Sur les sous-groupes profinis des groupes algébriques linéaires

Benoit Loisel

▶ **To cite this version:**

Benoit Loisel. Sur les sous-groupes profinis des groupes algébriques linéaires. Théorie des groupes [math.GR]. Université Paris Saclay (COmUE), 2017. Français. ⟨NNT : 2017SACLX024⟩. ⟨tel-01628480⟩

HAL Id: tel-01628480

https://pastel.hal.science/tel-01628480v1

Submitted on 3 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HAL Authorization

NNT : 2017SACLX024

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

préparée à

L'École polytechnique

ÉCOLE DOCTORALE N°574
École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

par

Benoit LOISEL

Sur les sous-groupes profinis des groupes algébriques linéaires

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 11 juillet 2017

Composition du jury :

Michel BRION	Rapporteur	Université Grenoble Alpes
Inna CAPDEBOSCQ	Examinatrice	University of Warwick
Pierre-Emmanuel CAPRACE	Président du jury	Université catholique de Louvain
Bertrand RÉMY	Directeur de thèse	École polytechnique
Benjamin SCHRAEN	Examinateur	École polytechnique
Dan SEGAL	Examinateur	University of Oxford

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement Bertrand Rémy, mon directeur de thèse, pour tout ce qu'il a su m'apprendre au long de ces trois années et demi, allant du M2 où je l'ai rencontré, jusqu'à la fin de cette thèse ; et en particulier, pour ses grandes qualités humaines et pédagogiques. Il a su me guider, partager ses nombreuses connaissances et attiser ma curiosité mathématique. C'est un immense plaisir d'avoir pu travailler avec lui.

Je souhaite également adresser toute ma gratitude à Michel Brion et T.N. Venkataramana, qui ont accepté de rapporter cette thèse, pour leur intérêt envers mes travaux et pour toutes leurs nombreuses remarques toujours pertinentes et très enrichissantes. J'exprime aussi toute ma gratitude à l'égard des membres du jury, incluant Inna Capdeboscq, Pierre-Emmanuel Caprace, Benjamin Schraen et Dan Segal, pour l'intérêt qu'ils portent à ces travaux.

Je remercie toutes les mathématiciennes et tous les mathématiciens avec qui j'ai eu l'occasion d'échanges par courriels, ou oraux, constructifs, ou laissant entrevoir des pistes intéressantes de recherche pour la suite, ou plus généralement tous ceux qui se sont intéressés de près ou de loin à mes travaux. Je tiens à citer, en particulier, Raphaël Achet, Paul Broussous, Anna Cadoret, Brian Conrad, Cyril Demarche, Matthieu Florence, Philippe Gille, Guy Henniart, Marco Maculan, Ariane Mézard, Giancarlo Lucchini-Arteche, Gopal Prasad, Guy Rousseau, Vincent Sécherre, Maarten Solleveld, Thierry Stulemeijer et Stefan Witzel.

Mes remerciements vont à tous les membres du CMLS qui m'ont donné les moyens de m'épanouir dans un environnement sécurisé et de qualité, en particulier pour leur remarquable efficacité à l'adresse de la cellule informatique Jean-Luc, David et Danh, ainsi qu'au secrétariat, Carole, Marine et Pascale, et qu'aux directeurs successifs Yvan et Charles ; mais également à tous les autres, notamment pour les discussions de café.

Un grand merci à tous les doctorants du CMLS et du CMAP pour les bons moments passés ensemble, et pour nos échanges lors du séminaire réservé aux doctorants, avant tout à Thomas pour son soutien indéfectible et ses remarquables talents culinaires, mais également à Aymeric, Bac, Emiliano, Étienne, Fabio, Hsueh-Yung, Jacek, Ludovic, Matilde, Matthieu, Nicolas, René, Raphaël, Rita, Tatiana, Timofey, Thomas, Vincent, Xianglong, Yakine, Zakarias.

Je salue toute l'équipe mathématique du département d'informatique de l'IUT d'Orsay pour ces trois années de monitorat enrichissantes, plus spécifiquement les responsables des cours dont j'ai effectué les TD, à savoir Caroline, Élodie, Emmanuel et Hélène.

Je remercie les organisateurs et organisatrices du $\mathbb{TFJM}^2$, en particulier Antoine, Giancarlo, Igor et Matthieu. C'était un honneur de faire partie du jury et de vivre cette

expérience, très constructive, de diffusion de la recherche en mathématiques auprès d'un public de jeunes lycéens très motivés.

J'adresse une affection toute particulière à mes amis et anciens camarades, mathématiciens ou non, pour leur soutien sans failles, Alexia, Alicia, Anthony, Arnaud, Aurélie, Charlotte, Diego, Jhih-Huang, Jim, Maxime, Miguel, Nicolas, Rémi, Thibault, Xavier, pour ne citer qu'eux.

Ces derniers mots iront à mes parents Danièle et Marc, et à ma sœur Claire pour leur bienveillance en toutes circonstances.

Table des matières

Introduction **7**
I Groupes pseudo-réductifs en caractéristique positive . . . 7
II Théorie de Bruhat-Tits . . . 8
III Groupes profinis et sous-groupes de congruence . . . 10
IV Principaux résultats de la thèse . . . 12
V Guide de lecture . . . 17

1 Préliminaires **19**
1.1 Groupes algébriques sur un corps quelconque . . . 19
1.1.1 Groupes algébriques affines . . . 19
1.1.2 Systèmes de racines et groupes radiciels d'un groupe réductif . . . 21
1.1.3 Déploiement, quasi-déploiement, (an)isotropie et ploiement . . . 23
1.1.4 Donnée de groupes radicielle . . . 25
1.1.5 Action-$*$ sur un diagramme de Dynkin . . . 26
1.1.6 Paramétrage des sous-groupes de rang 1 via les systèmes de Chevalley-Steinberg . . . 30
1.1.7 Simplicité . . . 35
1.1.8 Relations de commutation dans un groupe quasi-déployé . . . 35
1.2 Immeubles . . . 39
1.2.1 Systèmes de Coxeter et systèmes de Tits . . . 39
1.2.2 Immeubles et propriétés métriques . . . 40
1.3 Éléments de théorie de Bruhat-Tits . . . 42
1.3.1 Corps local . . . 42
1.3.2 Valuations d'une donnée de groupes radicielle . . . 44
1.3.3 Ensembles de valeurs . . . 45
1.3.4 L'immeuble de Bruhat-Tits attaché aux points rationnels . . . 49
1.3.5 Modèles entiers . . . 50
1.3.6 Système de Tits affine et bornologie . . . 51
1.4 Groupes profinis . . . 52
1.4.1 Définitions et exemples naturels . . . 52
1.4.2 Questions de présentation . . . 53
1.4.3 Sous-groupes profinis d'un corps local . . . 55

2 Sous-groupes compacts maximaux **57**
2.1 Introduction . . . 57
2.1.1 Existence de sous-groupes compacts maximaux . . . 57

2.1.2 Groupes algébriques sur des corps imparfaits . . . 58
2.1.3 L'apport de la topologie du corps de base . . . 59
2.2 Quelques extensions de groupes topologiques . . . 60
2.2.1 Groupes topologiques noethériens . . . 61
2.2.2 Une suite exacte déduite de morphismes de K-schémas . . . 62
2.2.3 Existence d'un sous-groupe pro-p ouvert . . . 62
2.3 Sous-groupes compact et ouverts . . . 63
2.4 Groupes quasi-réductifs . . . 67
2.4.1 Le cas d'un groupe commutatif quasi-réductif . . . 68
2.4.2 Le cas d'un groupe pseudo-réductif . . . 68
2.4.3 Cas général . . . 70
2.5 Démonstration de l'équivalence du théorème . . . 70

3 Sous-groupes pro-p maximaux **75**
3.1 Introduction . . . 75
3.1.1 Conjugaison et description des sous-groupes pro-p maximaux . . . 76
3.1.2 Utilisation des immeubles et des modèles entiers . . . 76
3.2 Démonstration du théorème de conjugaison . . . 77
3.3 Modèles entiers . . . 79
3.3.1 Noyau du morphisme de réduction . . . 80
3.3.2 Sous l'hypothèse de simple connexité . . . 82
3.3.3 Donnée de groupes radicielle valuée dans le cas d'un groupe simplement connexe quasi-déployé . . . 82
3.4 Description utilisant l'action sur l'immeuble . . . 83
3.5 Sous-groupes d'Iwahori . . . 84

4 Générateurs d'un pro-p Sylow **87**
4.1 Introduction . . . 87
4.1.1 Nombre minimal de générateurs . . . 87
4.1.2 Pro-p-Sylows et leurs sous-groupes de Frattini . . . 89
4.1.3 Structure de ce chapitre . . . 90
4.2 Sous-groupes de rang 1 . . . 92
4.2.1 Le cas réduit . . . 93
4.2.2 Le cas non réduit . . . 95
4.3 Théorie de Bruhat-Tits : cas quasi-déployé . . . 104
4.3.1 Description d'une alcôve fondamentale par ses cloisons . . . 104
4.3.2 Nombre d'alcôves dans un résidu de cloison . . . 108
4.3.3 Action sur une boule combinatoire unité . . . 110
4.4 Calculs en rang supérieur . . . 114
4.4.1 Relations de commutation des groupes radiciels d'un groupe quasi-déployé . . . 114
4.4.2 Génération d'éléments unipotents grâce aux relations de commutation entre sous-groupes valués des groupes radiciels . . . 120
4.5 Ensemble minimal de générateurs . . . 132
4.5.1 Le sous-groupe de Frattini . . . 132
4.5.2 Nombre minimal de générateurs . . . 134

Index **139**

Index des notations **141**

Bibliographie **144**

Introduction

L'objectif principal de cette thèse est de présenter les sous-groupes pro-p maximaux du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique linéaire défini sur un corps local de caractéristique résiduelle p, par un système de générateurs et relations topologiques. On se pose tout d'abord la question du cadre de ce travail. Il s'agit notamment de trouver des conditions algébriques qui garantissent l'existence et la conjugaison des sous-groupes pro-p maximaux qui jouent un rôle analogue à celui des p-groupes de Sylow d'un groupe fini. Afin de modérer la diversité des cas à considérer, on s'appuiera fortement sur la théorie de Bruhat-Tits qui nous permet d'établir des preuves uniformes, ne dépendant ni de la caractéristique du corps, ni de la classe d'isomorphisme du groupe algébrique considéré.

Dans cette introduction, on va présenter quelques motivations à ce travail et aux outils qu'il fait intervenir. Les définitions précises des objets mathématiques seront ensuite données au chapitre 1, qui résume les différents éléments, de structure des groupes, sur lesquels ce travail s'appuie.

I Groupes pseudo-réductifs en caractéristique positive

Un groupe algébrique linéaire (lisse) est une variété algébrique affine (lisse) munie de morphismes, réguliers pour la structure algébrique en question, satisfaisant aux axiomes donnant une structure de groupe. On peut également considérer les groupes algébriques linéaires comme des schémas en groupes affines définis sur un anneau k. Sauf mention explicite du contraire, on supposera toujours que k est un corps. Au sein des groupes algébriques linéaires, on distingue deux classes, à savoir les groupes semi-simples et réductifs (voir définition 1.1.1), qui ont des propriétés remarquables en théorie des représentations. La situation devient plus compliquée lorsque le corps de base k n'est pas parfait comme le mentionne Tits dans un cours au Collège de France [Tit13]. Par exemple, si l'on travaille sur un corps de base k imparfait, avec un groupe algébrique linéaire G connexe, alors la densité des points rationnels $G(k)$ dans la variété algébrique G peut être mise en défaut. Certains groupes ne sont pas unirationnels, comme on peut le voir sur plusieurs exemples dans [CGP15, 11.3]. De même, il se peut que G n'admette aucun sous-groupe algébrique non trivial qui soit unipotent, connexe, distingué et défini sur k, bien que G ne soit pas réductif. On parle alors de groupes pseudo-réductifs (voir définition 1.1.1). Une des raisons de ce défaut provient de l'impossibilité de pouvoir définir convenablement une décomposition de Jordan sur un corps imparfait. En quelque sorte, il faut des extensions purement inséparables pour déployer la partie unipotente alors qu'il suffit d'extensions

séparables pour déployer la partie semi-simple (ce qui permet d'appliquer des descentes galoisiennes).

Plus récemment, la situation sur un corps imparfait a connu un essor, grâce aux travaux de Conrad, Gabber et Prasad [CGP15] sur la structure des groupes pseudo-réductifs. Ces travaux font valoir des présentations standard de ces groupes, qui permettent de se rapprocher de la situation déjà connue des groupes réductifs. Un élément important est la restriction de Weil, dont les propriétés sont étudiées dans [BLR90] par exemple. Une présentation standard consiste en une certaine « chirurgie » sur un sous-groupe de Cartan de la restriction de Weil d'un groupe réductif. Les présentations standard permettent de décrire tous les groupes pseudo-réductifs (sauf en caractéristique 2 et 3), donnant alors une classification, modulo celle des groupes commutatifs, qui s'appuie sur les classifications déjà existantes des groupes réductifs. La classification des groupes pseudo-réductifs a été achevée tout récemment, modulo celle des groupes commutatifs, dans [CP16].

La théorie de structure des groupes pseudo-réductifs possède de nombreuses applications. L'étude des systèmes de racines des groupes quasi-réductifs (voir définition 1.1.12) permet d'établir l'existence d'une décomposition de Bruhat et d'un système de Tits sphérique (voir définition 1.2.2) des points rationnels d'un groupe algébrique connexe défini sur un corps quelconque en toute généralité [CGP15, C.2.20]. Conrad obtient de nombreux résultats tels que la finitude du nombre de classes [Con12, 1.3.1], le critère de compacité de Godement [Con12, A.5.5] ou encore la finitude des nombres de Tamagawa [Con12, 1.3.6], pour lesquels les références classiques se limitent au cas des groupes réductifs [PR94], [Mar91], ou unipotents [Oes84], quand la caractéristique du corps de base est non nulle.

Il reste néanmoins de nombreuses difficultés, en caractéristique positive, à passer du cas des groupes pseudo-réductifs au cas des groupes algébriques en général. Tout d'abord, on peut remarquer la complexité de la classification des groupes unipotents. Russell classifie, dans [Rus70], les formes de $\mathbb{G}_a$ au moyen des p-polynômes. On peut observer que les ensembles de cohomologie de ces groupes peuvent être infinis (pour les formes non déployées) bien que $H^1(k, \mathbb{G}_a) = 0$. On pourra trouver une étude approfondie des groupes unipotents et de leurs points rationnels dans [Tit68], [BoT71] ou encore [KMT74], reprise dans l'annexe [CGP15, B]. Une autre difficulté est la non-existence de facteurs de Levi en toute généralité. On trouvera un exemple dans [CGP15, A.6]. Pour résoudre le problème de l'extension, on pourrait également s'intéresser au groupe de Picard dont la question de la représentabilité est traitée dans [BLR90]. Ce groupe de Picard est calculé pour les formes de $\mathbb{G}_a$ dans [Ach16].

II Théorie de Bruhat-Tits

Lorsqu'on part d'un corps de base qui est un corps de nombres $k/\mathbb{Q}$, on peut naturellement le compléter par rapport à chacune de ses places $v \in \mathcal{V}$. Étant donnée une k-variété X, le principe local-global vise à relier la question de l'existence de points rationnels sur k de X à l'existence de points rationnels de X sur le complété k_v de k par rapport à toute place $v \in \mathcal{V}$. Partant d'un groupe algébrique G défini sur k, l'existence de points rationnels est automatiquement donnée par celle de l'élément neutre. La question suivante est alors de savoir s'il y a suffisamment de points rationnels. On dit que X vérifie l'approximation faible en dehors d'un ensemble fini de places S si le plongement diagonal

$X(k) \to \prod_{v \in \mathcal{V} \setminus S} X(k_v)$ est dense (on peut aussi définir l'approximation forte en utilisant les adèles de k). Si $X = G$ est un groupe algébrique connexe, alors il vérifie l'approximation faible en dehors d'un ensemble fini S, d'après [PR94, Thm. 7.7], et on peut même supposer $S = \emptyset$ lorsque G est simplement connexe ou adjoint. On peut également se poser ce type de questions lorsque k est le corps de fonctions d'une courbe algébrique sur un corps fini. Ceci nous motive alors à étudier les groupes algébriques définis sur un corps local, c'est-à-dire le complété d'un corps de nombres ou d'un corps de fonctions d'une courbe algébrique sur un corps fini. On suppose désormais que le corps de base est un corps local ou, de manière équivalente, une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{F}_p((t))$. On le note K pour distinguer cette hypothèse du cas d'un corps quelconque k et le nombre premier p est appelé la caractéristique résiduelle de K.

Pour les groupes réductifs déployés sur un corps quelconque k, on dispose d'une classification dont l'invariant classifiant est appelé une donnée radicielle [Spr98] et s'appuie principalement sur la classification des systèmes de racines [Bou81]. Sans l'hypothèse de déploiement, on dispose encore de certaines classifications (à isogénie près) lorsqu'on précise le corps de base : on définit des indices de Tits portant sur le noyau anisotrope, donnés dans [Tit66] ou [Spr98, 17]. Sur un corps local, cette classification devient celle énoncée dans [Tit79] et est reprise dans un cours donné par Tits au Collège de France [Tit13]. Ces dernières classifications reposent sur la construction, d'une part, d'un espace doté d'une structure polysimpliciale $X(G, K)$ ayant des propriétés de symétrie remarquables et, d'autre part, d'une action ayant de bonnes propriétés de $G(K)$ sur cet espace. On appelle cet espace l'immeuble de Bruhat-Tits de G sur K. L'espace $X(G, K)$ est muni d'une structure d'espace métrique complet et contractile ayant une propriété de courbure négative ou nulle. D'une certaine manière, les immeubles de Bruhat-Tits sont l'équivalent sur un corps local des espaces symétriques riemanniens des groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut alors, oubliant les objets algébriques à l'origine de ces définitions, étudier les propriétés combinatoires et topologiques des immeubles. On peut trouver une étude des immeubles et de leurs propriétés combinatoires et topologiques dans [Rou09], [AB08] et [Ron89]. On dispose également, grâce aux travaux de Weiss [Wei09], d'une classification des immeubles indépendante de la théorie des groupes algébriques. L'intérêt principal d'introduire ces immeubles est qu'ils permettent souvent d'établir des énoncés — ou des démonstrations — uniformes, c'est-à-dire qui ne consistent pas en une étude, au cas par cas, s'appuyant sur les classifications précédentes.

D'une action fortement transitive et préservant le type (voir section 1.2) d'un groupe G sur un immeuble X, on peut déduire un système de Tits de G et réciproquement. Comme on le verra en définition 1.2.2, un système de Tits est une donnée combinatoire sur les points rationnels, très utile pour obtenir, par exemple, des résultats de simplicité sur le groupe des points rationnels modulo son centre. Cette correspondance a été établie dans [BrT72] et reprise dans [Bro89]. L'existence d'un système de Tits est fortement reliée à celle d'une décomposition de Bruhat. Lorsque l'immeuble est affine et que l'action est continue et propre, on dispose alors de davantage d'informations sur la structure des points rationnels $G(K)$. On peut naturellement s'interroger sur la nature topologique (compacité) des cellules de la décomposition de Bruhat.

En utilisant la construction standard des groupes pseudo-réductifs, il semble possible d'attacher un immeuble aux points rationnels d'un groupe pseudo-réductif. Néanmoins, aucune référence ne fait actuellement mention d'une telle construction. Pour le passage au

cas général, la situation devrait être beaucoup plus délicate en raison de la non finitude du H^1 d'un groupe unipotent et de l'existence de groupes pseudo-réductifs non standard en caractéristiques 2 et 3. Même si l'on parvient alors à exhiber une action fortement transitive d'un groupe algébrique sur un immeuble affine, il resterait encore à traiter la question de la « canonicité » d'une telle construction (alors même que l'on dispose d'une certaine liberté dans le choix de la présentation standard d'un groupe pseudo-réductif [CGP15, 4]). Landvogt, dans [Lan00], a étudié cette question de la fonctorialité en G et K, lorsque G est un groupe réductif.

Enfin, par analogie à la situation des groupes réductifs sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on s'intéresse à la compacité du groupe des points rationnels et aux sous-groupes compacts du groupe des points rationnels. Plus spécifiquement, on s'intéresse aux sous-groupes compacts maximaux dont l'existence est donnée, pour les groupes réductifs, par un théorème attribué à Langlands dans [Bru64] et repris dans [PR94]. On peut également s'interroger sur la structure topologique de ces groupes compacts comme le fait Pink dans [Pin98].

Un autre aspect essentiel de la théorie de Bruhat-Tits, dans [BrT84], est la construction de modèles entiers d'un groupe réductif G défini sur K. Ces modèles permettent de retrouver les stabilisateurs de parties de l'immeuble, ou de définir les sous-groupes parahoriques et les sous-groupes d'Iwahori de $G(K)$. On verra que la connexité de la fibre spéciale est reliée à la simple connexité de G. Ces modèles entiers sont repris dans de nombreuses références telles que [PY02] et permettent la mise en place des filtrations de Moy-Prasad [MP96]. La principale difficulté est d'établir l'existence des modèles entiers d'un sous-groupe de Cartan de G. Une construction alternative à celle de Bruhat-Tits est donnée par Landvogt [Lan96] et s'appuie sur les travaux de Bosch, Lutkebohmert et Raynaud sur les modèles de Néron [BLR90].

III Groupes profinis et sous-groupes de congruence

Un groupe profini est un groupe compact totalement discontinu. Ainsi, les sous-groupes compacts des groupes $G(K)$ précédemment évoqués fournissent de nombreux exemples de groupes profinis. De manière équivalente, il s'agit des limites projectives de groupes finis. D'autres exemples importants sont les groupes de Galois absolus. De nombreux résultats classiques des groupes finis se généralisent, sous de bonnes hypothèses, aux groupes profinis (théorèmes de Sylow, inégalité de Golod-Shafarevich, ...). Dans une considération plus proche de la théorie des groupes, on s'intéresse naturellement aux groupes pro-p. Pour un groupe semi-simple G défini sur un corps local K, les sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$ sont deux à deux conjugués, d'après un théorème dû à Matsumoto [Mat66], et jouent un rôle analogue, par de nombreux aspects, à celui des p-groupes de Sylow d'un groupe fini. On observe également que le normalisateur d'un pro-p-Sylow (qui se trouve être un sous-groupe d'Iwahori) se comporte comme le normalisateur d'un sous-groupe de Sylow d'un groupe fini. L'étude des groupes pro-p et de leur possible linéarité tient une place centrale dans l'étude des groupes profinis, comme on peut le trouver dans [DdSMS99] ou [LGM00].

Par ailleurs, plaçons-nous à nouveau dans le cadre d'un corps global k et notons $\mathcal{V}$ l'ensemble de ses places. Soient $R \leq k$ un anneau de Dedekind borné sauf sur un ensemble fini de places $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ et G un groupe algébrique défini sur R. Pour toute place

$v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$, on considère la v-complétion R_v de l'anneau R. On obtient un groupe complet $\widetilde{G(R)} = \prod_{v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}} G(R_v)$. On dispose également d'une complétion profinie $\widehat{G(R)}$ de $G(R)$ (la limite projective des quotients par les sous-groupes distingués d'indice fini). Le *problème du sous-groupe de congruence* est de savoir si tout sous-groupe d'indice fini de $G(R)$ contient un sous-groupe de la forme $\ker\Big(G(R) \to G(R/I)\Big)$ avec I un idéal de R ou, ce qui revient au même, si l'application naturelle $\widehat{G(R)} \to \widetilde{G(R)}$ est surjective de noyau fini. Par exemple, lorsque $G = \mathrm{SL}_{n,\mathbb{Z}}$ avec $n \geq 2$ et $R = \mathbb{Z}$, par un théorème de Matsumoto [Mat69], l'application surjective $\widehat{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})} \to \prod_p \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ a un noyau fini si, et seulement si, $n \geq 3$. Cette question est abordée par Prasad et Raghunathan (voir [PR84a] et [PR84b]), par le calcul de $H^2\Big(G(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)$.

Le sous-groupe de Frattini tient également une place centrale dans l'étude des présentations des groupes profinis. C'est un groupe qui est formé des éléments non-générateurs (au sens topologique, voir définition 1.4.5) et qui se comporte comme le radical de Jacobson en algèbre commutative.

Le quotient d'un groupe pro-p par son sous-groupe de Frattini est un groupe abélien p-élémentaire qui, vu comme espace vectoriel, est de dimension égale au nombre minimal de générateurs topologiques. En ce sens, ce quotient de Frattini est l'analogue pro-p adéquat de l'abélianisé d'un groupe discret [Bro94, II.2]. D'ailleurs, on dispose d'une interprétation cohomologique du nombre minimal de générateurs, ou du nombre minimal de relations pour présenter un groupe pro-p [Ser94].

Dans le cadre des groupes profinis, les questions de présentation (au sens topologique) semblent mieux se comporter que dans le cadre des groupes finis (présentés au sens abstrait). Par exemple, pour les groupes profinis de présentation finie, Lubotzky a montré que l'on peut réaliser le nombre minimal de générateurs et le nombre minimal de relations par une même présentation [Lub01, 2.5]. Par ailleurs, soit P un groupe pro-p de présentation finie. Notons $d(P)$ (resp. $r(P)$) le nombre minimal de générateurs (resp. de relations) d'une présentation de P. Une motivation pour connaître $d(P)$ et $r(P)$ est que ces quantités interviennent dans des critères numériques décidant l'analycité ou non de P sur des corps non archimédiens (voir [DdSMS99] sur $\mathbb{Q}_p$ ou [LS94] pour des généralisations).

Dans le cadre des groupes finis linéaires, des références classiques donnent alors des bornes explicites à la somme du nombre minimal de générateurs et de relations [GKKL11]. Les questions analogues dans le cadre profini consistent à borner uniformément cette même somme par des présentations topologiques des sous-groupes compacts maximaux des groupes algébriques linéaires sur des corps non archimédiens (voir [CLR16] dans le cas des groupes simples déployés). Le présent travail porte sur le nombre minimal de générateurs d'un sous-groupe pro-p maximal d'un groupe algébrique simple défini sur un corps local non archimédien. Dans le cas déployé, une borne linéaire en le rang est fournie dans [CR14] au moyen de méthodes de théorie de Lie de dimension infinie. Ici, nous devons utiliser la théorie de Bruhat-Tits tout entière (immeubles et modèles entiers) pour obtenir des estimations similaires (i.e. linéaires en un certain rang) portant sur des groupes non déployés.

IV Principaux résultats de la thèse

Cette thèse est articulée autour de quatre chapitres. Le chapitre 1 introduit plusieurs définitions utiles tout au long de ce travail et ne comporte pas de résultats originaux. Le chapitre 2 s'intéresse aux sous-groupes compacts (maximaux ou non) du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique linéaire défini sur un corps local. Le chapitre 3 donne différentes descriptions des sous-groupes pro-p maximaux d'un groupe semi-simple, dont la plupart sont encore valables pour des groupes réductifs. Le chapitre 4 est consacré à la description du sous-groupe de Frattini d'un sous-groupe pro-p maximal du groupe des points rationnels d'un groupe semi-simple, simplement connexe, quasi-déployé, défini sur un corps local.

Définitions préliminaires

Dans le chapitre 1 de cette thèse, on rappelle un certain nombre de définitions et notations, introduites par Borel, Bruhat et Tits, concernant la structure des groupes algébriques et de leurs points rationnels.

En section 1.1, on rappelle les définitions des différentes classes de groupes algébriques (semi-simple, réductif, pseudo-réductif, quasi-réductif) qui interviennent naturellement au chapitre 2 par dévissage d'un groupe algébrique linéaire connexe quelconque. On rappelle également les différentes notions de déploiement d'un groupe algébrique selon sa nature (diagonalisable, unipotent, résoluble, réductif). Enfin, pour les groupes réductifs, on rappelle comment définir un système de racines Φ (qui est un invariant du groupe par isomorphisme) relatif au corps de base, ainsi qu'une action du groupe de Galois absolu sur ce système de racines qui fournit davantage d'informations sur la structure du groupe. On s'appuie alors sur cette action du groupe de Galois absolu sur le système de racines relatif pour établir des « relations de commutation », via des paramétrages des groupes radiciels U_a relatifs à un tore maximal T défini sur K, qui décrivent finement la structure d'un groupe réductif quasi-déployé.

En section 1.2, indépendamment de la section précédente, on introduit le vocabulaire combinatoire et topologique des immeubles et des systèmes de Tits. En section 1.3, on rappelle alors la méthode de Bruhat-Tits consistant à attacher un immeuble aux points rationnels d'un groupe réductif et une action convenable de ce groupe sur cet immeuble. En particulier, on rappelle, pour chaque racine $a \in \Phi$, l'existence d'une exhaustion décroissante par des sous-groupes $U_{a,l}$, pour $l \in \mathbb{R}$, du groupe de points rationnels du groupe (unipotent) radiciel U_a. On définit des ensembles de valeurs Γ_a et Γ'_a déterminant les sauts dans la filtration. On introduit certaines fonctions $f_\Omega : \Phi \to \mathbb{R}$, pour Ω une partie d'un appartement standard $\mathbb{A}$ servant de modèle d'appartement dans la construction de l'immeuble de Bruhat-Tits. On utilise les filtrations et les fonctions f_Ω pour définir une action de $G(K)$ sur l'immeuble $X(G,K)$. On présente également différents modèles entiers $\mathfrak{G}_\Omega$ du groupe algébrique, utiles notamment pour s'intéresser plus finement à la structure du groupe des points rationnels.

En section 1.4, on rappelle quelques définitions élémentaires sur les groupes profinis. On donne notamment une définition précise de présentation au sens profini (ou pro-p) d'un tel groupe. On précise alors quelques questions et enjeux naturels de la théorie.

Existence de sous-groupes compacts maximaux

Au chapitre 2, on s'interroge sur l'existence de sous-groupes compacts maximaux du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique linéaire général.

En section 2.2, on introduit la notion de groupe topologique noethérien (ceux qui satisfont la propriété de chaîne ascendante sur les sous-groupes ouverts) dont on étudie le comportement vis-à-vis des morphismes de groupes topologiques (i.e. continus).

En section 2.3, on étudie le lien que les sous-groupes compacts et ouverts des points rationnels $G(K)$ d'un groupe semi-simple G ont avec l'immeuble $X(G,K)$. On décrit géométriquement les sous-groupes compacts maximaux dans ce contexte, via la théorie de Bruhat-Tits introduite en section 1.3.

En section 2.4, on démontre que le groupe des points rationnels d'un groupe quasi-réductif est un groupe topologique noethérien.

Enfin, en section 2.5, on aboutit au résultat suivant :

Théorème A (Théorème 2.1.5 et corollaire 2.1.6)**.** *Soient K un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et G un K-groupe algébrique affine lisse. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) la composante neutre G^0 de G est un K-groupe quasi-réductif ;

(ii) le groupe topologique $G(K)$ est noethérien ;

(iii) $G(K)$ possède un sous-groupe compact maximal ;

(iv) $G(K)$ possède un sous-groupe pro-p maximal.

De plus, si G satisfait ces conditions équivalentes, alors on a :

(1) Tout sous-groupe pro-p (resp. compact) de $G(K)$ est contenu dans un sous-groupe pro-p (resp. compact) maximal de $G(K)$.

(2) Tout sous-groupe pro-p (resp. compact) maximal de $G(K)$ est ouvert.

(3) $G(K)$ est abstraitement engendré par une partie compacte.

En particulier, on note que le point (3) de ce théorème étend partiellement, en caractéristique quelconque, un résultat de Borel et Tits [BoT65, 13.4]. Pour savoir précisément quels sont les groupes algébriques linéaires dont les points rationnels sont compactement engendrés, il resterait à comprendre, en général, l'action d'un groupe algébrique linéaire sur son K-radical unipotent déployé (voir définition 1.1.12).

Sous-groupes pro-p maximaux

Au chapitre 3, on s'intéresse aux sous-groupes pro-p maximaux d'un groupe réductif G défini sur un corps local K. On décrit, par différents moyens, les sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$. Afin d'avoir des descriptions de plus en plus précises, on suppose successivement que G est semi-simple, puis simplement connexe, puis quasi-déployé.

En section 3.2, on présente une démonstration immobilière de la conjugaison des sous-groupes pro-p maximaux. On observe, en utilisant les résultats de la section 2.3, que tout sous-groupe pro-p de $G(K)$ stabilise globalement une alcôve. Par transitivité de l'action de $G(K)$ sur les alcôves de l'immeuble $X(G,K)$, on obtient le théorème suivant :

Théorème B (Théorème 3.1.1)**.** *Soit K un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Soit G un K-groupe réductif. Les sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$ sont deux à deux conjugués.*

Soit P un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$. Il existe un modèle entier convenable $\mathfrak{G}$ de G tel que P se réalise comme l'image réciproque $\pi^{-1}(Q)$, par le morphisme $\pi : \mathfrak{G}(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \mathfrak{G}(\kappa)$ provenant du morphisme de réduction, d'un p-sous-groupe de Sylow Q du groupe fini $\mathfrak{G}(\kappa)$.

Plus précisément, il s'agit, par exemple, du modèle entier $\mathfrak{G}$ (non nécessairement connexe) dont le groupe de points entiers $\mathfrak{G}(\mathcal{O}_K)$ est le stabilisateur de l'isobarycentre d'une alcôve (on verra qu'elle est unique) stabilisée par le sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$.

En section 3.3, on décrit plus précisément les sous-groupes pro-p maximaux, lorsque G est semi-simple, au moyen de modèles entiers. On complète cette étude, en section 3.4, grâce à la théorie de Bruhat-Tits décrivant localement l'action des groupes radiciels sur l'immeuble. On obtient le théorème suivant :

Théorème C (Théorème 3.1.2)**.** *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe semi-simple. Si P est un sous-groupe de $G(K)$, alors P est un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ si, et seulement si, il existe une alcôve $\mathbf{c} \subset X(G,K)$ telle que P est un sous-groupe pro-p maximal du stabilisateur de $\mathbf{c}$.*

De plus, une telle alcôve $\mathbf{c}$ est uniquement déterminée par P et l'ensemble des points fixés par l'action de P sur $X(G,K)$ est contenu dans l'adhérence simpliciale (aussi appelée enclos et notée $\mathrm{cl}(\mathbf{c})$) de $\mathbf{c}$.

En particulier, on a une application surjective naturelle de l'ensemble des sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$ vers l'ensemble des alcôves de $X(G,K)$. Lorsque G est simplement connexe, cette application est une bijection.

Lorsque G est simplement connexe, le comportement « local » de l'action de $G(K)$ sur son immeuble est plus « rigide ». En quelque sorte, l'hypothèse de simple connexité sur G vis-à-vis de son immeuble affine de Bruhat-Tits est assez similaire à l'hypothèse de connexité sur G vis-à-vis de son immeuble sphérique. On trouvera un exemple plus précis de ce phénomène dans [BrT84, 5.2.11].

Théorème D (Théorème 3.1.3)**.** *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe semi-simple simplement connexe.*

Tout sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ est conjugué à :

$$P_{\mathbf{c}}^{+} = \ker\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \overline{\mathfrak{G}}_{\mathbf{c}}^{\mathrm{red}}(\kappa)\right)$$

où $\mathbf{c} \subset \mathbb{A}$ désigne une alcôve de l'appartement standard, κ désigne le corps résiduel de K et $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathbf{c}}^{\mathrm{red}}$ désigne le quotient réductif de la fibre spéciale du modèle entier associé à $\mathbf{c}$ (notation définie en section 3.3.1).

Enfin, lorsque G est, de plus, quasi-déployé, la donnée de groupes radicielle valuée sur $G(K)$ fournit une description assez précise des sous-groupes pro-p maximaux, grâce aux valuations des groupes radiciels.

Proposition E (Propositions 3.3.8 et 3.3.9)**.** *Le groupe $P_{\mathbf{c}}^+$ admet la structure de produit directement engendré suivante :*

$$P_{\mathbf{c}}^+ = \left(\prod_{a \in \Phi_{\mathrm{nd}}^+} U_{-a, f_{\mathbf{c}}(-a)} \right) \cdot T(K)_b^+ \cdot \left(\prod_{a \in \Phi_{\mathrm{nd}}^+} U_{a, f_{\mathbf{c}}(a)} \right)$$

où $f_{\mathbf{c}}(a)$ est une valeur définie en notation 1.3.17, où Φ_{nd} est l'ensemble des racines non divisibles du système de racines relatif Φ et où $T(K)_b^+ = P_{\mathbf{c}}^+ \cap T(K)_b$ désigne le sous-groupe pro-p maximal (unique) du groupe de points rationnels du tore maximal T.

De plus, on a l'isomorphisme de groupes topologiques suivant :

$$\begin{array}{rccc} \prod_{a \in \Delta} \hat{a}^\vee : & \prod_{a \in \Delta} (1 + \mathfrak{m}_{L_a}) & \to & T(K)_b^+ \\ & (t_a)_{a \in \Delta} & \mapsto & \prod_{a \in \Delta} \hat{a}^\vee(t_a) \end{array}$$

où $\hat{a} = 2a$ si $2a \in \Phi$, et $\hat{a} = a$ sinon ; $\hat{a}^\vee$ désigne la coracine de la racine $\hat{a}$; L_a est le corps de déploiement de a (voir définition 1.1.18) et $\mathfrak{m}_{L_a}$ est l'idéal maximal de l'anneau des entiers de L_a.

En section 3.5, on retrouve alors la description des sous-groupes d'Iwahori donnée par Prasad [Pra89, 0.5] : ce sont les normalisateurs des sous-groupes pro-p maximaux. C'est un comportement très similaire à celui observé pour les p-sous-groupes de Sylow d'un groupe linéaire fini.

Système minimal de générateurs d'un sous-groupe pro-p maximal

Au chapitre 4, on cherche un système de générateurs topologiques d'un sous-groupe pro-p maximal P. Pour cela, on va décrire le sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(P)$ de P.

En section 4.2, on traite le cas d'un groupe G semi-simple de rang 1. On discutera suivant que le système de racines du groupe est réduit ou non.

En section 4.3, on s'intéresse à l'action de $\mathrm{Frat}(P)$ sur l'immeuble de Bruhat-Tits $X(G, K)$. On s'appuie sur les résultats de la section 3.4. On y définit une certaine racine $\theta \in \Phi$, utile dans le cadre des descriptions combinatoires des alcôves.

En section 4.4, on utilise les relations de commutation, introduites en section 1.1.8, pour obtenir une description du sous-groupe de Frattini en termes des filtrations des groupes radiciels, de manière analogue à la description des groupes pro-p maximaux obtenue en section 3.3.3, souvent avec un cran de décalage dans les filtrations.

En section 4.5, on synthétise les différentes étapes pour obtenir les descriptions suivantes :

Théorème F (Théorèmes 4.5.1 et 4.5.2 et proposition 4.2.4)**.** *Soit G un groupe semi-simple, simplement connexe, quasi-déployé, défini sur un corps local non archimédien K de caractéristique résiduelle p. On suppose que $p \neq 2$. Si Φ est de type G_2 ou BC_l, on suppose que $p \geq 5$. Alors :*

***Description profinie** : Le groupe pro-p P est topologiquement de type fini et, en particulier, $\mathrm{Frat}(P) = P^p[P, P]$. De plus, lorsque K est de caractéristique $p > 0$, on a $P^p \subset [P, P]$.*

***Description via la donnée de groupes radicielle valuée** : On suppose que le système de racines relatif Φ n'est pas de type BC_1.*

Pour toute racine $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ non divisible, on pose :

— $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,\mathbf{c}}$, *si* $a \notin \Delta \cup \{-\theta\}$;

— $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)^+} U_{2a,2f'_{\mathbf{c}}(a)}$, *si* $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$ *est multipliable, si* L_a/L_{2a} *est non ramifiée et si* $f'_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma'_a$;

— $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)^+}$ *sinon* ;

où $f'_{\mathbf{c}}(a)$ *et* $f'_{\mathbf{c}}(a)^+$ *sont des valeurs définies en notation 1.3.17. Ce groupe* $V_{a,\mathbf{c}}$ *ne dépend que de la racine* a *et de l'alcôve* $\mathbf{c}$*, pas de la base* Δ *choisie.*

Alors $\mathrm{Frat}(P) = \left(\prod_{a \in \Phi^-_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}} \right) T(K)^+_b \left(\prod_{a \in \Phi^+_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}} \right)$.

Description géométrique *: Si le système de racines relatif* Φ *est réduit, alors le sous-groupe de Frattini* $\mathrm{Frat}(P)$ *est le sous-groupe pro-p maximal du stabilisateur point par point dans* $G(K)$ *de la boule combinatoire unité centrée en* $\mathbf{c}$.

On en déduit alors, en étudiant le quotient $P/\mathrm{Frat}(P)$, une famille minimale de générateurs topologiques. Le nombre minimal de générateurs topologiques est donné par le résultat suivant :

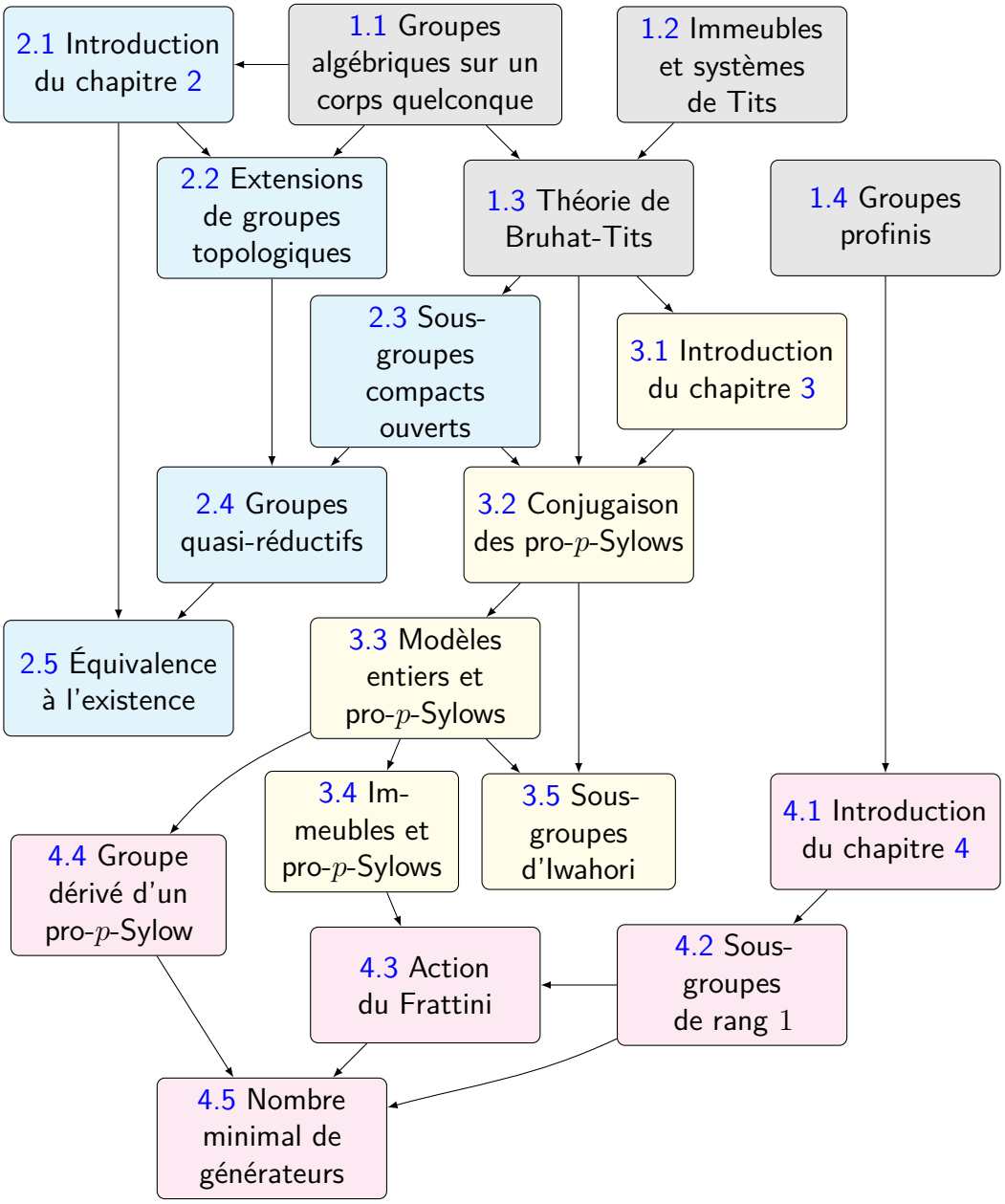
Corollaire G (Corollaire 4.5.4)**.** *Comme précédemment, on suppose que* K *est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle* p*. On suppose que* G *est un* K*-groupe* K*-simple, simplement connexe, quasi-déployé, et que* $p \neq 2$*. On utilise la notation 1.1.15 sur les extensions de corps. Soient* n *le rang d'un sous-système de racines irréductible maximal (tous isomorphes) du système de racines absolu* $\tilde{\Phi}$ *et* l *le rang du système de racines relatif* Φ*. Soient* f *le degré résiduel de* L_d/K *et* $m = \log_p\left(\mathrm{Card}(\kappa)\right)$.

(1) On suppose que Φ *n'est pas de type* BC_1*. Si* Φ *est de type* G_2 *ou si* Φ *est non réduit, on suppose, de plus, que* $p \geq 5$*. Si* L'/L_d *est ramifiée, alors* $d(P) = mf(l+1)$ *; si* L'/L_d *est non ramifiée, alors* $d(P) = mf(n+1)$.

(2) On suppose que Φ *est de type* BC_1 *et que* $p \geq 5$*. Si* L'/L_d *est ramifiée, alors* $2mf \leq d(P) \leq 6mf$ *; si* L'/L_d *est non ramifiée, alors* $3mf \leq d(P) \leq 9mf$.

V Guide de lecture

Bien que l'ordre linéaire soit un ordre tout à fait acceptable, on indique au lecteur le guide de lecture suivant, que l'on détaille en section 4.1.3, en ce qui concerne le chapitre 4. Ce guide reprend les différentes étapes précédemment mentionnées et les liens qui coexistent entre elles.



Chapitre 1

Préliminaires et notations

Dans ce chapitre, on introduit et on rappelle les définitions plus ou moins élémentaires, utilisées tout au long du document.

Comme d'habitude, on notera $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ les ensembles des entiers respectivement naturels, naturels non nuls et relatifs. On notera également $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les corps de nombres respectivement rationnels, réels et complexes.

1.1 Groupes algébriques sur un corps quelconque

Dans toute la suite, par souci de clarté et pour distinguer les résultats propres à la topologie du corps de base, on désignera par la lettre minuscule k un corps quelconque. On la distinguera de la lettre majuscule K qui désignera toujours un corps local non archimédien. La lettre grecque κ désignera toujours, quant à elle, un corps fini.

Pour toute la suite, on choisit une clôture séparable de k, notée k_s, et une clôture algébrique de k contenant k_s, notée $\overline{k}$; on note k_p la clôture parfaite de k contenue dans $\overline{k}$.

1.1.1 Groupes algébriques affines

On appelle k-**groupe algébrique affine** un k-schéma en groupes affines de type fini (au sens de [DG70, II.1.1]). Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, on supposera toujours qu'un k-**groupe algébrique affine** est lisse (ce qui coïncide avec la définition usuelle de [Bor91] par exemple, et on préférera la terminologie des schémas en groupes lorsqu'on travaillera sans hypothèse de lissité). On abrégera souvent le terme, par abus, en k-groupe. Un k-sous-groupe désignera un k-sous-schéma en groupes fermé lisse (sauf mention explicite du contraire). On définit également la notion d'action d'un schéma en groupes affine sur un schéma affine en imposant la commutativité des diagrammes usuels. La composante neutre d'un k-groupe, notée G°, désigne la composante connexe de l'élément neutre du k-groupe G. C'est un k-sous-groupe distingué.

Si G désigne un groupe algébrique linéaire, on le fait agir sur lui même par conjugaison. On considère un sous-groupe H de G. On note $\mathcal{N}_G(H)$ le **normalisateur** de H dans G et $\mathcal{Z}_G(H)$ le **centralisateur** de H dans G. En particulier, on rappelle que l'on peut effectivement définir de tels schémas en groupes affines et de type fini (car ils sont représentables, voir [DG70, II.1.3] par exemple) mais qu'ils ne sont pas nécessairement

lisses. Le groupe algébrique (non nécessairement lisse) $Z_G = \mathcal{Z}_G(G)$ (resp. $\mathcal{C}(G) = Z_G^\circ$ est appelé le **centre** (resp. **centre connexe**) de G.

Lorsque H_1 et H_2 sont deux k-sous-groupes d'un k-groupe algébrique G, avec H_1 connexe, on peut définir (voir [Bor91, 2.3]) le k-sous-groupe $[H_1, H_2]$ de G engendré par les commutateurs de la forme $[h_1, h_2] = h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ avec $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$. On définit alors le **groupe dérivé** d'un groupe connexe G par $\mathcal{D}(G) = [G, G]$. On dit que G est **résoluble** si la suite dérivée descendante définie par $G_0 = G$ et $G_{i+1} = \mathcal{D}(G_i)$ stationne en le groupe trivial.

Soient G, H des k-schémas en groupes affines de type fini et $(G_i)_{i\in I}$ une famille de k-groupes algébriques. Soit $\mu : H \to G$ un k-homomorphisme de schémas en groupes plat et surjectif. On dit que le k-morphisme μ est une **isogénie** si son noyau est un groupe fini ; que c'est une isogénie **centrale** si $\ker \mu \subset Z_G$. On dit que G est le produit **direct** (resp. **presque direct**, **directement engendré**) des G_i s'il existe un k-morphisme $\pi : \prod_{i\in I} G_i \to G$ qui est un isomorphisme de groupes (resp. une isogénie, un isomorphisme de variétés). En pratique, dans une telle écriture, les G_i désignent des sous-groupes de G et le morphisme π est induit par la multiplication.

On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ l'algèbre de Lie de G et $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe. Sur la clôture algébrique $\overline{k}$, on peut définir une décomposition de Jordan [Bor91, 4.5] d'un groupe algébrique $G_{\overline{k}} = G_s \cdot G_u$ où G_s et G_u sont des sous-ensembles de $G_{\overline{k}}$ constitués par l'ensemble des éléments respectivement semi-simples et unipotents. On dit que G est **unipotent** si $G_{\overline{k}} = G_u$. Dans ce cas, on peut descendre le $\overline{k}$-schéma $G_{\overline{k}} = G_u$ en un l-schéma pour une extension l/k finie purement inséparable.

Si l/k est une extension finie de corps (ou seulement finie plate d'anneaux noethériens ici), si G est un k-schéma en groupes, on note G_l le changement de base de k à l de G. Si H est un l-schéma en groupes, on définit [BLR90, 7.6] la **restriction de Weil** de l à k de H, notée $R_{l/k}(H)$ comme l'unique foncteur en groupes représentable solution du problème universel :

$$R_{l/k}(H)(A) = H(A \otimes_k l)$$

pour toute k-algèbre A. Le foncteur $R_{l/k}$ allant de la catégorie des l-schémas en groupes vers la catégorie des k-schémas en groupes est exact à gauche en tant qu'adjoint à droite du foncteur changement de base. On renvoie le lecteur à [CGP15, A.5] pour une étude plus approfondie des restrictions de Weil d'extensions de corps purement inséparables.

Soient G un k-schéma en groupes affine de type fini et H un k-sous-groupe distingué de G. On peut définir [CGP15, A.1.11] un k-schéma en groupes affine de type fini G/H et un k-morphisme quotient $G \to G/H$. Soit l/k une extension de corps. On définit le l-**radical résoluble** (resp. **unipotent**) de G comme le plus grand l-sous-groupe connexe fermé distingué et résoluble (resp. unipotent) de G_l. On le note $\mathcal{R}_l(G)$ (resp. $\mathcal{R}_{u,l}(G)$).

1.1.1 Définition. Soit G un k-groupe algébrique connexe. On dit que G est **semi-simple** (resp. **réductif**, **pseudo-réductif**) si son $\overline{k}$-radical résoluble (resp. $\overline{k}$-radical unipotent, k-radical unipotent) est trivial.

On remarque, en particulier, qu'un groupe réductif est toujours supposé connexe par cette définition. On rappelle qu'un groupe unipotent est résoluble. En particulier, un groupe semi-simple est réductif et un groupe réductif est pseudo-réductif. Les groupes quasi-réductifs (voir définition 1.1.12 ultérieure) constituent une classe plus générale encore au sein des groupes algébriques.

On note $\mathbb{G}_{m,k} = \mathrm{Spec}\Big(k[X, X^{-1}]\Big)$ le k-groupe multiplicatif, $\mathbb{G}_{a,k} = \mathrm{Spec}\Big(k[X]\Big)$ le k-groupe additif et $\mathrm{SL}_{n,k} = \mathrm{Spec}\left(\frac{k\Big[\{X_{i,j},\ 1\leq i,j\leq n\}\Big]}{\Big(\mathrm{dét}(X_{i,j})_{i,j}-1\Big)}\right)$ le k-groupe spécial linéaire des matrices carrées de taille n de déterminant 1.

On dit [Bor91, §8] qu'un k-groupe algébrique G est un k-**tore** (resp. tore k-**déployé**) s'il est diagonalisable (i.e. $G = G_s$ et G est commutatif) et connexe (resp. k-isomorphe à $\mathbb{G}_{m,k}^n$, le produit direct de n copies de $\mathbb{G}_{m,k}$). Soit T un tore k-déployé. On notera $X^*(T) = \mathrm{Mor}_{\text{gr-alg}}(T, \mathbb{G}_{m,k})$ son **réseau des caractères** (k-rationnels) et $X_*(T) = \mathrm{Mor}_{\text{gr-alg}}(\mathbb{G}_{m,k}, T)$ son **réseau des cocaractères**. On rappelle [Spr98, 3.2.11] qu'il existe un accouplement parfait $X^*(T) \times X_*(T) \to \mathbb{Z}$.

1.1.2 Systèmes de racines et groupes radiciels d'un groupe réductif

Les définitions de [Bou81, VI] sont supposées connues, en particulier, on utilisera librement les notions de système de racines réduit ou non réduit, de base d'un système de racines, de rang d'un système de racines, de racine positive et de demi-système de racines positif, de groupe de Weyl, de plus haute racine, de système de racines irréductible.

1.1.2.1 Système de racines relatif à k

On considère un k-groupe algébrique connexe G et un tore k-déployé maximal S de G. On définit pour tout caractère $a \in X^*(S)$, le sous-espace

$$\mathfrak{g}_a = \{X \in \mathfrak{g},\ \forall s \in S,\ \mathrm{Ad}(s)(X) = a(s)X\}$$

Par définition, on appelle **racine** un caractère $a \in X^*(S)$ pour lequel $\mathfrak{g}_a \neq \{0\}$. On notera $\Phi(G, S)$ l'ensemble de ces racines.

Lorsque G est réductif, $\Phi(G, S)$ constitue un système de racines [Bor91, 21.1], noté plus simplement Φ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Ce système de racines ne dépend pas du choix de S par conjugaison k-rationnelle des tores k-déployés maximaux [Bor91, 20.9 (ii)]. On l'appelle le **système de racines relatif** à k et ses éléments seront appelés des racines relatives.

En général, ce système de racines n'est pas réduit. On note $(a) = \mathbb{R}_+ a \cap \Phi$ le **rayon radiciel** d'une racine $a \in \Phi$. On rappelle qu'on a la disjonction : soit $(a) = \{a\}$, soit $(a) = \{a, 2a\}$, soit $(a) = \{\frac{1}{2}a, a\}$ [Bou81, VI.1.3 proposition 8].

1.1.2 Définition. On dit que $a \in \Phi$ est **multipliable** si $2a \in \Phi$, et que a est **non multipliable** sinon. On dit que $a \in \Phi$ est **divisible** si $\frac{1}{2}a \in \Phi$, et que a est **non divisible** sinon. En général, on désignera par les lettres latines a, b, c les racines relatives de G par rapport à k. Pour toute partie Ψ de Φ, on notera Ψ_{nd} l'ensemble des racines non divisibles de Ψ et Ψ_{nm} l'ensemble des racines non multipliables de Ψ.

Étant données deux racines distinctes a et b, on note $(a, b) = \{ra + sb \in \Phi,\ r, s \in \mathbb{N}^*\}$. On dira qu'une partie Ψ de Φ est **close** si pour tout $a, b \in \Psi$, on a l'inclusion $(a, b) \subset \Psi$; et que Ψ est **positivement close** si Ψ est close et s'il existe un demi-espace contenant Ψ.

1.1.2.2 Système de racines absolu

Lorsque le corps de base k n'est pas séparablement clos, un tore k-déployé maximal peut ne pas être un tore maximal. Néanmoins, lorsque le k-groupe algébrique lisse G est connexe, un théorème de Grothendieck [SGA3, XIV 1.1] (dû à Rosenlicht lorsque k est parfait) nous assure que G admet un tore maximal T défini sur k (i.e. $T_{\overline{k}}$ est un tore maximal de $G_{\overline{k}}$). Comme tout k-tore se déploie sur une extension (finie) séparable de k, on peut obtenir davantage de caractères par extension des scalaires jusqu'à la clôture séparable.

On suppose à nouveau que G est réductif. On note $\widetilde{k}$ la plus petite extension de k déployant T (déterminée au choix près d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de k). On rappelle [BrT84, 4.1.2] que $\widetilde{k}$ est en fait la plus petite extension qui déploie G en tant que groupe réductif au sens de la définition 1.1.7. On note $\widetilde{\Phi} = \Phi(G_{\widetilde{k}}, T_{\widetilde{k}})$ le système de racines réduit du groupe réductif déployé $G_{\widetilde{k}}$ par rapport à un tore maximal $\widetilde{k}$-déployé $T_{\widetilde{k}}$ [Bor91, 14.8]. On l'appelle **système de racines absolu**. En général, on désignera par les lettres grecques α, β, γ les éléments de $\widetilde{\Phi}$; on les appelle des **racines absolues**.

On peut justifier cette terminologie par le fait qu'on a « fait le plein » de racines en passant à $\widetilde{k}$ car cette extension déploie le groupe réductif G ; autrement dit, on a les isomorphismes canoniques de systèmes de racines $\widetilde{\Phi} = \Phi(G_{k_s}, T_{k_s}) = \Phi(G_{\overline{k}}, T_{\overline{k}})$.

1.1.2.3 Bases et diagrammes de Dynkin

Étant donnée une base Δ de Φ (resp. $\widetilde{\Delta}$ de $\widetilde{\Phi}$), on notera $\mathrm{Dyn}(\Delta)$ (resp. $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$) son diagramme de Dynkin. Les arêtes représentent des défauts d'orthogonalités de la base qui traduiront des défauts de commutation entre groupes radiciels. Les arêtes multiples apparaissent entre deux racines simples de longueurs distinctes et sont orientées de la racine longue vers la racine courte.

Les diagrammes de Dynkin classent, à isométrie près, les systèmes de racines irréductibles [Bou81, VI.4.2]. On a une liste explicite de types : A_l pour $l \geq 1$, B_l pour $l \geq 3$, C_l pour $l \geq 2$, D_l pour $l \geq 4$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 et BC_l pour $l \geq 1$; l'indice précise le rang du système de racines et la lettre précise la géométrie du diagramme de Dynkin. Seul le dernier type correspond à un système de racines irréductible non réduit [Bou81, VI.4.14].

1.1.3 Remarque. Si Φ est un système de racines, alors Φ_{nd} et Φ_{nm} sont aussi des systèmes de racines. Si, de plus, Φ est irréductible et non réduit de rang l, alors les systèmes de racines Φ, Φ_{nd} et Φ_{nm} sont respectivement de type BC_l, B_l et C_l.

Étant donnés un k-groupe réductif G et S un tore k-déployé maximal, le choix d'un k-sous-groupe parabolique minimal contenant $\mathcal{Z}_G(S)$ équivaut au choix d'une base du système de racines relatif [BoT65, 4.15]. En particulier, le choix d'un tore maximal T défini sur k contenant S et d'un sous-groupe de Borel B de $G_{\overline{k}}$ le contenant détermine naturellement une base $\widetilde{\Delta}$ et donc une base Δ.

1.1.2.4 Groupes radiciels

Lorsque G est réductif, on définit les groupes radiciels de G par la proposition suivante :

1.1.4 Proposition-définition ([Bor91, 14.5 et 21.9])**.** Si $a \in \Phi$, il existe un unique k-sous-groupe de G, noté U_a, qui est fermé, connexe, unipotent, normalisé par $Z = \mathcal{Z}_G(S)$ et qui a $\mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}_{2a}$ pour algèbre de Lie. On l'appelle le **groupe radiciel** de G relativement à a.

Si Ψ est une partie positivement close de Φ, alors il existe un unique k-sous-groupe de G, noté U_Ψ, qui est fermé, connexe, unipotent, normalisé par $\mathcal{Z}_G(S)$ et qui a $\sum_{a\in\Psi} \mathfrak{g}_a$ pour algèbre de Lie.

De plus, ces groupes radiciels vérifient la proposition suivante :

1.1.5 Proposition ([Bor91, 21.9])**.** *Pour tout ordre sur une partie positivement close Ψ, l'application produit $\prod_{a\in\Psi_{nd}} U_a \to U_\Psi$ est un isomorphisme de k-variétés.*

Pour tout couple de racines $a, b \in \Phi$ non colinéaires, la partie (a, b) est positivement close et on a l'inclusion des groupes unipotents $[U_a, U_b] \leq U_{(a,b)}$.

De manière analogue, on définit sur $\widetilde{k}$ des groupes radiciels par rapport au système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$. On les note $\widetilde{U}_\alpha$ pour $\alpha \in \widetilde{\Phi}$.

1.1.3 Déploiement, quasi-déploiement, (an)isotropie et ploiement

Dans cette section, on précisera les notions, antinomiques, de déploiement et de ploiement selon la nature des groupes considérés. On les reliera aux notions d'isotropie et d'anisotropie.

1.1.3.1 Déploiement d'un groupe algébrique

1.1.6 Définition. Soit G un k-groupe algébrique connexe résoluble. On dit que G est k-**déployé** s'il admet une suite de composition de quotients successifs $\mathbb{G}_{a,k}$ ou $\mathbb{G}_{m,k}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite décroissante de k-sous-groupes $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ tels que pour tout i le k-groupe G_{i+1} est distingué dans G_i et le quotient G_i/G_{i+1} est k-isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$ ou $\mathbb{G}_{m,k}$.

En particulier, lorsque G est un tore, on retrouve la définition élémentaire de tore k-déployé car il n'existe pas d'extension non triviale de $\mathbb{G}_{m,k}^n$ par $\mathbb{G}_{m,k}$. Un tore se déploie sur une extension finie séparable de k. À l'opposé, un groupe unipotent se déploie sur une extension finie purement inséparable de k. Par conséquent, un groupe résoluble connexe se déploie toujours sur une extension finie (éventuellement non séparable) de k.

1.1.7 Définition. On dit qu'un groupe réductif G est k-**déployé** s'il contient un k-tore T maximal qui est k-déployé et pour lequel chaque groupe radiciel U_a, pour $a \in \Phi(G, T)$, est k-isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$.

Un groupe réductif est k-déployé si, et seulement si, il admet un tore maximal k-déployé [Bor91, 18.7]. Par conséquent, un groupe réductif se déploie toujours sur une extension finie séparable, car c'est le cas de tout tore [Bor91, 8.11]. On se fixe une clôture séparable k_s de k et T un tore maximal défini sur k du k-groupe réductif G. Il existe ainsi une plus petite sous-extension finie galoisienne, notée $\widetilde{k}/k$, déployant T, ainsi que le groupe réductif G.

1.1.3.2 Quasi-déploiement d'un groupe réductif

Lorsque le corps de base k est algébriquement clos, la théorie de structure des groupes réductifs nous amène naturellement à considérer les sous-groupes de Borel. En général, sur un corps quelconque, un groupe algébrique n'admet pas de sous-groupe de Borel et on est alors amené à considérer les sous-groupes paraboliques minimaux. Une situation intermédiaire est celle des groupes quasi-déployés.

1.1.8 Proposition-définition. [BrT84, 4.1.1] Soit G un k-groupe réductif. On dit que G est **quasi-déployé**, s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) il existe un sous-groupe de Borel B de G qui est défini sur k ;

(ii) il existe un tore k-déployé maximal noté S tel que le centralisateur de S dans G est un tore ;

(iii) pour tout tore k-déployé maximal S, le centralisateur de S dans G est un tore.

Lorsque G est un groupe réductif quasi-déployé, on choisira, en se tenant aux notations de [BrT84, 4.1.1], un sous-groupe de Borel défini sur k que l'on notera toujours B. On choisira également un tore k-déployé maximal S de sorte que le tore $T = \mathcal{Z}_G(S)$ soit un tore maximal de G contenu dans B, ce qui existe toujours d'après [Bor91, 20.5, 20.6 (iii)].

1.1.3.3 Anisotropie et ploiement

1.1.9 Définition ([Bor91, 20.1])**.** Un k-groupe réductif est dit **isotrope** s'il contient un tore k-déployé non trivial. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **anisotrope**.

Un k-tore T est isotrope si, et seulement si, il admet des caractères non triviaux. Plus généralement, un k-tore T se décompose en un produit presque direct $T = T_s \cdot T_{\mathrm{an}}$ [Bor91, 8.15] où T_s est le sous-tore k-déployé maximal de T et $T_{\mathrm{an}} = \bigcap_{\chi \in X^*(T)} \ker\chi$ est le plus grand sous-tore anisotrope de T (voir également [BoT65, 1.4 et 1.7]).

Lorsque G est un k-groupe réductif, un théorème de Bruhat-Tits-Rousseau, dont une preuve élémentaire est donnée par Prasad [Pra82], donne une équivalence, lorsque le corps de base k est un corps local, entre la propriété d'anisotropie et la compacité du groupe topologique $G(k)$.

Grâce aux travaux de Tits sur la structure des groupes unipotents [CGP15, B.2], on peut définir, pour les groupes unipotents, une notion ayant un comportement analogue à la notion d'anisotropie pour les tores. On la définit comme suit :

1.1.10 Définition. Un k-groupe algébrique affine lisse unipotent U est dit **k-ployé** s'il n'existe pas de k-morphisme non constant de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$ vers U [CGP15, B.2.1].

De manière équivalente, U est k-ployé s'il n'existe pas de k-morphisme de groupes $\mathbb{G}_{a,k} \to U$ [CGP15, B.3.2] ; ou encore, s'il n'existe pas d'action non triviale de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur U [CGP15, B.4.4].

Lorsque le corps de base k est parfait, un tel groupe est nécessairement trivial [Bor91, 15.5]. Ainsi, cette définition n'a d'intérêt que pour un corps k imparfait (de caractéristique $p > 0$). Le k-ploiement n'étant pas le contraire du k-déploiement, cette terminologie pourrait porter à confusion. Oesterlé utilise, dans [Oes84], le terme de groupe unipotent totalement k-ployé.

Dans le même esprit que le cas des groupes réductifs, un théorème d'Oesterlé [Oes84, VI.1] permet de relier compacité et k-ploiement d'un groupe unipotent lorsque le corps de base k est un corps local.

De manière analogue aux tores, un k-groupe unipotent lisse connexe U se réalise comme extension (non triviale en général) d'un groupe unipotent k-ployé par un groupe unipotent déployé [CGP15, B.3.4].

1.1.11 Remarque. On peut uniformiser les deux notions d'anisotropies des groupes unipotents et des tores comme suit. Un k-groupe résoluble connexe G est dit k-ployé si $G(k) = G(k[t, t^{-1}])$ [Con15, 5.1]. Ainsi, on retrouve bien la notion de k-ploiement pour les groupes unipotents [Con15, 3.4] et la notion d'anisotropie pour les tores.

On rappelle également la définition de Bruhat et Tits [BrT84, 1.1.12], initialement introduite dans une note au C.R.A.S. de Borel et Tits [BoT78].

1.1.12 Définition. Soit G un k-groupe affine lisse connexe.

On appelle k-**radical unipotent déployé** de G le plus grand k-sous-groupe unipotent lisse connexe k-déployé distingué dans G. On le note $\mathcal{R}_{us,k}(G)$.

On dit que G est k-**quasi-réductif** si son k-radical unipotent $\mathcal{R}_{u,k}(G)$ est k-ployé ou, de manière équivalente, si son radical unipotent k-déployé $\mathcal{R}_{us,k}(G)$ est trivial.

1.1.13 Remarque. Lorsque G est quasi-réductif, il n'existe pas d'action non triviale de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur $\mathcal{R}_{u,k}(G)$. Par conséquent, l'action adjointe d'un tore n'engendre pas de nouvelles racines par rapport à l'action sur le quotient pseudo-réductif, ce qui nous assure que la symétrie du système de racines est préservée. Ainsi, il est possible de définir un système de racines pour un groupe quasi-réductif [CGP15, 3.2].

1.1.4 Donnée de groupes radicielle

Afin de définir une action convenable du groupe abstrait $G(k)$ des points rationnels sur un immeuble sphérique, il suffit d'établir certaines relations reliant les groupes radiciels $U_a(k)$. On regroupe ces relations en une liste d'axiomes, définissant la notion de donnée de groupes radicielle. Précisément, on a la définition suivante due à Bruhat-Tits [BrT72, 6.1.1] :

1.1.14 Définition. Soient G un groupe abstrait et Φ un système de racines. Une **donnée de groupes radicielle** de G de type Φ est un système $(T, (U_a, M_a)_{a\in\Phi})$ satisfaisant aux axiomes suivants :

(DGR 1) T est un sous-groupe de G et, pour toute racine $a \in \Phi$, l'ensemble U_a est un sous-groupe non trivial de G, appelé le groupe radiciel de G associé à a ;

(DGR 2) pour toutes racines $a, b \in \Phi$, le groupe des commutateurs $[U_a, U_b]$ est contenu dans le groupe engendré par les groupes radiciels U_{ra+sb} où $r, s \in \mathbb{N}^*$ et $ra + sb \in \Phi$;

(DGR 3) si a est une racine multipliable, on a $U_{2a} \subset U_a$ et $U_{2a} \neq U_a$;

(DGR 4) pour toute racine $a \in \Phi$, l'ensemble M_a est une classe à droite de T dans G et on a $U_{-a} \setminus \{1\} \subset U_a M_a U_a$;

(DGR 5) pour toutes racines $a, b \in \Phi$ et $n \in M_a$, on a $nU_b n^{-1} = U_{r_a(b)}$ où $r_a \in W(\Phi)$ est la réflexion orthogonale par rapport à $a^\perp$ et $W(\Phi)$ est le groupe de Weyl de Φ ;

(DGR 6) pour tout ordre Φ^+ sur Φ, en notant $\Phi^- = -\Phi^+ = \Phi \setminus \Phi^+$, on a $TU_{\Phi^+} \cap U_{\Phi^-} = \{1\}$.

On dit qu'une donnée de groupes radicielle est **génératrice** si G est engendré par les sous-groupes U_a et T.

Si G est un k-groupe réductif, on choisit un tore k-déployé maximal S et on pose $Z = \mathcal{Z}_G(S)$. D'après [BrT84, 4.1.19], il existe des classes à droite M_a telles que $G(k)$ admet une donnée de groupes radicielle génératrice $\Big(Z(k), \big(U_a(k), M_a\big)_{a\in\Phi}\Big)$ de type Φ.

1.1.5 Action-$*$ sur un diagramme de Dynkin

Dans l'optique d'effectuer des descentes galoisiennes de la situation déployée, dont la combinatoire est bien connue, à la situation générale, on va définir en section 1.1.5.1 une action du groupe de Galois absolu $\Sigma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ sur le système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$ qui se comporte bien vis-à-vis du choix de bases $\widetilde{\Delta}$ et Δ des systèmes de racines absolu et relatif $\widetilde{\Phi}$ et Φ.

On fera correspondre en section 1.1.5.2 des orbites de racines absolues avec des racines relatives ; on dressera en section 1.1.5.3 la liste exhaustive des différentes actions possibles de Σ sur $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$ pour un k-groupe réductif quasi-déployé G qui est absolument simple, ce qui constitue un premier pas vers une classification.

1.1.5.1 Définition de l'action-$*$

Dans cette section, on résume, sans élément de preuve, quelques résultats de [BoT65, §6]. On se donne G un k-groupe réductif, S un tore k-déployé maximal de G et $\widetilde{T}$ un tore maximal (et en particulier déployé sur k_s) de $\widetilde{G} = G_{k_s}$ contenant $\widetilde{S} = S_{k_s}$. On peut choisir $\widetilde{T}$ de sorte qu'il existe un tore T maximal défini sur k contenant S tel que $T_{k_s} = \widetilde{T}$. On choisit un k-sous-groupe parabolique minimal P contenant S et un k_s-sous-groupe de Borel $\widetilde{B}$ contenant $\widetilde{T}$ et contenu dans $\widetilde{P} = P_{k_s}$. Ces choix munissent respectivement les systèmes de racines relatif $\Phi = \Phi(G, S)$ et absolu $\widetilde{\Phi} = \Phi(\widetilde{G}, \widetilde{T})$ d'ordres compatibles dont on note respectivement Δ et $\widetilde{\Delta}$ les bases correspondantes. On peut définir une action naturelle de $\Sigma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ sur les caractères $X^*(\widetilde{T})$ par la formule naturelle suivante :

$$\forall \sigma \in \Sigma,\ \forall \chi \in X^*(\widetilde{T}),\ \sigma \cdot \chi = t \mapsto \sigma\Big(\chi\big(\sigma^{-1}(t)\big)\Big)$$

Le système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$ est stabilisé par le groupe de Galois Σ mais, en général, cette action ne préserve aucun ordre $\widetilde{\Phi}^+$ de $\widetilde{\Phi}$. Par des arguments de conjugaison, on peut modifier l'action naturelle en une action de Σ sur $\widetilde{\Phi}$ qui préserve un ordre donné $\widetilde{\Phi}^+$. Plus précisément, en considérant les classes de conjugaison des k_s-sous-groupes paraboliques, on définit alors une action de Σ sur les parties closes de $\widetilde{\Phi}$ [1] qui permet en particulier de définir une action sur $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$. On l'appellera action-$*$.

1. En effet, par [Bor91, 20.4], on sait associer à un sous-groupe parabolique contenant un tore déployé maximal donné une partie close du système de racine correspondant. Par conjugaison rationnelle des sous-groupes parabolique minimaux [Bor91, 20.9], on peut choisir, dans la classe de conjugaison, un unique k-sous-groupe parabolique, dit « standard », contenant un sous-groupe parabolique minimal donné. Tout k-sous-groupe parabolique est conjugué à un unique sous-groupe parabolique standard [Bor91, 21.12].

Plus précisément, on sait [Bor91, 14.8] qu'une base de $\widetilde{\Phi}$ correspond à un sous-groupe de Borel de $\widetilde{G}$ et que ceux-ci sont rationnellement conjugués

Afin de simplifier l'exposition, on supposera désormais que G est quasi-déployé. On peut alors choisir $T = \mathcal{Z}_G(S)$ comme tore maximal et un sous-groupe de Borel B défini sur k et contenant T. On peut étendre par linéarité l'action-$*$ de Σ sur $\widetilde{\Delta}$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\widetilde{V}^* = X^*(T_{\widetilde{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (euclidien pour un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl), de manière compatible avec l'action-$*$ déjà définie sur $\widetilde{\Phi}$. Le morphisme de restriction $j = \iota^* : X^*(T) \to X^*(S)$, où $\iota : S \subset T$ est le morphisme inclusion, peut s'étendre en un endomorphisme d'espace euclidien $\rho : \widetilde{V}^* \to \widetilde{V}^*$. Précisément, ρ est la projection orthogonale de $\widetilde{V}^*$ sur le sous-espace (euclidien) des points fixes $V^* \simeq X^*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ de l'action de Σ sur $\widetilde{V}^*$. Ainsi, d'une réalisation géométrique de $\widetilde{\Phi}$ dans l'espace euclidien $\widetilde{V}^*$, on déduit une réalisation géométrique de $\Phi = \rho(\widetilde{\Phi})$ dans V^*. En particulier, on adoptera parfois le point de vue géométrique sur les racines relatives et on s'intéressera plus particulièrement à la longueur de ces racines.

1.1.5.2 Stabilisateurs et orbites de l'action-$*$

Lorsque G est quasi-déployé, aucune racine absolue n'induit par restriction le caractère trivial sur S. On dispose donc d'une application $\rho : \widetilde{\Phi} \to \Phi$ définie précédemment. Les fibres de cette application sont exactement les orbites de l'action-$*$ de Σ sur $\widetilde{\Phi}$ [BoT65, 6.4 (2)]. En particulier, on adoptera parfois le point de vue des racines relatives vues comme orbites de racines absolues pour l'action-$*$.

Supposons désormais que le k-groupe réductif quasi-déployé G est presque k-simple ; ce qui se traduit par l'irréductibilité du système de racines relatif Φ. On sait désormais que le groupe de Galois absolu Σ agit sur $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$ par automorphismes du diagramme. En particulier, les composantes connexes de $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$, qui correspondent aux sous-systèmes de racines irréductibles du système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$, sont permutées. Or chaque racine relative est une orbite pour cette action ; comme $\mathrm{Dyn}(\Delta)$ est connexe par presque k-simplicité, on en déduit que l'action-$*$ sur l'ensemble des composantes connexes de $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$ est transitive.

On choisit (arbitrairement) un sous-système de racines irréductible noté $\widetilde{\Phi}_0$ dont l'ensemble $\widetilde{\Delta}_0 = \widetilde{\Phi}_0 \cap \Delta$ est une base.

Pour l'action-$*$ de Σ sur $\widetilde{\Delta}$, le stabilisateur point par point de $\widetilde{\Delta}_0$ est un sous-groupe distingué du stabilisateur global de cette partie, d'indice fini noté $d \in \mathbb{N}^*$. Le quotient agit alors fidèlement sur $\widetilde{\Delta}_0$ comme groupe d'automorphismes de ce diagramme de Dynkin d'un système de racines irréductible donc $d \in \{1, 2, 3, 6\}$ d'après la classification des systèmes de racines irréductibles. Pour l'action de Σ sur $\widetilde{\Delta}$, on notera Σ_d le sous-groupe de Σ stabilisant globalement $\widetilde{\Delta}_0$; on notera Σ_0 le stabilisateur point par point de $\widetilde{\Delta}_0$.

1.1.15 Notation (Choix d'extensions de corps)**.** On note $L_d = \widetilde{K}^{\Sigma_d}$ et $L_0 = \widetilde{K}^{\Sigma_0}$ les sous-corps de k_s fixés respectivement par les sous-groupes Σ_0 et Σ_d du groupe de Galois absolu. Comme Σ_0 est distingué dans Σ_d, on sait en particulier que l'extension L_0/L_d est galoisienne de degré d.

Si $d \leq 2$, on pose $L' = L_0$; si $d = 2$, on se fixe un élément $\tau \in \mathrm{Gal}(L_0/L_d)$ non trivial.

Si $d \geq 3$, on choisit L' comme étant une sous-extension de L_0 de degré 3 sur L_d (éventuellement non galoisienne) ; on se fixe aussi un élément $\tau \in \mathrm{Gal}(L_0/L_d)$ d'ordre 3.

Enfin, on note $d' = [L' : L_d] \in \{1, 2, 3\}$, vérifiant $d' = \min(d, 3)$.

Lorsqu'on se posera des questions sur les groupes de points rationnels, on pourra le plus souvent se réduire au cas absolument simple. En effet, grâce au théorème [BoT65, 6.21], on peut écrire $G = R_{L_d/K}(G')$ où G' est un L_d-groupe absolument simple ; de sorte que $G(k) \simeq G'(L_d)$. Dans ce contexte, on peut alors sans restriction supposer que G est absolument simple ce qui, dans ce cas, implique les conséquences suivantes : le système de racines $\widetilde{\Phi}$ est irréductible ; $\widetilde{k} = L_0$ et $L_d = k$. Malgré cela, dans cette thèse on préférera seulement supposer que G est k-simple afin d'obtenir des énoncés plus intrinsèques.

1.1.5.3 Premiers éléments de classification des groupes quasi-déployés

On suppose toujours que le k-groupe réductif quasi-déployé G est presque k-simple et reprend les notations précédentes.

Si $\widetilde{\Phi}_0$ est de type $X_l \in \{B_l, C_l, E_7, E_8, F_4, G_2\}$, alors le diagramme de Dynkin de $\widetilde{\Delta}_0$ ne présente pas de symétries donc nécessairement $d = 1$.

Si $\widetilde{\Phi}_0$ est de type $X_l \in \{A_l, D_l \text{ (pour } l \geq 5), E_6\}$, alors le diagramme de Dynkin de $\widetilde{\Delta}_0$ ne présente qu'une symétrie d'ordre 2 donc nécessairement $d = 1$ ou 2.

Si $\widetilde{\Phi}_0$ est de type D_4, alors d peut prendre les valeurs $1, 2, 3, 6$ et Σ_d/Σ_0 est un groupe d'ordre d isomorphe à l'un des groupes suivants : $\{1\}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ou $\mathfrak{S}_3$.

On parlera alors de type ${}^dX_l$ pour le groupe réductif quasi-déployé presque K-simple suivant la notation de [Tit66, 1.5 et table II]. En fait, Tits précise la notation ${}^dX_l$ sous la forme ${}^dX^t_{n,r}$ où n désigne le rang de $\widetilde{\Phi}$, r le rang de Φ et t est une certaine donnée combinatoire liée au noyau anisotrope du groupe G. Autrement dit, l'indice t est trivial lorsque le groupe G est quasi-déployé. L'entier n est un multiple de l et ils sont égaux lorsque le groupe G est supposé absolument simple.

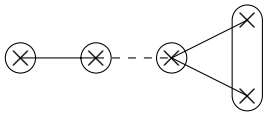
On représente les diagrammes de Dynkin du système de racines absolu où une croix $\times$ représente une racine simple absolue, et on entoure les racines simples d'une même orbite, ainsi que les diagrammes de Dynkin relatifs correspondant (la flèche d'une arête double pointe vers une racine simple courte sauf si l'un des deux sommets est une racine simple multipliable, auquel cas on ne met pas de flèche).

— Si $d = 1$ on obtient les diagrammes de Dynkin des systèmes de racines irréductibles réduits.

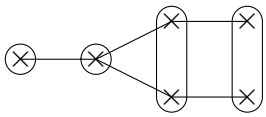
— Si $d = 2$ et $\widetilde{\Phi}$ est de type A_{2l} avec $l \geq 1$, on parle de type ${}^2A_{2l}$ et de type relatif BC_l.

— Si $d = 2$ et $\widetilde{\Phi}$ est de type A_{2l-1} avec $l \geq 2$, on parle de type ${}^2A_{2l-1}$ et de type relatif C_l.

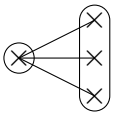
— Si $d = 2$ et $\widetilde{\Phi}$ est de type D_{l+1} avec $l \geq 3$, on parle de type ${}^2D_{l+1}$ et de type relatif B_l.



— Si $d = 2$ et $\widetilde{\Phi}$ est de type E_6, on parle de type ${}^2E_6$ et de type relatif F_4.



— Si $d = 3$ ou 6 et $\widetilde{\Phi}$ est de type D_4, on parle de type ${}^dD_4$ et de type relatif G_2 ; on parle alors de groupe trialitaire.



Pour achever une classification des groupes semi-simples absolument simples quasi-déployés, il faudrait encore pouvoir classifier les extensions galoisiennes de corps de degré 2, 3 et 6 (que l'on trouve en des termes classiques dans [Spr98, 17]). Par exemple, pour des corps locaux non archimédiens, il faudra alors prendre en compte l'indice de ramification [Tit79]. Pour des groupes non quasi-déployés, on pourra également introduire les indices de Tits [Tit66] : il faut par exemple tenir compte des racines sur un tore maximal qui s'annulent par restriction au tore k-déployé maximal.

1.1.5.4 Lien entre la longueur des racines relatives et l'action-$*$

Si $d = 1$, les systèmes de racines $\widetilde{\Phi}_0$ et Φ sont de même type.

Supposons $d = 2$ et considérons $V = \oplus_{\alpha\in\widetilde{\Delta}_0} \mathbb{R}\alpha$ une réalisation géométrique du système de racines $\widetilde{\Phi}_0$ muni d'un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl, permettant de définir une notion de longueur. Toutes les racines $\alpha \in \widetilde{\Phi}_0$ ont même longueur, sinon le diagramme de Dynkin ne présenterait pas de symétrie d'ordre 2. On prolonge par linéarité l'action de Σ_d/Σ_0 sur $\widetilde{\Delta}_0$ à V, ce qui étend l'action de Σ_d sur $\widetilde{\Phi}_0$. On a un morphisme de groupes $\Sigma_d/\Sigma_0 \to \mathrm{GL}(V)$ et l'élément non trivial de Σ_d/Σ_0 est une involution de V, qui préserve le produit scalaire, donc une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan que l'on note V_0. Le système de racines relatif Φ se réalise comme projection orthogonale du système de racines absolu $\widetilde{\Phi}_0$ sur V_0. En particulier, les racines relatives qui, en tant qu'orbite, contiennent deux racines absolues de $\widetilde{\Phi}_0$ sont, dans cette (et donc toute) réalisation géométrique, plus courtes que les racines relatives qui contiennent un seul élément de $\widetilde{\Phi}_0$.

Si $d = 3$ ou 6, alors $\widetilde{\Phi}_0$ est de type D_4. On réalise géométriquement $\widetilde{\Phi}_0$ dans $V = \mathbb{R}^4$ et on prolonge l'action de Σ_d/Σ_0 sur $\widetilde{\Phi}_0$ en une action sur V par linéarité. On réalise le système de racines relatif comme projection sur le lieu de points fixes dans V sous l'action de Σ_d/Σ_0 des racines absolues de $\widetilde{\Phi}_0$. En particulier, les racines relatives qui, en tant qu'orbite, contiennent trois racines absolues de $\widetilde{\Phi}_0$ sont, dans cette (et donc toute) réalisation géométrique, plus courtes que les racines relatives qui contiennent un seul élément de $\widetilde{\Phi}_0$.

1.1.6 Paramétrage des sous-groupes de rang 1 via les systèmes de Chevalley-Steinberg

On veut ramener l'étude générale d'un groupe réductif G à des sous-problèmes matriciels de rang 1 et 2. On souhaite ici paramétrer les sous-groupes de G de rang 1 associés à un certain caractère $a \in \Phi$ dont on rappelle ici la définition.

1.1.16 Définition. Soit $a \in \Phi$ une racine relative. On appelle **sous-groupe de rang** 1 de G associé à a le k-sous-groupe semi-simple (et simplement connexe si G l'est) $\langle U_{-a}, U_a \rangle$ engendré par les deux groupes radiciels opposés U_{-a} et U_a.

C'est un sous-groupe du groupe réductif $\mathcal{Z}_G\Big(\big(\ker a\big)^\circ\Big)$ de rang semi-simple 1 [Spr98, 15.3.3] ; il est semi-simple en tant que groupe engendré par ses groupes radiciels.

Dans le cas général, la structure d'un groupe radiciel (resp. d'un tore) peut être difficile à décrire explicitement. Dans le cas déployé, à l'inverse, chaque groupe radiciel est, par définition, isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$ et tout k-tore maximal est isomorphe à un produit direct de $\mathbb{G}_{m,k}$, ce qui nous donne immédiatement des paramétrages.

Tout d'abord, on explicite en section 1.1.6.1, en fonction de chaque racine $a \in \Phi$, le corps L_a permettant de déployer le sous-groupe G_a de rang 1 associé à a. Ensuite, en section 1.1.6.2, on se pose la question de la compatibilité des différents paramétrages les uns par rapport aux autres d'une part ; et vis-à-vis des extensions de déploiement en vue de faire une descente au corps de base d'autre part. Enfin, en section 1.1.6.3, on donne des réalisations matricielles des sous-groupes de rang 1.

1.1.6.1 Corps de déploiement des sous-groupes de rang 1

Soit $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ une racine absolue.

1.1.17 Définition. On note Σ_α le stabilisateur de α pour l'action-$*$ de Σ sur $\widetilde{\Phi}$. On définit le **corps de définition** de la racine absolue α comme étant le sous-corps de $\widetilde{k}$ fixé par Σ_α, noté $L_\alpha = \widetilde{k}^{\Sigma_\alpha}$.

Lorsque G est quasi-déployé, on considère $a = \alpha|_S$ la restriction de α au tore k-déployé maximal S qui est alors une racine relative. On a vu en section 1.1.5.2 que $\{\alpha \in \widetilde{\Phi},\ a = \alpha|_S\}$ est une orbite non vide pour l'action-$*$ de Σ sur $\widetilde{\Phi}$. Par abus de notation, on la note plus simplement $a = \{\alpha \in \widetilde{\Phi},\ a = \alpha|_S\}$.

Étant donnée une racine absolue $\alpha \in \Phi$, on observe que pour toute racine absolue $\sigma \cdot \alpha \in a$ de l'orbite a, on a $L_{\sigma\cdot\alpha} = \sigma(L_\alpha)$. Ainsi, les corps de définition des différentes racines absolues de l'orbite a sont isomorphes via des éléments $\sigma \in \Sigma$, ce qui permet de définir une classe d'isomorphisme L_a/k qui ne dépend pas du choix de $\alpha \in a$.

1.1.18 Définition. La classe d'extension de **corps de déploiement** de a est la classe d'isomorphisme de L_α/k, notée L_a/k.

1.1.19 Remarque. Si $a \in \Phi$ est une racine multipliable, alors il existe des racines $\alpha, \alpha' \in a$ telles que $\alpha + \alpha' \in \widetilde{\Phi}$. Dans l'orbite a, on écrit $\alpha' = \sigma(\alpha)$ où $\sigma \in \Sigma$. On obtient ainsi une extension de corps quadratique $L_\alpha/L_{\alpha+\alpha'}$ qui ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de α. Par abus de notation, on note alors la classe d'isomorphisme de cette extension L_a/L_{2a}. À partir de la section 1.3.1, on s'intéressera à la ramification de cette extension.

De l'appariement $X^*(S) \times X_*(S) \to \mathbb{Z}$, on a déduit que chaque racine relative $a \in \Phi$ se réalise géométriquement dans l'espace euclidien V^*. On suppose que Φ est irréductible. Par [Bou81, VI.1.4 Prop. 12], il y a alors exactement une ou deux longueurs pour les racines si Φ est réduit ; et par [Bou81, VI.4.14] il y a trois longueurs distinctes de racines si Φ est non réduit.

On dit qu'une racine $a \in \Phi$ est **longue** si sa longueur est maximale dans sa composante irréductible, et qu'elle est **courte** sinon. Plus précisément, lorsque Φ est un système de racines réduit non simplement lacé, le rapport des longueurs entre une racine longue et une racine courte est exactement $\sqrt{d'}$ où l'entier $d' \in \{1, 2, 3\}$ a été défini par la notation 1.1.15 en considérant la plus petite extension de K déployant G.

1.1.20 Proposition. *Soient d, L', L_d donnés par la notation 1.1.15.*

(1) Si $d = 1$, toute racine $a \in \Phi$ admet $L_a = L' = L_d = L_0$ pour corps de déploiement (à isomorphisme près, au sens de la section 1.1.6.1).

(2) Si $d \geq 2$ et Φ est réduit, toute racine courte admet L' comme corps de déploiement ; toute racine longue admet L_d comme corps de déploiement.

(3) Si $d = 2$ et Φ est non réduit, toute racine non divisible admet L' comme corps de déploiement ; toute racine divisible admet L_d comme corps de déploiement.

Démonstration. (1) Si $d = 1$, alors $\Sigma_0 = \Sigma_d = \Sigma_a$ pour toute racine $a \in \Phi$. Ce qui correspond donc à l'égalité des corps $L_0 = L_d = L_a = L'$.

On suppose désormais que $d \geq 2$. Comme $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$ admet une symétrie non triviale, toutes les racines absolues ont la même longueur dans la réalisation géométrique dans $\widetilde{V}^*$ que l'on a définie en section 1.1.5. Soit a une racine relative, vue comme orbite, qui contient plusieurs racines absolues. Dans une réalisation géométrique, on a vu que l'orbite a peut se réaliser géométriquement comme projection orthogonale de ses racines absolues. Donc, la longueur d'une racine relative, orbite de plusieurs racines absolues est plus courte que celle d'une racine relative qui n'est orbite que d'une racine absolue.

Soient $a \in \Phi$ une racine relative et $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ une racine absolue telle que la racine relative $a = \alpha|_S$ est son orbite pour l'action-$*$.

(2) On suppose que $d \geq 2$ et que Φ est réduit. Si la racine relative a est courte, alors Σ_0 fixe α mais Σ_d ne fixe pas α. De plus, on observe que pour $d = 6$ (donc $\widetilde{\Phi}$ est de type D_4), le stabilisateur de α est d'indice 3 dans $\Sigma_d/\Sigma_0 \simeq \mathfrak{S}_3$. Donc L_α est une extension séparable de L_d de degré 3 si $d \geq 3$ et de degré 2 sinon, donc isomorphe à L'. Ainsi $L' = L_a$. Si a est longue, alors Σ_d est le stabilisateur de α. Donc $L_d = L_a$.

(3) On suppose que $d = 2$ et que Φ est non réduit. Si la racine relative a est divisible, alors a est une racine longue. Donc Σ_2 est le stabilisateur de α. Ainsi $L_2 = L_a$. Sinon, a est une racine courte. Donc Σ_0 est le stabilisateur de α. Ainsi $L' = L_0 = L_a$. □

1.1.6.2 Systèmes de Chevalley-Steinberg

On considère ici simultanément un k-groupe réductif quasi-déployé G et on se donne une extension $\widetilde{k}/k$ déployant G. On note également $\widetilde{G} = G_{\widetilde{k}}$ le $\widetilde{k}$-groupe déployé associé. Un système de Chevalley-Steinberg de la donnée $(G, \widetilde{k}, k)$ est la donnée de $\widetilde{k}$-isomorphismes de groupes $: \widetilde{x}_\alpha : \mathbb{G}_{a,\widetilde{k}} \to \widetilde{U}_\alpha$ qui paramètrent les groupes radiciels de $\widetilde{G}$ et satisfont les axiomes de compatibilité (SC1) à (SC4) énoncés ci-après, conformément aux définitions de [BrT84, 4.1.3]. Ces axiomes prennent en compte à la fois les défauts de commutation des

groupes radiciels et l'action-$*$ de $\Sigma = \mathrm{Gal}(\widetilde{k}/k)$ sur les racines. Autrement dit, bien que ces isomorphismes paramètrent les groupes radiciels de $\widetilde{G}$, un système de Chevalley-Steinberg dépend aussi de la k-forme quasi-déployée G de $\widetilde{G}$.

On sait, par [BrT84, 4.1.3], qu'un groupe quasi-déployé admet toujours un système de Chevalley-Steinberg.

1.1.21 Définition. On appelle **$\widetilde{k}$-système** de $(G, \widetilde{k}, k)$ la donnée d'une famille d'isomorphismes de $\widetilde{k}$-groupes $(\widetilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\Phi}}$ où $\widetilde{x}_\alpha : \mathbb{G}_{a,\widetilde{k}} \to \widetilde{U}_\alpha$.

Les deux premiers axiomes prennent en compte l'expression sur les groupes radiciels de la loi du groupe déployé $G_{\widetilde{k}}$.

1.1.22 Définition ([BrT84, 3.2.1 et 3.2.2])**.** Soit $(\widetilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\Phi}}$ un $\widetilde{k}$-système de $(G, \widetilde{k}, k)$. On dit que c'est un **$\widetilde{k}$-système de Chevalley** s'il vérifie les axiomes suivants :

(SC1) pour toute racine absolue $\alpha \in \widetilde{\Phi}$, les isomorphismes $\widetilde{x}_\alpha$ et $\widetilde{x}_{-\alpha}$ sont associés, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme $\theta_\alpha : \mathrm{SL}_{2,\widetilde{k}} \to G$ tel que pour tout $u \in \widetilde{k}$ on ait $\theta_\alpha \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{x}_\alpha(u)$ et $\theta_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{x}_{-\alpha}(u)$;

(SC2) pour tout couple (α, β) de racines absolues, il existe un signe $\varepsilon_{\alpha,\beta} \in \{-1, 1\}$, qui ne dépend que de α et β, tel que, pour tout $u \in \widetilde{K}$, on ait la relation $\widetilde{x}_{s_\alpha(\beta)}(u) = m_\alpha \cdot \widetilde{x}_\beta(\varepsilon_{\alpha,\beta} u) \cdot m_\alpha^{-1}$.

Ici s_α désigne la réflexion par rapport à α dans le groupe de Weyl associé à $\widetilde{\Phi}$ et on a posé $m_\alpha = \widetilde{x}_\alpha(1) \cdot \widetilde{x}_{-\alpha}(1) \cdot \widetilde{x}_\alpha(1)$.

Les deux derniers axiomes tiennent compte de l'action-$*$ du groupe de Galois absolu Σ sur le système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$.

1.1.23 Définition ([BrT84, 4.1.3])**.** Soit $(\widetilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\Phi}}$ un système de Chevalley de $(G, \widetilde{k}, k)$. On dit que c'est un **$\widetilde{k}$-système de Chevalley-Steinberg** s'il vérifie les axiomes supplémentaires suivants :

(SC3) pour toute racine absolue $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ telle que la racine relative $\alpha|_S \in \Phi$ est non divisible, pour tout élément $\sigma \in \Sigma$, on a l'égalité $\widetilde{x}_{\sigma(\alpha)} = \sigma \circ \widetilde{x}_\alpha \circ \sigma^{-1}$;

(SC4) pour toute racine absolue $\alpha \in \widetilde{\Phi}$ telle que la racine relative $\alpha|_S \in \Phi$ est divisible, pour tout élément $\sigma \in \Sigma$, il existe un signe $\varepsilon = \varepsilon_{\alpha,\sigma} \in \{-1, 1\}$ tel que pour tout $u \in \widetilde{k}$ on ait l'égalité $\widetilde{x}_{\sigma(\alpha)}(u) = \sigma(\widetilde{x}_\alpha(\varepsilon\sigma^{-1}(u)))$;

si de plus $\{\beta, \beta'\}$ est une partie à 2 éléments de $\widetilde{\Delta}$ telle que $\alpha = \beta + \beta'$ et $\alpha|_S = 2a$ avec $a = \beta|_S = \beta'|_S \in \Phi$, si σ fixe L_α, alors on impose de plus que $\varepsilon = -1$ si et seulement si σ est un automorphisme non trivial de L_β.

1.1.6.3 Paramétrage des groupes radiciels

Partant d'un k-groupe réductif quasi-déployé G, on se fixe un $\widetilde{k}$-système de Chevalley-Steinberg $(\widetilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\Phi}}$, ce qui paramètre les groupes radiciels absolus $\widetilde{x}_\alpha : U_a \to \mathbb{G}_a$. On va descendre ces paramétrages au corps de base pour paramétrer les groupes radiciels relatifs. On utilisera les nouveaux paramétrages ainsi définis afin de valuer les groupes radiciels, et ce de manière compatible grâce aux axiomes des systèmes de Chevalley-Steinberg.

Soit $\pi : G^a \to \langle U_{-a}, U_a \rangle$ un revêtement universel du k-sous-groupe de rang 1 engendré par U_a et U_{-a}. Le groupe G^a se déploie sur L_a (on le voit sur son tore maximal défini via les cocaractères $\alpha^\vee$ pour $\alpha \in a$), ce qui justifie l'emploi du terme de « corps de déploiement » d'une racine relative (les groupes radiciels étant quant à eux déjà déployés sur k). On trouve, tout au long de [BrT84, 4.1.1 à 4.1.9], un paramétrage et une réalisation matricielle du groupe semi-simple simplement connexe G^a que l'on rappelle ici.

Le cas d'une racine non multipliable : Soit $a \in \Phi$ une racine relative telle que $2a \notin \Phi$. Par [BrT84, 4.1.4], le k-groupe G^a de rang relatif 1 est isomorphe à $R_{L_\alpha/k}(\mathrm{SL}_{2,L_\alpha})$. On l'écrit sous la forme $G^a = R_{L_\alpha/K}(\widetilde{G}^\alpha)$ via l'isomorphisme $\xi_\alpha : \mathrm{SL}_{2,L_\alpha} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{G}^\alpha$.

On paramètre un tore L_α-déployé maximal du groupe classique SL_{2,L_α} par :

$$\begin{array}{rccc} z : & \mathbb{G}_{m,L_\alpha} & \to & \mathrm{SL}_{2,L_\alpha} \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

On paramètre les groupes radiciels correspondants par les homomorphismes :

$$\begin{array}{rccc} y_- : & \mathbb{G}_{a,L_\alpha} & \to & \mathrm{SL}_{2,L_\alpha} \\ & v & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} y_+ : & \mathbb{G}_{a,L_\alpha} & \to & \mathrm{SL}_{2,L_\alpha} \\ & u & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Par [BrT84, 4.1.5], il existe un unique L_α-homomorphisme de groupes, noté $\xi_\alpha : \mathrm{SL}_{2,L_\alpha} \to \widetilde{G}^\alpha$, tel que $\widetilde{x}_{\pm\alpha} = \pi \circ \xi_\alpha \circ y_\pm$.

On en déduit alors un k-homomorphisme $x_a = \pi \circ R_{L_\alpha/k}(\xi_\alpha)$ qui est un k-isomorphisme de groupes entre $R_{L_a/k}(\mathbb{G}_{a,L_a})$ et U_a. On définit également un k-isomorphisme de groupes :

$$\widetilde{a} = \pi \circ R_{L_\alpha/k}(\xi_\alpha \circ z) : R_{L_\alpha/k}(\mathbb{G}_{m,L_\alpha}) \to T^a$$

où T^a désigne le tore maximal de $\langle U_{-a}, U_a \rangle$ considéré.

Le cas d'une racine multipliable : Soit $a \in \Phi$ une racine relative vérifiant $2a \in \Phi$. Soient $\alpha \in a$ une racine relative dans l'orbite a et $\tau \in \Sigma$ un élément du groupe de Galois absolu tel que $\alpha + \tau(\alpha)$ est à nouveau une racine absolue (de l'orbite $2a$). Pour alléger les notations, on note ici (au choix près d'isomorphismes compatibles pris dans Σ) $L = L_a = L_\alpha$ et $L_2 = L_{2a} = L_{\alpha+\tau(\alpha)}$. Par [BrT84, 4.1.4], le k-groupe G^a est isomorphe à $R_{L_2/k}(\mathrm{SU}(h))$, où h désigne la forme hermitienne sur $L \times L \times L$ donnée par :

$$h : (x_{-1}, x_0, x_1) \mapsto \sum_{i=-1}^{1} x_i {}^\tau x_i$$

On écrit le groupe $G^a_{L_2}$ comme produit $G^a_{L_2} = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_2/k)} \widetilde{G}^{\sigma(\alpha),\sigma(\tau(\alpha))}$ où chaque facteur $\widetilde{G}^{\sigma(\alpha),\sigma(\tau(\alpha))}$ est isomorphe à $\mathrm{SU}(h)$, de sorte que $\mathrm{SU}(h)_L \simeq \mathrm{SL}_{3,L}$.

On définit un L_2-schéma en groupes unipotent connexe en munissant la L_2-sous-variété $H_0(L, L_2) = \{(u, v) \in L \times L,\ u^\tau u = v + {}^\tau v\}$ de $L_a \times L_a$ de la loi de groupes suivante :

$$(u, v), (u', v') \mapsto (u + u', v + v' + u^\tau u')$$

On pose alors $H(L,L_2) = R_{L_2/K}(H_0(L,L_2))$. Explicitement, on a le groupe de points rationnels $H(L,L_2)(k) = \{(u,v) \in L \times L,\ u^\tau u = v + {}^\tau v\}$ dont la loi de groupe est donnée par $x_a(u,v)x_a(u',v') = x_a(u+u', v+v'+u^\tau u')$.

1.1.24 Notation. Pour toute racine multipliable $a \in \Phi$, suivant [BrT84, 4.2.20] on complète les notations des corps de définition par :

— $L^0 = \{y \in L,\ y + {}^\tau y = 0\}$, qui est un L_2-espace vectoriel de dimension 1 ;

— $L^1 = \{y \in L,\ y + {}^\tau y = 1\}$, qui est un L^0-espace affine.

En effet, si k n'est pas de caractéristique 2, alors $L^0 = \ker(\tau + \mathrm{id})$ est de dimension 1 car $L_2 = \ker(\tau - \mathrm{id})$ est de dimension 1 et ± 1 sont les deux valeurs propres de $\tau \in \mathrm{GL}(L_a)$. De plus, l'espace affine L^1 est non vide car il contient $\frac{1}{2}$. Si K est de caractéristique 2, alors $L^0 = \ker(\tau + \mathrm{id}) = L_2$. On verra en section 1.3.1 que L^1 est non vide. On pourra alors écrire $L = L_2\lambda \oplus L^0$ pour un élément convenable $\lambda \in L^1$.

1.1.25 Remarque (Intérêt de ces notations complémentaires). Pour tout $\lambda \in L^0$ non nul, on a un isomorphisme de groupes commutatifs donné par la relation $\begin{matrix} L_2 & \to & L^0 \\ y & \mapsto & \lambda y \end{matrix}$, de sorte que $x_a(0,\lambda y) = x_{2a}(y)$. Ceci ajoute une incertitude lorsqu'on souhaite effectuer des calculs dans $G(k)$. Lorsqu'on prendra en considération les valuations, on devra choisir un λ de valuation nulle ; ce qui est en fait toujours possible. Pour éviter toute ambiguïté, on préférera travailler avec l'isomorphisme $\begin{matrix} L_a^0 & \to & U_{2a}(k) \\ y & \mapsto & x_a(0,y) \end{matrix}$ permettant de réaliser $U_{2a}(k)$ comme sous-groupe de $U_a(k)$.

On paramètre un tore maximal de $\mathrm{SU}(h)$ par l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} z: & R_{L/L_2}(\mathbb{G}_{m,L}) & \to & \mathrm{SU}(h) \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1}{}^\tau t & 0 \\ 0 & 0 & {}^\tau t^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

On paramètre les groupes radiciels de $\mathrm{SU}(h)$, normalisés par le tore maximal précédemment défini, par les isomorphismes :

$$\begin{array}{rccc} y_-: & H_0(L,L_2) & \to & \mathrm{SU}(h) \\ & (u,v) & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ -v & -{}^\tau u & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} y_+: & H_0(L,L_2) & \to & \mathrm{SU}(h) \\ & (u,v) & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau u & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On sait, par [BrT84, 4.1.9], qu'il existe un unique L_2-isomorphisme de groupe, que l'on note $\xi_\alpha : \mathrm{SU}(h) \to \widetilde{G}^{\alpha,\tau(\alpha)}$, tel que $\widetilde{x}_{\pm\alpha} = \pi \circ \xi_\alpha \circ y_\pm$. On définit alors un k-isomorphisme de groupes $x_a = \pi \circ R_{L_2/K}(\xi_\alpha)$ entre le k-groupe $H(L,L_2)$ et le groupe radiciel U_a. On définit également le k-isomorphisme de groupes :

$$\widetilde{a} = \pi \circ R_{L_2/K}(\xi_\alpha \circ z) : R_{L_\alpha/K}(\mathbb{G}_{m,L_\alpha}) \to T^a$$

où T^a est le tore maximal de $\langle U_{-a}, U_a\rangle$ considéré.

1.1.7 Simplicité

1.1.26 Définition. On dit [Bor91, 22.8] qu'un k-groupe algébrique affine G est k-**simple** (resp. **presque** k-simple) s'il n'admet pas de k-sous-groupe connexe fermé distingué non commutatif qui soit non trivial (resp. de dimension positive)

On dit que G est **absolument** simple (resp. **absolument presque** simple) si $G_{\overline{k}}$ est $\overline{k}$-simple (resp. presque $\overline{k}$-simple).

1.1.27 Remarque. On peut oublier l'hypothèse « non commutatif » lorsque G est semi-simple ; on s'appuiera sur la classification à isogénie près des groupes semi-simples via les indices de Tits [Tit66].

On a aussi une interprétation en termes de produit direct (resp. presque direct) : un groupe réductif G est k-simple (resp. presque k-simple) s'il n'est pas le produit direct (resp. presque direct) de plusieurs k-sous-groupes réductifs dont au moins deux sont non triviaux (resp. ne sont pas finis) [BoT65, 0.7].

Restriction au cas absolument k-simple En termes de système de racines, le produit presque direct $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$ de k-groupes réductifs $G_1, \ldots, G_n$ donne lieu à une somme directe orthogonale $\Phi(G, S) = \oplus^{\perp}_{i=1\ldots n} \Phi(G_i, S_i)$ des systèmes de racines correspondants ; ce qui ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix du tore k-déployé maximal S dans G où chaque $S_i = (S \cap G_i)^\circ$ est un tore k-déployé maximal de G_i [Bor91, 22.9 et 22.10]. En particulier, un k-groupe réductif est presque absolument simple (resp. presque k-simple) si, et seulement si son système de racines absolu (resp. relatif) est irréductible.

Lorsqu'on s'intéresse au groupe des points rationnels $G(k)$, on peut se restreindre à l'étude des groupes réductifs absolument simples en utilisant la proposition suivante de [BoT65, 6.21] :

1.1.28 Proposition. *Soit G un k-groupe semi-simple. Par définition, G est le produit presque direct de k-groupes presque k-simples.*

Supposons que G est presque k-simple. Alors il existe une extension finie séparable k'/k, un k'-groupe absolument simple H et une k-isogénie $R_{k'/k}(H) \to G$.

En particulier, si G est un k-groupe semi-simple, on peut étudier G en tant que produit presque direct de groupes H_i. Au niveau des points rationnels, il faudra en revanche exiger des conditions entre le noyau de l'isogénie et le corps k pour rapprocher l'étude du groupe des points rationnels de $G(k)$ à celle des groupes de points rationnels $H_i(k')$ où les k'-groupes H_i sont absolument simples.

1.1.8 Relations de commutation dans un groupe quasi-déployé

On précise ici l'axiome (DGR 2) de la donnée de groupes radicielle au moyen des paramétrages que l'on vient de définir.

On sait, par [Bor91, 14.5], qu'il existe des constantes $(c_{r,s;\alpha,\beta})_{r,s\in\mathbb{N}^*;\alpha,\beta\in\widetilde{\Phi}}$ dans $\widetilde{k}$, uniquement déterminées par le choix d'un système de Chevalley-Steinberg $(\widetilde{x}_\alpha)_{\alpha\in\widetilde{\Phi}}$, telles que, pour toute paire de racines absolues non colinéaires $\alpha, \beta \in \widetilde{\Phi}$ et tous paramètres $u, v \in \widetilde{k}$, les relations suivantes sont satisfaites :

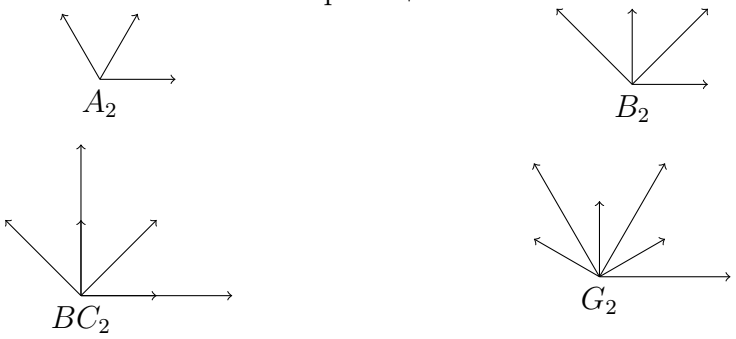
$$[\widetilde{x}_\alpha(u), \widetilde{x}_\beta(v)] = \prod_{r,s\in\mathbb{N}^*} \widetilde{x}_{r\alpha+s\beta}(c_{r,s;\alpha,\beta} u^r v^s)$$

De plus, on a $c_{r,s;\alpha,\beta} = 0$ dès que $r\alpha + s\beta \notin \widetilde{\Phi}$, ce qui nous assure que le produit considéré est fini et a un sens grâce aux paramétrages précédents. On appelle ces constantes les **constantes de structure**. On a une certaine liberté dans le choix du système de Chevalley-Steinberg. En particulier, on peut imposer que les constantes $c_{r,s;\alpha,\beta}$ soient « entières », c'est-à-dire des éléments du sous-anneau premier $\mathbb{Z}1_{\widetilde{k}}$ de $\widetilde{k}$ où $1_{\widetilde{k}}$ désigne l'unité de $\widetilde{k}$. Plus précisément, le $\widetilde{k}$-groupe déployé $\widetilde{G}$ provient par changement de base d'un $\mathbb{Z}$-groupe réductif [SGA3, XXV 1.3]. On peut alors interpréter les constantes de structures entières $c_{r,s;\alpha,\beta}$, au signe près, comme étant certains coefficients de la matrice de Cartan [SGA3, XXIII 6.4]. Explicitement, pour un groupe G absolument simple, on a :

1.1.29 Lemme. *Soient $\alpha, \beta \in \widetilde{\Phi}$ deux racines absolues non colinéaires telles que $\alpha+\beta \in \widetilde{\Phi}$.*
Si $\widetilde{\Phi}$ est de type A_n, D_n ou E_n, alors $c_{1,1;\alpha,\beta} \in \{\pm 1_{\widetilde{k}}\}$.
Si $\widetilde{\Phi}$ est de type B_n, C_n ou F_4, alors $c_{1,1;\alpha,\beta} \in \{\pm 1_{\widetilde{k}}, \pm 2 \cdot 1_{\widetilde{k}}\}$.
Si $\widetilde{\Phi}$ est de type G_2, alors $c_{1,1;\alpha,\beta} \in \{\pm 1_{\widetilde{k}}, \pm 2 \cdot 1_{\widetilde{k}}, \pm 3 \cdot 1_{\widetilde{k}}\}$.

Pour un groupe quasi déployé, étant données deux racines relatives non colinéaires $a, b \in \Phi$, on peut expliciter une relation de commutation entre les groupes radiciels correspondants grâce aux paramétrages $(x_c)_{c\in\Phi}$. Les différentes relations de commutation d'un groupe quasi-déployé sont explicitées dans [BrT84, Annexe A], où Bruhat et Tits traitent les cas suivant les angles entre les racines. Ici, on adoptera plutôt le point de vue dans [PR84a, §1] de Prasad et Raghunathan suivant les longueurs des racines.

Les racines relatives qui apparaissent se réalisent dans le sous-système de racines irréductible $\Phi(a,b) = \Phi \cap (\mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b)$ de rang 2, donc de type A_2, C_2, BC_2 ou G_2. Quitte à échanger a et b, on peut supposer que a est de longueur (dans une réalisation géométrique) inférieure ou égale à b. Les différentes racines a et b sont choisies dans l'une des quatre configurations suivantes de sorte que $a + b$ soit encore une racine.



On peut aisément se restreindre au cas d'un groupe presque k-simple. On reprend les notations des corps de déploiement des racines 1.1.18 et l'entier d' correspondant. Les différents cas sont les suivants, où les paramètres sont exprimés à isomorphismes près, de sorte que les paramétrages soient bien définis.

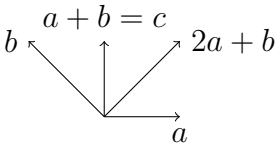
1.1.30 Lemme (Relations de commutation entre groupes radiciels d'un groupe quasi-déployé)**.**
Cas $d' = 1$ ou les racines relatives a, b, c sont toutes longues :
Par [BrT84, A.6], on a la relation de commutation suivante :

$$\forall y \in L_a,\ z \in L_b,\ [x_a(y), x_b(z)] = \prod_{r,s\in\mathbb{N}^*} x_{ra+sb}(c_{r,s;\alpha,\beta} y^r z^s)$$

Cas $d'=2$***, les racines*** a,c ***sont courtes,*** b ***est longue et non divisible :***

Par [BrT84, A.6.b], il existe des signes $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}$ *tels qu'on ait la relation de commutation :*

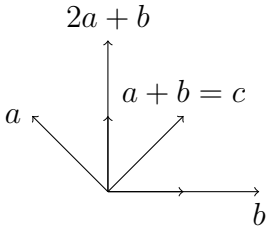
$$\begin{array}{l}\forall y\in L_a,\ \forall z\in L_b,\\ \qquad\Big[x_a(y),x_b(z)\Big] \quad=\quad x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2 y^{\tau}yz\Big)\end{array}$$



Cas $d'=2$***, les racines*** a,c ***sont courtes,*** b ***est longue et divisible :***

Par [BrT84, A.6.c], il existe $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}$ *tels qu'on ait la relation de commutation :*

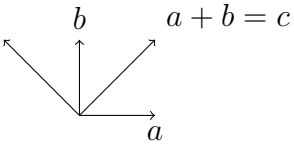
$$\begin{array}{l}\forall y\in L_a,\ \forall z\in L_b^0,\\ \qquad\Big[x_a(y),x_{\frac{b}{2}}(0,z)\Big] \quad=\quad x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_{a+\frac{b}{2}}\Big(0,\varepsilon_2 y^{\tau}yz\Big)\end{array}$$



Cas $d'=2$***, les racines*** a,b ***sont courtes,*** c ***est longue et non divisible :***

Par [BrT84, A.6.b], il existe $\varepsilon\in\{\pm1\}$ *tel qu'on ait la relation de commutation :*

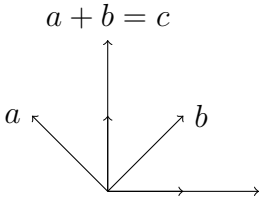
$$\begin{array}{l}\forall y\in L_a,\ \forall z\in L_b,\\ \qquad\Big[x_a(y),x_b(z)\Big] \quad=\quad x_{a+b}\Big(\varepsilon(yz+{}^{\tau}y^{\tau}z)\Big)\end{array}$$



Cas $d'=2$***, les racines*** a,b ***sont courtes,*** c ***est longue et divisible :***

Par [BrT84, A.6.c], il existe $\varepsilon\in\{\pm1\}$ *tel qu'on ait la relation de commutation :*

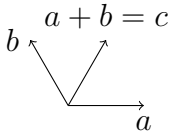
$$\begin{array}{l}\forall y\in L_a,\ \forall z\in L_b,\\ \qquad\Big[x_a(y),x_b(z)\Big] \quad=\quad x_{\frac{a+b}{2}}\Big(0,\varepsilon(yz-{}^{\tau}y^{\tau}z)\Big)\end{array}$$



Cas $d'=2$***, les racines*** a,b,c ***sont courtes,*** a,b ***sont non multipliables :***

Par [BrT84, A.6.b], il existe $\varepsilon\in\{\pm1\}$ *tel qu'on ait la relation de commutation :*

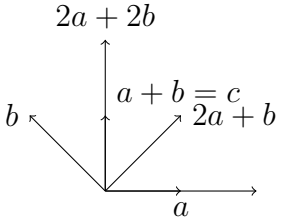
$$\begin{array}{l}\forall y\in L_a,\ \forall z\in L_b,\\ \qquad\Big[x_a(y),x_b(z)\Big] \quad=\quad x_{a+b}\Big(\varepsilon yz\Big)\end{array}$$



Cas $d'=2$***, les racines*** a,b,c ***sont courtes,*** b ***est non multipliable et*** a ***est multipliable :***

Par [BrT84, A.6.c], il existe $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{\pm1\}$ *tels qu'on ait la relation de commutation :*

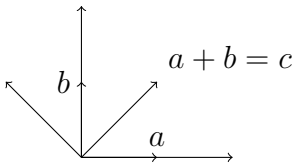
$$\begin{array}{l}\forall (y,y')\in H(L_a,L_{2a}),\ \forall z\in L_b,\\ \qquad\Big[x_a(y,y'),x_b(z)\Big] \quad=\quad x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz,y'z^{\tau}z\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2 zy'\Big)\end{array}$$



Cas $d'=2$***, les racines*** a,b,c ***sont courtes et*** a,b ***sont multipliables :***

Par [BrT84, A.6.c], il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel qu'on ait la relation de commutation :

$$\begin{array}{l}\forall (y,y') \in H(L_a, L_{2a}),\\ \forall (z,z') \in H(L_b, L_{2b}),\\ \quad \Big[x_a(y,y'), x_b(z,z')\Big] \quad = \quad x_{a+b}\Big(\varepsilon yz\Big)\end{array}$$

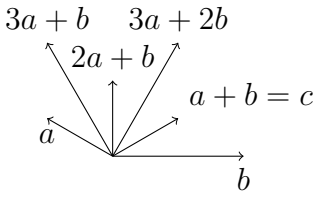


Désormais, on suppose que $d'=3$. Ce qui correspond uniquement au cas des groupes trialitaires. Le cas de trois racines longues est déjà écrit.

Cas $d'=3$, les racines a, c sont courtes et b est longue :

Soit $\tau \in \Sigma_d$ un élément représentant un élément d'ordre 3 du groupe quotient Σ_d/Σ_0. Pour tout $y \in L'$, on pose $\Theta(y) = {}^{\tau}y^{\tau^2}y$ et $\mathrm{N}(y) = y\Theta(y)$. Par [BrT84, A.6.d], il existe un entier $\eta \in \{1,2\}$ et quatre signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{-1,1\}$ tels qu'on ait la relation de commutation :

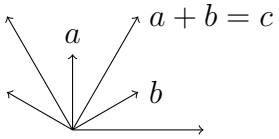
$$\begin{array}{l}\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b,\\ \quad \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] \quad = \quad x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\quad x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2 \Theta(y) z\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\quad x_{3a+b}\Big(\varepsilon_3 \mathrm{N}(y) z\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\quad x_{3a+2b}\Big(\varepsilon_4 \eta \mathrm{N}(y) z^2\Big)\end{array}$$



Cas $d'=3$,les racines a, b sont courtes et c est longue :

Soit $\tau \in \Sigma_d$ comme précédemment. Pour tout $y \in L'$, on pose $\mathrm{Tr}(y) = y + {}^{\tau}y + {}^{\tau^2}y$. Par [BrT84, A.6.d], il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tels qu'on ait la relation de commutation :

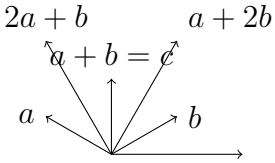
$$\begin{array}{l}\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b,\\ \quad \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] \quad = \quad x_{a+b}\Big(\varepsilon \mathrm{Tr}(yz)\Big)\end{array}$$



Cas $d'=3$ et les racines a, b, c sont courtes :

Soit $\tau \in \Sigma_d$ comme précédemment. Pour tout $y \in L'$, on définit $\Theta(y)$, $\mathrm{Tr}(y)$ et $\mathrm{N}(y)$ comme précédemment. Pour tout $y, z \in L'$, on pose $(y * z) = \Theta(y+z) - \Theta(y) - \Theta(z) = {}^{\tau}y^{\tau^2}z + {}^{\tau^2}y^{\tau}z$. Par [BrT84, A.6.d], il existe trois signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1,1\}$ tels qu'on ait la relation de commutation :

$$\begin{array}{l}\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b,\\ \quad \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] \quad = \quad x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 (y*z)\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\quad x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2 \mathrm{Tr}\Big(\Theta(y) z\Big)\Big)\\ \qquad\qquad\qquad\quad x_{a+2b}\Big(\varepsilon_3 \mathrm{Tr}\Big(y\Theta(z)\Big)\Big)\end{array}$$



On peut observer, grâce à la classification des systèmes de racines irréductibles de rang 2, que tous les cas combinatoires possibles ont été traités.

1.2 Immeubles

Un immeuble est un complexe polysimplicial doté de propriétés de symétrie remarquables. Ce sont en outre des espaces métriques contractiles ayant des propriétés de courbure négative ou nulle. Une axiomatique possible pour les définir est celle des systèmes d'appartements. L'immeuble est alors un recollement d'appartements, tous identiques et pavés par des produits de simplexes. Les simplexes de dimension maximale sont appelés des alcôves ou chambres. On parle d'immeuble sphérique (resp. affine) lorsque l'appartement peut se réaliser géométriquement comme une sphère (resp. un espace affine).

Afin de mieux comprendre les groupes de points rationnels des groupes réductifs, on leur attache un immeuble et une action sur celui-ci. Cette action sera fortement transitive, c'est-à-dire transitive sur les couples « inclusion d'une alcôve dans un appartement ». La structure des groupes réductifs sur les corps quelconques peut se résumer à attacher à un groupe réductif, un immeuble sphérique avec une action fortement transitive des points rationnels du groupe.

Sur un corps topologique muni d'une valuation, on dispose en outre d'une topologie séparée sur les points rationnels qui permet de préciser la situation. Lorsque la valuation est discrète, on peut établir des filtrations de certains sous-groupes bien choisis (notamment les groupes de racines produits à partir du groupe additif d'un corps local de base), et on va établir le pavage d'un appartement affine en alcôves en section 4.3.1. La structure des groupes réductifs sur les corps locaux non archimédiens peut se résumer à attacher à un groupe réductif, un immeuble affine avec une action fortement transitive des points rationnels associés.

En quelque sorte, les immeubles de Bruhat-Tits sont l'équivalent sur un corps local des espaces symétriques riemanniens des groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2.1 Systèmes de Coxeter et systèmes de Tits

Avant de s'intéresser aux groupes algébriques et à leurs points rationnels, on commence par rappeler quelques définitions élémentaires qui sont liées à la définition des immeubles. Pour une étude plus approfondie, le lecteur pourra se reporter à [Bou81, chap.IV].

1.2.1 Définition. Un **système de Coxeter** est un couple (W, S) constitué d'un groupe (abstrait) et une partie S qui engendre W, dont les éléments sont d'ordre 2 et telle que le groupe W admet la présentation :

$$W = \left\langle S \;\middle|\; (ss')^{m_{s,s'}} = 1, \quad s, s' \in S,\ m_{s,s'} \neq \infty \right\rangle$$

où $m_{s,s'}$ désigne l'ordre de l'élément ss' dans W.

On parlera de **groupe de Coxeter** pour désigner un groupe W qui s'inscrit dans un système de Coxeter (W, S). Pour une partie $X \subset S$, on notera W_X le sous-groupe de W engendré par X. C'est encore un groupe de Coxeter appelé **sous-groupe parabolique** de W de type X.

On attache, à un système de racines Φ, un groupe de Coxeter $W(\Phi)$, que l'on appellera **groupe de Weyl** de Φ, engendré par l'ensemble des réflexions $s_\alpha : x \mapsto x - \alpha^\vee(x)\alpha$ de $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\Phi)$ [Bou81, VI.1]. C'est un groupe fini qui agit sur la sphère unité, on parlera de groupe de Weyl **sphérique**.

On va définir (voir section 1.3.4) une « affinisation » du système de racines. On parle d'échelonnage d'un système de racines [BrT72, 1.4] (ou encore de système de racines affine [Tit79]). On disposera alors d'un ensemble $S = \{s_{\alpha,l},\ \alpha \in \Phi,\ l \in \Gamma_a\}$ formé de réflexions affines, où les Γ_a sont des sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$. Le groupe W engendré par S est un groupe de Coxeter appelé le **groupe de Weyl affine** de l'échelonnage de Φ [Bou81, VI.2]. On peut en fait trouver une sous-famille finie de S qui engendre W.

De même que pour les systèmes de racines, on peut définir un diagramme de Dynkin d'un système de Coxeter. Lorsque ce diagramme est connexe, on dit alors que (W, S) est irréductible.

1.2.2 Définition. On appelle **système de Tits** (ou **BN-paire**) la donnée d'un quadruplet (G, B, N, S) constitué d'un groupe abstrait G, de deux sous-groupes B et N de G et d'une partie $S \subset W$, où $T = B \cap N$ et $W = N/T$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(T1) G est engendré par $B \cup N$ et $T = B \cap N$ est un sous-groupe distingué de N ;

(T2) S engendre W et se compose d'éléments d'ordre 2 ;

(T3) pour tout $s \in S$ et $w \in W$, on a $sBw \subset BwB \cup BswB$;

(T4) pour tout $s \in S$, on a $sBs \neq B$.

On dispose d'une **décomposition de Bruhat** $G = BWB$ [Bou81, IV.2 thm. 1]. Le groupe W est appelé le **groupe de Weyl** du système de Tits (G, B, N, S) ; c'est un groupe de Coxeter [Bou81, IV.2 thm. 2]. Un sous-groupe P de G est dit **parabolique** s'il contient un conjugué de B ou, de manière équivalente, s'il existe une partie $X \subset S$ telle que P est conjugué au sous-groupe $G_X = BW_XB$ [Bou81, IV.2.6]. On dit alors que X est le **type** de P. On dira que le système de Tits est **sphérique** (resp. **affine**) lorsque le groupe W est isomorphe au groupe de Weyl sphérique (resp. affine) d'un système de racines. Une application des systèmes de Tits est le théorème de simplicité du groupe G, modulo son centre [Bou81, IV.2.7 thm. 5].

L'exemple ci-dessous, sur un corps quelconque, est une généralisation des travaux de [BoT65] pour les groupes réductifs au cas général des groupes algébriques.

1.2.3 Exemple. Soient k un corps quelconque et G un k-groupe algébrique lisse connexe. Soit S un tore k-déployé maximal de G. On pose $N = \mathcal{N}_G(S)$ et $Z = \mathcal{Z}_G(S)$. Soit P un k-sous-groupe pseudo-parabolique minimal de G (voir définition [CGP15, 2.2.1]). D'après [CGP15, C.2.8], on a la décomposition de Bruhat $G(k) = P(k)N(k)P(k)$. De plus, le théorème [CGP15, C.2.20] fournit une partie R telle que $(G(k), P(k), N(k), R)$ est un système de Tits sphérique et $Z(k) = P(k) \cap N(k)$

Pour disposer d'une description plus fine de la structure du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique, on va chercher à lui associer un système de Tits de type affine, au moyen d'une action convenable sur un immeuble.

1.2.2 Immeubles et propriétés métriques

Un **complexe simplicial** sur un ensemble de sommets X est une collection non vide $\mathcal{C}$ de parties finies de V, appelées **simplexes**, tel que les singletons sont des simplexes et toute sous-partie d'un simplexe $C \in \mathcal{C}$ est encore un simplexe, appelé une facette de C. Le cardinal r de C est appelé le **rang** de C et $r - 1$ est appelé la dimension de C [AB08,

A.1.1]. Un **complexe polysimplicial** $(X, \mathcal{C})$ est un produit fini de complexes simpliciaux $(X_i, \mathcal{C}_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire $(X, \mathcal{C}) = (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{C}_i)$. Les éléments de Σ sont appelés des **polysimplexes**. La dimension d'un polysimplexe est le produit des dimensions des simplexes qui le constituent. Une **facette** d'un polysimplexe est un produit de facettes des simplexes qui le constituent. Une **chambre** est un polysimplexe de dimension maximale. Une **cloison** est un polysimplexe de codimension 1. On dit que le complexe polysimplicial est **fin** si toute cloison est contenue dans exactement deux chambres ; qu'il est **épais** si toute cloison est contenue dans au moins trois chambres. Lorsqu'on dispose d'une structure affine, on retrouve les définitions de [BrT72, 1.1].

Soit (W, S) un système de Coxeter avec S fini. On lui attache le complexe polysimplicial suivant :

$$\Sigma(W, S) = \left\{wW_X,\ w \in W,\ X \in \mathcal{P}(S)\right\}$$

qu'on appelle **complexe de Coxeter** du système (W, S). On dispose d'une réalisation géométrique dans $\mathbb{R}^S$ [AB08, 2.5]. En particulier, on dispose d'une géométrie sphérique (resp. affine) pour un groupe de Weyl d'un système de racines (resp. d'un échelonnage). C'est un ensemble partiellement ordonné pour l'ordre opposé à l'inclusion. Les éléments maximaux sont appelés des **chambres**. On dit que X est le **type** du polysimplexe wW_X. Une cloison est donc un polysimplexe dont le type est un singleton. On dit que $\Sigma(W, S)$ est **fin**, c'est-à-dire que toute cloison contient exactement deux chambres.

1.2.4 Définition. Soit (W, S) un système de Coxeter. Un **immeuble** de type (W, S) est un complexe polysimplicial X muni d'une collection $\mathcal{A}$ de sous-complexes $A \subset X$, appelés **appartements**, satisfaisant aux axiomes suivants :

(I0) tout appartement $A \in \mathcal{A}$ est isomorphe au complexe de Coxeter $\Sigma(W, S)$;

(I1) si F_1 et F_2 sont deux facettes de X, alors il existe un appartement $A \in \mathcal{A}$ les contenant ;

(I2) si A_1 et A_2 sont deux appartements dont l'intersection $A_1 \cap A_2$ contient une chambre de A_1, alors il existe un isomorphisme de complexes polysimpliciaux $A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ fixant une à une les facettes de $A_1 \cap A_2$.

On suppose désormais que le système de Coxeter (W, S) est sphérique ou affine et que le complexe de Coxeter $\Sigma(W, S)$ munit, via une réalisation géométrique [AB08, 10.2], une sphère ou un espace affine Euclidien $\mathbb{A}$ d'une structure de complexe polysimplicial. On dispose alors d'une distance sur chaque appartement que l'on peut, au moyen des rétractions, étendre de manière unique en une distance euclidienne sur l'immeuble tout entier [AB08, 11.2]. L'immeuble muni de cette métrique est un espace complet et CAT(0) (c'est-à-dire contractile et ayant une propriété de courbure négative ou nulle) [AB08, Thm 11.16].

Soit G un groupe d'isométries d'un immeuble X. On dit que G agit **fortement transitivement** sur X si l'action de G sur l'ensemble des couples (C, A) formés d'une chambre C contenue dans un appartement A est transitive. À partir d'un système de Tits (G, B, N, S), on peut définir un immeuble épais X de type $(W = N/(B \cap N), S)$, sphérique ou affine si le système de Tits l'est. On peut définir une action naturelle de G sur X par isométries et fortement transitive préservant le type des facettes [BrT72, §2]. Inversement, si un groupe abstrait G agit sur un immeuble X sphérique ou affine par isométries et fortement transitivement en préservant le type des facettes, on peut

définir un système de Tits de G en posant $B = \mathrm{Stab}_G(C)$ et $N = \mathrm{Stab}_G(A)$ où A est un appartement de X et C une chambre de A [AB08, Thm. 6.56].

1.3 Éléments de théorie de Bruhat-Tits

Afin de disposer d'une analyse plus fine du groupe de points rationnels d'un groupe réductif G, on s'intéresse au cas d'un corps de base K topologique, précisé en section 1.3.1, qui munit le groupe abstrait $G(K)$ d'une topologie. À partir de (G, K), on va définir en section 1.3.4, conformément à [BrT84], un immeuble affine $X(G, K)$ appelé immeuble de Bruhat-Tits attaché à (G, K). Dans le même temps, on définit une action continue (et éventuellement propre) de $G(K)$ sur $X(G, K)$, par isométries et fortement transitive. Sous de bonnes hypothèses (e.g. G est simplement connexe), cette action de $G(K)$ sur $X(G, K)$ préserve le type des facettes et on dispose alors d'un système de Tits affine, précisé en section 1.3.6, pour lequel les doubles classes de la décomposition de Bruhat sont bornées (et compactes si l'action est propre). On pourra également s'intéresser plus tard aux compactifications de cet immeuble, réalisées dans [RTW10].

1.3.1 Corps local

Supposons désormais dans toute la suite que K est un corps local non archimédien, de valuation (discrète[2]) $\omega : K^\times \to \mathbb{Z}$. Si L/K est une extension finie, alors il existe une unique valuation $\omega_L : L^\times \to \mathbb{Q}$ prolongeant ω faisant de L un corps local. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on la notera plus simplement ω.

Pour un corps local L, on notera $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers ; ϖ_L une uniformisante quelconque de $\mathcal{O}_L$; $\mathfrak{m}_L$ l'unique idéal maximal de $\mathcal{O}_L$; $\kappa_L = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$ le corps résiduel (fini) de L ; $\Gamma_L = \omega_L(L^\times)$ le groupe des valeurs prises par la valuation.

1.3.1 Remarque. On préfère la notation $\mathcal{O}_L$ à la notation L^0 car, pour certaines extensions quadratiques L/K, on sera amené à considérer l'ensemble noté L^0 des éléments de L de trace nulle déjà introduit dans la notation 1.1.24 pour des corps quelconques.

Dans toute la suite on notera p la caractéristique du corps fini κ_K, on l'appelle **caractéristique résiduelle** de K. On distinguera le cas où K est de caractéristique 0 (et donc une extension finie de $\mathbb{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p)$) du cas où K et κ_K sont d'**égales caractéristiques** p. On notera également q le cardinal du corps résiduel fini κ_K.

Topologie forte sur $G(K)$ On a des immersions fermées $G \to \mathrm{GL}_n \to \mathbb{A}_K^N$ de K-schémas affines qui permettent d'avoir des inclusions $G(K) \subset \mathrm{GL}_n(K) \subset K^N$, fermées pour la topologie de Zariski. Comme on a une topologie sur K induite par la valuation, on peut en déduire une topologie produit sur K^N. On définit une topologie sur $\mathrm{GL}_n(K)$ et $G(K)$ respectivement comme étant la plus petite topologie rendant continues et fermées les inclusions précédentes. Cela ne dépend pas de la représentation $G \to \mathrm{GL}_n$ choisie. On l'appelle topologie forte, ou topologie usuelle. Cette topologie est plus fine que la topologie de Zariski.

2. Bien que Bruhat et Tits traitent également le cas des valuations denses, on se restreint ici au cas des corps locaux. La valuation est automatiquement discrète par locale compacité.

Extension quadratique galoisienne d'un corps local Afin de comprendre la structure d'un groupe réductif quasi-déployé, on peut se réduire au cas d'un groupe semi-simple absolument presque simple quasi-déployé par la proposition 1.1.28. Lorsqu'on est dans le cas d'une forme extérieure d'un groupe déployé qui fait apparaître des racines relatives multipliables (type ${}^2A_{2l}$), on a besoin d'une connaissance plus approfondie de l'extension quadratique « tordant » le groupe déployé.

Soient L/K une extension quadratique galoisienne de corps locaux, $\omega = \omega_L$ la valuation sur L et τ l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$.

1.3.2 Lemme. *[BrT84, 4.3.3] Il existe des éléments $t \in \mathcal{O}_L$, $r, s \in \mathcal{O}_K$ tels que $\mathcal{O}_K[t] = \mathcal{O}_L$ et $t^2 = rt - s$ vérifiant les propriétés :*

- *Si L/K est non ramifiée, $\omega(s) = 0$.*
- *Si L/K est ramifiée, s est une uniformisante de K et t est une uniformisante de L.*
- *On a $r = 0$ ou $\omega(s) \leq \omega(r) < \omega(2)$ ou $0 < \omega(s) \leq \omega(r) = \omega(2)$.*

Démonstration. Si L/K est non ramifiée, on a $\omega(\varpi_L) = \omega(\varpi_K)$ et $[\kappa_L : \kappa_K] = 2$. Soit $t \in \mathcal{O}_L$ tel que $\bar{t} = t/\mathfrak{m}_L \in \kappa_L$ vérifie $\kappa_K[\bar{t}] = \kappa_L$. On a donc $\mathcal{O}_K[t] = \mathcal{O}_L$ et on écrit $t^2 - rt + s = 0$. Remarquons que $s = N_{L/K}(t)$ et $r = \mathrm{Tr}_{L/K}(t)$. En particulier, $s, r \in \mathcal{O}_K$. On a $\omega(s) = 2\omega(t) = 0$. Si $r \neq 0$ et $\omega(r) \geq \omega(2)$, en particulier $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $\frac{r}{2} \in \mathcal{O}_K$. On pose $t' = t - \frac{r}{2} \in \mathcal{O}_L$. Ceci change r en $r' = 0$ et s en $s' = s - \frac{r^2}{4}$ et $\omega(s') = 2\omega(t') = 0$ reste vrai.

Si L/K est ramifiée, on a $\omega(\varpi_L) = \frac{1}{2}\omega(\varpi_K)$ et $[\kappa_L : \kappa_K] = 1$. On pose $t = \varpi_L$. On a bien $\mathcal{O}_K[t] = \mathcal{O}_L$ et on écrit $t^2 - rt + s = 0$. Remarquons que $s = N_{L/K}(t)$ et $r = \mathrm{Tr}_{L/K}(t)$. On a bien $\omega(s) = 2\omega(t) = 2\omega(\varpi_L) = \omega(\varpi_K)$. Donc s est une uniformisante de K. Si $r \neq 0$ et $\omega(r) > \omega(2)$, en particulier $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et $\frac{r}{2} \in \mathcal{O}_K$, donc $\omega(\frac{r}{2}) > \omega(t)$. On pose $t' = t - \frac{r}{2} \in \mathcal{O}_L$. $\omega(t') = \min(\omega(t), \omega(\frac{r}{2})) = \omega(t)$ car on est dans le cas d'égalité étant donné que c'est une somme de deux termes de valuations distinctes. Cela change r en $r' = 0$ et s en $s' = s - \frac{r^2}{4}$ qui conviennent alors. □

1.3.3 Remarque. Si K est de caractéristique 2, alors $r \neq 0$ sinon on contredirait la séparabilité de l'extension L/K.

On complète la notation 1.1.24 en posant $L^1_{\max} = \{y \in L^1,\ \omega(y) = \sup \omega(L^1)\}$. Ce qu'il faut retenir du lemme suivant est que $L^1_{\max}$ est non vide.

1.3.4 Lemme. *On reprend l'écriture du lemme 1.3.2.*
Si $r = 0$, on a $L_0 = tK$ et $L_1 = \frac{1}{2} + tK$ et $\frac{1}{2} \in L^1_{\max}$.
Si $r \neq 0$, on a $L_0 = (1 - 2tr^{-1})K$ et $L_1 = tr^{-1} + (1 - 2tr^{-1})K$ et $tr^{-1} \in L^1_{\max}$.

Démonstration. Écrire $x = at + b$ avec $a, b \in K$ donne les résultats pour L_0 et L_1.

Remarquons que $\forall x, y \in K,\ \omega(x + ty) = \min(\omega(x), \omega(t) + \omega(y))$. En effet, si L/K et ramifiée, on a $\omega(ty) \neq \omega(x)$. Si L/K est non ramifiée, si $\omega(x) < \omega(y)$ c'est bon. Sinon, $\omega(x) \geq \omega(y)$ donc $xy^{-1} \in \mathcal{O}_K$. Si par l'absurde $\omega(t + xy^{-1}) > \min(\omega(t), \omega(x) - \omega(y))$, alors $t + xy^{-1} \in \varpi_L \mathcal{O}_L$. Donc t et xy^{-1} ont même image dans κ_L. Contradiction avec $t \notin \mathcal{O}_K$.

Lorsque $r = 0$, on a $\forall x \in K,\ \omega(\frac{1}{2} + tx) = \min(\omega(\frac{1}{2}), \omega(t) + \omega(x)) \leq \omega(\frac{1}{2})$. D'où le résultat.

Lorsque $r \neq 0$, on a pour tout $x \in K$,

$$\begin{array}{rcl} \omega(tr^{-1} + (1 - 2tr^{-1})x) & = & \omega(x + t(r^{-1} - 2r^{-1}x)) \\ & = & \min(\omega(x), \omega(tr^{-1}) + \omega(1 - 2x)) \\ & \leq & \omega(tr^{-1}) \end{array}$$

Sinon, on aurait $\omega(x) > \omega(tr^{-1})$ et $\omega(1 - 2x) > 0$. Comme $\omega(1) = 0$, on aurait donc $0 = \omega(2x) = \omega(x) + \omega(2)$. Donc $-\omega(x) = \omega(2) < \omega(rt^{-1})$. Contradiction avec les hypothèses faites sur r et t. □

1.3.2 Valuations d'une donnée de groupes radicielle

En utilisant sa valuation ω_L, on peut définir une exhaustion d'un corps local L par une suite croissante de sous-groupes (ouverts compacts). On en fait de même pour les groupes de points rationnels des groupes radiciels, via les paramétrages définis en section 1.1.6.3. Afin de pouvoir définir une action de $G(K)$ sur un immeuble affine ayant des propriétés convenables, il suffit de disposer de certaines relations établies entre les sous-groupes obtenus par filtration des groupes radiciels. Plus précisément, on rappelle la définition donnée par Bruhat-Tits [BrT72, §6] :

1.3.5 Définition. [BrT72, 6.2.1] Soient G un groupe abstrait et Φ un système de racines. Soit $\left(T, \left(U_a, M_a\right)_{a\in\Phi}\right)$ une donnée de groupes radicielle de G de type Φ. Une **donnée de groupes radicielle valuée** est un système $\left(T, \left(U_a, M_a, \varphi_a\right)_{a\in\Phi}\right)$, où φ_a est une application de U_a dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(DGRV 0) pour toute racine $a \in \Phi$, l'image de l'application φ_a contient au moins 3 éléments ;

(DGRV 1) pour toute racine $a \in \Phi$ et tout élément $l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $U_{a,l} = \varphi_a^{-1}([l; \infty])$ est un sous-groupe de U_a et le groupe $U_{a,\infty}$ est le groupe trivial noté $\{\mathbf{1}\}$;

(DGRV 2) pour toute racine $a \in \Phi$ et tout élément $m \in M_a$, l'application $u \mapsto \varphi_{-a}(u) - \varphi_a(mum^{-1})$ est constante sur $U_{-a} \setminus \{\mathbf{1}\}$;

(DGRV 3) pour toutes racines $a, b \in \Phi$ telles que $b \notin -\mathbb{R}_+ a$ et tous éléments $l, l' \in \mathbb{R}$, le groupe engendré par les commutateurs $[U_{a,l}, U_{b,l'}]$ est contenu dans le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes de la forme $U_{ra+sb,rl+sl'}$ pour $r, s \in \mathbb{N}^*$ et $ra + sb \in \Phi$;

(DGRV 4) pour toute racine multipliable $a \in \Phi$, l'application φ_{2a} est la restriction de l'application $2\varphi_a$ au sous-groupe U_{2a} ;

(DGRV 5) pour toute racine $a \in \Phi$, tout élément $u \in U_a$ et tous éléments $u', u'' \in U_{-a}$ tels que $u'uu'' \in M_a$, on a $\varphi_{-a}(u') = -\varphi_a(u)$.

Désormais, on se donne K un corps local et G un K-groupe réductif quasi-déployé, ayant Φ pour système de racines relatif. On a obtenu en section 1.1.4 une donnée de groupes radicielle de $G(K)$. On définit une **filtration** $(\varphi_a)_{a\in\Phi}$ des points rationnels $U_a(K)$ de chaque groupe radiciel par :

— $\varphi_a(x_a(y)) = \omega(y)$ pour tout $y \in L_a$ lorsque a est une racine non multipliable et non divisible ;

— $\varphi_a(x_a(y, y')) = \frac{1}{2}\omega(y')$ pour tout $(y, y') \in H(L_a, L_{2a})$ si a est une racine multipliable ;

— $\varphi_{2a}(x_a(0, y')) = \omega(y')$ pour tout $y' \in L_a^0$ si a est une racine multipliable.

D'après [BrT84, §4.2], le système $\Big(T(K), \big(U_a(K), M_a, \varphi_a\big)_{a\in\Phi}\Big)$ est une donnée de groupes radicielle valuée.

1.3.3 Ensembles de valeurs

À partir d'une donnée de groupes radicielle valuée, on peut alors définir un immeuble affine et une action de $G(K)$ sur cet immeuble ayant de bonnes propriétés précisées dans [BrT72, §7].

On veut quantifier précisément les sauts dans l'exhaustion en sous-groupes du groupe des points rationnels d'un groupe radiciel. Comme on supposera toujours que la valuation ω est discrète, ces sauts a priori indexés par $\mathbb{R}$ le sont, en fait, par certains sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$. On utilisera ces ensembles en section 1.3.4, afin d'obtenir une « affinisation » du système de racines sphériques.

Soit $a \in \Phi$ une racine. On définit les **ensembles de valeurs** suivants :

— $\Gamma_a = \varphi_a(U_a(K) \setminus \{\mathbf{1}\})$;

— $\Gamma'_a = \{\varphi_a(u),\ u \in U_a(K) \setminus \{\mathbf{1}\} \text{ et } \varphi_a(u) = \sup \varphi_a(uU_{2a}(K))\}$.

De plus, pour toute valeur $l \in \mathbb{R}$, on notera $l^+ = \min\{l' \in \Gamma_a,\ l' > l\}$. C'est la plus petite valeur, strictement supérieure à l, pour laquelle on obtient un nouveau sous-groupe de la famille $(U_{a,l'})_{l'>l}$.

Afin de pouvoir déterminer Γ'_a, on a introduit la notation

$$L^1_{a,\max} = \{z \in L^1_a,\ \omega(z) = \sup\{\omega(y),\ y \in L^1_a\}\}$$

en section 1.3.1. C'est le sous-ensemble de L^1_a formé des éléments qui atteignent le maximum de la valuation. Cet ensemble est non vide, d'après le lemme 1.3.4, et détermine une certaine valeur comme étant la valuation prise par ces éléments.

1.3.6 Remarque. On utilisera la notation l^+ avec précaution car cette valeur dépend de a. En particulier, on s'attachera à préciser au cas par cas, pour chaque racine, une normalisation de la valuation de sorte que $l^+ = l + 1$.

Dans le lemme 4.3.11, on donnera un sens géométrique à Γ'_a. C'est cet ensemble de valeurs qui paramètre les racines affines dont la direction est donnée par la racine relative a.

Détermination des ensembles de valeurs On se donne une racine relative $a \in \Phi$. On veut calculer les ensembles de valeurs Γ_a et Γ'_a en fonction de la valuation et du corps de déploiement de a.

1.3.7 Lemme. *Si a est une racine non multipliable et non divisible, alors on a $\Gamma_a = \Gamma'_a = \Gamma_{L_a}$.*

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de l'isomorphisme entre $U_a(K)$ et L_a donné en section 1.1.6. □

On suppose désormais que la racine relative $a \in \Phi$ est multipliable.

Comme ω est une valuation discrète et que pour tout $y \in L_a^1$, on a $\omega(y) \leq 0$, il est clair que $L_{a,\max}^1$ est non vide. De plus, lorsque $p \neq 2$, on a $\frac{1}{2} \in L_{a,\max}^1$. Ainsi, d'après [BrT84, 4.2.21 (4)] avec $p \neq 2$, on sait que $\Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_{L_a}$ et que $\Gamma'_a = \Gamma_{L_a}$. D'après [BrT84, 4.3.4] avec $p \neq 2$, on sait que :

— lorsque l'extension quadratique L_a/L_{2a} est non ramifiée, on a les égalités $\Gamma_{2a} = \Gamma'_{2a} = \omega(L^{0\times}) = \Gamma_{L_a} = \Gamma_{L_{2a}}$;

— lorsque l'extension quadratique L_a/L_{2a} est ramifiée, on a les égalités $\Gamma_{2a} = \Gamma'_{2a} = \omega(L^{0\times}) = \omega(\varpi_{L_a}) + \Gamma_{L_{2a}}$.

1.3.8 Lemme (Synthèse)**.** *On suppose que la caractéristique résiduelle p est différente de 2. Soit $a \in \Phi$ une racine multipliable. Si l'on normalise la valuation ω de sorte que $\Gamma_{L_a} = \mathbb{Z}$, alors on a :*

L_a/L_{2a}	*non ramifiée*	*ramifiée*
Γ_{L_a}	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\Gamma_{L_{2a}}$	$\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$
Γ_a	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
Γ_{2a}	$\mathbb{Z}$	$1+2\mathbb{Z}$
Γ'_a	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

1.3.9 Remarque. On a également traité le cas d'une racine divisible. C'est le cas $2a$ d'une racine multipliable a.

1.3.10 Remarque (Le cas de caractéristique résiduelle 2). Lorsque la caractéristique résiduelle est quelconque (et en particulier lorsque $p = 2$), on pose $\delta = \sup \omega(L_a^1)$. On peut exprimer les ensembles de valeurs en fonction de δ et de la ramification de L_a/L_{2a}. On obtient les résultats suivants :

— $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_{L_a}$;

— $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma_{2a} = \frac{1}{2}\Gamma_{L_a}$;

— si L_a/L_{2a} est ramifiée, alors $\Gamma'_a \cap \frac{1}{2}\Gamma_{2a} = \emptyset$ et $\Gamma_{2a} = \delta + \omega(\varpi_{L_a}) + \Gamma_{L_{2a}}$;

— si L_a/L_{2a} est non ramifiée, alors $\Gamma'_a \cap \frac{1}{2}\Gamma_{2a} \neq \emptyset$ et $\Gamma_{2a} = \Gamma_{L_{2a}} = \Gamma_{L_a}$.
Comme $\delta = 0$ lorsque $p \neq 2$, ceci généralise bien le lemme 1.3.8.

Calcul détaillé dans le cas d'une racine multipliable On redémontre ici les résultats annoncés dans la remarque 1.3.10, dus à Bruhat et Tits [BrT84, 4.2.21]. On suppose que $a \in \Phi$ est une racine multipliable et on reprend les notations du paragraphe de la section 1.3.1 sur les extensions quadratiques galoisiennes de corps locaux. En particulier, on pose dans ce paragraphe $K = L_{2a}$ et $L = L_a$ pour alléger ici les notations.

On sait par le lemme 1.3.4 que $L_{\max}^1$ est non vide. Notons $\delta = \sup \omega(L_{\max}^1)$ et choisissons $\lambda \in L_{\max}^1$.

1.3.11 Proposition.
(1) Si L/K est non ramifiée, on a $\Gamma'_{2a} = \Gamma_K$.
(2) Si L/K est ramifiée, on a $\Gamma'_{2a} = \delta + \omega(\varpi_L) + \Gamma_K$.

Démonstration. On sait par le lemme 1.3.4 que $\Gamma'_{2a} = \omega(L_0^\times) \subset \Gamma_L$ et que L_0 est un K-espace vectoriel de dimension 1. Donc Γ'_{2a} s'écrit $\omega_0 + \Gamma_K$ avec $\omega_0 \in \Gamma_L$ à déterminer.
(1) Le cas non ramifié découle du fait que $\Gamma_L = \Gamma_K$.
(2) Dans le cas ramifié, on montre que $\delta \notin \Gamma'_{2a}$. Par l'absurde, supposons que $\delta \in \Gamma'_{2a}$. Par définition de Γ'_{2a}, il existerait $y \in L_0$ tel que $\delta = \omega(y)$. Par définition de δ, il existe $x \in L_1$ tel que $\delta = \omega(x)$. Donc $\omega(xy^{-1}) = 0$. Comme L/K est ramifiée, il existe $z \in \mathcal{O}_K^\times$ tel que $xy^{-1} = z \mod \varpi_L \mathcal{O}_K$. On pose $y' = yz \in L_0$ de sorte que $\omega(xy^{-1} - z) = \omega(x(y')^{-1} - 1) > 0$. Comme $x + y' \in L_1$, on a $\omega(x + y') = \omega(y') + \omega(xy'^{-1} - 1) > \delta$; ce qui contredit la maximalité de δ.

□

1.3.12 Lemme. *Si $\lambda \in L^1_{\max}$ alors pour tout $x \in K$ et tout $y \in L_0$, on a $\omega(x\lambda + y) = \min(\omega(y), \omega(x\lambda))$.*

Démonstration. Si $x = 0$, c'est vrai.
Supposons désormais $x \in K^\times$. Alors $\lambda + yx^{-1} \in L_1$. Donc par définition de $L^1_{\max}$, on a $\omega(\lambda) \geq \omega(\lambda + yx^{-1})$. Donc $\omega(x\lambda) \geq \omega(x\lambda + y)$. De plus, $\omega(y) = \omega(y + x\lambda - x\lambda) \geq \min(\omega(y + x\lambda), \omega(-x\lambda) = \omega(y + x\lambda)$ car $\omega(-x\lambda) \geq \omega(x\lambda) \geq \omega(x\lambda + y)$. Donc $\min(\omega(y), \omega(x\lambda)) = \omega(y + x\lambda)$. □

1.3.13 Proposition. *On a $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$*

Démonstration. Soit $(u, v) \in H(L, K)$ tel que :

$$\varphi_a\Big(x_a(u, v)\Big) = \sup \varphi_a\Big(x_a(u, v)U_{2a}(K)\Big)$$

Fixons un $\lambda \in L^1_{\max}$. On remarque que $(u, \lambda u^\tau u) \in H(L, K)$ et que $v - \lambda u^\tau u \in L_0$ avec $u^\tau u \in K$. Pour tout $v' \in L_0$, on applique le lemme 1.3.12 à $v + v'$:

$$\begin{aligned} \omega(v + v') &= \omega((v + v' - \lambda u^\tau u) + \lambda(u^\tau u)) \\ &= \min(\omega(v + v' - \lambda u^\tau u), \delta + 2\omega(u)) \\ &\leq \delta + 2\omega(u) \end{aligned}$$

avec égalité pour $v' = \lambda u^\tau u - v \in L_0$. Donc $\omega(v) = 2\varphi_a(x_a(u, v)) = \delta + 2\omega(u)$. Donc $\Gamma'_a \subset \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$
Réciproquement, pour tout $u \in L^\times$, on a $(u, \lambda u^\tau u) \in H(L, K)$ et $\mathbf{u} = x_a(u, v)$ vérifie bien $\varphi_a(\mathbf{u}) = \sup \varphi_a(\mathbf{u}U_{2a}(K))$.
D'où le résultat $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$. □

1.3.14 Proposition.
(1) $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$
(2) $\Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_L$

Démonstration. (1) Par définition, $\Gamma'_a \subset \Gamma_a$ et

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Gamma'_{2a} &= \{\tfrac{1}{2}\varphi_{2a}(x_{2a}(v)),\ v \in L_0\}\\ &= \{\varphi_a(x_a(0,v)),\ v \in L_0\}\\ &\subset \Gamma_a\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2}\Gamma'_{2a} \cup \Gamma'_a \subset \Gamma_a$.

Réciproquement, soient $(u,v) \in H(L,K)$ et $\lambda \in L_1^{\max}$. On a $u^\tau u \in K$ et $(u, \lambda u^\tau u) \in H_0(L,K)$. On pose $v' = v - \lambda u^\tau u \in L_0$. On peut écrire $x_a(u,v) = x_a(u,\lambda u^\tau u)x_a(0,v')$.

Si $u = 0$, alors $\varphi_a(x_a(0,v)) \in \Gamma_{2a} = \Gamma'_{2a}$.

Si $u \neq 0$, alors pour tout $v' \in L_0$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_a(x_a(u,v)x_{2a}(v')) &= \varphi_a(x_a(u,v+v')\\ &= \tfrac{1}{2}\omega(v+v')\\ &= \tfrac{1}{2}\omega((u^\tau u)\lambda + (v+v'-\lambda u^\tau u))\\ &= \tfrac{1}{2}\min(\omega(v+v'-\lambda u^\tau u), \omega(\lambda)+2\omega(u))\end{aligned}$$

Les trois premières égalités sont élémentaires, la dernière est une conséquence du lemme 1.3.12.

On constate que le $\sup\{\varphi_a(x_a(u,v)\mathbf{u}'),\ \mathbf{u}' \in U_{2a}(K)\}$ est atteint en $\mathbf{u}' = x_{2a}(v')$ et vaut $\delta + 2\omega(u)$.

Si $\varphi_a(x_a(u,v)) \notin \Gamma'_a$, alors on a nécessairement :

$$\frac{1}{2}(\delta + 2\omega(u)) = \varphi_a(x_a(u,v)x_a(0,v')) > \varphi_a(x_a(u,v)) = \frac{1}{2}\omega(v)$$

Donc $\varphi_a(x_a(u,v)) = \frac{1}{2}\omega(v - \lambda u^\tau u) = \frac{1}{2}\omega(-v') \in \frac{1}{2}\omega(L_0^\times)$.
Donc $\varphi_a(x_a(u,v)) \in \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$.

(2) On le montre par double inclusion.

L'inclusion $\Gamma_a \subset \frac{1}{2}\Gamma_L$ est claire par l'écriture $\varphi_a(x_a(u,v)) = \frac{1}{2}\omega(v)$ avec $(u,v) \in H(L,K) \subset L \times L$.

Si L/K est non ramifiée, on a $\Gamma_{2a} = \Gamma_K = \Gamma_L$ car L_0 est un K-espace vectoriel de dimension 1. Donc $\frac{1}{2}\Gamma_L = \frac{1}{2}\Gamma'_{2a} \subset \Gamma_a$ donne l'autre inclusion.

Si L/K est ramifiée, on a montré que $\Gamma'_a = \frac{1}{2}\delta + \Gamma_L$ et que $\frac{1}{2}\Gamma'_{2a} = \frac{1}{2}(\delta + \omega(\varpi_L) + \Gamma_K)$. En appliquant (1), on a le résultat. □

1.3.15 Remarque. En section 4.3.2, on dénombrera le nombre d'alcôves ayant une cloison en commun grâce au quotient $U_{a,l}/U_{a,l^+}$. On utilisera alors le point (1). Le point (2) indique la répartition des murs et sert surtout si l'on est en train de regarder l'immeuble d'un groupe de dimension supérieure. On en déduit que deux murs consécutifs sont distants d'une « demi-uniformisante » et que donc la translation minimale du groupe de Weyl affine est donnée par un élément du tore maximal $T(K)$ de la forme $\tilde{a}(\varpi_L)t$ où $t \in T(K)_b$. Tout élément du tore $T(K)$ ne s'écrit pas comme produit de $m(\mathbf{u})$ [3] mais l'écart à une telle écriture est contenu dans $T(K)_b$.

1.3.16 Corollaire. *L'union $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$ est disjointe si et seulement si l'extension L/K est ramifiée.*

3. Pour $\mathbf{u} \in U_a(K)$ un élément unipotent appartenant à un groupe radiciel correspondant à une racine $a \in \Phi$, il existe des éléments $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in U_{-a}(K)$ tels que $m(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\mathbf{u}\mathbf{u}''$ relève dans $N(K) = \mathcal{N}_G(S)(K)$ la réflexion associée à la racine a du groupe de Weyl sphérique $W = N(K)/T(K)$.

Démonstration. Par les propositions 1.3.11(1) et 1.3.14(2), on constate que si L/K est non ramifiée, alors $\Gamma'_a \cap \frac{1}{2}\Gamma'_{2a} = \Gamma'_a \neq \emptyset$ car $2\Gamma_a = \Gamma'_{2a} = \Gamma_L = \Gamma_K$.

Par les propositions 1.3.11(2) et 1.3.13, on constate que si L/K est ramifiée, alors la réunion $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$ est disjointe. □

1.3.4 L'immeuble de Bruhat-Tits attaché aux points rationnels

Dans la théorie de Bruhat-Tits, on attache un immeuble affine à un groupe réductif G sur un corps local K, qu'on notera $X(G,K)$, en deux étapes. La première étape, qui correspond à [BrT84, §4], se concentre sur les groupes déployés et quasi-déployés. La seconde étape, qui correspond à [BrT84, §5], est une descente étale au corps de base qui permet de passer du cas quasi-déployé au cas général. Afin de décrire certains sous-groupes en termes de l'action de $G(K)$ sur son immeuble de Bruhat-Tits, on va rappeler comment on définit la structure simpliciale de l'immeuble à partir de la valuation des groupes radiciels. Ensuite, en section 4.3.3, on s'intéressera plus quantitativement à l'action de $G(K)$ sur son immeuble de Bruhat-Tits $X(G,K)$.

L'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif quasi-déployé G peut être défini en recollant des espaces affines, appelés **appartements**, le long de certains hyperplans bien choisis. Ceci consiste à définir l'immeuble par la formule $X(G,K) = G(K) \times \mathbb{A}/\sim$, où $\mathbb{A}$ est un espace affine convenable muni d'une structure simpliciale, appelé l'**appartement standard** (voir [Lan96, §9]). On recolle les appartements le long d'hyperplans de codimension 1, appelés **murs**, que l'on va décrire dans l'appartement standard comme les lieux de zéros de certaines fonctions affines, grâce aux ensembles de valeurs. Plus précisément, on définit une « affinisation » du système de racines sphériques en suivant la méthode de Bruhat-Tits. Dans le lemme 4.3.11, on vérifie que cette construction équivaut à celle de Tits dans [Tit79]. En section 4.3.1, on décrit, grâce aux ensembles de valeurs, une certaine alcôve de l'immeuble, dont l'adhérence sera un domaine fondamental de l'action de $G(K)$ sur $X(G,K)$. En section 4.3.2, on décrit localement l'immeuble au voisinage d'une alcôve.

Dans [Lan96, §1], il est défini une structure polysimpliciale des appartements comme suit. Premièrement, on définit $\mathbb{A} = \mathbb{A}(G,S,K)$ comme étant l'unique espace affine euclidien sous le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = X_*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et muni d'un morphisme de groupes $\nu : \mathcal{N}_G(S)(K) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ compatible.

Deuxièmement, chaque racine relative $a \in \Phi \subset X^*(S)$ induit une forme linéaire sur V déduite par linéarité de l'appariement $X_*(S) \times X^*(S) \to \mathbb{Z}$. Ainsi, quitte à choisir une origine $\mathcal{O} \in \mathbb{A}$, chaque racine relative induit une fonction affine sur $\mathbb{A}$.

Troisièmement, du système de racines sphérique (dont chaque racine est vue comme fonction affine), on va définir une « affinisation ». Chaque application affine $\theta(a,l) = a(\cdot - \mathcal{O}) - l : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, où $a \in \Phi$ et $l \in \mathbb{R}$, détermine un unique **demi-appartement** :

$$D(a,l) = \{x \in \mathbb{A},\ \theta(a,l)(x) > 0\}$$

dont la frontière (qui est un espace affine de codimension 1) est notée $\mathcal{H}_{a,l} = \{x \in \mathbb{A},\ \theta(a,l)(x) = 0\}$. Lorsque $l \in \Gamma'_a$, l'application affine $\theta(a,l)$ est appelée une **racine affine**. Par le lemme 4.3.11, on verra que l'ensemble des racines affines ainsi définies est le système de racines affines défini dans [Tit79, 1.6].

Pour chaque racine affine $\theta(a,l)$, l'ensemble correspondant $\mathcal{H}_{a,l}$ est appelé un **mur** de $\mathbb{A}$. Les murs induisent une structure simpliciale sur $\mathbb{A}$ comme suit : une composante

connexe de $\mathbb{A} \setminus \bigcup_{a\in\Phi,\ l\in\Gamma'_a} \mathcal{H}_{a,l}$ est appelée une **alcôve**. C'est un simplexe de dimension maximale. Plus généralement, on définit une relation d'équivalence sur les points de $\mathbb{A}$ par $x \sim y$ si, pour tout $a \in \Phi$, on a $a(x) - a(y) \geq 0$. Ce qui signifie que $x \sim y$ si, et seulement si, les points x et y sont toujours contenus dans un même demi-appartement. Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée une **facette** ; les alcôves sont les facettes de dimension maximale. L'ensemble des facettes constitue par définition une partition de $\mathbb{A}$. Enfin, l'espace affine $\mathbb{A}$ muni du système de racines affine $\{\theta(a,l),\ a \in \Phi \text{ et } l \in \Gamma'_a\}$ et de la structure simpliciale induite par la relation d'équivalence ci-dessus est appelé l'**appartement standard**.

1.3.17 Notation. En suivant les notations de [BrT72, §6 et §7], reprises dans [BrT84, §4] et [Lan96, §5], on va définir certains sous-groupes utiles pour définir l'immeuble $X(G,K)$ de $G(K)$ et l'action du groupe sur l'immeuble.

Comme précédemment, on se donne un tore K-déployé maximal S du groupe réductif quasi-déployé G et on note $T = \mathcal{Z}_G(S)$ le tore maximal correspondant. On note $T(K)_b$ le plus grand sous-groupe compact maximal du groupe topologique des points rationnels $T(K)$ [Lan96, 1.2].

Pour toute partie non vide Ω of $\mathbb{A}$, on note :

- $f_\Omega(a) = \sup\{-a(x),\ x \in \Omega\}$ pour toute racine relative $a \in \Phi$;
- $U_{a,\Omega} = U_{a,f_\Omega(a)}$ pour toute racine relative $a \in \Phi$;
- $\begin{aligned} f'_\Omega(a) &= \inf\left\{l \in \Gamma'_a,\ l \geq f_\Omega(a) \text{ ou } \tfrac{1}{2}l \geq f_\Omega(\tfrac{a}{2})\right\} \\ &= \sup\{l \in \mathbb{R},\ U_{a,l} = U_{a,f_\Omega(a)}\} \end{aligned}$
- U_Ω le sous-groupe de $G(K)$ engendré par les groupes $U_{a,\Omega}$ où $a \in \Phi$;
- $N_\Omega = \{n \in \mathcal{N}_G(S)(K),\ \forall x \in \Omega,\ n \cdot x = x\}$;
- $P_\Omega = U_\Omega \cdot T(K)_b$, (on rappelle que $T(K)_b$ normalise U_Ω) ;
- $\widehat{P_\Omega}$ le sous-groupe de $G(K)$ engendré par U_Ω et N_Ω.

1.3.5 Modèles entiers

Dans la théorie de Bruhat-Tits, on définit simultanément un immeuble, une action du groupe de points rationnels sur cet immeuble et des modèles entiers du groupe algébrique. Lorsque G est un K-groupe semi-simple simplement connexe (quasi-déployé), pour toute partie Ω non vide de $\mathbb{A}$, le groupe P_Ω (resp. $\widehat{P}_\Omega$) peut s'obtenir, d'après [BrT84, 4.6.28], comme groupe des points entiers d'un certain $\mathcal{O}_K$-modèle convenable [4] de G, noté $\mathfrak{G}^\circ_\Omega$ (resp. $\widehat{\mathfrak{G}}_\Omega$). On écrit alors $P_\Omega = \mathfrak{G}^\circ_\Omega(\mathcal{O}_K) \subset \mathfrak{G}^\circ_\Omega(K) = G(K)$. On voit donc que les points entiers de certains modèles fournissent une structure algébrique sur des sous-groupes définis géométriquement, i.e. comme certains stabilisateurs (point par point ou globalement selon le choix du modèle). On appelle P_Ω le **fixateur connexe** dans $G(K)$ de la partie $\Omega \subset X(G,K)$ [BrT84, 4.6.28 (i)]. On va rappeler, brièvement, quels sont les différents modèles qui nous sont utiles dans la suite.

4. Plus généralement, Bruhat et Tits définissent des modèles entiers de groupes réductifs quasi-déployés mais, sans l'hypothèse de semi-simplicité, les points entiers de ces groupes ne se réalisent que comme sous-groupes d'un certain sous-groupe G^1 de $G(K)$. Précisément, on a $G^1 = \{g \in G(K),\ \omega(\chi(g)) = 0,\ \forall \chi \in X^*_K(G)\}$.

Pour tout $\mathcal{O}_K$-schéma $\mathfrak{X}$, on notera $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}_\kappa$ sa fibre spéciale.

Soit Ω une partie bornée non vide de $\mathbb{A}$. On définit un $\mathcal{O}_K$-modèle de G affine, lisse, connexe, de type fini [Lan96, 10.10] que l'on note $\mathfrak{G}^\circ_\Omega$, unique à isomorphisme unique près [5].

On note $\mathfrak{G}_\Omega$, $\widehat{\mathfrak{G}}_\Omega$ et $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$ les $\mathcal{O}_K$-modèles affines lisses (éventuellement non connexes) définis respectivement en [BrT84, 4.6.2], en [BrT84, 4.6.26] et en [BrT84, 4.6.18] dans le cas d'un groupe quasi-déployé et, par descente étale, en [BrT84, 5.1.9] dans le cas général.

Pour une partie Ω de $\mathbb{A}$, on note $\mathrm{cl}(\Omega)$ l'enveloppe convexe combinatoire, appelée **enclos** et définie en [BrT72, 7.1.2]. On dit que Ω est **close** si $\Omega = \mathrm{cl}(\Omega)$ (c'est une propriété de convexité au sens des parties d'une structure polysimpliciale). On rappelle que si Ω est close et si G est semi-simple, alors $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\mathcal{O}_K)$ est le stabilisateur (globalement) de la partie Ω dans $G(K)$ [BrT84, 4.6.28 (ii), 5.1.31].

Le groupe des points entiers $\mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O}_K)$ fixe Ω point par point et, lorsque G est simplement connexe, on a $\mathfrak{G}_\Omega = \mathfrak{G}^\dagger_\Omega$ [BrT84, 5.2.9]. En particulier, le groupe des points rationnels d'un K-groupe semi-simple simplement connexe agit sur son immeuble de Bruhat-Tits par des isométries préservant le type des facettes.

En résumé, pour toute partie non vide Ω de $\mathbb{A}$, on introduit quatre modèles entiers d'un groupe G semi-simple qui satisfont les inclusions suivantes :

$$\mathfrak{G}^\circ_\Omega \subset \mathfrak{G}_\Omega \subset \widehat{\mathfrak{G}}_\Omega \subset \mathfrak{G}^\dagger_\Omega$$

Le groupe $\mathfrak{G}^\circ_\Omega(\mathcal{O}_K)$ est le fixateur connexe de Ω dans $G(K)$, le groupe $\widehat{\mathfrak{G}}_\Omega(\mathcal{O}_K)$ est le stabilisateur point par point de Ω dans $G(K)$ et, lorsque Ω est close, le groupe $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\mathcal{O}_K)$ est le stabilisateur de Ω dans $G(K)$. L'écart qui subsiste entre les définitions de $\mathfrak{G}^\circ_\Omega$, de $\mathfrak{G}_\Omega$ et de $\widehat{\mathfrak{G}}_\Omega$ provient essentiellement de considérations de la géométrie algébrique des schémas ; il s'agit principalement d'hypothèses de connexité, notamment de la fibre spéciale.

1.3.6 Système de Tits affine et bornologie

Soit G un K-groupe réductif. On ne suppose pas, a priori, que G est simplement connexe et on verra quelques conséquences lorsqu'on ajoute cette hypothèse. On sait que $G(K)$ agit continûment et fortement transitivement sur son immeuble de Bruhat-Tits (par des isométries qui préservent le type des facettes lorsque G est, de plus, simplement connexe). On note à nouveau $\mathbb{A}$ l'appartement standard dans lequel on choisit une alcôve $\mathbf{c}$. On note G^+ le sous-groupe constitué des éléments de $G(K)$ dont l'action sur $X(G,K)$ préserve le type des facettes.

Soient $B = \mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$ le stabilisateur de l'alcôve $\mathbf{c}$ et $B^+ = \mathrm{Stab}_{G^+}(\mathbf{c})$ le stabilisateur point par point de $\mathbf{c}$. Soient $N = \mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbb{A})$ le stabilisateur de $\mathbb{A}$ dans $G(K)$ et $N^+ = \mathrm{Stab}_{G^+}(\mathbb{A})$ le stabilisateur de $\mathbb{A}$ dans G^+. Ainsi, on obtient un système de Tits affine (B^+, N^+) pour G^+ et (B,N) est un système de Tits affine généralisé de $G(K)$ (voir [Gar97, 5.5 et 14.7] pour plus de détails). Soient $T = B \cap N$ et $T^+ = B^+ \cap N^+$. Notons $W^+ = N^+/T^+$. L'ensemble $\Theta = T/T^+$ est fini [Gar97, 5.5] et on a une décomposition de Bruhat :

$$G(K) = \bigsqcup_{t\in\Theta,\ w\in W^+} B^+ t w B^+$$

5. Par la propriété universelle, on sait qu'à isomorphisme près, le $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes $\mathfrak{G}^\circ_\Omega$, défini dans [BrT84, 5.1.9] par descente du modèle quasi-déployé [BrT84, 4.6.2], s'identifie au modèle $\mathfrak{G}_\Omega$ défini dans [Lan96].

On définit une bornologie sur $G(K)$ par :

1.3.18 Proposition-définition ([Gar97, 14.7])**.** Une partie $H \subset G(K)$ est dite **bornée** si H vérifie les propositions équivalents suivantes :

(i) H est contenue dans une union finie de doubles classes B^+twB^+, où $t \in \Theta$ et $w \in W^+$;

(ii) il existe un point de l'immeuble $x \in X(G,K)$ tel que $H \cdot x \subset X(G,K)$ est une partie bornée de l'immeuble ;

(iii) pour toute partie bornée $Y \subset X(G,K)$, l'ensemble :

$$H \cdot Y = \{h \cdot y,\ h \in H \text{ et } y \in Y\}$$

est une partie bornée de $X(G,K)$.

Étant donné un plongement $G(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$, il existe une définition naturelle de sous-groupe borné, donnée par la métrique canonique de $\mathrm{GL}_n(K)$. On pourra remarquer que les deux définitions coïncident.

On verra en section 2.3 que lorsque G est semi-simple, le sous-groupe B est alors compact (c'est une reformulation du lemme 2.3.1(2)) et que les parties fermées bornées de $G(K)$ sont exactement les parties compactes.

1.4 Groupes profinis

1.4.1 Définitions et exemples naturels

1.4.1 Proposition-définition. Soit H un groupe topologique. On dit que H est **profini** s'il vérifie les propositions équivalentes suivantes [DdSMS99, 1.3] :

(i) H est compact (séparé) et totalement discontinu ;

(ii) H est compact (séparé) et les sous-groupes ouverts de H constituent une base de voisinages de l'élément neutre ;

(iii) H se réalise comme une limite projective de groupes finis.

Si p est un nombre premier, on dit qu'un groupe topologique H est **pro-p** s'il se réalise comme limite projective de p-groupes finis.

On parlera indifféremment de groupe pro-p ou de pro-p-groupe. Lorsqu'un groupe H est pro-p et se réalise comme sous-groupe d'un groupe topologique G, on parlera alors de sous-groupe pro-p, de sous-pro-p-groupe ou de pro-p-sous-groupe, selon la nature du groupe G (topologique, pro-p ou profini).

Partant d'un groupe abstrait H, l'ensemble de ses sous-groupes distingués d'indice fini (resp. une puissance de p) permet de définir un système projectif en considérant les quotients. On peut alors définir la **complétion profinie** (resp. pro-p) de H, notée $\widehat{H}$ (resp. $\widehat{H}^p$), comme limite projective des groupes quotients obtenus. Le morphisme de groupes naturel $H \to \widehat{H}$ a pour noyau l'intersection des sous-groupes distingués d'indice fini de H [Wil98, 1.4].

1.4.2 Exemples. (0) Naturellement les groupes finis sont profinis et les p-groupes finis sont pro-p.

(1) Le groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$ est la limite projective des groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour l'ordre partiel donné par la relation de division. On dispose en outre d'une structure d'anneau comme limite projective d'anneaux.

(1') Le groupe $\widehat{\mathbb{Z}}^p$, également noté $\mathbb{Z}_p$, est la limite projective des $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

(2) Si l/k est une extension galoisienne, on peut munir le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(l/k)$ d'une structure naturelle de groupe profini, qui prend une place importante en cohomologie galoisienne [Ser94].

(2') Si $\kappa = \mathbb{F}_q$ est un corps fini, son groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}/\kappa)$ est un groupe profini isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$.

(3) Un groupe topologique compact H se réalise comme extension d'un groupe compact connexe et d'un groupe profini, en considérant le quotient par sa composante neutre H°.

(4) Le groupe des points rationnels d'un groupe réductif anisotrope sur un corps local est un groupe compact et totalement discontinu. En effet, un tel groupe est compact d'après un théorème de Bruhat-Tits-Rousseau [Pra82]. C'est le cas, par exemple, du groupe des éléments de norme 1 d'une K-algèbre à division centrale D, noté $\mathrm{SL}_1(D)$ [Bor91, 23.1].

Si X est une partie d'un groupe topologique H, on notera $\overline{\langle X \rangle}$ le sous-groupe fermé de H engendré par X. En particulier, il est immédiat que si H est un groupe profini (resp. pro-p), alors $\overline{\langle X \rangle}$ aussi.

1.4.3 Définition. Soit H un groupe profini. On appelle sous-groupe de **Frattini** de H l'intersection des sous-groupes ouverts propres maximaux de H. On le note $\mathrm{Frat}(H)$ [DdSMS99, 1.8].

Remarquons que le sous-groupe de Frattini d'un groupe profini est distingué.

1.4.4 Proposition. *Lorsque H est un groupe pro-p, on note H^p le sous-pro-p-groupe de H engendré par la partie $H^{\{p\}} := \{x^p,\ x \in H\}$. Alors on a l'égalité suivante [RZ10, 2.8.7] :*

$$\mathrm{Frat}(H) = \overline{H^p[H,H]}$$

En particulier, le quotient $H/\mathrm{Frat}(H)$ est un pro-p-groupe abélien p-élémentaire.

1.4.2 Questions de présentation

On se pose des questions de présentation des groupes profinis par système de générateurs topologiques et relations.

1.4.5 Définition. Soit H un groupe profini.

On dit qu'une partie X de H **engendre topologiquement** H si $\overline{\langle X \rangle} = H$.

On dit qu'un élément $h \in H$ est un **générateur topologique** s'il existe une partie X de H contenant h qui engendre topologiquement H tel que $\overline{\langle X \setminus \{h\} \rangle} \neq H$.

On dit qu'un élément $h \in H$ est **non-générateur** s'il n'est pas un générateur topologique [RZ10, 2.8].

Le sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(H)$ d'un groupe profini H joue un rôle analogue à celui du radical de Jacobson d'un anneau. On peut comprendre le sous-groupe de Frattini comme le sous-groupe constitué par l'ensemble des éléments non générateurs de H [RZ10, 2.8.1]. On a alors un énoncé analogue au lemme de Nakayama :

1.4.6 Lemme. *Soient H un groupe profini et X une partie de H. Alors X engendre topologiquement H (on note $\overline{\langle X\rangle} = H$) si, et seulement si l'image $X\mathrm{Frat}(H)/\mathrm{Frat}(H)$ de X dans le groupe quotient $H/\mathrm{Frat}(H)$ engendre topologiquement le groupe profini $H/\mathrm{Frat}(H)$ [DdSMS99, 1.9].*

1.4.7 Définition. On dit qu'un groupe profini H est **de type fini** s'il admet une famille finie de générateurs topologiques, c'est-à-dire une partie finie $X \subset H$ telle que $\overline{\langle X\rangle} = H$.

On appelle **nombre minimal de générateurs topologiques** de H le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe une partie finie à n éléments qui engendre topologiquement H.

1.4.8 Exemple. On sait munir $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ d'une structure d'anneau et on considère le groupe additif $H = (\mathbb{Z}_p, +)$. C'est un groupe pro-p. L'ensemble des générateurs topologiques de H est $\mathbb{Z}_p^\times$, l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau. Le sous-groupe de Frattini de H est $\mathrm{Frat}(H) = p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_p^\times$. On le retrouve par la formule $\mathrm{Frat}(H) = \overline{H^p[H,H]}$ avec $[H,H] = 0$ et $H^p =< px,\ x \in H >= p\mathbb{Z}_p$. Le groupe profini H est de type fini car la famille $X = \{1+p\}$, par exemple, engendre topologiquement H. Le nombre minimal de générateurs topologiques de $\mathbb{Z}_p$ est égal à 1.

1.4.9 Proposition. *Si H est un groupe pro-p, alors H est de type fini si, et seulement si son sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(H)$ est un ouvert de H [RZ10, 2.8.10].*

Dans ce cas, le sous-groupe de H engendré par H^p et $[H,H]$ est fermé [DdSMS99, 1.20] et on écrit $\mathrm{Frat}(H) = H^p[H,H]$.

1.4.10 Corollaire. *Soit H un groupe pro-p. Alors le quotient $H/\mathrm{Frat}(H)$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. S'il est de dimension finie n, alors H est de type fini et son nombre minimal de générateurs est égal à n.*

Afin de définir une notion de présentation profinie d'un groupe profini de type fini, on a besoin d'une notion de groupe libre, disposant de suffisamment de quotients. Le groupe libre profini (resp. pro-p) engendré par n éléments, noté $\widehat{F_n}$ (resp. $\widehat{F_n}^p$), est le complété profini (resp. pro-p) du groupe libre de rang n.

1.4.11 Définition. Une **présentation libre profinie** (resp. pro-p) d'un groupe profini (resp. pro-p) H de type fini est une suite exacte

$$1 \to R \to F \to H \to 1$$

de groupes profinis (resp. pro-p) où F est un groupe libre profini (resp. pro-p) de type fini.

Soit H un groupe profini admettant une telle présentation libre profinie. L'ensemble fini canonique X des générateurs topologiques de F s'envoie sur un ensemble de générateurs topologiques de H.

S'il existe une présentation libre profinie de H telle que R est engendré topologiquement par l'ensemble des conjugués dans F d'une partie finie Y (on parle de clôture normale),

alors on dit que H est **de présentation finie**. Une telle partie Y de R est appelée une famille de **relations** de H par rapport à X. On peut alors se demander à quel point le nombre minimal de générateurs, de relations, ou de relation à générateurs fixés dépend du choix de la présentation choisie. On trouve des réponses à ces questions dans [Lub01]. Lorsque H est pro-p, on a une interprétation cohomologique de ces nombres minimaux de générateurs et relations [Ser94, §4].

1.4.3 Sous-groupes profinis d'un corps local

L'étude des groupes quasi-déployés sur un corps quelconque fait valoir l'intérêt des extensions séparables de petit degré $d \in \mathbb{N}$. En particulier, certaines formes quasi-déployées nous amènent à considérer une extension séparable L/K quadratique ou cubique. On va rappeler des résultats concernant soit un corps local, soit une extension de corps locaux.

Soit L/K une extension finie séparable de degré d, de corps locaux non archimédiens, de valuation discrète ω (on pourra se restreindre au cas $d = 2$ ou 3). On note, comme précédemment, $\mathcal{O}_L$ (resp. $\mathcal{O}_K$) l'anneau des entiers de L (resp. K), $\mathfrak{m}_L$ (resp. $\mathfrak{m}_K$) son unique idéal maximal et κ_L (resp. κ) le corps résiduel fini de caractéristique p. On note $\mathbb{F}_p$ le sous-corps premier de κ.

On peut interpréter les groupes topologiques K, L, $K^\times$ et $L^\times$ comme groupes de points rationnels des K-groupes algébriques, respectivement $\mathbb{G}_{a,K}$, $R_{L/K}(\mathbb{G}_{a,L})$, $\mathbb{G}_{m,K}$ et $R_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})$.

Le groupe topologique abélien L admet une exhaustion par la famille de sous-groupes compacts ouverts $(\varpi_L^n \mathcal{O}_L)_{n\in\mathbb{Z}}$. Le groupe topologique abélien $L^\times$ admet un unique sous-groupe compact maximal : c'est le sous-groupe des entiers inversibles $\mathcal{O}_L^\times$. En tant que groupe profini abélien, $\mathcal{O}_L^\times$ admet un unique sous-groupe pro-p maximal $1+\mathfrak{m}_L$. C'est aussi l'unique sous-groupe pro-p maximal de $L^\times$. En effet, le morphisme d'anneaux quotient $\pi : \mathcal{O}_L \to \kappa_L$ nous donne un morphisme de groupes $\pi : \mathcal{O}_L^\times \to \kappa_L^\times$. Si P est un sous-groupe pro-p de $\mathcal{O}_L$, alors $\pi(P)$ est un sous-p-groupe de $\kappa_L^\times$. Donc $P \subset \ker \pi = 1 + \mathfrak{m}_L$. Inversement, le groupe $1 + \mathfrak{m}_L = \varprojlim (1 + \mathfrak{m}_L) / (1 + \mathfrak{m}_L^n)$ est pro-p.

1.4.12 Remarque. Lorsque L est de caractéristique p, d'après [Iwa86, Prop. 2.6 et 2.8], on peut établir des isomorphismes de $\mathbb{Z}_p$-modules $\mathcal{O}_L^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$ et $1 + \mathfrak{m}_L \simeq \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$. En particulier on remarquera que ces groupes ne sont pas topologiquement de type fini. De même, le groupe $(\mathcal{O}_L, +) \simeq \kappa_L^{\mathbb{N}}$ n'est pas topologiquement de type fini.

En caractéristique 0, la situation est plus favorable. Par exemple $(\mathbb{Z}_p, +)$ est topologiquement de type fini engendré par l'élément 1. Plus généralement, on peut démontrer que les groupes abéliens $\mathcal{O}_L^\times$ et $1 + \mathfrak{m}_L$ sont alors de type fini [Iwa86, Prop. 2.7]

Chapitre 2

Sous-groupes compacts maximaux d'un groupe algébrique sur un corps local

2.1 Introduction

Étant donné un corps de base k et un k-schéma en groupes affine lisse G, on s'intéresse au groupe de ses points rationnels $G(k)$. Lorsque le corps k est muni d'une topologie, ce groupe hérite lui-même d'une topologie. Il peut donc y avoir un sens à relier certaines propriétés algébriques du k-groupe G et certaines propriétés topologiques du groupe $G(k)$. Dans ce chapitre, on considérera un corps local non archimédien K, donc le groupe topologique $G(K)$ sera localement compact. Ainsi, on pourra s'intéresser aux sous-groupes compacts de $G(K)$. La valuation de K permet également de définir une notion naturelle de partie bornée. On s'intéressera, en particulier, aux sous-groupes bornés. Dans ce chapitre, on trouve des conditions équivalentes à l'existence de sous-groupes compacts maximaux de $G(K)$. Ceci reprend les résultats présentés dans [Loi16, §2].

Dans la suite, on notera ω la valuation discrète de K, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers, $\mathfrak{m}$ son unique idéal maximal, ϖ une uniformisante et $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$ le corps résiduel.

2.1.1 Existence de sous-groupes compacts maximaux

Le théorème [BrT84, 5.1.27] de Bruhat et Tits établit un lien entre l'anisotropie d'un groupe réductif et la compacité du groupe de ses points rationnels. Un autre lien entre l'algèbre et la topologie est donné par le critère de compacité de Godement pour les quotients arithmétiques des groupes de Lie non archimédiens, récemment étendu en caractéristique positive par Conrad [Con12, A5]. Dans ce chapitre, on présente un nouveau résultat pour un groupe algébrique général défini sur un corps local. Plus précisément, on fournit une condition purement algébrique sur le K-groupe algébrique G équivalente au fait que $G(K)$ admette un sous-groupe compact maximal. Le fait que cette condition est non triviale s'explique en première approximation par ce qui suit :

2.1.1 Exemples. On considère le groupe additif $\mathbb{G}_{a,K}$. Dans le groupe topologique $(K,+)$, la famille de sous-groupes $\varpi^n\mathcal{O}_K$, où $n \in \mathbb{N}$ constitue une base de voisinages ouverts compacts de l'élément neutre 0. Cependant, K n'est pas compact et n'admet pas de

sous-groupe compact maximal, puisque K est la réunion des sous-groupes compacts $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \varpi^n \mathcal{O}_K$. On déduit, de plus, de cette exhaustion que $(K,+)$ ne peut pas être engendré par une partie compacte.

À l'inverse, considérons le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{m,k}$. Le groupe topologique $K^\times$ admet un unique sous-groupe compact maximal, à savoir $\mathcal{O}_K^\times$. Comme la valuation $\omega : K^\times \to \mathbb{Z}$ de K est discrète, le groupe topologique $K^\times$ est engendré par la partie compacte formée par la réunion de $\mathcal{O}_K^\times$ et d'un élément $x \in K^\times$ tel que $\omega(x) = 1$.

On dira qu'un groupe topologique H est **compactement engendré** s'il existe une partie $X \subset H$ compacte qui engendre H en tant que groupe abstrait.

En général, on sait [Tit79, 3.2] que les sous-groupes compacts maximaux d'un groupe réductif sont paramétrés par son immeuble de Bruhat-Tits élargi (l'immeuble défini dans [Tit79] correspond à l'immeuble élargi défini en [BrT84, 4.2.6] ; on pourra voir [Rou77, II.2] pour plus de détails au moyen des sous-groupes bornés).

En fait, le groupe additif est le prototype de groupe algébrique pour lequel le groupe des points rationnels n'admet pas de sous-groupe compact maximal. Plus précisément :

2.1.2 Théorème. *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe algébrique affine connexe. Le groupe topologique $G(K)$ admet un sous-groupe compact maximal si, et seulement si, G ne contient pas de K-sous-groupe connexe unipotent K-déployé distingué non trivial.*

Sous ces conditions, le groupe $G(K)$ est, de plus, compactement engendré.

On reprend la notion de déploiement des groupes unipotents ; elle correspond à l'existence d'un dévissage de quotients successifs isomorphes à $\mathbb{G}_a$. En caractéristique zéro, tout groupe unipotent est déployé. Ainsi la condition algébrique du théorème ci-dessus revient, en fait, à dire que G est réductif. Dans ce cas, le théorème est dû à Langlands et démontré dans [PR94, §3.3] ou [Bru64, §3]. Ici, l'énoncé recouvre tous les cas. La preuve, reposant sur la théorie de Bruhat-Tits et les groupes pseudo-réductifs, est uniforme quelle que soit la caractéristique du corps local.

Dans le théorème 2.1.2, les K-groupes satisfaisant les conditions équivalentes sont exactement les groupes quasi-réductifs (par définition 1.1.12).

2.1.2 Groupes algébriques sur des corps imparfaits

Comme on l'a mentionné plus haut, on va utiliser la notion de groupe pseudo-réductif (voir définition 1.1.1). Cette définition a été introduite, pour la première fois, par Borel et Tits dans [BoT78] mais la structure de ces groupes n'a été étudiée en détail que plus récemment, par Conrad, Gabber et Prasad dans [CGP15].

Si k est un corps quelconque, il se peut que le radical unipotent d'un k-groupe algébrique affine lisse G, noté $\mathcal{R}_{u,\overline{k}}(G_{\overline{k}})$, ne se descende pas en un k-sous-groupe de G lorsque k est imparfait. Il admet un corps de définition minimal qui est une extension finie purement inséparable de k, donné par [CGP15, 1.1.9]. On doit donc remplacer le radical unipotent $\mathcal{R}_u(G)_{\overline{k}}$ par le k-radical unipotent, noté $\mathcal{R}_{u,k}(G)$, qu'on a défini en section 1.1.1.

Néanmoins, grâce à la suite exacte de k-groupes algébriques suivante :

$$1 \to \mathcal{R}_{u,k}(G) \to G \to G/\mathcal{R}_{u,k}(G) \to 1$$

on peut mieux comprendre la structure du k-groupe G. Bien entendu, lorsque k est parfait, il s'agit exactement du quotient réductif de G.

Sur un corps parfait, les notions de groupe réductif et pseudo-réductif sont identiques, mais c'est loin d'être le cas en général. On doit faire face à cette difficulté.

Grâce au théorème principal de structure de Conrad, Gabber et Prasad [CGP15, 5.1.1], on comprend mieux les groupes pseudo-réductifs. Ainsi, on peut espérer généraliser les résultats des groupes réductifs aux groupes pseudo-réductifs et, par dévissage, obtenir des résultats généraux sur les groupes algébriques connexes quelconques. Typiquement, cette notion a permis à Conrad d'établir un critère de compacité de Godement en termes d'anisotropie d'un groupe algébrique quelconque sur un corps local (on remarquera que, jusque là, les références standard telles que [Mar91] citaient ce critère, en caractéristique positive, seulement pour les groupes réductifs, alors que le critère était déjà connu en caractéristique 0 sans l'hypothèse de réductivité du groupe).

2.1.3 L'apport de la topologie du corps de base

Désormais, on suppose que k est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et on le note K.

Si U est un K-groupe unipotent connexe K-déployé, on va définir dans le lemme 2.5.1, par analogie avec le cas de $\mathbb{G}_a$ traité dans l'exemple 2.1.1, une exhaustion du groupe $U(K)$ non compact par une suite croissante de sous-groupes compacts ouverts. Si un K-groupe algébrique G contient un tel K-sous-groupe U distingué, alors on va recouvrir, dans la proposition 2.5.2, le sous-groupe fermé distingué $U(K)$ par des sous-groupes compacts ouverts de $G(K)$. Ainsi, le groupe $G(K)$ ne peut pas admettre de sous-groupe compact maximal car un tel sous-groupe devrait contenir $U(K)$ en tant que sous-groupe fermé.

Réciproquement, il est bien connu que si G est un K-groupe semi-simple, alors $G(K)$ admet des sous-groupes compacts maximaux. On voudrait donc démontrer la même chose pour un k-groupe quasi-réductif. Il apparaît comme naturel d'utiliser les propriétés de propreté et de finitude des suites exactes longues de cohomologie galoisienne attachées à certaines extensions de groupes [Ser94, 5.5]. Malheureusement, ces propriétés ne sont pas toujours réalisées pour les extensions qu'on considère. En fait, les premiers ensembles pointés de cohomologie galoisienne des sous-groupes distingués pertinents de G sont souvent infinis en caractéristique positive (e.g. $\#H^1(K, Z_G) = \infty$ pour $\mathrm{car}(K) = p > 0$ et $G = \mathrm{SL}_p$; on pourra consulter [CGP15, 11.3.3] pour un exemple d'un groupe unipotent).

Par conséquent, les méthodes cohomologiques ne sont pas suffisantes pour conclure. On utilise alors des propriétés topologiques des groupes de points rationnels. L'une d'entre elles est la suivante :

2.1.3 Définition. Un groupe topologique G est dit **noethérien** s'il vérifie la condition de chaîne ascendante sur les sous-groupes ouverts ; autrement dit, toute suite croissante de sous-groupes ouverts est stationnaire.

2.1.4 Exemple. (1) Le groupe abélien discret $(\mathbb{Z}, +)$ est noethérien car tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est un idéal de l'anneau noethérien $\mathbb{Z}$.

(2) D'après l'exemple 2.1.1, le groupe additif $(K, +)$ d'un corps local non archimédien n'est pas un groupe noethérien car il admet une suite infinie strictement croissante de sous-groupes ouverts, à savoir $(\varpi^{-n}\mathcal{O}_K)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme le groupe topologique $(K,+)$ (vu comme points rationnels du K-groupe additif $\mathbb{G}_{a,K}$) n'admet pas de sous-groupe compact maximal, on ne peut pas espérer que le groupe des points rationnels d'un K-groupe unipotent non-K-ployé admette un sous-groupe compact maximal. Avec le résultat mentionné précédemment d'Oesterlé (voir section 1.1.3.3), ces heuristiques nous amènent à l'énoncé suivant :

2.1.5 Théorème. *Soient K un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et G un K-groupe algébrique affine lisse. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) la composante neutre G^0 de G est un K-groupe quasi-réductif ;

(ii) le groupe topologique $G(K)$ est noethérien ;

(iii) $G(K)$ possède un sous-groupe compact maximal ;

(iv) $G(K)$ possède un sous-groupe pro-p maximal.

De plus, si G satisfait ces conditions équivalentes, alors on a :

(1) Tout sous-groupe pro-p (resp. compact) de $G(K)$ est contenu dans un sous-groupe pro-p (resp. compact) maximal de $G(K)$.

(2) Tout sous-groupe pro-p (resp. compact) maximal de $G(K)$ est ouvert.

2.1.6 Corollaire. *Si G est un k-groupe quasi-réductif, alors $G(K)$ est compactement engendré.*

Démonstration du corollaire. Par [CM13, Lemma 3.22], un groupe localement compact H est noethérien si, et seulement si, tout sous-groupe ouvert de H est compactement engendré. C'est donc le cas pour $H = G(K)$. □

Ce théorème et son corollaire sont bien connus dans le cas d'un corps p-adique $K/\mathbb{Q}_p$ (dans ce cas de caractéristique $\mathrm{car}(K) = 0$, la quasi-réductivité entraîne la réductivité car tous les groupes unipotents sont automatiquement déployés) comme énoncé dans la proposition de Platonov et Rapinchuk [PR94, 3.3 Proposition 3.15] et dans un théorème de Borel et Tits [BoT65, 13.4]. En caractéristique non nulle, il est nécessaire d'utiliser la notion de quasi-réductivité dans l'énoncé du résultat.

Pour un groupe réductif G défini sur un corps p-adique $K/\mathbb{Q}_p$, on sait de plus qu'un sous-groupe compact ouvert est contenu dans un nombre fini de sous-groupes compacts [PR94, Proposition 3.16 (1)]. On ne sait pas si ceci est encore vrai pour un groupe quasi-réductif défini sur un corps local de caractéristique p. En fait, lorsque $G(K)$ agit proprement sur un immeuble affine euclidien localement fini, il y a une certaine correspondance entre ses sous-groupes compacts ouverts et les parties bornées non vides de son immeuble de Bruhat-Tits. Dans le cas d'un groupe quasi-réductif, on a un système de Tits sphérique donné par [CGP15, C.2.20] mais l'existence d'un système de Tits affine (à doubles classes compactes) n'est toujours pas démontrée.

2.2 Quelques extensions de groupes topologiques

Comme on considère des groupes topologiques, on impose que tout morphisme entre de tels groupes soit continu. On rappelle que le morphisme entre groupes topologiques de points rationnels déduit d'un morphisme de groupes algébriques est continu pour la K-topologie.

2.2.1 Groupes topologiques noethériens

On rappelle tout d'abord quelques propriétés des groupes noethériens (voir définition 2.1.3).

2.2.1 Proposition.

(1) Tout sous-groupe ouvert d'un groupe noethérien est noethérien.

(2) Un groupe compact est noethérien.

(3) Soit $\varphi : G \to Q$ un morphisme strict (et continu) entre groupes topologiques, d'image ouverte (e.g. φ est un morphisme ouvert). Si Q et $\ker\varphi$ sont noethériens, alors G l'est aussi.

(4) Toute extension de groupes noethériens est un groupe noethérien.

(5) Le groupe multiplicatif $K^\times$ d'un corps local K non archimédien est noethérien.

(6) Soit $\psi : H \to G$ un morphisme (continu) de groupes topologiques. Si H est noethérien et $\psi(H)$ est un sous-groupe d'indice fini de G, alors G est noethérien.

Démonstration. (1) est évident et (2) est clair car tout sous-groupe ouvert d'un groupe compact est d'indice fini.

(3) Comme $\mathrm{Im}(\varphi)$ est ouvert dans Q, le sous-groupe $\varphi(G)$ est noethérien par (1). Comme φ est un morphisme strict, on peut, sans restriction, supposer que φ est le morphisme quotient $G \to G/H \simeq \varphi(G)$ où $H = \ker\varphi$. Soit $(U_n)_n$ une suite croissante de sous-groupes ouverts de G. Comme H est noethérien, la suite $(U_n \cap H)_n$ est constante à partir d'un certain rang, disons à partir de $N_1 \in \mathbb{N}$. De plus, la suite $\varphi(U_n) \simeq U_nH/H$ stationne à partir d'un certain rang, disons $N_2 \geq N_1$, car chaque terme $\varphi(U_n)$ est un sous-groupe ouvert du groupe noethérien $\varphi(G) \simeq G/H$. On a alors $\varphi(U_n) \simeq U_n/(U_n \cap H) \simeq U_n/(U_{N_1} \cap H) \simeq U_{N_2}/(U_{N_1} \cap H)$ pour tout $n \geq N_2$. Donc $U_n = U_{N_2}$ pour $n \geq N_2$.

(4) Par définition, une extension de groupes topologiques est une suite exacte

$$1 \to H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$$

de morphismes continus qui sont ouverts sur leur image. En appliquant (3) à π, si H et Q sont noethériens, alors G l'est aussi.

(5) est une conséquence de (2) et (4) car $K^\times$ est une extension du groupe compact $\mathcal{O}_K^\times$ par le groupe discret noethérien $\omega(K^\times) \simeq \mathbb{Z}$.

(6) Soit $(U_n)_n$ une suite croissante de sous-groupes ouverts de G. Comme H est noethérien, la suite de sous-groupes ouverts $\psi^{-1}(U_n)$ est constante à partir d'un certain rang, donc la suite $V_n = \psi(\psi^{-1}(U_n)) = U_n \cap \psi(H)$ l'est aussi. La suite d'indices $[U_n : V_n] = [U_n : U_n \cap \psi(H)]$ est une suite d'entiers bornée par l'indice $[G : \psi(H)]$ qui est fini. De plus, comme U_n est une suite croissante et V_n est stationnaire, la suite $[U_n : V_n]$ est croissante à partir d'un certain rang, donc constante à partir d'un certain rang. Par conséquent, la suite croissante $(U_n)_n$ est stationnaire. □

2.2.2 Remarque. Une motivation pour considérer la propriété de noethérianité des groupes topologiques est que l'on peut facilement démontrer l'existence de sous-groupes maximaux pour une propriété donnée (P), dès lors qu'on sait qu'il existe un sous-groupe ouvert ayant la propriété (P) (comme on le fait dans la démonstration de la proposition 2.5.4).

Par exemple, un groupe noethérien ayant un sous-groupe ouvert strict admet des sous-groupes ouverts stricts maximaux, et tout sous-groupe ouvert strict est contenu dans au moins l'un d'entre eux.

2.2.2 Une suite exacte déduite de morphismes de K-schémas

Deuxièmement, on rappelle quelques propriétés des morphismes, provenant de morphismes algébriques, des groupes topologiques de points rationnels.

2.2.3 Lemme. *Soit K un corps local non archimédien. Soient G un K-groupe algébrique affine lisse et H un K-sous-groupe fermé distingué de G.*

(a) Il existe un morphisme quotient fidèlement plat $\pi : G \to G/H$ et le K-schéma en groupes G/H est lisse. De plus, lorsque H est lisse, π est lisse.

On considère la suite exacte de K-groupes suivante :

$$1 \to H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} G/H \to 1$$

(b) Cette suite exacte induit une suite exacte de groupes topologiques :

$$1 \to H(K) \xrightarrow{j_K} G(K) \xrightarrow{\pi_K} (G/H)(K)$$

et j_K est un homéomorphisme sur son image. De plus, si H est lisse, alors le morphisme continu π_K est ouvert.

Démonstration. (a) On sait par [SGA3, Exp. VI A Thm 3.2 (iv)] que le morphisme quotient existe et est fidèlement plat. Ainsi, le K-groupe G/H est lisse par [DG70, II.§5 2.2]. Si, de plus, H est lisse, alors par [DG70, II.§5 5.3 et II.§5 2.2], le morphisme π est lisse.

(b) Les morphismes entre K-schémas de type fini sont continus pour la K-topologie, et j_K est un homéomorphisme sur son image, par définition de la K-topologie. Comme π est lisse, le morphisme continu π_K est ouvert, d'après [GGMB14, lemma 3.1.2 et proposition 3.1.4].

□

2.2.3 Existence d'un sous-groupe pro-p ouvert

Suivant la remarque 2.2.2, on a besoin du lemme suivant que l'on rappelle :

2.2.4 Lemme. *Soit K un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Soit G un K-groupe algébrique affine lisse. Alors $G(K)$ contient un sous-groupe pro-p ouvert.*

Démonstration. Étant donnée une immersion fermée $G \to \mathrm{GL}_{n,K}$ (une telle immersion existe [DG70, II.5.5.2]), le groupe topologique $G(K)$ se réalise comme sous-groupe fermé $G(K) \subset \mathrm{GL}_n(K)$ muni de la topologie usuelle. Ainsi, il suffit de démontrer que $\mathrm{GL}_n(K)$ contient un sous-groupe pro-p ouvert U, puisque $U \cap G(K)$ sera alors un sous-groupe pro-p ouvert de $G(K)$.

Le groupe $H = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ est compact. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$H_d = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{m}_K^d) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K),\ g - \mathrm{id} \in \mathfrak{m}_K^d \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_K) \right\}$$

Chaque H_d est un sous-groupe ouvert compact distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$. Les H_d forment une base de voisinages ouverts de l'élément neutre $\mathrm{id} \in H$. De plus, ce sont des groupes pro-p pour la même raison que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ l'est dans [DdSMS99, 5.1].

Fait : $H_1 = \varprojlim_d H_1/H_d$ est un groupe pro-p.

Pour tout $x \in H_d$, on écrit $x = \mathrm{id} + y$ où $y \in \mathfrak{m}_K^d \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_K)$. Ainsi $x^p = \mathrm{id} + py + \sum_{k=2}^{p} \binom{k}{p} y^k$. Si $k \geq 2$, alors $y^k \in \mathfrak{m}_K^{d+1} \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_K)$ car $d \geq 1$. Si $\mathrm{car}(K) = p$, alors $py = 0$. Sinon, $\mathrm{car}(K) = 0$ et $p \in \mathfrak{m}_K$. Alors $py \in \mathfrak{m}_K^{d+1} \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_K)$, donc H_d/H_{d+1} est un p-groupe. □

2.3 Sous-groupes compacts et ouverts d'un groupe semi-simple

Dans cette section, on suppose que K est un corps local non archimédien et que G est un K-groupe algébrique (affine lisse connexe) semi-simple. Dans la proposition 2.3.5, on décrit chaque sous-groupe compact maximal comme stabilisateur d'un point, uniquement déterminé, de l'immeuble de Bruhat-Tits de G. Ceci est, en fait, encore vrai si l'on suppose seulement G réductif. On ne suppose pas ici, en général, que G est simplement connexe et on donnera quelques conséquences de cette hypothèse supplémentaire. Le groupe des points rationnels $G(K)$ agit continûment et fortement transitivement sur son immeuble affine de Bruhat-Tits (en préservant le type des facettes lorsque G est, de plus, simplement connexe). On note $\mathbb{A}$ l'appartement standard, $\mathbf{c}$ une alcôve choisie dans $\mathbb{A}$ et G^+ le sous-groupe de $G(K)$ formé par l'ensemble des éléments dont l'action sur l'immeuble préserve le type des facettes. On dispose alors d'un système de Tits affine (G^+, B^+, N^+, R) pour le groupe G^+ qu'on a défini en section 1.3.6.

2.3.1 Lemme. *Sous les hypothèses et notations précédentes, on a :*

(1) Le groupe topologique N agit proprement sur $\mathbb{A}$.

(2) Pour toute partie non vide $\Omega \subset \mathbb{A}$, le stabilisateur point par point de Ω dans $G(K)$ est compact.

(3) Pour toute partie bornée non vide $\Omega \subset X(G,K)$, le stabilisateur global de Ω dans $G(K)$ est compact.

Démonstration. (1) On reprend les notations de [Lan96, §1]. En particulier, on considère le groupe $W = N(K)/Z(K)_b$, le groupe ${}^vW = N(K)/Z(K)$ et le groupe $\Lambda = Z(K)/Z(K)_b$. On note $\pi : N(K) \to W$ le morphisme quotient de groupes topologiques et $V = X_*(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les cocaractères. On part du diagramme commutatif suivant [Lan96, 1.6] :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & {}^vW & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nu_1} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\nu}} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) & \xrightarrow{\mathrm{pr}} & \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

duquel on déduit une action de N sur l'espace affine $\mathbb{A}$ [Lan96, 1.8], donné par le morphisme de groupes $\nu : N(K) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) = \overline{\nu} \circ \pi$. Soit $x \in \mathbb{A}$. Le stabilisateur de x dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) = V \rtimes \mathrm{GL}(V)$ est l'ensemble $\{y \mapsto g(y) - g(x) + x,\ g \in \mathrm{GL}(V)\}$. De la commutativité du diagramme, on déduit également que le stabilisateur de x dans $\nu(W)$ est l'ensemble fini $F_x = \{y \mapsto g(y) - g(x) + x,\ g \in j({}^vW)\}$. Par conséquent, le stabilisateur $\nu^{-1}(F_x)$ de x

dans N est compact car, lorsque G est semi-simple, le noyau de ν est le sous-groupe compact $Z(K)_b$ [Lan96, 1.2 (ii)].

(2) Suivant les notations de [Lan96, 12.4], on note $P_x = \langle U_x, N_x \rangle$. L'application continue $\mu : N_x \times U_x Z(K)_b \to P_x$ donnée par la multiplication est un morphisme de groupes surjectif [Lan96, 12.6 (ii)]. Par (1), le groupe N_x est compact et le groupe $U_x Z(K)_b$ est compact [Lan96, 12.12 (i)]. Par suite, P_x est compact. Ainsi, le stabilisateur point par point de Ω qui s'écrit $P_\Omega = \bigcap_{x\in\Omega} P_x$ [Lan96, 13.3(i) et 12.8] est compact.

(3) Pour tout $x \in X(G,K)$, par forte transitivité, il existe $g \in G(K)$ tel que $g \cdot x \in \mathbb{A}$ ce qui donne $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x) = g^{-1} P_{g\cdot x} g$. Ceci ne dépend pas du choix d'un tel $g \in G(K)$. Soit $\Omega \subset X(G,K)$ une partie non vide. Le stabilisateur point par point de Ω, noté $G(K)_\Omega$, est une intersection de sous-groupes de $G(K)$ de la forme $g^{-1} P_{g\cdot x} g$; donc, est compact par (2). Le groupe $G(K)_\Omega$ est aussi le noyau de l'action du stabilisateur point par point de Ω, qu'on note $\mathrm{Stab}_{G(K)}(\Omega)$, sur le sous-complexe polysimplicial fini de $X(G,K)$ induit par la partie bornée Ω (il est fini car $X(G,K)$ est localement fini). En particulier, le groupe quotient $\mathrm{Stab}_{G(K)}(\Omega)/G(K)_\Omega$ est fini. Le groupe $G(K)_\Omega$ est compact, donc $\mathrm{Stab}_{G(K)}(\Omega)$ l'est aussi. □

En conséquence de ce lemme, les parties bornées sont fortement liées aux parties compactes.

2.3.2 Lemme. *Sous les hypothèses et notations précédentes on a :*

(1) Toute partie bornée de $G(K)$ est relativement compacte.

(2) Une partie de $G(K)$ est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

(3) Tout sous-groupe borné maximal de $G(K)$ est un sous-groupe compact maximal.

Démonstration. On rappelle que $B^+ = P_{\mathbf{c}}$ est compact par le lemme 2.3.1 et ouvert dans $G(K)$ par [Lan96, 12.12 (ii)]. Ainsi, toute double classe $B^+ t w B^+$ (qu'on a défini en section 1.3.6) est une partie compacte ouverte de $G(K)$.

(1) Si une partie $H \subset G(K)$ est bornée, alors par la définition 1.3.18(i) H est contenue dans une réunion finie de doubles classes, et cette réunion est une partie compacte.

(2) Si H est une partie compacte de $G(K)$, alors H est fermée dans $G(K)$. Du recouvrement ouvert de H donné par les doubles classes, on déduit un sous-recouvrement fini. Donc par la définition 1.3.18(i), H est bornée. Réciproquement, une partie bornée est compacte dès qu'elle est fermée, par (1).

(3) Si H est un sous-groupe borné maximal, alors $\overline{H}$ est un sous-groupe fermé. Par la définition 1.3.18(ii), c'est un sous-groupe borné et il contient H. Ainsi, la maximalité de H parmi les sous-groupes bornés entraîne que $H = \overline{H}$ est un sous-groupe compact maximal, car tout sous-groupe compact est borné d'après (2). □

On rappelle qu'un espace métrique est dit CAT(0) s'il est géodésique (deux points quelconques sont toujours reliés par un chemin continu paramétré par la distance) et si tout triangle géodésique est au moins aussi fin que le triangle du plan euclidien (pour des arêtes ayant les mêmes longueurs). Cette notion est développée dans le livre de Bridson et Haefliger [BH99]. Cette dernière condition est l'association d'une condition de courbure négative ou nulle et d'une condition de simple connexité (qu'on appelle également (NC) dans [Bro89, §VI.3B]), qu'on peut également reformuler en imposant l'inégalité du parallélogramme [AB08, Prop. 11.4]. On utilise le théorème de point fixe suivant pour décrire les sous-groupes compacts ouverts grâce à l'espace métrique $X(G,K)$.

2.3.3 Théorème (Théorème de point fixe de Bruhat-Tits [Bro89, VI.4])**.** *Soit H un groupe agissant par isométries sur un espace métrique (M, d) complet et* CAT(0)*. Si M admet une partie bornée non vide H-stable, alors H fixe un point de M.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème de point fixe et de la définition 1.3.18(iii).

2.3.4 Corollaire. *Si H est un sous-groupe borné de $G(K)$, alors H fixe un point de $X(G, K)$.*

Démontrons alors la proposition suivante :

2.3.5 Proposition. *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe semi-simple. Soit P un sous-groupe de $G(K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) le sous-groupe P est un sous-groupe compact maximal de $G(K)$;

(ii) le sous-groupe P fixe un unique point $x \in X(G, K)$ et $P = \mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$.

De plus, si G est simplement connexe, alors un tel point x est un sommet du complexe polysimplicial de $X(G, K)$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si P est un sous-groupe borné maximal, alors on sait, par le corollaire 2.3.4, que P fixe un point $x \in X(G, K)$. Donc, P est un sous-groupe de $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$ qui est un sous-groupe borné d'après 2.3.1(3). On a ainsi $P = \mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$ par l'hypothèse de maximalité sur P.

On doit démontrer que la maximalité de P en tant que sous-groupe borné implique que $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$ ne fixe aucun autre point de $X(G, K)$. Soit A un appartement contenant x. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des murs de A et $d(x)$ le nombre de murs de A contenant x. On va montrer, par récurrence décroissante sur $d(x)$, que le sous-groupe borné maximal $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$ admet un unique point fixe dans A.

Par transitivité, il existe un élément $g \in G(K)$ tel que $g \cdot A = \mathbb{A}$. Il suffit donc de démontrer que $g\mathrm{Stab}_{G(K)}(x)g^{-1} = P_{g\cdot x}$ fixe un unique point de $\mathbb{A}$. On peut donc supposer, sans restriction, que $x \in \mathbb{A}$ et $g = 1$.

On note $\Phi = \Phi(G, S)$ le système de racines relatif de G. On commence par le cas où $d(x)$ est maximal : le point x est alors un sommet spécial de $\mathbb{A}$ et donc $d(x) = d_{\max} = \frac{1}{2}\mathrm{Card}(\Phi_{\mathrm{nd}})$. Pour toute racine affine $a + l$ telle que le mur qui lui est associé contient x, l'ensemble des points de $\mathbb{A}$ fixé par le groupe radiciel $U_{a,x}$ est exactement un demi-appartement [Lan96, 13.3 (ii)]. Donc pour toute racine relative $a \in \Phi$, l'ensemble des points de A fixé par $U_{a,x}$ et $U_{-a,x}$ est le mur associé à $a + l$ et $-a - l$. L'ensemble des points fixés par P_x dans $\mathbb{A}$ est donc $\{x\}$ car x est un sommet spécial et P contient $U_{a,x}$ pour toute racine relative $a \in \Phi$ [Lan96, § 10].

On suppose désormais que $d < d_{\max}$. Par l'absurde, supposons que P_x fixe un autre point $y \in \mathbb{A}$. Comme $G(K)$ agit par isométries et comme le segment $[x, y]$ est caractérisé par la métrique [AB08, Prop. 11.5], le groupe P_x fixe le segment $[x, y]$. Si $[x, y]$ rencontre un mur, on obtient un point $z \in \mathbb{A}$ fixé par P_x tel que $d(z) > d(x)$. Par hypothèse de récurrence, P_z admet un unique point fixe, donc P_z contient P_x strictement et ceci contredit la maximalité de P_x. Donc, y et x appartiennent à une même facette F. Si $F \neq \{x\}$ et $x \neq y$, comme l'action est continue et préserve la structure polysimpliciale, le groupe P_x fixe $\overline{F} \cap (x, y)$. Donc P fixe un point $z \in \overline{F} \setminus F$. On obtient à nouveau $d(z) > d(x)$ et on contredit alors à nouveau la maximalité de P_x.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Réciproquement, soit $x \in X(G,K)$ tel que le groupe $P = \mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$ fixe un unique point. Si P' est un sous-groupe borné contenant P, et $y \in X(G,K)$ est un point fixé par P', alors P fixe y et $y = x$ par unicité. Donc $P' \subset \mathrm{Stab}_{G(K)}(x) = P$.

De plus, lorsque G est simplement connexe, le stabilisateur de toute facette fixe cette facette point par point [BrT84, 5.2.9]. En raison de l'équivalence précédente, un sous-groupe borné maximal est exactement le stabilisateur d'un sommet de $X(G,K)$. □

2.3.6 Remarque. Par unicité du point fixe, on obtient une application injective de l'ensemble des sous-groupes bornés (i.e compacts) maximaux de $G(K)$ dans l'ensemble des points de l'espace métrique $X(G,K)$. Notons $X(G,K)_{\max}$ l'image de cette application. On observe que $X(G,K)_{\max}$ contient l'ensemble des sommets du complexe polysimplicial $X(G,K)$.

De plus, on peut remarquer que chaque $x \in X(G,K)_{\max}$ est l'isobarycentre de sa facette F, car le stabilisateur dans $G(K)$ de x agit isométriquement sur F et x est l'unique point fixe. On prêtera attention au fait que la réciproque est fausse : le stabilisateur de l'isobarycentre d'une facette n'est pas, en général, un sous-groupe borné maximal.

2.3.7 Remarque. En reprenant la démonstration de la proposition 2.3.5, il n'est pas difficile de voir qu'un sous-groupe compact $H \subset G(K)$ est toujours contenu dans un sous-groupe compact maximal. Soit $x \in X(G,K)$ un point fixé par H de degré $d(x)$ maximal (ce degré ne dépend pas du choix d'un appartement). Alors H est contenu dans $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$.

Fait : $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$ est un sous-groupe compact maximal.

En effet, par l'absurde, si $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x)$ n'est pas maximal, alors ce groupe fixe un second point y, et on peut alors trouver un point sur la droite (x,y) de plus grand degré, fixé par ce groupe : ceci contredit la maximalité de $d(x)$.

Désormais, on a besoin d'étudier plus en détail les sous-groupes compacts ouverts pour démontrer la noethérianité des groupes absolument simples.

2.3.8 Lemme. *Soit U un sous-groupe compact de $G(K)$. On note $\Omega = X(G,k)^U$ la partie non vide des points fixés par U. Si U est ouvert, alors Ω est une partie bornée (par conséquent compacte) de $X(G,K)$.*

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que Ω n'est pas bornée. Soit $x_0 \in \Omega$. Comme Ω n'est pas bornée, on peut choisir une suite de points $x_n \in \Omega$ tels que $d(x_n, x_0) \geq n$. Soit $\overline{X(G,K)}$ la compactification de $X(G,K)$, définie dans [RTW10]. Soit $x \in \overline{X(G,K)}$ une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ (ce qui existe car l'espace $\overline{X(G,K)}$ est compact [RTW10, 3.34]). Comme l'application $\begin{array}{ccc} X(G,K) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & d(x_0,y) \end{array}$ est continue, $x \notin X(G,K)$. Par [RTW10, 4.20 (i)], il existe alors un tore k-déployé maximal S' tel que $x_0, x \in \overline{\mathbb{A}(S',K)}$, et on peut supposer que $S' = S$.

Le groupe U est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Stab}_{G(K)}(x_0)$, qui est compact par le lemme 2.3.1. Donc, pour toute racine relative $a \in \Phi$, l'intersection $U_a(K) \cap U$ est un sous-groupe d'indice fini dans U_{a,x_0}. Ainsi, U contient U_{a,l_a} pour un certain réel $l_a \in [f_{x_0}(a), +\infty[$.

Comme $G(K)$ agit encore continûment sur $\overline{X(G,K)}$, le point $x \in \overline{X(G,K)}$ est fixé par U. Comme $x \notin \mathbb{A}(S,K)$, il existe une racine $a \in \Phi$ pour laquelle $U_{a,x} = \mathrm{Stab}_{G(K)}(x) \cap U_a(K) = \{1\}$ par la description de ce stabilisateur en [RTW10, 4.14]. Mais $U_{a,x} \supset U \cap U_a(K) \supset U_{a,l_a}$, d'où la contradiction. □

2.3.9 Proposition. *Tout sous-groupe compact ouvert de $G(K)$ est contenu dans un nombre fini de sous-groupes compacts (ouverts) de $G(K)$.*

Démonstration. Soit $U \subset G(K)$ un sous-groupe compact ouvert. D'après le lemme 2.3.8, l'ensemble non vide $\Omega = X(G,K)^U$ est borné. Suivant la remarque 2.3.7, U est contenu dans un sous-groupe compact maximal. Comme $X(G,K)$ est localement fini (car K est un corps local), par la remarque 2.3.6, U est contenu dans un nombre fini de sous-groupes compacts maximaux. Comme U est ouvert dans $G(K)$, il est ouvert donc d'indice fini dans chaque sous-groupe compact maximal le contenant. Ainsi, l'ensemble des sous-groupes compacts contenant U est fini. □

On peut maintenant obtenir la première étape du théorème 2.1.5 par la proposition suivante :

2.3.10 Proposition. *Soient K un corps local non archimédien et G un groupe semi-simple presque-K-simple. Alors $G(K)$ est noethérien.*

Démonstration. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-groupes ouverts de $G(K)$. On note $G(K)^+$ le sous-groupe distingué de $G(K)$ engendré par les points rationnels des radicaux unipotents des K-sous-groupes paraboliques minimaux de G [BoT73, 6.2].

On commence par des énoncés sur les sous-groupes ouverts de $G(K)$. Soit U un tel sous-groupe.

Fait : Si $U \cap G(K)^+$ est borné, alors U est compact.

En effet, supposons que $U \cap G(K)^+$ est borné. Comme U est un sous-groupe ouvert de $G(K)$, il est fermé. Le groupe $G(K)^+$ est fermé dans $G(K)$ d'après [BoT73, 6.14]. Ainsi, $U \cap G(K)^+$ est compact par le lemme 2.3.2(2). D'après [BoT73, 6.14], le groupe quotient $G(K)/G(K)^+$ est compact. Donc $UG(K)^+/G(K)^+$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(K)/G(K)^+$. Le morphisme de groupes continu et bijectif naturel $U/(U \cap G(K)^+) \to UG(K)^+/G(K)^+$ est ouvert ; c'est donc un homéomorphisme. Ainsi $U/(U \cap G(K)^+)$ est compact. Il s'ensuit que U est compact.

Fait : Si U est non borné, alors U contient $G(K)^+$.

En effet, si U n'est pas borné, il n'est pas compact. Donc $U \cap G(K)^+$ est un sous-groupe ouvert non borné de $G(K)^+$ en appliquant le fait précédent. Par un théorème de Prasad, attribué à Tits [Pra82, Theorem (T)], on obtient $U \cap G(K)^+ = G(K)^+$. Donc $U \supset G(K)^+$.

On termine maintenant la démonstration en distinguant deux cas.

Premier cas : U_n est borné (donc compact) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par la proposition 2.3.9, U_0 est contenu dans un nombre fini de sous-groupes compacts. Ainsi, la suite croissante de sous-groupes compacts ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Second cas : U_N est non borné pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

Alors, pour tout $n \geq N$, le groupe U_n n'est pas borné et contient donc $G(K)^+$. Le sous-groupe ouvert $U_N/G(K)^+$ du groupe compact $G(K)/G(K)^+$ est d'indice fini. Ainsi, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. □

2.4 Groupes quasi-réductifs

On va maintenant utiliser la théorie de structure des groupes pseudo-réductifs pour démontrer la noethérianité des groupes quasi-réductifs à partir de celle des groupes semi-simples.

2.4.1 Le cas d'un groupe commutatif quasi-réductif

On commence par traiter le cas des groupes commutatifs quasi-réductifs qui apparaissent naturellement comme certains quotients des sous-groupes de Cartan des groupes pseudo-réductifs.

2.4.1 Proposition. *Soit K un corps local non archimédien. Si C est un K-groupe lisse quasi-réductif commutatif, alors $C(K)$ est noethérien.*

Démonstration. Dans cette démonstration on reprend le début de celle de [Con12, 4.1.5].

Soit S le tore K-déployé maximal de C (il est unique par conjugaison K-rationnelle [CGP15, C.2.3]). On considère le morphisme quotient lisse de K-groupes :

$$1 \longrightarrow S \xrightarrow{j} C \xrightarrow{\pi} C/S \longrightarrow 1$$

Fait : Le K-groupe commutatif lisse connexe C/S ne contient aucun sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$.

En effet, par l'absurde, en appliquant [SGA3, Exp. XVII 6.1.1(A)(ii)] à la pré-image dans C d'un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_a$ (voir [Con12, 4.1.4] pour une démonstration plus directe), on obtient une contradiction avec la quasi-réductivité de C. En appliquant [Bor91, 8.14 Cor.] à la pré-image dans C d'un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_m$, on obtient une contradiction avec la maximalité de S.

Par le lemme 2.2.3(b) et le théorème de Hilbert 90, on en déduit une suite exacte courte de groupes topologiques :

$$1 \longrightarrow S(K) \xrightarrow{j_K} C(K) \xrightarrow{\pi_K} \Big(C/S\Big)(K) \longrightarrow 1$$

où π_K est un morphisme ouvert surjectif.

Par [Con12, A.5.7], le groupe topologique $\Big(C/S\Big)(K)$ est compact, donc il est noethérien par la proposition 2.2.1(2) (dans ce cas, comme le groupe est commutatif, on dispose également d'une démonstration plus élémentaire en considérant le quotient lisse de C/S par son K-tore maximal, qui est anisotrope). Par la proposition 2.2.1(4) et (5), le groupe topologique $S(K) \simeq (K^\times)^n$ (où $n = \dim S$) est noethérien. En appliquant alors la proposition 2.2.1(3) à π_K, on en déduit que le groupe topologique $C(K)$ est noethérien. □

2.4.2 Le cas d'un groupe pseudo-réductif

Grâce à [CGP15], on dispose de théorèmes de structure des groupes pseudo-réductifs, dont on peut trouver un bon résumé dans [Con12, §2] par exemple. En particulier, on a beaucoup de flexibilité dans le choix d'une présentation standard (généralisée), de sorte qu'on peut réduire la question de la noethérianité des groupes pseudo-réductifs à celle des groupes semi-simples et des groupes commutatifs quasi-réductifs.

2.4.2 Lemme. *Soient K un corps local non archimédien et K' une K-algèbre finie réduite non nulle, que l'on écrit sous la forme $K' = \prod_{i\in I} K'_i$ où les K'_i/K sont des extensions de corps locaux de degré fini (possiblement inséparables). Soit G' un K'-groupe algébrique lisse connexe. On note G'_i sa fibre au-dessus du facteur K'_i. On considère le K-groupe lisse connexe $G = R_{K'/K}(G')$. Si chaque fibre G'_i est soit un K'_i-groupe semi-simple absolument simple, soit un K'_i-groupe pseudo-réductif exotique basique, alors le groupe topologique $G(K)$ est noethérien.*

Démonstration. On écrit $R_{K'/K}(G') = \prod_{i\in I} R_{K'_i/K}(G'_i)$ [CGP15, A.5.1]. On a un isomorphisme de groupes topologiques $R_{K'/K}(G')(K) \simeq \prod_{i\in I} G'_i(K'_i)$. Si chaque facteur $G'_i(K'_i)$ est noethérien, alors $G(K)$ l'est aussi par la proposition 2.2.1(4).

Désormais, on suppose sans restriction que K'/K est une extension finie de corps locaux. Il suffit donc de montrer que $G'(K')$ est noethérien.

Si G' est un K'-groupe semi-simple absolument simple, alors par la proposition 2.3.10 le groupe topologique $G'(K')$ est noethérien.

Sinon, G' est un K'-groupe pseudo-réductif exotique basique (voir [CGP15, 7.2] ou [Con12, 2.3.1] pour la définition). Par définition, on est donc dans le cas d'un corps de caractéristique $\mathrm{car}(K') \in \{2,3\}$. Alors, par [CGP15, 7.3.3, 7.3.5], $G(K')$ est topologiquement isomorphe à $\overline{G}(K')$ où $\overline{G}$ est un K'-groupe semi-simple absolument simple. Ainsi, $G(K')$ est noethérien par la proposition 2.3.10. □

2.4.3 Proposition. *Soient K un corps local non archimédien et G un groupe pseudo-réductif. Alors $G(K)$ est noethérien.*

Démonstration. Cette démonstration suit essentiellement celle de [Con12, 4.1.9], fondée sur le théorème de structure des groupes pseudo-réductifs. On reprend les étapes principales de cette démonstration.

Si K est un corps quelconque de caractéristique $p \neq 2,3$, alors un K-groupe pseudo-réductif est toujours standard par le théorème [CGP15, 5.1.1].

Si K est un corps local de caractéristique $p \in \{2,3\}$, alors on est dans le cas favorable d'un corps de base K avec $[K : K^p] = p$. Ainsi, par le théorème [CGP15, 10.2.1], G est le produit direct $G_1 \times G_2$ d'un K-groupe pseudo-réductif standard généralisé G_1 et d'un K-groupe pseudo-réductif totalement non réduit G_2. De plus, le K-groupe G_2 est toujours trivial si $p \neq 2$.

Première étape : Supposons que G_2 est non trivial (en particulier on a $\mathrm{car}(K) = 2$). Par [CGP15, 9.9.4], on sait que pour tout K-groupe pseudo-simple basique non réduit H (voir définition [CGP15, 10.1.2]), le groupe topologique $H(K)$ est topologiquement isomorphe à $\mathrm{Sp}_{2n}(L)$ pour un certain n et une certaine extension de corps locaux L/K. Par la proposition 2.3.10, $\mathrm{Sp}_{2n}(L)$ est noethérien, donc $H(K)$ l'est aussi. Par [CGP15, 10.1.4], le K-groupe totalement non réduit G_2 est isomorphe à une restriction de Weil $R_{K'/K}(G'_2)$ où K' est une K-algèbre finie réduite non nulle et les fibres de G'_2 sont des K-groupes pseudo-simples basiques non réduits. Par le lemme 2.4.2, $G_2(K)$ est donc noethérien.

Deuxième étape : Désormais, on peut supposer que $G = G_1$ est un K-groupe pseudo-réductif standard généralisé, donné par une présentation standard généralisée $(G', K'/K, T', C)$ et $C' = \mathcal{Z}_{G'}(T')$ où K' est une K-algèbre finie réduite non nulle, T' est un K'-tore maximal de G' et C est un K-sous-groupe de Cartan de G. On écrit $K' = \prod_{i\in I} K'_i$ où les K'_i/K sont des extensions finies de corps locaux. Par définition des présentations standard généralisées, G' est un K'-groupe dont les fibres, notées G'_i, sont absolument-simples et simplement connexes ou pseudo-réductives exotiques basiques. Ainsi, par le lemme 2.4.2, le groupe topologique $R_{K'/K}(G')(K)$, qui est topologiquement isomorphe à $\prod_{i\in I} G'_i(K'_i)$, est noethérien. De plus, par les propositions 2.4.1 et 2.2.1(4), le groupe topologique $\Big(R_{K'/K}(G') \rtimes C\Big)(K)$ est noethérien.

Troisième étape : avec les notations précédentes, $H^1\Big(K, R_{K'/K}(C')\Big)$ est fini : ceci est exactement une partie de la démonstration de [Con12, 4.1.9]. Par [Con12, 4.1.6], il

existe un morphisme de groupes $H^1\Big(K, R_{K'/K}(C')\Big) \simeq \prod_{i\in I} H^1\Big(K'_i, C'_i\Big)$. Si G'_i est semi-simple, le sous-groupe de Cartan C'_i est un tore et $H^1\Big(K'_i, C'_i\Big)$ est fini par [Con12, 4.1.7]. Sinon, G'_i est un groupe pseudo-réductif exotique basique. Il existe alors un morphisme quotient de G'_i sur un groupe semi-simple absolument simple $G'_i \to \overline{G'_i}$ qui envoie C'_i sur un sous-groupe de Cartan (donc un tore) $\overline{C'_i}$ de $\overline{G'_i}$. Sur une clôture séparable K'_{is}, l'application injective entre points rationnels $C'_i(K'_{is}) \to \overline{C'_i}(K'_{is})$ devient bijective. Par [Con12, 4.1.6], on a un isomorphisme $H^1(K'_i, C'_i) \simeq H^1(K'_i, \overline{C'_i})$ et on sait que cet ensemble de cohomologie est fini par [Con12, 4.1.7] à nouveau, car $C'_i(K'_{is})$ s'identifie par Galois-équivariance aux K'_{is}-points d'un K'_i-tore dans ce cas.

Par définition des présentations standard généralisées, on a un isomorphisme de groupes :

$$G \simeq \Big(R_{K'/K}(G') \rtimes C\Big)/R_{K'/K}(C')$$

Suivant la démonstration de [Con12, 4.1.9], le morphisme continu de groupes topologiques $\pi_K : \Big(R_{K'/K}(G') \rtimes C\Big)(K) \to G(K)$ est ouvert et son image est distinguée d'indice fini dans $G(K)$ [Con12, 4.1.9 (4.1.2)]. Ainsi, par la proposition 2.2.1(6) appliquée au morphisme π_K, le groupe $G(K)$ est noethérien. □

2.4.3 Cas général

2.4.4 Proposition. *Soit G un groupe quasi-réductif défini sur un corps local K non archimédien. Alors $G(K)$ est noethérien.*

Démonstration. On considère le quotient pseudo-réductif de G :

$$1 \longrightarrow \mathcal{R}_{u,K}(G) \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/\mathcal{R}_{u,K}(G) \longrightarrow 1$$

Par le lemme 2.2.3(b) on en déduit la suite exacte de groupes topologiques suivante :

$$1 \longrightarrow \mathcal{R}_{u,K}(G)(K) \longrightarrow G \xrightarrow{\pi_K} \Big(G/\mathcal{R}_{u,K}(G)\Big)(K)$$

où le morphisme π_K est ouvert car $\mathcal{R}_{u,K}(G)$ est lisse.

En appliquant [Oes84, VI.1] au groupe unipotent k-ployé $\mathcal{R}_{u,K}(G)$, le groupe topologique $\mathcal{R}_{u,K}(G)(K)$ est compact, donc noethérien par la proposition 2.2.1(2). En appliquant la proposition 2.4.3 au K-groupe pseudo réductif $G/\mathcal{R}_{u,K}(G)$, on en déduit que le groupe topologique $\Big(G/\mathcal{R}_{u,K}(G)\Big)(K)$ est noethérien. Ainsi, par la proposition 2.2.1(3), le groupe topologique $G(K)$ est noethérien. □

2.5 Démonstration de l'équivalence du théorème

Il n'y a désormais plus de difficultés à démontrer le théorème 2.1.5 qui donne une équivalence entre une propriété algébrique sur le groupe G et des propriétés topologiques de son groupe de points rationnels $G(K)$. On démontre successivement $\Big((iii) \text{ ou } (iv)\Big) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow \Big((iii) \text{ et } (iv)\Big)$.

On commence par démontrer $\Big((iii) \text{ ou } (iv)\Big) \Rightarrow (i)$.

2.5.1 Lemme. *Soit K un corps local non archimédien. Si U est un K-groupe algébrique affine lisse unipotent connexe, alors $U(K)$ s'écrit comme réunion croissante, indexée par $\mathbb{Z}$, de sous-groupes pro-p ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dont l'intersection est triviale.*

De plus, lorsque U n'est pas K-ployé, on peut supposer que la suite U_n est strictement croissante.

Démonstration. Soit ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_K$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathfrak{m}^n = \varpi^n\mathcal{O}_K \subset K$. Notons $\mathbb{U}_m$ le K-groupe lisse unipotent connexe K-déployé des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit :

$$P_n = \left\{ (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq m}, \begin{array}{ccc} x_{i,j} = 0 & \text{si } i > j \\ x_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \\ x_{i,j} \in \mathfrak{m}^{n(i-j)} & \text{si } i < j \end{array} \right\} \subset \mathbb{U}_m(K)$$

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite croissante de sous-groupes d'intersection triviale et de réunion égale à $\mathbb{U}_m(K)$. Pour tout n, le sous-groupe P_n de $\mathbb{U}_m(K)$ est ouvert car il contient le voisinage ouvert de l'élément neutre $\left(1 + \mathfrak{m}^{|n|(m-1)}\mathcal{M}_m(K)\right) \cap \mathbb{U}_m(K)$. C'est un groupe pro-$p$ car chaque P_{n+1} est un sous-groupe distingué de P_n et chaque quotient P_n/P_{n+1} est un p-groupe.

Par [Bor91, 15.5(ii)], il existe une immersion fermée $U \to \mathbb{U}_m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On pose $U_n = P_n \cap U(K)$. La suite de sous-groupes $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est croissante, d'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ triviale et de réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n = U(K)$, car il en est de même pour $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{U}_m(K)$. Chaque U_n est un sous-groupe pro-p de $U(K)$ car $U(K) \subset \mathbb{U}_m(K)$ est fermé, et est aussi un sous-groupe ouvert de $U(K)$ car P_n est ouvert dans $\mathbb{U}_m(K)$.

On suppose désormais que U n'est pas K-ployé. Comme $U(K)$ n'est pas compact par [Oes84, VI.1], chaque U_n est distinct de $U(K)$. De plus, aucun groupe U_n n'est trivial car chacun de ces groupes est ouvert dans $U(K)$. Ainsi, on peut extraire une suite strictement croissante $\left(U_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ ayant les propriétés attendues. □

2.5.2 Proposition. *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe algébrique affine lisse. Supposons que le groupe topologique $G(K)$ contient un sous-groupe compact maximal ou un sous-groupe pro-p maximal. Alors, G° est un K-groupe quasi-réductif.*

Démonstration. Soient $U = \mathcal{R}_{u,K}(G^\circ)$ le K-radical unipotent de G et H un sous-groupe compact (ou pro-p) maximal de $G(K)$. On va montrer, au moyen d'un raisonnement par l'absurde, que U est K-ployé.

Supposons que U n'est pas K-ployé. Soit $\mathcal{Z}_U$ le K-sous-groupe central lisse maximal de U (ce groupe existe, construit comme le K-sous-groupe fermé lisse maximal [CGP15, C.4.2] du centre de U). Par la proposition [CGP15, B.3.2], le K-sous-groupe fermé $\mathcal{Z}_U$ contient un K-sous-groupe fermé K-isomorphe à $\mathbb{G}_{a,K}$. Ainsi, $\mathcal{Z}_U$ est un K-groupe unipotent non-K-ployé non trivial. Par [Oes84, VI.1], le groupe topologique $\mathcal{Z}_U(K)$ n'est pas compact.

Comme $\mathcal{Z}_U$ est un sous-groupe caractéristique du sous-groupe U distingué dans G, le groupe $\mathcal{Z}_U(K)$ est normalisé par H. Par le lemme 2.5.1, le groupe $\mathcal{Z}_U(K)$ est recouvert par une suite croissante, indexée par $\mathbb{Z}$, de sous-groupes pro-p ouverts, disons $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la partie $C_n = \bigcup_{h\in H} hZ_nh^{-1}$ de $\mathcal{Z}_U(K)$ normalisée

par H. La partie C_n est compacte comme image de la partie compacte $H \times Z_n$ par l'application continue $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$. Comme $(C_n \cap Z_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est un recouvrement ouvert de C_n par une suite croissante, il existe un certain entier $m_n \in \mathbb{Z}$ tel que $C_n \subset Z_{m_n}$. On définit P_n comme étant l'adhérence dans $G(K)$ du sous-groupe engendré par C_n. C'est un sous-groupe fermé du sous-groupe pro-p Z_{m_n}, donc c'est un sous-groupe pro-p normalisé par H. Ainsi, le sous-groupe $H_n \cdot H$ de $G(K)$, engendré par H et H_n, est un groupe pro-p (comme image du produit semi-direct de pro-p-groupes $H_n \rtimes H$ par le morphisme surjectif $H_n \rtimes H \to H_n \cdot H$ induit par la multiplication [RZ10, 2.2.1(e)] et [Ser94, 1.4 Prop.4(b)]) contenant H. Donc, $H_n \subset H$ par maximalité de H en tant que sous-groupe compact ou pro-p de $G(K)$. Par conséquent, H contient la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} H_n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \bigcup_{h\in H} hZ_nh^{-1} = \bigcup_{h\in H} h\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} Z_n\right)h^{-1} = \bigcup_{h\in H} h\mathcal{Z}_U(K)h^{-1} = \mathcal{Z}_U(K)$. Comme $\mathcal{Z}_U(K)$ est un sous-groupe fermé non compact de H, on a une contradiction avec la compacité de H. □

On démontre ensuite $(i) \Rightarrow (ii)$.

2.5.3 Proposition. *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe algébrique affine lisse. Si G° est un K-groupe quasi-réductif, alors $G(K)$ est noethérien.*

Démonstration. La composante neutre G° de G est un K-sous-groupe affine lisse distingué de G [DG70, II.§5 1.1 et 2.1], et le quotient $F = G/G^0$ est un K-groupe fini (lisse) [DG70, II.§5 1.10].

Par le lemme 2.2.3(b), on a une suite exacte de groupes topologiques

$$1 \to G^0(K) \to G(K) \overset{\pi_K}{\to} F(K)$$

où π_K est un morphisme ouvert.

Par la proposition 2.4.4, le groupe topologique $G^\circ(K)$ est noethérien et $F(K)$ est noethérien car il est fini. Par conséquent, en appliquant la proposition 2.2.1(3), le groupe topologique $G(K)$ est noethérien. □

Pour conclure, on montre que $(ii) \Rightarrow \Big((iii) \text{ et } (iv)\Big)$.

2.5.4 Proposition. *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe algébrique affine lisse. Si $G(K)$ est noethérien, alors $G(K)$ admet un sous-groupe compact maximal et un sous-groupe pro-p maximal.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $G(K)$ ne contient pas de sous-groupe pro-p (resp. compact) maximal.

Par récurrence, on va alors définir une suite strictement croissance de sous-groupes pro-p (resp. compacts) ouverts. L'initialisation de la récurrence est donnée par le lemme 2.2.4. Hérédité : comme $G(K)$ n'admet pas de sous-groupe pro-p (resp. compact) maximal, étant donné un groupe pro-p (resp. compact) ouvert U_n, il existe un sous-groupe pro-p (resp. compact) U_{n+1} contenant U_n strictement. Le groupe U_{n+1} est ouvert car il contient U_n.

Une telle suite ne peut pas exister car cela contredirait la noethérianité de $G(K)$: d'où une contradiction. □

On termine en démontrant enfin la deuxième partie du théorème 2.1.5.

2.5.5 Lemme. *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe algébrique affine lisse. Si P est un sous-groupe pro-p (resp. compact) de $G(K)$, alors P est contenu dans un sous-groupe pro-p (resp. compact) ouvert de $G(K)$.*

Démonstration. Soit U le sous-groupe pro-p ouvert de $G(K)$ donné par le lemme 2.2.4. L'indice $[P : U \cap P]$ est fini car P est compact et $U \cap P$ est ouvert dans P. Donc, l'ensemble $\{x^{-1}Ux,\ x \in P\}$ est fini. On pose $U_0 = \bigcap_{x \in P} x^{-1}Ux$. C'est un sous-groupe pro-p ouvert de $G(K)$ normalisé par P. Ainsi le groupe $P_0 = P \cdot U_0$ est un sous-groupe ouvert de $G(K)$. Il est compact comme image de $P \times U_0$ par l'application continue donnée par la multiplication $G(K) \times G(K) \to G(K)$. Lorsque, de plus, P est pro-p, le groupe P_0 est pro-p comme image du groupe pro-p $P \ltimes U_0$ par le morphisme surjectif induit par la multiplication $P \ltimes U_0 \to P \cdot U_0$. □

Démonstration de la deuxième partie du théorème 2.1.5.

En utilisant la même construction par récurrence que dans la démonstration de 2.5.4, les énoncés (1) et (2) sont des conséquences directes de la noethérianité et du lemme 2.5.5. □

Chapitre 3

Sous-groupes pro-p maximaux d'un groupe semi-simple

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère à nouveau un corps local non archimédien K. Le groupe topologique $G(K)$ est alors totalement discontinu et localement compact. Ainsi, s'intéresser aux sous-groupes compacts de $G(K)$ revient à s'intéresser à ses sous-groupes profinis. C'est un autre point de vue sur la question traitée au chapitre 2. On s'intéresse désormais plus spécifiquement aux sous-groupes pro-p qui apparaissent nombreux lorsque p désigne la caractéristique résiduelle de K.

Le défaut de compacité des sous-groupes bornés maximaux du groupe des points rationnels d'un K-groupe non semi-simple rend plus difficile l'utilisation des résultats de groupes profinis. Comme exemple de comportement défavorable d'un groupe non semi-simple, le sous-groupe pro-p maximal de $\mathbb{G}_m(K) = K^\times$ n'est pas de type fini lorsque $K = \mathbb{F}_q((t))$. On ne considérera donc pas ces cas lorsqu'on cherchera une famille minimale de générateurs au chapitre 4. Désormais, on se restreint au cas d'un K-groupe G semi-simple et on ne considérera que des K-schémas en groupes de type fini affines et lisses. On parlera plus simplement de K-groupe algébrique.

On retrouve le théorème 3.1.1 de conjugaison des sous-groupes pro-p maximaux de [PR94, Theorem 3.10], que Platonov et Rapinchuk démontrent en caractéristique 0, et dû à Matsumoto [Mat66]. On en donnera une démonstration, en section 3.2, au moyen des immeubles de Bruhat-Tits au lieu des ordres maximaux de l'algèbre de Lie.

En outre, de la même manière qu'on a obtenu une description des sous-groupes compacts (ou profinis de manière équivalente) maximaux de $G(K)$ dans la proposition 2.3.5, le théorème 3.1.2 établit une description analogue des sous-groupes pro-p maximaux en termes de l'action sur l'immeuble. On trouvera la démonstration en section 3.4. En pratique, la description en termes de modèles entiers, établie par le théorème 3.1.3, est plus commode ; elle est démontrée en section 3.3.

3.1.1 Conjugaison et description des sous-groupes pro-p maximaux

Une fois que l'on sait qu'un groupe algébrique G admet des sous-groupes profinis maximaux, on voudrait les décrire plus précisément. Dans le cas d'un K-groupe G semi-simple, on peut travailler avec les modèles entiers de G et l'action de $G(K)$ sur son immeuble de Bruhat-Tits $X(G,K)$. Malheureusement, il y a, en général, plusieurs classes de conjugaison des sous-groupes profinis maximaux (dans le cas d'un groupe simplement connexe, ils correspondent aux sommets de l'immeuble d'après la proposition 2.3.5). Il peut même y avoir plusieurs classes d'isomorphisme (c'est par exemple le cas pour $\mathrm{Sp}_4(K)$). Néanmoins, les sous-groupes pro-p maximaux apparaissent, quant à eux, jouer un rôle analogue à celui des p-sous-groupes de Sylow d'un groupe fini, comme on peut le voir dans l'énoncé suivant :

3.1.1 Théorème. *Soit K un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Soit G un K-groupe semi-simple. Alors $G(K)$ admet des sous-groupes pro-p maximaux et ils sont deux à deux conjugués.*

Grâce à la géométrie de l'immeuble, étant donné un modèle entier convenablement choisi $\mathfrak{G}$ de G, on peut décrire l'un de ces sous-groupes pro-p maximaux comme image réciproque $\pi^{-1}(P)$, par le morphisme $\pi : \mathfrak{G}(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \mathfrak{G}(\kappa)$ provenant du morphisme de réduction, d'un p-sous-groupe de Sylow P du groupe fini $\mathfrak{G}(\kappa)$.

On précisera le choix de ce modèle entier dans le théorème 3.1.3. On notera que, par conjugaison, tous les sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$ s'obtiennent ainsi mais qu'il faut considérer différents modèles entiers (quitte à conjuguer dans $G(K)$) pour décrire l'ensemble des sous-groupes pro-p maximaux.

3.1.2 Utilisation des immeubles et des modèles entiers

Bien que le théorème 2.1.5 donne un bon critère à l'existence de sous-groupes compacts (donc profinis) maximaux, la démonstration n'est pas constructive dans le sens où l'on ne dispose d'aucun détail sur la nature de ces groupes. Toutefois, dans le cas d'un K-groupe G semi-simple, en notant $X(G,K)$ son immeuble de Bruhat-Tits, on a, par la proposition 2.3.5, une bonne description des sous-groupes profinis maximaux comme stabilisateurs de certains points de l'immeuble pour l'action continue et propre de $G(K)$ sur cet immeuble réalisé géométriquement.

Comme on l'a énoncé dans le théorème 2.1.5, le groupe topologique $G(K)$ admet aussi des sous-groupes pro-p maximaux. Ces groupes sont, en quelque sorte, une généralisation des sous-groupes de Sylow d'un groupe fini : dans la situation d'un groupe profini H, on sait que H admet des sous-groupes pro-p maximaux et qu'ils sont deux à deux conjugués [Ser94, 1.4 Prop. 3]. Par le théorème 3.1.1, on obtient plus généralement que le groupe $G(K)$ (en général non compact) admet des sous-groupes pro-p maximaux et qu'ils sont deux à deux conjugués. L'utilisation des immeubles de Bruhat-Tits et, en particulier, des immeubles euclidiens associés aux paires (G,K) nous permet d'être plus précis : on donne alors une description utile des sous-groupes pro-p maximaux au moyen d'une donnée de groupes radicielle valuée lorsque G est simplement connexe. Grâce à ceci, on peut, au chapitre 4, calculer le sous-groupe de Frattini d'un sous-groupe pro-p maximal.

Il y aura alors des calculs, en quelque sorte, analogues à ceux de [PR84a] où Prasad et Raghunathan calculent le groupe dérivé d'un sous-groupe parahorique.

3.1.2 Théorème. *Soient K un corps local non archimédien et G un K-groupe semi-simple. Si P est un sous-groupe de $G(K)$, alors P est un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ si, et seulement si, il existe une alcôve $\mathbf{c} \subset X(G,K)$ telle que P est un sous-groupe pro-p maximal du stabilisateur de $\mathbf{c}$.*

De plus, une telle alcôve $\mathbf{c}$ est uniquement déterminée par P et l'ensemble des points fixés par l'action de P sur $X(G,K)$ est contenu dans l'adhérence simpliciale (appelée enclos et notée $\mathrm{cl}(\mathbf{c})$) de $\mathbf{c}$.

En particulier, on a une application surjective naturelle de l'ensemble des sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$ vers l'ensemble des alcôves de $X(G,K)$. Lorsque G est simplement connexe, cette application est une bijection.

La première partie de ce théorème sera une conséquence immédiate de la proposition 3.2.3 et de la conjugaison des pro-p-sous-groupes de Sylow au sein d'un groupe profini car le stabilisateur d'une alcôve est un groupe profini (car compact) d'après le lemme 2.3.1(3). Pour avoir une description plus détaillée des sous-groupes pro-p maximaux, les modèles entiers et leurs réductions à la fibre spéciale ont, à leur tour, un rôle essentiel.

On reprend les notations de la section 1.3.5. En particulier, pour une partie Ω de $\mathbb{A}$ non vide, on note $\mathfrak{G}^\circ_\Omega$, $\mathfrak{G}_\Omega$ et $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$ les différents modèles définis dans [BrT84, §4] pour un groupe quasi-déployé puis dans [BrT84, §5], par descente étale, dans le cas général. Lorsque G est simplement connexe, ces différents modèles entiers coïncident en fait [BrT84, 4.6.32, 5.1.31].

En section 3.3, on va alors faire un usage plus systématique des $\mathcal{O}_K$-modèles pour obtenir la description suivante :

3.1.3 Théorème. *Soient K un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et G un K-groupe semi-simple simplement connexe.*

Tout sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ est conjugué à

$$P^+_{\mathbf{c}} = \ker\Big(\mathfrak{G}_{\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \overline{\mathfrak{G}}^{\mathrm{red}}_{\mathbf{c}}(\kappa)\Big)$$

où $\mathbf{c} \subset \mathbb{A}$ désigne une alcôve de l'appartement standard, κ désigne le corps résiduel de K et $\overline{\mathfrak{G}}^{\mathrm{red}}_{\mathbf{c}}$ désigne le quotient réductif de la fibre spéciale du modèle entier associé à $\mathbf{c}$.

Ce morphisme $\mathfrak{G}_{\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \overline{\mathfrak{G}}^{\mathrm{red}}_{\mathbf{c}}(\kappa)$ et son noyau apparaissent dans plusieurs références telles que [PY02], ou encore [Tit79].

3.2 Démonstration du théorème de conjugaison

On commence par s'intéresser au cas d'un groupe algébrique défini sur un corps fini. C'est le cas, par exemple, de la fibre spéciale des $\mathcal{O}_K$-modèles $\mathfrak{G}_\Omega$ (ces modèles sont utiles pour décrire les sous-groupes profinis et pro-p).

3.2.1 Lemme. *Soit κ un corps fini de caractéristique p. Soit H un κ-groupe réductif.*

Les p-sous-groupes de Sylow du groupe fini $H(\kappa)$ sont exactement les groupes $B_u(\kappa)$ où B est un sous-groupe de Borel[1] *de H défini sur κ et B_u est le radical unipotent de B.*

De plus, l'application $B \mapsto B_u(\kappa)$ réalise une bijection entre l'ensemble des κ-sous-groupes de Borel de H et l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow de $H(\kappa)$.

Démonstration. D'après [Ste68, Corollaire p.132], on sait que si B est un sous-groupe de Borel, alors $B_u(\kappa)$ est un p-sous-groupe de Sylow de $H(\kappa)$. Par des théorèmes de conjugaison, on obtient que tous les p-sous-groupes de Sylow de $H(\kappa)$ sont obtenus ainsi. En effet, les sous-groupes de Borel sont $H(\kappa)$-conjugués par le théorème de Lang [Bor91, 16.6], et les p-sous-groupes de Sylow du groupe fini $H(\kappa)$ sont $H(\kappa)$-conjugués par le théorème de Sylow. On en déduit une application surjective $\Psi : B \mapsto B_u(\kappa)$ entre l'ensemble des κ-sous-groupes de Borel de H et l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow de $H(\kappa)$. Montrons que cette application est bijective.

D'une part, comme $H(\kappa)$ agit transitivement par conjugaison sur l'ensemble des κ-sous-groupes de Borel de H, le nombre de κ-sous-groupes de Borel est égal au cardinal de $H(\kappa)/\mathcal{N}_{H(\kappa)}(B)$. Par un théorème de Chevalley [Bor91, 11.16], un sous-groupe de Borel de H est égal à son normalisateur, donc $\mathcal{N}_{H(\kappa)}(B) = B(\kappa)$. D'autre part, comme $H(\kappa)$ agit transitivement par conjugaison sur l'ensemble de ses p-sous-groupes de Sylow, le nombre de ses p-sous-groupes de Sylow est égal au cardinal de $H(\kappa)/\mathcal{N}_{H(\kappa)}(B_u(\kappa))$. Or, d'après [MT11, 24.11], on sait que $\mathcal{N}_{H(\kappa)}(B_u(\kappa)) = B(\kappa)$. D'où le résultat. □

3.2.2 Remarque. La correspondance bijective entre les κ-sous-groupes de Borel de H et les p-sous-groupes de Sylow de $H(\kappa)$ est inutile dans ce qui va suivre. On a seulement besoin de savoir que le nombre de κ-sous-groupes de Borel est premier à p (ce qui est aussi une conséquence de la décomposition de Bruhat).

Plus précisément, à partir de cette démonstration, on obtient que le normalisateur d'un p-sous-groupe de Sylow de $H(\kappa)$ est exactement $B(\kappa)$. Avec une hypothèse de simple connexité, on va obtenir, à la proposition 3.5.2, un énoncé analogue en remplaçant le corps fini κ par un corps local : à savoir que les normalisateurs des sous-groupes pro-p maximaux sont exactement les sous-groupes d'Iwahori.

Lorsqu'un p-groupe fini agit sur un ensemble fini de cardinal premier à p, la formule des classes assure l'existence d'un point fixe. Cet énoncé se généralise à l'action d'un groupe pro-p. En effet, si G est un groupe pro-p agissant continûment sur X, alors G opère sur X à travers un quotient fini G/H où H est le sous-groupe ouvert distingué de G fixant X. Donc G fixe un élément de X.

Comme un sous-groupe profini est compact, par le théorème de point fixe de Bruhat-Tits 2.3.3, un tel sous-groupe de $G(K)$ fixe un point $x_0 \in X(G, K)$. Comme l'action de $G(K)$ préserve la structure polysimpliciale, on en déduit une action sur l'étoile de x_0, c'est-à-dire une action sur l'ensemble des facettes dont l'adhérence contient x_0. En montrant que l'ensemble des alcôves de l'étoile de x_0 est fini de cardinal premier à p, on obtient la proposition suivante :

3.2.3 Proposition. *Un sous-groupe pro-p de $G(K)$ stabilise globalement une alcôve de $X(G, K)$.*

1. Par un théorème dû à Lang [Bor91, 16.6], on sait qu'un groupe algébrique linéaire H défini sur un corps fini κ admet des sous-groupes de Borel eux-mêmes définis sur κ.

Démonstration. Soit U un sous-groupe pro-p de $G(K)$. D'après la proposition 2.3.5, il existe un point $y \in X(G,K)$ tel que $\mathrm{Stab}_{G(K)}(y)$ est un sous-groupe compact maximal de $G(K)$ contenant U. On considère l'ensemble (non vide) $\mathcal{C}_y$ des alcôves de $X(G,K)$ dont l'adhérence contient y. On prêtera attention au fait qu'on oublie alors la structure euclidienne fournie par l'immeuble $X(G,K)$ et qu'on considère $\mathcal{C}_y$ seulement comme un ensemble discret.

Soit F la facette de $X(G,K)$ contenant y. Par conjugaison, on peut supposer sans restriction que $F \subset \mathbb{A}$. On définit alors l'étoile de F, notée $X(G,K)_F$, comme étant l'ensemble des facettes F' de $X(G,K)$ telles que $F \subset \overline{F'}$. On munit cet ensemble de l'ordre partiel $F' \leq F'' \Leftrightarrow F' \subset \overline{F''}$. On note $\mathfrak{G}_F^\circ$ le modèle entier à fibres connexes de G associé à F (dont on a rappelé l'existence en section 1.3.5). On note κ le corps résiduel de K et on considère $\mathcal{P}_F$ l'ensemble des κ-sous-groupes paraboliques de $\overline{\mathfrak{G}_F}$ ordonné par l'ordre inverse à l'inclusion. D'après [BrT84, 4.6.32 et 5.1.32 (i)], il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre $X(G,K)_F$ et $\mathcal{P}_F$ tel que les simplexes maximaux de $X(G,K)_F$ soient exactement les éléments de $\mathcal{C}_y$, et les κ-sous-groupes paraboliques minimaux de $\overline{\mathfrak{G}_F}$ leur correspondent bijectivement. Par le théorème de Lang [Bor91, 16.6], les κ-sous-groupes paraboliques minimaux de $\overline{\mathfrak{G}_F}$ sont exactement ses κ-sous-groupes de Borel. D'après le lemme 3.2.1, on obtient alors une bijection entre $\mathcal{C}_y$ et l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{G}_F^\circ(\kappa)$.

Comme $G(K)$ préserve la structure polysimpliciale de $X(G,K)$ et comme U fixe y, le groupe U agit sur $\mathcal{C}_y$. Pour tout $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathcal{C}_y$, par continuité de l'action $G(K) \times X(G,K) \to X(G,K)$, la partie $\{g \in U,\ g \cdot \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{c}'}\}$ est fermée dans U. Par conséquent, U agit continûment sur l'ensemble fini $\mathcal{C}_y$, dont le cardinal est congru à 1 modulo p et, en particulier, premier à p. Le pro-p-groupe U fixe alors un élément $\mathbf{c} \in \mathcal{C}_y$, donc U stabilise globalement l'alcôve $\mathbf{c}$ de $X(G,K)$. □

On peut désormais démontrer le théorème de conjugaison des sous-groupes pro-p maximaux.

Démonstration du théorème 3.1.1. Soient U, U' deux sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$. Soient $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$ des alcôves stabilisées par l'action de U et de U' respectivement (elles existes d'après la proposition 3.2.3). Comme $G(K)$ agit transitivement sur l'ensemble des alcôves de $X(G,K)$, il existe un élément $g \in G(K)$ tel que $g \cdot \mathbf{c}' = \mathbf{c}$. Ainsi $gU'g^{-1}$ stabilise $\mathbf{c}$. Par conséquent, U et $gU'g^{-1}$ sont deux sous-groupes pro-p maximaux de $P = \mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$ qui est compact par le lemme 2.3.1(3), donc profini. Par le théorème de conjugaison des pro-p-sous-groupes de Sylow d'un groupe profini [Ser94, 1.4 Prop. 3], U et $gU'g^{-1}$ sont conjugués dans P, donc U et U' sont conjugués dans $G(K)$. □

On va ensuite avoir recours aux groupes radiciels et aux modèles entiers pour démontrer l'unicité de l'alcôve stabilisée par un sous-groupe pro-p maximal donné. On démontrera ensuite, en section 3.4, le théorème décrivant ces sous-groupes 3.1.2.

3.3 Modèles entiers

Dans la démonstration de la proposition 3.2.3, on a utilisé des modèles entiers ; ici, on va en faire usage de manière plus systématique.

3.3.1 Noyau du morphisme de réduction

Soit Ω une partie bornée non vide de l'appartement standard $\mathbb{A}$. On note $\pi_\kappa : \mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\mathcal{O}_K) \to \mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\kappa)$ le morphisme canonique de réduction. On note $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega = \left(\mathfrak{G}^\dagger_\Omega\right)_\kappa$ la fibre spéciale. On note $\left(\overline{\mathfrak{G}}_\Omega\right)^\circ$ la composante neutre du κ-groupe $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega$, et $R_u(\overline{\mathfrak{G}}^\circ_\Omega)$ son radical unipotent, qui est défini sur κ car κ est parfait [BoT65, 0.7]. On note $\overline{\mathfrak{G}}^{red}_\Omega = \overline{\mathfrak{G}}_\Omega / R_u(\overline{\mathfrak{G}}^\circ_\Omega)$ le quotient de κ-groupes (éventuellement non connexe car $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega$ peut ne pas être connexe). Le système de racines de sa composante neutre est l'ensemble Φ_Ω des racines $a \in \Phi$, où Φ désigne le système de racines relatif de G, tels que la racine a vue comme application affine est constante sur Ω et prend ses valeurs dans Γ'_a [Lan96, 10.36]. On remarque que, lorsque Ω contient une alcôve, aucune racine de Φ n'est constante sur Ω car une alcôve de $\mathbb{A}$ est ouverte dans $\mathbb{A}$, donc Φ_Ω est alors vide.

On note $\pi_q : \overline{\mathfrak{G}}_\Omega \to \overline{\mathfrak{G}}^{red}_\Omega$ le κ-morphisme quotient de κ-groupes algébriques et, par abus de notations, on note encore $\pi_q : \mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\kappa) \to \overline{\mathfrak{G}}^{red}_\Omega(\kappa)$ le morphisme de groupes abstraits déduit de π_q. Grâce au contexte, il n'y aura jamais d'ambiguïté sur le morphisme considéré.

3.3.1 Notation. Par l'identification des groupes abstraits $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\kappa) = \overline{\mathfrak{G}}_\Omega(\kappa)$, on peut définir le morphisme composé $\pi_\Omega = \pi_q \circ \pi_\kappa$. On note P^+_Ω le noyau de π_Ω.

Plus spécifiquement, si F est une facette de l'immeuble $X(G,K)$, par transitivité, il existe un élément $g \in G(K)$ tel que $g \cdot F \subset \mathbb{A}$. On note $P^+_F = g^{-1} P^+_{g\cdot F} g$. Ce groupe ne dépend pas du choix de g.

Notre but ici est de démontrer que, lorsque G est simplement connexe, P^+_F est un pro-p-sous-groupe maximal du sous-groupe $\mathrm{Stab}_{G(K)}(F)$ qui est profini (d'après le lemme 2.3.1(3)). On remarquera qu'avec ces notations, il n'est pas nécessaire que la facette F soit contenue dans l'appartement standard $\mathbb{A}$.

3.3.2 Lemme. *Le morphisme de groupes π_κ est surjectif et son noyau $\ker \pi_\kappa$ est un groupe pro-p.*

Démonstration. La surjectivité de π_κ est une conséquence de la lissité du $\mathcal{O}_K$-modèle $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$ [BLR90, 2.3 Prop. 5].

Le $\mathcal{O}_K$-groupe affine lisse de type fini $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega$ admet une représentation linéaire fidèle, c'est-à-dire une immersion fermée, $\rho : \mathfrak{G}^\dagger_\Omega \to \mathcal{GL}_{n,\mathcal{O}_K}$ qui commute au morphisme (surjectif) de réduction. De plus, on observe que $\rho(\ker \pi_\kappa) = \ker \widetilde{\pi_\kappa} \cap \rho(\mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\mathcal{O}_K))$. Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker \pi_\kappa & \xrightarrow{\subset} & \mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\pi_\kappa} & \mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\kappa) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{O}_K}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_\kappa} & & \\
0 & \longrightarrow & \ker \widetilde{\pi_\kappa} & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\widetilde{\pi_\kappa}} & \mathrm{GL}_n(\kappa) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Ainsi $\ker \pi_\kappa$ est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\ker \widetilde{\pi_\kappa}$, donc c'est un groupe pro-p. □

3.3.3 Proposition. *Le groupe P^+_Ω est un sous-groupe pro-p distingué de $\mathfrak{G}^\dagger_\Omega(\mathcal{O}_K)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.2.3(b), on a $\ker \pi_q = R_u(\overline{\mathfrak{G}}_\Omega)(\kappa)$, donc c'est un p-groupe en tant que groupe de points rationnels d'un κ-groupe unipotent. On va montrer que la suite d'homomorphismes de groupes

$$1 \longrightarrow \ker \pi_\kappa \xrightarrow{\subseteq} \ker(\pi_q \circ \pi_\kappa) \xrightarrow{\pi_\kappa} \ker \pi_q \xrightarrow{\pi_q} 1$$

est exacte. On doit vérifier que $\pi_\kappa(\ker \pi_q \circ \pi_\kappa) = \ker \pi_q$.

En effet, si $g \in \pi_\kappa(\ker \pi_q \circ \pi_\kappa)$, alors il existe $h \in \ker \pi_q \circ \pi_\kappa$ tel que $g = \pi_\kappa(h)$. Ainsi $\pi_q(g) = \pi_q \circ \pi_\kappa(h) = 1$, et donc $g \in \ker \pi_q$.

Réciproquement, si $g \in \ker \pi_q$, par surjectivité de π_κ (donnée par le lemme 3.3.2), il existe $h \in \mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O}_K)$ tel que $\pi_\kappa(h) = g$. Ainsi $\pi_q \circ \pi_\kappa(h) = \pi_q(g) = 1$, et donc $h \in \ker(\pi_q \circ \pi_\kappa)$. Donc $g \in \pi_\kappa(\ker(\pi_q \circ \pi_\kappa))$.

Par conséquent, $P_\Omega^+ = \ker \pi_\Omega$ est un groupe pro-p. □

3.3.4 Lemme. *Soit κ un corps fini de caractéristique p. Si H est un κ-groupe réductif (donc connexe), alors $H(\kappa)$ n'admet pas de p-sous-groupe distingué non trivial.*

Démonstration. Soit P un p-sous-groupe distingué de $H(\kappa)$. C'est un sous-groupe d'un certain p-sous-groupe de Sylow de $H(\kappa)$. Par le lemme 3.2.1, il existe alors un κ-sous-groupe de Borel B tel que $P \subset \mathcal{R}_u(B)(\kappa)$.

On peut choisir un tore κ-déployé maximal S de H tel que le tore maximal $T = \mathcal{Z}_H(S)$ de H soit contenu dans B. Soit $n \in \mathcal{N}_H(T)(\kappa)$ tel que B et nBn^{-1} sont des κ-sous-groupes de Borel opposés. Alors on a l'intersection $B \cap nBn^{-1} = T$ [Bor91, 14.1]. On a $nPn^{-1} = P$ car P est distingué dans $H(\kappa)$. Donc, P est un sous-groupe de $T(\kappa)$ et $\#T(\kappa)$ est premier à p. Par conséquent, $P \subset T(\kappa)$ est trivial. □

Pour obtenir des résultats sur la maximalité de $\ker \pi_\Omega$, il faut que le morphisme π_Ω soit surjectif.

3.3.5 Lemme. *Le morphisme de groupes abstrait π_Ω est surjectif.*

En particulier, si Q est un p-sous-groupe de Sylow de $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega^{\mathrm{red}}(\kappa)$, alors $\pi_\Omega^{-1}(Q)$ est un sous-groupe pro-p maximal de $\mathfrak{G}_\Omega^\dagger(\mathcal{O}_K)$.

Démonstration. Par définition, le groupe $U = R_u(\overline{\mathfrak{G}_\kappa})$ est connexe. Par le théorème de Lang, on a $H^1(\kappa, U) = 0$ [Bor91, 16.9]. Ainsi par [Ser94, I.5.5 Prop.38] le morphisme de groupes abstraits π_q est surjectif. D'après le lemme 3.3.2, le morphisme composé π_Ω est surjectif.

Par la proposition 3.3.3, le morphisme surjectif π_Ω a un noyau pro-p. Donc, pour tout p-sous-groupe Q de $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega^{\mathrm{red}}(\kappa)$, le groupe $\pi_\Omega^{-1}(Q)$ est pro-p (en tant qu'extension de tels groupes). Ainsi, si Q est un p-sous-groupe de Sylow, alors $\pi_\Omega^{-1}(Q)$ est un sous-groupe pro-p maximal. □

3.3.6 Proposition. *Si $\overline{\mathfrak{G}_\Omega}$ est connexe, alors le noyau P_Ω^+ est un sous-groupe pro-p distingué maximal de $\mathfrak{G}_\Omega^\dagger(\mathcal{O}_K)$.*

Démonstration. Soit $\widetilde{P}$ un sous-groupe pro-p distingué de $\mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O}_K)$ contenant P_Ω^+. Par [Ser94, I.1.4 Prop.4], son image par le morphisme surjectif π_Ω (voir lemme 3.3.5) est un p-sous-groupe distingué de $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega^{\mathrm{red}}(\kappa)$.

Lorsque $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega$ est connexe, le quotient $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega^{\mathrm{red}}$ est un κ-groupe réductif (car connexe). Donc, par le lemme 3.3.4, $\pi(\widetilde{P})$ est trivial et $\widetilde{P} = P_\Omega^+$. □

3.3.2 Sous l'hypothèse de simple connexité

Désormais, on suppose que le K-groupe semi-simple G est simplement connexe. Donc $\mathfrak{G}_\Omega^\dagger = \mathfrak{G}_\Omega = \mathfrak{G}_\Omega$ [BrT84, 4.6.32 et 5.1.31].

3.3.7 Proposition. *Supposons que $\Omega = \mathbf{c} \subset \mathbb{A}$ est une alcôve et que G est simplement connexe. Alors P_Ω^+ est un sous-groupe pro-p maximal de $\mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O}_K)$.*

Démonstration. Comme Ω est une alcôve, le système de racines du groupe quotient $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega/R_u(\overline{\mathfrak{G}}_\Omega)$ est vide [BrT84, 4.6.12(i), 5.1.31]. On sait par simple connexité de G, d'après [Tit79, 3.5.2], que le κ-groupe algébrique $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega$ est connexe. Ainsi, le quotient $\overline{\mathfrak{G}}_\Omega^{\mathrm{red}}$ est un κ-groupe réductif quasi-déployé ayant un système de racines vide. Donc, c'est un κ-tore et, par conséquent, il ne possède pas de p-sous-groupe non trivial. Ainsi, pour tout pro-p-sous-groupe P de $\mathfrak{G}_\Omega^\dagger(\mathcal{O}_K) = \mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O}_K)$, l'image $\pi_\Omega(P)$ par le morphisme surjectif π_Ω (voir lemme 3.3.5) est un p-groupe [Ser94, 1.4 Prop.4], donc est trivial. Par conséquent, le noyau P_Ω^+ est le sous-groupe pro-p maximal (unique) de $\mathfrak{G}_\Omega(\mathcal{O}_K)$. □

Maintenant, on peut démontrer le théorème 3.1.3.

Démonstration du théorème 3.1.3. Soit P un sous-groupe pro-p maximal. Par la proposition 3.2.3, on a $P \subset \mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$. Soit $\mathbf{c}_0 \subset \mathbb{A}$ une alcôve. Par forte transitivité de l'action de $G(K)$ sur l'immeuble $X(G,K)$, il existe $g \in G(K)$ tel que $g\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}$. Ainsi, $g^{-1}Pg$ est un sous-groupe pro-p maximal de $\mathfrak{G}_{\mathbf{c}_0}(\mathcal{O}_K)$. Par la proposition 3.3.7, on a donc $P = gP_{\mathbf{c}_0}^+ g^{-1}$. □

3.3.3 Donnée de groupes radicielle valuée dans le cas d'un groupe simplement connexe quasi-déployé

Pour conclure dans le cas d'un groupe simplement connexe, on va interpréter les sous-groupes pro-p maximaux en termes d'une donnée de groupes radicielle valuée. Ceci peut être un peu délicat dans le cas général et, dans les deux propositions suivantes, on supposera que G est, en outre, quasi-déployé. Au chapitre 4, on va calculer le sous-groupe de Frattini d'un sous-groupe pro-p maximal en utilisant la décomposition explicite de la proposition 3.3.8.

On note S le tore K-déployé maximal choisi en section 1.1.3.2, utilisé dans la construction de l'appartement standard $\mathbb{A}$ de l'immeuble en section 1.3.4, et $T = \mathcal{Z}_G(S)$ le k-tore maximal associé (G est supposé quasi-déployé). Soient $T(K)_b$ l'unique sous-groupe profini maximal de $T(K)$ et $T(K)_b^+$ son unique sous-groupe pro-p maximal.

3.3.8 Proposition. *On se place encore sous l'hypothèse où G est simplement connexe et quasi-déployé. Le groupe $P_{\mathbf{c}}^+$ admet la structure de produit directement engendré suivante :*

$$P_{\mathbf{c}}^+ = \left(\prod_{a \in \Phi_{\mathrm{nd}}^+} U_{-a, f_{\mathbf{c}}(-a)} \right) \cdot T(K)_b^+ \cdot \left(\prod_{a \in \Phi_{\mathrm{nd}}^+} U_{a, f_{\mathbf{c}}(a)} \right)$$

où Φ_{nd} est l'ensemble des racines non divisibles du système de racines relatif $\Phi = \Phi(G,S)$.

En particulier, $T(K)_b^+ = P_{\mathbf{c}}^+ \cap T(K)_b$.

Démonstration. Par hypothèse de simple connexité, la proposition [Lan96, 3.5] donne $\mathfrak{T}(\mathcal{O}_K) = T(K)_b$ où $\mathfrak{T}$ désigne le modèle entier de T défini dans [Lan96, §3].

Comme $\mathbf{c}$ est une alcôve, pour toute racine relative $a \in \Phi$, on a $f_{\mathbf{c}}(a) + f_{\mathbf{c}}(-a) > 0$. Suivant les calculs de [Lan96, 5.9, 5.12, 6.5] et les axiomes des données de groupes radicielles valuées, le produit directement engendré $\mathfrak{U}_{-\Phi^+,\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K) \cdot \mathfrak{T}(\mathcal{O}_K) \cdot \mathfrak{U}_{\Phi^+,\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K)$ est un groupe, donc il est égal à $\mathfrak{G}_{\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K)$ par [BrT84, 4.6.6].

Dans la démonstration de la proposition 3.3.7, on a vu que $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathbf{c}}^{\mathrm{red}}(\kappa)$ n'admet pas de p-sous-groupe non trivial. Ainsi $\mathfrak{U}_{\pm\Phi^+,\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K) \subset \ker \pi_{\mathbf{c}} = P_{\mathbf{c}}^+$ car l'image d'un groupe pro-p par un morphisme continu surjectif est un groupe pro-p. Par conséquent, on en déduit l'égalité. □

Par quasi-déploiement et simple connexité, le K-tore maximal T est un tore induit [BrT84, 4.4.16] (on peut aussi parler de tore quasi-trivial [CTS77, §2]), engendré par les coracines, et on peut alors préciser la description précédente :

3.3.9 Proposition. *On a l'isomorphisme de groupes topologiques suivant :*

$$\begin{array}{rccc} \prod_{a\in\Delta} \hat{a}^\vee : & \prod_{a\in\Delta}(1+\mathfrak{m}_{L_a}) & \to & T(K)_b^+ \\ & (t_a)_{a\in\Delta} & \mapsto & \prod_{a\in\Delta} \hat{a}^\vee(t_a) \end{array} \tag{3.1}$$

où $\hat{a} = 2a$ si $2a \in \Phi$, et $\hat{a} = a$ sinon ; L_a est le corps de déploiement de a (voir définition 1.1.18) et $\mathfrak{m}_{L_a}$ est l'idéal maximal de l'anneau des entiers de L_a.

Démonstration. Comme G est un K-groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé, par [BrT84, 4.4.16], le tore maximal T est un tore induit (i.e. quasi-trivial) et, plus précisément, on a l'isomorphisme suivant $\prod_{a\in\Delta} \hat{a}^\vee : \prod_{a\in\Delta} R_{L_a/K}(\mathbb{G}_{m,L_a}) \simeq T$, où Δ est une base du système de racines relatif Φ. Par unicité, à isomorphisme près, des $\mathcal{O}_K$-modèles de T, le $\mathcal{O}_K$-groupe $\mathfrak{T}$ est $\mathcal{O}_K$-isomorphe à $\prod_{a\in\Delta} R_{\mathcal{O}_{L_a}/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_{L_a}})$. Ainsi, on a un isomorphisme $\prod_{a\in\Delta} \mathcal{O}_{L_a}^\times \simeq \mathfrak{T}(\mathcal{O}_K) = T(K)_b$ de groupes topologiques commutatifs, dont le sous-groupe pro-p maximal est isomorphe au produit direct $\prod_{a\in\Delta}(1+\mathfrak{m}_{L_a})$. □

3.4 Description utilisant l'action sur l'immeuble

On peut maintenant exploiter la description utile d'un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$, comme pro-p-sous-groupe de Sylow du stabilisateur global d'une alcôve convenable. Pour démontrer le théorème 3.1.2, il suffit de montrer que tout sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ se réalise comme tel.

Démonstration du théorème 3.1.2. Si G est anisotrope, alors $G(K)$ est compact donc profini d'après un théorème dû à Bruhat, Tits et Rousseau [Pra82, Thm. BTR] et son immeuble est un point [BrT84, 5.1.27]. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Sylow des groupes profinis. On suppose désormais que le groupe semi-simple G n'est pas anisotrope. Dans ce cas, ses appartements sont de dimension supérieure ou égale à 1 par définition et l'immeuble de Bruhat-Tits $X(G,K)$ est épais par [Rou09, 8.7].

Soit P un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$. D'après la proposition 3.2.3, il existe une alcôve $\mathbf{c}$ telle que P stabilise globalement $\mathbf{c}$. Par forte transitivité, on peut supposer sans restriction que $\mathbf{c} \subset \mathbb{A}$. En particulier, P est un sous-groupe pro-p maximal de $\mathfrak{G}_{\mathbf{c}}^\dagger(\mathcal{O}_K)$.

Premièrement, on démontre l'unicité d'une telle alcôve $\mathbf{c}$. Par le lemme 2.3.1, le groupe topologique $\mathfrak{G}^{\dagger}_{\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K)$ est compact, donc profini. Par le théorème de Sylow des groupes profinis [Ser94, 1.4 Prop.3 et 4 (a)], il existe $g_0 \in \mathfrak{G}^{\dagger}_{\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K)$ tel que P contient $g_0 P^+_{\mathbf{c}} g_0^{-1} = P^+_{\mathbf{c}}$. Il suffit de démontrer que $P^+_{\mathbf{c}}$ ne stabilise globalement aucune alcôve de $X(G,K)$ distincte de $\mathbf{c}$.

Pour tout $a \in \Phi$, l'image par $\pi_{\mathbf{c}}$ du groupe radiciel $U_{a,\mathbf{c}}(\mathcal{O}_K)$ est triviale car $\overline{\mathfrak{U}}_{a,\mathbf{c}}$ est un groupe radiciel de $\overline{\mathfrak{G}}^{red}_{\mathbf{c}}$ [Lan96, 10.34], donc est trivial car $\mathbf{c}$ est une alcôve [Lan96, 10.36]. Ainsi $P^+_{\mathbf{c}}$ contient le sous-groupe $U_{\mathbf{c}}$ de $G(K)$ engendré par les $U_{a,\mathbf{c}}$ pour $a \in \Phi$. Le groupe $P^+_{\mathbf{c}}$ agit sur l'ensemble des facettes de $X(G,K)$ qui ne sont pas contenues dans l'enclos $\mathrm{cl}(\mathbf{c})$ de $\mathbf{c}$ car ce groupe stabilise globalement $\mathrm{cl}(\mathbf{c})$ et préserve la structure polysimpliciale de $X(G,K)$. Soit F une telle facette. Soit A' un appartement contenant $\mathbf{c}$ et F. Soit A'' un appartement contenant $\mathbf{c}$ mais pas F, ce qui est possible lorsque G n'est pas anisotrope. Comme le groupe $U_{\mathbf{c}}$ agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant $\mathbf{c}$ [Lan96, 13.7], il existe $u \in U_{\mathbf{c}} \subset P^+_{\mathbf{c}}$ tel que $u \cdot A' = A''$. Donc $P^+_{\mathbf{c}}$ ne stabilise pas F.

Réciproquement, soient $\mathbf{c}$ une alcôve de $X(G,K)$ et P un sous-groupe pro-p maximal de $\mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$. Soit P' un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ contenant P. Un tel P' existe par le lemme 2.5.5 et la proposition 2.3.9. Soit $\mathbf{c}'$ l'unique alcôve stabilisée par P', donc par P. Comme P contient $P^+_{\mathbf{c}}$ d'après le lemme 3.3.5, il ne stabilise aucune facette de $X(G,K)$ hors de $\mathrm{cl}(\mathbf{c})$. Donc $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ et P' est un sous-groupe pro-p maximal de $\mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$. Par maximalité de P, on a $P' = P$. □

3.4.1 Corollaire. *Si G est un K-groupe semi-simple simplement connexe, alors P est un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ si, et seulement si, il existe une alcôve $\mathbf{c}$ de $X(G,K)$ telle que $P = P^+_{\mathbf{c}}$. De plus, une telle alcôve $\mathbf{c}$ est uniquement déterminée par P et l'ensemble des points fixés par P dans $X(G,K)$ est exactement l'enclos $\mathrm{cl}(\mathbf{c}) = \overline{\mathbf{c}}$ de $\mathbf{c}$.*

Démonstration. La première partie est une conséquence de la proposition 3.3.7 et de la première partie du théorème 3.1.3.

Lorsque G est simplement connexe, le stabilisateur d'une alcôve est aussi son stabilisateur point par point [BrT84, 5.2.9]. Ce fait combiné au théorème 3.1.3 nous donne la deuxième partie. □

3.5 Sous-groupes d'Iwahori d'un groupe simplement connexe

On rappelle les définitions suivantes de [BrT84, 5.2] :

3.5.1 Définition.
(1) Étant donnée une facette F de $X(G,K)$, on appelle **fixateur connexe** de F le sous-groupe $\mathfrak{G}_F(\mathcal{O}_K)$ de $G(K)$.
(2) Un sous-groupe de $G(K)$ est appelé un sous-groupe **parahorique** (resp. d'**Iwahori**) s'il est le stabilisateur connexe d'une facette (resp. d'une alcôve) de $X(G,K)$.

Pour conclure cette étude des sous-groupes pro-p, on redonne une démonstration de la proposition suivante bien connue, qui est une sorte de généralisation du lemme 3.2.1.

3.5.2 Proposition. *On suppose que G est simplement connexe. Un sous-groupe de $G(K)$ est un sous-groupe d'Iwahori si, et seulement si, c'est le normalisateur dans $G(K)$ d'un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{c}$ une alcôve de $\mathbb{A}$, soient $g \in G(K)$ un élément et H le stabilisateur de $g \cdot \mathbf{c}$. Comme G est simplement connexe, le stabilisateur H est en fait un sous-groupe d'Iwahori [BrT84, 5.2.9]. Par la proposition 3.3.3, $gP_{\mathbf{c}}^+ g^{-1}$ est un sous-groupe pro-p distingué de H. Donc $H \subset \mathcal{N}_{G(K)}(gP_{\mathbf{c}}^+ g^{-1})$. Pour tout élément $h \in \mathcal{N}_{G(K)}(gP_{\mathbf{c}}^+ g^{-1})$, tout $u \in gP_{\mathbf{c}}^+ g^{-1}$ et $x \in g \cdot \mathbf{c}$, on a $h^{-1}uh \cdot x = x$ car $gP_{\mathbf{c}}^+ g^{-1}$ fixe $g \cdot \mathbf{c}$ point par point. Ainsi $h \cdot x$ est un point de $X(G, K)$ fixé par $gP_{\mathbf{c}}^+ g^{-1}$, donc $h \cdot x \in g \cdot \mathbf{c}$ car il ne peut pas être contenu dans la frontière de $g \cdot \mathbf{c}$. Comme l'action de $G(K)$ sur $X(G, K)$ préserve la structure polysimpliciale, l'élément h stabilise $g \cdot \mathbf{c}$. Donc $\mathcal{N}_{G(K)}(gP_{\mathbf{c}}^+ g^{-1}) = H$. Par le théorème 3.1.3, on a la première implication.

Réciproquement, soit U un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$. Posons $H = \mathcal{N}_{G(K)}(U)$. Soit $\mathbf{c}$ l'unique alcôve fixée par U donnée par le théorème 3.1.2. Par unicité de $\mathbf{c}$, le sous-groupe H stabilise $\mathbf{c}$. Par la proposition 3.3.7 (et par conjugaison), U est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$. Ainsi $H = \mathcal{N}_{G(K)}(U) = \mathrm{Stab}_{G(K)}(\mathbf{c})$ est un sous-groupe d'Iwahori de $G(K)$. □

3.5.3 Corollaire. *Les sous-groupes d'Iwahori du groupe $G(K)$ sont $G(K)$-conjugués.*

C'est la proposition [Tit79, 3.7].

Démonstration. Ce corollaire est immédiat par le théorème 3.1.1 et la proposition 3.5.2. □

L'intérêt de la proposition 3.5.2 est que l'on dispose d'une définition « intrinsèque » (du point de vue de la théorie des groupes, autrement dit une description qui n'utilise pas l'action sur un immeuble de Bruhat-Tits) des sous-groupes d'Iwahori dans les cas favorables (par exemple un groupe simplement connexe défini sur un corps local). Ceci nous donne alors une méthode rapide pour décrire le système de Tits affine purement en termes de théorie des groupes.

Chapitre 4

Ensemble minimal de générateurs d'un pro-p Sylow

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on reprend le contenu de [Loi17]. On se donne K un corps local non archimédien et G un K-schéma en groupes affine lisse et de type fini. Le groupe topologique $G(K)$ est totalement discontinu et localement compact. Sous certaines conditions, ce groupe admet des sous-groupes compacts ou pro-p maximaux qui fournissent de nombreux exemples de groupes profinis. On va alors s'intéresser aux sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$ du point de vue de la théorie des groupes profinis.

4.1.1 Nombre minimal de générateurs

On rappelle que lorsque H est un groupe profini, on dit que H est **topologiquement engendré** par une partie X si H est égal au plus petit sous-groupe fermé contenant X ; une telle partie X est appelée un **ensemble de générateurs**. On veut déterminer le nombre minimal de générateurs d'un sous-groupe pro-p maximal d'un groupe algébrique défini sur un corps local.

Supposons que $K = \mathbb{F}_q((t))$ est un corps local de caractéristique p, avec $q = p^m$ et que G est un K-groupe simple simplement connexe K-déployé de rang l. Par un résultat récent de Capdeboscq et Rémy [CR14, 2.5], on sait que tout sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ possède un ensemble fini de générateurs X ; de plus, le nombre minimal d'éléments d'un tel ensemble X est $m(l+1)$.

Dans la situation générale d'un K-schéma en groupes G affine de type fini lisse, par le théorème 2.1.5, on sait que $G(K)$ admet des sous-groupes pro-p maximaux (on pourra parler de **pro-p-Sylows**) si, et seulement si, G est quasi-réductif (son K-radical unipotent déployé est trivial). Lorsque K est de caractéristique 0, on est dans la situation des groupes réductifs car un groupe unipotent défini sur un corps parfait est toujours déployé. Pour obtenir des descriptions explicites d'un pro-p-Sylow au moyen de la théorie de Bruhat-Tits, on se restreint à étudier le cas d'un groupe semi-simple G simplement connexe défini sur un corps local K.

Un tel groupe G peut se décomposer comme un produit presque direct de groupes presque-K-simples. De plus, on a rappelé par la proposition 1.1.28 que pour tout groupe K-

simple H, il existe une extension finie de corps locaux K'/K et un K'-groupe absolument simple simplement connexe H' tel que H est isomorphe à la restriction de Weil $R_{K'/K}(H')$. Cela signifie que si l'on voit H' comme un K-groupe, on a $H(K) = H'(K')$ par définition de la restriction de Weil, et on peut supposer que G est absolument simple.

On rappelle que dans la théorie de Bruhat-Tits, étant donné un K-groupe réductif G, on lui attache un complexe polysimplicial $X(G, K)$ (un immeuble affine), appelé l'immeuble de Bruhat-Tits de G sur K et une action convenable de $G(K)$ sur $X(G, K)$. Par un théorème de Steinberg [Pra16, 1.7], il existe une extension non ramifiée K'/K telle que le K-groupe G se quasi-déploie sur K' (il se quasi-déploie sur un corps de dimension cohomologique inférieure à 1 [Ser94, Ch.III, 2.2 Thm. 1 et 2.3 Thm. 1'], à savoir l'extension non ramifiée maximale de K [Ser94, Ch. II, 3.2 Cor. et 3.3 Ex. (c)]). Il y a deux temps dans la théorie de Bruhat-Tits. La première étape, qui correspond au chapitre 4 de [BrT84], définit et attache un immeuble $X(G', K')$ à $G_{K'}$ par recollement d'espaces affines, appelés des appartements. La deuxième étape, qui correspond au chapitre 5 de [BrT84], utilise une descente étale de K' au corps de base K, via des théorèmes de point fixe.

Dans le cas d'un groupe qui n'est pas quasi-déployé, la géométrie de l'immeuble ne retranscrit pas fidèlement la structure du groupe. La dimension des appartements est diminuée par descente étale [Pra16] par rapport au cas déployé ou quasi-déployé, ce qui entraîne un manque d'informations combinatoires. Par exemple, lorsque G est anisotrope [1] sur K, son immeuble de Bruhat-Tits est réduit à un point ; dans ce cas, la théorie de Bruhat-Tits ne permet pas de décrire les groupes anisotropes en des termes explicites de combinatoire. Dans le cas général, on pourrait alors avoir recours à des méthodes plus arithmétiques. Ainsi, pour mener des calculs explicites qui reposent sur des méthodes combinatoires utilisant la théorie de Lie, on doit supposer que G contient un tore ayant suffisamment de caractères sur K. Plus précisément, on rappelle qu'un groupe réductif G est dit **quasi-déployé** s'il contient un sous-groupe de Borel défini sur K ou, de manière équivalente, si le centralisateur de tout tore K-déployé maximal est un tore [BrT84, 4.1.1].

Désormais, on suppose que K est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle $p \neq 2$ et de corps résiduel $\kappa \simeq \mathbb{F}_q$ où $q = p^m$. On suppose également que G est un K-groupe absolument simple, simplement connexe, quasi-déployé.

4.1.1 Théorème. *Soient l le rang du système de racines relatif de G et n le rang du système de racines absolu de G. On suppose que $l \geq 2$. Si G a un système de racines relatif Φ de type G_2 ou BC_l, on suppose de plus que $p \neq 3$. Soit P un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$. On note $d(P)$ le nombre minimal de générateurs de P. On a l'une des deux égalités :*

$$d(P) = m(l+1) \text{ ou } d(P) = m(n+1)$$

selon que l'extension de corps minimale déployant les racines courtes (voir définition 1.1.18) est ramifiée ou non.

On trouvera une reformulation plus précise de ce théorème dans l'énoncé du corollaire 4.5.4. D'après [Ser94, 4.2], on sait que $d(P)$ peut aussi être calculé par des méthodes cohomologiques : $d(P) = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} H^1(P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1. On dispose d'une classification [Tit79] des groupes simples définis sur un corps local. Parmi ces groupes, tout groupe simplement connexe anisotrope est isomorphe à $\mathrm{SL}_1(D)$, le groupe des éléments de norme 1 d'une K-algèbre à division de dimension finie [PR94, Theorem 6.5].

On va maintenant être un peu plus explicite. Dans ce qui suit, étant donné un corps local L/K, on note ω_L sa valuation (discrète), $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers, $\mathfrak{m}_L$ son unique idéal maximal, ϖ_L une uniformisante, et $\kappa_L = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$ le corps résiduel. Comme on va devoir comparer les valuations de différents éléments de L^*, on normalisera la valuation $\omega_L : L^* \to \mathbb{Q}$ de sorte que $\omega_L(L^*) = \mathbb{Z}$. Pour tout réel $l \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor l \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à l et $\lceil l \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à l. Si c'est clair dans le contexte, on pourra omettre les indices L de ces différentes notations.

4.1.2 Pro-p-Sylows et leurs sous-groupes de Frattini

Dans un cadre plus général, soient k un corps global et $\mathcal{V}$ l'ensemble de ses places (i.e. les valuations de k modulo normalisation). Soit $R \leq k$ un anneau de Dedekind borné sauf sur un ensemble fini de places $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ et G un R-groupe. Pour toute place $v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$, on considère la v-complétion R_v de R. On obtient une première complétion $\widetilde{G(R)} = \prod_{v \in \mathcal{V}\setminus\mathcal{S}} G(R_v)$ du groupe $G(R)$. On dispose d'une autre complétion de $G(R)$ en considérant sa complétion profinie, qu'on note $\widehat{G(R)}$. Le *problème du sous-groupe de congruence* est de savoir quand l'application naturelle $\widehat{G(R)} \to \widetilde{G(R)}$ est surjective de noyau fini. Par exemple, lorsque $G = \mathrm{SL}_{n,\mathbb{Z}}$ avec $n \geq 2$ et $R = \mathbb{Z}$, par un théorème de Matsumoto [Mat69], l'application surjective $\widehat{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})} \to \prod_p \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ a un noyau fini si, et seulement si, $n \geq 3$.

Ici, on se concentre sur un seul facteur et, plus précisément, sur un pro-p-Sylow d'un facteur $G(R_v)$. Autrement dit, $K = R_v$ est un corps local non archimédien et G est un K-groupe semi-simple. On fixe un sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$. Lorsque G est simplement connexe, on sait par le théorème 3.1.3, qu'il existe un $\mathcal{O}_K$-modèle $\mathfrak{G}$ donné par la théorie de Bruhat-Tits, c'est-à-dire un $\mathcal{O}_K$-groupe de fibre générique $\mathfrak{G}_K = G$, tel qu'on peut identifier P au noyau du morphisme quotient surjectif naturel $\mathfrak{G}(\mathcal{O}_K) \to \Big(\mathfrak{G}_\kappa/\mathcal{R}_u\big(\mathfrak{G}_\kappa\big)\Big)(\kappa)$. En d'autres termes, le pro-p-Sylow P est l'image réciproque d'un p-Sylow par le morphisme surjectif $\mathfrak{G}(\mathcal{O}_K) \to \mathfrak{G}(\kappa)$.

Pour compter le nombre minimal de générateurs de P, on dispose, grâce à la théorie des groupes profinis, d'une méthode qui consiste à calculer le quotient de P par son sous-groupe de Frattini [RZ10, 2.8.5]. On rappelle que le sous-groupe de Frattini d'un pro-p-groupe P est le groupe constitué de ses éléments non générateurs et peut s'écrire simplement comme $\mathrm{Frat}(P) = \overline{[P,P]P^p}$, le plus petit sous-groupe fermé de P engendré par les puissances p-ièmes et les commutateurs d'éléments de P [DdSMS99, 1.13]. Une fois qu'on aura déterminé le groupe $\mathrm{Frat}(P)$, on obtiendra alors immédiatement un ensemble minimal de générateurs topologiques X de P, en relevant un ensemble minimal de générateurs du groupe abélien fini p-élémentaire $P/\mathrm{Frat}(P)$.

De cette écriture, on peut observer que le calcul du sous-groupe de Frattini de P revient principalement au calcul de son groupe dérivé. Bien que P soit proche d'être un sous-groupe d'Iwahori I de $G(K)$ (en fait $I = \mathcal{N}_{G(K)}(P)$ est un sous-groupe d'Iwahori par la proposition 3.5.2) et P est d'indice fini dans I), on ne peut pas directement utiliser les résultats de [PR84a, §6] car on dispose de moins d'éléments appartenant au tore maximal qu'on s'est fixé dans P que dans I. Néanmoins, les calculs de la section 4.4 présentent quelques similitudes avec ceux de Prasad et Raghunathan : il s'agit d'estimer les indices de filtration des groupes radiciels au moyen des relations de commutation.

On rappelle qu'on dit que P est de **présentation finie** comme groupe pro-p s'il existe un sous-groupe fermé distingué R du groupe pro-p libre $\widehat{F_n}^p$, engendré par l'ensemble des conjugués d'une famille finie à n éléments, tel que $P \simeq \widehat{F_n}^p/R$. Soient $r(P)$ le minimum des $d(R)$ pour R satisfaisant les conditions précédentes et $n \geq d(P)$. D'après [Ser94, 4.3], P est de présentation finie en tant que groupe pro-p si, et seulement si $H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est fini. Dans ce cas, on a $r(P) = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et, pour tout R satisfaisant aux conditions précédentes, on a $d(R) = n - d(P) + r(P)$. On remarque que $r(P)$ ne dépend pas du choix d'un ensemble de générateurs et on peut simultanément choisir une famille minimale de générateurs et une famille minimale de relations. Plus généralement, Lubotzky a démontré dans [Lub01, 2.5] que tout groupe profini P de présentation finie admet une présentation minimale en tant que groupe profini.

Si l'on peut démontrer que $H^2(P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est fini, alors, par [Wil98, 12.5.8], on dispose de l'inégalité de Golod-Shafarevich $r(P) \geq \frac{d(P)^2}{4}$. Et ce doit être le cas d'après l'étude de Lubotzky et Shalev [LS94] des groupes $\mathcal{O}_K$-standard. On ne connaît pas, en revanche, de borne supérieure pour $r(P)$.

Ici, le résultat principal de ce chapitre est une description du sous-groupe de Frattini de P, noté $\mathrm{Frat}(P)$, en termes d'une donnée de groupes radicielle valuée. On suppose que K est un corps local non archimédien de corps résiduel de caractéristique p et que G est un K-groupe semi-simple, simplement connexe, quasi-déployé. Pour simplifier l'énoncé, on suppose de plus que G est absolument presque simple ; ce qui revient à supposer que le système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$ est irréductible. On a vu par la proposition 3.3.8 qu'on peut décrire un sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$ grâce à une donnée de groupes radicielle valuée. On se fixe $\mathbf{c}_{\mathrm{af}}$ une alcôve bien choisie, qu'on décrira en section 4.3.1, et qui est un domaine fondamental pour l'action de $G(K)$ sur $X(G, K)$. On sait par le théorème 3.1.2 que tout sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ fixe une unique alcôve. À conjugaison près, on peut supposer que $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\mathrm{af}}$ est l'unique alcôve fixée par P. On peut alors décrire le sous-groupe de Frattini en utilisant la donnée de groupes radicielle valuée, ce qu'on énonce dans le théorème suivant :

4.1.2 Théorème. *Soit G un K-groupe semi-simple, absolument simple, simplement connexe, quasi-déployé.*

On suppose que $p \neq 2$ et, si Φ est de type G_2 ou BC_l, on suppose que $p \geq 5$.

Alors le pro-p-groupe P est topologiquement de type fini et, en particulier, $\mathrm{Frat}(P) = P^p[P, P]$. *De plus, lorsque K est de caractéristique $p > 0$, on a $P^p \subset [P, P]$.*

Le sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(P)$ *peut s'écrire comme produit directement engendré en termes de la donnée de groupes radicielle valuée.*

Lorsque Φ est réduit (c'est-à-dire que son type n'est pas BC_l), alors $\mathrm{Frat}(P)$ *est le sous-groupe pro-p maximal du stabilisateur point par point dans $G(K)$ de la boule combinatoire centrée en $\mathbf{c}$ de rayon 1.*

Pour une version plus précise, notamment la description par la donnée de groupes radicielle valuée, on pourra voir les théorèmes 4.5.1 et 4.5.2.

4.1.3 Structure de ce chapitre

On suppose que G est un K-groupe semi-simple, simplement connexe, quasi-déployé. On fixe un sous-groupe de Borel B de G défini sur K. En particulier, ce choix détermine

un ordre Φ^+ du système de racines ainsi qu'une base Δ. Par [Bor91, 20.5, 20.6 (iii)], il existe un tore K-déployé maximal S de G tel que son centralisateur, noté $T = \mathcal{Z}_G(S)$, est un K-tore maximal de G contenu dans B. On fixe une clôture séparable K_s de K. Par [Bor91, 8.11], il existe une unique plus petite extension galoisienne de K contenue dans K_s déployant T, et donc aussi G par [Bor91, 18.7] ; on la note $\widetilde{K}$. On rappelle que le **système de racines relatif**, noté Φ, est le système de racines de G relativement à S et que le **système de racines absolu**, noté $\widetilde{\Phi}$, est le système de racines de $G_{\widetilde{K}}$ relativement à $T_{\widetilde{K}}$. En section 1.1.5, on a rappelé la définition d'une action-$*$ de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ sur $\widetilde{\Phi}$ qui préserve la structure du diagramme de Dynkin $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$ et d'une action sur la base $\widetilde{\Delta}$ qui correspond au sous-groupe de Borel B. D'après [BrT84, 4.2.23], lorsque G est absolument simple (donc $\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})$ est connexe), le groupe $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Dyn}(\widetilde{\Delta})\big)$ est un groupe fini d'ordre $d \leq 6$. Par conséquent, le degré de toutes les extensions de déploiement attachées aux racines est petit et n'interfère pas beaucoup avec la théorie de Lie. Ceci limite les difficultés calculatoires et on remarquera qu'une large partie des démonstrations est en fait consacrée au cas des groupes $\mathrm{SU}(h)$ ayant un système de racines non réduit de type BC_l et au cas des formes trialitaires de D_4.

À partir de cette action, en considérant des sous-groupes de rang 1, on a défini en section 1.1.6, en suivant [BrT84, §4.2], un système cohérent de paramétrages des groupes radiciels. On a également défini, en section 1.3.2, une filtration de ces groupes radiciels, dont on a déduit une donnée de groupes radicielle valuée génératrice $\Big(T(K), \big(U_a(K), \varphi_a\big)_{a\in\Phi}\Big)$ construite à partir de $(G, S, K, \widetilde{K})$. Cette filtration revient à prescrire une « affinisation » du système de racines sphérique Φ. À partir de ces outils, on va calculer, en section 4.2.1 et en section 4.2.2, les différentes relations de commutation qu'il existe entre des éléments semi-simples et unipotents dans un groupe de rang 1. Ceci nous sera utile pour décrire, en section 4.3.3, l'action de P sur la boule combinatoire unité centrée en $\mathbf{c}$ de rayon 1. Ceci nous sera aussi utile en section 4.5.1 pour exhiber des éléments semi-simples de $\mathrm{Frat}(P)$.

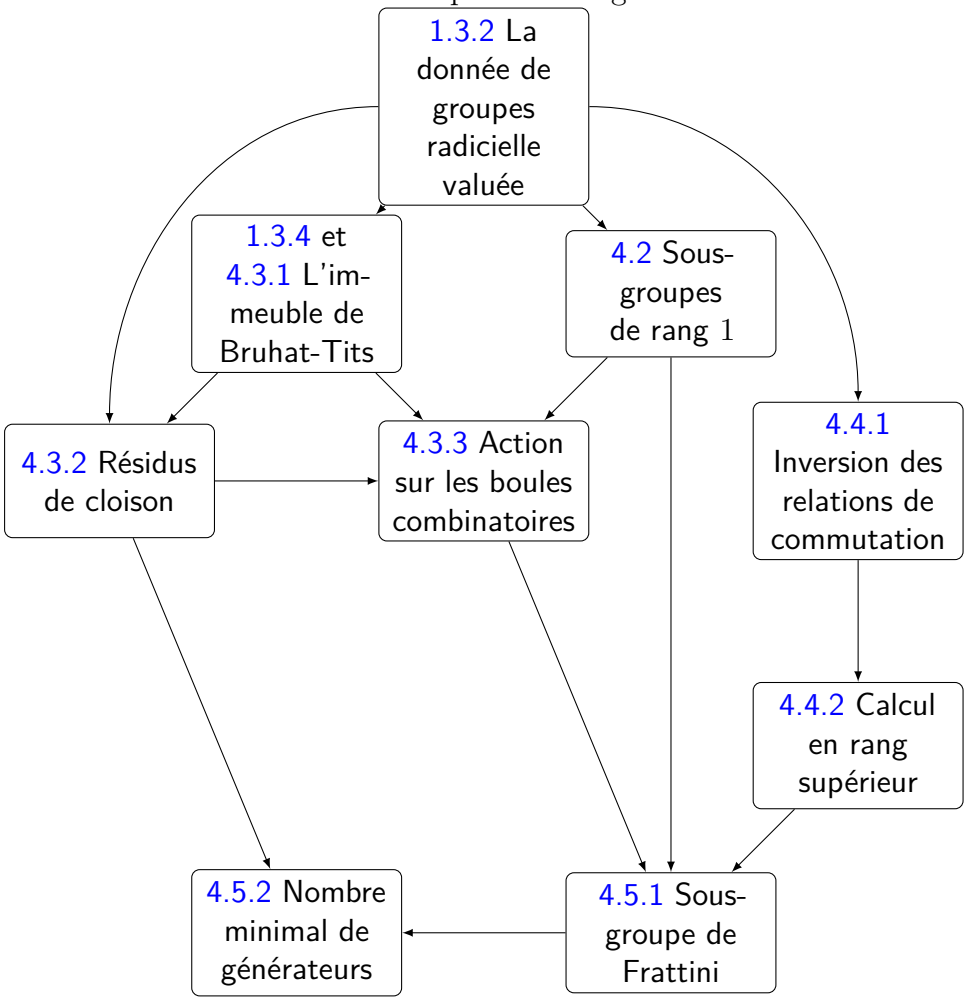
On note $\mathbb{A} = A(G, S, K)$ l'appartement « standard » et on choisit une alcôve fondamentale $\mathbf{c}_{\mathrm{af}} \subset \mathbb{A}$, comme domaine fondamental de l'action de $G(K)$ sur $X(G, K)$. On décrira les alcôves, en section 4.3.1, en utilisant les ensembles de valeurs qu'on a définis en section 1.3.3. On rappelle que ces ensembles de valeurs mesurent les lieux des sauts entre deux termes consécutifs de la filtration d'un groupe radiciel et, dans le cas d'un système de racines non réduit, ils mesurent également la nature des sauts. De ceci, on va déduire, en section 4.3.2, une description géométrique de la boule combinatoire unité centrée en $\mathbf{c}$ de rayon 1. Par conséquent, la situation géométrique nous donnera, en section 4.3.3, une borne supérieure pour le groupe $\mathrm{Frat}(P)$, c'est-à-dire un sous-groupe Q de P contenant $\mathrm{Frat}(P)$.

On cherchera alors un ensemble de générateurs de Q contenus dans $\mathrm{Frat}(P)$ pour établir une égalité. L'écriture $\mathrm{Frat}(P) = \overline{P^p[P, P]}$ nous invite à chercher un ensemble minimal de générateurs de Q en écrivant des commutateurs d'éléments de P. En section 4.4.1, on va inverser les relations de commutation données dans [BrT84, A] et qu'on a rappelé en section 1.1.8 pour les groupes quasi-déployés. On en déduira en section 4.4.2, une liste d'éléments unipotents contenus dans $[P, P]$.

De ces éléments unipotents et des éléments semi-simples obtenus en considérant les sous-groupes de rang 1, on déduira, en section 4.5.1, un ensemble de générateurs et une description du sous-groupe de Frattini comme produit directement engendré. En

section 4.3.2, on poussera un peu plus loin l'étude de Bruhat-Tits des quotients de termes de filtration successifs d'un groupe radiciel. De ceci, on pourra calculer le quotient fini $P/\mathrm{Frat}(P)$ et en déduire, en section 4.5.2, une famille minimale de générateurs de P. On énonce ensuite le nombre minimal de générateurs d'une telle famille dans le corollaire 4.5.4.

On résume ces différentes étapes dans le guide de lecture suivant :



4.2 Sous-groupe de rang 1 dans une donnée de groupes radicielle valuée

On reprend les notations de la section 4.1.3. En particulier, on rappelle que K est un corps local non archimédien et que G est un K-groupe presque-K-simple, simplement connexe, quasi-déployé. Afin de calculer le sous-groupe de Frattini d'un sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$, on adopte le point de vue des données de groupes radicielles valuées. En section 1.3.2, on a défini des filtrations de ces groupes au moyen de paramétrages. Grâce à ces paramétrages donnés en section 1.1.6, on va calculer explicitement, en sections 4.2.1 et 4.2.2, les différents commutateurs possibles, et les puissances p-ièmes d'éléments dans un sous-groupe de rang 1 correspondant à une racine donnée. Le cas du rang 1 est non seulement utile pour définir les filtrations des groupes radiciels, mais aussi pour

exhiber des éléments du sous-groupe de Frattini de P correspondant à des éléments du tore maximal T. Il y a exactement deux K-groupes absolument simples simplement connexes quasi-déployés de rang 1, à K-isomorphisme près, dont les types sont appelés A_1 et BC_1. Il s'agit respectivement de SL_2 (qu'on traite à la section 4.2.1) et de $\mathrm{SU}(h) \subset \mathrm{SL}_3$ (qu'on traite à la section 4.2.2) .

On note $T(K)_b$ le sous-groupe borné (i.e. compact) maximal (unique) de $T(K)$, défini en section 1.3.4 et $T(K)_b^+$ le sous-groupe pro-p maximal (unique) de $T(K)_b$.

4.2.1 Le cas réduit

Soit $a \in \Phi$ une racine non multipliable de Φ qui provient d'une racine absolue $\alpha \in \widetilde{\Phi}$. Dans cette section, pour alléger les notations, on note $L = L_\alpha = L_a$. Soit $G^a = \langle U_{-a}, U_a \rangle$ le K-sous-groupe de G engendré par U_{-a} et U_a. Le revêtement universel $\pi : R_{L/K}(\mathrm{SL}_{2,L}) \to G^a$ est une K-isogénie centrale, qui nous permet de calculer les relations entre U_a, U_{-a} et T via les paramétrages x_a, x_{-a} et $\widetilde{a}$ grâce à des réalisations matricielles dans SL_2.

On note $T^a = T \cap G^a$ le tore maximal de G^a et $T^a(K)_b^+ = T(K)_b^+ \cap T^a(K)$ le sous-groupe pro-p maximal de $T^a(K)$. Par la proposition 3.3.9 (puisque G^a est simplement connexe, le tore T^a est quasi-trivial), on sait que $\widetilde{a} : 1 + \mathfrak{m}_{L_a} \to T^a(K)_b^+$ est un isomorphisme de groupes.

4.2.1 Lemme (Relation de commutation $[T, U_a]$ dans le cas réduit)**.**
(1) Soit $t \in T(K)$. Alors, pour tout $x \in L_\alpha$, on a :

$$\Big[x_a(x), t\Big] = x_a\Big(\big(1 - \alpha(t)\big)x\Big)$$

(2) On normalise la valuation ω de sorte que $\Gamma_a = \Gamma_{L_a} = \mathbb{Z}$. Pour tout $l \in \Gamma_a$, on a :

$$\Big[T(K)_b^+, U_{a,l}\Big] \leq U_{a,l+1}$$

et c'est une égalité lorsque la caractéristique résiduelle $p \neq 2$.

Démonstration. (1) Par définition on a, $tx_a(x)t^{-1} = x_a\big(\alpha(t)x\big)$. Donc $\Big[x_a(x), t\Big] = x_a\Big(x\Big)x_a\Big(-\alpha(t)x\Big) = x_a\Big(\big(1 - \alpha(t)\big)x\Big)$.

(2) Soient $t \in T(K)_b^+$ et $u \in U_{a,l}$. On écrit $u = x_a(x)$ avec $x \in L_a$ tel que $\omega(x) \geq l$. On écrit $t = \widetilde{a}(1+z)$ avec $z \in \mathfrak{m}_{L_\alpha}$ de sorte que $\alpha(t) = (1+z)^2$. En particulier, on a $\omega\big(1 - \alpha(t)\big) \geq 1$. En appliquant (1), on obtient $\varphi_a\Big([t,u]\Big) = \omega\big((1-\alpha(t))x\big)$. Donc $\varphi_a\Big([t,u]\Big) \geq \omega(x) + 1 \geq l + 1$. On en déduit l'inclusion $\Big[T(K)_b^+, U_{a,l}\Big] \subset U_{a,l+1}$.

Réciproquement, soit $y \in L_\alpha$ tel que $\omega(y) \geq l+1$. Soit ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_{L_a}$. Supposons que $p \neq 2$. On a $\omega(2\varpi + \varpi^2) = 1$. Choisissons $t = \widetilde{a}(1+\varpi)$ et $x = (2\varpi+\varpi^2)^{-1}y$. Alors $\Big[t, x_a(x)\Big] = x_a(y)$ et $t \in T(K)_b^+$. Donc $\omega(x) = \omega(y) - 1 \geq l$. □

4.2.2 Lemme (Relation de commutation $[U_{-a,l}, U_{a,l'}]$ dans le cas réduit)**.**
On normalise ω de sorte que $\Gamma_a = \Gamma_{L_a} = \mathbb{Z}$. Soient $l, l' \in \Gamma_a = \mathbb{Z}$ des valeurs telles que $l + l' \geq 1$. Alors, pour tous $x, y \in L_\alpha$ tels que $\omega(x) \geq l'$ et $\omega(y) \geq l$, on a :

$$\Big[x_{-a}(y), x_a(x)\Big] = x_{-a}\left(\frac{xy^2}{1+xy}\right)\widetilde{a}\,(1+xy)\,x_a\left(\frac{-x^2y}{1+xy}\right)$$

En particulier, $[U_{-a,l}, U_{a,l'}] \subset U_{-a,l+1} T(K)_b^+ U_{a,l'+1}$.

Démonstration. On a $\omega(xy) = \omega(x) + \omega(y) > 0$, donc $xy \in \mathfrak{m}_{L_a}$. Ainsi, $1 + xy \in \mathcal{O}_{L_a}^\times$ et dans $\mathrm{SL}_2(L_a)$, on a :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{xy^2}{1+xy} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+xy & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-x^2y}{1+xy} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant π à cette égalité, on obtient le résultat attendu.

On a $1 + xy \in 1 + \mathfrak{m}_{L_a}$, donc $\widetilde{a}(1 - xy) \in T(K)_b^+$. De plus, $\omega\left(\frac{xy^2}{1+xy}\right) = \omega(x) + 2\omega(y) \geq 1 + \omega(y)$ et $\omega\left(\frac{x^2y}{1+xy}\right) = 2\omega(x) + \omega(y) \geq 1 + \omega(x)$. Donc $x_{-a}\left(\frac{xy^2}{1+xy}\right) \in U_{-a,l+1}$ et $x_a\left(\frac{-x^2y}{1+xy}\right) \in U_{a,l'+1}$. □

4.2.3 Proposition. *On suppose que* $p \neq 2$ *et* $\Gamma_a = \Gamma_{L_a} = \mathbb{Z}$. *Soit* $l \in \mathbb{Z} = \Gamma_a$. *Soit* H *un sous-groupe compact ouvert de* $G^a(K)$ *contenant* $U_{a,l}$, $T^a(K)_b^+$ *et* $U_{-a,-l+1}$.

Alors le groupe $H^p[H, H]$ *contient les sous-groupes* $U_{a,l+1}$, $U_{-a,-l+2}$ *et* $T^a(K)_b^+$.

De plus, dans le cas d'égale caractéristique ($\mathrm{car}(K) = \mathrm{car}(\kappa) = p$), *on a l'inclusion* $H^p \subset [H, H]$.

Démonstration. Soit ϖ une uniformisante de L_a. On commence par montrer que $T^a(K)_b^+$ est contenu dans $H^p[H, H]$. Pour tout $t \in 1 + \mathfrak{m}_{L_a}$, $t \neq 1$ et tout $u \in L_a$, on peut vérifier qu'on a bien les égalités suivantes dans SL_2 :

$$\left[\begin{pmatrix} t & \frac{tu}{1-t^2} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-t^2)^2}{t^2u} & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} t^2 & u \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{t^2-1}{t^2v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{tv}{(t^2-1)} & t \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ v & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

On a $\omega(1 + t) = \omega(2 + s) = 0$ car $p \neq 2$. Ainsi, pour tout $u \in \varpi^{l+1}\mathcal{O}_{L_a}$ et tout $t - 1 = s \in \varpi\mathcal{O}_{L_a}$, on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \omega\left(\tfrac{tu}{1-t^2}\right) &= \omega(t) + \omega(u) - \omega(1+t) - \omega(1-t) \\ &= \omega(u) - \omega(s) \\ \omega\left(-\tfrac{(1-t^2)^2}{t^2u}\right) &= 2\omega(s) - \omega(u) \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{pmatrix} t^2 & u \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & -t^{-4}u \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^{-4} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Soit $t = 1 + s \in 1 + \varpi\mathcal{O}_L$. Prenons $u = \varpi^{l+\omega(s)}$ de sorte que $\omega\left(\frac{tu}{1-t^2}\right) \geq l$ et $\omega\left(-\frac{(1-t^2)^2}{t^2u}\right) \geq -l + 1$. Alors, $\pi\begin{pmatrix} t & \frac{tu}{1-t^2} \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \in H$ et $\pi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-t^2)^2}{t^2u} & 1 \end{pmatrix} \in H$. Ainsi, par l'équation (4.1), on obtient $\pi\begin{pmatrix} t^2 & u \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix} \in [H, H]$. De manière analogue, en remplaçant u par $-t^4u$, on obtient $\pi\begin{pmatrix} t^2 & -t^{-4}u \\ 0 & t^{-2} \end{pmatrix} \in [H, H]$. Par conséquent, pour tout $t \in 1 + \varpi\mathcal{O}_L$, on a $\widetilde{a}(t^4) \in [H, H]$ par l'équation (4.3).

De plus, les éléments $\widetilde{a}(t^p)$ où $t \in 1+\mathfrak{m}_L$ sont dans H^p car on a supposé que $H \supset T(K)_b^+$. Comme 4 et p sont premiers entre eux, on a $\widetilde{a}(t) \in H^p[H,H]$.

Dans le cas d'égale caractéristique $\mathrm{car}(K) = p > 2$, le morphisme de groupes $\begin{cases} 1+\mathfrak{m}_L & \to & 1+\mathfrak{m}_L \\ t & \mapsto & t^2 \end{cases}$ est surjectif. Donc $\widetilde{a}(t) \in [H,H]$.

Par conséquent, les éléments :

$$x_a(u) = \widetilde{a}(t^{-2}) \cdot \left[\widetilde{a}(t) x_a\left(\frac{t^2 u}{1-t^2}\right), x_{-a}\left(-\frac{(1-t^2)^2}{t^4 u}\right)\right]$$

où $u \in \varpi^{l+1}\mathcal{O}_L$ et $t = 1+\varpi^{\omega(u)}$, sont dans $H^p[H,H]$ (resp. dans $[H,H]$ si $\mathrm{car}(K) = p$). Ainsi, le groupe $H^p[H,H]$ (resp. $[H,H]$) contient $U_{a,l+1}$.

De manière analogue, on montre qu'il contient $U_{-a,(-l+1)+1} = U_{a,-l+2}$, en utilisant l'équation (4.2) au lieu de l'équation (4.1).

Il reste à montrer que $H^p \subset [H,H]$ lorsque $\mathrm{car}(K) = p > 2$. Soit $g \in H$. On écrit $g = x_{-a}(v)\widetilde{a}(t)x_a(u)$. On considère le morphisme quotient $\pi : H \to H/[H,H]$. Alors $\pi(g^p) = \pi(g)^p = \Big(\pi\big(x_{-a}(v)\big)\pi\big(\widetilde{a}(t)\big)\pi\big(x_a(u)\big)\Big)^p$. Comme $H/[H,H]$ est commutatif, on a $\pi(g^p) = \pi\big(x_{-a}(v)\big)^p \pi\big(\widetilde{a}(t)\big)^p \pi\big(x_a(u)\big)^p = \pi\big(x_{-a}(pv)\big)\pi\big(\widetilde{a}(t^p)\big)\pi\big(x_a(pu)\big) = \pi\big(\widetilde{a}(t^p)\big) = 1$ car on a vu que $\widetilde{a}(t^p) \in [H,H]$. Donc $g^p \in [H,H]$. □

4.2.2 Le cas non réduit

Soit $a \in \Phi$ une racine multipliable de Φ provenant d'une racine absolue $\alpha \in \widetilde{\Phi}$.

Dans cette section, on note $L = L_\alpha = L_a$ et $L_2 = L_{\alpha+{}^\tau\alpha} = L_{2a}$, où $\tau = \tau_a$ désigne l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(L/L_2)$. Afin d'alléger les notations, pour tout $x \in L$, on note ${}^\tau x = \tau(x)$. On note h la L_2-forme hermitienne :

$$\begin{array}{rccc} h: & L \times L \times L & \to & L \\ & (x_{-1}, x_0, x_1) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=-1}^{1} x_{-i}{}^\tau x_i \end{array}$$

On rappelle que le revêtement universel est une K-isogénie centrale $\pi : R_{L/K}(SU(h)) \to G^a$, de laquelle on calcule, au sein de $\mathrm{SU}(h)$, des relations entre des éléments de U_a, U_{-a} et T grâce aux paramétrages x_a, x_{-a} et $\widetilde{a}$.

On note $T^a = T \cap G^a$ et $T^a(K)_b^+ = T(K)_b^+ \cap T^a(K)$, de sorte que $T^a(K)_b^+ = \widetilde{a}\,(1+\mathfrak{m}_{L_a})$. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on pose $T^a(K)_b^l = \widetilde{a}\left(1+\mathfrak{m}_{L_a}^l\right)$. On normalise ω par $\Gamma_a = \Gamma_{-a} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, de sorte que $\Gamma_L = \mathbb{Z}$ et $\Gamma_{L_2} = 2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}$ suivant que l'extension L/L_2 est ramifiée ou non. L'analogue de la proposition 4.2.3, dans le cas non réduit, devient l'énoncé suivant :

4.2.4 Proposition. *On suppose que $p \geq 5$. Soit $l \in \Gamma_a = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Soit H un sous-groupe compact ouvert de $G(K)$ contenant les sous-groupes suivants $T(K)_b^+$, $U_{-a,-l}$ et $U_{a,l+\frac{1}{2}}$.*

Si L/L_2 est non ramifiée, alors il existe $l'' \in \mathbb{N}^*$ tel que $H^p[H,H]$ contient les sous-groupes suivants $T^a(K)_b^{l''}$, $U_{-a,-l+1}$ et $U_{a,l+\frac{3}{2}}$.

Si L/L_2 est ramifiée, alors il existe $l'' \in \mathbb{N}^*$ tel que $H^p[H,H]$ contient les sous-groupes suivants $T^a(K)_b^{l''}$, $U_{-a,-l+\frac{3}{2}}$ et $U_{a,l+2}$.

Précisément, quitte à échanger a et $-a$, on peut supposer que $l \in \Gamma'_a = \mathbb{Z}$ et, dans ce cas, on a $l'' = 3 + \varepsilon$ où

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } L/L_2 \text{ est ramifiée et } l \in 2\mathbb{Z}+1 = \Gamma_L \setminus \Gamma_{L_2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, lorsque K est de caractéristique $p > 0$, on a $H^p \subset [H, H]$.

4.2.5 Remarque. Comme les sous-groupes pro-p maximaux sont deux à deux conjugués d'après le théorème 3.1.1, en choisissant un sous-groupe pro-p maximal correspondant à une alcôve convenable, on pourra s'arranger pour que $\varepsilon = 0$. C'est ce choix d'une alcôve fondamentale qu'on fait en section 4.3.1. De plus, en raison du manque de rigidité, les calculs en rang 1 donnent de trop grandes inégalités pour le groupe dérivé. En fait, lorsque le rang est supérieur ou égal à 2, on peut faire une hypothèse plus forte, afin de faire un calcul plus précis du sous-groupe de Frattini, comme on l'énonce dans la proposition 4.2.14.

Afin d'alléger les notations, on note $H(L, L_2)$ les points rationnels du K-groupe $H(L, L_2)$, au lieu de $H(L, L_2)(K)$. Pour tous $(x, y), (u, v) \in H(L, L_2)$ et tout $t \in 1 + \varpi_L \mathcal{O}_L$, quitte à pré-composer par π, on a la réalisation matricielle suivante :

$$x_a(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau x & -y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_{-a}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ -v & -{}^\tau u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1}{}^\tau t & 0 \\ 0 & 0 & {}^\tau t^{-1} \end{pmatrix}$$

On veut obtenir certains éléments unipotents, et certains éléments semi-simples, en multipliant ensemble des commutateurs et des puissances p-ièmes d'éléments de H bien choisis, comme on l'a fait, précédemment, dans le cas d'un système de racines réduit. En particulier, dans le lemme 4.2.7 on va borner explicitement, grâce à ces paramétrages, le groupe engendré par les commutateurs d'éléments toriques et d'éléments unipotents d'un groupe radiciel donné. Dans le lemme 4.2.9, on donne, grâce aux paramétrages, une formule explicite pour le commutateur d'éléments unipotents pris dans des groupes radiciels opposés. Enfin, en utilisant le lemme 4.2.13, on va inverser cette relation de commutation. Pour conclure, on va démontrer la proposition 4.2.4 en combinant ces différents lemmes.

Le lemme suivant assure l'existence d'éléments de valuation minimale, utilisés dans les paramétrages des coracines.

4.2.6 Lemme. *Soient L/K une extension galoisienne quadratique de corps locaux et $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ l'élément non trivial. Soit ϖ_L une uniformisante de l'anneau local $\mathcal{O}_L$. Soit p la caractéristique résiduelle et supposons que $p \neq 2$.*

(1) *Pour tout $t \in 1 + \mathfrak{m}_L$, on a $\omega(t^2 - {}^\tau t) \geq \omega(\varpi_L)$ et $\omega(t^\tau t - 1) \geq \omega(\varpi_L)$.*

(2) *Si l'extension L/K est non ramifiée, alors il existe $t \in 1 + \mathfrak{m}_L$ tel que $\omega(t^\tau t - 1) = \omega(t^2 - {}^\tau t) = \omega(\varpi_L)$.*

(3) *Si l'extension L/K est ramifiée, alors pour tout $t \in 1+\mathfrak{m}_L$, on a l'inégalité $\omega\left(t^{\tau}t-1\right) \geq 2\omega\left(\varpi_L\right)$. Si $p \geq 5$, alors il existe $t \in 1+\mathfrak{m}_L$ tel que $\omega\left(t^{\tau}t-1\right) = 2\omega\left(t^2-{}^{\tau}t\right) = 2\omega\left(\varpi_L\right)$.*

Démonstration. (1) On écrit $t = 1+s$ avec $\omega(s) \geq \omega(\varpi_L)$. Alors $\omega(t^2-{}^{\tau}t) = \omega(2s+s^2-{}^{\tau}s) \geq \omega(s)$ et $\omega(t^{\tau}t-1) = \omega(s+{}^{\tau}s+s^{\tau}s) \geq \omega(s)$.

(2) Si L/K est non ramifiée, on peut choisir une uniformisante $\varpi_L \in \mathcal{O}_L \cap K$. Soit $t = 1+\varpi_L$, tel que $t^2-{}^{\tau}t = \varpi_L+\varpi_L^2$. Comme $p \neq 2$, on a $\omega(2) = 0$. Donc $\omega\left(t^{\tau}t-1\right) = \omega\left(2\varpi_L+\varpi_L^2\right) = \omega\left(\varpi_L\right)$.

(3) Si L/K est ramifiée, l'inégalité $\omega\left(t^{\tau}t-1\right) \geq \omega\left(\varpi_L\right)$ est stricte car $t^{\tau}t-1 \in K$. Par conséquent, $\omega\left(t^{\tau}t-1\right) \geq 2\omega\left(\varpi_L\right)$. On remarque que $\omega\left(\varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L\right) \geq 2\omega\left(\varpi_L\right) = \omega\left(\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L\right)$. On définit $t = 1+\varpi_L$, de sorte que $t^2-{}^{\tau}t = 2\varpi_L-{}^{\tau}\varpi_L+\varpi_L^2$.

Par l'absurde, si l'on avait $\omega\left(2\varpi_L-{}^{\tau}\varpi_L\right) \geq 2\omega\left(\varpi_L\right)$, alors, par inégalité triangulaire, on aurait $\omega\left(3\varpi_L\right) \geq \min\left(\omega\left(\varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L\right), \omega\left(2\varpi_L-{}^{\tau}\varpi_L\right)\right) \geq 2\omega\left(\varpi_L\right)$. Lorsque $p \neq 3$, on a $\omega\left(3\varpi_L\right) = \omega\left(\varpi_L\right)$. Donc, on a une contradiction avec $\omega\left(\varpi_L\right) > 0$. Par conséquent, $\omega\left(2\varpi_L-{}^{\tau}\varpi_L\right) = \omega\left(\varpi_L\right)$, pour toute uniformisante $\varpi_L \in \mathcal{O}_L$.

On définit $\varpi_L' = \varpi_L+\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L$. Cet élément $\varpi_L' \in \mathcal{O}_L$ est aussi une uniformisante. On définit $t' = 1+\varpi_L'$. On a vu que $\omega\left(t'^2-{}^{\tau}t'\right) = \omega\left(\varpi_L\right)$.

Fait : au moins l'un des éléments t ou t' satisfait l'égalité souhaitée.

En effet, on a $t^{\tau}t-1 = \varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L+\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L$ et $t'^{\tau}t'-1 = \varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L+3\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L+\mathrm{Tr}_{L/K}\left(\varpi_L^2{}^{\tau}\varpi_L\right)+N_{L/K}\left(\varpi_L\right)^2$.

Par l'absurde, supposons qu'on ait $\omega\left(\varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L+\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L\right) > 2\omega\left(\varpi_L\right)$ et $\omega\left(\varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L+3\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L\right) > 2\omega\left(\varpi_L\right)$. Alors, par inégalité triangulaire, on a $\omega\left(2\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L\right) > 2\omega\left(\varpi_L\right)$. Comme $p \neq 2$, on a $\omega\left(2\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L\right) = 2\omega\left(\varpi_L\right)$, c'est une contradiction.

Donc, on a au moins l'égalité $\omega\left(\varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L+\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L\right) = 2\omega\left(\varpi_L\right)$ ou l'égalité $\omega\left(\varpi_L+{}^{\tau}\varpi_L+3\varpi_L{}^{\tau}\varpi_L\right) = 2\omega\left(\varpi_L\right)$. Donc, au moins l'une des deux égalités suivantes $\omega\left(t^{\tau}t-1\right) = 2\omega\left(\varpi_L\right)$ ou $\omega\left(t'^{\tau}t'-1\right) = 2\omega\left(\varpi_L\right)$ est satisfaite. Donc t ou t' convient. □

On définit le sous-groupe $H(L,L_2)_l = \left\{(u,v) \in H(L,L_2),\ \frac{1}{2}\omega(v) \geq l\right\}$ de $H(L,L_2)$. On notera que $H(L,L_2)_l$ peut se réaliser comme points entiers d'un $\mathcal{O}_K$-modèle du K-schéma en groupes $H(L,L_2)$, à savoir le groupe $\mathcal{H}^l$ défini dans [Lan96, 4.23]. On rappelle que pour tout $l \in \mathbb{R}$, on a $H(L,L_2)_l \simeq U_{a,l}$, par définition de la filtration des groupes radiciels, via l'isomorphisme $(u,v) \mapsto x_a(u,v)$. On rappelle qu'on dispose également d'un isomorphisme $\widetilde{a} : 1+\mathfrak{m}_L \simeq T^a(K)_b^+$.

4.2.7 Lemme. *Soit $l \in \Gamma_a = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.*

Si L/L_2 est non ramifiée, on a :

$$U_{a,l+1} \subset \left[T(K)_b^+, U_{a,l}\right] \subset U_{a,l+\frac{1}{2}}$$

Si L/L_2 est ramifiée, on a :

$$U_{a,l+\frac{3}{2}} \subset \left[T(K)_b^+, U_{a,l}\right] \subset U_{a,l+\frac{1}{2}}$$

Démonstration. Pour tout $t \in 1+\varpi_L\mathcal{O}_L \simeq T(K)_b^+$ et tout $(u,v) \in H(L,L_2)_l$, on a :

$$\left[\begin{pmatrix}1 & -^\tau u & -v\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t & 0 & 0\\ 0 & \frac{^\tau t}{t} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{^\tau t}\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & -^\tau U & -V\\ 0 & 1 & U\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

où $U=\left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)u$ et $V=\left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)v+\left(t^\tau t-\frac{^\tau t^2}{t}\right)^\tau v$. On peut vérifier que pour tout $(U,V)\in H(L,L_2)$, on a :

$$\begin{array}{rcll}\omega(V) & \geq & \min\left(\omega\left(t-^\tau t^2\right)+\omega(v)-\omega(t),\omega\left(\frac{^\tau t}{t}\right)+\omega\left(t^2-^\tau t\right)+\omega\left(^\tau v\right)\right) & \\ & & & \text{par inégalité triangulaire}\\ & = & \omega(v)+\omega\left(t^2-^\tau t\right) & \text{car } \tau \text{ préserve la valuation}\\ & \geq & 2l+1 & \text{par le lemme 4.2.6(1)}\end{array}$$

De cette inégalité, on déduit $(U,V)\in H(L,L_2)_{l+\frac{1}{2}}$, donc $\left[U_{a,l},T(K)_b^+\right]\subset U_{a,l+\frac{1}{2}}$.

Réciproquement, soit $l'\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Soit $(U,V)\in H(L,L_2)_{l'}$. On veut trouver des éléments $t\in 1+\mathfrak{m}_L$ et $(u,v)\in H(L,L_2)$ tels que $[\widetilde{a}(t),x_a(u,v)]=x_a(U,V)$ et de sorte que $\omega(v)$ est aussi grand que possible.

On choisit t satisfaisant aux égalités (2) ou (3) du lemme 4.2.6 appliqué à l'extension de corps locaux L/L_2. Soit $u=\frac{t}{t-^\tau t^2}U$. On cherche $X,Y\in\mathcal{O}_K\left(t,^\tau t\right)$ tels que $\left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)v+\left(t^\tau t-\frac{^\tau t^2}{t}\right)^\tau v=V$ où l'on pose $v=XV+Y^\tau V$. Il suffit de trouver X,Y tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)X+\left(t^\tau t-\frac{^\tau t^2}{t}\right)^\tau Y & = & 1\\ \left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)Y+\left(t^\tau t-\frac{^\tau t^2}{t}\right)^\tau X & = & 0\end{array}\right.$$

L'unique solution de ce système linéaire est :

$$\left\{\begin{array}{rcl}X & = & \frac{1}{(1-t^\tau t)\left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)}\\ Y & = & \frac{\frac{^\tau t^2}{t}}{(1-t^\tau t)\left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)}\end{array}\right.$$

de sorte que :

$$v=XV+Y^\tau V=\frac{V+\frac{^\tau t^2}{t}{}^\tau V}{(1-t^\tau t)\left(1-\frac{^\tau t^2}{t}\right)}$$

satisfait $(u,v)\in H(L,L_2)$.

Par un calcul matriciel, et comme on a choisi t,u,v pour cela, on peut vérifier que $[x_a(u,v),\widetilde{a}(t)]=x_a(U,V)$. De plus, la valuation nous donne $\omega(v)\geq\omega(V)-\omega(1-t^\tau t)-\omega(t-^\tau t^2)$ car $\omega\left(V+\frac{^\tau t^2}{t}{}^\tau V\right)\geq\omega(V)$.

Lorsque L/L_2 est non ramifiée, par le lemme 4.2.6(2), on obtient $\omega(v)\geq 2l'-2$. De cette inégalité, on déduit $(u,v)\in H(L,L_2)_{l'-1}$, donc :

$$\left[U_{a,l'-1},T(K)_b^+\right]\supset U_{a,l'}$$

Lorsque L/L_2 est ramifiée, par le lemme 4.2.6(3), on obtient $\omega(v)\geq 2l'-3$. De cette inégalité, on déduit $(u,v)\in H(L,L_2)_{l'-\frac{3}{2}}$, donc :

$$\left[U_{a,l'-\frac{3}{2}},T(K)_b^+\right]\supset U_{a,l'}$$

□

4.2.8 Remarque. Ces inégalités peuvent être améliorées en s'appuyant davantage sur les propriétés arithmétiques des corps locaux. Par exemple, lorsque L/L_2 est ramifiée et $l \notin \mathbb{Z}$, on peut obtenir $\left[T(K)_b^+, U_{a,l}\right] \subset U_{a,l+1}$.

4.2.9 Lemme (Relation de commutation pour des groupes radiciels opposés)**.** *Soient $l, l' \in \Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_L = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ des valeurs telles que $l + l' > 0$. Soient $(x, y) \in H(L, L_2)_l$ et $(u, v) \in H(L, L_2)_{l'}$. On a $[x_{-a}(x, y), x_a(u, v)] = x_{-a}(X, Y)\tilde{a}(T)x_a(U, V)$ où :*

$$\begin{cases} T &= 1 - {}^\tau ux + vy \\ U &= \frac{1}{{}^\tau T}\left(u^{2\tau}x - {}^\tau vx - u{}^\tau v{}^\tau y\right) \\ V &= \frac{1}{T}\left(uv{}^\tau x - {}^\tau u{}^\tau vx + v{}^\tau vy\right) \\ X &= \frac{1}{T}\left({}^\tau ux^2 - uy + vxy\right) \\ Y &= \frac{1}{T}\left({}^\tau xuy - {}^\tau ux{}^\tau y + vy{}^\tau y\right) \end{cases}$$

De plus, $\omega(V) \geq \lceil 3l' + l \rceil$ et $\omega(Y) \geq \lceil l' + 3l \rceil$.
Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} [U_{-a,l}, U_{a,l'}] &\subset U_{-a,\frac{\lceil 3l+l' \rceil}{2}} T^a(K)_b^+ U_{a,\frac{\lceil l+3l' \rceil}{2}} \\ &\subset U_{-a,l+\frac{1}{2}} T^a(K)_b^+ U_{a,l'+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Démonstration. Comme τ préserve ω, on a l'égalité suivante dans $H(L, L_2)$:

$$2\omega(u) = \omega(u{}^\tau u) = \omega(v + {}^\tau v) \geq \omega(v)$$

Donc, on en déduit :

$$\omega(x) + \omega(u) \geq \frac{1}{2}\Big(\omega(y) + \omega(v)\Big) \geq l + l' > 0$$

Par un calcul matriciel dans $\mathrm{SU}(h)$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau u & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ -y & -{}^\tau x & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X_0 & 1 & 0 \\ -Y_0 & -{}^\tau X_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{{}^\tau T}{T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{{}^\tau T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau U_0 & -V_0 \\ 0 & 1 & U_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} T &= 1 - {}^\tau ux + vy \\ U_0 &= \frac{1}{{}^\tau T}(u - {}^\tau vx) \\ V_0 &= \frac{1}{T}v \\ X_0 &= \frac{1}{T}(x - uy) \\ Y_0 &= \frac{1}{T}y \end{cases}$$

Comme $\omega({}^\tau ux) \geq \frac{1}{2}\omega(vy) > 0$, on obtient $T \in 1 + \mathfrak{m}_L$. Donc $\frac{1}{T} \in \mathcal{O}_L^\times$ est bien défini. Il s'ensuit :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -{}^\tau y & {}^\tau x & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau u & -v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ X & 1 & 0 \\ -Y & -{}^\tau X & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{{}^\tau T}{T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{{}^\tau T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -{}^\tau U & -V \\ 0 & 1 & U \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} T &= 1 - {}^\tau ux + vy \\ U &= \frac{1}{{}^\tau T}\left(u^{2\tau}x - {}^\tau vx - u{}^\tau v{}^\tau y\right) \\ V &= \frac{1}{T}\left(uv{}^\tau x - {}^\tau u{}^\tau vx + v{}^\tau vy\right) \\ X &= \frac{1}{T}\left({}^\tau ux^2 - uy + vxy\right) \\ Y &= \frac{1}{T}\left({}^\tau xuy - {}^\tau ux{}^\tau y + vy{}^\tau y\right) \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \omega(V) &\geq \min\Big(\omega(uv^\tau x), \omega({}^\tau u{}^\tau vx), \omega(v{}^\tau vy)\Big) \\ &\geq \omega(v) + \min\Big(\omega(u) + \omega(x), \omega(v) + \omega(y)\Big) \\ &\geq 2l' + l + l' \end{aligned}$$

Comme $\omega(V) \in \mathbb{Z}$, on a en fait $\omega(V) \geq \lceil 3l' + l \rceil \geq 2l' + 1$.

On procède de même pour trouver une borne inférieure pour $\omega(Y)$. □

Afin de calculer le groupe dérivé de P en termes de groupes radiciels, on voudrait résoudre les équations précédentes en (u, v) et (x, y). Précisément, étant donné $t \in 1 + \mathfrak{m}_L^{l''}$, on cherche des éléments $(u, v), (x, y) \in H(L, L_2)$ ayant des valuations données $l, l' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ satisfaisant $t = 1 - {}^\tau ux + vy$. L'existence de tels éléments $(u, v), (x, y)$ n'est pas garantie si l'' n'est pas assez grand. Premièrement, on cherche un élément $(u, v) \in H(L, L_2)_l$ tel que la valuation de sa trace $\omega\left(\mathrm{Tr}(u)\right)$ soit minimale.

4.2.10 Lemme. *Soit L/K une extension galoisienne quadratique de corps locaux, de caractéristique résiduelle $p \neq 2$ et de valuation discrète (supposée surjective) $\omega : L^\times \to \mathbb{Z}$. Il existe une uniformisante ϖ_L dans $\mathcal{O}_L$ telle que $\mathrm{Tr}_{L/K}(\varpi_L)$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$.*

Démonstration. Si L/K est non ramifiée, on peut choisir une uniformisante ϖ_L de $\mathcal{O}_L$ dans $\mathcal{O}_K$. Comme $p \neq 2$, l'élément $\mathrm{Tr}_{L/K}(\varpi_L) = 2\varpi_L$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$.

Si L/K est ramifiée, soit ϖ' une uniformisante de $\mathcal{O}_L$. On sait que $\omega\left(\mathrm{Tr}_{L/K}(\varpi')\right) \geq \min\left(\omega\left(\varpi'\right), \omega\left({}^\tau\varpi'\right)\right) = 1$. Ceci n'est jamais une égalité car $\Gamma_K = \omega(K^\times) = 2\mathbb{Z}$.

Si $\omega\left(\mathrm{Tr}_{L/K}(\varpi')\right) = 2$, alors on pose $\varpi_L = \varpi'$. Sinon, on pose $\varpi_L = \varpi' + N_{L/K}(\varpi')$. Alors, ϖ_L est une uniformisante car $\omega\left(N_{L/K}(\varpi')\right) = 2 > 1 = \omega(\varpi')$. De plus, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\varpi_L) = \mathrm{Tr}_{L/K}(\varpi') + 2N_{L/K}(\varpi')$. Comme $\omega\left(\mathrm{Tr}_{L/K}(\varpi')\right) > \omega\left(2N_{L/K}(\varpi')\right) = 2$, on a le résultat. □

4.2.11 Lemme. *On suppose que $p \neq 2$. Soit $l \in \Gamma_L = \mathbb{Z}$.*

Si L/L_2 est non ramifiée, on pose $\varepsilon = 0$.

Si L/L_2 est ramifiée, on pose $\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } l \in \Gamma_{L_2} = 2\mathbb{Z} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Il existe $u \in L$ tel que :

(a) $\omega(u) = l$;

(b) $\omega\left(\mathrm{Tr}_{L/L_2}(u)\right) = l + \varepsilon$;

(c) $\left(u, \frac{1}{2}u^\tau u\right) \in H(L, L_2)_l$.

Démonstration. Soit ϖ_L une uniformisante de $\mathcal{O}_L$ choisie de sorte que $\varpi_{L_2} = \mathrm{Tr}_{L/L_2}(\varpi_L)$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_{L_2}$: elle existe d'après le lemme 4.2.10. On pose $u = (\varpi_L)^\varepsilon \cdot (\varpi_{L_2})^{\frac{l-\varepsilon}{\omega(\varpi_{L_2})}}$.

(a) $\omega(u) = \varepsilon\omega(\varpi_L) + \frac{l-\varepsilon}{\omega(\varpi_{L_2})}\omega(\varpi_{L_2}) = l$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{L/L_2}(u) &= \mathrm{Tr}_{L/L_2}\left((\varpi_L)^\varepsilon\right) \cdot (\varpi_{L_2})^{\frac{l-\varepsilon}{\omega(\varpi_{L_2})}} \\ &= \begin{cases} (\varpi_{L_2})^{\frac{l-\varepsilon}{\omega(\varpi_{L_2})}+\varepsilon} & \text{si } \varepsilon = 1 \\ 2(\varpi_{L_2})^{\frac{l-\varepsilon}{\omega(\varpi_{L_2})}} & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\omega\left(\mathrm{Tr}_{L/L_2}(u)\right) = \left(\frac{l-\varepsilon}{\omega(\varpi_{L_2})} + \varepsilon\right)\omega(\varpi_{L_2}) = l - \varepsilon + \varepsilon\omega(\varpi_{L_2}) = l + \varepsilon$.

(c) On a $N_{L/L_2}(u) = u^\tau u = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}u^\tau u\right)$. □

Ainsi, on a obtenu un élément (u, v) dont la trace du premier terme $\mathrm{Tr}_{L/L_2}(u)$ est minimale. Ensuite, on cherche un élément $(x, y) \in H(L, L_2)_{l'}$ tel que $t = 1 - {}^\tau ux + vy$. C'est un problème quadratique pour lequel on va trouver des solutions $(x, y) \in H(L, L_2)_{l'}$ de $t = 1 - {}^\tau ux + vy$ pour $t \in 1 + \mathfrak{m}_L^{l''}$ et l'' assez grand.

4.2.12 Lemme. *Soit L un corps local de caractéristique résiduelle $p \neq 2$. Pour tout $a \in \mathfrak{m}_L$, il existe $b \in \mathfrak{m}_L$ tel que $(1+b)^2 = 1 + a$ et $\omega(a) = \omega(b)$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathfrak{m}_L$. Par le lemme de Hensel, le polynôme $X^2 - 1 - a$ admet exactement deux racines distinctes $1+b$ et $-1+b'$ dans $\mathcal{O}_L$, avec $b, b' \in \mathfrak{m}_L$ car 1 et -1 sont deux racines distinctes dans κ_L du polynôme $X^2 - 1$. De plus, $\omega(a) = \omega\Big((1+b)^2 - 1\Big) = \omega(b) + \omega(2+b)$. Comme $p \neq 2$, on a $\omega(2+b) = 0$. Donc $\omega(a) = \omega(b)$. □

On donne maintenant une solution $(x, y) \in H(L, L_2)_{l'}$ de $t = 1 - {}^\tau ux + vy$ pour un l'' assez grand et $t \in 1 + \mathfrak{m}_L^{l''}$.

4.2.13 Lemme. *On suppose que $p \neq 2$. Soient $l, l' \in \Gamma_a$ des valeurs telles que $l + l' > 0$ et $l \in \Gamma'_a = \mathbb{Z}$. On définit $\varepsilon \in \{0, 1\}$ comme dans le lemme 4.2.11. On pose :*

$$l'' = \max\left(1 + 2\varepsilon, \varepsilon + 2l + 2l'\right) \in \mathbb{N}^*$$

Pour tout $w \in \mathfrak{m}_L^{l''}$, il existe $(u, v) \in H(L, L_2)_l$ et $(x, y) \in H(L, L_2)_{l'}$ tels que ${}^\tau ux - vy = w$.

Démonstration. Afin d'alléger les notations, dans cette démonstration, on note T l'opérateur trace $\mathrm{Tr}_{L/L_2} : L \to L_2$ de l'extension de corps quadratique.

Soit $w \in (\mathfrak{m}_L)^{l''}$. On choisit $u \in L$ vérifiant les propriétés (a),(b) et (c) du lemme 4.2.11 et on pose $v = \frac{1}{2}u^\tau u$. On cherche un élément $(x, y) \in H(L, L_2) \cap (L_2 \times L)$ tel que ${}^\tau xu - vy = w$, ce qui revient à :

$$\begin{cases} y = \frac{-w + {}^\tau ux}{v} \\ x^2 = T(y) = -T\left(\frac{w}{v}\right) + xT\left(\frac{{}^\tau u}{v}\right) \end{cases}$$

car $v \neq 0$ (sinon la propriété (a) ne serait pas satisfaite).

On pose $\delta = 4\frac{T\left(\frac{w}{v}\right)}{T\left(\frac{\tau u}{v}\right)^2}$. On a $T\left(\frac{\tau u}{v}\right) = 2\frac{T(u)}{u^\tau u}$ par définition de $v = \frac{1}{2}u^\tau u \in L_2$ et par L_2-linéarité de la trace T. Donc $\omega\left(T\left(\frac{\tau u}{v}\right)\right) = \omega\left(T(u)\right) - 2\omega(u) = -l + \varepsilon$. On a $\omega\left(T\left(\frac{w}{v}\right)\right) \geq \omega(w) - \omega(v) \geq l'' - 2l$. Donc $\omega(\delta) = \omega\left(T\left(\frac{w}{v}\right)\right) - 2\omega\left(T\left(\frac{\tau u}{v}\right)\right) \geq l'' - 2\varepsilon \geq 1$.

Par le lemme 4.2.12, il existe $b \in \mathfrak{m}_{L_2}$ tel que $(1+b)^2 = 1 - \delta$ et $\omega(b) = \omega(\delta)$. On note $\sqrt[2]{1-\delta} = 1 + b$. Ainsi $\omega\left(\sqrt[2]{1-\delta} - 1\right) = \omega(\delta)$.

On pose $x = \frac{1}{2}T\left(\frac{\tau u}{v}\right)\left(1 - \sqrt[2]{1-\delta}\right) \in L_2$ et $y = \frac{w - {}^\tau u x}{v} \in L$. On a $x^2 = T(y)$. De plus, $\omega(x) = \omega(\delta) + \varepsilon - l$. On vérifie que la valuation de y convient :

$$\begin{array}{rcl} \omega(y) & \geq & \min\left(\omega(w), \omega(u) + \omega(x)\right) - \omega(v) \\ & = & \min\left(l'', \omega(\delta) + \varepsilon\right) - 2l \\ & \geq & \min\left(l'', l'' - 2\varepsilon + \varepsilon\right) - 2l \\ & = & l'' - \varepsilon - 2l \\ & \geq & 2l' \end{array}$$

Ainsi $(u, v) \in H(L, L_2)_l$ et $(x, y) \in H(L, L_2)_{l'}$ conviennent. □

Pour conclure, on combine les lemmes 4.2.7, 4.2.9 et 4.2.13 pour démontrer la proposition 4.2.4.

Démonstration de la proposition 4.2.4. Quitte à échanger a et $-a$, on peut supposer que $l \in \Gamma'_a = \mathbb{Z} = \Gamma_L$.

Par le lemme 4.2.7, on a $U_{-a,-l+1} \subset [H, H]$ et $U_{a,l+\frac{3}{2}} \subset [H, H]$ lorsque L/L_2 est non ramifiée ; on a $U_{-a,-l+\frac{3}{2}} \subset [H, H]$ et $U_{a,l+2} \subset [H, H]$ lorsque L/L_2 est ramifiée.

Soit $t \in T^a(K)_b^{l''}$ qu'on écrit $t = \widetilde{a}(1+w)$ avec $w \in (\mathfrak{m}_L)^{l''}$. Soient $l_0 = l + 1 \in \mathbb{Z}$ et $l'_0 = -l + \frac{1}{2}$. Par le lemme 4.2.13, il existe $(u, v) \in H(L, L_2)_{l_0}$ et $(x, y) \in H(L, L_2)_{l'_0}$ tels que $-w = {}^\tau u x - v y$.

On applique les relations de commutation des groupes radiciels opposés 4.2.9. Soient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} T & = & 1 + w \\ U & = & \frac{1}{{}^\tau T}\left(u^{2\tau}x - {}^\tau v x - u^\tau v^\tau y\right) \\ V & = & \frac{1}{T}\left(u v^\tau x - {}^\tau u^\tau v x + v^\tau v y\right) \\ X & = & \frac{1}{T}\left({}^\tau u x^2 - u y + v x y\right) \\ Y & = & \frac{1}{T}\left({}^\tau x u y - {}^\tau u x^\tau y + v y^\tau y\right) \end{array}\right.$$

Par le lemme 4.2.9, on a $[x_{-a}(x, y), x_a(u, v)] = x_{-a}(X, Y)\widetilde{a}(T)x_a(U, V)$ avec $\omega(V) \geq \lceil 3l' + l \rceil$ et $\omega(Y) \geq \lceil l' + 3l \rceil$.

Comme $l \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{1}{2}\lceil 3l'_0 + l_0 \rceil = -l + \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}\lceil l'_0 + 3l_0 \rceil = l + 2$. Donc $x_{-a}(X, Y) \in [T(K)_b^+, U_{-a,l}]$ et $x_a(U, V) \in [T(K)_b^+, U_{a,l+\frac{1}{2}}]$ par le lemme 4.2.7. Comme $\widetilde{a}(1+w) = x_{-a}(X, Y)^{-1}\left[x_{-a}(x, y), x_a(u, v)\right]x_a(U, V)^{-1} \in [H, H]$, on obtient $T^a(K)_b^{l''} \subset [H, H]$.

On suppose désormais que $\mathrm{car}(K) = p \geq 5$. Il suffit de vérifier que $H^p \subset [H, H]$. Dans le quotient $H/[H, H]$, on a $u^p = 1$ pour tout $u \in U_{a,l}$ et il en est de même pour $-a$. En effet, l'élément $x_a\left(u, v\right)^p = x_a\left(pu, pv + \frac{p(p-1)}{2}u^\tau u\right)$ est bien l'élément neutre en caractéristique $p \neq 2$.

De plus, si $t \in T^a(K)_b^+$, on écrit $t = \widetilde{a}(1+w)$ où $w \in \mathfrak{m}_L$. On a $(1+w)^p = 1 + w^p$ avec $\omega(w^p) \geq p \geq 5 \geq l''$. Donc $t^p \in T^a(K)_b^{l''} \subset [H, H]$. □

Dans le cas d'un groupe de rang supérieur, on va obtenir dans la proposition 4.4.2 certaines inclusions de la forme $U_{a,l_a} \subset [H,H]$ pour des valeurs convenables l_a, en écrivant certains commutateurs d'éléments pris dans des groupes radiciels correspondant à des racines non colinéaires. Ainsi, il est utile de faire une hypothèse supplémentaire sur les groupes radiciels contenus dans $[H,H]$.

4.2.14 Proposition. *Si dans la proposition 4.2.4 on suppose de plus que $[H,H]H^p$ contient $U_{a,l+1}$ et $U_{-a,-l+\frac{1}{2}}$, alors on peut prendre $l'' = 1+2\varepsilon$.*

Démonstration. Dans la démonstration précédente, quitte à échanger a et $-a$ de sorte que $l \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ et $l' \in \mathbb{Z}$, on peut remplacer les égalités $l_0 = l+1$ et $l'_0 = -l+\frac{1}{2}$ par $l_0 = l+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ et $l'_0 = -l$. En effet, dans ce cas, on obtient $\lceil 3l'_0 + l_0 \rceil = \lceil -2l+\frac{1}{2} \rceil = -2l+1$, de sorte que $U_{-a,\frac{1}{2}\lceil 3l'_0+l_0\rceil} \subset H^p[H,H]$ en utilisant l'hypothèse supplémentaire. De la même manière, on a $\lceil 3l'_0 + l_0 \rceil = 2l+2$ de sorte que $U_{a,\frac{1}{2}\lceil l'_0+3l_0\rceil} \subset H^p[H,H]$. Par conséquent, on conclut alors comme précédemment. □

Pour conclure cette section, on calcule la relation de commutation entre des éléments d'un même groupe radiciel. Ceci est non trivial car, pour une racine multipliable, son groupe radiciel n'est pas commutatif. Ce calcul servira à comprendre l'action d'un sous-groupe pro-p maximal sur son immeuble de Bruhat-Tits.

4.2.15 Lemme (Calcul du groupe dérivé d'un sous-groupe borné d'un groupe radiciel : spécificité d'une racine multipliable)**.** *Soient $l, l' \in \Gamma_a = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. En général, on a $[U_{a,l}, U_{a,l'}] \subset U_{2a,\lceil l\rceil+\lceil l'\rceil}$.*

Si L/L_2 est non ramifiée et $p \neq 2$, alors $[U_{a,l}, U_{a,l}] = U_{2a,2\lceil l\rceil}$.

Si L/L_2 est ramifiée et $p \neq 2$, alors $[U_{a,l}, U_{a,l}] = U_{2a,2\lceil l\rceil+1}$.

Démonstration. Soient $(u,v),(x,y) \in H(L,L_2)$. En termes matriciels, on a :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -^\tau x & -y \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -^\tau u & -v \\ 0 & 1 & -u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^\tau u - u^\tau x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $[x_a(x,y), x_a(u,v)] = x_a\left(0, x^\tau u - u^\tau x\right)$.

Si $\omega(y) \geq 2l$, alors $\omega(x) \geq \lceil l \rceil$ car $\omega(x) \in \Gamma_L = \mathbb{Z}$. De même, si $\omega(v) \geq 2l'$, alors $\omega(u) \geq \lceil l' \rceil$. Donc $\omega\left(x^\tau u - u^\tau x\right) \geq \omega(u) + \omega(x) \geq \lceil l \rceil + \lceil l' \rceil$. On en déduit $[U_{a,l}, U_{a,l}] \subset U_{2a,\lceil l\rceil+\lceil l'\rceil}$.

Réciproquement, on montre que tout élément de $U_{2a,2\lceil l\rceil}$ peut s'écrire comme commutateur de deux éléments bien choisis pris dans $U_{a,l}$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $w \in (L^0)_{2\lceil l\rceil}$, il existe $(u,v),(x,y) \in H(L,L_2)_l$ tel que $w = x^\tau u - u^\tau x$.

On commence par traiter le cas d'une extension non ramifiée L/L_2 avec $p \neq 2$. Dans ce cas, on a $\Gamma'_{2a} = \Gamma_{2a} = \mathbb{Z}$ par le lemme 1.3.8. Donc, il existe $\lambda_0 \in (L^0)_0 = \left\{\lambda \in \mathcal{O}_L^\times,\ \lambda + {}^\tau\lambda = 0\right\}$. Soit $\varpi \in \mathcal{O}_{L_2}$ une uniformisante. On pose $x = \lambda_0 \varpi^{\lceil l\rceil}$ et $y = \frac{1}{2}x^\tau x$ de sorte que $(x,y) \in H(L,L_2)_l$. Soit $w \in (L^0)_{2\lceil l\rceil} = \left\{w_0 \in (\mathfrak{m}_L)^{2\lceil l\rceil},\ w_0 + {}^\tau w_0 = 0\right\}$. Alors $u = \frac{w}{x-^\tau x} \in L_2$. En effet, ${}^\tau u = \frac{^\tau w}{^\tau x - x} = \frac{-w}{-(x-^\tau x)} = u$. De plus, $\omega(x - {}^\tau x) = \omega\left((\lambda_0 - {}^\tau\lambda_0)\varpi^{\lceil l\rceil}\right) = \omega(2\lambda_0) + \omega(\varpi^{\lceil l\rceil}) = \lceil l \rceil$ car $p \neq 2$. Ainsi $\omega(u) = \omega(w) - \omega(x - {}^\tau x) = \lceil l \rceil$. On pose $v = \frac{1}{2}u^\tau u = \frac{u^2}{2}$ de sorte que $(u,v) \in H(L,L_2)_l$. On a donc $x^\tau u - u^\tau x = u(x - {}^\tau x) = w$.

On traite ensuite le cas d'une extension ramifiée L/L_2 avec $p \neq 2$. Dans ce cas, $\Gamma'_{2a} = \Gamma_{2a} = 2\mathbb{Z}+1$ par le lemme 1.3.8. Ainsi $U_{2a,2\lceil l\rceil} = U_{2a,2\lceil l\rceil+1}$. De plus, il existe $\lambda_0 \in (L^0)_1 = \{\lambda \in \mathcal{O}_L,\ \lambda + {}^\tau\lambda = 0 \text{ et } \omega(\lambda) = 1\}$. Soit $\varpi \in \mathcal{O}_{L_2}$ une uniformisante.

Si $\lceil l\rceil \in 2\mathbb{Z}$, on pose $x = \lambda_0 \varpi^{\frac{\lceil l\rceil}{2}}$ et $y = \frac{1}{2}x^\tau x$ de sorte que $(x,y) \in H(L,L_2)_l$.

Sinon, on a $\lceil l\rceil \in 2\mathbb{Z}+1$. On pose $x = \lambda_0 \varpi^{\frac{\lceil l\rceil-1}{2}}$ et $y = \frac{1}{2}x^\tau x$ de sorte que $(x,y) \in H(L,L_2)_l$.

Soit $w \in (L^0)_{2\lceil l\rceil} = \left\{w_0 \in (\mathfrak{m}_L)^{2\lceil l\rceil},\ w_0 + {}^\tau w_0 = 0\right\}$. Alors, comme précédemment, on obtient $u = \frac{w}{x - {}^\tau x} \in L_2$. De plus, $\omega\left((\lambda_0 - {}^\tau\lambda_0\right) = \omega(2\lambda_0) = 1$ car $p \neq 2$. Donc, on obtient les inégalités $\omega(x) \geq \lceil l\rceil$ et $\omega\left(x - {}^\tau x\right) =\leq \lceil l\rceil + 1$. Ainsi $\omega(u) = \omega(w) - \omega(x - {}^\tau x) \geq \lceil l\rceil$. On pose $v = \frac{1}{2}u^\tau u = \frac{u^2}{2}$ de sorte que $(u,v) \in H(L,L_2)_l$. On a bien $x^\tau u - u^\tau x = u(x - {}^\tau x) = w$. □

4.3 Théorie de Bruhat-Tits pour un groupe semi-simple quasi-déployé

Dans la théorie de Bruhat-Tits, on attache un immeuble à un groupe réductif en deux temps. La première étape, dans [BrT84, §4], correspond à attacher un immeuble à un groupe déployé ou quasi-déployé. La deuxième étape, dans [BrT84, §5], est une descente étale au corps de base via des théorèmes de point fixe. Afin de décrire certains sous-groupes vis-à-vis de l'action sur l'immeuble de Bruhat-Tits, en section 4.3.1, on définit une alcôve fondamentale grâce aux valuations des groupes radiciels. Ensuite, en section 4.3.3, on s'intéresse à l'action du groupe $G(K)$ sur son immeuble de Bruhat-Tits $X(G,K)$. Dans cette section, K est à nouveau un corps local et G un K-groupe presque-K-simple, simplement connexe, quasi-déployé.

L'immeuble de Bruhat-Tits de (G,K) est obtenu en recollant ensemble des espaces affines, appelés appartements, ayant une même structure polysimpliciale fixée. C'est-à-dire qu'on définit l'immeuble comme classes d'équivalence $X(G,K) = G(K) \times \mathbb{A}/\sim$, où $\mathbb{A}$ est un espace affine convenable, appelé l'appartement standard (voir par exemple [Lan96, §9]). On recolle les appartements le long d'hyperplans affines, appelés murs, qu'on décrit comme des lieux de zéros de certaines fonctions affines grâce aux racines et aux ensembles de valeurs qu'on a définis à la section 1.3.3. En section 1.3.4, on a rappelé comment on déduit la structure polysimpliciale à partir de la définition des murs. Plus précisément, on va définir une « affinisation » du système de racines sphérique en suivant la méthode de Bruhat-Tits. Dans le lemme 4.3.11, on vérifie que cette construction coïncide avec le système de racines affine que Tits définit dans [Tit79]. En section 4.3.1, on décrit, grâce aux ensembles de valeurs, une alcôve bien choisie, qui sera également un domaine fondamental de l'action de $G(K)$ sur $X(G,K)$. En section 4.3.2, on va étudier localement l'immeuble au voisinage d'une alcôve.

4.3.1 Description d'une alcôve fondamentale par ses cloisons

4.3.1 Définition. Une **cloison** est une facette de $X(G,S)$ de codimension 1.

On veut décrire numériquement, en fonction de certaines racines relatives et leurs ensembles de valeurs, les murs bordant une alcôve donnée. Pour ceci, on peut s'appuyer

sur un système de racines dual, qu'il est nécessaire de considérer dans les cas d'extensions ramifiées.

Premièrement, on définit un système de racines dual de Φ par une normalisation convenable du système de racines dual canonique. On rappelle que, dans cette section, le système de racines Φ est irréductible par hypothèse d'absolue simplicité sur G.

4.3.2 Notation. On considère une réalisation géométrique de Φ_{nd} dans l'espace euclidien $\left(V^*, (\cdot|\cdot)\right)$. Pour chaque racine $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$, on pose $\lambda_a = \frac{\mu^2}{(a|a)} \in \{1, d'\}$ et $a^D = \lambda_a a \in V$ où μ désigne la longueur d'une racine longue, de sorte que $a^D = a$ pour toute racine longue. L'ensemble $\Phi_{\mathrm{nd}}^D = \{a^D,\ a \in \Phi_{\mathrm{nd}}\}$ est un système de racines, car il est proportionnel (par le facteur $\frac{\mu^2}{2}$) au système de racines inverse $\Phi^\vee$ de [Bou81, VI.1.1 Prop. 2]. En particulier, si Φ est un système de racines irréductible et réduit, alors on a l'égalité $\Phi^D = \Phi$ si, et seulement si, c'est un système de racines simplement lacé (i.e. de type A, D ou E). De plus, par [Bou81, VI.1.5 Rem.(5)], si Δ est une base de Φ, alors $\Delta^D = \{a^D,\ a \in \Delta\}$ est une base de Φ_{nd}^D.

Bien que $\Phi^\vee$ et Φ^D soient construits strictement en termes de théorie de Lie, on a trouvé qu'il était plus pratique d'introduire le système de racines suivant Φ^δ qui prend également en compte la nature des extensions de déploiement attachées aux racines.

4.3.3 Définition. Pour toute racine non divisible $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$, on note $\delta_a \in \{1, d'\}$ l'ordre du groupe quotient $\Gamma_{L_a}/\Gamma_{L_d}$ (resp. $\Gamma_{L_a}/\Gamma_{L'}$) si Φ est réduit (resp. non réduit), on pose $a^\delta = \delta_a a$ et $\Phi_{\mathrm{nd}}^\delta = \{a^\delta,\ a \in \Phi_{\mathrm{nd}}\}$. On pose $\Delta^\delta = \{a^\delta,\ a \in \Delta\}$. On va voir que $\Phi_{\mathrm{nd}}^\delta = \Phi_{\mathrm{nd}}$ ou Φ_{nd}^D.

4.3.4 Notation. Dans la suite, on notera :

- h la plus haute racine de Φ par rapport à la base Δ ;
- $\theta \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ la racine telle que θ^δ est la plus haute racine de $\Phi_{\mathrm{nd}}^\delta$ par rapport à la base Δ^δ.

De plus, si Φ est non réduit, on va voir que $\Phi_{\mathrm{nd}}^\delta = \Phi_{\mathrm{nd}}^D = \Phi_{\mathrm{nm}}$, de sorte que $h = 2\theta$.

On remarque que si a est multipliable et $2l \in \Gamma'_{2a}$, il est possible que l'ensemble $\mathcal{H}_{2a,2l} = \mathcal{H}_{a,l}$ soit un mur même si $l \notin \Gamma'_a$. De plus, on a $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma'_{2a}$ dans ce cas. Sinon, si a est non multipliable et non divisible, on a $\Gamma_a = \Gamma'_a$ par le lemme 1.3.7. Par conséquent, les murs de $\mathbb{A}$ peuvent être décrits par les différentes racines $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ et les valeurs $l \in \Gamma_a$.

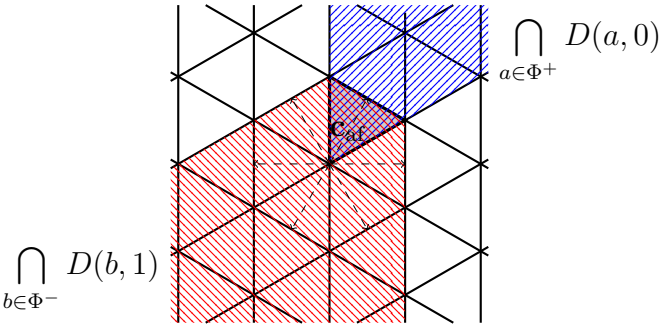
D'après [BrT84, 4.2.23], on peut classifier les échelonnages pour décrire les différentes alcôves d'un groupe K-simple G. De manière analogue, il existe une classification des groupes absolument presque-simples sur K, à isogénie près, donnée par Tits dans [Tit79, §4]. Ici, on réduit la disjonction de cas à trois types de comportements.

Premier cas : Φ est réduit et L'/L_d est non ramifiée. Il s'agit des groupes résiduellement déployés nommés A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 ; et des groupes non résiduellement déployés nommés ${}^2A'_{2n-1}$, ${}^2D_{n+1}$, ${}^2E_6$ et ${}^3D_4$ dans les tables de Tits [Tit79, 4.2, 4.3]. Ceci correspond respectivement aux échelonnages, classifiés dans [BrT72, 1.4.6], de type A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 ; et C_n, B_n, F_4 et G_2.

Soit a une racine relative. Comme Φ est réduit, on a $\Gamma_a = \Gamma_{L_a}$ par le lemme 1.3.7. Donc, par la proposition 1.1.20, on a $\Gamma_a = \Gamma_{L_d}$. Comme L'/L_d est non ramifiée, on a $\Gamma_{L'} = \Gamma_{L_d}$. Donc

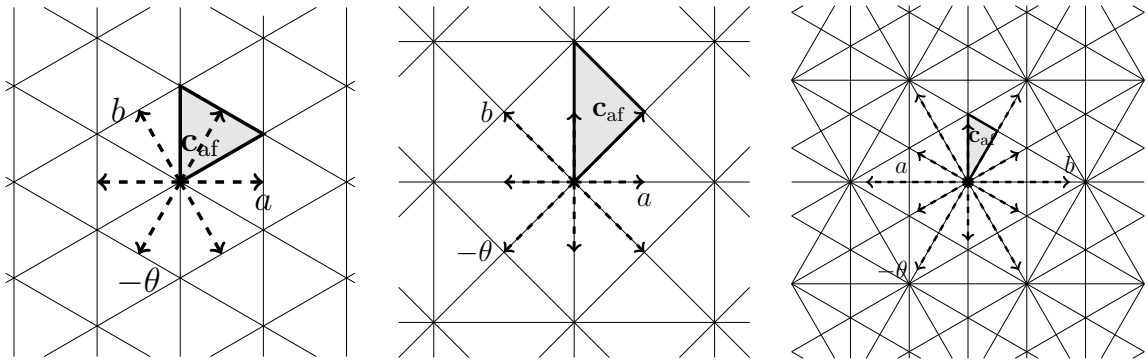
$$\Phi^\delta = \Phi \text{ et } h = \theta$$

Pour alléger les notations, on normalise la valuation ω de sorte que $\Gamma_{L'} = \mathbb{Z} = \Gamma_{L_d}$ et $0^+ = 1$. Par définition des alcôves comme composantes connexes, on peut définir une alcôve comme étant l'intersection de tous les demi-appartements $D(a, l)$ et $D(b, l^+)$ pour $a \in \Phi^+$, $b \in \Phi^-$ et $l \in \mathbb{R}$. Comme $D(a, l) \subset D(a, l')$ pour tout $l > l'$, on est en fait en train de considérer l'intersection finie des demi-appartements $D(a, 0)$ et $D(b, 1)$ pour $a \in \Phi^+$ et $b \in \Phi^-$ comme dans la figure ci-dessous. On appelle cette alcôve l'**alcôve fondamentale**, qu'on note $\mathbf{c}_{\text{af}}$.



Par [Bou81, VI.2.2 Prop. 5], les cloisons de cette alcôve sont exactement contenues dans les murs $\mathcal{H}_{a,0}$, pour $a \in \Delta$, et $\mathcal{H}_{-h,1}$.

4.3.5 Exemple (Les appartements et leurs alcôves fondamentales en dimension 2).



Type A_2 Type C_2 Type G_2

Deuxième cas : Φ est réduit et L'/L_d est ramifiée. Il s'agit des groupes résiduellement déployés nommés B-C_n, C-B_n, F_4^I et G_2^I dans les tables de Tits [Tit79, 4.2]. Ils correspondent respectivement aux échelonnages, classifiés dans [BrT72, 1.4.6], de type B-C_n, C-B_n, F_4^I et G_2^I.

Comme L'/L_d est ramifiée, on a $d' \in \{2, 3\}$, donc Φ est un système de racines non simplement lacé. De plus, on a $d'\Gamma_{L'} = \Gamma_{L_d}$. Soit a une racine relative. Comme Φ est réduit, on a $\Gamma_a = \Gamma_{L_a}$ par le lemme 1.3.7. Par la proposition 1.1.20, si a est une racine longue, on a $\Gamma_a = \Gamma_{L_d}$; si a est une racine courte, on a $\Gamma_a = \Gamma_{L'}$. Donc, on a $\delta_a = \lambda_a$. Ainsi $\Phi^\delta_{\text{nd}} = \Phi^D_{\text{nd}}$.

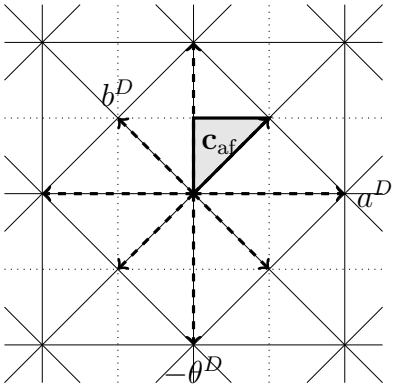
Pour alléger les notations, on normalise la valuation ω de sorte que $\Gamma_{L'} = \mathbb{Z}$. L'intersection de tous les différents demi-appartements $D(a, 0)$ et $D(b, 0^+)$ où $a \in \Phi^+$ et $b \in \Phi^-$ est exactement une alcôve. Si $b \in \Phi^-$ est courte, alors $\Gamma_b = \Gamma_{L'}$ de sorte que $D(b, 0^+) = D(b, 1)$; si $b' \in \Phi^-$ est longue, alors $\Gamma_b = \Gamma_{L_d}$ de sorte que $D(b, 0^+) = D(b', d')$. On l'appelle **l'alcôve fondamentale** et on la note $\mathbf{c}_{\text{af}}$.

Ses cloisons sont exactement contenues dans les murs $\mathcal{H}_{a,0}$, où $a \in \Delta$, et $\mathcal{H}_{-\theta,1}$. En effet, soient $a \in \Phi$ et $l \in \mathbb{R}$. On pose $l^D = \delta_a l$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{A}$, on ait :

$$a(x - \mathcal{O}) - l = 0 \Leftrightarrow a^D(x - \mathcal{O}) - l^D = 0$$

On sait que l'ensemble $\mathcal{H}_{a,l}$ est un mur de $\mathbb{A}$ si, et seulement si, $l \in \Gamma_a$; donc si, et seulement si, $l^D \in \Gamma_{L_d}$. Ainsi, les cloisons de $\mathbf{c}_{\text{af}}$ sont contenues dans les murs $\mathcal{H}_{a^D,l^D}$ décrits par le premier cas. Comme la plus haute racine θ^D est une racine longue de Φ^D d'après [Bou81, VI.1.8 Prop. 25 (iii)], on en déduit que θ est une racine courte de Φ, donc que $\delta_\theta = d'$.

4.3.6 Remarque. La ramification de l'extension de déploiement a l'effet d'ajouter certains murs dans les directions correspondant aux racines courtes. Par exemple, si $d = 2$ et si le système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$ est de type A_3, alors le système de racines relatif est de type C_2 et on a le dessin suivant où l'on représente en pointillés les murs « ajoutés », et le système de racines Φ^D au lieu de Φ :



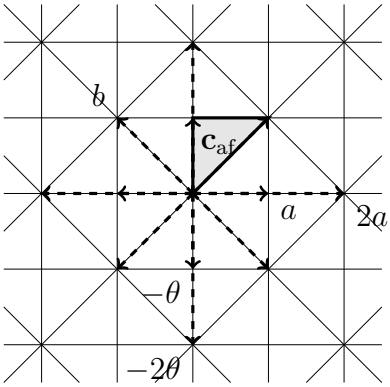
Troisième cas : Φ est non réduit. Il s'agit des groupes nommés $C\text{-}BC_n$ et ${}^2A'_{2n}$ dans les tables de Tits [Tit79, 4.2, 4.3]. Ils correspondent respectivement aux échelonnages, classifiés dans [BrT72, 1.4.6], de type $C\text{-}BC_n^{III}$ et $C\text{-}BC_n^{IV}$.

Comme Φ est non réduit, on a $d = d' = 2$. Pour simplifier les notations, on normalise la valuation ω de sorte que $\Gamma_{L'} = \mathbb{Z}$. Soit a une racine relative non divisible. Si a est multipliable, par le lemme 1.3.8, on a $\Gamma_a = \frac{1}{2}\Gamma_{L'}$; si a est non multipliable, par le lemme 1.3.7, et par la proposition 1.1.20, on a $\Gamma_a = \Gamma_{L_a} = \Gamma_{L'}$. Donc $\delta_a\Gamma_a = \Gamma_{L'}$.

Comme précédemment, on peut voir que l'intersection des différents demi-appartements suivants : $D(a, 0)$ pour $a \in \Phi^+_{\text{nd}}$, $D(b, 1)$ pour $b \in \Phi^-_{\text{nd}}$ non multipliable, et $D(b', \frac{1}{2})$ pour $b' \in \Phi^-$ multipliable, est exactement une alcôve. On l'appelle l'**alcôve fondamentale** et on la note $\mathbf{c}_{\text{af}}$. Ses cloisons sont exactement contenues dans les murs $\mathcal{H}_{a,0}$, pour $a \in \Delta$, et $\mathcal{H}_{-\theta,\frac{1}{2}}$.

En effet, on procède de même que dans le cas précédent en travaillant avec le système de racines réduit Φ^D_{nd}.

4.3.7 Exemple ($\widetilde{\Phi}$ de type A_4 et Φ de type BC_2).



4.3.2 Nombre d'alcôves dans un résidu de cloison

On sait par le théorème 3.1.2 qu'un sous-groupe pro-p maximal P fixe une alcôve $\mathbf{c}$ lorsque G est simplement connexe. Donc P agit sur l'ensemble des alcôves de $X(G,K)$ qui sont adjacentes à $\mathbf{c}$, c'est-à-dire celles qui ont une cloison en commun avec $\mathbf{c}$. On veut décrire cet ensemble d'alcôves.

4.3.8 Définition. Soit F une cloison. Le **résidu de cloison** par rapport à F, noté E_F, est l'ensemble des alcôves dont l'adhérence contient F.

La **boule combinatoire unité** centrée en $\mathbf{c}$, notée $B(\mathbf{c},1)$, est la réunion de tous les résidus de cloison par rapport aux différentes cloisons F contenues dans l'adhérence de $\mathbf{c}$.

On dit que deux alcôves sont **adjacentes** si elles ont une cloison en commun.

Dans ce qui suit, on reformule et on démontre [Tit79, 1.6].

4.3.9 Proposition. *Soient $a \in \Phi$ et $l \in \Gamma_a$. Le groupe U_{a,l^+} est un sous-groupe distingué de $U_{a,l}$. On note $X_{a,l} = U_{a,l}/U_{a,l^+}$ le groupe quotient.*

Si a est non multipliable, alors il existe une structure canonique de κ_{L_a}-espace vectoriel sur $X_{a,l}$ de dimension 1.

Si a est multipliable, alors il existe un morphisme de groupes canonique $X_{2a,2l} \to X_{a,l}$ de sorte qu'on a l'inclusion $[X_{a,l}, X_{a,l}] \leq X_{2a,2l}$. Il existe une structure canonique de κ_{L_a}-espace vectoriel sur le groupe quotient $X_{a,l}/X_{2a,2l}$ de dimension 0 *ou* 1.

Démonstration. On suppose que a est non multipliable. Alors $U_a(K)$ est commutatif. Donc U_{a,l^+} est un sous-groupe distingué de $U_{a,l}$ et le groupe quotient $X_{a,l}$ est commutatif. On définit une structure de $\mathcal{O}_{L_a}$-module sur $X_{a,l}$ par :

$$\forall x \in \mathcal{O}_{L_a},\ \forall y \in L_a \text{ tel que } \omega(y) \geq l, \quad x \cdot x_a(y)U_{a,l^+} = x_a(xy)U_{a,l^+}$$

Pour tout $x \in \varpi_{L_a}\mathcal{O}_{L_a}$ et tout $y \in L_a$ tel que $\omega(y) \geq l$, on a $\omega(xy) \geq l^+$, donc $xX_{a,l} \leq U_{a,l^+}$. Ceci nous donne une structure de $\kappa_{L_a} = \mathcal{O}_{L_a}/\varpi_{L_a}\mathcal{O}_{L_a}$-espace vectoriel sur $X_{a,l}$. On vérifie que cet espace vectoriel est de dimension 1 : pour tous $y, y' \in L_a$ tels que $\omega(y) = \omega(y') = l$, comme y est inversible, on a $x = y^{-1}y' \in \mathcal{O}_{L_a}$. De plus, de tels éléments y, y' existent par définition de Γ_{L_a}.

On suppose maintenant que a est multipliable. D'après le lemme 4.2.15 appliqué à $l, l^+ \in \Gamma_a$, on déduit que U_{a,l^+} est un sous-groupe distingué de $U_{a,l}$.

Le sous-groupe distingué $U_{2a,2l^+}$ de $U_{2a,2l}$ est le noyau du morphisme de groupes canonique $U_{2a,2l} \to X_{a,l}$. Ainsi on déduit un morphisme entre groupes quotients $X_{2a,2l} \to X_{a,l}$. En passant la formule du lemme 4.2.15 au quotient, on en déduit que $[X_{a,l}, X_{a,l}] \leq X_{2a,2l}$.

En particulier, le groupe $X_{a,l}/X_{2a,2l}$ est commutatif. Il existe une structure de $\mathcal{O}_{L_a}$-module donnée par :

$$\forall x \in \mathcal{O}_{L_a},\ \forall (y,y') \in H(L_a, L_{2a}) \text{ tel que } \omega(y') \geq 2l,$$
$$x \cdot x_a(y,y')U_{a,l^+}U_{2a,2l} = x_a(xy, x^\tau xy')U_{a,l^+}U_{2a,2l}$$

Pour tout $x \in \varpi_{L_a}\mathcal{O}_{L_a}$ et tout $(y,y') \in H(L_a, L_{2a})$ tel que $\omega(y') \geq 2l$, on a $\omega(x^\tau xy') \geq 2(l^+)$. Ceci définit une structure de κ_{L_a}-espace vectoriel sur $X_{a,l}/X_{2a,2l}$. Cet espace vectoriel est de dimension inférieure ou égale à 1. En effet, s'il existe des éléments $(y,y'), (z,z') \in H(L_a, L_{2a})$ tels que $\omega(y') = \omega(z') = 2l$, alors on peut poser $x = y^{-1}z \in \mathcal{O}_{L_a}$ car y est inversible. Ainsi, on a $x_a(z,z') \in x \cdot x_a(y,y')U_{2a,2l}$. □

Si a est une racine non multipliable, on pose $X_{2a,2l} = 0$ et $\kappa_{L_{2a}} = \kappa_{L_a}$. Ainsi, la dimension $d(a,l) = \dim_{\kappa_{L_{2a}}} X_{a,l}/X_{2a,2l}$ a alors un sens pour toute racine $a \in \Phi$.

4.3.10 Remarque. Soit F une cloison contenue dans un mur $\mathcal{H}_{a,l}$ correspondant à une racine affine $\theta(a,l)$. On pose $q = \mathrm{Card}(\kappa_{L_{2a}})$. Le résidu de cloison E_F contient $1 + \mathrm{Card}(X_{a,l}) = 1 + q^{d(\frac{a}{2},\frac{l}{2})+d(a,l)+d(2a,2l)}$ éléments. C'est une conséquence du lemme 4.3.14.

Par le lemme suivant, on a que les systèmes de racines affines définis dans [BrT72, 6.2.6] et dans [Tit79, 1.6] sont les mêmes.

4.3.11 Lemme. *Soient $a \in \Phi$ une racine et $l \in \mathbb{R}$. Alors $d(a,l) > 0$ si, et seulement si, $l \in \Gamma'_a$.*

Démonstration. C'est un jeu de réécriture par équivalences.

$$\begin{aligned}
l \in \Gamma'_a &\Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \in U_a(K),\ \varphi_a(\mathbf{u}) = l = \sup \varphi_a(\mathbf{u}U_{2a}(K)) \\
&\Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \in U_a(K),\ \varphi_a(\mathbf{u}) = l \text{ et } \forall \mathbf{u}'' \in U_{2a}(K),\ \varphi_a(\mathbf{u}\mathbf{u}'') < l^+ \\
&\Leftrightarrow U_{a,l} \neq U_{a,l^+} \text{ et } \exists \mathbf{u} \in U_{a,l},\ \forall \mathbf{u}'' \in U_{2a}(K),\ \mathbf{u}\mathbf{u}'' \notin U_{a,l^+} \\
&\Leftrightarrow X_{a,l} \neq 0 \text{ et } X_{a,l} \neq X_{2a,2l} \\
&\Leftrightarrow d(a,l) \neq 0
\end{aligned}$$

□

Ce système de racines affine est une affinisation du système de racines sphérique. On peut l'obtenir en ajoutant des réflexions affines correspondant aux éléments $\mathbf{m}(u) = u'uu''$ où pour tout $u \in U_a(K) \setminus \{1\}$, il existe des éléments $u', u'' \in U_{-a}K$ uniquement déterminés tels que $\mathbf{m}(u) \in \mathcal{N}_G(S)(K)$.

4.3.3 Action sur une boule combinatoire unité

Soit $P = P^+_{\mathbf{c}}$ un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$. Pour tout $a \in \Phi$, s'il existe un mur $\mathcal{H}_{a,l}$ bordant l'alcôve $\mathbf{c}$, on note $F_{\mathbf{c},a}$ la cloison de $\mathbf{c}$ contenue dans $\mathcal{H}_{a,l}$. On note $E_{\mathbf{c},a} = E_{F_{\mathbf{c},a}}$ le résidu de cloison de $F_{\mathbf{c},a}$. On veut étudier l'action du groupe dérivé et du sous-groupe de Frattini de P sur l'immeuble de Bruhat-Tits $X(G,K)$ de G sur K. Pour cela, on considère l'action, sur chaque ensemble $E_{\mathbf{c},a}$, des différents groupes radiciels $U_{a,\mathbf{c}}$ et du groupe $T(K)^+_b$.

4.3.12 Lemme. *Soient $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ deux alcôves adjacentes de l'appartement $\mathbb{A}$ le long d'un mur défini par une racine $a \in \Phi$. Si $b \in \Phi \setminus \mathbb{R}a$, alors $f'_{\mathbf{c}_1}(b) = f'_{\mathbf{c}_2}(b)$ où les applications f' ont été définies dans les notations 1.3.17. En particulier, on a $U_{b,\mathbf{c}_1} = U_{b,\mathbf{c}_2}$.*

Démonstration. Pour que $f'_{\mathbf{c}_1}(b) \neq f'_{\mathbf{c}_2}(b)$, il faut et il suffit qu'il existe un mur défini par une racine b séparant les alcôves $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ en deux demi-appartements opposés. Les alcôves $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ sont adjacentes par une cloison contenue dans un mur défini par a. Ce mur est le seul qui sépare les deux alcôves dans deux demi-appartements opposés. Donc, si $f'_{\mathbf{c}_1}(b) \neq f'_{\mathbf{c}_2}(b)$, alors a et b sont colinéaires. □

4.3.13 Proposition. *Soit $a \in \Phi = \Phi(G,S)$ une racine relative telle qu'il existe un mur $\mathcal{H}_{a,l}$ bordant $\mathbf{c}$. Si a est non multipliable ou si l'extension quadratique L_a/L_{2a} est ramifiée, alors le sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(P)$ fixe $E_{\mathbf{c},a}$ point par point.*

Par conséquent, si Φ est un système de racines réduit ou si l'extension L/L_d est ramifiée, alors $\mathrm{Frat}(P)$ fixe point par point l'enclos de la boule combinatoire unité $\mathrm{cl}(B(\mathbf{c},1))$ centrée en $\mathbf{c}$.

En général, en notant Q_a le stabilisateur point par point de $E_{\mathbf{c},a}$, on a une inclusion de groupes $\mathrm{Frat}(P) \subset Q_a U_{2a,\mathbf{c}}$.

Le reste de cette section a pour but de démontrer cette proposition.

Soit $\mathbf{c}'$ une alcôve de $\mathbb{A}$ adjacente à $\mathbf{c}$. En particulier, on a $\mathbf{c}' \in B(\mathbf{c},1)$. On écrit $a' + r'$, avec $a' \in \Phi$ et $r' \in \Gamma_{a'}$, la racine affine dirigeant le mur séparant les alcôves $\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}'$. Si a' est divisible, on pose $a = \frac{1}{2}a'$ et $r = \frac{1}{2}r'$. On remarque qu'on a toujours $r \in \Gamma_a$ mais $a + r$ peut être ou non une racine affine selon que r est, ou non, un élément de Γ'_a. Sinon, on pose $a = a'$ et $r = r'$. On a aussi la définition suivante de r donnée par l'égalité $r = f_{\mathbf{c}}(a) = f'_{\mathbf{c}}(a)$ d'après [Lan96, 7.7]. Quitte à échanger a et $-a$, on peut supposer que $f_{\mathbf{c}'}(a) = f_{\mathbf{c}}(a)^+ > f_{\mathbf{c}}(a)$ et que $f_{\mathbf{c}'}(-a) < f_{\mathbf{c}}(-a) = f_{\mathbf{c}'}(-a)^+$.

Le groupe P agit sur l'ensemble fini d'alcôves $E_{\mathbf{c},a}$ et fixe $\mathbf{c}$. Donc, il agit sur l'ensemble d'alcôves $E'_{\mathbf{c},a} = E_{\mathbf{c},a} \setminus \{\mathbf{c}\}$. On note Q_a le noyau de cette action. On va montrer que le groupe quotient P/Q_a est isomorphe à un sous-groupe de $U_{a,r}/U_{a,r^+}$.

4.3.14 Lemme. *Le groupe $U_{a,\mathbf{c}}$ agit transitivement sur l'ensemble $E'_{\mathbf{c},a}$.*

Démonstration. Par construction de l'immeuble, le sous-groupe $P_{\mathbf{c}}$ agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant l'alcôve $\mathbf{c}$ [Lan96, 9.7 (i)]. Comme l'action préserve le type des facettes, on en déduit $E_{\mathbf{c},a} = P_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c}'$.

On écrit $P_{\mathbf{c}} = U_{a,\mathbf{c}} \cdot \prod_{b \in \Phi^+_{\mathrm{nd}} \setminus (a)} U_{b,\mathbf{c}} \cdot U_{-\Phi^+,\mathbf{c}} \cdot T(K)_b$ [BrT72, 7.1.8]. Le groupe $T(K)_b$ fixe $\mathbb{A}$ point par point [Lan96, 9.8], donc il fixe aussi $\mathbf{c}'$. Pour tout $b \in \Phi \setminus \mathbb{R}a$, par le lemme 4.3.12 on a $U_{b,\mathbf{c}} = U_{b,\mathbf{c}'}$. Donc $U_{b,\mathbf{c}}$ fixe $\mathbf{c}'$. Comme on a supposé que $f_{\mathbf{c}'}(-a) < f_{\mathbf{c}}(-a)$, on a $U_{-a,\mathbf{c}} \subset U_{-a,\mathbf{c}'}$. Donc $U_{-a,\mathbf{c}}$ fixe $\mathbf{c}'$. Par conséquent, on a $E'_{\mathbf{c},a} = U_{a,\mathbf{c}} \cdot \mathbf{c}'$, car le sous-groupe borné du groupe radiciel $U_{b,\mathbf{c}}$ et le groupe $T(K)_b$ fixent $\mathbf{c}'$. □

4.3.15 Lemme. *Soit $g \in P$ un élément fixant $\mathbf{c}'$. Si $[v, g]$ fixe $\mathbf{c}'$ pour tout $v \in U_{a,\mathbf{c}}$, alors g fixe $E_{\mathbf{c},a}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{c}'' \in E'_{\mathbf{c},a}$. Par le lemme 4.3.14, il existe un élément $v \in U_{a,\mathbf{c}}$ tel que $\mathbf{c}'' = v\mathbf{c}'$. On effectue le calcul suivant :

$$\begin{aligned} g \cdot \mathbf{c}'' &= gv \cdot \mathbf{c}' \\ &= v[v^{-1}, g]g \cdot \mathbf{c}' \\ &= v[v^{-1}, g] \cdot \mathbf{c}' && \text{car } g \text{ fixe } \mathbf{c}' \\ &= v\mathbf{c}' && \text{car } [v^{-1}, g] \text{ fixe } \mathbf{c}' \\ &= \mathbf{c}'' \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour toute alcôve $\mathbf{c}'' \in E'_{a,\mathbf{c}}$, on conclut que g fixe $E_{a,\mathbf{c}}$. □

Ainsi, pour montrer qu'un élément $g \in [P, P]$ fixe $E_{\mathbf{c},a}$, il suffit de vérifier que $[U_{a,\mathbf{c}}, g]$ fixe $\mathbf{c}'$. On se ramène donc à calculer des commutateurs. On rappelle que le groupe $U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} = U_{a,\mathbf{c}'}$ fixe $\mathbf{c}'$.

4.3.16 Lemme. *Les groupes suivants :*

(1) $U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}$
(2) $T(K)^+_b$
(3) $U_{b,\mathbf{c}}$ *où* $b \in \Phi \setminus \mathbb{R}a$
(4) $U_{-a,\mathbf{c}}$

fixent le résidu de cloison $E_{\mathbf{c},a}$.

Démonstration. (1) Soit $u \in U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}$. Alors u fixe $\mathbf{c}'$. Soit $v \in U_{a,\mathbf{c}}$.

Si a est non multipliable, alors $[v, u] = 1$ car le groupe radiciel $U_a(K)$ est commutatif.

Si a est multipliable, par le lemme 4.2.15, on sait que $[v^{-1}, u] \in U_{2a,\lceil f_{\mathbf{c}}(a)^+\rceil + \lceil f_{\mathbf{c}}(a)\rceil}$. Comme $\lceil f_{\mathbf{c}}(a)^+\rceil + \lceil f_{\mathbf{c}}(a)\rceil > 2f_{\mathbf{c}}(a)$, on en déduit que $[v^{-1}, u] \in U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} = U_{a,f_{\mathbf{c}'}(a)}$ fixe $\mathbf{c}'$.

En appliquant le lemme 4.3.15, on obtient que u fixe $E_{\mathbf{c},a}$.

(2) Soit $t \in T(K)^+_b$. L'élément t fixe $\mathbf{c}'$ car $T(K)_b$ fixe l'appartement A. Par les lemmes 4.2.1 et 4.2.7, on sait que $[T(K)^+_b, U_{a,\mathbf{c}}] \subset U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} = U_{a,\mathbf{c}'}$. Donc $[v, t] \in U_{a,\mathbf{c}'}$ fixe $\mathbf{c}'$ pour tout $v \in U_{a,\mathbf{c}}$. On déduit de (1) que $T(K)^+_b$ fixe $E_{\mathbf{c},a}$.

(3) Soient $g \in U_{b,\mathbf{c}}$ et $v \in U_{a,\mathbf{c}}$. Par le lemme 4.3.12, on a $U_{b,\mathbf{c}} = U_{b,\mathbf{c}'}$. Donc $g \cdot \mathbf{c}' = \mathbf{c}'$. Par quasi-concavité des fonctions f' appliquée dans le cas où a et b ne sont pas colinéaires [BrT84, 4.5.10], on obtient que :

$$[v^{-1}, g] \in \prod_{m,n \in \mathbb{N}^*,\ ma+nb \in \Phi} U_{ma+nb, f'_{\mathbf{c}}(ma+nb)}$$

En appliquant à nouveau le lemme 4.3.12, on a $U_{ma+nb,\mathbf{c}} = U_{ma+nb,\mathbf{c}'}$. Donc $[v, g]$ fixe $\mathbf{c}'$ pour tout v, ainsi, par le lemme 4.3.15, l'élément g fixe $E_{\mathbf{c},a}$.

(4) Soient $u \in U_{-a,\mathbf{c}}$ et $v \in U_{a,\mathbf{c}}$. Comme $f_{\mathbf{c}'}(-a) < f_{\mathbf{c}}(-a)$, on a $U_{-a,\mathbf{c}} \subset U_{-a,\mathbf{c}'}$. Donc u fixe $\mathbf{c}'$.

Suivant que a est multipliable ou non, on sait que le commutateur $[v, u] \subset U_{-a,f_{\mathbf{c}}(-a)^+} T(K)^+_b U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}$, en appliquant soit le lemme 4.2.9, soit le lemme 4.2.2. Les groupes $U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}$, $T(K)^+_b$, et $U_{-a,f_{\mathbf{c}}(-a)^+} \subset U_{-a,f_{\mathbf{c}}(-a)}$ fixent $\mathbf{c}'$. Donc, le commutateur $[v, u]$ fixe $\mathbf{c}'$ car il peut s'écrire comme produit de trois tels éléments. En appliquant le lemme 4.3.15, on conclut que u fixe $E_{\mathbf{c},a}$. □

Démonstration de la proposition 4.3.13. On conserve les notations introduites précédemment. En particulier, a est une racine telle qu'il existe un mur $\mathcal{H}_{a,l}$ bordant l'alcôve $\mathbf{c} \subset \mathbb{A}$; l'alcôve $\mathbf{c}' \in \mathbb{A}$ possède une cloison $F_{\mathbf{c},a}$ en commun avec $\mathbf{c}$. On a les égalités $f'_{\mathbf{c}}(a)^+ = f'_{\mathbf{c}'}(a) = f'_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}(a)$. Donc $U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} = U_{a,\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$. Pour toute racine $b \in \Phi_{\mathrm{nd}} \setminus \mathbb{R}a$, par le lemme 4.3.12, on a $f'_{\mathbf{c}}(b) = f'_{\mathbf{c}'}(b) = f'_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}(b)$. Donc $U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)} = U_{b,\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$. Enfin, puisqu'on a supposé que $f'_{\mathbf{c}'}(-a) < f'_{\mathbf{c}}(-a)$, on en déduit les égalités de groupes $U_{-a,\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'} = U_{-a,f'_{\mathbf{c}}(-a)} \cap U_{-a,f'_{\mathbf{c}'}(-a)} = U_{-a,\max(f'_{\mathbf{c}}(-a),f'_{\mathbf{c}'}(-a))} = U_{-a,\mathbf{c}}$. De cela, on déduit l'"égalité des groupes :

$$U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}\left(\prod_{b\in\Phi_{\mathrm{nd}}\setminus\{a\}} U_{b,\mathbf{c}}\right) T(K)_b^+ U_{-\Phi^+,\mathbf{c}} = U_{\Phi^+,\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'} T(K)_b^+ U_{-\Phi^+,\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$$

On note ce groupe $P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$. Cette notation se justifie car on pourrait montrer que (comme dans la proposition 2.3.5) il s'agit du (unique par hypothèse de simple connexité de G) sous-groupe pro-p maximal du stabilisateur point par point dans $G(K)$ de $\mathbf{c} \cup \mathbf{c}'$.

Par le lemme 4.3.16, le sous-groupe Q_a contient le sous-groupe $P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$. Tout d'abord, on montre que $P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$ est un sous-groupe distingué de P. On peut écrire $P = U_{a,\mathbf{c}} P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$. On a les inclusions de groupes suivantes :

— $[U_{a,\mathbf{c}}, U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}] \subset U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} \subset P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$ par le lemme 4.2.15 ou par commutativité suivant que la racine a est multipliable ou non ;

— $[U_{a,\mathbf{c}}, T(K)_b^+] \subset U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} \subset P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$ par le lemme 4.2.7 ou 4.2.1 ;

— $[U_{a,\mathbf{c}}, U_{-a,\mathbf{c}}] \subset U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} T(K)_b^+ U_{-a,f_{\mathbf{c}}(-a)^+} \subset P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$ par le lemme 4.2.9 ou 4.2.2 ;

— $[U_{a,\mathbf{c}}, U_{b,c}] \subset P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$ pour toute racine $b \in \Phi_{\mathrm{nd}} \setminus \mathbb{R}a$ par quasi-concavité [BrT84, 4.5.10], comme dans la démonstration du lemme 4.3.16 (3).

Donc, $P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$ est un sous-groupe distingué de P et le quotient $P/P^+_{\mathbf{c}\cup\mathbf{c}'}$ est isomorphe à $U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}/U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} = X_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}$. Ensuite, on voit que Q_a est un sous-groupe distingué de P en tant que noyau de l'action de P sur $E_{\mathbf{c},a}$. Donc, le groupe quotient P/Q_a est un sous-groupe de $X_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}$.

On définit un sous-groupe Q'_a par $Q'_a = Q_a U_{2a,2f_{\mathbf{c}}(a)}$ si a est multipliable, L_a/L_{2a} est ramifiée et $f_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma'_a$; et par $Q'_a = Q_a$ sinon. On montre que le groupe quotient P/Q'_a peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

Premièrement, on suppose que a est non multipliable ou que L_a/L_{2a} est ramifiée. Alors, par la proposition 4.3.9, on sait que le groupe quotient $P/Q'_a = X_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}$ est un κ_{L_a}-espace vectoriel (de dimension 1).

Deuxièmement, on suppose que a est multipliable, que l'extension L_a/L_{2a} est non ramifiée et que $f'_{\mathbf{c}}(a) \notin \Gamma'_a$. Alors, par la proposition 4.3.9, on sait que $X_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)} = X_{2a,2f'_{\mathbf{c}}(a)}$ est un $\kappa_{L_{2a}}$-espace vectoriel de dimension 1 car l'espace quotient $X_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)}/X_{2a,2f'_{\mathbf{c}}(a)}$ est nul par le lemme 4.3.11. Donc $P/Q'_a = X_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)}$ est un espace vectoriel.

Finalement, on suppose que a est multipliable, que L_a/L_{2a} est non ramifiée et que $f'_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma'_a$. Alors, par la proposition 4.3.9, on sait que $P/Q'_a \simeq X_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)}/X_{2a,2f'_{\mathbf{c}}(a)}$ est un κ_{L_a}-espace vectoriel de dimension 1.

Par conséquent, d'une part, le groupe P/Q'_a est commutatif ; donc $[P,P] \subset Q'_a$. D'autre part, le groupe P/Q'_a est d'exposant p ; donc $P^p \subset Q'_a$. On obtient $P^p[P,P] \subset Q'_a$. Comme $G(K)$ agit continûment sur $X(G,K)$, le groupe Q_a est un sous-groupe fermé de

P en tant que noyau de l'action de P sur $E_{\mathbf{c},a}$. De plus, le groupe $Q_a U_{2a,2f_{\mathbf{c}}(a)}$ est encore fermé. Donc $\mathrm{Frat}(P) = \overline{P^p[P,P]} \subset Q'_a$.

Si Φ est un système de racines réduit ou si l'extension L'/L_d est ramifiée, alors pour toute racine $a \in \Phi$ correspondant à une cloison de $\mathbf{c}$, on obtient que $\mathrm{Frat}(P)$ fixe $E_{\mathbf{c},a}$ point par point et donc qu'il fixe la boule combinatoire unité centrée en $\mathbf{c}$, notée $B(\mathbf{c},1)$, qui est la réunion de tous les résidus de cloison $E_{\mathbf{c},a}$. Par continuité de l'action, le groupe $\mathrm{Frat}(P) = \overline{P^p[P,P]}$ fixe point par point l'enclos de $B(\mathbf{c},1)$. □

4.3.17 Remarque. Bien que le tore borné $T(K)_b$ fixe point par point l'appartement A, son action sur le 1-voisinage de cet appartement est, en général, non triviale. Par exemple, supposons que Φ est un système de racines réduit et choisissons une racine relative $a \in \Phi$ définissant un mur bordant l'alcôve $\mathbf{c}$. L'action de $T(K)_b$ sur $E_{\mathbf{c},a}$ correspond à l'action du sous-groupe $\kappa_{L_a}^{\times 2} \subset \kappa_{L_a}^{\times}$. La partie utile d'un élément $t \in T(K)_b$ pour décrire son action sur l'ensemble d'alcôves $E_{\mathbf{c},a} \setminus \{\mathbf{c}'\}$ est $a(t)/\varpi_{L_a}\mathcal{O}_{L_a} \in \kappa_{L_a}^{\times 2}$. En effet, soit $\mathbf{c}'' \in E_{\mathbf{c},a} \setminus \{\mathbf{c}'\}$ qu'on écrit sous la forme $\mathbf{c}'' = x_a(x)\cdot\mathbf{c}'$ où $\omega(x) = f'_{\mathbf{c}}(a)$. Alors $t\cdot\mathbf{c}'' = tx_a(x)t^{-1}\cdot\mathbf{c}' = x_a(a(t)x)\cdot\mathbf{c}'$.

4.3.18 Corollaire (de la proposition 4.3.13)**.** *Pour toute racine relative $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ non divisible,*

- *si $a \notin \Delta \cup \{-\theta\}$, on pose $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,\mathbf{c}}$;*
- *si $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$ est non multipliable, on pose $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}$;*
- *si $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$, si a est multipliable, et si L_a/L_{2a} est non ramifiée ou $f'_{\mathbf{c}}(a) \notin \Gamma'_a$, on pose $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}$;*
- *si $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$, si a est multipliable, si l'extension L_a/L_{2a} est ramifiée et si $f'_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma'_a$, on pose $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}U_{2a,2f_{\mathbf{c}}(a)} = U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+}U_{2a,\mathbf{c}}$.*

On a l'inégalité :

$$\mathrm{Frat}(P) \leq \prod_{a\in\Phi^-_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}} \cdot T(K)^+_b \cdot \prod_{a\in\Phi^+_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}} = T(K)^+_b \prod_{a\in\Phi_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}}$$

Démonstration. Comme $\mathrm{Frat}(P) \subset P$, il suffit de vérifier que $\mathrm{Frat}(P) \cap U_a(K) \subset V_{a,\mathbf{c}}$ pour tout $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$. Soit $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$. Par la proposition 4.3.13, on a l'inclusion $\mathrm{Frat}(P) \subset Q_a U_{2a,\mathbf{c}}$ lorsque a est multipliable, l'extension L_a/L_{2a} est ramifiée et $f'_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma'_a$; on a l'inclusion $\mathrm{Frat}(P) \subset Q_a$ dans les autres cas. En particulier, on a $\mathrm{Frat}(P) \cap U_a(K) \subset V_{a,\mathbf{c}}$. □

4.3.19 Proposition. *On suppose que Φ est un système de racines réduit. Le groupe $Q = T(K)^+_b \prod_{a\in\Phi} V_{a,\mathbf{c}}$ est le sous-groupe pro-p maximal du stabilisateur point par point dans $G(K)$ de l'enclos $\mathrm{cl}(B(\mathbf{c},1))$ de la boule combinatoire unité centrée en $\mathbf{c}$.*

Démonstration. On note $\mathrm{cl}\,(B(\mathbf{c},1))$ l'enclos de la boule combinatoire unité centrée en $\mathbf{c}$. On pose $\Omega = \mathrm{cl}(B(\mathbf{c},1)) \cap \mathbb{A}$. On note $\widehat{P}_{B(\mathbf{c},1)}$ (resp. $\widehat{P}_\Omega$) le stabilisateur point par point dans $G(K)$ de $\mathrm{cl}\,(B(\mathbf{c},1))$ (resp. Ω). Par [Lan96, 9.3 et 8.10], on écrit $\widehat{P}_\Omega = T(K)_b \prod_{a\in\Phi} U_{a,\Omega}$.

Par la proposition 4.3.13, on sait que Q fixe $\mathrm{cl}(B(\mathbf{c},1))$ point par point. Soit $g \in \widehat{P}_{B(\mathbf{c},1)} \subset \widehat{P}_\Omega$. On écrit $g = t\prod_{a\in\Phi} u_a$ où $t \in T(K)_b$ et $u_a \in U_{a,\Omega} = V_{a,\mathbf{c}}$. Par le lemme 4.3.16, on sait que u_a fixe point par point $\mathrm{cl}(B(\mathbf{c},1))$.

Soit $t \in T(K)_b$ fixant point par point $\mathrm{cl}(B(\mathbf{c},1))$. Soit a une racine correspondant à une cloison de $\mathbf{c}$. Par le lemme 4.3.14, on écrit l'orbite $E'_{\mathbf{c},a} = U_{a,\mathbf{c}}\mathbf{c}'$. Pour tout $u \in U_{a,\mathbf{c}}$,

le calcul $u \cdot \mathbf{c}' = tu \cdot \mathbf{c}' = [t,u]u\mathbf{c}'$ nous montre que $[t,u] \in V_{a,\mathbf{c}}$. Par le lemme 4.2.1, on a $a(t) \equiv 1 \bmod \varpi$.

Comme cette égalité est vraie pour tout $a \in \Delta$, on a $t \in T' = \prod_{a\in\Delta} \widetilde{a}(\pm 1 + \mathfrak{m}_{L_a})$. Donc $\widehat{P}_{B(\mathbf{c},1)} \subset T' \prod_{a\in\Phi} V_{a,\mathbf{c}}$.

L'indice $[T' : T(K)_b^+]$ divise $\prod_{a\in\Delta} |\pm 1 + \mathfrak{m}_{L_a}/1 + \mathfrak{m}_{L_a}| = 2^{|\Delta|}$ qui est premier à p car $p \neq 2$. Donc Q est un sous-groupe, d'indice premier à p, du groupe profini $\widehat{P}_{B(\mathbf{c},1)}$. Comme Q est un groupe pro-p, on en déduit que c'est un sous-groupe pro-p maximal de $\widehat{P}_{B(\mathbf{c},1)}$.

Il reste à montrer que c'est le seul, autrement dit que Q est distingué dans $\widehat{P}_{B(\mathbf{c},1)}$. Mais comme $T(K)_b$ normalise Q, on a le résultat. □

4.4 Calculs en rang supérieur

Comme précédemment, on se donne un K-groupe K-simple, simplement connexe, quasi-déployé G et un sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$. Par une analyse géométrique, on a donné, dans la proposition 4.3.19, une description du sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(P)$ comme étant un sous-groupe du sous-groupe pro-p maximal Q (unique) d'un stabilisateur bien décrit dans $G(K)$. On cherche maintenant une partie assez grande de $\mathrm{Frat}(P)$, qui engendre Q, et donc $\mathrm{Frat}(P)$. On va exhiber des éléments unipotents de $\mathrm{Frat}(P)$ en trouvant certaines valeurs $l_a \in \mathbb{R}$ avec $a \in \Phi$ telles que les sous-groupes des groupes radiciels U_{a,l_a} sont des sous-groupes de $[P,P] \subset \mathrm{Frat}(P)$. Dans le cas du rang 1 qu'on a traité en section 4.2, on a déjà trouvé certaines valeurs l_a. En rang supérieur, on peut améliorer ces valeurs pour la plupart des racines ; plus précisément, pour toutes les racines qui ne correspondent pas à des cloisons de l'(unique) alcôve $\mathbf{c}$ stabilisée par P, on veut trouver $l_a = f'_{\mathbf{c}}(a)$. En section 4.4.1, on va inverser la plupart des relations de commutation ce qui nous donnera des bornes pour les valuations des groupes radiciels. En section 4.4.2, on va rassembler ces valeurs pour le système de racines tout entier.

4.4.1 Relations de commutation des groupes radiciels d'un groupe quasi-déployé

Dans le cas d'un groupe quasi-déployé, étant données deux racines relatives non colinéaires $a, b \in \Phi$, on a vu en section 1.1.8 qu'il existe une relation de commutation entre les groupes radiciels U_a et U_b en termes des paramétrages $(x_c)_{c\in\Phi}$. On peut exprimer complètement cette relation de commutation dans le système de racines irréductible $\Phi(a,b) = \Phi \cap (\mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b)$ de rang 2. Donc $\Phi(a,b)$ est de type A_2, C_2, BC_2 ou G_2, et on peut supposer que a est de longueur inférieure ou égale à b. On a alors rappelé dans ce cadre, au lemme 1.1.30, les différentes relations de commutation entre groupes radiciels d'un groupe quasi-déployé.

On rappelle qu'on a défini, en section 1.1.5, une action-$*$ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ sur le système de racines absolu $\widetilde{\Phi}$ et qu'on peut réaliser les racines relatives Φ comme les orbites de cette action. On rappelle que le degré $d' = [L'/L_d]$ a été défini par la notation 1.1.15 comme étant le nombre de racines absolues dans une racine relative courte (vue comme orbite). On fait les hypothèses suivantes :

4.4.1 Hypothèse. On suppose que la caractéristique résiduelle p de K est telle que $p > d'$ et les constantes de structure de la forme $c_{1,1;\alpha,\beta}$, où $\alpha, \beta \in \widetilde{\Phi}$, sont inversibles dans

$\mathcal{O}_K$. Autrement dit, on suppose que $p \geq 3$ si le système de racines relatif Φ du K-groupe presque-K-simple quasi-déployé G est de type B_n, C_n, BC_n ou F_4 ; et que $p \geq 5$ si Φ est de type G_2.

4.4.2 Proposition. *Soient $a, b, c \in \Phi$ des racines relatives telles que $c = a + b$ et, au moins, l'une des deux racines a, b est non multipliable. Soient $l_a \in \Gamma_a$, $l_b \in \Gamma_b$ et $l_c \in \Gamma_c$ des valeurs satisfaisant $l_c = l_b + l_a$.*

Soit $u \in U_{c,l_c}$. Si l'hypothèse 4.4.1 est vérifiée, alors il existe des éléments $v \in U_{a,l_a}$, $v' \in U_{b,l_b}$ et $v'' \in \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N}^* \\ r+s\geq 2}} U_{ra+sb,rl_a+sl_b}$ tels que $u = [v, v']v''$.

Démonstration. Si u est l'élément neutre, l'énoncé est évident. On peut donc supposer, sans restriction, que u n'est pas l'élément neutre. On choisit deux racines absolues dans leurs orbites $\alpha \in a$ et $\beta \in b$. Dans cette démonstration, la longueur des racines est considérée dans le système de racines (éventuellement non réduit) $\Phi(a, b)$ de rang 2.

Dans les différents cas ci-dessous, on suivra toujours le même schéma de preuve. Premièrement, on rappelle la nature des extensions de déploiement des racines a, b et $c = a + b$ qu'on a calculées dans la proposition 1.1.20. Deuxièmement, on rappelle la relation de commutation entre U_a et U_b, donnée dans la section 1.1.8 et on représente le système de racines pris en compte dans l'écriture de cette relation. Troisièmement, étant donné un élément unipotent non trivial $u \in U_{c,l_c}$, on utilise le paramétrage des groupes radiciels, défini en section 1.1.6, pour exhiber des éléments convenables $v \in U_{a,l_a}$ et $v' \in U_{b,l_b}$. Enfin, on vérifie qu'on a bien l'égalité $v'' = [v, v']^{-1}u$.

Cas $d' = 1$ ou les trois racines relatives a, b, c sont longues :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_b = L_c = L_d$.

Par [BrT84, A.6], on a la relation de commutation suivante :

$$\forall y \in L_a,\ z \in L_b,\ [x_a(y), x_b(z)] = \prod_{r,s\in\mathbb{N}^*} x_{ra+sb}(c_{r,s;\alpha,\beta}y^r z^s)$$

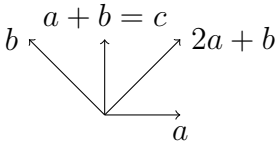
Il existe un paramètre $x \in L_c$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. On choisit $y \in L_a$ tel que $\omega(y) = l_a$. Ceci est possible car $l_a \in \Gamma_a = \Gamma_{L_a}$ d'après le lemme 1.3.7. On pose $z = c_{1,1;\alpha,\beta}^{-1} x y^{-1} \in L_b$. Alors $\omega(z) = \omega(x) - \omega(y) \geq l_c - l_a = l_b$ satisfait l'égalité $x = c_{1,1;\alpha,\beta} yz$. On pose alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et $(v'')^{-1} = \prod_{r,s\in\mathbb{N}^*,\ r+s\geq 2} x_{ra+sb}(c_{r,s;\alpha,\beta}y^r z^s)$. Pour toute paire d'entiers positifs (r, s) tels que $r + s \geq 2$ et $ra + sb$ est une racine, on a $\omega(c_{r,s;\alpha,\beta}y^r z^s) \geq r\omega(y) + s\omega(z) \geq rl_a + sl_b$. Donc $v'' \in \prod_{r,s\in\mathbb{N}^*;r+s\geq 2} U_{ra+sb,rl_a+sl_b}$. Ainsi $[v, v'] = u(v'')^{-1}$.

Cas $d' = 2$, les racines a, c sont courtes, b est longue et non divisible :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_b = L_{2a+b} = L_d$ et $L_a = L_c = L'$.

Par [BrT84, A.6.b], il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ tels qu'on a la relation de commutation suivante :

$$\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b,\quad \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] = x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz\Big)\, x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2 y^\tau yz\Big)$$



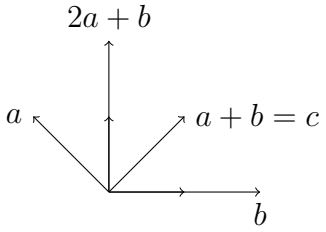
Il existe un paramètre $x \in L_c$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. On choisit $z \in L_b$ tel que $\omega(z) = l_b$. Ce qui est possible car $l_b \in \Gamma_b = \Gamma_{L_b}$. On pose $y = \varepsilon_1 x z^{-1} \in L' = L_a$. Alors $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z) \geq l_c - l_b = l_a$ et $x = \varepsilon_1 yz$. La racine $2a+b$ est non divisible et on a $\omega(y^\tau yz) = 2\omega(y) + \omega(z) \geq 2l_a + l_b$. On pose alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et $v'' = x_{2a+b}(-\varepsilon_2 y^\tau yz)$. Donc $v'' \in U_{2a+b,2l_a+l_b}$. Ainsi $u = [v, v']v''$.

Cas $d' = 2$, les racines a, c sont courtes, b est longue et divisible :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_c = L'$.

Par [BrT84, A.6.c], il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ tels qu'on a la relation de commutation suivante :

$$\begin{aligned} \forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b^0, \\ \Big[x_a(y), x_{\frac{b}{2}}(0,z)\Big] &= x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz\Big) \\ &\quad x_{a+\frac{b}{2}}\Big(0, \varepsilon_2 y^\tau yz\Big) \end{aligned}$$



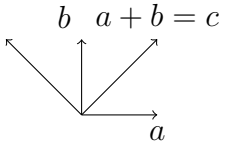
Il existe un paramètre $x \in L_c$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. Par le lemme 1.3.8, on a $l_b \in \Gamma_b = \omega(L'^{0\times})$. Donc, on peut choisir $z \in L_{\frac{b}{2}}^0 = L'^0$ tel que $\omega(z) = l_b$. On pose $y = \varepsilon_1 x z^{-1} \in L_a = L'$. Alors $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z) \geq l_c - l_b = l_a$ et $x = \varepsilon_1 yz$. La racine $2a+b$ est divisible et on peut vérifier que $\omega(\varepsilon_2 y^\tau yz) = 2\omega(y) + \omega(z) \geq 2l_a + l_b$. On pose alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et $v'' = x_{a+\frac{b}{2}}(0, -\varepsilon_2 y^\tau yz)$. Ainsi $u = [v, v']v''$.

Cas $d' = 2$, les racines a, b sont courtes, c est longue et non divisible :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_b = L'$ et $L_c = L_d$.

Par [BrT84, A.6.b], il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel qu'on a la relation de commutation suivante :

$$\begin{aligned} \forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b, \\ \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] &= x_{a+b}\Big(\varepsilon(yz + {}^\tau y^\tau z)\Big) \end{aligned}$$



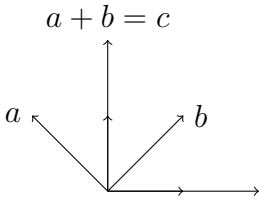
Il existe un paramètre $x \in L_c$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. On choisit $z \in L_b = L$ tel que $\omega(z) = l_b$. Ceci est possible car $l_b \in \Gamma_b$. On pose $y = \frac{\varepsilon}{2} x z^{-1} \in L_a = L'$. Ceci a un sens car p ne divise pas $d' = 2$, donc $2 \in \mathcal{O}_K^\times$. Alors $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z) \geq l_c - l_b = l_a$ et $\varepsilon \mathrm{Tr}(yz) = \frac{x}{2} + \frac{{}^\tau x}{2} = x$ car $x \in L_d$. On pose alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et $v'' = 1$. Ainsi $u = [v, v']v''$.

Cas $d' = 2$, les racines a, b sont courtes, c est longue et divisible :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_b = L_{\frac{c}{2}} = L'$.

Par [BrT84, A.6.c], il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel qu'on a la relation de commutation suivante :

$$\begin{aligned} \forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b, \\ \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] &= x_{\frac{a+b}{2}}\Big(0, \varepsilon(yz - {}^\tau y^\tau z)\Big) \end{aligned}$$



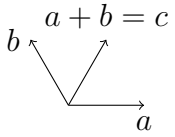
Il existe un paramètre $x \in L_{\frac{\varepsilon}{2}}^0 = L'^0$ tel que $u = x_{\frac{\varepsilon}{2}}(0,x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. On choisit $z \in L_b = L'$ tel que $\omega(z) = l_b$. Ce qui est possible car $l_b \in \Gamma_b$. On pose $y = \frac{\varepsilon}{2} x z^{-1} \in L_a = L'$. Ceci est possible car p ne divise pas $d' = 2$, donc $2 \in \mathcal{O}_K^\times$. Ainsi $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z) \geq l_c - l_b = l_a$ et $\varepsilon\left(yz - {}^\tau y^\tau z\right) = \frac{x - {}^\tau x}{2} = x$ car $x + {}^\tau x = 0$. On a alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et $v'' = 1$. Donc $u = [v, v']v''$.

Cas $d' = 2$, les racines a, b, c sont courtes, a, b sont non multipliables :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_b = L_c = L'$.

Par [BrT84, A.6.b], il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel qu'on a la relation de commutation suivante :

$$\begin{aligned} &\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b, \\ &\quad \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] \quad = \quad x_{a+b}\Big(\varepsilon yz\Big) \end{aligned}$$



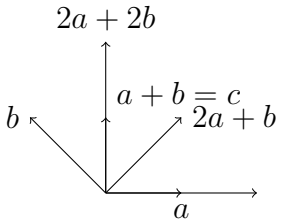
Il existe un paramètre $x \in L_c$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. On choisit $z \in L_b = L$ tel que $\omega(z) = l_b$. On pose $y = \varepsilon x z^{-1} \in L_a = L'$. Alors $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z) \geq l_c - l_b = l_a$ et $x = \varepsilon yz$. On a donc $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et $v'' = 1$. Ainsi $u = [v, v']v''$.

Cas $d' = 2$, les racines a, b, c sont courtes, b est non multipliable et a est multipliable :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_b = L_c = L'$.

Par [BrT84, A.6.c], il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ tel qu'on a la relation de commutation suivante :

$$\begin{aligned} &\forall (y, y') \in H(L_a, L_{2a}),\ \forall z \in L_b, \\ &\Big[x_a(y, y'), x_b(z)\Big] \quad = \quad x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz, y' z^\tau z\Big) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2 z y'\Big) \end{aligned}$$



Il existe un paramètre $(x, x') \in H(L_c, L_{2c})$ tel que $u = x_c(x, x')$ et $\omega(x') \geq 2l_c$. On choisit $z \in L_b$ tel que $\omega(z) = l_b$. Ceci est possible car $l_b \in \Gamma_b$. On pose $y = \varepsilon_1 x z^{-1} \in L$ et $y' = x' z^{-1 \tau} z^{-1}$. Alors on a $y^\tau y = y' + {}^\tau y'$ et $\omega(y') = \omega(x') - 2\omega(z) \geq 2l_c - 2l_b = 2l_a$. Donc $(y, y') \in H(L_a, L_{2a})_{l_a}$. De plus $(x, x') = (\varepsilon_1 yz, y' z^\tau z)$. La racine $2a + b$ est non multipliable, non divisible, et on peut vérifier que $\omega(\varepsilon_2 z y') = \omega(y') + \omega(z) \geq 2l_a + l_b$. On a donc $v = x_a(y, y')$, $v' = x_b(z)$ et $v'' = x_{2a+b}(-\varepsilon_2 x'^\tau z^{-1})$. Ainsi $u = [v, v']v''$.

Cas $d' = 2$, les racines a, b, c sont courtes a, b et multipliables :

Ce cas où a et b sont toutes deux multipliables a été exclu par hypothèse (et c'est le seul). On verra pourquoi dans la remarque 4.4.3.

Désormais, on suppose que $d' = 3$. Ceci ne se produit que pour les formes trialitaires de D_4.

Cas $d' = 3$, les racines a, c sont courtes et b est longue :

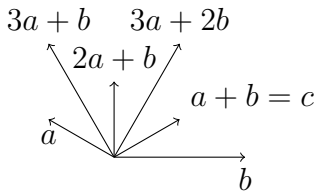
Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_c = L_{2a+b} = L'$ et $L_b = L_{3a+b} = L_{3a+2b} = L_d$.

On note $\tau \in \Sigma_d$ un élément relevant un élément d'ordre 3 dans le groupe quotient Σ_d / Σ_0. Pour tout $y \in L'$, on note $\Theta(y) = {}^\tau y^{\tau^2} y$ et $\mathrm{N}(y) = y\Theta(y)$. Par [BrT84, A.6.d], il

existe un entier $\eta \in \{1,2\}$ et quatre signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{-1,1\}$ tels qu'on a la relation de commutation suivante :

$\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b,$

$$\begin{aligned}\Big[x_a(y), x_b(z)\Big] &= x_{a+b}\Big(\varepsilon_1 yz\Big)\\ &\quad x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2\Theta(y)z\Big)\\ &\quad x_{3a+b}\Big(\varepsilon_3\mathrm{N}(y)z\Big)\\ &\quad x_{3a+2b}\Big(\varepsilon_4\eta\mathrm{N}(y)z^2\Big)\end{aligned}$$



Il existe un paramètre $x \in L_c = L'$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. On choisit $z \in L_b = L_d$ tel que $\omega(z) = l_b$. Ceci est possible car $l_b \in \Gamma_b$. On pose $y = \varepsilon_1 xz^{-1} \in L_a = L'$. Alors $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z) \geq l_c - l_b = l_a$ et $x = \varepsilon_1 yz$. La racine $2a+b$ est courte et le paramètre $\varepsilon_2\Theta(y)z \in L'$ satisfait $\omega(\varepsilon_2{}^{\tau}y^{\tau^2}yz) = 2\omega(y)+\omega(z) \geq 2l_a+l_b$. La racine $3a+b$ est longue et le paramètre $\varepsilon_3\mathrm{N}(y)z \in L_d$ satisfait l'égalité $\omega(\varepsilon_3{}^{\tau}y^{\tau^2}yz) = 3\omega(y)+\omega(z) \geq 3l_a+l_b$. La racine $3a+2b$ est longue et le paramètre $\eta\varepsilon_4 z^2\mathrm{N}(y) \in L$ satisfait $\omega(\eta\varepsilon_4 z^2 y^{\tau}y^{\tau^2}y) = \omega(\eta) + 3\omega(y) + 2\omega(z) \geq 3l_a + 2l_b$.

On pose alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et

$$v'' = x_{3a+2b}\Big(-\eta\varepsilon_4\mathrm{N}(y)z^2\Big)x_{3a+b}\Big(-\varepsilon_3\mathrm{N}(y)z\Big)x_{2a+b}\Big(-\varepsilon_2\Theta(y)z\Big)$$

Ainsi $v'' \in U_{2a+b,2l_a+l_b}U_{3a+b,3l_a+l_b}U_{3a+2b,3l_a+2l_b}$. Donc $u = [v,v']v''$

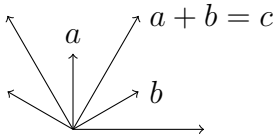
Cas $d' = 3$, les racines a, b sont courtes et c est longue :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_b = L'$ et $L_c = L_d$.

On choisit un élément $\tau \in \Sigma_d$ relevant un élément d'ordre 3 dans le groupe quotient Σ_d/Σ_0. Pour tout $y \in L'$, on pose $\mathrm{Tr}(y) = y + {}^{\tau}y + {}^{\tau^2}y$. Par [BrT84, A.6.d], il existe un signe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que :

$\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b,$

$$\Big[x_a(y), x_b(z)\Big] = x_{a+b}\Big(\varepsilon\mathrm{Tr}(yz)\Big)$$



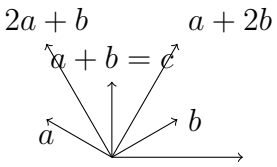
Il existe un paramètre $x \in L_c = L_d$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. On choisit $z \in L_b = L'$ tel que $\omega(z) = l_b$. Ce qui est possible car $l_b \in \Gamma_b$. On pose $y = \frac{\varepsilon}{3}xz^{-1} \in L_a = L$. Ceci est possible car p ne divise pas $3 = d'$, donc $3 \in \mathcal{O}_K^{\times}$. Ainsi $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z) \geq l_c - l_b = l_a$ et $x = \varepsilon\mathrm{Tr}(yz)$. On pose alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et $v'' = 1$. Donc $u = [v,v']v''$.

Cas $d' = 3$ et les racines a, b, c sont courtes :

Par la proposition 1.1.20, on a $L_a = L_b = L_c = L'$ et $L_{2a+b} = L_{a+2b} = L_d$.

Soit $\tau \in \Sigma_d$ un élément relevant un élément d'ordre 3 dans le groupe quotient Σ_d/Σ_0. Pour tout $y \in L'$, on note $\Theta(y) = {}^{\tau}y^{\tau^2}y \in L'$ et $\mathrm{Tr}(y) = y + {}^{\tau}y + {}^{\tau^2}y \in L_d$ et $\mathrm{N}(y) = y\Theta(y) \in L_d$. Pour tout $y, z \in L'$, on note $(y * z) = \Theta(y+z) - \Theta(y) - \Theta(z) = {}^{\tau}y^{\tau^2}z + {}^{\tau^2}y^{\tau}z$. Par [BrT84, A.6.d], il existe trois signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1,1\}$ tels qu'on a la relation de commutation :

$$\begin{array}{l}\forall y \in L_a,\ \forall z \in L_b,\\ \Big[x_a(y), x_b(z)\Big] \end{array} \begin{array}{rl} = & x_{a+b}\Big(\varepsilon_1(y*z)\Big)\\ & x_{2a+b}\Big(\varepsilon_2 \mathrm{Tr}\Big(\Theta(y)z\Big)\Big)\\ & x_{a+2b}\Big(\varepsilon_3 \mathrm{Tr}\Big(y\Theta(z)\Big)\Big)\end{array}$$



On choisit $z \in L_b = L'$ tel que $\omega(z) = l_b$, ce qui est possible car $l_b \in \Gamma_b$. Comme p ne divise pas 2, on a $2 \in \mathcal{O}_K^\times$ et on peut poser :

$$y = \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \frac{\mathrm{Tr}(xz) - 2xz}{\Theta(z)} = \frac{\varepsilon_1}{2\mathrm{N}(z)} \Big(z\mathrm{Tr}(xz) - 2xz^2\Big)$$

de sorte que $(y * z) = \varepsilon_1 x$. En effet :

$$\begin{aligned}(y*z) &= \frac{\varepsilon_1}{2\mathrm{N}(z)} \Big({}^{\tau}z\mathrm{Tr}(xz) - 2^{\tau}x^{\tau}z^2\Big)\,{}^{\tau^2}z + \frac{\varepsilon_1}{2\mathrm{N}(z)} \Big({}^{\tau^2}z\mathrm{Tr}(xz) - 2^{\tau^2}x^{\tau^2}z^2\Big)\,{}^{\tau}z\\ &= \frac{\varepsilon_1\Theta(z)}{2\mathrm{N}(z)} \Big(\mathrm{Tr}(xz) - 2^{\tau}x^{\tau}z + \mathrm{Tr}(xz) - 2^{\tau^2}x^{\tau^2}z\Big)\\ &= \frac{\varepsilon_1}{2z}\,(2xz)\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl}\omega(y) = & \omega\Big(\mathrm{Tr}(xz) - 2xz\Big) - \omega\Big(\Theta(z)\Big)\\ \geq & \min\Big(\omega\Big(\mathrm{Tr}(xz)\Big), \omega(x) + \omega(z)\Big) - 2\omega(z)\\ \geq & \Big(\omega(x) + \omega(z)\Big) - 2\omega(z)\\ = & \omega(x) - \omega(z)\\ \geq & l_c - l_a = l_b\end{array}$$

En fait, on a $\omega(y) = \omega(x) - \omega(z)$ car on déduit l'inégalité $\omega(x) \geq \omega(y) + \omega(z)$ de la formule $x = \varepsilon_1(y * z)$. La racine $2a + b$ est longue et on peut vérifier que le paramètre $\varepsilon_2 \mathrm{Tr}\Big(\Theta(y)z\Big) \in L_d$ satisfait $\omega\Big(\varepsilon_2 \mathrm{Tr}\Big(\Theta(y)z\Big)\Big) \geq 2\omega(y) + \omega(z) = 2l_a + l_b$. La racine $a + 2b$ est longue et on peut vérifier que le paramètre $\varepsilon_3 \mathrm{Tr}\Big(y\Theta(z)\Big) \in L_d$ satisfait $\omega\Big(\varepsilon_3 \mathrm{Tr}\Big(y\Theta(z)\Big)\Big) \geq \omega(y) + 2\omega(z) = l_a + 2l_b$. On pose alors $v = x_a(y)$, $v' = x_b(z)$ et

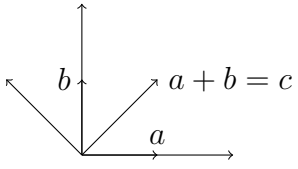
$$v'' = x_{a+2b}\Big(-\varepsilon_3 \mathrm{Tr}\Big(y\Theta(z)\Big)\Big) x_{2a+b}\Big(-\varepsilon_2 \mathrm{Tr}\Big(\Theta(y)z\Big)\Big)$$

Ainsi $v'' \in U_{2a+b,2l_a+l_b} U_{a+2b,l_a+2l_b}$. Donc $u = [v, v']v''$.

Ainsi on a traité tous les cas possibles. □

4.4.3 Remarque. Dans le cas qu'on a exclu où les racines a et b sont toutes deux multipliables, par [BrT84, A.6.c], il existe un signe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel qu'on a la relation de commutation suivante :

$$\begin{array}{l}\forall (y, y') \in H(L_a, L_{2a}),\\ \forall (z, z') \in H(L_b, L_{2b}),\\ \Big[x_a(y, y'), x_b(z, z')\Big] \end{array} \begin{array}{rl} = & x_{a+b}\Big(\varepsilon yz\Big)\end{array}$$



Il existe un paramètre $x \in L_c = L'$ tel que $u = x_c(x)$ et $\omega(x) \geq l_c$. Le problème est que, pour une racine multipliable $a \in \Phi$, l'ensemble des valeurs Γ_a ne contrôle pas entièrement la valuation du premier terme y du paramètre $(y, y') \in H(L_a, L_{2a})$. On peut montrer que, lorsque $l_a \notin \Gamma'_a$, on a $\omega(y) > l_a$. Donc l'inclusion $[U_{a,l_a}, U_{b,l_b}] \subset U_{a+b,l_a+l_b}$ n'est pas, en général, une égalité.

4.4.2 Génération d'éléments unipotents grâce aux relations de commutation entre sous-groupes valués des groupes radiciels

Dans le corollaire 4.3.18, on a obtenu que $\mathrm{Frat}(P)$ est un sous-groupe d'un certain pro-p-groupe Q écrit en termes de la donnée de groupes radicielle valuée. On veut avoir une égalité lorsque c'est possible. Puisque $\mathrm{Frat}(P) = [P, P]P^p$, il suffit de trouver une famille génératrice de Q constituée de puissances p-ièmes et de commutateurs d'éléments pris dans P. En considérant, plus généralement, un sous-groupe compact ouvert H de $G(K)$, en section 4.4.2.1, on va faire une récurrence sur la hauteur des racines positives de la plus haute racine jusqu'aux racines simples pour fournir des bornes de valuation des sous-groupes de groupes radiciels contenus dans $[H, H]$; en section 4.4.2.2, on va, en outre, considérer la longueur des racines pour fournir de telles bornes pour le système de racines tout entier. En section 4.4.2.3, on revient alors à la situation du sous-groupe de Frattini $H = \mathrm{Frat}(P) = \overline{P^p[P, P]} \supset [P, P]$ de P.

Afin d'effectuer une récurrence sur le système de racines relatif, le lemme suivant, formulé en termes de combinatoire de Lie, explique comment obtenir, pas à pas, toutes les racines comme combinaison linéaire à coefficients entiers de la plus basse racine (l'opposée de la plus haute racine) et des racines simples.

4.4.4 Lemme. *Soient Φ un système de racines irréductible de rang supérieur ou égal à 2 et Δ une base de racines simples dans Φ, associée à un ordre Φ^+. Soit h la plus haute racine pour cet ordre.*

(1) Soit $\beta \in \Phi^+ \setminus (\Delta \cup 2\Delta)$ une racine positive qui n'est pas multiple d'une racine simple. Alors, il existe une racine simple $\alpha \in \Delta$ et une racine positive $\beta' \in \Phi^+$ telles que $\beta = \alpha + \beta'$ et les racines α, β' ne sont pas colinéaires.

(2) Soit $\gamma \in \Phi^- \setminus \{-h\}$. Il existe une racine positive $\beta \in \Phi^+$ et une racine négative $\gamma' \in \Phi^-$ telles que $\gamma = \beta + \gamma'$ et les racines β, γ' ne sont pas colinéaires.

(3) Soit $\alpha \in \Delta$. Il existe une racine simple $\beta \in \Delta$ telle que $\alpha + \beta$ est une racine positive. De plus, les racines $\alpha + \beta \in \Phi^+$ et $-\beta$ ne sont pas colinéaires.

Démonstration. En reprenant les notations de [Bou81, VI.1.3], on note V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par Δ contenant Φ et $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl.

(1) Soit $\beta \in \Phi^+ \setminus \Delta$ une racine positive non simple. Comme Δ est une base de l'espace vectoriel (euclidien) V et comme $\beta \in \Phi^+$ est dans le cône $\mathbb{Z}_{>0}\Delta$ engendré par Δ, il existe une racine simple $\alpha \in \Delta$ telle que $(\alpha|\beta) > 0$. Par [Bou81, VI.1.3 Corollaire], on a $\beta' = \beta - \alpha \in \Phi$ car on a exclu le cas où $\alpha = \beta$ en supposant que $\beta \notin \Delta$. De plus, β' est une racine positive car ses coefficients entiers lorsqu'on l'écrit dans la base Δ sont tous de

même signe (donc tous positifs). Enfin, β' et α ne sont pas colinéaires car on a supposé que β n'est pas multiple d'une racine simple. Ainsi $\beta' = \beta - \alpha$ satisfait l'assertion (1).

(2) Soit $\gamma \in \Phi^- \setminus \{-h, -\frac{h}{2}\}$. Si $(-h|\gamma) > 0$, alors la somme $\beta = h + \gamma \in \Phi^+$ est une racine positive. De plus, $-h$ et β ne sont pas colinéaires car on a supposé que γ et h ne sont pas colinéaires. Ainsi β et $\gamma' = -h$ satisfont l'assertion (2). Sinon, on a nécessairement l'égalité $(-h|\gamma) = 0$ d'après [Bou81, VI.1.8 Proposition 25]. Ainsi, il existe une racine simple $\alpha \in \Delta$ telle que $(\alpha|\gamma) > 0$, car les racines $\alpha \in \Delta$ forment une base de l'espace euclidien V et $-h \neq 0$. Les racines γ et α ne sont pas colinéaires car, si elles l'étaient, on devrait avoir $\gamma \in \mathbb{R}_+\alpha$ suivant l'hypothèse $(\gamma|\alpha) > 0$; et ceci contredit $\gamma \in \Phi^-$. Ainsi $\gamma' = \gamma - \alpha \in \Phi^-$ est une racine négative. Donc γ' et $\beta = \alpha$ satisfont l'assertion (2).

Soit $\gamma = -\frac{h}{2}$. En particulier, ceci n'arrive que si Φ est non réduit. On peut alors appliquer la même méthode dans Φ_{nd}, car la racine $-\frac{h}{2}$ est une racine courte de Φ_{nd}, donc elle ne peut pas être colinéaire à la plus haute racine de Φ_{nd}.

(3) Soit $\alpha \in \Delta$. Toute racine simple β reliée à α par une arête du diagramme $\mathrm{Dyn}(\Delta)$ satisfait (3). Or une telle racine simple existe car on a supposé Φ irréductible de rang supérieur ou égal à 2. □

4.4.5 Lemme. *Soient Φ un système de racines irréductible de rang supérieur ou égal à 2 et Δ une base de racines simples dans Φ, associée à un ordre Φ^+. Soit h la plus haute racine pour cet ordre. Pour toute racine $\gamma \in \Phi$, il existe des entiers positifs ou nuls $(n_\alpha(\gamma))_{\alpha\in\Delta}$ tels que :*

$$\gamma = -h + \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(\gamma)\alpha$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la hauteur. Si $\gamma = -h$, c'est clair.

Hérédité : Si $\gamma \in \Phi$, par 4.4.4, il existe $\beta \in \Phi^+$ et $\gamma' \in \Phi$ telles que $\gamma = \gamma' + \beta$. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe des entiers positifs ou nuls $(n_\alpha(\gamma'))$ tels que $\gamma' = -h + \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(\gamma')\alpha$. D'après [Bou81, VI.1.6 Théorème 3], il existe des entiers positifs ou nuls $(n_\alpha(\beta))$ tels que $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(\beta)\alpha$. Donc, la propriété est satisfaite pour $n_\alpha(\gamma) = n_\alpha(\gamma') + n_\alpha(\beta)$. □

4.4.6 Définition. Soit $f : \Phi \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **concave** si elle satisfait aux axiomes suivants :

(C0) $f(2a) \leq 2f(a)$ pour toute racine $a \in \Phi$ telle que $2a \in \Phi$;

(C1) $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ pour toutes racines $a, b \in \Phi$ telles que $a + b \in \Phi$;

(C2) $0 \leq f(a) + f(-a)$ pour toute racine $a \in \Phi$.

Bien que ces axiomes ressemblent à une propriété de convexité, ils correspondent en fait à des relations de concavité en termes de valuations des groupes radiciels.

4.4.7 Exemple. Pour toute partie non vide $\Omega \subset \mathbb{A}$, l'application $f_\Omega : a \mapsto \sup\{-a(x),\ x \in \Omega\}$ est concave. Plus tard, on appliquera les propositions 4.4.9 et 4.4.12 aux valeurs $l_a = f_{\mathbf{c}_{\mathrm{af}}}(a)$.

4.4.2.1 Bornes pour les groupes radiciels positifs

Soient $(l_a)_{a\in\Phi}$ des valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit les valeurs suivantes $(l'_b)_{b\in\Phi^+}$ en fonction des l_a, qui vont jouer le rôle de bornes aux valuations des groupes radiciels associés aux racines positives.

4.4.8 Notation. Pour toute racine positive $b \in \Phi^+$, on peut écrire de manière unique $b = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(b)\alpha$ où les $n_a(b) \in \mathbb{N}$ sont des entiers positifs (non tous nuls). On pose $l'_b = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(b) l_\alpha$.

En utilisant le lemme 4.4.4, on va pouvoir effectuer plusieurs récurrences sur les différents systèmes de racines pour obtenir des bornes, déterminées par la proposition 4.4.2, sur les valuations des sous-groupes de groupes radiciels contenus dans le sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(P)$. La première étape, en termes de racines positives, est la suivante :

4.4.9 Proposition. *Soient $(l_a)_{a\in\Phi}$ des valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute racine simple $a \in \Delta$, on a $l_a \in \Gamma_a$.*

(1) Alors $l'_b \in \Gamma_b$ pour toute racine positive $b \in \Phi^+$.

(2) On suppose, de plus, que l'application $a \mapsto l_a$ est concave. Alors, on a l'inégalité : $l'_b \geq l_b$ pour toute racine positive $b \in \Phi^+$.

(3) On suppose, en outre, que l'hypothèse 4.4.1, portant sur p, est vérifiée. Soit H un sous-groupe (compact ouvert) de $G(K)$ contenant les groupes U_{a,l_a} pour $a \in \Phi$. Alors pour toute racine $b \in \Phi^+ \setminus \Delta$, le groupe dérivé $[H, H]$ contient les groupes U_{b,l'_b}.

Démonstration. (1) On applique la proposition 1.1.20 et les lemmes 1.3.8 et 1.3.7 dans les différents cas.

Premier cas : Φ est un système de racines réduit ou L'/L_d est non ramifiée. Pour toute racine $b \in \Phi^+$, l'ensemble de valeurs Γ_b de b est $\Gamma_{L'} = \Gamma_{L_d}$. Donc la somme $l'_b = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(b) l_a$ est un élément de $\Gamma_{L_d} = \Gamma_b$.

Deuxième cas : Φ est un système de racines réduit et L'/L_d est ramifiée. Pour toute racine longue de Φ, son ensemble de valeurs est le groupe $d'\Gamma_{L'} = \Gamma_{L_d}$. Pour toute racine courte de Φ, son ensemble de valeurs est le groupe $\Gamma_{L'}$. Donc, pour toute racine courte $b \in \Phi$, la somme $l'_b = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(b) l_\alpha$ est un élément de $\Gamma_{L'} = \Gamma_b$.

Soit $b \in \Phi$ une racine longue relative provenant d'une racine absolue $\beta \in \widetilde{\Phi}$. On écrit $\beta = \sum_{\widetilde{\alpha}\in\widetilde{\Delta}} n'_{\widetilde{\alpha}}(\beta)\widetilde{\alpha}$. Alors $n_\alpha(b) = \sum_{\widetilde{\alpha}\in\alpha} n'_{\widetilde{\alpha}}(\beta)$. De plus, l'application $\widetilde{\alpha} \mapsto n'_{\widetilde{\alpha}}(\beta)$ est constante sur les classes $\alpha \in \Delta$ car β est Σ_d-invariant et $\alpha = \Sigma_d{\cdot}\widetilde{\alpha}$ est une orbite. Ainsi, pour toute racine simple courte α provenant de $\widetilde{\alpha}$ prise dans la même composante irréductible que β, on obtient $n_\alpha(b) = d' n'_{\widetilde{\alpha}}(\beta)$. Par conséquent, $n_\alpha(b) l_\alpha = n'_{\widetilde{\alpha}}(\beta) d' l_\alpha \in d'\Gamma_{L'} = \Gamma_{L_d}$. Pour toute racine simple longue α, on a $l_\alpha \in \Gamma_{L_d}$. Donc, la somme $l'_b = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(b) l_\alpha$ est un élément de $\Gamma_{L_d} = \Gamma_b$.

Troisième cas : Φ est un système de racines non réduit. L'ensemble de valeurs de toute racine multipliable est $\frac{1}{2}\Gamma_{L'}$. L'ensemble de valeurs de toute racine non multipliable et non divisible est $\Gamma_{L'}$. Pour toute racine multipliable $b \in \Phi^+$, la somme l'_b est un élément de $\frac{1}{2}\Gamma_{L'} = \Gamma_b$. On numérote par $a_1, \ldots, a_{l-1}$ les racines simples non multipliables et par a_l la racine simple multipliable. Toute racine non multipliable et non divisible $b \in \Phi^+$ peut s'écrire sous la forme $b = \sum_{j=1}^{l} n_j(b) a_j$ avec $n_l \in \{0, 2\}$. On a $n_j(b) l_{a_j} \in \Gamma_{a_j} = \Gamma_L$ et $n_l(b) l_{a_l} \in 2\Gamma_{a_l} = \Gamma_{L'}$. Donc la somme l'_b est un élément de $\Gamma_{L'} = \Gamma_b$.

(2) Pour toute racine positive $b \in \Phi^+$, on applique récursivement le lemme 4.4.4(1) à Φ^+ afin d'écrire $b = \sum_{j=1}^{N} a_j$ où les $a_j \in \Delta$ sont des racines simples (avec éventuellement des répétitions) et $N \in \mathbb{N}^*$ est tel que $b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ est une racine (positive) pour tout $n \in [1, N]$. Par récurrence, on obtient que $l'_{b_n} \geq l_{b_n}$. En effet, pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

on a $l'_{b_{n+1}} = l'_{b_n} + l_{a_{n+1}} \geq l_{b_n} + l_{a_{n+1}}$ par hypothèse de récurrence ; et par l'axiome (C1) de concavité, on en déduit l'inégalité $l_{b_n} + l_{a_{n+1}} \geq l_{b_n + a_{n+1}} = l_{b_{n+1}}$. Ainsi, on a bien $l_b \leq l'_b$.

(3) Par conséquent, on a l'inclusion $U_{b,l'_b} \subset U_{b,l_b}$. On procède par récurrence forte décroissante sur la hauteur dans le système de racines Φ relativement à la base Δ.

Initialisation : Soit h la plus haute racine de Φ. Pour le groupe U_{h,l'_h}, on sait par le lemme 4.4.4(1) qu'il existe une racine simple $a \in \Delta$ et une racine positive $b \in \Phi^+$ non colinéaire à a, non toutes deux multipliables, telles que $h = a + b$. Soit $u \in U_{h,l'_h}$. On a l'inclusion des groupes $U_{b,l'_b} \subset U_{b,l_b}$. On sait par la proposition 4.4.2, qu'il existe des éléments $v \in U_{a,l_a}$, $v' \in U_{b,l'_b}$ et $v'' \in \prod_{r,s \in \mathbb{N}^*; r+s \geq 2} U_{ra+sb, rl_a + sl'_b}$ tels que $u = [v, v']v''$. Mais, pour tout couple d'entiers strictement positifs (r, s) tels que $r + s \geq 2$, le caractère $ra + sb$ n'est pas une racine car ceci contredirait la maximalité de h. Donc $v'' = 1$. Ainsi, on a $U_{h,l'_h} \subset [H, H]$.

Hérédité : Soit $c \in \Phi^+ \setminus \Delta$. Par le lemme 4.4.4(1), on écrit $c = a + b$ où $a \in \Delta$ et $b \in \Phi^+$. Soit $u \in U_{c,l'_c}$. On sait par la proposition 4.4.2, qu'il existe des éléments $v \in U_{a,l_a}$, $v' \in U_{b,l'_b}$ et $v'' \in \prod_{r,s \in \mathbb{N}^*; r+s \geq 2} U_{ra+sb, rl_a + sl'_b}$ tels que $u = [v, v']v''$. Pour tout couple d'entiers strictement positifs (r, s) tels que $r + s \geq 2$, si le caractère $ra + sb$ est une racine, alors on a $rl_a + sl'_b = l'_{ra+sb}$ par définition des l'. De plus, la hauteur de $ra + sb$ est supérieure à celle de c. Par hypothèse de récurrence, le groupe $U_{ra+sb, l'_{ra+sb}}$ est un sous-groupe de $[H, H]$, donc $v'' \in [H, H]$. Par conséquent, on a $U_{c,l'_c} \subset [H, H]$. □

4.4.2.2 Bornes pour les groupes radiciels négatifs

Afin d'obtenir des résultats analogues pour les groupes radiciels des racines négatives, effectuer une récurrence sur la hauteur des racines semble ne plus fonctionner. En fait, on va considérer la longueur des racines au lieu de la hauteur. On rappelle que, dans la notation 4.3.2, on a défini un système de racines dual Φ^D purement en termes de combinatoire de Lie.

4.4.10 Lemme. *Soit Φ un système de racines irréductible réduit non simplement lacé de rang $l \geq 2$. Soit Δ une base définissant un ordre sur Φ et $\theta \in \Phi$ la racine (courte) telle que θ^D est la plus haute racine de Φ^D pour l'ordre donné par Δ^D. Alors, toute racine courte $c \in \Phi \setminus \{-\theta\}$ peut s'écrire $c = a + b$ où $a, b \in \Phi$ sont des racines non colinéaires telles que $a \in \Phi$ est courte et $b \in \Phi^+$. En particulier, toute racine courte est plus haute que $-\theta$.*

Démonstration. On va exhiber de telles racines, au cas par cas, grâce à une réalisation géométrique explicite du système de racines dans $\mathbb{R}^l$. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq l}$ la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^l$.

Φ est de type B_l avec $l \geq 2$:
Racines simples : $a_i = e_i - e_{i+1}$ où $1 \leq i < l$ et $a_l = e_l$
Racines courtes : $\pm e_i$ pour $1 \leq i \leq l$ et $\theta = e_1$
Pour toute racine courte $c \in \Phi \setminus \{-\theta\}$,

— si $c \in \Phi^+$, on l'écrit $c = e_i = a + b$ où $1 \leq i \leq l$, $a = -e_j$, $b = e_i + e_j$ et $j \neq i$;

— si $c \in \Phi^-$, on l'écrit $c = -e_i = a + b$ où $1 < i \leq l$, $a = -e_1$ et $b = e_1 - e_i$.

Φ est de type C_l avec $l \geq 3$:
Racines simples : $a_i = e_i - e_{i+1}$ où $1 \leq i < l$ et $a_l = 2e_l$
Racines courtes : $\pm e_i \pm e_j$ où $1 \leq i < j \leq l$ et $\theta = e_1 + e_2$
Pour toute racine courte $c \in \Phi \setminus \{-\theta\}$,

— si $c = e_i \pm e_j$ où $1 \leq i < j \leq l$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = -e_i \pm e_j$ et $b = 2e_i$;
— si $c = -e_i \pm e_j$ où $1 < i < j \leq l$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = -e_1 - e_i$ et $b = e_1 \pm e_i$;
— si $c = -e_1 \pm e_j$ où $2 < j \leq l$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = -e_1 - e_2$ et $b = e_2 \pm e_j$;
— si $c = -e_1 + e_2$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = -e_1 - e_3$ et $b = e_2 + e_3$.

Φ est de type F_4 :

Racines simples : $a_1 = e_2 - e_3$, $a_2 = e_3 - e_4$, $a_3 = e_4$ et $a_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$
Plus haute racine : $h = e_1 + e_2 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 2a_4$
Racines courtes : $\pm e_i$ où $1 \leq i \leq 4$ et $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ et $\theta = e_1$
Pour toute racine courte $c \in \Phi \setminus \{-\theta\}$,

— si $c = e_1$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$ et $b = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$;
— si $c = \pm e_i$ où $1 < i \leq 4$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = \frac{1}{2}(-e_1 + \pm e_i - e_j - e_k)$ et $b = \frac{1}{2}(e_1 + \pm e_i + e_j + e_k)$ où $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$;
— si $c = \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = \frac{1}{2}(-e_1 \mp e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ et $b = e_1 \pm e_2$;
— si $c = \frac{1}{2}(-e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$, on l'écrit $c = a + b$ où $a = -e_1$ et $b = \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$.

Φ est de type G_2 :

Racines simples : α, β où α est courte et β est longue
Plus haute racine : $h = 3\alpha + 2\beta$
On a $\theta = 2\alpha + \beta$. On résume les choix pour toutes les racines courtes, sauf pour $-\theta$, au cas par cas, dans le tableau suivant :

c	$2\alpha + \beta$	$\alpha + \beta$	α	$-\alpha$	$-\alpha - \beta$
a	α	$-\alpha$	$-\alpha - \beta$	$-2\alpha - \beta$	$-2\alpha - \beta$
b	$\alpha + \beta$	$2\alpha + \beta$	$2\alpha + \beta$	$\alpha + \beta$	α

□

On définit $(\delta_c)_{c\in\Phi}$, $\Phi^\delta_{\mathrm{nd}}$, θ et h comme dans la notation 4.3.4. Soient $(l_a)_{a\in\Phi}$ des valeurs quelconques dans $\mathbb{R}$. On définit les valeurs suivantes $(l''_c)_{c\in\Phi}$ en fonction des l_a, qui deviendront des bornes pour les valuations de chaque groupe radiciel.

4.4.11 Notation. Pour toute racine non divisible $c \in \Phi_{\mathrm{nd}}$, grâce au lemme 4.4.5 appliqué dans le système de racines $\Phi^\delta_{\mathrm{nd}}$, on écrit :

$$c^\delta = -\theta^\delta + \sum_{\alpha^\delta \in \Delta^\delta} n'_\alpha(c)\alpha^\delta \in \Phi^\delta$$

avec $n'_\alpha(c) \in \mathbb{N}$. On définit des valeurs $l''_c \in \mathbb{R}$ par :

$$\delta_c l''_c = \delta_{-\theta} l_{-\theta} + \sum_{\alpha\in\Delta} \delta_\alpha n'_\alpha(c) l_\alpha$$

De plus, pour toute racine multipliable $c \in \Phi$, on définit $l''_{2c} = 2l''_c$. On remarque que pour toute racine $c \in \Phi$, il existe des entiers $n_\alpha(c)$ for $\alpha \in \Delta$, uniquement déterminés par :

$$c = \sum_{\alpha\in\Delta} n_\alpha(c)\alpha$$

Ceci étend la notation 4.4.8.

Ces valeurs bornent supérieurement celles définissant les sous-groupes de groupes radiciels contenus dans le groupe dérivé $[H,H]$. En particulier, cette proposition nous donne des valeurs, y compris pour les racines simples, que nous n'avions alors pas traitées dans la proposition 4.4.9. On peut remarquer sur un exemple que, en général, ces valeurs ne sont pas optimales pour les racines positives non simples.

4.4.12 Proposition. *Soient $(l_a)_{a\in\Phi}$ des valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute racine simple $a\in\Delta$, on a $l_a\in\Gamma_a$ et que $l_{-\theta}\in\Gamma_{-\theta}$.*

(1) On a $l''_c\in\Gamma_c$ pour toute racine $c\in\Phi_{\mathrm{nd}}\setminus\{-\theta\}$ non divisible.

(2) On suppose, de plus, que l'application $a\mapsto l_a$ est concave. Pour toute racine $c\in\Phi$, on a $l''_c\geq l_c$; pour toute racine positive $b\in\Phi^+$, on a $l''_b\geq l'_b\geq l_b$.

(3) On suppose, en outre, que le système de racines irréductible Φ n'est pas de rang 1 et que l'hypothèse 4.4.1 est vérifiée. Soit H un sous-groupe (compact ouvert) de $G(K)$ contenant les sous-groupes U_{a,l_a} pour tout $a\in\Phi$. Si G est une forme trialitaire de D_4 (i.e. Φ est de type G_2 et $\delta_\theta=3$), alors on suppose de plus que $l'_\theta+l_{-\theta}\leq\omega(\varpi_{L'})$. Sous ces conditions, le groupe dérivé $[H,H]$ contient les sous-groupes U_{c,l''_c} pour toutes les racines $c\in\Phi\setminus\{-\theta\}$.

Démonstration. (1) Si Φ est un système de racines réduit, alors $\Phi^\delta=\Phi$ si l'extension L'/L_d est non ramifiée ; et $\Phi^\delta=\Phi^D$ si l'extension L'/L_d est ramifiée. Par la définition 4.3.3, pour toute racine $c\in\Phi$, l'entier δ_c est l'ordre du groupe quotient Γ_c/Γ_{L_d}, de sorte que $\delta_c\Gamma_c=\Gamma_{L_d}$. Ainsi, chaque terme $n'_\alpha(c)\delta_\alpha l_\alpha$ et $\delta_{-\theta}l_{-\theta}$ de la somme appartient au groupe Γ_{L_d}. Donc $\delta_c l''_c\in\Gamma_{L_d}=\delta_c\Gamma_c$, et on a bien $l''_c\in\Gamma_c$ pour toute racine $c\in\Phi$.

Si Φ est un système de racines non réduit, alors l'ensemble de valeurs de chaque racine multipliable est $\frac{1}{2}\Gamma_{L'}$ par le lemme 1.3.8 et l'ensemble de valeurs de chaque racine non multipliable et non divisible est $\Gamma_{L'}$. Pour toute racine non divisible $c\in\Phi$, la valeur $\delta_c l_c$ est un élément de $\Gamma_{L'}$, donc la somme l''_c l'est aussi. Si c est non multipliable, alors $\delta_c=1$, donc $l''_c\in\Gamma_{L'}=\Gamma_c$. Si c est multipliable, alors $\delta_c=2$ donc $l''_c\in\frac{1}{2}\Gamma_{L'}=\Gamma_c$.

(2) Dans la suite, pour toute racine $c\in\Phi_{\mathrm{nd}}$, on note $n_\alpha(c)$ et $n'_\alpha(c)$ les entiers définis dans la notation 4.4.11. On note, de plus, les entiers $n^\delta_\alpha(c)$ uniquement déterminés par l'écriture suivante dans la base Δ^δ : $c^\delta=\sum_{\alpha\in\Delta}n^\delta_\alpha(c)\alpha^\delta$. De l'unicité, pour toute racine simple $\alpha\in\Delta$, on déduit que $\delta_\alpha n^\delta_\alpha(c)=\delta_c n_\alpha(c)$ et que $n'_\alpha(c)=n^\delta_\alpha(\theta)-n^\delta_\alpha(c)\geq 0$ (c'est un entier positif ou nul).

Soit $b\in\Phi^+_{\mathrm{nd}}$ une racine positive non divisible. Dans l'espace vectoriel $V^*=\mathrm{Vect}(\Phi)$, on a :

$$\begin{aligned} b^\delta &= -\theta^\delta+\theta^\delta+\sum_{\alpha\in\Delta}n^\delta_\alpha(b)\alpha^\delta \\ &= -\theta^\delta+\sum_{\alpha\in\Delta}\left(n^\delta_\alpha(\theta)+n^\delta_\alpha(b)\right)\alpha^\delta \end{aligned}$$

Par définition de l''_b,l'_b,l'_θ, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_b l''_b &= \delta_\theta l_{-\theta}+\sum_{\alpha\in\Delta}\left(n^\delta_\alpha(b)+n^\delta_\alpha(\theta)\right)\delta_\alpha l_\alpha \\ &= \delta_\theta l_{-\theta}+\left(\sum_{\alpha\in\Delta}\delta_b n_\alpha(b)l_\alpha\right)+\left(\sum_{\alpha\in\Delta}\delta_\theta n_\alpha(\theta)l_\alpha\right) \\ &= \delta_\theta l_{-\theta}+\delta_b l'_b+\delta_\theta l'_\theta \end{aligned}$$

Donc $\delta_b(l''_b - l'_b) = \delta_\theta(l'_\theta + l_{-\theta})$. D'après la proposition 4.4.9(2), on a $l'_b \geq l_b$ pour toutes les racines positives et, en particulier, on a $l'_\theta \geq l_\theta$. Donc, en utilisant l'axiome (C2), on a $l'_\theta + l_{-\theta} \geq l_\theta + l_{-\theta} \geq 0$. Par conséquent, on a bien $l''_b \geq l'_b \geq l_b$.

Soit $b \in \Phi^+$ une racine multipliable. Alors $l''_{2b} = 2l''_b \geq l'_{2b} = 2l'_b \geq 2l_b$. Par l'axiome (C0), on a $2l_b \geq l_{2b}$, donc $l''_{2b} \geq l_{2b}$.

Soit $c \in \Phi^-_{\mathrm{nd}}$ une racine négative non divisible. On veut montrer que $l''_c \geq l_c$. On procède par récurrence sur la hauteur dans Φ_{nd}.

• **Premier cas : $\Phi^\delta_{\mathrm{nd}} = \Phi_{\mathrm{nd}}$.** Alors $\delta_\theta = 1$, $h = \theta$ et $\delta_c = 1$ pour toute racine $c \in \Phi$. Par définition, $l''_{-h} = l''_{-\theta} = l_{-\theta} = l_{-h}$.

Si $c \neq -\theta$, par le lemme 4.4.4(2), il existe $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ et $b \in \Phi^+_{\mathrm{nd}}$ tels que $c = a + b$. De l'égalité $c = -\theta + \sum_\alpha n'_\alpha(c)\alpha = -\theta + \sum_\alpha n'_\alpha(a)\alpha + \sum_\alpha n_\alpha(b)\alpha = a + b$, on déduit que $n'_\alpha(c) = n'_\alpha(a) + n_\alpha(b)$. Donc $l''_c = l''_a + l'_b \geq l_a + l'_b$ par hypothèse de récurrence. Par l'axiome (C1) et comme $l'_b \geq l_b$, on obtient $l''_c \geq l_a + l_b \geq l_{a+b} = l_c$.

• **Second cas : $\Phi^\delta_{\mathrm{nd}} = \Phi^D_{\mathrm{nd}} \neq \Phi_{\mathrm{nd}}$.** Alors $\delta_\theta = d'$.

On commence par effectuer une récurrence, initialisée par $l''_{-\theta} = l_{-\theta}$, sur la hauteur des racines courtes. On suppose que $c \neq -\theta$ est une racine courte dans Φ_{nd}. Par le lemme 4.4.10, il existe une racine courte $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ et une racine positive $b \in \Phi^+_{\mathrm{nd}}$ telle que $c = a + b$. Donc $\delta_a = \delta_c = \delta_\theta$. On a $\delta_\theta b = \delta_\theta(c - a) = c^\delta - a^\delta = -\theta^\delta + \sum_\alpha \delta_\alpha n'_\alpha(c) + \theta^\delta - \sum_\alpha \delta_\alpha n'_\alpha(a) = \sum_\alpha \delta_\alpha \Big(n'_\alpha(c) - n'_\alpha(a)\Big)$. Donc $\delta_\theta n_\alpha(b) = \delta_\alpha \Big(n'_\alpha(c) - n'_\alpha(a)\Big)$ pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \delta_c l''_c &= \delta_\theta l_{-\theta} + \textstyle\sum_\alpha \delta_\alpha n'_\alpha(c) l_\alpha \\ &= \Big(\delta_\theta l_{-\theta} + \textstyle\sum_\alpha \delta_\alpha n'_\alpha(a) l_\alpha\Big) + \sum_\alpha \delta_\alpha \Big(n'_\alpha(c) - n'_\alpha(a)\Big) l_\alpha \\ &= \delta_a l''_a + \delta_\theta l'_b \end{aligned}$$

Donc $l''_c = l''_a + l'_b \geq l_a + l'_b$ par hypothèse de récurrence. Par l'axiome (C1) et comme $l'_b \geq l_b$, on a $l''_c \geq l_a + l_b \geq l_{a+b} = l_c$.

Maintenant, on va faire une récurrence sur la hauteur pour toutes les racines de Φ_{nd}. Initialisation : on considère la plus basse racine $-h$. Comme Φ_{nd} est non simplement lacé, il existe deux racines courtes $a, b \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ telles que $-h = a + b$. En particulier, $\delta_a = \delta_b = \delta_\theta$. Alors :

$$\begin{aligned} -h &= -\delta_\theta\theta + \textstyle\sum_\alpha \delta_\alpha n'_\alpha(h)\alpha \\ a &= -\theta + \textstyle\sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a)\alpha \\ b &= -\theta + \textstyle\sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_b} n'_\alpha(b)\alpha \\ (\delta_\theta - 2)\theta &= \textstyle\sum_\alpha \Big(\delta_\alpha n'_\alpha(h) - \frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a) - \frac{\delta_\alpha}{\delta_b} n'_\alpha(b)\Big)\alpha \\ &= \textstyle\sum_\alpha (\delta_\theta - 2) n_\alpha(\theta)\alpha \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} l''_{-h} - l''_a - l''_b &= \Big(\delta_\theta l_{-\theta} + \sum_\alpha n'_\alpha(-h)\delta_\alpha l_\alpha\Big) - \Big(l_{-\theta} + \sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a) l_\alpha\Big) \\ &\quad - \Big(l_{-\theta} + \textstyle\sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_b} n'_\alpha(b) l_\alpha\Big) \\ &= (\delta_\theta - 2) l_{-\theta} + \textstyle\sum_\alpha \Big(\delta_\alpha n'_\alpha(-h) - \frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a) - \frac{\delta_\alpha}{\delta_b} n'_\alpha(b)\Big) l_\alpha \\ &= (\delta_\theta - 2)(l_{-\theta} + l'_\theta) \end{aligned}$$

Comme $\delta_\theta = d' \geq 2$ et $l_{-\theta} + l'_\theta \geq l_{-\theta} + l_\theta \geq 0$, on a $l''_{-h} \geq l''_a + l''_b$. Vu le cas déjà traité des racines courtes, on sait que $l''_a \geq l_a$ et que $l''_b \geq l_b$. Donc, par l'axiome (C1), on a $l''_{-h} \geq l_a + l_b \geq l_{a+b} = l_{-h}$.

Hérédité : on considère la longueur d'une racine $c \neq -h$. Le cas d'une racine courte a déjà été traité. Soit $c \neq -h \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ une racine longue. On suppose que $l''_a \geq l_a$ pour toute racine a plus basse que c dans Φ_{nd}. On a $c = c^\delta = -\delta_\theta\theta + \sum_\alpha n'_\alpha(c)\delta_\alpha\alpha$. Par le lemme 4.4.4, il existe deux racines $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ et $b \in \Phi^+_{\mathrm{nd}}$ telles que $c = a + b$.

Si a est longue, on a $a = a^\delta = -\delta_\theta\theta + \sum_\alpha n'_\alpha(a)\delta_\alpha\alpha$. Donc, $\delta_\alpha n'_\alpha(c) = \delta_\alpha n'_\alpha(a) + n_\alpha(b)$. Par conséquent, $l''_c = l''_a + l'_b$. Par hypothèse de récurrence, on a $l''_a \geq l_a$ car c est strictement plus haute que a. Donc $l''_c \geq l_a + l'_b \geq l_a + l_b \geq l_{a+b} = l_c$ par l'axiome (C1).

Sinon, a est une racine courte, de sorte que $\delta_\alpha = \delta_\theta = d'$. Donc $a = -\theta + \sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_\theta} n'_\alpha(a)\alpha$. On a : $0 = a + b - c = (\delta_\theta - 1)\theta + \sum_\alpha \left(\frac{\delta_\alpha}{\delta_\theta} n'_\alpha(a) + n_\alpha(b) - n'_\alpha(c)\delta_\alpha\right)\alpha$. Par unicité des coefficients, pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, on a $(\delta_\theta - 1)n_\alpha(\theta) = \frac{\delta_\alpha}{\delta_\theta} n'_\alpha(a) + n_\alpha(b) - n'_\alpha(c)\delta_\alpha$. Donc $l''_c - l''_a - l'_b = (\delta_\theta - 1)l_{-\theta} + \sum_\alpha(\delta_\theta - 1)n_\alpha(\theta)l_\alpha = (\delta_\theta - 1)(l_{-\theta} + l'_\theta)$. Comme $l_{-\theta} + l'_\theta \geq l_{-\theta} + l_\theta \geq 0$ par l'axiome (C2), on obtient $l''_c \geq l''_a + l'_b$. Par hypothèse de récurrence, $l''_a \geq l_a$. Donc $l''_c \geq l_a + l_b \geq l_{a+b} = l_c$ par l'axiome (C1). Ceci termine la récurrence.

Enfin, si c est une racine multipliable, alors $l''_{2c} = 2l''_c \geq 2l_c \geq l_{2c}$ par l'axiome (C0). Ceci termine la démonstration de (2).

(3) On établit à présent les inclusions $U_{c,l''_c} \subset [H, H]$, dans l'ordre allant des plus longues aux plus courtes racines. Suivant que Φ est un système de racines réduit ou non, il y a une, deux ou trois longueurs distinctes de racines.

Soit $c \neq -\theta$ une racine. On l'écrit comme somme de deux racines non colinéaires $c = a + b$. On veut appliquer la proposition 4.4.2, pour de bonnes valeurs $l''_a \in \Gamma_a$, $l'_b \in \Gamma_b$ et $\widehat{l_c} \in \Gamma_c$ telles que $l''_c \geq \widehat{l_c} = l''_a + l'_b$, pour démontrer que $U_{c,l''_c} \subset [H, H]$. Comme dans la proposition 4.4.2, on a aussi un terme v'', on devra faire attention à l'ordre des étapes ici. On procède, étape par étape, de la plus grande à la plus petite longueur des racines, et on traite à la fin le cas, lorsqu'il se produit, de la plus basse racine $c = -h \neq -\theta$ séparément. On note $(a, b) = \{ra + sb,\ r, s \in \mathbb{N}\} \cap \Phi$ et $\Phi(a, b) = (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b) \cap \Phi$. On notera qu'en général, on a $\Phi(a, b) \neq (\mathbb{R}a + \mathbb{R}b) \cap \Phi$.

- **Cas d'une racine divisible.** On suppose que $c \neq -h$ est une racine divisible. Alors le système de racines irréductible Φ est non réduit et $\delta_c = \delta_\theta = d' = 2$. De plus, on a $2\theta = h$. Par le lemme 4.4.4 appliqué à Φ_{nm}, il existe des racines non colinéaires $a, b \in \Phi_{\mathrm{nm}}$ telles que $b \in {\Phi_{\mathrm{nm}}}^+$ et $c = a + b$. De plus, a, b sont nécessairement non divisibles et on a $\delta_a = \delta_b = 1$. Comme précédemment, on peut à nouveau montrer que $l''_c = 2l''_{\frac{c}{2}} = l''_a + l'_b$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a,l''_a}$ et $v' \in U_{b,l'_b}$ tels que $u = [v, v']$. Donc $U_{c,l''_c} \subset [H, H]$.

- **Cas d'une racine longue non divisible :** Soit c une racine longue de Φ_{nd}. Alors $\delta_c = 1$ par définition. On suppose que $c = c^\delta \notin \{-\theta, -h\}$. Par le lemme 4.4.4 appliqué à Φ_{nd}, il existe des racines non colinéaires $a, b \in \Phi$ telles que $b \in {\Phi_{\mathrm{nd}}}^+$ et $c = a + b$.

Premier sous-cas : $\Phi(a, b)$ est de type A_2. On a $(a, b) = \{a, b, a + b\}$ et on a montré dans (2) que $l''_c \geq l''_a + l'_b$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a,l''_a}$ et $v' \in U_{b,l'_b}$ tels que $u = [v, v']$. Donc $U_{c,l''_c} \subset [H, H]$ car $l''_a \geq l_a$ et $l'_b \geq l_b$.

Deuxième sous-cas : $\Phi(a,b)$ est de type B_2 ou G_2. On a $(a,b) = \{a, b, a+b\}$ et $\delta_a = \delta_b = \delta_\theta$ car dans ce cas, nécessairement, la racine longue c est la somme de deux racines courtes. On a montré que $l''_c \geq l''_a + l'_b$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a,l''_c - l'_b}$ et $v' \in U_{b,l'_b}$ tels que $u = [v, v']$. Donc $U_{c,l''_c} \subset [H,H]$.

Troisième sous-cas : $\Phi(a,b)$ est de type BC_2. Alors a et b sont multipliables, et on a $\delta_a = \delta_b = 2$. Si $a \neq -\theta$, on définit $a' = a - b \in \Phi_{\mathrm{nm}}$ et $b' = 2b \in \Phi_{\mathrm{nm}}$. Alors a' est une racine longue non divisible et b' est une racine divisible. On a $\delta_{a'} = \delta_c = 1$ et $2a' + b' = 2a$. Donc $a' = -\delta_\theta\theta + \sum_\alpha n'_\alpha(a')\delta_\alpha\alpha$ et $b' = 2b = \sum_\alpha 2n_\alpha(b)\alpha$. Pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, on a donc $n'_\alpha(c)\delta_\alpha = n'_\alpha(a')\delta_\alpha + 2n_\alpha(b)$. Ainsi $l''_c = \delta_\theta l_{-\theta} + \sum_\alpha n'_\alpha(c)\delta_\alpha l_\alpha = l''_{a'} + 2l'_b = l''_{a'} + l'_{b'}$.

On a $-2\theta + \sum_\alpha n'_\alpha(a')\delta_\alpha\alpha = a' = a + b = \Big(-\theta + \sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{2} n'_\alpha(a)\alpha \Big) + \sum_\alpha n_\alpha(b)\alpha$. Pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, on a donc $n'_\alpha(a')\delta_\alpha - n_\alpha(\theta) = \frac{\delta_\alpha}{2} n'_\alpha(a) + n_\alpha(b)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} l''_{a'} + l'_b &= \delta_\theta l_{-\theta} + \sum_\alpha \Big(n'_\alpha(a')\delta_\alpha + n_\alpha(b) \Big) l_\alpha \\ &= 2l_{-\theta} + \sum_\alpha \Big(\tfrac{\delta_\alpha}{2} n'_\alpha(a) + n_\alpha(\theta) \Big) l_\alpha \\ &= 2l_{-\theta} + \tfrac{1}{2}(2l''_a - 2l_{-\theta}) + l'_\theta \\ &= (l_{-\theta} + l'_\theta) + \tfrac{1}{2} l''_{2a} \end{aligned}$$

Comme $l_{-\theta} + l'_\theta \geq 0$, on a $2l''_{a'} + l'_{b'} = 2(l''_{a'} + l'_b) \geq l''_{2a}$. Par la proposition 4.4.2, pour tout élément $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a',l''_{a'}}$ et $v' \in U_{b,l'_{b'}}$ et $v'' \in U_{2a'+b',2l''_{a'}+l'_{b'}}$ tels que $u = [v,v']v''$. On a déjà montré que, comme $2a'+b' = 2a \neq -2\theta$ est une racine divisible, le groupe $U_{2a'+b',2l''_{a'}+l'_{b'}} \subset U_{2a,l''_{2a}}$ est un sous-groupe de $[H,H]$. Donc $U_{c,l''_c} \subset [H,H]$.

Si $a = -\theta$, on pose $a' = 2a \in \Phi_{\mathrm{nm}}$ et $b' = b - a = b + \theta \in \Phi^+_{\mathrm{nm}}$. De la même manière, on a $l''_c = l''_{a'} + l'_{b'}$ et $l''_{a'} + 2l'_{b'} = 2l''_b = l''_{b'}$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a',l''_{a'}}$ et $v' \in U_{b,l'_{b'}}$ et $v'' \in U_{a'+2b',l''_{a'}+2l'_{b'}}$ tels que $u = [v,v']v''$. On a déjà montré, dans le cas d'une racine divisible, que le groupe $U_{a'+2b',l''_{a'}+l'_{2b'}} = U_{2b,l''_{2b}}$ est un sous-groupe de $[H,H]$. Donc $U_{c,l''_c} \subset [H,H]$.

- **Cas d'une racine courte :** Soit $c \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ une racine courte de $c \in \Phi_{\mathrm{nd}}$. Alors $\delta_c = \delta_\theta$ par définition. On suppose que $c \neq -\theta$ et que $-c^D$ n'est pas la plus haute racine de Φ^D_{nd}. Par le lemme 4.4.10 appliqué à Φ_{nd}, il existe des racines non colinéaires $a, b \in \Phi$ telles que $b \in {\Phi_{\mathrm{nd}}}^+$, la racine a est courte et $c = a + b$.

Premier sous-cas : les deux racines a et b sont courtes. On a $\delta_a = \delta_b = \delta_c = \delta_\theta$ et on a vu en (2) que $l''_c = l''_a + l'_b$. Le sous-système de racines $\Phi(a,b)$ de rang 2 est de type type A_2 ou G_2. De plus, lorsque $\Phi(a,b)$ est de type G_2, on a $(a,b) = \{a, b, a+b, 2a+b, a+2b\}$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a,l''_a}$ et $v' \in U_{b,l''_b}$ et, de plus, $v'' \in U_{2a+b,2l''_a+l'_b} U_{a+2b,l''_a+2l'_b}$ si $\Phi(a,b)$ est de type G_2, ou $v'' = 1$ si $\Phi(a,b)$ est de type A_2, tels que $u = [v,v']v''$.

Il reste à montrer que $v'' \in [H,H]$. Dans le cas de G_2, on a $\delta_{2a+b} = \delta_{a+2b} = 1$. De plus, $2a + b = 2\Big(-\theta + \sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a)\alpha \Big) + \sum_\alpha n_\alpha(b)\alpha = -\delta_\theta\theta + \sum_\alpha \Big(2\frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a) + n_\alpha(b) + (\delta_\theta -$

$2)n_\alpha(\theta)\Big)\alpha$. On a :

$$\begin{aligned} l''_{2a+b} &= \delta_\theta l_{-\theta} + \textstyle\sum_\alpha \Big(2\frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a) + n_\alpha(b) + (\delta_\theta - 2)n_\alpha(\theta)\Big) l_\alpha \\ &= \delta_\theta l_{-\theta} + \tfrac{2}{\delta_a}(\delta_a l''_a - \delta_\theta l_{-\theta}) + l'_b + (\delta_\theta - 2)l'_\theta \\ &= 2l''_a + l'_b + (\delta_\theta - 2)(l_{-\theta} + l'_\theta) \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer que $l''_{a+2b} = l''_a + 2l'_b + (\delta_\theta - 1)(l'_\theta + l_{-\theta})$.

Si $\delta_\theta = 1$, comme $l_{-\theta} + l'_\theta \geq 0$, on a $l''_{2a+b} \leq 2l''_a + l'_b$ et $l''_{a+2b} = l''_a + 2l'_b$. On a donc $U_{2a+b,l''_{2a+b}} \supset U_{2a+b,2l''_a+l'_b}$ et $U_{a+2b,l''_{a+2b}} = U_{a+2b,l''_a+2l'_b}$.

Sinon, $\delta_\theta = 3$ et G est une forme trialitaire de D_4. Dans ce cas, on a supposé que $l_{-\theta} + l'_\theta \leq \omega(\varpi_{L'}) = 0^+ \in \Gamma_{L'}$. Comme $l''_{a+2b}, l''_{2a+b} \in \Gamma_{L_d} = 3\Gamma_{L'}$, on obtient que $0 \leq (\delta_\theta - 1)(l'_\theta + l_{-\theta}) < 3\omega(\varpi_{L'}) = 0^+ \in \Gamma_{L_d}$. Il en est de même pour $(\delta_\theta - 1)(l'_\theta + l_{-\theta})$. Donc, on a les égalités de groupes : $U_{a+2b,l''_a+2l'_b} = U_{a+2b,l''_{a+2b}+(\delta_\theta-1)(l'_\theta+l_{-\theta})} = U_{a+2b,l''_{a+2b}}$ et $U_{2a+b,2l''_a+l'_b} = U_{2a+b,l''_{2a+b}+(\delta_\theta-2)(l'_\theta+l_{-\theta})} = U_{2a+b,l''_{2a+b}}$.

Dans les deux cas, comme $2a+b$ et $a+2b$ sont longues et distinctes de $-h$, on a vu que les groupes $U_{2a+b,l''_{2a+b}}$ et $U_{a+2b,l''_{a+2b}}$ sont contenus dans $[H,H]$. Donc $v'' \in [H,H]$. Ainsi $U_{c,l''_c} \subset [H,H]$.

Deuxième sous-cas : a est courte et b est longue. On a $\delta_a = \delta_c = \delta_\theta$ et $\delta_b = 1$. Le sous-système de racines $\Phi(a,b)$ de rang 2 est de type B_2 ou BC_2. Précisément, on a $(a,b) = \{a, b, a+b, 2a+b\}$ si Φ est un système de racines réduit et $(a,b) = \{a, b, a+b, 2a, 2a+b, 2a+2b\}$ sinon. On a $\delta_a = \delta_c = \delta_\theta$ et $\delta_b = \delta_{2a+b} = 1$. On a $\delta_c c = \delta_\theta\Big(-\theta + \sum_\alpha \Big(\frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a) + n_\alpha(b)\Big)\alpha\Big) = -\delta_\theta\theta + \sum_\alpha \Big(\delta_\alpha n'_\alpha(a) + \delta_\theta n_\alpha(b)\Big)\alpha$. Donc $\delta_c l''_c = \delta_a l''_a + \delta_\theta l'_b$. Ainsi $l''_c = l''_a + l'_b$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a',l''_{a'}}$ et $v' \in U_{b,l'_{b'}}$ et $v'' \in U_{2a+b,2l''_a+l'_b}$ tels que $u = [v,v']v''$.

Il reste à vérifier que $v'' \in [H,H]$. On a :

$$\begin{aligned} \delta_{2a+b}(2a+b) &= 2a+b \\ &= 2\Big(-\theta + \textstyle\sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a)\alpha\Big) + \sum_\alpha n_\alpha(b)\alpha \\ &= -\delta_\theta\theta + \textstyle\sum_\alpha \Big(\delta_\alpha \frac{2}{\delta_a} n'_\alpha(a) + n_\alpha(b) + (\delta_\theta - 2)n_\alpha(\theta)\Big)\alpha \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} l''_{2a+b} &= \delta_\theta l_{-\theta} + \tfrac{2}{\delta_a}(\delta_a l''_a - \delta_\theta l_{-\theta}) + l'_b + (\delta_\theta - 2)l'_\theta \\ &= \delta_\theta l_{-\theta} + 2l''_a - 2l_{-\theta} + l'_b + (\delta_\theta - 2)l'_\theta \\ &= 2l''_a + l'_b + (\delta_\theta - 2)(l_{-\theta} + l'_\theta) \end{aligned}$$

Comme $\delta_\theta \in \{1,2\}$ et $l_{-\theta} + l'_\theta \geq 0$, on obtient l'inégalité $l''_{2a+b} \leq 2l''_a + l'_b$. Comme $2a+b$ est une racine longue de Φ_{nd}, on a déjà montré que $U_{2a+b,2l''_a+l'_b} \subset U_{2a+b,l''_{2a+b}} \subset [H,H]$. Donc $v'' \in [H,H]$ et il s'ensuit que $U_{c,l''_c} \subset [H,H]$.

Maintenant, il ne reste plus que deux cas possibles à traiter : celui d'une racine négative c telle que $-c^D$ est la plus haute racine de Φ^D dans le cas où $h = \theta$; ou celui de la racine négative $c = -h$ dans le cas où $h \neq \theta$.

- **La plus basse racine duale :** On suppose que c est la racine négative de Φ_{nd} telle que $-c^D$ est la plus haute racine de Φ^D_{nd} et $h = \theta \neq -c$ (ce cas ne se produit que si

L'/L_d est non ramifiée et le système de racines Φ n'est pas simplement lacé). Dans ce cas, on a $\delta_a = \delta_b = \delta_c = \delta_\theta = 1$ et le sous-système de racines $\Phi(a,b)$ de rang 2 est réduit. Par le lemme 4.4.4(2), il existe des racines $a \in \Phi^-_{\mathrm{nd}}$ et $b \in \Phi^+_{\mathrm{nd}}$ telles que $c = a + b$. Si a est courte, on peut procéder comme précédemment. Donc, on suppose que a est une racine longue et que les racines b et c sont courtes.

Si $\Phi(a,b)$ est de type B_2, alors $(a,b) = \{a, b, a+b, a+2b\}$ et on a les égalités $l''_{a+b} = l''_a + l'_b$ et $l''_{a+2b} = l''_a + 2l'_b$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a,l''_a}$ et $v' \in U_{b,l'_b}$ et $v'' \in U_{a+2b,l''_a+2l'_b}$ tels que $u = [v,v']v''$. Comme $a + 2b$ est une racine longue de $\Phi_{\mathrm{nd}} = \Phi$, on a déjà vu que $U_{a+2b,l''_a+2l'_b} = U_{a+2b,l''_{a+2b}} \subset [H,H]$. Donc $U_{c,l''_c} \subset [H,H]$.

Si $\Phi(a,b)$ est de type G_2, alors $(a,b) = \{a, b, a+b, a+2b, a+3b, 2a+3b\}$ On a les égalités $l''_{a+b} = l''_a + l'_b$, $l''_{a+2b} = l''_a + 2l'_b$ et $l''_{a+3b} = l''_a + 3l'_b$. De plus, on a $l''_{2a+3b} = 2l''_a + 3l'_b - (l_{-\theta} + l'_\theta) \leq 2l''_a + 3l'_b$. Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c}$, il existe des éléments $v \in U_{a,l''_a}$ et $v' \in U_{b,l'_b}$ et $v'' \in U_{a+2b,l''_a+2l'_b} U_{a+3b,l''_a+3l'_b} U_{2a+3b,2l''_a+3l'_b}$ tels que $u = [v,v']v''$. Comme $a + 3b$ et $2a + 3b$ sont des racines longues de $\Phi_{\mathrm{nd}} = \Phi$, on a déjà vu que $U_{a+3b,l''_a+3l'_b} = U_{a+3b,l''_{a+3b}} \subset [H,H]$ et que $U_{2a+3b,2l''_a+3l'_b} \subset U_{2a+3b,l''_{2a+3b}} \subset [H,H]$. Comme $a + 2b \neq -\theta$ peut s'écrire comme somme de deux racines courtes b et $a + b$, on a vu que $U_{a+2b,l''_a+2l'_b} = U_{a+2b,l''_{a+2b}} \subset [H,H]$. Donc $U_{c,l''_c} \subset [H,H]$.

• **La plus basse racine :** Pour conclure, il reste à traiter le cas, lorsqu'il se produit, de la racine $-h \neq -\theta$ où h est la plus haute racine de Φ (ce qui ne se produit que pour G de type ${}^2A_{2l+1}$, ${}^2D_{l+1}$, ${}^2E_6$, ${}^3D_4$ ou ${}^6D_4$ avec une extension L'/L_d ramifiée). Dans ce cas, on a $\delta_\theta > 1$, et h est une racine longue. En particulier, l'entier $(\delta_\theta - 2)$ est positif ou nul. On écrit h comme somme $h = c = a + b$ de deux racines courtes a et b, de sorte que $\delta_a = \delta_b = \delta_\theta$ et $\delta_c = 1$. De plus, on a $(a,b) = \{a, b, a+b\}$. On a :

$$\begin{aligned} c = a + b = & \Big(-\theta + \textstyle\sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_a} n'_\alpha(a)\alpha \Big) + \Big(-\theta + \textstyle\sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{\delta_b} n'_\alpha(b)\alpha \Big) \\ = & -2\theta + \textstyle\sum_\alpha \Big(\frac{\delta_\alpha}{\delta_\theta} n'_\alpha(a) + \frac{\delta_\alpha}{\delta_\theta} n'_\alpha(b) \Big)\alpha \\ = & -\delta_\theta\theta + \textstyle\sum_\alpha \Big(\frac{\delta_\alpha}{\delta_\theta} n'_\alpha(a) + \frac{\delta_\alpha}{\delta_\theta} n'_\alpha(b) + (\delta_\theta - 2) n_\alpha(\theta) \Big)\alpha \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} l''_c = & \ \delta_\theta l_{-\theta} + \tfrac{1}{\delta_\theta}(\delta_a l''_a - \delta_\theta l_{-\theta}) + \tfrac{1}{\delta_\theta}(\delta_b l''_b - \delta_\theta l_{-\theta}) + (\delta_\theta - 2) l'_\theta \\ = & \ l''_a + l''_b + (\delta_\theta - 2)(l_{-\theta} + l'_\theta) \\ \geq & \ l''_a + l''_b \end{aligned}$$

Par la proposition 4.4.2, pour tout $u \in U_{c,l''_c} \subset U_{c,l''_a+l''_b}$, il existe des éléments $v \in U_{a,l''_a}$ et $v' \in U_{b,l''_b}$ tels que $u = [v,v']$. Ce qui conclut. □

4.4.13 Remarque. Dans les propositions 4.4.9 et 4.4.12, on ne restreint pas le choix de la base Δ mais seulement celui des valeurs l_a. En fait, les conditions sur les $l_a \in \Gamma_a$ pour $a \in \Delta$ et sur $l_{-\theta} \in \Gamma_{-\theta}$ limitent les choix possibles pour Δ.

4.4.14 Lemme. *Soient Φ un système de racines irréductible non réduit et Δ une base de Φ. Soit $a \in \Delta$ la racine simple multipliable. Soit θ la demi plus haute racine de Φ relativement à la base Δ. Alors $\Delta' = (\Delta \cup \{-\theta\}) \setminus \{a\}$ est une autre base de Φ ; de plus, la racine $-a$ est la demi plus haute racine de Φ relativement à la base Δ'.*

Démonstration. On considère la réalisation géométrique euclidienne suivante du système de racines $\Phi = \{\pm e_i,\ 1 \leq i \leq l\} \cup \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm 2e_i,\ 1 \leq i \leq l\}$ où (e_i) désigne la base canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^l$. On note $a_i = e_i - e_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq l-1$ et $a_l = e_l$. L'ensemble $\Delta = \{a_1, \ldots, a_l\}$ est une base de Φ et $\theta = e_1 = a_1 + \cdots + a_l$ est la demi plus haute racine de Φ.

Soit $w \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{R})$ l'élément du groupe de Weyl $W(\Phi)$ défini par $w(e_i) = -e_{l-i+1}$. On observe que w stabilise $\Delta \setminus \{a_l\}$, que $w(-\theta) = a_l$ et que $w(a_l) = -\theta$.

Si D est un demi-espace de $\mathbb{R}^l$ définissant la base Δ, alors $w(D)$ est aussi un demi-espace de $\mathbb{R}^l$ et il définit la base $\Delta' = (\Delta \setminus \{a_l\}) \cup \{-\theta\}$. La demi plus haute racine de Φ relativement à Δ' est alors $-a_l$. □

4.4.2.3 Borne inférieure pour les sous-groupes radiciels valués du sous-groupe de Frattini

On veut appliquer les propositions 4.4.9 et 4.4.12 au sous-groupe pro-p maximal P qui correspond à l'alcôve fondamentale $\mathbf{c}_{\mathrm{af}}$ décrite à la section 4.3.1.

4.4.15 Théorème. *On suppose que le système de racines relatif Φ irréductible est de rang $l \geq 2$ et que la caractéristique résiduelle p de K satisfait l'hypothèse 4.4.1. Soient P un sous-groupe pro-p maximal de $G(K)$ et $\mathbf{c}$ l'alcôve (unique) fixée par P. Pour toute racine $a \in \Phi$, si le mur $\mathcal{H}_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)}$ (cette notation a été introduite en section 1.3.4) contient une cloison de $\mathbf{c}$, alors on a $[P,P] \supset U_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)^+}$; sinon, on a $[P,P] \supset U_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)}$.*

Démonstration. On normalise la valuation de sorte que $\Gamma_{L'} = \mathbb{Z}$. Quitte à conjuguer, on peut supposer que $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\mathrm{af}}$ est l'alcôve fondamentale, définie en section 4.3.1, et bordée par les murs suivants :

— $\mathcal{H}_{a,0}$ pour toutes les racines simples $a \in \Delta$;

— $\mathcal{H}_{-\theta,1}$ si Φ est réduit ;

— $\mathcal{H}_{-\theta,\frac{1}{2}}$ si Φ est non réduit.

Pour toute racine $a \in \Phi$, on a les valeurs suivantes :

— $f'_{\mathbf{c}}(a) = 0$ si $a \in \Phi^+$;

— $f'_{\mathbf{c}}(a) = \frac{\delta_\theta}{\delta_a} \in \{1, d'\}$ si $a \in \Phi^-$ et Φ est réduit ;

— $f'_{\mathbf{c}}(a) = \frac{1}{\delta_a} \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ si $a \in \Phi^-_{\mathrm{nd}}$ et Φ est non réduit.

Les murs bordant l'alcôve $\mathbf{c}$ sont définis via les racines $\Delta \cup \{-\theta\}$. Donc, pour toute racine $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$, on a $f_{\mathbf{c}}(a) = f'_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma_a$. De plus, $f_{\mathbf{c}}(-\theta) = 1$ et $l'_\theta = 0$ de sorte que la somme satisfasse $f_{\mathbf{c}}(-\theta) + l'_\theta = 1 = \omega(\varpi_{L'})$. Par conséquent, on peut appliquer les propositions 4.4.9 et 4.4.12 au groupe P et aux valeurs $l_c = f_{\mathbf{c}}(c)$ où $c \in \Phi$.

Pour toute racine positive non simple et non divisible $b \in \Phi^+_{\mathrm{nd}} \setminus \Delta$, par la proposition 4.4.9, on a $l'_b = 0$. Donc $[P,P] \supset U_{b,0} = U_{b,l_b}$.

Pour toute racine $c \in \Phi^- \setminus \{-\theta, -2\theta\}$, par la proposition 4.4.12, on a $\delta_c l''_c = \delta_\theta f'_{\mathbf{c}}(-\theta)$. Si Φ est réduit, alors on a $l''_c = \frac{\delta_\theta}{\delta_c} = f'_{\mathbf{c}}(c)$. Si Φ est non réduit, alors on a $l''_c = \frac{1}{\delta_c} = f'_{\mathbf{c}}(c)$ car $\delta_{-\theta} l_{-\theta} = 1$. Donc $[P,P] \supset U_{c,l_c}$.

On suppose que Φ est réduit. Soit $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$. Alors, par la proposition 4.2.3, on sait que $[P,P] \supset U_{a,l_a^+}$.

On suppose que Φ est non réduit. Soit $a \in \Delta$. Par la proposition 4.4.12, on a $\delta_a l''_a = \delta_\theta f'_{\mathbf{c}}(-\theta)$. Ainsi, on a $l''_a = \frac{1}{\delta_a} = 0^+ = f'_{\mathbf{c}}(a)^+$. En effet, si a est multipliable, $l''_a = \frac{1}{2}$; sinon $l''_a = 1$ est la plus petite valeur strictement positive de Γ_a. Donc $[P,P] \supset U_{a,l''_a}$.

Enfin, lorsque Φ est non réduit, on peut appliquer le lemme 4.4.14 pour échanger les rôles de la racine simple multipliable $a \in \Delta$ et de la demi plus basse racine $-\theta$. On écrit $\theta = \sum_{b\in\Delta} n_b b$ où $n_b \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $-\theta = \theta + (-2\theta) = n_a a + \sum_{b\in\Delta\setminus\{a\}} n_b b + 2(-\theta)$. Ainsi, en appliquant la proposition 4.4.12 à la base $\Delta' = (\Delta \setminus \{a\}) \cup \{-\theta\}$, on obtient $l''_{-\theta} = 2l_{-\theta} = 1 = l^+_\theta$. □

4.4.16 Remarque. On en déduit immédiatement que le groupe dérivé $[P,P]$ contient $U_{c,f'_{B(\mathbf{c},1)\cap\mathbb{A}}(c)}$ pour toute racine $c \in \Phi$.

Dans le cas du rang 1, on a un manque de rigidité qui peut rendre $[P,P]$ plus petit que ce qu'on pourrait attendre. Typiquement, les propositions 4.4.9 et 4.4.12 ne s'appliquent pas.

4.4.17 Corollaire. *On suppose que p satisfait l'hypothèse 4.4.1. Pour toute racine non divisible $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ et tout sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$, on écrit $P \cap U_a(K) = U_{a,l_a}$ où $l_a \in \Gamma_a$. Si $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$,*

- *si a est une racine non multipliable ou si L_a/L_{2a} est ramifiée, alors on a l'égalité $[P,P] \cap U_a(K) = U_{a,l_a^+}$;*
- *si a est multipliable et si l'extension L_a/L_{2a} est non ramifiée, alors on a les inclusions $U_{a,l_a^+} \subset [P,P] \cap U_a(K) \subset U_{a,l_a^+} U_{2a,2l_a}$.*

Si $a \in \Phi \setminus (\Delta \cup \{-\theta\})$, alors on a l'égalité $[P,P] \cap U_a(K) = U_{a,l_a}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate du théorème 4.4.15 et de la proposition 4.3.13. □

4.5 Ensemble minimal de générateurs topologiques d'un sous-groupe pro-p maximal

Comme précédemment, on se donne un K-groupe K-simple, simplement connexe, quasi-déployé G et un sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$. Dans le corollaire 4.5.4, on obtient le nombre minimal de générateurs topologiques du sous-groupe pro-p maximal P dans les différents cas possibles pour G.

Afin de donner des formules explicites pour ces nombres, on est amené à introduire les entiers suivants. On note e' l'indice de ramification de L'/L_d et f' son degré résiduel ; on pose $m = \log_p(\mathrm{Card}(\kappa_K))$ de sorte que $\kappa_K \simeq \mathbb{F}_{p^m}$. De plus, lorsqu'on suppose seulement que G est K-simple plutôt qu'absolument simple, on note également e l'indice de ramification de L_d/K et f le degré résiduel.

4.5.1 Le sous-groupe de Frattini

Afin d'exhiber une famille minimale de générateurs du sous-groupe pro-p maximal P, on sait, par [DdSMS99, 1.9], qu'il suffit de relever une famille minimale de générateurs du groupe abélien fini p-élémentaire $P/\mathrm{Frat}(P)$, où $\mathrm{Frat}(P)$ est le sous-groupe de Frattini

de P. D'après la proposition 3.3.8, on sait que $P = \left(\prod_{a\in\Phi^-_{\mathrm{nd}}} U_{a,\mathbf{c}}\right) T(K)^+_b \left(\prod_{a\in\Phi^+_{\mathrm{nd}}} U_{a,\mathbf{c}}\right)$ où $\mathbf{c}$ est une alcôve bien choisie de $X(G,K)$. Quitte à conjuguer, on peut supposer, sans restriction, que $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\mathrm{af}}$.

On veut décrire le sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(P)$, de la même manière, en termes de groupes radiciels valués $U_{a,\widehat{l_a}}$, pour des valeurs convenables $\widehat{l_a} \in \mathbb{R}$, et d'un sous-groupe de $T(K)^+_b$ qu'on doit déterminer. Comme P est un groupe pro-p, par [DdSMS99, 1.13], on a $\mathrm{Frat}(P) = \overline{P^p[P,P]}$. Donc $P/\mathrm{Frat}(P)$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension $d(P)$ que l'on veut déterminer.

4.5.1 Théorème (Descriptions du sous-groupe de Frattini d'un sous-groupe pro-p maximal : le cas réduit)**.** *On suppose que le système de racines relatif Φ est réduit et que $p \neq 2$. Si Φ est de type G_2, on suppose que $p \geq 5$. Alors :*

***Description profinie** : Le pro-p-groupe P est topologiquement de type fini et, en particulier,* $\mathrm{Frat}(P) = P^p[P,P]$. *De plus, lorsque K est de caractéristique $p > 0$, on a $P^p \subset [P,P]$.*

***Description via la donnée de groupes radicielle valuée** : Pour tout $a \in \Phi$, on pose :*

$$V_{a,\mathbf{c}} = \begin{cases} U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)^+} & \text{si } a \in \Delta \cup \{-\theta\} \\ U_{a,\mathbf{c}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce groupe ne dépend que des racines $a \in \Phi$ et de l'alcôve $\mathbf{c} \subset \mathbb{A}$, pas du choix de la base Δ.

On a l'écriture suivante :

$$\mathrm{Frat}(P) = \left(\prod_{-a\in\Phi^+} V_{-a,\mathbf{c}}\right) T(K)^+_b \left(\prod_{a\in\Phi^+} V_{a,\mathbf{c}}\right)$$

***Description géométrique** : Le sous-groupe de Frattini* $\mathrm{Frat}(P)$ *est le sous-groupe pro-p maximal du stabilisateur point par point dans $G(K)$ de la boule combinatoire unité centrée en $\mathbf{c}$.*

Démonstration. Pour toute racine $a \in \Phi$, on pose $l_a = f_{\mathbf{c}}(a)$, de sorte que $l_a \in \Gamma_a$ pour toute racine $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$ et que l'application $a \mapsto l_a$ soit concave. On définit $\widehat{l_a} = \begin{cases} l_a^+ & \text{si } a \in \Delta \cup \{-\theta\} \\ l_a & \text{sinon} \end{cases}$. On définit $Q = \prod_{a\in\Phi^-} U_{a,\widehat{l_a}} \cdot T(K)^+_b \cdot \prod_{a\in\Phi^+} U_{a,\widehat{l_a}}$. On va démontrer successivement la chaîne d'inclusions $Q \subset P^p[P,P] \subset \mathrm{Frat}(P) \subset Q$.

L'inclusion $P^p[P,P] \subset \overline{P^p[P,P]} = \mathrm{Frat}(P)$ est immédiate.

Par le corollaire 4.3.18, on a $\mathrm{Frat}(P) \subset Q$.

Si le système de racines relatif Φ irréductible et réduit est de rang $l \geq 2$, par le théorème 4.4.15, on a $\forall a \in \Phi,\ [P,P] \supset U_{a,\widehat{l_a}}$. Si Φ est de rang 1, par la proposition 4.2.3, on a $\forall a \in \Phi,\ P^p[P,P] \supset U_{a,\widehat{l_a}}$. De plus, par la proposition 4.2.3, on a aussi $T^a(K)^+_b \subset P^p[P,P]$ pour tout $a \in \Phi$. Comme G est simplement connexe et quasi-déployé, le groupe $T(K)^+_b$ est engendré par les groupes $T^a(K)^+_b$, donc $T(K)^+_b \subset P^p[P,P]$. Par conséquent, $Q \subset P^p[P,P]$.

Ainsi, on a bien (2) : $Q = \mathrm{Frat}(P) = P^p[P,P]$.

De plus, si K est de caractéristique p, par la proposition 4.2.3 on peut remplacer $[P,P]P^p$ par $[P,P]$, ce qui donne bien (1) : $Q = [P,P]$.

(3) Par la proposition 4.3.19, on sait que $\mathrm{Frat}(P) = Q$ est le sous-groupe pro-p du stabilisateur point par point de l'enclos de la boule combinatoire unité centrée en $\mathbf{c}$. □

Dans le cas d'un système de racines non réduit Φ, on a vu que le calcul de $[P,P]$ se fait différemment du cas réduit à cause de la non commutativité des groupes radiciels. On étudie ce cas séparément.

4.5.2 Théorème (Descriptions du sous-groupe de Frattini d'un sous-groupe pro-p maximal : le cas non réduit)**.** *On suppose que le système de racines relatif Φ est non réduit de rang $l \geq 2$, et que $p \geq 5$. Alors :*

Description profinie : *Le sous-groupe pro-p maximal P est topologiquement de type fini et, en particulier,* $\mathrm{Frat}(P) = P^p[P,P]$. *De plus, lorsque K est de caractéristique $p > 0$, on a* $\mathrm{Frat}(P) = [P,P]$.

Description via la donnée de groupes radicielle valuée : *Soit $a \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ une racine non divisible.*

Si $a \notin \Delta \cup \{-\theta\}$, on pose $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,\mathbf{c}}$.

Sinon $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$. Si, de plus, a est multipliable, si L'/L_2 est non ramifiée et si $f'_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma'_a$, on pose $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)^+} U_{2a,2f'_{\mathbf{c}}(a)}$. Sinon, on pose $V_{a,\mathbf{c}} = U_{a,f'_{\mathbf{c}}(a)^+}$.

Alors $\mathrm{Frat}(P) = \left(\prod_{a\in\Phi^-_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}}\right) T(K)^+_b \left(\prod_{a\in\Phi^+_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}}\right)$.

Démonstration. Soit $Q = \left(\prod_{a\in\Phi^-_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}}\right) T(K)^+_b \left(\prod_{a\in\Phi^+_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}}\right)$.

Par le corollaire 4.3.18, on a $\mathrm{Frat}(P) \subset Q$.

Si Φ est de rang $l \geq 2$, par le théorème 4.4.15 et le lemme 4.2.15, pour toute racine $a \in \Phi$, on a $[P,P] \supset V = \prod_{a\in\Phi_{\mathrm{nd}}} V_{a,\mathbf{c}}$. Pour la racine simple multipliable a, par les propositions 4.2.4 et 4.2.14, comme $f_{\mathbf{c}_{\mathrm{af}}}(a) = 0$, on a $\varepsilon = 0$, et donc $T^a(K)^+_b \subset [P,P]$. Pour toute racine non multipliable $a \in \Phi$, par la proposition 4.2.3, on a $T^a(K)^+_b \subset [P,P]$. Donc, le groupe $T(K)^+_b$ qui est engendré par les sous-groupes $T^a(K)^+_b$, pour a racine simple, est un sous-groupe de $\mathrm{Frat}(P)$. Par conséquent, on a bien $Q \subset \mathrm{Frat}(P)$.

De plus, comme Q est un sous-groupe ouvert de P (d'indice fini), le sous-groupe de Frattini $\mathrm{Frat}(P) = Q$ est ouvert dans P. Par [DdSMS99, 1.14], on sait que P est topologiquement de type fini. Par [DdSMS99, 1.20], on en déduit que $\mathrm{Frat}(P) = P^p[P,P]$.

Enfin, en appliquant les propositions 4.2.3 et 4.2.4, on obtient $P^p \subset [P,P]$ lorsque K est de caractéristique P. □

4.5.2 Nombre minimal de générateurs

4.5.3 Corollaire (des théorèmes 4.5.1 et 4.5.2)**.** *On suppose que $p \neq 2$.*

Si le système de racines Φ est réduit, on suppose que $p \neq 3$ ou que Φ n'est pas de type G_2. Si le système de racines Φ est non réduit, on suppose que $p \geq 5$ et que Φ n'est pas de rang 1.

Alors $P/\mathrm{Frat}(P)$ est isomorphe au produit direct de groupes abéliens p-élémentaires suivant : $\prod_{a\in\Delta\cup\{-\theta\}} U_{a,\mathbf{c}}/V_{a,\mathbf{c}}$, où les groupes $V_{a,\mathbf{c}}$ pour $a \in \Phi$ sont ceux définis dans le théorème 4.5.1 ou le théorème 4.5.2 suivant que le système de racines est réduit ou non.

Démonstration. Soit $A = \prod_{a\in\Phi} U_{a,\mathbf{c}}/V_{a,\mathbf{c}}$ le produit direct de groupes quotients à considérer. Soit $B = (\prod_{a\in\Phi^-} U_{a,\mathbf{c}}) \times T(K)^+_b \times (\prod_{a\in\Phi^+} U_{a,\mathbf{c}})$ le produit direct de groupes radiciels,

valués par rapport à $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\mathrm{af}}$, et du sous-groupe pro-$p$ maximal du tore borné. Soit $C = (\prod_{a\in\Phi^-} V_{a,\mathbf{c}}) \times T(K)_b^+ \times (\prod_{a\in\Phi^+} V_{a,\mathbf{c}})$ le produit direct des groupes radiciels valués donné par les théorèmes 4.5.1 et 4.5.2, et du sous-groupe pro-p maximal de $T(K)$.

On veut définir un homomorphisme de groupes surjectif $B \to P/\mathrm{Frat}(P)$. Soit $\pi : P \to P/\mathrm{Frat}(P)$ le morphisme quotient. Pour toute inclusion $j_a : U_{a,\mathbf{c}} \to P$ (resp. $j_0 : T(K)_b^+ \to P$), on définit un morphisme de groupes $\phi_a = \pi \circ j_a : U_{a,\mathbf{c}} \to P/\mathrm{Frat}(P)$ (resp. $\phi_0 = \pi \circ j_0$). Comme $P/\mathrm{Frat}(P)$ est commutatif, l'application de multiplication induit un morphisme de groupes $\mu : B \to P/\mathrm{Frat}(P)$. En appliquant la proposition 3.3.8 à P, on en déduit que μ est surjectif.

Par les théorèmes 4.5.1(2) et 4.5.2(2), on a $\ker\mu = C$. En passant au quotient, on en déduit un isomorphisme de groupes $B/C \simeq P/\mathrm{Frat}(P)$. En outre, on a un morphisme de groupes canonique $A \simeq B/C$. Donc $P/\mathrm{Frat}(P)$ est isomorphe à A. □

Comme $P/\mathrm{Frat}(P)$ est un groupe abélien fini p-élémentaire, on en déduit que les groupes quotients $U_{a,\mathbf{c}}/V_{a,\mathbf{c}}$, pour $a \in \Phi$, le sont aussi. Donc, on peut calculer leurs dimensions en tant que $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. D'après [DdSMS99, 1.9], on sait que le nombre minimal d'éléments d'une famille génératrice du groupe pro-p est $d(P) = \dim_{\mathbb{F}_p}\Big(P/\mathrm{Frat}(P)\Big)$. On pourrait aussi le calculer par la formule $d(P) = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\Big(H^1(P, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\Big)$ d'après [Ser94, 4.2 Corollaire 5]. On applique ceci à notre sous-groupe pro-p maximal P de $G(K)$.

4.5.4 Corollaire. *Comme précédemment, on suppose que K est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p. On suppose que G est un K-groupe K-simple, simplement connexe, quasi-déployé et que $p \neq 2$. On reprend la notation 1.1.15 sur les extensions de corps. Soient n le rang d'un sous-système de racines irréductible maximal (tous isomorphes) du système de racines absolu $\tilde{\Phi}$ et l le rang du système de racines relatif Φ. Soient f le degré résiduel de L_d/K et $m = \log_p\Big(\mathrm{Card}(\kappa_K)\Big)$.*

(1) On suppose que Φ n'est pas de type BC_1. Si Φ est de type G_2 ou si Φ est non réduit, on suppose, de plus, que $p \geq 5$. Si L'/L_d est ramifiée, alors $d(P) = mf(l+1)$; si L'/L_d est non ramifiée, alors $d(P) = mf(n+1)$.

(2) On suppose que Φ est de type BC_1 et que $p \geq 5$. Si L'/L_d est ramifiée, alors $2mf \leq d(P) \leq 6mf$; si L'/L_d est non ramifiée, alors $3mf \leq d(P) \leq 9mf$.

4.5.5 Remarque (Résumé en termes de la classification des groupes quasi-déployés). On rappelle que f' est le degré résiduel de L'/L_d et que, au cas par cas, on dispose de relations entre d, l et n. Dans le corollaire 4.5.4, si le groupe quasi-déployé est de type ${}^dX_{n,l}$ (suivant les notations de [Tit66] ; il n'est pas ici nécessaire de prendre en considération tous les indices de Tits en raison de l'hypothèse de quasi-déploiement), on a $d(P) = mf\xi$ où :

Type	(in)égalité	Hypothèse
${}^1X_l,\ l \geq 1,\ X \neq G$	$\xi = l+1$	$p \geq 3$
${}^1G_2$	$\xi = 3$	$p \geq 5$
${}^2A_{2l-1},\ l \geq 2$	$\xi = f'(l-1)+2$	$p \geq 3$
${}^2D_{l+1},\ l \geq 3$	$\xi = l+f'$	$p \geq 3$
${}^2E_6$	$\xi = 3+2f'$	$p \geq 3$
${}^3D_4$ et ${}^6D_4$	$\xi = 2+f'$	$p \geq 5$
${}^2A_{2l},\ l \geq 2$	$\xi = f'l+1$	$p \geq 5$
${}^2A_2$	$f'+1 \leq \xi \leq 3f'+3$	$p \geq 5$

Démonstration. D'après [Tit66, 3.1.2], il existe un groupe absolument simple G' tel que $G = R_{L_d/K}(G')$, de sorte que $G(K) = G'(L_d)$. Comme $\mathrm{Card}(\kappa_{L_d}) = f\mathrm{Card}(\kappa_K)$, on peut supposer que G est absolument simple, de sorte que $\widetilde{\Phi}$ soit irréductible et $m = \log_p\Big(\mathrm{Card}(\kappa_{L_d})\Big)$.

(1) On suppose que Φ est réduit. Par définition des groupes $V_{a,\mathbf{c}}$ dans le théorème 4.5.1(2), on a $U_{a,\mathbf{c}}/V_{a,\mathbf{c}} \simeq \begin{cases} X_{a,f_{\mathbf{c}}(a)} & \text{si } a \in \Delta \cup \{-\theta\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où les groupes quotient $X_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}$ sont définis comme dans la proposition 4.3.9. En appliquant le corollaire 4.5.3, on écrit $P/\mathrm{Frat}(P) \simeq \prod_{a\in\Delta\cup\{-\theta\}} X_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}$. On sait, par la proposition 4.3.9, que le groupe $X_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}$ est un κ_{L_a}-espace vectoriel de dimension 1. Le corps fini κ_{L_a} est de cardinal p^{mf_a} où f_a est le degré résiduel de l'extension L_a/L_d. Ainsi, on obtient $\dim_{\mathbb{F}_p}(P/\mathrm{Frat}(P)) = \sum_{a\in\Delta\cup\{-\theta\}} mf_a$. Il reste à calculer $\xi = \sum_{a\in\Delta\cup\{-\theta\}} f_a$. Soit $a \in \Delta \cup \{-\theta\}$. Si a est une racine longue, alors $L_a = L_d$ et $f_a = 1$. Sinon, on a $L_a = L'$ et $f_a = f'$.

On suppose que L'/L_d est ramifiée. On sait que θ^D est la plus haute racine de Φ^D par rapport à Δ^D. Donc $-\theta^D$ est une racine longue de Φ^D et $-\theta$ est une racine courte. Ainsi, $L_{-\theta} = L'$, de sorte que $f_{-\theta} = f' = 1$. On a $f_a = 1$ pour toute racine simple $a \in \Delta$. Ainsi $\xi = \mathrm{Card}(\Delta) + f_{-\theta} = l + 1$.

On suppose que L'/L_d est non ramifiée. On sait que θ est la plus haute racine de Φ par rapport à la base Δ. Donc $-\theta$ est une racine longue et $L_{-\theta} = L_d$, de sorte que $f_{-\theta} = 1$. On a $f_a = \mathrm{Card}(a)$ où toute racine simple $a \in \Delta$ est vue comme orbite de racines simples absolues $\alpha \in \widetilde{\Delta}$. Ainsi $\xi = f_{-\theta} + \sum_{a\in\Delta} f_a = 1 + \mathrm{Card}(\widetilde{\Delta}) = 1 + n$.

On suppose que Φ est non réduit de rang $l \geq 2$.

Par le corollaire 4.5.3, on peut calculer le groupe quotient $P/\mathrm{Frat}(P) \simeq \prod_{b\in\Delta\cup\{-\theta\}} U_{b,l_b}/V_b$ qui est abélien p-élémentaire. On désigne par a la racine simple multipliable. On peut exprimer chaque quotient $U_{b,l_b}/V_b$ en termes des groupes $X_{b,l}$ (et de $X_{2b,2l}$ si $b \in \{a, -\theta\}$ est une racine multipliable).

Premier cas : b est non multipliable. Dans ce cas, on a $V_b = U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)^+}$. Par la proposition 4.3.9, on sait que $U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)^+} = X_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}$ est un κ_{L_b}-espace vectoriel de dimension 1, donc un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension $f'm$.

Deuxième cas : b est multipliable et L_b/L_{2b} est ramifiée. Par les lemmes 4.3.11 et 1.3.8, on sait que $U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/V_b = U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)^+} = X_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}$ est un $\kappa_{L_a} \simeq \kappa_{L_d}$-espace vectoriel de dimension 1, donc un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension $m = f'm$.

Troisième cas : b est multipliable, L_b/L_{2b} est non ramifiée et $f'_{\mathbf{c}}(b) \notin \Gamma'_a$. Par la proposition 4.3.9 et le lemme 4.3.11, on sait que $U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/V_b = U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)^+} = X_{2b,2f_{\mathbf{c}}(b)}$ est un $\kappa_{L_{2b}}$-espace vectoriel de dimension 1, donc un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension m.

Quatrième cas : b est multipliable, L_b/L_{2b} est non ramifiée et $f'_{\mathbf{c}}(b) \in \Gamma'_a$. Par la proposition 4.3.9, on sait que $U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/V_b = U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/\Big(U_{b,f_{\mathbf{c}}(b)^+}U_{2b,2f_{\mathbf{c}}(b)}\Big) = X_{b,f_{\mathbf{c}}(b)}/X_{2b,2f_{\mathbf{c}}(b)}$ est un κ_{L_b}-espace vectoriel de dimension 1, donc c'est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension $2m = f'm$.

De plus, on remarque qu'on a l'alternative suivante : soit $f_{\mathbf{c}}(a) \in \Gamma'_a$ et $f_{\mathbf{c}}(-\theta) \notin \Gamma'_{-\theta}$, soit $f_{\mathbf{c}}(a) \notin \Gamma'_a$ et $f_{\mathbf{c}}(-\theta) \in \Gamma'_{-\theta}$. Donc, la somme des dimensions sur $\mathbb{F}_p$ de $U_{a,f_{\mathbf{c}}(a)}/V_a$ et $U_{-\theta,f_{\mathbf{c}}(-\theta)}/V_{-\theta}$ est toujours égale à $(f'+1)fm$.

Comme il y a $l-1$ racines simples non multipliables, on a $mf'(l-1)+(1+f') = m(lf'+1) \leq d(P) \leq m\Big((l-1)f'+(f'+1)\Big) = m(f'l+1)$. Soit ξ tel que $d(P)=m\xi$. Si L'/L_d est non ramifiée, alors $f'=2$ et $\xi = 2l+1 = n+1$. Si L'/L_d est ramifiée, alors $f'=1$ et $\xi = l+1$.

(3) On suppose que Φ est non réduit de rang 1. Dans ce cas, on ne peut appliquer ni le théorème 4.5.2, ni son corollaire. Soit $H = U_{-a,\frac{1}{2}}T(K)_b^+U_{a,0}$ un sous-groupe pro-p maximal de $G(K) \simeq \mathrm{SU}(h)(K)$, de sorte que $\varepsilon = 0$. Soit $l''=3$.

On suppose que L/L_2 est non ramifiée. Par les lemmes 4.2.15, 4.2.7 et la proposition 4.2.4, on a :

$$U_{-2a,2}U_{-a,\frac{3}{2}}T(K)_b^{l''}U_{a,1}U_{2a,0} \subset [H,H]H^p \subset U_{-2a,2},U_{-a,1}T(K)_b^+U_{a,\frac{1}{2}}U_{2a,0}$$

D'une part, grâce aux calculs via les groupes quotients $X_{a,l}$, on a que le L_2-espace vectoriel $U_{a,0}/U_{a,\frac{1}{2}}U_{2a,0} \simeq X_{a,0}/X_{2a,0}$ est de dimension $d(a,0)=2$ et le L_2-espace vectoriel $U_{-a,\frac{1}{2}}/U_{-2a,2},U_{-a,1} \simeq X_{-a,\frac{1}{2}}$ est de dimension $d(-a,\frac{1}{2}+d(-2a,1) = 0+1 = 1$. Donc $d(H) \geq 3m$. D'autre part, le quotient $U_{a,0}/U_{a,1}U_{2a,0}$ doit être isomorphe à $X_{a,0}/X_{2a,0} \oplus X_{a,\frac{1}{2}}/X_{2a,1}$, de dimension $d(a,0)+d(a,\frac{1}{2}) = 2$ en tant que κ_{L_2}-espace vectoriel. De la même manière, on a que $U_{-a,\frac{1}{2}}/U_{-2a,2}U_{-a,\frac{3}{2}}$ est isomorphe à un sous-groupe de $X_{-a,\frac{1}{2}} \oplus X_{-a,1}/X_{-2a,-2}$, de dimension $d(-a,\frac{1}{2})+d(-2a,1)+d(-a,1) = 0+1+2 = 3$. Enfin, $T(K)_b^+/T(K)_b^{l''}$ est de dimension $2(l''-1)=4$. Ainsi $d(H) \leq m(5+4) = 9m$.

On suppose que L/L_2 est ramifiée. Par les lemmes 4.2.15, 4.2.7 et la proposition 4.2.4, on a :

$$U_{-2a,3}U_{-a,2}T(K)_b^{l''}U_{a,\frac{3}{2}}U_{2a,1} \subset [H,H]H^p \subset U_{-2a,3},U_{-a,1}T(K)_b^+U_{a,\frac{1}{2}}U_{2a,1}$$

D'une part, grâce aux calculs via les groupes quotients $X_{a,l}$, on a que le L_2-espace vectoriel $U_{a,0}/U_{a,\frac{1}{2}}U_{2a,1} \simeq X_{a,0}$ est de dimension $d(a,0)+d(2a,0) = 1+0$ et que le L_2-espace vectoriel $U_{-a,\frac{1}{2}}/U_{-2a,3},U_{-a,1} \simeq X_{-a,\frac{1}{2}}$ est de dimension $d(-a,\frac{1}{2}+d(-2a,1) = 0+1 = 1$. Donc $d(H) \geq 2m$. D'autre part, le quotient $U_{a,0}/U_{a,\frac{3}{2}}U_{2a,1}$ doit être isomorphe à un sous-groupe de $X_{a,0} \oplus X_{a,\frac{1}{2}}/X_{2a,1} \oplus X_{a,1}/X_{2a,2}$, de dimension $d(a,0)+d(2a,0)+d(a,\frac{1}{2})+d(a,1) = 1+0+0+1 = 2$ en tant que κ_{L_2}-espace vectoriel. De même, le quotient $U_{-a,\frac{1}{2}}/U_{-2a,3}U_{-a,2}$ est isomorphe à un sous-groupe de $X_{-a,\frac{1}{2}} \oplus X_{-a,1} \oplus X_{-a,\frac{3}{2}}/X_{2a,3}$, de dimension $d(-a,\frac{1}{2})+d(-2a,1)+d(-a,1)+d(-2a,2)+d(-a,\frac{3}{2} = 0+1+1+0+0 = 2$. Enfin, $T(K)_b^+/T(K)_b^{l''}$ est de dimension $(l''-1)=2$. Ainsi $d(H) \leq m(4+2) = 6m$. □

4.5.6 Remarque (Famille génératrice en termes de groupes radiciels). Une famille génératrice de $P/\mathrm{Frat}(P)$ provient toujours d'une famille topologiquement génératrice de P. Donc, lorsque le système de racines relatif Φ est réduit, un système minimal de générateurs topologiques de P est donné par :

$$\Big\{x_a(\lambda_i),\ 1 \leq i \leq m \text{ et } a \in \Delta\Big\} \cup \Big\{\{x_{-\theta}(\lambda_i\varpi_{L'}),\ 1 \leq i \leq m\Big\}$$

où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{L_d}$ relevant une base $(\lambda_i\mathcal{O}_{L_d}/\mathfrak{m}_{L_d})_{1\leq i\leq m}$ de κ_{L_d} ; la racine θ est choisie comme dans la section 4.3.1 ; et $\varpi_{L'}$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_{L'}$.

Index

action-$*$, 24
affinisation, 107
alcôve, 48
    adjacente, 106
    fondamentale, 103, 105
appartement, 39, 47
    demi, 47
    standard, 47, 48

boule combinatoire unité, 106

caractéristique résiduelle, 40
caractère, 19
CAT(0), 62
centralisateur, 17
centre, 18
centre connexe, 18
chambre, 39
cloison, 102
close, 19, 49
    positivement, 19
cocaractère, 19
compactement engendré, 56
complexe polysimplicial, 39
complexe simplicial, 38
concave, 119
constantes de structure, 34
corps de définition, 28
corps de déploiement, 28

décomposition de Bruhat, 38
déployé
    groupe réductif, 21
    groupe résoluble, 21
    tore, 19
demi-appartement, 47
donnée de groupes radicielle, 23
    génératrice, 24
    valuée, 42

enclos, 49
ensemble de valeurs, 43

facette, 48
filtration des groupes radiciels, 42
fixateur connexe, 48, 82
Frattini, sous-groupe de, 51

générateur
    ensemble de, 85
générateur topologique, 51
groupe dérivé, 18
groupe de Weyl
    affine, 38
    sphérique, 37
groupe radiciel, 21

immeuble, 39
    élargi, 56
    épais, 39
    fin, 39
isogénie, 18
isogénie centrale, 18
isotrope, 22
Iwahori, 82

k-groupe
    absolument simple, 33
    algébrique affine, 17
    anisotrope, 22
    centralisateur, 17
    centre, 18
    centre connexe, 18
    groupe dérivé, 18
    isotrope, 22
    normalisateur, 17
    presque simple, 33
    pseudo-réductif, 18
    quasi-déployé, 22
    quasi-réductif, 23

réductif, 18
résoluble, 18
semi-simple, 18
simple, 33
unipotent, 18
k-radical
résoluble, 18
unipotent, 18
unipotent déployé, 23
k-système, 30
de Chevalley, 30
de Chevalley-Steinberg, 30

mur, 47

noethérien, 57, 59
normalisateur, 17

parabolique, 37, 38
parahorique, 82
partie bornée, 50
ployé, 22, 23
polysimplexe, 39
type, 39
pro-p, 50
complétion, 50
pro-p-Sylow, 85
produit direct, 18
produit directement engendré, 18
produit presque direct, 18
profini, 50
complétion, 50
Frattini, 51
présentation finie, 52
présentation libre, 52
type fini, 52
pseudo-réductif, 18, 56

quasi-déployé, 22, 86
quasi-réductif, 23

réductif, 18
déployé, 21
résidu de cloison, 106
résoluble, 18
déployé, 21
k-ployé, 23
racine, 19
affine, 47
courte, 29
divisible, 19
longue, 29
multipliable, 19
non divisible, 19
non multipliable, 19
plus haute, 103
relative, 19
relation, 52
restriction de Weil, 18

semi-simple, 18
simple, 33
absolument, 33
absolument presque, 33
presque, 33
simplexe, 38
sous-groupe de rang 1, 28
système de Coxeter, 37
système de racines, 19
absolu, 20
dual, 103
inverse, 102
relatif, 19
système de Tits, 38

topologiquement engendré, 85
tore, 19
déployé, 19
trialitaire, 27
type, 38
polysimplexe, 39

unipotent, 18
k-ployé, 22

Index des notations

a, b, c 1.1.2.1, page 21

a^δ 4.3.1, page 105

$\widetilde{a}$ 1.1.6.3, page 33

$\mathbb{A}$ 1.3.4, page 49

Ad 1.1.1, page 20

α, β, γ 1.1.2.2, page 22

$B(\mathbf{c}, 1)$ 4.3.2, page 108

B 1.1.3.2, page 24

$\mathbf{c}_{\mathrm{af}}$ 4.3.1, page 106

$\mathbb{C}$ 1, page 19

$c_{r,s;\alpha,\beta}$ 1.1.8, page 35

$\mathbf{c}$ 1.3.6, page 51

$\mathrm{cl}(\Omega)$ 1.3.5, page 51

$D(a, l)$ 1.3.4, page 49

$d(P)$ 4.1.1, page 88

d' 1.1.5.2, page 27

d 1.1.5.2, page 27

δ_a 4.3.1, page 105

Δ^D 4.3.1, page 105

Δ^δ 4.3.1, page 105

$\widetilde{\Delta}$ 1.1.2.3, page 22

Δ 1.1.2.3, page 22

$\mathrm{Dyn}(\Delta)$ 1.1.2.3, page 22

$E_{\mathbf{c},a}$ 4.3.3, page 110

E_F 4.3.2, page 108

e' 4.5, page 132

e 4.5, page 132

$F_{\mathbf{c},a}$ 4.3.3, page 110

f_Ω 1.3.4, page 50

f'_Ω 1.3.4, page 50

f' 4.5, page 132

f 4.5, page 132

$\mathrm{Frat}(H)$ 1.4.1, page 53

$\mathbb{G}_{a,k}$ 1.1.1, page 21

$\mathbb{G}_{m,k}$ 1.1.1, page 21

$\overline{\mathfrak{G}}_\Omega^{red}$ 3.3.1, page 80

$\overline{\mathfrak{G}}_\Omega$ 3.3.1, page 80

$\mathfrak{G}_\Omega^\circ$ 1.3.5, page 51

$\mathfrak{G}_\Omega^\dagger$ 1.3.5, page 51

$\mathfrak{G}_\Omega$ 1.3.5, page 51

$\widehat{\mathfrak{G}}_\Omega$ 1.3.5, page 51

$\mathfrak{g}$ 1.1.1, page 20

Γ_a 1.3.3, page 45

Γ_L 1.3.1, page 42

Γ'_a 1.3.3, page 45

$\mathcal{H}_{a,l}$ 1.3.4, page 49

$H(L, L_2)$ 1.1.6.3, page 34

h 4.3.1, page 105

$\overline{k}$ 1.1, page 19

k_p 1.1, page 19

k_s 1.1, page 19

$\widetilde{k}$ 1.1.2.2, page 22

K 1.1, page 19

k 1.1, page 19

κ_L 1.3.1, page 42

κ 1.1, page 19

L' 1.1.5.2, page 27

L^0 1.1.6.3, page 34

L_0 1.1.5.2, page 27

$L^1_{\max}$ 1.3.1, page 43

L^1 1.1.6.3, page 34

l'_b 4.4.2.1, page 121

L_a 1.1.6.1, page 30

L_α 1.1.6.1, page 30

L_d 1.1.5.2, page 27

l^+ 1.3.3, page 45

l''_c 4.4.2.2, page 124

$\mathfrak{m}_L$ 1.3.1, page 42

m 4.5, page 132

$\mathbb{N}^*$ 1, page 19

$\mathbb{N}$ 1, page 19

$\mathcal{N}_G(H)$ 1.1.1, page 19

N_Ω 1.3.4, page 50

$\mathcal{O}_L$ 1.3.1, page 42

ω_L 1.3.1, page 42

Ω 1.3.4, page 50

ω 1.3.1, page 42

$\widehat{P_\Omega}$ 1.3.4, page 50

P^+_Ω 3.3.1, page 80

P_Ω 1.3.4, page 50

p 1.3.1, page 42

$\widetilde{\Phi}_0$ 1.1.5.2, page 27

φ_a 1.3.2, page 44

Φ^D 4.3.1, page 105

Φ^δ 4.3.1, page 105

$\Phi(G,S)$ 1.1.2.1, page 21

Φ_{nd} 1.1.2.1, page 21

Φ_{nm} 1.1.2.1, page 21

$\widetilde{\Phi}$ 1.1.2.2, page 22

Φ 1.1.2.1, page 21

ϖ_L 1.3.1, page 42

$\mathbb{Q}$ 1, page 19

$\mathbb{Q}_p$ 1.3.1, page 42

q 1.3.1, page 42

$\mathbb{R}$ 1, page 19

$\mathcal{R}_l(G)$ 1.1.1, page 20

$R_{l/k}(G)$ 1.1.1, page 20

$r(P)$ 4.1.2, page 90

$\mathcal{R}_{u,l}(G)$ 1.1.1, page 20

$\mathcal{R}_{us,k}(G)$ 1.1.3.3, page 25

S 1.1.2.1, page 21

Σ_0 1.1.5.2, page 27

Σ_α 1.1.6.1, page 30

Σ_d 1.1.5.2, page 27

Σ 1.1.5, page 26

$T(K)^+_b$ 3.3.3, page 82

$T(K)_b$ 1.3.4, page 50

T 1.1.3.1, page 23

τ 1.1.5.2, page 27

$\theta(a,l)$ 1.3.4, page 49

θ 4.3.1, page 105

$U_{a,l}$ 1.3.2, page 44

$U_{a,\Omega}$ 1.3.4, page 50

U_a 1.1.2.4, page 23

U_Ω 1.3.4, page 50

$X_{a,l}$ 4.3.2, page 108

x_a 1.1.6.3, page 33

$\widetilde{x}_\alpha$ 1.1.6.2, page 31

$\overline{\langle X \rangle}$ 1.4.1, page 53

${}^{d}X_l$ 1.1.5.3, page 28

$\overline{X(G,K)}$ 2.3, page 66

$X(G,K)_{\max}$ 2.3, page 66

$X(G,K)$ 1.3.4, page 49

$\mathbb{Z}$ 1, page 19

$\mathcal{Z}_G(H)$ 1.1.1, page 19

Z 1.1.2.4, page 23

Bibliographie

[AB08] Peter Abramenko et Kenneth S. Brown. *Buildings*, volume 248 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. Theory and applications.

[Ach16] Raphaël Achet. Picard group of the forms of the affine line and of the additive group. working paper or preprint, available at https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01377384, Novembre 2016.

[BH99] Martin R. Bridson et André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, et Michel Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[BoT65] Armand Borel et Jacques Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (27) :55–150, 1965.

[BoT71] Armand Borel et Jacques Tits. Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs. I. *Invent. Math.*, 12 :95–104, 1971.

[BoT73] Armand Borel et Jacques Tits. Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples. *Ann. of Math. (2)*, 97 :499–571, 1973.

[BoT78] Armand Borel et Jacques Tits. Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(2) :A55–A57, 1978.

[Bou81] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique*. Masson, Paris, 1981. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6.

[Bro89] Kenneth S. Brown. *Buildings*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[Bro94] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[BrT72] François Bruhat et Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (41) :5–251, 1972.

[BrT84] François Bruhat et Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (60) :197–376, 1984.

[Bru64] François Bruhat. Sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples p-adiques. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 8*, pages Exp. No. 271, 413–423. Soc. Math. France, Paris, 1964.

[CGP15] Brian Conrad, Ofer Gabber, et Gopal Prasad. *Pseudo-reductive groups*, volume 26 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2015.

[CLR16] Inna Capdeboscq, Alexander Lubotzky, et Bertrand Rémy. Presentations : from Kac-Moody groups to profinite and back. *Transform. Groups*, 21(4) :929–951, 2016.

[CM13] Pierre-Emmanuel Caprace et Timothée Marquis. Open subgroups of locally compact Kac-Moody groups. *Math. Z.*, 274(1-2) :291–313, 2013.

[Con12] Brian Conrad. Finiteness theorems for algebraic groups over function fields. *Compos. Math.*, 148(2) :555–639, 2012.

[Con15] Brian Conrad. The structure of solvable groups over general fields. In *Autours des schémas en groupes. Vol. II*, volume 46 of *Panor. Synthèses*, pages 159–192. Soc. Math. France, Paris, 2015.

[CP16] Brian Conrad et Gopal Prasad. *Classification of pseudo-reductive groups*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2016.

[CR14] Inna Capdeboscq et Bertrand Rémy. On some pro-p groups from infinite-dimensional Lie theory. *Math. Z.*, 278(1-2) :39–54, 2014.

[CTS77] Jean-Louis Colliot-Thélène et Jean-Jacques Sansuc. La R-équivalence sur les tores. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10(2) :175–229, 1977.

[DdSMS99] John D. Dixon, Marcus P. F. du Sautoy, Avinoam Mann, et Dan Segal. *Analytic pro-p groups*, volume 61 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.

[DG70] Michel Demazure et Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[Gar97] Paul Garrett. *Buildings and classical groups*. Chapman & Hall, London, 1997.

[GGMB14] Ofer Gabber, Philippe Gille, et Laurent Moret-Bailly. Fibrés principaux sur les corps valués henséliens. *Algebr. Geom.*, 1(5) :573–612, 2014.

[GKKL11] Robert Guralnick, William Kantor, Martin Kassabov, et Alexander Lubotzky. Presentations of finite simple groups : a computational approach. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 13(2) :391–458, 2011.

[Iwa86] Kenkichi Iwasawa. *Local class field theory*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Mathematical Monographs.

[KMT74] Tatsuji Kambayashi, Masayoshi Miyanishi, et Mitsuhiro Takeuchi. *Unipotent algebraic groups*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 414. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[Lan96] Erasmus Landvogt. *A compactification of the Bruhat-Tits building*, volume 1619 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Lan00] Erasmus Landvogt. Some functorial properties of the Bruhat-Tits building. *J. Reine Angew. Math.*, 518 :213–241, 2000.

[LGM00] Charles R. Leedham-Green et Susan McKay. On the classification of p-groups and pro-p groups. In *New horizons in pro-p groups*, volume 184 of *Progr. Math.*, pages 55–74. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[Loi16] Benoit Loisel. On profinite subgroups of an algebraic group over a local field. working paper or preprint, Juillet 2016.

[Loi17] Benoit Loisel. Explicit generators of some pro-p groups via Bruhat-Tits theory. working paper or preprint, Janvier 2017.

[LS94] Alexander Lubotzky et Aner Shalev. On some Λ-analytic pro-p groups. *Israel J. Math.*, 85(1-3) :307–337, 1994.

[Lub01] Alexander Lubotzky. Pro-finite presentations. *J. Algebra*, 242(2) :672–690, 2001.

[Mar91] Gregori A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Mat66] Hideya Matsumoto. Un théorème de Sylow des groupes semi-simples p-adiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 262(2) :425–427, 1966.

[Mat69] Hideya Matsumoto. Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 2 :1–62, 1969.

[MP96] Allen Moy et Gopal Prasad. Jacquet functors and unrefined minimal K-types. *Comment. Math. Helv.*, 71(1) :98–121, 1996.

[MT11] Gunter Malle et Donna Testerman. *Linear algebraic groups and finite groups of Lie type*, volume 133 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[Oes84] Joseph Oesterlé. Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p. *Invent. Math.*, 78(1) :13–88, 1984.

[Pin98] Richard Pink. Compact subgroups of linear algebraic groups. *J. Algebra*, 206(2) :438–504, 1998.

[PR84a] Gopal Prasad et Madabusi S. Raghunathan. Topological central extensions of semisimple groups over local fields. *Ann. of Math. (2)*, 119(1) :143–201, 1984.

[PR84b] Gopal Prasad et Madabusi S. Raghunathan. Topological central extensions of semisimple groups over local fields. II. *Ann. of Math. (2)*, 119(2) :203–268, 1984.

[PR94] Vladimir Platonov et Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, volume 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[Pra82] Gopal Prasad. Elementary proof of a theorem of Bruhat-Tits-Rousseau and of a theorem of Tits. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2) :197–202, 1982.

[Pra89] Gopal Prasad. Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (69) :91–117, 1989. With an appendix by Moshe Jarden and the author.

[Pra16] Gopal Prasad. A new approach to unramified descent in Bruhat-Tits theory. working paper or preprint, available at https://arxiv.org/abs/1611.07430, Novembre 2016.

[PY02] Gopal Prasad et Jiu-Kang Yu. On finite group actions on reductive groups and buildings. *Invent. Math.*, 147(3) :545–560, 2002.

[Ron89] Mark Ronan. *Lectures on buildings*, volume 7 of *Perspectives in Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

[Rou77] Guy Rousseau. *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*. U.E.R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay, 1977. Thèse de doctorat, Publications Mathématiques d'Orsay, No. 221-77.68.

[Rou09] Guy Rousseau. Euclidean buildings. In *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, volume 18 of *Sémin. Congr.*, pages 77–116. Soc. Math. France, Paris, 2009.

[RTW10] Bertrand Rémy, Amaury Thuillier, et Annette Werner. Bruhat-Tits theory from Berkovich's point of view. I. Realizations and compactifications of buildings. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :461–554, 2010.

[Rus70] Peter Russell. Forms of the affine line and its additive group. *Pacific J. Math.*, 32 :527–539, 1970.

[RZ10] Luis Ribes et Pavel Zalesskii. *Profinite groups*, volume 40 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2010.

[Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

[SGA3] Michel Demazure et Alexander Grothendieck. *Schémas en groupes. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962-64 (SGA 3)*. augmented and corrected 2008–2011 re-edition of the original by Philippe Gille and Patrick Polo. Available at http://www.math.jussieu.fr/~polo/SGA3.

[Spr98] Tonny Albert Springer. *Linear algebraic groups*, volume 9 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[Ste68] Robert Steinberg. *Lectures on Chevalley groups*. Yale University, New Haven, Conn., 1968. Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson.

[Tit66] Jacques Tits. Classification of algebraic semisimple groups. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 33–62. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Tit68] Jacques Tits. *Lectures on algebraic groups*. Number vol. 1 in Lectures on Algebraic Groups. Yale University, Dept. of Mathematics, 1968.

[Tit79] Jacques Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tit13] Jacques Tits. *Résumés des cours au Collège de France 1973–2000*, volume 12 of *Documents Mathématiques (Paris)*. Société Mathématique de France, Paris, 2013.

[Wei09] Richard M. Weiss. *The structure of affine buildings*, volume 168 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[Wil98] John S. Wilson. *Profinite groups*, volume 19 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : Sur les sous-groupes profinis des groupes algébriques linéaires

Mots Clefs : Groupes algébriques linéaires, corps locaux, immeubles affines, théorie de Bruhat-Tits, groupes pseudo-réductifs, groupes profinis

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons aux sous-groupes profinis et pro-p d'un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps local. Dans le premier chapitre, on résume brièvement la théorie de Bruhat-Tits et on introduit les notations nécessaires à ce travail. Dans le second chapitre, on trouve des conditions équivalentes à l'existence de sous-groupes compacts maximaux d'un groupe algébrique linéaire G connexe quelconque défini sur un corps local K. Dans le troisième chapitre, on obtient un théorème de conjugaison des sous-groupes pro-p maximaux de $G(K)$ lorsque G est réductif. On décrit ces sous-groupes, de plus en plus précisément, en supposant successivement que G est semi-simple, puis simplement connexe, puis quasi-déployé. Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse aux présentations d'un sous-groupe pro-p maximal du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique G semi-simple simplement connexe quasi-déployé défini sur un corps local K. Plus spécifiquement, on calcule le nombre minimal de générateurs topologiques d'un sous-groupe pro-p maximal. On obtient une formule linéaire en le rang d'un certain système de racines, qui dépend de la ramification de l'extension minimale L/K déployant G, explicitant ainsi les contributions de la théorie de Lie et de l'arithmétique du corps de base.

Title : On profinite subgroups of linear algebraic groups

Keys words : Linear algebraic groups, local fields, affine buildings, Bruhat-Tits theory, pseudo-reductive groups, profinite groups

Abstract : In this thesis, we are interested in the profinite and pro-p subgroups of a connected linear algebraic group defined over a local field. In the first chapter, we briefly summarize the Bruhat-Tits theory and introduce the notations necessary for this work. In the second chapter we find conditions equivalent to the existence of maximal compact subgroups of any connected linear algebraic group G defined over a local field K. In the third chapter, we obtain a conjugacy theorem of the maximal pro-p subgroups of $G(K)$ when G is reductive. We describe these subgroups, more and more precisely, assuming successively that G is semi-simple, then simply connected, then quasi-split in addition. In the fourth chapter, we are interested in the pro-p presentations of a maximal pro-p subgroup of the group of rational points of a quasi-split semi-simple algebraic group G defined over a local field K. More specifically, we compute the minimum number of generators of a maximal pro-p subgroup. We obtain a formula which is linear in the rank of a certain root system, which depends on the ramification of the minimal extension L/K which splits G, thus making explicit the contributions of the Lie theory and of the arithmetic of the base field.