Méthode de corrélation calcul/essai pour l'analyse du crissement

Guillaume Martin

▶ **To cite this version:**

Guillaume Martin. Méthode de corrélation calcul/essai pour l'analyse du crissement. Génie mécanique [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2017. Français. NNT : 2017ENAM0012 . tel-01553827

HAL Id: tel-01553827

https://pastel.hal.science/tel-01553827

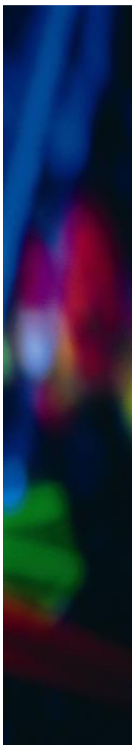
Submitted on 3 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

ARTS ET MÉTIERS ParisTech



2017-ENAM-0012

École doctorale n° 432 : Science des Métiers de l'ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Génie mécanique "

présentée et soutenue publiquement par

Guillaume MARTIN

le 30 mars 2017

Méthodes de corrélation calcul/essai pour l'analyse du crissement

Directeur de thèse : **Etienne BALMES**
Co-encadrement de la thèse : **Guillaume VERMOT DES ROCHES, Thierry CHANCELIER**

Jury

M. Charles PEZERAT, Professeur, LAUM, Université du Maine	Président
M. Jean Luc DION, Professeur, LISSMA, Supméca	Rapporteur
M. Scott COGAN, Chargé de recherche, FEMTO-ST, Universié de Franche Comté	Rapporteur
M. Daniel RIXEN, Professeur, Université technique de Munich	Examinateur
M. Samuel NACIVET, Docteur, Société PSA Peugeot-Citroën	Examinateur
M. Etienne BALMES, Professeur, PIMM, Arts & Métiers Paristech	Invité
M. Thierry CHANCELIER, Ingénieur, Société Chassis Brakes International	Invité
M. Guillaume VERMOT DES ROCHES, Docteur, Société SDTools	Invité

T H È S E

Arts et Métiers ParisTech - Campus de Paris
Nom de l'Unité de recherche

Guillaume Martin
Ingénieur recherche
SDTools
151, Boulevard de l'hôpital, 75013, Paris
France

Phone : +33 1 44 24 63 50
e-mail : martin@sdtools.com
www.sdtools.com

"La seule chose qui vaille la peine, ce sont les autres, nos semblables, la quantité d'amour et de connaissance qu'on peut partager, parce que c'est le seul bien qui s'accroit à mesure qu'on le partage, à la différence de tous les autres qui se réduisent à mesure qu'on les consomme."

Jean-Luc Mélenchon, Florange, 19/01/2017

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma profonde gratitude à Etienne Balmes pour m'avoir permis de réaliser ces travaux de thèse sous sa direction. Ton encadrement et ta disponibilité ont fortement contribué à la réussite du projet et je tiens à t'en remercier tout particulièrement. C'est enthousiasmant de pouvoir poursuivre l'aventure SDTools dans la continuité des travaux. Je remercie également Thierry Chancelier pour l'encadrement chez CBI. Ton recul et tes intuitions sur les sujets de recherches m'ont souvent permis d'explorer des pistes fructueuses. Un grand merci à tous les deux pour la liberté que vous m'avez laissée tout au long du projet et pour votre confiance.

Merci à Guillaume Vermot Des Roches et Jean-Philippe Bianchi pour leur amitié pendant ces trois années. Que de bons restaurants découverts autour de la Place d'Italie et que de bons moments passés avec vous deux ! Vous avez également été un soutien important pour rentrer dans la logique SDToolsienne, ça aurait été nettement plus compliqué sans vous ! Merci à Nicolas Ranc pour les discussions du midi, le soutien, le weekend à Oléron et ton rappel sur le besoin impératif d'un citation pour le manuscrit ! ;)

Merci à tous les profs, ingénieurs et doctorants du PIMM pour votre bonne humeur et votre aide, notamment en amont des conférences et pour peaufiner la présentation de la soutenance de thèse.

Merci aux collègues devenus des amis chez CBI, Ewen, Marc et Jérôme. Les sorties rue Jean-Pierre Timbaud, à la butte aux cailles, le vol de mon téléphone... resteront des moments très importants pour moi ! :)

Merci enfin aux amis Clément, Cannelle, Baptiste, Marie, Ben, Jess, Romain, Nicolas, Yves, Oriane, Chloé, Yoann, Bruna... et à la famille papa, maman et Lulu pour votre soutien indéfectible. C'était toujours très agréable pour moi de savoir que je pouvais vous retrouver le weekend, pour "tout oublier" et profiter (soirées, Center parcs, dimanche en famille ...) !

Je termine bien sûr en embrassant très fort Marion. Je te suis très reconnaissant d'avoir accepté de valider mon choix de faire un doctorat, malgré les difficultés que cela a pu engendrer. Ca y est ! C'est fini ! L'Amérique latine sera j'en suis sûr la plus belle des récompenses pour nous deux !

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Contexte industriel et méthodologique 2

1.1.1 Besoins et outils 2

1.1.2 Mesures vibratoires 2

1.1.3 Exploitations des mesures EMA et ODS 5

1.1.4 Modèles éléments finis 6

1.1.5 Exploitation conjointe du calcul et des essais 7

1.2 Organisation et contributions de la thèse 7

2 Analyse modale expérimentale **11**

2.1 Introduction 12

2.2 Modes, résidus, termes résiduels 14

2.2.1 Calcul de modes complexes et construction du modèle pôles/résidus . . . 15

2.2.2 Hypothèse d'amortissement modal, modes réels 18

2.2.3 Modèle pôles/résidus avec termes résiduels 19

2.3 Algorithmes d'identification modale 22

2.3.1 Algorithme Least Square Complex Frequency 22

2.3.2 Diagramme de stabilisation et sélection des pôles 25

2.3.3 Initialisation par estimateur à un seul mode 31

2.4 Raffinement à partir d'un modèle à pôles connus 32

2.4.1 Estimation des résidus à pôles connus 33

2.4.2 Optimisation non linéaire des pôles 35

2.4.3 De l'utilité de l'optimisation non-linéaire 37

2.5 Qualité des transferts au voisinage des modes 40

2.5.1 Motivation 40

2.5.2 Définition des critères 42

2.5.3 Cas test industriel 45

3 Corrélation calcul/essai **51**

3.1 Introduction . . . 52

3.2 MAC ou corrélation des formes aux capteurs . . . 54

3.2.1 Observation . . . 54

3.2.2 Superposition de maillage (ICP) . . . 55

3.2.3 Corrélation en forme MAC . . . 58

3.2.4 MAC et sensibilité au positionnement . . . 61

3.3 Localisation d'erreur . . . 63

3.3.1 Localisation d'erreurs dans la littérature . . . 63

3.3.2 Détection de capteurs erronés . . . 66

3.3.3 Impact des erreurs expérimentales sur le MAC . . . 67

3.3.4 Erreurs de forme calculée aux capteurs . . . 69

3.4 Estimation des mouvements non mesurés : théorie de l'expansion . . . 70

3.4.1 Méthode de sous-espace . . . 71

3.4.2 Réponse forcée du modèle : expansion statique . . . 72

3.4.3 Réponse forcée du modèle : expansion dynamique . . . 76

3.4.4 Méthode de minimisation du résidu : erreur de mesure et erreur de modèle 79

3.4.5 Application sur un cas test industriel . . . 83

4 Modèles paramétrés pour le recalage et la reconception **89**

4.1 Introduction . . . 90

4.2 Impact de la géométrie des composants . . . 91

4.2.1 Topologie expérimentale et maillage respectant la géométrie réelle . . . 91

4.2.2 Impact de la géométrie sur le comportement vibratoire . . . 95

4.3 Recalage de propriétés matériau . . . 98

4.4 Effets de jonctions dans les assemblages . . . 100

4.4.1 Motivation . . . 100

4.4.2 Représentation des jonctions . . . 101

4.4.3 Surface ou raideur : deux paramétrisations équivalentes . . . 104

4.4.4 Multi-modèle réduit : Kn/Kt . . . 107

4.4.5 Recalage Kn/Kt . . . 108

4.5 Outils d'analyse du comportement dynamique des assemblages . . . 112

4.5.1 Sensibilité des modes de composant assemblé et des modes d'assemblage . 113

4.5.2 Sensibilité des transferts à la modification du contact . . . 116

5 Analyse numérique et expérimentale du crissement : modes complexes, ODS et expansion **119**

5.1 Introduction 120

5.2 Analyse d'un cas numérique simple 122

5.2.1 Modèle linéarisé des perturbations glissantes 122

5.2.2 Evolutions paramétriques dans un cas simple 123

5.2.3 Pertinence de l'interaction à deux formes 125

5.3 Analyse expérimentale du cycle limite lors d'un crissement 127

5.3.1 Présentation du système et de la mesure 127

5.3.2 Analyse d'un cycle durant le crissement 130

5.3.3 Analyse de la variabilité dans le temps du cycle limite 132

5.3.4 Analyse de la reproductibilité du cycle limite 136

5.4 Extraction des modes du système monté sur le banc 138

5.5 Agrégation des lots de mesure 140

5.5.1 Stratégie d'agrégation des lots de mesures à partir des 4 références 140

5.5.2 Application au cas d'étude 143

5.6 Exploitation de l'expansion 146

6 Conclusion **155**

A Bruit de mesures laser **161**

B Analyse temps/fréquence : transformée de Gabor **163**

Bibliographie **165**

Table des figures **171**

Liste des tableaux **179**

1

Introduction

Sommaire

1.1 Contexte industriel et méthodologique 2
1.1.1 Besoins et outils 2
1.1.2 Mesures vibratoires 2
1.1.3 Exploitations des mesures EMA et ODS 5
1.1.4 Modèles éléments finis 6
1.1.5 Exploitation conjointe du calcul et des essais 7
1.2 Organisation et contributions de la thèse 7

1.1 Contexte industriel et méthodologique

1.1.1 Besoins et outils

Le crissement de frein est une nuisance sonore récurrente dans l'automobile. L'augmentation des coefficients de friction et la réduction de la masse des composants du système de frein mènent aujourd'hui à de hauts niveaux vibratoires dans les fréquences auditives, et ces problèmes de qualité se traduisent par des pénalités économiques aux équipementiers, bien qu'il n'existe pas de méthode robuste de conception.

Chassis Brakes International (CBI), qui est le partenaire industriel de ce projet, est spécialisé dans la production de systèmes de frein d'entrée et de moyenne gamme pour lesquels la latitude sur le coût des produits est très faible mais avec un niveau d'exigence sur les caractéristiques vibratoires tout de même élevé. Les produits classiques sont les freins à tambour et les freins à disque. CBI développe également d'autres activités comme les freins de parking automatiques et cherche à se développer dans les freins de services électriques dont les actionneurs peuvent également être source de nuisances sonores. Cet aspect ne sera pas abordé dans ces travaux.

La pratique industrielle pour le développement des systèmes de frein repose sur deux voies que sont la conception numérique et la caractérisation expérimentale.

Dans certains projets de freins, la conception numérique ne va pas jusqu'au calcul vibratoire. L'objectif des essais est alors de fournir des résultats d'analyses vibratoires aux équipes de développement. Ces projets s'inscrivent en général dans la durée et répondent aux questions classiques de la caractérisation vibratoire des prototypes, de la répétabilité des composants en production et de propositions éventuelles de modifications avec le support de la simulation. Ces projets sont également l'occasion d'évaluer la pertinence des modèles éléments finis (EF) et le cas échéant d'aider à les améliorer à travers des processus de recalage.

Dans d'autres cas, des calculs vibratoires sont réalisés et il est souvent nécessaire de nourrir les modèles de conception en paramètres physiques à travers des activités de corrélation calcul/essai et de recalage. Ces phases nécessitent des itérations approfondies entre ingénieurs de calculs et ingénieurs d'essai.

Une dernière situation est la résolution d'un phénomène crissant alors que le système de freinage est déjà en production. Le projet s'inscrit alors dans un temps beaucoup plus court et il est indispensable de disposer d'outils permettant une réactivité très importante vis à vis du client, car la qualité des produits est remise en cause et des sanctions économiques lourdes peuvent être appliquées.

Le support à la conception numérique et la résolution de crises sont les deux types de projets classiquement traités par les équipes essais du département NVH (Noise Vibration Harshness). La conception ayant lieu en amont, elle est bien intégrée dans les coûts ainsi que dans les délais de projet et est perçue comme source de valeur ajoutée. En revanche, la validation expérimentale ne peut avoir lieu qu'une fois les produits disponibles. La résolution de crise est vue comme une source de coût, même si elle est très souvent indispensable à la proposition de correctifs. Ces deux types de projets sont par ailleurs associés à deux échelles de temps très différentes.

Du point de vue industriel, les objectifs de la thèse sont de faire un bilan des méthodes d'exploitation des essais utilisables pour les différentes situations évoquées plus haut, d'améliorer les possibilités d'exploitation des essais par l'équipe simulation et de démontrer la capacité de les mettre en œuvre dans les applications CBI.

1.1.2 Mesures vibratoires

Les mesures vibratoires réalisées chez CBI sont principalement de deux types : les mesures avec accéléromètres et les mesures avec un laser à balayage 3D à effet Doppler (3D Scanning Laser Doppler Vibrometer). Ces moyens de mesure présentent trois différences importantes.

Premièrement, les mesures avec accéléromètres peuvent être effectuées simultanément lors d'un même essai, alors que les mesures lasers sont effectuées séquentiellement, point par point. La mesure laser nécessite donc autant de mesures que de localisations de capteurs et repose sur l'hypothèse de répétabilité : le système doit être stable pour permettre l'agrégation des mesures réalisées séquentiellement.

Deuxièmement, la densité du maillage de mesure est beaucoup plus faible dans le cadre d'une mesure avec accéléromètres que dans le cadre d'une mesure laser. En effet, l'ajout de masse qu'engendre le collage d'un accéléromètre et le nombre de voies de mesure limité restreint le nombre de capteurs utilisables. En revanche, la mesure laser est sans contact et la limitation dans le nombre de capteurs est liée au temps de mesure.

Enfin les accéléromètres peuvent effectuer des mesures dans des zones "cachées", alors que le laser ne permet de mesurer que des parties du système visibles directement ou à travers un miroir. Il n'est par exemple pas possible de mesurer l'intérieur d'un frein à tambour en conditions opérationnelles par une mesure laser.

Deux familles d'accéléromètres sont utilisées pour les mesures dans ce travail : les accéléromètres monoaxe et triaxe. Les accéléromètres sont collés sur la structure et permettent de mesurer l'accélération dans la direction normale à la surface uniquement pour les monoaxes (il s'agit donc d'un seul capteur) ou en 3D pour les triaxes avec deux mesures supplémentaires dans le plan orthogonal à la normale (il s'agit donc de trois capteurs par triaxe). Les capteurs triaxes sont fréquemment utilisés pour mesurer les déformations du système car ils permettent une visualisation 3D mais il peut être parfois plus pertinent d'utiliser un monoaxe qui, s'il est placé dans une direction de déformation pertinente, permet de récupérer l'essentiel de l'information avec l'utilisation d'une seule voie de mesure au lieu de 3.

La mise en place d'une mesure avec accéléromètres est souvent plus longue en raison du temps nécessaire à l'installation et à la définition du maillage de mesure. Un système de frein à tambour équipé d'accéléromètres permettant de mesurer l'intérieur du système (non visible lorsque le tambour est remis en place) est présenté en figure 1.1

FIGURE 1.1 – Accéléromètres équipant un frein à tambour

La figure 1.2 montre le dispositif de mesure laser disponible au laboratoire NVH de CBI. La mesure présentée est celle d'un disque de frein. Celui-ci est suspendu par des fils de pêche de façon à limiter l'interaction avec l'environnement extérieur, le but étant de se rapprocher le plus possible d'une configuration libre, comme dans le cas d'un calcul de modes propres numériques.

Les trois têtes laser visent successivement tous les points du maillage de mesure visible sur la figure 1.3 et enregistrent la réponse temporelle en vitesse à chaque impact de marteau. Le système d'acquisition intègre toutes ces données pour fournir les réponses fréquentielles de chaque point du maillage dans les trois directions (x y z) du repère cartésien lié à la pièce.

FIGURE 1.2 – Mise en place de la mesure (en haut), dispositif laser (en base à gauche), système mesuré (disque) et marteau (en bas au centre), système d'acquisition (en bas à droite)

La figure 1.3 montre le maillage capteur de cette mesure. Celui-ci comporte 477 points, soit 1431 réponses fréquentielles. Les mesures peuvent donc être très riches, mais la qualité doit être vérifiée. En effet, il est fréquent pour des mesures laser que certains capteurs bruités viennent dégrader les essais et ainsi nuire à son exploitation. L'annexe A résume les problèmes de qualité de mesure laser, principalement liés à la puissance du retour lumineux et à l'état de surface visé.

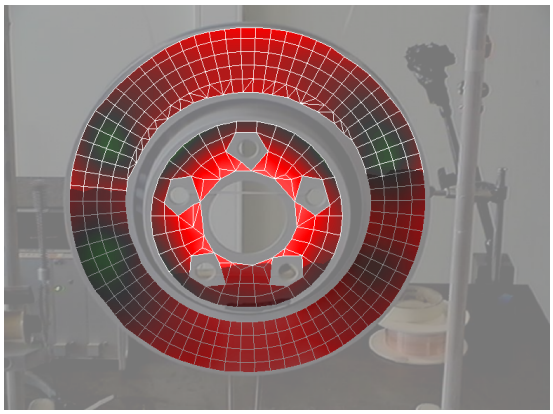


FIGURE 1.3 – Maillage de mesure Polytec

1.1.3 Exploitations des mesures EMA et ODS

Les mesures par laser ou accéléromètres sont classiquement utilisées en laboratoire pour répondre à plusieurs besoins :

- analyser la dispersion fréquentielle des modes sur plusieurs composants théoriquement identique en sortie de chaîne de fabrication ;
- identifier les déformées modales d'un système (*Experimental Modal Analysis* ou EMA) ;
- mesurer la déformation d'un système en condition de crissement (*Operational Deflection Shape* ou ODS).

Dans tous les cas, une attention importante doit être portée à la qualité de la mesure, qui détermine de façon directe la qualité de son exploitation.

Les mesures réalisées en vue d'une EMA nécessitent la maîtrise de l'excitation du système, classiquement obtenue avec des impacts marteau ou des pôts vibrants. Ces actionneurs sont équipés de cellules d'efforts qui permettent de mesurer la quantité d'effort injectée dans le système. A partir des mesures des sorties (vitesses pour le laser ou accélération pour les accéléromètres) et des entrées (forces), il est possible à l'aide d'un algorithme d'identification d'extraire les modes physiques du système.

Les mesures effectuées en vue d'une ODS nécessite d'être capable de reproduire en laboratoire les phénomènes de crissement observés sur véhicules. Des bancs d'essais d'inertie permettent de fournir la puissance d'entrainement du tambour ou du disque et de contrôler de nombreux de paramètres lors du freinage : la pression exercée, la vitesse de rotation, le couple de freinage et la température de la garniture. La figure 1.4 montre la mise en place d'un système de frein sur un banc à essai, avec sur la gauche le cardan d'entrainement qui fourni la puissance et sur la droite un système de frein à tambour équipé d'accéléromètres.

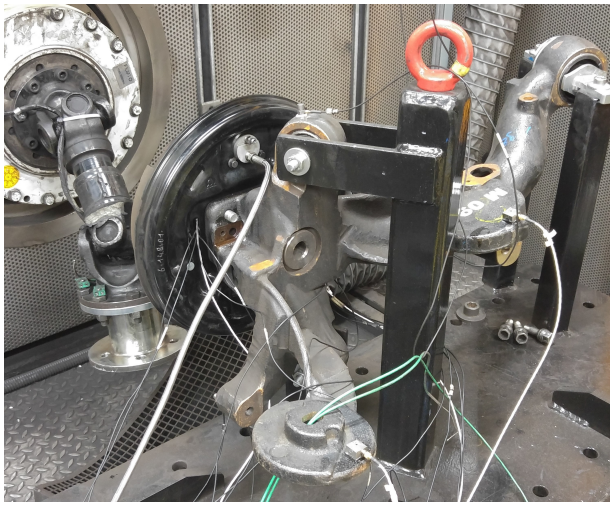


FIGURE 1.4 – Banc à essai avec un système de freinage complet

Ces bancs sont classiquement utilisés lors du développement d'un nouveau frein pour évaluer ses caractéristiques vibratoires : un schéma type de freinages est appliqué et les niveaux et fréquences de bruit sont mesurés avec, en cas de crissement, les paramètres auxquels il est apparu.

L'utilisation de ces informations permet par la suite de cibler certains comportements crissants, afin de les reproduire de façon contrôlée et permettre la mesure des déformées opérationnelles pour analyser précisément le phénomène.

1.1.4 Modèles éléments finis

Pour comprendre les phénomènes vibratoires et proposer des modifications, les modèles éléments finis sont nécessaires. Ceux-ci sont classiquement obtenus à partir des modèles CAO (Conception Assistée par Ordinateur). Chaque composant est maillé et les contacts entre les pièces sont construits par l'équipe de simulation. La figure 1.5 montre le passage d'une CAO à un composant maillé ainsi qu'un exemple de modèle éléments finis d'un système de frein à tambour complet.

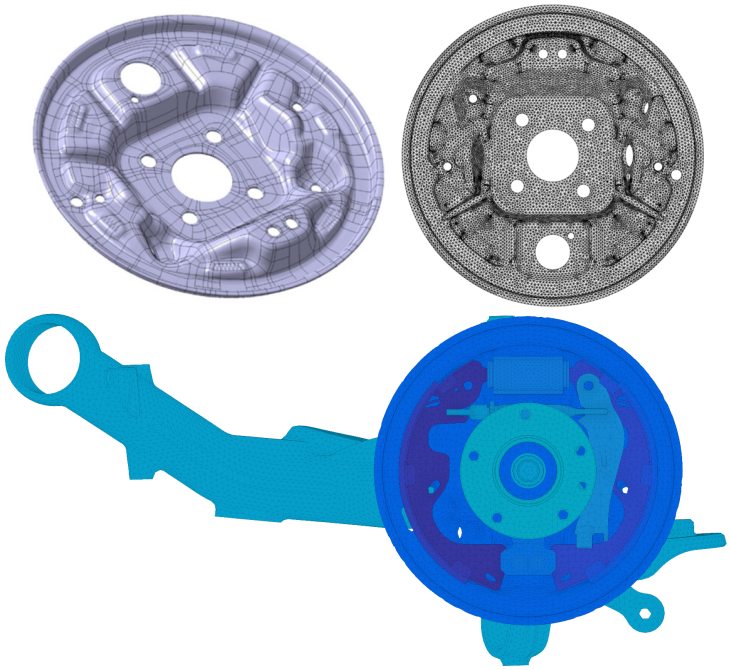


FIGURE 1.5 – Modèle CAO (en haut à gauche), modèle EF maillé (en haut à droite) et modèle EF d'un système complet de frein à tambour sans le tambour (en bas)

Les modèles sont utilisés pour des besoins très variés, par exemple chez CBI pour :
- simuler un processus d'emboutissage de composant ;
- fournir des calculs de résistance aux sollicitations mécaniques du système (contraintes statiques ou dynamiques) ;
- aider à planifier les essais vibratoires ;
- analyser le comportement vibratoire du système ;
- proposer des orientations de modification du système.

Nous nous intéresserons dans ce travail aux aspects vibratoires.

Tout comme les mesures EMA et ODS permettent d'analyser les comportements vibratoires au niveau du composant et du système complet, les modèles peuvent être utilisés pour calculer les modes des composants ou les modes d'un système de frein complet en condition de freinage. Les résultats obtenus sont beaucoup plus détaillés spatialement que les mesures, mais des questions de prédictibilités du modèle se posent avec trois sources identifiées d'erreurs de modélisation : la géométrie réelle des pièces, les propriétés matériau et la définition des contacts entre composants.

Avec l'augmentation des capacités informatiques, la taille des modèles devient de plus en plus importante, permettant de s'affranchir de la problématique de mauvaise convergence liée à une discrétisation trop grossière des composants. La difficulté est alors de s'adapter à ces gros modèles : la moindre étude paramétrique devient rapidement très gourmande en temps et cela est souvent une limitation dans l'exploitation complète des modèles. Le développement de méthodes mettant en œuvre des techniques de réduction est un besoin clairement identifié.

Les résultats de calculs et d'essai peuvent être exploités individuellement, mais leurs confron-

tations et exploitations conjointes sont souvent nécessaires à une compréhension fine.

1.1.5 Exploitation conjointe du calcul et des essais

Les équipes d'essais vibratoires et de simulation travaillent traditionnellement de façon relativement indépendante, le lien étant fait quasiment exclusivement à travers les managers de projets. Pourtant, les deux activités sont très complémentaires et une interaction plus importante serait bénéfique : les essais nécessitent une bonne compréhension du système pour mettre en place des campagnes de mesures les plus pertinentes possibles et les incertitudes de modélisation demandent une confrontation aux résultats d'essais pour évaluer la prédictivité du modèle.

Pour permettre un dialogue simplifié et l'utilisation conjointe des résultats d'essai et simulation, un outil commun est nécessaire, permettant de faire le lien de façon la plus transparente possible entre les types de fichiers et les formalismes d'implémentation utilisés dans chacune des équipes. Plusieurs objectifs sont établis quant aux fonctionnalités globales auxquelles devra répondre l'outil :

- Assister la mise en place d'un essai en utilisant les modèles EF
- Evaluer la qualité de corrélation entre les essais et le calcul
- Permettre le recalage de paramètres clés du modèle en cherchant à se rapprocher des résultats d'essai
- Utiliser le modèle pour interpoler spatialement les mesures (expansion)

1.2 Organisation et contributions de la thèse

La première utilisation des essais vibratoires est l'analyse modale expérimentale (EMA) qui, pour des composants ou assemblages, combine mesure et identification des propriétés modales. Le chapitre 2 se concentre sur l'identification modale. La **première contribution** de cette thèse est une analyse critique des résultats d'identification avec l'introduction de critères détaillés sur la qualité des propriétés modales.

La section 2.2 reprécise tout d'abord l'origine des hypothèses classiquement utilisés pour l'identification modale. Après un rappel de la théorie de l'algorithme LSCF, la section 2.3 illustre l'existence de biais générés par l'utilisation d'une minimisation linéaire sous-optimale pour extraire les pôles et par la présence de modes numériques. Ces biais peuvent ensuite être diminués par une optimisation non-linéaire présentée en section 2.4, à partir des pôles initialement identifiés.

Après l'identification des pôles et des résidus, puis leur optimisation, une exploitation directe consiste en une analyse des propriétés modales obtenues. Cependant, la question de la qualité de l'identification, qui n'est pas classiquement évaluée, est abordée en section 2.5 qui reprend les résultats publiés en [1, 2].

Une analyse fine de la superposition des transferts mesurés et identifiés conduit à la définition de quatre critères de qualité d'identification. La mise en œuvre sur un cas réel permet d'illustrer l'efficacité de ces critères pour analyser les mesures laser, avec un grand nombre de capteurs dont on sait qu'une partie présente des mesures très bruitées.

Le chapitre 3 aborde la corrélation calcul/essai qui est la deuxième utilisation classique des résultats d'identification. La corrélation donne une distance entre les résultats d'identification et de calcul EF. Cette distance peut être évaluée de plusieurs façons et la section 3.2 rappelle les plus classiques, à savoir la comparaison entre les fréquences modales et la comparaison des formes modales avec le critère de MAC. Pour calculer le MAC, la superposition précise du maillage de mesure sur le modèle EF est nécessaire et un algorithme de superposition a été développé, augmentant fortement l'efficacité et la qualité de cette étape.

Une fois la corrélation évaluée, l'identification des sources de mauvaise corrélation est un besoin identifié depuis longtemps. La section 3.3 commence par rappeler les outils développés dans la littérature et précise leurs limites. La distinction des erreurs en deux sources, expérimentales à travers les outils de qualité d'identification présentés en section 2.5 et numériques par l'exploitation du critère MACCo, constitue une **deuxième contribution** de ce travail [1, 2]. Pour la prise en compte de l'erreur d'identification, un critère MACError est défini de façon à créer automatiquement pour chaque mode des lots de capteurs dont l'identification est de bonne qualité. Pour la mise en évidence des erreurs sur les formes modales issues du calcul, le critère MACCo est optimisé de façon à réduire les temps de calculs et plusieurs stratégies d'utilisation permettent d'identifier par mode les capteurs menant à une mauvaise corrélation.

Pour le MAC, la corrélation est définie comme une comparaison des formes au niveau des capteurs. Une autre approche pour évaluer la précision du modèle EF est de vérifier la qualité de l'équilibre dynamique du modèle pour des déformées respectant le déplacement mesuré aux capteurs. Cette approche appartient à la classe plus globale des méthodes d'expansion qui permettent également l'interpolation spatiale des capteurs aux DDL du modèle. La section 3.4 présente tout d'abord les méthodes d'expansion les plus classiques (sous-espace, statique et dynamique) avant d'introduire la méthode plus complexe MDRE (*Minimum Dynamic Residual Expansion*). Cette méthode est basée sur la minimisation d'un objectif combinant une énergie liée au non-respect de l'équilibre dynamique et une erreur de mesure. L'évaluation des erreurs permet de mettre en évidence sur un cas industriel les sources d'erreurs liées à la mesure et celles liées à la simulation.

Après avoir évalué la qualité de la corrélation calcul/essai et éventuellement avoir mis en évidence certains paramètres clés sources d'erreurs de simulation, un processus de recalage [3] de modèle doit être mise en œuvre pour améliorer la précision du modèle éléments finis. Les procédures de recalage développées pendant cette thèse sont présentées au chapitre 4 et ont fait l'objet de la communication [4]. Partant d'un retour d'expérience sur les paramètres les plus influents, le protocole défini considère les étapes suivantes : recalage géométrique, recalage des propriétés matériau et recalage des contacts entre composants. Chaque étape doit permettre l'évaluation de la nouvelle corrélation ainsi que de la comparaison entre le modèle avant et après recalage.

La section 4.2 présente l'influence du recalage de la géométrie au niveau du composant seul, à travers la comparaison des comportements vibratoires entre un composant recalé en géométrie et un composant nominal sur un modèle industriel. Le recalage des propriétés matériau est ensuite explicité en section 4.3 et le biais engendré par la non prise en compte du recalage préalable en géométrie est mis en évidence.

Une fois chaque composant recalé en géométrie et en propriétés matériaux, les contacts d'assemblage restent la dernière source d'erreur identifiée. Ceux-ci sont assez classiquement considérés dans l'industrie comme des contacts parfaits (aucun déplacement relatif entre les surfaces sur l'ensemble du contact) ou parfois estimés à partir d'un calcul statique de mise en pression des composants (serrage de vis, rivets...), mais l'évaluation du résultat est très rarement réalisée. Pour permettre le recalage, le contact doit être paramétré et le modèle réduit pour que les temps de calcul soient compatibles avec le temps industriel.

Cette étape de recalage des liaisons est une **troisième contribution notable** de ce travail. La section 4.4 présente la méthode de paramétrisation. Il y est montré qu'une densité de raideur sur l'ensemble de la surface potentielle de contact s'avère conduire aux mêmes variations de modes qu'une évolution de surface. Par ailleurs, la méthode de réduction multi-modèle permet à partir de 4 calculs complets d'obtenir une approximation très fidèle du modèle pour n'importe quel paramètre de contact. Le modèle réduit ainsi obtenu est utilisé pour recaler le contact par rapport à un essai sur un sous-assemblage industriel. Le paramétrage du contact peut également être utilisé comme outil d'étude de sensibilité : **une nouvelle contribution** est une extension

de la notion de modes de composants intégrés dans un assemblage. Leurs évolutions avec les paramètres de contact sont analysées en section 4.5 reprenant les résultats présentés en [5].

Finalement, même si le recalage des modèles EF augmente leurs qualités, le nombre de paramètres non pleinement maîtrisés dans la modélisation ne permet pas de se passer des mesures expérimentales des phénomènes crissants. La mesure fournit une évaluation du crissement qui dépend de tous les paramètres non maîtrisés par la simulation, mais dont le résultat est spatialement pauvre. La simulation permet de mieux appréhender la bonne manière d'exploiter les mesures, d'*enrichir* spatialement ces dernières et d'évaluer l'impact de modifications potentielles. La **dernière contribution** de cette thèse est donc la réalisation et l'analyse détaillée d'une campagne de mesures sur un système de frein réel présentant un problème crissant [6].

Les mesures ODS des cycles de crissements sont difficiles à interpréter en particulier du fait de fluctuations en amplitude et en fréquence. Il convient donc de comprendre le mécanisme d'instabilité modale pour mieux les analyser. La section 5.2 propose une analyse numérique, sur un frein simplifié, de la génération de modes complexes instables (modes présentant un amortissement négatif) et met notamment en évidence qu'il s'agit principalement de l'interaction entre deux modes réels. Les mesures du cycle limite sont analysées en section 5.3 et une transformation dans le domaine temps-fréquence confirme que du point de vue expérimental, la variabilité du cycle limite se situe, comme en numérique, dans un sous-espace composé majoritairement de deux formes réelles. La question de la reproductibilité du phénomène est également analysée, car les mesures nécessitent plusieurs lots de capteurs et une bonne reproductibilité est nécessaire à l'agrégation des résultats.

Par ailleurs, des mesures EMA, permettant d'identifier les modes de la structure et non le cycle limite, semblent utiles à une compréhension plus large du système. La section 5.4 analyse les difficultés de la mise en œuvre de telles mesures.

Finalement, malgré des difficultés liées à l'agrégation des lots de mesure, le résultat obtenu est étendu avec le modèle EF du système de freinage complet. La section 5.6 présente le résultat de cette expansion ainsi que quelques interprétations pouvant en être tirées.

2

Analyse modale expérimentale

Sommaire

2.1 Introduction 12
2.2 Modes, résidus, termes résiduels 14
2.2.1 Calcul de modes complexes et construction du modèle pôles/résidus . . 15
2.2.2 Hypothèse d'amortissement modal, modes réels 18
2.2.3 Modèle pôles/résidus avec termes résiduels 19
2.3 Algorithmes d'identification modale 22
2.3.1 Algorithme Least Square Complex Frequency 22
2.3.2 Diagramme de stabilisation et sélection des pôles 25
2.3.3 Initialisation par estimateur à un seul mode 31
2.4 Raffinement à partir d'un modèle à pôles connus 32
2.4.1 Estimation des résidus à pôles connus 33
2.4.2 Optimisation non linéaire des pôles 35
2.4.3 De l'utilité de l'optimisation non-linéaire 37
2.5 Qualité des transferts au voisinage des modes 40
2.5.1 Motivation 40
2.5.2 Définition des critères 42
2.5.3 Cas test industriel 45

2.1 Introduction

L'abondance de livres et articles détaillant différentes méthodes d'identification, comme par exemple [7, 8, 9, 10], rend compte de la difficulté de synthèse des différentes pratiques dans ce domaine. Un historique de l'évolution des techniques est proposé au chapitre 4.3 de [11] et au chapitre 3.1.1 de [12].

La classification retenue ici, et illustrée par la figure 2.1, consiste à définir l'identification comme un problème inverse défini par les données de référence, le choix de la paramétrisation du modèle devant reproduire ces données et l'algorithme qui permet de choisir les différents paramètres du modèle reproduisant les données de façon optimale.

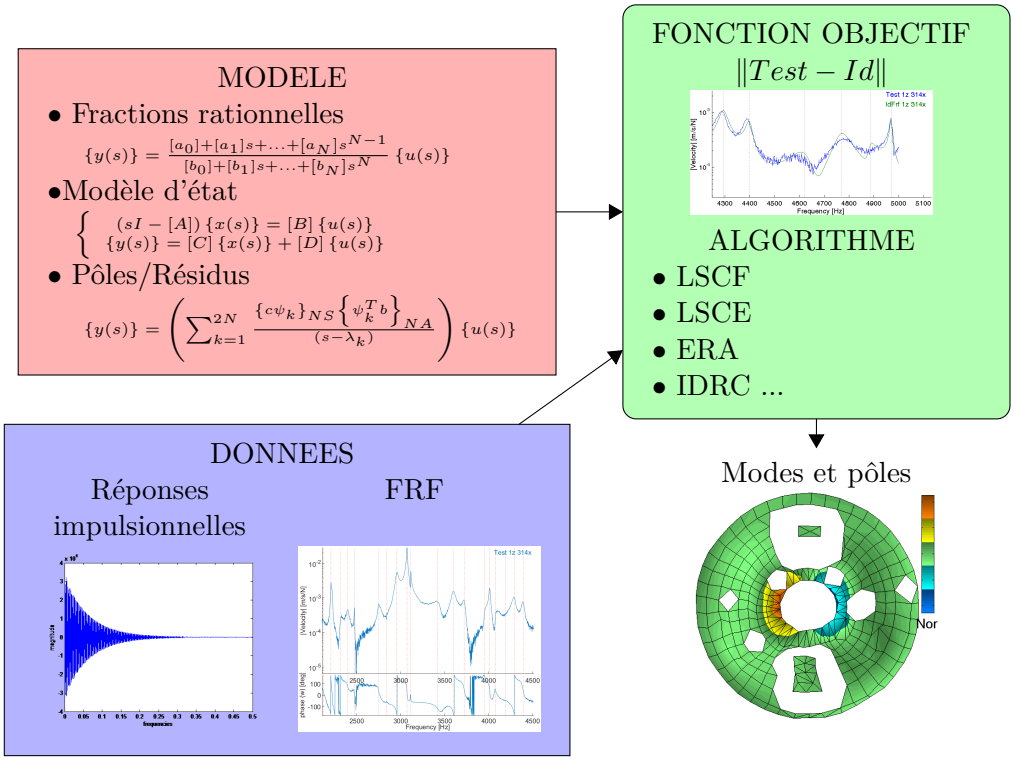


FIGURE 2.1 – Principe de l'identification modale

Pour le choix des données de référence, l'essentiel des méthodes d'identification modale reposent sur des mesures répétées où l'utilisation de moyennes permet de réduire les niveaux de bruits. Le plus souvent, ce sont des réponses fréquentielles et plus spécifiquement des fonctions de transfert ou leurs transformées de Fourier inverses, les réponses impulsionnelles. En particulier, on considéra ici l'estimateur H_1 classique [7] donné par

$$H_1(\omega) = S_{yf}(\omega)S_{ff}(\omega)^{-1} \tag{2.1}$$

où S_{yf} est la densité interspectrale de puissance (ou Cross Power Spectrum) entre les mesures de déplacement en sortie et les mesures de force en entrée, et S_{ff} la densité spectrale de puissance (ou Auto Power Spectrum) des mesures de force en entrée.

Pour le choix du modèle, les formes usuelles de paramétrisation sont :

— Les fractions rationnelles

$$\{y(s)\} = \frac{[a_0] + [a_1]\, s + \ldots + [a_N]\, s^{N-1}}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_N s^N}\{u(s)\} \tag{2.2}$$

où $\{u(s)\}_{NA}$ est le vecteur des NA entrées (Number of Actuators) dans le domaine fréquentiel, $\{y(s)\}$ le vecteur des NS sorties (Number of Sensors), $[a_k]_{NS\times NA}$ les coefficients

matriciels du polynôme au numérateur et b_k les coefficients scalaires du polynôme au dénominateur. Une autre forme appelée fraction matricielle à droite (*Right Fraction Matrix*) utilise des coefficients matriciels au dénominateur $[b_k]_{NA\times NA}$ menant à

$$\{y(s)\} = \frac{[a_0] + [a_1]\, s + ... + [a_N]\, s^{N-1}}{[b_0] + [b_1]\, s + ... + [b_N]\, s^N} \{u(s)\} \tag{2.3}$$

— Les modèles d'état

$$\begin{cases} (sI - [A])\, \{x(s)\} = [B]\, \{u(s)\} \\ \{y(s)\} = [C]\, \{x(s)\} + [D]\, \{u(s)\} \end{cases} \tag{2.4}$$

où les matrices $[A]\,[B]\,[C]\,[D]$ sont indépendantes du temps. $[A]\,[B]$ sont les matrices de l'équation d'état et $[C]\,[D]$ les matrices de l'équation d'observation. Dans le cadre de ce travail, les entrées $\{u(s)\}$ correspondent à des efforts et les sorties $\{y(s)\}$ à des vitesses ou accélération. Mais des entrées en déplacement et des sorties en effort ou déformation sont aussi classiques.

— Le modèle pôles/résidus

$$\{y(s)\} = \left(\sum_{k=1}^{2N} \frac{[R_k]_{NS\times NA}}{(s - \lambda_k)} \right) \{u(s)\} \tag{2.5}$$

où $[R_k]_{NS\times NA}$ sont les résidus et λ_k les pôles (directement reliés aux coefficients du numérateur et du dénominateur du modèle fraction polynômiale). Enfin, il est possible de décomposer le résidu en une observabilité modale $\{c\psi_k\}$ et une commandabilité $\left\{\psi_k^T b\right\}$ (ou contrôlabilité) conduisant ainsi au modèle modal

$$\{y(s)\} = \left(\sum_{k=1}^{2N} \frac{\{c\psi_k\}_{NS\times 1} \left\{\psi_k^T b\right\}_{1\times NA}}{(s - \lambda_k)} \right) \{u(s)\} \tag{2.6}$$

La section 2.2 reprécise les liens entre le modèle pôles/résidus (2.5) et le modèle modal (2.6) à partir du modèle mécanique du second ordre classique. La nature des termes résiduels rajoutés est également rappelée pour gérer au mieux la troncature modale dans le cas des vibrations où les modes hors de la bande de fréquence ont des contributions rarement négligeables.

L'organisation des différentes étapes de l'identification et les sections de ce chapitre les abordant sont montrées en figure 2.2.

Pour l'algorithme d'identification, l'objectif usuel est de trouver les paramètres p du modèle minimisant l'erreur en sortie, définie à chaque fréquence ω_f et chaque capteur c par la différence entre fonction de transfert prédite et mesurée, soit

$$\epsilon_c(p, \omega_f) = H_c(p, \omega_f) - H_c^{test}(\omega_f), \tag{2.7}$$

éventuellement pondérée par une information de variance de façon à satisfaire le maximum de vraisemblance [13]. Cette fonction objectif conduisant à des algorithmes d'optimisation non-linéaires, il est classique de décomposer la procédure d'identification en deux problèmes linéaires sous-optimaux, correspondant aux deux étapes en bleu sur la figure 2.2.

Dans un premier temps, on cherche à identifier les pôles (et les commandabilités modales pour certains algorithmes), à l'aide de modèles *polynomiaux à coefficients matriciels* (matrix coefficient polynomial model) selon la terminologie proposée dans [10], qui cherche à unifier les différents algorithmes classiques selon un formalisme commun. Pour ce problème, le modèle fraction rationnelle (2.2) (ou fraction matricielle à droite (2.3) pour l'identification simultanée

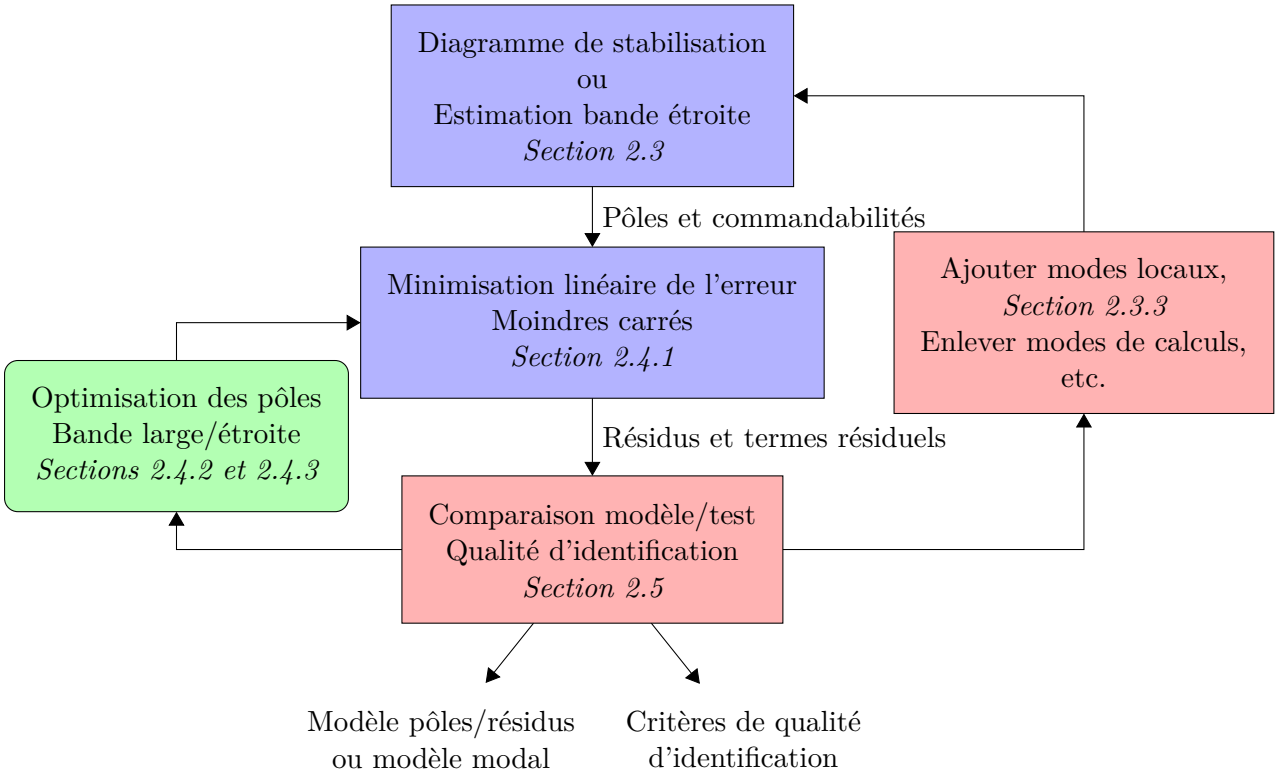


FIGURE 2.2 – Etapes d'identification

des commandabilités modales) est le plus classiquement utilisé actuellement. Pour cette phase, la section 2.3 détaillera l'algorithme LSCF, la construction d'un diagramme de stabilisation et illustrera certaines de ses limitations en particulier en termes de biais.

Dans une deuxième phase, après un choix toujours plus ou moins manuel des pôles à conserver, les résidus pour le modèle pôles/résidus (2.5) ou les observabilités modales pour le modèle modal (2.6), sont estimés à partir de ces pôles par moindre carré linéaire avec la fonction objectif d'erreur en sortie (2.7).

A l'issue de la phase d'estimation des résidus (ou observabilités modales), il est assez courant de ne faire qu'exploiter les formes résultantes. Il est cependant important de noter que l'analyse de la superposition des transferts mesurés et synthétisés, permet des interventions manuelles (ajout de modes locaux, retrait de modes numériques,...), ou des optimisations non-linéaires utilisant l'erreur en sortie (2.7). La section 2.4 rappelle l'estimation des résidus à partir de pôles connus et présente la méthode IDRC d'optimisation non linéaire des pôles, illustrée sur un cas numérique.

Enfin, la dernière partie du chapitre, la section 2.5, présente une analyse fine de la superposition des transferts mesurés et identifiés à travers la définition de quatre critères de qualité d'identification. Des exemples d'utilisation de ces critères sont donnés à partir de mesures expérimentales effectuées sur un plateau de frein à tambour.

2.2 Modes, résidus, termes résiduels

Les formes pôles/résidus (2.5) et modèle modal (2.6) étant les formes d'utilisation finale des résultats d'analyse modale expérimentale, il est important de les analyser en détail. Cette section reprend donc des résultats plutôt classiques, mais souvent peu détaillés, sur le lien entre

les équations de modèles mécaniques et les formes utilisées en analyse modale expérimentale.

Partant d'un modèle mécanique amorti, la section 2.2.1 détaille le calcul des modes complexes, puis la construction des modèles modaux et pôles/résidus. L'hypothèse d'amortissement modal étant souvent considérée en calcul, la section 2.2.2 aborde les liens entre modes réels issus d'un calcul élastique et complexes issus d'un calcul amorti.

Enfin, ces modèles seront utilisés pour identifier les modes à partir de mesures effectuées sur une bande de fréquence limitée. L'influence des modes hors-bandes est analysée en section 2.2.3 et permet de justifier le besoin d'introduire des termes résiduels hauts et bas représentant les contributions d'inertie et de flexibilité résiduelle.

2.2.1 Calcul de modes complexes et construction du modèle pôles/résidus

Dans le cadre de cette section, nous partons du modèle mécanique classique du second ordre où le comportement de la structure est caractérisé par le vecteur de degrés de liberté $\{q(t)\}$ (alors que le modèle d'état utilise l'état x qui combine le déplacement q et la vitesse $\dot{q}$). Ce modèle combine les équations d'évolution et d'observation de la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} [M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = [b]\{u(t)\} \\ \{y(t)\} = [c]\{q(t)\} \end{array} \right. \tag{2.8}$$

avec $[M]$, $[C]$ et $[K]$ les matrices de masse, d'amortissement et de raideur, $\{u(t)\}$ les entrées (typiquement des efforts) et $\{y(t)\}$ les sorties (typiquement des déplacements). L'utilisation d'un modèle du second ordre plutôt que d'un modèle d'état est en fait très peu limitative et est en particulier compatible avec les modèles à amortissement viscoélastique [14].

Par rapport aux écritures mécaniques classiques, il est important de noter la définition de la matrice de contrôlabilité $[b]$ qui définit la localisation spatiale des entrées et la matrice d'observabilité $[c]$ qui définit la relation supposée linéaire entre degrés de libertés et sorties (ce qui est vérifié pour les quantités usuelles : déplacements, déformations, contraintes élastiques, résultantes, ...). Avec les notions d'entrée et de sortie linéairement dépendantes des DDL, la définition du problème est rendue indépendante de la discrétisation.

Une façon de résoudre l'équation (2.8) est de réécrire le problème du second ordre de dimension N en un problème du premier ordre de dimension 2N (une forme plus restrictive mais analogue au modèle d'état général présenté à l'équation (2.4)). On introduit pour cela la relation triviale $[M]\{\dot{q}(t)\} - [M]\{\dot{q}(t)\} = 0$, ce qui conduit à

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} C & M \\ M & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} K & 0 \\ 0 & -M \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q \\ \dot{q} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} b \\ 0 \end{array} \right] \{u(t)\} \\ \{y(t)\} = [c \;\; 0] \left\{ \begin{array}{c} q \\ \dot{q} \end{array} \right\} \end{array} \right. \tag{2.9}$$

où le lien avec le modèle d'état est $[A] = -\left[\begin{array}{cc} C & M \\ M & 0 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{cc} K & 0 \\ 0 & -M \end{array} \right]$, $[B] = \left[\begin{array}{cc} C & M \\ M & 0 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} b \\ 0 \end{array} \right]$, $[C] = [c \;\; 0]$ et $[D] = 0$. On cherche des modes ou solutions de la forme $q(t) = \{\Psi\}\, e^{\lambda t}$ et ainsi l'état s'écrit $\{x(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} q \\ \dot{q} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Psi \\ \lambda\Psi \end{array} \right\} e^{\lambda t} = \{\theta\}\, e^{\lambda t}$. De la connaissance de λ_k, on extrait classiquement les paramètres modaux définis par

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{|\lambda_k|}{2\pi} \quad \text{et} \quad \zeta_k = \frac{-\Re(\lambda_k)}{\omega_k} = \frac{-\Re(\lambda_k)}{2\pi f_k} \tag{2.10}$$

Pour faciliter l'écriture de la suite des calculs, on pose $[\alpha] = \left[\begin{array}{cc} D & M \\ M & 0 \end{array} \right]$ et $[\beta] = \left[\begin{array}{cc} K & 0 \\ 0 & -M \end{array} \right]$.

Résoudre la forme homogène de l'équation (2.9) mène au problème aux valeurs propres généralisées à droite (et ses vecteurs propre $[\theta_{kR}]$). Le problème aux valeurs propres adjointes à gauche (et ses vecteurs propres à gauche $[\theta_{kL}]^T$) est également dérivé

$$\begin{cases} ([\alpha]\,\lambda_{kR} + [\beta])\,\{\theta_{kR}\} = 0 \\ \{\theta_{kL}\}^T\,([\alpha]\,\lambda_{kL} + [\beta]) = 0 \end{cases}. \tag{2.11}$$

On cherche maintenant à montrer que les valeurs propres sont communes aux vecteurs propres à gauche et à droite. On remarque que les vecteur propres à gauche correspondent aux vecteurs propres à droite si l'on remplaçait les matrices $[\alpha]$ et $[\beta]$ par leurs transposées. En appliquant cette transformation à la deuxième équation de (2.11), il vient

$$\left([\alpha]^T\,\lambda_{kL} + [\beta]^T\right)\{\theta_{kL}\} = 0. \tag{2.12}$$

Les valeurs propres λ_{kL} sont solutions de

$$det([\beta]^T + \lambda_{kL}\,[\alpha]^T) = 0 \tag{2.13}$$

et comme $[\beta]^T + \lambda_{kL}\,[\alpha]^T = ([\beta] + \lambda_{kL}\,[\alpha])^T$ et $det(x^T) = det(x)$, on obtient

$$det([\beta]^T + \lambda_{kL}\,[\alpha]^T) = det([\beta] + \lambda_{kL}\,[\alpha]) = 0. \tag{2.14}$$

On a donc $det([\beta] + \lambda_{kL}\,[\alpha]) = det([\beta] + \lambda_{kR}\,[\alpha]) = 0$, ce qui conduit à $\lambda_{kL} = \lambda_{kR}$.

On reprend la première ligne de l'équation (2.11) pour une valeur propre k et la deuxième ligne pour une valeur propre j. Multiplier la première à gauche par $\{\theta_{jL}\}^T$, multiplier la seconde à droite par $\{\theta_{kR}\}$ et soustraire le tout donne

$$\{\theta_{jL}\}^T\,[\alpha]\,(\lambda_k - \lambda_j)\,\{\theta_{kR}\} = 0, \tag{2.15}$$

ce qui équivaut à écrire $\forall k \neq j$

$$\{\theta_{jL}\}^T\,[\alpha]\,\{\theta_{kR}\} = 0. \tag{2.16}$$

On obtient alors la première condition d'orthogonalité

$$[\Theta_L]^T\,[\alpha]\,[\Theta_R] = \left[\backslash \nu_k \backslash\right] \tag{2.17}$$

et on montre facilement, en introduisant cette égalité dans (2.11), la seconde condition d'orthogonalité

$$[\Theta_L]^T\,[\beta]\,[\Theta_R] = \left[\backslash -\nu_k\lambda_k \backslash\right]. \tag{2.18}$$

Le choix de la mise à l'échelle des modes est lié au choix des valeurs arbitraires de ν_k. Pour faciliter l'expression du lien entre les modes complexes et les modes normaux (section 2.2.2), cette valeur sera conservée explicitement.

Dans le domaine fréquentiel, en utilisant la variable de Laplace $s = j\omega$ (ce qui est équivalent à Fourier pour des conditions initiales nulles), l'équation (2.9) prend la forme

$$\begin{cases} (s\,[\alpha] + [\beta])\,\{q(s)\} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}\{u(s)\} \\ \{y(s)\} = [c \;\; 0]\,\{q(s)\} \end{cases} \tag{2.19}$$

qui permet d'expliciter la fonction de transfert $[H(s)]$, qui fait le lien entre les entrées $\{u(s)\}$ et les sorties $\{y(s)\}$, sous la forme

$$\{y(s)\} = [c \;\; 0]\,(s\,[\alpha] + [\beta])^{-1}\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}\{u(s)\} = [H(s)]\,\{u(s)\}. \tag{2.20}$$

Avec en entrée des efforts et en sortie des déplacements, cette fonction de transfert est appelée flexibilité.

En utilisant les deux conditions d'orthogonalité (2.17) et (2.18), on peut écrire

$$[\Theta_L]^T (s[\alpha] + [\beta]) [\Theta_R] = \left[\backslash \nu_k(s - \lambda_k) \backslash\right] \tag{2.21}$$

et en en prenant l'inverse, multiplié à gauche par $[\Theta_R]$ et à droite par $[\Theta_L]^T$, on obtient

$$(s[\alpha] + [\beta])^{-1} = [\Theta_R] \left[\backslash \frac{1}{\nu_k(s-\lambda_k)} \backslash\right] [\Theta_L]^T . \tag{2.22}$$

Injecter (2.22) dans (2.20) mène à

$$\{y(s)\} = [c \;\; 0] [\Theta_R] \left[\backslash \frac{1}{\nu_k(s-\lambda_k)} \backslash\right] [\Theta_L]^T \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \{u(s)\} = [H(s)] \{u(s)\} \tag{2.23}$$

On rappelle que $[\Theta_R]$ et $[\Theta_L]$ sont composés d'une participation en déplacement et en vitesse

$$\begin{cases} [\Theta_R] = \begin{bmatrix} [\Psi_R] \\ [\Psi_R][\Lambda] \end{bmatrix} \\ [\Theta_L]^T = \begin{bmatrix} [\Psi_L] \\ [\Psi_L][\Lambda] \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{2.24}$$

et l'écriture de (2.24) peut être simplifiée en supprimant les participations en vitesse, donnant

$$\{y(s)\} = [c] [\Psi_R] \left[\backslash \frac{1}{\nu_k(s-\lambda_k)} \backslash\right] [\Psi_L]^T [b] \{u(s)\} . \tag{2.25}$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme d'une somme pour toutes les valeurs propres λ_k du produit de la contrôlabilité $\{\Psi_L\}_k^T [b]$ (vecteur ligne de longueur le nombre d'entrées décrivant la localisation des efforts) et de l'observabilité $[c] \{\Psi_R\}_k$ (vecteur colonne de longueur le nombre de sorties décrivant la localisation des capteurs)

$$\{y(s)\} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{[c] \{\Psi_R\}_k \{\Psi_L\}_k^T [b]}{\nu_k(s - \lambda_k)} \{u(s)\} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{[R_k]_{NS \times NA}}{\nu_k(s - \lambda_k)} \{u(s)\} = [H(s)] \{u(s)\} . \tag{2.26}$$

Cette forme de modèle est appelé *modèle pôles/résidus*. Dans la suite de ce mémoire, les observabilités et contrôlabilités modales identifiées seront notées $\{c\Psi_R\}$ et $\left\{\Psi_L^T b\right\}$ (les localisations sont intrinsèquement liées à la mesure) et celles issues du calcul $[c] \{\Psi_R\}$ et $\{\Psi_L\}^T [b]$. Dans la littérature [7], le résidu identifié est souvent noté

$$[R_k] = \{\psi_k\} \{L_k\} \tag{2.27}$$

où les formes modales $\{\psi_k\}$ et les observabilités modales $\{c\psi_{kR}\}$ ne sont pas explicitement différenciées et où les contrôlabilités modales $\left\{\psi_{kL}^T b\right\}$ sont appelées facteurs de participation notés $\{L_k\}$. La notation utilisée ici, bien que moins classique est préférée car elle met en avant la dualité entre les entrées et les sorties avec le rôle similaire de l'observabilité et de la contrôlabilité par rapport aux modes physiques, indépendamment des choix de localisation des capteurs et des excitations.

En faisant l'hypothèse supplémentaire d'un modèle à coefficients réels ($[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont réelles), le polynôme caractéristique $det([\beta] + \lambda [\alpha])$ est à coefficients réels et les pôles sont soit réels, soit viennent par paires conjuguées. La fonction de transfert peut alors être réécrite

$$[H(s)] = \sum_{k=1}^{N-N_R} \left(\frac{[R_k]}{\nu_k(s - \lambda_k)} + \frac{\overline{[R_k]}}{\bar{\nu_k}(s - \bar{\lambda}_k)} \right) + \sum_{kr=1}^{N_R} \frac{[R_{kr}]}{\nu_{kr}(s - \lambda_{kr})}. \tag{2.28}$$

En présence d'amortissement faible, la base modale est souvent considérée sans la matrice d'amortissement qui est ensuite réintroduite dans la forme modale. Les modes ainsi obtenus sont dits normaux, et très souvent calculés pour les modèles éléments finis. Le plus souvent, ce sont donc ces modes normaux que l'on cherchera à comparer avec les modes identifiés.

2.2.2 Hypothèse d'amortissement modal, modes réels

Les modes normaux sont définis à partir du modèle décrit à l'équation (2.8) mais sans la matrice d'amortissement, ne conservant donc que les matrices de masse et de raideur. Ces deux matrices vérifient également des propriétés supplémentaires : la matrice $[M]$ est symétrique définie positive et la matrice $[K]$ est symétrique semi-définie positive. Un problème aux valeurs propres équivalent du premier ordre est ainsi directement obtenu en cherchant les solutions au problème homogène associé sous la forme $x(t) = \{\phi_k\} e^{j\omega_k t}$ (soit un pôle imaginaire pur $\lambda_k = j\omega_k$)

$$-\omega_k^2 [M] \{\phi_k\} + [K] \{\phi_k\} = \{0\} . \tag{2.29}$$

En prenant la transposée de l'équation (2.29), et en utilisant l'hypothèse de symétrie des matrices $[M]$ et $[K]$, on obtient que les vecteurs propres à droite correspondent aux vecteurs propres à gauche.

En faisant l'analogie avec la section 2.2.1, les matrices $[M]$ et $[K]$ jouent le rôle des matrices $[\alpha]$ et $[\beta]$ et les valeurs propres λ_k sont analogues à $-\omega_k^2$. Les deux conditions d'orthogonalités analogues aux équations (2.17) et (2.18) sont alors

$$\begin{array}{c} [\Phi]^T [M] [\Phi] = \left[\backslash \mu_k \backslash \right] \\ et \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] = \left[\backslash \mu_k {\omega_k}^2 \backslash \right] . \end{array} \tag{2.30}$$

La matrice d'amortissement peut être réintroduite ici et projetée sur la base des modes normaux. Dans beaucoup d'applications, et particulièrement celles présentant des amortissements faibles et des modes non couplés [15], l'hypothèse est faite que la matrice d'amortissement est diagonale dans la base des modes normaux

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \left[\backslash 2\mu_k \zeta_k \omega_k \backslash \right] , \tag{2.31}$$

où le coefficient d'amortissement modal ζ_k est l'amortissement du pôle $\lambda_k = \omega_k(-\zeta_k + j\sqrt{(1-\zeta_k^2)})$. Cette hypothèse est appelée amortissement modal. Un cas particulier d'amortissement modal est l'amortissement de Rayleigh

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] . \tag{2.32}$$

En appliquant le même raisonnement que celui menant de (2.19) à (2.26), on écrit l'équation (2.8) dans le domaine de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{c} [Ms^2 + Cs + K] \{q(s)\} = [b] \{u(s)\} \\ \{y(s)\} = [c] \{q(s)\} \end{array} \right. \tag{2.33}$$

et on aboutit à l'écriture de la flexibilité dynamique $[H(s)]$ sous la forme

$$\{y(s)\} = [H(s)] \{u(s)\} = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{[c] \{\phi_k\} \{\phi_k\}^T [b]}{\mu_k(s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + {\omega_k}^2)} \{u(s)\} = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{[T_k]}{\mu_k(s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + {\omega_k}^2)} \{u(s)\} . \tag{2.34}$$

On peut alors essayer de mettre en relation les modes normaux et complexes. Avec les hypothèses de matrices symétriques et d'amortissement faible, l'écriture sur base modale complexe

s'écrit

$$\begin{aligned}[H(s)] &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{[R_k]}{\nu_k(s-\lambda_k)}+\frac{\overline{[R_k]}}{\bar{\nu_k}(s-\bar{\lambda_k})}\right)=\sum_{k=1}^{N}\left(2\frac{\Re([R_k]/\nu_k)s-\Re\left(\bar{\lambda}[R_k]/\nu_k\right)}{s^2-(\lambda_k+\bar{\lambda_k})s+\lambda_k\bar{\lambda_k}}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\left(2\frac{\Re([R_k]/\nu_k)s+\zeta_k\omega_k\Re([R_k]/\nu_k)-\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\Im([R_k]/\nu_k)}{s^2-2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2}\right).\end{aligned} \tag{2.35}$$

La comparaison terme à terme des numérateurs entre (2.34) et (2.35) donne

$$\begin{cases}\Re\left(\frac{[R_k]}{\nu_k}\right)=0\\ 2\zeta_k\omega_k\Re\left(\frac{[R_k]}{\nu_k}\right)-2\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\Im\left(\frac{[R_k]}{\nu_k}\right)=\frac{[T_k]}{\mu_k}\end{cases} \tag{2.36}$$

et injecter la première ligne dans la seconde aboutit au lien entre les résidus du modèle réel $\frac{[T_k]}{\mu_k}$ et les résidus du modèle complexe $\frac{[R_k]}{\nu_k}$, soit

$$\frac{[T_k]}{\mu_k}=2j\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\frac{[R_k]}{\nu_k}=2j\Im(\lambda)\frac{[R_k]}{\nu_k}. \tag{2.37}$$

On note ici que lorsque l'hypothèse d'amortissement proportionnel est respectée, les résidus des modes réels $\frac{[T_k]}{\mu_k}$ sont réels purs et les résidus des modes complexes $\frac{[R_k]}{\nu_k}$ sont imaginaires purs.

Un choix de normalisation classique des modes normaux est la normalisation en masse : $\mu_k = 1$. Cette normalisation sera celle choisie dans toute la suite de ce mémoire. Elle est équivalente à une normalisation des modes complexes avec $\nu_k = 2j\Im(\lambda_k)$. Avec ces deux choix de normalisation, chaque mode normal défini par (ω_k, ζ_k et $\{\phi_k\}$) est associé à deux modes complexes définis par $(\lambda_k, \{\psi_k\})$ et $(\bar{\lambda_k}, \{\bar{\psi_k}\})$ avec $\{\psi_k\} = \{\bar{\psi_k}\} = \{\phi_k\}$, vecteur réel pur.

Dans la suite, nous adopterons pour la normalisation des modes complexes la convention $\nu_k = 1$. La correspondance entre modes normaux et modes complexes sera donc la suivante : chaque mode normal défini par (ω_k, ζ_k et $\{\phi_k\}$) est associé à deux modes complexes définis par $(\lambda_k, \{\psi_k\})$ et $(\bar{\lambda_k}, \{\bar{\psi_k}\})$ avec $\{\psi_k\} = \frac{1}{\sqrt{2j\Im(\lambda_k)}}\{\phi_k\}$ vecteur monophasé incliné de -45° dans le plan complexe.

Que ce soit pour les modes normaux ou complexes, dans le cadre d'une identification modale, celle-ci est toujours réalisée sur une bande de fréquence bornée. La section suivante analyse l'influence des modes hors bande sur la qualité d'identification.

2.2.3 Modèle pôles/résidus avec termes résiduels

Une analyse modale expérimentale (Experimental Modal Analysis ou EMA) est réalisée à partir de transferts mesurés. L'échantillonnage nous impose donc toujours de travailler sur une bande fréquentielle finie. Cependant, des modes haute fréquence au-dessus de la fréquence maximale sont physiquement présents, mais non mesurés et non représentés par le modèle pôles/résidus tel qu'énoncé en (2.28). De plus, dans le cadre de mesures de pièces suspendues (au plus proche des calculs de modes libres classiquement réalisés en simulation), les 6 modes de corps rigide correspondant au balancement du système en raison de sa suspension sont visibles à très basse fréquence. Ceux-ci n'ont pas besoin d'être identifiés, mais leurs contributions sur la réponse dans la bande de fréquence d'étude peuvent être non négligeables et doivent être prise en compte.

Pour bien comprendre l'influence des modes hors de la bande d'étude, la figure 2.3 représente une fonction de transfert comportant trois modes normaux avec amortissement modal. Les trois modes sont représentés individuellement en pointillés et leur somme est représentée en trait plein. Les paramètres modaux correspondant sont donnés dans la table 2.1.

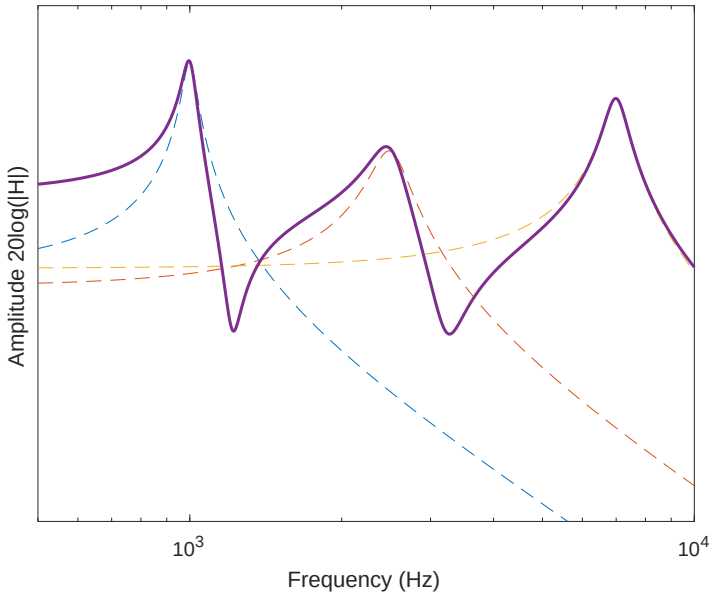


FIGURE 2.3 – Fonction de transfert de trois modes : tracés individuels en pointillés et somme des trois modes en trait continu

Mode #	Fréquence (Hz)	Amortissement (%)	Résidu (m/N)
1	1000	3	1e3
2	2500	8	5e3
3	7000	5	5e4

TABLE 2.1 – Paramètres modaux

La figure 2.3 montre notamment que l'influence des deux modes 1 et 3 éloigne sensiblement la réponse autour de la fréquence du second mode de sa réponse lorsqu'il est considéré individuellement. Si l'on cherche à identifier uniquement le second mode à partir d'une mesure restreinte à une bande autour de sa fréquence de résonnance, l'identification sera biaisée en ne considérant qu'un seul mode dans le modèle.

Pour présenter l'origine des termes résiduels, on considère tout d'abord le modèle pôles/résidus pour trois modes :

$$\{y(s)\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{[R_k]}{s-\lambda_k} + \frac{[\bar{R}_k]}{s-\bar{\lambda}_k} \right) \{u(s)\} \tag{2.38}$$

En nous restreignant à une bande d'étude autour du deuxième mode, on peut faire l'hypothèse que :

$$|s| \gg |\lambda_1| \quad \text{et} \quad |s| \ll |\lambda_3| \,. \tag{2.39}$$

En utilisant ces hypothèses, la contribution du premier mode peut être approchée par

$$\frac{[R_1]}{s-\lambda_1} + \frac{[\bar{R}_1]}{s-\bar{\lambda}_1} = 2\frac{\Re\left([R_1]\right) s - \Re\left([R_1]\,\bar{\lambda}_1\right)}{s^2 - \left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1\right) s + \lambda_1\bar{\lambda}_1} \approx \frac{2\Re\left([R_1]\right)}{s} - \frac{2\Re\left([R_1]\,\bar{\lambda}_1\right)}{s^2} \approx \frac{[F_1]}{s} + \frac{[F_2]}{s^2} \tag{2.40}$$

et celle du troisième mode par

$$\frac{[R_3]}{s-\lambda_3} + \frac{[\bar{R}_3]}{s-\bar{\lambda}_3} = \frac{\Re\left([R_3]\right) s - \Re\left([R_3]\,\bar{\lambda}_3\right)}{s^2 - \left(\lambda_3 + \bar{\lambda}_3\right) s + \lambda_3\bar{\lambda}_3} \approx -\frac{\Re\left([R_3]\,\bar{\lambda}_3\right)}{\lambda_3\bar{\lambda}_3} \approx [E] \,. \tag{2.41}$$

Le terme résiduel basse fréquence, aussi appelé terme résiduel d'inertie, contient une contribution en $1/s$ qui est souvent négligée car dans le cas de systèmes très peu amortis, les modes attendus sont réels et les résidus ont une partie réelle nulle : $[F_1] = 2\Re([R_1]) = 0$. Il est ainsi souvent réduit à une contribution en $1/s^2$ uniquement. Le terme haute fréquence, aussi appelé flexibilité résiduelle, est lui composé d'une unique contribution constante. Dans [16], un terme résiduel composée d'une fraction rationnelle d'ordre 2 au numérateur et 2 au dénominateur (très proche de l'introduction de deux modes en dehors de la bande d'étude) est introduit. Cela améliore la consistance de l'identification, mais demande un processus d'optimisation pour trouver les coefficients du dénominateur.

La figure 2.4 montre graphiquement l'approximation énoncée par les équations (2.40) et (2.41). Dans la bande passante d'intérêt, matérialisée par les deux traits verticaux, le mode de plus basse fréquence est approché par un terme résiduel en $1/s^2$ (une droite pour une représentation logarithmique de l'échelle de fréquence) et le mode de plus haute fréquence par un terme résiduel constant.

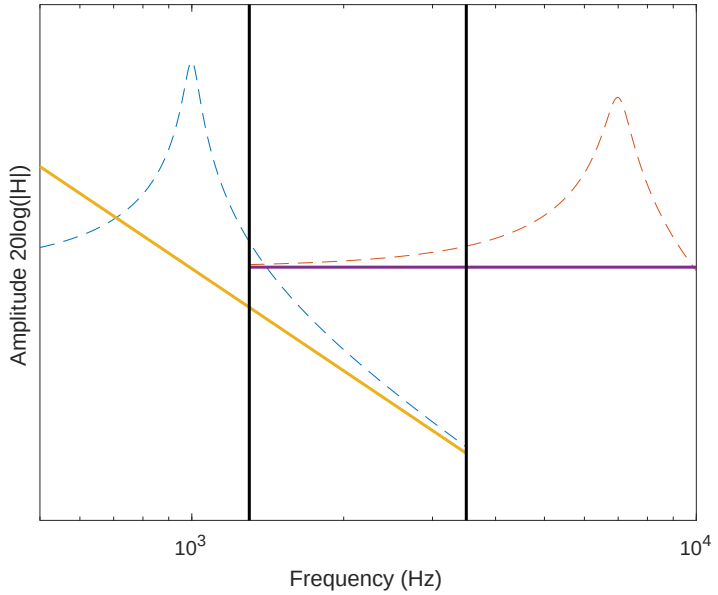


FIGURE 2.4 – Termes résiduels haut et bas

On obtient ainsi la forme de l'équation (1.3) pour un mode et les deux termes résiduels hauts et bas :

$$\{y(s)\} = \left[\left(\frac{[R_2]}{s-\lambda_2} + \frac{[\bar{R}_2]}{s-\bar{\lambda}_2}\right) + [E] + \frac{[F]}{s^2}\right]\{u(s)\} \tag{2.42}$$

La figure 2.5 montre l'intérêt de l'introduction des termes résiduels dans le modèle d'identification. A gauche, le modèle sans termes résiduels (en pointillés) ne représente pas fidèlement l'évolution avec la fréquence de la fonction de transfert mesurée (trait plein) : l'identification cherchera à optimiser les paramètres modaux pour minimiser l'écart avec la mesure et le résultat sera biaisé. En revanche, à droite de la figure 2.5, on observe clairement que dans la bande de travail, le modèle utilisé (second mode plus termes résiduels) est très proche de la solution exacte : l'introduction des termes résiduels minimise le biais d'identification sur les modes dans la bande de fréquence d'intérêt.

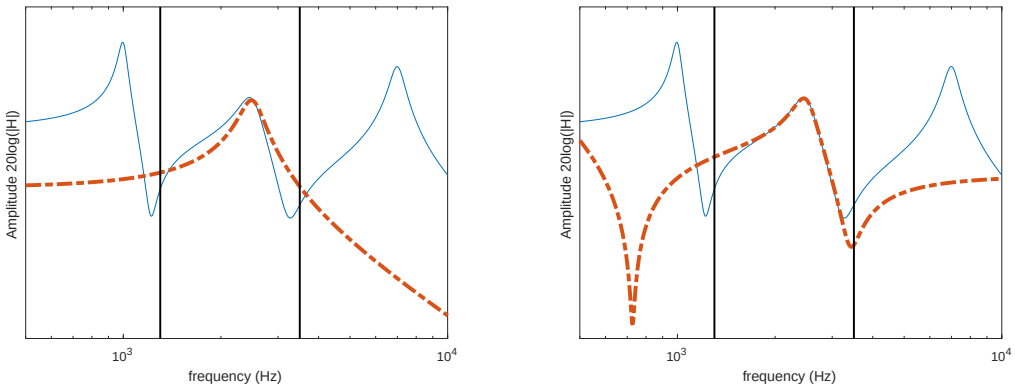


FIGURE 2.5 – Comparaison entre modèle sans terme résiduel (gauche) et modèle avec termes résiduels (droite) : les modèles sont représentés en pointillé et la mesure en trait continu

On précise ici que les termes résiduels ont été écrits pour une fonction de transfert en déplacement/force. Il faut, en fonction du type de mesure, adapter ces termes : $[E]\,s + \frac{[F]}{s}$ pour une mesure vitesse/force et $[E]\,s^2 + [F]$ pour une mesure accélération/force.

Le modèle fraction polynômiale, présenté à l'équation (2.2), peut être directement relié au modèle pôles/résidus de l'équation (2.5). Cependant, cette forme ne permet pas d'expliciter simplement les termes résiduels. Pour compenser ce problème, on augmente l'ordre du modèle, ce qui engendre l'apparition d'un certain nombre de modes numériques. Si le biais qu'engendrerait une absence de termes résiduels est corrigé, il ne l'est pas de façon maitrisée. De plus, cela demande par la suite d'être capable de discerner les modes physiques des modes numériques.

2.3 Algorithmes d'identification modale

L'algorithme d'identification le plus classiquement utilisé dans l'industrie, commercialisé sous le nom Polymax, correspond à l'algorithme p-LSCF [17] (polyreference-Least Square Complex Frequency). Il est basé sur le modèle fraction matricielle présenté en équation (2.3) mais les polynômes sont exprimés sur une base différente de celle de la transformée de Laplace. Pour saisir l'essentiel des principes de cet algorithme, l'algorithme LSCF, qui est basé sur le modèle de l'équation (2.2) et ne prend pas entre compte les entrées multiples, est présenté en section 2.3.1

Pour exploiter l'algorithme LSCF, un outil classique est le diagramme de stabilisation. Pour des raisons explicitées en section 2.3.2, il est souvent nécessaire de surévaluer le degré du modèle fraction rationnelle par rapport au nombre de mode à identifier et le diagramme de stabilisation aide par la suite à discriminer les modes physiques des modes numériques. Une étude de consistance à partir d'un cas test numérique évalue l'utilisation de ce diagramme, mettant en évidence un biais sur les paramètres identifiés.

Il est parfois nécessaire de corriger un premier résultat d'identification, notamment par l'ajout de modes oubliés ou non stabilisés par la méthode LSCF couplée à un diagramme de stabilisation. Une méthode ciblée d'estimation locale à un seul mode est présentée en section 2.3.3.

2.3.1 Algorithme Least Square Complex Frequency

L'algorithme LSCF [18] cherche à approcher des fonctions de transfert fréquentielles par un modèle de type fraction rationnelle. Pour une paire entrée/sortie indexée c, la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel est modélisée, pour un modèle d'ordre N, par

$$H_c(\omega_f) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_{c,k}\Omega_k(\omega_f)}{\sum_{k=0}^{N} b_k\Omega_k(\omega_f)}. \tag{2.43}$$

Cette fraction rationnelle est formée d'une combinaison linéaire d'une base $\Omega_k(\omega_f)$ de polynômes dépendant de la fréquence, dont le choix sera discuté plus loin, avec des coefficients de pondération $a_{c,k}$ au numérateur et b_k au dénominateur.

Le vecteur des inconnues recherchées est donc

$$P^T = \{\dots a_{c,k} \dots b_k\}. \tag{2.44}$$

Les coefficients $a_{c,k}$ dépendent de la paire entrée/sortie, car ils sont liés à la forme des modes, alors que les coefficients b_k n'en dépendent pas puisque les pôles sont indépendants du choix de capteur/actionneur.

On note que la principale différence avec la version p-LSCF se situe ici : l'algorithme p-LSCF utilise un polynôme matriciel au dénominateur (équation de type (2.3)) avec des coefficients de taille $NA \times NA$, au lieu d'un dénominateur commun utilisé dans cette section (équation de type (2.2)). Les coefficients matriciels permettent d'obtenir à la fois les pôles et les contrôlabilités modales (permettant le lien avec le modèle modal) alors que l'utilisation d'un dénominateur commun comme présenté dans cette section ne donne que les pôles (permettant le lien avec le modèle pôles/résidus).

Pour un modèle d'ordre N, avec $N_S \times N_A$ coefficients par polynôme de la base au numérateur et $N+1$ coefficients au dénominateur, on a donc $(NS \times NA + 1) \times (N+1)$ inconnues.

L'utilisation d'une erreur en sortie (2.7) conduisant à une fonction objectif faisant intervenir les coefficients b_k de façon non-linéaire, il est usuel de définir une nouvelle erreur obtenue en multipliant la précédente par le dénominateur de (2.43). L'objectif retenu, sous optimal mais dépendant linéairement des coefficients $a_{c,k}$ et b_k, est donc

$$\epsilon^{'}(a_{c,k}, b_k, \omega_f) = \epsilon(a_{c,k}, b_k, \omega_f) \times \sum_{k=0}^{N} b_k \Omega_k(\omega_f) = \sum_{k=0}^{N} a_{c,k}\Omega_k(\omega_f) - H_c^{test}(\omega_f) \times \sum_{k=0}^{N} b_k \Omega_k(\omega_f). \tag{2.45}$$

Pour un ensemble de pulsations ω_f, on définit donc un résidu vectoriel

$$\begin{aligned}
\{E_c'\} &= \begin{bmatrix} \Omega_0(\omega_1) & \cdots & \Omega_k(\omega_1) & \cdots & \Omega_N(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Omega_0(\omega_f) & \cdots & \Omega_k(\omega_f) & \cdots & \Omega_N(\omega_f) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Omega_0(\omega_{N_f}) & \cdots & \Omega_k(\omega_{N_f}) & \cdots & \Omega_N(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{c,0} \\ \vdots \\ a_{c,k} \\ \vdots \\ a_{c,kN} \end{Bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} H_c^{test}(\omega_1)\Omega_0(\omega_1) & \cdots & H_c^{test}(\omega_1)\Omega_k(\omega_1) & \cdots & H_c^{test}(\omega_1)\Omega_N(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_c^{test}(\omega_f)\Omega_0(\omega_f) & \cdots & H_c^{test}(\omega_f)\Omega_k(\omega_f) & \cdots & H_c^{test}(\omega_f)\Omega_N(\omega_f) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_c^{test}(\omega_{N_f})\Omega_0(\omega_{N_f}) & \cdots & H_c^{test}(\omega_{N_f})\Omega_k(\omega_{N_f}) & \cdots & H_c^{test}(\omega_{N_f})\Omega_N(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_N \end{Bmatrix} \\
&= [X_c]\{A_c\} + [Y_c]\{B\}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Pour un ensemble de transferts (paires entrée/sortie c) et toutes les fréquences ω_f, un résidu global est alors donné par

$$\{E'\} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & Y_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & X_c & \ddots & \vdots & Y_c \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X_{N_iN_o} & Y_{N_iN_o} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_c \\ \vdots \\ A_{N_iN_o} \\ B \end{Bmatrix} = [J]\{P\} \tag{2.47}$$

Le minimum au sens des moindres carrés de la norme de ce résidu s'écrit

$$\min_{a_{c,k},b_k}\left(\sum_{f=0}^{N_f}\sum_{c=0}^{N_iN_o}|\epsilon^{'}(a_{c,k},b_k,\omega_f)|^2\right)=\min_P\left(\{E'\}^H\{E'\}\right)=\min_P\left(\{P\}^H[J]^H[J]\{P\}\right) \tag{2.48}$$

Pour trouver ce minimum, on cherche à annuler les dérivées partielles de cette fonction coût par rapport aux paramètres P

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\{P\}^H[J]^H[J]\{P\}\right)=2[J]^H[J]\{P\}=0 \tag{2.49}$$

Le problème devient donc

$$\begin{aligned}[J]^H[J]\{P\}&=\begin{bmatrix} X_1^HX_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & X_1^HY_1\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & X_c^HX_c & \ddots & \vdots & X_c^HY_c\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X_{N_iN_o}^HX_{N_iN_o} & X_{N_iN_o}^HY_{N_iN_o}\\ Y_1^HX_1 & \cdots & Y_c^HX_c & \cdots & Y_{N_iN_o}^HX_{N_iN_o} & \sum_{c=1}^{N_iN_o}Y_c^HY_c \end{bmatrix}\{P\}\\ &=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & S_1\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & R_c & \ddots & \vdots & S_c\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_{N_iN_o} & S_{N_iN_o}\\ S_1^H & \cdots & S_c^H & \cdots & S_{N_iN_o}^H & \sum_{c=1}^{N_iN_o}T_c \end{bmatrix}\{P\}=0\end{aligned} \tag{2.50}$$

avec $R_c=X_c^HX_c$, $S_c=X_c^HY_c$ et $T_c=Y_c^HY_c$.

La matrice $[J]^H[J]$ fait intervenir des produits de puissances de la base polynomiale $\Omega_k(\omega)$ utilisée en (2.43). En utilisant la base classique de la transformée de Laplace $\Omega_k(\omega)=(j\omega)^k$, le conditionnement numérique devient vite très mauvais lorsque l'ordre du modèle augmente. Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été proposées [10]. Il a été proposé de normaliser la bande de fréquence sur une gamme (-1,1) mais cela ne fait que repousser le problème du conditionnement numérique. L'utilisation de polynômes orthogonaux (polynômes de Forsythe ou de Chebychev par exemple) permet également d'améliorer fortement le conditionnement, les inconvénients étant la difficulté d'extraire les paramètres modaux à partir des coefficients identifiés sur la base orthogonale, ainsi qu'une augmentation des temps de calcul.

La base de la transformée en z, introduite par la méthode LSCF, s'est naturellement imposée car sa relation avec les pôles est quasiment directe et le conditionnement numérique est fortement amélioré. Après avoir mis la bande de fréquence d'intérêt sur l'intervalle $[0;2\pi[$, cette base s'écrit

$$\Omega(\omega)=e^{j2\pi\left(\frac{\omega-\omega_{min}}{\omega_{max}-\omega_{min}}\right)} \tag{2.51}$$

L'intérêt de cette base est que passer à la puissance n'engendre qu'une rotation sur le cercle unité dans le plan complexe. Le conditionnement numérique est naturellement bon et le lien avec les paramètres modaux est simple. Des comparatifs de conditionnements numériques pour différentes bases sont disponibles en [10] et dans la section 5.3.3 de [11].

Un intérêt supplémentaire, décrit en détail en annexe B du chapitre 5 de [11], est lié à la structure de la matrice $[J]^H[J]$ et l'utilisation de la base de la transformée en z. Chaque bloc $[R_c]$, $[S_c]$ et $[T_c]$ est à diagonale constante (également appelé matrice de Toeplitz), ce qui permet

de les construire en ne calculant que la première colonne pour R_c et T_c qui sont des matrices hermitiennes et la première colonne et la première ligne pour S_c. De plus, ce calcul peut être accéléré en remarquant qu'il peut s'écrire sous la forme d'une transformée de Fourier, permettant d'utiliser l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT).

Comme indiqué dans la section 2.1, seule l'extraction des pôles est nécessaire, les résidus étant classiquement obtenus dans un second temps à partir du modèle pôles/résidus avec termes résiduels. Comme les pôles ne sont reliés qu'aux paramètres b_k du dénominateur de (2.43), on cherche donc à éliminer les paramètres $a_{c,k}$ du système (2.50). Les $N_i N_o$ premiers blocs lignes donnent

$$[R_c]\{A_c\} + [S_c]\{B\} = 0 \tag{2.52}$$

soit

$$\{A_c\} = -[R_c]^{-1}[S_c]\{B\} \tag{2.53}$$

En injectant ces $N_i N_o$ blocs d'équations dans le dernier bloc ligne, on obtient un système beaucoup plus compact pour lequel il ne reste que les inconnues b_k

$$\left(\sum_{c=1}^{N_i N_o} [T_c] - [S_c]^H [R_c]^{-1} [S_c]\right)\{B\} = [D]\{B\} = 0 \tag{2.54}$$

et en fixant arbitrairement un coefficient b_k de $\{B\}$ (ce choix est discuté en section 2.3.2), les autres coefficients sont obtenus par inversion du sous-bloc de la matrice $[D]$. Par exemple, en fixant $b_N = 1$

$$\{B\} = \left\{ \begin{array}{c} -[D(1:N,1:N)]^{-1}\{D(1:N,N+1)\} \\ 1 \end{array} \right\} \tag{2.55}$$

Les coefficients étant b_k connus, les pôles z_k du polynôme $\sum_{k=0}^{N} b_k z^k$ sont extraits à l'aide d'un solveur polynômial. Une fois ces pôles obtenus, il faut retourner dans la base classique de Laplace $s = j\omega$. La relation entre les pôles z_k dans la base z et les pôles λ_k dans la base s est d'après (2.51)

$$z_k = e^{2\pi \frac{\lambda_k - j\omega_{min}}{\omega_{max} - \omega_{min}}} = e^{2\pi \frac{\Re(\lambda_k)}{\omega_{max} - \omega_{min}}} e^{j2\pi \frac{\Im(\lambda_k) - \omega_{min}}{\omega_{max} - \omega_{min}}} \tag{2.56}$$

et la correspondance terme à terme avec la forme trigonométrique $z_k(w_k) = |z_k| e^{j\theta_k}$ permet de faire le lien avec les pôles

$$\Re(\lambda_k) = ln(|z_k|)\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{2\pi} \quad \text{et} \quad \Im(\lambda_k) = (\omega_{max} - \omega_{min})\frac{\theta_k}{2\pi} + \omega_{min}. \tag{2.57}$$

Le choix de l'ordre du modèle à considérer étant une difficulté, il est usuel de construire un diagramme de stabilisation en calculant les pôles sur une gamme d'ordres de modèles, comme présenté en section 2.3.2. Une méthode de calcul rapide est présentée au chapitre 5.3.5 de [11]. Il s'agit de construire une seule fois la matrice $[D]$ de l'équation (2.54) pour l'ordre maximal souhaité et de résoudre les équations (2.55) à (2.10) de façon itérative en considérant un sous-bloc de $[D]$ de taille croissante : chaque résolution du sous-bloc de taille k nous donne ainsi les pôles du modèle d'ordre k.

2.3.2 Diagramme de stabilisation et sélection des pôles

Si la procédure précédente permet d'estimer les pôles efficacement, le choix de l'ordre du modèle nécessaire à une bonne estimation est une difficulté reconnue. Il est même bien établi qu'une représentation correcte de la réponse, tenant aussi compte des contributions résiduelles et en présence de bruit de mesure, nécessite d'utiliser un ordre largement supérieur au nombre

de modes effectivement présents dans la bande. Après des rappels bibliographiques, cette section cherche à illustrer l'impact de différentes stratégies sur un exemple théorique permettant d'évaluer la consistance des résultats.

Le diagramme de stabilisation est l'outil le plus classiquement utilisé pour effectuer cette étape d'extraction des pôles physiques. Cette méthode consiste à résoudre successivement le problème en incrémentant l'ordre du modèle et à ne retenir que les modes raisonnablement constants en amortissement, fréquence et résidus. La distinction entre modes numériques et modes physiques repose alors sur l'hypothèse que les modes numériques sont instables avec l'évolution de l'ordre du modèle, alors que les modes physiques sont stables.

L'obtention d'un diagramme de stabilisation le plus propre possible (retrait des modes clairement numériques) avant la sélection manuelle des pôles est discutée dans [19]. En particulier, le choix du paramètre contraint pour déterminer les coefficient b_k (voir Eq.(2.55)) est d'une très grande importance : fixer le dernier paramètre (coefficient lié à l'ordre le plus élevé) b_N permet, lorsque la base choisie est la base de la transformée en z, d'obtenir la majorité des modes numériques avec un amortissement négatif, ce qui aboutit à un nettoyage préliminaire très simple.

Plusieurs critères déterministes sont envisageables pour évaluer la stabilité des modes avec l'évolution de l'ordre du modèle, dont les plus classiques sont rappelés dans [20] :

- Ecarts relatifs en fréquence et amortissement
- Stabilité de la déformée modale (avec le critère MAC introduit en section 3.2.3)
- Mesure de la complexité des modes (souvent révélateur de modes numériques puisque l'on cherche généralement des modes à amortissement proportionnel, donc réels) avec le Modal Phase Collinearity ou le Modal Phase Deviation

Dans le cas de méthodes d'identification stochastiques, comme la méthode Maximum Likelihood [13], une incertitude sur les pôles identifiés est obtenue (reliée aux variances de la mesure). Si ces incertitudes sont disponibles, d'autres indicateurs peuvent être calculés. Le chapitre 7 de [11] présente trois critères stochastiques : écart-type des pôles, "pole-zeros pairs" et "pole-zero correlation". Les deux derniers critères utilisent l'idée qu'un mode numérique contribue très peu à la fonction de transfert et doit donc être annulé dans la majorité des transferts par un zéro. Ces indicateurs stochastiques, décrits comme plus robustes que les déterministes par l'auteur, sont combinés aux indicateurs déterministes classiques par des poids prédéfinis par l'expérience (et sans doute fonction du type de mesure à identifier) pour former un indicateur unique de qualité d'identification du mode (Mode Quality Index).

Etant donné le faible amortissement de la plupart des systèmes que l'on cherchera à identifier, nous n'avons pas jugé utile d'explorer ces méthodes stochastiques et seulement des critères déterministes sont utilisés pour interpréter le diagramme de stabilisation : nous regarderons la stabilité en fréquence et en amortissement entre les pôles d'ordres successifs.

Ces critères sont calculés pour plusieurs ordres de modèle et le diagramme de stabilisation est affiché. L'utilisateur doit alors sélectionner l'ordre voulu (et donc les paramètres physiques associés) pour chaque mode, ou ne pas sélectionner certains modes, qu'il jugerait non physiques. Cette étape correspond à la phase 1 de la figure 2.2 et fournit les pôles (et les contrôlabilités modales pour l'algorithme pLSCF).

Pour appuyer l'importance des choix de l'utilisateur sur le résultat de l'extraction des pôles, une étude de consistance est menée ici.

Le système simulé contient 4 modes normaux présentant tous un amortissement de 0.1% sur 100 capteurs. Le premier mode à 1000 Hz est isolé avec une forte participation sur tous les capteurs qui présentent tous un résidu de 1. Le second mode à 1500 Hz présente les mêmes caractéristiques que le premier mais est très proche du troisième à 1510 Hz qui lui présente une participation croissante (résidus croissant de 0 à 1 sur les différents capteurs). Enfin le mode 4 à

2000 Hz est très localisé : le résidu vaut 1 pour les trois premiers capteurs et 0 pour les autres. Les caractéristiques de la mesure simulée sont rassemblées en table 2.2.

Mode #	Fréquence (Hz)	Amortissement (%)	Résidu (m/N)
1	1000	0.1	1 pour tous
2	1500	0.1	1 pour tous
3	1510	0.1	0, 0.01, ..., 1
4	2000	0.1	1, 1, 1, 0, ..., 0

TABLE 2.2 – Paramètres modaux pour simuler la mesure

Pour les mesures de type vibromètre laser, une source importante d'erreurs de mesures est liée au phénomène de *drop-out*, pics d'amplitudes très localisés dans le temps, qui engendrent un bruit large bande en fréquence. L'annexe A précise l'origine de ces erreurs de mesure laser. Pour se rapprocher de cette situation, on rajoute à chaque fréquence d'un transfert vitesse/effort un bruit additif sur les parties réelles et imaginaires, de distribution normale, avec une moyenne de 0 et un écart type de $4.5e(-2)ms^{-1}N^{-1}$.

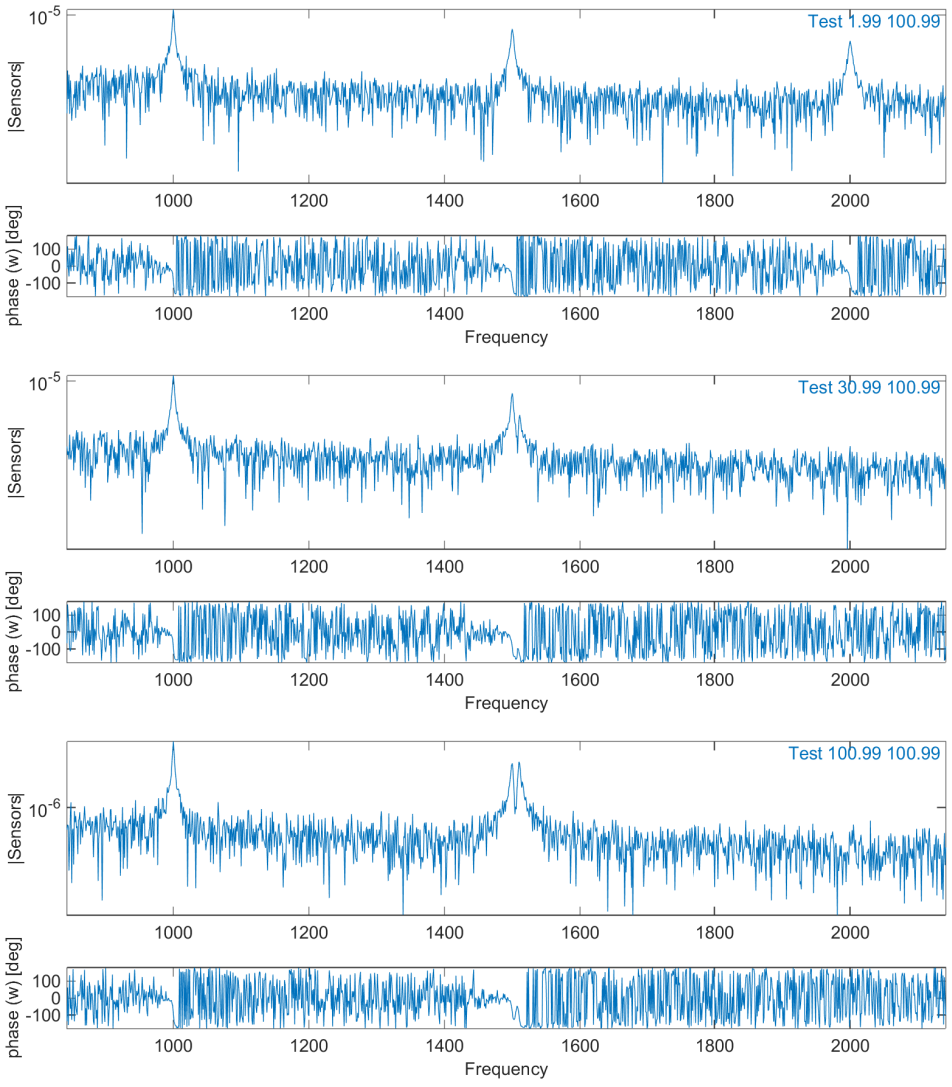


FIGURE 2.6 – Visualisation des transferts synthétisés : diagramme de Bode pour les voies 1, 30 et 100

La figure 2.6 montre trois voies du transfert simulé. La première met en évidence les deux premiers modes et le quatrième. Sur la voie 30, on voit toujours les deux premiers modes, le troisième commence à contribuer suffisamment pour être visible à côté du second et le dernier mode n'est pas visible du tout. Enfin, pour la dernière voie, le mode 1 est toujours très présent, le mode 4 absent et les deux modes proches 2 et 3 contribuent de façon équivalente.

La figure 2.7 montre trois diagrammes de stabilisation pour lesquels des paramètres différents ont été choisis. Tout d'abord, les pôles affichés ne sont que ceux présentant un amortissement positif. Ensuite deux critères sur la stabilité en fréquence et en amortissement ont été considérés : un pôle est considéré comme stable si l'écart relatif entre deux ordres successifs est inférieur à 0.1% pour la fréquence et 20% pour l'amortissement. Si ces deux conditions sont réunies sur plus de 5 ordres successifs, les pôles sont dits stables et sont matérialisés par une croix + bleue. Si une seule de ces conditions est vérifiée ou qu'elles sont vérifiées mais pour moins de 5 ordres successifs, les pôles sont affichés avec un triangle jaune. Enfin si aucune de ces conditions n'est vérifiée, mais que le pôle présente un amortissement positif, il est représenté par une croix x rouge.

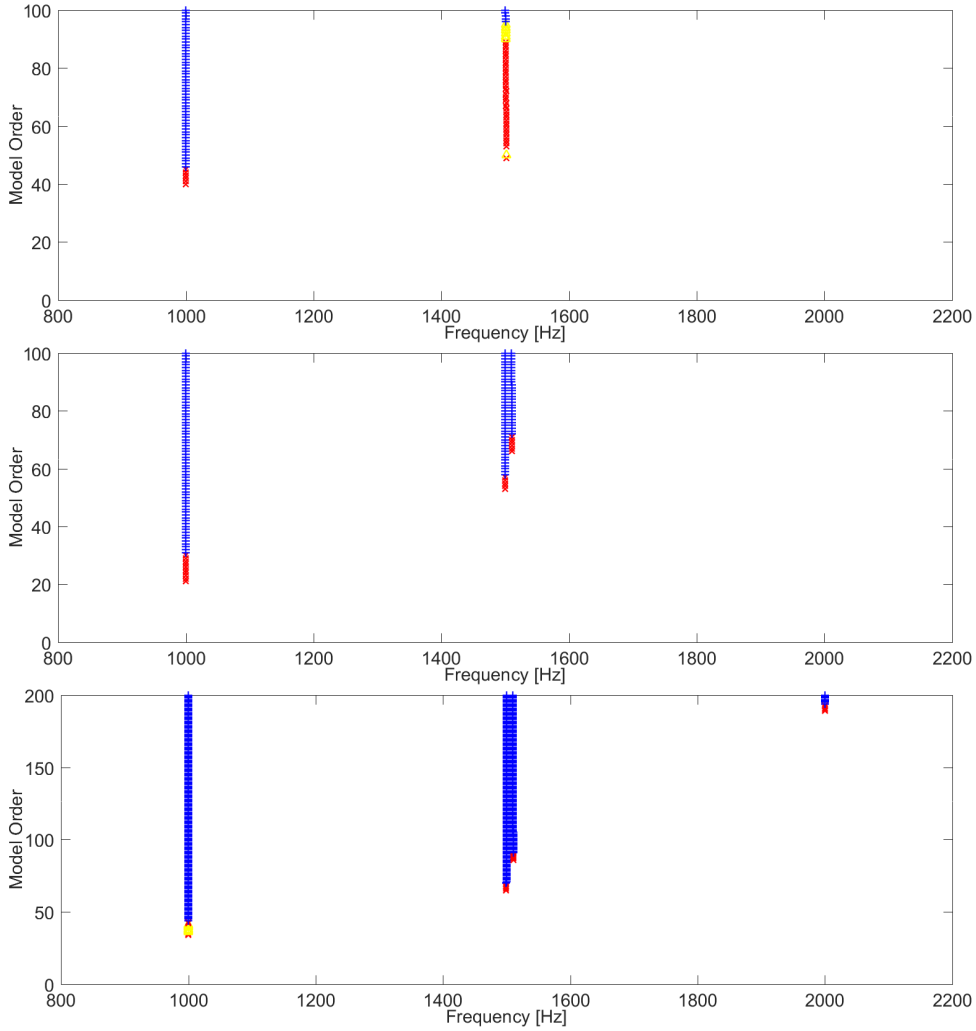


FIGURE 2.7 – Diagrammes de stabilisation : ordre 100 sur toute la bande (haut), ordre 100 par bande de 1000Hz (milieu) et ordre 200 par bande de 1000 Hz (bas)

Le premier diagramme de stabilisation correspond à une identification de toute la bande (0-3000 Hz) d'un coup avec un ordre maximal du modèle de 100. Le premier mode est stabilisé dès l'ordre 45 sans problème. La seconde colonne de stabilisation montre une plus grande difficulté

à stabiliser le mode, et n'identifie qu'un seul mode autour de 1500 Hz là où deux modes dont un contribuant plus faiblement que l'autre sont en réalité présents. Enfin, le dernier mode localisé à 2000 Hz n'est pas identifié du tout.

Le second diagramme présente un cas où l'ordre du modèle est toujours 100 mais pour lequel 3 identifications successives avec une bande passante de 1000 Hz (1-1001, 1001-2001 et 2001-3000) ont été effectuées. Le premier mode est dans ce cas stabilisé encore plus tôt, dès l'ordre 30 et les modes deux et trois sont cette fois ci identifiés séparément. Le mode 4 n'est quant à lui toujours pas identifié.

Enfin, le dernier diagramme correspond toujours aux mêmes 3 bandes d'identifications successives mais jusqu'à l'ordre 200, ce qui permet d'identifier le quatrième mode. On note ici qu'il est souvent intéressant d'effectuer une succession d'identification sur une bande réduite qui permettra une meilleure détection des modes qu'une identification sur la bande totale de fréquence d'étude. De plus, le coût de calcul que cela engendre est souvent moindre : nombre de bande $\times$ (construction + inversion de la matrice $[D]$ de l'équation (2.54), de taille N^2) contre (construction + inversion de la matrice $[D]$ de taille $\tilde{N}^2$ avec $\tilde{N} > N$).

Dans la configuration favorable qui permet d'obtenir les 4 modes, on cherche maintenant à étudier la convergence des propriétés modales. La figure 2.8 montre l'évolution avec l'ordre du modèle de l'erreur relative de chaque pôle par rapport à leur valeurs théoriques.

La première remarque est que pour la fréquence comme pour l'amortissement, l'identification est de meilleure qualité pour les ordres élevés du modèle d'identification. On visualise à gauche que l'erreur en fréquence est très faible et qu'elle tend vers les valeurs théoriques pour les ordres élevés du modèle (<0.01%). Pour l'amortissement en revanche, les erreurs peuvent être significatives si l'ordre du modèle d'identification n'est pas suffisamment élevé. Même pour l'ordre 200, si les modes 1 et 2 présentent une erreur d'estimation de l'amortissement de 2%, l'erreur pour le mode 3 est de 8% et le mode 4 n'est pas du tout convergé avec une erreur sur l'amortissement estimé de 85%.

Comme certains modes peuvent être identifiés avec un biais significatif, une optimisation non linéaire partant du résultat donné par LSCF pour l'initialisation des pôles est à envisager. La méthode basée sur IDRC est présentée en section 2.4.1.

On note que des résultats similaires sur le biais ont été présentés en [21].

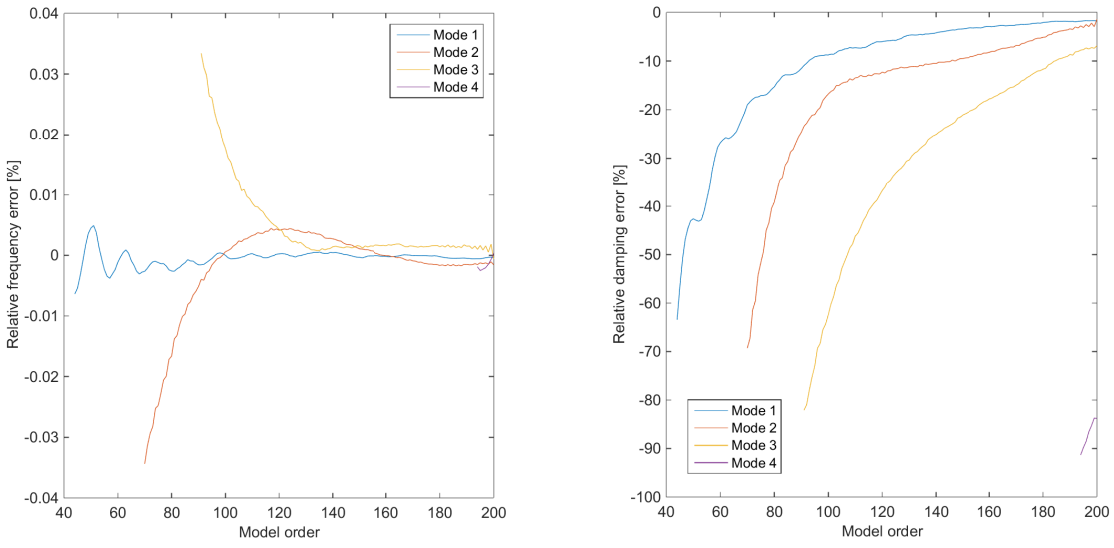


FIGURE 2.8 – Evolution de l'erreur relative en fréquence (gauche) et en amortissement (droite) par rapport aux valeurs théoriques, en fonction de l'ordre du modèle

L'exploitation du diagramme de stabilisation peut dans beaucoup de cas être automatisée en prenant en compte l'ensemble des observations précédentes. Une procédure semi-automatisée a été mise en place pour assister l'identification et demande les deux paramètres d'entrée suivant :

— l'ordre du modèle

— la taille des bandes de fréquence

Pour les mesures de composants réalisées pendant la thèse, après utilisation fréquente de l'outil, on remarque que pour assurer l'identification de modes sur une bande de fréquence comportant N modes, il faut choisir un ordre de modèle au moins 10 fois plus grand. Comme on souhaite une réactivité assez importante lors du processus d'identification, nous avons fixé à 100 l'ordre d'un modèle raisonnable : pour notre exemple numérique de 100 voies et 3000 pas de temps fréquentiels, la résolution prend 1 seconde (6s pour un ordre 200, 26s pour un ordre 300). Connaissant le nombre de modes approximativement recherchés sur l'ensemble de la bande de fréquence et en faisant l'hypothèse qu'ils sont équitablement répartis, la taille des bandes de fréquence est définie de façon à avoir en moyenne un nombre cible de modes par bande (dans notre cas 10 fois plus petit que l'ordre du modèle, donc 10).

Une fois le diagramme construit, les pôles à amortissement négatif sont automatiquement exclus. En fonction du type de mesure (plus ou moins amorti, plus ou moins bruité), l'utilisateur donne des paramètres de stabilisation en fréquence et amortissement qui sont appliqués pour afficher le diagramme de stabilisation (avec les règles déjà expliquées). Les pôles stables pour le dernier ordre du modèle depuis au moins 5 ordres successifs sont automatiquement sélectionnés (moyenne sur les 5 derniers pôles). Les autres colonnes non complètement stabilisées sont alors affichées en jaune et l'utilisateur ne se focalise que sur celles-ci pour valider ou non la stabilisation.

Un diagramme de stabilisation sur le cas industriel d'un plateau de frein à tambour (présenté en détail en section 2.5.1) et l'extraction automatique des pôles a été effectué. L'algorithme LSCF a été utilisé pour les fréquences 0-5000 Hz par bande de 1000Hz et pour un ordre de modèle de 100. La mesure contient 1 actionneur, 1692 capteurs et 6400 échantillons fréquentiels. La Figure 2.9 montre le diagramme de stabilisation obtenu, le temps de calcul étant pour cet exemple de 27s.

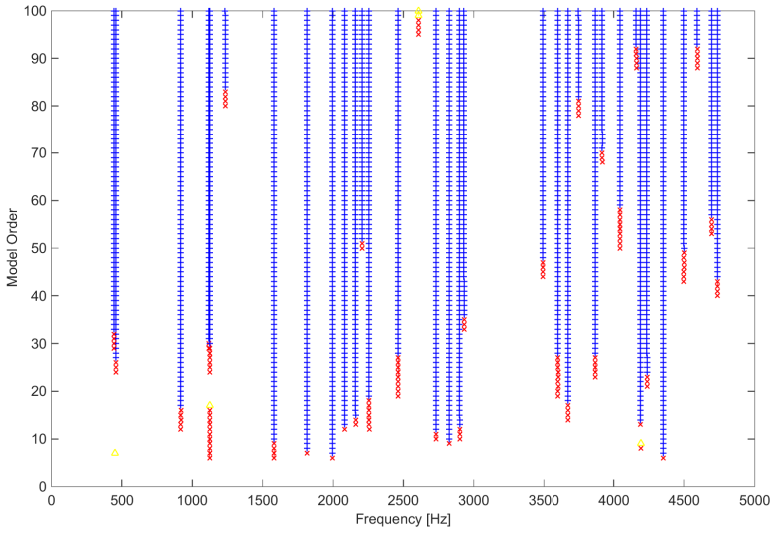


FIGURE 2.9 – Diagramme de stabilisation sur le cas test industriel

Une analyse manuelle a été effectuée en parallèle et le diagramme de stabilisation fournit tous les modes sélectionnés manuellement sauf le mode très amorti à 2706Hz qui n'est pas complètement stabilisé (en jaune sur le diagramme). Le résultat de l'identification à partir des pôles extraits permet de superposer le transfert synthétisé sur le transfert mesuré pour une voie

donnée. La Figure 2.10 montre cette superposition. Certaines résonnances du transfert synthétisé présentent assez nettement des erreurs d'identification, où la largeur du pic est trop faible et l'amplitude à la résonnance surestimée, typique d'une sous-estimation de l'amortissement. De plus, pour les fréquences inférieures à 3500Hz, la qualité de l'identification entre les résonnances est assez mauvaise, avec bien entendu une erreur importante liée à l'absence de pôle à 2706Hz.

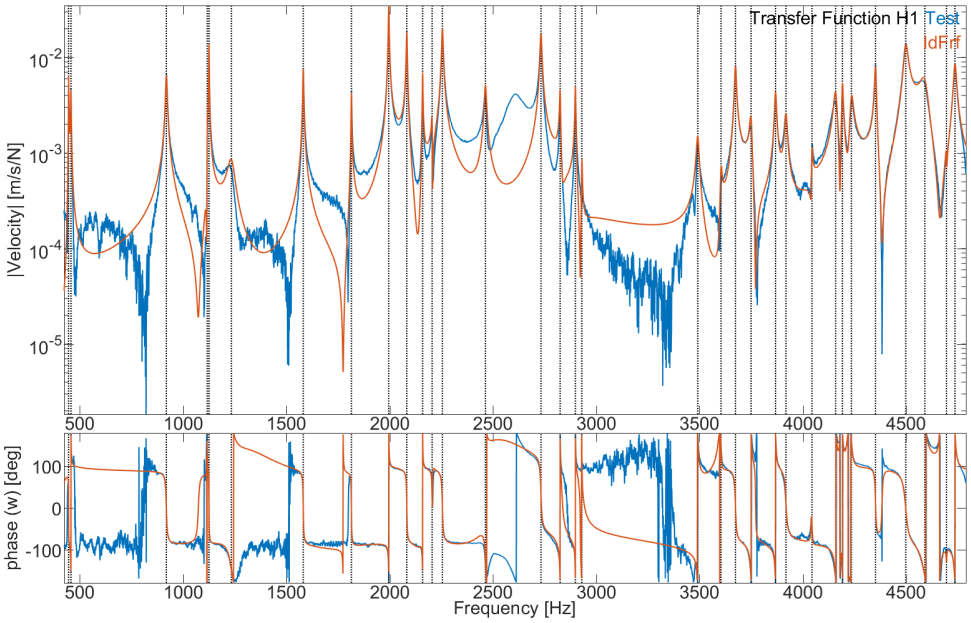


FIGURE 2.10 – Superposition des transferts synthétisés et mesurés pour une voie donnée.

Certains modes très localisés ou bruités peuvent être difficilement accessibles avec la méthode LSCF (souvent en raison d'une difficulté à obtenir un diagramme de stabilisation exploitable). La méthode plus simple d'estimateur à un pôle peut alors être envisagée.

2.3.3 Initialisation par estimateur à un seul mode

Un algorithme d'estimation de mode unique sur bande étroite est utilisé dans SDT [22] pour ajouter un mode spécifique (en remplacement de LSCF ou parce que le mode n'est pas stabilisé). Cet algorithme permet à partir d'une fréquence et d'un amortissement approximatif d'identifier le pôle du mode ciblé à partir d'un modèle bande étroite, comportant un seul mode complexe et deux termes résiduels. Ce modèle Single Input Single Output est utilisé sur une bande de fréquence centrée autour de la fréquence donnée, typiquement sur l'intervalle classique $[-\zeta\omega;\zeta\omega]$ en considérant une valeur arbitraire souvent surestimée de ζ, de l'ordre de 10%. Le modèle pour chaque voie c s'écrit

$$H_c(\omega_f) = \frac{r_c}{j\omega_f - \lambda_c} + e_c + \frac{f_c}{-(\omega_f)^2} \tag{2.58}$$

et avec le même raisonnement que pour l'algorithme LSCF, considérer l'erreur classique

$$\epsilon(r_c, e_c, f_c, \lambda_c, \omega_f) = H_c(\omega_f) - H_c^{test}(\omega_f) \tag{2.59}$$

mène à une résolution non linéaire (en λ). On lui préfère une erreur sous-optimale mais linéaire pour les paramètres en multipliant par le dénominateur $j\omega_f - \lambda_c$, ce qui donne

$$\epsilon^{'}(r_c, e_c, f_c, \lambda_c, \omega_f) = e_c j\omega_f + (r_c - e_c\lambda_c) + \frac{f_c}{j\omega_f} + \frac{f_c\lambda_c}{-{\omega_f}^2} + H_c^{test}\lambda_c - H_c^{test} j\omega_f. \tag{2.60}$$

Comme on ne cherche ici que la valeur du pôle λ_c, on introduit de nouvelles constantes en facteur des puissances de ω_f. Pour améliorer le conditionnement numérique, les pulsations sont normalisées par la pulsation minimale de la bande de fréquence considérée ω_{min} et la fonction de transfert est normalisée par son amplitude moyenne sur la bande $\langle |H_c^{test}| \rangle$, donnant

$$\epsilon^{'}(\alpha_c, \lambda_c, \omega_f) = \alpha_{1,c}\frac{\omega_f}{\omega_{min}} + \alpha_{2,c} + \alpha_{3,c}\frac{\omega_{min}}{\omega_f} + \alpha_{3,c}\left(\frac{\omega_{min}}{\omega_f}\right)^2 + \frac{H_c^{test}(\omega_f)}{\langle |H_c^{test}| \rangle}\lambda_c - \frac{H_c^{test}(\omega_f)}{\langle |H_c^{test}| \rangle} j\omega_f. \quad (2.61)$$

Ceci conduit à une expression matricielle de l'erreur

$$\begin{aligned} \{E_c'\} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{H_c^{test}(\omega_{min})}{\langle |H_c^{test}| \rangle} \\ \frac{\omega_2}{\omega_{min}} & 1 & \frac{\omega_{min}}{\omega_2} & \left(\frac{\omega_{min}}{\omega_2}\right)^2 & \frac{H_c^{test}(\omega_2)}{\langle |H_c^{test}| \rangle} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}} & 1 & \frac{\omega_{min}}{\omega_{max}} & \left(\frac{\omega_{min}}{\omega_{max}}\right)^2 & \frac{H_c^{test}(\omega_{max})}{\langle |H_c^{test}| \rangle} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{1,c} \\ \alpha_{2,c} \\ \alpha_{3,c} \\ \alpha_{4,c} \\ \lambda_c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{H_c^{test}(\omega_{min})}{\langle |H_c^{test}| \rangle} j\omega_{min} \\ \frac{H_c^{test}(\omega_2)}{\langle |H_c^{test}| \rangle} j\omega_2 \\ \vdots \\ \frac{H_c^{test}(\omega_{max})}{\langle |H_c^{test}| \rangle} j\omega_{max} \end{Bmatrix} \\ &= [A] \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha_{1,c} & \alpha_{2,c} & \alpha_{3,c} & \alpha_{4,c} & \lambda_c \end{array} \right\}^T - \{b\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

dont la minimisation au sens des moindres carrés donne les 5 paramètres

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha_{1,c} & \alpha_{2,c} & \alpha_{3,c} & \alpha_{4,c} & \lambda_c \end{array} \right\}^T = [A]^+ \{b\} \quad (2.63)$$

et le pôle estimé correspond au dernier paramètre.

Ce système est résolu sur chaque voie de mesure et on obtient donc un pôle par voie. Un premier nettoyage est effectué en retirant de l'ensemble des pôles ceux présentant une fréquence en dehors de la bande d'étude ou un amortissement négatif. Un nettoyage supplémentaire peut également être envisagé pour retirer les pôles identifiés sur des voies où le mode ne contribue pas ou peu (à l'aide du critère de contribution présenté en section 2.5.2), ce qui peut représenter la majorité des voies pour des modes très localisés. En effet pour les voies où le mode n'est quasiment pas visible, aucune confiance sur la validité des pôles n'est possible. Enfin, il faut ensuite mettre en place une stratégie de type clustering pour récupérer une valeur unique de pôle.

2.4 Raffinement à partir d'un modèle à pôles connus

L'objectif de la première phase d'identification était de construire une liste initiale des pôles. La deuxième phase est alors l'estimation des déformées modales dans la forme pôles/résidus (2.5) ou modèle modal (2.6), avec les termes résiduels introduits en section 2.2.3. Cette seconde phase est détaillée en section 2.4.1 qui présente l'estimation des résidus et termes résiduels par moindres carrés et précise les problématiques liées aux mesures avec entrées multiples (Multi Input Multi Output ou MIMO).

En superposant les réponses fréquentielles estimées aux transferts mesurés, on peut itérer en supprimant des modes identifiés qui seraient en réalité des modes de calculs ou en enrichissant la base modale, consistant le plus souvent à la compléter par de nouvelles identifications sur des bandes étroites.

Ensuite, l'exemple de la section 2.3.2 ayant mis en évidence le caractère biaisé ou mal convergé des estimateurs classiques, la section 2.4.2 détaille une stratégie d'optimisation non-linéaire des pôles à partir des pôles préalablement identifiés. L'algorithme utilisé, IDRC, est ensuite appliqué au cas test numérique ainsi qu'à une mesure industrielle en section 2.4.3.

2.4.1 Estimation des résidus à pôles connus

Une fois les pôles connus, il est possible d'utiliser l'erreur en sortie (2.7) pour estimer les coefficients au numérateur du modèle pôle résidu avec termes résiduels introduit en section 2.2.3. On cherche donc à résoudre le problème

$$\min_{R_k,E,F} \left| \left[H^{test}\right] - \left(\sum_k \left(\frac{[R_k]}{s-\lambda_k} + \frac{[\bar{R_k}]}{s-\bar{\lambda_k}} \right) + [E] + \frac{[F]}{s^2} \right) \right|. \tag{2.64}$$

Afin de prendre en compte correctement la contrainte selon laquelle les pôles et résidus viennent par paires conjuguées, il est nécessaire de réarranger l'équation (2.64) et de faire intervenir les parties réelles et imaginaires de R_k. L'erreur utilisée pour la minimisation peut être réécrite comme

$$\left[H^{test}\right] - \left(\sum_k \left(\Re([R_k]) \left(\frac{1}{s-\lambda_k} + \frac{1}{s-\bar{\lambda_k}} \right) + j \times \Im([R_k]) \left(\frac{1}{s-\lambda_k} - \frac{1}{s-\bar{\lambda_k}} \right) \right) + [E] + \frac{[F]}{s^2} \right) \tag{2.65}$$

dont on évalue ensuite les parties réelles et imaginaires. Pour simplifier l'écriture, commençons par écrire cette erreur pour une paire entrée/sortie c et un modèle à un pôle k (sans termes résiduels). Son écriture matricielle est composée de $2N_f$ lignes correspondant à la partie réelle de l'erreur (N_f lignes) et la partie imaginaire de l'erreur (N_f lignes sous les premières). En posant

$$X_k(\omega_f) = \frac{1}{j\omega_f - \lambda_k} + \frac{1}{j\omega_f - \bar{\lambda_k}} \; et \; Y_k(\omega_f) = \frac{1}{j\omega_f - \lambda_k} - \frac{1}{j\omega_f - \bar{\lambda_k}}, \tag{2.66}$$

l'erreur s'écrit

$$\begin{aligned} \{E_c\} &= \begin{Bmatrix} \Re(H_c^{test}(\omega_1)) \\ \vdots \\ \Re(H_c^{test}(\omega_{N_f})) \\ \Im(H_c^{test}(\omega_1)) \\ \vdots \\ \Im(H_c^{test}(\omega_{N_f})) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \Re(X_k(\omega_1)) & -\Im(Y_k(\omega_1)) \\ \vdots & \vdots \\ \Re(X_k(\omega_{N_f})) & -\Im(Y_k(\omega_{N_f})) \\ \Im(X_k(\omega_1)) & \Re(Y_k(\omega_1)) \\ \vdots & \vdots \\ \Im(X_k(\omega_{N_f})) & \Re(Y_k(\omega_{N_f})) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Re(R_{k,c}) \\ \Im(R_{k,c}) \end{Bmatrix} \\ &= \left\{\widetilde{H_c^{test}}\right\} - [A_k] \left\{\widetilde{R_{k,c}}\right\} \end{aligned} \tag{2.67}$$

où l'opérateur $\widetilde{\ }$ correspond à la décomposition du vecteur en sa partie réelle suivie de sa partie imaginaire.

Cette erreur peut ensuite être écrite pour l'ensemble des $N_i N_o$ voies et pour N modes plus les deux termes résiduels :

$$[E] = \begin{bmatrix} \widetilde{H_1^{test}} & \cdots & \widetilde{H_{N_iN_o}^{test}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_N & B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{R_{1,1}} & \cdots & \widetilde{R_{1,N_iN_o}} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{R_{N,1}} & \cdots & \widetilde{R_{N,N_iN_o}} \\ E_1 & \cdots & E_{N_iN_o} \\ F_1 & \cdots & F_{N_iN_o} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

avec

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {-\omega_1}^{-2} \\ \vdots \\ {-\omega_{N_f}}^{-2} \end{Bmatrix} \tag{2.69}$$

car $[E]$ et $[F]$ sont supposés réels comme discuté en section section 2.2.3. Les résidus et termes résiduels sont alors calculés par minimisation au sens des moindres carrés comme indiqué dans l'équation (2.64).

La gestion des configurations à plusieurs entrées et sorties (MIMO) doit faire l'objet d'une attention spécifique. On rappelle que l'équation (2.26) donnait la relation entre les modes et le résidu associé $[R_k] = \{c\psi_{kR}\} \left\{\psi_{kL}^T b\right\}$.

Dans la cas de mesures SIMO, le vecteur ligne de commandabilité modale $\left\{\psi_{kL}^T b\right\}$ est un scalaire. Le vecteur de résidus $\{R_k\}$ et le vecteur d'observabilité modale $\{c\psi_{kR}\}$ sont proportionnels. En revanche, dans le cas d'une mesure MIMO, la matrice résidu $[R_k]$ est une matrice dyadique correspondant au produit du vecteur colonne d'observabilité $\{c\psi_{kR}\}$ par le vecteur ligne de commandabilité $\left\{\psi_{kL}^T b\right\}$: la matrice recherchée est de rang 1 alors qu'aucune contrainte n'a été imposée dans ce sens.

Deux approches sont alors possibles : appliquer la contrainte de rang après estimation de la matrice de résidu $[R_k]$ ou ajouter une contrainte au problème de moindre carré.

Pour la première approche, l'approximation de rang 1 optimale d'une matrice est associée à sa première valeur singulière, c'est-à-dire

$$[R_k] = [U_1 \cdots U_{Ni}] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_{Ni} \end{bmatrix} [V_1 \cdots V_{Ni}]^T \approx \{U_1\} \sigma_1 \{V_1\}^T . \tag{2.70}$$

L'observabilité modale $\{c\psi_{kR}\}$ est assimilée à $\{U_1\}$ et la commandabilité modale $\left\{\psi_{kL}^T b\right\}$ à $\{V_1\}^T$.

Plusieurs auteurs font état d'une dégradation importante de la qualité de l'identification entre avant et après l'application de la contrainte de rang sur le résidu [23, 24, 17, 25]. Pour pallier à ce problème, des algorithmes d'identification prenant en compte directement cette contrainte ont été développés. Ils consistent pour la plupart en une généralisation d'un algorithme SIMO à un algorithme MIMO (ces algorithmes sont souvent identifiables par le terme "polyreference"). Ainsi l'algorithme p-LSCF [26] ne part plus d'un modèle fraction matricielle avec un dénominateur commun à toutes les voies mais utilise un modèle RFMD (Right Fraction Matrix Description) qui contient au dénominateur un polynôme à coefficient matriciels, avec des matrices carrées de taille le nombre de points d'excitations $NA \times NA$. Cela permet d'identifier les pôles mais également les commandabilités modales directement. On ne cherche alors plus à identifier les résidus, mais directement l'observabilité modale avec

$$\min_{c\psi_{kR},E,F} \left| [H_{test}] - \left(\sum_k \left(\frac{\{c\psi_{kR}\} \left\{\psi_{kL}^T b\right\}}{s - \lambda_k} + \frac{\overline{\{c\psi_{kR}\}} \overline{\left\{\psi_{kL}^T b\right\}}}{s - \bar{\lambda}_k} \right) + [E] + \frac{[F]}{s^2} \right) \right| \tag{2.71}$$

D'après les résultats montrés par ces auteurs, l'erreur globale d'identification est plus faible en identifiant directement avec l'algorithme p-LSCF qu'avec le résultat obtenu en utilisant successivement LSCF et la décomposition en valeur singulière de la matrice résidus.

Un autre intérêt pointé notamment par [26] est la plus grande capacité de p-LSCF à identifier des modes très proches en fréquence qui ne sont typiquement synthétisés que par un seul mode par l'algorithme LSCF. Cet intérêt est cependant discutable puisque la décomposition en valeurs singulière sert justement à détecter des configurations de modes multiples.

Cette méthode n'a pas été implémentée dans le cadre de cette thèse : aucun cas de modes trop fortement couplés pour être stabilisés avec LSCF ou de dégradation importante après SVD n'a été rencontré pour justifier de la mettre en place.

2.4.2 Optimisation non linéaire des pôles

Comme les pôles extraits d'un diagramme de stabilisation sont souvent biaisés, la deuxième étape d'identification présentée à la section précédente, à savoir l'extraction des formes modales à partir de ces pôles, est également susceptible d'être biaisée. Plusieurs algorithmes proposent de réaliser une optimisation globale de tous les paramètres : les résidus ou observabilités modales et les pôles.

La logique itérative de ce processus d'optimisation est présentée en figure 2.2. Une combinaison d'algorithmes est utilisée pour initialiser les pôles et à l'issue de la première estimation à pôles connus (2.64), une comparaison des transferts permet de détecter des difficultés. L'utilité et les raffinements possibles de cette analyse de qualité des transferts synthétisés seront détaillés en section 2.5.

L'idée de la comparaison des transferts est qu'il est assez facile de détecter les modes manquants. De même des modes numériques ou des modes trop peu excités pour être considérés comme pertinents peuvent être retirés, sur la base de critères clairs (définit en section 2.5.2), ce que ne permet pas le diagramme de stabilisation.

Dans [13], une fois les pôles initialisés avec l'algorithme LSCF, l'ensemble des paramètres de la fraction rationnelle (coefficients des matrices au numérateur et coefficients scalaires au dénominateur) sont optimisés avec un algorithme de type Gauss-Newton. Cette méthode est appelée Maximum Likelihood Frequency Description (MLFD).

En considérant que le bruit correspond à une distribution normale et qu'il est non corrélé entre les différents transferts, celui-ci est introduit dans le calcul de l'erreur (2.7) par la variance de la mesure qui agit comme un facteur de pondération par fréquence et par paire entrée/sortie. Cette erreur

$$\epsilon_c(p, \omega_f) = \frac{H_c(p, \omega_f) - H_c^{test}(\omega_f)}{\sqrt{var\left\{H_c^{test}(\omega_f)\right\}}}, \tag{2.72}$$

est ensuite utilisée pour optimiser les paramètres p du modèle qui la minimise au sens des moindres carrés sur toutes les paires entrée/sortie c et toutes les fréquences ω_f.

Le résultat du modèle fraction rationnelle est transposable au modèle pôles/résidus qui ne prend pas en compte la propriété de la minimalité de la matrice de résidu (rang 1). La minimalité peut être imposée en utilisant le modèle "right fraction matrix" (les coefficients au dénominateur sont des matrices de taille le nombre d'entrées). L'algorithme pLSCF est alors utilisé pour initialiser les coefficients du modèle, puis l'ensemble de ces paramètres sont optimisés (p-MLFD) [27].

Enfin, une dernière version plus récente appelée Maximum Likelihood-Modal Model (ML-MM) [23] propose d'utiliser directement le modèle modal avec termes résiduels : le biais engendré par la non prise en compte des termes résiduels est corrigé. Dans [16], les termes résiduels classiques sont ensuite remplacés par un terme comprenant plus de paramètres (proche d'un modèle avec termes résiduels plus deux modes extra bande) qui permet de réduire à nouveau le biais d'identification. Une information non trouvée de façon claire dans les différents papiers traitant de cette méthode concerne le temps de calcul. [16] montre par exemple une mesure comportant 294 capteurs, 2 actionneurs et 256 échantillons fréquentiels et l'optimisation prend 7 minutes, mais il n'est pas fait mention du nombre de modes ni du nombre d'itérations.

Dans [28, 29], l'algorithme Identification Des Résidus Complexes (IDRC) utilise le modèle pôles/résidus. La fonction coût considère la norme quadratique de l'écart entre le modèle et la mesure

$$\min_{\lambda_k, R_k, E, F} \left| \left[H^{test}\right] - \left(\sum_k \left(\frac{[R_k]}{s - \lambda_k} + \frac{\overline{[R_k]}}{s - \bar{\lambda_k}} \right) + [E] + \frac{[F]}{s^2} \right) \right|. \tag{2.73}$$

La limitation pour réaliser cette optimisation de façon immédiate est le nombre de paramètres

à considérer et donc le coût numérique élevé. Pour limiter cet impact, l'algorithme propose de considérer les formes modales et les termes résiduels comme des fonctions implicites des pôles. En effet, on peut voir sur l'équation précédente que la minimisation est linéaire selon ces paramètres, il est donc possible d'écrire explicitement la résolution de leur minimisation, à pôles fixés. La minimisation complète ne dépend alors plus que des pôles et on obtient le problème suivant :

$$\begin{aligned}&\min_{\lambda_k}\left(\min_{R_k,E,F}\left|\left[H^{test}\right]-\left(\sum_k\left(\frac{[R_k]}{s-\lambda_k}+\frac{\overline{[R_k]}}{s-\overline{\lambda_k}}\right)+[E]+\frac{[F]}{s^2}\right)\right|\right)\\&=\min_{\lambda_k}\left(\left|\left[H^{test}\right]-\left(\sum_k\left(\frac{[R_k(\lambda_k)]}{s-\lambda_k}+\frac{\overline{[R_k(\lambda_k)]}}{s-\overline{\lambda_k}}\right)+[E(\lambda_k)]+\frac{[F(\lambda_k)]}{s^2}\right)\right|\right)\end{aligned}\tag{2.74}$$

avec $[R_k(\lambda_k)]$, $[E(\lambda_k)]$ et $[F(\lambda_k)]$ les résultats de la minimisation explicite à pôles fixés. Ce calcul est explicité en section 2.4.1.

Pour traiter cette minimisation, l'algorithme calcule le gradient de la fonction coût. Pour des pôles fixés et une fois les résidus calculés, l'erreur s'écrit

$$\begin{aligned}E=\left[H^{test}\right]-&\begin{bmatrix}\frac{1}{j\omega_1-\lambda_1}&\frac{1}{j\omega_1-\overline{\lambda_1}}&\cdots&\frac{1}{j\omega_1-\lambda_N}&\frac{1}{j\omega_1-\overline{\lambda_N}}&1&\frac{1}{-{\omega_1}^2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\frac{1}{j\omega_{N_f}-\lambda_1}&\frac{1}{j\omega_{N_f}-\overline{\lambda_1}}&\cdots&\frac{1}{j\omega_{N_f}-\lambda_N}&\frac{1}{j\omega_{N_f}-\overline{\lambda_N}}&1&\frac{1}{-{\omega_{N_f}}^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{1,1}&\cdots&R_{1,N_iN_o}\\\overline{R}_{1,1}&\cdots&\overline{R}_{1,N_iN_o}\\\vdots&&\vdots\\R_{N,1}&\cdots&R_{N,N_iN_o}\\\overline{R}_{N,1}&\cdots&\overline{R}_{N,N_iN_o}\\E_1&\cdots&E_{N_iN_o}\\F_1&\cdots&F_{N_iN_o}\end{bmatrix}\\&=\left[H^{test}\right]-[\Phi]\,[R]\end{aligned}\tag{2.75}$$

avec

$$[R]=\left([\Phi]^H[\Phi]\right)^{-1}[\Phi]^H\left[H^{test}\right]\tag{2.76}$$

la solution analytique de R qui minimise la fonction coût de l'erreur au sens des moindres carrés

$$J=trace(E^HE)\tag{2.77}$$

Le gradient de cette fonction coût selon un paramètre θ s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial\theta}=trace\left(2E^H\frac{\partial E}{\partial\theta}\right)=trace\left(2\left(H^{test}-\Phi R\right)^H\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}R-\Phi\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)\right)\\trace\left(2\left(\Phi R-H^{test}\right)^H\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}R\right)+trace\left(2\left(\Phi R-H^{test}\right)^H\Phi\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)\end{aligned}\tag{2.78}$$

En injectant l'équation (2.76) dans le deuxième terme de (2.78), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\Phi R-H^{test}\right)^H\Phi\frac{\partial R}{\partial\theta}&=\left(\Phi(\Phi^H\Phi)^{-1}\Phi^HH^{test}-H^{test}\right)^H\Phi\frac{\partial R}{\partial\theta}\\&=(H^{test})^H\Phi(\Phi^H\Phi)^{-1}\Phi^H\Phi\frac{\partial R}{\partial\theta}-H^{test\ H}\Phi\frac{\partial R}{\partial\theta}=0\end{aligned}\tag{2.79}$$

et le gradient de la fonction coût s'écrit alors

$$\frac{\partial J}{\partial\theta}=trace\left(2\left(\Phi R-H^{test}\right)^H\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}R\right)\tag{2.80}$$

En pratique, le gradient est calculé pour les dérivées des parties réelles et imaginaires des pôles. On note que le signe de la partie réelle de $\partial J/\partial(Re(\lambda_k))$ nous renseigne sur la sur- ou sous-évaluation de l'amortissement et que le signe de la partie imaginaire de $\partial J/\partial(Im(\lambda_k))$ nous renseigne sur la sur- ou sous-évaluation de la fréquence propre.

Il est ainsi proposé un algorithme ad-hoc d'optimisation qui à chaque itération ajoute aux valeurs courantes ω_k et ζ_k les pas en pulsation $\delta\omega_k$ et en amortissement $\delta\zeta_k$. Lorsque le signe de $Im(\partial J/\partial(Im(\lambda_k)))$ change, l'incrément en pulsation est divisé par deux, et de même lorsque $Re(\partial J/\partial(Re(\lambda_k)))$ change de signe avec l'incrément en amortissement.

Si cette méthode ne donne aucune garantie de convergence, elle permet en pratique d'obtenir des résultats satisfaisants dans une majorité de cas. Un de ses inconvénients est que les nouveaux résidus et termes résiduels doivent être calculés à chaque itération, ce qui est gourmand en temps de calcul (la taille du problème de minimisation de l'erreur (2.68) est directement liée au nombre d'échantillons fréquentiels, au nombre de modes et au nombre de voies mesurées).

Comme on sait que les modes sont fortement découplés entre eux (notamment en présence de modes à amortissement très faible suffisamment éloignés), une optimisation automatique tirant parti de cette propriété est proposée pour décomposer le problème global en une somme de problèmes de petite taille. Les modes sont classés par amortissement décroissant : plus un mode est amorti, plus son influence est étendue dans le domaine fréquentiel. Ensuite, chaque mode est séquentiellement optimisé alors que les autres sont conservés fixes : cela mène à résoudre N optimisations à un mode, qui sont plus rapides qu'une optimisation des N modes directement. Cette optimisation automatique est illustrée sur un cas industriel en section 2.4.3.

Enfin, un commentaire sur la nécessité de l'identification large bande peut être fait. Il arrive que des mesures présentent des phénomènes qui ne peuvent être assimilés à du bruit classique, pouvant engendrer un biais d'identification important (même en pondérant avec la variance des mesures). Ce problème est typiquement rencontré en présence de phénomènes non linéaires impactant une certaine gamme de fréquence ou en présence de bruit non assimilable à un bruit de distribution normale. Il peut dans ces cas être envisageable de réaliser de multiples identifications séparées par bande, qui donneront des résultats plus représentatifs qu'en considérant toute la gamme de fréquence. Un exemple de cette problématique est également montré sur le cas industriel du plateau.

2.4.3 De l'utilité de l'optimisation non-linéaire

Pour illustrer l'utilité de l'optimisation non-linéaire, le cas test numérique dont les pôles ont été identifiés en section 2.3.2 avec l'algorithme LSCF, est de nouveau exploité. Les écarts entre les fréquences exactes et identifiées sont très faibles, mais la figure 2.11 à gauche rappelle le biais d'identification entre les amortissements exacts et identifiés. Les écarts en amortissement sont significatifs notamment pour le modes 3 (8%) et même très élevés pour le mode 4 (85%).

L'estimation des résidus est réalisée à partir des pôles extraits avec LSCF. L'erreur définie pour comparer les résidus est

$$Err = \frac{|\{R_{est}\} - \{R_{exact}\}|^2}{|\{R_{exact}\}|^2} \tag{2.81}$$

qui permet de prendre en compte des erreurs sur les formes mais également sur les amplitudes. Comme la même convention de norme en masse est utilisée pour synthétiser les transferts et pour les identifier, les résidus peuvent être comparés directement, un écart en amplitude traduisant une erreur de mise à l'échelle. La figure 2.11 à droite montre cette erreur relative. Comme attendu, pour les modes 3 et 4 qui présentent des pôles mal identifiés, on obtient des résidus également mauvais, spécialement pour le mode 4, à 78% d'erreur relative. On note ici que la comparaison des formes uniquement donne un MAC de bonne qualité pour le mode 4 à 96 % mais que c'est principalement l'amplitude qui est la source de l'erreur.

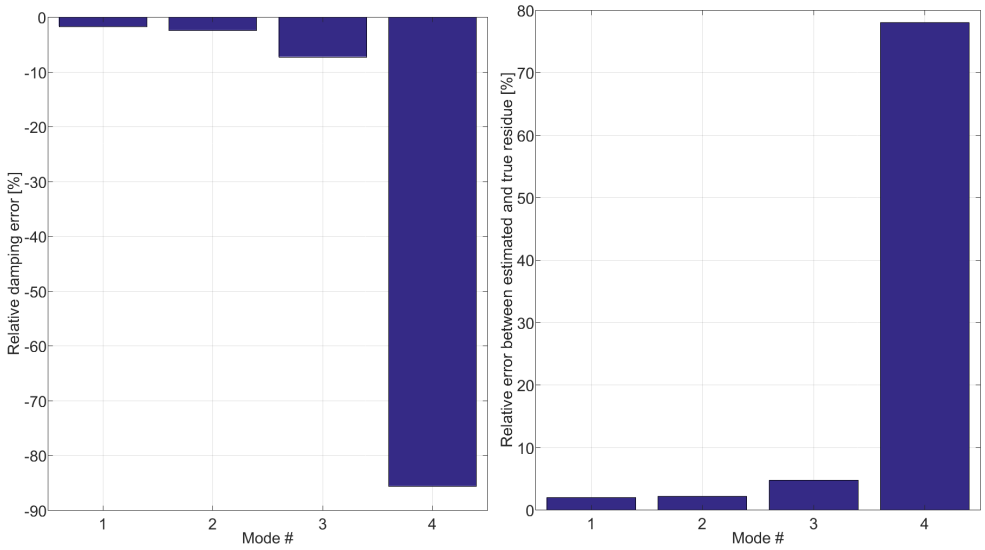


FIGURE 2.11 – Ecart relatif entre les valeurs identifiées et théoriques : en amortissement (gauche) et en résidu (droite)

Après optimisation des pôles grâce à l'algorithme IDRC, la figure 2.12 à gauche montre une erreur d'identification de l'amortissement beaucoup plus faible, notamment pour le mode #4 où l'erreur n'est plus que de 2.5%. Cela engendre également une baisse significative de l'erreur en résidu (à droite de la figure), même si celle-ci reste assez élevée pour le mode #4, puisque 96% des capteurs ne voient que du bruit.

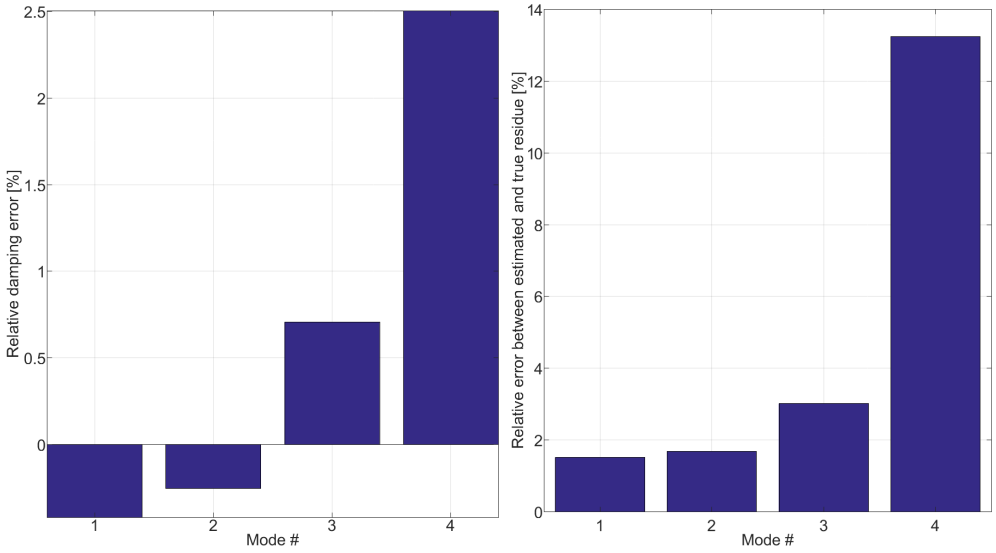


FIGURE 2.12 – Ecart relatif entre les valeurs identifiées et théoriques après optimisation : en amortissement (gauche) et en résidu (droite)

Un second exemple d'optimisation est réalisé, utilisant le cas test du plateau dont le résultat de l'identification avec LSCF a été présenté en Figure 2.10. Le mode manquant à 2607 Hz est introduit avec l'estimateur à un seul mode. L'ensemble des pôles est alors optimisé avec IDRC et la figure 2.13 montre l'évolution des amortissements modaux entre leurs valeurs avant et après l'optimisation.

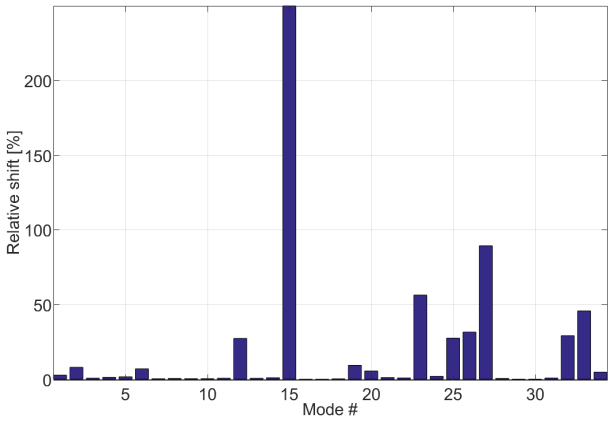


FIGURE 2.13 – Evolution relative de l'amortissement par mode, entre après et avant l'optimisation

Les amortissements initiaux étaient tous sous-estimés, dont certains très fortement. L'impact de l'optimisation des pôles sur la superposition des transferts synthétisés et mesurés (sur la même voie que pour la figure 2.10), est montré en figure 2.14. La qualité de la superposition est fortement améliorée, notamment au niveau des résonnances de chaque mode.

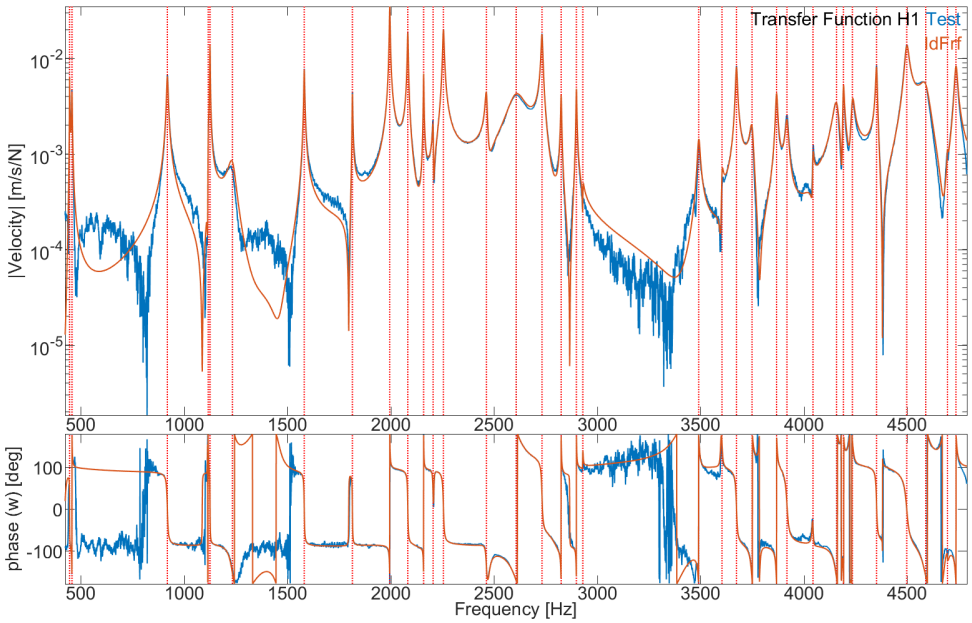


FIGURE 2.14 – Superposition des transferts synthétisés et mesurés pour une voie donnée, après optimisation.

La mesure dans la bande de fréquence 3000-3400Hz est très bruitée et les sauts de phases pourraient indiquer la présence de modes très mal excités et donc non identifiables. Pour analyser l'influence de la non prise en compte de cette zone de la mesure, deux optimisations indépendantes sont réalisées les bandes 500-3000Hz et 3400-5000Hz. La figure 2.15 montre le résultat de la superposition et on constante que les deux identifications sont quasiment parfaites, avec notamment une bien meilleure qualité de superposition au niveau des antirésonances. Cela illustre qu'il est parfois utile de réaliser des optimisations par bande plutôt que sur bande large, notamment en présence d'une bande très bruitée ou présentant un comportement qui ne semble pas pouvoir être fidèlement représenté par le modèle.

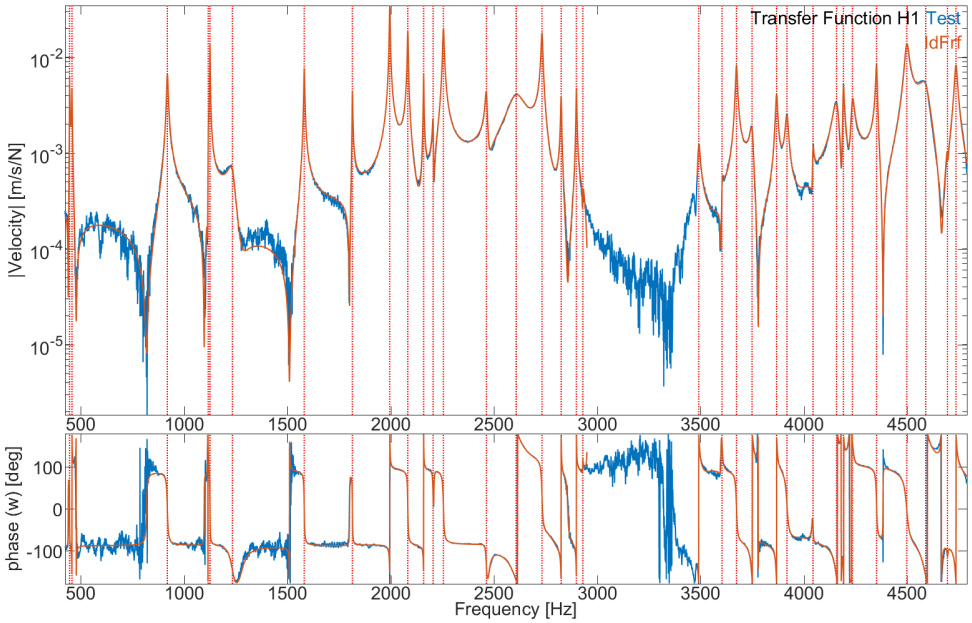


FIGURE 2.15 – Superposition des transferts synthétisés et mesurés pour une voie donnée, après optimisation par bande.

2.5 Qualité des transferts au voisinage des modes

2.5.1 Motivation

Les erreurs de mesures ont plusieurs origines. La variabilité en production peut jouer un rôle majeur dans les procédures de recalage et d'analyse de corrélation [30, 31, 32] mais elle ne sera pas prise en compte ici. La variabilité des mesures (chargements, évolution de température durant les essais,...) est classiquement contrôlée par des essais de reproductibilité. Des méthodes mettant en œuvre des stratégies de type bootstrap [33, 34] peuvent être utilisées pour obtenir des incertitudes sur les paramètres identifiés à partir de mesures répétées. Un intérêt fort de ces méthodes est qu'aucune hypothèse n'est formulée sur la loi statistique observée par ces paramètres. Cependant la limitation majeure est que toutes les mesures doivent être enregistrées indépendamment (pas de moyenne des mesures). Des résultats comparables peuvent être obtenus en utilisant des méthodes de type Monte Carlo [35] ou des identifications avec maximum de vraisemblance utilisant la variance des mesures (Maximum likelihood) [36, 37], mais cela fait l'hypothèse que le bruit sur les transferts mesurés suit une loi normale. Dans toutes ces situations, il est important de préciser que tout biais introduit par la méthode d'identification choisie peut avoir des effets qui ne sont pas du tout pris en compte [34].

Plutôt que de construire un modèle d'incertitude pour les paramètres modaux identifiés, l'objectif retenu ici sera de quantifier l'erreur d'identification. Le modèle d'identification utilisé est le modèle pôles/résidus avec termes résiduels présenté par l'équation (2.42). L'erreur d'identification est tout d'abord définie en évaluant, pour chaque mode et chaque capteur, la différence entre les fonctions de transfert mesurées et synthétisées autour de chaque fréquence de résonnance. Ce critère, défini à la section 2.5.2, ne nécessite pas l'utilisation de méthodes stochastiques pour estimer les bornes d'incertitudes sur les paramètres modaux [36, 37] et est ainsi plus facilement utilisable. Trois critères supplémentaires, le niveau (level), la contribution et le bruit sur signal (Noise Over Signal) sont alors introduits pour assister le tri des mesures et l'évaluation de leur pertinence pour le processus d'identification. En prenant les résultats d'identification obtenus avec la stratégie d'optimisation des pôles [28] à l'aide de la Structural Dynamics Toolbox [22] pour MATLAB, ces critères permettent de définir des lots de capteurs pertinents par mode pour lesquels l'identification est de bonne qualité.

Pour illustrer l'utilisation de ces nouveaux critères, le cas test d'une analyse modale expérimentale d'un composant de frein à tambour sera utilisé en section 2.5.3 : un plateau embouti sur lequel est riveté un guide-câble (voir à gauche de la figure 2.16). Pour être aussi proche que possible de conditions limites libres, l'ensemble est suspendu par des fils de pêche qui n'interagissent qu'en quelques points avec la structure. Afin de s'assurer que l'ensemble des modes sont suffisamment bien excités, trois points d'excitation ont été testés : deux dans la direction hors-plan et un dans le plan. Du fait que les critères proposés ne sont pour le moment pas étendus aux mesures présentant plusieurs entrées, mais limités aux mesure avec excitation unique, seul un point d'excitation hors plan a été retenu pour l'analyse. Ce point a été choisi car il engendrait la meilleure excitation modale moyenne sur la gamme de fréquence d'étude.

Les mesures sont réalisées à l'aide d'un vibromètre laser 3D à balayage par effet doppler (3D-Scanning Laser Doppler Vibrometer ou 3D-SLDV PSV-400 fabriqué par Polytec). A gauche de la figure 2.17 est montré le maillage de mesure composé de 493 points, associés à 1479 fonctions de transfert (3 capteurs par point de mesure dans chacune des trois directions X,Y et Z). Pour chaque point, les réponses de 8 impacts marteaux sont mesurés et les fonctions de transfert sont obtenues à l'aide de l'estimateur H_1 classique [7].

Une validation manuelle des 1479 mesures ne peut pas être réalisée en un temps raisonnable alors que l'on sait qu'une partie non négligeable des mesures peut être considérée comme clairement bruitée. Le nombre important de mesures et l'existence d'une observabilité faible dans certaines directions augmente le besoin d'une définition automatique de lots de capteurs. De plus, ces procédures sont également très pertinentes dans le cas de mesures avec des accéléromètres ainsi que pour des mesures d'impacts marteau.

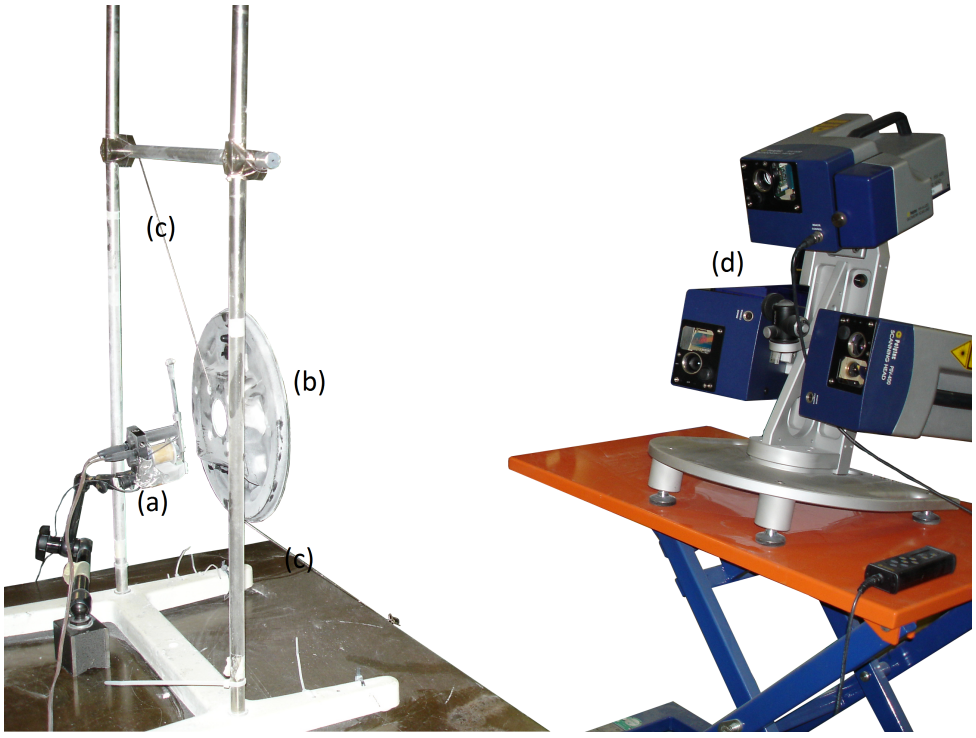


FIGURE 2.16 – Configuration de mesure : (a) Marteau à impact automatique, (b) plateau de frein à tambour, (c) fils de pêche, (d) 3D-SLDV

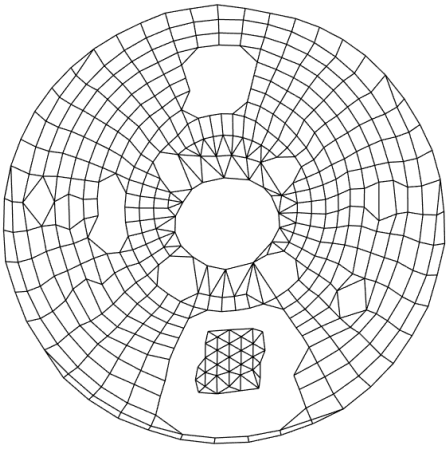


FIGURE 2.17 – Maillage de mesure : 493 points, 1479 capteurs

2.5.2 Définition des critères

La fonction objectif définie en (2.64), bien que très classiquement utilisée, n'est pas analysée dans le détail. Une identification parfaite est obtenue si les fonctions de transfert mesurées et identifiées sont parfaitement superposées. La visualisation de cette superposition est souvent utilisée mais celle-ci n'est pas envisageable pour plus que quelques transferts. Ainsi, d'autres outils sont proposés ici.

Il est utile de noter que la fonction objectif (2.64) est obtenue comme une somme de contributions positives associées à chaque paire capteur/actionneur (correspondant aux colonnes de H qui seront indexées c par la suite) et à chaque fréquence (lignes de H).

La contribution d'un mode est caractérisée par le fait que son amplitude est maximale autour de sa fréquence de résonance. Une méthode classique est de recentrer l'identification sur la bande passante à demi-puissance (ou à -3dB) donnée par $[\omega_j(1-\zeta_j) \;\; \omega_j(1+\zeta_j)]$ avec ω_j la fréquence de résonnance et ζ_j l'amortissement modal. On propose ainsi de définir l'**erreur d'identification** pour un mode j une paire entrée/sortie c par

$$e_{j,c} = \frac{\int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c}(s) - H_{id,c}(s)|^2}{\int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{id,c}(s)|^2} \tag{2.82}$$

avec $H_{Test,c}$ le transfert mesuré et $H_{id,c}$ le transfert synthétisé. α est un facteur d'échelle de la largeur de bande de fréquence, avec $\alpha = 1$ correspondant à la largeur de bande classique à -3dB et $\alpha = 5$, une valeur pertinente utilisée dans [22] et dans ce papier. Ce critère d'erreur d'identification peut être vu comme une évaluation numérique de la qualité de la méthode historique d'identification "circlefit" pour chaque paire entrée/sortie. La figure 2.18 illustre un cas simple sur le mode à 4050Hz situé au centre de la visualisation. Sur la gauche, la mesure en bleu clair est bruitée, ce qui engendre que la correspondance avec l'identification en rouge pointillé ne peut pas être bonne. Ceci est cohérent avec la valeur du critère d'erreur évaluée à 30%. Sur la droite, la résonnance du mode est très bien visible et la superposition avec l'identification quasiment parfaite. Ce résultat visuel est très bien restitué par le critère d'erreur évalué à 0.4%.

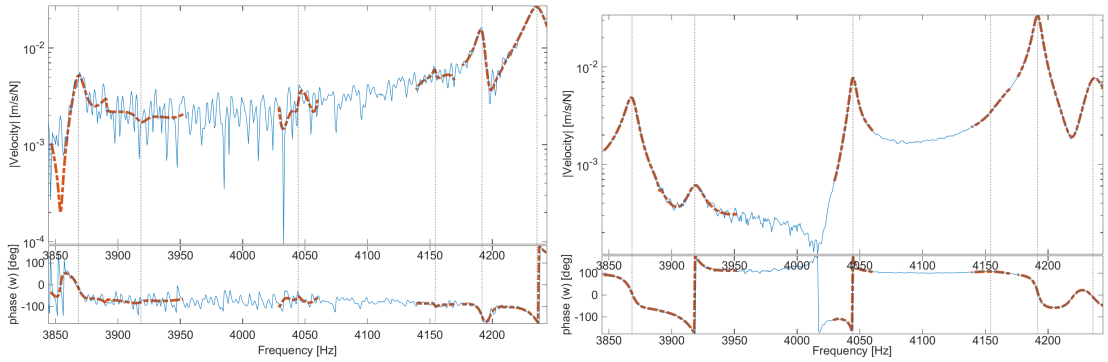


FIGURE 2.18 – Exemple de fonctions de transfert avec un critère d'erreur élevé de 30% (à gauche) et faible de 0.4% (à droite)

Pour la plupart des applications et plus spécialement pour des mesures 3D laser, une erreur importante est attendue près des noeuds de vibration où l'observabilité est faible. Pour éviter de prendre en compte de telles fonctions de transfert, le critère de **niveau** pour un mode donné est défini comme le ratio entre la moyenne quadratique autour de la résonnance de ce mode et la moyenne quadratique maximale sur l'ensemble des paires de capteur/actionneur

$$L_{j,c} = \frac{\int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c}(s)|^2}{\max_c \int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c}(s)|^2} \tag{2.83}$$

Les capteurs problématiques sont ceux présentant une erreur importante malgré un niveau significatif. Ainsi, considérer les critères d'erreur et de contribution de façon séparée n'est pas toujours approprié, comme illustré dans la discussion sur le post-traitement en section 2.5.3. Un nouveau critère, appelé "Bruit sur Signal" ou **Noise Over Signal (NOS)** est obtenu en multipliant les critères d'erreur et de niveau

$$NOS_{j,c} = e_{j,c} \times L_{j,c} \approx \frac{\int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c}(s) - Hid,c(s)|^2}{\max_c \int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c}(s)|^2} \tag{2.84}$$

de façon mettre en évidence les fonctions de transfert où une erreur importante est associée à un niveau élevé, donc critique. Pour une identification raisonnable, l'approximation faite en (2.84) utilise le fait que $H_{Test,c}$ et $H_{Id,c}$ doivent se superposer et que donc $\int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c}(s)|^2 / \int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{id,c}(s)|^2 \approx 1$. Cette approximation illustre que le produit $e_{j,c} \times L_{j,c}$ est proche du ratio de l'erreur d'identification (soit une estimation du bruit) sur la réponse maximale (soit le niveau de signal), ce qui explique la terminologie NOS retenue.

La figure 2.19 (à gauche) montre l'exemple d'une fonction de transfert avec une valeur de NOS élevée (8.3%) : l'erreur est très élevée à 40.4% alors que le niveau est tout de même significatif à 20.5%. Le mode est très mal identifié (à peine visible dans le transfert) mais l'amplitude du résidu identifié est importante pour la définition de la forme du mode. L'existence de paires capteur/actionneur présentant un haut niveau de bruit pour une amplitude importante, mises en évidence par les valeurs de NOS, est typique de modes faiblement excités (la contrôlabilité du mode est faible pour le point d'excitation utilisé). Sur la droite, la fonction de transfert montre également une valeur de NOS élevée (24.7%) et une erreur importante (24.7%) mais graphiquement, le mode est très visible. La valeur importante du NOS est ici due à une mauvaise identification (pôle mal identifié engendrant un résidu biaisé et une erreur importante). En effet, ce transfert spécifique a été mesuré dans un second lot de mesure, pour lequel le paramétrage du traitement de signal de la mesure avait été changé par rapport au premier lot, entrainant un amortissement apparent différent. Cet exemple illustre le fait que le critère NOS est également

bien adapté pour la détection de problèmes de cohérence entre les mesures (paramétrage différent entre les systèmes de mesure, changement du comportement du système mesuré, ...)

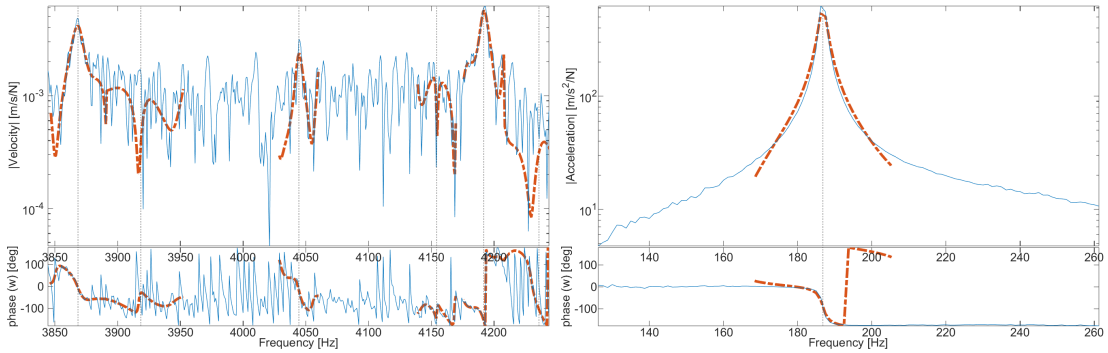


FIGURE 2.19 – Exemples de fonctions de transferts présentant des valeurs de NOS élevées en raison de : mauvaise excitation (à gauche) et concaténation de mesures incohérentes (à droite)

Après le dépouillement manuel de nombreuses mesures, il se trouve que deux cas tendancieux sont souvent rencontrés : la mesure est bruitée mais présente une contribution suffisante pour être identifiée avec confiance ou la contribution du mode est si faible qu'il ne peut pas être séparé des autres modes sans poser la question d'un biais d'estimation plus ou moins important. Pour distinguer ces deux cas de figure, un dernier critère de **contribution** est introduit

$$C_{j,c} = 1 - \frac{\int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c} - H_{id,j,c}|^2}{\int_{\omega_j(1-\alpha\zeta_j)}^{\omega_j(1+\alpha\zeta_j)} |H_{Test,c}|^2}. \tag{2.85}$$

pour mesurer la contribution modale d'un mode spécifique j relativement à la réponse globale de tous les modes autour de sa fréquence de résonnance, donnant ainsi une indication de sa *visibilité* ($H_{id,j,c}$ est la synthèse du transfert ne comportant que le mode j). Pour des fonctions de transfert très bruitées, cet indicateur peut être négatif et est alors ramené à 0. Le choix de H_{Test} plutôt que de H_{Id} pour la normalisation est sujet à discussion. L'utilisation de H_{Id} semble générer plus de "fausses détections" , où des contributions estimées sont élevées pour des signaux très bruités, alors qu'aucune confiance dans la qualité de l'identification n'est possible.

La figure 2.20 montre des fonctions de transfert pour lesquelles ce genre de discussion est nécessaire. Sur la gauche, autour de 4050Hz, le mode est bien visible malgré un niveau de bruit relativement élevé. Il peut être important de conserver cette mesure pour bien interpréter la corrélation. Sur la droite, la figure montre une fonction de transfert où l'erreur est très faible mais pour laquelle la résonnance du mode d'intérêt n'est pas visible du tout. La capacité d'identifier le résidu avec confiance est faible puisque l'identification est clairement susceptible d'être significativement biaisée.

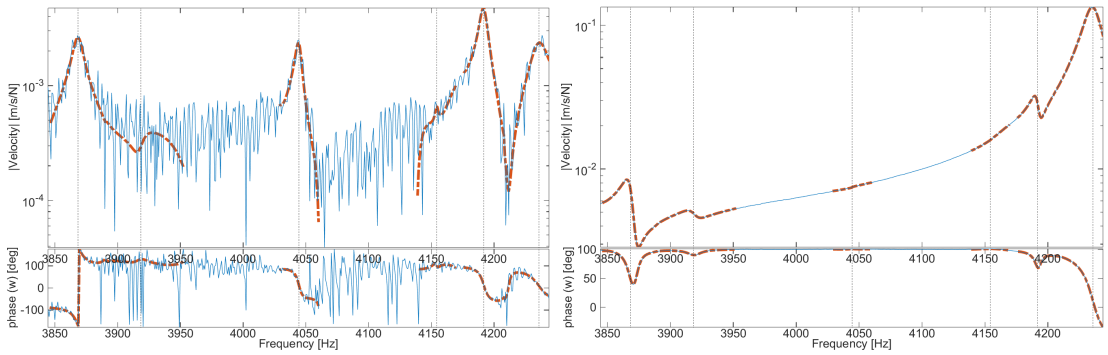


FIGURE 2.20 – Exemples de fonctions de transfert : Erreur élevée de 18.7% avec un contribution élevée de 73.5% (à gauche) et erreur faible de 0.1% avec une contribution faible de 0% (à droite)

Les critères proposés permettent de décomposer les sources d'erreurs d'identification en contributions pour chaque mode et chaque fonction de transfert. Pour chaque mode, les capteurs clairement problématiques, présentant une erreur importante avec une contribution faible et un niveau faible peuvent être ignorés automatiquement et seulement les résultats proprement identifiés peuvent être conservés avec une grande confiance sur la qualité. Les résultats intermédiaires peuvent être analysés plus en détail en utilisant des tris par le niveau, la contribution ou le NOS pour mettre en évidence les fonctions de transfert problématiques, comme illustré dans la prochaine section.

2.5.3 Cas test industriel

Pour des raisons pratiques et plus particulièrement en présence de beaucoup de capteurs, des outils de post-traitement permettant de les trier dans des tables et de générer des visualisations de type carte de couleurs en fonction des différents critères de qualité sont nécessaires et vont être présentés ici.

Dans le cas présent, les modes ont été préalablement identifiés par l'équipe des essais chez CBI à l'aide de l'algorithme Polymax implémenté dans le logiciel commercial LMS Test.Lab. La pertinence des pôles sélectionnés dans le diagramme de stabilisation est toujours une question. Après avoir réalisé une optimisation des pôles initiaux avec IDRC, une table de qualité globale de l'identification par mode est proposée et montée en Table 2.3

Pour chaque mode, l'erreur moyenne et la contribution moyenne sont calculées. Ces critères globaux sont utiles pour évaluer rapidement la qualité générale de l'identification de chaque mode. Le critère classique Modal Phase Collinearity (MPC) [38], qui quantifie si les formes modales sont réelles (attendu dans une majorité de systèmes mesurés chez CBI) est également calculé.

La table est colorée en utilisant des seuils définis pour chaque critère de façon à mettre en évidence rapidement les modes pour lesquels une attention plus particulières semble nécessaire. Ces seuils sont sujets à discussion, mais les valeurs qui semblent pertinentes après plusieurs dépouillements manuels, et utilisées ici sont

— Erreur : $0\% < 10\% < 30\% < 100\%$
— Contribution : $100\% > 20\% > 10\% > 0\%$
— MPC : $100\% > 90\% > 10\% > 0\%$

Dans notre cas, les modes 15, 27, 32, 35, 36 et 37 doivent être rejetés à cause de leur valeur très faible de MPC et de contribution : ils correspondent à des modes numériques.

Etant donné le grand nombre de modes, trois d'entre eux présentant un intérêt particulier ont été retenus. Leurs déformées modales sont montrées en figure 2.21.

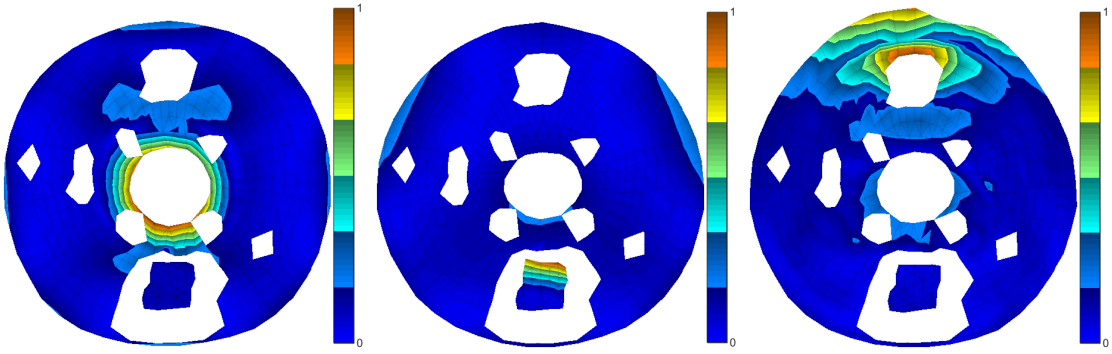


FIGURE 2.21 – Modes retenus pour l'illustration des critères de qualité #9 (gauche), #6 (milieu) and #26 (droite).

Le mode #9 présente une forme modale plutôt localisée avec une grande déformation autour du trou central. Malgré cela, le mode est très visible sur la plupart des fonctions de transferts.

Mode Number	Freq[Hz]	Damp[%]	Error[%]	Contribution[%]	MPC[%]
1	445	0,13	6	75	99
2	457	0,31	13	74	98
3	919	0,37	16	73	99
4	1116	0,14	9	61	98
5	1125	0,09	7	75	97
6	1234	1,44	37	42	99
7	1581	0,12	8	86	100
8	1814	0,07	5	87	99
9	1995	0,08	4	93	99
10	2083	0,09	4	83	99
11	2159	0,06	8	74	99
12	2205	0,09	15	40	95
13	2255	0,14	7	82	99
14	2463	0,19	8	79	98
15	2609	0,08	25	7	1
16	2732	0,14	6	83	96
17	2825	0,07	4	89	99
18	2899	0,06	6	80	99
19	2930	0,06	16	36	98
20	3492	0,17	13	70	97
21	3604	0,11	8	75	99
22	3674	0,11	8	79	99
23	3750	0,21	27	32	92
24	3868	0,11	11	71	98
25	3919	0,17	27	34	94
26	4044	0,06	20	38	92
27	4154	0,03	16	6	2
28	4192	0,07	4	66	98
29	4236	0,17	5	76	99
30	4352	0,08	3	85	98
31	4499	0,23	8	75	99
32	4606	0,04	15	4	3
33	4696	0,06	24	22	90
34	4737	0,14	19	56	96
35	4803	0,09	32	16	10
36	4820	0,05	31	10	7
37	4924	0,04	39	11	5

TABLE 2.3 – Table de qualité globale de l'identification

Il est en effet très bien excité par la localisation de l'impact marteau, à côté de ce trou central. Ceci est bien illustré par la figure 2.22 où la plupart des capteurs présentent une erreur faible (marqueurs + bleus) et une contribution élevée (marqueurs *o* jaunes avec une échelle fixée pour que la valeur maximale soit 0.5, soit la moitié de Eq.(2.85), qui se trouve être une échelle plus pertinente pour visualiser les différents critères simultanément). Les quelques capteurs qui présentent une erreur élevée sur la droite de l'image correspondent à des réponses avec un niveau faible (marqueurs × rouges avec le maximum à 0.5 comme pour la contribution) où les mesures sont attendues comme bruitées.

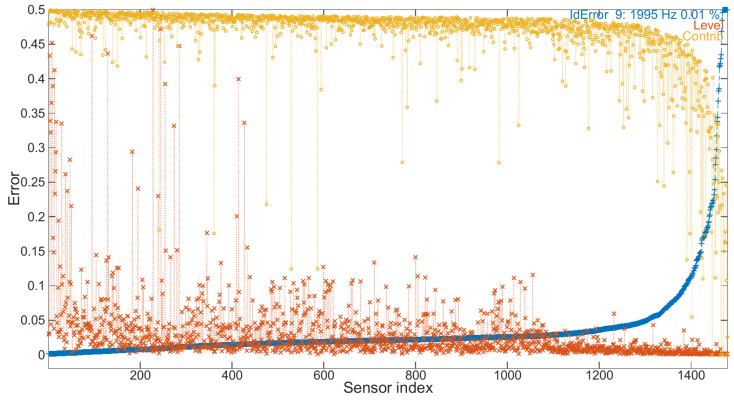


FIGURE 2.22 – Erreur(+), niveau(x) et contribution (o) pour le mode #9

Le mode #6 présente une déformée modale bien plus localisée encore, correspondant à la première flexion du guide-câble. Les niveaux d'erreur présentés par la figure 2.23 sont significativement au-dessus de 10% pour quasiment deux tiers des capteurs. Néanmoins, le zoom sur les 100 premiers capteurs avec l'erreur la plus faible confirme que pour les capteurs pertinents où le niveau est élevé, l'erreur est très faible et la contribution plutôt élevée. La capacité à améliorer la qualité de l'identification à travers de nouvelles mesures n'est donc pas claire et le choix d'ignorer les capteurs avec une erreur élevée est confirmé.

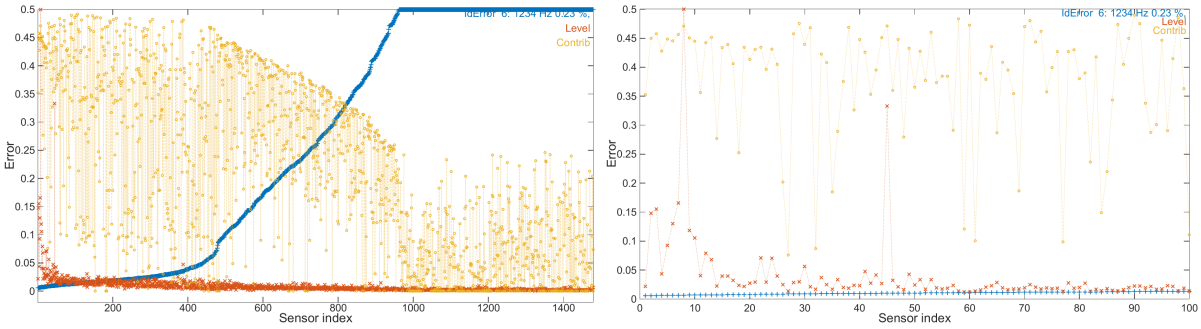


FIGURE 2.23 – Erreur(+), niveau(x) et contribution (o) pour le mode #6 (gauche) et zoome sur les 100 premiers capteurs avec l'erreur la plus faible (droite)

La figure 2.24 montre, pour le mode #26, des erreurs et contributions caractéristiques moyennes similaires au mode #6. Le mode présente une déformée modale bien plus globale et l'analyse détaillée des fonctions de transfert montre que beaucoup de capteurs avec un niveau important (au-dessus de 10% ou 0.05 sur la figure, en raison du facteur d'échelle 0.5) ont également une erreur élevée (typiquement, au-dessus de 10%).

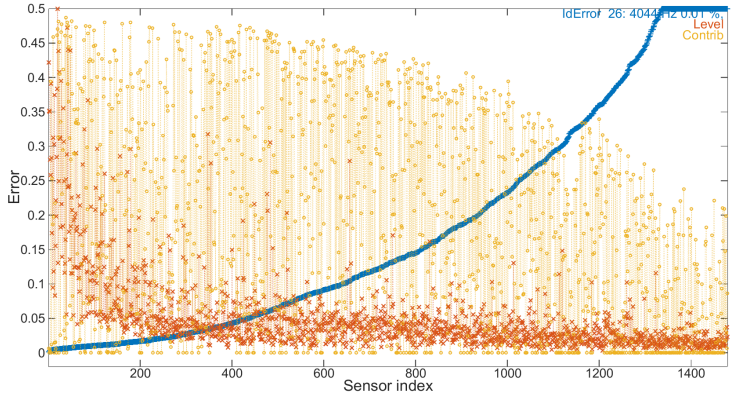


FIGURE 2.24 – Erreur(+), niveau(x) et contribution (o) pour le mode #26

Une utilisation efficace des critères proposés nécessite la mise en place d'outils de navigation. La capture d'écran à gauche de la figure 2.25 montre une table supérieure *Modes* qui permet de naviguer dans la liste des modes et une table inférieure *I/O Pairs* qui permet d'analyser les différents critères de qualité pour chaque fonction de transfert mesurée. Dans le cas présent, une seule entrée était considérée, ce qui explique la valeur constante dans la colonne *In*. La table *Modes* montre les indices des modes de mesure, leurs fréquences et amortissements. Les indices des modes numériques et leurs fréquences, le seuil "Thres" et les valeurs de MAC sont également montrés et seront expliqués et analysés en section 3.3.3. Dans la table *I/O Pairs*, le tri utilisé sur l'image est basé sur le critère NOS et le transfert sélectionné (cellule bleue dans la table) est montré à la droite de la figure 2.25. La figure indique clairement un mode faiblement excité d'où résulte une mauvaise qualité d'identification.

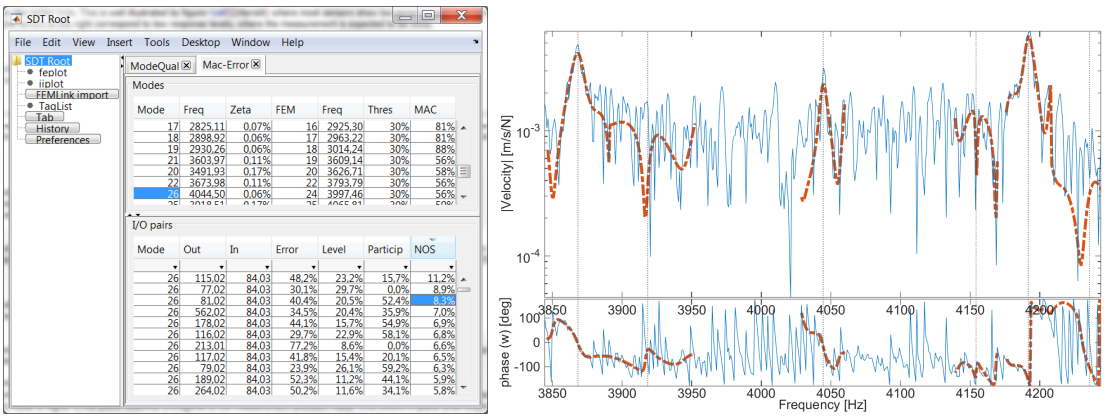


FIGURE 2.25 – A gauche : tables de navigation divisés en *Modes* et en fonctions de transfert *I/O Pairs*. A droite : la fonction de transfert sélectionnée présentant une valeur de NOS élevée pour le mode #26.

Les vues présentées aux figures 2.22, 2.23 et 2.24, qui classent les capteurs par erreur croissante, ne restituent pas l'information importante qu'est la localisation de ces capteurs sur la structure. Il est donc intéressant de reformater les critères de qualités de façon à les afficher comme des cartes de couleurs montrant les amplitudes dans les directions x, y (horizontale et verticale dans la vue choisie) et dans la direction z (normale à la vue).

Les cartes d'erreur pour les modes #9, #6 et #26 sont montrées en figure 2.26. L'erreur est beaucoup plus importante pour les capteurs dans le plan (directions x et y), spécialement pour les modes #6 et #26. Ce comportement était attendu car il est bien connu que dans le cadre de mesures avec vibromètre 3D, le bruit est plus important dans les directions relativement orthogonales à la direction de la mesure (soit ici le plan xy). Le mode #26 montre des zones dans les directions dans le plan où l'erreur est faible. Elles correspondent à des endroits où les déplacements sont importants :le niveau du signal augmente, ce qui explique la plus faible erreur. Le mode #9, qui est très bien excité, montre globalement une erreur faible, même dans les directions dans le plan. Les capteurs restants avec une erreur importante sont principalement localisés dans des endroits où la surface est courbe et donc inclinée par rapport à la direction du laser, ce qui est également connu pour contribuer fortement à un appauvrissement de la qualité de mesure [39].

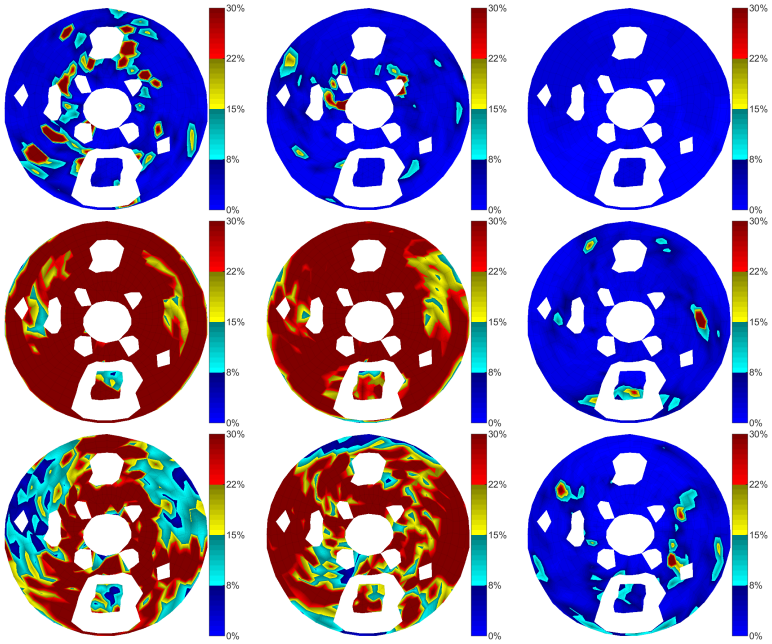


FIGURE 2.26 – Erreur dans les directions x, y et z (de gauche à droite) des modes #9, #6 et #26 (de haut en bas)

Les cartes de contribution pour les modes #9, #6 et #26 sont montrées à la figure 2.27. Comme attendu, le mode #9 montre une contribution globale très élevée. Sa carte de contribution est presque l'exact opposé de sa carte d'erreur, ce qui montre que partout où il n'y a pas de bruit, le mode est bien visible dans les fonctions de transfert. Pour le mode #6, les zones où l'amplitude de la déformée modale est grande contribuent fortement. C'est la même chose pour le mode #26 sauf autour du trou central et près de trou supérieur. Dans ces zones, l'amplitude du mode est grande mais la contribution est faible, ce qui peut être interprété comme des zones où le mode d'intérêt est *caché* par les contributions plus fortes des modes voisins. Pour ces capteurs, la capacité à identifier proprement le résidu est une question puisque le résultat est susceptible d'être biaisé.

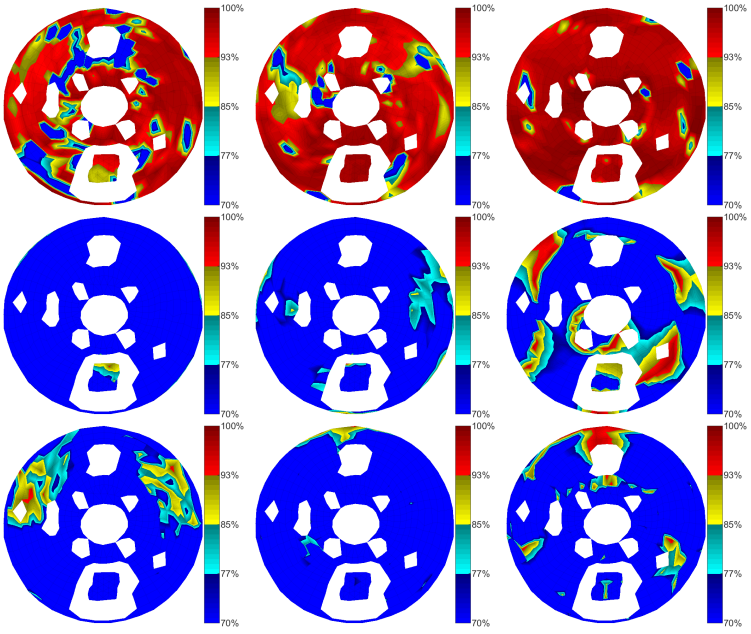


FIGURE 2.27 – Contribution dans les directions x, y et z (de gauche à droite) des modes #9, #6 et #26 (de haut en bas)

Le critère de NOS, qui a été utilisé dans la table 2.25 pour visualiser rapidement les fonctions de transfert associées, peut également être affiché sous forme d'une carte de couleur. Dans notre cas, la figure 2.28 met clairement en avant que pour les modes #6 et #9, aucun capteur mal identifié ne présente un niveau élevé. En revanche, certains capteurs du mode #26 sont sujets à une NOS important (jusqu'à 10%), remettant clairement en cause la qualité des formes extraites. La tendance est confirmée en animant le mode identifié #26 qui montre des déplacements dans le plan non physiquement réalistes.

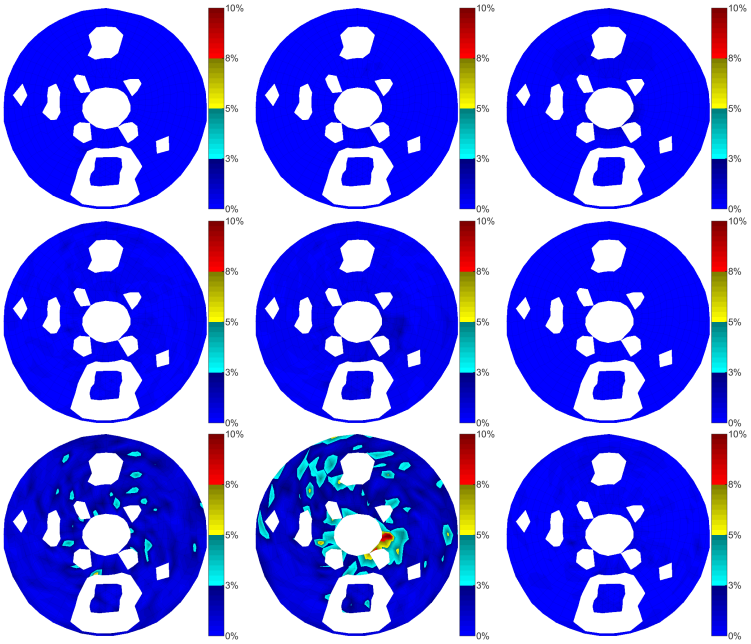


FIGURE 2.28 – NOS dans les directions x, y et z (de gauche à droite) des modes #9, #6 et #26 (de haut en bas)

3

Corrélation calcul/essai

Sommaire

3.1 Introduction 52
3.2 MAC ou corrélation des formes aux capteurs 54
3.2.1 Observation 54
3.2.2 Superposition de maillage (ICP) 55
3.2.3 Corrélation en forme MAC 58
3.2.4 MAC et sensibilité au positionnement 61
3.3 Localisation d'erreur 63
3.3.1 Localisation d'erreurs dans la littérature 63
3.3.2 Détection de capteurs erronés 66
3.3.3 Impact des erreurs expérimentales sur le MAC 67
3.3.4 Erreurs de forme calculée aux capteurs 69
3.4 Estimation des mouvements non mesurés : théorie de l'expansion . 70
3.4.1 Méthode de sous-espace 71
3.4.2 Réponse forcée du modèle : expansion statique 72
3.4.3 Réponse forcée du modèle : expansion dynamique 76
3.4.4 Méthode de minimisation du résidu : erreur de mesure et erreur de modèle 79
3.4.5 Application sur un cas test industriel 83

3.1 Introduction

Une des principales motivations de l'extraction de déformées modales à partir d'expériences est la corrélation calcul/essai, c'est-à-dire la définition d'une distance entre calculs et essais. Cette distance, combinée à une paramétrisation de modèle peut ensuite être utilisée pour corriger les paramètres du modèle qu'on estime mal connus dans une procédure de recalage qui sera abordée au chapitre 4.

L'approche la plus classique pour définir une distance calcul/essai est de comparer des quantités pouvant être mesurées et calculées. En particulier, les fréquences propres sont comparables. Cette comparaison nécessite cependant d'appairer les modes, ce qui n'est que rarement trivial, en particulier du fait des problématiques de croisements de modes illustrées en section 3.2.3.

La comparaison des formes modales est donc une nécessité abordée en section 3.2. Les formes modales ne sont connues qu'aux capteurs comme cela sera détaillé dans la définition de l'observation en section 3.2.1. Cette définition exige une étape préalable de superposition du maillage de mesure sur le modèle éléments finis suivant la procédure détaillée en section 3.2.2 avec des erreurs induites illustrées en section 3.2.4.

Le critère MAC (Modal Assurance Criterion) [40] est le plus classiquement utilisé pour évaluer la distance entre formes connues aux capteurs et appairer les formes correspondantes. Le calcul du MAC s'insère dans une procédure globale de corrélation et recalage de modèle illustrée par la figure 3.1. D'un côté, les données issues des mesures expérimentales sont identifiées, donnant ainsi les fréquences expérimentales ω_j, les coefficients d'amortissement ζ_j et les déformées modales aux capteurs $\{c\psi_j\}$. D'un autre côté, les calculs à partir du modèle éléments finis donnent les fréquences numériques ω_k et les déformées modales $\{\psi_k\}$ connues aux DDL du modèle.

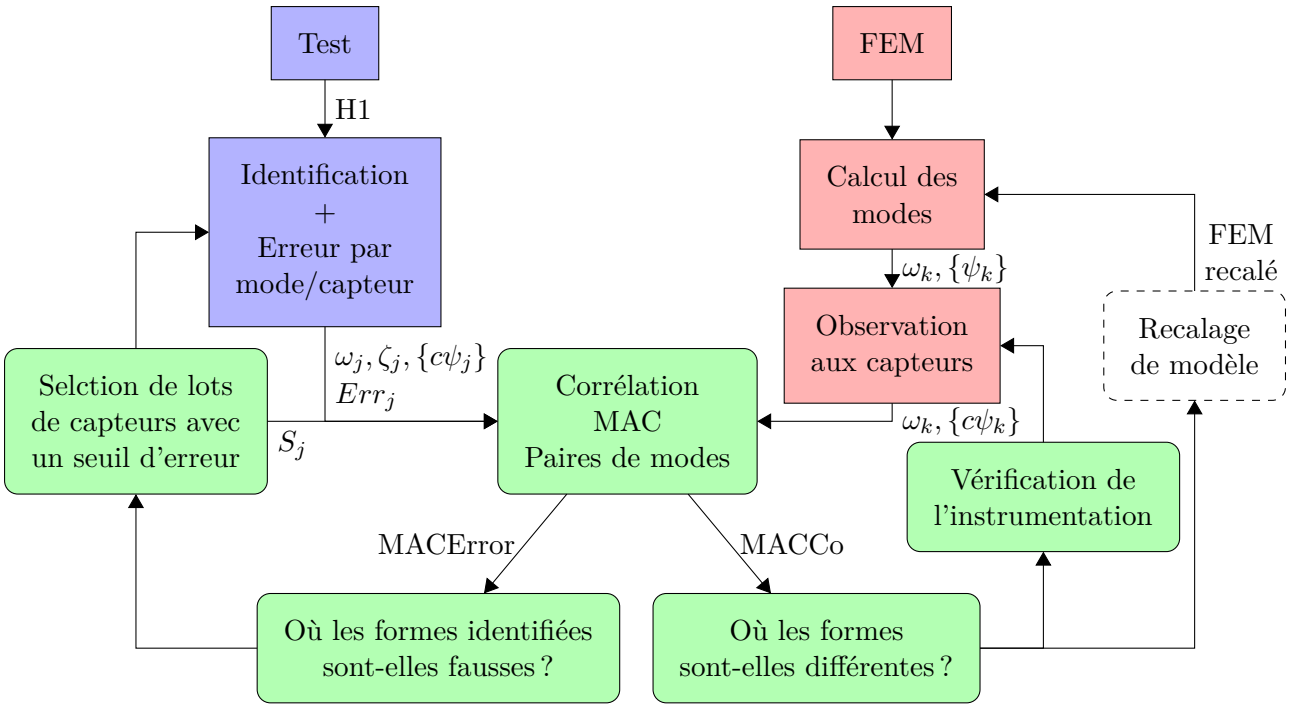


FIGURE 3.1 – Evaluation de la corrélation durant une procédure de recalage de modèle

Pour une évaluation fine de la corrélation, le besoin de localiser les capteurs conduisant à des différences a été identifié très tôt dans la littérature et la section 3.3.1 fait une synthèse de résultats existants. De façon plus précise, il convient dans la comparaison des formes de distinguer deux sources de différences : les erreurs de mesure et les erreurs de modèle.

Les essais étant imparfaits, chaque composante d'une déformée expérimentale $\{c\psi_j\}$ est entachée d'erreur. Le modèle étant imparfait, les déformées issues du calcul et de l'essai diffèrent en certains capteurs et il est utile d'analyser la localisation de ces écarts.

La localisation des erreurs liées aux essais est classée en deux catégories : les erreurs de configuration de mesure (capteur défectueux, mauvaise orientation ...) et les erreurs liées à la qualité d'identification. Le besoin d'une telle localisation est particulièrement avéré pour les essais considérés ici, où une petite fraction d'un grand nombre de mesures est de mauvaise qualité et où le grand nombre de voies rend irréaliste un repérage manuel.

Les erreurs de configurations sont des erreurs globales qui affectent l'ensemble des modes identifiés sur certains capteurs. La section 3.3.2 présente l'utilisation du critère MACCo pour identifier les capteurs menant globalement à une mauvaise corrélation.

Les erreurs provenant d'une mauvaise qualité d'identification sont ensuite traitées en section 3.3.3. L'erreur d'identification, présentée et analysée en section 2.5, est calculée avant l'évaluation de la corrélation. Elle fournit une estimation *a priori* des mauvais capteurs, qui est utilisée pour définir, pour chaque mode, des lots de capteurs identifiés avec confiance. Dans la procédure de la figure 3.1, un jeu S_j de capteurs valides est donc construit pour chaque mode identifié. Ces jeux permettent de bien analyser les difficultés expérimentales et de donner des valeurs de MAC corrigées des erreurs expérimentales : une procédure MACError est proposée et permet de visualiser l'influence des capteurs mal identifiés sur l'évaluation du MAC.

Une fois les erreurs expérimentales éliminées, il reste utile de caractériser *a posteriori* la localisation des différences de forme entre les modes identifiés et issus du calcul. L'algorithme MACCo est utilisé en section 3.3.4 et sa mise en oeuvre permet de visualiser par mode les zones de la mesure contribuant à une baisse du MAC. Cette visualisation sert généralement dans les procédures de recalage à identifier les composants ou contacts mal modélisés qui seront ensuite paramétrés et optimisés pour se rapprocher des essais.

Une alternative aux approches de corrélation au niveau des capteurs est la définition de méthodes dites d'expansion [41] qui estiment la réponse mesurée sur l'ensemble des DDL du modèle. Les sections 3.4.1 à 3.4.4 reviennent sur les définitions théoriques des méthodes classiques et illustrent leurs limites sur un cas test numérique.

La méthode la plus simple, dite expansion modale et présentée en section 3.4.1, cherche à minimiser la distance euclidienne entre les mesures aux capteurs et un jeu de formes du modèle numérique. Cette méthode n'utilise pas à priori la dynamique du modèle pour extrapoler les mesures, si ce n'est pour la définition du lot de formes admissibles.

Une deuxième famille d'approches utilise la définition d'une erreur sur les équations mécaniques devant être vérifiées. Par exemple un mode est censé être auto-équilibré et donc vérifier l'équation d'équilibre $\left[K - \omega_j^2 M\right] \{\phi_j\} = 0$.

Les expansions statiques et dynamiques, respectivement présentées en sections 3.4.2 et 3.4.3, considèrent que les erreurs de modèles peuvent être représentées par des efforts localisés aux capteurs. Ainsi, l'expansion est obtenue en calculant la réponse du modèle en imposant les déplacements mesurés aux capteurs (dual d'un effort imposé). L'expansion statique ne prend pas en compte la dynamique du modèle, permettant le calcul de l'expansion de tous les modes en une fois. L'expansion dynamique demande, elle, un calcul par mode (déplacement imposé à la fréquence du mode identifié), ce qui nécessite la mise en place d'une réduction de modèle pour limiter le temps de calcul.

La méthode MDRE, présentée en section 3.4.4 cherche à minimiser une énergie résiduelle obtenue à partir du résidu en effort sur l'ensemble des DDL (et non plus seulement aux capteurs), à laquelle s'ajoute la prise en compte d'une erreur de mesure. Elle est appliquée et analysée plus en détail sur un cas industriel en section 3.4.5.

3.2 MAC ou corrélation des formes aux capteurs

La comparaison des formes modales nécessite de distinguer les mesures connues aux capteurs et les résultats de calcul connus aux degrés de liberté du modèle. La section 3.2.1 introduit donc la notion d'observation. L'étape initiale de positionnement relatif des géométries expérimentales et numériques est ensuite détaillée en section 3.2.2. Le critère MAC est finalement introduit en section 3.2.3 pour comparer les formes, avec une discussion sur la notion de croisement de modes et l'impact d'erreurs de positionnement est évalué en section 3.2.4.

Les illustrations réutilisent le cas test présenté en section 2.5.1. La figure 3.2 montre à gauche la géométrie expérimentale et à droite la géométrie du modèle EF.

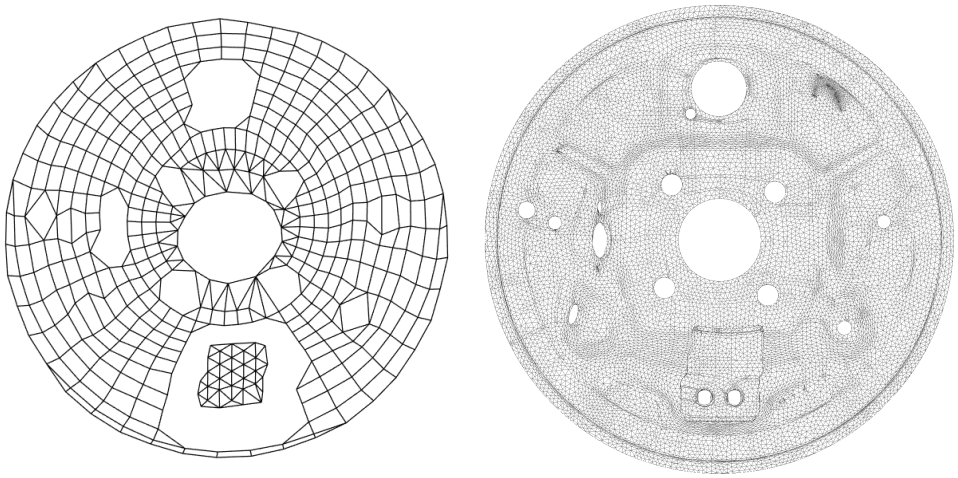


FIGURE 3.2 – Géométrie de mesure (à gauche) et modèle EF (à droite)

3.2.1 Observation

Les déformées modales expérimentales ne sont connues qu'aux capteurs et les déformées modales numériques le sont aux degrés de libertés du modèle : les dimensions spatiales ne sont pas cohérentes. Pour obtenir des formes comparables, le modèle éléments finis doit être observé selon les capteurs utilisés pour la mesure. L'hypothèse générale est que les mesures y dépendent linéairement de l'état du modèle éléments finis q, ce qui revient à poser une équation d'observation de la forme

$$\{y\}_{NS} = [c]_{NS\times N}\,\{q\}_N \tag{3.1}$$

avec NS le nombre de capteurs et N le nombre de DDL numériques. Ainsi une forme modale issue du calcul $\{\psi_j\}$ est observée pour conduire à une forme aux capteurs $[c]\,\{\psi_j\}$ qui est directement comparable à une forme expérimentale.

La construction de cette observation correspond à une phase dite de *corrélation topologique* décomposée de deux étapes :

— le positionnement relatif du maillage de test sur le modèle EF, étape qui peut être complexe en l'absence d'outils adéquats. Une procédure semi-automatisée a donc été mise en place et est décrite en section 3.2.2.
— l'estimation du mouvement du modèle éléments finis au niveau de la position physique exacte des capteurs. Il s'agit alors de la construction de l'observation (3.1).

Plusieurs stratégies d'observation classiques sont présentées en figure 3.3.

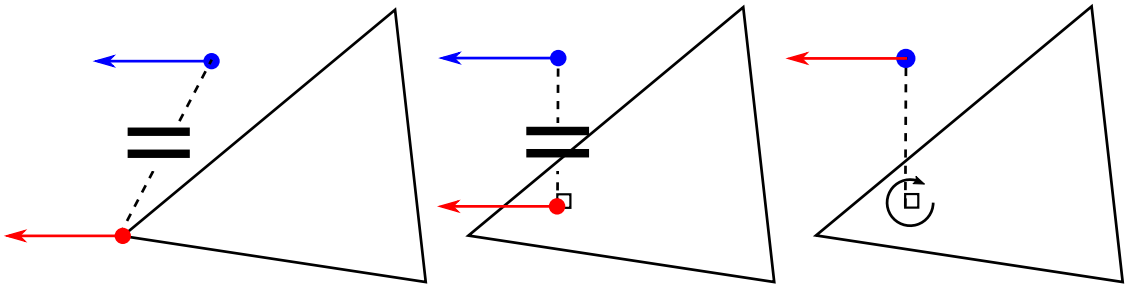


FIGURE 3.3 – Méthodes d'observation avec le capteur en bleu et l'observation en rouge : noeud le plus proche (gauche), surface la plus proche (milieu) et lien rigide (droite)

La stratégie la plus simple (à gauche de la figure 3.3) est de rechercher autour du capteur le noeud du maillage EF le plus proche et d'extraire les quantités vues à ce noeud dans la direction du capteur. Une approximation est donc faite sur la position précise du capteur.

Pour limiter cette approximation sur la position, il est possible d'observer le modèle EF à l'endroit de la surface la plus proche du capteur (par projection orthogonale, comme montrée au milieu de la figure 3.3). Cette observation se fait à l'aide des fonctions de formes de l'élément concerné, évaluées à l'endroit de la projection orthogonale et dans la direction du capteur. L'erreur sur la position du capteur est réduite, mais non nulle si la mesure est effectivement réalisée à une certaine distance de la surface (fibre neutre d'un élément de coque, position de l'élément sensible d'un accéléromètre).

Dans le cas de capteurs situés à une certaine distance de la surface du modèle, l'approche retenue ici est de considérer un lien rigide entre la position capteur et sa projection orthogonale sur la surface et d'utiliser les rotations associées au point projeté pour corriger le déplacement du capteur. Dans le cas d'éléments de volume pour lesquels la rotation n'est pas définie, celle-ci est estimée à partir du gradient des déplacements.

La figure 3.4 montre la superposition du maillage de test, issu de la mesure du plateau par vibromètre laser 3D, sur le modèle éléments finis. A droite, le zoom met en évidence le maillage expérimental en rouge, les projections orthogonales en vert et les DDL concernés pour construire la matrice d'observation reliés aux projections en bleu.

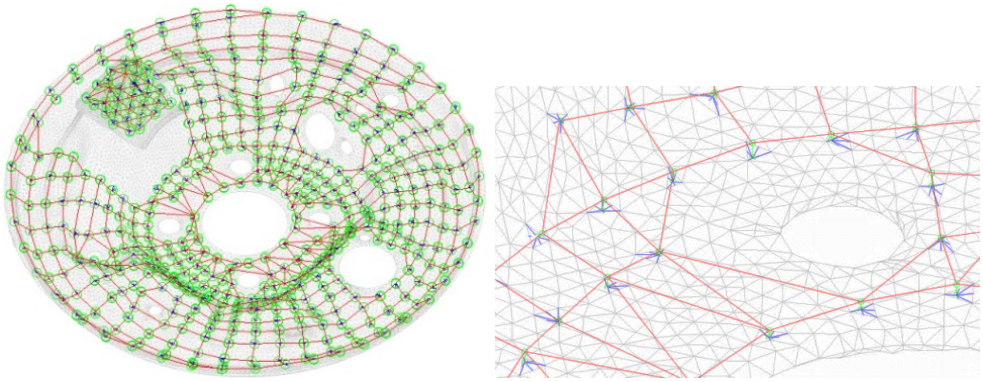


FIGURE 3.4 – Construction de la matrice d'observation pour la mesure d'un plateau de frein à tambour : vue globale (gauche) et zoom (droite)

3.2.2 Superposition de maillage (ICP)

La construction de l'observation nécessite au préalable la superposition du maillage de test sur le modèle EF. L'objectif de cette étape est donc de trouver la transformation rigide qui minimise l'écart entre les deux géométries, cette mesure de l'écart restant à définir.

Dans la littérature, les algorithmes permettant ce positionnement relatif optimal sont appelés algorithmes ICP (Iterative Closest Points) dont beaucoup de variantes existent. La comparaison

entre les algorithmes classiques, faite dans [42], montre que la différence principale résulte dans la vitesse de convergence, liée à la définition de la distance entre les deux surfaces et à la méthode d'optimisation.

Deux définitions de la distance sont mises en avant : la distance "point à point" (distance euclidienne entre chaque point de mesure et le noeud du modèle le plus proche) et la distance "point à plan" (distance entre chaque point de mesure et le plan tangent au noeud du modèle le plus proche). En raison d'une convergence plus rapide et de la possible linéarisation du problème, la méthode "point à plan" a été implémentée.

La figure 3.5 présente l'algorithme mis en place.

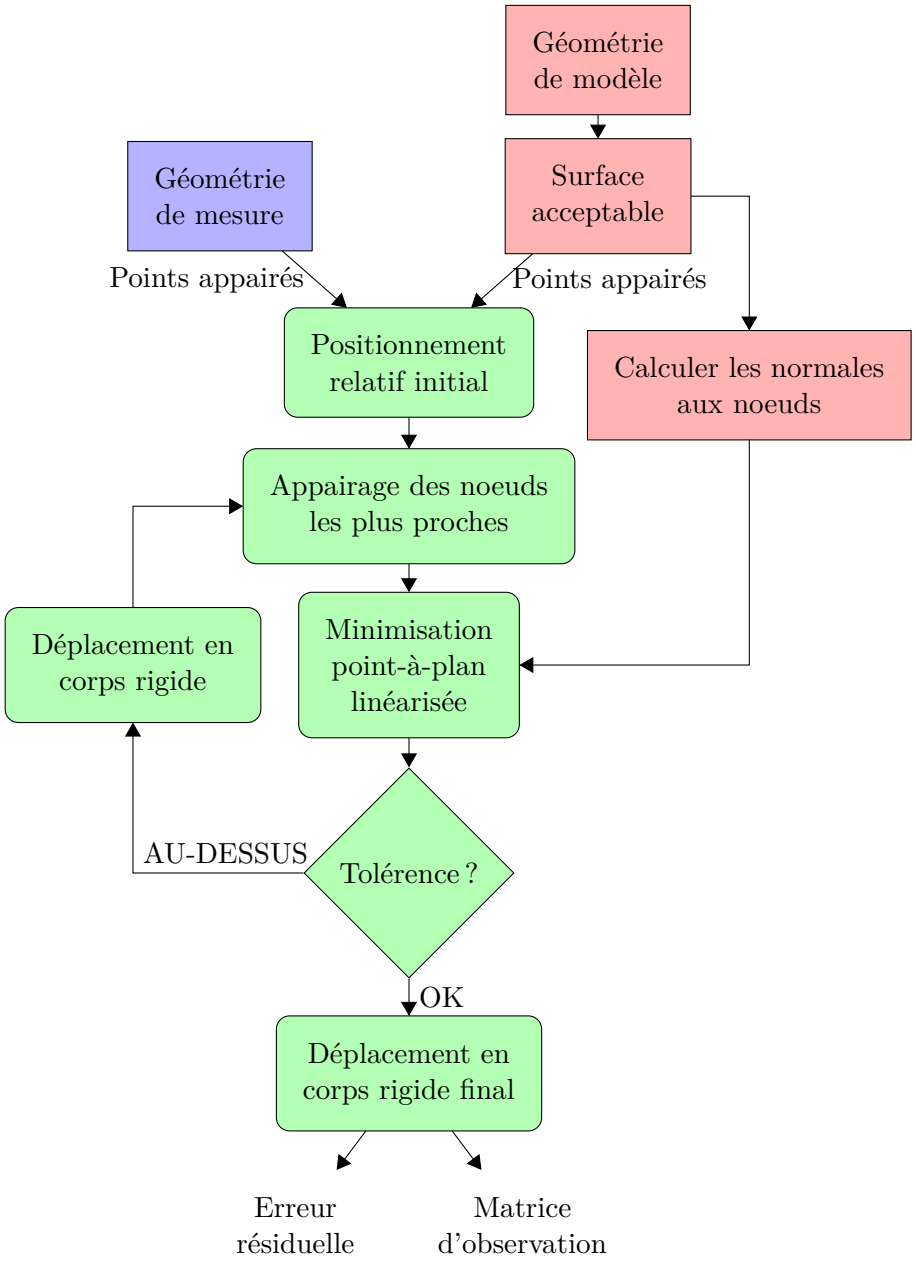


FIGURE 3.5 – Algorithme de superposition d'un maillage de mesure sur un modèle EF

Dans une première phase, afin de réduire les temps de recherche des noeuds les plus proches, une sous-sélection de la surface du modèle EF peut être réalisée. Dans l'exemple du plateau, on retire typiquement tous les noeuds qui ne sont pas visibles du point de vue de la mesure (la peau inférieure du plateau). Cela diminue la taille de la surface admissible du modèle et permet

également de ne pas tomber dans un minimum local qui mettrait en correspondance des points de mesure sur la peau supérieure avec des noeuds du modèle sur la peau inférieure.

Comme l'algorithme fait intervenir un déplacement rigide qui comprend des rotations, l'optimisation est non linéaire : un positionnement initial est nécessaire pour démarrer dans une position proche de la solution optimale. Pour cela, trois noeuds en correspondance sont sélectionnés sur les deux surfaces.

Le positionnement initial est alors calculé comme suit :

— superposition des premiers noeuds (translation) ;
— alignement des premiers et deuxièmes noeuds (rotation autour du point résultant de la superposition des premiers noeuds) ;
— coplanarité des deux lots de trois noeuds (rotation autour de la droite engendrée par les premiers et deuxièmes noeuds).

Ces trois transformations sont appliquées au maillage de test et une translation est ensuite effectuée pour positionner l'origine du repère au centre de gravité (cela donne plus de sens à la valeur des angles et améliore le conditionnement numérique).

La transformation rigide s'écrit à partir des 6 degrés de libertés spatiaux classiques : les trois angles α, β et γ (rotations autour de x, y et z respectivement) et les trois translations t_x, t_y et t_z. Ces paramètres permettent de définir la matrice de transformation rigide de taille 4x4

$$\begin{aligned}[M] &= [T(t_x,t_y,t_z)]\,[R_z(\gamma)]\,[R_y(\beta)]\,[R_x(\alpha)] \\ &= [T(t_x,t_y,t_z)]\,[R(\alpha,\beta,\gamma)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 0 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2}$$

qui transforme un point $\{q\}$ en $\{q'\}$ par la relation

$$\begin{Bmatrix} q'_x \\ q'_y \\ q'_z \\ 1 \end{Bmatrix} = [M] \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{3.3}$$

Les coefficients de la matrice de rotation sont détaillés dans [43] et dépendent non-linéairement (fonctions trigonométriques) des angles α, β et γ.

Puisque le positionnement initial est proche de l'optimum, l'hypothèse d'angles petits permet de linéariser les fonction trigonométriques en posant classiquement $\sin(\theta) \approx \theta$ et $\cos(\theta) \approx 1$. La matrice de transformation en corps rigide s'écrit alors

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta & t_x \\ \gamma & 1 & -\alpha & t_y \\ -\beta & \alpha & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

L'objectif est de trouver les trois translations et rotations qui minimisent la distance entre les points du maillage de test $\{S_i\}$ et les noeuds du modèle EF $\{D_i\}$, définie comme la distance de projection du point $\{S_i\}$ sur le plan tangent à $\{D_i\}$ (plan de normale $\{N_i\}$). La figure 3.6 tirée de [43] schématise cette distance.

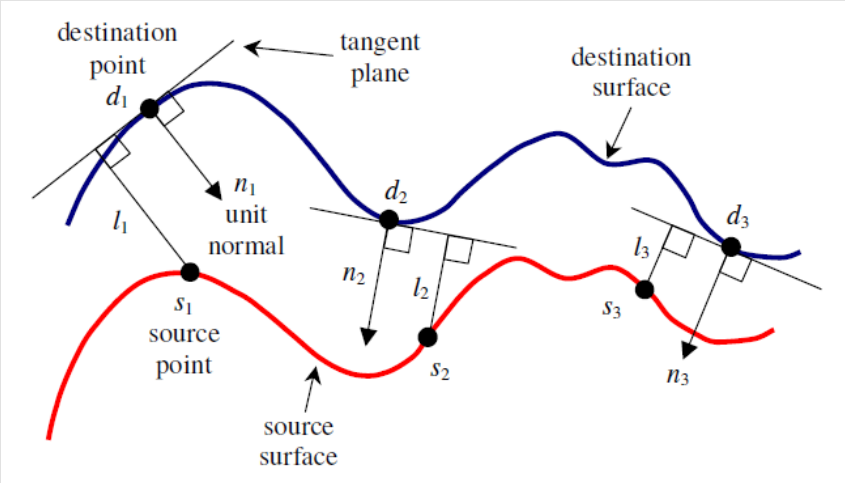


FIGURE 3.6 – Schéma présentant la distance point à plan [43]

L'erreur s'écrit donc

$$\epsilon_i(\alpha,\beta,\gamma,t_x,t_y,t_z) = \left(\begin{Bmatrix} D_{ix} \\ D_{iy} \\ D_{iz} \\ 1 \end{Bmatrix} - [M(\alpha,\beta,\gamma,t_x,t_y,t_z)] \begin{Bmatrix} S_{ix} \\ S_{iy} \\ S_{iz} \\ 1 \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} N_{ix} \\ N_{iy} \\ N_{iz} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

et [43] détaille comment elle peut être réorganisée sous la forme d'une minimisation au sens des moindres carrés de la forme $[A]_{NS\times 6}\{\alpha,\beta,\gamma,t_x,t_y,t_z\}^T = \{b\}_{NS}$.

Les normales aux noeuds du modèle EF sont calculées et une boucle d'optimisation est initiée :

- Appariement de chaque point de mesure avec le noeud EF le plus proche
- Minimisation de l'erreur présentée à l'équation (3.5) au sens des moindres carrés.
- Application de la matrice de transformation rigide non linéaire (3.2) pour ne pas déformer le maillage de mesure.
- Si l'évolution relative entre deux erreurs résiduelles successives est plus petite que la tolérance, arrêt du processus, sinon poursuite jusqu'à convergence ou dépassement d'un nombre maximal d'itération.

L'intérêt de la linéarisation de la minimisation est qu'elle permet d'obtenir le résultat d'optimisation en un temps très faible. La section 3.2.4 montre son application au cas du plateau et précise l'impact de la qualité de superposition sur l'évaluation de la corrélation.

3.2.3 Corrélation en forme MAC

Ayant des déformées modales identifiées $\{c\psi_{\mathtt{id}j}\}$ (où l'observation est intrinsèquement liée à la localisation de la mesure) et l'observation aux capteurs $[c]\{\psi_k\}$ des déformées modales numériques $\{\psi_k\}$, le critère de MAC est le plus classiquement utilisé pour les comparer. Pour chaque couple de modes (j,k), le MAC s'écrit

$$\mathrm{MAC}_{jk} = \frac{|\{c\psi_{\mathtt{id}j}\}^H [c] \{\psi_k\}|^2}{|\{c\psi_{\mathtt{id}j}\}^H \{c\psi_{\mathtt{id}j}\}||\{\psi_k\}^H [c]^H [c] \{\psi_k\}|}, \tag{3.6}$$

ce qui correspond au coefficient de corrélation entre les deux formes observées. Une valeur de MAC supérieure à 0.9 est typiquement considérée comme une bonne corrélation, alors qu'une valeur en dessous de 0.7 est généralement assimilée à une mauvaise corrélation.

Un des objectifs importants du MAC est de permettre l'appariement des déformées modales en vue, en particulier, de comparer leurs fréquences. Un exemple de matrice de MAC est montré

en figure 3.7. La matrice n'étant pas diagonale, il apparait que les formes comparables entre les déformées numériques et expérimentales ne viennent pas dans l'ordre, ce qui illustre la nécessité d'un critère permettant l'*appariement* ou mise en correspondance de formes comparables.

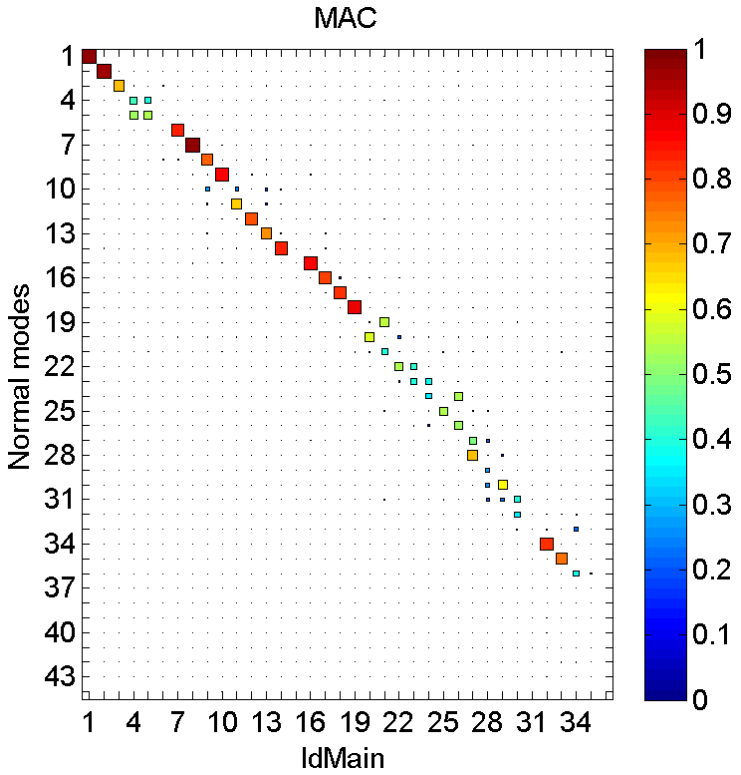


FIGURE 3.7 – Matrice de MAC sur le cas test du plateau entre les modes numériques ("Normal modes") et les modes identifiés ("IdMain")

On note ainsi par exemple que le mode expérimental #6 n'est apparié avec aucun mode numérique, et inversement le mode numérique #10 n'est corrélé avec aucun mode expérimental. La conséquence est que les 4 modes numériques (#6-#9) et expérimentaux (#7-#10) sont corrélés, mais sont décalés en indices.

Dans la figure, les modes 4-5 présentent des niveaux importants de corrélation croisée. Ce type de configuration où des modes proches en fréquence ont des corrélations moyennes avec des termes extra-diagonaux notables peut facilement s'expliquer par la notion de croisement de modes. Il est ainsi montré en [44], que pour deux modes proches en fréquence $\{\phi_1(p_0)\}\, et\, \{\phi_2(p_0)\}$, des petites modifications de la structure, décrites par des paramètres p proches de p_0, peuvent induire une rotation du sous-espace modal, c'est-à-dire donner

$$[\phi_1(p)\ \phi_2(p)] = [\phi_1(p_0)\ \phi_2(p_0)] \begin{bmatrix} cos(\theta(p)) & sin(\theta(p)) \\ -sin(\theta(p)) & cos(\theta(p)) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

On se convaincra facilement, que pour θ_p variant dans l'intervalle possible $[0; \pi/2]$, le critère $MAC(\phi_i(p), \phi_j(p_0))$ présentera des valeurs en 0 et 1.

Pour illustrer ce phénomène, la figure 3.8 présente le modèle masse-ressort cyclique le plus simple ayant deux modes à des fréquences non nulles (le troisième mode correspond au déplacement en corps rigide des trois masses à 0Hz).

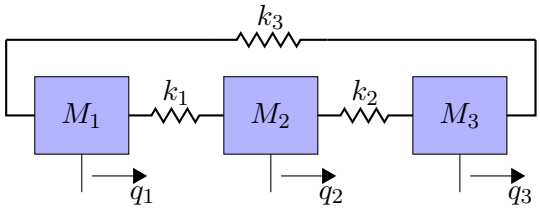


FIGURE 3.8 – Système masse ressort cyclique présentant deux modes non nuls

En prenant les valeurs $M_1 = M_2 = M_3 = 1$ et $k_1 = k_2 = k_3 = 1/3$, on obtient deux modes doubles exactement à la même pulsation de 1rad/s. Si la symétrie exacte du système est rompue, avec par exemple $k_1 = 0.3275$ et $k_2 = 0.3325$, la figure 3.9 montre l'évolution des modes avec $k_3 \in [0.3, 0.36]$

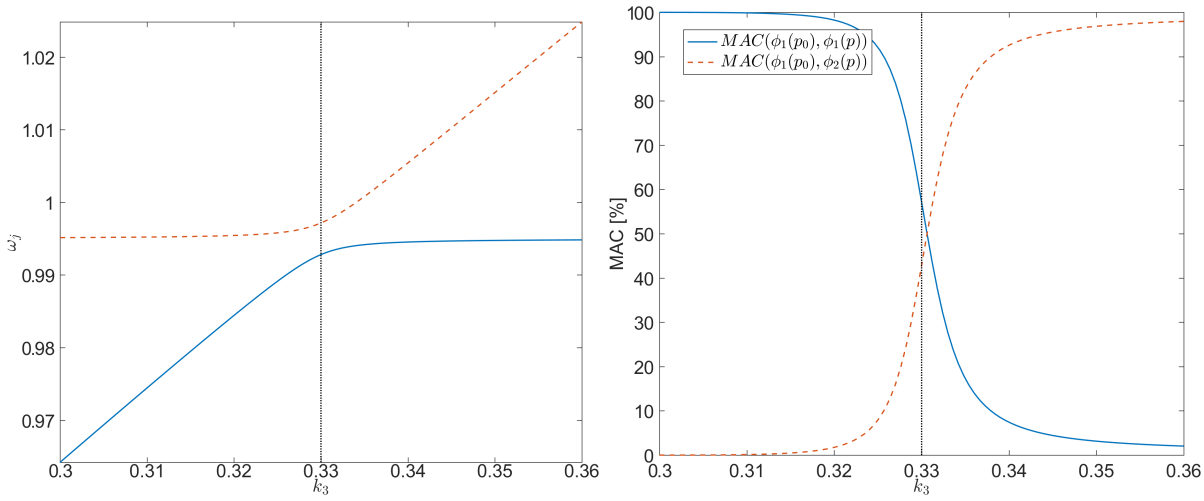


FIGURE 3.9 – Croisement de modes avec l'évolution de k_3 : Evolution des pulsations (gauche) et du MAC entre le premier mode initial $\phi_1(k_3 = 0.3)$ et les deux modes évoluant avec k_3(à droite)

Avec l'évolution de k_3, le premier mode se rapproche de la pulsation du second et les formes commencent à se coupler. Pour une valeur légèrement plus élevée que $k_3 = 0.33$, les deux formes ont tourné de 45° l'une par rapport à l'autre : le MAC de la première forme initiale $\phi_1(p_0)$ est de 50% avec $\phi_1(p)$ ainsi qu'avec $\phi_2(p)$. Les deux modes poursuivent ensuite leur croisement jusqu'à atteindre une rotation de quasiment 90°. On note que pour une rotation complète de 90°, cela correspond à la condition où les deux modes se croisent instantanément, c'est à dire en présence de modes double présent uniquement pour $k_1 = k_2 = k_3$. Ici, cela n'est pas possible puisque $k_1 \neq k_2$ et plus l'écart entre k_1 et k_2 est important, plus le croisement est long et la rotation non complète.

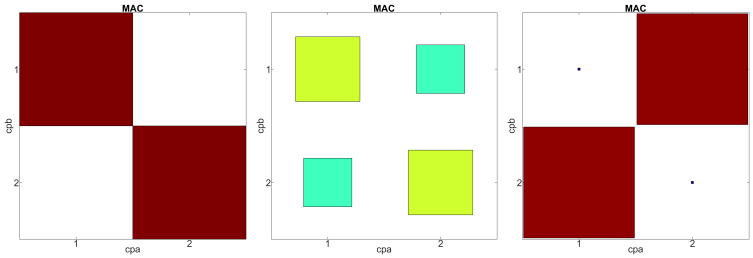


FIGURE 3.10 – Evolution de la matrice de MAC entre les modes initiaux et les modes pour $k_3 = 0.3$ (MAC diagonal à gauche), $k_3 = 0.33$ (milieu) et $k_3 = 0.36$ (droite)

La figure 3.10 montre ce croisement sur trois figures de MAC. La première correspond au MAC parfait entre modes initiaux $[\phi_1(p_0)\phi_2(p_0)]$ et eux-mêmes (puisque la matrice de masse est ici l'identité). La deuxième figure montre le MAC entre les modes initiaux et les modes $[\phi_1(k_3 = 0.33)\phi_2(k_3 = 0.33)]$: le croisement de mode fait chuter la corrélation dans la diagonale et augmente les termes hors diagonaux. Finalement, la troisième figure montre que les deux formes se sont presque complètement échangées.

Dans ces cas de figure, une faible variation d'un paramètre peut engendrer des modifications de formes modales pour les modes proches en fréquence. Le MAC juge ces formes comme non corrélées alors qu'elles se situent dans le même sous-espace. Le MAC *Combine* a été développé de façon à permettre de prendre en compte ce phénomène : pour des modes proches en fréquence, l'algorithme trouve la rotation des modes EF aboutissant à la meilleure corrélation, permettant de comparer les sous-espaces entre eux et non directement les formes.

En dehors de l'évaluation de la corrélation de modes pour l'appariement, il est aussi usuel de vérifier que les modes distincts sont plutôt orthogonaux. Si cette propriété est souvent vérifiée, elle n'est censée l'être que pour une norme en masse (il s'agit alors de la propriété d'orthogonalité des solutions d'un problème aux valeurs propres).

Il est par exemple possible que deux modes propres soient quasiment identiques au niveau des capteurs mesurés et différents ailleurs. Il est également possible que la différence entre deux modes ne soit visible que sur quelques capteurs et que l'absence de pondération de ces quelques capteurs par rapport aux autres conduise à une corrélation apparente.

Lorsqu'un nombre important de capteurs est disponible (typiquement dans le cadre d'une mesure par vibromètre laser), il est très rare d'être confronté à une difficulté de distinction de modes. En revanche, dans le cas de mesure avec un nombre de capteurs limités (typiquement pour des mesures avec des accéléromètres), il est préférable de mettre en place une stratégie de positionnement permettant de distinguer des modes spécifiques. L'algorithme MSeq détaillé en section 4.2.2 propose, à partir d'un modèle éléments finis et d'un sous-espace composé de formes numériques d'intérêt, un positionnement des capteurs dans ce but.

3.2.4 MAC et sensibilité au positionnement

Avant d'aborder les problématiques d'utilisation du MAC, on cherche ici à illustrer l'importance de la corrélation topologique et en particulier de l'étape de positionnement des maillages par la méthode ICP point à plan introduite en section 3.2.2. La figure 3.11 montre à gauche le positionnement initial mettant en correspondance deux listes de trois points sélectionnés sur le maillage de test d'une part et sur le modèle EF d'autre part. A droite de cette figure, le positionnement relatif des deux maillages est celui obtenu après l'optimisation ICP.

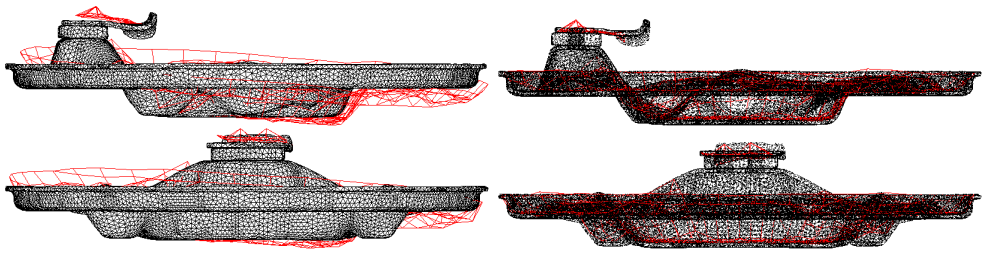


FIGURE 3.11 – Superposition du maillage de mesure sur le modèle EF : initialisation avec trois points en correspondance (à gauche) et résultat après optimisation ICP (à droite)

Après la mise en position initiale, l'erreur moyenne point à plan est de 1.14mm avec un écart type de 0.88mm et une erreur maximale de 5.34mm. Après optimisation ICP, la superposition semble de meilleure qualité visuellement et cela est confirmé par l'amélioration des trois critères : l'erreur moyenne est de 0.82mm, l'écart-type de 0.58mm et l'erreur maximale de 3.01mm.

En terme de temps de calcul, le maillage de mesure compte environ 300 points et le modèle EF 200 000 noeuds. Sans compter le temps de calcul des normales aux noeuds EF (typiquement de quelques secondes), l'optimisation compte 7 itérations pour converger (évolution relative de l'erreur moyenne entre deux itérations $< 10^{-6}$) en 0.69 secondes.

La figure 3.12 montre l'erreur point à plan résiduelle après optimisation ICP : il s'agit de la distance de projection orthogonale de chaque point de mesure sur le plan tangent au noeud EF le plus proche. Sur l'ensemble du plateau, cette erreur semble être un bruit aléatoirement réparti sur une gamme de 0-2mm. Ceci est lié à la qualité de scanner de géométrie utilisé par le vibromètre laser 3D pour définir les points de mesure. Au niveau du guide câble, une erreur plus uniforme de l'ordre de 2.5mm pose tout de même la question du bon positionnement de ce composant dans l'assemblage du modèle EF.

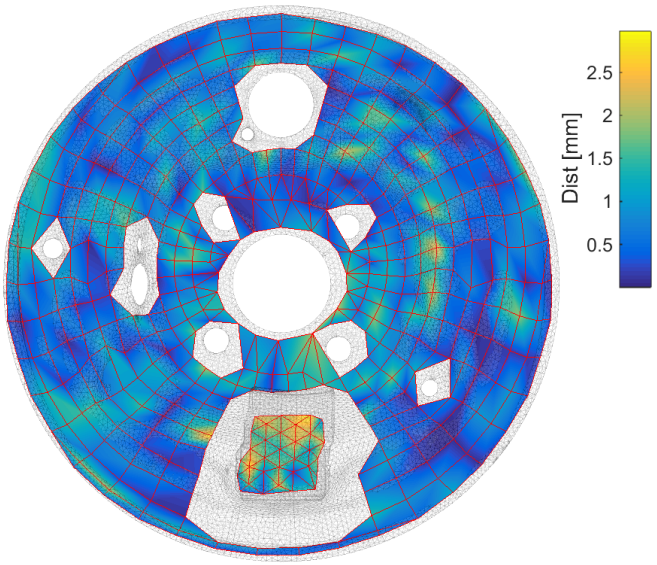


FIGURE 3.12 – Erreur résiduelle (distance point à plan) après optimisation ICP

Enfin, l'impact de la qualité de la superposition sur l'évaluation de la corrélation des formes modales est analysé. La figure 3.13 compare le MAC pour les modes appairés (MAC >50% sur la figure 3.7) avec d'une part l'observation résultant de la superposition initiale avec trois points (barres bleues) et d'autre part celle résultant de la superposition après optimisation ICP (barres jaunes). Les valeurs de MAC sont globalement plus faibles lorsque la superposition n'est pas optimale.

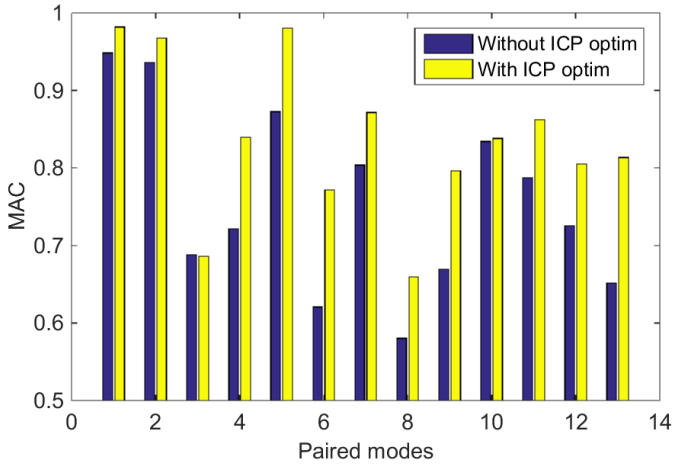


FIGURE 3.13 – Impact du repositionnement sur les MAC appairés

Dans les procédures de corrélation, il convient donc de minimiser l'impact des erreurs de configuration qui se décomposent en erreur de positionnement relatif des géométries et erreur de relevés exacts des positions de mesure dans la géométrie d'essai.

3.3 Localisation d'erreur

Une fois éliminées les erreurs associées à la corrélation topologique, l'étape suivante est de localiser les capteurs menant à une mauvaise corrélation. Les critères classiques de la littérature sont présentés en section 3.3.1. Deux sources d'erreurs peuvent être distinguées : les erreurs liées à la mesure et les erreurs liées à la modélisation.

Les erreurs de mesures peuvent être globales (capteur mal positionné, capteur défectueux, ...) et un retrait des capteurs incriminés sur tous les modes est nécessaire, comme illustré en section 3.3.2. Elles peuvent également résulter d'une mauvaise qualité d'identification, et cela nécessite alors un tri des capteurs par mode, illustré en section 3.3.3, réutilisant le critère d'erreur d'identification présenté en section 2.5.

Les erreurs de modèles sont ensuite analysées en cherchant à localiser les différences de formes entre les modes identifiés et les modes numériques, en ne considérant que les capteurs fiables par mode. La section 3.3.4 illustre cette étape avec l'utilisation de l'algorithme MACCo.

3.3.1 Localisation d'erreurs dans la littérature

Le besoin de localiser les capteurs menant à une mauvaise corrélation a été identifié très tôt et a mené à différentes approches. Pour les critères suivants, les déformées modales identifiées $\{c\psi_j\}$ et les déformées numériques calculées et observées selon les capteurs $\{c\psi_k\}$ ($[c]\{\psi_k\}$ sera par la suite écrit $\{c\psi_k\}$ par commodité) sont supposées appariées. Cet appariement est classiquement réalisé en associant à chaque déformée modale expérimentale la déformée modale numérique avec laquelle elle est le plus corrélée (avec la plus grande valeur de MAC). Ensuite, un seuillage est appliqué sur les déformées modales appairées pour ne conserver que celles ayant une valeur de MAC supérieure à 70%

Le CoMAC [45] utilise le même critère de corrélation que le MAC, mais au lieu de comparer les données sur tous les capteurs à chaque déformée modale j, il compare les données sur toutes les déformées modales appariées pour chaque capteur c, soit

$$\mathrm{CoMAC}_c = 1 - \frac{\left\{ \sum_{j,k \in Pairs} |c_c\psi_j \quad c_c\psi_k| \right\}^2}{\sum_{j,k \in Pairs} |c_c\psi_j|^2 \sum_{j,k \in Pairs} |c_c\psi_k|^2} \tag{3.8}$$

où l'écriture $1-$ est utilisée ici pour obtenir une bonne corrélation pour des valeurs faibles du CoMAC. Cette définition du CoMAC suppose que les modes sont mis à l'échelle de façon similaire. Comme cela est parfois difficile à assurer, un **scaled** CoMAC (CoMAC mis à l'échelle) est proposé en mettant à l'échelle les déformées modales $\{c\psi_k\}$ en utilisant le Modal Scale Factor (MSF)[46]

$$\left\{\widehat{c\psi_k}\right\} = \{c\psi_k\}\,\mathrm{MSF}_{jk} = \{c\psi_k\}\,\frac{\{c\psi_k\}^H \{c\psi_j\}}{\{c\psi_k\}^H \{c\psi_k\}} \tag{3.9}$$

qui permet de minimiser la norme quadratique de la différence entre $\{c\psi_j\}$ et $\left\{\widehat{c\psi_k}\right\}$.

Alors que le critère du CoMAC est assez ancien, le nombre de papiers y faisant référence est assez limité. Une raison expliquant cette limitation est probablement qu'il nécessite un nombre élevé de modes identifiés pour mette en évidence les capteurs contribuant à la mauvaise corrélation de façon pertinente. La seconde limitation est liée à la nature globale de ce critère : comme montré en section 2.5, certains capteurs peuvent présenter une contribution faible ou

une erreur importante pour beaucoup de modes (et être donc potentiellement mal identifiés, même avec un niveau élevé), mais être pourtant très pertinents pour d'autres (en particulier les modes locaux). Le CoMAC peut ainsi engendrer des retraits de modes globalement mauvais, mais parfois essentiels.

La figure 3.14 montre le scaled CoMAC appliqué au cas test du plateau de frein à tambour. Beaucoup de capteurs dans le plan sont détectés comme étant une source globale de mauvaise corrélation. Cela est probablement dû au fait que la qualité globale de mesure dans le plan est moins bonne et que la majorité des modes sollicite principalement les capteurs hors-plan. Cependant, les capteurs dans le plan peuvent être très pertinents voire indispensable pour la définition de certains modes.

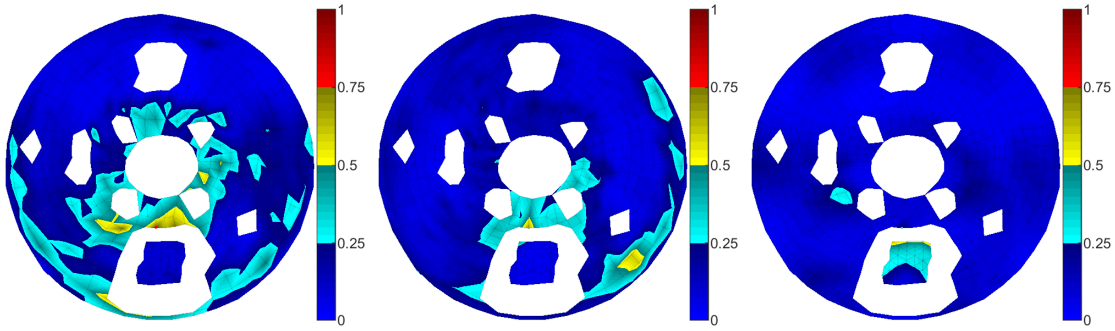


FIGURE 3.14 – Scaled CoMAC pour le cas test du plateau de frein à tambour, directions X Y et Z

Le critère **enhanced** CoMAC (eCoMAC), introduit dans [47], utilise la moyenne de l'écart entre les amplitudes des déformées modales identifiées et numériques pour chaque capteur sur tous les modes, à la place du critère de corrélation utilisé par le CoMAC. Il est obtenu avec

$$\mathrm{eCoMAC}_c = \frac{\sum\limits_{j,k \in Pairs} \left\| \frac{\{c_c\psi_j\}}{\|\{c_c\psi_j\}\|} - \frac{\left\{\widehat{c_c\psi_k}\right\}}{\left\|\left\{\widehat{c_c\psi_k}\right\}\right\|} \right\|}{2NM} \tag{3.10}$$

où l'écart est calculé à partir de déformées modales tout d'abord mises à l'échelle avec le MSF (pour assurer la corrélation en phase) et ensuite normalisée à 1 (pour que le critère soit borné par 0 et 1 comme le CoMAC). De même que pour le CoMAC original, ce critère nécessite un nombre suffisant de modes identifiés et travaille sur une suppression globale de capteurs pour tous les modes.

La figure 3.15 montre le résultat du critère eCoMAC appliqué à notre cas test. Ce critère est décrit dans [47] comme plus sensible aux erreurs de phase et de mise à l'échelle. Il met en évidence, dans les directions hors plan, le problème avec le capteur proche du guide câble (voir les explications en dessus de la figure 3.17 pour les détails). Cependant, dans les directions hors-plan, il semble que les différences entre le test et le modèle sont suffisamment élevées pour être détectées avec le même niveau sur le contour extérieur et autour du trou central du plateau.

Le eCoMAC ne parvient donc pas ici à séparer clairement les capteurs menant globalement à une mauvaise corrélation (erreur de setup ou de mesure) des capteurs qui ne sont problématiques que pour certains modes (différence de comportement réelle entre le test et le modèle).

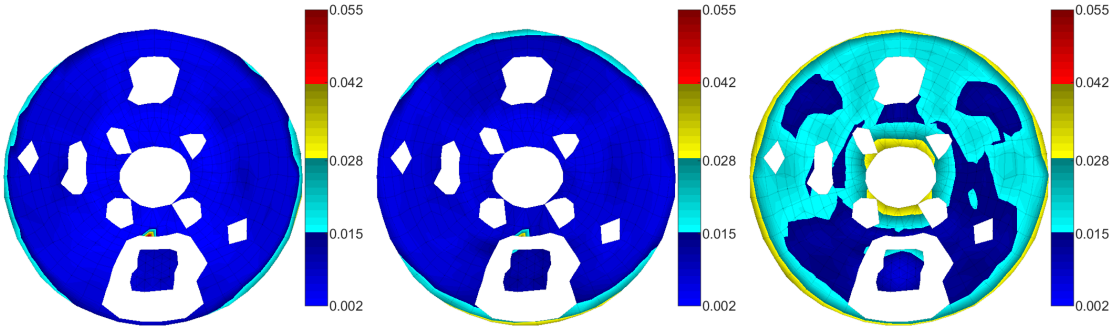


FIGURE 3.15 – Critère eCoMAC pour le cas test du plateau de frein à tambour, directions X Y et Z

Les deux approches CoMAC et eCoMAC supposent que l'identification est correcte. Un autre critère, le COMEF [48], introduit la prise en compte d'erreurs de mesure en minimisant la détection d'erreurs pour les capteurs présentant des amplitudes de mesures faibles, qui sont plus susceptibles d'être bruités. Quelques critères se sont penchés sur un tri non global des capteurs, mais spécifique par mode. Le critère COrthog [49] pointe les capteurs divergents pour chaque mode apparié, en analysant le critère POC. La constitution de lots de capteurs par mode est développée dans [50] où les réponses d'amplitude faible sont supprimées pour chaque mode.

Un dernier critère, appelé MAC Variation Technique dans [51] ou MAC Coordinate criterion (MACCo) dans [22] est un algorithme itératif qui retire successivement les capteurs menant à une mauvaise corrélation (valeur faible du MAC). La structure de l'algorithme est détaillée en figure 3.16. Pour une paire de modes j, k donnée et un lot de capteur S^n, le MACCo d'indice $n+1$ est le couple formé par un nouveau lot S^{n+1} associé à une valeur de MAC. Ce couple est calculé à partir du lot précédent S^n auquel on retire le capteur qui améliore le plus la valeur du MAC.

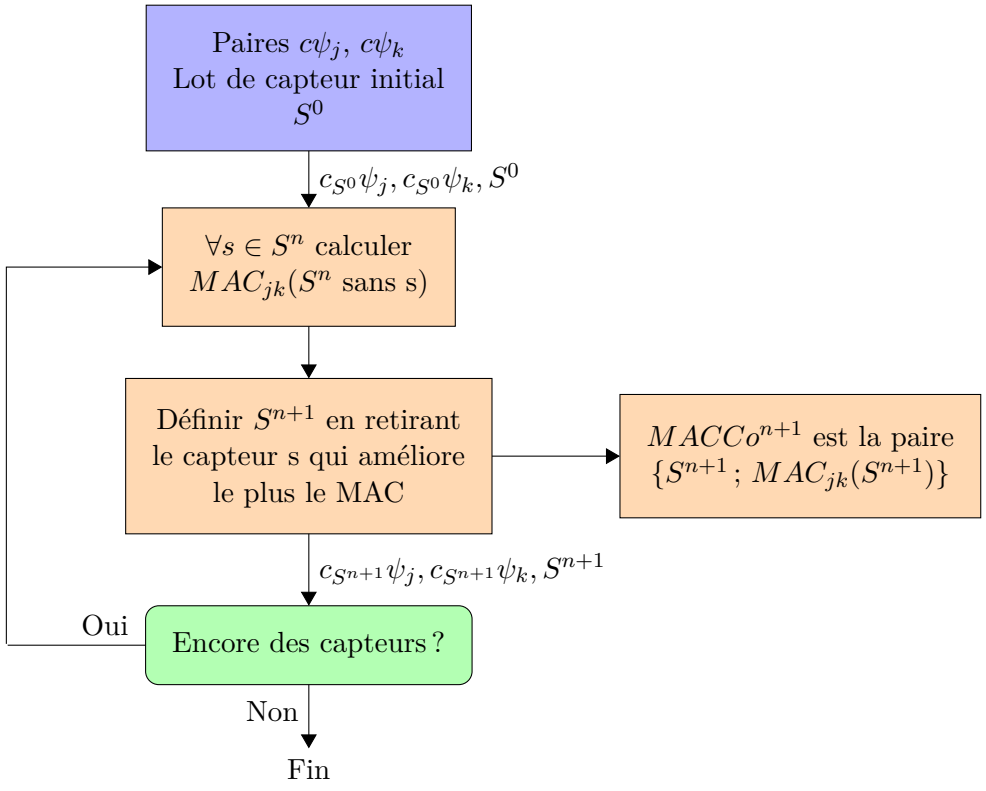


FIGURE 3.16 – Algorithme MACCo

Contrairement aux variantes du CoMAC qui nécessitent plusieurs modes, la procédure peut

aussi bien être appliquée par mode (pour chaque paire de mode individuellement) que globalement en prenant le MAC moyen sur un ensemble de modes appairés.

Retirer itérativement les capteurs et calculer à chaque fois la valeur du MAC est très gourmand en temps de calcul. L'efficacité peut être grandement améliorée en réécrivant le calcul du MAC pour une paire de mode jk avec un capteur s retiré, en faisant intervenir des produits scalaires pré-calculés sur le lot S^n auxquels les produits liés à la composante s sont soustraits

$$MAC_{jk}(S^n, s) = \frac{|\{c_{S^n}\psi_j\}^H \{c_{S^n}\psi_k\} - (c_s\psi_j)^H(c_s\psi_k)|^2}{|\{c_{S^n}\psi_j\}^H \{c_{S^n}\psi_j\} - (c_s\psi_j)^H(c_s\psi_j)|^2 |\{c_{S^n}\psi_k\}^H \{c_{S^n}\psi_k\} - (c_s\psi_k)^H(c_s\psi_k)|^2} \tag{3.11}$$

Par exemple, appliqué à notre cas test qui a 26 paires de modes et 1479 capteurs, cela ne prend que 4 secondes pour calculer le MACCo pour tous les modes.

3.3.2 Détection de capteurs erronés

Avec le besoin de mettre en évidence les sources d'erreurs provenant de la mesure, le premier objectif évident est de localiser les capteurs qui sont globalement erronés. Les raisons classiques sont des erreurs d'orientation, d'échelle ou encore des mesures très bruitées sur l'ensemble de la bande de fréquence.

Dans le but de détecter les capteurs contribuant globalement à la mauvaise corrélation, plusieurs stratégies sont envisageables. Le MACCo peut être appliqué à la valeur moyenne de MAC des modes appairés plutôt qu'à chaque paire de modes prise individuellement. Une autre stratégie est de calculer le MACCo pour chaque paire de mode et ensuite de calculer la moyenne sur l'ensemble des modes de l'évolution relative du MAC résultant du retrait d'un capteur spécifique : ce critère est appelé *MACevol*.

La figure 3.17 montre le résultat de ce critère global MACevol. Les capteurs 212x et 212y améliorent en moyenne le MAC des modes appairés respectivement de 2% et 1% lorsqu'ils sont sortis du lot de capteurs valides. Ces capteurs correspondent à une localisation de la mesure pour laquelle la trajectoire du laser était trop proche du guide-câble. Avec le léger balancement en corps rigide de la pièce pendant la mesure, les lasers étaient parfois coupés par le guide-câble, introduisant de ce fait des mesures très faussées : pour quasiment toutes les déformées modales, ces capteurs montrent des déplacements clairement non physiques.

En regardant les résultats fournis par les critères scaled CoMAC à la figure 3.14 et eCoMAC à la figure 3.15, tous les deux pointaient ces capteurs comme source de mauvaise corrélation. Cependant, ils étaient mélangés avec d'autres capteurs qui étaient, eux, symptomatiques d'une différence globale réelle de comportement entre la mesure et le modèle. Le MACevol pointe clairement ces deux capteurs comme source primaire de mauvaise corrélation.

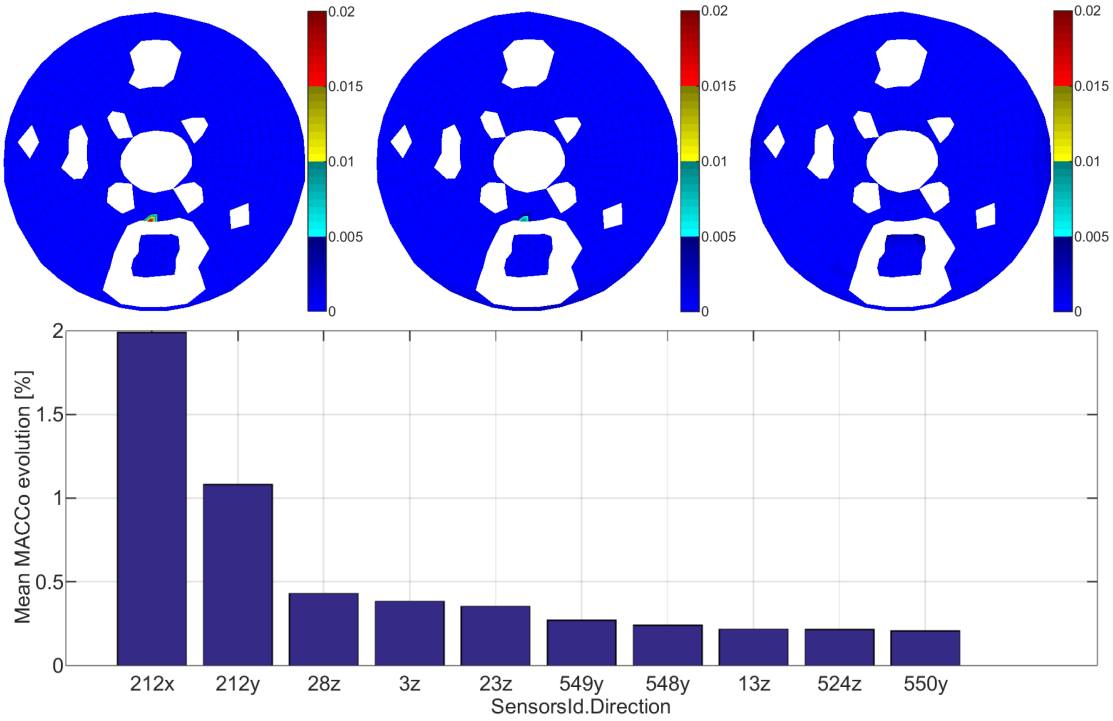


FIGURE 3.17 – MACevol : la carte dans les directions x, y et z (en haut) et la valeur pour les 10 premiers capteurs (en bas)

3.3.3 Impact des erreurs expérimentales sur le MAC

Une fois les capteurs erronés éliminés, la deuxième source d'erreur de mesure est liée à la qualité de l'identification. Cette qualité d'identification peut être mesurée à l'aide des différents critères présentés en section 2.5. Un tri des capteurs pour chaque mode et selon chacun des quatre critères est alors obtenu.

Pour être efficace dans l'analyse de la corrélation avec beaucoup de capteurs, des outils interactifs sont nécessaires pour naviguer parmi les paires de modes via la matrice de MAC, observer les déformées modales issues de l'identification et de la simulation, trier les capteurs en fonction des critères de qualités pour rapidement visualiser des transferts pertinents.

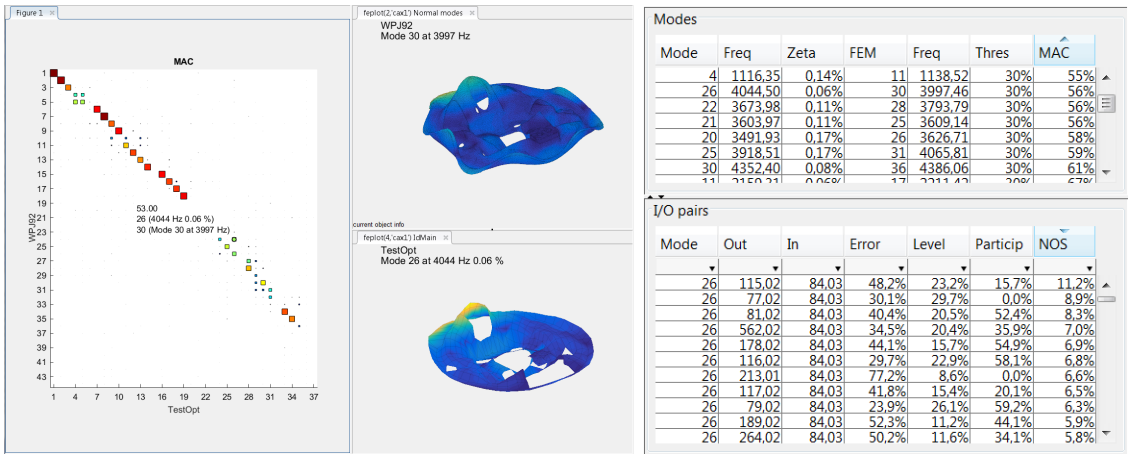


FIGURE 3.18 – Affichage de la matrice de MAC et des déformées modales associées (gauche) et table avec les modes appairés et les critères de qualité par mode et par capteur.

La figure 3.18 montre sur la gauche le MAC évalué pour notre cas test. Les informations sur les modes appairés sont résumées dans la partie supérieure de la table à droite de la figure,

où les colonnes peuvent être triées. Cela permet par exemple un post traitement par fréquence croissante ou par MAC croissant. Quand une ligne correspondant à une paire de mode est sélectionnée, la partie inférieure de la table montre pour chaque capteur, les valeurs des critères de qualité pour le mode considéré : Erreur, Niveau, Contribution et NOS. Cette table permet également un tri selon ces critères, permettant de visualiser directement le transfert associé au capteur sélectionné (visualisation de la superposition des transferts mesuré et synthétisé, centrée autour de la fréquence du mode).

Afin de permettre un retrait automatique des capteurs dont la qualité d'identification est clairement mauvaise, le critère d'erreur est utilisé. Pour chaque paire de modes, le **MAC-Error** est l'évolution de la valeur du MAC avec le retrait de capteurs par erreur décroissante. Des exemples de résultats types sont donnés en figure 3.19 pour les modes identifiés #9, #26 et #33 associés à leurs modes numériques appairés.

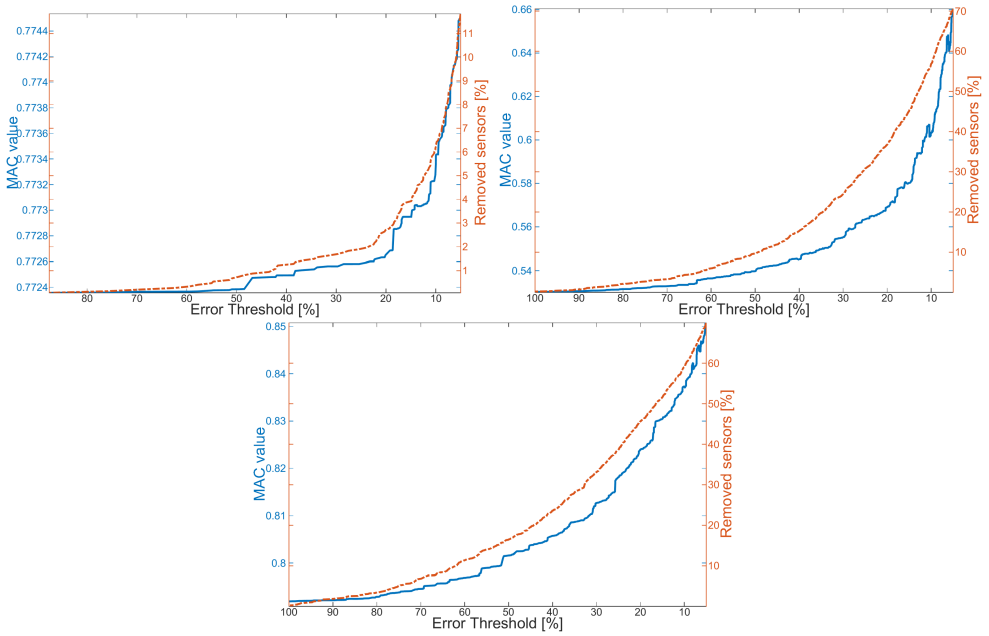


FIGURE 3.19 – MACError pour les modes identifiés #9, #26 et #33. La ligne bleue continue et l'échelle à gauche donnent les valeurs de MAC et la ligne rouge hachée et l'échelle de droite donnent la fraction de capteurs retirés.

Le mode #9, qui est très bien excité, ne montre aucune amélioration de la valeur du MAC avec le retrait des capteurs présentant l'erreur la plus grande, et très peu de capteurs sont retirés (en dessous de 5% d'erreur) en comparaison avec les deux autres modes. Le mode #26 a été présenté comme trop peu excité, avec un critère d'erreur globalement élevé ainsi qu'un niveau élevé du critère NOS. Le retrait de capteurs ayant la plus grande erreur améliore notablement l'évaluation de la corrélation : la valeur de MAC est de 53% avec tous les capteurs et de 60% avec uniquement les capteurs présentant une erreur inférieure à 10%. Le mode #33 est un mode plutôt localisé où seulement le pourtour extérieur du plateau se déforme. Malgré une valeur de MAC satisfaisante avec tous les capteurs de 79%, le retrait des capteurs avec plus de 10% d'erreur améliore sensiblement cette valeur, l'amenant à 84%. Les capteurs retirés pour les modes #26 et #33 sont principalement localisés dans le plan.

Dans les tables résumant la qualité de corrélation en figure 3.18, la colonne *Threshold* dans la table *Modes* est utilisée pour fixer la valeur de l'erreur maximale acceptable pour le calcul du MAC. Cette valeur est typiquement fixée à 30% voire 20%, valeur au-dessus desquelles les transferts ne sont généralement pas exploitables.

3.3.4 Erreurs de forme calculée aux capteurs

Le critère MACevol est utilisé en premier lieu pour éliminer les capteurs globalement mauvais sur tous les modes. Le MAC-Error est ensuite utilisé pour supprimer des capteurs associés à une mauvaise identification en appliquant un seuil sur le critère d'erreur. Le résultat de ces deux critères donne des lots de capteurs pour chaque mode. L'information restante dans ces lots de capteurs peut alors être considérée comme fiable, de sorte qu'il est maintenant pertinent de chercher à localiser où les déformées modales diffèrent significativement.

Cette dernière étape est réalisée à l'aide du MACCo par mode, qui peut être affiché comme une fonction (évolution de la valeur du MAC avec le retrait des capteurs) ou sous forme de cartes de couleurs (chaque capteur prend la valeur du MAC lorsqu'il est retiré). Plutôt que la valeur du MAC, il peut être intéressant également d'afficher son évolution relative à chaque retrait de capteur, mettant en avant les capteurs qui améliorent "rapidement" la corrélation. Cette stratégie de visualisation correspond au *MACevol*, mais évalué par mode et non plus de façon moyenne sur l'ensemble des modes (comme fait pour le retrait des capteurs globalement erronés).

La figure 3.20 montre un résultat type pour le mode #9. Avant de calculer le MACCo, un seuil de 20% est appliqué sur l'erreur, menant à un retrait de 3% des capteurs avec le critère MAC-Error. Ce premier retrait est visible par le décalage au début de l'axe x en haut de la figure 3.20 et par les zones blanches sur l'affichage en carte de couleurs.

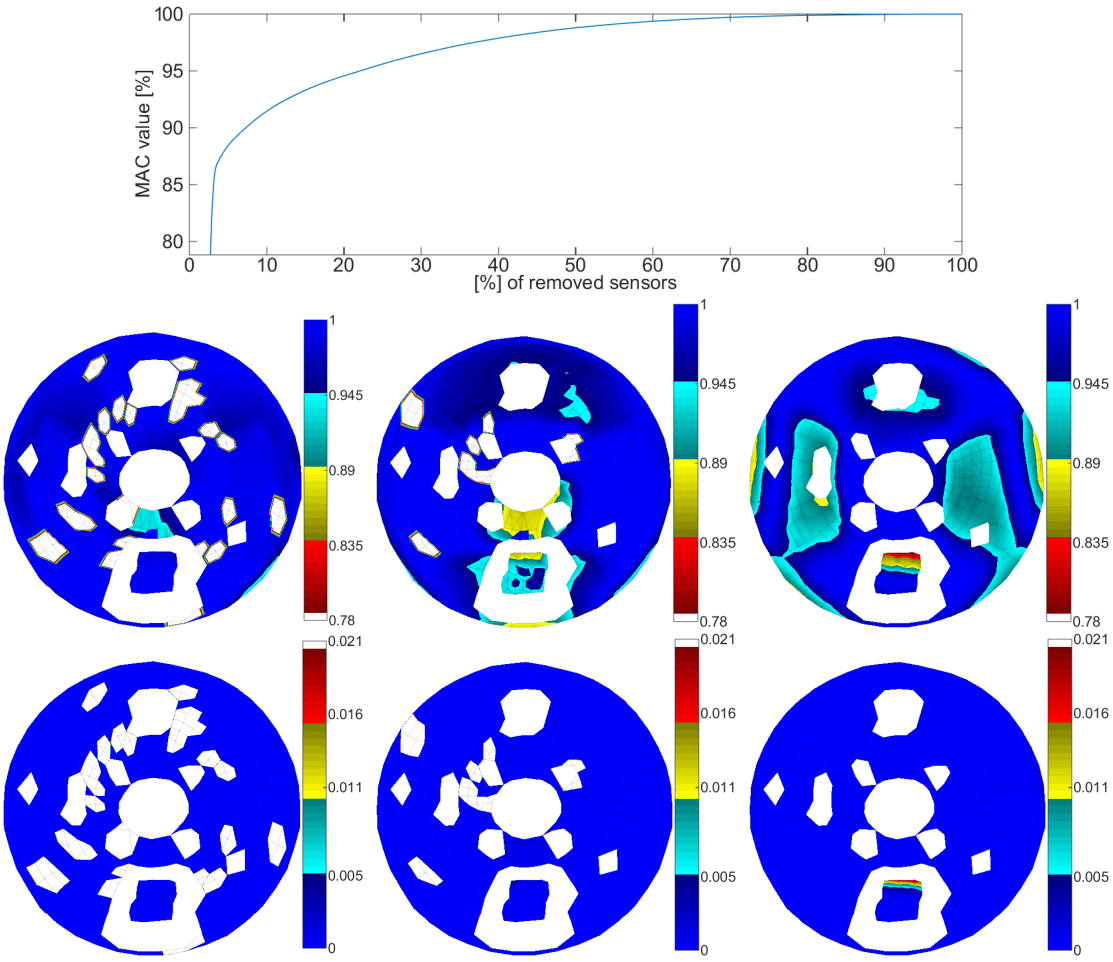


FIGURE 3.20 – Affichage du MACCo pour le mode identifié #9 : Evolution du MAC avec le retrait de capteur (en haut), affichage sous forme de carte de couleur (milieu) et affichage de la version MACevol (en bas).

L'évolution du MAC montre une augmentation rapide focalisée sur quelques capteurs seulement : quelques capteurs localisés contribuent beaucoup à la mauvaise corrélation. Les cartes de couleurs de la figure 3.20 indiquent que le retrait de 4 capteurs à l'extrémité du guide-câble améliore la valeur du MAC de 78% à 87% mettant en avant une grande différence de comportement entre les déformées modales à cet endroit.

La visualisation du critère MACevol en bas de la figure 3.3.3 permet de mettre clairement en évidence la prépondérance des quatre capteurs quant à leur influence forte sur l'amélioration du MAC. Le retrait des 4 capteurs sur le guide-câble mène à une augmentation du MAC de 2% chacun.

La figure 3.21 illustre que ce résultat est également vrai pour les modes #3, #7 et #13, ce qui indique clairement une erreur de modélisation au niveau du guide-câble. Dans l'étude industrielle, le recalage du contact entre le plateau et le guide-câble a été considéré et cela a confirmé qu'il était la source principale de la mauvaise corrélation.

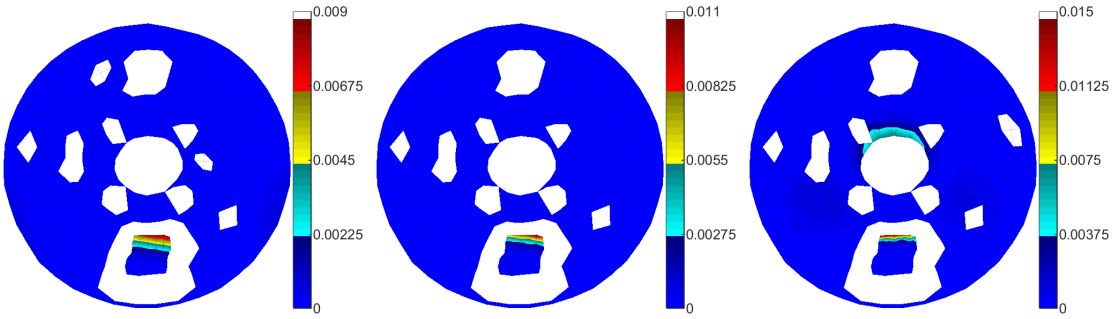


FIGURE 3.21 – MACevol dans la direction z pour les modes #3, #7 and #13

3.4 Estimation des mouvements non mesurés : théorie de l'expansion

Dans beaucoup de cas d'application, un modèle éléments finis associé à une mesure expérimentale est généralement disponible. Même lorsque la représentativité de celui-ci n'est pas vérifiée, à travers notamment un processus de recalage de modèle, il peut être utilisé en complément des mesures dans des algorithmes dits d'*expansion*. L'utilisation de ces méthodes a principalement deux objectifs :

- enrichir la mesure en utilisant le modèle éléments finis pour interpoler spatialement les mesures en estimant la réponse sur l'ensemble des degrés de liberté du modèle. Cela a été par exemple utilisé pour des applications en modification structurale dans [52].
- analyser les erreurs de modélisation en observant l'énergie résiduelle après expansion [53, 54, 55].

Les sections suivantes rappellent et illustrent des méthodes d'expansion classiques : méthodes de sous-espace, expansion statique, expansion dynamique et MDRE (Minimul Dynamic Residual Expansion)

Pour évaluer la pertinence de chaque algorithme, une étude de consistance sera systématiquement réalisée. Le modèle numérique utilisé est présenté en figure 3.22. Il est composé de deux composants assemblés : une poutre horizontale et une poutre verticale. Les deux poutres sont couplées entre elles et la poutre verticale est encastrée en trois zones à sa base. Pour ces contacts, une liaison point surface parfaite est implémentée sous forme de contrainte multipoints : les déplacements des noeuds encastrés sont imposés comme nuls et les déplacements des noeuds de la poutre horizontale sont linéairement dépendants des noeuds de la poutre verticale (en utilisant pour les noeuds esclaves l'observation du déplacement de la surface maitre, voir section 3.2.1).

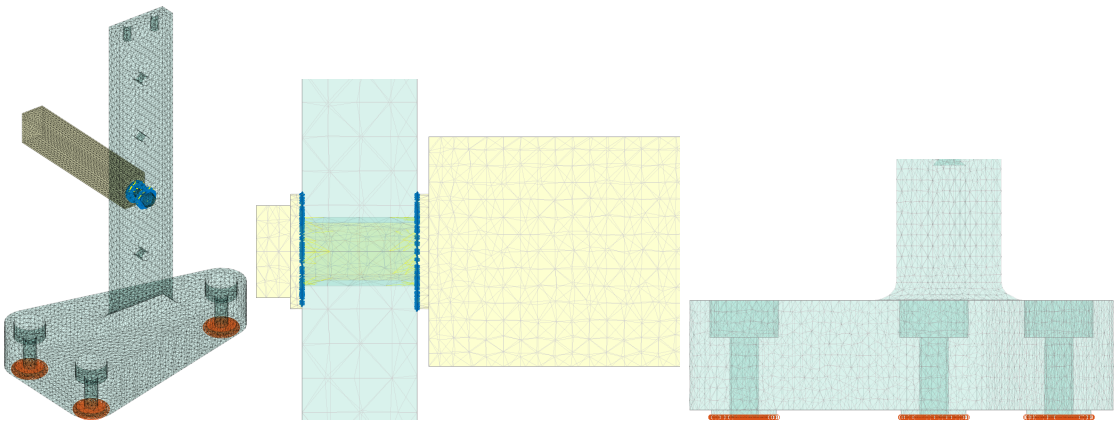


FIGURE 3.22 – Modèle éléments finis avec les contacts en surbrillance (gauche), zoom sur le contact entre les deux poutres (milieu) et zoom sur les encastrements à la base (droite)

L'étude de consistance vise à évaluer la qualité de l'expansion pour chacun des algorithmes à partir d'une mesure simulée que l'on sait exacte par rapport au modèle. Deux géométries de mesure sont utilisées pour simuler une identification que l'on cherche à étendre. La première géométrie de mesure est très dense en capteurs (les directions n'ont pas été représentées, car il s'agit pour chaque point de capteurs triaxiaux), elle représente une géométrie typique de mesure par vibromètre laser. La seconde diffère par l'ajout d'un capteur triaxial sur la poutre horizontale, qui représente un accéléromètre positionné sur une partie non visible du système, ajoutant une information supplémentaire sur le comportement vibratoire de ce composant.

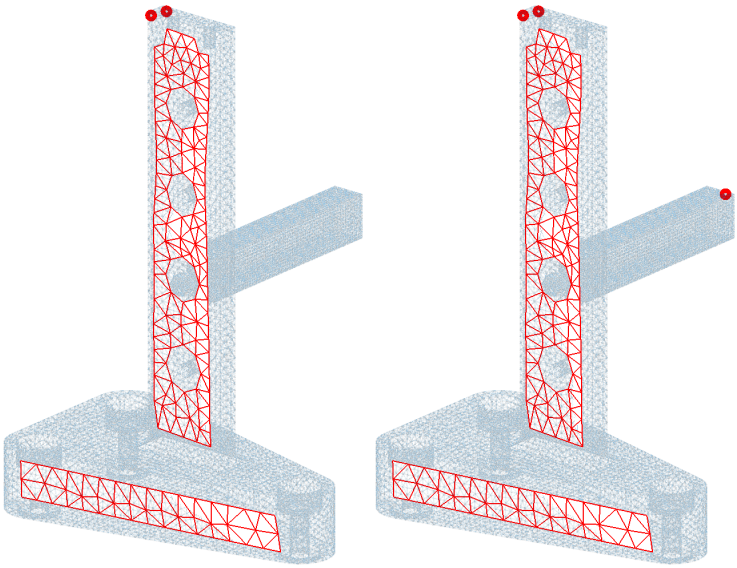


FIGURE 3.23 – Géométrie de mesure pour la consistance : forte densité de capteurs sur la poutre verticale (gauche) et ajout d'un triaxe à l'extrémité de la poutre horizontale (droite)

La méthode MDRE sera également utilisée pour analyser les erreurs de modélisation en regardant la répartition de l'énergie résiduelle (utilisée comme fonction coût par cette méthode).

3.4.1 Méthode de sous-espace

Les méthodes de sous-espaces utilisent des informations fournies par le modèle pour construire une base $[T]_{N\times NR}$ d'un sous-espace de déplacements possibles du modèle éléments finis. Le déplacement global $\{q_{Ex}\}$ est alors une combinaison linéaire de ces formes, soit $\{q_{Ex}\} = [T]\{q_R\}$. Pour comparer la forme étendue globale avec la mesure, on observe le modèle aux capteurs avec

$[c]\{q_{Ex}\}$ et la meilleure combinaison linéaire est celle qui minimise l'écart avec la mesure

$$\{q_R\} = \arg\min \|\{y_{Test}\} - [c][T]\{q_R\}\|^2 \tag{3.12}$$

Pour conduire à un problème bien posé il est nécessaire que la dimension du sous-espace soit inférieure ou égale au nombre de capteurs. Pour un sous-espace de taille inférieure à NS, un effet de lissage intervient et peut être considéré comme bénéfique en présence d'erreurs de mesure. On note que la minimisation étant définie sur l'observation du sous-espace, il est important que $[c][T]$ soit bien conditionnée c'est-à-dire que les formes soient bien distinctes au capteur. Le sous-espace le plus classiquement utilisé est le sous-espace modal [56]. On note que si la dynamique du modèle est utilisée pour construire le sous-espace (pour calculer les formes modales), elle n'intervient pas dans la minimisation de la fonction coût : l'erreur est purement algébrique, faisant intervenir la norme euclidienne de l'écart en déplacement aux capteurs. Il en résulte qu'il est assez courant de constater des contributions importantes de modes très éloignés en fréquence, ce qui est une limitation forte de la méthode.

3.4.2 Réponse forcée du modèle : expansion statique

Une utilisation plus complète du modèle est possible à travers le calcul de la réponse forcée du modèle EF aux déplacements mesurés, imposés aux capteurs.

On considère tout d'abord que les capteurs sont coïncidents avec des degrés de liberté du modèle. Ceci permet de distinguer les DDL actifs $\{q_a\}$ (correspond classiquement aux DDL d'interface et ici aux capteurs) et les DDL complémentaires $\{q_c\}$. L'expansion statique correspond à la résolution du problème $q_a = y_{Test}$ pour des efforts statiques appliqués aux capteurs, c'est-à-dire la solution de

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{Test} \\ q_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

Ce problème correspond à la condensation de Guyan [57] sur les capteurs pour laquelle on néglige les efforts d'inertie (on pose $\omega = 0$, ce qui élimine la matrice de masse de l'équation de mouvement) et on suppose qu'il est pertinent de ne prendre en compte des efforts qu'aux capteurs (soit $F_c = 0$). La solution de ce problème est assimilable à une méthode de sous-espace avec $[T]$ donné par

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ K_{cc}^{-1} K_{ca} \end{bmatrix} \{y_{Test}\} = [T]\{y_{Test}\} \tag{3.14}$$

plutôt que les modes propres de la structure.

Ici, les capteurs ne correspondent pas nécessairement aux DDL du modèle mais à une combinaison linéaire de ceux-ci (via la matrice d'observation $[c]$). Nous allons alors utiliser les modes d'attache (efforts imposés aux capteurs) plutôt que les modes de contraintes (déplacements imposés aux capteurs), qui génèrent le même sous-espace [58]. Avec la réciprocité, la matrice de commandabilité aux capteurs $[b]$ est liée à la matrice d'observabilité aux capteurs $[c]$ par la relation $[b] = [c]^T$. Les déplacements engendrés par les efforts aux capteurs sont donc obtenus par

$$\left[\tilde{T}\right] = [K_{FE}]^{-1}[b] = [K_{FE}]^{-1}[c]^T \tag{3.15}$$

On note que la matrice de raideur n'est pas inversible en présence de modes de corps rigides et que des méthodes spécifiques existent dans ce cas [58].

Comme le sous-espace obtenu par effort imposé est identique à celui correspondant à des déplacements imposés, on cherche maintenant une organisation de ce sous-espace $\left[\tilde{T}\right][A]$ (avec $[A]$ matrice non singulière) permettant d'écrire directement la relation entre la mesure $\{y_{Test}\}$ et l'ensemble des DDL q. Pour retrouver la forme de (3.14), soit $\{q\} = [T]\{y_{Test}\}$, on cherche

$[A]$ telle que $[T] = \left[\tilde{T}\right][A]$ vérifiant $[c]\{q\} = \{y_{Test}\}$. Il est donc nécessaire que $[c]\left[\tilde{T}\right][A] = I$, ce qui conduit à l'expression finale de la forme étendue

$$\{q\} = \left[\tilde{T}\right]\left[c\tilde{T}\right]^{-1}\{y_{Test}\} \tag{3.16}$$

Pour le cas test de la poutre sans accéléromètre sur la barre horizontale, la figure 3.24 montre la matrice de MAC entre les déformées obtenues par expansion statique et les déformées réelles du modèle. Dans les basses fréquences, seuls 4 modes sont correctement étendus.

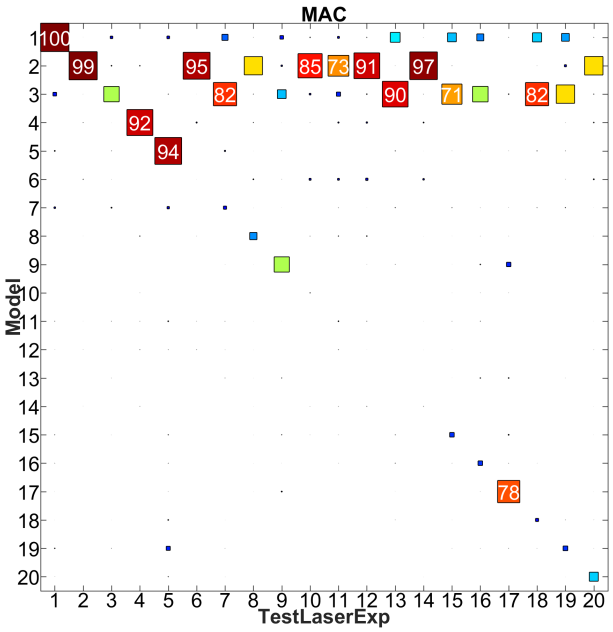


FIGURE 3.24 – MAC entre les déformées du modèle nominal et les déformées étendues avec une expansion statique à partir de la géométrie de mesure #1

La figure 3.25 montre que le troisième mode étendu ressemble fortement au mode nominal, mais l'amplitude du déplacement en corps rigide de la barre horizontale est plus faible du fait de la non prise en compte de l'inertie. Dès le mode #6, les modes étendus sont majoritairement non corrélés avec les modes nominaux. Pour les modes #6, #7 et #10, la première flexion, la deuxième flexion et la torsion de la barre horizontale marquent les différences entre les modes étendus statiquement et les modes nominaux.

Pour donner une indication sur la gamme de fréquence pour laquelle l'expansion peut se passer de façon satisfaisante, la notion de mode à capteurs fixes peut être utilisée [59]. Cette notion est le pendant des modes à interface fixe de la méthode de Craig-Bampton. Il s'agit de calculer les modes de la structure pour laquelle on contraint les déplacements vus par les capteurs à être nuls. Les modes obtenus donnent donc une indication des déformations dynamiques non visibles par les capteurs et des fréquences pour lesquelles elles se produisent.

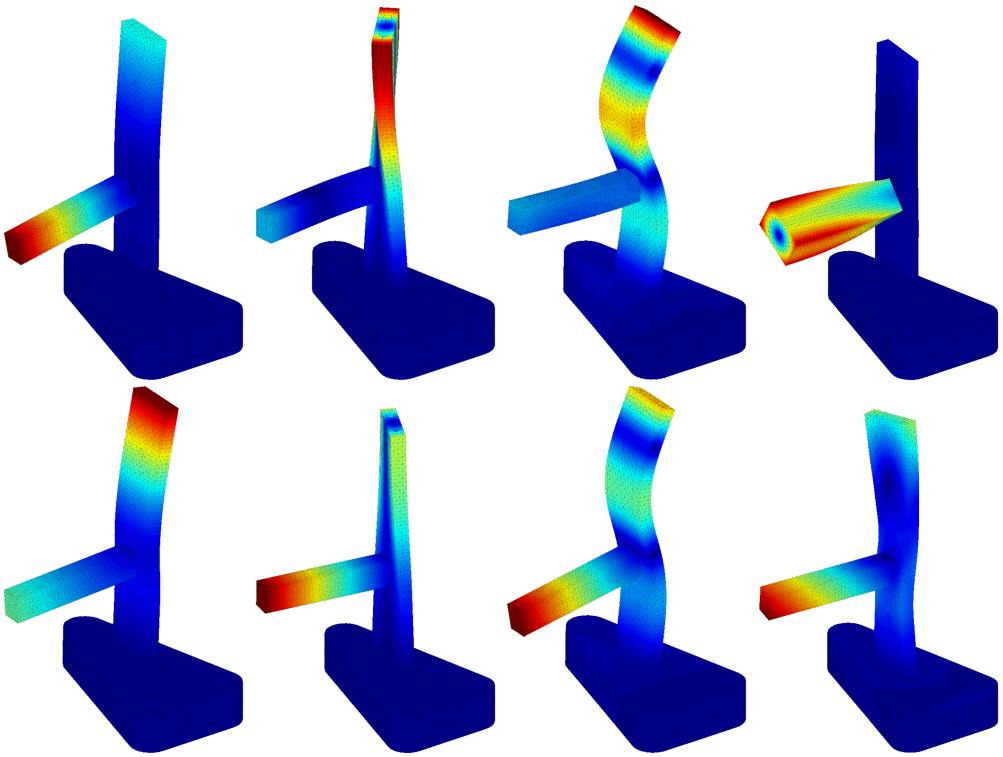


FIGURE 3.25 – Différence entre les déformées nominales (première ligne) et les déformées étendues par expansion statique avec la géométrie #1 (deuxième ligne) pour les modes 3 6 7 et 10 (de gauche à droite)

La figure 3.26 montre que le premier mode à capteurs fixes apparait à la fréquence 1969Hz, soit juste après la fréquence du 5ème mode à 1262Hz. On retrouve, dans ces modes à capteurs fixes, les trois formes (première flexion, deuxième flexion et torsion de la barre horizontale) qui ne sont pas décrites par l'expansion statique pour les modes #6, #7 et #10.

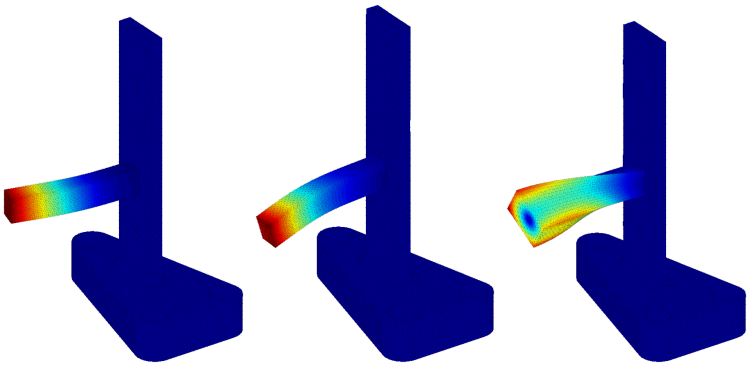


FIGURE 3.26 – Trois premiers modes à capteurs fixes : 1969Hz, 3201Hz et 8074Hz

Pour augmenter la bande de fréquence, le maillage de mesure #2 est doté d'un capteur supplémentaire sur la barre horizontale. Le calcul des modes à capteurs fixes à partir de cette géométrie donne une première fréquence à 4404Hz, soit juste après la fréquence du 9ème mode à 4087Hz.

Le MAC entre les modes obtenus par expansion statique et les modes nominaux pour la géométrie de mesure #2 est montré en figure 3.27. La corrélation des modes en dessous de la fréquence du premier mode à capteurs fixes est très bonne.

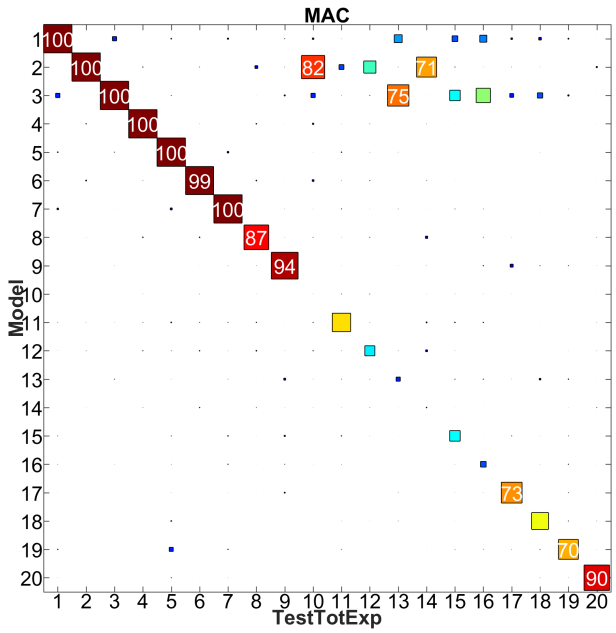


FIGURE 3.27 – MAC entre les déformées du modèle nominal et les déformées étendues avec une expansion statique à partir de la géométrie de mesure #2

A partir du mode #10, la qualité de l'expansion est dégradée et très mauvaise pour certains modes. Les comparaisons entre les modes étendus et nominaux, montrés en figure 3.28, expliquent ces écarts. La torsion de la poutre ne peut pas être imposée avec un seul triaxe sur la poutre horizontale et les flexions d'ordre supérieur de la poutre horizontale apparaissent entre les capteurs.

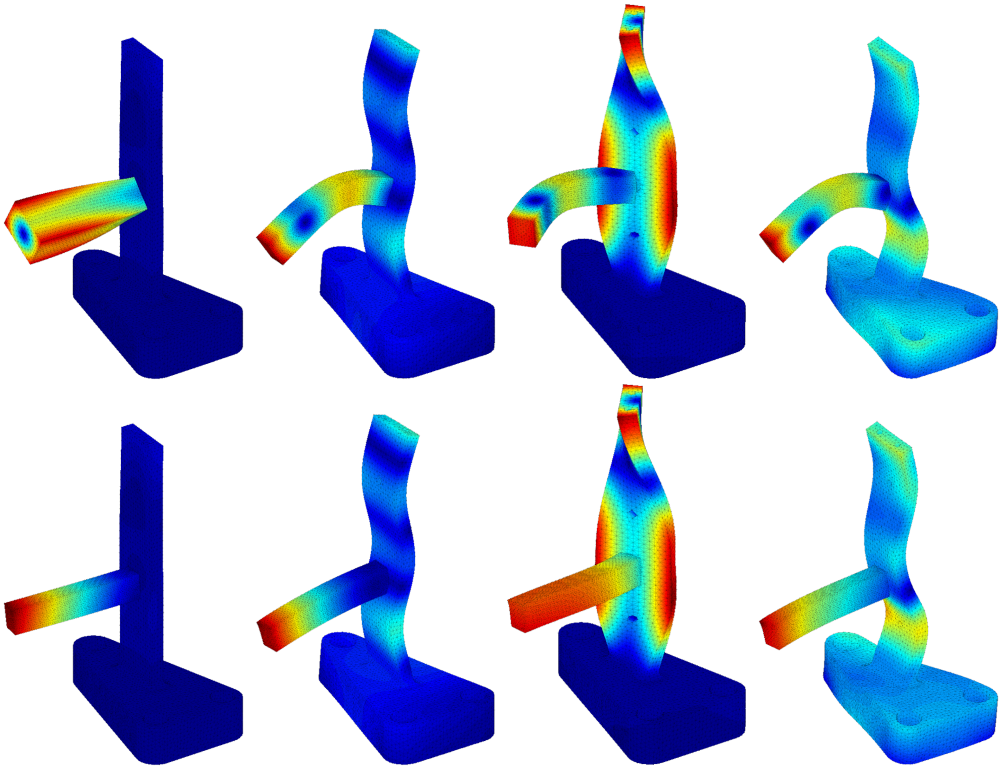


FIGURE 3.28 – Différence entre les déformées nominales (première ligne) et les déformées étendues par expansion statique avec la géométrie #2 (deuxième ligne) pour les modes 10 13 14 et 16 (de gauche à droite)

L'ajout de capteurs est toujours une difficulté expérimentale et l'expansion statique peut dans certains cas être insuffisante. La dynamique du modèle peut alors être utilisée pour améliorer les résultats.

3.4.3 Réponse forcée du modèle : expansion dynamique

Contrairement à l'expansion statique, l'expansion dynamique prend en compte la fréquence de la réponse à étendre. Ainsi, pour chaque mode à étendre, on résout le problème dynamique à effort nul sur les degrés de liberté complémentaires, soit

$$\begin{bmatrix} Z_{aa}(\omega) & Z_{ac}(\omega) \\ Z_{ca}(\omega) & Z_{cc}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_a(\omega) \\ q_c(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

qui en posant $q_a = y_{Test}$ donne

$$\begin{Bmatrix} q_a(\omega) \\ q_c(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ Z_{cc}^{-1}(\omega) Z_{ca}(\omega) \end{bmatrix} \{y_{Test}(\omega)\} \tag{3.18}$$

Par rapport à l'expansion statique où un seul sous-espace était généré pour tous les modes, il faut pour l'expansion dynamique générer un sous-espace spécifique par mode ou réponse étendue. Ceci engendre des temps de calculs potentiellement très longs. La solution retenue ici est de résoudre ce problème dans le sous-espace combinant les modes de la structure et la réponse statique aux efforts appliqués sur les capteurs (3.15). Le sous-espace ainsi obtenu,

$$[T] = \left[[K_{FE}]^{-1} [c]^T \quad [\Phi]_{NM} \right]^{\perp} \tag{3.19}$$

est utilisé pour réduire le modèle. La notation $^{\perp}$ est utilisée pour indiquer le besoin d'orthogonaliser les vecteurs de cette famille (par rapport aux matrices $[M]$ et $[K]$ du modèle) avec des éliminations éventuelles. Sur la géométrie #1 par exemple, cela revient à réduire le modèle sur 580 DDL (560 capteurs + 20 modes), ce qui permet par la suite des calculs rapides.

On cherche donc à résoudre le problème

$$\begin{array}{l} \left[T^T Z(\omega) T\right] \{q_R(\omega)\} = [Z_R(\omega)] \{q_R(\omega)\} = [T]^T \left\{c^T F_a\right\} \\ \text{avec} \\ [c] [T] \{q_R(\omega)\} = \{y_{Test}(\omega)\} \end{array} \tag{3.20}$$

Pour se ramener à une forme similaire à (3.18), il faut générer une base du sous espace engendré par $[T]$ telle que les NS premiers DDL généralisés correspondent aux capteurs notés q_T. En d'autres termes, on cherche la base $\left[\tilde{T}\right] = [T] [A]$ associée aux nouveaux DDL généralisés $\{\tilde{q_R}\}$ décomposés en des déplacements selon les capteurs et des DDL réduits complémentaires, soit

$$\{\tilde{q_R}\} = \begin{Bmatrix} q_T \\ q_{Rc} \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

vérifiant

$$[c] \left[\tilde{T}\right] \begin{Bmatrix} q_T \\ q_{Rc} \end{Bmatrix} = \{q_T\} \tag{3.22}$$

ce qui revient à trouver une matrice $[A]$ telle que

$$[c] [T] [A] = \begin{bmatrix} [I]_{NS*NS} & [0]_{NS*(NR-NS)} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Pour obtenir $[A]$, on construit par décomposition en valeurs singulières une base $[Ker(cT)]$ du noyau de $[c] [T]$ que l'on complète par le sous-espace orthogonal à ce noyau, noté $\left[Ker(cT)^{\perp}\right]$.

En considérant le sous-espace engendré par $[T]\left[Ker(cT)^{\perp}\right]$, que l'on notera $\left[T^{\perp}\right]$, on se retrouve dans la situation de (3.16) : l'observation de cette base aux capteurs $[c]\left[T^{\perp}\right]$ est de rang plein. Les NS premières colonnes de $[A]$ sont donc construites de façon similaire à (3.16) en considérant la base initiale comme $\left[T^{\perp}\right]$. Les $NR - NS$ dernières sont prise égales à la base $[Ker(cT)]$. La matrice $[A]$ correspond donc à

$$[A] = \left[\begin{array}{cc} Ker(cT)^{\perp}(cT^{\perp})^{-1} & Ker(cT) \end{array} \right] \tag{3.24}$$

Dans cette base $\left[\tilde{T}\right] = [T]\,[A]$, l'équation de mouvement devient

$$\left[\begin{array}{cc} Z_{TT}(\omega) & Z_{TRc}(\omega) \\ Z_{RcT}(\omega) & Z_{RcRc}(\omega) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_T(\omega) \\ q_{Rc}(\omega) \end{array} \right\} = \left[\tilde{T}\right]^T \left\{ \begin{array}{c} F_T(\omega) \\ 0 \end{array} \right\}, \tag{3.25}$$

où les DDL actifs sont les capteurs $\{q_T(\omega)\} = \{y_{Test}(\omega)\}$ et des DDL complémentaires sont les inconnues. La réponse étendue est donc donnée par

$$\{q(\omega)\} = \left[\tilde{T}\right] \left[\begin{array}{c} I \\ -Z_{RcRc}^{-1}(\omega) Z_{RcT}(\omega) \end{array} \right] \{y_{Test}(\omega)\} \tag{3.26}$$

L'intérêt de la réduction de modèle est ici très visible, car la matrice de rigidité dynamique $Z_{RcRc}(\omega)$ à inverser est de taille NR-NS (le nombre de modes utilisés pour enrichir le sous-espace de l'expansion statique), ce qui est beaucoup plus acceptable que pour (3.18) où la matrice de rigidité $Z_{cc}(\omega)$ est de taille N-NS (soit l'ordre de grandeur du nombre de DDL du modèle, souvent quelques millions de DDL pour les modèles complets).

La pertinence de la base retenue pour la réduction n'a pas été établie ici et pourrait faire l'objet d'une analyse de convergence par itération sur résidu [60, 61], mais dans la mesure où les résultats affichés plus loin sont pertinents cette étude n'a pas été réalisée.

Quelle que soit la géométrie de mesure choisie (#1 ou #2), la consistance de l'expansion dynamique est parfaite, le MAC est diagonal. Ce résultat était attendu puisque les modes propres nominaux sont dans la base de réduction et toute la dynamique du modèle est prise en compte.

Il parait cependant pertinent d'évaluer la robustesse de cette méthode d'expansion aux erreurs de modèle. A cet effet, les modes ont été étendus avec la forme du mode nominale (vue aux capteurs), mais pour une fréquence non exacte variant de -50% à +50%.

Pour le mode #5 et la géométrie #1, la figure 3.29 montre que le mode étendu présente une corrélation presque parfaite (supérieure à 99.986%) sur la bande de fréquence d'expansion considérée. On note à nouveau que l'expansion est exacte à la vraie fréquence soit 1001Hz.

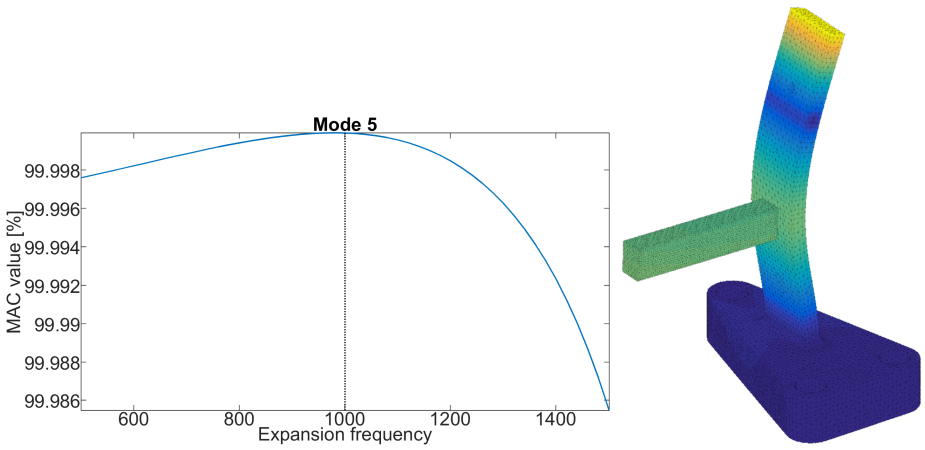


FIGURE 3.29 – Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #5 sans accéléromètre sur la poutre horizontale (gauche) et visualisation du mode étendu (droite)

Pour le mode #6 à 2319Hz, la figure 3.30 indique une forte baisse de la corrélation autour de 1948Hz et de 3200Hz et il parait intéressant de comprendre l'origine de ces fréquences.

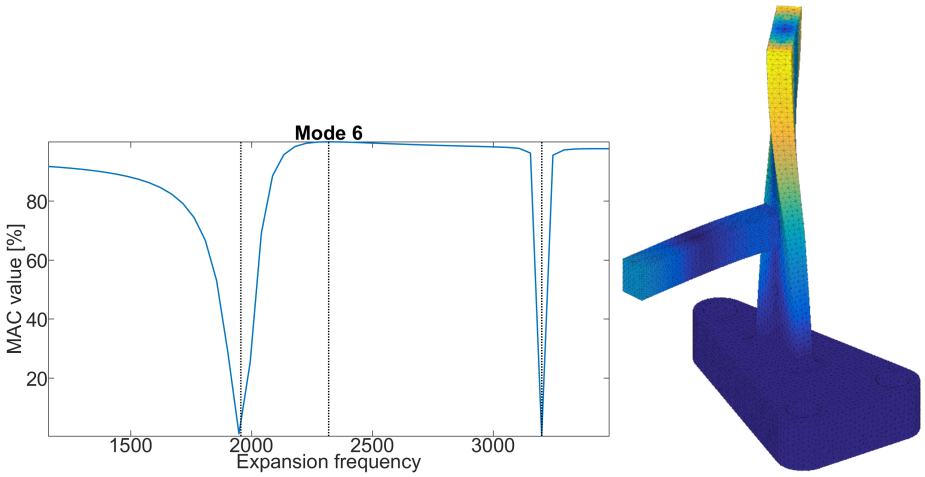


FIGURE 3.30 – Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #6 sans accéléromètre sur la poutre horizontale (gauche) et visualisation du mode étendu (droite)

Lors de l'expansion, les mouvements possibles sont liés à q_T qui est ici contraint aux déplacements mesurés $\{y_{Test}\}$ et aux DDL complémentaires $\{q_{Rc}\}$. On cherche donc des réponses dans le sous espace engendré par

$$\left[\tilde{T}\right]\begin{bmatrix} y_{Test} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Le calcul des modes dans ce sous-espace peut mettre en évidence des résonnances du système, proches de la fréquence d'expansion imposée. La figure 3.31 affiche les déformées modales calculées dans ce sous espace : imposer les déplacements aux capteurs aux fréquences 1948Hz et 3200Hz fait entrer en résonnance les deux modes de flexion de la poutre horizontale.

Pour chaque mode à étendre, il est donc judicieux de vérifier si un mode de résonnance du modèle réduit (sur la base "mesure étendue à la fréquence identifiée + modes à capteurs fixes") n'est pas présent en dessous ou proche de la fréquence d'expansion. De façon analogue à la présence de modes de capteurs fixes pour l'expansion statique, cela remet en cause la qualité de l'expansion dynamique puisqu'aucune mesure ne permet de valider la participation des formes non visibles par les capteurs.

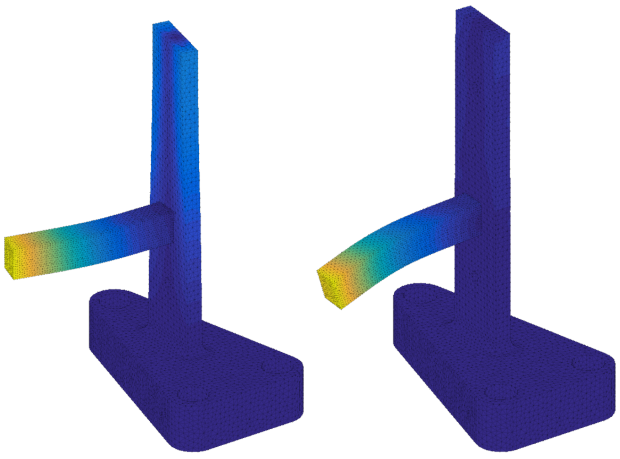


FIGURE 3.31 – Modes du système réduit au sous espace "mesure étendue+ capteurs fixes" : premier mode à 1948Hz (gauche) et deuxième mode à 3200Hz (droite)

Tout comme pour l'expansion statique, il est toujours théoriquement possible d'ajouter un capteur pour améliorer la confiance dans le résultat d'identification. La figure 3.32 présente le résultat de l'expansion dynamique du mode #6 avec la géométrie #2 qui ajoute un triaxe sur la poutre horizontale. Avec le capteur supplémentaire, les deux modes de flexion de la poutre horizontale ne peuvent plus s'exprimer (leurs formes ne font plus partie des modes à capteurs fixes) et l'erreur de modèle, approchée par une erreur de fréquence, n'a que peu d'influence sur la qualité du résultat d'expansion.

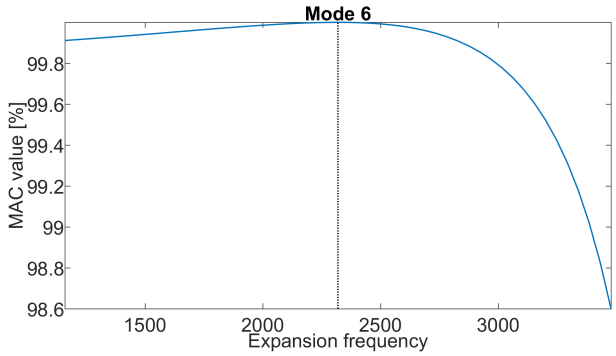


FIGURE 3.32 – Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #6 avec triaxe sur la poutre horizontale

Il faut alors monter jusqu'à la fréquence du mode #10 à 4951Hz pour voir le problème réapparaitre. Sur le modèle réduit (mesure étendue + capteurs fixes), le mode de torsion de la poutre est précédé par un mode à 4258Hz. La forme correspondante affichée à droite dans la figure, est également une torsion mais à fréquence plus basse et avec une rotation autour du capteur situé sur la poutre horizontale.

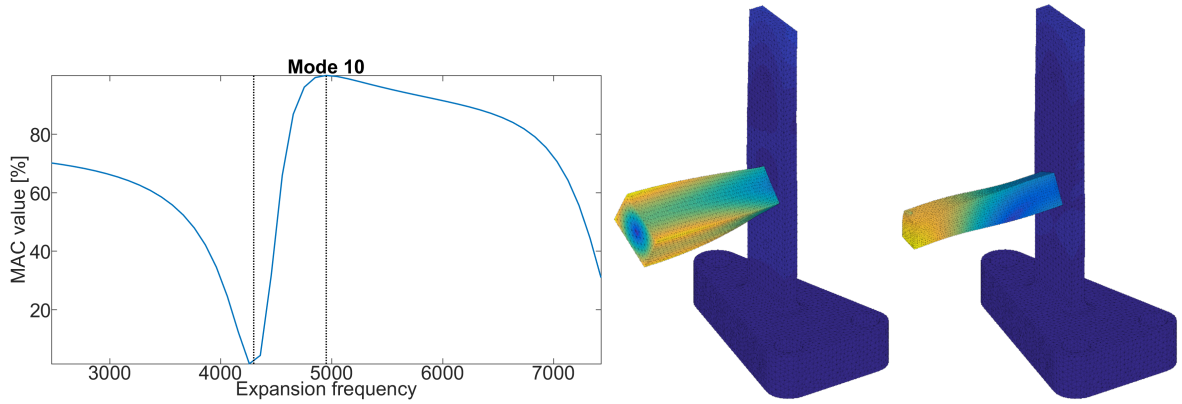


FIGURE 3.33 – Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #6 avec accéléromètre sur la poutre horizontale (gauche), mode de torsion étendu (centre) et mode du sous-espace "mesure étendue + capteurs fixes" (droite)

Si l'expansion dynamique est plus robuste que l'expansion statique, il convient donc cependant de faire attention à la possibilité de couplage avec des déformées correspondant aux modes du sous-espace "mesure étendue + capteurs fixes".

3.4.4 Méthode de minimisation du résidu : erreur de mesure et erreur de modèle

L'expansion statique impose les déplacements aux capteurs en négligeant les effets d'inertie ($\omega = 0$), l'expansion dynamique ajoute la prise en compte de l'inertie, mais dans les deux cas

le modèle et les mesures y_{Test} sont supposés exacts. Pour lever cette limitation la méthode MDRE (*Minimum Dynamic Residual Expansion*, qui est très proche de l'erreur en relation de comportement étendue [53, 54, 55]) utilise une fonction coût composée d'une erreur de modèle et d'une erreur de mesure.

L'erreur de mesure est classiquement une mesure de l'écart entre la forme identifiée $\{y_{j,Test}\}$ et l'observation aux capteurs de la forme étendue $[c]\{\phi_j\}$, soit

$$\epsilon_{Test} = \left([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\}\right)^T [Q] \left([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\}\right) \tag{3.28}$$

avec une norme Q à choisir. La norme euclidienne classique ($[Q] = [I]$) a été utilisée dans ces travaux, mais une pondération de la mesure utilisant le critère d'erreur d'identification introduit en section 2.5 est envisageable avec par exemple $[Q] = [I] - \text{diag}(e_{c,j})$ ou $[Q] = \text{diag}(\max(e_{max} - e_{c,j}, 0)/e_{max})$ avec e_{max} une valeur maximale d'erreur au-dessus de laquelle, la mesure n'est pas du tout prise en compte.

L'erreur de modèle est ensuite prise en compte, à travers le non-respect de l'équilibre dynamique, où les efforts résiduels

$$\{R_{jL}\} = [Z(\omega_j)]\{\phi_j\} \tag{3.29}$$

ne sont nuls que si le modèle et les mesures sont exacts, ce qui correspond au cas de l'expansion dynamique exacte illustré dans la section précédente. On rappelle ici que le second point commun entre les expansions statique et dynamique est l'hypothèse selon laquelle les erreurs de modèle sont reprises par des efforts aux capteurs : dans les deux cas, les efforts selon les DDL complémentaires sont considérés nuls. Cette hypothèse n'est pas faite par la méthode MDRE qui considère les efforts résiduels $\{R_{jL}\}$ sur l'ensemble des DDL du modèle.

Pour obtenir une mesure de ce résidu en effort $\{R_{jL}\}$, la méthode d'itération sur résidu définit le déplacement statique associé

$$\{R_{jD}\} = [K]^{-1}\{R_{jL}\} = [K]^{-1}[Z(\omega_j)]\{\phi_j\} \tag{3.30}$$

et l'erreur de modèle associée est l'énergie de déformation engendrée par ce résidu en déplacement, soit

$$\epsilon_{Mod} = \{R_{jD}\}^H [K]\{R_{jD}\} \tag{3.31}$$

L'expansion MDRE cherche donc à minimiser l'erreur totale définie comme somme pondérée de l'erreur de mesure et de l'erreur de modèle

$$\begin{array}{rcl} \epsilon & = & \gamma\epsilon_{Test} + \epsilon_{Mod} \\ & = & \gamma\left([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\}\right)^H [Q]\left([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\}\right) + \{R_{jD}\}^H [K]\{R_{jD}\} \end{array} \tag{3.32}$$

La définition du résidu en déplacement $[K]\{R_{jD}\} = [Z(\omega_j)]\{\phi_j\}$ peut être intégrée à la minimisation par un vecteur multiplicateurs de Lagrange soit

$$\begin{array}{rcll} \min_{\phi_j, R_{jD}, \lambda} & (& \gamma\left([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\}\right)^H [Q]\left([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\}\right) & \\ & + & \{R_{jD}\}^H [K]\{R_{jD}\} & \\ & + & \{\lambda\}^H \left([K]\{R_{jD}\} - [Z(\omega_j)]\{\phi_j\}\right) &) \end{array} \tag{3.33}$$

La minimisation de cette fonction coût conduit à l'annulation des dérivée partielles par rapport aux paramètres $(\phi_j, R_{jD}, \lambda)$ qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma [c]^T \left([Q] + [Q]^H\right)\left([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\}\right) - [Z(\omega_j)]^H \{\lambda\} = 0 \\ \left([K] + [K]^H\right)\{R_{jD}\} + [K]^H \{\lambda\} = 0 \\ [K]\{R_{jD}\} - [Z(\omega_j)]\{\phi_j\} = 0 \end{array} \right. \tag{3.34}$$

De la deuxième ligne, on tire la relation $\{\lambda\} = -[K]^{-H}\left([K]+[K]^{H}\right)\{R_{jD}\}$ permettant de réduire le nombre d'inconnues. La forme matricielle de la minimisation s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} \gamma c^T\left(Q+Q^H\right)c & Z(\omega_j)^H K^{-H}\left(K+K^H\right) \\ -Z(\omega_j) & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi \\ R_{jD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma c^T\left(Q+Q^H\right)y_{j,Test} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

qui, lorsque les matrice $[K]$, $[Z(\omega_j)]$ et $[Q]$ sont symétriques, se simplifie en

$$\begin{bmatrix} \gamma c^T Q c & Z(\omega_j) \\ -Z(\omega_j) & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi \\ R_{jD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma c^T Q y_{j,Test} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Le choix du paramètre γ est important puisqu'il gère la pondération entre l'erreur du modèle et l'erreur de mesure. Une procédure de réglage simple est de donner une estimation de l'erreur de mesure relative $\sqrt{\epsilon_{Test}}/\left\|y_{j,Test}\right\|$ et d'itérer sur les valeurs de γ jusqu'à atteindre ce critère.

Pour évaluer la pertinence de la méthode MDRE, le mode identifié #11 est utilisé avec la géométrie de mesure #2 (avec accéléromètre sur la poutre horizontale). Afin de donner un sens à la prise en compte des erreurs de mesure, un bruit additif de distribution uniforme (entre -10% et +10%) est introduit sur la partie réelle et la partie imaginaire au niveau de chaque capteur. Une fois ce bruit ajouté, l'erreur de mesure relative $\sqrt{\epsilon_{Test}}/\left\|y_{j,Test}\right\|$ entre le mode nominal et le mode bruité est de 5.5%.

La figure 3.34 montre le MAC entre la forme du mode nominal et la forme étendue avec la méthode MDRE en fonction de la fréquence d'expansion et du niveau d'erreur admissible.

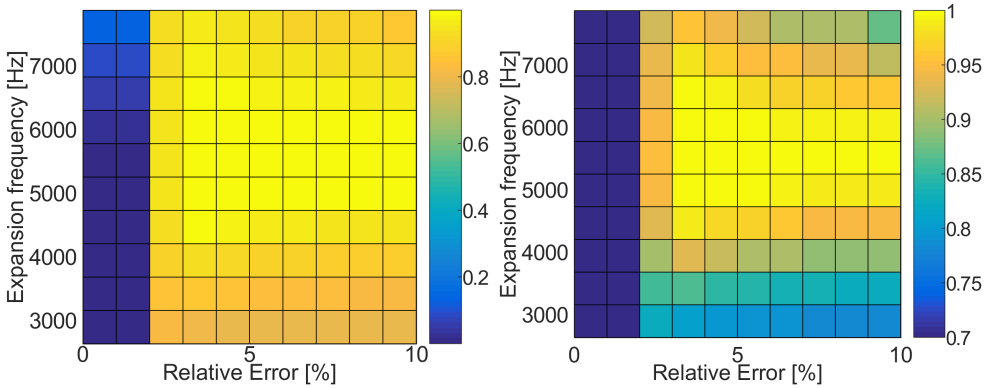


FIGURE 3.34 – MAC entre le mode nominal #11 et le mode étendu en fonction de la fréquence d'expansion et de l'erreur relative admissible (gauche) et zoom de la carte de couleur sur la gamme 0.7-1 (droite)

Pour des erreurs admissibles trop faibles ($\gamma \approx 0$) le conditionnement numérique de la méthode MDRE est mauvais et le résultat n'est pas exploitable. La forme liée à cette expansion sans erreur de mesure admissible est montrée à gauche de la figure 3.35 et elle n'est visiblement pas pertinente. Dans le calcul de MAC en 3.34, la corrélation globale sur tous les DDL de modèle est très mauvaise, alors qu'elle est parfaite aux capteurs.

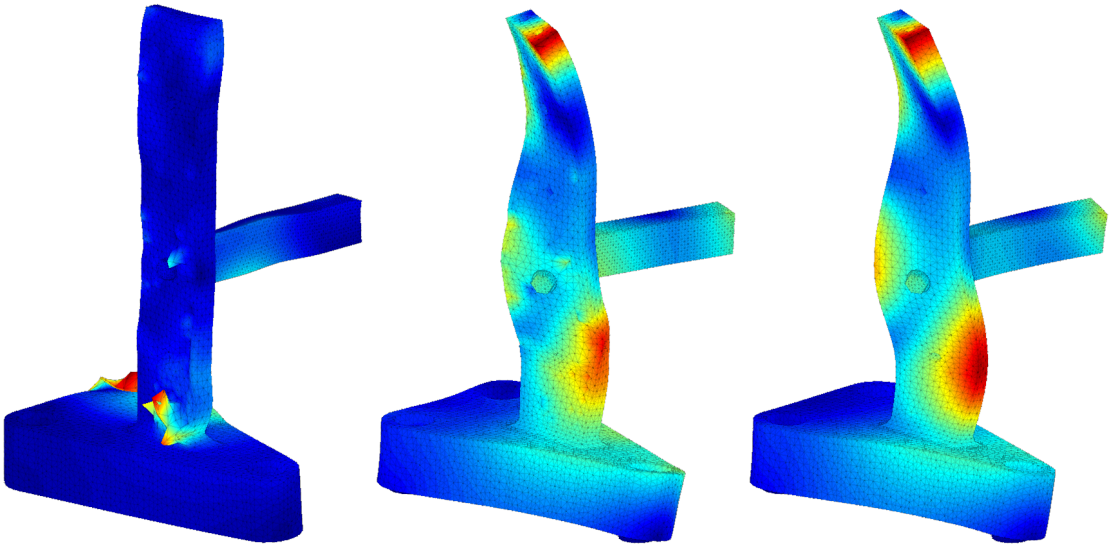


FIGURE 3.35 – Résultat de l'expansion MDRE pour le mode #11 à la fréquence nominale : erreur nulle au capteurs (à gauche), erreur relative de 2% (au mileu) et de 4% (à droite)

A partir d'une erreur admissible de 2%, le résultat de l'expansion est exploitable. La déformée au milieu de la figure 3.35 montre un certain niveau d'irrégularité, le MAC n'est que de 90%, car l'erreur de mesure est supérieure à l'erreur admissible obtenue par ajustement de la pondération γ : le "lissage" de la forme expérimentale est présent mais pas suffisamment.

Dès 3% d'erreur admissible, la corrélation à la fréquence d'expansion est quasiment de 100% et ne descend pas sous 80% pour des fréquences à +/- 50% de la fréquence nominale. La déformée à droite de la figure 3.35 montre le résultat de l'expansion pour une erreur admissible de 4% à la fréquence exacte : plus aucune irrégularité n'est visible.

Pour une pondération permettant une erreur de mesure plus importante, la zone de très bonne corrélation se restreint. La relaxation supplémentaire de l'erreur de mesure a aussi pour effet de diminuer la contrainte qui impose au modèle EF de suivre les mesures : le comportement de l'expansion peut alors se rapprocher du modèle EF non contraint qui a une dynamique fausse loin de la fréquence nominale.

Pour comparer l'expansion dynamique et la MDRE, la figure 3.36 montre l'évolution du MAC avec la fréquence d'expansion pour l'expansion dynamique et pour l'expansion MDRE avec 2% et 6% d'erreur de mesure relative admissible.

On note que des modes du modèle réduit (sur la base "mesure étendue +capteurs fixes"), peuvent entrer en résonnance avec l'expansion dynamique à des fréquences proches de la fréquence nominale. L'expansion MDRE avec une erreur admissible de 2% voit son maximum de corrélation autour de la fréquence nominale, mais pour une valeur de MAC de 90% du fait d'un niveau de bruit expérimental admissible trop faible. L'expansion MDRE avec une erreur admissible de 6% a un MAC maximal de 100% à la fréquence nominale, a un MAC supérieur à 80% sur toute la gamme de fréquence d'expansion et ne souffre pas de problème de résonnances de structure parasites.

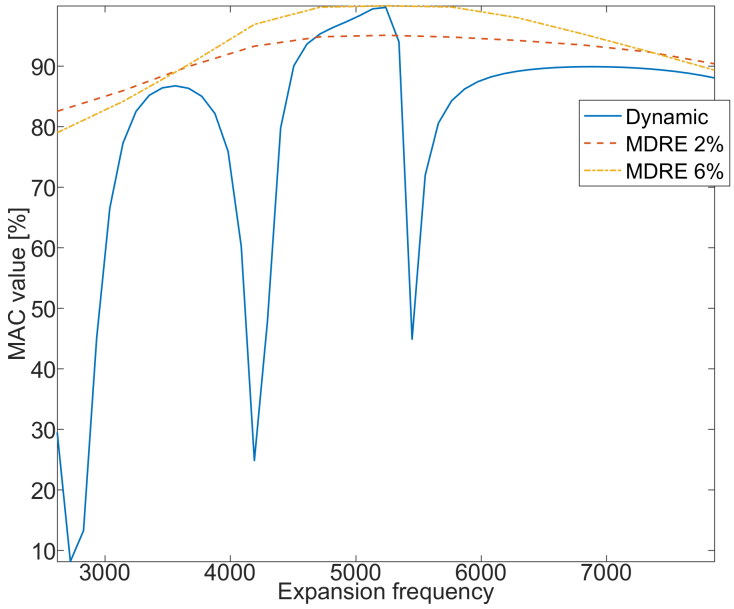


FIGURE 3.36 – Comparaison entre expansion dynamique (trait bleu plein) et expansion MDRE avec 2% d'erreur de mesure relative admissible (trait rouge pointillé) et 6% d'erreur (trait mixte vert)

Il est utile de noter que tout comme pour la méthode MDRE sans erreur admissible, l'expansion dynamique de la mesure bruitée pose des problèmes de conditionnement numérique (qui n'existaient pas sans addition de bruit). Une méthode avec multiplicateur de Lagrange a donc été mise en place pour obtenir ce résultat d'expansion dynamique.

3.4.5 Application sur un cas test industriel

Dans cette section, l'expansion MDRE est appliquée au cas test industriel de l'assemblage plateau/guide-câble exploité dans ce chapitre. Le mode #9, dont le critère MACevol a montré en figure 3.20 qu'il présentait une différence de comportement claire au niveau du guide-câble, est utilisé pour illustrer le résultat.

Le paramètre important de l'expansion MDRE est la valeur de γ qui permet de déterminer la balance entre l'erreur de mesure $\epsilon_{j,Test}$ et l'erreur de modèle $\epsilon_{j,Mod}$ (voir section 3.4.4 pour la définition de ces erreurs). Plusieurs valeurs ont été utilisées pour l'expansion et l'impact est mesuré à l'aide de deux indicateurs, à savoir l'erreur relative de mesure pour le mode j

$$\epsilon^R_{j,Test} = \frac{\sqrt{\epsilon_{j,Test}}}{\|y_{j,Test}\|} \tag{3.37}$$

et le ratio d'énergie résiduelle sur l'énergie de déformation du mode j, que l'on appellera par la suite erreur relative de modèle

$$\epsilon^R_{j,Mod} = \frac{\epsilon_{j,Mod}}{\left\{\hat{\phi}^{\perp}_j\right\}^T [K] \left\{\hat{\phi}^{\perp}_j\right\}}. \tag{3.38}$$

La figure 3.37 montre les formes étendues avec l'algorithme MDRE pour des valeurs de γ décroissantes.

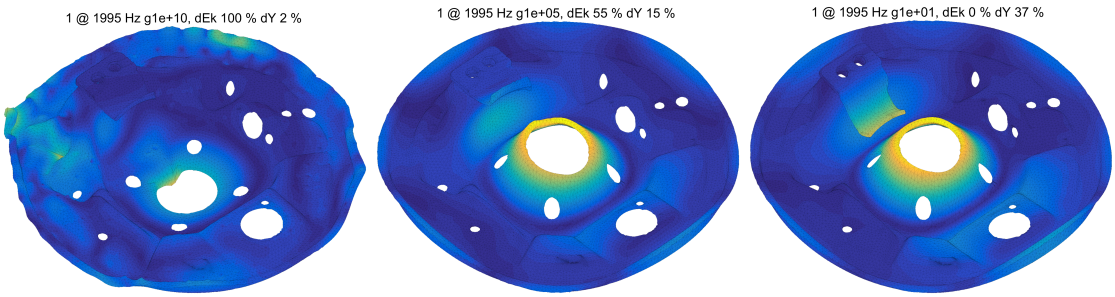


FIGURE 3.37 – Résultats d'expansion avec : $\gamma = 1e10$ (gauche), $\gamma = 1e5$ (milieu) et $\gamma = 1e1$ (droite)

Pour la valeur la plus élevée $\gamma = 1e10$, l'erreur relative de mesure est très faible $\epsilon^R_{9,Test} = 2\%$ et l'erreur relative de modèle très importante $\epsilon^R_{9,Mod} = 100\%$. La forme obtenue est contrainte à respecter très précisément les mesures aux capteurs. Le maillage de mesure étant très dense et les mesures potentiellement bruitées, cela engendre des amplitudes de déformation très importantes entre les capteurs dont les niveaux dépassent ceux des déplacements mesurés. Le résultat, bien que présentant un MAC de 99.7% avec les mesures, n'est clairement pas physique et donc pas exploitable.

Une valeur plus faible $\gamma = 1e5$ aboutit à une erreur relative de mesure plus élevée $\epsilon^R_{9,Test} = 15\%$ mais pour laquelle la valeur du MAC est de 98% donc la forme étendue reste très fidèle à la mesure. La contrainte sur le modèle étant relâchée, l'erreur relative de modèle est plus faible $\epsilon^R_{9,Mod} = 55\%$. Aucune aberration physique de déplacement n'est visible sur la forme étendue. On note, pour comparaison par la suite, que le résultat d'expansion montre le guide-câble qui se déplace dans la même direction verticale que le déplacement du trou central, en phase.

Enfin, la valeur la plus faible $\gamma = 1e1$ donne une erreur relative de mesure $\epsilon^R_{9,Test} = 37\%$ encore plus élevée et une erreur relative de modèle presque nulle. Dans ce cas de figure, le poids associé à l'erreur de mesure $\epsilon_{9,Test}$ est tellement faible que le résultat de l'expansion correspond à la forme minimisant les efforts résiduels pour une excitation à 1995Hz sans autre contrainte. La forme obtenue est très proche du mode #8 du modèle EF, le plus proche en fréquence à 1959Hz. Le MAC entre le mesure et l'observation de la forme étendue aux capteurs est alors de 87% et la comparaison entre les formes étendues pour $\gamma = 1e5$ et $\gamma = 1e1$ explique cette chute de corrélation. Sans la contrainte ($\gamma = 1e1$) de mesure, le guide-câble se déforme verticalement en opposition avec le déplacement du trou central, ce qui est corrigé en ajoutant la contrainte de la mesure ($\gamma = 1e5$).

Une analyse fine de l'erreur de mesure après expansion peut être réalisée. Pour chaque mode, l'erreur de mesure $\epsilon_{j,Test}$ étant une norme, elle peut être décomposée en une somme de contributions de chaque capteur. L'ensemble de ces contributions forment le vecteur $\{E_{j,Test}\}$ correspond au produit terme à terme (produit matriciel de Hadamard) de $([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\})$ et $[Q]([c]\{\phi_j\} - \{y_{j,Test}\})^*$. Pour des valeurs intermédiaires de γ, qui aboutissent à un compromis entre les erreurs relative de mesure d'une part et de modèle d'autre part, la visualisation de $\{E_{j,Test}\}$ met en évidence les capteurs pour lesquels autoriser l'écart avec la mesure contribue le plus à faire baisser l'erreur de modèle. En présence de bruit important ou de mesures clairement fausses, les capteurs incriminés engendrent des erreurs de modèle importantes (concentration d'efforts résiduels aux capteurs) et ceux-ci sont prioritairement *relâchés*.

Une méthode itérative sur la valeur de γ permet d'obtenir pour chaque mode une erreur relative de mesure cible $\epsilon^R_{j,Test} \approx 15\%$. Les vecteurs d'erreur de mesure $\frac{\{\sqrt{E_{j,Test}}\}}{\|y_{j,Test}\|}$ sont alors moyennés sur l'ensemble des modes et la figure 3.38 présente le classement de chaque capteur par erreur relative moyenne de mesure décroissante. Le résultat peut être directement comparé avec le retrait global de capteurs obtenu avec le critère MACevol à la figure 3.17 : les deux capteurs

clairement faux 212x et 212y sont également détectés. Les capteurs 250y et 250x s'avèrent présenter également des erreurs importantes correspondant à des comportements visiblement non physiques. Les 5 premiers capteurs détectés sont donc retirés globalement sur tous les modes identifiés.

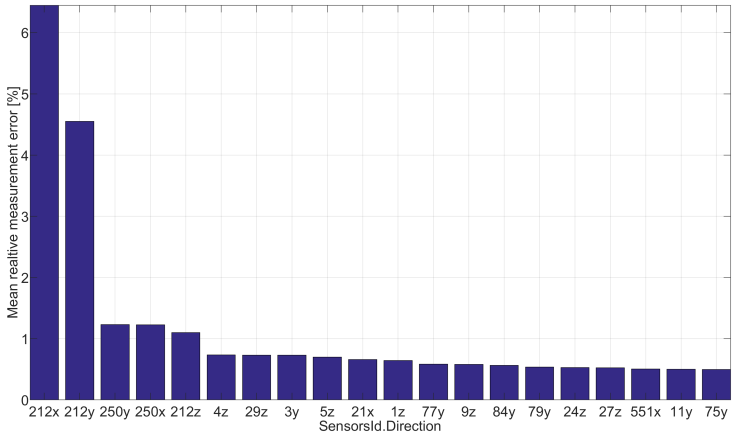


FIGURE 3.38 – Erreurs relatives moyennes de mesure par capteur, classés par ordre décroissant.

Une fois ces capteurs supprimés, l'évaluation des cartographies d'erreurs de mesure montre que le résultat est très dépendant de la valeur de γ utilisée. La figure 3.39 montre les cartographies obtenues pour le mode #9 pour 3 valeurs γ. Pour la valeur la plus faible $\gamma = 1e1$ (à gauche), l'erreur relative de mesure maximale est de 15% et l'animation montre clairement qu'il s'agit d'un bruit de mesure. La valeur intermédiaire $\gamma = 1e5$ (au milieu) présente quelques capteurs avec une erreur relative de mesure maximale plus élevée, à 40%. L'animation montre toujours des déplacements très désordonnés, avec néanmoins une erreur assez nette dans le plan au niveau du trou centrale. L'erreur relative de mesure après l'expansion avec une valeur élevée de $\gamma = 1e10$ montre finalement l'écart entre la forme minimisant les efforts résiduels à la fréquence d'expansion et la mesure : on note le relâchement du guide-câble et toujours dans une moindre mesure le déplacement dans le plan autour du trou central.

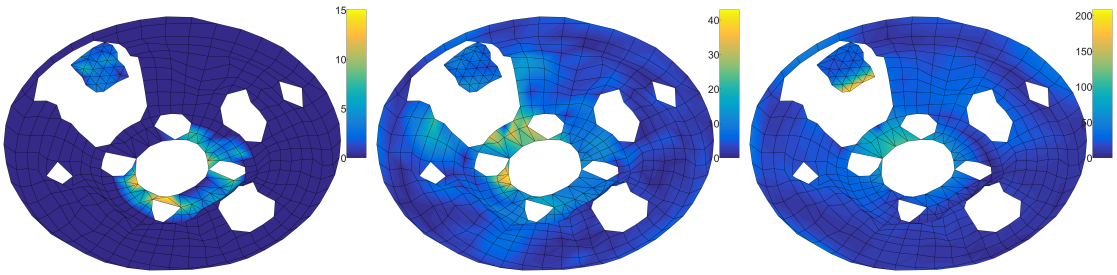


FIGURE 3.39 – Cartographie d'erreur relative de mesure par capteur pour le mode #9 avec : $\gamma = 1e10$ (gauche), $\gamma = 1e5$ (milieu) et $\gamma = 1e1$ (droite).

Analyser l'évolution de l'erreur relative de mesure en fonction de γ permet donc de cibler les zones de la mesure où le comportement entre le modèle et le système réel est différent. Il est également possible d'analyser l'erreur relative de modèle. Pour une erreur relative moyenne de mesure ciblée à $\epsilon^R_{j,Test} \approx 15\%$, l'erreur relative moyenne de modèle est $\epsilon^R_{j,Mod} = 61\%$. L'énergie résiduelle du modèle $\epsilon_{j,Mod}$ peut être vue comme la somme des énergies dans chaque élément du modèle. La figure 3.40 montre la répartition de cette énergie résiduelle dans les éléments pour le mode #9, normée de façon à ce que l'énergie maximale soit 1.

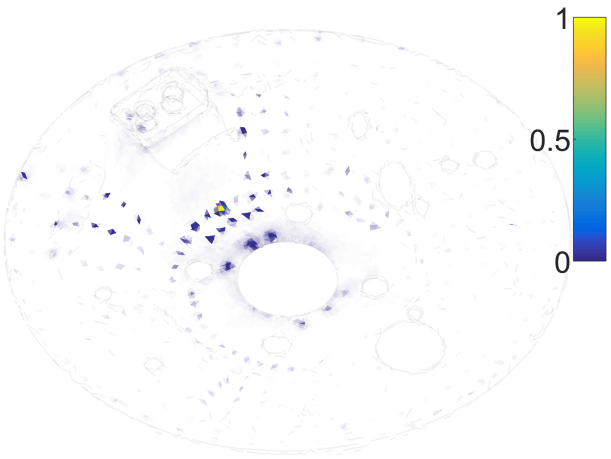


FIGURE 3.40 – Erreur relative de mesure modèle par élément.

Il apparaît clairement que l'énergie résiduelle de modèle se concentre dans ce cas au niveau de la localisation des capteurs : contraindre à suivre précisément la mesure engendre des efforts localisés très importants. Il paraît donc intéressant de différencier l'origine des énergies résiduelles entre les modes libres et l'enrichissement par les réponses aux efforts unitaires aux capteurs. A partir de l'équation (3.19), le sous-espace de réduction du modèle est composé des modes libres $[\Phi]_{NM}$ et de l'enrichissement de ces modes par les réponses aux efforts unitaires aux capteurs, que l'on notera $\left[\Phi^{\perp}\right]$.

Les DDL du modèle réduit q_R sont alors décomposés en les DDL des modes libres q_M et les DDL de l'enrichissement $q_{M^{\perp}}$ et la matrice de raideur réduite s'écrit

$$[K_R] = \begin{bmatrix} \omega_M^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{M^{\perp}}^2 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

avec ω_M les pulsations des modes libres et $\omega_{M^{\perp}}$ les pseudo-pulsations des formes d'enrichissement.

A partir de cette propriété, l'erreur de modèle peut être décomposée en

$$\begin{aligned} \epsilon_{j,Mod} &= \{R_{j,D}\}_{|M}^T \left[\backslash\omega_M^2\backslash\right] \{R_{j,D}\}_{|M} + \{R_{j,D}\}_{|M^{\perp}}^T \left[\backslash\omega_{M^{\perp}}^2\backslash\right] \{R_{j,D}\}_{|M^{\perp}} \\ &= \epsilon_{j,M} + \epsilon_{j,M^{\perp}} \end{aligned} \tag{3.40}$$

avec $\epsilon_{j,M}$ l'erreur de modèle liée aux modes libres et $\epsilon_{j,M^{\perp}}$ l'erreur de modèle liée à l'enrichissement.

En appliquant cette décomposition dans notre cas, il apparaît que l'erreur liée à l'enrichissement a une proportion très importante : l'erreur relative de modèle totale $\epsilon_{j,Mod}^R = 61\%$ se décompose en une erreur relative liée aux modes libres $\epsilon_{j,M}^R = 2.8\%$ et une erreur relative liée à l'enrichissement $\epsilon_{j,M}^R = 58.1\%$. La figure 3.41 montre la répartition de ces deux erreurs dans les éléments du modèle. La visualisation de l'erreur liée aux modes d'enrichissement en quasiment identique à l'erreur globale, étant donnée sa prédominance. L'erreur liée aux modes libre, dont les amplitudes sont plus faibles, apporte une information importante de concentration d'énergie résiduelle au niveau du guide-câble.

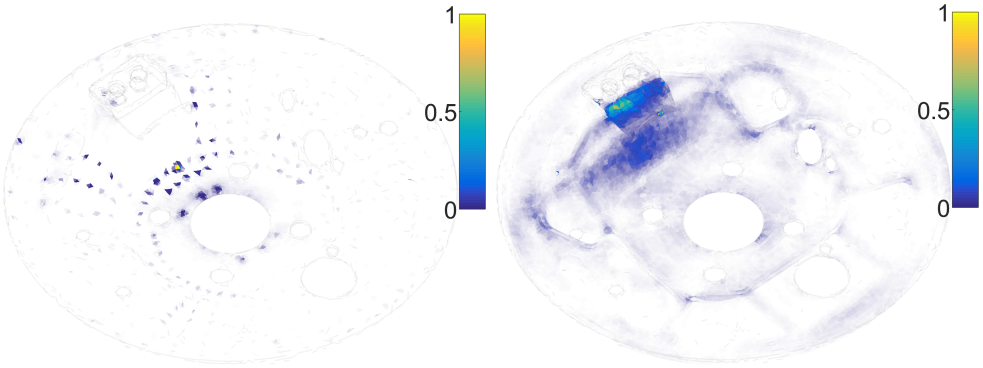


FIGURE 3.41 – Erreur relative de modèle par élément, liée aux modes d'enrichissement (gauche) et aux modes libres (droite)

Les erreurs relatives de modèle liées aux modes libres ont été calculées sur l'ensemble des modes expérimentaux étendus pour la même erreur relative de mesure cible de 15%, puis moyennées par élément. La répartition de ce résultat est montré en figure 3.42. Il met évidence de façon très claire la localisation de l'énergie résiduelle moyenne liée aux modes libres au niveau du guide-câble, confirmant la nécessité de recaler le contact.

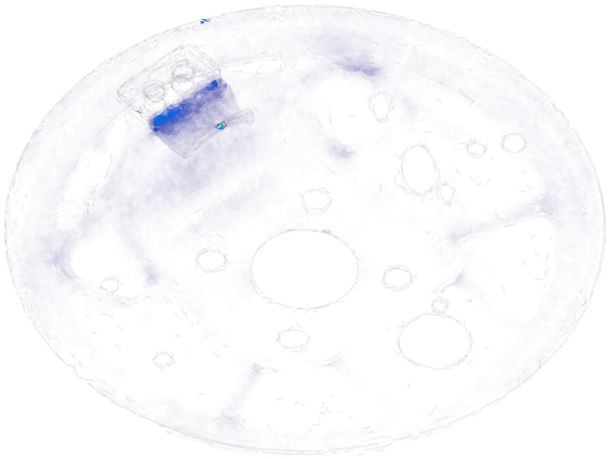


FIGURE 3.42 – Erreur relative moyenne de modèle par élement, liée aux modes libres.

Une seconde analyse d'un résultat d'expansion MDRE sur un frein complet est disponible en section 5.6.

4

Modèles paramétrés pour le recalage et la reconception

Sommaire

4.1 Introduction 90
4.2 Impact de la géométrie des composants 91
4.2.1 Topologie expérimentale et maillage respectant la géométrie réelle . . . 91
4.2.2 Impact de la géométrie sur le comportement vibratoire 95
4.3 Recalage de propriétés matériau 98
4.4 Effets de jonctions dans les assemblages 100
4.4.1 Motivation 100
4.4.2 Représentation des jonctions 101
4.4.3 Surface ou raideur : deux paramétrisations équivalentes 104
4.4.4 Multi-modèle réduit : Kn/Kt 107
4.4.5 Recalage Kn/Kt 108
4.5 Outils d'analyse du comportement dynamique des assemblages . . . 112
4.5.1 Sensibilité des modes de composant assemblé et des modes d'assemblage 113
4.5.2 Sensibilité des transferts à la modification du contact 116

4.1 Introduction

Un objectif important des analyses modales expérimentales est de valider la prédictivité des modèles dans la configuration d'essai. Si possible, la confrontation calcul/essai permet d'estimer certains paramètres de façon plus précise, on parle alors de recalage ou de calibration [55]. Alors que les procédures de type recalage de composants puis d'assemblages sont plutôt classiquement proposées, peu d'illustrations industrielles sont disponibles. Ce chapitre détaille donc une procédure décomposée en trois étapes imbriquées, illustrées en figure 4.1, où les cases rouges sont liées à mesure, les cases oranges aux processus de corrélation et les cases bleues aux différents recalages des modèles. L'analyse des difficultés rencontrées, liées aux essais ou à la modélisation de systèmes de freinage, permet alors de proposer un protocole de validation simple et précis qui pourrait être mis en oeuvre de façon plus systématique.

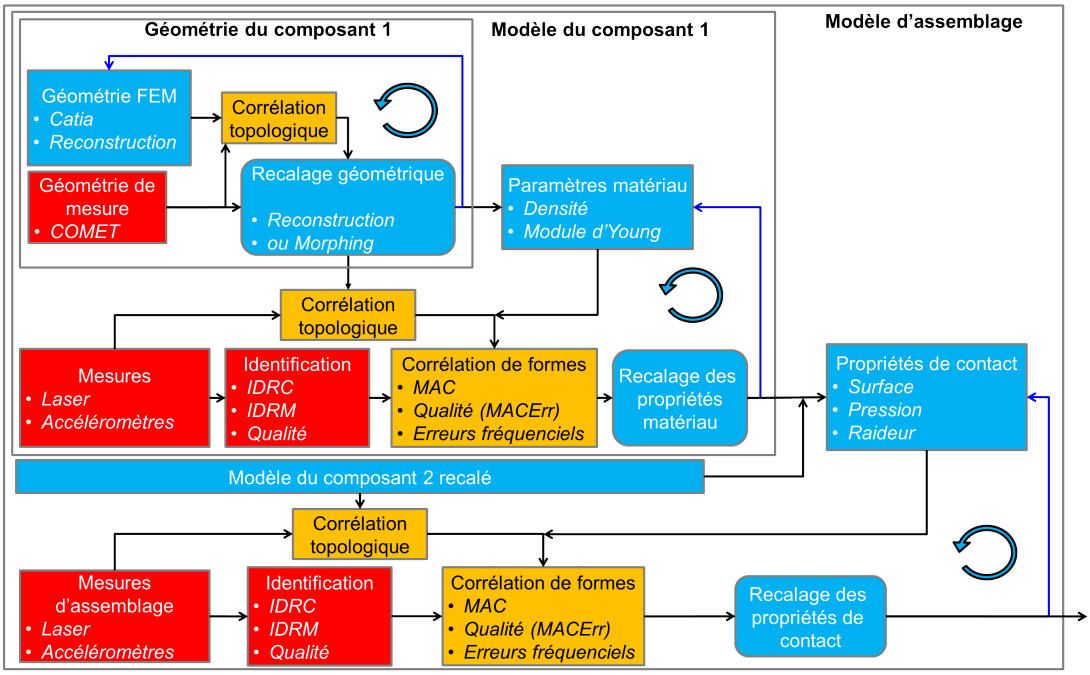


FIGURE 4.1 – Processus de recalage : géométrie composant, propriétés matériau de composant, propriétés de contact des assemblages

Tout d'abord, au niveau d'un composant seul, la précision sur la géométrie s'est avérée être une source d'erreur critique et est traitée en premier. A partir d'un nuage de points mesurés, décrivant la géométrie d'un composant réel, on peut soit reconstruire directement un volume fermé qui sera ensuite maillé, soit réaliser un morphing permettant de déformer le modèle éléments finis nominal de façon à ce que sa surface épouse au mieux le nuage de points. Cette étape de recalage géométrique est illustrée en section 4.2 sur un plateau de frein : les écarts de géométrie entre le modèle nominal et la topologie mesurée sont évalués et l'influence de ces écarts sur le comportement vibratoire est établi.

Une fois qu'une géométrie fidèle au système réel est obtenue, les propriétés matériau sont recalées. La majorité des composants de frein sont soit des pièces de fonderie, soit des tôles embouties. L'hypothèse de matériaux homogènes et isotropes a donc été retenue pour le recalage : la densité est trouvée à partir du poids de la pièce réelle et du volume du modèle, et le module d'Young est optimisé de façon à minimiser les écarts entre les fréquences modales. La section 4.3 précise cette étape de recalage des propriétés matériau. Elle montre en particulier que la non prise en compte de l'étape précédente de recalage en géométrie introduit un biais significatif dans l'estimation des paramètres.

Lorsque les composants sont tous recalés en géométrie et en propriétés matériau, l'étape

suivante correspond au recalage des assemblages. On précise que celui-ci peut devoir être fait de façon hiérarchique en incluant plusieurs niveaux de sous-assemblages. La différence fondamentale entre un composant et un assemblage est l'existence de surfaces en contact. La première proposition de la section 4.4 est qu'il peut être assez équivalent de paramétrer les contacts en tant que surface variable ou en tant que densité surfacique de raideur variable. La section aborde ensuite la réduction de modèle pour permettre des calculs de recalage en des temps raisonnables. Le recalage des propriétés de liaison est finalement abordé à travers l'exploitation de déformées modales expérimentales. Une fonction objectif classique basée sur les appariements de fréquence peut être problématique, particulièrement en présence de croissements de modes. Une autre fonction objectif, correspondant à celle utilisée pour l'expansion MDRE (introduite en section 3.4.4) est beaucoup plus régulière et facilite la sélection des paramètres optimaux.

Le recalage appliqué au cas test considéré (assemblage plateau/guide-câble) a mis en valeur la problématique récurrente des croisements de modes. Plus spécifiquement, les modes de différents composants peuvent interagir de façon variable et la section 4.5 propose des outils nouveaux pour analyser les modes de composants intégrés dans un système.

4.2 Impact de la géométrie des composants

La première étape du processus de recalage décrit dans la figure 4.1 est l'ajustement de la géométrie des composants. La section 4.2.1 présente les techniques d'exploitation d'une mesure de topologie de surface en vue d'obtenir un modèle maillé respectant cette topologie. L'approche CAO inverse puis remaillage est utilisée au final pour des questions de disponibilité des outils, mais présente un certain nombre de limitations. Une revue des approches de morphing (déformation du maillage EF nominal) est par ailleurs réalisée.

La section 4.2.2 évalue ensuite l'impact des écarts de topologie sur le comportement vibratoire en comparant les fréquences et les déformées modales obtenues avec un modèle nominal d'une part et avec un modèle reconstruit d'autre part.

4.2.1 Topologie expérimentale et maillage respectant la géométrie réelle

Chez CBI, les mesures de géométries 3D sont réalisées avec le matériel COMET L3D développé par Steinbichler : un scanner 3D à lumière structurée, qui permet d'obtenir une précision de l'ordre de $10\mu m$. La pièce mesurée, ici un plateau, est fixée sur une plaque tournante qui permet de la faire pivoter suivant deux axes de rotation. Sur la figure 4.2, on peut voir le dispositif de déplacement du plateau (à gauche) et le système de mesure (à droite).

FIGURE 4.2 – Mise en position de la pièce sur le plateau tournant (à gauche), système de mesure COMET L3D (à droite)

Ce dispositif est composé d'un projecteur et d'une caméra. A chaque position de la pièce, une succession de franges lumineuses sont projetées sur la pièce, permettant de récupérer un nuage

de points. Toutes les vues sont finalement groupées pour obtenir un nuage de point complet décrivant la surface de la pièce.

Pour faire sentir le principe de fonctionnement de cette méthode de mesure, on peut simplifier l'explication du fonctionnement par rapport aux techniques plus poussées réellement utilisées. La figure 4.3 présente le principe : chaque pixel de la caméra correspond à une droite dans l'espace et quand ce pixel voit une frange, qui correspond à un plan dans l'espace, l'intersection du plan avec la droite permet de conclure sur la position dans l'espace du point. Pour plus de détails sur les méthodes, une revue des différents schémas de projection et des algorithmes de post-traitement est disponible en [62].

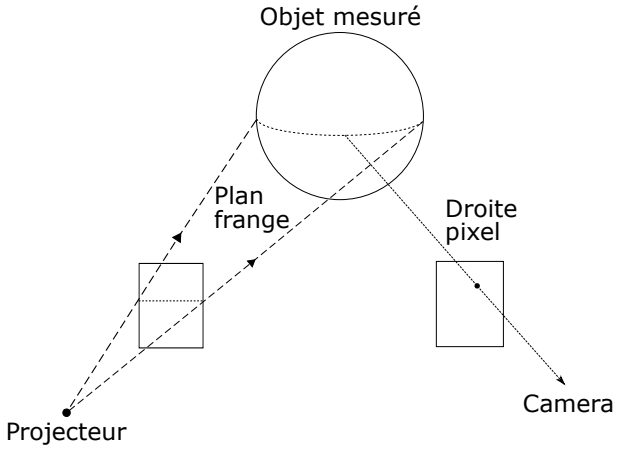


FIGURE 4.3 – Principe de fonctionnement d'un scanner 3D à lumière structurée

La mesure du plateau aboutit donc à un nuage de point très dense (242 766 points en surface de la pièce dans notre cas), montré à gauche de la figure 4.4. Pour comparer l'écart avec la surface nominale du modèle éléments finis (114 426 noeuds en surface), visible à droite de la figure 4.4, la surface de ce modèle est superposée au nuage de points en utilisant la procédure ICP présentée en section 3.2.2.

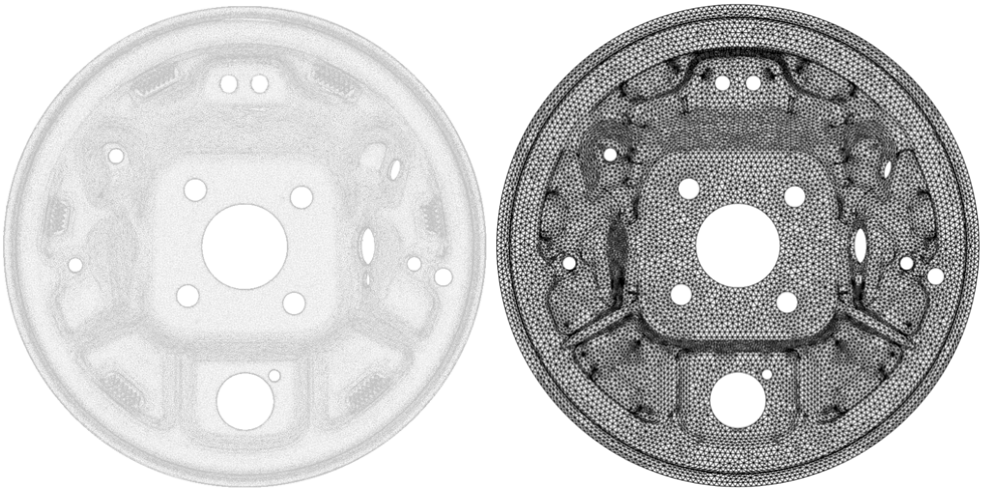


FIGURE 4.4 – Surface mesurée (à gauche) et surface nominale du modèle éléments finis (à droite)

Même avec un très grand nombre de points comme c'est le cas ici, le calcul de la superposition ne prend que 2 minutes avec 15 itérations (l'arrêt étant fixé pour une évolution de l'erreur résiduelle relative inférieure à 10^{-8}, la cinquième itération ne présentait plus qu'une évolution de 10^{-4}). La surface la moins dense (modèle éléments finis) est déplacée en considérant l'autre (le nuage de points mesuré) fixe.

L'erreur moyenne obtenue est de 0.33 mm avec une erreur maximale de 2.11 mm. La carte de l'erreur résiduelle par rapport à la surface nominale est présentée en figure 4.5. Cette pièce est obtenue par emboutissage et la carte d'erreur montre que toutes les zones planes sont globalement proches du modèle mais des écarts très importants, de l'ordre de 1 à 2 mm pour une plaque d'épaisseur 2mm, sont présents au niveau des zones fortement déformées (congés, rainures et surfaces inclinées par rapport à la direction de l'emboutissage).

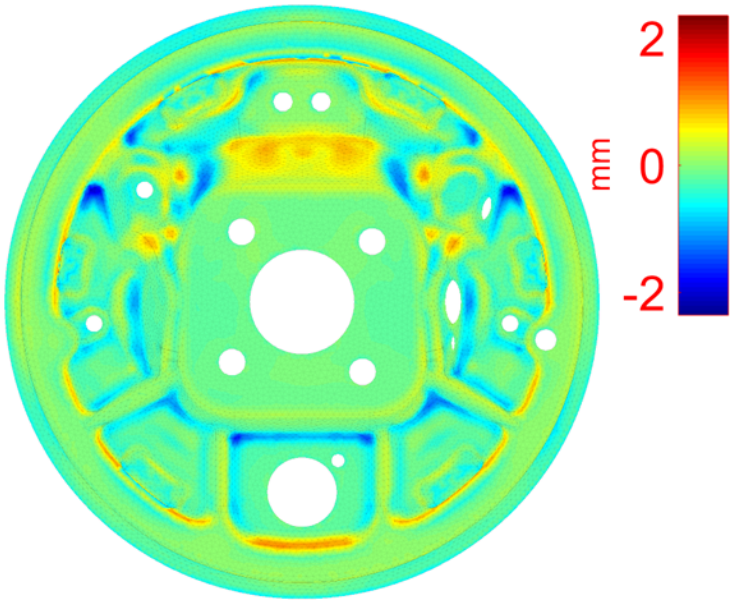


FIGURE 4.5 – Superposition et écart entre la surface nominale et la surface mesurée

Pour pouvoir évaluer l'impact de cet écart de topologie de surface, le nuage de points n'est pas suffisant et un modèle respectant la géométrie réelle doit être construit. Deux méthodes pour obtenir un modèle avec une géométrie pertinente ont été envisagées.

La première classe de méthodes, dite CAO inverse, reconstruit un volume directement à partir du nuage de points mesuré (pas besoin du modèle éléments finis nominal) et maille le volume obtenu. L'inconvénient de ces méthodes est que comme tout le modèle découle de la mesure, il faut s'assurer qu'il n'y a pas de zone non mesurée et que tout la topologie de surface est réellement mesurable (les perçages ou les zones non visibles ne sont typiquement pas accessibles à la mesure).

De plus, même si la technique évolue très vite, le retour d'expérience de l'utilisation du logiciel de reconstruction montre que dans certains cas, des artefacts issus de la mesure posent des problèmes pour la fermeture des volumes. Cela engendre des retouches manuelles, un temps supplémentaire non négligeable et un niveau de formation assez important sur l'outil est nécessaire. Dans le cadre de cette thèse, CBI ayant fortement progressé sur l'utilisation du logiciel Geomagic, les résultats présentés utilisent cette solution.

Une seconde classe de méthodes propose d'utiliser le modèle éléments finis existant comme base de départ, de déformer son maillage en surface pour épouser au mieux le nuage de point mesuré et de propager cette déformation dans le volume. Ces méthodes appartiennent aux modifications de maillage de type morphing ou "mise en correspondance non rigide" ("non-rigid registration"). Elles présentent plusieurs d'intérêts :

— Les zones non mesurées ou non mesurables peuvent être approchées par le modèle qui "suit" la déformation imposée par les zones mesurées.
— Le volume étant fermé initialement, les artéfacts de mesure n'ont qu'un effet très limité.
— La topologie des matrices masse et raideur est inchangée entre le modèle nominal et le modèle recalé en géométrie : cela permet par exemple d'envisager de faire ressortir à

partir de plusieurs mesures des zones de fortes variations de géométrie, voire d'intégrer ces variations dans un modèle probabiliste exploitant ces dispersions.

Une difficulté de ces méthodes est cependant de garantir la qualité du maillage après morphing, comme montré dans [63].

La plupart des algorithmes de mise en correspondance de surfaces [64, 65] peuvent être décomposés en trois étapes : le positionnement rigide initial, le choix des fonctions objectifs (déplacement rigide ou non, distance au nuage de points, minimisation de la déformation des mailles) et enfin la stratégie d'optimisation. Ces méthodes ne traitent cependant que de la mise en correspondance des surfaces et pas de la propagation de la déformation de surface dans le volume ni de la qualité de maillage du point de vue du calcul numérique.

D'autres méthodes sont focalisées sur la propagation dans le volume d'une déformation de la surface, tout en minimisant la dégradation de la qualité du maillage comme par exemple l'algorithme FEMWarp [66], adapté à des éléments tetraédrique ou hexaédrique. Les algorithmes linear simplex et triharmonic Radial Basis Function [67] présentent l'avantage de ne pas reposer sur le maillage mais sur un champ de déformation dans le volume : il est donc adapté directement à tout type d'éléments et la méthode RBF semble donner de très bons résultats en terme de qualité de maille sur les exemples fournis. L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles reposent directement sur la qualité du déplacement de la surface : elles semblent très bien adaptées à de la modification de maillage où le déplacement de la surface est contrôlé et imposé, mais moins directement adaptées au recalage de topologie.

Certaines contributions, notamment dans le domaine médical proposent de coupler les deux approches. Dans [68], la transformation de la surface est d'abord traitée par succession de projections et de lissages sur le nuage de point jusqu'à convergence, de façon à obtenir une surface avec des éléments de surface les moins dégradés possibles. La propagation est ensuite effectuée avec la méthode RBF en utilisant cette fois des fonctions gaussiennes (plutôt que triharmoniques pour [67]). La limitation de cette technique est qu'il faut s'assurer d'être suffisamment proche de la géométrie finale pour que la première étape de projection de la surface ait un sens. Dans notre exemple, certaines zones du plateau présentent des écarts très importants après le positionnement rigide et des parties de la peau supérieures du modèle seraient projetées sur la peau inférieure, engendrant des distorsions et un résultat inutilisable.

Enfin, des méthodes globales permettent de déformer le volume interne et la surface en même temps [69, 70]. Le découpage diffère suivant les méthodes mais globalement, l'espace englobant le modèle est décomposé en plusieurs cubes dont les différents noeuds, associés à des fonctions d'interpolation, définissent un champ de déplacement de tout le volume. Le modèle est d'abord déplacé classiquement de façon rigide pour faire correspondre au mieux les deux surfaces puis itérativement, les noeuds de contrôle sont autorisés à se déplacer engendrant une déformation du maillage. L'objectif pour chaque itération est de réduire l'écart entre la surface mesurée et la surface du modèle, tout en minimisant la déformation de chaque cube élémentaire définissant la grille de contrôle. Un intérêt fort mis en avant dans les résultats présentés est qu'en autorisant la déformation de façon progressive, des écarts de topologie initiaux importants peuvent être mieux traités.

Dans les cas où la qualité finale du maillage résultant du morphing ne serait pas satisfaisante, des algorithmes existent également, travaillant sur le déplacement des noeuds dans le volume, pour l'améliorer [71, 72].

Etant donné que ce sujet n'était pas central et vue la relative complexité de l'algorithme qui semble le plus pertinent dans notre cas [70], celui-ci n'a pas été mis en place mais cela reste une perspective très intéressante pour se rendre robuste à la prise en compte de zones non mesurables et donc non fidèlement reconstruites ainsi que pour envisager l'introduction de la variabilité de la géométrie dans un modèle robuste.

Un volume dont la surface est fidèle à la mesure est donc finalement obtenu directement à

partir du nuage de points en utilisant le logiciel Geomagic. Le résultat de cette reconstruction du plateau est montré à gauche de la figure 4.6. Ce volume est ensuite maillé avec les mêmes caractéristiques de mailles que pour le modèle EF nominal (tétraèdres quadratiques, longueur caractéristique minimale de 2mm et maximale de 3mm).

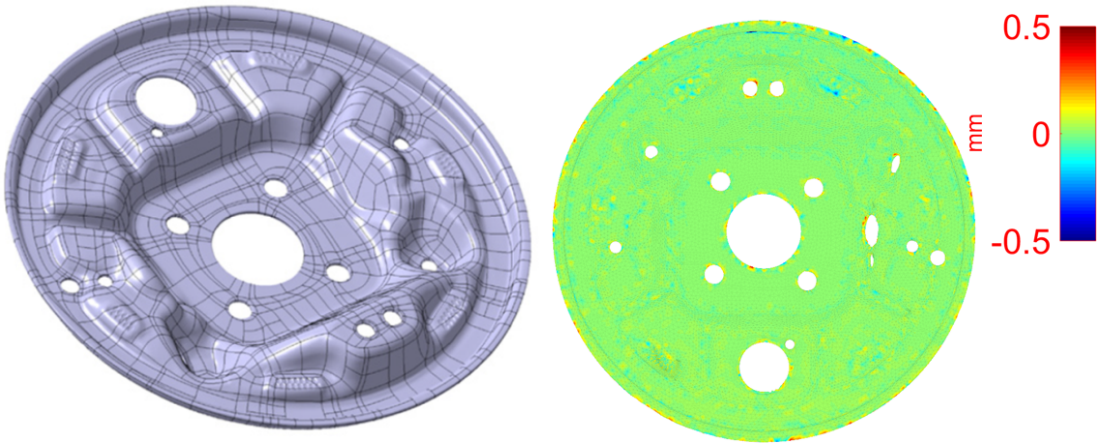


FIGURE 4.6 – Volume reconstruit (à gauche) et superposition et écart entre la surface du modèle reconstruit et la surface mesurée (à droite)

Une vérification de la qualité de reconstruction a été effectuée et montre que la surface du modèle reconstruit est en effet très fidèle avec le nuage de point mesuré, comme montré à droite de la figure 4.6. En plus de l'écart en surface, les volumes du modèle nominal et du modèle reconstruit ont été comparés : celui de la géométrie reconstruite est 11% plus faible que celui du modèle nominal.

4.2.2 Impact de la géométrie sur le comportement vibratoire

Pour évaluer l'influence du recalage géométrique sur les propriétés vibratoires du modèle, les mêmes propriétés matériau (acier standard) sont appliquées aux deux modèles (le nominal et le reconstruit). Les modes propres des deux modèles sont alors calculés, fournissant les fréquences propres et les déformées modales.

Pour comparer les déformées modales issues des deux modèles, comme les maillages sont différents, il est tout d'abord nécessaire de définir une observation commune. Une solution simple est de considérer un des modèles comme un maillage de test. Ainsi, les degrés de liberté du second modèle sont observés selon ceux du premier, de façon analogue à des capteurs de mesure. On obtient alors deux lots de déformées modales cohérents qui peuvent être comparés avec le MAC. L'inconvénient de cette méthode est que le nombre de noeuds est très important et donc le temps de génération de la matrice d'observation est assez long (2 minutes dans notre cas). On note également que pour certaines zones déplacées (congés) la pertinence de la comparaison n'est pas claire, en raison notamment de la distance importante de la projection même si la rotation de la surface est prise en compte dans l'observation. Cet aspect ne sera pas abordé ici.

Pour accélérer cette étape tout en gardant une bonne qualité de corrélation, un algorithme de positionnement de capteurs est utilisé sur un des deux modèles : ils doivent permettre de voir et différencier tous les modes avec un nombre restreint de capteurs qui sont alors utilisés pour observer le second modèle, avec un temps de calcul très faible.

L'algorithme MSeq (Maximum Sequence) [59] choisit itérativement des capteurs à partir d'une famille de vecteurs, ici composée des modes de la structure : $[T^0] = [\phi_1 \cdots \phi_N]$. A chaque itération k, le capteur qui présente la plus grande amplitude moyenne sur tous les formes de la

famille de vecteurs est choisit

$$i_{k+1} = \arg\max_m \sum_j \left| c_m T_j^k \right| \tag{4.1}$$

La famille est alors modifiée en lui soustrayant une combinaison linéaire $\left\{\tilde{T}^k\right\}$ des vecteurs qui la constituent, de façon à ce que tous les vecteurs de la nouvelle famille présentent une composante nulle selon le capteur sélectionné. La combinaison linéaire est obtenue par une somme de chaque vecteur du sous-espace $\left[T^k\right]$ pondérée par l'amplitude observée au capteur i_{k+1} sélectionné, soit

$$\left\{\tilde{T}^k\right\} = \left[T^k\right] \left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\}^T \tag{4.2}$$

et cette combinaison linéaire est normalisée pour que sa composante selon le capteur i_{k+1} soit 1. Le vecteur de combinaison linéaire considéré est donc

$$\left\{\hat{T}^k\right\} = \left\{\tilde{T}^k\right\} \left(c_{i_{k+1}} \tilde{T}^k\right)^{-1} = \left[T^k\right] \left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\}^T \left(\left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\} \left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\}^T\right)^{-1} \tag{4.3}$$

Finalement, il est soustrait à chaque vecteur de la famille $\left[T^k\right]$ après avoir été multiplié par $\left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\}$ de façon à ce que la nouvelle famille n'ait que des composantes nulles selon le capteur i_{k+1} : $\left\{c_{i_{k+1}} T^{k+1}\right\} = 0$. L'écriture matricielle permettant d'obtenir la nouvelle famille s'écrit

$$\begin{aligned} \left[T^{k+1}\right] &= \left[T^k\right] - \left\{\hat{T}^k\right\} \left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\} \\ &= \left[T^k\right] - \left[T^k\right] \left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\}^T \left(\left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\} \left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\}^T\right)^{-1} \left\{c_{i_{k+1}} T^k\right\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

et on obtient ainsi une nouvelle famille de rang N-k qui ne contient aucune information sur les capteurs déjà positionnés. On peut itérer ainsi au maximum $Nfois$ (le nombre de mode au départ), le rang du sous-espace est alors nul. On place donc autant de capteurs que le rang du sous-espace initial $[T^0]$.

Cette méthode est mise en place pour notre cas test sur les 44 premiers modes du modèle nominal. 44 capteurs sont donc sélectionnés et les déformées modales du modèle reconstruit sont observées selon ces capteurs. Toutes ces étapes, de la sélection des capteurs à l'observation du modèle reconstruit, ne prennent que 10 secondes et les deux lots de déformées modales ne sont plus exprimés que sur 44 capteurs.

Une façon de confirmer que le résultat du placement de capteurs permet de bien séparer les modes est d'évaluer l'autoMAC : le MAC entre un lot de déformées modales et lui-même. La figure 4.7 montre à gauche le positionnement et l'orientation des capteurs sélectionnés par l'algorithme. On remarque que leur positionnement correspond à une certaine intuition, notamment en observant la répartition très régulière au niveau du trou central et du pourtour extérieur qui semble bien adaptée pour dissocier les différents modes à lobes hors-plan très présents pour ce composant. A droite de cette figure, l'autoMAC confirme que l'on parvient très bien à dissocier les modes les uns des autres : les valeurs de MAC des termes hors diagonale sont très faibles, avec une valeur maximale de 25% entre les modes #1 et #11.

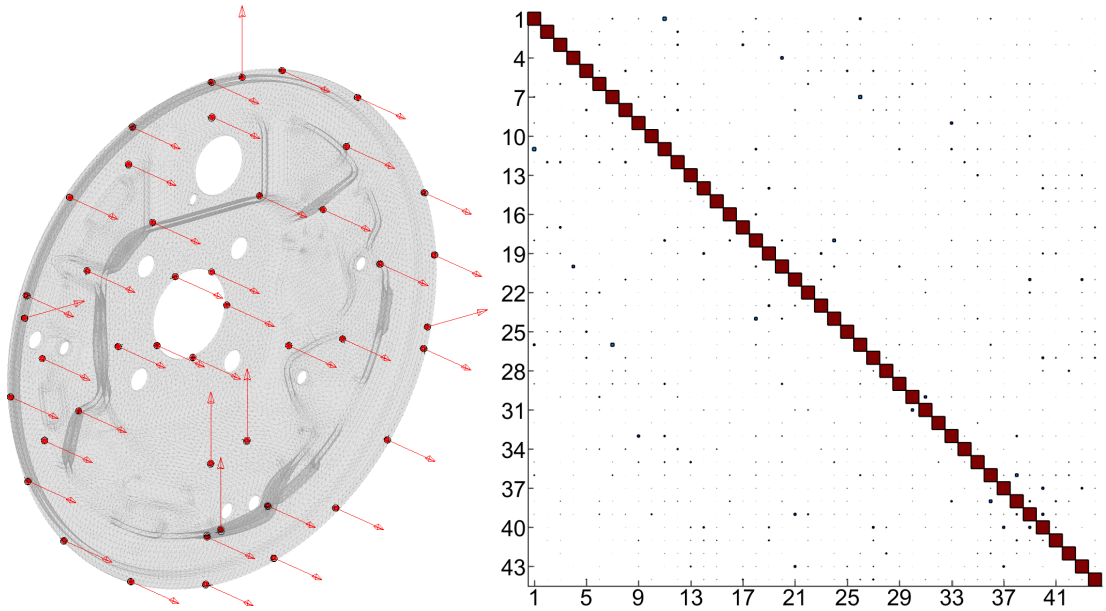


FIGURE 4.7 – Pertinence du placement de capteur : Visualisation des 44 capteurs sélectionnés (à gauche) et l'autoMAC (à droite)

Le MAC entre les déformées du modèle nominal et celles du modèle reconstruit observées aux capteurs sélectionnés par l'algorithme MSeq est affiché à gauche de la figure 4.8. Les formes sont bien corrélées jusqu'au mode 17 (3200Hz), sauf pour les modes 9 et 11 qui sont sous 70%. Cependant, comme ces modes sont proches en fréquence, un croisement de mode est suspecté d'être la cause de cette mauvaise corrélation : les trois modes peuvent décrire quasiment le même sous-espace entre les deux modèles (voir l'explication sur les modes croisés en section 3.2.3). Au-delà de 3200 Hz, quelques modes sont bien corrélés, mais beaucoup d'entre eux sont clairement différents. En ce qui concerne les fréquences, le diagramme à droite de la figure 4.8 montre que pour les modes appairés (MAC>70%), le modèle éléments finis initial présente des fréquences plus élevées (en moyenne de 2%).

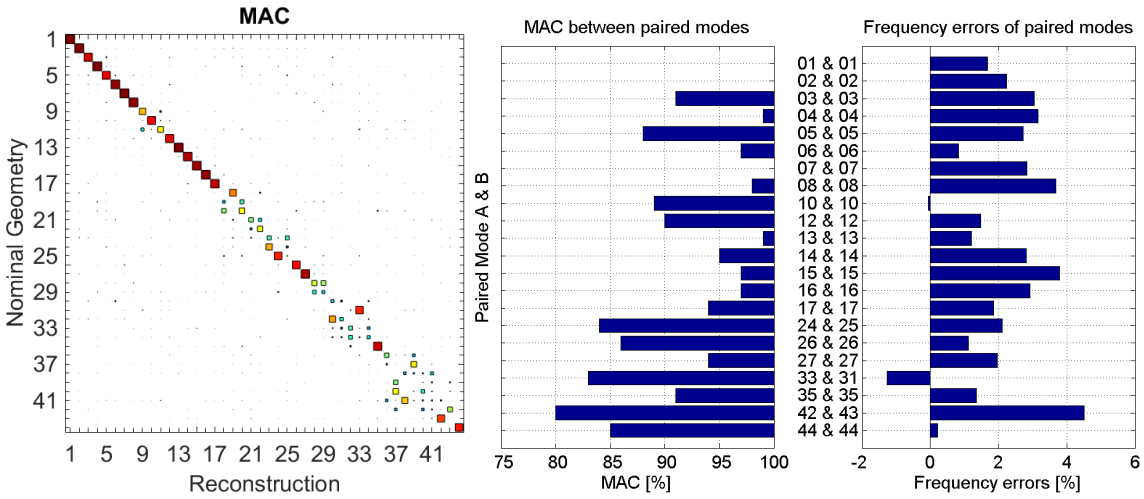


FIGURE 4.8 – Corrélation entre les modes propres du modèle nominal et du modèle reconstruit : MAC (à gauche) et MAC + écarts relatifs en fréquence des modes appairés (à droite)

Les différences entre le modèle nominal et le modèle reconstruit sont donc significatives et illustrent clairement le besoin de recalage de la géométrie en amont du recalage des propriétés matériau.

4.3 Recalage de propriétés matériau

Une fois la géométrie recalée, l'étape suivante est d'ajuster les paramètres matériau du composant. La densité est considérée dans en premier temps. Puisque le volume est maintenant jugé comme très représentatif du volume réel de la pièce, une simple mesure de la masse réelle est faite et la densité est calculée en effectuant le ratio de la masse mesurée sur le volume du modèle éléments finis reconstruit.

Dans un deuxième temps, le recalage des propriétés élastiques, à savoir ici le module d'Young (nous ne considérons que des matériaux métalliques isotropes) est réalisé. Etant donné que la géométrie est très fidèle et que la modification uniforme du module d'Young ou de la densité n'engendre sur les fréquences des modes propres qu'une dilatation linéaire, on peut considérer au niveau du composant seul que les modes propres sont appairés directement en les considérant dans l'ordre selon leur fréquence (il faut néanmoins s'assurer que tous les modes numériques sont bien identifiés).

Dans le cas du plateau des transferts colocalisés ont été mesurés en utilisant un marteau et un accéléromètre. Comme montré à gauche de la figure 4.9, les trois points d'excitations sont choisis pour permettre une bonne identification de chaque fréquence (contribution importante).

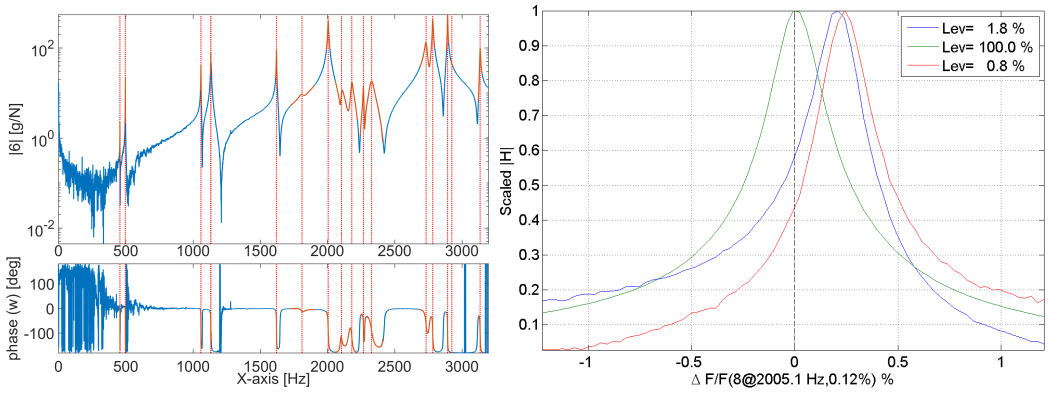


FIGURE 4.9 – Identification sur un transfert colocalisé (à gauche) et problème de variation de fréquence lié à l'ajout de masse (à droite)

L'image de droite illustre que l'effet d'ajout de masse lié au déplacement de l'accéléromètre est important pour certains modes. Ici, pour le mode 8 à 2005Hz, on trouve une évolution de fréquence grande devant la largeur des pics. Il n'est donc pas possible d'identifier simultanément les trois transferts qui présentent des pôles trop significativement différents.

Pour pallier à ce problème, une optimisation de tous les pôles est réalisée pour chaque transfert et une dispersion de l'identification des fréquences peut être fournie (en ne considérant pour chaque mode que les transferts présentant une contribution suffisante).

Des méthodes de mesure sans-contact, comme le vibromètre laser, seraient préférables pour des composants légers comme celui-ci, mais elles sont difficilement utilisables en pratique puisque beaucoup de composants sont amenés à être testés en usine et que c'est un moyen de mesure plus complexe à mettre en place.

En faisant l'hypothèse que tous les modes sont appairés (pas de croisement de modes ou de modes manquants) et que l'influence de la masse ajoutée est négligeable, on définit la fonction coût permettant d'optimiser le module d'Young comme la moyenne de l'erreur relative entre les fréquences

$$J(E) = \frac{1}{N} \sum_i \left(\frac{|\Delta f_i|}{f_i}(E) \right) \tag{4.5}$$

Etant donné que les pièces sont considérées composées d'un mono-matériau isotrope, le module d'Young E est directement en facteur de la matrice de raideur, la densité ρ est directement

en facteur de la matrice de masse et les fréquences des modes sont proportionnelles à $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Sans calculer de nouveau les modes du composant, on peut chercher le facteur α qui minimise la fonction coût

$$\alpha = \arg\min \left(\sum_i \frac{|\alpha f_{num,i} - f_{exp,i}|}{f_{exp,i}} \right) \tag{4.6}$$

et on sait que l'on a la relation

$$\alpha = \sqrt{\frac{E_2/E_1}{\rho_2/\rho_1}} \tag{4.7}$$

avec E_1, E_2 les modules d'Young (nominal et recalé) et ρ_1, ρ_2 les densités (nominale et recalée). Connaissant l'ancienne densité, la nouvelle densité recalée et l'ancien module d'Young, on en déduit directement le nouveau module d'Young

$$E_2 = \alpha^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} E_1 \tag{4.8}$$

La figure 4.10 à gauche illustre l'évolution de la fonction coût de l'équation (4.5) appliquée au modèle avec la géométrie nominale et au modèle avec la géométrie reconstruite. A droite de cette figure, les erreurs relatives en fréquence associées à ces deux modèles pour chacun des modes sont détaillées. Tout d'abord, il apparait clairement que ces erreurs sont notablement plus faibles pour le modèle reconstruit. L'erreur moyenne est de 0.8% au lieu de 1.3 %. L'écart type de ces erreurs relatives est également plus faible (0.6% au lieu de 0.9%). De plus, l'exemple montre que la non prise en compte du recalage en géométrie mène à une estimation du module d'Young biaisée. En effet, en considérant le modèle nominal, on trouve E=189 GPa au lieu de la valeur plus réaliste de 196 GPa en considérant le modèle reconstruit.

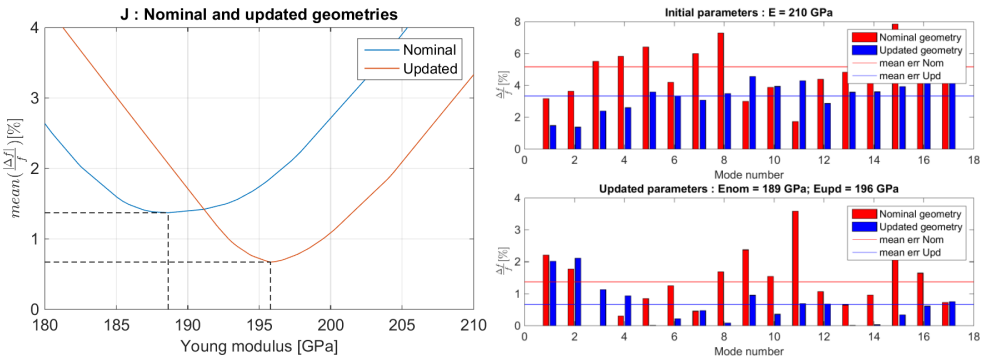


FIGURE 4.10 – Fonction coût pour le modèle nominal et le modèle recalé (à gauche) ; Pour les deux modèles : erreur relative en fréquence pour chaque mode entre avant (en haut à droite) et après (en bas à droite) le recalage du module d'Young + erreur moyenne

Plusieurs essais expérimentaux de dispersion en production menés chez CBI montrent que, au niveau du composant plateau, la dispersion en fréquence entre plusieurs composants pris aléatoirement en sortie de chaîne de production est typiquement de +/- 2%. En premier ordre, le recalage du plateau sur une mesure spécifique peut donc être considéré comme représentatif de l'ensemble des composants (recalage déterministe).

A ce stade, les deux étapes que sont le recalage de géométrie et le recalage des propriétés matériau permettent donc d'obtenir des modèles de chaque composant avec une grande confiance sur leur caractère prédictif. Ces composants nominaux dans l'assemblage doivent alors être remplacés par leur version recalée.

Une autre problématique liée à la méthode de reconstruction choisie doit être soulignée. Le modèle est recalé en géométrie par une reconstruction directe à partir du nuage de points puis par la construction du maillage plutôt que par un morphing du modèle nominal. Comme un

nouveau maillage est défini pour le composant recalé, toutes ses interactions avec le reste du système, via les surfaces de contact, doivent être redéfinies lorsqu'il est substitué à sa version nominale. Ainsi, la stratégie mise en place pour remplacer un composant nominal par sa version recalée dans l'assemblage est de

— superposer le nouveau composant sur l'ancien de façon à le positionner dans le repère de l'assemblage
— détecter autour de chaque ancien contact les surfaces à reconnecter
— remplacer l'ancien composant par le nouveau et recréer des contacts équivalents

La méthode de modification du maillage nominal par une méthode de morphing pourrait être de nouveau intéressante pour simplifier cette étape. Il est possible d'envisager un morphing interdisant le déplacement des noeuds concernés par un contact dans l'assemblage, ce qui permettrait de ne pas avoir à redéfinir les contacts, dont le maillage est souvent optimisé dans le modèle nominal pour répondre aux exigences du calcul (contacts plans parfaits, densité de maille maitrisée, contacts compatibles...)

4.4 Effets de jonctions dans les assemblages

4.4.1 Motivation

Une fois que la géométrie et les propriétés matériau sont recalées au niveau des composants, la dernière source d'erreur de corrélation se situe au niveau des contacts. Pour motiver l'intérêt de cette section, la figure 4.11 montre le résultat de corrélation pour un assemblage plateau/guide-câble (on précise que le plateau est différent de celui utilisé pour les sections précédentes).

Une analyse modale expérimentale a été réalisée avec un vibromètre 3D à balayage : les modes expérimentaux ont été identifiés et la géométrie du maillage de test superposée au modèle éléments finis (voir à gauche de la figure 4.11). On note que le MAC est loin d'être diagonal et certains modes expérimentaux ne sont corrélés avec aucun mode numérique, alors que le plateau seul a été préalablement recalé en géométrie et propriété matériau.

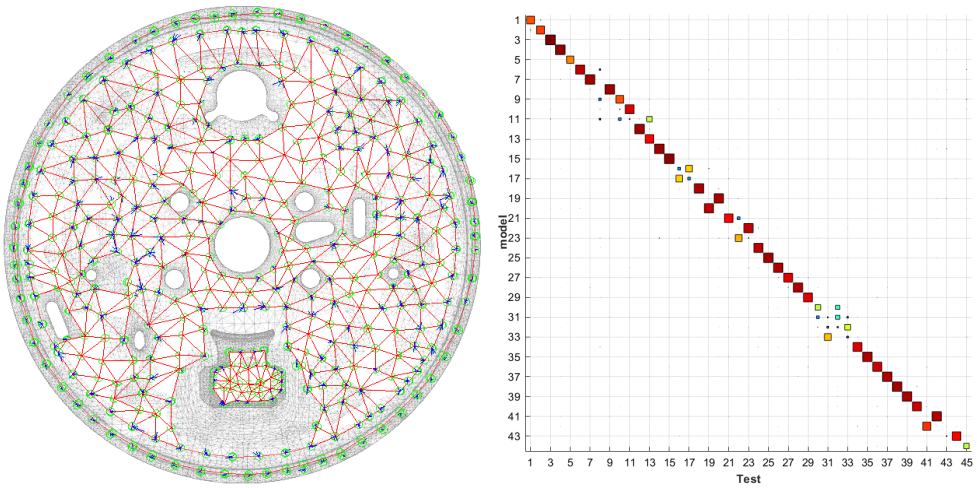


FIGURE 4.11 – Superposition du maillage de test sur le modèle éléments finis recalé en géométrie et propriétés matériau (à gauche) ; MAC entre les déformées modales identifiées et les déformées numériques observées selon les capteurs (à droite)

Une mesure de dispersion expérimentale de ce sous-assemblage a été effectuée à partir de plusieurs sous-assemblages en sortie en chaîne de production. Elle montre une dispersion pour certains modes allant jusqu'à +/- 10%. Le besoin d'analyser les contacts est donc clairement établi.

La première difficulté, avant même de pouvoir parler de recalage de contact, est de définir une méthode paramétrisation du contact. La section 4.4.2 rappelle les techniques classiquement utilisées dans l'industrie pour modéliser les contacts et précises leurs limites.

Deux méthodes de paramétrisation sont illustrées en section 4.4.3 : l'évolution de la surface en contact rigide et l'évolution de la raideur de contact (dans le plan et hors-plan). Une équivalence entre les deux méthodes est montrée sur un cas d'étude et la méthode utilisant des raideurs de contacts est retenue, car elle présente une évolution plus régulière des modes.

L'intérêt de cette méthode est également d'autoriser une réduction multi-modèle comme cela est détaillé en section 4.4.4. Cette réduction de modèle rend le temps de calcul pour les études paramétriques compatible avec les délais industriels.

Une étude paramétrique est réalisée sur le cas test en section 4.4.5 dans le but de trouver les raideurs dans le plan et hors plan maximisant la corrélation entre le modèle et l'identification. Une première mesure de cette corrélation est réalisée en prenant en compte l'écart en fréquence des modes appariés en forme (MAC supérieur à une valeur choisie). En raison du caractère non régulier de cette fonction coût, un second critère basé sur l'erreur résiduelle utilisée pour l'expansion MDRE est utilisé, fournissant un résultat beaucoup plus régulier et simple à analyser.

4.4.2 Représentation des jonctions

Les liaisons entre pièces dans un assemblage sont des surfaces dans lesquelles se développent des efforts de contact/frottement. La représentation la plus simple du contact frottant, au moins du point de vue formalisme, est la loi dite de Signorini-Coulomb. La définition du contact entre deux solides nécessite la définition d'un *gap* donnant la distance minimale entre les deux solides. L'orientation associée à la mesure de ce gap est appelée normale comme illustré en figure 4.12. La loi de Signorini dit alors que le gap doit être positif ou nul et que les efforts de contact qui permettent de vérifier cette contrainte de gap ne se développent que si le gap est nul.

$$\begin{cases} g \geq 0 \\ p \geq 0 \\ (g).(p) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

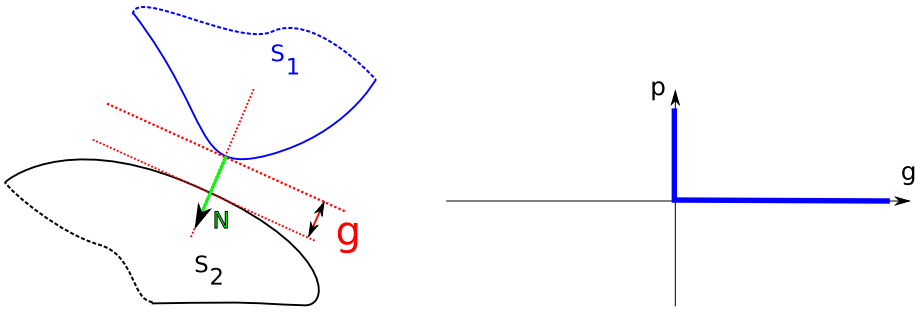


FIGURE 4.12 – Définition de la normale de contact (N) et du gap (g) entre deux solides (à gauche) et définition de la loi de Signorini contact-pression

Lors d'une transition d'échelle tenant compte des aspérités, il ne semble pas clair que la loi de Signorini reste adaptée : ces aspérités peuvent être représentées par Signorini à une échelle micro mais ne le sont plus dans une modélisation à l'échelle macro. Il est donc aussi possible de supposer que le changement d'échelle conduit plutôt à une loi fonctionnelle donnant une pression dépendante du gap $p(g)$, sans que cela corresponde à l'artifice mathématique d'une méthode de pénalisation. Des choix classiques sont des lois en puissance ou exponentielles (voir section 3.2.2 de [73]).

Dans les configurations présentant une condition de contact, la loi de Coulomb idéalisée

considère des états adhérents, où le déplacement relatif des deux surface est maintenu nul par des efforts dans le plan, ou glissants, pour lesquels les efforts tangents sont orientés suivant le glissement et d'amplitude reliée à l'effort normal $f_N = p$ par un coefficient de frottement. On a donc

$$\begin{cases} \| \{f_T\} \| \leq \mu \| \{f_N\} \| \\ \| \{f_T\} \| < \mu \| \{f_N\} \| \Leftrightarrow \{w\} = \{0\} \\ \| \{f_T\} \| = \mu \| \{f_N\} \| \Leftrightarrow \{f_T\} = \mu \| \{f_N\} \| \frac{\{w\}}{\|\{w\}\|} \end{cases} \tag{4.10}$$

où f_N est l'effort de contact, f_T l'effort de friction, μ le coefficient de friction, et w la vitesse de glissement.

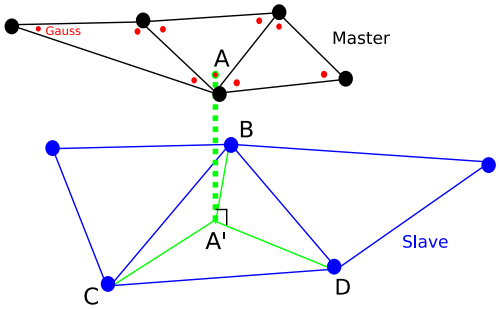


FIGURE 4.13 – Illustration du calcul d'un gap

D'un point de vue pratique, le gap est calculé en un certain nombre de points de Gauss, illustrés en figure 4.13. Pour un point A sur la surface maitre avec un déplacement u_A et son projeté A' sur la surface esclave avec un déplacement $u_{A'}$, associés à une orientation de normale N, l'expression du gap au point de gauss prend la forme

$$g = \{N\}^T (\{u_{A'}\} - \{u_A\}) - g_0 \tag{4.11}$$

et comme u_A et $u_{A'}$ sont linéairement dépendants des DDL de leurs éléments via leurs fonctions de formes, il est possible de définir une matrice d'observation $[C_{NOR}]$ faisant le lien entre les N déplacements au DDL $\{q\}$ et le gap $\{g\}$ vu par tous les Nc points de Gauss concernés par le contact, en retranchant un éventuel *offset* $\{g_0\}$, soit

$$\{g\}_{Nc} = [C_{NOR}]_{N_c \times N} \{q\}_{N \times 1} - \{g_0\}_{N_c} \tag{4.12}$$

L'impact de la distribution de pression est obtenu par une intégration numérique de la forme

$$\{\hat{q}\}^T \{f_N\} = \int_\Gamma \{\hat{u}(\hat{q})\}^T N p dS \simeq \sum_e \sum_j \{\hat{u}(\hat{q})\}^T \{N\} p(x_j, q) \omega_j^{(e)} J^{(e)}(x_j) \tag{4.13}$$

où f_N est la force de contact globale, $p(g)$ la pression de contact, $\hat{q}$ un déplacement virtuel aux DDL auquel est associé un déplacement virtuel $\hat{u}(\hat{q})$ en un point quelconque du domaine, q de déplacement élément fini, $x_j^{(e)}$ sont les points d'intégration de l'élément courant e, $J^{(e)}(x_j)$ le Jacobien de la transformation (surface associée à chaque point d'intégration) et $\omega_j^{(e)}$ le poids associé à la règle d'intégration de l'élément e.

Dans l'implémentation, on utilise une matrice d'observation du gap $[C_{NOR}]$ ce qui conduit à une expression de la force sous la forme

$$\{f_N\}_{N \times 1} = [C_{NOR}]^T_{N \times N_c} \left\{ \omega_j^{(e)} J^{(e)}(x_j)\ p(x_j, q) \right\}_{N_c \times 1} \tag{4.14}$$

De manière similaire, le déplacement relatif tangent est donné par

$$\{q_T\}_{2N_c \times 1} = [C_{TAN}]_{2N_c \times N} \{q\}_{N \times 1} \tag{4.15}$$

et les efforts tangents appliqués aux DDL peuvent être estimés à partir du champ local de densité d'efforts tangents f_{tj}

$$\{f_T\}_{N\times 1} = [C_{TAN}]^T_{N\times 2N_c} \left\{\omega_j^{(e)} J^{(e)}(x_j)\ f_{tj}(p(x_j,q), q_T, \dot{q}_T)\right\}_{2N_c\times 1} \tag{4.16}$$

Dans le cadre de ce travail, les interfaces considérées sont permanentes (boulons ou rivets). Pour de grandes amplitudes ou pour l'étude des dissipations associées aux liaisons [74, 75, 76], il convient de mettre en place des stratégies numériques détaillées permettant de prendre en compte l'évolution des conditions de contact frottant.

Pour de faibles amplitudes ou des pressions suffisantes, il est cependant usuel d'approcher le modèle en supposant un contact permanent sur une surface à déterminer et l'absence de transition adhérence/glissement. Deux voies numériques sont alors possibles.

En idéalisant le problème, les conditions de Signorini-Coulomb conduisent à des contraintes entre degrés de liberté $[c_{NOR}]\{q\} = 0$ pour le contact parfait et $[c_{TAN}]\{q\} = 0$ pour l'adhérence. Dans le cas de maillages incompatibles, il peut être important d'éviter les phénomènes de verrouillage [77].

En approchant la réalité physique d'une fluctuation spatiale des efforts par une approche fonctionnelle, on peut supposer que ces efforts dépendent du gap et d'un déplacement tangentiel. De façon approximative, on se contentera ici de supposer des variations linéaires, c'est à dire de définir une densité surfacique de raideur normale k_n conduisant à une matrice de raideur normale

$$[K_N] = k_n \sum_{j\in gauss} \{C_{NOR,j}\}^T \omega_j J(x_j) \{C_{NOR,j}\} \tag{4.17}$$

et de manière similaire, une densité surfacique de raideur tangente k_t donnant

$$[K_T] = k_t \sum_{j\in gauss} \{C_{TAN,j}\}^T \omega_j J(x_j) \{C_{TAN,j}\} \tag{4.18}$$

Les densités de raideur normale et raideurs tangentes étant des représentations équivalentes de phénomènes complexes d'adhérence/glissement à l'échelle des aspérités, le choix de paramètres pertinents pose question. Le choix de la valeur maximale de raideur de k_n et k_t n'est pas trivial : cette raideur doit être suffisamment élevée pour correspondre à un contact ou une adhérence parfaite, mais pas trop élevée pour ne pas générer des problèmes de conditionnement numérique.

La stratégie retenue ici consiste à représenter le contact très raide comme une couche très fine de matériau reliant les deux surfaces, puis de calculer la raideur associée. On note que le choix d'une raideur surfacique plutôt que d'une raideur fixe entre chaque lien noeud-surface permet de se rendre indépendant du maillage. Dans le cas d'une barre de section constante, cette raideur surfacique est égale à E/L avec E le module d'Young et L la longueur de la barre. Sur l'ensemble des études réalisées dans cette thèse, les raideurs surfaciques avec $L = l_c/10$ (l_c est la longueur caractéristique moyenne des tailles de maille) ont permis d'être très proche des solutions obtenues avec un encastrement, sans engendrer de problème de conditionnement numérique. Pour mettre en oeuvre une stratégie de recalage détaillée dans la section suivante, il est donc proposé d'utiliser les raideurs de référence $k_{n,max}$, $k_{t,max}$ définies ci-dessus et de paramétrer les contributions des interfaces sous la forme

$$[K_{contact}(\nu,\tau)] = \left[K^J_{Fixed}(k_{n,max}, k_{t,max})\right] + \nu\left[K^J_N(k_{n,max})\right] + \tau\left[K^J_T(k_{t,max})\right] \tag{4.19}$$

avec $\left[K^J_{Fixed}\right]$ la raideur de jonction constante de parties non-paramétrées qui seront définies dans la section suivante, $\left[K^J_N\right]$ la raideur normale définie pour la densité surfacique de raideur $k_{n,max}$ et associée à un coefficient de pondération ν dans l'intervalle [0 1] et enfin $\left[K^J_T\right]$ la raideur

de contact tangent définie pour la densité surfacique de raideur $k_{t,max}$ et associée au coefficient de pondération $\tau \in [0\ 1]$.

Le modèle utilisé pour calculer les modes normaux d'un assemblage de deux composants part de l'équation du mouvement sans amortissement classique. Comme indiqué en figure 4.14, on peut choisir de séparer le vecteur de DDL de déplacements en deux sous-vecteurs q_1 et q_2, correspondant aux DDL de chacun des composants.

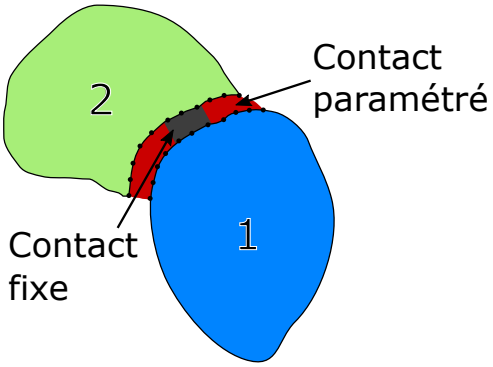


FIGURE 4.14 – Décomposition des DDL de l'assemblage par composant

Cette décomposition amène à l'écriture de l'équation de mouvement classique

$$\left[Ms^2 + K(\nu,\tau)\right] \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1(s) \\ F_2(s) \end{array} \right\} \tag{4.20}$$

où, en faisant l'hypothèse que la masse de la liaison est nulle ou peut être négligée, la topologie de la matrice de masse est

$$\left[\begin{array}{cc} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{array} \right]. \tag{4.21}$$

De même, on distingue dans matrice de raideur les raideurs des deux composants libre et la matrice de raideur de contact $[K_{contact}(\nu,\tau)]$ issue de (4.19)

$$\left[\begin{array}{cc} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{array} \right] + \left[K_{contact}(\nu,\tau)\right]. \tag{4.22}$$

4.4.3 Surface ou raideur : deux paramétrisations équivalentes

Une inconnue majeure dans la plupart des assemblages est la surface réellement en contact : c'est à dire là où la pression est suffisante pour maintenir le contact avec ou sans glissement. Comme l'assemblage a un rôle fonctionnel, il est clair qu'une surface minimale existe où le contact est toujours maintenu. Cependant, dans beaucoup de cas, une fraction notable des surfaces se touchant du point de vue de la géométrie utilisée pour le modèle correspond à des surfaces qui ne sont en réalité pas en contact [78, 79, 80]. Il est ainsi assez pertinent [81] d'utiliser des calculs de statique non-linéaire pour déterminer les surfaces de contact et de supposer ces surfaces fixes pour les calculs de mode.

En l'absence d'une connaissance précise des surfaces de contact, on cherche à trouver un équivalent linéaire autour d'une surface "moyenne" fixe. En prenant dans notre exemple le premier mode de flexion du guide-câble, présenté à droite de la figure 4.15, on comprend le caractère potentiellement non-linéaire sur un cycle avec des ouvertures/fermetures entre les rivets et l'avant du guide-câble.

Par ailleurs, comme les surfaces en contact ne sont pas usinées et que les rivets utilisés pour maintenir l'assemblage introduisent des pressions relativement faibles, il est évident que la surface réellement en contact est très sensible aux défauts géométriques. Il a déjà été montré

numériquement dans [82] que l'évolution de la surface en contact a un effet significatif sur les fréquences des modes, en particulier pour le premier mode de flexion du guide-câble et on va ici montrer un comportement équivalent pour la paramétrisation en raideur introduite dans la section précédente.

On reprécise que l'exemple utilisé dans cette sous-section concerne un assemblage plateau/guide-câble, mais qu'il s'agit d'un autre cas test que le plateau utilisé en section 4.2. L'interprétation des résultats reste pertinente, mais les valeurs numériques des fréquences modales ne peuvent pas être mises en relation.

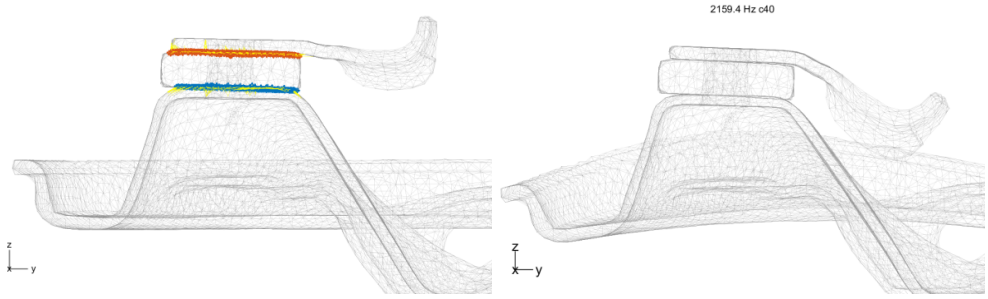


FIGURE 4.15 – Définition du contact : contact guide-câble/point-fixe en rouge et point-fixe/plateau en bleu (à gauche) et visualisation du premier mode de flexion du guide-câble (à droite)

Pour chacune des deux surfaces de contact, entre le guide-câble et le point fixe et entre le point fixe et le plateau, les rivets ont un rôle fonctionnel qui est de garantir une zone de contact permanente. Si, comme proposé dans [81], il est possible d'utiliser des calculs de statique non-linéaire pour déterminer la zone de contact, cette approche est complexe à mettre en oeuvre.

La proposition faite ici est donc de définir arbitrairement une zone de contact adhérent permanent. Pour le cas des rivets, un paramètre intuitif serait le rayon de recherche autour des deux rivets : pour chaque valeur du rayon, l'intérieur des cercles est parfaitement couplé, comme le montre la figure 4.16. Pour la suite, afin de limiter le nombre de paramètres et de simplifier les illustrations, les deux contacts seront paramétrés de façon similaire : les paramètres du contact supérieur seront systématiquement appliqués de façon identique au contact inférieur.

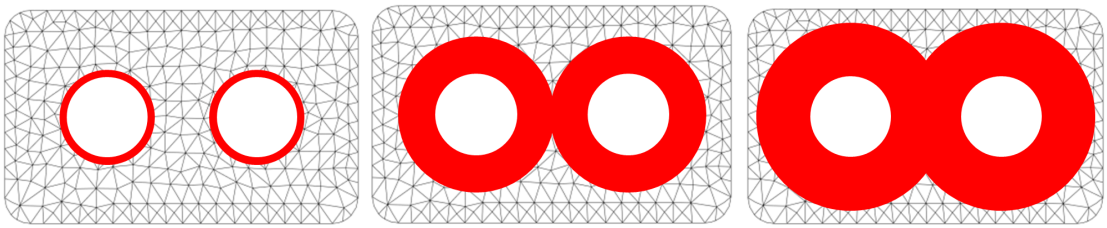


FIGURE 4.16 – Evolution de la surface de contact parfait autour des rivets

Cependant, une telle définition géométrique demande une intervention manuelle qui peut être fastidieuse selon la complexité de topologie du contact. Pour construire une famille croissante de surfaces de contact, il est aussi possible d'utiliser des résultats de calcul. Par exemple, en figure 4.17, on a choisi d'utiliser le champ de gap associé au premier mode de flexion du guide-câble. En définissant des seuils de gap (pourcentage de l'ouverture maximale), on peut séparer la surface en deux et supposer un contact parfait pour les points de Gauss présentant un faible gap et sans contact sinon. Les surfaces rouges montrent les éléments qui voient une ouverture supérieure au seuil, les éléments verts voient une ouverture inférieure au seuil et les éléments bleus voient soit une ouverture dans le bruit numérique, soit ne sont liés à aucun noeud esclave. L'augmentation du seuil de gap au-delà duquel les points de Gauss ne sont pas considérés en contact permet d'augmenter progressivement la rigidité globale du contact.

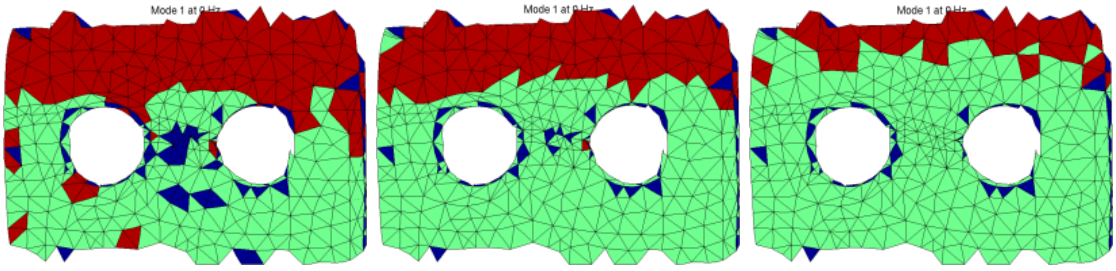


FIGURE 4.17 – Evolution de la surface de contact avec un seuil sur les intervalles d'ouverture (40%, 60% et 80%), les zones rouges et bleues sont sans contact.

La progression relativement irrégulière de la surface de contact est ici liée au fait que les composants utilisés sont reconstruits en géométrie : les surfaces ne sont pas parfaitement planes et l'observation des intervalles d'ouverture n'est pas clairement progressive.

L'idée de séparation de surface par fonction de niveau (*level set*) est très répandue [83], et la variété des applications pointe aussi vers d'autres implémentations possibles. Par exemple, des lignes iso-températures construites à partir d'un problème thermique avec des points de contrôle sur le bord de chaque trou de rivet et sur l'extérieur de la surface maximale fourniraient une autre stratégie pertinente d'évolution de surface.

Deux paramétrages sont envisagés pour analyser les liaisons : soit la zone de connexion parfaite est paramétrée en surface, via le seuil de gap, et on cherche la surface conduisant à la meilleure corrélation calcul/essai, soit on construit une zone de contact minimal parfait (la plus petite dans la figure 4.16), et on utilise la paramétrisation proposée en équation (4.19) pour définir des densités de raideurs normales et tangentes dont les valeurs seront les paramètres équivalents de représentation de la liaison.

Pour la paramétrisation en surface croissantes, les fréquences modales calculées pour le plateau sont affichées à gauche de la figure 4.18. Certaines zones montrent une évolution des fréquences modales faibles alors que pour certains seuils (5% et 60% de l'ouverture maximale notamment), des évolutions soudaines sont visibles. Cette évolution non régulière traduit le fait que certains noeuds peuvent fortement contraindre le contact en particulier pour des maillages peu raffinés comme c'est le cas ici.

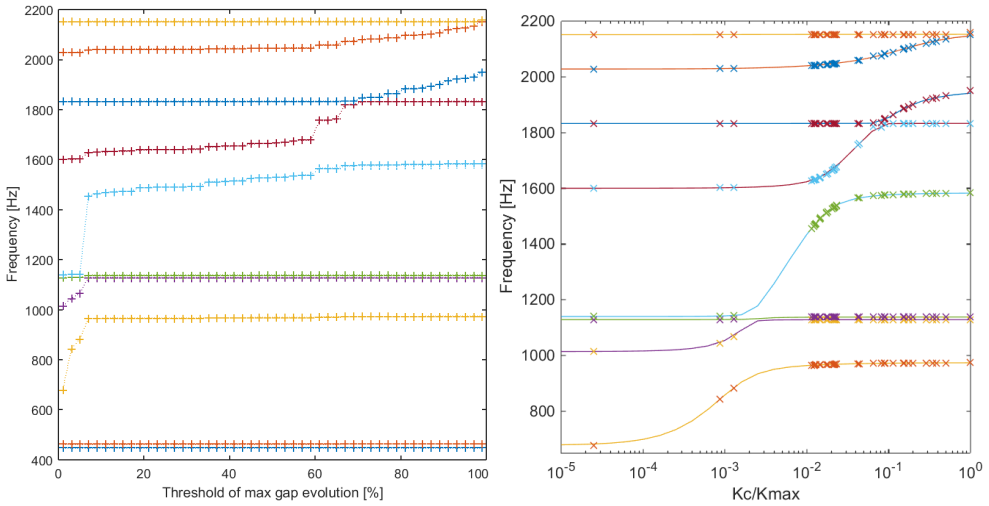


FIGURE 4.18 – Evolution des fréquences modales : pour la suite ordonnée de surfaces de contacts (de la surface la plus faible à la plus élevée) (à gauche) et pour différentes raideurs de contacts, de la moins raide à la plus raide (à droite)

Pour l'approche en raideur, il est important de définir la "surface minimale" en contact

permanent de façon à contraindre les mouvements rigides relatifs des pièces dont on sait qu'ils ne sont pas réalistes. Mais une fois cette surface minimale définie, l'évolution des fréquences présente une allure régulière illustrée à droite de la figure 4.18. Les transitions sont clairement plus lisses et les croisements de modes plus facilement analysables que pour l'approche en surface. On note que la représentation de l'évolution est ici limitée aux points de fonctionnement $\nu = \tau = k_c/k_{max}$ afin de permettre une visualisation simple.

Les deux points de fonctionnement extrêmes, contact parfait sur la surface minimale ou sur toute la surface, sont similaires dans les deux représentations et le modèle paramétré en raideur présente une transition régulière entre ces deux extrêmes.

Le résultat important de la figure 4.18 est que les deux paramétrages conduisent aux mêmes évolutions de fréquence. Pour chaque surface du tracé de gauche, on a en effet cherché la raideur normale minimisant les écarts relatifs entre les fréquences modales obtenues avec les deux stratégies. Les fréquences paramétrées en surface sont alors représentées par des croix sur les courbes paramétrées en raideur. La superposition quasi-exacte de l'ensemble des fréquences confirme l'équivalence des deux approches du point de vue de l'objectif de prédire des modes.

Par ailleurs, il est intéressant de noter que faire varier les surfaces de contact nécessite un calcul complet du modèle par surface (chaque point de fonctionnement correspond à une surface spécifique et donc la topologie de la matrice de raideur change) alors que l'évolution en raideur de contact peut être calculée à partir de quelques points de fonctionnement uniquement en utilisant une réduction multi-modèle détaillée dans la section suivante.

4.4.4 Multi-modèle réduit : Kn/Kt

Une difficulté classique des études paramétriques est la gestion du temps de calcul. Pour illustrer ce problème, la figure 4.19 montre le résultat d'une étude paramétrique sur le cas test de l'assemblage plateau/point fixe/guide-câble (où seulement les points de fonctionnement $\nu = \tau$ sont montrés). Les deux paramètres sont discrétisés en 20 valeurs réparties sur une échelle logarithmique entre 10^{-8} et 1. La résolution directe de cette étude demande donc 400 calculs de modes propres sur modèle complet (1 pour chaque couple de paramètre (ν,τ)), ce qui engendre un temps de calcul très important.

Un intérêt majeur de la paramétrisation du contact par des raideurs est qu'il devient simple de mettre en place une réduction multi-modèle [84] permettant ensuite des calculs très rapides. Le modèle complet est seulement calculé pour quatre points de fonctionnement qui correspondent aux valeurs extrêmes des deux paramètres de raideur. La famille de vecteurs correspondant à la concaténation des déformées modales obtenues pour chacun de ces points de fonctionnement est ensuite orthonormalisée par rapport à la masse $[M]$ et à la matrice de raideur la plus forte $[K(\nu = 1, \tau = 1)]$ pour générer la base de réduction

$$[T_{Assembly}] = [T(\nu = 1, \tau = 1), T(\nu = 0, \tau = 1), T(\nu = 1, \tau = 0), T(\nu = 0, \tau = 0)]^{\perp} \qquad (4.23)$$

Le modèle est par la suite calculé dans le sous espace engendré par cette base. La réduction consiste en la projection de l'équation (4.20) sur la base définie précédemment

$$([M_R]\, s^2 + [K_R(\nu, \tau)])\, \{q'\} = [T_{Assembly}]^T \left\{ \begin{array}{c} F_1(s) \\ F_2(s) \end{array} \right\} \qquad (4.24)$$

avec $[M_R] = [T_{Assembly}]^T\, [M]\, [T_{Assembly}]$ et $[K_R(\nu, \tau)] = [T_{Assembly}]^T\, [K(\nu, \tau)]\, [T_{Assembly}]$

Afin de valider la pertinence de la méthode de réduction proposée, les résultats de l'étude paramétrique à partir du modèle complet et du modèle réduit sont comparés. La figure 4.19 montre une superposition quasiment parfaite des fréquences modales calculées à partir du modèle complet (croix) et du modèle réduit (lignes) pour les paramètres $\nu = \tau$. Ces erreurs très faibles

signifient que le sous-espace utilisé pour la réduction est suffisant pour bien décrire les évolutions des déformées modales entre les quatre points de fonctionnement extrêmes, qui sont eux résolus de manière exacte.

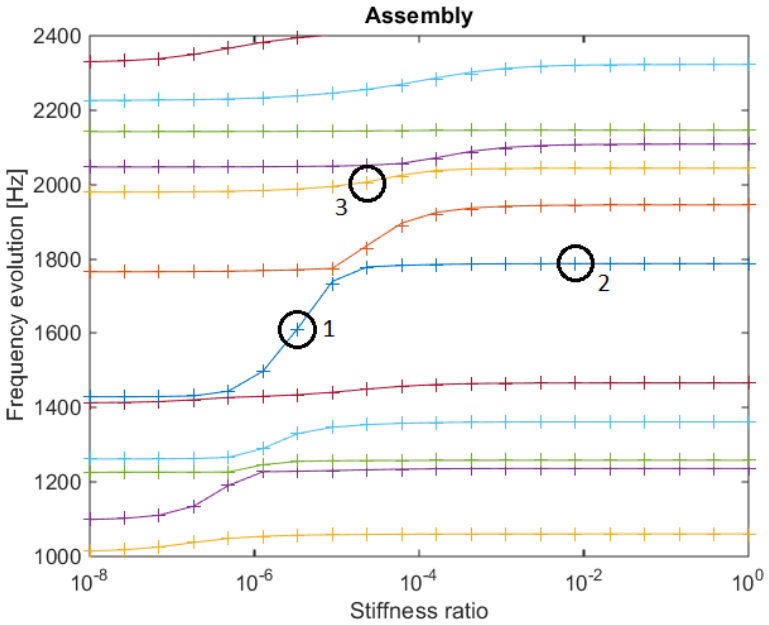


FIGURE 4.19 – Superposition de l'évolution des fréquences modales avec la raideur pour le modèle réduit (lignes) et pour le modèle complet (croix). Les points entourés correspondent aux déformées modales montrées en figure 4.27

Le gain dans l'utilisation du modèle réduit se traduit à la fois en terme de temps de calcul et en terme de stockage mémoire. L'étude réduite demande la résolution de seulement quatre modèles complets et permet le calcul d'un grand nombre de points de conception très rapidement et avec une très bonne approximation. Le stockage des déformées modales réduites associées à chaque couple de paramètre (ν,τ) est très léger alors que leur stockage sur la base complète est très lourd.

4.4.5 Recalage Kn/Kt

La première utilisation de ce modèle paramétré est le recalage ou recherche des propriétés équivalentes de liaison (ν,τ) pour lesquelles la corrélation entre le modèle et l'essai est maximale.

Une première façon de définir la qualité de corrélation globale est de calculer l'erreur relative moyenne entre les fréquences des modes appairés. La fonction objectif

$$J(\nu,\tau) = \sum_{j,kpairs} \left| \frac{f_j(\nu,\tau) - f_k(\nu,\tau)}{f_k(\nu,\tau)} \right| \tag{4.25}$$

est donc évaluée pour chaque couple (ν,τ).

L'appariement des modes nécessite de choisir un seuil de MAC admissible au-dessus duquel les modes sont considérés comme comparables. Un seuil classiquement retenu est 70%. Avec ce seuil l'évolution de la fonction coût avec les paramètres ν et τ, montrée à gauche de la figure 4.20, est assez difficile à analyser car de nombreux minima locaux sont présents et l'évolution avec les paramètres n'est pas régulière. Ce caractère non régulier est lié à des changements brusques du nombre de modes appariés. Or si les évolutions du MAC dues à de fortes évolutions des paramètres sont souhaitées, les cas récurrents de chute de MAC associés aux croisements de mode ne le sont pas.

Le nombre de modes appairés en fonction des paramètres ν et τ est montré à droite de la figure 4.20. Sur toute la gamme des paramètres évalués, ce nombre passe de 25 à 39 et confirme la localisation des sauts brutaux observés sur la cartographie de la fonction coût à gauche. L'exploitation de cette carte avec confiance pour sélectionner les paramètres optimaux n'est pas possible.

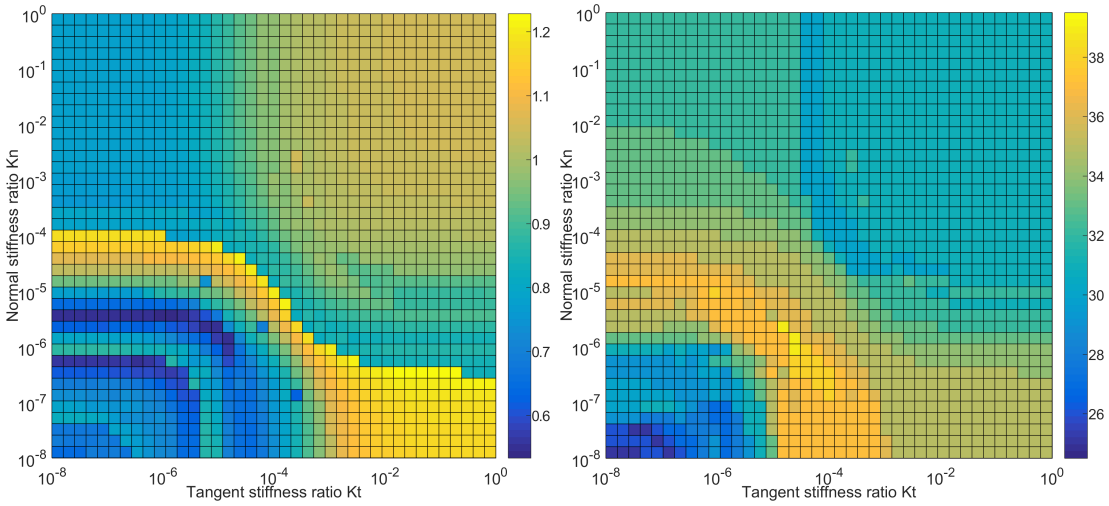


FIGURE 4.20 – Recalage des raideurs avec appairage pour MAC>70% : erreur relative moyenne des modes appairés [%] (à gauche) et nombre de modes appairés (à droite)

Pour limiter l'impact de l'appariement des modes qui engendre ce comportement irrégulier, un seuil de MAC beaucoup plus bas a été fixé, à 23% après de multiples essais pour obtenir une carte suffisamment régulière. La figure 4.21 à gauche montre la carte de la fonction coût qui présente toujours quelques irrégularités pour les raideurs très faibles. A droite de cette figure, le nombre de modes appairés oscille entre 38 et 40, ce qui explique le caractère plus lisse de la fonction objectif.

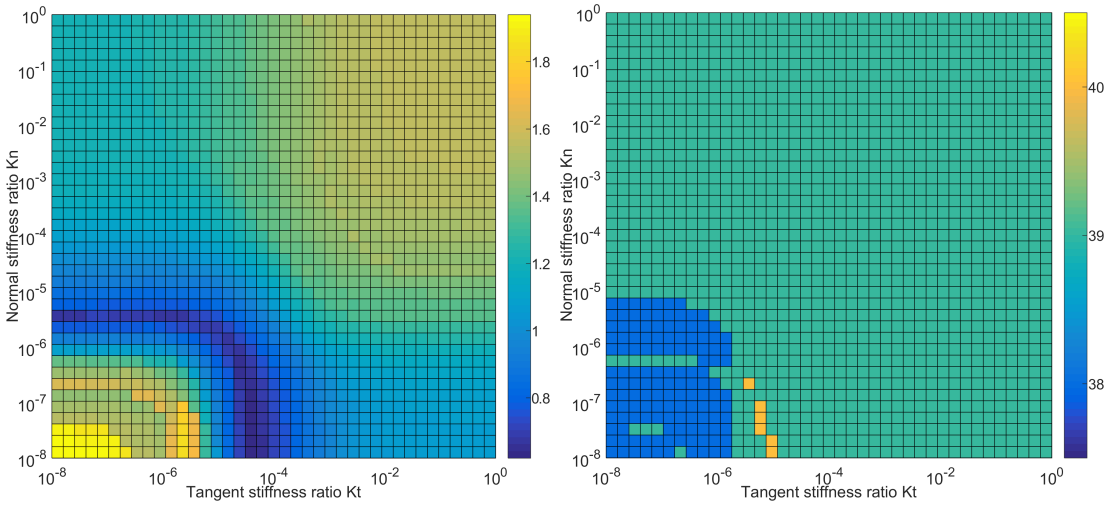


FIGURE 4.21 – Recalage des raideurs avec appairage pour MAC>23% : fonction objectif (à gauche) et nombre de modes appairés (à droite)

En resserrant la coloration de la carte vers les valeurs minimales, la figure 4.22 est plus lisible et permet de récupérer les valeurs optimales $\nu = 1e(-8)$ et $\tau = 2e(-4)$.

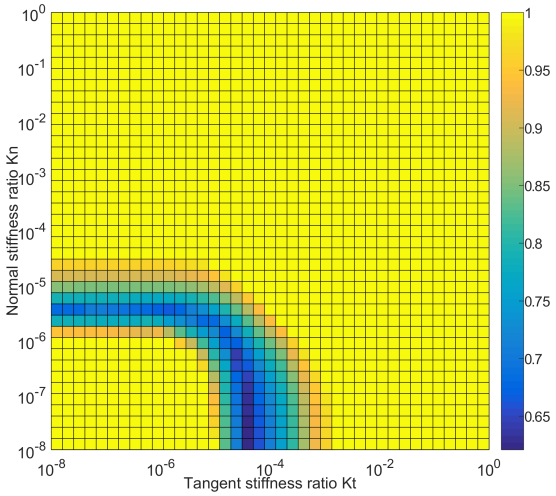


FIGURE 4.22 – Recalage des raideurs avec appairage pour MAC>23% : fonction objectif avec coloration resserrée autour du minimum

On note ici que la valeur de raideur normale est nettement plus faible que la valeur tangentielle. Dans une interprétation de ces paramètres en tant que contact et frottement, le résultat serait étonnant. Il convient donc de rappeler qu'il s'agit de paramètres équivalents traduisant des comportements à d'autres échelles (non-linéarités, défauts de surface) dont l'interprétation directe est donc hasardeuse.

Pour ce couple de paramètres optimaux, le MAC est montré à gauche de la figure 4.23. En comparant avec le MAC initial de la figure 4.11, la corrélation montre une nette amélioration. On note que les erreurs restantes concernent les deux modes numériques #19 et #20 qui sont inversés et les deux modes #31 et #32 qui semblent se croiser (présence de termes hors diagonaux sur ce bloc de modes).

Les deux modes #19 et #20 ainsi que le bloc des deux modes #31 et #32 sont proches à moins de 2% d'écart en fréquence. Comme cet écart en fréquence est admissible, il est plus judicieux de comparer les sous-espaces entre eux plutôt que les formes une à une, en utilisant le *MAC Combine*, présenté en section 3.2.3. La figure 4.26 à droite montre le résultat obtenu avec ce critère, où tous les modes présentant des fréquences écartées de moins de 2% sont recombinés par bloc.

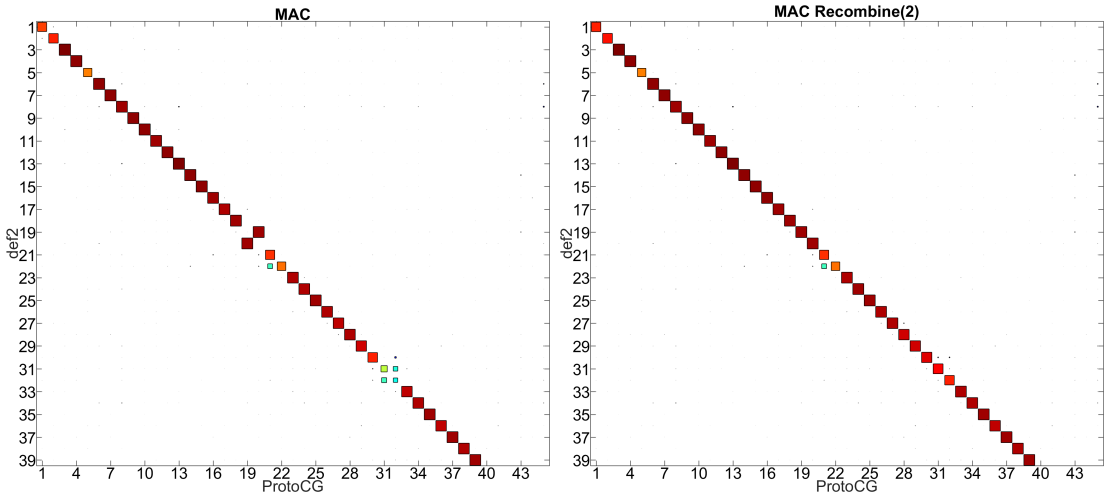


FIGURE 4.23 – MAC pour les valeurs optimales de Kn et Kt : MAC simple (à gauche) et MAC Combine avec des écarts en fréquence admissible de 2% (à droite)

Si le résultat de la corrélation obtenue pour ce couple de paramètres est très satisfaisant, le

choix du seuil de MAC est parfois plus problématique que pour cet exemple et la comparaison de modes corrélés à seulement 20% peut poser problème.

L'utilisation de méthodes ne nécessitant pas d'appariement parait donc un objectif souhaitable. La méthode MDRE (voir section 3.4.4) donne une mesure de l'erreur de modèle indiquant la cohérence entre le mode étendu et les équations d'équilibre du modèle. Cette erreur est un scalaire combinant des informations de fréquence et de forme sans référence à une solution calculée et donc sans appariement.

L'expansion MDRE devant être calculée pour tous les couples (ν,τ), le coût peut être important (surtout en présence de nombreux capteurs qui augmentent fortement la taille du modèle réduit). Pour optimiser le calcul, seuls quelques modes pertinents du point de vue du contact recalé doivent être sélectionnés. Pour identifier les modes pertinents, l'expansion de tous les modes est réalisée sur le modèle nominal (contact très rigide) et la répartition de l'énergie de déformation en contributions de contact minimal, contact normal, contact tangentiel et composants est calculée. La figure 4.24 montre pour chaque contact ainsi que pour l'ensemble des composants, les modes assemblés pour lesquels leur taux de déformation est le plus élevé (ces taux de déformation sur chaque ligne sont mis à l'échelle de façon à ce que le minimum soit 0 et le maximum soit 1, pour permettre une meilleure visualisation).

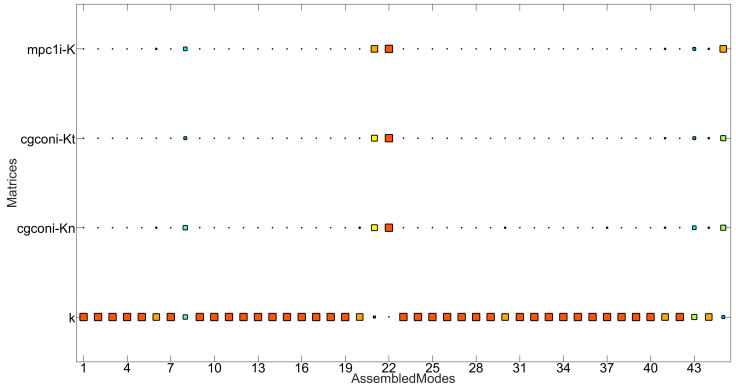


FIGURE 4.24 – Répartition de l'énergie de déformation : raideur de contact minimal, raideur tangentielle, raideur normale et raideur interne aux composants (de haut en bas)

Cinq modes étendus font plus fortement travailler le contact et sont donc a priori plus sensibles à l'évolution des paramètres. Ces 5 modes (#8, #21, #22, #43 et #45) sont affichés en figure 4.25. Ils sont localisés autour du guide-câble et correspondent à des déformations en flexion ou en torsion de celui-ci.

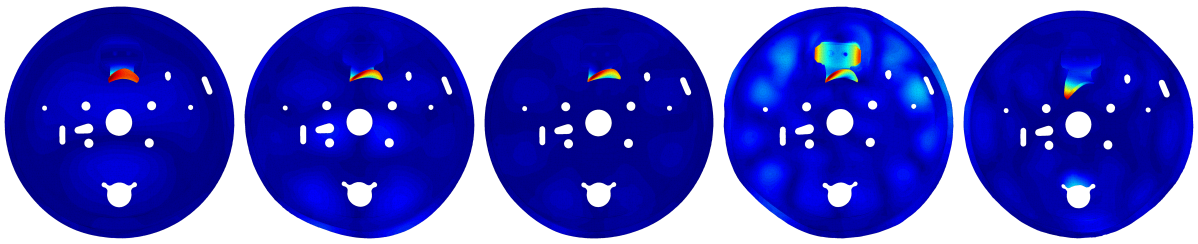


FIGURE 4.25 – Modes étendus avec un fort niveau d'énergie dans le contact

Pour chaque couple de paramètres (ν,τ), les modes retenus sont étendus avec la méthode MDRE et les erreurs relatives de modèle $\epsilon^R_{j,Mod}$ sur les cinq modes sont calculées (voir section 3.4.5 pour la définition de cette erreur). Elles sont ensuite moyennées pour chaque point de fonctionnement et la figure 4.26 montre la cartographie de l'erreur relative de modèle moyenne obtenue. La répartition de la zone où la fonction coût est minimale est similaire à celle obtenue avec l'écart en fréquence des modes appairés (voir figure 4.21). Cependant, elle ne nécessite au-

cune sélection de seuil et ne pose pas la question de la pertinence de comparer les fréquences de modes présentant un MAC très faible. La raideur normale optimale, donnant une erreur relative de modèle moyenne de 45%, est légèrement plus élevée pour ce critère : $\nu = 4.8e(-7)$ au lieu de $1e(-8)$. L'erreur minimale de 45% est assez élevée, probablement car elle est obtenue pour une valeur γ très grande, telle qu'aucune erreur de mesure n'est admissible. L'influence du paramètre γ sur le couple de paramètres optimaux trouvé doit être analysée, mais n'a pas été traitée ici.

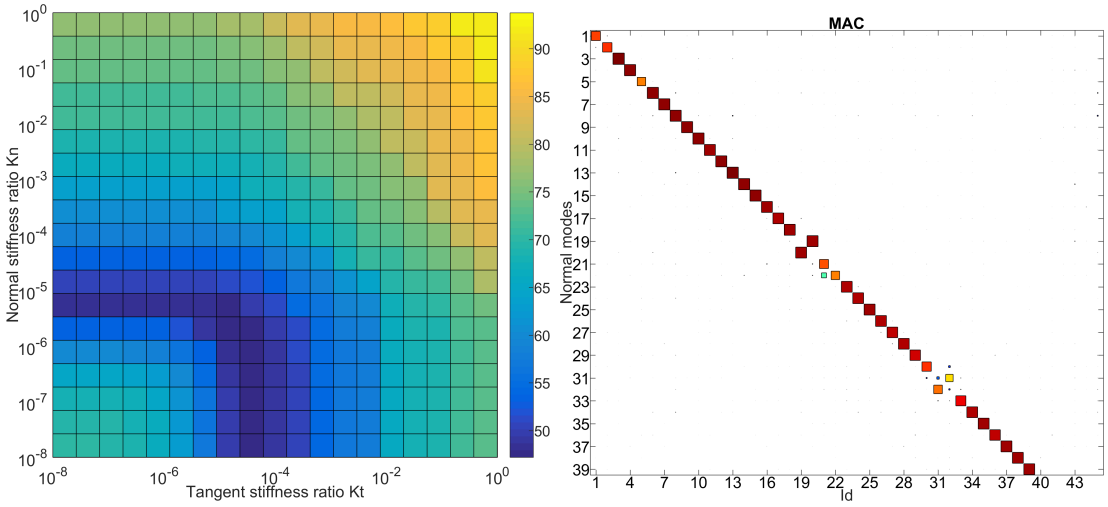


FIGURE 4.26 – Carte d'erreur en énergie résiduelle moyenne (gauche) et MAC associé aux paramètres optimaux $\nu = 4.8e(-7)$ et $\tau = 2.3e(-5)$ (droite)

Le MAC correspondant au couple optimal est montré à droite de la figure 4.26. La même conclusion quant à la correspondance des sous-espaces à l'endroit des deux croisements de modes est faite avec la MAC *Combine*. Si les deux croisements de modes restant étaient problématiques, il faudrait probablement découpler les raideurs normales et tangentielles entre le contact supérieur et inférieur au point fixe pour améliorer la corrélation, mais cela porterait le nombre de paramètres à optimiser à quatre.

Etant donnée la régularité de la carte d'erreur, il parait tout à fait envisageable d'utiliser des méthodes d'optimisation classiques basées sur des approximations régulières pour obtenir les paramètres optimaux avec un nombre d'itérations assez faible.

4.5 Outils d'analyse du comportement dynamique des assemblages

La paramétrisation du couplage a précédemment été utilisée avec pour objectif le recalage du modèle. Cette section vise à montrer son utilité dans les études de sensibilité des modes d'assemblage aux propriétés de contact.

Pour analyser finement l'évolution des fréquences et des déformées modales, la section 4.5.1 introduit la notion de modes de composant assemblé dont la participation est observée sur les modes d'assemblage, permettant notamment une meilleure compréhension de la notion de croisement de modes.

L'influence du contact est visible sur les paramètres modaux du modèle mais elle peut également être évaluée pour des réponses forcées. La section 4.5.2 analyse ainsi l'évolution de fonctions de transfert déplacement/effort. Les croisements de modes apparaissent alors comme une séparation d'une résonnance principale en deux résonnances d'amplitudes plus faibles. Par ailleurs, des bandes de fréquences pour lesquelles aucun mode n'est présent sont mises en évidence.

4.5.1 Sensibilité des modes de composant assemblé et des modes d'assemblage

Pour introduire la notion de modes de composant assemblé, une analyse de quelques points de fonctionnements spécifiques de la figure 4.19 est réalisée. Les évolutions des fréquences modales montrent que quelques modes restent quasiment constant (lignes horizontales) alors que d'autres sont très sensibles à l'augmentation de la raideur avec une courbe d'évolution semblant former un "S".

La figure 4.27 montre trois déformées modales, identifiés par des marqueurs sur la figure 4.19.

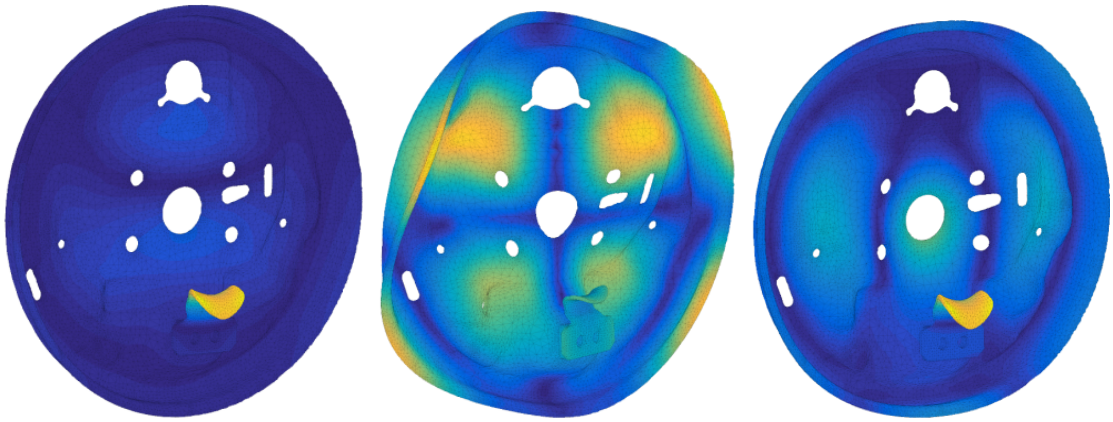


FIGURE 4.27 – Visualisation de trois déformées modales correspondant aux points 1, 2 et 3 sur la figure 4.19

La première déformée correspond à un mode très sensible à l'évolution de la raideur de contact et situé loin des modes constants. Cette déformée modale est clairement dominée par le premier *mode de flexion du guide-câble*. La deuxième déformée correspond à un mode dont la fréquence évolue très peu avec la raideur. La déformation est principalement localisée au niveau du plateau, le guide-câble ne faisant que suivre avec un déplacement en corps-rigide, sans se déformer. Enfin, la troisième déformée correspond à un cas intermédiaire, à la fois près du "S" et d'une ligne horizontale. Le plateau et le guide-câble se déforment, ce qui correspond à un couplage entre le premier *mode de guide-câble* et le *mode de plateau*.

L'observation de ces trois déformées modales caractéristiques montre qu'avec l'augmentation de la raideur, le premier *mode de flexion du guide-câble* croise différents *modes de plateau* et peut se coupler plus ou moins avec eux. Lorsque le *mode de flexion du guide-câble* est loin des *modes de plateaux*, il s'exprime seul avec une très faible déformation du plateau. De la même manière, lorsque les *modes de plateau* sont loin du *mode de flexion du guide-câble*, ils s'expriment seuls, avec une contribution faible du guide-câble.

Il est clair qu'une définition pertinente de ce que l'on a appelé jusqu'ici par abus de langage "mode de composant" dépend de la présence des autres composants. Ici, ce que l'on appelle le mode de flexion du guide-câble serait très différent si le guide-câble était considéré dans les conditions libres. C'est pourquoi ces modes ont été appelés "modes de composants assemblés" : il est proposé de découpler les déformations d'un premier composant du reste de la structure en conservant celle-ci mais en la considérant comme "rigide".

L'augmentation de rigidité du reste de la structure pourrait être obtenu en augmentant le module d'Young, mais cela pose la question du choix de cette valeur qui peut mener à des problèmes de conditionnement numérique. La solution retenue est plutôt de réduire les degrés de libertés du reste de la structure en n'autorisant que les déplacements de corps rigide. Cela permet de ne conserver que l'effet inertiel tout en interdisant la déformation. Les solutions sont

donc cherchées dans le sous-espace

$$\{q\} = \begin{bmatrix} RB_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \{q'\} \tag{4.26}$$

avec RB_1 les 3 translations et 3 rotations du premier composant.

Comme précédemment, une réduction multi-modèle est utilisée pour calculer l'évolution en fréquence des modes de composant assemblé avec la raideur. Ces modes sont montrés à la figure 4.28 avec sur la gauche l'évolution des modes de guide-câble assemblé (le plateau est contraint en corps rigide) et à droite les modes de plateau assemblé (le guide-câble est contraint à être rigide).

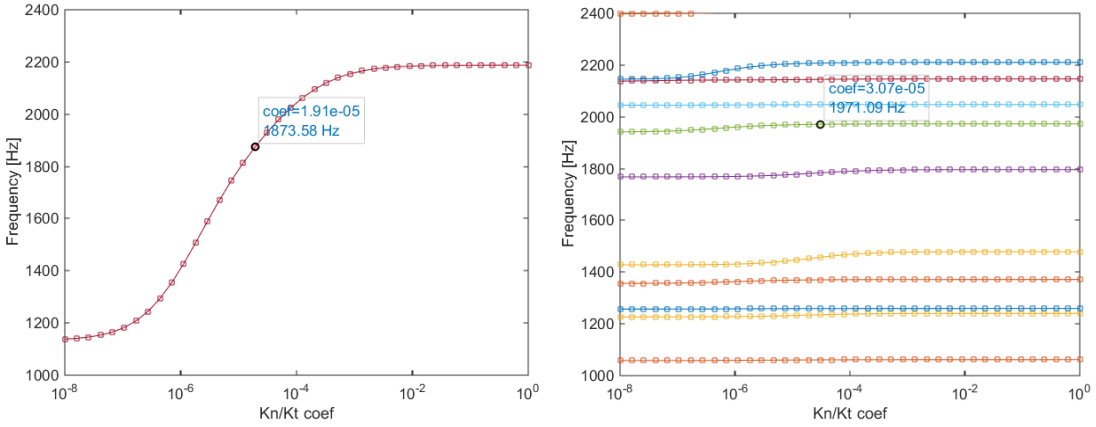


FIGURE 4.28 – Evolution des modes de composant assemblé : modes de guide-câble (gauche) et modes de plateau (droite)

Sur la gauche, le seul mode de guide-câble présent correspond à sa première flexion, dont la fréquence est très dépendante de la raideur de contact : il varie de 1200 Hz à 2200Hz. L'assemblage joue donc un rôle très important sur le comportement du guide-câble.

Sur la droite, les modes de plateau sont assez peu sensibles aux paramètres du contact. Les origines de variations des modes assemblés (voir figure 4.19) sont donc principalement liées à des couplages des modes de plateau avec le mode de guide câble. La compréhension de l'évolution des formes modales d'assemblage avec la raideur est donc nécessaire.

L'objectif est donc de voir quels modes de composant assemblé contribuent aux modes d'assemblage. Une définition de l'amplitude des modes de composant assemblé est introduite. Pour chaque couple de paramètres (ν, τ), les déformées modales calculées $[\phi(\nu,\tau)]$ satisfont la condition d'orthogonalité

$$[\phi(\nu,\tau)]^T [M] [\phi(\nu,\tau)] = I \tag{4.27}$$

et une déformée $\{q\}$ quelconque peut être décomposée sur la base des déformées modales

$$\{q\} = [\phi(\nu,\tau)] \{\alpha(\nu,\tau)\} \tag{4.28}$$

A partir de l'équation (4.27), on obtient

$$[\phi(\nu,\tau)]^{-1} = [\phi(\nu,\tau)]^T [M] \tag{4.29}$$

et donc, en combinant les équations (4.28) et (4.29), la décomposition d'une déformée quelconque sur les modes d'assemblage s'écrit

$$\{\alpha(\nu,\tau)\} = [\phi(\nu,\tau)]^T [M] \{q\} \tag{4.30}$$

La matrice $[\phi(\nu,\tau)]^T [M]$ est appelée observateur modal. Les modes de composant assemblé peuvent alors être observés sur les modes d'assemblage pour mieux comprendre leur implication.

La figure 4.29 montre la participation du premier mode de guide-câble assemblé (la forme observée est celle correspondant au marquage sur la figure de gauche) sur les modes d'assemblage : la participation est marquée par les points sur la figure de droite. Comme attendu, cette forme croise beaucoup de modes de plateau, se couple parfois avec eux sur une large gamme de raideur mais parfois ne se couple pas du tout.

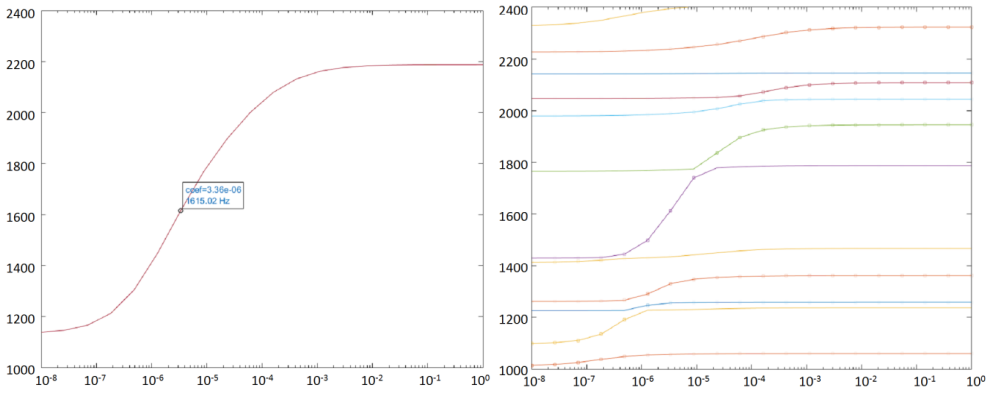


FIGURE 4.29 – Observation de la forme du premier mode de guide-câble assemblé (sélectionné à gauche) sur les modes d'assemblage (la participation est marquée par les points sur la figure de droite).

De la même manière, la figure 4.30 montre la participation d'un mode de plateau assemblé sur les modes d'assemblage. Un comportement intéressant à analyser est observé ici. L'ajout de raideur dans le contact augmente toujours les fréquences modales. Cependant, l'observation de la forme du mode de plateau assemblé montre qu'elle s'exprime pour une valeur de raideur très faible à une fréquence plus importante que pour une raideur très grande. Ce comportement est lié au croisement de ce mode de plateau par le mode de guide-câble.

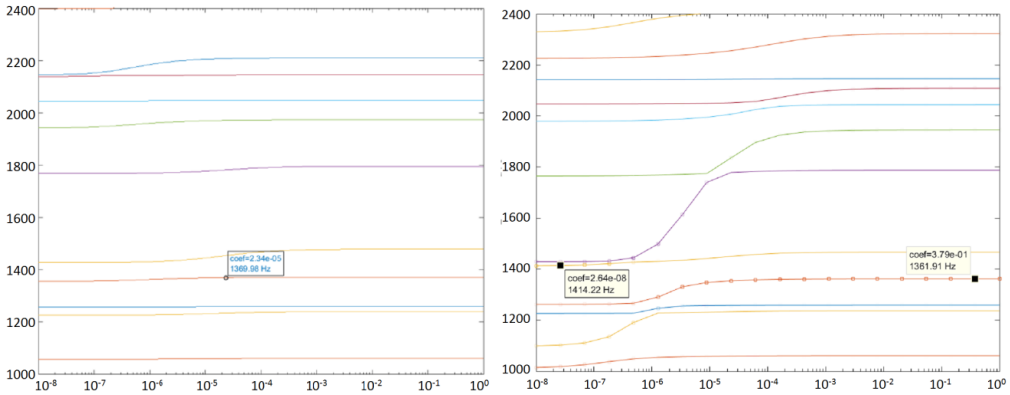


FIGURE 4.30 – Observation de la forme d'un mode de plateau assemblé (sélectionné à gauche) sur les modes d'assemblage (la participation est marquée par les points sur la figure de droite).

La figure 4.31 montre les deux modes propres pointés à droite de la figure 4.30. Pour une raideur très faible, la fréquence du mode de plateau assemblé est supérieure à la fréquence du mode de guide-câble assemblé : le mode de guide-câble répond en opposition de phase, ce qui augmente la fréquence du mode d'assemblage. A l'inverse, pour une raideur très importante, le guide-câble répond en phase au mode de plateau, ajoutant ainsi un effet de masse qui abaisse la fréquence du mode d'assemblage.

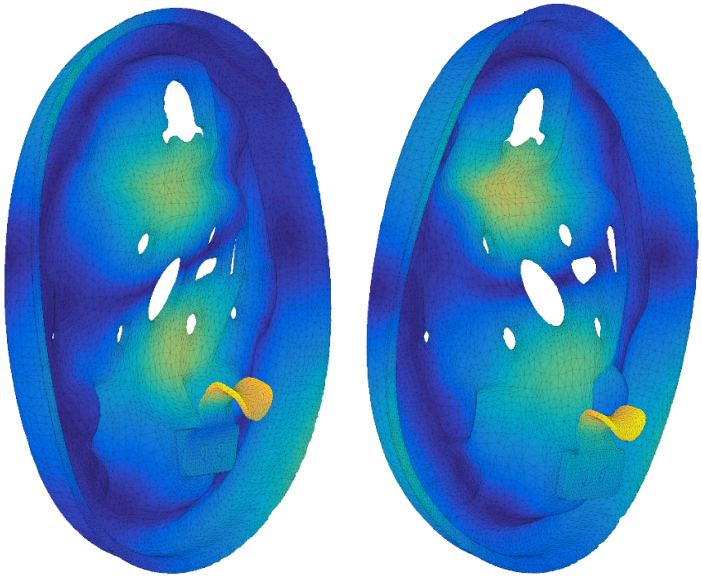


FIGURE 4.31 – Mode d'assemblage avec une déformation similaire du plateau : fréquence plus élevée du mode avec une raideur de contact faible (à gauche) et fréquence plus faible du mode avec une raideur de contact élevée (à droite)

4.5.2 Sensibilité des transferts à la modification du contact

Pour l'étude des vibrations, il est important de toujours confronter le point de vue spatial des formes modales affiché dans la section précédente et le point de vue fréquentiel des fonctions de transfert. Dans le cas d'une étude paramétrique, l'évolution des formes modales n'est qu'indirectement liée à l'évolution du niveau d'un transfert, car les évolutions de forme ont tendance à se compenser [44].

Pour illustrer ce point, on considère l'évolution d'une fonction de transfert colocalisée pour une excitation sur le guide câble en fonction de l'évolution de la raideur de contact où on fait varier la raideur normale et la raideur tangente de manière identique ($\nu = \tau$). Le choix de cette localisation reflète le fait que le guide câble est une pièce pouvant générer du bruit.

La figure 4.32 gauche donne une représentation de Bode classique. Chaque courbe correspond au transfert colocalisé synthétisé pour un point de fonctionnement. Si on aperçoit clairement les fréquences de résonnance qui se déplacent ainsi que des points de faible amplitude, l'interprétation est difficile. La même étude paramétrique peut être affichée en tant que carte donnant l'amplitude en fonction de la fréquence et de la raideur de contact. Sur cette carte en figure 4.32 droite, on affiche aussi les fréquences modales comme des lignes noires pour bien faire ressortir les résonances potentiellement visibles.

Cette carte fait très clairement apparaitre que la contribution du mode de guide câble peut apparaitre entre 1000-2000 Hz selon la raideur de contact. Par ailleurs selon le point de fonctionnement, les amplitudes peuvent baisser de façon significative au moment des croisements de mode. Un fonctionnement proche des zones de transition peut être à la fois intéressant d'un point de vue performance et dangereux du point de vue de la robustesse puisque de petits changements dans les propriétés de contact pourraient conduire à de fortes variations d'amplitude.

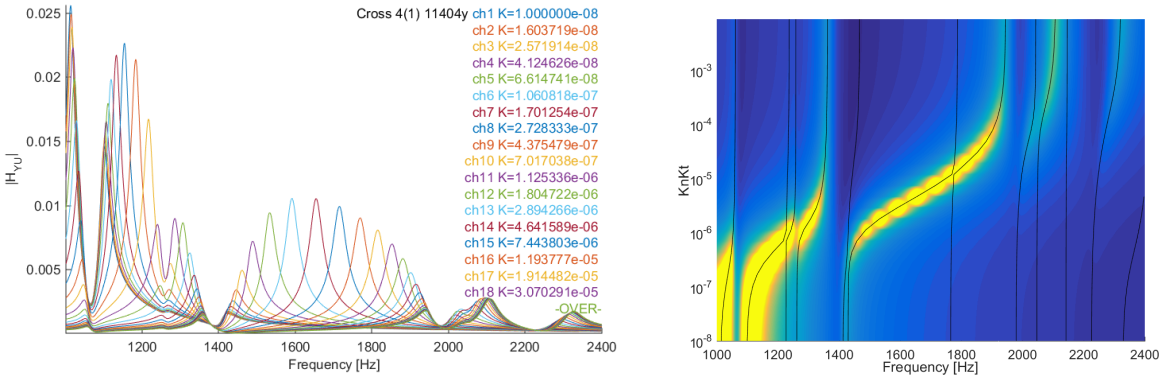


FIGURE 4.32 – Evolution d'un transfert colocalisé au niveau du guide câble en fonction de la raideur de contact. Gauche : vue amplitude/fréquence pour diverses raideurs. Droite : carte d'amplitude dans le plan fréquence/raideur.

La figure 4.33 fournit une deuxième illustration pour laquelle le mode de plateau proche de 2 kHz contribue beaucoup au point d'excitation choisi. La transition indique alors clairement que pour une propriété de jonction spécifique, matérialisée par la ligne en pointillés, le couplage avec le mode de guide câble conduit à une décroissance notable des niveaux vibratoires. Dans ce cas, la flexion du guide-câble se comporte comme un amortisseur à masse accordée dont l'utilisation est bien connue.

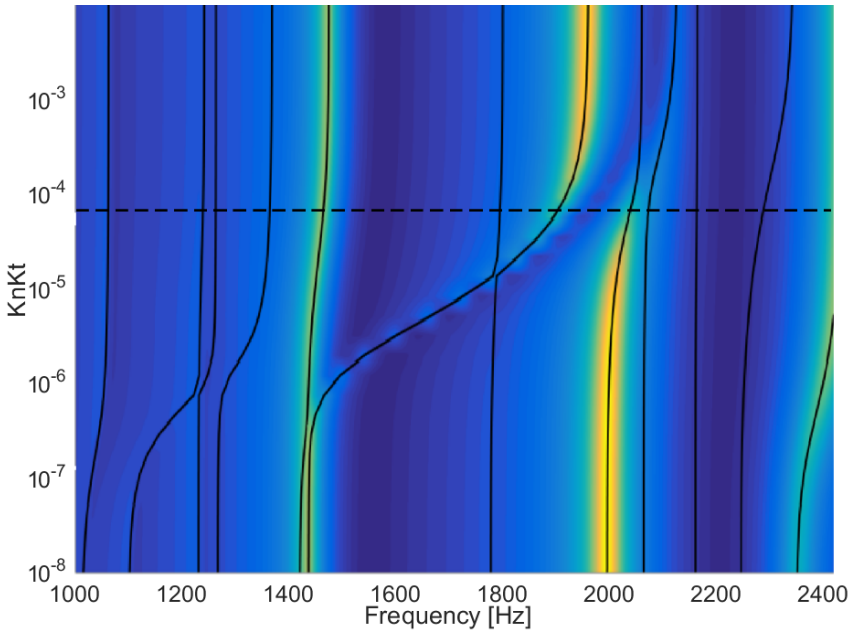


FIGURE 4.33 – Evolution d'un transfert colocalisé au niveau du plateau en fonction de la raideur de contact, sur une carte d'amplitude dans le plan fréquence/raideur.

5

Analyse numérique et expérimentale du crissement : modes complexes, ODS et expansion

Sommaire

5.1 Introduction 120
5.2 Analyse d'un cas numérique simple 122
5.2.1 Modèle linéarisé des perturbations glissantes 122
5.2.2 Evolutions paramétriques dans un cas simple 123
5.2.3 Pertinence de l'interaction à deux formes 125
5.3 Analyse expérimentale du cycle limite lors d'un crissement 127
5.3.1 Présentation du système et de la mesure 127
5.3.2 Analyse d'un cycle durant le crissement 130
5.3.3 Analyse de la variabilité dans le temps du cycle limite 132
5.3.4 Analyse de la reproductibilité du cycle limite 136
5.4 Extraction des modes du système monté sur le banc 138
5.5 Agrégation des lots de mesure 140
5.5.1 Stratégie d'agrégation des lots de mesures à partir des 4 références . . . 140
5.5.2 Application au cas d'étude 143
5.6 Exploitation de l'expansion 146

5.1 Introduction

Le crissement n'étant pas une condition désirée, son apparition correspond à un défaut de conception. En conséquence seule une caractérisation expérimentale est à même de permettre une compréhension des conditions exactes d'occurrence.

Cependant les essais sont le plus souvent trop pauvres spatialement pour être exploités seuls. En effet des contraintes de positionnement d'accéléromètre ou de visibilité pour une mesure laser limitent forcément les informations accessibles à la mesure. Les modèles EF forment donc un complément nécessaire. En particulier, l'expansion permet d'estimer les déplacements non mesurés.

Par ailleurs, la compréhension acquise par l'essai doit permettre de proposer des modifications de structure. Le traitement des situations de crissement se fait par différentes techniques : ajout d'amortissement, changement des champs de pression sous la plaquette, modification de l'espacement fréquentiel des modes, ... qui toutes nécessitent une évaluation fine des formes issues de l'essai et du calcul.

Le savoir-faire et le retour d'expérience joue un grand rôle dans la préconisation de solutions. Cependant les modèles éléments finis permettent des études rapides sur l'influence de modifications réalistes affectant la forme des pièces et il est souhaitable de les utiliser au maximum même quand leurs prédictions ne sont pas parfaites.

Dans ce contexte d'utilisation croisée d'essais et de calculs, illustrée par la figure 5.1, ce chapitre détaille les résultats d'une campagne d'essai réalisée sur un frein à tambour.

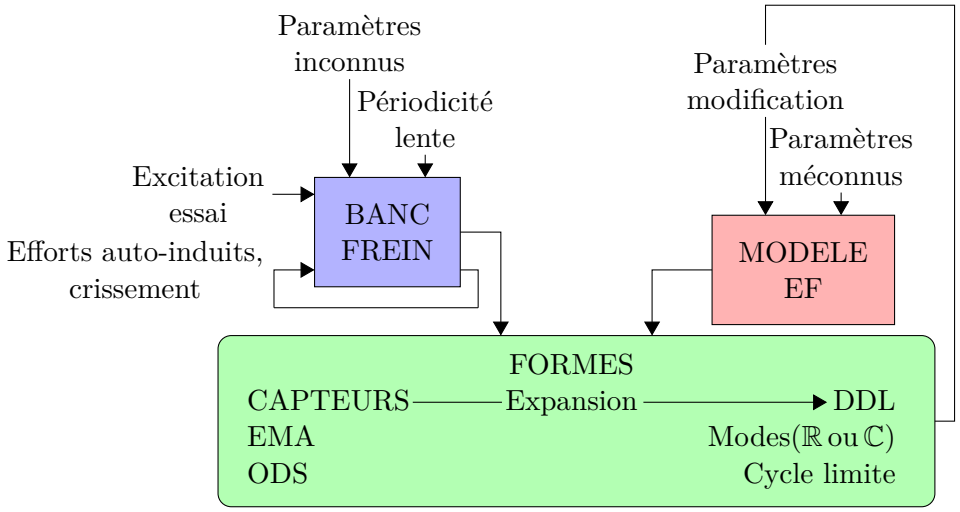


FIGURE 5.1 – Exploitation croisée des essais et du calcul pour l'analyse du crissement sur banc d'essai

Dans un premier temps, il convient de détailler les grands objectifs d'une mesure de crissement.

Le premier objectif classique en présence d'un phénomène de crissement sur véhicule est de reproduire le phénomène sur banc d'essai de façon à permettre une mesure spatialement plus riche que ne le permet la mesure embarquée sur véhicule. Les efforts liés à l'instabilité étant internes au système et non mesurables, on réalise une mesure en sortie seule en vue d'extraire des formes classiquement appelées déformées opérationnelles. L'acronyme ODS pour *Operational Deflection Shape* sera utilisé ici. Cette dénomination est très générale et concerne toute évaluation d'au moins deux capteurs (définissant une forme) à un certain instant de la mesure (mesure temporelle) ou à une certaine fréquence (exploitation d'un spectre construit à partir des mesures). Des mesures temporelles doivent donc être réalisées en présence du crissement pour

plusieurs capteurs à définir et la géométrie de mesure doit être créée pour l'utiliser en relation avec le modèle EF.

Le second objectif est d'analyser avec précision le comportement du système dans le temps : évolution de la fréquence crissante, évolution des formes, répétabilité et reproductibilité du crissement... Cet objectif n'a pas d'implication sur la gamme opératoire de mesure, il s'agit seulement d'une exploitation des mesures crissantes et s'applique aussi au calcul [73].

Le troisième objectif est de caractériser les modes propres du système, soit obtenir un résultat d'analyse modale expérimentale (EMA). Pour l'extraction des modes, il est plus simple de partir de transferts à effort connu. Cette mesure doit être réalisée en respectant le plus possible les conditions opérationnelles tout en introduisant une excitation maitrisée. Le positionnement de cette excitation doit donc être choisi et les conditions du système clairement définies pour la mesure : mise sous-pression, mise sous couple ou en glissement.

Du côté modèle, les phases de recalage de composants et d'assemblages, décrites dans les chapitres précédents, permettent de travailler avec une relative confiance dans la qualité des prédictions. Cependant un nombre notable de comportements ne sont reproductibles que dans une configuration de freinage. Les pièces mobiles ont un calage particulier dépendant de beaucoup de paramètres qui ne sont pas tous clairement identifiés. Les jeux, comportements matériaux et comportements de friction dépendent de la température. Le système évolue au cours de sa vie (usure, formation de troisième corps dans les interfaces, ...). En conséquence, le modèle ne peut, le plus souvent, être pleinement prédictif que par recalage sur une configuration de banc utilisée pour les essais de crissement.

Les techniques d'expansion permettent de combiner modèle EF et formes expérimentales connues aux capteurs (ODS ou EMA) pour estimer des réponses sur l'ensemble de la structure. On a alors des quantités directement comparables aux résultats de mesure, mais aussi accès à des formes beaucoup plus détaillées.

Pour cette expansion, un point à traiter est l'agrégation de lots de mesures. Les systèmes d'acquisitions étant limités en nombre de voies, il est souvent nécessaire pour obtenir une forme suffisamment détaillée en espace de réaliser des mesures séquentielles. Plusieurs capteurs de référence communs à tous les lots sont nécessaires à la construction du regroupement et à l'évaluation de sa qualité.

Enfin comme indiqué par la figure 5.1, la compréhension des formes obtenues permet de proposer des modifications de l'assemblage et l'approche la plus rapide pour cibler les bonnes modifications est d'utiliser le modèle EF qui permet de tester l'impact de modifications physiquement réalistes.

Pour une exploitation pertinente des mesures, une compréhension initiale des comportements attendus est indispensable. Par exemple, lors du phénomène de crissement, on mesure classiquement un cycle limite caractérisé par des ODS et non des modes qui interagissent. La compréhension de l'évolution de ce cycle limite ne peut venir que de la simulation.

La section 5.2 propose donc une analyse numérique du crissement sur un modèle simplifié de frein à disque. Le modèle numérique est simulé autour d'un état tangent (issu d'une analyse statique) linéaire dans le domaine fréquentiel : on obtient des modes complexes avec des amortissements associés et les modes instables sont ceux présentant un amortissement négatif. Le lien entre le couplage de deux modes réels et la déstabilisation du système est rappelé. Une étude du modèle, réduit uniquement sur ces deux modes, permet d'analyser simplement le phénomène avec une bonne fidélité.

Pour les essais sur frein réel, la section 5.3 détaille ensuite la stratégie retenue pour l'extraction de formes ODS à partir de mesures temporelles crissantes. Les difficultés analysées en détail sont liées à la variabilité du cycle limite au cours du temps, à la reproductibilité. Les difficultés liées aux mesures EMA sont ensuite présentées en section 5.4.

Les méthodes d'expansion permettent enfin un retour vers une exploitation de formes connues sur l'ensemble du maillage éléments finis. Les restrictions en nombre de voies de mesure impliquent cependant une concaténation de lots de mesures. Les techniques associés sont présentées en section 5.5 avec l'application à la concaténation des 4 lots de mesure de la campagne d'essai.

Malgré les difficultés et les questionnements liés à l'agrégation des mesures, celle-ci est menée à terme pour illustrer le résultat et son exploitation à travers l'expansion MDRE en section 5.6. Les erreurs résiduelles de modèle après l'expansion sont illustrées et permettent d'orienter vers des sources potentielles d'erreur de modélisation.

5.2 Analyse d'un cas numérique simple

Pour analyser les réponses crissantes de façon pertinente, il est nécessaire d'avoir une compréhension initiale des propriétés à exploiter et du caractère plus ou moins stable de ces quantités par rapport à de petits changements de structure. La section 5.2.1 reprend donc le cadre théorique classique des perturbations glissantes et les sections suivantes analysent la sensibilité des modes complexes sur un cas test numérique.

5.2.1 Modèle linéarisé des perturbations glissantes

Le phénomène de crissement est associé à une interaction entre les fluctuations d'effort normal liée aux vibrations et les effets induits sur les efforts tangentiels, comme explicité en [73] par exemple. Dans la version linéarisée du problème de contact frottant avec un disque tournant [85, 73], on considère des équations du mouvement de la forme

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K_s + K_u]\{q(t)\} = \{f_{ext}(t)\} \tag{5.1}$$

où q, $\dot{q}$, et $\ddot{q}$ sont les déplacements, vitesses et accélérations. M, C, K sont respectivement les matrices de masse, amortissement visqueux et raideur supposées constantes dans le temps. La matrice de raideur peut être décomposée en une partie symétrique K_s liée aux pièces élastiques et à la linéarisation des efforts de contact, alors que la partie non-symétrique K_u est liée à la fluctuation d'efforts tangentiels induits par une fluctuation d'efforts normaux. Pour les points glissants avec l'hypothèse des petites perturbations [85], l'expression de K_u est de la forme

$$[K_u] = [C_{TAN}]^T \left[\backslash \mu w_i J(x_i) \frac{\partial p_i(q)}{\partial q} \backslash \right] [C_{NOR}] \tag{5.2}$$

qui est clairement proportionnelle à μ, avec $[C_{NOR}]$ l'observation du gap selon les normales au contact, $[C_{TAN}]$ l'observation du gap tangentiel, w_i et $J(x_i)$ le poids de Gauss et la surface tous deux associés à chaque point de Gauss i (voir section 4.4.2). $\frac{\partial p_i(q)}{\partial q}$ correspond à la linéarisation de la loi de contact pression/gap autour des gaps correspondant à l'état tangent du modèle.

Il est bien documenté que les instabilités de crissement sont associées à une interaction entre plusieurs modes, associée à la contribution en raideur non-symétrique K_u. L'approche classique de calculs d'instabilités dans les états tangents linéarisés consiste donc à calculer les modes complexes solutions de

$$\left([K_s] + [K_u] + \lambda_j [C] + \lambda_j^2 [M]\right)\{\psi_j\} = 0 \tag{5.3}$$

et de s'intéresser à ceux dont le pôle λ_j a une partie réelle négative et sont donc instables.

Pour le calcul des modes complexes, il est usuel de passer par une base réduite associée aux modes réels ϕ_j solutions de $\left[K_S - \omega_j^2 M\right]\{\phi_j\} = \{0\}$ et donc d'approcher $\psi_j \approx [\Phi]\{\psi_{jR}\}$ en résolvant le problème aux valeurs propres réduit

$$\left(\left[\backslash \omega_j^2 \backslash\right] + \left[\Phi^T K_u \Phi\right] + \lambda_j \left[\Phi^T C \Phi\right] + \lambda_j^2 [I]\right)\{\psi_{jR}\} = 0 \tag{5.4}$$

où la masse est l'identité du fait de l'orthogonalité des modes et de leur normalisation, l'amortissement visqueux est souvent supposé diagonal par une hypothèse d'amortissement modal dans la configuration où $\mu = 0$ (donc où $K_u = 0$), la matrice de raideur est diagonale avec les pulsations propres au carré ($k_i = \omega_j^2$) et enfin la projection de K_u donne une matrice k' a priori non symétrique.

5.2.2 Evolutions paramétriques dans un cas simple

Pour illustrer les propriétés attendues, cette section reprend le frein simplifié proposé par [73]. Ce frein affiché en figure 5.2 est composé d'un disque (bleu) en acier non-amorti, d'une plaque arrière (jaune) elle aussi en acier non-amorti et enfin d'une garniture (verte) avec des propriétés orthotropes représentant un matériau composite fretté (beaucoup plus souple, de l'ordre de 5GPa). Sur le matériau composite, un amortissement de Rayleigh a été ajouté : $[C] = \alpha [M] + \beta [K]$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = 5e^{-7}$ pour représenter le caractère beaucoup plus amorti de ce matériau par rapport au disque et à la plaque arrière. La liste détaillée des matériaux ainsi que des précisions sur la nature des contacts sont disponibles en introduction de [73].

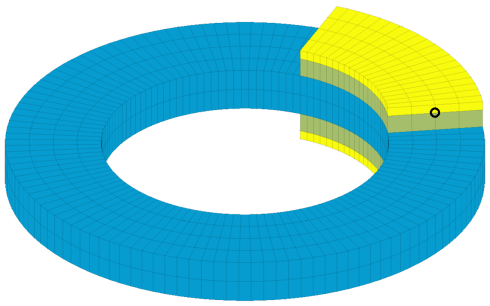


FIGURE 5.2 – Modèle éléments finis du frein à disque simplifié

Pour le calcul, le disque est mis en rotation et le contact frottant est linéarisé autour d'un état tangent menant à une raideur symétrique de contact et une raideur non symétrique de frottement comme explicité en section 5.2.1. Quatre points de part et d'autre des deux patins, similaires à celui entouré sur la figure 5.2, représentent les conditions limites fixes reprenant l'effort généré par le contact frottant.

Ce modèle présente un mode complexe instable autour de 5050 hertz qui correspond à l'interaction entre deux modes réels (modes calculés avec $\mu = 0$ et utilisés comme base de réduction) montrés en figure 5.3. Le mode réel #8 est un mode à lobe principalement hors-plan par rapport au disque et le mode réel #9 est un mode principalement dans le plan faisant intervenir le glissement des patins sur le disque.

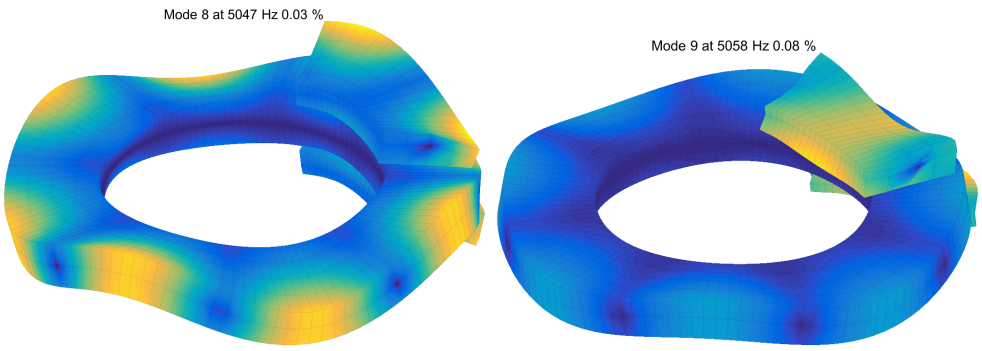


FIGURE 5.3 – Déformées modales des modes réels #8 et #9

Pour un coefficient de frottement μ progressivement augmenté de 0 à 0.2, la figure 5.4 montre l'évolution des deux modes complexes 8 et 9 à partir des modes sans frottement indiqués par un

point rouge. La figure montre que les deux modes se rapprochent en fréquence et que l'amortissement du mode #8 diminue jusqu'à devenir négatif alors que celui du mode #9 augmente.

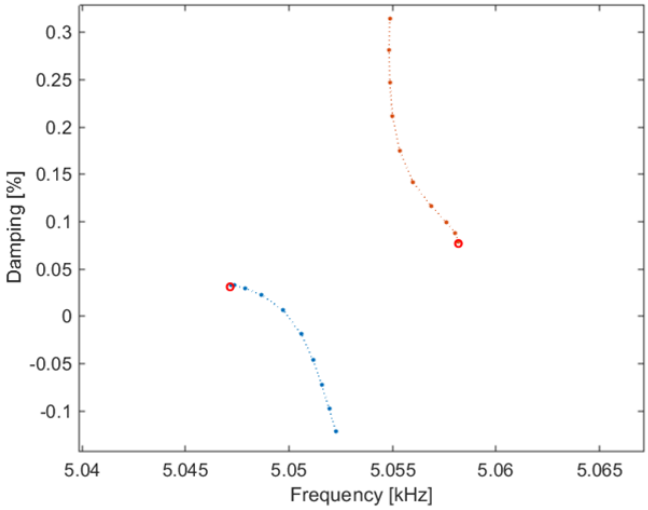


FIGURE 5.4 – Participation des modes réels aux modes complexes

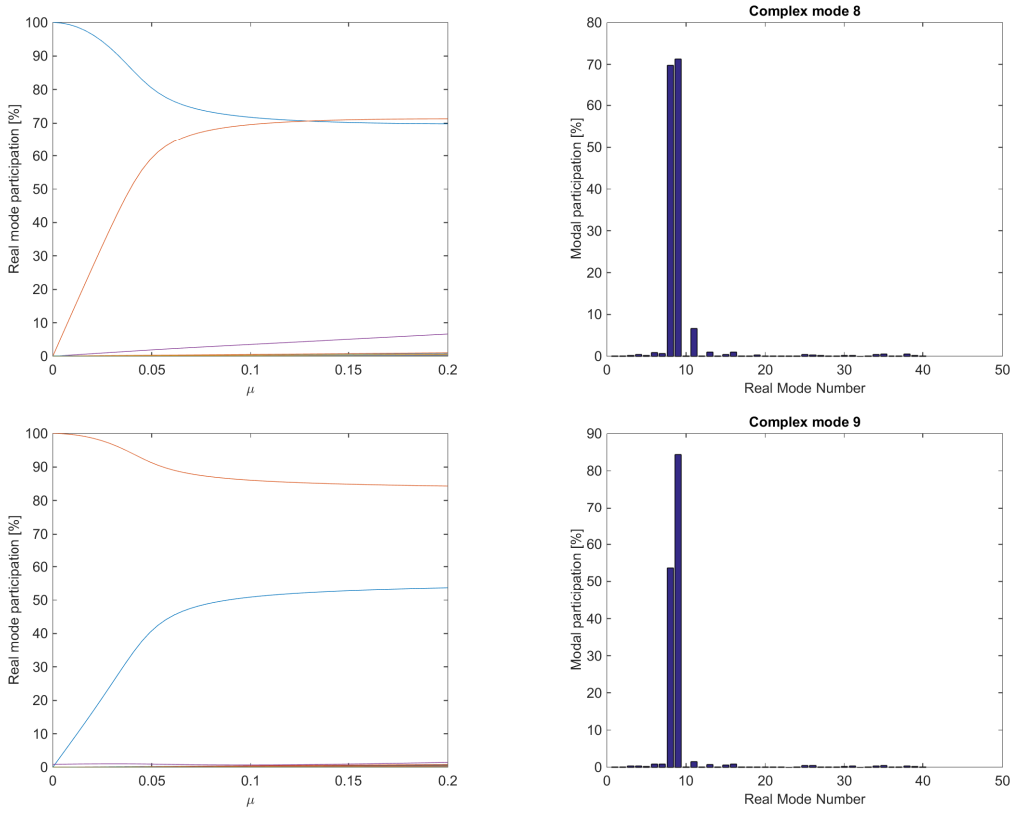


FIGURE 5.5 – Participation des modes réels aux modes complexes #8 (en haut) et #9 (en bas) : évolution de l'amplitude de participation (à gauche) et amplitude de participation pour $\mu = 0.2$ (à droite)

Le calcul des modes complexes est réalisé à partir du modèle réduit sur les modes réels (5.4). Il est donc possible d'afficher les participations des modes réels aux modes complexes, soit les amplitudes des composantes de $\{\psi_{jR}\}$: l'évolution avec μ de ces participations aux modes

complexes #8 et #9 est tracée en figure 5.5. La figure illustre clairement que seuls deux mode réels contribuent notablement aux modes complexes. Pour un coefficient de frottement nul, les modes complexes #8 et #9 sont exactement les modes réels #8 et #9. En augmentant le coefficient de frottement, les deux formes modales réelles se couplent pour former les formes des modes complexes et les contributions des autres modes réels restent très faibles.

Pour mieux analyser les interactions modales, on tient compte du fait qu'un mode est défini à un coefficient multiplicatif près. Ceci permet de contraindre l'amplitude modale principale $\psi_{jR,k} = 1$ (amplitude du $k^{ième}$ mode réel contribuant au mode complexe j). Ainsi pour le mode #8, on fixe la huitième composante de ψ_{8R} à 1 et on procède de même pour le mode #9. Il est alors possible de tracer la phase des composantes $\psi_{8R,9}$ et $\psi_{9R,8}$. La figure 5.6 illustre ainsi que les évolutions d'amortissement et de forme complexe sont aussi associées à des évolutions de phase relative entre les deux modes réels.

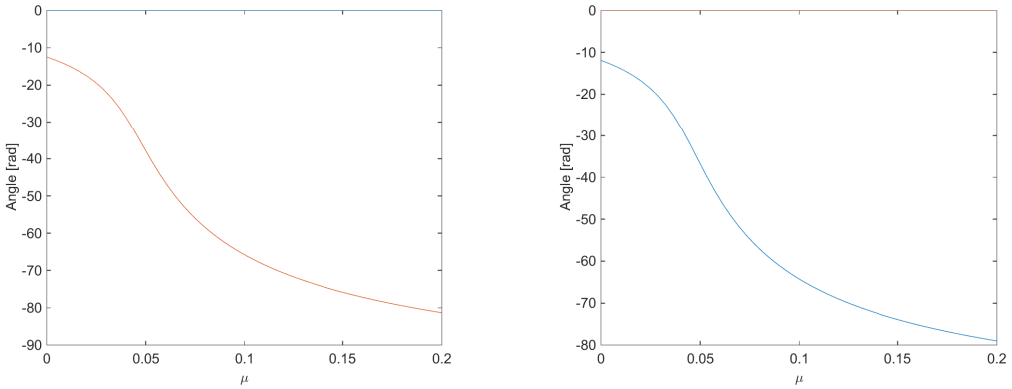


FIGURE 5.6 – Déphasage entre les deux modes réels participant aux modes complexes #8 (à gauche) et #9 (à droite)

Pour résumer, l'instabilité fait principalement intervenir deux formes modales réelles bien définies pour lesquelles le ratio d'amplitude et le déphasage dépendent du degré de couplage.

5.2.3 Pertinence de l'interaction à deux formes

Pour vérifier que les deux formes réelles suffisent à décrire le phénomène, le modèle à été réduit sur la base modale combinant les deux modes réels contribuant principalement à l'interaction modale, ce qui est fait en posant $T = [\phi_8\ \phi_9]$. La réduction de (5.3) dans cette base, avec l'hypothèse d'amortissement modal, conduit à un système à deux degrés de liberté modaux dont on peut calculer les modes complexes

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {\lambda_j}^2 + \begin{bmatrix} 2\zeta_8\omega_8 & 0 \\ 0 & 2\zeta_9\omega_9 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} \omega_8^2 & 0 \\ 0 & \omega_9^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} \\ k'_{21} & k'_{22} \end{bmatrix} \right) \{\psi_{jR}\} = 0 \tag{5.5}$$

La comparaison entre le modèle réduit sur l'ensemble des modes réels et celui réduit sur 2 modes uniquement est donnée en figure 5.7. On voit que la précision sur la fréquence des modes est nettement moins bonne avec deux modes pour la réduction, mais que l'amortissement estimé est lui très peu changé.

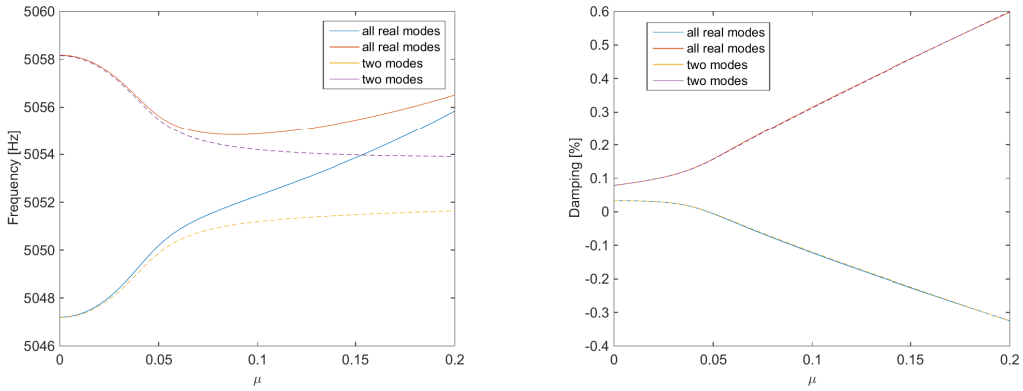


FIGURE 5.7 – Comparaison entre l'évolution en fréquence et amortissement avec le coefficient de frottement pour le modèle réduit sur l'ensemble des modes réels et le modèle réduit sur les deux modes réels (lignes pointillées) #8 et #9 (lignes continues)

Il est par ailleurs assez courant de chercher à traiter les problèmes de crissement en séparant les fréquences propres supposées interagir. Si cela est assez difficile à réaliser par changements de géométries de pièces, il est relativement aisé de tester l'impact d'un écartement de fréquences en base modale. On suppose donc être capable d'écarter les fréquences propres en conservant les amortissements modaux, soit dans notre cas créer une modification de structure conduisant aux variations de propriété modale

$$\begin{cases} \omega_8 \to \omega_8(1 - \frac{\delta\omega}{\omega}) \\ \omega_9 \to \omega_9(1 + \frac{\delta\omega}{\omega}) \end{cases} \tag{5.6}$$

A des fins d'illustration, on prend comme référence le point $\mu = 0.1$ (peu réaliste pour des freins réels mais tout de même pertinent pour l'analyse) qui présente un mode instable et on cherche à tester l'impact d'un écartement de fréquence à amortissement de structure constant. La figure 5.8 montre l'évolution des fréquences et des amortissements des deux modes pour un écartement des fréquences des deux modes réels croissant. Dans cette figure, les fréquences et amortissements pour couplage nul (ou $\mu = 0$) sont affichés en pointillé. Si on suppose que la matrice de couplage k' n'est pas modifiée par l'écartement des fréquences, on constate que pour des grands écarts de fréquence, les modes complexes convergent vers la limite découplée pour laquelle aucun mode n'est instable.

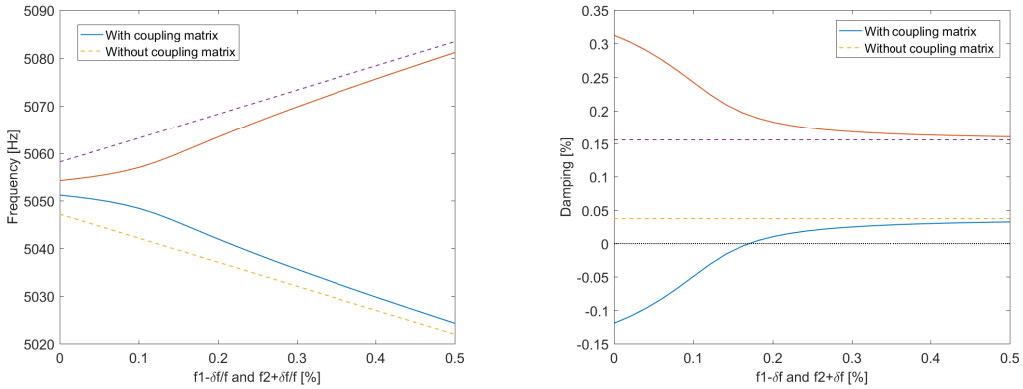


FIGURE 5.8 – Evolution de la fréquence (à gauche) et de l'amortissement (à droite) des modes complexes avec l'écartement des fréquences propres des modes réels

Cet exemple très simplifié a permis d'illustrer les propriétés attendues d'une situation de crissement. Le cycle limite mesuré devrait faire intervenir essentiellement deux formes associées

aux modes réels en interaction. Ce cycle peut être assez sensible à des fluctuations de propriétés qui peuvent induire des variations de fréquences, de niveaux de réponse et de contributions en amplitude et phase des modes réels nominaux.

5.3 Analyse expérimentale du cycle limite lors d'un crissement

Toutes les mesures exploitées dans cette section ont été réalisées sur un système de frein à tambour visible sur les deux vues de la figure 5.9. Sur la photo, le tambour a été retiré pour permettre de voir l'instrumentation interne. Pour ce frein, une problématique de crissement très basse fréquence, aux alentours de 900Hz, est présente sur véhicule. Un montage a été réalisé par CBI de façon à pouvoir fixer les trois attaches du bras sur lequel est monté le frein à tambour.

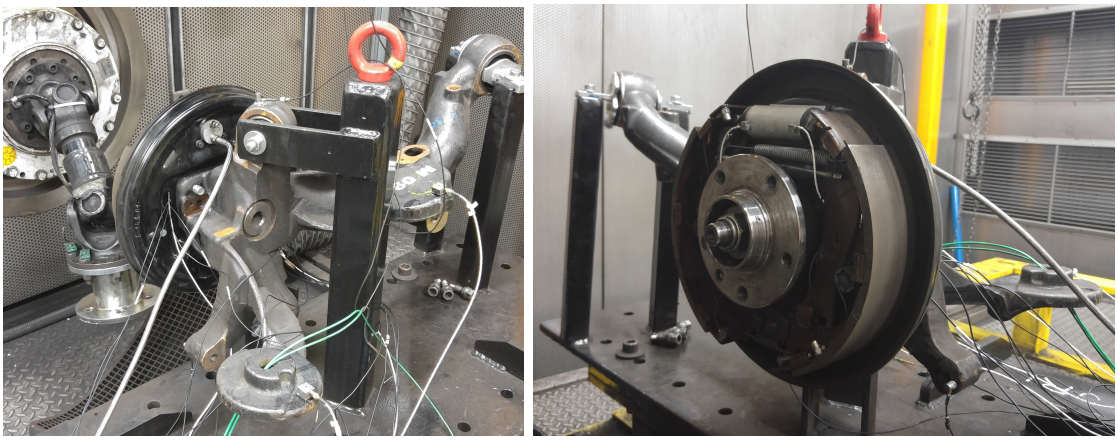


FIGURE 5.9 – Frein à tambour mesuré pour l'étude expérimentale du crissement

La section 5.3.1 présente la géométrie de mesure. La stabilité des formes modales est ensuite analysée selon plusieurs points de vue. La section 5.3.2 analyse l'évolution de la forme sur quelques cycles seulement. Une décomposition temps-fréquence, à l'aide de la transformée de Gabor dont le formalisme est rappelé en annexe B, est réalisée sur la mesure. A partir de cette décomposition la variabilité sur tout le temps de freinage est alors analysée en section 5.3.3. Enfin, la section 5.3.4 analyse la répétabilité de deux freinages mesurés d'un jour sur l'autre.

5.3.1 Présentation du système et de la mesure

La géométrie de mesure a été construite à partir des modes du modèle EF. L'algorithme MSeq, présenté en section 4.2.2, a été utilisé de façon à différencier les modes de la bande de fréquence autour de 900 Hz. La répartition initiale de capteurs ainsi obtenue a été modifiée pour tenir compte des contraintes de mise en position des accéléromètres. Par ailleurs la mesure utilise des triaxes qui permettent une interprétation visuelle plus simple des formes expérimentales, même si l'expansion analysée en section 3.4 rend cet argument moins probant. Enfin, certains capteurs ont été ajoutés pour répondre à une logique de distribution "régulière" des capteurs par rapport à la géométrie des composants (une répartition circulaire sur le plateau et les segments par exemple).

La géométrie obtenue, dont la superposition sur le modèle EF est visible en figure 5.10, est créée en se servant du modèle EF. Comme le positionnement des accéléromètres est peu précis, il a été jugé acceptable de construire la géométrie en positionnant les capteurs sur le modèle EF directement. Le positionnement d'un capteur triaxe se fait comme suit :

— Sélection d'un noeud sur la surface du maillage EF
— Détection automatique de la direction du premier capteur suivant la normale à la surface
— Orientation du deuxième capteur (rotation autour de la normale)

— Le troisième capteur est alors obtenu automatiquement pour former un repère direct entre les trois capteurs du triaxe.

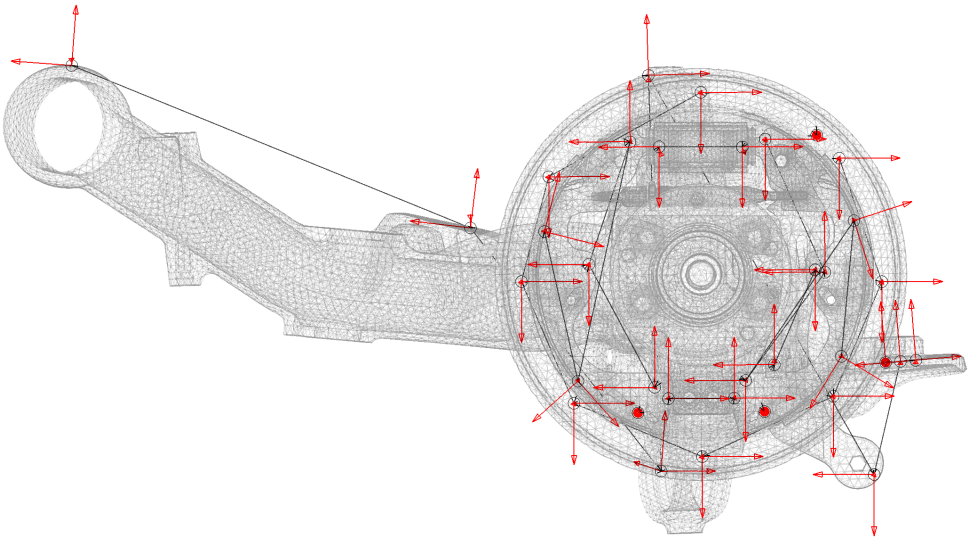


FIGURE 5.10 – Maillage de capteurs superposé au modèle éléments finis

Etant donné le grand nombre de capteurs (3 fois 31 triaxes = 93 capteurs + 4 monoaxes communs à chaque lot) et le nombre voies de mesures limité à 24 (ou 48 en couplant deux systèmes), la mesure a dû être réalisée avec 4 lots de capteurs. Afin d'assurer l'agrégation de ces lots, 4 capteurs uniaxiaux de référence ont été positionnés avec pour objectif de bien distinguer au moins la forme instable du modèle EF proche de 900Hz. S'il n'y a aucun moyen de s'assurer de la pertinence de la forme de calcul avant la mesure, il n'y a non plus aucune raison de ne pas utiliser cette information. La figure 5.11 montre le positionnement de ces 4 capteurs : un sur chaque segment, un sur le bord du plateau et un sur le bras au niveau de l'accroche du ressort pour l'amortisseur du véhicule.

FIGURE 5.11 – Positionnements des capteurs de référence

En ce qui concerne l'excitation du système pour réaliser des EMA, trois positions ont été retenues de façon à exciter les modes autour de 900Hz. Sur l'ensemble des points d'excitation, chaque mode numérique dans la gamme de fréquence 800-1000Hz voit au moins une fois le pot vibrant selon une direction représentant plus de 20% de l'amplitude maximale du mode. Trois configurations du pot vibrant ont été retenues et visibles en figure 5.12 : deux excitations du

bras et une excitation du plateau.

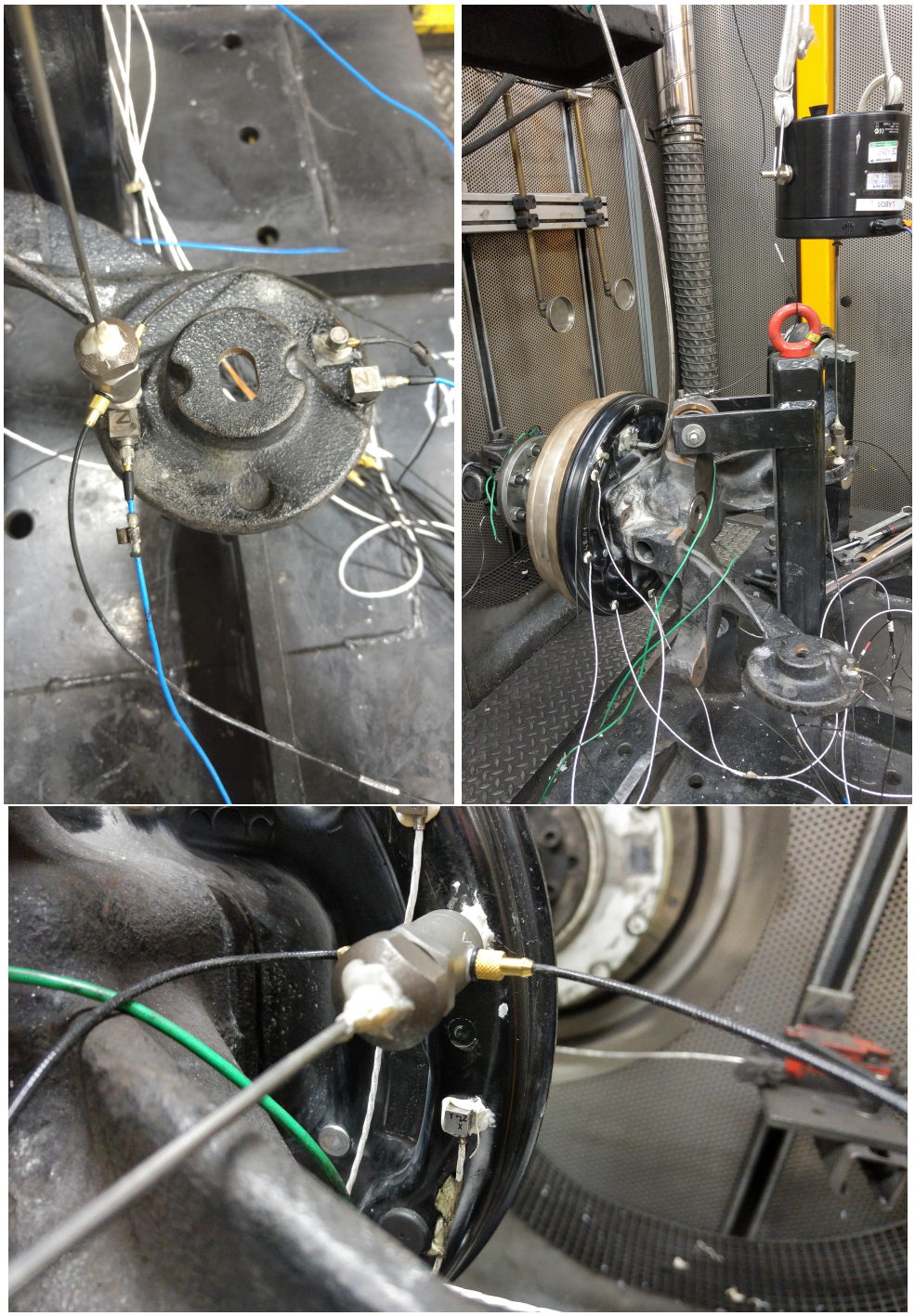


FIGURE 5.12 – Positionnements de l'excitation du pot vibrant

Pour chaque lot de capteur, l'objectif retenu est de mesurer au moins une fois le cycle limite correspondant au crissement (ODS) et de réaliser plusieurs EMA dans des conditions plus ou moins représentatives des conditions de crissement. En l'occurrence, quatre configurations sont retenues, soit de la plus éloignée à la plus proche :

— freinage statique sous pression 20 bar ;
— freinage statique sous pression 20 bar + couple 100Nm ;
— freinage statique sous pression 20 bar + couple 200Nm ;
— conditions glissantes sous pression 20 bar.

L'objectif spécifique de cet ensemble d'EMA est d'évaluer la pertinence de réaliser des mesures sous freinage statique qui est une condition notablement différente du système en conditions glissantes (contact entre pièces, champs de pression, non linéarités, ...). L'ajout du couple de 100Nm puis 200Nm est censé permettre de se rapprocher des conditions glissantes en termes de positionnement initial des pièces et de précontrainte du système (le freinage à 20bar en conditions glissantes engendre un couple d'environ 350Nm). Enfin la mesure sous condition glissante est très proche du système crissant, mais dans une configuration pour laquelle l'instabilité ne se développe pas.

Pour résumer, les mesures effectuées concernent 4 lots de 23 à 38 capteurs, 3 positions du pot vibrant et au moins 5 configurations de mesure (au moins une ODS et 4 EMA). Au total plus de 60 mesures ont réalisées sur 2 semaines et les sections suivantes proposent une exploitation de ces résultats.

5.3.2 Analyse d'un cycle durant le crissement

Pour analyser le crissement dans le domaine temporel, un capteur de référence est choisi arbitrairement sur une des mesures ODS réalisées. La mesure temporelle de ce capteur est montrée en figure 5.13. La vitesse de rotation est très faible : la roue fait un tour en environ 14 secondes. On remarque que cette durée correspond à un motif d'évolution de l'amplitude du crissement (complètement visible ici entre les temps 8s et 22s). Cette répétition synchronisée avec le tour de roue suggère que des caractéristiques liées au tambour, comme par exemple le voile, engendrent des modifications du système (champ de pression, surface en contact, calage des pièces) qui influent sur le crissement.

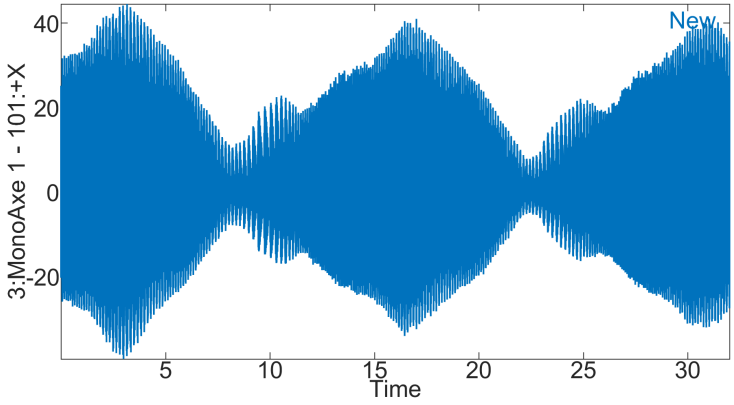


FIGURE 5.13 – Mesure temporelle du crissement pour un capteur donné

Pour analyser plus finement les déformations du système mises en jeu, un zoom est effectué au niveau du maximum d'amplitude (autour de 16s). Ce zoom laisse apparaître, en figure 5.14, trois cycles d'apparence sinusoïdale.

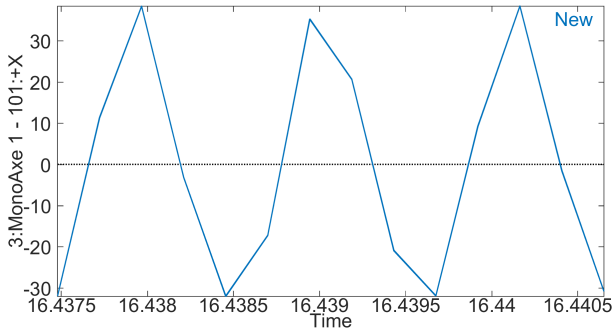


FIGURE 5.14 – Mesure temporelle : zoom sur 3 cycles

En observant cette fenêtre de mesure sur tous les capteurs, il est possible d'évaluer l'évolution des formes mesurées pendant ces trois cycles. Une décomposition en valeur singulière de l'ensemble des formes est réalisée

$$\left[\begin{array}{ccc} y(t_1) & \cdots & y(t_n) \end{array}\right]_{NS\times NT} = [U]\left[\backslash\sigma_n\backslash\right][V]^T = \sum_j \{U_j\}\,\sigma_j\,\{V_j\}^T \tag{5.7}$$

dans laquelle on distingue des formes U_j et des amplitudes temporelles associées

$$a_j(t) = \sigma_j\,\{V_j(t_1)\cdots V_j(t_{NT})\} \tag{5.8}$$

Pour le cycle considéré, les valeurs singulières σ_j affichées à gauche de la figure 5.15, montrent que deux formes principales se dégagent nettement. La deuxième représente plus 80% de la première alors que la troisième à peine 10%.

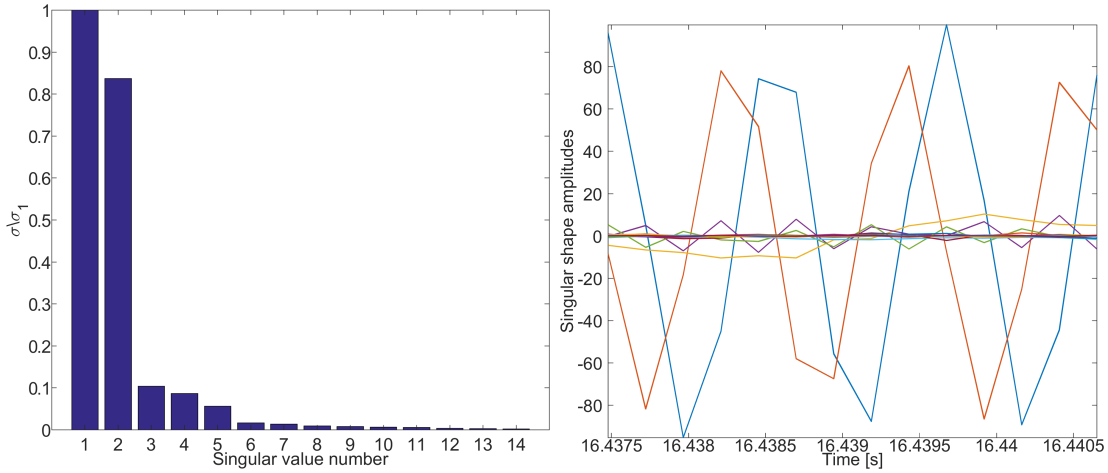


FIGURE 5.15 – Décomposition en valeur singulière des trois cycles sur l'ensemble des capteurs : valeurs singulières (à gauche) et amplitudes temporelles associées (à droite)

Le tracé des amplitudes temporelles $a_j(t)$ à droite de la figure 5.15, montre que les deux formes principales s'expriment selon une sinusoïde avec un déphasage d'environ 90° entre les deux.

L'observation de la mesure temporelle avec un zoom moins important (sur 1 seconde entre 16s et 17s) est montrée en figure 5.16. L'évolution d'apparence périodique de l'enveloppe du signal pose la question de l'évolution des formes principales sur une échelle de temps plus longue, ce qui motive une analyse temps-fréquence qui sera réalisée dans la section suivante.

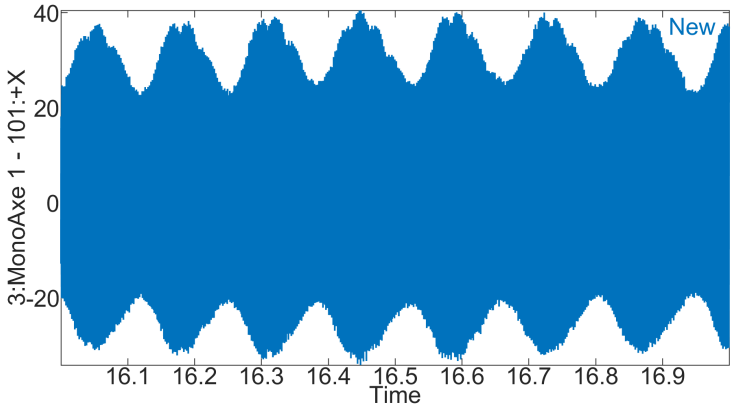


FIGURE 5.16 – Questionnements sur l'évolution temporelle : besoin d'une analyse temps-fréquence

5.3.3 Analyse de la variabilité dans le temps du cycle limite

Pour analyser la mesure temporelle pendant le crissement, présentée en figure 5.16, la transformée de Gabor temps-fréquence a été utilisée. La définition de cette transformée ainsi que les propositions de réglage des paramètres sont décrites précisément dans l'annexe B et les principaux résultats sont présentés ici.

La transformée de Gabor est une analyse de Fourier à court terme du signal convolué avec une fenêtre Gaussienne. Cette fenêtre a pour intérêt de maximiser l'inégalité d'Heisenberg-Gabor selon laquelle il n'est pas possible de connaître avec une précision aussi grande que voulue la localisation à la fois en fréquence et en temps d'un signal. Les écarts types de la fonction Gaussienne dans le domaine temporel $\sqrt{\Delta t^2}$ et fréquentiel $\sqrt{\Delta t^2}$ sont donc liés par l'égalité

$$\sqrt{\Delta f^2}\sqrt{\Delta t^2} = \frac{1}{4\pi} \tag{5.9}$$

et le choix d'un écart-type dans un des domaines détermine le second. La fenêtre gaussienne est translatée dans le domaine temporel du début à la fin du signal selon un pas de temps à définir et pour chaque pas de temps, la transformée de Fourier est calculée avec une discrétisation fréquentielle choisie. Les détails sur le choix des pas temporels et fréquentiels ainsi que sur les limitations de la transformée de Gabor sont disponibles en annexe B.

Deux choix ont été effectués sur la valeur de l'écart-type de la gaussienne pour calculer la transformée de Gabor. La figure 5.17 montre à gauche la résultat de la transformée de Gabor pour une résolution temporelle $\sqrt{\Delta t^2} = 0.004s$ très bonne et une résolution fréquentielle induite (voir l'équation (5.9)) grossière de $\sqrt{\Delta f^2} = 20Hz$. On retrouve les variations d'amplitudes cycliques toutes les 0.7s environ. Le trait noir matérialise pour chaque instant la fréquence où la transformée de Gabor est maximale. Avec ce choix de résolution, cette fréquence "instantanée" (en raison l'étroitesse de la fenêtre temporelle) oscille à la fréquence de la variation en amplitude entre 905Hz et 910Hz.

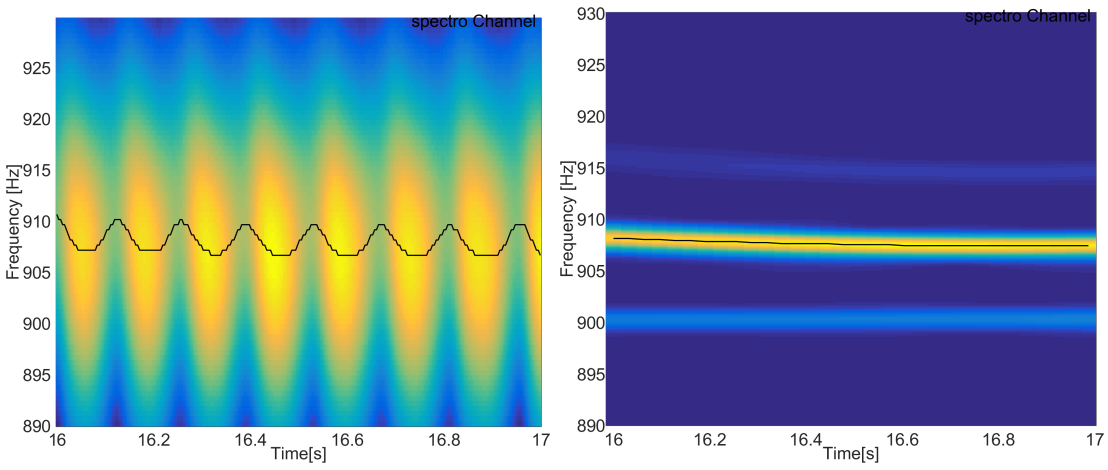


FIGURE 5.17 – Transformée de Gabor de la mesure temporelle entre les temps 16s et 17s : résolution temporelle élevée $\sqrt{\Delta t^2} = 0.004s$ et fréquentielle faible $\sqrt{\Delta f^2} = 20Hz$ (à gauche) et résolution temporelle faible $\sqrt{\Delta t^2} = 0.1592s$ et fréquentielle élevée $\sqrt{\Delta f^2} = 0.5Hz$ (à droite)

Un autre choix sur le compromis de résolution temps-fréquence est fait à droite de la figure 5.17 avec une résolution fréquentielle $\sqrt{\Delta f^2} = 0.5Hz$ très bonne et une résolution temporelle induite $\sqrt{\Delta t^2} = 0.1592s$ plus grossière. L'évolution cyclique lente de l'amplitude n'est plus visible. Une fréquence prédomine nettement, matérialisée par le trait noir autour de 907-906Hz. Une seconde fréquence très stable à 900Hz est présente, ainsi que dans une moindre mesure une troisième fréquence autour de 915 Hz.

L'interaction entre deux sinusoïdes d'amplitudes α et β et de fréquences proches f_α et f_β crée un phénomène dit de "battement" : le signal équivaut à une sinusoïde de fréquence $\frac{f_\alpha + f_\beta}{2}$

dont l'enveloppe évolue entre $\alpha - \beta$ et $\alpha + \beta$ à une fréquence $\frac{f_\alpha - f_\beta}{4}$. L'écart entre la fréquence dominante et la fréquence fixe à 900Hz est d'environ 7Hz menant à un battement à la fréquence 1.75Hz. C'est ce battement qui est visible dans le domaine temporel (figure 5.16) et avec la transformée de Gabor pour une résolution fine en temps.

La fréquence très stable à 900Hz est constamment relevée sur toutes les mesures effectuées. Il s'agit d'une interaction du système avec le banc d'essai à une harmonique de la fréquence d'alimentation (50Hz) : tous les systèmes de mesure ont été mis sur batterie et le phénomène est toujours présent.

La fréquence d'intérêt pour l'analyse du crissement semble donc plutôt être celle d'amplitude plus importante dont la contribution est visible vers 907 Hz en figure 5.17 droite. Pour la transformée $\{y(f,t)\}$, on cherche donc à chaque instant t la fréquence f_{max} du maximum d'amplitude de $\{y\}$. Comme les mesures sont plutôt propres (voir quelques capteurs en figure 5.21), il n'y a pas de doute sur la fréquence du maximum. Par ailleurs, le résultat obtenu par suivi de la fréquence du maximum sur différents capteurs donne des résultats presque identiques (à quelques pas de fréquence près). En pratique, le premier capteur de référence est donc utilisé.

Ayant obtenu la forme associée au maximum d'amplitude $\{y(f_{max}(t),t)\}$ pour chaque instant t, on cherche ensuite à évaluer la stabilité de l'ensemble de ces formes. Comme motivé en section 5.2, les phénomènes de crissement proviennent de l'interaction entre formes réelles. On cherche donc à vérifier qu'il est possible de représenter la forme associée à la fréquence du crissement comme une combinaison de formes réelles. Pour ceci, on construit la famille de vecteurs

$$[F] = [\Re(\cdots y(f_{max}(t),t)\cdots)\ \ \Im(\cdots y(f_{max}(t),t)\cdots)]_{NS\times 2NT} = \sum_j \{U_j\}\,\sigma_j\,\{V_j\}^T \tag{5.10}$$

Dans la décomposition en valeurs singulière de cette matrice, les vecteurs V_j sont de longueur $2NT$ avec les NT premières composantes donnant la contribution à la partie réelle et les suivants la contribution à la partie imaginaire. On obtient donc une approximation de la famille $[y(f_{max}(t),t)]$, de la forme

$$[\cdots y(f_{max}(t),t)\cdots] \approx \sum_j \{U_j\}_{NS\times 1}\,\{a_j(t)\}_{1\times NT} \tag{5.11}$$

avec $a_j(t) = \sigma_j \times (v_j(t) + iv_j(t+NT))$.

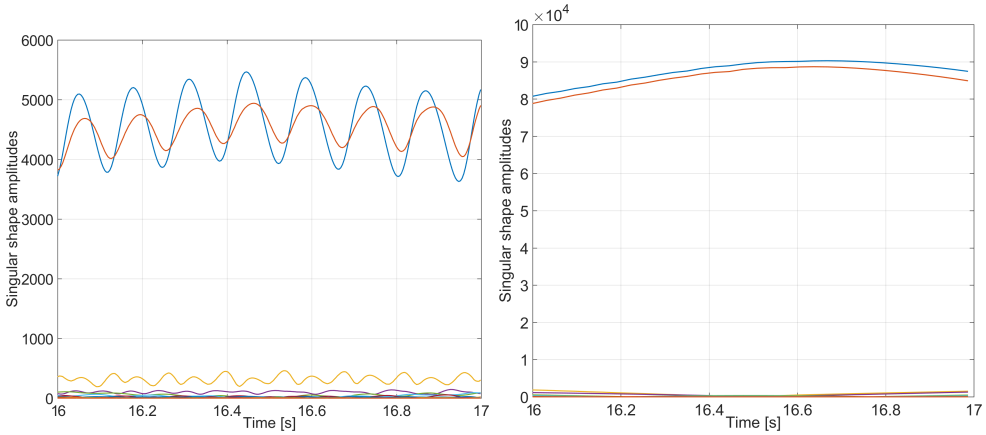


FIGURE 5.18 – Evolution temporelle des amplitudes principales entre les temps 16s et 17s : pour une résolution temporelle élevée et fréquentielle faible (à gauche) et pour une résolution temporelle faible et fréquentielle élevée (à droite)

La figure 5.18 montre l'évolution temporelle du module des amplitudes principales $|a_j(t)|$. A gauche, avec la résolution fréquentielle faible, deux formes prédominent clairement, mais leurs

amplitudes évoluent à la fréquence du battement entre la fréquence du crissement et la fréquence du banc. A droite, la résolution fréquentielle fine permet de séparer les contributions du banc et du cycle de crissement. Le choix de $y(f_{max}(t), t)$ est donc plus pertinent. On retrouve cependant toujours deux formes principales dont l'évolution est beaucoup plus lisse.

En dehors de l'évolution individuelle des deux amplitudes principales, il est intéressant de regarder l'évolution de la participation relative des deux formes. A gauche de la figure 5.19, l'évolution relative de la deuxième forme par rapport à la première montre une oscillation liée à l'interaction avec le banc d'essai. A droite, ou seules les formes liées au crissement interviennent, l'évolution relative des deux amplitudes est extrêmement faible : évolution d'amplitude de moins de 2% et déphasage de quelques degrés.

Cette première analyse a donc indiqué l'existence d'un cycle issu de la combinaison de deux formes réelles dont la fréquence et la forme sont très stables entre les temps 15s et 16s.

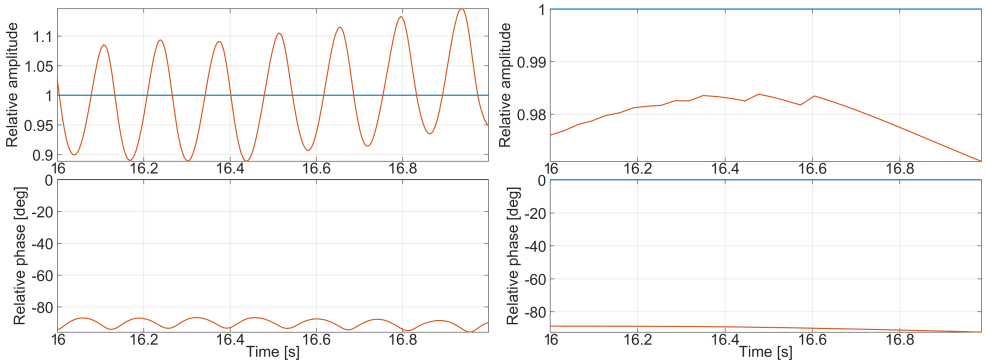


FIGURE 5.19 – Evolution relative des deux formes principales $a_2(t)/a_1(t)$ de la figure 5.18

Pour confirmer la tendance, on étudie maintenant un temps plus long. Pour l'intervalle de 12s à 20s, la figure 5.20 montre l'analyse temps fréquence. A gauche, la faible résolution fréquentielle conserve l'interaction crissement/banc et rend difficile l'interprétation avec la fréquence d'amplitude maximale car elle est sujette au battement. A droite, avec une résolution fréquentielle fine, la fréquence maximale du crissement évolue régulièrement entre 906Hz et 913Hz et n'est plus aussi stable que sur l'intervalle de temps plus court.

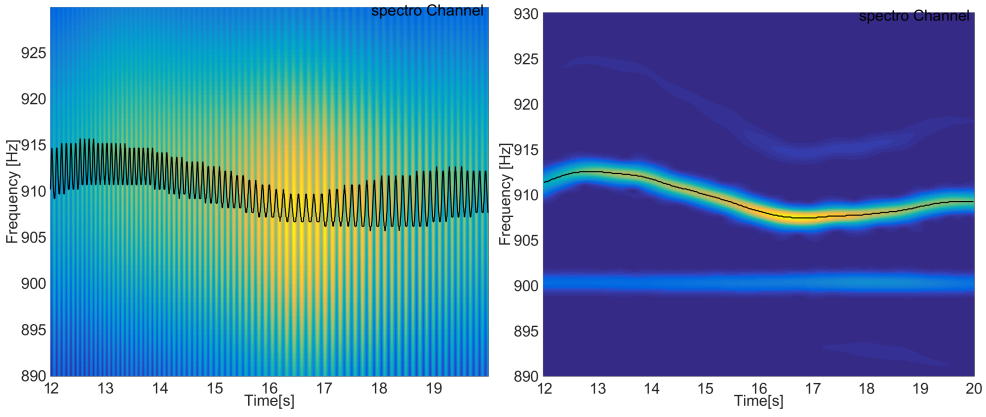


FIGURE 5.20 – Transformée de Gabor de la mesure temporelle entre les temps 12s et 20s : résolution temporelle élevée $\sqrt{\Delta t^2} = 0.004s$ et fréquentielle faible $\sqrt{\Delta f^2} = 20Hz$ (à gauche) et résolution temporelle faible $\sqrt{\Delta t^2} = 0.1592s$ et fréquentielle élevée $\sqrt{\Delta f^2} = 0.5Hz$ (à droite)

La figure 5.21 montre la superposition de trois tranches temporelles (t=13s, t2=15s et t3=17s) de l'analyse temps fréquence à forte résolution fréquentielle. On voit clairement l'évolution à la fois en amplitude et en fréquence autour de 910Hz alors que la participation à 900Hz est

rigoureusement stable en fréquence. Cette stabilité à 900Hz alors que la fréquence du crissement n'est pas constante confirme qu'il s'agit d'une excitation liée à l'alimentation électrique du banc.

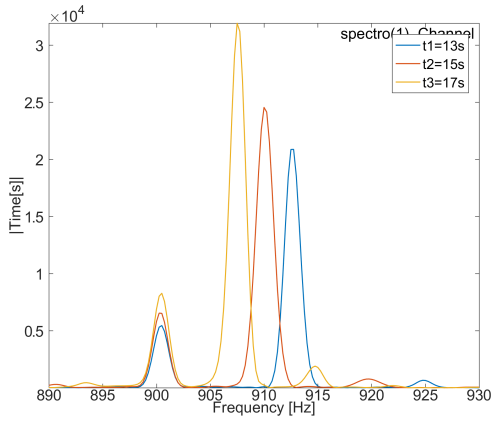


FIGURE 5.21 – Trois coupes de l'évolution temps-fréquence : t1=13s, t2=15s et t3=17s

Pour la transformée à résolution forte, la figure 5.22 affiche à gauche les amplitudes associées aux formes principales et confirme que la réponse est bien représentée par un sous-espace de dimension 2 avec une variation régulière des amplitudes principales.

L'évolution relative des deux premières amplitudes, affichée à droite de la figure, montre une phase relative toujours proche de 90°, mais des fluctuations d'amplitude assez fortes avec $|a_2/a_1| \in [0.7\ 1]$.

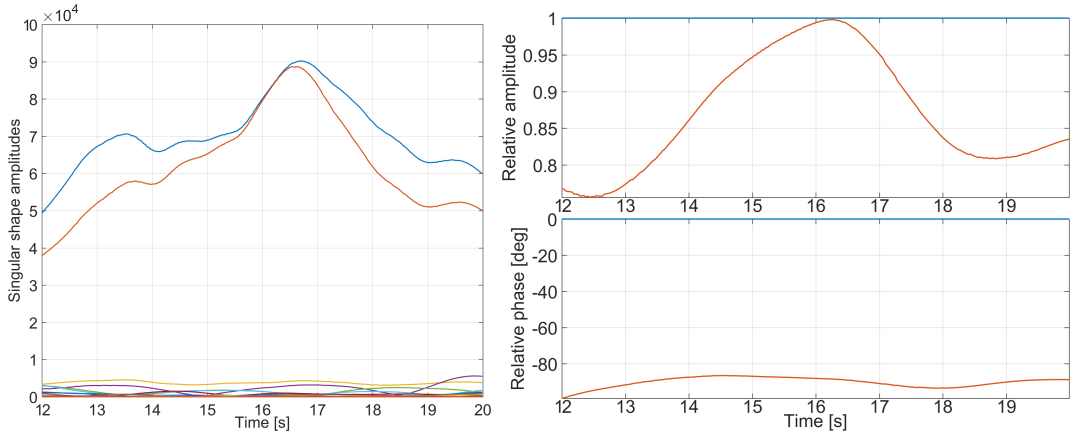


FIGURE 5.22 – Pour une résolution fréquentielle forte, $|a_j(t)|$ à gauche et $a_2(t)/a_1(t)$ à droite.

Une autre interprétation de l'évolution de forme peut être obtenue en comparant les formes $\{y(f_{max}(t), t)\}$ entre elles (calcul dit d'AutoMAC). Le résultat en figure 5.23 montre que les cas extrêmes $|a_2/a_1| = 0.7$ en $t = 12.3s$ et $|a_2/a_1| = 1$ en $t = 16.2s$, donnent un MAC de 96%. Cette corrélation plutôt forte, montre le caractère peu pertinent du MAC pour mesurer le déphasage entre deux formes.

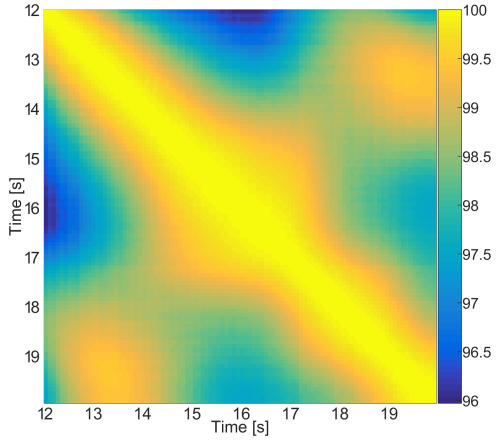


FIGURE 5.23 – AutoMAC entre les formes $\{y(f_{max}(t), t)\}$

5.3.4 Analyse de la reproductibilité du cycle limite

Le phénomène crissant obtenu montrant une assez grande stabilité sur un essai, il semble pertinent d'évaluer la reproductibilité des propriétés obtenues. Pour cela, la mesure d'un second freinage avec les mêmes capteurs a été réalisée. Cette mesure a été effectuée le lendemain de la mesure précédente. Les conditions globales de la mesure (température, mise en position relative des pièces, état de surface de la garniture) ont donc légèrement varié.

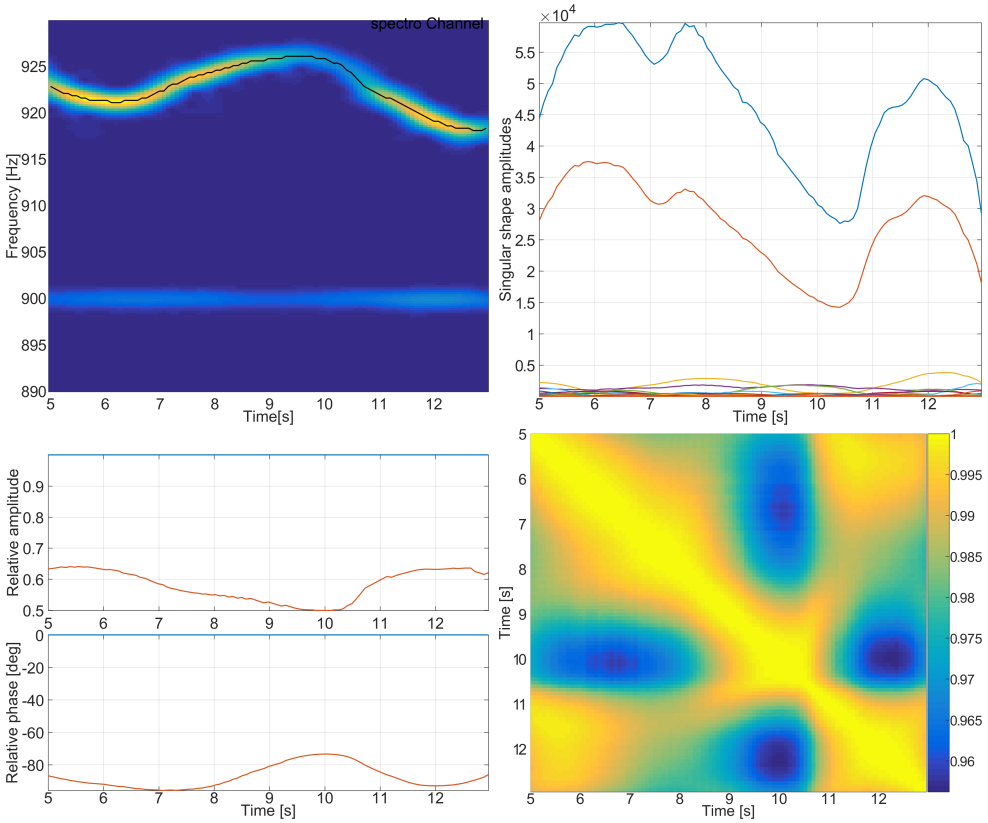


FIGURE 5.24 – Etude de variabilité pour un deuxième freinage : transformée de Gabor (en haut à gauche), évolution des amplitudes principales (en haut à droite), évolution relative des deux formes principales (en bas à gauche) et autoMAC entre les formes $\{y(f_{max}(t), t)\}$ (en bas à droite)

La figure 5.24 présente les résultats sur le second freinage de l'analyse similaire à celle réalisée

sur le premier freinage à la section précédente. La fréquence du crissement est dans ce cas également variable mais de moyenne plus élevée que pour le freinage précédent, avec une variation entre 917Hz et 925Hz.

L'évolution temporelle des formes principales (en haut à droite) montre à nouveau deux formes prépondérantes. Le ratio des deux premières amplitudes, en bas à gauche, présente une fluctuation plus forte en phase (entre -70° et -100°) et plus faible en amplitude $a_2/a_1 \in [0.5\ .65]$. L'AutoMAC, en bas à droite, reste bon mais cela est cohérent avec sa faible sensibilité.

Si, pour les deux freinages pris indépendamment les variations de la réponse $\{y(f_{max}(t),t)\}$ représentant le cycle fluctuent assez peu avec le temps, la comparaison croisée entre les deux freinages, montrée en figure 5.25 est plus nuancée. On constate en effet des MAC compris entre 0.78 et 0.88 sur les 38 capteurs du lot de mesure.

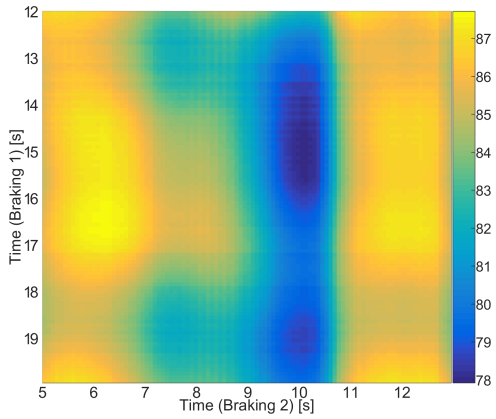


FIGURE 5.25 – MAC entre les formes $\{y_1(f_{max}(t),t)\}$ et $\{y_2(f_{max}(t),t)\}$

Afin de comparer les sous-espaces plutôt que les formes directement, une décomposition en valeurs singulières est proposée sur le modèle de l'équation (5.10), mais en prenant en entrée les deux mesures mises bout à bout et normalisées pour avoir le même poids

$$[y(t)] = \left[\frac{[y_1(f_{max}(t),t)]}{\|y_1(f_{max}(t),t)\|} \quad \frac{[y_2(f_{max}(t),t)]}{\|y_2(f_{max}(t),t)\|} \right] \tag{5.12}$$

L'évolution temporelle de chaque mesure, décomposée selon les amplitudes des formes réelles principales communes, est montrée en figure 5.26.

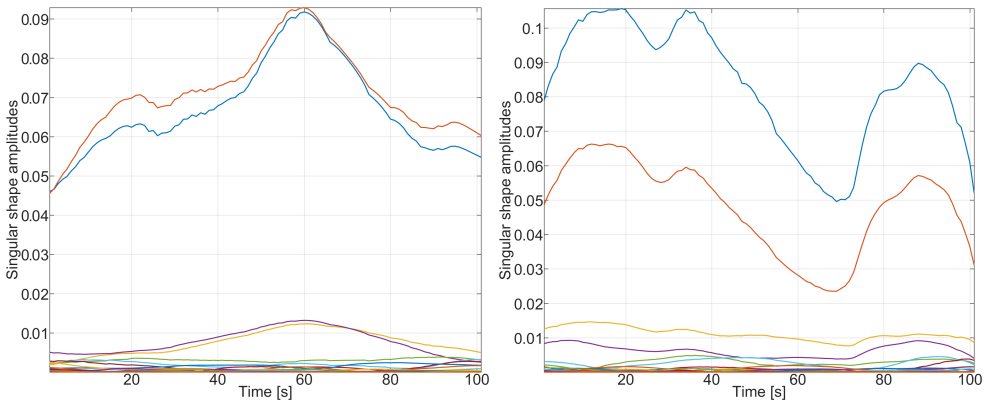


FIGURE 5.26 – Décomposition de l'évolution temporelle de chaque mesure sur la base des formes principales réelles communes : premier freinage (à gauche) et second freinage (à droite).

La prédominance de deux formes est légèrement moins marquée que lorsque les deux freinages sont analysés de façon isolée (figures 5.22 et 5.24), mais elle est toujours nette. L'évolution relative entre les deux formes principales pour les deux mesures est montrée en figure 5.27.

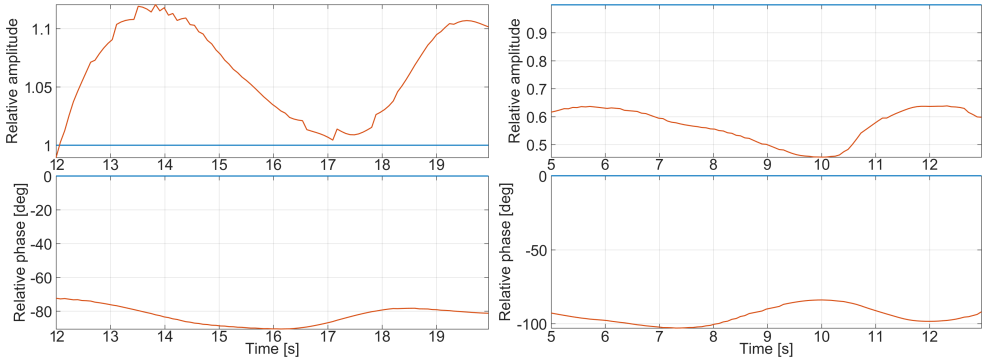


FIGURE 5.27 – Evolution relative des deux formes principales pour chaque graphique de la figure 5.26

En raison du ratio d'amplitude et du déphasage qui sont nettement différents pour les deux mesures, le MAC, qui compare les formes complexes et non les sous-espaces, est d'assez mauvaise qualité. Pourtant, le sous-espace composé ici des deux formes principales comunes permet de bien décrire les deux mesures.

Une autre façon de comparer plus directement les sous-espaces est d'évaluer l'angle entre entre eux (se référer à [86, 87] pour la notion d'angle entre sous-espaces). Le MAC peut être vu comme le carré du cosinus de l'angle entre deux vecteurs. Par extension, le MAC équivalent peut être évalué entre des sous-espaces. Le sous-espace engendré par les deux formes principales extraites du premier freinage et celui engendré par les deux formes principales extraites du deuxième freinage forment un angle de 19°, soit un MAC de 90%.

5.4 Extraction des modes du système monté sur le banc

Pour tout travail de recalage du modèle représentant le système monté sur le banc, il est nécessaire de disposer de données de référence aisément calculables et comme précédemment l'approche la plus raisonnable est d'estimer des modes.

De nombreux travaux ont été menés sur l'extraction des propriétés modales à partir de mesures opérationnelles. On parle alors d'OMA (Operational Modal Analysis) et une revue très complète est disponible en [88]. La méthode OMA la plus classique, qui suppose que l'excitation non maîtrisée est un bruit blanc, n'utilise que cette information pour construire une pseudo-FRF utilisée pour l'identification. Reynders met en avant la qualité supérieure des résultats obtenue avec la méthode OMAX (Operational Modal Analysis in presence of eXogeneous inputs) [89], qui prend en compte à la fois la contribution stochastique, liée aux efforts inconnus et une ou plusieurs contributions déterministes, liées à des efforts connus sur la structure : l'introduction et la prise en compte de ces excitations supplémentaires contrôlées, qui ajoutent de l'énergie dans le système, améliore les résultats.

L'utilisation des transmissibilités, ratios de déplacement entre deux capteurs qui ont la propriété de présenter des transferts stables aux fréquences des pôles sous différentes conditions de chargement, a également été proposée pour identifier les pôles [90, 91, 92]. Cette méthode présente l'avantage par rapport à l'OMA de ne pas faire l'hypothèse que les efforts inconnus sont de type bruit blanc. Elle est combinée à la méthode OMAX dans [93] pour s'affranchir de cette hypothèse, avec de bons résultats.

Pour le cas d'étude, les mesures ayant lieu sur un banc, il est possible de rajouter une excitation maitrisée au système glissant et donc d'obtenir des transferts comme pour une analyse modale classique (EMA). L'estimateur H_1 avec 50 moyennes a été utilisé. Le moyennage des inter- et auto-spectres tend à supprimer l'influence des efforts non mesurés en faisant l'hypothèse qu'ils ne sont pas corrélés avec les efforts mesurés.

En l'absence d'implémentation des algorithmes OMA et OMAX dans SDT, ce choix était plus rapide et comme le montreront les résultats suivants l'obtention de transferts a donné des informations particulièrement utiles sur la reproductibilité.

L'exploitation des modes dans des activités de corrélation nécessite une bonne représentation des conditions de fonctionnement et une bonne reproductibilité des mesures. Pour assoir la dépendance aux conditions de fonctionnement, plusieurs tests ont été réalisés. De la plus éloignée à la plus proche des conditions d'occurrence du crissement, on a considéré : freinage sous 20 bar statique, puis sous couple 100Nm, sous couple 200Nm et enfin en condition de glissement sans crissement. On note que pour les trois premières conditions, étant donnée l'absence d'efforts internes notables, une EMA est très bien indiquée.

La figure 5.28 présente les transferts mesurés entre la position de l'excitation #2 et le capteur de référence #1. Dans chacune des conditions de freinage, quatre transferts sont superposés : il s'agit d'un transfert de référence mesuré pour chacun des 4 lots de capteurs.

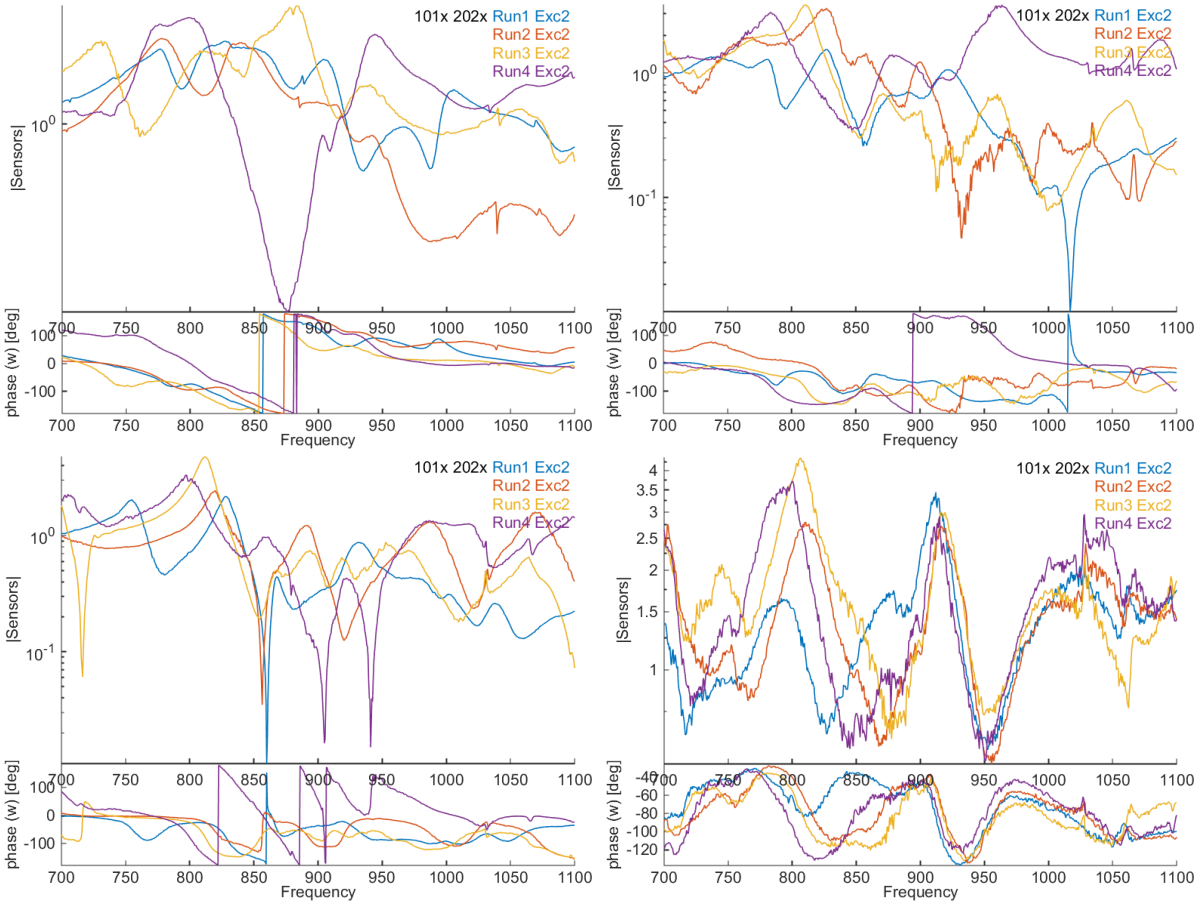


FIGURE 5.28 – Reproductibilité des transferts pour la position d'excitation #2 et la référence #1, sous 20bar pour différentes conditions : statique (en haut à gauche), en couple 100Nm (en haut à droite), en couple 200Nm (en bas à gauche) et en conditions de glissement (en bas à droite)

Dans la condition de mise sous pression statique, la dispersion est très grande : les quatre transferts sont très différents et la reproductibilité de la mesure très mauvaise. Au-delà de l'incapacité à agréger les identifications modales de chacun des lots de capteurs étant donné la dispersion des mesures, il est peu probable qu'il soit possible d'exploiter ces mesures pour analyser le phénomène crissant qui est, lui, assez reproductible.

En ajoutant le couple, si la reproductibilité de la mesure est toujours mauvaise, elle est

tout de même améliorée. On note quelques similitudes entre les évolutions en amplitude. Si une agrégation est peut-être envisageable, elle demande néanmoins beaucoup de travail et aboutit nécessairement à un résultat de qualité douteuse. La capacité à faire le lien avec le crissement qui apparait en conditions glissantes est toujours une question.

Finalement, une mesure en conditions glissantes est effectuée. Pour éviter l'occurrence du crissement qui viendrait perturber la mesure, il est souvent possible de jouer sur la pression ou la vitesse de rotation du tambour jusqu'à un point de fonctionnement ou le crissement n'apparait pas. Dans notre cas, le simple fait de laisser refroidir le système permettait quasi systématiquement de supprimer le bruit.

La visualisation de ce transfert mesuré (en bas à droite de 5.28) montre tout de même un bruit notablement plus élevé que pour les trois transferts précédents en condition de freinage statique. Néanmoins, la reproductibilité de la mesure est nettement plus grande que précédemment et on observe entre autre pour ce couple entrée/sortie une résonnance claire autour de 910Hz, soit la fréquence moyenne d'occurrence du crissement. Malgré la baisse de la qualité du signal, cette mesure semble plus exploitable car plus proche des conditions d'occurrence du bruit et l'agrégation de l'identification des 4 lots de mesure est beaucoup plus envisageable.

Quelle que soit la méthode employée pour extraire les pôles en conditions opérationnelles (EMA, OMA, OMAX, transmissibilités), celles-ci reposent toutes sur l'hypothèse d'un système linéaire invariant dans le temps. Etant donné la variabilité dans le temps du cycle limite mise en évidence dans les sections précédentes, il est probable que celle-ci soit également présente au niveau des modes du système. Pour notre exemple d'exploitation de transferts estimés avec H_1, la variation pour chaque mesure des pôles du système est moyennée dans le domaine fréquentiel et en résulte un "étalement" et un bruit potentiellement non négligeables au niveau des résonnances.

Afin de permettre une identification plus précise des systèmes variant dans le temps, [94] propose d'étendre l'identification de type LSCF au domaine temps-fréquence avec des fonctions de base de la forme $\Omega_{i,j}(t,\omega) = p_i(t)z^j$, les fonctions p_i formant une famille de polynômes orthogonaux dans le domaine temporel. Cela permet d'identifier des pôles évolutifs dans le temps. L'algorithme est développé pour une excitation non mesurée en bruit blanc uniquement et pourrait être étendu à une prise en compte conjointe des efforts non mesurés et des efforts mesurés, de la même manière que pour l'extension de OMA en OMAX, améliorant la qualité des mesures et donc potentiellement des résultats obtenus.

Pour la caractérisation des modes, une autre perspective, nécessitant à priori moins de développement, est l'utilisation de la méthode d'appropriation [95] qui permettrait d'exciter plus spécifiquement un mode réel en cours de freinage.

5.5 Agrégation des lots de mesure

5.5.1 Stratégie d'agrégation des lots de mesures à partir des 4 références

Etant donnés les problèmes de reproductibilité, l'agrégation des lots de mesure n'est pas du tout triviale. Un protocole est proposé permettant d'utiliser l'hypothèse selon laquelle les deux formes réelles principales d'un cycle limite forment un sous-espace constant entre deux freinages. Le protocole doit également permettre de concaténer les lots de mesures à partir des 4 capteurs de référence.

Pour chaque mesure de cycle limite, deux formes principales réelles $[\Phi_1\Phi_2]$ sont extraites. A partir de deux formes principales cibles (elles seront explicitées plus tard) connues aux capteurs de référence $[\phi_1\phi_2]_{|ref}$, l'objectif est de trouver les combinaisons linéaires $[\lambda]$ de $[\Phi_1\Phi_2]$ minimisant l'écart aux capteurs avec les formes cibles, ce qui est obtenu avec

$$[\lambda] = [\Phi_1\Phi_2]^+_{|ref}\,[\phi_1\phi_2]_{|ref} \tag{5.13}$$

avec $[\Phi_1\Phi_2]_{|ref}$ la restriction de $[\Phi_1\Phi_2]$ aux capteurs de référence.

$\left[\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2\right] = [\Phi_1\Phi_2]\,[\lambda]$ est alors la combinaison linéaire dans le sous-espace engendré par les deux formes réelles principales qui minimise l'écart aux capteurs de référence avec les deux formes cibles $[\phi_1\phi_2]_{|ref}$.

Pour valider la pertinence de n'utiliser que 4 capteurs et une combinaison des deux formes réelles principales pour reconstruire les déformées, l'algorithme est appliqué sur le premier freinage mesuré et avec pour cible $\{y(f_{max}(t),t))\}_{|ref}$.

La figure 5.29 à gauche montre que quel que soit l'instant choisit pour cible, l'approximation avec les deux formes principales permet d'avoir un MAC entre la mesure $\{y(f_{max}(t),t))\}_{|ref}$ et la meilleure combinaison linéaire $\{\tilde{y}(f_{max}(t),t))\}_{|ref} = [\Phi_1\Phi_2]_{|ref}\,\{\lambda\}$ au-dessus de 99.3%. La comparaison entre les formes estimées et mesurées sur tous les capteurs à droite de la figure 5.29 montre également une très bonne corrélation, avec un MAC minimum de 98.5%.

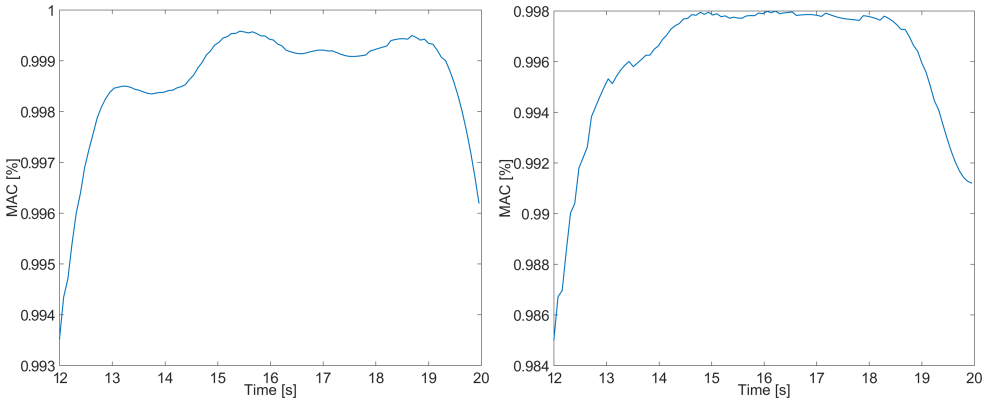


FIGURE 5.29 – MAC entre $\{\tilde{y}(f_{max}(t),t))\}_{|ref}$ et $\{y(f_{max}(t),t))\}_{|ref}$ (gauche) et entre $\{\tilde{y}(f_{max}(t),t))\}$ et $\{y(f_{max}(t),t))\}$ (droite).

L'évaluation de cette méthode peut également être faite pour les deux freinages successifs : à partir du sous-espace extrait de la mesure d'un freinage, on cherche à reconstruire la mesure de l'autre, en s'appuyant sur les capteurs de référence uniquement. La figure 5.30 montre à gauche le MAC à chaque instant entre la reconstruction du premier freinage $\{\tilde{y_1}(f_{max}(t),t))\}$ à partir du sous-espace du second $\left[\Phi_1^2\Phi_2^2\right]$ et les mesures réelles $\{y_1(f_{max}(t),t))\}$. La figure de droite montre l'inverse. Les valeurs de MAC sont plus faible que précédemment mais le MAC est tout de même dans les deux cas supérieur à 87%, qui est à titre de comparaison la borne supérieur de la corrélation direct entre les deux mesures en figure 5.25

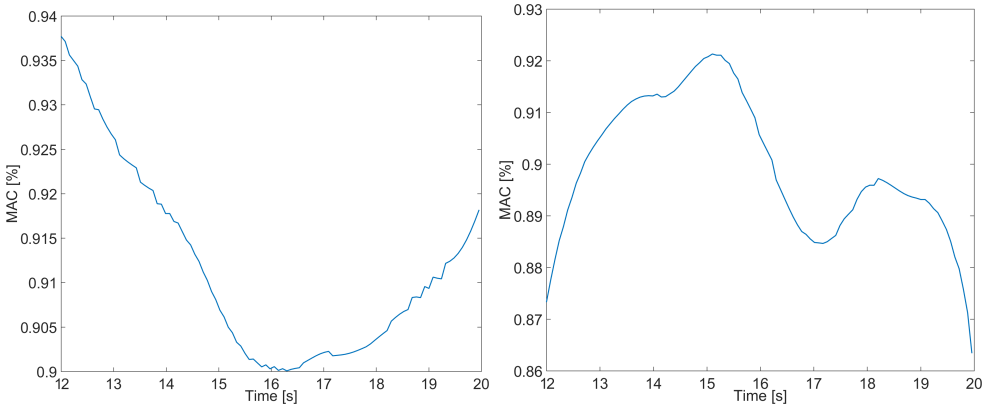


FIGURE 5.30 – MAC entre la reconstruction du premier freinage à l'aide du sous-espace du second $\{\tilde{y_1}(f_{max}(t),t))\}$ et la mesure réelle (à gauche) et entre la reconstruction du second freinage à l'aide du sous-espace du premier $\{\tilde{y_2}(f_{max}(t),t))\}$ et la mesure réelle (à droite)

L'objectif final est d'agréger les différents lots de formes extraites des mesures. On propose

pour cela de prendre comme formes cibles aux références les deux formes principales $[\phi_1\phi_2]_{|ref}$ résultant de la décomposition en valeurs singulières de $\left[\Phi_1^1\Phi_2^1\right]_{|ref}$ et $\left[\Phi_1^2\Phi_2^2\right]_{|ref}$, soit

$$\left[\Phi_1^1\Phi_2^1\ \Phi_1^2\Phi_2^2\right]_{|ref} = \sum_j \{\phi_j\}_{|ref}\,\sigma_j\,\{V_j\}^T \tag{5.14}$$

Les quatre valeurs principales sont montrées en figure 5.31 : La valeur singulière de la troisième forme, bien que non clairement négligeable, est inférieure à 30% de la première.

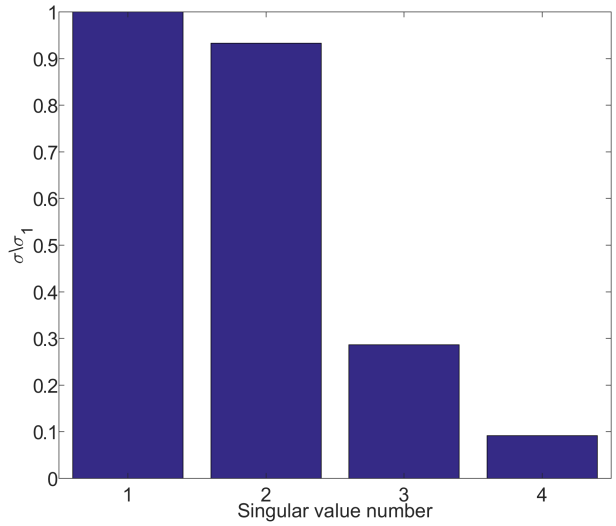


FIGURE 5.31 – Valeurs principales résultant de la concaténation de $\left[\Phi_1^1\Phi_2^1\right]_{|ref}$ et $\left[\Phi_1^2\Phi_2^2\right]_{|ref}$

La figure 5.32 présente la qualité de l'agrégation, à travers un calcul de MAC aux capteurs de référence entre les formes cibles et la meilleure combinaison linéaire des deux formes principales de chaque mesure. Pour la première mesure, les deux formes sont très bien corrélées avec un MAC minimum de 97%. La deuxième mesure voit pour la première forme une corrélation un peu plus faible à 81% mais la seconde forme est très bien corrélée.

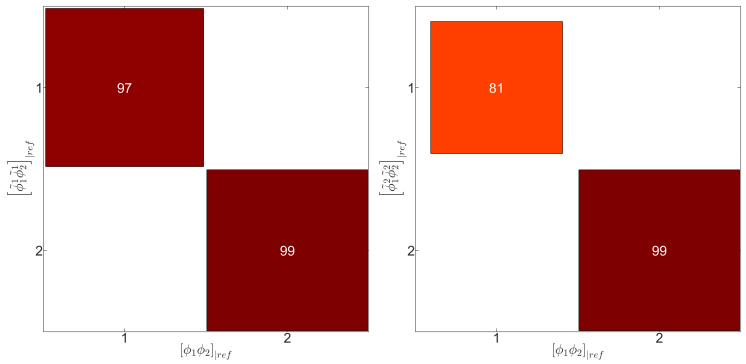


FIGURE 5.32 – Qualité d'agrégation aux références

Les deux familles de vecteurs obtenues (une famille par mesure) peuvent dans notre cas être comparées car les capteurs sont identiques. La figure 5.33 montre que la corrélation pour la première forme est de 86% et pour la seconde de 96%.

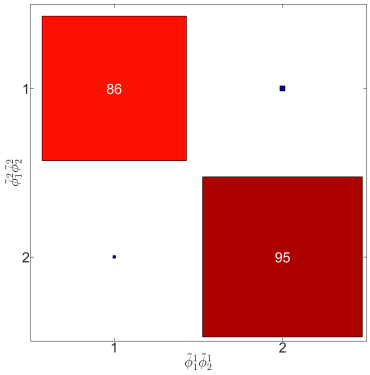


FIGURE 5.33 – Comparaison entre les formes agrégées sur l'ensemble des capteurs

L'étude de l'agrégation a donc été faite ici à partir de deux mesures réalisées sur les mêmes capteurs de façon à évaluer la pertinence du protocole. Les deux mesures présentent un crissement pour des fréquences sensiblement différentes (environ 910Hz pour la première et 923Hz pour la seconde) et une comparaison directe des formes complexes aboutit à une corrélation en MAC entre 78% et 87%. L'algorithme mis en place permet d'obtenir pour chacune des mesures deux formes principales qui, lorsqu'elles sont comparées sont corrélées à 86% et 95%. Ce résultat est plutôt encourageant mais on note qu'il s'agit d'une expérimentation sur un cas unique. Cet algorithme est mis en oeuvre en section suivante pour agréger les 4 lots de mesures.

5.5.2 Application au cas d'étude

Sur chaque lot de mesure, 4 ODS ont été sélectionnées. Le choix a été fait en fonction de la meilleure stabilité du crissement quand plusieurs ODS avaient pu être mesurées et par défaut sinon. Les transformées de Gabor (avec $\sqrt{\Delta f^2} = 0.5Hz$) de ces mesures sont montrées en figure 5.34 sur le premier capteur de référence de chaque lot de capteurs.

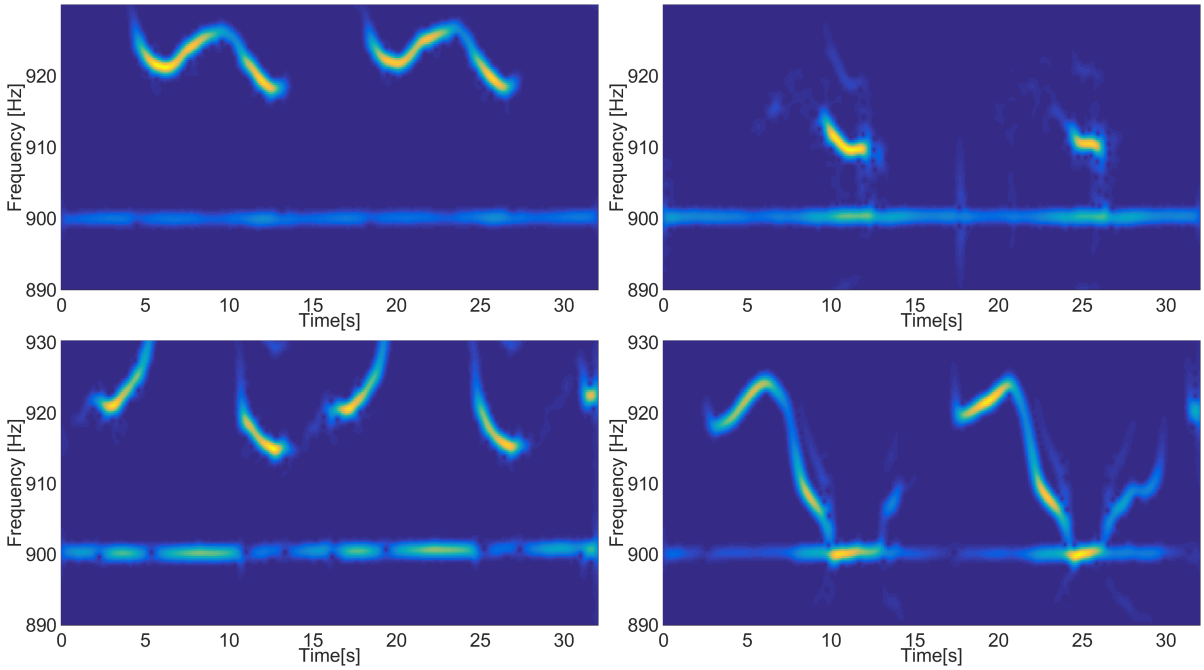


FIGURE 5.34 – Transformées de Gabor du premier capteur de référence pour les quatre lots de mesure

On observe sur chaque ODS l'évolution périodique au tour de roue du crissement. Les ODS 3 et 4 montrent des zones d'interactions fortes avec la fréquence du banc à 900Hz. Pour l'ODS

2, il a été très difficile de reproduire le phénomène de crissement et il s'agit de la seule mesure disponible. Pour chaque mesure, un tronçon temporel a été extrait de façon à ne conserver que les instants où le crissement est présent et si possible où l'interaction avec le banc est limitée. La figure 5.35 montre les transformées de Gabor des bandes temporelles retenues.

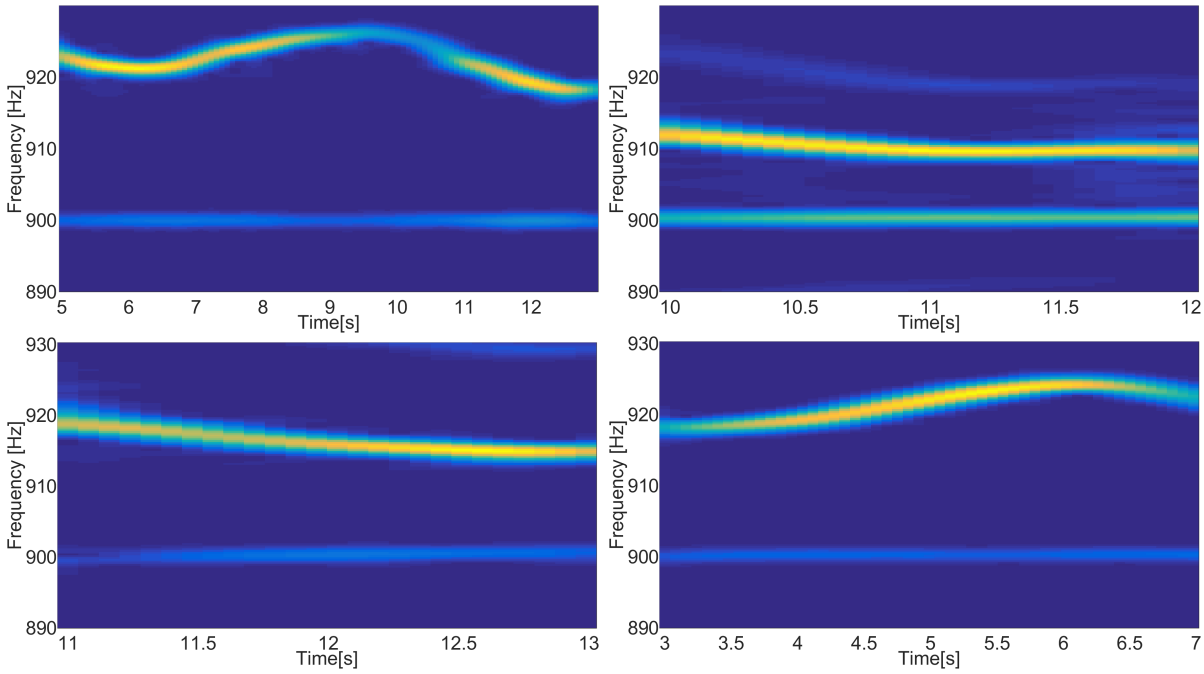


FIGURE 5.35 – Bandes temporelles extraites des transformées de Gabor

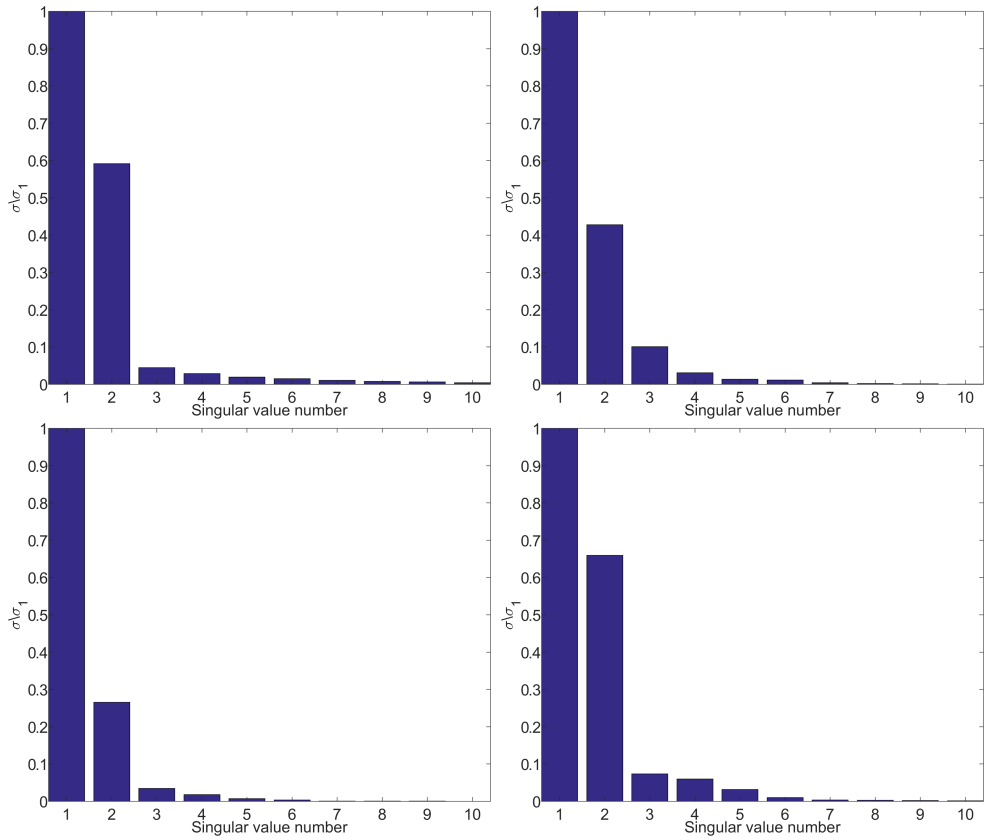


FIGURE 5.36 – Décomposition en valeurs singulières des formes à la fréquence maximale, pour chaque lot de capteurs

L'algorithme d'agrégation présenté en section 5.5.1 est maintenant mis en place pour ces 4 mesures. Les formes aux fréquences d'amplitude maximale sont extraites pour chaque ODS. Une décomposition en valeurs singulières de ces familles de formes est alors réalisée pour chaque mesure dont les 10 premières valeurs principales sont montrées en figure 5.36

Quelle que soit la mesure, l'approximation par les deux premières valeurs propres est pertinente : la troisième valeur propre la plus élevée est trouvée pour la deuxième mesure, avec une valeur inférieure à 10% de la première. On obtient alors $\left[\cdots\ \Phi_1^i\Phi_2^i\ \cdots\right]$ pour $(i = 1-4)$

A partir de cette famille de formes, la décomposition en valeurs singulières de la restriction aux capteurs de référence est calculée pour donner $\left[\cdots\ \phi_i\ \cdots\right]_{|ref}\,(i = 1-4)$. La figure 5.37 montre les 4 valeurs principales (les suivantes sont nulles car il n'y a que 4 capteurs de référence). La troisième valeur propre présente tout de même une valeur de 25%, ce qui pose question sur la qualité de l'agrégation, mais celle-ci sera tout de même réalisée pour mener le développement à terme.

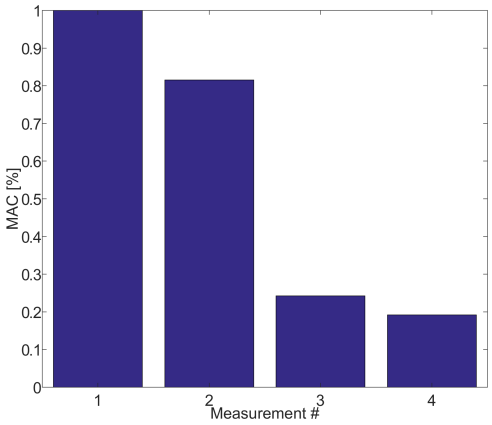


FIGURE 5.37 – Décomposition en valeurs singulières de $\left[\cdots\ \Phi_1^i\Phi_2^i\ \cdots\right]_{|ref}\,(i = 1-4)$, donnant $\left[\cdots\ \phi_i\ \cdots\right]_{|ref}\,(i = 1-4)$

La comparaison directe des 4 sous-espaces $\left[\Phi_1^i\Phi_2^i\right]_{|ref}$ avec le sous-espace cible $\left[\phi_1\phi_2\right]_{|ref}$, donne les valeurs de MAC (on rappelle qu'il est défini comme le carré du cosinus de l'angle entre les sous-espaces) montrées en figure 5.38.

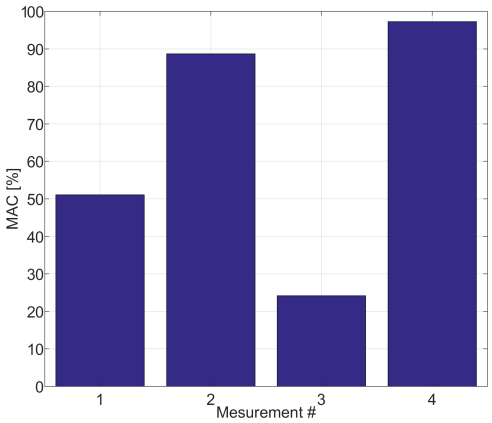


FIGURE 5.38 – MAC entre les sous-espaces $\left[\Phi_1^i\Phi_2^i\right]_{|ref}\,(i = 1-4)$ et le sous-espace cible $\left[\phi_1\phi_2\right]_{|ref}$

Les sous-espaces des mesures #2 et #4 sont très bien corrélées aux capteurs avec le sous-espace cible, ce qui n'est pas le cas des mesures #1 et #3.

A partir des 4 lots $\left[\Phi_1^i\Phi_2^i\right]_{|ref}$ et des deux formes cibles $\left[\phi_1\phi_2\right]_{|ref}$, les combinaisons linéaires $\left[\tilde{\phi}_1^i\tilde{\phi}_2^i\right]_{|ref} = \left[\Phi_1^i\Phi_2^i\right]_{|ref}\left[\lambda_i\right]$ sont trouvées de façon à minimiser les écarts au sens des moindres

carrés $\left\| \left[\tilde{\phi}_1^i \tilde{\phi}_2^i\right]_{|ref} - [\phi_1\phi_2]_{|ref} \right\|^2$. La figure 5.39 présente à partir de ce résultat le MAC non plus entre les sous-espaces mais entre les premières formes et les secondes avec les deux formes sur sous-espace cible.

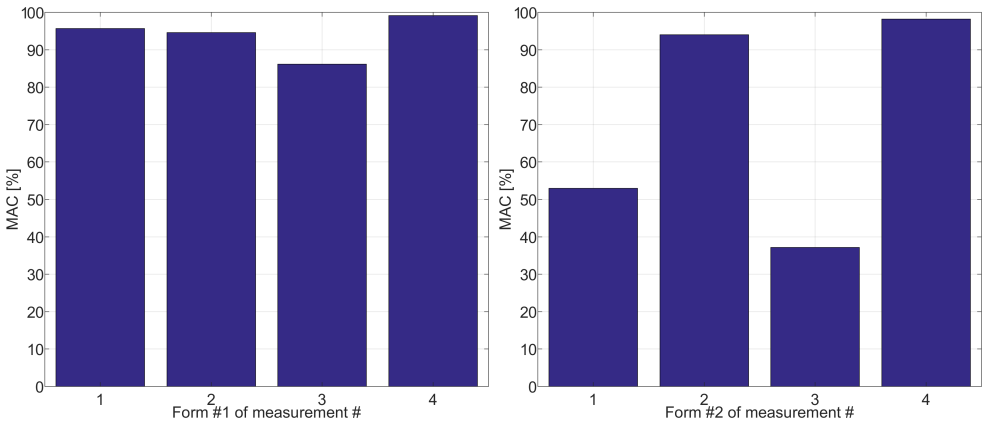


FIGURE 5.39 – MAC entre $\left\{\tilde{\phi}_1^i\right\}_{|ref}$ et $\{\phi_1\}_{|ref}$ (à gauche) et entre $\left\{\tilde{\phi}_2^i\right\}_{|ref}$ et $\{\phi_2\}_{|ref}$ (à droite)

La première forme cible $\{\phi_1\}_{|ref}$ est très bien corrélée avec l'ensemble des premières formes $\left\{\tilde{\phi}_1^i\right\}_{|ref}$ des 4 mesures. En revanche, les mauvaises corrélations des mesures #1 et #3 mises en avant par le MAC entre sous-espace à la figure 5.38, proviennent d'une mauvaise corrélation avec la deuxième forme cible $\{\phi_2\}_{|ref}$. Pour agréger la deuxième forme, seule l'exploitation des mesures #2 et #4 semble raisonnable.

Il semble donc que la première forme soit semblable pour toutes les mesures et que la seconde se manifeste suivant deux comportements différents, exprimés par les mesures #2 et #4 d'une part et par les mesures #1 et #3 d'autre part. Il serait donc possible d'envisager d'analyser le problème en deux fois, par bloc de mesures, mais ceci n'a pas été mis en oeuvre pour des raisons de temps.

On obtient ainsi deux formes notées $\left[\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2\right]$ résultant de l'agrégation des 4 lots $\left[\tilde{\phi}_1^i\tilde{\phi}_2^i\right] = \left[\Phi_1^i\Phi_2^i\right]\left[\lambda_i\right]$. Dans le résultat d'agrégation, les références peuvent être soit supprimées, soit remplacées par $[\phi_1\phi_2]_{|ref}$.

5.6 Exploitation de l'expansion

A partir des deux formes principales obtenues par extractions des mesures du cycle limite, l'expansion de type MDRE est envisagée (voir section 3.4.4). Comme les formes sont réelles, le modèle réel est utilisé pour étendre les mesures, soit le modèle avec un coefficient de friction nul. En faisant l'analogie avec les modes réels, ceux-ci doivent être orthogonaux par rapport aux matrices de masse et de raideur. Or, dans l'exemple de l'agrégation en section précédente, ce sont les formes restreintes aux capteurs de référence $[\phi_1\phi_2]_{|ref}$ qui sont orthogonales entre elles. Pour trouver une combinaison linéaire plus physique des deux formes, l'expansion est réalisée en deux étapes.

Tout d'abord, elle est faite classiquement à partir des deux formes $[\phi_1\phi_2]$ et le résultat de l'expansion, noté $\left[\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\right]$, est alors orthonormalisé par rapport aux matrices de masse et de raideur. Pour réaliser cette étape, le modèle est réduit sur la base composée des deux formes étendues pour former l'équation de la dynamique

$$\left(\left[M_R\right]s^2 + \left[K_R\right]\right)\left\{q_R\right\} = 0 \tag{5.15}$$

avec $[M_R] = \left[\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\right]^T [M] \left[\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\right]$ et $[K_R] = \left[\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\right]^T [K] \left[\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\right]$. Un calcul aux valeurs propres de ce système permet de donner les deux combinaisons linéaires des formes étendues orthogonales par rapport aux matrices de masse et de raideur

$$\left[\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\right] [q_{R1}\ q_{R2}] \tag{5.16}$$

ainsi que deux fréquences propres, souvent supérieures à la fréquence d'expansion, qui sont d'autant plus élevées que l'erreur de modèle est grande.

Cette recombinaison de vecteurs est ensuite appliquée en amont de l'expansion sur les deux vecteurs extraits des mesures

$$\left[\phi_1^{\perp}\phi_2^{\perp}\right] = [\phi_1\phi_2] [q_{R1}\ q_{R2}] \tag{5.17}$$

et l'expansion est effectuée de nouveau sur à partir des deux formes obtenues. Le résultat de cette seconde expansion sera noté $\left[\hat{\phi}_1^{\perp}\hat{\phi}_2^{\perp}\right]$ et exploité par la suite.

L'expansion est tout d'abord réalisée pour la valeur la plus élevée de γ, soit $\gamma = 1e10$, qui engendre une erreur de mesure nulle. La figure 5.40 présente les deux formes étendues (après orthonormalisation). La première forme en haut montre une déformation dominée par la flexion du levier de frein-à-main. Les capteurs ont été superposés au modèle sur la vue de droite qui zoome sur le levier de frein-à-main et un segment. La deuxième forme étendue, en bas de la figure 5.40 est dominée par une déformation du segment. Le zoom sur le segment montre des déformations très localisées qui ne semblent pas physiques : la réponse du modèle est probablement fausse dans cette zone et les mesures contraignent le modèle à suivre.

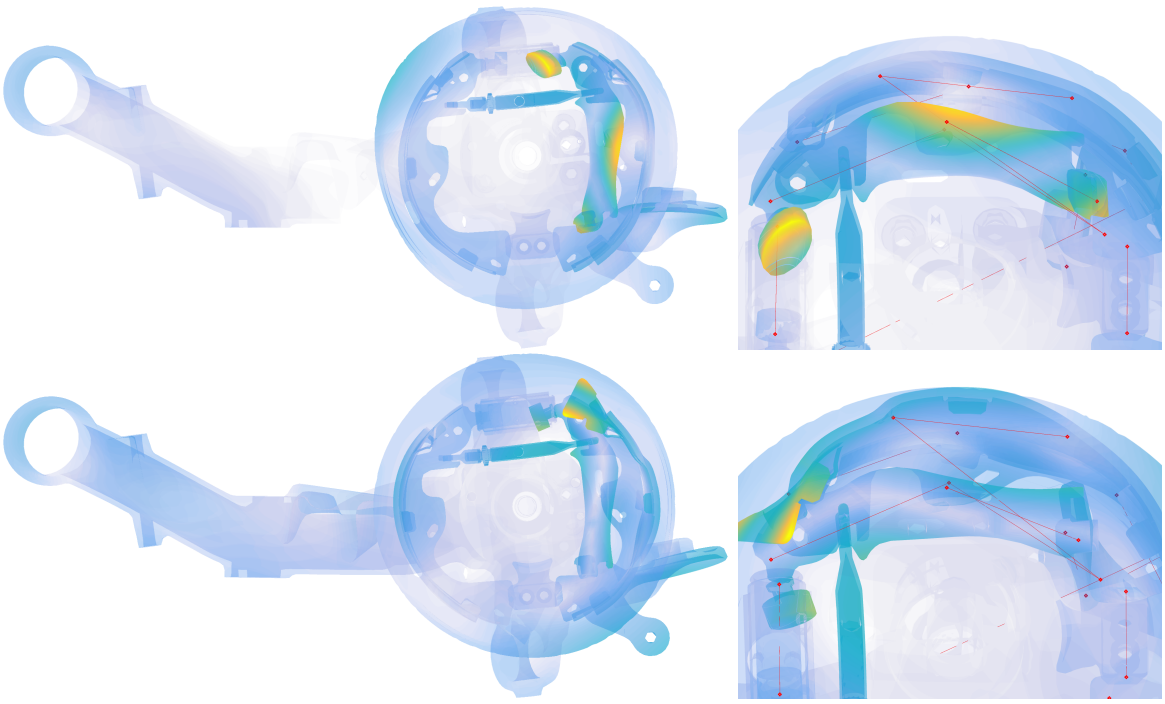


FIGURE 5.40 – Formes étendue avec erreur de mesure nulle

Pour analyser plus finement la qualité de l'expansion, les valeurs de γ sont balayées selon une échelle logarithmique de 10^1 à 10^{10} et l'expansion est réalisée pour les deux formes à 910Hz. Tout d'abord, après la première expansion, les valeurs des fréquences trouvées à l'étape de l'orthonormalisation des deux formes par rapport aux matrices de masse et de raideur sont données en figure 5.41

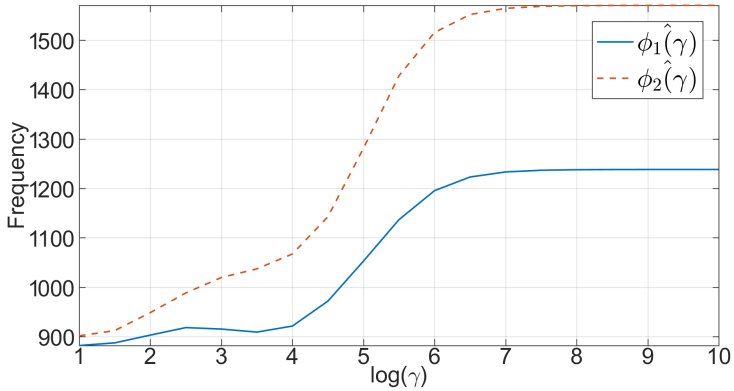


FIGURE 5.41 – Fréquences associées à l'orthonormalisation des deux formes étendues : forme #1 (bleu continu) et forme #2 (rouge pointillé)

Jusqu'à $\gamma = 10^4$, les valeurs de fréquence d'expansion sont stables pour la forme #1 et évoluent lentement pour la forme #2 jusqu'à 1050Hz. Au-delà, à cette valeur, un point d'inflexion assez nette sur les deux courbes montre que le poids supplémentaire accordé à l'erreur de mesure contraint beaucoup le modèle et les fréquences des formes orthonormalisées augmentent fortement.

Pour la seconde expansion (après recombinaison des deux formes mesurées+), la figure 5.42 montre l'évolution de l'erreur relative de mesure $\epsilon^R_{j,Test}$ et de l'erreur relative de modèle $\epsilon^R_{j,Mod}$ pour les deux formes (voir section 3.4.5 pour la définition de ces erreurs). L'évolution de γ traduit la transition entre la réponse du modèle minimisant les efforts résiduels à la fréquence 910Hz sans contrainte et la réponse du modèle minimisant les efforts résiduels avec une erreur de mesure nulle.

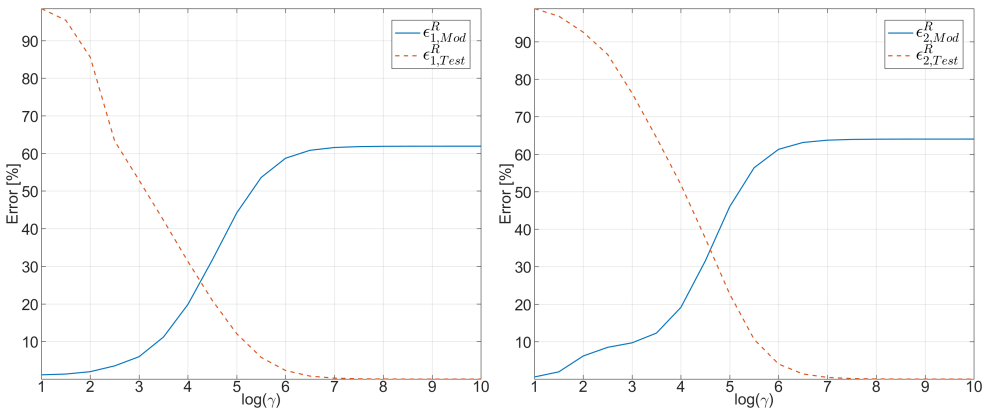


FIGURE 5.42 – Evolution des erreurs relatives de mesure et de modèle avec γ : forme #1 (à gauche) et forme #2 (à droite)

L'erreur liée au non-respect de la mesure peut également être évaluée comme une valeur de MAC entre l'observation aux capteurs des modes étendus et les formes mesurées. La figure 5.43 montre l'évolution du MAC avec γ pour les deux formes. On note que pour dès $\gamma = 10^6$, le MAC est à 100% et que pour une valeur d'erreur relative de mesure de 30%, le MAC est déjà élevé avec une valeur d'environ 90%.

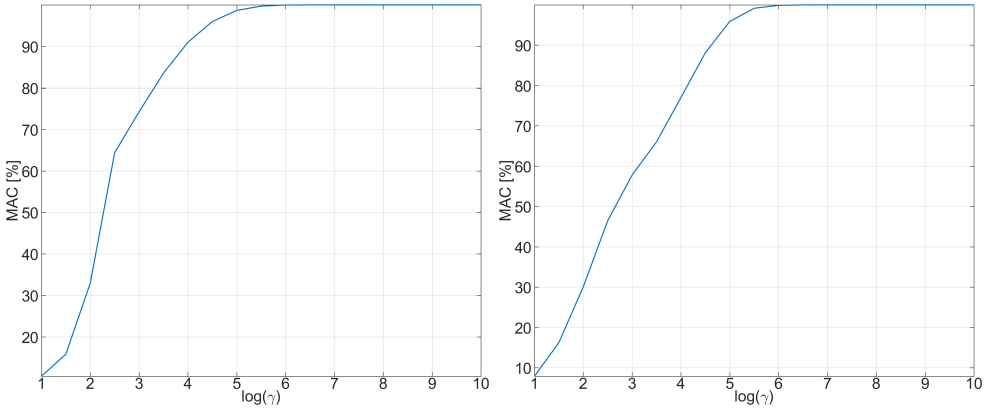


FIGURE 5.43 – Evolution du MAC entre les formes étendues et la mesure avec γ : forme #1 (à gauche) et forme #2 (à droite)

Pour trouver une valeur intermédiaire pertinente de γ, il est proposé de calculer la norme euclidienne du vecteur formé par les deux erreurs relatives, soit

$$\epsilon^R_{j,Global}(\gamma) = \sqrt{\epsilon^R_{j,Test}(\gamma)^2 + \epsilon^R_{j,Mod}(\gamma)^2} \tag{5.18}$$

et la figure 5.44 montre son évolution avec γ. Un minimum est trouvé en $\gamma = 1e4$ pour la forme #1 et $\gamma = 3e4$ pour la forme #2. Le choix de ce critère est arbitraire mais permet dans les faits de proposer automatiquement une valeur de γ pour laquelle l'interprétation de l'expansion est pertinente.

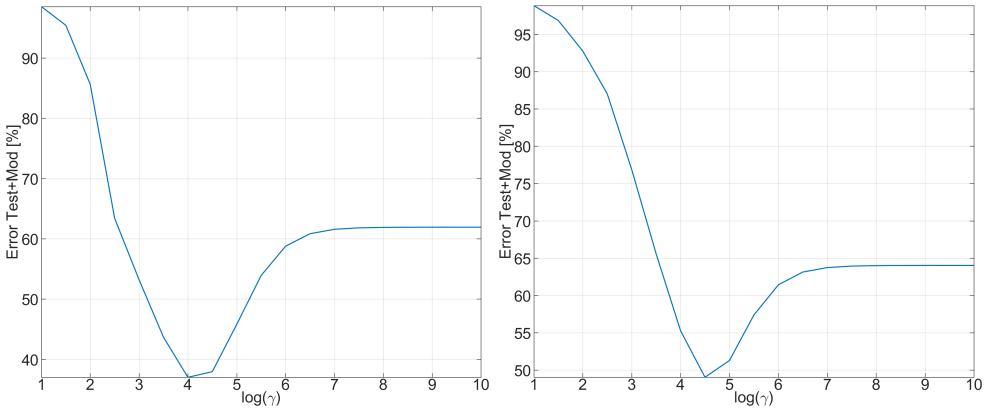


FIGURE 5.44 – Evolution de l'erreur relative globale avec γ : forme #1 (à gauche) et forme #2 (à droite)

Pour illustrer l'intérêt de cette valeur de γ, les figures 5.45 et 5.46 montrent pour les deux formes, respectivement #1 et #2, l'erreur de modèle (énergie de déformation résiduelle) $\epsilon_{j,Mod}$ pour trois valeurs caractéristiques de γ : la plus faible (réponse non contrainte aux capteurs) $\gamma = 1e1$, la valeur précédemment définie $\gamma = \arg\min\left(\epsilon^R_{j,Global}(\gamma)\right)$ et la plus grande $\gamma = 1e10$ (réponse exacte aux capteurs).

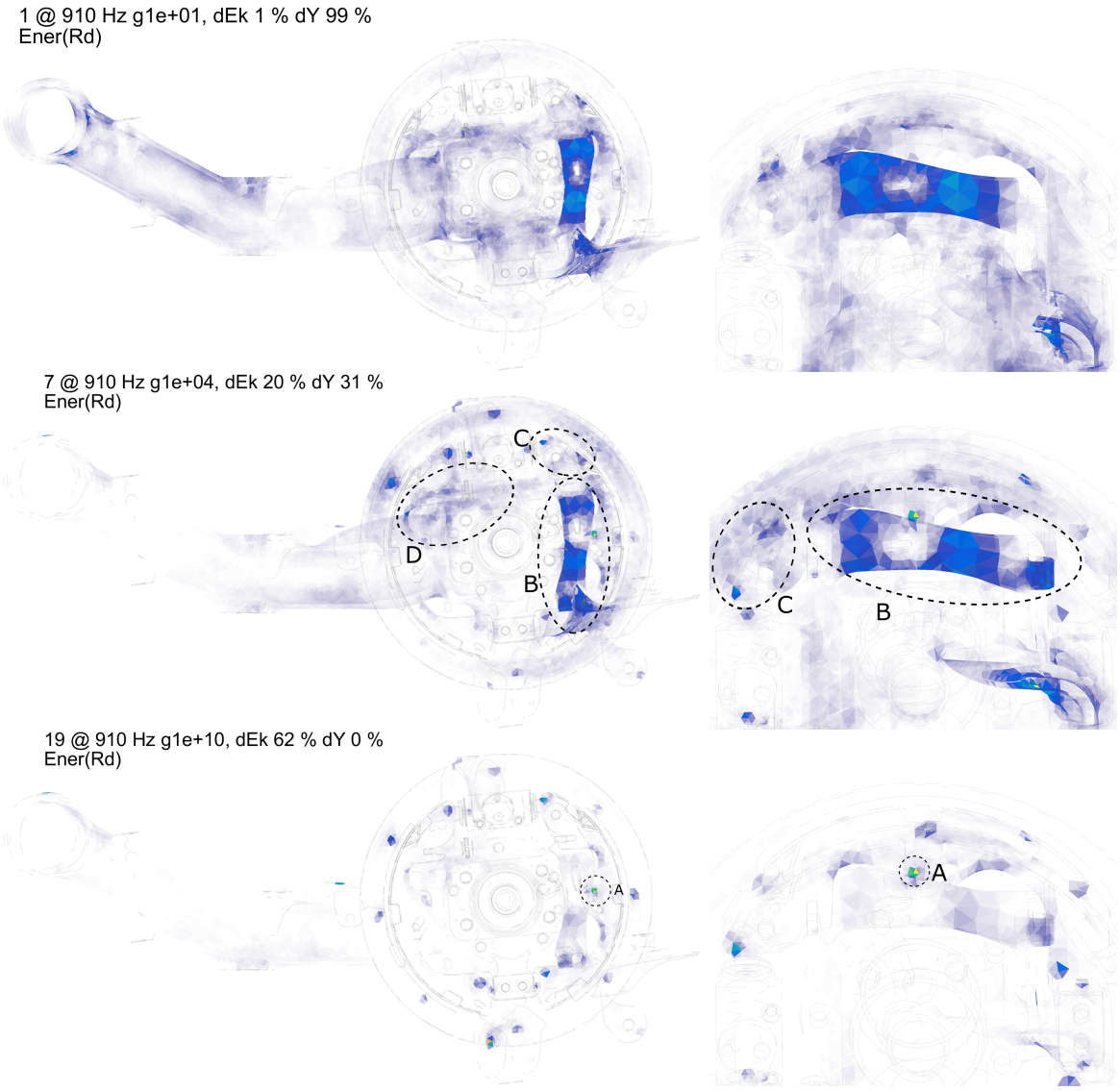


FIGURE 5.45 – Carte d'erreur de modèle après expansion de la forme #1 pour $\gamma = 1e1$ (en haut), $\gamma = 1e4$ (au milieu) et $\gamma = 1e10$ (en bas). Les figures de droites sont un zoom sur le levier de frein-à-main et le segment.

La visualisation de l'énergie de déformation résiduelle de la forme #1 pour la valeur $\gamma = 1e1$ très faible n'est pas exploitable : l'erreur relative de modèle est très faible et l'erreur de modèle semble répartie un peu dans toute la structure.

Pour la valeur $\gamma = 1e10$ la plus élevée, on observe une concentration de l'énergie résiduelle au niveau des capteurs, avec notamment une énergie localisée très importante au niveau du capteur au milieu de l'âme du segment (A). Le fait d'obliger l'erreur de mesure à être nulle engendre des concentrations fortes d'énergie. Comme le modèle est réduit sur les modes libres plus les réponses aux efforts unitaires aux capteurs, les DDL correspondant aux réponses aux capteurs sont les seuls à pouvoir localement permettre au modèle de suivre exactement la mesure : les efforts résiduels et donc l'énergie résiduelle se concentrent sur ces DDL.

Pour la valeur intermédiaire $\gamma = 1e4$, quelques concentrations aux capteurs apparaissent déjà (notamment celle au milieu de l'âme du segment qui est déjà très importante) mais les concentration d'énergie dans certaines zones du modèle sont d'un ordre de grandeur comparable : on note notamment une concentration d'énergie résiduelle dans le levier de frein-à-main (B), au niveau du contact entre le segment et le levier de frein à main (C), sur le pourtour du plateau ainsi que près d'une zone de contact entre le bras et le plateau (D). Ces concentrations sont des

pistes pour déterminer les erreurs de modélisation et envisager une paramétrisation du modèle en vue d'un recalage. Les erreurs sur le plateau et le bras posent question sur la définition du contact qui les relie. L'erreur au niveau du levier de frein à main et du segment remet également en cause la représentativité de cet assemblage.

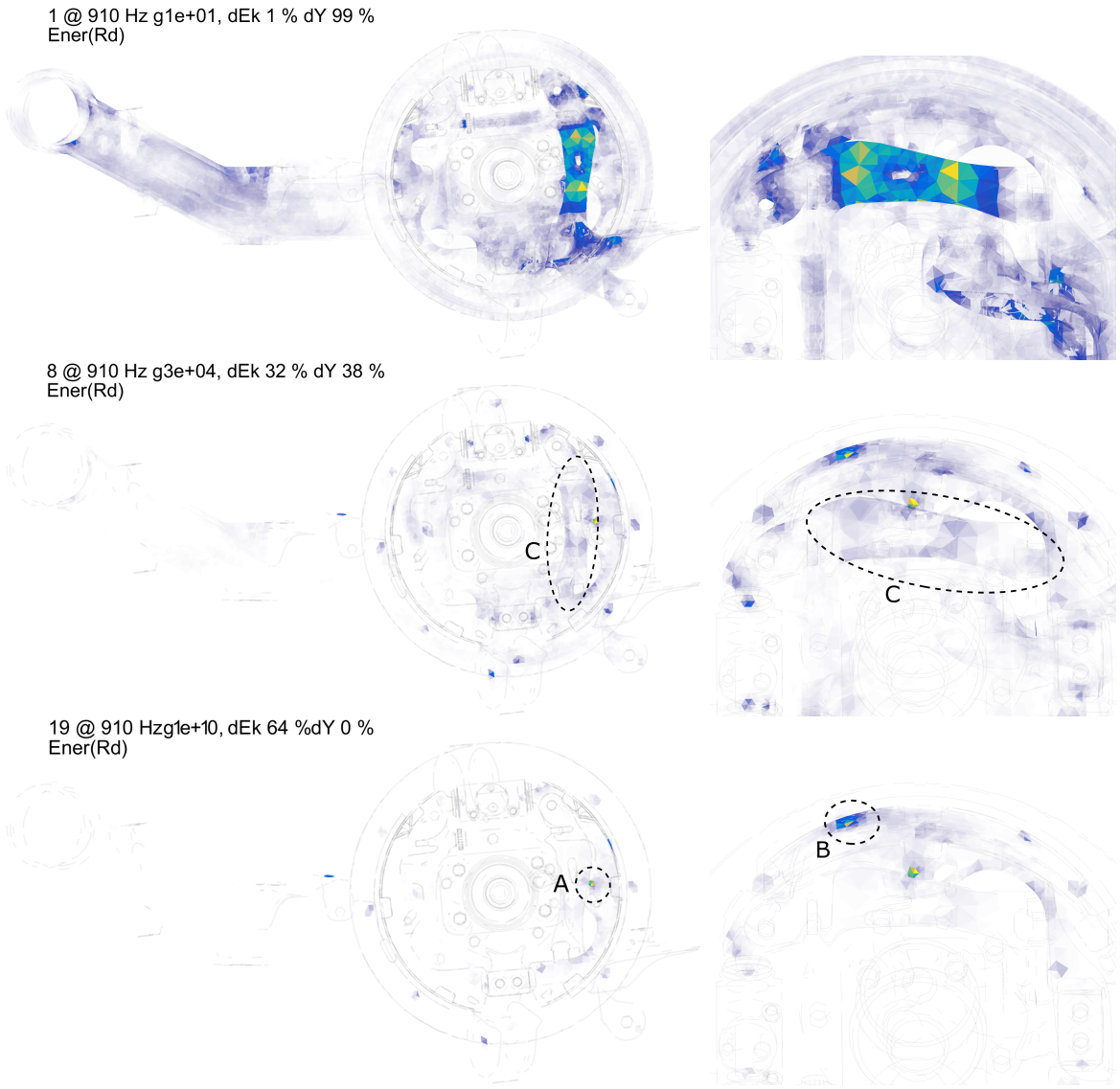


FIGURE 5.46 – Carte d'erreur de modèle après expansion de la forme #2 pour $\gamma = 1e1$ (en haut), $\gamma = 3e4$ (au milieu) et $\gamma = 1e10$ (en bas). Les figures de droites sont un zoom sur le levier de frein-à-main et le segment.

Tout comme pour la forme #1, l'expansion pour $\gamma = 1e1$ n'est pas exploitable. L'expansion pour $\gamma = 1e10$ très élevé montre également une concentration des énergies aux capteurs avec deux capteur très marqués : sur l'âme du segment (A) (le même capteur que pour la forme #1) et sur la partie supérieure du segment (B). La visualisation de l'état intermédiaire, pour $\gamma = 3e4$ montre également une énergie résiduelle au niveau du levier de frein-à-main (C).

Les concentrations de contrainte au niveau du segment et du pourtour du plateau peuvent également être le signe d'une erreur de définition des contacts entre le plateau et le segment, identifiés par l'équipe de simulation comme très sensibles pour certains modes.

La difficulté de lecture des cartes est liée aux écarts importants d'amplitude entre les énergies résiduelles aux capteurs et dans le reste de la structure, qui surviennent quand γ devient grand : la carte de couleur permet difficilement de visualiser une aussi grande gamme de valeurs. Pour

faciliter la lecture, il est alors proposé de décomposer l'erreur de modèle en deux, comme déjà réalisé en section 3.4.5 : l'erreur résiduelle liée aux modes libres et celle liée à l'enrichissement par les réponses aux efforts unitaires aux capteurs.

La décomposition est effectuée pour les deux formes étendues avec $\gamma = 1e10$ et les deux origines d'énergie résiduelle sont comparable avec $\epsilon_{1,M}/\epsilon_{1,M^\perp} = 109\%$ et $\epsilon_{2,M}/\epsilon_{2,M^\perp} = 158\%$.

La figure 5.47 montre la répartition dans les éléments de l'énergie résiduelle liée à l'enrichissement. Pour la forme #1, on note la concentration classique au niveau des capteurs et avec notamment une grande amplitude sur le triaxe situé au milieu de l'âme (A). Les deux triaxes sur le levier de frein-à-main (B) induisent une erreur assez distribuée dans le composant. Une forte concentration d'énergie résiduelle est également présente sur les attaches et au milieu du bras (C) : la simulation est réalisée avec des conditions libres qui ne sont sans doute pas suffisamment représentatives des conditions limites réelles. Pour la forme #2, les deux erreurs les plus importantes sont clairement celles liées aux triaxes sur le segment (D), au milieu de l'âme et sur la jante, qui induisent des zones assez large d'énergie résiduelle.

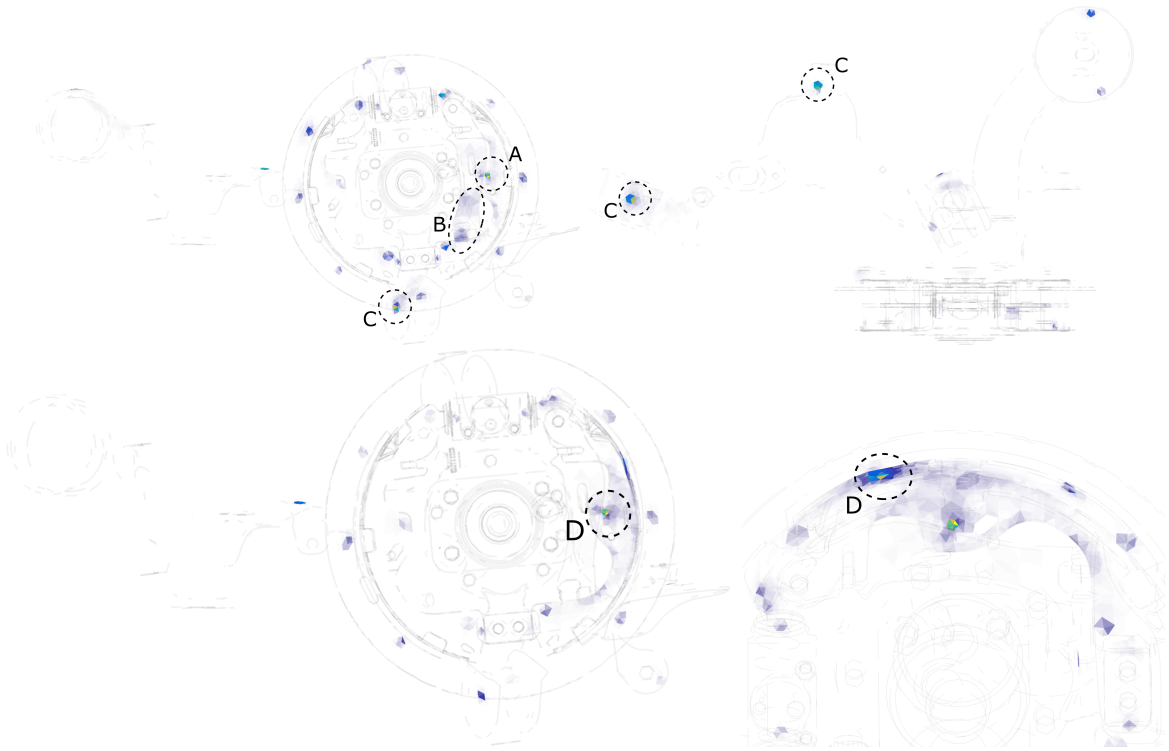


FIGURE 5.47 – Erreur de modèle liée à l'enrichissement statique : forme #1 (en haut) et forme #2 (en bas)

La figure 5.48 montre la répartition dans les éléments de l'énergie résiduelle liée aux formes modales libres. Pour la forme #1, des erreurs importantes sont présentes sur le bras (A), confirmant le questionnement sur la modélisation des attaches, voire de la géométrie du bras lui-même. Une zone d'erreur est présente au proche de l'assemblage entre le plateau et le bras (B). Enfin, deux zones d'erreur au niveau des repose-segments précisent qu'un recalage est probablement nécessaire (C). Pour la forme #2, la zone autour du contact plateau-bras (D) est également entachée d'énergie résiduelle. Le levier de frein-à-main (E) qui se déplace de façon quasiment rigide présente une erreur importante qui peut remettre en cause la représentativité de son assemblage avec le segment. Enfin, la plus forte erreur est au niveau du repose-segment central (F).

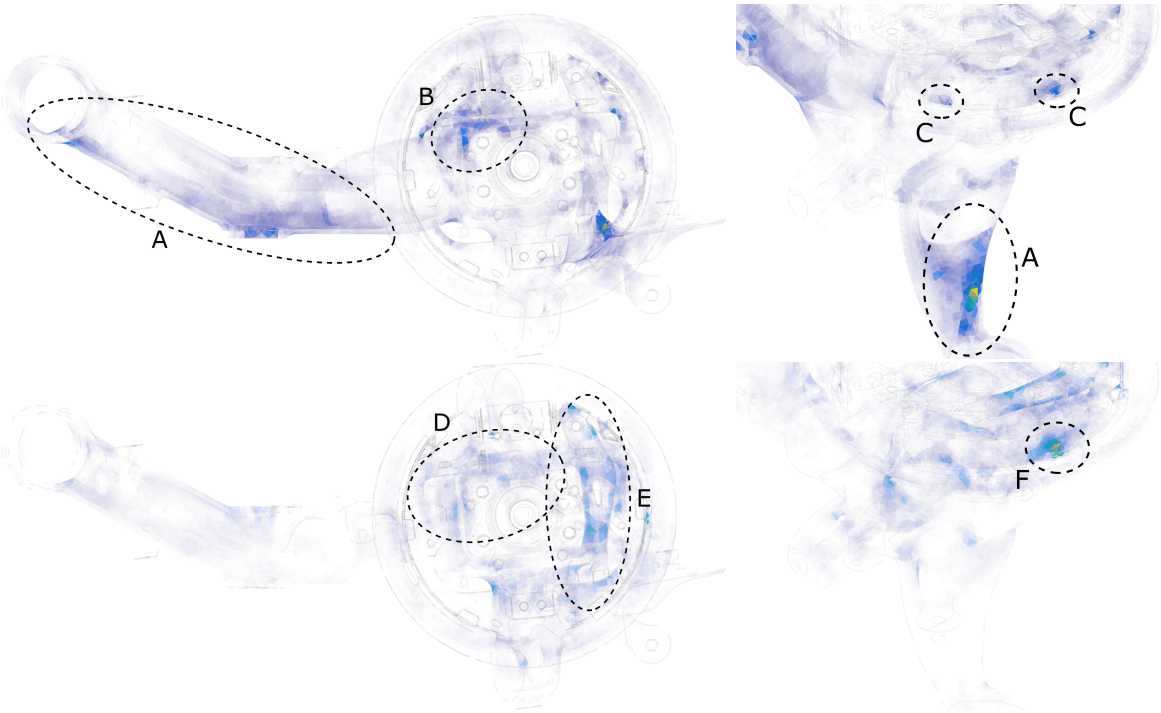


FIGURE 5.48 – Erreur de modèle liée aux formes modales : forme #1 (en haut) et forme #2 (en bas)

6

Conclusion

L'objectif industriel de cette thèse était de faire un bilan méthodologique des méthodes d'exploitation conjointes d'essais et de calculs éléments finis pour l'analyse des situations de crissement. L'étendue de cet objectif a conduit à aborder des sujets très divers sur lesquels différentes contributions très spécifiques ont été apportées et sont détaillées plus loin. Une contribution sous-jacente, mais peu mise en avant, a été la réalisation en forte autonomie de plusieurs campagnes d'analyse modale classique et d'analyse des vibrations en conditions opérationnelles.

La première thématique abordée au chapitre 2 est l'identification soit l'extraction des paramètres modaux à partir des mesures.

Le rappel des formes de modèle et une revue d'algorithmes d'identification classiques, LSCF en particulier, a permis de mettre en évidence l'existence de biais dans les estimations et de justifier le besoin de réaliser une optimisation non-linéaire des pôles. Cette justification mériterait un approfondissement notable. En particulier, un algorithme d'optimisation globale, tirant partie du caractère découplé des modes pour réaliser des optimisations séquentielles, a été utilisé pour toutes les analyses modales réalisées mais n'a pas été clairement détaillé. Une analyse fine de la convergence de cet algorithme pour des mesures industrielles paraitrait utile à son déploiement plus systématique. En particulier les voies bruitées induisent clairement un biais qu'il conviendrait de limiter.

La deuxième contribution du chapitre 2 a été l'exploitation de l'idée que la validité des formes modales expérimentales devait être analysée pour chaque capteur et chaque mode. Cette idée a permis d'introduire et de montrer l'utilité de différents critères :

— L'*erreur* évalue l'écart entre la mesure et la synthèse après identification des transferts au voisinage de chaque résonance. Elle est utilisée pour éliminer les capteurs non pertinents dans les calculs de MAC. Ceci correspond à la définition d'un set de capteurs valides pour chaque mode. Les niveaux d'erreur intermédiaire (entre 10 and 30%) requièrent des analyses supplémentaires qui motivent les trois autres critères.
— Le *niveau* évalue l'amplitude du transfert au voisinage d'un mode donné, avec mise à l'échelle par rapport au capteur de plus grande amplitude. Il est essentiellement utilisé en combinaison avec le critère d'erreur pour former le NOS.
— Le *NOS* (Noise Over Signal) estime le caractère critique de l'erreur en la pondérant par le niveau. Ce critère sert à détecter des modes mal excités pour lesquels les transferts avec un niveau élevé sont bruités et ne permettent pas une identification fiable et les cas de mauvaise identification liée à des changements de propriétés modales, typiquement du fait de lots de mesures.
— La *contribution* évalue la visibilité d'un mode dans le transfert. Ce critère est utile pour les cas de modes proches et les applications où une grande confiance dans l'identification de l'amplitude modale en un capteur spécifique est nécessaire (par exemple pour la mise à l'échelle de modes à partir des transferts colocalisés).

Des versions *globales* de ces critères sont également définies pour analyser la qualité globale d'identification de chaque mode. L'*erreur moyenne* évalue la qualité moyenne de la superposition autour d'un mode, la *contribution moyenne* indique si une résonnance modale apparait en moyenne bien détachée des autres modes ou encore le *NOS maximum* montre si au moins un capteur est potentiellement mal identifié car présentant une erreur importante pour une amplitude non négligeable non négligeable.

La réalisation au cours de la thèse, d'outils interactifs permettant de naviguer dans les vues spatiales et fréquentielles, a été essentielle pour démontrer le potentiel des critères proposés pour l'analyse de mesures au vibromètre 3D où le grand nombre de voies demande une capacité d'analyse rapide. En dehors d'améliorations ergonomiques pour l'utilisation industrielle, le principal thème demandant un travail complémentaire est le traitement des configurations à plusieurs entrées (MIMO) pour lesquelles une pondération des entrées est nécessaire, la commandabilité modale étant un candidat naturel.

Il parait utile de rappeler que l'optimisation non-linéaire des pôles introduite au début du

chapitre est apparue comme un élément essentiel pour l'utilisation pertinente des critères proposés. De plus, une optimisation bande étroite autour de chaque mode identifié isolément (non présentée dans ce manuscrit) montre une bonne capacité à s'extraire des problèmes liés à l'identification large bande et l'évaluation plus complète de sa pertinence est à réaliser.

Le chapitre 3 a ensuite abordé les problématiques de corrélation calcul/essai. Dans ce cadre, la première contribution a été une amélioration des outils de superposition de maillage en vue de minimiser les erreurs de configuration.

Cette première source d'erreur étant prise en compte, l'objectif a ensuite été de proposer et de valider des critères pragmatiques permettant de détecter les mesures erronées, d'éliminer les composantes modales expérimentales peu précises (sur la base de lots de capteurs formés à partir du critère d'erreur), puis de localiser les capteurs ou calcul et essai diffèrent. On a montré que le MACCo fournit un algorithme de tri des capteurs permettant un classement des erreurs rapide et plus pertinent que d'autres algorithmes de la littérature. Différentes stratégies d'affichage ont été proposées et illustrées.

La localisation de capteurs où calcul et essai diffèrent ne fournit qu'une information indirecte sur les défauts de modèle. Le chapitre propose alors une analyse critique, sur un cas test numérique, des limites des méthodes d'expansion utilisées pour estimer les formes identifiées sur l'ensemble des DDL du modèle et éventuellement construire un résidu caractéristique de l'erreur de modèle. Le premier point particulièrement innovant est l'introduction de critères précis sur les limitations en fréquence des méthodes d'expansion statique et dynamique en présence d'erreurs de modèle. Le deuxième point est l'introduction d'une stratégie de réduction. Cette stratégie permet des temps de calcul fluides pour des modèles industriels y compris pour l'expansion MDRE qui présente la plus grande robustesse par rapport aux erreurs de modèle. Les illustrations réalisées dans le chapitre et les suivants permettent de confirmer la pertinence de la réduction. Une validation approfondie paraitrait cependant utile.

L'expansion MDRE, illustrée sur un cas industriel, fournit des résultats précis sur la localisation des erreurs de mesure et de modèle. L'exploitation des erreurs de mesures après expansion MDRE permet de mettre en évidence, de la même manière que le MACCo, les capteurs globalement faux. Elles permettent également de pointer les zones où la mesure diffère du modèle éléments finis. L'exploitation des erreurs de modèle s'est également avérée pertinente, mettant en avant une concentration d'énergie résiduelle au proche de la jonction plateau/guide-câble. Ces analyses mériteraient donc d'être réalisées sur d'autres applications.

Le chapitre 4 a abordé la paramétrisation de modèle et le recalage. La pertinence d'une stratégie générique considérant, géométrie, matériau et jonctions, a été illustrée. Industriellement, une méthode permettant de décomposer les systèmes en composants à recaler seuls (en géométrie et propriété matériaux) et puis de les intégrer dans l'assemblage a été implémentée et testée. Une poursuite des efforts d'intégration parait cependant nécessaire.

Du point de vue des résultats, il apparait très clairement que la géométrie réelle des pièces a un impact prépondérant sur le comportement vibratoire et qu'ignorer cet impact conduit à des biais notables. Parmi les voies paraissant utiles à approfondir, l'utilisation du morphing semble importante pour intégrer la dispersion géométrique en production ou pour proposer un recalage géométrique n'affectant pas les contacts de façon à ne pas rendre nécessaire l'étape de leur redéfinition. En effet celle-ci nécessite souvent une passe manuelle et peut engendrer des problèmes de convergence de calcul, notamment lorsqu'il s'agit de géométries reconstruites.

La procédure de recalage matériau mise en oeuvre est très efficace pour les matériaux homogènes, mais le cas de matériaux plus complexes comme les garnitures des plaquettes ou des segments pourraient poser des difficultés spécifiques.

Une première proposition originale du chapitre est la justification d'une équivalence pour le contact entre surface et densité surfacique de raideur. L'illustration proposée montre que l'ap-

proche, couplée à une réduction multi-modèle, est très pragmatique pour le recalage et les études de sensibilité. Avec cette base réduite, enrichie des réponses aux efforts unitaires aux capteurs, l'analyse de l'énergie résiduelle après une expansion MDRE a clairement pointé l'influence du contact dans le cadre de l'étude sur l'assemblage plateau/guide-câble. La minimisation de l'énergie résiduelle permet de trouver la configuration du contact qui maximise la corrélation avec la mesure.

La pertinence de la paramétrisation du contact par des densités de raideur a été confirmée par d'autres études [79], mais l'existence de plusieurs cas n'est clairement pas une démonstration de généralité. Cette paramétrisation est de plus cohérente avec les notions de macro-efforts [78] utilisées pour des analyses d'amortissement dans les liaisons [84]. L'approfondissement de cette voie reste donc particulièrement prometteuse pour la définition de modèles de liaison d'une complexité juste suffisante et donc d'un coût numérique optimal.

Du point de vue des applications au frein, les applications sur des assemblages plus complexes (frein complet sur banc avec les liaisons segment/plateau, plateau/bras et surtout tambour/segment) restent à mettre en œuvre. Les difficultés à caractériser de tels assemblages dans leur condition de fonctionnement (l'extraction des modes), affichées en section 5.4, semblent cependant devoir être traitées dans un premier temps.

Une deuxième proposition originale a été l'introduction de la notion de modes de composant assemblé. Cette extension de la méthode CMT [96, 73] fourni des conditions aux limites pertinentes pour l'analyse de l'évolution de modes locaux à l'intérieur d'un assemblage. Le concept parait particulièrement adapté aux problématiques de crissement où le traitement de crises demande de réaliser des modifications de composant impactant des modes spécifiques d'assemblage. Les modifications de composant souvent réalisées étant des changements de forme de moule ou des poinçonnages locaux supplémentaires, une stratégie de morphing local permet des études assez rapides pour le placement de fréquences modales. Cette stratégie a été testée mais pas assez approfondie pour être détaillée dans ce manuscrit ni pour devenir opérationnelle industriellement, même si l'intérêt parait très clair.

La dernière thématique abordée au chapitre 5 a été l'exploitation des essais sur banc de freinage. Un premier exemple numérique simple a permis de justifier le besoin d'analyser les cycles en termes de combinaisons variables de formes réelles. L'analyse expérimentale dans le domaine temps-fréquence a ensuite permis de montrer l'existence effective de sous-espaces réelles raisonnablement constants malgré le caractère variable en temps et peu reproductible des réponses mesurées. Il semble donc très plausible de pouvoir utiliser ces sous-espaces pour cibler les changements modaux nécessaires au traitement de la situation de crissement. Dans le cas présenté, les formes du cycle limite ont été extraites et agrégées avec une hypothèse d'invariance de sous-espace. Le résultat est encourageant mais les difficultés poussent plutôt vers une limitation du nombre de lots de mesures. L'utilisation de techniques d'identification plus adaptées aux systèmes variables en temps semble par ailleurs nécessaire pour exploiter au mieux les mesures.

L'exploitation des réponses crissantes a été ici motivée par un lien implicitement fait avec les modes complexes du modèle. Différents travaux sur le calcul et l'exploitation de cycles limites [97] montrent, en dehors de l'interaction modale de base, l'importance d'autres effets, harmoniques et modes proches de celles-ci en particulier. Il paraitrait intéressant d'analyser des résultats de simulation en vue d'améliorer encore les stratégies d'exploitation des mesures.

Comme évoqué plus haut, les problématiques de variabilité et de reproductibilité ne permettent pas un recalage précis du modèle assemblé. Cependant, même pour un modèle seulement partiellement recalé, l'expansion permet une meilleure lisibilité des phénomènes et une compréhension des sources potentielles d'erreurs de modélisation et donc de sensibilité de la réponse expérimentale.

Une perspective intéressante est l'exploitation plus avancée de l'énergie résiduelle après expansion pour aider au recalage de propriétés clairement dépendantes de la dynamique des condi-

tions d'essai, soit principalement le contact segment/tambour et dans une moindre mesure les contacts segment/plateau et plateau/bras. Indépendamment du recalage, les formes expérimentales étendues peuvent permettre d'identifier des modes calculés que l'on pourrait vouloir décaler et donc ouvre la voie à des études de sensibilité à la géométrie des composants, par morphing ou une autre technique à définir.

En complément de cette perspective, il semblerait très utile d'améliorer les procédures expérimentales. Les techniques d'appropriation permettraient de mieux exciter des formes spécifiques et donc d'obtenir une caractérisation plus précise en particulier avec des changements de niveau d'excitation. Les techniques de contrôle de fréquence par la phase [98] que l'on voit utilisées pour les systèmes non-linéaires semblent particulièrement pertinentes ici.

A

Bruit de mesures laser

Dans [39], les difficultés fréquentes lors de mesures laser sont résumées. Au cours de nos mesures, le principal problème est lié au chatoiement (speckle en anglais, voir à droite de la Figure A.1) qui correspond à la tâche du laser où des zones de fortes intensités lumineuses et des zones sombres se dessinent. Une description complète de ce phénomène, lié à des interférences entre les rayons lumineux qui se reflètent sur une surface granuleuse, est disponible dans [99].

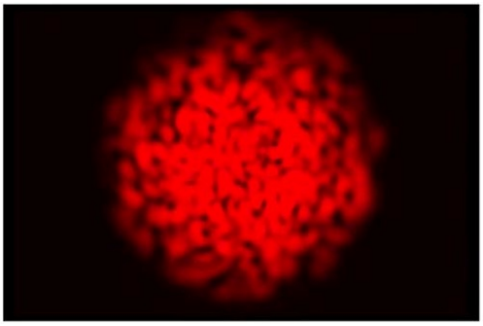


FIGURE A.1 – Visualisation d'une tâche de speckle laser.

D'après [99], le système travaille sur la variation de l'intensité du retour laser en fonction du temps pour déterminer la vitesse du point mesuré. Comme le capteur photo-sensible travaille sur une zone de la tâche speckle, un déplacement plutôt orienté dans le plan modifie fortement la zone vue par le capteur et engendre une modification de l'intensité moyenne parasite. Dans certains cas de figure, le retour laser vu par le capteur photosensible est trop faible et engendre ce que l'on appelle un dropout lors du traitement numérique (démodulation), qui se traduit par un pic soudain de forte amplitude de la vitesse mesurée. Pour limiter ce phénomène, la surface mesurée peut être bombée en blanc pour maximiser le retour limineux, mais cela n'est parfois pas suffisant.

La figure A.2 montre pour l'exemple une réponse temporelle présentant plusieurs dropouts. Le problème de ces pics d'amplitude est qu'ils vont engendrer un bruit sur une large bande de fréquence qui peut être parfois difficilement réduit.

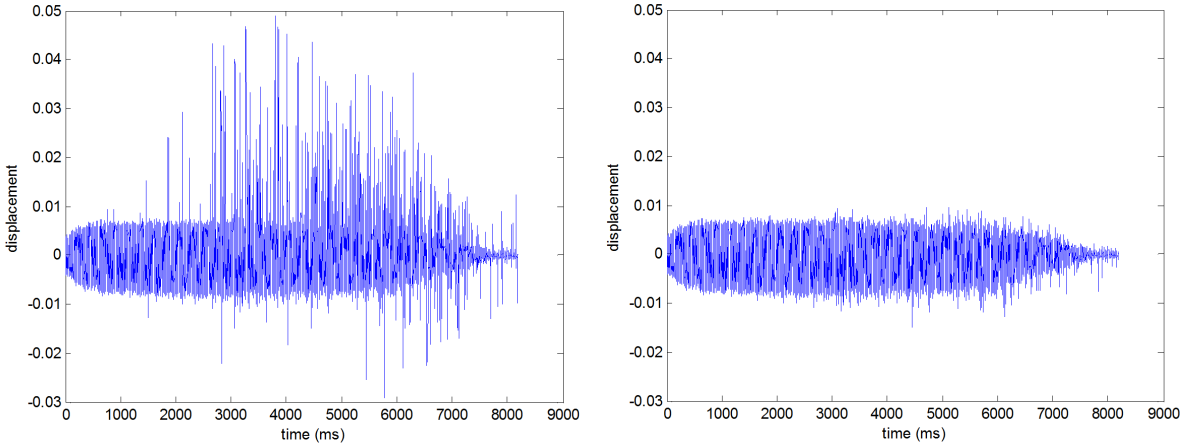


FIGURE A.2 – Mesure temporelle d'un crissement avec présence de Dropouts (à gauche) et après suppression des pics d'amplitude (à droite)

La Figure A.3 montre l'impact du nettoyage des dropouts sur le bruit ambiant : les dropouts engendre un bruit large bande d'un ordre de grande 10 fois plus grand que lorsque ceux-ci sont nettoyés dans le domaine temporel. Les points de mesures présentant cette pathologie de façon importante sont néfastes à une bonne corrélation mais ne reflètent pas une erreur physique de comportement entre deux modèles, ils sont donc à éliminer.

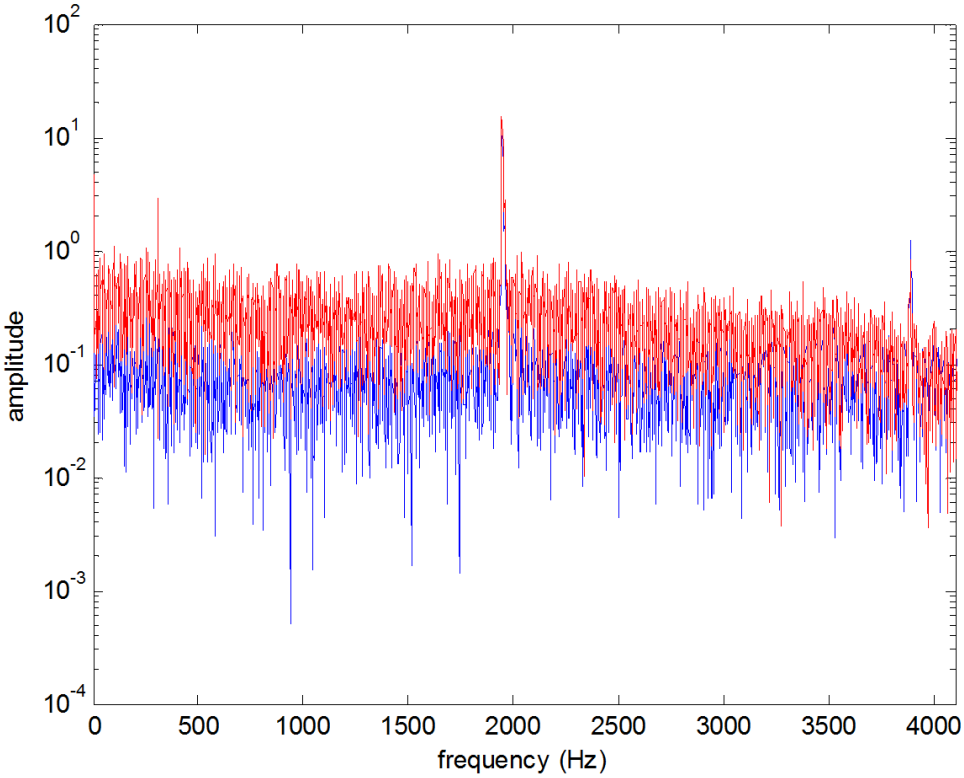


FIGURE A.3 – Impact dans le domaine fréquentiel de la présence de dropouts (courbe rouge) et après nettoyage (courbe bleue)

B

Analyse temps/fréquence : transformée de Gabor

Pour l'analyse temps/fréquence, une problématique classique est liée à l'inégalité d'Heisenberg-Gabor selon lequel il n'est pas possible de connaître avec une précision aussi grande que voulue la localisation à la fois en fréquence et en temps d'un signal.

Etant donné un signal temporel $s(t)$, la transformée de Fourier en fréquence $S(f)$ et la transformée inverse s'écrivent

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2j\pi ft}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{2j\pi ft}\mathrm{d}f \tag{B.1}$$

L'énergie du signal correspond à l'intégration sur la bande fréquence de la densité spectrale de puissance $|S(f)|^2$ ou à l'intégration sur la bande temporelle de la puissance instantannée $|s(t)|^2$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 \,\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \,\mathrm{d}t \tag{B.2}$$

et il est possible de voir ces puissances de façon analogue à une densité de probabilité dont on peut récupérer les temps ou fréquences moyens (moment d'ordre 1) et les variances temporelle et fréquentielle (moment d'ordre 2 centré). Pour que les puissances du signal soient analogue à une densité de probabilité, elles doivent être normalisées à 1 et on notera par la suite

$$\tilde{P}(f) = \frac{|S(f)|^2}{E} \quad \text{et} \quad \tilde{p}(t) = \frac{|s(t)|^2}{E} \tag{B.3}$$

La fréquence moyenne et l'instant moyen du signal s'écrivent

$$\Delta f = \int_{-\infty}^{+\infty} f\tilde{P}(f)\mathrm{d}f \quad \text{et} \quad \Delta t = \int_{-\infty}^{+\infty} t\tilde{p}(t)\mathrm{d}t \tag{B.4}$$

et les variances dans les domaines fréquentiel et temporel traduisant l'étalement du signal autour de la fréquence moyenne et de l'instant moyenne s'écrivent

$$\Delta f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f-\Delta f)^2\tilde{P}(f)\mathrm{d}f \quad \text{et} \quad \Delta t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\Delta t)^2\tilde{p}(t)\mathrm{d}t \tag{B.5}$$

Sans rentrer dans le détail de la démontration, voir [100], l'inégalité d'Heisenberg-Gabor dit que le produit des écart-types dans le domaine fréquentiel et temporel présente un minimum

$$\sqrt{\Delta f^2}\sqrt{\Delta t^2} \geq \frac{1}{4\pi} \tag{B.6}$$

Le signal pour lequel cette inégalité est une égalité est la gaussienne

$$g_{\sigma_t}(t,t_0) = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma_t^2}} \tag{B.7}$$

pour laquelle $\Delta t = t_0$ et $\sqrt{\Delta t^2} = \sigma_t$. On peut également montrer que la transformée de Fourier de cette gaussienne est elle même une gaussienne avec un écart-type

$$\sqrt{\Delta f^2} = \frac{1}{4\pi\sigma_t} \tag{B.8}$$

Pour tirer parti de ce meilleur compromis de description en temps et en fréquence de la fonction gaussienne, celle-ci est utilisée comme une fenêtre dans le cadre d'une analyse de Fourier à court terme (Short Time Fourier Transform ou STFT). L'analyse STFT avec une fenêtre gaussienne est aussi appelée transformée de Gabor et s'écrit analytiquement

$$STFT_{\sigma_t}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') g_{\sigma_t}(t', t) e^{-2j\pi f t'} \mathrm{d}t' \tag{B.9}$$

Le choix de la largeur de la fenêtre temporelle, donc de σ_t, dépend de la balance entre précision dans le domaine temporel et précision dans le domaine fréquentiel : en donnant une précision voulue sous la forme d'un écart-type de la fenêtre gaussienne (en temporel via $\sqrt{\Delta t^2}$ ou en fréquentiel via $\sqrt{\Delta f^2}$), la valeur σ_t est fixée.

Deux choix restent à faire quant à la discrétisation en temps et en fréquence. La STFT est calculée dans sa version discrète en utilisant l'algorithme FFT pour chaque valeur discrète temporelle. Une discrétisation pertinente est un échantillonnage temporel avec un pas de $\sqrt{\Delta t^2}$ et fréquentiel avec un pas de $\sqrt{\Delta f^2}$.

Pour la gestion de la discrétisation fréquentielle, le signal temporel fenêtré est tronqué de part et d'autre du centre de la fenêtre, en fonction d'une valeur au delà de laquelle la gaussienne est négligeable. Par exemple la gaussienne est inférieure à 10^{-n} pour

$$t = \sigma_t \sqrt{2n \log 10} \tag{B.10}$$

Le signal temporel est ensuite complété par des 0 jusqu'à une longueur de signal de $1/\sqrt{\Delta f^2}$ pour obtenir l'échantillonnage fréquentiel voulu.

Pour un aspect plus "lisse" de la carte temps/fréquence, il peut être intéressant de réduire les pas de temps temporels et fréquentiels mais il est important de noter que cela ne permet pas le d'améliorer la précision : le paramètre permettant de gérer la balance entre la précision dans le domaine fréquentiel et temporel est uniquement σ_t.

Une limitation de la STFT est que les résolutions temporelles et fréquentielles sont fixes, quelles que soient les valeurs f et t. Or, il est classique de vouloir dans les basses fréquences une meilleure résolution fréquentielle ainsi qu'une résolution temporelle moins bonne et dans les hautes fréquences une résolution temporelle très grande devant la résolution fréquentielle. Une réponse à ce besoin est donné notamment par les transformées en ondelettes (voir [101, 100] pour plus de détails) et le pendant de la transformée de Gabor est l'ondelette de Morlet.

Etant donné que le phénomène de crissement est très localisé en fréquence, le besoin de multi-résolution n'est pas avéré et la transformée de Gabor est utilisée dans ce travail pour l'analyse temps/fréquence des mesures temporelles du crissement.

Bibliographie

[1] G. Martin, E. Balmes, and T. Chancellier, "Improved Modal Assurance Criterion using a quantification of identification errors per mode/sensor," (Leuven), Sept. 2014.

[2] G. Martin, E. Balmes, and T. Chancelier, "Characterization of identification errors and uses in localization of poor modal correlation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 88, pp. 62–80, May 2017.

[3] M. Friswell and J. Mottershead, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. 1995.

[4] G. Martin, E. Balmes, and T. Chancelier, "Review of model updating processes used for brake components," 2015.

[5] G. Martin, E. Balmes, G. Vermot Des Roches, and T. Chancelier, "Updating and design sensitivity processes applied to drum brake squeal analysis," 2016.

[6] G. Martin, E. Balmes, G. Vermot Des Roches, and T. Chancelier, "Squeal Measurement Using Operational Deflection Shape. Quality Assessment and Analysis Improvement Using FEM Expansion.," 2017.

[7] W. Heylen and P. Sas, *Modal Analysis Theory and Testing*. 2006.

[8] D. Ewins, *Modal Testing : Theory and Practice*. 1984.

[9] N. Maia and J. Silva, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. 1997.

[10] R. J. Allemang and A. W. Phillips, "The unified matrix polynomial approach to understanding modal parameter estimation : An update," in *Proceedings of ISMA International Conference on Noise and Vibration Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium*, 2004.

[11] P. Verboven, *Frequency-Domain System Identification for Modal Analysis*. PhD thesis, 2002.

[12] E. Balmes, *Modeles Analytiques Réduits et Modeles Expérimentaux Complets En Dynamique Des Structures*. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, 1997.

[13] P. Guillaume, P. Verboven, and S. Vanlanduit, "Frequency-domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals," in *International Seminar on Modal Analysis*, vol. 1, pp. 359–366, 1998.

[14] E. Balmes, *Viscoelastic Vibration Toolbox, User Manual*. 2004-2013.

[15] E. Balmes, "New results on the identification of normal modes from experimental complex modes," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 11, no. 2, pp. 229–243, 1997.

[16] M. El-Kafafy, T. De Troyer, and P. Guillaume, "Fast maximum-likelihood identification of modal parameters with uncertainty intervals : A modal model formulation with enhanced residual term," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 48, pp. 49–66, Oct. 2014.

[17] B. Peeters, H. Van der Auweraer, P. Guillaume, and J. Leuridan, "The PolyMAX frequency-domain method : A new standard for modal parameter estimation ?," *Shock and Vibration*, vol. 11, no. 3-4, pp. 395–409, 2004.

[18] H. Van Der Auweraer, P. Guillaume, P. Verboven, and S. Vanlanduit, "Application of a fast-stabilizing frequency domain parameter estimation method," *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 123, no. 4, pp. 651–658, 2001.

[19] B. Cauberghe, P. Guillaume, P. Verboven, E. Parloo, and S. Vanlanduit, "The secret behind clear stabilization diagrams : The influence of the parameter constraint on the stability of the poles," in *Proceedings of the 10th SEM International Congress & Exposition on Experimental and Applied Mechanics*, pp. 7–10, 2004.

[20] E. Reynders, J. Houbrechts, and G. De Roeck, "Fully automated (operational) modal analysis," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 29, pp. 228–250, 2012.

[21] M. Böswald, "Analysis of the bias in modal parameters obtained with frequency-domain rational fraction polynomial estimators," *Proceedings of ISMA 2016*, pp. 2907–2921, 2016.

[22] E. Balmes, *Structural Dynamics Toolbox (for Use with MATLAB)*. September 1995-2014.

[23] M. El-kafafy, T. De Troyer, B. Peeters, and P. Guillaume, "Fast maximum-likelihood identification of modal parameters with uncertainty intervals : A modal model-based formulation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 37, pp. 422–439, May 2013.

[24] M. El-Kafafy, B. Peeters, P. Guillaume, and T. De Troyer, "Constrained maximum likelihood modal parameter identification applied to structural dynamics," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015.

[25] B. Peeters, P. Guillaume, H. Van der Auweraer, B. Cauberghe, P. Verboven, and J. Leuridan, "Automotive and aerospace applications of the PolyMAX modal parameter estimation method," in *Proceedings of IMAC*, vol. 22, pp. 26–29, 2004.

[26] P. Guillaume, P. Verboven, S. Vanlanduit, H. Van Der Auweraer, and B. Peeters, "A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator," in *Proceedings of IMAC*, vol. 21, pp. 183–192, 2003.

[27] B. Cauberghe, P. Guillaume, P. Verboven, E. Parloo, and S. Vanlanduit, "A poly-reference implementation of the maximum likelihood complex frequency-domain estimator and some industrial applications," in *Proceedings of the 22nd International Modal Analysis Conference*, 2004.

[28] E. Balmes, "Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization," in *International Modal Analysis Conference*, pp. 540–546, 1996.

[29] E. Balmes, *Experimental/Analytical Predictive Models of Damped Structural Dynamics*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1993.

[30] J. A. Cafeo, R. V. Lust, and U. M. Meireis, "Uncertainty in mode shape data and its influence on the comparison of test and analysis models," in *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*, pp. 349–355, 2000.

[31] J. A. Cafeo, R. V. Lust, S. J. Doggett, D. J. Nefske, D. A. Feldmaier, and S. H. Sung, "A design-of-experiments approach to quantifying test-to-test variability for a modal test," in *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*, pp. 598–604, 1997.

[32] J. P. De Clerck, "Using singular value decomposition to compare correlated modal vectors," in *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*, vol. 2, pp. 1022–1029, 1998.

[33] T. L. Paez and N. F. Hunter, "Statistical Series : Part 5 Fundamental concepts of the bootstrap for statistical analysis of mechanical systems," *Experimental Techniques*, vol. 22, pp. 35–38, May 1998.

[34] C. R. Farrar, S. W. Doebling, and P. J. Cornwell, "A comparison study of modal parameter confidence intervals computed using the Monte Carlo and Bootstrap techniques," in *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*, vol. 2, pp. 936–944, 1998.

[35] S. W. Doebling and C. R. Farrar, "Estimation of statistical distributions for modal parameters identified from averaged frequency response function data," *Journal of Vibration and Control*, vol. 7, no. 4, pp. 603–624, 2001.

[36] R. Pintelon, P. Guillaume, and J. Schoukens, "Uncertainty calculation in (operational) modal analysis," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, pp. 2359–2373, 2007.

[37] E. Reynders, R. Pintelon, and G. De Roeck, "Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, pp. 948–969, May 2008.

[38] P. Vacher, B. Jacquier, and A. Bucharles, "Extensions of the MAC criterion to complex modes," in *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering*, 2010.

[39] K. B. Gatzwiller, K. B. Ginn, A. Betts, and S. Morel, "Practical aspects of successful laser doppler vibrometry based measurements," in *Proceedings of 21 St International Modal Analysis Conference (IMAC-XXI), Kissimmee, Florida. Changes in Physiological States. Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 7, p. 315, 2002.

[40] R. J. Allemang, "The modal assurance criterion–twenty years of use and abuse," *Sound and vibration*, vol. 37, no. 8, pp. 14–23, 2003.

[41] E. Balmes, "Sensors, Degrees of Freedom, and Generalized Modeshape Expansion Methods," *International Modal Analysis Conference*, pp. 628–634, 1999.

[42] S. Rusinkiewicz and M. Levoy, "Efficient variants of the ICP algorithm," in *3-D Digital Imaging and Modeling, 2001. Proceedings. Third International Conference on*, pp. 145–152, 2001.

[43] K.-L. Low, "Linear least-squares optimization for point-to-plane icp surface registration," *Chapel Hill, University of North Carolina*, 2004.

[44] E. Balmes, "High Modal Density, Curve Veering, Localization : A Different Perspective On The Structural Response," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 161, pp. 358–363, Feb. 1993.

[45] N. Lieven and D. Ewins, "Spatial Correlation of Modeshapes, The Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC)," *International Modal Analysis Conference*, 1988.

[46] R. J. Allemang and D. L. Brown, "A correlation coefficient for modal vector analysis," in *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference*, vol. 1, pp. 110–116, 1982.

[47] D. Hunt, "Application of an Enhanced Coordinate Modal Assurance Criterion," *International Modal Analysis Conference*, pp. 66–71, 1992.

[48] F. N. Catbas, A. E. Aktan, R. J. Allemang, and D. L. Brown, "A correlation function for spatial locations of scaled mode shapes :(COMEF)," in *Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*, pp. 1550–1555, 1998.

[49] P. Avitabile and F. Pechinsky, "Coordinate orthogonality check (CORTHOG)," in *Proceedings of the 12th International Modal Analysis*, vol. 2251, p. 753, 1994.

[50] P. Avitabile and T. Foster, "Dof selection for smoothing/expansion of measured data.," in *The 11 Th International Modal Analysis Conference*, pp. 1486–1489, 1993.

[51] M. Brughmans, J. Leuridan, and K. Blauwkamp, "The application of FEM-EMA correlation and validation techniques on a body-in-white," in *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, pp. 646–646, 1993.

[52] M. Corus, *Amélioration de Méthodes de Modification Structurale Par Utilisation de Techniques D'expansion et de Réduction de Modèle.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2003.

[53] P. Feissel and O. Allix, "Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 1968–1983, Mar. 2007.

[54] A. Bobillot, *Méthodes de Réduction Pour Le Recalage : Application Au Cas d'Ariane 5.* Jan. 2002.

[55] A. Kuczkowiak, *Modèle hybride incertain pour le calcul de réponse en fonctionnement d'un alternateur.* PhD thesis, Unversité de Franche Comté, 11/12/14.

[56] D. Kammer, "Test-Analysis Model Development Using an Exact Modal Reduction," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pp. 174–179, 1987.

[57] R. Guyan, "Reduction of Mass and Stiffness Matrices," *AIAA Journal*, vol. 3, p. 380, 1965.

[58] R. J. Craig, "A Review of Time-Domain and Frequency Domain Component Mode Synthesis Methods," *Int. J. Anal. and Exp. Modal Analysis*, vol. 2, no. 2, pp. 59–72, 1987.

[59] E. Balmes and others, "Orthogonal Maximum Sequence Sensor Placements Algorithms for modal tests, expansion and visibility," *IMAC, January*, vol. 145, p. 146, 2005.

[60] A. Bobillot and E. Balmes, "Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids," *Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Apr. 2002.

[61] A. Bobillot and E. Balmes, "Iterative Computation of Modal Sensitivities," *AIAA Journal*, vol. 44, no. 6, pp. 1332–1338, 2006.

[62] J. Salvi, S. Fernandez, T. Pribanic, and X. Llado, "A state of the art in structured light patterns for surface profilometry," *Pattern Recognition*, vol. 43, pp. 2666–2680, Aug. 2010.

[63] T. França de Paula, G. Rejdych, T. Chancelier, G. Vermot des Roches, and B. E, "On the influence of geometry updating on modal correlation of brake components.," in *Proceedings Vibrations, Chocs & Bruit*, 2012.

[64] G. K. Tam, Z.-Q. Cheng, Y.-K. Lai, F. C. Langbein, Y. Liu, D. Marshall, R. R. Martin, X.-F. Sun, and P. L. Rosin, "Registration of 3D point clouds and meshes : A survey from rigid to nonrigid," *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 7, pp. 1199–1217, 2013.

[65] H. Li, R. W. Sumner, and M. Pauly, "Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans," in *Computer Graphics Forum*, vol. 27, pp. 1421–1430, 2008.

[66] M. L. Staten, S. J. Owen, S. M. Shontz, A. G. Salinger, and T. S. Coffey, "A comparison of mesh morphing methods for 3D shape optimization," in *Proceedings of the 20th International Meshing Roundtable*, pp. 293–311, 2012.

[67] D. Sieger, S. Menzel, and M. Botsch, "RBF morphing techniques for simulation-based design optimization," *Engineering with Computers*, vol. 30, no. 2, pp. 161–174, 2014.

[68] L. Grassi, N. Hraiech, E. Schileo, M. Ansaloni, M. Rochette, and M. Viceconti, "Evaluation of the generality and accuracy of a new mesh morphing procedure for the human femur," *Medical engineering & physics*, vol. 33, no. 1, pp. 112–120, 2011.

[69] R. Szeliski and S. Lavallée, "Matching 3-D anatomical surfaces with non-rigid deformations using octree-splines," in *Biomedical Image Analysis, 1994., Proceedings of the IEEE Workshop on*, pp. 144–153, 1994.

[70] M. Rouhani and A. D. Sappa, "Non-rigid shape registration : A single linear least squares framework," in *Computer Vision–ECCV 2012*, pp. 264–277, 2012.

[71] D. Vartziotis, J. Wipper, and B. Schwald, "The geometric element transformation method for tetrahedral mesh smoothing," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 1, pp. 169–182, 2009.

[72] D. Vartziotis, J. Wipper, and M. Papadrakakis, "Improving mesh quality and finite element solution accuracy by GETMe smoothing in solving the Poisson equation," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 66, pp. 36–52, 2013.

[73] G. Vermot Des Roches, *Frequency and Time Simulation of Squeal Instabilities. Application to the Design of Industrial Automotive Brakes.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, CIFRE SDTools, 2010.

[74] L. Heller, *Amortissement Dans Les Structures Assemblées.* PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2005.

[75] A. Caignot, P. Ladevèze, D. Néron, and J.-F. Durand, "Virtual testing for the prediction of damping in joints," *Engineering Computations*, vol. 27, no. 5, pp. 621–644, 2010.

[76] H. Festjens, G. Chevallier, and J.-l. Dion, "A numerical tool for the design of assembled structures under dynamic loads," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 75, no. 0, pp. 170 – 177, 2013.

[77] G. Vermot Des Roches, E. Balmes, H. Ben Dhia, and R. Lemaire, "Compatibility measure and penalized contact resolution for incompatible interfaces," *European Journal Of Computational Mechanics*, vol. 19, pp. 317–329, 2010.

[78] E. Balmes and G. V. Vermot Des Roches, "From physical to macro-models of local assemblies for predictions of global dynamics.," (St Ouen), 2015.

[79] G. Vermot Des Roches, E. Balmes, and S. Nacivet, "Error localization and updating of junction properties for an engine cradle model," in *ISMA*, (Leuven, Belgium), p. ID 372, Sept. 2016.

[80] G. Vermot Des Roches and E. Balmes, "Understanding friction induced damping in bolted assemblies through explicit transient simulation," in *ISMA*, p. ID360, Sept. 2014.

[81] Y. Goth and H. Reynaud, "A bolt assembly parametric model," in *ISMA*, (Leuven).

[82] G. Vermot Des Roches, G. Rejdych, E. Balmes, and T. Chancelier, "The Component Mode Tuning (CMT) method. A strategy adapted to the design of assemblies applied to industrial brake squeal," 2014.

[83] J. A. Sethian, *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*, vol. 3. 1999.

[84] C. Hammami, *Intégration de Modèles de Jonctions Dissipatives Dans La Conception Vibratoire de Structures Amorties.* PhD thesis, Arts et Metiers ParisTech, Paris, 14/10/14.

[85] X. Lorang, *Instabilité Vibratoire Des Structures En Contact Frottant : Application Au Crissement Des Freins de TGV.* PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2007.

[86] A. Bjorck and G. H. Golub, "Numerical methods for computing angles between linear subspaces," *Mathematics of computation*, vol. 27, no. 123, pp. 579–594, 1973.

[87] H. Gunawan, O. Neswan, and W. Setya-Budhi, "A formula for angles between subspaces of inner product spaces," *Contributions to Algebra and Geometry*, vol. 46, no. 2, pp. 311–320, 2005.

[88] E. Reynders, "System identification methods for (operational) modal analysis : Review and comparison," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 19, no. 1, pp. 51–124, 2012.

[89] P. Guillaume, T. De Troyer, C. Devriendt, and G. De Sitter, "OMAX–operational modal analysis in presence of eXogenous inputs," in *Proceedings of the 25th IMAC, a Conference on Structural Dynamics, Society for Experimental Mechanics, Orlando, FL*, 2007.

[90] C. Devriendt and P. Guillaume, "Identification of modal parameters from transmissibility measurements," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 314, pp. 343–356, July 2008.

[91] C. Devriendt, G. De Sitter, and P. Guillaume, "An operational modal analysis approach based on parametrically identified multivariable transmissibilities," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, pp. 1250–1259, July 2010.

[92] C. Devriendt, G. De Sitter, S. Vanlanduit, and P. Guillaume, "Operational modal analysis in the presence of harmonic excitations by the use of transmissibility measurements," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, pp. 621–635, Apr. 2009.

[93] T. De Troyer, P. Guillaume, C. Devriendt, and M. Runacres, "Combined use of FRFs and transmissbility functions in an OMAX framework," in *Proceedings of ISMA2010–International Conference on Noise and Vibration Engineering Including USD2010*, pp. 3263–3273, 2010.

[94] S.-D. Zhou, W. Heylen, P. Sas, and L. Liu, "Maximum likelihood estimator of operational modal analysis for linear time-varying structures in time–frequency domain," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, no. 11, pp. 2339–2358, 2014.

[95] E. Balmes, C. Chapelier, P. Lubrina, and P. Fargette, "An evaluation of modal testing results based on the force appropriation method," in *http ://www.sdtools.com/pdf/IMAC95appro.pdfInternational Modal Analysis Conference*, pp. 47–53, 1995.

[96] G. Vermot des Roches, J.-P. Bianchi, E. Balmes, R. Lemaire, and T. Pasquet, "Using component modes in a system design process," in *International Modal Analysis Conference*, pp. 1–2, 2010.

[97] S. Nacivet and J.-J. Sinou, "Modal Amplitude Stability Analysis and its application to brake squeal," *Applied Acoustics*, vol. 116, pp. 127–138, Jan. 2017.

[98] S. Mojrzisch, J. Wallaschek, and J. Bremer, "An Experimental Method for the Phase Controlled Frequency Response Measurement of Nonlinear Vibration Systems," *PAMM*, vol. 12, pp. 253–254, Dec. 2012.

[99] S. J. Rothberg and B. J. Halkon, "Laser vibrometry meets laser speckle," in *Sixth International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques : Advances and Applications*, pp. 280–291, 2004.

[100] J.-P. Ovarlez, "Note de cours : Distributions temps-fréquence," Mar. 2016.

[101] V. C. Chen and H. Ling, *Time-Frequency Transforms for Radar Imaging and Signal Analysis*. 2002.

Table des figures

1.1 Accéléromètres équipant un frein à tambour . . . 3
1.2 Mise en place de la mesure (en haut), dispositif laser (en base à gauche), système mesuré (disque) et marteau (en bas au centre), système d'acquisition (en bas à droite) . . . 4
1.3 Maillage de mesure Polytec . . . 4
1.4 Banc à essai avec un système de freinage complet . . . 5
1.5 Modèle CAO (en haut à gauche), modèle EF maillé (en haut à droite) et modèle EF d'un système complet de frein à tambour sans le tambour (en bas) . . . 6

2.1 Principe de l'identification modale . . . 12
2.2 Etapes d'identification . . . 14
2.3 Fonction de transfert de trois modes : tracés individuels en pointillés et somme des trois modes en trait continu . . . 20
2.4 Termes résiduels haut et bas . . . 21
2.5 Comparaison entre modèle sans terme résiduel (gauche) et modèle avec termes résiduels (droite) : les modèles sont représentés en pointillé et la mesure en trait continu . . . 22
2.6 Visualisation des transferts synthétisés : diagramme de Bode pour les voies 1, 30 et 100 . . . 27
2.7 Diagrammes de stabilisation : ordre 100 sur toute la bande (haut), ordre 100 par bande de 1000Hz (milieu) et ordre 200 par bande de 1000 Hz (bas) . . . 28
2.8 Evolution de l'erreur relative en fréquence (gauche) et en amortissement (droite) par rapport aux valeurs théoriques, en fonction de l'ordre du modèle . . . 29
2.9 Diagramme de stabilisation sur le cas test industriel . . . 30
2.10 Superposition des transferts synthétisés et mesurés pour une voie donnée. . . . 31
2.11 Ecart relatif entre les valeurs identifiées et théoriques : en amortissement (gauche) et en résidu (droite) . . . 38
2.12 Ecart relatif entre les valeurs identifiées et théoriques après optimisation : en amortissement (gauche) et en résidu (droite) . . . 38
2.13 Evolution relative de l'amortissement par mode, entre après et avant l'optimisation 39
2.14 Superposition des transferts synthétisés et mesurés pour une voie donnée, après optimisation. . . . 39
2.15 Superposition des transferts synthétisés et mesurés pour une voie donnée, après optimisation par bande. . . . 40
2.16 Configuration de mesure : (a) Marteau à impact automatique, (b) plateau de frein à tambour, (c) fils de pêche, (d) 3D-SLDV . . . 41
2.17 Maillage de mesure : 493 points, 1479 capteurs . . . 42
2.18 Exemple de fonctions de transfert avec un critère d'erreur élevé de 30% (à gauche) et faible de 0.4% (à droite) . . . 43

2.19 Exemples de fonctions de transferts présentant des valeurs de NOS élevées en raison de : mauvaise excitation (à gauche) et concaténation de mesures incohérentes (à droite) . . . 44
2.20 Exemples de fonctions de transfert : Erreur élevée de 18.7% avec un contribution élevée de 73.5% (à gauche) et erreur faible de 0.1% avec une contribution faible de 0% (à droite) . . . 44
2.21 Modes retenus pour l'illustration des critères de qualité #9 (gauche), #6 (milieu) and #26 (droite). . . . 45
2.22 Erreur(+), niveau(x) et contribution (o) pour le mode #9 . . . 47
2.23 Erreur(+), niveau(x) et contribution (o) pour le mode #6 (gauche) et zoome sur les 100 premiers capteurs avec l'erreur la plus faible (droite) . . . 47
2.24 Erreur(+), niveau(x) et contribution (o) pour le mode #26 . . . 47
2.25 A gauche : tables de navigation divisés en *Modes* et en fonctions de transfert *I/O Pairs*. A droite : la fonction de transfert sélectionnée présentant une valeur de NOS élevée pour le mode #26. . . . 48
2.26 Erreur dans les directions x, y et z (de gauche à droite) des modes #9, #6 et #26 (de haut en bas) . . . 49
2.27 Contribution dans les directions x, y et z (de gauche à droite) des modes #9, #6 et #26 (de haut en bas) . . . 49
2.28 NOS dans les directions x, y et z (de gauche à droite) des modes #9, #6 et #26 (de haut en bas) . . . 50

3.1 Evaluation de la corrélation durant une procédure de recalage de modèle . . . 52
3.2 Géométrie de mesure (à gauche) et modèle EF (à droite) . . . 54
3.3 Méthodes d'observation avec le capteur en bleu et l'observation en rouge : noeud le plus proche (gauche), surface la plus proche (milieu) et lien rigide (droite) . . . 55
3.4 Construction de la matrice d'observation pour la mesure d'un plateau de frein à tambour : vue globale (gauche) et zoom (droite) . . . 55
3.5 Algorithme de superposition d'un maillage de mesure sur un modèle EF . . . 56
3.6 Schéma présentant la distance point à plan [43] . . . 58
3.7 Matrice de MAC sur le cas test du plateau entre les modes numériques ("Normal modes") et les modes identifiés ("IdMain") . . . 59
3.8 Système masse ressort cyclique présentant deux modes non nuls . . . 60
3.9 Croisement de modes avec l'évolution de k_3 : Evolution des pulsations (gauche) et du MAC entre le premier mode initial $\phi_1(k_3 = 0.3)$ et les deux modes évoluant avec k_3(à droite) . . . 60
3.10 Evolution de la matrice de MAC entre les modes initiaux et les modes pour $k_3 = 0.3$ (MAC diagonal à gauche), $k_3 = 0.33$ (milieu) et $k_3 = 0.36$ (droite) . . . 60
3.11 Superposition du maillage de mesure sur le modèle EF : initialisation avec trois points en correspondance (à gauche) et résultat après optimisation ICP (à droite) 61
3.12 Erreur résiduelle (distance point à plan) après optimisation ICP . . . 62
3.13 Impact du repositionnement sur les MAC appairés . . . 62
3.14 Scaled CoMAC pour le cas test du plateau de frein à tambour, directions X Y et Z 64
3.15 Critère eCoMAC pour le cas test du plateau de frein à tambour, directions X Y et Z . . . 65
3.16 Algorithme MACCo . . . 65
3.17 MACevol : la carte dans les directions x, y et z (en haut) et la valeur pour les 10 premiers capteurs (en bas) . . . 67
3.18 Affichage de la matrice de MAC et des déformées modales associées (gauche) et table avec les modes appairés et les critères de qualité par mode et par capteur. . 67

3.19 MACError pour les modes identifiés #9, #26 et #33. La ligne bleue continue et l'échelle à gauche donnent les valeurs de MAC et la ligne rouge hachée et l'échelle de droite donnent la fraction de capteurs retirés. 68
3.20 Affichage du MACCo pour le mode identifié #9 : Evolution du MAC avec le retrait de capteur (en haut), affichage sous forme de carte de couleur (milieu) et affichage de la version MACevol (en bas). 69
3.21 MACevol dans la direction z pour les modes #3, #7 and #13 70
3.22 Modèle éléments finis avec les contacts en surbrillance (gauche), zoom sur le contact entre les deux poutres (milieu) et zoom sur les encastrements à la base (droite) 71
3.23 Géométrie de mesure pour la consistance : forte densité de capteurs sur la poutre verticale (gauche) et ajout d'un triaxe à l'extrémité de la poutre horizontale (droite) 71
3.24 MAC entre les déformées du modèle nominal et les déformées étendues avec une expansion statique à partir de la géométrie de mesure #1 73
3.25 Différence entre les déformées nominales (première ligne) et les déformées étendues par expansion statique avec la géométrie #1 (deuxième ligne) pour les modes 3 6 7 et 10 (de gauche à droite) 74
3.26 Trois premiers modes à capteurs fixes : 1969Hz, 3201Hz et 8074Hz 74
3.27 MAC entre les déformées du modèle nominal et les déformées étendues avec une expansion statique à partir de la géométrie de mesure #2 75
3.28 Différence entre les déformées nominales (première ligne) et les déformées étendues par expansion statique avec la géométrie #2 (deuxième ligne) pour les modes 10 13 14 et 16 (de gauche à droite) 75
3.29 Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #5 sans accéléromètre sur la poutre horizontale (gauche) et visualisation du mode étendu (droite) 77
3.30 Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #6 sans accéléromètre sur la poutre horizontale (gauche) et visualisation du mode étendu (droite) 78
3.31 Modes du système réduit au sous espace "mesure étendue+ capteurs fixes" : premier mode à 1948Hz (gauche) et deuxième mode à 3200Hz (droite) 78
3.32 Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #6 avec triaxe sur la poutre horizontale 79
3.33 Evolution du MAC avec la fréquence d'expansion dynamique du mode identifié #6 avec accéléromètre sur la poutre horizontale (gauche), mode de torsion étendu (centre) et mode du sous-espace "mesure étendue + capteurs fixes" (droite) . . . 79
3.34 MAC entre le mode nominal #11 et le mode étendu en fonction de la fréquence d'expansion et de l'erreur relative admissible (gauche) et zoom de la carte de couleur sur la gamme 0.7-1 (droite) 81
3.35 Résultat de l'expansion MDRE pour le mode #11 à la fréquence nominale : erreur nulle au capteurs (à gauche), erreur relative de 2% (au mileu) et de 4% (à droite) 82
3.36 Comparaison entre expansion dynamique (trait bleu plein) et expansion MDRE avec 2% d'erreur de mesure relative admissible (trait rouge pointillé) et 6% d'erreur (trait mixte vert) 83
3.37 Résultats d'expansion avec : $\gamma = 1e10$ (gauche), $\gamma = 1e5$ (milieu) et $\gamma = 1e1$ (droite) 84
3.38 Erreurs relatives moyennes de mesure par capteur, classés par ordre décroissant. 85
3.39 Cartographie d'erreur relative de mesure par capteur pour le mode #9 avec : $\gamma = 1e10$ (gauche), $\gamma = 1e5$ (milieu) et $\gamma = 1e1$ (droite). 85
3.40 Erreur relative de mesure modèle par élément. 86

3.41 Erreur relative de modèle par élément, liée aux modes d'enrichissement (gauche) et aux modes libres (droite) 87
3.42 Erreur relative moyenne de modèle par élement, liée aux modes libres. 87

4.1 Processus de recalage : géométrie composant, propriétés matériau de composant, propriétés de contact des assemblages 90
4.2 Mise en position de la pièce sur le plateau tournant (à gauche), système de mesure COMET L3D (à droite) 91
4.3 Principe de fonctionnement d'un scanner 3D à lumière structurée 92
4.4 Surface mesurée (à gauche) et surface nominale du modèle éléments finis (à droite) 92
4.5 Superposition et écart entre la surface nominale et la surface mesurée 93
4.6 Volume reconstruit (à gauche) et superposition et écart entre la surface du modèle reconstruit et la surface mesurée (à droite) 95
4.7 Pertinence du placement de capteur : Visualisation des 44 capteurs sélectionnés (à gauche) et l'autoMAC (à droite) 97
4.8 Corrélation entre les modes propres du modèle nominal et du modèle reconstruit : MAC (à gauche) et MAC + écarts relatifs en fréquence des modes appairés (à droite) 97
4.9 Identification sur un transfert colocalisé (à gauche) et problème de variation de fréquence lié à l'ajout de masse (à droite) 98
4.10 Fonction coût pour le modèle nominal et le modèle recalé (à gauche) ; Pour les deux modèles : erreur relative en fréquence pour chaque mode entre avant (en haut à droite) et après (en bas à droite) le recalage du module d'Young + erreur moyenne 99
4.11 Superposition du maillage de test sur le modèle éléments finis recalé en géométrie et propriétés matériau (à gauche) ; MAC entre les déformées modales identifiées et les déformées numériques observées selon les capteurs (à droite) 100
4.12 Définition de la normale de contact (N) et du gap (g) entre deux solides (à gauche) et définition de la loi de Signorini contact-pression 101
4.13 Illustration du calcul d'un gap 102
4.14 Décomposition des DDL de l'assemblage par composant 104
4.15 Définition du contact : contact guide-câble/point-fixe en rouge et point-fixe/plateau en bleu (à gauche) et visualisation du premier mode de flexion du guide-câble (à droite) 105
4.16 Evolution de la surface de contact parfait autour des rivets 105
4.17 Evolution de la surface de contact avec un seuil sur les intervalles d'ouverture (40%, 60% et 80%), les zones rouges et bleues sont sans contact. 106
4.18 Evolution des fréquences modales : pour la suite ordonnée de surfaces de contacts (de la surface la plus faible à la plus élevée) (à gauche) et pour différentes raideurs de contacts, de la moins raide à la plus raide (à droite) 106
4.19 Superposition de l'évolution des fréquences modales avec la raideur pour le modèle réduit (lignes) et pour le modèle complet (croix). Les points entourés correspondent aux déformées modales montrées en figure 4.27 108
4.20 Recalage des raideurs avec appairage pour MAC>70% : erreur relative moyenne des modes appairés [%] (à gauche) et nombre de modes appairés (à droite) 109
4.21 Recalage des raideurs avec appairage pour MAC>23% : fonction objectif (à gauche) et nombre de modes appairés (à droite) 109
4.22 Recalage des raideurs avec appairage pour MAC>23% : fonction objectif avec coloration resserrée autour du minimum 110
4.23 MAC pour les valeurs optimales de Kn et Kt : MAC simple (à gauche) et MAC Combine avec des écarts en fréquence admissible de 2% (à droite) 110

4.24 Répartition de l'énergie de déformation : raideur de contact minimal, raideur tangentielle, raideur normale et raideur interne aux composants (de haut en bas) 111
4.25 Modes étendus avec un fort niveau d'énergie dans le contact 111
4.26 Carte d'erreur en énergie résiduelle moyenne (gauche) et MAC associé aux paramètres optimaux $\nu = 4.8e(-7)$ et $\tau = 2.3e(-5)$ (droite) 112
4.27 Visualisation de trois déformées modales correspondant aux points 1, 2 et 3 sur la figure 4.19 113
4.28 Evolution des modes de composant assemblé : modes de guide-câble (gauche) et modes de plateau (droite) 114
4.29 Observation de la forme du premier mode de guide-câble assemblé (sélectionné à gauche) sur les modes d'assemblage (la participation est marquée par les points sur la figure de droite). 115
4.30 Observation de la forme d'un mode de plateau assemblé (sélectionné à gauche) sur les modes d'assemblage (la participation est marquée par les points sur la figure de droite). 115
4.31 Mode d'assemblage avec une déformation similaire du plateau : fréquence plus élevée du mode avec une raideur de contact faible (à gauche) et fréquence plus faible du mode avec une raideur de contact élevée (à droite) 116
4.32 Evolution d'un transfert colocalisé au niveau du guide câble en fonction de la raideur de contact. Gauche : vue amplitude/fréquence pour diverses raideurs. Droite : carte d'amplitude dans le plan fréquence/raideur. 117
4.33 Evolution d'un transfert colocalisé au niveau du plateau en fonction de la raideur de contact, sur une carte d'amplitude dans le plan fréquence/raideur. 117

5.1 Exploitation croisée des essais et du calcul pour l'analyse du crissement sur banc d'essai 120
5.2 Modèle éléments finis du frein à disque simplifié 123
5.3 Déformées modales des modes réels #8 et #9 123
5.4 Participation des modes réels aux modes complexes 124
5.5 Participation des modes réels aux modes complexes #8 (en haut) et #9 (en bas) : évolution de l'amplitude de participation (à gauche) et amplitude de participation pour $\mu = 0.2$ (à droite) 124
5.6 Déphasage entre les deux modes réels participant aux modes complexes #8 (à gauche) et #9 (à droite) 125
5.7 Comparaison entre l'évolution en fréquence et amortissement avec le coefficient de frottement pour le modèle réduit sur l'ensemble des modes réels et le modèle réduit sur les deux modes réels (lignes pointillées) #8 et #9 (lignes continues) . . 126
5.8 Evolution de la fréquence (à gauche) et de l'amortissement (à droite) des modes complexes avec l'écartement des fréquences propres des modes réels 126
5.9 Frein à tambour mesuré pour l'étude expérimentale du crissement 127
5.10 Maillage de capteurs superposé au modèle éléments finis 128
5.11 Positionnements des capteurs de référence 128
5.12 Positionnements de l'excitation du pot vibrant 129
5.13 Mesure temporelle du crissement pour un capteur donné 130
5.14 Mesure temporelle : zoom sur 3 cycles 130
5.15 Décomposition en valeur singulière des trois cycles sur l'ensemble des capteurs : valeurs singulières (à gauche) et amplitudes temporelles associées (à droite) . . . 131
5.16 Questionnements sur l'évolution temporelle : besoin d'une analyse temps-fréquence 131
5.17 Transformée de Gabor de la mesure temporelle entre les temps 16s et 17s : résolution temporelle élevée $\sqrt{\Delta t^2} = 0.004s$ et fréquentielle faible $\sqrt{\Delta f^2} = 20Hz$ (à gauche) et résolution temporelle faible $\sqrt{\Delta t^2} = 0.1592s$ et fréquentielle élevée $\sqrt{\Delta f^2} = 0.5Hz$ (à droite) 132

5.18 Evolution temporelle des amplitudes principales entre les temps 16s et 17s : pour une résolution temporelle élevée et fréquentielle faible (à gauche) et pour une résolution temporelle faible et fréquentielle élevée (à droite) 133
5.19 Evolution relative des deux formes principales $a_2(t)/a_1(t)$ de la figure 5.18 134
5.20 Transformée de Gabor de la mesure temporelle entre les temps 12s et 20s : résolution temporelle élevée $\sqrt{\Delta t^2} = 0.004s$ et fréquentielle faible $\sqrt{\Delta f^2} = 20Hz$ (à gauche) et résolution temporelle faible $\sqrt{\Delta t^2} = 0.1592s$ et fréquentielle élevée $\sqrt{\Delta f^2} = 0.5Hz$ (à droite) 134
5.21 Trois coupes de l'évolution temps-fréquence : t1=13s, t2=15s et t3=17s 135
5.22 Pour une résolution fréquentielle forte, $|a_j(t)|$ à gauche et $a_2(t)/a_1(t)$ à droite. . . 135
5.23 AutoMAC entre les formes $\{y(f_{max}(t),t)\}$ 136
5.24 Etude de variabilité pour un deuxième freinage : transformée de Gabor (en haut à gauche), évolution des amplitudes principales (en haut à droite), évolution relative des deux formes principales (en bas à gauche) et autoMAC entre les formes $\{y(f_{max}(t),t)\}$ (en bas à droite) 136
5.25 MAC entre les formes $\{y_1(f_{max}(t),t)\}$ et $\{y_2(f_{max}(t),t)\}$ 137
5.26 Décomposition de l'évolution temporelle de chaque mesure sur la base des formes principales réelles communes : premier freinage (à gauche) et second freinage (à droite). 137
5.27 Evolution relative des deux formes principales pour chaque graphique de la figure 5.26 138
5.28 Reproductibilité des transferts pour la position d'excitation #2 et la référence #1, sous 20bar pour différentes conditions : statique (en haut à gauche), en couple 100Nm (en haut à droite), en couple 200Nm (en bas à gauche) et en conditions de glissement (en bas à droite) 139
5.29 MAC entre $\{\tilde{y}(f_{max}(t),t))\}_{|ref}$ et $\{y(f_{max}(t),t))\}_{|ref}$ (gauche) et entre $\{\tilde{y}(f_{max}(t),t))\}$ et $\{y(f_{max}(t),t))\}$ (droite). 141
5.30 MAC entre la reconstruction du premier freinage à l'aide du sous-espace du second $\{\tilde{y_1}(f_{max}(t),t))\}$ et la mesure réelle (à gauche) et entre la reconstruction du second freinage à l'aide du sous-espace du premier $\{\tilde{y_2}(f_{max}(t),t))\}$ et la mesure réelle (à droite) 141
5.31 Valeurs principales résultant de la concaténation de $\left[\Phi_1^1\Phi_2^1\right]_{|ref}$ et $\left[\Phi_1^2\Phi_2^2\right]_{|ref}$ . . . 142
5.32 Qualité d'agrégation aux références 142
5.33 Comparaison entre les formes agrégées sur l'ensemble des capteurs 143
5.34 Transformées de Gabor du premier capteur de référence pour les quatre lots de mesure 143
5.35 Bandes temporelles extraites des transformées de Gabor 144
5.36 Décomposition en valeurs singulières des formes à la fréquence maximale, pour chaque lot de capteurs 144
5.37 Décomposition en valeurs singulières de $\left[\cdots\ \Phi_1^i\Phi_2^i\ \cdots\right]_{|ref}\,(i=1-4)$, donnant $\left[\cdots\ \phi_i\ \cdots\right]_{|ref}\,(i=1-4)$ 145
5.38 MAC entre les sous-espaces $\left[\Phi_1^i\Phi_2^i\right]_{|ref}\,(i=1-4)$ et le sous-espace cible $[\phi_1\phi_2]_{|ref}$ 145
5.39 MAC entre $\left\{\tilde{\phi}_1^i\right\}_{|ref}$ et $\{\phi_1\}_{|ref}$ (à gauche) et entre $\left\{\tilde{\phi}_2^i\right\}_{|ref}$ et $\{\phi_2\}_{|ref}$ (à droite) 146
5.40 Formes étendue avec erreur de mesure nulle 147
5.41 Fréquences associées à l'orthonormalisation des deux formes étendues : forme #1 (bleu continu) et forme #2 (rouge pointillé) 148
5.42 Evolution des erreurs relatives de mesure et de modèle avec γ : forme #1 (à gauche) et forme #2 (à droite) 148
5.43 Evolution du MAC entre les formes étendues et la mesure avec γ : forme #1 (à gauche) et forme #2 (à droite) 149

5.44 Evolution de l'erreur relative globale avec γ : forme #1 (à gauche) et forme #2 (à droite) 149
5.45 Carte d'erreur de modèle après expansion de la forme #1 pour $\gamma = 1e1$ (en haut), $\gamma = 1e4$ (au milieu) et $\gamma = 1e10$ (en bas). Les figures de droites sont un zoom sur le levier de frein-à-main et le segment. 150
5.46 Carte d'erreur de modèle après expansion de la forme #2 pour $\gamma = 1e1$ (en haut), $\gamma = 3e4$ (au milieu) et $\gamma = 1e10$ (en bas). Les figures de droites sont un zoom sur le levier de frein-à-main et le segment. 151
5.47 Erreur de modèle liée à l'enrichissement statique : forme #1 (en haut) et forme #2 (en bas) 152
5.48 Erreur de modèle liée aux formes modales : forme #1 (en haut) et forme #2 (en bas) 153

A.1 Visualisation d'une tâche de speckle laser. 161
A.2 Mesure temporelle d'un crissement avec présence de Dropouts (à gauche) et après suppression des pics d'amplitude (à droite) 162
A.3 Impact dans le domaine fréquentiel de la présence de dropouts (courbe rouge) et après nettoyage (courbe bleue) 162

Liste des tableaux

2.1 Paramètres modaux 20
2.2 Paramètres modaux pour simuler la mesure 27
2.3 Table de qualité globale de l'identification 46

METHODES DE CORRELATION CALCUL/ESSAI POUR L'ANALYSE DU CRISSEMENT

RESUME : Le crissement de frein est une nuisance sonore récurrente dans l'automobile qui, bien qu'il n'existe pas de solution robuste lors de la conception, se traduit souvent par des pénalités économiques envers les équipementiers. La simulation numérique et les caractérisations expérimentales sont les deux voies classiques pour analyser les phénomènes crissants. La simulation permet une analyse fine des comportements vibratoires et l'évaluation de l'impact de modifications de conception, mais les modèles sont imparfaits et leur domaine de validité doit être établi. La mesure garantit que tous les paramètres sont pris en compte, mais elle est souvent spatialement pauvre et peu adaptée à la prédiction de modifications. Dans ce contexte, les objectifs de la thèse sont de faire un bilan des méthodes d'exploitation des essais, de fournir des outils permettant une interaction facilitée entre les équipes d'essai et de simulation et de mettre en œuvre les développements dans une application métier.
Après un rappel sur les hypothèses et les méthodes pour l'identification modale, une analyse critique des résultats d'identification aboutit à la caractérisation des biais et à l'introduction de critères détaillés permettant d'évaluer la qualité du résultat. La corrélation calcul/essai permet de qualifier les modèles et des outils sont intégrés pour faciliter sa mise en œuvre. Plusieurs critères sont définis pour mettre en évidence les sources de mauvaise corrélation venant de la mesure d'une part et du modèle d'autre part. Les sources de mauvaise corrélation sont également identifiées avec l'algorithme d'expansion MDRE, dont les limitations sont comparées à celles des expansions statiques et dynamiques.
Le recalage des modèles est ensuite traité par une procédure systématique imbriquant les étapes de recalage de la géométrie, des propriétés matériau et des contacts entre composants. Une paramétrisation du contact est proposée avec une réduction multi-modèle permettant des temps de calculs compatibles avec le temps industriel. Elle permet également des études de sensibilités avec l'introduction de la notion de modes de composant dans un assemblage.
Une analyse détaillée d'une campagne de mesure sur un système de frein en conditions crissantes est enfin réalisée. Un parallèle entre les évolutions du cycle limite et le degré de couplage des modes complexes est proposé. Dans le domaine temps-fréquence, la variabilité, la répétabilité, la reproductibilité et la possibilité d'agréger des mesures séquentielles sont évaluées. Le résultat obtenu est finalement étendu sur le modèle éléments finis, ce qui permet des interprétations utiles.

Mots clés : crissement, frein, modèle éléments finis, analyse modale expérimentale, qualité d'identification, corrélation calcul/essai, Modal Assurance Criterion, localisation d'erreur, expansion, Minimum Dynamic Residual Expansion, recalage de modèle, modèle paramétré, réduction de modèle, jonctions, contacts, déformées opérationnelles, cycle limite.

CALCULATION/TEST METHODS FOR THE ANALYSIS OF SQUEAL

ABSTRACT : Brake squeal is a nuisance commonly encountered in the car industry which often results in financial penalties towards brake manufacturers, even if no robust solution exists for the conception. Numerical simulation and experimental characterizations are the classical two-track approaches to analyze squeal phenomena. Numerical simulation allows a fine analysis of vibration behaviors and the evaluation of conception modification impacts, but models are not perfect and their validity domain must be defined. Measurement guarantees that every parameter is taken into account, but it is often spatially poor and not really suited for modification prediction. In this context, the thesis objectives are to make an overview of test operating methods, to provide tools allowing an easier interaction between both test and simulation teams and to enforce the developments in a business application.
After a review of the hypotheses and methods for modal identification, a critical analysis of the identification results leads to the characterization of biases and the introduction of detailed criteria to evaluate the quality of the result. Calculation/test correlation allows to qualify the models and tools are integrated to facilitate its implementation. Several criteria are defined to highlight the sources of bad correlation coming from the measure on the one hand and the model on the other hand. Sources of poor correlation are also identified with the MDRE expansion algorithm, whose limitations are compared with those of static and dynamic expansions.
Model updating is then processed by a systematic procedure imbricating the steps of updating of geometry, material properties and contacts between components. A contact parametrization is proposed with a multi-model reduction allowing calculation times compatible with industrial time. It also allows sensitivity studies with the introduction of the notion of component modes in an assembly.
Finally, a detailed analysis of a measurement campaign on a braking system under squeal conditions is carried out. A parallel between the changes of the limit cycle and the degree of coupling of the complex modes is proposed. In the time-frequency domain, variability, repeatability, reproducibility and the ability to aggregate sequential measurements are evaluated. The result is finally extended on the finite element model, which allows useful interpretations.

Keywords : squeal, brake, Finite Element Model, Experimental Modal Analysis, identification quality, calculation/test correlation, Modal Assurance Criterion, error localization, expansion, Minimum Dynamic Residual Expansion, model updating, parametrized model, model reduction, junctions, contacts, Operational Deflection Shapes, limit cycle.

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

ParisTech
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
PARIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY