



HAL
open science

Amortisseurs passifs non linéaires pour le contrôle de l'instabilité de flottement

Arnaud Malher

► **To cite this version:**

Arnaud Malher. Amortisseurs passifs non linéaires pour le contrôle de l'instabilité de flottement. Mécanique [physics]. Université Paris Saclay (COmUE), 2016. Français. NNT : 2016SACL010 . tel-01571845

HAL Id: tel-01571845

<https://pastel.hal.science/tel-01571845>

Submitted on 3 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLY010

THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY PRÉPARÉE À
L'ÉCOLE NATIONALE DES TECHNIQUES AVANCÉES

ÉCOLE DOCTORALE N° 579
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences

SPÉCIALITÉ DE DOCTORAT : MÉCANIQUE

Arnaud Malher

Amortisseurs passifs non linéaires pour le contrôle de l'instabilité de flottement

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau le 17 Octobre 2016.

Composition du Jury :

Président	Pr. Laurent Jacquin	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
Rapporteurs	Pr. Grigorios Dimitriadis	Université de Liège (LTDAS-AEA)
	Pr. Claude-Henri Lamarque	École Nationale des Travaux Publics de l'État (LTDS)
Examineurs	Pr. Guilhem Michon	Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace
	Dr. Yann Doutreleau	Direction Générale de l'Armement
Invité	Dr. Xavier Amandolèse	École Polytechnique (LadHyX)
Directeurs de thèse	Pr. Cyril Touzé	École Nationale des Techniques Avancées (IMSIA)
	Pr. Olivier Doaré	École Nationale des Techniques Avancées (IMSIA)

Remerciements

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il est de coutume de remercier comme il se doit toutes les personnes qui ont participé, de près ou de loin, au travail de thèse. Ayant beaucoup de monde à remercier, je vais commencer par le commencement ! Tout d'abord je tiens à remercier Antoine Chaigne, car sans lui cette thèse n'aurait pas vu le jour. En effet, j'ai eu la chance de suivre son cours d'acoustique et de vibro-acoustique au cours de mon master de recherche. Son entrain et sa vivacité ont confirmé définitivement mon attrait pour la recherche et la science, et m'ont fait dire que le laboratoire dont il était directeur devait forcément être un endroit chouette, et je ne me suis pas trompé ! Je pense sincèrement que la très bonne ambiance, tant scientifique qu'humaine, qui règne à l'UME est de son chef !

Ensuite, je tiens à adresser un très très très grand merci à mes deux directeurs de thèse, Cyril et Olivier, sans leur patience et leur enthousiasme, ce travail de thèse aurait été bien moins prolifique ! Cyril, je te remercie pour ton apport scientifique précieux, ton aide constante et ta disponibilité sans failles de même que ton abnégation à relire les différents articles que l'on a pu écrire ainsi que le manuscrit de thèse, et ce n'est pas rien ! Et je n'oublie pas que tu as pris le temps de t'occuper des tâches administratives avant même que je commence cette thèse, tâches que je ne pouvais réaliser à cause de mes péripéties dans le Shandong ! Olivier, je te remercie pour tes questions et tes pistes de réflexion toujours pertinentes, et qui m'ont permis de prendre le recul nécessaire sur mon travail durant ces trois années de thèse. Et même si j'ai eu le mauvais goût de rédiger mon mémoire pendant que tu attendais ton deuxième enfant ! Tu as toujours fait le nécessaire pour être présent au maximum, et je t'en suis très reconnaissant.

Je remercie sincèrement les différents membres du jury : le président Laurent Jacquin, les rapporteurs Greg Dimitriadis et Claude Lamarque, et les examinateurs Guilhem Michon et Yann Doutreleau, pour toutes leur remarques pertinentes et leur conseils bienveillants.

Comme la science ne se fait pas tout seul, je remercie (par domaine et ordre d'apparition :) tous les membres du labo pour leur soutien et leur disponibilité : Régine, Olivier, Caroline grâce à qui j'ai pu partir en mission (entre autres choses !). Lahcene, Nicolas et Thierry, pour avoir accepté d'usiner toutes les choses bizarres qui naissent dans ma tête et fourni l'environnement logistique indispensable à la réussite de la thèse. Olivier C., Jean, Romain, Corine, Benjamin, Marica, pour tous les échanges scientifiques (et un peu moins scientifiques aussi !). Thomas, Marie, Yuan, Yifan, Joosung, Jin Jack et Guillaume, pour m'avoir montré la voie (pour les anciens) et soutenu ! Puis un merci particulier à Simon et Stefania, avec qui j'ai travaillé sur l'amortisseur magnétique de vibration. Enfin, je remercie les deux stagiaires de Master que j'ai encadré : Yueling et Daniel.

Last but no least, je tiens à adresser un très grand merci à Gaëtan Kerschen pour m'avoir très gentiment accueilli dans son laboratoire de l'Université de Liège pendant un mois, ce qui m'a permis de débiter sereinement l'étude sur l'absorbeur de vibration non linéaire. Je souhaite aussi remercier chaleureusement Giuseppe Habib, qui a pris le temps de m'aider durant cette étude. De plus, je souhaite remercier toute l'équipe de l'Université de Liège pour leur accueil chaleureux. D'autre part, je souhaite remercier Luca Pigolotti de l'Université de Florence.

Pour conclure, je souhaite remercier particulièrement ma famille et mes proches pour leur soutien.

*« Tous les hommes pensent que le bonheur réside au sommet de la montagne,
alors qu'il réside dans la façon de la gravir. »*

Confucius

« La seule noblesse réside dans la volonté de subversion. »

Paul Nizan

Table des matières

Prélude	11
I Modèle aéroélastique de l'aile en flottement	13
1 Modèle à deux degrés de liberté et analyse de stabilité linéaire	15
1.1 Description du mouvement de l'aile	16
1.1.1 Section typique	16
1.1.2 Équations du mouvement	17
1.2 Forces aérodynamiques	19
1.2.1 Approche quasi-stationnaire	19
1.2.2 Modèle de Theodorsen	20
1.2.3 Modèle de Wagner	22
1.3 Analyse de stabilité	23
2 Expérience de flottement et mesures de décrochage dynamique	27
2.1 Expérience de flottement	28
2.1.1 Montage expérimental	28
2.1.2 Réponse temporelle et diagramme de bifurcation	30
2.2 Mesures d'efforts aérodynamiques en grand déplacement	31
2.2.1 Dispositif expérimental et méthodologie	32
2.2.2 Résultats	37
3 Modélisation du système aéroélastique en grande amplitude	41
3.1 Modélisation du décrochage dynamique	42
3.1.1 Explication du phénomène	42
3.1.2 Description du modèle de Petot	46
3.1.3 Ajustement des coefficients du modèle de Petot et comparaison avec l'expérience	49
3.2 Modélisation du régime post-flottement	52
3.2.1 Description du modèle	52
3.2.2 Influence des efforts aérodynamiques	53
3.2.3 Modèle ajusté à l'expérience de flottement	55

II	Influence d'un amortisseur hystérétique sur l'instabilité de flottement	59
4	Comportement pseudo-élastique des AMF et modélisation phénoménologique	61
4.1	Comportement des alliages à mémoire de forme	62
4.1.1	Une histoire de changement de phase	62
4.1.2	Comportement pseudo-élastique des AMF	63
4.1.3	Présentation des ressorts en AMF	66
4.2	Mesures de la force de rappel des ressorts en AMF	66
4.2.1	Comportement quasi-statique	67
4.2.2	Comportement dynamique	69
4.3	Modèle de Bouc-Wen	73
4.3.1	Description du modèle	74
4.3.2	Comparaison avec les mesures	74
5	Influence d'un amortisseur hystérétique sur l'instabilité de flottement	77
5.1	Mesures	78
5.1.1	Établissement des cycles limites	78
5.1.2	Diagramme de bifurcation	79
5.2	Modèle linéaire par morceaux	81
5.3	Modèle complet	86
5.3.1	Présentation du modèle complet	86
5.3.2	Résultats et discussions	87
III	Développement et analyse d'amortisseurs à raideur non linéaire	93
6	Influence d'un NLTVA sur l'instabilité de flottement	95
7	Réalisation pratique d'un amortisseur à raideurs ajustables	119
	Épilogue	141

Nomenclature

Paramètres structurels du profil d'aile

α	Angle d'attaque
h	Altitude
c	Corde
b	Demi-corde
s	Envergure
S	Surface portante, égale à $s c$
CA	Centre aérodynamique
CE	Centre élastique
CG	Centre de gravité
x_{CG}	Distance entre le centre élastique et le centre de gravité
x_{CE}	Distance entre le bord d'attaque et le centre élastique
e	Distance entre le centre aérodynamique et le centre élastique
ρ_s	Masse volumique
M	Masse
I_α	Inertie de rotation
S_α	Balourd, égal à $M x_{CG}$
k_h	Raideur du mode de pompage
k_α	Raideur du mode de tangage
c_h	Coefficient d'amortissement du mode de pompage
c_α	Coefficient d'amortissement du mode de tangage
ω	Pulsation
ω_h	Pulsation propre du mode de pompage, égale à $\sqrt{k_h/M}$
ω_α	Pulsation propre du mode de tangage, égale à $\sqrt{k_\alpha/I_\alpha}$

Paramètres aérodynamiques

L	Force de portance
M_a	Moment aérodynamique
C_L	Coefficient de portance
C_{M_a}	Coefficient de moment aérodynamique
$C_{L,\alpha}$	Pente à l'origine du coefficient de portance
$C_{M_a,\alpha}$	Pente à l'origine du coefficient de moment aérodynamique
ρ_f	Masse volumique de l'air
ν	Viscosité cinématique de l'air
U	Vitesse de l'écoulement
Re	Nombre de Reynolds, égal à $U c/\nu$
k	Pulsation réduite, égale à $\omega b/U$
τ	Temps réduit, égal à $t U/b$
τ_d	Retard au décrochage
ΔC_L	Paramètre de décrochage
ΔC_L^{max}	Overshoot
α_s	Angle de décrochage statique
α_d	Angle de décrochage dynamique
τ_d	Retard au décrochage

Paramètres des ressorts en alliage à mémoire de forme

l	Longueur
l_0	Longueur à vide
l_m	Longueur moyenne au cours d'un cycle de chargement
Δl	Amplitude d'un cycle de chargement
δl	Pas d'amplitude pour un chargement quasi-statique
δt	Pas de temps pour un chargement quasi-statique
ε	Taux d'élongation, égal à l/l_0
ε_m	Taux d'élongation moyen au cours d'un cycle de chargement, égal à l_m/l_0
$\Delta \varepsilon$	Amplitude du taux d'élongation d'un cycle de chargement, égal à $\Delta l/l_0$
$\delta \varepsilon$	Pas d'amplitude du taux d'élongation pour un chargement quasi-statique, égal à $\delta l/l_0$
f_e	Fréquence d'excitation dans le cas d'un chargement dynamique
F_{NL}^{AMF}	Force de rappel
\mathcal{A}_{AMF}	Aire de la boucle d'hystérésis de F_{NL}^{AMF}
K_G	Pente moyenne de F_{NL}^{AMF}
ζ_{AMF}	Taux d'amortissement, égal à $\mathcal{A}_{AMF}/(K_G (2\Delta l)^2)$

Prélude

Après une de ses premières observations il y a plus d'un siècle lors d'un vol du bombardier *Handley Page O/400* durant la guerre 14-18, et de son étude par F. Lanchester [51] et L. Baird et A. Fage [3], l'instabilité de flottement reste encore aujourd'hui sous le feu des projecteurs dans le monde de l'aéroélasticité.

Le travail présenté dans cette thèse s'intéresse à l'établissement de l'instabilité de flottement ainsi qu'à des moyens innovants pour la contrôler de manière passive. Le manuscrit est divisé en trois grandes parties. La première partie s'intéresse à une description détaillée du mouvement d'un profil d'aile durant le flottement, en mettant l'accent sur la modélisation des efforts aérodynamiques instationnaires et sur le phénomène de décrochage dynamique. Ensuite, deux types d'amortisseurs non linéaires sont étudiés. Dans la deuxième partie, l'effet d'un amortisseur hystérétique sur l'instabilité de flottement est étudié. Enfin la troisième partie se consacre à l'influence d'un amortisseur non linéaire de vibration accordé.

Comme son nom l'indique, l'aéroélasticité est l'étude de l'interaction entre une structure élastique et des forces aérodynamiques. La structure choisie dans ce manuscrit est l'aile d'avion. Néanmoins, les phénomènes physiques présentés dans ce manuscrit s'observent sur d'autres structures, comme les tabliers de pont ou le vol des insectes, le travail présenté reste alors encore pertinent. Dans le cadre de l'étude du flottement d'aile d'avion, le mouvement de l'aile est le plus souvent décomposé suivant son premier mode de flexion, correspondant à un mouvement de translation verticale aussi appelé pompage, et son premier mode de torsion, correspondant à un mouvement de rotation aussi appelé tangage, voir par exemple [8, 20, 28].

En utilisant ce formalisme, le flottement apparaît alors à une vitesse d'écoulement critique, appelée ici *vitesse de flottement*. Lorsque la vitesse de l'écoulement est inférieure à la vitesse de flottement, le travail des efforts aérodynamiques au cours d'un cycle d'oscillation est négatif et les forces structurelles et aérodynamiques se compensent, ainsi le mouvement de l'aile est amorti. Au contraire, si la vitesse de l'écoulement est supérieure à la vitesse de flottement, le travail des efforts aérodynamiques au cours d'un cycle d'oscillation est positif et les forces structurelles et aérodynamiques se cumulent, ainsi le mouvement de l'aile croît exponentiellement. C'est ce mécanisme qui est à l'origine de l'instabilité de flottement.

L'apparition de ce phénomène est largement étudiée dans la littérature ; ce qui l'est moins, c'est l'étude du régime post-flottement. En effet, une fois le seuil de l'instabilité passé, le mouvement de la structure croît exponentiellement jusqu'à se stabiliser sur un cycle limite. L'apparition de ce cycle limite est possible uniquement à cause de phénomènes non linéaires, provenant soit de la structure, soit des forces aérodynamiques, soit des deux. Les sources de non linéarités structurelles sont multiples [87]. Elles peuvent être d'origine géométrique, à cause d'une déformation importante de l'aile, mais aussi provenir d'une distribution massique irrégulière (par exemple la présence de missiles en bout d'aile pour les chasseurs) ou de la présence de jeu dans des parties

mobiles de l'aile [14] (par exemple les gouvernes). Concernant les forces aérodynamiques, la non linéarité provient du décollement complet de la couche limite de l'aile lorsqu'elle atteint des angles d'attaques trop importants. Cela provoque une brusque chute des efforts aérodynamiques ainsi qu'un comportement hystérétique ; ce phénomène est appelé décrochage dynamique.

On se propose dans ce manuscrit de modéliser le décrochage dynamique apparaissant dans le régime post-flottement. Ce choix est encore relativement peu fait dans la littérature, les efforts aérodynamiques étant le plus souvent estimés à l'aide de modèles linéaires. On peut néanmoins citer quelques publications [10, 89] allant dans cette direction.

La première partie de ce manuscrit, décomposée en trois chapitres, est entièrement dévolue à l'étude du phénomène de flottement, avec prise en compte du décrochage dynamique. Pour cela, nous supposons le comportement de la structure linéaire. L'accent est mis sur la modélisation des efforts aérodynamiques instationnaires et non linéaires. Dans le premier chapitre, le modèle aéroélastique permettant d'estimer le mouvement de l'aile est présenté. Puis dans le deuxième chapitre une réalisation expérimentale de l'aile en flottement ainsi que les mesures des forces aérodynamiques en grands déplacements sont présentées. Enfin, dans le troisième chapitre, le modèle utilisé pour estimer le décrochage dynamique et son intégration dans le modèle aéroélastique sont détaillés.

Dans de nombreux contextes industriels, le contrôle des vibrations est un enjeu majeur. Dans le cadre de l'instabilité de flottement, la stratégie la plus étudiée dans la littérature est le contrôle actif d'une partie mobile de l'aile, voir par exemple [20, 42, 43, 96]. Néanmoins, les stratégies de contrôle passif ont connu récemment un regain d'intérêt. Par exemple, les travaux de Lee *et al.* [54, 55] explorent l'influence d'un oscillateur annexe possédant une raideur purement cubique, c'est-à-dire sans raideur linéaire. On peut aussi citer les travaux de W. Lacarbonara et M. Cetraro [46], qui étudient l'influence d'un oscillateur visco-hystérétique sur l'instabilité de flottement. Il est à noter que l'étude de l'influence d'amortisseurs passifs sur le flottement est plus active dans le domaine des structures de génie civil, et particulièrement des tabliers de pont [44, 75, 94].

Nous nous intéressons pour notre étude uniquement au contrôle passif. Son intérêt est qu'il ne nécessite pas d'apport d'énergie pour contrôler le système. Deux stratégies sont le plus couramment utilisées, soit l'utilisation de matériaux dissipatifs (visco-élastiques, hystérétiques,...) soit l'ajout d'un oscillateur annexe à la structure à amortir. Les deux dispositifs de contrôle passif présentés dans les parties II et III de ce manuscrit se placent dans chacune de ces deux catégories.

Concernant l'usage de matériaux dissipatifs, l'objectif est de trouver un matériau capable de dissiper le plus d'énergie possible en affectant le moins possible le comportement global de la structure, par exemple en ne l'alourdissant pas trop.

Dans le contexte du flottement, nous nous sommes intéressés à l'usage de dispositifs hystérétiques. L'étude d'amortisseurs hystérétiques connaît un intérêt croissant dans la littérature [12, 63, 64, 79, 83], notamment à travers l'usage d'alliages à mémoire de forme (AMF) [11, 100] qui présentent, en

régime pseudo-élastique, un comportement hystérétique capable de dissiper une quantité importante d'énergie [19, 68].

Une étude théorique de l'influence d'un dissipateur hystérétique, réalisé à l'aide d'AMF, sur l'instabilité de flottement a été réalisée récemment par De Sousa et De Marqui Junior [86]. Dans cette étude, les efforts aérodynamiques sont calculés à l'aide d'un modèle instationnaire linéaire basé sur la fonction de Theodorsen [24] et la force de rappel des AMF est estimée en calculant la phase dans laquelle se trouve le matériau en fonction de son élongation. Cette étude permet de montrer que l'amortisseur hystérétique est à même de réduire significativement l'amplitude des cycles limites apparaissant pendant l'instabilité de flottement. L'apport de notre travail par rapport à cette contribution est la validation expérimentale de l'influence d'un amortisseur hystérétique sur l'instabilité de flottement, ainsi que la prise en compte des effets non linéaires des efforts aérodynamiques.

La deuxième partie de ce manuscrit, décomposée en deux chapitres, s'intéresse à l'influence d'un amortisseur hystérétique sur l'instabilité de flottement. Ce comportement hystérétique est réalisé l'aide de ressorts en AMF. Dans le quatrième chapitre, l'usage des AMF en tant qu'amortisseur est présenté, puis la mesure et la modélisation de leur force de rappel sont décrites. Enfin, dans le cinquième chapitre, l'étude expérimentale et la modélisation de l'influence des ressorts en AMF sur l'instabilité de flottement sont présentées. Un article regroupant les quatre premiers chapitres est paru dans la revue *Journal of Fluids and Structures*.

Après avoir étudié l'influence d'un amortisseur hystérétique sur l'instabilité de flottement, on explore l'usage d'un oscillateur annexe. L'objectif est cette fois de maximiser le transfert d'énergie entre la structure à amortir, ici appelée structure primaire, et l'oscillateur annexe, appelé ici absorbeur de vibration accordé (AVA). Depuis son invention par Frahm [27] et son étude théorique par Den Hartog [17], l'amortisseur à masse accordé (AMA) s'est imposé comme un pionnier des AVA. L'AMA est composé d'un ensemble masse-ressort-amortisseur visqueux dont la fréquence propre est réglée sur la fréquence propre du mode de la structure primaire à amortir de telle sorte que lorsque la structure primaire résonne sur ce mode, elle fasse par là même résonner l'AMA qui lui extrait ainsi son énergie. De plus, l'amortissement visqueux de l'AMA doit être réglé pour optimiser ce transfert et amortir le plus efficacement possible les vibrations de la structure primaire.

En 2001, Gendelman [30] a proposé l'utilisation d'un oscillateur possédant une raideur purement non linéaire. Ce type d'amortisseur est appelé par la suite puits d'énergie non linéaire et noté NES (dû à sa dénomination anglaise). Il a été largement étudié dans la littérature [31, 50, 92, 93]. Cet amortisseur possède l'avantage, par rapport à l'AMA, de ne pas avoir de fréquence résonnante et donc d'être capable d'extraire de l'énergie au système principal sur une plus large bande fréquentielle. De plus, le NES peut être à même d'amortir des non linéarités présentes dans la structure primaire. L'inconvénient de ce type d'amortisseur est qu'il n'est efficace qu'à partir d'une certaine quantité d'énergie contrairement à l'AMA. Une solution proposée initialement par Roberson [77] et reprise récemment par Kerschen *et al.* [33, 34, 95] est l'utilisation d'un AVA possédant une

raideur linéaire et non linéaire. Ainsi, si le système primaire est résonnant, la partie linéaire de cet absorbeur peut-être réglée sur cette résonance et s'activer à de faibles niveaux d'énergie et la partie non linéaire peut avoir un effet sur d'éventuelles non linéarités apparaissant à un plus haut niveau d'énergie. Ce système est appelé absorbeur non linéaire de vibration accordé et noté NLTVA (dû à sa dénomination anglaise). Comme le profil d'aile possède des modes propres bien identifiés et que son comportement est non-linéaire dans le régime post-flottement, le NLTVA semble être un candidat intéressant pour le contrôler.

L'utilisation d'AVA est encore marginale dans le contrôle du flottement. On peut citer les travaux de Lee *et al* [54, 55], où l'influence d'un puits d'énergie non linéaire sur l'instabilité de flottement est étudiée. Autrement, Lacarbonara et Cetraro [46] ont étudié l'influence d'un AVA possédant une force de rappel hystérétique. Il est à noter que l'emploi d'AVA pour le contrôle du flottement sur des ouvrages de génie civil, particulièrement les tabliers de pont, est un sujet plus actif [44, 75].

La troisième partie de ce manuscrit, décomposée en deux chapitres, traite du couplage entre un NLTVA et une aile en flottement. Le sixième chapitre est composé d'une publication soumise à la revue *Journal of Computational Nonlinear Dynamics* de soumission sur l'étude analytique et numérique de ce couplage et le septième chapitre est composé d'une publication parue dans la revue *Nonlinear Dynamics* [6] explorant une réalisation expérimentale du NLTVA à l'aide de forces magnétiques.

Première partie

Modèle aéroélastique de l'aile en flottement

Chapitre 1

Modèle à deux degrés de liberté et analyse de stabilité linéaire

Résumé

Nous présentons dans ce chapitre le modèle aéroélastique utilisé pour modéliser le déplacement d'une aile d'avion plongée dans un écoulement. Pour cela, le mouvement de l'aile est réduit à son premier mode de flexion et à son premier mode de torsion. Les oscillations de ces deux modes sont représentées par les deux degrés de liberté que sont le pompage et le tangage. Le pompage est un mouvement de translation verticale qui rend compte du premier mode de flexion et le tangage est un mouvement de rotation qui correspond au premier mode de flexion. Ce modèle, appelé modèle à deux degrés de liberté, est très employé dans la littérature [8, 20, 28].

Ensuite, à l'aide du formalisme de Lagrange, les équations du mouvement sont établies. Comme l'aile est plongée dans un écoulement, elle subit des efforts aérodynamiques. Ces efforts sont estimés, dans ce chapitre, par des modèles linéaires quasi-stationnaires et instationnaires. Cela permet d'analyser la stabilité du système en calculant l'évolution de ses fréquences propres et de ses taux de croissance en fonction de la vitesse d'écoulement dans le domaine linéaire, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'instabilité de flottement apparaisse. Une fois l'instabilité établie il faut recourir à des modèles aérodynamiques non linéaires. Cela fait notamment l'objet des chapitres 2 et 3.

Sommaire

1.1	Description du mouvement de l'aile	16
1.1.1	Section typique	16
1.1.2	Équations du mouvement	17
1.2	Forces aérodynamiques	19
1.2.1	Approche quasi-stationnaire	19
1.2.2	Modèle de Theodorsen	20
1.2.3	Modèle de Wagner	22
1.3	Analyse de stabilité	23

1.1 Description du mouvement de l'aile

Dans cette section, nous présentons la modélisation de l'aile retenue pour l'étude du flottement, ainsi que les équations qui en découlent.

1.1.1 Section typique

Dès les premiers travaux sur l'aéroélasticité, les chercheurs ont remarqué que le comportement global de l'aile d'avion pouvait se ramener à celui d'une *section typique* prise au $3/4$ de l'aile à partir de son emplanture comme schématisé sur la Figure 1.1. En effet si on suppose que la forme de la section de l'aile est la même tout le long de son envergure et que les efforts aérodynamiques sont bi-dimensionnels, ce qui est le cas si l'effet de la recirculation en bout d'aile est négligé, alors cette approximation est justifiée.

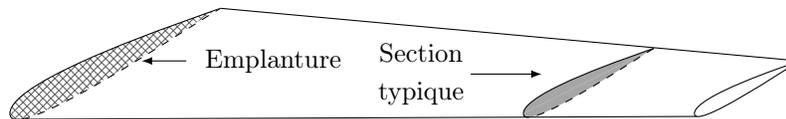


Figure 1.1 – Représentation schématique de la section typique d'une aile d'avion.

Quand l'instabilité de flottement survient, on observe que le mouvement de l'aile est principalement dominé par son premier mode de flexion et son premier mode de torsion. Il est alors légitime de réduire le mouvement de l'aile à ces deux modes pour étudier l'instabilité de flottement. En outre, si les effets tridimensionnels des efforts aérodynamiques sont négligés, le modèle classique à deux degrés de liberté représenté Figure 1.2, peut-être utilisé [8, 20, 28].

La corde, qui relie le bord d'attaque au bord de fuite, est de longueur c et la demi-corde de longueur b . Le premier mode de flexion de l'aile, aussi appelé pompage, se résume au niveau du profil par une translation dont le déplacement est noté h , compté positif vers le bas. Ce mode de pompage est caractérisé par un ressort de raideur k_h et un dissipateur visqueux d'amortissement c_h . Le premier mode de torsion de l'aile, aussi appelé tangage, se résume à un mouvement de rotation au niveau du profil dont l'angle formé avec l'horizontal est noté α et appelé angle d'attaque, il est compté positivement dans le sens anti-trigonométrique. Ce mode de tangage est caractérisé par un ressort de torsion de raideur k_α et un dissipateur visqueux d'amortissement c_α .

La section typique possède trois points remarquables qui se situent sur la corde. Le premier est le centre aérodynamique, noté CA sur la Figure 1.2. C'est le point où la résultante des efforts aérodynamiques s'applique. Ce point dépend de l'angle d'attaque. Concernant les profils minces, il est situé au quart avant pour les faibles angles d'attaque et se déplace jusqu'à la mi-corde pour les

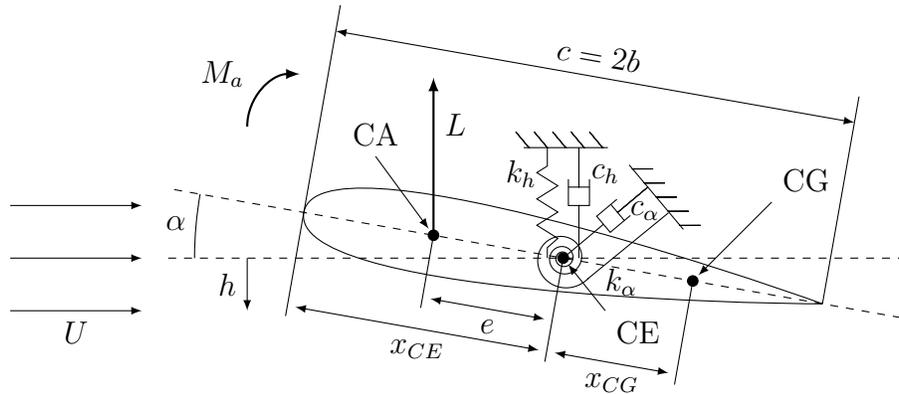


Figure 1.2 – Section typique à deux degrés de liberté.

angles d'attaque très élevés (~ 90 degrés). Le second point remarquable est le centre de rotation, ou centre élastique, noté CE sur la Figure 1.2, et distant de x_{CE} du bord d'attaque. C'est autour de ce point que se fait la rotation du mode de tangage. Ainsi la distance entre CA et CE, notée e , détermine le moment exercé par les forces aérodynamiques. Enfin, le dernier point remarquable est le centre de gravité, noté CG sur la Figure 1.2. Sa distance au centre élastique, notée x_{CG} , détermine le couplage entre les modes de pompage et de tangage. En effet plus CG et CE sont proches, plus le couplage sera faible, jusqu'à s'annuler si CG est confondu avec CE.

Le profil d'aile étant plongé dans un fluide en mouvement, de vitesse notée U , il subit des forces aérodynamiques. Ces efforts aérodynamiques se résument à une force de portance notée L et à un moment aérodynamique noté M_a . Les efforts de traîne ne sont pas considérés car nous ne tenons pas compte du mouvement longitudinal de l'aile. L'expression de ces efforts aérodynamiques fait l'objet de la section 1.2.

1.1.2 Équations du mouvement

Nous utilisons le formalisme de Lagrange pour établir les équations du mouvement de l'aile. Le système possédant deux degrés de liberté, il y a deux coordonnées généralisées qui sont h et α . Afin de calculer l'énergie cinétique du système, on calcule le déplacement d'un point matériel quelconque, noté M , de la corde du profil au repos. M est situé à une distance x du centre élastique. Après un mouvement quelconque du profil, M se meut en un point noté M' comme schématisé sur la Figure 1.3.

Ainsi $\mathbf{MM}' = x(\cos(\alpha) - 1)\mathbf{e}_x - (h + \sin(\alpha)x)\mathbf{e}_y$ et le carré de sa dérivée temporelle vaut $(d\mathbf{MM}'/dt)^2 = \dot{h}^2 + \dot{\alpha}^2 x^2 + 2\dot{\alpha}\dot{h}\cos(\alpha)x$, où $(\dot{\cdot})$ dénote la dérivée temporelle. La plupart du temps, on se place dans l'hypothèse des petites perturbations [8, 20, 28]. Alors le terme $2\dot{\alpha}\dot{h}\cos(\alpha)x$ peut

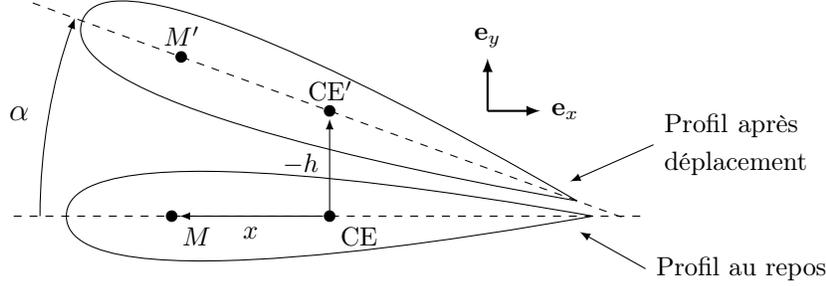


Figure 1.3 – Déplacement d'un point matériel M du profil au repos. Les quantités primées correspondent à l'aile ayant subi un déplacement.

être linéarisé. Mais comme nous nous intéressons aux mouvements de grandes amplitudes, hormis pour l'analyse de stabilité, nous ne linéarisons pas ce terme.

L'énergie cinétique de l'aile notée \mathcal{T} vaut

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \rho_s(x) (d\mathbf{M}\mathbf{M}'/dt)^2 dx, \quad (1.1)$$

où $\int_{\mathcal{C}} dx$ est l'intégrale sur la corde et $\rho_s(x)$ la masse linéique de l'aile a priori non constante. En remplaçant $(d\mathbf{M}\mathbf{M}'/dt)^2$ par son expression dans l'équation (1.1) il vient

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} M \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_\alpha \dot{\alpha}^2 + S_\alpha \dot{h} \dot{\alpha} \cos(\alpha), \quad (1.2)$$

avec $M = \int_{\mathcal{C}} \rho_s(x) dx$ la masse du profil, $I_\alpha = \int_{\mathcal{C}} \rho_s(x) x^2 dx$ son moment d'inertie et $S_\alpha = \int_{\mathcal{C}} \rho_s(x) x dx$ son balourd, qui est également égal à $M x_{CG}$. L'énergie potentielle, notée \mathcal{V} , provient du travail des ressorts et s'écrit

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_\alpha \alpha^2. \quad (1.3)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathcal{T} - \mathcal{V})}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial(\mathcal{T} - \mathcal{V})}{\partial h} &= -c_h \dot{h} - L, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathcal{T} - \mathcal{V})}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial(\mathcal{T} - \mathcal{V})}{\partial \alpha} &= -c_\alpha \dot{\alpha} + M_a. \end{aligned} \quad (1.4)$$

En effet la force qui s'exerce sur le mouvement de pompage est la portance L et celle qui s'applique au mouvement de tangage est le moment aérodynamique M_a . En regroupant les équations (1.2)

à (1.4) on aboutit aux équations du mouvement

$$\begin{aligned} M \ddot{h} + S_\alpha \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + k_h h &= -L + S_\alpha \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2, \\ I_\alpha \ddot{\alpha} + S_\alpha \cos(\alpha) \ddot{h} + c_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha &= M_a. \end{aligned} \quad (1.5)$$

La modélisation des efforts aérodynamiques L et M_a est présentée dans la section suivante.

1.2 Forces aérodynamiques

La force de portance est égale au produit d'une force de référence $(1/2) \rho_f S U^2$, où ρ_f est la masse volumique de l'air et S la surface portante de l'aile, par le coefficient de portance sans dimension C_L . De même, le moment aérodynamique est égal au produit d'un moment de référence $(1/2) \rho_f S c U^2$ par le coefficient de moment aérodynamique sans dimension C_{M_a} . En régime stationnaire et pour des petits angles d'attaque, le coefficient de portance vaut $C_L = C_{L,\alpha} \alpha$, où $C_{L,\alpha}$ est la pente à l'origine du coefficient de portance. Pour les profils minces, $C_{L,\alpha} \simeq 2\pi$.

Néanmoins dès que l'aile est en mouvement, l'approche stationnaire n'est plus valable et il faut prendre en compte le déplacement de l'aile par rapport à l'écoulement. L'objet de cette section est de présenter trois modèles aérodynamiques linéaires permettant d'estimer les coefficients C_L et C_{M_a} dans le cas des profils minces. Le premier est un modèle quasi-stationnaire, c'est-à-dire que la vitesse du profil est supposée faible devant la vitesse de l'écoulement. Les deux modèles suivants sont des modèles instationnaires, c'est-à-dire qu'il n'y a plus d'hypothèse faite sur la vitesse relative du profil par rapport à l'écoulement. Cela implique que le sillage de l'écoulement est alors pris en compte dans le calcul des forces aérodynamiques.

1.2.1 Approche quasi-stationnaire

L'idée de ce modèle est d'étendre l'expression des efforts aérodynamiques en régime stationnaire à un régime faiblement instationnaire. Le caractère faiblement instationnaire est caractérisé à l'aide de la pulsation réduite $k = \omega / U$, où ω est la pulsation du profil, qui n'est autre que le rapport entre la période d'oscillation du profil et le temps mis par le fluide pour parcourir la demi-corde de l'aile. Ainsi, pour $k \ll 1$, le profil est quasiment immobile du point de vue du fluide et l'approche quasi-stationnaire peut être utilisée. Dans le cadre du profil à deux degrés de liberté, il est pertinent de prendre en compte la vitesse du mouvement de pompage dans l'expression des efforts aérodynamiques. En effet, même si la pulsation réduite est faible, le mouvement de pompage a une contribution non négligeable. Cela se traduit par l'introduction d'un angle d'attaque apparent, noté α_{ap} , qui s'exprime

$$\alpha_{ap} = \alpha + \frac{\dot{h}}{U}. \quad (1.6)$$

La force de portance vaut alors :

$$L = \frac{1}{2} \rho_f S U^2 C_{L,\alpha} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U} \right). \quad (1.7)$$

Il est à noter que cette expression est valable pour les profils d'ailes symétriques, c'est à dire des profils tels que les efforts aérodynamiques valent zéro à angle d'attaque nul. Si nous restons dans l'hypothèse de profils d'aile symétriques, le moment aérodynamique est directement égal au bras de levier engendré par la portance L au centre élastique, *i.e.* $M_a = e L$. Ainsi le moment aérodynamique vaut

$$M_a = \frac{1}{2} \rho_f e S U^2 C_{L,\alpha} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U} \right). \quad (1.8)$$

Pour des petits angles d'attaque, le centre aérodynamique CA est au quart de corde, ainsi $e \simeq x_{CE} - c/4$.

Si l'hypothèse $k \ll 1$ n'est plus satisfaite, il faut prendre en compte les instationnarités de l'écoulement engendrées par le mouvement du profil. Pour cela, deux modèles instationnaires couramment utilisés dans le cas des profils minces sont présentés dans ce chapitre : le modèle de Theodorsen [91] et le modèle de Wagner [97]. Ces deux modèles prennent en compte l'influence du sillage du profil sur les efforts aérodynamiques. Dans le chapitre 3, un modèle prenant en compte les non-linéarités des efforts aérodynamiques apparaissant aux angles d'attaque élevés est présenté.

1.2.2 Modèle de Theodorsen

Le modèle de Theodorsen se base sur l'équation de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$, valable pour un écoulement potentiel incompressible et irrotationnel, où ϕ est le potentiel de vitesse. Pour résoudre cette équation, deux hypothèses sont utilisées :

- l'imperméabilité de l'aile qui implique que l'écoulement normal au profil est nul,
- la condition de Kutta qui impose que la vitesse au bord de fuite est finie.

La différence avec l'approche quasi-statique est que le sillage est ici pris en compte à l'aide de la condition de Kutta, ainsi que l'effet de masse ajoutée provenant de l'hypothèse d'imperméabilité. On obtient alors une expression des efforts aérodynamiques, qui se décomposent selon une partie non circulatoire, notée C_L^{mc} , provenant de l'hypothèse d'imperméabilité, et s'écrivant

$$C_L^{mc} = (\pi b/U^2)(\ddot{h} - (x_f - b)\ddot{\alpha} + U \dot{\alpha}). \quad (1.9)$$

Et une partie circulatoire, notée C_L^c , provenant de la condition de Kutta, et valant

$$C_L^c = C_{L,\alpha} C \left(\alpha + \dot{h}/U + (3c/4 - x_{CE}) \dot{\alpha}/U \right). \quad (1.10)$$

Cette expression est la même que celle du coefficient de portance obtenue à l'aide du modèle quasi-stationnaire à la différence du terme $(3c/4 - x_{CE})\dot{\alpha}/U$, qui est un terme prenant en compte l'effet de cambrure, et du terme C , qui est la fonction de Theodorsen et dépend du mouvement de l'aile. La fonction de Theodorsen est l'apport notable du chercheur éponyme. Elle caractérise l'intensité des tourbillons engendrés par le mouvement du profil. Cette fonction a pour effet de limiter la contribution de la partie circulaire de la portance en fonction du sillage provoqué par le mouvement du profil. En effet, plus le profil a un mouvement important plus il engendre des tourbillons dans son sillage et ces tourbillons diminuent l'intensité des efforts aérodynamiques qu'il subit.

La fonction de Theodorsen faisant intervenir la contribution des tourbillons dans le sillage du profil, elle dépend du mouvement de l'aile. Dans le cas d'un mouvement harmonique, de pulsation ω , une solution exacte peut être obtenue en fonction de la pulsation réduite $k = \omega b/U$ et s'écrit

$$C(k) = \frac{K_1(ik)}{K_1(ik) + K_0(ik)}. \quad (1.11)$$

K_0 et K_1 sont les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce d'ordre 0 et 1 respectivement. Ainsi pour un mouvement harmonique, la portance totale s'écrit

$$L = \frac{1}{2} \rho_f S U^2 \left(\underbrace{\frac{\pi b}{U^2} \left(\ddot{h} - (x_f - b)\ddot{\alpha} + U \dot{\alpha} \right)}_{\text{Partie non circulaire}} + C_{L,\alpha} C(k) \underbrace{\left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U} + \left(\frac{3c}{4} - x_{CE} \right) \frac{\dot{\alpha}}{U} \right)}_{\text{Partie circulaire}} \right). \quad (1.12)$$

Un raisonnement analogue est mené pour déterminer l'expression du moment aérodynamique, il vient

$$M_a = \frac{1}{2} \rho_f S U^2 \left(\underbrace{\frac{\pi b}{2U^2} \left((x_f - b)(\ddot{h} - (x_f - b) \frac{b^2}{8} \ddot{\alpha}) - \left(\frac{3c}{4} - x_f \right) \dot{\alpha} \right)}_{\text{Partie non circulaire}} \right. \\ \left. + e C_{L,\alpha} C(k) \underbrace{\left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U} + \left(\frac{3c}{4} - x_{CE} \right) \frac{\dot{\alpha}}{U} \right)}_{\text{Partie circulaire}} \right). \quad (1.13)$$

On peut remarquer que la relation $M_a = e L$ n'est vérifiée que pour la partie circulaire des efforts aérodynamiques. En effet la partie non circulaire est négligée dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire. Il se trouve ainsi que la masse ajoutée du fluide n'est pas la même pour la portance que pour le moment.

Du fait de la fonction $C(k)$, l'expression de la portance est obtenue dans le domaine fréquentiel, or il peut être intéressant d'avoir une expression de la portance dans le domaine temporel. Pour cela on peut se tourner vers la formulation de Wagner décrite dans la section suivante.

1.2.3 Modèle de Wagner

Le modèle de Wagner est fondé sur la réponse indicielle de l'écoulement suite à un brusque changement d'angle d'incidence [29, 82]. Afin de l'observer expérimentalement, on place un profil d'aile dans un écoulement stationnaire avec un angle d'attaque nul, puis on augmente rapidement (idéalement avec une vitesse infinie) l'incidence de l'aile jusqu'à une valeur en deçà de son angle de décrochage. On observe alors que les efforts aérodynamiques croissent jusqu'à s'établir à leur valeur en régime stationnaire. Il est à noter que c'est le cas pour les profils minces mais que ce comportement peut varier pour d'autres types de profils [81].

En fait, lorsque l'incidence de l'aile augmente brutalement, le profil crée un tourbillon qui est ensuite convecté par l'écoulement dans son sillage. Ainsi lorsque ce tourbillon est proche du profil il réduit notablement les efforts aérodynamiques et plus il s'éloigne du profil plus son influence diminue. L'influence de ce tourbillon sur les efforts aérodynamiques peut-être estimée à l'aide de la fonction de Wagner, notée $\Phi(t)$. Wagner a estimé cette fonction numériquement, puis Garrick [29] et Sears [82] en ont proposé des formulations analytiques, enfin l'approximation la plus couramment utilisée est celle de Jones [41] et s'écrit

$$\Phi(t) = 1 - 0.165 e^{-0.0455t} - 0.335 e^{-0.3t}. \quad (1.14)$$

Pour estimer l'évolution des efforts aérodynamiques au cours du temps il faut alors intégrer cette fonction. L'expression de la portance et du moment aérodynamique s'écrit alors

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho_f S U^2 C_{L,\alpha} \left[\left(\alpha(t) + \frac{\dot{h}(t)}{U} + \left(\frac{3c}{4} - x_{CE} \right) \frac{\dot{\alpha}(t)}{U} \right) \Phi(0) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left(\alpha(\tau) + \frac{\dot{h}(\tau)}{U} + \left(\frac{3c}{4} - x_{CE} \right) \frac{\dot{\alpha}(\tau)}{U} \right) \frac{\partial \Phi(t - \tau)}{\partial \tau} d\tau \right], \\ M_a &= e L. \end{aligned} \quad (1.15)$$

La partie non circulatoire des efforts aérodynamiques n'est pas prise en compte par le modèle de Wagner, c'est pour cela que l'on a toujours $M_a = e L$. Toutefois, il est possible de l'inclure en ajoutant l'expression trouvée par Theodorsen. Cela n'entrave pas le caractère temporel du formalisme de Wagner.

Comme l'expression des efforts aérodynamiques des trois modèles présentés est fonction des degrés de liberté du système, si on suppose que ces derniers ont un comportement harmonique, l'équation (1.5) peut se mettre sous la forme d'un système aux valeurs propres dont les parties réelles et imaginaires nous renseignent sur sa stabilité. L'étude du système aux valeurs propres résultant de l'équation (1.5) est exposée dans la section suivante.

1.3 Analyse de stabilité

Les modèles présentés étant valables pour des petits angles d'attaque, ils sont surtout utiles pour estimer la stabilité du système. Pour cela il faut reprendre l'équation (1.5), la linéariser et remplacer L et M_α par leur expression. En utilisant le modèle quasi-stationnaire, on obtient

$$\begin{aligned} M \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + \left(c_h + \frac{1}{2} \rho_f S U C_{L,\alpha} \right) \dot{h} + k_h h + \frac{1}{2} \rho_f S U^2 C_{L,\alpha} \alpha &= 0, \\ I_\alpha \ddot{\alpha} + S_\alpha \ddot{h} + c_\alpha \dot{\alpha} - \frac{1}{2} \rho_f e S U C_{L,\alpha} \dot{h} + \left(k_\alpha - \frac{1}{2} \rho_f e S U^2 C_{L,\alpha} \right) \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ou au premier ordre,

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (1.17)$$

avec

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \\ \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{Id}_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_h + \frac{1}{2} \rho_f S U C_{L,\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{2} \rho_f e S U C_{L,\alpha} & c_\alpha \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_h & \frac{1}{2} \rho_f S U^2 C_{L,\alpha} \\ 0 & k_\alpha - \frac{1}{2} \rho_f e S U^2 C_{L,\alpha} \end{bmatrix}$$

Avant de faire l'analyse de stabilité dynamique du système, on s'intéresse à sa stabilité statique. Pour cela, on considère toutes les dérivées temporelles des équations (1.16) nulles. Il en résulte le système suivant

$$\begin{bmatrix} k_h & (1/2) \rho_f S U^2 C_{L,\alpha} \\ 0 & k_\alpha - (1/2) \rho_f e S U^2 C_{L,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Les deux valeurs propres de ce système, notée d_1 et d_2 , sont égales à $d_1 = k_h$ et $d_2 = k_\alpha - (1/2) \rho_f e S U^2 C_{L,\alpha}$. La première valeur propre d_1 est toujours positive. En revanche, la seconde valeur propre d_2 peut être négative. Il y a alors apparition d'une instabilité statique, appelée divergence en aéroélasticité. Pour que d_2 puisse être négative, il faut que $e > 0$. En effet si $e < 0$, c'est-à-dire que si le centre élastique est en amont du centre aérodynamique, la valeur propre d_2 est toujours positive et il n'y a donc pas de divergence. Maintenant, si $e > 0$, alors d_2 est négative lorsque $k_\alpha < (1/2) \rho_f e S U_d^2 C_{L,\alpha}$, c'est-à-dire pour des vitesses d'écoulement supérieures à $\sqrt{2k_\alpha / (\rho_f e S C_{L,\alpha})}$. Cette vitesse est appelée vitesse de divergence et notée U_d .

On s'intéresse à présent à l'analyse de stabilité dynamique. Pour cela on cherche les solutions harmoniques de l'équation (1.17), c'est-à-dire les solutions de la forme $\exp(st)$ avec $s \in \mathbb{C}$. Ainsi, la

stabilité du système est déterminée par les valeurs propres de \mathbf{A} . Chaque valeur propre correspond à un mode du système. Comme la matrice \mathbf{A} est de dimension quatre, elle possède quatre valeurs propres, notées s_1 à s_4 . La partie imaginaire de s_i , notée ω_i , correspond à la pulsation propre du mode i et la partie réelle de s_i , notée λ_i , au taux de croissance du mode i . Il y a trois situations possibles pour chaque mode : (i) λ_i est négatif, le système est stable, (ii) λ_i est positif et ω_i est non nulle, il y a instabilité de flottement et (iii) λ_i est positif et ω_i est nulle, il y a divergence. Lorsqu'il n'y a ni couplage ni écoulement, c'est-à-dire $S_\alpha = 0$ et $U = 0$, les valeurs propres du système nous donne les fréquences propres des deux degrés de liberté, à savoir la pulsation du mode de tangage $\omega_\alpha = \sqrt{K_\alpha/I_\alpha}$ et celle du mode de pompage $\omega_h = \sqrt{K_h/M}$.

En utilisant les paramètres employés par Dowell [20], répertoriés dans le Tableau 1.1, on calcule l'évolution de λ_i et ω_i en fonction de la vitesse d'écoulement réduite, notée \tilde{U} et égale à $U/(b\omega_\alpha)$, sur la Figure 1.4. Lorsque \tilde{U} est nulle, les pulsations ω_1 et ω_2 correspondent aux pulsations propres du système. Comme ω_1 est la pulsation la plus proche de ω_α et ω_2 la pulsation la plus proche de ω_h car $\omega_\alpha = 2\omega_h$, on attribue à ω_1 et λ_1 la pulsation propre et le taux de croissance du mode couplé de tangage et à ω_2 et λ_2 la pulsation propre et le taux de croissance du mode couplé de pompage. Quand \tilde{U} est inférieure à 0.87, le mouvement est amorti. Si \tilde{U} est supérieure à 0.87, le taux de croissance du mode couplé de tangage devient positif et sa pulsation propre est non nulle : il y a donc flottement. Lorsque \tilde{U} est supérieure à 1.77, le taux de croissance du mode couplé de pompage est positif et sa pulsation propre est nulle, il y a divergence. Cette vitesse de divergence peut être retrouvée grâce à l'expression de U_d donnée précédemment.

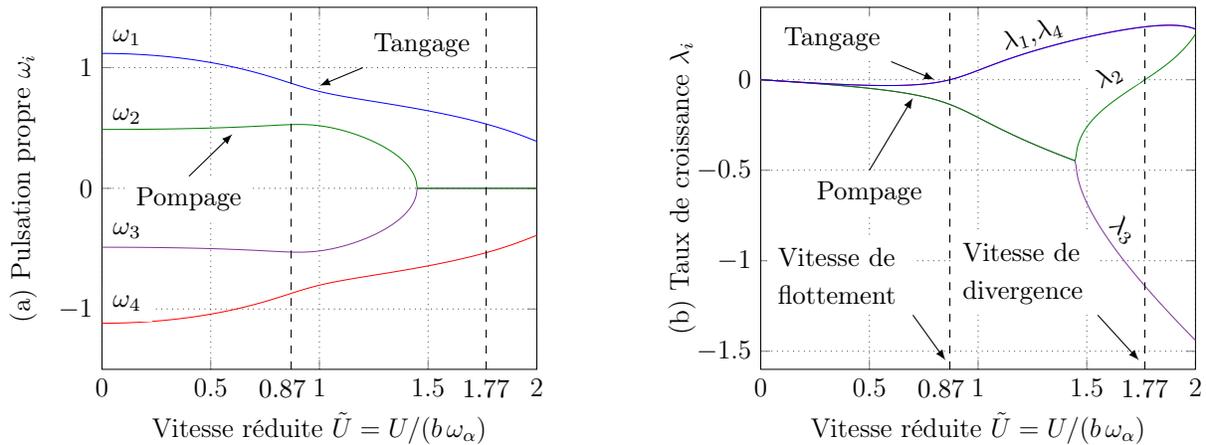


Figure 1.4 – Évolution des pulsations propres ω_i et des taux de croissances λ_i de \mathbf{A} en fonction de la vitesse réduite $U/(b\omega_\alpha)$. Les paramètres utilisés sont ceux de Dowell [20].

L'estimation de la vitesse de flottement à l'aide du modèle quasi-stationnaire donne des ré-

sultats satisfaisants pour des faibles pulsations réduites. En effet, le sillage du profil est dans ce cas peu affecté par le mouvement du profil. Toutefois, si la pulsation réduite du profil est plus importante, il faut recourir aux modèles aérodynamiques instationnaires décrits précédemment. L'estimation de la stabilité du système à l'aide de ces modèles ne sera pas détaillée dans ce manuscrit, néanmoins les grandes étapes sont données. Pour une explication plus détaillée, le lecteur peut se référer aux ouvrages de référence en aéroélasticité [8, 20, 28]. Concernant le modèle de Wagner, comme ce dernier fait intervenir des fonctions integro-différentielles, la mise en forme du problème sous un système aux valeurs propres n'est pas immédiate. Une solution possible pour y parvenir est d'introduire des variables d'états aérodynamiques dans le vecteur d'état \mathbf{X} . Ces variables d'états aérodynamiques correspondent aux différents membres de l'intégrale apparaissant dans l'expression de la portance et du moment aérodynamique à l'équation (1.15). Le système aux valeurs propres ainsi obtenu est de dimension huit et sa résolution se fait de la même manière que pour le système quasi-stationnaire.

Concernant le modèle de Theodorsen, comme les efforts aérodynamiques dépendent du mouvement du profil, on suppose ce dernier harmonique, ce qui est le cas lorsque $U = U_f$ car alors le taux de croissance vaut zéro. En effet, pour un mouvement harmonique, l'expression de la fonction de Theodorsen est connue. En développant les dérivées temporelles de α et h dans l'équation (1.5) on obtient alors un système de la forme $\mathbf{B} [h_0 \ \alpha_0]^T e^{i\omega t} = 0$, où \mathbf{B} est une matrice de dimension 2×2 , α_0 et h_0 les amplitudes initiales du mode de tangage et de pompage et ω la pulsation. Ainsi la vitesse de flottement est la vitesse qui annule le déterminant de \mathbf{B} , dans lequel est présent $C(k)$.

$S_\alpha/(M b)$	$\sqrt{I_\alpha/(M b^2)}$	e/b	$\rho_f b S/(2 M)$	ω_h/ω_α	$c_\alpha/(M b^2 \omega_\alpha)$	$c_h/(M \omega_\alpha)$
0.2	0.5	0.4	$1/10/\pi$	0.5	0	0

Tableau 1.1 – Paramètres aéroélastiques de Dowell [20].

Une fois que l'instabilité de flottement s'amorce, le profil d'aile est soumis à des amplitudes d'oscillations croissantes jusqu'à ce que s'établisse un cycle limite. Les raideurs et les amortissements des deux degrés de liberté étant linéaires, la non-linéarité à l'origine des cycles limites provient des efforts aérodynamiques, notamment à cause du phénomène de décrochage dynamique.

Dans le chapitre suivant, les mesures effectuées sur un montage de flottement à deux degrés de liberté sont présentées, puis les mesures d'efforts aérodynamiques instationnaires en grand déplacement sont exposées. Ces mesures servent notamment à la modélisation du comportement de l'aile une fois l'instabilité de flottement établie, ce qui est présenté dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Expérience de flottement et mesures de décrochage dynamique

Résumé

Lorsque l'instabilité de flottement se développe, l'amplitude du mouvement du profil croît jusqu'à ce que s'établisse un cycle limite [21]. Afin d'estimer l'évolution de ce cycle limite en fonction de la vitesse d'écoulement, une expérience de flottement sur un profil de plaque plane à deux degrés de liberté est menée dans la section 2.1. On observe, à l'aide du montage expérimental, que les cycles limites s'établissent à des angles d'attaque (~ 40 degrés) supérieurs à l'angle de décrochage de la plaque (10 degrés). Afin de connaître la forme des efforts aérodynamiques qui se développent à de telles amplitudes, des mesures d'efforts aérodynamiques en grand déplacement sont menées section 2.2 sur une plaque plane. En effet, ces efforts aérodynamiques sont essentiels dans l'établissement des cycles limites.

Sommaire

2.1	Expérience de flottement	28
2.1.1	Montage expérimental	28
2.1.2	Réponse temporelle et diagramme de bifurcation	30
2.2	Mesures d'efforts aérodynamiques en grand déplacement	31
2.2.1	Dispositif expérimental et méthodologie	32
2.2.2	Résultats	37

2.1 Expérience de flottement

Afin de caractériser le flottement, des mesures ont été conduites sur un montage expérimental composé d'un profil possédant deux degrés de liberté. Le profil choisi est une plaque plane. Ce choix est motivé par sa relative facilité d'utilisation, et le fait que le comportement aérodynamique de la plaque plane et des profils minces sont similaires [88], ce qui ne nuit ainsi pas à la généralité de l'étude. Ce montage est l'élément clé du travail présenté ici. En effet, c'est grâce à ce dispositif que l'on peut valider notre modèle aéroélastique. En outre, il permet de déterminer la capacité de l'amortisseur hystérétique, consistant en des ressorts en AMF, à contrôler l'instabilité de flottement. Cette étude fait partie du chapitre 5. Le montage expérimental utilisé est celui conçu par Xavier Amandolèse [2], il nous a été prêté afin de le modifier pour réaliser nos mesures. Dans cette section, le dispositif expérimental de flottement à deux degrés de liberté, ainsi que les mesures qui ont été menées, sont présentés.

2.1.1 Montage expérimental

Le profil utilisé pour l'expérience de flottement est une plaque plane en acier d'envergure 225 mm, de corde 35 mm et d'épaisseur 1,5 mm, ce qui équivaut à un rapport épaisseur sur corde de 4,3 %. Le dispositif expérimental est schématisé Figure 2.1.

Le profil est maintenu à ses deux extrémités par des tiges insérées dans des roulements à billes (les roulements ne sont pas représentés sur le schéma). Les tiges sont fixées à la mi-corde de la plaque de telle sorte que le centre élastique du profil soit à mi-corde. Les roulements à billes sont positionnés sur des lames de maintien qui ont pour but de soutenir le poids du profil. La raideur du mouvement de pompage est assurée par quatre ressorts de traction et celle du mouvement de tangage par deux ressorts spiraux. Deux barres d'inertie sont fixées aux tiges maintenant le profil. En fixant des poids excentrés du centre élastique sur ces barres, la position du centre de gravité peut être modifiée. Deux flasques (non schématisées sur la Figure 2.1) sont placées aux extrémités de la plaque afin de réduire les effets aérodynamiques tridimensionnels. L'écoulement est assuré par un souffleur placé en amont du montage.

Les amplitudes de déplacement des modes de pompage et de tangage sont mesurées à l'aide de capteurs de déplacement laser Keyence LK-G. Le mouvement de pompage est directement obtenu à l'aide du capteur laser visant une des lames de maintien, celui de droite sur la Figure 2.1. Pour le tangage, son mouvement n'est pas directement accessible. En effet, le capteur laser de gauche sur la Figure 2.1 visant une des barres de rappel, mesure à la fois le mouvement de pompage et de tangage. Ainsi il faut lui retrancher le signal provenant du capteur laser de droite sur la Figure 2.1 pour avoir accès au déplacement du mouvement de tangage. Les deux ressorts de traction inférieurs sont reliés à deux capteurs de force PCB 208-C03 afin de mesurer leur force de rappel. L'acquisition est réalisée à l'aide d'une carte d'acquisition National Instruments.

Pour estimer la masse M du profil, on se sert de l'expression de la pulsation propre ω_h du mode

de pompage pur. En effet, on sait qu'elle est égale à $\sqrt{k_h/M}$. Ainsi, si on ajoute une masse m_1 au profil, la pulsation propre ω_{hm} du mode de pompage alourdi de m_1 devient égale à $\sqrt{k_h/(M + m_1)}$. Puis, en faisant le rapport de ces deux pulsations propres, on obtient l'expression suivante pour la masse du profil, $M = m_1/(\omega_h^2/\omega_{hm}^2 - 1)$. Il suffit alors de mesurer ω_h et ω_{hm} pour connaître M . Pour cela on procède à des lâchers du mode de pompage en bloquant le mode de tangage. Afin d'avoir une estimation robuste de M , on mesure ω_{hm} pour différentes masses m_1 . Concernant le moment d'inertie en rotation I_α , la méthodologie utilisée est la même avec cette fois $I_\alpha = m_1 l_1^2/(\omega_\alpha^2/\omega_{\alpha m}^2 - 1)$, où $\omega_{\alpha m}$ est la pulsation du mode de tangage alourdi de la masse m_1 située à la distance l_1 du centre élastique. Pour estimer les raideurs k_h et k_α du mode de pompage et de tangage, connaissant M et I_α , on peut directement les calculer à l'aide de ω_h et de ω_α . Pour estimer les amortissements visqueux des modes de pompage et de tangage, on ajuste, par la méthode des moindres carrés, une courbe exponentielle décroissante sur les mesures de lâchers de chaque degré de liberté effectuées pour calculer M et I_α . Pour estimer le moment statique, les deux pulsations du système couplé, notées ω_1 et ω_2 , sont mesurées et la relation suivante [8] est utilisée,

$$S_\alpha = \sqrt{m I_\alpha \left(1 - \frac{\omega_h^2 + \omega_\alpha^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right)}, \quad (2.1)$$

Les paramètres identifiés sont rassemblés dans le Tableau 2.1.

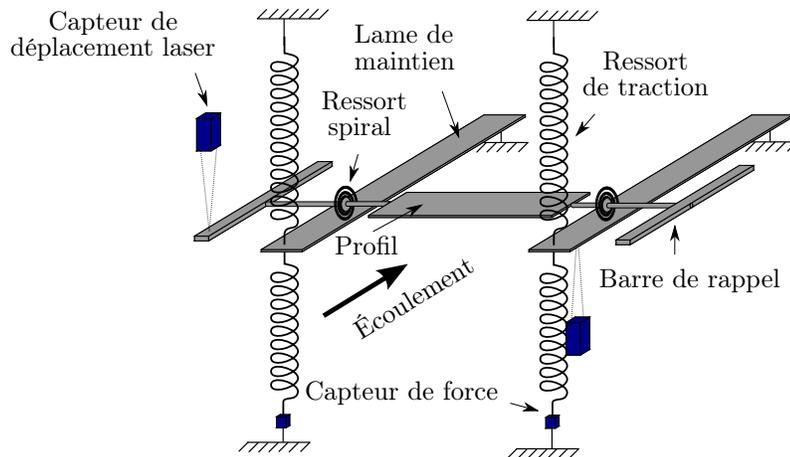


Figure 2.1 – Schéma du dispositif expérimental utilisé pour étudier l'instabilité de flottement.

M [kg]	I_α [kg.m ²]	c_h [kg.s ⁻¹]	c_α [kg.m ² .s ⁻¹]	k_h [kg.s ⁻²]	k_α [kg.m ² .s ⁻²]	S_α [kg.m]
0.389	$2.11 \cdot 10^{-4}$	0.126	$1.65 \cdot 10^{-4}$	282.3	0.143	$1 \cdot 10^{-3}$

Tableau 2.1 – Paramètres structurels de l'expérience de flottement.

En utilisant les paramètres du Tableau 2.1, on estime une vitesse de flottement de 5,69 m/s à l'aide du modèle quasi-stationnaire, de 5,99 m/s à l'aide du modèle de Wagner et de 6,02 m/s à l'aide du modèle de Theodorsen. Dans la section 2.1.2, les mesures effectuées sur ce dispositif expérimental sont présentées.

2.1.2 Réponse temporelle et diagramme de bifurcation

Le but des mesures présentées ici est d'avoir un cas de référence afin de valider la modélisation qui sera présentée dans le chapitre 3. Tout d'abord, on trace sur la Figure 2.2 l'évolution temporelle du déplacement des modes de pompage et de tangage suite à une perturbation initiale du mode de pompage pour $U = 5.6$ m/s.

Cette vitesse d'écoulement est la plus faible pour laquelle le régime de flottement est observé. La perturbation initiale est appliquée au système car lorsque la vitesse d'écoulement est proche de la vitesse de flottement le profil ne se met pas en oscillations par lui même car les frottements secs, notamment présents dans les roulements, l'en empêchent.

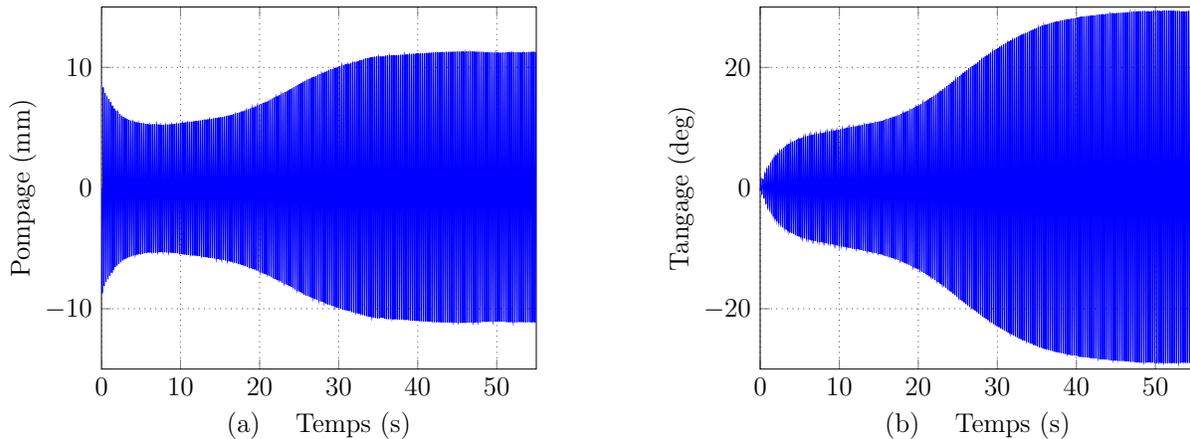


Figure 2.2 – Évolution temporelle du mouvement de pompage (a) et de tangage (b) pour une vitesse d'écoulement de 5.6 m/s.

Dans la section 2.1.1, la vitesse de flottement du montage a été calculée autour de 6 m/s, ce

qui est au-delà de la vitesse présentée sur la Figure 2.2. Si cette différence peut être imputée aux incertitudes de mesure des paramètres du montage, elle peut aussi s'expliquer par la nature de la bifurcation qui est possiblement sous-critique. C'est à dire que les cycles limites engendrés par l'instabilité subsistent en-deçà de la vitesse de flottement. En effet, la présence de branche sous-critique durant des mesures de flottement a été observée dans la littérature [2, 73, 76]. Ainsi il se peut que la perturbation initiale, nécessaire pour que le système se mette en oscillations, l'ait forcé à s'établir sur une probable branche sous-critique. On ne peut alors pas savoir si le système se met sur un cycle limite parce que la vitesse de flottement est dépassée ou parce qu'il existe une branche sous-critique. Pour cette raison, le diagramme de bifurcation du système est mesuré uniquement pour la branche descendante, c'est-à-dire pour des vitesses d'écoulement décroissantes, car cette branche n'est pas influencée par la perturbation initiale.

Pour réaliser le diagramme de bifurcation du système de flottement, on impose une vitesse d'écoulement égale à la vitesse d'écoulement maximale testée (9 m/s), on attend que le système s'établisse sur un cycle limite stable, puis on mesure le déplacement des deux degrés de liberté. Ensuite, la vitesse d'écoulement est diminuée et on attend à nouveau que le mouvement du système se stabilise sur un cycle limite, puis on mesure le déplacement des deux degrés de liberté. Cette opération est répétée jusqu'à ce que l'instabilité de flottement cesse. L'amplitude maximale des cycles limites pour chaque degré de liberté, résultant de cette mesure, est tracée en fonction de la vitesse de l'écoulement sur la Figure 2.3. Les cycles limites s'établissent à des angles d'attaque importants, jusqu'à 42.9 degrés pour 9 m/s. Il faut ainsi estimer les efforts aérodynamiques qui se développent à de telles amplitudes, c'est l'objet de la section suivante.

2.2 Mesures d'efforts aérodynamiques en grand déplacement

Les mode de pompage et de tangage possédant des forces de rappel linéaires [2], la non linéarité responsable de l'établissement des cycles limites engendrés par l'instabilité de flottement provient donc des efforts aérodynamiques. Le comportement non linéaire des efforts aérodynamiques apparaît lorsque l'angle d'attaque du profil dépasse son angle de décrochage, ce qui est le cas dans notre expérience de flottement. Ce phénomène non linéaire est appelé décrochage dynamique. Il a été étudié pour la première fois sur des pâles d'hélicoptère par Harris et Pruyne [36] car ces profils sont sujets à des angles d'attaque importants. Le rôle du décrochage dynamique dans l'établissement des cycles limites a été étudié dans la littérature [18, 23, 76]. La description détaillée de ce phénomène fait partie du chapitre 3.

Afin de modéliser le décrochage dynamique, on peut recourir à des simulations numériques directes des équations de la mécanique des fluides, mais cette solution est très coûteuse en temps de calcul et peut s'avérer prohibitive pour une étude aéroélastique où il faut calculer les efforts aérodynamiques sur un grand nombre de périodes d'oscillations. Contrairement à cette approche,

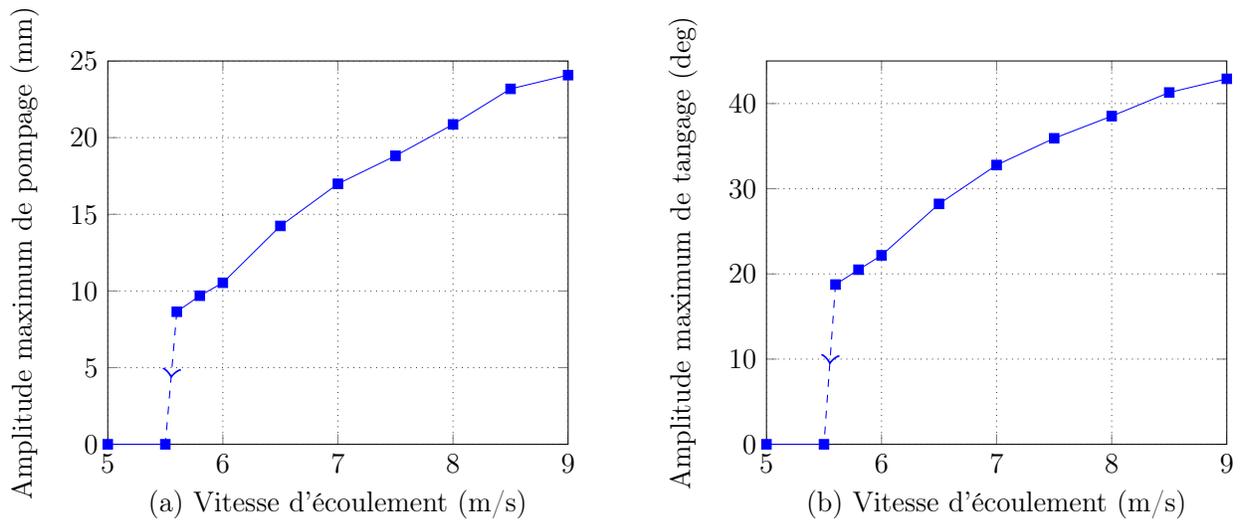


Figure 2.3 – Amplitude maximum du mode de pompage (a) et de tangage (b) en fonction de la vitesse d'écoulement.

une solution souvent utilisée est l'utilisation de modèles semi-empiriques [52, 56, 71], basés sur des mesures expérimentales.

On trouve un certain nombre d'études expérimentales sur le décrochage dynamique dans la littérature [1, 4, 39, 53, 60, 62], mais la plupart d'entre elles sont conduites sur des profils d'aile type NACA0012 et pour des mouvements non symétriques. Pour cette raison, il est nécessaire de constituer une base de données de mesures de décrochage dynamique sur notre profil de plaque plane et pour des mouvements symétriques. Ces mesures vont être utilisées pour identifier les paramètres du modèle de décrochage dynamique et le valider. Pour cela, les mesures ont été effectuées pour une grande gamme de fréquences, d'amplitudes et de vitesses d'écoulement, afin de recouvrir les conditions rencontrées lors de l'expérience de flottement.

Dans cette section, nous présentons ces mesures d'efforts aérodynamiques instationnaires effectuées sur un profil de plaque plane piloté en rotation. Des mesures similaires ont été effectuées par Xavier Amandolèse au LadHyX sur une autre plaque plane. Les résultats des deux campagnes de mesure ainsi qu'une confrontation des résultats obtenus fait l'objet d'un article en cours de soumission pour la revue *Experiments in Fluids*.

2.2.1 Dispositif expérimental et méthodologie

Le profil choisi pour l'expérience de flottement étant une plaque plane, les mesures d'efforts aérodynamiques ont été conduites sur une plaque plane rigide en acier et rectangulaire, dont le

bord d'attaque a été biseauté. Son envergure est de 236 mm, sa corde de 70 mm et son épaisseur de 3 mm, ce qui équivaut à un rapport épaisseur sur corde de 4,3 %, identique à celui de la plaque utilisée pour l'expérience de flottement. Les dimensions de la plaque utilisée pour les mesures présentées ici sont différentes de celles de la plaque utilisée dans l'expérience de flottement pour deux raisons. D'une part les efforts aérodynamiques mesurés doivent donner un rapport signal sur bruit satisfaisant, or ces efforts sont proportionnels à la surface de la plaque. Il se trouve que les dimensions du profil utilisé lors de l'expérience de flottement ne donnent pas d'efforts aérodynamiques suffisamment importants. C'est pour résoudre ce problème que la surface de la plaque utilisée pour les mesures d'efforts aérodynamiques est plus importante que celle utilisée pour l'expérience de flottement. D'autre part, étant encastree d'un seul côté et non maintenue à ses deux extrémités comme pour l'expérience de flottement, la plaque est sujette à des déformations non négligeables, une plaque plus épaisse permet de réduire ce phénomène.

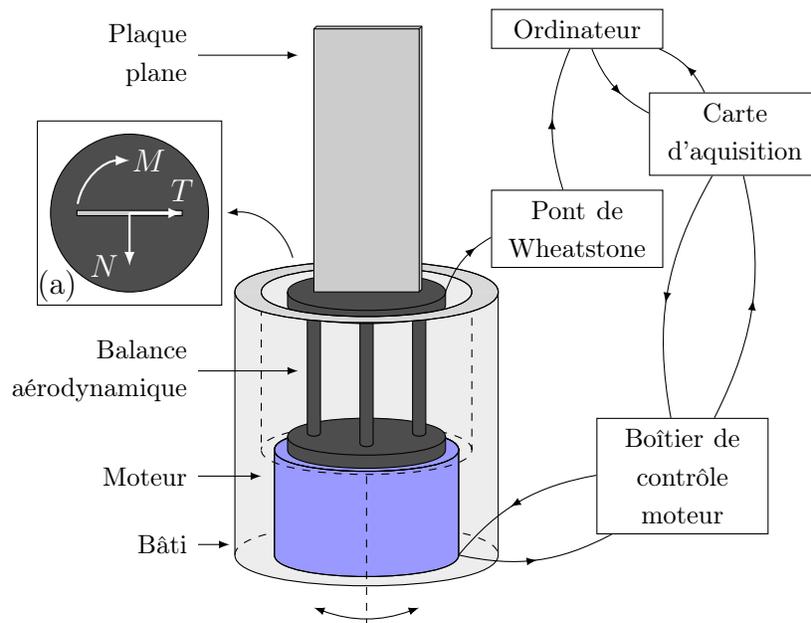


Figure 2.4 – Schéma de la plaque fixée à la balance aérodynamique et au moteur. (a) Vue de dessus de la balance aérodynamique avec le sens de mesure des efforts.

Le dispositif expérimental est représenté schématiquement sur la Figure 2.4. Une des deux extrémités de la plaque est fixée au centre d'une balance aérodynamique, de sorte que le centre de rotation de la plaque est situé à sa mi-corde, tandis que l'autre extrémité est laissée libre. La balance aérodynamique mesure une force tangentielle notée T , une force normale notée N et un moment noté M (voir l'encadré (a) de la Figure 2.4). La balance est pilotée en rotation à

l'aide d'un moteur contrôlé en amplitude et en fréquence, comme schématisé sur la Figure 2.4. Ce montage est installé verticalement dans la veine d'essai d'une soufflerie à retour. Ainsi la balance aérodynamique ne mesure pas le poids de la plaque. La section de la veine d'essai est de largeur et de hauteur 460 mm. Le plus grand angle de rotation mesuré étant 50 degrés, le profil recouvre au maximum 11,7 % de la largeur de la veine. À l'instar de l'expérience de flottement, la plaque est entourée de deux flasques en plexiglas à ses extrémités, afin de réduire les effets aérodynamiques tridimensionnels dus à la recirculation. La flasque inférieure est fixée sur la veine d'essai de la soufflerie et la flasque supérieure au profil. Une photographie du dispositif expérimental complet est donnée sur la Figure 2.5.

L'acquisition et le contrôle du moteur sont réalisés à l'aide d'une carte d'acquisition National Instrument et l'acquisition de la balance aérodynamique à l'aide d'une carte d'acquisition National Instruments intégrant directement un pont de Wheatstone comme schématisé Figure 2.4. La fréquence d'échantillonnage est de 2 kHz. La position de l'aile est acquise avec la boucle de retour du boîtier de contrôle moteur. La précision de cette boucle de retour a été vérifiée à l'aide d'un capteur de déplacement laser. Pour chaque acquisition on impose au profil un mouvement sinusoïdal d'amplitude constante sur une vingtaine de périodes d'oscillation et dans le même temps les efforts aérodynamiques et l'angle d'incidence de la plaque sont mesurés.

Quand la plaque est mise en mouvement par le moteur, deux phénomènes viennent perturber la mesure : la résonance des modes de la plaque et son inertie.

Concernant les modes de la plaque, la fréquence de son premier mode propre a été mesurée à 19 Hz. Ainsi, pour éviter que ce mode ne vienne perturber les mesures de la balance aérodynamique, les mesures ont été filtrées a posteriori à l'aide d'un filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 8 et de fréquence de coupure 18 Hz. La fréquence d'excitation maximale de l'aile étant 2 Hz, cela permet de retenir jusqu'à la neuvième harmonique des efforts aérodynamiques.

Concernant l'inertie de la plaque, toutes les mesures ont été faites avec et sans écoulement. Puis, les efforts mesurés sans écoulement ont été retranchés à ceux mesurés avec écoulement pour ne retenir que les efforts aérodynamiques. Nous avons alors observé que l'inertie de l'aile affecte principalement les mesures de moment et peut être négligée pour les mesures de forces normale et tangentielle.

Les différentes étapes de la mesure, illustrées pour un exemple sur la Figure 2.7, sont :

1. Prescription d'un mouvement de rotation sinusoïdal à une certaine fréquence et une certaine amplitude (Figure 2.7a),
2. Mesure des efforts aérodynamiques sans écoulement,
3. Mesure des efforts aérodynamiques avec un écoulement à une vitesse donnée (voir Figure 2.7b),
4. Filtrage des mesures (Figure 2.7c),
5. Moyennage temporel des mesures sur les périodes acquises (Figure 2.7d),
6. Soustraction du moment dû à l'inertie de la plaque au moment mesuré (Figure 2.7e).

Une fois la force normale N et la force tangentielle T mesurées, il faut les projeter afin de calculer la force de portance comme schématisé Figure 2.6, cela donne la relation suivante $L = N \cos(\alpha) - T \sin(\alpha)$. Concernant le moment, il est directement mesuré par la balance. La force de portance et le moment aérodynamique obtenus sont présentés sur la Figure 2.7(f). Cette procédure est appliquée pour 3 vitesses d'écoulements : 5 m/s, 10 m/s et 15 m/s, trois fréquences réduites $k = 2\pi f_e b/U$, où f_e est la fréquence d'excitation imposé au profil : 0.01, 0.02 et 0.3, et 37 amplitudes de 4 à 40 degrés. Les résultats obtenus sont présentés dans la section 2.2.2.

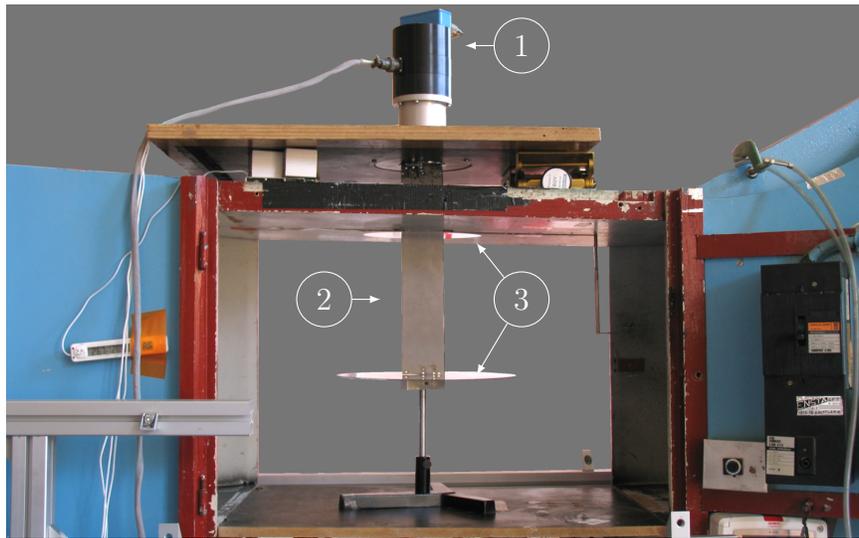


Figure 2.5 – Photographie du montage expérimental installé dans la veine d'essai de la soufflerie. 1 : Moteur et balance aérodynamique, 2 : plaque plane, 3 : flasques.

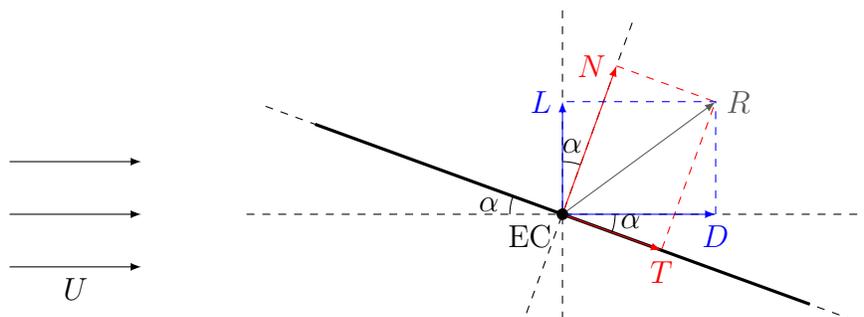


Figure 2.6 – Projection des efforts normaux et tangentiels pour obtenir la force de portance. D est la force de traînée et R la résultante des forces aérodynamiques

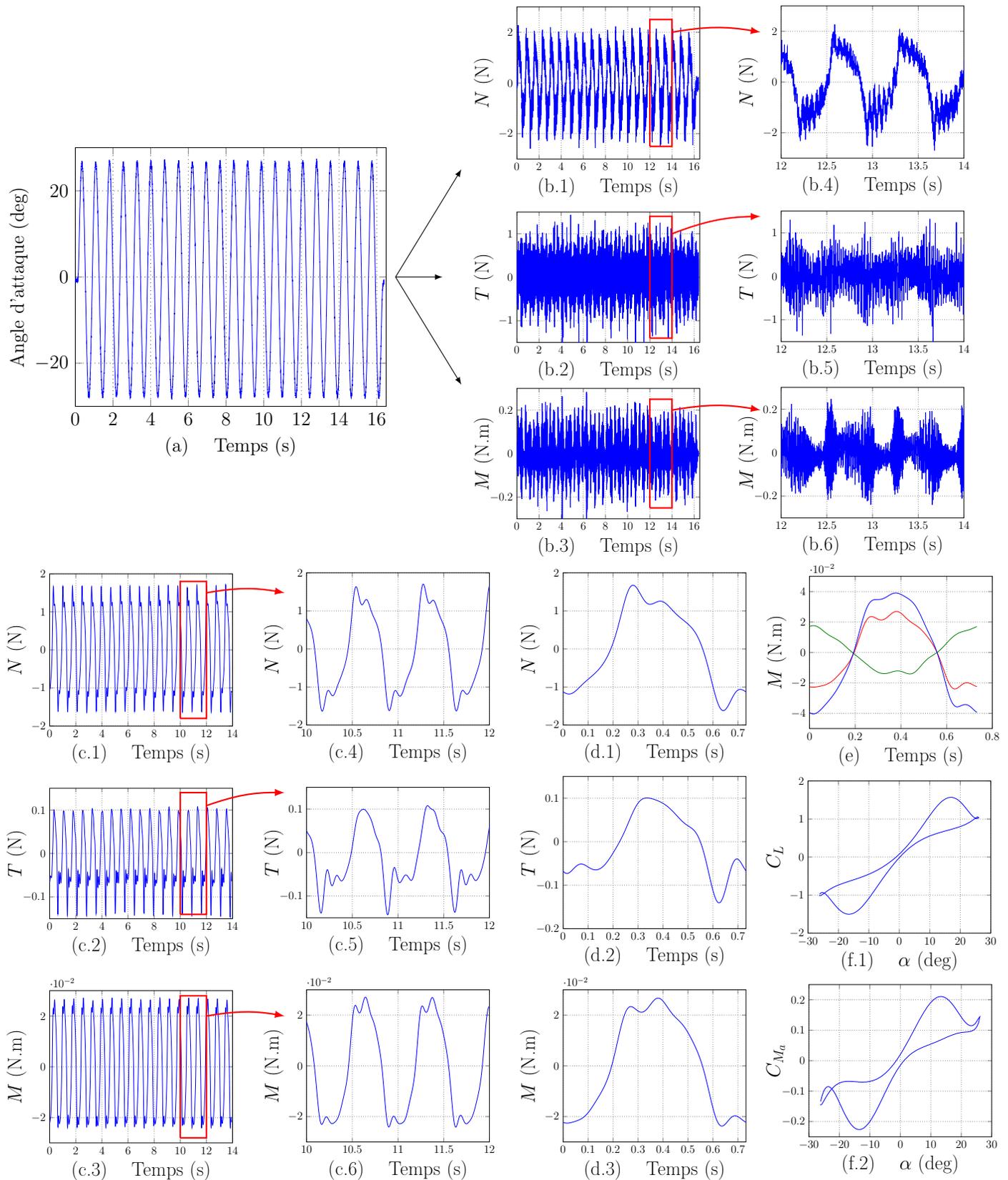


Figure 2.7 – Exemple des différentes étapes d'acquisition des efforts aérodynamiques pour une amplitude de 27 degrés, une fréquence de 1.36 Hz et une vitesse d'écoulement de 10 m/s. (a) Commande d'angle imposé au profil, (b) efforts aérodynamiques mesurés, (c) efforts aérodynamiques filtrés, (d) efforts aérodynamiques moyennés, (e) soustraction de l'inertie à la mesure du moment : en rouge le moment avec l'inertie, en bleu le moment sans l'inertie et en vert l'inertie, et (f) coefficients de portance et de moment obtenus en fonction de l'angle d'attaque.

2.2.2 Résultats

Nous présentons tout d'abord les courbes statiques de portance et de moment aérodynamique du profil utilisé. Elles ont été mesurées pour les trois vitesses d'écoulement 5 m/s, 10 m/s et 15 m/s. Ces vitesses correspondent aux nombres de Reynolds Re suivants : $2.24 \cdot 10^4$, $4.49 \cdot 10^4$ et $6.73 \cdot 10^4$, où $Re = U c/\nu$, et ν est la viscosité cinématique de l'air. Le coefficient de portance est tracé sur la Figure 2.8(a) en fonction de l'angle d'attaque et le coefficient de moment aérodynamique sur la Figure 2.8(b).

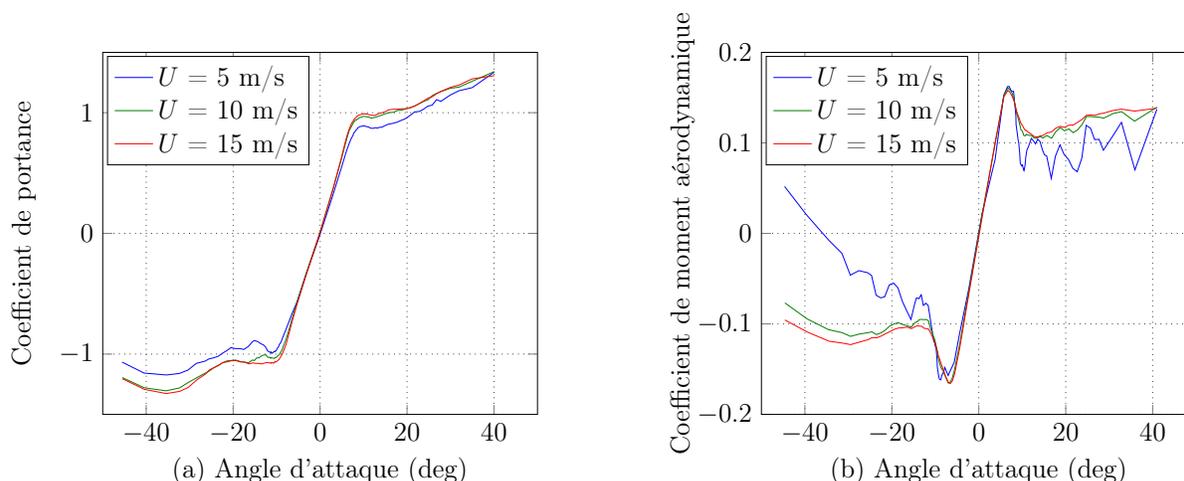


Figure 2.8 – Mesures statiques de la portance (a) et du moment aérodynamique (b) de la plaque plane pour les trois vitesses d'écoulement testées.

L'angle de décrochage de la plaque plane utilisée est mesuré à 10 degrés ce qui est dans la gamme des angles de décrochage des plaques planes [26, 49, 70]. D'autre part, il est connu que trois types de décrochage peuvent survenir en fonction du profil [57]. Une description plus approfondie de ces différents scénarios de décrochage est donnée à la section 3.1.1. Cependant on peut déjà noter à l'aide des mesures qu'une fois l'angle de décrochage atteint, le décrochage est assez « doux ». De plus, la valeur du coefficient de portance à l'angle de décrochage est égale à 1. Ces deux caractéristiques font que ce décrochage est typique du décrochage de profil mince. Les mesures sont ainsi en accord avec la théorie. De plus les mesures effectuée en parallèle par Xavier Amandolèse au même nombre de Reynolds pour une plaque ayant un bord d'attaque non biseauté montrent un scénario équivalent.

Le rapport entre les pentes du coefficient de portance et de moment à angle d'attaque nul est proche de la théorie des profils minces car on trouve $e \simeq x_{CE} - 0.269c$ au lieu de $e \simeq x_{CE} - 0.25c$.

Concernant l'influence de la vitesse d'écoulement, elle est surtout visible lorsque cette vitesse est faible. En effet la différence entre 10 et 15 m/s est relativement ténue. Il est à noter que les efforts aérodynamiques sont proportionnels à la vitesse d'écoulement au carré, ainsi pour des faibles vitesses d'écoulement les efforts aérodynamiques sont relativement petits et le rapport signal sur bruit des mesures se détériore. Cela peut notamment expliquer les variations importantes du coefficient de moment aérodynamique pour $U = 5$ m/s.

Concernant les mesures dynamiques nous ne présentons que celles effectuées à 10 m/s car celles effectuées à 5 m/s donnent un rapport signal sur bruit trop faible et celles à 15 m/s sont relativement proches.

Tout d'abord sur la Figure 2.9, les mesures conduites pour les deux amplitudes 18 et 36 degrés et les trois fréquences réduites testées 0.01, 0.02 et 0.03 ; sont présentées. Ensuite, sur la Figure 2.10, les mesures effectuées à une fréquence réduite $k = 0.03$ et pour quatre amplitudes 12, 18, 27 et 36 degrés, sont présentées.

La première remarque est que le décrochage se fait à des angles d'attaques plus élevés dans le cas dynamique que statique et que ces angles dépendent de l'amplitude et de la fréquence de rotation du profil. Une seconde remarque est que la chute des efforts aérodynamiques une fois l'angle de décrochage atteint est bien plus importante dans le cas dynamique. Enfin, les efforts aérodynamiques pour une amplitude de rotation croissante et décroissante ne suivent pas le même chemin. Ainsi les efforts aérodynamiques ont un comportement hystérétique en grand déplacement. La taille de la boucle d'hystérésis dépend de l'amplitude et de la fréquence de rotation du profil.

Dans ce chapitre, les mesures réalisées pour estimer le comportement post-flottement du profil d'aile à deux degrés de liberté ont été détaillées, puis les mesures d'efforts aérodynamiques en grand déplacement ont été présentées, mettant notamment en évidence le phénomène de décrochage dynamique. Dans le chapitre suivant, le phénomène de décrochage dynamique est présenté en détail, les éléments théoriques le composant ainsi que sa modélisation sont présentés. Le modèle utilisé est le modèle de Petot [71]. En combinant le modèle aéroélastique présenté au premier chapitre avec le modèle de Petot, le comportement du profil dans le régime post-flottement est alors estimé. Les résultats de cette modélisation sont présentés.

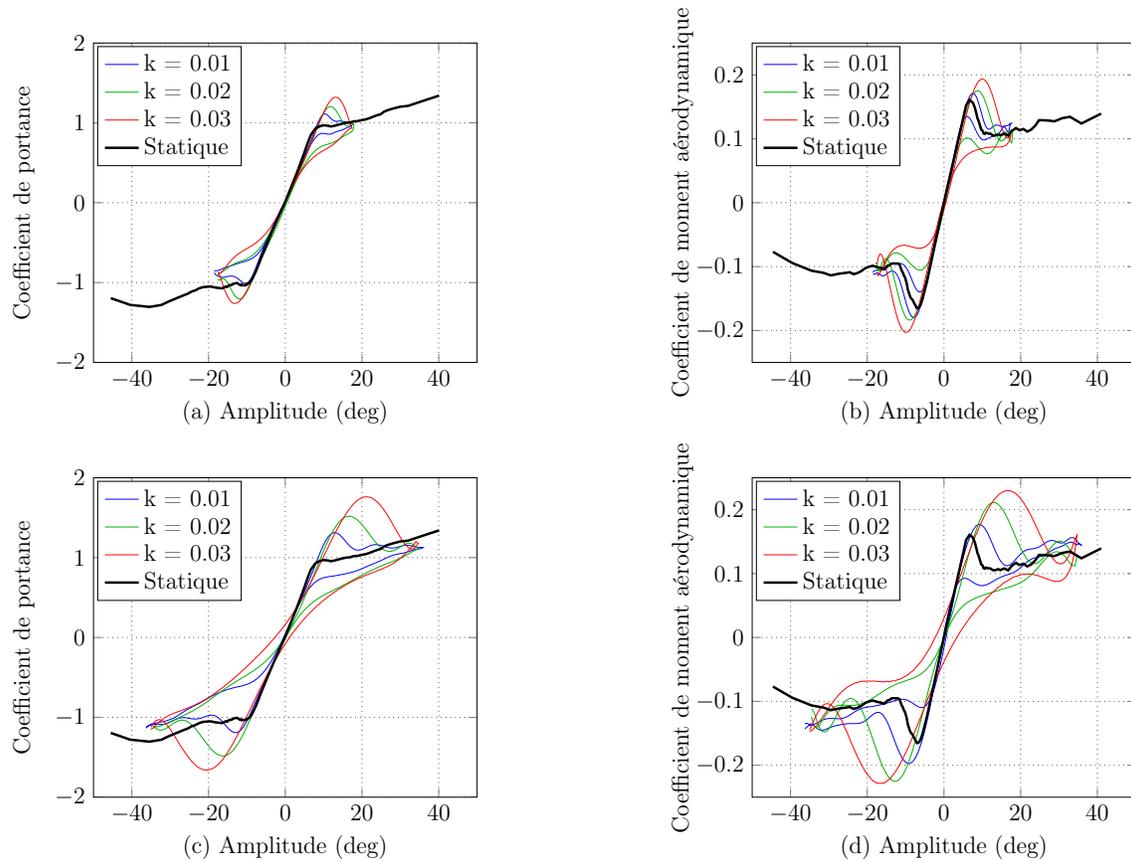


Figure 2.9 – Mesures dynamiques de la portance (a,c) et du moment aérodynamique (b,d) de la plaque pour des amplitudes de 18 degrés (a,b) et 36 degrés (c,d), trois fréquences réduites et $U = 10$ m/s.

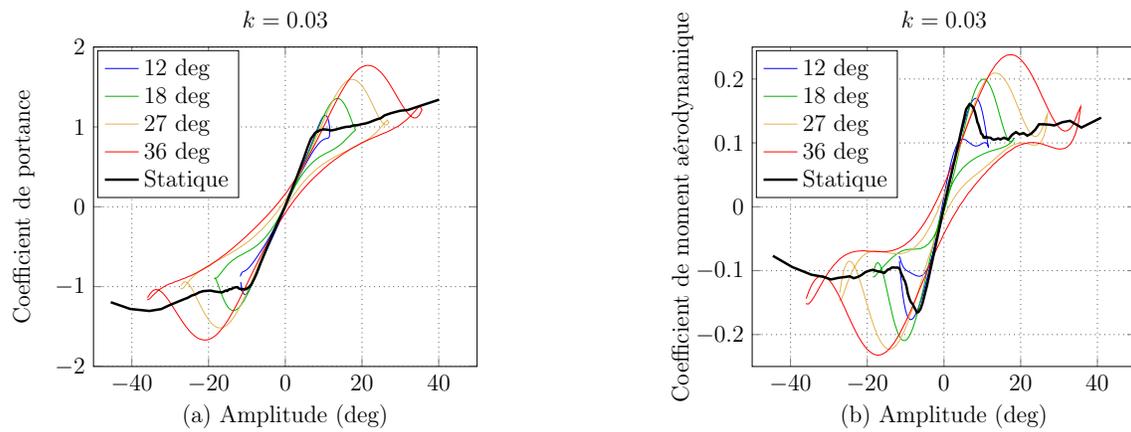


Figure 2.10 – Mesures dynamiques de la portance (a) et du moment aérodynamique (b) de la plaque pour quatre amplitudes, $k = 0.03$ et $U = 10$ m/s.

Chapitre 3

Modélisation du système aéroélastique en grande amplitude

Résumé

Afin de pouvoir prédire le comportement du profil d'aile dans le régime post-flottement, il faut estimer les efforts aérodynamiques qui se développent à des grandes amplitudes où le phénomène de décrochage dynamique apparaît. Ainsi, la première partie de ce chapitre est consacrée à la description du phénomène de décrochage dynamique, et à sa modélisation à l'aide du modèle de Petot [71]. Le modèle de Petot est un modèle semi-empirique faisant intervenir des paramètres qui dépendent du profil et de l'écoulement. Il est donc nécessaire d'ajuster les coefficients de ce modèle à l'aide d'une série de mesures pour pouvoir ensuite l'exploiter à des fins prédictives. Dans notre cas, ces paramètres sont estimés à l'aide des mesures présentées dans la section 2.2.2.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la présentation du modèle combinant les équations aéroélastiques présentées dans la section 1.1.2 au modèle de Petot. Les résultats obtenus sont comparés avec les mesures exposées dans la section 2.1.2.

Sommaire

3.1	Modélisation du décrochage dynamique	42
3.1.1	Explication du phénomène	42
3.1.2	Description du modèle de Petot	46
3.1.3	Ajustement des coefficients du modèle de Petot et comparaison avec l'ex- périence	49
3.2	Modélisation du régime post-flottement	52
3.2.1	Description du modèle	52
3.2.2	Influence des efforts aérodynamiques	53
3.2.3	Modèle ajusté à l'expérience de flottement	55

3.1 Modélisation du décrochage dynamique

Lorsque le profil est soumis à des amplitudes de vibration importantes le phénomène de décrochage dynamique survient. Après avoir présenté son fonctionnement et son influence sur les efforts aérodynamiques, nous présentons le modèle utilisé pour l'estimer, à savoir le modèle de Petot [71]. Le choix de ce modèle est détaillé dans la section 3.1.2.

3.1.1 Explication du phénomène

Avant de détailler le phénomène de décrochage dynamique, il convient de présenter celui de décrochage statique. Le décrochage statique correspond à une situation dans laquelle l'écoulement est totalement détaché de la partie supérieure ou inférieure du profil. Ce phénomène apparaît à un certain angle d'attaque, appelé angle de décrochage statique et noté α_s . Le décrochage statique peut s'enclencher de trois manières différentes [25, 57], on parle alors de décrochage de profil mince, de décrochage de bord d'attaque ou de décrochage de bord de fuite.

Le décrochage de profil mince est celui qui survient notamment sur la plaque plane. Ce décrochage est schématisé sur la Figure 3.1. Les étapes qui le composent sont les suivantes :

1. L'angle d'attaque du profil est faible, cas (a) de la Figure 3.1, l'écoulement est attaché tout le long du profil.
2. L'angle d'attaque augmente sans dépasser l'angle de décrochage, cas (b) de la Figure 3.1. L'écoulement se sépare au niveau du bord d'attaque puis recolle en aval du profil. Il y a alors création d'une bulle de séparation comme schématisée sur la Figure 3.1(b). La taille de cette bulle augmente en même temps que l'angle d'attaque.
3. L'angle d'attaque augmente jusqu'à être supérieur à l'angle de décrochage, cas (c) de la Figure 3.1. La bulle de séparation a grossi jusqu'à dépasser le bord de fuite, l'écoulement est décroché tout le long de la corde. La portance n'augmente plus avec l'angle d'attaque, le profil peut alors être vu comme un corps non profilé par rapport à l'écoulement.

Ce qui différencie le décrochage de profil mince de celui de bord d'attaque et de bord de fuite est l'étape (b) de la Figure 3.1. Pour le décrochage de bord d'attaque, qui apparaît typiquement pour les profils de type NACA0012, une bulle de séparation laminaire se crée juste après le bord d'attaque dû au décollement et au recollement de la couche limite. Cette bulle se rapproche du bord d'attaque quand l'angle d'attaque augmente puis se désagrège quand l'angle de décrochage statique est dépassé. Ce type de décrochage provoque une brusque chute de portance une fois l'angle de décrochage atteint. Le décrochage de bord de fuite apparaît sur des profils plus épais. L'écoulement se détache alors à partir du bord de fuite et remonte en amont de la corde jusqu'à atteindre le bord d'attaque.

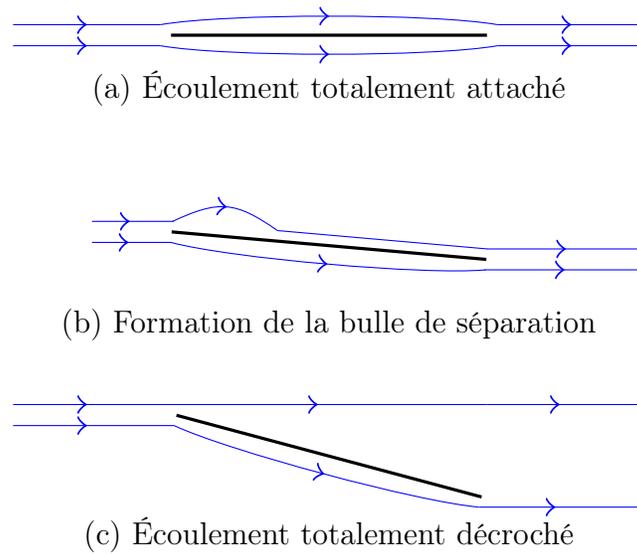


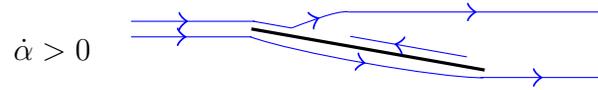
Figure 3.1 – Représentation des différentes étapes du décrochage statique dans le cas d'un profil mince.

Lorsque le profil est en mouvement, le décrochage ne s'effectue plus de la même manière. Une des grandes différences est qu'il apparaît à un angle d'attaque plus élevé que l'angle de décrochage statique. Cet angle est appelé angle de décrochage dynamique et est noté α_d . Le décrochage dynamique est un phénomène encore très étudié dans la littérature, les différentes étapes qui le composent sont relativement complexes et dépendent notamment de la forme de l'aile et des caractéristiques de l'écoulement [61]. L'objet de cette section n'est pas de faire une description exhaustive de tous les décrochages dynamiques possibles, mais de synthétiser les éléments les plus importants qui le constituent.

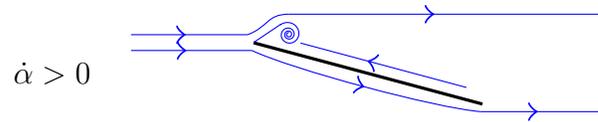
Les étapes importantes du décrochage dynamique, représentées sur la Figure 3.2, sont les suivantes [13, 52, 56, 61] :

1. L'angle d'attaque du profil augmente et atteint l'angle de décrochage statique, cas (a) de la Figure 3.2. L'écoulement au niveau de la partie aval du profil a une vitesse négative, cette zone d'écoulement inversé remonte vers le bord d'attaque du profil quand l'angle d'attaque augmente.
2. L'angle d'attaque augmente et dépasse l'angle de décrochage statique, cas (b) de la Figure 3.2. La partie de l'écoulement inversé s'est rapprochée du bord d'attaque et un tourbillon se forme à cet endroit
3. L'angle d'attaque continue à augmenter, cas (c) de la Figure 3.2. Le tourbillon qui s'est formé au bord d'attaque se détache et est convecté par l'écoulement le long du profil. Ce tourbillon a pour effet de contribuer à l'augmentation de la portance et à faire chuter le moment aérodynamique.
4. L'angle d'attaque est maintenant égal à l'angle de décrochage dynamique, cas (d) de la Figure 3.2. Le tourbillon qui s'est formé au bord d'attaque atteint le bord de fuite et se délite. Un tourbillon se forme au bord de fuite. À ce moment, l'écoulement est totalement décroché de la partie supérieure de l'aile qui ne porte plus, cela se traduit par une importante chute de la force de portance.
5. L'angle d'attaque diminue et devient faible à nouveau, cas (e) de la Figure 3.2. L'écoulement se recolle au profil à partir du bord d'attaque. La portance retrouve un comportement linéaire.

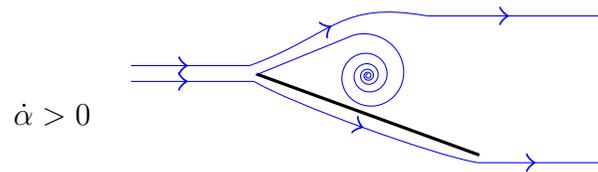
Les étapes 3 et 4 précédemment décrites correspondent principalement au profil rencontrant du décrochage de bord d'attaque. Concernant les profils présentant du décrochage de profil mince, comme la plaque plane, il n'y a pas de formation de tourbillon de bord d'attaque. Le profil décroche ainsi plus tôt. Le lien entre les étapes 1, 2 et 5 et la force de portance ainsi que le moment est représenté sur la Figure 3.3. ΔC_L^{max} , appelé « overshoot » dans la littérature anglo-saxonne, est le carré de la différence entre la portance maximale dynamique et statique. Comme le profil décroche plus tard dans le cas dynamique cette quantité est toujours positive.



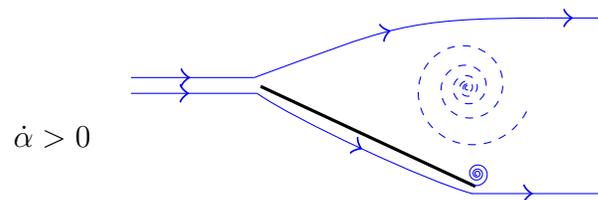
(a) Écoulement inversé sur la partie aval du profil



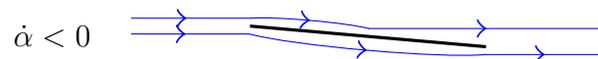
(b) Construction d'un tourbillon au bord d'attaque



(c) Détachement et convection du tourbillon vers le bord de fuite



(d) Délitement du tourbillon arrivé au bord de fuite et construction d'un tourbillon au bord de fuite



(e) Rattachement de l'écoulement depuis le bord d'attaque

Figure 3.2 – Représentation des différentes étapes du décrochage dynamique.

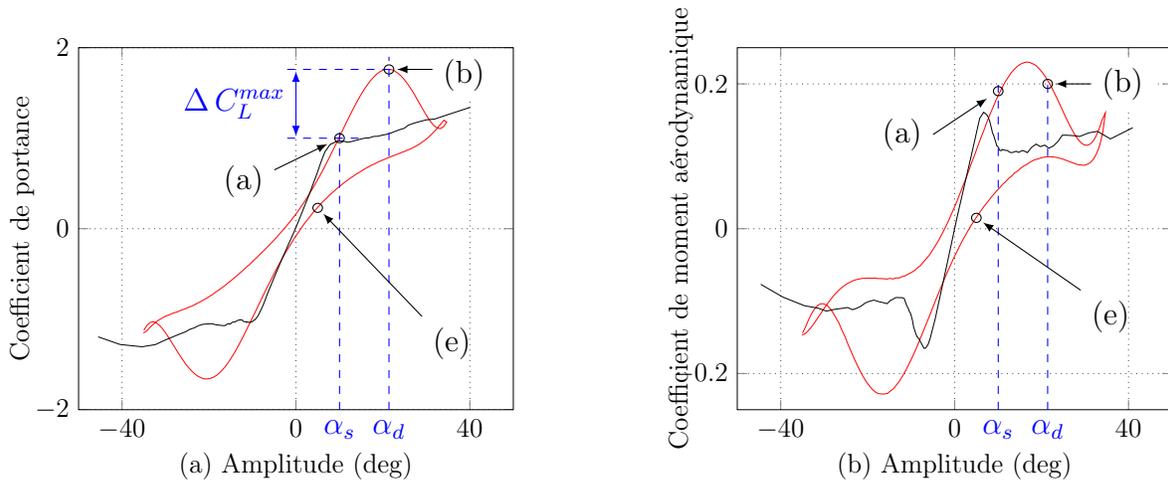


Figure 3.3 – Comparaison entre les courbes de portance (a) et de moment aérodynamique (b) statique (noire) et dynamique (rouge) d’une plaque plane. Les lettres (a), (b), et (e) réfèrent à la Figure 3.2.

La différence entre α_s et α_d est directement proportionnelle au retard au décrochage. Ce retard au décrochage est provoqué notamment par la vitesse induite par le profil sur l’écoulement. Ainsi, si le retard au décrochage est connu, α_d le sera aussi et, si on suppose que l’évolution de la portance est linéaire entre α_s et α_d , ΔC_L^{max} sera aussi connu. Beddoes [5] a montré que ce retard au décrochage est constant s’il est adimensionné par le temps de référence U/b , il est alors noté τ_d . Le temps de référence U/b correspond au temps mis par une particule fluide pour traverser la demi-corde du profil à la vitesse de l’écoulement.

Le dernier point remarquable du décrochage dynamique est que l’évolution de la portance pour des angles d’attaque croissants et décroissants n’est pas la même, ce qui crée un phénomène d’hystérésis. Cela vient du fait que l’écoulement ne raccroche pas le profil de la même façon qu’il ne le décroche. En outre, cette hystérésis varie grandement en fonction de la fréquence et de l’amplitude du mouvement du profil ainsi que du type de profil et des paramètres de l’écoulement.

Dans la section 3.1.2, nous présentons le modèle qui a été utilisé au cours de la thèse pour estimer les efforts aérodynamiques, à savoir le modèle de Petot [71]. Ce modèle prend en compte le retard au décrochage ainsi que l’hystérésis des efforts aérodynamiques.

3.1.2 Description du modèle de Petot

La modélisation du décrochage dynamique est un sujet encore très étudié dans la littérature. Les premiers travaux sont probablement ceux de Gross et Harris [32], repris par Tarzanin [90] et

connu sous le nom de modèle de Boeing-Vertol. Ensuite Beddoes [5], puis Dat [16] ont été à l'origine des modèles les plus étudiés aujourd'hui. Beddoes s'est associé avec Leishman pour développer le modèle nommé Leishman-Beddoes [56]. D'autre part, Petot a continué les travaux qu'il a effectué avec Dat et Tran pour établir le modèle de Petot [71], couramment nommé modèle de l'ONERA dans la littérature. On peut aussi citer les travaux de Øye [69] et Hansen *et al.* [35]. Enfin Larsen *et al.* [52] ont proposé un modèle de décrochage dynamique destiné aux pâles d'éoliennes et ont classé par la même occasion les différents modèles de décrochage dynamique en trois catégories :

1. L'influence de chaque étape du décrochage sur les efforts aérodynamiques est modélisée. Le modèle de Leishman-Beddoes se place dans cette catégorie.
2. Les caractéristiques de la courbe de portance et de moment aérodynamique sont modélisées. Le modèle de Petot se classe dans cette catégorie.
3. Un angle d'attaque dynamique est modélisé et remplace l'angle d'attaque du profil. Le modèle de Tarzanin se situe dans cette catégorie.

Nous avons choisi d'utiliser le modèle de Petot car sa formulation est plus simple que celle de Leishman-Beddoes et son intégration dans un modèle aéroélastique plus directe. De plus, de part sa formulation, le modèle de Petot est assez polyvalent et donc à même d'estimer les efforts aérodynamiques sur différents types de profil et d'écoulement.

Dans la description du modèle, nous ne détaillons que l'estimation du coefficient de portance. Concernant le coefficient de moment aérodynamique, Petot propose une formulation légèrement différente qui correspond mieux à ses mesures. Néanmoins, il a été choisi dans ce manuscrit d'utiliser la même modélisation que pour la portance en adaptant les paramètres, car cette modélisation représente convenablement les mesures effectuées.

L'élément clé du modèle de Petot est l'introduction d'un paramètre non linéaire de décrochage, noté ΔC_L , qui est égal à la différence entre l'extrapolation de la courbe de portance du régime non décroché dans le régime décroché, notée C_L^e , et la courbe de portance statique, notée C_L^s , comme schématisé sur la Figure 3.4. Cette valeur est obtenue à l'aide des mesures de portance statique, mais peut aussi être modélisée analytiquement. Dans le travail présenté, ΔC_L est directement estimé à l'aide des mesures de portance statique.

Concernant le coefficient de portance C_L , il est décomposé selon une partie accrochée notée C_L^1 , et une partie décrochée notée C_L^2 . C_L^1 modélise les efforts de portance en l'absence de décrochage, son expression est proche des modèles instationnaires linéaires présentés section 1.2. C_L^2 modélise la partie décrochée de l'écoulement, son expression est déterminée à partir d'une équation d'oscillateur amorti faisant intervenir essentiellement des termes non linéaires. C_L^2 permet de modéliser le comportement hystérétique des efforts aérodynamiques. Ainsi la portance totale s'écrit

$$L = \frac{1}{2} \rho S U^2 (C_L^1 + C_L^2). \quad (3.1)$$

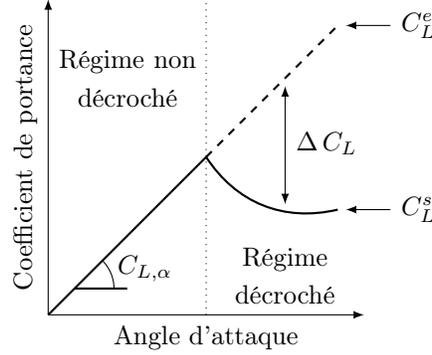


Figure 3.4 – Représentation du coefficient de portance statique en fonction de l'angle d'attaque. Ligne pleine : courbe de portance statique du profil. Ligne pointillée : extrapolation de la courbe de portance avant le décrochage dans le régime décroché. Le paramètre de décrochage ΔC_L correspond à la différence entre la courbe de portance extrapolée et la courbe de portance du profil en régime statique.

Les coefficients de portance C_L^1 et C_L^2 sont déterminés à l'aide des équations différentielles suivantes

$$C_L^{1'} + \lambda^L C_L^1 = \lambda^L (C_{L,\alpha} \alpha_{ap} + \sigma^L b \alpha') + (\kappa^L C_{L,\alpha} + d^L) \alpha'_{ap} + \kappa^L \sigma^L b \alpha'', \quad (3.2a)$$

$$C_L^{2''} + a^L C_L^{2'} + r^L C_L^2 = - (r^L \Delta C_L|_{\alpha_{ap}} + E^L \alpha'_{ap}). \quad (3.2b)$$

$\Delta C_L|_{\alpha_{ap}}$ est égal au paramètre de décrochage calculé en fonction de l'angle d'attaque apparent $\alpha_{ap} = \alpha + \dot{h}/U$ et (') désigne la dérivation par rapport au temps réduit $\tau = tU/b$. Les autres paramètres introduits par les équations (3.2a) et (3.2b) peuvent être regroupés en trois catégories

- Les constantes : λ^L et κ^L ,
- Les paramètres ayant une partie constante et une partie dépendant de $(\Delta C_L)^2$: $r^L = r_0^L + r_2^L (\Delta C_L)^2$, $a^L = a_0^L + a_2^L (\Delta C_L)^2$ et $\sigma^L = \sigma_0^L + \sigma_2^L (\Delta C_L)^2$,
- Les paramètres ne dépendant que de ΔC_L , sans partie constante : $E^L = -E_2^L (\Delta C_L)^2$ et $d^L = \sigma_2 |\Delta C_L|$.

Les coefficients λ^L , κ^L , r_0^L , r_2^L , a_0^L , a_2^L , σ_0^L , σ_2^L et E_2^L doivent être ajustés à l'aide des mesures de décrochage dynamique. De plus, ΔC_L étant non linéaire, r^L , a^L , σ^L et E^L le sont aussi.

Concernant le retard au décrochage, Petot propose de garder ΔC_L nul après que l'angle d'attaque a dépassé α_s pendant le temps τ_d , ce qui peut, en introduisant une variable annexe τ_s , s'écrire de

la manière suivante,

$$\begin{cases} \Delta C_L = 0 & \text{si } \alpha < \alpha_s \\ \Delta C_L = 0 \text{ et } \tau_s = \tau & \text{si } \alpha = \alpha_s \\ \Delta C_L = 0 & \text{si } \alpha > \alpha_s \text{ et } \tau < \tau_s + \tau_d \\ \Delta C_L = C_L^e - C_L^s & \text{si } \alpha > \alpha_s \text{ et } \tau \geq \tau_s + \tau_d \end{cases} \quad (3.3)$$

Ainsi, plus la fréquence réduite est grande, plus α_d et ΔC_L^{max} sont grands, car τ_d est constant. Cela s'observe assez nettement sur la Figure 2.9(c). De façon analogue, plus l'amplitude de rotation est grande et plus α_d et ΔC_L^{max} sont grands. Cela est visible sur la Figure 2.10(a).

Il faut maintenant trouver les valeurs des coefficients des équations (3.2a) et (3.2b) à l'aide des mesures effectuées à la section 2.2.

3.1.3 Ajustement des coefficients du modèle de Petot et comparaison avec l'expérience

On compare dans cette section les estimations du modèle présenté en section 3.1.2 avec les mesures effectuées en section 2.2.2. On compare le modèle aussi bien avec les mesures de portance que de moment aérodynamique. Les coefficients liés au modèle de moment aérodynamique sont indicés M au lieu de L .

Avant de pouvoir utiliser le modèle de Petot, il faut ajuster ses coefficients. Pour cela, la fonction de minimisation non-linéaire sous contrainte de Matlab *fmincon* est utilisée. La quantité à minimiser est la différence entre les prédictions du modèle et les mesures pour les différentes amplitudes et fréquences d'oscillations testées. Les coefficients du modèle de Petot sont ajustés dans un certain intervalle dont les limites, données par Petot [71], sont regroupées dans le Tableau 3.1. La fonction de minimisation requiert un jeu de coefficients de départ, on utilise un jeu de coefficients aléatoires bornés par les valeurs du Tableau 3.1. L'optimisation est réalisé avec différents jeux de coefficients de départ pour s'assurer de la robustesse de la solution trouvée. Les coefficients ainsi obtenus sont rassemblés dans le Tableau 3.2.

Coefficient	λ	κ	σ_0	r_0	a_0	σ_2	r_2	a_2	E_2
Valeur minimale	0.1	0	0.05	0.1	0.1	-0.15	0	0	-0.2
Valeur maximale	0.4	1	0.15	0.4	0.4	0	0.5	0.6	0

Tableau 3.1 – Valeurs minimales et maximales des coefficients du modèle de Petot.

On trace sur la Figure 3.5 la prédiction du modèle avec les coefficients du Tableau 3.2 ainsi que les mesures pour une fréquence réduite de 0.03 et trois amplitudes 12, 23 et 37 degrés. Pour

chaque amplitude, la force de portance est très bien estimée par le modèle de Petot. Le moment aérodynamique est relativement bien estimé, bien que le modèle utilisé soit destiné à estimer les forces de portance. On fait de même pour les trois fréquences réduites 0.01, 0.02 et 0.03 et une amplitude de 36 degrés sur la Figure 3.6. Cette fois-ci encore, la force de portance est très bien estimée par le modèle de Petot et l'estimation du moment aérodynamique est relativement proche des mesures. On insère maintenant le modèle de Petot aux équations aéroélastiques afin de prédire le déplacement du profil dans le régime post-flottement.

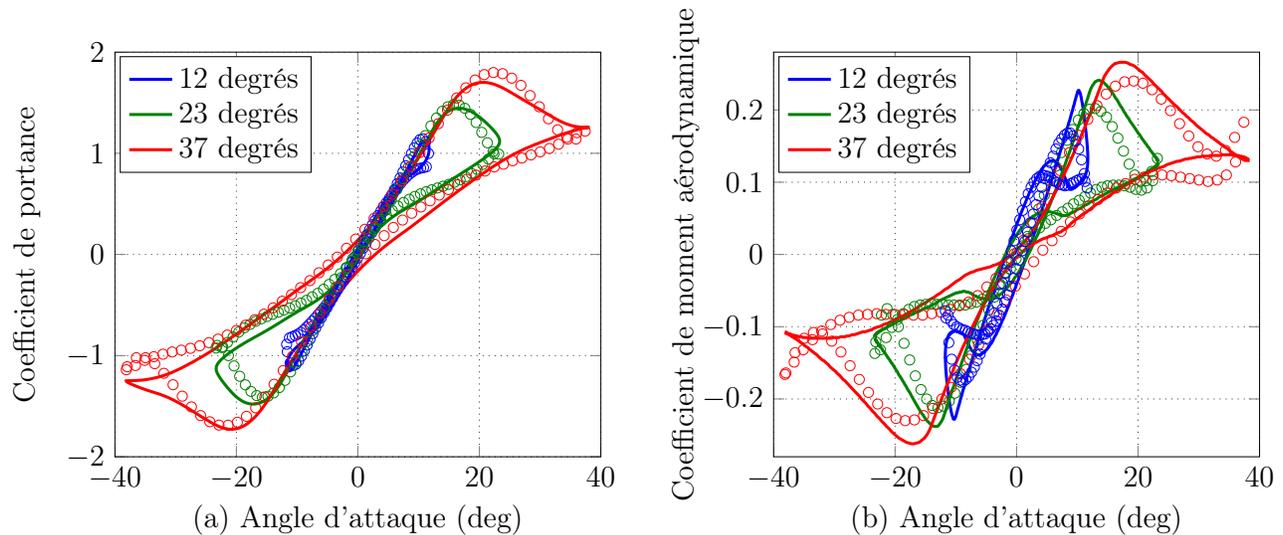


Figure 3.5 – Coefficient de portance (a) et de moment aérodynamique (b) de la plaque plane en fonction de l'angle d'attaque pour une fréquence réduite de 0.03 et trois amplitudes. Ligne pleine : modèle de Petot avec les paramètres du Tableau 3.2, cercles : mesures.

Coefficient du modèle de portance	λ^L	κ^L	σ_0^L	r_0^L	a_0^L	σ_2^L	r_2^L	a_2^L	E_2^L
Valeur	0.119	0.81	0.1	0.15	0.16	-0.005	0.09	0.26	-0.004
Coefficient du modèle de moment aérodynamique	λ^M	κ^M	σ_0^M	r_0^M	a_0^M	σ_2^M	r_2^M	a_2^M	E_2^M
Valeur	0.1	0.43	0.15	0.19	0.4	-0.026	0	0.08	0

Tableau 3.2 – Coefficients du modèle de Petot estimés à l’aide des mesures de portance et de moment aérodynamique présentées à la section 2.2.2. Une comparaison entre les mesures et le modèle utilisant ces coefficients est donnée sur la Figures 3.5 et 3.6.

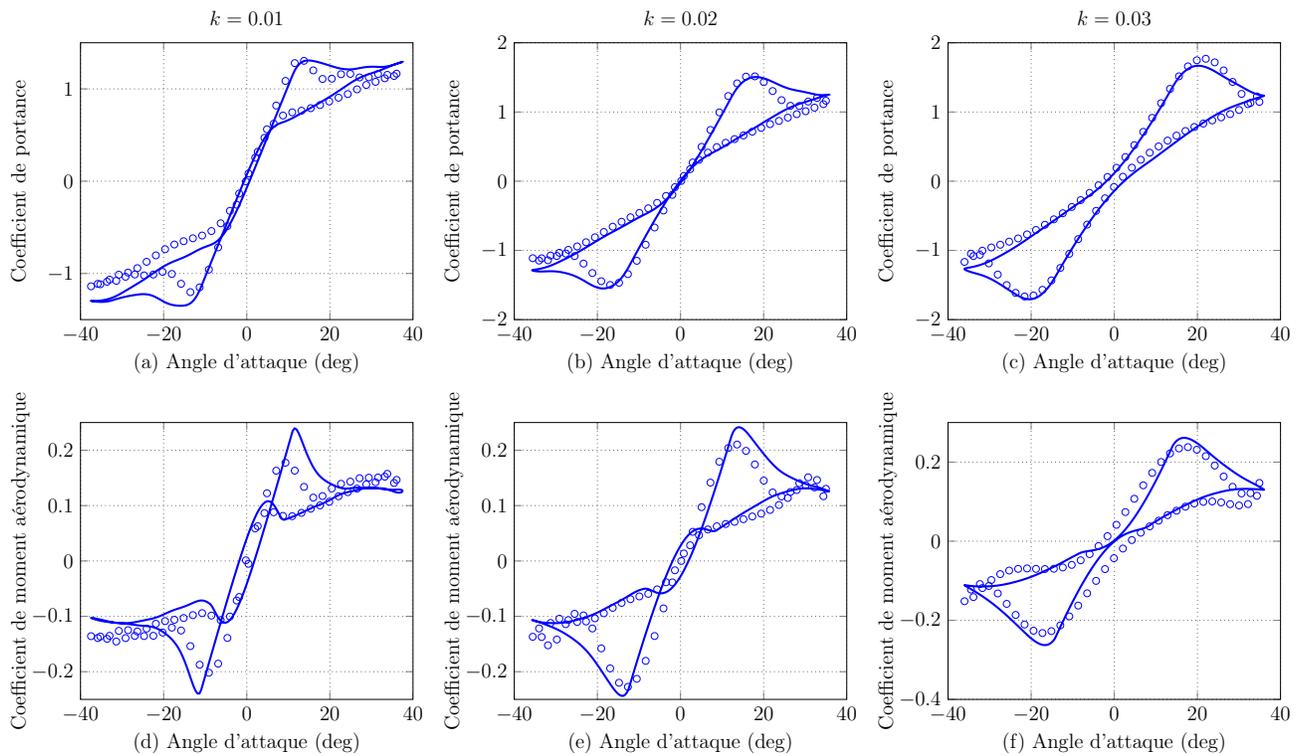


Figure 3.6 – Coefficient de portance (a,b,c) et de moment aérodynamique (d,e,f) de la plaque plane en fonction de l’angle d’attaque pour une amplitude de 36 degrés et trois fréquences réduites : 0.01 (a,d), 0.02 (b,e) et 0.03 (c,f). Ligne pleine : modèle de Petot avec les paramètres du Tableau 3.2, cercle : mesures.

3.2 Modélisation du régime post-flottement

En couplant le modèle de Petot présenté à la section 3.1 avec le modèle aéroélastique présenté en section 1.1.2, on peut estimer le mouvement du profil une fois l'instabilité de flottement établie. Dans un premier temps, les coefficients utilisés pour le modèle de Petot sont ceux estimés dans la section précédente. Toutefois, la plaque plane utilisée pour l'expérience de flottement et celle utilisée pour les mesures d'efforts aérodynamiques ne sont pas les mêmes. Les coefficients du modèle de Petot sont alors susceptibles de varier. Ainsi, afin d'affiner l'estimation de ce modèle, l'influence des efforts aérodynamiques sur le diagramme de bifurcation est étudiée afin d'ajuster les coefficients du modèle de Petot à la plaque utilisée dans l'expérience de flottement.

Dans cette section, le modèle couplant le modèle aéroélastique et le modèle de Petot est présenté. Puis, l'influence des efforts aérodynamiques sur le diagramme de bifurcation calculé est étudiée. Enfin, le diagramme de bifurcation calculé avec les coefficients du modèle de Petot ajusté est comparé aux mesures présentées à la section 2.1.2.

3.2.1 Description du modèle

Le système couplant le modèle de Petot et le modèle aéroélastique s'écrit

$$Mh'' + S_\alpha \cos(\alpha)\alpha'' + \frac{b}{U} c_h h' + \frac{b^2}{U^2} k_h h - S_\alpha \sin(\alpha)\alpha'^2 = -b^3 \rho s (C_L^1 + C_L^2), \quad (3.4a)$$

$$I_\alpha \alpha'' + S_\alpha \cos(\alpha)h'' + \frac{b}{U} c_\alpha \alpha' + \frac{b^2}{U^2} k_\alpha \alpha - S_\alpha h' \alpha' (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = 2b^4 \rho s (C_{M_\alpha}^1 + C_{M_\alpha}^2), \quad (3.4b)$$

$$C_L^{1'} + \lambda^L C_L^1 = \lambda^L (C_{L,\alpha} \alpha_{ap} + \sigma^L b \alpha') + (\kappa^L C_{L,\alpha} + d^L) \alpha'_{ap} + \kappa^L \sigma^L b \alpha'', \quad (3.4c)$$

$$C_L^{2''} + a^L C_L^{2'} + r^L C_L^2 = - (r^L \Delta C_L|_{\alpha_{ap}} + E^L \alpha'_{ap}), \quad (3.4d)$$

$$C_{M_\alpha}^{1'} + \lambda^M C_{M_\alpha}^1 = \lambda^M (C_{M_\alpha,\alpha} \alpha_{ap} + \sigma^M b \alpha') + (\kappa^M C_{M_\alpha,\alpha} + d^M) \alpha'_{ap} + \kappa^M \sigma^M b \alpha'', \quad (3.4e)$$

$$C_{M_\alpha}^{2''} + a^M C_{M_\alpha}^{2'} + r^M C_{M_\alpha}^2 = - (r^M \Delta C_{M_\alpha}|_{\alpha_{ap}} + E^M \alpha'_{ap}). \quad (3.4f)$$

Les équations sont exprimées dans le domaine de temps réduit τ , ce qui fait apparaître les facteurs b/U et b^2/U^2 dans les équations (3.4a) et (3.4b). L'intégration temporelle de ce système est réalisée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. À chaque pas de temps, les efforts aérodynamiques sont calculés à l'aide des équations (3.4c) à (3.4f) puis les valeurs de h , h' , α et α' sont calculées au même pas de temps à l'aide des équations (3.4a) et (3.4b). La résolution du système par

intégration temporelle implique l'usage d'une condition initiale. Comme zéro est toujours une solution d'équilibre du système, il faut que cette condition initiale soit non nulle pour observer d'éventuels cycles limites.

Afin de calculer le diagramme de bifurcation du système, les équations (3.4a) à (3.4f) sont intégrées temporellement pour une plage de vitesses d'écoulements croissantes puis décroissantes. On note U_{min} et U_{max} les valeurs minimales et maximales de cette plage de vitesse et dU le pas de vitesse. La vitesse U_{min} est choisie inférieure à la vitesse de flottement. À chaque pas de vitesse, si le système au pas de vitesse précédent converge vers zéro, la condition initiale est fixée à une valeur arbitraire, de l'ordre de 0.5 degré sur le mouvement de tangage. Sinon, la condition initiale est fixée égale à l'état du système au dernier pas de temps du pas de vitesse précédent. Puis, une fois la condition initiale établie, l'intégration temporelle est réalisée jusqu'à ce que la solution s'établisse sur un régime stable, avant de passer au pas de vitesse suivant. Les résultats de cette procédure sont présentés dans la section suivante.

3.2.2 Influence des efforts aérodynamiques

Le diagramme de bifurcation est calculé à partir de l'équation (3.4) avec les paramètres structuraux de l'expérience de flottement menée dans la section 2.1.2 et les coefficients de Petot du Tableau 3.2. Le résultat est tracé sur la Figure 3.7. De plus, $U_{min} = 4.3$ m/s, $U_{max} = 9$ m/s et $dU = 0.1$ m/s.

Le diagramme de bifurcation est composé de deux branches stables. Une branche inférieure correspondant à des petites amplitudes d'oscillations et une branche supérieure correspondant à des grandes amplitudes d'oscillations. La branche supérieure s'établissant à des amplitudes d'oscillations plus importantes que l'angle de décrochage de la plaque correspond à du flottement de décrochage. Quant à la branche inférieure, elle correspond à du flottement classique, c'est-à-dire du flottement par couplage de mode.

Afin de caractériser ces deux branches on utilise quatre constantes représentées sur la Figure 3.7(b) :

- La vitesse de flottement U_f ,
- La vitesse d'écoulement U_s à laquelle le flottement de décrochage s'établit,
- La vitesse d'écoulement U_c à laquelle le flottement cesse,
- Le saut d'amplitude α_J qui survient après U_s .

Si les vitesses U_c et U_f sont différentes, l'instabilité de flottement est sous-critique. C'est notamment le cas pour le diagramme de bifurcation présenté sur la Figure 3.7. Il est ainsi possible d'avoir une sous-criticalité provenant des efforts aérodynamiques. À notre connaissance, c'est la première fois que le décrochage dynamique est ainsi identifié comme cause de la possible sous-criticalité de l'instabilité de flottement.

Il y a une différence non négligeable entre le diagramme de bifurcation mesuré à la Figure 2.3 et

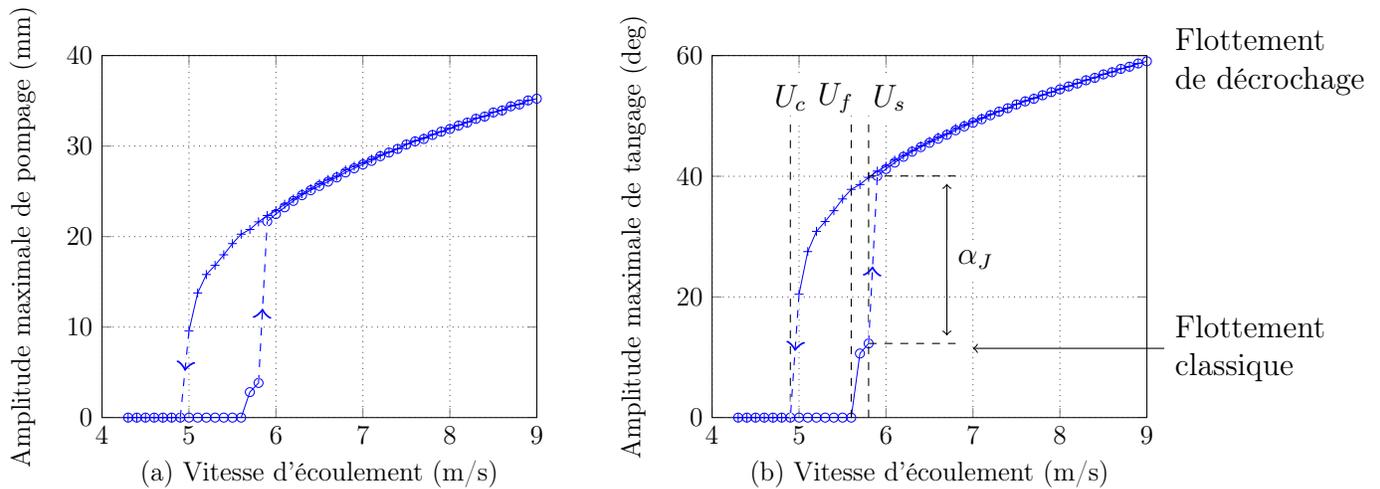


Figure 3.7 – Amplitude maximale en pompage (a) et tangage (b) calculée en résolvant le système d'équations (3.4) pour des vitesses d'écoulements croissantes [o] et décroissantes [+]. Les coefficients structuraux sont ceux du Tableau 2.1 et les coefficients de Petot ceux du Tableau 3.2

celui estimé à la Figure 3.7, principalement au niveau de l'amplitude des cycles limites ainsi que de la valeur de U_c . En effet, la vitesse U_c est estimée à 4.9 m/s et mesurée à 5.5 m/s et les cycles limites sont estimés à une amplitude de 60 % supérieure à la mesure. Cette différence peut s'expliquer par l'inexactitude, soit des paramètres structuraux, soit des coefficients de Petot. L'incertitude des mesures des paramètres structuraux étant relativement faible, le décalage entre diagramme de bifurcation mesuré et estimé provient plus certainement de l'inexactitude de l'estimation des efforts aérodynamiques, et donc des coefficients du modèle de Petot. D'autant plus que les deux plaques utilisées pour l'expérience de flottement et les mesures d'efforts aérodynamiques ne sont pas identiques et que les conditions d'écoulement ne sont pas les mêmes.

Il faut ainsi ajuster les coefficients du modèle de Petot pour obtenir un diagramme de bifurcation plus proche des mesures effectuées. Pour cela, on étudie l'influence des coefficients du modèle de Petot sur trois constantes du diagramme de bifurcation U_c , U_s et α_J . En effet U_f ne dépend que de la partie linéaire des équations. Le système (3.4) est ainsi résolu en faisant varier chacun des coefficients du modèle de Petot. L'influence de ces coefficients sur les constantes du diagramme de bifurcation est présentée dans le Tableau 3.3. Les signes "plus" indiquent le degré d'influence de chaque coefficient.

Afin d'expliquer la démarche qui a été utilisée, quatre exemples sont donnés sur la Figure 3.8, où la courbe bleue correspond au diagramme de bifurcation présenté sur la Figure 3.7. Les exemples ont été choisis pour couvrir les situations les plus variées possibles.

Sur la Figure 3.8(a), l'influence de a_0^L est tracée. En diminuant a_0^L de 0.16 à 0.1, la vitesse de

flottement de décrochage est significativement décalée, en effet U_s passe de 5.8 m/s à 6.7 m/s. De plus, le saut α_J passe de 27.7 degrés à 8.95 degrés et la sous-criticalité a disparu, ainsi $U_c = U_f$. Comme cela est montré dans le Tableau 3.3, a_0^L est le coefficient qui a le plus d'influence (+++) sur toutes les constantes du diagramme de bifurcation. L'influence de a_0^L (et dans une moindre mesure celle de a_0^M) sur les constantes du diagramme de bifurcation est importante car ce terme correspond à un coefficient d'amortissement dans l'équation (3.4c) et est ainsi plus à même d'influencer l'amplitude des cycles limites. L'influence de σ_2^M est tracée sur la Figure 3.8(b). Son effet est important (+++) sur α_J , modéré (++) sur U_c et négligeable (=) sur U_s . En comparaison avec a_0^L , la sous-criticalité n'est pas totalement annulée et le flottement de décrochage n'est quasiment pas décalé. Concernant κ_L , comme montré sur la Figure 3.8(c), son influence est importante (+++) sur U_s , mais modérée (++) sur α_J et U_c . Finalement, E_2^M a quasiment la même influence que σ_2^M , comme montré sur la Figure 3.8(d).

Dans la section suivante, à la lumière de l'influence de chaque coefficient du modèle de Petot sur le diagramme de bifurcation, les coefficients du Tableau 3.2 sont ajustés pour obtenir un diagramme de bifurcation le plus proche des mesures effectuées dans la section 2.1.2.

Cst. de bif.	Coeff. Petot	Linéaire					Non-linéaire			
		λ^L	κ^L	σ_0^L	r_0^L	a_0^L	σ_2^L	r_2^L	a_2^L	E_2^L
U_s		+	+++	=	++	+++	=	=	+	++
U_c		++	++	=	++	+++	++	++	+	+++
α_J		++	++	=	+++	+++	+++	+++	++	++
		λ^M	κ^M	σ_0^M	r_0^M	a_0^M	σ_2^M	r_2^M	a_2^M	E_2^M
U_s		=	+++	=	+	++	+	=	=	=
U_c		+	+++	=	+	++	+++	+	=	+++
α_J		++	++	=	+	++	+++	+	=	+++

Tableau 3.3 – Influence des coefficients du modèle de Petot sur les constantes du diagramme de bifurcation. Le nombre de signes "plus" indique le degré d'influence sur les constantes du diagramme de bifurcation, tandis que le signe égal indique qu'il n'y a pas d'effet.

3.2.3 Modèle ajusté à l'expérience de flottement

À l'aune du Tableau 3.3, le coefficient du modèle de Petot ayant la plus grande influence sur l'amplitude des cycles limites est a_0^L . C'est donc d'abord ce coefficient que l'on modifie afin d'ajus-

ter les résultats du modèle aux mesures. Il est choisi égal à 0.14 au lieu de 0.16. Afin d'affiner encore la prédiction du modèle à l'expérience, κ^M est choisi égal à 0.8 au lieu de 0.81 et a_2^M à -0.1 au lieu de -0.026. Le jeu de coefficients retenu est donné dans le Tableau 3.4 et le diagramme de bifurcation correspondant tracé sur la Figure 3.9.

La vitesse d'écoulement U_c est très bien prédite par le modèle, en effet elle est estimée à 5.6 m/s et mesurée à 5.5 m/s. De plus, la différence entre l'estimation du modèle et la mesure de l'amplitude des cycles limites sur le mouvement de tangage est de 14.1 % et sur le mouvement de pompage de 5.2 %. L'estimation est moins bonne pour le mouvement de tangage car son amplitude est fortement liée au moment aérodynamique, or le modèle de Petot utilisé est plutôt destiné à l'estimation de la force de portance même s'il donne des résultats corrects pour le moment aérodynamique. En outre, le modèle estime que la bifurcation est légèrement sous-critique, ce que la mesure ne permet pas d'observer.

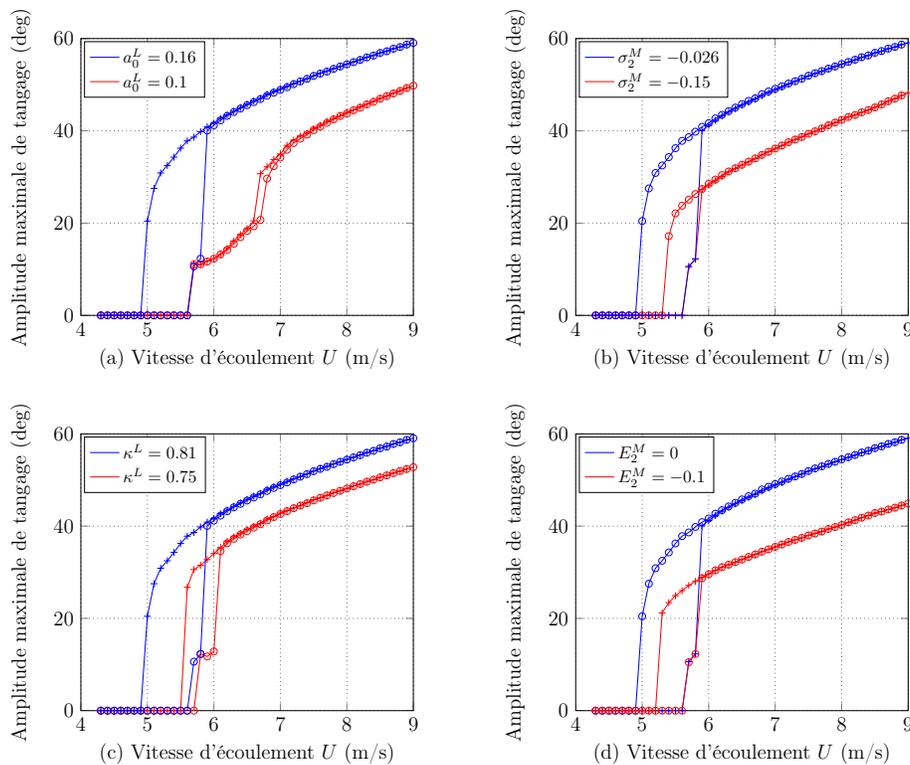


Figure 3.8 – Influence de quatre coefficients du modèle de Petot sur le diagramme de bifurcation. La courbe bleue est la courbe de référence présenté sur la Figure 3.7 tandis que la courbe rouge correspond au coefficient du modèle de Petot modifié.

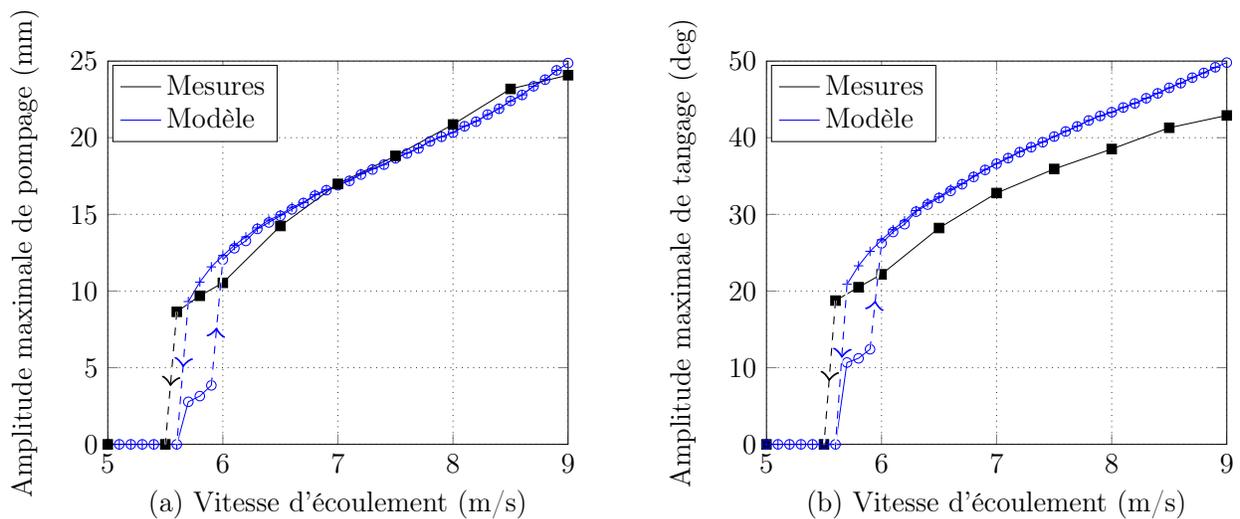


Figure 3.9 – Amplitude maximale en pompage (a) et tangage (b) calculée en résolvant le système d'équations (3.4) pour des vitesses d'écoulements croissantes [o] et décroissantes [+]. Les coefficients structuraux sont ceux du Tableau 2.1 et les coefficients de Petot ceux du Tableau 3.4

Coefficient du modèle de portance	λ^L	κ^L	σ_0^L	r_0^L	a_0^L	σ_2^L	r_2^L	a_2^L	E_2^L
Valeur	0.119	0.8	0.1	0.15	0.14	-0.005	0.09	0.26	-0.004

Coefficient du modèle de moment aérodynamique	λ^M	κ^M	σ_0^M	r_0^M	a_0^M	σ_2^M	r_2^M	a_2^M	E_2^M
Valeur	0.1	0.43	0.15	0.19	0.4	-0.1	0	0.08	0

Tableau 3.4 – Coefficients du modèle de Petot ajustés à l'aide de la mesure du diagramme de bifurcation présentée section 2.2.2. Une comparaison entre les mesures et le modèle utilisant ces coefficients est donnée sur la Figure 3.9.

Conclusion de la première partie

Nous avons montré dans cette partie la modélisation du système aéroélastique dans le régime linéaire ainsi que dans le régime post-flottement. Le modèle d'aile à deux degrés de liberté ainsi que l'estimation des efforts aérodynamiques dans le régime linéaire ont été présentés. Des mesures ont été effectuées sur un montage de flottement à deux degrés de liberté, avec un profil de plaque plane, pour mettre en évidence l'établissement de cycles limites une fois l'instabilité de flottement apparue ainsi que l'évolution de ces cycles limites en fonction de la vitesse de l'écoulement. Les efforts aérodynamiques ont été mesurés sur une plaque plane contrôlée en rotation afin d'identifier le phénomène non linéaire de décrochage dynamique responsable de la formation des cycles limites. Le décrochage dynamique a été modélisé à l'aide du modèle semi-empirique de Petot, dont les mesures d'efforts aérodynamiques en grand déplacement ont servi à ajuster ses coefficients. Le modèle aéroélastique initial a été enrichi du modèle de Petot afin de pouvoir prédire l'évolution des cycles limites dans le régime post-flottement. Les coefficients du modèle de Petot ont été ajustés à l'aide du diagramme de bifurcation mesuré avec le montage de flottement. Bien que faisant intervenir des phénomènes physiques complexes, les résultats obtenus sont très satisfaisants et encourageants. Les deux prochaines parties s'intéressent au contrôle de cette instabilité de flottement à l'aide de stratégies passives. Nous commençons, dans la partie suivante, par la prise en compte d'un amortisseur hystérétique, réalisé avec des ressorts en alliages à mémoire de forme (AMF) en régime pseudo-élastique. Cette partie est composée des deux chapitres 4 et 5. Le fonctionnement des AMF ainsi que le comportement de leur force de rappel lorsqu'ils sont utilisés sous forme de ressort sont présentés dans le chapitre 4. Leur utilisation dans le contexte de l'instabilité de flottement fait l'objet du chapitre 5.

Deuxième partie

Influence d'un amortisseur hystérétique sur
l'instabilité de flottement

Chapitre 4

Comportement pseudo-élastique des AMF et modélisation phénoménologique

Résumé

Afin de réduire l'amplitude des cycles limites qui se développent pendant l'instabilité de flottement, on se propose d'étudier l'influence d'un amortisseur hystérétique. Cet amortisseur est réalisé à l'aide de ressorts en alliage à mémoire de forme (AMF). Ces alliages possèdent, en régime pseudo-élastique, une force de rappel hystérétique prompte à dissiper une grande quantité d'énergie. Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler les propriétés physiques essentielles des AMF et plus particulièrement leur régime pseudo-élastique. La force de rappel de ressorts de traction composés d'AMF est ensuite mesurée en régime pseudo-élastique. Enfin, une modélisation de ces observations à l'aide d'un modèle phénoménologique de Bouc-Wen est présentée.

Sommaire

4.1	Comportement des alliages à mémoire de forme	62
4.1.1	Une histoire de changement de phase	62
4.1.2	Comportement pseudo-élastique des AMF	63
4.1.3	Présentation des ressorts en AMF	66
4.2	Mesures de la force de rappel des ressorts en AMF	66
4.2.1	Comportement quasi-statique	67
4.2.2	Comportement dynamique	69
4.3	Modèle de Bouc-Wen	73
4.3.1	Description du modèle	74
4.3.2	Comparaison avec les mesures	74

4.1 Comportement des alliages à mémoire de forme

Afin de réaliser l'amortisseur hystérétique, il a été choisi d'utiliser des ressorts en alliage à mémoire de forme (AMF). La première étude sur ce type d'alliage a été faite par Ölander [66] avec un assemblage d'or et de cadmium. On présente dans cette section les principes physiques du comportement des AMF et le mécanisme qui leur confère une grande capacité de dissipation d'énergie.

4.1.1 Une histoire de changement de phase

Les alliages à mémoire de forme sont des polycristaux ayant deux phases solides [67]. Une phase austénite, énergétiquement stable à haute température, dont la microstructure cristalline est schématisée Figure 4.1, et une phase martensite, énergétiquement stable à basse température, dont la microstructure est soit orientée, soit auto-accommodée, comme schématisé Figure 4.1. Pour passer d'une phase solide à l'autre, ces alliages subissent une transformation displacive, schématisée Figure 4.2, les atomes de la structure cristalline se déplacent les uns par rapport aux autres sans que les liaisons atomiques ne se brisent, contrairement aux transformations diffusives où il y a diffusion d'atomes. Cette capacité de changer de phase sans diffuser d'atomes est à l'origine du caractère « mémoire de forme » des AMF. La transformation displacive peut être provoquée en faisant varier la température de l'alliage ou en lui appliquant une contrainte. Dans tous les cas, le changement de phase se fait au prix d'un transfert thermique.



Figure 4.1 – Microstructures cristallines des alliages à mémoire de forme.

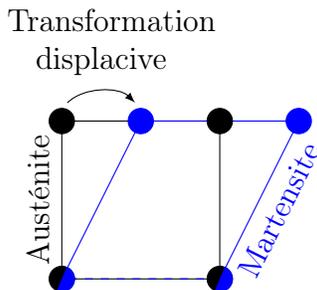


Figure 4.2 – Transformation displacive de la phase austénite à la phase martensite.

Afin de comprendre comment le passage d'une phase solide à l'autre s'effectue, on trace sur la Figure 4.3 le diagramme contrainte-température théorique d'un AMF. Les températures T_{A_d} et T_{A_f} sont respectivement les températures de début et de fin de la transformation austénitique et les températures T_{M_d} et T_{M_f} sont celles de début et de fin de la transformation martensitique. Le passage d'une phase de l'AMF à l'autre peut être illustré par l'exemple suivant : l'AMF est placé à une température supérieure à T_{A_f} sans contrainte (point 1 de la Figure 4.3), il est alors en phase austénite. Puis, à contrainte nulle, on refroidit l'AMF jusqu'à une température inférieure à T_{M_f} , point 2 de la Figure 4.3. Entre les températures T_{M_d} et T_{M_f} , la transformation martensitique s'effectue. L'AMF est alors en phase martensite auto-accommodée. Comme l'AMF n'est soumis à aucune contrainte, sa micro-structure n'a pas de direction privilégiée, ce qui justifie la dénomination auto-accommodée. Si maintenant une contrainte est appliquée à l'AMF, sa micro-structure va se déformer pour conduire à une phase de martensite orientée, point 3 de la Figure 4.3. C'est entre les étapes 2 et 3 que l'AMF peut être déformé de façon importante, en effet la déformation de l'alliage peut atteindre jusqu'à 10 %. Si l'AMF est maintenant chauffé à une température supérieure à T_{A_f} , il se trouve à nouveau dans sa phase austénite, point 4 de la Figure 4.3, et retrouve son état original. La transformation austénitique s'effectuant entre les températures T_{A_d} et T_{A_f} . C'est pour cela que ces alliages sont appelés à mémoire de forme, ils peuvent retrouver leur forme initiale après une importante déformation.

4.1.2 Comportement pseudo-élastique des AMF

En plus de retrouver leur forme originale après une grande déformation, les AMF ont un comportement pseudo-élastique, c'est à dire que leur module d'élasticité varie de façon réversible en fonction de leur teneur en austénite et en martensite. C'est ce comportement pseudo-élastique que l'on utilise dans le cadre de la thèse car il permet de dissiper une grande quantité d'énergie. Le comportement pseudo-élastique de l'AMF s'observe en lui appliquant une contrainte cyclique à

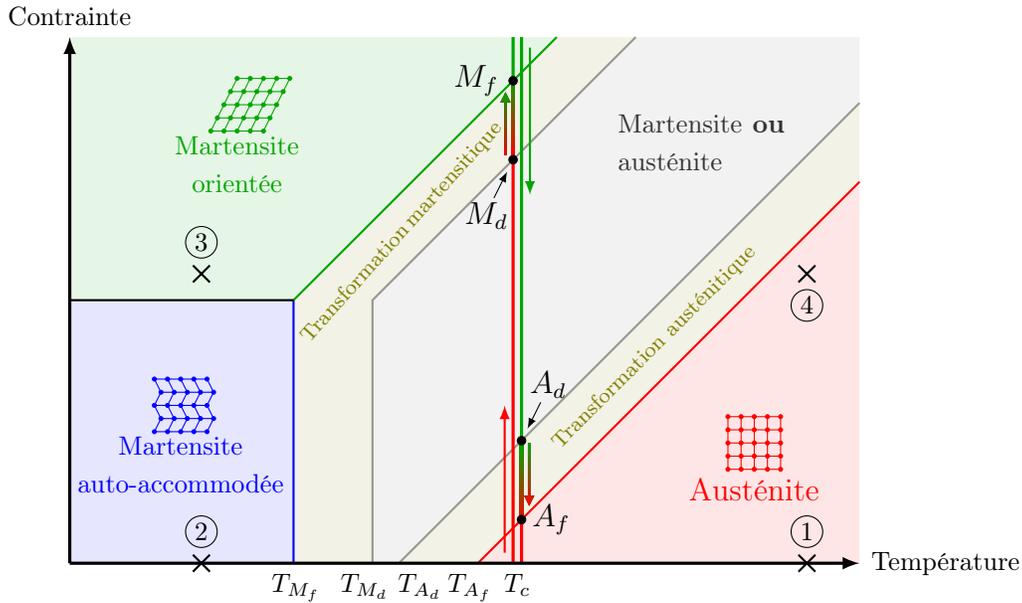


Figure 4.3 – Diagramme contrainte-température théorique d'un AMF. T_{A_d} et T_{A_f} sont respectivement les températures de début et de fin de la transformation austénitique et T_{M_d} et T_{M_f} sont celles de début et de fin de la transformation martensitique. Pour une contrainte cyclique à température constante, A_d et A_f sont respectivement le début et la fin de la transformation austénitique et M_d et M_f le début et la fin de la transformation martensitique.

une température constante T_c , comme représenté sur la Figure 4.3. Les points A_d et A_f désignent alors respectivement le début et la fin de la transformation austénitique et les points M_d et M_f le début et la fin de la transformation martensitique. Les étapes du chemin parcouru par l'AMF sous une contrainte cyclique pour une température T_c sont résumées dans le Tableau 4.1.

On peut remarquer deux faits notables. D'une part, entre M_d et M_f et entre A_d et A_f , la microstructure de l'AMF est composée à la fois d'austénite et de martensite. Dans cette configuration, la raideur de l'AMF est plus faible, ainsi le changement de phase s'accompagne d'un changement de raideur. D'autre part, les points A_f et M_d et les points A_d et M_f ne sont pas confondus. Cela signifie que lorsque le matériau est chargé puis déchargé, les changements de phase ne se font pas au même moment. La réponse de l'AMF est ainsi hystérétique. C'est ce comportement dont on tire parti pour le contrôle de l'instabilité de flottement car il permet de dissiper une grande quantité d'énergie.

Afin d'observer le comportement pseudo-élastique de l'AMF, on trace le chemin représenté en

Position sur le diagramme contrainte-température	Évolution de la contrainte	Composition cristallographique
Avant M_d	Croissante	Austénite
Entre M_d et M_f	Croissante	Austénite + Martensite orientée
Après M_f	Décroissante	Martensite orientée
Entre A_d et A_f	Décroissante	Martensite orientée + Austénite
Après A_f	Décroissante	Austénite

Tableau 4.1 – Étapes du chargement cyclique de l'AMF à la température T_c comme matérialisé sur le diagramme contrainte-température Figure 4.3

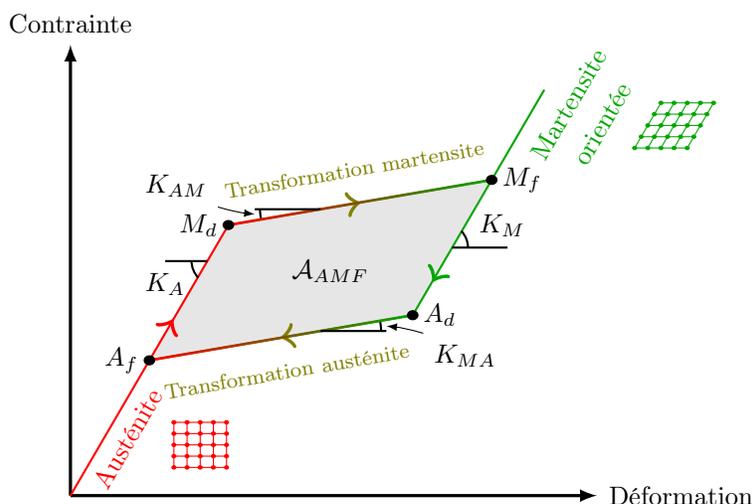


Figure 4.4 – Diagramme contrainte-déformation d'un AMF pour la température T_c comme représentée Figure 4.3.

Figure 4.3 dans le plan contrainte-déformation sur la Figure 4.4. La raideur en phase austénite est notée K_A , en phase martensite K_M , pendant la transformation martensitique K_{AM} et pendant la transformation austénitique K_{MA} . Les deux dernières raideurs correspondent à une coexistence d'austénite et de martensite. Ainsi, la boucle d'hystérésis de l'AMF est entièrement définie par les quatre raideurs K_A , K_M , K_{AM} et K_{MA} et les quatre points M_d , M_f , A_d et A_f .

L'énergie dissipée par l'AMF durant un cycle de déformation est égale à l'aire de sa boucle d'hystérésis, notée \mathcal{A}_{AMF} . Ainsi plus la déformation de l'AMF est importante, plus il dissipera d'énergie, cette énergie étant dissipée sous la forme d'échange thermique.

Afin d'activer le comportement hystérétique de l'AMF dans le cas d'une contrainte cyclique, il

faut que la contrainte dépasse M_d lorsqu'elle est croissante et qu'elle dépasse A_d lorsqu'elle est décroissante. De plus, pour que la boucle d'hystérésis de l'AMF soit maximale, il faut qu'au cours du cycle de chargement, l'AMF soit, lors de la charge minimum, en phase austénite et lors de la charge maximum, en phase martensite, afin de recouvrir toute sa boucle d'hystérésis.

4.1.3 Présentation des ressorts en AMF

Les alliages à mémoire de forme sont utilisés dans de nombreux contextes industriels [40], comme par exemple l'industrie médicale, le génie civil ou encore l'aéronautique. Concernant le contrôle de vibration, la plupart des travaux s'intéresse à la protection des structures de génie civil des excitations extérieures et principalement des tremblements de terre [78]. L'idée étant de faire travailler l'AMF lorsque la structure entre en vibration pour dissiper l'énergie de cette vibration. Les alliages à mémoire de forme peuvent être réalisés à partir de nombreux métaux différents (Cuivre, Zinc, Nickel, Aluminium, Titane, Fer, ...). Néanmoins, l'alliage le plus souvent utilisé est un assemblage de Nickel et de Titane, noté NiTi et souvent appelé sous sa dénomination commerciale Nitinol. Il est composé à environ moitié de Nickel et de Titane. Sa large utilisation peut-être justifiée par son relatif faible coût de fabrication, sa bonne résistance à la corrosion, sa compatibilité avec des applications biomédicales ou encore sa bonne résistivité électrique [40], ce qui est intéressant quand on veut le chauffer à l'aide d'un courant électrique.

Dans le cadre de la thèse, l'AMF a été fourni par l'entreprise Nimesis [65], ils s'agit d'un alliage NiTi contenant 56.46 % de Nickel et 43.34 % de Titane, la température de fin de transformation austénitique, T_{A_f} , est de 27°C. Afin de l'inclure dans le montage de flottement, l'AMF est utilisé sous forme de ressort de traction à spires jointives. Le diamètre extérieur du ressort est égal à 4 mm, sa longueur à 50 mm et le diamètre du fil du ressort à 0.5 mm. L'élongation du ressort en AMF provoque la torsion du fil le composant, ce qui déforme l'AMF et engendre le changement de phase. Une photographie des ressorts utilisés est donnée Figure 4.5.

Les ressorts en AMF sont utilisés à température ambiante ($\sim 20^\circ\text{C}$), ce qui est en deçà de T_{A_f} . Ainsi, au repos, le ressort n'est pas uniquement composé d'austénite et l'entièreté de la boucle d'hystérésis du diagramme contrainte-déformation n'est pas parcourue. Néanmoins, le ressort ne pouvant travailler qu'en traction, il doit avoir une élongation moyenne non nulle et la contrainte minimale d'un cycle n'est ainsi pas forcément nulle. Ainsi, même si T_{A_f} était inférieure à la température ambiante, la boucle d'hystérésis de l'AMF ne serait pas entièrement parcourue.

4.2 Mesures de la force de rappel des ressorts en AMF

Avant d'utiliser les ressorts en AMF sur le montage de flottement, il faut connaître leur force de rappel, notée F_{NL}^{AMF} , et particulièrement sa dépendance au taux d'élongation et à la fréquence d'excitation du ressort. Pour cela des essais de traction ont été conduits. Tout d'abord en impo-

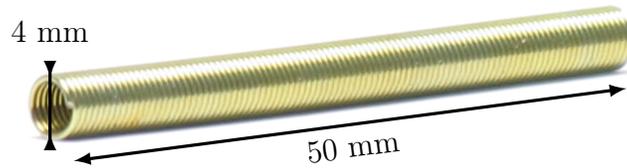


Figure 4.5 – Un des ressorts en AMF utilisé comme amortisseur hystérétique.

sant un chargement quasi-statique afin de connaître la dépendance de la force de rappel au taux d'élongation, puis en imposant un chargement dynamique afin de connaître la dépendance de la force de rappel à la fréquence d'excitation.

4.2.1 Comportement quasi-statique

Afin de réaliser les essais de traction quasi-statique on utilise le dispositif expérimental représenté sur la Figure 4.6. Il est composé d'un robot de déplacement auquel est attaché une extrémité du ressort afin de lui imposer son élongation suivant l'axe du ressort. L'autre extrémité du ressort est fixée à une balance servant à mesurer sa force de rappel. Ainsi, le robot impose une élongation au ressort, notée $l(t)$, et la balance mesure la force de rappel correspondante. L'évolution de $l(t)$ en fonction du temps est représentée Figure 4.7.

Le robot de déplacement reste pendant le temps δt à chaque élongation, la mesure de la balance est acquise à la fin de δt puis le robot monte ou descend de la distance δl . Les mesures présentées ici ont été réalisées pour $\delta t = 10 s$ et $\delta l = 0.5$ ou $1 mm$. L'amplitude de $l(t)$ est notée Δl et l'amplitude moyenne l_m , comme représenté sur la Figure 4.7. Les taux d'élongation sont notés ε , ils sont calculés par rapport à la longueur à vide du ressort, notée l_0 . Les mesures ont été menées pour $l(0) = l_m + \Delta l$, courbe rouge sur la Figure 4.7, $l(0) = l_m$, courbe bleue sur la Figure 4.7 et $l(0) = l_m - \Delta l$, courbe noire sur la Figure 4.7.

On trace la force de rappel F_{NL}^{AMF} d'un ressort en AMF en fonction de son taux d'élongation ε sur la Figure 4.8(a) pour $\varepsilon_m = 9.5$, $\Delta \varepsilon = [1.2 \dots 4]$, $\delta \varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon(0) = \varepsilon_m$. Lorsque $\Delta \varepsilon$ est faible, la raideur des ressorts en AMF varie peu car le changement de phase ne se fait pas complètement, on dit dans ce cas que l'AMF reste dans sa boucle interne car toute la boucle d'hystérésis n'est pas parcourue. Lorsque $\Delta \varepsilon$ est important, la raideur des ressorts en AMF varie de façon importante car le changement de phase est plus conséquent, cela s'observe bien sur la plus grande boucle de la Figure 4.8(a).

Afin de quantifier l'énergie dissipée par les ressorts en AMF, ce qui est l'élément clé pour lequel ils sont utilisés ici, on utilise le taux d'amortissement introduit par Carpineto *et al.* [12], noté ζ_{AMF} , et égal à

$$\zeta_{AMF} = \frac{\mathcal{A}_{AMF}}{K_G (2 \Delta l)^2},$$

où K_G est la raideur moyenne du ressort en AMF comme définie sur la Figure 4.8(a). On mesure cette quantité pour différents $\Delta \varepsilon$ et ε_m sur la Figure 4.8(b).

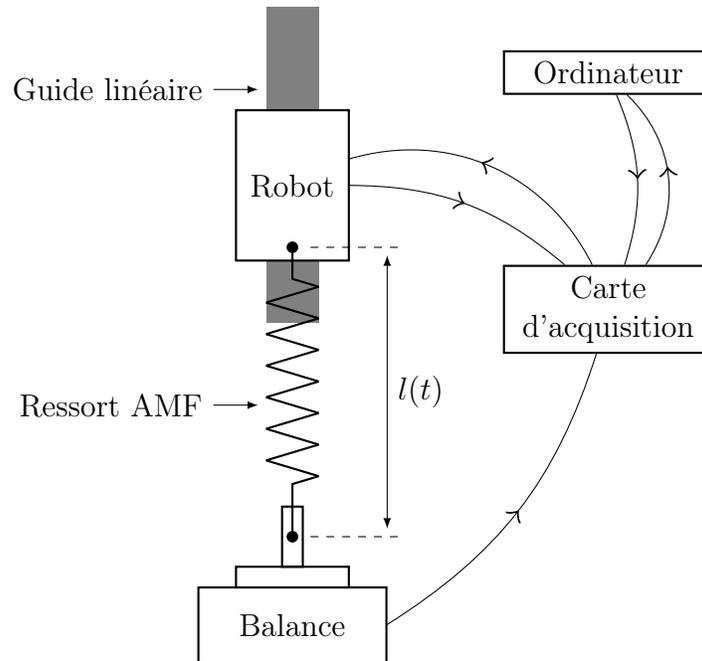


Figure 4.6 – Montage expérimental des essais de tractions quasi-statiques.

Alors que ζ_{AMF} est faiblement influencé par le taux d'élongation moyen ε_m , il est directement proportionnel à l'amplitude du taux d'élongation $\Delta \varepsilon$. En effet pour que ζ_{AMF} varie significativement, il faut que le changement de phase austénite-martensite se fasse le plus complètement possible, c'est à dire que la contrainte de l'AMF dépasse M_f et A_f , ce qui est obtenu en augmentant $\Delta \varepsilon$. C'est ainsi ce paramètre qui permet de maximiser la capacité d'amortissement du ressort en AMF.

Le changement de phase étant réalisé au prix d'un échange thermique entre l'AMF et le milieu extérieur, si l'AMF est contraint dynamiquement, il n'aura pas le temps d'évacuer la chaleur créée par le changement de phase. Il faut ainsi regarder l'influence de la fréquence d'excitation sur la force de rappel des ressorts en AMF, ce qui est présenté dans la section suivante.

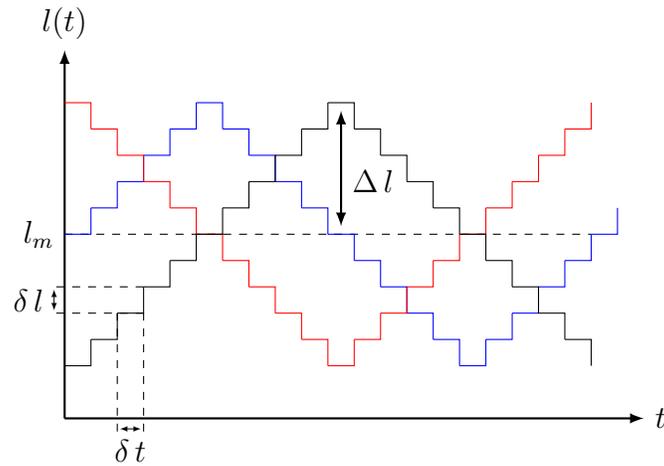


Figure 4.7 – Trois types d'élongations imposées au ressort lors des essais de traction quasi-statiques.

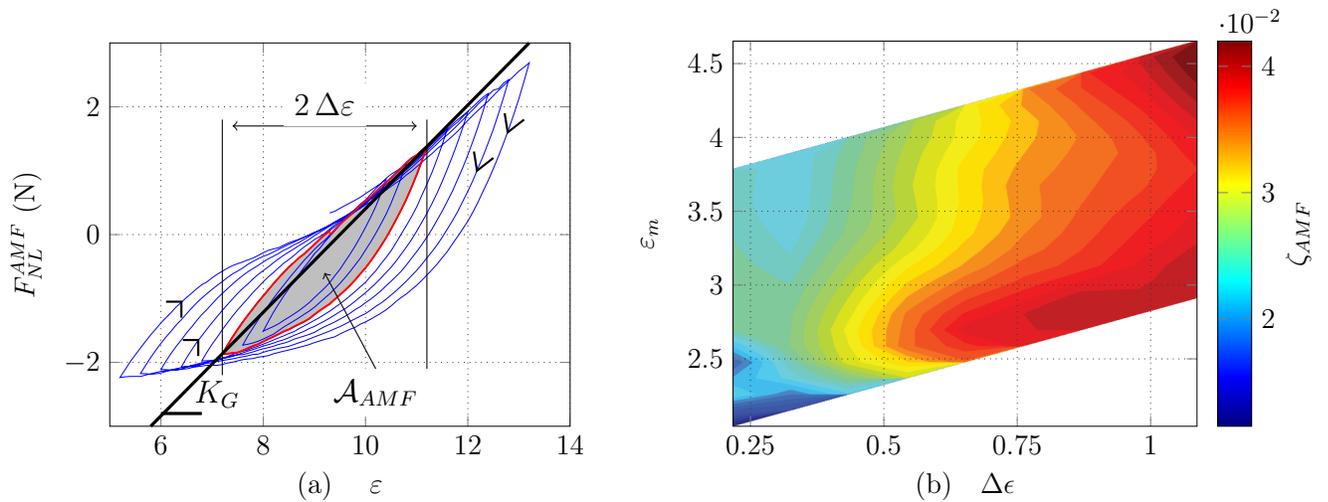


Figure 4.8 – Mesure quasi-statique de la force de rappel d'un ressort en AMF. (a) Exemple pour différentes amplitudes de chargement $\Delta \varepsilon$, un taux d'élongation moyen $\varepsilon_m = 9.5$ et un pas de chargement $\delta \varepsilon = 0.1$. (b) Évolution du taux d'amortissement ζ_{SMA} des ressorts en AMF en fonction de $\Delta \varepsilon$ et ε_m .

4.2.2 Comportement dynamique

Afin de réaliser les essais de traction dynamique, on utilise le dispositif expérimental représenté sur la Figure 4.9. Il est composé d'un ensemble moteur-bielle-manivelle auquel est fixé une

extrémité du ressort en AMF et qui lui impose son élongation suivant son axe de traction, l'autre extrémité du ressort est fixée à un capteur de force PCB 208-C03 qui mesure sa force de rappel. Le déplacement de l'extrémité du ressort fixée à l'ensemble moteur-bielle-manivelle est mesuré à l'aide d'un micromètre optique Keyence LS-7070M. L'élongation imposée par le moteur au ressort est de la forme $\varepsilon(t) = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon \sin(2\pi f_e t)$, où f_e est la fréquence d'excitation. On trace sur la Figure 4.10(a) la force de rappel du ressort en AMF pour une fréquence d'excitation $f_e = 5$ Hz, une amplitude de taux d'élongation $\Delta\varepsilon = 3$ et une élongation moyenne $\varepsilon_m = 6$, en comparaison avec un essai quasi-statique aux mêmes $\Delta\varepsilon$ et ε_m .

La différence principale entre l'essai quasi-statique et l'essai dynamique est la taille de la boucle d'hystérésis, ce qui signifie que les ressorts en AMF sont moins à même de dissiper de l'énergie lorsqu'ils sont déformés dynamiquement. En effet, la transformation martensitique, qui est provoquée quand l'AMF est chargé, est exothermique. Ainsi, si le chargement est dynamique, la chaleur engendrée par cette transformation n'a pas le temps d'être évacuée et le changement de phase n'est plus isotherme. D'après la Figure 4.3, si la température augmente, la fin de la transformation martensitique, correspondant au point M_f , se fait à un niveau de contrainte plus élevé, ainsi la raideur K_{AM} est plus élevée. De même, lorsque l'AMF est déchargé, si la température engendrée par la transformation martensitique n'est toujours pas évacuée, le début de la transformation austénitique, correspondant au point A_d , se fait à un niveau de contrainte plus élevé. Puis, comme la transformation austénitique est endothermique, la température de l'AMF diminue et la fin de la transformation austénitique, correspondant au point A_f , se fait à un niveau de contrainte plus faible et K_{MA} est ainsi plus élevé que dans le cas isotherme. Pour résumer, si le chargement est dynamique les points M_f et A_d augmentent et le point A_f diminue. Cela a pour effet de diminuer l'aire de la boucle d'hystérésis de l'AMF.

Il a été observé dans la littérature [19, 37, 85, 99] que la taille de la boucle d'hystérésis passait par un maximum pour une fréquence d'excitation donnée, notée f_{opt} et généralement inférieure à 10^{-1} Hz. Cette fréquence d'excitation est en fait liée au temps caractéristique de dissipation de la chaleur engendrée par la transformation martensitique. En effet, si à la fin de la transformation martensitique cette chaleur a été évacuée, le point A_d n'est pas plus élevé que pour une transformation isotherme. Dans ce cas, le point M_f est plus haut et le point A_f plus bas, ce qui a pour effet d'augmenter la taille de la boucle d'hystérésis. Un exemple tiré d'un article de He *et al.* [38] est donné comme illustration sur la Figure 4.11.

Dans notre étude, les ressorts en AMF sont utilisés aux fréquences de flottement (~ 4 Hz). Ainsi, c'est dans cette gamme de fréquences qu'il est intéressant de connaître le comportement des ressorts en AMF. Pour cela, on trace sur la Figure 4.10(b) l'évolution du taux d'amortissement ζ_{AMF} des ressorts en AMF en fonction de la fréquence d'excitation f_e . Le taux d'amortissement ζ_{AMF} est maximum pour la plus faible fréquence d'excitation mesurée puis diminue de façon monotone et se stabilise pour $f_e \simeq 0.3$ Hz, ainsi il est raisonnable de penser que les fréquences d'excitation testées sont supérieures à f_{opt} .

Même si le taux d'amortissement des ressorts en AMF est moins important pour la fréquence

de flottement que pour des fréquences plus faibles, l'effet hystérétique est toujours présent et les ressorts en AMF restent un candidat intéressant pour le contrôle passif du flottement. De plus, la courbe présentée à la Figure 4.10(b) est valable uniquement pour le ressort utilisé dans les conditions de l'essai, qui correspondent aux conditions de l'expérience. Mais si le matériau, les caractéristiques géométriques du ressort ou l'environnement extérieur varient, cette courbe ne sera plus la même. Les ressorts en AMF ayant été commandés en début de thèse, leur comportement ainsi que leur plage de fonctionnement n'étaient alors pas encore connus. Ainsi, si la plage de fonctionnement des ressort en AMF est connue a priori, il est envisageable, dès la conception, d'améliorer encore leur capacité à contrôler l'instabilité de flottement.

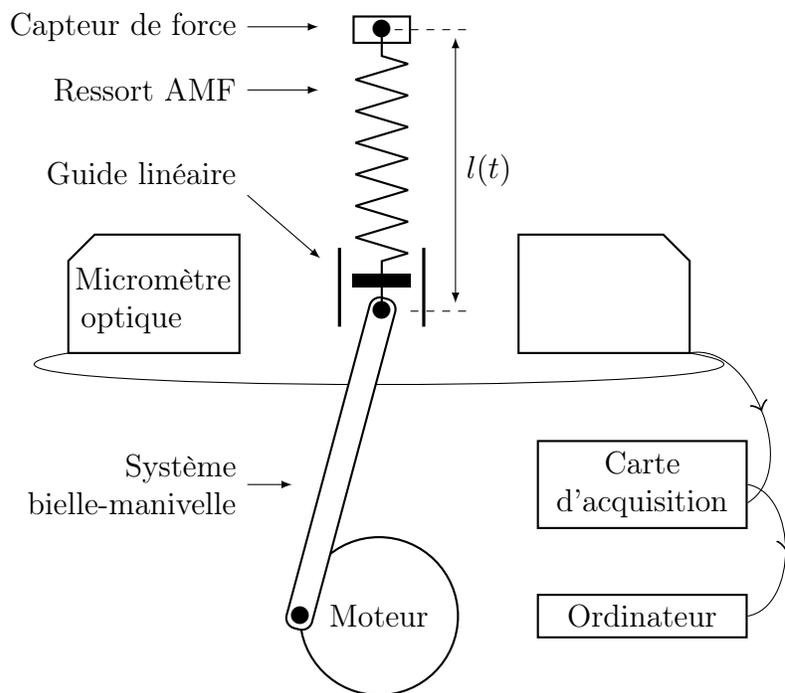


Figure 4.9 – Montage expérimental des essais de tractions dynamiques.

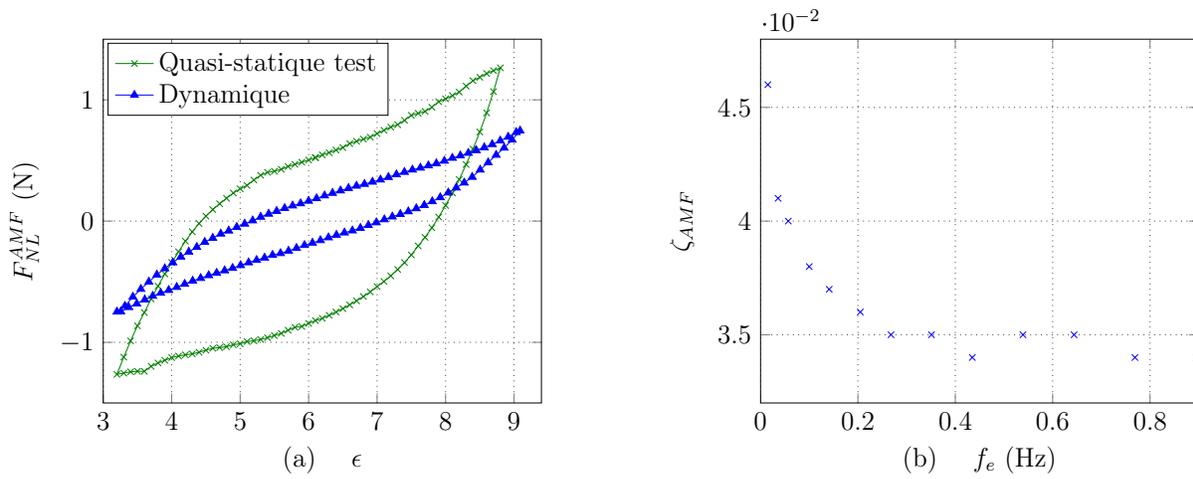


Figure 4.10 – Essai de traction des ressorts en AMF. (a) Comparaison entre un chargement quasi-statique et dynamique et (b) influence de la fréquence d’excitation f_e sur le taux d’amortissement ζ_{AMF} du ressort en AMF.

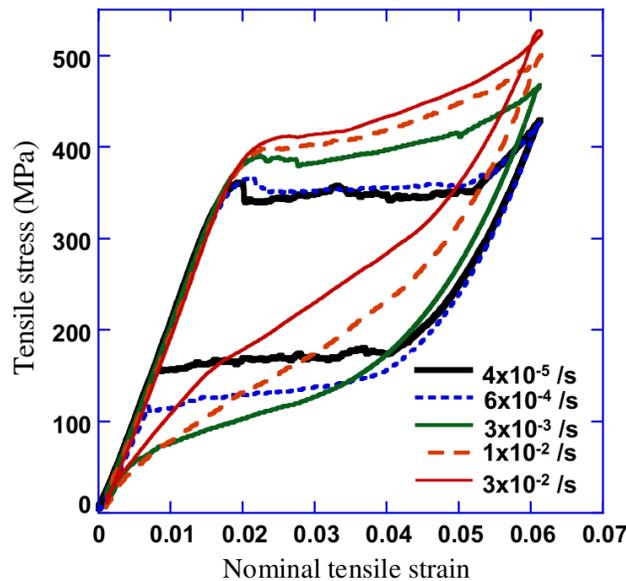


Figure 4.11 – Mesure de l’effet de la fréquence d’excitation sur la boucle d’hystérésis d’un AMF. La mesure a été réalisé par He *et al.* [38]. La fréquence d’excitation optimale f_{opt} correspond à la courbe verte.

4.3 Modèle de Bouc-Wen

Afin de modéliser l'influence des ressorts en AMF sur l'instabilité de flottement, il faut estimer leur force de rappel. De nombreuses études dans la littérature s'intéressent à la modélisation des AMF en régime pseudo-élastique [7, 45, 47, 67, 68, 74]. Ces modèles sont généralement des modèles tridimensionnels utilisant des lois thermodynamiques. De plus, ils utilisent des équations décrivant l'évolution de la fraction de martensite dans l'alliage, les échanges de chaleur et les forces thermodynamiques provenant d'un pseudo-potential de dissipation qui peut inclure des fonctions critères décrivant les transformations de phase, comme expliqué par exemple par M. Ould Moussa [68]. Ces modèles, bien que décrivant fidèlement le comportement mécanique des AMF, sont relativement lourds d'utilisation. D'autant plus que l'AMF n'est pas déformé de manière homogène. En effet, c'est l'élongation du ressort qui cause sa déformation en provoquant la torsion du fil le composant. Ainsi, l'AMF est principalement déformé sur la partie extérieure de sa section et il faut alors prendre en compte la façon dont l'AMF est déformé en fonction de l'élongation du ressort. Cela complique ainsi encore plus la prédiction de la force de rappel des ressorts en AMF par les modèles cités précédemment.

Contrairement à cette approche, il a été choisi au cours de la thèse de recourir à un modèle phénoménologique estimant directement la force de rappel des ressorts en AMF. Une première stratégie a été de modéliser directement les différentes raideurs de la force de rappel des ressorts en AMF à l'aide de sections de droites. Ainsi, en fonction de l'élongation du ressort et de son « histoire », le modèle affecte la force de rappel correspondante en s'appuyant sur les sections de droites. L'utilisation de ce modèle a fait l'objet d'une publication [58] donnée en annexe, et est résumée dans la section 5.2. Bien que ce modèle reproduise bien le comportement global de la force de rappel de l'AMF, il n'estime pas assez fidèlement la force de rappel des ressorts en AMF utilisés dans cette étude. En effet, il ne prend pas en compte le fait que même pour une élongation faible, la force de rappel des ressorts en AMF est hystérétique, ce qui est notamment montré sur la Figure 4.8. Or cela est déterminant lorsque les ressorts en AMF sont utilisés pour contrôler le flottement. En effet, plus tôt les ressorts en AMF ont un comportement hystérétique, plus le mouvement du profil sera amorti rapidement. Il est ainsi essentiel de modéliser correctement le comportement des ressorts en AMF pour des faibles taux d'élongations.

Pour ces raisons, nous nous sommes tournés vers des modèles hystérétiques de la littérature. Il en existe un grand nombre, on peut citer notamment celui de Duhem [22], de Dahl [15] ou encore de Bouc et Wen [9, 98]. Tous ces modèles font intervenir des formulations différentielles et utilisent des fonctions discontinues. Le modèle retenu est celui de Bouc-Wen, en effet ce modèle a déjà été utilisé par Carboni [11] pour modéliser la force de rappel d'un dispositif utilisant des fils en AMF et a donné des résultats satisfaisants. Pour identifier les coefficients de ce modèle phénoménologique, les mesures présentées section 4.2 sont utilisées.

4.3.1 Description du modèle

La formulation retenue pour la force de rappel F_{NL}^{AMF} provenant du modèle de Bouc-Wen s'écrit

$$F_{NL}^{AMF}(h, t) = k_E h + k_3 h^3 + z(t), \quad (4.1)$$

où k_E représente la raideur globale de l'AMF et k_3 le comportement potentiellement raidissant ou assouplissant de la force de rappel aux grandes amplitudes. Le comportement hystérétique est modélisé à l'aide de la fonction $z(t)$, qui est calculée à partir de l'équation différentielle de premier ordre suivante,

$$\dot{z} = [k_D - |z|^n(\gamma + \beta \text{sign}(\dot{h}z))] \dot{h}, \quad (4.2)$$

où k_D contribue de manière analogue à k_E à la raideur globale de la force de rappel. D'autre part, β , γ et n sont les coefficients modélisant la forme de la boucle d'hystérésis de F_{NL}^{AMF} . Le coefficient β permet de modifier la valeur de K_A , le coefficient γ celle de K_{AM} et n le rapport entre K_A et K_{AM} . Finalement $\text{sign}()$ désigne la fonction signe.

La force de rappel prédite par le modèle de Bouc-Wen est symétrique, ce qui signifie que les raideurs K_A et K_M sont supposées égales de même que les raideurs K_{AM} et K_{MA} . Ainsi β , γ et n influent sur toutes les parties de la boucle d'hystérésis. Le caractère symétrique de la force de rappel des ressorts en AMF a bien été observé expérimentalement pour les différentes élongations testées, l'hypothèse de symétrie du modèle de Bouc-Wen n'est donc pas gênante. Il est néanmoins possible, en prenant une expression modifiée du modèle de Bouc-Wen, de simuler des forces de rappel asymétriques [84].

Les coefficients k_D , k_E , k_3 , β , γ et n sont ajustés à l'aide de la fonction de minimisation sous contrainte non linéaire *fmincon* de Matlab. La fonction coût à minimiser est la différence au carré entre les prédictions du modèle et les essais présentés dans la section 4.2. Il est à noter que les coefficients du modèle de Bouc-Wen correspondent à une précontrainte ε_m et à une fréquence d'excitation f_e donnée. En effet, il n'y a pas d'élément dans le modèle qui prend en compte le comportement thermomécanique de l'AMF et sa fraction d'austénite.

4.3.2 Comparaison avec les mesures

Un exemple du résultat de la procédure décrite dans la section précédente est donné sur la Figure 4.12 où la force de rappel quasi-statique d'un ressort en AMF mesurée et estimée par le modèle de Bouc-Wen pour $\varepsilon_m = 3$ et $\Delta\varepsilon = 0.8, 1.2$ et 1.8 sont tracées. Les paramètres utilisés sont regroupés dans le Tableau 4.2. La force de rappel des ressorts en AMF est très bien estimée par le modèle, et ce, aux différentes amplitudes du taux de délongation. De plus, le comportement hystérétique est bien observé pour des faibles amplitudes d'élongation et les passages de K_A à K_{AM} , ainsi que de K_M à K_{MA} , ne sont pas abruptes. Ce qui est le cas lorsque le modèle par sections de droites est utilisé.

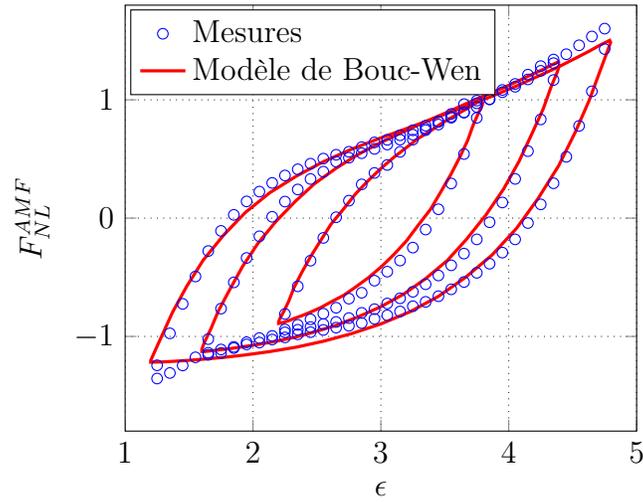


Figure 4.12 – Force de rappel des ressorts en AMF pour un chargement quasi-statique avec $\Delta\varepsilon = 0.8, 1.2$ et 1.8 et $\varepsilon_m = 3$.

$k_D [kg.s^{-2}]$	$k_E [kg.s^{-2}]$	$k_3 [kg.m^{-2}.s^{-2}]$	β	γ	n
138	0	$8.7 \cdot 10^3$	154	0	1

Tableau 4.2 – Coefficients du modèle de Bouc-Wen utilisé pour la configuration présentée sur la Figure 4.12

Dans le chapitre suivant, ces ressorts sont intégrés au montage de flottement présenté à la section 2.1.1 afin d'étudier leur influence sur l'instabilité de flottement. Puis, la modélisation de l'aile en flottement avec les ressorts en AMF est présentée.

Chapitre 5

Influence d'un amortisseur hystérétique sur l'instabilité de flottement

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons l'influence d'un amortisseur hystérétique composé des ressorts en AMF, décrits au chapitre précédent, sur le régime post-flottement de la plaque plane. Tout d'abord, le dispositif expérimental de flottement décrit à la section 2.1.1 est repris en plaçant les ressorts en AMF sur le mouvement de pompage à la place des ressorts de traction linéaires. Le diagramme de bifurcation avec les ressorts en AMF est ensuite mesuré. Dans un deuxième temps, le modèle complet, regroupant la modélisation de l'amortisseur hystérétique à l'aide des équations de Bouc-Wen, détaillées à la section 4.3.1, ainsi que le modèle aéroélastique en grande amplitude décrit à la section 3.2.1, est résolu afin de calculer le diagramme de bifurcation du profil dans le régime post-flottement avec les ressorts en AMF. Cette prédiction est ensuite comparée avec les mesures.

Sommaire

5.1	Mesures	78
5.1.1	Établissement des cycles limites	78
5.1.2	Diagramme de bifurcation	79
5.2	Modèle linéaire par morceaux	81
5.3	Modèle complet	86
5.3.1	Présentation du modèle complet	86
5.3.2	Résultats et discussions	87

5.1 Mesures

Afin d'estimer l'influence d'un amortisseur hystérétique, réalisé à l'aide de ressorts en AMF, sur l'instabilité de flottement, le montage expérimental utilisé à la section 2.1.1 est réutilisé. Après avoir présenté les modifications apportées au montage pour inclure les ressorts en AMF et le réglage de ces derniers, l'établissement des cycles limites avec et sans ressorts en AMF est mis en évidence. Puis, dans une deuxième section, le diagramme de bifurcation mesuré avec les ressorts en AMF est détaillé.

5.1.1 Établissement des cycles limites

Afin d'inclure les ressorts en AMF au montage expérimental, ces derniers sont fixés à la place des ressorts de traction inférieurs, cf Figure 2.1. Ils agissent de cette façon sur le mouvement de pompage. Les ressorts en AMF ne sont pas utilisés pour contrôler le mouvement de tangage car la forme en spirale des ressorts affectés au mouvement de tangage n'a pas été réalisable avec des AMF.

Il a été montré à la section 4.2.1 que plus le taux d'élongation $\Delta\epsilon$ est important, plus le taux d'amortissement ζ_{AMF} est important. Ainsi, les ressorts en AMF sont réglés pour que $\Delta\epsilon$ soit le plus grand possible, ce qui revient à minimiser la longueur des ressorts à vide l_0 . Toutefois, pour comparer convenablement le régime post-flottement avec et sans les ressorts en AMF, il faut que la raideur du mouvement de pompage aux petites amplitudes, c'est-à-dire lorsque les ressorts en AMF ont un comportement quasiment linéaire, soit identique pour les deux cas considérés : ressorts en AMF ou ressorts linéaires. Or, plus l_0 est faible, plus la raideur globale des ressorts en AMF est importante. Néanmoins les deux ressorts linéaires supérieurs sur la Figure 2.1 peuvent être changés pour équilibrer la raideur globale du mouvement de pompage. Il y a ainsi un compromis à trouver entre la minimisation de l_0 et la conservation de la raideur à faible amplitude du mouvement de pompage. Sur les mesures présentées, l_0 a été choisi égal à 15 mm et la longueur moyenne l_m des ressorts à 98 mm, ce qui équivaut à $\epsilon_m = 6.53$.

On compare tout d'abord l'établissement des cycles limites sur le mouvement de pompage suite à une perturbation initiale pour une vitesse d'écoulement $U = 9$ m/s avec et sans ressorts en AMF sur la Figure 5.1(a). Les ressorts en AMF ont deux effets notables : (i) l'amplitude des cycles limites est réduite, en effet elle est divisée par 2.53 sur le mouvement de pompage, (ii) le régime transitoire est raccourci, en effet les cycles limites s'établissent après 5 secondes avec les ressorts en AMF contre 15 secondes avec les ressorts linéaires. Concernant le premier effet, il est dû au comportement hystérétique des ressorts en AMF, ce qui est montré à travers leur force de rappel sur la Figure 5.1(b). De plus, cette figure permet notamment de vérifier que la raideur globale des ressorts en AMF et des ressorts linéaires sont équivalentes, la seule différence étant le comportement hystérétique des ressorts en AMF qui permet de stabiliser le système à des cycles

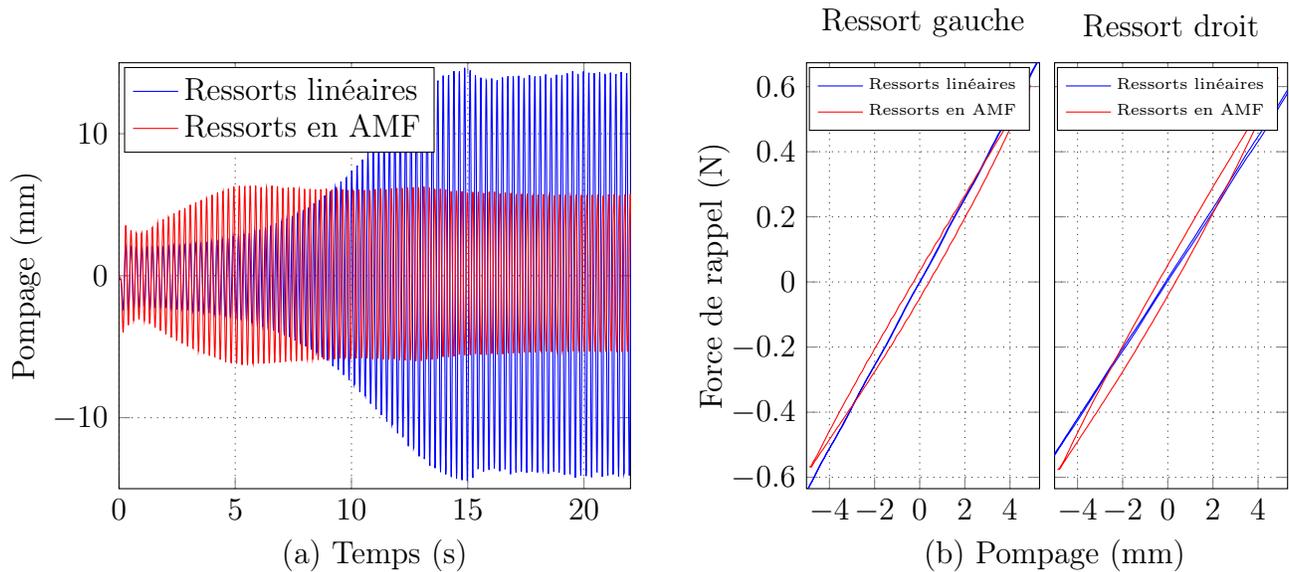


Figure 5.1 – Établissement des cycles limites mesurés sur le montage de flottement avec et sans ressorts en AMF pour $U = 9\text{ m/s}$. (a) Amplitude de déplacement du mode de pompage. (b) Force de rappel des ressorts linéaires et en AMF lors d’une période du cycle limite établi, la partie gauche correspond au ressort de gauche sur la Figure 2.1 et la partie droite au ressort de droite.

limites d’amplitudes plus faibles. Quant au second effet, il est plutôt qualitatif car la perturbation initiale n’est pas la même avec et sans les ressorts en AMF. Néanmoins, dès que le comportement hystérétique des ressorts en AMF est significatif, les cycles limites stables s’établissent. Comme leur amplitude est moindre qu’avec des ressorts linéaires et que l’amortissement intrinsèque du montage est plus important avec les ressorts en AMF, le régime transitoire est plus court.

5.1.2 Diagramme de bifurcation

On mesure à présent le diagramme de bifurcation avec les ressorts en AMF. Pour cela, la même procédure que celle décrite à la section 2.1.2 est utilisée. Le diagramme de bifurcation obtenu est présenté sur la Figure 5.2. La diminution de l’amplitude des cycles limites s’observe pour toutes les vitesses mesurées. L’amplitude des cycles limites est divisée en moyenne par 3.71 sur le mode de pompage avec la présence des ressorts en AMF et par 1.59 sur le mode de tangage. D’autre part, la vitesse U_c , à laquelle l’instabilité de flottement cesse, n’est pas la même avec ou sans l’usage des ressorts en AMF. Elle est égale à 5.5 m/s avec les ressorts linéaire et à 6.9 m/s avec les ressorts en AMF. Cette différence n’est a priori pas évidente à expliquer et seules des hypothèses peuvent être formulées.

En effet, comme l’apparition des cycles limites dépend de la condition initiale appliquée au montage, la vitesse de flottement ne peut-être mesurée avec certitude. Cependant, la théorie prévoit

une vitesse de flottement égale à 5.6 m/s. Deux hypothèses sont alors envisageables pour expliquer le fait que les cycles limites cessent à 6.9 m/s en présence des ressorts en AMF. Soit l'estimation théorique de la vitesse de flottement est erronée et cette vitesse serait en réalité plutôt aux alentours de 6.9 m/s. Ainsi, les cycles limites apparaissant pour des vitesses inférieures à 6.9 m/s, lorsque les ressorts linéaires sont utilisés, correspondraient à une branche sous-critique. Soit les cycles limites sont stoppés par les différentes sources de frottement sec présents dans le montage. En effet, lorsque les ressorts en AMF sont utilisés, l'amplitude des cycles limites est relativement faible pour $U = 6.9$ m/s, et particulièrement sur le mouvement de pompage.

En conclusion, l'influence des ressorts en AMF sur l'instabilité de flottement est très importante. En effet, la réduction de l'amplitude des cycles limites est très conséquente. Les ressorts en AMF sont ainsi des candidats sérieux pour le contrôle passif de l'instabilité de flottement. La branche aller du diagramme de bifurcation n'ayant pas été mesurée, la potentielle sous-criticalité de l'instabilité n'est pas connue et l'influence des ressorts en AMF sur cette dernière non plus. Pour cette raison, entre autres, nous nous proposons de modéliser l'influence de l'amortisseur hystérétique, composé des ressorts en AMF, sur l'instabilité de flottement. À cette fin, une première approche utilisant un modèle par sections de droites pour calculer la force de rappel des ressorts en AMF est présentée. Puis, dans la section 5.3, le modèle exposé à la section 3.2.1 enrichi du modèle de Bouc-Wen est utilisé.

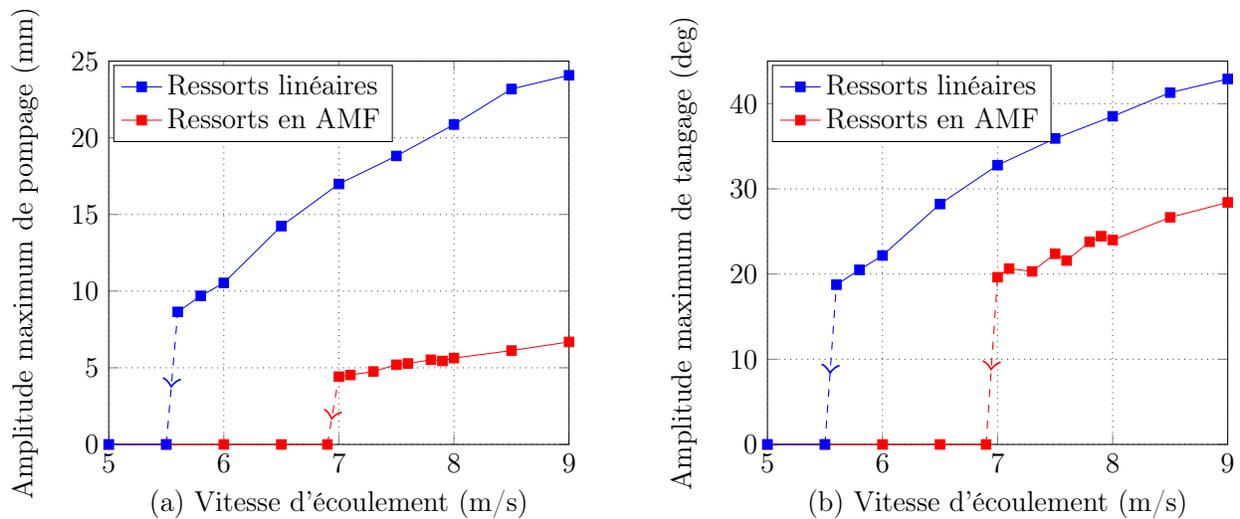


Figure 5.2 – Amplitude maximum du mode de pompage (a) et de tangage (b) en fonction de la vitesse d'écoulement avec et sans ressorts en AMF.

5.2 Modèle linéaire par morceaux

Une étude préliminaire, ayant fait l'objet d'une publication en tant que chapitre d'un livre [58], est présentée dans cette section. La publication en question est donnée en annexe et une version résumée en français est donnée ici.

Dans cette étude préliminaire, la force de rappel de l'amortisseur hystérétique, notée f_{NL}^{SMA} , est estimée à l'aide de sections de droite comme schématisé sur la Figure 5.3. Cette modélisation est utilisée pour les alliages à mémoire de forme, en effet ce type d'approche a déjà été exploré dans la littérature [48, 59, 80].

Pour le modèle présenté, les raideurs K_A et K_M (présentées à la Figure 4.4) sont supposées égales, de mêmes que les raideurs K_{AM} et K_{MA} . Elles sont notées respectivement K_1 et K_2 . De plus, deux quantités sont introduites, h_l et H , comme montré sur la Figure 5.3. La grandeur h_l caractérise le début du comportement hystérétique de l'amortisseur et la grandeur H sa fin. L'aire de la boucle d'hystérésis de l'amortisseur \mathcal{A}_{SMA} est alors entièrement définie par les deux raideurs K_1 et K_2 et les deux grandeurs h_l et H par la relation suivante

$$\mathcal{A}_{SMA} = h_l H \sqrt{1 + K_1^2} \sqrt{1 + K_2^2} \cos(\tan^{-1}(1/K_1) + \tan^{-1}(K_2)). \quad (5.1)$$

Les efforts aérodynamiques sont estimés à l'aide du modèle quasi-stationnaire. Afin d'observer des cycles limites dans le régime post-flottement, notamment lorsque l'amortisseur hystérétique n'est pas utilisé, des non linéarités cubiques sont introduites dans les deux degrés de liberté du profil. Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu C_{L,\alpha} \Theta & 0 \\ -\mu \gamma C_{L,\alpha} \Theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \Omega^2 & \mu C_{L,\alpha} \Theta^2 \\ 0 & (1 - \delta^t) r_\alpha^2 - \mu \gamma C_{L,\alpha} \Theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_y y^3 \\ -\delta^t f_{NL}^{SMA}(\alpha) - \xi_\alpha \alpha^3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $y = h/b$, $r_\alpha = \sqrt{I_\alpha/(M b^2)}$, $x_\alpha = S_\alpha/(mb)$, $\mu = \rho b S/(2m)$, $\Theta = U/(b\omega_\alpha)$, $\gamma = e/b$ et $\Omega = \sqrt{\omega_h/\omega_\alpha}$. Les termes ξ_α et ξ_h sont les non linéarités cubiques sans dimension et $()'$ désigne la dérivation par rapport au temps réduit $\tau = \omega_\alpha^2 t$. Finalement, le coefficient δ^t est équivalent à un symbole de Kronecker égal à 1 si l'amortisseur hystérétique est utilisé et à 0 sinon.

Le comportement hystérétique est dévolu au mouvement de tangage car c'est le mode le plus énergétique une fois l'instabilité de flottement apparue. On note f_{NL}^t la force de rappel du mouvement de tangage, ainsi

$$f_{NL}^t(\alpha) = (1 - \delta^t) r_\alpha^2 \alpha + \xi_\alpha \alpha^3 + \delta^t f_{NL}^{SMA}(\alpha), \quad (5.3)$$

Les valeurs choisies pour les paramètres linéaires de l'équation (5.2) sont regroupées dans le Tableau 5.1.

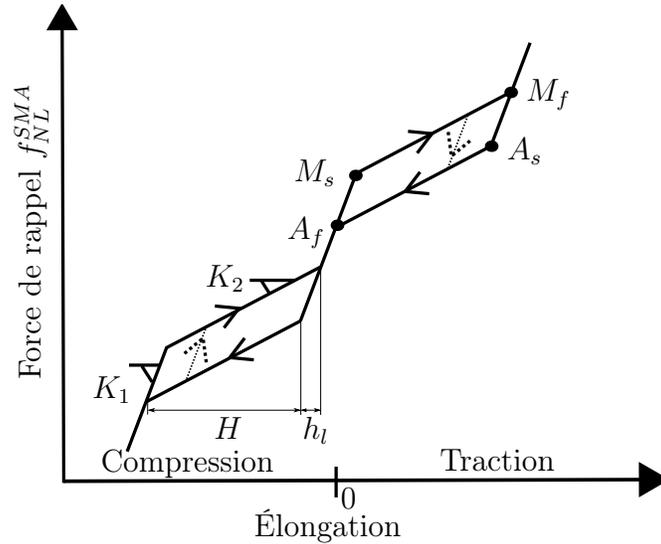


Figure 5.3 – Modélisation de la force de rappel de l'amortisseur hystérétique à l'aide de sections de droite.

r_α	x_α	μ	γ	$C_{L,\alpha}$	Ω
0.5	0.2	$1/10\pi$	0.4	2π	0.5

Tableau 5.1 – Paramètres aéroélastiques adimensionnés de l'équation (5.2).

Afin d'estimer le déplacement du profil, les équations (5.2) sont résolues par intégration temporelle à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Le diagramme de bifurcation est tout d'abord calculé avec et sans amortisseur hystérétique, le résultat est tracé sur la Figure 5.4. Outre la vitesse de flottement Θ_f , ce premier calcul permet d'identifier quatre points remarquables lorsque l'amortisseur hystérétique est présent :

1. La vitesse Θ_s à laquelle l'amortisseur entre dans sa boucle d'hystérésis et commence ainsi à dissiper l'énergie apportée par l'écoulement,
2. La vitesse Θ_c à laquelle l'amortisseur a parcouru entièrement sa boucle d'hystérésis et n'est plus à même de dissiper l'énergie de l'écoulement,
3. Le saut d'amplitude α_J lorsque Θ_c est dépassé,
4. La vitesse Θ_e , plus petite vitesse à laquelle les cycles limites peuvent être observés, et qui

marque le début ou la fin (selon le sens de parcours) du régime post-flottement à grande amplitude.

Ainsi, l'amortisseur hystérétique est efficace entre les vitesses Θ_s et Θ_c . Mais une fois Θ_c dépassé, il y a une forte discontinuité et l'apparition d'une branche sous-critique qui peut être néfaste à la structure. Le configuration optimale de l'amortisseur hystérétique doit alors être à même d'assurer

1. Θ_s le plus faible possible pour que l'amortisseur hystérétique soit efficace rapidement et que l'amplitude des cycles limites engendrés soit de faible amplitude,
2. Θ_c le plus grand possible afin que l'amortisseur hystérétique soit effectif le plus longtemps possible,
3. α_J le plus faible possible de telle sorte que les amplitudes atteintes après Θ_c ne soient pas trop importantes,
4. Θ_e le plus grand possible, idéalement égale à la vitesse de flottement, afin de ne pas rendre l'instabilité de flottement sous-critique.

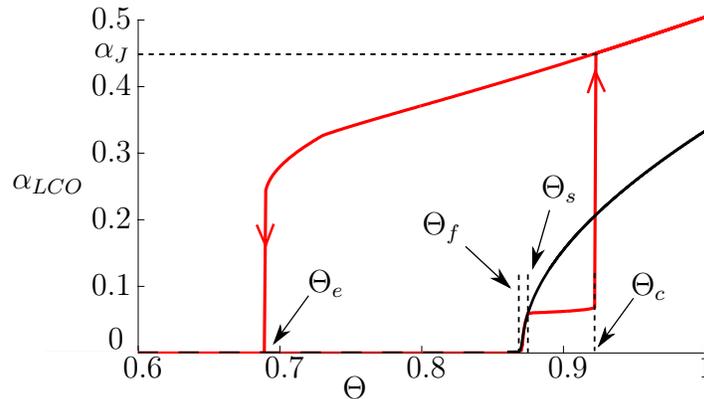


Figure 5.4 – Amplitude des cycles limites du mode de tangage en fonction de la vitesse adimensionnée Θ calculé avec les paramètres linéaire du Tableau 5.1 et $\xi_\alpha = \xi_h = 1$. La courbe rouge correspond au diagramme de bifurcation calculé en présence de l'amortisseur hystérétique avec les caractéristiques suivantes : $h_l = 0.05$, $K_1/K_2 = 10$ et $H = 0.209$. La courbe noire correspond au diagramme de bifurcation sans amortisseur hystérétique.

On trace maintenant sur la Figure 5.5(a) l'influence des paramètres de l'amortisseur hystérétique h_l , K_1 et K_2 sur le diagramme de bifurcation. L'influence de H n'est pas étudiée car l'aire de la boucle d'hystérésis \mathcal{A}_{SMA} , comme définie équation (5.1), est gardée constante. En effet, l'aire totale de la boucle est directement reliée à l'énergie dissipée [72]. Or on cherche ici à connaître,

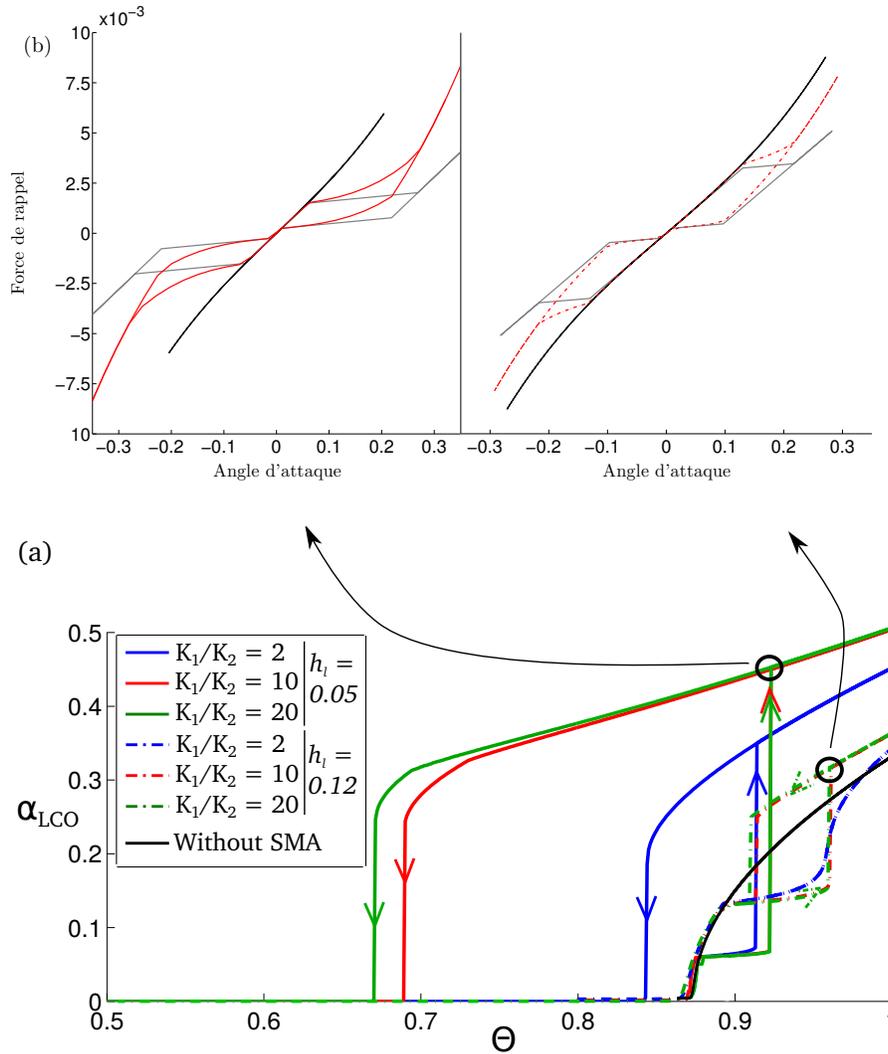


Figure 5.5 – (a) Évolution de l'amplitude des cycles limites du mouvement de tangage en fonction de la vitesse d'écoulement Θ pour différents paramètres de l'amortisseur hystérétique ($\xi_h = \xi_\alpha = 1$ et \mathcal{A}_{SMA} constant). (b) Force de rappel en fonction de l'angle d'attaque à la vitesse $\Theta = \Theta_c$. Figure de gauche : $h_l = 0.05$ et $K_1/K_2 = 10$, figure de droite : $h_l = 0.12$ et $K_1/K_2 = 10$. La force de rappel de l'amortisseur hystérétique f_{NL}^{SMA} est représentée par les courbes grises, la force de rappel du mouvement de tangage f_{NL}^t en présence de l'amortisseur par les courbes rouges et sans l'amortisseur par les courbes noires.

pour une valeur de dissipation donnée, la forme de boucle la plus efficace pour contrôler l'instabilité.

À l'aide de la Figure 5.5(a), on remarque que diminuer h_l a pour effet de réduire Θ_s et Θ_c . En effet, la grandeur h_l détermine le début du comportement hystérétique de l'amortisseur. Ainsi, plus h_l est faible, plus l'amortisseur sera efficace rapidement et plus Θ_s sera faible. Comme \mathcal{A}_{SMA} est constant, si Θ_s est petit alors Θ_c aussi.

D'autre part, on remarque à l'aide de la Figure 5.5(a) que plus h_l est faible, plus α_J est important. Afin de mieux comprendre ce phénomène, les forces de rappel f_{NL}^t et f_{NL}^{SMA} sont tracées sur la Figure 5.5(b) pour $\Theta = \Theta_c$. La configuration avec $h_l = 0.05$ est tracée à gauche de la Figure 5.5(b) et celle avec $h_l = 0.12$ à droite.

Tout d'abord, on remarque bien qu'une fois Θ_c atteint, la boucle d'hystérésis de l'amortisseur est entièrement parcourue. D'autre part l'effet du paramètre h_l est clairement identifié. En effet, lorsque $h_l = 0.05$, le comportement hystérétique de l'amortisseur est plus précoce que lorsque $h_l = 0.12$. Ainsi, pour $h_l = 0.05$, lorsque toute la boucle d'hystérésis est parcourue, la force de rappel f_{NL}^t avec l'amortisseur s'est éloignée de façon non négligeable de celle sans amortisseur, ce qui est moins le cas lorsque $h_l = 0.12$. Et plus la force de rappel f_{NL}^t avec l'amortisseur hystérétique s'éloigne de celle sans, plus le saut d'amplitude est important. Afin de mieux s'en convaincre, on peut s'intéresser aux simulations faites pour différents rapports K_1/K_2 . On remarque alors que plus ce rapport est faible, plus la force de rappel avec amortisseur est proche de celle sans amortisseur, et plus le saut d'amplitude est faible.

Enfin, on remarque à l'aide de la Figure 5.5(a) que la vitesse Θ_e est d'autant plus faible que α_J est grand. En effet, plus α_J est grand plus le caractère sous-critique de la bifurcation est prononcé et plus Θ_e est faible.

Il faut ainsi augmenter h_l et diminuer K_1/K_2 pour diminuer le saut d'amplitude α_J . Néanmoins, cela a pour effet d'augmenter Θ_s et ainsi retarder l'apparition du comportement hystérétique de l'amortisseur. Les cycles limites qui se développent sont alors d'amplitude plus importante. Cela s'observe sur la Figure 5.5(a). En effet, lorsque $h_l = 0.05$, $\Theta_s = 0.88$ et les cycles limites du mode de tangage sont d'amplitude 0.06 alors que lorsque $h_l = 0.12$, $\Theta_s = 0.9$ et les cycles limites du mode de tangage sont d'amplitude 0.13. En conclusion, plus le comportement hystérétique de l'amortisseur est précoce, plus l'amplitude des cycles limites est faible lorsque l'amortisseur n'a pas atteint toute sa capacité, mais plus le saut d'amplitude une fois cette capacité atteinte sera important.

L'étude de ce cas repose sur une modélisation simple et idéalisée du comportement des AMF, sans pré-contrainte initiale. Cette première étude avait été menée en parallèle des expériences au cours desquelles il nous est clairement apparu que la pré-contrainte était nécessaire et importante. Aussi, les résultats de cette étude ont pu donner des premières idées quantitatives sur les paramètres hystérétiques à optimiser ; mais un changement de paradigme était nécessaire pour aller plus loin dans la comparaison. C'est, entre autres, la raison pour laquelle le modèle de Bouc-Wen a été

choisi pour modéliser la force de rappel des ressorts en AMF. Nous présentons ainsi dans la section suivante le modèle complet regroupant le modèle aéroélastique en grand déplacement développé au chapitre 3 ainsi que le modèle de Bouc-Wen exposé à la section 4.3.

5.3 Modèle complet

Afin d'estimer l'établissement et l'évolution des cycles limites avec les ressorts en AMF, on utilise le modèle, appelé modèle complet, qui regroupe le modèle aéroélastique équation (1.4), le modèle de Petot et le modèle de Bouc-Wen. Le système d'équations est d'abord présenté, puis les résultats sont exposés et confrontés aux mesures.

5.3.1 Présentation du modèle complet

Le modèle permettant de décrire les comportements post-flottement du profil avec et sans ressorts en AMF est le suivant,

$$Mh'' + S_\alpha \cos(\alpha)\alpha'' + \frac{bc_h}{U}h' + \frac{b^2}{U^2}(\delta_l k_h + \delta_s k_E)h - S_\alpha \sin(\alpha)\dot{\alpha}^2 = -b^3 \rho s (C_L^1 + C_L^2) - \frac{\delta_s b^2}{U^2}(k_3 h^3 + z), \quad (5.4a)$$

$$I_\alpha \alpha'' + S_\alpha \cos(\alpha)h'' + \frac{b}{U}c_\alpha \alpha' + \frac{b^2}{U^2}k_\alpha \alpha - S_\alpha h' \alpha' (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) = 2b^4 \rho s (C_{M_a}^1 + C_{M_a}^2), \quad (5.4b)$$

$$C_L^1{}' + \lambda^L C_L^1 = \lambda^L (C_{L,\alpha} \alpha_{ap} + \sigma^L b \alpha') + (\kappa^L C_{L,\alpha} + d^L) \alpha'_{ap} + \kappa^L \sigma^L b \alpha'', \quad (5.4c)$$

$$C_L^2{}'' + a^L C_L^2{}' + r^L C_L^2 = - (r^L \Delta C_L|_{\alpha_{ap}} + E^L \alpha'_{ap}), \quad (5.4d)$$

$$C_{M_a}^1{}' + \lambda^M C_{M_a}^1 = \lambda^M (C_{M_a,\alpha} \alpha_{ap} + \sigma^M b \alpha') + (\kappa^M C_{M_a,\alpha} + d^M) \alpha'_{ap} + \kappa^M \sigma^M b \alpha'', \quad (5.4e)$$

$$C_{M_a}^2{}'' + a^M C_{M_a}^2{}' + r^M C_{M_a}^2 = - (r^M \Delta C_{M_a}|_{\alpha_{ap}} + E^M \alpha'_{ap}), \quad (5.4f)$$

$$z' = [k^D - |z|^n(\gamma + \beta \text{sign}(h'z))]h'. \quad (5.4g)$$

Les coefficients δ_l et δ_s introduits dans l'équation (5.4a) sont équivalents à des symboles de Kronecker utilisés pour passer du modèle avec ressorts en AMF au modèle sans. En effet, le comportement du système aéroélastique sans ressorts en AMF est calculé en sélectionnant $\delta_l = 1$ et $\delta_s = 0$, tandis que le système avec la présence des ressorts en AMF est calculé en choisissant $\delta_s = 1$ et $\delta_l = 0$.

L'intégration temporelle de ce système est réalisée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 comme à la section 3.2. La procédure pour estimer le diagramme de bifurcation correspondant est la même.

5.3.2 Résultats et discussions

On calcule le diagramme de bifurcation du système d'équations (5.4) avec les mêmes paramètres structuraux et les mêmes coefficients du modèle de Petot que ceux utilisés à la section 3.2. Concernant les coefficients du modèle de Bouc-Wen, n'étant pas intrinsèques au matériau (ils dépendent notamment de la fréquence d'excitation et de la pré-contrainte), ils sont ajustés à partir de la force de rappel mesurée pendant l'évaluation du diagramme de bifurcation du montage de flottement. Ces coefficients sont regroupés dans le Tableau 5.2. Le coefficient β est plus faible et le coefficient n plus élevé que dans l'exemple présenté à la section 4.3.2. Le diagramme de bifurcation ainsi obtenu est présenté sur la Figure 5.6. L'amplitude des cycles limites est très bien estimée par le modèle pour le mouvement de pompage et de tangage. En effet, la différence entre l'estimation du modèle et la mesure de l'amplitude des cycles limites sur le mouvement de tangage est de 5.97 % et sur le mouvement de pompage de 3.19 %. D'autre part, les ressorts en AMF ont comme effet notable d'annuler la sous-criticalité présente lorsque les ressorts linéaires sont utilisés. Cette sous-criticalité n'ayant pas pu être établie expérimentalement, cet effet de l'amortisseur hystérétique est observé uniquement numériquement.

Ainsi, que les ressorts en AMF soient utilisés ou non, le modèle présenté ici reproduit de façon très satisfaisante ce qui a été observé expérimentalement. Ce qui conforte l'idée qu'il est possible d'estimer le comportement post-flottement du profil à deux degrés de liberté, même en présence d'efforts aérodynamiques instationnaires fortement non linéaires et en présence d'un amortisseur hystérétique.

k_D [$kg.s^{-2}$]	k_E [$kg.s^{-2}$]	k_3 [$kg.m^{-2}.s^{-2}$]	β	γ	n
141.15	141.15	$1.7 \cdot 10^4$	100	0	1.78

Tableau 5.2 – Coefficients du modèle de Bouc-Wen utilisés pour estimer le diagramme de bifurcations présenté à la Figure 5.6

Afin d'explorer plus en détail le comportement du régime post-flottement avec les ressorts en AMF, on reprend le diagramme de bifurcation présenté sur la Figure 3.7. Pour rappel, ce diagramme de bifurcation a été calculé avec les coefficients du modèle de Petot correspondants aux mesures aérodynamiques et non à l'expérience de flottement. On se propose d'étudier ce diagramme de bifurcation car il possède d'une part une sous-criticalité assez importante, et d'autre part une branche de flottement classique et de flottement de décrochage bien distinctes l'une de l'autre. Il est ainsi intéressant d'observer si les ressorts en AMF ont toujours la capacité d'annuler la sous-criticalité de la bifurcation. Pour cela, nous calculons sur la Figure 5.7 ce diagramme de bifurcation avec et sans les ressorts en AMF.

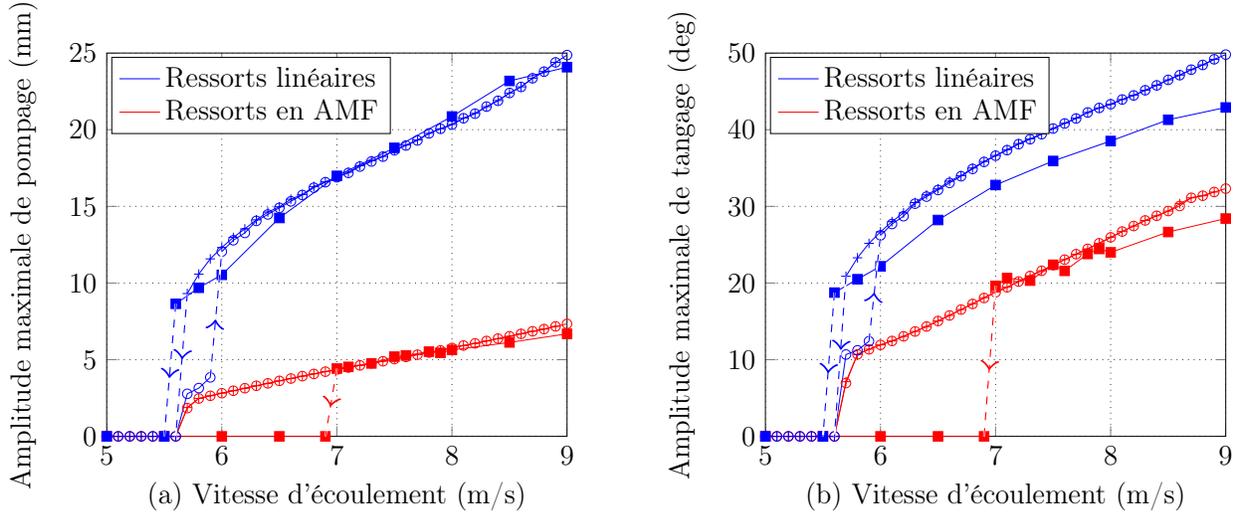


Figure 5.6 – Amplitude maximale du mode de pompage (a) et de tangage (b) en fonction de la vitesse d'écoulement avec et sans ressorts en AMF. Les carrés désignent les mesures, les cercles (resp. les signes plus) l'estimation du modèle pour des vitesses d'écoulement croissantes (resp. décroissantes). Les coefficients du modèle de Petot sont ceux estimés à partir de la mesure du diagramme de bifurcation du montage de flottement et sont regroupés dans le Tableau 3.4.

Les ressorts en AMF annulent bien la sous-criticalité présente lorsque des ressorts linéaires sont utilisés. De plus, l'usage des ressorts en AMF permet de diviser l'amplitude des cycles limites du mode de pompage par 5.96 en moyenne et du mode de tangage par 2.16 en moyenne.

Comme il n'existe pas de saut d'amplitude lorsque les ressorts en AMF sont utilisés, il est difficile de séparer les branches de flottement classique et de flottement de décrochage. Ainsi, une proposition faite dans cette étude est d'introduire une grandeur φ correspondant au déphasage entre les mouvements de pompage et de tangage pour caractériser les deux types de flottement. En effet, le flottement de décrochage est connu pour être dominé par le mouvement de tangage [2, 76] et le déphasage φ paraît être ainsi une grandeur pertinente pour discriminer les deux types de flottement. L'expression du déphasage φ est la suivante,

$$\varphi = \frac{\omega_{max}}{N_{max}} \sum_{i=1}^{N_{max}} (T_{\alpha_{max}}^i - T_{h_{min}}^i). \quad (5.5)$$

$T_{h_{max}}^i$ (resp. $T_{\alpha_{min}}^i$) est le temps correspondant au i ème maximum de $h(t)$ (resp. $\alpha(t)$), N_{max} est le nombre de maxima de $h(t)$ et ω_{max} la pulsation de $h(t)$. Ainsi, si $\varphi > 0$, le mouvement de pompage est en avance de phase sur le mouvement de tangage et réciproquement. De plus, si φ est nul,

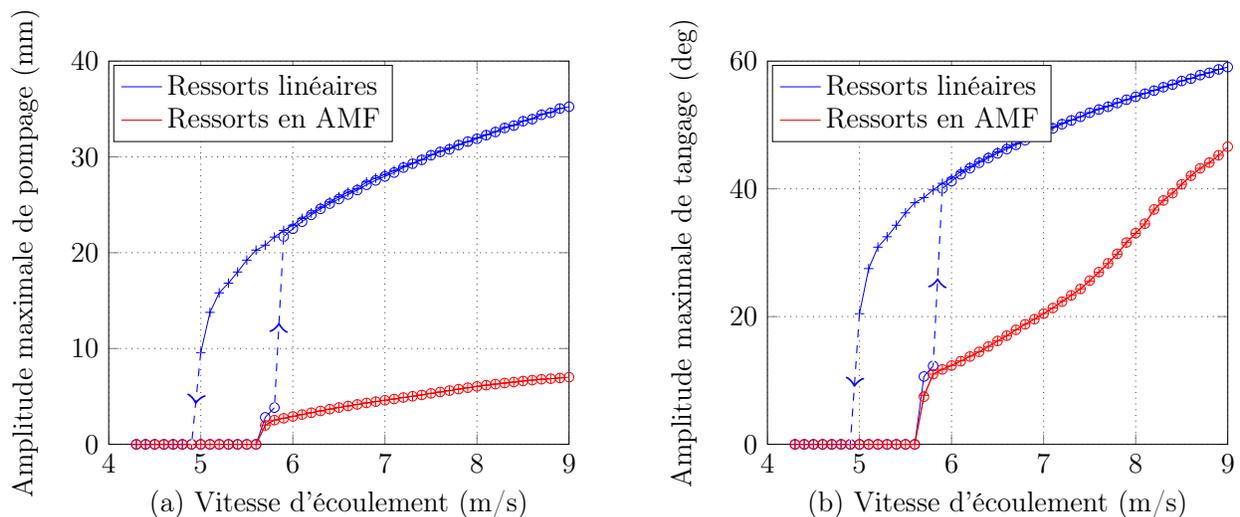


Figure 5.7 – Amplitude maximum du mode de pompage (a) et de tangage (b) en fonction de la vitesse d'écoulement avec et sans ressorts en AMF. Les cercles (resp. les signes plus) correspondent aux vitesses d'écoulement croissantes (resp. décroissantes). Les coefficients de Petot utilisés sont ceux du Tableau 3.2

les mouvements de pompage et de tangage sont en phase et si φ est égal à 180 degrés ils sont en opposition de phase. On trace sur la Figure 5.8 ce déphasage φ pour les deux diagrammes de bifurcation présentés aux Figures 5.6 et 5.7. On s'intéresse d'abord aux diagrammes de bifurcation estimés sans ressorts en AMF, en bleu sur la Figure 5.8. En effet, dans ce cas, les deux branches de bifurcation sont bien distinctes et permettent alors d'observer s'il y a un lien entre le déphasage φ et la nature de ces branches. On remarque sur la Figure 5.8 que les cycles limites correspondant à la branche de flottement de décrochage ont un déphasage φ décroissant en fonction de U , tandis que les cycles limites correspondant à du flottement classique, de 5.7 à 5.9 m/s pour les vitesses croissantes sur la Figure 5.8(a) et de 5.7 à 5.8 m/s pour les vitesses croissantes sur la Figure 5.8(a), ont un déphasage φ croissant en fonction de U . Ainsi, les deux régimes de flottement, le flottement classique et le flottement de décrochage, présentent un déphasage qui se comporte différemment. Il est décroissant en fonction de U pour le flottement de décrochage et croissant en fonction de U pour le flottement classique.

Concernant les diagrammes de bifurcation avec ressorts en AMF, leur déphasage φ , en rouge sur la Figure 5.8, possède une partie croissante et une partie décroissante. Ainsi, le flottement observé entre 5.6 et 6.5 m/s sur la Figure 5.8(a) s'apparente à du flottement classique, et au-delà, à du flottement de décrochage. Pour la Figure 5.8(b), le flottement compris entre 5.6 et 7.2 m/s s'approche du flottement classique et celui au-delà à du flottement décrochage. Ce qui signifie que les ressorts en AMF permettraient de décaler l'apparition du flottement de décrochage de 6

à 6.5 m/s pour le diagramme de bifurcation de la Figure 5.6 et de 6 à 7.2 m/s pour celui de la Figure 5.7.

Cette analyse est une suggestion, en effet, il n'existe pas pour l'instant de lien établi entre le déphasage et le type de flottement. Il s'agit plutôt de retenir des tendances à l'aide des deux branches clairement distinctes lorsque des ressorts linéaires sont utilisés et de les appliquer au cas où les ressorts en AMF sont présents.

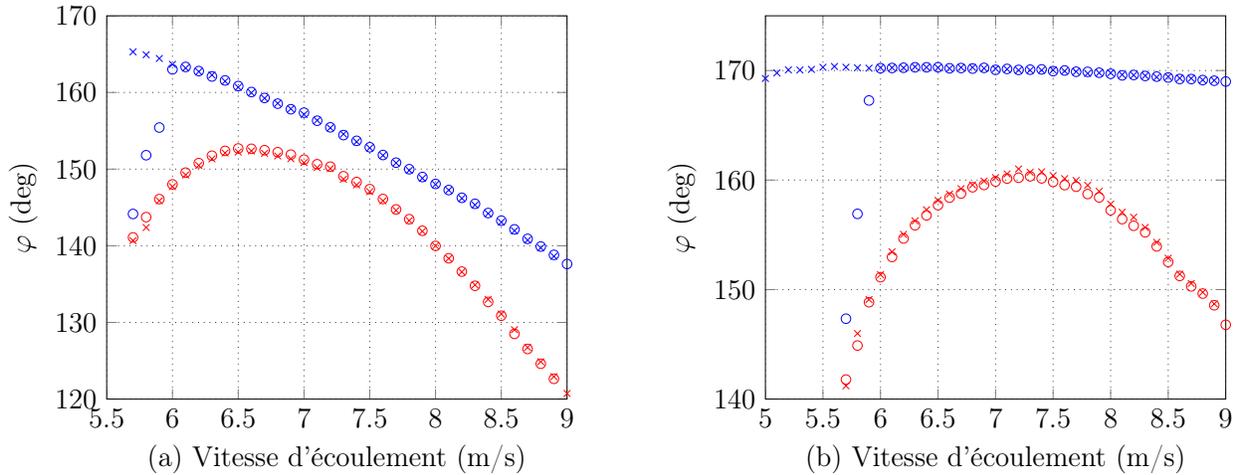


Figure 5.8 – Déphasage φ entre le mouvement de pompage et de tangage comme défini à l'équation (5.5) en fonction de la vitesse d'écoulement. Les cercles (resp. les signes plus) correspondent aux vitesses croissantes (resp. décroissantes). Les signes bleus correspondent au système avec des ressorts linéaires et les signes rouges avec des ressorts en AMF. (a) Correspond au diagramme de bifurcation présenté à la Figure 5.6 et (b) à la Figure 5.7.

Nous nous intéressons à présent à l'influence des coefficients du modèle de Bouc-Wen n , γ et β sur le régime post-flottement. Le lecteur doit garder à l'esprit que le comportement hystérétique, réalisé dans cette étude avec des ressorts en AMF, peut être réalisé avec d'autres types de dispositifs, voir par exemple [11, 12]. Cette étude reste néanmoins toujours pertinente à partir du moment où la force de rappel du dispositif peut être estimée par le modèle de Bouc-Wen.

L'effet de n , γ et β sur le diagramme de bifurcation de la Figure 5.6 est présenté sur la Figure 5.9. L'influence des coefficients explorés réside principalement dans l'amplitude des cycles limites. En effet, la présence des ressorts en AMF annule quoiqu'il en soit la sous-criticalité de la bifurcation. Ainsi, on ne peut pas trouver de similitudes avec les tendances observées en utilisant le modèle par sections de droites détaillé à la section 5.2. Néanmoins, chaque coefficient n'affecte pas de la même façon les deux degrés de liberté. En effet, β et n ont un impact plus important sur le mouvement de pompage, tandis que γ a un effet plus important sur le mouvement de tangage. De plus, à l'aide de la Figure 5.6, on peut déduire que le réglage optimal est réalisé avec un grand β et un petit γ et n .

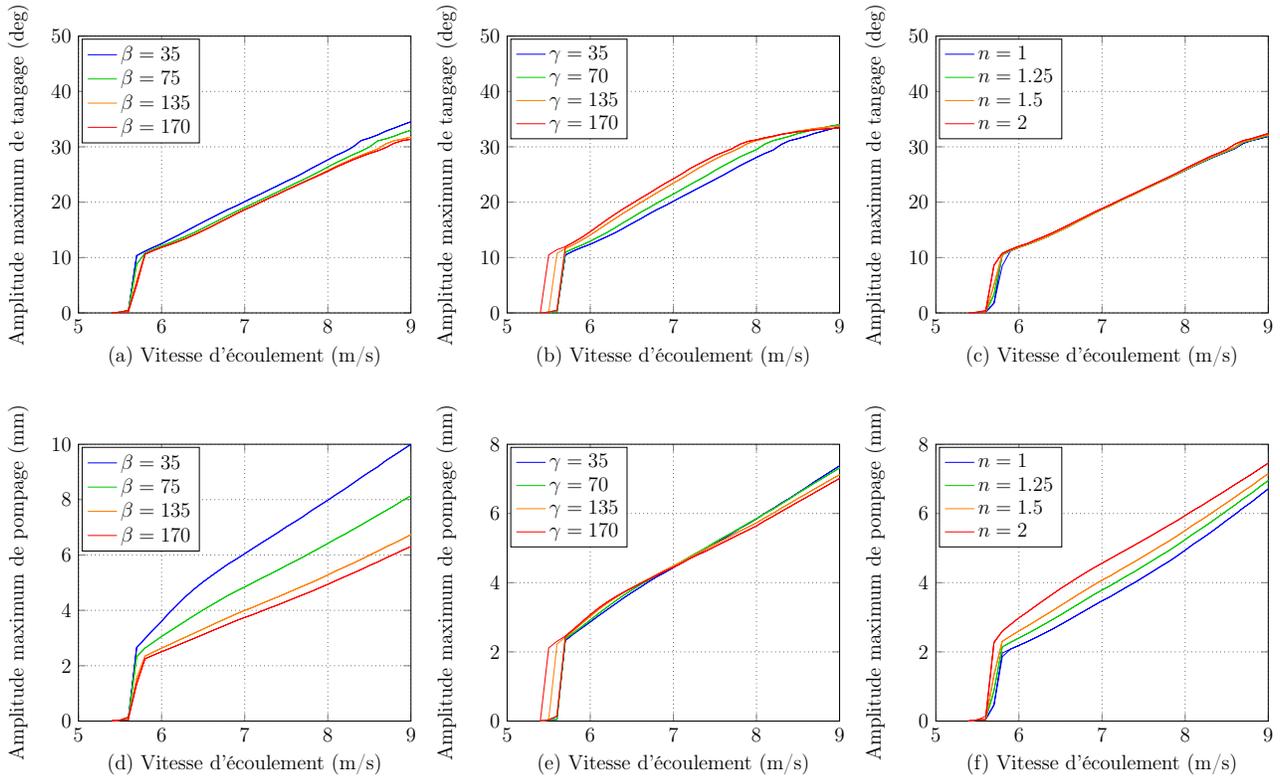


Figure 5.9 – Influence des coefficients β , γ et n du modèle de Bouc-Wen sur le diagramme de bifurcation. Première ligne : Mouvement de tangage; seconde ligne : mouvement de pompage. (a,d) Influence de β , (b,e) influence de γ et (c,f) influence de n .

Conclusion de la deuxième partie

Nous avons montré dans cette partie l'influence d'un amortisseur hystérétique, réalisé à l'aide de ressorts en AMF, sur l'instabilité de flottement. Dans le chapitre 4, les propriétés physiques des AMF ainsi que la modélisation de la force de rappel des ressorts en AMF ont été exposés. Il a été trouvé que le paramètre clé à maximiser est l'amplitude du taux de délongation $\Delta \epsilon$ du ressort. En effet, pour un $\Delta \epsilon$ suffisamment grand, le changement de phase austénite-martensite est alors réalisé entièrement et l'aire de la boucle d'hystérésis de la force de rappel des ressorts en AMF est maximale. D'autre part, l'influence de la fréquence d'excitation des ressorts en AMF sur leur taux d'amortissement ζ_{AMF} a été mise en évidence. Il a été trouvé que pour la gamme de fréquences

de l'expérience de flottement, le taux d'amortissement des ressorts en AMF varie peu en fonction de leur fréquence d'excitation. Ensuite, dans le chapitre 5, les ressorts en AMF ont été utilisés sur le montage expérimental présenté à la section 2.1.1. Il a été montré que ces derniers réduisent de façon conséquente l'amplitude des cycles limites se développant dans le régime post-flottement. En effet, leur amplitude est divisée par 3.71 sur le mode de pompage et par 1.59 sur le mode de tangage. D'autre part, l'évolution des cycles limites dans le régime post-flottement a été modélisé et les résultats trouvés sont en très bon accord avec la mesure. De plus, il a été montré que les ressorts en AMF permettent d'annuler la probable sous-criticalité de l'instabilité de flottement et de retarder l'apparition du flottement de décrochage.

Dans la partie suivante, l'influence d'un amortisseur non linéaire de vibrations accordé (NLTVA) sur l'instabilité de flottement est étudiée. Dans un premier chapitre, une étude analytique et numérique de l'influence du NLTVA est présentée. Dans un second chapitre, une réalisation pratique du NLTVA aux moyens de forces magnétiques est exposée.

Troisième partie

Développement et analyse d'amortisseurs à raideur non linéaire

Chapitre 6

Influence d'un NLTVA sur l'instabilité de flottement

Résumé

L'influence d'un amortisseur non-linéaire de vibration accordée (NLTVA) sur l'instabilité de flottement de profil d'aile est étudié. En particulier, son effet sur le seuil de l'instabilité, l'amplitude des cycles limites se développant après le seuil d'instabilité et la potentielle sous-criticalité de la bifurcation, sont analysés. Dans cette optique, le mouvement du profil d'aile est étudié à l'aide du modèle classique à deux degrés de liberté en utilisant une approche linéaire pour l'estimation des efforts aérodynamiques. Afin d'assurer l'apparition de cycles limites dans le régime post-flottement, des non linéarités cubiques sont incluses dans le modèle structurel. L'influence de chaque paramètre du NLTVA est étudié et une règle d'optimisation de ces paramètres est proposée. L'étude révèle la capacité du NLTVA à retarder de façon conséquente le seuil de l'instabilité, ainsi qu'à assurer la super-criticalité de la bifurcation et réduire l'amplitude des cycles limites.

Ce chapitre est composé d'un article écrit en anglais et soumis à la revue *Journal of Computational Nonlinear Dynamics*. La première partie de l'article présente les équations du mouvement du système couplant le profil d'aile et le NLTVA, le deuxième chapitre s'intéresse à l'analyse de stabilité linéaire du profil d'aile à deux degrés de liberté couplé au NLTVA et la troisième partie détaille l'étude de l'influence du NLTVA dans le régime post-flottement.

Flutter control of a two-degrees-of-freedom airfoil using a nonlinear tuned vibration absorber

Arnaud Malher^a, Cyril Touzé^a, Olivier Doaré^a, Giuseppe Habib^b, Gaëtan Kerschen^b

^a*IMSIA (Institute of Mechanical Sciences and Industrial Applications),
ENSTA ParisTech - CNRS - EDF - CEA,
Université Paris-Saclay,*

828 Bd des Maréchaux, 91732 Palaiseau Cedex, France

^b*Space Structures and Systems Laboratory
Department of Aerospace and Mechanical Engineering
University of Liège, Belgium*

Abstract

The influence of a Nonlinear Tuned Vibration Absorber (NLTVA) on the airfoil flutter is investigated. In particular, its effect on the instability threshold and the potential subcriticality of the bifurcation is analyzed. For that purpose, the airfoil is modeled using the classical pitch and plunge aeroelastic model together with a linear approach for the aerodynamic loads. Large amplitude motions of the airfoil are taken into account with nonlinear restoring forces for the pitch and plunge degrees of freedom. The two cases of a hardening and a softening spring behavior are investigated. The influence of each NLTVA parameter is studied and an optimum tuning of these parameters is found. The study reveals the ability of the NLTVA to shift the instability, avoid its possible subcriticality and reduce the LCOs amplitude.

Keywords: Flutter instability, Nonlinear tuned vibration absorber, Tuned mass damper, passive control

1. Introduction

When slender structures, such as bridge deck or airfoil, undergo wind excitation, a flutter instability, triggered by a Hopf bifurcation, may arise. The flow velocity for which the instability starts is called *flutter velocity*. This phenomenon is detrimental and may even lead to fatal vibrations of the structure.

Numerous strategies have been investigated in the past in order to control the flutter instability. Most of them concern active control techniques, such as governing a trailing edge flap on the wing [1, 2, 3] or using piezoelectric actuators [4]. The reader may refer to the Dowell's book on aeroelasticity [5] for more details on flutter active control. The alternative strategy is the use of passive control techniques, which is also the aim of the present study. This research topic is relatively recent. Most efforts have been devoted to bridge deck passive control [6, 7, 8].

Email address: arnaud.malher@ensta-paristech.fr (Arnaud Malher)

The most classical passive device for controlling flutter instabilities is the tuned vibration absorber initially developed by Den Hartog [9], and generally known as TMD (Tuned Mass Damper) or TVA (Tuned Vibration absorber). This device consists of a small lumped mass attached to the primary structure through a linear spring and a damper. If its eigenfrequency and damping ratio are correctly tuned, it can significantly shift the flutter speed [10]. Nevertheless, the TMD has no effect on the nonlinearities arising in the post-critical regime.

Lee *et al.* [11, 12] proposed to use a nonlinear energy sink (NES) to control the flutter instability. The NES has been initially investigated in the field of vibration control [13, 14, 15], it consists of an oscillator linked to the primary structure through an essential nonlinear stiffness (*i.e.* with no linear part), leading to targeted energy transfer [16]. Applied to the flutter control, the method shows an important reduction in the amplitude of the LCOs [11, 12]. Nevertheless, it has no effect on the flutter velocity, and needs a certain amount of energy to be activated.

In the present study, the use of a nonlinear tuned vibration absorber (NLTVA), as proposed by Vigi e and Kerschen [17] and Habib *et al.* [18] is investigated. The distinctive feature of the NLTVA is that it possesses both a linear and a nonlinear stiffness. The linear part of the absorber enables to recover the optimal control given by a TMD, whereas its nonlinear part can be tuned in order to enhance the control of the primary system nonlinearities, using a so-called principle of similarity [19]. Its effectiveness has been proven on a Van der Pol-Duffing oscillator [20]. Moreover, several experimental realizations of the NLTVA have been recently explored [21, 22] and a tuning rule for the NLTVA parameters coupled with a primary system having polynomial nonlinearities has been proposed using the Den Hartog’s equal peak method [19].

In the present context of the flutter instability, two main design rules are followed for optimizing the NLTVA characteristics. First, the linear stiffness of the absorber is tuned in order to increase as much as possible the critical flutter velocity, thus repelling the appearance of LCO to larger flow velocities. This step consists in finding the optimal values of a TMD in order to control the flutter instability, for which preliminary results can be found in [23] for a specific set of airfoil parameters. Secondly, the nonlinear stiffness of the NLTVA may be tuned in order to enforce supercriticality, as well as to reduce the LCO amplitudes. The aim of the present study is thus to extend the results presented in [20], obtained for a Van der Pol-Duffing oscillator as primary structure. To get closer to a real airfoil situation, the primary structure is here selected as the classical two degrees-of-freedom aeroelastic system, with pitch and plunge motions as generalized coordinates [5]. The quasi-steady theory is used to estimate the aerodynamic loads. In order to take into account the nonlinear structural behavior for large displacements, the model includes cubic stiffness terms in the pitch and plunge motion. This allows the system to develop LCO in the post-critical regime.

The first section is devoted to the linear stability analysis. The optimization of the linear characteristics of the vibration absorber is investigated, showing in particular how the flutter velocity can be repelled to larger values using a well-tuned absorber. The airfoil parameters are then varied and a design rule is proposed in order to find easily the optimized linear values. Then the influence of the nonlinear part of the NLTVA is investigated. Two different cases are specifically studied for the airfoil nonlinear restoring force: a hardening and a softening scenario. These results give a number of fruitful strategies in order to control passively the flutter instability by means of a nonlinear vibration absorber.

2. Equations of motion

2.1. Model equations

The classical pitch and plunge model is used to describe the airfoil motion, see e.g. [5]. Pitch and plunge are respectively described by the heave h and the angle of attack α as shown in Fig. 1. The geometrical parameters of the airfoil are the chord c , the semi-chord b and the lifting surface S . EC is the elastic center, GC the gravity center and AC the aerodynamic center. The distance between AC and EC is denoted by e . The inertia terms of the airfoil are the mass M , the inertia moment I_α and the static moment S_α . The static moment S_α is equal to $M x_{CG}$, where x_{CG} is the distance between EC and GC. The pitch mode is described by the stiffness k_α and the damping c_α and the plunge motion by the stiffness k_h and the damping c_h . The model encompasses structural nonlinearities, which have the beneficial effect of limiting the dynamics to LCOs in the post-critical regime. Nonlinear terms in the plunge and pitch stiffnesses, respectively k_{h3} and $k_{\alpha3}$, are thus introduced in a similar fashion as in [11, 12, 24, 25] in order to take into account the potential nonlinearities of the aeroelastic system that can arise from e.g. geometric or localized nonlinearities.

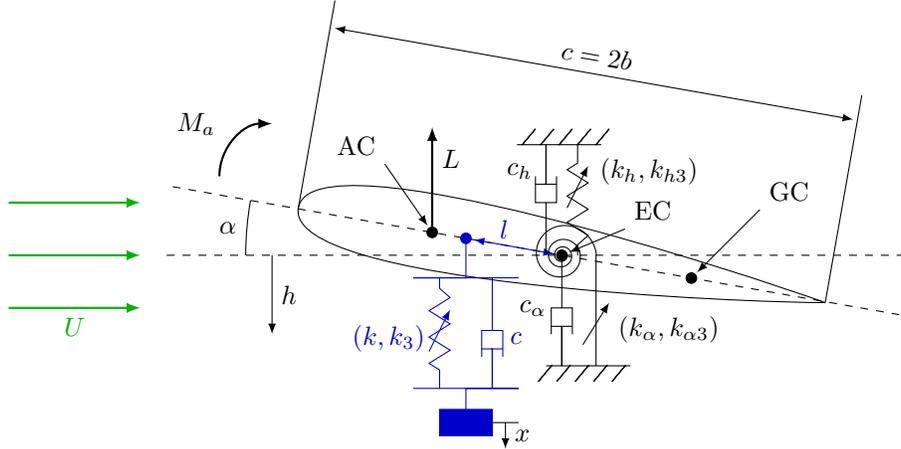


Figure 1: Sketch of the two degrees of freedom airfoil (main structure) in black coupled with the NLTVA (absorber) in blue.

The flow goes from left to right with velocity U , as illustrated in Fig. 1. It produces two aerodynamic loads, the lift L and the aerodynamic moment M_a . The quasi-steady theory is selected for modeling them, see e.g. [5, 26]. It gives the following expressions : $L = (1/2)\rho S U^2 dC_l(\alpha + \dot{h}/U)$ and $M_a = (1/2)\rho S c U^2 e dC_l(\alpha + \dot{h}/U)$, where ρ is the fluid density and dC_l is the slope at zero angle of attack of the lift coefficient.

The NLTVA is attached along the mid-chord of the airfoil at distance l from EC. It is composed of a mass m , a spring of linear stiffness k and cubic stiffness k_3 , and a dashpot of damping c . Finally, the equations of motion read :

$$M\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} + (c_h + BU)\dot{h} + c(\dot{h} - \dot{x} - l\dot{\alpha}) + k_h h + BU^2\alpha + k(h - x - l\alpha) + k_{h3} h^3 + k^3(h - x - l\alpha)^3 = 0, \quad (1a)$$

$$I_\alpha\ddot{\alpha} + S_\alpha\ddot{h} + c_\alpha\dot{\alpha} + c l(\dot{x} + l\dot{\alpha} - \dot{h}) - NU\dot{h} + (k_\alpha - NU^2)\alpha + k l(x + l\alpha - h) + k_{\alpha3} \alpha^3 + k_3 l(x + l\alpha - h)^3 = 0, \quad (1b)$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} + l\dot{\alpha} - \dot{h}) + k(x + l\alpha - h) + k_3(x + l\alpha - h)^3 = 0, \quad (1c)$$

where $B = (1/2) \rho S d C_l$ and $N = (1/2) \rho S e d C_l$.

The aim of the linear part of the NLTVA, which can be seen as a TMD, is to repel the flutter velocity. The goal of its nonlinear part is to reduce the LCO amplitude and ensure the supercriticality of the bifurcation caused by the flutter instability. The NLTVA nonlinear part is limited to a cubic stiffness in order to have the same functional form as the airfoil nonlinearity as prescribed in [20].

In order to reduce the number of the system parameters, the equations of motion are made dimensionless, by introducing

$$y = h/b \quad \text{and} \quad \tilde{x} = x/b.$$

The inertia coefficients become

$$r_\alpha = \sqrt{I_\alpha/Mb^2} \quad \text{and} \quad x_\alpha = S_\alpha/Mb.$$

Afterward, by introducing the dimensionless time $\tau = \omega_\alpha t$, where $\omega_\alpha = \sqrt{k_\alpha/I_\alpha}$, the expression of the frequency ratio, dimensionless cubic stiffnesses and damping ratios are obtained as,

$$\omega_h = \sqrt{k_h/M}, \quad \Omega = \omega_h/\omega_\alpha, \quad \xi_h = k_{h3}/(M\omega_\alpha^2), \quad \xi_\alpha = k_{\alpha3}/(M b^2 \omega_\alpha^2), \quad \zeta_h = c_h/M\omega_\alpha \quad \text{and} \quad \zeta = c/m\omega_\alpha.$$

Then the dimensionless aerodynamic parameters are introduced as follows

$$\tilde{U} = U/b\omega_\alpha, \quad \beta = B b/M \quad \text{and} \quad \nu = N/M.$$

Eventually, the dimensionless NLTVA parameters are

$$\varepsilon = m/M, \quad \omega = \sqrt{k/m}, \quad \gamma = \omega^2/\omega_\alpha^2, \quad \lambda = l/b, \quad \zeta = c/m\omega_\alpha \quad \text{and} \quad \xi = k_3/(m\omega_\alpha^2).$$

The equations of motion finally can be recast in compact form as :

$$\mathbf{M}\mathbf{q}'' + \mathbf{C}\mathbf{q}' + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

with

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha & 0 \\ x_\alpha & r_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \zeta_h + \varepsilon\zeta + \beta\tilde{U} & -\varepsilon\zeta\lambda & -\varepsilon\zeta \\ -\nu\tilde{U} - \varepsilon\zeta\lambda & \zeta_\alpha + \varepsilon\zeta\lambda^2 & \varepsilon\zeta\lambda \\ -\zeta & \zeta\lambda & \zeta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \Omega^2 + \varepsilon\gamma & \beta\tilde{U}^2 - \varepsilon\gamma\lambda & -\varepsilon\gamma \\ -\varepsilon\gamma\lambda & r_\alpha^2 - \nu\tilde{U}^2 + \varepsilon\gamma\lambda^2 & \varepsilon\gamma\lambda \\ -\gamma & \gamma\lambda & \gamma \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \xi_h y^3 + \varepsilon\xi(y - \tilde{x} - \lambda\alpha)^3 \\ \xi_\alpha \alpha^3 + \varepsilon\lambda\xi(y - \tilde{x} - \lambda\alpha)^3 \\ \xi(y - \tilde{x} - \lambda\alpha)^3 \end{bmatrix},$$

where $(\prime) = d/d\tau$.

The characteristics of the NLTVA are defined according the following five parameters:

1. the mass ratio $\varepsilon = m/M$, between the mass of the NLTVA and that of the wing;
2. the dimensionless distance λ that specifies the location where the NLTVA is attached;
3. the NLTVA reduced eigenfrequency $\gamma = \omega^2/\omega_\alpha^2$, characterizing the eigenfrequency of the NLTVA compared to that of pitch motion;
4. the NLTVA damping ratio $\zeta = c/m\omega_\alpha$;
5. the NLTVA reduced cubic stiffness $\xi = k_3/(m\omega_\alpha^2)$.

For the present study, the mass ratio has been taken equal to 5%. The larger ε the more efficient the NLTVA will be, however one must keep in mind that the absorber needs to have a negligible mass as compared to the airfoil. In this work, the NLTVA is located at the leading edge of the profile, thus $\lambda = 1$. Note that its effect has been found, in our study, to be directly proportional to λ . Hence the location where its influence on the airfoil is optimal has been selected. Eventually, γ and ζ are thus selected as our linear control parameters and ξ as our nonlinear control parameter, the optimal tuning of which is searched for.

2.2. Flutter velocity

The aim of this section is to introduce the flutter velocity of the airfoil system alone, which will be afterward compared to that obtained with the presence of the absorber. The linear part of the equations of motion without the NLTVA writes

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_h + \beta \tilde{U} & 0 \\ -\nu \tilde{U} & \zeta_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega^2 & \beta \tilde{U}^2 \\ 0 & r_\alpha^2 - \nu \tilde{U}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

We assume a solution of the form

$$\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \exp(z t), \quad (4)$$

where $y_0 = y(0)$, $\alpha_0 = \alpha(0)$ and $z \in \mathbb{C}$. Therefore, three situations are possible,

1. $\Re(z) < 0$, the airfoil motion is stable,
2. $\Re(z) \geq 0$ and $\Im(z) \neq 0$, the airfoil encounters flutter,
3. $\Re(z) \geq 0$ and $\Im(z) = 0$, the airfoil encounters divergence.

The linear system Eq. (3) with the ansatz (4) writes

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \exp(z t) = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} z^2 + \zeta_h z + \beta \tilde{U} z + \Omega^2 & x_\alpha z^2 + \beta \tilde{U}^2 \\ x_\alpha z^2 - \nu \tilde{U} z & r_\alpha^2 z^2 + \zeta_\alpha z + r_\alpha^2 - \nu \tilde{U}^2 \end{bmatrix}.$$

By canceling the determinant of \mathbf{B} , the flutter velocity \tilde{U}_f can be found, as shown in [5, 26, 27, 28, 29].

The next section is devoted to the linear stability analysis in the presence of the NLTVA. The calculation will follow the same guidelines recalled here.

3. Linear stability analysis

3.1. Optimization of the NLTVA linear parameters.

The aim of this section is to study the influence of the design parameters γ and ζ on the flutter velocity \tilde{U}_f . The targeted optimal values are those for which \tilde{U}_f is as large as possible, in order to repel the instability.

In the remaining of this study, unless explicitly mentioned, the airfoil linear parameters of Eq. (2) are equal to the parameters from [5]. They are gathered in Table 1 and define the reference case. In the next section, the airfoil parameters will be varied in order to investigate their influence on the NLTVA tuning and effectiveness. In this section, the nonlinear terms are not taken into account.

x_α	r_α	β	ν	Ω	ζ_α	ζ_h
0.2	0.5	0.2	0.08	0.5	0.01	0.01

Table 1: Dimensionless aeroelastic parameters of the reference case [5].

Using the same notations as the previous section, \mathbf{B} is now equal to

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} z^2 + (\zeta_h + \varepsilon\zeta + \beta\tilde{U})z + \Omega^2 + \varepsilon\gamma & x_\alpha z^2 - \varepsilon\zeta\lambda z + \beta\tilde{U}^2 - \varepsilon\gamma\lambda & -\varepsilon\zeta z - \varepsilon\gamma \\ x_\alpha z^2 - (\nu\tilde{U} - \varepsilon\zeta\lambda)z - \varepsilon\gamma\lambda & r_\alpha^2 z^2 + (\zeta_\alpha + \varepsilon\zeta\lambda^2)z + r_\alpha^2 - \nu\tilde{U}^2 + \varepsilon\gamma\lambda^2 & \varepsilon\zeta\lambda z + \varepsilon\gamma\lambda \\ -\zeta z - \gamma & \zeta\lambda z + \gamma\lambda & z^2 + \zeta z + \gamma \end{bmatrix}$$

The determinant of the matrix \mathbf{B} takes the form of a 6th order polynomial,

$$\det(\mathbf{B}) = a_6 z^6 + a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (5)$$

where a_1 to a_6 are detailed in Appendix A. The Routh-Hurwitz criterion is used to determine when one of the roots of $\det(\mathbf{B})$ has a positive real part.

This study leads to four independent conditions called b_5 , c_5 , d_5 and e_5 , which read

$$b_5 = (a_5 a_4 - a_6 a_3)/a_5 > 0, \quad c_5 = b_5 a_3 - a_5 b_4 > 0, \quad d_5 = c_5 b_4 - c_4 b_5 > 0 \quad \text{and} \quad e_5 = d_5 c_4 - d_4 c_5 > 0,$$

$$\text{with } b_4 = (a_5 a_2 - a_6 a_1)/a_5, \quad b_3 = a_0, \quad c_4 = (b_5 a_3 - b_3 a_5)/b_5 \text{ and } d_4 = b_3.$$

These four conditions are plotted as an example in Fig. 2 for $\zeta = 0.15$. Each line corresponds to the points where one of the four expressions b_5 to e_5 becomes positive, as a function of the reduced eigenfrequency γ , and for increasing values of \tilde{U} . Thus, the flutter velocity corresponds to the lowest curve and the stability zone to the area below it, represented as a gray-shaded area in Fig. 2.

This calculation is then conducted for different values of ζ in order to find the optimal couple $(\gamma_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}})$ for which the flutter velocity is maximal. The result is shown in Fig. 3. The maximal reduced flutter velocity, obtained for $\gamma = 0.462$ and $\zeta = 0.11$, is equal to 1.255, which means a

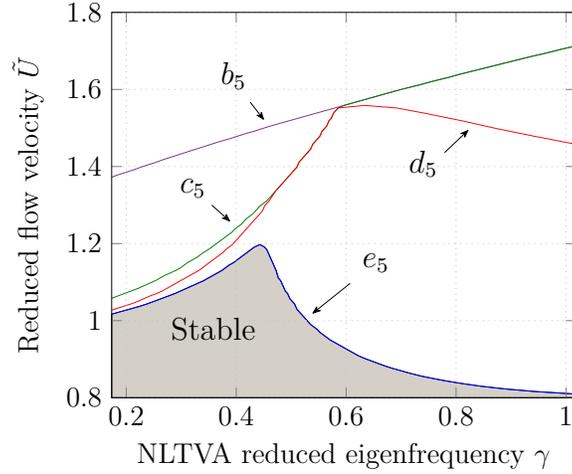


Figure 2: Reduced flutter velocity given by the Routh Hurwitz criterion as a function of the NLTVA reduced eigenfrequency γ , and for a damping ratio $\zeta = 0.15$. The gray area corresponds to the stability of the system.

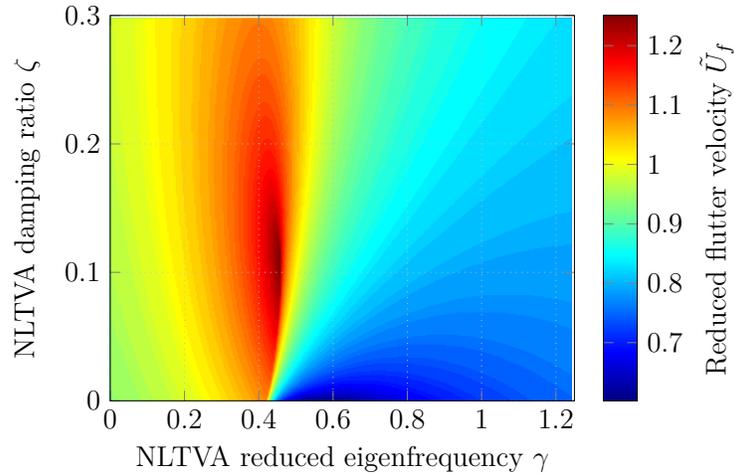


Figure 3: Cartography of the reduced flutter velocity given by the criterion e_5 as a function of the NLTVA reduced frequency γ and damping ratio ζ .

34.5% gain as compared to the flutter velocity without absorber, which is equal to 0.934. This gain on the flutter velocity is named $G_{\tilde{U}_f}$. Because of their complexity, the equations $b_5 = 0$, $c_5 = 0$, $d_5 = 0$ and $e_5 = 0$ cannot be easily made explicit with respect to ζ and γ . Thus, analytical expressions of the optimal values of ζ and γ are not defined. Nevertheless these optimal values can be found numerically.

In practical situations, a slight detuning of γ and ζ may occur. Thus, the sensitivity of \tilde{U}_f regarding these parameters is detailed. It is shown in Fig. 3 that γ has more influence on \tilde{U}_f than

ζ . Moreover, \tilde{U}_f^{max} is on a sharp point rather than on a plateau. That is, if γ increases a little, \tilde{U}_f decreases significantly. Nevertheless, if γ decreases a little, the \tilde{U}_f 's drop is less abrupt. Therefore, the control should guarantee $\gamma \leq \gamma_{opt}$. For a more quantitative point of view, a 10% increase of γ gives a 20% decrease of \tilde{U}_f and a 10% decrease of γ implies a 7% decrease of \tilde{U}_f , whereas a 10% increase or decrease of ζ gives a 4% decrease of \tilde{U}_f .

3.2. Influence of the airfoil parameters

In this section, the airfoil parameters influence on the NLTVA efficiency is investigated. Three main parameters are identified for characterizing the airfoil : the nondimensional static moment $x_\alpha = S_\alpha/(Mb)$, which describes the coupling between pitch and plunge motion, the radius of gyration $r_\alpha = \sqrt{I_\alpha/(Mb^2)}$, which expresses the ratio between the airfoil inertias and finally the frequency ratio $\Omega = \omega_h/\omega_\alpha$ between the two natural frequencies of the plunge and pitch motion. Let us now define the investigation range for each of these three selected parameters.

The location of EC from the leading edge is equal to $0.45c$ in the reference case. The selected investigation range is selected as $[0 \ 0.6]$. The extreme value for x_α is $x_\alpha = 1.1$; corresponding to a gravity center at the trailing edge, however this situation never occurs in practice. The value for r_α^2 depends on the airfoil density distribution and shape. Although theoretically not bounded, it is generally in the interval $[0 \ 1]$ [26, 30, 31]; which is thus the selected range in this study. Finally, variations of Ω^2 are selected in the range $[0 \ 1]$. Indeed, the natural frequency of the pitch motion is generally larger than the plunge one, thus $\Omega^2 \leq 1$.

The optimal value γ_{opt} and ζ_{opt} are computed using the methodology described in section 3.1 while varying the three parameters x_α , r_α^2 and Ω^2 in their respective ranges. The corresponding gain in flutter velocity, $G_{\tilde{U}_f}$, is plotted in Fig. 4. The color represents the value of $G_{\tilde{U}_f}$ for each set of airfoil parameters. The influence of the NLTVA on $G_{\tilde{U}_f}$ is highly dependent on the airfoil parameters and can vary from 10% up to more than 140%.

General tendencies on the influence of x_α , r_α^2 and Ω^2 on the flutter velocity gain $G_{\tilde{U}_f}$ can be drawn from Fig. 4. First of all, there is a small strip of large $G_{\tilde{U}_f}$ for small values of r_α^2 , especially visible for $\Omega^2 = 0.4$ and 0.7 . This small strip has a singular behavior, but the corresponding value of r_α^2 are particularly small and not very realistic. Otherwise, the influence of r_α^2 is limited. Regarding Ω^2 , the larger it is the larger is $G_{\tilde{U}_f}$. Indeed, when Ω^2 is close to one, ω_α and ω_h are close to each other. In this case, the efficiency of the NLTVA, working optimally at a single frequency, is enhanced since both degrees of freedom can be controlled. Eventually, the influence of x_α is substantial, the NLTVA effectiveness decreasing while x_α is increasing. The explanation of this tendency is not obvious. An argument that can be given is that a large x_α push the two airfoil coupled frequencies apart. Thus, as for Ω^2 , the same causes producing the same effects, if x_α is large the NLTVA is less efficient.

3.3. NLTVA linear parameters tuning rule

The aim of the present section is to provide a simple tuning rule allowing one to compute easily the optimal NLTVA linear parameters, namely γ_{opt} and ζ_{opt} ; as a function of the airfoil parameters, condensed in the three dimensionless parameters x_α , r_α^2 and Ω^2 . For that purpose, a third order

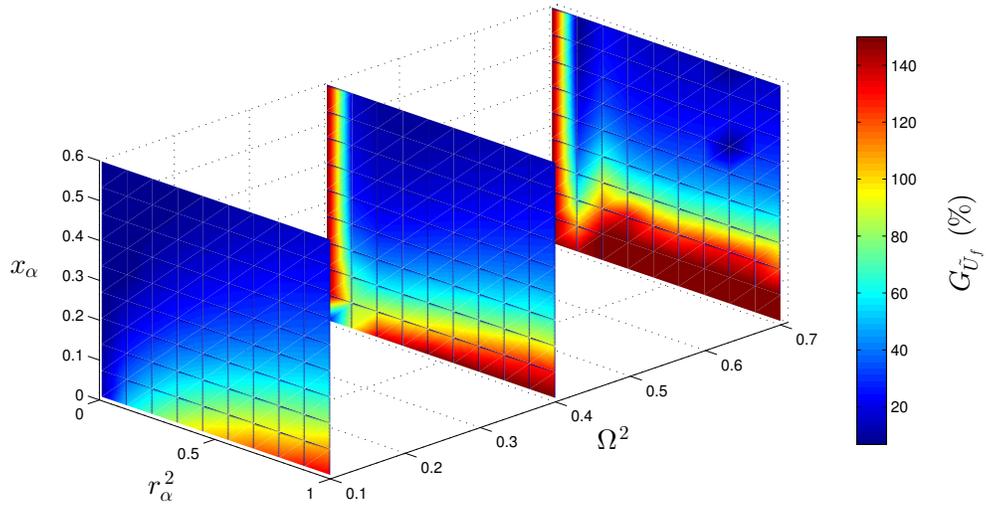


Figure 4: Evolution of the optimal flutter velocity gain $G_{\tilde{U}_f}$ caused by the NLTVA vs x_α , r_α^2 and Ω^2 .

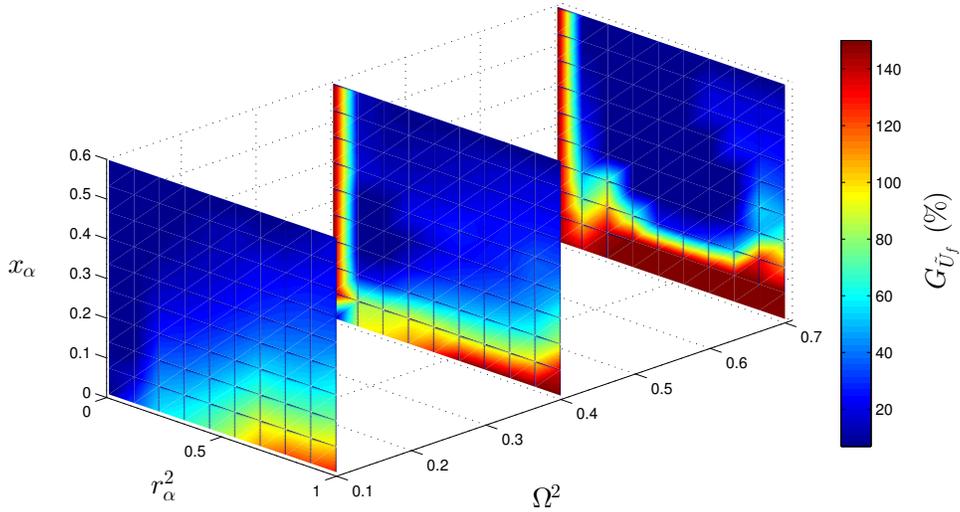


Figure 5: Estimation of $G_{\tilde{U}_f}$ using the fitted parameters $\zeta_{\text{opt}}^{\text{fit}}$ and $\gamma_{\text{opt}}^{\text{fit}}$ vs x_α , r_α^2 and Ω^2 .

polynomial expansion has been found to give an accurate fit to the hypersurface shown in Fig. 4.

More specifically, the following expansion has been used

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{opt}}^{\text{fit}} &= \sum_{i,j,k=0}^3 a_{ijk} x_{\alpha}^i (r_{\alpha}^2)^j (\Omega^2)^k, \\ \zeta_{\text{opt}}^{\text{fit}} &= \sum_{i,j,k=0}^3 b_{ijk} x_{\alpha}^i (r_{\alpha}^2)^j (\Omega^2)^k,\end{aligned}\tag{6}$$

the coefficients of which are given in Appendix B. The resulting $G_{\tilde{U}_f}$, calculated with $\gamma_{\text{opt}}^{\text{fit}}$ and $\zeta_{\text{opt}}^{\text{fit}}$, is plotted in Fig. 5. This figure has to be compared with Fig. 4, showing that the qualitative and quantitative features are retrieved. Hence, Eq. (6) can be easily used in order to determine directly the NLTVA linear parameters as a function of its airfoil parameters.

4. Nonlinear analysis of the post-critical regime

This section is devoted to the tuning methodology for optimizing the nonlinear stiffness of the NLTVA. Two goals are in view. First, one would like to ensure a supercritical bifurcation, as being a safer scenario for an engineering design with respect to the global stability of the airfoil. Second, the post-critical LCOs are investigated in order to decrease their amplitudes as much as possible. For the nonlinear analysis, the NLTVA linear parameters correspond to the airfoil reference case and are gathered in Table 2.

ε	λ	ζ	γ
0.05	1	0.11	0.462

Table 2: NLTVA linear parameters used for the nonlinear analysis.

4.1. Criticality analysis

The Hopf bifurcation encountered at $\tilde{U} = \tilde{U}_f$ can be either subcritical or supercritical. In a normal form analysis of the bifurcation, this characteristic is simply related to the sign of the cubic nonlinear term when the system is written in polar form [32, 33, 34]. The aim of this section is to obtain the expression of this coefficient, based on a reduced-order model that contains the leading order nonlinearity of the normal form. The technique used follows classical methods for dynamical systems [32, 35] that have been recently applied on a Van der Pol-Duffing oscillator [20]. It is decomposed into five steps.

The first step is to recast the equations of motion (2) as a first-order dynamical system as follows

$$\tilde{\mathbf{q}}' = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{b},\tag{7}$$

with

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} y \\ \alpha \\ \tilde{x} \\ y' \\ \alpha' \\ \tilde{x}' \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_3 & Id_3 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_h y^3 + \varepsilon\xi(y - \tilde{x} - \lambda\alpha)^3 \\ \xi_\alpha \alpha^3 + \varepsilon\xi\lambda(\tilde{x} - y + \lambda\alpha)^3 \\ \xi(\tilde{x} - y + \lambda\alpha)^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

For the criticality analysis, ξ_α , ξ_h and ξ are left variable, ξ being the nonlinear control parameter of the NLTVA.

The second step is to estimate the eigenvalues and eigenvectors of \mathbf{A} for $\tilde{U} = \tilde{U}_f$. Because the expression of \mathbf{A} is particularly tedious, an analytical expression of its eigenvectors and eigenvalues is not reachable, they are thus calculated using the airfoil parameters from Table 1 and the retained NLTVA linear parameters. The system being of dimension 6, the eigenvalues and eigenvectors of \mathbf{A} for $\tilde{U} = \tilde{U}_f$ are denoted respectively d_1 to d_6 and \mathbf{V}_1 to \mathbf{V}_6 . Besides, the real and imaginary part of $d_{1..6}$ are denoted $\lambda_{1..6}$ and $\omega_{1..6}$ respectively. The Hopf bifurcation is characterized by a pair of complex conjugate eigenvalues crossing the imaginary axis. At criticality for $\tilde{U} = \tilde{U}_f$, these eigenvalues, denoted d_1 and d_2 , have a zero real part and read

$$d_1 = i\omega_1 \quad \text{and} \quad d_2 = i\omega_2 = -i\omega_1.$$

Their corresponding eigenvectors are denoted \mathbf{V}_1 and \mathbf{V}_2 . Because it has been found that in our case \mathbf{V}_1 to \mathbf{V}_6 are complex conjugate, the following transformation matrix is introduced [32, 20],

$$\mathbf{T} = [\text{Re}(\mathbf{V}_1) \quad \text{Im}(\mathbf{V}_1) \quad \text{Re}(\mathbf{V}_3) \quad \text{Im}(\mathbf{V}_3) \quad \text{Re}(\mathbf{V}_5) \quad \text{Im}(\mathbf{V}_5)].$$

The third step is to obtain the first-order Jordan form of Eq. (7) by changing the linear basis with the transform $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{T}\mathbf{y}$. The dynamics for \mathbf{y} thus writes

$$\mathbf{y}' = \mathbf{W}\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{b}}, \quad (8)$$

where $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}$ and $\mathbf{W} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. It is reminded to the reader that in this expression, the elements of $\tilde{\mathbf{b}}$ are function of ξ_α , ξ_h and ξ .

The fourth step is to reduce Eq. (8) to its first-order center manifold [32, 33, 36, 37]. For a system encompassing only third order nonlinearities, this corresponds to neglect variables not related to the bifurcation, *i.e.* y_3 to y_6 .

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where \tilde{b}_1 and \tilde{b}_2 are the following polynomial functions

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= c_{30}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_1^3 + c_{21}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_1^2 y_2 + c_{12}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_1 y_2^2 + c_{03}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_2^3 \\ \tilde{b}_2 &= d_{30}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_1^3 + d_{21}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_1^2 y_2 + d_{12}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_1 y_2^2 + d_{03}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi) y_2^3 \end{aligned} \quad (10)$$

The expression of the $c_{ij}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi)$ and $d_{ij}(\xi_\alpha, \xi_h, \xi)$ coefficients are given in Appendix C.

The fifth step is to operate the following polar transformation

$$y_1 = r \cos(\omega_1) \quad \text{and} \quad y_2 = r \sin(\omega_1),$$

where $r \in \mathbb{R}$. Unfolding the singularity in the vicinity of the critical point [34, 33], the Hopf bifurcation can be locally described with

$$r' = \lambda_\alpha(\tilde{U} - \tilde{U}_f)r + \rho r^3, \quad (11)$$

where $\lambda_\alpha = \partial\lambda/\partial\tilde{U}$ and $\lambda = \lambda_1$ for any \tilde{U} ; λ_α is estimated numerically. That is, λ_1 is calculated for a flow speed \tilde{U} slightly larger than \tilde{U}_f ($\sim 0.05\%$) and the slope between the two is calculated. It has to be noticed that Eq. (11) is only valid for \tilde{U} in a neighborhood of \tilde{U}_f , because Eqs. (9 - 11) result from a local analysis at criticality. The validity of this neighborhood will be discussed in the next section. Eventually, it can be proven [33] that

$$\rho = (1/8)(3c_{30} + c_{12} + d_{21} + 3d_{03}). \quad (12)$$

The non-trivial solution of Eq. (11) is equal to $\sqrt{-\lambda_\alpha(\tilde{U} - \tilde{U}_f)/\rho}$. Thus, if $\rho > 0$, this solution is valid for $\tilde{U} < \tilde{U}_f$ and the bifurcation is subcritical. Otherwise, if $\rho < 0$, the non-trivial solution of Eq. (11) is valid for $\tilde{U} > \tilde{U}_f$ and the bifurcation is supercritical. The value of ξ for which $\rho = 0$ (denoted ξ_c) is a linear function of ξ_α and ξ_h , and can directly be derived from Eq. (12). The expression of ξ_c is found by using the parameters from Table 1 and 2 and yields :

$$\xi_c = 0.0116\xi_h + 0.0966\xi_\alpha. \quad (13)$$

If $\xi > \xi_c$, the instability is supercritical and if $\xi < \xi_c$, the instability is subcritical. The nonlinearity of the NLTVA is thus able to cancel the subcriticality of the bifurcation. The validation of the analytical procedure described above as well as the behavior of the system in the post-critical regime is investigated in the next section.

4.2. Post-critical regime

The analytical procedure described above is compared with numerical solutions obtained by a continuation technique, using a pseudo-arclength method implemented in the software AUTO [38].

The post-critical regime is explored for a hard and a soft pitch spring, *i.e.* $\xi_\alpha > 0$ and $\xi_\alpha < 0$ respectively. A hard spring can be used to represent a thin wing or a propeller blade, whereas a soft spring may be associated with panel buckling [39, 24]. Nonlinear restoring force is considered only on the pitch motions so that $\xi_h = 0$. This assumption is justified by the fact that in the post-critical regime, LCOs amplitudes are very small on the plunge mode, so that the cubic nonlinearity is not excited. Moreover, it has been verified in all the numerical results presented that setting $\xi_h = 1$ does not change significantly the bifurcation behavior.

Firstly, the hard pitch spring is investigated. This configuration is similar to the one studied by Lee *et al.* [24]. Secondly, the configuration with a soft pitch spring is explored. This case is similar to the one studied by Pettit and Beran [25]. In this case a quintic stiffness is added to the pitch stiffness in order to have stable solutions in the post-critical regime.

4.2.1. Hard pitch spring

In a similar manner as in [24], we set here the nonlinear restoring forces to $\xi_\alpha = 1$ and $\xi_h = 0$. The bifurcation diagram for the airfoil without absorber (*i.e.* with $\varepsilon = 0$) is first shown in Fig. 6(a,b). The result corresponds to a supercritical Hopf bifurcation. The analytical solution obtained in section 4.1 is also represented, showing a very good agreement for small amplitude oscillations.

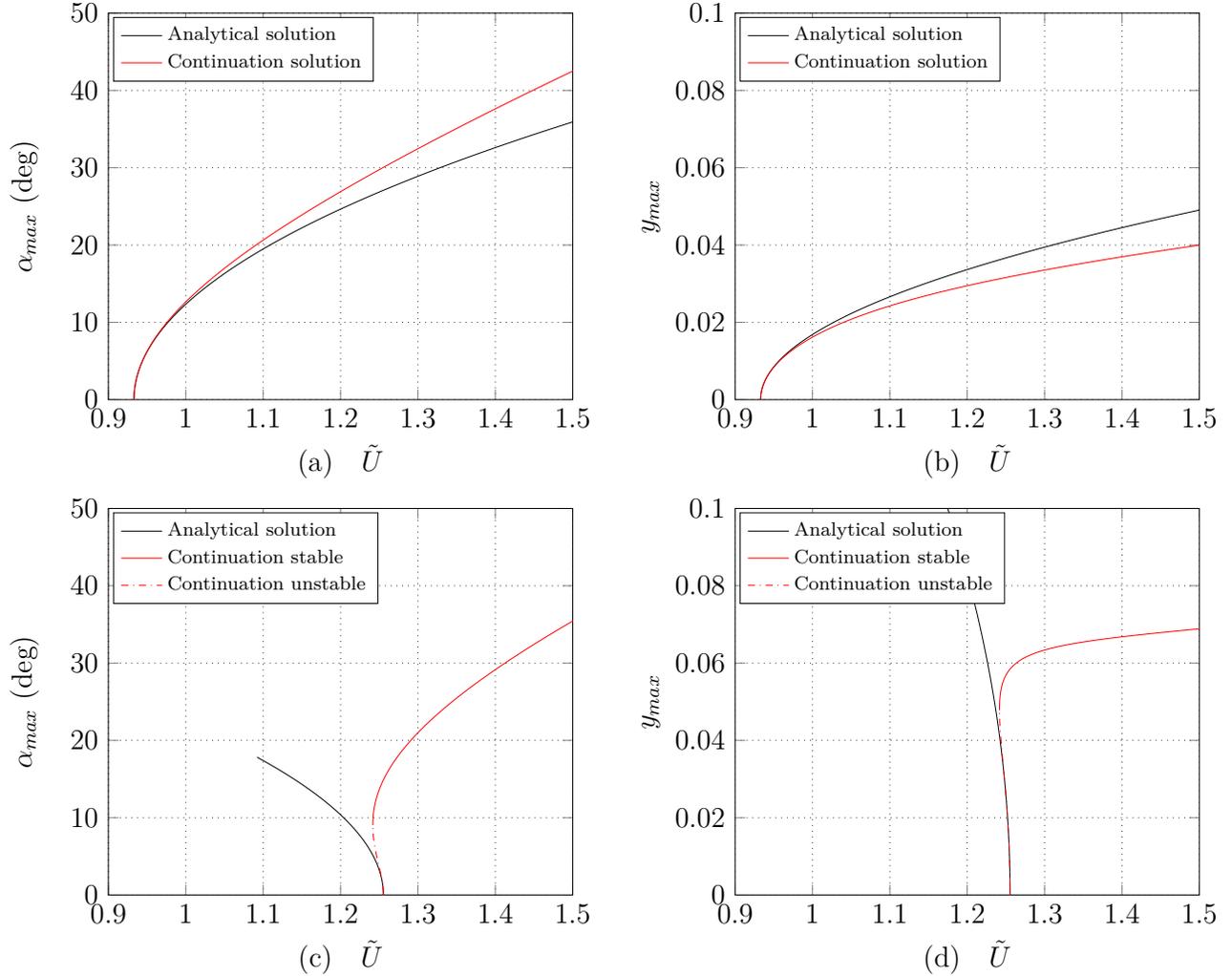


Figure 6: Bifurcation diagram of pitch and plunge mode for the system without absorber (a,b) and in presence of a NLTVA without nonlinearities (c,d).

The case with a NLTVA without nonlinearities (*i.e.* $\xi = 0$), which is equivalent to a TMD, is shown in Fig. 6(c,d). As predicted by the linear stability analysis, the flutter velocity is repelled from 0.93 to 1.26. Nevertheless, the Hopf bifurcation becomes subcritical. Hence, a detrimental effect of repelling the flutter velocity is to shift the originally supercritical Hopf bifurcation to a

subcritical one. The most salient disadvantage of subcriticality lies in the appearance of a jump phenomenon at the flutter velocity, when increasing (and decreasing) the flow speed. In this example, when \tilde{U} is slightly larger than \tilde{U}_f , the amplitude of pitch motion varies suddenly from 0 to 15 degrees, which may cause serious damage to the structure. Another effect of the subcriticality is the existence of a bi-stable region for flow velocities smaller than the flutter velocity.

We now investigate the influence of the nonlinear stiffness ξ of the NLTVA on the Hopf bifurcation criticality. For that purpose, the bifurcation diagram is plotted for four increasing values of ξ in Fig. 7. The four selected cases are

1. $\xi = 0.06$ ($\xi < \xi_c$), where the subcriticality is less pronounced than for $\xi = 0$,
2. $\xi = 0.0966$ ($\xi = \xi_c$), where, according to the analytical prediction, there is a transition between subcritical and supercritical behavior,
3. $\xi = 0.217$ ($\xi_c < \xi < \xi_s$, where $\xi_s = 0.218$), which is the largest value of ξ before a global bifurcation appearance,
4. $\xi = 0.218$ ($\xi = \xi_s$), where a global bifurcation suddenly occurs in the diagram, with appearance of two limit points, as well as two Neimark-Sacker bifurcations points with in between quasiperiodic solutions.

These results clearly evidenced the effect of the NLTVA on the bifurcation diagram. Increasing the cubic stiffness ξ turns out to make the bifurcation more and more supercritical. However the global behavior is also affected so that the optimal value is not the largest possible value of ξ . The global bifurcation occurring for $\xi_s = 0.218$ modifies drastically the diagram, which is then non optimal in a design point of view. Indeed, the two limit points give rise to a new global subcritical behavior with the appearance of a solution branch with large amplitude that persists for smaller values of \tilde{U}_f . Hence, this situation is to be avoided and optimal values for ξ are founded with $\xi > \xi_c$ (ensuring supercriticality) and $\xi < \xi_s$ (avoiding an extra global bifurcation scenario); the largest decrease of LCO amplitude on pitch being obtained with $\xi = 0.217$. This case could be optimal, but its robustness is not satisfactory since $\xi = 0.218$ gives a detrimental global bifurcation scenario. Furthermore, the abrupt and drastic transition of the scenario for ξ varying from $\xi = 0.217$ to $\xi = 0.218$ suggests that periodic stable solutions probably exist also for $\xi < 0.218$ and $\tilde{U} < \tilde{U}_f$. However, a detailed analysis of this aspect is out of the scope of this study.

The influence of the NLTVA is summarized in Fig. 8. The LCO amplitude on pitch has been reduced significantly by the NLTVA. For example at $\tilde{U} = 1.4$, the LCO amplitude on pitch has been decreased by 36.4 % compared to the case without absorber. Nevertheless, at the same time, the LCO amplitude on plunge has been increased by 115.9 %. Even if this increase seems large, it is remarked that the more inconvenient LCO are those on the pitch mode, because this is the most energetic mode of the system in the post-critical regime and even after an increase of 115.9 % the LCO amplitude on plunge remains very small (8 % of the semi-chord).

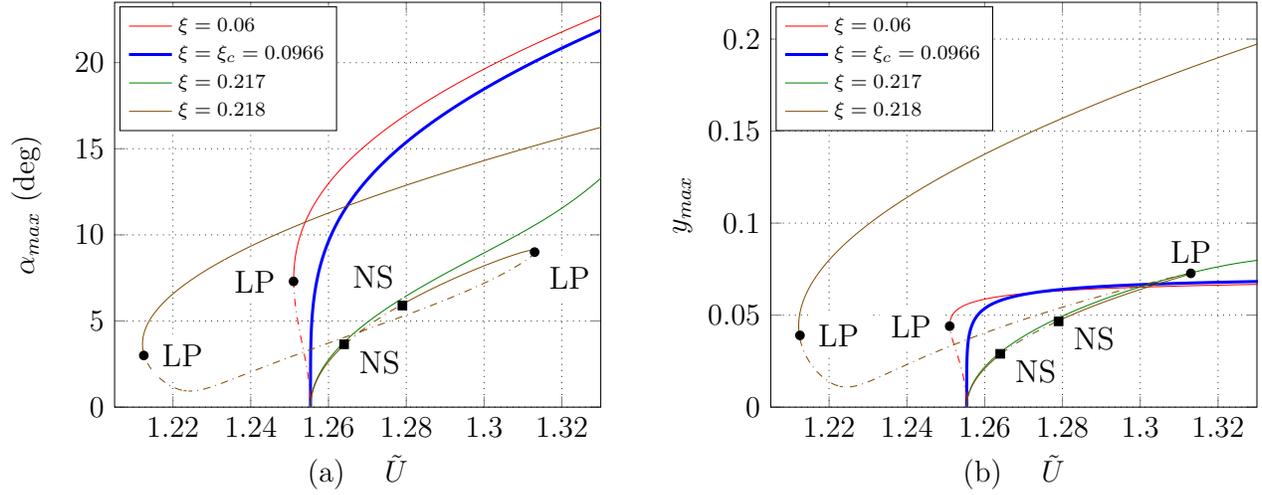


Figure 7: Bifurcation diagram of (a) pitch and (b) plunge mode for four increasing values of ξ . The solid lines correspond to the stable solutions and the dashed line to the unstable ones. LP stands for limit point and NS for Neimark Sacker bifurcation point.

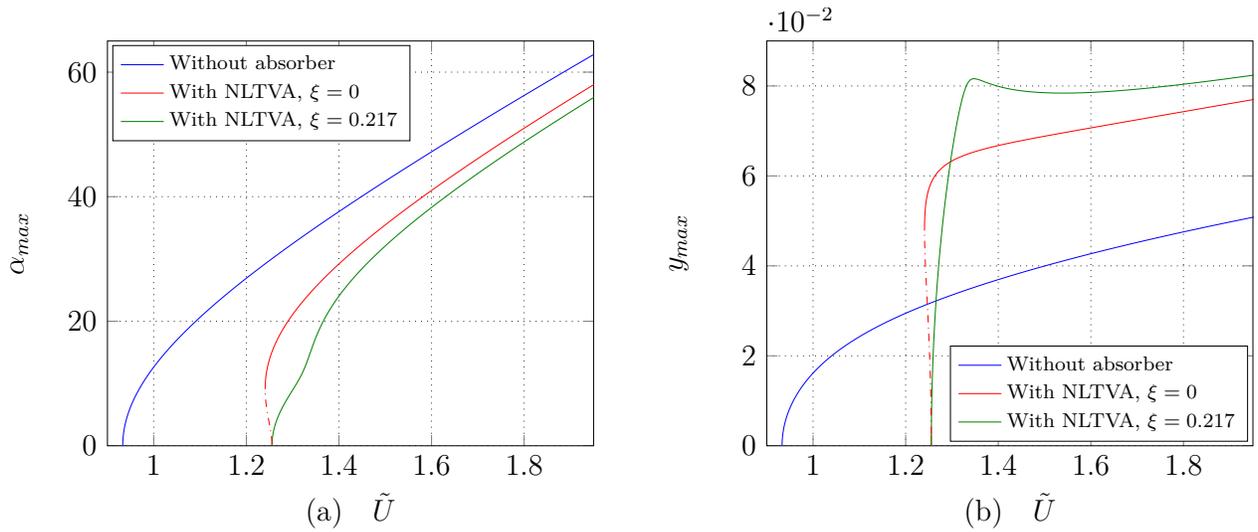


Figure 8: Influence of the NLTVA with $\xi = 0$ and $\xi = 0.217$ on the bifurcation diagram of the 2 dofs airfoil.

4.2.2. Soft pitch spring

In this section, the influence of the NLTVA on the airfoil with a soft pitch spring is investigated. That is $\xi_\alpha = -1$ and $\xi_h = 0$. Moreover, a quintic stiffness, named $\xi_{\alpha 5}$, is added to the pitch restoring force, which means that the vector \mathbf{b} from Eq. (7) becomes

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_h y^3 + \varepsilon \xi (y - \tilde{x} - \lambda \alpha)^3 \\ \xi_\alpha \alpha^3 + \xi_{\alpha 5} \alpha^5 + \varepsilon \xi \lambda (\tilde{x} - y + \lambda \alpha)^3 \\ \xi (\tilde{x} - y + \lambda \alpha)^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

We choose in this study $\xi_{\alpha 5} = 7$, this configuration is similar to the case studied by Pettit and Beran [25].

As in the previous section, the effect of ξ on the airfoil bifurcation diagram is investigated. For that purpose, the bifurcation diagram is computed for five increasing values of ξ from -0.5 to 0.4, the results are shown in Fig. 9. The key values are the following:

- $\xi_c = -0.0966$, which is the critical value predicted from the analytical study using Eq. (13). When $\xi \geq \xi_c$, the bifurcation is supercritical, otherwise it is subcritical.
- $\xi_{s_1} = -0.15$ and $\xi_{s_2} = 0.125$: between these two values, a global bifurcation occurs and the solution branches encounters Neimark-Sacker bifurcations, resulting in a more complex shape of the diagram.
- $\xi = 0$ which corresponds to the TMD.

Around the criticality, detailed in Fig. 9(c,d), the effect of increasing ξ is to bend the bifurcation branch to the right. In order to have a supercritical behavior, one would have thus expect that selecting a larger value than $\xi_c = -0.0966$ could have been sufficient. However the numerical simulation shows that ensuring supercriticality with $\xi \geq \xi_c$ in the vicinity of the critical flutter velocity do not avoid the occurrence of a global subcritical behavior. Increasing ξ worsens the scenario with a large amplitude branch going down to smaller velocities, even though locally the supercriticality is enforced. In particular the cases $\xi = \xi_c = -0.0966$ and $\xi = 0$ shown in Fig. 9(a,b) show large amplitudes especially present in the plunge mode, which are not acceptable in a design perspective to mitigate the flutter instability. And still increasing ξ is definitely not a solution, as the situation worsens as soon as $\xi > \xi_{s_2}$, as exemplified with the case $\xi = 0.4$.

In this more difficult case, a compromise must be found between the acceptable subcriticality and the amplitudes of LCOs in the post-critical regime. With this aim in view, the case $\xi = -0.5$ shown in Fig. 9 could represent such an optimal, with a small interval of subcriticality together with reduced amplitude of the LCOs. Depending on the context and the design constraints, $\xi = -0.15$ also represents an interesting case for the control of the flutter instability. Nevertheless this case is more difficult to handle than the precedent with a hardening spring, and an optimal control as initially desired is out of reach with the present NLTVA design.

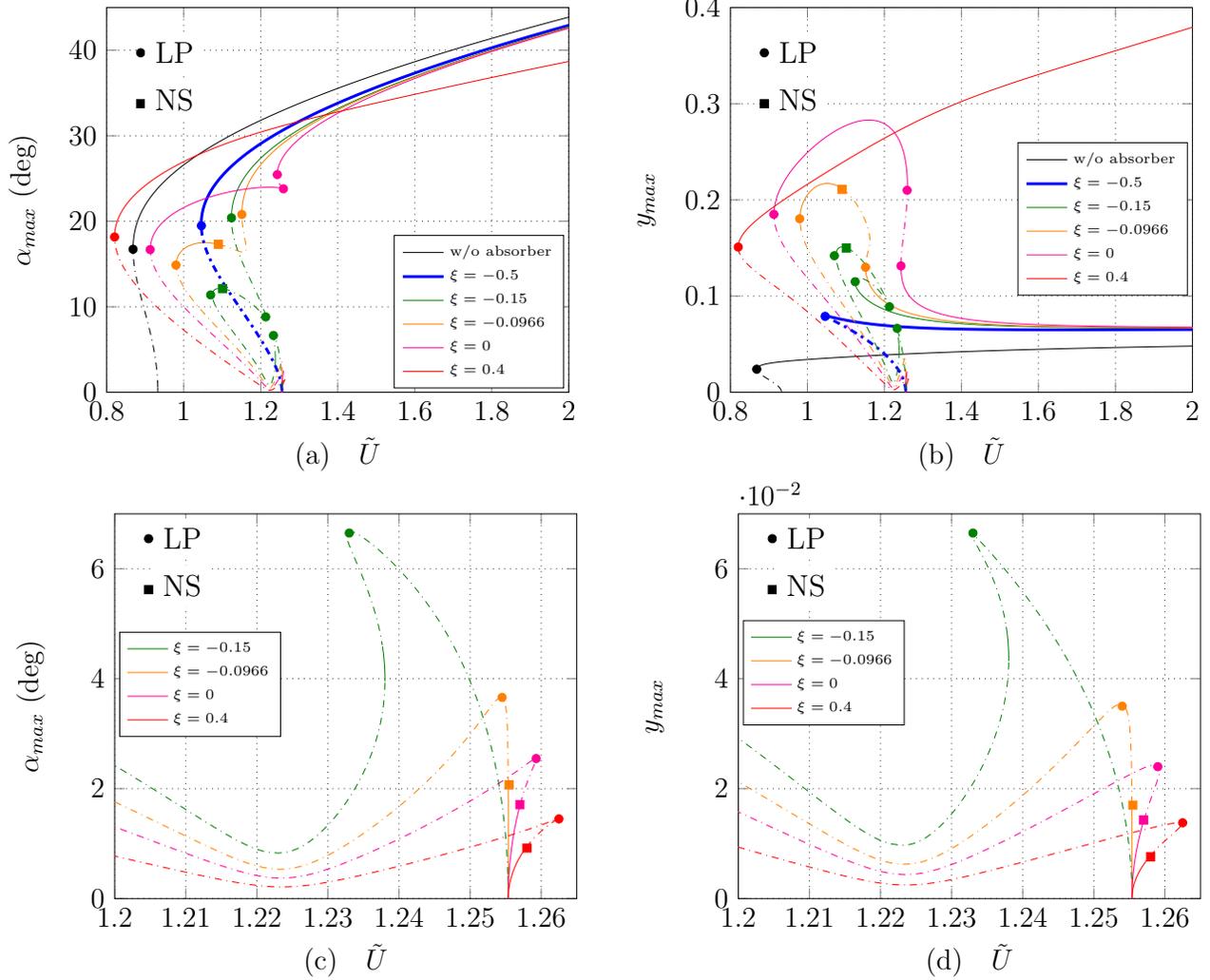


Figure 9: Bifurcation diagram of (a,c) pitch and (b,d) plunge mode for increasing values of ξ . The solid lines correspond to the stable solutions and the dashed line to the unstable ones. The plots (c) and (d) detail the bifurcation diagram around the criticality for $\xi \geq -0.15$. LP stands for limit point and NS for Neimark Sacker bifurcation point.

5. Conclusion

The influence of an NLTVA on the airfoil flutter instability has been investigated. The NLTVA is defined by two parameters : its linear stiffness, which can be tuned in order to repel as much as possible the flutter velocity U_f ; and its nonlinear stiffness, which can be used for a better control of the bifurcation diagram. Linear stability analysis has shown that the flutter velocity can indeed be repelled by finding optimal values of stiffness together with the damping ratio of the absorber. Important gains ranging roughly from 30 % to more than 150 % can be theoretically achieved. A design rule has also been provided by means of a polynomial fit of the optimal parameters, for varying values defining the studied airfoil.

A nonlinear analysis has then be conducted, including a local analytical prediction, and a bifurcation study for a hardening and a softening pitch spring stiffness. Results show that in the hardening case, an optimal tuning is achieved, controlling the bifurcation in a supercritical case with an important gain in the LCOs amplitudes. The softening case has been found more difficult to optimize, and a compromise between subcriticality and large amplitude LCOs has to be found, depending on the context.

Acknowledgment

We thank Direction Générale de l'Armement (DGA) for a financial support to this work.

References

- [1] Vipperman, J. S., Clark, R. L., Conner, M., and Dowell, E. H., 1998. "Experimental active control of a typical section using a trailing-edge flap". *Journal of Aircraft*, **35**(2), pp. 224–229.
- [2] Karpel, M., 1982. "Design for active flutter suppression and gust alleviation using state-space aeroelastic modeling". *Journal of Aircraft*, **19**(3), pp. 221–227.
- [3] Ko, J., Kurdila, A. J., and Strganac, T. W., 1997. "Nonlinear control of a prototypical wing section with torsional nonlinearity". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **20**(6), pp. 1181–1189.
- [4] Heeg, J., 1993. Analytical and experimental investigation of flutter suppression by piezoelectric actuation. Tech. Rep. 3241, NASA.
- [5] Dowell, E. H., 2004. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer Academic Publishers.
- [6] Kwon, S.-D., and Park, K.-S., 2004. "Suppression of bridge flutter using tuned mass dampers based on robust performance design". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **92**(11), pp. 919–934.
- [7] Vaurigaud, B., Manevitch, L. I., and Lamarque, C.-H., 2011. "Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to coupled flutter using targeted energy transfer". *Journal of Sound and Vibration*, **330**(11), pp. 2580–2595.

- [8] Pourzeynali, S., and Datta, T., 2002. “Control of flutter of suspension bridge deck using TMD”. *Wind and Structures*, **5**(5), pp. 407–422.
- [9] Den Hartog, J. P., 1934. *Mechanical vibrations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- [10] Gattulli, V., Di Fabio, F., and Luongo, A., 2004. “Nonlinear tuned mass damper for self-excited oscillations”. *Wind and Structures*, **7**, pp. 251–264.
- [11] Lee, Y. S., Vakakis, A., Bergman, L., McFarland, D. M., and Kerschen, G., 2007. “Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1: theory”. *AIAA journal*, **45**(3), pp. 693–711.
- [12] Lee, Y. S., Kerschen, G., McFarland, D. M., Hill, W. J., Nickkawde, C., Strganac, T. W., Bergman, L. A., and Vakakis, A. F., 2007. “Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2: experiments”. *AIAA journal*, **45**(10), pp. 2391–2400.
- [13] Gendelman, O. V., 2001. “Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators”. *Nonlinear dynamics*, **25**(1-3), pp. 237–253.
- [14] Vakakis, A. F., and Gendelman, O., 2001. “Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part ii - resonance capture”. *Journal of Applied Mechanics*, **68**(1), pp. 42–48.
- [15] Vakakis, A. F., Manevitch, L. I., Gendelman, O., and Bergman, L., 2003. “Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments”. *Journal of Sound and Vibration*, **264**(3), pp. 559–577.
- [16] Vakakis, A. F., Gendelman, O. V., Bergman, L. A., McFarland, D. M., Kerschen, G., and Lee, Y. S., 2008. *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*, Vol. 156. Springer, Ontario.
- [17] Viguié, R., and Kerschen, G., 2009. “Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: a tuning methodology”. *Journal of Sound and Vibration*, **326**(3), pp. 780–793.
- [18] Habib, G., Detroux, T., Viguié, R., and Kerschen, G., 2015. “Nonlinear generalization of Den Hartog’s equal-peak method”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **52**, pp. 17–28.
- [19] Habib, G., and Kerschen, G., 2016. “A principle of similarity for nonlinear vibration absorbers”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **332**(1), pp. 1–8.
- [20] Habib, G., and Kerschen, G., 2015. “Suppression of limit cycle oscillations using the nonlinear tuned vibration absorber”. In *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 471, p. 20140976.

- [21] Grappasonni, C., Habib, G., Detroux, T., and Kerschen, G., 2016. “Experimental demonstration of a 3D-printed nonlinear tuned vibration absorber”. In *Nonlinear Dynamics, Volume 1. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*. Springer, pp. 173–183.
- [22] Benacchio, S., Malher, A., Boisson, J., and Touzé, C., 2016. “Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses”. *Nonlinear Dynamics*, **85**(2), pp. 893–911.
- [23] Lacarbonara, W., and Cetraro, M., 2011. “Flutter control of a lifting surface via visco-hysteretic vibration absorbers”. *International Journal Aeronautical and Space Sciences*, **12**(4), pp. 331–345.
- [24] Lee, B. H. K., Jiang, L., and Wong, Y., 1998. “Flutter of an airfoil with a cubic nonlinear restoring force”. *39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf, 20-23 April, Long Beach, CA, 1998.*, pp. 237–257.
- [25] Pettit, C. L., and Beran, P. S., 2003. “Effects of parametric uncertainty on airfoil limit cycle oscillation”. *Journal of Aircraft*, **40**(5), pp. 1004–1006.
- [26] Bisplinghoff, R. L., and Ashley, H., 1962. *Principles of aeroelasticity*. John Wiley and Sons, Inc., New-York.
- [27] Fung, Y. C., 2002. *An introduction to the theory of aeroelasticity*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- [28] Lee, Y. S., Vakakis, A. F., Bergman, L. A., McFarland, D. M., and Kerschen, G., 2005. “Triggering mechanisms of limit oscillations due to aeroelastic instability”. *Journal of Fluids and Structures*, **21**, pp. 485–529.
- [29] Malher, A., Doaré, O., and Touzé, C., 2015. “Pseudoelastic shape memory alloys to mitigate the flutter instability: A numerical study”. In *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*. Springer, pp. 353–365.
- [30] Amandolèse, X., Michelin, S., and Choquel, M., 2013. “Low speed flutter and limit cycle oscillations of a two-degree-of-freedom flat plate in a wind tunnel”. *Journal of Fluids and Structures*, **43**, pp. 244–255.
- [31] Dimitriadis, G., and Li, J., 2009. “Bifurcation behavior of airfoil undergoing stall flutter oscillations in low-speed wind tunnel”. *AIAA journal*, **47**(11), pp. 2577–2596.
- [32] Kuznetsov, Y. A., 2013. *Elements of applied bifurcation theory*, Vol. 112. Springer, New York.
- [33] Guckenheimer, J., and Holmes, P., 2013. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, New York.
- [34] Manneville, P., 1995. “Dissipative structures and weak turbulence”. *Chaos-The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour*, pp. 257–272.

- [35] Iooss, G., and Adelmeyer, M., 1998. *Topics in bifurcation theory and applications*. World Scientific, Singapore.
- [36] Gai, G., and Timme, S., 2015. “Nonlinear reduced-order modelling for limit-cycle oscillation analysis”. *Nonlinear Dynamics*, **84**(2), pp. 991–1009.
- [37] Touzé, C., Thomas, O., and Chaigne, A., 2004. “Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes”. *Journal of Sound and Vibration*, **273**(1), pp. 77–101.
- [38] Doedel, E. J., Paffenroth, R. C., Champneys, A. R., Fairgrieve, T. F., Kuznetsov, Y. A., Sandstede, B., and Wang, X., 2002. Auto 2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Tech. rep., Concordia University.
- [39] Woolston, D. S., 2012. “An investigation of effects of certain types of structural nonlinearities on wing and control surface flutter”. *Journal of the Aeronautical Sciences*, **24**(1), pp. 57–63.

Appendix A: Coefficients of Eq. (5)

$$a_6 = r_\alpha^2 - x_\alpha^2,$$

$$a_5 = (\zeta_h + (1 + \varepsilon)\zeta)r_\alpha^2 + (\nu x_\alpha + br_\alpha^2)\tilde{U} + \zeta_\alpha - x_\alpha^2\zeta + (2x_\alpha + \lambda)\varepsilon\lambda\zeta,$$

$$a_4 = (\Omega^2 + \zeta\zeta_h + (1 + \varepsilon)\gamma + 1)r_\alpha^2 + (\beta\zeta_\alpha + (\nu x_\alpha + r_\alpha^2\beta)\zeta)\tilde{U} - (\beta x_\alpha + \nu)\tilde{U}^2 + (\zeta_h + (1 + \varepsilon)\zeta)\zeta_\alpha + \varepsilon\lambda^2\zeta\zeta_h - \gamma x_\alpha^2 + (2x_\alpha + \lambda)\varepsilon\gamma\lambda,$$

$$a_3 = (\zeta\Omega^2 + (1 + \gamma)\zeta_h + (1 + \varepsilon)\zeta)r_\alpha^2 - (\nu\zeta_h + \beta x_\alpha\zeta + (1 + \varepsilon)\nu\zeta)\tilde{U}^2 + (\beta\zeta\zeta_\alpha + \gamma\nu x_\alpha + r_\alpha^2\beta(1 + \gamma))\tilde{U} + (\zeta\zeta_\alpha + \varepsilon\gamma\lambda^2)\zeta_h + (1 + \varepsilon)\gamma\zeta_\alpha + (\zeta_\alpha + \varepsilon\lambda^2\zeta)\Omega^2,$$

$$a_2 = ((1 + \gamma)\Omega^2 + \zeta\zeta_h + (1 + \varepsilon)\gamma)r_\alpha^2 - (\nu\Omega^2 + \nu\zeta\zeta_h + \beta\gamma x_\alpha + (1 + \varepsilon)\gamma\nu)\tilde{U}^2 + \beta(\gamma\zeta_\alpha + r_\alpha^2\zeta)\tilde{U} + (\zeta\zeta_\alpha + \varepsilon\gamma\lambda^2)\Omega^2 + \gamma\zeta_\alpha\zeta_h,$$

$$a_1 = (\zeta\Omega^2 + \gamma\zeta_h)r_\alpha^2 - \nu(\zeta\Omega^2 + \gamma\zeta_h)\tilde{U}^2 + \beta\gamma r_\alpha^2\tilde{U} + \gamma\zeta_\alpha\Omega^2,$$

$$a_0 = (r_\alpha^2 - \nu\tilde{U}^2)\gamma\Omega^2.$$

Appendix B: Coefficients of Eq. (6)

The majority of the coefficients a_{ijk} and b_{ijk} from Eq. (6) are neglectable. The non-neglectable coefficients a_{ijk} and b_{ijk} are

$a_{000} = 0.328$	$a_{100} = -0.629$	$a_{200} = 0.173$	$a_{300} = 0.294$
$a_{010} = 0.604$	$a_{210} = 0.165$	$a_{030} = -0.124$	$a_{001} = 0.486$
$a_{101} = -0.437$	$a_{111} = -0.113$	$a_{021} = -0.275$	$a_{002} = 0.278$
$a_{102} = -0.254$	$a_{003} = 0.142$	$a_{103} = -0.143$	

$b_{000} = 0.11$	$b_{100} = 0.0475$	$b_{200} = -0.0701$	$b_{300} = -0.174$
$b_{010} = 0.00307$	$b_{210} = 0.174$	$b_{030} = -0.0329$	$b_{001} = -0.00415$
$b_{101} = -0.128$	$b_{111} = 0.106$	$b_{021} = 0.0164$	$b_{002} = -0.081$
$b_{102} = -0.0444$	$b_{003} = -0.00191$	$b_{103} = 0.00259$	

Appendix C: Coefficients of Eq. (10)

The nonlinear coefficients of the cubic polynomial terms appearing in Eq. (10) are here detailed. Since the first transformation matrix has no simple analytic expression, the numerical values of the coefficients are given, which correspond to the airfoil parameters of the reference case given in Table 1 and to the optimal NLTVA linear parameters given in Table 2.

$$\begin{aligned}
c_{30} &= 0.047 \xi_h - 0.064 \xi_\alpha - 4.9 \xi & d_{30} &= -0.01 \xi_h - 0.43 \xi_\alpha - 0.28 \xi \\
c_{21} &= -0.054 \xi_h + 0.16 \xi_\alpha + 2.6 \xi & d_{21} &= 0.012 \xi_h + 1.1 \xi_\alpha + 0.15 \xi \\
c_{12} &= 0.021 \xi_h - 0.13 \xi_\alpha - 0.46 \xi & d_{12} &= -4.5 \cdot 10^{-3} \xi_h - 0.87 \xi_\alpha - 0.026 \xi \\
c_{03} &= -2.7 \cdot 10^{-3} \xi_h + 0.036 \xi_\alpha + 0.027 \xi & d_{03} &= 5.7 \cdot 10^{-4} \xi_h + 0.24 \xi_\alpha + 1.5 \cdot 10^{-3} \xi
\end{aligned}$$

Chapitre 7

Réalisation pratique d'un amortisseur à raideurs ajustables

Après avoir présenté l'influence du NLTVA sur un profil d'aile en flottement, nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre une réalisation expérimentale possible et originale d'un NLTVA. L'idée principale du dispositif présenté ici est de tirer partie de la force magnétique présente entre des aimants permanents. Le dispositif proposé est appelé absorbeur magnétique de vibration et noté MVA dû à sa dénomination anglaise. Le MVA est schématisé sur la Figure 7.1. Ce chapitre est composé de travaux menés conjointement avec Simon Benacchio lors de son stage post-doctoral à l'Unité de Mécanique de Février à Septembre 2015. Ce travail a donné lieu à une publication parue dans la revue *Nonlinear Dynamics* (numéro 2 de juillet 2016). Le chapitre est composé de cette publication et un résumé détaillant le MVA est donné en préambule.

L'idée du MVA a été originalement proposée par Jean Boisson, qui a étudié sa faisabilité avec un étudiant au début de l'année 2014. Puis, j'ai aidé à la conception du MVA utilisé pour les essais statiques servant à mesurer sa force de rappel, à la réalisation de ces essais statiques, puis à l'établissement et à la validation du modèle utilisé pour estimer la force de rappel du MVA.

Le MVA, schématisé sur la Figure 7.1, est composé d'un assemblage d'aimants annulaires positionnés sur des axes en plastique. Hormis l'aimant numéroté 1 sur la Figure 7.1, qui peut se mouvoir le long de son axe, tous les aimants sont fixes. Les aimants 2 et 3, positionnés sur l'axe central, et nommés aimants répulsifs, ont une polarisation opposée à celle de l'aimant mobile 1. Ces deux aimants ont pour but de repousser l'aimant central afin de le maintenir au milieu de son axe et ainsi créer une force de rappel. Les aimants désaxés 4, 5, 6 et 7, appelés aimants correctifs, ont la même polarisation que l'aimant mobile 1. Ces quatre aimants correctifs ont pour rôle de modifier la force de rappel exercée par les aimants 2 et 3.

Les paramètres géométriques de ce dispositif sont la distance d entre les axes, la distance $2R$ entre les aimants correctifs du même axe, la distance r entre l'aimant mobile 1 au repos et l'aimant fixe 3, et enfin la position x de l'aimant mobile, comme montré sur la Figure 7.1. La force de rappel appliquée à l'aimant mobile est alors de la forme $K_1 x + K_3 x^3$ pour des faibles valeurs de x , où les raideurs K_1 et K_3 dépendent des propriétés des aimants ainsi que des deux longueurs d et R .

À l'aide de ce dispositif, il est alors théoriquement possible de modifier la raideur linéaire et cubique du MVA indépendamment l'une de l'autre. Ce qui est particulièrement intéressant dans le cadre du NLTVA où les raideurs linéaire et cubique doivent être accordées indépendamment.

Le champ magnétique des aimants est modélisé à l'aide d'une expansion multipolaire. La force d'interaction entre les aimants, et donc la force de rappel du MVA, découle du champ magnétique. Des essais de traction statiques sont réalisés afin de valider la modélisation retenue pour estimer la force de rappel du MVA. Pour la généralité de l'étude, trois situations sont mises en avant. Une première où la raideur linéaire du MVA est positive, qui correspond au cas du NLTVA, une deuxième où la raideur linéaire est nulle, qui correspond au cas du NES et une troisième où la raideur linéaire est négative, ce qui donne un amortisseur bi-stable.

Une fois la modélisation de la force de rappel du MVA effectuée, son comportement dynamique est étudié à la fois expérimentalement et numériquement. Les trois situations décrites précédemment sont traitées. Dans les trois cas, les résultats expérimentaux et numériques sont en très bon accord.

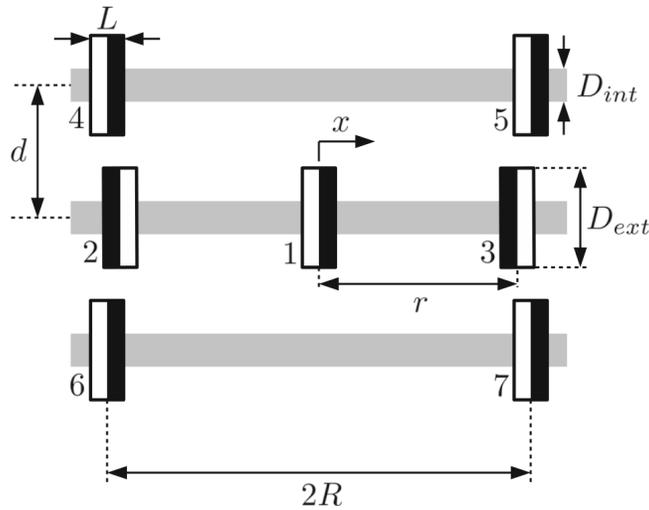


Figure 7.1 – Représentation schématique de l'absorbeur magnétique de vibration.

Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses

S. Benacchio · A. Malher · J. Boisson · C. Touzé

Received: 19 November 2015 / Accepted: 8 March 2016
© Springer Science+Business Media Dordrecht 2016

Abstract The design and characterisation of a magnetic vibration absorber (MVA), completely relying on magnetic forces, is addressed. A distinctive feature of the absorber is the ability of tuning the linear stiffness together with the nonlinear cubic and quintic stiffnesses by means of repulsive magnets located in the axis of the main vibrating magnetic mass, together with a set of corrective magnets located off the main axis. The tuning methodology is passive and relies only on three geometrical parameters. Consequently, the MVA can be adjusted to design either a nonlinear tuned vibration absorber, a nonlinear energy sink or a bi-stable absorber with negative linear stiffness. The expressions of the stiffnesses are given from a multipole expansion of the magnetic fields of repulsive and corrective magnets. A complete static and dynamic characterisation is performed, showing the robustness of the modelling together with the ability of the MVA to work properly in different vibratory regimes, thus making it a suitable

candidate for passive vibration mitigation in a wide variety of contexts.

Keywords Magnetic vibration absorber · Tuned-mass damper · Nonlinear energy sink · Tunable stiffness

1 Introduction

The vibration mitigation of mechanical structures is a long-standing problem which receives a considerable and continuous interest due to its importance in engineering applications. The most famous vibration absorber is the linear tuned-mass damper (TMD), originally proposed by Frahm [11] and theoretically studied by Den Hartog [8]. Whereas the original work by Ormondroyd and Den Hartog [33] considered the primary structure (PS) as a linear undamped oscillator, further research extended their results to a damped oscillator as PS, in order to derive the optimal parameter values for a given set of optimisation criteria [3, 40, 48]. The extension of these results to flexible structures having an infinite number of modes is also a topic for current research, see e.g. [24].

The drawbacks of the TMD as a vibration absorber are well known and documented. The main associated problem is related to the narrow bandwidth of optimal control, asking for an accurate tuning which must continue over times. In the last decades, a number of investigations have been conducted in order to over-

S. Benacchio (✉) · A. Malher · J. Boisson · C. Touzé
Institute of Mechanical Sciences and Industrial
Applications (IMSIA), ENSTA ParisTech-CNRS-EDF-CEA,
Université Paris-Saclay, 828 Boulevard des maréchaux,
91762 Palaiseau Cedex, France
e-mail: sbenacchio@centrale-marseille.fr

A. Malher
e-mail: arnaud.malher@ensta-paristech.fr

J. Boisson
e-mail: jean.boisson@ensta-paristech.fr

C. Touzé
e-mail: cyril.touze@ensta-paristech.fr

come these limitations, one of the main ideas being to use a nonlinearity in order to improve the vibration absorber design. The concept of a nonlinear energy sink (NES) relies on a vanishing linear stiffness, giving rise to an essentially nonlinear restoring force. Having no natural frequency, the NES can thus adapt itself to the frequency of the PS [12, 41, 44]. A targeted energy transfer (TET) can then occur in an irreversible fashion [42, 43]. The concept has been demonstrated theoretically and experimentally in a series of papers [13, 15, 25–27, 31, 32].

As also remarked by a number of investigators, the frequency range over which a linear passive vibration isolator is effective may be limited by the mount stiffness required to support a static load. Hence, the idea of selecting the eigenfrequency of the vibration isolator as small as possible leads to the concept of “quasi-zero stiffness” (QZS) absorber, which has been studied both theoretically and experimentally [5, 6, 23, 46].

Another idea which has emerged recently is to use the nonlinearity of the absorber in order to control the nonlinearity of the primary structure. As remarked in [45], a TMD is less effective as soon as the PS is nonlinear and exhibits typical features of nonlinear dynamics. In this context, an extension of den Hartog’s equal peak method has been proposed in [18], leading to the definition of a nonlinear tuned vibration absorber (NLTVA), which can be used e.g. for suppressing the limit cycle oscillations in a Duffing–Van der Pol system [19].

A recognised drawback of the NES is that a sufficient energy level is required for the targeted energy transfer to occur [42, 43]. Recent studies have considered the case of a negative linear stiffness, leading to a bi-stable vibration absorber device. For example, it has been shown in [29, 37] that such a vibration absorber may be more efficient than an NES as the energy barrier for activation is smaller in the bi-stable case.

Numerous experimental devices have been proposed including for example thin rods with no pretension for an NES [31], or vibro-impact oscillator [2, 14]. For the absorber with quasi-zero stiffness, the case of Euler buckled beams has been proposed in [28]. Recent realisations of the NLTVA have been built with 3D printed beams having a particular cross section in order to correctly tune linear and nonlinear characteristics [16, 17]. The vibration suppression of beams using eddy current dampers has been proposed in [4, 10, 38] for pendulum and normal motions, respectively. A variety of nonlinear absorbers of more general forms have also been

proposed including for example the case of centrifugal pendulum for torsional vibration mitigation [20].

In this contribution, a passive magnetic vibration absorber (MVA) is proposed with the ability of properly tuning its linear and nonlinear characteristics. Our goal is to propose a flexible device that can be used as either an NES, an NLTVA or a bi-stable vibration absorber, all these tunings being realised passively with a simple change in the system’s geometry. The device relies on the use of magnetic forces in order to be able to tune the stiffnesses. The idea of using magnetic forces for designing a vibration absorber can be traced back to the pioneering work of Yamakawa and Kojima [21, 22, 47]. In these articles, they use a simple arrangement with a mobile magnet at centre in the repulsive magnetic fields of fixed magnets. The device being vertical, the gravity force was also taken into account (the centre magnet being levitating), in order to design a QZS absorber [36]. Other arrangements where the correction forces are provided by springs have also been studied in [7, 46]. Moreover, the study of nonlinear magnetic systems goes over the vibration reduction field with energy harvesting devices, see for example [30]. Finally, Al-Shudeifat proposes an asymmetric arrangement of the initial design of Yamakawa and Kojima in order to realise an NES [1]. In general, we note that the realisation of vibration absorber devices is not flexible and are tuned for the purpose of realising a specific case, TMD, NES, NLTVA or bi-stable.

The paper is organised as follows. In Sect. 2, we introduce the geometry of the device. The basic idea is the same as those already used since Yamakawa and Kojima, the originality being the use of a set of four fixed corrective magnets placed at an offset position of the main axis. A multipole expansion is used to model the magnetic forces, so that the linear, cubic and quintic nonlinear stiffnesses can be evaluated. Their variations with respect to geometric parameters are studied in order to show how one can select the desired absorber: NES, NLTVA or bi-stable. Static and dynamic tests are then experimentally conducted in Sects. 3, 4 in order to obtain a complete characterisation of the MVA.

2 The magnetic vibration absorber (MVA)

2.1 Main characteristics

The proposed vibration absorber is shown in Fig. 1. It is composed of seven permanent ring magnets located on

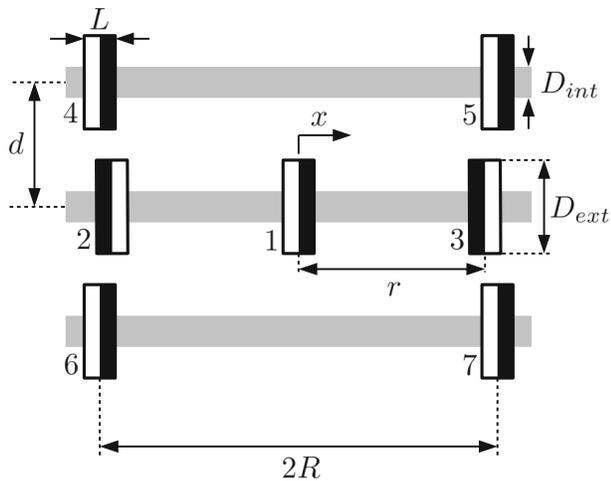


Fig. 1 Schematic representation of the magnetic vibration absorber (MVA)

plastic rods, shown in grey in Fig. 1. The length, internal and external diameters of the magnets are denoted L , D_{int} and D_{ext} respectively. The mass of the absorber oscillating around the central position $x = 0$ is given by the magnet 1. This mass can be easily tuned by adding a massive object at centre as proposed e.g. in [2]. The main vibration axis is horizontal so that the gravity has no influence on the restoring force exerted on magnet 1. The other magnets, respectively, numbered 2, 3, 4, 5,

6 and 7, are fixed on the rods. The black and white parts of each magnet indicate the direction of their axial magnetisation. Regarding the magnet (1), magnets 2 and 3 have an opposite magnetisation. As they apply a repulsive force on the magnet 1, pushing it in its central position, they are named the repulsive magnets. The amplitude of the repulsive force can be tuned by modifying the geometric parameter r , or the magnetisation. Magnets 4, 5, 6 and 7, named the corrective magnets, have the same direction of magnetisation as magnet 1 and apply an attractive force on it. The amplitude of this force is adjustable by modifying the geometric parameters R and d . Therefore, the total force applied on the magnet 1 is tuned by the independent modifications of the geometric parameters r , R and d .

2.2 Experimental realisation

Numerous experimental configurations can be built following the model of the proposed MVA, and a number of them have been tested in the laboratory in order to characterise the MVA. In this section, we focus on a practical realisation, convenient for a number of static and dynamical tests. A picture of this selected device is shown in Fig. 2. In particular, the same type of

Fig. 2 Realisation of the magnetic vibration absorber with the definition of the additional length L

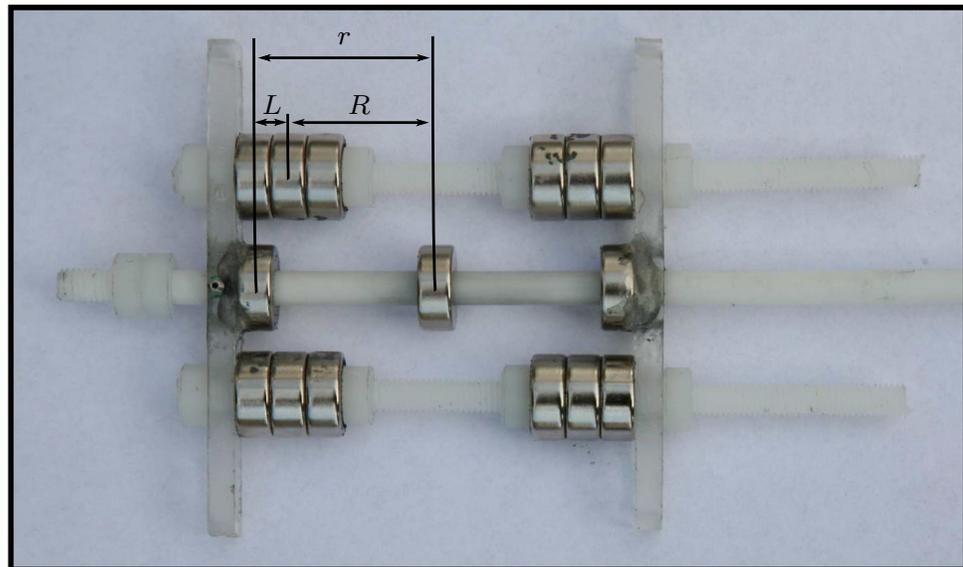


Table 1 Characteristics of the magnets

Length (L) (mm)	Internal diameter (D_{int}) (mm)	External diameter (D_{ext}) (mm)	Weight (M_{mag}) (g)	Type	Grade
5	10	20	10	NdFeB	N42

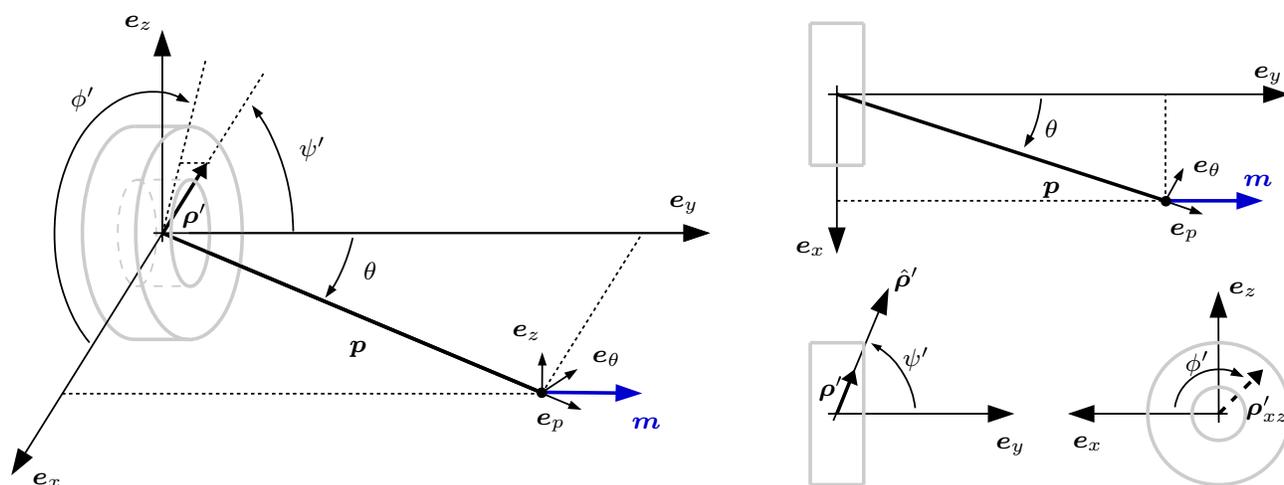


Fig. 3 Geometrical representation for computing the magnetic force applied on the moment \mathbf{m} , located at \mathbf{p} and created by the ring magnet of external diameter D_{ext} , internal diameter D_{int} and

ring magnets has been retained for vibrating, repulsive and corrective magnets. The characteristics of these ring magnets are given in Table 1. Of course, different magnets can be used in the device for tuning the desired properties. To get a corrective force that is large enough in comparison with the repulsive force, the corrective magnets are in fact composed of three rings stuck together, in order to increase their total magnetic moments. So as to fit with the schematic representation of Fig. 1, the length $2R$ corresponds to the distance between the two magnetic moments of the corrective magnets located on the same axis. The magnetic moment is assumed to be located at the centre of the 3 stuck magnets. Hence, R represents the distance between the middle of the three corrective magnets and the central position, as shown in Fig. 2. Consequently, in the experimental realisation, the length R is set equal to $r - L$, with L the thickness of one magnet, see Fig. 2. As this experimental device has been mostly used in the remainder of the study, we will generally select R as $R = r - L$.

2.3 Theoretical expression of the stiffnesses

Let us now derive the expression of the force applied on magnet 1. The mutual energy of two similar permanent magnets with a magnetic moment \mathbf{m} , a volume V and creating a magnetic field \mathbf{B} is given by

$$E_p = - \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (1)$$

length L . Angles are defined such as $\phi' = (\widehat{\mathbf{e}_x, \rho'_{xz}})$ with ρ'_{xz} the orthogonal projection of ρ' in the plane $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, $\psi' = (\widehat{\mathbf{e}_y, \rho'})$ and $\theta = (\widehat{\mathbf{e}_y, \mathbf{p}})$

where $\mathbf{M} = \mathbf{m}/V$ is the corresponding uniform magnetisation. The force created by the magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ on the vibrating magnet is given by

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{p})), \quad (2)$$

where \mathbf{p} is the coordinates of the magnet 1 relative to the fixed magnet as shown in Fig. 3. In this study, a multipole expansion is used to give the expression of the magnetic field in order to improve the dipole approximation which could give inaccurate results for small distance between magnets.

2.3.1 Multipole expansion

The multipole expansion is briefly presented here for cylindrical permanent magnets axially magnetised. The calculation is first presented for a cylindrical magnet without hole. The hole is taken into account at the end of the calculation, by adding the magnetic field created by another cylindrical permanent magnet with opposite magnetisation, and a diameter equal to that of the hole. The interested reader is referred to [35] for a more detailed presentation of magnetic forces and multipole expansion. The used approach is known to be relevant if the distance between the magnets is larger than their characteristic lengths (usually the radius of a sphere containing the magnet). Figure 3 shows the geometric parameters used for the computation when the fixed magnet is located at the origin of the basis $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ and the magnet 1 at the origin of the basis $(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$.

All primed variables are defined relative to the fixed magnet for integration. The magnetic field reads

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{p}) &= \frac{\mu_0 m}{4\pi V} \sum_{n \text{ odd}} \frac{(L/2)^{n+2}}{p^{n+2}} \left((n+1) D_n \mathbf{e}_p - \frac{dD_n}{d\theta} \mathbf{e}_\theta \right) \\ &= \sum_{n \text{ odd}} \mathbf{B}_n(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3)$$

where μ_0 is the void permeability and p and m are, respectively, the magnitudes of the vector \mathbf{p} and of the magnetic moment \mathbf{m} of the fixed magnet. Using the substitution $\gamma = \cos(\psi')$, the term $\left((n+1) D_n \mathbf{e}_p - \frac{dD_n}{d\theta} \mathbf{e}_\theta \right)$ takes into account the shape of the fixed magnet with

$$D_n(\mathbf{p}, \beta) = \begin{cases} 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \int_0^{2\pi} \frac{P_n(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}')}{\gamma^{n+3}} d\phi' d\gamma, & n \text{ odd,} \\ 0, & n \text{ even,} \end{cases} \quad (4)$$

where $\beta = D_{\text{ext}}/L$ if the magnet is a fully solid cylinder and $P_n()$ the Legendre polynomials. Using the notations of Fig. 3, $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}') = \sqrt{1-\gamma^2} \sin \theta \cos(\phi') + \gamma \cos(\theta)$, with $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|$ and $\hat{\boldsymbol{\rho}}' = \boldsymbol{\rho}'/\|\boldsymbol{\rho}'\|$ the unit vector of the integration point in the fixed magnet.

Finally, rewriting $m \cos(\theta) \mathbf{e}_p = \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{m}$ and $m \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta = (\hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}^T - \mathbf{I}d) \mathbf{m}$, the first terms of the magnetic field read

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\mathbf{p}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{p^3} \left[3 \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}^T - \mathbf{I}d \right] \mathbf{m}, \\ \mathbf{B}_3(\mathbf{p}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{p^5} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \left(\frac{4-3\beta^2}{8} \right) \\ &\quad \times \left[\left(35 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 - 15 \right) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}^T \right. \\ &\quad \left. - \left(15 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 - 3 \right) \mathbf{I}d \right] \mathbf{m}, \\ \mathbf{B}_5(\mathbf{p}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{p^7} \left(\frac{L}{2} \right)^4 \left(\frac{15\beta^4 - 60\beta^2 + 24}{64} \right) \\ &\quad \times \left[\left(231 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^4 - 210 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 + 35 \right) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}^T \right. \\ &\quad \left. - \left(105 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^4 - 70 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 + 5 \right) \mathbf{I}d \right] \mathbf{m}, \\ \mathbf{B}_7(\mathbf{p}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{p^9} \left(\frac{L}{2} \right)^6 \left(\frac{64-336\beta^2+280\beta^4-35\beta^6}{1024} \right) \\ &\quad \times \left[\left(6435 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^6 - 9009 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3465 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 + 315 \right) \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{p}}^T - \left(3003 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^6 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3465 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^4 + 945 (\hat{\mathbf{m}}^T \hat{\mathbf{p}})^2 - 35 \right) \mathbf{I}d \right] \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\mathbf{I}d$ is the unit matrix and T stands for the transpose. As shown in Sect. 3.2, the first four terms (dipole, quadrupole, hexapole and octupole) of the magnetic field gives an accurate model for the MVA.

In order to take into account the shape of the magnet, the ring is defined by the addition of two cylinders of equal length L [35]. The magnetic field of the largest is computed as previously using the diameter D_{ext} and a positive magnetisation \mathbf{M} , whereas the magnetic field of the hole is computed using the diameter D_{int} and a negative magnetisation $-\mathbf{M}$. The latter is simply computed replacing D_{ext} by D_{int} and \mathbf{m} by $-\mathbf{m}$ in Eq. (5).

2.3.2 Total stiffness force

The total force applied on magnet 1 due to the repulsive and corrective magnets is computed using Eq. (2) for magnets 2–7 and finally reads

$$\mathbf{F}_{\text{Tot}} = \sum_{i=2}^7 \mathbf{F}(\mathbf{p}_i), \quad (6)$$

where \mathbf{p}_i is the vector between the centre of the magnets i and 1.

For $i = (2, 3)$, one has

$$|\mathbf{p}_i| = (r+x), \quad (7)$$

while for $i = (4, 5, 6, 7)$,

$$|\mathbf{p}_i| = \left((R+x)^2 + d^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

where x is the displacement of the magnet 1 around its central position. According to Eq. (7), the repulsive force is tuned using the length r , while Eq. (8) shows that the lengths R and d tune the corrective force. Truncating the Taylor series around $x = 0$ at the fifth order, the total force applied on the magnet 1 can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Tot}}(x) &\approx - \left(K_1^{\text{rep}}(r) - K_1^{\text{cor}}(R, d) \right) x \\ &\quad - \left(K_3^{\text{rep}}(r) - K_3^{\text{cor}}(R, d) \right) x^3 \\ &\quad - \left(K_5^{\text{rep}}(r) - K_5^{\text{cor}}(R, d) \right) x^5, \\ &\approx -K_1 x - K_3 x^3 - K_5 x^5. \end{aligned} \quad (9)$$

This magnetic force is factorised to give a linear, a cubic and a quintic stiffness terms. Modifying the geometric parameters r , R and d , these three terms can be tuned to change the properties of the MVA. The detailed expressions of these coefficients are given in ‘‘Appendix’’.

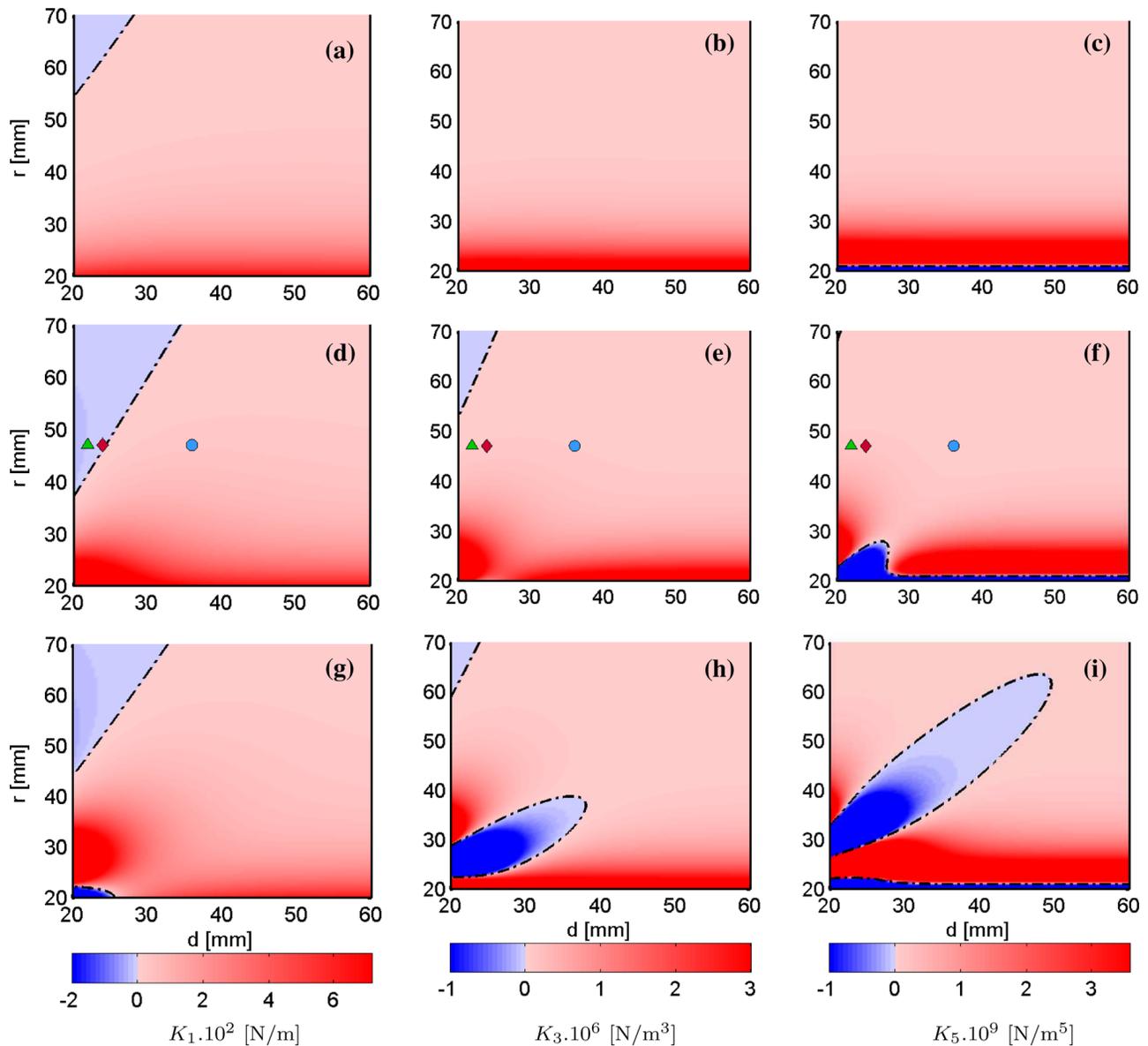


Fig. 4 Theoretical evolution of the linear (*first column*), cubic (*second column*) and quintic (*third column*) stiffness coefficients as functions of r and d for $R = r - L + 20$ mm (**a–c**), $R = r - L$ (**d–f**) and $R = r - L - 10$ mm (**g–i**). Zeros are shown using *black*

dashed lines. Configurations of Fig. 5 are denoted with the markers as: *green triangle*, *red diamond* and *blue circle*. (Color figure online)

2.3.3 Stiffness cartography

The aim of this section is to show how the geometry of the device, parametrised by r , R and d , can be used for tuning the stiffnesses of the MVA. Figure 4 shows the evolution of the coefficients K_1 , K_3 and K_5 as a function of r and d . As explained in Sect. 2.2, R is selected as $R = r - L$ in all this section. The central row of Fig. 4, i.e. Fig. 4d–f, corresponds to the experimental device shown in Fig. 2 with $R = r - L$. In order to explore numerically the possible stiffnesses of the

MVA, the first row, i.e. Fig. 4a–c, shows a case where a larger value of R has been selected. More specifically, denoting r_0 the minimal distance numerically computed ($r_0 = 20$ mm in Fig. 4), the length R has been increased of r_0 . This minimum distance is arbitrarily chosen according to the model limitations. Then, in Fig. 4g–i, the distance R has been decreased so as to observe the effect of a stronger correction brought by the corrective magnets. In this case, R has been decreased of $r_0/2$.

The stiffness cartography has been computed from the model presented in the previous section, with as input parameters two different magnetic moments, m_r and m_c , respectively, for the repulsive and corrective magnets. The selection of the numerical values relies on an identification procedure for the MVA design shown in Fig. 2 and used as a reference case for the study of the stiffness variations. The parameter values are $m_r = 0.89$ and $m_c = 0.71$. Moreover, a shift $\Delta d = 3$ mm is added to d in order to better fit the model with the experimental realisation. The choice of this parameter is more deeply explained in Sect. 3.2.

Figure 4 demonstrates that many stiffness configurations can be reached using the proposed MVA. Modifying the geometric parameters, all the stiffness coefficients can be either positive, equal to zero or negative. According to Fig. 4a–c, for a large value of R , linear (K_1) and quintic (K_5) coefficients are positive in almost all geometric configurations while the cubic coefficient K_3 is always above zero. Largest values of the coefficients are found for small values of r . When the corrective magnets are far from the magnet 1, the parameter d has a small effect on stiffness coefficients. As shown in Fig. 4d–f, when R is roughly equal to r , more geometric configurations are able to produce negative coefficients. The parameter d has now an important effect on the coefficients. For example, K_5 can be either positive or negative by modifying d when $r = 25$ mm, see Fig. 4f. Finally, when R is smaller than r as in Fig. 4g–i, the cartographies of the stiffness coefficients become more complex. Interestingly enough, one can notice that in this configuration, it is possible to have negative values for the two nonlinear coefficients and a positive value for K_1 . This could be useful to tune the MVA as an NLTVA for the damping of shells (or arches) vibrations. Indeed, for some values of the curvature, a shallow shell may exhibit a softening nonlinearity, see e.g. [34, 39]. As the nonlinear term of an NLTVA should be tuned as the “mirror” of the nonlinearity of the primary structure to be damped [18, 45], then in this case one needs to design an NLTVA with a positive K_1 and a negative K_3 .

To sum up the results of Fig. 4, the linear coefficient is large for small values of r , or in other words when magnets are close together. Negative values of K_1 are given by large r . The extremum values of coefficients can be increased by modifying the magnetic properties of the device. For instance, a larger magnetisation may be used in order to increase the difference between minimum and maximum values of K_1 . If one

changes the magnet grade from N42 to N50, an increase in the linear stiffness of the order of about 10% can be awaited. Another option is to add more magnets to the absorber. As the magnetisation is proportional to the volume occupied by the magnetic material, a substantial increase in the forces can be obtained.

In the following sections, R is equal to $r - L$ as in Fig. 4d–f. In order to investigate the behaviour of the MVA, this paper focuses on the modification of the linear stiffness coefficient. In Fig. 4d, the blue, red and green markers present geometric configurations where K_1 is, respectively, positive, equal to zero and negative. Hence, in this three selected configurations, the MVA is tuned as either a vibration absorber (TVA, marker blue circle), a nonlinear energy sink (NES, red diamond) or a bi-stable damper (green triangle), respectively. In each case, the nonlinear coefficients are positive. The remainder of the study is focused on these three different realisations. Numerous other test configurations could have been investigated, by tuning the nonlinear characteristic of the MVA (in order to obtain hardening or softening nonlinearity), or by adjusting the magnetic parameters, or the mass of the MVA. However, all these further case studies are postponed to the next step of this research, where the MVA will be used in real conditions on a given structure.

3 Static behaviour

The MVA is now experimentally studied. Static force measurements are reported, in order to investigate the behaviour of the absorber for the three cases indicated with the markers in Fig. 4. A thorough identification of the model parameters is then conducted.

3.1 Static force measurements

The proposed model of the tunable MVA is compared with static force measurements for the three geometric configurations indicated with the markers in Fig. 4 and described by r and d in Table 2. The magnet 1 is moved around its central position $x = 0$ with a 1 mm step. The static force applied on the magnet is measured for each step and presented using blue crosses in Fig. 5. The insets show the measurements around the central position where the effects of the nonlinear terms can be neglected. Therefore, the sign of the linear coefficient K_1 can be directly observed. Since the force is given by

Table 2 Experimental fitted and theoretical optimised stiffness coefficients

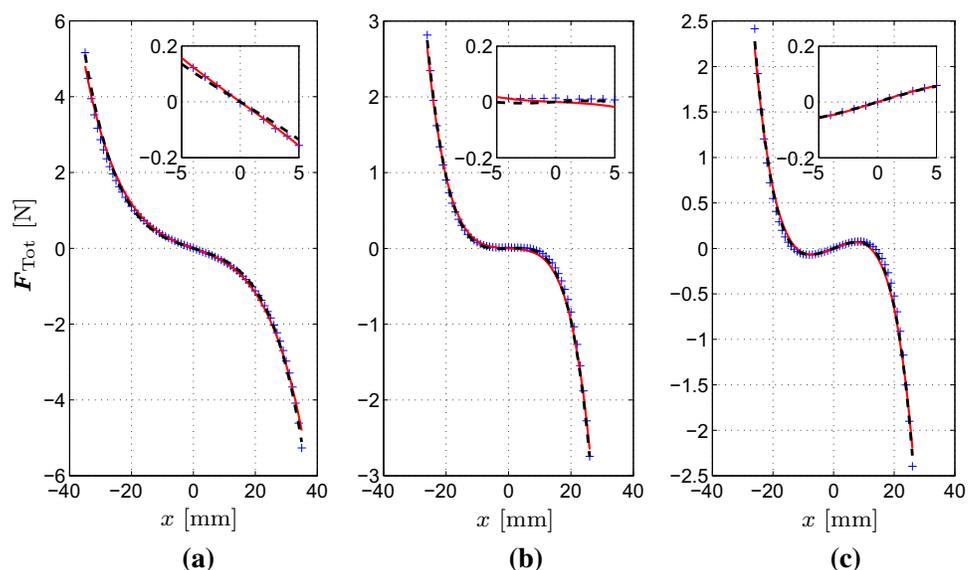
Param.	Fig. 5a	Fig. 5b	Fig. 5c
r (mm)	47	47	47
d (mm)	36	24	22
K_1^{Exp} (N/m)	29.90	1.84	-13.39
K_1 (N/m)	25.59	-2.11	-12.77
K_3^{Exp} (N/m ³)	0.64×10^5	0.66×10^5	0.74×10^5
K_3 (N/m ³)	0.59×10^5	0.73×10^5	0.57×10^5
K_5^{Exp} (N/m ⁵)	0.20×10^8	1.21×10^8	1.04×10^8
K_5 (N/m ⁵)	0.32×10^8	1.28×10^8	1.36×10^8

$F_{\text{Tot}}(x) \approx -K_1x$ for small displacements, Fig. 5a–c shows that the linear coefficient is, respectively, positive, quasi-equal to zero and negative. These results are in agreement with the theoretical conclusions of Fig. 4d and demonstrate that the MVA can be experimentally tuned as a TVA, an NES or a bi-stable damper, which has a linear negative stiffness and thus possess two stable equilibria around the unstable central position.

3.2 Identification of the model parameters

In order to find the experimental values of the stiffness coefficients, the measurements are fitted using Eq. (10). For the three configurations, the linear, cubic and quintic fitted terms, named K_1^{Exp} , K_3^{Exp} and K_5^{Exp} , are given in Table 2. The plot of Eq. (10) using these values is

Fig. 5 Static force applied on the magnet 1 as a function of its displacement. Measurement (blue plus symbol), experimental fit (red line) and theoretical fitted model (black dashed line). **a** $K_1 > 0$, first column of Table 2 and blue circle in Fig. 4, **b** $K_1 \approx 0$, second column of Table 2 and red diamond in Fig. 4, **c** $K_1 < 0$, third column of Table 2 and green triangle in Fig. 4. (Color figure online)



presented in Fig. 5 and shows that this simple function is able to accurately estimate the behaviour of the MVA.

Then, the experimental linear stiffness coefficients are used to optimise the model presented in Sect. 2.3. In the expression of K_1 detailed in “Appendix”, three parameters are used for this optimisation. Since the theoretical value of the magnetic moment m_{theo} depends on the approximate remanent magnetic field B_r given by the manufacturers, the two first variable parameters are m_r and m_c . Moreover, to take into account the errors of the length measurements, the third parameter is a shift Δd , added to the length d . This adjusting parameter is used as an overall free variable taking into account the measurement errors in geometry for each magnet which occur when the experimental realisation of the MVA is not perfectly symmetric. To optimise these parameters, the method of least squares using the experimental and the theoretical stiffness coefficients is applied for a large number of geometric configurations N . Thus, the cost function to minimise is

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{cost}}(m_r, m_c, \Delta d) &= \sum_{i=1}^N \left(K_{1,i}^{\text{Exp}} - K_{1,i}(m_r, m_c, \Delta d) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left(K_{1,i}^{\text{Exp}} - \left\{ K_{1,i}^{\text{rep}}(m_r, \Delta d) - K_{1,i}^{\text{cor}}(m_c, \Delta d) \right\} \right)^2. \end{aligned}$$

Figure 6a shows the experimental linear coefficients for 50 different configurations used to find the optimal values of the variable parameters given in Table 3.

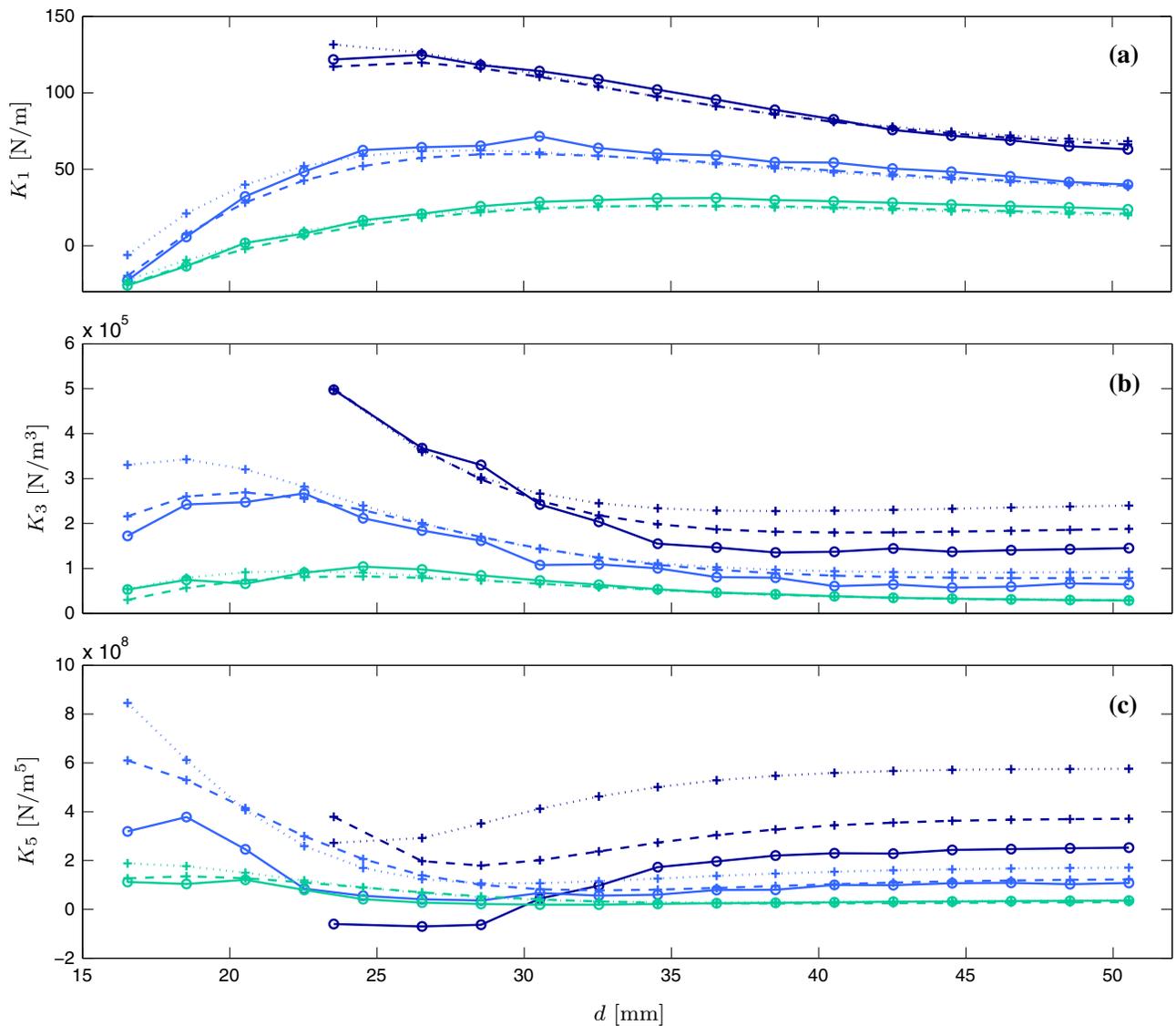


Fig. 6 Linear (a), cubic (b) and quintic (c) stiffness coefficients for $r = 35$ mm (dark blue line), $r = 40$ mm (light blue line) and $r = 45$ mm (green line). Full lines are the results of the experi-

mental fit, dotted lines are the results of a dipole approximation, and dashed lines are the results of the multipole expansion. (Color figure online)

Table 3 Optimal values of the variable parameters

m_r	m_c	Δd (mm)
0.89	0.71	3

In order to confirm these magnetic moment values found from the fitting procedure, magnetic field measurements along the axis of a ring magnet, as well as shifted from the same axis, have been conducted. These measurements clearly demonstrate that the optimised value of m_r is in good agreement with the magnetic field measurements. Nevertheless, outside of the magnet axis, measurements show that the magnetic field

deviates from the multipole expansion theory. This is the reason why an equivalent magnetic moment m_c , different from m_r , is introduced. Moreover, it is in good agreement with the calculation of K_1 , K_3 and K_5 . For the three cases presented in Sect. 3.1, the stiffness coefficients computed using the optimal model are given in Table 2 and shown with black dashed lines in Fig. 5. Since theoretical and experimental values are close, the optimal model is believed to give a reliable description of the MVA.

To conclude this section, a discussion on the accuracy of the multipole expansion as compared to the dipole approximation is provided. For every configu-

ration, the theoretical stiffness coefficients are compared to the experimental results and presented in Fig. 6 with dashed and full lines, respectively. Each point represents a geometric configuration corresponding to a pair (r, d) linked together for the same r . The optimal model gives very accurate results for the linear stiffness which is always close to the experimental coefficient. When the distances r and d are large, the model gives also very accurate results for the nonlinear coefficients K_3 and K_5 . The accuracy of the model decreases when r and d also decrease, see e.g. Fig. 6b, c. For instance, K_5 is incorrectly predicted when $r = 35$ mm, or $r = 40$ mm and $d < 30$ mm, but the figure definitely shows that using a multipole expansion improves significantly the accuracy of the model for small values. Indeed, the dotted lines show the theoretical stiffness coefficients given by a dipole approximation, whereas the dashed line shows the result predicted with the multipole expansion. Note that when using only the dipole term, the optimisation procedure provides different (though close) values: $m_r = 0.82$, $m_c = 0.72$ and $\Delta d = 3$ mm. Figure 6a shows that the two models give similar results for the linear stiffness coefficients. However, the multipole expansion provides better results for the modelling of nonlinear coefficients as shown in Fig. 6b, c, and even for small values of r and d . For instance, when $r = 35$ mm, the error on K_3 and K_5 is divided by 2 almost everywhere using the multipole expansion.

To conclude this section, the model proposed in Sect. 2 gives accurate results for the modelling of the linear and cubic stiffness coefficients. For the quintic term, the accuracy is ensured only for large values of r and d . For almost every geometric configuration, the multipole expansion is more accurate than the dipole approximation, this being especially true for nonlinear coefficients.

4 Dynamical behaviour

This section is devoted to the dynamical behaviour of the MVA, tuned either as an NLTVA, an NES or a bi-stable absorber. In order to investigate its general dynamics, experiments are compared to numerical simulations for the three geometric configurations. The MVA which has been used to study the NLTVA and the NES is the experimental realisation presented in Sect. 2.2. Nevertheless, the linear stiffness of the NLTVA has been increased slightly in order to cope

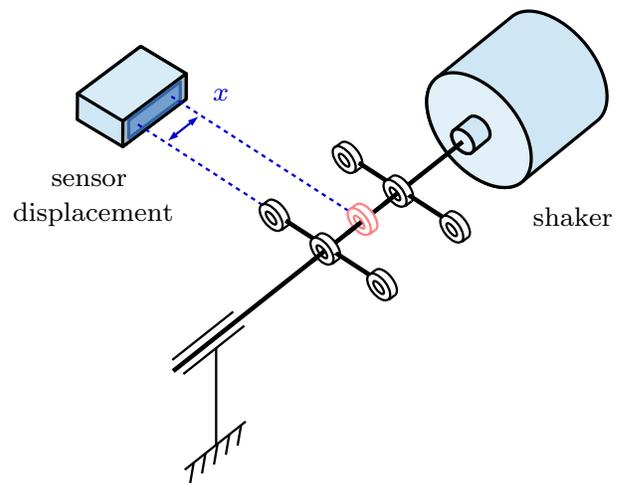


Fig. 7 Experimental set-up for dynamical measurements. The external frame of the MVA (shown in *black*) is mounted on the shaker. The displacement of the mobile magnet (shown in *red*) is measured relatively to the displacement of the external frame. (Color figure online)

with experimental limitations in low-frequency range due to the use of a shaker. For practical reasons, the MVA selected to study the bi-stable absorber is built with smaller magnets. Thus, the characteristics of the new magnets are $L = 6$ mm, $D_{\text{int}} = 6$ mm, $D_{\text{ext}} = 15$ mm, $m_{\text{mag}} = 6.6$ g, and the results of the optimisation step give $m_r = 0.67$, $m_c = 0.54$ and $\Delta d = 2$ mm.

4.1 Experimental set-up and model comparison

As shown in Fig. 7, the external frame of the MVA is excited using a LDS V455 shaker and the displacement x of the magnet 1 is measured with a Keyence LS-7070M optical sensor. The absorber is placed horizontally to avoid the gravity effect. Indeed, the restoring force would be asymmetric in case of a vertical MVA. The force applied on the vibrating magnet is harmonic. For a given experiment, the amplitude of the forcing is fixed and the frequency is varied. Increasing and decreasing values of the forcing frequency are used in a step-by-step experiment, as is usual for nonlinear vibrations where hysteretic behaviours are awaited due to the presence of multiple equilibria for a certain frequency range. Using this experimental set-up, the equation of motion for the vibrating magnet reads

$$m_{\text{mag}}\ddot{x} + \chi_{\text{visc}}\dot{x} + g\mu_{\text{fric}}m_{\text{mag}}\text{sgn}(\dot{x}) + K_1x + K_3x^3 + K_5x^5 = \mathcal{F}_{\text{ext}}\sin(\Omega t), \quad (11)$$

with m_{mag} the mass of the vibrating magnet, χ_{visc} a viscous damping coefficient, μ_{fric} a dry friction coefficient

Table 4 Characteristics of the studied configurations

Param.	NLTVA (Sect. 4.2.1)	NES (Sect. 4.2.2)	Bi-stable absorber (Sect. 4.2.3)
r (mm)	38	47	37.5
d (mm)	38	24	16
m_{mag} (g)	10	10	6.6
χ_{visc} (kg/s)	0.09	0.044	0.079
μ_{fric}	0.4	0.4	0.4
K_1 (N/m)	70.49	-2.11	-44.22
K_3 (N/m ³)	1.36×10^5	0.73×10^5	2.57×10^5
K_5 (N/m ⁵)	1.27×10^8	1.28×10^8	12.98×10^8

(and $\text{sgn}(\cdot)$ represents the sign function), g the gravitational acceleration, K_1 , K_3 , K_5 the stiffness coefficients and \mathcal{F}_{ext} and Ω the amplitude and the frequency of the external force, respectively. The identification of all the model parameters (namely m_{mag} , μ_{fric} , K_1 , K_3 , K_5 and χ_{visc}) is realised as follows. The mass of the vibrating magnet m_{mag} is directly measured. The dry friction coefficient μ_{fric} is found by comparing experimental measurements and theoretical values. A set of specific measurements have been realised by applying a static force of increasing amplitude on a free magnet placed on the same lubricated plastic rod as those used for the MVA. The measured force threshold initiating the magnet displacement gives approximately $\mu_{\text{fric}} \approx 0.4$ with an accurate repeatability. This value is exactly within the generic range of static frictional coefficient between lubricated Plexiglas and steel (0.4–0.5) found in tables. Therefore, the value of 0.4 has been retained for all numerical simulations.

Then, one defines the selected geometry for the MVA in order to use it as an NLTVA, an NES or a bi-stable absorber. These three arrangements are given fixing the geometric parameters r and d (with R selected as $r - L$). From these parameters, together with the magnetic moments derived from the static measurements, the theoretical model using the multipole expansion of Sect. 2 provides the stiffnesses K_1 , K_3 and K_5 . The values of these parameters are given in Table 4 for the three configurations.

The last parameter to evaluate is the viscous damping coefficient χ_{visc} . This coefficient includes all loss mechanisms which are not detailed in the model. For example, these losses could be due to lubricated viscous friction, heat transfer and eddy currents. As the damping behaviour of the MVA in free vibration is dominated by the dry friction for free oscillations, χ_{visc} is difficult to evaluate experimentally by using

free decay tests. Therefore, the value of the viscous damping coefficient has been estimated by fitting measured and theoretical frequency response curve. Experimental frequency–response curves are obtained with a step-by-step increase and decrease in the excitation frequency (with a step of 0.5 Hz). Numerical solutions are found by continuation, using a pseudo-arclength continuation method implemented in the software *AUTO* [9]. All the values used to feed the model are given in Table 4. One can observe that slight variations of the viscous damping coefficients are found. They should be due to different physical mechanisms: eddy currents in the fixed magnets are present due to the oscillations of magnet 1. These damping forces depend on the configuration used so that finding different values of χ_{visc} appears logical. Finally the lubrication on the axis changes slightly from one experiment to another one, once again explaining the observed differences.

4.2 Results

4.2.1 The NLTVA

First, the MVA is tuned as a TVA with a positive linear stiffness K_1 . The case is termed “NLTVA” as we are also interested in the nonlinear characteristics of the MVA, which have been chosen positive for this case, see the values given in Table 4, second column. Figure 8 shows the frequency–response curves for five different amplitudes of the forcing, for a frequency range in the vicinity of the eigenfrequency of the MVA oscillator. For each amplitude of the external force, experimental and numerical frequency response curves give very close results. The typical backbone curve due to nonlinear terms appears when the external force is increased. As the K_3 and K_5 are both positive, a hardening nonlinearity is observed. In order to illustrate

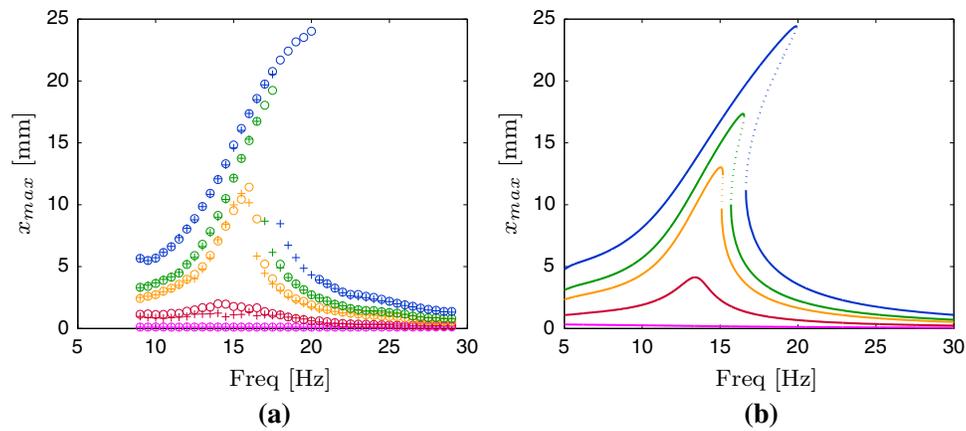


Fig. 8 MVA tuned as an NLTVA. Maximum amplitude of the displacement of the vibrating magnet for increasing external forces: $\mathcal{F}_{\text{ext}} = 0.02\text{N}$ (pink line), 0.08N (red line), 0.16N (orange line), 0.20N (green line) and 0.32N (blue line). **a**

Measurements—forward (circle) and backward (plus symbol) sweeps. **b** Simulations. Continuous line stable solutions, dotted lines unstable solutions. (Color figure online)

Fig. 9 Examples of experimental NLTVA behaviour for $(r, d) = (38, 38)\text{ mm}$ (dark green circle), $(36, 26)\text{ mm}$ (light blue circle), $(30, 66)\text{ mm}$ (dark blue circle), $(30, 20)\text{ mm}$ (violet circle) and $(30, 27.5)\text{ mm}$ (pink circle). Forward sweeps with circles and backward sweeps with (plus symbol). (Color figure online)

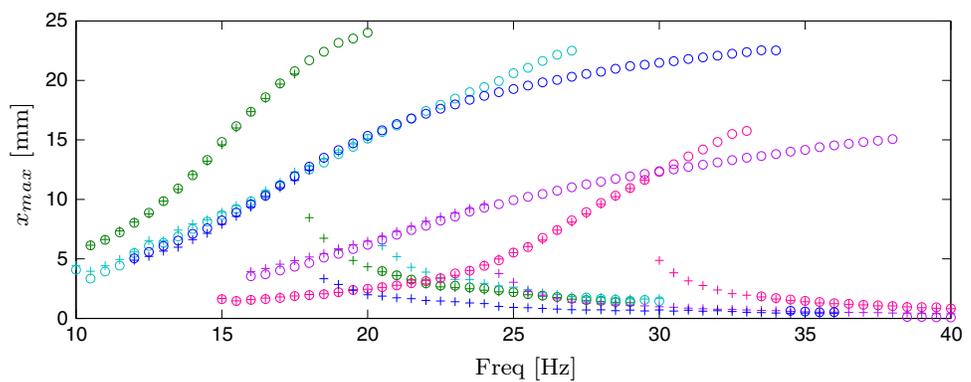


Table 5 Stiffness coefficients for the NLTVA examples of Fig. 9

Legend	Dark green circle	Light blue circle	Dark blue circle	Violet circle	Pink circle
r (mm)	38	36	30	30	30
d (mm)	38	26	66	20	27.5
K_1 (N/m)	70.49	93.96	118.44	183.75	260.26
$K_3 \times 10^5$ (N/m ³)	1.36	4.75	5.20	21.49	8.72
$K_5 \times 10^8$ (N/m ⁵)	1.27	4.63	12.41	48.78	2.65

the tuning of the resonance frequency and of the backbone curve, Fig. 9 shows several NLTVA configurations for the same external force $\mathcal{F}_{\text{ext}} = 0.32\text{N}$. These examples demonstrate that the frequency response of the MVA greatly depends on its geometric configuration. According to Table 5, the frequency of the peaks is tuned by K_1 and the nonlinear terms saturate the large amplitudes of the vibrations of the MVA. It must be noticed that the maximum amplitude of the vibrating magnet depends on the geometric configuration. Indeed, this amplitude is obviously limited by r . As

shown in Fig. 4, largest values of K_1 are given for small values of r . Thus, it seems not possible to have large vibrating amplitude in high frequency. However, this can be overcome by modifying other parameters like magnet dimensions or magnetic characteristics.

4.2.2 The NES

The MVA is now tuned as an NES, the characteristics of which are given in the third column of Table 4. Measurements and simulation results are shown in Fig. 10.

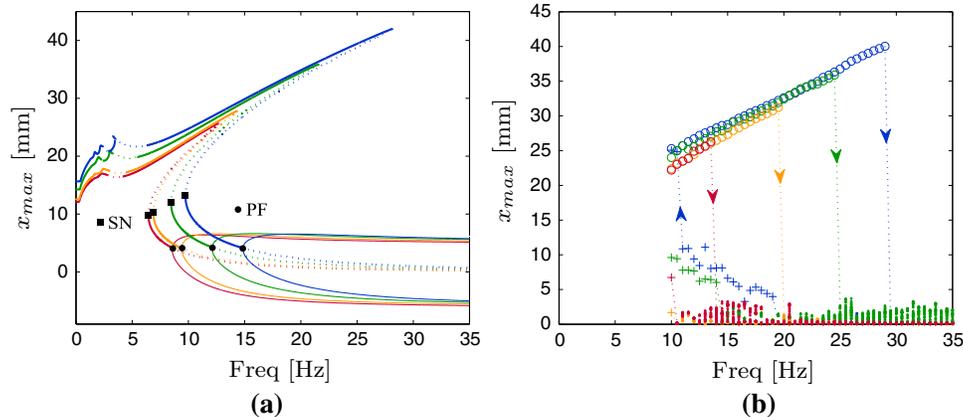


Fig. 10 MVA tuned as an NES. Maximum amplitude of the displacement of the vibrating magnet for increasing external forces: $\mathcal{F}_{\text{ext}} = 0.15$ N (red line), 0.16 N (orange line), 0.26 N (green line) and 0.37 N (blue line). **a** Simulations—stable (straight line) and unstable (dotted line) solutions. SN saddle-node bifurca-

Due to intrinsic limitations of the shaker used in the experiments, applying a constant external force in low frequency is out of reach, so that the smallest tested excitation frequency is 10 Hz. Below this value, the behaviour of the NES can be studied using the simulation results.

At first sight, the general behaviour of the frequency–response curves share similarities with the case of the NLTV, the main difference being the vanishing resonance frequency, implying a different behaviour of the solution branches in the low-frequency part. However, a main difference is found: the lower branch in high frequencies presents an instability. More precisely, a pitchfork bifurcation point is found numerically for a frequency slightly larger than the saddle-node usual limit point (see Fig. 10a where the bifurcation point is indicated with a circle as PF for pitchfork bifurcation). From this bifurcation point, the lower branch is unstable and a couple of stable periodic solutions arise. It has also been found numerically that the basins of attraction of the stable periodic orbits emanating from the pitchfork are very small. Hence, for these parameter values, three solutions coexist in the phase space: a quasi-periodic solution and two stable periodic orbits. The solution that is most likely to be observed is the quasi-periodic one. In fact, the only way to observe the periodic solutions emanating from the pitchfork is to continue the solutions slowly from the bifurcation point with increasing excitation frequencies. Only a small portion of the lower branch is stable, in the vicinity of the saddle-node bifurcation point. Thus, in

tion point, PF pitchfork bifurcation point. **b** Measurements—maximum of periodic orbits represented by circles for increasing excitations and plus symbol for decreasing excitations. When a quasi-periodic regime is observed, a Poincaré section is used to represent the data with dots. (Color figure online)

an experiment with increasing and decreasing step-by-step harmonic excitation, the following observations are expected:

- When increasing the excitation frequency, the upper branch with large amplitude is followed, until the jump point. At this point, the quasi-periodic regime is expected.
- When decreasing the excitation frequency, the quasi-periodic regime is first observed. Then, after the pitchfork bifurcation point and before the jump to the upper branch at the saddle-node point, periodic orbits are observed, corresponding to the stable part of the lower branch. Finally, the jump to the upper branch is observed.

Interestingly, the predicted stable and unstable areas are also found in measurements with a very good accuracy as compared to the prediction, see Fig. 10b. In the tests with increasing excitation frequencies, the upper branch is observed until the jump, and then the quasi-periodic solution is observed and represented thanks to a Poincaré section in Fig. 10b, with a stroboscopic acquisition at the forcing frequency. One can observe that the range of amplitudes explored by the quasi-periodic regime is rather limited, as shown by the extent of the cloud of points from the Poincaré section. This is illustrated in Fig. 11, which represents 10 s of the mass displacement, for an excitation frequency of 30 Hz and an amplitude of 0.26 N. This motion is composed of a fast oscillation with the same frequency than the forcing, modulated by an envelope oscillating at compara-

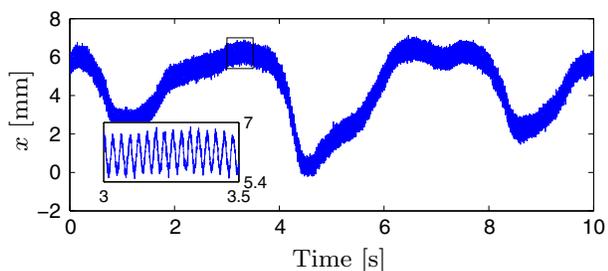


Fig. 11 Time response of the vibrating magnet for the MVA tuned as an NES, for $\Omega = 30$ Hz and $\mathcal{F}_{\text{ext}} = 0.26$ N, for which the quasi-periodic motion is observed. *Inset* shows a zoomed portion for a better visualisation of the fast oscillation at the forcing frequency

tively smaller frequencies. While the amplitude of the fast oscillations is about 1 mm, the modulation amplitude is about 6 mm.

Finally, when decreasing the excitation frequency in Fig. 10b, the quasi-periodic is at hand. The pitchfork bifurcation point is retrieved experimentally as a small portion of periodic orbits are found before the jump to the upper branch (denoted with plus symbol in Fig. 10b).

4.2.3 The bi-stable absorber

Finally, the MVA is tuned as a bi-stable absorber, the characteristics of which are given in the last column of Table 4. Due to the bi-stability, the behaviour of such a damper is characterised by three distinct regimes depending on the amplitude of the external force. In order to describe these regimes, Figs. 12 and 13 present, respectively, frequency response curves and the corresponding time evolutions and phase plots of the vibrating mass.

For small forcing amplitude, the vibrating mass is arbitrarily trapped in one of the two energy wells located at stable equilibria shown in Fig. 5c. This regime is named intrawell oscillations, and the corresponding frequency response is presented in Fig. 12a. In this regime, a softening type nonlinearity is at hand. Figure 13a shows the time evolution and phase plot of this low energy oscillation. The computation of the central positions of the wells from the model predicts $x_{\text{well}} = \pm 10.5$ mm, which is close to the experimental value given in Fig. 13a and equal to ± 8.9 mm.

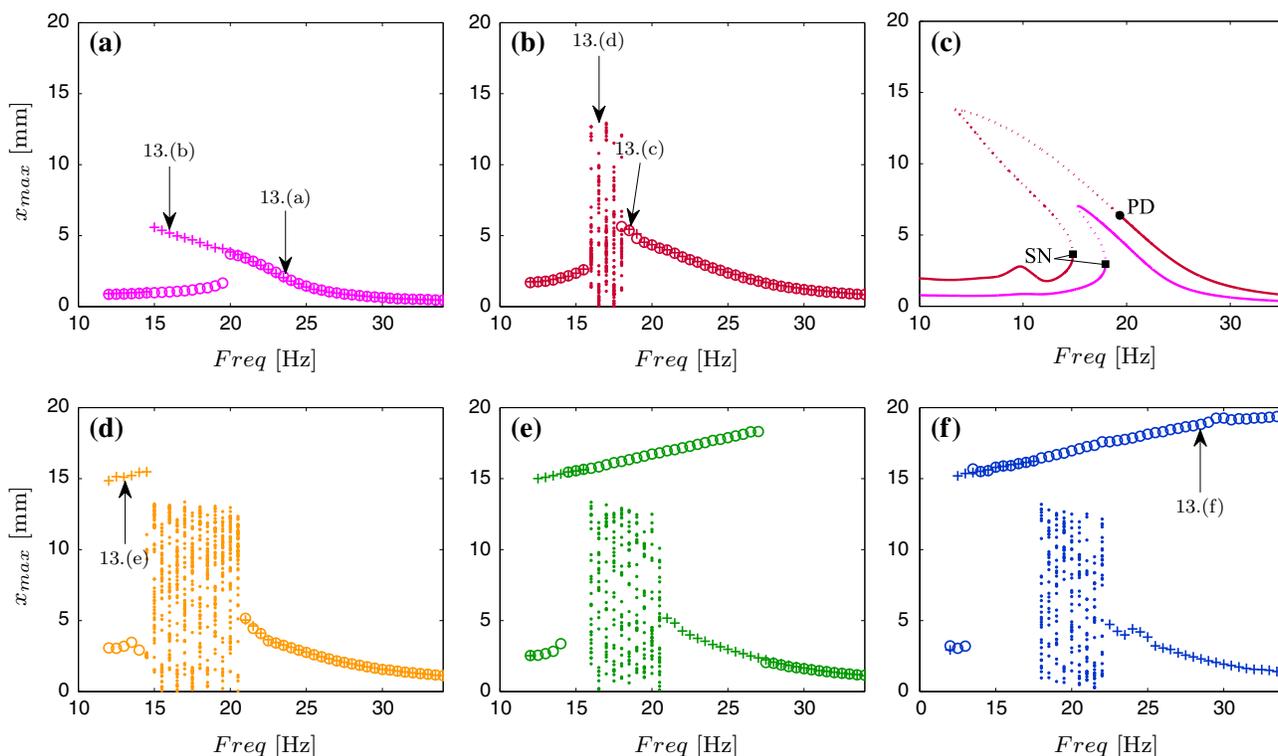


Fig. 12 Maximum amplitude of the displacement of the vibrating magnet configured as a bi-stable absorber. **a, b, d–f** experiments, forward (*circle*) and backward (*plus symbol*) sweeps and for several external forces. $\mathcal{F}_{\text{ext}} = 0.08$ N (*pink line*), 0.16 N (*red line*), 0.20 N (*orange line*), 0.23 N (*green line*) and 0.24 N

(*blue line*). *Dots* are the Poincaré sections and *arrows* indicate the dynamic regimes detailed in Fig. 13. **c** numerical simulation for $\mathcal{F}_{\text{ext}} = 0.08$ N (*pink line*), and 0.16 N (*red line*), unstable states reported with *dotted lines*. *SN* saddle-node bifurcation, *PD* period-doubling. (Color figure online)

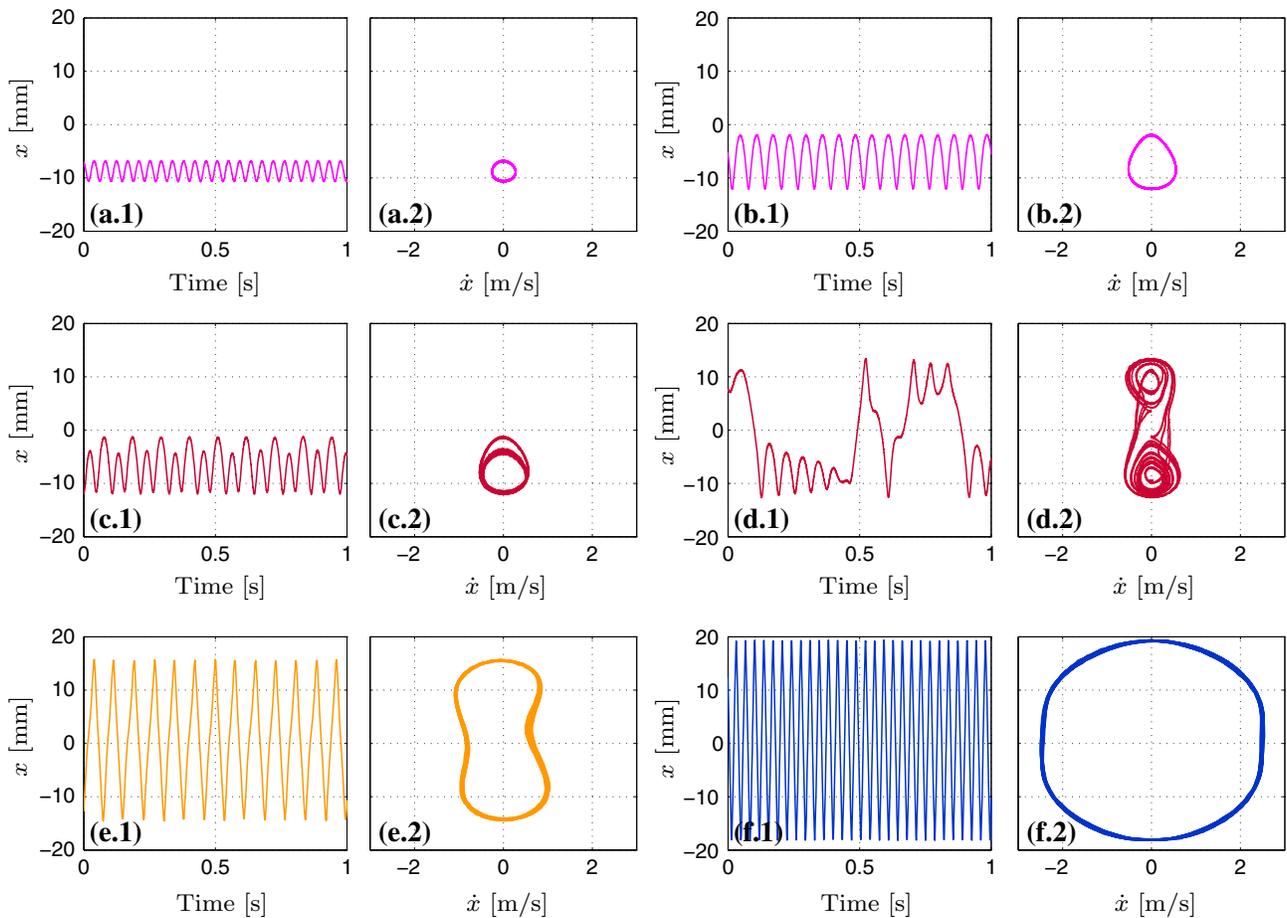


Fig. 13 Experimental time evolutions (1) and phase plots (2) extracted from measurements indicated with *arrows* in Fig. 12 and illustrating intrawell (**a–c**), aperiodic (**d**) and interwell (**e, f**)

oscillations. $\mathcal{F}_{\text{ext}} = 0.08 \text{ N}$ (pink line), 0.16 N (red line), 0.20 N (orange line) and 0.24 N (blue line). (Color figure online)

By increasing the oscillation amplitudes, though still observing them in the intrawell oscillations, one can see that the limit cycle tends to the homoclinic trajectory, so that the measured displacement, indicated with the arrow located on the upper branch and detailed in Fig. 13b, departs from a sinusoidal motion with increasing amplitudes of the harmonics.

Figure 12b considers the case of a slightly larger external force, showing a more complex behaviour in the frequency range [15, 18] Hz. In this region, periodic orbits have become unstable in favour of a chaotic motion. The chaotic oscillations are represented by means of Poincaré sections in Fig. 12b. Interestingly, when decreasing the excitation frequency, a period doubling is first observed and reported in Fig. 13c. The chaotic motion, shown in Fig. 13d, is characterised by aperiodic oscillations between the two wells. Once

again the numerical model is able to recover the characteristics of these intrawell frequency–response curves, as shown in Fig. 12c. In particular, the correct amplitudes are predicted, and the period-doubling bifurcation point is also found in the simulation, leading to the large frequency range at centre of the frequency band where no stable periodic orbits exist anymore.

The external force is increased again in Fig. 12d leading to a wider frequency range of unstable oscillations. Moreover, in low frequency the motion jumps on an upper branch during the backward sweep. The amplitude of this new periodic regime, named interwell oscillations and detailed in Fig. 13e, is large. The magnet now oscillates between the two stable positions with a periodic motion.

As shown in Fig. 12e, f, no aperiodic oscillation occurs during the forward sweep for largest external

forces. Indeed, the motion jumps on the upper branch in the low frequency range and the nonlinear coefficients lead to a hardening behaviour. For large amplitudes, the magnet displacement is shown in Fig. 13f. Finally, the larger the force, the shorter the frequency range of the unstable oscillations and the longer the upper branch in each direction are. It is interesting to notice that the aperiodic vibrations favour the jump on the upper branch during the backward sweep.

5 Conclusion

This contribution proposes the design and full characterisation of a passive MVA, relying completely on magnetic forces. The mobile mass of the absorber oscillates in a magnetic field created by a set of repulsive and corrective fixed magnets. The linear and nonlinear stiffness coefficients of this original device can be tuned easily, ensuring a great flexible use in different mechanical contexts. This flexibility has been assessed by tuning it either as an NLTVA, an NES or a bi-stable absorber with negative linear stiffness. A model for the absorber has been derived using a multipole expansion of the magnetic field, the validity of which has been verified by means of static measurements. The model predicts the variations of the linear, cubic and quintic stiffness coefficients of the absorber, for each geometric configuration. The dynamical behaviour of the MVA has been also completely characterised in its three main tunings of interest, showing once again the robustness of the model as compared to the measurements. The proposed design appears as an efficient absorber for vibration mitigation which should be easily used in a wide variety of context. Moreover, its versatility should allow one to use the device with different damping properties in a completely passive manner, so that its properties can be changed, depending on the targeted example, or even during the lifetime of a structure. The next steps of this research will consist in testing the MVA as an effective absorber mounted on a real structure. It will also allow us to draw a comparative study of the three families of absorber (NLTVA, NES and bi-stable), in order to test their relative merits and drawbacks on the same example given by a nonlinear structure.

Acknowledgments This work was supported by the Direction Générale de l'Armement (DGA) under the grant AMORMAG.

Appendix

This appendix gives the details of the computation of the stiffness coefficients. As the corrective magnets of the MVA presented in Fig. 2 is made up of 3 magnets bonded together, the corresponding coefficients are multiplied by 3. Moreover, the magnetic moments m_c and m_r of the corrective and repulsive magnets, respectively, are different values and are used for the optimisation presented in Sect. 3.2. The stiffness coefficients of Eq. (10) come from the dipolar, quadrupolar, hexapolar and octopolar terms of the magnetic field of the repulsive and corrective magnets and are given by

$$\begin{aligned} K_1^{\text{rep}} &= K_1^{\text{dip,rep}} + K_1^{\text{quad,rep}} + K_1^{\text{hex,rep}} + K_1^{\text{oct,rep}}, \\ K_1^{\text{cor}} &= 3 \left(K_1^{\text{dip,cor}} + K_1^{\text{quad,cor}} + K_1^{\text{hex,cor}} + K_1^{\text{oct,cor}} \right), \\ K_3^{\text{rep}} &= K_3^{\text{dip,rep}} + K_3^{\text{quad,rep}} + K_3^{\text{hex,rep}} + K_3^{\text{oct,rep}}, \\ K_3^{\text{cor}} &= 3 \left(K_3^{\text{dip,cor}} + K_3^{\text{quad,cor}} + K_3^{\text{hex,cor}} + K_3^{\text{oct,cor}} \right), \\ K_5^{\text{rep}} &= K_5^{\text{dip,rep}} + K_5^{\text{quad,rep}} + K_5^{\text{hex,rep}} + K_5^{\text{oct,rep}}, \\ K_5^{\text{cor}} &= 3 \left(K_5^{\text{dip,cor}} + K_5^{\text{quad,cor}} + K_5^{\text{hex,cor}} + K_5^{\text{oct,cor}} \right), \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} K_1^{\text{dip,rep}} &= 48c_{\text{dip}}m_r \frac{1}{r^5}, \\ K_3^{\text{dip,rep}} &= 240c_{\text{dip}}m_r \frac{1}{r^7}, \\ K_5^{\text{dip,rep}} &= 672c_{\text{dip}}m_r \frac{1}{r^9}, \\ K_1^{\text{quad,rep}} &= 480c_{\text{quad}}m_r \frac{1}{r^7}, \\ K_3^{\text{quad,rep}} &= 4480c_{\text{quad}}m_r \frac{1}{r^9}, \\ K_5^{\text{quad,rep}} &= 20160c_{\text{quad}}m_r \frac{1}{r^{11}}, \\ K_1^{\text{hex,rep}} &= 1792c_{\text{hex}}m_r \frac{1}{r^9}, \\ K_3^{\text{hex,rep}} &= 26880c_{\text{hex}}m_r \frac{1}{r^{11}}, \\ K_5^{\text{hex,rep}} &= 177408c_{\text{hex}}m_r \frac{1}{r^{13}}, \\ K_1^{\text{oct,rep}} &= 23040c_{\text{oct}}m_r \frac{1}{r^{11}}, \\ K_3^{\text{oct,rep}} &= 506880c_{\text{oct}}m_r \frac{1}{r^{13}}, \\ K_5^{\text{oct,rep}} &= 4612608c_{\text{oct}}m_r \frac{1}{r^{15}}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 K_1^{\text{dip,cor}} &= 12c_{\text{dip}}m_c \frac{(8R^4 - 24d^2R^2 + 3d^4)}{(R^2 + d^2)^{9/2}}, \\
 K_1^{\text{quad,cor}} &= 60c_{\text{quad}}m_c \frac{(16R^6 - 120R^4d^2 + 90R^2d^4 - 5d^6)}{(R^2 + d^2)^{13/2}}, \\
 K_1^{\text{hex,cor}} &= 28c_{\text{hex}}m_c \frac{(128R^8 - 1792R^6d^2 + 3360R^4d^4 - 1120R^2d^6 + 35d^8)}{(R^2 + d^2)^{17/2}}, \\
 K_1^{\text{oct,cor}} &= 180c_{\text{oct}}m_c \frac{(256R^{10} - 5760R^8d^2 + 20160R^6d^4 - 16800R^4d^6 + 3150R^2d^8 - 63d^{10})}{(R^2 + d^2)^{21/2}}, \\
 K_3^{\text{dip,cor}} &= 30c_{\text{dip}}m_c \frac{(16R^6 - 120d^2R^4 + 90d^4R^2 - 5d^6)}{(R^2 + d^2)^{13/2}}, \\
 K_3^{\text{quad,cor}} &= 70c_{\text{quad}}m_c \frac{(128R^8 - 1792R^6d^2 + 3360R^4d^4 - 1120R^2d^6 + 35d^8)}{(R^2 + d^2)^{17/2}}, \\
 K_3^{\text{hex,cor}} &= 210c_{\text{hex}}m_c \frac{(256R^{10} - 5760R^8d^2 + 20160R^6d^4 - 16800R^4d^6 + 3150R^2d^8 - 63d^{10})}{(R^2 + d^2)^{21/2}}, \\
 K_3^{\text{oct,cor}} &= 990c_{\text{oct}}m_c \frac{(1024R^{12} - 33792R^{10}d^2 + 190080R^8d^4 - 295680R^6d^6 + 138600R^4d^8 - 16632R^2d^{10} + 231d^{12})}{(R^2 + d^2)^{25/2}}, \\
 K_5^{\text{dip,cor}} &= \frac{21}{2}c_{\text{dip}}m_c \frac{(128R^8 - 1792d^2R^6 + 3360d^4R^4 - 1120d^6R^2 + 35d^8)}{(R^2 + d^2)^{17/2}}, \\
 K_5^{\text{quad,cor}} &= \frac{315}{2}c_{\text{quad}}m_c \frac{(256R^{10} - 5760R^8d^2 + 20160R^6d^4 - 16800R^4d^6 + 3150R^2d^8 - 63d^{10})}{(R^2 + d^2)^{21/2}}, \\
 K_5^{\text{hex,cor}} &= \frac{693}{2}c_{\text{hex}}m_c \frac{(1024R^{12} - 33792R^{10}d^2 + 190080R^8d^4 - 295680R^6d^6 + 138600R^4d^8 - 16632R^2d^{10} + 231d^{12})}{(R^2 + d^2)^{25/2}}, \\
 K_5^{\text{oct,cor}} &= \frac{9009}{2}c_{\text{oct}}m_c \frac{(2048R^{14} - 93184R^{12}d^2 + 768768R^{10}d^4 - 1921920R^8d^6 + 1681680R^6d^8 - 504504R^4d^{10} + 42042R^2d^{12} - 429d^{14})}{(R^2 + d^2)^{29/2}},
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 c_{\text{dip}} &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}, \\
 c_{\text{quad}} &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{3(\beta_{\text{int}}^2 - \beta_{\text{ext}}^2)}{8}, \\
 c_{\text{hex}} &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \left(\frac{L}{2}\right)^4 \frac{15(\beta_{\text{ext}}^4 - \beta_{\text{int}}^4) + 60(\beta_{\text{int}}^2 - \beta_{\text{ext}}^2)}{64}, \\
 c_{\text{oct}} &= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \left(\frac{L}{2}\right)^6 \frac{35(\beta_{\text{int}}^6 - \beta_{\text{ext}}^6) + 280(\beta_{\text{ext}}^4 - \beta_{\text{int}}^4) + 336(\beta_{\text{int}}^2 - \beta_{\text{ext}}^2)}{1024},
 \end{aligned}$$

$$\text{and } \beta_{\text{int}} = \frac{D_{\text{int}}}{L} \text{ and } \beta_{\text{ext}} = \frac{D_{\text{ext}}}{L}.$$

References

1. Al-Shudeifat, M.: Asymmetric magnet-based nonlinear energy sink. *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **10**(1), 014,502 (2014)
2. AL-Shudeifat, M.A., Wierschem, N., Quinn, D.D., Vakakis, A.F., Bergman Jr., L.A., Spencer, B.F.: Numerical and experimental investigation of a highly effective single-sided vibro-impact non-linear energy sink for shock mitigation. *Int. J. Non-Linear Mech.* **52**, 96–109 (2013)
3. Asami, T., Nishihara, O., Baz, A.: Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems. *J. Vib. Acoust.* **124**, 284–295 (2002)
4. Bourquin, F., Caruso, G., Peigney, M., Siegert, D.: Magnetically tuned mass damper for optimal vibration damping of large structures. *Smart Mater. Struct.* **23**, 085009 (2014)
5. Carrella, A., Brennan, M., Kovacic, I., Waters, T.: On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness. *J. Sound Vib.* **322**(4–5), 707–717 (2009)
6. Carrella, A., Brennan, M., Waters, T.: Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *J. Sound Vib.* **301**(3–5), 678–689 (2007)
7. Carrella, A., Brennan, M., Waters, T., Shin, K.: On the design of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using linear mechanical springs and magnets. *J. Sound Vib.* **315**(3), 712–720 (2008)
8. Den Hartog, J.: *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill, New York (1934)
9. Doedel, E.J., Paffenroth, R., Champneys, A.R., Fairgrieve, T.F., Kuznetsov, Y.A., Oldeman, B.E., Sandstede, B., Wang, X.: *Auto 2000: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Technical report, Concordia University (2002)
10. Feudo, S.L., Allani, A., Cumunel, G., Argoul, P., Bruno, D.: Experimental tuned mass damper based on eddy currents damping effect and adjustable stiffness. In: 12e colloque national en calcul des structures (CSMA 2015). CSMA, Giens (2015)
11. Frahm, H.: *Device for Damping Vibrations of Bodies*. Technical Report, US Patent No. 989,958 (1909)
12. Gendelman, O., Manevitch, L., Vakakis, A., Closskey, R.M.: Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators, I: dynamics of the underlying Hamiltonian systems. *J. Appl. Mech.* **68**(1), 34–41 (2001)
13. Gourc, E., Michon, G., Séguy, S., Berlioz, A.: Experimental investigation and design optimization of targeted energy transfer under periodic forcing. *J. Vib. Acoust.* **136**(2), 021,021 (2014)
14. Gourc, E., Michon, G., Séguy, S., Berlioz, A.: Targeted energy transfer under harmonic forcing with a vibro-impact nonlinear energy sink: Analytical and experimental developments. *J. Vib. Acoust.* **137**(3), 031,008 (2015)
15. Gourdon, E., Alexander, N., Taylor, C., Lamarque, C., Pernot, S.: Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: theoretical and experimental results. *J. Sound Vib.* **300**(3–5), 522–551 (2007)
16. Grappasonni, C., Habib, G., Detroux, T., FengWen, W., Kerschen, G., Jensen, J.: Practical design of a nonlinear tuned vibration absorber. In: *Proceedings of the ISMA 2014 conference* (2014)
17. Grappasonni, C., Habib, G., Detroux, T., Kerschen, G.: Experimental demonstration of a 3D-printed nonlinear tuned vibration absorber. In: *Proceedings of the XXXIII International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Orlando (2015)
18. Habib, G., Detroux, T., Viguié, R., Kerschen, G.: Nonlinear generalization of den Hartog's equal-peak method. *Mech. Syst. Signal Process.* **52–53**, 17–28 (2015)
19. Habib, G., Kerschen, G.: Suppression of limit cycle oscillations using the nonlinear tuned vibration absorber. *Proc. R. Soc. Lond. A* **471**(2176) (2015)
20. Haddow, A.G., Shaw, S.W.: Centrifugal pendulum vibration absorbers: an experimental and theoretical investigation. *Nonlinear Dyn.* **34**(3–4), 293–307 (2003)
21. Kojima, H., Nagaya, K.: Forced vibrations of a circular plate with a nonlinear dynamic vibration absorber. *Bull. JSME* **28**(136), 309–314 (1985)
22. Kojima, H., Saito, H.: Forced vibrations of a beam with a non-linear dynamic vibration absorber. *J. Sound Vib.* **88**(4), 559–568 (1983)
23. Kovacic, I., Brennan, M.J., Waters, T.P.: A study of a nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic. *J. Sound Vib.* **315**(3), 700–711 (2008)
24. Krenk, S., Hogsberg, J.: Tuned mass absorber on a flexible structure. *J. Sound Vib.* **333**, 1577–1595 (2014)
25. Lamarque, C.H., Gendelman, O.V., Ture Savadkoobi, A., Etcheverria, E.: Targeted energy transfer in mechanical systems by means of non-smooth nonlinear energy sink. *Acta Mech.* **221**(1–2), 175–200 (2011)
26. Lee, Y.S., Kerschen, G., McFarland, D.M., Hill, W.J., Nickkawde, C., Strganac, T.W., Bergman, L.A., Vakakis, A.F.: Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part II: experiments. *AIAA J.* **45**(10), 2391–2400 (2007)
27. Lee, Y.S., Vakakis, A.F., Bergman, L.A., McFarland, D.M., Kerschen, G.: Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part I: theory. *AIAA J.* **45**(3), 693–711 (2007)
28. Liu, X., Huang, X., Hua, H.: On the characteristics of a quasi-zero stiffness isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector. *J. Sound Vib.* **332**(14), 3359–3376 (2013)
29. Manevitch, L.I., Sigalov, G., Romeo, F., Bergman, L.A., Vakakis, A.F.: Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment: analytical study. *J. Appl. Mech.* **81**(4), 041,011 (2013)
30. Mann, B., Owens, B.: Investigations of a nonlinear energy harvester with bistable potential well. *J. Sound Vib.* **329**(9), 1215–1226 (2010)
31. McFarland, D.M., Bergman, L.A., Vakakis, A.F.: Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency. *Int. J. Nonlinear Mech.* **40**, 891–899 (2005)
32. Mehmood, A., Nayfeh, A.H., Hajj, M.R.: Effects of a nonlinear energy sink (NES) on vortex-induced vibrations of a circular cylinder. *Nonlinear Dyn.* **77**, 667–680 (2014)
33. Ormondroyd, J., Den Hartog, J.: The theory of the dynamic vibration absorber. *Trans. ASME* **50**, 9–22 (1928)

34. Pellicano, F., Amabili, M., Païdoussis, M.P.: Effect of the geometry on the non-linear vibration of circular cylindrical shells. *Int. J. Non-Linear Mech.* **37**, 1181–1198 (2002)
35. Petruska, A., Abbott, J.: Optimal permanent-magnet geometries for dipole field approximation. *IEEE Trans. Magn.* **49**(2), 811–819 (2013)
36. Robertson, W.S., Kidner, M., Cazzolato, B.S., Zander, A.C.: Theoretical design parameters for a quasi-zero stiffness magnetic spring for vibration isolation. *J. Sound Vib.* **326**(1–2), 88–103 (2009)
37. Romeo, F., Sigalov, G., Bergman, L.A., Vakakis, A.F.: Dynamics of a linear oscillator coupled to a bistable light attachment: numerical study. *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **10**(1), 011,007 (2014)
38. Sodano, H.A., Bae, J., Inman, D.J., Belvin, W.K.: Concept and model of eddy current damper for vibration suppression of a beam. *J. Sound Vib.* **288**, 1177–1196 (2005)
39. Touzé, C., Thomas, O.: Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells: effect of the geometry. *Int. J. Non-Linear Mech.* **41**(5), 678–692 (2006)
40. Tsai, H., Lin, G.: Optimum tuned mass dampers for minimizing steady-state response of support excited and damped system. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **11**, 846–862 (1993)
41. Vakakis, A., Gendelman, O.: Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators, II: resonance capture. *J. Appl. Mech.* **68**(1), 42–48 (2001)
42. Vakakis, A., Gendelman, O., Bergman, L., McFarland, D., Kerschen, G., Lee, Y.: *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems I*. Springer, New York (2008)
43. Vakakis, A., Gendelman, O., Bergman, L., McFarland, D., Kerschen, G., Lee, Y.: *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems II*. Springer, New York (2008)
44. Vakakis, A., Manevitch, L., Gendelman, O., Bergman, L.: Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments. *J. Sound Vib.* **264**, 559–577 (2003)
45. Viguíé, R., Kerschen, G.: Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: a tuning methodology. *J. Sound Vib.* **326**(3–5), 780–793 (2009)
46. Xu, D., Yu, Q., Zhou, J., Bishop, S.: Theoretical and experimental analyses of a nonlinear magnetic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *J. Sound Vib.* **332**(14), 3377–3389 (2013)
47. Yamakawa, I., Takeda, S., Kojima, H.: Behavior of a new type dynamic vibration absorber. *Bull. JSME* **20**(146), 947–954 (1977)
48. Zilletti, M., Elliott, S.J., Rustighi, E.: Optimisation of dynamic vibration absorbers to minimise kinetic energy and maximise internal power dissipation. *J. Sound Vib.* **331**, 4093–4100 (2012)

Conclusion de la troisième partie

Nous avons étudié dans cette partie l'influence d'un NLTVA sur l'instabilité de flottement ainsi qu'une réalisation expérimentale de ce dernier. Dans le chapitre 6, une étude théorique a permis de mettre en évidence les principaux effets du NLTVA sur le flottement, à savoir retarder l'apparition de l'instabilité, annuler la potentielle sous-criticalité de l'instabilité lorsqu'elle est locale et réduire l'amplitude des cycles limites dans le régime post-flottement. Il a été montré que l'effet le plus notable est le décalage de la vitesse de flottement, réalisé à l'aide de la partie linéaire du NLTVA, néanmoins grandement dépendant des paramètres du profil. Concernant la partie non linéaire du NLTVA, son réglage est moins évident que pour la partie linéaire. Un compromis a été trouvé, dans le cas d'un profil possédant des non linéarités raidissantes, où la supercriticalité de la bifurcation est assurée et l'amplitude des cycles limites réduite de façon notable. Dans le chapitre 7, une réalisation expérimentale du NLTVA utilisant des aimants permanents a été présentée. Ce dispositif permet de régler les raideurs linéaires et non linéaires de l'amortisseur. Trois situations ont été mises en avant. Une première où la raideur linéaire de l'amortisseur est positive, cas du NLTVA, une seconde où cette raideur est nulle, cas du NES, et une dernière où cette raideur est négative, cas de l'amortisseur bistable. De plus, une modélisation a été établie permettant de prédire, en fonction des caractéristiques de l'amortisseur, sa force de rappel. Ce modèle a été validé expérimentalement.

Épilogue

Dans de nombreux contextes industriels, des vibrations non désirées sont présentes. Dès lors que leur amplitude est significative, elles peuvent accélérer la fatigue de la structure ou amener à sa rupture. Elles doivent alors être amorties ou, si possible, supprimées. Le flottement est une instabilité bien connue dans le domaine de l'aéroélasticité, et qui peut être source de vibrations importantes pour la structure. Ce type d'instabilité s'observe sur une grande variété de structures, du vol des insectes au tablier de pont. Nous nous sommes intéressés tout au long de notre travail au flottement des ailes d'avions. Toutefois, les dispositifs de contrôle passif présentés ici gardent toute leur pertinence pour le flottement d'autres types de structure.

Nous avons étudié, dans ce manuscrit, l'influence d'amortisseurs passifs non linéaires sur l'instabilité de flottement d'un profil d'aile à deux degrés de liberté. L'instabilité de flottement, et particulièrement le régime post-flottement, ont d'abord été étudiés. Pour cela, une expérience a été menée avec une plaque plane comme profil d'aile, ce qui a permis de caractériser le flottement sur ce type de profil et de mesurer l'établissement et l'évolution des cycles limites dans le régime post-flottement. D'autre part, le comportement du profil a été modélisé dans le régime post-flottement en prenant en compte le décrochage dynamique à l'aide du modèle de Petot. Par la suite, nous avons étudié l'influence sur le flottement d'un amortisseur hystérétique, réalisé expérimentalement à l'aide de ressorts en alliage de forme. En effet, ces alliages présentent un comportement pseudo-élastique apte à dissiper une grande quantité d'énergie. Nous avons pu montrer expérimentalement que cet amortisseur hystérétique permet de réduire de façon conséquente l'amplitude des cycles limites de la plaque plane dans le régime post-flottement. Nous avons ensuite utilisé le modèle de Bouc-Wen pour modéliser la force de rappel de cet amortisseur, afin de prédire le déplacement de la plaque plane en présence de l'amortisseur hystérétique. Enfin, nous avons étudié l'influence d'un amortisseur non linéaire de vibration accordé (NLTVA) sur l'instabilité de flottement. Sa présence a pour objectif de : retarder l'apparition de l'instabilité, assurer le caractère supercritique de l'instabilité et réduire l'amplitude des cycles limites dans le régime post-flottement. L'influence du NLTVA a été étudié analytiquement et numériquement, les trois effets excomptés ayant été observés. De plus, nous avons proposé une réalisation expérimentale du NLTVA, appelée MVA, à l'aide d'aimants permanents. Nous avons mesuré et modéliser sa force de rappel. En fonction de son réglage, le MVA peut se comporter, en plus du NLTVA, comme un oscillateur purement non linéaire (NES) ou comme un amortisseur bi-stable. Ces trois configurations (NLTVA, NES et bi-stable) ont été étudiées expérimentalement et numériquement.

Nous pouvons toutefois identifier quelques limites à notre étude. Concernant la modélisation du comportement de l'aile dans le régime post-flottement, le modèle de Petot utilisé reproduit

fidèlement le décrochage dynamique observé sur la plaque plane mais peut ne pas convenir à tout type de profil. De plus, ce modèle requiert une identification d'un grand nombre de paramètres, il faut alors être en mesure d'effectuer des mesures d'efforts aérodynamiques instationnaires sur le profil concerné. D'autre part, concernant l'étude expérimentale effectuée, la branche aller du diagramme de bifurcation n'a pas été mesurable de façon robuste. Ainsi, les prévisions du modèle pour cette branche aller n'ont pu être vérifiées. Concernant l'amortisseur hystérétique, les ressorts en AMF utilisés n'ont pas été conçus pour avoir une efficacité optimale dans les conditions de fonctionnement du flottement. Ainsi, pour une future application, si les conditions de fonctionnement de l'amortisseur sont connues, l'optimisation de la conception des AMF sera envisageable. En ce qui concerne le NLTVA, son effet n'a pas été étudié expérimentalement. De plus, le modèle aérodynamique utilisé est relativement simple, afin de permettre des développements analytiques.

Il existe néanmoins plusieurs perspectives intéressantes. Concernant le modèle aéroélastique en grande amplitude, pour mettre en regard l'utilisation de modèles semi-empiriques avec la simulation numérique, il me semble que dès lors que des mesures d'efforts instationnaires sont envisageables sur le profil considéré, les modèles semi-empiriques sont plus avantageux dans le cadre de l'aéroélasticité. En effet, leur résolution étant immédiate par rapport à la simulation numérique, ils permettent d'explorer une grande variété de situations. De plus, certains modèles semi-empiriques s'attachent à modéliser les phénomènes physiques en jeu lors du décrochage dynamique (ce qui n'est pas le cas du modèle de Petot). On ne perd ainsi pas d'information physique en les utilisant. Concernant le contrôle, une limite des amortisseurs passifs est qu'ils ne sont efficaces, la plupart du temps, que sur une plage de fonctionnement restreinte. Cependant, chacun à sa manière, l'amortisseur hystérétique et le NLTVA tendent à dépasser cette contrainte. En ce qui concerne l'amortisseur hystérétique, nous avons observé qu'il s'active pour de faibles mouvements de la structure primaire et qu'il reste efficace sur une grande gamme d'amplitudes. Et pour le NLTVA, le fait d'avoir un comportement linéaire et non linéaire permet d'étendre son influence sur l'instabilité de flottement. Il semble alors légitime de coupler ces deux amortisseurs afin d'avoir un contrôle encore plus robuste du flottement, et particulièrement dans le régime post-flottement.

Annexe A

Chapitre paru dans
Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis,
Springer, 2015

Pseudoelastic Shape Memory Alloys to Mitigate the Flutter Instability: A Numerical Study

Arnaud Malher, Olivier Doaré and Cyril Touzé

Abstract A passive control of aeroelastic instabilities on a two-degrees-of-freedom (dofs) system is considered here using shape memory alloys (SMA) springs in their pseudo-elastic regime. SMA present a solid-solid phase change that allow them to face strong deformations ($\sim 10\%$); in the pseudo-elastic regime, an hysteresis loop appears in the stress-strain relationship which in turn gives rise to an important amount of dissipated energy. This property makes the SMA a natural candidate for mitigating undesired vibrations in a passive manner. A 2-dofs system is used here to model the classical flutter instability of a wing section in a uniform flow. The SMA spring is selected to act on the pitch in order to dissipate energy of the predominant motion. A simple phenomenological model for the SMA hysteresis loop is introduced, allowing for a quantitative study of the important parameters to optimize in view of an experimental design. Thanks to a simple phenomenological model for the SMA hysteresis loop, a quantitative numerical study is performed in order to exhibit the best tuning of the material parameters for controlling the flutter instability.

1 Introduction

Aeroelastic instabilities are an important issue in aeronautics, especially regarding the wing motions. Indeed, for a coupled system airflow—flexible structure, like aircraft wing, turbojet or bridge, a limit velocity exists above which the flexible structure cannot evacuate the energy received from the airflow anymore, then giving rise to strong or even fatal deformations. These instabilities, usually described under the generic term flutter instability, result from interaction between aerodynamic, inertia and elastic forces [3]. In this contribution, we focus on a passive control device for mitigating the flutter instability by using springs composed of shape memory alloys (SMA). In their pseudo-elastic regime, SMA are known for showing the ability of

A. Malher (✉) · O. Doaré · C. Touzé
Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech, 828 Boulevard des Maréchaux,
91762 Palaiseau Cedex, France
e-mail: arnaud.malher@ensta-paristech.fr

O. Doaré
e-mail: olivier.doare@ensta-paristech.fr

C. Touzé
e-mail: cyril.touze@ensta-paristech.fr

© Springer International Publishing Switzerland 2015
M. Belhaq (ed.), *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*,
Springer Proceedings in Physics 168, DOI 10.1007/978-3-319-19851-4_17

353

dissipating an important amount of energy thanks to the hysteresis loop appearing in their stress-strain relationship [11], and has thus already been used in numerous applications ranging from civil engineering, aeronautics to medical industry [13, 14]. The goal of this study is, in a first step, not to describe the system as accurately as possible but to exhibit the interest of using an hysteretic phenomenon in the view of controlling an aeroelastic instability and studying the influence of different SMA parameters for the flutter control.

Recent contributions have considered the dynamical responses of SMA springs from the theoretical viewpoint [1, 7, 11] in order to properly quantify the most prominent features of the vibrations of simple single dof systems. Experimentally, a torsion pendulum has recently been used in order to clearly exhibit the softening effect of SMA oscillators [4].

The aim of this paper is to investigate the effect of a SMA spring on the flutter instability. More particularly, the most relevant parameters of a pseudo-elastic regime on the amplitudes of the limit cycle oscillations (LCO) are analyzed, in order to quantify the effect of the dissipation brought by the hysteresis loop. The airfoil is modeled using the classical 2-dofs system coupling pitch and heave motions [5]. In order to exchange energy and create the possibility of a Hopf bifurcation in the system, the minimal model should contain at least a flexural (heave) and a torsional (pitch) mode. The SMA nonlinear behaviour is described by an heuristic model where the prominent parameters are left free to vary. The structural nonlinearities that may appear in the wing motion are here described thanks to the addition of a cubic nonlinearity in the restoring force [6, 8, 9, 12]. Numerical simulations are then conducted in order to investigate the effect of the SMA on the LCO. In particular, it is shown that for certain parameter range, the SMA spring can lead to a significant decrease of the amplitude of the LCO.

2 2DOFs Airfoil Model

2.1 Linear Model and Flutter Velocity

The system under consideration is shown in Fig. 1. A Lagrangian formulation is used to express the evolution of the altitude h (heave) and the angle of attack α (pitch) [5]. The kinetic energy reads $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_\alpha\dot{\alpha}^2 + S_\alpha\dot{h}\dot{\alpha}$, and the potential energy reads $\mathcal{V} = \frac{1}{2}k_\alpha\alpha^2 + \frac{1}{2}k_h h^2$. In these expressions, I_α is the inertia moment and S_α the static moment which is directly related to the position of the airfoil gravity center and is the cause of the coupling. The source terms F and M (aerodynamic force and moment) are classically derived from the lift coefficient C_L such as $F = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_L$ and $M = eF$, where ρ is the fluid density, U the upstream airspeed and S the airfoil section. We assume that the angle of attack remains small, so that the lift coefficient depends linearly on α_{app} the apparent angle of attack, so that $C_L = (\partial C_L / \partial \alpha)\alpha_{app}$ ($C_L|_{\alpha=0} = 0$ because the airfoil is symmetric). A pseudo-static approach is used,

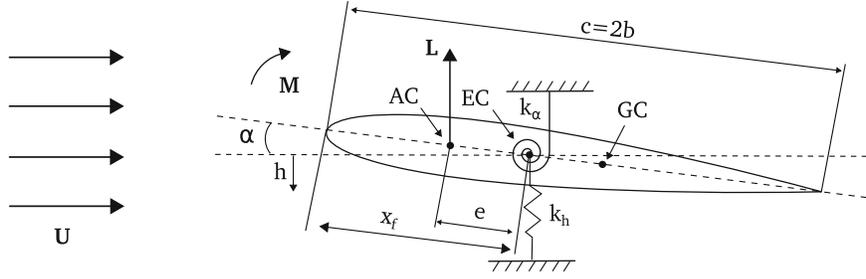


Fig. 1 Sketch of the airfoil model as a rigid body in uniform flow U with two dof: pitch (α) and heave (h)

i.e. the airfoil speed \dot{h} is not neglected as compared to the upstream airspeed U and $\alpha_{app} = \alpha + \dot{h}/U$ [5].

Lagrange equations lead to the following dynamical system:

$$\begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho U S C_{L,\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{2}e\rho U S C_{L,\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & \frac{1}{2}\rho U^2 S C_{L,\alpha} \\ 0 & K_\alpha - \frac{1}{2}e\rho U^2 S C_{L,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = 0. \quad (1)$$

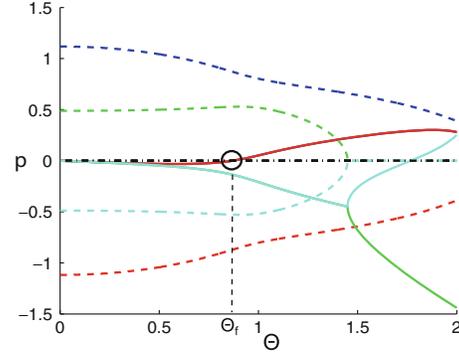
In nondimensional form (1) reads

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu C_{L,\alpha} \Theta & 0 \\ -\mu \gamma C_{L,\alpha} \Theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega^2 & \mu C_{L,\alpha} \Theta^2 \\ 0 & r_\alpha^2 - \mu \gamma C_{L,\alpha} \Theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{h}{b}, & \tau &= \frac{K_\alpha t}{I_\alpha}, & (\cdot)' &= \frac{d}{d\tau}, \\ r_\alpha &= \sqrt{\frac{I_\alpha}{mb^2}}, & \mu &= \frac{\rho b S}{2m}, & x_\alpha &= \frac{S_\alpha}{mb}, \\ \Theta &= \frac{U}{b} \sqrt{\frac{I_\alpha}{K_\alpha}}, & \Omega &= \sqrt{\frac{K_h I_\alpha}{m K_\alpha}}, & \gamma &= \frac{e}{b}. \end{aligned}$$

In order to gain insight on the critical parameter values, the flutter speed Θ_f can be derived analytically. Indeed, assuming that the airfoil motion is harmonic, $y = \Re(\tilde{y} \exp(pt))$ and $\alpha = \Re(\tilde{\alpha} \exp(pt))$ with $(p, \tilde{\alpha}, \tilde{y}) \in \mathcal{C}$, replacing α and y by their new expressions in (2) it yields

Fig. 2 Real (solid lines) and imaginary (dotted lines) parts of the solutions of $\det(\mathbf{A}) = 0$, with \mathbf{A} defined in (3). Parameters of the problem are listed in Table 1



$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{\alpha} \end{bmatrix} = 0, \quad \text{with} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p^2 + \mu C_{L,\alpha} \Theta p + \Omega^2 & x_\alpha p^2 + \mu C_{L,\alpha} \Theta^2 \\ x_\alpha p^2 - \mu \gamma C_{L,\alpha} p & r_\alpha^2 p^2 + r_\alpha^2 - \mu \gamma C_{L,\alpha} \Theta^2 \end{bmatrix}.$$

Equation (3) has non trivial solutions p_i when $\det(\mathbf{A}) = 0$. Using the parameter values of Table 1, the solutions p_i versus the flow speed Θ is plotted in Fig. 2. At the flutter velocity Θ_f , the real part of one of the solutions p_i vanishes. Assuming then p purely imaginary, separating real and imaginary parts in the equation $\det(\mathbf{A}) = 0$, and grouping the terms to eliminate p , the following expression is found for which Θ_f is solution

$$(A_1 \Theta^2 - A_2)(A_3 \Theta^2 + A_4) = 0,$$

$$\text{with } \begin{cases} A_1 = \mu C_{L,\alpha} (r_\alpha^2 + \gamma x_\alpha) \\ A_2 = r_\alpha^2 x_\alpha \end{cases},$$

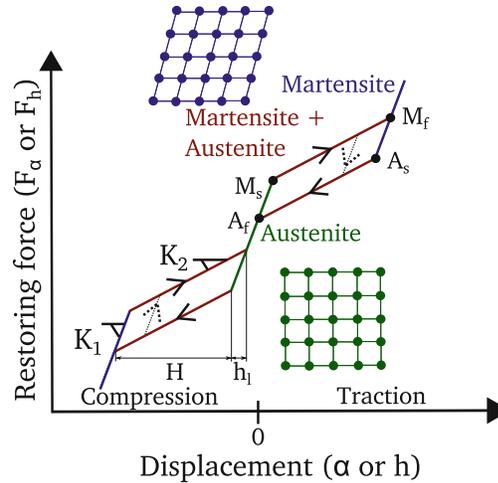
$$\text{thus } \Theta_f = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{r_\alpha^2 x_\alpha}{\mu C_{L,\alpha} (r_\alpha^2 + \gamma x_\alpha)}}. \quad (4)$$

Using values of Table 1 we find $\Theta_f = 0.87$.

2.2 SMA Model

The SMA spring is assumed to have pseudo-elastic behaviour, which is briefly recalled in Fig. 3. This nonlinear behaviour is characterized by a solid-solid phase change between two different states. The first one called *austenite* is stable at large

Fig. 3 Pseudo-elastic behaviour of SMA and its microstructure for each phase



temperatures and is the natural state of the spring at rest. The microstructure of the austenite phase is also sketched in Fig. 3. When deformed, the microstructure of the SMA turns into a new phase called *martensite*, energetically stable at small temperatures and for which the microstructure is now oriented. The points in the stress-strain space where the transformations start and finish are usually denoted with the subscripts *s* (start) and *f* (finish), so that for instance M_f refers to the point where the martensitic transformation has been fully accomplished in the SMA structure.

The path followed in the stress-strain relationship is not the same when the material is loaded or unloaded, thus an hysteresis loop appears as illustrated in Fig. 3. This hysteretic phenomena is the most salient feature of the pseudo-elastic behaviour of SMA. The dissipated energy during a cycle is proportional to the area of the hysteresis loop so that the more the loop area is large, the more energy is prone to be dissipated in the device.

The nonlinear behaviour of single dof SMAs can be derived from a general, three-dimensional model inferred from thermodynamical laws and then reduced by considering ad-hoc assumptions, see e.g. [2, 7, 10, 11]. In this case the model contains, in-built within the oscillator equation, additional equations governing the evolution of the fraction of martensite, the description of heat transfer, and the thermodynamic force, which expression is derived from a pseudopotential of dissipation that can include yields functions in order to express the phase transformations [11]. These modeling features are typical of hysteretic systems [15] and give rise to a complex formulation which, in turn, induces numerical difficulties for solving the whole system. Contrary to this general approach, we use in this contribution a simple heuristic model instead, as it has the capacity to retrieve the main features of the dynamical behaviour within a light computational framework. It is built following the sketch in Fig. 3 by approximating each part of the diagram by a linear relationship, h_l modelize the beginning of the martensitic transformation and H the end of the martensitic transformation. An internal auxiliary variable playing the role of the fraction of martensite is defined so as to keep the memory of the precedent state of the material in a dynamical simulation. For simplification, it is assumed that the slopes of

Table 1 Nondimensional aeroelastic parameters

r_α	μ	x_α	Ω	γ	$C_{L,\alpha}$
0.5	$1/10\pi$	0.2	0.5	0.4	2π

the purely austenitic and purely martensitic phases are equal, as well as the slopes during the reverse or transverse transformations, so that the stiffness of the SMA are defined by K_1 and K_2 , only as shown in Fig. 3. It is also assumed that the behaviour of the spring is symmetric in traction and compression. Internal loops are described following the sketch in Fig. 3 and we call A_{SMA} the area of the maximal internal loop. The area A_{SMA} is completely defined by the four parameters K_1 , K_2 , h_l and H with the following relationship

$$A_{SMA} = h_l H \sqrt{1 + K_1^2} \sqrt{1 + K_2^2} \cos(\tan^{-1}(1/K_1) + \tan^{-1}(K_2)).$$

For the remainder of the study, the four parameters that will be considered are A_{SMA} , K_1 , K_2 and h_l (A_{SMA} instead of H as it is more physically meaningful).

After the flutter instability, with the physical parameters from Table 1 the wing experiences large-amplitude motions especially on the pitch mode, whereas the amplitude of the motion of the heave mode remains fairly small. In order to take advantage of the dissipative properties of the SMA, it appears logical to include a SMA spring on the torsional motion, whereas the flexural spring is left unchanged with a linear behaviour law.

2.3 Final Model

To ensure a LCO after bifurcation occurs (no matter using SMA or not) a cubic stiffness is added on both modes (ξ_y for heave and ξ_α for pitch). The final model with a SMA torsional spring is then derived by replacing $r_\alpha^2 \alpha$ from (2) with the nonlinear behaviour of the SMA spring f_{NL}^{SMA} depicted in Fig. 3. It reads:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \alpha'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu C_{L,\alpha} \Theta & 0 \\ -\mu \gamma C_{L,\alpha} \Theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \alpha' \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \Omega^2 & \mu C_{L,\alpha} \Theta^2 \\ 0 & -\mu \gamma C_{L,\alpha} \Theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_y y^3 \\ -f_{NL}^{SMA}(\alpha) - \xi_\alpha \alpha^3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

3 Results and Discussion

The aeroelastic parameters for the two-dofs system have been selected according to [5], they are listed in Table 1. Equation (5) is integrated in time with a fourth-order Runge-Kutta scheme. The initial condition is generally prescribed as a small perturbation on the heave mode. The results shown in Fig. 4 are made for $\xi_y = \xi_\alpha = 0$, thus the nonlinearity is exclusively due to the SMA.

When $\Theta < \Theta_f$, the airfoil motion decreases and tends to zero, see Fig. 4a. When $\Theta \geq \Theta_f$, the flutter instability occurs and the position at rest is not stable anymore. However, the energy of the LCO can be dissipated by the SMA, so that for a certain range of reduced velocity, the amplitude of the motion saturates thanks to the nonlinear behaviour of the SMA, as illustrated in Fig. 4b. When the motion amplitudes of the LCO are beyond the end of the martensitic transformation, the potential of dissipation of the SMA is reached, so that divergent motions are retrieved. The critical speed above which the motion diverges is denoted Θ_c . The first observed and awaited effect of adding the SMA is to increase Θ_c thanks to the damping property of the hysteresis loop, an intermediate stage where LCO with small amplitude is present. In a first step the energy evolution is investigated to ensure the LCO is entirely due to the hysteresis loop of the SMA and in a second step, a parametric study of the SMA is made to understand its influence on the LCO.

Fig. 4 Effect of the SMA on the linear flutter instability ($\xi_y = \xi_\alpha = 0$) for three different reduced velocities: **a** Linear stability case, $\Theta = 0.86$ **b** Instability case, with LCO due to SMA dissipation, $\Theta = 0.91$ **c** Instability case where SMA cannot dissipate enough energy, and an exponential growth is observed, $\Theta = 0.93$ ($\Theta_f = 0.87$ and $\Theta_c = 0.926$). *Blue* heave motion y , *green* pitch α . The curves are normalized to their maximal value

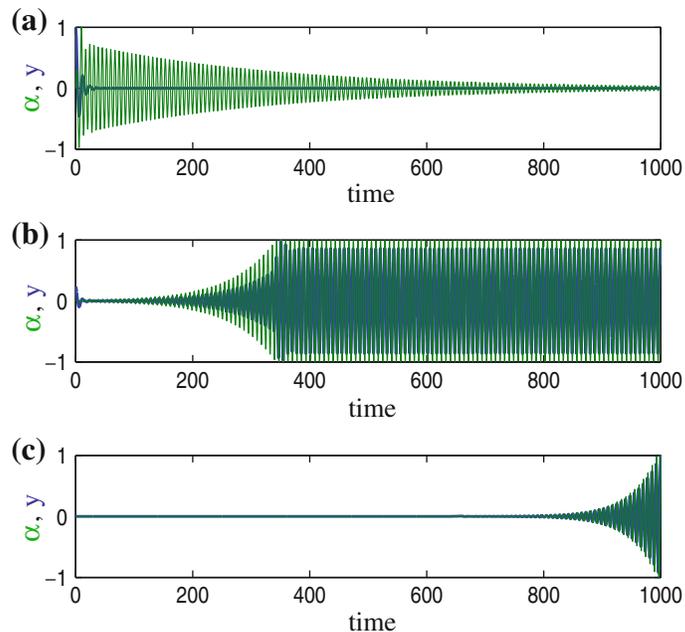
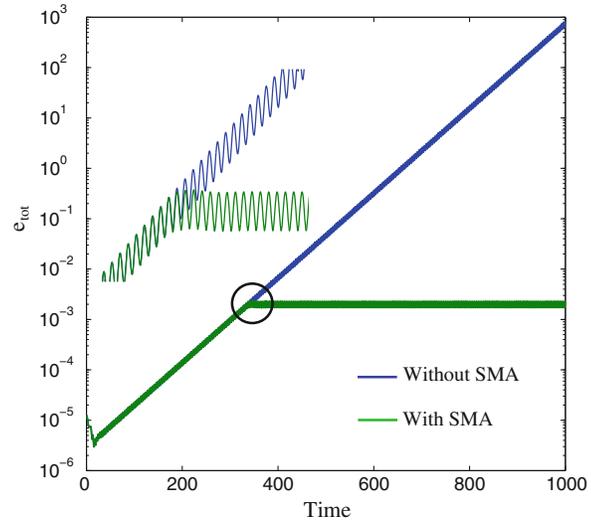


Fig. 5 Total energy e_{tot} versus time for the aeroelastic system (parameters of Table 1), with and without SMA, and for $\Theta = 0.9$



3.1 Energy Exchange

We investigate the energy evolution with time for the case $\Theta_f < \Theta < \Theta_c$. The energy contained in the airfoil reads

$$E_{tot} = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \frac{1}{2} \left(m\dot{h}^2 + I_\alpha \dot{\alpha}^2 + K_\alpha \alpha^2 + K_h h^2 \right) + S_\alpha \dot{h} \dot{\alpha}.$$

Then the nondimensional energy is

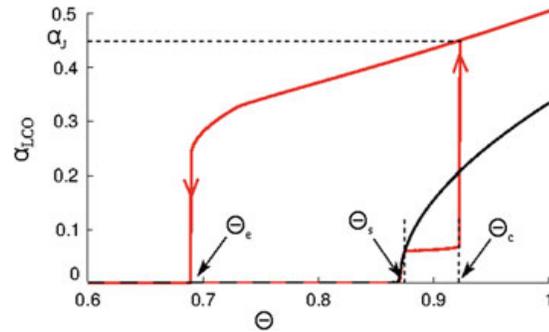
$$e_{tot} = \frac{1}{2} \left(\dot{y}^2 + r_\alpha^2 \dot{\alpha}^2 + k_\alpha \alpha^2 + \Omega^2 y^2 \right) + x_\alpha \dot{y} \dot{\alpha}. \quad (6)$$

Its evolution is plotted in Fig. 5 for system with and without SMA. For each cycle the energy increase of the system without SMA corresponds exactly to the energy dissipated by the SMA in its internal loop (for example right after the system with SMA enters in its first internal loop this loop dissipates $1.198 \cdot 10^{-4}$ and during this time the system without SMA grew $1.189 \cdot 10^{-4}$). Hence in this regime, the energy saturates to a finite value. This clearly shows that the LCO appearing when $\Theta_f < \Theta < \Theta_c$ is entirely due to the SMA hysteresis loop. We now explore the influence of the SMA parameters on the LCO.

3.2 Influence of SMA Parameters

The global effect of the SMA parameters on the behaviour of the flutter instability is studied through the bifurcation diagram for varying flow velocities Θ . Fig. 6 shows such a bifurcation diagram for a given SMA spring (the amplitude of pitch motion

Fig. 6 Bifurcation diagram of the 2 dof aeroelastic system with cubic stiffness ($\xi_y = \xi_\alpha = 1$). *Black* Without SMA spring. *Red* With SMA spring (selected values: $h_l = 0.05$, $K_1 = 10 K_2$ and $A_{SMA} = 2.35 \times 10^{-3}$)



LCO is represented versus Θ). The diagram is obtained numerically by direct integration in time of (5). The flow velocity is increased step by step, one time forward and one time backward, in order to get all the solution branches. When changing Θ to $\Theta + \delta\Theta$, the initial condition for $\Theta + \delta\Theta$ is selected as the steady state of the previous simulation launched for Θ . The black line in Fig. 6 shows the bifurcation diagram when only a cubic nonlinear restoring force is considered, no SMA is added to the system. In this case the classical supercritical bifurcation is retrieved. The diagram with a given SMA is represented with the red line.

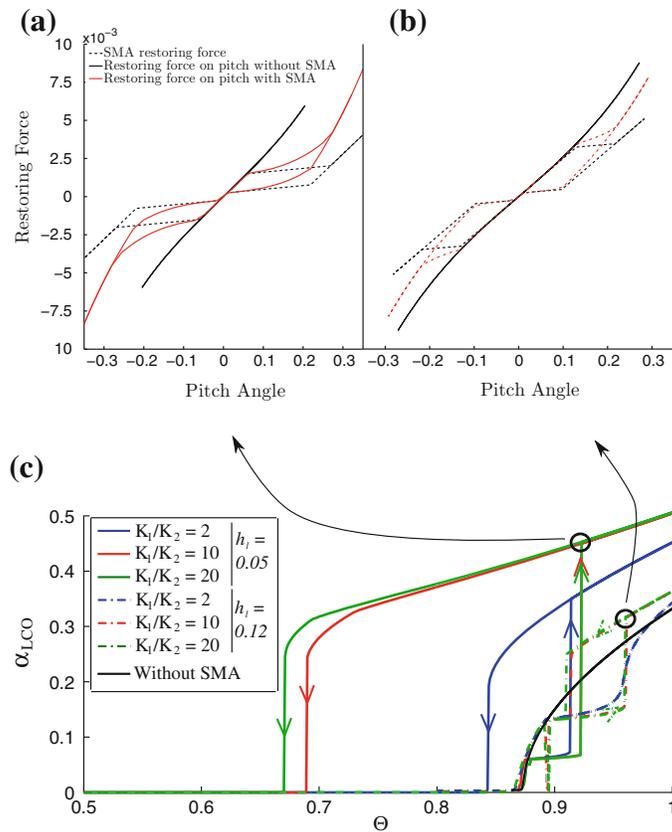
The first striking feature one can observe is that due to the softening effect brought by the SMA, the bifurcation is now subcritical. The gain in using enhanced damping properties thanks to the hysteresis loop is illustrated through the appearance of the points denoted Θ_s (flow velocity for which the oscillations enters the loop and thus the enhanced damping capacity is present) and Θ_c (the point for which the martensitic transformation is finished so that the damping capacity has been fully exploited). Above Θ_c , a jump is observed to a branch parameterized by α_J (amplitude at Θ_c) where the LCO amplitudes are larger than without SMA. Hence the advantage of the enhanced damping capacity is here completely lost due to the appearance of this subcritical branch where large-amplitude motions are observed. Finally, the point where this subcritical branch disappears when decreasing the flow velocity, denoted Θ_e , defines a dangerous range of flow velocities where the system could jump to the higher branch.

The SMA parameters can be optimized in order to fulfill the following targets:

- decrease the amplitude α_J of the secondary branch as much as possible. In the best case, avoid subcriticality,
- decrease Θ_s so as to bring this point as close as possible to the flutter velocity,
- increase Θ_c as much as possible so as to take full advantage of the enhanced damping capacity of the SMA,
- increase Θ_e so as to avoid the large range of subcriticality where the two solution branches coexist.

Numerous simulations have been done to obtain the best parameters h_l and K_1/K_2 , in order to fulfill at best these objectives. Figure 7c sums up some of the results obtained for illustration. One can conclude that in order to decrease the value α_J describing the upper branch, one has to select a large value for h_l , and in this case

Fig. 7 **a** LCO amplitude versus flow speed for different SMA parameters ($\xi_h = \xi_\alpha = 1$ and A_{SMA} constant). **b** Corresponding restoring force for $\Theta = \Theta_c$, on the *left* $h_l = 0.05$ and $K_1/K_2 = 10$ and on the *right* $h_l = 0.12$ and $K_1/K_2 = 10$



it appears then more appropriate to take smaller values for the ratio K_1/K_2 . One can also observe the advantageous effect of using a small value for K_1/K_2 when h_l has been selected small, as it increases substantially the value of Θ_e . Table 2 summarizes the effect of the coefficients with respect to the targeted objectives relative to the different remarkable points Θ_s , Θ_e , Θ_c and α_J . A simple plus/minus sign code is used for a quick understanding of the effect of each coefficients: a plus sign indicates an advantageous effect whereas a minus sign indicates a detrimental effect with respect to the target. From this table and Fig. 7c it appears clear that the best choice is a large h_l together with a small ratio K_1/K_2 .

Figure 7a, b show the restoring force at two particular points in order to get physical insight in the results obtained. In Fig. 7a, a disadvantageous case is selected and one can observe that the softening effect is the dominating feature of the nonlinear restoring force of the SMA, explaining the enforced subcriticality observed on the bifurcation diagram. This adverse case helps also in understanding that increasing blindly the hysteresis loop area A_{SMA} is not a solution as it may have no effect on the subcriticality. When K_2 is too small, the sudden jump in amplitude observed for a small variation of force is detrimental as the system jumps to large amplitude motions and the energy of this vibratory state is too important. Figure 7b illustrates an advantageous case where the softening effect is not too important and thus leads to an improved global behaviour in the bifurcation diagram.

Table 2 Influence of the SMA constants on the identified points in the bifurcation diagram

SMA parameters	K_1/K_2		h_l	
	Small	Large	Small	Large
Θ_s	=	=	+++	----
Θ_e	+++	----	----	+++
Θ_c	-	+	----	+++
α_J	++	--	----	+++

A plus sign shows an advantageous effect, whereas a minus sign indicates a detrimental effect on the targeted behaviour, while an equal sign shows no effect. The number of the sign is proportional to the magnitude of the effect

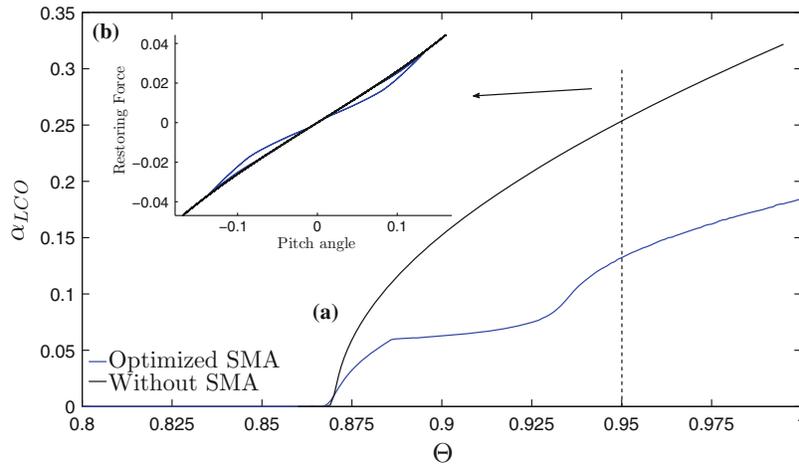


Fig. 8 **a** Bifurcation diagram with $h_l = 0.05$, $K_1/K_2 = 1.5$ and $\xi_\alpha = 3.4$. **b** Restoring force at $\Theta = 0.95$

This analysis shows undoubtedly that the best choice would be to have both the case of the hysteresis loop together with a stronger hardening effect at very large amplitude. To fulfill these requests, the full martensite branch should have a hardening behaviour stronger than the one of the reference case (without SMA). Such a configuration is obtained for example with $h_l = 0.05$, $K_1/K_2 = 1.5$ and $\xi_\alpha = 3.4$. Figure 8 shows the bifurcation diagram obtained in this case. One can observe that supercriticality is enforced. Secondly a large range of small amplitudes of LCOs are observed between 0.875 and 0.93, where the enhanced damping capacity of the SMA plays its role. Finally the improved hardening effect at large amplitude gives rise to a branch where amplitudes of LCOs are smaller, even when the transformation has been completed.

4 Conclusion

Whether one wants to harvest energy or avoid devastating instabilities, the control of aeroelastic flutter is a critical issue. An option is discussed here by using SMA springs in pseudo-elastic behaviour, in order to use the potential of dissipation of such materials. A numerical study with a simple heuristic model for the behaviour of the SMA has shown that the amplitude of the LCO after the flutter velocity can be significantly reduced by adding a SMA spring on the pitch mode of the two-dofs aeroelastic system. More precisely, the study of the bifurcation diagram clearly exhibits an advantageous effect of using the enhanced damping capacity of the SMA with the appearance of a branch of small amplitudes LCOs. However a detrimental effect appears because of the softening effect created by the solid-solid phase change. The optimized case is obtained by hardening the stiffness of the martensite phase. In this case it has been shown that subcriticality together with small amplitudes LCOs can be obtained.

The next steps of this research is to confront these preliminary findings with experiments. Complicating effects such as the dependence of the hysteresis loop on frequency, asymmetry of the SMA restoring force, aeroelastic nonlinearities due to stall phenomenon, will be studied and included in the model in order to obtain a global picture of the passive control of the flutter instability with SMA springs.

Acknowledgments This work is supported by Direction Générale de l'Armement (DGA) from French Ministry of Defense.

References

1. Bernardini, D., Rega, G.: The influence of model parameters and of the thermomechanical coupling on the behavior of shape memory devices. *Int. J. Non-Linear Mech.* **45**(10), 933–946 (2010)
2. Bernardini, D., Vestroni, F.: Non-isothermal oscillations of pseudoelastic devices. *Int. J. Non-Linear Mech.* **38**(9), 1297–1313 (2003)
3. Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., Halfman, R.L.: *Aeroelasticity*. Courier Dover Publications, New York (2013)
4. Doaré, O., Sbarra, A., Touzé, C., Moussa, M.O., Moumni, Z.: Experimental analysis of the quasistatic and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys. *Int. J. Solids Struct.* (2011)
5. Dowell, E.H. et al. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer Academic, Dordrecht (1994)
6. Ko, J., Strganac, T.W., Kurdila, A.J.: Adaptive feedback linearization for the control of a typical wing section with structural nonlinearity. *Nonlinear Dyn.* **18**(3), 289–301 (1999)
7. Lacarbonara, W., Bernardini, D., Vestroni, F.: Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices. *Int. J. Solids Struct.* **41**(5–6), 1209–1234 (2004)
8. Lee, Y.S., Kerschen, G., McFarland, D.M., Hill, W.J., Nickkawde, C., Strganac, T.W., Bergman, L.A., Vakakis, A.F.: Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2: experiments. *AIAA J.* **45**(10), 2391–2400 (2007)
9. Lee, Y.S., Vakakis, A., Bergman, L., McFarland, D.M., Kerschen, G.: Suppression aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1: Theory. *AIAA J.* **45**(3), 693–711 (2007)

10. Moussa, M.O.: Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux à mémoire de forme. PhD thesis, Ecole Polytechnique (2012)
11. Moussa, M.O., Moumni, Z., Doaré, O., Touzé, C., Zaki, W.: Non-linear dynamic thermomechanical behaviour of shape memory alloys. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* **23**(14), 1593–1611 (2012)
12. Platanitis, G., Strganac, T.W.: Control of a nonlinear wing section using leading-and trailing-edge surfaces. *J. Guidance Control Dyn.* **27**(1), 52–58 (2004)
13. Saadat, S., Salichs, J., Noori, M., Hou, Z., Davoodi, H., Bar-On, I., Suzuki, Y., Masuda, A.: An overview of vibration and seismic applications of niti shape memory alloys. *Smart Mater. Struct.* (2002)
14. Strelec, J.K., Lagoudas, D.C., Kahn, M.A., Yen, J.: Design and implementation of a shape memory alloy actuated reconfigurable airfoil. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* (2003)
15. Visintin, A.: *Differential Models of Hysteresis*, vol. 1. Springer, Berlin (1994)

Bibliographie

- [1] X. AMANDOLESE et E. SZECHENYI. “Experimental study of the effect of turbulence on a section model blade oscillating in stall”. *Wind Energy* 7.4 (2004), p. 267–282.
- [2] X. AMANDOLÈSE, S. MICHELIN et M CHOQUEL. “Low speed flutter and limit cycle oscillations of a two-degree-of-freedom flat plate in a wind tunnel”. *Journal of Fluids and Structures* 43, (2013), p. 244–255.
- [3] L. BAIRSTOW et A. FAGE. “Oscillations of the Tail Plane and Body of an Aeroplane in Flight”. *Aeronaut. Res. Counc. RM 276* (1916).
- [4] C. BAK, P. FUGLSANG, J. JOHANSEN et I. ANTONIOU. *Wind tunnel tests of the NACA 63-415 and a modified NACA 63-415 airfoil*. 2000.
- [5] T. S. BEDDOES. “A synthesis of unsteady aerodynamic effects including stall hysteresis.” *1st European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum*. Southampton (England), 1975.
- [6] S. BENACCHIO, A. MALHER, J. BOISSON et C. TOUZÉ. “Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses”. *Nonlinear Dynamics* 85.2 (2016), p. 893–911.
- [7] D. BERNARDINI et F. VESTRONI. “Non-isothermal oscillations of pseudoelastic devices”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38.9 (2003), p. 1297–1313.
- [8] R. L. BISPLINGHOFF et H. ASHLEY. *Principles of aeroelasticity*. John Wiley et Sons, Inc., New-York., 1962.
- [9] R. BOUC. “Modèle mathématique d’hystérésis”. *Acustica* 24.3 (1971), p. 16–25.
- [10] M. BRYANT et E. GARCIA. “Modeling and testing of a novel aeroelastic flutter energy harvester”. *Journal of vibration and acoustics* 133.1 (2011), p. 011010.
- [11] B. CARBONI et W. LACARBONARA. “Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device : experiments and computations”. *Nonlinear Dynamics* 83.1-2 (2015), p. 23–39.
- [12] N. CARPINETO, W. LACARBONARA et F. VESTRONI. “Hysteretic tuned mass dampers for structural vibration mitigation”. *Journal of Sound and Vibration* 333.5 (2014), p. 1302–1318.
- [13] L. W. CARR. “Progress in analysis and prediction of dynamic stall”. *Journal of aircraft* 25.1 (1988), p. 6–17.
- [14] M. D. CONNER, D. M. TANG, E. H. DOWELL et L. N. VIRGIN. “Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay : a numerical and experimental study”. *Journal of Fluids and structures* 11.1 (1997), p. 89–109.

- [15] P. R. DAHL. “Solid friction damping of mechanical vibrations”. *AIAA Journal* 14.12 (1976), p. 1675–1682.
- [16] R. DAT, C. T. TRAN et D. PETOT. “Modèle phénoménologique de décrochage dynamique sur une pale d’hélicoptère.” *16^e colloque d’aérodynamique appliquée (AAAF)*. 1979.
- [17] J. P. DEN HARTOG. *Mechanical vibrations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1934.
- [18] G. DIMITRIADIS et J. LI. “Bifurcation behavior of airfoil undergoing stall flutter oscillations in low-speed wind tunnel”. *AIAA journal* 47.11 (2009), p. 2577–2596.
- [19] O. DOARÉ, A. SBARRA, C. TOUZÉ, M. OULD MOUSSA et Z. MOUMNI. “Experimental analysis of the quasi-static and dynamic torsional behaviour of shape memory alloys”. *International Journal of Solids and Structures* 49.1 (2012), p. 32–42.
- [20] E. H. DOWELL. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [21] E. H. DOWELL, J. EDWARDS et T. STRGANAC. “Nonlinear aeroelasticity”. *Journal of aircraft* 40.5 (2003), p. 857–874.
- [22] P. DUHEM. “Die dauernden Änderungen und die Thermodynamik I”. *Z. Phys. Chemie* 22 (1897), p. 543–589.
- [23] P. DUNN et J. DUGUNDJI. “Nonlinear stall flutter and divergence analysis of cantilevered graphite/epoxy wings”. *AIAA journal* 30.1 (1992), p. 153–162.
- [24] J. W. EDWARDS. “Unsteady aerodynamic modeling for arbitrary motions”. *AIAA Journal* 17.4 (1979), p. 365–374.
- [25] L. E. ERICSSON et J. P. REDING. “Unsteady airfoil stall, review and extension”. *Journal of Aircraft* 8.8 (1971), p. 609–616.
- [26] A. FAGE et F. JOHANSEN. “On the flow of air behind an inclined flat plate of infinite span”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 116.773 (1927), p. 170–197.
- [27] H. FRAHM. *Device for damping vibrations of bodies*. Rapp. tech. US Patent 989,958. 1909.
- [28] Y. C. FUNG. *An introduction to the theory of aeroelasticity*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2002.
- [29] I. E. GARRICK. *On some reciprocal relations in the theory of nonstationary flows*. Rapp. tech. NASA, 1938.
- [30] O. V. GENDELMAN. “Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators”. *Nonlinear dynamics* 25.1-3 (2001), p. 237–253.

- [31] E. GOURC, G. MICHON, S. SEGUY et A. BERLIOZ. “Experimental investigation and design optimization of targeted energy transfer under periodic forcing”. *Journal of Vibration and Acoustics* 136.2 (2014), p. 021021.
- [32] D. GROSS et F. HARRIS. “Prediction of inflight stalled airloads from oscillating airfoil data”. *Proceedings of the 25th Annual National Forum of the American Helicopter Society*. 1969.
- [33] G. HABIB et G. KERSCHEN. “A principle of similarity for nonlinear vibration absorbers”. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 332.1 (2016), p. 1–8.
- [34] G. HABIB, T. DETROUX, R. VIGUIÉ et G. KERSCHEN. “Nonlinear generalization of Den Hartog’s equal-peak method”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 52 (2015), p. 17–28.
- [35] M. H. HANSEN, M. GAUNAA et H. A. MADSEN. *A Beddoes-Leishman type dynamic stall model in state-space and indicial formulations*. Rapp. tech. 2004.
- [36] F. D. HARRIS et R. R. PRUYN. “Blade Stall-Half Fact, Half Fiction”. *Journal of the American Helicopter Society* 13.2 (1968), p. 27–48.
- [37] Y. J. HE et Q. P. SUN. “On non-monotonic rate dependence of stress hysteresis of superelastic shape memory alloy bars”. *International Journal of Solids and Structures* 48.11 (2011), p. 1688–1695.
- [38] Y. HE, H. YIN, R. ZHOU et Q. SUN. “Ambient effect on damping peak of NiTi shape memory alloy”. *Materials Letters* 64.13 (2010), p. 1483–1486.
- [39] E. HOO, K. D. DO et J. PAN. “An investigation on the lift force of a wing pitching in dynamic stall for a comfort control vessel”. *Journal of fluids and structures* 21.8 (2005), p. 707–730.
- [40] J. M. JANI, M. LEARY, A. SUBIC et M. A. GIBSON. “A review of shape memory alloy research, applications and opportunities”. *Materials & Design* 56 (2014), p. 1078–1113.
- [41] R. T. JONES. *The unsteady lift of a wing of finite aspect ratio*. Rapp. tech. 681. NASA, 1940.
- [42] M. KARPEL. “Design for active flutter suppression and gust alleviation using state-space aeroelastic modeling”. *Journal of Aircraft* 19.3 (1982), p. 221–227.
- [43] J. KO, T. W. STRGANAC et A. J. KURDILA. “Adaptive feedback linearization for the control of a typical wing section with structural nonlinearity”. *Nonlinear Dynamics* 18.3 (1999), p. 289–301.
- [44] S.-D. KWON et K.-S. PARK. “Suppression of bridge flutter using tuned mass dampers based on robust performance design”. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 92.11 (2004), p. 919–934.

- [45] W. LACARBONARA, D. BERNARDINI et F. VESTRONI. “Nonlinear thermomechanical oscillations of shape-memory devices”. *International Journal of Solids and Structures* 41.5-6 (2004), p. 1209–1234.
- [46] W. LACARBONARA et M. CETRARO. “Flutter control of a lifting surface via visco-hysteretic vibration absorbers”. *International Journal Aeronautical and Space Sciences* 12.4 (2011), p. 331–345.
- [47] D. LAGOUDAS, D. HARTL, Y. CHEMISKY, L. MACHADO et P. POPOV. “Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys”. *International Journal of Plasticity* 32 (2012), p. 155–183.
- [48] D. C. LAGOUDAS, J. J. MAYES et M. M. KHAN. “Simplified shape memory alloy (SMA) material model for vibration isolation”. *SPIE’s 8th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*. International Society for Optics et Photonics. 2001, p. 452–461.
- [49] E. LAITONE. “Wind tunnel tests of wings at Reynolds numbers below 70 000”. *Experiments in Fluids* 23.5 (1997), p. 405–409.
- [50] C. H. LAMARQUE et A. T. SAVADKOOHI. “Dynamical behavior of a Bouc–Wen type oscillator coupled to a nonlinear energy sink”. *Meccanica* 49.8 (2014), p. 1917–1928.
- [51] F. W. LANCHESTER. “Torsional vibrations of the tail of an aeroplane”. *Selected reprint series, Aerodynamic flutter* 5 (1916), p. 12–5.
- [52] J. W. LARSEN, S. R. NIELSEN et S. KRENK. “Dynamic stall model for wind turbine airfoils”. *Journal of Fluids and Structures* 23.7 (2007), p. 959–982.
- [53] T. LEE et P. GERONTAKOS. “Investigation of flow over an oscillating airfoil”. *Journal of Fluid Mechanics* 512 (2004), p. 313–341.
- [54] Y. S. LEE, A. VAKAKIS, L. BERGMAN, D. M. MCFARLAND et G. KERSCHEN. “Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 1 : theory”. *AIAA journal* 45.3 (2007), p. 693–711.
- [55] Y. S. LEE, G. KERSCHEN, D. M. MCFARLAND, W. J. HILL, C. NICHKAWDE, T. W. STRGANAC, L. A. BERGMAN et A. F. VAKAKIS. “Suppressing aeroelastic instability using broadband passive targeted energy transfers, part 2 : experiments”. *AIAA journal* 45.10 (2007), p. 2391–2400.
- [56] J. G. LEISHMAN et T. S. BEDDOES. “A Semi-Empirical Model for Dynamic Stall”. *Journal of the American Helicopter Society* 34.3 (1989), p. 3–17.
- [57] J. G. LEISHMAN. *Principles of Helicopter Aerodynamics*. Cambridge university press, 2006.

- [58] A. MALHER, O. DOARÉ et C. TOUZÉ. “Pseudoelastic shape memory alloys to mitigate the flutter instability : a numerical study”. *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*. Springer, 2015, p. 353–365.
- [59] A. MASUDA et M. NOORI. “Optimization of hysteretic characteristics of damping devices based on pseudoelastic shape memory alloys”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37.8 (2002), p. 1375–1386.
- [60] K. W. MCALISTER, O. LAMBERT et D. PETOT. *Application of the ONERA model of dynamic stall*. Rapp. tech. DTIC Document, 1984.
- [61] W. J. MCCROSKEY. *The phenomenon of dynamic stall*. Rapp. tech. DTIC Document, 1981.
- [62] W. J. MCCROSKEY, L. W. CARR et K. W. MCALISTER. “Dynamic stall experiments on oscillating airfoils”. *Aiaa Journal* 14.1 (1976), p. 57–63.
- [63] R. K. MILLER. “The steady state response of systems with hardening hysteresis”. *Journal of Mechanical Design* 100.1 (1978), p. 193–198.
- [64] M. NAKASHIMA, K. SABURI et B. TSUJI. “Energy input and dissipation behaviour of structures with hysteretic dampers”. *Earthquake engineering & structural dynamics* 25.5 (1996), p. 483–496.
- [65] *Nimesis Technology*. <http://www.nimesis.com/>.
- [66] A. ÖLANDER. “An electrochemical investigation of solid cadmium-gold alloys”. *Journal of the American Chemical Society* 54.10 (1932), p. 3819–3833.
- [67] M. OULD MOUSSA. “Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux à mémoire de forme.” Thèse de doct. Ecole Polytechnique, 2012.
- [68] M. OULD MOUSSA, Z. MOUMNI, O. DOARÉ, C. TOUZÉ et W. ZAKI. “Non-linear dynamic thermomechanical behaviour of shape memory alloys”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 23.14 (2012), p. 1593–1611.
- [69] S. ØYE. “Dynamic stall simulated as time lag of separation”. *Proceedings of the 4th IEA Symposium on the aerodynamics of wind turbines*. 1991.
- [70] A. PELLETIER et T. J. MUELLER. “Low Reynolds number aerodynamics of low-aspect-ratio, thin/flat/cambered-plate wings”. *Journal of Aircraft* 37.5 (2000), p. 825–832.
- [71] D. PETOT. “Modélisation du décrochage dynamique par équations différentielles”. *La Recherche Aéronautique* 5, (1989), p. 59–72.
- [72] M. C. PIEDBOEUF, R. GAUVIN et M. THOMAS. “Damping behaviour of shape memory alloys : strain amplitude, frequency and temperature effects”. *Journal of Sound and Vibration* 214.5 (1998), p. 885–901.

- [73] L. PIGOLOTTI, C. MANNINI, G. BARTOLI et K. THIELE. “Wind tunnel tests on elongated rectangular plates under flutter motion : limit-cycle oscillations and preliminary energy harvesting considerations”. *International conference on wind engineering*. 2015.
- [74] P. POPOV et D. C. LAGOUDAS. “A 3-D constitutive model for shape memory alloys incorporating pseudoelasticity and detwinning of self-accommodated martensite”. *International Journal of Plasticity* 23.10 (2007), p. 1679–1720.
- [75] S. POURZEYNALI et T. DATTA. “Control of flutter of suspension bridge deck using TMD”. *Wind and Structures* 5.5 (2002), p. 407–422.
- [76] N. A. RAZAK, T. ANDRIANNE et G. DIMITRIADIS. “Flutter and stall flutter of a rectangular wing in a wind tunnel”. *AIAA journal* 49.10 (2011), p. 2258–2271.
- [77] R. E. ROBERSON. “Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber”. *Journal of the Franklin Institute* 254.3 (1952), p. 205–220.
- [78] S. SAADAT, J. SALICHS, M. NOORI, Z. HOU, H. DAVOODI, I. BAR-ON, Y. SUZUKI et A. MASUDA. “An overview of vibration and seismic applications of NiTi shape memory alloys”. *Smart Materials and Structures* (2002).
- [79] D. SAUTER et P. HAGEDORN. “On the hysteresis of wire cables in Stockbridge dampers”. *International journal of non-linear Mechanics* 37.8 (2002), p. 1453–1459.
- [80] M. A. SAVI, P. M. C. L. PACHECO et A. M. B. BRAGA. “Chaos in a shape memory two-bar truss”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37.8 (2002), p. 1387–1395.
- [81] R. H. SCANLAN. “Problematics in formulation of wind-force models for bridge decks”. *Journal of engineering mechanics* 119.7 (1993), p. 1353–1375.
- [82] W. R. SEARS. “Operational methods in the theory of airfoils in non-uniform motion”. *Journal of the Franklin Institute* 230.1 (1940), p. 95–111.
- [83] R. I. SKINNER, J. M. KELLY et A. J. HEINE. “Hysteretic dampers for earthquake-resistant structures”. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 3.3 (1974), p. 287–296.
- [84] J. SONG et A. DER KIUREGHIAN. “Generalized Bouc-Wen model for highly asymmetric hysteresis”. *Journal of engineering mechanics* 132.6 (2006), p. 610–618.
- [85] H. SOUL, A. ISALGUE, A. YAWNY, V. TORRA et F. C. LOVEY. “Pseudoelastic fatigue of NiTi wires : frequency and size effects on damping capacity”. *Smart Materials and Structures* 19.8 (2010), p. 085006.
- [86] V. C. de SOUSA et C. D. M. JUNIOR. “Effect of pseudoelastic hysteresis of shape memory alloy springs on the aeroelastic behavior of a typical airfoil section”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* (2014), p. 1045389X14563862.

- [87] T. W. STRGANAC, J. KO et D. E. THOMPSON. “Identification and control of limit cycle oscillations in aeroelastic systems”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23.6 (2000), p. 1127–1133.
- [88] S. SUNADA, A. SAKAGUCHI et K. KAWACHI. “Airfoil section characteristics at a low Reynolds number”. *Journal of Fluids Engineering* 119.1 (1997), p. 129–135.
- [89] D. TANG et E. H. DOWELL. “Experimental and theoretical study on aeroelastic response of high-aspect-ratio wings”. *AIAA journal* 39.8 (2001), p. 1430–1441.
- [90] F. J. TARZANIN. “Prediction of control loads”. *Journal of the American Helicopter Society* 17 (1972), p. 33–46.
- [91] T. THEODORSEN. “General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter” (1935).
- [92] A. F. VAKAKIS et O. GENDELMAN. “Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part II - resonance capture”. *Journal of Applied Mechanics* 68.1 (2001), p. 42–48.
- [93] A. F. VAKAKIS, O. V. GENDELMAN, L. A. BERGMAN, D. M. MCFARLAND, G. KERSCHEN et Y. S. LEE. *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*. T. 156. Springer, Ontario, 2008.
- [94] B. VAURIGAUD, L. I. MANEVITCH et C.-H. LAMARQUE. “Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to coupled flutter using targeted energy transfer”. *Journal of Sound and Vibration* 330.11 (2011), p. 2580–2595.
- [95] R. VIGUIÉ et G. KERSCHEN. “Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system : a tuning methodology”. *Journal of Sound and Vibration* 326.3 (2009), p. 780–793.
- [96] J. S. VIPPERMAN, R. L. CLARK, M. CONNER et E. H. DOWELL. “Experimental active control of a typical section using a trailing-edge flap”. *Journal of Aircraft* 35.2 (1998), p. 224–229.
- [97] H. WAGNER. “Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln”. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 5.1 (1925), p. 17–35.
- [98] Y. K. WEN. “Method for random vibration of hysteretic systems”. *Journal of the engineering mechanics division* 102.2 (1976), p. 249–263.
- [99] H. YIN, Y. HE et Q. SUN. “Effect of deformation frequency on temperature and stress oscillations in cyclic phase transition of NiTi shape memory alloy”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 67, (2014), p. 100–128.
- [100] Y. ZHANG et S. ZHU. “A shape memory alloy-based reusable hysteretic damper for seismic hazard mitigation”. *Smart Materials and Structures* 16.5 (2007), p. 1603.

Titre : Amortisseurs passifs non linéaires pour le contrôle de l'instabilité de flottement

Mots clefs : Instabilité de flottement, Décrochage dynamique, Amortisseur hystérétique, Alliages à mémoire de forme, Absorbeur de vibrations non linéaires, Absorbeur magnétique

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude d'amortisseurs passifs non linéaires innovants pour le contrôle de l'instabilité de flottement sur un profil d'aile à deux degrés de libertés. Lorsqu'un profil d'aile entre en flottement, il oscille de façon croissante jusqu'à se stabiliser sur un cycle limite dont l'amplitude peut être significative et détériorer sa structure. Le contrôle a ainsi deux objectifs principaux : retarder l'apparition de l'instabilité et réduire l'amplitude des cycles limites. Avant d'étudier l'influence des amortisseurs passifs, l'instabilité de flottement, et notamment le régime post-flottement, a été étudié. Une expérience de flottement sur une plaque plane a été menée et sa modélisation, prenant en compte le phénomène de décrochage dynamique, a été réalisée. Concernant le contrôle passif, le premier type d'amortisseur étudié est un amortisseur hystérétique réalisé à l'aide de ressorts en alliage à mémoire de forme. La caractéristique principale de tels amortisseurs est que leur

force de rappel étant hystérétique, elle permet de dissiper une grande quantité d'énergie. L'objectif principal est ainsi de réduire l'amplitude des cycles limites provoqués par l'instabilité de flottement. Cet effet escompté a été observé et quantifié expérimentalement et numériquement à l'aide de modèles semi-empiriques. Le second type d'amortisseur utilisé est un amortisseur non linéaire de vibration accordé. Il est composé d'une petite masse connectée au profil d'aile à l'aide d'un ressort possédant une raideur linéaire et une raideur cubique. La partie linéaire de ce type d'amortisseur permet de retarder l'apparition de l'instabilité tandis que la partie non linéaire permet de réduire l'amplitude des cycles limites. L'influence de l'amortisseur non linéaire de vibration accordé a été étudiée analytiquement et numériquement. Il a été trouvé que l'apparition de l'instabilité est significativement retardée à l'aide de cet amortisseur, l'effet sur l'amplitude des cycles limites étant plus modeste.

Title : Influence of nonlinear passive absorbers on the flutter instability

Keywords : Flutter instability, Dynamic stall, Hysteretic damper, Shape memory alloys, Nonlinear tuned vibration absorber, Magnetic absorber

Abstract : The aim of this thesis is to study the effect of passive nonlinear absorbers on the two degrees of freedom airfoil flutter. When an airfoil is subject to flutter instability, it oscillates increasingly until stabilizing on a limit cycle, the amplitude of which can be possibly substantial and thus damage the airfoil structure. The control has two main objectives : delay the instability and decrease the limit cycle amplitude. The flutter instability, and the post-flutter regime in particular, were studied first. A flutter experiment on a flat plate airfoil was conducted and the airfoil behavior was modeled, taking into account dynamic stall. Regarding the passive control, the first absorber studied was a hysteretic damper, realized using shape memory alloy springs. The characteristic of such dampers is their hysteretic restoring force, allo-

wing them to dissipate a large amount of energy. Their main goal was thus to decrease the limit cycle amplitude caused by the flutter instability. This expected effect was observed and quantified both experimentally and numerically, using heuristic model. The second absorber studied was a nonlinear tuned vibration absorber. This absorber consists of a light mass attached to the airfoil through a spring having both a linear and a cubic stiffness. The role of the linear part of such absorber was to repel the instability threshold, while the aim of the nonlinear part was to decrease the limit cycle amplitude. It was found, analytically and numerically, that the instability threshold is substantially shifted by this absorber, whereas the limit cycle amplitude decrease is relatively modest.

