



**HAL**  
open science

# Algorithmes et Bornes minimales pour la Synchronisation Temporelle à Haute Performance : Application à l'internet des objets corporels

Imen Nasr

► **To cite this version:**

Imen Nasr. Algorithmes et Bornes minimales pour la Synchronisation Temporelle à Haute Performance : Application à l'internet des objets corporels. Informatique mobile. Université Paris Saclay (COMUE); École supérieure des communications de Tunis (Tunisie), 2017. Français. NNT : 2017SACLY007 . tel-01573861

**HAL Id: tel-01573861**

**<https://pastel.hal.science/tel-01573861v1>**

Submitted on 10 Aug 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLAY007



THESE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY  
PREPAREE A  
"L'ECOLE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES"

ECOLE DOCTORALE N° 573

Interfaces : approches interdisciplinaires, fondements, applications et innovation  
Spécialité de doctorat : Informatique

Par

**Mme. Imen Nasr**

Algorithmes et Bornes minimales pour la Synchronisation  
Temporelle à Haute Performance - Application à l'internet des objets corporels

**Thèse présentée et soutenue à Tunis, le 23 janvier 2017 :**

**Composition du Jury :**

M. Mohamed Siala	Professeur - SUP'COM	Président
M. Emanuel Radoi	Professeur des Universités – Université de Bretagne Occidentale	Rapporteur
Mme. Monia Turki	Professeure – ENIT	Rapporteur
M. Pascal Larzabal	Professeur des Universités – ENS Cachan	Examineur
M. Benoît Geller	Professeur – ENSTA ParisTech	Directeur de thèse
M. Sofiane Cherif	Professeur– SUP'COM	Co-directeur de thèse
Mme. Leïla Najjar Atallah	Maître de conférences – SUP'COM	Co-encadrante

# THÈSE DE DOCTORAT EN CO-TUTELLE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DE LA  
COMMUNICATION

DE L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DES COMMUNICATIONS DE TUNIS

&

DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES TECHNIQUES AVANCÉES

Sujet de la thèse :

**Algorithmes et Bornes minimales pour la Synchronisation temporelle à haute performance - Application à l'internet des objets corporels**

*Auteur :*  
Imen NASR

*Directeurs de Thèse :*  
Pr. Sofiane CHERIF  
Pr. Benoît GELLER  
*Co-Directeur de Thèse :*  
Dr. Leila NAJJAR ATALLAH

15 janvier 2017



A mes chers parents Souad et Mokhtar

A ma soeur Arwa et mon frère Nidhal

A mon époux Noureddine

A toute ma famille et mes amis



# Remerciements

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont l'intérêt manifesté à l'égard de ma recherche m'a permis de progresser dans cette phase d'apprentissage de la recherche.

En premier lieu, je tiens à remercier mes directeurs de thèse, monsieur Sofiane CHERIF et monsieur Benoît GELLER, et ma co-encadrante madame Leïla NAJJAR ATALLAH, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour leurs multiples conseils et pour toutes les heures qu'ils ont consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également leur dire à quel point j'ai apprécié leur grande disponibilité et leur respect des délais serrés de relecture des documents que je leurs ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de cette thèse.

Je suis infiniment reconnaissante à madame Monia TURKI et monsieur Emanuel RADOI pour avoir accepté la fonction de rapporteur et de s'être rendus disponibles.

Mes remerciements vont également à monsieur Mohamed SIALA et monsieur Pascal LARZABAL pour avoir accepté de participer au jury de thèse.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à l'ensemble des membres du laboratoire COSIM et le personnel de SUP'COM pour leur soutien logistique et moral ainsi que pour la très bonne ambiance que j'y ai toujours trouvée.

Je remercie également le personnel et les membres de l'unité de recherche U2IS de l'ENSTA ParisTech pour m'avoir accueillie et de m'avoir permis de travailler dans d'aussi bonnes conditions. Je remercie plus particulièrement Jianxio YANG pour nos nombreuses discussions, pour son aide et pour la confiance qu'il a manifestée à l'égard de mon travail.

J'adresse toute ma gratitude à tous mes amis et à toutes les personnes qui m'ont aidée dans la réalisation de ce travail.

Ma reconnaissance va à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif de ce travail doctoral : ma petite famille, et en particulier à mes parents. Malgré mon éloignement, leur intelligence, leur confiance, leur tendresse, leur amour me portent et me guident tous les jours. Leur présence et leurs encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais.

Je remercie mon cher époux pour son soutien quotidien indéfectible et son enthousiasme contagieux à l'égard de mes travaux comme de la vie en général.

Merci à mon oncle Béchir pour sa confiance, ses encouragements et ses nombreux conseils.

Une pensée pour terminer ces remerciements pour ma grand-mère Baya et pour mes oncles Mongi et Mohamed, qui n'ont pas vu l'aboutissement de mon travail mais je sais qu'ils en auraient été très fiers.

# Résumé

Pour faire face au vieillissement de la population, et aux coûts de santé publique, qui demandent des dépenses de plus en plus importantes, le monde médical s'accorde à dire que les personnes utiliseront l'auto-médicalisation via des réseaux de capteurs sans fil disséminés sur le corps. Ce type de réseau sera employé pour un meilleur suivi médical tout en réduisant les coûts d'hospitalisation et de transport des malades. Ces capteurs, dits *Wireless Body Area Network* (WBAN), déployés au voisinage du corps, sur la surface ou à l'intérieur du corps, constituent alors un élément clé de l'internet des objets ou *Internet of Things* (IoT). Malgré les difficultés engendrées par le canal de communication corporel, les communications doivent être fiables car elles engagent souvent des paramètres vitaux.

La synchronisation temporelle est la première opération effectuée par le démodulateur. Elle permet d'assurer que les échantillons transmis aux processus de démodulation puissent réaliser un taux d'erreurs binaires le plus faible. Dans cette thèse, nous proposons l'étude d'algorithmes innovants de synchronisation temporelle à haute performance.

D'abord, nous avons proposé des algorithmes exploitant l'information souple du décodeur en plus du signal reçu afin d'améliorer l'estimation aveugle d'un retard temporel supposé constant sur la durée d'observation.

Ensuite, nous avons proposé un algorithme original basé sur la synchronisation par lissage à faible complexité. Cette étape a consisté à proposer une technique opérant dans un contexte hors ligne, permettant l'estimation d'un retard aléatoire variable dans le temps. Elle consiste à estimer le délai temporel d'un échantillon à l'autre via des boucles d'aller-retour sur plusieurs itérations. Les performances théoriques en termes de biais et d'EQM à chaque itération ont également été évaluées. Nous avons montré que les performances d'un tel estimateur dépassent celles des algorithmes traditionnels.

Des algorithmes de synchronisation ont également été proposés dans un contexte où le canal de propagation présente des imperfections.

Afin d'évaluer la pertinence de tous les estimateurs proposés, pour des retards déterministe et aléatoire, nous avons comparé leurs performances à des bornes de Cramèr-Rao que nous avons développées pour ce cadre. Enfin, nous avons évalué les algorithmes proposés sur des signaux WBAN.

**Mots Clés :** Synchronisation temporelle, borne de Cramèr-Rao, Réseaux WBAN, Maximum de Vraisemblance, Maximum a Posteriori



# Abstract

To cope with the population aging and public health costs, which require increasingly significant expenses, the medical community agrees that people use self-medicalization through wireless sensor networks scattered on the body. This type of network will be used for better medical care while reducing the hospital and medical transportation costs. These sensors, called Wireless Body Area Network (WBAN), deployed in the vicinity of the body, on the surface or inside the body, are a key element of the Internet of Things (IoT). Despite the difficulties caused by the physical communication channel, communication must be reliable because they often undertake vital parameters.

Time synchronization is the first function performed by the demodulator. It ensures that the samples sent to the following demodulation processes allow to achieve the lowest error rate. In this thesis we propose the study of innovative algorithms for high performance time synchronization.

First, we propose algorithms exploiting the soft information from the decoder in addition to the received signal to improve the blind estimation of the time delay.

Next, we develop an original algorithm based on low complexity smoothing synchronization techniques. This step consisted in proposing a technique operating in an off-line context, making it possible to estimate a random delay that varies over time. It consists in estimating the time delay from one sample to another on several iterations via Forward-Backward loops. The theoretical performances in terms of bias and MSE at each iteration were also evaluated. We have shown that the performance of such estimators exceeds that of traditional algorithms.

Synchronization algorithms have also been proposed for the case when the propagation channel has some imperfections.

In order to evaluate the relevance of all the proposed estimators, for deterministic and random delays, we compared their performance to Cramèr-Rao bounds that we developed within these frameworks. We, finally, evaluated the proposed algorithms on WBAN signals.

**Key Words :** Time Synchronization, Cramèr-Rao bound, WBAN, Maximum Likelihood, Maximum a Posteriori



# Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Liste des Figures	xiii
List of Figures	xiii
Liste des Tableaux	xvii
List of Tables	xvii
Liste des Acronymes	xix
Liste des Symboles	xxi
Introduction Générale	1
<b>1 Synchronisation temporelle en bande de base</b>	<b>11</b>
1.1 Formulation du problème de synchronisation temporelle . . . . .	11
1.1.1 Modélisation mathématique . . . . .	12
1.1.2 Dégradation due aux erreurs de synchronisation temporelle . . . . .	13
1.2 Estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance . . . . .	14
1.3 Détecteurs supervisés basés sur l'estimateur MV . . . . .	18
1.3.1 Détecteur au sens du Maximum de Vraisemblance . . . . .	18

1.3.2	Détecteur <i>Early Late</i> (ELD)	19
1.3.3	Détecteur <i>Zero Crossing</i> (ZCD)	19
1.3.4	Détecteur <i>Müller &amp; Mueller</i> (MMD)	21
1.4	Approches non assistées par les données basées sur l'estimateur MV	21
1.4.1	Détecteur <i>Early Late</i> non supervisé (ELD NDA)	23
1.4.2	Détecteur de Gardner	23
1.5	Interpolation et ajustement	24
1.5.1	Interpolation idéale	25
1.5.2	Interpolation polynomiale	25
1.5.3	Interpolateur de Lagrange	26
1.6	Etude des performances de poursuite	28
1.6.1	Biais et erreur quadratique moyenne théoriques	29
1.6.2	Linéarisation de l'erreur d'adaptation	30
1.7	Les performances limites de l'estimateur	35
1.7.1	Borne de Cramèr-Rao standard	36
1.7.2	Borne de Cramèr-Rao bayésienne	37
1.8	Conclusion	38
<b>2</b>	<b>Synchronisation temporelle souple pour un retard constant</b>	<b>39</b>
2.1	Mise en place d'un estimateur souple au sens du Maximum de Vraisemblance	39
2.1.1	Cas d'une Modulation BPSK	41
2.1.2	Cas d'une Modulation QPSK	42
2.1.3	Cas d'une modulation $M$ -PSK	44
2.1.4	Cas d'une modulation QAM	51
2.2	Calcul de la borne de Cramèr-Rao de l'estimateur souple proposé	55
2.2.1	Cas d'un signal modulé en BPSK	56
2.2.2	Cas d'un signal modulé en QPSK	57
2.2.3	Cas d'un signal modulé en $M$ -PSK	60
2.2.4	Cas d'un signal modulé en QAM	61
2.3	Discussion des résultats obtenus	63

2.4	Conclusion . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard variable</b>	<b>71</b>
3.1	Mise en place d'un estimateur hors ligne au sens du Maximum <i>a Posteriori</i> . . . . .	71
3.1.1	Estimateur au sens du Maximum A Posteriori . . . . .	72
3.1.2	Algorithme d'estimation hors ligne . . . . .	76
3.2	Evaluation des performances théoriques de l'estimateur . . . . .	79
3.2.1	Performances après une seule itération . . . . .	80
3.2.2	Performances après des itérations multiples . . . . .	83
3.3	Calcul de la borne de Cramèr-Rao Bayésienne . . . . .	88
3.3.1	Borne de Cramèr-Rao Bayésienne hors ligne . . . . .	89
3.3.2	Borne de Cramèr-Rao Bayésienne en ligne . . . . .	90
3.3.3	Calcul de $J_D$ pour un signal BPSK . . . . .	91
3.3.3.1	Mode assisté par les données . . . . .	92
3.3.3.2	Mode non assisté par les données . . . . .	92
3.3.3.3	Mode assisté par le code . . . . .	94
3.3.4	Calcul de $J_D$ pour une modulation QAM . . . . .	96
3.3.4.1	Mode assisté par les données . . . . .	96
3.3.4.2	Mode non assisté par les données . . . . .	96
3.3.4.3	Mode assisté par le code . . . . .	99
3.4	Discussion des résultats obtenus . . . . .	101
3.5	Conclusion . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Synchronisation temporelle dans le cas d'un canal à évanouissement</b>	<b>107</b>
4.1	Synchronisation temporelle dans le cas d'un canal à évanouissement lent pour un retard constant . . . . .	108
4.1.1	Développement d'un estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance dans le cas d'un canal estimé par le récepteur . . . . .	108
4.1.1.1	Evaluation de la fonction de vraisemblance . . . . .	108
4.1.1.2	Détecteur cohérent du retard temporel au sens du maximum de vraisemblance . . . . .	110

4.1.2	Borne de Cramèr-Rao Hybride pour l'estimation conjointe canal/retard . . . . .	110
4.1.2.1	Développement analytique de la borne de Cramèr-Rao Hybride . . . . .	111
4.1.2.2	Evaluation de l'estimateur proposé et de la borne hybride . . . . .	115
4.1.3	Algorithme de synchronisation à canal inconnu . . . . .	118
4.1.4	Borne de Cramèr-Rao pour une synchronisation à canal inconnu . . . . .	119
4.2	Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard variable . . . . .	120
4.2.1	Etude du cas d'un canal estimé par le récepteur . . . . .	120
4.2.1.1	Estimateur du retard au sens du Maximum A Posteriori . . . . .	120
4.2.1.2	Algorithme d'estimation hors ligne . . . . .	124
4.2.2	Etude du cas d'une synchronisation à canal inconnu . . . . .	124
4.2.3	Borne de Cramèr-Rao Bayésienne sur l'estimation du canal et du retard . . . . .	125
4.2.3.1	Borne de Cramèr-Rao bayésienne hors ligne . . . . .	126
4.2.3.2	Borne de Cramèr-Rao Bayésienne en ligne . . . . .	129
4.3	Conclusion . . . . .	132
<b>5</b>	<b>Synchronisation temporelle dans un réseau WBAN</b>	<b>133</b>
5.1	Modélisation du système de transmission dans le standard des WBAN . . . . .	133
5.1.1	Modélisation des canaux dans les réseaux WBAN . . . . .	134
5.1.2	Spécifications du standard pour la sous-couche Ultra Wideband . . . . .	135
5.1.3	Spécifications du standard pour la sous-couche Human Body Communication . . . . .	137
5.1.4	Spécifications du standard pour la sous-couche Narrowband . . . . .	137
5.2	Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard constant . . . . .	142
5.2.1	Estimateur au sens du maximum de vraisemblance . . . . .	142
5.2.2	Modulation $\pi/2$ -DBPSK . . . . .	144
5.2.3	Modulation $\pi/4$ -DQPSK . . . . .	145
5.2.4	Evaluation de l'estimateur proposé . . . . .	146
5.3	Efficacité de l'algorithme dans le cas d'un canal à évanouissement . . . . .	151
5.4	Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard variable . . . . .	154
5.5	Conclusion . . . . .	158

---

<b>Conclusion Générale</b>	<b>161</b>
<b>A Annexe A</b>	<b>165</b>
A.1 Détecteur Early late . . . . .	165
A.2 Détecteur Zero Crossing . . . . .	166
A.3 Détecteur Mueller et Müller . . . . .	167
A.4 Détecteur de Gardner . . . . .	167
<b>B Annexe B</b>	<b>171</b>
B.1 Démonstration que $\frac{\partial x_{j,1}}{\partial \tau}$ et $x_{j,1}$ sont décorrélés . . . . .	171
B.2 Evaluation des différentes espérances dans (2.99) . . . . .	172
B.3 Développement analytique de l'équation (2.115) . . . . .	175
<b>C Annexe C</b>	<b>177</b>
C.1 Développement analytique de l'équation (3.65) : . . . . .	177
C.2 Développement analytique des termes dans (3.98) et (3.107) : . . . . .	179
<b>Bibliography</b>	<b>183</b>



# Table des figures

1.1	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ . . . . .	14
1.2	Ajustement du signal aux meilleurs instants d'échantillonnage . . . . .	24
1.3	Interpolation pour un facteur de suréchantillonnage $F = 2$ . . . . .	27
1.4	Interpolation pour un facteur de suréchantillonnage $F = 4$ . . . . .	27
1.5	Interpolation pour un facteur de suréchantillonnage $F = 8$ . . . . .	27
1.6	EQM en fonction du numéro de l'échantillon pour un signal BPSK, RSB = 10 dB, roll-off = 0.3. . . . .	32
1.7	EQM en fonction du numéro de l'échantillon pour un détecteur MV, RSB = 10 dB, roll-off = 0.3. . . . .	32
1.8	EQM en fonction du RSB, roll-off= 0.7 . . . . .	34
1.9	EQM en fonction du RSB, roll-off= 0.3 . . . . .	34
1.10	EQM en fonction du délai temporel normalisé, roll-off= 0.3, RSB= 10dB . . . . .	35
1.11	Echantillonnage d'un signal . . . . .	35
2.1	Codage de Gray pour une modulation 16PSK . . . . .	46
2.2	Comparaison entre la BCR empirique et son expression analytique en fonction du RSB pour différentes modulations. . . . .	64
2.3	EQM et BCR en fonction du RSB pour un signal modulé en BPSK, $\alpha = 0.3$ . . . . .	65
2.4	EQM et BCR en fonction du RSB pour un signal modulé en QPSK, $\alpha = 0.3$ . . . . .	66
2.5	EQM et BCR en fonction du RSB pour un signal modulé en 8-PSK, $\alpha = 0.3$ . . . . .	67
2.6	EQM en fonction du RSB pour des modulations 16QAM . . . . .	67
2.7	EQM en fonction du RSB pour des modulations 64QAM . . . . .	68

2.8	Comparison entre la BCR empirique et la BCR analytique pour différentes modulations, $\alpha = 0.3$ . . . . .	68
3.1	Moyenne de $\tau_k/T$ . . . . .	73
3.2	Variance de $\tau_k/T$ . . . . .	73
3.3	$\tau_k/T$ et sa valeur estimée tout au long du bloc d'observation en mode DA, pour une modulation BPSK, (a) $\sigma_w/T = 10^{-4}$ et (b) $\sigma_w/T = 10^{-3}$ . . . . .	78
3.4	EQM en fonction de $\frac{\tau_0}{T}$ au centre du bloc d'observation pour plusieurs valeurs de RSB et de $\sigma_w/T$ , en utilisant des signaux 16QAM dans le mode DA. . . . .	78
3.5	Comparison entre les EQM analytiques et empiriques à différentes positions à l'intérieur du bloc d'observation pour un RSB = 10dB, $\sigma_w/T = 10^{-4}$ et utilisant des signaux BPSK et le mode DA. . . . .	101
3.6	BCRBs à plusieurs positions à l'intérieur du bloc d'observation pour un RSB = 0 dB, $\sigma_w/T = 10^{-4}$ et une modulation BPSK en mode DA. . . . .	102
3.7	BCRB en ligne et hors ligne à plusieurs positions dans le bloc, RSB = 0 dB, $\sigma_w/T = 10^{-4}$ , (a) modulation BPSK et (b) modulation 16QAM. . . . .	103
3.8	BCRB en ligne et hors ligne en fonction du RSB, $\sigma_w/T = 10^{-4}$ , longueur du bloc = 2000, modulation BPSK. . . . .	104
3.9	BCRB en ligne et et hors ligne en fonction du RSB, $\sigma_w/T = 10^{-4}$ , longueur du bloc = 2000, modulation 16QAM. . . . .	104
4.1	$\text{ber}_{h_\tau}$ et $\mathbf{BCRH}_\alpha$ en fonction des observations, $f_d T = 0.001$ , RSB = 5dB. . . . .	115
4.2	$\mathbf{BCRH}_\alpha$ en ligne et hors ligne en fonction de la longueur du bloc d'observation ( $N$ ), pour un RSB = 5dB. . . . .	116
4.3	$\mathbf{BCRH}_\alpha$ en ligne et hors ligne en fonction de la longueur du bloc d'observation ( $N$ ), pour différentes valeurs de $f_d T$ de et un RSB= 5dB. . . . .	117
4.4	$\mathbf{BCRH}_\alpha$ en ligne et hors ligne en fonction du RSB, pour une longueur de bloc $N = 40$ . . . . .	117
4.5	$\text{ber}_{h_\tau}$ en fonction du RSB, pour une longueur de bloc $N = 40$ et une modulation BPSK. . . . .	118
4.6	$\text{ber}_{h_\tau}$ en fonction du RSB, pour une longueur de bloc $N = 40$ et une modulation QPSK. . . . .	118
4.7	$\mathbf{BCRB}_\tau$ en fonction du numéro de l'observation, $f_d T = 0.01$ , SNR=10dB, BPSK. . . . .	130
4.8	$\mathbf{BCRB}_\tau$ en fonction du RSB, $N = 40$ , BPSK. . . . .	131

4.9	$BCRB_{\tau}$ en fonction du RSB, $N = 40$ , $f_d T = 0.01$ , BPSK. . . . .	131
5.1	Sous-couches définies par le standard IEEE 802.15.6 . . . . .	135
5.2	Chaîne de transmission UWB . . . . .	136
5.3	Structure de la trame HBC . . . . .	137
5.4	Chaîne de transmission HBC . . . . .	138
5.5	Structure de la trame Narrowband . . . . .	140
5.6	Structure standard du PPDU . . . . .	140
5.7	Biais d'estimation du retard normalisé à chaque observation pour un RSB=5 dB . . . .	147
5.8	Biais d'estimation du retard normalisé à chaque observation pour un RSB=10 dB . . . .	148
5.9	EQM en fonction du RSB pour une modulation $\pi/2$ -DBPSK . . . . .	148
5.10	EQM en fonction du RSB pour une modulation $\pi/4$ -DQPSK . . . . .	149
5.11	EQM en fonction de $\tau/T$ pour des signaux $\pi/2$ -DBPSK et un RSB= 10 dB . . . . .	150
5.12	EQM du retard normalisé à chaque échantillon, RSB = 5 dB . . . . .	153
5.13	EQM du retard normalisé à chaque échantillon, RSB = 10 dB . . . . .	153
5.14	EQM du retard normalisé à chaque échantillon en fonction du RSB pour une modulation $\pi/2$ -DBPSK . . . . .	154
5.15	EQM du retard normalisé à chaque échantillon en fonction du RSB pour une modulation $\pi/4$ -DQPSK . . . . .	155
5.16	EQM en fonction du numéro de l'échantillon, RSB = 0dB, $\sigma_w = 10^{-3}$ , roll-off = 0.3 . . . .	157
5.17	EQM en fonction du numéro de l'échantillon dans un canal de Rayleigh, RSB = 0dB, $\sigma_w = 10^{-3}$ , roll-off = 0.3, $f_d T = 0.001$ . . . . .	157
5.18	EQM en fonction du numéro de l'échantillon dans un canal BBAG, RSB = 10dB, $\sigma_w =$ $10^{-3}$ , roll-off = 0.3, $f_d T = 0.001$ . . . . .	158



# Liste des tableaux

1.1	Tableau récapitulatif . . . . .	31
2.1	Code de Gray pour différentes longueurs de constellation . . . . .	45
2.2	Les valeurs d'EQM pour un RSB = 10 dB . . . . .	65
2.3	Les valeurs du RSB pour une EQM = $10^{-4}$ . . . . .	65
2.4	EQM pour un RSB = 0 dB . . . . .	66
5.1	Modèles des canaux et scénarii . . . . .	135
5.2	Modulations UWB . . . . .	136
5.3	Spécification de la norme IEEE 802.15.6 pour les signaux HBC . . . . .	137
5.4	Paramètres de Modulation et de Codage . . . . .	139
5.5	$\frac{\pi}{2}$ -DBPSK mapping . . . . .	141
5.6	$\frac{\pi}{4}$ -DQPSK mapping . . . . .	141
5.7	Paramètres de Modulation et de Codage pour la bande de fréquence de 2400 MHz à 2483.5 MHz . . . . .	142
5.8	Valeur de l'EQM pour une modulation $\pi/2$ -DBPSK . . . . .	149
5.9	Valeur de l'EQM pour une modulation $\pi/4$ -DQPSK . . . . .	149
5.10	Valeur de l'EQM pour une modulation $\pi/2$ -DBPSK . . . . .	150



# Liste des Acronymes

<b>BBAG</b> Bruit Blanc Additif Gaussien .....	6
<b>BCR</b> Borne de Cramèr-Rao .....	6
<b>BCRB</b> Borne de Cramèr-Rao Bayésienne .....	6
<b>BCRH</b> Borne de Cramèr-Rao Hybride .....	6
<b>BCRM</b> Borne de Cramèr-Rao Modifiée .....	6
<b>BPSK</b> <i>Binary Phase Shift Keying</i> .....	6
<b>CA</b> <i>Code-Aided</i> .....	5
<b>CPM</b> <i>Constant Phase Modulation</i> .....	5
<b>DA</b> <i>Data-Aided</i> .....	4
<b>DD</b> <i>Decision Directed</i> .....	4
<b>DET</b> Détecteur d'Erreur Temporelle .....	18
<b>ELD</b> <i>Early Late Detector</i> .....	6
<b>EQM</b> Erreur Quadratique Moyenne .....	6
<b>EXIT</b> <i>EXtrinsic Information Transfer</i> .....	6

<b>HBC</b> <i>Humain Body Communication</i> .....	11
<b>IoT</b> <i>Internet of Things</i> .....	iii
<b>ISI</b> <i>Interférence Inter-Symboles</i> .....	4
<b>LLR</b> <i>Log-Likelihood Ratio</i> .....	40
<b>MAP</b> <i>Maximum a Posteriori</i> .....	4
<b>MIF</b> <i>Matrice d'Information de Fisher</i> .....	112
<b>MIH</b> <i>Matrice d'Information Hybride</i> .....	111
<b>MMD</b> <i>Mueller &amp; Müller Detector</i> .....	6
<b>MSK</b> <i>Minimum Shift Keying</i> .....	6
<b>MV</b> <i>Maximum de Vraisemblance</i> .....	4
<b>NB</b> <i>NarrowBand</i> .....	9
<b>NDA</b> <i>Non-Data-Aided</i> .....	4
<b>QAM</b> <i>Quadrature Amplitude Modulation</i> .....	5
<b>QPSK</b> <i>Quadrature Phase Shift Keying</i> .....	7
<b>PSK</b> <i>Phase Shift Keying</i> .....	3
<b>RSB</b> <i>Rapport Signal à Bruit</i> .....	3
<b>TEB</b> <i>Taux d'Erreurs Binaires</i> .....	3
<b>UWB</b> <i>Ultra Wideband</i> .....	11

---

<b>WBAN</b> <i>Wireless Body Area Network</i> .....	iii
<b>ZCD</b> <i>Zero Crossing Detector</i> .....	6



# Liste des Symboles

$\Re\{z\}$	la partie réelle de $z$
$\Im\{z\}$	la partie imaginaire de $z$
$z^*$	le conjugué de $z$
$\mathbf{X}^T$	la matrice transposée de $\mathbf{X}$
$\dot{f}$	la première dérivée de $f$ , pour toute fonction $f$
$\ddot{f}$	la seconde dérivée de $f$ , pour toute fonction $f$
$f_X(x)$	la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $X$
$P(X)$	la probabilité de la variable aléatoire $X$
$E_y(X)$	La valeur moyenne de $X$ par rapport à $y$
$ \mathbf{X} $	le déterminant de la matrice $\mathbf{X}$
$\nabla_x$	le gradient par rapport à $x$
$\Delta_x^y = \nabla_x \nabla_y$	le Laplacien par rapport à $y$ et à $x$
$\triangleq$	par définition égal à
$\otimes$	opérateur de convolution



# Introduction Générale

## Contexte applicatif de la thèse

Dans le futur, des dizaines de milliards d'objets supplémentaires seront connectés à l'infrastructure du réseau Internet au niveau mondial. Un énorme volume de données et de services associés vont être transformés en un réseau mondial appelé l'Internet des objets ou IoT. L'IoT représente alors les échanges d'informations et de données provenant de dispositifs présents dans le monde réel vers le réseau Internet.

L'IoT devrait couvrir tous les besoins physiques de la vie humaine quotidienne. Le rôle de l'IoT est de transférer les informations recueillies par un ensemble de capteurs à une unité de traitement proche ou à distance et de générer certaines tâches. Comme tout marché émergent, une période de transition est nécessaire avant l'optimisation de l'ensemble du système. Deux normes ont déjà été définies à cette fin : IEEE 802.15.4 pour *Wireless Personal Area Networks* (WPAN) et IEEE 802.15.6 pour les réseaux de capteurs corporels sans fils appelés WBAN.

Les réseaux de capteurs corporels sans fil WBAN sont en train d'évoluer pour répondre aux nouveaux besoins des marchés dans divers domaines tels que la sécurité, les soins de santé, les jeux, les vêtements intelligents, etc... Ces WBANs constituent un élément clé de l'Internet des objets. Les individus, avec des capteurs et des actionneurs, peuvent en effet interagir plus efficacement avec leur environnement, tout en assurant une connectivité mondiale via l'Internet mobile.

Dans le cadre des communications dans les WBAN, nous considérerons une personne équipée d'un ensemble de capteurs sans fil qui sont, soit disposés superficiellement (attachés à des vêtements), soit implantés à l'intérieur du corps ou à sa surface.

Selon l'application envisagée, ces capteurs peuvent servir à prélever des mesures de grandeurs physiologiques chez des personnes malades, vieilles ou invalides, et peuvent même administrer des doses de médicaments (à des intervalles réguliers ou lorsque la mesure effectuée le déclenche) ; dans d'autres cas, ces capteurs peuvent simplement aider à suivre les mouvements, localiser la personne, ou détecter des dangers (chute ou absence de mouvement).

Ces mesures prises à domicile, rendues accessibles à l'équipe médicale permettent ainsi d'assurer le suivi continu du malade sans le contraindre à des déplacements et séjours longs à l'hôpital, tout en lui permettant de continuer ses activités normales chez lui.

Le groupe de travail du standard WBAN a défini certaines exigences de réseau pour garantir des performances minimales du système.

Les applications médicales d'un système de réseaux de capteurs sans fil imposent des exigences strictes en matière de fiabilité du système, de qualité de service, de consommation d'énergie, de vie privée et de sécurité des données. Par conséquent, les réseaux de capteurs médicaux WBAN présentent plusieurs défis à relever.

Le principal facteur limitant la durée de vie d'un réseau de capteurs est l'énergie. Les capteurs actuels ont des périodes de veille durant leur inactivité pour préserver leur batterie. Les sources de consommation d'énergie dans un noeud capteur proviennent principalement de l'unité d'acquisition ou de mesure, de l'unité de traitement des données et de l'unité de communications (transmission et réception sans fil)

Les communications sont les actions qui coûtent le plus cher en termes d'énergie ; les calculs le sont mais avec une moindre importance. Il est donc fortement nécessaire de limiter le nombre de communications entre capteurs et si possible la quantité de calculs. Un réseau de capteurs sans fil médicaux est un réseau spécial qui a un certain nombre de contraintes par rapport à un réseau classique. Ces contraintes sont le résultat des limitations concernant la mémoire du capteur, sa réserve énergétique, sa capacité de traitement ainsi que l'utilisation d'une communication sans fil.

Les ressources sont très limitées dans un minuscule capteur sans fil. Un capteur est un petit dispositif avec une mémoire très réduite et un espace de stockage limité. Donc pour construire un mécanisme de communication fiable, il est nécessaire de limiter la taille du code de l'algorithme à implémenter.

Malgré les progrès dans la fabrication de capteurs de plus en plus puissants, les capteurs actuels possèdent une capacité de calcul très réduite. Cette faible capacité de calcul ne permet pas d'utiliser des algorithmes complexes.

Les applications médicales imposent des exigences strictes en termes de fiabilité du système de bout en bout et de livraison des données. Les systèmes WBAN devraient assurer un transfert continu des données à travers des standards tels que Bluetooth, ZigBee, etc., pour promouvoir l'échange d'informations. En outre, les systèmes devront être évolutifs, assurer une migration efficace entre les réseaux et offrir une connectivité non-interrompue.

Un WBAN fonctionne dans un environnement hétérogène. Par conséquent, il devrait réduire l'interférence des autres périphériques réseau. Ceci est particulièrement important pour la mise en oeuvre à grande échelle des systèmes WBAN. Afin d'assurer une transmission fiable des

données, la synchronisation temporelle est une tâche cruciale dans un récepteur WBAN fournissant robustesse aux bruits et aux interférences. Etant donné que la synchronisation temporelle constitue la première partie critique du récepteur, une mauvaise synchronisation dégrade l'ensemble du système. Des algorithmes de synchronisation de faible complexité sont alors nécessaires dans un WBAN pour garantir un réseau à faible latence et prolonger ainsi la durée de vie du réseau. Vu que le support de ces capteurs est le corps humain et que les dispositifs qui y sont installés risquent de chauffer et aussi afin d'éviter le recours à des changements fréquents des batteries, il est évident que l'aspect de réduction de la consommation d'énergie est à prendre en compte de façon impérative afin de prolonger la durée de vie du réseau BAN. L'optimisation de la consommation d'énergie est assurée par l'utilisation d'algorithmes simples, faciles à implémenter et exploitant le temps de veille des capteurs pour finir le traitement des données.

## Contexte scientifique de la thèse

La synchronisation temporelle est la première fonction assurée par le démodulateur. Elle permet d'échantillonner le signal au plus près des instants optimaux. Cela permettra d'assurer que les échantillons transmis aux processus suivants de démodulation, y compris la détection de données, aient un Rapport Signal à Bruit (RSB) maximal et donc un Taux d'Erreurs Binaires (TEB) minimal. Les temps d'échantillonnage optimaux correspondent à l'ouverture maximale du diagramme de l'oeil et sont situés sur les maxima des formes décalées du filtre global. Il est clair que l'emplacement de ces pics doit être déterminé avec précision pour une détection fiable. Un circuit qui est capable de prédire de tels instants est appelé un synchroniseur (ou horloge). Il s'agit d'une partie essentielle de tout récepteur synchrone. La démodulation cohérente, pour laquelle le récepteur dispose de la fréquence et de la phase instantanées en permanence, est utilisée avec les communications numériques où un taux d'erreur optimal est d'une importance primordiale. Dans les applications où la simplicité et la robustesse de la mise en oeuvre sont plus importantes que les performances optimales, la démodulation différentielle ou non cohérente sont des alternatives intéressantes à la détection cohérente. L'information sur la phase de la porteuse n'est pas alors nécessaire. Par exemple, la démodulation différentielle des signaux de modulation par déplacement de phase, *Phase Shift Keying* (PSK) est réalisée en calculant la différence entre les phases de signal à deux instants d'échantillonnage consécutifs et en prenant une décision sur cette différence. La décision statistique est indépendante de la phase de la porteuse réelle. La récupération de phase n'a alors pas lieu ; seuls la fréquence porteuse et le délai temporel sont nécessaires.

La synchronisation temporelle peut être effectuée par des circuits, soit en boucle ouverte, soit en boucle fermée. Le premier type fournit une estimation directe des positions d'impulsions par rapport à une référence temporelle locale. Le deuxième type permet de calculer un signal

d'erreur qui est proportionnel à la différence entre les positions d'impulsion réelles et leurs estimations. Le signal d'erreur est alors exploité pour mettre à jour les estimations. Il est essentiel de noter que la synchronisation temporelle ne peut être effectuée correctement sans échantillonner en accord avec le théorème de Shannon.

La synchronisation temporelle est indispensable même dans le cas où le canal de transmission vérifie le critère de Nyquist. Un égaliseur peut permettre de restituer le décalage entre les échantillons lorsque celui-ci est constant. Cette opération devient toutefois très difficile à faible RSB. La synchronisation temporelle est la seule alternative si le décalage évolue d'un échantillon à l'autre. En fait, un égaliseur ne peut pas assurer la poursuite des délais temporels entre les symboles lorsque la différence des horloges de l'émetteur et du récepteur varie au cours du temps. Ceci provoque de l'Interférence Inter-Symboles (ISI) et dégrade donc les performances du récepteur.

La synchronisation se fait généralement en deux étapes : une première étape de synchronisation grossière suivie d'une étape de synchronisation fine. La synchronisation grossière est utilisée par exemple pour la synchronisation de trames dans les systèmes de transmission par paquets avec ou sans transmission de pilotes. La synchronisation grossière fait en général appel à des techniques exploitant la cyclostationnarité du signal reçu grâce à la périodicité de ses propriétés statistiques au cours du temps. Ces méthodes sont connues sous le nom "méthodes de raie spectrale" [35, 51]. Elles sont généralement utilisées pour la synchronisation de trames dans les systèmes de transmission par paquets avec ou sans transmission de pilotes. Dans la synchronisation fine, à laquelle nous nous intéressons dans cette thèse, des algorithmes adaptatifs inspirés de l'approche du Maximum de Vraisemblance (MV) ou du Maximum *a Posteriori* (MAP) sont mis en oeuvre afin d'affiner le décalage entre les échantillons. Ce type de synchronisation est souvent pris en charge par l'estimateur du canal [89]. Ceci est indispensable dans les canaux difficiles (faible RSB, variation rapide, etc...) dans lesquels les systèmes modernes sont amenés à fonctionner.

Les détecteurs d'erreur de synchronisation peuvent être divisés en deux grandes catégories. La première famille regroupe les détecteurs utilisant des estimations des valeurs des symboles reçus pour obtenir l'erreur de synchronisation, appelés détecteurs par retour de décision ou *Decision Directed* (DD) ou détecteurs assistés par les données, *Data-Aided* (DA). La seconde classe de détecteurs détermine l'erreur temporelle sans utiliser d'estimations sur les données transmises. Ceux-ci sont dits non assistés par les données, *Non-Data-Aided* (NDA). Bien que l'approche DA soit plus proche des performances optimales, elle est généralement sensible aux erreurs de phase. A l'inverse, les approches NDA sont plus tolérantes aux erreurs de phase mais moins performantes. Les performances et les propriétés d'un certain nombre de détecteurs existants sont traitées en détail dans le chapitre 1 de cette thèse.

## Stratégies existantes

L'augmentation de la puissance de calcul dans les systèmes de traitement numérique du signal, a permis l'utilisation d'algorithmes de synchronisation complexes, mais très performants, implémentés sous une forme totalement numérique. L'amélioration des performances et de l'analyse statistique des algorithmes se traduit par l'utilisation de certains estimateurs tels que le MV [77] et le MAP [47]. Nous illustrerons, ci-après, l'évolution historique des algorithmes de synchronisation temporelle.

La première étude qui s'est intéressée à l'utilisation du modèle MV fut publiée par Wintz et Leuke en 1969 [91]. Dans cet article, les auteurs présentent une étude des performances théoriques limites ainsi qu'une implémentation sous-optimale de l'estimateur MV. Les modèles MV et MAP ont également été étudiés dans [47, 77] pour des signaux en bande de base qui subissent un filtrage optimal de Nyquist et qui sont transmis via un canal Gaussien. Ces modèles suscitent toujours l'intérêt des chercheurs vu leur résolubilité mathématique et leur simplicité.

Les années 1970 ont connu plusieurs publications autour des techniques de synchronisation temporelle et ont abouti à un numéro spécial de la revue *IEEE Transactions on Communications*. Parmi les travaux les plus connus, on cite ceux de Kobayashi en 1971 [44], Franks et Bubrouski en 1974 [28] de Mueller et Müller en 1976 [58], de Meyers [24], de Franks [27], de Moeneclaey [56] et de Gardner [30].

Les performances de ces techniques ont été améliorées au cours des années 1980 afin de couvrir des modulations d'ordres plus élevés telles que la *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM) [41] ou à mémoire telle que la *Constant Phase Modulation* (CPM) [21]. Ces améliorations se sont poursuivies jusqu'aux années 1990 en introduisant l'effet des canaux mobiles [20, 36, 68] et en se basant essentiellement sur des techniques adaptatives [4]. En outre, des analyses de la dynamique de ces méthodes ont été fournies par exemple dans [46, 57]. Les algorithmes qui combinent à la fois la synchronisation temporelle et de phase ont aussi continué à intéresser les chercheurs [70]. La disponibilité de circuits intégrés plus puissants a permis le développement d'algorithmes "intelligents" capables de traiter des blocs de données de tailles très importantes [39]. Ces algorithmes peuvent aussi sélectionner certaines séquences de données qui seront utilisées dans le processus de synchronisation [25, 42].

Durant les années 2000, remarquant que les récepteurs turbo fonctionnent même pour des faibles valeurs de RSB, de nombreuses recherches se sont concentrées sur des algorithmes de synchronisation assistés par le code ou *Code-Aided* (CA) [12]. Cette approche consiste à exploiter les informations souples fournies par le détecteur turbo afin d'aider le synchroniseur. Cette idée a déjà été appliquée dans certaines contributions, en particulier, pour l'estimation de l'erreur de phase [49]. Elle a également été exploitée dans [65] avec un algorithme Expectation-Maximization dans le cadre d'une synchronisation au sens du MV. De plus, la synchronisation temporelle a été combinée avec le décodage canal afin que la sortie de chaque bloc améliore

l'entrée de l'autre [97]. Dans [64] les auteurs ont proposé d'introduire la récupération du rythme d'échantillonnage à l'intérieur de l'égaliseur turbo pour effectuer conjointement ces deux tâches. Dans [6], une technique itérative de synchronisation temporelle a été présentée, où l'information à la sortie du décodeur est introduite dans le détecteur d'erreur de synchronisation MM [58] afin de réaliser conjointement une turbo égalisation.

Afin d'assurer une synchronisation temporelle, on peut mettre en oeuvre un détecteur classique en ligne, tel que le *Mueller & Müller Detector* (MMD) [58], le *Zero Crossing Detector* (ZCD) [33] et le *Early Late Detector* (ELD) [48], pour lequel, le délai estimé ne dépend que des observations précédentes. Ces détecteurs sont des algorithmes à faible coût et ont déjà été implémentés pour estimer un retard temporel constant sur la durée d'observation. Cependant leurs performances de poursuite sont limitées surtout si le retard estimé est variable dans le temps, tel que pour l'exemple d'un retard dans un dispositif sans fil à haute mobilité (mouvements rapides et brusques des capteurs les uns par rapport aux autres). Dans ce cas, une certaine amélioration peut être apportée par la mise en oeuvre d'algorithmes hors-ligne qui opèrent sur l'ensemble du bloc d'observation en tenant compte à la fois des observations passées et futures. Cette technique de lissage a été appliquée dans [95] pour la récupération de phase de manière itérative.

Les estimateurs de l'erreur de synchronisation sont généralement évalués en termes de biais et d'Erreur Quadratique Moyenne (EQM). Cependant, il est parfois difficile de trouver analytiquement les expressions de ces deux termes. Dans ce cas, on fait souvent appel à des bornes théoriques de référence auxquelles on compare les performances des estimateurs en question. Plusieurs bornes ont été proposées dans la littérature telles que la borne de Bhattacharyya [13], de Chapman-Robbins [19], de Brankin [5], d'Abel [2, 3] et la Borne de Cramèr-Rao (BCR) [43].

Des expressions analytiques de la BCR ont été obtenues pour l'estimation CA de l'erreur de phase et de fréquence. Dans [7, 8, 96], les auteurs ont évalué la Borne de Cramèr-Rao Hybride (BCRH) et la Borne de Cramèr-Rao Bayésienne (BCRB) pour l'estimation CA, DA, NDA dynamique de la phase estimation pour des signaux QAM et ont montré théoriquement l'amélioration apportée par l'utilisation d'une technique CA. Une comparaison entre les différentes techniques de synchronisation temporelle en termes de TEB a été proposée dans [45] en utilisant la méthode *EXtrinsic Information Transfer* (EXIT) *chart* [80]. Néanmoins, quelques propriétés statistiques des estimateurs telles que le biais et l'EQM ne peuvent pas être fournies par l'analyse EXIT *chart*. Les auteurs de [94] ont également proposé des expressions semi-analytiques du biais et de la variance des estimateurs, en fonction du retard temporel, pour un détecteur de type Mueller & Müller dans un contexte CA. Cependant, l'évaluation des performances a été faite seulement pour des signaux *Binary Phase Shift Keying* (BPSK) à faible RSB, en se basant sur l'hypothèse que l'ISI peut être approximée par un Bruit Blanc Additif Gaussien (BBAG) [55]. Pour la synchronisation temporelle, seulement des expressions analytiques des BCR DA [54] et NDA pour des signaux BPSK, *Minimum Shift Keying* (MSK) et QAM ont été proposées [50]. Bien que la Borne de Cramèr-Rao Modifiée (BCRM) présentée dans [22, 52] soit plus facile

à obtenir, elle est, cependant, loin de la véritable BCR, en particulier pour des faibles valeurs du RSB.

Des expressions analytiques de la BCR ont été obtenues dans [10] pour la récupération CA de la fréquence et de la phase pour des signaux QAM-carré turbo-codés. Cependant, pour le problème de récupération de rythme, la BCR a été évaluée pour un scénario DA [54], NDA [50] et CA [62, 63] seulement dans le cas d'un retard constant. La BCR standard est mal adaptée à l'évaluation d'un estimateur de retard variable. Dans ce cas, un autre type de borne peut être utilisé à savoir la CRB Bayésienne que nous allons développer tout au long du troisième chapitre de ce mémoire.

## Problématique et plan de la thèse

Comme nous l'avons déjà dit, les approches de synchronisation temporelle se divisent en approches supervisées par des symboles pilotes envoyés par l'émetteur et en approches non supervisées où le récepteur utilise uniquement le signal reçu afin de récupérer le rythme d'échantillonnage. Le premier type engendre une réduction de l'efficacité spectrale en envoyant des symboles supplémentaires sur le canal de transmission. Le deuxième type est moins performant mais fait gagner de la bande passante. Il semble alors intéressant de développer des algorithmes d'estimation du retard temporel non supervisés afin d'augmenter le débit des données utiles, tout en essayant de réduire au maximum la complexité de mise en oeuvre. Les approches CA se basant sur des informations souples tirées du signal reçu représentent un excellent candidat pour résoudre ce dilemme. Bien que cette approche ait été déjà traitée auparavant, son étude s'est restreinte à la modulation binaire ou à définir un cadre général pour l'implémentation de la technique. Dans cette thèse, nous allons traiter d'autres types de modulations, d'ordre plus élevé, qui sont employées dans les systèmes de communications modernes.

Afin d'évaluer l'efficacité de l'estimateur du retard, son EQM est souvent comparée à des bornes de référence dont la BCR. L'expression de cette borne a été uniquement évaluée pour des approches NDA et DA. Nous nous proposons dans cette thèse d'évaluer son expression pour des estimations de type CA et de la valider en la comparant à des résultats empiriques. Différemment de [54] et [50], nous allons chercher des expressions analytiques de la BCR relative à l'estimation CA du retard temporel pour des modulations BPSK, *Quadrature Phase Shift Keying* (QPSK) et en général des signaux QAM et *M*-PSK et de comparer les performances de l'estimateur CA proposé à cette borne.

Les détecteurs sont implémentés sous la forme d'algorithmes adaptatifs dont le traitement se fait en ligne. Lorsque le retard temporel est aléatoire et variable au cours du temps, les capacités de poursuite de ces détecteurs sont limitées par l'auto-bruit et ce même à des valeurs élevées du RSB. Certains systèmes de communication, tels que les réseaux de capteurs basculent entre deux états "actif" et "non actif" ; le premier pour l'acquisition des données et le deuxième pour

le traitement. Vu les contraintes de communication dans les WBAN dues à l'importance vitale pour la prise des décisions médicales fiables, nous pouvons exploiter des approches opérant dans un contexte hors ligne afin de réduire les erreurs d'estimation d'un instant d'échantillonnage à l'autre. Ce genre d'algorithmes est doté d'une faible complexité qui le rend intéressant pour les WBAN.

Certaines études ont essayé de se rapprocher davantage du cas réel en combinant la synchronisation temporelle avec l'estimation du canal ou à évaluer des estimateurs NDA dans un canal à évanouissement. Afin de valider de tels estimateurs, nous avons intérêt à calculer les bornes limites correspondantes. Dans cette thèse, nous allons traiter ce point en prenant l'exemple d'un canal de Rayleigh.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le corps humain est caractérisée par des pertes dues principalement à l'effet d'absorption de puissance dans les tissus et dissipées sous la forme de chaleur. La propagation le long du corps change selon s'il y a ou non une ligne de visibilité directe entre chaque paire de capteurs. Ces aspects sont à prendre en compte dans l'objectif final de réduire la consommation d'énergie.

Le corps portant le réseau WBAN pouvant être en mouvement, les capteurs sont amenés à changer de leurs positions relatives, ce qui impose la mise en place d'un estimateur simple des canaux entre les différents capteurs. L'estimation du canal requiert une bonne synchronisation temporelle. L'estimateur des délais temporels doit ainsi être adaptatif et nécessite un nombre réduit de mesures. L'objectif est ici d'adopter l'approche de MV ou de MAP, d'évaluer ses performances d'une part et de calculer les bornes minimales d'estimation permettant de juger la pertinence de la solution proposée, d'autre part.

Quand la réduction de la complexité du récepteur WBAN est à favoriser au détriment du taux d'erreur, nous pouvons avoir recours à un estimateur de retard non cohérent. Avec ce type de détecteur, nous n'avons plus besoin d'assurer la synchronisation de phase. Un détecteur non cohérent sera ainsi proposé et comparé à un détecteur cohérent. Tous les algorithmes proposés seront testés et adaptés à la structure d'une trame WBAN selon le modèle proposé par le standard IEEE 802.15.6.

L'apport de cette thèse consiste d'abord à proposer des détecteurs inspirés de l'estimateur MV qui exploitent l'information souple sur les symboles, fournie par le démodulateur, pour estimer un retard temporel déterministe et évaluer analytiquement la BCR correspondante. Le deuxième apport consiste à développer une technique d'estimation bayésienne d'un retard temporel aléatoire et de calculer la BCRB permettant d'évaluer la pertinence d'un tel estimateur. Les bornes de Cramèr-Rao sont évaluées aussi bien pour un canal gaussien que pour un canal à évanouissement de Rayleigh. Enfin, le dernier apport de la thèse est d'adapter les estimateurs proposées aux spécifications d'une chaîne de transmission WBAN, l'élément clé de l'IoT, et d'évaluer l'amélioration apportée par l'implémentation de ces techniques.

Afin de répondre à la problématique de cette thèse, nous proposons dans ce qui suit le plan du mémoire de thèse.

Dans le premier chapitre, nous allons établir le cadre général pour l'analyse des techniques de synchronisation temporelle développées tout au long de la thèse.

Dans le second chapitre, nous allons proposer un estimateur CA du retard temporel déterministe pour des modulations linéaires de type  $M$ -PSK et QAM et évaluer les expressions théoriques de la BCR correspondante.

Dans le troisième chapitre, nous allons proposer un algorithme d'estimation d'un retard temporel variable fonctionnant dans un contexte hors ligne. Nous allons également évaluer les performances théoriques de cet algorithme en termes de biais et d'EQM et les comparer à une borne de Cramér-Rao dédiée. Cet estimateur sera étudié dans les modes DA, NDA et CA.

Le quatrième chapitre sera dédié à évaluer les détecteurs dans un canal à évanouissement et de calculer les bornes d'estimation adaptées à ce contexte. L'étude sera présentée pour un retard déterministe aussi bien qu'un retard aléatoire et variable dans le temps.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous allons proposer des algorithmes cohérents et non cohérents adaptés aux réseaux WBAN. Pour ce faire, nous allons suivre le modèle proposé par le standard IEEE 802.15.6 pour les communications à bande étroite ou *NarrowBand* (NB).

## Publications

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

### Revue internationale à comité de lecture

1. I. Nasr, L. Najjar Atallah and S. Cherif, B. Geller, "Near MAP Dynamical Delay Estimator and Bayesian CRB for Coded QAM Signals", *IEEE Transactions on Wireless Communications*, In Revision.
2. I. Nasr, B. Geller, L. Najjar Atallah and S. Cherif, "Performance Study of a Near Maximum Likelihood Code-Aided Timing Recovery Technique", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 3, pp. 799-811, Feb.1, 2016.
3. I. Nasr, L. Najjar Atallah, S. Cherif, J. Yang, K. Wang, "On a Hybrid Preamble/Soft-Output Demapper Approach for Time Synchronization for IEEE 802.15.6 Narrowband WBAN", *China Communications*, February 2015.

### Conférences internationales à comité de lecture

1. I. Nasr, L. Najjar Atallah, S. Cherif and B. Geller, "Time Synchronization in IoT Networks : Case of a Wireless Body Area Network", *IEEE ISIVC Tunis*, November 2016.

2. I. Nasr, L. Najjar Atallah, B. Geller and S. Cherif, "CRB Derivation and New Code-Aided Timing Recovery Technique for QAM Modulated Signals", *IEEE ICC London*, June 2015.
3. I. Nasr, L. Najjar Atallah, S. Cherif, B. Geller and J. Yang, "A Soft Maximum Likelihood Technique for Time Delay Recovery", *IEEE COMNET Hammamet*, March 2014.

# Chapitre 1

## Synchronisation temporelle en bande de base

Ce chapitre établit le cadre général pour l'analyse des techniques de synchronisation temporelle développées dans les chapitres suivants. La première section définit le modèle du signal à travers la chaîne de transmission et ses relations avec les paramètres de nuisance. La seconde section décrit la fonction de synchronisation temporelle dans un récepteur numérique et identifie les limites engendrées par les erreurs de synchronisation sur la conception du système. La troisième section définit le problème d'estimation au sens du MV du délai temporel. La section qui suit est dédiée à la présentation des DET basés sur l'estimateur au sens du MV. Dans la cinquième section, nous évoquons les techniques d'ajustement du signal après l'estimation du retard temporel. Dans la sixième section, nous proposons une évaluation théorique des performances des DET en termes d'EQM. Enfin, la dernière section est dédiée à la définition des bornes limites théoriques des estimateurs.

### 1.1 Formulation du problème de synchronisation temporelle

Avant de pouvoir commencer la modélisation mathématique du système de transmission, nous avons besoin de définir le type du réseau WBAN sur lequel nous allons travailler. Le standard IEEE 802.15.6 propose trois sous couches physiques possibles, à savoir, la couche NB, la couche *Ultra Wideband* (UWB) et la couche *Human Body Communication* (HBC), qui dépendent de la bande de fréquence sélectionnée. Dans le cadre du projet de thèse, nous avons choisi de travailler sur des signaux à bande étroite. Nous détaillerons dans ce qui suit la modélisation mathématique de ces signaux.

### 1.1.1 Modélisation mathématique

Nous supposons dans ce qui suit que le signal à transmettre est un signal en bande de base, c'est-à-dire, qui n'a pas subi de transposition de fréquence. Il s'agit de transmettre une suite d'éléments binaires  $\{b_i\}$  prenant valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1\}$ . Cette suite binaire est modulée en une suite de symboles  $\{a_i\}$  transmise à travers le filtre d'émission, de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , à la cadence  $1/T$ . Lorsque les symboles  $a_n$  sont binaires, leur cadence d'émission  $1/T$  est égale à la cadence d'émission des bits  $1/T_b$  ( $T_b$  est la durée d'un bit). Le signal émis,  $s(t)$ , s'écrit sous la forme :

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j h(t - jT). \quad (1.1)$$

Le signal transmis traverse un canal qui introduit un retard arbitraire déterministe en temps,  $\tau$ , au signal émis  $s(t)$  et rajoute un BBAG complexe,  $n(t)$ , de variance  $\sigma_n^2$  pour former le signal reçu :

$$r(t) = s(t - \tau) + n(t). \quad (1.2)$$

Implicitement les équations (1.1) et (1.2) traduisent que le signal est à bande étroite, i.e. que toutes ses composantes spectrales sont atténuées de façon identique par le canal BBAG.

A la réception le signal  $r(t)$  est d'abord filtré afin de supprimer le bruit en dehors de la bande et ensuite échantillonné aux instants  $t = kT + \hat{\tau}$ , où  $k$  est un entier. Les échantillons sont envoyés au détecteur pour générer des estimations  $\hat{a}_k$  des symboles transmis. En pratique, le filtre à la réception est adapté à  $h(t)$ , c'est-à-dire il s'écrit sous la forme :

$$h_r(t) = h(-t + t_0), \quad (1.3)$$

où  $t_0$  est le délai qui rend  $h_r(t)$  un filtre causal (nul si  $t < 0$ ). Soit  $g(t)$  le filtre équivalent au produit de convolution de  $h(t)$  et  $h_r(t)$  ;  $g(t) \triangleq h(t) \otimes h_r(t)$ .  $g(t)$  vérifie aussi le critère de Nyquist :

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Les filtres en cosinus surélevé sont souvent utilisés dans ce cas de figure. La réponse temporelle de  $g(t)$  est alors donnée par :

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \times \frac{\cos(\alpha \pi t/T)}{1 - 4\alpha^2 t^2/T^2}, \quad (1.5)$$

où  $\alpha$  est le facteur roll-off ou de retombée dont la valeur est choisie dans l'intervalle  $]0, 1[$ . L'objectif de la synchronisation temporelle est de fournir des instants d'échantillonnage  $t = kT + \hat{\tau}$  qui minimisent la probabilité d'erreur symbole. Plus généralement, la synchronisation temporelle permet d'échantillonner la sortie du filtre adapté à la réception à l'ouverture maximale du

diagramme de l'oeil. L'erreur de synchronisation a donc tendance à dégrader les performances du démodulateur. Ceci est illustré dans le paragraphe suivant.

### 1.1.2 Dégradation due aux erreurs de synchronisation temporelle

Considérons  $P(e|\hat{\tau})$  la probabilité d'erreur du détecteur conditionnée à la valeur estimée du retard temporel  $\hat{\tau}$ .

D'après la nature du problème de décalage temporel, la probabilité d'erreur  $P(e|\hat{\tau})$  est une fonction convexe de  $\hat{\tau}$  qui admet un minimum au point  $\tau_0 = \tau + t_0$ , ce qui explique le fait que les meilleurs instants d'échantillonnage sont  $t = kT + \tau_0$ . En pratique, la durée entre deux impulsions adjacentes n'est pas constante mais varie lentement et d'une façon aléatoire. Cette variation est appelée gigue temporelle (ou instabilité de synchronisation) et elle est due à la nature aléatoire des formes d'onde. La modélisation de cette variation peut se faire en considérant la variable  $\hat{\tau}$  comme étant une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité est  $f(\hat{\tau})$ . Pour simplifier on suppose que  $\tau_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\tau} f(\hat{\tau}) d\hat{\tau}$  est la valeur moyenne de  $\hat{\tau}$ . En moyennant  $P(e|\hat{\tau})$  par rapport à  $\hat{\tau}$ , on obtient la probabilité d'erreur du système [52] :

$$P(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(e|\hat{\tau}) P(\hat{\tau}) d\hat{\tau}. \quad (1.6)$$

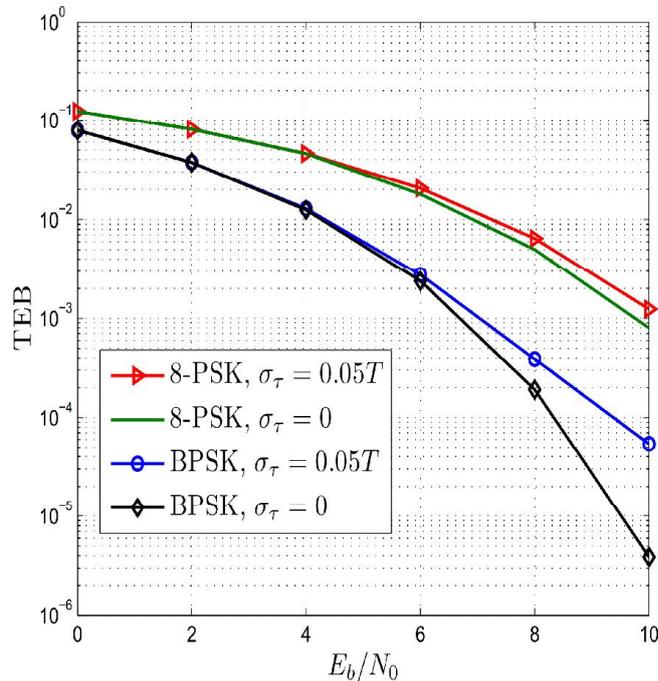
Cette équation établit donc le rapport entre la probabilité d'erreur du système et les erreurs de synchronisation. Dans [18], un développement en série de Taylor a été proposé pour  $P(e|\hat{\tau})$  au voisinage de  $\tau_0$  :

$$P(e|\hat{\tau}) \approx P(e|\tau_0) + \frac{1}{2} \ddot{P}(e|\tau_0) (\tau - \tau_0)^2 \quad (1.7)$$

où  $\ddot{P}(e|\tau_0)$  est la dérivée seconde de  $P(e|\hat{\tau})$  pour  $\hat{\tau} = \tau_0$ . Notons que le terme contenant  $(\tau - \tau_0)$  est absent vu que  $P(e|\hat{\tau})$  admet un minimum en  $\tau_0$ . Supposons que  $\sigma_\tau^2 \triangleq E((\hat{\tau} - \tau_0)^2)$  et en remplaçant  $P(e|\hat{\tau})$  par son expression dans (1.7) on obtient :

$$P(e) \approx P(e|\tau_0) + \frac{1}{2} \ddot{P}(e|\tau_0) \sigma_\tau^2. \quad (1.8)$$

Etant donné que  $\ddot{P}(e|\tau_0) > 0$  ( $P(e|\hat{\tau})$  est une fonction convexe qui admet un minimum en  $\tau_0$ ), alors  $P(e)$  se dégrade proportionnellement à  $\sigma_\tau^2$  ce qui prouve l'intérêt de la synchronisation temporelle. La Figure 1.1 montre le taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour les modulations BPSK et 8PSK. Notons que  $E_b$  est l'énergie moyenne transmise par bit et que  $N_0/2$  est la densité spectrale de puissance du bruit. Le paramètre  $\tau$  est modélisé par une variable aléatoire de distribution gaussienne avec un écart type  $\sigma_\tau$  égal à 0 et  $5 \times 10^{-2}T$ . La courbe relative à  $\sigma_\tau = 0$  représente le taux d'erreur binaire pour une synchronisation parfaite. La figure montre un taux d'erreur irréductible même si le rapport signal-bruit a été suffisamment augmenté. L'explication est que les erreurs de synchronisation génèrent des ISI, qui, à leur tour, produisent des erreurs de décision, même en absence de bruit.

FIGURE 1.1: Taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$ 

Afin de corriger ce retard temporel, nous avons d'abord besoin de connaître sa valeur. Plusieurs approches ont été proposées dans la littérature pour l'estimation de  $\tau$  que nous pouvons classer sous deux catégories. La première regroupe les différentes techniques de corrélation telles que les méthodes de raie spectrale [35, 51] ... Ces techniques consistent à récupérer la valeur du retard à partir de la transposition dans le domaine des fréquences de la fonction d'autocorrélation du signal reçu. Bien que ces techniques semblent les plus performantes, elles restent plus complexes à mettre en œuvre étant donné qu'on est amené à calculer le moment d'ordre 2 du signal. La deuxième famille regroupe les approches basées sur l'estimateur du maximum de vraisemblance dont les performances s'approchent des bornes limites d'estimation dont nous allons parler à la fin de ce chapitre. Nous avons opté dans cette thèse pour le deuxième type d'estimateurs et nous pouvons les appliquer plus tard à un système de capteurs corporels qui nécessitent des algorithmes à faible consommation d'énergie et donc à complexité réduite. Abordons maintenant l'étude de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance du retard  $\tau$ .

## 1.2 Estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance

Dans les années soixante, les boucles de synchronisation temporelle ont été construites en utilisant des techniques analogiques avec un oscillateur commandé en tension fixé à la valeur nominale ou un multiple de la valeur nominale du débit de symbole. Avec l'introduction des

dispositifs semi-conducteurs numériques, cette méthode a été mise en oeuvre sous plusieurs formes, y compris la forme hybride analogique/numérique (généralement pour les modems à grande vitesse, par exemple [15]), la forme entièrement numérique [60, 67], la forme hybride matérielle/logicielle [81], et la forme entièrement logicielle [74].

Compte tenu des inconvénients des implémentations analogiques et la montée en puissance du traitement numérique du signal, les dispositifs de communication ont été conçus sous une forme entièrement numérique. L'implémentation des techniques de synchronisation temporelle et l'analyse de leurs performances ont énormément progressé au cours des dernières décennies grâce à l'utilisation d'outils d'analyse et des estimateurs au sens du MV [77] et du MAP [47]. L'estimateur obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance est asymptotiquement efficace vu qu'il atteint la borne de Cramér-Rao. Lorsque la variable à estimer est modélisée par une variable aléatoire ayant une certaine probabilité *a priori*, nous pouvons utiliser l'estimateur MAP. La méthode du MAP consiste à trouver la valeur qui maximise la fonction de vraisemblance pondérée par la distribution *a priori* du paramètre à estimer.

Dans ce paragraphe, vu que le retard temporel à estimer est un paramètre déterministe, nous allons chercher à l'estimer au sens du MV introduit par le canal. Pour une synchronisation totalement numérique, le signal reçu est préfiltré, échantillonné et ensuite passé à travers un filtre adapté numérique.

Considérons tout d'abord la version échantillonnée du signal reçu  $r(t)$  donné par (1.2) :

$$r_i = s_i(\tau) + n_i \quad (1.9)$$

avec

$$s_i = \sum_j a_j h(iT_s - jT) \quad (1.10)$$

où  $T_s = \frac{T}{F}$  est la période d'échantillonnage,  $F$  est le facteur de suréchantillonnage et  $n_i$  est un BBAG de variance  $\sigma_n^2$ . Nous considérons dans ce qui suit que  $t_0 = 0$ . Ainsi le filtre adapté à la réception (1.3) est égal à  $h_r(t) = h(-t)$ .

L'objectif est de chercher  $\hat{\tau}$  qui maximise, par rapport à  $u$ , la probabilité d'avoir reçu le bloc d'échantillons  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_N]^T$ , sachant le retard  $u$  et les symboles transmis  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots]^T$ .

$$\hat{\tau} = \arg \max_u P(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}). \quad (1.11)$$

Comme le bruit additif est blanc, les échantillons de bruit,  $n_i$ , sont indépendants, et on a alors pour  $N$  échantillons reçus :

$$\hat{\tau} = \arg \max_u \left\{ \prod_{i=1}^N P(r_i|u, a_i) \right\}. \quad (1.12)$$

Du modèle (1.9), la forme standard de la pdf  $P(r_i|u, a_i)$  est donnée par :

$$P(r_i|u, a_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{|r_i - s_i(u)|^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (1.13)$$

On obtient donc :

$$P(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^N} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{|r_i - s_i(u)|^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (1.14)$$

Ainsi, trouver  $\hat{\tau}$  revient à maximiser par rapport à  $u$  la fonction de vraisemblance suivante :

$$\Lambda(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{|r_i - s_i(u)|^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (1.15)$$

ce qui est équivalent à maximiser le log de la fonction de vraisemblance :

$$\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N |r_i - s_i(u)|^2. \quad (1.16)$$

Soit  $T_0$  la période d'observation de la totalité du signal  $r(t)$ . En faisant tendre le nombre d'échantillons  $N$  vers l'infini, la fonction log de vraisemblance devient à un terme multiplicatif près :

$$\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = -\frac{1}{2\sigma_n^2} \int_{T_0} |r(t) - s(t-u)|^2 dt \quad (1.17)$$

Le carré dans l'intégrale dans (1.17) est une mesure de la distance entre le signal reçu et le signal de référence. En développant cette quantité on obtient :

$$\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = -\frac{1}{2\sigma_n^2} \int_{T_0} |r(t)|^2 dt - \frac{1}{2\sigma_n^2} \int_{T_0} |s(t-u)|^2 dt + \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{T_0} \Re\{r(t)s^*(t-u)\} dt \quad (1.18)$$

Seul le dernier terme d'inter-corrélation dans (1.18) contient des informations utiles concernant le décalage en temps ; en effet, pour une période d'observation  $T_0$  suffisamment large, l'intégrale de  $|s(t-u)|^2$  par rapport à  $t$  sur la période  $T_0$  est tout simplement l'énergie des symboles transmis,  $\sum_j |a_j|^2$ , qui est indépendante de  $u$ . D'autre part, le terme  $\int_{T_0} |r(t)|^2 dt$  est indépendant de  $u$ .

La fonction de log-vraisemblance à maximiser devient à une constante additive près :

$$\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{T_0} \Re\{r(t)s^*(t-u)\} dt - \sum_j \frac{|a_j|^2}{2\sigma_n^2} + \text{constante} \quad (1.19)$$

Bien que n'intervenant pas toujours dans la maximisation, nous conservons dans un premier temps le second terme.

En développant le premier terme de (1.19), nous obtenons pour un filtre de mise en forme  $h(\cdot)$  réel :

$$\begin{aligned} \int_{T_0} r(t)s^*(t-u)dt &= \int_{T_0} \left( \sum_i a_i h(t-iT-\tau) + n(t) \right) \left( \sum_j a_j^* h(t-jT-u) \right) dt \\ &= \sum_i \sum_j a_j^* a_i \int_{T_0} h(t-iT-\tau)h(t-jT-u)dt + \sum_j a_j^* \int_{T_0} h(t-jT-u)n(t)dt. \end{aligned}$$

Sachant que pour une période d'observation  $T_0$  assez longue,  $\int_{T_0} h(t-iT-\tau)h(t-jT-u)dt = g((j-i)T - (\tau-u))$ , et en posant :

$$\begin{aligned} y_j(u) &= \sum_i a_i g((j-i)T - (\tau-u)), \\ v_j(u) &= \int_{T_0} h(t-jT-u)n(t)dt, \text{ et} \\ x_j(u) &= y_j(u) + v_j(u), \end{aligned} \tag{1.20}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) &= \frac{1}{\sigma_n^2} \Re \left\{ \sum_j a_j^* y_j(u) + \sum_j a_j^* v_j(u) \right\} - \sum_j \frac{|a_j|^2}{2\sigma_n^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_j \Re \{ a_j^* x_j(u) \} - \sum_j \frac{|a_j|^2}{2\sigma_n^2}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

$x_j(u)$  correspond au signal reçu après filtrage adapté,  $y_j(u)$  est sa partie utile et  $v_j(u)$  est un bruit coloré provenant du filtrage du bruit d'observation. Si on reçoit  $N$  symboles alors :

$$\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{j=1}^N \Re \{ a_j^* x_j(u) \} - \sum_{j=1}^N \frac{|a_j|^2}{2\sigma_n^2}. \tag{1.22}$$

Nous avons ainsi obtenu une formulation discrète de la fonction de vraisemblance qui peut être vue comme l'énergie des symboles à la sortie du filtre adapté. Cette énergie est maximale lorsque le symbole  $x_j(u)$  ressemble au symbole transmis  $a_j$  ; c'est-à-dire que l'ajustement temporel  $u$  est égal au vrai retard  $\tau$ .

Nous développerons, dans ce qui suit, l'expression de l'estimateur de  $\tau$  permettant de maximiser cette fonction. Sachant qu'il est difficile de trouver l'expression exacte de cet estimateur, certains algorithmes itératifs ont été développés dans la littérature assurant la convergence de l'estimateur vers la valeur maximisant  $\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})$ .

Nous allons dans ce qui suit présenter des algorithmes adaptatifs dits détecteurs DET qui ont été déjà proposés dans la littérature permettant d'annuler au fil des itérations la dérivée de la fonction de vraisemblance par rapport à  $u$ .

Le schéma conceptuel que nous choisissons peut être résumé comme suit. Nous supposons que des décisions fiables sur les symboles sont disponibles. En conséquence, nous cherchons le maximum de la fonction log-vraisemblance  $\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})$  par rapport à  $u$ . Une condition nécessaire pour qu'un maximum survienne est la décroissance vers zéro de la dérivée de  $\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})$  par rapport à  $u$  au fil des itérations. Vu la difficulté de résolution analytique de l'équation  $\frac{\partial \Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})}{\partial u} = 0$  par rapport à  $u$ , certaines techniques stochastiques, se basant sur l'algorithme du gradient [16] et l'algorithme Expectation-Maximization [23] ont été utilisées afin de se rapprocher de l'estimateur MV. Nous nous sommes particulièrement intéressés dans cette thèse aux techniques de résolution adaptatives vu leur simplicité de mise en oeuvre. Ces techniques sont implémentées dans le récepteur sous forme de Détecteur d'Erreur Temporelle (DET). Nous allons dans la suite présenter les DETs déjà proposés dans la littérature et expliquer leur relation avec l'estimateur MV.

### 1.3 Détecteurs supervisés basés sur l'estimateur MV

Pour ce type de détecteurs, on utilise la valeur exacte ou estimée des symboles transmis. Nous présenterons dans ce qui suit les DETs les plus populaires.

#### 1.3.1 Détecteur au sens du Maximum de Vraisemblance

Il s'avère que la dérivée de la fonction log-vraisemblance (1.22) est donnée par la somme de plusieurs termes à un terme multiplicatif près :

$$\frac{\partial \Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})}{\partial u} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Re \{ a_j^* x_j(u) \}}{\partial u}. \quad (1.23)$$

Une solution récursive du problème d'estimation au sens du maximum de vraisemblance peut être alors implémentée en utilisant le terme générique de la somme (1.23) afin de mettre à jour la valeur actuelle du délai estimé selon l'équation suivante :

$$\hat{\tau}_n = \hat{\tau}_{n-1} + \mu e_n(\hat{\tau}_{n-1}, a_n), \quad (1.24)$$

où

$$e_n(\hat{\tau}_{n-1}, a_n) = \Re \left\{ a_n^* \frac{\partial x_n(u)}{\partial u} \Big|_{u=\hat{\tau}_{n-1}} \right\}. \quad (1.25)$$

En pratique,  $\frac{\partial x_n(u)}{\partial u} \Big|_{u=\hat{\tau}_{n-1}}$  est obtenu à l'aide des techniques d'interpolation qui seront présentées dans la suite du manuscrit.

Lorsque les symboles  $a_n$  sont inconnus par le récepteur, une valeur estimée de ces symboles  $\hat{a}_n$  peut être utilisée dans le terme de mise à jour de (1.24). Dans ce cas de figure, on parle de synchronisation temporelle par retour de décision ou DD.

Les autres détecteurs proposent de nouvelles écritures du terme d'adaptation  $e_n(\hat{\tau}_{n-1}, \hat{a}_n)$  qui met à jour la nouvelle valeur  $\hat{\tau}_n$  ayant pour objectif de maximiser la fonction de vraisemblance.

### 1.3.2 Détecteur *Early Late* (ELD)

Ce détecteur se base sur l'approximation de la dérivée  $\frac{\partial x_n(u)}{\partial u}|_{u=\hat{\tau}_{n-1}}$  en utilisant l'approximation par différence du dérivateur numérique suivant :

$$h_d(kT_d) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1, \\ -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (1.26)$$

avec  $T_d = T/2$ .

L'erreur d'adaptation du détecteur *Early Late* [48] est alors donnée par :

$$e_n(\hat{\tau}_{n-1}, \hat{a}_n) = \Re \left\{ \hat{a}_n^* \left( x_{n+\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{n-1}) - x_{n-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{n-1}) \right) \right\}. \quad (1.27)$$

Implicitement, un échantillonnage de deux points par symbole est réalisé en sortie du filtre adapté pour le détecteur *Early Late*.

### 1.3.3 Détecteur *Zero Crossing* (ZCD)

D'après (1.13), nous allons montrer que la maximisation de  $\Lambda(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})$  par rapport à  $u$  revient à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre les symboles émis  $a_j$  et les symboles reçus  $x_j(u)$ . En d'autres termes, la valeur de  $u$  annulant la dérivée de  $\Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})$  annulera aussi la dérivée par rapport à  $u$  de

$$E(u, \mathbf{a}) \propto \sum_j |\epsilon_j(u, a_j)|^2 \triangleq \sum_j |a_j - x_j(u)|^2. \quad (1.28)$$

En effet,

$$\begin{aligned} E(u, \mathbf{a}) &\propto \sum_j |\epsilon_j(u, a_j)|^2 \\ &= \sum_j |a_j|^2 + \sum_j |x_j(u)|^2 - 2 \sum_j \Re \{ x_j(u) a_j^* \}. \end{aligned}$$

D'une part,  $\sum_j |a_j|^2$  est indépendant de  $u$ . D'autre part,  $\sum_j |x_j(u)|^2$  est égale à l'énergie des symboles reçus. Lorsque la durée d'observation est suffisamment large, on peut négliger l'effet

du retard sur le signal reçu. Ce terme est par conséquent indépendant de  $u$ . Par suite,

$$\frac{\partial E(u, \mathbf{a})}{\partial u} = -2 \frac{\partial \left( \sum_j \Re \left\{ x_j(u) a_j^* \right\} \right)}{\partial u}. \quad (1.29)$$

L'expression de  $\frac{\partial E(u, \mathbf{a})}{\partial u}$  est proportionnelle à  $\frac{\partial \Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})}{\partial u}$ . Dans ce cas, la valeur de  $\hat{\tau}$  qui annule  $\frac{\partial E(u, \mathbf{a})}{\partial u}$  par rapport à  $u$  annulera aussi  $\frac{\partial \Lambda_L(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})}{\partial u}$ .

Ainsi, nous pouvons obtenir l'erreur d'adaptation donnant une estimation de  $\tau$  qui coïncide avec l'estimateur au sens du MV à partir de la dérivée par rapport à  $u$  de  $E(u, \mathbf{a})$ . En pratique, au lieu de minimiser la somme dans (1.28), nous pouvons restreindre notre étude à la minimisation de l'erreur instantanée  $|\epsilon_n(u, a_n)|^2$ , ce qui permettra une convergence plus rapide. La dérivée correspondante est donnée par (en négligeant le terme de bruit) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\epsilon_n(u, a_n)|^2}{\partial u} &= 2\Re \left\{ (a_n - x_n(u)) \sum_i a_i^* \frac{\partial g(nT - iT + u - \tau)}{\partial u} \right\} \\ &= 2\Re \left\{ (a_n - x_n(u)) \sum_j a_{n-j}^* \frac{\partial g(jT + u - \tau)}{\partial u} \right\}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

En utilisant l'approximation du dérivateur numérique présenté dans (1.26) pour  $T_d = T/2$ , ce qui nécessite d'échantillonner à deux points par symbole, on obtient :

$$\sum_j a_{n-j}^* \frac{\partial g(jT + u - \tau)}{\partial u} \approx \frac{1}{T} \sum_j a_{n-j}^* \left( g \left( jT + \frac{T}{2} - \tau \right) - g \left( jT - \frac{T}{2} - \tau \right) \right). \quad (1.31)$$

En général, on choisit  $g$  qui vérifie le critère de Nyquist, soit  $g(kT) = 1$  pour  $k = 0$  et  $g(kT) = 0$  sinon. Ainsi  $g(jT + \frac{T}{2} - \tau) = 0$  pour  $j \neq -\frac{1}{2}$  et  $g(jT - \frac{T}{2} + \tau) = 0$  pour  $j \neq \frac{1}{2}$ .

Par conséquent les termes de la somme (1.31) sont non nuls seulement pour  $j = -\frac{1}{2}$  et  $j = \frac{1}{2}$  :

$$\sum_j a_{n-j}^* \frac{\partial g(jT + u - \tau)}{\partial u} \approx \frac{1}{T} a_{n+\frac{1}{2}}^* g(-\tau) - a_{n-\frac{1}{2}}^* g(-\tau) \quad (1.32)$$

$$\propto a_{n+\frac{1}{2}}^* - a_{n-\frac{1}{2}}^*. \quad (1.33)$$

Par suite,

$$\frac{\partial |\epsilon_n(u, a_n)|^2}{\partial u} \propto \left( a_{n+\frac{1}{2}}^* - a_{n-\frac{1}{2}}^* \right) x_n(u) + \text{constante}, \quad (1.34)$$

où la constante ne dépend pas de  $u$ . Le terme  $\left( a_{n+\frac{1}{2}}^* - a_{n-\frac{1}{2}}^* \right) x_n(u)$  peut être utilisé comme un terme de mise à jour de la valeur estimée de  $\hat{\tau}_n$ . Etant donné que les symboles  $a_n$  sont définis

pour des indices entiers durant deux échantillons consécutifs, un décalage d'une demi période symbole conduit à l'erreur d'adaptation du détecteur Zero Crossing [33] suivante :

$$e_n(\hat{\tau}_{n-1}, \hat{a}_n) = \Re \left\{ (\hat{a}_n^* - \hat{a}_{n-1}^*) x_{n-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{n-1}) \right\} \quad (1.35)$$

$x_{n-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{n-1})$  est obtenu à l'aide des techniques d'ajustement qui seront évoquées plus tard.

### 1.3.4 Détecteur Müller & Mueller (MMD)

En reprenant la même démarche jusqu'à (1.30) et à l'aide de l'approximation par différence du dérivateur numérique (1.26) pour  $T_d = T$ , on obtient :

$$\sum_j a_{n-j}^* \frac{\partial g(jT + u - \tau)}{\partial u} \approx \frac{1}{2T} \sum_j a_{n-j}^* (g(jT + T - \tau) - g(jT - T - \tau)) \quad (1.36)$$

Sachant que  $g(jT + T - \tau) = 0$  pour  $j \neq -1$  et  $g(jT - T + \tau) = 0$  pour  $j \neq 1$ , on obtient donc :

$$\sum_j a_{n-j}^* \frac{\partial g(jT + u - \tau)}{\partial u} \approx a_{n+1}^* g(-\tau) - a_{n-1}^* g(-\tau) \quad (1.37)$$

$$\propto a_{n+1}^* - a_{n-1}^*. \quad (1.38)$$

Par suite,

$$\frac{\partial |\epsilon_n(u, a_n)|^2}{\partial u} \approx K_1 \Re \{ a_{n+1}^* x_n(u) - x_n(u) a_{n-1}^* \} + K_2, \quad (1.39)$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes par rapport à  $u$ . Comme  $a_{n+1}$  n'est pas disponible à l'instant  $n$ , un simple décalage du premier terme ramène à l'erreur d'adaptation :

$$e_n(\hat{\tau}_{n-1}, \hat{a}_n) = \Re \{ x_{n-1}(\hat{\tau}_{n-1}) a_n^* - x_n(\hat{\tau}_{n-1}) a_{n-1}^* \} \quad (1.40)$$

Ce détecteur est appelé le détecteur de Müller & Mueller [58].

## 1.4 Approches non assistées par les données basées sur l'estimateur MV

Dans la section précédente, nous avons décrit plusieurs détecteurs de synchronisation dont le fonctionnement nécessite des décisions fiables sur les symboles ou la connaissance des symboles transmis. Dans cette section, nous étudions les détecteurs non assistés qui, en principe, devraient avoir de meilleures performances que les premiers lorsque les décisions ne sont pas disponibles ou ne sont pas fiables.

L'objectif de ces approches étant de pouvoir estimer l'erreur de synchronisation sans se soucier des données, nous devrions, à cette fin, moyennner d'abord la fonction de vraisemblance  $\Lambda(\mathbf{r}|\tau, \mathbf{a})$  :

$$\Lambda(\mathbf{r}|\tau, \mathbf{a}) = \exp \left( \sum_j \frac{\Re \{a_j^* x_j(\tau)\}}{\sigma_n^2} - \sum_j \frac{|a_j|^2}{2\sigma_n^2} \right) \quad (1.41)$$

par rapport aux données  $\mathbf{a}$  et ensuite chercher le maximum de la fonction de vraisemblance marginale  $\Lambda(\mathbf{r}|\tau)$ . Malheureusement, cette méthode conduit à des difficultés de mise en oeuvre importantes. Ainsi, au lieu de développer cette solution, nous avons recours aux approximations suivantes. Premièrement, nous laissons tomber le second terme de l'exponentielle dans (1.41) bien que cela augmente le niveau du bruit résiduel. Nous verrons plus loin comment lutter contre ce bruit avec d'autres méthodes. Deuxièmement, nous supposons que le RSB est suffisamment faible pour que le développement en série de Taylor de l'exponentielle (1.41) puisse être tronqué au terme quadratique, à savoir,

$$\Lambda(\mathbf{r}|\tau, \mathbf{a}) \approx 1 + \sum_j \frac{\Re \{a_j^* x_j(\tau)\}}{\sigma_n^2} + \frac{1}{2} \left( \sum_j \frac{\Re \{a_j^* x_j(\tau)\}}{\sigma_n^2} \right)^2 \quad (1.42)$$

Troisièmement, nous moyennons par rapport aux symboles. En éliminant quelques termes qui n'ont aucun effet sur la maximisation de la fonction de vraisemblance [32, 53], nous obtenons :

$$\Lambda(\mathbf{r}|\tau) \approx \sum_j \frac{|x_j(\tau)|^2}{2\sigma_n^2}, \quad (1.43)$$

ce qui représente l'approximation désirée de la fonction de vraisemblance marginale  $\Lambda(\mathbf{r}|\tau)$ . Il s'agit d'une expression quadratique impliquant les échantillons provenant du filtre adapté. Cette formule indique que l'estimation du moment d'échantillonnage optimal correspond au choix du délai temporel qui maximise l'énergie de la séquence  $x_j(\tau)$ . Une façon de poursuivre la maximisation de l'énergie consiste à chercher le zéro de la dérivée de la fonction de vraisemblance. A partir de (1.43), la dérivée par rapport à  $\tau$  s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{r}|\tau)}{\partial \tau} \approx \sum_j \Re \left\{ \frac{x_j^*(\tau)}{\sigma_n^2} \frac{\partial x_j(\tau)}{\partial \tau} \right\}. \quad (1.44)$$

Ainsi, le terme générique de la somme peut être calculé pour  $\tau = \hat{\tau}_{k-1}$  et utilisé comme signal d'erreur pour mettre à jour l'estimation du retard temporel  $\hat{\tau}_k$ . Cela mène à l'équation d'adaptation suivante :

$$\hat{\tau}_n = \hat{\tau}_{n-1} + \mu e_n(\hat{\tau}_{n-1}) \quad (1.45)$$

où  $\mu$  est le pas d'adaptation et

$$e_n(\hat{\tau}_{n-1}) = \Re \left\{ x_n^*(\hat{\tau}_{n-1}) \frac{\partial x_n(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{n-1}} \right\} \quad (1.46)$$

En comparant (1.46) avec l'algorithme supervisé (1.25), on voit que la décision  $\hat{a}_n$  a été remplacée par l'échantillon filtré à la réception  $x_n(\hat{\tau}_{n-1})$ . La complexité des deux détecteurs est sensiblement la même. En particulier, ils ont besoin de deux filtres séparés, le filtre adapté et le filtre dérivé correspondant. Ce genre de détecteur est dit de type "Non-Data-Aided" (NDA). Comme dans la section 1.3, une simplification possible est de rapprocher l'échantillon dérivé  $\frac{\partial x_n(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{n-1}}$  par une différence finie.

#### 1.4.1 Détecteur *Early Late* non supervisé (ELD NDA)

L'expression de l'erreur d'adaptation de ce détecteur a été obtenue en évaluant  $\frac{\partial x_n(u)}{\partial u}$  par une dérivation dans le domaine numérique à l'aide du filtre dérivateur à deux points dont l'expression est donnée par (1.26) avec  $T_d = T/2$ .

L'erreur d'adaptation du ELD de type NDA est donnée par :

$$\frac{\partial x_n(u)}{\partial u} = x_{n+\frac{1}{2}}(u) - x_{n-\frac{1}{2}}(u) \quad (1.47)$$

avec

$$e_n(\hat{\tau}_{n-1}) = \Re \left\{ x_n^*(\hat{\tau}_{n-1}) (x_{n+\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{n-1}) - x_{n-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{n-1})) \right\}. \quad (1.48)$$

#### 1.4.2 Détecteur de Gardner

L'algorithme de Gardner peut être obtenu par un simple décalage de  $T/2$  de l'équation (1.47) ou en remplaçant dans l'erreur d'adaptation du ZCD les symboles  $\hat{a}_{n-1}$  et  $\hat{a}_n$  par l'échantillon correspondant du signal  $x(t)$  :

$$e_n(\hat{\tau}_{n-1}) = \Re \left\{ x_{n-\frac{1}{2}}^*(\hat{\tau}_{n-1}) (x_n(\hat{\tau}_{n-1}) - x_{n-1}(\hat{\tau}_{n-1})) \right\} \quad (1.49)$$

En pratique, la récupération du retard temporel se compose de deux opérations de base : l'estimation des positions des impulsions du signal, par rapport à une référence temporelle locale et l'utilisation de cette information pour le calcul des échantillons optimaux du signal qui seront utilisés dans le processus de détection. La première de ces opérations est appelée mesure de synchronisation ; la dernière est le réglage d'horloge ou l'ajustement. Les positions des impulsions du signal correspondent aux ouvertures maximales du diagramme de l'oeil (voir Figure 1.2, partie 1). Les temps d'échantillonnage en réception sont dictés par un oscillateur libre (voir Figure 1.2, partie 2) et sont *a priori* sous-optimaux, alors que le réglage optimum se

fait par interpolation entre des échantillons [52] (voir Figure 1.2, partie 3). Pour que le réglage ou le ré-échantillonnage numérique du signal soit possible, la fréquence d'échantillonnage doit respecter le critère de Shannon. En d'autres termes, le rythme d'échantillonnage à la réception doit être strictement supérieur à deux fois la fréquence maximale du signal.

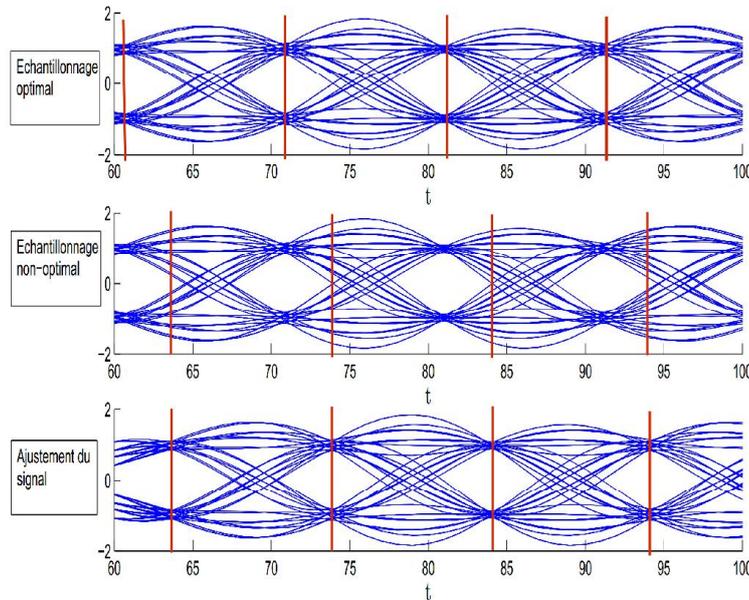


FIGURE 1.2: Ajustement du signal aux meilleurs instants d'échantillonnage

L'implémentation des différents détecteurs présentés requiert le calcul des valeurs intermédiaires du signal entre deux instants d'échantillonnage successifs. La technique d'ajustement la plus primitive consiste à sélectionner un échantillon parmi tous ceux prélevés pendant la durée symbole. Cette méthode conduit à une erreur de synchronisation importante et nécessite un facteur de suréchantillonnage élevé. Il est donc préférable d'utiliser une technique d'interpolation numérique pour ne pas avoir besoin de trop augmenter le nombre de suréchantillons.

## 1.5 Interpolation et ajustement

Dans les équations d'adaptation des détecteurs d'erreur temporelle présentés dans le paragraphe précédent, on était amené à calculer la valeur du signal  $x_n(\tau + \delta)$  après avoir reçu l'ensemble de symboles  $\{x_i(\tau)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Ceci est réalisable à l'aide d'opérations mathématiques appliquées sur la version discontinue du signal, appelées interpolations. Plusieurs types d'interpolations peuvent répondre à ce besoin, en partant de l'interpolateur idéal et en arrivant aux interpolateurs polynomiaux. Commençons tout d'abord par définir ce qu'est un interpolateur idéal.

### 1.5.1 Interpolation idéale

L'idée est de pouvoir restituer à partir de certains échantillons  $\{y(mT)\}$  la forme d'onde continue en temps  $y(t)$ , à l'aide de la formule d'interpolation suivante :

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_I(t - mT)y(mT), \quad (1.50)$$

avec

$$h_I(t) \triangleq \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}. \quad (1.51)$$

Cette approche est non réalisable, car l'équation implique une somme infinie alors qu'en pratique, seulement un nombre limité de termes peut être manipulé. Tronquer la somme entraînera inévitablement une certaine distorsion du signal. De plus, la complexité d'implémentation de ce genre d'interpolateurs est aussi un facteur limite. En fait, en supposant la quantification des coefficients  $h_I(t - mT)$  sur des mots de longueur  $W$  bits, alors pour chaque interpolation le transfert de la totalité des mots au filtre interpolateur, correspondant à une valeur quantifiée de  $h_I(t - mT)$ , allourdirait le traitement au niveau du synchroniseur.

En pratique, le filtre interpolateur est mis en oeuvre en utilisant un filtrage polyphasé. Il s'agit de sauvegarder en mémoire des versions décalées d'une fraction de la période d'échantillonnage du sinus cardinal puis de sélectionner la valeur de la réponse impulsionnelle stockée la plus proche du décalage en question [75].

Un autre type d'interpolation à complexité réduite, appelé interpolation polynomiale, est utilisé en pratique. Il est obtenu via des approximations de l'interpolateur idéal.

### 1.5.2 Interpolation polynomiale

D'excellents interpolateurs peuvent être mis en oeuvre en remplaçant  $h_I(\cdot)$  dans (1.51) par des fonctions continues par morceaux de courte durée (par exemple, deux ou quatre intervalles d'échantillonnage). Ces fonctions sont des réponses impulsionnelles de filtres à base de polynômes.

Soit  $t_n = (I_n + \epsilon_n)T$ , l'instant d'interpolation du signal, où  $I_n$  est la partie entière de  $t_n/T$  et  $\epsilon_n$  est la partie fractionnelle.  $y(t_n)$  est obtenu à l'aide de l'expression suivante :

$$y(t_n) = \sum_{i=-I_1}^{I_2} c_i(\epsilon_n)y((I_n - i)T), \quad (1.52)$$

avec

$$c_i(\epsilon_n) \triangleq h_I(iT + \epsilon_n T), \quad (1.53)$$

et  $I_1$  et  $I_2$  sont les nombres d'échantillons précédant et suivant l'échantillon à l'instant  $I_n T$ .  $c_i(c_n)$  sont des échantillons de la réponse impulsionnelle  $h_I(t)$ .  $h_I(t)$  est approximé par un polynôme dont le choix des coefficients répond à un certain critère d'optimalité telle que la minimisation de l'erreur quadratique entre la réponse impulsionnelle de l'interpolateur idéal, le sinus cardinal, et son approximation [26, 54]. Nous réalisons ainsi une interpolation à l'aide d'un ensemble de  $M$  filtres à réponse impulsionnelle finie dont la sortie du  $j^{\text{ème}}$  filtre est premièrement multipliée par  $\epsilon_n^j$  est ensuite sommée :

$$h_I(iT + \epsilon_n T) = \sum_{j=1}^M \beta_{i,j} \epsilon_n^j. \quad (1.54)$$

Ce genre d'interpolateur peut être utilisé en temps réel et il n'y a presque aucune différence entre des interpolateurs de 3<sup>ème</sup> et de 4<sup>ème</sup> ordre [54].

### 1.5.3 Interpolateur de Lagrange

Un autre interpolateur polynômial, plus souvent utilisé, est l'interpolateur de Lagrange [76]. Il diffère des autres interpolateurs polynômiaux classiques par le fait que :

- le degré du polynôme interpolateur est égal au nombre d'échantillons utilisés moins 1.  
un seul polynôme est valide sur tout le support des échantillons. Ceci fait que  $h_I(iT + \epsilon_n T)$  est indépendant de  $n$ .
- les coefficients de l'interpolateur de Lagrange sont complètement spécifiés pour un  $y(t_n)$  donné, alors que pour un interpolateur polynômial classique les coefficients sont le résultat d'une optimisation.

Voici quelques exemples de réponses impulsionnelles d'un interpolateur de Lagrange.

Pour une interpolation linéaire sur deux échantillons :

$$c_{-1}(\epsilon) = \epsilon \quad (1.55)$$

$$c_0(\epsilon) = 1 - \epsilon \quad (1.56)$$

Pour une interpolation parabolique sur quatre échantillons :

$$c_{-2}(\epsilon) = \alpha \epsilon^2 - \alpha \epsilon \quad (1.57)$$

$$c_{-1}(\epsilon) = -\alpha \epsilon^2 + (1 + \alpha) \epsilon \quad (1.58)$$

$$c_0(\epsilon) = -\alpha \epsilon^2 + (1 - \alpha) \epsilon + 1 \quad (1.59)$$

$$c_1(\epsilon) = \alpha \epsilon^2 - \alpha \epsilon \quad (1.60)$$

où  $\alpha$  est un paramètre dont la valeur optimale est 0.5.

Les coefficients d'un interpolateur cubique en quatre échantillons sont :

$$c_{-2}(\epsilon) = \frac{1}{6}\epsilon^3 - \frac{1}{6}\epsilon \tag{1.61}$$

$$c_{-1}(\epsilon) = -\frac{1}{2}\epsilon^3 + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \epsilon \tag{1.62}$$

$$c_0(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon^3 - \epsilon^2 - \frac{1}{2}\epsilon + 1 \tag{1.63}$$

$$c_1(\epsilon) = -\frac{1}{6}\epsilon^3 + \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{3}\epsilon \tag{1.64}$$

Dans les Figures 1.3, 1.4 et 1.5, nous comparons le résultat des interpolations cubique et quadratique en quatre échantillons à la version continue du signal pour un facteur de suréchantillonnage  $F$  respectivement égal à 2, 4 et 8. Il est clair qu'avec 4 échantillons par période symbole et plus ( $F \geq 4$ ), les interpolateurs cubique et quadratique sont plus proches du signal continu qu'avec 2 échantillons par période symbole. Lorsque  $F$  est égal 2, l'interpolateur cubique est plus précis qu'un interpolateur quadratique. Cependant, des résultats similaires pour les deux interpolateurs sont obtenus lorsque  $F$  est supérieur à 4.

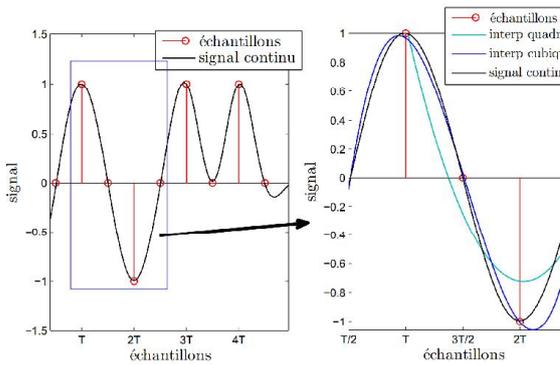


FIGURE 1.3: Interpolation pour un facteur de suréchantillonnage  $F = 2$

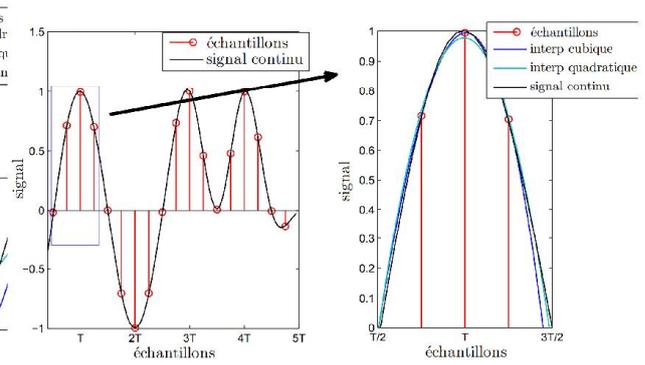


FIGURE 1.4: Interpolation pour un facteur de suréchantillonnage  $F = 4$

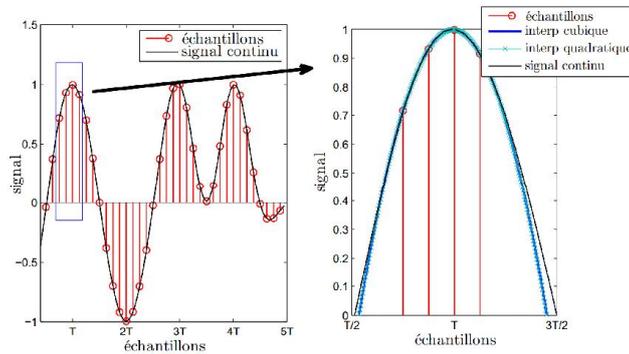


FIGURE 1.5: Interpolation pour pour un facteur de suréchantillonnage  $F = 8$

Dans cette thèse, nous avons choisi d'utiliser un interpolateur cubique à quatre échantillons pour un bon compromis distorsion/complexité.

Ayant présenté les étapes de mise en oeuvre d'un bloc de synchronisation pour l'estimation du retard temporel  $\tau$ , nous allons maintenant passer aux outils de mesure de performance de ces estimateurs.

## 1.6 Etude des performances de poursuite

La qualité d'un estimateur est évaluée à l'aide de deux mesures : le biais et la variance de l'erreur d'estimation [38].

En fonction de la valeur moyenne de l'estimateur,  $E(\hat{\tau})$ , trois situations possibles peuvent se présenter :

1. La valeur moyenne de l'estimateur est égale à la vraie valeur :  $E(\hat{\tau}) = \tau$  pour toute valeur de  $\tau$ . Sous cette condition, l'estimateur est dit non biaisé.
2. La valeur moyenne de l'estimateur diffère de la vraie valeur par une quantité fixe connue, appelée biais,  $B(\hat{\tau})$ , tel que :  $E(\hat{\tau}) = \tau + B(\hat{\tau})$ . Dans ce cas, l'estimateur est dit biaisé. Il peut être transformé en un estimateur non biaisé en soustrayant la valeur du biais de l'estimateur.
3. La valeur moyenne du biais diffère de la vraie valeur du paramètre à estimer par une valeur variable telle que :  $E(\hat{\tau}) = \tau + B(\hat{\tau}, \tau)$ . Dans ce cas, on ne peut pas soustraire le biais de l'estimateur vu qu'il dépend de  $\tau$ .

On souhaite, en général, utiliser des estimateurs non biaisés.

La deuxième mesure de la qualité d'un estimateur est sa variance qui coïncide pour un estimateur non-biaisé avec l'EQM. En fait, un estimateur non biaisé peut avoir des valeurs très dispersées par rapport à sa moyenne alors qu'un estimateur biaisé peut donner des estimés très proches de la vraie valeur désirée. L'EQM nous fournit une idée sur l'erreur globale de biais et de dissémination ou de répartition de l'estimateur. Elle est définie comme étant la moyenne du carré de l'erreur d'estimation. Si  $\boldsymbol{\tau}$  est un vecteur, l'expression de l'EQM est donnée par :

$$M(\hat{\boldsymbol{\tau}}) = E((\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau})(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau})^T) \quad (1.65)$$

$$= B(\hat{\boldsymbol{\tau}})B(\hat{\boldsymbol{\tau}})^T + cov(\hat{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.66)$$

où  $cov(\hat{\boldsymbol{\tau}})$  est la matrice de covariance de l'estimateur. Par conséquent, plus la valeur de l'EQM est faible, plus l'estimateur est performant. Nous avons ainsi intérêt à concevoir des estimateurs non biaisés et dont l'EQM est minimale. Nous allons, dans le paragraphe suivant, évaluer le biais et l'EQM instantanés et asymptotiques des estimateurs adaptatifs proposés dans le paragraphe précédent. Ces performances sont aussi appelées performances de poursuite.

### 1.6.1 Biais et erreur quadratique moyenne théoriques

Nous essayerons dans cette partie de trouver l'expression théorique du biais et de l'erreur quadratique moyenne à chaque itération des détecteurs d'erreur temporelles présentés dans la section 1.3. Dans cette analyse, nous considérons que le délai estimé est proche du délai réel  $\tau$  et que nous disposons de décisions fiables sur les symboles  $\hat{a}_k \simeq a_k$ .

Pour ce faire, nous allons approximer le terme d'adaptation  $e_k(a_k, \tau_{k-1})$  par la somme d'une trajectoire moyenne, fonction linéaire de l'erreur d'estimation instantanée  $\delta_k = \tau_{k-1} - \tau$  et d'un bruit résiduel  $N_k$  autour de cette trajectoire moyenne :

$$e_k(a_k, \tau_{k-1}) = S(\delta_k) + N_k, \quad (1.67)$$

où :

$$S(\delta_k) = E[e_k(a_k, \tau_{k-1})] \simeq \rho\delta_k, \quad (1.68)$$

est la courbe  $S(\cdot)$  définie dans [52] ;  $N_k$  est le bruit de la boucle de synchronisation qui prend en considération d'une part, l'auto-bruit (ou bruit auto-généré) du détecteur  $N_k^{sn}$  dû à la fluctuation des paramètres de nuisance (i.e les symboles  $a_i$  avec  $i$  différent de  $k$ ) et d'autre part, le bruit d'observation  $N_k^{on}$ .

$$N_k = N_k^{sn} \mid N_k^{on} \quad (1.69)$$

La courbe  $S(\cdot)$  est une courbe caractéristique de la manière dont l'erreur est prise en compte [89]. Elle caractérise, en fait, l'ouverture moyenne du diagramme de l'oeil qui est un critère de décision sur les instants d'échantillonnage.

Nous allons évaluer dans le paragraphe suivant  $\rho$  défini dans (1.68) et  $\sigma_N^2$ , la variance de  $N_k$  pour tous les détecteurs.

L'estimé du délai temporel à l'instant  $k$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_k &= \tau_{k-1} + \mu e_k(a_k, \tau_{k-1}) \\ &= \tau_{k-1} + \gamma(\tau_{k-1} - \tau) + q_k, \end{aligned} \quad (1.70)$$

où d'après (1.67) et (1.68),  $\gamma = \rho\mu$  et  $q_k = \mu N_k$ . Ainsi, nous obtenons itérativement :

$$\begin{aligned} \tau - \tau_k &= \tau - \tau_{k-1} - \gamma(\tau_{k-1} - \tau) - q_k \\ &= (1 + \gamma)(\tau - \tau_{k-1}) - q_k \\ &= (1 + \gamma)^2(\tau - \tau_{k-2}) - q_{k-1}(1 + \gamma) - q_k \\ &= (1 + \gamma)^{k-1}(\tau - \tau_1) - \sum_{i=2}^k q_i(1 + \gamma)^{k-i}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Ceci mène aux expressions suivantes du biais  $B_k$  et de l'EQM  $M_k$  :

$$\begin{aligned} B_k &= E[\tau - \tau_k] \\ &= (1 + \gamma)^{k-1} E(\tau - \tau_1), \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} M_k &= E((\tau - \tau_k)^2) \\ &= (1 + \gamma)^{2k-2} E((\tau - \tau_1)^2) + \sum_{i=2}^k E(q_i^2) (1 + \gamma)^{2k-2i} \\ &= (1 + \gamma)^{2k-2} E((\tau - \tau_1)^2) + \frac{1 - [(1 + \gamma)^2]^{k-1}}{1 - (1 + \gamma)^2} \sigma_q^2, \end{aligned} \quad (1.73)$$

avec  $\sigma_q^2 = \mu^2 \sigma_N^2$ .

La condition suffisante pour avoir un estimateur asymptotiquement non-biaisé est  $-2 < \gamma = \mu\rho < 0$ . Le pas d'adaptation joue ainsi un rôle important dans la convergence et la consistance de l'algorithme d'estimation. En faisant tendre le nombre d'observations vers l'infini, le biais et l'EQM asymptotiques sont donnés par :

$$B_\infty = 0, \quad (1.74)$$

$$M_\infty = \frac{\sigma_q^2}{1 - (1 + \gamma)^2} = \frac{\mu^2 \sigma_N^2}{1 - (1 + \mu\rho)^2}. \quad (1.75)$$

Nous pouvons déduire que, même à fort RSB, l'EQM des algorithmes de synchronisation sature à cause de l'auto-bruit.

Bien que l'estimateur au sens du MV soit théoriquement satisfaisant, les algorithmes adaptatifs qui en découlent perdent beaucoup de bonnes propriétés d'un véritable estimateur MV. L'origine de cette dégradation est le bruit propre des détecteurs qui persiste même à fort RSB. Nous remarquons également que l'EQM à la convergence dépend de la valeur du pas d'adaptation. Par conséquent, un mauvais choix de  $\mu$  pourrait dégrader les performances de l'estimateur.

### 1.6.2 Linéarisation de l'erreur d'adaptation

L'expression de  $S(\delta_k)$  et de  $N(k)$  (i.e  $\rho$  et  $\sigma_N^2$ ) dépend du DET utilisé. Dans ce qui suit, on va évaluer l'expression de ces paramètres pour les différentes techniques proposées.

Prenons l'exemple d'un détecteur MV. De (1.20), (1.25) et (1.68) :

$$\begin{aligned} S(\delta_k) &= E \left[ \Re \left\{ \frac{\partial \Re \{a_k^* x_k(u)\}}{\partial u} \Big|_{u=\hat{\tau}_{k-1}} \right\} \right] \\ &= \sum_i \Re \{ E[a_k^* a_i] \dot{g}((k-i)T + \hat{\tau}_{k-1} - \tau) \} \\ &= E[|a_k|^2] \dot{g}(\hat{\tau}_{k-1} - \tau). \end{aligned}$$

Etant donné que nous supposons que  $\hat{\tau}_{k-1}$  est proche de  $\tau$ , alors en effectuant un développement en série de Taylor de premier ordre, et comme  $\dot{g}(0) = 0$ , nous obtenons :

$$S(\delta_k) \simeq E[|a_k|^2] \ddot{g}(0) \delta_k. \quad (1.76)$$

Soit  $A^2 = E[|a_k|^2]$ . Par conséquent :

$$\rho_{MV} = A^2 \ddot{g}(0). \quad (1.77)$$

D'autre part :

$$N(k) = \sum_{i, i \neq k} \operatorname{Re} \{ a_k^* a_i \} \dot{g}((k-i)T + \hat{\tau}_{k-1} - \tau) + \Re \{ a_k^* v'_k(\hat{\tau}_{k-1}) \}. \quad (1.78)$$

Ce qui fait que :

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \operatorname{var} \left( \sum_{i, i \neq k} a_k^* a_i \dot{g}((k-i)T + \hat{\tau}_{k-1} - \tau) \right) + A^2 \sigma_n^2 \\ &= E \left[ \sum_{i, i \neq k} |a_k|^2 |a_i|^2 \dot{g}^2((k-i)T + \hat{\tau}_{k-1} - \tau) \right] + A^2 \sigma_n^2 \\ &= A^4 \sum_{i, i \neq k} \dot{g}^2((k-i)T + \hat{\tau}_{k-1} - \tau) + A^2 \sigma_n^2 \\ &\simeq A^4 \left( \dot{g}^2(T) + \dot{g}^2(-T) + \dot{g}^2(2T) + \dot{g}^2(-2T) \right) + A^2 \sigma_n^2 \\ &= 2A^4 \left( \dot{g}^2(T) + \dot{g}^2(2T) \right) + A^2 \sigma_n^2. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Nous présentons, dans l'annexe A, le développement analytique de  $\rho$  et  $\sigma_N^2$  pour les autres détecteurs. Le récapitulatif des résultats trouvés sont regroupés dans la Table 1.1.

TABLE 1.1: Tableau récapitulatif

Détecteur	$\rho$	$\sigma_N^2$
MV	$A^2 \ddot{g}(0)$	$2A^4 (\dot{g}^2(T) + \dot{g}^2(2T))$
EL	$2A^2 \dot{g}(\frac{T}{2})$	$2A^4 g^2 \left( -\frac{T}{2} \right) + 2A^2 \sigma_n^2$
ZC	$2A^2 \dot{g}(\frac{T}{2})$	$A^4 g^2 \left( -\frac{T}{2} \right) + 2A^2 \sigma_n^2$
MM	$2A^2 \dot{g}(-T)$	$2A^2 \sigma_n^2 + A^2 g(0)$
Gardner	$\frac{2KA^2\pi}{T^2}$	$2A^2 \sigma_n^2 g(0)^2$

Afin de valider les résultats théoriques, nous comparons l'EQM empirique avec celle obtenue analytiquement pour différents détecteurs et différentes modulations. Les valeurs empiriques

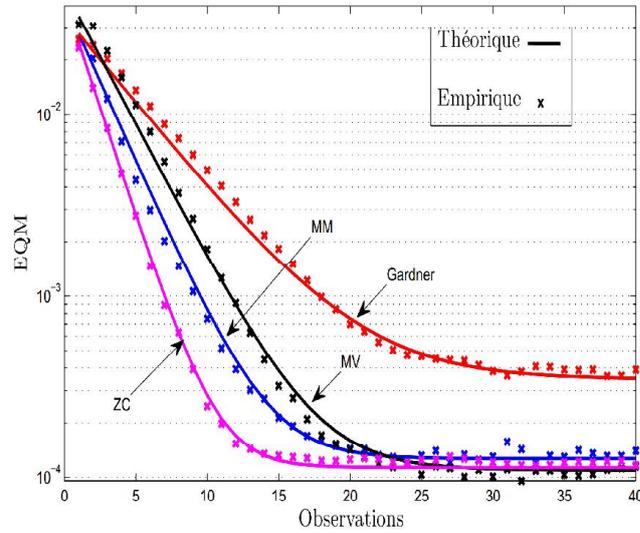


FIGURE 1.6: EQM en fonction du numéro de l'échantillon pour un signal BPSK, RSB = 10 dB, roll-off = 0.3.

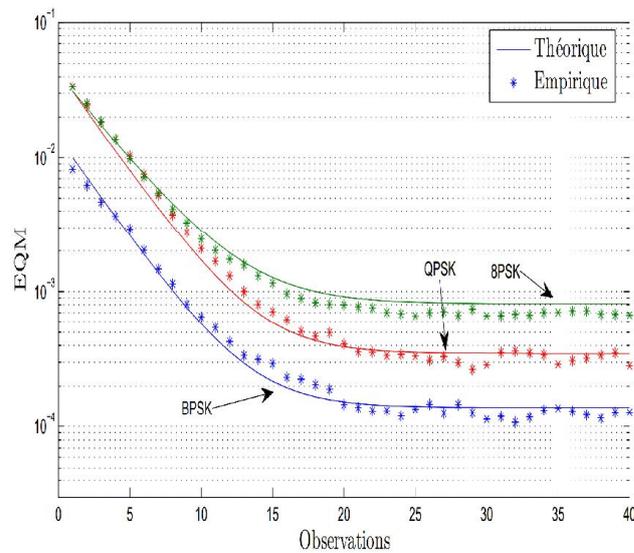


FIGURE 1.7: EQM en fonction du numéro de l'échantillon pour un détecteur MV, RSB = 10 dB, roll-off = 0.3.

sont obtenues pour un bloc de 40 échantillons du signal ayant traversé un filtre en cosinus surelevé avec un coefficient de roll-off  $\alpha = 0.3$ . A chaque instant  $k$ , un nouvel échantillon est reçu et la valeur estimée de  $\tau$  est obtenue à l'aide de l'équation d'adaptation du détecteur choisi. Nous initialisons la valeur estimée du retard à 0.

Les Figures 1.6 et 1.7, respectivement, superposent l'EQM théorique et expérimentale de tous

les détecteurs en utilisant une modulation BPSK (Figure 1.6) et pour un détecteur MV en utilisant des signaux BPSK, QPSK et 8-PSK (Figure 1.7). Les figures montrent que les EQM empiriques correspondent parfaitement aux expressions obtenues analytiquement pour les différents détecteurs et les différentes modulations. La première constatation est que tous les détecteurs convergent rapidement vers l'état d'équilibre (entre 15 et 25 échantillons). Nous voyons aussi que le détecteur MV est le plus performant ; toutefois, il est le détecteur le plus complexe à mettre en oeuvre. Nous constatons également que l'EQM est détériorée en augmentant l'ordre de modulation. Cette détérioration peut être compensée en diminuant le pas d'adaptation au dépend d'une convergence plus lente.

Nous pouvons déduire de l'expression (1.75) que l'EQM à l'état d'équilibre dépend de la valeur du facteur roll-off pour le même estimateur. A partir de la même expression, nous déduisons aussi que l'EQM des détecteurs dépend de la valeur du RSB. Ce résultat est confirmé par les Figures 1.8 et 1.9 dans lesquelles nous présentons les courbes d'EQM à l'équilibre de différents détecteurs pour un roll-off respectivement égal à 0.7 et 0.3. On voit que l'EQM augmente avec pour un roll-off égal à 0.7 par rapport à un roll-off égal à 0.3 pour un détecteur de type MM et diminue pour un détecteur de type ZC ou EL. L'EQM augmente pour une MMD et diminue pour un ZCD et un ELD. En effet, la valeur de l'EQM que nous représentons sur ces figures dépend de  $\mu$ ,  $\rho$  et  $\sigma_N$ . Les expressions de ces deux derniers termes sont données dans la Table 1.1. Les valeurs de  $\rho$  et de  $\sigma_N$  pour ces détecteurs sont liées au choix du filtre  $g(\cdot)$  et par suite à la valeur du roll-off. Nous remarquons que le signe du paramètre de la fonction  $g(\cdot)$  pour les détecteurs ZC et le EL dans l'expression de  $\rho$  est l'inverse de celui du détecteur MM. Nous remarquons également que le bruit de la boucle ( $\sigma_N$ ) augmente avec le roll-off pour un détecteur MM et diminue avec le roll-off pour les détecteurs ZC et le EL ce qui explique la variation dans le comportement des courbes.

Dans la Figure 1.10, nous présentons la valeur de l'EQM à la convergence en fonction de la valeur du retard normalisé pour des DET de type MV et de type ZC. Nous remarquons que plus le retard s'éloigne de la valeur nulle plus l'EQM est détériorée. Ceci est dû au fait que la capacité de correction de l'erreur de synchronisation est limitée par l'amplitude de l'erreur. En effet, lorsque le décalage temporel dépasse la période symbole (canal dispersif en temps), l'échantillon reçu à l'instant  $k$  ne correspond pas au  $k^{\text{ème}}$  symbole émis. Par conséquent, même si l'on essaie d'ajuster l'échantillon en question à l'aide des techniques d'interpolation, on risque d'interférer soit avec le symbole précédent, soit avec le symbole suit (voir Figure 1.11).

En fait, le DET tend à trouver la valeur de  $\tau$  qui maximise l'énergie reçue dans  $x_k(\tau)$ . Dans ce cas, il est préférable d'assurer une égalisation du signal conjointement avec la synchronisation temporelle afin de réduire l'ISI.

Il est souvent difficile de trouver l'expression d'un estimateur non biaisé et à variance minimale. Le problème est alors abordé en cherchant une borne minimale à l'EQM pour tout estimateur non biaisé et comparer ensuite la variance de l'estimateur étudié à cette borne de référence.

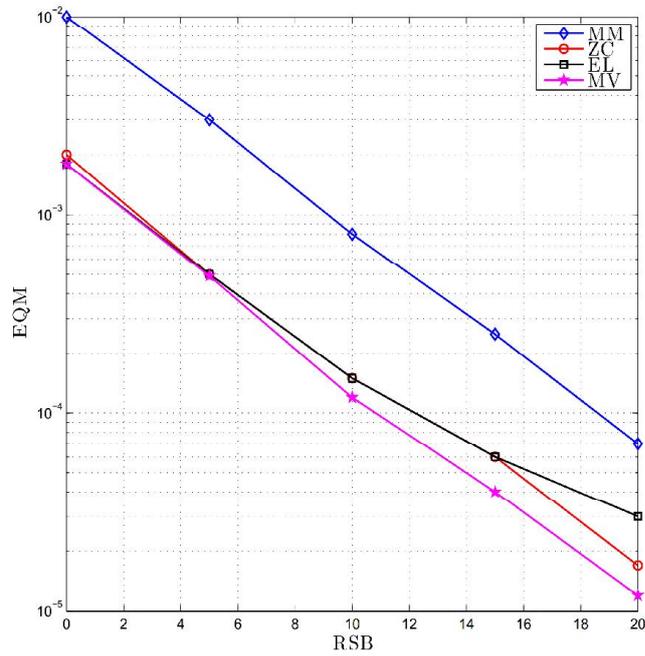


FIGURE 1.8: EQM en fonction du RSB, roll-off= 0.7

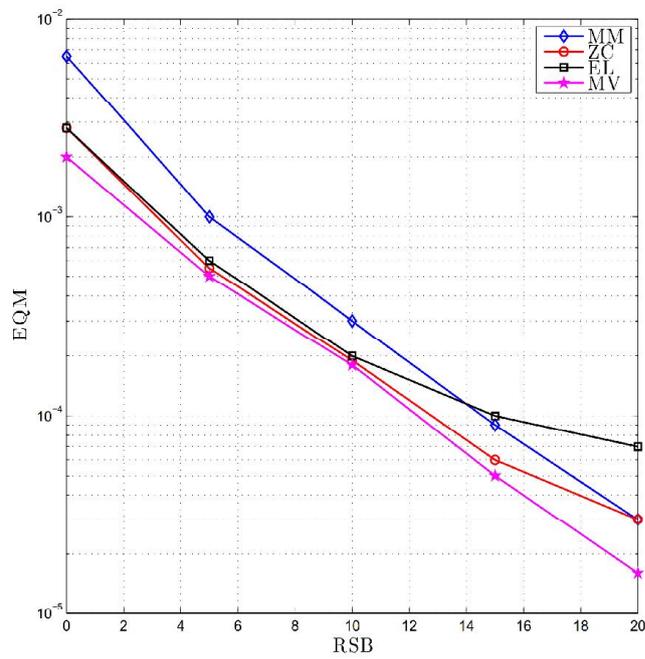


FIGURE 1.9: EQM en fonction du RSB, roll-off= 0.3

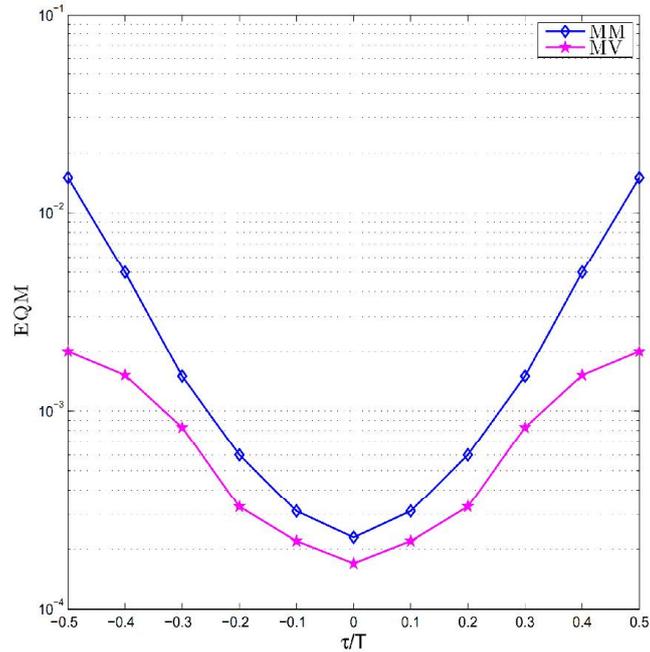


FIGURE 1.10: EQM en fonction du délai temporel normalisé, roll-off= 0.3, RSB= 10dB

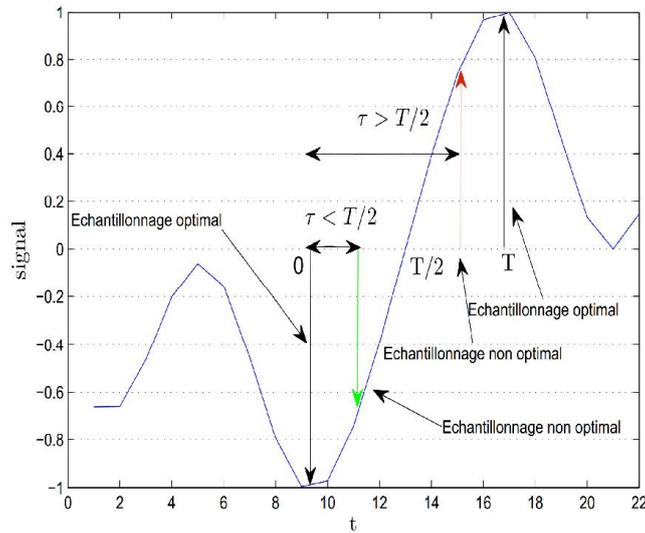


FIGURE 1.11: Echantillonnage d'un signal

## 1.7 Les performances limites de l'estimateur

La borne de Cramèr-Rao (BCR) est la plus utilisée vu sa simplicité de calcul. Elle diffère des autres bornes par le fait qu'elle fournit une limite locale au voisinage du paramètre en

question. Les autres bornes imposent d'autres contraintes sur tout le support du paramètre estimé. L'étude de cette borne est importante vu qu'elle permet de comparer la variance d'un estimateur sous-optimal réalisable à celle d'un estimateur optimal mais qui peut être non réalisable. Le but est d'évaluer la perte engendrée par l'implémentation de cet estimateur sous-optimal [54]. Nous allons dans ce qui suit définir cette borne dans le cas d'une estimation d'un paramètre déterministe, à savoir la BCR standard, ou d'un paramètre aléatoire, auquel cas on parle de BCRB.

### 1.7.1 Borne de Cramèr-Rao standard

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la BCR sur la variance des erreurs d'estimation d'un retard temporel constant dans le temps. Dans son livre, Van Trees [83] propose une discussion détaillée et un développement mathématique des différentes bornes théoriques. Nous allons nous limiter ici à l'étude de la borne d'estimation d'un seul paramètre scalaire  $\tau$  déterministe et inconnu. Considérons un estimateur non biaisé  $\hat{\tau}$  du retard temporel ( $E(\hat{\tau}) = \tau$ ). La variance de cet estimateur ou l'EQM,  $M$ , est telle que :

$$M = \text{var}(\hat{\tau} - \tau) \geq \frac{1}{F(\tau)} = \text{BCR}(\tau), \quad (1.80)$$

où  $F(\tau)$  est l'information de Fisher dont l'expression est donnée par :

$$F(\tau) = -E \left[ \frac{\partial^2 \log(P(\mathbf{r}|\tau))}{\partial \tau^2} \right]. \quad (1.81)$$

Si le paramètre à estimer est de dimension  $n$ , alors  $F(\tau)$  devient une matrice carrée de dimension  $n \times n$ .

La borne donnée par (1.80) est la borne de Cramèr-Rao. Les premiers à démontrer cette inégalité étaient Fisher et Dugué mais elle a été aussi prouvée par Cramèr et Rao et porte depuis leurs noms. Tout estimateur non biaisé pouvant atteindre cette borne est dit efficace [83]. Une autre écriture équivalente à (1.81) lorsque  $P(\mathbf{r}|\tau)$  converge uniformément sur  $R$ , ce qui est notre cas vu qu'il s'agit de la loi normale, est donnée par :

$$F(\tau) = E \left[ \left( \frac{\partial \log(P(\mathbf{r}|\tau))}{\partial \tau} \right)^2 \right]. \quad (1.82)$$

Etant donné que  $P(\mathbf{r}|\tau)$  est une fonction non linéaire de  $\tau$ , alors l'estimateur proposé ne peut pas atteindre la borne et par suite ne peut pas être qualifié d'"efficace" [83]. Nous pouvons par contre considérer qu'à fort RSB et pour un grand nombre d'échantillons  $N$ , les performances de l'estimateur s'approchent de cette borne.

D'autres variétés de la BCR ont également été proposées lorsque le calcul théorique devient difficile à réaliser. Nous pouvons citer à titre d'exemple la BCR modifiée [22] et la borne de

Miller Chang [79]. Bien que ces nouvelles bornes soient plus simples à calculer, elles restent toujours inférieures à la BCR et elles coïncident seulement à fort RSB.

Nous avons jusqu'à maintenant étudié la borne minimale d'estimation d'un retard déterministe. Si ce retard est modélisé par une variable aléatoire  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_N]^T$  associée à une densité de probabilité *a priori*  $P(\boldsymbol{\tau})$ , on parle alors d'une borne de Cramèr-Rao bayésienne, comme défini dans le paragraphe suivant.

### 1.7.2 Borne de Cramèr-Rao bayésienne

Selon Van Trees [83] la BCRB est déduite à partir de l'inégalité :

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \geq \mathbf{F}_B(\boldsymbol{\tau}), \quad (1.83)$$

où  $\mathbf{F}_B(\boldsymbol{\tau})$ , donnée par :

$$\mathbf{F}_B(\boldsymbol{\tau}) = E_{\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\tau}}^T \log(P(\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}))] \quad (1.84)$$

est la matrice d'information de Fisher bayésienne et  $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}}$  est la matrice de covariance associée à l'estimateur bayésien  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  telle que :

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \triangleq E_{\mathbf{r}, \boldsymbol{\tau}} [(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau})(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau})^T]. \quad (1.85)$$

En appliquant la loi de Bayes :

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) \quad \forall x, y, \quad (1.86)$$

alors  $\mathbf{F}_B(\boldsymbol{\tau})$  s'écrit :

$$\mathbf{F}_B(\boldsymbol{\tau}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\tau}}^T \log(P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\tau}))] + E_{\boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\tau}}^T \log(P(\boldsymbol{\tau}))] \quad (1.87)$$

$$= E_{\boldsymbol{\tau}} [\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})] + E_{\boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\tau}}^T \log(P(\boldsymbol{\tau}))]. \quad (1.88)$$

Dans (1.87), le premier terme dépend des observations tandis que le second terme ne dépend que de l'*a priori* sur les paramètres, ce qui caractérise l'approche bayésienne. Contrairement à la BCR de la section 1.7.1, cette borne est un minorant global de l'EQM, c'est-à-dire sur tout le support de  $\boldsymbol{\tau}$ . Elle peut être classée dans la famille des bornes de Weiss-Weinstein [71] vu qu'elle est obtenue grâce à l'inégalité (1.83) sur la matrice de covariance. Cette famille comprend également la famille des bornes Ziv-Zakai [99], les bornes de Bobrowsky-Mayer-Wolf-Zakai [14], de Bhattacharyya bayésienne [82], de Reuven-Messer [72]. Une étude sur ces familles de bornes a été présentée dans le livre de Van Trees and Bell [85]. Comme dans le cas déterministe, la BCRB est souvent plus facile à calculer que les autres bornes.

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé les résultats basiques requis pour l'étude des problèmes de synchronisation temporelle dans un récepteur numérique. Nous avons commencé par définir le modèle de base du système étudié. Ensuite, nous avons présenté des estimateurs adaptatifs du retard temporel qui maximisent la fonction de vraisemblance et évalué leurs performances en termes de biais et d'EQM. Enfin, nous avons présenté les bornes limites des performances de tout estimateur non biaisé du retard temporel.

Les techniques d'estimation du retard temporel se divisent en techniques de type DA et d'autres de type NDA. Le premier type consiste à introduire des signaux de référence dans la trame transmise pour aider dans le processus de synchronisation. Même si cette technique fournit une estimation plus précise du retard temporel, elle réduit le débit utile du système global. Ceci est évité dans le mode NDA où seules des données d'informations utiles, inconnues par le récepteur, sont transmises. Bien que ce mode de fonctionnement permette d'optimiser l'efficacité spectrale, il est contraint par le niveau du RSB qui doit être suffisamment élevé pour garantir de bonnes performances. Un compromis a été trouvé par l'utilisation des techniques de type CA qui exploitent l'information souple sur les symboles afin d'améliorer la synchronisation temporelle dans un contexte non supervisé. Les études précédentes se sont limitées à la modulation BPSK et aucune n'a fourni un développement explicite de la BCR-CA. Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de développer un nouvel estimateur non supervisé de type CA pour un retard déterministe et différentes modulations linéaires. La borne de Cramér-Rao sera également évaluée pour le contexte considéré.

## Chapitre 2

# Synchronisation temporelle souple pour un retard constant

Avec le développement des techniques de codage de canal [11, 29, 86, 87], le décodage itératif a été étendu à d'autres fonctions du récepteur, en particulier la synchronisation [45, 55, 64, 65, 93, 97].

Dans ce chapitre, nous allons d'une part proposer une technique de synchronisation temporelle assistée par le code ou "*Code Aided*" (CA) au sens du MV pour des signaux PSK et QAM où l'information *a priori* sur les symboles transmis à la sortie du décodeur est injectée au DET. D'autre part, nous allons développer des expressions analytiques de la BCR relative à l'estimation CA du retard temporel pour des modulations PSK et QAM et allons comparer les performances de l'estimateur CA proposé à cette borne. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [61–63].

### 2.1 Mise en place d'un estimateur souple au sens du Maximum de Vraisemblance

Au lieu de faire une estimation peu fiable du retard temporel en se basant uniquement sur les données reçues (approche NDA) ou de réduire l'efficacité spectrale en envoyant des séquences de préambule (approche DA), nous proposons de tirer profit de la sortie du décodeur du système, afin d'améliorer la synchronisation temporelle. Dans les paragraphes suivants, nous développons des algorithmes adaptatifs basés sur l'approche du MV en introduisant l'information souple provenant du décodeur dans la fonction de vraisemblance.

Nous supposons que le codage utilisé est un codage de Gray et que les éléments de la constellation prennent des valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{M-1}\}$  où  $M$  est la taille de la constellation. Nous suggérons la notation  $v_i$  pour le  $i^{\text{ème}}$  élément codé de la constellation et

$a_k$  le  $k^{\text{ème}}$  symbole transmis :

$$v_i \Leftrightarrow c_1^i c_2^i \dots c_{\log_2(M)}^i, \quad (2.1)$$

$$a_k \Leftrightarrow b_1^k b_2^k \dots b_{\log_2(M)}^k, \quad (2.2)$$

où  $c_j^i$  (resp.  $b_j^k$ ) correspond au  $i^{\text{ème}}$  bit binaire de  $v_i$  (resp.  $a_k$ ).

Nous adoptons également les notations suivantes :  $x_{k,1}(\tau) = \Re\{x_k(\tau)\}$ ,  $x_{k,2}(\tau) = \Im\{x_k(\tau)\}$ ,  $a_{k,1} = \Re\{a_k\}$ ,  $a_{k,2} = \Im\{a_k\}$ ,  $\tilde{a}_{k,1} = \Re\{\tilde{a}_k\}$  et  $\tilde{a}_{k,2} = \Im\{\tilde{a}_k\}$ .

En choisissant un entrelaceur de grande taille, on peut supposer que les bits codés dans un symbole sont statistiquement indépendants [11, 90] de sorte que la probabilité *a priori* qu'un symbole transmis  $a_k$  soit égal au symbole possible  $v_i$  soit donnée par :

$$\begin{aligned} P[a_k = v_i] &= P[b_1^k = c_1^i, b_2^k = c_2^i, \dots, b_{\log_2(M)}^k = c_{\log_2(M)}^i] \\ &= \prod_{m=1}^{\log_2(M)} P[b_m^k = c_m^i]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Considérons,  $\lambda_m^k$  la sortie souple du décodeur, appelée aussi *Log-Likelihood Ratio* (LLR), à l'échantillon  $k$  telle que :

$$\lambda_m^k = \ln \left( \frac{P[b_m^k = 1]}{P[b_m^k = 0]} \right); \quad m = 1, \dots, \log_2(M). \quad (2.4)$$

De cette expression, et sachant que  $P[b_m^k = 0] + P[b_m^k = 1] = 1$ , nous pouvons tirer les probabilités *a priori* suivantes du bit  $b_m^k$  :

$$P[b_m^k = 1] = \frac{\exp\left(\frac{\lambda_m^k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_m^k}{2}\right)}; \quad (2.5)$$

$$P[b_m^k = 0] = \frac{\exp\left(-\frac{\lambda_m^k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_m^k}{2}\right)}. \quad (2.6)$$

En supposant que le symbole  $v_i$  est transmis à l'instant  $k$ , une formule générale de la probabilité *a priori* du bit codé  $b_m^k$  est donc donnée par :

$$P[b_m^k = c_m^i] = \frac{\exp\left((2c_m^i - 1)\frac{\lambda_m^k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_m^k}{2}\right)}, \quad (2.7)$$

où  $c_m^i \in \{0, 1\}$ .

L'information souple  $\lambda_m^k$  peut être obtenue soit simplement à partir d'un démappage souple ou après plusieurs itérations de décodage souple. Dans la pratique, il est plus facile de traiter les données d'un démappeur plutôt que celles d'un décodeur souple. Cependant, à faible RSB, le gain de codage est particulièrement avantageux pour les constellations d'ordre élevé ce qui fait du décodage souple une approche plus intéressante.

En l'absence de séquence d'apprentissage, nous utilisons l'estimateur MV moyenné suivant :

$$\hat{\tau} = \arg \max_u \Lambda_L(r|u) = \arg \max_u \{\log (\Lambda(r|u))\}, \quad (2.8)$$

où la fonction de log-vraisemblance  $\Lambda_L(r|u)$  est donnée par :

$$\Lambda_L(r|u) = \ln (\Lambda(r|u)) \quad (2.9)$$

et  $\Lambda(r|u)$  est obtenue en moyennant  $\Lambda(\mathbf{r}|u, \mathbf{a})$  sur tous les symboles transmis possibles  $\mathbf{a}$ .

Ainsi, en éliminant les termes en  $|a_k|^2$  de (1.22) (seulement pour les modulations à enveloppe constante) et en la moyennant sur l'ensemble des symboles transmis, supposés indépendants, on obtient :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \sum_{v_i \in \mathcal{V}} P[a_k = v_i] \exp \left( \frac{\Re\{v_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2} \right), \quad (2.10)$$

$$= \prod_k \sum_{i=0}^{M-1} P[a_k = v_i] \exp \left( \frac{\Re\{v_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2} \right) \quad (2.11)$$

où  $P[a_k = v_i]$  est donnée par (2.3)-(2.7).

Dans ce qui suit, nous dérivons séparément le DET CA pour des signaux modulés en BPSK, QPSK et  $M$ -PSK puis pour des signaux modulés en QAM. Même si les modulations BPSK et QPSK peuvent être considérées comme étant des cas particuliers de la modulation  $M$ -PSK pour, respectivement,  $M = 2$  et  $M = 4$ , pour le DET CA nous utilisons une technique récursive qui ne fonctionne que pour des modulations  $M$ -PSK avec une taille de constellation  $M \geq 8$ .

### 2.1.1 Cas d'une Modulation BPSK

Dans cette section, nous présentons l'algorithme de synchronisation temporelle adaptatif CA avec une modulation BPSK. Dans ce cas,  $M = 2$ ,  $m = 1$ ,  $v_i \in \{-1, 1\}$  et  $b_k \in \{0, 1\}$ . En utilisant (2.3) et (2.7), la fonction de vraisemblance dans (2.10) pour un signal BPSK devient :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \frac{\exp\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)} \exp\left(\frac{1}{\sigma^2} x_{k,1}(u)\right) + \frac{\exp\left(\frac{-\lambda_k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} x_{k,1}(u)\right) \right] \quad (2.12)$$

et par suite :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \frac{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x_{k,1}(u)}{\sigma^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)}, \quad (2.13)$$

où, pour simplifier,  $\lambda_k$  désigne  $\lambda_1^k$ .

Le signal reçu est altéré par un BBAG à valeurs réelles avec une densité spectrale de puissance égale à  $\frac{N_0}{2} = \sigma^2$ , ainsi :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \frac{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{2x_{k,1}(u)}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)}. \quad (2.14)$$

La fonction log-vraisemblance est alors donnée par :

$$\Lambda_L(r|u) = \sum_k \ln \left( \frac{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{2x_{k,1}(u)}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)} \right). \quad (2.15)$$

En dérivant  $\Lambda_L(r|u)$  par rapport à  $u$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial \Lambda_L(r|u)}{\partial u} = \sum_k \frac{2}{N_0} \frac{\partial x_{k,1}(u)}{\partial u} \tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{2x_{k,1}(u)}{N_0}\right). \quad (2.16)$$

Ensuite, afin d'estimer  $\tau$ , nous proposons en pratique de mettre en oeuvre l'équation adaptative (??) ou les approximations présentées dans la section 1.3 en substituant  $a_k$  par le symbole souple :

$$\tilde{a}_k(u) = \tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{2x_{k,1}(u)}{N_0}\right). \quad (2.17)$$

L'équation réursive devient alors :

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \mu e_k(\tilde{a}_k(\tau_{k-1}), \tau_{k-1}), \quad (2.18)$$

où  $e_k(\tilde{a}_k(\tau_{k-1}), \tau_{k-1})$  est donnée par (1.25), (1.27), (1.35) ou (1.49) suivant le type de détecteur choisi. Le symbole souple  $\tilde{a}_k(\tau_{k-1})$  remplace le symbole  $a_k$ .

### 2.1.2 Cas d'une Modulation QPSK

Dans le cas d'une modulation QPSK, pour laquelle  $M = 4$  et  $m \in \{1, 2\}$ , les éléments de la constellation appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  où :

$$v_1 = -v_0, v_2 = v_0^*, v_3 = -v_0^*. \quad (2.19)$$

Pour les symboles  $v_i$ , nous choisissons le code de Gray suivant :

$$v_0 \Leftrightarrow 11, v_1 \Leftrightarrow 00, v_2 \Leftrightarrow 01 \text{ and } v_3 \Leftrightarrow 10. \quad (2.20)$$

La fonction de vraisemblance est alors donnée par :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \sum_{i=0}^3 P[a_k = v_i] \exp\left(\frac{\Re\{v_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right). \quad (2.21)$$

L'expression de  $P[a_k = v_i]$  peut être obtenue en utilisant (2.3), (2.7) et (2.20) comme :

$$P[a_k = v_0] = \beta_k \exp\left(\frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{2}\right), \quad (2.22)$$

$$P[a_k = v_1] = \beta_k \exp\left(\frac{-\lambda_1^k - \lambda_2^k}{2}\right), \quad (2.23)$$

$$P[a_k = v_2] = \beta_k \exp\left(\frac{-\lambda_1^k + \lambda_2^k}{2}\right), \quad (2.24)$$

$$P[a_k = v_3] = \beta_k \exp\left(\frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{2}\right), \quad (2.25)$$

$$P[a_k = v_i] = \beta_k \exp\left(\frac{(2c_1^i - 1)\lambda_1^k + (2c_2^i - 1)\lambda_2^k}{2}\right), \quad (2.26)$$

$$\text{où } \beta_k = \frac{1}{4 \cosh(\lambda_1^k/2) \cosh(\lambda_2^k/2)}.$$

En remplaçant  $P[a_k = v_i]$  dans (2.21) par son expression (2.22)-(2.25) et en utilisant (2.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Lambda(r|u) &= \prod_k \beta_k \left[ \exp\left(\frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{2}\right) \exp\left(\frac{\Re\{v_0^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{-\lambda_1^k - \lambda_2^k}{2}\right) \exp\left(\frac{\Re\{-v_0^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\frac{-\lambda_1^k + \lambda_2^k}{2}\right) \exp\left(\frac{\Re\{v_2^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{2}\right) \exp\left(\frac{\Re\{-v_2^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) \right] \\ &= \prod_k 2\beta_k \left[ \cosh\left(\frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k}{2} + \frac{\Re\{v_0^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) + \cosh\left(\frac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{2} + \frac{\Re\{v_2^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) \right]. \quad (2.27) \end{aligned}$$

Etant donné que  $\cosh(a) + \cosh(b) = 2 \cosh\left(\frac{a+b}{2}\right) \cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$  et que le signal reçu est altéré par un BBAG complexe avec une densité spectrale de puissance égale à  $N_0 = \sigma^2$ , nous obtenons :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k 4\beta_k \cosh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{\Re\{(v_0 + v_0^*)x_k(u)\}}{N_0}\right) \cosh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} + \frac{\Re\{(v_0^* - v_0)x_k(u)\}}{N_0}\right) \quad (2.28)$$

En utilisant le fait que  $a + a^* = 2\Re\{a^*\}$  et  $a^* - a = 2j\Im\{a^*\}$ , nous obtenons :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k 4\beta_k \cosh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{2v_{0,1}x_{k,1}(u)}{N_0}\right) \cosh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} + \frac{2v_{0,2}x_{k,2}(u)}{N_0}\right). \quad (2.29)$$

Par conséquent, la fonction log-vraisemblance est :

$$\Lambda_L(r|u) = \sum_k \ln\left(\cosh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{2v_{0,1}x_{k,1}(u)}{N_0}\right)\right) + \sum_k \ln\left(\cosh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} + \frac{2v_{0,2}x_{k,2}(u)}{N_0}\right)\right) + \sum_k \ln(4\beta_k).$$

La dérivation de cette fonction par rapport à  $u$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_L(r|u)}{\partial u} &= \sum_k \frac{2v_{0,1}}{N_0} \tanh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{2v_{0,1}x_{k,1}(u)}{N_0}\right) \frac{\partial x_{k,1}(u)}{\partial u} \\ &+ \sum_k \frac{2v_{0,2}}{N_0} \tanh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} + \frac{2v_{0,2}x_{k,2}(u)}{N_0}\right) \frac{\partial x_{k,2}(u)}{\partial u} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$= \frac{2}{N_0} \sum_k \Re\left\{\tilde{a}_k^*(u) \frac{\partial x_k(u)}{\partial u}\right\}, \quad (2.31)$$

où la partie réelle et la partie imaginaire du symbole souple sont données par :

$$\tilde{a}_{k,1}(u) = v_{0,1} \tanh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{2v_{0,1}x_{k,1}(u)}{N_0}\right), \quad (2.32)$$

$$\tilde{a}_{k,2}(u) = v_{0,2} \tanh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} + \frac{2v_{0,2}x_{k,2}(u)}{N_0}\right). \quad (2.33)$$

En pratique, comme dans le cas des signaux BPSK, nous proposons d'estimer  $\tau$ , en utilisant (??). L'équation d'adaptation devient donc :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu e_k(\tilde{a}_k, \hat{\tau}_{k-1}), \quad (2.34)$$

où les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{a}_k$  sont respectivement données par (2.32) et (2.33) pour  $u = \hat{\tau}_{k-1}$  et  $e_k(\tilde{a}_k(\tau_{k-1}), \tau_{k-1})$  est donnée par (1.25), (1.27), (1.35) ou (1.49) suivant le type de détecteur choisi.

### 2.1.3 Cas d'une modulation $M$ -PSK

Dans ce paragraphe, nous développons l'équation d'adaptation d'un DET CA dans le cas de signaux  $M$ -PSK. Ce développement se base essentiellement sur les propriétés du codage de Gray et exploite la relation entre les constellations d'ordre  $p$  et  $(p-2)$ , ce qui ne rend l'analyse valable que pour  $p \geq 3$ . Autrement dit, toutes les expressions analytiques sont valables pour les signaux qui sont mappés sur 3 bits et plus et ainsi les résultats précédents relatifs aux signaux BPSK et QPSK, ne peuvent pas en être déduits comme des cas particuliers.



Considérons l'exemple de  $p = 4$ . Dans la Figure 2.1, nous avons représenté le codage de Gray correspondant à une modulation 16PSK.  $\mathcal{V}_{2^p}$  est alors composé de 16 éléments, provenant de

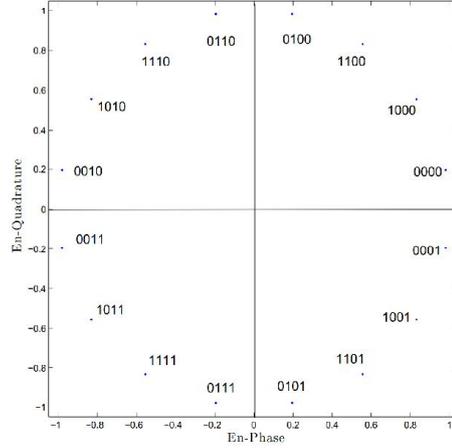


FIGURE 2.1: Codage de Gray pour une modulation 16PSK

l'union de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^p}$  contenant les 8 premiers éléments de  $\mathcal{V}_{2^p}$  et  $(-\tilde{\mathcal{V}}_{2^p})$  contenant les 8 derniers éléments de  $\mathcal{V}_{2^p}$ . D'après la Table 2.1, le bit le moins significatif des éléments de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^p}$ , souligné et colorié en rouge, est égal à 0 et le bit le moins significatif des éléments de  $(-\tilde{\mathcal{V}}_{2^p})$ , souligné et colorié en bleu, est égal à 1. Les 3 bits les plus significatifs des éléments de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^p}$  sont ceux des éléments de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{p-1}}$ .  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{p-1}}$  est l'ensemble des 4 premiers éléments d'une constellation de  $p = 3$  bits. Les 3 bits les plus significatifs des éléments de  $(-\tilde{\mathcal{V}}_{2^p})$  sont ceux des éléments de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^p}$  mais dans l'ordre inverse.

En général, et en se basant sur l'exemple précédent, le bit de poids faible des points de la constellation s'écrit :

$$\forall \tilde{v}_m \in \tilde{\mathcal{V}}_{2^p} \quad c_p^m = 0, \quad (2.38)$$

$$\forall \tilde{v}_m \in (-\tilde{\mathcal{V}}_{2^p}) \quad c_p^m = 1, \quad (2.39)$$

Les  $p - 1$  bits les plus significatifs des éléments de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^p}$  sont les mêmes que ceux des éléments de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{p-1}}$  et les  $p - 1$  bits les plus significatifs des éléments de  $(-\tilde{\mathcal{V}}_{2^p})$  sont les mêmes que ceux des éléments de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{p-1}}$  mais dans l'ordre inverse.

La probabilité du symbole  $a_k$  est donnée par :

$$P(a_k = \tilde{v}_m) = \beta_k^p \underbrace{\prod_{l=1}^{p-1} \exp\left((2c_l^m - 1)\frac{\lambda_l^k}{2}\right)}_{\gamma_k^{p-1}(\tilde{v}_m)} \exp\left((2c_p^m - 1)\frac{\lambda_p^k}{2}\right), \quad (2.40)$$

où  $\gamma_k^2(\tilde{v}_m) = 1$  est prise comme valeur initiale lorsque  $p = 3$ . Il en résulte que, pour tout  $\tilde{v}_m$  dans  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^p}$  :

$$\mathbb{P}(a_k = \tilde{v}_m) = \beta_k^p \gamma_k^{p-1}(\tilde{v}_m) \exp\left(-\frac{\lambda_p^k}{2}\right), \quad (2.41)$$

$$\mathbb{P}(a_k = -\tilde{v}_m) = \beta_k^p \gamma_k^{p-1}(-\tilde{v}_m) \exp\left(\frac{\lambda_p^k}{2}\right). \quad (2.42)$$

En remplaçant (2.41) et (2.42) dans (2.36), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Lambda(r|u) = & \prod_k \frac{\beta_k^p}{\sigma^2} \sum_{m=1}^{2^{p-1}} \left[ \gamma_k^{p-1}(\tilde{v}_m) \exp\left(-\frac{\lambda_p^k}{2}\right) \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) + \gamma_k^{p-1}(-\tilde{v}_m) \times \right. \\ & \left. \exp\left(\frac{\lambda_p^k}{2}\right) \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

où  $\tilde{v}_m = \exp\left(j\frac{2\pi m}{M}\right)$ , pour  $m = 1, \dots, M/2 = 2^{p-1}$ .

Considérons les premiers  $(p-1)$  bits les plus significatifs de  $\tilde{v}_m \Leftrightarrow c_1^m c_2^m \dots c_{p-1}^m c_p^m$ . Définissons  $\tilde{v}_n$  le symbole  $2^{p-1}$ -PSK associé au mappage de Gray  $\tilde{v}_n \Leftrightarrow c_1^m c_2^m \dots c_{p-1}^m$ , où  $n$  est dans  $\{1, \dots, 2^{p-1}\}$ . Nous utilisons la même décomposition de  $\mathcal{V}_{2^{p-1}} = \tilde{\mathcal{V}}_{2^{p-1}} \cup (-\tilde{\mathcal{V}}_{2^{p-1}})$  pour la constellation  $2^{p-1}$ -PSK. Les symboles  $\tilde{v}_n$  sont obtenus à partir des précédentes  $2^{p-1}$ -PSK constellations en appliquant la même procédure de construction. Ainsi,  $\tilde{v}_n$  et  $-\tilde{v}_n$  ont les mêmes  $(p-2)$  bits les plus significatifs. Cette analyse nécessite alors que  $p \geq 3$ , ce qui justifie le traitement séparé de  $p = 1$  (BPSK) et  $p = 2$  (QPSK), effectué précédemment dans les sections 2.1.1 et 2.1.2.

Si nous prenons l'exemple de  $p = 4$ , pour le mappage de  $\tilde{v}_2 \Leftrightarrow 1000$ , le mappage  $\tilde{v}_n$  correspondant est  $\Leftrightarrow 100$  et pour le mappage de  $-\tilde{v}_2 = \tilde{v}_1 \Leftrightarrow 1011$ , le mappage de  $-\tilde{v}_n$  correspondant est  $\Leftrightarrow 101$ . Ainsi, on note que les 2 bits les plus significatifs de  $\tilde{v}_n$  et  $-\tilde{v}_n$  sont les mêmes.

En conséquence :

$$\gamma_k^{p-2}(\tilde{v}_n) = \prod_{l=1}^{p-2} \exp\left((2c_l^m - 1)\frac{\lambda_l^k}{2}\right), \quad (2.44)$$

ce qui donne l'expression suivante :

$$\gamma_k^{p-1}(\tilde{v}_m) = \gamma_k^{p-2}(\tilde{v}_n) \exp\left((2c_{p-1}^m - 1)\frac{\lambda_{p-1}^k}{2}\right), \quad (2.45)$$

où  $c_{p-1}^m$  est l'avant dernier bit de plus faible poids de  $\tilde{v}_m$  et il est le bit de plus faible poids de  $\tilde{v}_n$ .

Maintenant, nous allons développer l'expression de  $c_{p-1}^m$  en fonction de  $m$ . En fait, nous savons que :

$$c_{p-1}^m = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq n \leq \frac{2^{p-1}}{2} = 2^{p-2}, \\ 1 & \text{si } 2^{p-2} < n \leq 2^{p-1}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Sachant que :

$$1 \leq n \leq 2^{p-2} \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor = 0, \quad (2.47)$$

$$2^{p-2} < n \leq 2^{p-1} \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor = 1, \quad (2.48)$$

où  $\lfloor x \rfloor$  est la partie entière de  $x$ , nous pouvons donc écrire :

$$c_{p-1}^m = \left\lfloor \frac{n}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor. \quad (2.49)$$

Il est également facile de montrer que :

$$n = \text{rem} \left( m, \frac{M}{2} \right), \quad (2.50)$$

où  $M = 2^p$  et  $\text{rem}(x, y)$  est le reste dans la division Euclidienne de  $x$  par  $y$ . Il en résulte que :

$$c_{p-1}^m = \left\lfloor \frac{\text{rem}(m, 2^{p-1})}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor. \quad (2.51)$$

Par conséquent, nous obtenons de (2.45) et (2.51) :

$$\begin{aligned} \gamma_k^{p-1}(\tilde{v}_m) &= \gamma_k^{p-2}(\tilde{v}_n) \exp \left( \left( 2 \left\lfloor \frac{\text{rem}(m, 2^{p-1})}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor - 1 \right) \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} \right) \\ &= \alpha_{p-1}^k(m), \end{aligned} \quad (2.52)$$

où  $\alpha_{p-1}^k(m)$  est calculé récursivement pour tout  $p \geq 3$  à partir de :

$$\alpha_{p-1}^k(m) = \alpha_{p-2}^k(\text{rem}(m, 2^{p-1})) \exp \left( \left( 2 \left\lfloor \frac{\text{rem}(m, 2^{p-1})}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor - 1 \right) \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} \right). \quad (2.53)$$

En raison de la symétrie de la construction du mapping de Gray, nous pouvons noter que pour tout entier  $m$  dans  $\{1, \dots, 2^{p-1}\}$  :

$$\begin{aligned} \gamma_k^{p-1}(-\tilde{v}_m) &= \gamma_k^{p-1}(\tilde{v}_{2^{p-1}-m+1}) \\ &= \alpha_{p-1}^k(2^{p-1} - m + 1) \\ &= \alpha_{p-2}^k(\text{rem}(2^{p-1} - m + 1, 2^{p-1})) \exp \left( \left( 2 \left\lfloor \frac{\text{rem}(2^{p-1} - m + 1, 2^{p-1})}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor - 1 \right) \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

D'une part, nous avons :

$$\alpha_{p-2}^k(\text{rem}(2^{p-1} - m + 1, 2^{p-1})) = \alpha_{p-2}^k(2^{p-1} - m + 1). \quad (2.55)$$

D'autre part, nous obtenons :

$$\left\lfloor \frac{\text{rem}(2^{p-1} - m + 1, 2^{p-1})}{2^{p-2} + 1} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in \{1, \dots, 2^{p-2}\}, \\ 0 & \text{si } m \in \{2^{p-2} + 1, \dots, 2^{p-1}\}. \end{cases} \quad (2.56)$$

Ainsi, (2.55) devient :

$$\gamma_k^{p-1}(-\tilde{v}_m) = \begin{cases} \alpha_{p-2}^k(2^{p-1} - m + 1) \exp\left(\frac{\lambda_{p-1}^k}{2}\right) & \text{si } 1 \leq m \leq 2^{p-2}, \\ \alpha_{p-2}^k(2^{p-1} - m + 1) \exp\left(-\frac{\lambda_{p-1}^k}{2}\right) & \text{si } 2^{p-2} < m \leq 2^{p-1}. \end{cases} \quad (2.57)$$

Par conséquent, la fonction de vraisemblance (2.43) devient :

$$\begin{aligned} \Lambda(r|u) &= \prod_k \frac{\beta_k^p}{\sigma^2} \sum_{m=1}^{2^{p-2}} \alpha_{p-2}^k(m) \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2}\right) \\ &\quad + \alpha_{p-2}^k(2^{p-1} - m + 1) \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x_k(u)\}}{\sigma^2} + \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} + \frac{\lambda_p^k}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{m=2^{p-2}+1}^{2^{p-1}} \alpha_{p-2}^k(m) \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x_k(u)\}}{\sigma^2} + \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2}\right) \\ &\quad + \alpha_{p-2}^k(2^{p-1} - m + 1) \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} + \frac{\lambda_p^k}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

En raison de la symétrie du codage de Gray, les premiers  $(p-2)$ -bits de tout symbole  $\tilde{v}_m$  sont identiques à ceux de  $\tilde{v}_{2^{p-1}-m+1}$ , pour tout entier  $m$  dans  $\{1, 2^{p-1}\}$ , ce qui fait que,  $\alpha_{p-2}^k(2^{p-1} - m + 1) = \alpha_{p-2}^k(m)$ .

Se basant sur le fait que,  $\tilde{v}_{m+2^{p-2}}^* = j\tilde{v}_m^*$ , et à partir de (2.58), la fonction log-vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Lambda(r|u) &= \prod_k \frac{2\beta_k^p}{\sigma^2} \sum_{m=1}^{2^{p-2}} \alpha_{p-2}^k(m) \times \cosh \left( \frac{\Re \{ \tilde{v}_m^* x_k(u) \}}{\sigma^2} - \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right) \\
&\quad + \sum_{m=2^{p-2}+1}^{2^{p-1}} \alpha_{p-2}^k(2^{p-1} - m + 1) \cosh \left( -\frac{\Re \{ \tilde{v}_m^* x_k(u) \}}{\sigma^2} + \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right) \\
&= \prod_k \frac{2\beta_k^p}{\sigma^2} \sum_{m=1}^{2^{p-2}} \alpha_{p-2}^k(m) \cosh \left( \frac{\Re \{ \tilde{v}_m^* x_k(u) \}}{\sigma^2} - \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{2^{p-2}} \alpha_{p-2}^k(2^{p-2} - m + 1) \cosh \left( -\frac{\Re \{ \tilde{v}_{m+2^{p-2}}^* x_k(u) \}}{\sigma^2} + \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right). \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Ceci fait que :

$$\begin{aligned}
\Lambda_L(u) &= \sum_k \log \left( \frac{2\beta_k^p}{N_0} \right) + \sum_k \log \left( \sum_{m=1}^{2^{p-2}} \alpha_{p-2}^k(m) \cosh \left( \frac{\Re \{ \tilde{v}_m^* x_k(u) \}}{N_0} - \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{2^{p-2}} \alpha_{p-2}^k(2^{p-2} - m + 1) \cosh \left( -\frac{\Im \{ \tilde{v}_m^* x_k(u) \}}{N_0} + \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right) \right), \quad (2.60)
\end{aligned}$$

où  $N_0 = \sigma^2$  est la densité spectrale de puissance du BBAG complexe.

Définissons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
H_k(x) &\triangleq \sum_{m=1}^{2^{p-2}} \alpha_{p-2}^k(m) \cosh \left( \frac{\Re \{ \tilde{v}_m^* x \}}{N_0} - \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right) \\
&\quad + \alpha_{p-2}^k(2^{p-2} - m + 1) \cosh \left( -\frac{\Im \{ \tilde{v}_m^* x \}}{N_0} + \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right), \quad (2.61)
\end{aligned}$$

$$g_m(x) \triangleq \alpha_{p-2}^k(m) \sinh \left( \frac{\Re \{ \tilde{v}_m^* x \}}{N_0} - \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right) \text{ et} \quad (2.62)$$

$$h_m(x) \triangleq \alpha_{p-2}^k(2^{p-2} - m + 1) \sinh \left( -\frac{\Im \{ \tilde{v}_m^* x \}}{N_0} + \frac{\lambda_{p-1}^k}{2} - \frac{\lambda_p^k}{2} \right). \quad (2.63)$$

Nous pouvons alors écrire en dérivant (2.60) par rapport à  $u$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda_L(u)}{\partial u} &= \sum_k \frac{H'_k(x_k(u))}{H_k(x_k(u))} \\
&= \sum_k \frac{1}{N_0} \left[ \frac{\sum_{m=1}^{2^{p-2}} g_m(x_k(u))}{H_k(x_k(u))} \frac{\partial \Re \{ \tilde{v}_m^* x_k(u) \}}{\partial u} - \frac{\sum_{m=1}^{2^{p-2}} h_m(x_k(u))}{H_k(x_k(u))} \frac{\partial \Im \{ \tilde{v}_m^* x_k(u) \}}{\partial u} \right]. \quad (2.64)
\end{aligned}$$

A partir de (2.60)-(2.63), nous obtenons :

$$\frac{\partial \Lambda_L(u)}{\partial u} = \frac{1}{N_0} \sum_k \Re \left\{ \tilde{a}_k^* \frac{\partial x_k(u)}{\partial u} \right\}, \quad (2.65)$$

où respectivement les parties réelles et imaginaire  $\tilde{a}_{k,1}$  et  $\tilde{a}_{k,2}$  du symbole souple  $\tilde{a}_k$  sont données par :

$$\tilde{a}_{k,i}(u) = \frac{I_i(x_k(u))}{H_k(x_k(u))}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (2.66)$$

avec

$$I_i(x) = \sum_{m=1}^{2^{p-1}} g_m(x) \kappa_i + h_m(x) \varepsilon_i, \quad (2.67)$$

où  $\kappa_i$  et  $\varepsilon_i$  sont donnés par :

$$\kappa_i = \begin{cases} \tilde{v}_{m,1} & \text{si } i = 1 \\ -\tilde{v}_{m,2} & \text{si } i = 2 \end{cases}, \quad (2.68)$$

et

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \tilde{v}_{m,2} & \text{si } i = 1 \\ -\tilde{v}_{m,1} & \text{si } i = 2 \end{cases} \quad (2.69)$$

L'estimée du délai temporel est ainsi mise à jour selon l'équation d'adaptation suivante :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu e_k(\tilde{a}_k, \hat{\tau}_{k-1}), \quad (2.70)$$

où les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{a}_k$  sont données par (2.66) pour  $u = \tau_{k-1}$  et l'expression de  $e_k(\tilde{a}_k, \hat{\tau}_{k-1})$  dépend du choix du DET (voir section 1.3).

Des modulations à haute efficacité spectrale sont nécessaires dans les systèmes de communication modernes afin de transmettre des données à haut débit sur une bande passante limitée [98]. Ceci est la raison pour laquelle la modulation d'amplitude en quadrature QAM est couramment utilisée. Cette modulation nécessite une synchronisation fine qui est à l'origine du développement de nombreux estimateurs de retard temporel.

#### 2.1.4 Cas d'une modulation QAM

Dans ce paragraphe, nous développons l'équation d'adaptation d'un algorithme CA dans le cas de signaux  $2^{2p}$ -QAM ( $M = 2^{2p}$ ) en exploitant la structure du codage et les propriétés générales de la constellation. En effet, un signal  $2^{2p}$ -QAM prend ses valeurs dans l'ensemble  $\mathcal{V}_{2^{2p}} = \{v_m = \pm(2i-1)d_p \pm j(2n-1)d_p; i, n = 1, 2, \dots, 2^p\}$ , où  $d_p$  est la distance inter-symboles et  $j^2 = -1$ .

Afin de trouver l'expression de  $P(a_k = \tilde{v}_i)$ , nous utilisons ici un codage de Gray pour des signaux  $2^{2p}$ -QAM. Selon (2.3) et (2.7), et pour des bits indépendants, nous avons :

$$P(a_k = \tilde{v}_i) = \underbrace{\prod_{l=1}^{2p} \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_l^k}{2}\right)}}_{\beta_k^p} \underbrace{\prod_{l=1}^{2p} \exp\left((2c_l^i - 1)\frac{\lambda_l^k}{2}\right)}_{\xi_k^p(\tilde{v}_i)}. \quad (2.71)$$

Nous décrivons ici la construction par récurrence du mappage de Gray de la constellation  $2^{2p}$ -QAM en partant d'une constellation  $2^{2p-2}$ -QAM. Dans le quart supérieur droit du plan complexe, les symboles sont notés  $\tilde{v}_i$  et appartiennent au sous ensemble  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}$  de  $\mathcal{V}_{2^{2p}}$ . Pour tout  $\tilde{v}_i$  dans  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}$  les  $2p - 2$  bits les plus significatifs sont ceux des symboles appartenant à  $\mathcal{V}_{2^{2p-2}}$ . Ainsi, pour tout  $\tilde{v}_i$  dans  $-\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}$  les  $2p - 2$  bits les plus significatifs sont obtenus par symétrie centrale de ceux de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}$ . Les  $2p - 2$  bits les plus significatifs des éléments dans  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}^*$  (resp.  $-\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}^*$ ) sont obtenus par symétrie par rapport aux ordonnées (resp. aux abscisses  $x$ ) de ceux de  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}$ .

Finalement, les deux bits les moins significatifs des symboles de  $\mathcal{V}_{2^{2p}}$  sont ceux d'une constellation QPSK Gray codée. En d'autres termes :

$$\forall \tilde{v}_i \in \tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}} \quad c_{2p-1}^i c_{2p}^i = 11, \quad (2.72)$$

$$\forall \tilde{v}_i \in (-\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}) \quad c_{2p-1}^i c_{2p}^i = 00, \quad (2.73)$$

$$\forall \tilde{v}_i \in \tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}^* \quad c_{2p-1}^i c_{2p}^i = 01, \quad (2.74)$$

$$\forall \tilde{v}_i \in (-\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}^*) \quad c_{2p-1}^i c_{2p}^i = 10. \quad (2.75)$$

La probabilité (2.71) devient :

$$P(a_k = \tilde{v}_i) = \beta_k^p \overbrace{\prod_{l=1}^{2p-2} \exp\left((2c_l^i - 1)\frac{\lambda_l^k}{2}\right)}^{\gamma_k^p(\tilde{v}_i)} \exp\left((2c_{2p}^i - 1)\frac{\lambda_{2p}^k}{2} + (2c_{2p-1}^i - 1)\frac{\lambda_{2p-1}^k}{2}\right) \quad (2.76)$$

Dans (2.76),  $\gamma_k^p(\tilde{v}_i)$  traite les  $(2p - 2)$  premiers bits les plus significatifs de  $\tilde{v}_i \Leftrightarrow c_1^i c_2^i \dots c_{2p-1}^i c_{2p}^i$ . Vu la symétrie de construction du codage Gray,  $\tilde{v}_i$ ,  $-\tilde{v}_i$ ,  $\tilde{v}_i^*$  et  $-\tilde{v}_i^*$  ont les mêmes  $2p - 2$  bits les plus significatifs. En conséquence :

$$\gamma_k^p(\tilde{v}_i) = \gamma_k^p(-\tilde{v}_i) = \gamma_k^p(\tilde{v}_i^*) = \gamma_k^p(-\tilde{v}_i^*). \quad (2.77)$$

A partir de l'équation (1.22), on a :

$$\Lambda(\mathbf{r}|u, \mathbf{a}) = \prod_k \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{\Re\{a_k^* x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{|a_k|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.78)$$

Ainsi, en utilisant la propriété d'indépendance par entrelacement entre les bits codés et en moyennant sur l'ensemble des symboles transmis possibles, nous constatons que :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \frac{1}{\sigma^2} \sum_{v_i \in \mathcal{V}_{2^{2p}}} P[a_k = v_i] \exp\left(\frac{\Re\{v_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{|v_i|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.79)$$

Considérons  $\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}} = \{\tilde{v}_m = (2i-1)d_p + j(2n-1)d_p, i, n = 1, \dots, 2^p\}$ , alors  $\mathcal{V}_{2^{2p}} = \tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}} \cup (-\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}) \cup (\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}})^* \cup (-\tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}})^*$ . Ainsi, la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} \Lambda(r|u) &= \prod_k \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\tilde{v}_i \in \tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}} P(a_k = \tilde{v}_i) \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{|\tilde{v}_i|^2}{2\sigma^2}\right) \\ &+ P(a_k = -\tilde{v}_i) \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{|\tilde{v}_i|^2}{2\sigma^2}\right) \\ &+ P(a_k = \tilde{v}_i^*) \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_i x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{|\tilde{v}_i|^2}{2\sigma^2}\right) \\ &+ P(a_k = -\tilde{v}_i^*) \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}_i x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{|\tilde{v}_i|^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

En remplaçant la probabilité des symboles (2.76) dans (2.80), on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda(r|u) &= \prod_k \frac{\beta_k^p}{\sigma^2} \sum_{\tilde{v}_i \in \tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}} \exp\left(-\frac{|\tilde{v}_i|^2}{2\sigma^2}\right) \left[ \gamma_k^p(\tilde{v}_i) \exp\left(\frac{\lambda_{2^{2p}-1}^k}{2} + \frac{\lambda_{2^{2p}}^k}{2}\right) \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) \right. \\ &+ \gamma_k^p(-\tilde{v}_i) \exp\left(-\frac{\lambda_{2^{2p}-1}^k}{2} - \frac{\lambda_{2^{2p}}^k}{2}\right) \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) + \gamma_k^p(\tilde{v}_i^*) \exp\left(-\frac{\lambda_{2^{2p}-1}^k}{2} + \frac{\lambda_{2^{2p}}^k}{2}\right) \\ &\left. \times \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_i x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) + \gamma_k^p(-\tilde{v}_i^*) \exp\left(\frac{\lambda_{2^{2p}-1}^k}{2} - \frac{\lambda_{2^{2p}}^k}{2}\right) \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}_i x_k(u)\}}{\sigma^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ceci donne l'expression suivante de la fonction de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \Lambda(r|u) &= \prod_k \frac{2\beta_k^p}{\sigma^2} \sum_{\tilde{v}_i \in \tilde{\mathcal{V}}_{2^{2p}}} \exp\left(-\frac{|\tilde{v}_i|^2}{2\sigma^2}\right) \gamma_k^p(\tilde{v}_i) \left[ \cosh\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_i^* x_k(u)\}}{\sigma^2} + \frac{\lambda_{2^{2p}-1}^k}{2} + \frac{\lambda_{2^{2p}}^k}{2}\right) \right. \\ &\left. \cosh\left(\frac{\Re\{\tilde{v}_i x_k(u)\}}{\sigma^2} - \frac{\lambda_{2^{2p}-1}^k}{2} + \frac{\lambda_{2^{2p}}^k}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Un développement similaire de la fonction de vraisemblance a été effectué dans [9] pour le calcul de la BCR pour l'estimation CA du RSB et il a été montré que :

$$\gamma_k^p(\tilde{v}_m) = \theta_{k,2^p}(i)\theta_{k,2^p-1}(n), \quad (2.83)$$

où  $\tilde{v}_m = \pm(2i - 1)d_p \pm j(2n - 1)d_p$  et  $\theta_{k,2p}(i)$  et  $\theta_{k,2p-1}(n)$  sont récursivement obtenus en utilisant les formules suivantes :

$$\theta_{k,2p}(i) = \theta_{k,2p-2}\left(\frac{|2i - 1 - 2^{p-1}| + 1}{2}\right) \exp\left(\left(2\left\lfloor\frac{i-1}{2^{p-2}}\right\rfloor - 1\right)\frac{\lambda_{2^{p-2}}^k}{2}\right), \quad (2.84)$$

$$\theta_{k,2p-1}(n) = \theta_{k,2p-3}\left(\frac{|2n - 1 - 2^{p-1}| + 1}{2}\right) \exp\left(\left(2\left\lfloor\frac{n-1}{2^{p-2}}\right\rfloor - 1\right)\frac{\lambda_{2^{p-3}}^k}{2}\right), \quad (2.85)$$

où  $\theta_{k,1}(1) = \theta_{k,2}(1) = 1$ .

En utilisant l'identité  $\cosh(a) + \cosh(b) = 2 \cosh\left(\frac{a+b}{2}\right) \cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$ , la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \frac{4\beta_k^p}{\sigma^2} H_k^{2p}(x_{k,1}(u)) H_k^{2p-1}(x_{k,2}(u)),$$

où

$$H_k^l(x) = \sum_{i=1}^{2^{p-1}} \theta_{k,l}(i) \exp\left(-\frac{(2i-1)^2 d_p^2}{2\sigma^2}\right) \cosh\left(\frac{(2i-1)d_p x}{\sigma^2} + (-1)^l \frac{\lambda_l^k}{2}\right). \quad (2.86)$$

La fonction log-vraisemblance devient :

$$\Lambda_L(u) = \sum_k \log\left(H_k^{2p}(x_{k,1}(u)) H_k^{2p-1}(x_{k,2}(u))\right) + \sum_k \log\left(\frac{4\beta_k^p}{\sigma^2}\right). \quad (2.87)$$

Ainsi, sa dérivée par rapport à  $u$  est donnée par :

$$\frac{\partial \Lambda_L(u)}{\partial u} = \sum_k \frac{\dot{H}_k^{2p}(x_{k,1}(u))}{H_k^{2p}(x_{k,1}(u))} \frac{\partial x_{k,1}(u)}{\partial u} + \frac{\dot{H}_k^{2p-1}(x_{k,2}(u))}{H_k^{2p-1}(x_{k,2}(u))} \frac{\partial x_{k,2}(u)}{\partial u}, \quad (2.88)$$

où pour toute fonction  $f(\cdot)$ , on note  $\dot{f}(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$ .

En considérant les expressions suivantes des parties réelles et imaginaires du symbole souple  $\tilde{a}_k$  :

$$\tilde{a}_{k,1} = \frac{\dot{H}_k^{2p}(x_{k,1}(u))}{H_k^{2p}(x_{k,1}(u))}, \quad (2.89)$$

$$\tilde{a}_{k,2} = \frac{\dot{H}_k^{2p-1}(x_{k,2}(u))}{H_k^{2p-1}(x_{k,2}(u))}, \quad (2.90)$$

ainsi, on trouve que :

$$\frac{\partial \Lambda_L(u)}{\partial u} = \sum_k \Re \left\{ \tilde{a}_k^* \frac{\partial x_k(u)}{\partial u} \right\}, \quad (2.91)$$

qui servira comme terme d'erreur de mise à jour,  $e_k(\tilde{a}_k, \hat{\tau}_{k-1})$ . Dans la pratique, nous proposons d'estimer  $\tau$  en utilisant l'équation d'adaptation suivante :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu e_k(\tilde{a}_k, \hat{\tau}_{k-1}), \quad (2.92)$$

où les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{a}_k$  sont données par (2.89) et (2.90) pour  $u = \hat{\tau}_{k-1}$  et  $e_k(\tilde{a}_k, \hat{\tau}_{k-1}) = \Re \left\{ \tilde{a}_k^* \frac{\partial x_k(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{k-1}} \right\}$ . Nous pouvons également choisir d'autres expressions de  $e_k(\tilde{a}_k(\tau_{k-1}), \tau_{k-1})$ , comme par exemple celles données par (1.25), (1.27), (1.35) ou (1.49), étant donné que ces détecteurs sont des approximations de l'estimateur au sens du MV.

Afin d'évaluer les performances de tels estimateurs, il est intéressant de comparer leur EQM à la valeur théorique de la BCR. L'expression analytique de cette borne est évaluée dans la section suivante pour un algorithme de synchronisation temporelle CA.

## 2.2 Calcul de la borne de Cramèr-Rao de l'estimateur souple proposé

Bien que de nombreux estimateurs ont été proposés jusqu'ici pour restituer le retard temporel, l'évaluation théorique de leur pertinence par rapport à la meilleure performance possible est également d'un grand intérêt. Ainsi, nous avons souvent recours à comparer la proximité des deux résultats d'analyse et de simulation à des limites inférieures correspondant à la performance optimale. Par exemple, des bornes inférieures sur l'EQM donnent une indication sur les limites de performance, et par conséquent permettent de déterminer si les exigences de performance en termes d'EQM sont réalistes ou non et si des améliorations sont encore possibles. Bien qu'il existe de nombreuses familles de bornes inférieures, la famille des BCR est la plus utilisée et la plus facile à déterminer [43].

Dans cette section, nous développons l'expression de la BCR pour l'estimation CA d'un retard dans le cas de signaux BPSK, QPSK,  $M$ -PSK ( $M \geq 8$ ) et QAM. Il est important de noter ici que l'expression de la BCR est conditionnée aux valeurs des LLRs provenant du décodeur. Un autre moyennage sur les valeurs possibles de la sortie souple du décodeur doit être ensuite effectuée pour évaluer la BCR. Ceci est traité ici par une moyenne de tirages Monte Carlo. D'autres travaux ont été effectués pour développer une expression semi-analytique de la BCR en tenant compte de la variation des LLR comme dans [94] et [92].

Supposons que nous pouvons produire des estimations non biaisées  $\hat{\tau}$  du délai  $\tau$  du signal reçu. La BCR qui vérifie  $E[(\hat{\tau} - \tau)^2] \geq \text{CRB}(\tau)$  pour tout estimateur  $\hat{\tau}$  de  $\tau$  est définie par [43] :

$$\text{BCR}(\tau) = I^{-1}(\tau), \quad (2.93)$$

où  $I(\tau)$ , l'information de Fisher [43], est donnée par :

$$I(\tau) = E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right]. \quad (2.94)$$

Dans le paragraphe suivant, nous évaluons, tout d'abord, l'expression de (2.94) dans le cas d'un signal modulé en BPSK. Les PSK et QAM seront ensuite considérés.

### 2.2.1 Cas d'un signal modulé en BPSK

Rappelons l'expression de la fonction de log-vraisemblance donnée par (2.15). :

$$\Lambda_L(\tau) = \sum_j \ln \left( \frac{\cosh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_j}{2} \right)} \right), \quad (2.95)$$

En dérivant  $\Lambda_L(\tau)$  par rapport à  $\tau$  :

$$\frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} = \sum_j \frac{1}{N_0} \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right). \quad (2.96)$$

Élevons maintenant au carré le résultat obtenu :

$$\left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 = \sum_j \sum_i \frac{2}{N_0^2} \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right). \quad (2.97)$$

En prenant la moyenne de l'équation (2.97) sur le bruit d'observation et les symboles, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] &= \sum_j \sum_i \frac{1}{N_0^2} E \left[ \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \right. \\ &\quad \left. \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \right] \\ &= \frac{4}{N_0^2} \sum_i E \left[ \left( \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \tanh^2 \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \right] \\ &\quad + \frac{4}{N_0^2} \sum_j \sum_{i \neq j} E \left[ \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Afin de simplifier le premier terme de (2.98), nous montrons dans l'Annexe B, que  $\frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau}$  et  $x_{j,1}(\tau)$  sont non corrélés. Cette démonstration est également utile pour le reste des calculs.

Par conséquent, (2.98) devient :

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] &= \sum_i \frac{4}{N_0^2} E \left[ \tanh^2 \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \right] E \left[ \left( \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] \\
&+ \sum_j \sum_{i \neq j} \frac{4}{N_0^2} E \left[ \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \times \right. \\
&\quad \left. \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \right]. \tag{2.99}
\end{aligned}$$

Les différents termes de (2.99) sont développés dans l'Annexe B. Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial u} \right)^2 \right] &= \sum_i \frac{4}{N_0^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(1, x, N_0) dx \right] \left[ \frac{N_0}{2} \dot{g}'(0) + \sum_n \dot{g}(nT)^2 \right] \\
&- \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{4}{N_0^2} g'((j-i)T)^2, \tag{2.100}
\end{aligned}$$

où :

$$G_i(\nu, x, N_0) = \frac{\exp \left( -\frac{x^2 + \nu^2}{N_0} \right)}{\cosh \left( \frac{2\nu x}{N_0} + \frac{\lambda_i}{2} \right)}. \tag{2.101}$$

L'équation (2.100) dépend implicitement du RSB et l'inverse de (2.100) donne la BCR dans le cas d'une modulation BPSK.

## 2.2.2 Cas d'un signal modulé en QPSK

Passons maintenant à l'évaluation de la BCR pour une modulation QPSK. Selon (2.30), la dérivée de la fonction log-vraisemblance  $\Lambda_L(\tau)$  par rapport à  $\tau$ , donne :

$$\frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{N_0} \sum_k \left[ \tilde{a}_{k,1}(\tau) \frac{\partial x_{k,1}(\tau)}{\partial \tau} + \tilde{a}_{k,2}(\tau) \frac{\partial x_{k,2}(\tau)}{\partial \tau} \right]. \tag{2.102}$$

où l'expression de  $\tilde{a}_k$  est donnée par (2.32) et (2.33). En élevant au carré, on obtient :

$$\left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 = \sum_k \sum_n \frac{2}{N_0^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^2 \tilde{a}_{k,i}(\tau) \tilde{a}_{n,l}(\tau) \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau}. \tag{2.103}$$

A partir de (2.32) et (2.33), on sait que  $\tilde{a}_{k,i}(\tau)$  est une fonction de  $x_{k,i}(\tau)$ . Dans l'Annexe B, nous montrons que  $x_k(\tau)$  et  $\frac{\partial x_k(\tau)}{\partial \tau}$  sont deux variables décorrélés. En considérant chacune des parties réelle et imaginaire des symboles QPSK comme des signaux binaires,  $x_{k,i}(\tau)$  et  $\frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau}$

sont, de même, décorrélées. Ainsi :

$$E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = \frac{2}{N_0^2} \sum_k \sum_{i=1}^2 E \left[ \tilde{a}_{k,i}^2(\tau) \right] E \left[ \left( \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] \\ + \sum_k \sum_{n, n \neq k} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{2}{N_0^2} E \left[ \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \tilde{a}_{k,i}(\tau) \tilde{a}_{n,l}(\tau) \right]. \quad (2.104)$$

Nous déduisons alors de (2.32) et (2.33) que :

$$E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = \sum_k \sum_{i=1}^2 \frac{2}{N_0^2} E \left[ \tanh^2 \left( \frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x_{k,i}(\tau)}{N_0} \right) \right] E \left[ \left( \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] \\ + \sum_k \sum_n \frac{2}{N_0^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1, l \neq i}^2 E \left[ \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x_{k,i}(\tau)}{N_0} \right) \right. \\ \left. \times \tanh \left( \frac{\lambda_l^n}{2} + \frac{2v_{0,l}x_{n,l}(\tau)}{N_0} \right) \right]. \quad (2.105)$$

Selon les équations dans (1.20) et sachant que  $g(\cdot)$  est un filtre de Nyquist, nous avons :

$$x_{k,1}(\tau) = a_{k,1} + \int_{T_0} h(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt, \quad (2.106)$$

et

$$x_{k,2}(\tau) = a_{k,2} + \int_{T_0} h(t - jT - \tau) \Im\{n(t)\} dt. \quad (2.107)$$

Ainsi,  $x_{k,1}(\tau)$  et  $x_{k,2}(\tau)$  suivent une distribution normale et par conséquent :

$$x_{k,1}(\tau) \sim \mathcal{N} \left( a_{k,1}, \frac{N_0}{2} \right), \quad (2.108)$$

$$x_{k,2}(\tau) \sim \mathcal{N} \left( a_{k,2}, \frac{N_0}{2} \right). \quad (2.109)$$

Par suite, nous obtenons la fonction de distribution suivante de la variable  $x_{k,1}(\tau)$  :

$$f_{x_{k,1}(\tau)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \left[ P(\Re\{a_k\} = v_{0,1}) \exp \left( -\frac{(x - v_{0,1})^2}{N_0} \right) + P(\Re\{a_k\} = -v_{0,1}) \exp \left( -\frac{(x + v_{0,1})^2}{N_0} \right) \right] \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \left[ \frac{\exp(\frac{\lambda_1^k}{2})}{2 \cosh(\frac{\lambda_1^k}{2})} \exp \left( -\frac{(x - v_{0,1})^2}{N_0} \right) \frac{\exp(-\frac{\lambda_1^k}{2})}{2 \cosh(\frac{\lambda_1^k}{2})} \exp \left( -\frac{(x + v_{0,1})^2}{N_0} \right) \right] \\ - \frac{\exp \left( -\frac{x^2 + v_{0,1}^2}{N_0} \right)}{\sqrt{\pi N_0} \cosh \left( \frac{\lambda_1^k}{2} \right)} \cosh \left( \frac{2xv_{0,1}}{N_0} + \frac{\lambda_1^k}{2} \right). \quad (2.110)$$

De même, nous pouvons écrire que :

$$f_{x_{k,2}(\tau)}(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2 + v_{0,2}^2}{N_0}\right)}{\sqrt{\pi N_0} \cosh\left(\frac{\lambda_1^k}{2}\right)} \cosh\left(\frac{2v_{0,2}x}{N_0} + \frac{\lambda_2^k}{2}\right). \quad (2.111)$$

En utilisant le fait que  $a_{k,1}$  et  $a_{k,2}$  sont considérés comme des signaux binaires et par analogie aux résultats trouvés pour des signaux BPSK, nous obtenons les expressions suivantes :

$$E\left[\tanh^2\left(\frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x_{k,i}(\tau)}{N_0}\right)\right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2 + (v_{0,i})^2}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{2v_{0,i}x}{N_0} + \frac{\lambda_i^k}{2}\right)} dx \quad (2.112)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(v_{0,i}, x, N_0) dx, \quad (2.113)$$

où  $G_i(\nu, x, N_0)$  est donnée par (2.101) et pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$E\left[\left(\frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau}\right)^2\right] = \frac{N_0}{2} \ddot{g}(0) + E[a_{k,i}^2] \sum_n \dot{g}(nT)^2. \quad (2.114)$$

Finalement, lorsque  $n \neq k$  et  $l \neq i$ , dans l'Annexe B, nous avons montré que :

$$E\left[\frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \tanh\left(\frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x_{k,i}(\tau)}{N_0}\right) \tanh\left(\frac{\lambda_l^n}{2} + \frac{2v_{0,l}x_{n,l}(\tau)}{N_0}\right)\right] = -2v_{0,i}g'((k-n)T)^2. \quad (2.115)$$

En remplaçant (2.112), (2.114) et (2.115) dans (2.105), on a :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial u}\right)^2\right] &= \sum_k \sum_{i=1}^2 \frac{2}{N_0^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(v_{0,i}, x, N_0) dx\right] \left[\frac{N_0}{2} \ddot{g}(0) + E[a_{k,i}^2] \sum_n \dot{g}(nT)^2\right] \\ &\quad - \sum_k \sum_n \left(\frac{4}{N_0}\right)^2 \dot{g}((k-n)T)^2. \end{aligned} \quad (2.116)$$

L'inverse de (2.116) mène à l'expression de la BCR d'un signal modulé en QPSK pour une estimation du délai temporel de type CA.

Comme pour les signaux BPSK, un moyennage sur les valeurs possibles de  $\lambda_i$  devrait ensuite être fait pour obtenir la BCR qui prend en compte le gain de codage.

### 2.2.3 Cas d'un signal modulé en $M$ -PSK

Pour une modulation  $M$ -PSK, à partir de (2.65) et (2.104), on a :

$$E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = \frac{1}{N_0^2} \left( \sum_k \sum_{i=1}^2 E \left[ \tilde{a}_{k,i}^2(\tau) \right] E \left[ \left( \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] + \sum_k \sum_{n, n \neq k} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^2 E \left[ \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \tilde{a}_{k,i}(\tau) \tilde{a}_{n,l}(\tau) \right] \right), \quad (2.117)$$

où le symbole souple  $M$ -PSK estimé est donné par (2.66). Le premier terme de (2.117) peut être évalué à partir de (2.66) comme :

$$E \left[ \tilde{a}_{k,i}^2(\tau) \right] = \int \frac{(I_i(x))^2}{H_k^2(x)} f_{x_k(\tau)}(x) dx. \quad (2.118)$$

Similairement à l'annexe B, la densité de probabilité de  $x_k(\tau)$  est :

$$\begin{aligned} f_{x_k(\tau)}(x) &= \frac{1}{2\pi N_0} \left[ \sum_{m=1}^{2^p-1} P(a_k = \tilde{v}_m) \exp \left( -\frac{|x - \tilde{v}_m|^2}{2N_0} \right) + P(a_k = -\tilde{v}_m) \exp \left( -\frac{|x + \tilde{v}_m|^2}{2N_0} \right) \right] \\ &= \frac{\exp \left( -\frac{|x|^2 + 1}{2N_0} \right)}{2\pi N_0} \left[ \sum_{m=1}^{2^p-1} P(a_k = \tilde{v}_m) \exp \left( \frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x\}}{N_0} \right) + P(a_k = -\tilde{v}_m) \exp \left( \frac{\Re\{\tilde{v}_m^* x\}}{N_0} \right) \right] \\ &= \frac{\beta_k^p}{\pi N_0} \exp \left( -\frac{|x|^2 + 1}{2N_0} \right) H_k(x). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Selon les équations dans (1.20) où  $g(\cdot)$  est filtre de Nyquist, et en considérant que les symboles transmis sont mutuellement indépendants, alors :

$$E \left[ \left( \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = \frac{N_0}{2} \dot{g}(0) + \sum_n E[a_{k-n,i}^2] \dot{g}(nT)^2, \quad (2.120)$$

et

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \tilde{a}_{k,i}(\tau) \tilde{a}_{n,l}(\tau) \right] &= - \left( \int \frac{I_i(x)}{H_k(x)} f_{x_k(\tau)}(x) dx \right)^2 \dot{g}((k-n)T)^2 \quad (2.121) \\ &= - \left( \frac{\beta_k^p \dot{g}((k-n)T)}{\pi \sigma^2} \int I_i(x) \exp \left( -\frac{|x|^2 + 1}{2\sigma^2} \right) dx \right)^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors l'expression de la BCR pour un signal modulé en  $M$ -PSK en introduisant (2.118), (2.120) et (2.121) dans l'inverse de (2.117).

### 2.2.4 Cas d'un signal modulé en QAM

Dans cette section, nous développons la BCR CA des signaux QAM-carrés.

Partant de (2.88), nous avons :

$$E \left[ \left( \frac{\partial \Lambda_L(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = \sum_k \sum_n \sum_{l \in \{2p, 2p-1\}} E \left[ \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau)) \dot{H}_n^l(z_{n,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau)) H_n^l(z_{n,l}(\tau))} \frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial z_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \right] \quad (2.122)$$

$$+ \sum_k \sum_n E \left[ \frac{\dot{H}_k^{2p}(z_{k,2p}(\tau)) \dot{H}_n^{2p-1}(z_{n,2p-1}(\tau))}{H_k^{2p}(z_{k,2p}(\tau)) H_n^{2p-1}(z_{n,2p-1}(\tau))} \frac{\partial z_{k,2p}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial z_{n,2p-1}(\tau)}{\partial \tau} \right],$$

où

$$z_{k,l}(\tau) = \begin{cases} x_{k,1}(\tau) & \text{si } l = 2p, \\ x_{k,2}(\tau) & \text{si } l = 2p - 1. \end{cases} \quad (2.123)$$

Notons que  $\frac{\partial z_{k,2p}(\tau)}{\partial \tau}$  (resp.  $\frac{\partial z_{k,2p-1}(\tau)}{\partial \tau}$ ) et  $z_{k,2p}(\tau)$  (resp.  $z_{k,2p-1}(\tau)$ ) sont décorrélés, par suite le second terme de (2.122) est égal à 0. Evaluer la BCR revient donc à calculer le premier terme de (2.122), qui sera effectué dans ce qui suit distinguant les cas  $k = n$  et  $k \neq n$ .

#### Cas 1 : $k = n$

On a :

$$E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \right)^2 \left( \frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \right)^2 \right] E \left[ \left( \frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right]. \quad (2.124)$$

D'autre part :

$$E \left[ \left( \frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = \sum_i E[a_i^2] \dot{g}^2((k-i)T) - \frac{\sigma^2}{2} \ddot{g}(0). \quad (2.125)$$

Nous avons aussi :

$$E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \right)^2 P(z_{k,l}(\tau)) dz_{k,l}(\tau). \quad (2.126)$$

$g(\cdot)$  étant un filtre de Nyquist, le signal reçu et filtré à la réception (1.20), s'écrit :

$$x_k(\tau) = a_k + v_k(\tau), \quad (2.127)$$

par conséquent, à partir de (2.76) et (2.127), la fonction de densité de probabilité de  $x_k(\tau)$  est :

$$f(x_k(\tau)) = \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \exp \left( -\frac{|x_k(\tau) - v_i|^2}{2\sigma^2} \right) \frac{P(a_k = v_i)}{2\pi\sigma^2}$$

$$= \frac{4\beta_k}{2\pi\sigma^2} H_k^{2p}(x_{k,1}(\tau)) H_k^{2p-1}(x_{k,2}(\tau)) \exp \left( -\frac{x_{k,1}^2(\tau) + x_{k,2}^2(\tau)}{2\sigma^2} \right). \quad (2.128)$$

Etant donné que  $x_{k,1}(\tau)$  et  $x_{k,2}(\tau)$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de  $x_k(\tau)$ , qui sont deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, on trouve que :

$$f(x_k(\tau)) = f(x_{k,1}(\tau))f(x_{k,2}(\tau)), \quad (2.129)$$

où

$$f(x_{k,1}(\tau)) = \frac{2\omega_{k,2p}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} H_k^{2p}(r_k(\tau)) \exp\left(-\frac{r_k^2(\tau)}{2\sigma^2}\right) \quad (2.130)$$

$$f(x_{k,2}(\tau)) = \frac{2\omega_{k,2p-1}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} H_k^{2p-1}(i_k(\tau)) \exp\left(-\frac{i_k^2(\tau)}{2\sigma^2}\right) \quad (2.131)$$

et

$$\omega_{k,2p} = \prod_{l=1}^p \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_{2l}^k}{2}\right)} \quad (2.132)$$

$$\omega_{k,2p-1} = \prod_{l=1}^p \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_{2l-1}^k}{2}\right)} \quad (2.133)$$

En conséquence, nous obtenons :

$$E\left[\left(\frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))}\right)^2\right] = \frac{2\omega_{k,l}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{H}_k^l(x)^2}{H_k^l(x)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (2.134)$$

### Cas 2 : $k \neq n$

Sachant que  $\frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau}$  et  $\frac{\partial z_{n,l}(\tau)}{\partial \tau}$  dépendent de  $z_{k,l}(\tau)$  et  $z_{n,l}(\tau)$ , alors afin d'obtenir l'espérance du premier terme de (2.122), nous moyennons d'abord l'expression désirée en conditionnant par rapport à  $z_{k,l}(\tau)$  et  $z_{n,l}(\tau)$ , puis nous calculons l'espérance de l'expression résultante par rapport à ces deux variables aléatoires.

Nous avons :

$$z_{k,l}(\tau) = a_{k,l} + \alpha_{k,l} \quad (2.135)$$

où  $a_{k,l}$  (resp.  $\alpha_{k,l}$ ) est égale à  $\Re\{a_k\}$  (resp.  $\Re\{v_k(\tau)\}$ ) si  $l = 2p$  et à  $\Im\{a_k\}$  (resp.  $\Im\{v_k(\tau)\}$ ) si  $l = 2p - 1$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} &= a_{k,l} \dot{g}((n-k)T) + \sum_{j, j \neq k, n} a_{n,j} \dot{g}((n-j)T) + \dot{\alpha}_{n,l} \\ &= (z_{k,l}(\tau) \dot{g}((n-k)T) - \dot{g}((n-k)T) \alpha_{k,l}) + \sum_{j, j \neq k, n} a_{j,l} \dot{g}((n-j)T) + \dot{\alpha}_{n,l} \end{aligned} \quad (2.136)$$

L'évaluation de la moyenne conditionnelle mène à :

$$E \left[ \frac{\partial z_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \times \frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau} \middle| z_{k,l}(\tau), z_{n,l}(\tau) \right] = z_{k,l}(\tau) \dot{g}((n-k)T) z_{n,l}(\tau) \dot{g}((k-n)T) - z_{k,l}(\tau) z_{n,l}(\tau) \dot{g}((k-n)T)^2. \quad (2.137)$$

Par suite :

$$E \left[ \frac{\partial z_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \frac{\dot{H}_n^l(z_{n,l}(\tau))}{H_n^l(z_{n,l}(\tau))} \middle| z_{k,l}(\tau), z_{n,l}(\tau) \right] = - \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \frac{\dot{H}_n^l(z_{n,l}(\tau))}{H_n^l(z_{n,l}(\tau))} z_{k,l}(\tau) z_{n,l}(\tau) \dot{g}((k-n)T)^2.$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial z_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial z_{k,l}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \frac{\dot{H}_n^l(z_{n,l}(\tau))}{H_n^l(z_{n,l}(\tau))} \right] &= -E \left[ z_{k,l}(\tau) \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \right] E \left[ z_{n,l}(\tau) \frac{\dot{H}_n^l(z_{n,l}(\tau))}{H_n^l(z_{n,l}(\tau))} \right] \dot{g}((k-n)T)^2 \\ &= -E \left[ z_{k,l}(\tau) \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \right]^2 \dot{g}((k-n)T)^2, \end{aligned} \quad (2.138)$$

où

$$E \left[ z_{k,l}(\tau) \frac{\dot{H}_k^l(z_{k,l}(\tau))}{H_k^l(z_{k,l}(\tau))} \right] = \frac{2\omega_{k,l}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \dot{H}_k^l(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (2.139)$$

Nous mentionnons que les fonctions intégrales impliquées dans (2.134) et (2.139), respectivement, décroissent rapidement lorsque  $x$  augmente. Par conséquent, les intégrales sur  $]-\infty, +\infty[$  peuvent être approchées de manière précise par une intégrale finie sur un intervalle de type  $[-A, +A]$  en utilisant la méthode d'intégration numérique de Riemann. L'évaluation de la BCR est donc possible vu que toutes les expressions impliquées dans l'équation (2.122) sont obtenues.

Ayant calculé les expressions analytiques des bornes de Cramèr-Rao en mode CA pour différentes modulations, le paragraphe suivant exploite les résultats obtenus et permet de comparer les performances des différents estimateurs par rapport aux bornes.

## 2.3 Discussion des résultats obtenus

Dans cette section, nous présentons les résultats de simulation des algorithmes d'estimation du retard CA proposés et l'expression proposée de la BCR. Nous considérons le cas de modulations linéaires avec un facteur de sur-échantillonnage égal à 8. Les symboles à transmettre passent d'abord à travers un filtre en cosinus surélevé, avec un facteur  $\alpha$  de roll-off et envoyés ensuite sur un canal BBAG. Les résultats sont donnés pour des blocs de symboles moyennés sur 1000 itérations Monte Carlo. Les LLR sont fournis par le décodeur d'un turbo-code composé de deux RSC identiques concaténés en parallèle avec un taux de codage systématique  $r = \frac{1}{2}$  et les polynômes générateurs  $(1, 0, 1, 1)$  et  $(1, 1, 0, 1)$ . Les valeurs LLR sont initialisées par les sorties de démappage souple. Les sorties du turbo-décodeur ne sont réinjectées qu'une seule fois à l'entrée du synchroniseur. Un grand entrelaceur est placé entre les deux RSC.  $\hat{\tau}_k$  est initialisée à 0 et sa valeur estimée est représentée à la fin du bloc lorsque l'état d'équilibre est atteint (à la convergence). Les résultats de simulation sont évalués pour un retard temporel  $\tau = 0, 2T$ .

Le pas d'adaptation  $\mu$  est choisi de manière à minimiser l'EQM ; en théorie, un pas adaptatif [17, 34] permettrait une de la convergence rapide et une EQM plus faible à la convergence ; cependant, pour des raisons de simplicité, dans la pratique des valeurs typiques de  $\mu$  sont fixées entre 0,15 et 0,45 selon les scénarios possibles. La valeur de  $x_k(\tau_{k-1})$  est obtenue par une interpolation quadratique. Pour les résultats de simulations suivants, nous avons choisi, pour évaluer les intégrales,  $A = 100$  et un pas d'intégration égal à  $1/2000$ .

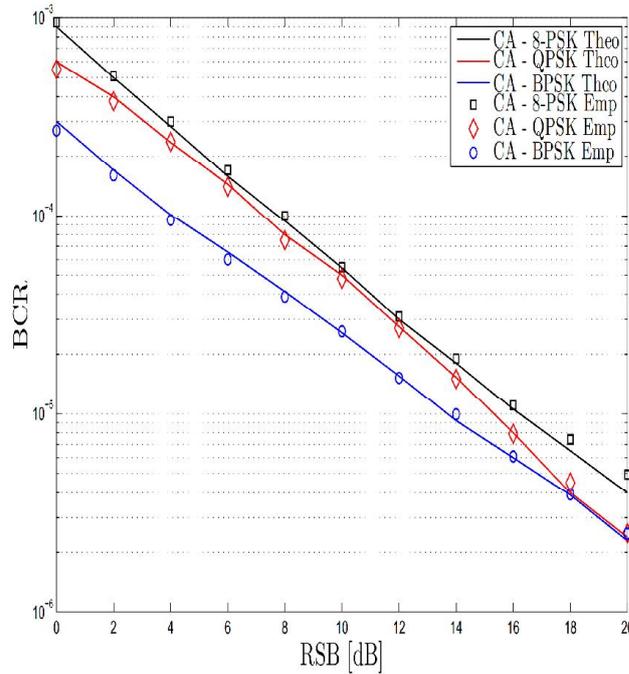
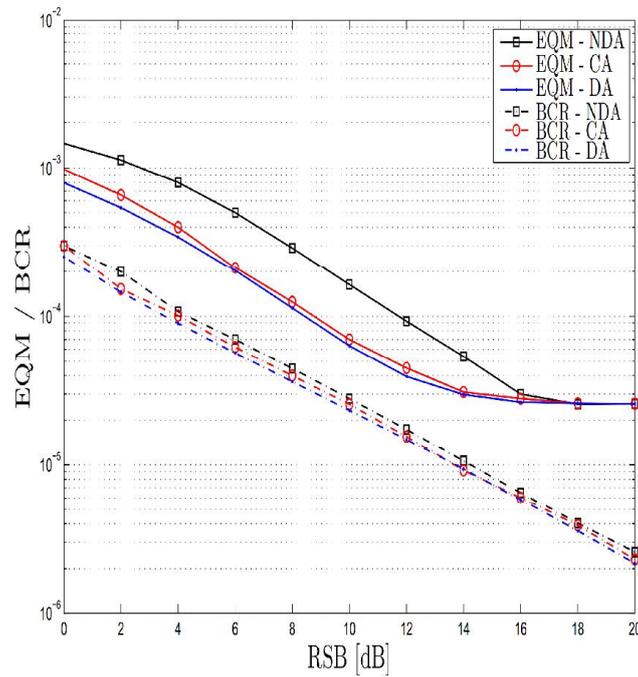


FIGURE 2.2: Comparaison entre la BCR empirique et son expression analytique en fonction du RSB pour différentes modulations.

La figure 2.2 superpose la courbe de la BCR théorique évaluée et la BCR empirique obtenue par un moyennage sur les symboles à l'aide d'une simulation Monte Carlo pour les signaux BPSK, QPSK et 8-PSK. Nous pouvons confirmer que les valeurs analytiques correspondent parfaitement aux valeurs simulées de la BCR prouvant ainsi la validité des expressions trouvées.

Dans les Figures 2.3, 2.4 et 2.5, nous traçons les courbes des BCR et EQM pour un délai normalisé ( $\tau/T$ ) en fonction du RSB pour des modulations BPSK, QPSK and 8-PSK en utilisant un DET MV. Les valeurs d'EQM sont évaluées après la convergence de l'algorithme, à la fin du bloc d'observation contenant 500 symboles. On note qu'avant la saturation à fort RSB, l'EQM est inversement proportionnelle au RSB, alors que les BCR continuent à décroître même à fort RSB. Comparé au mode NDA, l'EQM du mode CA décroît en exploitant l'information souple du décodeur turbo. Le mode DA réalise encore la meilleure performance, cependant, il engendre une perte plus élevée en termes d'efficacité spectrale. En outre, sur un large intervalle de rapports signal sur bruit, la performance du mode CA est presque équivalente à celle du

FIGURE 2.3: EQM et BCR en fonction du RSB pour un signal modulé en BPSK,  $\alpha = 0.3$ 

mode DA sans l'utilisation de symboles pilotes. A fort RSB les courbes liées aux trois modes de synchronisation fusionnent. Cette saturation du RSB sur le côté droit des figures 2.3, 2.4 et 2.5 est due au bruit propre de l'erreur de mise à jour du DET. Des résultats similaires sont obtenus pour d'autres facteurs de roll-off et d'autres détecteurs. Certains résultats numériques sont résumés dans les Tables 2.2 et 2.3.

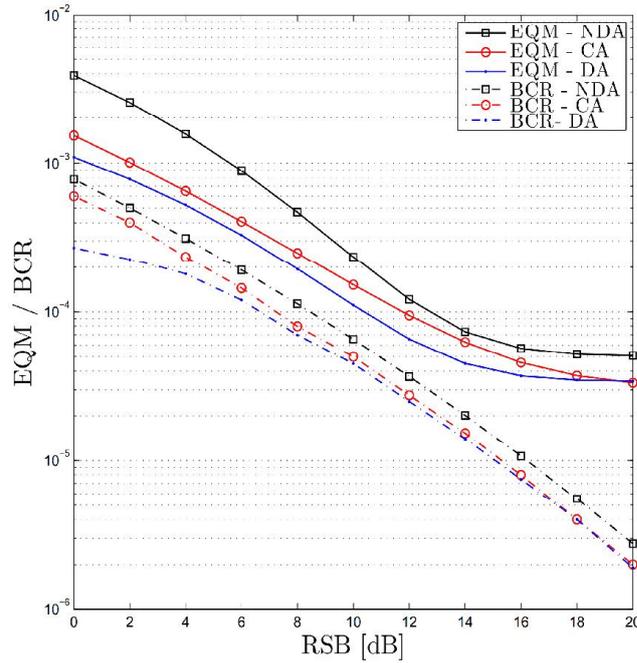
TABLE 2.2: Les valeurs d'EQM pour un RSB = 10 dB

Modulation	DA	Souple	NDA
BPSK	$0.63 \times 10^{-4}$	$0.7 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-4}$
QPSK	$1.2 \times 10^{-4}$	$1.6 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$
8-PSK	$1.8 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-4}$

TABLE 2.3: Les valeurs du RSB pour une EQM =  $10^{-4}$ 

Modulation	DA	Souple	NDA
BPSK	8.5 dB	9 dB	12 dB
QPSK	11 dB	12 dB	13 dB
8-PSK	12 dB	14 dB	19.5 dB

Dans les figures 2.6 et 2.7, nous affichons les résultats de simulation de l'EQM sur  $(\tau/T)$  en fonction du RSB pour des modulations 16-QAM et 64-QAM, respectivement. Par rapport au

FIGURE 2.4: EQM et BCR en fonction du RSB pour un signal modulé en QPSK,  $\alpha = 0.3$ 

	16-QAM	64-QAM
DA	$6 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
CA	$9 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
NDA	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$

TABLE 2.4: EQM pour un RSB = 0 dB

mode NDA, l'erreur quadratique moyenne est réduite en exploitant les informations souples du décodeur turbo. Sur un large intervalle de RSB, les performances du mode CA sont presque équivalentes à celles du mode DA. Par exemple, pour un RSB = 0 dB, l'EQM est égale à  $6 \times 10^{-3}$  pour le mode DA,  $9 \times 10^{-3}$  pour la technique proposée et  $1,8 \times 10^{-2}$  pour le mode NDA pour des signaux 16-QAM et elle est égale à  $1,5 \times 10^{-2}$  pour le mode DA,  $1,8 \times 10^{-2}$  pour la technique et proposée et  $2,7 \times 10^{-2}$  pour le mode NDA pour des signaux 64-QAM.

La figure 2.8 présente la courbe théorique de la BCR évaluée à partir de (2.122) et comparée à la courbe empirique obtenue par un moyennage sur les symboles utilisant une simulation Monte Carlo pour des signaux 16-QAM et 64-QAM. Nous pouvons confirmer que les valeurs analytiques correspondent parfaitement aux valeurs simulées de la BCR ce qui permet de valider les résultats trouvés pour des modulations QAM.

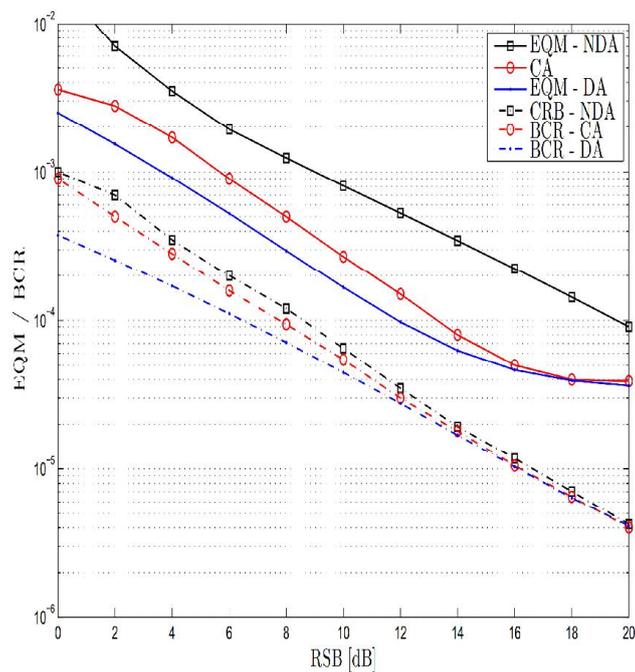


FIGURE 2.5: EQM et BCR en fonction du RSB pour un signal modulé en 8-PSK,  $\alpha = 0.3$

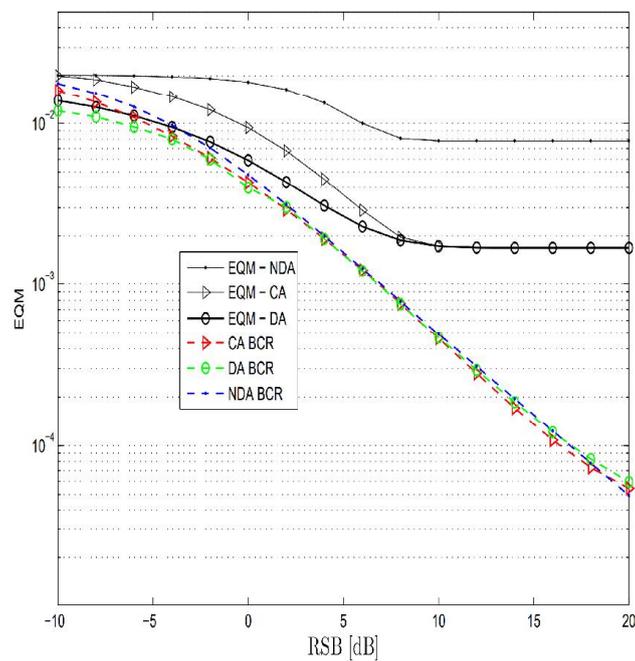


FIGURE 2.6: EQM en fonction du RSB pour des modulations 16QAM

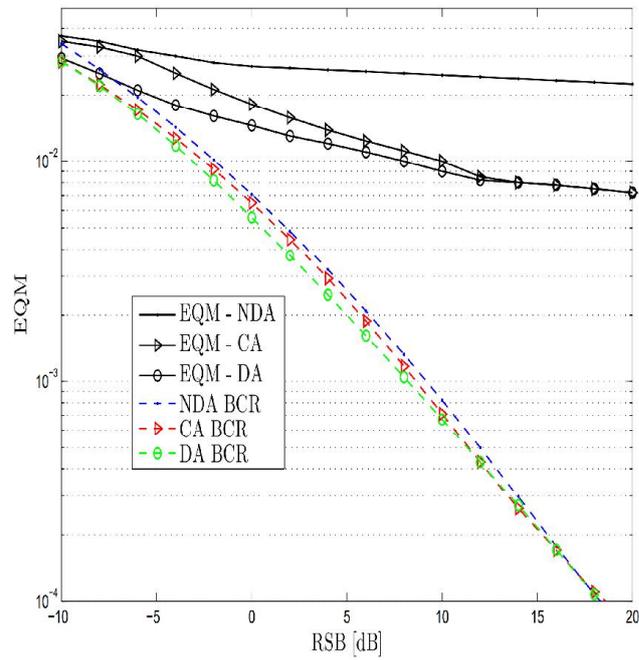
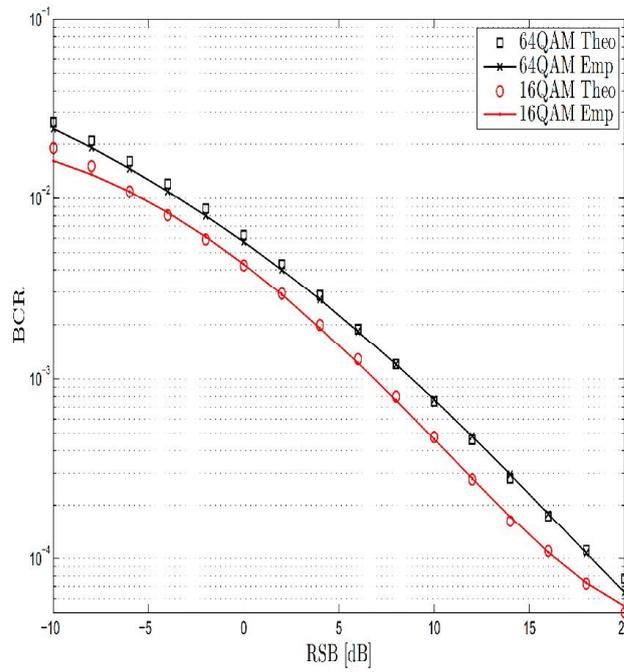


FIGURE 2.7: EQM en fonction du RSB pour des modulations 64QAM

FIGURE 2.8: Comparaison entre la BCR empirique et la BCR analytique pour différentes modulations,  $\alpha = 0.3$

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des algorithmes de synchronisation temporelle utilisant l'information souple du décodeur afin d'améliorer l'estimation d'un retard temporel déterministe. Cette technique permet d'augmenter l'efficacité spectrale en évitant d'envoyer des symboles pilotes sur le canal radio et de réduire l'EQM par rapport au mode NDA.

Les expressions des BCR CA ont été également développées pour des signaux BPSK, QPSK,  $M$ -PSK et QAM. Ces résultats ont été validés en les comparant à des simulations Monte Carlo.

Vu le changement du milieu de fonctionnement du système dû à la température, à l'humidité, au déplacement du récepteur (capteur WBAN en mouvement), etc ..., le retard temporel varie légèrement d'une façon aléatoire. Les détecteurs inspirés du MV déjà proposés ne sont pas en mesure d'assurer la poursuite de ce retard étant donné qu'aucune information *a priori* n'est fournie sur ses variations. Dans le chapitre suivant, nous allons proposer et évaluer une technique hors ligne permettant d'estimer un retard temporel variable aléatoirement au cours du temps.



## Chapitre 3

# Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard variable

Jusqu'ici, nous avons considéré le problème d'estimation d'un retard temporel constant modélisé par une variable déterministe.

Dans ce chapitre, nous nous basons sur la théorie de l'estimation au sens du MAP pour la mise en oeuvre d'un algorithme de synchronisation temporelle fonctionnant en mode hors-ligne dans le cas d'un retard temporel variable dans le temps et modélisé par une variable aléatoire.

Un estimateur dynamique hors ligne est proposé et ses performances théoriques en termes de biais et d'EQM sont évaluées et comparées à la borne de Cramèr-Rao bayésienne. Les performances du système proposé sont évaluées par rapport à celles de l'estimateur en ligne, et ce pour les modes DA, CA et NDA dans le cas de signaux BPSK et QAM. Nous montrons en particulier la pertinence de combiner le mode CA et l'approche hors ligne.

### 3.1 Mise en place d'un estimateur hors ligne au sens du Maximum *a Posteriori*

Revenons à l'expression que nous avons utilisée pour le signal transmis  $s(t)$  :

$$s(t) = \sum_i a_i h(t - iT). \quad (3.1)$$

Cette fois-ci, nous considérons que le retard temporel introduit par le canal n'est plus constant sur la période d'observation. Le signal reçu s'écrit alors :

$$r(t) = s(t - \tau(t)) + n(t), \quad (3.2)$$

où  $n(t)$  est un BBAG de variance connue  $\sigma_n^2$  et  $\tau(t)$  est le retard temporel à l'instant  $t$ .

Le  $k^{\text{ème}}$  échantillon du signal reçu s'écrit donc :

$$r_k = s_k(\tau_k) + n_k, \quad (3.3)$$

où  $\tau_k = \tau(kT)$ ,  $s_k(\tau_k) = s(kT - \tau_k)$  et  $n_k$  est le  $k^{\text{ème}}$  échantillon de bruit. Nous supposons que le retard  $\tau_k$  suit un modèle d'évolution de Wiener [6, 64] selon :

$$\tau_k = \tau_{k-1} + w_k, \quad (3.4)$$

où  $w_k$  est un BBAG de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ .  $\sigma_w^2$  détermine la sévérité de la gigue temporelle. Le modèle de Wiener, a été choisi en raison de sa simplicité et de sa capacité à modéliser une large gamme de canaux en faisant varier un paramètre unique [64]. Ce modèle est connu aussi sous le nom de marche aléatoire vu que la valeur du retard d'indice  $k$  part de la valeur du retard d'indice  $k - 1$  et suit une direction aléatoire  $w_k$ . Etant donné que la variable aléatoire  $w_k$  est d'espérance nulle, la moyenne de  $\tau_k$  dépend uniquement de la moyenne du retard initial,  $\tau_1$  :

$$E[\tau_k] = E\left[\tau_1 + \sum_{i=1}^{k-1} w_i\right] = E[\tau_1]. \quad (3.5)$$

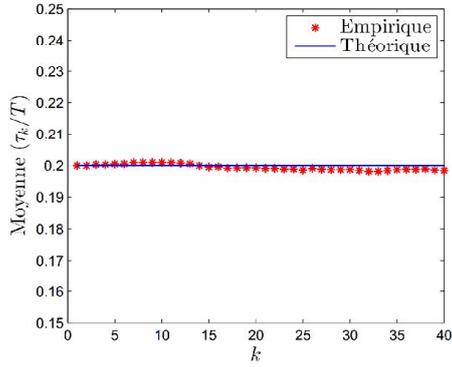
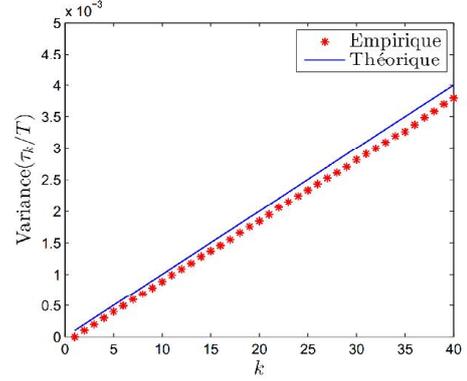
Sa variance dépend toutefois des variances des deux paramètres  $\tau_1$  et  $w_k$  respectivement. En effet :

$$\begin{aligned} \text{var}(\tau_k) &= E\left[(\tau_k - E[\tau_k])^2\right] \\ &= \text{var}(\tau_{k-1}) + \sigma_w^2 \\ &= \text{var}(\tau_1) + (k-1)\sigma_w^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nous constatons que la variance augmente linéairement avec le temps; le modèle proposé est alors non stationnaire. Les résultats trouvés ci-dessus ont été confirmés par les Figures 3.1 et 3.2 qui représentent respectivement la moyenne et la variance empiriques et théoriques (données par les équations (3.5) et (3.6)). Les résultats empiriques ont été obtenus par des simulations Monte Carlo sur 1000 réalisations et en prenant  $\tau_1 = 0.2T$  et  $\sigma_w = 10^{-3}$ .

### 3.1.1 Estimateur au sens du Maximum A Posteriori

Soit  $\mathbf{a}$  le vecteur des symboles transmis et  $\mathbf{r}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  les vecteurs contenant, respectivement, les  $N$  observations aléatoires  $r_k$  et les  $N$  délais  $\tau_k$  représentés comme suit :  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$  et  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N]$ . L'estimateur au sens du MAP de  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur  $\mathbf{u}$  avec la plus forte

FIGURE 3.1: Moyenne de  $\tau_k/T$ .FIGURE 3.2: Variance de  $\tau_k/T$ .

probabilité compte tenu des observations. L'estimateur du retard temporel s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\tau}} &= \arg \max_{\mathbf{u}} \{P(\mathbf{u}|\mathbf{r}, \mathbf{a})\} \\ &= \arg \max_{\mathbf{u}} \{P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a})P(\mathbf{u})\} \\ &= \arg \max_{\mathbf{u}} \{\log (P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a})) + \log (P(\mathbf{u}))\},\end{aligned}\quad (3.7)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\tau}} = [\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_N]$  et  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]$ .

Pour les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{a}$  donnés, l'indépendance des échantillons du modèle (3.3) permet d'écrire :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^N P(r_i|u_i, \mathbf{a}),\quad (3.8)$$

où

$$P(r_i|u_i, \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{|r_i - s_i(u_i)|^2}{2\sigma_n^2}\right).\quad (3.9)$$

Par suite :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^N \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N |r_i - s_i(u_i)|^2}{2\sigma_n^2}\right).\quad (3.10)$$

En laissant la durée d'observation  $T_0$  du signal  $r(t)$  couvrir un grand nombre  $N$  de périodes symbole, on peut supposer que [52] :

$$\sum_{i=1}^N |r_i - s_i(u_i)|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{T_0} |r(t) - s(t - u(t))|^2 dt\quad (3.11)$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{T_0} |r(t)|^2 dt + \int_{T_0} |s(t - u(t))|^2 dt - 2 \int_{T_0} \Re \{r(t)s(t - u(t))^*\} dt.\quad (3.12)$$

Pour une durée  $T_0$  suffisamment large et sachant que l'énergie de  $h(t)$  est égale à 1, le délai  $u(t)$  peut être négligé dans l'intégrale suivante [38, 54] :

$$\int_{T_0} |s(t - u(t))|^2 dt \simeq \int_{T_0} |s(t)|^2 dt = \sum_i |a_i|^2. \quad (3.13)$$

D'autre part,

$$\int_{T_0} \Re \{r(t)s(t - u(t))^*\} dt = \int_{T_0} \Re \left\{ \left( \sum_j a_j h(t - jT - \tau(t)) + n(t) \right) \sum_i a_i^* h(t - iT - u(t)) \right\} dt. \quad (3.14)$$

En considérant que le retard temporel reste invariable sur la période d'échantillonnage, on peut écrire :

$$\tau(t) = \tau_i, \forall t \in [iT, (i+1)T]. \quad (3.15)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{T_0} \Re \{r(t)s(t - u(t))^*\} dt &= \int_{T_0} \Re \left\{ \left( \sum_j a_j h(t - jT - \tau_j) + n(t) \right) \sum_i a_i^* h(t - iT - u_i) \right\} dt \\ &= \Re \left\{ \sum_i a_i^* \left( \sum_j a_j \int_{T_0} h(t - jT - \tau_j) h(t - iT - u_i) dt + \int_{T_0} h(t - iT - u_i) n(t) dt \right) \right\} \\ &= \Re \left\{ \sum_i a_i^* \left( \sum_j a_j g((i-j)T - (\tau_j - u_i)) + \underbrace{\int_{T_0} h(t - iT - u_i) n(t) dt}_{v_i(u_i)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $g(t) = h(t) \otimes h^*(-t)$ .

Etant donné que le retard temporel varie très lentement dans le temps, on peut considérer que  $\tau_j \simeq \tau_i$  même pour les valeurs éloignées de  $i$  et  $j$  ; ceci est alors plus plausible pour les autres valeurs, où  $i$  et  $j$  sont assez proches. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{T_0} \Re \{r(t)s(t - u(t))^*\} dt &= \Re \left\{ \sum_i a_i^* \left( \underbrace{\sum_j a_j g((i-j)T - (\tau_i - u_i))}_{y_i(u_i)} + v_i(u_i) \right) \right\} \\ &= \Re \left\{ \sum_i a_i^* (y_i(u_i) + v_i(u_i)) \right\} \\ &= \Re \left\{ \sum_i a_i^* x_i(u_i) \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nous obtenons finalement [52] :

$$\int_{T_0} \Re \{r(t)s(t-u(t))^*\} dt \simeq \sum_i \Re \{a_i^* x_i(u_i)\}, \quad (3.18)$$

où  $x_i(u_i)$  est le signal reçu après filtrage adapté :

$$x_i(u_i) = y_i(u_i) + v_i(u_i), \quad (3.19)$$

$$y_i(u_i) = \sum_l a_l g((i-l)T - (\tau_i - u_i)), \quad (3.20)$$

$$v_i(u_i) = \int_{T_0} h(t - iT - u_i)n(t)dt, \quad (3.21)$$

$$g(t) = h(t) \otimes h^*(-t). \quad (3.22)$$

Nous choisissons un filtre de mise en forme  $h(t)$  en racine de Nyquist de sorte que le filtre global  $g(t)$  donné par (3.22) soit un filtre de Nyquist.

Etant donné que  $\int_{T_0} |r(t)|^2 dt$  ne dépend pas de  $\mathbf{u}$ , cette quantité peut être éliminée dans la fonction de vraisemblance à maximiser. Ayant un nombre fini d'observations  $N$ , le premier terme dans la fonction à maximiser dans (3.7) à :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \left(\frac{C}{2\pi\sigma_n^2}\right)^N \exp\left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Re\{a_i^* x_i(u_i)\}}{\sigma_n^2} - \frac{|a_i|^2}{2\sigma_n^2}\right)\right), \quad (3.23)$$

où  $C$  est un terme constant par rapport à la variable  $\mathbf{u}$ . A partir du modèle de Wiener (3.4), nous obtenons :

$$P(\mathbf{u}) = P(u_1) \prod_{i=2}^N P(u_i|u_{i-1}) \quad (3.24)$$

$$= P(u_1) \prod_{i=2}^N \frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2\sigma_w^2}\right). \quad (3.25)$$

Ainsi, sans perte de généralité et en éliminant les termes constants, le problème de maximisation (3.7) peut s'écrire :

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\mathbf{u}} \{\Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u})\}, \quad (3.26)$$

où :

$$\Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N \Re\{a_i^* x_i(u_i)\} + \log(P(u_1)) - \sum_{i=2}^N \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2\sigma_w^2}. \quad (3.27)$$

Si nous supposons que  $\frac{\partial \log(P(u_1))}{\partial u_1} = 0$  (dans le cas d'absence d'une connaissance *a priori* sur  $u_1$ ), alors le gradient de  $\Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u})$  par rapport à  $\mathbf{u}$  est donné par :

$$\nabla_u \Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \begin{cases} \Re \left\{ \frac{a_k^*}{\sigma_n^2} \frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \right\} + \frac{u_{k+1} - u_k}{\sigma_w^2}, \text{ pour } k = 1; \\ \Re \left\{ \frac{a_k^*}{\sigma_n^2} \frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \right\} + \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\sigma_w^2}, \text{ pour } k = 2, \dots, N-1; \\ \Re \left\{ \frac{a_k^*}{\sigma_n^2} \frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \right\} + \frac{u_{k-1} - u_k}{\sigma_w^2}, \text{ pour } k = N. \end{cases}$$

L'algorithme du gradient est souvent utilisé pour trouver l'extremum d'une équation non linéaire comme (3.27), vérifiant  $\nabla_u \Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}_{1,N}$ . Le délai temporel estimé  $\hat{\tau}$  maximisant  $\Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u})$  par rapport à  $\mathbf{u}$  est alors donné par :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_2 + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2} \Re \left\{ a_1^* \frac{\partial x_1(u_1)}{\partial u_1} \Big|_{u_1 = \hat{\tau}_1} \right\}, \text{ pour } k = 1; \\ \hat{\tau}_k = \frac{\hat{\tau}_{k+1} + \hat{\tau}_{k-1}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2} \Re \left\{ a_k^* \frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \Big|_{u_k = \hat{\tau}_k} \right\}, \text{ pour } k = 2, \dots, N-1; \\ \hat{\tau}_N = \hat{\tau}_{N-1} + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2} \Re \left\{ a_N^* \frac{\partial x_N(u_N)}{\partial u_N} \Big|_{u_N = \hat{\tau}_N} \right\}, \text{ pour } k = N. \end{cases} \quad (3.28)$$

### 3.1.2 Algorithme d'estimation hors ligne

Selon l'équation (3.28) du paragraphe précédent, le délai estimé à l'instant  $k$  est une fonction du retard à l'échantillon précédent  $k-1$  et à l'échantillon suivant  $k+1$ , qui sont en fait inconnus pour une technique de filtrage en ligne. L'idée est alors d'estimer le délai  $\tau_k$  avec un algorithme de lissage hors ligne. Considérons :

$$z_k(\hat{\tau}_i, a_k) \triangleq \mu \Re \left\{ a_k^* \frac{\partial x_k(u_i)}{\partial u_i} \Big|_{u_i = \hat{\tau}_i} \right\}, \quad (3.29)$$

$$\hat{\tau}_k^{(F)} \triangleq \hat{\tau}_{k-1}^{(F)} + z_k(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)}, a_k), \quad (3.30)$$

$$\hat{\tau}_k^{(B)} \triangleq \hat{\tau}_{k+1}^{(B)} + z_k(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)}, a_k), \quad (3.31)$$

où  $z_k(\hat{\tau}_i, a_k)$  est le terme d'adaptation,  $\mu$  est le pas d'adaptation et  $i$  est un indice dans  $\{k-1, k+1\}$ . Nous reconnaissons dans (3.30) la boucle récursive classique de récupération du retard temporel donnée par les équations (??) et (1.25) et dans les références [33, 48, 52, 58]. L'équation (3.31) est similaire à (3.30) mais traite les termes postérieurs à  $k$ , l'indice temporel d'intérêt. À partir de (3.28) et en introduisant les expressions précédentes (3.29)-(3.31), nous proposons l'algorithme d'aller-retour appelé aussi *Forward-Backward* (FB) qui combine la boucle d'aller ou *Forward* (F) en ligne classique présentée dans les chapitres précédents (3.30) avec une boucle de retour ou *Backward* (B) (3.31) procédant d'une façon similaire mais dans le sens opposé en

partant de la fin du bloc ( $k = N$ ) jusqu'au début ( $k = 1$ ) :

$$\hat{\tau}_k^{(FB)} = \begin{cases} \hat{\tau}_1^{(B)} = \hat{\tau}_2^{(B)} + z_1(\hat{\tau}_2^{(B)}, a_1); \\ \frac{1}{2} (\hat{\tau}_k^{(B)} + \hat{\tau}_k^{(F)}), \text{ pour } k = 2, \dots, N-1; \\ \hat{\tau}_N^{(F)} = \hat{\tau}_{N-1}^{(F)} + z_N(\hat{\tau}_{N-1}^{(F)}, a_N). \end{cases} \quad (3.32)$$

Dans un contexte hors-ligne, l'estimation de  $\tau_k$ , peut même être améliorée en appliquant des itérations multiples de la boucle aller-retour sur le même bloc d'observations. Ceci est réalisé par l'initialisation de la première valeur à estimer de la nouvelle itération par la dernière valeur estimée à l'itération précédente.

On remarque que le terme d'adaptation  $z_k(\hat{\tau}_i, a_k)$  dépend des symboles transmis. Ces symboles peuvent être connus par le récepteur en présence de signaux pilotes à l'intérieur de la trame transmise. Dans ce cas, l'algorithme proposé (en-ligne ou hors-ligne) opère dans le mode DA. Cependant, dans le but d'améliorer l'efficacité spectrale et d'augmenter le débit utile, ces signaux de référence peuvent être supprimés. Ainsi, en pratique, des estimées dures  $\hat{a}_k$  des symboles transmis sont calculées par le récepteur et remplacent  $a_k$  dans (3.32); ceci est appelé le mode NDA. Dans les systèmes codés, on peut tirer profit de la sortie souple des décodeurs afin de fournir des estimations plus fiables des symboles  $a_k$  comme il a été proposé dans le chapitre précédent dans le cas du traitement en ligne. Nous pouvons donc remplacer  $a_k$  par le symbole souple  $\tilde{a}_k$  dans (3.32) pour l'algorithme de lissage hors-ligne et obtenir le mode CA hors-ligne.

Ci-après, nous évaluons par simulation les performances de l'algorithme de synchronisation étudié pour un petit bloc de 90 symboles non codés BPSK transmis sur un canal gaussien. Le signal suréchantillonné, est passé à travers un filtre en cosinus surélevé, avec un facteur de roll-off  $\alpha = 0.3$ , avant d'être envoyé. Le canal introduit un retard temporel aléatoire  $\tau$  suivant un modèle Wiener (voir (3.4)). Le signal est filtré au niveau du récepteur et récupéré par le synchroniseur. Nous évaluons enfin l'EQM sur 1000 essais Monte Carlo.

La Figure 3.3 illustre la valeur estimée du retard normalisé  $\hat{\tau}_k/T$  en utilisant les algorithmes *Forward*, *Backward* et *Forward-Backward* après trois itérations dans un contexte DA pour un signal BPSK. Tout au long du bloc d'observation, l'algorithme *Forward-Backward* fournit une meilleure estimation du retard temporel que le *Forward* ou le *Backward* seulement vu qu'il moyenne à tout moment les deux trajectoires. Aux extrémités du bloc d'observation, les trois algorithmes ont des performances équivalentes. Ceci est un résultat logique puisque en pratique, la première estimation du retard par la boucle *Backward* utilise la dernière estimation de la boucle *Forward* et vice-versa.

La Figure 3.4 trace les courbes d'EQM sur l'estimation du retard temporel en fonction de la valeur moyenne du retard au niveau du centre du bloc des observations pour différents RSB et différents écarts type  $\sigma_w$  en utilisant une modulation 16QAM. On note que l'EQM décroît pour

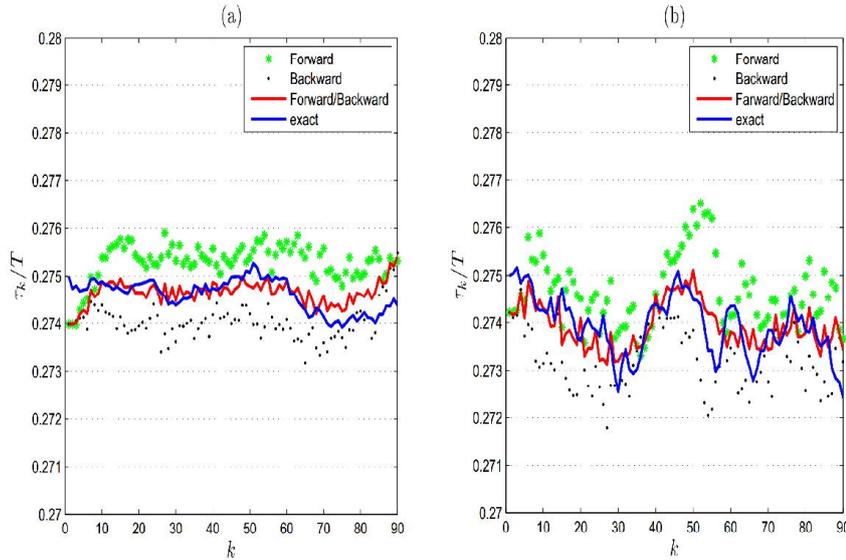


FIGURE 3.3:  $\tau_k/T$  et sa valeur estimée tout au long du bloc d'observation en mode DA, pour une modulation BPSK, (a)  $\sigma_w/T = 10^{-4}$  et (b)  $\sigma_w/T = 10^{-3}$

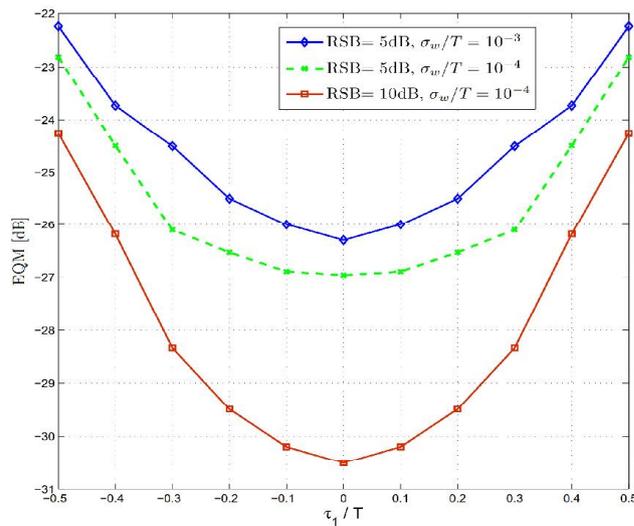


FIGURE 3.4: EQM en fonction de  $\frac{\tau_0}{T}$  au centre du bloc d'observation pour plusieurs valeurs de RSB et de  $\sigma_w/T$ , en utilisant des signaux 16QAM dans le mode DA.

des valeurs plus faibles de  $\sigma_w$  et des valeurs plus élevées de RSB. Ce résultat est non seulement intuitif mais prévisible vu que, comme cela sera établi, l'expression théorique de l'EQM est inversement proportionnelle à  $\sigma_w$  et  $\sigma_n$ .

Ci-après, à chaque indice de temps  $k$ , les performances analytiques après une et plusieurs itérations de l'algorithme *Forward*, *Backward* et *Forward-Backward* seront développées en termes de biais d'estimation et d'EQM.

### 3.2 Evaluation des performances théoriques de l'estimateur

Dans ce qui suit, nous approchons pour tout instant  $k$ , le terme d'adaptation de chaque algorithme comme étant la somme d'une fonction linéaire de l'erreur d'estimation,  $\hat{\tau}_i - \tau_k$  et d'un bruit additif auto-généré,  $b_k(\hat{\tau}_i)$ , où  $i = k - 1$  (resp.  $i = k + 1$ ) lorsque l'algorithme *Forward* (resp. *Backward*) est utilisé.

En se basant sur les équations (3.29) et (3.19)-(3.22), nous avons :

$$\begin{aligned} z_k(\hat{\tau}_i, a_k) &= \mu \Re \left\{ a_k^* \frac{\partial x_k(\hat{\tau}_i)}{\partial \hat{\tau}_i} \right\} \\ &= \mu \Re \left\{ \sum_j a_k^* a_j \dot{g}((k-j)T + \hat{\tau}_i - \tau_k) + a_k^* \dot{v}_k(\hat{\tau}_i) \right\} \\ &= S(\hat{\tau}_i - \tau_k) + \mu b_k(\hat{\tau}_i), \end{aligned} \quad (3.33)$$

où dans ce chapitre  $\dot{f}$  désigne la dérivée de toute fonction  $f$  par rapport à  $\tau$ , et :

$$\begin{aligned} S(\hat{\tau}_i - \tau_k) &= E[z_k(\hat{\tau}_i, a_k)] \\ &= \mu \sum_j \Re \{ E[a_k^* a_j] \} \dot{g}((k-j)T + \hat{\tau}_i - \tau_k), \end{aligned}$$

où  $b_k(\hat{\tau}_i)$  est le bruit de la boucle engendré par les fluctuations autour de la moyenne. Etant donné que les symboles transmis,  $a_k$ , sont décorrélés et en supposant que  $\hat{\tau}_i - \tau_k$  ( $i$  est égal à  $(k-1)$  ou  $k+1$ ) est proche de zéro, nous trouvons :

$$S(\hat{\tau}_i - \tau_k) = \mu E[|a_k|^2] \dot{g}(\hat{\tau}_i - \tau_k) \simeq \mu E[|a_k|^2] \dot{g}(0)(\hat{\tau}_i - \tau_k). \quad (3.34)$$

Le bruit de la boucle,  $b_k(\hat{\tau}_i)$ , est donné par :

$$b_k(\hat{\tau}_i) = \Re \left\{ \sum_{j, j \neq k} a_k^* a_j \dot{g}((k-j)T + \hat{\tau}_i - \tau_k) + a_k^* \dot{v}_k(\hat{\tau}_i) \right\}. \quad (3.35)$$

Sa variance est donnée par :

$$\sigma_b^2 = E \left[ \sum_{j, j \neq k} |a_k|^2 |a_j|^2 \dot{g}^2((k-j)T + \hat{\tau}_i - \tau_k) \right] + E[|a_k|^2] \sigma_n^2,$$

où pour un filtre de Nyquist, nous pouvons négliger les valeur de  $\dot{g}(t)$  pour  $|t| \geq 3T$  [52].

En utilisant les notations suivantes :

$$\gamma = \mu E[|a_k|^2] \ddot{g}(0) \quad (3.36)$$

et

$$q_k = \mu b_k(\hat{\tau}_i), \quad (3.37)$$

et en basant sur les équations (3.33) et (3.34), on obtient :

$$z_k(\hat{\tau}_i, a_k) \simeq \gamma(\hat{\tau}_i - \tau_k) + q_k, \quad (3.38)$$

où dans ce qui suit, on note  $\sigma_q^2 = \mu^2 \sigma_b^2$  la variance de  $q_k$ . A partir de cette expression linéaire (3.38), nous allons développer dans le paragraphe suivant, l'expression du biais d'estimation et de l'EQM pour les algorithmes *Forward*, *Backward* et *Forward-Backward* pour tout échantillon  $k$  à chaque itération  $m$  en commençant par la première itération.

### 3.2.1 Performances après une seule itération

A partir de (3.4), (3.30) et (3.38), pour l'algorithme *Forward*, nous avons :

$$\hat{\tau}_k^{(F)} = \hat{\tau}_{k-1}^{(F)} + \gamma(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)} - \tau_k) + q_k \quad (3.39)$$

$$\tau_k = \tau_{k-1} + w_k. \quad (3.40)$$

En utilisant (3.39), on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)} &= \tau_k - \hat{\tau}_{k-1}^{(F)} - \gamma(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)} - \tau_k) - q_k \\ &= \tau_k(1 + \gamma) - \hat{\tau}_{k-1}^{(F)} - \gamma\hat{\tau}_{k-1}^{(F)} - q_k \\ &= (\tau_{k-1} + w_k)(1 + \gamma) - \hat{\tau}_{k-1}^{(F)}(1 + \gamma) - q_k \\ &= (\tau_{k-1} - \hat{\tau}_{k-1}^{(F)})(1 + \gamma) + w_k(1 + \gamma) - q_k \\ &= \left[ (\tau_{k-2} - \hat{\tau}_{k-2}^{(F)}) + w_{k-1}(1 + \gamma) - q_{k-1} \right] (1 + \gamma) + w_k(1 + \gamma) - q_k \\ &= (1 + \gamma)^2 (\tau_{k-2} - \hat{\tau}_{k-2}^{(F)}) + (1 + \gamma)^2 w_{k-1} + w_k(1 + \gamma) - q_{k-1}(1 + \gamma) - q_k \\ &= (1 + \gamma)^{k-1} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F)}) + \sum_{i=0}^{k-2} w_{k-i}(1 + \gamma)^{i+1} - \sum_{i=0}^{k-2} q_{k-i}(1 + \gamma)^i. \end{aligned}$$

Le biais avec la boucle *Forward* vaut :

$$B_k^{(F)} = (1 + \gamma)^{k-1} B_1^{(F)}. \quad (3.41)$$

L'EQM du retard estimé pour une seule boucle *Forward* est alors donné par :

$$\begin{aligned}
M_k^{(F)} &= E \left[ \left( \tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)} \right)^2 \right] \\
&= (1 + \gamma)^{2k-2} E \left[ \left( \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F)} \right)^2 \right] + \sum_{i=0}^{k-2} E \left[ (1 + \gamma)^2 w_{k-i}^2 + q_{k-i}^2 \right] (1 + \gamma)^{2i+2} \\
&= (1 + \gamma)^{2k-2} M_1^{(F)} + \frac{1 - [(1 + \gamma)^2]^{k-1}}{1 - (1 + \gamma)^2} \left[ (1 + \gamma)^2 \sigma_w^2 + \sigma_q^2 \right]. \tag{3.42}
\end{aligned}$$

A partir de (3.4), (3.31) et (3.38), pour l'algorithme *Backward*, nous avons :

$$\hat{\tau}_k^{(B)} = \hat{\tau}_{k+1}^{(B)} + \gamma(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)} - \tau_k) + q_k \tag{3.43}$$

$$\tau_k = \tau_{k-1} + w_k. \tag{3.44}$$

En utilisant (3.43), nous obtenons pour l'algorithme *Backward* :

$$\begin{aligned}
\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)} &= \tau_k - \hat{\tau}_{k+1}^{(B)} - \gamma(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)} - \tau_k) - q_k \\
&= \tau_k(1 + \gamma) - \hat{\tau}_{k+1}^{(B)}(1 + \gamma) - q_k \\
&= (\tau_{k+1} - w_{k+1})(1 + \gamma) - \hat{\tau}_{k+1}^{(B)}(1 + \gamma) - q_k \\
&= (\tau_{k+1} - \hat{\tau}_{k+1}^{(B)})(1 + \gamma) - w_{k+1}(1 + \gamma) - q_k \\
&= \left[ (\tau_{k+2} - \hat{\tau}_{k+2}^{(B)})(1 + \gamma) - w_{k+2}(1 + \gamma) - q_{k+1} \right] (1 + \gamma) + w_{k+1}(1 + \gamma) - q_k \\
&= (1 + \gamma)^2 (\tau_{k+2} - \hat{\tau}_{k+2}^{(B)}) - (1 + \gamma)^2 w_{k+2} - w_{k+1}(1 + \gamma) - q_{k+1}(1 + \gamma) - q_k \\
&= (1 + \gamma)^2 (\tau_{k+2} - \hat{\tau}_{k+2}^{(B)}) - \sum_{i=k+1}^{k+2} w_i (1 + \gamma)^{i-k} - \sum_{i=k}^{k+1} q_i (1 + \gamma)^{i-k} \\
&= (1 + \gamma)^{N-k} (\tau_N - \hat{\tau}_N^{(B)}) - \sum_{i=k+1}^N w_i (1 + \gamma)^{i-k} - \sum_{i=k}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-k} \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Par conséquent, le biais relatif à l'estimation du retard temporel après une seule boucle *Backward* est :

$$B_k^{(B)} = (1 + \gamma)^{N-k} B_N^{(B)}, \tag{3.46}$$

et l'EQM correspondante est :

$$\begin{aligned}
M_k^{(B)} &= (1 + \gamma)^{2N-2k} E \left[ \left( \tau_N - \hat{\tau}_N^{(B)} \right)^2 \right] + \sum_{i=k+1}^N E \left[ (1 + \gamma)^2 w_i^2 + q_i^2 \right] (1 + \gamma)^{i-k} \\
&= (1 + \gamma)^{2N-2k} M_N^{(B)} + \frac{1 - [(1 + \gamma)^2]^{N-k}}{1 - (1 + \gamma)^2} \left[ (1 + \gamma)^2 \sigma_w^2 + \sigma_q^2 \right]. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Etant donné qu'à la fin du bloc d'observation, on a :

$$\tau_N - \hat{\tau}_N^{(B)} = \tau_N - \hat{\tau}_N^{(F)}; \quad (3.48)$$

en injectant (3.48) dans (3.41) on a :

$$B_N^{(B)} = (1 + \gamma)^{N-1} B_1^{(F)}, \quad (3.49)$$

De même, en remplaçant  $M_N^{(B)}$  dans (3.47) par son expression obtenue à partir de (3.42) et en remplaçant  $k$  par  $N$  (vu que  $M_N^{(B)} = M_N^{(F)}$ ), nous obtenons l'expression suivante :

$$M_N^{(B)} = (1 + \gamma)^{2N-2} M_1^{(F)} + \frac{1 - [(1 + \gamma)^2]^{N-1}}{1 - (1 + \gamma)^2} [(1 + \gamma)^2 \sigma_w^2 + \sigma_q^2]. \quad (3.50)$$

Pour l'algorithme hors-ligne, à partir de (3.32), nous avons pour  $k = 1 \cdots N - 1$  :

$$\tau_k - \hat{\tau}_k^{(FB)} = \frac{1}{2} (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)}) + \frac{1}{2} (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)}). \quad (3.51)$$

Par suite, en utilisant (3.46) et (3.49), le biais d'estimation relatif à l'algorithme *Forward-Backward* est donné par :

$$\begin{aligned} B_k^{(FB)} &= \frac{1}{2} B_k^{(B)} + \frac{1}{2} B_k^{(F)} \\ &= \frac{1}{2} [(1 + \gamma)^{k-1} + (1 + \gamma)^{2N-k-1}] B_1^{(F)}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

et de (3.51), l'expression de l'EQM est :

$$\begin{aligned} M_k^{(FB)} &= \frac{1}{4} E \left[ (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)})^2 \right] + \frac{1}{4} E \left[ (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)})^2 \right] + \frac{1}{2} E \left[ (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)}) (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)}) \right] \\ &= \frac{1}{4} M_k^{(B)} + \frac{1}{4} M_k^{(F)} + \frac{1}{2} E \left[ (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)}) (\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Nous allons à présent évaluer le dernier terme de (3.53). Etant donné que  $\tau_N - \hat{\tau}_N^{(B)} = \tau_N - \hat{\tau}_N^{(F)}$  et en partant de (3.41) pour  $k = N$  et de (3.45), nous trouvons que :

$$\begin{aligned} \tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)} &= (1 + \gamma)^{2N-k-1} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F)}) + \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-k-i+1} - \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-k-i} - \sum_{i=k+1}^N w_i (1 + \gamma)^{i-k} \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-k} - q_k. \end{aligned} \quad (3.54)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)}\right) \left(\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)}\right) &= \left[ (1+\gamma)^{k-1}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F)}) + \sum_{i=2}^k w_i (1+\gamma)^{k-i+1} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=2}^k q_i (1+\gamma)^{k-i} \right] \times \left[ (1+\gamma)^{2N-k-1} E(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F)}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^k w_i (1+\gamma)^{2N-k-i+1} - \sum_{i=2}^k q_i (1+\gamma)^{2N-k-i} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=k+1}^N w_i (1+\gamma)^{2N-k-i+1} - \sum_{i=k+1}^N q_i (1+\gamma)^{2N-k-i} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=k+1}^N w_i (1+\gamma)^{i-k} - \sum_{i=k+1}^{N-1} q_i (1+\gamma)^{i-k} - q_k \right]. \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
E \left[ \left(\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)}\right) \left(\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)}\right) \right] &= (1+\gamma)^{2N-2} M_1^{(F)} + \sum_{i=2}^k (1+\gamma)^{2N-2i+2} \sigma_w^2 \\
&\quad + (1+\gamma)^{2N-2i} \sigma_q^2 + \sigma_q^2 \\
&= (1+\gamma)^{2N-2} M_1^{(F)} + \sigma_q^2 \quad (3.56) \\
&\quad + (1+\gamma)^{2N-2i} \left( (1+\gamma)^2 \sigma_w^2 + \sigma_q^2 \right) \left( \frac{1 - (1+\gamma)^{2k-2}}{1 - (1+\gamma)^2} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, de (3.53), nous déduisons que l'expression de l'EQM après une itération est donnée par :

$$M_k^{(FB)} = \frac{1}{4} M_k^{(B)} + \frac{1}{4} M_k^{(F)} + \frac{1}{2} \left[ (1+\gamma)^{2N-2} M_1^{(F)} + (1+\gamma)^{2N-2k-4} \left( (1+\gamma)^2 \sigma_w^2 + \sigma_q^2 \right) \left( \frac{1 - (1+\gamma)^{2k+2}}{1 - (1+\gamma)^2} \right) + \sigma_q^2 \right]. \quad (3.57)$$

### 3.2.2 Performances après des itérations multiples

Nous développons maintenant l'expression analytique du biais,  $B_k^m$ , et de l'EQM,  $M_k^m$ , pour respectivement les algorithmes *Forward*, *Backward* et *Forward-Backward*, après  $m$  itérations. Notons  $\hat{\tau}_k^{(I),m}$ , l'estimé de  $\tau_k$  à l'itération  $m$  utilisant l'algorithme  $I$  où  $I$  est dans  $\{F, B, FB\}$  et respectivement signifie *Forward*, *Backward* et *Forward-Backward*.

Nous analysons (à l'itération  $m \geq 2$ ) la première estimée de l'algorithme *Forward* et la dernière estimée de l'algorithme *Backward* de l'itération précédente. On sait que l'erreur d'estimation à la fin de la boucle *Backward* est égale à l'erreur initiale d'estimation à la deuxième boucle *Forward* :

$$\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),2} = \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),1}. \quad (3.58)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \tau_k - \hat{\tau}_k^{(B),1} &= (1 + \gamma)^{2N-k-1}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{2N-k-i+1} - \sum_{i=2}^N q_i(1 + \gamma)^{2N-k-i} \\ &\quad - \sum_{i=k+1}^N w_i(1 + \gamma)^{i-k} - \sum_{i=k}^{N-1} q_i(1 + \gamma)^{i-k}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pour  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned} \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),2} &= \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),1} \\ &= (1 + \gamma)^{2N-2}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{2N-i} - \sum_{i=2}^N q_i(1 + \gamma)^{2N-1-i} \\ &\quad - \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{i-1} - \sum_{i=1}^{N-1} q_i(1 + \gamma)^{i-1}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

De même :

$$\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),3} = \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),2}, \quad (3.61)$$

et

$$\begin{aligned} \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),2} &= (1 + \gamma)^{2N-2}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),2}) + \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{2N-i} - \sum_{i=2}^N q_i(1 + \gamma)^{2N-i-1} \\ &\quad - \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{i-1} - \sum_{i=1}^{N-1} q_i(1 + \gamma)^{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),2} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times 2} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + (1 + \gamma)^{2N-2} \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-i} \\
&\quad - (1 + \gamma)^{2N-2} \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-1-i} - (1 + \gamma)^{2N-2} \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{i-1} \\
&\quad - (1 + \gamma)^{2N-2} \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-1} + \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-i} - \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-i-1} \\
&\quad - \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{i-1} - \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-1} \\
&= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times 2} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-i} \\
&\quad - [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-1-i} - [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{i-1} \\
&\quad - [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-1} \\
&= \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),3}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

En faisant un raisonnement par récurrence, à l'itération  $m$ , on aura :

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),m} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1)} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + \sum_{j=0}^{m-2} (1 + \gamma)^{(2N-2) \times j} \left[ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-i} \right. \\
&\quad \left. - q_i (1 + \gamma)^{2N-1-i} \right] - \sum_{j=0}^{m-2} (1 + \gamma)^{(2N-2) \times j} \left[ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{i-1} + \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-1} \right] \\
&= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1)} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + \Omega(m) \left[ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-i} - q_i (1 + \gamma)^{2N-1-i} \right] \\
&\quad - \Omega(m) \left[ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{i-1} + \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-1} \right], \tag{3.63}
\end{aligned}$$

où

$$\Omega(m) = \frac{1 - (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1)}}{1 - (1 + \gamma)^{2N-2}}. \tag{3.64}$$

A la  $k^{\text{ème}}$  observation et d'après (3.41) :

$$\begin{aligned}
\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F),m} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1) + k-1} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + \Omega(m) \sum_{i=2}^N \left[ w_i \left( (1 + \gamma)^{2N-1+k-i} - (1 + \gamma)^{k+i-2} \right) \right] \\
&\quad - \Omega(m) \left[ \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-2+k-i} + \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{k+i-2} \right] - \sum_{i=2}^k (1 + \gamma)^{k-i} (q_i + w_i (1 + \gamma)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, à l'itération  $m$ , l'expression du biais d'estimation de l'algorithme *Forward* est donnée par :

$$B_k^{(F),m} = (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1) + k - 1} B_1^{(F),1}, \quad (3.65)$$

et l'EQM correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} M_k^{(F),m} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times 2(m-1) + 2k - 2} M_1^{(F),m} + \left( \sum_{i=2}^k \left[ (1 + \gamma)^{2N-1+k-i} \Omega(m) - (1 + \gamma)^{k+i-2} \Omega(m) + (1 + \gamma)^{k-i+1} \right]^2 \right. \\ &+ \sum_{i=k+1}^N \Omega(m)^2 \left[ (1 + \gamma)^{2N-1+k-i} - (1 + \gamma)^{k+i-2} \right]^2 \Big) \sigma_w^2 + \left( \sum_{i=k+1}^N \Omega(m)^2 \left[ (1 + \gamma)^{2N-2+k-i} - (1 + \gamma)^{k+i-2} \right]^2 \right. \\ &+ \sum_{i=2}^k \left[ (1 + \gamma)^{2N-2+k-i} \Omega(m) - (1 + \gamma)^{k+i-2} \Omega(m) + (1 + \gamma)^{k-i} \right]^2 + \Omega(m)^2 \left[ (1 + \gamma)^{2N+2k-2} + (1 + \gamma)^{2k-2} \right] \Big) \sigma_q^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

D'après (3.54) et en remplaçant  $(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F)})$  par  $(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),m})$  dont l'expression est donnée par (3.63), nous obtenons pour la  $k^{\text{ème}}$  observation :

$$\begin{aligned} \tau_k - \hat{\tau}_k^{(B),m} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1) + 2N - k - 1} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) + \Omega(m) \left[ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{4N-k-1-i} - q_i (1 + \gamma)^{4N-k-2-i} \right] \\ &- \Omega(m) \left[ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-k+i-2} + \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{2N-k+i-2} \right] + \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-k-i+1} \\ &- \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-k-i} - \sum_{i=k+1}^N w_i (1 + \gamma)^{i-k} - \sum_{i=k}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-k}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Par suite, à l'itération  $m$ , le biais d'estimation de l'algorithme *Backward* est donné par :

$$B_k^{(B),m} = (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1) + 2N - k - 1} B_1^{(F),1}, \quad (3.68)$$

et l'expression de l'EQM correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} M_k^{(B),m} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times 2(m-1) + 4N - 2k - 2} M_1^{(F),m} + \left( \sum_{i=2}^k \left[ (1 + \gamma)^{4N-1-i-k} \Omega(m) - (1 + \gamma)^{2N-k+i-2} \Omega(m) \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1 + \gamma)^{2N-k-i+1} \right]^2 + \sum_{i=k+1}^N \left[ (1 + \gamma)^{4N-1-i-k} \Omega(m) - (1 + \gamma)^{2N-k+i-2} \Omega(m) + (1 + \gamma)^{2N-k-i+1} \right. \right. \\ &\left. \left. (1 + \gamma)^{i-k} \right]^2 \right) \sigma_w^2 + \left( (1 + \gamma)^{4N-2k} \sum_{i=2}^{k-1} \left[ (1 + \gamma)^{2N-2-i} \Omega(m) - (1 + \gamma)^{i-2} \Omega(m) + (1 + \gamma)^{-i} \right]^2 \right. \\ &+ (1 + \gamma)^{2N-2k} \left[ 1 + \Omega(m) (1 + \gamma)^{2N-2} \right]^2 + \sum_{i=k}^{N-1} \left[ (1 + \gamma)^{4N-2-i-k} \Omega(m) - (1 + \gamma)^{2N-k+i-2} \Omega(m) \right. \\ &\left. + (1 + \gamma)^{2N-k-i} + (1 + \gamma)^{i-k} \right]^2 \Big) \sigma_q^2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

De manière analogue à (3.51), nous avons :

$$\tau_k - \hat{\tau}_k^{(FB),m} = \frac{1}{2} \left( \tau_k - \hat{\tau}_k^{(F),m} \right) + \frac{1}{2} \left( \tau_k - \hat{\tau}_k^{(B),m} \right) \quad (3.70)$$

En remplaçant  $\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F),m}$  et  $\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B),m}$  par leurs expressions données respectivement par (3.65) et (3.67)

$$\begin{aligned} \tau_k - \hat{\tau}_k^{(FB),m} &= \frac{1}{2} \left( \tau_k - \hat{\tau}_k^{(F),m} \right) + \frac{1}{2} \left( \tau_k - \hat{\tau}_k^{(B),m} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \gamma)^{(2N-2)(m-1)} \left( \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1} \right) \times \left[ (1 + \gamma)^{k-1} (1 + \gamma)^{2N-k-1} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=2}^k \left[ (1 + \gamma)^{k-i+1} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{2N-i+k-1} - \Omega(m)(1 + \gamma)^{k+i-2} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{4N-i-k-1} \right. \\ &- \left. \Omega(m)(1 + \gamma)^{2N-k+i-2} + (1 + \gamma)^{2N-i-k+1} \right] w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^N \left[ \Omega(m)(1 + \gamma)^{2N-i+k-1} \right. \\ &- \left. \Omega(m)(1 + \gamma)^{k+i-2} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{4N-i-k-1} - \Omega(m)(1 + \gamma)^{2N-k+i-2} + (1 + \gamma)^{2N-i-k+1} \right. \\ &+ \left. (1 + \gamma)^{i-k} \right] w_i - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{k-1} \left[ (1 + \gamma)^{2N-i+k} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{k+i-2} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{4N-i-k-2} \right. \\ &+ \left. \Omega(m)(1 + \gamma)^{2N-k+i-2} + (1 + \gamma)^{2N-i-k} \right] q_i - \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{N-1} \left[ (1 + \gamma)^{2N-i+k} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{k+i-2} \right. \\ &+ \left. \Omega(m)(1 + \gamma)^{4N-i-k-2} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{2N-k+i-2} + (1 + \gamma)^{2N-i-k} + (1 + \gamma)^{i-k} \right] q_i \\ &- \frac{1}{2} \left[ (1 + \gamma)^{N+k} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{3N-k-2} \right] q_N - \frac{1}{2} \left[ (1 + \gamma)^{k-1} + \Omega(m)(1 + \gamma)^{2N-k-1} \right] q_1, \quad (3.71) \end{aligned}$$

les expressions du biais et de l'EQM de l'algorithme *Forward-Backward* à l'itération  $m$  pour la  $k^{\text{ème}}$  observation sont :

$$B_k^{(FB),m} = \frac{1}{2} (1 + \gamma)^{(2N-2)(m-1)} \left[ (1 + \gamma)^{k-1} + (1 + \gamma)^{2N-k-1} \right] B_1^{(F),1}, \quad (3.72)$$

et

$$\begin{aligned}
M_k^{(FB),m} &= \frac{1}{4} \left\{ M_k^{(F),m} + M_k^{(B),m} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (1+\gamma)^{2(2N-2)(m-1)+2N-2} M_1^{(F),1} \right. \\
&+ \left( \sum_{i=2}^k (1+\gamma)^{2N} \left[ (1+\gamma)^{-i+1} + \Omega(m)(1+\gamma)^{2N-i-1} - \Omega(m)(1+\gamma)^{i-2} \right]^2 \right. \\
&- \sum_{i=k+1}^N \Omega(m) \left[ (1+\gamma)^{2N-i-1} + (1+\gamma)^{i-2} \right] \left[ \Omega(m)(1+\gamma)^{4N-i-1} - \Omega(m)(1+\gamma)^{2N+i-2} + (1+\gamma)^{2N-i+1} \right] \left. \right\} \sigma_w^2 \\
&- \left( \sum_{i=2}^{k-1} (1+\gamma)^{2N} \left[ \Omega(m)(1+\gamma)^{2N-i-2} + \Omega(m)(1+\gamma)^{i-2} + (1+\gamma)^{-i} \right]^2 + \left[ (1+\gamma)^{N-2} - \Omega(m)(1+\gamma)^{3N-2} \right] (1+\gamma)^{N-2} \right. \\
&- \left. \sum_{i=k}^{N-1} \Omega(m) \left[ (1+\gamma)^{2N-i-2} - (1+\gamma)^{i-2} \right] \left[ \Omega(m)(1+\gamma)^{4N-i-2} - \Omega(m)(1+\gamma)^{2N+i-2} - (1+\gamma)^{2N-i} - (1+\gamma)^i \right] \right\} \sigma_a^2.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Ces expressions analytiques seront validées plus tard par simulation.

Dans la section suivante, nous calculons la borne de Cramèr-Rao associée aux modèles d'observation et du retard temporel considérés. La borne adéquate à ce problème est la borne bayésienne qui prend en compte la dépendance entre les retards temporels.

### 3.3 Calcul de la borne de Cramèr-Rao Bayésienne

La BCR standard et la BCR modifiée [43], [52] ne sont pas adaptées à l'estimation des paramètres à variation temporelle. En fait, ces limites ne tiennent pas compte de la dépendance statistique entre les retards temporels successifs. Cette dépendance est naturellement considérée dans le cadre bayésien ; d'une part, la distribution *a priori*  $P(\boldsymbol{\tau})$  modélise implicitement la dépendance dans le temps entre les retards stochastiques ; d'autre part, le cadre de Bayes est intrinsèquement basé sur la connaissance du vecteur de la distribution *a priori*  $P(\boldsymbol{\tau})$ . Dans ce contexte, une BCR Bayésienne (BCRB) est obtenue en inversant la matrice d'information bayésienne suivante [84] :

$$\mathbf{G}_N = E_{\boldsymbol{\tau}}[\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})] + E_{\boldsymbol{\tau}}[-\Delta_{\boldsymbol{\tau}} \log(P(\boldsymbol{\tau}))], \tag{3.74}$$

où  $E_{\boldsymbol{\tau}}$  et  $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$  sont respectivement l'espérance par rapport au vecteur  $\boldsymbol{\tau}$  et l'opérateur Laplacien ;  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})$  est similaire à la matrice conventionnelle d'information de Fisher [43] donnée par :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\tau}}[-\Delta_{\boldsymbol{\tau}} \log(P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\tau}))]. \tag{3.75}$$

Le premier terme de (3.74) considère la moyenne par rapport à  $\boldsymbol{\tau}$  de l'information apportée par l'observation  $\mathbf{r}$ . Le second terme dépend de l'information *a priori* sur  $\boldsymbol{\tau}$ . Les éléments de la diagonale de l'inverse de  $\mathbf{G}_N$  donnent les BCRB relatives aux éléments de  $\boldsymbol{\tau}$ .

Dans ce qui suit, on distingue deux types de BCRB, à savoir, la BCRB dans le mode de synchronisation hors ligne et la BCRB dans le mode de synchronisation en ligne. Dans un contexte hors ligne, le récepteur attend jusqu'à ce que l'ensemble du bloc d'observation  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_N]$  soit reçu. Ensuite, les retards temporels  $\tau_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) sont estimés en utilisant tous les échantillons reçus. Dans un contexte en ligne,  $\tau_k$  est estimé en utilisant seulement les observations précédentes et l'observation actuelle  $[r_1, \dots, r_k]$ .

### 3.3.1 Borne de Cramèr-Rao Bayésienne hors ligne

Selon (3.75), et en se basant sur l'expression de  $P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\tau})$  donnée par (3.23), nous pouvons déduire que  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})$  est une matrice diagonale, indépendante des  $\tau_k$ . Ainsi, le premier terme de (3.74) s'écrit :

$$E_{\boldsymbol{\tau}}[\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})] = J_D \mathbf{I}_N, \quad (3.76)$$

où  $\mathbf{I}_N$  est la matrice d'identité ( $N \times N$ ) et pour tout indice  $k$  :

$$J_D = E \left[ -\frac{\partial^2 \log(P(r_k|\tau_k))}{\partial \tau_k^2} \right] \quad (3.77)$$

$$= E \left[ \left( \frac{\partial \log(P(r_k|\tau_k))}{\partial \tau_k} \right)^2 \right]. \quad (3.78)$$

En remarquant que l'expression de  $J_D$  ne dépend pas de  $\tau_k$ , les éléments de la diagonale de la matrice d'information de Fisher sont alors égaux. Cette expression sera évaluée plus tard pour différents modes de transmission. A partir de (3.25), le dernier terme de (3.74) est :

$$E_{\boldsymbol{\tau}}[\Delta_{\boldsymbol{\tau}} \log(P(\boldsymbol{\tau}))] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_w^2} - D & -\frac{1}{\sigma_w^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_w^2} & \frac{2}{\sigma_w^2} & -\frac{1}{\sigma_w^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\frac{1}{\sigma_w^2} & \frac{2}{\sigma_w^2} & -\frac{1}{\sigma_w^2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{\sigma_w^2} & \frac{1}{\sigma_w^2} \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

où  $D = E_{\tau_1} \left[ \frac{\partial^2 \log(P(\tau_1))}{\partial \tau_1^2} \right]$ . Si l'on considère qu'il n'y a aucune information *a priori* sur  $\tau_1$ , alors  $D = 0$ .

Par conséquent et se basant sur (3.74), (3.76) et (3.79), nous obtenons :

$$\mathbf{G}_N = \beta \begin{pmatrix} A+1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & A & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & A & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & A+1 \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

où  $A = -\sigma_w^2 J_D - 2$  et  $\beta = -\frac{1}{\sigma_w^2}$ .

Une étude similaire a été réalisée sur la BCRB par rapport à l'estimation du décalage de phase pour un signal non codé BPSK dans [8]. Les auteurs de [8] ont présenté l'expression suivante de  $[\mathbf{G}_N^{-1}]_{k,k}$ , qui mène directement à l'expression de la BCRB hors ligne :

$$[\mathbf{G}_N^{-1}]_{k,k} = \frac{1}{|\mathbf{G}_N|} \left[ \rho_1^2 (\beta + \nu_1)^2 \nu_1^{N-3} + \rho_2^2 (\beta + \nu_2)^2 \nu_2^{N-3} - \frac{\beta^2}{A-2} (\nu_1^{k-2} \nu_2^{N-k-1} + \nu_1^{N-k-1} \nu_2^{k-2}) \right], \quad (3.81)$$

où  $|\mathbf{G}_N|$  est le déterminant de  $\mathbf{G}_N$  donné par :

$$|\mathbf{G}_N| = (A+2)\beta \left( \rho_1 \nu_1^{N-1} + \rho_2 \nu_2^{N-1} \right), \quad (3.82)$$

et pour  $m = 1, 2$  :

$$\nu_m = \frac{1}{\sigma_w^2} + \frac{J_D}{2} \left( 1 + (-1)^m \times \sqrt{1 + \frac{4}{J_D \sigma_w^2}} \right), \quad (3.83)$$

$$\rho_m = \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\sigma_w^2 J_D}} + (-1)^m \times \left( 1 + \frac{2}{\sigma_w^2 J_D} \right)}{2 \sqrt{1 + \frac{4}{\sigma_w^2 J_D}}}. \quad (3.84)$$

### 3.3.2 Borne de Cramèr-Rao Bayésienne en ligne

Dans ce mode, les observations  $r_k$  sont reçues afin de mettre à jour la valeur estimée de  $\tau_k$ . Seulement les observations passées et actuelles sont disponibles. Tichavsky *et al.* [59] ont déjà fourni une méthode de mise à jour de la matrice d'information bayésienne, de l'indice  $k-1$  à l'indice  $k$ . Soit  $S_k$  la séquence récursive suivante :

$$S_k = \frac{(J_D + \frac{1}{\sigma_w^2})S_{k-1} + \frac{J_D}{\sigma_w^2}}{S_{k-1} + \frac{1}{\sigma_w^2}}. \quad (3.85)$$

La borne minimale en ligne, appelée aussi borne séquentielle d'estimation, est alors donnée par :

$$C_k = \frac{1}{S_k} = \frac{\sigma_w^2 + C_{k-1}}{\sigma_w^2 J_D + 1 + J_D C_{k-1}}, \quad (3.86)$$

où  $C_1 = \frac{1}{J_D}$ .

La valeur de cette borne séquentielle à l'indice  $N$  est égale à l'inverse de la matrice d'information bayésienne à l'indice  $(N, N)$ . En d'autres termes, la valeur de la borne en ligne à l'échantillon  $N$  est la même que celle de la borne hors ligne à l'extrémité d'un bloc d'échantillons de taille  $N$ .

Ainsi d'après (3.81), nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_N &= [\mathbf{G}_N^{-1}]_{N,N} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{G}_N|} \left[ \rho_1^2 (\beta + \nu_1)^2 \nu_1^{N-3} + \rho_2^2 (\beta + \nu_2)^2 \nu_2^{N-3} - \frac{b^2}{A-2} (\nu_1^{N-2} \nu_2^{-1} + \nu_1^{-1} \nu_2^{N-2}) \right] \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ceci traduit logiquement que, dans la dernière position du bloc il y a autant d'information avec les deux approches hors ligne et en ligne. Nous notons également que cette borne diminue dans le temps et converge vers :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\mathbf{G}_N^{-1}]_{N,N} = \frac{-\sigma_w^2 + \sqrt{\sigma_w^4 + 4 \frac{\sigma_w^2}{J_D}}}{2}. \quad (3.89)$$

Cette limite est obtenue en appliquant le théorème du point fixe.

Les expressions analytiques de  $J_D$  dans le cas de signaux BPSK et square-QAM seront présentées dans ce qui suit.

### 3.3.3 Calcul de $J_D$ pour un signal BPSK

L'expression analytique de  $J_D$  dépend du mode de synchronisation sélectionné. Dans les sous paragraphes suivants, nous présentons un développement analytique de  $J_D$ , en fonction du RSB, respectivement, dans le cas d'une synchronisation DA, NDA et CA.

Commençons par considérer les égalités suivantes :  $x_{k,1}(\tau_k) = \Re\{x_k(\tau_k)\}$ ,  $x_{k,2}(\tau_k) = \Im\{x_k(\tau_k)\}$ ,  $\dot{x}_{k,i}(\tau_k) = \frac{\partial x_{k,i}(u_k)}{\partial u_k} \Big|_{u_k=\tau_k}$  et  $\ddot{x}_{k,i}(\tau_k) = \frac{\partial^2 x_{k,i}(u_k)}{\partial u_k^2} \Big|_{u_k=\tau_k}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  avec :

$$\begin{aligned} x_k(\tau_k) &= \sum_m a_{k-m} g(mT) + v_k(\tau_k) \\ &= a_k + v_k(\tau_k), \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \Big|_{u_k=\tau_k} = \sum_m a_{k-m} \dot{g}(mT) + \dot{v}_k(\tau_k), \quad (3.91)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_k(u_k)}{\partial u_k^2} \Big|_{u_k=\tau_k} &= \sum_m a_{k-m} \ddot{g}(mT) + \ddot{v}_k(\tau_k) \\ &= a_k \ddot{g}(0) + \ddot{v}_k(\tau_k). \end{aligned} \quad (3.92)$$

### 3.3.3.1 Mode assisté par les données

Pour évaluer l'expression de  $J_D$  dans le mode DA, nous allons utiliser l'expression (3.77). En se basant sur (3.23) et (3.92), nous obtenons :

$$J_D = -\frac{|a_k|^2}{\sigma_n^2} \ddot{g}(0), \quad (3.93)$$

avec  $|a_k|^2 = 1$  pour les modulations de type PSK.

### 3.3.3.2 Mode non assisté par les données

Afin de trouver l'expression de  $J_D$  dans un contexte NDA, nous allons utiliser (3.78). A partir de (3.8) et (3.23), nous avons :

$$P(r_k | \tau_k, \mathbf{a}) = \frac{C}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(\frac{\Re\{a_k^* x_k(\tau_k)\}}{\sigma_n^2} - \frac{|a_k|^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (3.94)$$

En moyennant sur les symboles  $\mathbf{a}$  de type BPSK, équiprobablement transmis, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(r_k | \tau_k) &= \frac{1}{2} \left[ \exp\left(\frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right) + \exp\left(-\frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right) \right] \\ &= K \cosh\left(\frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right), \end{aligned} \quad (3.95)$$

et donc

$$\log(P(r_k | \tau_k)) = \log\left(\cosh\left(\frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right)\right) + \log(K), \quad (3.96)$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $\tau_k$ . Par conséquent :

$$J_D = \frac{1}{\sigma_n^4} E \left[ \tanh\left(\frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right)^2 \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2 \right]. \quad (3.97)$$

Sachant que  $\dot{g}(mT)$  est nulle pour  $m = 0$ , que les symboles  $a_i$  sont indépendants et que le bruit  $\Re\{n(t)\}$  est indépendant des symboles  $a_i$  pour tout  $i$ , on peut conclure que  $x_{k,1}(\tau_k)$  et  $\dot{x}_{k,1}(\tau_k)$  sont décorrélés et par conséquent  $\tanh\left(\frac{1}{\sigma_n^2} x_{k,1}(\tau_k)\right)$  et  $\dot{x}_{k,1}(\tau_k)$  sont décorrélés. Nous obtenons

comme résultat :

$$J_D = \frac{1}{\sigma_n^4} E \left[ \tanh \left( \frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2} \right)^2 \right] E \left[ \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2 \right]. \quad (3.98)$$

– **Calcul de**  $E \left[ \tanh \left( \frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2} \right)^2 \right]$  :

En se basant sur (3.90), la fonction de densité de probabilité de  $y_k(\tau_k)$  pour des symboles équiprobablement transmis est :

$$\begin{aligned} f_{x_{k,1}(\tau_k)}(x) &= \frac{\left[ \exp \left( -\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2} \right) + \exp \left( -\frac{(x+1)^2}{2\sigma^2} \right) \right]}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{x^2+1}{2\sigma^2} \right) \cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Par conséquent :

$$E \left[ \tanh \left( \frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2} \right)^2 \right] = \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma_n^2} \right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh \left( \frac{x}{\sigma_n^2} \right)^2}{\cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right)} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right) dx. \quad (3.100)$$

Utilisant la relation  $\sinh(x)^2 = \cosh(x)^2 - 1$ , et l'expression générale de l'intégrale suivante pour  $\beta > 0$  [37] :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\beta x^2) \cosh(ax) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp \left( \frac{a^2}{4\beta} \right), \quad (3.101)$$

nous obtenons :

$$E \left[ \tanh \left( \frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2} \right)^2 \right] = 1 - \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma_n^2} \right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right)}{\cosh \left( \frac{x}{\sigma_n^2} \right)} dx. \quad (3.102)$$

– **Calcul de**  $E \left[ \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2 \right]$  :

Nous avons :

$$\begin{aligned} E \left[ \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2 \right] &= E \left[ \left[ \sum_m a_{k-m} \dot{g}(mT) + \Re\{\dot{v}_k(\tau_k)\} \right] \left[ \sum_n a_{k-n} \dot{g}(nT) + \Re\{\dot{v}_k(\tau_k)\} \right] \right] \\ &= E \left[ \sum_m a_{k-m}^2 \dot{g}(mT)^2 + \sum_{i=1}^N \Re\{n_i\}^2 \dot{h}(iT - kT - \tau_k)^2 \right] \end{aligned}$$

Nous trouvons donc :

$$E \left[ \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2 \right] = \sum_m \dot{g}(mT)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \ddot{g}(0). \quad (3.103)$$

### 3.3.3.3 Mode assisté par le code

Soit  $\lambda_k$  le LLR en sortie du décodeur à l'instant  $k$ , on a donc :

$$P(a_k = \pm 1) = \frac{\exp\left(\pm \frac{\lambda_k}{2}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)}. \quad (3.104)$$

Ainsi, en partant de (3.94) et en moyennant par rapport à la probabilité *a priori* des symboles BPSK transmis  $\mathbf{a}$ , on obtient :

$$\log(P(r_k|\tau_k)) = \log\left(\frac{\cosh\left(\frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2} + \frac{\lambda_k}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right)}\right) + K. \quad (3.105)$$

Par suite, selon (3.78) :

$$J_D = \frac{1}{\sigma_n^4} E\left[\tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right)^2 \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2\right]. \quad (3.106)$$

En choisissant un entrelaceur de taille très importante, nous pouvons supposer que les symboles transmis sont mutuellement indépendants [11, 90]. Nous pouvons donc considérer que  $\tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right)$  et  $\dot{x}_{k,1}(\tau_k)$  sont décorrélés.

Nous avons alors :

$$J_D = \frac{1}{\sigma_n^4} E\left[\tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right)^2\right] E\left[\dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2\right], \quad (3.107)$$

où  $E\left[\dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2\right] = E\left[\dot{y}_k(\tau_k)^2\right]$  est donnée par (3.103).

– **Calcul de  $E\left[\tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2}\right)^2\right]$  :**

Se basant sur (3.90) et ayant les LLR,  $\lambda_k$ , la fonction de densité de probabilité de  $y_k(\tau_k)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{y_k(\tau_k)}(x) &= \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \sqrt{2\pi}\sigma} \left[ \exp\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2+1}{2\sigma^2}\right) \cosh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (3.108)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E \left[ \tanh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)^2 \frac{\exp \left( -\frac{x^2+1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) dx \\ &= \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)^2}{\cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right)} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la relation  $\sinh(x)^2 = \cosh(x)^2 - 1$ , nous trouvons que :

$$\begin{aligned} E \left[ \tanh \left( \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right] &= \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx \right] \\ &= \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \left[ I_k - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx \right], \end{aligned} \quad (3.109)$$

où

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx.$$

Comme  $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$ , alors :

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \sinh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sinh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx.$$

Le second terme de  $I_k$  est l'intégrale sur  $R$  d'une fonction impaire. Il est donc égal à 0. En se basant sur (3.101), nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx \\ &= \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Ainsi :

$$E \left[ \tanh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right] = 1 - \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx. \quad (3.111)$$

Afin de pouvoir évaluer l'estimateur CA proposé pour des modulation QAM, nous passons maintenant au calcul de  $J_D$  correspondante dans les trois modes de transmission.

### 3.3.4 Calcul de $J_D$ pour une modulation QAM

#### 3.3.4.1 Mode assisté par les données

Pour le mode DA, l'expression de  $J_D$  est la même que celle obtenue pour des signaux BPSK donnée par (3.93).

#### 3.3.4.2 Mode non assisté par les données

Afin d'évaluer l'expression de  $J_D$ , nous avons besoin de développer l'expression de  $P(r_k|\tau_k)$ .

En partant de (3.94) et en supposant que les symboles transmis  $\mathbf{a}$  sont équiprobables, alors la fonction de vraisemblance devient :

$$\begin{aligned} P(r_k|\tau_k) &= \frac{1}{M} \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \frac{C}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(\frac{\Re\{v_i^* x_k(\tau_k)\}}{\sigma_n^2} - \frac{|v_i|^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ &= CF_k(\tau_k), \end{aligned} \quad (3.112)$$

où  $\mathcal{V} = \{v_1, v_1, \dots, v_M\}$  est la constellation de taille  $M$ .

En considérant uniquement les constellations QAM carrées, nous pouvons exploiter la symétrie de la constellation afin de factoriser  $H_k(\tau_k)$  dans le but de linéariser la fonction log-vraisemblance. Dans ce cas, la taille de la constellation s'écrit comme étant une puissance carrée de deux,  $M = 2^{2p}$ .

Considérons  $\tilde{\mathcal{V}}$  le sous ensemble de la constellation ayant des parties réelles et imaginaires positives. Si  $\tilde{v}$  appartient à  $\tilde{\mathcal{V}}$  alors il s'écrit :

$$\tilde{v} = (2m - 1)d_p + j(2n - 1)d_p, \quad (3.113)$$

où  $\{m, n\} \in \{1, \dots, 2^{p-1}\}$  et  $d_p$  est la distance inter-symboles qui a l'expression suivante sous l'hypothèse de symboles d'énergie normalisée :

$$d_p = \frac{2^{p-1}}{\sqrt{2^p \sum_{k=1}^{2^{p-1}} (2k - 1)^2}}. \quad (3.114)$$

Notons que  $\mathcal{V} = \tilde{\mathcal{V}} \cup \tilde{\mathcal{V}}^* \cup (-\tilde{\mathcal{V}}) \cup (-\tilde{\mathcal{V}}^*)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} F_k(\tau_k) &= \sum_{\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}} \frac{\exp\left(-\frac{|\tilde{v}|^2}{2\sigma_n^2}\right)}{2\pi\sigma_n^2 M} \left[ \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v}^* x_k(u)\}}{\sigma_n^2}\right) + \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v}^* x_k(u)\}}{\sigma_n^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\frac{\Re\{\tilde{v} x_k(u)\}}{\sigma_n^2}\right) + \exp\left(-\frac{\Re\{\tilde{v} x_k(u)\}}{\sigma_n^2}\right) \right] \\ &= \sum_{\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}} \frac{\exp\left(-\frac{|\tilde{v}|^2}{2\sigma_n^2}\right)}{2\pi\sigma_n^2 2^{2p-2}} \cosh\left(\frac{\Re\{\tilde{v}\} x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right) \cosh\left(\frac{\Im\{\tilde{v}\} x_{k,2}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right), \end{aligned} \quad (3.115)$$

où  $x_{k,1}(\tau_k) = \Re\{x_k(\tau_k)\}$  et  $x_{k,2}(\tau_k) = \Im\{x_k(\tau_k)\}$ .

En utilisant (3.113), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_k(\tau_k) &= \frac{1}{2\pi\sigma_n^2 2^{2p-2}} \sum_{m=1}^{2^{p-1}} \sum_{n=1}^{2^{p-1}} \exp\left(-\frac{(2m-1)^2 + (2n-1)^2}{2\sigma_n^2} d_p^2\right) \\ &\quad \times \cosh\left(\frac{(2m-1)d_p x_{k,1}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right) \cosh\left(\frac{(2n-1)d_p x_{k,2}(\tau_k)}{\sigma_n^2}\right) \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$= H_k\left(x_{k,1}(\tau_k)\right) H_k\left(x_{k,2}(\tau_k)\right), \quad (3.117)$$

où

$$H_k(x) = \sum_{m=1}^{2^{p-1}} \frac{2 \exp\left(-\frac{(2m-1)^2}{2\sigma_n^2} d_p^2\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2 2^p}} \cosh\left(\frac{(2m-1)d_p x}{\sigma_n^2}\right). \quad (3.118)$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial \log(P(\tau_k|\tau_k))}{\partial \tau_k} = \frac{\dot{H}_k(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k))} \dot{x}_{k,1}(\tau_k) + \frac{\dot{H}_k(x_{k,2}(\tau_k))}{H_k(x_{k,2}(\tau_k))} \dot{x}_{k,2}(\tau_k), \quad (3.119)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{H}_k(x) &= \frac{\partial H_k(x)}{\partial x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2 2^p}} \sum_{m=1}^{2^{p-1}} \exp\left(-\frac{(2m-1)^2}{2\sigma_n^2} d_p^2\right) \\ &\quad \times \frac{(2m-1)d_p}{\sigma_n^2} \sinh\left(\frac{(2m-1)d_p x}{\sigma_n^2}\right), \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\dot{x}_{k,1}(\tau_k) = \frac{\partial x_{k,1}(\tau_k)}{\partial \tau_k} \quad \text{et} \quad \dot{x}_{k,2}(\tau_k) = \frac{\partial x_{k,2}(\tau_k)}{\partial \tau_k}.$$

Nous trouvons finalement en utilisant l'expression générale de  $J_D$  donnée par (3.78) :

$$\begin{aligned} J_D &= E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k))} \right)^2 \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2 \right] \\ &+ E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k(x_{k,2}(\tau_k))}{H_k(x_{k,2}(\tau_k))} \right)^2 \dot{x}_{k,2}(\tau_k)^2 \right] \\ &+ E \left[ \frac{\dot{H}_k(x_{k,1}(\tau_k)) \dot{H}_k(x_{k,2}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k)) H_k(x_{k,2}(\tau_k))} \dot{x}_{k,1}(\tau_k) \dot{x}_{k,2}(\tau_k) \right]. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Etant donné que  $x_{k,1}(\tau_k)$  (resp.  $x_{k,2}(\tau_k)$ ) et  $\dot{x}_{k,1}(\tau_k)$  (resp.  $\dot{x}_{k,2}(\tau_k)$ ) sont décorrélés, alors le troisième terme de (3.121) est nul. De plus,  $x_{k,1}(\tau_k)$  et  $x_{k,2}(\tau_k)$  ont les mêmes propriétés statistiques. Par suite :

$$J_D = 2E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k))} \right)^2 \dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2 \right] \quad (3.122)$$

$$= 2E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k))} \right)^2 \right] E [\dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2], \quad (3.123)$$

avec

$$E [\dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2] = \sum_i E[a_i^2] \dot{g}^2((k-i)T) - \frac{\sigma_n^2}{2} \ddot{g}(0). \quad (3.124)$$

Nous avons aussi :

$$E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k))} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\dot{H}_k(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k))} \right)^2 P(x_{k,1}(\tau_k)) dx_{k,1}(\tau_k). \quad (3.125)$$

$g$  étant un filtre de Nyquist, le signal reçu après filtrage adapté peut s'écrire :

$$x_k(\tau) = a_k + v_k(\tau), \quad (3.126)$$

ainsi :

$$\begin{aligned} P(x_k(\tau_k)) &= \sum_{v \in \mathcal{V}} \exp \left( -\frac{|x_k(\tau) - v|^2}{2\sigma_n^2} \right) \frac{P(a_k = v_i)}{2\pi\sigma_n^2} \\ &= H_k(x_{k,1}(\tau_k)) H_k(x_{k,2}(\tau_k)) \exp \left( -\frac{x_{k,1}^2(\tau_k) + x_{k,2}^2(\tau_k)}{2\sigma_n^2} \right). \end{aligned} \quad (3.127)$$

Comme  $x_{k,1}(\tau_k)$  et  $x_{k,2}(\tau_k)$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de  $x_k(\tau_k)$ , qui sont deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, alors :

$$P(x_k(\tau)) = P(x_{k,1}(\tau_k)) P(x_{k,2}(\tau_k)), \quad (3.128)$$

où

$$P(x_{k,1}(\tau_k)) = H_k(x_{k,1}(\tau_k)) \exp\left(-\frac{x_{k,1}^2(\tau_k)}{2\sigma_n^2}\right) \quad (3.129)$$

$$P(x_{k,2}(\tau_k)) = H_k(x_{k,2}(\tau_k)) \exp\left(-\frac{x_{k,2}^2(\tau_k)}{2\sigma_n^2}\right). \quad (3.130)$$

D'où, on obtient :

$$E\left[\left(\frac{\dot{H}_k^l(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k(x_{k,1}(\tau_k))}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{H}_k(x)^2}{H_k(x)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) dx. \quad (3.131)$$

En remplaçant (3.131) et (3.124) dans (3.122), nous obtenons l'expression de  $J_D$ .

### 3.3.4.3 Mode assisté par le code

Considérons les symboles  $a_k$  de la constellation QAM carrée, dont l'étiquetage respecte le codage de Gray. Les résultats obtenus sont également vrais pour toute autre technique de codage. La taille de la constellation est égale à  $M$ .

Nous considérons le mapping suivant du  $k^{\text{ème}}$  symbole  $a_k$  transmis :

$$a_k \Leftrightarrow b_1^k b_2^k \dots b_{\log_2(M)}^k, \quad (3.132)$$

où  $b_j^k$  correspond à la  $j^{\text{ème}}$  information binaire de  $a_k$ .

On peut supposer que les bits codés dans un symbole sont statistiquement indépendants en utilisant un entrelaceur de grande taille [11, 90]. Considérons  $\lambda_m^k$  la sortie souple du décodeur à l'instant  $k$  ayant pour expression :

$$\lambda_m^k = \ln\left(\frac{P[b_m^k = 1]}{P[b_m^k = 0]}\right), \quad m = 1, \dots, \log_2(M). \quad (3.133)$$

L'information souple  $\lambda_m^k$  est généralement obtenue après plusieurs itérations de décodage souple.

Dans le chapitre précédent, nous avons développé l'expression de la fonction de vraisemblance pour un retard constant  $\tau$  pour une modulation QAM (voir (2.79) et (2.87)). Le résultat obtenu peut être adapté à un délai variable dans le temps, ce qui nous permet d'obtenir l'expression suivante :

$$P(r_k|\tau_k) = H_k^{2p}(x_{k,1}(\tau_k)) H_k^{2p-1}(x_{k,2}(\tau_k)), \quad (3.134)$$

où

$$H_k^l(x) = \frac{2w_{k,l}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \sum_{i=1}^{2^{p-1}} \theta_{k,l}(i) \exp\left(-\frac{(2i-1)^2 d_p^2}{2\sigma_n^2}\right) \cosh\left(\frac{(2i-1)d_p x}{\sigma_n^2} + (-1)^l \frac{\lambda_l^k}{2}\right) \quad (3.135)$$

$$\omega_{k,2p} = \prod_{l=1}^p \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_{2l}^k}{2}\right)}, \quad (3.136)$$

$$\omega_{k,2p-1} = \prod_{l=1}^p \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_{2l-1}^k}{2}\right)}, \quad (3.137)$$

et  $\theta_{k,2p}(i)$  et  $\theta_{k,2p-1}(i)$  sont récursivement obtenues selon les équations suivantes :

$$\theta_{k,2p}(i) = \theta_{k,2p-2} \left( \frac{|2i-1-2^{p-1}|+1}{2} \right) \exp \left( \left( 2 \lfloor \frac{i-1}{2^{p-2}} \rfloor - 1 \right) \frac{\lambda_{2^{p-2}}^k}{2} \right), \quad (3.138)$$

$$\theta_{k,2p-1}(i) = \theta_{k,2p-3} \left( \frac{|2i-1-2^{p-1}|+1}{2} \right) \exp \left( \left( 2 \lfloor \frac{i-1}{2^{p-2}} \rfloor - 1 \right) \frac{\lambda_{2^{p-3}}^k}{2} \right), \quad (3.139)$$

où  $\lfloor x \rfloor$  est la partie entière de  $x$ ,  $\theta_{k,1}(1) = 1$  et  $\theta_{k,2}(1) = 1$ .

Ainsi d'une façon similaire au cas NDA, et en se basant sur le fait que  $x_{k,1}(\tau_k)$  (resp.  $x_{k,2}(\tau_k)$ ) et  $\dot{x}_{k,1}(\tau_k)$  (resp.  $\dot{x}_{k,2}(\tau_k)$ ) sont décorrélés, l'expression de  $J_D$  est donnée par :

$$J_D = E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k^{2p}(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k^{2p}(x_{k,1}(\tau_k))} \right)^2 \right] E [\dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2] + E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k^{2p-1}(x_{k,2}(\tau_k))}{H_k^{2p-1}(x_{k,2}(\tau_k))} \right)^2 \right] E [\dot{x}_{k,2}(\tau_k)^2] \quad (3.140)$$

L'expression de  $E [\dot{x}_{k,1}(\tau_k)^2]$  qui est égale à  $E [\dot{x}_{k,2}(\tau_k)^2]$  est donnée par (3.124). Suivant les mêmes étapes que dans le cas NDA, nous obtenons :

$$P(x_{k,1}(\tau_k)) = H_k^{2p}(x_{k,1}(\tau_k)) \exp \left( -\frac{x_{k,1}^2(\tau_k)}{2\sigma_n^2} \right), \quad (3.141)$$

$$P(x_{k,2}(\tau_k)) = H_k^{2p-1}(x_{k,2}(\tau_k)) \exp \left( -\frac{x_{k,2}^2(\tau_k)}{2\sigma_n^2} \right). \quad (3.142)$$

Ainsi :

$$E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k^{2p}(x_{k,1}(\tau_k))}{H_k^{2p}(x_{k,1}(\tau_k))} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{H}_k^{2p}(x)^2}{H_k^{2p}(x)} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right) dx. \quad (3.143)$$

et

$$E \left[ \left( \frac{\dot{H}_k^{2p-1}(x_{k,2}(\tau_k))}{H_k^{2p-1}(x_{k,2}(\tau_k))} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{H}_k^{2p-1}(x)^2}{H_k^{2p-1}(x)} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right) dx. \quad (3.144)$$

En remplaçant (3.143), (3.144) et (3.124) dans (3.140) nous arrivons à l'expression de  $J_D$ .

Nous mentionnons que les fonctions dans les intégrales impliquées dans (3.131), (3.143) et (3.144), décroissent rapidement lorsque  $x$  augmente. Ainsi, les intégrales sur  $]-\infty, +\infty[$  peuvent être approximées par des intégrales finies sur l'intervalle  $[-A, +A]$  et la méthode d'intégration de Riemann peut être utilisée adéquatement. L'évaluation de la BCRB est maintenant possible puisque toutes les expressions impliquées dans les équations (3.74) et (3.86) ont été développées.

Les BCRB pour les différents modes de transmission seront comparées aux performances de l'estimateur dans la section suivante.

### 3.4 Discussion des résultats obtenus

Nous utilisons les notations suivantes dans les figures du présent paragraphe. "Un seul *Forward*" pour dire que l'EQM est mesurée après une seule itération *Forward* en ligne sans aucune estimation *Backward*. "Multiples *Forward*" (resp. "Multiples FB") pour une EQM mesurée après 3 itérations utilisant un algorithme *Forward* (resp. *Forward-Backward*). Enfin "Simu" est utilisé pour dire que la valeur obtenue est empirique, alors que "Theo" fait référence à une valeur de l'EQM obtenue théoriquement en utilisant les expressions trouvées avec le modèle linéaire proposé pour l'erreur d'adaptation dans le paragraphe 3.2.2. L'algorithme en ligne est l'algorithme faisant un seul aller, c'est-à-dire, nécessitant une seule itération *Forward*.

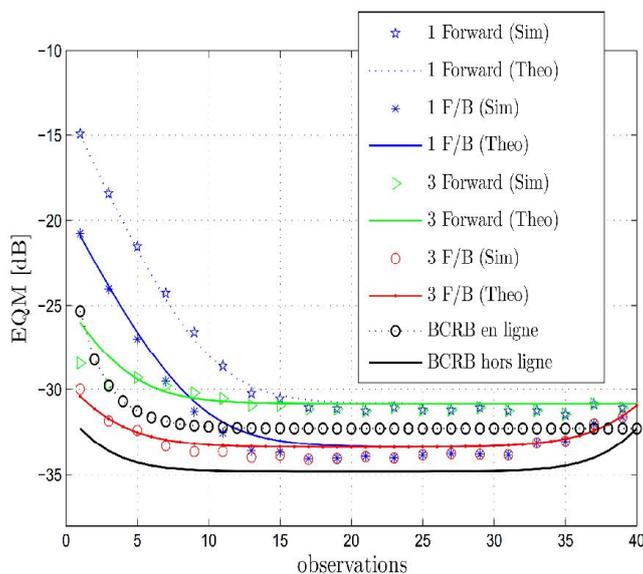


FIGURE 3.5: Comparaison entre les EQM analytiques et empiriques à différentes positions à l'intérieur du bloc d'observation pour un  $RSB = 10\text{dB}$ ,  $\sigma_w/T = 10^{-4}$  et utilisant des signaux BPSK et le mode DA.

Dans la Figure 3.5, nous présentons en fonction du numéro de l'échantillon à l'intérieur du bloc, les EQM et les BCRBs (en ligne et hors ligne) dans un contexte DA pour un  $RSB = 10\text{dB}$ . En augmentant le nombre d'observations, les performances en ligne sont améliorées. La borne en ligne décroît et converge vers son asymptote donnée par (3.89). L'EQM de l'algorithme en ligne à savoir "F" (après une seule itération *Forward*) sature près de la borne correspondante. Cette saturation est due à la fois à la nature variable du retard et à l'auto-bruit de la boucle d'adaptation (voir (3.73)). La même figure montre l'EQM d'une itération FB et sa borne limite donnée par la BCRB hors ligne. On note qu'il y a un gain de 3 dB en termes d'EQM au niveau

du centre du bloc en utilisant l'algorithme FB et que, similairement, la BCRB hors ligne est en dessous de la BCRB en ligne. On note aussi que les performances de l'algorithme hors ligne proposé, à savoir l'algorithme FB sont meilleures que celles de l'algorithme hors ligne "Multiple Forward". Enfin, il y a un bon accord entre la simulation et les résultats théoriques de la section 3.2.2 ce qui valide notre modèle analytique linéaire.

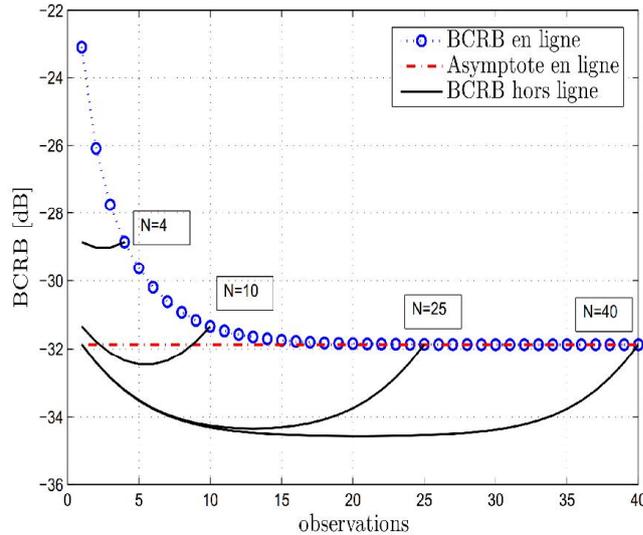


FIGURE 3.6: BCRBs à plusieurs positions à l'intérieur du bloc d'observation pour un RSB = 0 dB,  $\sigma_w/T = 10^{-4}$  et une modulation BPSK en mode DA.

La Figure 3.6 représente les BCRB hors ligne et en ligne à chaque indice de temps pour différentes longueurs de bloc ainsi que l'asymptote en ligne pour une longueur infinie du bloc (donnée par (3.89)). Encore une fois, on peut conclure que la borne hors ligne est toujours inférieure à la borne en ligne indépendamment de la taille du bloc d'observation. En outre, le nombre d'observations traitées au synchroniseur a un grand impact sur les performances du système. Il est à noter que la meilleure estimation du temps dans un contexte hors ligne, est obtenue au centre du bloc d'observation. En fait, à cette position, les deux observations passées et futures, qui sont fortement corrélées, sont utilisées pour la récupération du retard. Toutefois, moins d'information est introduite dans le synchroniseur aux frontières du bloc où la plupart du temps seulement l'observation passée (resp. future) est utilisée par l'itération *Forward* (resp. *Backward*).

Dans la Figure 3.7, nous comparons, en fonction du numéro de l'échantillon à l'intérieur du bloc d'observation, les BCRBs en ligne et hors ligne pour respectivement les modes DA, NDA et CA, pour des signaux BPSK (Figure 3.7.a) et 16QAM (Figure 3.7.b). Pour le mode CA, un décodeur turbo est utilisé. Il est composé de deux RSC identiques concaténés en parallèle avec un taux de codage systématique  $r = \frac{1}{2}$  et les polynômes générateurs (1, 0, 1, 1) et (1, 1, 0, 1). Les valeurs LLR sont initialisées par les sorties du démappeur souple. Les sorties du turbo-décodeur

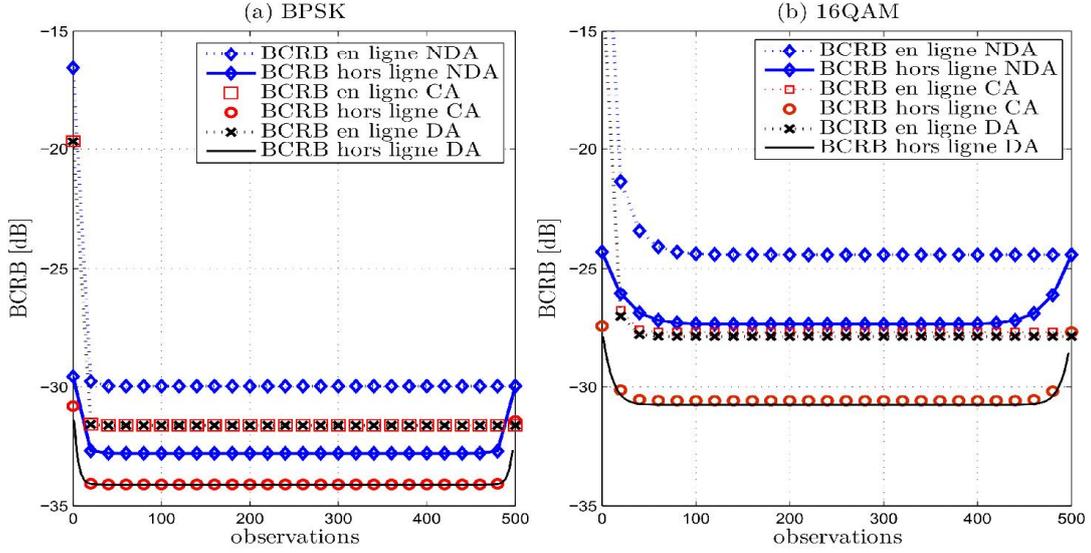


FIGURE 3.7: BCRB en ligne et hors ligne à plusieurs positions dans le bloc,  $RSB = 0$  dB,  $\sigma_w/T = 10^{-4}$ , (a) modulation BPSK et (b) modulation 16QAM.

ne sont injectées qu'une seule fois à l'entrée du synchroniseur. Un grand entrelaceur est placé entre les deux RSC. Le RSB est fixé à 0 dB. Il est clair que les techniques hors ligne sont plus performantes que les techniques en ligne (pour n'importe quel mode de synchronisation DA/NDA/CA). On note que, les performances du mode CA sont meilleures que celles du mode NDA et sont quasi-similaires à celles du mode DA comme prévu. Des conclusions similaires à celles tirées de la Figure 3.5 sont obtenues concernant les BCRBs correspondants aux différents modes (AD/NDA/CA).

La Figure 3.8 (resp. Figure 3.9) présente les courbes d'EQM et des BCRBs en fonction du RSB au centre du bloc d'observation pour les deux scénarii en ligne et hors ligne, pour les modes DA, NDA et CA et pour une modulation BPSK (resp. 16QAM). Pour les deux approches en ligne et hors ligne, le mode CA est plus performant que le mode NDA et s'approche du mode DA sur un large intervalle de RSB. Cependant, de meilleures performances peuvent parfois être obtenues à l'aide d'un scénario NDA hors ligne comparé à un scénario CA en ligne pour des signaux BPSK. Selon la Figure 3.8 pour des valeurs du RSB supérieures à 2dB la BCRB hors ligne du mode NDA est au-dessous de la BCRB en ligne du mode CA. L'EQM du mode NDA de l'algorithme *Forward-Backward* est plus faible que l'EQM de l'algorithme *Forward* opérant dans le mode CA pour des RSB supérieurs à 7dB. Des performances équivalentes sont prévues avec le scénario NDA hors ligne et le scénario CA en ligne pour une modulation 16QAM et pour un RSB inférieur à -2dB (voir Figure. 3.9). Dans un cas pareil, la boucle NDA hors ligne est préférable vu qu'elle est plus simple à implémenter que la boucle CA en ligne. A fort RSB, les BCRB en ligne et hors ligne deviennent confondues. En d'autres termes, le problème d'estimation d'un retard variable devient équivalent au problème d'estimation d'un

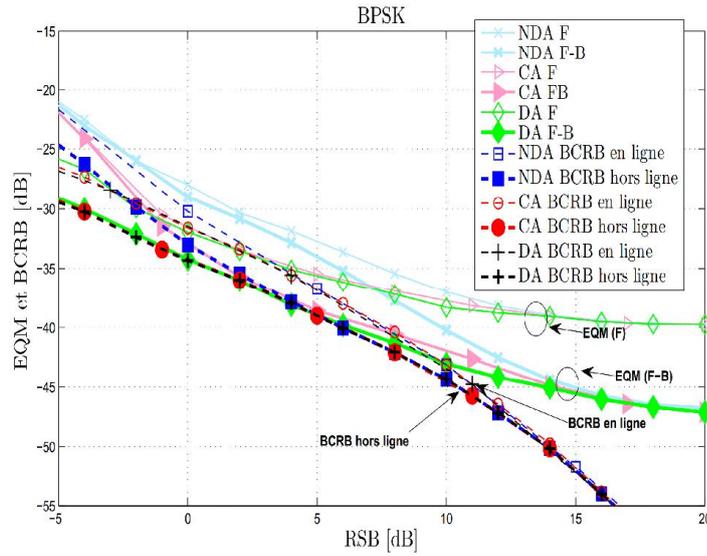


FIGURE 3.8: BCRB en ligne et hors ligne en fonction du RSB,  $\sigma_w/T = 10^{-4}$ , longueur du bloc = 2000, modulation BPSK.

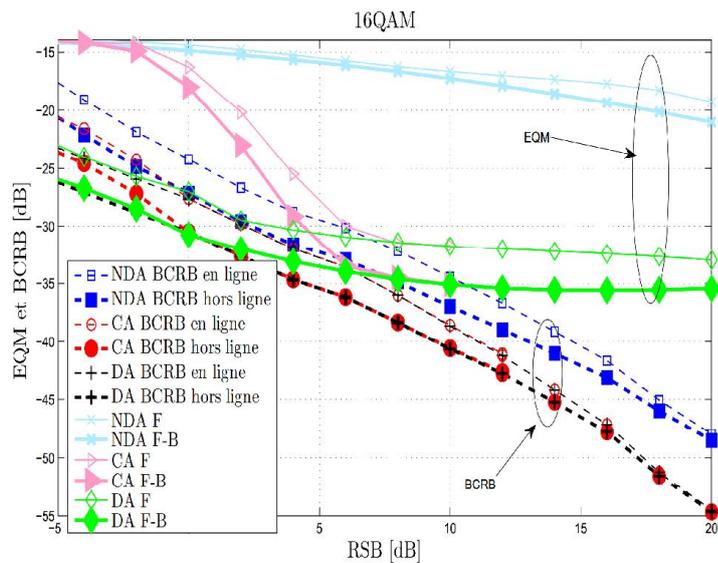


FIGURE 3.9: BCRB en ligne et hors ligne en fonction du RSB,  $\sigma_w/T = 10^{-4}$ , longueur du bloc = 2000, modulation 16QAM.

retard déterministe. Toutefois, comme illustré par les courbes d'EQM des Figures 3.8 et 3.9, en pratique, il y a un avantage dans l'utilisation de l'approche hors ligne vu que l'auto-bruit est moins important. Pour les valeurs moyennes du RSB, le scénario hors ligne est plus avantageux que le scénario en ligne : comme prévu par l'étude de la BCRB, un gain de 3 dB est apporté par l'utilisation de l'information *a priori*. A faible RSB, les performances des modes NDA et CA se confondent et le mode DA réalise une estimation plus précise. Actuellement, dans les systèmes

modernes, les récepteurs sont souvent contraints de travailler à faible et à moyen RSB. On peut donc bénéficier des avantages apportés par le scénario hors ligne combiné avec l'approche CA.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un algorithme de lissage hors-ligne pour la récupération dynamique du délai temporel est proposé. Cet algorithme repose sur l'estimateur au sens du MAP. Les performances théoriques de la technique hors-ligne ont été déterminées et validées par les résultats de simulation. Le BCRB est également évaluée pour des estimateurs DA, NDA et CA à la fois pour des scénarii hors ligne et en ligne. Les performances de l'algorithme présenté se rapprochent de la BCRB hors ligne et dépassent la limite des performances des détecteurs classiques de synchronisation en ligne. Les résultats de simulation montrent l'amélioration apportée par respectivement les approches hors ligne et CA. L'approche NDA hors ligne est simple à mettre en oeuvre étant une moyenne de deux trajectoires de l'algorithme du gradient. Néanmoins, cette approche de faible complexité conduit souvent à des performances supérieures à celles du CA en ligne, alors que ce dernier est plus complexe à mettre en oeuvre.

A ce niveau de la thèse, nous avons étudié le problème de synchronisation temporelle sans tenir compte des imperfections dues au canal de transmission. Ces imperfections, affectent non seulement les performances du synchroniseur, mais aussi les expressions et la valeur des bornes limites de références.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter et proposer des algorithmes d'estimation du retard temporel pour des signaux ayant subi un évanouissement dont l'amplitude suit la loi de Rayleigh. Nous allons également développer les expressions des bornes limites permettant d'évaluer la pertinence de tels estimateurs.



## Chapitre 4

# Synchronisation temporelle dans le cas d'un canal à évanouissement

Dans les deux chapitres précédents, nous nous sommes limités à l'étude de la synchronisation temporelle en réduisant l'effet du canal de transmission au retard de propagation et en considérant le cas d'un canal BBAG. En réalité, en particulier pour les WBAN, le signal transmis subit un affaiblissement dû au milieu de propagation. Il est alors parfois nécessaire d'avoir une connaissance sur le canal de transmission pour une bonne démodulation du signal.

Dans les systèmes qui traitent les données reçues par bloc et pour lesquels le canal de transmission ne peut pas être supposé constant sur le bloc, le problème de synchronisation temporelle est directement intégré dans le processus d'estimation du canal.

La prise en considération explicite de la synchronisation temporelle est particulièrement importante lorsque le décalage temporel ne peut pas être supposé constant sur la durée d'un bloc, comme dans le cas des transmissions en flot continu ou lorsque le canal de transmission est à évanouissement [52]. Par contre, dans des cas plus complexes, par exemple lorsque la détection des symboles s'effectue à l'aide d'un détecteur de Viterbi, la récupération du délai temporel et l'estimation du canal sont étroitement liés. Nous nous plaçons dans ce dernier cas.

Dans ce chapitre, nous allons développer des algorithmes de synchronisation temporelle en tenant compte de l'effet du canal de propagation. Les bornes minimales correspondantes seront également calculées. Dans un premier temps, nous effectuons l'étude d'un estimateur du décalage temporel constant dans le cas d'un canal à évanouissement lent et dont les coefficients sont estimés au préalable par le récepteur. Nous développons aussi l'expression de la BCR hybride (par rapport à la modélisation déterministe/aléatoire des données) BCRH relative à l'estimation d'un tel retard. Nous passons ensuite à l'étude du cas où le canal de transmission est inconnu par le récepteur toujours dans le cas d'un retard constant. Enfin, nous proposons un estimateur pour un retard variable dans le cas d'un canal à évanouissement lent. La BCRB relative à ce problème d'estimation est également évaluée.

## 4.1 Synchronisation temporelle dans le cas d'un canal à évanouissement lent pour un retard constant

### 4.1.1 Développement d'un estimateur au sens du Maximum de Vraisemblance dans le cas d'un canal estimé par le récepteur

Nous allons garder la même expression du signal transmis  $s(t)$  :

$$s(t) = \sum_i a_i h(t - iT), \quad (4.1)$$

Dans un premier temps, nous supposons que le retard temporel est constant sur la période d'observation et le gain de canal varie d'une mesure à l'autre. En introduisant l'effet du canal et du retard temporel, le signal reçu peut donc s'écrire comme étant :

$$r(t) = \alpha(t)s(t - \tau) + n(t), \quad (4.2)$$

où  $\tau$  est un retard temporel inconnu,  $\alpha(t)$  est un processus gaussien complexe modélisant l'effet du canal de transmission de fréquence Doppler  $f_d$  et  $n(t)$  est un BBAG de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ . L'effet des trajets multiples du canal peut être incorporé dans le filtre  $h(t)$ . Nous considérons que  $f_d$  est faible par rapport au débit des symboles,  $1/T$ , alors le gain de canal  $\alpha(t)$  est supposé constant pendant la période symbole.

Considérons les vecteurs tronqués de dimension  $N$ ,  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_N]^T$ ,  $\mathbf{s}(\tau) = [s_1(\tau), \dots, s_N(\tau)]^T$  avec  $s_k(\tau) = s(kT - \tau)$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$  et  $\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_N]^T$ , représentant les  $N$  échantillons des signaux continus  $r(t)$ ,  $s(t - \tau)$  et  $n(t)$ , respectivement aux instants  $kT$ . Les paramètres  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\tau$  sont supposés respectivement, aléatoire (estimé par le récepteur) et déterministe inconnu.

Le  $k^{\text{ème}}$  échantillon du signal reçu est donné par :

$$r_k = \alpha_k s_k(\tau) + n_k. \quad (4.3)$$

#### 4.1.1.1 Evaluation de la fonction de vraisemblance

La vraisemblance des données pour une valeur  $u$  de retard est donnée par :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, u) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\int_{T_0} |r(t) - \alpha(t)s(t - u)|^2 dt}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\int_{T_0} |r(t)|^2 + |\alpha(t)s(t - u)|^2 dt}{2\sigma^2} + \frac{\int_{T_0} \Re\{r(t)\alpha(t)^*s(t - u)^*\} dt}{\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $T_0$  est la période d'observation. Notons que  $\int_{T_0} |r(t)|^2 dt$  ne dépend pas de  $u$ . Selon [52, 69], lorsque  $T_0$  est suffisamment large, l'effet du retard temporel sur l'intégrale du second terme au

carré dans (4.4) peut être négligé et par suite :

$$\int_{T_0} |\alpha(t)s(t-\tau)|^2 dt \simeq \int_{T_0} |\alpha(t)s(t)|^2 dt \simeq \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 |a_k|^2. \quad (4.5)$$

En développant la dernière intégrale dans (4.4), nous obtenons :

$$\int_{T_0} r(t)\alpha(t)^* s^*(t-u) dt = \int_{T_0} \left( \alpha(t) \sum_i a_i h(t-iT-\tau) + n(t) \right) \left( \alpha(t)^* \sum_j a_j^* h(t-jT-u) \right) dt.$$

Etant donné que le canal est lentement variable, nous pouvons écrire que  $\alpha(t) = \alpha_i$  pour tout  $t$  dans l'intervalle de temps  $[iT, (i+1)T]$ . Ainsi, si  $h(t-iT-\tau)$  prend les valeurs les plus significatifs sur  $[iT, (i+1)T]$ , on a,  $\alpha(t) \sum_i a_i h(t-iT-\tau) \simeq \sum_i \alpha_i a_i h(t-iT-\tau)$ .

Par suite :

$$\begin{aligned} \int_{T_0} r(t)\alpha(t)^* s^*(t-u) dt &= \int_{T_0} \left( \sum_i \alpha_i a_i h(t-iT-\tau) + n(t) \right) \left( \sum_j \alpha_j^* a_j^* h(t-jT-u) \right) dt \\ &= \sum_i \sum_j \alpha_j^* a_j^* \alpha_i a_i \int_{T_0} h(t-iT-\tau) h(t-jT-u) dt \\ &\quad + \sum_j \alpha_j^* a_j^* \int_{T_0} h(t-jT-u) n(t) dt. \end{aligned}$$

Sachant que  $\int_{T_0} h(t-iT-\tau) h(t-jT-u) dt = g((j-i)T - (\tau-u))$ , et en posant :

$$x_k(u) = y_k(u) + v_k(u), \quad (4.6)$$

$$y_k(u) = \sum_i \alpha_i a_i g((k-i)T - (\tau-u)), \quad (4.7)$$

$$v_k(u) = \int_{T_0} h^*(t-kT-u) n(t) dt, \quad (4.8)$$

où la vraie valeur du retard est notée par  $\tau$ , nous aboutissons finalement à l'expression suivante :

$$P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, u) = C \exp \left( - \frac{\sum_{k=1}^N |\alpha_k a_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^N \Re \{ \alpha_k^* a_k^* x_k(u) \}}{2\sigma^2} \right), \quad (4.9)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\tau$ .  $x_k(\tau)$  est vu comme étant la sortie du filtre adapté à la réception,  $y_k(\tau)$  est sa partie utile et  $v_k(\tau)$  est relatif au bruit gaussien coloré de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ .

Les symboles  $a_k$  qui apparaissent dans (4.9) peuvent être connus si certains symboles pilotes sont envoyés dans de la trame de données. Dans ce cas, le DET fonctionne dans un mode DA. Afin d'améliorer l'efficacité spectrale, ces symboles pilotes peuvent être limités à un court

préambule ou même omis, auquel cas les  $a_k$  sont estimés au niveau du récepteur. Dans ce dernier cas, le DET fonctionne dans un mode DD. Pour ce faire, nous utilisons habituellement une estimation dure des symboles  $a_k$ .

#### 4.1.1.2 Détecteur cohérent du retard temporel au sens du maximum de vraisemblance

Lorsque l'on étudie le problème de synchronisation temporelle, il faut distinguer entre les méthodes supervisées et les méthodes non supervisées. Le premier type est motivé par la notion intuitive disant que la synchronisation temporelle peut être améliorée en exploitant la connaissance des symboles transmis. En outre, étant donné que les données et le canal sont estimés conjointement dans un récepteur cohérent, une technique combinant l'estimation du canal et la synchronisation temporelle est utilisée. Un DET basé sur l'approche du maximum de vraisemblance peut être mis en oeuvre pour estimer le délai. Dans le cas DA, ce DET met à jour la valeur estimée  $\hat{\tau}$  du retard constant  $\tau$  à chaque symbole reçu d'indice  $k$  selon l'équation suivante :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu \Re \left\{ \hat{\alpha}_k^* a_k^* \frac{\partial x_k(u)}{\partial u} \Big|_{u=\hat{\tau}_{k-1}} \right\} \quad (4.10)$$

où  $\mu$  est le pas d'adaptation et  $\hat{\alpha}_k$  est la valeur estimée de  $\alpha_k$ .  $a_k$  est remplacé par sa valeur estimée  $\hat{a}_k$  dans un contexte DD.

En prenant un canal gaussien, nous retrouvons l'expression de l'erreur d'adaptation d'un détecteur au sens du MV présentée dans le premier chapitre.

Afin d'évaluer la pertinence de l'estimateur proposé ci-haut, nous calculons dans ce qui suit la borne minimale sur l'EQM correspondant au contexte considéré.

#### 4.1.2 Borne de Cramèr-Rao Hybride pour l'estimation conjointe canal/retard

La BCR standard et la BCRB ont été introduites dans la littérature pour trouver un minimum théorique à l'EQM d'estimation, respectivement, pour des modèles de paramètres déterministes et des modèles de paramètres aléatoires. Cependant, dans certains cas, nous avons plutôt besoin d'estimer conjointement un mélange de paramètres déterministes et aléatoires. Par exemple, dans les systèmes réels, l'estimation du retard temporel supposé déterministe est souvent associée à une estimation du canal de transmission modélisé par une variable aléatoire. La BCR et la BCRB ne sont alors plus pertinentes pour ces estimateurs. Bien que la BCM [22] peut être utilisée comme une solution en marginalisant certains paramètres indésirables, elle n'est pas suffisamment proche de la vraie BCR. Par la mise en place d'un cadre général pour obtenir l'expression analytique de la BCRB adaptée à l'estimation d'un vecteur de paramètres [59], une extension a été proposée par [73] pour certains cas pratiques où le vecteur à estimer

est composé d'un mélange de paramètres aléatoires et déterministes. Cette borne est appelée BCRH pour BCR hybride.

Dans [40], une BCRH a été introduite pour l'estimation conjointe d'un canal dynamique et de l'offset de la fréquence porteuse dans les systèmes OFDM, modélisés respectivement par une variable aléatoire et une variable déterministe. Dans [7, 96], cette borne a été calculée pour une estimation d'un offset de phase dynamique suivant un modèle brownien avec une dérive inconnue linéaire. Les auteurs de [88] ont proposé une BCRH pour l'estimation conjointe d'un offset de phase aléatoire et d'un retard temporel déterministe.

Dans ce qui suit, nous proposons un développement analytique de la BCRH pour une estimation conjointe d'un canal de Rayleigh et d'un retard temporel constant. L'expression de cette borne sera présentée dans les deux contextes DA et DD.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\tau$  inconnus sont respectivement modélisés par des variables aléatoire et déterministe. Soit le vecteur de paramètres inconnus suivant :

$$\boldsymbol{\mu} = [\alpha, \tau]^T. \quad (4.11)$$

Soit  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r})$  un estimateur non biaisé du paramètre hybride  $\boldsymbol{\mu} = [\alpha, \tau]^T$  basé sur les observations  $\mathbf{r}$ . La BCRH peut être obtenue dans un contexte en ligne où l'estimée de  $\boldsymbol{\mu}$  dépend uniquement de l'observation en cours et l'observation précédente ou dans un contexte hors ligne où la totalité du bloc d'observations reçues est considérée. La BCRH par rapport à  $\boldsymbol{\mu}$  [84] vérifie :

$$E_{\mathbf{r}, \alpha | \tau} \left[ (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\mu}) (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\mu})^H \right] \geq \mathbf{BCRH}(\boldsymbol{\mu}), \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{a} \geq \mathbf{B}$  signifie  $\mathbf{a} - \mathbf{B}$  est une matrice définie positive.

#### 4.1.2.1 Développement analytique de la borne de Cramèr-Rao Hybride

D'après [73] et [40], la BCRH se décompose en quatre blocs de sous matrices des tailles respectives  $N \times N$ ,  $N \times 1$ ,  $1 \times N$  et  $1 \times 1$  (où  $N$  est la taille de  $\tau$ ) :

$$\mathbf{BCRH}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \mathbf{BCRH}^{11}(\alpha) & \mathit{bcrh}^{12}(\alpha, \tau) \\ \mathit{bcrh}^{21}(\alpha, \tau) & \mathit{bcrh}^{22}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

La BCRH est l'inverse de la Matrice d'Information Hybride (MIH) suivante [73] :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}) = E_{\alpha} [\mathbf{F}(\alpha, \tau)] + E_{\alpha | \tau} [-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\mu} \log(P(\alpha | \tau))], \quad (4.14)$$

où  $P(\boldsymbol{\alpha}|\tau)$  est l'information *a priori* sur  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \tau)$  est la Matrice d'Information de Fisher (MIF) définie comme étant :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \tau) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \tau} [-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log (P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \tau))], \quad (4.15)$$

où  $P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \tau)$  est la fonction de densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{r}$  sachant  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\tau$ .

Etant donné que  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\tau$  sont deux paramètres indépendants, alors  $P(\boldsymbol{\alpha}|\tau) = P(\boldsymbol{\alpha})$  et par suite :

$$E_{\boldsymbol{\alpha}|\tau} [-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log (P(\boldsymbol{\alpha}|\tau))] = \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{\alpha}} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} \log (P(\boldsymbol{\alpha}))] & \mathbf{0}_{N,1} \\ \mathbf{0}_{1,N} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Nous considérons le cas d'un canal de Rayleigh modélisant une propagation NLOS. Par conséquent,  $\boldsymbol{\alpha}$  est une variable aléatoire gaussienne complexe de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}$ . L'information *a priori* sur  $\boldsymbol{\alpha}$  est alors donnée par :

$$P(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{|\pi \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}|} \exp(-\boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.17)$$

En évaluant l'espérance de la dérivée seconde de  $\log (P(\boldsymbol{\alpha}))$  par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}$ , nous obtenons :

$$E_{\boldsymbol{\alpha}} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} \log (P(\boldsymbol{\alpha}))] = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}. \quad (4.18)$$

La matrice de covariance peut être calculée en utilisant l'expression suivante [78] :

$$[\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}]_{n,m} = \sigma_{\alpha}^2 J_0(2\pi f_d T(n-m)) \quad (4.19)$$

où  $\sigma_{\alpha}$  est l'écart-type de l'évanouissement du canal,  $f_d$  est la fréquence Doppler du canal et  $J_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel du premier type.

La MIF peut être décomposée en quatre blocs de sous matrices :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{f}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \tau) \\ \mathbf{f}^{21}(\boldsymbol{\alpha}, \tau) & \mathbf{f}^{22}(\tau) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

où :

$$\mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \tau} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} \log (P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \tau))], \quad (4.21)$$

$$\mathbf{f}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \tau) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \tau} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\tau} \log (P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \tau))], \quad (4.22)$$

$$\mathbf{f}^{21}(\boldsymbol{\alpha}, \tau) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \tau} [-\Delta_{\tau}^{\boldsymbol{\alpha}} \log (P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \tau))], \quad (4.23)$$

$$\mathbf{f}^{22}(\tau) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \tau} [-\Delta_{\tau}^{\tau} \log (P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \tau))], \quad (4.24)$$

où  $P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \tau)$  est donnée par (4.9).

#### Evaluation de la matrice d'information de Fisher dans le mode DA

Nous avons :

$$\mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}(J_1, \dots, J_N), \quad (4.25)$$

où :

$$J_k = \frac{|a_k|^2}{\sigma^2}. \quad (4.26)$$

Etant donné que  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\tau$  sont deux paramètres indépendants, alors  $\mathbf{f}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \tau) = \mathbf{f}^{21}(\boldsymbol{\alpha}, \tau)^T = \mathbf{0}_{N,1}$ .

En se basant sur (4.24) et (4.9), nous pouvons déduire que :

$$\mathbf{f}^{22}(\tau) = \rho \ddot{g}(0), \quad (4.27)$$

où  $\rho = \frac{\sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 |a_k|^2}{\sigma^2}$  est le RSB par symbole reçu.

Dans le but d'évaluer l'expression de la MIF donnée par (4.14), nous avons encore besoin de moyenner les composants de la MIF obtenue par rapport au vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$ . Etant donné que seulement  $\mathbf{f}^{22}(\tau)$  dépend de  $\boldsymbol{\alpha}$ , alors seulement la MIF relative à l'estimation du retard  $\tau$  devrait être moyennée par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Calculer l'espérance de (4.27) par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}$  est équivalent à faire sa moyenne par rapport au RSB. Nous obtenons finalement :

$$E_{\boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{f}^{22}(\tau)] = \bar{\rho} \ddot{g}(0), \quad (4.28)$$

où  $\bar{\rho} = E_{\boldsymbol{\alpha}} [\rho]$  est le RSB moyen sur le canal.

### Evaluation de la matrice d'information de Fisher dans le mode DD

Dans ce paragraphe, nous évaluons l'expression des composantes de la MIF pour des signaux BPSK et QPSK. En comparaison avec le mode DA, seulement l'expression de  $\mathbf{f}^{22}(\tau)$  change. Pour les signaux BPSK et QPSK,  $|a_k|^2 = 1$  dans (4.26). Le calcul de  $\mathbf{f}^{22}(\tau)$  pour des modulations BPSK et QPSK lorsque les symboles transmis sont inconnus par le récepteur a été présenté dans [50] pour un canal BBAG :

$$\mathbf{f}^{22}(\tau) = 4\rho \left[ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\rho} \beta(\rho) \right) \left( \rho \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \dot{g}((m-n)T) - \frac{N}{2} \ddot{g}(0) \right) - \rho \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \dot{g}((m-n)T) \right],$$

pour une modulation BPSK où :

$$\beta(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\cosh(\sqrt{2\rho}x)} dx \quad (4.29)$$

et :

$$f^{22}(\tau) = 2\rho \left( \rho \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \dot{g}^2((m-n)T) - N\ddot{g}(0) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_\rho^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{G_\rho(x) \sqrt{2\pi}} dx - \frac{\rho \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x g_\rho(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2}{\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \dot{g}^2((m-n)T), \quad (4.30)$$

pour une modulation QPSK où :

$$g_\rho(x) = 2e^{-2\rho} \sinh(2\sqrt{\rho}x), \quad (4.31)$$

et

$$G_\rho(x) = 2e^{-2\rho} \cosh(2\sqrt{\rho}x). \quad (4.32)$$

Ayant un canal à évanouissement de Rayleigh, alors le RSB  $\rho$  suit une distribution exponentielle et la fonction de densité de probabilité de  $\rho$  est alors donnée par :

$$P(\rho) = \frac{1}{\bar{\rho}} \exp\left(-\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right), \text{ pour } \rho \geq 0. \quad (4.33)$$

Afin d'obtenir l'expression finale de la MIH, nous avons besoin de moyenner l'expression analytique de  $f^{22}(\tau)$  pour des modulations BPSK et QPSK par rapport à  $\rho$  pour  $\rho \geq 0$ . Vu qu'il est difficile d'obtenir analytiquement l'expression exacte des intégrales dans (4.29) et (4.30) et moyenner le résultat obtenu par rapport au RSB, une intégration numérique peut être utilisée afin d'obtenir  $E_\alpha [f^{22}(\tau)]$ . Notons que les intégrales dans (4.29) et (4.30) décroissent rapidement en fonction de  $x$ . Les fonctions intégrales peuvent être approximées par une intégration finie de Riemann sur l'intervalle  $[-D, +D]$  au lieu de  $]-\infty, +\infty[$  avec un pas d'intégration  $\delta$ . La même technique peut être utilisée pour calculer la moyenne par rapport au RSB sur l'intervalle  $[0, D]$  au lieu de  $[0, +\infty[$ .

### Inversion de la matrice d'information hybride

En se basant sur (4.14), la MIH est donnée par :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} E_\alpha [\mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha})] + \mathbf{R}_\alpha^{-1} & \mathbf{0}_{N,1} \\ \mathbf{0}_{1,N} & E_\alpha [f^{22}(\tau)] \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Nous remarquons que  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu})$  est une matrice diagonale par blocs, par suite, en utilisant la formule d'inversion des matrices blocs [43], la BCRH devient :

$$\begin{aligned} BCRH(\boldsymbol{\mu}) &= \begin{pmatrix} (E_\alpha [\mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha})] + \mathbf{R}_\alpha^{-1})^{-1} & \mathbf{0}_{N,1} \\ \mathbf{0}_{1,N} & (E_\alpha [f^{22}(\tau)])^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} BCRH_\alpha & \mathbf{0}_{N,1} \\ \mathbf{0}_{1,N} & \text{bcrh}_\tau \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

#### 4.1.2.2 Evaluation de l'estimateur proposé et de la borne hybride

Les résultats sont fournis pour des signaux BPSK and QPSK mis en forme par un filtre à l'émission de type racine de cosinus surélevé avec un facteur de roll-off égal à 0.3. Le facteur de suréchantillonnage du signal est égal à 8.

La Figure 4.1 montre les BCRHs relatives à l'estimation du canal et du retard temporel en fonction de la longueur du bloc des symboles.  $BCRH_\alpha$  est donnée dans un contexte en ligne, où seulement l'échantillon en cours et l'échantillon précédent sont pris en considération dans l'estimation du canal. Le terme  $bcrh_\tau$  est calculé dans les modes DA et NDA pour des modulations BPSK et QPSK. Nous avons également fixé  $f_d T = 0.001$ , qui signifie que le canal varie lentement sur le bloc d'observation. La  $BCRH_\alpha$  en ligne est la même quelle que soit la modulation et quel que soit le mode choisi vu qu'elle dépend uniquement de la matrice de covariance du canal et du bruit d'observation. On note aussi que le mode DA est plus performant que le mode NDA et que les performances ultimes dans le cas BPSK sont meilleures que pour le QPSK. .

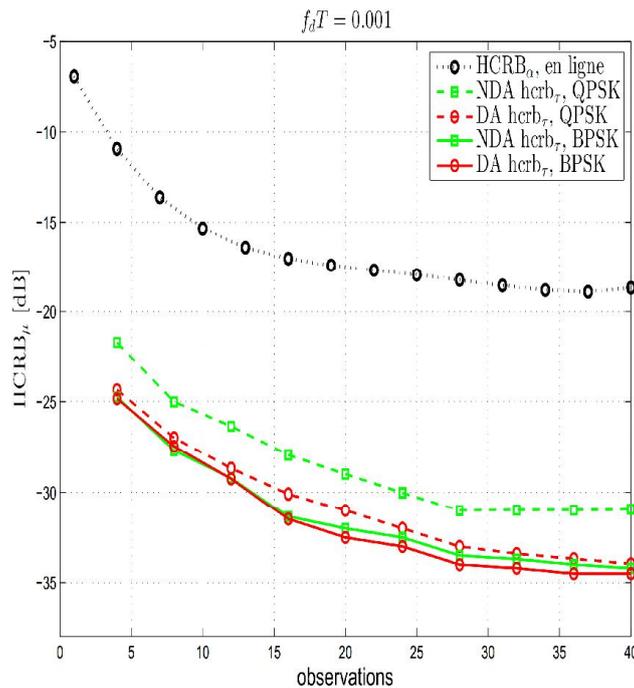


FIGURE 4.1:  $bcrh_\tau$  et  $BCRH_\alpha$  en fonction des observations,  $f_d T = 0.001$ , RSB = 5dB.

Dans la Figure 4.2, nous évaluons les  $BCRH_\alpha$  en ligne et hors ligne pour différentes longueurs du bloc d'observation et pour  $f_d T = 0.001$  (qui caractérise la matrice d'autocorrelation du canal  $\mathbf{R}_\alpha$ ). La Figure 4.3 présente, pour un RSB = 5dB, les  $BCRH_\alpha$  en ligne et hors ligne pour  $f_d T = 0.1$  (un canal qui varie rapidement dans le temps) et  $f_d T = 0.001$  (canal quasiment constant sur le bloc). Il a été montré que nous pouvons atteindre de meilleures performances

d'estimation avec une technique hors ligne, puisque nous pouvons utiliser tout le bloc d'observation. Les performances au centre du bloc sont meilleures que celles des frontières pour une technique hors ligne parce que les observations actuelle, passée et future sont utilisées en même temps pour l'estimation de gain de canal. Cependant, aux frontières, nous ne pouvons utiliser que l'observation passée si l'on se trouve au début du bloc ou bien l'observation future si l'on est à la fin du bloc. Il est également démontré que, au début, la borne en ligne diminue et donc la performance d'estimation est améliorée puisque l'estimateur utilise de plus en plus d'observations. Après la réception de certains échantillons de signal, la borne converge à son asymptote et cela est dû au bruit d'observation. Par exemple, l'asymptote est atteinte plus rapidement pour  $f_d T = 0.1$  que pour  $f_d T = 0.001$ .

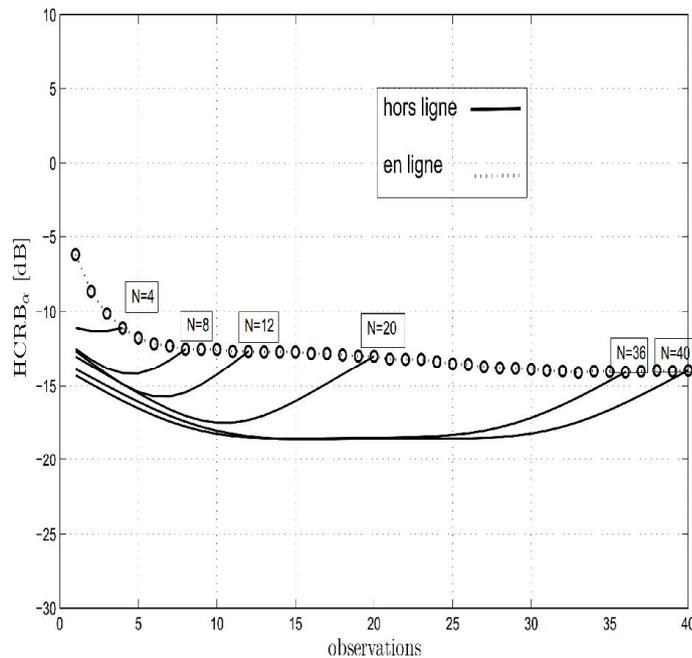


FIGURE 4.2:  $BCRH_\alpha$  en ligne et hors ligne en fonction de la longueur du bloc d'observation ( $N$ ), pour un RSB = 5dB.

Dans la Figure 4.4, nous affichons l'évolution de la  $BCRH_\alpha$  avec le RSB dans des scénarii en ligne et hors ligne et pour différentes valeurs de fréquence Doppler. Il est clair que la  $BCRH_\alpha$  diminue avec le RSB et augmente si la variation du canal est plus rapide.

Dans les Figures 4.5 et 4.6, nous évaluons, pour respectivement des modulations BPSK et QPSK, l'évolution de  $hcrb_\tau$  en fonction du RSB pour  $f_d T = 0.1$  et  $f_d T = 0.001$  et pour différents modes de transmission (DA et NDA). Le nombre d'échantillons reçus est égal à 40. Comme l'on pouvait s'y attendre,  $hcrb_\tau$  décroît lorsque le RSB augmente.

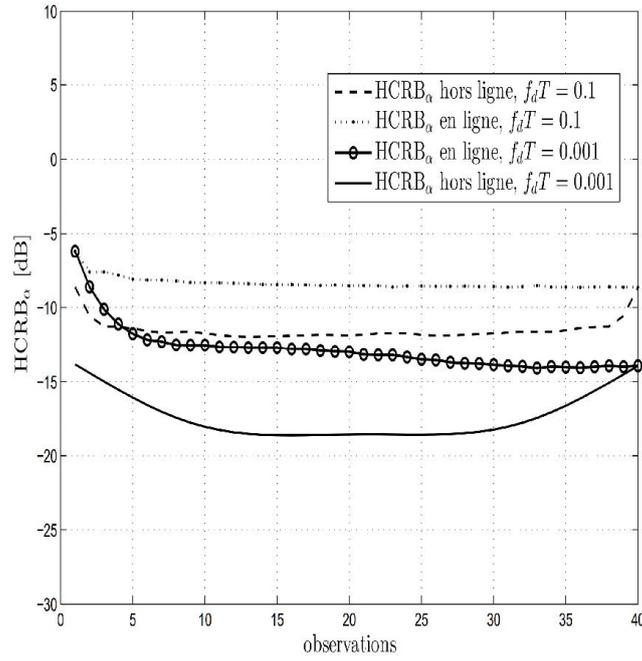


FIGURE 4.3:  $BCRH_{\alpha}$  en ligne et hors ligne en fonction de la longueur du bloc d'observation ( $N$ ), pour différentes valeurs de  $f_d T$  de et un RSB= 5dB.

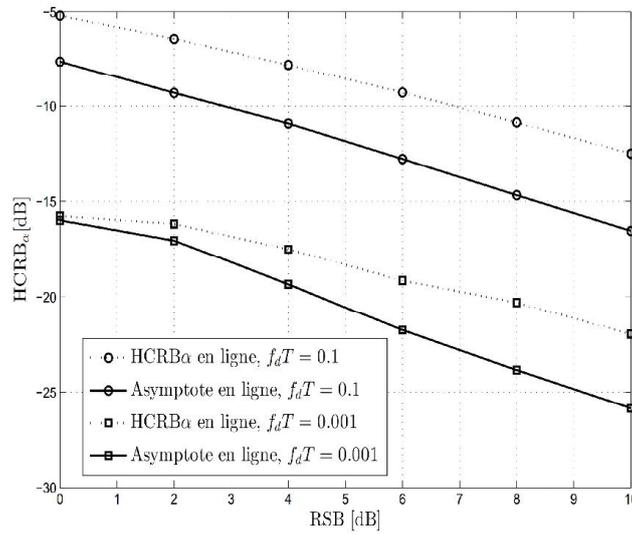


FIGURE 4.4:  $BCRH_{\alpha}$  en ligne et hors ligne en fonction du RSB, pour une longueur de bloc  $N = 40$ .

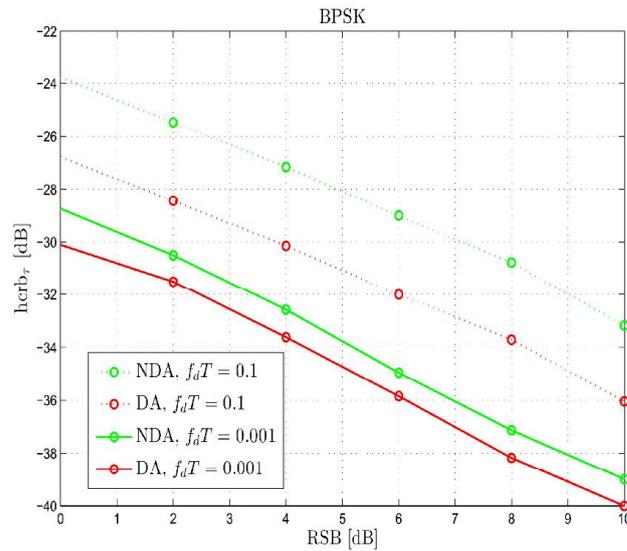


FIGURE 4.5:  $\text{ber}_{h_T}$  en fonction du RSB, pour une longueur de bloc  $N = 40$  et une modulation BPSK.

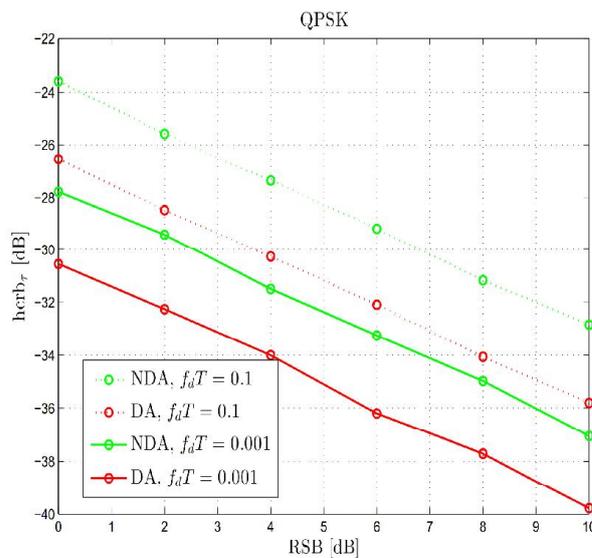


FIGURE 4.6:  $\text{ber}_{h_T}$  en fonction du RSB, pour une longueur de bloc  $N = 40$  et une modulation QPSK.

### 4.1.3 Algorithme de synchronisation à canal inconnu

Si le récepteur ne dispose pas d'une estimation des coefficients du canal, alors la valeur de l'erreur d'adaptation de l'équation (4.10) ne peut pas être déterminée. De plus, certaines limitations sont susceptibles de survenir avec la transmission en rafale et les applications à faible latence étant donné qu'un tel algorithme pourrait ralentir le démarrage du récepteur [52]. Dans ce cas, il est plus sûr de compter sur les méthodes NDA, afin d'éviter l'estimation du canal et la

recupération de phase de la porteuse. Certains détecteurs de type NDA ont déjà été proposés pour les canaux BBAG tels que les détecteurs de Gardner [31] et ELD de type NDA [48] ayant respectivement les équations d'adaptation suivantes :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu \Re \left\{ x_k(\hat{\tau}_{k-1})^* \left( x_{k+\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k-1}) - x_{k-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k-1}) \right) \right\} \quad (4.36)$$

et

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu \Re \left\{ x_{k-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k-1})^* \left( x_{k-1}(\hat{\tau}_{k-1}) - x_k(\hat{\tau}_{k-1}) \right) \right\}. \quad (4.37)$$

Des considérations mathématiques suggèrent que ces détecteurs peuvent être également utiles avec des canaux à évanouissement. En fait, il a été montré que le détecteur de Gardner et le NDA-ELD sont des approximations à faible RSB du DET au sens du MV [52, 66].

Ce qui est important à mettre en évidence ici est que les développements ont été faits dans le cas d'un seul trajet et permettent de récupérer le retard temporel fractionnel (modulo  $T$ ). Le cas d'un canal à trajets multiples nécessiterait l'incorporation d'un bloc d'égalisation. La synchronisation correspondrait à trouver le retard du premier trajet (le plus court).

#### 4.1.4 Borne de Cramèr-Rao pour une synchronisation à canal inconnu

L'expression de la BCR relative à l'estimation du retard dans un contexte NDA est donnée par :

$$BCR(\tau) = \left( E \left[ -\frac{\partial^2 \log(P(\mathbf{r}|\tau))}{\partial \tau^2} \right] \right)^{-1}, \quad (4.38)$$

où

$$P(\mathbf{r}|\tau) = \int_{\boldsymbol{\nu}} P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\nu}, \tau) P(\boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{\nu} \quad (4.39)$$

et  $\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}]^T$ .

Malheureusement, le calcul analytique de l'espérance de (4.38) est difficile à réaliser. Dans ce cas de figure, on a souvent recours à l'utilisation de la BCR modifiée dont l'expression est donnée par [22] :

$$BCRM(\tau) = \frac{1}{8\pi^2 N \xi} \frac{T^2}{E_s N_0}, \quad (4.40)$$

où  $E_s$  est l'énergie moyenne d'un symbole,  $N_0$  est la densité spectrale de puissance du bruit et  $\xi$  est un paramètre sans dimension qui dépend du filtre de mise en forme et dont l'expression est donnée par :

$$\xi = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} T^2 f^2 |G(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df}. \quad (4.41)$$

$G(f)$  est la transformée de Fourier de  $g(t)$ .

A ce niveau, nous avons uniquement considéré le cas d'un retard constant sur le bloc d'observation. Cependant, dans certains systèmes de communication, le retard introduit dans le signal n'est pas constant sur la durée d'observation. Nous allons alors proposer, dans ce qui suit, un algorithme de synchronisation temporelle pour un retard aléatoire qui varie d'un symbole à l'autre. Pour ce faire, nous avons opté pour un estimateur au sens du MAP.

## 4.2 Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard variable

### 4.2.1 Etude du cas d'un canal estimé par le récepteur

Revenons à l'expression du signal reçu  $r(t)$  utilisée dans la section précédente. Cette fois-ci, nous considérons que le retard temporel introduit par le canal n'est plus constant sur la période d'observation. Le signal reçu s'écrit alors :

$$r(t) = \alpha(t)s(t - \tau(t)) + n(t), \quad (4.42)$$

où  $\tau(t)$  est le retard temporel.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\tau$  sont supposés aléatoires.

En considérant que  $f_d$  est faible par rapport au débit des symboles  $1/T$ , alors  $\alpha(t)$  peut être supposé constant sur une période symbole. Le signal reçu est échantillonné au débit symbole. Le  $k^{\text{ème}}$  échantillon s'écrit donc :

$$r_k = \alpha_k s_k(\tau_k) + n_k, \quad (4.43)$$

où  $\alpha_k = \alpha(kT)$ ,  $\tau_k = \tau(kT)$ ,  $s_k(\tau_k) = s(kT - \tau_k)$  et  $n_k$  le  $k^{\text{ème}}$  échantillon de bruit. Nous supposons que le retard  $\tau_k$  suit le modèle d'évolution de Wiener suivant :

$$\tau_k = \tau_{k-1} + w_k, \quad (4.44)$$

où  $w_k$  est un BBAG stationnaire de moyenne nulle et de variance  $\sigma_w^2$ .

#### 4.2.1.1 Estimateur du retard au sens du Maximum A Posteriori

Soit  $\mathbf{a}$  le vecteur des symboles transmis. L'estimateur au sens du MAP de  $\tau$  est le vecteur  $\mathbf{u}$  avec la plus forte probabilité compte tenu des observations et des coefficients du canal. L'estimateur du retard temporel s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \arg \max_{\mathbf{u}} \{P(\mathbf{u}|\mathbf{r}, \mathbf{a}, \alpha)\} \\ &= \arg \max_{\mathbf{u}} \{P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}, \alpha)P(\mathbf{u})\} \\ &= \arg \max_{\mathbf{u}} \{\log(P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}, \alpha)) + \log(P(\mathbf{u}))\}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

où  $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_N]$  et  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]$ .

Pour  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\mathbf{a}$  donnés, l'indépendance des échantillons du modèle (4.42) permet d'écrire :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^N P(r_i|u_i, \mathbf{a}, \alpha_i), \quad (4.46)$$

où :

$$P(r_i|u_i, \mathbf{a}, \alpha_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{|r_i - \alpha_i s_i(u_i)|^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (4.47)$$

Par suite :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^N \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^N |r_i - \alpha_i s_i(u_i)|^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (4.48)$$

En laissant la durée d'observation  $T_0$  du signal  $r(t)$  couvrir un grand nombre  $N$  de périodes symbole, on peut supposer que [52] :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |r_i - \alpha_i s_i(u_i)|^2 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{T_0} |r(t) - \alpha(t)s(t - u(t))|^2 dt \\ &= \int_{T_0} |r(t)|^2 dt + \int_{T_0} |\alpha(t)s(t - u(t))|^2 dt - 2 \int_{T_0} \Re\{r(t)\alpha(t)^*s(t - u(t))^*\} dt. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Pour une durée  $T_0$  suffisamment large, le délai  $u(t)$  peut être négligé dans l'intégrale suivante [38, 54] :

$$\int_{T_0} |\alpha(t)|^2 |s(t - u(t))|^2 dt \simeq \int_{T_0} |\alpha(t)|^2 |s(t)|^2 dt = \sum_i |\alpha_i|^2 |a_i|^2. \quad (4.50)$$

D'autre part,

$$\int_{T_0} \Re\{r(t)\alpha(t)^*s(t - u(t))^*\} dt = \int_{T_0} \Re\left\{\left(\alpha(t) \sum_j a_j h(t - jT - \tau(t)) + n(t)\right) \alpha(t)^* \sum_i a_i^* h(t - iT - u(t))\right\} dt \quad (4.51)$$

En considérant que le retard temporel reste invariable sur la période d'échantillonnage, on peut écrire que pour tout  $t$  dans  $[iT, (i+1)T]$  :

$$\tau(t) = \tau_i \quad (4.52)$$

$$\alpha(t) = \alpha_i \quad (4.53)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{T_0} \Re \{r(t)s(t-u(t))^*\} dt &= \int_{T_0} \Re \left\{ \left( \sum_j \alpha_j a_j h(t-jT-\tau_j) + n(t) \right) \sum_i \alpha_i^* a_i^* h(t-iT-u_i) \right\} dt \\
&= \Re \left\{ \sum_i \alpha_i^* a_i^* \left( \sum_j \alpha_j a_j \int_{T_0} h(t-jT-\tau_j) h(t-iT-u_i) dt + \int_{T_0} h(t-iT-u_i) n(t) dt \right) \right\} \\
&= \Re \left\{ \sum_i \alpha_i^* a_i^* \left( \sum_j \alpha_j a_j g((i-j)T - (\tau_j - u_i)) + \underbrace{\int_{T_0} h(t-iT-u_i) n(t) dt}_{v_i(u_i)} \right) \right\} \quad (4.54)
\end{aligned}$$

où  $g(t) = h(t) \otimes h^*(-t)$ .

Etant donné que le retard temporel varie très lentement dans le temps, on peut alors considérer que  $\tau_j \simeq \tau_i$  pour des périodes symboles voisines. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{T_0} \Re \{r(t)s(t-u(t))^*\} dt &= \Re \left\{ \sum_i \alpha_i^* a_i^* \left( \underbrace{\sum_j \alpha_j a_j g((i-j)T - (\tau_i - u_i))}_{y_i(u_i)} + v_i(u_i) \right) \right\} \\
&= \Re \left\{ \sum_i \alpha_i^* a_i^* (y_i(u_i) + v_i(u_i)) \right\} \\
&= \Re \left\{ \sum_i \alpha_i^* a_i^* x_i(u_i) \right\}. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement [52] :

$$\int_{T_0} \Re \{r(t)s(t-u(t))^*\} dt \simeq \sum_i \Re \{ \alpha_i^* a_i^* x_i(u_i) \}, \quad (4.56)$$

où  $x_i(u_i)$  est le signal reçu après filtrage adapté :

$$x_i(u_i) = y_i(u_i) + v_i(u_i), \quad (4.57)$$

$$y_i(u_i) = \sum_l \alpha_l a_l g((i-l)T - (\tau_i - u_i)), \quad (4.58)$$

$$v_i(u_i) = \int_{T_0} h(t-iT-u_i) n(t) dt, \quad (4.59)$$

$$g(t) = h(t) \otimes h^*(-t). \quad (4.60)$$

En choisissant  $h(\cdot)$  comme étant un filtre en racine de Nyquist alors le filtre global  $g(\cdot)$  donné par (4.60) est un filtre de Nyquist. Vu que  $|r(t)|^2$  ne dépend pas de  $\mathbf{u}$ , alors son intégrale par rapport à  $t$  peut être éliminée de la fonction à maximiser. Ayant un nombre fini d'observations

$N$ , la fonction (4.45) se réduit à :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}) = \left( \frac{C}{2\pi\sigma_n^2} \right)^N \exp \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{\Re \{ \alpha_i^* a_i^* x_i(u_i) \}}{\sigma_n^2} - \frac{|\alpha_i a_i|^2}{2\sigma_n^2} \right) \right), \quad (4.61)$$

où  $C$  est un terme constant par rapport à la variable  $\mathbf{u}$ . A partir du modèle de Wiener (4.44) nous obtenons :

$$P(\mathbf{u}) = P(u_1) \prod_{i=2}^N P(u_i|u_{i-1}) \quad (4.62)$$

$$= P(u_1) \prod_{i=2}^N \frac{1}{\sigma_w \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2\sigma_w^2} \right). \quad (4.63)$$

Ainsi, le problème de maximisation (4.45) peut s'écrire :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \arg \max_{\mathbf{u}} \{ \Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \}, \quad (4.64)$$

où :

$$\Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N \Re \{ \alpha_i^* a_i^* x_i(u_i) \} + \log(P(u_1)) - \sum_{i=2}^N \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2\sigma_w^2}. \quad (4.65)$$

Si nous supposons que  $\frac{\partial \log(P(u_1))}{\partial u_1} = 0$  (dans le cas d'absence d'une connaissance *a priori* sur  $u_1$ ), alors le gradient de  $\Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$  par rapport à  $\mathbf{u}$  est donné par :

$$\nabla_{\mathbf{u}} \Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} \Re \left\{ \frac{\alpha_k^* a_k^*}{\sigma_n^2} \frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \right\} + \frac{u_{k+1} - u_k}{\sigma_w^2}, & k = 1; \\ \Re \left\{ \frac{\alpha_k^* a_k^*}{\sigma_n^2} \frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \right\} + \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\sigma_w^2}, & k = 2, \dots, N-1; \\ \Re \left\{ \frac{\alpha_k^* a_k^*}{\sigma_n^2} \frac{\partial x_k(u_k)}{\partial u_k} \right\} + \frac{u_{k-1} - u_k}{\sigma_w^2}, & k = N. \end{cases}$$

Afin de résoudre l'équation  $\nabla_{\mathbf{u}} \Lambda_L(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ , nous pouvons implémenter l'algorithme du gradient suivant :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_2 + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2} \Re \left\{ \alpha_1^* a_1^* \frac{\partial x_1(\hat{\tau}_1)}{\partial \hat{\tau}_1} \right\}; \\ \hat{\tau}_k = \frac{\hat{\tau}_{k+1} + \hat{\tau}_{k-1}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2} \Re \left\{ \alpha_k^* a_k^* \frac{\partial x_k(\hat{\tau}_k)}{\partial \hat{\tau}_k} \right\}, & k = 2, \dots, N-1; \\ \hat{\tau}_N = \hat{\tau}_{N-1} + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_n^2} \Re \left\{ \alpha_N^* a_N^* \frac{\partial x_N(\hat{\tau}_N)}{\partial \hat{\tau}_N} \right\}. \end{cases} \quad (4.66)$$

Cette solution étant similaire à celle trouvée dans le cas d'un canal gaussien, nous pouvons alors proposer le même algorithme d'aller-retour (*Forward-Backward*) hors ligne afin d'estimer le retard  $\boldsymbol{\tau}$ .

### 4.2.1.2 Algorithme d'estimation hors ligne

Considérons l'erreur d'adaptation pour  $i \in \{k-1, k+1\}$  :

$$z_k(\hat{\tau}_i, a_k, \alpha_k) \triangleq \mu \Re \left\{ \alpha_k^* a_k^* \frac{\partial x_k(\hat{\tau}_i)}{\partial \hat{\tau}_k} \right\}, \quad (4.67)$$

et les équations d'adaptation suivantes, respectivement des algorithmes *Forward* et *Backward* :

$$\hat{\tau}_k^{(F)} \triangleq \hat{\tau}_{k-1}^{(F)} + z_k(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)}, a_k, \alpha_k), \quad (4.68)$$

$$\hat{\tau}_k^{(B)} \triangleq \hat{\tau}_{k+1}^{(B)} + z_k(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)}, a_k, \alpha_k), \quad (4.69)$$

A partir de (4.66) et des expressions précédentes, nous proposons l'algorithme d'aller-retour qui combine la boucle d'aller en ligne avec une boucle de retour :

$$\hat{\tau}_k^{(FB)} = \begin{cases} \hat{\tau}_1^{(B)} = \hat{\tau}_2^{(B)} + z_1(\hat{\tau}_2^{(B)}, a_1, \alpha_1); \\ \frac{1}{2} \left( \hat{\tau}_k^{(B)} + \hat{\tau}_k^{(F)} \right), \text{ pour } k = 2, \dots, N-1; \\ \hat{\tau}_N^{(F)} = \hat{\tau}_{N-1}^{(F)} + z_N(\hat{\tau}_{N-1}^{(F)}, a_N, \alpha_N). \end{cases} \quad (4.70)$$

Comme dans le chapitre précédent, l'algorithme hors ligne proposé peut être itéré en alternant les boucles *Forward* et *Backward*. A chaque itération, l'algorithme sélectionné est initialisé par la dernière valeur estimée par l'algorithme précédent.

On remarque que le terme d'adaptation  $z_k(\hat{\tau}_i, a_k, \alpha_k)$  dépend des symboles transmis. Ces symboles peuvent être connus par le récepteur. En pratique, des estimées  $\hat{a}_k$  et  $\hat{\alpha}_k$  des symboles transmis et des coefficients du canal sont calculés par le récepteur et remplacent  $a_k$  et  $\alpha_k$  dans (4.70).

### 4.2.2 Etude du cas d'une synchronisation à canal inconnu

Lorsque le canal n'est pas estimé au niveau du récepteur, ou bien si l'on veut éviter l'estimation du canal, nous pouvons opter pour un algorithme hors ligne de type NDA. Pour ce faire, il suffit de remplacer l'erreur d'adaptation,  $z_k(\hat{\tau}_i, a_k, \alpha_k)$ , par l'erreur d'adaptation de l'algorithme de Gardner ou par celle du NDA-ELD.

L'équation d'adaptation de l'algorithme FB devient :

$$\hat{\tau}_k^{(FB)} = \begin{cases} \hat{\tau}_1^{(B)} = \hat{\tau}_2^{(B)} + z_1(\hat{\tau}_2^{(B)}); \\ \frac{1}{2} \left( \hat{\tau}_k^{(B)} + \hat{\tau}_k^{(F)} \right), \text{ pour } k = 2, \dots, N-1; \\ \hat{\tau}_N^{(F)} = \hat{\tau}_{N-1}^{(F)} + z_N(\hat{\tau}_{N-1}^{(F)}). \end{cases} \quad (4.71)$$

où, pour un algorithme de Gardner :

$$z_k(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)}) \triangleq \mu \mathfrak{R} \left\{ x_{k-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)}) \left( x_k(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)}) - x_{k-1}(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)}) \right) \right\} \quad (4.72)$$

$$z_k(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)}) \triangleq \mu \mathfrak{R} \left\{ x_{k+\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)}) \left( x_k(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)}) - x_{k+1}(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)}) \right) \right\}. \quad (4.73)$$

### 4.2.3 Borne de Cramèr-Rao Bayésienne sur l'estimation du canal et du retard

Commençons d'abord par définir le vecteur aléatoire  $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}]$ . La borne de Cramèr-Rao minimale d'estimation du vecteur  $\boldsymbol{\mu}$  est la borne de Cramèr-Rao Bayésienne. Soit  $P(\boldsymbol{\mu})$ , la probabilité *a priori* sur le vecteur  $\boldsymbol{\mu}$ . La BCRB est donc obtenue en inversant la matrice d'information bayésienne suivante [84] :

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\mu}} = E_{\boldsymbol{\mu}}[\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})] + E_{\boldsymbol{\mu}}[-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log(P(\boldsymbol{\mu}))], \quad (4.74)$$

où  $E_{\boldsymbol{\mu}}$  et  $\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}}$  sont respectivement l'espérance par rapport au vecteur  $\boldsymbol{\mu}$  et l'opérateur Laplacien ;  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})$  est similaire à la matrice conventionnelle d'information de Fisher [43] :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\mu}}[-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log(P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\mu}))]. \quad (4.75)$$

Le premier terme de (4.74) considère la moyenne par rapport à  $\boldsymbol{\mu}$  de l'information apportée par l'observation  $\mathbf{r}$ . Le second terme dépend de l'information *a priori* sur  $\boldsymbol{\mu}$ . Les éléments de la diagonale de l'inverse de  $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\mu}}$  donnent la BCRB par rapport à  $\boldsymbol{\mu}$ .

Dans ce qui suit, on distingue deux types de BCRB, à savoir, la BCRB dans le mode de synchronisation en ligne où seulement les observations actuelle et précédentes sont utilisées et la BCRB dans le mode de synchronisation hors ligne où tout le bloc d'observation est utilisé. La BCRB est l'inverse de la matrice d'information bayésienne (MIB)  $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\mu}}$ .

La BCRB se décompose en quatre blocs de sous matrices :

$$\mathbf{BCRB}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \mathbf{BCRB}^{11}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{BCRB}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \\ \mathbf{BCRB}^{21}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) & \mathbf{BCRB}^{22}(\boldsymbol{\tau}) \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

Etant donné que  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  sont deux paramètres indépendants, alors :

$$E_{\boldsymbol{\mu}} [-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log(P(\boldsymbol{\mu}))] = \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{\alpha}} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} \log(P(\boldsymbol{\alpha}))] & \mathbf{0}_{N,N} \\ \mathbf{0}_{N,N} & [-\Delta_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\mu}} \log(P(\boldsymbol{\mu}))] \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

Nous adoptons un modèle d'évanouissement de Rayleigh. Par conséquent,  $\boldsymbol{\alpha}$  est une variable aléatoire gaussienne complexe de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}$ . Comme nous l'avons démontré dans la section 4.1.2 :

$$E_{\boldsymbol{\alpha}} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} \log(P(\boldsymbol{\alpha}))] = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}. \quad (4.78)$$

La matrice de covariance peut être calculée en utilisant l'expression [78] :

$$[\mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}]_{n,m} = \sigma_{\alpha}^2 J_0(2\pi f_d T(n-m)), \quad (4.79)$$

où  $\sigma_{\alpha}$  est l'écart-type de l'évanouissement du canal,  $f_d$  est la fréquence Doppler du canal et  $J_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel du premier type.

La MIF peut être décomposée comme suit :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{F}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) \\ \mathbf{F}^{21}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) & \mathbf{F}^{22}(\boldsymbol{\tau}) \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

où :

$$\mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} \log(P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}))], \quad (4.81)$$

$$\mathbf{F}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\tau}} \log(P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}))], \quad (4.82)$$

$$\mathbf{F}^{21}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\tau}}^{\boldsymbol{\alpha}} \log(P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}))], \quad (4.83)$$

$$\mathbf{F}^{22}(\boldsymbol{\tau}) = E_{\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\tau}} [-\Delta_{\boldsymbol{\tau}}^{\boldsymbol{\tau}} \log(P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}))]. \quad (4.84)$$

Sachant que  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  sont deux variables aléatoires indépendantes, alors  $\mathbf{F}^{12}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{F}^{21}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}_{N,N}$  et par conséquent :

$$E_{\boldsymbol{\mu}}[\mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})] = \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{\alpha}}[\mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha})] & \mathbf{0}_{N,N} \\ \mathbf{0}_{N,N} & E_{\boldsymbol{\tau}}[\mathbf{F}^{22}(\boldsymbol{\tau})] \end{pmatrix}, \quad (4.85)$$

#### 4.2.3.1 Borne de Cramér-Rao bayésienne hors ligne

Selon (4.75), et en se basant sur l'expression de  $P(\mathbf{r}|\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})$  donnée par (4.61), nous pouvons déduire que  $\mathbf{F}^{22}(\boldsymbol{\tau})$  est une matrice diagonale, indépendante de  $\tau_k$ . Ainsi, le premier terme de (4.74) s'écrit :

$$E_{\boldsymbol{\tau}}[\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau})] = \mathbf{D}, \quad (4.86)$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale dont le  $k^{\text{ème}}$  élément de la diagonale est donné par :

$$[\mathbf{D}]_{k,k} = E \left[ -\frac{\partial^2 \log (P(r_k | \tau_k, \alpha_k))}{\partial \tau_k^2} \right] \quad (4.87)$$

$$= E \left[ \left( \frac{\partial \log (P(r_k | \tau_k, \alpha_k))}{\partial \tau_k} \right)^2 \right]. \quad (4.88)$$

Nous remarquons que l'expression de  $\mathbf{D}$  ne dépend pas de  $\boldsymbol{\tau}$ . Les éléments de la diagonale de la matrice  $\mathbf{D}$  sont alors égaux et par conséquent elle s'écrit :

$$\mathbf{D} = J_D \mathbf{I}_N \quad (4.89)$$

où  $\mathbf{I}_N$  est la matrice identité  $N \times N$ .

D'autre part, et d'après l'expression de  $P(\mathbf{r} | \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})$  donnée par (4.61) :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})^{11} = \text{diag}(J_1, \dots, J_N), \quad (4.90)$$

où

$$J_k = \frac{|a_k|^2}{\sigma_n^2}. \quad (4.91)$$

Par suite, nous obtenons :

$$E_{\boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})^{11}] = \text{diag}(J_1, \dots, J_N). \quad (4.92)$$

A partir de (4.63), le dernier terme de (4.74) implique le terme suivant :

$$E_{\boldsymbol{\tau}} [\Delta_{\boldsymbol{\tau}} \log (P(\boldsymbol{\tau}))] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_w^2} - G & -\frac{1}{\sigma_w^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_w^2} & \frac{1}{\sigma_w^2} & -\frac{1}{\sigma_w^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\frac{1}{\sigma_w^2} & \frac{2}{\sigma_w^2} & -\frac{1}{\sigma_w^2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{\sigma_w^2} & \frac{1}{\sigma_w^2} \end{pmatrix}, \quad (4.93)$$

où  $G = E_{\tau_1} \left[ \frac{\partial^2 \log (P(\tau_1))}{\partial \tau_1^2} \right]$ . Si l'on considère qu'il n'y a aucune information *a priori* sur  $\tau_1$ , alors  $G = 0$ .

Par conséquent, en se basant sur (3.74), (4.86) et (3.79), on obtient :

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{F}^{11}(\boldsymbol{\alpha})) + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} & \mathbf{0}_{N,N} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \mathbf{G}_N \end{pmatrix}, \quad (4.94)$$

avec

$$\mathbf{G}_N = \beta \begin{pmatrix} A+1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & A & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & A & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & A+1 \end{pmatrix}, \quad (4.95)$$

où  $A = -\sigma_w^2 J_D - 2$  et  $\beta = -\frac{1}{\sigma_w^2}$ .

La matrice  $\mathbf{B}_\mu$  est une matrice diagonale par bloc. Son inverse est alors donné par :

$$\mathbf{B}_\mu^{-1} = \begin{pmatrix} (E_\alpha [\mathbf{F}^{11}(\alpha)] + \mathbf{R}_\alpha^{-1})^{-1} & \mathbf{0}_{N,N} \\ \mathbf{0}_{N,N} & \mathbf{G}_N^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.96)$$

D'après le chapitre précédent, l'expression de  $[\mathbf{G}_N^{-1}]_{k,k}$ , qui mène directement à l'expression de la BCRB hors ligne est donnée par :

$$[\mathbf{G}_N^{-1}]_{k,k} = \frac{1}{|\mathbf{G}_N|} \left[ \rho_1^2 (\beta + \nu_1)^2 \nu_1^{N-3} + \rho_2^2 (\beta + \nu_2)^2 \nu_2^{N-3} - \frac{\beta^2}{A-2} (\nu_1^{k-2} \nu_2^{N-k-1} + \nu_1^{N-k-1} \nu_2^{k-2}) \right], \quad (4.97)$$

où  $|\mathbf{G}_N|$  est le déterminant de  $\mathbf{G}_N$  donné par :

$$|\mathbf{G}_N| = (A+2)\beta \left( \rho_1 \nu_1^{N-1} + \rho_2 \nu_2^{N-1} \right), \quad (4.98)$$

et pour  $m = 1, 2$  :

$$\nu_m = \frac{1}{\sigma_w^2} + \frac{J_D}{2} \left( 1 + (-1)^m \times \sqrt{1 + \frac{4}{J_D \sigma_w^2}} \right), \quad (4.99)$$

$$\rho_m = \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\sigma_w^2 J_D}} + (-1)^m \times \left( 1 + \frac{2}{\sigma_w^2 J_D} \right)}{2 \sqrt{1 + \frac{4}{\sigma_w^2 J_D}}}. \quad (4.100)$$

Passons dans ce qui au développement de l'expression de  $J_D$  dans un contexte DA, où les symboles transmis sont connus par le récepteur. **Calcul de  $J_D$  dans un contexte DA**

Dans un contexte DA et en se basant sur (4.61), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \log (P(r_k | \tau_k, \alpha_k))}{\partial \tau_k^2} = -\frac{|\alpha_k|^2 |a_k|^2}{\sigma_n^2} \ddot{g}(0) = -\rho_k \ddot{g}(0), \quad (4.101)$$

avec  $\rho_k = \frac{|\alpha_k|^2 |a_k|^2}{\sigma_n^2}$  est le RSB par symbole reçu.

Par suite,

$$E \left[ \frac{\partial^2 \log (P(r_k | \tau_k, \alpha_k))}{\partial \tau_k^2} \right] = -\bar{\rho} \ddot{g}(0), \quad (4.102)$$

où  $\bar{\rho}$  est le RSB moyen par symbole.

#### Calcul de $J_D$ dans un contexte NDA

Dans un contexte NDA, l'expression de  $J_D$  est donnée par :

$$J_D = E \left[ \frac{\partial^2 \log (P(r_k | \tau_k))}{\partial \tau_k^2} \right]. \quad (4.103)$$

Etant donné que cette expression n'est pas facile à obtenir analytiquement, il est intéressant dans ce cas d'utiliser  $J_M$ , l'équivalent de l'inverse de la BCRM pour un bloc d'échantillon de taille  $N = 1$ , au lieu de  $J_D$ .

En utilisant (4.40), pour  $N = 1$ , nous obtenons :

$$J_M = \frac{8\pi^2 \xi E_s N_0}{T^2}, \quad (4.104)$$

où  $E_s$  est l'énergie d'un symbole et  $\xi$  est donnée par (4.41).

#### 4.2.3.2 Borne de Cramèr-Rao Bayésienne en ligne

La valeur de cette borne séquentielle à l'indice  $K$ ,  $C_K$ , est égale à l'inverse de la matrice d'information bayésienne à l'indice  $(K, K)$ . En d'autres termes, la valeur de la borne en ligne à l'échantillon  $K$  est la même que celle de la borne hors ligne à l'extrémité d'un bloc d'échantillons de taille  $K$ .

Ainsi, nous obtenons :

$$C_K = [\mathbf{B}_\mu^{-1}]_{K,K} \quad (4.105)$$

Nous allons illustrer dans les Figures 4.7, 4.8 et 4.9 les résultats trouvés. Dans la Figure 4.7, nous présentons les bornes hors ligne et en ligne sur l'estimation d'un retard variable dans le cas d'un canal BBAG et un canal de Rayleigh pour  $f_d T = 0.001$  et un RSB = 10dB. Les signaux transmis sont de type BPSK filtré par un filtre en cosinus surélevé caractérisé par un facteur de roll-off = 0.3. L'écart type vaut  $\sigma_w = 10^{-3}$ . Nous remarquons que les bornes bayésiennes dans le cas d'un canal à évanouissement de Rayleigh ont la même forme que celles obtenues pour un canal Gaussien mais translatées vers le haut. Dans la même figure, nous comparons l'algorithme aller-retour après des itérations multiples et l'algorithme en ligne après une seule

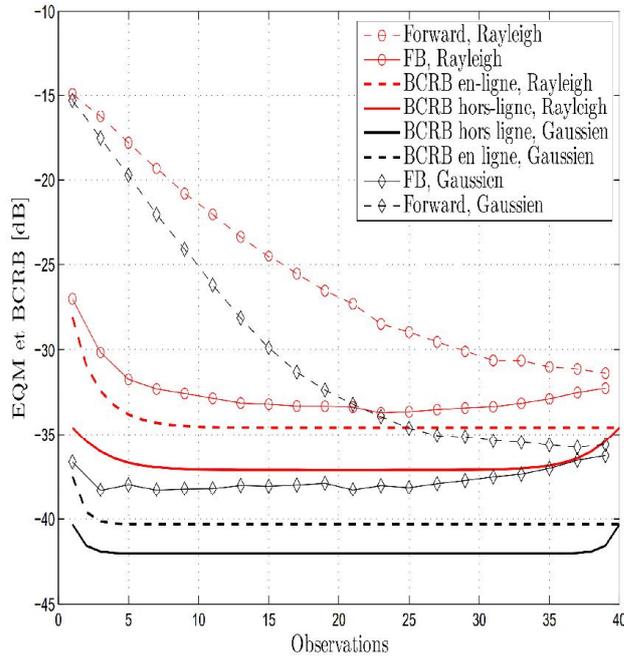


FIGURE 4.7:  $BCRB_{\tau}$  en fonction du numéro de l'observation,  $f_d T = 0.01$ , SNR=10dB, BPSK.

itération aux bornes bayésiennes hors ligne et en ligne en fonction du numéro de l'échantillon dans le bloc. Comme prévu, une amélioration de l'EQM est constatée avec la technique hors ligne.

Ces résultats sont confirmés dans la Figure 4.8 qui montre la valeur des bornes en ligne et hors ligne au centre du bloc d'observation en fonction du RSB pour les mêmes conditions de simulation. On remarque une dégradation des performances en augmentant  $f_d T$ , c'est-à-dire lorsque le canal varie plus rapidement dans le temps. On note également, qu'à faible et à fort RSB les bornes bayésiennes en ligne et hors ligne se rapprochent dans le cas d'un canal à évanouissement. En fait, à faible RSB, l'utilisation d'un algorithme hors ligne n'améliore pas les performances du système par rapport à un algorithme en ligne vu que le signal est noyé dans le bruit. A fort RSB, l'information *a priori* exploitée par la technique hors ligne n'a plus d'apport à l'estimateur étant donné que la qualité du signal est suffisamment bonne.

La Figure 4.9, présente les courbes d'EQM pour un algorithme *Forward* et l'algorithme *Forward-Backward* de type DA en fonction du RSB ainsi que leurs bornes bayésiennes correspondantes dans le cas d'un canal de Rayleigh pour  $f_d T = 0.01$ . Nous remarquons qu'à cause de la dégradation introduite par le canal, l'EQM s'éloigne de la borne limite même à fort RSB par rapport au cas d'un canal idéal.

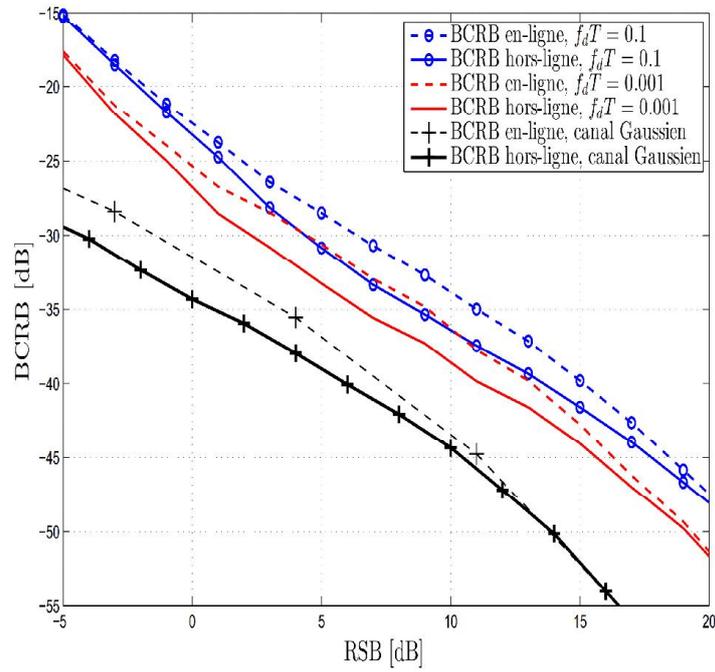


FIGURE 4.8:  $BCRB_{\tau}$  en fonction du RSB,  $N = 40$ , BPSK.

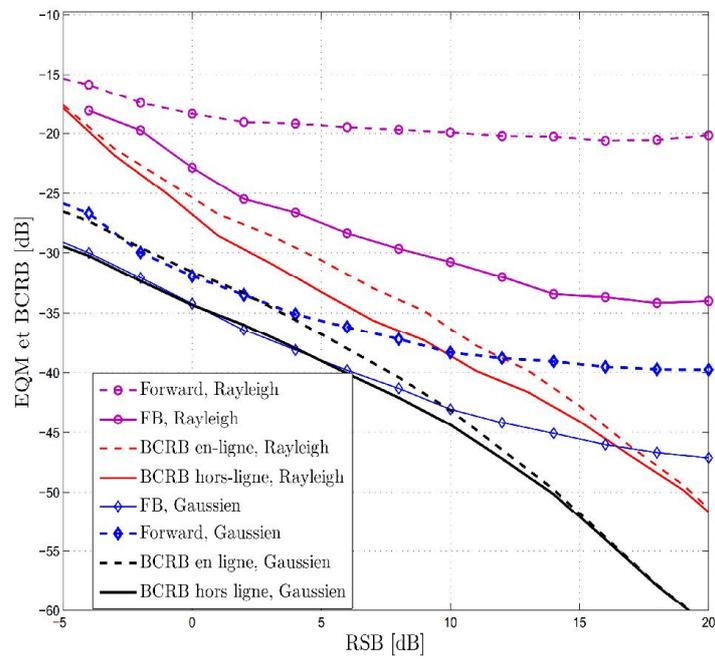


FIGURE 4.9:  $BCRB_{\tau}$  en fonction du RSB,  $N = 40$ ,  $f_dT = 0.01$ , BPSK.

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué l'expression analytique de la borne de Cramér-Rao hybride pour l'estimation d'un retard temporel dans le cas d'un canal à évanouissement de Rayleigh dans les mode DA et NDA. Les résultats de simulation montrent que nous pouvons atteindre une meilleure estimation du canal en utilisant des techniques d'estimation hors ligne, où toutes les observations du bloc sont utilisées. Nous avons également démontré que nous pouvons atteindre de meilleures performances de synchronisation temporelle en utilisant le mode DA.

Les techniques de synchronisation dans ce chapitre et dans les chapitres précédents ont été proposées pour des systèmes à bande étroite et pour des modulations linéaires. Nous essayerons dans le reste de ce mémoire de les adapter à la structure des signaux WBAN spécifiée par le standard IEEE 802.15.6 pour la sous-couche NB.

## Chapitre 5

# Synchronisation temporelle dans un réseau WBAN

Dans ce chapitre, nous allons considérer la norme WBAN. Ces réseaux portables sont basés en partie sur les nouvelles technologies sans fil à très faible consommation d'énergie tels que les systèmes bande étroite, ou "*Narrowband*" (NB), qui ont été proposés dans le cadre de la norme IEEE 802.15.6 WBAN [1]. En effet, le standard recommande d'utiliser des modulations différentielles pour les signaux transmis et spécifie une longueur fixe pour les signaux pilotes (le préambule) et les autres parties de la trame. Afin de pouvoir utiliser les algorithmes proposés précédemment, nous avons besoin d'adapter l'erreur d'adaptation des détecteurs à des signaux différentiels et d'alterner entre les différents modes de synchronisation (DA, NDA, CA) en parcourant les différentes parties de la trame.

Notre contribution dans ce cadre est un algorithme de synchronisation temporelle à faible complexité pour un récepteur WBAN dans les deux cas d'un canal BBAG et d'un canal à évanouissement de Rayleigh.

Ce chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, les spécifications du standard IEEE 802.15.6 pour le NB-WBAN fonctionnant dans la bande de fréquence 2.4 GHz sont présentées. Ensuite, des algorithmes de synchronisation temporelle pour un récepteur non cohérent dans un canal BBAG et un canal de Rayleigh sont proposés. Les résultats de simulation sont donnés dans l'objectif d'évaluer les algorithmes proposés.

### 5.1 Modélisation du système de transmission dans le standard des WBAN

Cette section est dédiée à la schématisation du système et du canal de transmission dans les réseaux WBAN selon le standard IEEE 802.15.6. WBAN est un réseau de capteurs sans fil

disposés sur et/ou dans le corps. Ces capteurs sont utilisés pour des applications de e-santé, c'est la raison pour laquelle, ils exigent notamment des spécifications particulières en terme de consommation d'énergie. Le groupe de travail IEEE 802.15.6 a déjà défini les spécifications des couches physique (PHY) et de contrôle d'accès au support (MAC). La couche MAC assure la gestion efficace de l'énergie par un bon choix d'ordonnancement des paquets, de l'accès au canal et des techniques de signalisation. La couche PHY est responsable de la sélection des fréquences, la génération de la fréquence porteuse, la détection de signaux, y compris la récupération du rythme, une modulation/démodulation et le chiffrement et le déchiffrement de l'information. Etant donné que la synchronisation temporelle fait partie des fonctionnalités de la couche physique, nous allons résumer dans ce qui suit les spécifications de la norme pour cette couche.

### 5.1.1 Modélisation des canaux dans les réseaux WBAN

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les différents modèles de canaux proposés par la norme IEEE 802.15.6. La modélisation et la caractérisation du canal de propagation est une étape fondamentale pour la simulation des réseaux et l'évaluation de leurs performances, en particulier pour les réseaux corporels, en raison de la complexité des tissus humains et du fait que les antennes sont placées autour du corps humain. Par ailleurs, l'hétérogénéité des applications et par conséquent les différentes bandes de fréquences utilisées implique la connaissance des modèles des canaux pour évaluer les performances de la couche physique dans différentes positions du corps humain et dans différents scénarios.

La structure du modèle de canal de propagation varie en fonction du type de la communication WBAN et même du scénario étudié. La norme IEEE 802.15.6, distingue 4 classes de modèles en fonction de la position des deux capteurs considérés :

- CM1 : Implant à implant,
- CM2 : Implant à la surface du corps,  
CM3 : Surface du corps à la surface du corps,
- CM4 : Surface du corps à l'extérieur.

La norme définit également un certain nombre de scénarios pour différentes applications. Ces scénarios sont représentés dans la Table 5.1.

En raison des réflexions par trajets multiples, la réponse du canal d'un WBAN paraît comme une série d'impulsions. En pratique, le nombre d'impulsions qui peuvent être distinguées est très grand, et dépend de la résolution temporelle du système de mesure. Le standard n'a défini que deux modèles pour le profil des délais. Ces profils sont relatifs aux modèles de canal CM3 (scénarios 4 et 5) et CM4 (scénarios 6 et 7) dans la bande 3.1-10.6 GHz. Vu que nous avons choisi de travailler avec des systèmes à bande étroite dans la bande 2.4GHz, le scénario S4 et le scénario S6 sont les plus adaptés à notre étude. Afin de simplifier les calculs, nous allons nous limiter plus tard à un modèle du canal à un seul trajet. Cela revient à considérer que le bloc

Modèle du canal	Scénario	Description	Bande de fréquence
CM1	S1	Implant à implant	402-405 MHz
CM2	S2	Implant à la surface du corps	402-405 MHz
	S3	Implant à l'extérieur	402-405 MHz
CM3	S4	Surface du corps à la surface du corps (LOS)	13,5 ; 50 ; 400 ; 600, 900 MHz 2,4 ; 3,1-10,6 GHz
	S5	Surface du corps à la surface du corps (NLOS)	13,5 ; 50 ; 400 ; 600, 900 MHz 2,4 ; 3,1-10,6 GHz
CM4	S6	Surface du corps à l'extérieur (LOS)	900 MHz 2,4 ; 3,1-10,6 GHz
	S7	Surface du corps à l'extérieur (NLOS)	900 MHz 2,4 ; 3,1-10,6 GHz

TABLE 5.1: Modèles des canaux et scénarii

de synchronisation est précédé par un bloc d'égalisation permettant de réduire la dispersion temporelle du canal.

En fonction des contraintes de régulation radioélectrique du spectre des différents pays, différentes options de bande passante de fréquences ont été proposées par la norme. Sur la base de la gamme de fréquence sélectionnée, trois sous-couches sont proposées pour la PHY :

La bande étroite, NB

La large bande, UWB

– Les communications via le corps humain, HBC

La sélection de chaque PHY dépend de l'application.



FIGURE 5.1: Sous-couches définies par le standard IEEE 802.15.6

### 5.1.2 Spécifications du standard pour la sous-couche Ultra Wideband

La PHY large bande est basée sur la technologie UWB en particulier la radio à impulsion (IR-UWB) et la large bande FM (FM-UWB)

– IR-UWB est caractérisée par la transmission soit d'une seule impulsion ou d'une suite d'impulsions par symbole d'information.

– FM-UWB combine la modulation CP-GFSK à large bande FM.

La Radio UWB est caractérisée par :

- Sa réalisation à faible complexité, ce qui est essentiel pour une faible consommation de puissance.
- Le fait que les niveaux de puissance du signal sont de l'ordre de ceux qui sont utilisés dans la bande MICS (dispositifs médicaux implantables). L'UWB fournit alors des niveaux de puissance assurant la sécurité pour le corps humain.

Une faible interférence avec d'autres dispositifs et équipements médicaux.

Il existe deux modes de fonctionnement : le mode par défaut et le mode de haute qualité de service (QoS). Le mode par défaut est utilisé dans des applications médicales et non-médicales (IR-UWB est obligatoire pour la mise en oeuvre, tandis que FM-UWB est facultative). Le mode haute qualité de service est utilisé pour des applications de haute priorité médicale. Les bandes de fréquence allouées à l'UWB sont : 3.1 à 5 GHz et de 6 à 10.6 GHz.

Les différentes modulations utilisées sont données dans la Table 5.2. La chaîne de transmission

	Modulation
<b>IR-UWB</b>	DBPSK
	DQPSK
	On-Off Keying
<b>FM-UWB</b>	CP-BFSK

TABLE 5.2: Modulations UWB

d'un signal UWB définie dans le standard est donnée par la Figure 5.2.

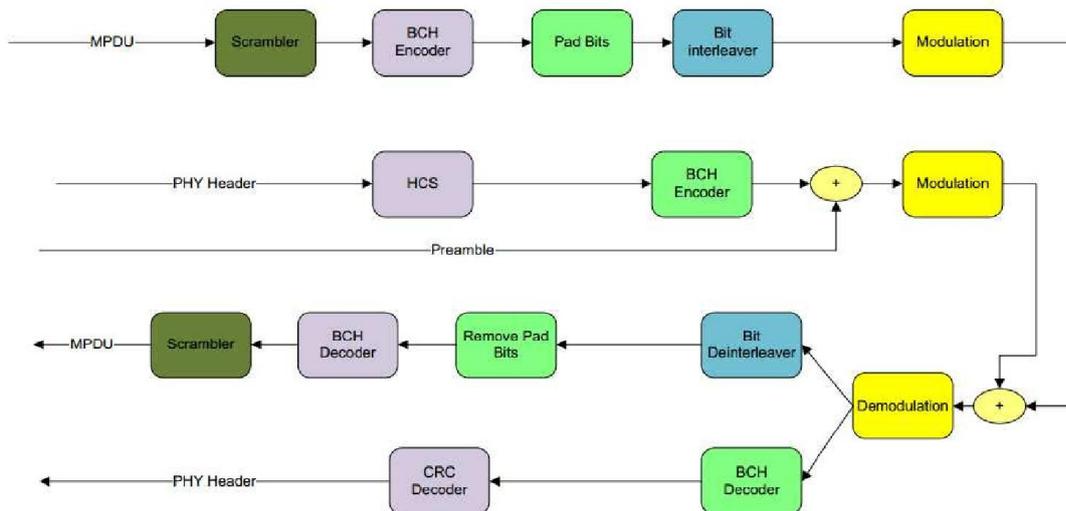


FIGURE 5.2: Chaîne de transmission UWB

Composant	Modulation	Débit symbole (ksps)	Débit de données	fCK (MHz)
PLCP Header	FS-Spreader	41	164 kbps	42
PSDU	FS-Spreader	41	165 kbps	42
PSDU	FS-Spreader	82	328 kbps	42
PSDU	FS-Spreader	164	656 kbps	42
PSDU	FS-Spreader	328	1.3125 Mbps	42

TABLE 5.3: Spécification de la norme IEEE 802.15.6 pour les signaux HBC

### 5.1.3 Spécifications du standard pour la sous-couche Human Body Communication

Il s'agit d'un signal électrique émis à travers le corps humain via des électrodes dans les bandes de fréquence 16 – 27 MHz avec une largeur de bande égale à 4 MHz.

La structure de la trame pour les HBC est donnée par la Figure 5.3. La chaîne de transmission

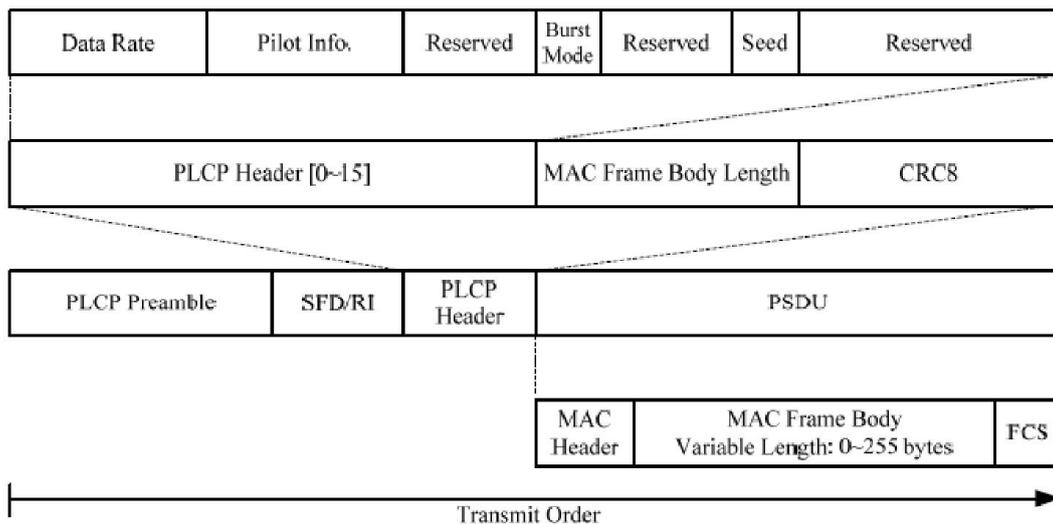


FIGURE 5.3: Structure de la trame HBC

HBC est définie par le schéma de la Figure 5.4. Les caractéristiques des signaux HBC spécifiées par la norme sont résumées dans la Table 5.3.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la sous-couche NB dédiée à la communication des capteurs mis en oeuvre dans le corps ou placés sur le corps. Nous allons dans ce qui suit présenter les spécifications du standard pour cette sous-couche.

### 5.1.4 Spécifications du standard pour la sous-couche Narrowband

La sous-couche NB assure :

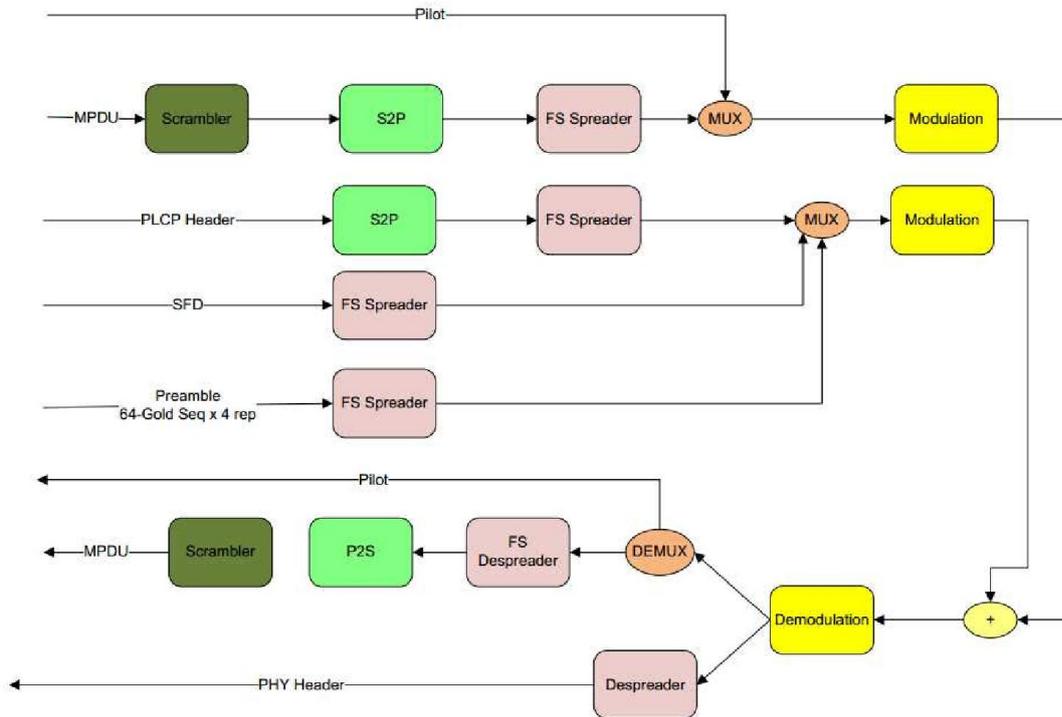


FIGURE 5.4: Chaîne de transmission HBC

- l’activation et la désactivation du transmetteur radio
- l’évaluation du canal
- la transmission et la réception

La Table 5.4 résume les techniques de codage et de modulation spécifiées par la norme pour les systèmes NB dans les bandes de fréquences allant de 402 MHz jusqu’à 2483.5 MHz.

La chaîne de transmission d’un signal à bande étroite définie dans le standard est donnée par la Figure 5.5.

Ce système utilise un codeur systématique BCH(63, 51,  $t = 2$ ) ou sa version abrégée BCH(31, 19,  $t = 2$ ) où  $t = 2$  fait référence au nombre d’erreurs qui peuvent être corrigées après décodage. Ce code est choisi pour son décodage facile et de faible complexité. En fait, le décodage est basé sur des méthodes algébriques connues sous le nom de syndrome de décodage [90]. Cela simplifie la conception du décodeur et requiert l’utilisation de petits matériels de faible puissance. Des bits redondants sont ajoutés aux paquets transmis pour une éventuelle correction d’erreurs au niveau du récepteur. Le nombre limité de bits supplémentaires n’engendre pas une augmentation importante du budget de puissance.

Nous notons également que le facteur d’étalement, qui varie en fonction du débit de données, de la modulation et des paramètres de codage, est mis en place afin d’assurer un débit de symboles

Frequency Band	Packet Component	Modulation	Symbol Rate (Kbps)	Code Rate BCH (n,k)	Information Data Rate (Kbps)
402-405 MHz	PLCP Header	$\pi/2$ -DBPSK	187,5	31,19	57,5
	PSDU	$\pi/2$ -DBPSK	187,5	63,51	75,9
	PSDU	$\pi/4$ -DQPSK	187,5	63,51	303,6
402-450 MHz	PLCP Header	GMSK	187,5	31,19	57,5
	PSDU	GMSK	187,5	63,51	75,9
	PSDU	GMSK	187,5	63,51	151,8
836-870 MHz	PLCP Header	$\pi/2$ -DBPSK	250	31,19	76,6
	PSDU	$\pi/2$ -DBPSK	250	63,51	101,2
	PSDU	$\pi/4$ -DQPSK	250	63,51	404,8
902-928 MHz	PLCP Header	$\pi/2$ -DBPSK	300	31,19	91,9
	PSDU	$\pi/2$ -DBPSK	300	63,51	121,4
	PSDU	$\pi/4$ -DQPSK	300	63,51	485,7
950-956 MHz	PLCP Header	$\pi/2$ -DBPSK	250	31,19	76,6
	PSDU	$\pi/2$ -DBPSK	250	63,51	101,2
	PSDU	$\pi/4$ -DQPSK	250	63,51	404,8
2360-2400 MHz 2400-2483,5 MHz	PLCP Header	$\pi/2$ -DBPSK	600	31,19	91,9
	PSDU	$\pi/2$ -DBPSK	600	63,51	121,4
	PSDU	$\pi/2$ -DBPSK	600	63,51	485,7
	PSDU	$\pi/4$ -DQPSK	600	63,51	971,4

TABLE 5.4: Paramètres de Modulation et de Codage

constant. Dans de mauvaises conditions du canal, il est préférable d'utiliser une modulation d'ordre plus faible.

La fonction principale de cette couche est de fournir un procédé permettant de transformer une unité de données de service de couche physique (PSDU) en une unité de données de protocole de couche physique (PPDU). Comme on le voit sur la Figure 5.6, au cours de la transmission, le PSDU doit être pré-joint à un préambule de couche physique et à un entête de couche physique en vue de créer le PPDU. Au niveau du récepteur, le préambule de la couche physique et l'entête de couche physique servent à la démodulation, au décodage et à la livraison du PSDU. La même figure montre le format du PPDU. Il est composé du préambule du protocole de convergence de couche physique (PLCP), de l'entête PLCP et du PSDU, énumérés dans l'ordre de transmission. Le préambule PLCP est la première composante du PPDU. Chaque préambule est construit par concaténation d'une  $m$ -séquence  $u$  de longueur 63 avec une séquence d'extension spécifique de 27 bits (010101010101101101101101). Par conséquent, la longueur du préambule est égale à 90 bits. Le but du préambule est d'aider le récepteur lors de la synchronisation temporelle.

L'entête PLCP est la deuxième composante principale de la PPDU. Le rôle de cette composante est de transmettre les informations nécessaires sur les paramètres de la couche PHY pour aider dans le décodage du PSDU au niveau du récepteur. L'entête PLCP peut être décomposé en un champ RATE ou de débit, un champ LENGTH ou de longueur, un champ de mode rafale

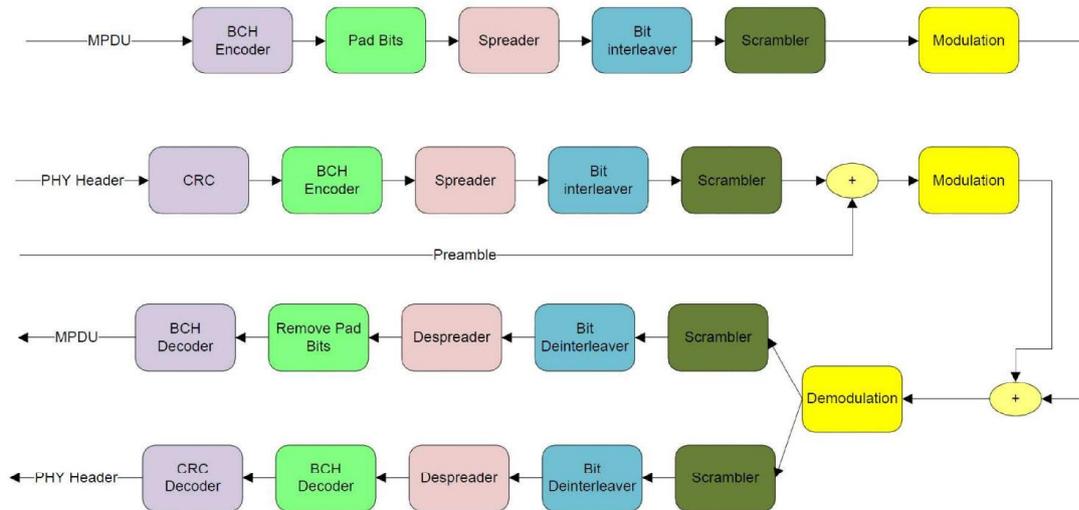


FIGURE 5.5: Structure de la trame Narrowband

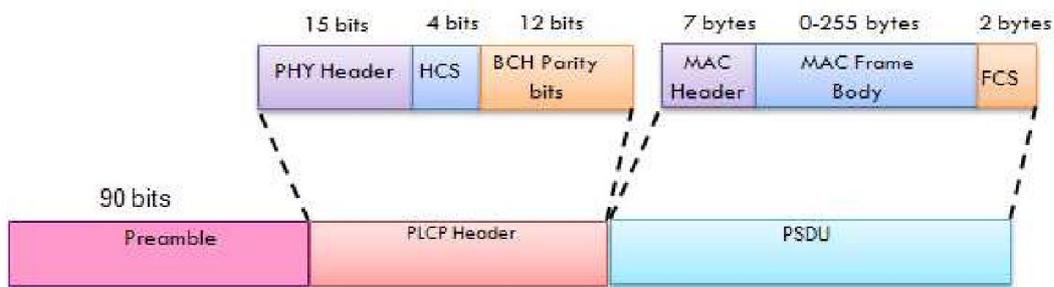


FIGURE 5.6: Structure standard du PPDU

BURST MODE, un champ SCRAMBLER SEED, un champ de bits réservés, une séquence de contrôle d'entête (HCS), et des bits de parité BCH. Les bits de parité BCH sont additionnés afin d'améliorer la robustesse de l'entête PLCP. Cet entête est transmis en utilisant le débit de données d'entête donné dans la bande de fréquences de fonctionnement. La taille de l'entête PLCP est égale à 31 bits.

Le PSDU est le dernier composant du PPDU. Ce composant est formé par la concaténation de l'entête de la couche MAC avec le corps de la trame et la trame séquence de contrôle (FCS). Le PSDU est alors codé, étalé et entrelacé avant d'être mélangé par le "scrambler". Il est transmis à l'un des débits disponibles dans la bande de fréquences de fonctionnement.

Lors de la transmission du paquet, le préambule PLCP est envoyé en premier, suivi par l'entête PLCP et enfin par le PSDU.

Le mappeur de constellation fonctionne sur la séquence de bits  $b(n)$ , qui résulte de la concaténation du préambule PLCP, de l'entête du PLCP et du PSDU.  $b(n)$  est mappé en utilisant l'une des modulations différentielles suivantes :  $\frac{\pi}{2}$ -DBPSK,  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK et  $\frac{\pi}{8}$ -D8PSK. Le flux de bits binaires,  $b(n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , doit être mappé dans la séquence à valeurs complexes  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, N/\log_2(M)$  selon l'équation suivante :

$$a_k = a_{k-1} \exp(j\phi_k), \quad (5.1)$$

où  $a_0 = \exp(j\pi/2)$ ,  $N$  est le nombre total de bits transmis,  $M = 2, 4, 8$  est la taille de la constellation et  $\phi_k$  est le changement de phase. Le mapping différentiel est utilisé pour éviter le besoin de récupération de la phase porteuse ce qui réduit la complexité du récepteur.

Le mapping de symboles varie en fonction de la bande de fréquence sélectionnée et le débit de données (voir tableau 5.4). Dans les simulations, nous allons considérer la bande de fréquence de 2400MHz à 2483.5MHz, pour laquelle, un mapping  $\frac{\pi}{2}$ -DBPSK est défini pour le préambule et l'entête PLCP et un mapping  $\frac{\pi}{2}$ -DBPSK ou  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK pour le PSDU.  $\phi_k$  prend ses valeurs selon la Table 5.5 pour une modulation  $\frac{\pi}{2}$ -DBPSK et selon la Table 5.6 pour une modulation  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK. Comme le montrent ces tableaux, nous remarquons que le produit  $a_k a_{k-1}^*$  est un

$b(k)$	$\phi_k$	$a_k a_{k-1}^*$
0	$\pi/2$	$j$
1	$3\pi/2$	$-j$

TABLE 5.5:  $\frac{\pi}{2}$ -DBPSK mapping

$b(2k)$	$b(2k+1)$	$\phi_k$	$a_k a_{k-1}^*$
0	0	$\pi/4$	$(1+j)/\sqrt{2}$
0	1	$3\pi/4$	$(-1+j)/\sqrt{2}$
1	0	$7\pi/4$	$(1-j)/\sqrt{2}$
1	1	$5\pi/4$	$(-1-j)/\sqrt{2}$

TABLE 5.6:  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK mapping

signal binaire imaginaire dans le cas d'une modulation  $\frac{\pi}{2}$ -DBPSK et un signal quaternaire complexe dans le cas d'une modulation  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK. Les modulations proposées pour la bande de fréquence de 2400 MHz à 2483.5 MHz sont regroupées dans la Table 5.7.

Sur la base des spécifications de faible complexité de la couche PHY ci-dessus, nous allons développer dans le paragraphe suivant un nouvel algorithme adaptatif qui exploite le format des données spécifié dans ce paragraphe pour la poursuite du retard temporel. Cet algorithme combine une technique de synchronisation temporelle DA, si la séquence reçue appartient au préambule (connu par le récepteur), et une technique non supervisée, lorsque la séquence reçue appartient à l'entête du PLCP ou au PSDU.

Packet Composant	Modulation	Symbol Rate (kbps)	Code Rate (k/n)	Spreading Factor	Data Rate (kbps)
PLCP Header	$\frac{\pi}{2}$ -DBPSK	600	19/31	4	91.9
PSDU	$\frac{\pi}{2}$ -DBPSK	600	51/63	4	121.4
PSDU	$\frac{\pi}{2}$ -DBPSK	600	51/63	2	242.9
PSDU	$\frac{\pi}{2}$ -DBPSK	600	51/63	1	485.7
PSDU	$\frac{\pi}{4}$ -DQPSK	600	51/63	1	971.4

TABLE 5.7: Paramètres de Modulation et de Codage pour la bande de fréquence de 2400 MHz à 2483.5 MHz

Dans ce qui suit, nous allons développer des algorithmes d'estimation du retard temporel pour les systèmes à bande étroite. Nous commencerons par l'étude du cas d'un retard constant et nous passerons ensuite à la récupération d'un retard variable.

## 5.2 Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard constant

Considérons le signal filtré et transmis  $s(t)$  :

$$s(t) = \sum_i a_i h(t - iT), \quad (5.2)$$

où  $a_i$  sont des symboles indépendants et identiquement distribués de moyenne nulle tirés d'une constellation DPSK,  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle du filtre à l'émission, qui selon le standard IEEE 802.15.6 est en racine de cosinus surélevé, et  $T$  est la période symbole.

Le signal reçu à travers un canal BBAG s'écrit :

$$r(t) = s(t - \tau) + n(t), \quad (5.3)$$

où  $\tau$  est un retard introduit par le canal inconnu et déterministe, supposé constant sur la durée d'observation et  $n(t)$  est un BBAG de moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ .

Dans le paragraphe suivant, nous développons un estimateur au sens du maximum de vraisemblance du retard temporel.

### 5.2.1 Estimateur au sens du maximum de vraisemblance

Le retard temporel est estimé au sens du MV en maximisant la fonction de vraisemblance selon l'équation suivante [66] :

$$\hat{\tau} = \arg \max_u \Lambda(u, \mathbf{a}), \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{a}$  est le vecteur des symboles transmis,

$$\Lambda(u, \mathbf{a}) = \exp \left( -\frac{1}{2\sigma_n^2} \int_{T_0} |r(t) - s(t-u)|^2 dt \right), \quad (5.5)$$

est la fonction de vraisemblance et  $T_0$  est la durée d'observation. De manière équivalente, la fonction log-vraisemblance  $\Lambda_L(u, \mathbf{a})$  peut être utilisée à la place de  $\Lambda(u, \mathbf{a})$ . Selon [69] et d'après le chapitre 1, si  $T_0$  est suffisamment large, l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance pour un signal dont l'amplitude est constante et de module égal à 1 est donné par :

$$\hat{\tau} = \arg \max_u \Lambda_L(u, \mathbf{a}), \quad (5.6)$$

où :

$$\Lambda_L(u, \mathbf{a}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_k \Re \{ a_k^* x_k(u) \}. \quad (5.7)$$

$x_k(u)$  est le signal reçu après filtrage adapté dont l'expression est donnée par :

$$x_k(u) = \sum_i a_i g((k-i)T - (\tau-u)) + \int_{T_0} h^*(t-kT-u)n(t)dt. \quad (5.8)$$

$g(\cdot)$  est le produit de convolution du filtre  $h(\cdot)$  par son filtre adapté.

Pour des signaux DPSK, on utilise généralement un décodage différentiel au niveau du récepteur qui consiste à démoduler  $f_k(u) = x_k(u)x_{k-1}^*(u)$  au lieu du signal reçu  $x_k(u)$ . En considérant  $d_k = a_k a_{k-1}^*$ , l'estimateur au sens du MV de  $\tau$  peut être donné par la maximisation par rapport à  $u$  de la fonction de vraisemblance suivante :

$$\Lambda^d(u, \mathbf{d}) = \exp \left( \sum_k \frac{\Re \{ d_k^* f_k(u) \}}{\sigma_n^2} \right). \quad (5.9)$$

Comme il est difficile de résoudre en pratique l'équation  $\frac{\partial \Lambda^d(u, \mathbf{d})}{\partial u} = 0$  par rapport à  $u$ , des algorithmes adaptatifs peuvent être implémentés ; leur objectif est de faire converger en modifiant la valeur de  $u$  la dérivée de  $\Lambda_L^d(u, \mathbf{d})$  vers 0. Pour ce faire, nous utilisons l'équation d'adaptation suivante qui met à jour à chaque instant  $k$  la valeur estimée de  $\hat{\tau}_k$  :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu e_k(d_k, \hat{\tau}_{k-1}), \quad (5.10)$$

où  $\mu$  est le pas d'adaptation et  $e_k(d_k, \hat{\tau}_{k-1})$  est l'erreur d'adaptation donnée par :

$$e_k(d_k, \hat{\tau}_{k-1}) = \Re \left\{ d_k^* \frac{\partial f_k(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{k-1}} \right\}. \quad (5.11)$$

Un tel détecteur d'erreur de synchronisation est appelé le détecteur au sens du maximum de vraisemblance [52]. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, le terme  $\frac{\partial f_k(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{k-1}}$

peut être obtenu par interpolation de la version échantillonnée du signal reçu et en évaluant la dérivée de l'interpolation obtenue à  $\hat{\tau}_{k-1}$ .

Les symboles  $d_k$  sont connus par le récepteur si et seulement si  $a_k$  et  $a_{k-1}$  font partie du préambule. L'algorithme de synchronisation opère donc dans le mode DA. Cependant, si  $a_k$  et  $a_{k-1}$  appartiennent à l'entête du PLCP ou au PSDU, ils deviennent inconnus par le récepteur. Dans ce cas, nous pouvons implémenter une technique de synchronisation temporelle non supervisée qui utilise des estimations dures  $\hat{d}_k$  au lieu de  $d_k$ . Néanmoins, cette alternative conduit à une baisse de la précision de l'estimation surtout lorsque le RSB est faible et la décision dure n'est pas fiable.

Notre contribution consiste également à proposer une solution pour faire face à ce problème. En effet, nous pouvons tirer profit du bloc de démodulation en exploitant les informations souples provenant du démodulateur souple pour améliorer les performances du synchroniseur quand aucun signal de référence n'est disponible. Pour résumer, l'algorithme proposé consiste en une combinaison de l'estimateur adaptatif DA lorsque le symbole reçu est une partie du préambule et un estimateur souple adaptatif lorsque le signal reçu appartient à l'entête du PLCP ou au PSDU. L'algorithme souple pour les modulations  $\pi/2$ -DBPSK et  $\pi/4$ -DQPSK va être présenté dans les deux paragraphes suivants.

### 5.2.2 Modulation $\pi/2$ -DBPSK

De l'approche MV classique, nous dérivons ci-après une nouvelle technique d'estimation du retard temporel qui utilise les informations souples du démodulateur afin d'améliorer la précision de la synchronisation.

Considérons  $\lambda_k$  la sortie souple du démodulateur à l'indice de temps  $k$  donnée par :

$$\lambda_k = \ln \left( \frac{P[b_k = 1]}{P[b_k = 0]} \right) = \ln \left( \frac{P[d_k = -j]}{P[d_k = j]} \right). \quad (5.12)$$

Comme il a été indiqué précédemment dans la Table 5.5, pour des signaux  $\frac{\pi}{2}$ -DBPSK,  $d_k$  peut être considéré comme un signal binaire imaginaire. En se basant sur les résultats du chapitre 2 ou aussi sur [61] dans lesquels nous avons proposé un estimateur souple d'un symbole modulé non différentiel BPSK, nous proposons l'expression suivante de  $\tilde{d}_k$ , l'estimation souple de  $d_k$  :

$$\tilde{d}_k = j \tanh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{\Im\{f_k(\tau_{k-1})\}}{\sigma^2} \right). \quad (5.13)$$

L'équation d'adaptation devient donc :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu e_k(\tilde{d}_k, \hat{\tau}_{k-1}), \quad (5.14)$$

où le symbole souple est donné par (5.13).

### 5.2.3 Modulation $\pi/4$ -DQPSK

Pour une modulation  $\pi/4$ -DQPSK, d'après la Table 5.6,  $d_k$  prend ses valeurs de l'ensemble  $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  où :

$$v_0 = e^{j\frac{\pi}{4}}, v_1 = -v_0, v_2 = v_0^* \text{ and } v_3 = -v_0^*.$$

En utilisant le mapping suivant :

$$v_0 \Leftrightarrow 00, v_1 \Leftrightarrow 11, v_2 \Leftrightarrow 10 \text{ and } v_3 \Leftrightarrow 01,$$

et en moyennant la fonction de vraisemblance dans (5.9) par rapport aux différentes valeurs prises par  $d_k$  nous obtenons :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k \sum_{i=0}^3 P[d_k = v_i] \exp\left(\frac{\Re\{v_i^* f_k(u)\}}{\sigma^2}\right). \quad (5.15)$$

L'expression de  $P[d_k = v_i]$  est donnée par :

$$P[d_k = v_i] = \beta_k \exp\left((2b_{2k} - 1)\frac{\lambda_{2k}}{2} + (2b_{2k+1} - 1)\frac{\lambda_{2k+1}}{2}\right), \quad (5.16)$$

où :

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \ln\left(\frac{P[b_m = 1]}{P[b_m = 0]}\right), \quad m \in \{2k, 2k+1\}, \\ \beta_k &= \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda_{2k}}{2}\right) \cosh\left(\frac{\lambda_{2k+1}}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

En remplaçant  $P[d_k = v_i]$  dans (5.15) par son expression (5.16), nous obtenons :

$$\Lambda(r|u) = \prod_k 4\beta_k \cosh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{2\Re\{v_0^*\}\Re\{f_k(u)\}}{\sigma^2}\right) \cosh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} - \frac{2\Im\{v_0^*\}\Im\{f_k(u)\}}{\sigma^2}\right). \quad (5.18)$$

La dérivation de la fonction log-vraisemblance  $\Lambda_L(r|u)$  par rapport à  $u$  donne :

$$\frac{\partial \Lambda_L(r|u)}{\partial u} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_k \Re\{\tilde{d}_k^* \frac{\partial f_k(u)}{\partial u}\}. \quad (5.19)$$

où :

$$\Re\{\tilde{d}_k\} = \Re\{v_0^*\} \tanh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{2\Re\{v_0^*\}\Re\{f_k(u)\}}{\sigma^2}\right), \quad (5.20)$$

$$\Im\{\tilde{d}_k\} = -\Im\{v_0^*\} \tanh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} - \frac{2\Im\{v_0^*\}\Im\{f_k(u)\}}{\sigma^2}\right), \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}\Re\{\tilde{d}_k\} &= \Re\{v_0^*\} \tanh\left(\frac{\lambda_2^k}{2} + \frac{2\Re\{v_0^*\}\Re\{f_k(u)\}}{\sigma^2}\right), \\ \Im\{\tilde{d}_k\} &= \Im\{v_0^*\} \tanh\left(\frac{\lambda_1^k}{2} - \frac{2\Im\{v_0^*\}\Im\{f_k(u)\}}{\sigma^2}\right).\end{aligned}\quad (5.22)$$

En pratique, comme pour les modulations  $\pi/2$ -DBPSK, nous proposons d'estimer  $\tau$  en utilisant l'équation d'adaptation (5.14) où les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{d}_k$  sont données par (5.22) pour  $u = \hat{\tau}_{k-1}$ .

Comme l'indique le paragraphe suivant, l'algorithme proposé améliore les performances obtenues pour le signal IEEE 802.15.6 NB ; il doit être souligné que cette amélioration est obtenue avec une très faible complexité supplémentaire. D'une part, l'information souple est obtenue directement à partir du dispositif de *demapping* et non à partir du décodeur de canal, et donc il n'y a qu'une seule itération directe ; d'autre part,  $\tanh(x)$  est linéarisée et approximée par  $x$  pour les petites valeurs de  $x$  et par  $+1$  (resp.  $-1$ ) pour les valeurs positives larges (resp. négatives larges) de  $x$ .

#### 5.2.4 Evaluation de l'estimateur proposé

La présente section montre l'amélioration de performance apportée par la mise en oeuvre de l'estimateur souple proposé en utilisant le format PPDU donné par la norme pour les systèmes IEEE 802.15.6 NB.

Commençons par décrire la structure de la trame utilisée dans le procédé de synchronisation temporelle. Le paquet reçu est composé de 201 symboles répartis comme suit :

- une séquence de préambule de 90 bits mappés en 90 symboles  $\pi/2$ -DBPSK. Ce préambule est connu par le récepteur.
- une séquence d'entête de PLCP de 31 bits mappés en 31 symboles  $\pi/2$ -DBPSK, inconnus par le récepteur.
- une séquence du PSDU de 160 bits mappés dans 80 symboles  $\pi/4$ -DQPSK aussi inconnus par le récepteur.

Les 201 symboles passent à travers un filtre à l'émission de type racine de cosinus surélevé ayant comme facteur de roll-off  $\alpha = 0.3$ . Le signal est transmis à travers un canal BBAG qui introduit un certain retard,  $\tau$ , et enfin filtré à la réception par un filtre adapté. Un démappeur souple est placé au niveau du bloc de démodulation qui calcule les log-likelihood-ratios (LLR),  $\lambda_k$ , des échantillons reçus du signal. La sortie,  $\lambda_k$ , du démappeur souple est injectée dans le synchroniseur adaptatif pour mettre à jour la valeur à l'indice  $k$  de l'estimée du retard temporel,  $\hat{\tau}_k$ . Pour les premiers 90 symboles reçus du préambule, l'estimateur du retard opère dans le mode DA en utilisant l'équation (5.10), où la valeur de  $d_k$  est connue suite à la connaissance de la séquence des symboles du préambule transmise. Pour les prochains symboles reçus, le synchroniseur passe en mode souple en utilisant l'équation de mise à jour (5.14), où  $\tilde{d}_k$  est le symbole souple dont la valeur est calculée en utilisant les LLR provenant du démappeur à

l'instant  $k$ .  $\tilde{d}_k$  est obtenue par l'équation (5.13), si l'échantillon du signal reçu appartient à l'entête du PLCP, et par l'équation (5.22), si l'échantillon reçu appartient au PSDU.

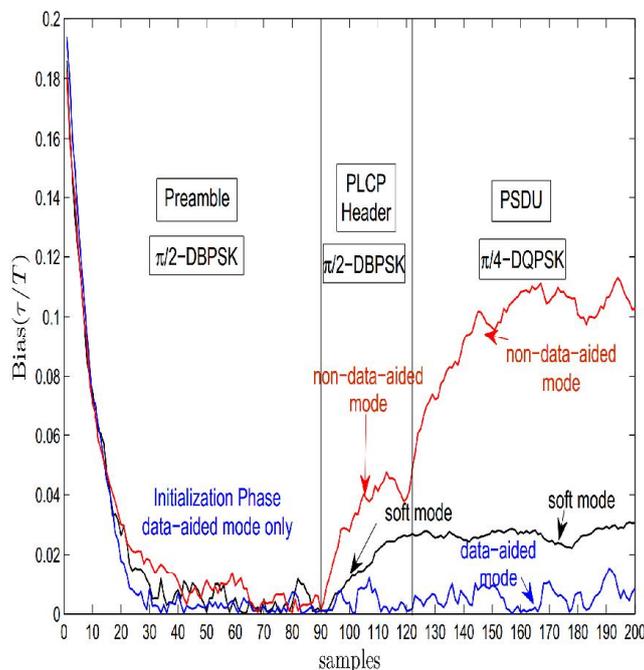


FIGURE 5.7: Biais d'estimation du retard normalisé à chaque observation pour un RSB=5 dB

Afin d'évaluer l'amélioration apportée par l'algorithme souple, on compare dans les Figures 5.7 et 5.8 le biais du retard estimé et normalisé,  $\hat{\tau}/T$ , à chaque échantillon reçu en utilisant la technique souple proposée et la technique NDA. Dans l'approche NDA,  $\tau$  est estimé selon (5.10), où  $d_K$  est remplacé par son estimée dure. Ces deux approches commencent après le mode DA, avec le début de l'entête du PLCP. Le RSB est égal à 5 dB dans la Figure 5.7 et à 10 dB dans la Figure 5.8. Comme il est montré, il y a une amélioration des performances avec la technique souple (courbe noire) pour les modulations  $\pi/2$ -DBPSK et  $\pi/4$ -DQPSK en comparaison avec la technique NDA (courbe rouge) lorsque le RSB est faible. Pour des valeurs de RSB plus élevées, des performances équivalentes sont observées en utilisant les mode souple et le mode NDA pour une modulation  $\pi/2$ -DBPSK et l'amélioration apparaît dans le cas d'une modulation  $\pi/4$ -DQPSK. La courbe bleue représente l'évolution du biais si un estimateur DA a été mis en oeuvre et reportée pour servir uniquement comme référence. Il est évident que pour les valeurs élevées du RSB, l'estimateur souple peut atteindre des résultats équivalents à ceux du mode DA.

Dans les Figures 5.9 et 5.10, nous comparons les performances des modes NDA, souple et DA en termes d'erreur quadratique moyenne (EQM( $\tau/T$ )) pour un retard temporel  $\tau = 0.1T$  et

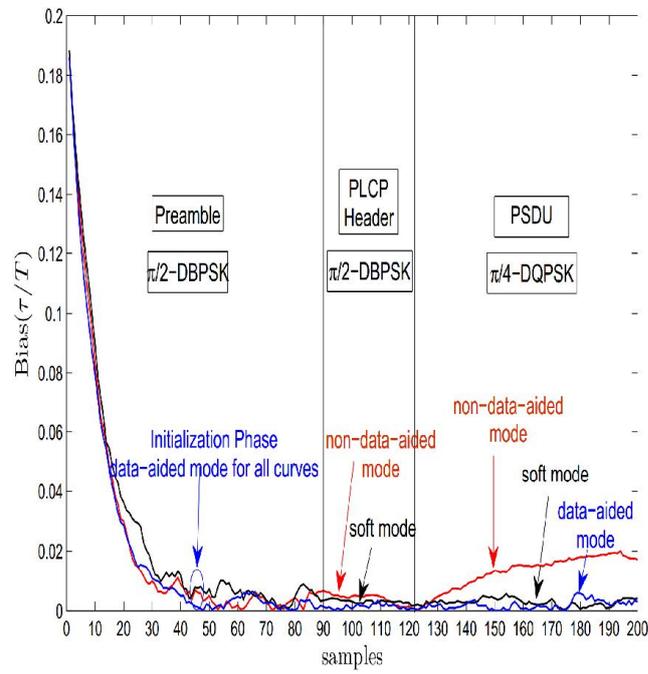


FIGURE 5.8: Biais d'estimation du retard normalisé à chaque observation pour un RSB=10 dB

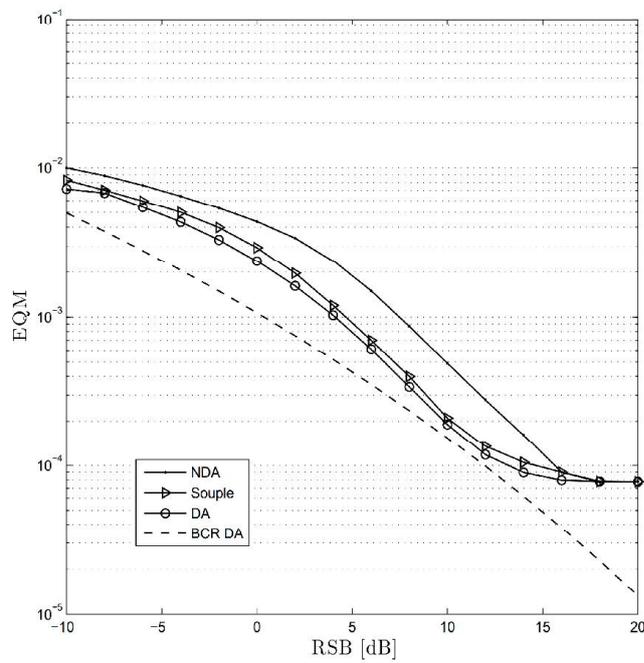
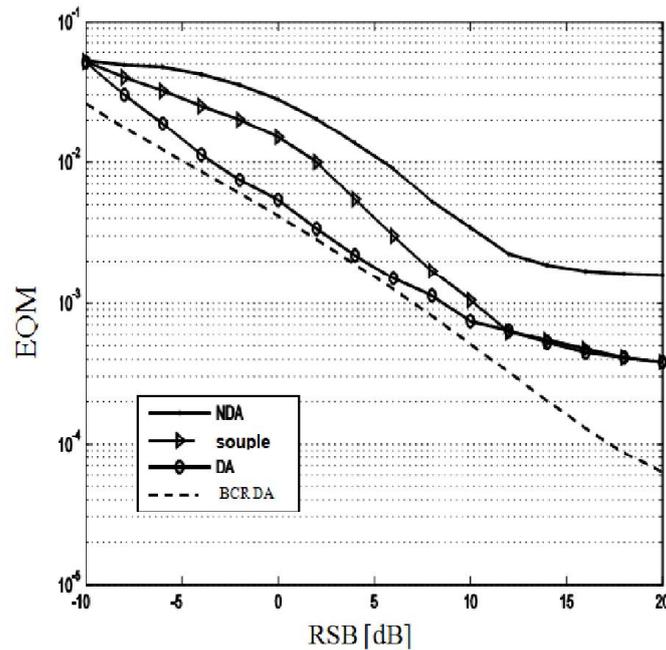


FIGURE 5.9: EQM en fonction du RSB pour une modulation  $\pi/2$ -DBPSK

FIGURE 5.10: EQM en fonction du RSB pour une modulation  $\pi/4$ -DQPSK

différentes valeurs de RSB. L'EQM de chaque technique est aussi comparée à la BCR de l'estimateur DA considérée comme borne limite minimale de référence. En fait, la BCR vérifie  $E \left[ \left( \frac{\hat{\tau} - \tau}{T} \right)^2 \right] \geq \text{BCR}(\frac{\tau}{T})$  pour tout estimateur non biaisé  $\hat{\tau}$  de  $\tau$  [43]. Les résultats sont donnés pour des blocs de 100 symboles moyennés sur 500 itérations Monte Carlo.  $\hat{\tau}_k$  est initialisé à 0 et sa valeur estimée est prise à la fin du bloc lorsque l'algorithme adaptatif converge. La Figure 5.9 (resp. Figure 5.10) représente les performances des 3 algorithmes pour une modulation  $\pi/2$ -DBSK (resp.  $\pi/4$ -DQPSK). Dans les deux cas, le mode souple fonctionne mieux que le mode NDA et il s'approche des performances du mode DA sur un grand intervalle de valeurs de RSB. L'EQM de tous les algorithmes s'approche de la BCR, et ceci confirme la consistance de l'estimateur proposé. Des résultats numériques sont résumés dans les tableaux 5.8 et 5.9.

RSB [dB]	DA	Souple	NDA
0	$2.5 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-3}$
10	$1.9 \times 10^{-4}$	$2.1 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$

TABLE 5.8: Valeur de l'EQM pour une modulation  $\pi/2$ -DBPSK

RSB [dB]	DA	Souple	NDA
0	$5 \times 10^{-3}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-2}$
10	$7 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$4 \times 10^{-3}$

TABLE 5.9: Valeur de l'EQM pour une modulation  $\pi/4$ -DQPSK

La saturation de l'EQM dans la partie droite des Figures 5.9 et 5.10 est due à l'auto-bruit de la boucle de synchronisation introduit par l'erreur d'adaptation (5.11). Des résultats similaires sont obtenus pour d'autres valeurs du coefficient de retombée, roll-off.

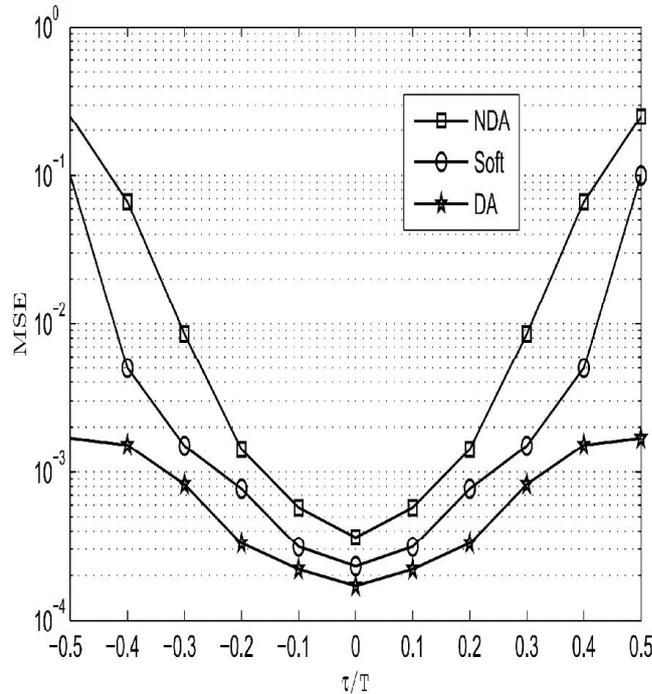


FIGURE 5.11: EQM en fonction de  $\tau/T$  pour des signaux  $\pi/2$ -DBPSK et un RSB= 10 dB

Un résultat similaire est représenté sur la Figure 5.11 où l'EQM des 3 techniques est donnée en fonction du retard temporel normalisé,  $\tau/T$ , pour une modulation  $\pi/2$ -DBSK et un RSB égal à 10 dB. Une amélioration est observée avec la technique souple par rapport au mode NDA pour toute valeur du retard temporel. Cette figure montre que l'EQM est une fonction croissante par rapport à la valeur absolue de l'offset fractionnel en temps. Quelques résultats numériques sont donnés dans la Table 5.10.

$\tau/T$	DA	Souple	NDA
0.1	$2 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-4}$
0.3	$8.5 \times 10^{-4}$	$1.5 \times 10^{-3}$	$9 \times 10^{-3}$

TABLE 5.10: Valeur de l'EQM pour une modulation  $\pi/2$ -DBPSK

### 5.3 Efficacité de l'algorithme dans le cas d'un canal à évanouissement

Dans ce cas, le signal retardé reçu est affecté non seulement par le BBAG mais également atténué par l'effet de propagation, il s'écrit :

$$r(t) = \alpha(t)s(t - \tau) + n(t), \quad (5.23)$$

où  $\alpha(t)$  est un processus gaussien complexe avec une fréquence Doppler  $f_d$  supposée faible par rapport au débit des symboles  $1/T$ . Par suite,  $\alpha(t)$  est à peu près constant durant la période symbole. Le  $k^{\text{ème}}$  échantillon du signal reçu s'écrit alors :

$$r_k = \alpha_k s_k(\tau) + n_k, \quad (5.24)$$

où  $s_k(\tau) = s(kT - \tau)$  et le signal reçu après filtrage adapté à la réception est :

$$x_k(\hat{\tau}) = \alpha_k \sum_i a_i g((k-i)T - (\tau - \hat{\tau})) + \int_{T_0} h^*(t - kT - \hat{\tau}) n(t) dt. \quad (5.25)$$

$g(\cdot)$  est le produit de convolution du filtre à l'émission  $h(\cdot)$  avec son filtre adapté et  $\hat{\tau}$  est le retard estimé.

D'après le chapitre 4, nous pouvons utiliser l'algorithme adaptatif suivant qui combine l'estimation du canal à la synchronisation temporelle :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu \Re \left\{ \hat{\alpha}_k^* a_k^* \frac{\partial x_k(u)}{\partial u} \Big|_{u=\hat{\tau}_{k-1}} \right\}. \quad (5.26)$$

Cette équation d'adaptation est celle d'un DET cohérent de type "Decision Directed" (DD).

Afin d'effectuer une démodulation cohérente dans un système de communication, la différence de phase entre le signal émis et le signal reçu doit être estimée et corrigée. L'exigence d'estimer l'offset de phase rajoute, cependant, une complexité de mise en oeuvre du démodulateur cohérent. Un tel algorithme pourrait ralentir le récepteur par l'ajout du bloc d'estimation des coefficients du canal. Cette approche n'est donc pas préférable pour les applications à faible latence et particulièrement les réseaux WBAN. Dans ce cas, nous pouvons utiliser les méthodes de type NDA telle que l'algorithme de Gardner [31] et l'algorithme ELD non supervisé [48] qui utilisent respectivement les équations d'adaptation suivantes :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu \Re \left\{ x_k(\hat{\tau}_{k-1})^* \left( x_{k+\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k-1}) - x_{k-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k-1}) \right) \right\} \quad (5.27)$$

et

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu \Re \left\{ x_{k-\frac{1}{2}}(\hat{\tau}_{k-1})^* (x_{k-1}(\hat{\tau}_{k-1}) - x_k(\hat{\tau}_{k-1})) \right\}. \quad (5.28)$$

Jusqu'à présent, nous avons seulement considéré le cas de récepteurs cohérents, qui doivent disposer des connaissances de la phase de la fréquence porteuse afin d'effectuer la synchronisation temporelle. Dans un système de communication, il existe une différence de phase entre le signal émis et le signal utilisé dans le démodulateur. Afin d'effectuer une démodulation cohérente dans le récepteur, cette différence de phase doit être estimée et corrigée.

L'exigence d'estimation du décalage de la phase de porteuse, ajoute en effet une complexité de mise en oeuvre au démodulateur cohérent. Pour des signaux DPSK, un démodulateur non cohérent, qui ne requiert pas l'estimation de la phase de la porteuse, devient plus intéressant.

En considérant comme dans les paragraphes précédents,  $f_k(u) = x_k(u)x_{k-1}^*(u)$  et  $d_k = a_k a_{k-1}^*$ , le DET non cohérent estime le retard temporel selon l'équation suivante :

$$\hat{\tau}_k = \hat{\tau}_{k-1} + \mu e_k(d_k, \hat{\tau}_{k-1}), \quad (5.29)$$

$e_k(d_k, \hat{\tau}_{k-1})$  est l'erreur d'adaptation donnée par :

$$e_k(d_k, \hat{\tau}_{k-1}) = \Re \left\{ d_k^* \frac{\partial f_k(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{k-1}} \right\}. \quad (5.30)$$

Ce DET ne nécessite pas un circuit de récupération de porteuse, complexe et coûteux, mais il est caractérisé par un taux d'erreur binaire moins bon que celui d'un détecteur cohérent.

Evaluons maintenant les performances de notre détecteur non cohérent sous les mêmes conditions de simulation que le paragraphe 5.2.4.

Nous avons fixé la fréquence Doppler à  $f_d T = 0.001$ , ce qui signifie que le canal varie lentement sur le bloc d'observations.

Afin d'évaluer l'amélioration apportée par l'algorithme proposé, nous comparons sur les Figures 5.12 et 5.13 donnant l'EQM du délai estimé normalisé,  $\hat{\tau}/T$ , à chaque échantillon reçu en utilisant le DET non cohérent de type DD et le DET cohérent de type NDA. Dans l'approche cohérente NDA,  $\tau$  est estimé en utilisant le détecteur de Gardner. Ces deux approches commencent après le mode de DA, avec le début de l'entête du PLCP. Le RSB est égal à 5dB dans la Figure 5.12 et à 10dB dans la Figure 5.13. Nous remarquons une amélioration des performances avec la technique proposée pour les signaux  $\pi/2$ -DBPSK et  $\pi/4$ -DQPSK par rapport à la technique cohérente lorsque le RSB est faible. Pour des valeurs plus élevées de RSB, des performances équivalentes sont observées en utilisant le détecteur non cohérent proposé et le détecteur cohérent de type NDA pour une modulation  $\pi/2$ -DBPSK et l'amélioration apparaît dans le cas d'une modulation  $\pi/4$ -DQPSK. La courbe noire représente l'évolution de l'EQM si un estimateur DA a été mis en oeuvre et elle est utilisée comme référence. Nous notons également l'augmentation de l'EQM en utilisant une technique de synchronisation aveugle (NDA et DD) au lieu du DET de type DA. L'EQM augmente également avec la réception du

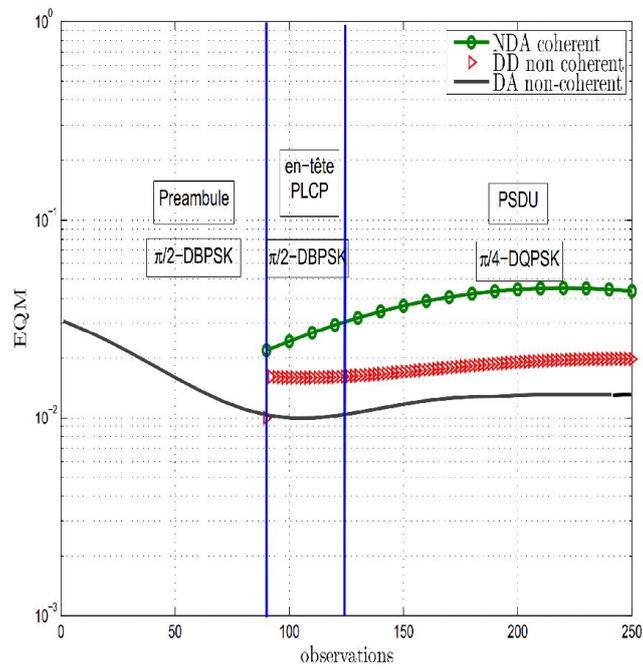


FIGURE 5.12: EQM du retard normalisé à chaque échantillon, RSB = 5 dB

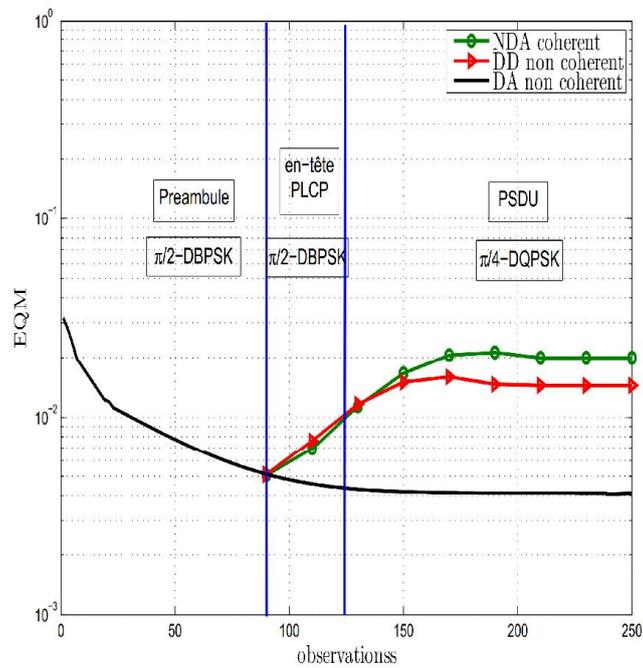


FIGURE 5.13: EQM du retard normalisé à chaque échantillon, RSB = 10 dB

PSDU, même avec le mode DA, en raison de l'utilisation d'une modulation d'ordre supérieur ( $\pi/4$ -DQPSK au PSDU après la  $\pi/2$ -DBPSK au préambule et à l'entête du PLCP).

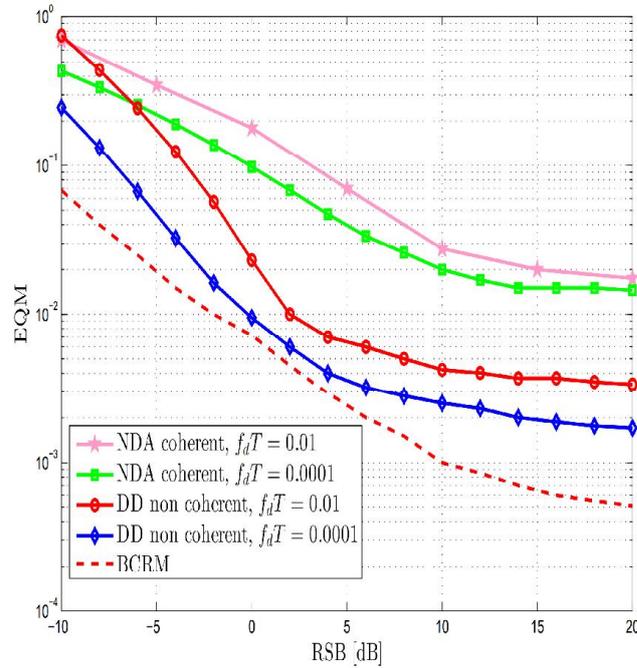


FIGURE 5.14: EQM du retard normalisé à chaque échantillon en fonction du RSB pour une modulation  $\pi/2$ -DBPSK

Dans les Figures 5.14 and 5.15, nous évaluons l'EQM en fonction du RSB pour, respectivement, les modulations  $\pi/2$ -DBPSK et  $\pi/4$ -DQPSK et pour différentes valeurs de fréquence Doppler. L'EQM est mesurée en utilisant un détecteur non cohérent et un détecteur cohérent de type NDA. Les courbes sont obtenues en moyennant l'EQM des différents algorithmes à la convergence de l'algorithme (après 100 échantillons) en utilisant des simulations de Monte Carlo. Nous remarquons que les performances du détecteur non cohérent proposé sont les plus proches de la BCRM, qui est une limite théorique minimale de l'EQM pour certaines valeurs du RSB en fonction de la cadence de l'évanouissement. L'EQM stagne à fort RSB, ce qui est dû au bruit auto-généré de la boucle de synchronisation introduit par les interférences inter-symboles.

## 5.4 Synchronisation temporelle dans le cas d'un retard variable

Gardons les mêmes hypothèses que le paragraphe précédent sauf que maintenant le retard introduit par le canal est variable et est modélisé par un retard aléatoire. Cette variation est due au mouvement de la personne portant le capteur. En utilisant les mêmes notations que le

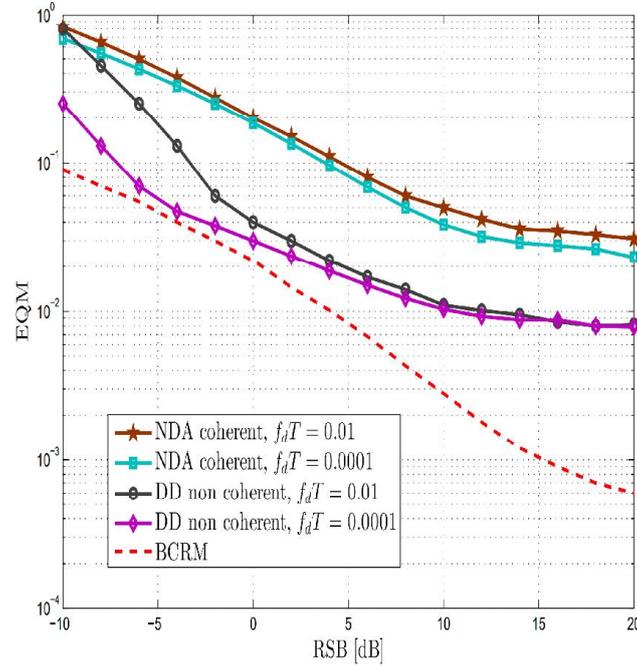


FIGURE 5.15: EQM du retard normalisé à chaque échantillon en fonction du RSB pour une modulation  $\pi/4$ -DQPSK

chapitre 2, le signal reçu s'écrit alors :

$$r(t) = s(t - \tau(t)) + n(t), \quad (5.31)$$

où  $n(t)$  est un BBAG de variance connue  $\sigma_n^2$  et  $\tau(t)$  est le retard temporel. Le  $k^{\text{ème}}$  échantillon s'écrit donc :

$$r_k = r(kT) = s_k(\tau_k) + n_k. \quad (5.32)$$

Le retard  $\tau_k$  suit également un modèle d'évolution de Wiener selon l'équation :

$$\tau_k = \tau_{k-1} + w_k. \quad (5.33)$$

Afin d'estimer le vecteur des retards  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_N]^T$ , nous pouvons appliquer les mêmes algorithmes hors ligne d'aller-retour ou *Forward-Backward*. Toutefois, pour des signaux DPSK, nous allons utiliser le signal  $f_k(\tau_i) = x_k(\tau_i)x_{k-1}^*(\tau_i)$  au lieu du signal reçu  $x_k(\tau_i)$  et  $d_k = a_k a_{k-1}^*$  au lieu de  $a_k$ . Le délai  $\tau_k$  est estimé en utilisant l'algorithme hors ligne suivant :

$$\hat{\tau}_k^{(FB)} = \begin{cases} \hat{\tau}_1^{(B)} = \hat{\tau}_2^{(B)} + z_1(\hat{\tau}_2^{(B)}, d_1); \\ \frac{1}{2} \left( \hat{\tau}_k^{(B)} + \hat{\tau}_k^{(F)} \right), \text{ pour } k = 2, \dots, N-1; \\ \hat{\tau}_N^{(F)} = \hat{\tau}_{N-1}^{(F)} + z_N(\hat{\tau}_{N-1}^{(F)}, d_N). \end{cases} \quad (5.34)$$

avec

$$z_k(\hat{\tau}_i, d_k) \triangleq \mu \Re \left\{ a_k^* \frac{\partial f_k(\hat{\tau}_i)}{\partial \hat{\tau}_k} \right\}, \quad (5.35)$$

$$\hat{\tau}_k^{(F)} \triangleq \hat{\tau}_{k-1}^{(F)} + z_k(\hat{\tau}_{k-1}^{(F)}, d_k), \quad (5.36)$$

$$\hat{\tau}_k^{(B)} \triangleq \hat{\tau}_{k+1}^{(B)} + z_k(\hat{\tau}_{k+1}^{(B)}, d_k), \quad (5.37)$$

où  $z_k(\hat{\tau}_i, d_k)$  est le terme d'adaptation,  $\mu$  est le pas d'adaptation et  $i$  est dans  $\{k-1, k+1\}$ .

Dans un contexte hors-ligne, l'estimation de  $\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , peut être améliorée en faisant plusieurs boucles aller-retour avec le même bloc d'observations.

On remarque que le terme d'adaptation  $z_k(\hat{\tau}_i, d_k)$  dépend des symboles transmis. Si  $k$  est inférieur à la longueur du préambule, alors la valeur de  $d_k$  est connue par le récepteur. L'algorithme FB opère ainsi dans le mode DA. Si l'indice  $k$  dépasse la longueur du préambule, la valeur de  $d_k$  devient inconnue par le récepteur. Par suite, des estimées dures  $\hat{d}_k$  des symboles transmis sont calculées par le récepteur et remplacent  $d_k$  dans (5.34); ceci est appelé le mode NDA. Nous pouvons également utiliser des estimations souple  $\tilde{d}_k$  de  $d_k$  en exploitant la sortie souple du démodulateur. Pour des symboles  $\pi/2$ -DBPSK,  $\tilde{d}_k$  est évaluée en utilisant (5.13) et pour des symboles  $\pi/4$ -DQPSK,  $\tilde{d}_k$  est évaluée en utilisant (5.22).

Pour résumer, afin d'estimer les retards  $\tau_k$ , nous supposons que l'algorithme en ligne commence par une phase d'initialisation lorsque les symboles appartiennent au préambule. Au cours de cette phase, l'estimateur effectue des boucles d'aller-retour (*Forward-Backward*) tout au long des 90 premiers échantillons en utilisant le mode DA (vu que ces symboles sont connus par le récepteur). À la convergence (après 3 itérations), l'algorithme passe aux symboles de l'entête du PLCP et du PSDU (inconnus par le récepteur) et poursuit de nouveau les aller-retours dans le mode non-coherent DD.

Nous considérons les mêmes conditions de simulation que le paragraphe 5.2.4, sauf qu'ici le retard temporel est une variable aléatoire non stationnaire qui suit le modèle d'évolution de Wiener avec  $\sigma_w = 10^{-3}$ .

Dans la Figure 5.16, nous représentons l'évolution de l'EQM par un canal BBAG tout au long des symboles de la trame d'un WBAN. L'EQM est considérablement réduite en utilisant l'approche hors ligne en comparaison avec l'approche en ligne. Par exemple, l'écart est de 7dB au 40<sup>ème</sup> symbole et de 3dB au 100<sup>ème</sup> échantillon. On remarque également une légère amélioration avec l'approche DD soft par rapport à l'approche DD dure utilisées à partir du 91<sup>ème</sup> échantillon.

Les mêmes courbes sont représentées dans la Figure 5.17 mais cette fois-ci en introduisant l'effet d'un canal de Rayleigh caractérisé par un  $f_d T = 0.001$ . L'EQM a un comportement similaire au cas précédent. Cependant, elle a augmenté vu la dégradation de la qualité du signal reçu.

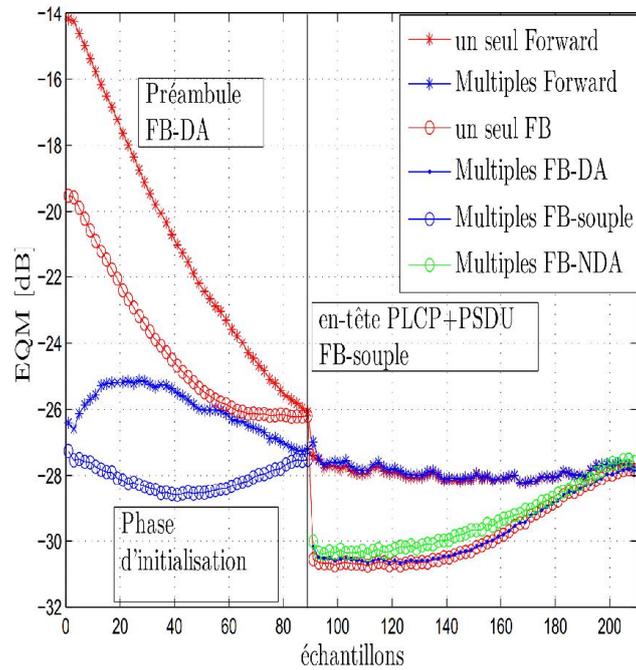


FIGURE 5.16: EQM en fonction du numéro de l'échantillon,  $RSB = 0\text{dB}$ ,  $\sigma_w = 10^{-3}$ , roll-off = 0.3

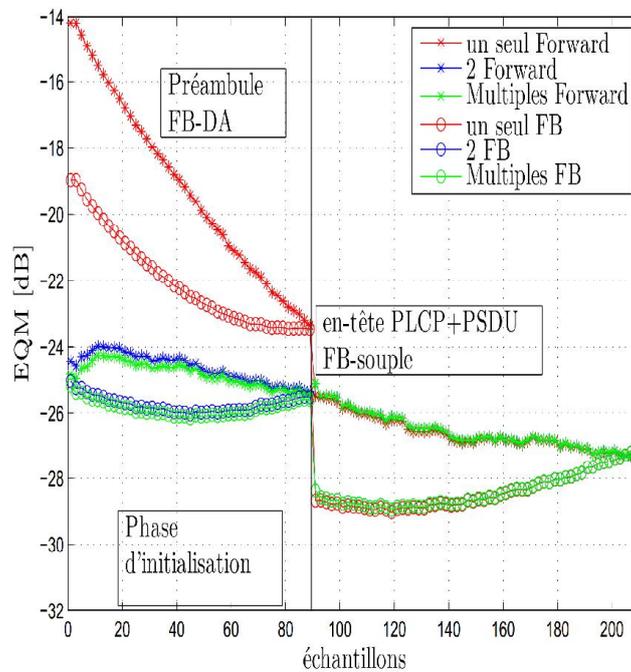


FIGURE 5.17: EQM en fonction du numéro de l'échantillon dans un canal de Rayleigh,  $RSB = 0\text{dB}$ ,  $\sigma_w = 10^{-3}$ , roll-off = 0.3,  $f_d T = 0.001$

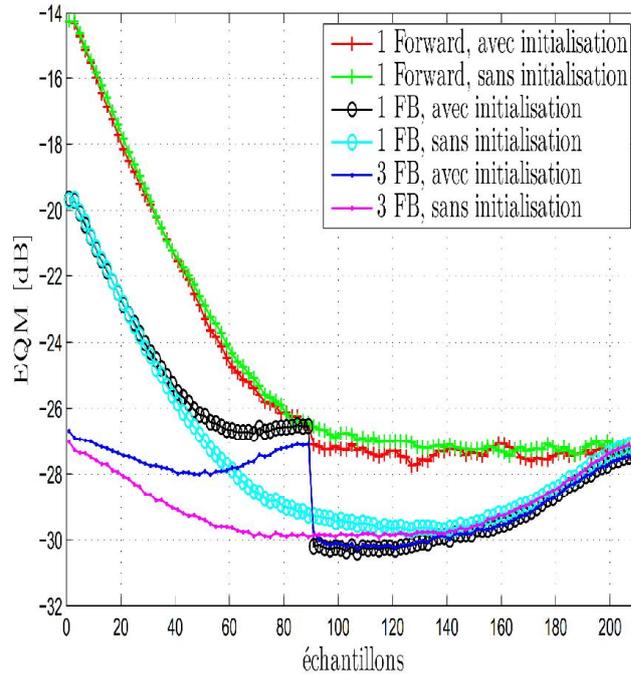


FIGURE 5.18: EQM en fonction du numéro de l'échantillon dans un canal BBAG,  $RSB = 10\text{dB}$ ,  $\sigma_w = 10^{-3}$ , roll-off = 0.3,  $f_d T = 0.001$

Dans la Figure 5.18, nous avons évalué l'EQM des algorithmes en ligne et hors ligne sans phase d'initialisation au niveau du préambule. L'algorithme *Forward-Backward* parcourt ainsi toute la trame en alternant entre le mode DA pour les 90 premiers symboles et le mode non-cohérent DD dure pour le reste des symboles. Les courbes d'EQM sont comparées à celles obtenues précédemment pour un canal Gaussien. Nous constatons que l'EQM de l'algorithme FB à la fin du préambule est moins importante que celle du scénario précédent. Cette amélioration est apportée par l'information provenant des symboles voisins. L'EQM est par contre la même au niveau de la 2<sup>ème</sup> partie du bloc d'observation. Cependant, en implémentant l'approche avec la phase d'initialisation, une seule itération de l'algorithme *Forward-Backward* au niveau de l'entête du PLCP et du PSDU suffit pour obtenir l'EQM minimale. L'algorithme Forward qui suit la phase d'initialisation a aussi une EQM légèrement moins importante que celui opérant sur la totalité du bloc d'une façon continue.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme de synchronisation temporelle sur la base d'un estimateur au sens du MV adapté à la structure des signaux NB proposée par le standard IEEE 802.15.6 des WBAN. La technique proposée combine une phase de synchronisation DA avec une phase de synchronisation souple exploitant la sortie souple du bloc de démodulation.

en vue d'améliorer l'estimation des symboles transmis. L'estimateur souple proposé est plus performant que l'estimateur NDA, et peut atteindre la performance du mode DA sur un large intervalle de valeurs de RSB. La pertinence du traitement de synchronisation temporelle ainsi proposée offre la possibilité de réduire la consommation d'énergie et d'augmenter l'efficacité spectrale tout en améliorant la performance par rapport au régime NDA.

Afin de réduire la complexité du bloc de synchronisation temporelle dans un système WBAN sous un canal de Rayleigh, nous avons proposé un détecteur d'erreur de synchronisation non cohérent. Cet algorithme fonctionne mieux qu'une technique cohérente NDA, telle que le détecteur de Gardner, dont les performances sont gravement dégradées à faible RSB.

Nous avons finalement proposé un algorithme d'estimation d'un retard variable adapté à la structure de la trame proposée par le standard qui fonctionne dans un contexte hors ligne. Cet algorithme est caractérisé par sa faible complexité qui est un facteur important dans les réseaux WBAN.



# Conclusion Générale

Cette thèse a traité des questions de synchronisation temporelle pour les systèmes à bande étroite, en particulier les WBAN, en se basant sur la modélisation radio et le calcul de bornes de référence dites bornes de Cramèr-Rao. Par ailleurs, certains défis ont été soulevés :

- Malgré les difficultés engendrées par le canal de communication corporel, les communications doivent être fiables car elles engagent souvent des paramètres vitaux. Les exigences en latence sont également strictes.
- Cette fiabilité doit être absolument garantie sur de longues périodes en économisant de l'énergie car ces capteurs ne sont pas toujours accessibles.
- La complexité des algorithmes utilisés doit permettre à la fois une économie en énergie, et le déploiement massif des capteurs est contraint par le coût global.

Cette thèse a donc consisté à développer, d'une part, des techniques simples et robustes pour le démodulateur numérique lui permettant d'assurer la synchronisation temporelle. Les algorithmes proposés ont été adaptés à la structure de la trame d'un réseau WBAN. D'autre part, elle a consisté à calculer des bornes de références afin d'évaluer la pertinence des estimateurs proposés.

Nous avons commencé par l'étude des outils utilisés dans le processus de synchronisation temporelle. En partant d'une modélisation mathématique des signaux traités, nous avons étudié les DETs inspirés de l'estimateur MV afin d'estimer l'erreur de synchronisation et les différentes techniques d'ajustement du signal permettant de supprimer le décalage entre les échantillons. Enfin, nous avons choisi la borne de Cramèr-Rao, qui constitue une borne minimale sur l'EQM de l'estimateur, comme critère d'évaluation des DET.

Dans une première étape, nous avons étudié le cas d'une transmission entre deux capteurs où les données reçues arrivent avec un certain retard temporel constant. Les synchroniseurs ont été principalement développés pour des modes de fonctionnement de type DA et NDA. Le mode DA conduit à la fois à une perte d'efficacité spectrale et une augmentation de la consommation de puissance due à la transmission de signaux pilotes dans la trame de données. Pour faire face à ce problème, nous utilisons des techniques NDA qui assurent la synchronisation à partir de la seule connaissance du signal reçu. Voilà pourquoi, la performance du système devient insatisfaisante en particulier dans de mauvaises conditions de canal. Pour trouver un compromis

entre l'efficacité spectrale et la fiabilité du synchroniseur, des techniques CA ont été proposées. Ces techniques profitent de la sortie souple du décodeur pour réduire l'erreur d'estimation dans la synchronisation ainsi que dans le processus de synchronisation de la fréquence porteuse et de la phase.

Nous avons donc proposé un algorithme de synchronisation temporelle qui exploite l'information souple à partir d'un décodeur ou un démappeur souple pour des modulations de type  $M$ -PSK et QAM. La récupération du retard, supposé constant sur la durée d'observation, se fait à l'aide d'un algorithme adaptatif qui tend à maximiser la fonction de vraisemblance. Nous avons également développé l'expression analytique de la borne de Cramèr-Rao pour l'estimation CA d'un retard temporel constant dans le temps, à laquelle on a comparé l'EQM de l'algorithme proposé. Une amélioration a été observée en utilisant un algorithme CA par rapport à un algorithme NDA sur un intervalle large de RSB. L'EQM de cet algorithme a pu atteindre celle de l'algorithme DA à fort RSB.

Dans une deuxième étape, nous avons étudié le cas d'une transmission entre deux capteurs où les données reçues arrivent avec un retard variable dans le temps. En effet, en réalité, et en raison de la mobilité du corps humain, de l'effet Doppler du canal de transmission et de la variation de l'horloge des oscillateurs, le retard temporel varie aléatoirement et légèrement au cours du temps tout en ayant une moyenne constante.

Cette étape a donc consisté à proposer un algorithme de synchronisation opérant dans un contexte hors ligne et inspiré de l'estimateur MAP pour un retard variable dans le temps. L'algorithme consiste à estimer le délai temporel d'un échantillon à l'autre via des boucles d'aller-retour sur plusieurs itérations. Les performances théoriques en termes de biais et d'EQM à chaque itération ont également été évaluées. Afin d'évaluer la pertinence de l'estimateur proposé, nous avons aussi développé l'expression de la BCRB utilisée pour l'évaluation de ce genre d'algorithmes d'estimation bayésienne. Cette borne a été étudiée dans les modes DA, NDA et CA pour des modulations BPSK et QAM. Un gain de 3dB en terme d'EQM a été observé pour l'approche hors ligne par rapport à l'approche en ligne qui consiste à déployer un DET classique. Les meilleures performances sont atteintes au centre du bloc, où la corrélation entre les échantillons du signal est maximale. Nous avons également constaté qu'un algorithme CA, qui est employé dans un contexte non supervisé, a réduit les erreurs d'estimation par rapport à un algorithme NDA. Nous avons également déduit que, sous certaines conditions, une approche hors ligne NDA semble parfois plus intéressante qu'une approche en ligne CA vu qu'elle est capable de générer des résultats similaires pour une complexité d'implémentation réduite.

Afin de nous rapprocher du cas réel, nous avons rajouté, dans l'étape suivante, un évanouissement de Rayleigh au modèle du signal de départ. Les algorithmes précédemment utilisés combinent l'estimation du canal et le processus de synchronisation temporelle. Cependant, lorsque le système de transmission requiert des algorithmes simples à mettre en oeuvre, on peut éliminer

l'estimation du canal en utilisant une technique NDA. Les algorithmes existants traitent uniquement des retards déterministes et leurs performances ont été uniquement comparées à la BCRM. Cette dernière est relativement loin de la borne réelle et n'évalue donc pas d'une manière précise les estimateurs proposés. Par suite, nous avons d'abord développé l'expression de la borne de Cramér-Rao hybride correspondante à l'estimation conjointe d'un canal à gain complexe dont l'amplitude suit la loi de Rayleigh et d'un retard temporel déterministe. Nous avons constaté que l'erreur d'estimation du retard temporel est plus importante lorsque le canal varie plus rapidement dans le temps et pour des RSB de plus en plus faibles. La borne d'estimation du canal est minimale au centre du bloc d'observation et elle est réduite pour les canaux à variation faible dans le temps et pour des RSB élevés.

En considérant le cas d'un retard variable dans le temps, nous avons développé un algorithme de synchronisation par bloc fonctionnant en hors ligne afin de poursuivre l'estimation d'un retard variable dans le temps. Nous avons également évalué les BCRB correspondantes à ce problème d'estimation. Nous avons pu constater de nouveau qu'un algorithme hors ligne engendre moins d'erreur d'estimation qu'un algorithme en ligne. Nous avons également remarqué que le canal introduit des erreurs temporelles incorrigibles par le synchroniseur.

A la dernière étape, nous avons adapté les algorithmes de synchronisation déjà proposés dans les chapitres précédents à la structure d'un WBAN selon le standard IEEE 802.15.6. Etant donné que des modulations différentielles ont été recommandées par le standard, nous avons opté pour l'utilisation de détecteurs non cohérents afin de ne plus avoir besoin de récupérer la phase, ni d'estimer le canal, et réduire ainsi la complexité du récepteur. Nous avons finalement proposé et évalué des algorithmes de poursuite hors ligne d'un retard variable dans le temps. Nous avons remarqué que l'exploitation de l'information souple fournie par le démodulateur dans le processus de synchronisation réduit les erreurs d'estimation du retard temporel au niveau de l'en-tête du PLCP et du PSDU, inconnus par le récepteur, par rapport à une technique NDA. Cette amélioration est surtout observée à faible RSB. Nous avons aussi constaté que l'EQM diminue avec un détecteur DD non-cohérent par rapport à un détecteur NDA cohérent, particulièrement à faible RSB. Un détecteur DD non-cohérent basé sur des décisions souples est aussi plus performant qu'un détecteur DD non-cohérent basé sur des décisions dures. Enfin comme prévu, un algorithme hors ligne permet d'améliorer les performances du synchroniseur lorsque le retard est aléatoire et varie dans le temps. Nous avons finalement constaté que le fait de commencer l'approche hors ligne par une phase d'initialisation au niveau du préambule de la trame WBAN, connue par le récepteur, dans un contexte DA, permet d'atteindre la convergence de l'algorithme en seulement 2 itérations. Cependant, si l'algorithme parcourt toute la trame sans phase d'initialisation, la convergence est atteinte après 3 itérations mais l'EQM est plus faible au niveau du préambule, le début de la trame.

## Perspectives

La synchronisation et la localisation des capteurs peuvent servir notamment à la géo-localisation des personnes et à la poursuite du mouvement des différentes parties du corps. Nous allons évaluer les algorithmes proposés dans des scénarios *indoor* et *outdoor* en proposant une modélisation du canal tenant compte des propriétés statistiques du réseau WBAN. Nous nous focaliserons également sur le développement d'algorithmes de synchronisation à la fois dans les espaces temps et fréquence. Nous comparerons les performances des algorithmes obtenus à celles de bornes d'estimation de référence que nous développerons spécialement pour ce cadre. Cette synchronisation temps-fréquence sera alors appliquée à la localisation en cas d'urgence médicale.

Lors de la transmission à travers le canal, le signal subit les atténuations et des réflexions. Ces réflexions multiples créent différents trajets, de longueurs variées, entre l'émetteur et le récepteur dûs aux nombreux obstacles rencontrés (milieu *indoor* par exemple). Les différentes composantes du signal provenant des chemins directs et indirects se recombinent avec des amplitudes, des phases et des instants d'arrivée différents, et produisent une version distordue du signal original. Ces phénomènes créent des interférences entre les signaux, ce qui engendre une perte très importante, voire totale, du signal. Afin de pouvoir récupérer le signal d'origine dans un système WBAN, il paraît intéressant de combiner la synchronisation temporelle à l'égalisation du canal.

## Annexe A

## Annexe A

Dans cet annexe nous présentons le développement analytique de  $\rho$  et  $\sigma_N^2$  pour les détecteurs EL, ZC, MM et Gardner.

### A.1 Détecteur Early late

Pour un détecteur EL

$$\begin{aligned}
 S(\delta_k) &= E \left[ \Re \left\{ a_k^* \left( x_{k+\frac{1}{2}}(\tau_{k-1}) - x_{k-\frac{1}{2}}(\tau_{k-1}) \right) \right\} \right] \\
 &= E \left[ \Re \left\{ a_k^* \sum_j a_j g \left( (k-j)T + \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1} \right) - a_k \sum_j a_j g \left( (k-j)T - \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1} \right) \right\} \right] \\
 &= E[|a_k|^2] \left( g\left(\frac{T}{2} - \delta_k\right) - g\left(-\frac{T}{2} - \delta_k\right) \right) \\
 &\simeq A^2 \left( \dot{g}\left(\frac{T}{2}\right)\delta_k - \dot{g}\left(-\frac{T}{2}\right)\delta_k \right) \\
 &= 2A^2 \dot{g}\left(\frac{T}{2}\right)\delta_k
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

car  $\dot{g}$  est une fonction impaire. D'où

$$\rho_{ELD} = 2A^2 \dot{g}\left(\frac{T}{2}\right) \tag{A.2}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}
 N(k) &= \Re \left\{ a_k^* \sum_{j,j \neq k} a_j g \left( (k-j)T + \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1} \right) + a_k^* v_{k+\frac{1}{2}}(\tau_{k-1}) \right. \\
 &\quad \left. - a_k^* \sum_{j,j \neq k} a_j g \left( (k-j)T - \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1} \right) - a_k^* v_{k-\frac{1}{2}}(\tau_{k-1}) \right\}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Ainsi :

$$\sigma_N^2 = 2A^4g^2 \left( -\frac{T}{2} \right) + 2A^2\sigma_n^2 \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Détecteur Zero Crossing

Pour un détecteur ZC

$$\begin{aligned} S(\delta_k) &= E \left[ \Re \left\{ x_{k-\frac{1}{2}}^*(\tau_{k-1})(a_k - a_{k-1}) \right\} \right] \\ &= E \left[ \Re \left\{ (a_k - a_{k-1}) \sum_j a_j^* g \left( (k-j)T - \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1} \right) \right\} \right] \\ &= E[|a_k|^2]g\left(-\frac{T}{2} - \delta_k\right) - E[|a_{k-1}|^2]g\left(\frac{T}{2} - \delta_k\right) \\ &\simeq A^2 \left( \dot{g}\left(-\frac{T}{2}\right)\delta_k - \dot{g}\left(\frac{T}{2}\right)\delta_k \right) \\ &= 2A^2\dot{g}\left(\frac{T}{2}\right)\delta_k \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

D'où

$$\rho_{ZC} = 2A^2\dot{g}\left(\frac{T}{2}\right) \quad (\text{A.6})$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} N(k) &= \Re \left\{ a_k^* \sum_{j,j \neq k} a_j g\left((k-j)T - \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1}\right) + a_k^* v_{k-\frac{1}{2}}(\tau_{k-1}) \right. \\ &\quad \left. - a_{k-1}^* \sum_{j,j \neq k-1} a_j g\left((k-j)T - \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1}\right) - a_{k-1}^* v_{k-\frac{1}{2}}(\tau_{k-1}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Ce qui donne :

$$\sigma_N^2 = A^4g^2 \left( -\frac{T}{2} \right) + 2A^2\sigma_n^2 \quad (\text{A.8})$$

### A.3 Détecteur Mueller et Müller

Pour un détecteur M&M

$$\begin{aligned}
S(\delta_k) &= E \left[ \Re \left\{ x_{k-1}(\tau_{k-1})a_k^* - x_k(\tau_{k-1})a_{k-1}^* \right\} \right] \\
&= E \left[ \Re \left\{ a_k^* \sum_j a_j g((k-j)T - T - \tau + \tau_{k-1}) - a_{k-1}^* \sum_j a_j g((k-j)T - \tau + \tau_{k-1}) \right\} \right] \\
&= E[|a_k|^2]g(-T - \delta_k) - E[|a_{k-1}|^2]g(T - \delta_k) \\
&\simeq A^2 (\dot{g}(-T)\delta_k - A^2 \dot{g}(T)\delta_k) \\
&= 2A^2 \dot{g}(-T)\delta_k
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Ainsi

$$\rho_{MM} = 2A^2 \dot{g}(-T) \tag{A.10}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}
N(k) &= \Re \left( \left\{ a_k^* \sum_{j,j \neq k} a_j g((k-j)T - T - \tau + \tau_{k-1}) + a_k^* v_{k-1}(\tau_{k-1}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a_{k-1}^* \sum_{j,j \neq k-1} a_j g((k-j)T - \tau + \tau_{k-1}) - a_{k-1}^* v_k(\tau_{k-1}) \right\} \right) \\
&= \Re \left\{ a_k^* v_{k-1}(\tau_{k-1}) - a_{k-1}^* v_k(\tau_{k-1}) - a_{k-1} a_k^* g(0) \right\}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2 &= 2A^2 \sigma_n^2 + \text{var}(a_{k-1} a_k^* g(0)) \\
&= 2A^2 \sigma_n^2 + A^4 g(0)^2
\end{aligned} \tag{A.12}$$

### A.4 Détecteur de Gardner

Pour un détecteur de Gardner :

$$\begin{aligned}
S(\delta_k) &= E \left[ \Re \left\{ x^* \frac{1}{k-\frac{1}{2}}(\tau_{k-1}) (x_k(\tau_{k-1}) - x_{k-1}(\tau_{k-1})) \right\} \right] \\
&= E \left[ \Re \left\{ \sum_j a_{k-j} g \left( jT - \frac{T}{2} - \tau + \tau_{k-1} \right) \left( \sum_j a_{k-j} g(jT - \tau + \tau_{k-1}) - \sum_j a_{k-j} g(jT - T - \tau + \tau_{k-1}) \right) \right\} \right] \\
&= E[|a_k|^2] \sum_j g(jT - \frac{T}{2} - \delta_k) g(jT - \delta_k) - E[|a_{k-1}|^2] \sum_j g(jT - \frac{T}{2} - \delta_k) g(jT - T - \delta_k) \\
&= A^2 \sum_j w(jT) - A^2 \sum_j f(jT)
\end{aligned}$$

avec

$$w(t) = h(t - \delta_k)h(t - \frac{T}{2} - \delta_k) \quad (\text{A.13})$$

$$f(t) = h(t - \frac{T}{2} - \delta_k)h(t - T - \delta_k). \quad (\text{A.14})$$

D'après la formule de Poisson

$$\sum_j w(jT) = \frac{1}{T} \sum_m W(\frac{m}{T}) \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_j f(jT) = \frac{1}{T} \sum_m F(\frac{m}{T}) \quad (\text{A.16})$$

où  $W(f) = TF(w(t))$  et  $F(f) = TF(f(t))$ .

Posons  $G(f) = TF(g(t))$  et  $H(f) = TF(g(t - \frac{T}{2})) = G(f) \exp(-j\pi fT)$ , avec  $TF(\cdot)$  est la transformée de Fourier. Nous obtenons :

$$TF\left(g(t)g(t - \frac{T}{2})\right) = TF(g(t)) * TF\left(g(t - \frac{T}{2})\right) \quad (\text{A.17})$$

$$= H(f) * G(f) \quad (\text{A.18})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu)G(f - \nu)d\nu \quad (\text{A.19})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)G(f - \nu) \exp(-j\pi\nu T) d\nu. \quad (\text{A.20})$$

Posons

$$G_2(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)G(f - \nu) \exp(-j\pi\nu T) d\nu. \quad (\text{A.21})$$

Par conséquent :

$$W(f) = TF(w(t)) \quad (\text{A.22})$$

$$= FT\left(g(t)g(t - \frac{T}{2})\right) \exp(-j2\pi\delta_k T) \quad (\text{A.23})$$

$$= G_2(f) \exp(-j2\pi\delta_k f) \quad (\text{A.24})$$

D'où

$$\sum_j w(jT) = \frac{1}{T} \sum_m G_2(\frac{m}{T}) \exp\left(-j2\pi\delta_k \frac{m}{T}\right) \quad (\text{A.25})$$

Supposons que la bande passante du signal est inférieure à  $\frac{1}{T}$ ; alors  $G_2(\frac{m}{T}) \neq 0$  uniquement pour  $m = 0$  et  $m = \pm 1$ . Ainsi :

$$\sum_j w(jT) = \frac{1}{T}G_2(0) + \frac{1}{T}G_2\left(\frac{-1}{T}\right) \exp\left(j2\pi\frac{\delta_k}{T}\right) + \frac{1}{T}G_2\left(\frac{1}{T}\right) \exp\left(-j2\pi\frac{\delta_k}{T}\right) \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{1}{T}G_2(0) + \frac{2}{T}\Re\left\{G_2\left(\frac{1}{T}\right) \exp\left(-j2\pi\frac{\delta_k}{T}\right)\right\}. \quad (\text{A.27})$$

D'autre part, nous avons :

$$\sum_j f(jT) = \frac{1}{T} \sum_m F\left(\frac{m}{T}\right) \quad (\text{A.28})$$

et sachant que  $f(t) = w\left(t - \frac{T}{2}\right)$  alors :

$$F(f) = W(f) \exp(j\pi T f) \quad (\text{A.29})$$

$$= G_2(f) \exp(-j2\pi\delta_k f) \exp(j\pi T f) \quad (\text{A.30})$$

D'où :

$$\sum_j f(jT) = \frac{1}{T} \sum_m G_2\left(\frac{m}{T}\right) \exp\left(-j2\pi\delta_k\frac{m}{T}\right) \exp(j\pi m) \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{1}{T}G_2(0) - \frac{1}{T}G_2\left(\frac{-1}{T}\right) \exp\left(j2\pi\frac{\delta_k}{T}\right) - \frac{1}{T}G_2\left(\frac{1}{T}\right) \exp\left(-j2\pi\frac{\delta_k}{T}\right) \quad (\text{A.32})$$

$$= \frac{1}{T}G_2(0) - \frac{2}{T}\Re\left\{G_2\left(\frac{1}{T}\right) \exp\left(-j2\pi\frac{\delta_k}{T}\right)\right\} \quad (\text{A.33})$$

Ce qui fait que

$$S(\delta_k) = \frac{4A^2}{T}\Re\left\{G_2\left(\frac{1}{T}\right) \exp\left(-j2\pi\frac{\delta_k}{T}\right)\right\}. \quad (\text{A.34})$$

Si  $g$  est paire,  $G$  est réelle et donc  $G_2$  est complexe. Soit  $K = \Im\left\{G_2\left(\frac{1}{T}\right)\right\}$ .

$$G_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)G(f-\nu) \exp(-j\pi\nu T) d\nu \quad (\text{A.35})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)G(f-\nu) \cos(\pi\nu T) d\nu - j \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)G(f-\nu) \sin(\pi\nu T) d\nu \quad (\text{A.36})$$

Ainsi

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)G(f-\nu) \sin(\pi\nu T) d\nu \quad (\text{A.37})$$

et

$$S(\delta_k) = \frac{4KA^2}{T} \sin\left(2\pi\frac{\delta_k}{T}\right) \quad (\text{A.38})$$

$$= \frac{8KA^2\pi\delta_k}{T^2}. \quad (\text{A.39})$$

Par suite :

$$\rho_{\text{Gardner}} = \frac{8KA^2\pi}{T^2} \quad (\text{A.40})$$

Passons maintenant au calcul du bruit d'adaptation

$$N(k) = \Re\left\{ \sum_i \sum_{j,j \neq i} a_{k-j}g(jT - \delta_k) a_{k-i}^*g(iT - \frac{T}{2} - \delta_k) \right. \quad (\text{A.41})$$

$$\left. - \sum_i \sum_{j,j \neq i} a_{k-j}g(jT - T - \delta_k) a_{k-i}^*g(iT - \frac{T}{2} - \delta_k) \right.$$

$$\left. + v_{k-\frac{1}{2}}^*(\tau_{k-1}) \left[ \sum_j a_{k-j}g(jT - T - \delta_k) - \sum_j a_{k-i}g(iT - T - \delta_k) \right] \right.$$

$$\left. + \left[ v_k(\tau_{k-1}) - v_{k-1}(\tau_{k-1}) \right] \sum_j a_{k-j}^*g(jT - \frac{T}{2} - \delta_k) \right\}$$

$$\approx \Re\left\{ v_{k-\frac{1}{2}}^*(\tau_{k-1}) \left[ \sum_j a_{k-j}g(jT - T - \delta_k) - \sum_j a_{k-i}g(iT - T - \delta_k) \right] \right. \quad (\text{A.42})$$

$$\left. + \left[ v_k(\tau_{k-1}) - v_{k-1}(\tau_{k-1}) \right] \sum_j a_{k-j}^*g(jT - \frac{T}{2} - \delta_k) \right\}$$

$$= \Re\left\{ v_{k-\frac{1}{2}}^*(\tau_{k-1}) \left[ a_k g(0) - a_{k-1} g(0) \right] \right\} \quad (\text{A.43})$$

D'où :

$$\sigma_N^2 = 2A^2\sigma_n^2 g(0)^2 \quad (\text{A.44})$$

## Annexe B

## Annexe B

### B.1 Démonstration que $\frac{\partial x_{j,1}}{\partial \tau}$ et $x_{j,1}$ sont décorrélés

A partir de l'équation (1.20), nous avons :

$$\begin{aligned} x_{j,1}(\tau) &= \sum_i a_{j-i} g(iT) + \int_{T_0} h^*(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt \\ &= a_j + \int_{T_0} h^*(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

comme  $g(t)$  est un filtre de Nyquist  $g(0) = 1$ . De plus :

$$\frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} = \sum_i a_{j-i} g'(iT) - \int_{T_0} h'(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt. \quad (\text{B.2})$$

En adoptant les notations suivantes :

$$\alpha_j = \int_{T_0} h(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{\alpha}_j = \int_{T_0} h'(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt, \quad (\text{B.4})$$

nous obtenons :

$$E \left[ x_{j,1}(\tau) \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \right] = E \left[ a_j \sum_i a_{j-i} g(iT) \right] - E [\alpha_j \dot{\alpha}_j] \quad (\text{B.5})$$

D'une part :

$$\begin{aligned} E [\alpha_j \dot{\alpha}_j] &= E \left[ \int_{T_0} h(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt \int_{T_0} h'(t - jT - \tau) \Re\{n(t)\} dt \right] \\ &= \frac{N_0}{2} g'(0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

D'autre part, comme  $g'(0) = 0$  ( $g(x)$  atteint son maximum en 0) alors  $\sum_i a_{j-i} g'(iT)$  et  $a_j$  sont décorrélés et donc  $E[a_j \sum_i a_{j-i} g(iT)] = 0$ . Par suite,  $\frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau}$  et  $x_{j,1}(\tau)$  sont décorrélés.

## B.2 Evaluation des différentes espérances dans (2.99)

**Développement analytique de  $E\left(\tanh^2\left(\frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0}\right)\right)$  :**

A partir de (B.1), la pdf de  $x_{i,1}(\tau)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 f_{x_{i,1}(\tau)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \left[ P(a_j = 1) \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{N_0}\right) + P(a_j = -1) \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{N_0}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \left[ \frac{\exp(\frac{\lambda_i}{2})}{2 \cosh(\frac{\lambda_i}{2})} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{N_0}\right) + \frac{\exp(-\frac{\lambda_i}{2})}{2 \cosh(\frac{\lambda_i}{2})} \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{N_0}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi N_0}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+1}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)} \left[ \exp\left(\frac{2x}{N_0} + \frac{\lambda_j}{2}\right) + \exp\left(-\frac{2x}{N_0} - \frac{\lambda_j}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+1}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)} \cosh\left(\frac{2x}{N_0} + \frac{\lambda_i}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Nous obtenons alors :

$$E\left[\tanh^2\left(\frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tanh^2\left(\frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) \sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{x^2+1}{N_0}\right) \cosh\left(\frac{2x}{N_0} + \frac{\lambda_i}{2}\right) dx. \tag{B.8}$$

Etant donné que  $\tanh^2(x) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(x)}$ , alors :

$$\begin{aligned}
 E\left[\tanh^2\left(\frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0}\right)\right] &= \frac{1}{\cosh\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) \sqrt{\pi N_0}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2+1}{N_0}\right) \cosh\left(\frac{2x}{N_0} + \frac{\lambda_i}{2}\right) dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+1}{N_0}\right)}{\cosh\left(\frac{2x}{N_0} + \frac{\lambda_j}{2}\right)} dx \right).
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Utilisant la relation suivante  $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$ , la première intégrale de (B.9) est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + 1}{N_0}\right) \cosh\left(\frac{2x}{N_0} + \frac{\lambda_i}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{1}{N_0}\right) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{N_0}\right) \cosh\left(\frac{2x}{N_0}\right) \times \cosh\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) dx + \sinh\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{N_0}\right) \sinh\left(\frac{2x}{N_0}\right) dx \right]. \quad (\text{B.10})$$

Le second terme de la dernière sommation est l'intégrale d'une fonction impaire et donc elle est égale à 0. D'après [37], nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta x^2) \cosh(ax) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(\frac{a^2}{4\beta}\right), \quad (\text{B.11})$$

ainsi le premier terme de (B.11) est :

$$\exp\left(-\frac{1}{N_0}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{N_0}\right) \cosh\left(\frac{2x}{N_0}\right) dx = \sqrt{\pi N_0}. \quad (\text{B.12})$$

Par conséquent l'équation (B.9) devient :

$$E \left[ \tanh^2 \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(1, x, N_0) dx, \quad (\text{B.13})$$

où  $G_i(1, x, N_0)$  est donnée par (2.101) pour  $\nu = 1$ .

**Développement analytique de  $E \left[ \left( \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right]$  :**

En se basant sur l'expression de  $\frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau}$  dans (B.2) et en moyennant sur les observations et les symboles transmis nous obtenons :

$$E \left[ \left( \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right] = \sum_n \dot{g}(nT)^2 + \frac{N_0}{2} \dot{g}(0). \quad (\text{B.14})$$

**Développement analytique de**  $E \left[ \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \right]$

Etant donné que  $\frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau}$  et  $\frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau}$  sont statistiquement dépendants en  $x_{i,1}(\tau)$  et  $x_{j,1}(\tau)$ , afin de développer l'expression de l'espérance désirée, nous moyennons d'abord l'expression en conditionnant sur  $x_{i,1}(\tau)$  et  $x_{j,1}(\tau)$ , ensuite nous moyennons le résultat obtenu par rapport à ces deux variables aléatoires.

Nous avons pour tout entier  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$  :

$$x_{i,1}(\tau) = a_i + \alpha_i, \quad (\text{B.15})$$

où  $\alpha_i$  est donnée par (B.3) et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} &= \sum_n a_n g'((j-n)T) + \dot{\alpha}_j \\ &= a_i g'((j-i)T) + \sum_{n, n \neq i, j} a_n g'((j-n)T) + \dot{\alpha}_j \\ &= [x_{i,1}(\tau) - \alpha_i] g'((j-i)T) + \sum_{n, n \neq i, j} a_n g'((j-n)T) + \dot{\alpha}_j. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Nous trouvons ainsi que :

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \middle| x_{i,1}(\tau), x_{j,1}(\tau) \right] &= x_{i,1}(\tau) g'((j-i)T) x_{j,1}(\tau) g'((i-j)T) \\ &= -x_{i,1}(\tau) x_{j,1}(\tau) g'((i-j)T)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \middle| x_{i,1}(\tau), x_{j,1}(\tau) \right] \\ = -\tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) x_{i,1}(\tau) x_{j,1}(\tau) g'((i-j)T)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Finalement, on obtient :

$$E \left[ \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \right] = -E \left[ x_{j,1}(\tau) \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \right]^2 g'((i-j)T)^2, \quad (\text{B.19})$$

où le premier terme est donné par :

$$\begin{aligned} E \left[ x_{j,1}(\tau) \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x}{N_0} \right) f_{x_{j,1}(\tau)}(x) dx \\ &= \frac{\exp \left( -\frac{1}{N_0} \right)}{\sqrt{\pi N_0} \cosh \left( \frac{\lambda_j}{2} \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} x \sinh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x}{N_0} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{N_0} \right) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E \left[ \frac{\partial x_{i,1}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{j,1}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_i}{2} + \frac{2x_{i,1}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_j}{2} + \frac{2x_{j,1}(\tau)}{N_0} \right) \right] = -g'((i-j)T)^2. \quad (\text{B.20})$$

### B.3 Développement analytique de l'équation (2.115)

Nous avons :

$$\begin{aligned} & E \left[ \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x_{k,i}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_l^n}{2} + \frac{2v_{0,l}x_{n,l}(\tau)}{N_0} \right) \right] \\ &= -E \left[ x_{k,i}(\tau) \tanh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x_{k,i}(\tau)}{N_0} \right) \right]^2 g'((k-n)T)^2 \\ &= - \left[ \frac{\exp \left( -\frac{v_{0,i}^2}{N_0} \right)}{\sqrt{\pi N_0} \cosh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} x \sinh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x}{N_0} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{N_0} \right) dx g'((k-n)T) \right]^2. \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \sinh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x}{N_0} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{N_0} \right) dx = \sqrt{\pi N_0} \cosh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} \right) \exp \left( \frac{v_{0,i}^2}{N_0} \right) 2v_{0,i}, \quad (\text{B.22})$$

et utilisant le fait que  $v_{0,i} = 1/\sqrt{2}$ , nous trouvons :

$$E \left[ \frac{\partial x_{k,i}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial x_{n,l}(\tau)}{\partial \tau} \tanh \left( \frac{\lambda_i^k}{2} + \frac{2v_{0,i}x_{k,i}(\tau)}{N_0} \right) \tanh \left( \frac{\lambda_l^n}{2} + \frac{2v_{0,l}x_{n,l}(\tau)}{N_0} \right) \right] = -2g'((k-n)T)^2. \quad (\text{B.23})$$



## Annexe C

## Annexe C

### C.1 Développement analytique de l'équation (3.65) :

D'après le traitement itératif de l'algorithme *Forward*, l'erreur d'estimation à la fin de la boucle *Backward* est égale à l'erreur initiale de la deuxième itération de la boucle *Forward*. Ainsi :

$$\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),2} = \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),1}. \quad (\text{C.1})$$

On sait à partir de (3.54) que :

$$\begin{aligned} \tau_k - \hat{\tau}_k^{(B),1} &= (1 + \gamma)^{2N-k-1} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) \\ &+ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-k-i+1} - \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-k-i} \\ &- \sum_{i=k+1}^N w_i (1 + \gamma)^{i-k} - \sum_{i=k}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-k}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Pour  $k = 1$  :

$$\begin{aligned} \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),2} &= \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),1} \\ &= (1 + \gamma)^{2N-2} (\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) \\ &+ \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{2N-i} - \sum_{i=2}^N q_i (1 + \gamma)^{2N-1-i} \\ &- \sum_{i=2}^N w_i (1 + \gamma)^{i-1} - \sum_{i=1}^{N-1} q_i (1 + \gamma)^{i-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

De même,

$$\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),3} = \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),2}. \quad (\text{C.4})$$

En se basant sur (C.2) et pour  $k = 1$  :

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),2} &= (1 + \gamma)^{2N-2}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),2}) + \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{2N-i} \\
&- \sum_{i=2}^N q_i(1 + \gamma)^{2N-i-1} - \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{i-1} \\
&- \sum_{i=1}^{N-1} q_i(1 + \gamma)^{i-1}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

En substituant  $\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),2}$  par son expression dans (C.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(B),2} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times 2}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) \\
&+ [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{2N-i} \\
&- [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=2}^N q_i(1 + \gamma)^{2N-1-i} \\
&- [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{i-1} \\
&- [1 + (1 + \gamma)^{2N-2}] \sum_{i=1}^{N-1} q_i(1 + \gamma)^{i-1} \\
&= \tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),3}
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Par récurrence, à l'itération  $m$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),m} &= (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1)}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) \\
&+ \sum_{j=0}^{m-2} (1 + \gamma)^{(2N-2) \times j} \left[ \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{2N-i} \right. \\
&- \left. q_i(1 + \gamma)^{2N-1-i} \right] - \sum_{j=0}^{m-2} (1 + \gamma)^{(2N-2) \times j} \times \\
&\left[ \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{i-1} + \sum_{i=1}^{N-1} q_i(1 + \gamma)^{i-1} \right] \\
&- (1 + \gamma)^{(2N-2) \times (m-1)}(\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),1}) \\
&+ \Omega(m) \left[ \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{2N-i} - q_i(1 + \gamma)^{2N-1-i} \right] \\
&- \Omega(m) \left[ \sum_{i=2}^N w_i(1 + \gamma)^{i-1} + \sum_{i=1}^{N-1} q_i(1 + \gamma)^{i-1} \right],
\end{aligned} \tag{C.7}$$

où  $\Omega(m)$  est donné par (??). Selon les expressions de  $\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F)}$  et  $\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B)}$  respectivement dans (3.41) et (3.54) et en remplaçant  $\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F)}$  par  $\tau_1 - \hat{\tau}_1^{(F),m}$  donné par (C.7), à l'itération  $m$  et

à la  $k^{\text{ème}}$  observation, nous obtenons l'expression de  $\tau_k - \hat{\tau}_k^{(F),m}$  donnée par (3.65) et celle de  $\tau_k - \hat{\tau}_k^{(B),m}$  donnée par (3.67).

## C.2 Développement analytique des termes dans (3.98) et (3.107) :

– Développement de  $E \left[ \tanh \left( \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right]$  :

En se basant sur (3.90), alors la fonction de densité de probabilité de  $x_k(\tau_k)$  pour des symboles équiprobables est :

$$\begin{aligned} f_{x_k(\tau_k)}(x) &= \frac{\left[ \exp \left( -\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2} \right) + \exp \left( -\frac{(x+1)^2}{2\sigma^2} \right) \right]}{2\sqrt{2\pi}\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{x^2+1}{2\sigma^2} \right) \cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Par conséquent :

$$E \left[ \tanh \left( \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right] = \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right)^2}{\cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right)} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx. \quad (\text{C.9})$$

En utilisant la relation  $\sinh(x)^2 = \cosh(x)^2 - 1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} E \left[ \tanh \left( \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx \right] \\ &= 1 - \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Cette expression a été obtenue en utilisant :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\beta x^2) \cosh(ax) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp \left( \frac{a^2}{4\beta} \right), \quad (\text{C.11})$$

pour  $\beta > 0$ .

– Développement de  $E \left[ \dot{y}_k(\tau_k)^2 \right]$  :

On a :

$$\begin{aligned}
E\left[\dot{y}_k(\tau_k)^2\right] &= E\left[\left[\sum_m a_{k-m}\dot{g}(mT) + \Re\{\dot{v}_k(\tau_k)\}\right]\right. \\
&\quad \times \left.\left[\sum_n a_{k-n}\dot{g}(nT) + \Re\{\dot{v}_k(\tau_k)\}\right]\right] \\
&= E\left[\sum_m a_{k-m}^2 \dot{g}(mT)^2\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^N \Re\{n_i\}^2 \dot{h}(iT - kT - \tau_k)^2\right] \\
&= \sum_m \dot{g}(mT)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \ddot{g}(0). \tag{C.12}
\end{aligned}$$

– Développement de  $E\left[\tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2}\right)^2\right]$  :

En se basant sur (3.90) et ayant le LLR,  $\lambda_k$ , la fonction de densité de probabilité de  $x_k(\tau_k)$  est :

$$\begin{aligned}
f_{x_k(\tau_k)}(x) &= \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \sqrt{2\pi}\sigma} \left[ \exp\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2+1}{2\sigma^2}\right) \cosh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2}\right). \tag{C.13}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
E\left[\tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2}\right)^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2}\right)^2 \frac{\exp\left(-\frac{x^2+1}{2\sigma^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \sqrt{2\pi}\sigma} \cosh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) \sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2}\right)^2}{\cosh\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx
\end{aligned}$$

En utilisant la relation  $\sinh(x)^2 = \cosh(x)^2 - 1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
E \left[ \tanh \left( \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right] &= \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx \right] \\
&= \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \left[ I_k - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx \right], \tag{C.14}
\end{aligned}$$

où

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx.$$

Etant donné que  $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$ , alors :

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \sinh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sinh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx. \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Le second terme de  $I_k$  est l'intégrale sur  $R$  d'une fonction impaire. Il est alors égal à 0. En utilisant (C.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \cosh \left( \frac{x}{\sigma^2} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) dx \\
&= \cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma \exp \left( \frac{1}{2\sigma^2} \right). \tag{C.16}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$E \left[ \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{y_k(\tau_k)}{\sigma^2} \right)^2 \right] = 1 - \frac{\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} \right) \sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)}{\cosh \left( \frac{\lambda_k}{2} + \frac{x}{\sigma^2} \right)} dx. \tag{C.17}$$



# Bibliographie

- [1] IEEE standard for local and metropolitan area networks - part 15.6 : Wireless body area networks. *IEEE Std 802.15.6-2012*, pages 1–271, Feb. 2012.
- [2] J. S. Abel. A bound on mean square estimate error. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. ICASSP-90., 1990 International Conference on*, pages 1345–1348 vol.3, Apr 1990.
- [3] J. S. Abel. A bound on mean-square-estimate error. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39(5) :1675–1680, Sep 1993.
- [4] A. Aghamohammadi, H. Meyr, and G. Ascheid. Adaptive synchronization and channel parameter estimation using an extended kalman filter. *IEEE Transactions on Communications*, 37(11) :1212–1219, Nov 1989.
- [5] E. W. Barankin. Locally best unbiased estimates. *Ann. Math. Statist.*, 20(4) :477–501, 12 1949.
- [6] R. Barry, A. Kavcic, S.W. McLaughlin, A. Nayak, and Wei Zeng. Iterative timing recovery. *IEEE Signal Processing Magazine*, 21(1) :89–102, Jan. 2004.
- [7] S. Bay, B. Geller, A. Renaux, J. P. Barbot, and J. M. Brossier. On the hybrid Cramer-Rao bound and its application to dynamical phase estimation. *IEEE Signal Processing letters*, 15 :453–456, 2008.
- [8] S. Bay, C. Herzet, J. M. Brossier, J. P. Barbot, and B. Geller. Analytic and asymptotic analysis of bayesian Cramer-Rao bound for dynamical phase offset estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 56(1) :61–70, Jan. 2008.
- [9] F. Bellili, A Methenni, and S. Affes. Closed-form Cramer Rao lower bound for SNR estimation from turbo-coded BPSK-, MSK-, and square-QAM-modulated signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 62(15) :4018–4033, Aug. 2014.
- [10] Faouzi Bellili, Achref Methenni, and Sofiéne Affes. Closed-form crlbs for CFO and phase estimation from turbo-coded square-qam-modulated transmissions. *IEEE Trans. Wireless Communications*, 14(5) :2513–2531, 2015.
- [11] C. Berrou and A. Glavieux. Near optimum error correcting coding and decoding : turbo-codes. *IEEE Trans. on Communications*, 44(10) :1261–1271, Oct. 1996.
- [12] Claude Berrou, Joachim Hagenauer, Marco Luise, Luc Vandendorpe, and Christian Schegel. Turbo-Information processing : algorithms, implementations & applications. *Proc. of the IEEE*, 95(6) :1146–1149, Jun. 2007.

- 
- [13] A. Bhattacharyya. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation (contd.). *Sankhya : The Indian Journal of Statistics (1933-1960)*, 8(3) :201–218, 1947.
- [14] B. Z. Bobrovsky, E. Mayer-Wolf, and M. Zakai. Some classes of global cramer-rao bounds. *Ann. Statist.*, 15(4) :1421–1438, 12 1987.
- [15] G. Bolding, W. G. Cowley, and I. S. Morrison. A Flexible 85 MSym/s Demodulator for Earth Resources Satellite Applications. page 444447, Sydney, Sept. 1991. IREECON.
- [16] Léon Bottou. On-line learning in neural networks. chapter On-line Learning and Stochastic Approximations, pages 9–42. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1998.
- [17] J. M. Brossier, P. O. Amblard, and B. Geller. Self adaptive PLL for general QAM constellations. In *Proc. of 11<sup>th</sup> European Signal Processing Conference EUSIPCO*, pages 631–635, Toulouse, Sept. 2002.
- [18] K. Bucket and M. Moeneclaey. Effect of random carrier phase and timing errors on the detection of narrowband m-psk and bandlimited ds/ss m-psk signals. *IEEE Transactions on Communications*, 43(2/3/4) :1260–1263, Feb 1995.
- [19] Douglas G. Chapman and Herbert Robbins. Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Ann. Math. Statist.*, 22(4) :581–586, 12 1951.
- [20] J. C. I. Chuang. The effects of multipath delay spread on timing recovery. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 36(3) :135–140, Aug 1987.
- [21] A. D’Andrea, U. Mengali, and R. Reggiannini. Carrier phase and clock recovery for continuous phase modulated signals. *IEEE Transactions on Communications*, 35(10) :1095–1101, Oct 1987.
- [22] AN. D’Andrea, U. Mengali, and R. Reggiannini. The modified Cramer-Rao bound and its application to synchronization problems. *IEEE Trans. on Communications*, 42(234) :1391–1399, Feb. 1994.
- [23] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1) :1–38, 1977.
- [24] D. Falconer and J. Salz. Optimal reception of digital data over the gaussian channel with unknown delay and phase jitter. *IEEE Transactions on Information Theory*, 23(1) :117–126, Jan 1977.
- [25] B. Farhang-Boroujeny. Near optimum timing recovery for digitally implemented data receivers. *IEEE Transactions on Communications*, 38(9) :1333–1336, Sep 1990.
- [26] C. W. Farrow. A continuously variable digital delay element. pages 2641–2645 vol.3, Jun 1988.
- [27] L. Franks. Carrier and bit synchronization in data communication - a tutorial review. *IEEE Transactions on Communications*, 28(8) :1107–1121, August 1980.
- [28] L. Franks and J. Bubrouski. Statistical properties of timing jitter in a pam timing recovery scheme. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 21(4) :489–496, Jul 1974.

- 
- [29] R.G. Gallager. Low-density parity-check codes. *IEEE Trans. on Information Theory*, 8(1) :21–28, Jan. 1962.
- [30] F. Gardner. Self-noise in synchronizers. *IEEE Transactions on Communications*, 28(8) :1159–1163, Aug 1980.
- [31] Floyd M. Gardner. A BPSK/QPSK timing-error detector for sampled receivers. *IEEE Trans. on Communications*, 34(5) :423–429, 1986.
- [32] F.M. Gardner. Demodulation reference recovery techniques suited for digital implementation. Final Report ESTEC Contract No.6847/86/NL/DG, European Space Agency, Aug. 1988.
- [33] F.M. Gardner. *Demodulator Reference Recovery Techniques Suited for Digital Implementation*. Gardner Research Comp., 1988.
- [34] B. Geller, V. Capellano, Jean Marc Brossier, A. Essebbar, and G. Jourdain. Equalizer for video rate transmission in multipath underwater communications. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 21(2) :150–156, Apr. 1996.
- [35] Fulvio Gini and Georgios B. Giannakis. Frequency offset and symbol timing recovery in flat-fading channels : A cyclostationary approach. *IEEE Trans. Commun*, 46 :400–411, 1998.
- [36] K. Goethals and M. Moeneclaey. Tracking performance of ml-oriented nda symbol synchronizers for nonselective fading channels. *IEEE Transactions on Communications*, 43(2/3/4) :1179–1184, Feb 1995.
- [37] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Elsevier Academic Press, 2007.
- [38] Simon Haykin. *Digital Communications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1988.
- [39] Yasushi Higashida, Masafumi Hagiwara, and Masao Nakagawa. Timing extraction and carrier estimation for psk signal block demodulation system. *Electronics and Communications in Japan (Part I : Communications)*, 72(7) :8–16, 1989.
- [40] H. Hijazi and L. Ros. Bayesian Cramér-Rao Bound for ofdm rapidly time-varying channel complex gains estimation. In *Global Telecommunications Conference, 2009. GLOBECOM 2009. IEEE*, pages 1–6, Nov 2009.
- [41] N. K. Jablon. Joint blind equalization, carrier recovery and timing recovery for high-order qam signal constellations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(6) :1383–1398, Jun 1992.
- [42] A. Jennings and B. Clarke. Data-sequence selective timing recovery for pam systems. *IEEE Transactions on Communications*, 33(7) :729–731, Jul 1985.
- [43] Steven M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.
- [44] H. Kobayashi. Simultaneous adaptive estimation and decision algorithm for carrier modulated data transmission systems. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 19(3) :268–280, June 1971.

- 
- [45] P. Kovintavewat and J.R. Barry. Exit chart analysis for iterative timing recovery. 4 :2435–2439 Vol.4, Nov. 2004.
- [46] W. C. Lindsey and Chak Ming Chic. A survey of digital phase-locked loops. *Proceedings of the IEEE*, 69(4) :410–431, April 1981.
- [47] W. C. Lindsey and M. K. Simon. *Telecommunications Systems Engineering*. PrenticeHall, 1973.
- [48] William C. Lindsey and Marvin K. Simon. *Telecommunication Systems Engineering*. Dover Publications, Incorporated, 1991.
- [49] V. Lottici and M. Luise. Carrier phase recovery for turbo-coded linear modulations. *IEEE International Conference on Communications, ICC*, 3 :1541–1545, 2002.
- [50] A. Masmoudi, F. Bellili, S. Affes, and A. Stephenne. Closed-form expressions for the exact Cramer-Rao bounds of timing recovery estimators from BPSK, MSK and square-QAM transmissions. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 59(6) :2474–2484, Jun. 2011.
- [51] L. Mazet. *Egalisation aveugle en milieu non-coopératif*. PhD thesis, Université de Marne la Vallée, Dec 1999.
- [52] U. Mengali and A. N. D’Andrea. *Synchronization Techniques for Digital Receivers*. Plenum Press, New York and London, 1997.
- [53] M. Meyers and L. Franks. Joint carrier phase and symbol timing recovery for pam systems. *IEEE Transactions on Communications*, 28(8) :1121–1129, Aug 1980.
- [54] H. Meyr, M. Moeneclaey, and S. A. Fechtel. *Digital Communication Receivers*. Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing, 1998.
- [55] B. Mielczarek and A. Svensson. Timing error recovery in turbo-coded systems on AWGN channels. *IEEE Trans. on Communications*, 50(10) :1584–1592, Oct. 2002.
- [56] M. Moeneclaey. Synchronization problems in pam systems. *IEEE Transactions on Communications*, 28(8) :1130–1136, Aug 1980.
- [57] M. Moeneclaey. The influence of phase-dependent loop noise on the cycle slipping of symbol synchronizers. *IEEE Transactions on Communications*, 33(12) :1234–1239, Dec 1985.
- [58] K. Mueller and M. Muller. Timing recovery in digital synchronous data receivers. *IEEE Trans. on Communications*, 24(5) :516–531, 1976.
- [59] Carlos H. Muravchik and Arye Nehorai. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, pages 1386–1396, 1998.
- [60] S. Nakamura, T. Kamisaka, K. Yogi, and Y. Takahasi. Advanced digitalized demodulator vlsis with incoherent sampled detection. In *Global Telecommunications Conference and Exhibition ‘Communications Technology for the 1990s and Beyond’ (GLOBECOM)*, 1989. *IEEE*, pages 1093–1099 vol.2, Nov 1989.

- [61] I. Nasr, L.N. Atallah, S. Cherif, B. Geller, and Jianxiao Yang. A soft maximum likelihood technique for time delay recovery. In *2014 International Conference on Communications and Networking (ComNet)*, pages 1–5, Mar. 2014.
- [62] I. Nasr, L.N. Atallah, B. Geller, and S. Cherif. CRB derivation and new code-aided timing recovery technique for QAM modulated signals. In *2015 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, pages 4901–4906, Jun. 2015.
- [63] I. Nasr, B. Geller, L. Najjar, and S. Cherif. Performance study of a near maximum likelihood code-aided timing recovery technique. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 64(3) :799–811, Feb 2016.
- [64] A.R. Nayak, J.R. Barry, and S.W. McLaughlin. Joint timing recovery and turbo equalization for coded partial response channels. *IEEE Trans. on Magnetics*, 38(5) :2295–2297, Sep. 2002.
- [65] N. Noels, C. Herzet, A. Dejonghe, V. Lottici, H. Steendam, M. Moeneclaey, M. Luise, and L. Vandendorpe. Turbo synchronization : an EM algorithm interpretation. *IEEE International Conference on Communications, ICC*, 4 :2933–2937, 2003.
- [66] M. Oerder. Derivation of Gardner’s timing-error detector from the maximum likelihood principle. *IEEE Trans. on Communications*, 35(6) :684–685, 1987.
- [67] M. Oerder and H. Meyr. VLSI implementation of synchronization algorithms in a 100 Mbit/s digital receiver. In *Global Telecommunications Conference, 1990, and Exhibition. 'Communications : Connecting the Future', GLOBECOM '90.*, IEEE, pages 589–593 vol.1, Dec 1990.
- [68] F. Patenaude, J. H. Lodge, and P. A. Galko. Symbol timing tracking for continuous phase modulation over fast flat-fading channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 40(3) :615–626, Aug 1991.
- [69] John G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 1995.
- [70] E. Del Re and R. Fantacci. Joint carrier and clock recovery for qpsk and msk digital communications. *IEE Proceedings I - Communications, Speech and Vision*, 136(3) :208–212, June 1989.
- [71] A. Renaux, P. Forster, P. Larzabal, C. D. Richmond, and A. Nehorai. A fresh look at the bayesian bounds of the weiss-weinstein family. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5334–5352, Nov 2008.
- [72] I. Reuven and H. Messer. A barankin-type lower bound on the estimation error of a hybrid parameter vector. *IEEE Transactions on Information Theory*, 43(3) :1084–1093, May 1997.
- [73] Y. Rockah and P. Schultheiss. Array shape calibration using sources in unknown locations-part i : Far-field sources. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35(3) :286–299, Mar 1987.
- [74] L. P. Sabel and W. G. Cowley. A recursive algorithm for the estimation of symbol timing in psk burst modems. In *Global Telecommunications Conference, 1992. Conference Record., GLOBECOM '92. Communication for Global Users.*, IEEE, pages 360–364 vol.1, Dec 1992.

- [75] R. W. Schafer and L. R. Rabiner. A digital signal processing approach to interpolation. *Proceedings of the IEEE*, 61(6) :692–702, June 1973.
- [76] R. W. Schafer and L. R. Rabiner. A digital signal processing approach to interpolation. *Proceedings of the IEEE*, 61(6) :692–702, June 1973.
- [77] J. J. Stiffler. *Theory of Synchronous Communications*. PrenticeHall, 1971.
- [78] Gordon L. Stüber. *Principles of Mobile Communication (2Nd Ed.)*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 2001.
- [79] G. N. Tavares, L. M. Tavares, and M. S. Piedade. On the miller-chang lower bound for nda carrier phase estimation. *IEEE Transactions on Communications*, 52(11) :1867–1871, Nov 2004.
- [80] S. Ten Brink. Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes. *IEEE Trans. on Communications*, 49(10) :1727–1737, Oct. 2001.
- [81] M. Tomlinson and J. Bramwell. A digital signal processing based modem receiver for the INMAR-SAT Standard C system. In *Satellite Systems for Mobile Communications and Navigation, 1988., Fourth International Conference on*, pages 232–238, Oct 1988.
- [82] Harry L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume 1. New York : Wiley, 1968.
- [83] Harry L. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory : Radar-Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise*. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, USA, 1992.
- [84] Harry L. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory : Radar-Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise*. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, USA, 1992.
- [85] Harry L. Van Trees and Kristine L. Bell. *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking*. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [86] C. Vanstraceele, B. Geller, J.-P. Barbot, and J. M Brossier. Block turbo codes for multicarrier local loop transmission. 3 :1773–1776 vol.3, 2002.
- [87] C. Vanstraceele, B. Geller, J. M Brossier, and J.-P. Barbot. A low complexity block turbo decoder architecture - [transactions letters]. *IEEE Trans. on Communications*, 56(12) :1985–1987, December 2008.
- [88] Jordi Vilà-Valls, Jean-Marc Brossier, and Laurent Ros. On-line Hybrid Cramér-Rao Bound for oversampled dynamical phase and frequency offset estimation. In *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Global Telecommunications, GLOBECOM'09*, pages 41–46, Piscataway, NJ, USA, 2009. IEEE Press.
- [89] M. Villegas. *Radiocommunications numériques : Conception de circuits intégrés RF et micro-ondes*. Radiocommunications numériques. Dunod, 2007.
- [90] Branka Vucetic and Jinhong Yuan. *Turbo Codes : Principles and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 2000.

- 
- [91] P. Wintz and E. Luecke. Performance of optimum and suboptimum synchronizers. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 17(3) :380–389, June 1969.
- [92] N. Wu. Performance analysis of code-aided iterative carrier phase recovery in turbo receivers. *IET Communications*, 6 :2980–2988(8), November 2012.
- [93] N. Wu, H. Wang, J. Kuang, and C. Yan. Performance analysis of code-aided symbol timing recovery on AWGN channels. *IEEE Trans. on Communications*, 59(7) :1975–1984, Jul. 2011.
- [94] Nan Wu, Hua Wang, Jingming Kuang, and Chaoxing Yan. Performance analysis of code-aided symbol timing recovery on AWGN channels. *IEEE Trans. on Communications*, 59(7) :1975–1984, July 2011.
- [95] J. Yang and B. Geller. Near-optimum low-complexity smoothing loops for dynamical phase estimation - Application to BPSK modulated signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 57(9) :3704–3711, Sep 2009.
- [96] J. Yang, B. Geller, and S. Bay. Bayesian and hybrid Cramer-Rao bounds for the carrier recovery under dynamic phase uncertain channels. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 59(2) :667–680, Feb 2011.
- [97] Li Zhang and A. Burr. APPA symbol timing recovery scheme for turbo codes. *PIMRC*, 1 :44–48 vol.1, Sep. 2002.
- [98] Liang Zhou, Benoit Geller, Anne Wei, Baoyu Zheng, Jingwu Cui, and Shan Xu. Cross-layer rate allocation for multimedia applications in pervasive computing environment. In *IEEE GLOBECOM*, pages 1–5, Nov 2008.
- [99] J. Ziv and M. Zakai. Some lower bounds on signal parameter estimation. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 15(3) :386–391, September 2006.



**Titre : Algorithmes et Bornes minimales pour la Synchronisation Temporelle à haute performance - Application à l'internet des objets corporels**

**Mots clés : Synchronisation temporelle, borne de Cramèr-Rao, Réseaux WBAN, Maximum de Vraisemblance, Maximum a Posteriori**

**Résumé :** La synchronisation temporelle est la première opération effectuée par le démodulateur. Elle permet d'assurer que les échantillons transmis aux processus de démodulation puissent réaliser un taux d'erreurs binaires le plus faible.

Dans cette thèse, nous proposons l'étude d'algorithmes innovants de synchronisation temporelle à haute performance.

D'abord, nous avons proposé des algorithmes exploitant l'information souple du décodeur en plus du signal reçu afin d'améliorer l'estimation aveugle d'un retard temporel supposé constant sur la durée d'observation.

Ensuite, nous avons proposé un algorithme original basé sur la synchronisation par lissage à faible complexité.

Cette étape a consisté à proposer une technique opérant dans un contexte hors ligne, permettant l'estimation d'un retard aléatoire variable dans le temps via des boucles d'aller-retour sur plusieurs itérations. Les performances d'un tel estimateur dépassent celles des algorithmes traditionnels.

Afin d'évaluer la pertinence de tous les estimateurs proposés, pour des retards déterministe et aléatoire, nous avons évalué et comparé leurs performances à des bornes de Cramèr-Rao que nous avons développées pour ce cadre. Enfin, nous avons évalué les algorithmes proposés sur des signaux WBAN.

**Title : Algorithms and Bounds for High Performance Time Synchronization - Application to the Internet of Things**

**Keywords : Time Synchronization, Cramèr-Rao bound, WBAN, Maximum Likelihood, Maximum a Posteriori**

**Abstract:** Time synchronization is the first function performed by the demodulator. It ensures that the samples transmitted to the demodulation processes allow to achieve the lowest bit error rate.

In this thesis we propose the study of innovative algorithms for high performance time synchronization.

First, we propose algorithms exploiting the soft information from the decoder in addition to the received signal to improve the blind estimation of the time delay.

Next, we develop an original algorithm based on low complexity smoothing synchronization techniques.

This step consisted in proposing a technique operating in an off-line context, making it possible to estimate a random delay that varies over time on several iterations via Forward-Backward loops. The performance of such estimators exceeds that of traditional algorithms.

In order to evaluate the relevance of all the proposed estimators, for deterministic and random delays, we evaluated and compared their performance to Cramèr-Rao bounds that we developed within these frameworks. We, finally, evaluated the proposed algorithms on WBAN signals.

