HAL
open science

Modélisation numérique du contact roue-rail pour l'étude des paramètres influençant les coefficients de Kalker : Application à la dynamique ferroviaire

Moncef Toumi

To cite this version:

Moncef Toumi. Modélisation numérique du contact roue-rail pour l'étude des paramètres influençant les coefficients de Kalker : Application à la dynamique ferroviaire. Matériaux. Université Paris-Est, 2016. Français. NNT : 2016PESC1158 . tel-01556205

HAL Id: tel-01556205

https://pastel.hal.science/tel-01556205

Submitted on 4 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris-Est

Spécialité : Mécanique

par

Moncef TOUMI

Ecole Doctorale : SCIENCES, INGENIERIE ET ENVIRONNEMENT

Modélisation numérique du contact roue-rail pour l'étude des paramètres influençant les coefficients de Kalker – Application à la dynamique ferroviaire

Thèse soutenue le 13 Décembre 2016 à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées devant le jury composé de :

Président :	Jean-Jacques SINOU	Ecole Centrale de Lyon
Rapporteurs :	Georges CAILLETAUD Philippe DUFRENOY	Ecole des Mines de Paris Université de Lille 1 – Polytech'Lille
Examinateurs :	Mohamed-Ali HAMDI Adnane BOUKAMEL	Université de Technologie de Compiègne IRT RAILENIUM
Directeur de thèse :	Honoré YIN	Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Encadrant :	Hugues CHOLLET	IFSTTAR

A la mémoire de mon père Béchir Toumi et de mon beau-frère Imed Ghanmi

Remerciement

Cette thèse s'est déroulée au sein du laboratoire GRETTIA de l'IFSTTAR et du laboratoire Navier de l'Ecole des Ponts et Chaussées. Faute de soutien et de la collaboration de certaines personnes, cette thèse n'aurait pas pu aboutir. Ainsi, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'avancement de mon travail.

Je voudrais d'abord exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à mon directeur de thèse Honoré Yin et mon encadrant Hugues Chollet. Merci pour tout le temps que vous m'avez accordé durant ces trois années et d'avoir su partager votre dynamisme et excellence scientifique avec une grande attention.

Je suis vivement reconnaissant au Professeur Jean-Jacques SINOU qui m'a fait l'honneur d'être président du Jury. Mes vifs remerciements sont aussi adressés aux Professeurs Georges CAILLETAUD et Philippe DUFRENOY pour avoir accepté de rapporter mon travail. Je remercie également le professeur Mohamed-Ali HAMDI et le directeur scientifique Adnane BOUKAMEL qui ont accepté d'examiner ce travail et ont bien voulu participer au Jury de thèse.

Je remercie RAILENIUM d'avoir financé cette thèse dans le cadre du projet CERVIFER. En particulier, un grand merci à Samir ASSAF et Adnane BOUKAMEL pour leurs remarques très pertinentes et leurs conseils durant les réunions de suivi de thèse.

Je tiens à remercier l'ensemble du personnel du laboratoire et plus particulièrement Michel pour son aide à la maîtrise du logiciel VOCO, Annie et Joëlle pour leur disponibilité et leur gentillesse ainsi qu'à Mustapha pour ses réponses à toutes mes questions administratives et en informatique.

Pour les petits moments de détente et tout le soutien qu'ils ont su m'apporter, je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues et amis, Matthieu, Anne-Sarah, Dihya, Florian, Khalil, Latifa, Florence, Nassim, Farida, Hani, Johanna, Amine, Ghaith, Zied…

Enfin, je remercie toute ma famille et ma belle-famille en Tunisie pour leur soutien inconditionnel et leurs encouragements. Que ma mère trouve dans mon travail le fruit de son éducation, de son dévouement et de ses sacrifices. Je remercie sincèrement ma merveilleuse femme Nouha pour sa patience et son amour. Tu as toujours été à mes côtés et ton soutien a été d'une grande aide pour moi.

Résumé

Le calcul des efforts normaux et tangents est important pour la modélisation dynamique du système véhicule-voie en ferroviaire. Pour déterminer les forces tangentielles au contact roue-rail, les coefficients de Kalker sont utilisés dans la plupart des codes de dynamique ferroviaire, pour les différents modèles de contact. Ces coefficients ont été mesurés sur banc à plusieurs reprises dans les années 80. Une synthèse de ces travaux, réalisée par Hobbs, montre que certaines de ces mesures présentent une baisse pouvant atteindre 50% par rapport à la théorie de Kalker. L'objet de cette thèse est d'identifier d'abord les véritables causes de la dispersion constatée entre les différentes mesures, généralement attribuée à la contamination de la surface, puis de développer un modèle numérique capable d'en tenir compte.

La démarche numérique proposée est sur deux volets. Dans le premier volet, une méthode itérative directe par éléments de frontière basée sur les intégrales de surface de Boussinesq-Cerruti est réécrite pour l'étude du contact normal et glissant entre deux corps élastiques, puis étendue pour la résolution du problème de contact roulant. Appliquée avec succès au contact roue-rail non-Hertzien, cette méthode est un outil prometteur pour l'étude des paramètres influençant les coefficients de Kalker qui allie à la fois la précision et la rapidité.

Dans le deuxième volet, le problème du contact roue-rail élastique est résolu à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant les schémas d'intégration temporelle explicite et implicite. La solution élastique est comparée avec le logiciel de référence CONTACT. Le modèle par éléments finis 3D développé a permis de prendre en compte d'une part le comportement élasto-plastique des corps en contact et d'autre part l'existence d'une couche de troisième corps sur l'interface du contact roue-rail. Ainsi, en fin de cette étude, une correction aux coefficients de Kalker est estimée à partir d'un modèle qui prend mieux en compte la réalité physique du contact roue-rail.

Afin d'évaluer l'influence de cette correction sur la vitesse critique du véhicule ferroviaire, une étude de stabilité est réalisée avec le code de dynamique ferroviaire VOCO dans lequel des facteurs de réduction des coefficients de Kalker ont été appliqués.

Mots clés :

Contact roue-rail roulant, coefficients de Kalker, modélisation numérique, courbes de saturation, plasticité, troisième corps, vitesse critique.

Abstract

The calculation of normal and tangential forces is important for the dynamic modeling of the railway vehicle-track interaction. To determine the tangential forces at the wheel-rail contact level, the Kalker's coefficients of stiffness are used in most of computer codes for different contact models. These coefficients were measured on bench several times in the 80s. A survey of these works, conducted by Hobbs, shows a decrease of up to 50 % in value compared to Kalker's theory. The aim of this thesis is first to identify the real causes of the dispersion observed between the various measurements, usually attributed to the surface contamination, then to develop a model taking into account the plastic deformation and the presence of a third body layer.

The numerical modeling of the wheel-rail contact is presented in two parts. In the first part, a direct boundary element method based on Boussinesq-Cerruti solution is developed to study the normal and sliding contact between two elastic bodies, and then extended to the resolution of rolling contact problem. Successfully applied to the wheel-rail contact for non-Hertzian situation, this method is a promising tool for studying the parameters influencing Kalker's coefficients which combines both precision and speed.

In the second part, a finite element model for rolling contact between wheel and rail is developed to study the normal and the tangential contact problems using the explicit and the implicit integration schemes. The elastic solution is compared with the solution of the CONTACT software. The three-dimensional finite element model takes into account the elastoplastic behavior of the bodies in contact as well as the existence of a third body layer at the interface between the wheel and the rail. Finally, a correction of Kalker's coefficients is estimated from the results of the numerical simulations.

To study the impact of this correction on the critical speed of the vehicle, a stability analysis is performed using the multibody dynamics software VOCO in which the reduced factors of Kalker's coefficients are considered.

Keywords :

Wheel-rail rolling contact, Kalker's coefficients, numerical modeling, creep curves, plasticity, third body, critical speed.

Table des matières

Résumé v
Abstract vii
Table des figures xi
Liste des tableaux xv
Notations xvii
Introduction générale 1
Chapitre 1 3
Etat de l'art : Contact roue-rail roulant 3
1.1. Problème du contact normal 4
1.1.1. Courbures et géométrie des corps en contact 4
1.1.2. Théorie de Hertz 5
1.1.3. Méthode semi-Hertzienne 8
1.2. Le problème du contact roulant 9
1.2.1. Pseudoglissement et vitesse de glissement 9
1.2.2. Théories du contact roulant 12
1.3. Courbe de saturation 21
1.3.1. Modèles décrivant la relation force tangentielle/pseudoglissement (loi de saturation) 22
1.3.2. Paramètres influençant les courbes de saturation 25
Conclusion 29
Chapitre 2 31
Modélisation du contact roue-rail roulant avec la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM) 31
Introduction 32
2.1. Méthode des éléments de frontière 32
2.1.1. Approximation de l'espace semi-infini 32
2.1.2. Problème de Boussinesq-Cerruti 33
2.2. Méthode d'inversion de matrice (MIM) 37
2.2.1. Discrétisation du problème 37
2.2.2. Problème du contact normal 38
2.2.3. Problème du contact glissant 45
2.2.4. Problème du contact roulant 51
2.3. Extension au contact non-Hertzien (contact roue-rail) 57
2.4. Comparaison entre MIM et CONTACT 62
Conclusion 63

Chapitre 3 65
Modélisation par éléments finis du contact roue-rail roulant 65
Introduction 66
3.1. Schémas d'intégration temporelle 66
3.1.1. Schéma d'intégration explicite 67
3.1.2. Schéma d'intégration implicite 68
3.1.3. Choix de l'approche de résolution 70
3.2. Contact roue-rail élastique 70
3.2.1. Gestion du contact en éléments finis (Abaqus) 70
3.2.2. Présentation du modèle numérique 71
3.2.3. Protocole de simulation 74
3.2.4. Validation du modèle élastique 75
3.2.5. Solution en élasticité 86
3.3. Contact roue-rail élasto-plastique 104
3.3.1. Contraintes 105
3.3.2. Contact normal 107
3.3.3. Contact tangent 108
3.3.4. Courbes de saturation 110
3.3.6. Influence de la charge normale 114
3.4. Couche de troisième corps en interface 115
Conclusion 121
Chapitre 4 125
Application à la dynamique du véhicule en ferroviaire avec le code VOCO 125
Introduction 126
4.1. Généralités sur la dynamique ferroviaire 126
4.1.1. Inscription en courbe 127
4.1.2. Déraillement 129
4.2. Vitesse critique 132
4.2.1. Méthode analytique 132
4.2.2. Méthode de « *Ramping* » 134
4.2.3. Diagramme de bifurcation 136
4.2.4. Effet des coefficients réducteurs Kij 137
Conclusions et perspectives 141
Conclusion générale et perspectives 143
Annexes 147
Bibliographie 153

Table des figures

Figure 1. 1 : (a) Point de contact et coordonnés du système (b) Géométrie de contact 4
Figure 1. 2 : (a) Rayons de courbure des corps en contact (b) Aire de contact et distribution de la pression selon la solution de Hertz 5
Figure 1. 3 : Les courbures dans le cas du contact roue-rail [3] 7
Figure 1. 4 : Les paramètres du contact semi-Hertzien 8
Figure 1. 5 : Degrés de liberté d'un essieu 10
Figure 1. 6 : Composantes du pseudoglissement de spin 11
Figure 1. 7 : Contrainte de cisaillement selon la théorie de Carter 13
Figure 1. 8 : Zones d'adhérence/glissement selon la théorie de Vermeulen et Johnson 14
Figure 1. 9 : Comparaison entre le modèle de Vermeulen et Johnson et les essais expérimentaux [10] 15
Figure 1. 10 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale avec la théorie de Carter et la théorie linéaire de Kalker [14] 16
Figure 1. 11 : Discrétisation de la surface de contact avec FASTSIM 18
Figure 1. 12 : Courbe de saturation et évolution de la répartition adhérence/glissement 22
Figure 1. 13 : Loi de saturation linéaire avec la théorie linéaire et comparaison avec CONTACT pour un pseudoglissement longitudinal pur [30] 23
Figure 1. 14 : Loi de saturation cubique de SHE avec la théorie linéaire et comparaison avec CONTACT pour un pseudoglissement longitudinal pur [30] 24
Figure 1. 15 : Comparaison des différents essais expérimentaux collectés par Hobbs avec la théorie linéaire de Kalker [34] 26
Figure 1. 16 : Mesures en ligne du coefficient de Kalker dans la direction longitudinale sous des conditions sèches et humides [36] 27
Figure 1. 17 : Mesures en ligne du coefficient de Kalker dans la direction latérale sous des conditions sèches et humides [36] 27
Figure 1. 18 : Effet de la pression maximale de Hertz sur la courbe de saturation 29
Figure 2. 1 : Problème de Boussinesq-Cerruti 33
Figure 2. 2 : Discrétisation de la surface du contact 38
Figure 2. 3 : Contact normal pour deux géométries différentes (a) contact sphère/sphère (b) contact cône rigide/plan 42
Figure 2. 4 : Distribution de la pression en 3D par MIM (a) Contact sphère/sphère (b) Contact cône/plan 43
Figure 2. 5 : Distribution de la pression normalisée suivant l'axe $y = 0$, $\delta = 0.4$ mm 44
Figure 2. 6 : Loi de contact normal pour deux géométries de contact différentes 45
Figure 2. 7 : Contact glissant entre deux sphères 49
Figure 2. 8 : Pression et effort de cisaillement normalisé par MIM et avec la solution analytique dans le cas d'un contact entre deux sphères, $\mu = 0.2$ 50
Figure 2. 9 : Loi de contact glissant entre deux sphères, $\mu = 0.2$ 50
Figure 2. 10 : Contact roulant entre deux sphères 54
Figure 2. 11 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement τt en contact roulant entre deux sphères, avec MIM (à gauche) et CONTACT (à droite). En haut : pseudoglissement longitudinal pur, au milieu : pseudoglissement latéral pur et en bas : pseudoglissement de spin pur. 55

Figure 2. 12 : Contrainte de cisaillement normalisée $\tau t/\mu pn$ en contact roulant entre deux sphères, avec MIM (à gauche) et CONTACT (à droite). En haut : pseudoglissement longitudinal pur, au milieu : pseudoglissement latéral pur et en bas : pseudoglissement de spin pur. 56
Figure 2. 13 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale en contact roulant entre deux sphères. 57
Figure 2. 14 : Contact en position centrée ($ty = 0$) entre une roue gauche S1002 et un rail gauche UIC60 incliné au 40ème. 58
Figure 2. 15 : Séparation entre les profils de la roue et du rail dans le plan ($Oy'z'$) et interpolation entre les coordonnées yi. 59
Figure 2. 16 : Pression de contact pour le couple S1002/UIC60 en position centrée, (a) représentation 2D, (b) représentation 3D. 60
Figure 2. 17 : Vecteurs et Contrainte de cisaillement au contact pour le couple S1002/ UIC60 en position centrée. Avec ξx=-0.161 ‰, ξy=0 ‰ et ϕ=5.227e-05. μ=0.36. 61
Figure 2. 18 : Contrainte de cisaillement normalisée $\tau t/\mu pn$ pour le couple S1002/ UIC60 en position centrée. Avec ξx=-0.161 ‰, ξy=0 ‰ et ϕ=5.2274e-05. μ=0.36. 61
Figure 3. 1 : Maillage du modèle EF et raffinement sur la bande de roulement 72
Figure 3. 2 : Positionnement de la roue par rapport au rail 73
Figure 3. 3 : Pression de contact avec la procédure implicite (a) QS (b) DM avec Δte par défaut 77
Figure 3. 4 : Contraintes de Von Mises en surface (en haut) et en coupe suivant A-A, B-B et C-C (en bas) avec différents schémas implicites, (a)-(b) implicite QS (c)-(d) implicite DM avec amortissement de Rayleigh (e)-(f) implicite DM sans amortissement de Rayleigh, déformation amplifiée par un facteur 100 sur (f). 78
Figure 3. 5 : Influence de l'amortissement de Rayleigh sur la pression de contact suivant y=0..... 79
Figure 3. 6 : Représentation 3D de la contrainte de cisaillement τt nodale (a) implicite QS (b) implicite DM avec un amortissement de Rayleigh (c) vue de coupe de la force suivant y=0..... 80
Figure 3. 7 : Influence de la taille du pas de temps Δt sur la contrainte de cisaillement (à droite) et sur la contrainte de cisaillement normalisée (à gauche) (a)-(d) $\Delta t1$=3.7e-04 s, (b)-(e) $\Delta t3$=1e-04 s, (c)-(f) $\Delta t4$=2e-05 s. 81
Figure 3. 8 : Influence de la taille du pas de temps Δt sur la contrainte de cisaillement τt en vue de coupe suivant y=0. 82
Figure 3. 9 : Influence du pas de temps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale 84
Figure 3. 10 : Evolution temporelle de la force longitudinale FxG et de la force latérale FyG en situation de freinage avec la méthode des éléments finis 85
Figure 3. 11 : Distribution de la pression de contact pn avec les différentes méthodes numériques (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM 87
Figure 3. 12 : Pression de contact en vue de coupe suivant y=0 87
Figure 3. 13 : Contraintes de Von Mises en coupe suivant le plan (XOZ) à gauche contact normal, à droite contact roulant, (a)-(d) EF dynamique explicite, (b)-(e) EF implicite QS, (c)-(f) EF implicite DM 90
Figure 3. 14 : Contraintes de Von Mises en surface avec la méthode implicite DM 91
Figure 3. 15 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement au contact pour ξx=-0.7‰ (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM 92
Figure 3. 16 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement au contact pour ξx=-1.5 ‰ (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite DM..... 93
Figure 3. 17 : Contrainte de cisaillement au contact en vue de coupe suivant y=0 avec le modèle cylindre-UIC60..... 94

Figure 3. 18 : Force tangentielle normalisée par μpn pour ξx=-0.7‰ (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM 95
Figure 3. 19 : Points et aires de contact en fonction de la translation arbitraire ty..... 96
Figure 3. 20 : Pression et surface de contact en fonction de la translation ty avec la méthode des éléments finis..... 96
Figure 3. 21 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement en surface avec la méthode des éléments finis (a) en freinage avec ξx=-0.7‰ (b) en accélération avec ξx=1.3‰ 97
Figure 3. 22 : Contrainte de cisaillement normalisée par μpn avec la méthode des éléments finis (a) en freinage avec ξx=-0.7‰ (b) en accélération avec ξx=1.3‰..... 97
Figure 3. 23 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement en surface avec la méthode des éléments finis (a) μ=0.2 (b) μ=0.3 (c) μ=0.4..... 98
Figure 3. 24 : Contrainte de cisaillement normalisée par μpn avec la méthode des éléments finis (a) μ=0.2 (b) μ=0.3 (c) μ=0.4 99
Figure 3. 25 : Rayon de roulement : (a) contact entre corps rigides (b) contact entre corps élastiques 100
Figure 3. 26 : Courbes de saturation dans la direction longitudinale avec différentes méthodes numériques 101
Figure 3. 27 : Courbes de saturation dans la direction latérale..... 102
Figure 3. 28 : Dérivée Ax de la courbe de saturation dans la direction longitudinale en fonction du pseudoglissement ξx 103
Figure 3. 29 : Dérivée Ay de la courbe de saturation dans la direction latérale en fonction de l'angle de dérive α 104
Figure 3. 30 : Contraintes de Von Mises avec l'acier R900A : (a) en surface (b) suivant la coupe A-A (d) suivant la coupe B-B. Contraintes de cisaillement : (c) suivant la coupe A-A (e) suivant la coupe B-B. 106
Figure 3. 31 : Distribution de la pression de contact en élasto-plasticité et comparaison avec CONTACT. (a) CONTACT (b) EF explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM..... 107
Figure 3. 32 : Pression de contact en vue de coupe suivant y=0 par les méthodes par éléments finis en élasto-plasticité et comparaison avec CONTACT. 108
Figure 3. 33 : Vecteurs et contour de la contrainte de cisaillement surfacique par la méthode des éléments finis, (a) solution élastique (b) solution élasto-plastique..... 109
Figure 3. 34 : Contrainte de cisaillement surfacique normalisée avec la méthode des éléments finis, ξx=-0.7 ‰ (a) solution élastique (b) solution élasto-plastique 109
Figure 3. 35 : Courbes de saturation dans la direction longitudinale en élasticité et en élasto-plasticité 110
Figure 3. 36 : Courbes de saturation dans la direction latérale en élasticité et en élasto-plasticité..... 111
Figure 3. 37 : Dérivée de la courbe de saturation dans la direction longitudinale en fonction du pseudoglissement ξx 112
Figure 3. 38 : Dérivée de la courbe de saturation dans la direction latérale en fonction de l'angle de dérive α 112
Figure 3. 39 : Contraintes de Von Mises avec l'acier 350HT 113
Figure 3. 40 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale avec les deux nuances d'acier R900A et 350HT 114
Figure 3. 41 : Influence de la charge normale sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale 115
Figure 3. 42 : Couche de troisième corps identifiée sur la surface d'un rail [90] 116
Figure 3. 43 : Modèle rhéologique élasto-plastique du troisième corps proposé par Hou [93]..... 117

Figure 3. 44 : Modèle de contact roue-rail avec couche de troisième corps sur l'interface du rail..... 118
Figure 3. 45 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale avec la méthode des éléments finis en présence d'une couche de troisième corps élastique entre la roue et le rail d'épaisseur h=125 μm et de module de cisaillement G=820 MPa..... 119
Figure 3. 46 : Influence du module de cisaillement G de la couche du troisième corps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale, h=125 μm..... 120
Figure 3. 47 : Influence de l'épaisseur h de la couche du troisième corps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale, G=820 MPa..... 120
Figure 3. 48 : Influence de la limite d'élasticité σc de la couche de troisième corps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale, h=125 μm et G=820 MPa..... 121
Figure 4. 1 : Bogie en prise de courbe..... 127
Figure 4. 2 : Présentation d'un véhicule en prise de courbe..... 128
Figure 4. 3 : Equilibre des forces sur la roue d'attaque déraillante..... 130
Figure 4. 4 : Effet de la variation des coefficients de Kalker sur le rapport Y/Q pour μ=0.5 131
Figure 4. 5 : Représentation des forces au contact d'un essieu [105] 133
Figure 4. 6 : Représentation du véhicule du benchmark de Manchester..... 135
Figure 4. 7 : Vitesse critique par la méthode du *Ramping*; en haut: amplitude du déplacement latéral de l'essieu 1, en bas : rampe décroissante de la vitesse 135
Figure 4. 8 : La vitesse critique à partir du diagramme de bifurcation..... 137
Figure 4. 9 : Effet des coefficients de réduction Kij sur la vitesse critique Vc 139

Liste des tableaux

Tableau 2. 1 : Comparaison du temps de calcul entre la MIM et CONTACT 62
Tableau 3. 1 : Paramètres du modèle..... 73
Tableau 3. 2 : Temps de calcul pour différentes tailles de maillage 75
Tableau 3. 3 : Erreur relative entre les différents maillages et le maillage le plus fin d5..... 76
Tableau 3. 4 : Erreur relative entre les différents maillages et le maillage d4 pour l'étude des courbes de saturation 76
Tableau 3. 5 : Temps de calcul pour différents pas de temps implicites 83
Tableau 3. 6 : Erreur relative entre différents pas de temps ($\Delta t1, \Delta t2, \Delta t3$) et le pas le plus petit $\Delta t4$ 83
Tableau 3. 7 : Solution du problème normal 88
Tableau 3. 8 : Solution du problème normal en élasticité et en élasto-plasticité avec la procédure par éléments finis implicite DM 108
Tableau 3. 9 : Influence de la charge CN sur la pression de contact maximale Pmax, le déplacement normal élasto-plastique en surface $uzmax$ et le déplacement résiduel $uzrésid$ 115
Tableau 4. 1 : Vitesse critique pour différents facteurs de réduction 139

Notations

e_z	Distance déformée
u_x	Déplacement en surface suivant x
u_y	Déplacement en surface suivant y
u_z	Déplacement normal en surface
p_n	Pression de contact
A, B	Courbures relatives
a, b	Semi-axes
δ	Rapprochement
e_z	Distance déformée
ξ_x	Pseudoglissement longitudinal
ξ_y	Pseudoglissement latéral
ϕ	Pseudoglissement de spin
V_x	Vitesse de roulement
ω_r	Vitesse circonférentielle
w_{gx}, w_{gy}	Vitesses de glissement
α	Angle de dérive
τ_x	Contrainte de cisaillement surfacique suivant x
τ_y	Contrainte de cisaillement surfacique suivant y
p_n	Pression de contact
μ	Coefficient de frottement
F_x	Force longitudinale au contact
F_y	Force transversale au contact
F_n	Force normale au contact
C_{ij}	Coefficients de Kalker
T^{kl}	Fonction d'influence
ν	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement
E	Module d'Young
E^*	Module d'Young équivalent
K	Facteur de quasi-identité
A	Matrice d'influence
R_m	Rayon de courbure effective
Apt	Angle au plan tangent
Δt_{cr}	Limite de stabilité du schéma d'intégration explicite
d_0	Diamètre de la roue
R_0	Rayon de roulement
σ_e	Limite d'élasticité
ρ	Densité

C_N	Charge par roue
σ_v	Contrainte de Von Mises
α_R, β_R	Coefficients de Rayleigh
h	Epaisseur de la couche du troisième corps
σ_c	Limite d'élasticité de la couche de troisième corps
D	Dévers théorique
m	Masse de l'essieu
I_{zz}	Moment d'inertie
K_x	Raideur de suspension primaire dans la direction longitudinale
K_y	Raideur de suspension primaire dans la direction transversale
γ	Conicité de la roue
e	Demi-écartement entre les rails
V_c	Vitesse critique
K_{ij}	Coefficients réducteurs

Introduction générale

Après les secteurs de l'aéronautique et de l'automobile, la certification virtuelle est maintenant autorisée pour l'homologation de certains véhicules en ferroviaire. Ceci autorise l'industrie ferroviaire à remplacer certains essais physiques par des simulations numériques avec les codes multi-corps de dynamique ferroviaire, et donc de réduire le coût et durée de développement des composants ferroviaires. Dans ce contexte, l'institut RAILENIUM a identifié l'importance de maîtriser la certification virtuelle dans son groupe WP7 qui vise à faire du prototypage et de la pré-certification virtuelle par calcul.

L'étude se place dans le cadre du projet coopératif CERVIFER (CERtification VIrtuelle en FERroviaires) dont l'objectif principal est de réduire à l'horizon 2020 de 50% la durée et le coût de développement et de certification des véhicules et infrastructures ferroviaires en remplaçant au maximum les essais par des calculs virtuels.

Le contact roue-rail est au cœur de toutes les recherches liées à l'interaction véhicule-voie en ferroviaire. Les forces au contact agissant sur une roue dont le mouvement est connu régissent l'équilibre général de l'essieu et le comportement dynamique des véhicules ferroviaires. La zone de contact étant soumise à de fortes concentrations de contraintes, elle est le champ de plusieurs phénomènes d'endommagement qui peuvent causer de graves conséquences sur les corps en contact. Ainsi, une bonne compréhension du contact roue-rail roulant et une bonne estimation des forces au contact est la clé pour la réalisation des simulations réalistes de la dynamique du véhicule et pour l'analyse des différents mécanismes d'endommagement.

Dans les codes multi-corps de dynamique ferroviaire, il est important de disposer d'un modèle de contact simple qui permet de déterminer le plus rapidement possible les forces au contact. Pour cela, la solution analytique de Hertz et la théorie linéaire de Kalker avec une loi de saturation sont souvent utilisés par ces codes pour calculer respectivement la force normale et les forces tangentielles. Bien que les hypothèses simplificatrices de ces théories (surfaces lisses, élasticité linéaire…) rendent les simulations dynamiques plus rapides, elles ne permettent cependant pas de bien décrire les détails de la réalité du contact roue-rail. Ceci a été confirmé par l'écart observé entre les mesures expérimentales des courbes de saturation [1] et la théorie linéaire de Kalker. Deux effets ont principalement été observés sur ces courbes; une baisse de la pente initiale pour les faibles pseudoglissements, donc des coefficients de Kalker, et une baisse des forces tangentielles pour des pseudoglissements plus élevés, donc du coefficient de frottement. Le premier effet est principalement attribué à l'existence naturelle ou artificielle d'une couche de troisième corps séparant les surfaces de la roue et du rail. Le second est attribué à la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse de glissement non décrite par la loi de Coulomb.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux paramètres conduisant à la baisse des coefficients de Kalker et à l'effet de cette baisse sur la dynamique du véhicule. L'objectif principal est de

développer un modèle numérique de contact roue-rail pour mieux décrire le contact roue-rail en prenant en compte la plasticité et la présence d'une couche de troisième corps.

Le mémoire de thèse est proposé en quatre chapitres décrits comme suit.

Le premier chapitre a pour objectif de positionner le cadre de ce travail de thèse pour identifier les paramètres responsables de la baisse des coefficients de Kalker. Un aperçu général des connaissances nécessaires pour l'étude du contact roue-rail roulant est donné puis quelques théories de contact roulant sont présentées et leurs limites sont discutées. L'état de l'art sur les mesures des coefficients de Kalker sous différentes conditions opératoires a permis d'identifier les paramètres responsables de leurs réductions. Cette indentification servira à établir un cahier des charges du modèle numérique à développer dans la suite de l'étude.

Dans le deuxième chapitre, nous avons développé une méthode itérative par éléments de frontière basée sur une approche directe par inversion de matrice (MIM) pour l'étude du contact normal, glissant et roulant. Cette méthode est ensuite appliquée avec succès au contact roue-rail roulant non-Hertzien. La comparaison de la MIM avec les solutions analytiques Hertziennes et les résultats du logiciel CONTACT[1] de Kalker a montré un excellent accord, ce qui fait de cette méthode un parfait outil d'investigation de futurs sujets qui permettront de mieux décrire la réalité du contact roue-rail comme la plasticité ou l'existence d'une couche de troisième corps.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons un modèle de contact roue-rail roulant basé sur la méthode des éléments finis. Une fois ce modèle validé en élasticité par comparaison avec le logiciel CONTACT, le comportement élasto-plastique est considéré. La prise en compte de la plasticité des corps en contact permet d'une part d'avoir une meilleure prédiction pour l'étude des différents types d'endommagements (usure, RCF…) et d'autre part de voir l'effet d'un tel comportement sur les courbes de saturation. L'étude de ce dernier aspect a montré que la plasticité réduit la pente initiale des courbes de saturation et par conséquent les coefficients de Kalker.

La baisse des coefficients de Kalker étant souvent attribuée à l'existence naturelle ou artificielle de couches de contaminants entre la roue et le rail, le modèle par éléments finis est étendu pour prendre en compte la présence d'une couche de troisième corps mince entre la roue et le rail dont les comportements élastique puis élasto-plastique sont étudiés. Des facteurs de réduction des coefficients de Kalker sont ensuite évalués à partir des résultats de ce modèle.

Dans le quatrième chapitre, les résultats de notre modèle par éléments finis sont appliqués à la dynamique du véhicule ferroviaire à travers les coefficients de réduction calculés. En particulier, l'effet de la plasticité et de la présence d'une couche de troisième corps sur le risque de déraillement et sur la vitesse critique du véhicule est évalué.

[1] Méthode par éléments de frontière implémentée par Kalker dans le logiciel de ce nom.

Chapitre 1

Etat de l’art : Contact roue-rail roulant

1.1. Problème du contact normal

La résolution du problème du contact normal entre deux corps consiste à déterminer l'aire de contact formée ainsi que la pression dans cette aire. Plusieurs méthodes existent et permettent aujourd'hui une telle résolution comme la méthode par éléments de frontière basée sur la solution de Boussinesq, ou encore la méthode des éléments finis. Malgré l'évolution croissante des algorithmes de résolution qui ne cesse de réduire le coût de calcul, l'implémentation de ces méthodes numériques dans les codes de dynamique ferroviaire n'est toujours pas possible pour répondre aux besoins des ingénieurs, car leur temps de calcul reste très élevé en comparaison avec les méthodes analytiques dérivées de la théorie Hertzienne. Cette section est consacrée à l'étude de la théorie de Hertz [2] ainsi qu'à son extension pour traiter des cas non-Hertziens appelée méthode semi-Hertzienne [3].

1.1.1. Courbures et géométrie des corps en contact

Quelques quantités liées à la géométrie des corps en contact doivent être définies avant de présenter les méthodes de résolution du problème normal. Soit S1 et S2 deux corps qui se touchent en un premier point de contact O de coordonnés (0,0,0) dans le repère cartésien $(O; x, y, z)$, avec l'axe z pointé dans la direction normale au plan tangentiel aux deux surfaces comme indiqué sur la Figure 1. 1(a).

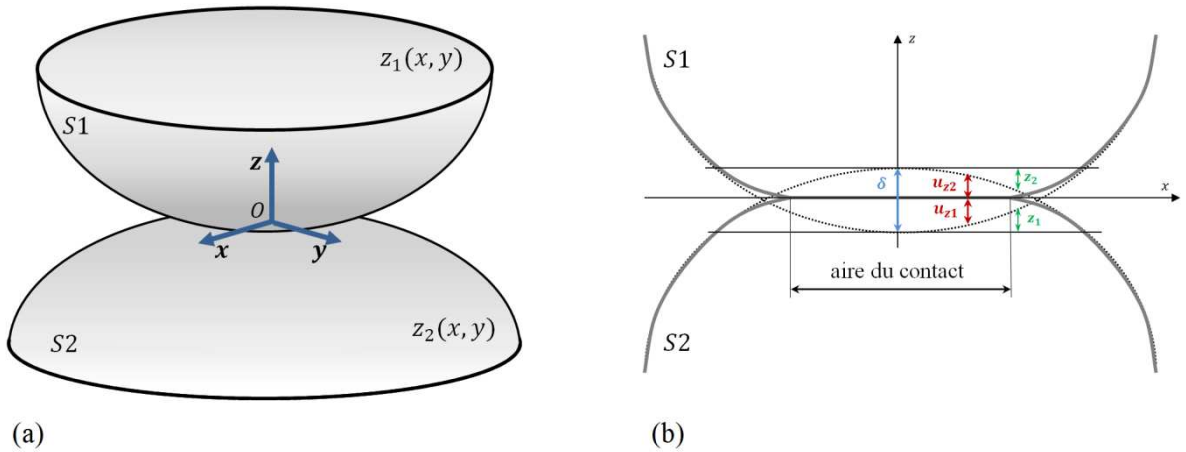


Figure 1. 1 : (a) Point de contact et coordonnés du système (b) Géométrie de contact

Les profils des surfaces de contact des deux corps S1 et S2 sont respectivement notés par $z_1(x,y)$ et $z_2(x,y)$. La pénétration ou le rapprochement subi par les deux corps loin de la zone de contact après l'application d'un chargement normal, noté δ, est représenté sur la Figure 1. 1(b). La distance indéformée ou séparation verticale entre les surfaces des corps S1 et S2 est donnée par :

$$z(x,y) = z_1(x,y) - z_2(x,y) \tag{1}$$

L'addition des déformations normales des deux corps en surface u_{z1} et u_{z2} donne la déformation normale surfacique u_z telle que :

$$u_z(x,y) = u_{z1}(x,y) - u_{z2}(x,y) \tag{2}$$

La distance indéformée e_z est donc donnée en fonction des quantités précédentes par :

$$e_z(x,y) = u_z(x,y) + z(x,y) - \delta \tag{3}$$

En appliquant le principe de complémentarité entre la zone de contact C et la zone extérieure E, le problème du contact normal peut être exprimé en fonction de la distance indéformée e_z et la pression de contact p_n de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\forall\ (x,y) \in C && e_z(x,y) = 0,\ p_n(x,y) > 0 \\ &\forall\ (x,y) \in E && e_z(x,y) > 0,\ p_n(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

1.1.2. Théorie de Hertz

Le problème du contact normal entre deux corps élastiques a été étudié en 1882 par Heinrich Hertz [2]. Sa solution permet de déterminer les dimensions de l'aire de contact ainsi que la distribution de la pression. Cependant, pour que cette théorie soit applicable, certaines hypothèses doivent être considérées :

- Les corps en contact sont élastiques, homogènes et isotropes
- Chaque solide peut être considéré comme un demi-espace élastique. Ceci implique que les dimensions du contact sont petites devant les dimensions et rayons de courbure au voisinage du contact
- Les surfaces sont continus et de seconds degrés. En d'autres termes, les courbures des deux corps sont constantes

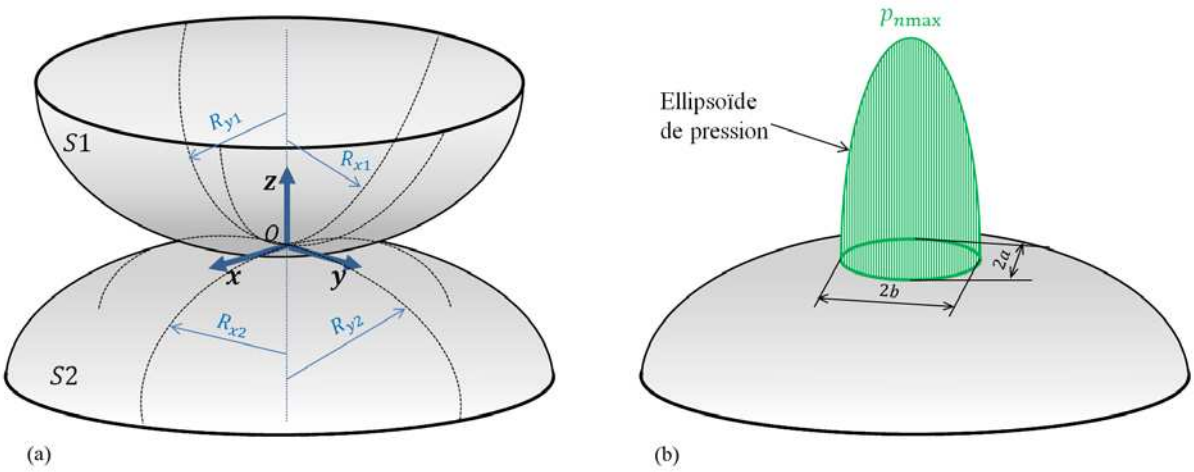


Figure 1. 2 : (a) Rayons de courbure des corps en contact (b) Aire de contact et distribution de la pression selon la solution de Hertz

Dans ce cas, la séparation entre les surfaces des deux corps peut s'écrire comme suit :

$$z(x,y) = Ax^2 + By^2 \tag{5}$$

A et B représentent les courbures relatives respectivement dans la direction longitudinale et transversale et sont données par :

$$A = \frac{1}{2R_{x1}} + \frac{1}{2R_{x2}} \tag{6}$$

$$B = \frac{1}{2R_{y1}} + \frac{1}{2R_{y2}} \tag{7}$$

Avec R_{x1} et R_{x2} les rayons des deux corps suivant x et R_{y1} et R_{y2} les rayons des deux corps suivant y comme indiqués sur la Figure 1. 2(a).

Si les hypothèses de Hertz sont respectées, la surface de contact est une ellipse de semi-axes a et b et la répartition de pression le long de cette surface est définie par un ellipsoïde comme représenté sur la Figure 1. 2(b). Les grandeurs caractéristiques de l'aire de contact, le rapprochement loin de la zone de contact et la pression de contact sont donnés dans le cas où les deux corps sont quasi-identiques par :

$$a = m\left(\frac{3}{2}F_n\frac{1-\nu^2}{E}\frac{1}{A+B}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{8}$$

$$b = n\left(\frac{3}{2}F_n\frac{1-\nu^2}{E}\frac{1}{A+B}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{9}$$

$$\delta = r\left(\left(\frac{3}{2}F_n\frac{1-\nu^2}{E}\right)^2(A+B)\right)^{\frac{1}{3}} \tag{10}$$

$$p_n(x,y) = p_{nmax}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \tag{11}$$

Avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et p_{nmax} la pression de contact maximale est donnée par :

$$p_{nmax} = \frac{3F_n}{2\pi ab} \tag{12}$$

m, n et r sont les paramètres de Hertz tabulés dans l'annexe A.1 en fonction de l'angle θ donné par :

$$\cos\theta = \frac{|A-B|}{A+B} \tag{13}$$

La théorie de Hertz est utilisée dans plusieurs applications dont celle du ferroviaire. Dans le cadre de cette application, les hypothèses de Hertz sont remplies à l'échelle qui intéresse la dynamique de l'essieu. Si le contact se produit sur la table de roulement, la courbure A_2 du rail suivant la direction du roulement x peut être considérée comme nulle et les courbures de la roue et du rail dans les autres directions (voir Figure 1. 3) sont données par :

Roue : $$A_1 = \frac{1}{R_0 cos\gamma} \quad (14)$$

$$B_1 = \frac{1}{R_w} \quad (15)$$

Rail : $$B_2 = \frac{1}{R_r} \quad (16)$$

Avec : R_0 le rayon du roulement, γ la conicité de la roue, R_w et R_r les rayons de courbures respectivement de la roue et du rail suivant la direction y.

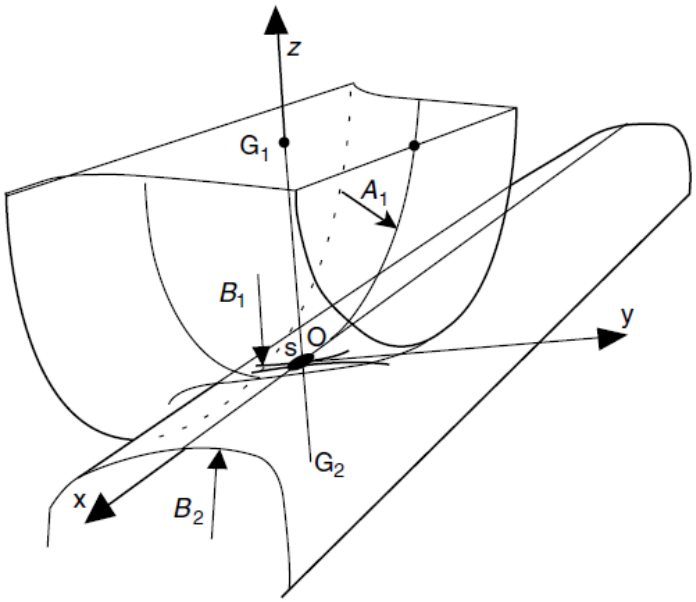


Figure 1. 3 : Les courbures dans le cas du contact roue-rail [4]

Cependant, dû à la charge élevée du train, la roue et le rail subissent en général une plastification initiale qui conduit à une baisse des pressions de contact et à une forme de la zone de contact qui n'est plus décrite par une ellipse [5, 6]. La théorie de Hertz n'étant pas capable de décrire un tel comportement à cause de l'hypothèse d'élasticité des corps en contact, la méthode des éléments finis est adoptée comme alternative pour ce genre d'étude (voir la section 1.2.2.6). Cette méthode permet aussi de prendre en compte la vraie géométrie 3D de la roue et du rail et de s'affranchir de l'hypothèse du demi-espace infini.

Enfin, la dernière hypothèse de Hertz est violée dans plusieurs situations de contact roue-rail où les courbures varient au voisinage du contact. Dans ce cas, le contact est dit « non-Hertzien » et la forme de la zone de contact n'est plus elliptique [7]. Dans la section suivante, la méthode semi-Hertzienne qui prend en compte la courbure dans une direction sera présentée comme un compromis rapide permettant de fournir aux codes de dynamique une répartition de pression plus réaliste que les simplifications à des contacts Hertziens équivalents ou multiples.

1.1.3. Méthode semi-Hertzienne

La théorie de Hertz présentée dans la section précédente résout le problème du contact normal dans le cas où les corps en contact ont des courbures constantes au voisinage du contact, lorsque ces courbures varient, cette méthode n'est plus applicable et le contact est dit non-Hertzien. Ayasse et Chollet ont développé une approche dite « semi-Hertzienne » [3] capable de traiter des cas non-Hertziens où la courbure peut varier dans la direction transversale. Ce modèle de contact est basé sur l'interpénétration virtuelle des deux corps en contact à l'état non déformé. Dans le cas du contact roue-rail, la méthode semi-Hertzienne permet de tenir compte de la variation de la courbure dans la direction transversale.

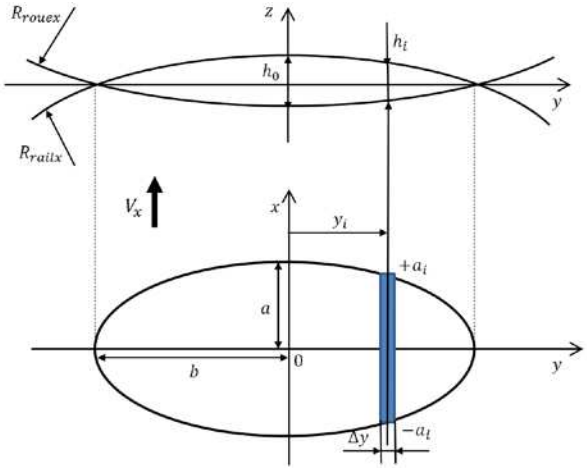


Figure 1. 4 : Les paramètres du contact semi-Hertzien

Sur la base de la méthode d'interpénétration, les semi axes a_g et b_g sont reliés à la translation normale h_0 par :

$$h_0 = a_g^2 A = b_g^2 B \tag{17}$$

Ce qui donne :

$l_1 = \frac{b_g}{a_g} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}$ qui est bien évidemment différent du rapport hertzien $l = \frac{b}{a} = \beta\lambda^{\gamma}$ vu que l tient compte de la déformation des deux corps en contact.

Pour obtenir le bon rapport, il faut compenser la valeur locale de l'une ou des deux courbures A et B. Ayasse et Chollet ont étudié plusieurs méthodes de compensation en fonction de l'une ou des deux courbures compensées. Seule la compensation de la courbure A sera présentée dans ce qui suit :

$$\frac{A_c}{A} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\lambda} = \frac{l^2}{\lambda} \tag{18}$$

Ce qui donne :

$$\frac{A_c}{B} = l^2 \tag{19}$$

On peut facilement vérifier que l'ellipse virtuelle a le même élancement que l'ellipse de Hertz :

$$\frac{b_g}{a_g} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{A_c}{B}} = l = \frac{b}{a} \tag{20}$$

Afin de superposer les deux ellipses, on impose aussi h_0 tel que :

$$h_0 = a^2 A_c = b^2 B = \frac{n^2 \delta}{r(1+\lambda)} \tag{21}$$

Les dimensions de l'ellipse de contact peuvent être calculées à partir de la relation (21). L'ellipse de contact est discrétisé en bandes parallèles y_i comme indiqué sur la Figure 1. 4 et tous ces derniers paramètres sont définis sur chacune de ces bandes, ainsi, on a :

$$a_i = \sqrt{\frac{h_i}{A_c}} \; avec \; h_i = h_o - z \tag{22}$$

Et la pression de contact est donnée par :

$$P(x, y_i) = \frac{3F_n}{2\pi ab}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{b}\right)^2} \tag{23}$$

1.2. Le problème du contact roulant

1.2.1. Pseudoglissement et vitesse de glissement

Sur une voie considérée comme rigide, un essieu qui se déplace avec une vitesse d'avance V_x suivant la direction x et une vitesse circonférentielle ω_r présente deux principaux degrés de liberté comme on peut le voir sur la Figure 1. 5 :

- Le déplacement transversal, ou décalage y
- L'angle de dérive α

La notion de pseudoglissement, ou « creepage » en anglais, a été introduite pour la première fois en 1926 par Carter [8]. A cette époque, le pseudoglissement était considéré seulement dans la direction longitudinale et Carter l'a défini comme étant la variation de la distance roulée par une roue lors de la transmission d'une force longitudinale, divisée par la distance roulée pour le même nombre de tours sous un roulement pur. Cette définition a ensuite évolué, pour décrire le pseudoglissement en fonction des vitesses relatives entre les corps, il est donc défini comme étant le rapport des vitesses relatives entre corps rigides.

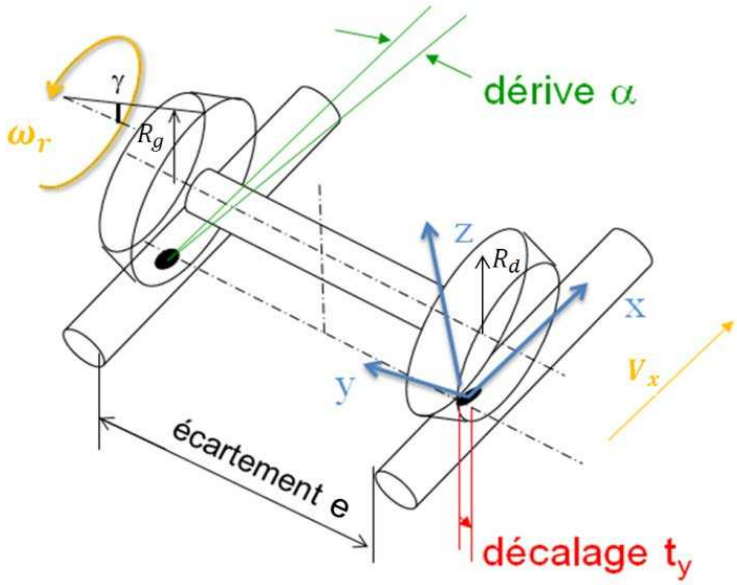


Figure 1. 5 : Degrés de liberté d'un essieu

Suivant la direction considérée, on peut distinguer les trois pseudoglissements ξ_x, ξ_y et ϕ respectivement longitudinal, transversal[2] et de spin. Pour un essieu ferroviaire, le pseudoglissement longitudinal ξ_x comprend principalement le terme $(V_x - r\omega_r)/V_x$ de différence de vitesse relative. Il comprend aussi un terme dû à la différence du rayon de roulement effectif entre la roue gauche R_g et la roue droite R_d à cause de la conicité γ des roues et un terme de vitesse longitudinale estimé par la vitesse de rotation de l'essieu $\dot{\alpha}$ multipliée par le demi-écartement de la voie. Le signe de ces deux derniers termes dépend de si on considère la roue droite ou gauche. On peut donc distinguer selon le côté droit ou gauche les deux composantes de pseudoglissement ξ_{xd} et ξ_{xg} suivantes:

Pseudoglissement longitudinal :

$$\xi_{xd} = \frac{(V_x - r\omega_r) + \omega_r(R_g - R_d) + \dot{\alpha}e/2}{V_x} \qquad (24)$$

$$\xi_{xg} = \frac{(V_x - r\omega_r) - \omega_r(R_g - R_d) - \dot{\alpha}e/2}{V_x}$$

En pratique, le pseudoglissement longitudinal atteint ses valeurs élevées lors de l'accélération et du freinage du train.

Le pseudoglissement transversal ou de dérive ξ_y prend une valeur nominale élevée lors de la prise de courbe d'un essieu avant de bogie ferroviaire classique. Il apparait du fait que $V_x - r\omega_r$ a une composante suivant la direction y due à l'angle de dérive α (voir Figure 1. 5). De plus, l'essieu se déplace suivant y avec une vitesse $\dot{y}$ éventuellement non nulle lors des phénomènes de lacet dynamique :

[2] « lateral » en langue anglaise

Pseudoglissement transversal :

$$\xi_y = \frac{\dot{y}}{V_x} - \alpha \tag{25}$$

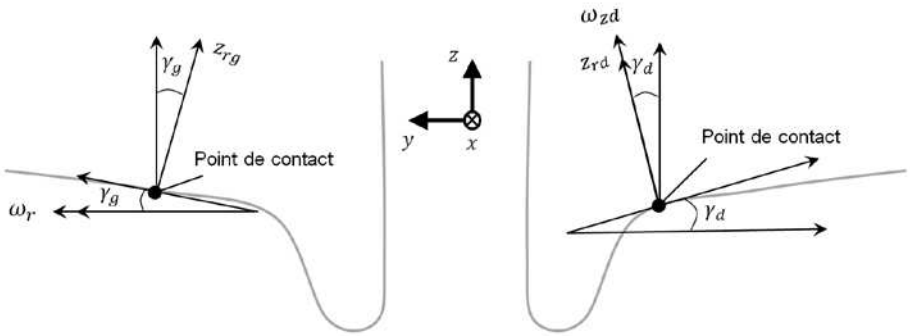


Figure 1. 6 : Composantes du pseudoglissement de spin

Le pseudoglissement de *spin* ϕ (terme anglophone pour *pivotement*) se compose de deux parties : La première composante, cinématique, est due à la vitesse relative de l'angle de dérive $\dot{\alpha}/V_x$ qui est constante peu importe le côté choisi. La seconde composante, géométrique, est une conséquence de la conicité γ de la roue qui conduit à une composante ω_z suivant la normale z_r à la surface de contact. Selon la position transversale de l'essieu, les conicités de la roue droite et gauche peuvent être différentes comme le montre la Figure 1. 6 conduisant aux pseudoglissements de spin ϕ_d et ϕ_g respectivement sur le côté droite et gauche :

Pseudoglissement de spin :

$$\begin{aligned} \phi_d &= \frac{\dot{\alpha}}{V_x} + \frac{\sin\gamma_d}{r} \\ \phi_g &= \frac{\dot{\alpha}}{V_x} - \frac{\sin\gamma_g}{r} \end{aligned} \tag{26}$$

Tous les pseudoglissements sont à l'origine de l'usure du matériau au voisinage du contact.

Les vitesses de glissement w_{gx} et w_{gy} entre deux corps rigides s'écrivent en fonction des pseudoglissements décrits dans la section précédente de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{w_{gx}}{V_x} = \xi_x - y\phi \\ \dfrac{w_{gy}}{V_x} = \xi_y + x\phi \end{cases} \tag{27}$$

En pratique, la roue et le rail subissent une déformation élastique et un terme dû à cette déformation s'ajoute aux vitesses de glissements rigides précédents. Ce terme est donné dans le cas du roulement transitoire par :

$$\begin{cases} u_x^e = \dfrac{\partial u_x}{\partial t} - V_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ u_y^e = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} - V_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \end{cases} \tag{28}$$

Dans le cas du roulement stationnaire, les dérivées partielles par rapport au temps $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ et $\frac{\partial u_y}{\partial t}$ sont nulles et les relations cinématiques s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{w_{gx}}{V_x} = \xi_x - y\phi - \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{w_{gy}}{V_x} = \xi_y + x\phi - \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{cases} \tag{29}$$

1.2.2. Théories du contact roulant

Plusieurs théories permettant la résolution du problème de contact roulant existent dans la littérature. La théorie de Carter [8] développée en 1926 constitue la première solution du problème de contact roulant dans laquelle la notion du pseudoglissement a été introduite pour la première fois. La roue est approximée par un cylindre et le rail par un semi-espace infini. Cette solution est restreinte à un calcul bidimensionnel. L'extension de la théorie de Carter dans le cas tridimensionnel est réalisée par Johnson en 1958 pour un contact circulaire dans deux papiers séparés [9, 10] puis par Vermeulen et Johnson [11] pour un contact elliptique. Parmi ces théories on trouve aussi les nombreuses contributions de Kalker qui sont spécifiquement dédiées au contact roue-rail. Les travaux de Kalker sont jusqu'à nos jours largement utilisés dans le domaine ferroviaire. La théorie linéaire [12], qui permet d'avoir directement les forces tangentielles au contact, est implémentée dans la plupart des codes de dynamique ferroviaire. La théorie complète ou exacte [13] présentée à travers le logiciel CONTACT est utilisée par de nombreuses personnes comme une solution élastique de référence pour valider ou comparer le résultat avec celui donné par leurs différents modèles. Cependant, son coût de calcul élevé rend son implémentation dans un code de dynamique ferroviaire contraignant, et limitée à des études locales. D'autres théories intermédiaires existent comme la théorie simplifiée à travers l'algorithme FASTSIM [14] qui présente un coût de calcul faible avec une précision satisfaisante.

Dans ce qui suit, les théories et modèles de contact roulant les plus marquants seront présentées. L'approche par éléments finis est également introduite et les différents modèles de contact roue-rail roulant développés avec cette méthode sont discutés.

1.2.2.1. Théorie de Carter

L'étude du contact roulant a commencé avec les travaux de Carter publiés en 1926 [8]. Dans sa théorie, Carter résout le contact roulant en deux dimensions en approximant la roue à un cylindre et le rail à un demi-espace infini. Le contact étant bidimensionnel, seul le pseudoglissement longitudinal ξ_x est considéré ($\xi_y = \phi = 0$). En cherchant à trouver une relation entre ce pseudoglissement et la force tangentielle au contact lors de l'accélération et le freinage des trains ferroviaires, il suggère que la zone de contact est divisée en zone d'adhérence qui se situe au bord d'attaque et une zone de glissement qui se situe au bord de fuite comme représenté sur la Figure 1. 7.

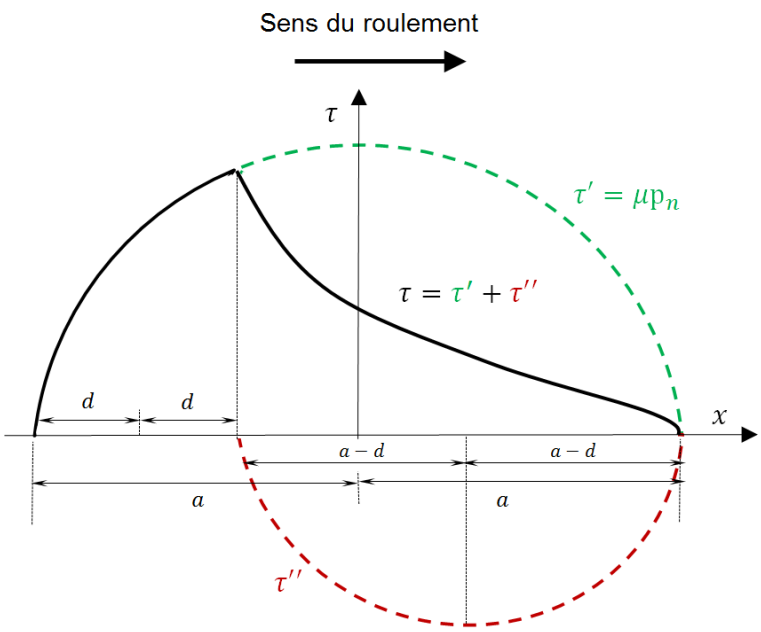


Figure 1. 7 : Contrainte de cisaillement selon la théorie de Carter

En notons par μ le coefficient de frottement, la contrainte de cisaillement dans la zone d'adhérence est donnée par :

$$\tau_x = \tau'_x + \tau''_x \tag{30}$$

Avec

$$-a \leq x \leq a \qquad \tau'_x = \mu \mathrm{p_n} = \mu p_{n0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2} \tag{31}$$

$$-a - 2d \leq x \leq a \qquad \tau''_x = -\frac{\mu(a-d)}{a} p_{n0} \sqrt{1 - \left(\frac{x-(a-d)}{d}\right)^2} \tag{32}$$

La contrainte de cisaillement dans la zone de glissement est donnée suivant la loi de Coulomb par :

$$\tau_x = \mu \mathrm{p_n} \tag{33}$$

La direction de τ_x doit s'opposer au glissement dans la direction longitudinale w_x comme suit :

$$\frac{\tau_x}{|\tau_x|} = -\frac{w_x}{|w_x|} \tag{34}$$

La loi qui relie la force tangentielle longitudinale au contact F_x au pseudoglissement ξ_x est donnée par Carter sous la forme normalisée suivante :

$$\frac{F_x}{\mu F_n} = \begin{cases} -\frac{4R_w}{\mu a}\xi_x + 4\left(\frac{R_w}{\mu a}\right)^2 \xi_x|\xi_x| & si \quad \frac{4R_w}{\mu a}|\xi_x| \leq 2 \\ -\frac{\xi_x}{|\xi_x|} & si \quad \frac{4R_w}{\mu a}|\xi_x| \geq 2 \end{cases} \tag{35}$$

Avec R_w le rayon de la roue.

Carter n'a pas abordé la question du pseudoglissement de dérive, comme a pu le faire Rocard [15] dans ses études théoriques du lacet dynamique des locomotives, mais il a été le premier à proposer une zone de glissement dans le contact.

1.2.2.2. Théorie de Vermeulen et Johnson

Johnson [9] a étendu en 1958 la théorie de Carter au cas tridimensionnel en prenant en compte d'abord seulement les pseudoglissements longitudinal et transversal (sans le spin). Son modèle découle de l'étude des forces tangentielles au contact d'une bille en roulement sur un plan. La forme de la zone de contact est, selon la théorie de Hertz, circulaire. Durant la même année, il publie un deuxième papier [10] dans lequel l'effet du spin est considéré. Il découvre que le spin a un effet sur la force transversale et présente une relation entre ces deux grandeurs.

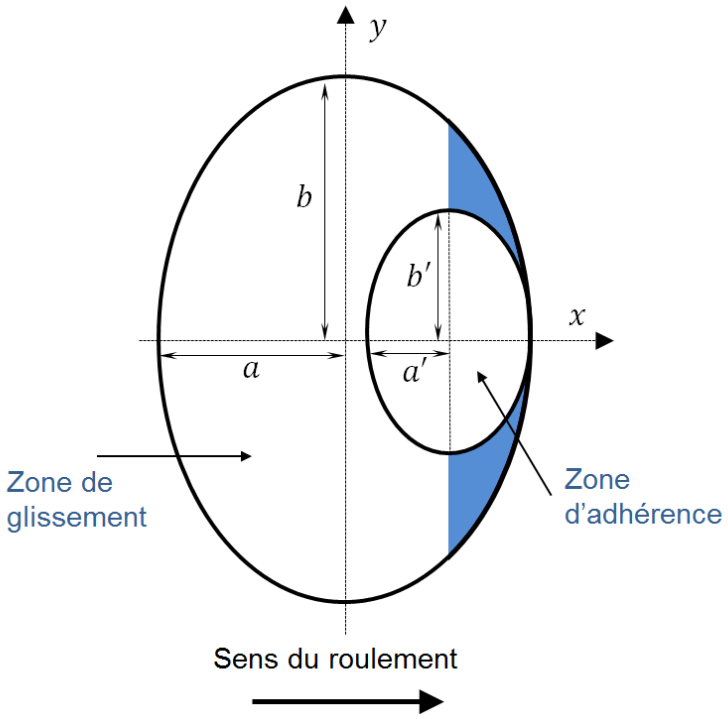


Figure 1. 8 : Zones d'adhérence/glissement selon la théorie de Vermeulen et Johnson

Quelques années plus tard, Vermeulen et Johnson [11] ont généralisé cette théorie pour décrire les forces tangentielles au contact dans le cas d'une empreinte de contact de forme

elliptique. La zone d'adhérence est représentée par une ellipse dont l'élancement a'/b' est égal à celui de l'ellipse de contact a/b. Elle est localisée sur le bord d'attaque comme le montre la Figure 1. 8 et a la même orientation que la zone de contact avec laquelle elle est connectée en un point sur l'axe x. Cette théorie présente une erreur pour la répartition d'adhérence/glissement aux points de la zone de contact au voisinage du bord d'attaque (en couleur bleu sur la Figure 1. 8) car la loi de frottement n'est pas satisfaite dans cette zone, néanmoins elle peut être considérée comme une bonne approximation pour les zones de contact.

Les deux auteurs ont ensuite donné une relation entre les pseudoglissements longitudinal et transversal ξ_x et ξ_y et la force tangentielle au contact sous forme d'une loi polynomiale. Pour valider leur approche, Vermeulen et Johnson ont réalisé des essais expérimentaux et ont comparé le résultat avec la solution donnée par leur modèle. Cette comparaison est reportée sur la Figure 1. 9.

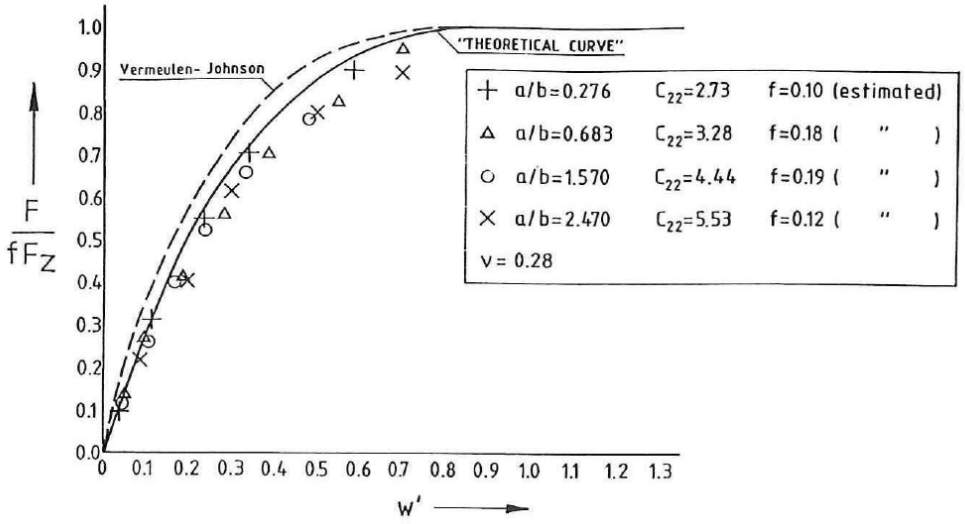


Figure 1. 9 : Comparaison entre le modèle de Vermeulen et Johnson et les essais expérimentaux [11]

1.2.2.3. Théorie linéaire de Kalker

Tandis que Johnson et Vermeulen ont concentré leurs efforts sur l'extension dans le cas 3D de la théorie de Carter. De Pater et Kalker ont suivi une approche différente qui reste basée sur cette même théorie [16]. En négligeant le terme quadratique dans la relation (35) de Carter pour $\frac{4R_w}{\mu a}|\xi_x| \leq 2$, ils ont pu obtenir la relation linéaire suivante entre la force tangentielle au contact et le pseudoglissement ξ_x :

$$\frac{F_x}{\mu F_n} = -\frac{4R_w}{\mu a}\xi_x \qquad si \qquad \frac{4R_w}{\mu a}|\xi_x| \leq 2 \tag{36}$$

De Pater admet cependant que la relation précédente n'est valable qu'en absence de glissement sur toute la zone de contact, c'est-à-dire pour ξ_x très faible. Kalker a suivi cette démarche durant ses travaux de thèse qu'il a présentée en 1967 [12]. Il a proposé une

généralisation de la relation linéaire (35) dans le cas où les pseudoglissements sont très faibles ou lorsque le coefficient de frottement tend vers l'infini. Dans ces conditions, le glissement disparait et l'empreinte de contact est couverte par la zone d'adhérence. Les relations cinématiques (29) deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \xi_x - y\phi \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \xi_y + x\phi \end{cases} \tag{37}$$

En intégrant les relations (37) sur toute la zone de contact et en considérant les relations de comportement (voir le chapitre 2), on obtient un système d'équations dont la résolution permet de déterminer les contraintes de cisaillement au contact τ_x et τ_y et par conséquent la relation entre les forces tangentielles au contact et les pseudoglissements. Selon la théorie linéaire de Kalker, cette relation s'exprime en fonction des coefficients C_{ij} de Kalker tabulés en fonction de l'élancement a/b ou b/a de l'ellipse de contact et en fonction du coefficient de Poisson ν (voir Annexe A.2). Les forces et moment de spin au contact sont donc données par :

$$F_x = -GabC_{11}\xi_x \tag{38}$$

$$F_y = -GabC_{22}\xi_y - G(ab)^{\frac{3}{2}}C_{23}\phi \tag{39}$$

$$M_z = G(ab)^{\frac{3}{2}}C_{23}\phi - G(ab)^2C_{33}\phi \tag{40}$$

Ayasse et Chollet [4] ont montré qu'il est préférable d'exprimer les C_{ij} directement à partir du rapport de courbure A/B afin de s'affranchir de la notion d'ellipse, pour pouvoir traiter les cas dits non-Hertziens.

La comparaison entre la courbe de saturation donnée par la théorie de Carter et celle donnée par la théorie linéaire de Kalker dans la direction longitudinale est reportée sur la Figure 1. 10.

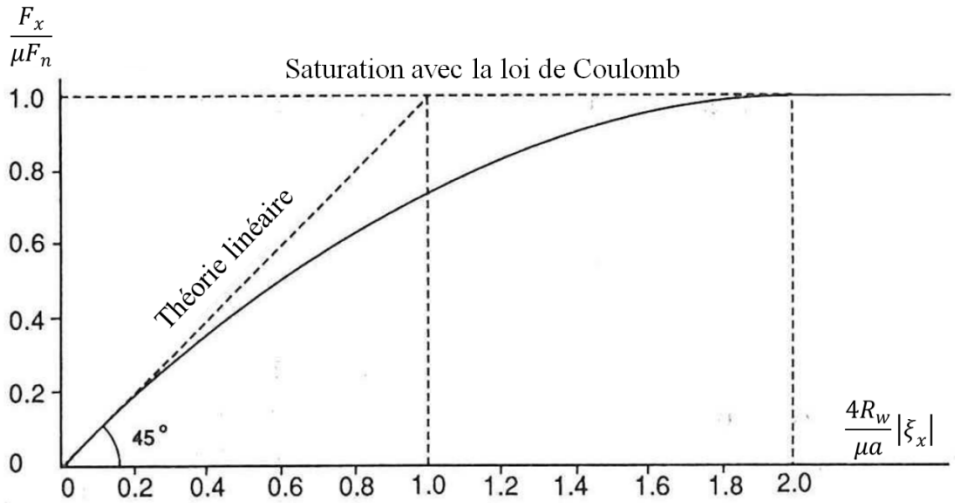


Figure 1. 10 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale avec la théorie de Carter et la théorie linéaire de Kalker [16]

La théorie linéaire de Kalker est implémentée dans la plupart des codes de dynamique ferroviaire pour calculer les forces tangentielles au contact dans les différentes directions, cependant, étant limitée aux valeurs faibles de pseudoglissement, cette théorie doit être complétée avec une loi de saturation afin de pouvoir couvrir lors des simulations dynamiques toutes les valeurs possibles de pseudoglissement qui n'est pas toujours proche de zéro (en accélération ou en freinage par exemple). Quand les pseudoglissements deviennent importants, une zone de glissement commence à se développer dans la surface de contact et la théorie linéaire n'est plus valide. Dans ces conditions, d'autres théories sont utilisées comme la théorie simplifiée ou la théorie complète de Kalker qu'on va présenter dans les sections suivantes.

1.2.2.4. Théorie simplifiée de Kalker : FASTSIM

Dans sa théorie simplifiée [17] publiée en 1973, Kalker modélise la roue et le rail par un tapis de ressorts en supposant que les déplacements élastiques au contact sont proportionnels aux efforts tangentiels. La relation entre ces deux grandeurs est donnée par :

$$\begin{cases} u_x = L_x \tau_x \\ u_y = L_y \tau_y \end{cases} \tag{41}$$

Avec L_x et L_y des flexibilités qui dépendent de la géométrie des corps en contact et sont identifiées à partir de la théorie linéaire de Kalker où la zone d'adhérence couvre toute la zone du contact. En introduisant les relations (41) dans la relation cinématique (29) dans le cas stationnaire, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{w_x}{V_x L_x} = \dfrac{\xi_x}{L_x} - \dfrac{\phi y}{L_x} - \dfrac{\partial \tau_x}{\partial x} \\ \dfrac{w_y}{V_x L_y} = \dfrac{\xi_y}{L_y} - \dfrac{\phi x}{L_y} - \dfrac{\partial \tau_y}{\partial x} \end{cases} \tag{42}$$

Selon la théorie linéaire, les corps sont en contact adhérence et $w_x = w_y = 0$. En intégration la relation (42) sous ces conditions, les contraintes de cisaillement peuvent être déterminées et et les forces tangentielles sont calculées de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_x = \displaystyle\int_{-a_i}^{a_i} \int_{-b}^{b} \tau_x dx dy = -\frac{8a^2 b \xi_x}{3L_x} \\ F_y = \displaystyle\int_{-a_i}^{a_i} \int_{-b}^{b} \tau_y dx dy = -\frac{8a^2 b \xi_y}{3L_y} - \frac{\pi a^3 b \phi}{4L_y} \end{cases} \tag{43}$$

Avec $a_i(y) = a\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$ le semi-axe d'une bande de contact d'abscisse y. a et b sont les semi-axes de l'ellipse de contact pour un cas Hertzien (voir Figure 1. 11).

En comparant les expressions des forces F_x et F_y obtenues par les relations (43) avec celles obtenues par la théorie linéaire (38) et (39), on définit par identification les flexibilités L_1, L_2 et L_3 pour chacune des valeurs de pseudoglissement qui sont données par :

$$L_1 = \frac{8a}{3C_{11}G}$$
$$L_2 = \frac{8a}{3C_{22}G} \tag{44}$$
$$L_3 = \frac{\pi a^2}{4G\sqrt{ab}C_{23}}$$

Finalement, le système final à résoudre est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{w_x}{V_x L} = \dfrac{\xi_x}{L_1} - \dfrac{\phi y}{L_3} - \dfrac{\partial \tau_x}{\partial x} \\ \dfrac{w_y}{V_x L} = \dfrac{\xi_y}{L_2} - \dfrac{\phi x}{L_3} - \dfrac{\partial \tau_y}{\partial x} \end{cases} \tag{45}$$

L est la flexibilité moyenne donnée par :

$$L = \frac{\xi_x L_1 + \xi_y L_2 + \sqrt{ab}\phi L_3}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + ab\phi^2}} \tag{46}$$

Cette approche est implémentée dans l'algorithme développé par Kalker connu sous le nom de FASTSIM [14]. Cet algorithme résout à partir du système (45) le problème du contact roulant entre deux solides quasi-identiques pour différents types de pseudoglissements (en présence de spin). L'idée principale de FASTSIM est de diviser la zone de contact en plusieurs bandes parallèles à l'axe x comme représenté sur la Figure 1. 11. Chaque bande est encore divisée en plusieurs éléments. Les contraintes de cisaillement, supposées constantes dans chacun de ces éléments, sont calculées à partir de (45) en considérant un contact collant entre les corps. La loi de Coulomb est ensuite vérifiée, c'est-à-dire que si le module des contraintes de cisaillement $\tau_t = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$ est inférieur ou égal à μp_n, le contact est collant. Si τ_t est supérieur à μp_n, la condition $\tau_t = \mu p_n$ est imposée et le contact devient glissant.

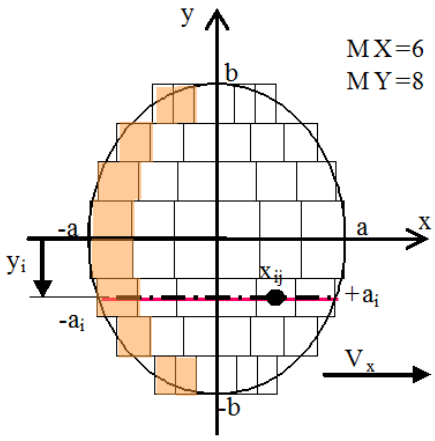


Figure 1. 11 : Discrétisation de la surface de contact avec FASTSIM

Kalker et d'autres développeurs qui ont étudié les possibilités de cet algorithme ont estimés l'erreur de FASTSIM par rapport à CONTACT à au pire 10% dans le cas d'un pseudoglissement pur et dans le pire des cas à 20% dans le cas d'une combinaison de différents pseudoglissements [13]. Cependant, la solution de FASTSIM est 1000 fois plus rapide que CONTACT.

1.2.2.5. Théorie complète de Kalker : le logiciel CONTACT

Dans son livre [13] Kalker présente une généralisation du principe des travaux virtuels pour la résolution du problème du contact. La démarche proposée a conduit à la théorie complète ou exacte qui permet de résoudre d'une façon exacte le problème du contact. Cette théorie est basée sur une formulation variationnelle du problème de contact introduite par Fichera [18] puis par Duvaut et Lions [19]. En utilisant le principe des travaux virtuels, Fichera a montré en 1964 l'existence et l'unicité du problème du contact normal sans frottement, puis, Duvaut et Lions ont établis en 1972, en utilisant la même démarche, l'existence et l'unicité du problème tangent.

La résolution du problème de contact avec l'approche variationnelle est basée sur deux inégalités dont l'une dérive du principe des travaux virtuels et l'autre de son dual, le principe des travaux virtuels complémentaires [20, 21]. En introduisant dans ces inégalités les lois d'élasticité de la mécanique des milieux continus, on obtient respectivement l'énergie potentielle et l'énergie complémentaire du système. Enfin, en ramenant le problème en surface et en satisfaisant les conditions aux limites définies par la loi de Coulomb et le principe de complémentarité, le problème du contact (normal et tangent) peut être exprimé sous forme de minimisation de l'énergie potentielle U du système ou de maximisation du l'énergie complémentaire C du système. Ce dernier peut s'écrire pour une aire de contact potentielle A_c sous la forme suivante :

$$maxC_{u,p} = -\int_{A_c} \left(z + \frac{1}{2}u_z\right) p_n dS + \int_{A_c} \left(W_t + \frac{1}{2}u_t - u_t'\right) p_t dS \qquad (47)$$

Avec :
$t = x, y$
W_t : glissement rigide dans la direction t

On peut distinguer dans la relation (47) deux intégrales, la première décrit le problème du contact normal et la deuxième décrit le problème du contact tangent. La relation entre les efforts au contact et les déplacements n'est plus linéaire comme avec FASTSIM mais est définie par l'intégrale de surface suivante :

$$u_l(x) = \iint_S T^{kl}(x, y) p_l(y) dS \qquad (48)$$

Avec :
$l, k = x, y, z$

$T^{kl}(x, y)$ est la fonction d'influence, elle représente le déplacement en x dû à une charge appliquée en y. Elle peut être calculée explicitement dans le cas de l'approximation du demi-espace infini à partir de la solution de Boussinesq-Cerruti.

Les corps en contact sont donc des demi-espaces infinis, cependant, le contact n'est pas forcément Hertzien et la théorie complète permet de traiter le contact non-Hertzien où la surface de contact n'est plus décrite par une ellipse. La zone potentielle de contact est alors divisée en mailles élémentaires rectangulaires au sein desquelles les forces normales et tangentielles sont résolues par un schéma itératif basé sur l'approche énergétique décrite précédemment. Le problème du contact normal est résolu à travers l'algorithme NORM [13] en utilisant les relations (47) et (48). La solution de ce problème (empreinte de contact et distribution de pression) est utilisée pour résoudre ensuite le problème du contact tangentiel et déterminer les efforts tangentiels au contact en utilisant cette fois l'algorithme TANG.

La théorie complète de Kalker est implémentée dans le fameux logiciel CONTACT. Bien qu'il assure une meilleure précision que les théories simplifiées, le coût de calcul élevé de CONTACT rend son utilisation avec un code de dynamique ferroviaire peu souhaitable quand les simulations ne nécessitent pas une haute précision au contact. Il est cependant considéré comme l'outil de référence pour la validation des différents modèles de contact [16].

1.2.2.6. La méthode des éléments finis

La résolution du problème de contact roue-rail roulant avec la méthode des éléments finis a plusieurs avantages par rapport aux théories de Kalker et à la théorie complète décrite dans la section précédente. D'abord, cette méthode permet de s'affranchir de l'hypothèse des demi-espaces infinis, et la vraie géométrie 3D des corps en contact peut être modélisée. De plus, la méthode des éléments finis rend possible l'introduction de différentes lois de comportement non linéaires pour les corps en contact. En particulier, le comportement plastique de la roue et du rail durant le roulement peut être pris en compte. D'autre part, afin de mieux décrire la réalité physique du contact frottant, les différents codes par éléments finis proposent en général des lois de frottement où il est possible de considérer la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse de glissement [22].

Plusieurs modèles par éléments finis de contact roue-rail qui traitent le problème du contact normal existent dans la littérature. Wiest [23] a étudié les pressions de contact lors du passage d'une roue par un système d'aiguillage. En comparant la solution par éléments finis à celle donnée par Hertz et CONTACT, il a trouvé un bon accord entre les différentes méthodes en élasticité. Lorsque le comportement plastique est pris en compte, la pression de contact maximale présente une baisse allant jusqu'à 42 % par rapport à la solution élastique. Cette solution confirme les résultats de Yan et Fischer [24] qui avait déjà trouvé des conclusions très proches pour une étude réalisée sur un couple composé d'une roue UIC-ORE standard en roulement avec un rail UIC60 standard.

Bijak [25] a développé un modèle de contact roue-rail simplifiée pour étudier les contraintes résiduelles dues à la déformation plastique qui sont d'une grande importance pour l'étude de la limite de fatigue et à l'initiation d'une fissure. Il a trouvé qu'une opération d'accélération

induit des contraintes de traction dans la direction longitudinale sur la zone avant de l'aire de contact qui augmentent les contraintes équivalentes. L'opération de freinage conduit au contraire à des contraintes de compression sur cette même zone.

Sladkowski [26] a étudié l'interaction entre la roue et le rail pour plusieurs profils différents. En analysant la distribution des contraintes et les zones de contact, il a pu développer de nouvelles conceptions des profils du rail.

Un modèle élastique 3D plus récent, basé sur un schéma d'intégration explicite, est développé par Zhao [27] pour étudier le problème du contact roue-rail normal et tangent. L'utilisation de ce schéma rend le modèle intrinsèquement adapté à l'analyse transitoire des phénomènes dynamiques hauts fréquences. La solution est en bon accord avec celle donnée par le logiciel CONTACT. Bien que l'étude du contact roue-rail roulant avec la méthode des éléments finis ait commencé depuis les années 80 [28], ils n'y a toujours pas suffisamment de modèles complets qui permettent de résoudre le problème du contact roulant en élasto-plasticité et de traiter sous ces conditions les différents aspects du contact tangent. Dans le but d'identifier l'origine potentielle du phénomène d'usure ondulatoire, Saulot et Baillet [29] ont mis en évidence les différents régimes d'instabilités à travers un modèle numérique 2D de contact roue-rail. Les conséquences de ces instabilités sur les déformations plastiques équivalentes et l'accroissement de la température dans le rail sont évaluées. Zhao [6, 30] a étendu son modèle élastique [27] pour étudier l'effet du comportement plastique sur les efforts au contact. Son modèle peut aider à mieux comprendre nombreux phénomènes de dégradation du rail tel que l'usure ondulatoire, le « Head-Check » ou encore le « squat ».

1.3. Courbe de saturation

La Figure 1. 12 montre la relation entre la force tangentielle au contact et le pseudoglissement qu'on peut également appeler « courbe de saturation ». Si on considère la direction longitudinale, aucune force tangentielle n'est transmise quand le pseudoglissement est égal à zéro. La roue et le rail sont en contact adhérent et la zone d'adhérence couvre la totalité de l'empreinte de contact. On dit que la roue est en roulement libre. En réalité, le pseudoglissement dans la direction longitudinale n'est jamais égal à zéro car les deux corps en contact se déforment. Un glissement se produit donc à l'arrière de la zone de contact et on peut généralement distinguer sur l'aire de contact deux zones : une zone d'adhérence qui coïncide avec le bord d'attaque et une zone de glissement qui coïncide avec le bord de fuite de la surface de contact et où les efforts tangentiels respectent la condition de saturation de la loi de Coulomb. Plusieurs représentations de ces zones existent dans la littérature comme par exemple celle de Vermeulen et Johnson déjà présentée dans la section 1.2.2.2. qui ont représenté la zone d'adhérence par une ellipse similaire à l'ellipse de contact et orienté dans la même direction. La meilleure répartition, représentée sur la Figure 1. 12, est due aux travaux de Haines et Ollerton [31] qui ont vu la zone d'adhérence comme une région en forme de citron en bordure sur le bord d'attaque de la zone de contact elliptique. Leurs travaux expérimentaux sur du matériau photoélastique réalisés en 1963 montrent un bon accord avec leur prédiction. Lorsque le pseudoglissement augmente, la zone d'adhérence diminue davantage et la zone de glissement augmente jusqu'à ce que le contact entre les deux corps

soit en glissement pur. La force tangentielle sature alors et atteint la limite μF_n selon la loi de Coulomb.

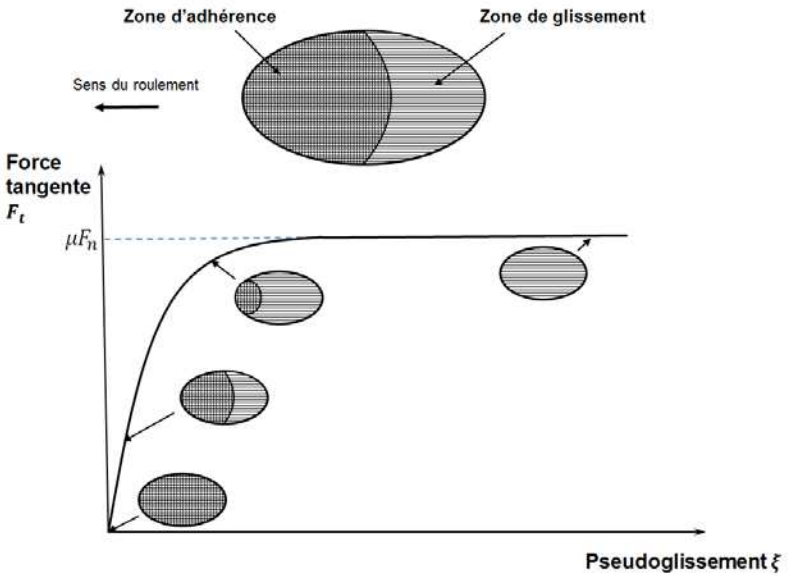


Figure 1. 12 : Courbe de saturation et évolution de la répartition adhérence/glissement

1.3.1. Modèles décrivant la relation force tangentielle/pseudoglissement (loi de saturation)

La nécessité d'avoir dans les codes multi-corps de dynamique ferroviaire un module de résolution du contact roue-rail à la fois rapide et précis a poussé plusieurs auteurs à développer des modèles capable d'évaluer le problème du contact à chaque pas de temps (de l'ordre de la milliseconde au maximum) durant une simulation dynamique d'un véhicule complet, où plusieurs interactions roue-rail se produisent. Le coût de calcul élevé de l'approche complète de Kalker ou encore de la méthode des éléments finis rend impossible l'utilisation de ces méthodes dans les codes de dynamique ferroviaire malgré l'excellente précision qu'elles peuvent offrir. Les dynamiciens préfèrent donc se baser pour leurs calculs sur des solutions analytiques du problème de contact simplifié vu le temps de calcul très rapide qu'elles donnent.

Dans les codes multi-corps de dynamique ferroviaire, le module de résolution du problème de contact se divise généralement en deux sous modules ; le premier résout le problème normal en utilisant la solution analytique de Hertz qui donne une ou plusieurs empreintes de contact elliptique de semi-axes a et b. Certains codes comme VOCO utilisent la théorie semi-Hertzienne qui permet de tenir compte du contact non-Hertzien dans une direction. L'empreinte du contact n'est donc plus elliptique dans ce cas. Le deuxième module résout le problème du contact tangentiel à partir de la théorie linéaire présentée dans la section 1.2.2.3. Cependant, il est rare que la théorie linéaire soit utilisée seule car elle n'est valide que pour des valeurs de pseudoglissement très faibles. Ainsi, les forces tangentielles données par les relations (38) et (39) sont généralement complétées par une loi de saturation afin de satisfaire la limite μF_n donnée par la loi de Coulomb. Plusieurs lois analytiques ou expérimentales

issues d'essais existent dans la littérature. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter les lois de saturation les plus répandues dans les codes de calcul en dynamique ferroviaire

Loi de saturation linéaire

La méthode la plus simple consiste à saturer les forces tangentielles données par la théorie linéaire avec la loi linéaire suivante :

$$F_t = \begin{cases} \sqrt{F_x^2 + F_y^2} & \xi_t \leq 1 \\ \mu F_n & \xi_t \geq 1 \end{cases} \tag{49}$$

Avec $\xi_t = \sqrt{\bar{\xi}_x^2 + \bar{\xi}_y^2}$; $\bar{\xi}_x$ et $\bar{\xi}_y$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_x &= -\frac{C_{11} G a b \xi_x}{\mu F_n} \\ \bar{\xi}_y &= \frac{-C_{22} G a b \xi_y - C_{23} G \sqrt{ab}^3 \phi}{\mu F_n} \end{aligned} \tag{50}$$

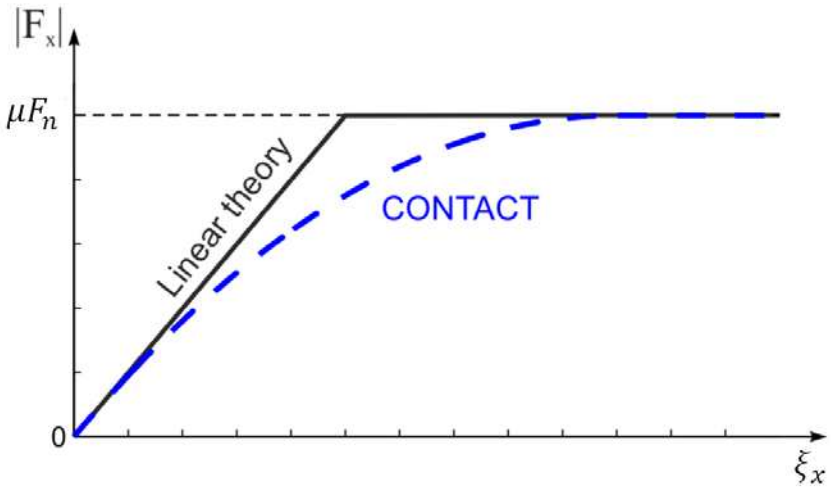


Figure 1. 13 : Loi de saturation linéaire avec la théorie linéaire et comparaison avec CONTACT pour un pseudoglissement longitudinal pur [32]

Une représentation de cette saturation linéaire est reportée sur la Figure 1. 13 pour un cas de pseudoglissement longitudinal pur. La comparaison avec CONTACT montre un faible accord dans la zone de transition non-linéaire des faibles valeurs de pseudoglissements aux valeurs des pseudoglissements élevés.

Loi de saturation polynômiale de Vermeulen et Johnson

D'autres lois plus continues que la loi de saturation linéaire peuvent être utilisées. Les travaux de Vermeulen et Johnson présentés dans la section 1.2.2.2 [11] les ont conduit à proposer la loi de saturation cubique suivante :

$$F_t = \begin{cases} \left(1 - \left(1 - \frac{\xi_t}{3}\right)^3\right)\mu F_n & \xi_t \leq 1 \\ \mu F_n & \xi_t \geq 1 \end{cases} \tag{51}$$

Dans l'expression de ξ_t, le pseudoglissement de spin est négligé ($\phi = 0$).

La Figure 1. 9 montre une comparaison entre les essais expérimentaux et la loi de saturation (51). La partie linéaire de la courbe n'est pas décrite par la théorie linéaire de Kalker mais plutôt avec une estimation faite par Vermeulen et Johnson sur les coefficients C_{ij}.

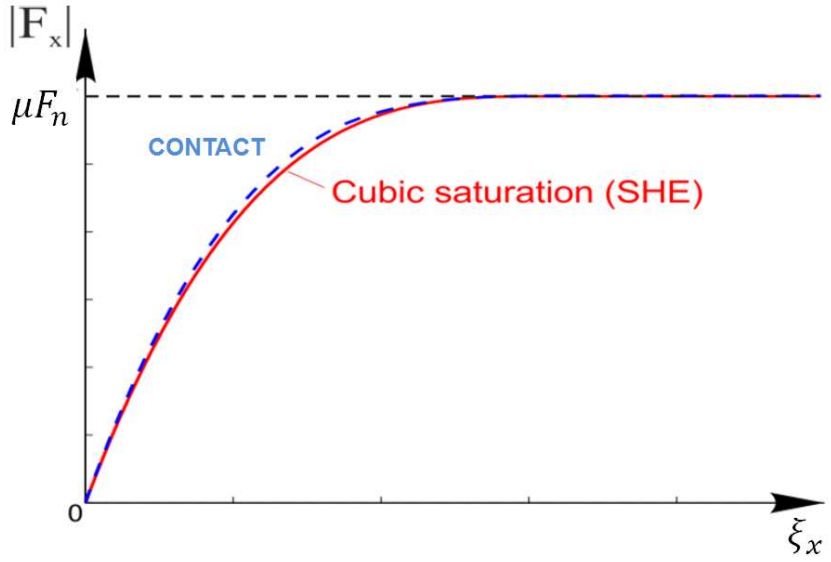


Figure 1. 14 : Loi de saturation cubique de SHE avec la théorie linéaire et comparaison avec CONTACT pour un pseudoglissement longitudinal pur [32]

Loi de saturation cubique de Shen-Hendrick-Elkins (SHE)

La loi de SHE [33] propose une amélioration à la loi de saturation de Vermeulen et Johnson (51) en considérant d'abord que les forces tangentielles sont directement données par la théorie linéaire de Kalker et les coefficients C_{ij} classiques puis en prenant en compte dans l'expression de ξ_t le pseudoglissement de spin ϕ. $\overline{\xi_x}$ et $\overline{\xi_y}$ sont donc donnés par leurs expressions (50). Le résultat de la saturation par SHE est représenté sur la Figure 1. 14 pour un pseudoglissement longitudinal pur.

La saturation avec SHE n'est valide que pour un pseudoglissement de spin faible [16]. Cette loi n'est donc pas capable de traiter certaines situations classiques comme le contact au boudin où le pseudoglissement de spin devient important.

Loi de saturation exponentielle : CHOPAYA

CHOPAYA [34] est une loi de saturation exponentielle établie à partir d'essais expérimentaux sous la forme suivante :

$$\frac{F_t}{\mu F_n} = 1 - e^{-\xi_t} \tag{52}$$

Le logiciel de dynamique ferroviaire VOCO [35] utilise cette loi pour saturer les forces tangentielles calculées à partir de la théorie linéaire.

1.3.2. Paramètres influençant les courbes de saturation

Depuis la première théorie de contact roulant introduite par Carter [8] en 1926, plusieurs équipes ont tenté de mesurer la force tangentielle au contact en fonction du pseudoglissement (courbe de saturation). Les essais expérimentaux menés sur bancs à différents échelles dans des conditions opératoires différentes ont permis de réaliser plusieurs mesures des coefficients de Kalker. Afin de pouvoir comparer les résultats de ces essais dont plusieurs paramètres peuvent varier tels que la charge normale, le coefficient de frottement, le module d'Young ou encore la géométrie des corps en contact, Hobbs [1] a représenté sous forme adimensionnelle les résultats des différents mesures à rail sec sur deux graphes séparés dans les deux directions longitudinale et transversale. Il a ensuite comparé le résultat obtenu avec la théorie linéaire de Kalker comme le montre la Figure 1. 15. On constate une forte dispersion par rapport à la théorie de Kalker surtout dans la direction longitudinale. Cette dispersion se traduit essentiellement par une baisse de la pente initiale des courbes de saturation par rapport à la théorie linéaire pour les faibles valeurs de pseudoglissement qui conduit à une baisse des coefficients C_{ij} de Kalker.

En effet, les mesures de la force longitudinale réalisées par Barwell et Woolacott montrent une baisse de la pente initiale d'environ deux fois par rapport à la théorie. Par conséquent, le coefficient de raideur C_{11} est environ égal à la moitié de ceux prévus par Kalker dans le tableau de l'annexe A.2.

Bien que toutes les mesures collectées par Hobbs soient réalisées dans des conditions opératoires différentes, la raison de la baisse de la pente initiale par rapport à la théorie de Kalker est souvent attribuée à la contamination de la surface. On peut supposer que certains de ces auteurs n'ont pas soigneusement nettoyé les surfaces de la roue et du rail avant chaque essai. Par conséquent, les particules et couches de contaminant sont maintenues sur ces surfaces ce qui éloigne les conditions d'essai de l'hypothèse de corps lisses définie par Hertz et Kalker dans leurs théories. Les mesures de Johnson confirment cette suggestion car en nettoyant méticuleusement les corps en contact, Johnson a éliminé toute couche de contaminant présente en surface conduisant ainsi à un excellent accord avec la théorie de Kalker dans les deux directions longitudinale et transversale comme le montre la Figure 1. 15. Hobbs [1] puis Chollet dans sa thèse [36] ont aussi soigneusement nettoyé leurs surfaces avant chaque essai et ont aussi trouvé un bon accord avec la théorie de Kalker dans la direction transversale.

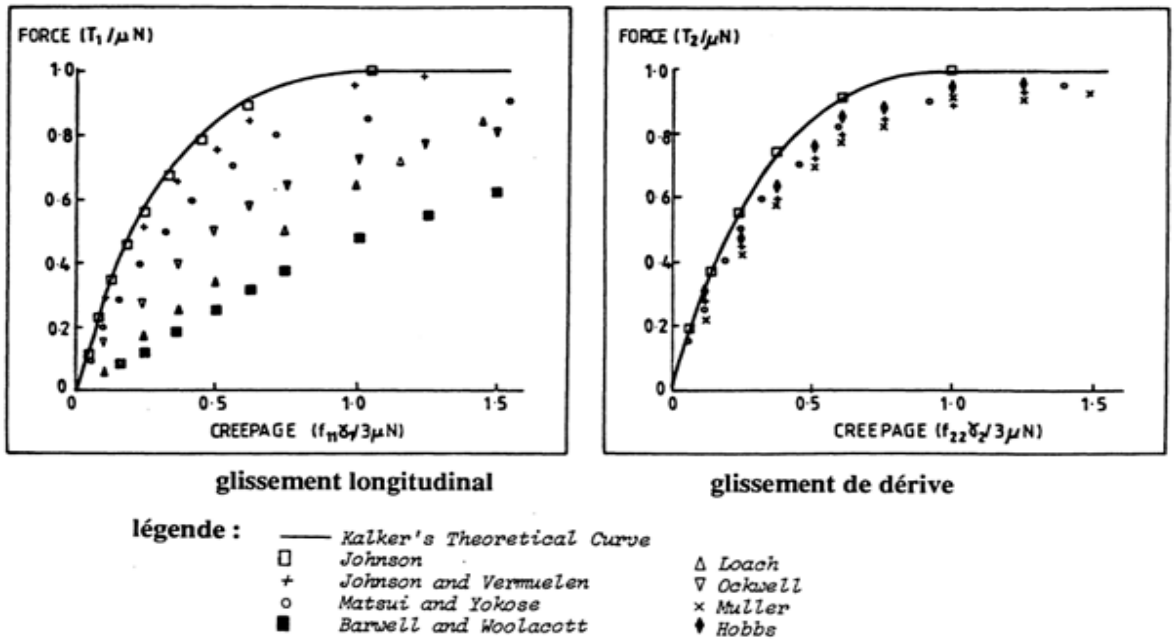


Figure 1. 15 : Comparaison des différents essais expérimentaux collectés par Hobbs avec la théorie linéaire de Kalker [1]

En réalité, les conditions de circulation sont différentes de ceux dans un laboratoire. Il est pratiquement impossible de contrôler l'état de surface du rail sur des kilomètres de voies ferrées. Différents types de contaminants externes sont présents sur les rails et ont donc tendance à éloigner les valeurs mesurées de la force tangentielle de la théorie de Kalker. En plus des facteurs climatiques qui peuvent intervenir au contact roue-rail comme l'humidité, Pritchard [37] a présenté plusieurs types de contaminants qui peuvent coexister sur l'interface d'un rail et qui conduisent à la baisse de la pente initiale des courbes de saturation. L'huile lubrifiante ou la graisse, excessivement appliquée au boudin pour réduire l'usure des rails, atteint souvent la bande de roulement sur le haut du rail. Cependant, cette couche de lubrifiant disparait après le passage de quelques trains. Les débris solides provenant de la rouille du rail (détachement de particules oxydées) ou de son usure sont considérés comme un contaminant naturel souvent appelé « troisième corps » qui peut exister avec d'autres contaminants externes comme les feuilles mortes amenées par le vent sur le rail.

Pour analyser l'effet de la lubrification sur les coefficients de Kalker, la plupart des expérimentateurs cités par Hobbs ont aussi conduits des essais sur banc avec rail humide ou lubrifié. En ajoutant de l'eau sur l'interface de contact entre la roue et le rail, Müller a constaté une baisse des coefficients de Kalker de 30 % pour une charge donnée par rapport à son résultat à rail sec représenté sur la Figure 1. 15. Cette baisse diminue plus que la moitié quand Müller a utilisé une charge 5 fois plus élevée. De même, les essais sur banc menés par Hobbs ont montré que sous l'effet d'une petite quantité de lubrifiant liquide, les coefficients de Kalker dans la direction transversale ont baissé de 50 % par rapport au résultat de la Figure 1. 15.

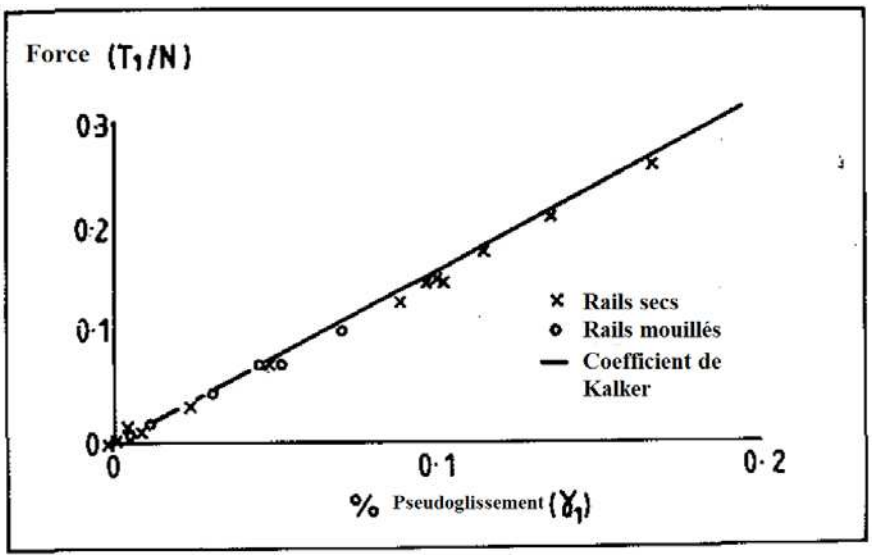


Figure 1. 16 : Mesures en ligne du coefficient de Kalker dans la direction longitudinale sous des conditions sèches et humides [38]

Cependant, certaines mesures en voie réelle réalisées à British Railways par Pearce et Roses [38] montrent que la lubrification et la contamination n'ont aucune influence sur les coefficients de Kalker. En effet, les essais menés par ces auteurs sur rails secs et mouillés pour mesurer le coefficient C_{11} dans la direction longitudinale sont tous les deux en bon accord avec les coefficients de Kalker comme le montre la Figure 1. 16. En contaminant un seul côté de la voie avec de l'acide oléique puis avec de l'eau, Pearce et Roses ont également trouvé un bon accord avec la théorie exacte de Kalker dans la direction transversale. Une deuxième série d'essais en ligne réalisée sur 4 jours (rail sec pendant 2 jours et mouillé pendant 2 jours) a montré que, contrairement aux résultats de Hobbs, les coefficients de Kalker mesurés sont en bon accord avec les coefficients théoriques dans la direction transversale comme le montre la Figure 1. 17. Néanmoins, on constate une baisse du coefficient de frottement pour des valeurs de pseudoglissement plus élevés.

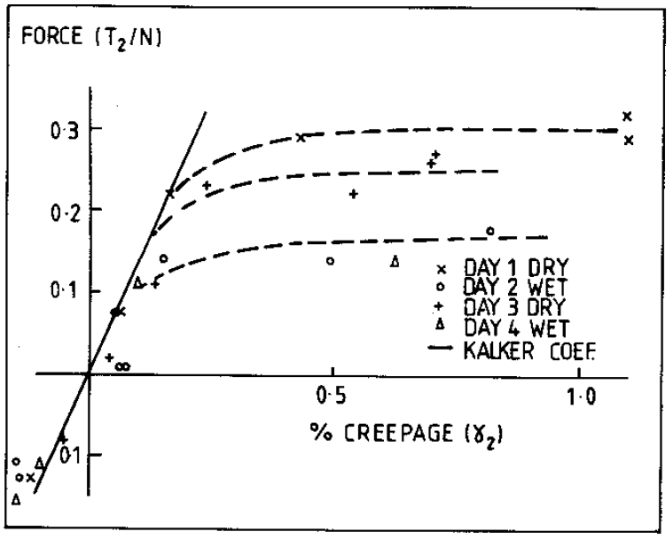


Figure 1. 17 : Mesures en ligne du coefficient de Kalker dans la direction transversale sous des conditions sèches et humides [38]

D'autres essais réalisés par les mêmes auteurs montrent une influence des lubrifiants liquides sur la dynamique du véhicule. Lorsque les rails sont mouillés, le phénomène de lacet (oscillation latérale du bogie à partir d'une vitesse critique) disparait pour certains types de bogie. Pearce et Roses suggèrent que ceci ne peut être dû qu'à une baisse des coefficients de Kalker malgré que leurs mesures réalisées dans des conditions similaires avec un dispositif expérimental différent n'aient montré aucun effet de la lubrification des rails sur ces coefficients.

Nayak et son équipe [39] durant les années 70 ont étudié l'effet d'importants paramètres, en plus de la contamination en surface, sur les coefficients de Kalker et le coefficient de frottement tels que la rugosité, la vibration en surface et la vitesse de roulement. Ils ont trouvé que la rugosité n'influe pas sur les coefficients de Kalker pour des charges d'exploitation mais a un effet sur le coefficient de frottement. Les surfaces rugueuses ont généralement un coefficient de frottement plus élevé que les surfaces lisses. Les vibrations en surface affectent considérablement le coefficient de frottement et peuvent être la cause de la baisse de ce coefficient lorsque la vitesse de roulement augmente. Si aucun phénomène de résonance n'est excité durant le roulement, cette vitesse n'altère pas les coefficients de Kalker.

Nayak et son équipe ont aussi testé l'influence de la contamination de la surface avec de l'eau et de l'huile et ont trouvé qu'elle réduit le coefficient du frottement ainsi que les coefficients de Kalker par un facteur compris entre 1/4 et 2/3. Ce résultat confirme donc les conclusions des travaux de Hobbs [1]. Nayak affirme que le taux de réduction de ces coefficients dépend de certains paramètres caractéristiques du l'huile comme sa viscosité, sa compressibilité et sa tendance à réagir avec les surfaces en acier.

Ceci pourrait expliquer pourquoi Pearce et Roses n'ont pas pu observer durant leurs mesures un effet de la contamination sur les coefficients de Kalker. En effet, ces auteurs affirmaient avoir utilisé un contaminant (acide oléique) non représentatif de ce qui peut naturellement se former sur les rails dans la pratique. On peut suggérer que les caractéristiques de ce contaminant ne sont pas disposées à montrer un effet sur les mesures des coefficients de Kalker.

Un autre important effet a été étudié par Ohyama [40] qui est l'effet de la pression maximale de Hertz à rugosité donnée. Ohyama a trouvé une baisse de la pente initiale de la courbe de saturation pour des pressions au-dessous de 400 MPa comme le montre la Figure 1. 18. Ces observations ont été confirmées par les mesures réalisées par Chollet [36], bien que plus récemment Meierhofer [41] ait montré que la baisse arrive avec l'augmentation de la pression Hertzienne et non pas l'inverse.

L'effet de la pression de Hertz peut expliquer la dispersion des résultats aperçue sur les figures de Hobbs (Figure 1. 15) pour certains essais car en calculant cette pression dans la limite des données disponibles dans [1], on a trouvé des valeurs qui varient entre 150 MPa et 1400 MPa. Il est donc clair que certains expérimentateurs n'ont pas pris soin de respecter cette pression de contact.

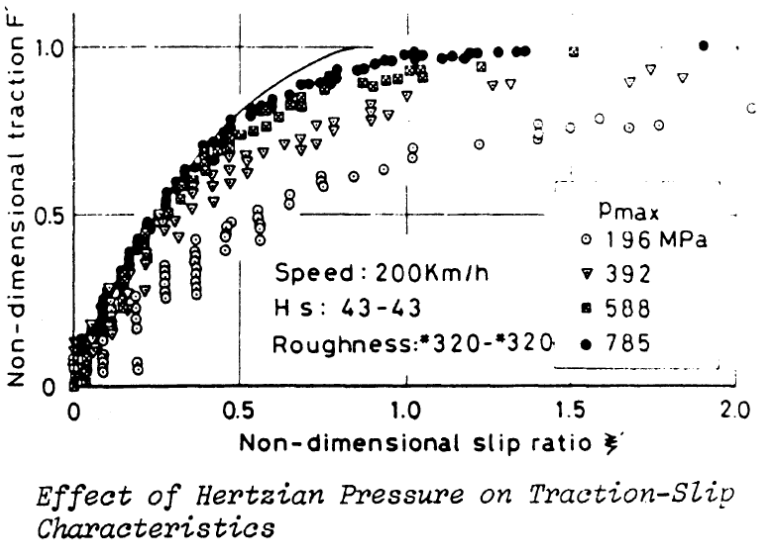


Figure 1. 18 : Effet de la pression maximale de Hertz sur la courbe de saturation [40]

Enfin, les théories de Kalker étant limitées à l'élasticité linéaire, certains auteurs [37, 42] attribuent la dispersion entre les mesures des coefficients de Kalker et la théorie linéaire à la déformation plastique des corps en contact.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté plusieurs théories de contact roulant dont la théorie linéaire qui exprime les forces tangentielles en fonction des coefficients de raideur de Kalker. Le désaccord constaté entre certaines mesures expérimentales et cette théorie, traduit par une baisse des coefficients de Kalker, a permis de mettre en évidence ses limites. En effet, cette théorie ne décrit pas fidèlement la réalité physique du contact roue-rail car d'une part elle suppose, comme toutes les autres théories de contact roulant, que les surfaces des deux corps en contact sont lisses et ne permet donc pas la prise en compte de nombreux paramètres tels que la rugosité ou l'existence naturelle ou artificielle d'une couche de contaminant sur l'interface du contact roue-rail. D'autre part, elle ne prend pas en compte la déformation plastique des corps en contact.

Afin d'avoir un meilleur ajustement entre les mesures et la théorie, plusieurs auteurs ont appliqué dans leurs modèles de contact roulant des corrections qui permettent de tenir compte de la présence d'une troisième couche de contaminant à l'interface du contact roue-rail [41, 43, 44]. Cependant, certains facteurs comme la plasticité restent à ce jours très peu étudiés tant sur le plan expérimental que théorique. Dans cette thèse, nous avons développé un modèle par éléments finis pour l'étude du contact roue-rail roulant en élasticité et en élasto-plasticité, ce qui a permis d'une part d'avoir une meilleure compréhension des phénomènes locaux au contact et d'autre part d'évaluer l'effet de la plasticité sur les coefficients de Kalker. Ce modèle a ensuite été étendu pour tenir compte de la présence d'une troisième couche mince et plastique sur l'interface du rail.

Chapitre 2

Modélisation du contact roue-rail roulant avec la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM)

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un état de l'art de l'expérimentation et de la modélisation du contact roue-rail allant des théories simplifiées jusqu'à des formulations beaucoup plus complexes telles que la méthode des éléments finis. L'inconvénient de cette dernière est son coût de calcul très élevé en comparaison avec les autres méthodes. Basé sur l'approximation de l'espace semi-infini, la méthode des éléments de frontière est considérée comme une alternative à la méthode des éléments finis qui permet de résoudre le problème du contact avec un temps de calcul nettement moins élevé.

Le parti pris de ce chapitre est de développer un outil numérique basé sur la méthode des éléments de frontière et sur les intégrales de Boussinesq-Cerruti, qui soit capable de résoudre le problème du contact roue-rail roulant dans des cas Hertzien et non-Hertzien. Pour y parvenir, nous proposons une généralisation de l'approche directe décrite par Johnson dans son livre [45] pour la résolution du problème normal. Cette méthode nommée Méthode d'Inversion de Matrice (MIM) est d'abord validée, dans le cas du contact normal et glissant, en comparant les résultats obtenus aux solutions analytiques. L'extension de la MIM au contact roulant est réalisée dans le cas stationnaire. La validation dans ce cas est faite, en comparant la solution obtenue avec une méthode basée sur une approche différente, l'approche variationnelle. Cette méthode qui découle de la théorie exacte de Kalker [13] a déjà été implémentée dans le code commercial CONTACT. Une application au contact roue-rail non-Hertzien est aussi présentée dans ce chapitre. Enfin, le coût de calcul des algorithmes de résolution de la MIM est évalué en le comparant avec celui du logiciel CONTACT pour un même cas Hertzien.

2.1. Méthode des éléments de frontière

La méthode des éléments de frontière désignée par son acronyme anglais B.E.M : *Boundary Element Method*, est une technique numérique prometteuse qui permet, avec un temps de calcul acceptable, de résoudre divers problèmes dont le problème du contact. Cette méthode est très avantageuse quand le domaine d'étude est infini car le domaine à discrétiser concerne seulement la surface en frontière. En considérant par exemple un problème de contact entre deux corps élastiques, le maillage s'applique seulement sur la surface potentielle de contact contrairement à la méthode des éléments finis qui nécessite un maillage de la géométrie 3D des deux corps. Pour cette raison, la méthode des éléments de frontière est considérée comme une alternative à la méthode des éléments finis [46]. Il existe trois types formulations de la BEM : la formulation directe, indirecte et variationnelle. Cette dernière a le plus été appliqué au contact mécanique [13]. Cependant, cette application se limite aux corps homogènes et isotropes en élasticité linéaire qui peuvent être approximés à des espaces semi-infinis.

2.1.1. Approximation de l'espace semi-infini

Dans la pratique, l'aire de contact est petite devant les dimensions des corps élastiques et devant leurs rayons de courbure près du contact. Les géométries des corps en contact peuvent être alors localement assimilées à des massifs semi-infinis élastiques. Ceci est également vrai

pour l'application principalement visée dans cette thèse qui est l'application ferroviaire. Les corps en contact sont la roue et le rail et les rayons de courbure de ces deux corps sont suffisamment grands devant la zone de contact dont la taille est de l'ordre de quelques millimètres.

Lorsqu'une pression est appliquée à une partie de la surface d'un solide élastique, en utilisant le principe de superposition en élasticité linéaire, les déplacements peuvent être calculés par l'intégrale suivante :

$$u_k(x,y,z) = \iint_S T^{kl}(x,y;\zeta,\eta;z)p_l(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{53}$$

Avec k et l les indices des composantes x, y et z.

$T^{kl}(x,y;\zeta,\eta;z)$ est la fonction d'influence, elle représente le déplacement en un point $M(x,y,z)$ d'un corps élastique dû à une charge p appliquée en S et dépend de la forme du corps. Un autre avantage très important de l'approximation de l'espace semi-infini est que, sous ces conditions, la fonction $T^{kl}(x,y;\zeta,\eta;z)$ peut être calculée explicitement en utilisant les équations de Boussinesq-Cerruti. Par la suite, les composantes de p_l dans les différentes directions x, y et z seront notées respectivement par τ_x, τ_y et p_n.

L'approche classique qui permet de trouver les contraintes et les déplacements élastiques dus à la pression surfacique et aux efforts tangentiels en surface pour un espace semi-infini est attribuée à Boussinesq [47] et Cerruti [48].

2.1.2. Problème de Boussinesq-Cerruti

La solution de Boussinesq-Cerruti permet d'avoir le champ de déplacement en un point quelconque M(x,y,z) d'un semi-espace infini qui est dû à un chargement appliqué à un point N(ζ,η) en surface d'une région S.

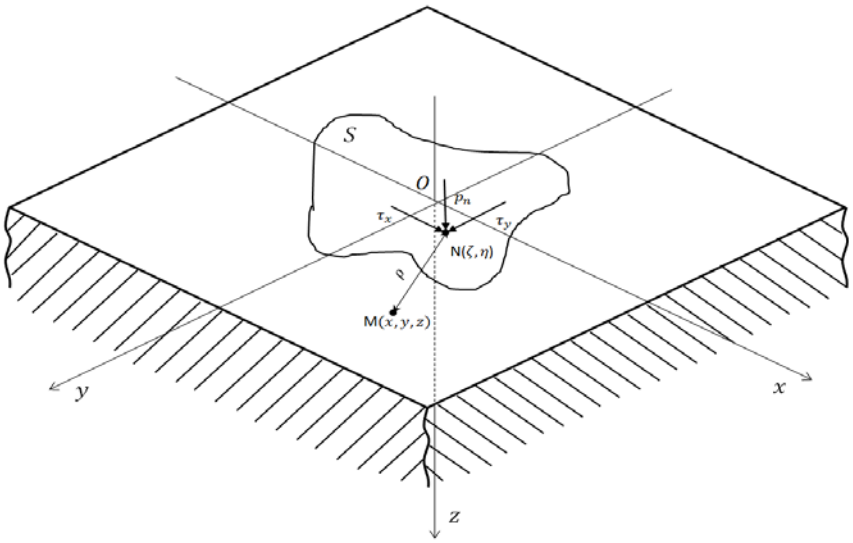


Figure 2. 1 : Problème de Boussinesq-Cerruti

En appliquant la théorie des potentiels, Boussinesq [47] a résolu analytiquement en 1885 le problème du contact normal pour un semi-espace infini en reliant les déplacements u_x, u_y, u_z en tout point M à la pression p_n appliquée en surface (Figure 2. 1). Trois ans avant la solution Boussinesq, Cerruti [48] avait déjà donné les déplacements en tout point M qui sont dus à un chargement tangentiel τ_x ou τ_y. Les déplacements en un point quelconque de l'espace semi-infini dus à une force normale concentrée pure F_n ainsi qu'aux forces tangentielles F_x et F_y sont donnés dans l'annexe B.1.

2.1.2.1. Fonction d'influence

L'utilisation de l'approximation de l'espace semi-infini pour un matériau homogène et isotrope rend possible le calcul de la fonction d'influence T^{kl} décrite dans l'équation (48). Pour d'autres géométries en contact, ce calcul devient coûteux et fastidieux [13]. Avec les récents progrès technologiques et l'augmentation constante de la puissance des machines de calcul, la méthode des éléments finis devient un moyen qui permet le calcul de cette fonction pour des géométries beaucoup plus compliquées qu'un espace semi-infini.

Les fonctions T^{kl} sont donc calculées explicitement et avec exactitude pour un espace semi-infini à partir des relations de Boussinesq-Cerruti définies dans les sections précédentes. En suivant le choix du repère cartésien $(O; x, y, z)$ défini sur la Figure 2. 1, ces fonctions sont données par les expressions analytiques dans l'annexe A.1. Pour l'étude du problème du contact normal et tangent, les fonctions T^{kl} sont ramenées en surface en remplaçant z par 0.

2.1.2.2. Relations de comportement

Dans cette partie, on s'intéresse aux déplacements relatifs en surface, c'est-à-dire sur la frontière $z = 0$, entre deux corps semi-infinis 1 et 2 qui sont dus aux efforts surfaciques τ_x, τ_y et p_n (voir Figure 2. 1). La solution est construite en suivant la procédure décrite par Johnson [45] en superposant la solution due à l'effort normal pure p_n ($p_n \neq 0$ et $\tau_x = \tau_y = 0$) avec celle due à l'effort tangentiel pure dans la direction x, τ_x ($\tau_x \neq 0$ et $p_n = \tau_y = 0$) et l'effort tangentiel dans la direction y, τ_y ($\tau_y \neq 0$ et $p_n = \tau_x = 0$).

Notons par i l'indice du corps en contact, i =1, 2. Avec 1 l'indice du corps en bas et 2 celui du corps en haut. Sous l'effet de l'effort normal pure p_n qui agit sur une surface de contact C, c'est-à-dire pour $\tau_x = \tau_y = 0$, les déplacements en tout point donnés en annexe B.1 doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u_{x1}(x,y,z) &= u_{x2}(x,y,-z) \\ u_{y1}(x,y,z) &= u_{y2}(x,y,-z) \\ u_{z1}(x,y,z) &= -u_{z2}(x,y,-z) \end{aligned} \tag{54}$$

Dans ces conditions, les déplacements relatifs en surface $u_x^{p_n}$, $u_y^{p_n}$ et $u_z^{p_n}$ qui sont dus à l'effort normal p_n appliqué sur l'aire de contact C s'obtiennent à partir de la relation (48) en

remplaçant z par 0 dans les fonctions d'influence $T^{kz(i)}$ de l'annexe B.2 pour chaque corps i avec k l'indice de la composante x, y et z. On obtient donc :

$$u_x^{p_n}(x,y) = u_{x1}(x,y,0) - u_{x2}(x,y,0) = -\frac{K}{\pi G}\iint_C \frac{x-\zeta}{r^2} p_n(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{55}$$

$$u_y^{p_n}(x,y) = u_{y1}(x,y,0) - u_{y2}(x,y,0) = -\frac{K}{\pi G}\iint_C \frac{y-\eta}{r^2} p_n(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{56}$$

$$u_z^{p_n}(x,y) = u_{z1}(x,y,0) - u_{z2}(x,y,0) = \frac{1-\nu}{\pi G}\iint_C \frac{p_n(\zeta,\eta)}{r} d\zeta d\eta \tag{57}$$

Avec $r = \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}$ et G, ν et K sont respectivement le module de cisaillement équivalent, le coefficient de Poisson équivalent et le facteur de quasi-identité qui sont donnés par :

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right) \tag{58}$$

$$\frac{\nu}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_1}{G_1} + \frac{\nu_2}{G_2}\right) \tag{59}$$

$$K = \frac{G}{4}\left(\frac{1-2\nu_1}{G_1} - \frac{1-2\nu_2}{G_2}\right) \tag{60}$$

G_1, G_2 : module de cisaillement des corps 1 et 2 ; ν_1, ν_2 : coefficient de Poisson des corps 1 et 2.

En suivant la même démarche, les déplacements relatifs en surface dus à l'effort de cisaillement pure τ_x sont calculés en utilisant les fonctions d'influence $T^{kx(i)}$ (voir annexe B.2) pour chaque corps i. On obtient le champ de déplacement en surface suivant :

$$\begin{aligned} u_x^{\tau_x}(x,y) &= u_{x1}(x,y,0) - u_{x2}(x,y,0) \\ &= \frac{1}{\pi G}\iint_C \left(\frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(x-\zeta)^2}{r^3}\right)\tau_x(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} u_y^{\tau_x}(x,y) &= u_{y1}(x,y,0) - u_{y2}(x,y,0) \\ &= \frac{1}{\pi G}\iint_C \frac{\nu(x-\zeta)(y-\eta)}{r^3}\tau_x(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \end{aligned} \tag{62}$$

$$u_z^{\tau_x}(x,y) = u_{z1}(x,y,0) - u_{z2}(x,y,0) = \frac{K}{\pi G}\iint_C \frac{x-\zeta}{r^2}\tau_x(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{63}$$

Finalement, les déplacements relatifs en surface dus à l'effort de cisaillement pure τ_y sont calculés en utilisant les fonctions d'influence $T^{ky(i)}$ (voir annexe B.2) pour chaque corps i. On obtient le champ de déplacement en surface pour $z = 0$:

$$u_x^{\tau_y}(x,y) = u_{x1}(x,y,0) - u_{x2}(x,y,0) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \frac{\nu(x-\zeta)(y-\eta)}{r^3}\tau_y(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{64}$$

$$u_y^{\tau_y}(x,y) = u_{y1}(x,y,0) - u_{y2}(x,y,0) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \left(\frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(y-\eta)^2}{r^3}\right)\tau_y(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{65}$$

$$u_z^{\tau_y}(x,y) = u_{z1}(x,y,0) - u_{z2}(x,y,0) = \frac{K}{\pi G}\iint_C \frac{y-\eta}{r^2}\tau_y(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{66}$$

En superposant les solutions précédentes, on obtient les relations de comportement suivantes :

$$u_x(x,y) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \left\{\left(\frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(x-\zeta)^2}{r^3}\right)\tau_x(\zeta,\eta) + \left(\frac{\nu(x-\zeta)(y-\eta)}{r^3}\right)\tau_y(\zeta,\eta) - K\frac{x-\zeta}{r^2}p_n(\zeta,\eta)\right\}d\zeta d\eta \tag{67}$$

$$u_y(x,y) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \left\{\left(\frac{\nu(x-\zeta)(y-\eta)}{r^3}\right)\tau_x(\zeta,\eta) + \left(\frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(y-\eta)^2}{r^3}\right)\tau_y(\zeta,\eta) - K\frac{y-\eta}{r^2}p_n(\zeta,\eta)\right\}d\zeta d\eta \tag{68}$$

$$u_z(x,y) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \left\{K\frac{x-\zeta}{r^2}\tau_x(\zeta,\eta) + K\frac{y-\eta}{r^2}\tau_y(\zeta,\eta) + \frac{1-\nu}{r}p_n(\zeta,\eta)\right\}d\zeta d\eta \tag{69}$$

Remarquons ici que tous les efforts (effort normal et des efforts tangentiels) interviennent dans les différentes expressions des déplacements relatifs. On parle de couplage entre le problème du contact normal et tangentiel. Ces deux problèmes sont couplés à travers le paramètre de quasi-identité K. Lorsque les deux corps 1 et 2 ont les mêmes paramètres de matériau, K est égale à zéro. On dit que les deux corps sont quasi-identiques. Dans ces conditions, les problèmes normal et tangentiel deviennent découplés et les équations précédentes s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_x(x,y) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \left\{\left(\frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(x-\zeta)^2}{r^3}\right)\tau_x(\zeta,\eta) + \left(\frac{\nu(x-\zeta)(y-\eta)}{r^3}\right)\tau_y(\zeta,\eta)\right\}d\zeta d\eta \tag{70}$$

$$u_y(x,y) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \left\{\left(\frac{\nu(x-\zeta)(y-\eta)}{r^3}\right)\tau_x(\zeta,\eta) + \left(\frac{1-\nu}{r} + \frac{\nu(y-\eta)^2}{r^3}\right)\tau_y(\zeta,\eta)\right\}d\zeta d\eta \tag{71}$$

$$u_z(x,y) = \frac{1}{\pi G}\iint_C \frac{1-\nu}{r}p_n(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{72}$$

Au final, en tenant compte du signe opposé de la pression p_n entre les deux corps 1 et 2, on peut définir pour les déplacements relatifs précédents des fonctions d'influence combinées T^{kl} entre ces deux corps qui se calcul dans le cas général par :

$$\forall\, k,l \in (x,y,z), \quad T^{kl}(x,y;\zeta,\eta) = T^{kl(1)}(x,y;\zeta,\eta;0) - T^{kl(2)}(x,y;\zeta,\eta;0) \tag{73}$$

$T^{kl(i)}$ sont les fonctions d'influence donnée explicitement dans l'annexe A.1 pour un espace semi-infini.

Bien que la pression normale p_n n'intervienne pas explicitement dans les composantes u_x et u_y (équations (70) et (71)), celle-ci reste liée aux efforts de cisaillement à travers la loi de Coulomb [49].

La condition de quasi-identité, et par conséquent le découplage entre les problèmes normal et tangentiel, est particulièrement vraie dans le cas du contact roue-rail étant donné que ces deux corps sont composés d'acier. Cependant, la valeur de K se réduit aussi à zéro lorsque les deux corps en contact sont incompressibles ($\nu_1 = \nu_2 = 0.5$) [50].

2.2. Méthode d'inversion de matrice (MIM)

On s'intéresse dans cette partie au contact entre deux corps quasi-identiques. Le problème normal est dans ce cas découplé du problème tangentiel. La résolution numérique peut donc se faire sur deux étapes en utilisant une méthode itérative directe appelée la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM). On trouve une description de cette méthode dans le livre de Johnson [45] pour la résolution directe du problème normal. Cette méthode a été utilisée par Cesbron [51] et Dubois [52] pour modéliser le contact pneumatique/chaussée, puis, Cesbron [53] l'a étendu pour l'étude du contact glissant. Dans cette section, on propose d'étendre la MIM pour résoudre le problème du contact roulant et frottant. La première étape consiste à résoudre le problème du contact normal en déterminant la pression de contact ainsi que la zone de contact C. La résolution du problème tangentiel consiste à déterminer les efforts de cisaillement en surface ainsi que la répartition entre les zones d'adhérence/glissement.

2.2.1. Discrétisation du problème

La Méthode d'Inversion de Matrice est basée sur une discrétisation en surface du massif semi-infini. La surface est découpée en N rectangles centrés au point de coordonnées (x_i,y_i) ($i \in [1,N]$) et de dimensions d_x et d_y comme indiqué sur la Figure 2. 2.

Notons $u = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ le vecteur des déplacements surfaciques avec $u_i = u(x_i, y_i)$, $u_x = \{u_{xi}\}^T_{i\in[1,N]}$, $u_y = \{u_{yi}\}^T_{i\in[1,N]}$ et $u_z = \{u_{zi}\}^T_{i\in[1,N]}$ et notons $p = \{\tau_x, \tau_y, p_n\}^T$ le vecteur effort au contact avec $p_i = p(x_i, y_i)$, $\tau_x = \{\tau_{xi}\}^T_{i\in[1,N]}$, $\tau_y = \{\tau_{yi}\}^T_{i\in[1,N]}$ et $p_n = \{p_{ni}\}^T_{i\in[1,N]}$. Le problème de contact défini par les équations (70)-(72) peut ainsi s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$u = Ap \tag{74}$$

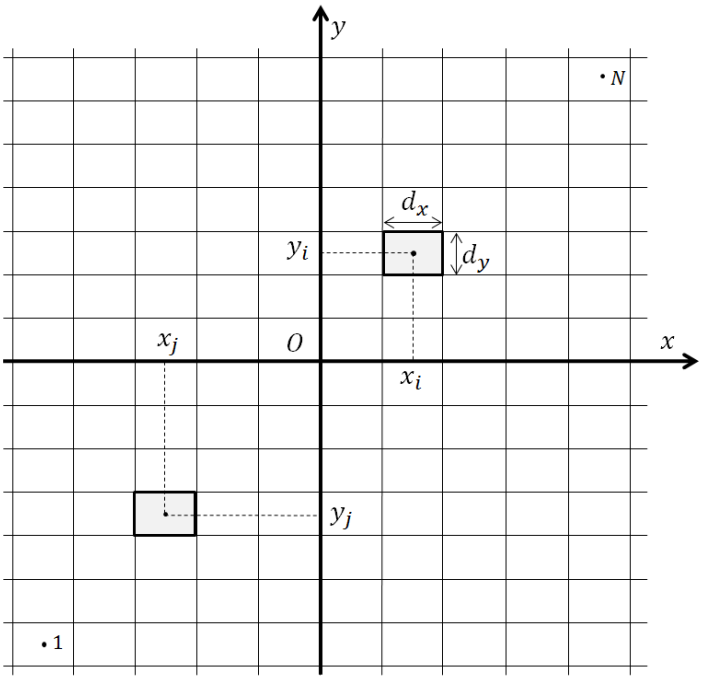


Figure 2. 2 : Discrétisation de la surface du contact

Avec A la matrice d'influence donnée dans le cas de la quasi-identité ($K = 0$) par :

$$A = \begin{pmatrix} A^{xx} & A^{xy} & 0 \\ A^{yx} & A^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A^{zz} \end{pmatrix} \tag{75}$$

En supposant que les composantes p_i du chargement surfacique p sont constantes sur chaque élément i, les composantes A_{ij}^{kl} des sous-matrices A^{kl} peuvent être calculées à partir de l'intégrale (48) comme suit :

$$\forall\ (i,j) \in [1,N]^2, \qquad A_{ij}^{kl} = \int_{y_j-d_y}^{y_j+d_y} \int_{x_j-d_x}^{x_j+d_x} T^{kl}(x_i, y_i; \zeta, \eta) d\zeta d\eta \tag{76}$$

Avec $k, l \in (x, y, z)$

Les coefficients A_{ij}^{kl} de la matrice d'influence A sont explicitement donnés dans l'annexe B.3.

2.2.2. Problème du contact normal

2.2.2.1. Formulation continue du problème de contact normal

La relation de comportement (72) qui définit le problème du contact normal peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_z(x,y) = \iint_C T^{zz}(x,y,\zeta,\eta)p_n(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{77}$$

Avec : $T^{zz}(x,y,\zeta,\eta) = \dfrac{1-\nu}{\pi G r}$ (78)

Rappelons aussi que la distance déformée e_z entre deux corps élastiques en contact définie dans la section 1.1.1. du premier chapitre est donnée par :

$$e_z(x,y) = u_z(x,y) + z(x,y) - \delta \tag{79}$$

Avec $z(x,y)$ la distance qui définit la séparation entre les surfaces des deux corps à l'état non déformé.
Le problème du contact normal consiste à trouver la zone de contact C ainsi que la pression p_n tout en respectant les conditions de contact suivantes :

- $e_z(x,y) \geq 0$; Non-pénétration
- $p_n(x,y) \geq 0$; Contact compressif
- $p_n(x,y)e_z(x,y) = 0$; Complémentarité

La condition de complémentarité à vérifier permet la distinction entre la zone C où les deux corps 1 et 2 sont en contact et la zone E où ils ne le sont pas (zone extérieure) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\forall\ (x,y) \in C \qquad e_z(x,y) = 0, p_n(x,y) > 0 \\ &\forall\ (x,y) \in E \qquad e_z(x,y) > 0, p_n(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

Pour un problème où le rapprochement δ est connu, la solution finale passe par la résolution des équations (77)-(79) puis par la vérification des conditions précédentes.
Il est aussi possible de résoudre le problème en imposant la charge normale F_n au lieu du rapprochement δ. Dans ce cas, il faut ajouter la relation suivante :

$$F_n = \iint_C p_n(\zeta,\eta)d\zeta d\eta \tag{81}$$

2.2.2.2. Formulation discrète du problème de contact normal

La surface du corps élastique étant discrétisée en N rectangles de surface $(d_x \times d_y)$, on considère dans cette partie une pression de contact p_{ni} uniforme sur chacun de ces rectangles. Dans le cas du contact normal, la relation de comportement sous sa forme matricielle (74) s'écrit de la manière suivante :

$$u_z = A^{zz}p_n \tag{82}$$

On peut également l'écrire sous sa forme discrétisée comme suit :

$$\forall\, i \in [1, N]\,, \qquad u_{zi} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{zz} p_{nj} \tag{83}$$

Il est possible d'utiliser directement l'expression analytique de A^{zz} établie par Love [54]. Le calcul analytique de A^{zz} à partir de l'intégrale (76) est donné dans l'annexe B.3.

D'autre part, l'écriture de la relation (79) sous sa forme discrétisée donne :

$$\forall\, i \in [1, N], \qquad e_{zi} = u_{zi} + z_i - \delta \tag{84}$$

Un point de coordonnées (x_i,y_i) est considéré à l'intérieur de la zone de contact si la distance déformée e_{zi} en ce point est nulle ($e_{zi} = 0$) et la pression p_{ni} est strictement positive ($p_{ni} > 0$). Pour chaque point i du domaine discrétisé, z_i représente la différence de hauteur de la surface entre les deux corps 1 et 2 en ce point. Pour un contact Hertzien où les courbures entre les deux corps sont constantes comme par exemple un contact entre deux sphères, z est une fonction quadratique et le problème peut être résolu analytiquement [2]. La solution analytique existe aussi pour d'autres géométries en contact de forme simple telle que l'indentation par une pointe conique ou cylindrique. En revanche, pour des géométries de forme quelconque, les courbures varient et la résolution analytique n'est plus possible. Une discrétisation en surface est donc nécessaire pour que le problème puisse être résolu numériquement en utilisant la méthode itérative MIM. Dans la section suivante, la procédure de résolution numérique du problème normal sera détaillée.

2.2.2.3. Méthode de résolution numérique

On considère dans cette partie N comme étant le nombre d'éléments de la surface potentielle de contact qui doit couvrir la surface réelle de contact. Le nombre d'éléments N est donc à priori supérieur au nombre réel d'éléments N_c inclus dans la zone de contact. L'algorithme de résolution itérative d'un problème à rapprochement δ connu suit les étapes suivantes :

1. On part de l'hypothèse que tous les points de la surface discrétisée sont inclus dans l'aire de contact. Ceci implique que $\forall\, i \in [1, N]$, la distance $e_{zi} = 0$. La géométrie des corps en contact étant connue et le rapprochement δ étant défini, les déplacements u_{zi} peuvent être calculés à partir de l'équation (84) ; $u_{zi} = \delta - z_i$
2. Le vecteur p_n est calculé directement à partir de la relation (82) par une inversion de la matrice A^{zz}. Plusieurs méthodes numériques ont été testées pour effectuer cette inversion et trouver le vecteur p_n et la méthode du gradient conjugué [55] a finalement été retenue car elle présente un coût de calcul légèrement inférieur à celui donné par la méthode Gauss Seidel [56] et nettement inférieur à celui donné par factorisation LU. Une comparaison du coût de calcul entre ces méthodes est présentée dans la section 2.4.
3. Les valeurs du vecteur p_n doivent vérifier la condition de complémentarité (4). Si les pressions p_{zi} sont positives dans C, on vérifie que les distances déformées e_{zi} sont nulles en ces points.

4. Certaines valeurs négatives peuvent apparaitre dans le vecteur pression p_n. Ces valeurs correspondent à des points qui sont en dehors de la surface de contact (appartenant à E). Les éléments correspondants sont donc à exclure de la zone de contact et la pression en ces points est mise à zéro. On vérifie également que les distances e_{zi} sont positives sur E.
5. On itère à partir de l'étape 2 jusqu'à ce que la condition (4) soit vérifiée.

Si la force normale F_n est définie comme c'est généralement le cas en ferroviaire, le rapprochement δ devient une inconnue supplémentaire. Une adaptation de l'algorithme précédent est donc nécessaire afin de résoudre le problème en tenant compte de cette inconnue. Il s'agit d'ajouter au système d'équation précédent la relation (81) qui s'écrit sous sa forme discrète comme suit :

$$F_n = d_x d_y \sum_{i=1}^{N} p_{ni} \tag{85}$$

Un vecteur p_n' contenant $N+1$ inconnues (les pressions p_{ni} et le rapprochement δ) est construit tel que $p_n' = \{p_n, -\delta\}^T$. Le système à résoudre devient :

$$u_z' = A^{zz'} p_n' \tag{86}$$

Pour que la relation (85) soit vérifiée, $A^{zz'}$ et u_z' sont modifiés à partir de A^{zz} et u_z de la manière suivante :

$$A^{zz'} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{87}$$

Et $u_z' = \left\{-z_1, \dots, -z_n, F_n/d_x d_y\right\}^T$

2.2.2.4. Résultats et validation

Afin d'évaluer la précision de la MIM et ainsi vérifier sa validité pour la résolution du problème normal, la solution numérique est comparée avec les solutions analytiques du problème de Boussinesq. Une synthèse de ces solutions existent dans le livre de Johnson [45] pour des géométries de contact de forme simple qui présentent une symétrie de révolution autour de l'axe z. Les travaux de Hertz [2] présentés dans la section 1.1.2. du premier chapitre sont sans doute les plus populaires. Ses études ont permis de trouver la distribution de la pression et les dimensions de la surface de contact pour des corps lisses et continus dont les courbures sont constantes. Un cas particulier est celui du contact entre deux sphères (Figure 2. 3(a)), les courbures A et B dans ce cas sont égaux. Love [54, 57] a donné la solution pour un espace semi-infini indenté par un cylindre et un cône rigide. Les travaux de Sneddon [58, 59] basés sur une approche différente de celle de Love ont conduit à ces mêmes résultats.

On s'intéresse dans cette partie particulièrement à deux géométries différentes représentées sur la Figure 2. 3, le contact entre deux sphères élastiques de rayons R1 et R2 et le contact entre un cône rigide avec un angle de pointe θ et un espace semi-infini. Pour tout point appartenant à la zone de contact, on peut montrer que la relation (79) entre le déplacement relatif normal et la géométrie des corps en contact s'écrit pour les deux géométries sous les formes suivantes :

Sphère
$$u_z(x,y) = \delta - \frac{r^2}{2R} \tag{88}$$

Cône
$$u_z(x,y) = \delta - \frac{r}{\tan\theta} \tag{89}$$

Avec $1/R$ la courbure relative donnée par $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$

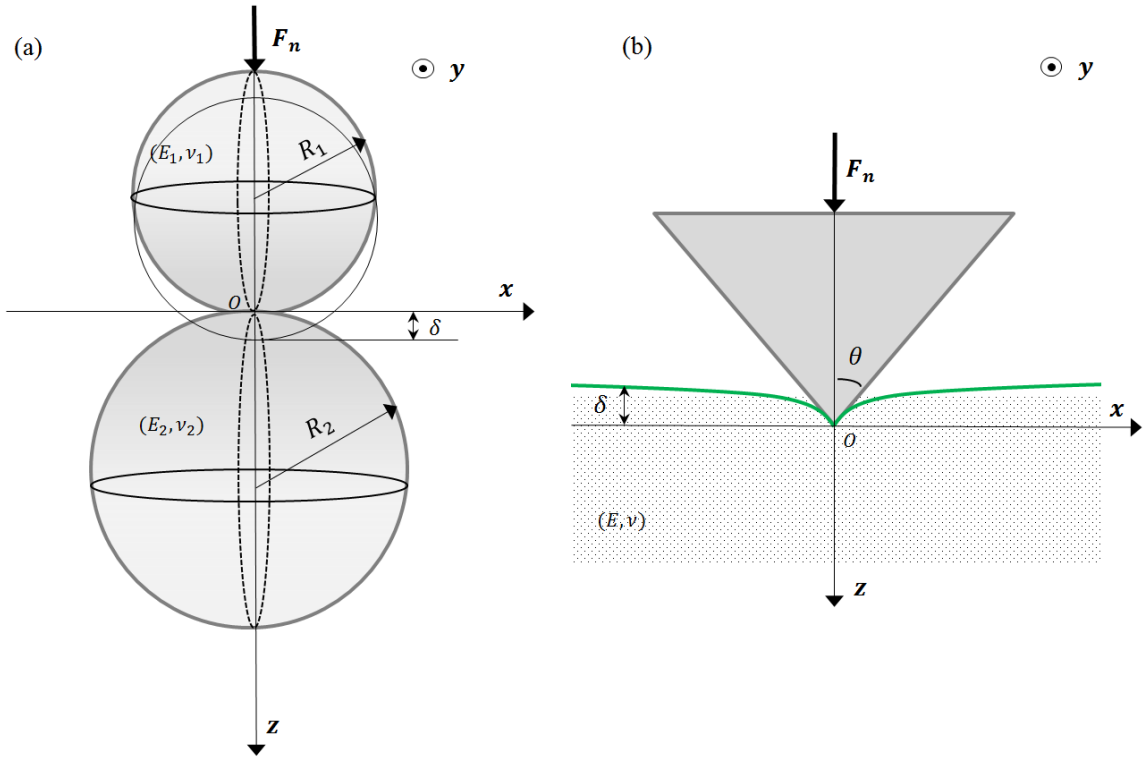


Figure 2. 3 : Contact normal pour deux géométries différentes (a) contact sphère/sphère (b) contact cône rigide/plan

Les deux géométries conduit à une aire de contact circulaire de rayon a donné par Hertz et Love respectivement par :

Sphère
$$a = \left(\frac{3F_n R}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{90}$$

Cône
$$a = \sqrt{\frac{2F_n \tan\theta}{\pi E^*}} \tag{91}$$

E^* est le module de Young équivalent donné par : $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$

La distribution de pression p_n est donnée dans l'aire de contact par :

Sphère
$$p_n(r) = \frac{3}{2} p_{nm} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \tag{92}$$

Cône
$$p_n(r) = p_{nm} \operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{r}\right) \tag{93}$$

Avec $p_{nm} = F_n/\pi a^2$ est la pression normale moyenne.

La loi de contact qui relie la charge normale F_n à δ est donnée par :

Sphère
$$F_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{\frac{3}{2}} \tag{94}$$

Cône
$$F_n = \frac{2}{\pi} E^* \tan\theta \, \delta^2 \tag{95}$$

Il convient de dire que pour le contact entre deux sphères élastiques, δ qui est la somme de δ_1 et δ_2 est appelé « rapprochement ». Dans le cas du contact entre le cône rigide et le massif semi-infini, le cône ne se déforme pas et δ se limite aux déplacements des corps rigides. Il est donc appelé « indentation ».

Les résultats analytiques précédents sont comparés à la solution de la MIM pour les deux géométries de contact présentées sur la Figure 2. 3. Les caractéristiques élastiques utilisées sont celle de l'acier avec un module d'Young $E = 210000$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.28$. Les rayons des sphères S1 et S2 sont respectivement égalent à $R1 = 300$ mm et $R2 = 460$ mm. Des éléments carrés de taille $d_x = d_y = 0.5$ mm sont utilisés pour obtenir la solution numérique avec cette géométrie. Pour la deuxième géométrie, l'angle de la pointe conique est $\theta = 80°$ et le maillage est fixé à $d_x = d_y = 0.15$ mm.

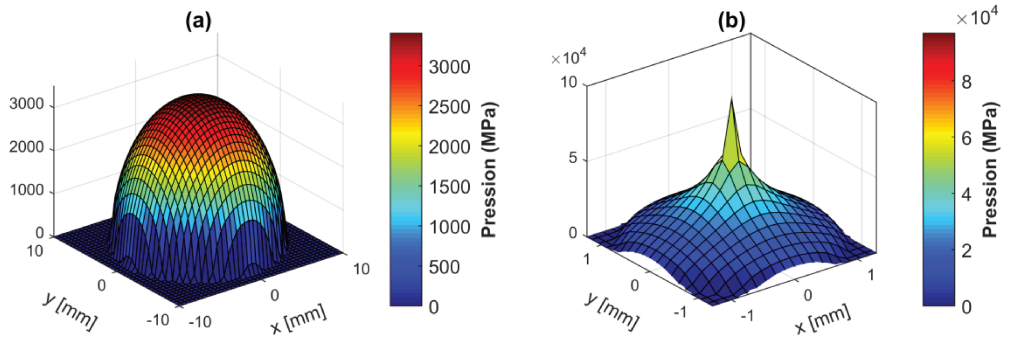


Figure 2. 4 : Distribution de la pression en 3D par MIM (a) Contact sphère/sphère (b) Contact cône/plan

La distribution 3D de la pression de contact avec MIM est représentée sur la Figure 2. 4. On remarque que la forme de l'empreinte de contact est circulaire pour les deux géométries (a) et

(b) ce qui est en accord avec la théorie pour des corps en contact présentant une géométrie de révolution (la théorie de Hertz pour (a) et la solution de Love pour (b)).

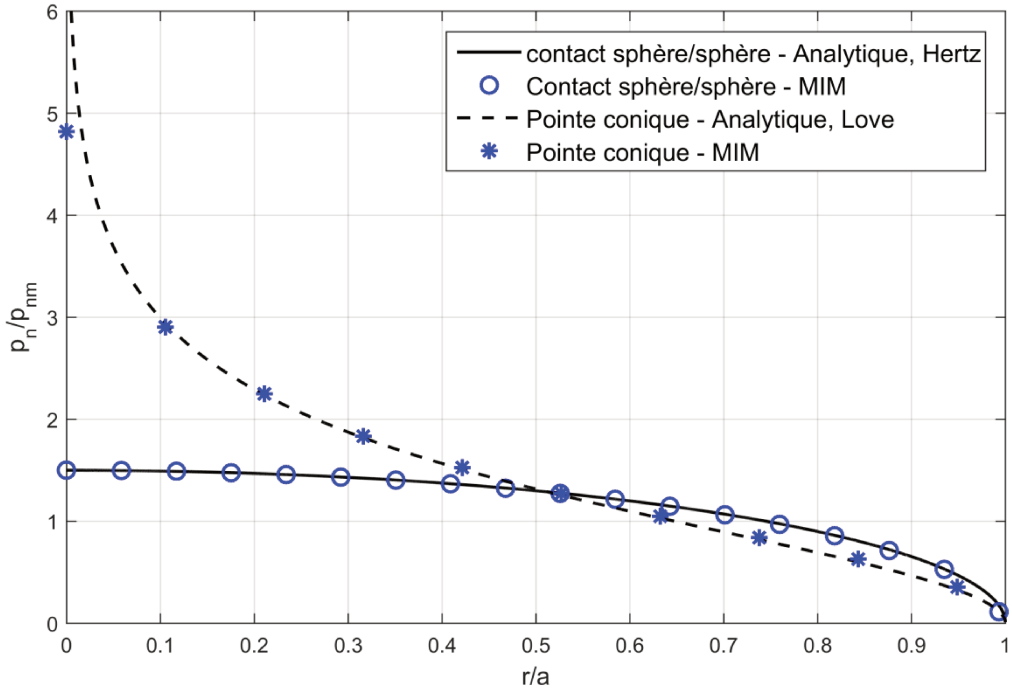


Figure 2. 5 : Distribution de la pression normalisée suivant l'axe $y = 0$, $\delta = 0.4$ mm

La Figure 2. 5 représente la distribution de la pression normalisée en fonction de la distance radiale normalisée suivant l'axe $y = 0$ pour les deux géométries de contact représentées sur la Figure 2. 3. La même valeur du rapprochement ou indentation δ est fixée dans les deux cas avec $\delta = 0.4$ mm. Les relations (92) et (93) sont utilisées pour obtenir la solution analytique. Un bon accord est trouvé dans les deux cas pour la pression normale entre la méthode numérique MIM et la solution analytique. Cependant, comme on peut le voir sur la Figure 2. 5 pour une distance radiale r/a proche de zéro, la MIM présente certaines limites dans cette région qui correspond au sommet de la pointe conique car la pression tend normalement vers des valeurs infinies dont la méthode numérique est incapable de traiter.

La Figure 2. 6 représente la loi de contact ou encore la force totale F_n en fonction de δ pour des valeurs entre 0 et 0.7 mm. Si δ est connu, F_n est déterminée numériquement à partir des pressions p_{ni} sur l'aire de contact comme suit :

$$F_n = \sum_{i=1}^{N_c} p_{ni}\, d_x d_y \tag{96}$$

Encore une fois, la solution numérique par MIM est en bon accord avec la solution analytique dans l'intervalle de valeurs étudiées. Ainsi, on peut conclure à partir des résultats précédents que la MIM présente une bonne précision pour la résolution du problème de contact normal.

Si les courbures des deux corps en contact ne sont pas constantes, le problème du contact normal est dit « non-Hertzien » et ne peut plus être résolu analytiquement mais numériquement avec la méthode des éléments de frontière type MIM ou CONTACT [60] ou encore avec la méthode des éléments finis. D'autres alternatives existent pour résoudre un contact non-Hertzien comme la méthode semi-Hertzienne [3] qui prend en compte la variation de la courbure dans une seule direction.

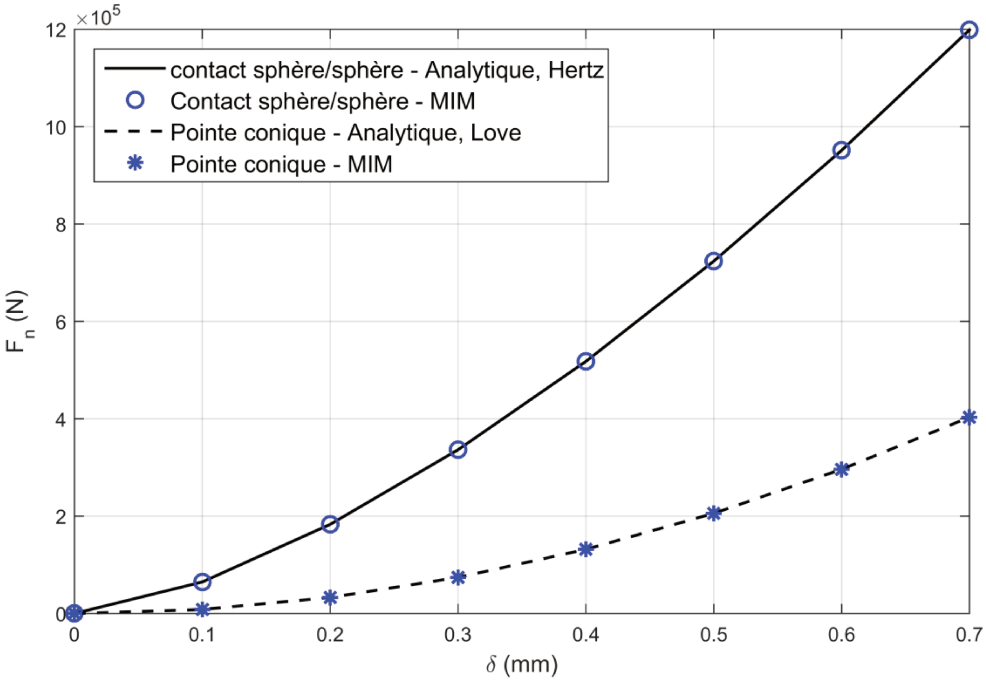


Figure 2. 6 : Loi de contact normal pour deux géométries de contact différentes

Selon les conditions cinématiques imposées aux deux corps en contact, le problème du contact tangentiel peut être classé en contact glissant et contact roulant. Le contact glissant considère les déplacements relatifs aux points appartenant à l'interface de contact dans la direction de la force tangentielle appliquée tandis que le contact roulant considère également la vitesse relative angulaire entre les deux corps. Par la suite, la MIM sera étendue pour résoudre d'abord le problème du contact glissant puis le problème du contact roulant sachant que ces deux conditions peuvent simultanément exister dans la réalité.

2.2.3. Problème du contact glissant

2.2.3.1. Formulation continue du problème de contact glissant

On considère dans cette section un contact glissant entre deux corps élastiques 1 et 2. Sous l'action des forces tangentielles F_x et F_y, les deux corps subissent une déformation élastique dans les deux directions x et y. Un glissement se produit entre deux points A1 et A2 de l'interface de ces deux corps qui sont initialement confondus [45]. Ce glissement est donné dans les deux directions x et y respectivement par :

$$\forall\ (x,y) \in C \qquad \begin{aligned} s_x(x,y) &= s_{x1}(x,y) - s_{x2}(x,y) = u_x(x,y) - \delta_x \\ s_y(x,y) &= s_{y1}(x,y) - s_{y2}(x,y) = u_y(x,y) - \delta_y \end{aligned} \tag{97}$$

$u_x = u_{x1} - u_{x2}$ et $u_y = u_{y1} - u_{y2}$ sont les déplacements élastiques subis par les deux points A1 et A2 respectivement dans les directions x et y. $\delta_x = \delta_{x1} - \delta_{x2}$ et $\delta_y = \delta_{y1} - \delta_{y2}$ sont les déplacements rigides entre les deux corps 1 et 2 évalués à deux points loin de l'interface déformée. On notera par s le vecteur glissement tangentiel de composante s_x et s_y dans le repère cartésien $(O\,; x, y, z)$.

Lorsque deux corps glissent l'un sur l'autre, l'aire de contact est divisée en deux zones ; une zone où les points en contact adhérent appelée zone d'adhérence et une zone où les points en contact glissent appelée zone de glissement. La distinction entre ces deux zones pour tout point (x,y) appartenant à la zone de contact se fait généralement à l'aide de la loi de Coulomb selon la condition suivante :

$$\forall\ (x,y) \in C \qquad \begin{cases} \tau_t(x,y) < \mu p_n(x,y) \\ s(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{Adhérence} \tag{98}$$

$$\begin{cases} \tau_t(x,y) = \mu p_n(x,y) \\ s(x,y) \neq 0 \\ \tau(x,y) = -\dfrac{s(x,y)}{s_t(x,y)}\tau_t(x,y) \end{cases} \qquad \text{Glissement} \tag{99}$$

Avec $\tau_t = \|\tau\| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$; $s_t = \|s\| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ respectivement les modules de l'effort de cisaillement et du glissement. μ est le coefficient de frottement

Le problème décrit par les équations (98) et (99) est non linéaire à cause de la relation entre les efforts tangentiels à travers la norme τ_t et la pression de contact p_n. Les points qui sont dans la zone d'adhérence subissent le même déplacement tangentiel imposé et l'effort tangentiel en ces points ne peut pas dépasser sa valeur limite μp_n. La direction de la vitesse du glissement peut être déduite de la dernière relation dans (99).

La résolution du problème de contact glissant consiste essentiellement à trouver les efforts tangentiels ainsi que la partition entre les zones d'adhérence et de glissement. La résolution numérique qui sera présentée dans la section 2.2.3.3. est réalisée à partir des relations de comportement (70) et (71), les relations décrivant la cinématique des deux corps (97) et la condition d'adhérence/glissement décrite par les relations (98) et (99).

2.2.3.2. Formulation discrète du problème de contact glissant

On définit par $u = \{u_x, u_y\}^T$ le vecteur du déplacement tangentiel de dimension $2N_c$ avec $u_i = u(x_i, y_i)$, $u_x = \{u_{xi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ et $u_y = \{u_{yi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$. N_c est le nombre d'éléments à l'intérieur de la zone de contact déduit à partir de la solution MIM du problème normal. On définit aussi par $\tau = \{\tau_x, \tau_y\}^T$ le vecteur effort tangentiel de dimension $2N_c$ avec $\tau_i =$

$\tau(x_i, y_i)$ $\tau_x = \{\tau_{xi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ et $\tau_y = \{\tau_{yi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$. On notera également par $s = \{s_x, s_y\}^T$ le vecteur glissement tangentiel avec $s_i = s(x_i, y_i)$, $s_x = \{s_{xi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ et $s_y = \{s_{yi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$.

La relation de comportement qui décrit le problème tangentiel peut être extraite sous sa forme matricielle directement à partir de la relation de comportement (74). On obtient :

$$u = A^{tt}\tau \tag{100}$$

Avec A^{tt} la sous matrice de dimension $2N_c \times 2N_c$ définit à partir de la matrice d'influence (75) par :

$$A^{tt} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} \tag{101}$$

L'écriture de (100) sous sa forme discrète conduit à la relation suivante :

$$\forall\, i \in [1, 2N_c] \qquad u_i = \sum_{j=1}^{2N_c} A^{tt}_{ij}\tau_j \tag{102}$$

La condition cinématique (97) sous sa forme discrète est donnée par :

$$\forall\, i \in [1, N_c] \qquad \begin{aligned} s_{xi} &= u_{xi} - \delta_x \\ s_{yi} &= u_{yi} - \delta_y \end{aligned} \tag{103}$$

Enfin, les relations (98) et (99) définissant la partition adhérence/glissement s'écrivent sous leur forme discrète comme suit :

$$\forall\, i \in [1, N_c] \qquad \begin{cases} \tau_{ti} < \mu p_{ni} \\ s_{ti} = 0 \end{cases} \quad \text{Adhérence} \tag{104}$$

$$\begin{cases} \tau_{ti} = \mu p_{ni} \\ s_{ti} \neq 0 \end{cases} \quad \text{Glissement} \tag{105}$$

Avec $\tau_{ti} = \sqrt{\tau_{xi}^2 + \tau_{yi}^2}$ et $s_{ti} = \sqrt{s_{xi}^2 + s_{yi}^2}$

La direction de l'effort tangentiel τ doit s'opposer au glissement s sur chaque élément i [45] tel que : $\tau_i = -\frac{s_i}{s_{ti}}\tau_{ti}$

2.2.3.3. Méthode de résolution numérique

Une fois le problème du contact normal est résolu et les pressions p_n sont déterminées, on peut procéder à la résolution du problème de contact tangent. La difficulté dans ce cas est de trouver les zones de contact où il y a glissement et les zones où il y a adhérence. Si les glissements rigides δ_x et δ_y sont connus, l'algorithme de résolution du problème de contact glissant suit les étapes suivantes :

1. On suppose d'abord que tous les points de la zone de contact C appartiennent à la zone d'adhérence. Ceci implique qu'initialement, aucun glissement ne se produit dans la zone de contact, c'est-à-dire que $\forall\, i \in [1, N_c],\ s_{xi} = s_{yi} = 0$. En remplaçant ces valeurs dans (103), on obtient :

$$\forall\, i \in [1, N_c] \qquad \begin{aligned} u_{xi} &= \delta_x \\ u_{yi} &= \delta_y \end{aligned} \tag{106}$$

2. La relation (106) implique que tous les points dans l'aire de contact subissent les mêmes déplacements tangentiels. Les vecteurs u_x et u_y sont donc déterminés et le vecteur u est construit. Le vecteur effort tangentiel τ est ensuite directement calculé à partir de la relation (100) par une inversion de la matrice A^{tt}.
3. On vérifie que les conditions (104) et (105) sont satisfaites. Si $\forall\, i \in [1, N_c]$, certaines valeurs τ_{ti} dépassent la limite μp_{ni} tel que $\tau_{ti} \geq \mu p_{ni}$, la loi de Coulomb est violée et la valeur de τ_{ti} en ces points est remise à μp_{ni} à l'incrément $k+1$ de la manière suivante :

$$\forall\, i \in [1, N_c], \text{ Si } \tau_{ti}^k \geq \mu p_{ni} \text{ alors :} \qquad \begin{cases} \tau_{xi}^{k+1} = \dfrac{\mu p_{ni} \tau_{xi}^k}{\tau_{ti}^k} \\ \tau_{yi}^{k+1} = \dfrac{\mu p_{ni} \tau_{yi}^k}{\tau_{ti}^k} \end{cases} \tag{107}$$

4. La méthode est itérée à partir de l'étape 2 jusqu'à ce que les conditions (104) et (105) soient vérifiées pour tous les points appartenant à l'aire de contact ce qui permettra une distinction entre la zone d'adhérence et la zone de glissement.

Si les forces tangentielles F_x et F_y sont connues et δ_x et δ_y sont inconnus, une adaptation de l'algorithme similaire à celle décrite pour la résolution du problème normal (section 2.2.2.3) doit être faite.

2.2.3.4. Résultats et validation

La théorie de Hertz qui résout le problème du contact normal entre deux sphères élastiques a été étendue par Cattaneo [61] et Mindlin [62] pour prendre en compte le glissement entre ces deux corps. Une synthèse de leurs principaux résultats peut être trouvée dans la monographie de Johnson [45]. Les résultats de la MIM pour la résolution du problème de contact glissant ont été validés dans cette section avec la solution analytique de Cattaneo-Mindlin dans le cas d'un contact entre deux sphères déjà pressées entre eux (Figure 2. 7). Les mêmes paramètres de calcul que ceux choisis pour la résolution du problème normal et présentés dans la section 2.2.2.4. ont été utilisés. Le déplacement rigide δ_x dans la direction x est égal à 0.06 mm alors que celui dans la direction y, δ_y est fixé à 0 mm. Un coefficient de frottement $\mu = 0.2$ entre les deux corps est également considéré.

Si on considère c la limite entre la zone d'adhérence et la zone de glissement, l'expression analytique de l'effort de cisaillement dans la zone de glissement, c'est-à-dire pour $c \leq r \leq a$, est donnée dans [45] par :

Pour $c \leq r \leq a$ $$\tau_t(x,y) = \tau_t'(x,y) = \mu p_n(x,y) = \mu p_{n0}\sqrt{(1-\frac{r^2}{a^2})} \quad (108)$$

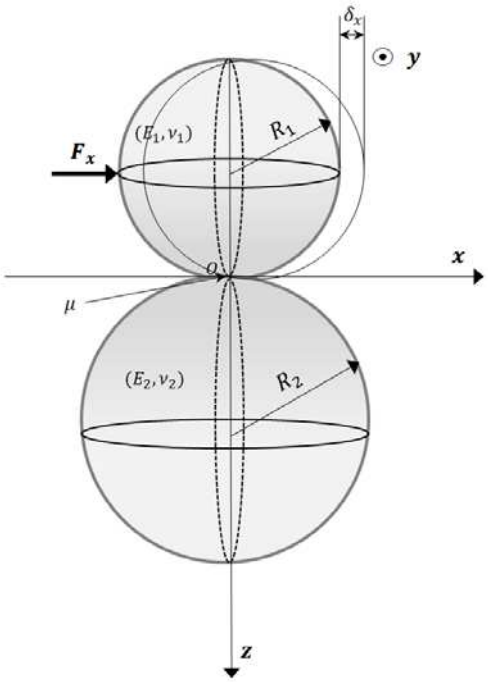


Figure 2. 7 : Contact glissant entre deux sphères

Dans la région où il y a adhérence, c'est-à-dire pour $r \leq c$, l'expression analytique de l'effort de cisaillement est donnée par la somme de τ_t' et τ_t'' avec :

pour $r \leq c$ $$\tau_t(x,y) = \tau_t'(x,y) + \tau_t''(x,y) = \tau_t'(x,y) + \frac{\mu c}{a} p_{n0}\sqrt{1-\frac{r^2}{c^2}} \quad (109)$$

La Figure 2. 8 montre une comparaison entre la solution analytique précédentes et solution numérique par MIM. Un très bon accord est trouvé entre ces deux solutions. La condition d'adhérence (104) est bien vérifiée, aucune valeur τ_{ti} ne dépasse la limite μp_{ni}. La distinction entre les zones d'adhérence et de glissement est représentée sur la Figure 2. 8.

La loi de contact qui exprime la force tangentielle $F_t = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ en fonction du déplacement tangentiel rigide $\delta_t = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$ pour un contact glissant entre deux sphères est également donnée dans [45] par :

$$F_t = \mu F_n - \mu F_n \left(1 - \frac{16aG\delta_t}{6(2-\nu)\mu F_n}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (110)$$

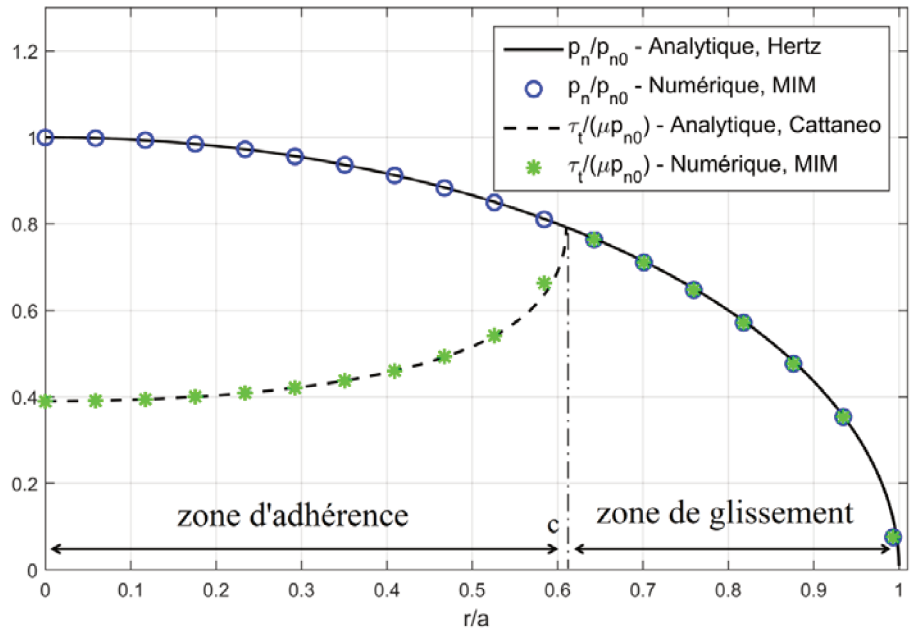


Figure 2. 8 : Pression et effort de cisaillement normalisé par MIM et avec la solution analytique dans le cas d'un contact entre deux sphères, $\mu = 0.2$

Cette loi de contact est étudiée dans ce travail pour des valeurs de δ_t entre 0 et 0.09 mm. La solution numérique de F_x et F_y et par conséquent F_t, est calculée en intégrant respectivement τ_x et τ_y sur toute l'aire de contact. La comparaison entre les résultats analytique et numérique représentée sur la Figure 2. 9 montre un très bon accord entre les deux solutions.

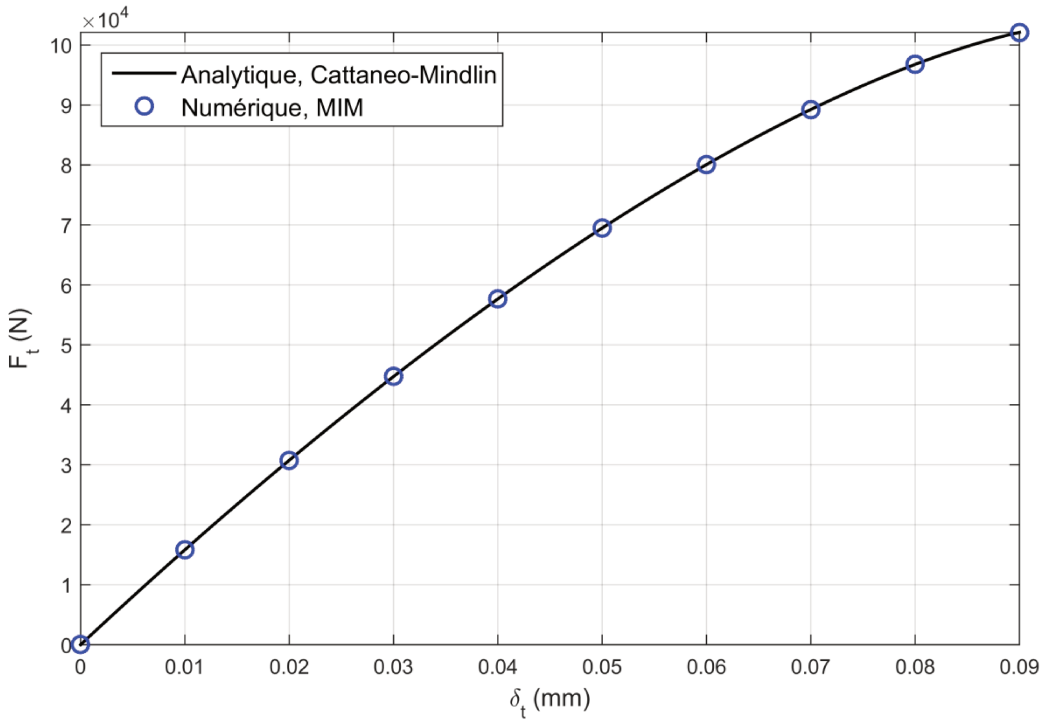


Figure 2. 9 : Loi de contact glissant entre deux sphères, $\mu = 0.2$

2.2.4. Problème du contact roulant

Plusieurs théories de contact roulant existent dans la littérature et permettent le calcul des efforts tangentiels sous l'action de différentes valeurs de pseudoglissements. Une synthèse de ces théories est présentée dans le chapitre 1. Basée sur la formulation variationnelle décrite dans la section 1.2.2.5 du premier chapitre, la théorie exacte de Kalker [13] est une célèbre méthode de résolution numérique du problème de Boussinesq-Cerruti qui a conduit au logiciel commercial CONTACT. Dans cette section, on propose d'étendre la méthode de résolution directe MIM pour l'étude du contact roulant.

2.2.4.1. Formulation continue du problème de contact roulant

On s'intéresse dans cette partie à l'étude du problème de contact roulant entre deux corps élastiques avec la présence d'un coefficient de frottement μ. Ce type de contact concerne plusieurs applications y compris celle du ferroviaire. En effet, la roue étant en roulement avec la vitesse angulaire ω_r, introduit en combinaison avec la vitesse d'avance du train V des glissements relatifs dit « pseudoglissements ». En comparaison avec le contact glissant qu'on a vu dans la section précédente, la description de la cinématique des deux corps en roulement est plus complexe car les expressions des vitesses de glissement prennent en compte les pseudoglissements ainsi des termes stationnaire et transitoire des déplacements élastiques. Cette description est donnée en détail dans le cas transitoire dans le chapitre 1 (section 1.2.1). Dans cette partie, la MIM est appliquée seulement dans le cas du roulement stationnaire, c'est-à-dire quand les forces et les géométries de contact ne varient pas au cours du temps. Dans ce cas, les termes $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ et $\frac{\partial u_y}{\partial t}$ sont nuls et les équations cinématiques s'écrivent $\forall\ (x, y) \in C$:

$$\begin{cases} \dfrac{w_x}{V} = \dfrac{\dot{s}_x}{V} = \xi_x - y\phi - \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ \dfrac{w_y}{V} = \dfrac{\dot{s}_y}{V} = \xi_y + x\phi - \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \end{cases} \tag{111}$$

Avec w_x et w_y les vitesses de glissement locales respectivement dans la direction x et y, ξ_x, ξ_y et ϕ sont respectivement les pseudoglissements longitudinal, transversal et de spin et V est la vitesse d'avance dans la direction x.

Les relations cinématiques (111) comportent deux dérivées partielles $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ qui nécessitent une discrétisation avec un développement de Taylor. En notant par $X = (x, y)$ la position du point M et par h une constante appartenant à $\mathbb{R}$, la formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} u_x(X + h) &= u_x(X) + h\frac{\partial u_x}{\partial x} + h\varepsilon(h) \\ u_y(X + h) &= u_y(X) + h\frac{\partial u_y}{\partial x} + h\varepsilon(h) \end{aligned} \tag{112}$$

En négligeant $\varepsilon(h)$, on obtient :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{u_x(X+h) - u_x(X)}{h}$$
$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{u_y(X+h) - u_y(X)}{h} \tag{113}$$

En notant par $u_x(X+h) = u'_x$ et par $u_y(X+h) = u'_y$, les relations (111) peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{w_x}{V} = \xi_x - y\phi - \frac{u'_x - u_x}{h} \\ \frac{w_y}{V} = \xi_y + x\phi - \frac{u'_y - u_y}{h} \end{cases} \tag{114}$$

La partition adhérence/glissement pour tout point (x, y) appartenant à la zone de contact se fait à l'aide de la loi de Coulomb qui peut s'écrire en fonction de la vitesse de glissement de la manière suivante :

$$\forall\ (x,y) \in C \qquad \begin{cases} \tau_t(x,y) < \mu p_n(x,y) \\ w(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{Adhérence} \tag{115}$$

$$\begin{cases} \tau_t(x,y) = \mu p_n(x,y) \\ w(x,y) \neq 0 \\ \tau(x,y) = -\frac{w(x,y)}{w_t(x,y)}\tau_t(x,y) \end{cases} \qquad \text{Glissement} \tag{116}$$

Avec $w_t = \|w\| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$ le module de la vitesse de glissement.

2.2.4.2. Formulation discrète du problème de contact roulant

On considère que $\forall\ i \in [1, N_c]$, $X_i = (x_i, y_i)$ sont les coordonnées d'un point i. Afin de tenir compte des déplacements tangentiels à la position $X_i + h$, on définit le vecteur déplacement tangentiel $u' = \{u'_x, u'_y\}^T$ tel que $u_i = u(X_i + h)$, $u'_x = \{u'_{xi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ et $u'_y = \{u'_{yi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$. La matrice B^{tt} à la position $X_i + h$ est donnée à partir de la matrice A^{tt} par :

$$B^{tt}(X_i) = A^{tt}(X_i + h) \tag{117}$$

Dans le cas du roulement stationnaire, u et u' sont des inconnues et τ' est égale à τ [13]. La relation de comportement dans ce cas est donnée par :

$$u' = B^{tt}\tau \tag{118}$$

Les relations cinématiques (114) s'écrivent sous la forme discrétisée de la manière suivante :

$$\forall\ i \in [1, N_c] \qquad \begin{cases} \frac{w_{xi}}{V} = \xi_x - y_i\phi - \frac{u'_{xi} - u_{xi}}{h} \\ \frac{w_{yi}}{V} = \xi_y + x_i\phi - \frac{u'_{yi} - u_{yi}}{h} \end{cases} \tag{119}$$

En notant par $w = \{w_x, w_y\}^T$ le vecteur vitesse de glissement avec $w_x = \{w_{xi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ et $w_y = \{w_{yi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ et par $c = \{c_x, c_y\}^T$ la partie rigide de la vitesse de glissement avec $c_x = \{c_{xi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ et $c_y = \{c_{yi}\}^T_{i\in[1,N_c]}$ puis en remplaçant (100) et (118) dans (119), on obtient la forme matricielle de la relation cinématique sous la forme suivante :

$$w = Vc - V\frac{(B^{tt} - A^{tt})\tau}{h} \tag{120}$$

Enfin la partition adhérence/glissement donnée par (115) et (116) s'écrit sous sa forme discrète comme suit :

$$\forall\, i \in [1, N_c] \qquad \begin{cases} \tau_{ti} < \mu p_{ni} \\ w_{ti} = 0 \end{cases} \qquad \text{Adhérence} \tag{121}$$

$$\begin{cases} \tau_{ti} = \mu p_{ni} \\ w_{ti} \neq 0 \end{cases} \qquad \text{Glissement} \tag{122}$$

Avec $w_{ti} = \sqrt{w_{xi}^2 + w_{yi}^2}$ et la direction de l'effort tangentiel τ doit s'opposer à la vitesse de glissement w [45] sur chaque point i tel que : $\tau_i = -\frac{w_i}{w_{ti}}\tau_{ti}$

2.2.4.3. Méthode de résolution numérique

L'extension du la MIM pour la résolution du problème de contact roulant dans le cas stationnaire part de la même hypothèse initiale que celle du problème de contact glissant :

1. On suppose que tous les points inclus dans la zone de contact appartiennent à la zone d'adhérence. Ceci implique que la vitesse de glissement est nulle pour tous ces points ($w = 0$).
2. Le vecteur glissement rigide c peut être construit à partir des valeurs prédéfinies des pseudoglissements et le vecteur effort tangentiel τ est calculé à partir de la relation (120). On choisit $h = d_x$.
3. On reprend l'étape 3 de l'algorithme de résolution du problème tangent. Si la loi de Coulomb n'est pas vérifiée et les conditions (104) et (105) ne sont pas satisfaites, on impose à l'incrément $k + 1$

$$\forall\, i \in [1, N_c], \text{ Si } \tau_{ti}^k \geq \mu p_{ni} \text{ alors :} \qquad \begin{cases} \tau_{xi}^{k+1} = \dfrac{\mu p_{ni}\tau_{xi}^k}{\tau_{ti}^k} \\ \tau_{yi}^{k+1} = \dfrac{\mu p_{ni}\tau_{yi}^k}{\tau_{ti}^k} \end{cases} \tag{123}$$

4. La méthode est itérée à partir de l'étape 2 jusqu'à ce que les conditions (104) et (105) soient vérifiées pour tous les points appartenant à l'aire de contact.

2.2.4.4. Résultats et validation

Le contact roulant a fait l'objet de plusieurs études durant le siècle précédent qui ont conduit à diverses théories dont les plus importantes sont présentées dans le chapitre 1 (section 1.2.2) Reynolds [63] était le premier à avoir étudié le contact roulant sans glissement entre deux corps avec des propriétés élastiques différentes. Il a fallu attendre jusqu'à 1926 pour que le problème du contact roulant avec frottement soit étudié par Carter [8] puis par Fromm [64] et par Föeppl [65]. La prise en compte du spin a été réalisée par Johnson [10] pour un contact entre une sphère et un plan élastique. Il a montré que le spin pur conduit à un pseudoglissement transversal ξ_y et par conséquent à une contrainte de cisaillement transversale. Kalker a également apporté plusieurs contributions dans le domaine du contact roulant comme la théorie linéaire [12] ou la théorie complète implémentée dans le logiciel commercial CONTACT [13]. Cette dernière sera considérée comme la solution de référence pour la comparaison avec la MIM qui a été étendue pour l'étude du contact roulant avec frottement dans le cas stationnaire.

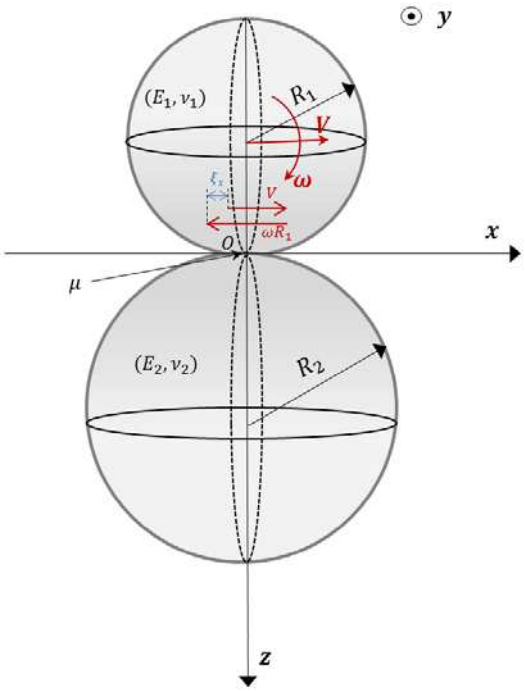


Figure 2. 10 : Contact roulant entre deux sphères

On s'intéresse pour l'étude du contact roulant avec MIM au cas d'un contact hertzien entre deux sphères de rayons R1 et R2 (voir Figure 2. 10). La sphère de rayon R1 roule sur la deuxième avec une vitesse angulaire ω et avance avec la vitesse V. Les paramètres de calcul pour la résolution du problème normal sont les mêmes que ceux utilisés auparavant dans la section 2.2.2.4. La solution du problème de contact roulant par MIM est comparée à la solution donnée par CONTACT pour trois situations de roulement différentes ; avec un pseudoglissement longitudinal pur $\xi_x = 3‰$, avec un pseudoglissement transversal pur $\xi_y = 3\,mrad$ et avec un pseudoglissement de spin pur $\phi = 0.0006$. Etant donné qu'on travaille dans le cas stationnaire, la solution finale ne dépend pas de la vitesse d'avance V. On

choisit dans ce cas $V = 35$ Km/h. On choisit également de fixer la valeur de la distance h à celle du pas d_x. Les contours et les vecteurs de la contrainte de cisaillement τ_t avec la MIM dans les trois cas cités précédemment sont représentés sur la Figure 2. 11 et comparés avec la solution de CONTACT (à droite). La solution donnée par MIM est en excellent accord avec celle de CONTACT.

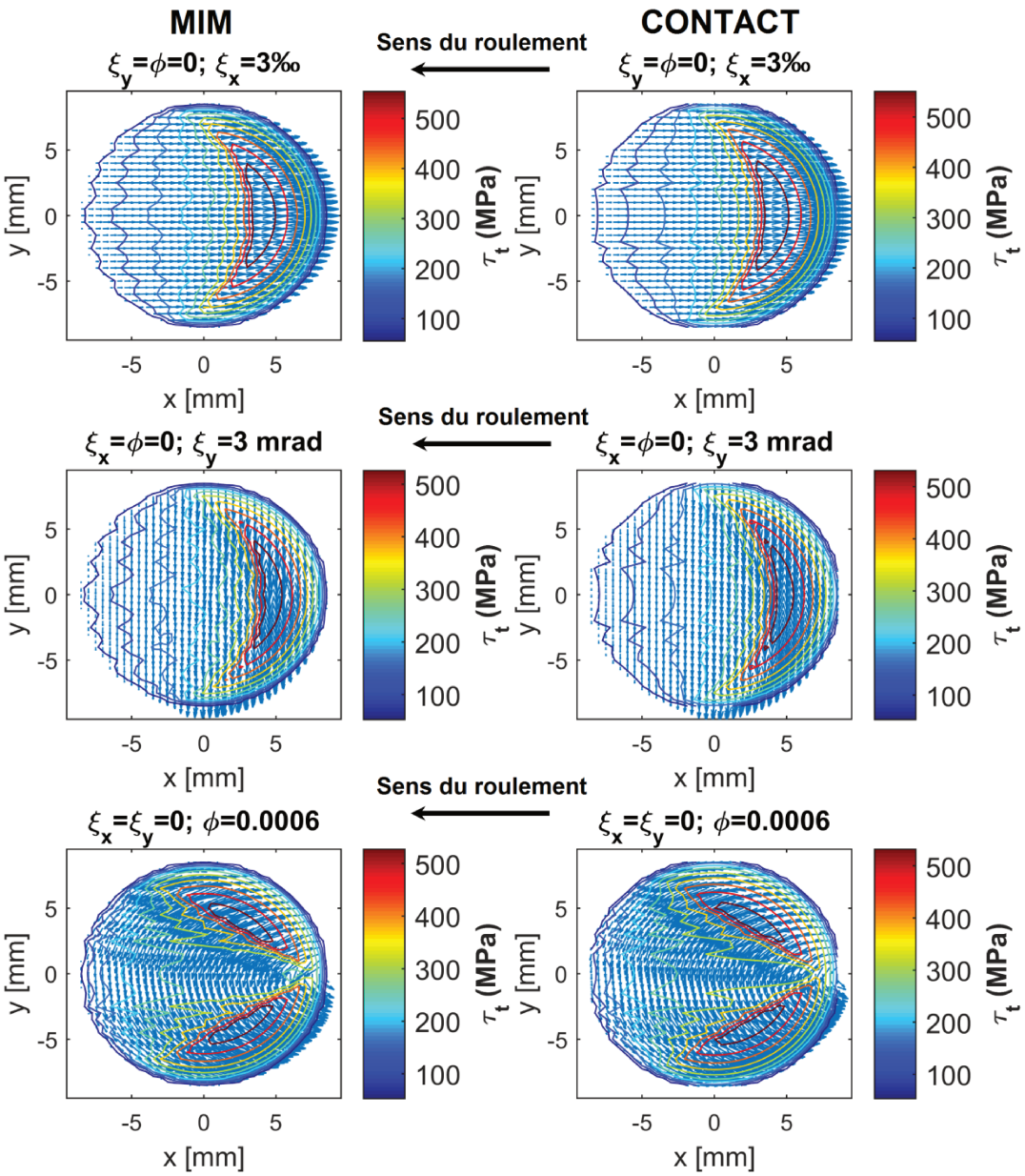


Figure 2. 11 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement τ_t en contact roulant entre deux sphères, avec MIM (à gauche) et CONTACT (à droite). En haut : pseudoglissement longitudinal pur, au milieu : pseudoglissement transversal pur et en bas : pseudoglissement de spin pur.

La Figure 2. 12 représente la contrainte de cisaillement normalisée $\tau_t/\mu p_n$ les trois cas de pseudoglissement définis dans le paragraphe précédent. En respectant les conditions d'adhérence/glissement définies par (104) et (105), on peut facilement déduire à partir de la Figure 2. 12 que les nœuds appartenant à la zone d'adhérence sont ceux pour lesquels

$\tau_t/\mu p_n$est inférieure à 1 et les nœuds appartenant à la zone de glissement sont ceux pour lesquels $\tau_t/\mu p_n = 1$ (en couleur rouge). Encore une fois la solution donnée par MIM est en très bon accord avec CONTACT.

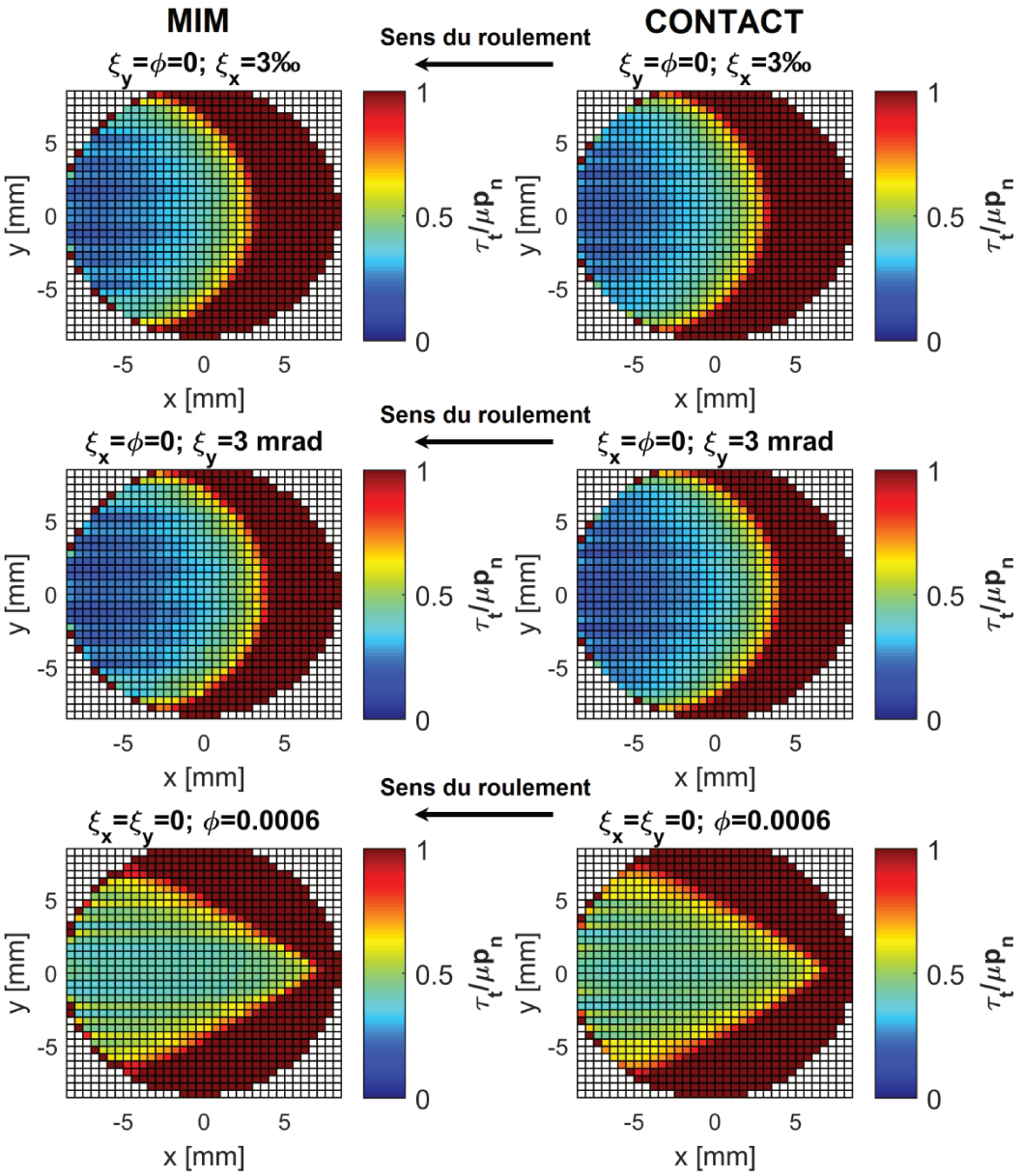


Figure 2. 12 : Contrainte de cisaillement normalisée $\tau_t/\mu p_n$ en contact roulant entre deux sphères, avec MIM (à gauche) et CONTACT (à droite). En haut : pseudoglissement longitudinal pur, au milieu : pseudoglissement transversal pur et en bas : pseudoglissement de spin pur.

La courbe de saturation dans la direction longitudinale est représentée sur la Figure 2. 13 avec les deux méthodes MIM et CONTACT. La solution est donnée pour 25 valeurs de pseudoglissement ξ_x qui sont comprises entre -20‰ et 20‰. Les deux courbes de saturation sont confondues comme le montre la Figure 2. 13. On peut donc déduire que la MIM donne une excellente précision par rapport au logiciel CONTACT pour toutes les grandeurs caractéristiques du problème de contact roulant.

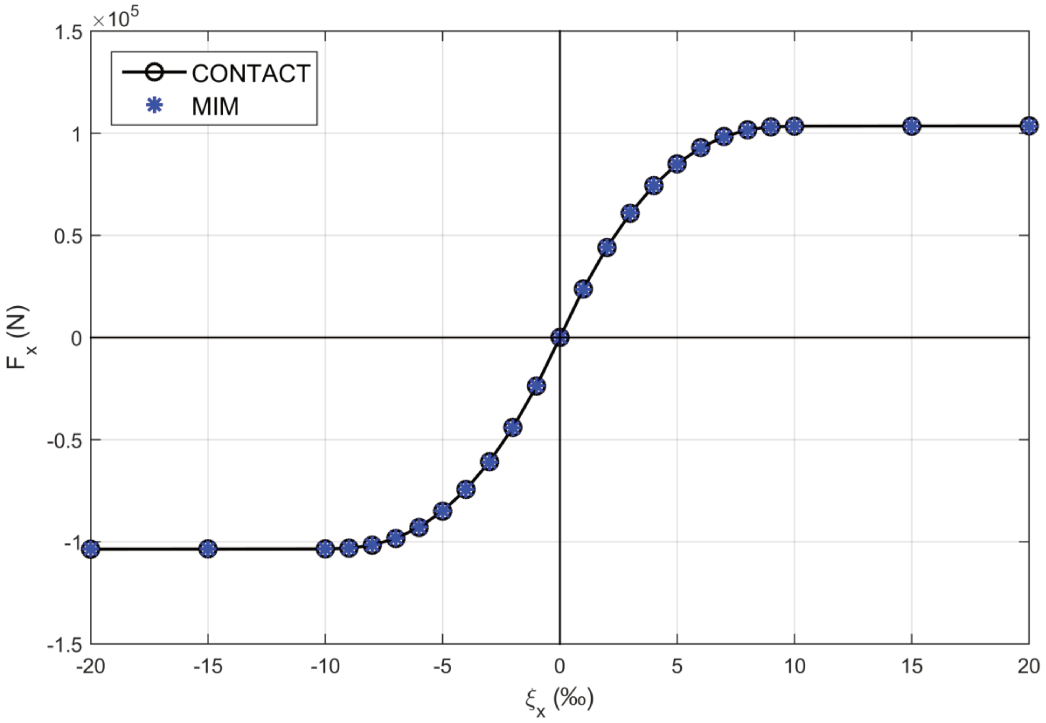


Figure 2. 13 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale en contact roulant entre deux sphères.

Pour des soucis de validation de la MIM, une géométrie de contact de forme simple a été choisie dans les sections précédentes. Le cas du contact Hertzien entre deux sphères est utilisé pour la résolution du problème de contact normal, glissant et roulant. Dans ce cas, $z(x, y)$ est une fonction quadratique dont les coefficients sont les courbures des deux corps dans les directions x et y. Dans la section suivante, la MIM sera étendue pour l'étude des corps de géométrie plus complexe tel que le contact non-hertzien où les courbures des deux corps peuvent varier.

2.3. Extension au contact non-Hertzien (contact roue-rail)

Pour plusieurs situations de contact en ferroviaire, la théorie de Hertz est suffisante pour résoudre le problème du contact normal tant que les hypothèses de celle-ci restent vérifiées. Si les courbures de la roue et du rail varient à proximité de la zone de contact, la théorie de Hertz n'est plus applicable et le contact est dit « non-Hertzien ». Dans ce cas, la solution peut être trouvée avec des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments de frontière type CONTACT ou MIM.

Dans ce qui suit, l'algorithme de résolution de la MIM est modifié de façon à pouvoir tenir compte de la variation des courbures du couple roue-rail dans la direction y. La roue sera considérée comme un corps de révolution de rayon R, ce qui veut dire que la courbure est constante dans la direction x [66].

Dans cette section, on s'intéresse à une situation réaliste de contact non-Hertzien du couple S1002/UIC60 qui existe pour la position centrée de l'essieu (pour $t_y = 0$) sur le rail incliné au

40ème. Afin de se mettre dans de telles conditions, on réalise avec le logiciel de dynamique ferroviaire VOCO [35] une simulation dynamique où on considère un train composé de 2 bogies et 4 essieux, qui roule sur une voie rectiligne pendant une certaine durée de temps. Il est ensuite facile d'exploiter les résultats de ce calcul pour déterminer d'abord le point de contact initial O à la position centrée comme indiqué sur la Figure 2. 14. On définit ensuite le repère local cartésien $(O; x', y', z')$ tel que (Oz') est la direction normale à la surface de contact et (ox') est confondue avec (Ox). $(O; y', z')$ est incliné par rapport à $(O; y, z)$ de l'angle au plan tangent Apt autour de l'axe (ox') (voir Figure 2. 14).

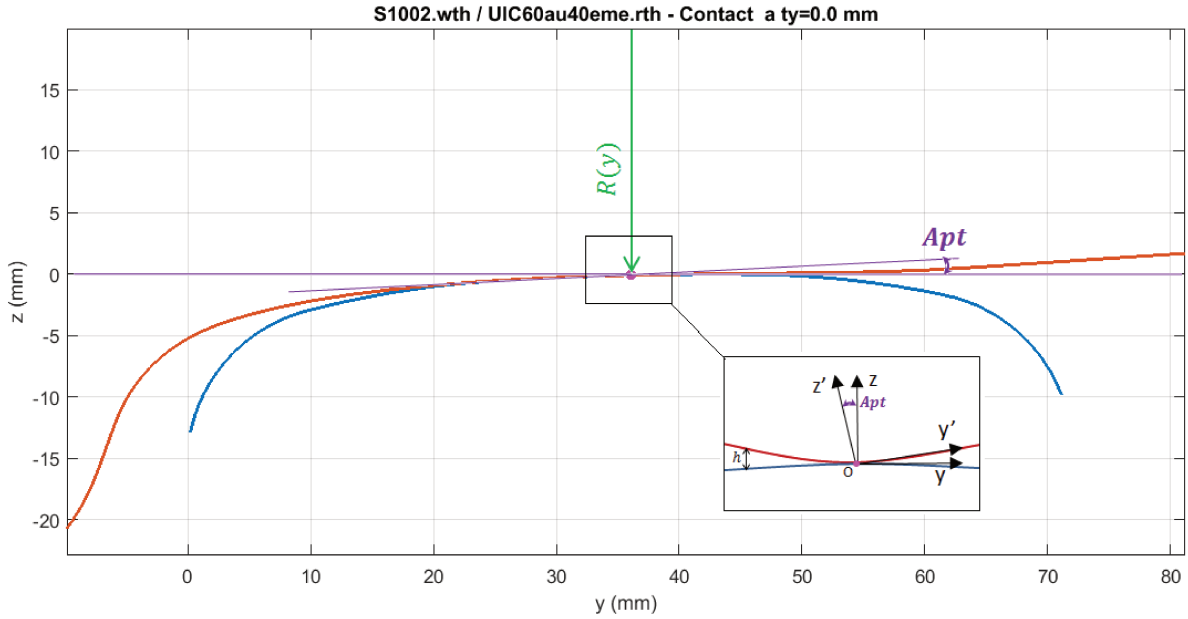


Figure 2. 14 : Contact en position centrée ($t_y = 0$) entre une roue gauche S1002 et un rail gauche UIC60 incliné au 40ème.

La séparation h entre les deux profils est initialement calculée dans le plan $(O; y, z)$. Afin de tenir compte de la séparation dans le plan $(O; y', z')$ qu'on notera Δz, on tourne h par l'angle au plan tangent $-Apt$ autour de l'axe x telle que $\Delta z = h.cos(Apt)$. La distance Δz est calculée pour différents points suivant y à proximité du point initiale de contact et qui sont séparés par une distance dy'. Il est maintenant possible de trouver, en procédant par interpolation, la séparation entre la roue et le rail $f(y)$ en fonction de n'importe quel point y appartenant à l'intervalle d'étude. La distance indéformée $z(x, y)$ s'écrit dans ce cas de la manière suivante :

$$z(x, y) = \frac{x^2}{2R_m} + f(y) \tag{124}$$

Avec R_m est le rayon de courbure effective donnée dans la direction normal à la surface de contact par :

$$R_m = \frac{R(y)}{cos(Apt)} \tag{125}$$

En écrivant la relation (124) sous sa forme discrète, on obtient :

$$\forall\, i \in [1, N] \qquad z_i = \frac{x_i^2}{2R_m} + f(y_i) \qquad (126)$$

La Figure 2. 15 représente la séparation Δz entre la roue et le rail à l'état indéformé dans le plan $(O; y', z')$. La fonction d'interpolation f est tracée pour tous les coordonnées y_i des éléments de la surface discrétisée.

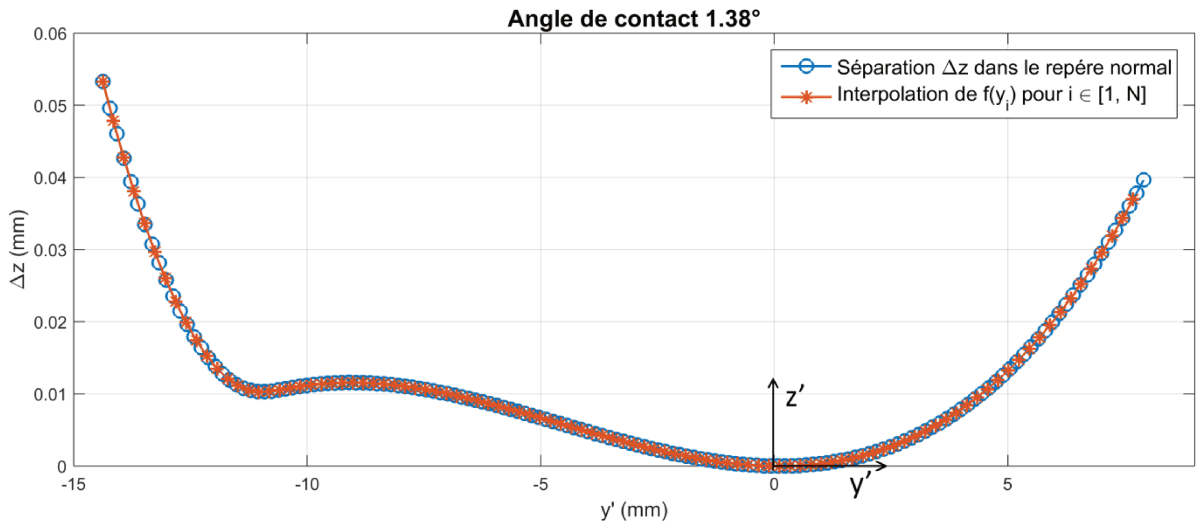


Figure 2. 15 : Séparation entre les profils de la roue et du rail dans le plan $(Oy'z')$ et interpolation entre les coordonnées y_i.

La résolution numérique du problème normal avec la MIM peut maintenant se faire dans le cas non-Hertzien en prenant en considération la relation (126) dans les étapes de calcul présentées dans la section 2.2.2.3. Le rapprochement δ étant inconnu, nous procéderons à l'étude avec la force normale F_n imposée qui est due dans le cas du contact roue-rail au poids du train. Il est donc nécessaire d'appliquer à l'algorithme de résolution, les modifications décrites dans le dernier paragraphe de la section 2.2.2.3.

Pour l'étude du couple S1002/UIC60, on choisit une force normale par roue égale à F_n=54530 N. L'angle au plan tangent à la position centrée est égale à Apt=1.38°. Les pseudoglissements ξ_x, ξ_y et ϕ sont calculés avec le logiciel VOCO à partir du comportement dynamique de l'essieu au dernier pas temps du calcul. En position centrée, le rayon de roulement de la roue droite est égal à celui de la roue gauche. Par conséquent, le pseudoglissement longitudinal est faible avec ξ_x=-0.161 ‰. Le roulement étant sur une voie rectiligne, l'angle de dérive α est très proche de zéro et le pseudoglissement transversal ξ_y est négligeable. Enfin, le spin ϕ est calculé avec sa formule donnée par $sin(Apt)/R$, ce qui donne ϕ=5.227e-05

La surface potentielle du contact est discrétisée autour du point initial de contact en 46×100 éléments de même taille avec $d_x = d_y =$ 0.223 mm. La distance indéformée Δz dans le repère normal est donnée pour 149 points autour du point initiale de contact pour y entre -14.374 mm et 7.908 mm.

La Figure 2. 16 montre la pression de contact pour le couple S1002/UIC60 (incliné au 40ème). On remarque dans la représentation 2D (Figure 2. 16(a)) que la zone de contact n'est plus elliptique mais peut être divisée en deux ellipses où la pression de contact est la plus élevée et qui sont reliées avec une zone de transition où la pression est moins élevée comme on peut clairement le voir sur la représentation 3D (Figure 2. 16(b)). On remarque aussi que la longueur de la zone de contact dans la direction y est en accord avec la distance indéformée représentée sur Figure 2. 15. Enfin, Le rapprochement dû à la force normale F_n est dans ce cas égal à δ=0.049 mm.

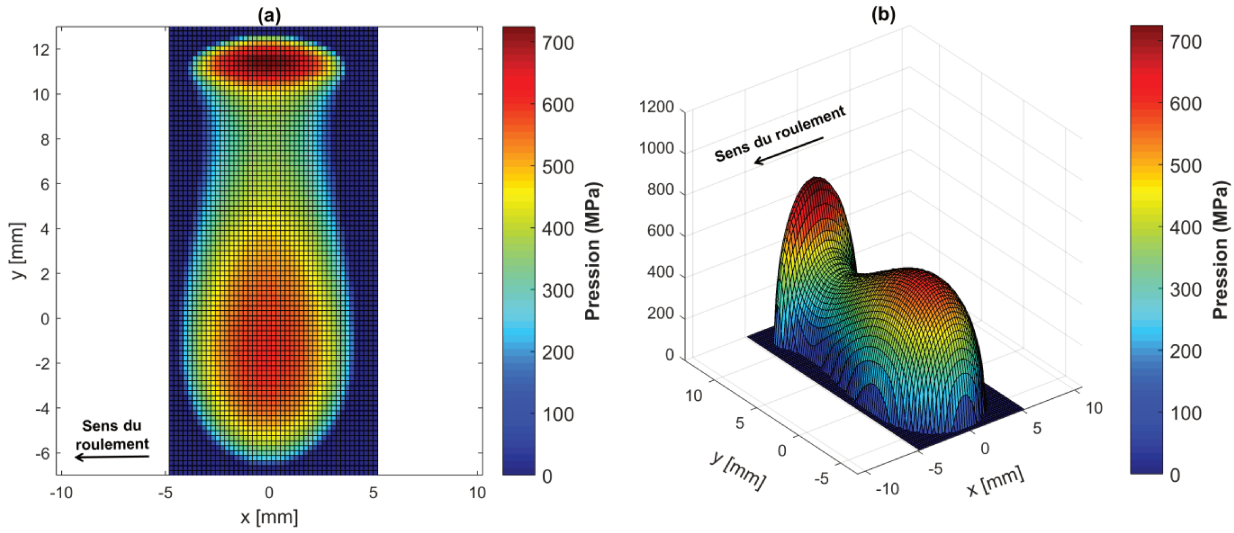


Figure 2. 16 : Pression de contact pour le couple S1002/UIC60 en position centrée, (a) représentation 2D, (b) représentation 3D.

Les vecteurs et les contraintes de cisaillement sont représentés sur la Figure 2. 17 pour un coefficient de frottement μ=0.36. Les efforts de cisaillement sont principalement dus au spin étant donné que les pseudoglissements longitudinal et transversal sont négligeables. Les flèches sont dirigées dans la direction de la contrainte de cisaillement τ_t et leur longueur est proportionnelle à son amplitude. Les contraintes de cisaillement dues au spin sont orientées dans le sens horaire. La contrainte de cisaillement est presque nulle sur le bord d'attaque puis augmente progressivement jusqu'à atteindre la saturation sur le bord de fuite.

Les zones d'adhérence/glissement sont déduites des contraintes de cisaillement normalisées représentées sur la Figure 2. 18. Un nœud est dans la zone de glissement si le rapport $\tau_t/\mu p_n$ est égal à 1 (en couleur rouge foncée sur la Figure 2. 18). Un nœud est dans la zone d'adhérence si le rapport $\tau_t/\mu p_n$ est inférieur à 1 (toute couleur différente du rouge foncé). Sous l'action du spin pure, la zone d'adhérence se situe sur le bord d'attaque et couvre la partie la plus large de la zone de contact.

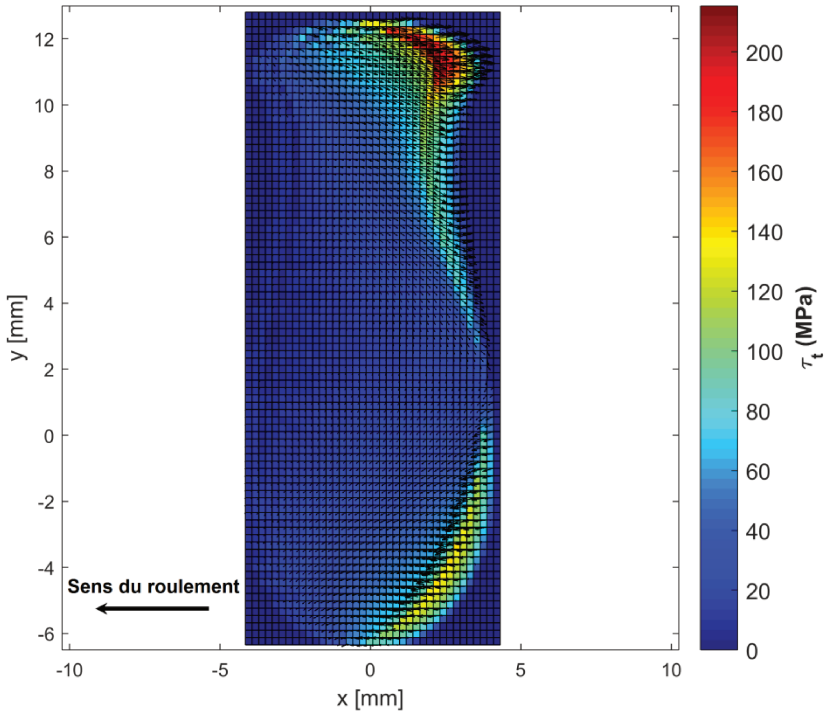


Figure 2. 17 : Vecteurs et Contrainte de cisaillement au contact pour le couple S1002/ UIC60 en position centrée. Avec ξ_x=-0.161 ‰, ξ_y=0 ‰ et ϕ=5.227e-05. μ=0.36.

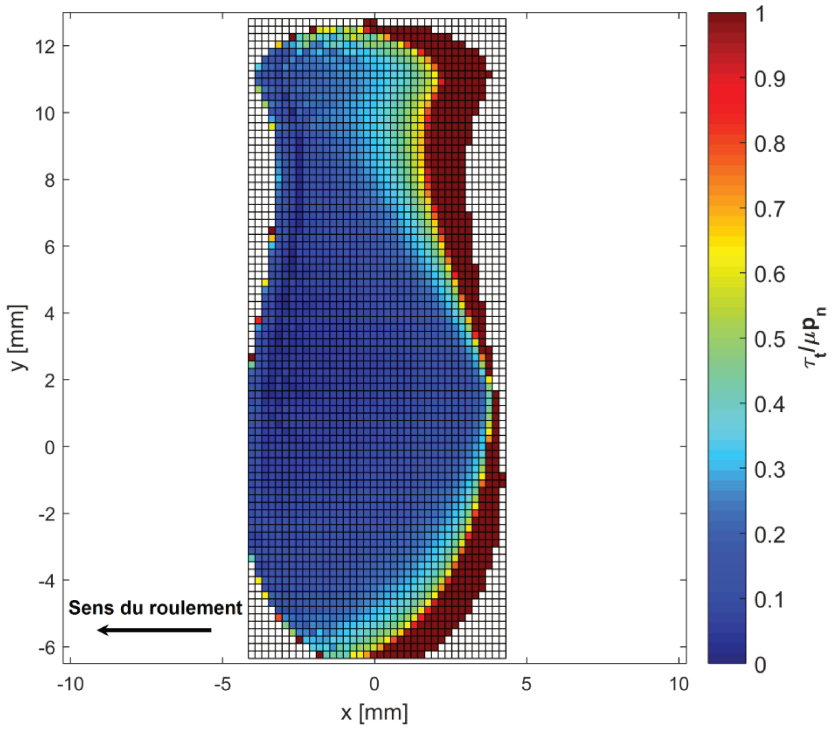


Figure 2. 18 : Contrainte de cisaillement normalisée $\tau_t/\mu p_n$ pour le couple S1002/ UIC60 en position centrée. Avec ξ_x=-0.161 ‰, ξ_y=0 ‰ et ϕ=5.227e-05. μ=0.36.

2.4. Comparaison entre MIM et CONTACT

Une étude de la sensibilité de maillage a été réalisée afin d'évaluer la MIM en terme de temps de calcul en comparaison avec le code CONTACT. Comme son nom l'indique, la MIM (Méthode d'Inversion de Matrice) nécessite au moins une inversion des matrices d'influences durant les étapes de résolution du problème normal et tangent. Cette inversion est l'étape la plus coûteuse de tout l'algorithme de calcul. Le temps de calcul dépend directement de la méthode de résolution numérique choisie. Il existe plusieurs méthodes qui permettent la résolution d'un système d'équations non linéaire. Le logiciel CONTACT utilise pour la résolution du problème normal une méthode nommée « Bound-Constrained Conjugate Gradients » (BCCG) qui dérive de la méthode du gradient conjugué [67] ainsi que deux versions adaptées de l'algorithme de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du problème de contact tangentiel transitoire [68] et stationnaire [69].

Dans ce travail, trois méthodes de résolution numérique ont été testées avec la MIM; la méthode de décomposition LU [70], la méthode du Gradient Conjugué (GC) [55] et la méthode de Gauss-Seidel (GS) [56]. Les deux premières méthodes ont été entièrement utilisées pour résoudre la totalité du problème de contact (problème normal et tangent) tans dis que la dernière a seulement été utilisée pour la résolution du problème normal et combinée avec la méthode GS pour la résolution du problème tangent. Le coût de calcul de ces méthodes est évalué dans le Tableau 2. 1 pour l'étude du problème de contact normal et tangentiel en utilisant différentes tailles d'éléments entre 0.01 et 0.05 mm.

Tableau 2. 1 : Comparaison du temps de calcul entre la MIM et CONTACT

Taille du maillage $d_x \times d_y$ (mm×mm)	Nombre d'élément Kn×Ln	Temps de calcul (s)			
		Factorisation LU	GS	GC+GS	CONTACT
0.05×0.05	20×20	1	0.2	0.1	0.1
0.03×0.03	35×35	12	6	3	0.3
0.02×0.02	50×50	163	53	24	1.1
0.015×0.015	70×70	1018	264	142	1.1
0.01×0.01	100×100	12919	2380	1278	17

Le résultat montre que la méthode de factorisation LU est la plus coûteuse en temps de calcul surtout pour les maillages les plus fins (environ 12919 s pour le maillage 0.1×0.01). La résolution du problème de contact avec la méthode GS permet une réduction importante de ce temps qui reste néanmoins élevé pour le maillage le plus fin (2380). Enfin, en remplaçant la GS par la méthode GC lors de la résolution du problème normal, le coût de calcul est divisé environ par deux pour toutes les tailles utilisées. Malgré cette amélioration, la combinaison du GC avec GS reste peu efficace en comparaison avec les algorithmes de résolution de CONTACT qui permettent l'obtention d'un coût de calcul extrêmement faible (17 s pour le maillage le plus fin 0.01×0.01). Ceci est essentiellement dû à l'utilisation avec l'algorithme BCCG de CONTACT d'un pré-conditionneur construit avec la transformation de Fourrier rapide (FFT) qui s'est montré très efficace et plus rapide que la méthode classique [67] (environ 100 fois plus rapide). De plus, l'adaptation faite sur l'algorithme de résolution du

problème tangentiel a permis d'améliorer les performances de cette méthode par un facteur supérieur à 2.

Plusieurs autres techniques de résolution existent dans la littérature et peuvent aussi être utilisées telles que la stratégie « Multi-level Multi-Integration » [71] ou encore la méthode basée sur la FFT présentée par Stanley et Kato [72]. Une synthèse des différentes techniques peut être trouvée dans [73]. Il est clair qu'à ce stade du travail, le code CONTACT est plus performant en termes de coût de calcul que la MIM surtout quand le maillage devient très fin. Cependant, l'objectif principal de ce chapitre n'est pas de rivaliser avec le logiciel commercial CONTACT mais de développer un outil numérique robuste capable de résoudre le problème du contact normal et tangentiel (glissant et roulant dans le cas stationnaire) du contact roue-rail en se basant sur la méthode des éléments de frontière et l'approximation de l'espace semi-infini.

Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode numérique directe dite « Méthode d'Inversion de Matrice » (MIM) basée sur l'approximation de l'espace semi-infini et sur l'approche de Boussinesq-Cerruti a été développée pour la résolution du problème de contact normal et glissant puis étendue pour résoudre le problème du contact roulant en régime stationnaire. Cette méthode a été validée avec succès dans le cas du contact normal et glissant en comparant la solution numérique avec les solutions analytiques pour des géométries de forme simple des corps en contact. La validation dans le cas du contact roulant est réalisée en comparant la solution avec le code CONTACT basé sur une formulation différente, la formulation variationnelle [13]. La MIM est appliquée dans le cas du contact Hertzien lorsque les courbures des corps en contact sont constantes et dans le cas du contact non-Hertzien où les courbures peuvent varier. Une application à une situation classique de contact non-Hertzien entre une roue S1002 et un rail UIC60 incliné au 40ème a montré que la forme de la zone de contact n'est plus décrite par l'ellipse de Hertz mais plutôt par deux formes elliptiques connectées entre eux. La comparaison avec le logiciel CONTACT a montré que la MIM présente une bonne précision mais avec un coût de calcul plus élevé. La réduction du coût de calcul de la MIM nécessite une optimisation des algorithmes de résolution numérique ou l'utilisation d'autres algorithmes plus performants et plus rapides, ce qui n'a pas été abordé dans ce chapitre car le travail vise essentiellement à développer un outil de résolution numérique du problème de contact roue-rail roulant et stationnaire, capable de gérer les différentes situations de contact ferroviaire telles que le contact non-Hertzien. La possession et la maitrise d'un tel outil nous permettra d'explorer d'autres thématiques qui restent à ce jour inaccessibles avec la méthode des éléments de frontière comme par exemple la prise en compte de la plasticité des corps en contact. Toutefois, il est important de mentionner qu'à ce jour ni la MIM ni CONTACT ne sont utilisées dans les codes de dynamique ferroviaire car, malgré l'avantage de CONTACT, le temps de calcul de ce dernier reste très élevé en comparaison avec les méthodes simplifiées telles que FASTSIM [17] ou la théorie linéaire de Kalker [12].

Bien qu'en comparaison avec la méthode des éléments finis, la MIM est largement plus rapide, cette dernière reste limitée au contact entre des corps élastiques et homogènes. Or,

l'élasticité linéaire ne permet pas une description fidèle de la réalité du contact roue-rail car ces deux corps subissent une plastification. Dans ce cas, la méthode des éléments finis s'impose comme l'approche la plus convenable à la résolution du problème car il est relativement simple de prendre en compte le comportement élasto-plastique des corps en contact. Dans le chapitre suivant, l'étude du contact roue-rail roulant sera abordée avec la méthode des éléments finis d'abord en élasticité linéaire puis en élasto-plasticité. L'influence de l'addition d'une couche mince et élastique à l'interface du rail sur les forces au contact sera aussi étudiée.

Chapitre 3

Modélisation par éléments finis du contact roue-rail roulant

Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude du contact roue-rail roulant à l'aide de la méthode des éléments finis. Les différents modèles présentés précédemment sont limités à la résolution du problème de contact entre deux corps lisses et élastiques. En effet, les théories de Kalker classiques sont incapables de prendre en compte le comportement élasto-plastique du matériau ainsi que l'existence naturelle ou artificielle d'une couche de troisième corps et de contaminants à l'interface séparant la roue et le rail [43]. Ce dernier paramètre est souvent considéré comme responsable de la dispersion constatée sur les mesures des coefficients de Kalker conduites durant les années 80s [1]. Pour en tenir compte, Certains auteurs ont étendu les théories de Kalker en considérant dans leurs modèles la présence d'une couche mince de troisième corps. Cependant, leurs modèles sont parfois limités à l'étude d'une couche élastique [44] ou encore au contact linéique [41].

Par sa facilité à introduire le comportement plastique du matériau et sa capacité à gérer les problèmes non-linéaires, la méthode des éléments finis s'impose comme une alternative aux théories de Kalker qui permet de surmonter les restrictions des autres modèles de contact roulant. Ainsi, l'étude du contact roue-rail roulant sera abordée dans ce chapitre avec la méthode des éléments finis d'abord en élasticité linéaire afin de vérifier la cohérence des résultats avec les autres méthodes puis en élasto-plasticité. L'influence sur les courbes de saturation et les coefficients de Kalker de l'élasto-plasticité ainsi que de l'addition d'une couche mince élasto-plastique à l'interface du rail sera également étudiée.

3.1. Schémas d'intégration temporelle

L'équation générale d'équilibre qui gouverne la réponse dynamique d'un système non linéaire sous sa forme discrétisée pour un élément fini est donnée par :

$$M\ddot{q}_{n+1} + C\dot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_{ext}(t_{n+1}) \tag{127}$$

Avec M la matrice de masse, C la matrice d'amortissement, K la matrice de rigidité. q le vecteur de déplacement, $\dot{q}$ le vecteur vitesse et $\ddot{q}$ le vecteur accélération. F_{ext} le vecteur des efforts extérieures à l'instant t_{n+1}. Le temps est discrétisé en pas de temps Δt et l'indice n correspond au temps $t_n = n\Delta t$.

La résolution numérique de cette équation différentielle se fait généralement en utilisant des schémas d'intégration temporelle directe qui peuvent être explicite ou implicite et qui sont basés sur la méthode des différences finies.

La méthode de Newmark-β [74] est une célèbre technique d'intégration temporelle utilisée dans la plupart des codes de calcul par éléments finis pour la résolution numérique des systèmes différentiels du second ordre qui peuvent être linéaires ou non linéaires comme le système (127). Ces algorithmes appartiennent à la famille des schémas de différences finies.

$$q_{\mathrm{n+1}} = q_n + dt\dot{q}_n + dt^2(\frac{1}{2}\ddot{q}_n + \beta(\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n)) \tag{128}$$

$$\dot{q}_{\mathrm{n+1}} = \dot{q}_n + dt((1-\gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}) \tag{129}$$

Avec β et γ sont les paramètres de contrôle.

Selon les valeurs de β et γ, on peut savoir si le schéma est conditionnellement ou inconditionnellement stable, et ainsi distinguer le type de schéma d'intégration qu'on veut utiliser. Il existe plusieurs schémas qui dépendent du choix de ces deux valeurs. Dans certains codes par élément finis comme Abaqus [75], le choix de ces paramètres conditionne le comportement dissipatif de l'analyse.

3.1.1. Schéma d'intégration explicite

Le schéma d'intégration explicite utilise fréquemment la méthode de différences finies centrées où la solution en déplacement à l'instant t_{n+1} est calculée entièrement en fonction de la solution à l'instant t_n. Cette condition est satisfaite dans l'équation (128) quand β=0. La méthode de différences finies centrées est construite à partir du schéma de Newmark-β pour β=0 et γ=1/2, avec ces valeurs, les équations (128) et (129) deviennent :

$$q_{\mathrm{n+1}} = q_n + dt\dot{q}_n + \frac{1}{2}dt^2\ddot{q}_n \tag{130}$$

$$\dot{q}_{\mathrm{n+1}} = \dot{q}_n + \frac{1}{2}dt(\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}) \tag{131}$$

En absence d'amortissement (C=0), la solution est trouvée comme suit : Le déplacement $q_{\mathrm{n+1}}$ à l'instant t_{n+1} est d'abord calculé à partir de l'équation de (130), ensuite, l'accélération $\ddot{q}_n$ est trouvée à partir de (127) après inversion de la matrice de masse M. L'avantage de la méthode explicite est que cette opération n'est pas coûteuse en temps de calcul, en comparaison avec la méthode implicite, car généralement la matrice de masse est diagonale donc facile à inverser. Enfin, le calcul de la vitesse $\dot{q}_{\mathrm{n+1}}$ à l'instant t_{n+1} devient possible en utilisant l'équation (131) puisque les vitesses et les accélérations à l'instant t_n sont maintenant connues et qu'en plus l'accélération à l'instant t_{n+1} a été déterminée. Cette procédure de résolution rend cette méthode facile à implémenter dans les codes par éléments finis.

L'inconvénient du schéma explicite est la nécessité d'avoir un pas de temps suffisamment petit pour pouvoir assurer la stabilité du schéma d'intégration. Une approximation de la limite de stabilité Δt_{cr} est donnée par la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy [76]. Cette condition définit cette limite comme étant le temps nécessaire pour qu'une onde élastique traverse le plus petit élément dans le modèle.

$$\Delta t_{cr} \approx \frac{l_{min}}{c_d} \tag{132}$$

Avec l_{min} est la plus petite taille d'élément dans le maillage, c_d est la vitesse de l'onde de dilation déterminée dans Abaqus [75] en calculant le module effectif hypo-élastique du matériau à partir de sa loi de comportement. Pour un matériau élastique et isotrope, c_d est donnée par :

$$c_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \tag{133}$$

Si la condition $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$ est respectée, on peut admettre que le schéma d'intégration est stable.

3.1.2. Schéma d'intégration implicite

3.1.2.1. Méthode de résolution

Le déplacement q_{n+1} au temps actuel t_{n+1} est calculé non seulement en fonction de la solution à l'instant t_n mais aussi en fonction de quelques quantités au même instant t_{n+1}. Plusieurs schémas de différences finies implicites existent dans la littérature [74, 77, 78, 79]. Ces schémas peuvent être construits à partir du schéma de Newmark-β en assignant à β et γ des valeurs particulières.

Nous présentons dans ce qui suit le schéma de l'accélération moyenne qui est donné pour β=1/4 et γ=1/2, dans ces conditions les équations (128) et (129) deviennent :

$$q_{\mathrm{n+1}} = q_n + dt\dot{q}_n + \frac{1}{4}dt^2(\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}) \tag{134}$$

$$\dot{q}_{\mathrm{n+1}} = \dot{q}_n + \frac{1}{2}dt(\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}) \tag{135}$$

En remplaçant (134) dans (127), et en considérant que le système comme non amorti (C=0), on obtient :

$$\left[M + \frac{1}{4}dt^2K\right]\ddot{q}_{n+1} = F_{ext}(t_{n+1}) - K\left(q_n + dt\dot{q}_n + \frac{1}{4}dt^2\ddot{q}_n\right) \tag{136}$$

La résolution avec le schéma d'intégration implicite commence par la détermination l'accélération $\ddot{q}_{n+1}$ à l'instant t_{n+1}. Le calcul de cette quantité nécessite l'inversion de la matrice $M + \frac{1}{4}dt^2K$ qui, contrairement au schéma explicite, n'est pas diagonale. Son inversion est donc plus coûteuse. Ensuite, le déplacement $q_{\mathrm{n+1}}$ à l'instant t_{n+1} est calculé à partir de l'équation (134) en fonction de valeurs connues à l'instant t_n (déplacement et vitesse) et aussi en fonction l'accélération $\ddot{q}_{n+1}$ qu'on a calculé dans la première étape. Enfin, la vitesse $\dot{q}_{\mathrm{n+1}}$à l'instant t_{n+1}est trouvée à partir de l'équation (135).

Le schéma implicite présente l'avantage d'être inconditionnellement stable pour des systèmes linéaires. Aucune restriction sur le pas de temps n'est requise contrairement au schéma explicite où la stabilité de la solution est conditionnée par le pas de temps critique qui peut être parfois très petit et donc peut conduire à une solution très coûteuse.

3.1.2.2. Stratégies de calcul dans le code Abaqus

Le logiciel par éléments finis Abaqus propose plusieurs stratégies de résolution avec le schéma d'intégration implicite. Le choix de la bonne stratégie dépend de l'application qu'on

veut étudier et de la solution qu'on souhaite obtenir. Deux stratégies de calcul sont adaptées à notre cas d'étude et permettent l'obtention d'une solution quasi-statique; La procédure implicite dissipation modérée (DM) et la procédure implicite quasi-statique (QS).

Quand l'étude dynamique se limite aux modes de basse fréquence, il est intéressant d'utiliser une certaine forme de dissipation numérique qui amortit les modes de vibration hautes fréquences qui peuvent participer. Plusieurs méthodes numériques ont ces propriétés d'amortissement comme la méthode Houbolt [78] ou encore la famille de méthode Newmark [74]. La procédure de calcul implicite DM utilise l'intégration temporelle de Hilber-Hughes-Taylor [79] qui est une extension de la méthode Newmark-β. Cette méthode permet un meilleur contrôle de la quantité d'énergie dissipée en pilotant d'autres paramètres que le pas de temps.

Comme son nom l'indique, la procédure implicite DM permet la dissipation d'une quantité modérée de l'énergie avec un amortissement visqueux, par plasticité si le comportement plastique est prise en compte dans le modèle ou par d'autres effets numériques [75]. Cette dissipation permet de réduire le bruit et d'améliorer la convergence sans trop dégrader la précision de la solution.

La procédure implicite QS utilise dans sa résolution le schéma d'Euler implicite [80] pour déterminer la réponse quasi-statique finale du système. Comme indiqué auparavant, la quantité d'énergie dissipée associée à l'intégration temporelle dépend du schéma utilisé et des paramètres de contrôle choisis. Le schéma d'Euler implicite est connu comme étant plus dissipatif que le schéma de Hilber-Hughes-Taylor [75]. Dans la procédure implicite QS, une dissipation considérable d'énergie est assurée ce qui garantit la convergence et la réponse quasi-statique finale. Le temps de calcul avec cette méthode n'est généralement pas élevé car de grands incréments de temps sont pris quand c'est possible.

Il existe également une troisième stratégie implicite dans le code Abaqus prédestinée à l'étude des phénomènes transitoires. Cette procédure utilise des incréments de temps petits pour obtenir avec précision la réponse vibratoire de la structure. Le choix des opérateurs de contrôle dans le schéma de Hilber-Hughes-Taylor garantit une dissipation minimale de l'énergie. Cette procédure n'est pas adaptée à notre cas d'étude car les non-linéarités liées au contact et au comportement du matériau en élasto-plasticité rendent la convergence très difficile.

L'étude du contact roue-rail roulant basée sur l'approche dynamique explicite est aussi possible avec le code Abaqus. Une telle approche est intrinsèquement adaptée à l'étude dynamique des phénomènes transitoires hauts fréquences. Plusieurs travaux sur la modélisation du contact roue-rail roulant avec l'approche dynamique explicite existent dans la littérature dont une synthèse est présentée dans la section 1.2.2.6 du premier chapitre.

3.1.3. Choix de l'approche de résolution

Dans le choix de la bonne approche de résolution d'un problème dynamique non-linéaire avec la méthode des éléments finis, le coût de calcul et la précision de la solution sont deux critères très importants.

La sélection de la valeur des opérateurs de contrôle des schémas d'intégration temporelle implicites permettent de choisir selon le type d'application, la quantité de dissipation numérique liée au pas de temps et ainsi la nature de la solution désirée. Dû à la nature implicite de résolution, la matrice de masse et la matrice de rigidité sont inversés et l'équilibre est vérifié à chaque pas de temps. En revanche, l'analyse dynamique avec le schéma d'intégration explicite utilise comme déjà mentionné, la méthode des différences finies centrées. Les déplacements et les vitesses sont calculés en fonction des quantités connues à l'incrément de temps précédent, ainsi, les matrices de masse et de rigidité n'ont pas besoin d'être inversés et même d'être construites, ce qui implique un coût de calcul moins élevé qu'avec le schéma implicite. Cependant, la nécessité d'avoir un pas de temps suffisamment petit pour garantir la stabilité, rend le coût global du calcul plus élevée comparée au schéma implicite pour un problème qui n'est pas fortement non linéaire.

Le choix entre le schéma implicite et explicite est parfois évident. Cependant, dans l'étude du contact roue-rail roulant, le choix dépend des grandeurs physiques qu'on souhaite étudier. L'expérience est dans ce cas le meilleur moyen pour trancher.

Dans ce travail, les deux schémas implicite et explicite seront utilisés avec le code Abaqus puis comparés avec une solution de référence en élasticité donnée par le logiciel CONTACT. Ce code est largement utilisé dans le domaine du ferroviaire pour valider les différents modèles de contact (analytiques, semi-analytiques ou même par éléments finis).

À l'exception de la méthode implicite QS présentée dans la section précédente qui, par la nature de son schéma dissipatif, donne une réponse quasi-statique, toutes les autres méthodes et schémas sont adaptés pour résoudre un problème dynamique transitoire. Pour assurer que les résultats par éléments finis soient comparables avec les solutions statiques comme la théorie de Hertz ou CONTACT, l'état quasi-statique doit être atteint durant le calcul. Il est donc essentiel de minimiser les vibrations et les oscillations liées au pas d'intégration. Pour ce faire, différents types d'amortissement peuvent être appliqués au modèle pour assurer la réponse quasi-statique.

3.2. Contact roue-rail élastique

3.2.1. Gestion du contact en éléments finis (Abaqus)

Lorsque deux solides se touchent, des efforts sont transmis de l'un à l'autre par leurs surfaces de contact. Dans certains cas, seule la contrainte normale est transmise. Le comportement dans la direction normale est modélisé dans Abaqus à travers l'option « *Hard Contact* » en considérant le contact entre les deux corps comme étant parfait. Les surfaces ne transmettent

aucune pression à moins que les nœuds esclaves entrent en contact avec la surface maître. Aucune pénétration n'est permise avec cette option.

S'il y a frottement, des contraintes de cisaillement peuvent aussi être transmise en appliquant aux nœuds la loi de Coulomb. L'option « *Penalty* » permet de saisir la limite des contraintes de cisaillement transmises en définissant directement un coefficient de frottement non nul.

Afin de pouvoir transférer une charge entre les éléments de deux corps différents, les nœuds de ceux-ci doivent être connectés entre eux. Les interactions entre les particules maillées sont définies par des conditions qui évitent la pénétration des surfaces. La procédure implicite dans Abaqus/Standard propose plusieurs formulations de contact. Chaque formulation est basée sur le choix d'une méthode de discrétisation du contact parmi les deux méthodes « *node-to-surface* » et « *surface-to-surface* ». L'approche « *surface-to-surface* » est choisie au détriment de « *node-to-surface* » dans notre étude car, comme le montre l'exemple fourni dans [75], celle-ci assure une meilleure précision des résultats liés aux contraintes et à la pression de contact. Contrairement à « *node-to-surface* », la méthode de discrétisation « *surface-to-surface* » considère la forme des deux surfaces maître et esclave. Les conditions de contact sont appliquées dans des régions à proximité des nœuds esclaves plutôt qu'individuellement au niveau de chaque nœud esclave. Ces régions sont approximativement centrées sur les nœuds esclaves, de sorte que chaque effort est appliqué non seulement à un seul nœud esclave mais aussi à tous les nœuds esclaves adjacents.

La procédure explicite dans Abaqus/Explicit fournit deux méthodes pour appliquer un effort donné ; « *Kinematic contact method* » et « *Penalty contact method* ». La première méthode évalue l'état cinématique du modèle à travers une prédiction de la configuration du contact sans considérer les conditions de contact. L'algorithme détermine ensuite les nœuds esclaves dans la configuration prédite qui pénètrent la surface maître. La profondeur de pénétration de chaque nœud esclave ainsi que plusieurs autres paramètres sont utilisés pour calculer la force de résistance requise pour opposer la pénétration. Si le comportement « *Hard contact* » est défini, cette force est calculée de sorte que le nœud esclave contacte exactement la surface maître.

Enfin, de grands déplacements relatifs de translation et de rotation étant possible entre la surface de la roue et celle du rail, la formulation de glissement entre les nœuds de la surface esclave par rapport à la surface maître est fixée à grand glissement à travers l'option « F*inite sliding* ». Cette option autorise les corps à se mouvoir selon une grande amplitude.

3.2.2. Présentation du modèle numérique

Le logiciel commercial Abaqus est utilisé dans ce chapitre pour modéliser le contact roulant entre la roue et le rail en élasticité et en élasto-plasticité. La méthode Newmark-β est utilisée dans ce code pour résoudre les équations différentielles générales et trouver la réponse dynamique du système. Dans ce travail, les deux schémas d'intégration explicites et implicites sont utilisés et le résultat en élasticité est comparé à une même solution de référence donnée par le logiciel CONTACT. Cette comparaison a permis l'évaluation de la précision de chacune de ces méthodes ainsi que leur coût de calcul. La méthode la moins coûteuse et qui

donne une meilleure précision est ensuite favorisée pour l'étude des courbes de saturations qui, en raison des simulations répétées nécessaires, est énormément coûteuse.

Le calcul de la réponse dynamique avec le schéma d'intégration implicite est effectué pour les deux applications décrites dans les sections précédentes, la procédure implicite DM et la procédure implicite QS.

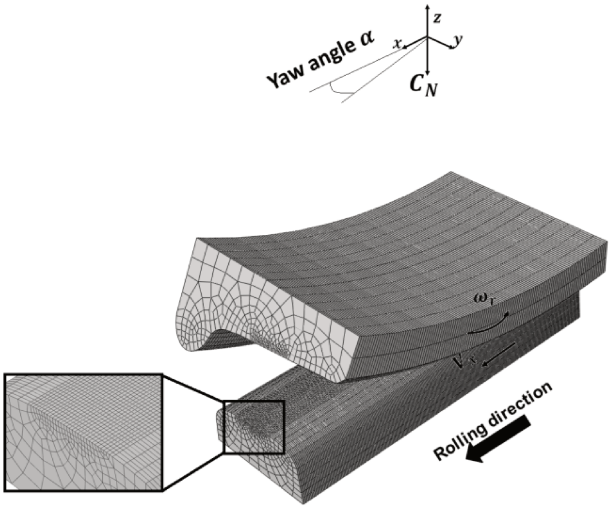


Figure 3. 1 : Maillage du modèle EF et raffinement sur la bande de roulement

Lors de cette étude, on ne s'intéresse qu'aux phénomènes qui se déroulent à proximité de la zone de contact. Les traverses, attaches et semelles élastomère ne sont pas ici modélisées. De plus, La partie supérieure de la roue ainsi que la partie inférieure du rail ont été enlevées du modèle 3D afin de l'alléger et de réduire le nombre d'éléments et par conséquent de réduire le temps de calcul. La roue et le rail ont été maillés avec des éléments hexagonaux à 8 nœuds. Le maillage est raffiné sur toute la bande de roulement (Figure 3. 1) délimitée par les deux plans autour du point de contact qui a été déterminé par une procédure analytique élaborée sur Matlab et qui sera expliquée dans le paragraphe suivant. Zhao [27] a montré qu'un maillage 1.3×1.3 mm peut assurer une précision satisfaisante pour la plupart des applications en ingénierie. L'étude de la sensibilité du maillage réalisée dans la section 3.2.4.1 nous a permis de choisir une taille de maillage 0.5 mm pour l'étude du problème normal et tangentiel avec un nombre total d'éléments de 382420, et une taille de maillage de 1 mm pour l'étude des courbes de saturation avec un nombre total d'éléments de 91000.

Tous les profils de roue et de rail ont été préparés avec une routine Matlab sur la plateforme Expro [81] (inclinaison du rail, point de contact, rayon de roulement, lissage des profils…) avant de les importer dans le modèle élément finis. Le profil de la roue sur le schéma de la Figure 3. 1 représente un S1002 modifié avec une table conique (la bande de roulement a été remplacé par un cône) avec une conicité au 1/10eme afin de pouvoir augmenter l'effet de spin tout en s'éloignant d'une zone de transition de courbure du rail, et le rail est un UIC60 incliné au 1/10eme et dont la longueur est de 250 mm. Les deux surfaces en contact sont considérées comme lisses. L'algorithme « *surface-to-surface* » est utilisé pour définir l'interaction entre la

roue et le rail en présence d'un coefficient de frottement μ=0.2. La formulation de contact frottant par pénalisation décrite dans la section précédente, a été employée dans cette étude.

La roue et le rail sont tous les deux en acier R900A couramment utilisés pour la fabrication des rails avec un module d'Young E=210 GPa et un coefficient de poisson ν=0.28, la densité de cet acier est ρ=7800 kg/m3. Tous les paramètres du modèle sont présentés dans le Tableau 3. 1.

Tableau 3. 1 : Paramètres du modèle

Paramètre	Valeur
Charge par roue C_N	7.5 kN
Vitesse de roulement V_x	50 km/h
Module d'Young E	210 GPa
Coefficient de poisson ν	0.28
Densité ρ	7800 kg/m^3
Limité d'élasticité σ_e	489 MPa
Coefficient de frottement μ	0.2
Diamètre de la roue d_0	920 mm
Conicité de la roue	1/10
Inclinaison du rail	1/10
Longueur du rail	250 mm

Certaines valeurs des paramètres utilisés dans ce travail ne sont pas celles utilisées dans les situations réelles de contact roue-rail dans le domaine du ferroviaire, comme l'inclinaison du rail et la conicité de la roue. Ces valeurs ont été sélectionnées uniquement pour assurer une zone de contact elliptique centrée (selon les conditions de Hertz) de façon à ce que les résultats puissent être facilement comparés avec les différentes méthodes.

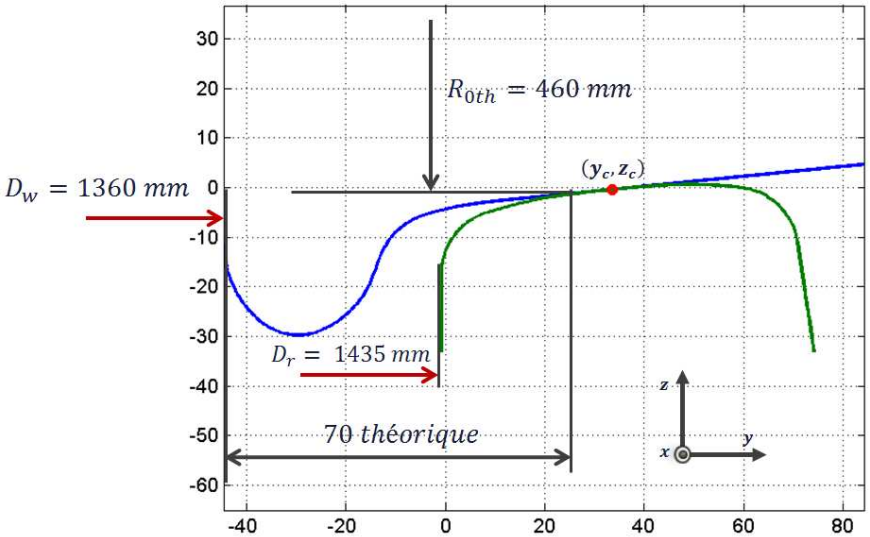


Figure 3. 2 : Positionnement de la roue par rapport au rail

La position transversale de la roue par rapport au rail est fixée en fonction de la valeur de t_y qui représente le déplacement de la roue par rapport au rail (Figure 3. 2). Ainsi, pour une

position t_{y0} donnée (par exemple la position pour laquelle l'essieu est centré sur la voie), le profil lissé (y_w, z_w) de la roue se déplace en latéral dans le repère où le profil du rail (y_r, z_r) est défini.

La nouvelle position du profil de la roue est donnée par :

$$Y_W = y_w - \frac{Dr - Dw}{2} + t_{y0} \tag{137}$$

$$Z_W = z_w + t_{z0} + tzo \tag{138}$$

Avec Dw écartement entre les roues, Dr écartement entre les rails et t_{z0} décalage du profil de la roue dans la direction normale z.

Un repère cartésien (Oxyz) est défini comme le montre la Figure 3. 1, le centre O est connecté au centre de l'essieu, la roue est liée à l'essieu rigide (non représenté sur la Figure 3. 1) où une charge normale C_N, correspondant à la masse du train et des voyageurs par roue, est appliquée en son centre.

3.2.3. Protocole de simulation

La résolution générale est faite en deux étapes : la première étape consiste à établir un contact normal et à appliquer la charge normale C_N. Le rail repose sur une fondation rigide et la roue, en adhésion avec l'essieu, suit le mouvement de ce dernier et se déplace dans la direction où la charge C_N est appliquée comme indiqué dans la Figure 3. 1. La deuxième étape est l'étape de roulement : une vitesse d'avance V_x est appliquée au rail dans le sens opposé au sens du roulement. La vitesse du roulement ω_r est appliquée autour de l'axe de rotation de l'essieu dans le sens indiqué sur la Figure 3. 1. Cet axe coïncide avec l'axe y pour un angle de dérive α égal à zéro. Durant cette étape, la charge C_N est maintenue jusqu'à la fin du calcul.

L'application des vitesses V_x et ω_r d'une façon instantanée peut perturber le calcul et la convergence au début de la phase de roulement. Pour éviter cette perturbation, ces vitesses sont appliquées progressivement en utilisant la procédure *« Smooth step »*. Les vitesses V_x et ω_r atteignent leurs valeurs maximales après 21 % de la distance parcourue. Leurs valeurs sont toutes les deux définies afin de pouvoir contrôler la valeur du pseudoglissement ξ_x donnée pour des corps rigides par :

$$\xi_x = \frac{V_x - r\omega_r}{V_x} \tag{139}$$

Lors de cette même étape, la rotation de la roue autour de y est libérée, l'avance du rail dans la direction x commence. Ainsi, la roue et le rail peuvent successivement rouler et avancer. La charge normale C_N est maintenue jusqu'à la fin du calcul.

Le pseudoglissement transversal ξ_y est défini en imposant un angle de dérive α autour de l'axe z c'est-à-dire entre la roue et le rail (Figure 3. 1). Dû à cet angle, la vitesse de roulement de la roue ω_r aura deux composantes ω_{rx} et ω_{ry} respectivement le long des axes x et y, qui sont donnés par :

$$\omega_{rx} = -\omega_r \sin\alpha \tag{140}$$
$$\omega_{ry} = \omega_r \cos\alpha \tag{141}$$

Le spin est pris en compte automatiquement par la procédure de calcul. Il est dû aux géométries des corps en contact c'est-à-dire la conicité de la roue et la courbure du rail et à l'inclinaison du rail.

3.2.4. Validation du modèle élastique

Avant de présenter la solution, le modèle par éléments finis du contact roue-rail décrit dans section précédente nécessite d'être validé. En particulier, la sensibilité du maillage sur les grandeurs physiques étudiées, la validité du schéma d'intégration implicite ainsi que le temps nécessaire pour atteindre la stabilité seront évalués.

3.2.4.1. Validation du maillage

Afin de trouver le meilleur compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul, l'influence de la taille du maillage sur les grandeurs caractéristiques a été évaluée. Cette évaluation est importante pour un modèle basé sur une discrétisation du domaine. Etant intéressé principalement par les grandeurs physiques liées au contact roue-rail roulant, la taille de maillage ne sera modifiée que sur la bande de roulement (Figure 3. 1). Ainsi, 5 tailles d'éléments différents dont la valeur sur la bande de roulement est comprise entre d1= 1.3×1.3 mm et d5=0.35×0.35 mm ont été testées. Le temps de calcul avec le schéma implicite dépend du nombre total d'éléments dans le modèle tandis qu'avec le schéma explicite, il dépend aussi du pas de temps qui est proportionnel à la plus petite taille de maillage dans le modèle. Dans ce qui suit, l'influence de la taille du maillage est abordée seulement avec la méthode implicite DM dans le cas élastique. Une étude similaire utilisant la méthode explicite peut être trouvée dans [27]. L'étude est portée sur la solution du problème normal et tangent, c'est-à-dire la pression maximale Pmax, les dimensions de la zone de contact elliptique de demi-axes théoriques a et b et la contrainte de cisaillement en surface longitudinale τ_x.

Le nombre total d'éléments dans le modèle ainsi que le temps de calcul correspondant à chacune des tailles de maillage utilisées sont reportés dans le Tableau 3. 2. Pour cette série de simulations, le pas de temps Δt est égal à 3.7e-04 s. Il est évident que si ce pas est réduit, le temps de calcul sera plus long.

Tableau 3. 2 : Temps de calcul pour différentes tailles de maillage

Maillage	Taille du maillage (mm)	Nombre total d'éléments	Temps de calcul (min)
d1	1.3×1.3	71247	52
d2	1×1	125876	60
d3	0.7×0.7	187293	200
d4	0.5×0.5	382420	455
d5	0.35×0.35	530722	940

L'obtention de ces grandeurs par la méthode des éléments finis ne nécessite qu'une seule simulation pour chacune des tailles de maillage avec un temps de calcul raisonnable même

pour le maillage le plus fin. En revanche, l'étude des courbes de saturation multiplie le nombre des calculs par le nombre de points souhaités, soit environ 20 fois, ce qui multiplie aussi le temps de calcul par 20. Ceci rend l'étude de sensibilité très coûteuse surtout pour le maillage le plus fin d5. Pour cette raison, nous nous sommes limités dans l'étude de ces courbes au maillage d4. Le Tableau 3. 3 présente l'erreur relative entre les différents maillages et le maillage le plus fin d5 pour les grandeurs physiques liées au contact.

Tableau 3. 3 : Erreur relative entre les différents maillages et le maillage le plus fin d5

	d1-d5	d2-d5	d3-d5	d4-d5
Semi-axe, a	12.2 %	6.3 %	2.3 %	-0.3 %
Semi-axe, b	11.4 %	9.5 %	6.6 %	4.7 %
Pression de contact maximale, Pmax	-3.1 %	-2.8 %	-4.4 %	-0.7 %
Contrainte de Von Mises maximale, σ_{vmax}	-18.3 %	-15.4 %	-10.2 %	-3.2 %
Contrainte de cisaillement maximale en surface, τ_{tmax}	21 %	15.3 %	13.8 %	3.3 %

L'influence de la taille du maillage est mise en évidence dans le Tableau 3. 3 par la contrainte de cisaillement maximale en surface dans la direction longitudinale. L'erreur relative par rapport à d5 est comprise entre 3.3 % et 21 % respectivement avec les maillages d4 et d1. Etant donné que le temps de calcul est relativement faible, le maillage d4 induisant une erreur relative inférieure à 4.7 % est le meilleur compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul pour l'étude des grandeurs liées aux problèmes de contact normal et tangent.

Tableau 3. 4 : Erreur relative entre les différents maillages et le maillage d4 pour l'étude des courbes de saturation

	d1-d4	d2-d4	d3-d4
Force résultante en longitudinale F_x	3 %	0.5 %	0 %
Pente initiale de la courbe de saturation en longitudinal	2 %	0 %	0 %
Limite de saturation supérieure en longitudinale	5 %	0 %	0 %
Limite de saturation inférieure en longitudinale	3 %	0 %	0 %

A cause du coût de calcul élevé que nécessitent les simulations avec d5, l'étude des courbes de saturation avec cette taille de maillage est inabordable. L'erreur relative est donc calculée entre d1, d2, d3 et le maillage d4. Le Tableau 3. 4 montre le résultat pour les grandeurs liées aux courbes de saturation dans la direction longitudinale. L'erreur relative est faible pour toutes les grandeurs (inférieure à 5 %). Cependant, les maillages inférieurs à d2 présentent une meilleure précision car l'erreur relative induite est pratiquement nulle. d2 est le maillage le plus avantageux en temps de calcul (voir le Tableau 3. 2), il est donc le meilleur compromis entre la précision et le temps de calcul pour l'étude des courbes de saturation.

3.2.4.2. Validation du schéma d'intégration implicite

L'étude dynamique des problèmes non-linéaires avec les schémas d'intégration temporelle implicites du logiciel Abaqus utilise différentes stratégies numériques pour calculer la réponse transitoire ou quasi-statique d'un système donné. En fonction de l'application qu'on veut étudier, la quantité d'amortissement numérique liée au pas de temps dépend du choix de la

stratégie de calcul utilisée. Certains schémas sont plus dissipatifs que d'autres et ceci peut avoir une influence considérable sur les grandeurs physiques étudiées. Dans ce qui suit, la différence entre les différentes stratégies de calcul implicite due à la nature dissipative du schéma d'intégration et au pas de temps sera étudiée.

Une incrémentation automatique du pas de temps est utilisée par défaut dans le logiciel Abaqus avec les procédures implicites de calcul dynamique des problèmes non-linéaires. Les principaux facteurs qui contrôlent l'ajustement de la taille du pas de temps dans un calcul implicite dynamique sont la convergence des itérations de l'algorithme de Newton-Raphson et la précision de l'intégration temporelle. La taille du pas de temps peut considérablement varier durant un calcul en fonction du comportement de la convergence [75]. Avec les deux procédures implicites choisies dans notre étude et qui sont les plus adaptées pour l'étude de notre problème du contact roue-rail roulant, c'est-à-dire la procédure implicite QS et la procédure implicite DM, le pas de temps est réduit si la solution a tendance à diverger et il est agrandit si une convergence rapide se produit durant l'incrément précédent. Cette stratégie est considérée comme la plus optimale et la plus fiable pour résoudre un calcul dynamique implicite [75]. Il est généralement recommandé d'employer une telle stratégie automatisée dans le calcul du pas de temps en implicite, c'est-à-dire une stratégie flexible qui permet l'augmentation et la réduction du pas de temps durant le calcul car, n'ayant aucun critère qui permet de la choisir, une taille de pas de temps élevée peut conduire à la divergence de l'algorithme de Newton-Raphson. De même, une taille très petite peut conduire à un temps de calcul très élevé qui est peu commode pour notre étude, en particulier, pour l'étude des courbes de saturation.

a. Instabilités liées à la procédure de calcul implicite

Pour un calcul élastique où les non-linéarités sont principalement dues au contact entre la roue et le rail, la convergence pour chaque itération est immédiatement obtenue et le pas de temps est maximisé à Δt_e=3.7e-04 s. La Figure 3. 3 montre le champ de pression avec les deux schémas implicites Euler et Hilber-Hughes-Taylor qui sont utilisés respectivement dans les procédures QS et DM du logiciel Abaqus. Le pas de temps utilisé ici (problème élastique) est égal à Δt_e.

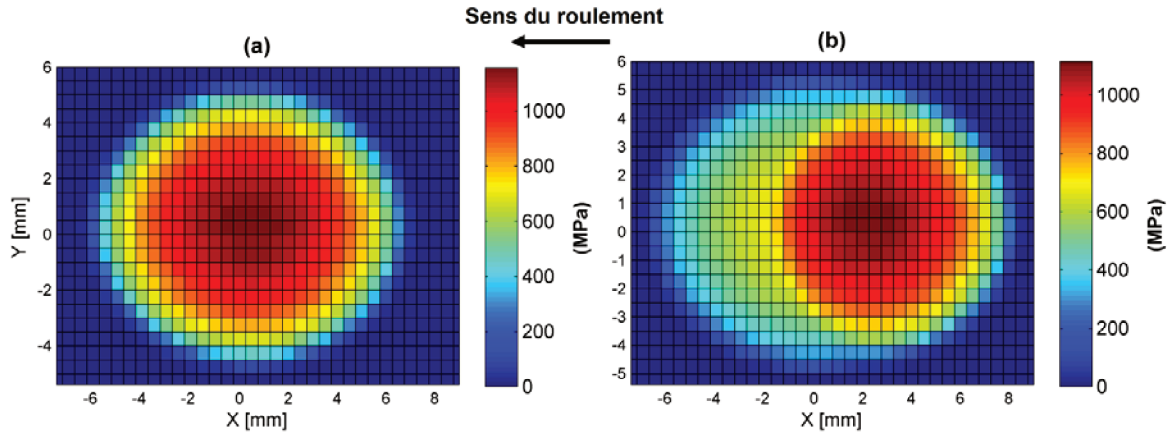


Figure 3. 3 : Pression de contact avec la procédure implicite (a) QS (b) DM avec Δt_e par défaut

La solution implicite QS est en accord avec celle prévue par la théorie, le champ de pression est symétrique et la pression est maximale au centre de l'ellipse de contact. Cependant, lorsque la méthode implicite DM est employée, le champ de pression est dissymétrique par rapport à y=0 (Figure 3. 3(b)) et l'ellipse de contact devient plus allongée dans la direction x. Par conséquent, la longueur du semi-axe a est plus large dans ce cas avec a=16 mm comparée à a=14 mm avec la procédure QS. Malgré cette différence, la valeur de la pression maximale n'est pas beaucoup affectée par la procédure de calcul utilisée. Les deux procédures QS et DM donnent respectivement Pmax=1163 Mpa et Pmax=1128 Mpa.

La Figure 3. 4 présente les contraintes de Von Mises avec différentes procédures implicites. La dissymétrie du champ de pression avec la procédure implicite DM est aussi accompagnée d'une dissymétrie du champ de contraintes de Von Mises comme le montre la Figure 3. 4 (e). Afin de mieux comprendre l'origine de cette dissymétrie, une coupe a été réalisée suivant le plan C-C. En amplifiant les déformations par un facteur de 100, on peut clairement observer sur la Figure 3. 4 (f) des ondulations à l'arrière de la surface de contact d'une longueur d'onde égale à 10 mm et d'une amplitude maximale égale approximativement à 2 mm.

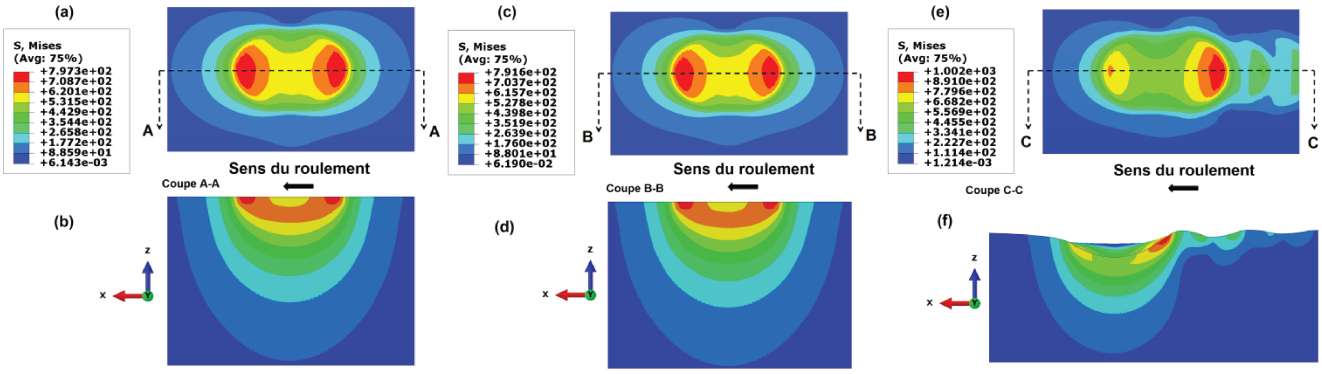


Figure 3. 4 : Contraintes de Von Mises en surface (en haut) et en coupe suivant A-A, B-B et C-C (en bas) avec différents schémas implicites, (a)-(b) implicite QS (c)-(d) implicite DM avec amortissement de Rayleigh (e)-(f) implicite DM sans amortissement de Rayleigh, déformation amplifiée par un facteur 100 sur (f).

Cette dissymétrie est aussi accompagnée par une valeur plus élevée de la contrainte de Von Mises maximale égale à σ_{vmax}=1002 Mpa comparée à σ_{vmax}=797.3 Mpa avec le calcul implicite QS et σ_{vmax}=791.6 Mpa quand l'amortissement de Rayleigh est appliqué.

La Figure 3. 4 montre clairement que les ondulations, et par conséquent la dissymétrie, sont liées à la nature dissipative du schéma de Hilber-Hughes-Taylor utilisé dans la procédure implicite DM. En effet, lorsque cette méthode est employée, seulement une partie de l'énergie totale du système est dissipée artificiellement par artéfact numérique. La dissipation liée aux paramètres de contrôle choisis pour ce schéma ne suffit pas pour amortir certains modes de vibrations hautes fréquences qui semblent être à l'origine de ces oscillations. Nous avons ajouté un amortissement visqueux comme facteur dissipatif supplémentaire afin de voir son influence sur ces ondulations et sur la dissymétrie des champs de pression et des contraintes de Von Mises. Il s'agit de l'amortissement de Rayleigh qui est proportionnel à une

combinaison linéaire de masse et de rigidité. La matrice d'amortissement C est dans ce cas donnée par :

$$C = \alpha_R M + \beta_R K \tag{142}$$

Les coefficients de Rayleigh α_R et β_R ont été choisis après plusieurs essais où on a appliqué différentes valeurs pour trouver ceux qui permettent un meilleur amortissement. Les coefficients retenus et qui sont utilisés sur la Figure 3. 4(c)-(d) sont α_R=0.01 et β_R=1e-06.

La Figure 3. 5 montre également l'influence de l'amortissement de Rayleigh sur la pression de contact quand le schéma implicite DM est employé. Sous l'effet des coefficients α_R et β_R, les oscillations observées sur la Figure 3. 4(f) disparaissent et le champ de pression devient symétrique (Figure 3. 5). L'enveloppe de la pression dans ces conditions devient alors très proche de la solution implicite QS.

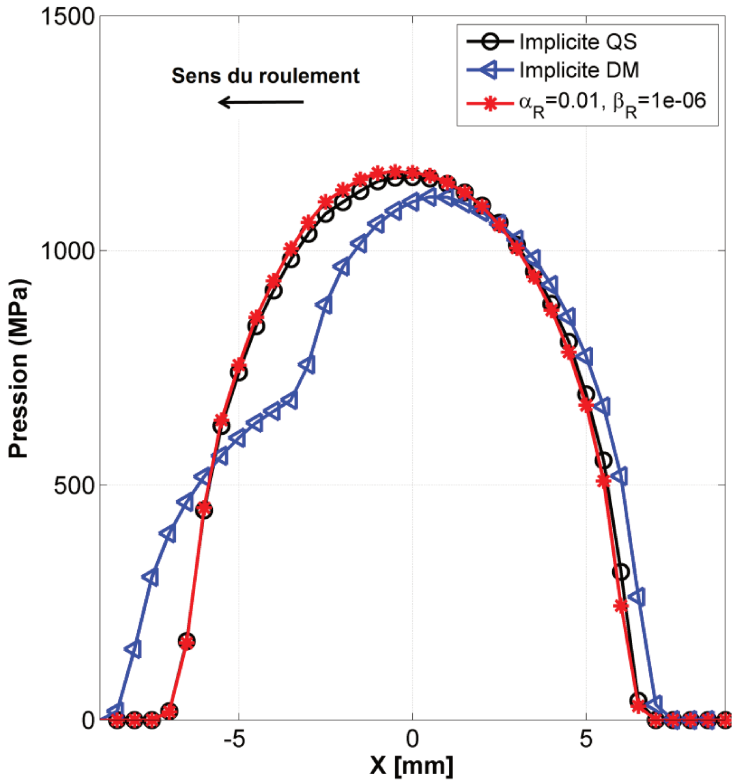


Figure 3. 5 : Influence de l'amortissement de Rayleigh sur la pression de contact suivant y=0

La procédure implicite QS ne nécessite aucun amortissement additionnel pour amortir de telles oscillations car le schéma d'Euler implicite permet naturellement plus de dissipation que le schéma de Hilber-Hughes-Taylor [75].

La solution du problème normal montre que la solution implicite DM ne permet pas une obtention directe d'un résultat cohérent au niveau de la distribution de la pression de contact, les dimensions de la zone de contact et le champ de contraintes de Von Mises. Un facteur dissipatif supplémentaire doit être appliqué pour éviter le bruit numérique dû aux modes de vibrations hautes fréquences qui n'ont pas pu être amortis avec seulement la dissipation

numérique liée au schéma de Hilber-Hughes-Taylor. L'utilisation de la procédure QS semble mieux convenir à nos besoins et à l'étude du problème normal de contact roue-rail car le schéma d'intégration temporelle implicite d'Euler fournit directement le résultat souhaité.

Ainsi, l'influence du schéma implicite utilisé est mise en évidence par des ondulations en surface de contact quand le schéma implicite DM est employé. Ces oscillations engendrent une dissymétrie du champ de pression et des contraintes de Von Mises. Par la suite, nous verrons que l'origine de ces instabilités est en réalité liée au pas d'intégration implicite choisi.

b. Instabilités liées au pas d'intégration temporelle

La Figure 3. 6(a) et (b) représente une visualisation 3D de la contrainte de cisaillement au contact donnée par les deux procédures implicites QS et DM avec l'amortissement de Rayleigh de coefficient α_R et β_R. La distribution de cette contrainte est presque la même avec les deux méthodes. La contrainte de cisaillement prend la forme d'une onde oscillante sur la zone de contact d'une fréquence importante donnant ainsi une distribution très différente par rapport à nos prédictions et par rapport à CONTACT.

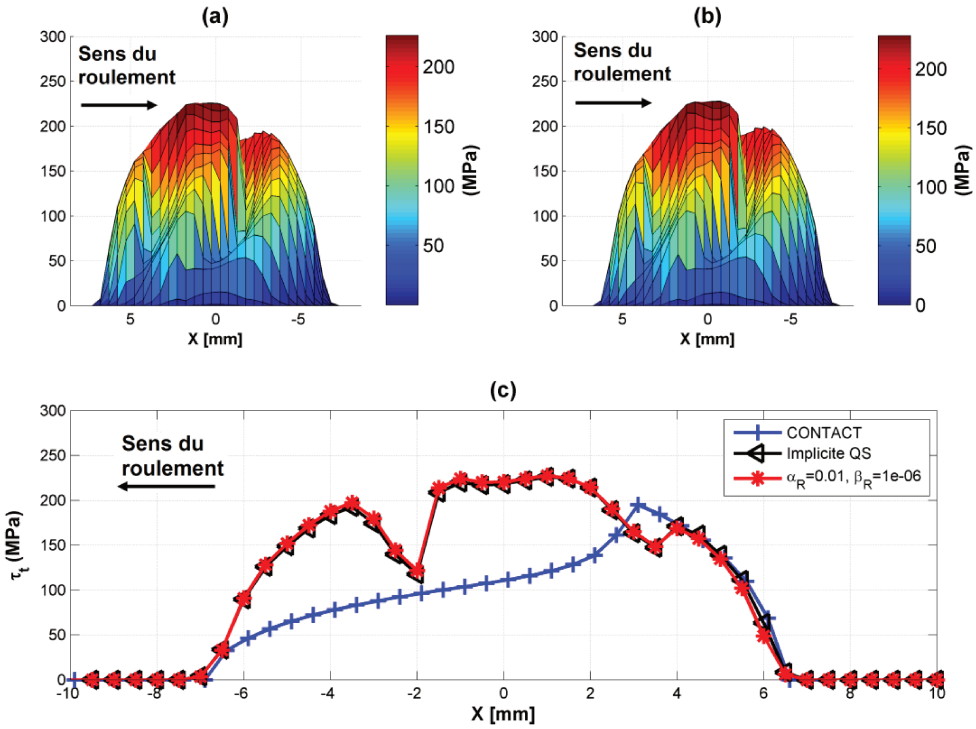


Figure 3. 6 : Représentation 3D de la contrainte de cisaillement τ_t nodale (a) implicite QS (b) implicite DM avec un amortissement de Rayleigh (c) vue de coupe de la force suivant y=0.

La présence de ces instabilités a une influence directe sur les grandeurs physiques locales qu'on veut étudier, notamment sur la zone d'adhérence-glissement qui est fortement altérée par rapport à CONTACT comme on peut le voir sur la Figure 3. 6(c) qui représente une vue en coupe suivant y=0 de la contrainte de cisaillement τ_t. Cependant, elles n'influent pas beaucoup sur la valeur maximale de la contrainte de cisaillement qui est à peu près égale à τ_{tmax}=226 MPa avec les différentes méthodes.

Bien qu'à ce stade de l'étude, nous ne connaissions pas encore l'origine de ces instabilités, elles peuvent être attribuées encore une fois à l'existence naturelle des modes de vibration hautes fréquences que même la procédure fortement dissipative QS (qui utilise le schéma d'Euler (Figure 3. 6 (a))) n'a pas réussi à les amortir. Ce qui montre que la nature du schéma implicite employé n'est pas la cause de leur existence. Afin de comprendre l'origine de ces instabilités, une étude de sensibilité du pas de temps sera menée dans le paragraphe suivant.

Influence du pas de temps

Comme tous les schémas d'intégration implicites, les schémas de Hilber-Hughes-Taylor et d'Euler sont inconditionnellement stables pour un système linéaire, c'est-à-dire que la stabilité de la solution est assurée indépendamment de la taille du pas de temps choisi. Cependant, le problème du contact roue-rail roulant comprend plusieurs sources de non-linéarités liées principalement au contact ou au comportement des matériaux si la plasticité est prise en compte. Dans ces conditions, la taille du pas de temps peut avoir une influence sur la cohérence de la solution recherchée.

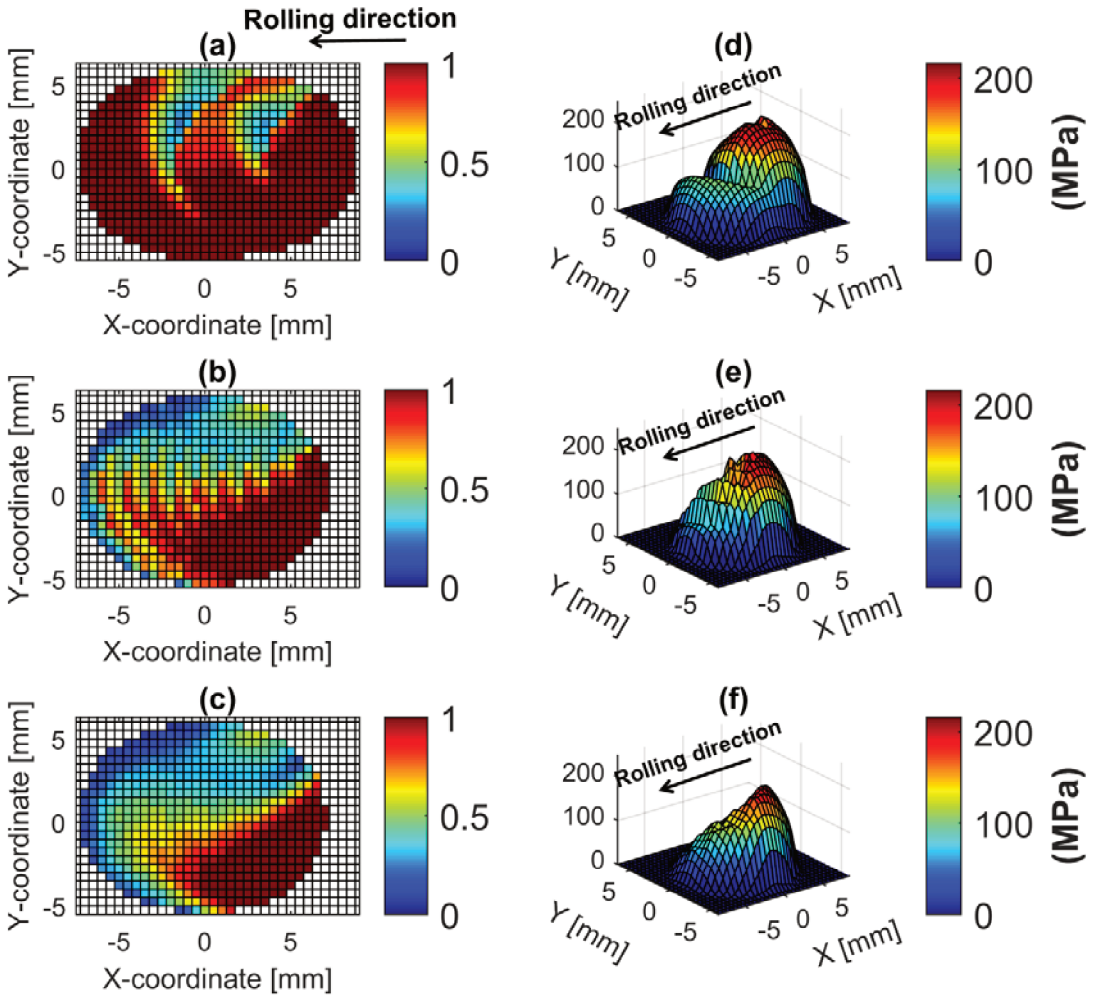


Figure 3. 7 : Influence de la taille du pas de temps Δt sur la contrainte de cisaillement (à droite) et sur la contrainte de cisaillement normalisée (à gauche) (a)-(d) Δt_1=3.7e-04 s, (b)-(e) Δt_3=1e-04 s, (c)-(f) Δt_4=2e-05 s.

Afin de voir l'effet du pas de temps sur la stabilité locale de la solution, quatre pas de temps différents Δt_1=3.7e-04 s, Δt_2=2e-04 s, Δt_3=1e-04 s et Δt_4=2e-05 s ont été testés. Le pas de temps Δt_1 est celui utilisé par défaut dans tous les calculs précédents. Il est calculé automatiquement par le logiciel Abaqus suivant la procédure expliquée auparavant. Il est évident que la solution devient plus coûteuse quand le pas de temps est réduit, en particulier avec Δt_4. La Figure 3. 7 représente la contrainte de cisaillement normalisée et en 3D avec ces trois pas de temps. Il est clair que la distribution de cette contrainte varie beaucoup en fonction du pas choisi. Les oscillations semblent s'amortir en fonction du raffinement du pas de temps jusqu'à disparaitre complètement avec le pas de temps le plus petit Δt_4.

Une étude similaire a été réalisée avec le modèle cylindre-UIC60 plat. La géométrie simple et l'absence de la conicité de la roue dans ce modèle rend négligeable l'effet de spin. Ceci permet d'une part, de comparer plus facilement la solution implicite avec les autres méthodes et d'autre part, de mettre en évidence l'influence du pas de temps sur l'oscillation de la force de cisaillement. La Figure 3. 8 représente une coupe de la contrainte de cisaillement donnée par ce modèle suivant y=0. Trois pas de temps différents ont aussi été utilisés. On remarque que la fréquence des oscillations est linéairement proportionnelle à la taille du pas de temps. L'amplitude et la longueur d'onde de ces oscillations diminuent quand le pas de temps est réduit jusqu'à disparaitre complètement avec Δt=5e-05 s.

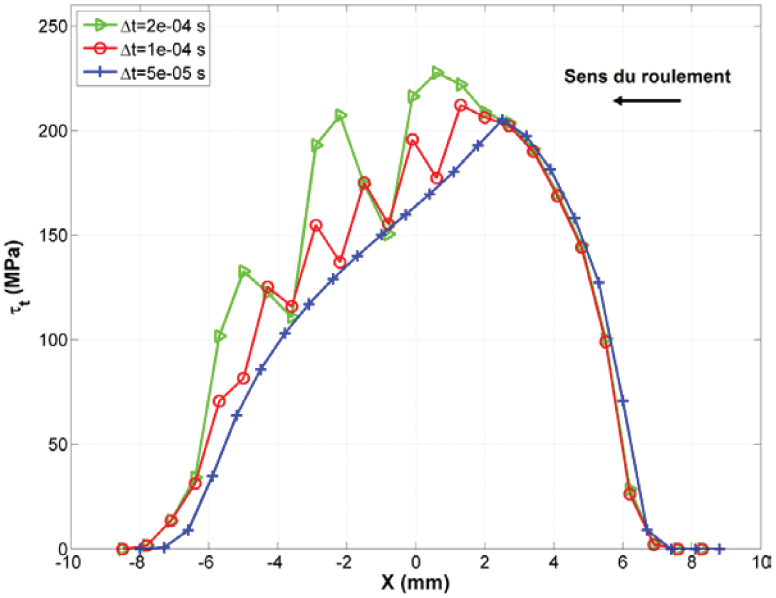


Figure 3. 8 : Influence de la taille du pas de temps Δt sur la contrainte de cisaillement τ_t en vue de coupe suivant y=0

En conclusion, les oscillations observées sur la Figure 3. 7 et la Figure 3. 8 sont en réalité des instabilités numériques liées au pas d'intégration implicite. Le schéma implicite présente l'avantage d'être inconditionnellement stable pour un système linéaire. Aucune restriction n'est appliquée sur la taille du pas de temps Δt. En revanche, pour un système non-linéaire, nous avons vérifié dans l'étude précédente que la précision de la solution nécessite un pas de temps assez petit pour éviter le bruit numérique qui affecte à la fois la solution du problème normal et tangent. Un pas de temps petit peut rendre le calcul très coûteux surtout pour l'étude

des courbes de saturation où des simulations répétées avec différentes valeurs de pseudoglissement doivent être effectuées.

Afin de trouver le meilleur compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul, l'effet de la taille du pas de temps sur les grandeurs physiques du problème normal et tangentiel a été évalué. Le Tableau 3. 5 montre le temps de calcul pour les différents pas de temps fixés pendant l'étape du roulement de la roue sur le rail. La taille de maillage pour cette série de simulations est d4=0.5 mm. Le Tableau 3. 6 montre l'erreur relative sur les grandeurs physiques étudiées entre différents pas de temps ($\Delta t_1, \Delta t_2$ et Δt_3) et le pas le plus petit Δt_4.

Tableau 3. 5 : Temps de calcul pour différents pas de temps implicites

Pas de temps	Taille du pas de temps (s)	Nombre d'incréments	Temps de calcul (min)
Δt_1	3.7e-04	70	455
Δt_2	2e-04	87	560
Δt_3	1e-04	128	630
Δt_4	2e-05	453	1770

Tableau 3. 6 : Erreur relative entre différents pas de temps ($\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$) et le pas le plus petit Δt_4

	Δt_1- Δt_4	Δt_2- Δt_4	Δt_3- Δt_4
Pression de contact maximale, Pmax	-2.5%	-0.6%	0.3%
Semi-axe, a	10.3%	0%	0%
Semi-axe, b	0%	0%	0%
Contrainte de Von Mises maximale, σ_{vmax}	31.5%	10.6%	0.7%
Contrainte de cisaillement maximale en surface, $\tau_t$max	8%	8%	6%
Force résultante en longitudinale, F_x	27.2%	17.3%	7%

L'influence de la taille du pas de temps est mise en évidence par la contrainte maximale de Von Mises et par le semi-axe a qui donnent respectivement une erreur relative de 31.5 % et 10.3 % avec Δt_1. Bien que Δt_3 donne des erreurs relatives faibles pour toutes les grandeurs physiques étudiées (entre 0% et 6%) avec un temps de calcul relativement faible, l'oscillation de la force tangentielle est toujours présente avec ce pas de temps comme on peut le voir sur la Figure 3. 7(b)-(e). Ces oscillations n'influent pas beaucoup sur les grandeurs physiques étudiées, notamment sur les contraintes de cisaillement en surface et les forces résultantes, mais rendent le résultat moins attirant et moins facile à comparer avec les autres méthodes numériques. Afin d'éviter au maximum ce bruit numérique, le pas Δt_4 est choisi pour l'étude du problème normal et tangent. En revanche, pour l'étude des courbes de saturation, l'influence du pas de temps est mise en évidence par la force résultante en longitudinale F_x qui donne une erreur relative égale à 27.2 %, 17.3% et 7% respectivement avec $\Delta t_1, \Delta t_2$ et Δt_3. Cet écart se traduit sur la courbe de saturation en longitudinale par une différence relativement élevée des pentes initiales données par ces différents pas comme on peut observer sur la Figure 3. 9. Ainsi, présentant l'erreur relative la plus faible, le pas de temps

Δt_3 est le meilleur compromis entre la précision et le temps de calcul pour l'étude des courbes de saturation.

On remarque également que les oscillations à l'arrière de la zone de contact, observées sur la Figure 3. 4(f), disparaissent complètement avec les pas de temps inférieurs ou égaux à Δt_2, sans même faire appel à l'amortissement de Rayleigh, ce qui conduit à la disparition de la dissymétrie du champ de pression (voir Figure 3. 11 (d)) et du champ de contrainte (voir Figure 3. 14(b)). Ceci est dû à l'amortissement lié au pas de temps. En effet, le schéma implicite de Hilber-Hughes-Taylor [79] dissipe à travers son pas d'intégration temporelle une quantité d'énergie qui est d'autant plus grande que la taille du pas de temps est réduite et permet ainsi l'amortissement de toute vibration et fluctuation dans le système.

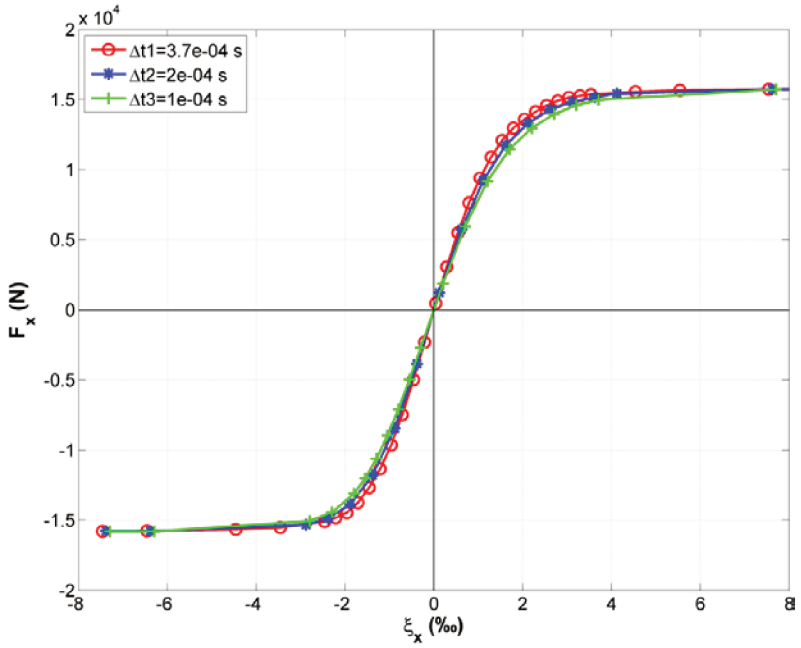


Figure 3. 9 : Influence du pas de temps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale

On peut prévoir qu'avec la solution élasto-plastique, les fluctuations sont encore plus réduites sous l'effet de la déformation plastique, car une quantité de l'énergie cinétique est dissipée par plasticité. Cette partie fera l'objet de la section 3.3.

Cette étude concerne principalement la vérification de la validité du schéma implicite ainsi que la sensibilité du pas de temps. La comparaison avec les différentes méthodes numériques sera menée dans la section 3.2.5

3.2.4.3. Validation du temps de calcul

Afin de vérifier la stabilité des schémas numériques utilisés avec la méthode des éléments finis, l'évolution temporelle de la force tangentielle globale F_{xG} dans la direction longitudinale et la force tangentielle globale F_{yG} dans la direction transversale est considérée dans cette partie. Ces grandeurs sont déterminées à partir des forces nodales en sommant sur toute la zone de contact la force tangentielle longitudinale $F_x(i)$ et la force tangentielle

transversale $F_y(i)$ de chaque nœud i inclus dans cette zone, ou encore à partir des contraintes de cisaillement nodales au contact $\tau_x(i)$ et $\tau_y(i)$ telle que :

$$\begin{aligned} F_{xG}=\sum_i^N F_x(i) &= \sum_i^N \tau_x(i).d^2 \\ F_{yG}=\sum_i^N F_y(i) &= \sum_i^N \tau_y(i).d^2 \end{aligned} \tag{143}$$

Avec d la taille du maillage dans le modèle éléments finis. Un nœud du maillage est considéré dans la zone de contact si $P_n(i)$>0.

La Figure 3. 10 montre l'évolution temporelle par la méthode des éléments finis des forces tangentielles globales F_{xG} et F_{yG} respectivement dans la direction longitudinale et transversale. Ce résultat est obtenu pour ξ_x=-0.7 ‰ et α=0 mrad. Les deux schémas explicite et implicite sont testés. A t=t1, le roulement n'a pas encore commencé, les forces tangentielles dans les deux directions sont égales à zéro. Leurs valeurs augmentent ensuite avec l'augmentation progressive des vitesses V_x et ω_r jusqu'à ce qu'elles atteignent leurs valeurs maximales à l'instant t=t2 après avoir parcouru une distance d2=41 mm.

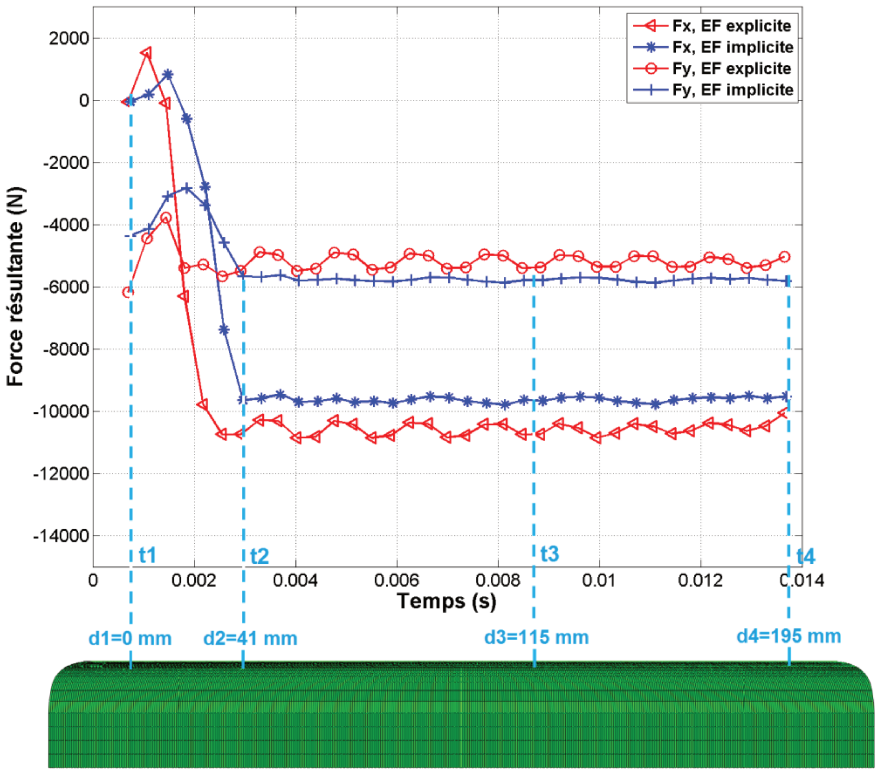


Figure 3. 10 : Evolution temporelle de la force longitudinale F_{xG} et de la force transversale F_{yG} en situation de freinage avec la méthode des éléments finis

A partir de l'instant t=t2, la solution devient stable et l'état quasi-statique est établi jusqu'à la fin du calcul à t=t4. Malgré le respect de la condition de Courant, des oscillations de la force tangentielle dans les deux directions sont toujours présentes avec le schéma explicite. L'existence de telles fluctuations est liée aux vibrations hautes fréquences du système. Ainsi, la solution donnée par cette méthode pourrait décrire plus fidèlement la réalité pour certains phénomènes de courte longueur d'onde comme l'étude du roulement transitoire [42].

3.2.5. Solution en élasticité

Un modèle EF 3D de contact roulant entre une roue S1002 élastique conique et un rail UIC60 élastique a été développé en utilisant la technique décrite dans la section 3.2.3 Afin de vérifier certains phénomènes difficiles à observer avec ce modèle à cause de la dissymétrie des efforts tangentiels due au spin, un deuxième couple avec une géométrie plus simple composé d'un cylindre roulant sur un rail UIC60 non-incliné est aussi testé. Ce dernier ne présente aucun effet de spin ce qui rend également la comparaison entre les différentes méthodes numériques plus directe. Dans ce qui suit, les résultats de calcul liés au problème normal et tangentiel seront présentés et comparés avec la solution fournie par le logiciel CONTACT [60]. La solution est extraite à la distance d3= 115 mm du début du rail (voir Figure 3. 10).

Dans le choix d'une approche de résolution par éléments finis d'un problème dynamique avec différentes sources de non-linéarités, le coût de calcul et l'efficacité d'une méthode à gérer les non-linéarités du problème tout en fournissant une solution stable, sont des aspects très importants. Dans certains cas le choix entre la méthode implicite et explicite est trivial, mais dans plusieurs autres cas comme l'étude du contact roue-rail roulant, le choix dépend du résultat qu'on souhaite avoir. Dans ce travail, les deux schémas explicite et implicite seront utilisés et comparés. Le pas de temps critique en explicite calculé avec l'expression (132) est égal à Δt_{cr}=6.41e-08 s. Le pas de temps implicite est choisi suite à l'étude de sensibilité réalisée dans la section 3.2.4.2. A cause du temps de calcul conséquent nécessaire pour l'étude des courbes de saturation, un seul schéma d'intégration temporelle, celui qui sera validé en élasticité, sera utilisé ensuite pour l'étude des courbes de saturation en élasto-plasticité.

3.2.5.1. Solution du problème normal

Dans ce qui suit la solution par éléments finis du problème normal sera présentée et comparée avec la solution de Hertz et celle du logiciel CONTACT. Afin de faciliter cette comparaison, les profils de la roue et du rail et leur disposition sont choisis de façon à pouvoir assurer une zone de contact elliptique (voir section 3.2.2). Les grandeurs physiques étudiées dans cette partie sont principalement la pression du contact et les dimensions de l'ellipse de contact.

La Figure 3. 11 montre la distribution de la pression de contact durant l'étape du roulement obtenue avec les différentes méthodes par éléments finis et comparée avec CONTACT. La solution par éléments finis est étudiée une nouvelle fois à un instant t_s=8.14e-03 s du calcul de l'étape de roulement qui correspond à la distance d_3=115 mm parcourue par la roue sur le rail (Figure 3. 10).

La Figure 3. 11 montre un bon accord pour la distribution de la pression p_n entre les méthodes par éléments finis et la solution de CONTACT. La forme de l'aire de contact est elliptique comme nous l'avons prévu précédemment. Le champ de pression est symétrique et la pression est maximale au centre de l'ellipse de contact.

Cet accord est mieux observé sur la vue de coupe de la pression suivant l'axe y=0 (Figure 3. 12), la pression maximale au centre est légèrement plus élevée avec les méthodes implicites.

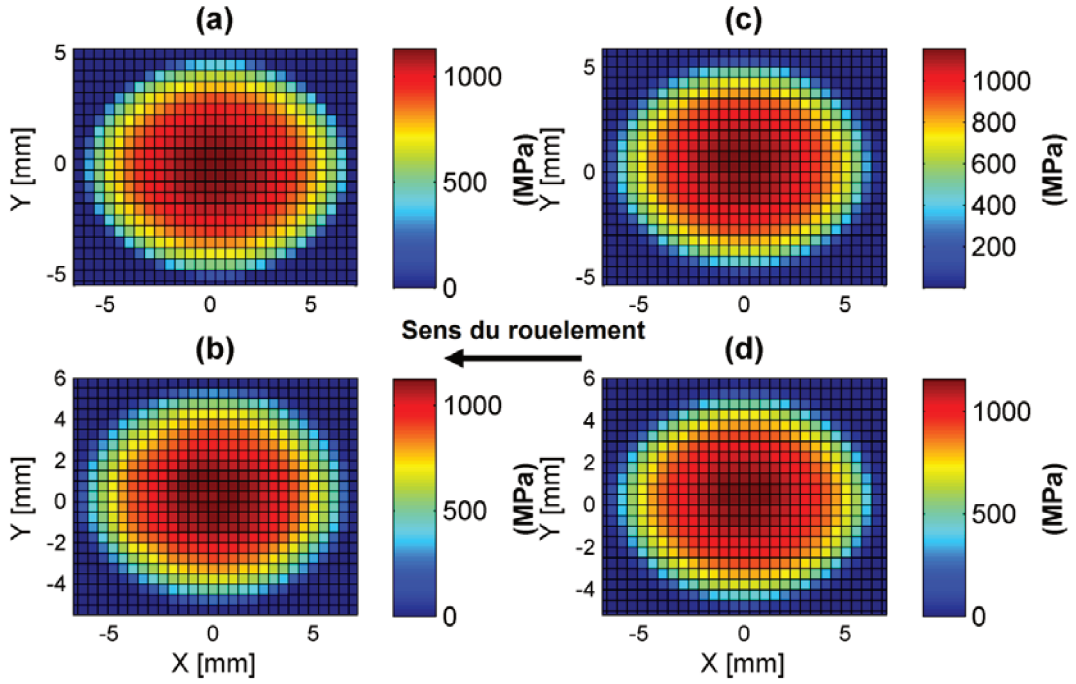


Figure 3. 11 : Distribution de la pression de contact p_n avec les différentes méthodes numériques (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM

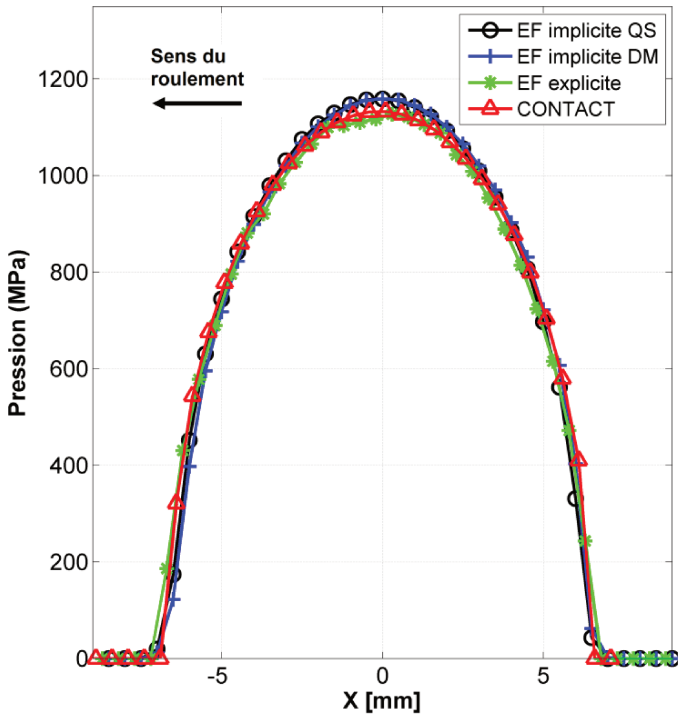


Figure 3. 12 : Pression de contact en vue de coupe suivant y=0

Les dimensions a et b de l'ellipse de contact ainsi que l'aire de la zone de contact et la pression maximale obtenue avec les différentes méthodes par éléments finis ont aussi été comparés avec la théorie de Hertz et avec CONTACT. Le résultat est récapitulé dans le Tableau 3. 7.

La méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière (CONTACT) sont basées sur une discrétisation du domaine d'étude, les dimensions de l'ellipse de contact dépendent de la nature de cette discrétisation et de la taille des éléments sur la surface de contact. Dans cette étude, ces éléments sont des carrés de côté 0.5 mm. Les semi-axes a et b de l'ellipse de contact ne peuvent donc être que des multiples de cette taille d'éléments.

Le semi-axe b donné par CONTACT est égal à 5.25 mm ce qui correspond à la longueur de 10.5 éléments. Ce résultat est très proche de la solution Hertzienne qui donne b=5.05 mm, soit la longueur de 10.1 éléments. Toutes les solutions par éléments finis donnent la même longueur b=5.5 mm légèrement supérieure d'une maille à celle donnée par CONTACT avec une erreur relative de 4.7%.

Tableau 3. 7 : Solution du problème normal

	Semi-axe a (mm)	Semi-axe b (mm)	Aire (mm²)	Pression maximale (MPa)
Hertz	6.66	5.05	104.7	1160
CONTACT	6.75	5.25	111.3	1132
Dynamique Explicite	7.25	5.5	125.2	1126
Implicite QS	7	5.5	120.9	1158.3
Implicite DM	7.25	5.5	125.2	1158.6
Erreur relative Dynamique explicite / CONTACT (%)	7.4%	4.7%	12.4%	-0.5%
Erreur relative implicite QS / CONTACT (%)	3.7%	4.7%	8.6%	2.2%
Erreur relative implicite MD / CONTACT (%)	7.4%	4.7%	12.4%	2.2%

Le semi-axe a donné par CONTACT est égal à 6.75 mm correspondant à la taille de 13.5 éléments. Cette longueur est également très proche de la solution Hertzienne qui donne a=6.6 mm ce qui est égal à la longueur de 13.2 éléments. Les méthodes par éléments finis explicite, implicite QS et implicite DM donnent respectivement a=7.25 mm, a=7 mm et a=7.25 mm conduisant à des erreurs relatives par rapport à CONTACT respectivement égalent à 7.4%, 3.7% et 7.4%.

Cette erreur sur les dimensions de l'ellipse de contact peut en partie être expliquée par la violation de l'hypothèse des semi-espaces infinis quand la méthode des éléments finis est employée. Cette hypothèse est en effet la condition de base de la théorie exacte de Kalker implémentée dans le logiciel CONTACT, les corps en contact sont considérés comme des semi-espaces infinis. Or, avec la méthode des éléments finis, les corps sont définis par la géométrie de la roue et du rail qui sont dans ce cas des corps finis. Plus les dimensions de ces corps tendent vers des semi-espaces infinis, plus la solution par éléments finis est proche de la solution CONTACT et plus l'erreur relative tendra vers zéro. Dans toutes les études par éléments finis, comme dans la présente étude, les dimensions réelles de la roue et du rail doivent être limitées (Figure 3. 1) dans le but de minimiser le nombre d'éléments, ce qui éloigne encore plus la solution par éléments finis de celle donnée par CONTACT et par Hertz.

L'erreur relative est encore plus élevée sur l'aire de contact qui est proportionnelle au produit a×b. Malgré cette erreur, la procédure de calcul par éléments finis n'influe pas beaucoup sur la valeur de la pression maximale. Le Tableau 3. 7 montre que la pression maximale donnée par les différentes méthodes par éléments finis est très proche de celle donnée par CONTACT avec une erreur relative maximale de 2.2%.

En général, en prenant en compte l'erreur due à la discrétisation, la solution du problème normal avec les différentes méthodes par éléments finis est en bon accord avec CONTACT et la solution Hertzienne.

L'analyse des pressions montre que les écarts de surface mal déterminés par la discrétisation ne sont pas le bon critère pour différencier les résultats. La méthode des éléments finis, en principe plus précise puisqu'elle permet d'aborder la plasticité, est impactée par les conditions aux limites car celles cis ne peuvent pas être prises assez loin du contact. Il n'y a donc pas de modèle idéal. Avec les éléments finis, on va pouvoir aborder la plasticité, mais avec modestie sachant que les contraintes sont déterminées à 5% près.

3.2.5.2. Contraintes de Von Mises

Le critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique de Von Mises, permet de se positionner par rapport à la limite d'élasticité σ_e, c'est-à-dire de savoir si un matériau soumis à une certaine sollicitation se déforme plastiquement ou s'il reste dans son domaine. Ce critère est valable seulement pour des matériaux homogène et isotrope.

La contrainte effective selon le critère de Von Mises est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{144}$$

Avec σ_1 , σ_2, σ_3 les contraintes principales

Ce critère est généralement utilisé pour évaluer les performances d'un matériau donné soumis à différents types de sollicitation. La Figure 3. 13 montre en vue de coupe suivant y=0, les contraintes de Von Mises en sous-surface avec différentes méthodes par éléments finis durant l'étape de contact normal (Figure 3. 13(a)-(b)-(c)) et durant l'étape de contact roulant (Figure 3. 13(d)-(e)-(f)).

Les solutions par éléments finis montrent un bon accord entre les différentes approches testées avec une contrainte de Von Mises maximale légèrement supérieure quand la procédure implicite est utilisée. En l'absence d'effort tangentiel, c'est-à-dire quand la roue et le rail sont en contact normal seul, la pression en surface due à la charge normale est élevée mais comme on peut voir sur la Figure 3. 13(a)-(b)-(c), la contrainte de Von Mises est maximale dans une zone en sous surface. Ce qui implique une plastification, si on se réfère à la limite d'élasticité de l'acier R900A, σ_{eR900A}=489 MPa, à environ 1 mm en sous surface. La Figure 3. 14(a) montre qu'aucune plastification ne se produit en surface. Ceci peut être expliqué par le critère de Von Mises qui tient compte des contraintes dans les trois directions de l'espace et non seulement dans la direction normale.

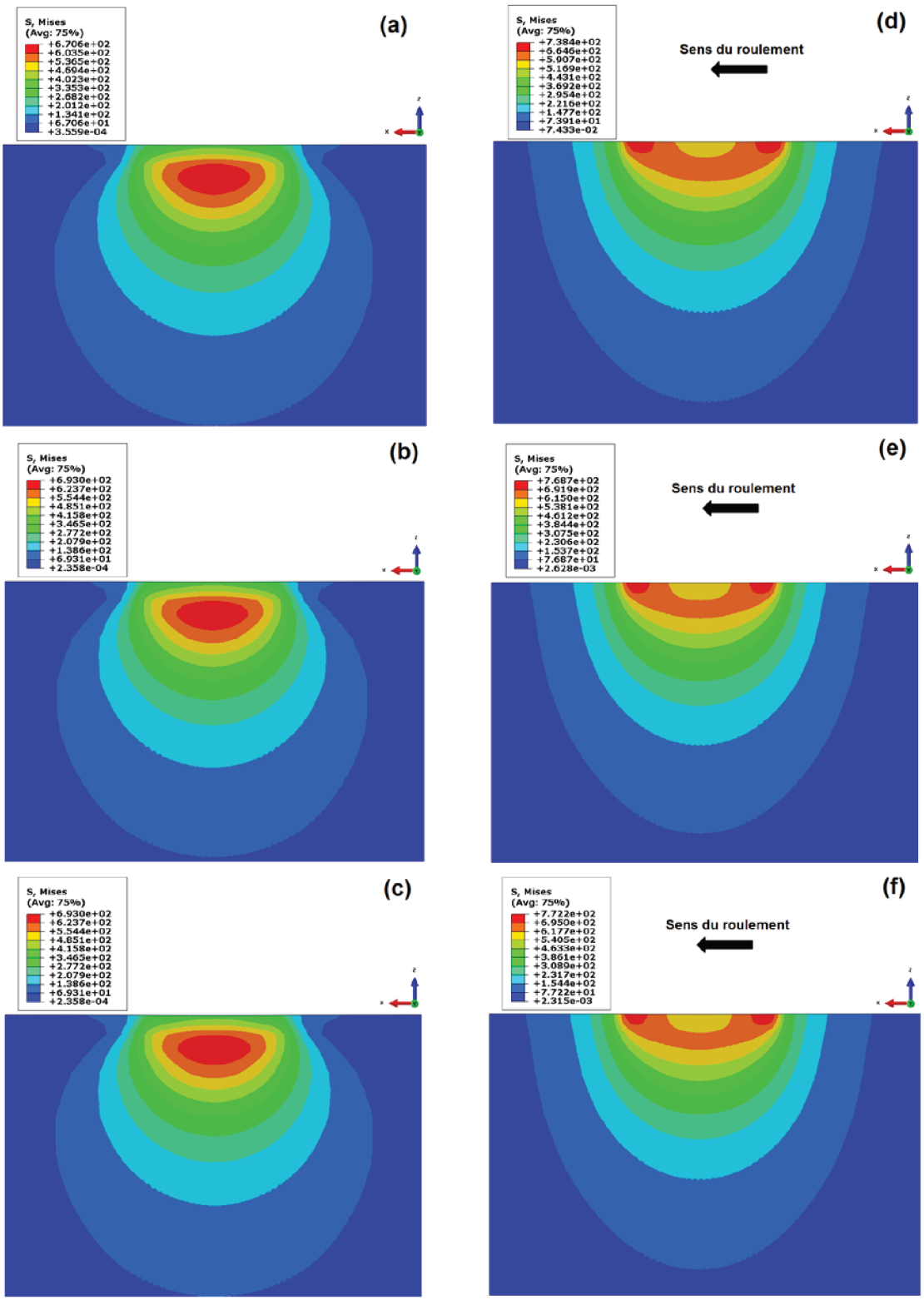


Figure 3. 13 : Contraintes de Von Mises en coupe suivant le plan (XOZ) à gauche contact normal, à droite contact roulant, (a)-(d) EF dynamique explicite, (b)-(e) EF implicite QS, (c)-(f) EF implicite DM

Quand le roulement entre la roue et le rail s'établi, des efforts tangentiels qui sont dus au frottement entre les deux corps en contact s'ajoutent à l'effort normal conduisant ainsi à une distribution des contraintes de Von Mises différente de celle observée pour le contact normal.

La contrainte maximale de Von Mises qui augmente légèrement sous l'effet de ces efforts tangentiels, se localise cette fois-ci en surface et l'écoulement plastique se produit tout d'abord en surface, à proximité du bord d'attaque et du bord de fuite de la zone de contact comme le montre la Figure 3. 14(b), puis en sous surface sous forme d'un arc comme le montrent les Figure 3. 13(d)-(e)-(f). Enfin si les efforts sont assez élevés, une plastification se produit au centre de la surface de contact.

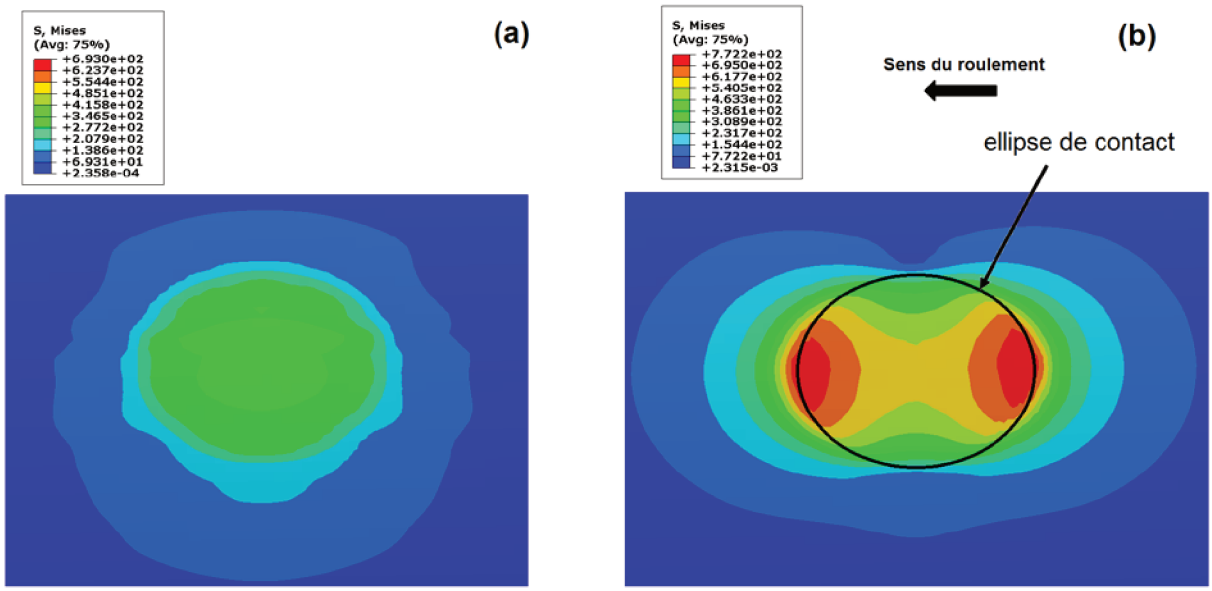


Figure 3. 14 : Contraintes de Von Mises en surface avec la méthode implicite DM

3.2.5.3. Solution du problème tangent

L'estimation précise des efforts de cisaillement est d'une extrême importance dans la modélisation du contact frottant, puisque l'ampleur de la force tangentielle de frottement en surface peut déterminer la trajectoire d'initiation et de propagation d'une fissure, ainsi que le développement de l'usure.

La Figure 3. 10 montre que, contrairement au schéma explicite, le schéma d'intégration implicite permet d'atteindre un état quasi-statique quasiment parfait pour la force tangentielle globale dans les directions longitudinale et transversale. Afin de vérifier la stabilité de la solution au niveau local et ainsi la cohérence entre les différentes méthodes numériques, nous allons comparer les efforts tangentiels aux nœuds obtenus par la méthode des éléments finis avec ceux obtenues avec CONTACT.

a. Contrainte de cisaillement au contact

La Figure 3. 15 montre le contour et les vecteurs de la contrainte de cisaillement en surface donnée par CONTACT (Figure 3. 15(a)) et par les différentes méthodes par éléments finis (Figure 3. 15(b)-(c)-(d)). Les flèches sont dirigées dans la direction de la force et leurs longueurs sont proportionnelles à leurs normes.

La distribution de la contrainte de cisaillement par les différentes méthodes par éléments finis ainsi que l'orientation des vecteurs de contrainte est en bon accord avec CONTACT,

cependant, l'effet du spin semble être plus important quand la méthode explicite est utilisée, ceci se traduit sur la Figure 3. 15 (b) par une légère modification de l'emplacement de la zone où la contrainte de cisaillement est la plus élevée.

La roue de forme conique tend naturellement à se déplacer en rotation autour de l'axe passant par le sommet du cône. Cependant, les conditions aux limites imposées dans le modèle pour une seule roue, obligent la roue à avancer dans la direction x. En réalité, cette condition est directement atteinte quand les deux roues droite et gauche sont reliées à un même essieu limitant ainsi leurs degrés de liberté. La forme conique des roues a plusieurs avantages ; elle donne plus de stabilité au wagon qui avance sans sortir de la voie. Elle contribue avec le boudin pour empêcher la roue de dérailler et elle facilite le mouvement d'inscription en courbe en assurant un rôle de différentiel. Mais, la surface de contact n'étant pas tout à fait parallèle à l'axe de rotation de l'essieu, ceci se traduit sur la zone de contact par un couple autour de la normale au contact, dont l'effet est appelé effet de *spin*. Le modèle développé dans cette partie est choisi de façon à pouvoir observer et étudier cet effet à l'aide de la méthode des éléments finis. La norme des vecteurs de la contrainte de cisaillement au contact sur la Figure 3. 15 est évidemment plus élevée dans la zone de glissement. L'orientation de ces vecteurs donnée par CONTACT et par les différentes méthodes par éléments finis est dirigée vers le sens horaire.

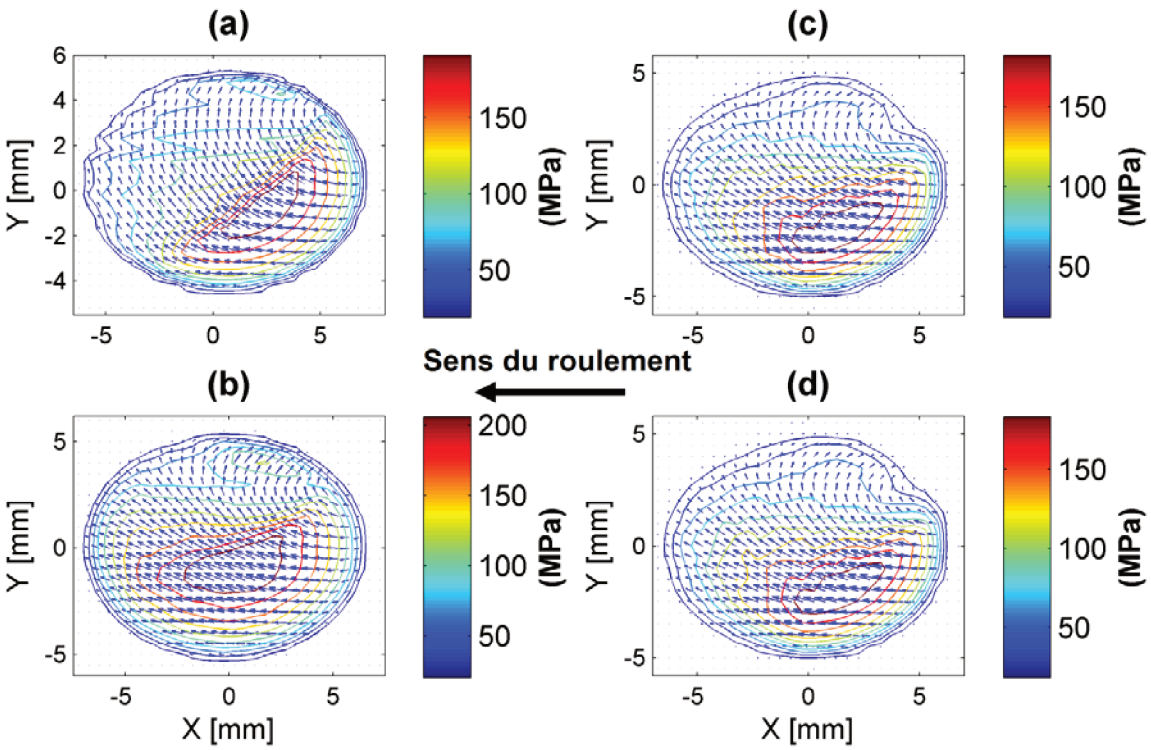


Figure 3. 15 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement au contact pour ξ_x=-0.7‰ (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM

Afin de vérifier la consistance des méthodes par éléments finis utilisées dans ce travail, nous avons testé une autre configuration plus simple, sans spin, composée d'une roue cylindrique en contact avec un rail UIC60 plat. Ceci nous permet également d'évaluer l'effet de la conicité de la roue sur les contraintes tangentielles au contact. La Figure 3. 16 montre les

vecteurs de la force de cisaillement avec les méthodes par éléments finis et avec CONTACT. L'orientation de ces vecteurs est complètement dirigée dans la direction longitudinale vers le sens du roulement et leurs normes augmentent du bord d'attaque vers le bord de fuite. En comparant l'orientation des vecteurs de la contrainte tangentielle sur la Figure 3. 15 et la Figure 3. 16, l'effet de spin peut être mis en évidence. Cet effet disparait complètement quand l'angle de conicité est enlevé avec la roue cylindrique.

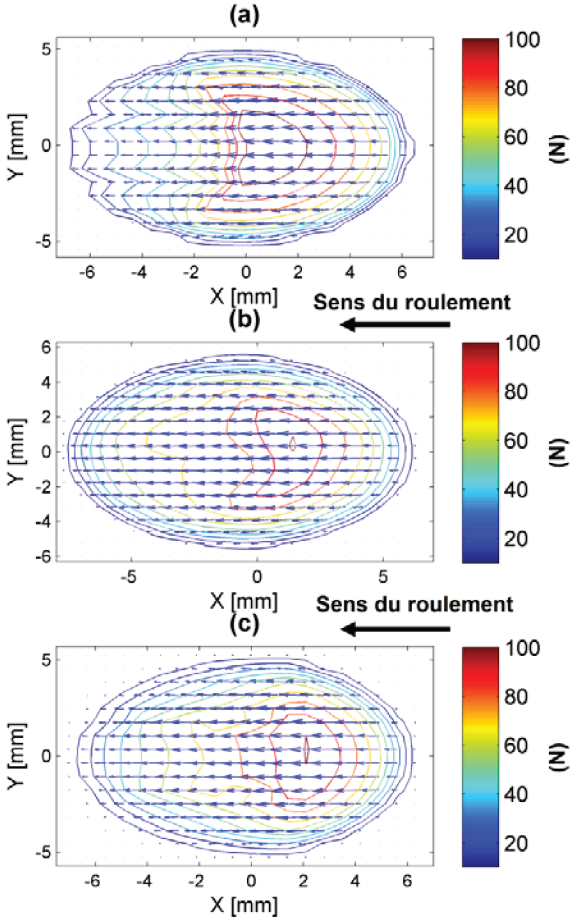


Figure 3. 16 : Contours et vecteurs de la force de cisaillement au contact pour ξ_x=-1.5 ‰ (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite DM

La Figure 3. 17 représente la contrainte tangentielle en vue de coupe suivant y=0 avec le modèle simplifié cylindre-UIC60 plat. La contrainte tangentielle selon les différentes méthodes numériques est en accord dans la zone de glissement. Elle suit l'enveloppe de la pression de contact. En revanche, l'allure de cette contrainte est différente dans la zone d'adhérence. Le logiciel CONTACT donne une allure concave, tandis que la méthode par éléments finis implicite donne une allure convexe et la méthode explicite une zone bombée.

Indépendamment du couple roue-rail utilisé, la contrainte de cisaillement maximale τ_{tmax} donnée par les différentes méthodes par éléments finis est en bon accord avec CONTACT. En effet, la Figure 3. 15 montre que la valeur de τ_{tmax}, environ égale à 180 MPa avec les deux méthodes implicites, est très proche de celle donnée par CONTACT environ 184 MPa tandis que τ_{tmax} avec la méthode explicite est légèrement plus élevée avec environ 200 MPa. Ce

résultat est très important pour l'étude des différents types d'endommagement du rail étant donné que le niveau maximum des contraintes de cisaillement au contact est le paramètre responsable de la détermination de l'initiation et de la propagation d'une fissure ainsi qu'au développement de l'usure.

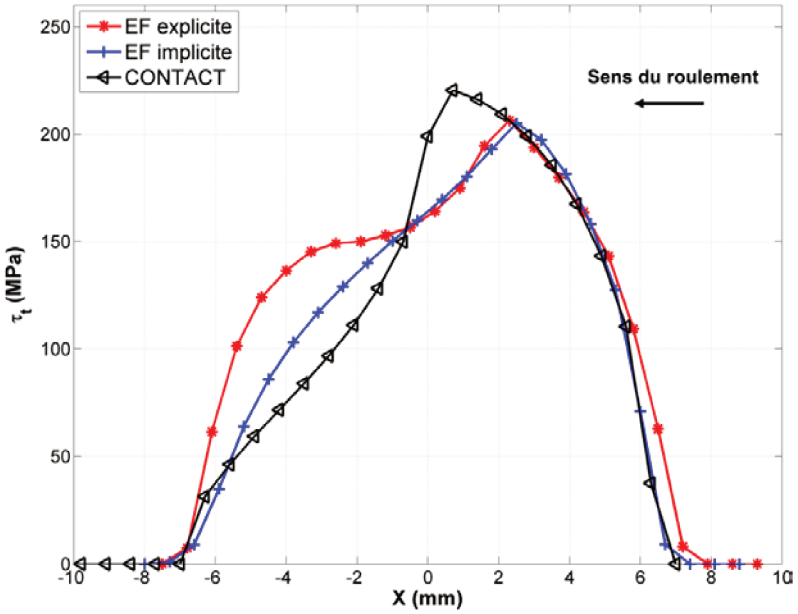


Figure 3. 17 : Contrainte de cisaillement au contact en vue de coupe suivant y=0 avec le modèle cylindre-UIC60

b. Zone d'adhérence-glissement

Les zones d'adhérence-glissement sont distinguées sur la surface de contact à l'aide de la loi de Coulomb ; les corps sont en adhérence en un noeud quand τ_t(i)<μp_n(i) et ils sont en glissement quand τ_t(i) =μp_n(i). En traçant l'effort de cisaillement local normalisé, on peut donc déduire la répartition de ces zones. La Figure 3. 18 montre ce résultat par les différentes méthodes par éléments finis et par CONTACT. La zone de glissement (en couleur rouge sombre) correspond à la zone où les nœuds du maillage ont une valeur de contrainte de cisaillement normalisée τ_t(i)/μp_n(i) égale à 1 et la zone d'adhérence est la zone où cette valeur est inférieure à 1.

Les deux méthodes implicites QS et DM donnent pratiquement le même résultat. Dans la suite de l'étude, la méthode implicite sera représentée seulement par la procédure DM. En comparant la Figure 3. 18 (d) avec la Figure 3. 18 (a), on remarque que la solution implicite DM est globalement en accord avec CONTACT bien que la zone de glissement est plus large avec la méthode implicite. La solution explicite est plus éloignée de CONTACT. Bien que l'emplacement des zones d'adhérence-glissement soit en accord, la surface de contact reste largement dominée par la zone de glissement.

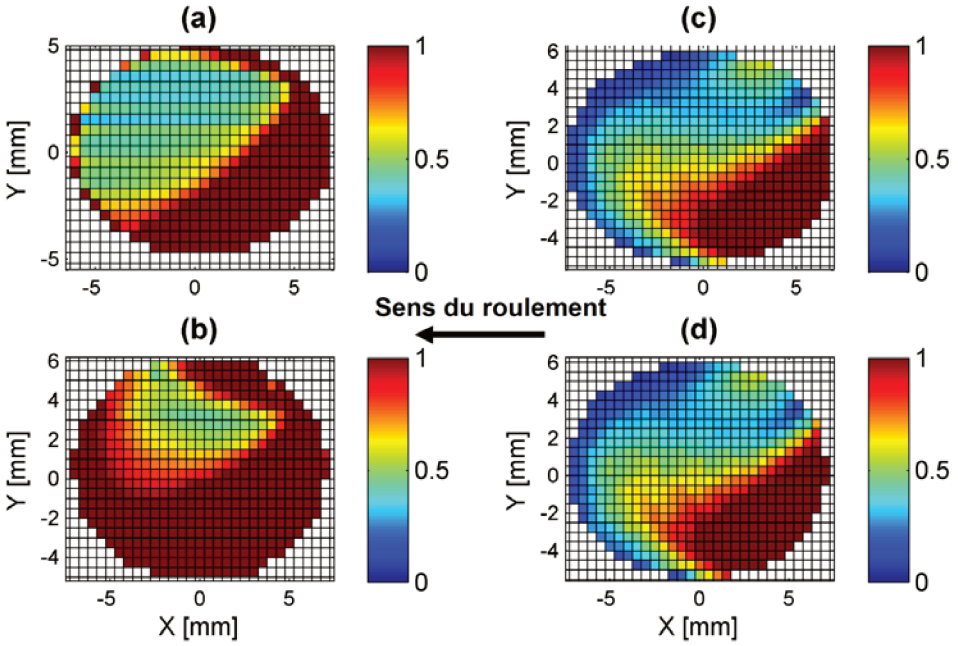


Figure 3. 18 : Force tangentielle normalisée par μp_n pour ξ_x=-0.7‰ (a) CONTACT (b) EF dynamique explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM

3.2.5.4. Etude paramétrique

Afin de vérifier la validité et la flexibilité du modèle, une étude paramétrique est conduite dans cette section. Cette étude permet de vérifier la reproductibilité du notre modèle dans des situations de contact différentes et d'évaluer la sensibilité d'un paramètre du modèle sur le résultat final. Seule la méthode implicite DM est employée étant donné que, comme on l'a vu dans les sections précédentes, la solution avec la méthode implicite QS est pratiquement la même quand le pas de temps est égal à Δt_4.

Sauf indication contraire, les paramètres du calcul présentés dans le Tableau 3. 1 demeurent inchangés durant toute l'analyse paramétrique.

a. Influence du point de contact

Lorsque le train est en circulation, le guidage est assuré par l'asservissement en position que constitue le bicône, ce qui implique que l'essieu se déplace transversalement selon un mouvement pseudopériodique. Le contact roue-rail peut se produire à différentes positions transversales en fonction de la translation ty, couvrant plusieurs situations de roulement entre le contact sur le cône extérieur de la roue, en passant par la position centrée (vers laquelle converge l'essieu stable roulant sur une voie rectiligne sans défaut) jusqu'au contact au boudin (lors de la prise en courbe serrée par forte adhérence).

La forme de l'aire de contact dépend des courbures antagonistes donc de la position transversale ty [82]. La Figure 3. 19 montre le point et l'aire de contact sur la roue et le rail en fonction de la translation ty imposée donnée avec le logiciel Expro [81]. Les dimensions de l'aire de contact sont déterminées suivant la théorie de Hertz. Au moins un saut de contact existe entre la position centrée et le contact au boudin. La surface de contact, elliptique en

position centrée, devient plus élancée dans la direction du roulement lors de la mise en contact au boudin.

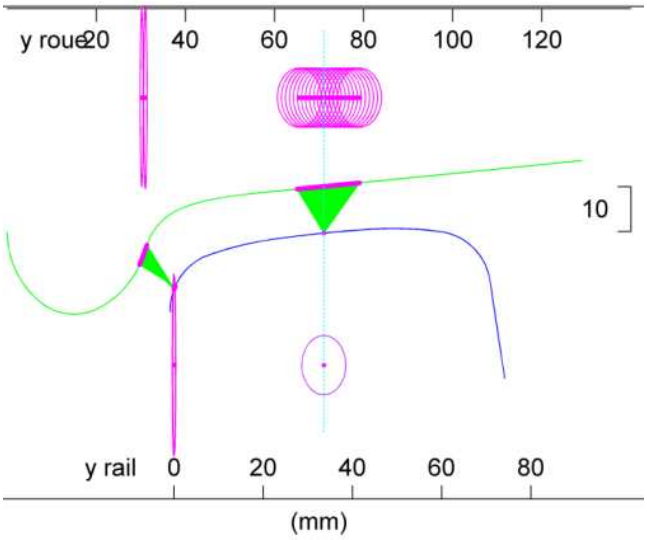


Figure 3. 19 : Points et aires de contact en fonction de la translation arbitraire ty

La pression de contact calculée avec la méthode des éléments finis est présentée sur la Figure 3. 20 en fonction de la translation imposée ty. Le saut de contact est fidèlement reproduit avec notre modèle. La surface de contact garde la même forme elliptique et la pression de contact est conservée jusqu'à ty=11.4 mm. Au-delà de cette valeur, le contact prend place au boudin, l'aire de contact est élancée dans la direction longitudinale (direction du roulement) avec une importante élévation de la pression maximale de 1102 MPa jusqu'à 5647 MPa à ty=14.4 mm (en hypothèse élastique) pour la même charge par roue C_N=75 kN. On peut conclure que la position transversale de l'essieu joue un rôle important dans l'étude du contact roue-rail. Sa modification impacte significativement la pression de contact ainsi que sa distribution.

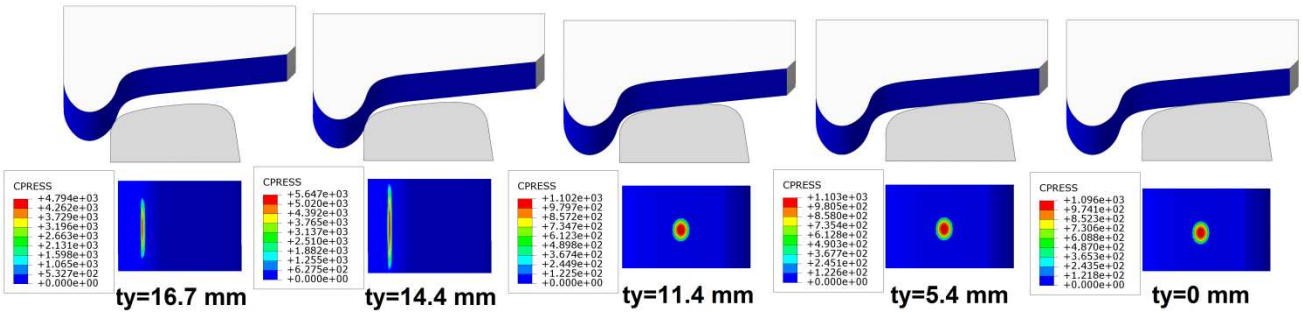


Figure 3. 20 : Pression et surface de contact en fonction de la translation ty avec la méthode des éléments finis

b. Influence du pseudoglissement longitudinal ξ_x (freinage et accélération)

La valeur du pseudoglissement longitudinal ξ_x définit la condition opératoire du véhicule, c'est-à-dire si le véhicule est en situation de freinage (quand ξ_x<0) ou d'accélération (quand ξ_x>0). Une troisième situation, en roulement libre, peut également exister lorsque ξ_x est égal à

zéro. Dû au couple de spin, la valeur de l'effort tangentiel τ_t en roulement libre est non nulle. Ceci se traduit par une force transversale positive pour α=0 (voir Figure 3. 27).

La Figure 3. 21 représente les contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement surfacique en freinage et en accélération. Pour ξ_x=-0.7‰, ces vecteurs sont dirigés vers le sens du roulement et l'effort tangentiel au contact tend à freiner la roue. Inversement, pour ξ_x=1.5‰, les vecteurs contrainte de cisaillement surfacique sont dirigés dans le sens opposé et l'effort tangentiel tend à l'accélérer. L'orientation globale imposée par le spin, reste dans les deux cas la même (dans le sens horaire).

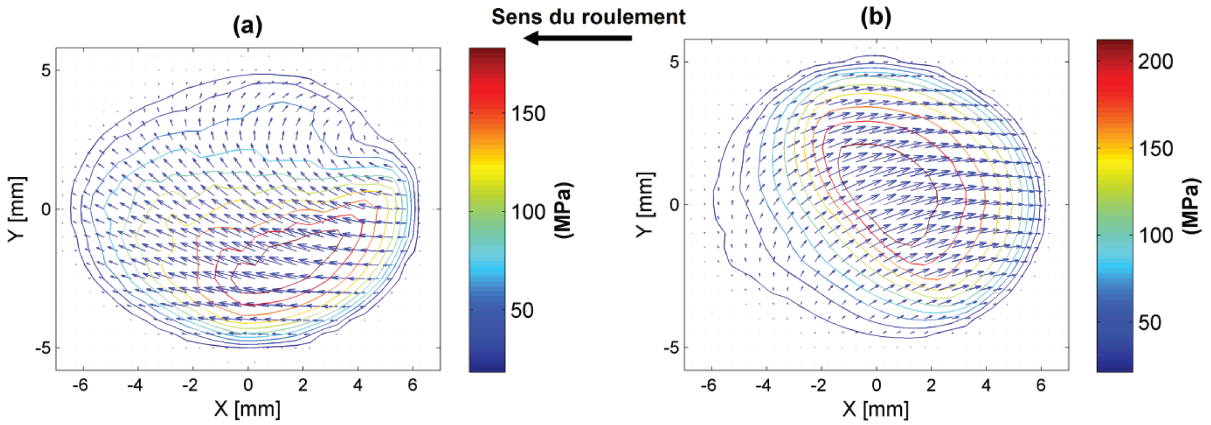


Figure 3. 21 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement en surface avec la méthode des éléments finis (a) en freinage avec ξ_x=-0.7‰ (b) en accélération avec ξ_x=1.3‰

Les zones d'adhérence-glissement, déduites de la contrainte de cisaillement normalisée, sont représentées sur la Figure 3. 22 pour les deux valeurs de pseudoglissement ξ_x. En freinage ou en accélération, la zone d'adhérence est toujours sur le bord d'attaque et la zone de glissement est sur le bord de fuite. Cependant, compte tenu de la dissymétrie par rapport à y=0 de la distribution des efforts tangentiels qui est due essentiellement au spin, la frontière entre la zone d'adhérence et de glissement est inversée avec les deux conditions opératoires.

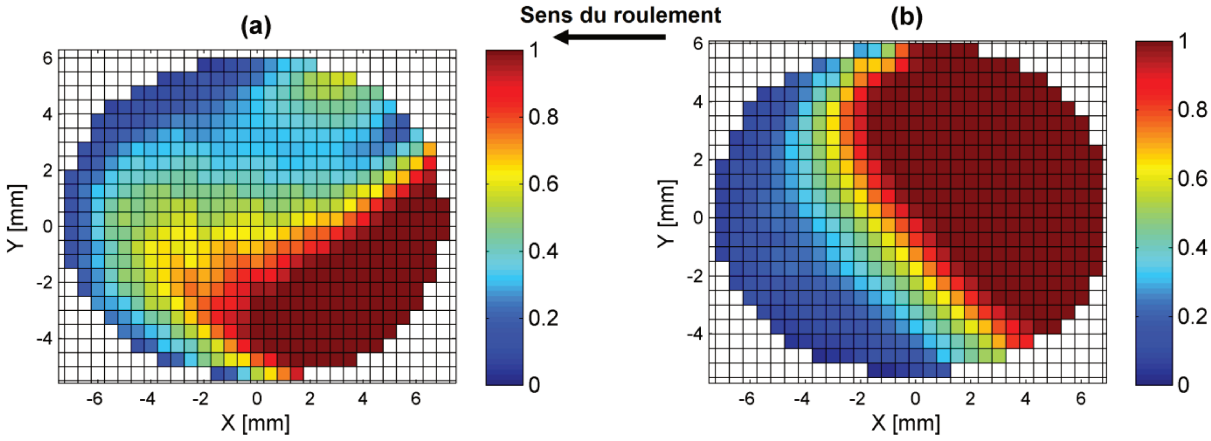


Figure 3. 22 : Contrainte de cisaillement normalisée par μp_n avec la méthode des éléments finis (a) en freinage avec ξ_x=-0.7‰ (b) en accélération avec ξ_x=1.3‰

c. Influence du coefficient de frottement

Le coefficient de frottement μ au contact roue-rail détermine l'effort maximum qui peut être transmis sur la surface de contact selon la loi de Coulomb. Le coefficient μ joue un rôle important dans la procédure de maintenance en ferroviaire car il impacte directement le processus de dégradation de la roue et du rail et détermine le niveau de l'usure et de la fatigue de contact de roulement. En fonction de plusieurs facteurs qui interviennent au niveau du contact telle que les conditions climatiques et la contamination de surface, la valeur du coefficient de frottement au contact roue-rail peut largement varier d'environ 0.05 (en présence d'un lubrifiant liquide type huile ou graisse) jusqu'à atteindre parfois la valeur de 0.7 (en été). Par exemple, l'étude de Popovici [83] sur la variation du coefficient de frottement dans le réseau ferré Hollandais a montré avec une série de mesure que la valeur de μ pendant l'automne est à 80% des cas comprise entre 0.05 et 0.2.

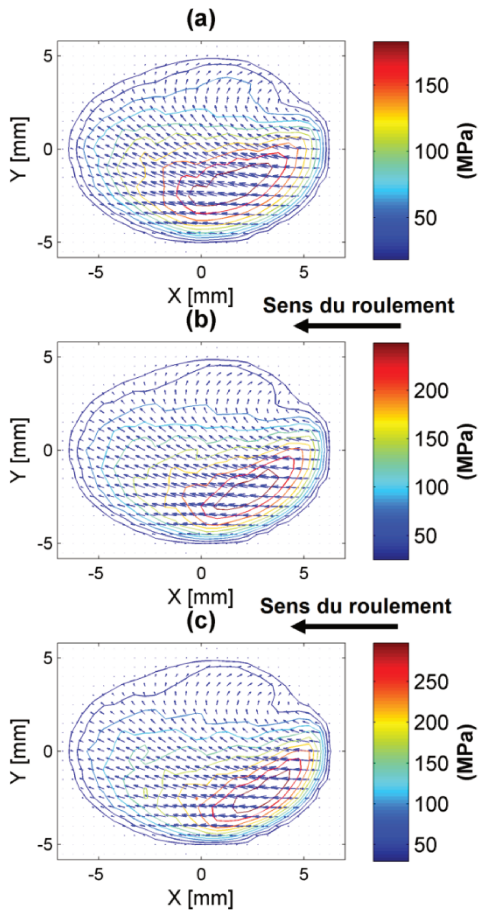


Figure 3. 23 : Contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement en surface avec la méthode des éléments finis (a) μ=0.2 (b) μ=0.3 (c) μ=0.4

Plusieurs équipes citées par Popovici ont été amenées à utiliser des modificateurs de frottement afin d'augmenter les efforts tangentiels au contact et avoir une meilleure réponse lors d'une opération de freinage ou d'accélération en conditions de basse adhérence. Certaines autres équipes ont appliqué des modificateurs de frottement de composition différente ou des lubrifiants pour au contraire réduire les efforts tangentiels et le coefficient de frottement, et par conséquent, réduire l'usure des rails et étendre leur durée de vie [84]. D'autres travaux

dirigés par Eadie [85] ont montré la capacité de ces modificateurs de frottement à significativement atténuer l'apparition de l'usure ondulatoire en courbe. En revanche, très peu d'études portent sur l'effet de ces matériaux sur la fatigue de contact de roulement (RCF). Le coefficient μ en circulation étant donc variable, notre modèle par éléments finis doit être capable de s'adapter avec ce changement. Ainsi, l'effet de différents coefficients de frottement sur les efforts de cisaillement au contact est étudié.

La Figure 3. 23 montre les contours et vecteurs de la contrainte de cisaillement surfacique donnés avec la solution par éléments pour trois coefficients de frottement μ=0.2, μ=0.3 et μ=0.4. On remarque que la zone de maximum d'effort tangentiel est réduite quand le coefficient μ augmente. Par conséquent, la zone de glissement, représentée sur la Figure 3. 24 en couleur rouge sombre pour $\tau_t/\mu p_n$=1, diminue et la zone d'adhérence augmente. Ainsi, les entreprises de gestion de l'infrastructure ferroviaire sont amenées, dans des situations de contact au boudin, à baisser le coefficient de frottement, en introduisant un système de lubrification, afin d'augmenter le glissement entre la roue et le rail dans cette zone et éviter une éventuelle montée de la roue sur le rail, par adhérence, ce qui réduit par conséquent le risque du déraillement du train.

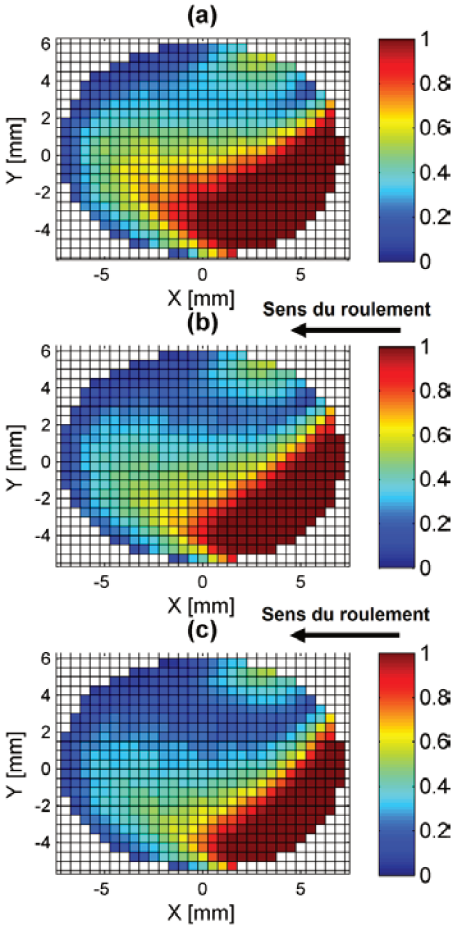


Figure 3. 24 : Contrainte de cisaillement normalisée par μp_n avec la méthode des éléments finis (a) μ=0.2 (b) μ=0.3 (c) μ=0.4

La Figure 3. 23 montre aussi que la valeur maximale de la contrainte de cisaillement τ_{tmax} augmente avec le coefficient de frottement de τ_{tmax}=180 MPa avec le coefficient le plus bas μ=0.2 jusqu'à atteindre τ_{tmax}=290 MPa avec le coefficient le plus élevé μ=0.4. Ainsi, l'élévation du coefficient de frottement augmente le risque du développement de l'usure et d'apparition d'une fissure dans les zones de maximum de contrainte de cisaillement. Pour cette raison, plusieurs équipes de maintenance tentent, dans certaines zones, de limiter l'usure du rail, en appliquant sur ces zones de risque (en courbe par exemple) des lubrifiants liquides qui permettent de baisser le coefficient de frottement et par conséquent les contraintes de cisaillement maximales.

3.2.5.5. Courbes de saturation

Les différentes théories de contact roulant dont la théorie complète de Kalker implémentée dans CONTACT, se basent sur l'équation (139) dans le calcul du pseudoglissement longitudinal ξ_x. Cette relation est aussi utilisée dans notre modèle par éléments finis et ω_r est déduit dans le cas du roulement libre sans glissement, c'est-à-dire pour un pseudoglissement ξ_x nul, de la relation suivante :

$$\omega_r = \frac{V_x}{R_0} \tag{145}$$

Le rayon de roulement R_0 est calculé pour une position t_y donnée en considérant la roue et le rail comme étant deux corps rigides. Or, dans le modèle par élément finis, les deux corps en contact sont élastiques. La roue et le rail se déforment à proximité de la zone de contact et la surface de contact sur la roue se déplace dans la direction normale z (Figure 3. 25). Le rayon de roulement R_{0EF} par la méthode des éléments finis R_{0EF} est donc, en réalité, inférieur à celui calculé avec l'hypothèse de rigidité des deux corps. Par conséquent, la vitesse de roulement ω_r est légèrement différente de celle imposée au départ.

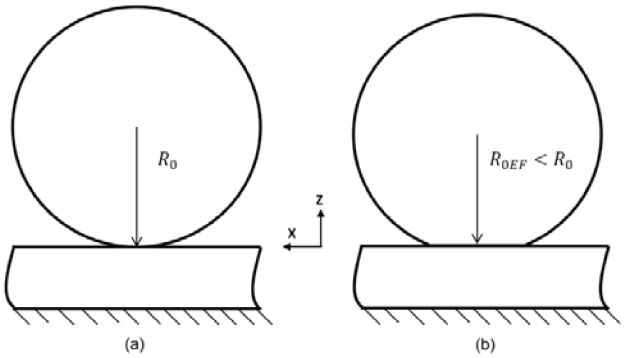


Figure 3. 25 : Rayon de roulement : (a) contact entre corps rigides (b) contact entre corps élastiques

Ceci se traduit sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale par un « offset » (décalage) de toute la courbe. La force longitudinale F_{xG} est donc, contrairement aux théories classiques du contact roulant et à CONTACT, différente de zéro pour un pseudoglissement ξ_x égal à zéro. Afin de pouvoir assurer une bonne comparaison avec les différentes méthodes

utilisées, les courbes de saturation par éléments finis dans la direction longitudinale sont remises à zéro en les décalant par la valeur $\xi_{décal}$. Cette valeur est calculée en procédant par une interpolation linéaire entre deux valeurs de pseudoglissement pour lesquelles la force longitudinale globale est positive et négative. Ces deux points doivent être choisis dans la partie linéaire de la courbe.

La Figure 3. 26 représente la courbe de saturation dans la direction longitudinale avec la méthode des éléments finis, CONTACT, FASTSIM et la théorie linéaire de Kalker. Les deux schémas d'intégration explicite et implicite DM ont été testés, on remarque une différence considérable entre ces deux solutions ; Les pentes initiales des différentes méthodes numériques (partie à proximité des pseudoglissements nuls sur la Figure 3. 26) sont comprises entre la pente la plus élevée donnée par la théorie linéaire de Kalker et la pente la plus basse donnée par la méthode implicite DM. La solution de cette dernière est très proche de CONTACT et FASTSIM. En revanche, la pente initiale de la courbe est plus raide avec la méthode explicite se rapprochant ainsi plus de la théorie linéaire.

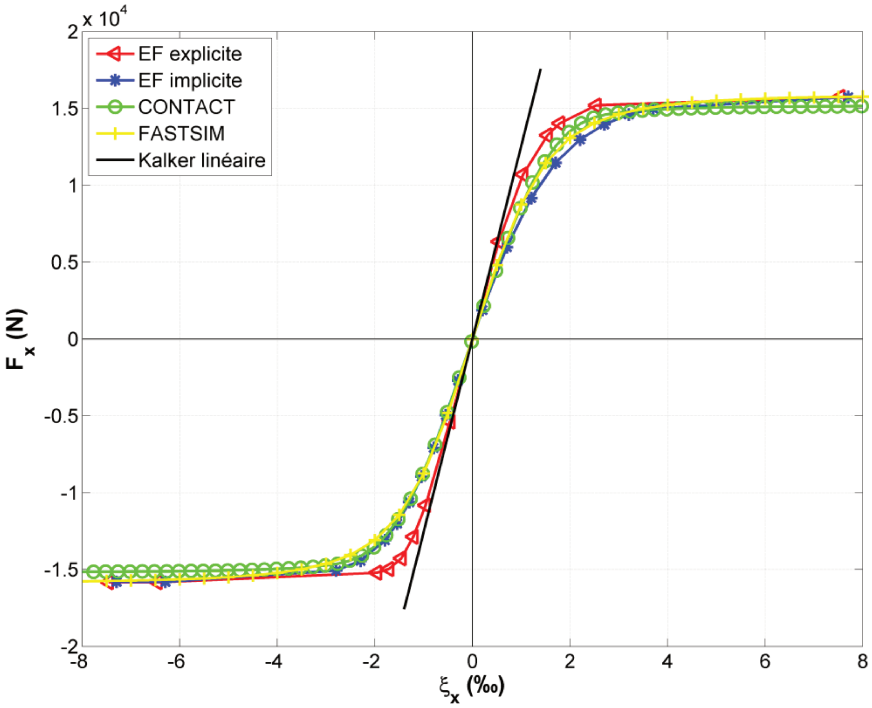


Figure 3. 26 : Courbes de saturation dans la direction longitudinale avec différentes méthodes numériques

La solution implicite est en bon accord avec CONTACT avec une même limite de saturation inférieure égale à -3‰ et une limite de saturation supérieure égale à 3.5‰ et 4‰ respectivement avec CONTACT et la solution implicite DM. La pente initiale, plus élevée avec la solution explicite, conduit à une limite de saturation inférieure et supérieure respectivement égale à -2‰ et 2.5‰.

L'accord entre la solution implicite DM et CONTACT est moins vérifié dans la direction transversale, la Figure 3. 27 représente la force transversale en fonction de l'angle de dérive α. Pour des raisons de coût de calcul élevé, la méthode explicite n'a pas été utilisée. De même

que dans la direction longitudinale, la solution de CONTACT et FASTSIM sont en bon accord et la pente initiale la plus élevée est donnée par la théorie linéaire de Kalker. Encore une fois, la pente initiale la moins raide est donnée par la méthode par éléments finis implicite DM. Ceci conduit à une saturation à un niveau plus élevée dans la borne supérieure et à un niveau plus bas dans la borne inférieure avec des limites de saturation supérieure et inférieure respectivement égales à 4.5 mrad et -9 mrad avec la solution par éléments finis comparée à 2 mrad et -5 mrad avec CONTACT et à 3.5 mrad et -7 mrad avec FASTSIM. Autrement dit, la transition entre la zone des micro-pseudoglissements et la zone des macro-pseudoglissements (ou zone de saturation) est plus lente avec la méthode implicite DM qu'avec CONTACT et FASTSIM.

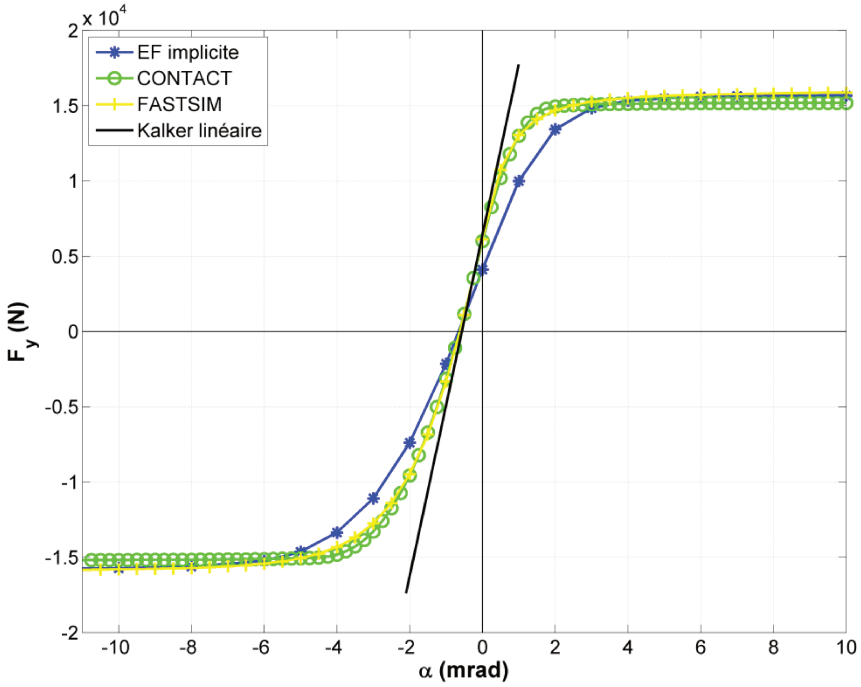


Figure 3. 27 : Courbes de saturation dans la direction transversale

L'effet du spin peut être évalué à partir de la courbe de saturation sur la Figure 3. 27. Pour un angle de dérive α=0 mrad, la force transversale induite par la conicité de la roue est égale à $F_{y\mathrm{lin}}$=6414 N, $F_{y\mathrm{FAST}}$=6161 N, $F_{y\mathrm{CON}}$= 6011 N et $F_{y\mathrm{EFe}}$=4115 N respectivement avec la théorie linéaire, FASTSIM, CONTACT et la méthode des éléments finis implicite DM. Il y a donc moins d'effet du spin quand la méthode des éléments finis est employée en comparaison avec les autres méthodes.

Les coefficients de Kalker étant proportionnels aux pentes initiales des courbes sur la Figure 3. 26 et la Figure 3. 27, on peut déduire que les coefficients C_{ijEF} par éléments finis élastiques sont inférieurs aux coefficients C_{ij} de Kalker utilisés dans sa théorie linéaire [12]. Pourtant, on aurait pu penser que le rapprochement des limites allait « raidir » le comportement ; c'est sans doute la forme élancée du rail apportée par le maillage éléments finis qui au contraire donne des résultats plus « souples » que les demi-espaces des deux autres méthodes.

Afin d'évaluer avec précision la variation entre les différents modèles et ainsi quantifier l'effet de la méthode numérique sur les coefficients de Kalker, en particulier l'effet de la méthode par éléments finis, les dérivées A_x et A_y entre chaque points successifs des courbes de saturation dans la direction longitudinale et transversale sont tracées. Pour tout point n de la courbe, ces dérivées sont calculées en utilisant les expressions suivantes :

$$\mathrm{A_x}(n) = \frac{F_x(n) - F_x(n-1)}{\xi_x(n) - \xi_x(n-1)} \tag{146}$$

$$\mathrm{A_y}(n) = \frac{F_y(n) - F_y(n-1)}{\alpha(n) - \alpha(n-1)} \tag{147}$$

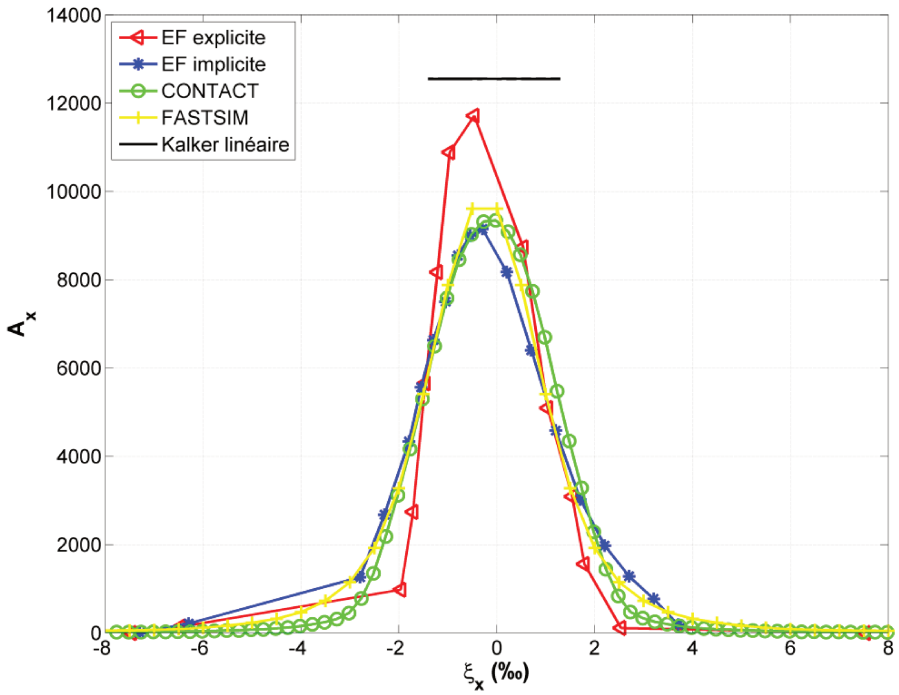


Figure 3. 28 : Dérivée A_x de la courbe de saturation dans la direction longitudinale en fonction du pseudoglissement ξ_x

Le résultat dans la direction longitudinale est représenté sur la Figure 3. 28. Le pic de chaque courbe correspond à la pente initiale de la courbe de saturation. Le résultat confirme la remarque précédente. Contrairement à la solution explicite, la pente initiale avec la solution implicite est en bon accord avec CONTACT et FASTSIM dans cette direction. De plus, les pentes initiales avec les différentes méthodes numériques sont inférieures à celle donnée par la théorie linéaire de Kalker, par conséquent, les coefficients de raideur qu'on peut évaluer à partir de la solution élastique par éléments finis, de FASTSIM ainsi que de CONTACT sont inférieurs aux coefficients classiques de Kalker prévus dans sa théorie linéaire. Cette baisse est évaluée à partir de la Figure 3. 28 avec des coefficients réducteurs qu'on notera K_{ij}. Dans le cas de la solution élastique implicite DM par éléments finis, le coefficient C_{11EFe} est réduit par K_{11e}=0.72 par rapport au coefficient C_{11} de Kalker qui est, d'après le tableau de l'annexe A.2, égal à 4.57.

De même, la Figure 3. 29 qui représente les dérivées A_y de la courbe de saturation dans la direction transversale en fonction de l'angle de dérive α, montre d'une part le bon accord entre les solutions de FASTSIM et CONTACT constaté sur la Figure 3. 27. Les pentes initiales des deux solutions sont très proches et sont comprises entre la théorie linéaire et la solution implicite DM. D'autre part, le coefficient réducteurs K_{22e}, permettant d'évaluer le coefficient C_{22EFe} donné avec la solution élastique implicite DM, est dans notre cas d'étude égal à 0.56 de réduction par rapport au coefficient de Kalker C_{22} égal à 4.12 dans ce cas.

En utilisant les corrections K_{ij} dues à la solution élastique par éléments finis (et par la suite à la solution élasto-plastique), il est possible d'évaluer l'influence de ces paramètres sur la vitesse critique du véhicule. Cette étude sera réalisée dans le chapitre suivant.

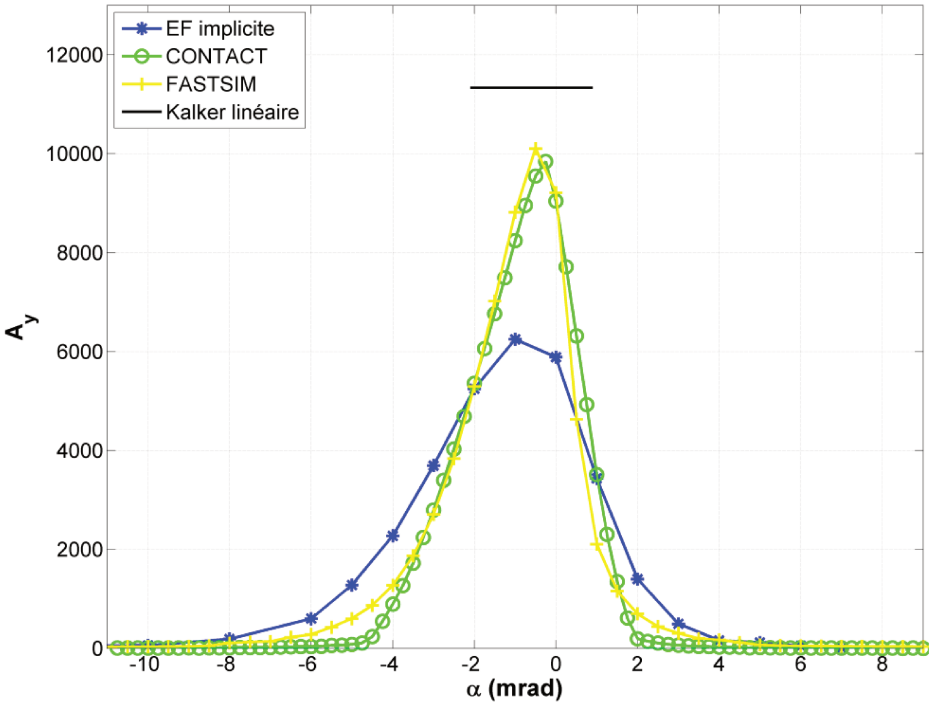


Figure 3. 29 : Dérivée A_y de la courbe de saturation dans la direction transversale en fonction de l'angle de dérive α

3.3. Contact roue-rail élasto-plastique

Les théories de contact roulant classiques ne décrivent pas fidèlement la réalité physique du contact roue-rail car elles ne prennent pas en compte la plasticité des corps en contact. De même, le logiciel CONTACT basé sur la théorie complète de Kalker ne permet pas la prise en compte du comportement élasto-plastique des matériaux lors de la résolution du problème de contact. Les non-linéarités dues à l'élasto-plasticité rendent son implémentation dans une méthode de type éléments de frontière très complexe. La méthode des éléments finis est particulièrement efficace pour la résolution de ce type de comportement, l'introduction de l'élasto-plasticité des matériaux en contact est relativement simple mais la convergence est parfois difficile à atteindre à cause de l'augmentation des non-linéarités du système ; de plus

nous avons vu dans la partie 3.2.5.1 que les limites du modèle ont une influence sur les contraintes normales calculées.

Dans cette partie, le modèle par éléments finis validé dans la section précédente est étendu pour résoudre le problème du contact roue-rail roulant élasto-plastique. Le but étant d'étudier l'effet de la plasticité sur la contrainte de cisaillement au contact et sur les courbes de saturation.

Une loi à écrouissage isotrope non-linéaire est utilisée dans ce travail. Les paramètres du matériau sont issus d'un essai de traction réalisé au sein de TataSteel sur l'acier R900A (voir l'annexe C). La limite d'élasticité de ce matériau est σ_{eR900A}=489 MPa. Certains points sur la figure de l'annexe C ont été enlevés dans Abaqus car ce dernier ne gère pas la phase de striction qui précède la rupture. Il est important de mentionner que cet acier est neuf et non écroui. Dans ce qui suit, la solution en élasto-plasticité pour le problème du contact normal et tangentiel sera présentée. Pour examiner l'influence de la plasticité sur le contact roue-rail, la solution élasto-plastique est comparée à la solution élastique.

L'étude par éléments finis en élasticité a montré que, pour un pas de temps assez petit, la solution implicite DM du problème normal et tangentiel est en parfaite accord avec la solution implicite QS. Une seule de ces deux procédures sera donc utilisée par la suite. D'autre part, la solution explicite est parfois éloignée de la solution de référence donnée par CONTACT comme le cas des zones d'adhérence-glissement sur la Figure 3. 18 ou encore pour la courbe de saturation longitudinale sur la Figure 3. 26. Dans la suite de l'étude, la méthode des éléments finis sera finalement représentée dans la plupart des cas par la procédure implicite DM. Comme pour le modèle élastique, la solution élasto-plastique des problèmes normal et tangentiel est donnée pour un pseudoglissement longitudinal ξ_x=-0.7 ‰ et un angle de dérive α=0 mrad.

3.3.1. Contraintes

La distribution des contraintes de Von Mises est examinée afin de vérifier si la déformation plastique se produit sur la zone de contact et en sous surface dans les conditions d'étude. En comparant les contraintes de Von Mises en surface en élasticité (Figure 3. 14) avec celles en élasto-plasticité (Figure 3. 30. (a)), on constate une baisse considérable de la contrainte maximale qui devient égale à 490 MPa sur presque toute la zone de contact. Compte tenu de la limite d'élasticité σ_{eR900A}, on déduit que, contrairement au cas élastique, la déformation plastique se produit sur toute la surface de contact.

La vue de coupe A-A sur la Figure 3. 30.(b) montre qu'une zone en sous surface plastifie également sous l'effet de l'effort tangentiel. La contrainte de cisaillement τ_{yz} suivant ce plan de coupe (Figure 3. 30.(c)) montre deux composantes de même taille et de même norme; une de traction et une de compression. Cette contrainte est maximale à une distance d'environ 3 mm en sous surface et tend à disparaitre en surface. Ce résultat est également vérifié par Ma dans [86].

La contrainte de Von Mises suivant le plan de coupe B-B (Figure 3. 30.(d)) est maximale dans une région de forme circulaire avec un rayon égal à environ 6.5 mm. Des contraintes résiduelles sont générées sur le rail après un premier passage de la roue. Les deux composantes de traction et de compression de la contrainte de cisaillement τ_{xz} (Figure 3. 30.(e)) sont légèrement attirées vers le sens opposé à celui du roulement sous l'effet de l'effort de traction longitudinal appliqué au contact roue-rail.

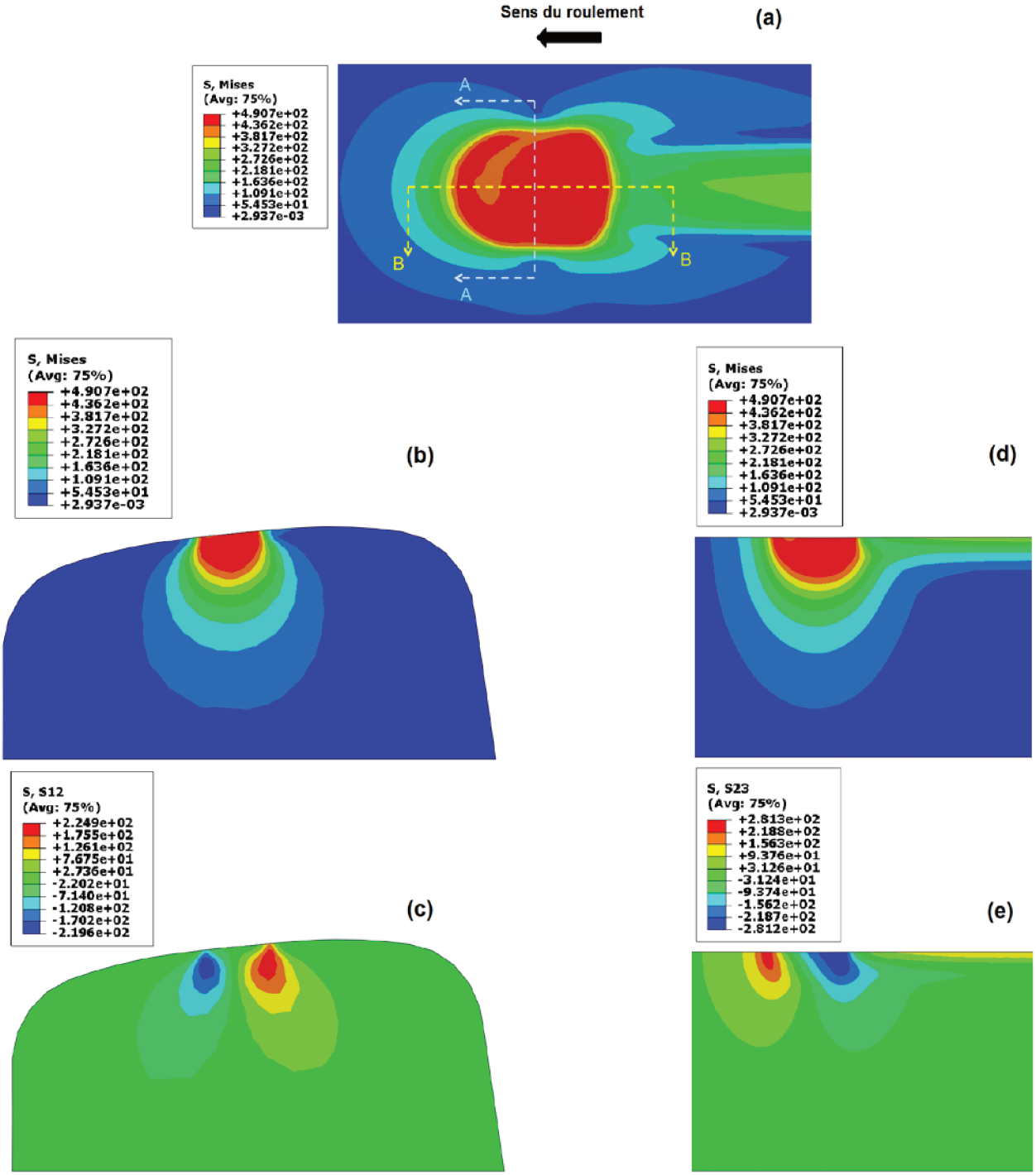


Figure 3. 30 : Contraintes de Von Mises avec l'acier R900A : (a) en surface (b) suivant la coupe A-A (d) suivant la coupe B-B. Contraintes de cisaillement : (c) suivant la coupe A-A (e) suivant la coupe B-B.

3.3.2. Contact normal

La Figure 3. 31 montre la distribution de la pression de contact avec les différentes solutions élasto-plastiques par la méthode des éléments finis (Figure 3. 31(b)-(c)-(d)). Pour montrer la différence entre la solution élastique et la solution élasto-plastique, cette pression est comparée à la solution élastique de référence donnée par CONTACT (Figure 3. 31(a)).

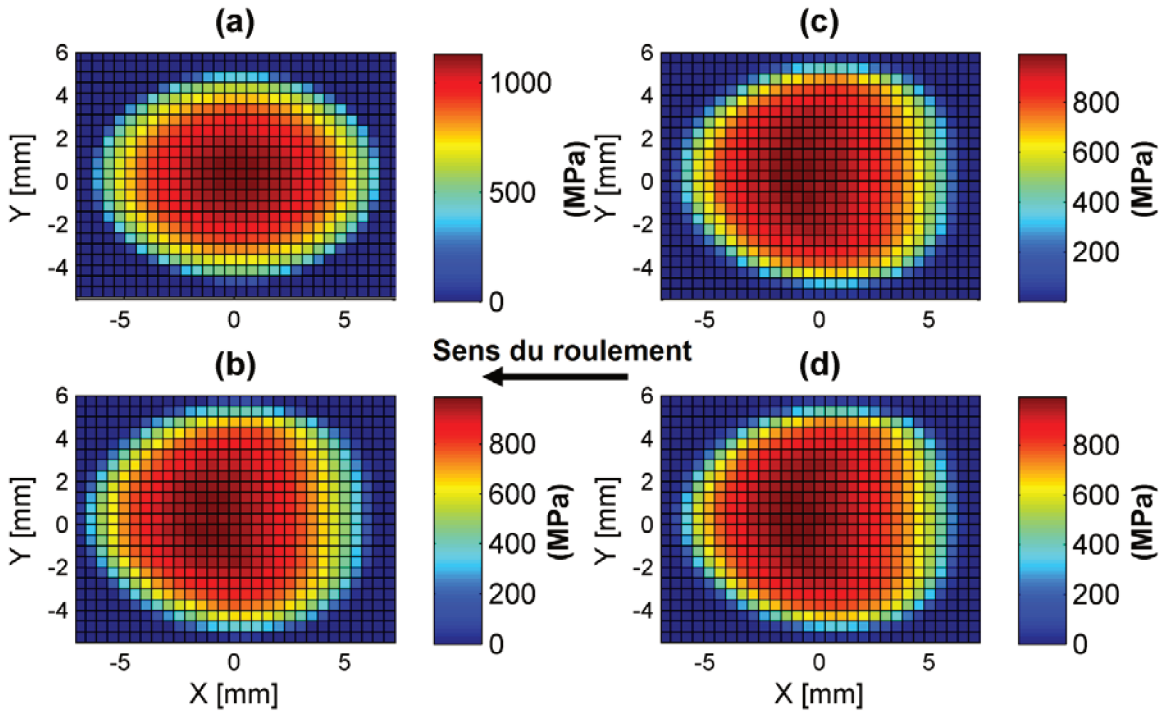


Figure 3. 31 : Distribution de la pression de contact en élasto-plasticité et comparaison avec CONTACT. (a) CONTACT (b) EF explicite (c) EF implicite QS (d) EF implicite DM

La Figure 3. 31 montre que la forme de la zone de contact, elliptique pour un contact élastique (Figure 3. 11), s'élargit au bord de fuite et prend la forme d'un œuf avec les différentes solutions élasto-plastiques. Cette variation est due aux courbures de la roue et du rail à proximité de la zone de contact qui, sous l'effet de la déformation plastique (Figure 3. 30), ont subi un changement irréversible conduisant ainsi à cette nouvelle forme. Lors du roulement, le bord d'attaque entre en contact en dernier, la surface de contact sur le rail dans cette région s'écrase moins et subit moins de déformation plastique que la zone à l'arrière de la surface, ce qui explique pourquoi la forme de la zone de contact au bord d'attaque reste inchangée comparée à la solution élastique. On peut s'attendre à une forme encore différente après un ou plusieurs passages de la roue sur le rail, par écrouissage. Cet aspect est étudié dans la thèse de Saint-Aimé [87].

Le changement de forme de la surface de contact en élasto-plasticité est accompagné d'une baisse de la pression de contact. La représentation de la pression de contact en vue de coupe suivant y=0 sur la Figure 3. 32 montre clairement cette baisse sous l'effet de la plasticité. Les solutions élasto-plastiques par les différentes méthodes éléments finis sont encore une fois en bon accord.

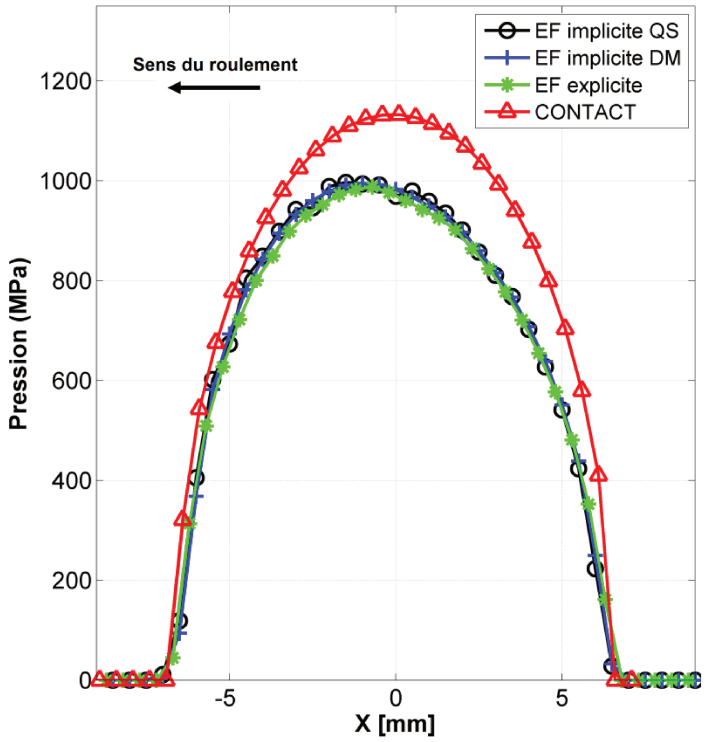


Figure 3. 32 : Pression de contact en vue de coupe suivant y=0 par les méthodes par éléments finis en élasto-plasticité et comparaison avec CONTACT.

Le Tableau 3. 8 représente une comparaison entre la solution élastique et la solution élasto-plastique du problème normal avec la procédure implicite DM. La surface de contact en élasto-plasticité n'étant plus elliptique, son aire est calculée en comptant le nombre de carré inclus dans la zone de contact. Cette aire élasto-plastique A_{ep} est plus grande que l'aire donnée par la solution élastique A_e avec A_{ep}=132 mm² et Ae=125.2 mm². On déduit donc que la plasticité élargit la surface de contact. La déformation plastique conduit aussi à une réduction de la pression maximale qui baisse de 1158.6 MPa à 992.3 MPa respectivement entre la solution élastique et la solution élasto-plastique.

Tableau 3. 8 : Solution du problème normal en élasticité et en élasto-plasticité avec la procédure par éléments finis implicite DM

	Semi-axe a (mm)	Semi-axe b (mm)	Aire (mm²)	Pression maximale (MPa)
Solution élastique	7.25	5.5	125.2	1158.6
Solution élasto-plastique	7	5.75	132	992.3
Différence relative élasto-plastique /élastique (%)	-3.5	4.3	5.1	-16.7

3.3.3. Contact tangent

La plasticité influe également sur la solution du problème tangent. La Figure 3. 33 représente les vecteurs et le contour de la contrainte de cisaillement en élasticité et en élasto-plasticité. On remarque que la zone de fort cisaillement est réduite et la contrainte de cisaillement

maximale passe de τ_{temax}=180 MPa à τ_{tepmax}=157 MPa respectivement avec la solution élastique et la solution élasto-plastique.

Cette comparaison montre aussi un léger changement de l'orientation des vecteurs de force bien que l'orientation globale reste la même, c'est-à-dire vers le sens horaire. Ceci peut être expliqué par l'augmentation des conformités entre la roue et le rail qui, sous l'effet de la déformation plastique, deviennent plus aplatis à proximité de la zone de contact. Cette modification affecte aussi l'effet de spin qu'on peut évaluer à partir de la courbe de saturation en transversale sur la Figure 3. 38.

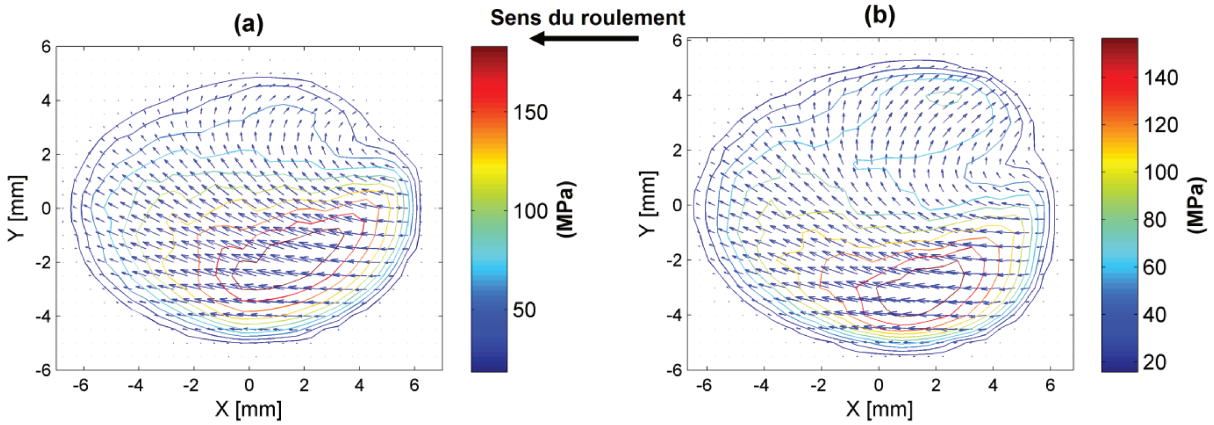


Figure 3. 33 : Vecteurs et contour de la contrainte de cisaillement surfacique par la méthode des éléments finis, (a) solution élastique (b) solution élasto-plastique

Les zones d'adhérence-glissement peuvent être déterminées à partir de la Figure 3. 34 qui représente la contrainte de cisaillement surfacique normalisée par μp_n en élasticité et en élasto-plasticité. La zone de glissement pour laquelle la contrainte de cisaillement sature est donnée en rouge sombre et le reste de la zone de contact correspond à la zone d'adhérence. On remarque que la déformation plastique réduit la zone de glissement. Par conséquent, l'aire de contact en élasto-plasticité est encore plus dominée par la zone d'adhérence.

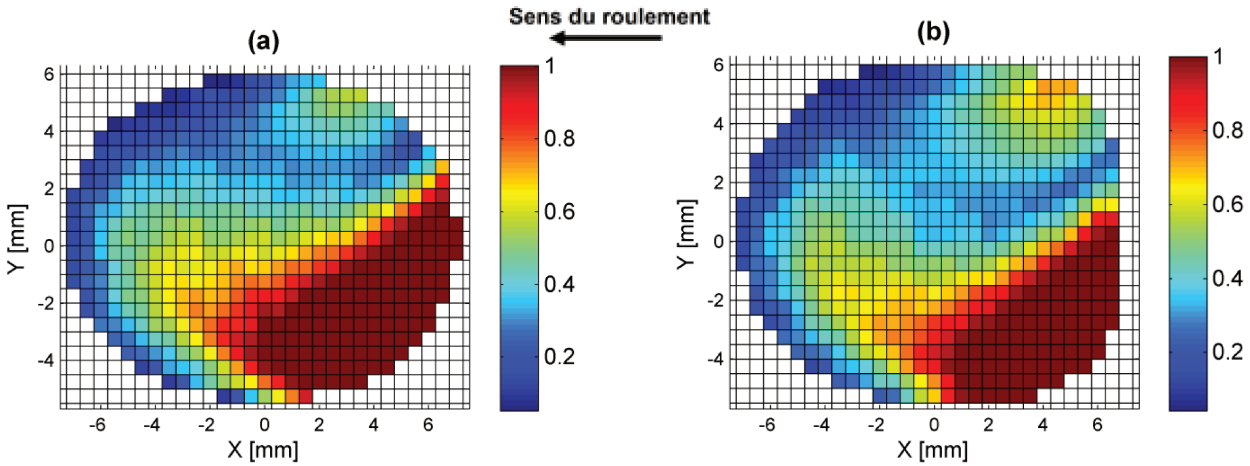


Figure 3. 34 : Contrainte de cisaillement surfacique normalisée avec la méthode des éléments finis, ξ_x=-0.7 ‰ (a) solution élastique (b) solution élasto-plastique

3.3.4. Courbes de saturation

L'effet de la plasticité sur les courbes de saturation a toujours été sous-estimé dans la bibliographie. Plusieurs auteurs ont considéré que cet effet est négligeable devant d'autres paramètres comme la contamination de la surface de contact [37] ou compte tenu de l'écrouissage du matériau lors des premiers cycles de passage. Très peu de chercheurs, comme ceux cités par Pritchard [37], ont attribué la baisse de la pente initiale des courbes de saturation à la déformation plastique des matériaux. Ceci revient d'une part à l'absence d'un modèle numérique rapide capable de prendre en compte le comportement élasto-plastique des matériaux et d'autre part à la complexité de la mise en œuvre d'une quantification de cet effet par la voie expérimentale. Bien que le temps de calcul soit très élevé en comparaison avec d'autres méthodes, la méthode des éléments finis reste le moyen le plus efficace qui permet l'étude du contact roue-rail élasto-plastique et permet aussi d'évaluer l'influence de la plasticité sur les courbes de saturation, au moins au premier passage, avant un éventuel écrouissage. Cet aspect est donc vérifié à l'aide de la méthode implicite DM décrite précédemment.

La Figure 3. 35 représente la force longitudinale F_x en fonction du pseudoglissement ξ_x en élasto-plasticité. La comparaison avec la solution élastique montre une baisse de la pente initiale qui conduit à une limite de saturation supérieure égale à 5.5 ‰, soit environ 1.4 fois plus élevée que celle donnée par la solution élastique. La limite de saturation inférieure est plus basse que la solution élastique avec une valeur égale à -4 ‰.

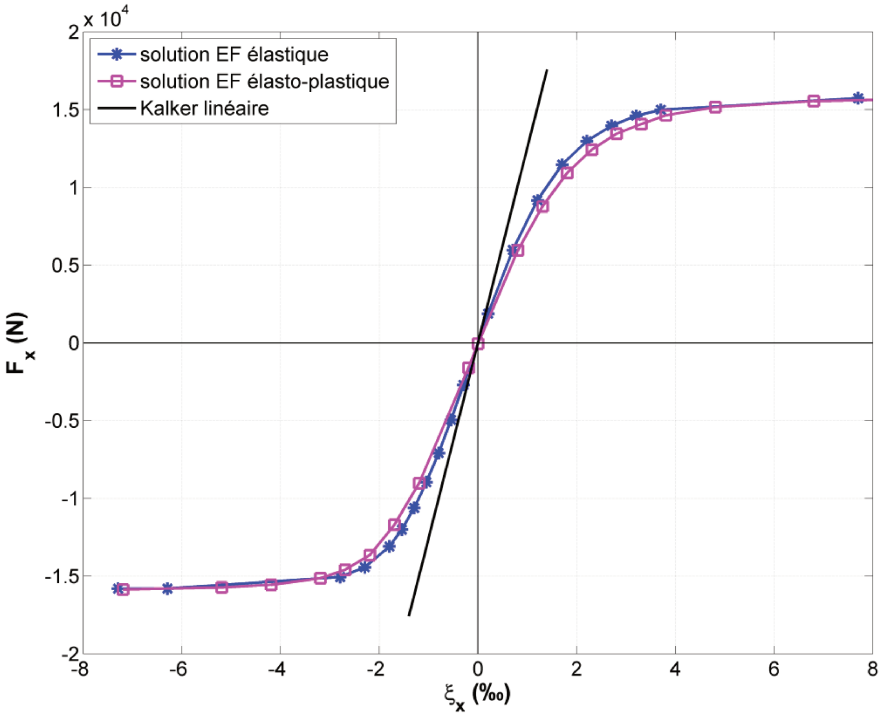


Figure 3. 35 : Courbes de saturation dans la direction longitudinale en élasticité et en élasto-plasticité

La courbe de saturation en transversale représentée sur la Figure 3. 36 montre également une baisse de la pente initiale sous l'effet de la déformation plastique, cette baisse entraine une augmentation jusqu'à 6.5 mrad de la limite de saturation supérieure et une réduction jusqu'à -9.5 mrad de la limite de saturation inférieure. De plus, l'effet du spin est légèrement réduit impliquant une force transversale pour α=0 mrad égale à $F_{y\mathrm{EFep}}$=3784 N avec la solution élasto-plastique (en comparaison avec $F_{y\mathrm{EFe}}$=4115 N avec la solution élastique).

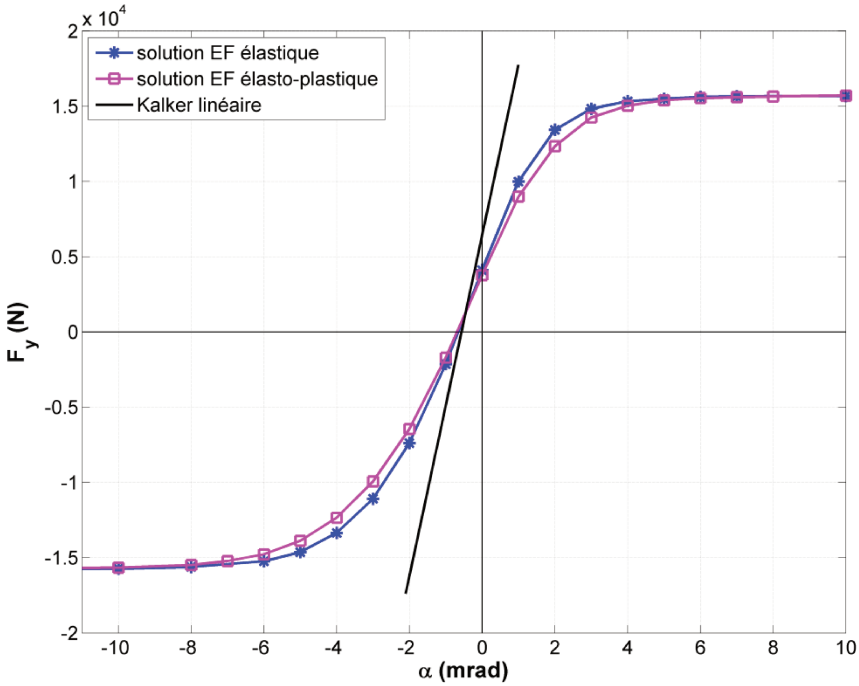


Figure 3. 36 : Courbes de saturation dans la direction transversale en élasticité et en élasto-plasticité

La pente à l'origine étant proportionnelle aux coefficients de Kalker, le niveau de réduction de ces derniers sous l'effet de la plasticité peut être quantifié à partir des dérivées des courbes de saturation précédentes. La Figure 3. 37 représente ces dérivées dans la direction longitudinale pour la solution élastique et élasto-plastique. On déduit de ce résultat que le coefficient C_{11EFep} dus à l'élasto-plasticité est réduit par rapport au coefficient C_{11} de Kalker par K_{11ep}=0.63.

De même, on déduit des dérivées de la courbe de saturation dans la direction transversale, représentées sur la Figure 3. 38, que le coefficient C_{22EFep} dus à l'élasto-plasticité est réduit dans ce cas d'étude par rapport au coefficient C_{22} de Kalker par K_{22ep}=0.46.

Dans les codes de dynamique ferroviaire, il est important d'avoir un modèle de contact qui permet l'obtention directe des forces tangentielles avant le calcul de la dynamique globale du véhicule. Pour cette raison, la théorie linéaire et ses dérivés sont implémentées dans la plupart des codes de dynamique ferroviaire. Cependant, bien qu'elle présente un avantage considérable en temps de calcul par rapport aux autres modèles, la théorie linéaire reste peu précise en comparaison avec la théorie complète de Kalker ou encore l'approche par éléments finis. De plus, les coefficients C_{ij} ne prennent pas en compte plusieurs facteurs tels que la

forme 3D élancée du rail, la plasticité des matériaux en contact, la rugosité ou la contamination en surface. Afin de tenir compte de ces paramètres et décrire mieux la dynamique globale du véhicule, certains dynamiciens sont amenés à diviser arbitrairement par 2 les coefficients de Kalker [38, 43]. L'étude par éléments finis précédente offre la possibilité d'estimer des corrections aux coefficients de Kalker à travers les coefficients réducteurs K_{ij} qui jusqu'ici considère la géométrie 3D de la roue et du rail ainsi que leur comportement élasto-plastique. L'application de ces corrections dans un code de dynamique ferroviaire fera l'objet du prochain chapitre.

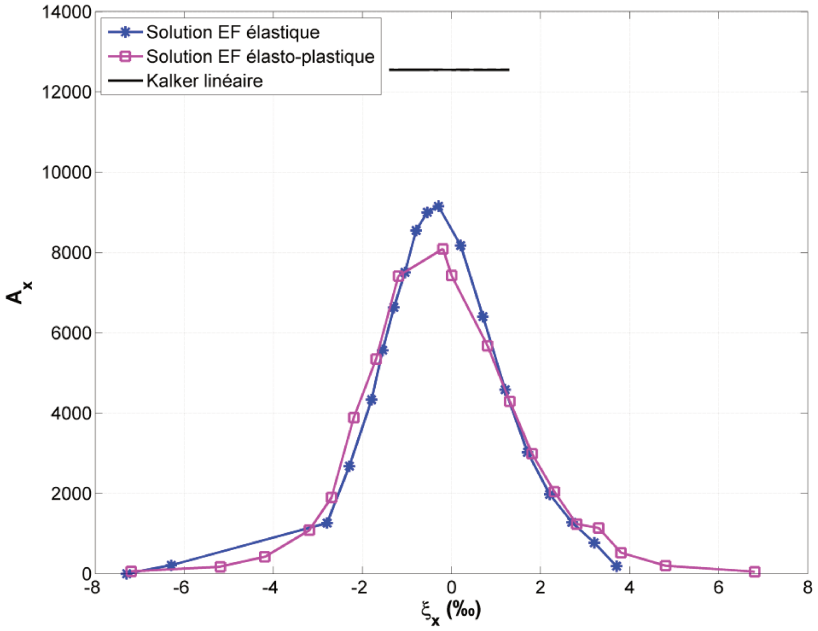


Figure 3. 37 : Dérivée de la courbe de saturation dans la direction longitudinale en fonction du pseudoglissement ξ_x

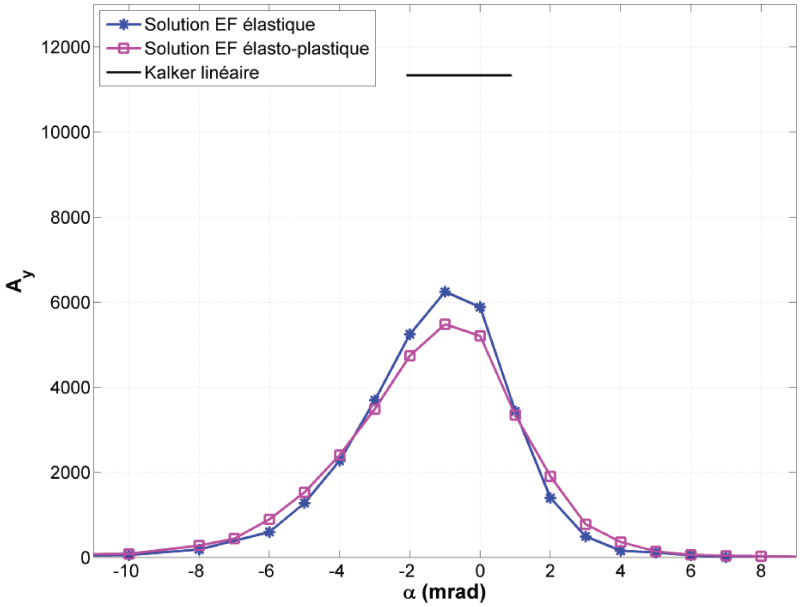


Figure 3. 38 : Dérivée de la courbe de saturation dans la direction transversale en fonction de l'angle de dérive α

3.3.5. Comparaison avec l'acier 350HT

La loi de comportement de l'acier R900A utilisée dans ce travail est donnée pour un matériau neuf non écroui. Or, dans la réalité, le rail subit après plusieurs cycles de roulement un écrouissage qui conduit au durcissement du matériau sous l'effet de la déformation plastique et par conséquent, à une augmentation de la limite d'élasticité. Cette limite d'élasticité semble être non seulement le paramètre responsable du niveau de déformation plastique sur le rail, mais également celui qui gouverne le niveau de réduction de la pente initiale des courbes de saturation (Figure 3. 37 et Figure 3. 38) par rapport à la solution élastique. Bien que l'effet de la plasticité sur la pente initiale soit relativement faible, on peut prédire qu'une loi de comportement issue d'essais réalisés sur l'acier R900A écroui, c'est-à-dire après plusieurs cycles de roulement, conduit à une pente moins réduite et donc plus proche de la solution élastique. Malheureusement nous ne disposons pas de telles données de matériau pour vérifier cette hypothèse. Cependant, nous allons vérifier l'effet de la plasticité avec un autre acier dont la limite d'élasticité est plus élevée que celle du R900A. Il s'agit de l'acier 350HT avec σ_{e350HT}=750.7 MPa. Une loi non-linéaire à écrouissage isotrope, identifiée à partir d'un essai de traction (voir Annexe C), est également utilisée dans ce travail.

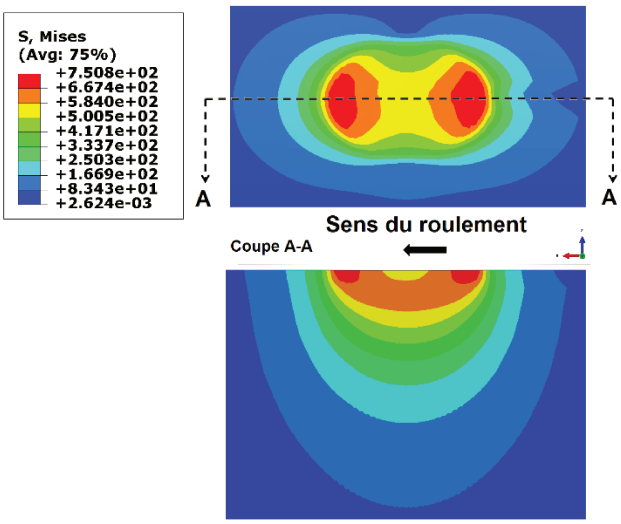


Figure 3. 39 : Contraintes de Von Mises avec l'acier 350HT

La Figure 3. 39 représente les contraintes de Von Mises en élasto-plasticité avec l'acier 350HT. La comparaison avec le champ des contraintes de Von Mises sur la Figure 3. 30 montre que le rail subit moins de déformation plastique qu'avec l'acier R900A. La distribution de ces contraintes est similaire à celle donnée par la solution élastique sur la Figure 3. 13(f) et la Figure 3. 14(b). En effet, dû à la limite d'élasticité élevée de l'acier 350HT, les déformations subites par le rail sont essentiellement élastiques. En traçant la courbe de saturation dans la direction longitudinale (voir Figure 3. 40) avec cet acier, on remarque que la réduction de la pente initiale due à la plasticité constatée avec l'acier R900A décline considérablement et la courbe retrouve pratiquement l'allure de la solution élastique.

On peut donc conclure que la pente initiale des courbes de saturation dépend du comportement du matériau et de sa limite d'élasticité. Plus cette limite est élevée, moins la

roue et le rail se déforment plastiquement et moins l'effet de la plasticité sur les courbes de saturation est important. Cependant, il est important de mentionner que, peu importe la nuance d'acier utilisée, notre étude se limite au premier passage de la roue sur un rail neuf non-écroui. Après plusieurs passages de la roue, le rail subit un durcissement dû à son écrouissage qui conduit à une augmentation de la limite d'élasticité. Par conséquent, le comportement de l'acier R900A, après plusieurs passages de la roue, devrait être semblable à celui de l'acier 350HT.

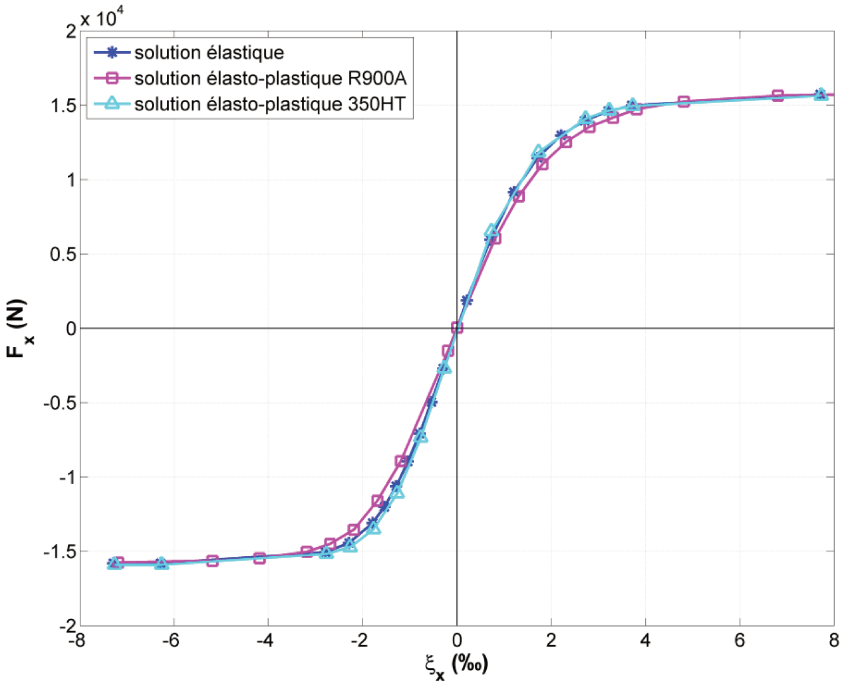


Figure 3. 40 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale avec les deux nuances d'acier R900A et 350HT

3.3.6. Influence de la charge normale

En fonction du type de matériel roulant ferroviaire en circulation (TGV, fret…), les rails peuvent être exposés à différentes valeurs de charge limitées par la norme UIC à 11.25 tonnes par roue. Cependant, cette valeur peut être dépassée lors de la prise en courbe en présence du dévers sur le rail extérieur le plus chargé. En augmentant la charge appliquée, le rail tend naturellement à subir plus de déformation élasto-plastique, ce qui pourrait avoir un impact sur les forces tangentielles et affecter par conséquent la pente initiale des courbes de saturation. Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons étudié avec notre modèle par éléments finis la courbe de saturation dans la direction longitudinale en élasto-plasticité pour trois charges par roue différentes, C_N=7.5 tonnes, C_N=11.25 tonnes et C_N=15 tonnes. Le résultat est représenté sur la Figure 3. 41. Afin de pouvoir comparer la courbe de saturation pour différente charge, la force longitudinale F_x a été normalisée par la force normale F_n. On remarque que la pente initiale est réduite lorsque la charge C_N augmente. La baisse de cette pente est accompagnée d'une augmentation de la pression de contact maximale Pmax comme le montre le Tableau 3. 9. Ce résultat est en accord avec les travaux de Meierhofer [41] qui a trouvé avec des mesures expérimentales que l'augmentation de la pression réduit non seulement la pente initiale de la

courbe de saturation dans la direction longitudinale mais également les forces tangentielles dans la zone des macro-pseudoglissements (pour des valeurs supérieurs à 1%). Son modèle numérique est capable de reproduire ce comportement dans les deux zones de la courbe.

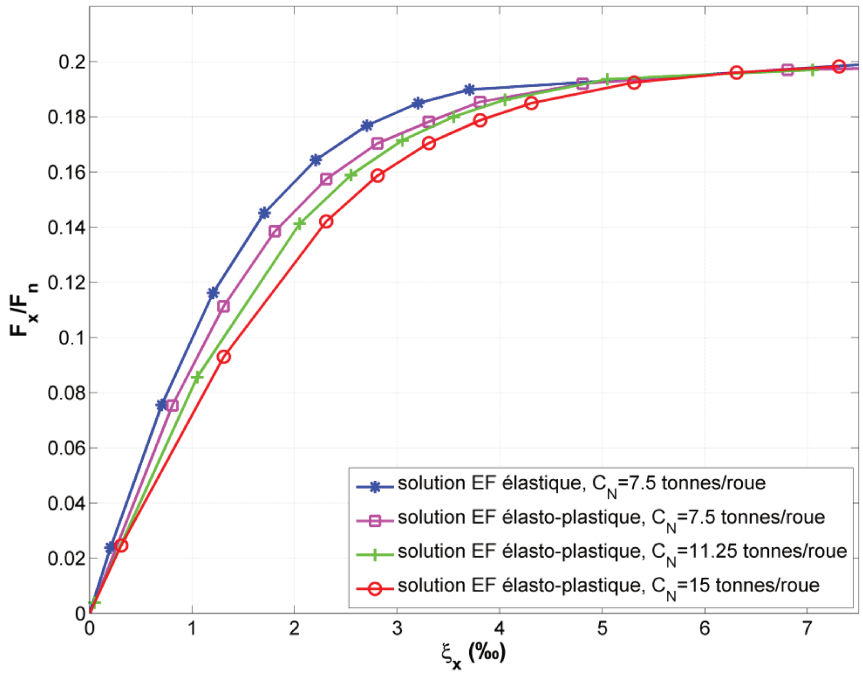


Figure 3. 41 : Influence de la charge normale sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale

Le déplacement résiduel normal sur le rail $u_{zrésid}$ après le passage de la roue est aussi représenté dans le Tableau 3. 9 pour les trois charges étudiées. On remarque que ce déplacement augmente avec la charge C_N. On peut donc conclure du Tableau 3. 9 et de la Figure 3. 41 que lorsque la charge normale appliquée sur le rail augmente, la déformation plastique augmente et le coefficient de Kalker C_{11} est réduit.

Tableau 3. 9 : Influence de la charge C_N sur la pression de contact maximale Pmax, le déplacement normal élasto-plastique en surface u_{zmax} et le déplacement résiduel $u_{zrésid}$

Charge C_N (tonnes)	Pmax (MPa)	u_{zmax} (μm)	$u_{zrésid}$ résiduel (μm)
7.5	992	-38.3	-5.0
11.25	1049	-51.7	-10.1
15	1081	-64.3	-18.7

3.4. Couche de troisième corps en interface

L'origine du concept de troisième corps, constitué de débris d'usure et de lubrifiant liquide, remonte aux travaux de Godet [88] réalisés dans les années soixante-dix dans lesquels il a proposé une approche générale du contact entre deux corps reliant le frottement au mécanisme de l'usure. Ce concept est différent du formalisme mathématique de Reynolds [89] dans lequel la notion du troisième corps se limite à un lubrifiant liquide.

Plusieurs travaux se sont ensuite succédés [90, 91, 92, 93] dont le but est d'avoir une meilleure compréhension du rôle de ce troisième corps et son influence sur le frottement et les différents mécanismes d'endommagement (usure, fissuration…). Cette compréhension est une étape essentielle avant l'introduction de tels effets dans les différents modèles numériques.

Dans le cas du contact roue-rail, l'interaction entre les deux premiers corps conduit, sous certaines sollicitations, à une couche mince de troisième corps (voir Figure 3. 42) composée de particules d'acier détachées par usure des deux premiers corps. Ce troisième corps dit « naturel » se mélange en général avec un troisième corps « artificiel » composé des différents types de contaminant qui peuvent exister sur l'interface du contact roue-rail [1, 37, 38] comme les contaminants dus aux conditions climatiques (feuilles mortes, eau, gel...), les contaminants dus aux conditions opératoires (huile de lubrification, sable, graviers du ballast…) ou encore les polluants externes [90]. L'étude du troisième corps est une tâche complexe étant donné que l'interface du contact roue-rail est un champ d'interaction de plusieurs phénomènes et comportements de nature mécanique, physique, chimique et thermique. Berthier [90] a montré que l'écoulement d'une couche de troisième corps entre la roue et le rail, d'épaisseur allant de quelques micromètres jusqu'à des dizaines de micromètres, assure l'accommodation du glissement entre ces deux corps. La présence de cette couche assure aussi une certaine protection de la fissuration en surface et permet ainsi d'étendre la durée de vie de la roue et du rail.

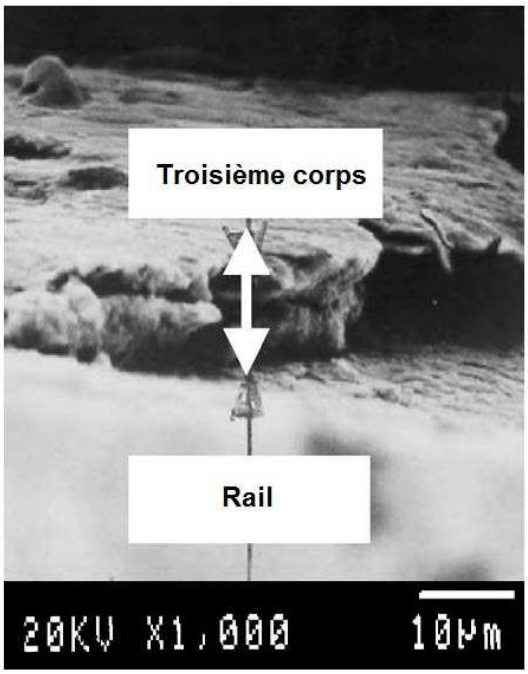


Figure 3. 42 : Couche de troisième corps identifiée sur la surface d'un rail [92]

D'autre part, les différents essais réalisés sur banc, dont une synthèse est présentée par Hobbs [1] (voir aussi la section 1.3.2 du premier chapitre), ont montré l'important rôle joué par la contamination de la surface dans la baisse de la pente initiale des courbes de saturation. Par conséquent, la réduction des coefficients de Kalker, appliquée parfois de façon arbitraire par certains dynamiciens dans leur code de dynamique ferroviaire pour le calcul de la vitesse

critique du véhicule ferroviaire, est aussi attribuée à cette contamination. Pour tenir compte de ces effets, plusieurs modèles ont été développés. Polach [94] a modélisé la baisse de la pente initiale dans la direction longitudinale par l'intermédiaire de deux facteurs de réduction ks et ka respectivement pour la zone d'adhérence et la zone de glissement, introduits dans son modèle semi-empirique. Ces facteurs sont déterminés à partir des mesures expérimentales des courbes de saturation réalisées sur plusieurs véhicules différents dans des conditions opératoires différentes. Vollebregt [44] a étendu la théorie complète de Kalker implémentée dans CONTACT en introduisant une couche élastique homogène et isotrope entre la roue et le rail dans laquelle des déplacements auxiliaires se produisent. Basé sur une approche similaire, Meierhofer [41] a développé, pendant la même année, un modèle physique qui, en plus, considère la déformation plastique du troisième corps. Le comportement élasto-plastique est introduit en utilisant le modèle rhéologique de Hou [95] représenté sur la Figure 3. 43, avec G, k et τ_c les trois paramètres rhéologiques qui représentent respectivement le module de cisaillement élastique, le module de cisaillement plastique et la contrainte de cisaillement critique. Cependant, le modèle de Meierhofer est jusqu'à ce jour limité au contact linéique.

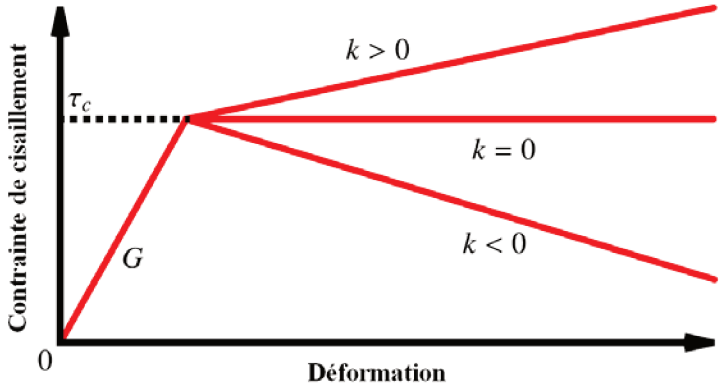


Figure 3. 43 : Modèle rhéologique élasto-plastique du troisième corps proposé par Hou [95]

On propose par la suite d'étudier avec le modèle éléments finis 3D présenté dans les sections précédentes, l'influence de l'addition d'une couche de troisième corps entre la roue et le rail sur les courbes de saturation. On suppose qu'une couche mince est placée sur l'interface du rail comme schématisé sur la Figure 3. 44. On suppose que cette couche est homogène et isotrope et on considère dans un premier temps qu'elle ne se déforme que de manière élastique. Kalker [43] a présenté un modèle mathématique phénoménologique où il a fait l'hypothèse que le troisième corps est beaucoup plus souple que les deux premiers corps. Une hypothèse similaire est adoptée dans ce travail. Un module de cisaillement G=820 MPa est défini pour la couche de troisième corps, soit 100 fois plus faible que celui de l'acier, c'est-à-dire 100 fois plus souple que la roue et le rail. On suppose aussi que l'épaisseur h de cette couche est égale à 125 μm [44]. Ce choix peut être justifié par les différentes mesures de la couche de troisième corps ; En effet, ces mesures ont conduit à différentes épaisseurs h qui varient selon les conditions expérimentales d'environ 0.41 μm [96] jusqu'à atteindre une valeur entre 150 μm et 200 μm [97]. La couche étant placée sur l'interface du rail, le mouvement de celle-ci suit celui du rail qui se déplace dans la direction longitudinale avec la

vitesse V_x. Un maillage hexagonal à 8 nœuds, identique à celui de la roue et du rail, est enfin défini. Tous les autres paramètres sont les mêmes que ceux définis dans le Tableau 3. 1.

Le nombre total d'éléments dans le modèle étant augmenté à cause du maillage de la couche du troisième corps, le coût de calcul devient très élevé, ce qui rend encore plus lourde l'étude des courbes de saturation. Pour cette raison, l'étude du problème sera limitée dans la direction longitudinale.

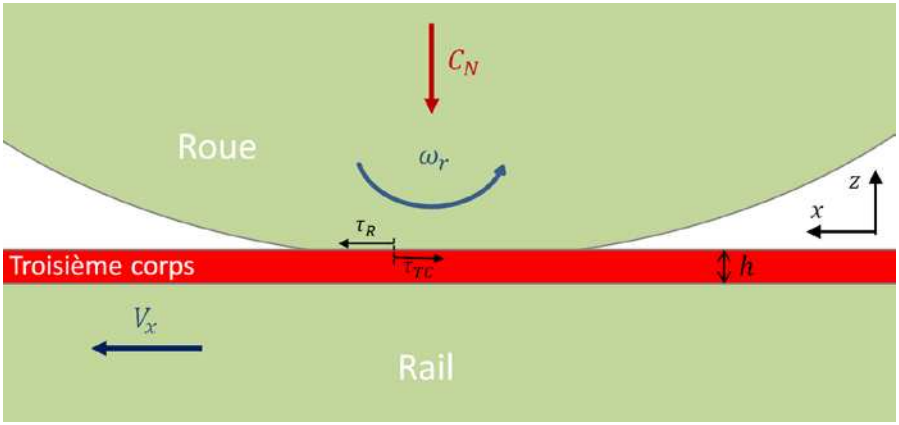


Figure 3. 44 : Modèle de contact roue-rail avec couche de troisième corps sur l'interface du rail

La Figure 3. 45 montre les courbes de saturation dans la direction longitudinale avec la méthode des éléments sans et avec la présence d'une couche élastique de troisième corps sur l'interface du rail. Sans le troisième corps, la courbe est composée de trois zones avec un comportement différent : une première zone de micro-pseudoglissement qui correspond à la pente initiale de la courbe, en général, c'est dans cette zone que les coefficients de Kalker sont calculés car la roue et le rail adhèrent complétement (condition nécessaire pour satisfaire la théorie linéaire de Kalker [12]). Ensuite, une deuxième zone non linéaire de transition qui relie la partie de faibles pseudoglissements à celle des pseudoglissements élevés, l'aire de contact dans cette zone est composée d'une zone d'adhérence et une zone de glissement (voir un exemple sur la Figure 3. 18). Enfin, une troisième zone de macro-pseudoglissement dans laquelle la force longitudinale F_x sature et les deux corps en contact sont en glissement total sur toute la zone de contact. En présence d'une couche élastique de troisième corps, on remarque deux effets notables : une baisse de la pente initiale de la courbe de saturation et un élargissement de la zone de transition qui conduit à un décalage de la limite de saturation pour cet exemple à environ 7.4 ‰ avec le troisième corps. Ces effets sont également vérifiés avec le modèle de Meierhofer [41].

En suivant la même démarche que celle dans la section 3.1.3.4, c'est-à-dire en traçant les dérivées de la courbe de saturation et en calculant la différence de la pente initiale par rapport à la théorie linéaire, on peut déduire que le facteur de réduction dans la direction longitudinale dû à l'addition d'une couche de troisième corps élastique est environ égale à K_{11tc}=0.5.

Les principaux paramètres caractéristiques de la couche élastique de troisième corps dans le modèle éléments finis sont son épaisseur h et son module de cisaillement G. Afin d'évaluer

leur influence sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale, une étude paramétrique est réalisée. La Figure 3. 46 montre le résultat pour différentes valeurs de module de cisaillement G et avec une épaisseur h gardée constante à sa valeur par défaut 125 μm. La valeur G=82000 MPa correspond à celui de l'acier sain et permet de vérifier la cohérence du modèle incluant le troisième corps en comparant la solution avec celle du contact roue-rail sans la présence du troisième corps. Comme on peut s'y attendre, les deux solutions sont confondues avec une légère différence dans la zone de transition. Cette différence est attribuée au maillage de la couche sur l'interface du rail qui, étant limité par sa faible épaisseur, est plus fin dans la direction z (voir Figure 3. 44) que le maillage du rail seul dans cette direction et à proximité de l'interface du contact.

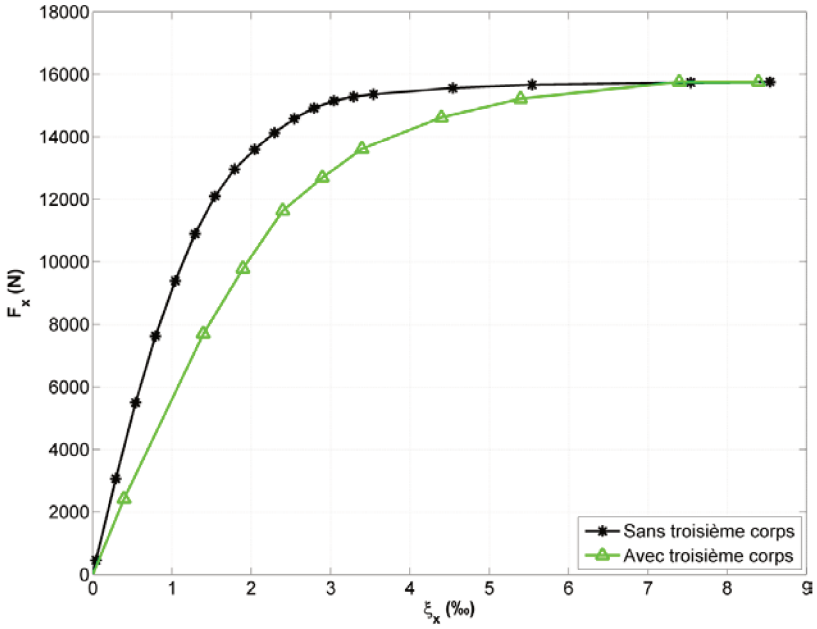


Figure 3. 45 : Courbe de saturation dans la direction longitudinale avec la méthode des éléments finis en présence d'une couche de troisième corps élastique entre la roue et le rail d'épaisseur h=125 μm et de module de cisaillement G=820 MPa

La Figure 3. 46 montre aussi que la pente initiale de la courbe de saturation baisse avec le module de cisaillement. Autrement dit, plus la couche est souple plus son effet sur la pente initiale est élevé. Cependant, cet effet n'est observable qu'à partir de la valeur de G=1640 MPa, soit 50 fois plus faible que l'acier. D'autre part, l'influence de G sur la zone de transition est toujours observée avec une limite de saturation supérieure plus rapidement atteinte quand le module de cisaillement est plus élevé.

La Figure 3. 47 montre l'influence de l'épaisseur h de la couche du troisième corps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale avec un module de cisaillement G=820 MPa. On remarque que la pente initiale de la courbe baisse avec l'augmentation de l'épaisseur h. Pour h=50 μm, la zone de transition n'a pas pu être représentée car au-delà de ξ_x=1.5‰, l'effort de cisaillement au contact devient assez élevé pour produire, sur l'interface du contact, une distorsion excessive des éléments du maillage de la couche du troisième corps, ce qui

empêche la solution par éléments finis de converger. Entre les épaisseurs h=125 μm et h=250 μm, la limite de saturation supérieure est quasiment la même.

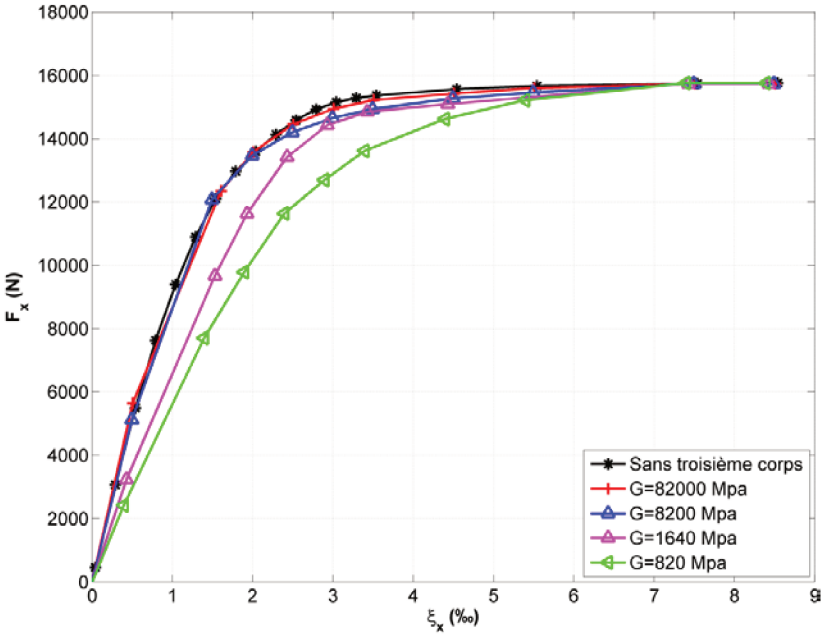


Figure 3. 46 : Influence du module de cisaillement G de la couche du troisième corps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale, h=125 μm

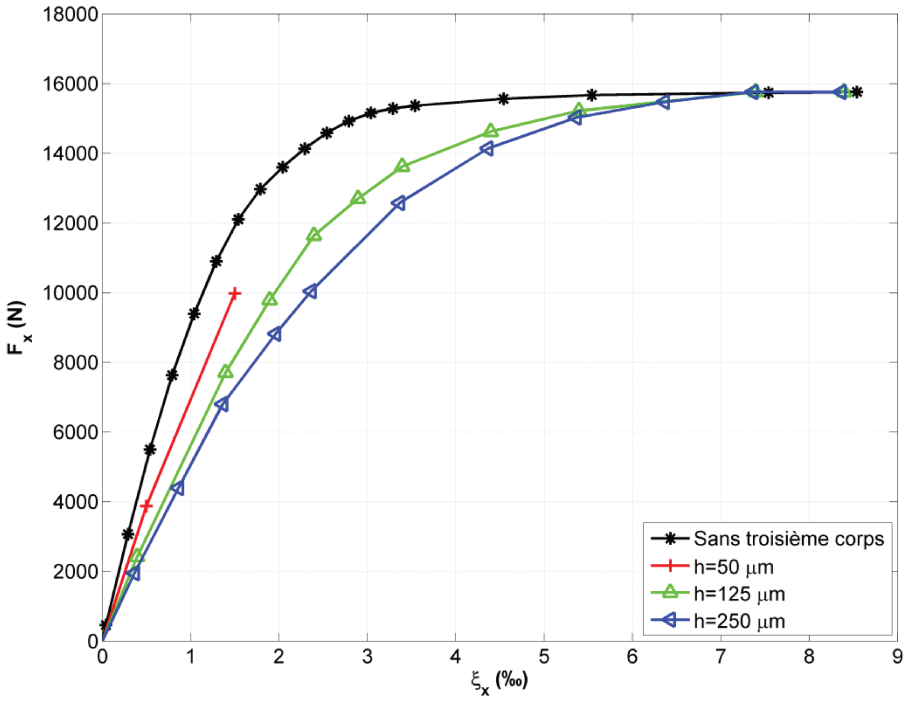


Figure 3. 47 : Influence de l'épaisseur h de la couche du troisième corps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale, G=820 MPa

On peut déduire de l'étude paramétrique précédente que l'épaisseur et le module de cisaillement du troisième corps ont une grande influence sur les coefficients de Kalker. Ces

coefficients sont réduits quand le module de cisaillement diminue et quand l'épaisseur h augmente.

Afin de mieux décrire le comportement de la couche de troisième corps, la déformation plastique de celle-ci est prise en compte dans le modèle par éléments finis à travers une loi plastique parfait dont la limite d'élasticité est notée σ_c. La Figure 3. 48 montre la courbe de saturation dans la direction longitudinale pour trois limites d'élasticité différentes σ_c=300 MPa, σ_c=200 MPa et σ_c=100 MPa. La solution est comparée avec le comportement élastique du troisième. On remarque que l'introduction du comportement plastique à la couche de troisième corps induit une baisse de la pente initiale de la courbe en comparaison avec le comportement élastique. Cette baisse augmente quand la limite d'élasticité diminue. On remarque aussi que la zone de transition qui précède la limite de saturation devient plus large sous l'effet de la plasticité du troisième corps. Enfin, lorsque la limite d'élasticité de cette couche devient très basse (σ_c=100 MPa), cet effet sur la courbe de saturation s'étend jusqu'à la zone de saturation, ce qui conduit à la réduction du seuil de saturation.

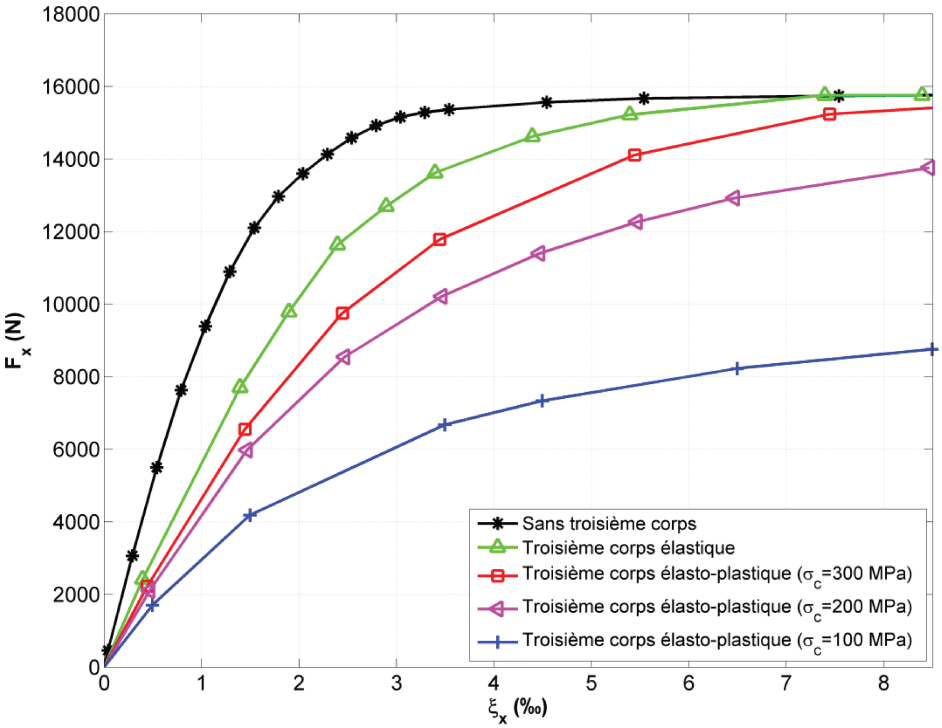


Figure 3. 48 : Influence de la limite d'élasticité σ_c de la couche de troisième corps sur la courbe de saturation dans la direction longitudinale, h=125 μm et G=820 MPa

Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle par éléments finis 3D est développé pour étudier le contact roue-rail roulant avec frottement en élasticité et en élasto-plasticité. La solution élastique est déterminée avec deux schémas d'intégration temporelle différents : le schéma d'intégration

explicite et le schéma d'intégration implicite et la cohérence entre ces schémas est vérifiée en comparant le résultat avec celui donné par le logiciel de référence CONTACT.

Ainsi, le problème du contact normal et tangentiel est étudié et les courbes de saturation sont analysées. Le résultat en élasticité est validé avec CONTACT. Les conclusions de cette étude sont les suivantes :

- La solution implicite est sensible à la quantité d'énergie dissipée reliée à la taille du pas de temps. En effet, si le pas de temps n'est pas suffisamment petit, des oscillations à l'arrière de la zone de contact sont observées sur le rail. De plus, des oscillations des contraintes de cisaillement ont conduit à une solution largement différente de la solution de CONTACT, en particulier pour les zones d'adhérence/glissement. La taille du pas de temps doit être choisie donc avec soin par une étude de sensibilité avant l'étape validation.
- La solution élastique du problème normal avec les différentes méthodes par éléments finis est en bon accord avec la théorie de Hertz et avec CONTACT pour la pression de contact maximale ainsi que la forme et la taille de la surface de contact. La solution élastique du problème tangentiel avec la méthode implicite est aussi en bon accord avec CONTACT pour les contours et vecteurs des contraintes de cisaillement au contact ainsi que pour les zones d'adhérence/glissement. La solution explicite dynamique montre un niveau de saturation plus élevé sur la zone de contact conduisant à une aire de glissement sur le bord d'attaque de cette zone. Cependant, la contrainte de cisaillement maximale au contact, premier responsable dans la détermination de l'initiation et de la propagation de la fissure ainsi qu'au développement de l'usure, n'est pas affectée par la méthode par éléments choisie et trouve un bon accord avec la solution donnée par CONTACT.
- Sous l'effet de la déformation plastique, les contraintes maximales de Von Mises et la pression maximale sont réduites et l'aire de contact na plus une forme elliptique mais une forme d'œuf. En outre, la zone d'adhérence avec les différentes méthodes par éléments finis devient plus large et la contrainte maximale de cisaillement est légèrement réduite.
- La pente initiale des courbes de saturation en élasticité dans la direction longitudinale et transversale avec la solution implicite est légèrement plus basse que celle de CONTACT et FASTSIM. Dans tous les cas, les pentes sont inférieures à la théorie linéaire de Kalker. Par conséquent, les coefficients de Kalker sont supérieurs à ceux donnés avec les méthodes numériques, en particulier avec la méthode des éléments finis implicite. Sous l'effet de la plasticité de l'acier R900A, les pentes initiales des courbes de saturation sont réduites de 37 % dans la direction longitudinale et de 54 % dans la direction transversale par rapport à la théorie linéaire, les coefficients de Kalker sont ainsi encore plus réduits que ceux déduits de la solution élastique par éléments finis. Cependant, la validité de ces résultats doit être confirmée avec d'autres études dans d'autres situations de contact comme pour des couples roue-rail différents afin de pouvoir déduire le niveau de réduction à appliquer dans les codes de dynamique ferroviaire. De plus, dans notre cas d'étude, la plasticité de l'acier R900A

réduit la pente initiale des courbes de saturation. La comparaison avec un acier de meilleures caractéristiques mécaniques (l'acier 350HT) a montré qu'en augmentant la limite d'élasticité du matériau, la déformation plastique diminue et la courbe de saturation retrouve la même allure que celle donnée par la solution élastique.

- L'introduction dans le modèle par éléments finis d'une couche de troisième corps d'épaisseur h=125 microns et de module de cisaillement G cent fois plus faible que l'acier réduit la pente initiale de la courbe de saturation dans la direction longitudinale et élargit sa zone de transition des micro-pseudoglissements aux macro-pseudoglissements. Une étude paramétrique a montré que l'effet sur ces deux zones augmente avec la réduction du module de cisaillement et l'augmentation de l'épaisseur de la couche. De plus, la prise en compte dans le modèle du comportement plastique du troisième corps a montré que celui-ci réduit encore plus la pente initiale en comparaison avec la solution donnée avec une couche élastique. Lorsque la limite d'élasticité de cette couche diminue, la pente initiale est davantage réduite et la zone de transition s'élargit considérablement.

Ainsi, basée sur la méthode des éléments finis, la démarche proposée dans ce chapitre permet d'estimer des corrections à appliquer aux coefficients de Kalker qui tiennent en compte de la géométrie 3D des corps en contact et du comportement élasto-plastique des corps en contact ainsi que de la présence d'une couche de troisième corps sur l'interface entre la roue et le rail. On présentera dans le prochain chapitre l'introduction de ces corrections dans le code de dynamique ferroviaire VOCO afin d'évaluer leur influence sur la dynamique globale du véhicule et sur la vitesse critique.

Chapitre 4

Application à la dynamique du véhicule en ferroviaire avec le code VOCO

Introduction

En raison du temps de calcul très important que nécessitent les méthodes décrites dans les deux chapitres précédents (la méthode des éléments de frontière et la méthode des éléments finis), leur implémentation directe dans les logiciels de dynamique ferroviaire reste jusqu'à ce jour impossible[3]. Le modèle de contact adopté par ces codes est généralement basé sur des formulations semi-analytiques qui découlent des théories simplifiées de Kalker. Les forces tangentielles au contact sont calculées à partir de la théorie linéaire en fonction des coefficients de raideur de Kalker. Bien que beaucoup plus rapide que la plupart des autres modèles de contact, les méthodes semi-analytiques sont limitées au contact élastique entre deux corps lisses. Elles ne permettent donc pas de décrire fidèlement la réalité physique du contact roue-rail vu qu'elles ne prennent pas en compte d'une part, la déformation plastique subie par la roue et le rail lors de la circulation du train et d'autre part, l'existence d'une couche de troisième corps naturelle ou artificielle à l'interface du contact roue-rail. Pour tenir compte de ces effets dans l'étude de la dynamique globale du véhicule, certaines équipes appliquent, dans leur code de dynamique ferroviaire, une correction aux coefficients de Kalker systématique et égale à 50% de leurs valeurs classiques [43]. Entre l'application ou non d'une telle correction, les forces au contact et par conséquent la dynamique du véhicule, sont fortement et directement impactées.

Dans ce chapitre, après revue des phénomènes de déraillement et de délestement qui peuvent entraîner une perte de sécurité, une étude de stabilité du véhicule ferroviaire est réalisée en utilisant le code de dynamique ferroviaire VOCO. L'influence sur la vitesse critique de différents facteurs de réduction des coefficients de Kalker K_{ij} est étudiée. En particulier, l'influence des facteurs de réduction déduits de l'étude par éléments finis du chapitre précédent sous l'effet de l'élasto-plasticité et de l'addition d'une couche élastique et mince sur l'interface du rail est évaluée. Elle conduit à ouvrir des perspectives expérimentales pour la détermination plus précise de la limite d'élasticité en sous-couche du contact et pour la mesure d'une épaisseur et d'un module représentatifs d'une couche régulière de troisième corps.

4.1. Généralités sur la dynamique ferroviaire

La dynamique ferroviaire concerne l'étude des phénomènes qui font intervenir la dynamique du véhicule ferroviaire et son interaction avec la voie. L'objectif principal de cette étude est d'assurer aux passagers un maximum de sécurité et de confort même dans les conditions de circulation les plus sévères. Ces phénomènes, dont l'ordre de fréquence ne dépasse pas les 20 hertz, sont gouvernés principalement par la dynamique latérale du véhicule faisant intervenir les non-linéarités dues au contact roue-rail. La sécurité et le bien-être des passagers sont considérés, par les constructeurs et les sociétés de gestion de l'infrastructure ferroviaire, depuis longtemps comme des enjeux fondamentaux faisant du transport ferroviaire l'un des moyens de transport le plus sûr d'Europe [98]. Avant qu'un matériel roulant ferroviaire ne

[3] Sauf à les substituer pendant quelques pas de temps après convergence vers un équilibre obtenu par les méthodes semi-analytiques, pour obtenir un état d'équilibre plus précis

soit mis en circulation commerciale, il est soumis à plusieurs essais dits d'homologation afin de déterminer les risques qui peuvent intervenir en dynamique ferroviaire dont les plus important sont : le déraillement (sortie des roues de la voie) le renversement (soulèvement de la roue d'un côté du véhicule) et le déripage de voie (déplacement transversal de la voie provoquant sa déformation irréversible). Heureusement, très peu de déraillements se produisent réellement. Néanmoins, les déraillements de véhicules à passagers conduisent souvent à la perte de vies humaines, les nouvelles de ces événements ont un impact énorme sur l'opinion publique, mettant en péril ce sentiment de sécurité qu'il est important pour les passagers d'avoir à l'égard du voyage dans le train. Une parfaite connaissance des paramètres caractérisant la dynamique latérale en ferroviaire est donc nécessaire.

4.1.1. Inscription en courbe

Le risque de déraillement en courbe est d'abord la conséquence de l'usage de l'essieu biconique d'une façon classique : avec des suspensions primaires qui contrecarrent l'effet favorable d'orientation du bicône. L'inscription en courbe du bogie classique est décrite en Figure 4. 1 avec un angle de dérive défavorable au guidage par les forces tangentielles transversales qui pourraient sur ce dessin guider la roue avant gauche. L'essieu avant, ou essieu d'attaque, est en situation sous-vireuse. Une partie de cet effet peut être compensée par la forme concave de la roue et par le déport latéral du point de contact vers l'intérieur de la voie. La roue opposée voit le même angle de dérive que la roue d'attaque et elle génère une force de dérive de même signe (vecteurs transversaux sur essieu 1 Figure 4. 1). Pour les courbes les plus serrées, la roue d'attaque prend son équilibre en général entre deux contacts, l'un sur la table, l'autre au boudin. L'effort normal sur ce boudin, généralement incliné à 70°, est nécessaire pour guider l'ensemble dans une position dite quasi-statique. Néanmoins, la présence de dérive et d'un fort spin à cet endroit est susceptible de faire monter la roue.

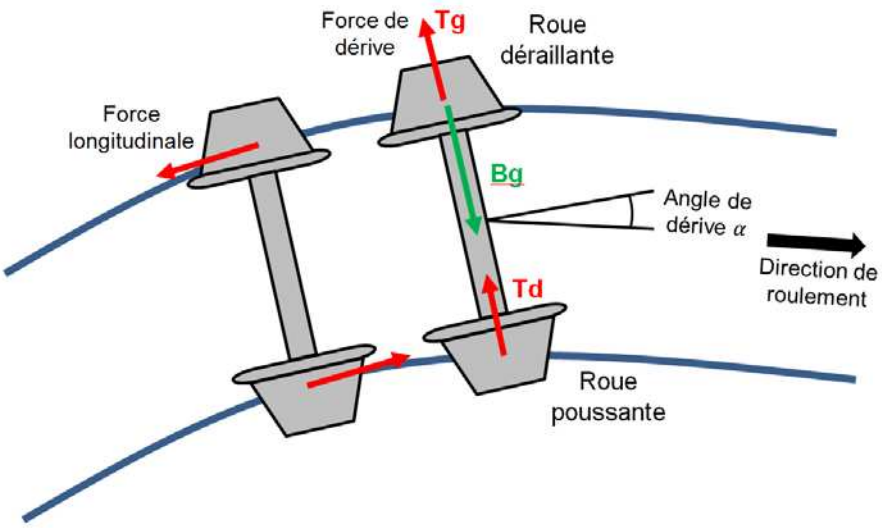


Figure 4. 1 : Bogie en prise de courbe

Les pseudoglissements sur les contacts dans cette configuration sont généralement élevés, les hypothèses sur l'adhérence disponible ont une grande importance sur l'équilibre final des forces mais il peut y avoir aussi un effet des hypothèses sur les courbes de saturation.

En ce qui concerne l'essieu 2, il est parfois sur-vireur, parfois neutre, selon l'architecture du bogie et la valeur de la courbe. Dans ce cas, il peut générer des efforts longitudinaux important comme sur la Figure 4. 1, tandis que l'essieu 1 voit plutôt ses efforts saturés par le pseudoglissement de dérive.

La détermination de ces équilibres en courbe est le premier objectif du calcul avec les codes multi-corps. La prise en compte de tous les degrés de liberté de tous les solides permet de tenir compte également de l'équilibre en roulis, qui va jouer sur les charges verticales Q donc à son tour sur les efforts tangents au contact.

Lors de la prise d'une courbe, le véhicule est soumis à une force centrifuge liée à l'accélération et inversement proportionnelle au rayon de la courbe. Cette force tend à pousser le véhicule vers l'extérieur de la courbe conduisant à des efforts latéraux qui peuvent être la source d'un inconfort des voyageurs ayant ressentis cette poussée et qui peuvent aussi présenter un danger au-delà d'une certaine vitesse (dégradation de la voie ou déraillement du véhicule). Pour compenser entièrement ou partiellement cette force, la voie est posée avec un angle caractérisé par une surélévation de la file de rail extérieure à la courbe. Cette surélévation est appelée dévers (Figure 4. 2).

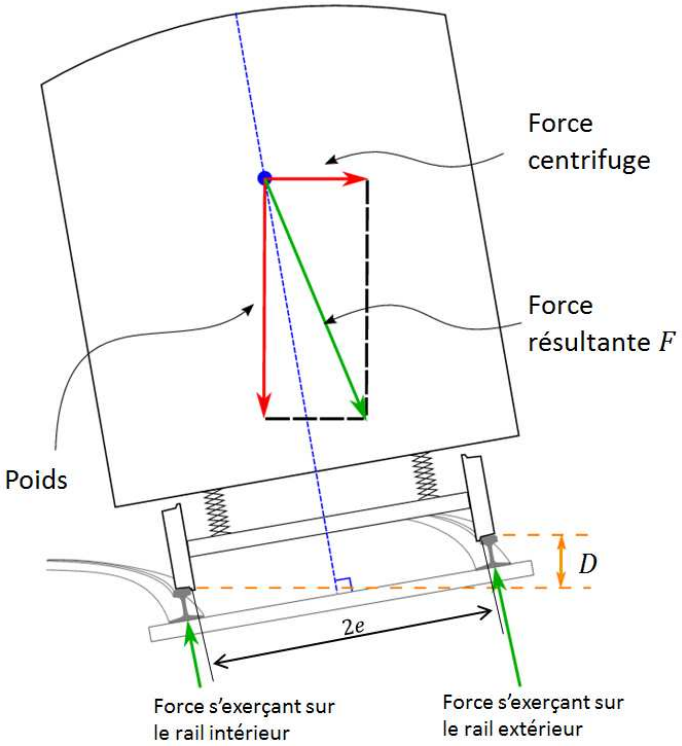


Figure 4. 2 : Présentation d'un véhicule en prise de courbe

Le dévers théorique D est calculé pour compenser exactement la force centrifuge à une vitesse donnée par la formule suivante :

$$D = 2e\frac{V^2}{Rg} \tag{148}$$

Avec e le demi-écartement entre les rails, V la vitesse du train, R le rayon de la courbe et g la pesanteur.

En pratique, la vitesse des trains sur une ligne est en général variable, elle dépend de la nature du tain en circulation dans le cas où la ligne est mixte (fret, TGV…). Elle est même nulle dans le cas où le train est à l'arrêt dans une courbe, et jusqu'à la vitesse de définition on sera en *excès de dévers*. Le dévers étant limité à 160 mm sur les lignes classiques et à 180 mm sur les lignes nouvelles [98], ces valeurs ne sont en général pas assez pour compenser, pour les trains les plus rapides, la force centrifuge qui donne la sensation aux passagers d'être poussé à l'extérieur de la courbe : le véhicule est dit en *insuffisance de dévers*. Dans ce cas, deux solutions peuvent être envisagées : augmenter le rayon des courbes ou diminuer la vitesse du train.

Pour les trains les plus lents ou quasiment à l'arrêt dans une courbe, la force résultante F (voir Figure 4. 2) exerce sur le rail intérieur un effort Q plus élevé que celui exercé sur le rail extérieur. Cette situation d'excès de dévers est défavorable à la tenue de la roue d'attaque.

En dehors du risque de renversement provoqué par une trop forte baisse d'un des efforts Q, ces efforts conditionnent l'établissement des efforts Y par le biais de l'adhérence.

4.1.2. Déraillement

Le risque de déraillement n'est classiquement considéré que pour la roue déraillante seule, dans le cas limite d'un contact unique saturé au boudin, avec perte du contact sur la table. C'est en considérant l'équilibre de l'essieu complet qu'on en vient à prendre en compte le contact sur la table de la roue poussante, éventuellement non saturé, donc sensible aux coefficients C_{ij}.

Equilibre de la roue d'attaque

Le mécanisme de déraillement se produit lorsque le boudin de la roue entre en contact avec le rail, sous l'action de l'adhérence, la roue monte sur la table de roulement du rail provoquant une perte de guidage du véhicule et sa sortie de la voie. La montrée de la roue ne peut se produire qu'avec une valeur excessive du rapport Y/Q. Plusieurs critères permettent de qualifier le risque de déraillement d'un matériel roulant [99, 100, 101, 102]. La plupart de ces critères découlent de la relation de Nadal [99] établie en 1896. Cette relation donne une limite du ratio Y/Q entre la force transversale et la force verticale qui peut être transmise à une roue sans engendrer un risque de déraillement (voir Figure 4. 3). Cette relation est donnée en fonction du coefficient de frottement μ sur le boudin qui peut être différent de celui des autres régions de la roue et en fonction de l'angle maximum au boudin γ_{max} par la formule suivante :

$$\frac{Y}{Q} = \frac{\tan\gamma - \mu}{1 + \mu \tan\gamma} \tag{149}$$

Cette formule figure dans les règles de sécurité contre le déraillement de la norme UIC 518 [103]. Elle est construite sur une décomposition des efforts normaux et tangentiels, en considérant que l'effort tangentiel T dans le plan de la Figure 4. 3 atteint la valeur μN, ce qui revient à considérer que toute l'adhérence est disponible dans cette direction, rien n'étant utilisé par le pseudoglissement longitudinal, ni par le spin. C'est donc au moins un état de roue indépendante (roue folle) qui est considéré, ce qui donne certainement à la valeur numérique de ce critère de la marge par rapport à un modèle plus réaliste d'essieu rigide avec des pseudoglissements non négligeables pour les trois termes. Le spin négligé conduit lui aussi à une marge supplémentaire.

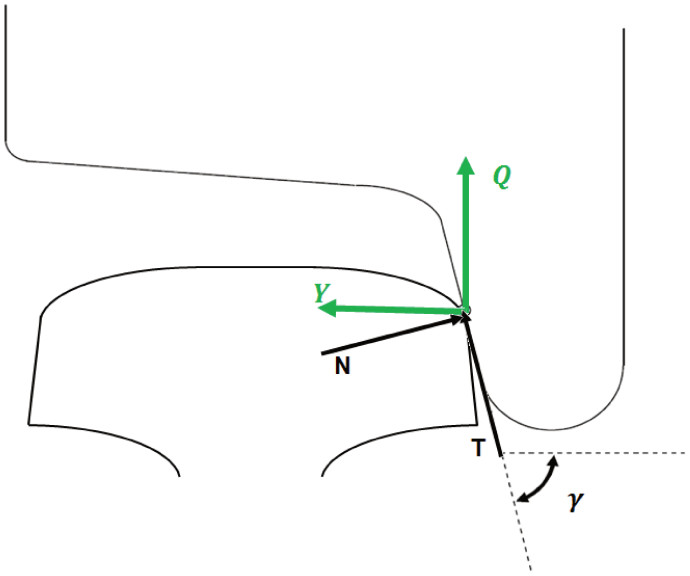


Figure 4. 3 : Equilibre des forces sur la roue d'attaque déraillante

Cependant ces marges sont utiles, compte tenu de l'incertitude sur la valeur de l'adhérence proprement dite, et sur les causes dynamiques additionnelles telles que les défauts de voie ou la dispersion de raideur des composants de voie.

Le retour d'expérience a établi que le rapport Y/Q, en valeur moyenne sur 2 mètres de parcours, ne doit pas dépasser 1.2 en quasi-statique et 0.8 en dynamique [98, 104]. La valeur de 1.2 est retrouvée lorsqu'on considère une adhérence de 0.36 dans la formule de Nadal, en roue libre, pour un boudin UIC de pente 70°. Elle correspond en réalité à une adhérence plus forte si on considère les autres pseudoglissements.

Le respect de ces conditions permet d'assurer que le boudin de la roue ne peut pas monter sur le rail en condition normale d'exploitation. La mesure des efforts Y et Q est donc une étape très importante lors de l'homologation physique d'un véhicule, et sa simulation aussi.

Equilibre de l'essieu

Dans la réalité, comme par simulation, l'effort Y sur la roue dérailleuse est obtenu en fonction de l'équilibre des forces sur l'ensemble de l'essieu, en présence de spin et de pseudoglissement longitudinal. A part les suspensions en direction du bogie, qui jouent un

rôle bien entendu, le rôle de l'autre roue représentée en Figure 4. 1, non considérée dans le dessin classique de la Figure 4. 3, est important. Cette autre roue est dite « poussante » car sur un essieu sous-vireur comme tout essieu avant de bogie classique en courbe, la force de dérive tend à pousser l'essieu vers l'extérieur de la courbe tandis que l'effort N sur le boudin de la roue déraillante permet de le maintenir dans un état stable, ou pas.

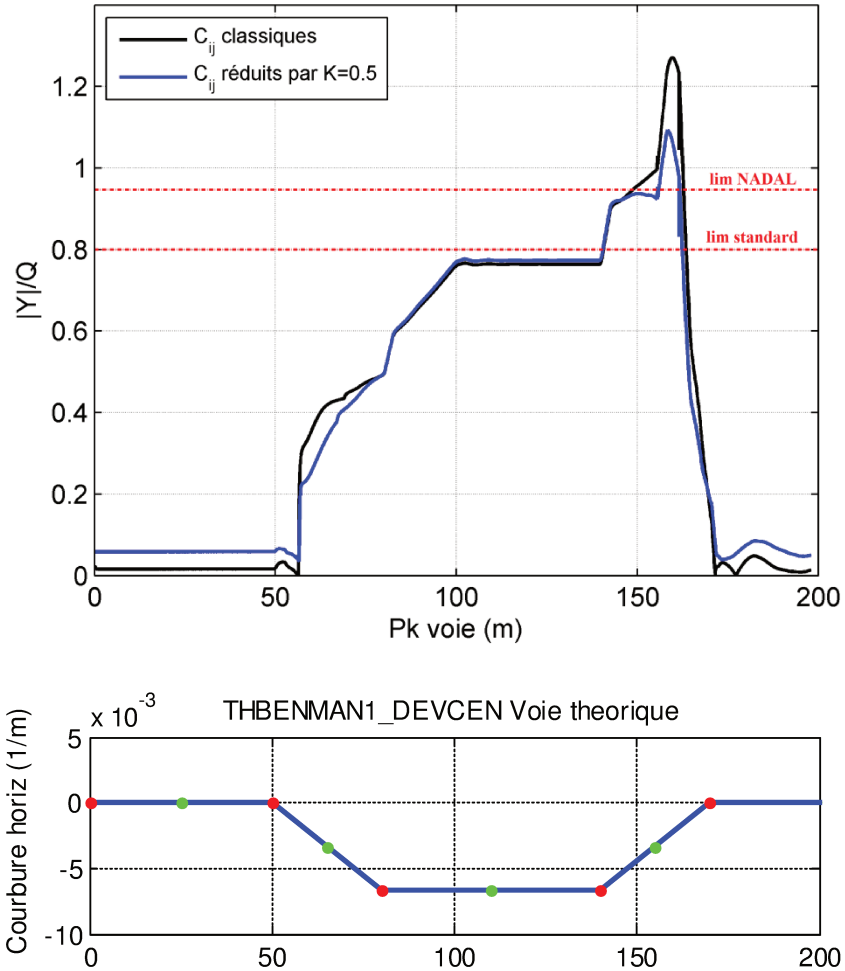


Figure 4. 4 : Effet de la variation des coefficients de Kalker sur le rapport Y/Q pour μ=0.5

En ce qui concerne la précision de calcul des forces tangentielles, elle n'est souvent pas nécessaire en ce qui concerne la roue d'attaque, puisque les pseudoglissements sont très importants donc le contact est saturé : les coefficients de Kalker n'ont d'importance que dans les phases transitoires.

Il n'en va pas de même pour la roue poussante : elle se trouve dans la position indiquée sur la Figure 3. 2 (contact sur la table) que nous avons déjà étudié avec la méthode des éléments finis dans le chapitre 3 et l'adhérence est rarement saturée. Une réduction des coefficients de Kalker pourrait donc avoir une influence sur l'état final d'équilibre de l'essieu, donc sur les valeurs numériques de Y et Q obtenues par calcul.

Pour établir cette influence, on a simulé le cas du benchmark de Manchester [105] adapté aux profils théoriques au 1/10e des cas de contact du chapitre 3 (FEM), en comparant le rapport

Y/Q obtenu sur la roue d'attaque de l'essieu avant dans deux cas ; les coefficients K=1 et 0.5. La Figure 4. 4 montre que le rapport Y/Q calculé avec les coefficients classiques k=1 dépasse le critère de Nadal en sortie de courbe après une distance parcourue égale à 162 m. En réduisant ces coefficients par K=0.5, le pic du rapport Y/Q baisse de 1.27 à 1.08 mais reste en dessus de la limite du critère de Nadal égal dans ce cas à 0.94.

La simulation commence par 50 m de ligne droite suivie par 30 m de clothoïde puis une courbe établie sur une soixantaine de mètre jusqu'à une clothoïde de sortie comprenant un défaut local pour accentuer le gauche. L'ensemble du véhicule est inscrit en courbe de façon quasi-statique sur une quarantaine de mètre une fois que le dernier essieu du deuxième bogie a atteint la courbe. Dès que l'essieu d'attaque entre dans le gauche de sortie, la diminution de la charge Q sur la roue d'attaque conduit à un pic du rapport Y/Q. Il y a un dépassement du critère de Nadal mais pas de déraillement.

Sur ce cas particulier, on peut en conclure que la réduction des coefficients de Kalker réduit légèrement le rapport Y/Q dans la zone délicate et diminue le risque de déraillement du train selon le critère de Nadal.

4.2. Vitesse critique

L'étude de la stabilité en dynamique ferroviaire est une étape très importante dans la conception du bogie et du véhicule ferroviaire. Plusieurs auteurs ont étudiés depuis le 19ème siècle, le mouvement dynamique du véhicule et ont essayé de trouver la solution des problèmes liés à la stabilité du véhicule comme le phénomène de lacet connu aussi sous son appellation anglaise « *hunting motion* », il s'agit d'un mouvement d'oscillations transversales instables qui est essentiellement dû à une vitesse trop élevée pour l'asservissement mécanique constitué du bicône ferroviaire. A partir d'une certaine vitesse, dite critique le régime des oscillations en réponse à une amplitude de défaut donnée devient permanent et leurs amplitudes s'amplifient, ce qui peut avoir des conséquences graves sur la sécurité des passagers (ripage de voie et risque de déraillement) et gêner leur confort. La détermination de cette vitesse critique est donc un point très important à prendre en considération par les dynamiciens en ferroviaire. C'était le point clé des recherches qui ont pu mener à la conception optimisée des trains à très grande vitesse, dans les années 70, en accompagnement des programmes de TGV japonais, allemands et français. Knothe [106] a fait une synthèse des travaux réalisés durant le 20ème siècle sur l'étude de stabilité en ferroviaire.

Par la suite, les différentes méthodes qui permettent le calcul de la vitesse critique seront présentées et seulement celles qui sont capables d'étudier un bogie ou un train complet seront retenues pour la suite de l'étude.

4.2.1. Méthode analytique

Pour un essieu seul avec des suspensions primaires K_x et K_y respectivement dans la direction longitudinale et transversale comme représentées sur la Figure 4. 5, le problème est relativement simple et la solution peut être obtenue analytiquement en résolvant l'équation du mouvement qui régit le système. En considérant seulement les suspensions primaires de

l'essieu et en négligeant l'effet du spin, l'équation dynamique peut s'écrire sous sa forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_y}{V} & 0 \\ 0 & \frac{2e^2C_x}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_y & -C_x \\ \frac{e\gamma}{R}C_y & e^2K_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (150)$$

Avec :
y le déplacement transversal de l'essieu
α l'angle de dérive
m masse de l'essieu
I_{zz} moment d'inertie
$C_x = GabC_{11}$ donné à partir de la théorie linéaire de Kalker
$C_y = GabC_{22}$ donné à partir de la théorie linéaire de Kalker
K_x raideur de suspension primaire dans la direction longitudinale
K_y raideur de suspension primaire dans la direction transversale
R rayon de roulement
γ conicité de la roue
e demi-écartement entre les rails
V Vitesse du train

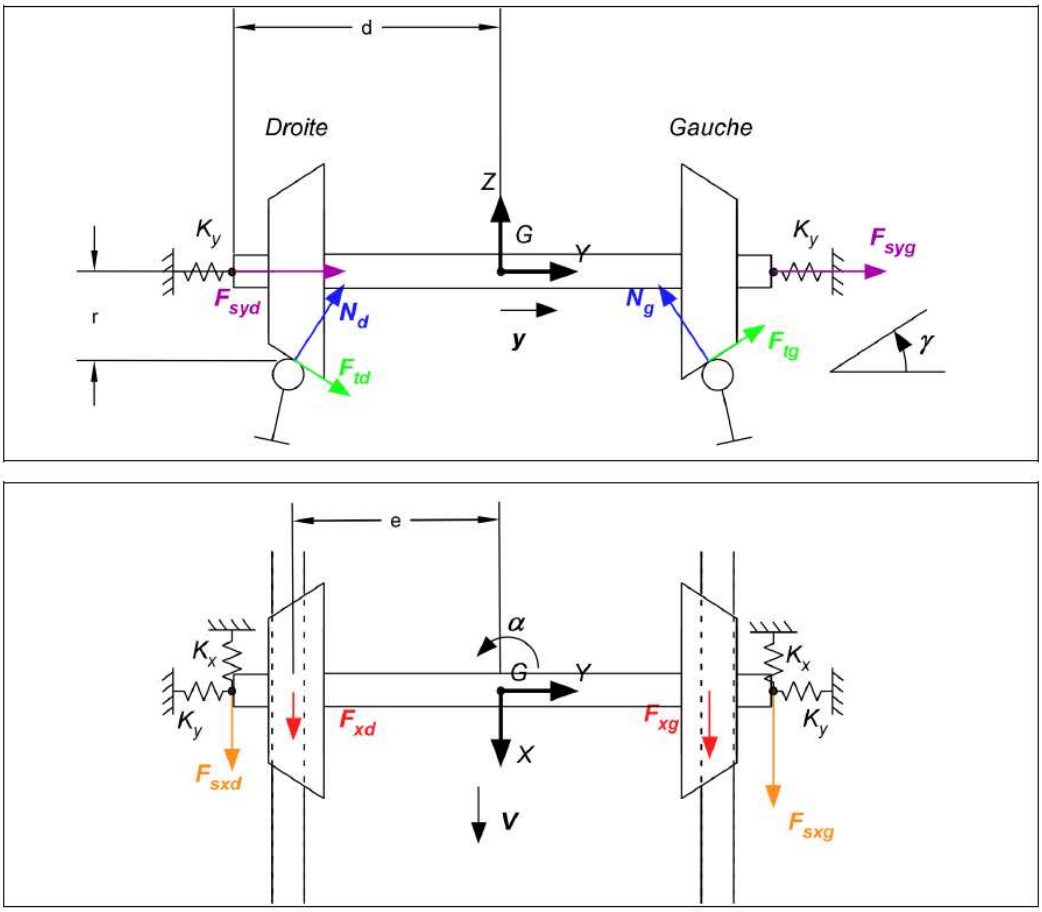


Figure 4. 5 : Représentation des forces au contact d'un essieu [107]

Les forces de contact sont prises en compte dans l'équation (150) à partir de la théorie linéaire de contact. L'addition de ces forces dans la matrice d'amortissement et de rigidité rend le système instable au-delà de la vitesse critique V_c. En supposant que les coefficients de Kalker C_{11} et C_{22} sont égaux, on obtient $C_x = C_y = C$. En remplaçant dans (150), I_{zz} par me^2 puis en appliquant le critère de stabilité de Routh, on peut montrer que la vitesse critique est donnée par :

$$V_c = \sqrt{\frac{2C^2eR(K_x + K_y)}{4C^2\gamma m - eRm\left(K_y - K_x\right)^2}} \tag{151}$$

La démonstration complète n'est pas présentée ici mais peut être trouvée dans plusieurs références comme [107]. L'expression de la vitesse critique (151) donne une idée sur les paramètres associés à l'étude de stabilité et indique la manière d'agir sur ces paramètres pour augmenter cette vitesse. En particulier, on constate que la vitesse critique est sensible à quelques paramètres qu'on peut contrôlés comme la conicité de la roue, le demi-écartement ou encore les coefficients de Kalker.

Lorsque l'étude de stabilité concerne le bogie ou le train complet, le calcul devient beaucoup plus complexe et la vitesse critique est généralement déterminée numériquement à l'aide d'un code multicorps.

4.2.2. Méthode de « *Ramping* »

Le « *Ramping* » est une méthode numérique utilisée communément par les dynamiciens pour estimer assez rapidement la vitesse critique du véhicule ferroviaire : On applique à un modèle excité transversalement, une rampe de vitesse croissante ou décroissante; la vitesse critique est celle pour laquelle les oscillations ou les instabilités apparaissent ou disparaissent.

La méthode de *ramping* en accélération ou en décélération a été testée en similitude par l'équipe du LTN dans les années 80, sur maquettes à échelle réduite, sur une voie parfaite constituée d'un grand volant d'essai, la roue de Grenoble. L'excitation se faisait par une impulsion de force sur le bogie de façon à dévier l'essieu de sa position centrale ; l'expérience a montré que la réponse à une seule impulsion suivie d'une décélération, permettait de reproduire une vitesse critique répétable.

La méthode de r*amping* en décélération (rampe de vitesse décroissante) après excitation par un défaut de voie transversal, a été adoptée par la suite par simulation temporelle.

Elle est utilisée dans ce travail avec le code de dynamique ferroviaire VOCO. On choisit pour cette étude le véhicule de référence en termes de comparaison inter-code, celui du benchmark de Manchester [105] composé d'une caisse, deux bogies et 4 essieux comme le montre la Figure 4. 6. Le choix de ce modèle simple et quasi-linéaire (en pratique celui d'une voiture à voyageur type EUROFIMA, correspondant aux voitures CORAIL) permet de mieux mettre en évidence les paramètres qu'on veut étudier sans tenir compte d'effets secondaires liés au véhicule. Afin de pouvoir appliquer les résultats de la méthode des éléments finis du chapitre

précédent, on choisit les mêmes profils théoriques de roue et de rail, c'est-à-dire une roue S1002 à table parfaitement conique au 1/10e et un rail UIC60 incliné au 10ème. Cela signifie que les vitesses critiques annoncées ici ne sont pas celles de ce véhicule sur une voie réelle.

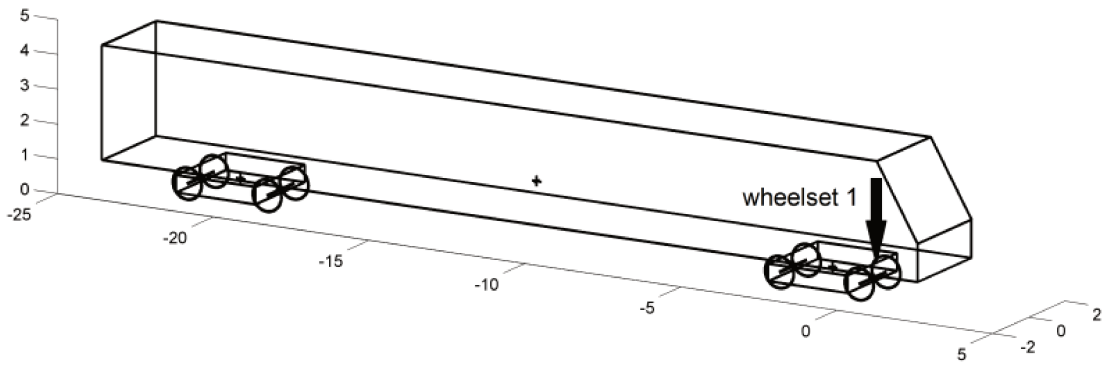


Figure 4. 6 : Représentation du véhicule du benchmark de Manchester

Afin d'appliquer la méthode en décélération, on choisit initialement une vitesse V =110 m/s qui diminue avec une décélération constante de -1 m/s². L'amplitude du déplacement transversal de l'essieu 1 (Figure 4. 5) en fonction du temps est représentée sur la Figure 4. 7(en haut). En représentant également la vitesse en fonction du temps, on déduit que la vitesse critique est égale dans ce cas V_c=273 km/h.

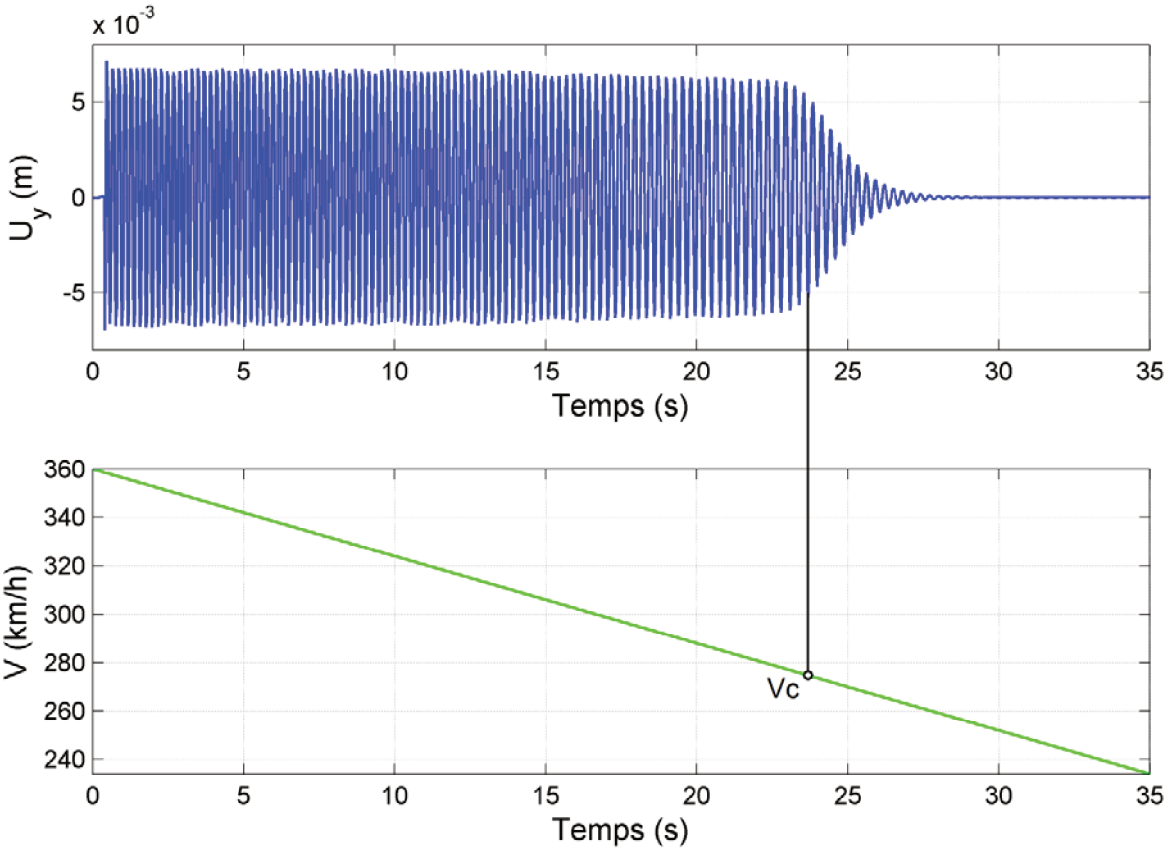


Figure 4. 7 : Vitesse critique par la méthode du *Ramping*; en haut: amplitude du déplacement transversal de l'essieu 1, en bas : rampe décroissante de la vitesse

Légèrement sensible à la décélération choisie et à la forme du défaut initial, le *Ramping* reste une méthode imprécise qui néanmoins permet de donner une bonne approximation de la vitesse critique, surtout quand le véhicule est assez simple comme c'est le cas avec le Benchmark Manchester. D'autres méthodes plus complexes peuvent être utilisées afin de déterminer avec plus de précisions cette vitesse comme par traçage du diagramme de bifurcation [108]. Dans ce cas, la méthode du *ramping* peut servir à fixer le domaine d'étude, c'est-à-dire les vitesses maximale et minimale.

Sur le terrain, la méthode du ramping est impossible à mettre en œuvre et elle est à peu près inconnue des dynamiciens expérimentaux pratiquant sur des véhicules réels.

4.2.3. Diagramme de bifurcation

True [108] a présenté l'analyse avec le diagramme de bifurcation comme étant la bonne démarche à suivre pour trouver la vitesse critique. Sa méthode est efficace pour trouver les attracteurs multiples qui peuvent exister. Cependant, dans cette partie, on s'intéresse seulement au point de bifurcation le plus bas qui correspond à la vitesse critique. L'idée principale est de lancer, avec un code de dynamique ferroviaire, plusieurs simulations de quelques dizaines de secondes de temps réel d'un train, roulant sur une voie présentant un défaut, avec des vitesses initiales constantes V, puis, récupérer une fois l'état stationnaire établi, l'amplitude maximale du déplacement transversal pseudopériodique u_y pour laquelle les oscillations se stabilisent. En pratique, toute irrégularité des rails va conduire au-delà de la vitesse critique à l'instabilité du train lors de sa circulation. La vitesse critique dépend des conditions initiales imposées. Si la perturbation appliquée est faible, l'essieu va converger vers l'attracteur central et la vitesse critique risque d'être surestimée. Afin de la déterminer au mieux, on se mettra par la suite dans les conditions les plus défavorables. Ainsi, on considère pour toutes les simulations un défaut d'alignement horizontal dans la voie d'amplitude maximale de 0.01 m, alors que le demi-écartement aux boudins est de 7 à 8 mm : le contact au boudin est en général assez violent, et lorsqu'on dépasse la vitesse critique, l'essieu rebondit d'un boudin à l'autre.

Le diagramme de bifurcation du véhicule sur les géométries de contact précédemment décrits est représenté sur la Figure 4. 8 pour les coefficients de Kalker classiques (non corrigés). Lorsque la vitesse V est inférieure à la vitesse critique, l'amplitude des oscillations latérales à la fin de la simulation est nulle. Le train tend à se stabiliser rapidement. La vitesse critique V_c est la vitesse pour laquelle l'amplitude des oscillations latérales varie brusquement de zéro à environ u_y=6.2 mm, c'est-à-dire V_c=280 km/h. Au delà de cette vitesse, l'amplitude des oscillations à la fin de chaque simulation devient de plus en plus élevée. La solution est décrite en tant que périodiquement stable. Comme on peut le constater, la valeur de la vitesse critique est très proche de celle obtenue avec la méthode « *Ramping* » malgré le manque de précision de cette dernière en comparaison avec le diagramme de bifurcation.

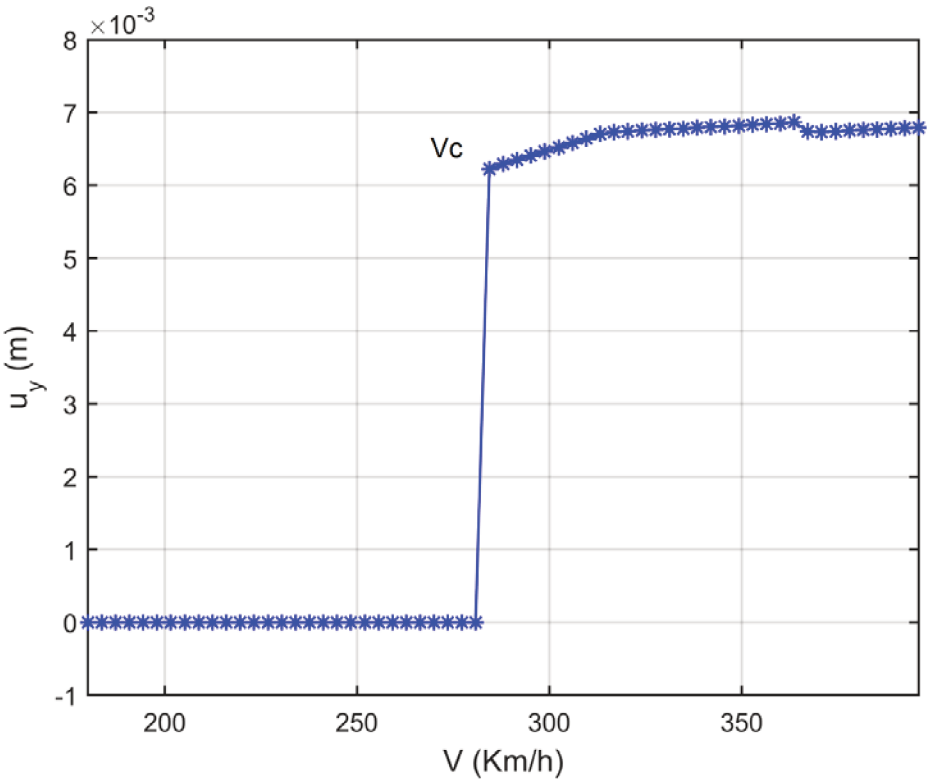


Figure 4. 8 : La vitesse critique à partir du diagramme de bifurcation

4.2.4. Effet des coefficients réducteurs K_{ij}

Les forces tangentielles au contact sont calculées dans le logiciel VOCO en fonction des coefficients de Kalker à partir de sa théorie linéaire. Avec cette théorie, le contact entre la roue et le rail est toujours supposé en adhérence et les forces dans la direction longitudinale et transversale sont données par les expressions suivantes avant saturation :

$$F_x = -GabC_{11}\xi_x \tag{152}$$

$$F_y = -GabC_{22}\xi_y - G(ab)^{\frac{3}{2}}C_{23}\varphi \tag{153}$$

Les coefficients C_{ij} ont été tabulés par Kalker en fonction du coefficient de Poisson ν et de l'élancement a/b d'ellipses Hertziennes (voir annexe A.2). La description utilisée dans VOCO exprime ces coefficients directement en fonction du rapport des courbures $X = A/B$ au lieu de l'élancement a/b afin de s'affranchir de la notion d'ellipse [4], pour pouvoir traiter les cas non-Hertziens. Les coefficients C_{ij} tabulés par Kalker sont approximés par des expressions polynomiales:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 3.3 + 0.89/(0.085 + X) \\ C_{22} &= 2.46 + 1.34/(0.109 + X) \\ C_{23} &= 0.18 + 1.29/(0.002 + X)^{0.63} \end{aligned} \tag{154}$$

Particularité du code VOCO, la saturation des forces tangentielles est atteinte avec une formulation analytique nommée CHOPAYA [82, 109] qui prend en compte le pseudoglissement de spin :

$$\frac{F_t}{\mu F_n} = 1 - e^{-\xi_t} \tag{155}$$

Avec $F_t = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, $\xi_t = \sqrt{\bar{\xi}_x^2 + \bar{\xi}_y^2}$;$\bar{\xi}_x$ et $\bar{\xi}_y$ sont les pseudoglissements réduits.

La différence constatée entre certaines mesures expérimentales et la théorie classique de Kalker (voir la Figure 1. 15) a conduit certaines équipes de dynamique à appliquer, dans leur code de dynamique ferroviaire, une correction aux coefficients de Kalker, arbitrairement choisie, équivalente dans certains cas à K=0.5 [43] et dans d'autres à K=0.6 [110] ou encore à K=μ/0.6 [38]. Certains codes multicorps comme NUCARS autorisent un changement de la valeur par défaut de cette réduction fixée à 100%, c'est-à-dire aucune correction n'est appliquée, à travers un paramètre %KALKER. C'est avec une démarche similaire que nous avons appliqué dans l'algorithme de contact du logiciel VOCO différents coefficients réducteurs K_{ij} afin d'étudier l'influence de la réduction des coefficients de Kalker sur la vitesse critique du véhicule. Certains de ces facteurs sont arbitraires, d'autres sont déduits de la solution de notre modèle par éléments finis. Les coefficients C_{ijr} résultants de cette réduction sont donc donnés par :

$$C_{ijr} = K_{ij} C_{ij} \tag{156}$$

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la solution élastique par éléments finis à partir d'un modèle de contact roue-rail 3D réduit la pente initiale des courbes de saturation par rapport à la théorie linéaire, et par conséquent les coefficients de Kalker, de 28 % dans la direction longitudinale et de 44 % dans la direction transversale pour les cas de contact étudiés, reproduits ici en réutilisant les mêmes roues et rails. Ceci nous permet de proposer les coefficients de réduction K_{11e}=0.72 et K_{22e}=0.56 appliqués respectivement aux coefficients C_{11} et C_{22}. Nous avons aussi montré que la prise en compte de l'élasto-plasticité des corps en contact réduit la pente initiale des courbes de saturation par rapport à la théorie linéaire de 37 % dans la direction longitudinale et de 54 % dans la direction transversale. Par conséquent, les coefficients réducteurs proposés dus à la plasticité sont de K_{11ep}=0.63 et K_{22ep}=0.46. Nous avons aussi montré qu'une couche élastique en interface entre la roue et le rail d'épaisseur h_c=125 μm et de module de cisaillement G=820 Mpa réduit le coefficient C_{11} par K_{11tc}=0.5. On suppose que le coefficient de réduction identifié dans la direction longitudinale est aussi valide dans la direction transversale. Dans les deux cas, on suppose que K_{23} est égal à K_{22}. Pour tous les autres cas, on considère que la réduction s'applique de la même manière dans les différentes directions, c'est-à-dire que $K_{11} = K_{22} = K_{23} = K$.

La Figure 4. 9 montre les diagrammes de bifurcation obtenus pour différents facteurs de réduction K qui varient de 0.9 jusqu'à 0.5.

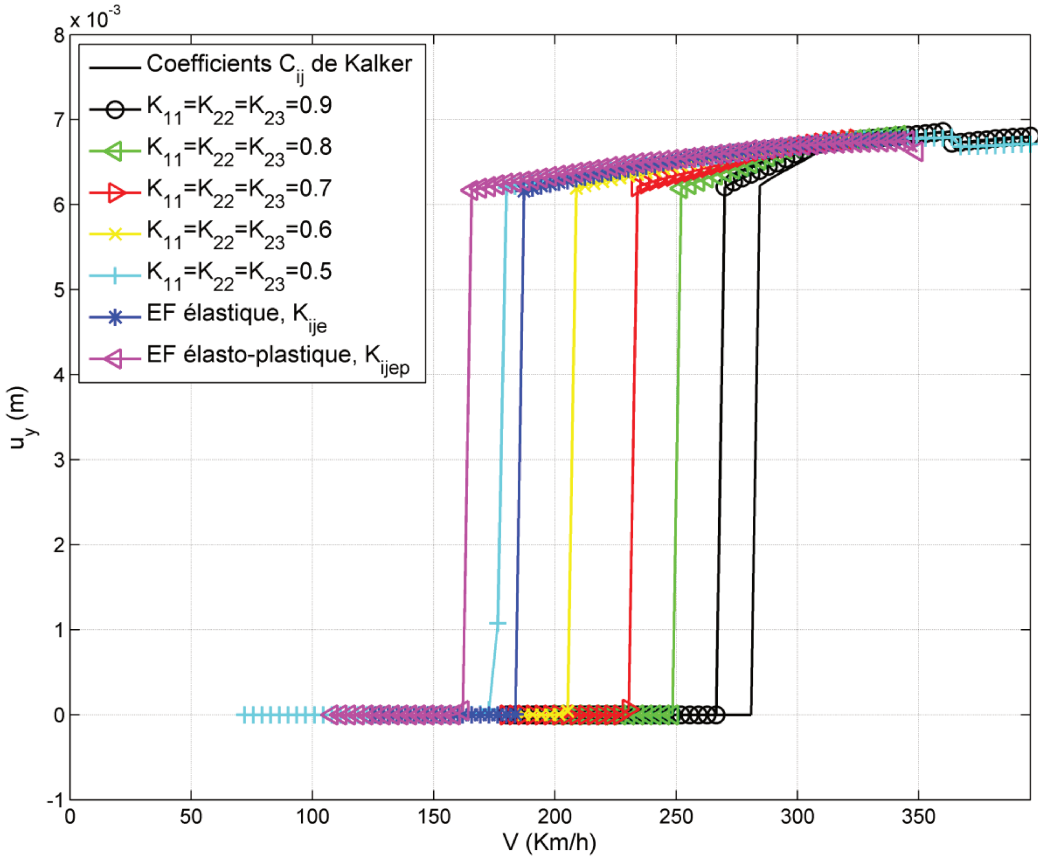


Figure 4. 9 : Effet des coefficients de réduction K_{ij} sur la vitesse critique V_c

Les facteurs précis déduits de notre étude par éléments finis sont aussi représentés sur la même figure. Les vitesses critiques qui en résultent sont reportées dans le Tableau 4. 1 et les erreurs relatives par rapport à la vitesse critique de référence $V_{créf}$=280 km/h (sans correction) sont calculées.

Tableau 4. 1 : Vitesse critique pour différents facteurs de réduction

Facteur de réduction	Vitesse critique V_c (km/h)	Erreur relative par rapport à $V_{créf}$ (%)
1	280	0 (référence)
0.9	266	-5.1
0.8	248	-11.5
0.7	230	-17.9
0.6	205	-26.9
K_{ije}	183	-34.6
0.5 (K_{ijtc})	173	-38.4
K_{ijep}	162	-42.1

Le Tableau 4. 1 montre que la vitesse critique diminue quand la réduction appliquée aux coefficients de Kalker augmente. En d'autres termes, les coefficients de Kalker classiques surestiment la vitesse critique. Bien que certaines équipes appliquent dans leur algorithme de contact des corrections aux coefficients de Kalker, la plupart des autres dynamiciens en ferroviaire négligent l'effet des facteurs de réduction et gardent simplement la valeur de K=1 (aucune réduction n'est appliquée). Ce choix est justifié par le fait que les forces tangentielles au contact, obtenues avec les coefficients de Kalker classiques, sont naturellement plus élevées, par conséquent, les simulations se font dans les conditions d'exploitation les plus sévères [110]. Or, le Tableau 4. 1 montre clairement l'important impact des coefficients réducteurs sur la vitesse critique et l'étude de stabilité du train. Un impact aussi élevé ne peut, lorsque les hypothèses de plasticité sont remplies, être négligé et une correction aux coefficients de Kalker doit être appliquée. De plus, cette correction permet d'avoir un meilleur ajustement avec la pratique dans des situations où les hypothèses de la théorie de Kalker ne sont pas bien respectées [43] comme lorsque les surfaces sont contaminées.

Cependant, le choix du niveau de réduction ne peut pas se faire d'une façon arbitraire et nécessite une justification en fonction des hypothèses car, si l'on considère le facteur habituellement utilisé K=0.5, il coïncide dans notre cas d'étude avec celui dû à l'introduction d'une certaine couche de troisième corps très élastique, la vitesse critique est fortement réduite de 38 %. Mais cela signifie qu'il faut que la couche soit de cette épaisseur, avec un module 100 fois plus faible que les matériaux de base, pour appliquer ce coefficient.

Afin de pouvoir estimer, d'une façon empirique, les coefficients réducteurs à appliquer, il est important de connaitre d'abord les différentes conditions opératoires dans lesquelles le train circule. Or, ces conditions peuvent beaucoup varier en fonction plusieurs paramètres tels que l'emplacement de la voie, le climat, les stratégies de contrôle qui peuvent générer des particules d'usure agglomérées dans le troisième corps… Une autre méthode qui permet de prendre en compte la baisse des coefficients de Kalker consiste à utiliser les différents modèles avancés de contact, développés durant ces dernières années [94, 41, 44], L'avantage de ces modèles est leur capacité à gérer la présence d'un troisième corps entre la roue et le rail. En se basant sur notre modèle par éléments finis, nous avons pu déduire les facteurs K_{ije}, K_{ijep} et K_{ijtc} dus respectivement à la solution élastique et élasto-plastique par éléments finis ainsi qu'à l'addition d'une couche élastique de troisième corps sur l'interface du rail. Ces facteurs réduisent la vitesse critique respectivement de 34 %, 42 % et 38 %. Bien que la démarche proposée dans cette thèse permette d'avoir une bonne estimation de la vitesse critique sous des conditions plus détaillées, il reste essentiel d'observer les épaisseurs de couches moyennes de troisième corps, de réaliser la mesure de leur module réel et de déterminer la limite élastique dans la zone de contact superficielle qui plastifie, avant d'en vérifier l'effet sur les coefficients C_{ij} par modèle éléments finis pour pouvoir conclure ensuite sur leur impact en simulation de la stabilité. Il convient ensuite de faire d'autres simulations avec des couples roue-rail et des véhicules différents avant de pouvoir proposer la meilleure corrélation de ces facteurs de réduction.

Conclusions et perspectives

Nous avons proposé dans ce chapitre une application des résultats par éléments finis à la dynamique globale du véhicule ferroviaire. En particulier, l'effet sur la vitesse critique de l'élasto-plasticité des corps en contact et de l'addition d'une couche mince sur l'interface du rail est étudié par l'intermédiaire des coefficients de réduction K_{ij} évalués à partir des courbes de saturation. Ces coefficients ont été introduits dans le modèle de contact du code de dynamique ferroviaire VOCO en appliquant une correction aux coefficients classiques de Kalker. La vitesse critique du véhicule a ensuite été déterminée numériquement en utilisant le diagramme de bifurcation. Nous avons montré que la vitesse critique diminue quand la réduction appliquée aux coefficients de Kalker augmente. Autrement dit, la non prise en compte des coefficients de correction risque de conduire à une surestimation de la vitesse critique si les conditions étudiées sont remplies.

Cependant, la correction par K_{ij}=0.5 adoptée par certains dynamiciens pour avoir un bon ajustement avec des mesures de forces Y anciennes en courbe, conduit à une réduction élevée de la vitesse critique de 38 % dans notre cas d'étude qui ne peut être considérée à la légère, car elle implique la présence permanente d'une couche de plus de 100 microns, 100 fois plus souple que l'acier de base. Une bonne description des conditions réelles d'essais est requise afin de savoir si une telle couche est toujours présente, si son module est si faible, donc s'il est pertinent d'appliquer un facteur aussi élevé que 0.5. D'autre part, nous avons montré que la vitesse critique est réduite de 42 % sous l'effet de la plasticité mais en considérant la limite élastique de l'acier à rail neuf ; les mesures de limite élastique des matériaux doivent être effectuées en surface sur des rails écrouis, pour mieux évaluer l'effet de ces paramètres, ce qui permettra d'avoir des coefficients de réduction mieux établis pour chaque paramètre.

Enfin, le changement des coefficients de Kalker a un léger impact sur le déraillement de l'essieu étant donné que l'équilibre de l'essieu est conditionné par la roue interne, poussante où le contact n'est pas saturé.

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons développé des modèles numériques basés sur la méthode des éléments de frontière et la méthode des éléments finis pour l'étude du contact roue-rail roulant. La méthode des éléments finis est utilisée pour étudier quelques paramètres influençant les coefficients de Kalker identifiés à partir d'un état de l'art sur les mesures expérimentales des courbes de saturation représentant la force tangentielle en fonction du pseudoglissement.

D'abord nous avons cherché à résoudre le problème de contact avec une approche itérative directe de la méthode des éléments de frontière connue sous le nom de la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM). Une telle approche a déjà été utilisée par le passé pour résoudre le problème du contact normal et glissant. Après avoir réécrit la MIM pour la résolution de ces problèmes, la méthode est validée en comparant les résultats aux solutions analytiques pour des géométries de contact de forme simple. Nous l'avons ensuite étendu pour pouvoir résoudre le problème du contact roulant stationnaire en introduisant aux systèmes d'équations les relations régissant la cinématique des corps en roulement. Dans ce cas, la validation de la MIM est faite par une comparaison avec l'approche variationnelle de la méthode des éléments de frontière implémentée par Kalker dans le logiciel CONTACT. Les résultats des deux méthodes étant en excellent accord pour des géométries simples, l'algorithme de résolution de la MIM est ensuite adapté aux situations de contact non-Hertzien. Des simulations numériques ont été effectuées pour l'étude du contact roue-rail roulant. En particulier, la position centrée entre une roue S1002 et un rail UIC60 incliné au 40ème est étudiée. La solution montre une empreinte de contact non elliptique ou non-Hertzienne due à la variation des courbures de la roue et du rail dans la direction transversale. Bien que le coût de calcul de la MIM est plus élevé en comparaison avec CONTACT car ce dernier dispose d'algorithmes de résolution plus performants fruit d'une vingtaine d'années de développement, l'outil numérique que nous maîtrisons désormais peut être utilisé pour explorer des sujets d'une grande importance dans le domaine ferroviaire comme la prise en compte de la plasticité des corps en contact ou encore l'étude de la présence d'une couche de troisième corps entre la roue et le rail.

Ensuite, nous avons développé un modèle par éléments finis 3D pour l'étude du contact roue-rail roulant en utilisant les schémas d'intégration temporelle implicite et explicite. Les profils de roue et de rail sont choisis et positionnés de sorte à pouvoir assurer une zone de contact elliptique et à pouvoir étudier l'effet de spin. Dans un premier temps, le problème de contact est traité en élasticité linéaire. Nous avons montré que la solution du schéma implicite est sensible à la quantité d'énergie dissipée numériquement à travers la taille du pas de temps. Un compromis entre cette taille et la précision de la solution a permis de minimiser certaines oscillations observées sur la force tangentielle tout en gardant un temps de calcul convenable

pour notre étude. En adoptant le compromis trouvé, la solution élastique implicite du problème de contact normal (distribution de la pression de contact, pression maximale, semi-axes de l'ellipse de contact…) est comparée avec les résultats donnés par la méthode explicite, par Hertz et par CONTACT. Compte tenu de l'imprécision due à la discrétisation, les solutions du problème normal des différentes méthodes sont en très bon accord. La solution élastique implicite du problème tangentiel est plus proche de CONTACT que la méthode explicite (distribution et module de la contrainte de cisaillement tangente, partition adhérence/glissement…). Les courbes de saturation dans les directions longitudinale et transversale montrent également un bon accord entre la solution implicite, FASTSIM et CONTACT. Les pentes initiales de ces courbes en implicite, proportionnelles aux coefficients C_{ij} de Kalker, sont réduites par rapport à la théorie linéaire de Kalker dans les deux directions. En traçant leurs dérivées, nous avons constaté une baisse des coefficients C_{ij} de 28% dans la direction longitudinale et de 44% dans la direction transversale dans notre cas d'étude. Ainsi, le coût de calcul avec deux méthodes par éléments finis étant élevé, la validation en élasticité du modèle par éléments finis nous a permis de choisir la méthode implicite pour la suite de l'étude. Afin de vérifier la validité et la flexibilité de ce modèle, une étude paramétrique est réalisée dans laquelle l'influence du point de contact, du pseudoglissement longitudinal et du coefficient de frottement est vérifiée.

Dans un deuxième temps, le contact roue-rail roulant avec la méthode des éléments finis est étudié en élasto-plasticité. Sous l'effet de la déformation plastique sur toute la zone de contact (selon le critère de Von Mises) de l'acier R900A neuf, la pression de contact maximale a baissé et l'aire de contact elliptique prend une forme ovoïde. De même, la contrainte de cisaillement maximale a baissé et les pentes initiales des courbes de saturation sont réduites dans les deux directions par rapport à la solution élastique. Les dérivées de ces courbes en élasto-plasticité ont montré cette fois-ci une baisse des coefficients de Kalker de 37 % dans la direction longitudinale et de 54 % dans la direction transversale dans notre cas d'étude. L'augmentation de la charge normale subite par la roue a conduit à une augmentation de la pression de contact maximale et de la déformation plastique. Par conséquent, la pente initiale de la courbe de saturation est réduite dans la direction longitudinale étudiée, ce qui confirme que la plasticité est un paramètre qui peut baisser les coefficients de Kalker. Par contre, la comparaison avec l'acier 350HT dont la limite d'élasticité est 1.5 plus élevée que l'acier R900A a montré un effet plus adouci de la déformation plastique conduisant à un résultat très proche de la solution élastique.

Ensuite, la présence d'une couche de troisième corps (naturelle ou artificielle) entre la roue et le rail étant identifiée comme le premier responsable de la baisse des coefficients de Kalker, nous l'avons modélisé avec la méthode des éléments finis en l'a considérant comme lisse et mince. Nous avons supposé dans un premier temps que cette couche est élastique et cent fois plus souple que l'acier avec une épaisseur h=125 μm. L'étude de la courbe de saturation dans la direction longitudinale montre une baisse de la pente initiale et, par conséquent, du coefficient de Kalker d'environ 50 %. En second lieu, un comportement plastique parfait est attribué à cette couche. Malgré les nombreuses études réalisées pour caractériser et mesurer la couche de troisième corps, les propriétés mécaniques et rhéologiques de celle-ci restent peu

connues compte tenu de la complexité des phénomènes présents à l'interface de contact entre la roue et le rail. Nous avons donc réalisé une étude paramétrique où les paramètres caractéristiques de la couche de troisième corps sont variés (épaisseur, module de cisaillement et limite d'élasticité). Le résultat a montré que la pente initiale dans la direction longitudinale est très sensible à ces paramètres ; elle est réduite avec l'augmentation de l'épaisseur et la baisse du module de cisaillement. L'introduction du comportement plastique augmente cette baisse surtout pour les limites d'élasticité les plus faibles.

Enfin, des facteurs de réduction K_{ij} des coefficients de Kalker sont évalués à partir de la solution par éléments finis puis appliqués dans le code de dynamique ferroviaire VOCO afin d'étudier l'effet de la variation de ces coefficients sur la dynamique du véhicule du benchmark Manchester, en particulier sur le déraillement et la vitesse critique. Nous avons pu montrer que la baisse des coefficients de Kalker réduit légèrement le risque du déraillement car l'équilibre de l'essieu est conditionné non seulement par la roue déraillante où le contact est saturé mais aussi par la roue poussante qui ne l'est pas. D'autre part, elle induit une baisse de la vitesse critique qui atteint jusqu'à 38 % par rapport la vitesse critique de référence (sans réduction) pour un facteur de réduction K_{ij}=0.5.

Il est donc très important de pouvoir correctement estimer, à partir du modèle par éléments finis, les bons facteurs de réduction à appliquer afin d'évaluer au mieux le comportement dynamique du véhicule. Pour cela, il reste essentiel de réaliser plus d'observations et d'essais pour caractériser les bons paramètres qui caractérisent la couche du troisième corps. De plus, la loi de comportement utilisée dans notre étude étant caractérisée à partir de l'acier R900A à l'état neuf (non accommodé), l'étude en élasto-plasticité correspond seulement au premier cycle de roulement. Or, en réalité le rail subit après quelques cycles de roulement un écrouissage qui conduit à son durcissement et une augmentation de sa limite d'élasticité. Pour pouvoir tenir compte dans le modèle par éléments finis de cet éventuel changement, il serait intéressant d'envisager des essais de caractérisation sur le même acier mais après avoir subi plusieurs cycles de roulement conduisant à la stabilisation de son écrouissage.

Annexes

Annexe A

Annexe A.1

θ (°)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
m	6.61	3.78	2.73	2.14	1.75	1.49	1.28	1.13	1
n	0.32	0.41	0.49	0.57	0.64	0.72	0.80	0.89	1
r	2.8	2.3	1.98	1.74	1.55	1.39	1.25	1.12	1

Annexe A.2 : Coefficients C_{ij} de Kalker

		C_{11}			C_{22}			$C_{23} = -C_{32}$			C_{33}		
	g	σ=0	1/4	1/2	σ=0	1/4	1/2	σ=0	1/4	1/2	σ=0	1/4	1/2
	0.0	$\pi^2/4(1-\sigma)$			$\pi^2/4 = 2,47$			$\pi\sqrt{g}/3$	-	-	$\pi^2/16(1-\sigma)g$		
$\frac{a}{b}$	0.1	2.51	3.31	4.85	2.51	2.52	2.53	0.334	0.473	0.731	6.42	8.28	11.7
	0.2	2.59	3.37	4.81	2.59	2.63	2.66	0.483	0.603	0.809	3.46	4.27	5.66
	0.3	2.68	3.44	4.80	2.68	2.75	2.81	0.607	0.715	0.889	2.49	2.96	3.72
	0.4	2.78	3.53	4.82	2.78	2.88	2.98	0.720	0.823	0.977	2.02	2.32	2.77
	0.5	2.88	3.62	4.83	2.88	3.01	3.14	0.827	0.929	1.07	1.74	1.93	2.22
	0.6	2.98	3.72	4.91	2.98	3.14	3.31	0.930	1.03	1.18	1.56	1.68	1.86
	0.7	3.09	3.81	4.97	3.09	3.28	3.48	1.03	1.14	1.29	1.43	1.50	1.60
	0.8	3.19	3.91	5.05	3.19	3.41	3.65	1.13	1.25	1.40	1.34	1.37	1.42
	0.9	3.29	4.01	5.12	3.29	3.54	3.82	1.23	1.36	1.51	1.27	1.27	1.27
$\frac{b}{a}$	1.0	3.40	4.12	5.20	3.40	3.67	3.98	1.33	1.47	1.63	1.21	1.19	1.16
	0.9	3.51	4.22	5.30	3.51	3.81	4.16	1.44	1.59	1.77	1.16	1.11	1.06
	0.8	3.65	4.36	5.42	3.65	3.99	4.39	1.58	1.75	1.94	1.10	1.04	0.954
	0.7	3.82	4.54	5.58	3.82	4.21	4.67	1.76	1.95	2.18	1.05	0.965	0.852
	0.6	4.06	4.78	5.80	4.06	4.50	5.04	2.01	2.23	2.50	1.01	0.892	0.751
	0.5	4.37	5.10	6.11	4.37	4.90	5.56	2.35	2.62	2.96	0.958	0.819	0.650
	0.4	4.84	5.57	6.57	4.84	5.48	6.31	2.88	3.24	3.70	0.912	0.747	0.549
	0.3	5.57	6.34	7.34	5.57	6.40	7.51	3.79	4.32	5.01	0.868	0.674	0.446
	0.2	6.96	7.78	8.82	6.96	8.14	9.79	5.72	6.63	7.89	0.828	0.601	0.341
	0.1	10.7	11.7	12.9	10.7	12.8	16.0	12.2	14.6	18.0	0.795	0.526	0.228

Annexe B

Annexe B. 1

Charge normal concentrée (problème de Boussinesq)

Les déplacements en un point quelconque de l'espace semi-infini dus à une force normale concentrée pure F_n qui agit au centre du repère O :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{F_n}{4\pi G}\left\{\frac{xz}{R^3} - (1-2\nu)\frac{x}{R(R+z)}\right\} \\ u_y &= \frac{F_n}{4\pi G}\left\{\frac{yz}{R^3} - (1-2\nu)\frac{y}{R(R+z)}\right\} \\ u_z &= \frac{F_n}{4\pi G}\left\{\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\nu)}{R}\right\} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Avec $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Charge tangente concentrée (problème de Cerruti)

Les déplacements en un point quelconque de l'espace semi-infini dus à une force tangentielle concentrée pure F_x qui agit au centre du repère O :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{F_x}{4\pi G}\left\{\frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + (1-2\nu)\left(\frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2}\right)\right\} \\ u_y &= \frac{F_x}{4\pi G}\left\{\frac{xy}{R^3} - (1-2\nu)\frac{xy}{R(R+z)^2}\right\} \\ u_z &= \frac{F_x}{4\pi G}\left\{\frac{xz}{R^3} + (1-2\nu)\frac{x}{R(R+z)}\right\} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Les déplacements en un point quelconque de l'espace semi-infini dus à une force tangentielle concentrée pure F_y qui agit au centre du repère O :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{F_y}{4\pi G}\left\{\frac{xy}{R^3} - (1-2\nu)\frac{xy}{R(R+z)^2}\right\} \\ u_y &= \frac{F_y}{4\pi G}\left\{\frac{1}{R} + \frac{y^2}{R^3} + (1-2\nu)\left(\frac{1}{R+z} - \frac{y^2}{R(R+z)^2}\right)\right\} \\ u_z &= \frac{F_y}{4\pi G}\left\{\frac{yz}{R^3} + (1-2\nu)\frac{y}{R(R+z)}\right\} \end{aligned} \tag{B.3}$$

Annexe B. 2

$$T^{xx}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{(x-\zeta)^2}{\rho^3} + (1-2\nu)\left(\frac{1}{\rho+z} - \frac{(x-\zeta)^2}{\rho(\rho+z)^2}\right)\right\} \quad \text{(B.4)}$$

$$T^{yx}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{(x-\zeta)(y-\eta)}{\rho^3} - (1-2\nu)\frac{(x-\zeta)(y-\eta)}{\rho(\rho+z)^2}\right\} \quad \text{(B.5)}$$

$$T^{zx}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{(x-\zeta)z}{\rho^3} + (1-2\nu)\frac{(x-\zeta)}{\rho(\rho+z)}\right\} \quad \text{(B.6)}$$

$$T^{xy}(x,y;\zeta,\eta;z) = T^{yx}(x,y;\zeta,\eta;z) \quad \text{(B.7)}$$

$$T^{yy}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{(y-\eta)^2}{\rho^3} + (1-2\nu)\left(\frac{1}{\rho+z} - \frac{(y-\eta)^2}{\rho(\rho+z)^2}\right)\right\} \quad \text{(B.8)}$$

$$T^{zy}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{(y-\eta)z}{\rho^3} + (1-2\nu)\frac{(y-\eta)}{\rho(\rho+z)}\right\} \quad \text{(B.9)}$$

$$T^{xz}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{(x-\zeta)z}{\rho^3} - (1-2\nu)\frac{(x-\zeta)}{\rho(\rho+z)}\right\} \quad \text{(B.10)}$$

$$T^{yz}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{(y-\eta)z}{\rho^3} - (1-2\nu)\frac{(y-\eta)}{\rho(\rho+z)}\right\} \quad \text{(B.11)}$$

$$T^{zz}(x,y;\zeta,\eta;z) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho}\right\} \quad \text{(B.12)}$$

Annexe B. 3

$$A_{ij}^{xx} = \frac{(1-\nu)I_1 + \nu I_2}{\pi G} \quad \text{(B.13)}$$

$$A_{ij}^{xy} = A_{ij}^{yx} = \frac{\nu I_3}{\pi G} \quad \text{(B.14)}$$

$$A_{ij}^{yy} = \frac{(1-\nu)I_1 + \nu I_4}{\pi G} \quad \text{(B.15)}$$

$$A_{ij}^{zz} = \frac{(1-\nu)I_1}{\pi G} \quad \text{(B.16)}$$

$$I_1 = \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{\rho}dudv = [[vln(u+\rho) + uln(v+\rho)]_{u_1}^{u_2}]_{v1}^{v_2} \quad \text{(B.17)}$$

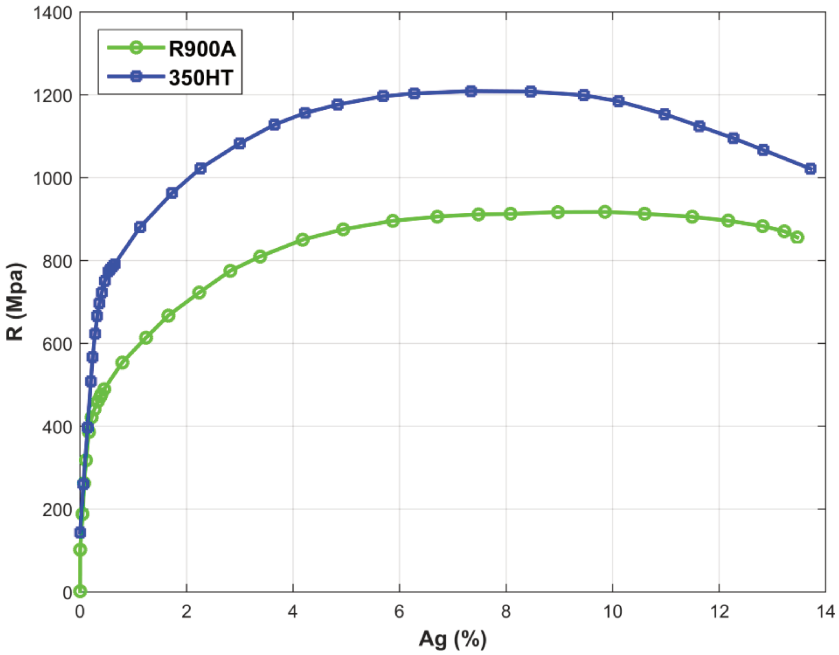
$$I_2 = \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{u^2}{\rho^3}dudv = [[vln(u+\rho)]_{u_1}^{u_2}]_{v1}^{v_2} \quad \text{(B.18)}$$

$$I_3 = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{uv}{\rho^3} dudv = [[-\rho]_{u_1}^{u_2}]_{v1}^{v_2} \quad \text{(B.19)}$$

$$I_4 = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{v^2}{\rho^3} dudv = [[uln(v+\rho)]_{u_1}^{u_2}]_{v1}^{v_2} \quad \text{(B.20)}$$

Avec $u = x - \zeta$, $v = y - \eta$, $\rho = \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}$, $u_1 = x_j - x_i - d_x/2$, $u_2 = x_j - x_i + d_x/2$, $v_1 = y_j - y_i - d_y/2$ et $v_2 = y_j - y_i + d_y/2$.

Annexe C



Loi de comportement des aciers R900A et 350 HT en traction sur éprouvette type

Bibliographie

[1] A. E. W. Hobbs, «A survey of creep,» British Railways Research Dpt Report note DYN 52, 1967.

[2] H. Hertz, «Über die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of elasticsolids),» *J. Reine und Angewandte Mathematik,* vol. 92, p. 156–171, 1882.

[3] J. B. Ayasse et H. Chollet, «Determination of the wheel rail contact patch in semi-Hertzian conditions,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 43, pp. 161-172, 2005.

[4] J. B. Ayasse et H. Chollet, Handbook of railway vehicle dynamics - Wheel-rail contact, Boca Raton: Taylor & Francis group, 2006.

[5] M. Toumi, H. Chollet et H. Yin, «Finite element analysis of the frictional wheel-rail rolling contact using explicit and implicit methods,» *Wear,* 2016.

[6] X. Zhao, Z. Li et R. Dollevoet, «Solution of the wheel-rail rolling contact in elasticity and elasto-plasticity using a transient finite element model,» chez *8th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail//Wheel Systems*, Florence, 2009.

[7] B. Paul et J. Hashemi, «Contact pressures in closely conforming elastic bodies,» *Journal of applied mechanics,* vol. 48, pp. 543-548, 1981.

[8] F. W. Carter, «On the Action of a Locomotive Driving Wheel,» *Proc. R. Soc. London,* vol. 112, pp. 151-157, 1926.

[9] K. L. Johnson, «The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane,» *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics,* vol. 25, pp. 332-339, 1958.

[10] K. L. Jonhson, «The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane,» *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics,* vol. 25, pp. 339-346, 1958.

[11] P. Vermeulen et K. L. Johnson, «Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential force,» *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics,* vol. 31, pp. 338-340, 1964.

[12] J. J. Kalker, «On the rolling contact of two clastic bodies in the presence of dry friction (thèse de doctorat),» Université de Technologie de Delft, Delft, 1967.

[13] J. J. Kalker, Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, Delft, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990.

[14] J. J. Kalker, «A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 11, pp. 1-13, 1982.

[15] Y. Rocard, L'instabilité en mécanique, automobiles - avions - ponts suspendus, Paris: Editions Masson, 1954.

[16] J. J. Kalker, «Wheel-rail rolling contact theory,» *Wear,* vol. 144, pp. 243-261, 1991.

[17] J. J. Kalker, «Simplified theory of rolling contact,» *Mechanical and aeronautical engineering*

and shipbuilding, vol. 1, pp. 1-10, 1973.

[18] G. Fichera, «Problemi elastostatici con vincoli unilaterale: il probleme di Signorini con ambigue condizioni al contorno,» *Memorie Accademie Nazionale dei Lincei,* vol. 8, pp. 91-140, 1964.

[19] G. Duvaut et J. L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Paris: Dunod, 1972.

[20] J. J. Kalker, «Variational principles of contact elastostatics,» *Journal Inst. Math. & Appl.,* vol. 20, pp. 199-219, 1977.

[21] J. J. Kalker, «The principle of virtual work and its dual for contact problems,» *Ingenieur-Archiv,* vol. 56, pp. 453-467, 1986.

[22] X. Zhao et Z. Li, «A solution of transient rolling contact with velocity dependent friction by the explicit finite element method,» *Engineering Computations,* vol. 33, pp. 1033-1050, 2016.

[23] M. Wiest, E. Kassa, W. Daves, J. C. O. Nielsen et H. Ossberger, «Assessment of methods for calculating contact pressure in wheel-rail/switch contact,» *Wear,* vol. 265, pp. 1439-1445, 2008.

[24] W. Yan et F. D. Fischer , «Applicability of the Hertz contact theory to rail-wheel contact problems,» *Arch. Appl. Mech.,* vol. 70, p. 255–268, 2000.

[25] M. Bijak-Zochowski et P. Marek, «Residual stress in some elasto-plastic problems of rolling contact with friction,» *Int. J. Mech. Sci.,* vol. 39, pp. 15-32, 1997.

[26] A. Sladkowski et M. Sitarz, «Analysis of wheel–rail interaction using FE software,» *Wear,* vol. 258, pp. 1217-1223, 2005.

[27] X. Zhao et Z. Li, «The solution of frictional wheel-rail rolling contact with a 3D transient finite element model: Validation and error analysis,» *Wear,* vol. 271, pp. 444-452, 2011.

[28] K. Knothe, R. Wille et B. Zastrau, «Advanced contact mechanics-road and rail,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 35, pp. 361-407, 2001.

[29] A. Saulot et L. Baillet, «Dynamic finite element simulations for understanding wheel-rail contact oscillatory states occurring under sliding conditions,» *Journal of tribology,* vol. 128, pp. 761-770, 2006.

[30] X. Zhao et Z. Li, «A three-dimensional finite element solution of frictional wheel–rail rolling contact in elasto-plasticity,» *Journal of engineering tribology,* vol. 229, p. 86–100, 2015.

[31] D. J. Haines et E. Ollerton, «Contact stress distribution on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces,» *Proc. Inst. Mech. Engrs.,* vol. 177, pp. 95-114, 1963.

[32] M. S. Sichani, «On efficient modelling of wheel-rail contact in vehicle dynamics simulation (thèse de doctorat),» KTH Royal institude of technology, Stockholm, 2016.

[33] Z. Y. Shen, J. K. Hedrick et J. A. Elkins, «A comparison of alternative creep-force models for rail vehicle dynamic analysis,,» *Proceeding of the 8th IAVSD Symposium,* pp. 591-605, 1984.

[34] S. Iwnicki, «Handbook of Railway Vehicle Dynamics,» *Boca Raton: Taylor & Francis Group,* pp. 85-120, 2006.

[35] H. Chollet et M. Sebes, «Manuel d'utilisation plate-forme logicielle VOCO sous MATLAB,» Champs sur Marne, 2013.

[36] H. Chollet, «Etude en similitude mécanique des efforts tangents au contact roue-rail (thèse de doctorat),» Université Paris 6, Paris, 1991.

[37] C. Pritchard, «Traction between rolling steel surfaces. A survey of railway and laboratory experiments,» chez *7th Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, 1980.

[38] T. G. Pearce et K. A. Rose, «Tangential force-creepage relationships in theory and practice,» chez *Contact mechanics and wear of rail/wheel systems*, Vancouver, British Columbia, 1982.

[39] P. R. Nayak, S. Hariharan, R. Stern, R. Abilock, P. A. March et P. K. Gupta, «Friction and creep in rolling contact,» Department of transportation (FRA), Washington, 1970.

[40] T. Ohyama et H. Maruyama, «Traction and Slip at Higher Rolling Speeds : Sorne Experiments Under Dry Friction and Water lubrification,» chez *Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*, Vancouver, 1982.

[41] A. Meierhofer, C. Hardwick, R. Lewis, K. Six et P. Dietmaier, «Third body layer-experimental results and a model describing its influence on the traction coefficient,» *Wear,* vol. 314, pp. 148-154, 2014.

[42] A. Saulot, «Analyse tribologique du contact roue-rail : modélisation et expérimentations,» Institut National des Sciences Appliquées de Lyon , Lyon, 2005.

[43] J. J. Kalker, «Modification of the two body contact conditions to account for the third-body,» *Tribology Series,* vol. 21, pp. 183-189, 1992.

[44] E. A. H. Vollebregt, «Numerical modeling of measured railway creep versus creep-force curves with CONTACT,» *Wear,* vol. 314, pp. 87-95, 2014.

[45] K. L. Johnson, Contact Mechanics, Cambridge, USA: Cambridge University Press, 1987.

[46] E. Premat, «Prise en compte d'effets météorologiques dans une méthode d'éléments finis de frontière,» Institut national des sciences appliquées de Lyon, Lyon, 2000.

[47] J. Boussinesq, Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques., Paris: Gauthier-Villars, 1885.

[48] V. Cerruti, «Acc. Lincei, Mem,» fis. Mat., Roma, 1882.

[49] C. A. Coulomb, «Théorie des machines simples,» *Mémoire de Mathématique et de Physique de l'Académie Royale,* 1785.

[50] J. J. Kalker, «Rolling Contact Phenomena: Linear Elasticity,» Berlin, 2000.

[51] J. Cesbron, «Influence de la texture de chaussée sur le bruit de contact pneumatique/chaussée (Thèse de doctorat),» Ecole Centrale de Nantes, Nantes, 2007.

[52] G. Dubois, Modèle de contact dynamique pneumatique/chaussée par approche multi-aspérités : application au bruit de roulement (thèse de doctorat), Nantes, 2012.

[53] J. Cesbron et H. P. Yin, «Contact analysis of road aggregate with friction using a direct numerical method,» *Wear,* vol. 268, pp. 686-692, 2009.

[54] A. E. H. Love, «Stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary,» *Royal Society,* vol. 6, pp. 54-59, 1929.

[55] M. Hestenes et E. Stiefel, «Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems,» *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* vol. 49, 1952.

[56] H. Jeffreys et B. S. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics, 3rd ed., Cambridge: England: Cambridge University Press, 1988.

[57] A. E. H. Love, «Boussinesq's problem for a rigid cone.,» *Quarterly Journal of Mathematics (Oxford series),* vol. 10, 1939.

[58] I. N. Sneddon, «Boussinesq's problem for a flat-ended cylinder,» *Proceedings of Cambridge Philosophical Society,* vol. 42, 1946.

[59] I. N. Sneddon, «Boussinesq's problem for a rigid cone,» *Proceedings of Cambridge Philosophical Society,* vol. 44, 1948.

[60] E. A. H. Vollebregt, «User guide for CONTACT: Vollebregt & Kalker's rolling and sliding contact model,» Delft, 2013.

[61] C. Cattaneo, «Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi,» *Rendiconti dell Academia nationale del Lincei,* vol. 27, 1938.

[62] R. D. Mindlin, «Compliance of elastic bodies in contact.,» *Trans. ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics,* vol. 16, 1949.

[63] O. Reynolds, «On rolling friction,» *Trans. Royal Society,* vol. 166, 1875.

[64] H. Fromm, «Berechnung des Schlupfes beim rollen deformierbaren Scheiben,» *ZAMP,* vol. 7, 1927.

[65] L. Föeppl, «Die strange lösung die rollende reibung,» 1947.

[66] W. Kik et J. Piotrowski, «A fast, approximate methode to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling,» chez *2nd mini-conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems*, Budapest, 1996.

[67] E. A. H. Vollebregt, The Bound-Constrained Conjugate Gradients method for non-negative matrices, Delft, 2013.

[68] E. A. H. Vollebregt, «A Gauss-Seidel type solver for special convex programs, with application to frictional contact mechanics,» *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 87, pp. 47-67, 1995.

[69] E. A. H. Vollebregt, «Improving the speed and accuracy of the frictional rolling contact model "CONTACT",» chez *Proceedings of the 10th International Conference on Computational Structures Technology*, Stirlingshire, United Kingdom, Civil-Comp Press, 2010.

[70] J. R. Bunch et J. Hopcroft, «Triangular factorization and inversion by fast matrix

multiplication,» *Mathematics of Computation,* vol. 28, pp. 231-236, 1974.

[71] A. Lubrecht et E. Ioannides, «A fast solution to the dry contact problem and the associated subsurface stress field, using multilevel techniques,» *ASME Journal of Tribolology,* vol. 113, p. 128–133, 1991.

[72] H. Stanley et T. Kato, «An FFT based method for solving rough surface contact,» *ASME Journal of Tribolology,* vol. 119, p. 481–485, 1997.

[73] I. Polonsky et L. Keer, «Fast methods for solving rough contact problems: a comparative study,» *ASME Journal of Tribology,* vol. 122, p. 36–41, 2000.

[74] N. M. Newmark, «A method of computation for structural dynamics,» *Journal of Engineering Mechanics, ASCE,* vol. 85, pp. 67-94, 1959.

[75] «Abaqus User Guide, Version 6.12,» Dassault Systèmes Simulia Corp., 2012.

[76] R. Courant, K. Friedrichs et H. Lewy, «On the partial differential equations of mathematical physics,» *Math. Ann.,* vol. 100, pp. 32-74, 1928.

[77] K. J. Bathe et E. L. Wilson, «Stability and accuracy analysis of direct integration methods,» *Earthquake engineering and structural dynamics,* vol. 1, pp. 283-291, 1973.

[78] J. C. Houbolt, «A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft,» *Journal of Aeronaut. Sci.,* vol. 17, pp. 540-550, 1950.

[79] H. M. Hilber, T. J. R. Hughes et R. L. Taylor, «Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics,» *Earthquake engineering and structural dynamics,* vol. 5, pp. 283-292, 1977.

[80] J. C. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, New York: John Wiley & Sons, 2003.

[81] P. Aknin, H. Chollet et M. Sebes, «Expro, Exploration de profils roue-rail, Version 4.0,» INRETS, 2005.

[82] J. B. Ayasse, H. Chollet et J. L. Maupu, «Parametres caracteristiques du contact roue-rail (Rapport INRETS N.225),» INRETS, 2000.

[83] R. I. Popovici, «Friction in wheel-rail contacts,» Thèse de doctorat, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2010.

[84] R. Stock, D. T. Eadie , D. Elvidge et K. Oldknow, «The impact of rail grade selection and friction modifier application on rail degradation,» chez *9th World Congress on Railway Research*, Lille, 2011.

[85] D. T. Eadie, M. Santoro, K. Oldknow et Y. Oka, «Field studies of the effect of friction modifiers on the short pitch corrugation generation in curves,» *Wear,* vol. 265, pp. 1212-1222, 2008.

[86] Y. Ma et V. L. Markine, «A Numerical Procedure for Analysis of W/R Contact Using Explicit Finite Element Methods,» chez *10th International Conference on Contact Mechanics, CM2015*, Colorado Springs, Colorado, Etats Unis, 2015.

[87] L. Saint-Aimé, «Prédiction de la fatigue du contact roue-rail prenant en compte des gradients de microstructure en surface (thèse de doctorat en cours de rédaction),» Université de Lille, Lille.

[88] M. Godet, «The third-body approach : a mechanical view of wear,» *Wear,* vol. 100, pp. 437-452, 1984.

[89] O. Reynolds, «On the theory of lubrication and its application to mr. beauchamps tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil,» *Phil. Trans. Roy. Soc. Of London,* vol. 177, pp. 157-234, 1886.

[90] Y. Berthier, S. Descartes, M. Busquet, E. Niccolini, C. Desrayaud , L. Baillet et M. C. Baietto-Dubourg, «The role and effects of the third body in the wheel-rail interaction,» *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.,* vol. 27, pp. 423-436, 2004.

[91] M. Renouf, A. Saulot et Y. Berthier, «Third-body flow during wheel rail interaction,» chez *III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering C.A. Mota Soares et.al. (eds.)*, Lisbon, Portugal, 2006.

[92] E. Niccolini et Y. Berthier, «Wheel–rail adhesion: laboratory study of “natural” third body role on locomotives wheels and rails,» *Wear,* vol. 258, pp. 1172-1178, 2005.

[93] G. Colas, A. Saulot, C. Godeau , Y. Michel et Y. Berthier, «Decrypting third body flows to solve dry lubrication issue – MoS2 case study under ultra high vacuum,» *Wear,* vol. 305, pp. 192-204, 2013.

[94] O. Polach, «Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit,» *Wear,* vol. 258, pp. 992-1000, 2005.

[95] K. Hou, J. Kalousek et E. Magel, «Rheological model of solid layer in rolling contact,» *Wear,* vol. 211, pp. 134-140, 1997.

[96] F. Bucher, K. Knothe et A. Theiler, «Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness,» *Wear,* vol. 253, pp. 204-218, 2002.

[97] S. Descartes, C. Desrayaud, E. Niccolini et Y. Berthier, «Presence and role of the third body in a wheel–rail contact,» *Wear,* vol. 258, pp. 1081-1090, 2005.

[98] X. Quost, «Modélisation de l’effet du vent sur les trains à grande vitesse, thèse de doctorat,» 2005.

[99] M. J. Nadal, «Theorie de la stabilite des locomotives. Part II: Mouvement de lacet,» *Annales des Mines,* vol. 10, pp. 232-255, 1896.

[100] H. Weinstock, «Wheel climb derailment criteria for evaluation of rail vehicle safety,» *Proceedings of the ASME winter annual meeting,* pp. 1-7, 1984.

[101] J. A. Elkins et H. Wu, «Angle of attack and distance-based criteria for flange climb derailment,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 33, pp. 291-305, 1999.

[102] R. Spinola, «A 3D contact force safety criterion for flange climb derailment of a railway wheel,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 42, pp. 289-300, 2004.

[103] «UIC Code 518, Test and approval of railway vehicles from the points of view of dynamic behaviour, safety, track fatigue and ride quality. Union Internationale des Chemins de fer. 3rd

edition,» 2005.

[104] J. Molinari, «Eléments de mécanique ferroviaire : relations entre paramètres de voie, sécurité et vitesses de circulation,» 1999.

[105] S. Iwnicki, «The Manchester Benchmark for Rail Vehicle Simulation,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 31, 1999.

[106] K. Knothe et F. Böhm, «History of stability of railway and road vehicles,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 31, pp. 289-323, 1999.

[107] H. Chollet et M. Sebes, «Manuel d'utilisation plate-forme logicielle VOCO sous MATLAB,» Champs sur Marne, 2013.

[108] H. True, «Multiple attractors and critical parameters and how to find them numerically: the right, the wrong and the gambling way,» *Vehicle System Dynamics,* vol. 3, pp. 443-459, 2012.

[109] J. B. Ayasse, H. Chollet et J. P. Pascal, «Modélisation de la dynamique horizontale d'une motrice MF 77 à vide. "Application du logiciel "VOAL.87" de l'INRETS-LTN",» Rapport pour la RATP, non publié, 1988.

[110] E. E. Magel et Y. Liu, «On some aspects of the wheel-rail interaction,» *Wear,* vol. 314, pp. 132-139, 2014.

Liste des publications

Articles dans des revues internationales avec comité de lecture

- M. Toumi, H. Chollet, H. Yin. «Finite element analysis of the frictional wheel rail rolling contact using explicit and implicit methods», *Wear* Vol. 366-367 pp. 157-166, 2016

Articles dans des conférences internationales avec comité de lecture

- M. Toumi, H. Chollet, H. Yin. «Effect of elasto-plasticity on the creep force characteristics and the railway vehicle stability», 24th Int. Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks (IAVSD). Graz, Autriche, 2015

- M. Toumi, H. Chollet, H. Yin. «Finite element study of the creep force versus creepage curves at the wheel-rail contact level», International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems (CM2015). Colorado, Etats-Unis, 2015