la fin de l'étape locale. Néanmoins, nous avons constaté que la méthode cyclique directe prédit mal les valeurs moyennes des contraintes et des déformations. Ceci a été expliqué par la condition de périodicité imposée sur le processus itératif qui influe sur l'état résiduel. Cette condition est proposée après cinq itérations avec un calcul à grand incrément de temps. Or, pour des problèmes fortement non linéaires, l'évolution de la solution reste encore importante au cours de ces premiers cycles. L'application de la condition de périodicité après un nombre plus important de cycles pourrait remédier au problème de la moyenne.
- Dans la même démarche que celle proposée précédemment, la détermination directe de la réponse asymptotique peut être effectuée selon une stratégie incrémentale en utilisant une formulation réduite pour la résolution du système linéaire. Dans ce cas, la précision de la prévision de la base réduite est améliorée soit avant la condition de périodicité, soit durant les trois premiers cycles qui succèdent cette dernière.
- Une autre perspective intéressante consiste à intégrer le principe de la méthode des sauts de cycles après un certain nombre de cycles. En effet, pour les modélisations avec un comportement élasto-plastique, nous avons pu observer une stabilisation du comportement. A ce stade, il sera intéressant de sauter des cycles puisque le

## CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

comportement est quasi-linéaire.

- Aspect local : il en ressort que la forte non linéarité et la complexité de la loi de plasticité cristalline semblent contraignantes dans le cadre d'une modélisation avec les méthodes de réduction de modèle. Une amélioration peut être apportée dans le cadre de résolution du modèle de comportement, ou de rajouter un paramètre permettant d'avoir une stabilisation plus rapide. Cela conduit à réduire le nombre de modes enrichis ainsi que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence.

# Bibliographie

- [1] ABAQUS. *User Manual, version 6.5*. Dassault Systèmes, 2005.
- [2] Guillaume Abrivard. *A coupled crystal plasticity - phase field formulation to describe microstructural evolution in polycrystalline aggregates during recrystallisation*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2009.
- [3] Mike A.Crisfield. *Non-linear Finite element Analysis of solids and structures : volume 1 essentials*. John Wiley and Sons Ltd, 1991.
- [4] Mike A.Crisfield. *Non-linear Finite element Analysis of solids and structures : volume 1*. John Wiley and Sons Ltd, 2000.
- [5] Komlan Agbessi. *Approches expérimentales et multi-échelles des processus d'amorçage des fissures de fatigue sous chargements complexes*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers-Centre de Bordeaux, 2013.
- [6] E. Agullo, P. Amestoy, A. Buttari, A. Guermouche, G. Joslin, J.-Y. L'Excellent, X.S. Li, A. Napov, F.-H. Rouet, M. Sid-Lakhdar, S. Wang, C. Weisbecker, and I. Yamazaki. Recent advances in sparse direct solvers. In *22nd Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, San Francisco*, 2013.
- [7] A. Ait-Yahia and E. Palomo Del Barrio. Thermal systems modelling via singular value decomposition : direct and modular approach. *Applied Mathematical Modelling*, 23 :447–468, 1999.
- [8] A. Ait-Yahia and E. Palomo Del Barrio. Numerical simplification method for statespace models of thermal systems. *Numerical Heat Transfer Part B*, 37 :201–225, 2000.
- [9] C. Allery, A. Hamdouni, D. Ryckelynck, and N. Verdon. A priori reduction method for solving the two-dimensional burgers' equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217 :6671–6679, 2011.
- [10] A. Ammar and F. Chinesta. Circumventing curse of dimensionality in the solution of highly multidimensional models encountered in quantum mechanics using meshfree finite sums decomposition. In *Meshfree Methods for Partial Differential Equations IV*, pages 1-17, 2008.
- [11] A. Ammar, F. Chinesta, and E. Cueto. Coupling finite elements and separated representation. *International Journal of Multiscale Computational Engineering*, 9(1) :17–33, 2011.

- [12] A. Ammar, F. Chinesta, E. Cueto, and M. Doblaré. Proper generalized decomposition of time-multiscale models. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 90 :569–596, 2012.
- [13] A. Ammar, F. Chinesta, P. Diez, and A. Huerta. An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1872–1880, 2010.
- [14] A. Ammar, F. Chinesta, and A. Falco. On the convergence of a greedy rank-one update algorithm for a class of linear systems. *Archives Of Computational Methods In Engineering*, 17(4) :473–486, 2010.
- [15] A. Ammar, E. Cueto, and F. Chinesta. Reduction of the chemical master equation for gene regulatory networks using proper generalized decompositions. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 28(9) :960–973, 2012.
- [16] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensionnal partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *J. of Non Newtonian Fluid Mechanics*, 139 :153–176, 2006.
- [17] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensionnal partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. part ii : Transient simulation using space-time separated representations. *J. of Non Newtonian Fluid Mechanics*, 144 :98–121, 2007.
- [18] A. Ammar, M. Normandin, and F. Chinesta. Solving parametric complex fluids models in rheometric flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165 :1588–1601, 2010.
- [19] A. Ammar, M. Normandin, F. Daim, D. Gonzalez, E. Cueto, and F. Chinesta. Non incremental strategies based on separated representations : Applications in computational rheology. *Mathematical Sciences*, 8(3, Sp.Iss. SI) :671,695, 2010.
- [20] A. Ammar, D. Ryckelynck, F. Chinesta, and R. Keunings. On the reduction of kinetic theory models related to finitely extensible dumbbells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 134 :136–147, 2006.
- [21] A. Ammar, A. Zghal, F. Morel, and F. Chinesta. On the space-time separated representation of integral linear viscoelastic models. *Comptes Rendus Mecanique*, 343 :247–263, 2015.
- [22] Amine Ammar. The proper generalized decomposition : a powerful tool for model reduction. *Int J Mater Form*, 3 :89–102, 2010.
- [23] ANSYS. *Finite element code*. Installation and configuration guide, 1999.
- [24] Markus Arzt. *approche des phénomènes cycliques par la méthode à grand incrément de temps*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [25] H. Askes and L.J. Sluys. Remeshing strategies for adaptive ale analysis of strain localisation. *Eur. J. Mech. A*, 19 :447–467, 2000.

- [26] J.A. Atwell and B.B. King. Reduced order controllers for spatially distributed systems via proper orthogonal decomposition. rapport technique. In *ICAM 99-07-01, Virginia Tech*, 1999.
- [27] N. Aurby, P. Holmes, J. L. Lumley, and E. Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192 :115–173, 1988.
- [28] Yessine Ayed. *Approches expérimentales et numériques de l’usinage assisté jet d’eau haute pression : étude des mécanismes d’usure et contribution à la modélisation multiphysiques de la coupe*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, centre d’Angers, 2013.
- [29] O. Balima, Y. Favennec, and D. Petit. Model reduction for heat condition with radiative boundary conditions using the modal identification method. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 52(2) :107–130, 2007.
- [30] K.J. BATHE. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, New York, 1982.
- [31] V.P. Bennett and D.L. McDowell. Crack tip displacements of microstructurally small surface cracks in single phase ductile polycrystals. *Engng Fracture Mechanics*, 70 :185–207, 2003.
- [32] V.P. Bennett and D.L. McDowell. Polycrystal orientation distribution effects on microslip in high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 25(1) :1087–1104, 2003.
- [33] J. Berthe. Cadre d’approximation espace-temps pour le traitement d’hyper-problèmes. Master’s thesis, ENS Cachan, 2010.
- [34] Didier Bodin. *Modèle d’endommagement cyclique : Application à la fatigue des enrobés bitumineux*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes, 2002.
- [35] P. Boisse, P. Ladevèze, M. Poss, and P. Rougee. A large time increment algorithm for anisotropic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 7 :65–77, 1991.
- [36] P. Boisse, P. Ladevèze, and P. Rougée. A large time increment method for elastoplastic problems. *Eur.J.Mech, A/solids*, 4 :257–275, 1989.
- [37] G. Bolzon and V. Buljak. An effective computational tool for parametric studies and identification problems in materials mechanics. *Comput Mech*, 48 :675–687, 2011.
- [38] Marc Bonnet. *Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis*. Ecole Polytechnique, département de Mécanique, majeure 2 SeISM, 2005.
- [39] Marc Bonnet and Attilio Frangi. *Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis*. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2007.
- [40] Christian La Borderie. *Introduction à la méthode des éléments finis*. 2003-2004.
- [41] H. Borouchaki, A. Cherouat, P. Laug, and K. Saanouni. Adaptive remeshing for ductile fracture prediction in metal forming. *C. R. Mecanique*, 330 :709–716, 2002.



- [42] G. P. Brooks and J. M. Powers. A karhunen-loève galerkin technique with shock fitting for optimization of a blunt body geometry. In *38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and exhibit. Indianapolis, 2002*.
- [43] H. Buret and G. Cailletaud. Zebulon, a finite element code for nonlinear material behaviour. In *Proc. Int. Conf. "New advances in structural computations"*, Giens, France, 2-5 Avril, pp.673-680, 1991.
- [44] W. D. Jr. Callister. *Material Science and Engineering An Introduction*. John Wiley and Sons, Inc., 1999.
- [45] Jianping CAO. *Modélisation numérique des problèmes d'interfaces sable-pieu pour les très grands nombres de cycles : Développement d'une méthode de sauts de cycles*. PhD thesis, Université Lille1 sciences et technologies, 2010.
- [46] Sophie Cartel. *Méthodes numériques de représentation à variables séparées pour la résolution des problèmes paramétriques en mécanique non-linéaire des structures*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011.
- [47] L. Champaney, P. Boucard, and S. Guinard. Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction. *Computational Mechanics*, 42(2) :305–315, 2008.
- [48] L. Champaney, P. Ladevèze, and P. Talbot. A non-incremental computational strategy for plastic or viscoplastic structures with unilateral contact. In *Computational Mechanics New Trends and Applications S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin (Eds.) CIMNE, Barcelona, Spain, 1998*.
- [49] H. Chen and Alan R. S. Ponter. A direct method on the evolution of ratchet limit. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 132, 2010.
- [50] J-L. Chenot, C. Béraudo, M. Bernacki, and L. Fourment. Finite element simulation of multi material metal forming. *Procedia Engineering*, 81 :2427–2432, 2014.
- [51] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. On the use of proper generalized decompositions for solving the multidimensional chemical master equation. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(1) :53–64, 2010.
- [52] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Proper generalized decomposition of multiscale models. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 83 :1114–1132, 2010.
- [53] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Proper generalized decomposition of multiscale models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) :1114–1132, 2010.
- [54] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensionnal models. In *Archives of Computational Methods in Engineering, pages 1-24*, 2010.
- [55] F. Chinesta, A. Ammar, A. Falco, and M. Laso. On the reduction of stochastic kinetic theory models of complex fluids. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 15 :639–652, 2007.

- [56] F. Chinesta, A. Ammar, and P. Joyot. Proper generalized decomposition of multiscale models. *The nanometric and micrometric scales of the structure and mechanics of materials revisited : An introduction to the challenges of fully deterministic numerical descriptions*, 6(3) :191–213, 2008.
- [57] F. Chinesta, A. Ammar, F. Lemarchand, P. Beauchene, and F. Boust. Alleviating mesh constraints : Model reduction, parallel time integration and high resolution homogenization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197 :400–413, 2008.
- [58] F. Chinesta, E. Cueto, D. Ryckelynck, and A. Ammar. Alpha-nem and model reduction : two new and powerful numerical strategies for describe flows involving short fiber suspensions. In *Revue Europeenne des Eléments Finis ; in press*.
- [59] J.Y. Cognard, P. Ladeveze, and P. Talbot. A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, 30 :583–593, 1999.
- [60] J.Y. Cognard and P. Ladevèze. a large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *Int. J. of Plasticity*, 9 :141–157, 1993.
- [61] F. Comte, M. H. Maitournam, P. Burry, and T. Mac Lan Nguyen. A direct method for the solution of evolution problems. *C. R. Mecanique*, 334 :317–322, 2006.
- [62] L. Cordier and M. Bergmann. Réduction de dynamique par décomposition orthogonale aux valeurs propres (pod). In *Optimisation et Contrôle des Ecoulements et des Transferts*, 12-17 Mars 2006.
- [63] J.-Y. Cognard and P. Ladevèze. A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 9 :141–157, 1993.
- [64] Vivien Courtier. *Réduction de modèle et simplification de l'intégration de loi de comportement pour la prévision de la durée de vie*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2013.
- [65] R. D. Cramer and I. M. Navon. Efficiency of a pod-based reduced second-order adjoint model in 4d-var data assimilation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(6) :985–1004, 2007.
- [66] M. Cremonesi, D. Néron, P.-A. Guidault, and P. Ladevèze. A pgd-based homogenization technique for the resolution of nonlinear multiscale problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 267 :275–292, 2013.
- [67] Yves Debard. *Méthode des éléments finis : élasticité plane*. Université du Mans, Master modélisation numérique et réalité virtuelle, 2011.
- [68] Josselin Delmas. *Fonctions de forme et points d'intégration des éléments finis*. EDF recherche et développement, GNU FDL, 2013.
- [69] F. Deprettere. Svd and signal processing : algorithms, analysis and applications. In *Elsevier Science Publishers, Amsterdam*, 1988.
- [70] O. Diard, S. Leclercq, G. Rousselier, and G. Cailletaud. Evaluation of finite element based analysis of 3d multicrystalline aggregates plasticity : Application to crystal plasticity model identification and the study of stress and strain fields near grain boundaries. *International Journal of Plasticity*, 21(4) :691–722, 2005.

- [71] Z.Z. Du, J. Wang, and W. Fan. Direct cyclic method for solder joint reliability analysis. In *IMECE2006, November 5-10, 2006, Chicago, Illinois, USA*, 2006.
- [72] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar. Proper general decomposition (pgd) for the resolution of navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 230 :1387–1407, 2011.
- [73] A. Dumon, C. Allery, and A. Ammar. Proper generalized decomposition method for incompressible navier–stokes equations with a spectral discretization. *Applied Mathematics and Computation*, 219 :8145–8162, 2013.
- [74] Antoine Dumon. *Réduction dimensionnelle de type PGF pour la résolution des écoulement incompressibles*. PhD thesis, Université de la Rochelle, 2011.
- [75] D. Dureisseix, P. Ladevèze, and B.A. Schrefler. A latin computational strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 56 :1489–1510, 2003.
- [76] C. Déprés, M.C. Fivel, and L. Tabourot. A dislocation-based model for low-amplitude fatigue behaviour of face-centred cubic single crystals. *Scripta Materiala*, 58 :1086–1089, 2008.
- [77] F. Eberl. *Second order heterogeneities in a multicrystal : experimental developments using X-ray diffraction and comparison with a finite element model*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, 1999.
- [78] B.S. Everitt and G. Dunn. Applied multivariate data analysis. In *Arnold, London*, 2001.
- [79] Marco Fahl. *Trust-Region methods for flow control based on Reduced Order Modeling*. PhD thesis, Université de Trier, 2001.
- [80] Nik Petrinic Fionn Dunne. *Introduction to computational plasticity*. Oxford University Press, 2006.
- [81] F. Galland, A. Gravouil, E. Malvesin, and M. Rochette. A global model reduction approach for 3d fatigue crack growth with confined plasticity. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 200(5-8) :699–716, 2011.
- [82] S. Ganapathysubramanian and N. Zabaras. Design across length scales : a reduced-order model of polycrystal plasticity for the control of microstructure-sensitive material properties. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :5017–5034, 2004.
- [83] S. Ghosh, Y. Bhandari, and M. Groeber. Cad-based reconstruction of 3d polycrystalline alloy microstructures from fib generated serial sections. *Computer-Aided Design*, 40(3) :293–310, 2008.
- [84] Alexandre Godin. *Estimation sur des bases orthogonales des propriétés thermiques de matériaux hétérogènes a propriétés constantes par morceaux*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2013.
- [85] D. Gonzalez, A. Ammar, F. Chinesta, and E. Cueto. Recent advances on the use of separated representations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81 :637–659, 2010.

- [86] D. Gonzalez, E. Cueto, F. Chinesta, P. Diez, and A. Huerta. Supg-based stabilization of proper generalized decompositions for high-dimensional advection-diffusion equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(13) :1216–1232, 2013.
- [87] R. Guerchais, F. Morel, and N. Saintier. The role of the microstructure and defects on crack initiation in 316l stainless steel under multiaxial high cycle fatigue. In *11th International Fatigue Congress*, Australia 2014.
- [88] R. Guerchais, C. Robert, F. Morel, and N. Saintier. Micromechanical study of the loading path effect in high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 59 :64–75, 2014.
- [89] R. Guerchais, N. Saintier, F. Morel, and C. Robert. Micromechanical investigation of the influence of defects in high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 67 :159–172, 2014.
- [90] R. Guerchais, N. Saintier, F. Morel, and C. Robert. Influence of the microstructure and voids on the high-cycle fatigue strength of 316l stainless steel under multiaxial loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and structures*, 38 :1087–1104, 2015.
- [91] Raphaël GUERCHAIS. *Influence d’accidents géométriques et du mode de chargement sur le comportement en fatigue à grand nombre de cycles d’un acier inoxydable austénitique 316L*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, centre d’Angers, 2014.
- [92] F. Guilhem. *Étude numérique des champs mécaniques locaux dans les agrégats polycristallins d’acier 316L sous chargement de fatigue*. PhD thesis, Mines ParisTech, 2011.
- [93] Y. Guilhem, S. Basseville, F. Curtit, J-M. Stéphan, and G. Cailletaud. Champs locaux, effets de joints de grains et de surface dans les agrégats polycristallins 3d. In *CSMA 11ème Colloque national en calcul des structures*, 13-17 Mai 2013.
- [94] Y. Guilhem, S. Basseville, F. Curtit, J-M. Stéphan, and G. Cailletaud. Investigation of the effect of grain clusters on fatigue crack initiation in polycrystals. *International Journal of Fatigue*, 32(11) :1748–1763, 2010.
- [95] Y. Guilhem, S. Basseville, F. Curtit, J-M. Stéphan, and G. Cailletaud. Numerical investigations of the free surface effect in three-dimensional polycrystalline aggregates. *Computational Materials Science*, 70 :150–162, 2013.
- [96] Céline Gérard. *Mesures de champs et identification de modèles de plasticité cristalline*. PhD thesis, Université Paris 13, 2008.
- [97] B Halphen. *Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité*. PhD thesis, Paris, 1978.
- [98] M. Hammoud, M. Beringhier, and J.-C. Grandidier. A reduced simulation applied to the viscoelastic fatigue of polymers. *Comptes Rendus Mecanique*, 342 :671–691, 2014.
- [99] M. Herbig, A. King, P. Reischig, H. Proudhon, E. M. Lauridsen, J. Marrow, J.-Y. Buffière, and W. Ludwig. 3-d growth of a short fatigue crack within a polycrystalline microstructure studied using combined diffraction and phasecontrast x-ray tomography. *Acta Materialia*, 52(2) :590–601, 2011.

- [100] Thibault Herbland. *Une méthode de correction élastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de concentration de contraintes sous chargement cyclique multiaxial non proportionnel*. PhD thesis, école des Mines de Paris, 2009.
- [101] Christophe Heyberger. *PGD espace-temps adaptée pour le traitement de problèmes paramétrés*. PhD thesis, École Normale Supérieure De Cachan, 2014.
- [102] P. Holmes, J. Lumley, and G. Berkooz. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry. In *Cambridge University, Cambridge*, 1996.
- [103] P. Holmes, J. Lumley, G. Berkooz, J. attingky, and R. Wittenberg. Low-dimensionals models of coherent structures in turbulence. *Phys. Rep.*, 287 :337–384, 1997.
- [104] A. Hor, N. Saintier, C. Robert, T. Palin-Luc, and F. Morel. Statistical assessment of multiaxial hcf criteria at the grain scale. *International Journal of Fatigue*, 67 :151–158, 2014.
- [105] H. Hotelling. Analysis of complex statistical variables in principal components. *J. Exp. Psy.*, 24 :417, 1953.
- [106] E. Héripré, M. Dexet, J. Crépin, L. Gélébart, A. Roos, M. Bornert, and D. Caldemaison. Coupling between experimental measurements and polycrystal finite element calculations for micromechanical study of metallic materials. *International Journal of Plasticity*, 23 :1512–1539, 2007.
- [107] J.-L. Chaboche J. Besson, G. Cailletaud and S. Forest. *Mécanique non-linéaire des matériaux*. Hermes, 2001.
- [108] A. Benallal J. Lemaitre, J.-L. Chaboche and R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, troisième édition, 2009.
- [109] M. Jabbado and M. H. Maitournam. A high-cycle fatigue life model for variable amplitude multiaxial loading. *Fatigue Fract Engng Mater Struct*, 31 :67–75, 2008.
- [110] T.J.R Hughes J.C. Simo. *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, 1997.
- [111] G. D Hatt J.L. Batoz. *Modélisation des Structures par Éléments Finis, I–III*. Hermès, Paris, 1991.
- [112] S. Y. Kung K. I. Diamantaras. *Principal Component Neural Networks : theory and Applications*. New York : John Wiley and Sons Inc, 1996.
- [113] T. Kanit. *Determination of representative volume element for random microstructures*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [114] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :3647–3679, 2003.
- [115] Habib Karaoui. *Nouveaux outils pour la conception fiable des structures*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2001.
- [116] K. Karhunen. Uber lineare methoden für wahrscheinliogkeitsrechnung. *Annales of Academic Science Fennicae, Series A1, Mathematical Physics*, pages 3–79, 1946.

- [117] K. Karhunen. Zur spektraltheorie stochastischer prozesse. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, page 37, 1946.
- [118] P. Kerfriden, P. Gosselet, S. Adhikari, and S. Bordas. Bridging proper orthogonal decomposition methods and augmented newton-krylov algorithms : an adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5-8) :850–866, 2011.
- [119] Leila Khalij. *Détermination directe des états limites et des champs de contraintes résiduelles pour les structures chargées cycliquement application de la méthode d’analyse simplifiée*. PhD thesis, Université de Lille I, 2002.
- [120] D.A. Knoll and P.R. McHugh. Newton–krylov methods applied to a system of convection–diffusion–reaction equations. *Comput. Phys. Commun.*, 88 :141–160, 1995.
- [121] Kristian Krabbenhoft. *Basic Computational Plasticity*. Department of Civil Engineering, Technical University of Denmark, June 2002.
- [122] R.D. Krieg and D.B. Krieg. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 99 :510–515, 1977.
- [123] S. Kruch. An efficient cycles jump technique for viscoplastic structures calculations involving large number of cycles. pages 1733–1744, 1992.
- [124] K. Kunisch and S. Volkwein. Control of burgers equation by a reduced-order approach using proper orthogonal decomposition. *J. Optimization Theory Appl.*, 102(2) :345–371, 1999.
- [125] P. Ladeveze, J.Y. Cognard, and P. Talbot. A non-incremental and adaptive computational approach in thermo-viscoplasticity. In *O. T. Bruhns and E. Stein, editors, IUTAM Symposium on Micro- and Macrostructural Aspects of the Thermoplasticity, pages 281-291*, 1999.
- [126] P. Ladevèze. Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. In *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 300 série II : p41-44*, 1985.
- [127] P. Ladevèze. La méthode à grand increment pour l’analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes. In *C.R.A.S 309, Série II, N 11*, 1989.
- [128] P. Ladevèze. The large time increment method for the analysis of structures with non-linear behavior described by internal variables. *Comptes Rendus De L’Academie Des Sciences Serie Ii*, 309(11) :1095–1099, 1989.
- [129] P. Ladevèze. *Mécanique non linéaire des structures*. Hermès, 1996.
- [130] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics-New approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Verlag, 1999.
- [131] P. Ladevèze and A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Compu. Methods Appl. Mech. Engrg.*, page 192, 2003.

- [132] P. Ladevèze and D. Néron. A multiscale computational method with time and space homogenization. *Comptes Rendus Mécaniques*, 330(4) :683–689, 2002.
- [133] P. Ladevèze, D. Néron, and J.-C. Passieux. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1287–1296, 2009.
- [134] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, and D. Néron. The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199 :1287–1296, 2010.
- [135] P. Ladevèze and U. Perego. Duality preserving discretization of the large time increment methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 189 :205–232, 2000.
- [136] L. D. Lathauwer, B. A. Moor, and J. Vandewalle. A multilinear singular value decomposition, *siam journal on matrix analysis and applications*. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21 :1253–1278, 2000.
- [137] A. J. Laub and V. C. Klema. The singular value decomposition : its computation and some applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25 :164–176, 1980.
- [138] R.A. Lebensohn. N-site modeling of a 3d viscoplastic polycrystal using fast fourier transform. *Acta Materialia*, 49 :2723–2737, 2001.
- [139] R.A. Lebensohn, A.K. Kanjarla, and P. Eisenlohr. An elasto-viscoplastic formulation based on fast fourier transforms for the prediction of micromechanical fields in polycrystalline materials. *International Journal of Plasticity*, 32-33 :59–69, 2012.
- [140] R.A. Lebensohn and C.N. Tomé. A self-consistent anisotropic approach for the simulation of plastic deformation and texture development of polycrystals : application to zirconium alloys. *Acta Metallurgica et Materialia*, 41 :2611–2624, 1993.
- [141] P. A. LeGresley and J.J. Alonso. Airfoil design optimization using reduced order models based on proper orthogonal decomposition. In *AIAA Paper 2000-2545*, 2000.
- [142] J. Lemaitre and I. Doghri. Damage 90 : a post processor for crack initiation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 115 :197–232, 1994.
- [143] P.M. Lesne and S. Savalle. Numerical analysis of an engine turbine disk loaded with a large number of thermomechanical cycles. *Proceedings of 2nd International Conference on Computational Plasticity*, pages 591–602, 1989.
- [144] A. Leygue, F. Chinesta, and M. Beringhier. Towards a framework for non-linear thermal models in shell domains. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 23(1) :55–73, 2013.
- [145] Yan LI. *Amorçage de fissures en fatigue dans un acier 304L : influence la micro-structure et d'un chargement d'amplitude variable*. PhD thesis, École Centrale Paris, 2012.
- [146] Y. C. Liang, H. P. Lee, S. P. Lim, W. Z. Lin, and K. H. Lee. Proper orthogonal decomposition and its applications - part i : Theory. *Journal of Sound and vibration*, 252(3) :527–544, 2002.

- [147] R. Lillbacka, E. Johnson, and M. Ekh. A model for short crack propagation in polycrystalline materials. *Engng Fracture Mechanics*, 73 :223–232, 2006.
- [148] T.H. Lin, K.K.F. Wong, N.J. Teng, and S.R. Lin. Micromechanic analysis of fatigue band crossing grain boundary. *Mater. Sci. Eng.*, A246 :169–179, 1998.
- [149] M. M. Loève. Probability theory. In *Princeton : Van Nostrand*, 1955.
- [150] M. M. Loève. *Probability theory*. The University Series in Higher Mathematics, 3rd Ed. Van Nostrand, Princeton, NJ., 1963.
- [151] J. L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *A.M. Iaglom and V.I. Tatarski, editors, Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation, Nauka, Moscow*, pages 221–227, 1967.
- [152] J.L. Lumley. Atmospheric turbulence and wave propagation. the structure of inhomogeneous turbulence. In *A.M. Yaglom et V.I. Tatarski*, 1967.
- [153] J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pages 166–178, 1967.
- [154] M. H. Maitournam, C. Krebs, and A. Galtier. A multiscale fatigue life model for complex cyclic multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 33 :232–240, 2011.
- [155] J. Mandel, J. Zarka, and B. Halphen. Adaptation d’une structure élastoplastique à écrouissage cinématique. *Mech. Res. Comm*, 4 :309–314, 1977.
- [156] N. Maouche, M.H. Maitournam, and K. Dang Van. On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts. *Wear Elsevier Scinece S.A.*, 203-204 :139–147, 1997.
- [157] Nadir Maouche. *Modélisation des phénomènes d’endommagement dus aux contacts à faible amplitude de débatement*. PhD thesis, école nationale des ponts et chaussées, 1997.
- [158] C. Mareau and S. Berbenni. An affine formulation for the self-consistent modeling of elasto-viscoplastic heterogeneous materials based on the translated field method. *International Journal of Plasticity*, 64 :134–150, 2015.
- [159] C. Mareau, D. Cuillerier, and F. Morel. Experimental and numerical study of the evolution of stored and dissipated energies in a medium carbon steel under cyclic loading. *Mechanics of Materials*, 60 :93–106, 2013.
- [160] M.-C. Marinelli, A. E. Bartali, J.W. Signorelli, P. Evrard, V. Aubin, I. Alvarez-Armas, and S. Degallaix-Moreuil. Activated slip systems and microcrack path in lcf of a duplex stainless steel. *Materials Science and Engineering*, 509(1-2) :81–88, 2009.
- [161] R. Markovinovic and J. Jansen. Accelerating iterative solution methods using reduced-ordered models as solution predictors. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 68 :525–541, 2006.
- [162] R. Masson and A. Zaoui. Self-consistent estimates for the rate-dependentelastoplastic behaviour of polycrystalline materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(7) :1543–1568, 1999.



- [163] Guillaume Maîtrejean. *Contribution à la modélisation numérique de la théorie cinétique des suspensions*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2011.
- [164] F. Morel and N. Huyen. A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals. *International Journal of Fatigue*, 16 :377–384, 1994.
- [165] F. Morel and N. Huyen. Plasticity and damage heterogeneity in fatigue. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 49(1) :98–127, 2008.
- [166] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157 :69–94, 1998.
- [167] L. Méric and G. Cailletaud. Single crystal modeling for structural calculations. part 2 : Finite element implementation. *J. of Engng. Mat. Technol.*, 113 :171–182, 1991.
- [168] D. Neron and P. Ladeveze. Proper generalized decomposition for multiscale and multi-physics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :351–372, 2010.
- [169] H. Neuber. Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary non-linear stress-strain law. *J. of Applied Mechanics*, 28 :544–551, 1961.
- [170] Q.S. Nguyen. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *Int. J. for Numerical Methods in Engng*, 11 :817–832, 1977.
- [171] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engng*, 196 :4251–4537, 2007.
- [172] A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engng*, 197 :4718–4736, 2008.
- [173] A. Nouy and P. Ladevèze. Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving micro problems. *Int. J. Multiscale Comput. Engng*, page 170, 2004.
- [174] A. Nouy and O. P. Le Maitre. Generalized spectral decompositions for stochastic nonlinear problems. *Journal of Computational Physics*, 228 :202–235, 2009.
- [175] J.Z. Zhu O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [176] R.L. Taylor O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method vol I-II*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [177] Herve Oudin. *Méthode des éléments finis*. Ecole centrale de Nantes, 2008.
- [178] J. Pacull, B. Mochel, R. Masson, and O. Débordes. Modèle numérique micromécanique d'agrégat polycristallin pour le comportement des combustibles oxydes. In *19ème Congrès Français de Mécanique*, Marseille, 24-28 Août 2009.

- [179] A. Paquin, H. Sabar, and M. Berveiller. Integral formulation and self-consistent modelling of elastoviscoplastic behavior of heterogeneous materials. *Archive of Applied Mechanics*, 69(6) :14–35, 1999.
- [180] H. Park and W. Lee. An efficient method of solving the navier-stokes equations for flow controls. *Phys. Rep*, 287 :337–384, 1997.
- [181] H. Park and L. Sirovich. Turbulent thermal convection in a finite domain : Part ii. numerical results. *Physics of Fluids A*, 2(9) :1659–1668, 1990.
- [182] H. Park and L. Sirovich. “accelerated disturbance damping of an unknown distributed system by nonlinear feedback. *AIChE Journal*, 38(9) :1461–1476, 1992.
- [183] H. M. Park and D. H. Cho. The use of the karhunen loève decomposition for the modeling of distributed parameters systems. *Chemical Engineering Science*, 51(1) :81–98, 1996.
- [184] H. M. Park and M. W. Lee. An efficient method of solving the navier-stokes equations for flow control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 :1133–1155, 1998.
- [185] H. M. Park and M. W. Lee. Boundary control of the navier-stokes equation by empirical reduction of modes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :165–186, 2000.
- [186] H. M. Park and M. W. Lee. Control of the navier-stokes equation by means of mode reduction. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33 :535–557, 2000.
- [187] H. M. Park and T. Y. Yoon. Solution of inverse radiation problems using the karhunen-loève galerkin procedure. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 68 :489–506, 2001.
- [188] J.C. Passieux, P. Ladevèze, and D. Néron. A scalable time-space multiscale domain decomposition method : adaptative time scale separation. *Computational Mechanics*, 46(4) :621–633, 2010.
- [189] K. Pearson. On lines and planes of closest to points in space. *Philosophical Magazine*, 40(4) :1446–1474, 1901.
- [190] K. Pearson. On lines planes of closes fit to system of points in space. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2, pages 559–572, 1901.
- [191] R. H. J. Peerlings, W. A. M. Brekelmans, R. de Borst, and M. G. D. Geers. Gradient-enhanced damage modelling of high-cycle fatigue. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 49 :1547–1569, 2000.
- [192] M. Peigney and C. Stolz. Approche par contrôle optimal des structures élastoviscoplastiques sous chargement cyclique. In *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris Série II b*, t 329, 2001.
- [193] D. Peirce, R.J. Asaro, and A. Needleman. Material rate dependence and localized deformation in crystalline solids. *Acta Metall.*, 31 :1951–1976, 1983.

- [194] B. Pommier, M.H. Maitournam, and Gaombalet. Détermination de cycle limite par une méthode cyclique directe. In *actes du 5ème colloque national de calcul des structures*, 2001.
- [195] Benjamin Pommier. *Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique soumise à un chargement thermomécanique cyclique*. PhD thesis, école polytechnique, 2003.
- [196] W. Prager. The theory of plasticity : a survey of recent achievements. In *Proc. Inst. Mech. Engrs, London, 169*, pp. 41-57, 1955.
- [197] E. Pruliere, F. Chinesta, and A. Ammar. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4) :791–810, 2010.
- [198] C.P. Przybyla and D.L. McDowell. Simulated microstructure-sensitive extreme value probabilities for high cycle fatigue of duplex ti-6al-4v. *International Journal of Plasticity*, 27(12) :1871–1895, 2011.
- [199] A. Le Pécheur, M. Clavel F. Curtit, J.M. Stephan, C. Rey, and Ph. Bompard. Polycrystal modelling of fatigue : Pre-hardening and surface roughness effects on damage initiation for 304l stainless steel. *International Journal of Fatigue*, 45 :48–60, 2012.
- [200] S. Quilici, S. Forest, and G. Cailletaud. On size effects in torsion of multi- and polycrystalline specimens. *Journal de Physique IV*, 8 :39–48, 1998.
- [201] A. Radermacher and S. Reese. Proper orthogonal decomposition based model reduction for nonlinear biomechanical analysis. *Int J Mater Eng Innov*, 4(2) :149–165, 2013.
- [202] A. Radermacher and S. Reese. Model reduction in elastoplasticity : proper orthogonal decomposition combined with adaptive sub-structuring. *Comput Mech*, 54 :677–687, 2014.
- [203] B. Ravindra. On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and vibration*, 219 :189–192, 1999.
- [204] Z.-Y. Ren and Q.-S. Zheng. A quantitative study of minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals-numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :881–893, 2002.
- [205] Joris J.C.Remmers René de Brost, Mike A.Crisfield and Clemens V. Verhoosel. *Non-linear Finite element Analysis of solids and structures*. Wiley series in computational mechanics, 2012.
- [206] Peerlings RHJ. *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology : Eindhoven, The Netherlands, 1999.
- [207] F. Risler and C. Rey. Iterative accelerating algorithms with krylov sub-spaces for the solution to large-scale non-linear problems. *Numer. Algorithms*, 23 :1–30, 2000.
- [208] C. Robert and C. Mareau. A comparison between different numerical methods for the modeling of polycrystalline materials with an elastic-viscoplastic behavior. *Computational Materials Science*, 103 :134–144, 2015.

- [209] C. Robert, N. Saintier, T. Palin-Luc, and F. Morel. Micro-mechanical modelling of high cycle fatigue behaviour of metals under multiaxial loads. *Mechanics of Materials*, 55 :112–129, 2012.
- [210] Hervé Rognon. *Comportement en fatigue sous environnement vibratoire : Prise en compte de la plasticité au sein des méthodes spectrales*. PhD thesis, école centrale de Paris, 2013.
- [211] Hervé Rognon. *Méthode d'estimation rapide de la tenue en fatigue oligocyclique d'une structure dans le cadre de la plasticité confinée : application aux assemblages soudés pour la construction navale*. PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, 2013.
- [212] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202 :346–366, 2005.
- [213] D. Ryckelynck. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :75–89, 2009.
- [214] D. Ryckelynck and D.M. Benziane. Multi-level a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 199(17-20) :1134–1142, 2010.
- [215] D. Ryckelynck, F. Chinesta, E. Cueto, and A. Ammar. On the a priori model reduction : Overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13(1) :91–128, 2006.
- [216] D. Ryckelynck, L. Hermanns, F. Chinesta, and E. Alarcon. An efficient a priori model reduction for boundary element models. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(8) :796–801, 2005.
- [217] D. Ryckelynck, K. Lampoh, and S. Quilicy. Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Mecanica*, 51 :309–317, 2016.
- [218] D. Ryckelynck and D. Missoum-Benziane. Multi-level a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(17-20) :1134–1142, 2010.
- [219] D. Ryckelynck, D. Missoum-Benziane, S. Cartle, and J. Besson. A robust adaptive model reduction method for damage simulations. *Computational Materials Science*, 50(5) :1597–1605, 2011.
- [220] D. Ryckelynck, F. Vincent, and S. Cantournet. Multidimensional a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225 :28–43, 2012.
- [221] David Ryckelynck. Hyperréduction a priori en dynamique non-linéaire à large bande. In *Giens*, 04 février 2005.
- [222] David Ryckelynck. Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *C. R. Mécanique*, 330 :499–505, 2002.
- [223] Kacem Sai. *Modèles à grand nombre de variables internes et méthodes numériques associées*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1993.

- [224] Jean Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Éditions de l'École Polytechnique, 2007.
- [225] B. Sarbandi, S. Cartle, J. Besson, and D. Ryckelynck. Truncated integration for simultaneous simulation of sintering using a separated representation. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4) :455–463, 2010.
- [226] S. Savalle and J.P. Culié. Méthodes de calcul associées aux lois de comportement cyclique et d'endommagement. *La recherche Aérospatiale*, 5 :263 – 278, 1978.
- [227] E. Schmid and W. Boas. *Kristalplastizität*. Springer Verlag, 1935.
- [228] J. Schwartz, O. Fandeur, and C. Rey. Fatigue crack initiation modeling of 316ln steel based on non local plasticity theory. *Procedia Engineering*, 2 :1353–1362, 2010.
- [229] J. Schwartz, O. Fandeur, and C. Rey. Numerical approach of cyclic behaviour of 316ln stainless steel based on a polycrystal modelling including strain gradients. *International Journal of Fatigue*, 55 :202–212, 2013.
- [230] Julien Schwartz. *Approche non locale en plasticité cristalline : application à l'étude du comportement mécanique de l'acier AISI 316LN en fatigue oligocyclique*. PhD thesis, École Centrale Paris, 2011.
- [231] J.C. Simo and R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48 :101–118, 1985.
- [232] S. Sirisup, GE. Karniadakis, D. Xiu, and IG. Kevrekidis. Equation-free/galerkin-free pod-assisted computation of incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 207(2) :568–587, 2005.
- [233] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. part 1 : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3) :561–571, 1987.
- [234] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. part 2 : Symmetries and transformations. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3) :573–582, 1987.
- [235] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. part 3 : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV(3) :583–590, 1987.
- [236] L. Sirovich and M. Kirby. Low-dimensional procedure for the characterization of human faces. *Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision*, 4(3) :519–524, 1987.
- [237] L. Sirovich and H. Park. Turbulent thermal convection in a finite domain : Part i. theory. *Physics of Fluids A*, 2(9) :1649–1658, 1990.
- [238] K. V. Spiliopoulos and K. D. Panagiotou. A direct method to predict cyclic steady states of elastoplastic structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 223-224 :186–198, 2012.
- [239] K.V. Spiliopoulos. A direct method to predict cyclic steady states of elastoplastic structures. *D. Weichert, G. Maier (Eds.), Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads, Kluwer Academic Publishers*, pages 213–232, 2000.

- [240] K.V. Spiliopoulos. A simplified method to predict the steady cyclic stress state of creeping structures. *ASME J. Appl. Mech.*, 69 :149–153, 2002.
- [241] K.V. Spiliopoulos and K.D. Panagiotou. Simplified methods for the steady state inelastic analysis of cyclically loaded structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 223-224 :186–198, 2012.
- [242] G. Strang. *Linear algebra and its applications*. Thomson/Cole, 2006.
- [243] C. Teodosiu, J.-L. Raphanel, and L. Tabourot. Finite element simulation of the large elastoplastic deformation of multicrystals. In *5th MECAMAT Int. Seminar on Large Plastic Deformations : Fundamental Aspects and Applications to Metal Forming*, pages 153–168, Fontainebleau, France, 1993.
- [244] M.J. Turner, R.W. Clough, C.H. Martin, and L.J. Topp. *J.Aero.Sci.*, 23 :805 – 824, 1956.
- [245] K. Dang Van. *Sur la résistance à la fatigue des métaux*. Sciences et Techniques de l’armement, mémorial de l’artillerie française, 3eme facicule, 1973.
- [246] E. Vasseur, P. Navidi, and S. Hariri. Direct determination of limiting cycle during cyclic loading. *Computational materials Sc.*, 7 :11–15, 1996.
- [247] N. Verdon, C. Allery, C. Béghein, A. Hamdouni, and D. Ryckelynck. Reduced-order modelling for solving linear and non-linear equations. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*, 27 :43–58, 2011.
- [248] N. Verdon, C. Allery, D. Ryckelynck, and A. Hamdouni. An adaptive rom approach for solving transfer equations. *European Journal of Computational Mechanics*, 15 :589–605, 2005.
- [249] Nicolas Verdon. *Un système dynamique d’ordre réduit basé sur une approche APR-POD pour l’étude de l’interaction écoulement turbulent-particules*. PhD thesis, Université de la Rochelle, 2007.
- [250] S. Volkwein. Optimal control of a phase-eld model using proper orthogonal decomposition. In *Z. Angew. Math. Mech.*
- [251] Peter Wriggers. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, 2008.
- [252] J. Yvonnet and Q.-C. He. The reduced model multiscale method (r3m) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, 223 :341–368, 2007.
- [253] J. Zarka and J. Casier. Elastic-plastic response of a structure subjected to cyclic loading : practical rules. *Mechanics Today*, 6 :93–198, 1979.
- [254] J. Zarka, J. Frelat, G. Inglebert, and P. Kasmal-Navidi. A new approach in inelastic analysis of structures. *CADLM*, 1990.
- [255] J. Zarka and H. Karaouni. New rules to be included in codes and standards to represent multiaxial variable amplitudes loadings on structures. In *ICONE10, Arlington, VA*, 2002.

- [256] J. Zarka and H. Karaoui. Fatigue analysis of structures during random loadings. In *ISSN*, 2009.
- [257] J. Zarka and P.K. Navidi. Simplified dynamical analysis of inelastic structures. *Nuclear Engineering and Design*, 92 :89–103, 1986.
- [258] J. Zarka and A. Pecker. Participation à la mise au point d’une méthode d’analyse simplifiée. *LMS école polytechnique, Rapport final*, 1988.
- [259] Jihed Zghal. *Etude du comportement en fatigue à grand nombre de cycles d’un acier à haute limite d’élasticité HC360LA : Endommagement, plasticité et phénomènes dissipatifs associés*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, centre d’Angers, 2016.
- [260] O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [261] O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung. *Engineer*, pages 507 – 510, 1965.

# Annexe A

## Description de la méthode LATIN

### Sommaire

---

1	Équations du problème . . . . .	218
2	Principe de la méthode . . . . .	219

---



## 1 Équations du problème

Le problème de référence a été déjà défini dans la partie 2.1. La solution de ce problème est assurée par la connaissance des champs de déformations totale et plastique, les champs de contrainte, ainsi que les variables et les forces internes. Soit  $\mathcal{X}$  les variables internes et  $\mathcal{Y}$  l'ensemble des variables conjuguées de  $\mathcal{X}$ . Le taux de dissipation est donné par :

$$\int_{\Omega} (\dot{\varepsilon}^p : \sigma - (\dot{\mathcal{X}}, \mathcal{Y})) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\dot{\varepsilon}^p \circ f) \, d\Omega \quad (\text{A.1})$$

avec  $(\cdot, \cdot)$  traduit le produit scalaire et  $\circ$  l'opérateur associé [33] et  $f$  s'écrit :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\mathcal{Y}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

En écrivant le comportement des matériaux dans le cadre des processus irréversibles de la thermodynamique, les équations d'état peuvent s'écrire sous la forme :

$$\{\sigma\} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \{\varepsilon^e\}} = [C^{el}] \{\varepsilon^e\} \quad (\text{A.3})$$

$$\{\mathcal{Y}\} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \{\mathcal{X}\}} = [\Lambda] \{\mathcal{X}\} \quad (\text{A.4})$$

avec  $\varepsilon^e$  le champ de déformation qui traduit la partie élastique,  $[C^{el}]$  la matrice de rigidité élastique et  $\Lambda$  un tenseur linéaire symétrique défini positif, constant par rapport au temps. Ainsi, en utilisant l'écriture A.2, les équations A.3 et A.4 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\{f\} = \begin{bmatrix} [C^{el}] & 0 \\ 0 & [\Lambda] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^e\} \\ \{\mathcal{X}\} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^e\} \\ \{\mathcal{X}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} [C^{el}] & 0 \\ 0 & [\Lambda] \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Une relation entre  $\{\sigma, \mathcal{Y}\}$  et  $\{\dot{\varepsilon}^p, \dot{\mathcal{X}}\}$  doit être incluse dans le modèle afin de satisfaire le second principe [48]. Ainsi, la loi d'évolution, non linéaire, est donnée par :

$$\{\dot{\varepsilon}^p\} = B(\{f\}) = \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} \phi^* \\ \partial_{\mathcal{Y}} \phi^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

avec  $B$  un opérateur différentiel positif et  $\phi^*(\{\sigma\}, \{\mathcal{Y}\})$  représentant le pseudo-potential de dissipation. Soit les espaces associés aux champs  $\{\dot{\varepsilon}^p\}$  et  $\{f\}$  compatibles avec l'équation A.1, qui correspondent aux conditions d'admissibilité des champs solutions, donnés par :

- $U^*$  l'espace des champs cinématiquement admissibles qui traduit l'ensemble des champs de déplacement  $\{U\}$  sur  $\partial_1 \Omega$  ;
- $F^*$  l'espace des champs statiquement admissibles de  $\{f\}$  qui traduit l'ensemble des champs de contrainte  $\{\sigma\}$  en équilibre avec les forces  $\{F_d\}$  sur  $\partial_2 \Omega$  et volumiques  $\{f_d\}$  sur  $\Omega$  ;
- $\varepsilon^*$  l'espace des champs cinématiquement admissibles de  $\{\dot{\varepsilon}\}$  telle que les champs de déformations  $\{\varepsilon\}$  sont obtenus à partir du champ de déplacement  $\{U\} \in U^*$  ;

## 2. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Ces espaces définissent l'espace dans lequel l'état de la structure  $S = (\dot{\varepsilon}^p, f)$  est recherché. Deux espaces d'éléments solutions vérifiant les équations peuvent alors être définis :

- $A_d$  l'espace des champs admissibles vérifiant les équations linéaires éventuellement globales, dont  $f$  est statiquement admissible tel que :

$$\{f\} \in F^*, ([A]^{-1}\{\dot{f}\} + \{\dot{\varepsilon}^p\}) \in \varepsilon^* \quad (\text{A.8})$$

- $\Gamma$  l'espace des champs admissibles vérifiant les équations non linéaires locales en temps et en espace telle que  $\{\dot{\varepsilon}^p\}$  et  $\{f\}$  vérifient la loi d'évolution.

Enfin la solution du problème de référence  $S_{ref}$  appartient à l'intersection des deux espaces  $A_d$  et  $\Gamma$  telle que :

$$S_{ref} \in (A_d \cap \Gamma) \quad (\text{A.9})$$

Cette solution est trouvée par la construction des éléments  $S_n \in A_d$  et  $\hat{S}_n \in \Gamma$  sur l'espace-temps  $\Omega \times I$ , avec  $I = [0, T]$  l'intervalle du temps.

## 2 Principe de la méthode

La méthode LATIN est basée sur la résolution de problèmes non linéaires. Chaque itération de cette méthode, sur l'ensemble de la structure  $\Omega$  et sur l'intervalle de temps  $\mathcal{I}$ , est constituée de trois principes :

1. La séparation du problème de référence en deux espaces : l'espace global  $A_d$  qui contient les équations globales et linéaires et l'espace local  $\Gamma$  qui contient les équations locales et non linéaires.
2. La construction des éléments  $S_n \in A_d$  et  $\hat{S}_n \in \Gamma$  par un processus itératif qui résout successivement chacun des deux groupes d'équations. En effet, en premier lieu  $\hat{S}_{n+1/2}$  est déterminée dans l'espace  $\Gamma$  à partir de la projection de  $S_n$  dans l'espace  $A_d$ , ensuite  $S_{n+1}$  est calculée à partir de  $\hat{S}_{n+1/2}$  trouvée précédemment. Les directions de recherche associées à chaque étape sont notées  $E^+$  et  $E^-$  qui permettent le passage d'un espace à un autre (figure A.1). Ainsi :
  - La détermination de  $\hat{S}_{n+1/2} \in \Gamma$  s'effectue par la connaissance de  $S_n \in A_d$  et à l'aide de la direction de recherche  $E^+$  donnée par :

$$E^+ = [\delta s = (\delta \dot{\varepsilon}^p, \delta f) \mid \delta \{\dot{\varepsilon}^p\} + [H^+] \delta \{f\} = 0] \quad (\text{A.10})$$

Avec  $[H^+]$  un paramètre de la méthode qui est un opérateur symétrique défini positif. Ensuite  $\{\hat{f}_{n+1/2}\}$  est déterminée par la résolution du problème non linéaire donné par :

$$B(\{\hat{f}_{n+1/2}\}) + [H^+]\{\hat{f}_{n+1/2}\} = \{\dot{\varepsilon}_n^p\} + [H^+]\{f_n\} \quad (\text{A.11})$$

Une fois  $\{\hat{f}_{n+1/2}\}$  trouvé par la résolution de l'équation A.11,  $\{\hat{\varepsilon}_{n+1/2}^p\}$  est trouvée à l'aide de la direction de recherche  $E^+$  par la relation suivante :

$$\{\hat{\varepsilon}_{n+1/2}^p\} = \{\dot{\varepsilon}_n^p\} + [H^+]\{f_n\} - [H^+]\{\hat{f}_{n+1/2}\} \quad (\text{A.12})$$

Enfin  $\hat{S}_{n+1/2} \in \Gamma$  est obtenue telle que  $\hat{S}_{n+1/2} = (\{\hat{\varepsilon}_{n+1/2}^p\}, \{\hat{f}_{n+1/2}\})$ .

## Annexe : Description de la méthode LATIN

- La détermination de  $S_{n+1} \in A_d$  s'effectue par la connaissance de  $\hat{S}_{n+1/2} \in \Gamma$ , trouvée dans l'étape précédente et à l'aide de la direction de recherche  $E^-$ , par :

$$E^- = [\delta s = (\delta \dot{\varepsilon}^p, \delta f) \mid \delta \{\dot{\varepsilon}_p\} - [H^-] \delta \{f\} = 0] \quad (\text{A.13})$$

où  $[H^-]$  est un paramètre de la méthode qui est un opérateur symétrique défini positif. Ensuite  $\{f_{n+1}\}$  est déterminée par la résolution du problème global donné par :

$$\int_{\mathcal{I} \times \Omega} (f^* \circ ([A]^- \{\dot{f}_{n+1}\} + [H^-] \{f_{n+1}\})) \, d\Omega dt = \int_{\mathcal{I} \times \Omega} (f^* \circ \hat{a}) \, d\Omega dt + \int_{\mathcal{I} \times \partial_1 \Omega} (\sigma^* n \cdot \dot{U}_d) \, dS dt \quad (\text{A.14})$$

Avec :

$$\{\hat{a}\} = \{\hat{\varepsilon}_{n+1/2}^p\} - [H^-] \{\hat{f}_{n+1/2}\} \quad (\text{A.15})$$

Le problème de l'équation A.14 est linéaire. Une fois le problème A.14 résolu,  $\{\dot{\varepsilon}_{n+1}^p\}$  est calculée, à l'aide de la direction de recherche, par :

$$\{\dot{\varepsilon}_{n+1}^p\} = \{\hat{a}\} - [H^-] \{f_{n+1}\} \quad (\text{A.16})$$

Ainsi,  $S_{n+1} \in A_d$  tel que  $S_{n+1} = (\{\dot{\varepsilon}_{n+1}^p\}, \{f_{n+1}\})$ , est obtenu.

3. Le troisième principe de la méthode LATIN consiste à utiliser une méthode de réduction de modèles dans la résolution de l'étape globale. En effet, l'ensemble  $\Gamma$  contient les équations non linéaires et locales en temps et en espace mais l'ensemble  $A_d$  contient l'ensemble des équations linéaires, mais globales. Donc il est coûteux en temps de calcul et en espace mémoire. Une idée proposée par Ladevèze [126, 130] sous le nom de la décomposition radiale consiste à chercher la solution d'un problème d'évolution sous la forme d'un produit de  $m$  fonctions découplées :

$$\mathcal{F}(X, t) \approx \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Psi_i(X) \quad (\text{A.17})$$

La variable  $\mathcal{F}$  peut traduire les champs de contrainte, de déformation plastique et les variables internes. L'écriture A.17 permet de découpler le problème en espace  $X$  et en temps. On trouve le même type de décomposition dans le cadre de la PGD pour le cas spécifique des problèmes espace/temps par Ammar et al. [16, 17] sous le nom "Proper Generalized Decomposition (PGD)". Cette méthode sera discutée d'une manière détaillée dans la partie 4.3.3. Le couplage de la méthode PGD avec la méthode LATIN a permis de diminuer le coût du temps de calcul et le stockage [131, 173, 133, 66].

4. La convergence et critère d'arrêt de l'algorithme. La convergence de la méthode est vérifiée avec une technique de relaxation numérique par :

$$S_{n+1} = \mu \hat{S}_{n+1} + (1 - \mu) S_{n+1} \quad (\text{A.18})$$

où  $\hat{S}_{n+1}$  traduit la solution de l'étape globale,  $S_{n+1}$  est la solution de l'étape de relaxation en  $n + 1$  et  $\mu$  présente le paramètre de relaxation généralement pris égal à 0.8 [101]. En ce qui concerne le critère d'arrêt, il est vérifié par une mesure de distance entre deux solutions consécutives (Fig.A.1) de l'étape globale et locale d'une même

## 2. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

itération  $\|S_{n+1} - \hat{S}_{n+1/2}\|$  qui va tendre vers zéro, puisque la solution recherchée  $S_{ref}$  est l'intersection entre  $A_d$  et  $\Gamma$ . Ainsi Ladevèze [130] propose de vérifier :

$$Res_{LATIN} = \frac{\|S_{n+1} - \hat{S}_{n+1/2}\|}{\|S_{n+1} + \hat{S}_{n+1/2}\|} \quad (\text{A.19})$$

avec :

$$\|S\| = \int_{\mathcal{I} \times \Omega} (\dot{\varepsilon}^p H^{-1} \dot{\varepsilon}^p + f H f) d\Omega dt \quad (\text{A.20})$$

Le résidu  $Res_{LATIN}$  est calculé à la fin de chaque itération. Ainsi, l'algorithme est arrêté lorsque sa valeur sera inférieure ou égale à une tolérance  $\epsilon_{LATIN}$ .

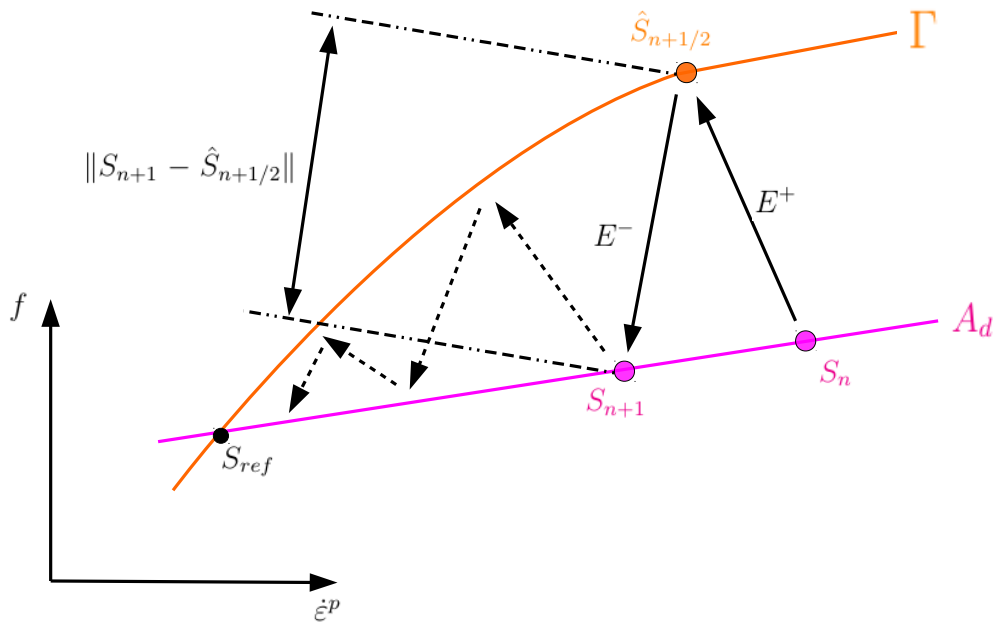


FIGURE A.1 – Principe de la méthode LATIN



# Annexe B

## Méthode de Zarka

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Principe de la méthode . . . . .</b>	<b>224</b>
<b>2</b>	<b>Détermination de l'état limite . . . . .</b>	<b>226</b>
2.1	Cas du comportement adapté . . . . .	226
2.2	Cas du comportement accommodé . . . . .	227

---

La méthode de Zarka est une méthode de calcul accélérée qui permet de déterminer l'état limite ainsi que les déformations plastiques et les contraintes résiduelles en tout point de la structure sans suivre l'évolution du chargement [119]. Cette méthode, est aussi appelée méthode d'analyse simplifiée des Structures Inélastiques, et a été proposée par Zarka et Casier [253] et par Zarka et al.[254]. Elle est capable de donner la réponse mécanique d'une structure à partir d'un calcul élastique linéaire basé sur un changement de variable et une décomposition de la réponse en deux parties : élastique et plastique.

## 1 Principe de la méthode

Le formalisme développé par Zarka est le suivant. La réponse réelle de la structure est décomposée en une partie élastique et inélastique. Soit :

$$\underline{U}(t) = \underline{U}^e(t) + \underline{U}^{ine}(t) \quad (\text{B.1})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{ine}(t) \quad (\text{B.2})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}^e(t) + \underline{\underline{R}}(t) \quad (\text{B.3})$$

où  $\underline{U}^e(t)$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(t)$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^e(t)$  sont les réponses élastiques fictives de la structure en fonction du temps,  $\underline{\underline{R}}(t)$  est le champ des contraintes résiduelles. Il est possible aussi de décomposer le champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  en :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^I(t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \quad (\text{B.4})$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^I(t)$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$  désignent respectivement la partie initiale et plastique. La partie élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(t)$  peut être donnée par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) = \mathbb{M} : \underline{\underline{\sigma}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^I(t) \quad (\text{B.5})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) = \mathbb{M} : \underline{\underline{\sigma}}(t) \quad (\text{B.6})$$

où  $\mathbb{M}$  traduit la matrice de souplesse (i.e matrice inverse de la matrice d'élasticité). Ainsi, en utilisant les équations précédentes, le champ de déformation inélastique peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{ine}(t) = \mathbb{M} : \underline{\underline{R}}(t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \quad (\text{B.7})$$

Soit le problème de référence définie dans la partie 2.1. Afin de déterminer les champs de déplacement, de déformation et de contrainte pour une structure à comportement purement élastique et linéaire, un opérateur de type analytique ou numérique noté "ELAS" est donné par :

$$ELAS(V, \partial_1\Omega, \partial_2\Omega, \underline{f}_d(t), \underline{\underline{\varepsilon}}^I(t), \underline{U}_d(t), \underline{F}_d(t), \mathbb{M}) \quad (\text{B.8})$$

Cet opérateur est caractérisé par trois parties :

- Partie géométrie : définie ici par  $V$  le volume fini de la structure et ses frontières  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  ;
- Partie chargement : traduite par  $\underline{f}_d(t)$ ,  $\underline{F}_d(t)$  et  $\underline{U}_d(t)$  qui sont respectivement les forces volumiques, surfaciques sur  $\partial_2\Omega$  ainsi que les déplacements imposés sur  $\partial_1\Omega$  ;
- Partie comportement : donnée ici par  $\underline{\underline{\varepsilon}}^I(t)$  et  $\mathbb{M}$ .

## 1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Si la déformation plastique est connue, le champ des contraintes inélastiques est donné par une analyse élastique avec un chargement nul. En introduisant  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$  comme déformation initiale, l'opérateur *ELAS* devient :

$$ELAS(V, \partial_1\Omega, \partial_2\Omega, \{0_d\}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t), \{0_d\}, \{0_d\}, \mathbb{M}^{-1}) \quad (\text{B.9})$$

Par conséquent, à partir de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$ , la valeur du  $\underline{\underline{R}}(t)$  peut être déterminée. Mais généralement, la déformation plastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$  n'est pas connue. Dans ce cas, Zarka et al. [254, 257] définissent une nouvelle écriture. Soit un matériau élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire, le modèle de Prager [196] associé au critère de von Mises est donné par :

$$f_{charge}(dev\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{y}}) = \frac{3}{2}(dev\underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{y}}(t)) : (dev\underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{y}}(t)) \leq \sigma_0^2 \quad (\text{B.10})$$

où  $f_{charge}$  définit la fonction de charge,  $dev\underline{\underline{\sigma}}$  est la partie déviatoire du tenseur des contraintes, et  $\underline{\underline{y}}$  traduit le paramètre transformé interne (défini par les auteurs) c'est à dire l'écrouissage cinématique, donné par :

$$\underline{\underline{y}}(t) = c\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \quad (\text{B.11})$$

où  $c$  est le module d'écrouissage constant. Soit le paramètre transformé de la structure  $\underline{\underline{Y}}(t)$ , défini par :

$$\underline{\underline{Y}}(t) = c\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) - dev\underline{\underline{R}}(t) = \underline{\underline{y}}(t) - dev\underline{\underline{R}}(t) \quad (\text{B.12})$$

avec  $dev\underline{\underline{R}}(t)$  la partie déviatoire des contraintes résiduelles. Nous nous plaçons dans l'espace des  $\underline{\underline{Y}}$ . A chaque instant, il est nécessaire de vérifier si le critère de plasticité est vérifié. Ainsi, l'écoulement plastique est donné par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t) = \lambda(dev\underline{\underline{\sigma}}^e(t) - \underline{\underline{Y}}(t)) \quad (\text{B.13})$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique qui vaut 0 si  $f_{charge}(dev\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p) < 0$ , sinon  $\lambda \geq 0$ . L'écoulement plastique  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t)$  est déterminé suivant la normale extérieure à la surface de charge centrée sur  $dev\underline{\underline{\sigma}}^e$  dans l'espace des  $\underline{\underline{Y}}$ . Comme la solution élastique  $dev\underline{\underline{\sigma}}^e(t)$  est calculée indépendamment de l'histoire de chargement, les positions de  $\underline{\underline{Y}}(t)$  sont connues localement en tout point de la structure. Donc la déformation inélastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$  peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) = c^{-1}[\underline{\underline{Y}}(t) + dev\underline{\underline{R}}(t)] \quad (\text{B.14})$$

Ainsi, l'équation B.7 s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{ine}(t) = c^{-1}\underline{\underline{Y}}(t) + [\mathbb{M} + c^{-1}dev] : \underline{\underline{R}}(t) \quad (\text{B.15})$$

Soit  $\hat{\mathbb{M}} = \mathbb{M} + c^{-1}dev$  : l'opérateur de souplesse modifié. L'opérateur élastique B.8 adapté à l'état limite considéré s'écrit alors sous la forme :

$$ELAS(V, \partial_1\Omega, \partial_2\Omega, \{0\}, c^{-1}\underline{\underline{Y}}(t), \{0\}, \{0\}, \hat{\mathbb{M}}^{-1}) \quad (\text{B.16})$$

A partir de cet opérateur, les champs inélastiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ine}(t)$  de l'équation B.15 seront déterminés en considérant comme déformation initiale  $c^{-1}\underline{\underline{Y}}(t)$  et comme loi de comportement  $\hat{\mathbb{M}}^{-1}$ . Il faut déterminer maintenant la nature de l'état limite de la structure pour pouvoir connaître les positions de  $\underline{\underline{Y}}(t)$ .



## 2 Détermination de l'état limite

Cette méthode permet de déterminer, à partir des analyses inélastiques, l'état limite de la structure après un certains nombre de cycles : adaptation, accommodation ou bien rochet. Pour le cas des matériaux à écrouissage cinématique linéaire, il n'y aura pas de comportement de type rochet [115]. Ainsi, la structure s'adapte ou bien s'accommode plastiquement.

Soit, dans les espaces des  $\underline{Y}$ , une sphère  $\mathcal{C}$  centrée en  $dev\underline{\sigma}^e(t)$  et de rayon  $\sigma_0$  associée au critère de von Mises. Soit  $\mathcal{C}_{int}$ , l'intersection ente les deux convexes donnés par l'amplitude de chargement minimale et maximale, alors :

$$\mathcal{C}_{int} = \mathcal{C}(dev\underline{\sigma}_{\underline{max}}^e) \cap \mathcal{C}(dev\underline{\sigma}_{\underline{min}}^e) \quad (\text{B.17})$$

Ainsi, deux cas sont possibles :

- Si  $\mathcal{C}_{int} \neq \emptyset$  il y a intersection entre les deux convexes (Fig.B.1a), dans ce cas il y aura un comportement adapté ;
- Sinon un comportement accommodé  $\mathcal{C}_{int} = \emptyset$  en au moins un point de la structure [97, 155] (Fig. B.1b).

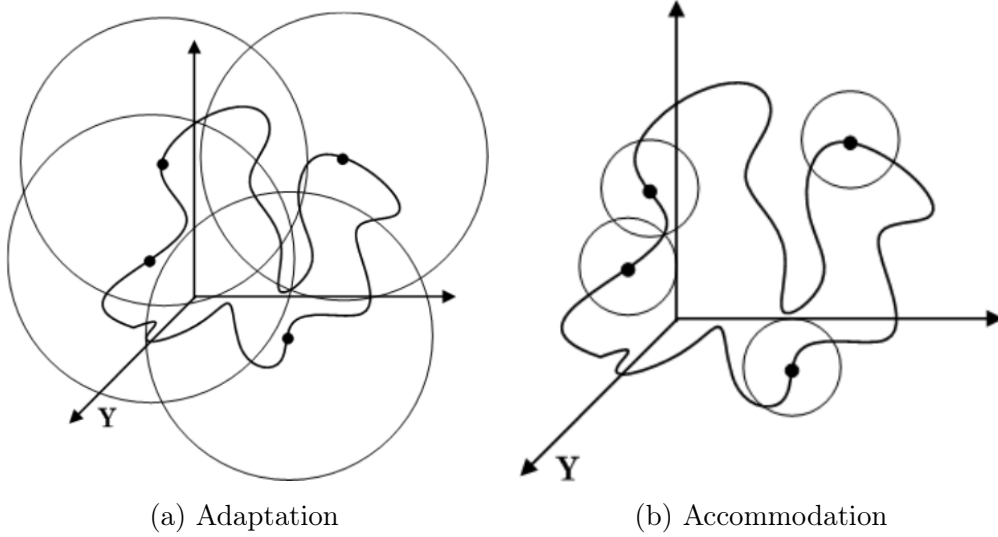


FIGURE B.1 – Nature de l'état limite de la structure avec la méthode Zarka [115]

En pratique, il y a une règle de projection orthogonale pour construire l'état limite de la structure, noté  $\underline{Y}_L$ , avec la méthode de Zarka. L'état initial de la structure est définie par  $\underline{Y}_0$  et  $\underline{\varepsilon}_0^p$  qui sont égaux à zéro. Avec la règle de projection, il existe trois cas possibles.

### 2.1 Cas du comportement adapté

Il existe deux procédures pour identifier le comportement adapté : procédure ZAC et procédure itérative [115]. Pour le ZAC, il s'agit de calculer le premier cycle par exemple d'une façon incrémentale, ensuite les paramètres de transformée  $\underline{Y}(t)$  sont projetés à l'intersection des deux convexes  $\mathcal{C}_{int}$ , puisque la solution finale se trouve dans cette intersection. Enfin l'opérateur élastique ELAS est calculé à partir des  $\underline{Y}(t)$  trouvés pour identifier les champs inélastiques  $\underline{\varepsilon}^{ine}(t)$ .

Pour la procédure itérative, en tout point de la structure et à partir de l'état initial  $\underline{Y}_0$  deux cas de figures sont possibles :

## 2. DÉTERMINATION DE L'ÉTAT LIMITE

- $\underline{Y}_0 \in \mathcal{C}_{int}$  (1<sup>er</sup> cas Figure B.2). Ainsi, l'opérateur élastique est donné par l'équation B.18;
- $\underline{Y}_0 \notin \mathcal{C}_{int}$  et à l'intérieur d'un des deux convexes (2<sup>ème</sup> cas Figure B.2);
- $\underline{Y}_0 \notin \mathcal{C}_{int}$  et à l'extérieur d'un des deux convexes (3<sup>ème</sup> cas Figure B.2).

Dans le 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> cas, une projection orthogonale de  $\underline{Y}_0$  sur le convexe est toutefois effectuée et l'opérateur élastique dans ce cas est donné par l'équation B.19. Cette procédure est itérative jusqu'à la convergence. Autrement dit, le paramètre de transformé  $\underline{Y}_L$ , donné par la projection de  $\underline{Y}_0$ , appartient à  $\mathcal{C}_{int}$  (Fig. B.2).

$$ELAS(V, \partial_1\Omega, \partial_2\Omega, \{0_d\}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \{0_d\}, \{0_d\}, \hat{\mathbb{M}}^{-1}) \quad (\text{B.18})$$

$$ELAS(V, \partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \{0_d\}, c^{-1}\underline{Y}_L, \{0_d\}, \{0_d\}, \hat{\mathbb{M}}^{-1}) \quad (\text{B.19})$$

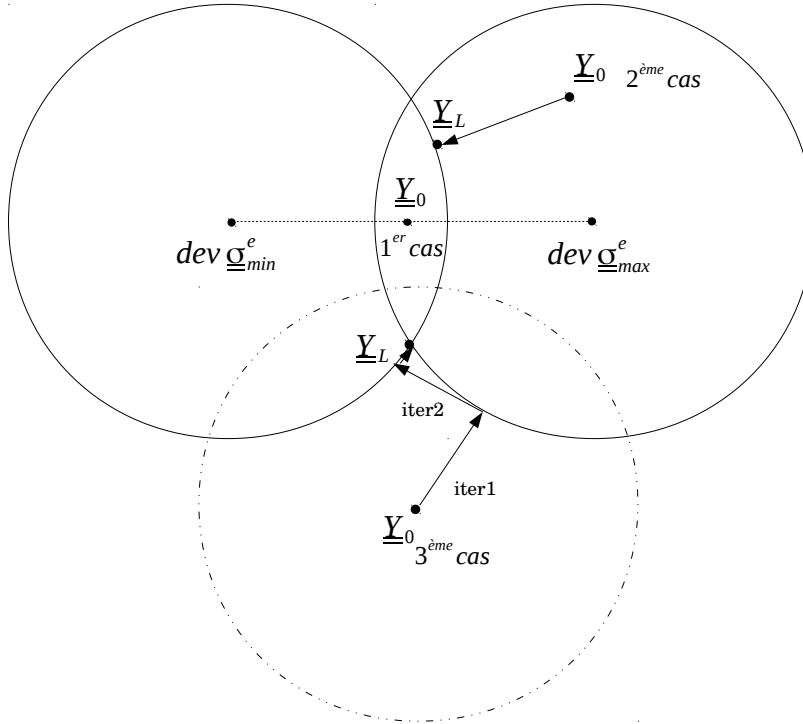


FIGURE B.2 – Construction du paramètre de transformée avec la règle de projection

### 2.2 Cas du comportement accommodé

C'est le cas où il n'y a pas d'intersection entre les deux convexes ( $\mathcal{C}_{int} \neq \emptyset$ ). Dans ce cas, Zarka et al.[254] proposent d'utiliser une borne inférieure " $\Delta\underline{Y}_{L,min}$ " et une borne supérieure " $\Delta\underline{Y}_{L,max}$ " (Fig.B.3). Soit  $\sigma_0$  le rayon de la sphère du convexe centré en  $dev\underline{\underline{\sigma}}^e$  dans l'espace des  $\underline{Y}$ . La borne inférieure est donnée par :

$$\Delta\underline{Y}_{L,min} = \left( 1 - \frac{2\sigma_0}{\|\Delta dev\underline{\underline{\sigma}}^{el}\|} \right) \Delta dev\underline{\underline{\sigma}}^e \quad (\text{B.20})$$

Avec :

$$\Delta dev\underline{\underline{\sigma}}^e = dev\underline{\underline{\sigma}}_{max}^e - dev\underline{\underline{\sigma}}_{min}^e \quad (\text{B.21})$$

$$\|\Delta dev \underline{\underline{\sigma}}^e\| = \sqrt{\frac{3}{2}(\Delta dev \underline{\underline{\sigma}}^e)^T \cdot (\Delta dev \underline{\underline{\sigma}}^e)} \quad (\text{B.22})$$

La borne supérieure constitue le cas le cas où la valeur de  $\|\Delta dev \underline{\underline{\sigma}}^e\|$  est la plus grande pour un chargement important. Dans ce cas, Zarka et al. [258] proposent d'utiliser une solution dite solution ultime calculée par :

$$\Delta \underline{\underline{Y}}_{L,max} = \underline{\underline{Y}}_{L,max} - \underline{\underline{Y}}_{L,min} \quad (\text{B.23})$$

Avec :

$$\underline{\underline{Y}}_{L,min} = dev \underline{\underline{\sigma}}_{min}^e + \frac{\sigma_0}{\|c^{-1} \dot{\underline{\underline{Y}}}_L\|} c^{-1} \dot{\underline{\underline{Y}}}_L \quad (\text{B.24})$$

$$\underline{\underline{Y}}_{L,max} = dev \underline{\underline{\sigma}}_{max}^e - \frac{\sigma_0}{\|c^{-1} \dot{\underline{\underline{Y}}}_L\|} c^{-1} \dot{\underline{\underline{Y}}}_L \quad (\text{B.25})$$

Ainsi, les opérateurs élastiques permettant de calculer les champs inélastiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{min}^{ine}(t)$  pour la borne inférieure et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{max}^{ine}(t)$  pour la borne supérieure, sont donnés par :

$$ELAS(V, \partial_1 \Omega, \partial_2 \Omega, \{0_d\}, c^{-1} \Delta \underline{\underline{Y}}_{L,min}, \{0_d\}, \{0_d\}, \hat{\mathbb{M}}^{-1}) \quad (\text{B.26})$$

$$ELAS(V, \partial_1 \Omega, \partial_2 \Omega, \{0_d\}, c^{-1} \Delta \underline{\underline{Y}}_{L,max}, \{0_d\}, \{0_d\}, \hat{\mathbb{M}}^{-1}) \quad (\text{B.27})$$

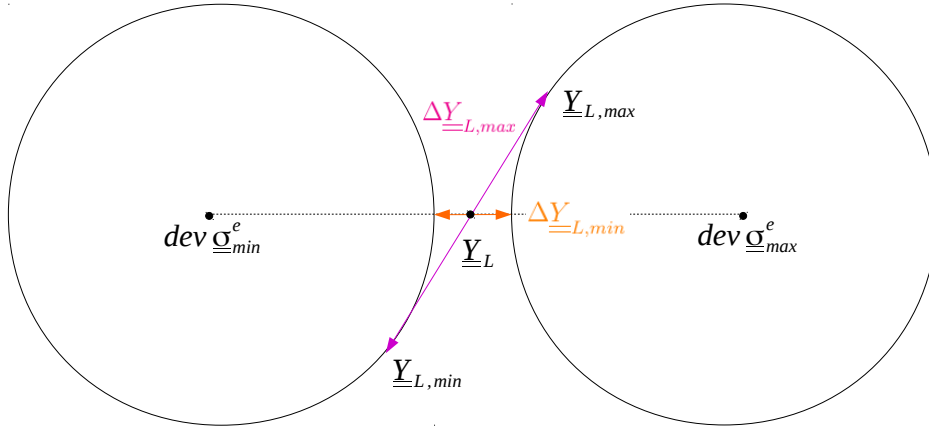


FIGURE B.3 – Construction du paramètre de transformée dans le cadre d’une accommodation

La méthode de Zarka a montré des bons résultats dans plusieurs domaines d’applications, et plus précisément, pour le calcul de la réponse asymptotique d’une structure avec des économies de temps de calcul conséquent par rapport à une méthode classique. Khalij [119] a utilisé la méthode de Zarka comme un outil numérique afin de déterminer l’état limite des structures pour l’analyse des champs de contraintes résiduelles, mais elle a également été utilisée pour des applications en fatigue [115, 255, 256, 246, 109] afin d’atteindre l’état stabilisé de la structure à l’échelle macroscopique et sous une variété de types de chargement. Toutes ces applications ont prouvé que cette technique de calcul donne des bon résultats, comparés à la méthode incrémentale, en termes de réponse mécanique ainsi qu’en temps CPU. Elle est plus rapide que la méthode des sauts de cycles. Mais l’inconvénient majeur est l’utilisation d’un écrouissage cinématique linéaire.

# Annexe C

## Stratégie incrémentale, non-incrémentale et PGD

### Sommaire

---

1	Convergence de la méthode Cyclique . . . . .	230
2	Temps de calcul à l'échelle macroscopique . . . . .	230
3	Temps de calcul à l'échelle de la microstructure . . . . .	233

---

Dans le cadre de la présentation de la méthode incrémentale droite, il a été mentionné qu'il existe des techniques dites non-incrémentales. Elles permettent d'itérer entre l'histoire des champs de contrainte et de déplacement qui vérifient respectivement les équations locales et globales. Cette stratégie de résolution a été proposée par Ladevèze dans le cadre de la méthode LATIN [127, 36] et consiste à découpler les équations du problème et de les résoudre séparément sur tout l'intervalle de chargement. Cette version d'utilisation a été nommée méthode Cyclique et présentée dans la section 3.5 du chapitre II.

Cette partie présente une comparaison des performances de la résolution classique non-incrémentale par rapport à une résolution incrémentale et une résolution non-incrémentale avec un solveur PGD. En premier lieu, une étude vis-à-vis de la convergence de l'algorithme itératif de la méthode Cyclique est présentée. Ensuite, les résultats des temps CPU sont abordés à l'échelle macroscopique dans un premier temps, et à l'échelle de la microstructure dans un second temps.

Il est à noter que les résultats seront présentés pour les différents modèles proposés aux chapitres III et IV. Les calculs sont effectués avec un chargement de traction-compression cyclique en déformation totale imposée avec un rapport de charge  $R_\epsilon = -1$ . Les simulations sont réalisées avec une discrétisation temporelle de 200 incréments par cycle.

## 1 Convergence de la méthode Cyclique

Afin de mieux appréhender les résultats obtenus avec la méthode Cyclique, la figure C.1 montre le nombre d'itérations nécessaires à la convergence pour chaque cycle et le temps par cycle tout au long des 100 cycles de chargement. Ces résultats sont illustrés pour les deux modèles M1 et M2 et pour les différentes amplitudes de chargement. Les graphiques de la figure C.2 présentent ces résultats pour les différents modèles d'agrégats polycristallins (modèles de type  $8^3$ ,  $16^3$  et  $32^3$  éléments).

Les différents résultats montrent que, tout comme la méthode PGD-V2, le nombre d'itérations de la méthode Cyclique durant les premiers cycles sont les plus coûteux. Durant cette phase, le comportement évolue de manière conséquente d'un cycle à l'autre. Par exemple, avec le modèle M1 et pour un chargement de  $E_{11} = 0.3\%$  (Fig. C.1a), 10 fonctions pour le premier cycle, 9 pour le deuxième puis 4 fonctions pour le troisième cycle sont nécessaires pour la convergence. Plus le nombre de cycles augmente, plus le comportement se stabilise ce qui conduit à une diminution du nombre d'itérations nécessaires à la convergence. Par exemple, à partir du 10<sup>ème</sup> cycle, 3 itérations suffisent pour obtenir la convergence et seulement 2 itérations à partir du 81<sup>ème</sup> cycle sont suffisantes. Aussi, dans le cas d'agrégat polycristallin à  $32^3$  éléments (Fig. C.2e), une seule itération suffit pour la convergence de l'état mécanique à partir du 30<sup>ème</sup> cycle pour les trois niveaux de chargement.

Ces constats sont faits pour les temps de calcul par cycle. Ils sont logiquement proportionnels aux nombres d'itérations par cycle qui traduisent le nombre de résolutions du système linéaire et du modèle de comportement.

## 2 Temps de calcul à l'échelle macroscopique

Cette partie présente les résultats en termes de temps de calcul obtenus avec les méthodes incrémentale droite, Cyclique et PGD-V2 avec le cas élasto-plastique du chapitre III.

L'ensemble des graphiques de la figure C.3 illustre l'évolution des temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles. Ces résultats sont obtenus pour les deux discrétisations spatiales du modèle : simulation de 1000 cycles avec le modèle M1

## 2. TEMPS DE CALCUL À L'ÉCHELLE MACROSCOPIQUE

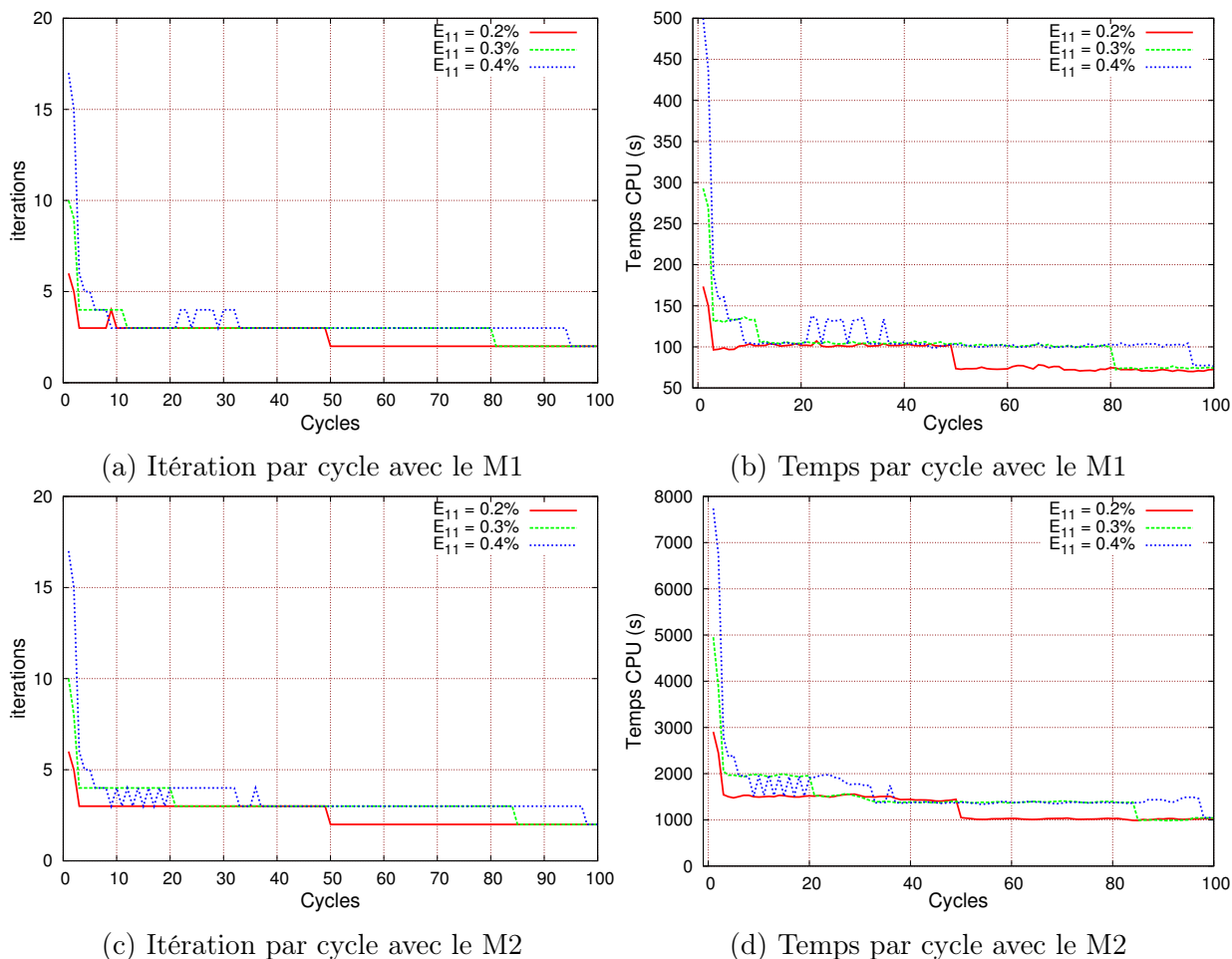
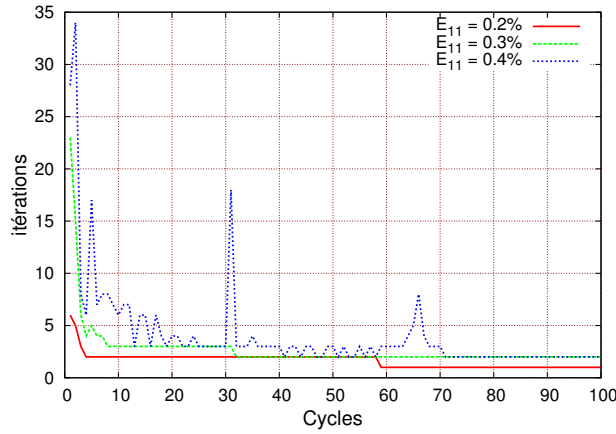


FIGURE C.1 – Évolution du temps CPU par cycle et nombre d’itérations de la méthode Cyclique après 100 cycles de chargement pour les différents niveaux de chargement avec les modèles M1 et M2

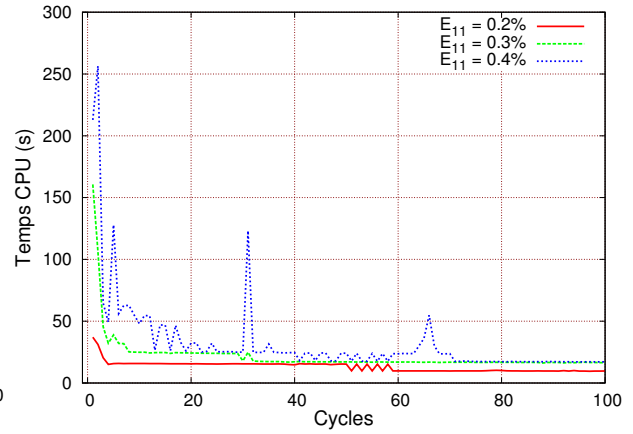
(1<sup>ère</sup> colonne) et 400 cycles avec le modèle M2 (2<sup>ème</sup> colonne). Ces résultats concernent plusieurs amplitudes de déformation macroscopiques appliquées :  $E_{11} = 0.2\%$ ,  $E_{11} = 0.3\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$ .

D’après ces résultats, le temps CPU de la méthode Cyclique est moins important que celui avec la méthode incrémentale droite pour une faible discrétisation spatiale. Pour les chargements respectifs  $E_{11} = 0.3\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$ , la méthode Cyclique réduit le temps de calcul de la méthode incrémentale droite d’un facteur respectif de 2 et 1.22. Cependant, pour un modèle contenant un grand nombre de ddl, des résultats différents sont obtenus. En effet, le temps CPU est plus important avec le calcul Cyclique pour tous les niveaux de chargement (allant jusqu’à un facteur 1.67 pour  $E_{11} = 0.4\%$ ). Pour ce modèle, il est à souligner que toute augmentation de la non linéarité du problème rend la méthode Cyclique moins robuste que la méthode incrémentale droite (facteurs temps de 1.18 et 2.3 respectivement pour  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$ ). Pour un faible nombre de ddl, une résolution non-incrémentale est préférée. Néanmoins, dans le cadre d’un modèle contenant un grand nombre de ddl, l’efficacité d’un solveur non-incrémental est moindre par rapport à celle de l’incrémental. Cela peut être expliqué par :

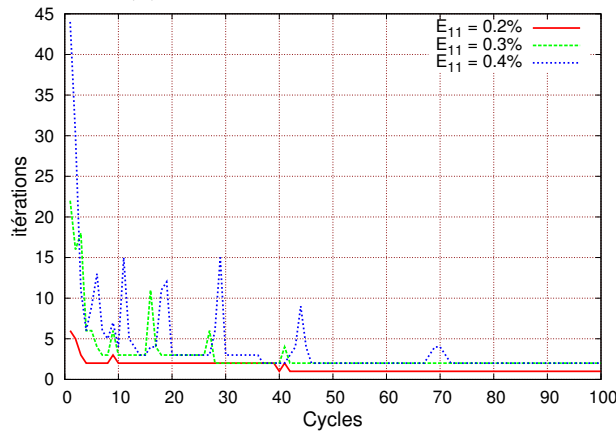
- Dans le cadre du modèle M1, la stabilisation du comportement après 1000 cycles est observée. Une itération suffit pour la convergence de l’état mécanique à partir du 540<sup>ème</sup> et 425<sup>ème</sup> cycle respectivement pour  $E_{11} = 0.3\%$  et  $E_{11} = 0.4\%$ . Cela conduit



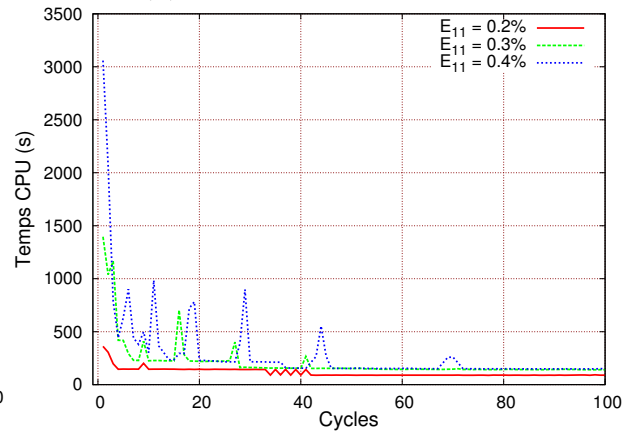
(a) Itération par cycle avec  $8^3$



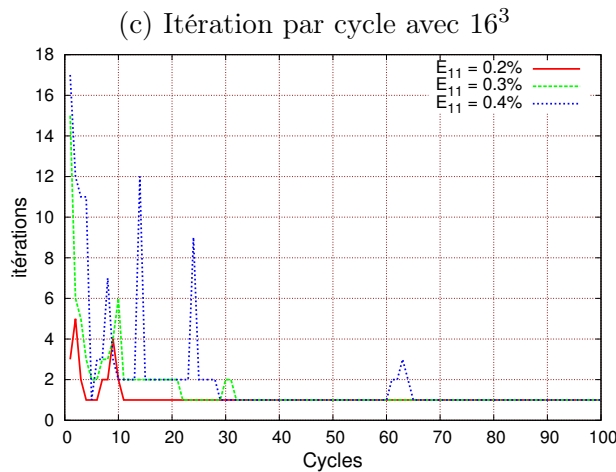
(b) Temps par cycle avec  $8^3$



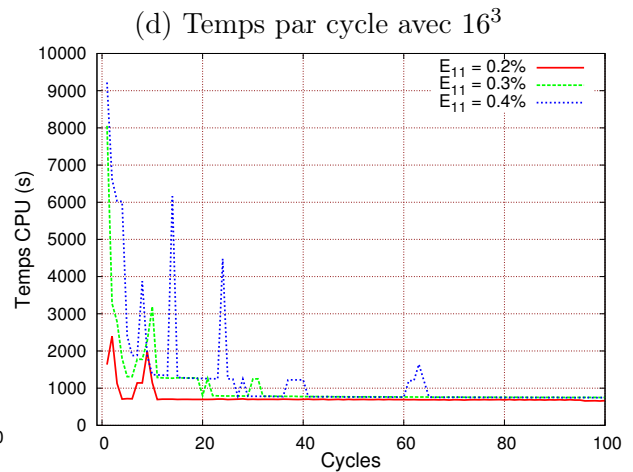
(c) Itération par cycle avec  $16^3$



(d) Temps par cycle avec  $16^3$



(e) Temps par cycle avec  $32^3$



(f) Temps par cycle avec  $32^3$

FIGURE C.2 – Évolution du temps CPU par cycle et nombre d'itérations de la méthode Cyclique après 100 cycles de chargement pour les différents niveaux de chargement avec les modèles d'agrégats de type  $8^3$ ,  $16^3$  et  $32^3$  éléments

### 3. TEMPS DE CALCUL À L'ÉCHELLE DE LA MICROSTRUCTURE

---

à une résolution du système linéaire avec la méthode Cyclique égale au nombre d'incrémentations, alors que ce nombre est plus important avec la méthode incrémentale droite au vu du nombre d'itérations nécessaires à chaque incrément.

- Dans le cadre du modèle M2, le stockage des matrices spatio-temporelles est plus important avec la méthode Cyclique. La résolution du système linéaire et du modèle de comportement est plus coûteuse en temps CPU par rapport à une résolution incrémentale.
- Pour une modélisation avec le modèle M2, une augmentation de la non linéarité du problème diminue l'efficacité de la méthode Cyclique par rapport à la méthode incrémentale droite. En effet, le nombre d'itérations augmente avec un niveau de chargement plus important. Cela conduit à un plus grand nombre de calculs du système linéaire et du modèle de comportement pour toute l'histoire de chargement.

L'évolution du temps de calcul de la méthode Cyclique est similaire à celui de la méthode PGD-V2 dans le cas du modèle M1. Les deux méthodes possèdent en effet la même stratégie de résolution. Dans le cas du modèle M2, la résolution utilisant un solveur PGD est relativement plus performante que dans le cadre d'une résolution classique. Cela s'explique par le nombre de fonctions utilisées par la méthode PGD. A titre d'exemple, pour un chargement de  $E_{11} = 0.2\%$ , la PGD-V2 et la méthode Cyclique utilisent à partir du 240<sup>ème</sup> cycle une seule itération pour la convergence de l'état mécanique. Dans le cas de la PGD-V2, un seul enrichissement par itération suffit pour la convergence de la base spatio-temporelle. Ainsi, la résolution du système linéaire est effectuée  $2 \times 1 \times 3$  fois (où 3 est le nombre d'itération de l'algorithme du point fixe) avec la PGD-V2, tandis qu'elle est effectuée  $200 \times 2$  fois avec la méthode Cyclique.

### 3 Temps de calcul à l'échelle de la microstructure

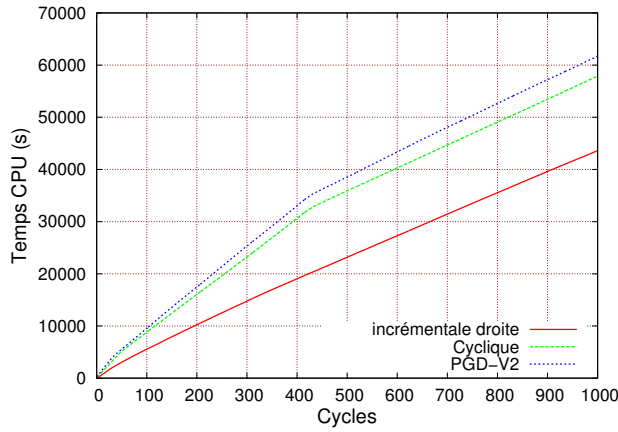
L'objectif de cette partie est de présenter une analyse des temps de calcul issus de la méthode incrémentale droite, la méthode Cyclique ainsi que la méthode PGD-V2 pour les différentes modélisations des modèles d'agrégats polycristallins proposés en chapitre IV.

Les temps de calcul des différentes méthodes sont reportés à la figure C.4 pour les trois modèles d'agrégats. Ces résultats sont obtenus pour une simulation de 2000 cycles avec le modèle à  $8^3$  éléments et pour 1000 cycles pour les modèles à  $16^3$  et  $32^3$  éléments. Il est à noter que, pour tous les résultats présentés, une seule discrétisation temporelle est utilisée avec 200 incréments par cycle. Sur ce graphique, les résultats obtenus sont présentés pour les différentes amplitudes de déformation macroscopique :  $E_{11} = 0.1\%$ ,  $E_{11} = 0.2\%$  et  $E_{11} = 0.3\%$ . La figure C.5, quant à elle, présente les résultats des temps de calcul des trois méthodes en fonction du nombre de ddl pour les différents niveaux de chargement.

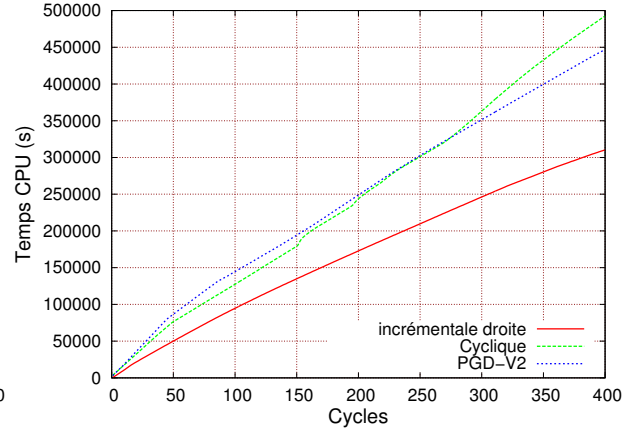
Au vu des résultats de la figure C.4, la méthode Cyclique prévoit un gain en temps CPU par rapport à la méthode incrémentale droite uniquement pour un faible nombre de ddl et une faible amplitude de déformation macroscopique appliquée (allant jusqu'à un facteur 1.1 pour les cas traités). Pour une forte non linéarité du comportement et un modèle contenant un grand nombre de ddl, des résultats différents sont obtenus. La performance de la méthode Cyclique diminue considérablement avec une augmentation de l'amplitude du chargement, et donc implicitement avec la non linéarité du problème (allant jusqu'à un facteur 1.5 pour  $E_{11} = 0.4\%$  avec le modèle à  $32^3$  éléments). Des résultats similaires ont été observés dans le cas d'une augmentation du nombre de ddl du problème et sont présentés en figure C.5. Ces observations peuvent s'expliquer par les éléments suivants :

- Tout comme dans le cadre du modèle macroscopique, le stockage des matrices spatio-

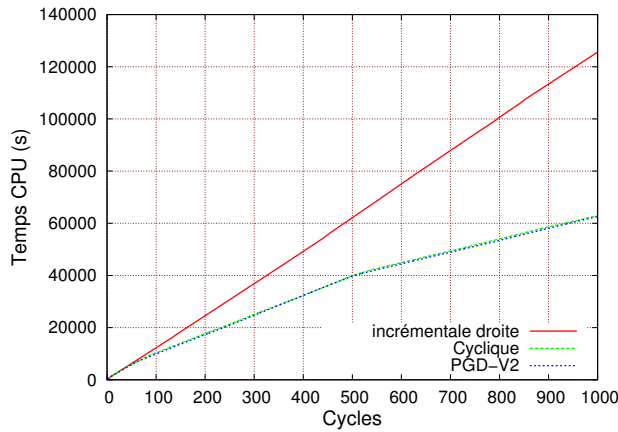




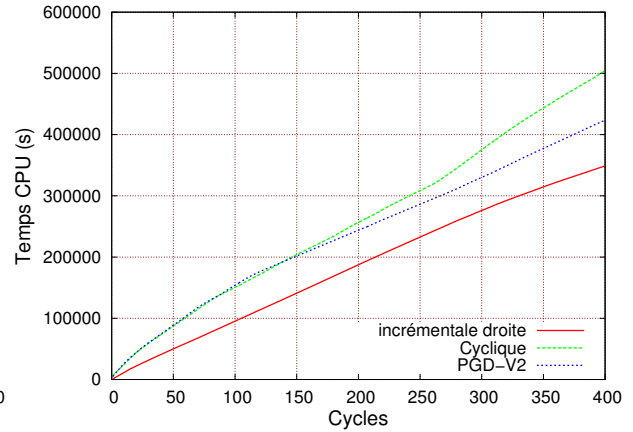
(a) Résultats avec le M1 pour  $E_{11} = 0.2\%$



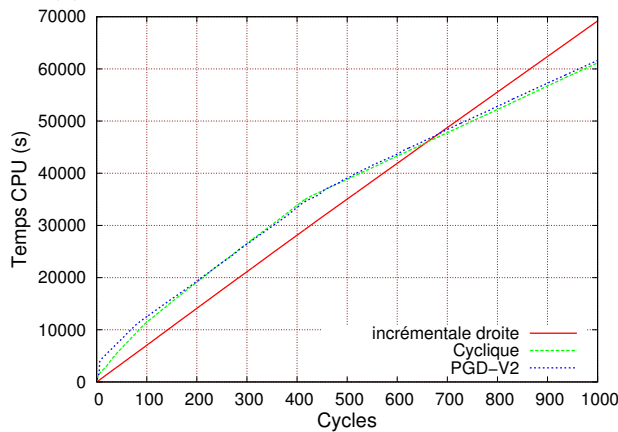
(b) Résultats avec le M2 pour  $E_{11} = 0.2\%$



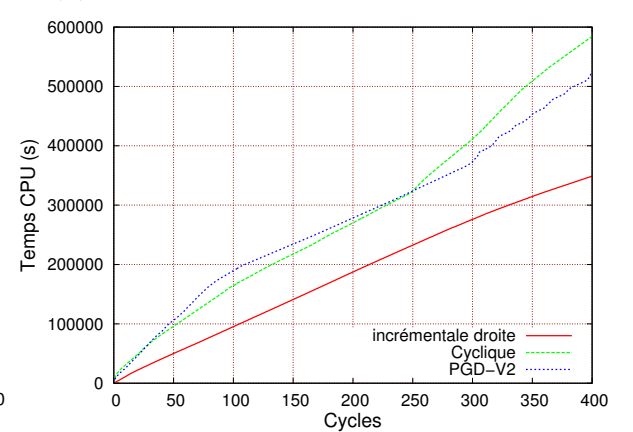
(c) Résultats avec le M1 pour  $E_{11} = 0.3\%$



(d) Résultats avec le M2 pour  $E_{11} = 0.3\%$



(e) Résultats avec le M1 pour  $E_{11} = 0.4\%$



(f) Résultats avec le M2 pour  $E_{11} = 0.4\%$

FIGURE C.3 – Évolution du temps de calcul des méthodes incrémentale droite, Cyclique et PGD-V2 en fonction du nombre de cycles après 1000 cycles avec le modèle M1 et 400 cycles avec le modèle M2 et pour différentes amplitudes de déformation macroscopique appliquées

### 3. TEMPS DE CALCUL À L'ÉCHELLE DE LA MICROSTRUCTURE

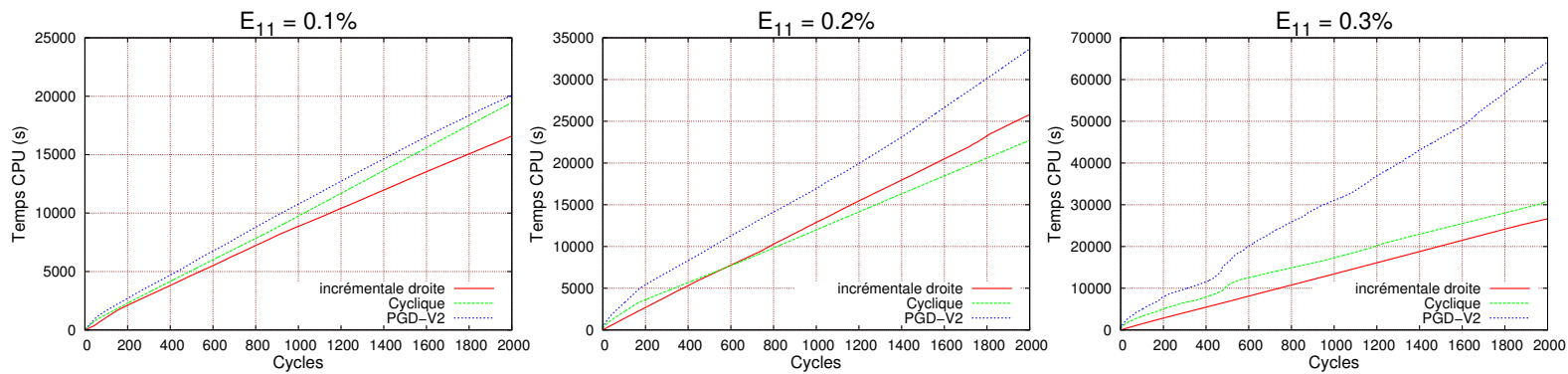
---

temporelles est plus important avec la méthode Cyclique pour un problème contenant un grand nombre de ddl. Dans ce cas, la résolution du système linéaire est plus coûteuse en temps CPU par rapport à une résolution incrémentale ;

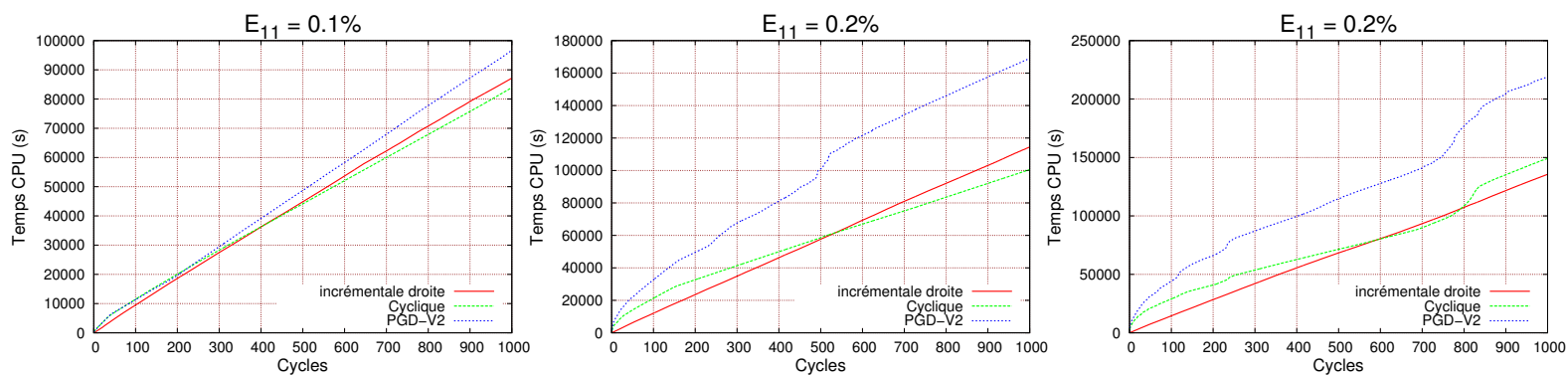
- Même si la méthode Cyclique nécessite une seule itération par cycle pour la convergence de l'état mécanique (c'est le cas souvent à partir du 200<sup>ème</sup> cycle), le temps CPU reste plus important par rapport à une résolution incrémentale en augmentant la non linéarité du problème et la discrétisation spatiale. Cela s'explique par la complexité d'une résolution d'une loi de comportement fortement non linéaire pour toute l'histoire spatio-temporelle, et notamment avec une loi de type plasticité cristalline. Ce constat confirme le problème observé avec les deux méthodes PGD.

Contrairement à ce qui a été observé dans le cadre d'une modélisation en plasticité  $J_2$ , la méthode PGD-V2 prévoit des résultats avec un temps de calcul plus important que celui la méthode Cyclique. Même si les deux méthodes possèdent la même stratégie de résolution, ces observations montrent que toute augmentation de la complexité du problème, en terme de non linéarité, affaiblit la performance d'un solveur PGD. Il est nécessaire d'enrichir la base pour la convergence du champ de déformation plastique. Cela conduit à un plus grand nombre de résolutions du système linéaire à l'étape globale par rapport à la méthode Cyclique. La prévision de la base spatio-temporelle de la méthode PGD n'est pas satisfaisante pour bien représenter le champ de déplacement résultant du système linéaire. Cela entraîne d'avantage de corrections de type Éléments Finis, conduisant à un nombre plus important d'itérations par rapport à la méthode Cyclique.

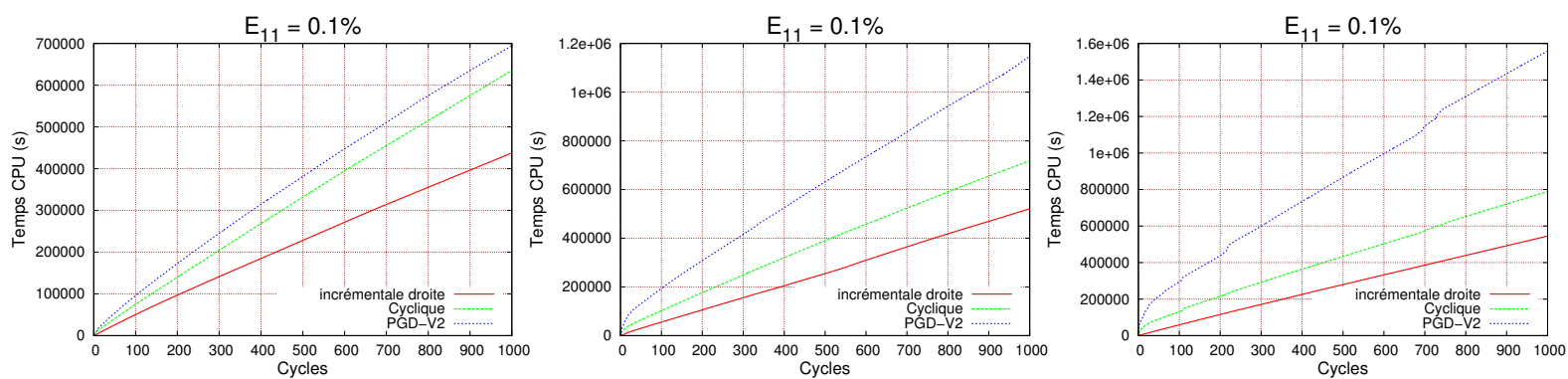
## Annexe : Stratégie incrémentale, non-incrémentale et PGD



(a) Modèle d'agrégat  $8^3$



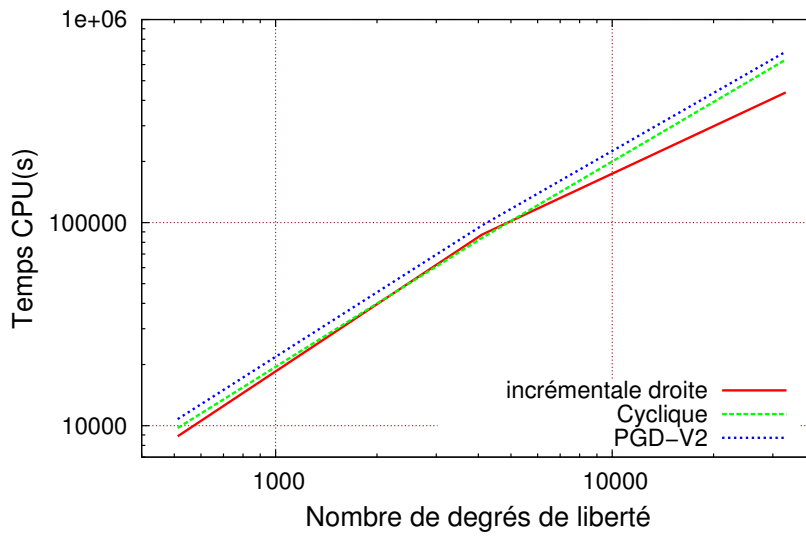
(b) Modèle d'agrégat  $16^3$



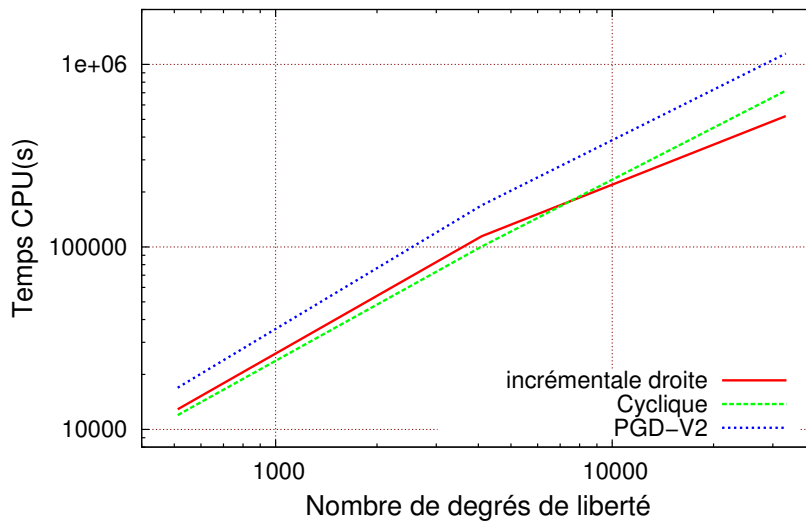
(c) Modèle d'agrégat  $32^3$

FIGURE C.4 – Évolution du temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de cycles pour différents modèles d'agrégats polycristallin et différentes amplitudes de chargement appliquées

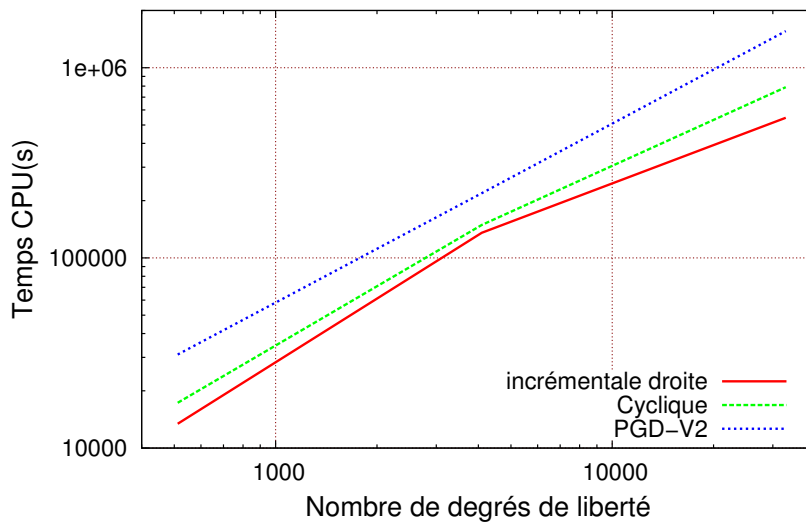
### 3. TEMPS DE CALCUL À L'ÉCHELLE DE LA MICROSTRUCTURE



(a) Résultats pour  $E_{11} = 0.1\%$



(b) Résultats pour  $E_{11} = 0.2\%$



(c) Résultats pour  $E_{11} = 0.3\%$

FIGURE C.5 – Temps de calcul des différentes méthodes en fonction du nombre de ddl après 1000 cycles de chargement





## Réduction dimensionnelle pour la simulation de la fatigue des métaux

**Résumé:** Afin de tenir compte de l'amorçage et de la propagation des fissures en fatigue, il est nécessaire de connaître l'historique des différentes quantités mécaniques dans la zone d'amorçage. Cela nécessite une connaissance des états mécaniques cycliques stabilisés. D'un point de vue numérique, les simulations numériques d'agrégats polycristallin avec les méthodes de résolution classiques ne sont réalisées que pour quelques cycles. Ce travail présente le développement des méthodes accélérées de calcul pour réduire le temps de calcul de la méthode des Éléments Finis dans le cas des simulations d'agrégats polycristallins soumis à un chargement cyclique. La première idée est de maintenir la matrice de rigidité constante afin d'effectuer une seule factorisation. Un premier algorithme a été écrit dans ce sens avec une résolution incrémentale et non incrémentale. La deuxième proposition est d'utiliser une méthode de réduction dimensionnelle en espace/temps couplé à la méthode des éléments finis. La PGD a été choisie. Cette méthode permet de découpler les variables spatiales et temporelles et les champs de déplacement ne sont calculés que pour un certain nombre de modes. Deux possibilités d'utilisation de la méthode PGD dans le cadre de la plasticité ont été proposées. La troisième proposition consiste à utiliser la stratégie de réduction adaptative APR comme solveur afin de résoudre un modèle d'ordre réduit en termes de nombre de ddl. Une stratégie incrémentale d'amélioration de la qualité de la base pour un certain intervalle de temps choisi a été mis en place dans ce cadre. Quatre possibilités d'utilisation de la méthode APR ont été proposées. L'analyse des performances des différentes méthodes est effectuée tout d'abord sur un problème élasto-plastique classique tridimensionnel présentant un défaut sphérique, ensuite à l'échelle de la microstructure avec un calcul visco-élasto-plastique d'agrégats polycristallins tridimensionnels. Les analyses ont montré que les réponses mécaniques macroscopique et mésoscopique des méthodes de réduction de modèle sont très proches de la méthode incrémentale. Le temps des simulations a été réduit par les différentes méthodes. Les gains sont plus importants quand on augmente la taille des maillages et la non linéarité du problème. Toutefois, l'idée de garder la matrice de rigidité constante avec une résolution incrémentale a permis un gain de temps encore plus conséquent à l'échelle de la microstructure.

**Mots clés:** fatigue, Éléments Finis, réduction de modèle, PGD, APR, plasticité, agrégats polycristallins

## Réduction dimensionnelle pour la simulation de la fatigue des métaux

**Abstract:** In order to take into account fatigue crack initiation and growth, it is necessary to know the evolution of the various mechanical quantities in the fatigue initiation site. This requires knowledge of the stabilized cyclic mechanical state. From a numerical point of view, the simulation of polycrystalline aggregates with conventional resolution methods are only carried out for a few cycles. This work presents the development of numerical methods to reduce the computation time associated with the Finite Element method for the numerical simulation of polycrystalline aggregates under cyclic loads. The first idea is to maintain a constant stiffness matrix during the simulation so that it is necessary to carry out a single factorization. An algorithm has been proposed in with either an incremental or non incremental resolution. The second proposal is based on the use of a model reduction method, coupled with the finite element method to solve space/time problems. The PGD method has been selected. This method allows the decoupling of the spatial and time coordinates. The displacement fields are computed for a certain number of modes. Two possibilities have been proposed to implement the PGD method in the context of plasticity. The third proposal is to use an a-priori adaptive approach based on the use of an APR strategy to solve a reduced order model in terms of the number of degrees of freedom. An incremental adaptive strategy has been proposed in order to master the quality of the reduced-basis for certain time steps. Four possibilities of using the APR method have been proposed. The applicability and the performance of the different methods have been firstly analysed for a conventional three-dimensional elasto-plastic problem with a spherical defect. Secondly, the numerical simulation of polycrystalline aggregates are investigated at the microstructural scale under cyclic elasto-visco-plastic conditions. These analyses have shown that the macroscopic and mesoscopic mechanical responses of the model reduction methods are very similar to the incremental method. The simulation time has been reduced by the different methods. The time gains are more significant when the model size is large and when the non-linearity of the problem is more pronounced. Nevertheless, the idea of maintaining a constant stiffness matrix with the incremental method results in still greater CPU time saving at the microstructural scale.

**Keywords:** fatigue, Finite Element, Model reduction, PGD, APR, plasticity, polycrystalline aggregates

