



HAL
open science

Modélisation et commande pour les optiques adaptatives des VLT et ELT : de l'analyse de performance à la validation ciel

Rémy Juvénal

► **To cite this version:**

Rémy Juvénal. Modélisation et commande pour les optiques adaptatives des VLT et ELT : de l'analyse de performance à la validation ciel. Optique [physics.optics]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLO007 . tel-01661369

HAL Id: tel-01661369

<https://pastel.hal.science/tel-01661369>

Submitted on 11 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLS007

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE À L'INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL

Ecole doctorale n°575
« Physique et ingénierie : électrons, photons, sciences du vivant »
(EOBE)

Spécialité de doctorat : Physique

par

M. RÉMY JUVÉNAL

MODÉLISATION ET COMMANDE POUR LES OPTIQUES
ADAPTATIVES DES VLT ET ELT : DE L'ANALYSE DE
PERFORMANCE À LA VALIDATION CIEL

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 23 Octobre 2017.

Composition du Jury :

Mme	CAROLINE KULCSÁR	Professeure des universités Institut d'Optique Graduate School	(Directrice de thèse)
M.	GÉRARD ROUSSET	Professeur des universités Observatoire de Paris	(Président)
M	SIMONE ESPOSITO	Astronome Osservatorio di Arcetri (Italie)	(Rapporteur)
M.	JEAN-PIERRE VÉLAN	Assistant professeur University of Victoria (Canada)	(Rapporteur)
M.	BENOÎT NEICHEL	Chargé de recherche Laboratoire d'astrophysique de Marseille	(Examineur)
M.	HENRI-FRANÇOIS RAYNAUD	Maître de conférence Institut d'Optique Graduate School	(Examineur) (Co-encadrant)
M.	JEAN-MARC CONAN	Ingénieur de recherche ONERA	(Examineur) (Co-encadrant)

Remerciements

C'est avec beaucoup d'émotions que je conclus ces trois années d'expérience enrichissantes tant du point de vue scientifique et professionnel, qu'humain. C'est ainsi avec un certain plaisir que j'achève la rédaction de ce manuscrit en écrivant cette traditionnelle rubrique des remerciements, accordant ainsi une pensée amicale à tous ceux avec qui j'ai pu interagir, et qui occuperont à jamais une place particulière dans ma mémoire.

Je tiens à commencer par remercier les membres de mon jury de thèse, et en premier lieu Simone Esposito et Jean-Pierre Véran d'avoir accepté de rapporter mon travail, malgré des conditions de planning accélérées. Merci en outre pour vos questions, qui ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit. Un grand merci aussi à Gérard Rousset et Benoît Neichel de me faire l'honneur d'examiner mes travaux de thèse. Je tiens à remercier chaleureusement mes trois gourous : Caroline, Henri-François, et Jean-Marc, qui m'ont apporté leur soutien indéfectible au cours de ces trois années de thèse, pour la qualité des nombreuses discussions scientifiques que nous avons pu avoir, toujours au combien enrichissantes, et pour m'avoir proposé une dynamique et un cadre de travail particulièrement agréable. Goûter à la recherche académique à vos côtés a été une réelle chance, et pour moi un vrai plaisir quotidien.

Un grand merci aux équipes SPIm et HRA pour votre accueil, pour votre disponibilité tant autour de petits séminaires qu'en privé, pour avoir toujours répondu à mes questions (parfois naïves). Travailler à vos côtés m'a beaucoup appris, et je ne pourrais jamais assez vous remercier pour cela. Merci aussi à Mondher Besbes, sans qui j'attendrais encore aujourd'hui mon premier budget d'erreur ! Comment ne pas avoir aussi une pensée émue pour toute l'équipe de GEMINI, avec qui j'ai adoré collaborer (même avec le décalage horaire, et les réunions qui finissent tard chez nous). Merci infiniment à Gaetano Sivo, déjà pour avoir lancé cette collaboration, et qui m'a permis d'aborder les contraintes liées au fonctionnement d'un système comme GeMS, et surtout pour votre accueil lors de cette mission de novembre 2015. Ainsi, merci Vincent, Martin, Eduardo pour ces trois semaines passées ensemble, pour le retour en enfance le soir autour de la Cube, et pour m'avoir fait découvrir ce beau pays qu'est le Chili.

La thèse c'est beaucoup de boulot (je n'étonnerai personne) mais pas que, et je voulais remercier tous mes super collègues, et amis, doctorants, postdoc et stagiaires, avec qui j'ai adoré partager couloir, bureau, café, et explosion de chatons ! Ainsi en vrac un grand merci à Marie-Anne, Rafael, Lijo, Sergio, Nicolas, Riadh, Corentin, Léonard (qui a la lourde tâche de me succéder ;)), Stéphane, Jan, et Claudiu (tu nous as fait rêver !). Merci à Matthieu,

bon toi t'es un permanent mais t'es un super GM donc tu as ta place dans ce paragraphe. Merci aussi aux doctorant de l'équipe HRA, je n'ai pas pu vous côtoyer à moitié autant que j'aurais aimé, mais j'ai toujours apprécié l'ambiance autour des repas et pauses (quand je pouvais y participer!) à Châtillon, et de vous retrouver en conférence! Donc merci à Joel, Sébastien, Adrien, Olivier, Kassem, Elena, Pedro, Anaïs, et je souhaite un bon courage aux petits nouveaux avec qui je n'ai pas eu l'occasion de beaucoup discuter.

Enfin, qu'est-on sans son entourage proche? Merci les amis pour tous ces moments de détente, qui permettent de s'aérer la tête de temps en temps! Merci à mes parents et ma soeur qui, en plus de m'avoir toujours poussé dans mes études, m'ont toujours apporté le soutien dont j'avais besoin. Enfin, je finis par vous parce que vous êtes mes deux étoiles guides : merci Anne de m'avoir supporté ces trois dernières années (et les sept d'avant aussi mais c'est un autre sujet), je ne sais pas si j'aurais pu accomplir tout ça sans ton soutien, et merci à mon petit bonhomme, qui me donne l'envie de déplacer des montagnes!

Table des matières

1	Introduction Générale	19
2	L'optique adaptative pour l'imagerie astronomique	23
2.1	Imagerie à travers la turbulence atmosphérique	24
2.1.1	Principes de formation d'image	24
2.1.2	Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique	26
2.1.2.1	Caractérisation optique des déformations introduites par la turbulence	26
2.1.2.2	Caractérisation statistique de la turbulence	28
2.1.2.3	Phénomène d'anisoplanétisme	29
2.1.3	Bases de représentation de la turbulence atmosphérique	30
2.1.3.1	Représentation zonale	30
2.1.3.2	Base des polynômes de Zernike	31
2.1.3.3	Base des polynômes de Karhunen-Loève	35
2.1.4	Autres sources de perturbation	35
2.2	Compensation des effets de la turbulence atmosphérique	36
2.2.1	Optique adaptative classique	37
2.2.1.1	Principe	37
2.2.1.2	Critères de performance en imagerie	37
2.2.1.3	Limites	39
2.2.2	Description des composants du système d'optique adaptative	41
2.2.2.1	Dispositifs d'analyse de surface d'onde	41
2.2.2.2	Dispositifs de correction de front d'onde	44
2.2.2.3	Étoiles guides laser	45
2.2.3	Quelques modalités d'optique adaptative	47
2.2.3.1	Optique adaptative extrême (XAO)	47
2.2.3.2	Optique adaptative à tomographie laser (OATL)	48
2.2.3.3	Optique adaptative multi-conjuguée (OAMC)	49
2.2.3.4	Optique adaptative multi-objet (OAMO)	50
2.3	Asservissement des systèmes d'optique adaptative	51
2.3.1	Modélisation de la boucle d'asservissement	51
2.3.1.1	Optique adaptative classique	52
2.3.1.2	Adaptation aux systèmes grand champ	54
2.3.1.3	Évaluation de la variance de phase résiduelle	55

2.3.2	Concepts de commande en optique adaptative	57
2.3.2.1	Régulateur à action intégrale	57
2.3.2.2	Le régulateur statique MMSE	58
2.3.2.3	Commande optimale linéaire quadratique gaussienne (LQG)	59
3	Caractérisation de la performance d'un correcteur linéaire en optique adaptative classique : expression du budget d'erreur	63
3.1	Évaluation du budget d'erreur d'une OA classique	64
3.1.1	Résumé de l'article	64
3.1.2	Article : <i>Linear controller error budget assessment for SCAO systems</i>	65
3.1.3	Retour sur le biais de reconstruction lié au repliement spatial	78
3.2	Implémentation algorithmique et complexité calculatoire	80
3.2.1	Forme d'état de régulateurs particuliers	80
3.2.1.1	Régulateur à action intégrale	81
3.2.1.2	Régulateur LQG – forme prédicteur	81
3.2.1.3	Régulateur LQG – forme estimateur	82
3.2.1.4	Régulateur mixte LQG bas ordres – intégrateur hauts ordres	82
3.2.2	Forme d'état associée aux fonctions de transfert	85
3.2.2.1	Fonction de transfert de réjection de perturbation	85
3.2.2.2	Fonction de transfert de propagation de bruit	87
3.2.3	Complexité calculatoire et parallélisation des calculs	88
3.3	Extension du formalisme au cas des systèmes d'optique adaptative grand champ	89
3.3.1	Adaptation de la formulation du budget d'erreur	89
3.3.2	Expression du budget d'erreur commandé	91
3.3.3	Discussion sur l'implémentation	92
3.4	Conclusion et discussion	93
4	Analyse de performance sur données ciel GeMS : Intégration d'une commande LQG tip/tilt avec filtrage de vibrations	95
4.1	Présentation de GeMS et performances actuelles	96
4.1.1	Le banc d'OAMC CANOPUS	96
4.1.2	Analyse de performance des campagnes d'avril 2015	97
4.2	Intégration d'une commande tip/tilt LQG pour GeMS	98
4.3	Identification paramétrique dynamique de modèles tip/tilt vibratoires pour la commande LQG	100
4.3.1	Identification paramétrique de modèles AR2 turbulent et vibratoires	101
4.3.2	Le filtre de Kalman étendu (EKF)	102
4.3.3	Minimisation de l'erreur de prédiction (PEM)	103
4.3.4	Minimisation d'erreur de prédiction en cascade (cPEM)	104
4.4	Analyse des performances des régulateurs synthétisés en rejeu	106
4.4.1	Principe de la simulation en rejeu	106
4.4.2	Performances des régulateurs	107
4.4.3	Analyse du budget d'erreur	109
4.5	Conclusion	111

5 Nouveaux régulateurs tenant compte de la direction du vent : performance et analyse	113
5.1 Quelle modélisation peut-on déduire des données?	114
5.2 Un compromis : le régulateur LQG tiède	115
5.2.1 Mode bouillonnant	115
5.2.2 Mode translation pure	117
5.2.2.1 Description de la stratégie de commande	117
5.2.2.2 Remplissage de la phase entrant dans la pupille	118
5.2.2.3 Optimalité du régulateur	120
5.2.3 Mode tiède	121
5.2.4 Expression en optique adaptative grand champ	122
5.3 Impact de la modélisation sur la performance en SCAO	122
5.3.1 Conditions de simulation	122
5.3.2 Simulation d'une turbulence en translation pure	123
5.3.3 Simulation d'une turbulence bouillonnante	124
5.4 Conclusion et discussion	124
6 Conclusion et discussion	127
A Documentation technique : Intégration d'une commande LQG avec filtrage de vibration pour GeMS – Interface graphique et architecture temps-réel.	133

Table des figures

2.1	FEP normalisée d'un télescope idéal (tache d'Airy)	26
2.2	Principe de l'effet de la turbulence atmosphérique sur le front d'onde incident	27
2.3	Illustration du phénomène d'anisoplanétisme en optique adaptative classique : L'objet d'intérêt est écarté d'un angle α de la direction de l'étoile guide . . .	30
2.4	Représentation zonale d'une phase de type von Kármán sur différentes grilles d'échantillonnage	30
2.5	Matrice de covariance spatiale d'une phase de type von Kármán, pour une représentation zonale 32x32	31
2.6	Représentation des 21 premiers polynômes de la base de Zernike	33
2.7	Statistiques spatiales de phase turbulente exprimées dans une base de poly- nômes de Zernike	34
2.8	Statistiques spatio-temporelle de phases turbulentes exprimées dans une bases de polynômes de Karhunen-Loève	36
2.9	Illustration de la présence de vibrations sur le tip/tilt. Données acquises par SCEXAO, au télescope Subaru (Hawaii). Graphe issu de [Kulcsár <i>et al.</i> , 2012].	37
2.10	Principe de l'optique adaptative classique (SCAO)	38
2.11	Principe du phénomène d'anisoplanétisme pour l'optique adaptative classique	40
2.12	Illustration d'effet d'anisoplanétisme sur la qualité d'imagerie de l'OA clas- sique (crédit C. Petit)	41
2.13	Principe de l'analyseur de Shack-Hartmann	43
2.14	Les deux technologies d'étoiles laser	46
2.15	Illustration de l'utilisation d'une EGL de type sodium en optique adaptative classique. On suppose la turbulence localisée sur deux couches fines.	48
2.16	Schéma de principe de l'optique adaptative à tomographie laser (OATL) avec deux étoiles guides naturelles, trois étoiles guides laser de type sodium et un champ d'intérêt restreint autour d'un objet. On suppose la turbulence localisée en deux couches, l'une au sol et l'autre en altitude.	49
2.17	Schéma de principe de l'optique adaptative multi-conjuguée (OAMC) avec trois étoiles guides naturelles, deux étoiles guides laser de type sodium et deux objets dans un champ d'intérêt étendu. On suppose la turbulence localisée en deux couches, l'une au sol et l'autre en altitude.	50
2.18	Champ d'observation dans le cas de l'OAMO. Plusieurs cibles sont présentes dans un champ large, avec plusieurs EG (naturelles et/ou laser).	51

2.19	Schéma de principe de l'optique adaptative multi-objet avec deux étoiles guides naturelles, deux étoiles guides laser de type sodium et un objet d'intérêt sur axe. On suppose la turbulence localisée en deux couches, l'une au sol et l'autre en altitude.	52
2.20	Schéma bloc de principe de l'asservissement d'un système d'optique adaptative	53
2.21	Chronogramme d'un système d'OA à deux trames de retard.	53
2.22	Schéma de principe de l'asservissement d'un système d'OA grand champ. Sont représentées deux étoiles guides (laser en orange, naturelle en bleu), des miroirs déformables conjugués à des altitudes différentes (plans violets) et plusieurs couches turbulentes (plans gris). Les empreintes des faisceaux et des métapupilles sont matérialisées en pointillés sur chacune des couches turbulentes.	56
2.23	Influence du gain de l'intégrateur sur les fonctions de transfert de la boucle d'OA	58
2.24	Influence du modèle sur la fonction de transfert de réjection d'un régulateur LQG	61
3.1	Influence du repliement spectral sur l'estimation de la DSP de la phase de perturbation à partir de la reconstruction de front d'onde. Les DSP estimées à partir de phases reconstruites par MC (marron) et MAP (vert) sont comparées à celles estimées à partir de la vraie trajectoire de phase (noir). La loi fréquentielle d'évolution (Taylor - rouge) et celle du repliement spectral (violet, cas MC [Gendron et Rousset, 2012]) sont superposées.	79
3.2	Signatures spectrales du repliement au travers du reconstituteur MAP aux hautes fréquences spatiales	80
3.3	Budget d'erreur du régulateur mixte à 2 ou 9 modes LQG comparé à celui de régulateurs LQG complet ou à action intégrale	85
3.4	Schéma-bloc équivalent du point de vue entrée-sortie à la fonction de transfert de réjection d'une boucle fermée d'OA classique	86
3.5	Schéma-bloc équivalent du point de vue entrée-sortie à la fonction de transfert de propagation de bruit d'une boucle fermée d'OA classique.	87
4.1	Schéma de principe optique de l'instrument d'OAMC CANOPUS. Crédit GEMINI.	97
4.2	Caractéristiques spectrales des 57 enregistrements ASO de GeMS en avril 2015	98
4.3	DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode AR2. Ordre du modèle : 22 (1 AR2 turbulent + 10 AR2 vibratoires). .	101
4.4	DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode EKF. Ordre du modèle : 30.	103
4.5	DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode PEM. Ordre du modèle : 30.	104
4.6	DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode cPEM. Ordre du modèle : 30 (15 cellules d'ordre 2).	105
4.7	Schéma de principe de l'algorithme d'identification c-PEM (PEM en cascade) avec trois cellules d'ordre deux représentées	106

4.8	Illustration du principe d'une simulation en rejeu à partir de données ciel boucle fermée	107
4.9	Performance en rejeu des différentes commandes envisagées pour GeMS, sur 67 fichiers d'avril 2015	108
4.10	Budget d'erreur moyen tip/tilt de GeMS sur les enregistrements d'avril 2015. Les cas d'instabilité de la méthode AR2 ont été supprimés pour tous les régulateurs.	110
4.11	Comparaison des fonctions de transfert des différents régulateurs pour le jeu de données ngs15105213323.	110
5.1	Illustration du mécanisme de prédiction pour le régulateur LQG modifié en configuration <i>frozen flow</i>	118

Liste des tableaux

- 2.1 Quelques caractéristiques de différentes générations de miroirs déformables pour l’optique adaptative classique. R_{ciel} désigne la distance inter-actionneurs reportée par conjugaison optique dans la pupille. 45
- 5.1 Conditions de simulation inspirées du système NAOS/VLT 123
- 5.2 Performances des régulateurs en simulation avec génération d’une turbulence en *frozen flow*, exprimées en rapport de Strehl 124
- 5.3 Performances des régulateurs en simulation avec génération d’une turbulence bouillonnante, exprimées en rapport de Strehl 124

Table des acronymes

ARn	Auto-régressif d'ordre n
ASO	Analyseur de surface d'onde
CANARY	Démonstrateur d'OAMO au télescope W. Hershell (Îles Canaries)
CTR	Calculateur (ou contrôleur) temps-réel
DSP	Densité spectrale de puissance
EG	Étoile guide
EGL	Étoile guide laser
EGN	Étoile guide naturelle
EKF	Filtre de Kalman étendu ou <i>Extended Kalman filter</i>
ELT	Télescope géant ou <i>Extremely large telescope</i>
E-ELT	Télescope géant européen ou <i>European-Extremely large telescope</i>
FEP	Fonction d'étalement du point
GEMINI	Observatoire composé de deux télescopes : le Sud au Chili et le Nord à Hawaï
KL	mode de Karhunen-Loève
LQG	Linéaire quadratique gaussien
MAP	<i>Maximum a posteriori</i>
MC	moindres carrés
MD	Miroir déformable
MMSE	Minimisation d'erreur quadratique moyenne ou <i>Minimum mean square error</i>
NAOS	Instrument d'OA classique du VLT (Chili)
NCPA	Aberrations de voie non commune ou <i>non-common path aberrations</i>
OA	Optique adaptative
SCAO	OA classique ou <i>single conjugate adaptive optics</i>
OATL	OA à tomographie laser
OAMC	OA multi-conjuguée

Liste des tableaux

OAMO	OA multi-objets
XAO	OA extrême ou <i>eXtreme adaptive optics</i>
PEM	Minimisation d'erreur de prédiction ou <i>prediction error minimization</i>
cPEM	PEM en cascade ou <i>cascaded-PEM</i>
R_S	Rapport de Strehl
SH	Shack-Hartmann (type d'ASO)
SVD	Décomposition en valeurs singulières ou <i>singular values decomposition</i>
TTM	Miroir de tip/tilt ou <i>tip/tilt mirror</i>
VLT	grand télescope ou <i>Very large telescope</i>
le VLT	Observatoire européen (au Chili)

Table des notations

Liste des tableaux

r	Coordonnées spatiales en mètres
α	Coordonnées angulaires en radians
α_{iso}	Angle d'isoplanétisme
γ	Angle zénithal en radians
h	Altitude en mètres
ν	Fréquence temporelle normalisée
f_s	Fréquence spatiale
f_c	Fréquence de coupure spatiale
ω	pulsation en radians par secondes
$\psi(\cdot)$	Fonction d'onde
$I(\cdot)$	Image
$O(\cdot)$	Objet
$f(\cdot)$	Amplitude complexe de l'onde
$\Omega(\cdot)$	Fonction pupillaire
FEP	Fonction d'étalement du point
$FEP_{\text{Airy}}(\cdot)$	Distribution d'Airy
FTO	Fonction de transfert optique
J_0	Fonction de Bessel d'ordre 0
J_1	Fonction de Bessel d'ordre 1
D_{pup}	Diamètre de la pupille
r_0	Paramètre de Fried
L_0	Grande échelle
V	Vitesse du vent
δn	Variance de l'indice de réfraction
λ	Longueur d'onde
ϕ	Phase de perturbation
$\hat{\phi}$	Phase estimée

v	Bruit formeur
Σ_v	Matrice de covariance du bruit formeur
(A, Γ)	Matrice de l'équation d'état
x	vecteur d'état
ϕ^{res}	Phase résiduelle
ϕ^{cor}	Phase de correction
ϕ^{zon}	Phase en zonal
ϕ^{zer}	Phase en Zernike
$Cn^2(h)$	Constante de structure
D_ϕ	Fonction de Structure
C_ϕ	Fonction de covariance
S_ϕ	Densité spectrale de puissance
f_{ml}	Distance focale des micro-lentilles en mètres
(d_x, d_y)	Écart au centre optique des sous-pupilles
Ω_{ss}	Surface d'une sous-pupille
F_e	Fréquence d'échantillonnage en Hertz
T_e	Temps d'échantillonnage en secondes
D	Opérateur ASO
y	Vecteurs de mesure ASO
w	Bruit de mesure
Σ_w	Matrice de covariance du bruit de mesure
C	Matrice du modèle de mesure
σ_{photon}^2	Variance de bruit de photons
$\sigma_{\text{lecture}}^2$	Variance de bruit de lecture
ρ_{pix}	Distance entre deux pixels, en pixels
N_{pix}	Nombre de pixels
d_{pix}	Largeur d'un pixel
N	Matrice d'influence du MD
u	Vecteur de commande
$u^{(i)}$	Tension envoyée au i^{eme} actionneur
n_{act}	Nombre d'actionneurs
d_{act}	Distance inter-actionneurs en mètres
f_i	Fonctions d'influence
P_u	Projecteur sur le miroir déformable
g	Gain de l'intégrateur

Liste des tableaux

L_∞	Gain de Kalman
K	Gain de commande
R_ϕ	Reconstructeur de phase
n	Ordre radial de Zernike
m	Ordre azimutal de Zernike
$P_{Zon \rightarrow Zer}$	Projecteur zonal vers Zernike
$P_{Zer \rightarrow Zon}$	Projecteur Zernike vers zonal
M_{int}	Matrice d'influence du système
M_{com}	Matrice de commande du système
R_S	Rapport de Strehl
E_c	Énergie cohérente
i_{halo}	Intensité du halo
σ_{res}^2	Variance de phase résiduelle
σ_{tempo}^2	Erreur temporelle
σ_{tomo}^2	Erreur tomographique
σ_{alias}^2	Erreur de repliement
$\sigma_{fitting}^2$	Erreur de <i>fitting</i>
$\sigma_{bruit, prop}^2$	Erreur de bruit propagé
σ_{NCPA}^2	Erreur lié aux aberrations de voie non commune
T^{rej}	Fonction de transfert de réjection
T^{bruit}	Fonction de transfert de propagation de bruit
M_α	Projecteur dans la direction de mesure
M_β	Projecteur dans la direction d'intérêt
\mathcal{P}	Espace des phases
\mathcal{P}^{\parallel}	Espace des phases sans repliement
\mathcal{P}^\perp	Espace complémentaire de \mathcal{P}^{\parallel}
P^{\parallel}	Projecteur sur \mathcal{P}^{\parallel}
P^\perp	Projecteur sur \mathcal{P}^\perp

Chapitre 1

Introduction Générale

L'observation astronomique au sol, née au début des années 1600 avec l'invention de la lunette de Galilée, a subi un essor considérable ces cent dernières années. Le premier télescope à miroirs est quant à lui inventé en 1666 par Newton, et ouvre la porte à l'extension du diamètre de collection de la lumière. En effet, le diamètre des télescopes, lié à la limite de diffraction, limite théorique de la résolution des images qu'il délivre, n'a cessé de croître pour passer d'un mètre au début du XX^e siècle à dix mètres de nos jours. Les télescopes dits VLT, pour *Very Large Telescopes*, représentent ceux dont le diamètre est compris en huit et dix mètres. Les années à venir verront l'émergence des télescopes géants, baptisés ELT pour *Extremely Large Telescopes*, avec des diamètres de plusieurs dizaines de mètres. Cette croissance importante des surfaces collectrices n'a pour autant pas servi, tout au long du XX^e siècle, à accroître la résolution de ces instruments. En effet, la présence de l'atmosphère terrestre limite la résolution de tous les télescopes au sol. Ainsi, quel que soit le télescope, l'atmosphère limite sa résolution à celle qu'aurait un télescope d'une trentaine de centimètres de diamètre, limité par la diffraction. Dès 1953, Babcock propose un principe de correction des déformations induites par la turbulence atmosphérique, posant de ce fait les bases de l'optique adaptative (OA) [Babcock, 1953]. Néanmoins, ce n'est qu'en 1989 que ce principe sera mis en œuvre et donnera lieu à la première observation approchant la limite de diffraction, avec la réalisation du premier instrument d'optique adaptative, COME-ON [Rousset *et al.*, 1990]. Cette nouvelle modalité d'instrumentation astronomique est immédiatement apparue comme incontournable [Fontanella *et al.*, 1991] et a donné lieu à de nombreux développements, conduisant à l'élaboration de programmes scientifiques de pointe concernant les instruments des VLT et ELT.

Le principe de l'OA repose sur deux dispositifs optiques : les analyseurs de surface d'onde (ASO) et les correcteurs de front d'onde, dont font partie les miroirs déformables (MD). De nombreux développements sont encore à l'œuvre aujourd'hui pour améliorer ces dispositifs, motivés par les objectifs ambitieux des programmes d'observation actuels et futurs, comme par exemple, en ce qui concerne les ASO, les analyseurs à pyramide [Ragazzoni, 1996, Bond *et al.*, 2016, Chen *et al.*, 2016], ou encore l'analyseur LIFT actuellement caractérisé sur le télescope Keck [Meimon *et al.*, 2010a, Plantet *et al.*, 2016]. Le traitement des mesures ASO et la commande en temps réel de ces systèmes représentent un autre enjeu d'impor-

tance, croissant avec la complexité des systèmes conçus et envisagés. Alors que les stratégies mises en place à l'époque de COME-ON se limitaient à l'emploi de lois de commande simples, les derniers instruments, comme SPHERE [Beuzit *et al.*, 2005, Sauvage *et al.*, 2014] ou GPI [Macintosh *et al.*, 2008, Poyneer *et al.*, 2016], emploient des lois de commande plus complexes, dont une partie repose sur des propriétés physiques des phénomènes perturbant l'observation (turbulence atmosphérique, vibrations, etc).

Les développements pour la commande des systèmes d'OA s'articulent principalement autour des deux axes suivant : les commandes qui ne tiennent pas compte explicitement d'un modèle dynamique des perturbations et celles basées sur un modèle dynamique, les commandes à base de modèle. Les stratégies utilisées à l'époque de COME-ON appartiennent à la première catégorie, avec un régulateur à action intégrale. C'est un régulateur couramment utilisé en OA sur les systèmes opérationnels. Les commandes s'appuyant sur un modèle explicite d'évolution des perturbations affectant le système comprennent actuellement principalement la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG). La commande LQG a suscité de l'intérêt très tôt, dès le début des années 1990. Les premiers travaux proposaient une formulation LQG continue approximée [Paschall *et al.*, 1991, Paschall et Anderson, 1993]. Malgré leur potentiel évident, ces méthodes ont peiné à convaincre la communauté pendant plus d'une décennie, en particulier à cause de leur complexité calculatoire accrue. Cependant, contrairement aux autres régulateurs utilisés, elles tiennent compte de la dynamique de la perturbation et des retards inhérents aux systèmes d'optique adaptative, ce qui permet de prédire l'évolution de la perturbation.

La commande LQG optimale au sens de la variance de phase résiduelle, pour les systèmes d'optique adaptative classique et grand champ, a été introduite par [Le Roux *et al.*, 2003, Le Roux *et al.*, 2004]. La démonstration complète de son optimalité peut être trouvée dans [Kulcsár *et al.*, 2006]. Les développements se sont alors accélérés. La première démonstration expérimentale de ce concept de commande a été obtenue dans les laboratoires de l'ONERA, en collaboration avec le L2TI, sur le banc BOA [Petit *et al.*, 2005], suivie par les premiers résultats de compensation de vibrations [Petit *et al.*, 2008]. Les premières validations expérimentales de commande LQG grand champ ont ensuite suivi sur le banc HOMER [Costille, 2009]. Suite aux premiers résultats expérimentaux très concluants, l'approche a gagné de l'intérêt dans la communauté. Une commande LQG a ainsi été développée sur la base d'une modélisation différente : la phase turbulente est supposée de type Taylor (un écran figé qui se translate sous l'effet du vent), et sa dynamique est exprimée dans le domaine de Fourier. Cette approche est dénommée *Predictive Fourier Control* [Poyneer et Véran, 2008]. Cette stratégie de commande a été validée en OA classique [Poyneer *et al.*, 2009, Rudy *et al.*, 2015].

La capacité de ces commandes à compenser des perturbations complexes, et les résultats obtenus par les différentes équipes, ont motivé la communauté à intégrer la commande LQG dans la conception de la commande des instruments. La première validation sur ciel d'une commande LQG complète en OA classique, en OA multi-objet et en OA à tomographie laser, a eu lieu dans le cadre des travaux de [Sivo, 2013, Sivo *et al.*, 2013, Sivo *et al.*, 2014],

de l'ANR CHAPERSONA et du projet européen CANARY, sur le démonstrateur d'OA multi-objet CANARY au télescope William Hershell. Une solution intermédiaire dédie le régulateur LQG à la compensation des modes de basculement, généralement affectés de vibrations mécaniques, ainsi qu'éventuellement à la compensation d'autres modes à basse fréquence spatiale. Le reste des modes est alors régulé par un intégrateur. Ce type de solution a d'abord été proposée et est opérationnelle pour la commande des modes de basculement de l'instrument d'OA extrême SPHERE [Sauvage *et al.*, 2014]. Dans le même temps, le *Predictive Fourier Control* a été intégré à la conception de la loi de commande de l'imageur d'exoplanètes GPI (de l'observatoire américain GEMINI) pour la correction des modes de basculement et de la défocalisation [Poyneer *et al.*, 2016]. Les performances atteintes par CANARY, SPHERE et GPI ont ainsi motivé l'observatoire GEMINI à intégrer une solution LQG avec filtrage de vibrations pour la commande des modes de basculement de l'instrument d'OAMC GeMS [Sivo *et al.*, 2016], solution dont l'apport en performance a été montré en simulation [Juvénal *et al.*, 2015b, Leboulleux *et al.*, 2015].

L'apport en performance des lois de commande à base de modèles est acquis pour la compensation de la partie basses fréquences de la turbulence et pour les vibrations. Elles sont aussi envisagées pour les futures mises à jour des instruments de VLT les plus ambitieux, comme GeMS [Sivo *et al.*, 2016] ou RAVEN [Jackson *et al.*, 2014], ainsi que pour la plupart des nouveaux instruments des ELT, comme HARMONI [Correia *et al.*, 2016]. En revanche, la compréhension fine des performances de ces systèmes, du point de vue du type de régulateur employé, reste à approfondir. Comparer les performances obtenues pour tous ces systèmes et pour toutes ces stratégies de commande n'est pas simple.

L'analyse fine de la performance passe par l'établissement d'un budget d'erreur, outil parfaitement adapté à l'analyse des performances d'un système d'OA. Cela consiste à découper le critère de performance, en général la variance de la phase résiduelle sur la voie scientifique, en postes d'erreur indépendants ou considérés comme tels. Pour ne citer que l'exemple des instruments d'optique adaptative extrême, dédiés à l'imagerie d'exoplanètes, les travaux de [Guyon, 2005] présentent les principales limites et les principaux axes d'amélioration des instruments d'alors pour atteindre les objectifs de l'optique adaptative extrême. Des budgets d'erreur ont été établis pour la conception de SPHERE [Fusco *et al.*, 2006] et de GPI [Macintosh *et al.*, 2007], et l'analyse de performance est à ce jour en cours [Sauvage *et al.*, 2014, Poyneer *et al.*, 2016]. Les budgets d'erreur sont ainsi principalement élaborés et calculés pour deux raisons : définir les spécifications d'un système lors de sa phase de conception, et analyser les performances réelles des instruments en traitant des séquences de mesures ASO enregistrées sur le ciel. Lorsque ces budgets d'erreur sont élaborés en phase de conception des instruments, ils le sont à partir d'approximations quant aux caractéristiques de la turbulence, et utilisent des approximations comme par exemple concernant l'erreur de dimensionnement (ou *fitting*) du miroir déformable [Hudgin, 1977, Roddier, 1999], et des hypothèses correspondant à des régulateurs simples (intégrateur, ou reconstruction de front d'onde par moindres carrés). Les analyses de performances de systèmes à partir d'enregistrements sur le ciel, comme par exemple celles réalisées pour CANARY [Martin, 2013, Martin *et al.*, 2017, Vidal *et al.*, 2014], sont

particularisées au système étudié, et donc non applicable au cas général.

Ces travaux de thèse ont donc pour premier objectif de formuler un budget d'erreur pour tout régulateur linéaire, afin de pouvoir évaluer et comparer finement les performances. Ils ont également pour objectif de définir de nouveaux modèles pour la commande haute performance de systèmes d'optique adaptative sur des télescopes de type VLT ou ELT, dans la perspective d'une implémentation ciel.

Le chapitre 2 de ce manuscrit introduit les différentes notions relatives à l'imagerie en limite de diffraction par un télescope au sol, ainsi que le formalisme nécessaire aux développements présentés dans ce manuscrit. Le chapitre 3 introduit un formalisme de calcul de budget d'erreur, s'adaptant à n'importe quel système et à tout régulateur linéaire. Dans un premier temps, ce formalisme est développé dans le cadre d'un système d'optique adaptative classique, et validé en simulation, puis est étendu au cas des systèmes d'optique adaptative grand champ. Le chapitre 4 utilise ce formalisme de budget d'erreur pour analyser les performances du système d'OAMC GeMS pour la commande des modes de basculement. L'analyse de performance permet ainsi de guider les choix de modèle pour l'intégration d'une nouvelle commande avec filtrage de vibrations. Le chapitre 5 introduit de nouveaux régulateurs, tenant compte de la direction de vent, améliorant encore les performances des commandes utilisées jusqu'alors. Enfin, ce manuscrit se conclut sur une discussion et des perspectives pour les futurs développements en commande optimale pour l'optique adaptative.

Chapitre 2

L'optique adaptative pour l'imagerie astronomique

Sommaire du chapitre

2.1	Imagerie à travers la turbulence atmosphérique	24
2.1.1	Principes de formation d'image	24
2.1.2	Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique	26
2.1.3	Bases de représentation de la turbulence atmosphérique	30
2.1.4	Autres sources de perturbation	35
2.2	Compensation des effets de la turbulence atmosphérique	36
2.2.1	Optique adaptative classique	37
2.2.2	Description des composants du système d'optique adaptative	41
2.2.3	Quelques modalités d'optique adaptative	47
2.3	Asservissement des systèmes d'optique adaptative	51
2.3.1	Modélisation de la boucle d'asservissement	51
2.3.2	Concepts de commande en optique adaptative	57

L'observation des astres, et donc leur imagerie, depuis la surface de la Terre fait face à un obstacle structurel : la présence de l'atmosphère terrestre. En effet, le faisceau lumineux issu de l'objet que l'on veut observer, dit objet d'intérêt, est perturbé par sa propagation à travers l'atmosphère, en particulier à cause de sa structure (masses d'air de températures différentes, variations d'indice de réfraction, ...) et de sa dynamique interne (mouvements de convection, vents, ...). Ce chapitre a pour vocation d'introduire les bases de l'imagerie astrophysique assistée par optique adaptative. Ainsi, les différents concepts liés à la propagation de l'onde optique émise par l'objet au travers de la turbulence atmosphérique sont rappelés, ou, le cas échéant, introduits dans la première partie de ce chapitre. La deuxième partie a pour objectif de présenter le principe de l'optique adaptative, de présenter les différents composants formant ces systèmes, et d'introduire la nomenclature liée à ses différentes modalités. Enfin, la troisième partie introduit le formalisme utilisé pour l'asservissement de ces systèmes, sujet qui est au cœur du manuscrit.

2.1 Imagerie à travers la turbulence atmosphérique

Cette partie présente dans un premier temps quelques rappels d'optique de Fourier, ainsi que la description du processus d'imagerie par un système optique linéaire télémétrique. Le deuxième paragraphe décrit le phénomène de turbulence atmosphérique, sa caractérisation statistique, et ses conséquences sur les images astrophysiques. Le troisième paragraphe est dédié aux modalités de représentation de la turbulence atmosphérique. D'autres sources de perturbation des systèmes d'imagerie astronomique sont présentées en conclusion de cette partie.

2.1.1 Principes de formation d'image

La lumière émise par l'objet d'intérêt se propage sous la forme d'une d'onde électromagnétique, dans un milieu homogène, transparent et isotrope. L'onde optique peut donc être entièrement décrite par sa fonction d'onde ψ :

$$\psi(r) = a(r) \exp(i\phi(r)), \quad (2.1)$$

où r est le vecteur de coordonnées, bidimensionnel, dans la pupille, a la distribution d'amplitude de l'onde, et ϕ la phase, appelée aussi front d'onde. L'objet d'intérêt, O (une étoile) est suffisamment loin pour être considéré comme un point lumineux à l'infini, de telle manière que le front d'onde issu de cet objet soit considéré comme plan à son entrée dans l'atmosphère. L'optique de Fourier décrit alors le processus d'imagerie de cet objet par un système optique linéaire invariant par translation, par la relation :

$$I(\alpha) = O(\alpha) * \text{FEP}(\alpha), \quad (2.2)$$

avec α le vecteur de coordonnées angulaires, bidimensionnel, en angle sur le ciel (radians), I l'image au foyer du système optique, FEP la réponse du système, appelée fonction d'étalement du point, et $*$ le produit de convolution entre deux quantités. La FEP est liée à la

pupille du système optique, notée $\Omega(\alpha)$, par :

$$\text{FEP}(\alpha) = \left| \tilde{f}(\mu) \right|_{\mu=\frac{\alpha}{\lambda}}^2, \quad (2.3)$$

où $\tilde{\cdot}$ désigne la transformée de Fourier, $|\cdot|$, le module, λ la longueur d'onde, $F_{\text{tél}}$ la focale du télescope et f l'amplitude complexe définie par :

$$f(r) = \Omega(r)\psi(r). \quad (2.4)$$

On considère généralement que le télescope est un instrument optique de pupille circulaire, confondue avec le miroir primaire. Ainsi,

$$\Omega(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| < \frac{D_{\text{pup}}}{2}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.5)$$

où D_{pup} est le diamètre du miroir primaire du télescope. Dans ce cas, la FEP du télescope est une tache d'Airy, et s'écrit :

$$\text{FEP}_{\text{Airy}}(\alpha) = \frac{\pi D_{\text{pup}}^2}{4\lambda^2} \left| \frac{2J_1(\pi D_{\text{pup}}\alpha/\lambda)}{\pi D_{\text{pup}}\alpha/\lambda} \right|^2, \quad (2.6)$$

avec J_1 la fonction de Bessel du premier ordre, et

$$\alpha = \frac{r}{D_{\text{pup}}}. \quad (2.7)$$

Cette tache d'Airy représente la réponse idéale du système optique, et induit une limite intrinsèque en résolution spatiale en l'absence d'aberration optique. La distribution d'intensité de la tache d'Airy est reproduite en figure 2.1. Lorsque l'on cherche à quantifier la résolution spatiale, ou angulaire, d'un système optique, il est d'usage de caractériser sa fonction de transfert optique (FTO), qui est liée à sa FEP par :

$$\text{FTO}(f_s) = \mathcal{F}^{-1}(\text{FEP}(\alpha)), \quad (2.8)$$

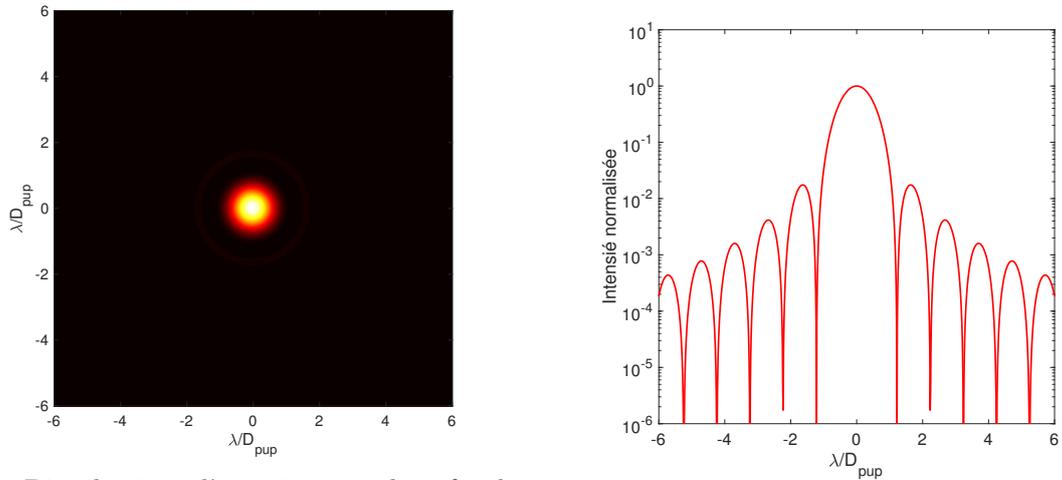
où f_s est la fréquence spatiale en rad^{-1} , et $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ désigne la transformée de Fourier inverse. Le télescope agit alors comme un filtre spatial passe-bas, de fréquence de coupure

$$f_c = \frac{D_{\text{pup}}}{\lambda}. \quad (2.9)$$

La résolution angulaire du télescope, $\alpha_{\text{tél}}$, est définie par convention comme l'inverse de cette fréquence de coupure :

$$\alpha_{\text{tél}} = \frac{\lambda}{D_{\text{pup}}}. \quad (2.10)$$

Cette résolution représente donc l'angle minimum entre deux objets séparables sur l'image.



(a) Distribution d'énergie au plan focal image du télescope

(b) Coupe centrale en échelle logarithmique

FIGURE 2.1 – FEP normalisée d'un télescope idéal (tache d'Airy)

2.1.2 Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique

La présence de l'atmosphère terrestre dégrade substantiellement la résolution effective des télescopes au sol. En effet, les dynamiques internes de l'atmosphère engendrent des phénomènes de nature turbulente. Ces turbulences vont se traduire par des déformations du front d'onde incident, évolutives au cours du temps, se comportant comme des aberrations optiques aléatoires. Le principal effet de ces déformations est la modification de la FEP du système et de sa FTO. En éclairage monochromatique et en présence de turbulence, la FEP courte pose (intégrée sur un temps faible devant le temps de cohérence temporelle de la turbulence atmosphérique) présente des tavelures, ou *speckle*, de taille caractéristique λ/D_{pup} . La largeur de l'enveloppe globale de la FEP est quant à elle de l'ordre de λ/r_0 , où r_0 est le paramètre de Fried, caractérisant la force de la turbulence. A contrario, en longue pose et en présence de turbulence, on observe au foyer de l'instrument une tache uniforme de diamètre λ/r_0 . En pratique sur les sites astronomiques, le paramètre de Fried varie de quelques centimètres à une trentaine de centimètres pour les très bonnes conditions d'observation (à une longueur d'onde de $0,5 \mu\text{m}$).

2.1.2.1 Caractérisation optique des déformations introduites par la turbulence

Les mouvements naturels de l'atmosphère (convection, cisaillement, ...) conduisent à l'apparition de tourbillons d'air, encore appelés zones d'écoulement turbulent. La taille caractéristique de ces volutes peut varier en pratique de quelques dizaines de centimètres à plusieurs dizaines de mètres, la borne inférieure constituant le paramètre de petite échelle, noté l_0 , et la borne supérieure le paramètre de grande échelle, noté L_0 . Le mélange de masses d'air de températures différentes induit ces tourbillons qui s'accompagnent alors, d'un point de vue optique, de variations localisées de l'indice de réfraction de l'air autour de sa valeur moyenne. De ce fait, le front d'onde, initialement plan avant sa traversée de l'atmosphère,

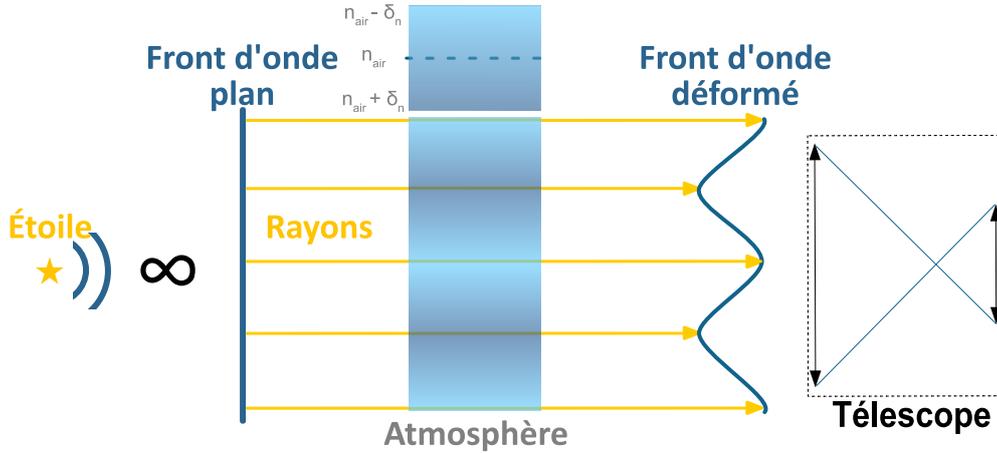


FIGURE 2.2 – Principe de l’effet de la turbulence atmosphérique sur le front d’onde incident

va se trouver déformé à son arrivée dans la pupille du télescope. Ainsi, si l’on imagine les rayons optiques perpendiculaires au front d’onde plan, ces variations d’indice vont avoir pour effet d’introduire une différence de marche entre les différents rayons. Ces variations d’indice de réfraction du milieu se traduisent donc par un déphasage entre les rayons lumineux, introduit par la propagation de l’onde sur une épaisseur d’atmosphère δh :

$$\phi(r, h) = 2\pi \frac{\delta n(r, h)}{\lambda} \delta h, \quad (2.11)$$

avec ϕ la phase de l’onde, h l’altitude et $\delta n(r, h)$ la variation d’indice. La figure 2.2 illustre graphiquement ce principe. La force (intensité) de la turbulence est caractérisée localement par la constante de structure $C_n^2(h)$. Le paramètre de Fried, caractérisant la force totale de la turbulence, est lié à la constante de structure par [Fried, 1966] :

$$r_0 = \left[0,42 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]^{-\frac{3}{5}}, \quad (2.12)$$

avec γ l’angle zénithal du télescope, c’est-à-dire l’angle entre le zénith (la normale au télescope) et la direction d’observation.

L’étude de ces phénomènes de turbulence dans les fluides, qui intriguait déjà au XVI^e siècle Léonard de Vinci, n’a abouti à un modèle solide qu’au milieu du XX^e siècle, avec les travaux de [Kolmogorov, 1941a, Kolmogorov, 1941b]. Kolmogorov formalise en effet un modèle décrivant la turbulence atmosphérique fondé sur la théorie des cascades d’énergie. Dans le cadre de ce manuscrit, un intérêt particulier est porté à la caractérisation de la densité spectrale de puissance (DSP) S_ϕ de la phase turbulente. La théorie de Kolmogorov en propose une expression théorique, qui sert généralement de valeur étalon pour la définition de nouveaux modèles :

$$S_\phi^{\text{Kol}}(f_s, h) \simeq 0,033 (2\pi)^{-\frac{2}{3}} C_n^2(h) f_s^{-\frac{11}{3}}. \quad (2.13)$$

Le modèle de Kolmogorov ne permet néanmoins pas de tenir compte des phénomènes de grande et de petite échelles. En effet, la densité spectrale de puissance de la phase turbulente ne converge pas lorsque la fréquence spatiale tend vers zéro, et est largement supérieure à la valeur prédite par le modèle aux hautes fréquences spatiales, au-delà de la petite échelle. [Von Karman, 1948] modifie le modèle de Kolmogorov pour tenir compte des échelles de la turbulence :

$$S_{\phi}^{\text{Kar}}(h, f_s) \simeq 0,033 (2\pi)^{-\frac{2}{3}} C_n^2(h) \left(\frac{1}{L_0^2} + f_s^2 \right)^{-\frac{11}{6}} \exp(-(f_s l_0)^2). \quad (2.14)$$

2.1.2.2 Caractérisation statistique de la turbulence

Le calcul des statistiques spatiales de la phase turbulente requiert la connaissance de la fonction de structure de phase :

$$D_{\phi}(\rho, \theta) = E(|\phi(r) - \phi(r + \rho)|^2), \quad (2.15)$$

où $E(\cdot)$ désigne l'espérance mathématique. La fonction de structure de phase n'a pas de dépendance angulaire du fait que la phase turbulente est considérée comme isotrope et stationnaire. Ainsi, tout couple de points de phase séparés d'une distance ρ présente les mêmes caractéristiques statistiques. La fonction de structure est alors reliée à la covariance spatiale de la phase par :

$$D_{\phi}(\rho) = 2[E(\phi(r)\phi(r)) - E(\phi(r)\phi(r + \rho))], \quad (2.16)$$

$$= 2[C_{\phi}(0) - C_{\phi}(\rho)], \quad (2.17)$$

avec $C_{\phi}(\rho)$ la covariance spatiale entre deux points de la phase séparés d'une distance ρ . Le théorème de Wiener-Khintchine permet d'exprimer la fonction de structure en fonction de la densité spectrale de puissance de la turbulence intégrée sur toute la colonne d'air [Conan, 1994] :

$$D_{\phi}(\rho) = 4\pi \int_0^{\infty} \nu S_{\phi}(\nu) [1 - J_0(2\pi\nu\rho)] d\nu. \quad (2.18)$$

Pour une phase de type Kolmogorov, D_{ϕ} peut être approximée par :

$$D_{\phi}^{\text{Kol}}(\rho) \simeq 6,88 \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}. \quad (2.19)$$

Le calcul de D_{ϕ} à partir de l'équation (2.18), pour une phase de type von Kármán conduit à [Conan, 2000] :

$$D_{\phi}^{\text{Kar}}(\rho) = \left(\frac{L_0}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right)^{\frac{5}{6}} \frac{2^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\pi^{\frac{8}{3}}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2^{\frac{1}{6}}} - \left(\frac{2\pi\rho}{L_0} \right)^{\frac{5}{6}} K_{\frac{5}{6}}\left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right) \right], \quad (2.20)$$

avec $\Gamma(x)$ la fonction gamma d'Euler évaluée au point x , et $K_{\frac{5}{6}}(x)$ la fonction de Bessel modifiée du deuxième type. [Conan, 2000] injecte ce résultat dans l'équation (2.17) pour identifier l'expression de la covariance spatiale entre deux points de la phase distants de ρ :

$$C_{\phi}^{\text{Kar}}(\rho) = \left(\frac{L_0}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{24}{5} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \right)^{\frac{5}{6}} \frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{2^{\frac{5}{6}} \pi^{\frac{8}{3}}} \left(\frac{2\pi\rho}{L_0} \right)^{\frac{5}{6}} K_{\frac{5}{6}}\left(\frac{2\pi\rho}{L_0}\right). \quad (2.21)$$

Pour caractériser les statistiques temporelles de la phase turbulente, on adopte généralement l'hypothèse de Taylor, qui consiste à supposer que chacune des couches de phase est figée, et se translate dans une direction déterminée par la direction du vent, à une vitesse coïncidant avec la norme du vecteur de vent $\mathbf{V}(h)$ [Taylor, 1938]. Pour une turbulence constituée d'une seule couche évoluant à une vitesse V , la variance temporelle de la phase turbulente entre deux instants séparés de τ , notée σ_ϕ^2 , se déduit de la fonction de structure de phase [Roddier, 1990] :

$$\sigma_\phi^2(\tau) = D_\phi(V\tau), \quad (2.22)$$

ce qui correspond, pour une turbulence de type Kolmogorov, à :

$$\sigma_\phi^2(\tau) \simeq 6,88 \left(\frac{V\tau}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}. \quad (2.23)$$

On définit alors le temps caractéristique τ_0 des fluctuations temporelles de la phase comme le temps nécessaire pour obtenir une variance temporelle égale à 1 radian carré :

$$\tau_0 \simeq 0,314 \frac{r_0}{V}. \quad (2.24)$$

2.1.2.3 Phénomène d'anisoplanétisme

La turbulence atmosphérique est un phénomène physique structurellement anisoplanétique [Fried, 1982]. Le front d'onde est perturbé par sa traversée du volume d'atmosphère. Or ce volume de turbulence diffère selon la direction d'observation. En effet, la turbulence évolue spatialement dans le volume turbulent, ce qui conduit deux faisceaux arrivant avec un angle α les séparant à ne pas voir la même turbulence atmosphérique, en particulier en altitude. La figure 2.3 illustre schématiquement ce principe.

[Fried, 1982] propose de définir un angle à partir duquel l'anisoplanétisme affecte la qualité d'imagerie. Il définit ainsi la zone d'isoplanétisme comme le champ autour de l'axe optique dans lequel la variance d'écart aberrant de la turbulence reste inférieure à un radian carré. [Roddier, 1981] relie cet angle au paramètre de Fried par :

$$\alpha_{\text{iso}} = 0,314 \frac{r_0}{\bar{h}}, \quad (2.25)$$

où

$$\bar{h} = \left(\frac{\int_0^\infty h^{\frac{5}{3}} C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right)^{\frac{3}{5}}. \quad (2.26)$$

L'angle d'isoplanétisme est fortement dépendant de la longueur d'onde, de par sa dépendance au paramètre de Fried (équation (2.12)). L'anisoplanétisme est un phénomène qui limite significativement les performances des système d'optique adaptative. De nombreuses études ont été consacrées à sa compensation comme discuté dans la suite de ce manuscrit.

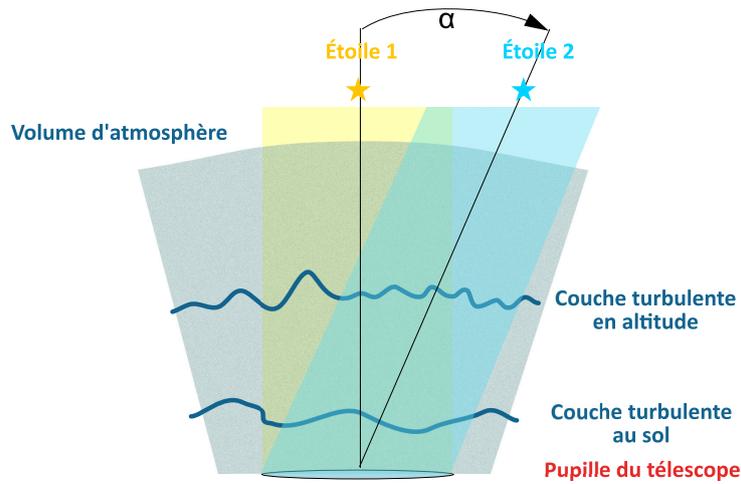


FIGURE 2.3 – Illustration du phénomène d’anisoplanétisme en optique adaptative classique : L’objet d’intérêt est écarté d’un angle α de la direction de l’étoile guide

2.1.3 Bases de représentation de la turbulence atmosphérique

La turbulence atmosphérique étant un phénomène naturel continu spatialement et temporellement, le problème de sa représentation se pose, en particulier pour sa modélisation. En effet, discrétiser la turbulence permet de limiter la complexité d’utilisation des modèles, notamment pour la commande. Deux types de représentation sont discutés tout au long de ce manuscrit : les représentations zonales et les représentations modales.

2.1.3.1 Représentation zonale

La représentation zonale d’une phase consiste à la projeter sur une grille de points de manière à l’échantillonner spatialement. De ce fait, la résolution de représentation de la phase est directement gérée par le nombre de points utilisés pour la constitution de la grille (figure 2.4).

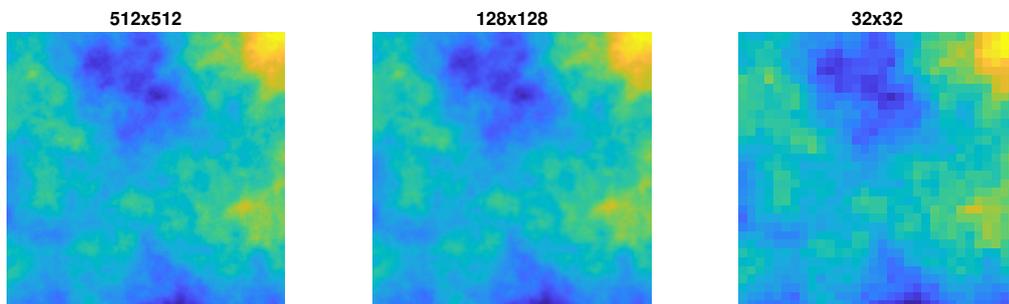


FIGURE 2.4 – Représentation zonale d’une phase de type von Kármán sur différentes grilles d’échantillonnage

La covariance entre chacun des pixels est alors donnée par l'équation (2.21), évaluée en $\rho_{\text{pix}} = \sqrt{n_{\text{pix},x}^2 + n_{\text{pix},y}^2} d_{\text{pix}}$, avec d_{pix} la largeur du pixel (considéré comme carré), et $[n_{\text{pix},x}, n_{\text{pix},y}]$ le nombre de pixels séparant en abscisses et en ordonnées les deux pixels considérés. Pour faciliter le calcul matriciel, ces cartes de phases sont réorganisées en vecteurs de taille N_{pix}^2 (nombre total de pixels) : on parle alors de forme lexicographiée (ou lexicographique). C'est pour cela que la matrice de covariance décrivant les corrélations entre tous ces pixels est présentée sous la forme d'une matrice de $N_{\text{pix}}^2 \times N_{\text{pix}}^2$ ($32^2 \times 32^2$ dans le cas de la figure 2.5). Une partie de la complexité calculatoire des lois de commande utilisant des *a priori* physiques est liée au nombre de corrélations non nulles dans la matrice de covariance. Comme le montre la figure 2.5, la matrice de covariance d'une phase en représentation zonale est pleine. Les modèles s'exprimant dans ce type de représentation utilisent donc, en général, une matrice de covariance tronquée, où par exemple on néglige la covariance entre les pixels séparés par une distance supérieure à une certaine valeur [Correia *et al.*, 2015, Assémat *et al.*, 2006, Fried et Clark, 2008].

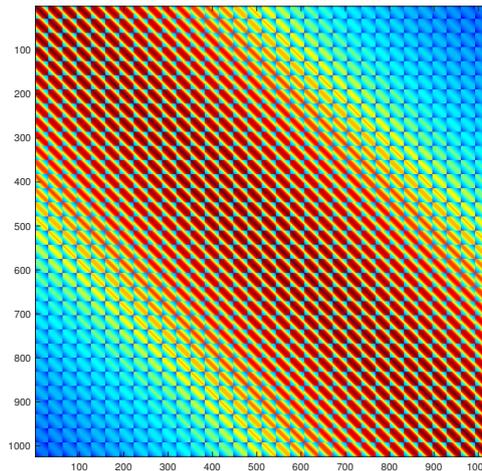


FIGURE 2.5 – Matrice de covariance spatiale d'une phase de type von Kármán, pour une représentation zonale 32x32

2.1.3.2 Base des polynômes de Zernike

Les approches modales permettent en général de réduire le nombre de corrélations du phénomène sur sa base de représentation, et de rendre plus creuse la matrice de covariance dudit phénomène. L'autre avantage des bases modales est de condenser l'énergie sur les premiers modes de la bases, conduisant ainsi à la réduction de la taille des vecteurs servant à la description du phénomène. La représentation modale la plus largement utilisée à ce jour en optique adaptative, voire même pour la conception des systèmes optiques en général, est la base des polynômes de Zernike. En effet, les premiers polynômes de Zernike ont l'avantage de correspondre aux aberrations optiques classiques, représentées sur la figure 2.6. Pour le

couple de coordonnées polaires $r \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, les polynômes de Zernike sont définis par :

$$Z_n^m(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta) & \text{pour } m \neq 0 \text{ et } j \text{ pair,} \\ \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta) & \text{pour } m \neq 0 \text{ et } j \text{ impair,} \\ \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} & \text{pour } m = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

avec n l'ordre radial, m l'ordre azimutal, j l'index dans la base de Zernike, selon la convention de [Noll, 1976], et

$$R_n^m(r) = \sum_{k=0}^{n-m+2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n+m}{2} + k\right)!} r^{n-2k}. \quad (2.28)$$

La phase turbulente s'exprime alors comme une combinaison linéaire de modes de la base de Zernike :

$$\phi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j Z_j, \quad (2.29)$$

où a_j est le coefficient du j^{e} polynôme de Zernike. Pour simplifier l'écriture des équations, on considérera dans la suite de ce manuscrit qu'une phase représentée dans une base modale est caractérisée par ses coordonnées dans cette base, c'est-à-dire, dans le cas de la base de Zernike :

$$\phi^{\text{Zer}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

[Noll, 1976] calcule la matrice de covariance des coefficients de Zernike pour une phase de statistique de Kolmogorov. Ainsi, la covariance entre deux modes de Zernike Z_i et Z_j , C_{ij} , est donnée par :

$$C_{ij} = 3,90 \left(\frac{D_{\text{pup}}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \sqrt{(n_i+1)(n_j+1)}^{\frac{n_i+n_j-2m_i}{2}} \delta_{m_i, m_j} \\ \times \frac{2^{-\frac{14}{3}} \Gamma\left(\frac{14}{3}\right) \Gamma\left(\frac{n_i+n_j-\frac{5}{3}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-n_i+n_j+\frac{17}{3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_i-n_j+\frac{17}{3}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_i+n_j+\frac{23}{3}}{2}\right)}, \quad (2.31)$$

où (n_i, m_i) et (n_j, m_j) sont les ordres radiaux et azimutaux des modes de Zernike respectivement Z_i et Z_j , et δ est la fonction de Kroenecker. La matrice de covariance des quatorze premiers ordres radiaux est reproduite en figure 2.7a, pour un rapport $D_{\text{pup}}/r_0 = 1$. La diagonale de cette matrice de covariance contient la variance spatiale de chacun des modes de Zernike. [Chassat, 1992] propose de modifier les variances de Noll pour tenir compte de

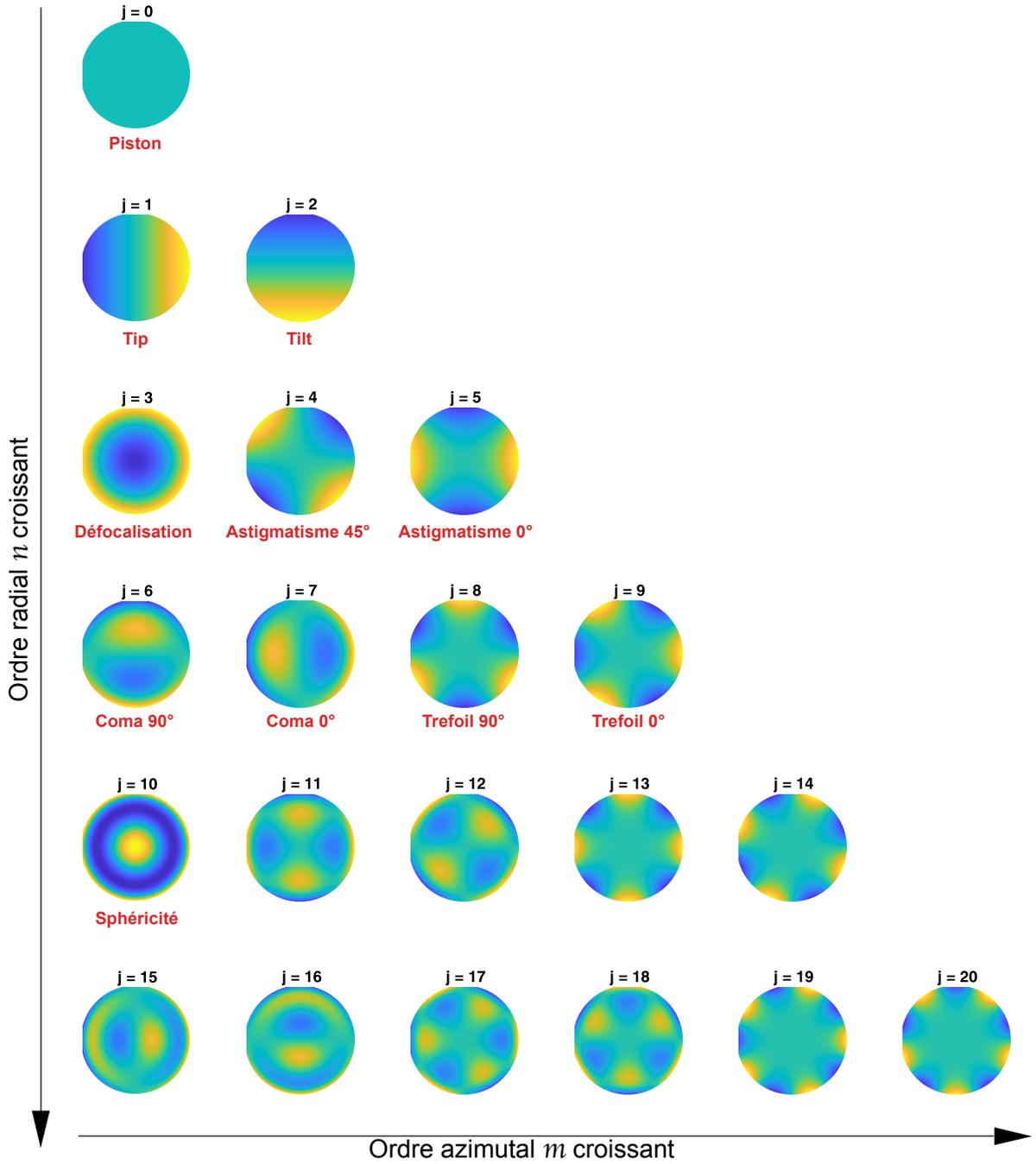
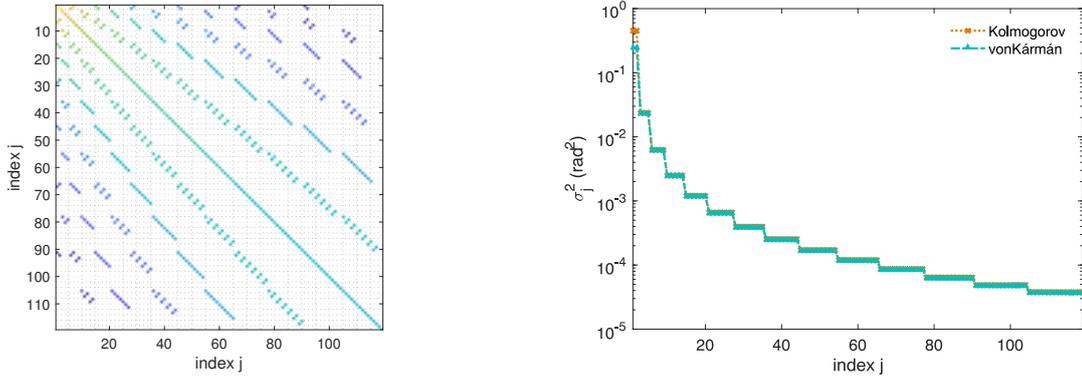


FIGURE 2.6 – Représentation des 21 premiers polynômes de la base de Zernike

la grande échelle :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n=1}^2 &\simeq 0,451 \left(\frac{D_{pup}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \left[1 - 0,77 \left(\frac{D_{pup}}{L_0} \right)^{\frac{1}{3}} + 0,09 \left(\frac{D_{pup}}{L_0} \right)^2 - 0,054 \left(\frac{D_{pup}}{L_0} \right)^{\frac{7}{3}} \right] \\
 \sigma_{n=2}^2 &\simeq 0,0234 \left(\frac{D_{pup}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \left[1 - 0,39 \left(\frac{D_{pup}}{L_0} \right)^2 + 0,27 \left(\frac{D_{pup}}{L_0} \right)^{\frac{7}{3}} \right] \\
 \sigma_{n \geq 3}^2 &\simeq 0,756(n+1) \left(\frac{D_{pup}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{\Gamma(n - \frac{5}{6})}{\Gamma(n + \frac{23}{6})} \left[1 - \frac{0,38}{(n - \frac{11}{6})(n + \frac{23}{6})} \left(\frac{D_{pup}}{L_0} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

avec σ_n^2 la variance de chaque mode de Zernike d'ordre radial n , et pour un rapport $D_{pup}/L_0 < 2$. Ce seuil n'était pas limitant à l'époque, mais le devient à l'avènement des télescopes géants, comme le montrent certaines études où des grandes échelles de moins de 25 mètres ont été mesurées, comme par exemple au site du VLT [Fusco *et al.*, 2004].



(a) Matrice de covariance (en échelle logarithmique) Kolmogorov des 119 premiers modes de Zernike, hors piston, pour $\frac{D_{pup}}{r_0} = 1$

(b) Variance des modes de Zernike pour une phase turbulente de type Kolmogorov et von Kármán, pour $\frac{D_{pup}}{r_0} = 1$, $\frac{D_{pup}}{L_0} = 0,2$

FIGURE 2.7 – Statistiques spatiales de phase turbulente exprimées dans une base de polynômes de Zernike

Notons que la variance des modes de Zernike est identique pour tous les modes d'un même ordre radial. Notons également que le piston n'est pas pris en compte dans ces graphes car il n'affecte pas la qualité d'imagerie, et n'est donc jamais corrigé par l'optique adaptative. L'effet de la grande échelle dans une représentation de Zernike se traduit quant à lui uniquement par une déplétion de la variance et des covariances des tous premiers modes (principalement les modes de basculement).

Du point de vue temporel, le comportement de la turbulence décomposée sur une base de Zernike est remarquable. En effet, les spectres temporels (DSP) des modes de Zernike, introduits par [Conan, 1994], présentent des comportements semblables à haute fréquence, avec une dépendance en $\nu^{\frac{17}{3}}$, et un comportement à basse fréquence lié à l'ordre radial du mode de Zernike et au vecteur de vent. Par ailleurs, [Conan, 1994] met en évidence la fréquence de coupure temporelle ν_c (à la croisée des asymptotes) pour chaque mode de Zernike :

$$\nu_c \simeq 0,3 \frac{(n+1)V}{D_{pup}}. \quad (2.33)$$

La phase turbulente étant un phénomène continu, à bande passante infinie, la décomposer sur une base modale requerrait une infinité de modes, ce qui n'est pas implémentable. Ainsi, quelle que soit l'approche modale, il faut utiliser une base tronquée, ce qui aboutit à une approximation dans la représentation de la phase turbulente. En outre, la limite de calcul numérique pour une représentation en base de Zernike se situe entre 800 et 900 modes,

principalement à cause des problèmes de discrétisation des polynômes. Les bases de Zernike ne sont donc pas adaptées à l'étude des systèmes dédiés aux ELT, qui requerraient des bases tronquées à plus de 5000 modes de Zernike. Notons enfin qu'il est facile de passer d'une représentation modale à une représentation zonale : il suffit d'échantillonner chaque mode sur la grille d'échantillonnage de la représentation zonale et d'appliquer la formule (2.29). Ainsi, pour la base de Zernike,

$$\phi^{\text{Zon}} = P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \phi^{\text{Zer}}, \quad (2.34)$$

où ϕ^{Zon} désigne la phase en zonal, et $P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}$ la matrice de passage de la représentation Zernike vers la représentation zonale, définie par :

$$P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} = (Z_1 \ Z_2 \ \dots). \quad (2.35)$$

Inversement, le passage de la représentation zonale vers la représentation Zernike se fait en utilisant la matrice de passage $P_{\text{Zon} \rightarrow \text{Zer}}$, définie comme la matrice pseudo-inverse de $P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}$:

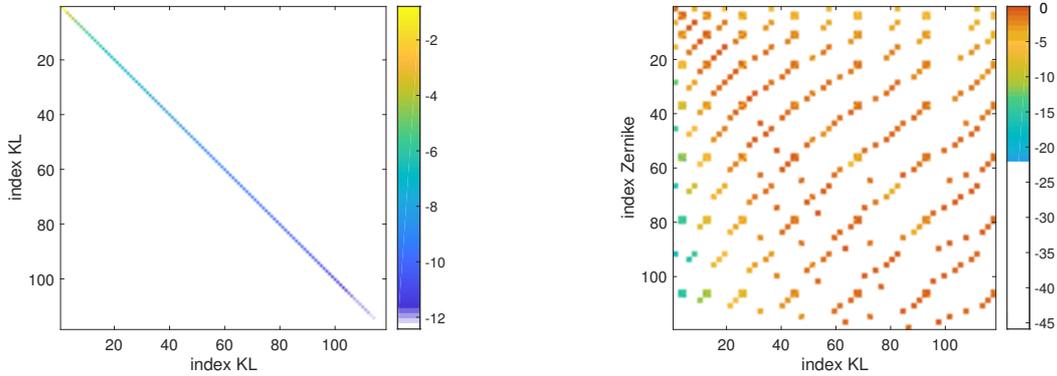
$$P_{\text{Zon} \rightarrow \text{Zer}} = P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}^+ = \left(P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}^T P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} \right)^{-1} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}^T. \quad (2.36)$$

2.1.3.3 Base des polynômes de Karhunen-Loève

La base de représentation modale utilisée pour les simulations de systèmes type ELT est la base des polynômes de Karhunen-Loève (KL). Il n'existe cependant pas d'expression analytique de ces polynômes. La base des polynômes de Karhunen-Loève est la représentation qui conduit à une matrice de covariance des modes diagonale. Cette base concentre l'énergie vers les premiers modes. Il suffit donc d'un nombre restreint de modes pour représenter une grande proportion de l'énergie turbulente. [Roddier, 1990] montre que ces derniers peuvent être obtenus en prenant les vecteurs propres issus de la diagonalisation de la matrice de covariance des modes de Zernike (équation (2.31)), ce qui ne permet néanmoins pas de s'affranchir de la limitation en nombre de modes [Lane et Tallon, 1992]. La méthode de [Cannon, 1995], moins complexe d'un point de vue algorithmique, et ne passant pas par un espace intermédiaire engendré par une base de Zernike, est à ce jour la méthode la plus utilisée pour générer des bases de Karhunen-Loève. La figure 2.8a reproduit la matrice de covariance d'une base de polynômes de Karhunen-Loève obtenus par la diagonalisation de la matrice de covariance en figure 2.7a. Cette matrice de covariance étant diagonale, donc très creuse, l'utilisation d'une base de KL constitue un avantage pour la modélisation de la turbulence dans des simulations liées aux ELT.

2.1.4 Autres sources de perturbation

La turbulence atmosphérique a constitué jusqu'à encore récemment le principal effet néfaste à corriger en temps réel pour atteindre les performances requises en imagerie astronomique. Avec les instruments de dernière génération sur les VLT, en particulier pour les



(a) Matrice de covariance (en échelle logarithmique) Kolmogorov obtenue par la diagonalisation de celle en figure 2.7a

(b) Matrice de passage (en échelle logarithmique) de l'espace de Zernike (figure 2.7a, 119 modes) vers l'espace des KL

FIGURE 2.8 – Statistiques spatio-temporelle de phases turbulentes exprimées dans une bases de polynômes de Karhunen-Loève

systèmes imageurs d'exoplanètes, la correction d'effets optiques dont l'origine est liée à la structure mécanique du télescope ou à l'environnement mécanique de l'instrument d'imagerie s'est avérée nécessaire. La taille des télescopes croissant encore significativement avec les ELT, on peut s'attendre à ce que ces effets soient encore plus importants, et nécessitent d'être quasi-obligatoirement corrigés par optique adaptative. On peut classer ces effets en deux familles : les vibrations mécaniques, qui font osciller la tache image sur le capteur, détruisant la résolution lors de longue pose ; et la prise au vent du télescope. Néanmoins ces effets indésirables sont cantonnés aux bas ordres, c'est-à-dire aux basses fréquences spatiales, grâce en particulier à la rigidité de la structure du télescope [Sedghi, 2007]. Les vibrations, affectant principalement les modes de basculement (*tip/tilt*), apparaissent sur la densité spectrale de puissance de la perturbation sous la forme d'un pic à la fréquence de chaque vibration (voir la figure 2.9), dont la largeur dépend de l'absorption de cette vibration par l'environnement mécanique. La prise au vent, communément appelée *windshake*, se traduit quant à elle par une élévation du plateau basse fréquence de la densité spectrale de puissance de la perturbation pouvant augmenter dans les pire cas de plusieurs ordres de grandeur.

2.2 Compensation des effets de la turbulence atmosphérique

L'optique adaptative est un dispositif permettant de compenser l'effet de la turbulence atmosphérique pour obtenir une qualité d'imagerie proche de la limite de diffraction du télescope. Le paragraphe qui suit détaille le principe de fonctionnement des systèmes d'optique adaptative et aborde leurs limitations. Les composants (techniques) de ces systèmes sont ensuite décrits dans le second paragraphe, et le troisième paragraphe présente d'autres modalités d'optique adaptative, permettant de contourner certaines des limitations comme

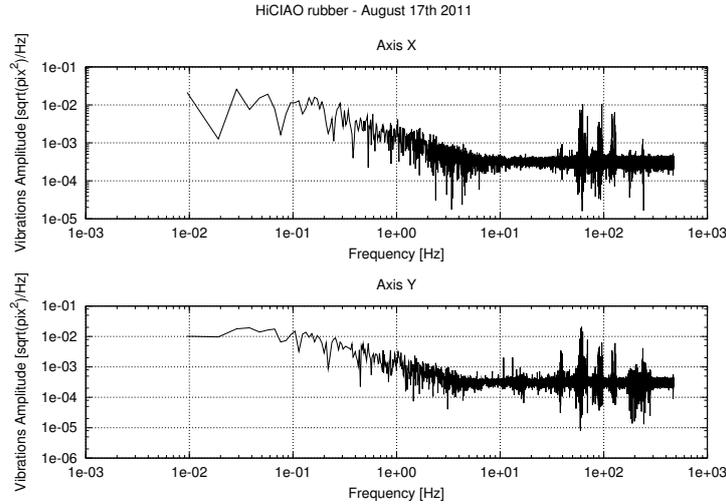


FIGURE 2.9 – Illustration de la présence de vibrations sur le tip/tilt. Données acquises par SCEXAO, au télescope Subaru (Hawaii). Graphe issu de [Kulcsár *et al.*, 2012].

l’anisoplanétisme.

2.2.1 Optique adaptative classique

2.2.1.1 Principe

Un système d’optique adaptative est un système opto-électro-mécanique permettant de corriger en temps réel les déformations du front d’onde introduites, entre autres, par la turbulence atmosphérique. Le schéma de principe est donné en figure 2.10. Le faisceau rencontre éventuellement un miroir plan, dédié à la correction des modes de basculement, et un miroir déformable. Le faisceau est ensuite séparé en deux, par une lame dichroïque (si la longueur d’onde de l’analyseur de surface d’onde est différente de la longueur d’onde d’imagerie) ou par une lame séparatrice. Une partie du faisceau poursuit son chemin vers la caméra d’imagerie tandis que l’autre part vers l’ASO, qui mesure les déformations résiduelles du front d’onde. Les mesures ASO sont alors transmises au ordinateur temps réel qui calcule et envoie la commande au miroir déformable (et éventuellement au miroir de basculement). De cette manière, le front d’onde du faisceau arrivant à la caméra d’imagerie est quasiment plan, permettant ainsi au télescope de se rapprocher de la limite de la diffraction.

2.2.1.2 Critères de performance en imagerie

Plusieurs critères sont couramment utilisés pour caractériser la performance d’un système optique, c’est-à-dire pour quantifier sa proximité à la limite de diffraction. Parmi les indicateurs de performance les plus courants, on peut citer par exemple la fonction de transfert de modulation du système optique, l’énergie encerclée dans un certain diamètre autour du centre optique (particulièrement adapté aux systèmes de couplage à des fibres optiques), la variance des écarts aberrants (largement utilisée pour quantifier l’importance d’aberra-

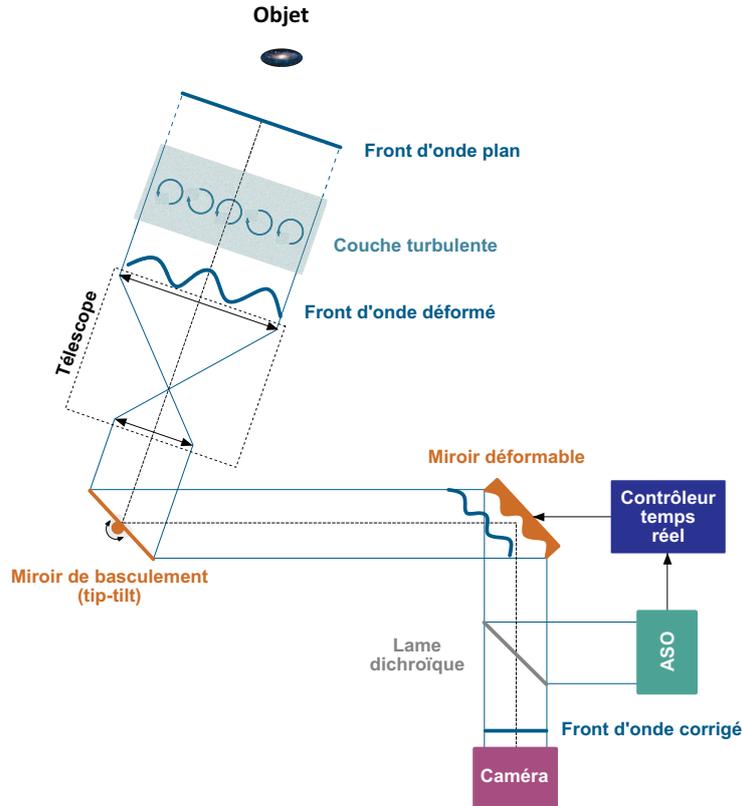


FIGURE 2.10 – Principe de l'optique adaptative classique (SCAO)

tions résiduelles) ou encore le rapport de Strehl. Ce dernier s'est imposé comme l'indicateur de qualité d'imagerie pour l'astronome. Le rapport de Strehl, noté R_S , est défini par

$$R_S = \frac{FEP(0)}{FEP_{\text{Airy}}(0)}, \quad (2.37)$$

où $FEP(\alpha)$ désigne l'intensité de la FEP à la position angulaire α (le centre optique étant positionné en $\alpha = 0$) en présence de turbulence (voir le paragraphe 2.1.2), et où FEP_{Airy} est la FEP du système équivalent idéal, en limite de diffraction. Ainsi, plus le rapport de Strehl se rapproche de 1, plus le système est proche de la limite de diffraction, et plus le scientifique sera satisfait des performances du système d'optique adaptative. En pratique, le rapport de Strehl se mesure directement sur les images astronomiques, donnant pour chaque image la performance de la correction par optique adaptative, performance qui est très dépendante des conditions d'observation.

La variance d'écarts aberrants, plus généralement appelée variance de phase résiduelle, et notée $\sigma_{\phi_{\text{res}}}^2$, est quant à elle le critère utilisé pour caractériser la qualité de la correction apportée par le système d'optique adaptative [Roddiier, 1999]. De nombreuses études ont été menées pour tenter de relier le rapport de Strehl à la variance de phase résiduelle.

[Maréchal, 1948] en propose une première approximation empirique :

$$R_S \simeq 1 - \sigma_{\phi^{\text{res}}}^2. \quad (2.38)$$

Celle-ci ne s'avère valable que pour de très faibles écarts aberrants, tendant à fortement sous estimer le rapport de Strehl quand $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ augmente. [Mahajan, 1983] propose une autre approximation empirique, repoussant un peu le domaine d'application de l'approximation de Maréchal :

$$R_S \simeq \exp(-\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2). \quad (2.39)$$

On peut démontrer l'équivalence avec l'approximation de Mahaja lorsque $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ tend vers zéro, en réalisant un développement limité au premier ordre. Pour les rapports de Strehl faibles (donc pour $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ plus élevé), [Fusco, 2000] introduit le concept de halo lumineux, qui s'ajoute à l'énergie cohérente [Rousset *et al.*, 1992] :

$$E_c = \exp(-\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2). \quad (2.40)$$

Finalement,

$$R_S = i_{\text{halo}} + E_c, \quad (2.41)$$

où i_{halo} est l'intensité du halo lumineux au centre optique, et E_c est l'énergie cohérente. Notons que cette expression tend vers l'approximation de [Mahajan, 1983] lorsque le rapport de Strehl augmente, le halo devenant alors négligeable devant l'énergie cohérente.

2.2.1.3 Limites

Aussi performants que soient ces systèmes, la limite de diffraction n'est, dans la plupart des cas, qu'approchée, et la performance de correction n'est pas constante dans le champ. En effet, la principale limitation des systèmes d'optique adaptative classique réside en l'anisoplanétisme de la turbulence atmosphérique [Fried, 1982]. Ainsi, lorsque l'objet d'intérêt se détache d'un angle $\alpha > \alpha_{\text{iso}}$ de la direction de l'étoile guide (figure 2.11b), la correction calculée n'est pas adaptée au front d'onde issu de l'objet. L'effet de l'anisoplanétisme sur la qualité d'imagerie d'une optique adaptative classique est illustré en figure 2.12, et se traduit par une élongation des taches lorsque l'on s'éloigne de l'étoile guide.

Néanmoins, même lorsque l'objet est suffisamment lumineux pour permettre directement l'analyse de front d'onde (figure 2.11a), ou que l'étoile guide est dans la même direction que l'objet, la performance du système reste limitée, en particulier à cause du contexte d'imagerie à très faible flux (comptage de photons) et des choix de conception. En effet, on dénombre généralement plusieurs sources d'erreur dans un système d'optique adaptative classique, liées à la géométrie même du système optique ainsi qu'au comportement de ses différents composants :

- La présence de deux voies optiques distinctes pour l'imagerie et l'analyse de surface d'onde induit des aberrations optiques présentes sur la voie d'imagerie qui ne sont pas vues par l'ASO et donc non compensées (et inversement), ce qui provoque une erreur due aux « aberrations non communes » (*NCPA – Non-Common Path Aberrations*), notée σ_{NCPA}^2 .

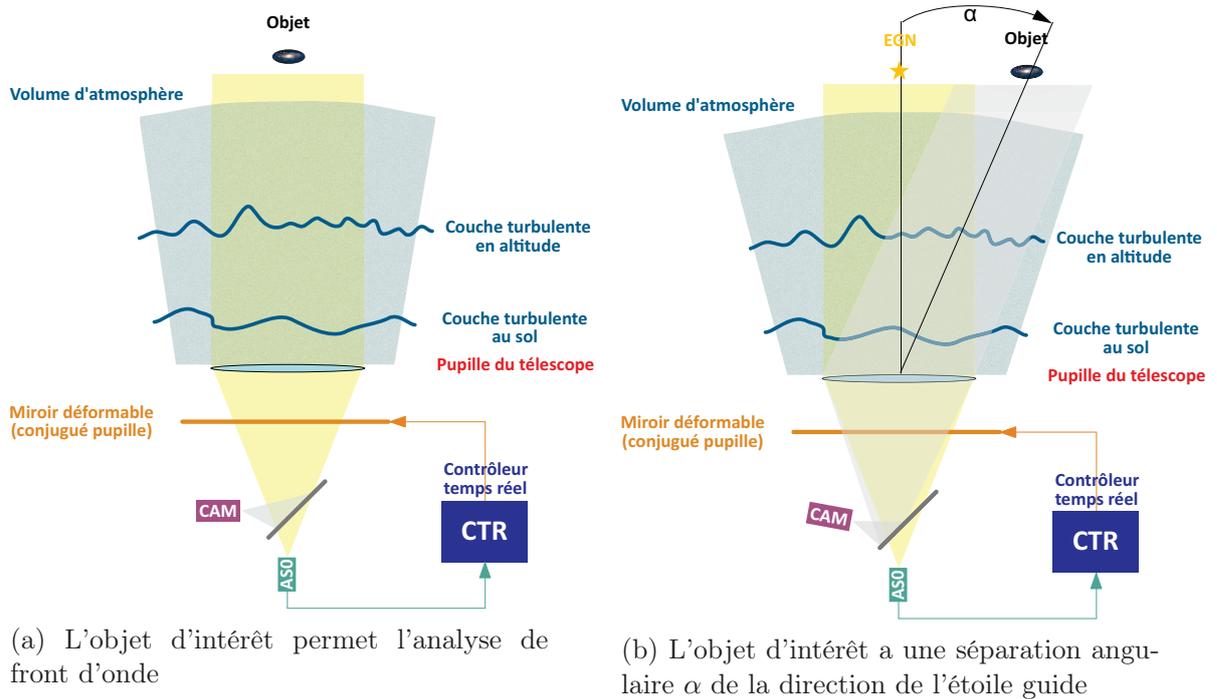
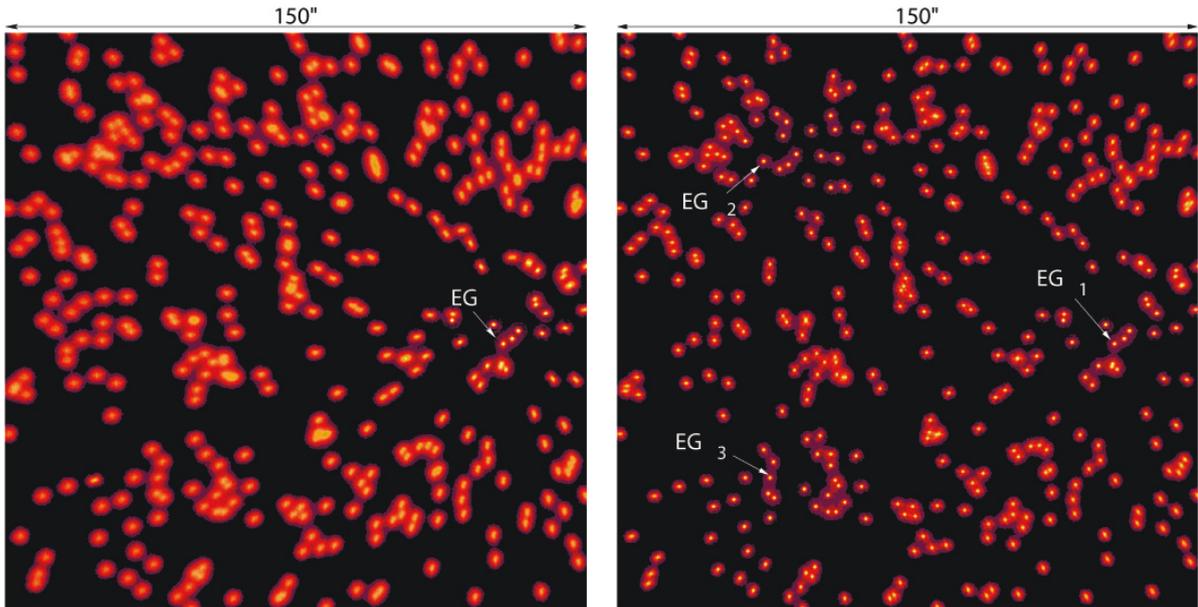


FIGURE 2.11 – Principe du phénomène d'anisoplanétisme pour l'optique adaptative classique

- L'ASO, comportant une caméra travaillant en faible flux, est affecté par des bruits (électronique et de photon), qui dans la boucle de commande et qui conduisent à une erreur de propagation de bruit affectant la variance résiduelle après correction, notée $\sigma_{\text{bruit,prop}}^2$. L'ASO est aussi un échantillonneur spatial du front d'onde, introduisant du repliement spatial dans les mesures. Une erreur due à la propagation du repliement apparaît sur la caméra d'imagerie, notée σ_{alias}^2 .
- Le miroir déformable, quelle que soit sa technologie, est composé d'un nombre fini d'actionneurs. Il ne peut donc pas corriger de phénomènes au-delà d'une certaine fréquence. La partie hautes fréquences (spatiales) du front d'onde, non corrigeable par le MD, conduit ainsi à une erreur communément appelée erreur de *fitting*, et notée σ_{fit}^2 .
- Le temps de pose de l'ASO, ainsi que les différents temps de transport d'informations (mesures et commandes) entre le contrôleur temps réel (CTR) et les autres composants (ASO et MD), le temps de lecture de la caméra de l'ASO, le temps de calcul de la commande, voire le temps de mise en forme du miroir déformable introduisent un retard entre l'application de la commande et le moment où le front d'onde corrigé est mesuré. Ce retard, classiquement assimilé à deux trames de la boucle d'optique adaptative (deux périodes d'échantillonnage), conduit à une erreur temporelle, notée σ_{temp}^2 .

Ces différentes sources d'erreur conduisent à une variance de phase résiduelle $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ au niveau de la caméra d'imagerie, classiquement décomposée en budget d'erreur :

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \underbrace{\sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2 + \sigma_{\text{bruit,prop}}^2}_{\text{Budget d'erreur commandé}} + \underbrace{\sigma_{\text{fit}}^2 + \sigma_{\text{NCPA}}^2}_{\text{Budget d'erreur libre}}, \quad (2.42)$$



(a) Image simulée sur la caméra d'un système d'OA classique. La correction n'est efficace que dans un champ proche de l'EG.

(b) Image simulée sur la caméra d'un système d'OAMC. La performance est quasiment uniforme dans le champ.

FIGURE 2.12 – Illustration d'effet d'anisoplanétisme sur la qualité d'imagerie de l'OA classique (crédit C. Petit)

Ces différents termes d'erreur peuvent être classés en deux catégories [Juvénal *et al.*, 2015b] : ceux liés au régulateur opérant dans le CTR que l'on dénommera « postes d'erreur commandés » (σ_{temp}^2 , σ_{alias}^2 , $\sigma_{\text{bruit,prop}}^2$), et ceux indépendants de la loi de commande que l'on dénommera « postes d'erreur libres » (σ_{fit}^2 , σ_{NCPA}^2).

2.2.2 Description des composants du système d'optique adaptative

2.2.2.1 Dispositifs d'analyse de surface d'onde

L'ASO est le dispositif permettant de mesurer le front d'onde perturbé. Sa mesure, notée y , est ensuite transmise au CTR pour le calcul de la commande. On peut classer les analyseurs de surface d'onde en deux familles distinctes :

- Les analyseurs de type « plan focal », qui mesurent le front d'onde incident directement sur l'image au plan focal, et sont basés sur des méthodes non linéaires. On peut notamment citer dans cette catégorie les ASO à diversité de phase [Gonsalves, 1982], qui sont en particulier utilisés en optique adaptative astronomique pour la calibration des aberrations non communes, comme par exemple pour SHERE [Sauvage *et al.*, 2007] ou CANARY [Gratadour *et al.*, 2013].
- Les analyseurs de type « plan pupille », qui mesurent le front d'onde incident en se basant sur l'optique géométrique dans la pupille du système (ici du télescope). L'analyseur de ce type le plus largement répandu en optique adaptative pour l'astronomie est l'analyseur de

Shack-Hartmann (SH) [Shack et Platt, 1971]. On peut aussi citer l'analyseur à pyramide [Ragazzoni, 1996, Esposito *et al.*, 2005], basé sur le principe du couteau de Foucault.

L'ensemble de ces concepts d'ASO sont détaillés dans [Rousset, 1999]. Ce paragraphe se limite à présenter le principe de fonctionnement des analyseurs de type Shack-Hartmann.

L'ASO-SH se résume optiquement au placement d'une caméra au foyer d'une matrice de micro-lentilles optiquement conjuguée à la pupille du système. Le schéma de principe de l'ASO-SH est reproduit en figure 2.13. La matrice de micro-lentilles échantillonne spatialement le front d'onde incident, et produit une tache, ou imagerie, au plan focal, commun à toutes les micro-lentilles, dans lequel est placée la caméra. Si le front d'onde incident est plan le centre de gravité de l'imagerie se trouve sur l'axe optique de la micro-lentille, alors que s'il est déformé, le centre de gravité de l'imagerie sera excentré de :

$$\begin{cases} d_x = f_{\text{ml}} \tan \alpha_x \approx f_{\text{ml}} \alpha_x \\ d_y = f_{\text{ml}} \tan \alpha_y \approx f_{\text{ml}} \alpha_y \end{cases} \quad (2.43)$$

où (d_x, d_y) sont les écarts au centre optique sur $(\mathcal{O}x, \mathcal{O}y)$ du centre de gravité de l'imagerie, f_{ml} est la distance focale de la micro-lentille (identique pour toutes les micro-lentilles), et (α_x, α_y) les angles d'inclinaison moyens de la partie du front échantillonné par la micro-lentille. Dans chacune des sous-pupilles, l'ASO-SH mesure donc le gradient moyen du front d'onde incident, en mesurant sur la caméra l'écart du centre de gravité des imageries aux centres optiques des micro-lentilles. La position du centre de gravité de l'imagerie dans le plan $(\mathcal{O}x, \mathcal{O}y)$ s'exprime en reliant l'angle moyen au déphasage dans la sous-pupille :

$$\begin{cases} d_x = \frac{\lambda f_{\text{ml}}}{2\pi \Omega_{\text{ss}}} \iint_{\Omega_{\text{ss}}} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) dx dy \\ d_y = \frac{\lambda f_{\text{ml}}}{2\pi \Omega_{\text{ss}}} \iint_{\Omega_{\text{ss}}} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) dx dy \end{cases}, \quad (2.44)$$

où Ω_{ss} est la surface de la micro-lentille. De nombreuses études ont été menées pour améliorer ces mesures en limitant la dépendance au bruit de mesure [Nicolle, 2006, Thomas *et al.*, 2006, Basden *et al.*, 2012]. Lorsque la source est étendue (comme par exemple en observation du soleil), les méthodes par corrélations [Michau *et al.*, 1993, Noël, 1998, Poyneer *et al.*, 2003] sont privilégiées.

Les mesures issues des micro-lentilles aux bords et sous l'occultation centrale du télescope étant moins, voire pas du tout éclairées, sont ignorées. Les angles (α_x, α_y) étant considérés suffisamment petits (équation (2.43)), l'équation de mesure de l'ASO s'écrit sous la forme d'une équation linéaire :

$$y = D\phi + w \quad (2.45)$$

où D est appelée matrice de l'ASO, et w est le bruit de mesure, qui sera considéré dans ce manuscrit comme blanc, gaussien et centré.

Le bruit de mesure, sur les pentes calculées par l'ASO-SH, présente deux contributions principales [Rousset, 1999] :

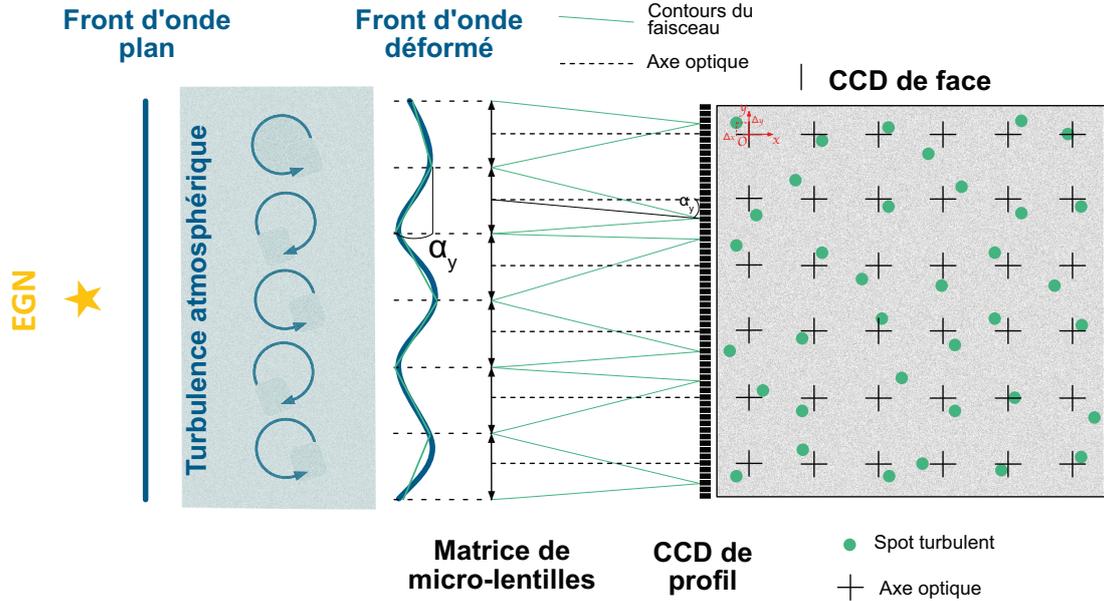


FIGURE 2.13 – Principe de l'analyseur de Shack-Hartmann

- Le bruit de photon, dont la variance de bruit sur les pentes ASO-SH est donnée par

$$\sigma_{\text{photon}}^2 = \frac{\pi^2}{2n_{\text{photon}}} \left(\frac{X_T}{X_D} \right)^2 \quad (2.46)$$

en rad^2 de différence de phase en bord de sous-pupille, où n_{photon} représente le nombre de photons reçus par sous-pupille pendant le temps d'intégration de la caméra, X_T est la largeur à mi-hauteur de l'imagerie, et X_D est la largeur à mi-hauteur de la tache de diffraction d'une sous-pupille.

- Le bruit de lecture, qui dans le cas d'une imagerie gaussienne dont on estime le centre de gravité présente une variance de bruit sur les pentes ASO-SH donnée par

$$\sigma_{\text{lecture}}^2 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\sigma_e n_{\text{pixel}}^2}{n_{\text{photon}} X_D} \right)^2 \quad (2.47)$$

en rad^2 de différence de phase en bord de sous-pupille, et où σ_e est l'écart-type moyen du bruit électronique par pixel pendant le temps d'intégration du capteur, donné en électrons, et n_{pixel} est le nombre de pixels présents dans le calcul du centre de gravité de l'imagerie.

Ces deux sources de bruit étant parfaitement décorréliées, la variance totale du bruit de mesure sur un ASO-SH est donnée par :

$$\sigma_w^2 = \sigma_{\text{photon}}^2 + \sigma_{\text{lecture}}^2. \quad (2.48)$$

Ce bruit de mesure matérialise les limites des analyseurs de type SH. En effet, les objectifs scientifiques des instruments croissant, le nombre de sous-pupilles des analyseurs tend à

croître. Cela a pour effet de diminuer le nombre de photons par sous-pupille (à temps d'échantillonnage égal et pour le même objet observé) et donc d'augmenter la variance de bruit de mesure, ce qui limite la performance du système.

2.2.2.2 Dispositifs de correction de front d'onde

Les dispositifs de correction de front d'onde font référence aux miroirs déformables et aux miroirs de basculement. Il existe plusieurs technologies de miroirs déformables, détaillées dans [Sechaud, 1999] pour les technologies de référence. Plusieurs miroirs déformables peuvent être utilisés pour la correction du front d'onde. Les spécifications de ces différents miroirs sont déterminées par plusieurs paramètres : la course des actionneurs (l'amplitude maximale des déformations), la fréquence de coupure temporelle (liée au temps de réponse) du miroir, la qualité optique de la surface, l'hystérésis, la dissipation d'énergie, ou encore les contraintes de compacité. Ces spécifications sont souvent adaptées à la modalité de correction considérée pour la conception du système. Par exemple, les différents miroirs peuvent être conjugués aux couches turbulentes d'altitude différente, ou encore en mode *woofer-tweeter* [Hampton *et al.*, 2006], où le *woofer* est un miroir avec généralement peu d'actionneurs de grande course, avec un temps de réponse relativement lent, alors que le *tweeter* est un miroir déformable avec une meilleure résolution spatiale (plus d'actionneurs), dont l'amplitude des déformations est moindre, mais dont le temps de réponse est significativement plus court. Les miroirs de basculement, ou miroirs de tip-tilt (TTM), sont par exemple des miroirs à grande amplitude (ou *stroke*) ne corrigeant que la pente moyenne dans la pupille du front d'onde. De plus les besoins, et donc les contraintes, sur ces miroirs ont été décuplés depuis les premiers miroirs déformables sur COME-ON [Kern *et al.*, 1989], ce que le tableau 2.1 résume en comparant la taille, le nombre d'actionneurs et le temps de réponse des miroirs déformables de différents instruments.

Quel que soit le type de miroir, il est caractérisé en première approximation par ses fonctions d'influence f_i , décrivant l'action de chaque actionneur i sur la surface du miroir sous l'effet d'une commande unitaire. Ainsi cette surface, appelée la phase de correction ϕ^{cor} générée par le miroir, s'exprime sous la forme :

$$\phi^{\text{cor}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{act}}} u^{(i)} f_i \quad (2.49)$$

où $u^{(i)}_{i \in [1, n_{\text{act}}]}$ représente la tension calculée par le CTR, que l'on regroupe généralement dans le vecteur de commande $u = (u^{(1)} \dots u^{(n_{\text{act}})})^T$, et n_{act} désigne le nombre total d'actionneurs. Pour simplifier l'écriture, les fonctions d'influence de tous les miroirs du système d'optique adaptative sont concaténées dans une matrice N , appelée matrice d'influence du (ou des) miroir déformable, telle que :

$$\phi^{\text{cor}} = Nu. \quad (2.50)$$

La géométrie de ses actionneurs, la distance séparant deux plus proches actionneurs d_{act} , et la technologie même du miroir déformable influent sur ses fonctions d'influence et

	COME-ON+ [Jagourel et Gaffard, 1992]	NAOS [Rousset <i>et al.</i> , 2000]	HARMONI [Vernet <i>et al.</i> , 2012]
1 ^{ère} lumière	1993	2001	~ 2024
R_{ciel}	50 cm	53 cm	~ 46 cm
n_{act}	52	185	~ 5300
Diamètre	70 mm	110 mm	2.4 m
ν_c (-3 dB)	59 Hz	1.6 kHz	> 2 kHz

TABLE 2.1 – Quelques caractéristiques de différentes générations de miroirs déformables pour l’optique adaptative classique. R_{ciel} désigne la distance inter-actionneurs reportée par conjugaison optique dans la pupille.

donc sur l’erreur de *fitting*. Plusieurs formulations ont été proposées, pour tel ou tel coefficient de couplage inter-actionneur c_{act} , et telle ou telle famille de fonction d’influence [Hudgin, 1977, Ellerbroek, 1994, Rigaut *et al.*, 1998]. [Roddiier, 1999] réunit toutes ces formules sous l’expression :

$$\sigma_{\text{fit}}^2 = \alpha_{\text{fit}} \left(\frac{d_{\text{act}}}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (2.51)$$

où α_{fit} est un coefficient valant de 0,15 à 1,25 selon les caractéristiques des fonctions d’influence.

2.2.2.3 Étoiles guides laser

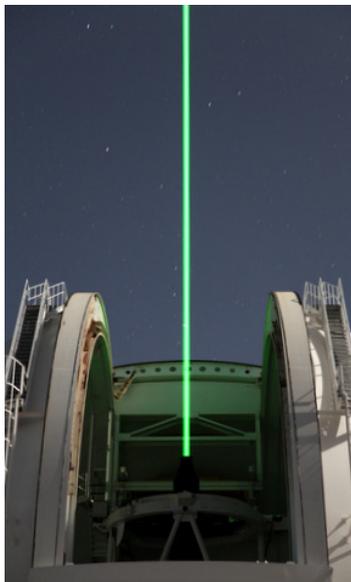
Dans le cas où l’analyse de front n’est pas possible à cause du flux lumineux trop faible de l’étoile guide, on peut s’aider d’étoiles artificielles, dites laser. Le principe consiste à utiliser un laser pour créer à une altitude déterminée, au plus haut de l’atmosphère, un point lumineux que l’on va utiliser comme étoile guide (EGL) [Foy et Labeyrie, 1985]. Il existe à ce jour deux technologies pour créer des étoiles laser :

- Les étoiles lasers Rayleigh [Thompson et Castle, 1992], basées sur la diffusion Rayleigh. Une partie du champ laser est rétro-diffusé vers le sol. En pratique, on utilise un laser cadencé synchronisé avec l’ASO. En tenant compte du temps de trajet aller-retour de la lumière, le temps de déclenchement de la mesure ASO est réglé pour fixer l’altitude de l’étoile, qui est généralement comprise entre 10 et 20 km. L’ASO capte ainsi des photons rétro-diffusés par une tranche d’atmosphère située à l’altitude $h + \Delta h$. Cette élongation Δh est fixée par la durée du pulse laser. Il est en pratique très difficile d’obtenir une EGL Rayleigh à une altitude supérieure à 20 km, le flux laser rétro-diffusé devenant insuffisant. Une illustration d’un laser Rayleigh au télescope William Herschel [Morris *et al.*, 2014] est présentée en figure 2.14a.
- Les étoiles laser sodium [Foy et Labeyrie, 1985, Gardner *et al.*, 1989], basées sur l’émission spontanée amplifiée des atomes de sodium de la mésosphère, évoluant à une altitude comprise entre 80 et 110 km. On utilise un laser continu à 589 nm pour exciter (raie D2) les atomes de sodium, qui re-émettent un photon à la même longueur d’onde en se désexcitant. L’ASO est donc conjugué à l’altitude de la couche, et l’élongation

de l'EGL est fixée par la répartition en altitude des atomes de sodium au moment de l'observation. Une illustration d'un laser sodium au télescope Gemini Sud est présentée en figure 2.14b. Un schéma de principe de l'optique adaptative assistée par laser est présenté en figure 2.15.

Ce type d'étoile guide présente néanmoins plusieurs inconvénients :

- Il est en pratique impossible d'effectuer une mesure de tip/tilt à partir d'EGL [Pilkington *et al.*, 1987, Rigaut et Gendron, 1992, Ellerbroek et Rigaut, 2001]. En effet, le temps de propagation aller-retour de la lumière étant très faible devant le temps de cohérence de l'atmosphère, cette dernière peut être considérée comme statique à l'échelle de la mesure. Ainsi, le principe de retour inverse de la lumière fait que la mesure de tip/tilt ne dépend que de la position de la pupille d'émission du laser et de celle de réception, et non de l'atmosphère elle-même. En pratique, il est impératif de coupler des EGN à des EGL pour effectuer cette mesure.
- Les EGL étant situées à une altitude finie, a contrario d'une EGN qui est considérée à l'infini, elles conduisent à ce qu'on appelle l'effet de cône. La conséquence principale est que le diamètre de l'empreinte du faisceau sur les différentes couches turbulentes diminue avec l'altitude. Par conséquent, la projection conique est suffisamment différente de la projection cylindrique pour introduire une erreur résiduelle significative. Cet effet est d'autant plus limitant pour la performance d'un système d'optique adaptative que le diamètre de la pupille du télescope est grand [Tallon et Foy, 1990, Hubin *et al.*, 2005]. Une solution pour limiter cet effet est de multiplier les EGL autour de l'objet d'intérêt,



(a) EGL Rayleigh au WHT (La Palma/Canaries) à 532 nm. Crédit C. Kulcsár.



(b) EGL Sodium à GEMINI Sud (Chili) à 589 nm. Crédit GEMINI Observatory (AURA).

FIGURE 2.14 – Les deux technologies d'étoiles laser

dans ce qu'on appelle une constellation d'EGL. Cet effet est encore plus important pour les EGL Rayleigh du fait que leur altitude est inférieure à celle des EGL Sodium.

- L'élongation des étoiles laser occasionne une élongation des spots sur la caméra de l'ASO. En effet, l'étoile laser est émise par une tranche d'atmosphère d'épaisseur non négligeable. Par simple effet de parallaxe, cette élongation en altitude conduit à une ovalisation et une augmentation de la taille des spots sur l'ASO. Il en résulte une plus forte sensibilité au bruit de mesure, les estimations de centre de gravité devenant moins robustes, ainsi que l'apparition de corrélations entre les pentes en x et y [Tallon *et al.*, 2008, Robert *et al.*, 2010, Muller *et al.*, 2011, Rousset *et al.*, 2014]. Cet effet est bien plus présent avec des EGL de type sodium, la couche de sodium pouvant s'étendre jusqu'à 10 km d'épaisseur, alors que la durée du pulse des EGL Rayleigh fixe l'épaisseur d'atmosphère rétro-diffusant le rayonnement laser.
- La couche de sodium n'étant pas fixe, même à l'échelle de temps de l'observation, il est difficile pour ce type d'EGL de déterminer la défocalisation. Des études sur les propriétés de la couche de sodium ont été menées récemment [Pfrommer et Hickson, 2010, Thomas *et al.*, 2011]. À ce jour, la mesure de la défocalisation est privilégiée sur les EGN, en plus des modes tip et tilt.
- Enfin, avec des EGL sodium, les ASO peuvent capter des photons issus de rétro-diffusion Rayleigh ou Mie (diffusion sur des aérosols) en plus de ceux ré-émis par la couche de sodium. Cet effet parasite constitue ce qu'on peut appeler l'effet fratricide, qui se matérialise par des sortes de traînées lumineuses, dépendant de la constellation d'EGL. Des exemples de l'impact de cet effet sur la performance globale d'un système peuvent être trouvés dans [Gratadour *et al.*, 2010, Wang *et al.*, 2010].

2.2.3 Quelques modalités d'optique adaptative

Lorsque l'on veut atteindre de très hautes performances, ou si l'on veut contrer l'effet d'anisoplanétisme, plusieurs modalités d'optique adaptative peuvent être envisagées pour augmenter le champ d'observation. Le concept d'optique adaptative grand champ (OAGC) a été introduit par [Dicke, 1975], mais les limites technologiques de l'époque n'avaient pas permis sa mise en œuvre. De nombreux développements autour des modalités grand champ ont malgré tout été réalisés, pour donner naissance récemment seulement aux premiers systèmes grand champ : MAD [Marchetti *et al.*, 2007], GeMS [Rigaut *et al.*, 2012], RAVEN [Lardièrre *et al.*, 2014] ou encore CANARY [Gendron *et al.*, 2011].

2.2.3.1 Optique adaptative extrême (XAO)

L'optique adaptative extrême est une modalité proche de l'OA classique, où l'on cherche principalement à obtenir dans un champ très étroit (quelques secondes d'arc) une imagerie la plus proche possible de la limite de diffraction du télescope, de manière à pouvoir discriminer des corps très proches, comme une étoile et sa (ou ses) planètes. Il va de soi que chaque terme du budget d'erreur (2.42) est traité alors avec soin, et donne lieu à des spécifications contraignantes. Le système d'optique adaptative est couplé à un coronographe, qui permet

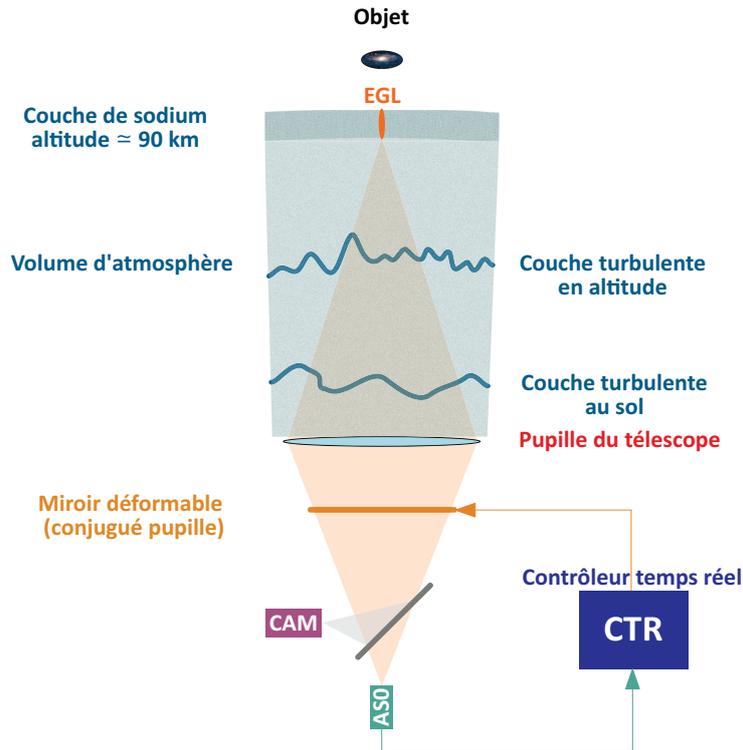


FIGURE 2.15 – Illustration de l'utilisation d'une EGL de type sodium en optique adaptative classique. On suppose la turbulence localisée sur deux couches fines.

de neutraliser au maximum les photons de l'étoile centrale. Trois instruments existent à ce jour :

- SCEXAO, au télescope Subaru, à Hawaii [Guyon *et al.*, 2010],
- GPI, fonctionnel, au télescope GEMINI Sud, sur le mont Pachón au Chili [Macintosh *et al.*, 2014],
- SPHERE, fonctionnel, au *Very Large Telescope*, sur le mont Paranal au Chili [Vigan *et al.*, 2016].

Les performances atteintes par exemple par SPHERE sont excellentes, avec un rapport de Strehl dépassant 97% en bande H [Fusco et Mawet, 2014].

2.2.3.2 Optique adaptative à tomographie laser (OATL)

L'optique adaptative à tomographie laser est la généralisation de l'OA assistée par laser présentée au paragraphe 2.2.2.3. En effet, lorsqu'aucune étoile n'est naturellement présente dans la direction d'intérêt, l'OATL utilise une constellation d'étoiles laser pour sonder le volume turbulent autour de l'objet dans plusieurs directions. Ces mesures sur EGL sont toujours couplées avec des mesures sur EGN, pour palier les limites d'utilisation des EGL, dans le but d'obtenir une correction efficace dans un champ étroit autour de la cible. Le système d'OATL fonctionne en boucle fermée avec un seul miroir déformable, optiquement conjugué

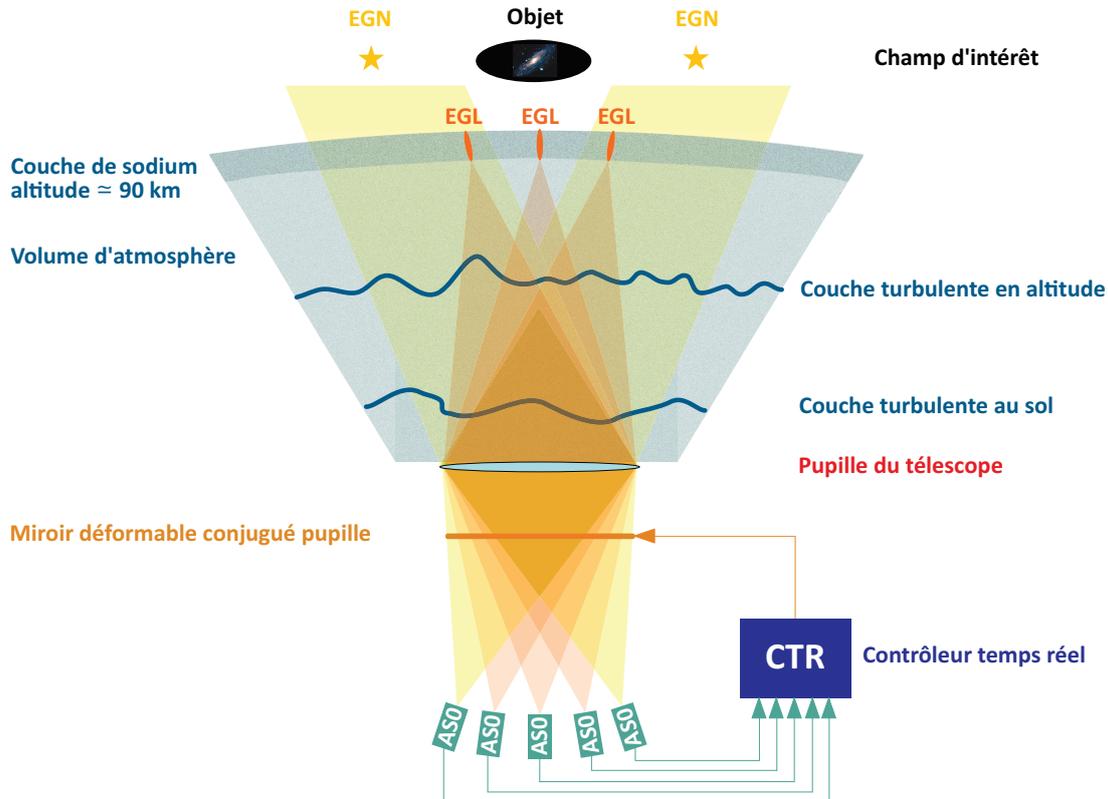


FIGURE 2.16 – Schéma de principe de l’optique adaptative à tomographie laser (OATL) avec deux étoiles guides naturelles, trois étoiles guides laser de type sodium et un champ d’intérêt restreint autour d’un objet. On suppose la turbulence localisée en deux couches, l’une au sol et l’autre en altitude.

à la pupille du télescope. Ce concept, initialement introduit par [Tallon et Foy, 1990], a profité de plusieurs études pour trouver la constellation d’EGL permettant la meilleure mesure tomographique de la turbulence [Le Louarn, 2000, Tokovinin *et al.*, 2001, Viard *et al.*, 2002, Lloyd-Hart *et al.*, 2006, Baranec *et al.*, 2006]. Sa première validation expérimentale a vu le jour sur le banc HOMER de l’ONERA [Costille, 2009]. L’OATL va constituer une brique de base de plusieurs des instruments prévus pour les ELT, comme HARMONI pour l’E-ELT [Thatte *et al.*, 2016] ou GMT-LTAO [Wang *et al.*, 2012]. La figure 2.16 représente un schéma de principe de l’OATL.

2.2.3.3 Optique adaptative multi-conjuguée (OAMC)

L’optique adaptative multi-conjuguée est une modalité permettant d’obtenir une performance de correction uniforme dans un champ assez large, de l’ordre de plusieurs minutes d’arc. Ce concept a été formulé par [Beckers, 1988] à partir des travaux de [Dicke, 1975], et consiste en un système en boucle fermée, utilisant des constellations d’EGL et d’EGN pour sonder un large volume turbulent dans plusieurs directions, et plusieurs miroirs déformables, optiquement conjugués à des altitudes différentes, pour la correction du front d’onde dans

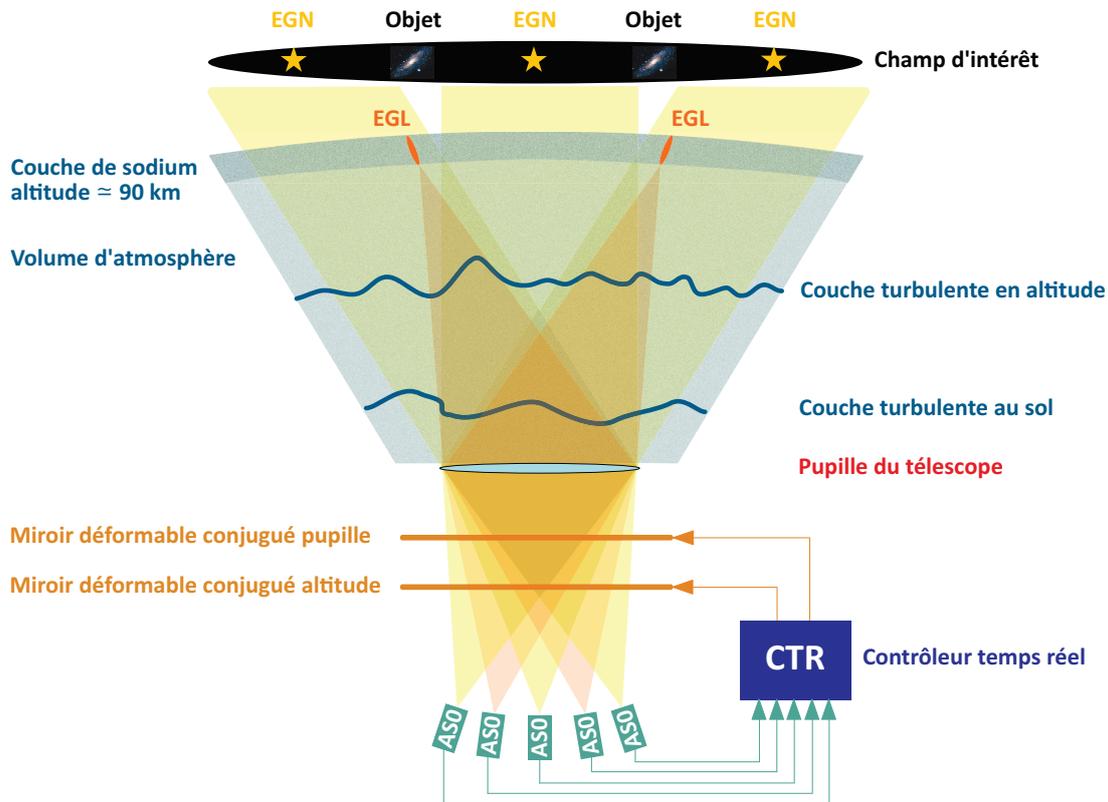


FIGURE 2.17 – Schéma de principe de l'optique adaptative multi-conjuguée (OAMC) avec trois étoiles guides naturelles, deux étoiles guides laser de type sodium et deux objets dans un champ d'intérêt étendu. On suppose la turbulence localisée en deux couches, l'une au sol et l'autre en altitude.

un champ étendu. L'exemple fonctionnel de cette modalité d'OA est l'instrument GeMS de l'observatoire GEMINI Sud, à La Serena au Chili [Rigaut *et al.*, 2014, Neichel *et al.*, 2014]. Ce type d'instrument sera au cœur du fonctionnement des futurs ELT avec notamment les instruments MAORY/MICADO pour l'E-ELT [Diolaiti *et al.*, 2010], ou encore le système NFIRAOS du *Thirty Meter Telescopes* (TMT) [Herriot *et al.*, 2014]. La figure 2.17 représente le schéma de principe de l'OAMC.

2.2.3.4 Optique adaptative multi-objet (OAMO)

L'optique adaptative multi-objet consiste, à partir d'une analyse multi-directionnelle du volume turbulent, à corriger efficacement les déformations du front d'onde dans un champ étroit autour de plusieurs objets d'intérêt éloignés les uns des autres. Une illustration d'un objectif d'observation en OAMO est présentée en figure 2.18. Les systèmes d'OAMO sont des systèmes d'OA en boucle ouverte, utilisant un miroir déformable par objet d'intérêt. Ce concept a été imaginé par [Hammer *et al.*, 2002] pour répondre aux objectifs scientifiques des ELT, visant à permettre la mesure des paramètres astrométriques simultanément sur plusieurs objets peu lumineux (en particulier des galaxies) répartis dans un champ

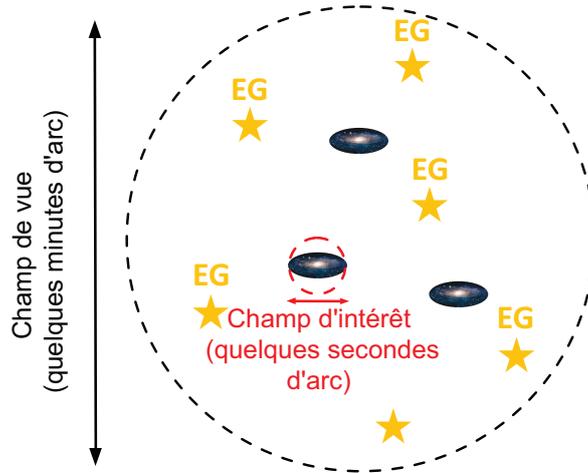


FIGURE 2.18 – Champ d’observation dans le cas de l’OAMO. Plusieurs cibles sont présentes dans un champ large, avec plusieurs EG (naturelles et/ou laser).

de quelques minutes d’arc. Une démonstration de concept a été réalisée avec l’instrument CANARY [Gendron *et al.*, 2011], qui mettait en œuvre un système d’OAMO observant un unique objet. De même, l’observatoire Subaru, à Hawaii, dispose d’un démonstrateur d’OAMO, RAVEN [Lardièrre *et al.*, 2014], offrant jusqu’à deux voies d’observation. Les instruments d’OAMO sont donc de première importance pour les futurs ELT, qui prévoient de s’en équiper à court terme, comme l’instrument de première lumière TMT-AGE/IRMOS [Akiyama *et al.*, 2014, Eikenberry *et al.*, 2006], le spectrographe infra-rouge multi-objet de TMT, ou encore à plus long terme l’instrument MOSAIC [Hammer *et al.*, 2016], le futur spectrographe multi-objet de l’E-ELT. La figure 2.19 représente le schéma de principe de l’OAMO.

2.3 Asservissement des systèmes d’optique adaptative

L’asservissement d’un système d’optique adaptative est critique pour atteindre ses performances optimales. Ce paragraphe traite les bases de la représentation mathématique du système d’optique adaptative, classique ou grand champ, situe les limites d’utilisation de ce formalisme et aborde les stratégies classiques de commande.

2.3.1 Modélisation de la boucle d’asservissement

La majorité des systèmes d’optique adaptative existants sont des systèmes commandés en boucle fermée, c’est-à-dire que l’ASO mesure la phase résiduelle. En pratique, cela correspond aux cas où l’ASO est placé en aval du miroir déformable dans la chaîne optique, et donc voit l’effet du miroir déformable. A contrario, certains systèmes fonctionnent en boucle ouverte, en particulier les systèmes d’OAMO : l’ASO (ou les) est alors placé en amont du (ou des) miroir déformable sur le train optique. La principale différence entre ces deux stratégies tient au fait que l’ASO voit ou non l’action du miroir déformable. Étant donné la faible

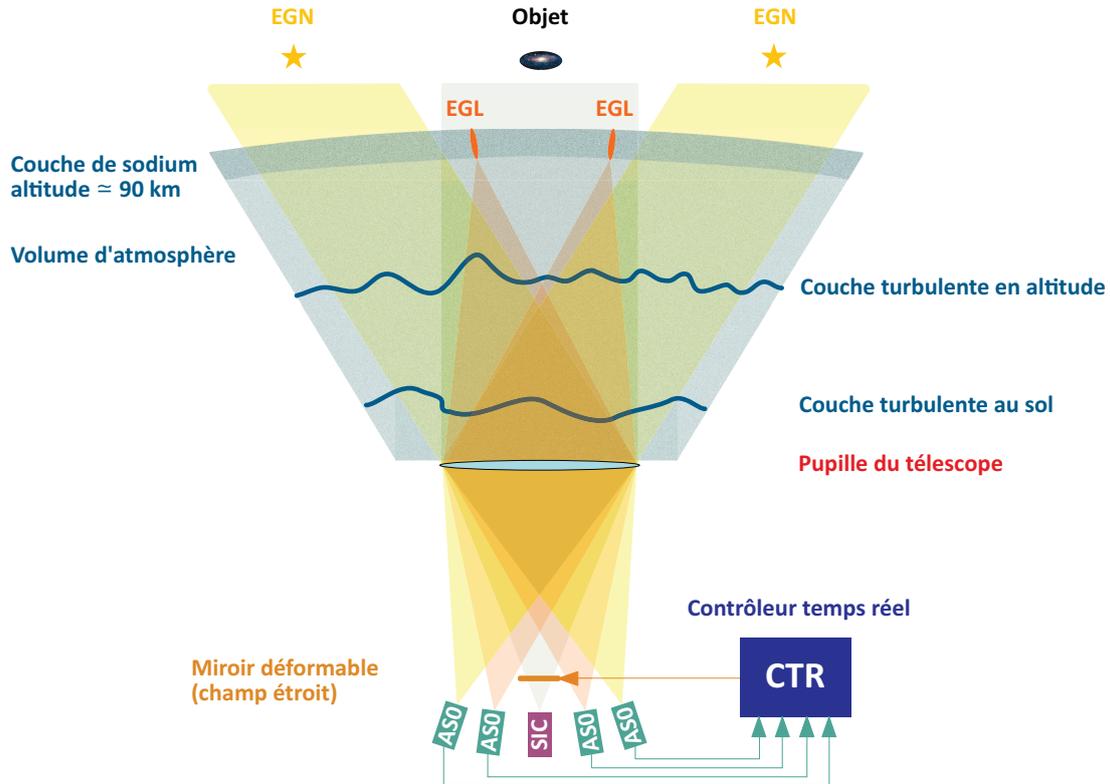


FIGURE 2.19 – Schéma de principe de l'optique adaptative multi-objet avec deux étoiles guides naturelles, deux étoiles guides laser de type sodium et un objet d'intérêt sur axe. On suppose la turbulence localisée en deux couches, l'une au sol et l'autre en altitude.

proportion de systèmes en boucle ouverte, ce manuscrit se limitera au cadre d'un système en boucle fermée, le passage à un système en boucle ouverte ne présentant aucune difficulté méthodologique.

2.3.1.1 Optique adaptative classique

La figure 2.20 retranscrit le schéma de principe de la figure 2.10 en schéma bloc. Le système d'optique adaptative est un système à temps discret, fonctionnant à pas de temps régulier T_e , classiquement appelé période d'échantillonnage. La phase de perturbation, ϕ , étant un phénomène continu, on définit ϕ_k , la phase de perturbation moyennée localement à l'instant kT_e , par :

$$\phi_k = \frac{1}{T_e} \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} \phi(t) dt. \quad (2.52)$$

Tous les composants du système d'optique adaptative sont utilisés dans leur plage de linéarité, ce qui permet de décrire leur comportement par une simple équation linéaire. Ainsi, l'ASO est un système linéaire, décrit par son opérateur D , perturbé par un bruit additif, blanc, gaussien et centré, à qui on affecte un retard d'une trame d'échantillonnage pour

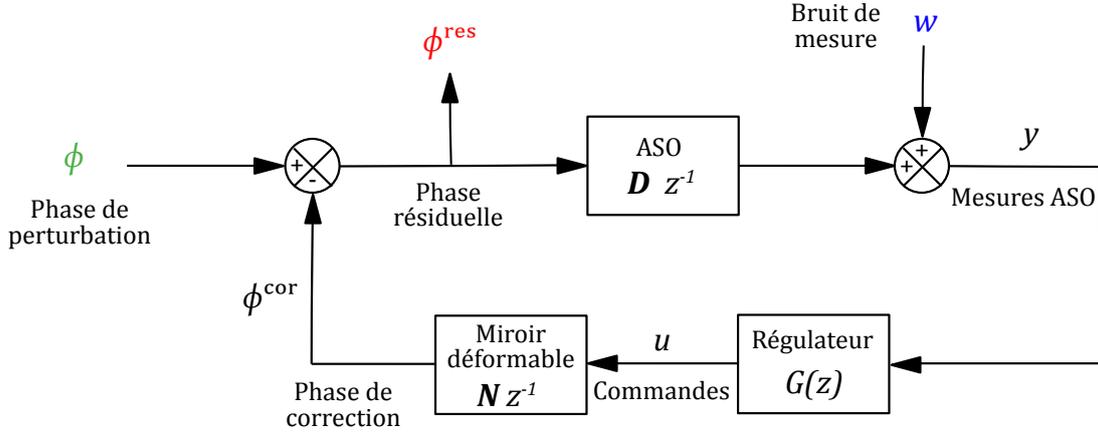


FIGURE 2.20 – Schéma bloc de principe de l'asservissement d'un système d'optique adaptative

tenir compte du temps de lecture de sa caméra. L'équation de l'ASO se résume à :

$$y_k = D\phi_{k-1}^{\text{res}} + w_k, \quad (2.53)$$

où y_k est la mesure de l'ASO à l'instant kT_e , w est le bruit de mesure de l'ASO, et ϕ^{res} est la phase résiduelle :

$$\phi_k^{\text{res}} = \phi_k - \phi_k^{\text{cor}}, \quad (2.54)$$

avec ϕ^{cor} la phase de correction générée par le miroir déformable. Le miroir déformable est quant à lui décrit par sa matrice d'influence, et affecté d'un retard pur d'une trame d'échantillonnage, pour tenir compte du bloqueur d'ordre 0 entre le CTR et le miroir, du temps de lecture de la caméra (de l'ASO), du calcul des pentes et du calcul de la commande. On a alors :

$$\phi_k^{\text{cor}} = Nu_{k-1}, \quad (2.55)$$

où u est la commande calculée par le CTR. Le système est donc affecté d'un retard de deux trames d'échantillonnage (soit $2T_e$). En pratique, ce retard peut être inférieur à deux trames. Cela peut être pris en compte dans le régulateur, et ne nuit pas à la généralité du formalisme détaillé dans ce manuscrit. Un chronogramme du système avec deux trames de retard est proposé en figure 2.21.

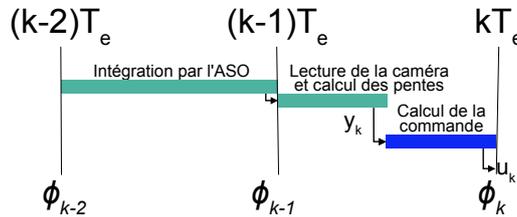


FIGURE 2.21 – Chronogramme d'un système d'OA à deux trames de retard.

En couplant les équations (2.53), (2.54) et (2.55), on peut réécrire l'équation de mesure sous la forme :

$$y_k = D\phi_{k-1} - DNu_{k-2} + w_k, \quad (2.56)$$

où DN est ce qu'on appelle la matrice d'interaction du système d'optique adaptative, notée M^{int} . Le système d'optique adaptative n'a donc que deux entrées exogènes : la phase de perturbation et le bruit de mesure. On choisit comme sortie d'intérêt la phase résiduelle, qui est la variable de performance dont on souhaite minimiser la variance. Le système asservi ayant deux entrées, son comportement dynamique est décrit par deux fonctions de transfert entre chacune des entrées et la sortie :

$$\Phi^{\text{res}}(z) = T^{\text{rej}}(z)\Phi(z) + T^{\text{bruit}}(z)W(z), \quad (2.57)$$

avec Φ^{res} , Φ et W les transformées en z de respectivement ϕ^{res} , ϕ et w ; T^{rej} est la fonction de transfert de réjection, reliant la phase de perturbation à la phase résiduelle, et T^{bruit} est la fonction de transfert de propagation de bruit, reliant le bruit de mesure à la phase résiduelle. L'expression de ces fonctions de transfert se déduit alors aisément du schéma bloc en figure 2.20 :

$$T^{\text{rej}}(z) = (I + z^{-2}NG(z)D)^{-1}, \quad (2.58)$$

$$T^{\text{bruit}}(z) = z^{-1}T^{\text{rej}}(z)NG(z). \quad (2.59)$$

2.3.1.2 Adaptation aux systèmes grand champ

Les systèmes d'optique adaptative grand champ ont la particularité d'utiliser plusieurs ASO, dans le but de réaliser une mesure tomographique du volume turbulent, et peuvent aussi utiliser plusieurs miroirs déformables pour la correction. L'ordonnancement des différents modèles des composants est déterminant pour limiter la complexité de la modélisation du système. Un formalisme compact est proposé par [Costille *et al.*, 2011]. Tout d'abord, le volume turbulent est considéré comme étant constitué de n_l couches infiniment fines, localisées à des altitudes différentes. Le système d'optique adaptative est composé de n_y ASO, analysant le front d'onde issu d'étoiles guides indifféremment naturelles ou laser, et de n_m miroirs déformables, conjugués à des altitudes différentes. La phase de perturbation ϕ est la concaténation des phases sur chacune des couches :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{(1)} \\ \vdots \\ \phi^{(l)} \\ \vdots \\ \phi^{(n_l)} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

où $\phi^{(l)}$ désigne la phase dans la métapupille de la couche l . La métapupille est définie dans chaque couche turbulente comme étant le cercle de plus petit diamètre entourant l'empreinte des faisceaux issus des étoiles guides (voir figure 2.22), ou, s'il est plus grand, le champ de correction. L'opérateur de mesure D du système grand champ est obtenu par la concaténation verticale des matrices de chaque ASO :

$$D = \begin{pmatrix} D_{\text{ASO}_1} \\ \vdots \\ D_{\text{ASO}_{n_y}} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

avec D_i la matrice du $i^{\text{ème}}$ ASO. La matrice d'influence globale du système grand champ est de même obtenue par la concaténation des matrices d'influence de chacun des miroirs :

$$N = (N_1 \quad \dots \quad N_{n_m}) \quad (2.62)$$

avec N_j la matrice d'influence du $j^{\text{ème}}$ miroir. On définit alors le projecteur M_α comme étant l'opérateur qui découpe dans chaque métapupille l'empreinte de chaque ASO et somme ces empreintes, de telle sorte que :

$$y_k = DM_\alpha \phi_{k-1}^{\text{res}} + w_k \quad (2.63)$$

Le calcul de la phase de correction fait alors intervenir un autre projecteur M_β , différent selon le type de système grand champ et l'objectif de commande considérés, qui va projeter la correction dans la (ou les) direction d'intérêt, ce qui s'écrit :

$$\phi_k^{\text{cor}} = M_\beta N u_{k-1}. \quad (2.64)$$

L'intérêt de cette description des systèmes grand champ est sa ressemblance avec celui des systèmes d'OA classique. Ainsi, le formalisme de commande des systèmes grand champ est similaire au cas classique de par son écriture, notamment pour la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG) [Costille *et al.*, 2011], la principale difficulté étant la définition des matrices M_α et M_β . On retrouve les expressions des fonctions de transfert de réjection $T_{\text{GC}}^{\text{rej}}$ et de propagation de bruit $T_{\text{GC}}^{\text{bruit}}$ en grand champ en combinant les transformées en z des équations (2.57), (2.63) et (2.64) :

$$T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(z) = (I + z^{-2} M_\beta N G(z) D M_\alpha)^{-1} \quad (2.65)$$

$$T_{\text{GC}}^{\text{bruit}}(z) = -z^{-1} T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(z) M_\beta N G(z) \quad (2.66)$$

2.3.1.3 Évaluation de la variance de phase résiduelle

La variance de phase résiduelle est un critère particulièrement bien adapté à la caractérisation de la performance du système du point de vue de la commande. En effet, la phase résiduelle constitue la sortie d'intérêt de la boucle d'asservissement et, grâce à son lien avec le rapport de Strehl, est également adaptée à la caractérisation optique de la performance du système d'optique adaptative. Par définition,

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \int_0^\infty \|\phi^{\text{res}}(t)\|_2^2 dt, \quad (2.67)$$

avec $\|\cdot\|_2^2$ désignant la norme quadratique. Le théorème de Parseval permet d'écrire :

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \int_0^\infty \|\Phi^{\text{res}}(e^{i\omega})\|_2^2 d\omega. \quad (2.68)$$

Quand ϕ est un processus stochastique stationnaire à l'ordre deux, de DSP S_ϕ , et w un bruit blanc gaussien de variance Σ_w , la variance de phase résiduelle s'exprime alors à partir des fonctions de transfert de la boucle, par le biais de l'équation (2.57) :

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 &= \text{trace} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi T^{\text{rej}}(e^{i\omega}) S_\phi(e^{i\omega}) T^{\text{rej}}(e^{i\omega})^* \right) \\ &+ \text{trace} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi T^{\text{bruit}}(e^{i\omega}) \Sigma_w T^{\text{bruit}}(e^{i\omega})^* \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

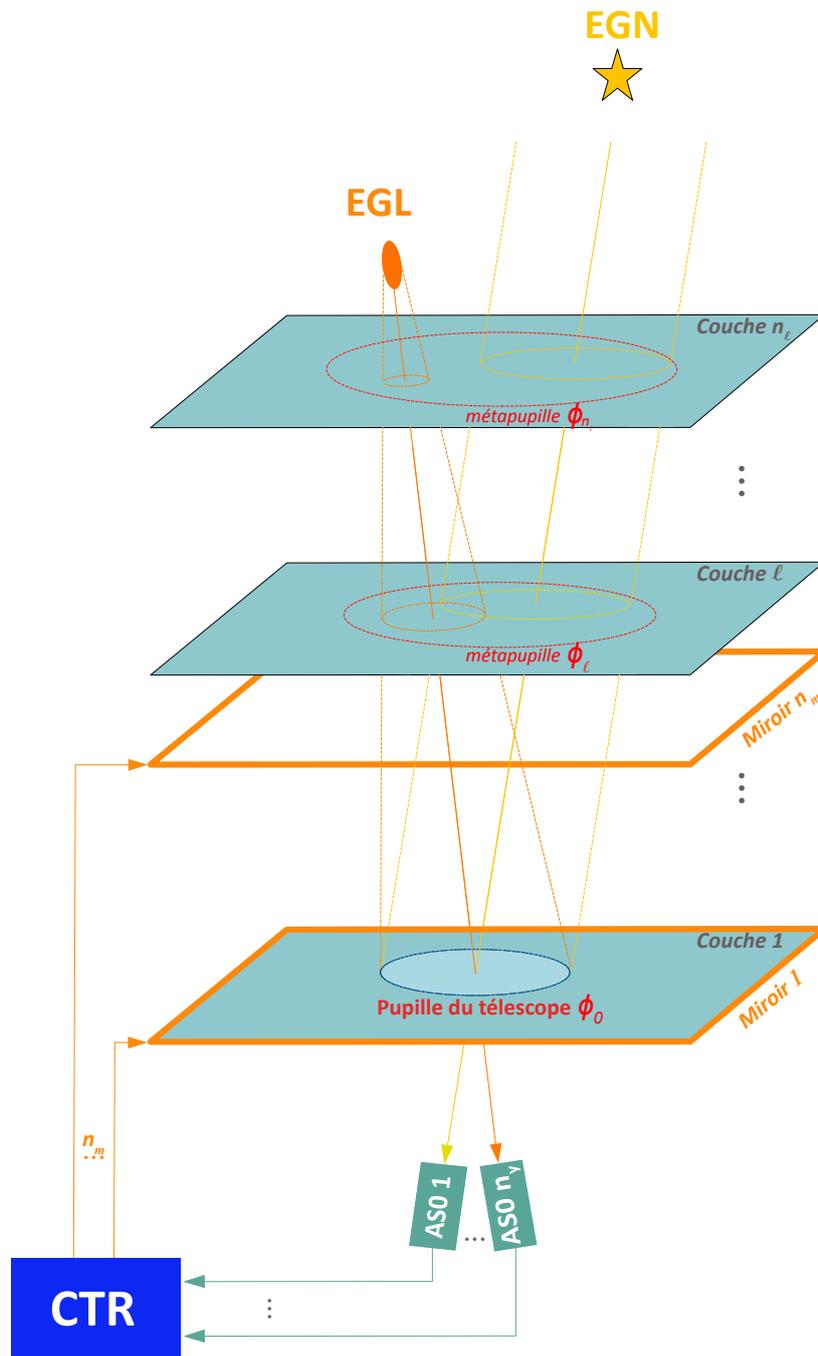


FIGURE 2.22 – Schéma de principe de l'asservissement d'un système d'OA grand champ. Sont représentées deux étoiles guides (laser en orange, naturelle en bleu), des miroirs déformables conjugués à des altitudes différentes (plans violets) et plusieurs couches turbulentes (plans gris). Les empreintes des faisceaux et des métapupilles sont matérialisées en pointillés sur chacune des couches turbulentes.

2.3.2 Concepts de commande en optique adaptative

Chaque instrument d'optique adaptative étant unique, on peut dénombrer autant de régulateurs que de systèmes en fonctionnement. Néanmoins, tous ces régulateurs sont conçus à partir de quelques concepts de commande, que ce paragraphe a pour objectif de présenter.

2.3.2.1 Régulateur à action intégrale

Le régulateur à action intégrale, ou plus couramment appelé l'intégrateur, et sans conteste le type de régulateur le plus utilisé dans les systèmes d'optique adaptative, grâce en particulier à sa simplicité d'implémentation et sa rapidité d'exécution. La relation entre la commande calculée par le CTR et les mesures issues de l'ASO peut s'exprimer à partir des équations (2.45) et (2.50), en négligeant le bruit de mesure, par :

$$y = M_{\text{int}}u, \quad (2.70)$$

où $M_{\text{int}} = DN$ est la matrice d'interaction du système. L'intégrateur est le régulateur qui permet d'annuler une erreur statique. Son équation de récurrence s'obtient à partir de l'inversion de l'équation (2.70). La matrice M_{int} n'étant pas inversible, la solution de cette inversion, appelé matrice de commande, et notée M_{com} , s'obtient par une solutions aux moindres carrés, c'est-à-dire une inverse généralisée de M_{int} :

$$u^* = M_{\text{com}}y \quad (2.71)$$

avec :

$$M_{\text{com}} = M_{\text{int}}^+ = (M_{\text{int}}^T M_{\text{int}})^{-1} M_{\text{int}}^T. \quad (2.72)$$

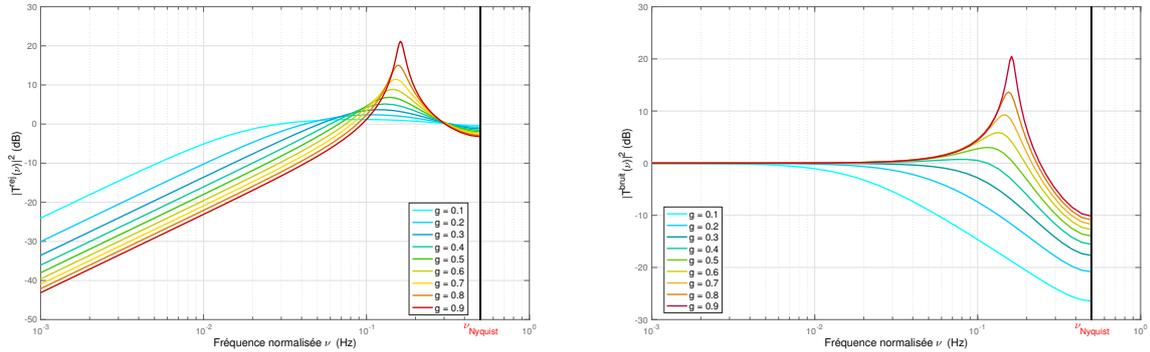
Il est nécessaire de remarquer qu'en pratique la matrice $M_{\text{int}}^T M_{\text{int}}$ n'est pas bien conditionnée, ce qui conduit à effectuer une décomposition en valeur singulière (SVD) tronquée de cette matrice, où les valeurs singulières trop faibles sont mise à zéro lors de l'inversion.

La commande d'un régulateur à action intégrale est alors définie par :

$$u_k = u_{k-1} + gM_{\text{com}}y_k, \quad (2.73)$$

où g est le gain de l'intégrateur. Le réglage de ce gain consiste en un compromis entre la performance du régulateur et sa robustesse en stabilité, en fonction des perturbations extérieures (bruit de mesure, force de la turbulence, vibrations, etc...). En effet, la figure 2.23 montre que la réjection de l'intégrateur augmente avec le gain de l'intégrateur. Parallèlement, l'augmentation de g conduit à une moins bonne réjection du bruit (figure 2.23b) et accroît le dépassement (fig . 2.23a), ou *overshoot*, du transfert de réjection. Ce peut être très gênant en présence de vibrations, comme l'ont observé [Sivo *et al.*, 2014] sur CANARY.

Par ailleurs, la commande par action intégrale ne permet pas de choisir de direction de correction autre qu'une correction globale dans le champ, ce qui cantonne l'utilisation de l'intégrateur aux systèmes d'OAMC, comme cela l'est par exemple pour l'instrument



(a) Fonction de transfert de réjection d'un intégrateur pour différentes valeurs du gain

(b) Fonction de transfert de propagation de bruit correspondantes

FIGURE 2.23 – Influence du gain de l'intégrateur sur les fonctions de transfert de la boucle d'OA

d'OAMC MAD, de l'ESO [Arcidiacono *et al.*, 2008].

Une variante appelée *Intégrateur à gain modal optimisé* [Gendron et Léna, 1994, Gendron et Léna, 1995] est souvent mise en œuvre. Cela consiste à appliquer des gains différents pour chaque mode de la SVD, de manière à s'adapter à la turbulence. On peut aussi citer l'« intégrateur à fuite » (*leaky integrator*) comme variante, qui améliore la robustesse en stabilité du correcteur, au prix d'une dégradation des performances. Ce type de régulateur est implémenté par exemple dans le CTR de GeMS [Rigaut *et al.*, 2014].

2.3.2.2 Le régulateur statique MMSE

Le régulateur statique, dit *Minimum mean square error* (MMSE), ou écart quadratique moyen minimum, est une modalité de commande grand champ boucle ouverte, qui sera néanmoins abordé dans la suite de ce manuscrit. Il est basé sur une estimation optimale, au sens du *maximum a posteriori*, du front d'onde dans la direction d'intérêt à partir de la dernière mesure disponible, sous l'hypothèse que les phases sont très corrélées dans le temps, c'est-à-dire que la phase évolue peu entre deux trames d'échantillonnage successives. De ce fait, le régulateur MMSE ne tient compte ni de la dynamique temporelle de la turbulence (il est donc souvent qualifié de régulateur statique) ni des retards de la boucle d'optique adaptative. Son principe consiste, à partir de mesures ASO y , dans une (ou des) direction α , à calculer

$$\hat{\phi} = R_{\text{MMSE}} y, \quad (2.74)$$

l'estimée de la phase dans le volume turbulent, avec R_{MMSE} défini par :

$$R_{\text{MMSE}} = \operatorname{argmin}_R (\|\phi - Ry\|^2). \quad (2.75)$$

La phase dans la pupille pouvant être considérée comme la somme d'une infinité de processus aléatoires indépendants, sa statistique peut être supposée gaussienne, en accord avec le théorème central limite. Le bruit de mesure w est quant à lui supposé blanc, gaussien

et centré. Dans ces conditions [Ellerbroek et Vogel, 2009], le reconstituteur qui minimise l'équation (2.75), en accord avec l'équation de mesure en grand champ (2.63) et en supposant que les phases sont temporellement décorréélées, est donné par

$$R_{\text{MMSE}} = [(DM_\alpha)^T \Sigma_w^{-1} (DM_\alpha) + \Sigma_\phi^{-1}]^+ (DM_\alpha)^T \Sigma_w^{-1}, \quad (2.76)$$

où Σ_ϕ et Σ_w sont les matrices de covariance spatiale respectivement de la phase de perturbation ϕ et du bruit de mesure w . La commande MMSE est une alternative à l'intégrateur lorsque la direction d'intérêt diffère de la direction de mesure. On projette alors la phase reconstruite sur le miroir déformable pour une correction dans la direction d'intérêt β à l'aide d'un projecteur P_{GC} ,

$$u = P_{\text{GC}} \hat{\phi}, \quad (2.77)$$

où P_{GC} est la généralisation en grand champ du pseudo-inverse de N :

$$P_{\text{GC}} = [(M_\beta N)^T (M_\beta N)]^+ (M_\beta N)^T M_\beta. \quad (2.78)$$

2.3.2.3 Commande optimale linéaire quadratique gaussienne (LQG)

La commande LQG est optimale pour les systèmes linéaires qui ne sont perturbés que par des bruits blancs gaussiens, et pour un critère de performance quadratique. Le contexte de l'optique adaptative, dans lequel on veut minimiser la variance de la phase résiduelle, est donc une application de choix pour ce type de commande. La commande LQG repose sur une modélisation des perturbations, et en particulier de la turbulence atmosphérique, comme sorties de filtre linéaires (filtres formeurs) attaqués par des bruits blancs gaussien. Ces modèles de perturbation décrivent la dynamique spatio-temporelle de la phase turbulente, des vibrations, de la prise au vent, etc. Elles reposent principalement sur deux hypothèses alternatives concernant la nature de la phase turbulente :

- La phase est bouillonnante, c'est-à-dire que la dynamique au sein de la turbulence est caractérisée par une évolution temporelle sans direction de déplacement privilégiée des différents volutes, lesquels apparaissent et disparaissent au cours du temps. Les modèles auto-régressifs sont particulièrement adaptés à la description de ces phénomènes. Des modèles auto-régressifs d'ordre 1 (AR1) ont été proposés [Le Roux *et al.*, 2003] et validés expérimentalement [Petit *et al.*, 2005, Petit *et al.*, 2009, Costille *et al.*, 2011, Parisot, 2012]. Des modèles auto-régressifs du deuxième ordre (AR2), plus performants, ont été proposés et validés expérimentalement [Petit, 2011] et ont été utilisés pour la commande de CANARY [Sivo, 2013] et de SPHERE [Sauvage *et al.*, 2014].
- La phase est figée, et se déplace sous l'effet du vent dans une direction déterminée. Cela correspond à l'hypothèse de *frozen flow*. Des modèles AR1 Fourier de ce type ont été développés dans le cadre du *Predictive Fourier Control* [Poyneer *et al.*, 2007], pour la commande des modes de basculement et de la défocalisation sur l'instrument GPI [Poyneer *et al.*, 2016]. Les développements autour des ELT et des instruments grand champ s'intéresse vivement à ce type de modèle, où chaque couche de turbulence est supposée en *frozen flow*. On peut ainsi citer les modèles AR1 zonaux du filtre de Kalman distribué [Gilles *et al.*, 2013, Massioni *et al.*, 2015], étudiés pour NFIRAOS (TMT), ou encore les modèles AR1, 2 et 3 zonaux proposés pour le régulateur LQG spatio-angulaire [Jackson *et al.*, 2015, Correia *et al.*, 2015].

Quel que soit le modèle linéaire de perturbation envisagé, il peut être réécrit sous la forme d'une équation d'état discrète :

$$x_{k+1} = Ax_k + \Gamma v_k, \quad (2.79)$$

avec x le vecteur d'état, qui regroupe, entre autres, différentes occurrences temporelles de la perturbation ϕ , v un bruit blanc gaussien centré, dit formeur, de covariance Σ_v , où A est la matrice d'état, contenant la dynamique du modèle de perturbation, et où Γ est la matrice de bruit formeur. Couplée à l'équation de mesure (2.53), on obtient une représentation d'état stochastique du système à commander :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \Gamma v_k \\ y_k = Cx_k + w_k - DNu_{k-2} \end{cases}, \quad (2.80)$$

avec C la matrice d'observation.

Le critère de la commande LQG, noté $J(u)$, correspond à la variance de phase résiduelle, et s'écrit :

$$J(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 dt, \quad (2.81)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\phi(t) - \phi^{\text{cor}}(t)\|^2 dt. \quad (2.82)$$

[Kulcsár *et al.*, 2006] montrent que la minimisation de ce critère, du fait du fonctionnement discret de la boucle de commande est équivalente à la minimisation du critère discret

$$J^d(u) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_0^K \|\phi_k - \phi_k^{\text{cor}}\|^2, \quad (2.83)$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_0^K \|\phi_k - Nu_{k-1}\|^2, \quad (2.84)$$

avec

$$\phi_k = \frac{1}{T_e} \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} \phi(t) dt. \quad (2.85)$$

À ce stade, en information complète et compte tenu du retard de commande, la commande optimale qui conduirait à une variance de phase résiduelle nulle serait :

$$u_k = P_u \phi_{k+1} = P_u C_\phi x_{k+1}, \quad (2.86)$$

avec C_ϕ la matrice qui extrait la phase de perturbation ϕ_k de x_k , et P_u la matrice qui projette la phase sur le miroir déformable. Toutefois, le problème de commande, dans le cas considéré, relève d'un problème en information incomplète. En effet, compte tenu des retards de la boucle d'asservissement, et de l'utilisation d'une mesure ASO bruitée, le calculateur ne peut accéder à ϕ_{k+1} . Dans ce cas de figure, la commande optimale s'écrit :

$$u_k = P_u \hat{\phi}_{k+1|k} = P_u C_\phi \hat{x}_{k+1|k}, \quad (2.87)$$

où $\hat{\phi}_{k+1|k} = E[x_{k+1}|y_k]$ est la sortie d'un filtre de Kalman. Le filtre de Kalman est un estimateur à variance minimale, dont le fonctionnement est décrit par deux équations :

- L'équation de mise à jour de l'état :

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + H_{\infty} \tilde{y}_{k|k-1}, \quad (2.88)$$

où $\tilde{y}_{k|k-1}$ est l'innovation, définie par

$$\tilde{y}_{k|k-1} = y_k - \hat{y}_{k|k-1} = y_k - C\hat{x}_{k|k-1} - DNu_{k-2}, \quad (2.89)$$

et où

$$H_{\infty} = \Sigma_{\infty} C^T (C \Sigma_{\infty} C^T + \Sigma_w)^{-1} \quad (2.90)$$

est le gain de Kalman d'estimation, avec Σ_{∞} la solution de l'équation de Riccati algébrique discrète :

$$\Sigma_{\infty} = A \Sigma_{\infty} A^T + \Gamma \Sigma_{\infty} \Gamma^T - A \Sigma_{\infty} C^T (C \Sigma_{\infty} C^T + \Sigma_w)^{-1} C \Sigma_{\infty} A^T. \quad (2.91)$$

- L'équation de prédiction de l'état :

$$\hat{x}_{k|k+1} = A \hat{x}_{k|k}, \quad (2.92)$$

qui peut aussi s'écrire, en utilisant (2.88) :

$$\hat{x}_{k|k+1} = (A - L_{\infty} C) \hat{x}_{k|k-1} + L_{\infty} y_k, \quad (2.93)$$

avec $L_{\infty} = A H_{\infty}$ le gain de Kalman de prédiction.

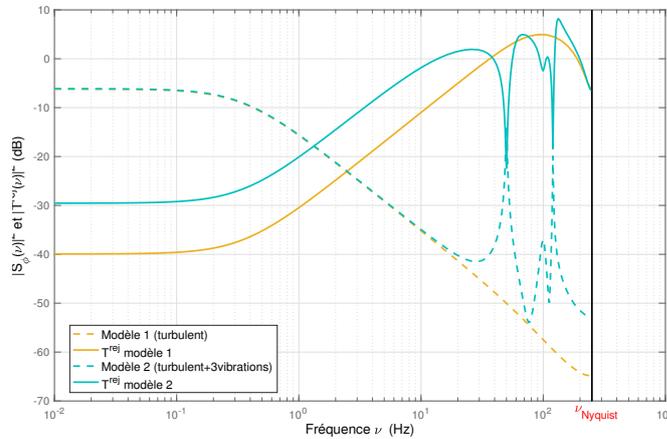


FIGURE 2.24 – Influence du modèle sur la fonction de transfert de réjection d'un régulateur LQG

La figure 2.24 représente la fonction de transfert de réjection de deux régulateurs LQG (courbes pleines), chacun basé sur un modèle différent de tip/tilt : le premier (courbe pointillée jaune) est issu d'un modèle bouillonnant AR2 purement turbulent, et le deuxième (courbe pointillée bleue) est issu du même modèle pour la turbulence atmosphérique, mais tient compte de trois vibrations, modélisées par des processus AR2 résonants du type de

ceux proposés par [Petit, 2006, Petit *et al.*, 2008]. La comparaison de ces courbes à celles de l'intégrateur (figure 2.23a) conduit à plusieurs remarques. Premièrement, la fonction de transfert de réjection du régulateur LQG présente un plateau d'atténuation aux basses fréquences, contrairement à l'intégrateur, dont la réjection tend vers 0 aux basses fréquences. Ensuite, la zone de dépassement du régulateur LQG est plus maîtrisée que celle de l'intégrateur. En effet, le levier pour jouer sur la zone de dépassement de l'intégrateur est son gain, alors qu'on peut modéliser le transfert de réjection du régulateur LQG à discrétion en modifiant le modèle de perturbation sous-jacent. Le régulateur, qu'il soit LQG ou à action intégrale, n'échappe toutefois pas à l'effet « lit-à-eau » (*waterbed effect*), découlant du théorème de Bode [Wu et Jonckheere, 1992] : une meilleure réjection quelque part implique nécessairement une moins bonne réjection aux autres fréquences. Ceci s'écrit sous la forme :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T^{\text{rej}}(e^{i\omega})| d\omega = 0, \quad (2.94)$$

pour tout régulateur n'ayant pas de pôles en dehors du cercle unité. La figure 2.24 illustre cet effet : la prise en compte de vibrations qui doivent être compensées dans le modèle, dans la bande [30, 200] Hz, se traduit par un rehaussement du transfert de réjection en dehors de cette bande de fréquences.

Chapitre 3

Caractérisation de la performance d'un correcteur linéaire en optique adaptative classique : expression du budget d'erreur

Sommaire du chapitre

3.1	Évaluation du budget d'erreur d'une OA classique	64
3.1.1	Résumé de l'article	64
3.1.2	Article : <i>Linear controller error budget assessment for SCAO systems</i>	65
3.1.3	Retour sur le biais de reconstruction lié au repliement spatial	78
3.2	Implémentation algorithmique et complexité calculatoire	80
3.2.1	Forme d'état de régulateurs particuliers	80
3.2.2	Forme d'état associée aux fonctions de transfert	85
3.2.3	Complexité calculatoire et parallélisation des calculs	88
3.3	Extension du formalisme au cas des systèmes d'optique adaptative grand champ	89
3.3.1	Adaptation de la formulation du budget d'erreur	89
3.3.2	Expression du budget d'erreur commandé	91
3.3.3	Discussion sur l'implémentation	92
3.4	Conclusion et discussion	93

Le chapitre 2 a permis d'introduire les différents concepts nécessaires au développement de ce manuscrit et a en particulier abordé les limites des systèmes d'optique adaptative. En effet, des phénomènes physiques (comme l'anisoplanétisme de la turbulence atmosphérique ou les bruits de caméra), les spécifications matérielles (conception et géométrie des ASO et des MD, ou puissance du contrôleur temps réel) et les choix de conception (entre autres l'asservissement) vont limiter la performance de l'imagerie. Les objectifs scientifiques des instruments pour les ELT, ou les améliorations envisagées pour les instruments des VLT, requièrent de contourner, ou le cas échéant de repousser ces limites. Dans ce contexte, il est important de pouvoir analyser la performance de tel ou tel régulateur pour faire un choix en adéquation avec les contraintes et objectifs du système. L'objet de ce chapitre est donc d'analyser finement l'effet de tout régulateur linéaire sur la performance finale du système d'optique adaptative, en calculant son budget d'erreur.

Pour cela, la partie 3.1 introduit une méthodologie complète pour évaluer le budget d'erreur des systèmes d'optique adaptative classique, méthodologie aussi bien adaptée aux phases de conception des systèmes (calculs théoriques ou simulations) qu'à l'analyse de performance sur données expérimentales, enregistrées lors de campagnes d'acquisition sur le ciel, ou le cas échéant en laboratoire. Cette partie est principalement constituée d'un article soumis à la revue JOSA A. La partie 3.2 revient sur l'implémentation numérique de cette méthode, de manière à gérer au mieux sa complexité calculatoire. Enfin, la partie 3.3 traite de l'extension de ce formalisme aux systèmes grand champ.

3.1 Évaluation du budget d'erreur d'une OA classique

3.1.1 Résumé de l'article

L'outil d'analyse de performance développé dans cette partie est basé sur une évaluation fréquentielle de la variance de phase résiduelle en sortie du système d'optique adaptative. On a montré au paragraphe 2.3 que l'asservissement pouvait être entièrement décrit à l'aide de deux fonctions de transfert : la fonction de transfert de réjection (2.58) et la fonction de transfert de propagation de bruit (2.59). Comme le montre l'équation (2.69), on peut évaluer la variance de phase résiduelle directement à partir de ces fonctions de transfert, de la variance du bruit de mesure et de la DSP de la phase de perturbation, et ce pour tout régulateur linéaire. Les budgets d'erreur sont alors construits à partir de ces expressions. L'article correspondant, soumis récemment, fait l'objet du paragraphe 3.1.2. Il propose en premier lieu de définir une décomposition de l'espace des phases adaptée à la définition des différents termes du budget d'erreur (2.42). Ceci permet de faire apparaître une structure particulière de la matrice de transfert de réjection, avec une forme adaptée à l'identification de ces différents termes.

La DSP de la phase peut être soit calculée de façon théorique, soit estimée à partir de réalisations obtenues en simulation. L'article propose une estimation par périodogramme moyenné des phases. Il aborde ensuite la problématique de l'estimation de DSP de la phase à partir de mesures ASO. La DSP est estimée dans ce cas par périodogramme moyenné

des phases estimées par reconstruction de front d'onde. Toutes les corrélations existant entre les différentes coordonnées de la base de représentation étant prises en compte, on privilégie un reconstruteur de type *maximum a posteriori* (MAP), plus robuste au bruit de mesure qu'un reconstruteur de type moindres carrés régularisés (MC). Toutefois, le nombre de modes pouvant être estimé correctement étant limité, on choisit de supposer la DSP diagonale à partir d'un certain ordre. La diagonale est alors extrapolée à partir du spectre moyen des derniers modes estimés par le MAP (spectre moyen des modes du dernier ordre radial en Zernike) et d'arguments théoriques de type Taylor. Un biais lié au bruit de mesure est présent dans l'estimation de la DSP de la phase de perturbation car propagé par la reconstruction à partir des mesures. Ce biais est formellement identifié pour la partie de la DSP basée sur l'estimation par MAP du front d'onde ainsi que pour celle issue de la procédure d'extrapolation.

Ces différents outils sont ensuite validés par la simulation d'un système de type NAOS fort flux [Rousset *et al.*, 2003], en comparant les performances d'un régulateur à action intégrale et de plusieurs régulateurs LQG. La problématique de la complexité calculatoire liée à l'utilisation de la méthode pour les systèmes de type ELT est discutée en conclusion, et plusieurs pistes d'amélioration sont proposées.

3.1.2 Article : *Linear controller error budget assessment for SCAO systems*

Linear controllers error budget assessment for SCAO systems

RÉMY JUVÉNAL^{1,2,*}, CAROLINE KULCSÁR¹, HENRI-FRANÇOIS RAYNAUD¹, AND JEAN-MARC CONAN²

¹Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Université Paris-Saclay, Palaiseau, France

²Onera, The French Aerospace Lab, Châtillon, France

*Corresponding author: remy.juvenal@institutoptique.fr

Compiled November 15, 2017

Understanding limitations of adaptive optics (AO) systems is crucial when designing new systems. In particular, analyzing the potential of different controllers is of great interest for the upcoming AO systems of the VLTs and ELTs. This paper thus details a complete error budget assessment formalism, based on analytic formulas involving the disturbance temporal Power Spectral Density (PSD) and the controller transfer function, and thus applicable to any linear controller. This formalism is presented here for the special case of Single-Conjugated Adaptive Optics (SCAO) systems, but can be extended to any closed or open-loop, single or multi-conjugated AO configuration. Special attention is paid to the 'control-dependent' errors, the importance of which is directly related to the type of control used in the AO system. The proposed method is applied to a NAOS/VLT-type SCAO system, using disturbance PSD derived from a simulated turbulence trajectory, enabling to construct detailed error budgets for an integrator and different LQG controllers. These results are compared with calculations based on disturbance PSD estimated from WFS measurements. Application to ELT-size systems is discussed in the conclusion. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (010.1080) Adaptive optics; (999.9999) Optimal Control; (000.4430) Numerical approximations and analysis; (010.1330) Atmospheric turbulence; (070.4790) Spectrum analysis; (080.5084) Phase space methods analysis.

<http://dx.doi.org/10.1364/ao.XX.XXXXXX>

1. INTRODUCTION

The scientific goals of the future instruments of the VLTs, and all the more so for the upcoming Extremely Large Telescopes (ELTs) and their instruments, such as HARMONI [1], MAORY [2, 3] or METIS [4], require particularly competitive Adaptive Optics (AO) systems. Controller design is therefore a key issue. Important efforts have been devoted to defining and adapting AO controllers in order to increase performance. Thus, development of optimal linear controllers has aroused considerable interest the last decade, leading to several implementations of Linear Quadratic Gaussian (LQG) controllers. These include the first full LQG control on the CANARY demonstrator in both Single Conjugated AO (SCAO) and Multi-Object AO (MOAO) [5, 6], tip-tilt control of the Extreme AO (XAO) system of the exo-planet detector SPHERE [7] and low order modes control of the XAO system of GPI [8]. A tip-tilt LQG controller with vibration mitigation has also been designed for the MultiConjugate AO (MCAO) instrument GeMS [9], and is expected to substantially improve its performance [10, 11]. A minimum-variance tip-tilt H_2 controller has also been successfully implemented on the McMath Pierce solar telescope [12]. A key feature of these minimum-

variance controllers is that they explicitly predict the phase to be corrected, based on an accurate modeling of the incoming disturbances (turbulence, vibrations, wind-shake). Analyzing in detail the performance of minimum-variance controllers – or for that matter of other types of linear controllers – requires a general-purpose tool capable to analyze the error budget and global performance of any control scheme. Such a tool will be useful both to design the next generation of AO systems and to explore upgrades of existing ones.

Defining and calculating error budgets allows for detailed performance analysis of AO systems. Error budgets are used for systems design, in order to specify their performance objectives, and to guide developments. They are also used to analyse the performance of existing instruments and quantify their limits, mainly in order to decide which improvements to prioritize [13]. Error budgets for XAO narrow-field AO systems can thus be found, for example, for SPHERE [14] or GPI [15], and the performance analysis of these systems has already started [7, 8], in order to plan their next upgrades. At the early design stages, error budgets are mostly based on simplified configurations and assumptions on the turbulence or the system,

as, e.g., the Deformable Mirror (DM) fitting error [16, 17], which depends on the geometry of the DM, or the propagated aliasing error [18]. However, each of these classical expressions have been obtained for particular conditions of phase expansion, Wavefront Sensor (WFS) and DM geometry, and control design. Therefore, using these expressions to build an error budget for performance analysis implicitly assumes that the system should behave similarly to these classical configurations. Furthermore, developments in performance analysis are very specific to either a particular system or a particular configuration, such as in [19, 20] for CANARY (SCAO, LTAO and MOAO), or the work on the computation of generalized aliasing in optimized-gain integrator for MCAO in [21].

When an accurate end-to-end simulator of the AO system is available, it can be used to evaluate the different terms in the error budget by selectively suppressing particular items in the simulation, e.g. setting first the measurement noise to zero [22]. However, this requires to run the AO simulator (or at least parts of it) several times over sufficiently long simulated disturbance sequences. This time-domain procedure is essentially a “black box” approach, which provides no theoretical or analytical clue as to why different controllers result in different error budget breakdowns. It has also been proposed to evaluate the error budget in the spatial frequency domain under frozen-flow assumption, since all items can be ultimately expressed and evaluated in the spatial Fourier domain [23].

We develop in this paper a general-purpose error budget formalism based on the assumption that the disturbance is a time-domain stationary stochastic process with known (temporal) Power Spectrum Density (PSD) and on an explicit description of the AO rejection transfer functions in the time domain. This time-domain stationarity assumption thus includes the frozen-flow hypothesis as a special case. Temporal frequency-domain approaches have already been proposed for specific cases, notably for the Keck AO system [24, 25], with scalar transfer functions, allowing only to probe rejection for decoupled controllers, such as an integrator. We propose here a fully multi-inputs/multi-outputs approach applicable to any linear AO controller. Furthermore, while this approach is applied here to the special case of a closed-loop SCAO system, it can easily be extended to cope with any particular closed or open-loop single or multi-conjugate AO configuration. Another benefit of using an approach based on the temporal disturbance PSD is that this information could be derived either from theoretical models, from end-to-end simulations or even from on-sky data, such as recorded WFS measurements.

This paper is organized as follows. In Section 2, a generic SCAO error budget decomposition and a general formalism enabling to properly separate all terms in the error budget are presented. Section 3 is dedicated to the phase representation, with a decomposition in appropriate subspaces, and leading to a precise expression of each error budget term depending centrally on the (multivariable) controller transfer function. In Section 4, we apply this formalism to the simulation of a VLT-type SCAO end-to-end simulation based on the specifications of NAOS high-flux mode [26]. Since this new formalism, as noted above, relies centrally on a sufficiently accurate knowledge of the disturbance PSD, Section 5 discusses the estimation of that PSD from WFS measurements. This PSD estimation method is then validated and discussed on the basis of a NAOS-like simulation. Section 6 concludes the paper with a discussion about the application of such a formalism in Wide-Field AO (WFAO) and in the context

of ELTs.

2. PERFORMANCE ANALYSIS FOR SCAO SYSTEMS

Defining an error budget amounts to breaking down the residual phase variance into several (hopefully) independent terms related to the different physical effects limiting the performance [27]. We introduced in [28] a new terminology, separating these errors into “control-dependent” and “control-free” error terms. The control-dependent errors gather the terms affected by the regulator (temporal error, noise propagation error and aliasing error), which therefore depend on the type of controller. The control-free errors gather all the other effects affecting the image quality, mainly DM fitting, Non-Common Path Aberrations (NCPA) and the impact of the disturbance Inter-Sampling Variance (ISV). This last term, which is generally neglected (as it is expected to be very small for properly designed systems), is due to the fact that commands are applied to the DM through a zero-holder hold, while the disturbance does not remain constant between two consecutive sampling times $t = kT_s = k/F_s$, where F_s is the AO loop sampling frequency. It has been shown that in the absence of DM dynamics, the ISV-induced error depends only on F_s and can be computed explicitly from the (continuous-time) disturbance PSD [29–31].

A. Residual phase variance decomposition

The error budget decomposition classically admitted for SCAO systems (to which we add here the ISV-induced error) can be written under the following form:

$$\sigma_{\phi_{\text{res}}}^2 = \underbrace{\sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{noise,prop}}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2}_{\text{Control-dependent errors}} + \underbrace{\sigma_{\text{NCPA}}^2 + \sigma_{\text{fitting}}^2 + \sigma_{\text{ISV}}^2}_{\text{Control-free errors}}. \quad (1)$$

In this expression, the three control-dependent errors are: the temporal error σ_{temp}^2 , due to the frame delays (WFS integration, read-out, command computation and data transfers); the noise propagation error $\sigma_{\text{noise,prop}}^2$, due to the propagation of the WFS measurement noise in the feedback loop; and the aliasing error σ_{alias}^2 , induced by the WFS finite-spatial sampling and propagated in the feedback loop. The three control-free errors are: the NCPA error σ_{NCPA}^2 , related to the existence of differential aberrations between the imaging and analysis optical paths, which result in uncorrected static aberrations; the fitting error $\sigma_{\text{fitting}}^2$, directly related to the finite number of DM actuators, which results in the non-compensation of the high spatial frequencies of the disturbance phase; and the inter-sampling error σ_{ISV}^2 . As noted above, σ_{ISV}^2 is very small and can be neglected for sampling frequencies F_s higher than 100 Hz [29]. In the sequel, we therefore neglect it in all calculations.

Control-free errors are generally computed from specifications and calibration data. The value of σ_{NCPA}^2 is classically computed from the best Strehl Ratio (SR) obtained on an internal calibration source by the AO system without turbulence. This best SR, denoted by SR_{best} , is therefore the upper bound of the system performance [20, 32]. For high-performance AO systems, SR_{best} generally satisfies the Maréchal criterion (e.g. 88% in H-band for GeMS [32], or 80% in H-band for CANARY [20]), which insures the validity of the well-known Mahajan approximation [33]:

$$\text{SR} \simeq \exp(-\sigma_{\phi_{\text{res}}}^2). \quad (2)$$

In this ideal situation (without disturbance), all optical aberrations in the common path are corrected by the AO loop. The

residual phase is thus made of the non-common path aberrations, leading to an error term simply defined as

$$\sigma_{\text{NCPA}}^2 = -\ln(\text{SR}_{\text{best}}). \quad (3)$$

Computing the fitting error $\sigma_{\text{fitting}}^2$ has been widely studied in the literature. Indeed, formulas have already been derived depending either on an equivalent amount of Zernike modes the DM is able to produce [17], or on the DM features (actuators geometry, total actuators number, pitch and actuators coupling coefficient) [18, 27]. We show in Section D that the global error budget formalism allows to evaluate this fitting error from the DM influence matrix N , which embeds all the informations about the DM structure.

B. Transfer-based expressions of the error budget

Computing the control-dependent errors requires an accurate analysis of the AO feedback loop. We propose to evaluate the residual phase variance through the computation of the residual phase in the frequency domain, because it is well adapted to the analysis of linear systems with stochastic inputs. Assuming that the DM's dynamics are fast enough with respect to the AO loop frequency, they can be neglected. The performance of the AO system is then encapsulated in the discrete-time block diagram in Fig. 1 [34]. This feedback loop has two independent inputs, the perturbation phase denoted by ϕ and the measurement noise, denoted by w , and one performance output: the residual phase. Throughout this paper, we will assume that all blocks in Fig. 1 are linear, which in practice translates into the assumption that both the commands and the residual phases remain in the linear ranges of the DM and of the WFS. Since all blocks in the AO loop are linear, the residual phase can be decomposed in the frequency domain as the sum of the impacts of its two external inputs ϕ and w :

$$\Phi^{\text{res}}(z) = T^{\text{rej}}(z)\Phi(z) + T^{\text{noise}}(z)W(z), \quad (4)$$

where Φ^{res} , Φ and W are respectively the z -transforms of ϕ^{res} , ϕ and w ; T^{rej} is the so-called rejection transfer function, linking the perturbation phase to the residual phase, and T^{noise} is the noise propagation transfer function, linking the measurement noise to the residual phase. Note that since all signals in the loop are vector-valued, both T^{rej} and T^{noise} are matrix-valued functions of a complex variable. In the block-diagram of Fig. 1, the linear WFS and DM are represented respectively by matrices D and N (DM influence matrix). The expressions of T^{rej} and T^{noise} are readily obtained from the diagram in Fig. 1:

$$T^{\text{rej}}(z) = [I + z^{-2}NG(z)D]^{-1}, \quad (5)$$

$$T^{\text{noise}}(z) = -z^{-1}T^{\text{rej}}(z)NG(z). \quad (6)$$

Note that this calculation is based on the assumption that the total loop delay is equal to $d = 2$ frames (or sampling periods): one frame for WFS integration (WFS camera exposure), plus one frame for all real-time data processing (WFS read-out, command computation and data transfer). However, to account for different value of d (e.g., $1 < d < 2$), one would simply need to replace z^{-2} by z^{-d-1} .

Under the additional assumption that ϕ^{res} is a second-order stationary (discrete-time) stochastic process with PSD $S_{\phi^{\text{res}}}$ (which is guaranteed on the condition that the continuous-time version of ϕ is itself such a process, see [34]), Parseval's theorem

can then be used to compute the residual phase variance in the frequency domain:

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \|S_{\phi^{\text{res}}}(z = e^{i\omega})\|_2^2 d\omega + \sigma_{\text{NCPA}}^2, \quad (7)$$

where $\omega = 2\pi f/F_s$ is the normalized pulsation (in radians per sampling period). Denote by $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ the residual phase minus the NCPA error:

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 - \sigma_{\text{NCPA}}^2. \quad (8)$$

With this notation, when w is a white noise with covariance matrix Σ_w and independent from ϕ , Eq. (4) leads to:

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \underbrace{\text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T^{\text{rej}}(e^{i\omega}) S_{\phi}(e^{i\omega}) T^{\text{rej}}(e^{i\omega})^* d\omega}_{\sigma_{\text{rej}}^2 = \sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2 + \sigma_{\text{fitting}}^2} + \underbrace{\text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T^{\text{noise}}(e^{i\omega}) \Sigma_w T^{\text{noise}}(e^{i\omega})^* d\omega}_{\sigma_{\text{noise,prop}}^2}, \quad (9)$$

where $*$ stands for Hermitian transposition, S_{ϕ} is the temporal PSD of the disturbance – considered without approximation, *i.e.* as a full matrix-valued PSD. We can note first that the structure of Eq. (9) is identical to the one of Eq. (4), with two independent parts: one depending solely on the disturbance PSD, and the other depending solely on the measurement noise variance. Thus, the second term in Eq. (9) is the expression of the noise propagation error:

$$\sigma_{\text{noise,prop}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T^{\text{noise}}(e^{i\omega}) \Sigma_w T^{\text{noise}}(e^{i\omega})^* d\omega, \quad (10)$$

and can be easily estimated, since the measurement noise covariance matrix Σ_w can be computed from AO telemetry or from calibrations. As an example, the noise propagation error has been assessed through this technique for the Keck performance analysis [24, 25]. As for the first term in Eq. (9), denoted by σ_{rej}^2 , it gathers all the remaining errors:

$$\sigma_{\text{rej}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T^{\text{rej}}(e^{i\omega}) S_{\phi}(e^{i\omega}) T^{\text{rej}}(e^{i\omega})^* d\omega. \quad (11)$$

Indeed, σ_{rej}^2 quantifies how the system is rejecting the incoming disturbances (turbulence, vibrations...), and therefore gathers σ_{temp}^2 , σ_{alias}^2 and $\sigma_{\text{fitting}}^2$. Actually, it may appear counter intuitive for fitting, but this is due to the fact that the rejection transfer function describes the whole behavior of the AO system regarding the disturbance, including the spatial frequencies which the DM is not able to produce, as explained below.

C. AO linear controllers in state-space form

In order to apply the transfer-based formulas derived above, one needs to compute the controller transfer function $G(z)$. This is easily achieved by using a fundamental result from control theory, namely that all linear controllers can be represented (and implemented) in so-called state-space form. Thus, a convenient standard state-space form for a linear discrete-time AO controller with input y (WFS measurement) and output u (DM command) is:

$$\begin{cases} x_k^G &= A_G x_k^G + B_G y_k, \\ u_k &= C_G x_{k+1}^G, \end{cases} \quad (12)$$

where (A_G, B_G, C_G) are matrices of appropriate dimensions. The vector x_k^G is the internal state of the controller; its role is to store

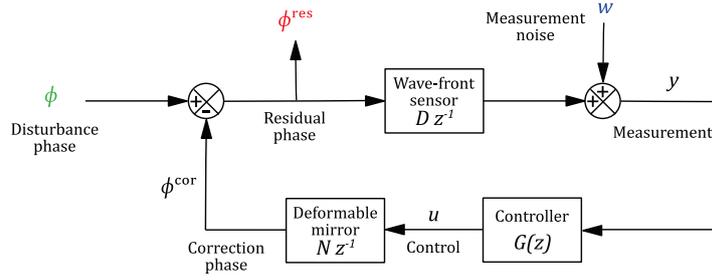


Fig. 1. Generic block diagram of an AO system with a two-frame delay.

all the information required to recursively update the control. In the case of an integrator, for example, this information is simply the previous value of u , which is updated according to the recursive equation:

$$u_k = u_{k-1} + gM_{\text{com}}y_k, \quad (13)$$

where g stands for the integrator gain, and M_{com} stands for the command matrix, defined as the generalized inverse of the interaction matrix M_{int} (which is itself either computed through a calibration step on a real system, or defined as the product DN). Thus, in order to convert the integrator to state-space form, one needs simply to take $x_k^G = u_{k-1}$, $A_G = I$, $B_G = gM_{\text{com}}$ and $C_G = I$, so that Eq. (12) becomes:

$$\begin{cases} x_{k+1}^G &= u_k = x_k^G + gM_{\text{com}}y_k = u_{k-1} + gM_{\text{com}}y_k, \\ u_k &= x_{k+1}^G. \end{cases} \quad (14)$$

LQG control is based on a phase prediction performed by a Kalman filter, which in turn is given in so-called predictor form as:

$$\hat{x}_{k+1|k} = A\hat{x}_{k|k-1} + L_{\infty}(y_k - \hat{y}_{k|k-1}), \quad (15)$$

$$\hat{\phi}_{k+1|k} = C_{\phi}\hat{x}_{k+1|k}, \quad (16)$$

$$\hat{y}_{k|k-1} = C\hat{x}_{k+1|k} - DNu_{k-2}. \quad (17)$$

In these equations, $\hat{x}_{k|k-1}$ is the state of the Kalman filter, C_{ϕ} is the operator extracting the phase prediction $\hat{\phi}_{k+1|k} = E(\phi_{k+1}|y_k, \dots, y_0)$ from $\hat{x}_{k+1|k}$, and L_{∞} is the so-called Kalman gain. The matrices A , C_{ϕ} and C come from a state-space stochastic model which encapsulates the WFS measurement equation and the disturbance spatio-temporal statistics (see, e.g., [34]). The optimal control action is then obtained by projecting the phase prediction on the DM according to the DM influence matrix N :

$$u_k = N^+\hat{\phi}_{k+1|k} = N^+C_{\phi}\hat{x}_{k+1|k}, \quad (18)$$

where \cdot^+ stands for the generalized inverse.

In order to be able to update the Kalman filter, the LQG controller needs to store $\hat{x}_{k|k-1}$ in its internal state. In a closed-loop AO configuration, a delayed value of the command u needs also to be stored. Taking:

$$x_k^G = \begin{pmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ u_{k-2} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

it is immediately checked that the appropriate state-space form is:

$$A_G = \begin{pmatrix} A - L_{\infty}C & L_{\infty}DN \\ N^+C_{\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} L_{\infty} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_G = \begin{pmatrix} N^+C_{\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Once the controller has been written in state-space form, its transfer function $G(z)$ is readily obtained using the z -transforms of Eq. (12). This yields:

$$G(z) = zC_G(zI - A_G)^{-1}B_G. \quad (21)$$

This formula is then directly implementable in a numerical simulation.

3. PHASE SPACE REPRESENTATION FOR ERROR BUDGET BREAKDOWN

The purpose of this section is to decompose the phase representation space into orthogonal subspaces which will enable to separate and calculate the different control-dependent error terms (together with the fitting error). We therefore proceed from the assumption that an appropriate finite-dimensional representation space \mathcal{P} has been selected for both the disturbance ϕ , the correction phase ϕ^{cor} and the residual phase ϕ^{res} . Popular possible choices include sampling on a regular spatial grid (zonal representation), spatial Fourier-domain decomposition and Zernike or Karhunen-Loève polynomials (modal representations).

A. Decomposition of the representation space

An inescapable fact about AO control is that the correction phase $\phi_k^{\text{cor}} = Nu_{k-1}$ necessarily lies in the linear subspace of \mathcal{P} generated by the DM influence functions, *i.e.* the columns of N . A convenient way to account for this fundamental property in our error budget evaluations is to decompose \mathcal{P} as a direct sum of the DM space \mathcal{P}^{\parallel} and its orthogonal complement \mathcal{P}^{\perp} :

$$\mathcal{P}^{\parallel} = \text{Im } N, \quad (22)$$

$$\mathcal{P}^{\perp} = (\mathcal{P}^{\parallel})^{\perp} = (\text{Im } N)^{\perp}, \quad (23)$$

so that

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\parallel} \oplus \mathcal{P}^{\perp}. \quad (24)$$

The associated projectors onto \mathcal{P}^{\parallel} and \mathcal{P}^{\perp} are thus defined as:

$$P^{\parallel} = NN^+, \quad (25)$$

$$P^{\perp} = I - P^{\parallel} = I - NN^+, \quad (26)$$

where I is the identity matrix of appropriate dimension. We assume that all phases in \mathcal{P}^{\parallel} are not aliased through the WFS, so that aliasing is induced by the part of the disturbance lying in \mathcal{P}^{\perp} [20, 21].

B. Decomposition of the closed-loop transfer functions

According to Eq. (24), any phase in \mathcal{P} can be uniquely decomposed as the sum of its (orthogonal) components in \mathcal{P}^{\parallel} and \mathcal{P}^{\perp} , which can be written in compact form as:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{\parallel} \\ \phi^{\perp} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Correction phases being produced by the DM, they belong to \mathcal{P}^{\parallel} , so that:

$$\phi^{\text{cor}} = \begin{pmatrix} \phi^{\text{cor}\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Since $\phi_k^{\text{cor}} = Nu_{k-1}$, this means that the influence matrix takes the form:

$$N = \begin{pmatrix} N^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

As for the WFS matrix D , it exhibits no special structure with respect to this decomposition of the representation space, so that:

$$D = \begin{pmatrix} D^{\parallel} & D^{\perp} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Substituting Eq. (29) and (30) in the rejection transfer function expression in Eq. (5), we get:

$$T^{\text{rej}}(z) = \begin{pmatrix} I + z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\parallel} & z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\perp} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}. \quad (31)$$

Thanks to the Strassen block-wise matrix inversion lemma, T^{rej} then takes the special form:

$$T^{\text{rej}}(z) = \begin{pmatrix} T^{\text{rej}\parallel}(z) & T^{\text{rej}\perp}(z) \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (32)$$

with

$$T^{\text{rej}\parallel}(z) = \left(I + z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\parallel} \right)^{-1}, \quad (33)$$

$$T^{\text{rej}\perp}(z) = -z^{-2} \left(I + z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\parallel} \right)^{-1} N^{\parallel}G(z)D^{\perp}. \quad (34)$$

The particular block-triangular structure of $T^{\text{rej}}(z)$ reflects the fact that the AO correction does not affect modes in \mathcal{P}^{\perp} . This means that the restriction of $T^{\text{rej}}(z)$ to \mathcal{P}^{\perp} is an identity matrix, and that its impact on the error budget is equal to the fitting error variance (see Section D).

Similarly, substituting Eq. (29) and (30) in Eq. (6) leads to the following special structure for the noise rejection transfer function:

$$T^{\text{noise}}(z) = \begin{pmatrix} T^{\text{noise}\parallel}(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

where

$$T^{\text{noise}\parallel}(z) \triangleq -z^{-1} \left(I + z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\parallel} \right)^{-1} N^{\parallel}G(z). \quad (36)$$

This is in agreement with the fact that the measurement noise is only affecting phase components in \mathcal{P}^{\parallel} through the control computation.

C. Spatial aliasing and detailed phase modelling

From Eq. (32), the impact of aliasing on control performance depends solely on $T^{\text{rej}\perp}$, which in turn depends on the controller. To mitigate the impact of spatial aliasing, a controller thus needs to perform appropriate temporal filtering of the WFS measurements. In the special case of an LQG controller, this ability to mitigate the impact of WFS aliasing through temporal filtering centrally depends on the size of the ‘‘modeling space’’ \mathcal{P}^{mod} used by the Kalman filter to estimate and predict the disturbance, and which as a rule contains \mathcal{P}^{\parallel} and a part of \mathcal{P}^{\perp} : taking a larger modeling space should reduce aliasing, while increasing the dimension of the controller state and thus its complexity. This suggests that to investigate this issue more thoroughly, it would be useful to further split \mathcal{P}^{\perp} in two subspaces: its intersection $\mathcal{P}^{\perp\text{m}}$ with \mathcal{P}^{mod} and the remaining orthogonal complement $\mathcal{P}^{\perp\bar{\text{m}}}$, containing the part of the disturbance that the Kalman filter does not seek to estimate. This would result in a phase decomposition in the form:

$$\phi \triangleq \begin{pmatrix} \phi^{\parallel} \\ \phi^{\perp\text{m}} \\ \phi^{\perp\bar{\text{m}}} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

The corresponding decomposition of the rejection transfer function would thus become a 3-by-3 block-triangular structure, namely:

$$T^{\text{rej}}(z) = \begin{pmatrix} I + z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\parallel} & z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\perp\text{m}} & z^{-2}N^{\parallel}G(z)D^{\perp\bar{\text{m}}} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}. \quad (38)$$

For the sake of simplicity, this more detailed decomposition of phases will not be used in the rest of this paper. Nevertheless, it should be noted that all the expressions and results given below can be readily extended to this three-subspaces formulation.

D. Explicit expressions for the control-dependent and fitting errors

The Hermitian PSD matrix $S_{\phi}(z)$ can also be decomposed according to Eq. (24), yielding:

$$S_{\phi}(z) \triangleq \begin{pmatrix} S_{\phi}^{\parallel}(z) & S_{\phi}^{\perp\text{m}}(z) \\ S_{\phi}^{\perp\text{m}}(z) & S_{\phi}^{\perp\bar{\text{m}}}(z) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Because of the special structure of $T^{\text{rej}}(z)$ in Eq. (32), Eq. (11) becomes:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{rej}}^2 &= \sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2 + \sigma_{\text{fitting}}^2 = \\ &\text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[T^{\text{rej}\parallel}(e^{i\omega}) S_{\phi}^{\parallel}(e^{i\omega}) T^{\text{rej}\parallel}(e^{i\omega})^* \right. \\ &\quad \left. + T^{\text{rej}\perp}(e^{i\omega}) S_{\phi}^{\perp\text{m}}(e^{i\omega}) T^{\text{rej}\perp}(e^{i\omega})^* + \right. \\ &\quad \left. 2\text{Re} \left(T^{\text{rej}\parallel}(e^{i\omega}) S_{\phi}^{\perp\text{m}}(e^{i\omega}) T^{\text{rej}\perp}(e^{i\omega})^* \right) + S_{\phi}^{\perp\bar{\text{m}}}(e^{i\omega}) \right] d\omega. \quad (40) \end{aligned}$$

In order to identify which parts of this expression correspond respectively to σ_{temp}^2 , σ_{alias}^2 and $\sigma_{\text{fitting}}^2$, we need to go back to the definition of each of these terms. To begin with, the temporal error σ_{temp}^2 is defined as the impact of the total loop delay on the system closed-loop performance, under the assumption that the disturbance could be perfectly compensated in the absence

of loop delay. This means that ϕ is reduced to its component ϕ^{\parallel} lying in the DM space \mathcal{P}^{\parallel} , so that:

$$\sigma_{\text{temp}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} T^{\text{rej}\parallel} (e^{i\omega}) S_{\phi}^{\parallel} (e^{i\omega}) T^{\text{rej}\parallel} (e^{i\omega})^* d\omega. \quad (41)$$

Likewise, the fitting error is the impact on performance of the part of the phase the DM is not able to produce. As the non-compensated phases lie in \mathcal{P}^{\perp} , it corresponds to the variance of the component ϕ^{\perp} lying in \mathcal{P}^{\perp} , which are left intact by the rejection transfer function, and thus corresponds to the last term in Eq. (40):

$$\sigma_{\text{fitting}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S_{\phi}^{\perp} (e^{i\omega}) d\omega. \quad (42)$$

Therefore, the remaining terms in Eq. (40) represent the aliasing error:

$$\sigma_{\text{alias}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[T^{\text{rej}\perp} (e^{i\omega}) S_{\phi}^{\perp} (e^{i\omega}) T^{\text{rej}\perp} (e^{i\omega})^* + 2\text{Re} \left(T^{\parallel} (e^{i\omega}) S_{\phi}^{\perp\parallel} (e^{i\omega}) T^{\text{rej}\perp} (e^{i\omega})^* \right) \right] d\omega. \quad (43)$$

Although it may seem counterintuitive, the expression of σ_{alias}^2 is in accordance with the physical definition of WFS aliasing. Indeed, the two terms in Eq. (43) represent the propagation of the aliasing error through the AO loop. Thus, in the absence of statistical correlation between ϕ^{\parallel} and ϕ^{\perp} (which would be the case for a diagonal phase PSD), the impact of aliasing would be reduced to the direct term:

$$\text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} T^{\text{rej}\perp} (e^{i\omega}) S_{\phi}^{\perp} (e^{i\omega}) T^{\text{rej}\perp} (e^{i\omega})^* d\omega. \quad (44)$$

However, when these two parts of the disturbance are correlated, the cross-over term

$$\text{trace} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{Re} \left(T^{\parallel} (e^{i\omega}) S_{\phi}^{\perp\parallel} (e^{i\omega}) T^{\text{rej}\perp} (e^{i\omega})^* \right) d\omega \quad (45)$$

expresses the impact of these correlations on the aliasing error variance.

The remaining control-dependent term is the noise propagation error $\sigma_{\text{noise,prop}}^2$. From Eq. (10) and Eq. (35), we get:

$$\sigma_{\text{noise,prop}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} T^{\text{noise}\parallel} (e^{i\omega}) \Sigma_w T^{\text{noise}\parallel} (e^{i\omega})^* d\omega, \quad (46)$$

While these expressions provide valuable theoretical insight, using them to directly evaluate σ_{temp}^2 , σ_{alias}^2 , $\sigma_{\text{noise,prop}}^2$ and $\sigma_{\text{fitting}}^2$ is not straightforward, because they require computing $T^{\text{rej}\parallel}$ and $T^{\text{rej}\perp}$. This in turn requires breaking down the WFS matrix D into D^{\parallel} and D^{\perp} . A convenient way to circumvent this difficulty is to use the projectors in Eq. (25) and Eq. (26), which (since P^{\parallel} and P^{\perp} are Hermitian) leads to:

$$\sigma_{\text{temp}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P^{\parallel} T^{\text{rej}} (e^{i\omega}) P^{\parallel} S_{\phi} (e^{i\omega}) P^{\parallel} T^{\text{rej}} (e^{i\omega})^* P^{\parallel} d\omega, \quad (47)$$

$$\sigma_{\text{fitting}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P^{\perp} T^{\text{rej}} (e^{i\omega}) P^{\perp} S_{\phi} (e^{i\omega}) P^{\perp} T^{\text{rej}} (e^{i\omega})^* P^{\perp} d\omega, \quad (48)$$

$$\sigma_{\text{alias}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[P^{\parallel} T^{\text{rej}} (e^{i\omega}) P^{\perp} S_{\phi} (e^{i\omega}) P^{\perp} T^{\text{rej}} (e^{i\omega})^* P^{\parallel} + 2\text{Re} \left(P^{\parallel} T^{\text{rej}} (e^{i\omega}) P^{\parallel} S_{\phi} (e^{i\omega}) P^{\perp} T^{\text{rej}} (e^{i\omega})^* P^{\parallel} \right) \right] d\omega, \quad (49)$$

$$\sigma_{\text{noise,prop}}^2 = \text{trace} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P^{\parallel} T^{\text{noise}} (e^{i\omega}) P^{\parallel} \Sigma_w P^{\parallel} T^{\text{noise}} (e^{i\omega})^* P^{\parallel} d\omega. \quad (50)$$

r_0	10 cm @ 0.5 μm
V_{wind}	10 m/s
D_{tel}	8 m
F_s	500 Hz
SH WFS	14x14
σ_w^2	0.2 rad ² @ 0.5 μm
DM	15x15
c_a	30 %

Table 1. SCAO simulation conditions. The turbulence is modeled with a single layer in frozen flow. The conditions are inspired by a NAOS/VLT like system.

These projector-based expressions are used for the simulations presented in the next section.

4. ERROR BUDGET ASSESSMENT FOR CONTROLLER DESIGN

In order to compute $\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2$ (the residual phase variance without NCPA), we use the expression derived from Parseval's theorem in Eq. (9). As in practice PSDs can be either computed from models over a finite frequency-domain grid or evaluated on such a grid from a sample time-domain trajectory using a discrete-time Fourier transform, the integral in Eq. (9) should be approximated by a Riemann sum in the form:

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 \simeq \frac{1}{n_s} \text{trace} \sum_{k=0}^{n_s-1} T^{\text{rej}} (e^{2i\pi k/n_s}) S_{\phi} (e^{2i\pi k/n_s}) T^{\text{rej}} (e^{2i\pi k/n_s})^* + T^{\text{noise}} (e^{2i\pi k/n_s}) \Sigma_w T^{\text{noise}} (e^{2i\pi k/n_s})^*, \quad (51)$$

where n_s is the number of frequency-domain samples, so that the index k corresponds to the physical frequency $f_k = kF_s/n_s$. As noted above, the disturbance PSD S_{ϕ} can be evaluated from theoretical expressions at the normalized pulsations $\{v_k\}_{0 \leq k < n_s}$, mainly for performance evaluations at a system design stage. If one can access the disturbance phase trajectory in simulation, we suggest to use a periodogram computed from a disturbance trajectory with n_s points in order to evaluate S_{ϕ} , with a tapering apodization window to limit edge effects, leading to the estimated disturbance PSD:

$$\check{S}_{\phi} \triangleq \widetilde{H(\phi)} \widetilde{H(\phi)}^*, \quad (52)$$

where $\widetilde{\cdot}$ is the Fourier transform of ϕ and H the apodization function. Note that using an apodization window requires to account for the inherent loss in energy (which remains low with a tapering window) in the final variance assessment.

A. Example of a VLT-type SCAO system: simulation conditions

As an illustration, we present here an error budget computation for a NAOS-like system mounted on the VLT at *Cerro Paranal*, Chile. The entire simulation is performed with MATLAB[®], using its Control Systems Toolbox. We simulate a single layer frozen flow turbulence, with Fried parameter $r_0 = 10$ cm

at the measurement wavelength ($0.5 \mu\text{m}$) and wind velocity $V_{\text{wind}} = 10 \text{ m/s}$. These are averaged values for the Paranal site [35]. The phase is projected on a Zernike basis of $n_\phi = 860$ modes (radial order 40). We simulate a telescope with a diameter aperture $D_{\text{tel}} = 8$ meters. We consider a Shack-Hartmann WFS based on NAOS high-flux specifications, with 14×14 sub-apertures, affected by an additive white gaussian noise of variance $\sigma_w^2 = 0.2 \text{ rad}^2$ per sub-aperture. The DM is simulated with a square grid of 15×15 actuators, located at the corners of the WFS sub-apertures. The influence functions are characterized by a coupling factor of 30%. The AO system is running at sampling frequency $F_s = 500 \text{ Hz}$, with a total loop delay of two frames. Table 1 summarizes all the simulation conditions.

The error budget is used to compare a constant gain integrator and several LQG controllers featuring different n_{mod} values, in order to evaluate quantitatively the impact on performance of the number of Zernike modes reconstructed by the Kalman filter (denoted as n_{mod}). We test several values of n_{mod} ranging from 209 (up to radial order 19) to 450 (up to radial order 30). The integrator has been tuned to an optimal value of 0.7 in these simulation conditions. For each controller, the simulation uses the same disturbance phase trajectory, from which we evaluate $\tilde{\mathcal{X}}_\phi$ and the error budget thanks to Eq. (47)-(50). Fig. 2 compares the detailed error budgets of all the considered controllers.

B. Results analysis

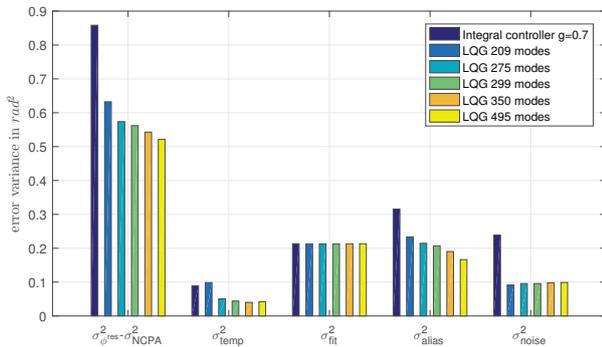


Fig. 2. Quantitative comparison of different controllers error budgets. All error budgets are evaluated using the periodogram of the disturbance phase.

As expected, the control-free fitting error is identical for all the controllers. As a comparison, the fitting error level in these simulations is in line with the approximated expressions in [27, 36], with for [36]:

$$\sigma_{\text{fitting}}^2 = 0.15 \left(\frac{d_{\text{act}}}{r_0} \right)^{5/3} \approx 0.22 \text{ rad}^2 \text{ (H-band)}, \quad (53)$$

where d_{act} is the DM actuators pitch. Furthermore, the LQG controllers appear to perform significantly better than the integral controller, with a dramatic improvement for the three control-dependent error terms σ_{temp}^2 , σ_{alias}^2 and $\sigma_{\text{noise,prop}}^2$, which is in good agreement with previous studies [28, 37]. In particular, the Kalman filter negotiates an excellent trade-off between noise propagation and the others terms. (Note that for an AO loop

with high SNR, this optimal trade-off can sometimes result in a level of noise propagation higher than for an integrator [10].)

The LQG209 case exhibits some specificities. Indeed, Fig. 2 shows that its temporal error is a little higher than for the integrator, while its noise propagation is a little lower than for the other LQG controllers. These specificities reflect the fact that this LQG controller uses a truncated Zernike basis which does not contain enough modes to accurately represent the correction phases generated by the DM and to accurately project them onto the DM. This induces a high temporal error, due to the uncorrected modes that lie in \mathcal{P}^\perp .

The comparison between the other LQG controllers shows globally three trends as the number of estimated Zernike modes increases:

- the temporal error variance is slowly decreasing,
- the aliasing error is decreasing significantly, along with the global residual variance,
- the noise propagation error variance is slowly increasing.

The first two trends reflect in a direct manner the fact that when the number of estimated modes increases, the Kalman filter generates a more accurate prediction of the components of the disturbance lying in and outside the DM space (*i.e.*, ϕ^\parallel and $\phi^{\perp\text{m}}$): a better prediction of ϕ^\parallel translates into a smaller temporal error, whereas a better prediction of $\phi^{\perp\text{m}}$ enables the controller to mitigate aliasing better. In addition, as the size of the model increases, the DM space is better represented, so that modes with higher spatial frequencies (which are predicted better) are also corrected more accurately.

To explain the increase in noise propagation, it should be noted that when more modes are estimated using the same set of measurements, the uncertainty affecting each individual mode tends to increase. On the other hand, the energy of the high-order modes is marginal, so that the global noise propagation variance does not increase significantly, while the temporal error is not significantly decreasing. Therefore, the sum of these two error terms tends to remain roughly the same. However, the number of modes in the modeling space has a significant impact both on the global residual phase and the aliasing error. Indeed, the aliasing error drops dramatically as the number of modes increases. This ability of the LQG regulator to significantly mitigate the effects of aliasing is due to the fact the Kalman filter uses statistical priors on the spatio-temporal evolution of the disturbance to untangle the contribution of the spatially aliased modes to measurements.

In an nutshell, these simulation trends confirm insights and hypothesis on the behavior of the LQG AO controllers – particularly their ability to partially ‘de-alias’ WFS measurements. Furthermore, results in Fig. 2 suggest that as soon as the modeling space used by the Kalman filter models the DM influence functions with sufficient accuracy, the temporal and noise propagation errors should remain nearly constant as the model size increases.

5. ERROR BUDGET ASSESSMENT FROM WFS MEASUREMENTS

The characterization of the performance of an operating AO system requires to use on-sky AO telemetry (WFS measurements) instead of the disturbance phase PSD or simulated trajectories. The first part of this section is thus dedicated to construct a

procedure to estimate the disturbance PSD when it cannot be computed from either theoretical considerations or realistic simulations. In the second part of the section, this procedure is applied to the same example than the one presented in Section 4, using WFS data instead of the real disturbance trajectory.

It should be emphasized that estimating the whole temporal inter-spectrum of a multivariable stochastic process from a noisy measurements is a challenging problem. A comprehensive treatment of this issue is thus clearly outside the scope of this paper, and the ad-hoc PSD estimation procedure proposed below follows a standard non-parametric approach using periodograms.

A. PSD estimation procedure

We propose to estimate the disturbance phase PSD in two steps. In the context of this article, this estimation is realized using a Zernike modes basis, but the method can be adapted to any phase representation scheme. We first reconstruct the phase from WFS data thanks to a modified Maximum A Posteriori (MAP) reconstructor of phase modes up to a chosen radial order \bar{n} [38]:

$$R_\phi = \Sigma_\phi D^T (D \Sigma_\phi D^T + \alpha \Sigma_w)^{-1} \quad (54)$$

where Σ_ϕ is the disturbance phase spatial covariance matrix, with Kolmogorov statistics given for a Zernike basis by Noll's formulas [39], α is a parameter depending on the signal-to-noise ratio [24], with $\alpha = 1$ for the standard MAP reconstructor expression. In practice, α is optimized in order to keep the energy in $\hat{\phi}$ as close as possible to Σ_ϕ . Note that even if von Kármán statistics are more relevant, adding the outer scale information in Σ_ϕ does not lead to a better accuracy of the PSD estimation as the signal-to-noise ratio of the low order modes is very high, so that priors do not dominate the MAP estimation for these modes.

The computation of Σ_ϕ is based on a prior value for the Fried parameter. It is here estimated with a classical least-square technique such as what has been done for NAOS [35]. As a first step, we propose to estimate $S_{\hat{\phi}}$, the first part of S_ϕ (*i.e.*, modes up to the radial order \bar{n}), thanks to a periodogram of the MAP estimates. In order to insure a good estimation accuracy, \bar{n} should be taken lower than the equivalent maximum radial order the DM is able to generate [17]. The estimated PSD \hat{S}_ϕ is thus composed of two parts: one is $S_{\hat{\phi}}$; the other part corresponds to radial orders higher than \bar{n} . The estimated PSD \hat{S}_ϕ is a full PSD matrix, and gathers most of the disturbance energy. Without any reliable information on the higher modes and their cross-spectrum values, a sensible hypothesis is to assume the PSD of these modes to be diagonal. We thus need, as a second step, to extrapolate $S_{\hat{\phi}}$ from its last radial order values. We compute the spectrum averaged on the last radial order \bar{n} :

$$\bar{S}_{\bar{n}} = \frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{m=i}^{i+n+1} S_{\hat{\phi}}(\bar{n}, m), \quad (55)$$

where $m = 1, \dots, i + n + 1$ represents the azimuthal order of the Zernike radial order \bar{n} . The averaged spectrum $\bar{S}_{\bar{n}}$ is then spread over the diagonal of S_ϕ for radial orders $n' \geq \bar{n} + 1$, using both the Taylor and Kolmogorov hypothesis. As for the Taylor hypothesis, the spectrum values for each mode of radial order $n' \geq \bar{n} + 1$ are shifted in frequency with respect to $\bar{S}_{\bar{n}}$, according to [17]:

$$f_c(n') = \frac{n'}{\bar{n}} f_c(\bar{n}), \quad (56)$$

where $f_c(n)$ is the cutoff frequency of radial order n . According to the Kolmogorov hypothesis, the whole spectrum of all the modes of radial order n' is multiplied by a factor insuring that the variances of the extrapolated modes respect the Zernike modes variance scaling of Noll [39]:

$$\sigma_{\hat{\phi}}^2(n) \propto (n + 1)^{-\frac{11}{3}}, \quad (57)$$

where n represents the Zernike mode radial order. In a nutshell, the matrix structure of the estimated PSD \hat{S}_ϕ is thus:

$$\hat{S}_\phi = \begin{pmatrix} S_{\hat{\phi}} & & 0 \\ & \hat{S}_{\bar{n}+1} & 0 \\ 0 & & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (58)$$

where $S_{\hat{\phi}}$ is the full PSD computed from the MAP wavefront reconstruction, and $\{\hat{S}_n\}_{n \geq \bar{n}+1}$ are the terms extrapolated from $\bar{S}_{\bar{n}}$. Figure 3 shows that this method is particularly accurate at keeping the modal variances of the estimated PSD close to the real PSD modal variances.

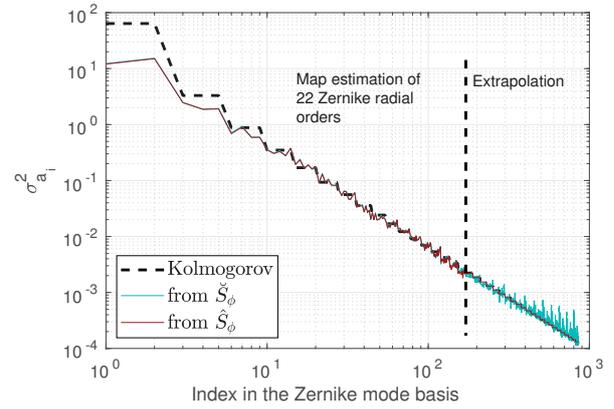


Fig. 3. Zernike modes variance, computed from Eq. (51) for \hat{S}_ϕ , the PSD estimated from known simulated phase samples (blue curve) and for \hat{S}_ϕ , the PSD estimated from WFS data (red curve). The theoretical Kolmogorov variances are represented by the black dashed curve.

Note that this estimation method is developed assuming an atmospheric turbulent phase. However, embedding more information in the MAP priors about other kind of disturbances (vibrations, windshake) could be relevant, mainly if the signal-to-noise ratio of the modes affected by these disturbances is low. However, if this signal-to-noise ratio is high, adding more prior information may not bring significant improvement, as the MAP reconstructor is then dominated by the data (just like for the outer scale).

B. Estimation of $\sigma_{\phi_{res}}^2$

Estimating a disturbance PSD from WFS data adds the propagation of the measurement noise w through the reconstruction process [40, 41]. Indeed, the reconstructor in Eq. (54) is based on the WFS measurement model:

$$y = D\phi + w, \quad (59)$$

where w is a white centered Gaussian noise. Thus, after reconstruction, the estimated phase $\hat{\phi}$ is:

$$\hat{\phi} = R_{\phi} D \phi + R_{\phi} \tau w, \quad (60)$$

and the MAP block of the estimated PSD can be written:

$$\hat{S}_{\phi} = R_{\phi} D S_{\phi} D^T R_{\phi}^T + R_{\phi} \Sigma_w R_{\phi}^T. \quad (61)$$

This additional term $R_{\phi} \Sigma_w R_{\phi}^T$ has been shown to follow a simple scaling law in a Zernike-based phase representation [41]:

$$\forall n \in \llbracket 1, \bar{n} \rrbracket, \quad \sigma_w^2(n) \propto (n+1)^{-2}. \quad (62)$$

Therefore, the residual phase variance has to be debiased from this impact of the noise, which is propagated through the rejection transfer function [10, 28]. This is achieved by subtracting

$$b_{\text{rec}} = \text{trace} \left(R_{\phi} \Sigma_w R_{\phi}^T \times \frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s}) T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s})^* \right) \quad (63)$$

from the residual phase variance evaluated thanks to \hat{S}_{ϕ} , for all the modes estimated by the MAP.

The noise propagation is different for extrapolated modes. Indeed, the noise level for these modes follows the same scaling law than Noll's variances, due to the extrapolation process. This propagated noise variance on each extrapolated mode, denoted by $\sigma_w^2(n)$, can thus be evaluated according to:

$$\forall n \geq \bar{n} + 1, \quad \sigma_w^2(n) = \left(\frac{n+1}{\bar{n}+1} \right)^{-11/3} \bar{\sigma}_w^2, \quad (64)$$

where $\bar{\sigma}_w^2$ is the propagated noise variance of the last radial order \bar{n} of the MAP-based estimation, averaged on the azimuthal orders. The bias introduced for the extrapolated modes is therefore obtained as

$$b_{\text{extra}} = \text{trace} \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\bar{n}+2}{\bar{n}+1} \right)^{-11/3} \bar{\sigma}_w^2 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \times \frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s}) T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s})^* \right), \quad (65)$$

and needs also to be removed from the residual phase variance computed from WFS data. Finally, the estimated residual phase variance is thus evaluated with:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\phi, \text{res}}^2 = & \underbrace{\text{trace} \left(\frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s}) \hat{S}_{\phi}(e^{2i\pi k/n_s}) T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s})^* \right)}_{\sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{fitting}}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2 + b_{\text{rec}} + b_{\text{extra}}} \\ & + \underbrace{\text{trace} \left(\frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} T^{\text{noise}}(e^{2i\pi k/n_s}) \Sigma_w T^{\text{noise}}(e^{2i\pi k/n_s})^* \right)}_{\sigma_{\text{noise, prop}}^2} \\ & - \underbrace{\text{trace} \left(\frac{1}{n_s} \sum_{k=0}^{n_s-1} T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s}) S_w T^{\text{rej}}(e^{2i\pi k/n_s})^* \right)}_{b_{\text{rec}} + b_{\text{extra}}} \end{aligned} \quad (66)$$

where

$$S_w = \begin{pmatrix} R_{\phi} \Sigma_w R_{\phi}^T & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \left(\frac{\bar{n}+2}{\bar{n}+1} \right)^{-11/3} \bar{\sigma}_w^2 & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Figure 4 illustrates these scaling regimes for the noise level. The black curve corresponds to the noise variance estimated using Eq. (63). The noise variance propagated before \bar{n} according to the decreasing law in Eq. (62) (red curve) is fully consistent with the estimation. We can note that the noise level of the last estimated modes (radial order \bar{n}) is a little high (the values above 1 have much more impact, as it is a log scale). This bias is due to correlations between modes induced by the estimation process. Therefore, the noise variance extrapolated with Noll's law (blue curve) starts with a slightly too high value on the first extrapolated mode, which is well accounted for in Eq. (67).

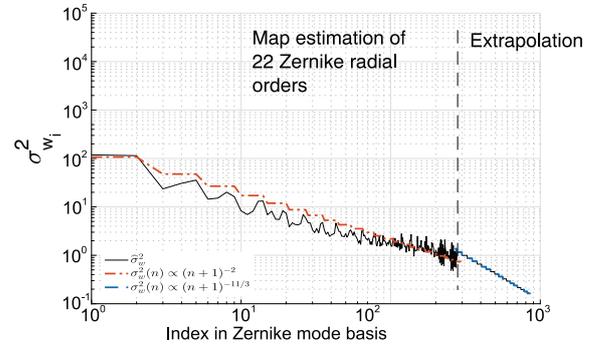


Fig. 4. Estimated noise level on the estimated disturbance phase PSD (black curve) and the fit for the two expected scaling laws: Rigaut-Gendron before extrapolation (red curve) and Noll for the extrapolated modes (blue curve).

C. Application to the VLT-type SCAO simulation

We use the same NAOS-like simulation than in Section 4 to evaluate the error budgets with this estimation procedure. First, we evaluate the error budget of the integral controller (with gain $g = 0.7$) from the WFS measurements, and compare it to the values obtained using the simulated disturbance phase trajectory (Fig. 5). The results for the two techniques are very close – within one percent of difference for each error term. The same analysis is then performed for the LQG controllers. Fig. 6 shows the results for LQG209. The global residual variance, the aliasing and the noise propagation errors are similar to expected values, while some difference can be observed for fitting and temporal errors.

The differences between the error budgets computed with S_{ϕ} and $S_{\hat{\phi}}$ are only due to the estimation of the cross-correlations. Indeed, we performed an error budget evaluation for a PSD estimated from the real phase trajectory, but approximated by its diagonal. Neglecting the cross correlations leads to overestimate the global residual phase for more than forty percents for LQG209. This is so because the rejection transfer function contains many coupling terms. In a case where the controller is decoupled (for example with an integrator), the RTF is close to

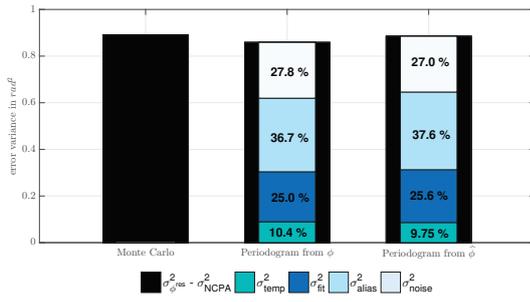


Fig. 5. Error budget assessment for an integral controller ($g = 0.7$). The Monte-Carlo value corresponds to a control loop simulation achieved with 15,000 samples.

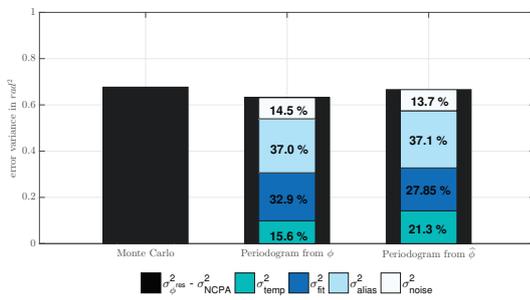


Fig. 6. Error budget assessment for an LQG controller, embedding an AR2 phase model based on 209 Zernike modes.

diagonal, so that the diagonal approximation is valid (difference of less than one percentage point). On the contrary, because of non-diagonal priors provided in the model, the Kalman filter uses all the cross-correlations to compute the phase estimate, so that the rejection transfer function involves the whole inter-spectrum in the computation of the error budget terms. In the case of a diagonal or nearly diagonal PSD, the estimation from WFS data would be simpler.

The PSD estimation method using WFS measurements may thus not achieve sufficient accuracy to evaluate error budget items for controllers which make use of phase correlation information on very high order modes. The PSD estimation problem should then be addressed in more thoroughly. However, the PSD estimation technique presented here is very easy to implement and efficient for controllers neglecting these correlations, such as integrators. For mixed controllers featuring an integrator for high-order modes decoupled from a high-performance low order controller, the value of \bar{n} can be taken significantly lower than the number of measurements available for phase reconstruction, which is likely to ensure a better accuracy of the method.

6. CONCLUSION AND DISCUSSION

We have proposed in this article a complete mathematical formalism for the error budget assessment of any SCAO system. This formalism applies to any system design, with matrices D and N modeling respectively the WFS and the DM. The formalism is valid for any linear controller, and thus enables to

compare control-dependent error budgets for different control solutions. Moreover, it can be used in two different phase contexts: for SCAO system design, when the perturbation phase PSD can be derived from theoretical considerations or computed from simulated trajectories, but also for performance analysis of existing SCAO systems, using WFS measurements and some phase reconstruction and PSD estimation technique. Based on simulations conducted in a realistic SCAO configuration, we pointed out the impact of PSD estimation error in the error budget evaluation when only WFS measurements are available. We showed that the diagonal approximation of the disturbance PSD had no impact for controllers neglecting the interactions between the components of the disturbance, like the integrator.

However, the error budget evaluation of controllers that rely on these interactions is affected by diagonal PSD approximations and a particular attention has to be given to the estimation of extra-diagonal components of the PSD. For controllers using a large number of modes (actually significantly larger than the number of WFS measurements, such as LQG495), the PSD estimation technique in Section 5 could be improved by using the theoretical inter-spectrum in order to fill the extrapolated part of the PSD. Also, phases reconstructed from WFS measurements, and thus their PSDs, are affected by a bias due to aliasing when a classical least-squares reconstruction is used, as shown in [42]. This bias appeared to be negligible when the disturbance PSD is estimated from a MAP reconstruction, so that it can be neglected in the error budget evaluation.

An increasingly popular AO control structure is to combine a high-performance controller for a limited number of low-order modes, decoupled from a simpler one (integrator or MAP reconstructor) for the remaining high-order modes. For such decoupled controllers, PSD estimation from WFS measurements could be well adapted, as the integral controller performance assessment tolerates perfectly the diagonal approximation made for the PSD extrapolation, while the low order high-performance controller benefits directly for the phase inter-spectrum estimation.

The computational complexity issue for such an algorithm should also be dealt with in order to assess the performance of ELT-size systems. Indeed, the computation complexity of some steps of the algorithm (frequency-wise transfer functions evaluation, error budgets evaluations using discrete Parserval's formulas Eq. (51)) is roughly a $\mathcal{O}(n_\nu n_\phi^3)$ (where n_ν and n_ϕ denote respectively the number of frequency samples and the dimension of the phase representation space) as matrix multiplication and inversion are similar issues in term of complexity. In the examples presented here, $n_\nu = 5000$ and $n_\phi = 860$, leading to a complexity $\propto 3.2 \cdot 10^{12}$ in terms of floating multiplies. Increasing the diameter of the telescope by a factor of 4 (for an ELT-type simulation) results in multiplying n_ϕ by a factor 16, which is increasing the number of computations in the algorithm by a factor of $16^3 = 4096$.

A first route for improvement is obviously a better optimization of the code (for which simplicity has been preferred at the expense of efficiency) and parallelization of frequency-domain calculations. Due to the complete independence of every frequency evaluation of the transfer functions, their evaluations can be parallelized over the frequency range. The same parallelization can be implemented for the computation of the error budgets, as each step of the sum in Eq. (51) is independent. This results in a reduction of computing time by a factor n_{core} at maximum, where n_{core} is the number of processors dedicated to the

parallelization of frequency-domain computations.

Another way to reduce computational complexity is to evaluate the control-dependent error terms directly in the DM space \mathcal{P}^{\parallel} , which is of significantly lower dimension. More generally, for ELT-class problems the choice of the phase representation space will clearly be a critical issue. Indeed, the entire formalism presented in this paper is intended to take into account interactions between the phase components lying in and outside of the DM space. However, these interactions are directly depending on the chosen phase representation basis. Thus, choosing a zonal phase representation (*i.e.* a spatial phase sampling) will result in a full PSD matrix S_{ϕ} . In the case of diagonal or nearly diagonal PSD, the implementation of the error budget method should account for this particular structure.

REFERENCES

1. T. Fusco, N. Thatte, S. Meimon, M. Tecza, F. Clarke, and M. Swinbank, "Adaptive optics systems for HARMONI: a visible and near-infrared integral field spectrograph for the E-ELT," *Proc. SPIE* **7736**, 773633–773633–12 (2010).
2. Y. Clénet, P. Bernardi, F. Chapron, E. Gendron, G. Rousset, Z. Hubert, R. Davies, M. Thiel, N. Tromp, and R. Genzel, "SAMI: the SCAO module for the E-ELT adaptive optics imaging camera MICADO," *Adaptive Optics Systems II, SPIE Proceedings* **7736** (2010).
3. E. Diolaiti, J.-M. Conan, I. Foppiani, M. Lombini, E. Marchetti, C. Petit, C. Robert, L. Schreiber, A. Baruffolo, M. Bellazzini *et al.*, "Towards the phase a review of MAORY, the multi-conjugate adaptive optics module for the E-ELT," in "AO4ELT," (2010).
4. R. Stuik, M. Feldt, S. Hippler, T. Bertram, S. Scheithauer, A. Obereder, D. Saxenhuber, B. R. Brandl, M. Kenworthy, R. Jager, and L. Vanema, "Designing the METIS SCAO and LTAO systems," in "Adaptive Optics Systems V," (SPIE Astronomical telescopes and instrumentation, 2016).
5. G. Sivo, C. Kulcsár, J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, E. Gendron, A. Basden, F. Vidal, T. Morris, S. Meimon, C. Petit, D. Gratadour, O. Martin, Z. Hubert, A. Sevin, D. Perret, F. Chemla, G. Rousset, N. Dipper, G. Talbot, E. Younger, R. Myers, D. Henry, S. Todd, D. Atkinson, C. Dickson, and A. Longmore, "First on-sky SCAO validation of full LQG control with vibration mitigation on the CANARY pathfinder," *Optics Express* **22**, 23565–23591 (2014).
6. G. Sivo, "Validation ciel d'une commande haute performance en optique adaptative classique et multi-objet sur le démonstrateur CANARY," Ph.D. thesis, Université Paris 13 (2013).
7. C. Petit, J.-F. Sauvage, T. Fusco, A. Sevin, M. Suarez, A. Costille, A. Vigan, C. Soenke, D. Perret, S. Rochat *et al.*, "Sphere eXtreme AO control scheme: final performance assessment and on sky validation of the first auto-tuned LQG based operational system," in "SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation," (International Society for Optics and Photonics, 2014), p. 91480O.
8. L. A. Poyneer, D. W. Palmer, B. Macintosh, D. Savransky, N. Sadakuni, S. Thomas, J.-P. Véran, K. B. Follette, A. Z. Greenbaum, S. M. Ammons, V. P. Bailey, B. Bauman, A. Cardwell, D. Dillon, D. Gavel, M. Hartung, P. Hibon, M. D. Perrin, F. T. Rantakyro, A. Sivaramkrishnan, and J. J. Wang, "Performance of the Gemini Planet Imager's adaptive optics system," *Appl. Opt.* **55**, 323–340 (2016).
9. G. Sivo, R. Juvénal, C. Kulcsár, V. Garrel, P. Gigoux, H.-F. Raynaud, E. Marin, J.-M. Conan, C. Petit, W. Rambold, V. Montes, C. Moreno, J. Donahue, E. Carrasco, M. van Dam, B. Neichel, and C. Trujillo, "Real-time implementation of an LQG tip-tilt controller for regular science observation on gems," in "Adaptive Optics Systems V," (SPIE Astronomical telescopes and instrumentation, 2016).
10. R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, J.-M. Conan, C. Petit, L. Leboulleux, G. Sivo, and V. Garrel, "Tip-tilt modeling and control for GeMS: a performance comparison of identification techniques," in "AO4ELT4," (2015).
11. L. Leboulleux, G. Sivo, R. Juvénal, C. Kulcsár, V. Garrel, J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, C. Petit, W. Rambold, E. Marin, and V. Montes, "Vibration analysis on gems tip-tilt data and performance evaluation using an LQG controller," in "AO4ELT4," (2015).
12. N. Doelman, R. Fraanje, and R. Den Breeje, "Optimal control of tip-tilt modes on-sky adaptive optics demonstration," in "AO4ELT2," (2011).
13. O. Guyon, "Limits of adaptive optics for high-contrast imaging," *The Astrophysical Journal* **629**, 592 (2005).
14. T. Fusco, G. Rousset, J.-F. Sauvage, C. Petit, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, M. Nicolle, M. Kasper, P. Baudoz, and P. Puget, "High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets: Application to the SPHERE instrument," *Optics Express* **14** (2006).
15. B. Macintosh, J. Graham, D. Palmer, R. Doyon, D. Gavel, J. Larkin, B. Oppenheimer, L. Saddlemyer, J. K. Wallace, B. Bauman *et al.*, "Adaptive optics for direct detection of extrasolar planets: the Gemini Planet Imager," *Comptes Rendus Physique* **8**, 365–373 (2007).
16. R. H. Hudgin, "Wave-front reconstruction for compensated imaging," *JOSA* **67**, 375–378 (1977).

17. J.-M. Conan, G. Rousset, and P.-Y. Madec, "Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence," *JOSA A* **12**, 1559–1570 (1995).
18. F. Rigaut, J.-P. Véran, and O. Lai, "Analytical model for Shack-Hartmann-based adaptive optics systems," *Adaptive Optical System Technology*, SPIE Proceedings **3353** (1998).
19. O. Martin, "Démonstration sur le ciel de l'optique adaptative multi-objet avec étoiles lasers par CANARY," Ph.D. thesis, Université Paris VII (2013).
20. F. Vidal, E. Gendron, G. Rousset, T. Morris, A. Basden, R. Myers, M. Brangier, F. Chemla, N. Dipper, D. Gratadour, D. Henry, Z. Hubert, A. Longmore, O. Martin, G. Talbot, and E. Younger, "Analysis of on-sky MOAO performance of CANARY using natural guide stars," *Astronomy & Astrophysics* **569** (2014).
21. F. Quirós-Pacheco, J.-M. Conan, and C. Petit, "General aliasing and its implications in modal gain optimization for multi-conjugated adaptive optics," *JOSA A* **27**, A182–A200 (2010).
22. F. Ferreira, E. Gendron, G. Rousset, and D. Gratadour, "Deriving comprehensive error breakdown for wide field adaptive optics systems using end-to-end simulations," in "Proc. SPIE 9909, Adaptive Optics Systems V" (2016).
23. B. L. Ellerbroek, "Linear systems modeling of adaptive optics in the spatial-frequency domain," *JOSA A* **22**, 310–322 (2005).
24. M. A. van Dam, D. Le Mignant, and B. A. Macintosh, "Performance of the Keck Observatory adaptive-optics system," *Applied Optics* **43** (2004).
25. M. A. van Dam, A. H. Bouchez, D. Le Mignant, E. M. Johansson, P. L. Wizinowich, R. D. Campbell, J. C. Y. Chin, S. K. Hartman, R. E. Lafon, P. J. Stomsky, and D. M. Summers, "The W. M. Keck Observatory Laser Guide Star Adaptive Optics System: Performance Characterization," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **118** (2006).
26. G. Rousset, F. Lacombe, P. Puget, N. N. Hubin, E. Gendron, T. Fusco, R. Arsenault, J. Charton, P. Feautrier, P. Gigan *et al.*, "NAOS, the first ao system of the VLT: on-sky performance," in "Astronomical Telescopes and Instrumentation," (International Society for Optics and Photonics, 2003), pp. 140–149.
27. F. Roddier, *Adaptive optics in astronomy* (Cambridge university press, 1999).
28. R. Juvénal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, J.-M. Conan, and G. Sivo, "Performance assessment for adaptive optics controllers: temporal and noise propagation errors," in "AO4ELT4," (2015).
29. C. Petit, "Étude de la commande optimale en OA et OAMC, validation numérique et expérimentale," Ph.D. thesis, Paris 13 (2006).
30. D. P. Looze, "Minimum variance control structure for adaptive optics systems," *JOSA A* **23**, 603–612 (2006).
31. C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, and J.-M. Conan, "Minimum variance prediction and control for adaptive optics," *Automatica* pp. 1939–1954 (2012).
32. B. Neichel, F. Rigaut, F. Vidal, M.-A. van Dam, V. Garrel, E. Rodrigo Carrasco, P. Pessev, C. Winge, M. Boccas, C. d'Orgeville, G. Arriagada, A. Serio, V. Fesquet, W. Rambold, J. Lührs, C. Moreno, G. Gausachs, R. Galvez, V. Montes, T. Vucina, E. Marin, C. Urrutia, A. Lopes, S. Diggs, C. Marchant, A. Ebberts, C. Trujillo, M. Bec, G. Trancho, P. McGregor, P. Young, F. Colazo, and E. Michelle, "Gemini multi-conjugate adaptive optics system review II: Commissioning, operation and overall performance," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* pp. 1002 – 1019 (2014).
33. V. Mahajan, "Strehl ratio for primary aberrations in terms of their aberration variance," *JOSA* **73**, 860–861 (1983).
34. C. Kulcsár, H.-F. Raynaud, C. Petit, J.-M. Conan, and P. V. de Lesegno, "Optimal control, observers and integrators in adaptive optics," *Optics express* **14**, 7464–7476 (2006).
35. T. Fusco, G. Rousset, D. Rabaud, E. Gendron, D. Mouillet, F. Lacombe, G. Zins, P. Madec, A. Lagrange, J. Charton *et al.*, "NAOS on-line characterization of turbulence parameters and adaptive optics performance," *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **6**, 585 (2004).
36. P.-Y. Madec, "Overview of deformable mirror technologies for adaptive optics and astronomy," *Adaptive Optics Systems III*, SPIE Proceedings **8447** (2012).
37. J.-M. Conan, H.-F. Raynaud, C. Kulcsár, S. Meimon, and G. Sivo, "Are integral controllers adapted to the new era of ELT adaptive optics?" in "AO4ELT2," (2011).
38. E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of point estimation, 2nd edition* (Springer Science & Business Media, 2006).
39. R. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," *JOSA* **66**, 207–211 (1976).
40. W. H. Southwell, "Wave-front estimation from wave-front slope measurements," *JOSA* **70**, 998–1006 (1980).
41. F. Rigaut and E. Gendron, "Laser guide star in adaptive optics-The tilt determination problem," *Astronomy and Astrophysics* **261**, 677–684 (1992).
42. E. Gendron and G. Rousset, "Temporal analysis of aliasing in Shack-Hartmann wave-front sensing," in "SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation," (International Society for Optics and Photonics, 2012), pp. 84476N–84476N.

3.1.3 Retour sur le biais de reconstruction lié au repliement spatial

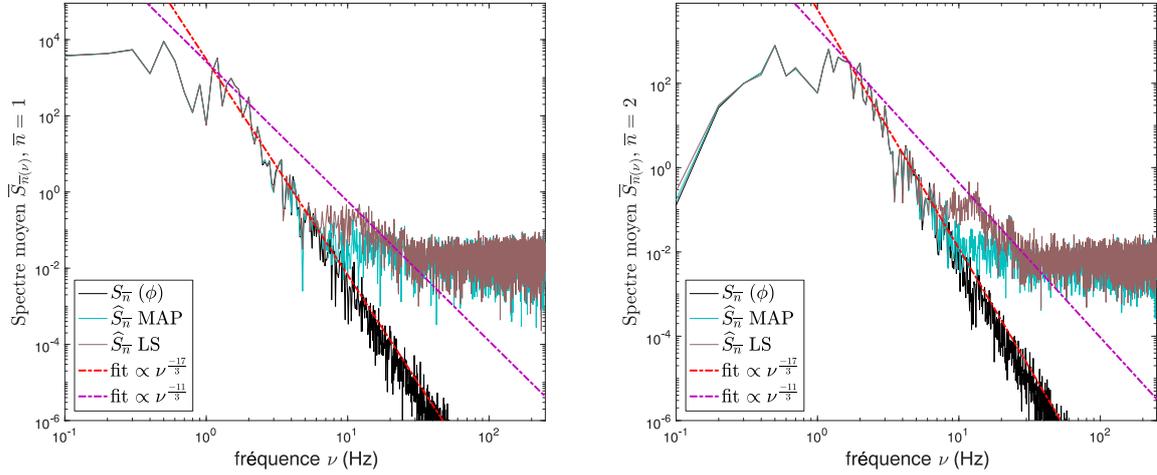
La partie 5.C de l'article détaille le calcul du biais lié au bruit de mesure dans la DSP de la phase résiduelle, lorsque cette dernière est calculée à partir de données ASO. Néanmoins, le bruit de mesure n'est pas la seule perturbation inhérente aux mesures ASO dont il faudrait tenir compte. En effet, le processus de mesure ASO, en particulier avec un analyseur de type Shack-Hartmann, repose sur un échantillonnage spatial de la phase de perturbation, qui va conduire à du repliement ou *aliasing* (voir paragraphe 2.2.2.1).

La détermination du biais lié au bruit de mesure dans l'estimation de la DSP de la perturbation à partir de phases reconstruites est capitale pour que l'évaluation du budget d'erreur converge vers un niveau de performance précis. Par ailleurs, on peut observer la signature fréquentielle de ce bruit sur les figures 3.1 et 3.2. Ces figures représentent le spectre moyen sur un ordre radial de Zernike de la phase de perturbation (courbes noires) et de phases reconstruites par MC (courbes marrons) et MAP (courbes vertes), dans les mêmes conditions que l'article (se référer à la partie 4.A. et au *table* 1). Le bruit reconstruit est lui aussi un bruit blanc gaussien et centré dont la signature fréquentielle est un plateau à haute fréquence (il est dominant par rapport au niveau du spectre turbulent). Cependant, le bruit de mesure n'est pas la seule source de biais dans cette estimation. En effet, comme le montrent [Gendron et Rousset, 2012] dans le cas d'un reconstituteur moindres carrés, le repliement spectral lié à l'échantillonnage de la phase de perturbation par l'ASO affecte sensiblement le résultat d'une reconstruction de phase, et se traduit sur la densité spectrale de puissance par une rupture de pente :

- $\nu > \nu_c$, $S(\nu) \propto \nu^{-\frac{17}{3}}$ sans repliement spectral (Taylor),
- $\nu > \nu_{\text{alias}}$, $S(\nu) \propto \nu^{-\frac{11}{3}}$ avec repliement spectral [Gendron et Rousset, 2012].

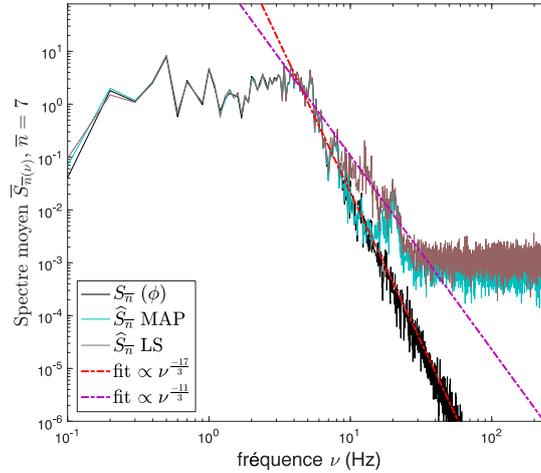
On retrouve ces lois de puissance sur les courbes des figures 3.1 et 3.2 : la décroissance en $\nu^{-\frac{17}{3}}$ sur les DSP des vraies phases et au début des DSP des phases reconstruites avec les MC et le MAP, et la décroissance en $\nu^{-\frac{11}{3}}$, principalement pour les DSP de phases reconstruites avec les MC, avant le plateau de bruit. Les DSP des phases reconstruites avec le MAP présentent quant à elles un signal parasite dont la signature spectrale est moins énergétique que celle des MC, et en même temps plus resserrée autour d'une fréquence. Elle est peu présente pour les bas ordres radiaux, car noyée dans le bruit (figure 3.1a et 3.1b), apparaît distinctement pour quelques ordres radiaux (figures 3.1c et 3.2a), puis disparaît de nouveau pour les ordres radiaux élevés, noyée dans le plateau basses fréquences (figure 3.2b).

En toute rigueur, le biais lié à ce repliement devrait lui aussi être soustrait au résultat du calcul de budget d'erreur, de la même manière que le bruit de mesure. Toutefois, le spectre de ce signal n'est pas aisé à déterminer du fait qu'il est intrinsèquement lié à la nature même de la turbulence. Néanmoins, comme le montrent les simulations, la non prise en compte de ce biais n'occasionne pas de différence remarquable sur le résultat du calcul du budget d'erreur (cas intégrateur, figure 5 de l'article). En revanche, la présence de ce signal parasite pourrait avoir un impact sur l'estimation des inter-spectres, et pourrait être l'une des causes des erreurs d'évaluation observées avec les régulateurs LQG complets.



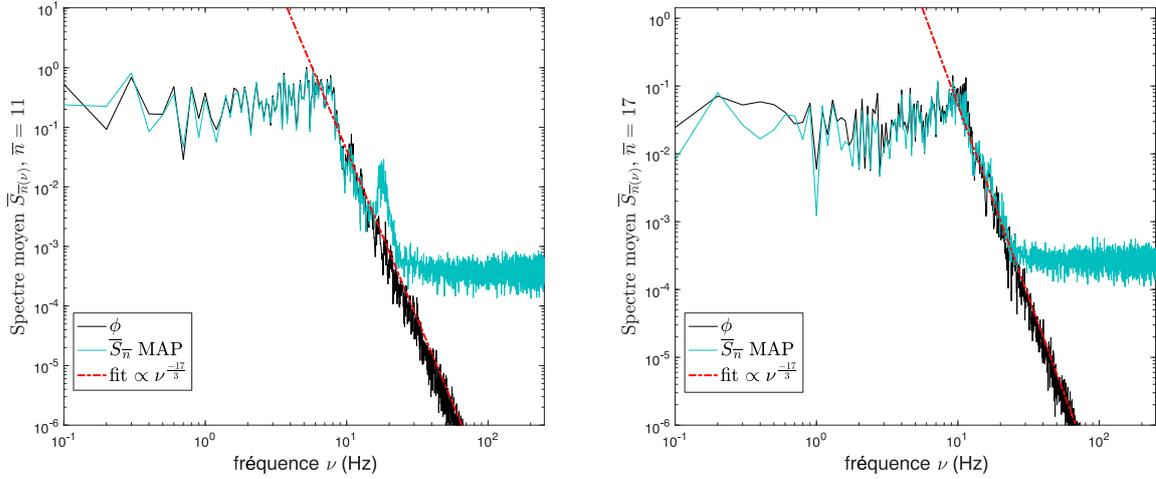
(a) Spectres moyens sur le premier ordre radial (tip et tilt)

(b) Spectres moyens sur le deuxième ordre radial (défocalisation et astigmatismes)



(c) Spectres moyens sur le septième ordre radial

FIGURE 3.1 – Influence du repliement spectral sur l'estimation de la DSP de la phase de perturbation à partir de la reconstruction de front d'onde. Les DSP estimées à partir de phases reconstruites par MC (marron) et MAP (vert) sont comparées à celles estimées à partir de la vraie trajectoire de phase (noir). La loi fréquentielle d'évolution (Taylor - rouge) et celle du repliement spectral (violet, cas MC [Gendron et Rousset, 2012]) sont superposées.



(a) Spectres moyens sur l'ordre radial 11

(b) Spectres moyens sur l'ordre radial 17

FIGURE 3.2 – Signatures spectrales du repliement au travers du reconstructeur MAP aux hautes fréquences spatiales

3.2 Implémentation algorithmique et complexité calculatoire

La complexité calculatoire de la méthode présentée ici est déterminante pour son implémentation numérique. En effet, le calcul des diverses fonctions de transfert fait intervenir plusieurs inversions matricielles dépendant de la variable z , liée à la fréquence normalisée ν par $z = e^{2\pi i\nu}$. De manière à limiter le nombre d'évaluations fréquentielles en ne calculant que les fonctions de transfert de réjection et de propagation de bruit, on exprime directement une représentation d'état des fonctions de transfert de réjection et de propagation de bruit en fonction d'un modèle d'état de régulateur générique :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_G x_k + B_G y_k \\ u_k &= C_G x_k + D_G y_k \end{cases} \quad (3.1)$$

Ceci permet, comme expliqué ci-après, d'obtenir des expressions analytiques quel que soit le régulateur utilisé. Notons qu'il existe de nombreuses manières de définir un modèle d'état générique. En effet, l'article adopte une formulation du modèle d'état plus compacte, n'utilisant que trois matrices et intégrant un retard d'une trame, alors que dans le cadre de ce manuscrit on adoptera un formalisme plus classique, avec quatre matrices.

3.2.1 Forme d'état de régulateurs particuliers

La représentation d'état est une forme alternative à la fonction de transfert pour décrire un système dynamique linéaire. Ainsi, tout régulateur linéaire de fonction de transfert

$G(z)$ admet une représentation d'état du type de l'équation (3.1). Cette partie regroupe les modèles d'état des régulateurs mis en œuvre dans le cadre de cette thèse.

3.2.1.1 Régulateur à action intégrale

L'équation de récurrence d'un régulateur à action intégrale discret s'écrit

$$u_k = u_{k-1} + gM_{\text{com}}y_k \quad (3.2)$$

et est équivalente à la forme d'état

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ix_k + gM_{\text{com}}y_k \\ u_k = Ix_k + gM_{\text{com}}y_k \end{cases} \quad (3.3)$$

en posant comme vecteur d'état $x_k = u_{k-1}$. On a alors pour l'intégrateur :

$$A_G = I, \quad B_G = gM_{\text{com}}, \quad C_G = I, \quad D_G = gM_{\text{com}}, \quad (3.4)$$

avec I la matrice identité de rang n_{act} .

3.2.1.2 Régulateur LQG – forme prédicteur

Le régulateur LQG forme prédicteur fait référence dans le cadre de ce manuscrit au régulateur dans sa forme classique décrite au paragraphe 2.3.2.3. La phase prédite par le filtre de Kalman est projetée directement sur la base d'actionneurs, soit :

$$u_k = \hat{\phi}_{k+1|k} = -K\hat{x}_{k+1|k}. \quad (3.5)$$

La fonction de transfert d'une telle commande LQG, notée G^{LQG} , basée sur le modèle d'état générique de perturbation (éq. (2.80)) est donnée par

$$G^{\text{LQG}}(z) = -K \left(I - (A - L_{\infty}C)z^{-1} - L_{\infty}DNKz^{-2} \right)^{-1} L_{\infty}. \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) peut être réécrite en introduisant une variable intermédiaire $Z(z)$

$$\begin{cases} U(z) = -KZ(z), \\ Z(z) = (I - (A - L_{\infty}C)z^{-1} - L_{\infty}DNKz^{-2})^{-1} L_{\infty}Y(z), \end{cases} \quad (3.7)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} U(z) = -KZ(z), \\ Z(z) = (A - L_{\infty}C)z^{-1}Z(z) + L_{\infty}DNKz^{-2}Z(z) + L_{\infty}Y(z). \end{cases} \quad (3.8)$$

On passe alors à un système d'équations de récurrence en posant :

$$x_k = \begin{pmatrix} z_{k-1} \\ z_{k-2} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

pour trouver un modèle d'état du type de l'équation (3.1), avec les matrices

$$A_G = \begin{pmatrix} A - L_\infty C & L_\infty DNK \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} L_\infty \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_G = (-K(A - L_\infty C) \quad -KL_\infty DNK), \quad D_G = -KL_\infty. \quad (3.10)$$

Cette forme de régulateur LQG est la plus classique et est celle utilisée pour les analyses de performance des régulateurs LQG de ce chapitre et du chapitre 4.

3.2.1.3 Régulateur LQG – forme estimateur

Le régulateur LQG forme estimateur fait référence, dans ce manuscrit, au régulateur utilisant l'estimée sans prédiction de la phase, obtenue également en sortie du filtre de Kalman. En effet, en accord avec l'équation (2.56), l'occurrence de phase présente dans la mesure y_k est la phase ϕ_{k-1} . L'estimation sans prédiction possible à partir de la mesure y_k est donc $\hat{\phi}_{k-1|k} = E[\phi_{k-1}|\mathcal{Y}_k]$. La commande se calcule alors, pour un régulateur basé sur le modèle d'état générique de perturbation (2.80), avec

$$u_k = -KA^2\hat{x}_{k-1|k} = -K'\hat{x}_{k|k}, \quad (3.11)$$

où K' est le gain de commande contenant la double étape de prédiction. Sous cette forme, le régulateur LQG a pour fonction de transfert

$$G^{\text{LQG}}(z) = -K'(I - (I - H_\infty C)z^{-1} - H_\infty DNK'z^{-2})^{-1} H_\infty, \quad (3.12)$$

On montre de manière identique au cas prédictif que le régulateur LQG version estimateur admet un modèle d'état du type de l'équation (3.1), avec les matrices

$$A_G = \begin{pmatrix} (I - H_\infty C) & H_\infty DNK' \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} H_\infty \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_G = (-K'(I - H_\infty C) \quad -K'H_\infty DNK'), \quad D_G = -K'H_\infty \quad (3.13)$$

Cette formulation du régulateur LQG sera celle utilisée pour l'analyse des performances des régulateurs étudiés dans le chapitre 5 de ce manuscrit.

3.2.1.4 Régulateur mixte LQG bas ordres – intégrateur hauts ordres

Il est aussi possible de représenter sous forme d'état des régulateurs mixtes, comme un régulateur LQG bas ordres couplé à un intégrateur pour le reste de la correction. En ne considérant qu'une seule voie d'analyse de front d'onde, la séparation des mesures envoyées dans chacun des deux régulateurs est déterminante. Ce cas de figure est caractéristique des instruments d'OA extrême, dont la mesure est délivrée par un analyseur unique (de type, ou apparenté, Shack-Hartmann pour SPHERE [Sauvage *et al.*, 2014] ou GPI [Poyneer *et al.*, 2016]). En revanche, pour les instruments grand champ, où l'on utilise en général à la fois des étoiles guides naturelles et laser, le découplage est souvent intégré dès la conception du système d'OA, comme par exemple pour GeMS [Sivo *et al.*, 2016],

où les ASO sur étoiles naturelles alimentent un régulateur LQG à filtrage de vibrations pour la compensation des modes de basculement, alors que les mesures laser alimentent un intégrateur chargé du reste de la correction.

L'objectif de ce paragraphe n'est pas de présenter exactement la stratégie de commande des instruments évoqués jusqu'ici, mais plutôt de proposer une structure décrivant leur fonctionnement. Supposons donc, dans un premier temps, qu'un régulateur LQG est alimenté par une mesure ASO filtrée, de telle sorte qu'elle ne contienne que la signature d'un nombre de modes limité à $n_{\text{mod}}^{\text{mes}}$. Supposons de plus, pour assurer une meilleure qualité d'estimation, que le régulateur LQG est dédié à la correction de $n_{\text{mod}}^{\text{cor}}$ modes, tel que :

$$n_{\text{mod}}^{\text{cor}} < n_{\text{mod}}^{\text{mes}}. \quad (3.14)$$

En effet, cette précaution permet de limiter l'impact du repliement spectral, naturellement plus fort sur les derniers modes reconstruits. On propose de filtrer la mesure totale y en effectuant une reconstruction de front d'onde par moindres carrés sur $n_{\text{mod}}^{\text{mes}}$ modes, basée sur l'équation de mesure réduite :

$$y_k^{\text{mes}} = D^{\text{mes}} \phi_{k-1} + w_k, \quad (3.15)$$

La pseudo-mesure, destinée à alimenter le filtre de Kalman, est alors obtenue en utilisant la matrice ASO tronquée D^{cor} (tronquée à $n_{\text{mod}}^{\text{cor}}$). De ce fait, le régulateur LQG ne corrige effectivement que $n_{\text{mod}}^{\text{cor}}$. Le nombre de modes considérés pour ce type d'application étant généralement faible par rapport au nombre de mesures, on peut considérer qu'un reconstruteur moindres carrés régularisé est une bonne option. Ainsi la pseudo-mesure fournie au régulateur LQG s'écrit :

$$y_k^{\text{LQG}} = D^{\text{cor}} R_{\phi} y_k, \quad (3.16)$$

où R_{ϕ} est le reconstruteur statique de front d'onde de type MC basé sur de l'équation (3.15).

Le modèle d'état associé à la partie LQG de la correction s'écrit donc :

$$\begin{cases} x_{k+1}^{\text{LQG}} = \begin{pmatrix} A - L_{\infty} C & L_{\infty} D N K \\ I & 0 \end{pmatrix} x_k^{\text{LQG}} + \begin{pmatrix} L_{\infty} D^{\text{cor}} R_{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} y_k \\ u_k^{\text{LQG}} = \begin{pmatrix} -K(A - L_{\infty} C) & -K L_{\infty} D N K \end{pmatrix} x_k^{\text{LQG}} - K L_{\infty} D^{\text{cor}} R_{\phi} y_k. \end{cases} \quad (3.17)$$

La mesure restante, c'est-à-dire la mesure complète y à laquelle on soustrait la contribution y^{LQG} envoyée au régulateur LQG, constitue la mesure utilisée par l'intégrateur :

$$y_k^{\text{INT}} = y_k - y_k^{\text{LQG}} = (I - D^{\text{cor}} R_{\phi}) y_k. \quad (3.18)$$

Le modèle d'état associé à la partie intégrateur du régulateur s'écrit donc :

$$\begin{cases} x_{k+1}^{\text{INT}} = I x_k^{\text{INT}} + g M_{\text{com}} (I - D^{\text{cor}} R_{\phi}) y_k \\ u_k^{\text{INT}} = I x_k^{\text{INT}} + g M_{\text{com}} (I - D^{\text{cor}} R_{\phi}) y_k. \end{cases} \quad (3.19)$$

Les deux régulateurs sont construits de telle manière que les deux commandes sont découplées. Ainsi,

$$u_k = u_k^{\text{LQG}} + u_k^{\text{INT}}. \quad (3.20)$$

On pose alors :

$$x_k = \begin{pmatrix} x_k^{\text{LQG}} \\ x_k^{\text{INT}} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

comme vecteur d'état pour combiner les représentations d'état (3.17) et (3.19) en un modèle d'état du type de l'équation (3.1), avec

$$A_G = \begin{pmatrix} A - L_\infty C & L_\infty DNK & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} L_\infty D^{\text{cor}} R_\phi \\ 0 \\ gM_{\text{com}} (I - D^{\text{cor}} R_\phi) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$C_G = (-K(A - L_\infty C) \quad -KL_\infty DNK \quad I), \quad D_G = (gM_{\text{com}} (I - D^{\text{cor}} R_\phi) - KL_\infty D^{\text{cor}} R_\phi). \quad (3.23)$$

Ces régulateurs mixtes représentent aujourd'hui les régulateurs de référence des nouveaux instruments d'optique adaptative. En effet, ils permettent de réaliser un compromis performance/complexité algorithmique intéressant. Pour confirmer cette tendance, inaugurée par les régulateurs de SPHERE et GPi, le formalisme de budget d'erreur peut être utilisé. Ainsi, la figure 3.3 compare les performances de deux régulateurs mixtes, respectivement de degré de correction LQG $n_{\text{mod}}^{\text{cor}} = 2$ et 9, aux régulateurs utilisés dans l'article, dans les mêmes conditions de simulation (résultats présentés dans [Kulcsár *et al.*, 2017]). Le régulateur mixte utilisant une correction LQG pour les modes de basculement apporte déjà un gain en performance significatif par rapport à une solution intégrateur, et ce sans même la présence de vibrations. Il reste néanmoins moins efficace qu'une solution LQG complète, même avec un nombre limité de modes. En revanche, le régulateur compensant 9 modes avec une solution LQG présente un apport en performance très appréciable. En effet, sa performance est quasiment équivalente à celle du régulateur LQG complet avec 350 modes, tout en présentant une complexité algorithmique significativement inférieure. De plus, la décomposition du budget d'erreur conduit à plusieurs observations sur le comportement du régulateur mixte à 9 modes LQG :

- Son erreur temporelle est proche de celle de l'intégrateur. Ainsi, l'apport du régulateur LQG sur les premiers modes n'est pas significatif du point de vue de l'erreur temporelle (en l'absence de vibrations). En effet, les modes de basse fréquence spatiale ont un comportement dynamique plus lent, limitant ainsi l'effet des retards pour l'intégrateur. En revanche, les régulateurs LQG complets, utilisant un modèle dynamique de la perturbation ont une erreur temporelle significativement plus faible, visiblement due à une meilleure compensations des retards sur les modes de haute fréquence spatiale. Des modèles plus fidèles à la dynamique de la turbulence pourraient ainsi faire diminuer sensiblement l'erreur temporelle des régulateurs LQG complets, alors que leur apport du point de vue de l'erreur temporelle sera faible pour un régulateur mixte.

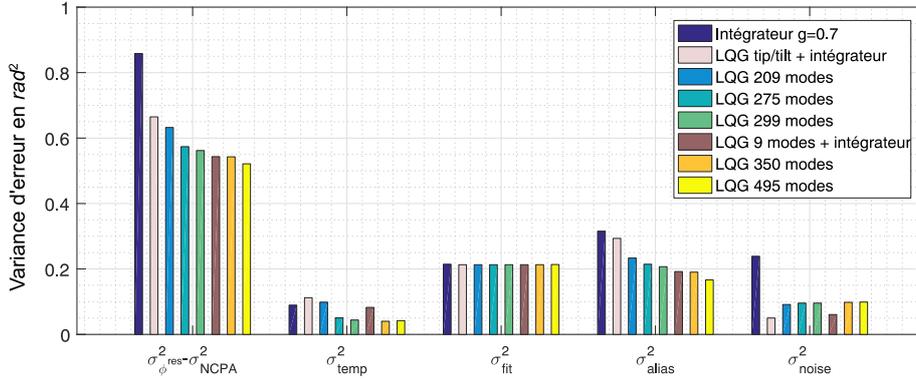


FIGURE 3.3 – Budget d’erreur du régulateur mixte à 2 ou 9 modes LQG comparé à celui de régulateurs LQG complet ou à action intégrale

- La propagation de bruit est significativement moindre, et n’est donc pas primordiale pour l’orientation de futur développements.
- Le niveau de l’erreur de repliement est proche de celui des régulateurs LQG complets. Ainsi, on peut supposer qu’un grande partie de l’erreur de repliement se reporte sur les premiers modes de Zernike. C’est pourquoi un régulateur mixte avec 9 modes atteint quasiment le même niveau d’erreur de repliement qu’un régulateur LQG utilisant 350 modes. Ainsi, le développement de modèles plus fidèles à la nature de la turbulence contribueraient dans les mêmes mesures au régulateurs mixte et complets du point de l’erreur de repliement.

3.2.2 Forme d’état associée aux fonctions de transfert

Une fois obtenue la représentation d’état du régulateur, on peut en déduire les fonctions de transfert de réjection et de propagation de bruit directement sous forme de modèles d’état. C’est l’objet de ce paragraphe.

3.2.2.1 Fonction de transfert de réjection de perturbation

On définit un couple d’entrées-sorties (e, s) tel que

$$S(z) = T^{\text{rej}}(z)E(z). \quad (3.24)$$

Notons que dans le cas de la fonction de transfert de réjection de perturbation, $E(z) = \Phi(z)$ et $S(z) = \Phi^{\text{res}}(z)$. Ceci permet d’écrire, à partir de l’équation (2.58),

$$S(z) = (I + z^{-2}NG(z)D)^{-1} E(z), \quad (3.25)$$

d’où

$$S(z) = E(z) - z^{-2}NG(z)DS(z). \quad (3.26)$$

Chapitre 3. Caractérisation de la performance d'un correcteur linéaire en optique adaptative classique : expression du budget d'erreur

L'équation (3.26) peut être décrite par le schéma-bloc représenté en figure 3.4, qui nous permet d'écrire, couplé aux équations (3.1), différentes égalités temporelles :

$$x_{k+1} = A_G x_k + B_G D s_{k-2} \quad (3.27)$$

$$y_k = C_G x_k + D_G D s_{k-2} \quad (3.28)$$

$$s_k = e_k - N y_k \quad (3.29)$$

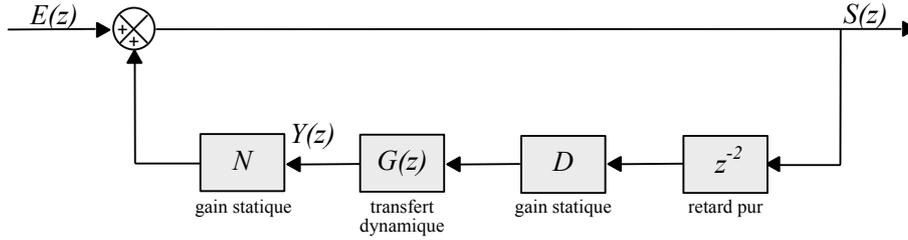


FIGURE 3.4 – Schéma-bloc équivalent du point de vue entrée-sortie à la fonction de transfert de réjection d'une boucle fermée d'OA classique

La combinaison des équations (3.28) et (3.29) permet d'écrire :

$$s_k = e_k - N C_G x_k - N D_G D s_{k-2}. \quad (3.30)$$

En posant

$$\xi_k = \begin{pmatrix} x_k \\ s_{k-1} \\ s_{k-2} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

on peut alors combiner les équations (3.27), (3.28) et (3.30) sous la forme d'un modèle d'état :

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = A_{\text{rej}} \xi_k + B_{\text{rej}} e_k \\ s_k = C_{\text{rej}} \xi_k + D_{\text{rej}} e_k \end{cases}, \quad (3.32)$$

avec

$$A_{\text{rej}} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & B_G D \\ -N C_G & 0 & -N D_G D \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\text{rej}} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{\text{rej}} = (-N C_G \quad 0 \quad -N D_G D), \quad D_{\text{rej}} = I. \quad (3.33)$$

On évalue ensuite la fonction de transfert de réjection en $z = e^{2\pi i \nu}$, avec

$$T^{\text{rej}}(z) = C_{\text{rej}} (zI - A_{\text{rej}})^{-1} B_{\text{rej}} + D_{\text{rej}}. \quad (3.34)$$

3.2.2.2 Fonction de transfert de propagation de bruit

De façon similaire, on définit un couple d'entrées-sorties (e, s) tel que :

$$S(z) = T^{\text{bruit}}(z)E(z). \quad (3.35)$$

Notons que dans le cas de la fonction de transfert de propagation de bruit, $E(z) = W(z)$ et $S(z) = \Phi^{\text{res}}(z)$. Ceci permet d'écrire, à partir de l'équation (2.59) :

$$S(z) = -z^{-1}T^{\text{rej}}(z)NG(z)E(z), \quad (3.36)$$

d'où, avec l'équation (2.58),

$$\begin{aligned} S(z) &= z^{-2}NG(z)DS(z) + z^{-1}NG(z)E(z), \\ &= z^{-1}NG(z)(z^{-1}DS(z) + E(z)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

L'équation (3.37) peut être décrite par le schéma-bloc représenté en figure 3.5, qui nous permet d'écrire, couplé aux équations (3.1), différentes égalités temporelles :

$$u_k = e_k + Ds_{k-1} \quad (3.38)$$

$$x_{k+1} = A_G x_k + B_G u_{k-1} \quad (3.39)$$

$$y_k = C_G x_k + D_G u_{k-1} \quad (3.40)$$

$$s_k = N y_k. \quad (3.41)$$

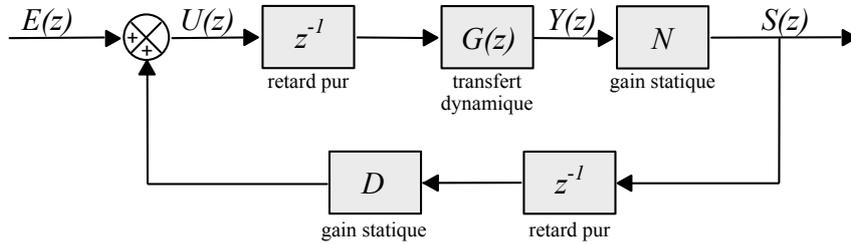


FIGURE 3.5 – Schéma-bloc équivalent du point de vue entrée-sortie à la fonction de transfert de propagation de bruit d'une boucle fermée d'OA classique.

La combinaison des équations (3.40) et (3.41) conduit à :

$$s_k = NC_G x_k + ND_G u_{k-1}. \quad (3.42)$$

On définit alors un nouveau vecteur d'état augmenté,

$$\xi_k = \begin{pmatrix} x_k \\ u_{k-1} \\ s_{k-1} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

ce qui nous permet de combiner les équations (3.38), (3.39) et (3.42) sous la forme d'une représentation d'état :

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = A_{\text{bruit}} \xi_k + B_{\text{bruit}} e_k, \\ s_k = C_{\text{bruit}} \xi_k \end{cases}, \quad (3.44)$$

avec

$$A_{\text{bruit}} = \begin{pmatrix} A_G & B_G & 0 \\ 0 & 0 & D \\ NC_G & ND_G & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\text{bruit}} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{\text{bruit}} = (NC_G \quad NC_G \quad 0), \quad D_{\text{bruit}} = 0. \quad (3.45)$$

On évalue ensuite la fonction de transfert de propagation de bruit en $z = e^{2\pi i\nu}$, avec

$$T^{\text{bruit}}(z) = C_{\text{bruit}} (zI - A_{\text{bruit}})^{-1} B_{\text{bruit}}. \quad (3.46)$$

3.2.3 Complexité calculatoire et parallélisation des calculs

La complexité calculatoire de ce formalisme est un point clé pour envisager une application à un système de type ELT. Le passage à un formalisme d'état pour toutes les fonctions de transfert à calculer sert dans un premier temps à optimiser l'utilisation des fonctions natives de Matlab[®]. En effet, la multiplication matricielle au sein même du calcul de fonction de transfert (objets *tf*) dans Matlab[®] n'est pas optimisée et peut prendre plusieurs jours (en pratique le calcul n'a jamais été mené jusqu'au bout du fait de sa longueur sur notre machine de calcul) pour le calcul d'une fonction de transfert de réjection du type de celles utilisées dans l'article, lorsqu'elle est réalisée sans précaution. En revanche, l'évaluation numérique de la fonction de transfert équivalente à un modèle d'état, par la fonction native *freqresp* de Matlab[®], est bien plus optimisée, et parallélisable sur les fréquences. Un autre avantage de l'évaluation à partir du modèle d'état qu'il n'est pas utile d'évaluer numériquement le transfert du régulateur, son action étant intégré dans le calcul théorique des matrices d'état. Ainsi, sur notre ordinateur (44 cœurs @2.20 GHz, 512 Go de mémoire vive), l'évaluation des deux fonctions de transfert, sur un intervalle de $[0 : F_{\text{éch}}/2]$ échantillonné sur 2500 points, et parallélisé sur 32 des cœurs disponibles (limite de Matlab[®]) prend environ une trentaine de minutes pour les simulations présentées dans l'article.

Le calcul des variances d'erreur est quant à lui un peu plus long du fait du nombre supérieur de multiplications matricielles nécessaires, prenant pour ces simulations entre trente et quarante-cinq minutes par poste d'erreur, selon qu'ils sont calculés à partir de trajectoires de phase de perturbation simulées, ou à partir de trajectoires de mesures ASO (la différence résultant au calcul du terme supplémentaire de biais lié au bruit de mesure). Le temps de calcul global du budget d'erreur d'un système SCAO de type NAOS fort flux (dans les conditions de l'article) est globalement de deux à trois heures selon la méthode mise en oeuvre.

Les seules optimisations réalisées pour réduire ce temps de calcul sont la parallélisation des évaluations fréquentielles, toutes indépendantes les unes des autres, ainsi que le calcul du dernier des termes par soustraction au terme d'erreur σ_{rej}^2 . Notons qu'une évaluation externe de l'erreur de *fitting* permettrait en outre de s'abstenir de calculer un terme supplémentaire. De plus, la structure parcimonieuse des matrices de transfert de réjection et de propagation de bruit n'a pas été exploitée, et représente une bonne piste d'amélioration du temps de

calcul de la méthode, mais requerrait des développements supplémentaires, basés sur des transformations des bases de représentation utilisées pour la phase de représentation. Ceci permettrait de calculer en parallèle les différents blocs de ces matrices et réduirait drastiquement le nombre d'opérations, qui est proportionnel au cube du nombre de coordonnées dans l'état ξ .

3.3 Extension du formalisme au cas des systèmes d'optique adaptative grand champ

Le budget d'erreur d'une optique adaptative grand champ diffère de celui d'une optique adaptative classique principalement par l'apparition de deux termes supplémentaires :

- une erreur tomographique, liée à la différence entre la voie d'analyse et la voie de correction, notée σ_{tomo}^2 , dans le budget d'erreur contrôlé ; elle représente donc l'écart entre la phase estimée en volume dans la direction d'intérêt à partir des mesures et la phase réellement présente dans cette direction d'intérêt ;
- une erreur liée aux aberrations statiques présentes dans la direction d'intérêt et par conséquent non vues par les analyseurs, notée σ_{abstat}^2 , et rejoignant le budget d'erreur libre.

En résumé, le budget d'erreur d'un système d'optique adaptative grand champ s'écrit :

$$\sigma_{\phi^{\text{res}}}^2 = \underbrace{\sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{tomo}}^2 + \sigma_{\text{alias}}^2 + \sigma_{\text{bruit,prop}}^2}_{\text{Budget d'erreur commandé}} + \underbrace{\sigma_{\text{fit}}^2 + \sigma_{\text{NCPA}}^2 + \sigma_{\text{abstat}}^2}_{\text{Budget d'erreur libre}} \quad (3.47)$$

L'objet de cette partie est de montrer comment le formalisme grand champ modifie les expressions des matrices de transfert de réjection et de propagation de bruit, et d'exprimer le budget d'erreur commandé de systèmes grand champ. La motivation de ce formalisme demeure, comme dans le cas classique, son degré de généralité du point de vue du système considéré et du régulateur étudié.

La détermination des termes du budget d'erreur libre est en pratique effectuée par des méthodes d'étalonnage liées à la conception même du système. Elles ne constituent donc pas un objectif de modélisation discuté dans cette partie (pour plus de renseignements, le lecteur pourra se référer, par exemple, à la méthode proposée par [Vidal *et al.*, 2014]).

3.3.1 Adaptation de la formulation du budget d'erreur

Dans un souci de simplification des calculs, alourdis par le formalisme grand champ, on ne tiendra pas compte de la subdivision de l'espace \mathcal{P}^\perp . Ainsi, les différents vecteurs de phase sont exprimés conformément à la décomposition :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^\parallel \oplus \mathcal{P}^\perp, \quad (3.48)$$

où \mathcal{P}^\parallel est l'espace engendré par les fonctions d'influence des miroirs déformables et \mathcal{P}^\perp son complémentaire orthogonal dans \mathcal{P} introduite dans l'article (paragraphe 3.1.2). On définit

Chapitre 3. Caractérisation de la performance d'un correcteur linéaire en optique adaptative classique : expression du budget d'erreur

ainsi P^{\parallel} et P^{\perp} comme les projecteurs sur respectivement les sous-espaces \mathcal{P}^{\parallel} et \mathcal{P}^{\perp} . Tout élément de \mathcal{P} pourra donc s'écrire sous la forme :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{\parallel} \\ \phi^{\perp} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Ainsi, en accord avec le formalisme de description des systèmes grand-champ introduit au paragraphe 2.3.1.2, les matrices D et N s'écrivent alors :

$$D = (D^{\parallel} \quad D^{\perp}), \quad (3.50)$$

$$N = \begin{pmatrix} N^{\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

avec

$$D^{\parallel} = \begin{pmatrix} D_{\text{ASO}_1}^{\parallel} \\ \vdots \\ D_{\text{ASO}_M}^{\parallel} \end{pmatrix}, \quad D^{\perp} = \begin{pmatrix} D_{\text{ASO}_1}^{\perp} \\ \vdots \\ D_{\text{ASO}_M}^{\perp} \end{pmatrix},$$

et

$$N^{\parallel} = (N_1 \quad \dots \quad N_N),$$

en tenant compte des équations (2.61) et (2.62). Les projecteurs angulaires M_{α} et M_{β} s'écrivent quant à eux :

$$M_{\alpha} = \begin{pmatrix} M_{\alpha}^{\parallel} & 0 \\ 0 & M_{\alpha}^{\perp} \end{pmatrix}, \quad M_{\beta} = \begin{pmatrix} M_{\beta}^{\parallel} & 0 \\ 0 & M_{\beta}^{\perp} \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

En reportant ces différentes expressions dans la fonction de transfert de réjection en grand champ (2.65), on obtient :

$$T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(z) = \begin{pmatrix} I + z^{-2} M_{\beta}^{\parallel} N^{\parallel} G(z) D^{\parallel} M_{\alpha}^{\parallel} & z^{-2} M_{\beta}^{\parallel} N^{\parallel} G(z) D^{\perp} M_{\alpha}^{\perp} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} M_{\beta}. \quad (3.53)$$

On utilise alors le lemme d'inversion matricielle par block de Strassen, et l'on obtient :

$$T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(z) = \begin{pmatrix} T_{\text{GC}}^{\text{rej}\parallel}(z) & T_{\text{GC}}^{\text{rej}\perp}(z) \\ 0 & M_{\beta}^{\perp} \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

avec

$$\begin{cases} T_{\text{GC}}^{\text{rej}\parallel}(z) = \left(I + z^{-2} M_{\beta}^{\parallel} N^{\parallel} G(z) D^{\parallel} M_{\alpha}^{\parallel} \right)^{-1} M_{\beta}^{\parallel}, \\ T_{\text{GC}}^{\text{rej}\perp}(z) = z^{-2} T_{\text{GC}}^{\text{rej}\parallel}(z) D^{\perp} M_{\alpha}^{\perp}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Similairement au cas de l'OA classique (voir l'équation (35) de l'article), la matrice de transfert de propagation du bruit s'obtient sous la forme :

$$T_{\text{GC}}^{\text{bruit}}(z) = \begin{pmatrix} T_{\text{GC}}^{\text{bruit}\parallel}(z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

avec

$$T_{\text{GC}}^{\text{bruit}\parallel}(z) = z^{-1} T_{\text{GC}}^{\text{rej}\parallel}(z) M_{\beta}^{\parallel} N^{\parallel} G(z). \quad (3.57)$$

3.3.2 Expression du budget d'erreur commandé

La structure des matrices de transfert grand champ permet d'identifier, de manière analogue au cas de l'optique adaptative classique, les erreurs de repliement, de propagation de bruit et de *fitting*. Ainsi :

$$\sigma_{\text{bruit,prop}}^2 = \frac{1}{\pi} \text{trace} \left[\int_0^\pi T_{\text{GC}}^{\text{bruit}}(e^{i\omega}) \Sigma_w T_{\text{GC}}^{\text{bruit}}(e^{i\omega})^* d\omega \right], \quad (3.58)$$

$$\sigma_{\text{fit}}^2 = \frac{1}{\pi} \text{trace} \left[\int_0^\pi P^\perp T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega}) P^\perp S_\phi(e^{i\omega}) P^\perp T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega})^* P^\perp d\omega \right]. \quad (3.59)$$

En revanche, la séparation entre erreur temporelle, erreur tomographique et erreur de repliement n'est pas évidente. En effet, l'erreur tomographique quantifie la variance de l'erreur causée par l'estimation de la phase dans une direction différente de la direction d'analyse. On fait le choix de ne considérer qu'une seule sorte de repliement, c'est-à-dire que tout mode haute fréquence affectant la mesure ou l'estimation d'un mode de basse fréquence, contribue à l'erreur de repliement. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{alias}}^2 = \frac{1}{\pi} \text{trace} & \left[\int_0^\pi \left(P^\parallel T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega}) P^\perp S_\phi(e^{i\omega}) P^\perp T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega})^* P^\parallel + \right. \right. \\ & \left. \left. 2\text{Re} \left(P^\parallel T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega}) P^\parallel S_\phi(e^{i\omega}) P^\perp T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega})^* P^\parallel \right) \right) d\omega \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

où $\text{Re}(\cdot)$ désigne la partie réelle du nombre complexe. D'autre part, on assimile l'erreur tomographique à l'erreur d'estimation des modes de \mathcal{P}^\parallel dans la direction de correction, à partir de modes de \mathcal{P}^\parallel dans la direction des mesures ASO. Le phénomène conduisant à l'erreur tomographique est donc un endomorphisme non bijectif de \mathcal{P}^\parallel , tout comme celui conduisant à l'erreur temporelle. Ainsi, en toute rigueur :

$$\sigma_{\text{temp}}^2 + \sigma_{\text{tomomo}}^2 = \frac{1}{\pi} \text{trace} \left[\int_0^\pi P^\parallel T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega}) P^\parallel S_\phi(e^{i\omega}) P^\parallel T_{\text{GC}}^{\text{rej}}(e^{i\omega})^* P^\parallel d\omega \right]. \quad (3.61)$$

L'interdépendance entre ces deux termes dépend alors du régulateur considéré. En effet, pour des régulateurs statiques, type MMSE, l'estimation de la phase turbulente dans la direction de correction se fait sans prédiction, et donc sans influence des retards. [Vidal *et al.*, 2014] proposent, dans le cadre de CANARY, d'évaluer l'erreur tomographique comme la différence entre la phase estimée par le MMSE, et la phase mesurée ϕ_{k-1} par un *truth sensor*, qui mesure la phase résiduelle dans la direction d'intérêt. Là où CANARY dispose en effet d'un *truth sensor*, rien n'empêche, d'un point de vue théorique, d'en considérer un virtuel. Ainsi, on peut définir une erreur tomographique, se rapprochant de celle de [Vidal *et al.*, 2014], en supprimant dans l'équation (3.61) l'influence des retards :

$$\sigma_{\text{tomomo}}^2 = \frac{1}{\pi} \text{trace} \left[\int_0^\pi P^\parallel T^{\text{tomomo}}(e^{i\omega}) P^\parallel S_\phi(e^{i\omega}) P^\parallel T^{\text{tomomo}}(e^{i\omega})^* P^\parallel d\omega \right], \quad (3.62)$$

avec

$$T^{\text{tomomo}}(z) = \begin{pmatrix} \left(I + M_\beta^\parallel N^\parallel G(z) D^\parallel M_\alpha^\parallel \right)^{-1} M_\beta^\parallel & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

où le bloc non nul correspond au transfert $T_{GC}^{rej}(z)$ lorsque le retard de boucle est pris égal à zéro. Il vient alors, en soustrayant (3.62) à (3.61) :

$$\begin{aligned} \sigma_{temp}^2 &= \frac{1}{\pi} \text{trace} \left[\int_0^\pi P \| T_{GC}^{rej}(e^{i\omega}) P \| S_\phi(e^{i\omega}) P \| T_{GC}^{rej}(e^{i\omega})^* P \| d\omega \right] \\ &- \frac{1}{\pi} \text{trace} \left[\int_0^\pi P \| T^{tomo}(e^{i\omega}) P \| S_\phi(e^{i\omega}) P \| T^{tomo}(e^{i\omega})^* P \| d\omega \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Notons que cette définition est discutable. En effet, lorsque le régulateur n'a pas d'action prédictive, $G(z)$ ne tient pas compte du retard de boucle, et l'expression de l'erreur tomographique correspond à sa définition. C'est ainsi le cas pour un régulateur MMSE [Vidal *et al.*, 2014], où $G(z) = R$. En revanche, pour les régulateurs de type LQG, combinant estimation et prédiction, la séparation de ces deux phénomènes est moins nette. L'action prédictive du régulateur LQG dépend elle-même du retard de boucle. De ce fait, l'expression de l'erreur tomographique dans l'équation (3.63) ne correspond pas à sa définition, puisque l'effet des retards est toujours présent par le biais de $G(z)$. Ainsi, pour un régulateur prédictif, le seul moyen d'accéder à une erreur tomographique serait de particulariser le calcul du transfert de réjection en utilisant une version sans retard du régulateur. Il faudrait alors soustraire la variance d'erreur correspondant au filtrage de la perturbation par ce transfert particularisé à l'équation (3.61) pour trouver l'erreur temporelle correspondante.

3.3.3 Discussion sur l'implémentation

Ce formalisme de budget d'erreur, tout comme celui pour les systèmes d'OA classique, est approprié tout aussi bien pour une évaluation théorique (à partir de modèle de turbulence), pour une évaluation à partir de données simulées, ou pour une évaluation à partir d'enregistrements ciel, sous réserve d'une méthode d'estimation de spectre suffisamment performante. De même, l'avantage de ce type de méthode réside en l'utilisation d'un seul et unique jeu de données, sans manipulation de ce dernier.

Néanmoins, la complexité structurelle supérieure des systèmes grand champ, par rapport aux systèmes classiques, se traduit par un accroissement significatif de la complexité calculatoire de l'évaluation du budget d'erreur. En effet, l'utilisation de modèles de turbulence multi-couches conduit à l'accroissement du nombre de modes utilisés pour la représentation des phases. La complexité calculatoire évoluant comme le cube de la dimension de la base de représentation, le nombre de couches turbulentes considéré a un impact significatif sur le temps de calcul des différents transferts et termes d'erreur. Ainsi, l'utilisation d'un modèle à trois couches, conservant un nombre de modes identique dans chaque couche prendrait, en première approximation, neuf heures. De plus, la modalité grand champ étudiée influe sur la dimension des bases de représentation de la perturbation. Ainsi, pour un cas OATL, le champ d'observation restant limité, la taille des métapupilles aux différentes altitudes reste comparable et n'engendre pas une augmentation significative de nombre du modes. En revanche, un cas OAMC, dont le champ d'observation large provoque une augmentation significative de la taille des méta-pupilles avec l'altitude, nécessite une augmentation significative du nombre de modes par couche et donc de la complexité calculatoire.

L'accroissement du nombre de mesures et de commandes ne contribue en revanche que dans une moindre mesure à l'accroissement de la complexité, le temps calcul des transferts croissant linéairement avec ces deux paramètres. De plus, hormis pour les systèmes les plus exotiques, le nombre de MD et d'ASO reste relativement limité dans les spécifications actuelles des systèmes.

Enfin, le formalisme grand champ requiert l'utilisation de vecteurs de données de taille supérieure à ceux du cas OA classique. Ainsi, lorsqu'en OA classique les matrices de réjection de perturbation, de propagation de bruit, ou encore de DSP de la phase pesaient 40 gigaoctets dans la mémoire vive, leur poids dans le cadre grand champ pourrait s'avérer limitant, d'autant plus si l'on devait imaginer une application grand champ ELT. Des développements sur la réduction de ces vecteurs sont indispensables pour le portage de ce formalisme à ce type de système.

3.4 Conclusion et discussion

Ce chapitre introduit un formalisme d'évaluation de budget d'erreur permettant de comparer tout régulateur linéaire, pour n'importe quel système, sur la base des mêmes paramètres, et avec les mêmes métriques. De plus, ce formalisme se prête autant à la caractérisation théorique et en simulation de la performance de systèmes d'optique adaptative qu'à de l'analyse de données expérimentales, en se basant sur une seule et unique série de données. De ce fait, l'absence de manipulation sur le jeu de données expérimentales garantit le traitement impartial de chaque régulateur étudié. En outre, ce formalisme se transpose aisément du cadre de l'optique adaptative classique à celui de l'optique adaptative grand champ, ne nécessitant que quelques accommodations à la discrimination entre erreurs tomographique et temporelle.

Les résultats de l'article valident le bon fonctionnement du formalisme, et permettent d'aborder le problème de l'estimation d'un spectre turbulent. En simulation, lorsque l'on dispose d'une trajectoire suffisamment longue de phase de perturbation, on montre que l'estimation du spectre par périodogramme moyenné des trajectoires de phase conduit à des résultats tout à fait satisfaisants. On montre en particulier un cas classique d'étude du paramétrage de la commande LQG, en quantifiant l'apport en performance d'un modèle de perturbation plus ou moins fin dans la représentation d'état. On propose de plus une méthode d'estimation de densité spectrale de puissance de la perturbation, pour le cas où l'on ne dispose que de mesures ASO. Cette méthode d'estimation permet en outre de quantifier pour la première fois l'intérêt d'estimer correctement l'inter-spectre de la perturbation, c'est-à-dire les composantes extra-diagonales de la densité spectrale de puissance, qui sont en général négligées au profit d'approximations scalaires, sous-entendant une matrice de densité spectrale de puissance diagonale même lorsque les régulateurs ne sont pas découplés. Cette méthode (à base de données ASO) est performante lorsque les régulateurs corrélaient pas ou peu les modes de perturbation (comme l'intégrateur), ou lorsque le nombre de composantes interspectrales à estimer est limité. La problématique de l'évaluation de l'intégralité du spectre de la perturbation, pour la commande fortement

Chapitre 3. Caractérisation de la performance d'un correcteur linéaire en optique adaptative classique : expression du budget d'erreur

corrélée, comme dans le cas des régulateurs LQG utilisés pour l'intégralité de la correction, nécessite de repenser le problème d'estimation pour améliorer l'estimation des termes croisés du spectre. Ceci est une problématique en soi, abordée en particulier pour des applications en télécommunications et traitement d'antenne (historiquement – voir par exemple [Lacoume et Latombe, 1981]).

L'approche fréquentielle privilégiée dans ce formalisme permet de séparer facilement les différents termes des budgets d'erreur, en se basant sur des arguments liés aux spécifications du système considéré. Néanmoins, l'approche fréquentielle souffre d'une lourdeur calculatoire, qui nécessite un soin particulier dans l'implémentation de ces méthodes. Si la technologie disponible en terme de base de calcul permet d'utiliser ce type d'outil pour des systèmes d'optique adaptative classique et grand champ pour les VLT, voire pour les systèmes d'optique adaptative classique des ELT, moyennant une optimisation des calculs, la perspective grand champ pour les ELT est plus délicate et requerra des développements autour de l'optimisation de l'algorithme.

Le chapitre 4, dédié à l'analyse de données télémétriques acquises sur le ciel, se basera sur des analyses de performance réalisées à partir de ce formalisme pour motiver l'amélioration de la commande des modes tip et tilt de l'instrument GeMS. Ce travail a été réalisé dans le cadre de la collaboration de l'équipe avec l'observatoire GEMINI sud.

Chapitre 4

Analyse de performance sur données ciel GeMS : Intégration d'une commande LQG tip/tilt avec filtrage de vibrations

Sommaire du chapitre

4.1	Présentation de GeMS et performances actuelles	96
4.1.1	Le banc d'OAMC CANOPUS	96
4.1.2	Analyse de performance des campagnes d'avril 2015	97
4.2	Intégration d'une commande tip/tilt LQG pour GeMS	98
4.3	Identification paramétrique dynamique de modèles tip/tilt vibratoires pour la commande LQG	100
4.3.1	Identification paramétrique de modèles AR2 turbulent et vibratoires	101
4.3.2	Le filtre de Kalman étendu (EKF)	102
4.3.3	Minimisation de l'erreur de prédiction (PEM)	103
4.3.4	Minimisation d'erreur de prédiction en cascade (cPEM)	104
4.4	Analyse des performances des régulateurs synthétisés en rejeu	106
4.4.1	Principe de la simulation en rejeu	106
4.4.2	Performances des régulateurs	107
4.4.3	Analyse du budget d'erreur	109
4.5	Conclusion	111

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les performances de la commande tip/tilt du système imageur d'OAMC GeMS, et en particulier l'apport en performance d'une commande LQG avec filtrage de vibration, en se basant entre autres sur l'analyse du budget d'erreur de chacune des méthodes. Le système d'optique adaptative multi-conjuguée GeMS a été conçu en interne par l'observatoire GEMINI [Rigaut *et al.*, 2014, Neichel *et al.*, 2014] pour l'observation scientifique, et est installé au télescope GEMINI sud, sur le *cerro Pachón*, près de La Serena, au Chili. GeMS est le seul instrument d'OAMC fonctionnel à ce jour. L'objet de ce paragraphe, après une présentation succincte du système et un état des lieux de ses limites actuelles, est d'étudier l'apport en performance d'un régulateur LQG avec filtrage de vibrations pour la boucle bas ordres, sur étoiles naturelles, de GeMS. Ce paragraphe aborde enfin l'architecture temps-réel intégrée pour la nouvelle commande, ainsi que les contraintes de communication spécifiant la complexité des modèles de perturbation prévus.

Nous tenons ici à remercier G. Sivo, à l'origine de cette collaboration, ainsi que les équipes de GEMINI Sud pour l'accès aux données et l'accueil chaleureux à l'observatoire, qui a permis de préparer l'intégration future des stratégies de commande retenues sur le calculateur temps-réel de GeMS.

4.1 Présentation de GeMS et performances actuelles

Le système GeMS est composé de trois éléments principaux : un système de génération d'étoiles laser (de type sodium), un module d'observation (caméra infra-rouge GSAOI ou spectro-imageur proche infrarouge à champ large FLAMINGOS2), et le banc d'optique adaptative multi-conjuguée (CANOPUS).

4.1.1 Le banc d'OAMC CANOPUS

Le schéma de principe optique de CANOPUS est reproduit à la figure 4.1. La lumière collectée par le télescope entre dans l'instrument et rencontre les trois miroirs déformables (2) (en pratique seulement deux MD sont actuellement en place, le troisième miroir étant plan), conjugués respectivement au sol, à 4,5 et à 9 kilomètres d'altitude, puis le miroir de basculement (3). Le faisceau est alors séparé par une lame dichroïque (4) en un faisceau infrarouge pour l'observation scientifique (6) et un faisceau visible (EGL et EGN).

Le faisceau visible rencontre à son tour une lame dichroïque (7), qui sépare la lumière issue des étoiles naturelles de celle issue des étoiles laser. La lumière issue des étoiles lasers est collectée par les ASO « laser » (8), à grande résolution spatiale, dédiés à la correction des hautes fréquences spatiales de la turbulence (c'est-à-dire à la commande des miroirs déformables). La lumière issue des étoiles naturelles est quant à elle envoyée à des ASO à basse résolution (9), dédiés à la correction des modes de basculement. La mesure des modes de basculement sur GeMS est réalisée à partir d'une à trois EGN. Les ASO dédiés à la mesure du tip/tilt sont une photodiode quatre-cadrons, placée au plan focal d'une lentille,



FIGURE 4.1 – Schéma de principe optique de l'instrument d'OAMC CANOPUS. Crédit GEMINI.

délivrant une mesure de l'angle d'arrivée, assimilé à du tip/tilt moyen dans la pupille :

$$y^{tip/tilt} = \frac{1}{n_{ASO}} \sum_{n=1}^{n_{ASO}} y_n^{tip/tilt}, \quad (4.1)$$

avec n_{ASO} le nombre d'ASO utilisés, $y_n^{tip/tilt}$ la mesure de tip ou de tilt provenant du n^e ASO, et $y^{tip/tilt}$ la mesure moyenne de tip ou de tilt. L'utilisation d'une seule mesure, moyenne, place la commande de ces modes dans une configuration semblable à de l'optique adaptative classique. Le régulateur utilisé pour la correction des modes de basculement est un intégrateur dont le gain varie (par palier) généralement de 0,1 à 0,5. GeMS fonctionnant en boucle fermée, les données ASO enregistrées sont des mesures de phase résiduelle. Enfin, CANOPUS possède une source interne (1) dédiée à la calibration du banc.

Notons que le télescope GEMINI est un télescope de type Cassegrain, ce qui impose d'accrocher les instruments à la monture du télescope, et donc de les faire bouger avec lui. Cela ajoute donc une contrainte de compacité et de poids aux différents instruments de GEMINI, et est une source de contraintes mécaniques. Notons en outre que GeMS fait actuellement l'objet de nombreuses améliorations [Garrel *et al.*, 2016] : un nouveau module ASO pour étoiles naturelles, un nouveau système laser pour la génération des EGL, une étude pour le changement d'un miroir déformable, et la refonte de la commande des modes de basculement, principalement pour filtrer activement les vibrations, qui est l'objet de ce chapitre.

4.1.2 Analyse de performance des campagnes d'avril 2015

L'étude de performance présentée dans ce chapitre se base sur le traitement de jeux de données télémétriques de tip/tilt enregistrés sur GeMS en avril et mai 2015 par Lucie

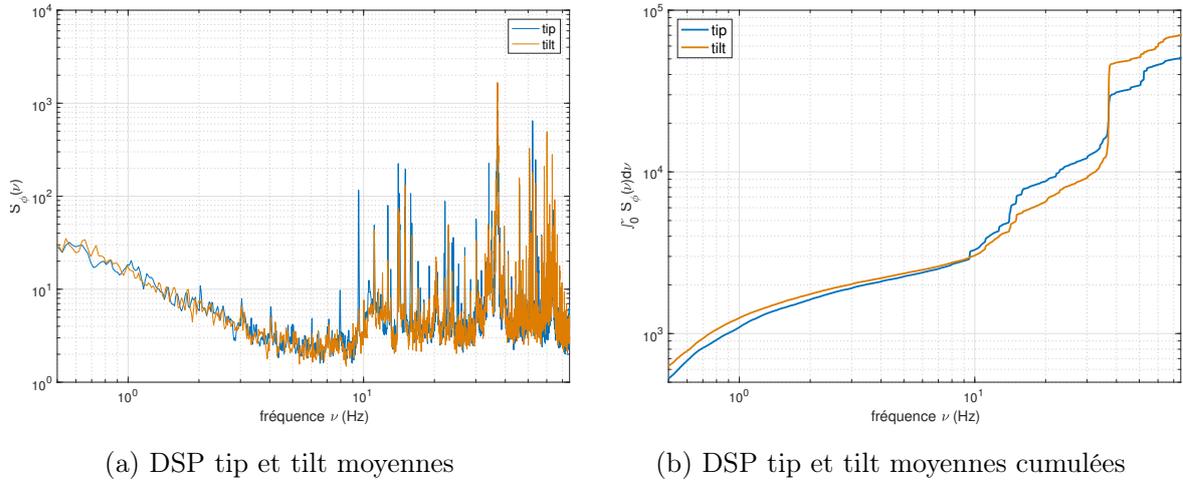


FIGURE 4.2 – Caractéristiques spectrales des 57 enregistrements ASO de GeMS en avril 2015

Leboulleux. Les données utilisées pour cette étude sont toutes composées de 8000 mesures en boucle fermée, acquises à une fréquence variant entre 150 et 700 Hz. L'instrument GeMS, et en particulier CANOPUS, est affecté par des vibrations assez intenses, comme le montre la figure 4.2. En effet, la figure 4.2a reproduit les spectres moyens de tip et de tilt sur avril et mai. Ces spectres sont parfaitement similaires sur les deux axes, ce qui montre que la présence des vibrations est liée au mode d'opération du télescope (rotation, angle d'azimut, etc...) [Leboulleux *et al.*, 2015]. On observe de plus qu'une multitude de vibrations est présente dans ces spectres moyens, mais trois vibrations se démarquent franchement : à 15 Hz, à 60 Hz, et une particulièrement importante à 37 Hz. La figure 4.2b représente les DSP cumulées correspondantes. La vibration à 37 Hz apparait clairement la plus intense et la plus pénalisante car elle n'est pas filtrée par l'intégrateur. Elle peut même être parfois amplifiée par le régulateur si elle se trouve dans la zone de dépassement (ou *overshoot*), comme dans le cas de CANARY [Sivo *et al.*, 2014].

Ainsi, la compensation de ces vibrations est déterminante pour l'amélioration des performances de l'instrument. [Leboulleux *et al.*, 2015] montrent de plus que ces vibrations apparaissent et disparaissent au gré de l'inclinaison azimutale du télescope. Les méthodes impliquant une commande LQG avec identification de modèles de perturbations semblent donc particulièrement adaptées à ce type de situation.

4.2 Intégration d'une commande tip/tilt LQG pour GeMS

L'objectif de la collaboration avec GeMS est la mise en place d'une stratégie de commande permettant de passer directement d'un régulateur à action intégrale à un régulateur LQG avec filtrage de vibrations. L'algorithme de calcul de commande retenu est le calcul

par quatre matrices (M_1 , M_2 , M_3 , et M_4) inspiré de celui de DARC [Basden *et al.*, 2010]. Le calcul de la commande est alors réalisé en deux étapes (ou *threads*) indépendantes :

$$u_k = M_3 x_k + M_4 y_k \quad (4.2)$$

$$x_{k+1} = M_1 x_k + M_4 y_k \quad (4.3)$$

où x est un vecteur d'état dont les composantes dépendent du type de régulateur, y_k (boucle fermée) est la dernière mesure disponible, et u_k est la commande calculée. Du point de vue de l'optimisation du calcul, l'équation (4.2) peut être calculée d'emblée, la mise à jour de l'état pouvant être calculée ultérieurement. On pourrait en outre pré-calculer $M_3 x_k$ pour ne faire qu'une seule multiplication matrice - vecteur dans l'équation (4.2). Cette forme de calcul convient pour l'expression de tout régulateur linéaire. L'état x comprend l'état du filtre et les commandes passées u_{k-2} et u_{k-1} . Ainsi, pour avoir un régulateur LQG, on utiliserait les matrices :

$$M_1^{\text{LQG}} = \begin{pmatrix} A - L_\infty C & L_\infty & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$M_2^{\text{LQG}} = \begin{pmatrix} L_\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$M_3^{\text{LQG}} = (C_\phi A (A - L_\infty C) \quad C_\phi A L_\infty \quad 0), \quad (4.6)$$

$$M_4^{\text{LQG}} = C_\phi A L_\infty. \quad (4.7)$$

Notons que dans la boucle la valeur d' u_{k-1} est forcée à zéro dans le calcul matriciel (lignes de zéros dans M_1^{LQG} et M_2^{LQG}), mais est mise à jour en fin de boucle, car si elle n'a pas d'utilité dans le calcul de la commande en cour, elle sert à d'autres calculs comme la reconstruction des pentes pseudo boucle ouverte.

Pour un intégrateur, on utiliserait

$$M_1^{\text{int}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$M_2^{\text{int}} = \begin{pmatrix} g M_{\text{com}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$M_3^{\text{int}} = I, \quad (4.10)$$

$$M_4^{\text{int}} = g M_{\text{com}}. \quad (4.11)$$

La structure du CTR de GeMS implique de choisir une dimension de vecteur d'état maximale, qui est fixée arbitrairement à 64, soit 32 composantes pour chacun des axes des modes tip et tilt. La forme des équations (4.2) et (4.3) impose, afin de tenir compte de la rétroaction, de stocker dans le vecteur d'état les deux dernières occurrences de commande, quel que soit le régulateur. La fréquence d'opération de GeMS (150 – 700 Hz) impose que le temps alloué au calcul de la commande reste inférieur à 50 micro-secondes. Pour

assurer la rapidité d'exécution du calcul, celui-ci est décomposé en *threads* et parallélisé. Les temps de calcul mesurés lors de l'intégration de l'algorithme sur le CTR de GeMS se sont révélés inférieurs à 35 micro-secondes, quel que soit le régulateur et le type de modèle utilisés, garantissant ainsi un fonctionnement en dessous des spécifications avec une marge significative. Une description plus complète (avec pseudo-code) de l'implémentation temps-réel, ainsi que de l'interface graphique développée pour interagir avec le CTR de GeMS est fournie en annexe A.

L'identification de modèle pour la commande LQG est réalisée hors-ligne, sur une machine différente, interagissant avec le CTR via le réseau de l'observatoire GEMINI. Les enregistrements de pentes de GeMS sont (au maximum) composés de 8000 échantillons, ce qui représente une durée d'enregistrement variant de plus d'une minute à une dizaine de secondes. Néanmoins, le temps alloué à l'identification de modèles est fixé à une trentaine de seconde, se basant sur l'hypothèse de perturbations quasi-stationnaires à cette échelle de temps, et pour ainsi permettre une bonne adéquation des modèles à la perturbation. L'intégralité de l'échantillon est utilisée pour estimer le nouveau modèle d'état de la perturbation, et permettre le calcul du gain de Kalman L_∞ . Les matrices (M_1, M_2, M_3, M_4) sont alors calculées et envoyées dans un répertoire du CTR, écrasant les précédentes.

4.3 Identification paramétrique dynamique de modèles tip/tilt vibratoires pour la commande LQG

La commande des modes de basculement de GeMS est découplée du reste de la correction, car elle utilise uniquement les mesures ASO sur étoiles naturelles. La modification de la loi de commande des modes tip/tilt de GeMS est donc apparue comme une solution accessible pour améliorer la performance. La commande optimale LQG avec filtrage de vibrations a été introduite par [Petit, 2006]. Cette stratégie a été validée avec succès dans le cadre de CANARY [Sivo *et al.*, 2014] et de SPHERE [Sauvage *et al.*, 2014]. C'est pourquoi GEMINI étudie la mise en place d'un régulateur similaire pour son instrument d'OAMC. Le lecteur pourra trouver un inventaire des solutions de ce type dans [Kulcsár *et al.*, 2012a, Kulcsár *et al.*, 2017].

Utiliser en ligne les méthodes d'identification paramétrique est particulièrement adapté aux situations où les vibrations à corriger ne sont pas fixes, c'est-à-dire lorsque le système est perturbé par des vibrations dont la fréquence évolue, ou encore lorsque la présence de certaines vibrations est intermittente. Cela permet en effet d'actualiser régulièrement les modèles de perturbation nécessaires à la commande LQG au cours de l'observation, et d'adapter ainsi le modèle à l'évolution des caractéristiques des perturbations.

4.3.1 Identification paramétrique de modèles AR2 turbulent et vibratoires

[Meimon *et al.*, 2010b] ont proposé une méthode pour identifier une somme de modèles AR2 décrivant à la fois la partie turbulente et un nombre prédéfini de vibrations. Cette méthode consiste à ajuster, à partir d'une densité spectrale de puissance de tip ou de tilt, des modèles AR2 pour la turbulence et n_{vib} vibrations, sur une plage fréquentielle $\Delta\nu$, et avec une largeur minimum du pic vibratoire fixée à $\bar{\delta}\nu$. L'algorithme identifie en outre le niveau du bruit de mesure sur les modes de basculement à partir du plateau haute fréquence du spectre. La figure 4.3 représente la densité spectrale de puissance du modèle identifié par cette méthode sur le jeu de données (tip) NGS15108023248 enregistré sur GEMS en avril 2015 (350 Hz). Cette méthode identifie un modèle de turbulence auquel se rajoutent des pics vibratoires.

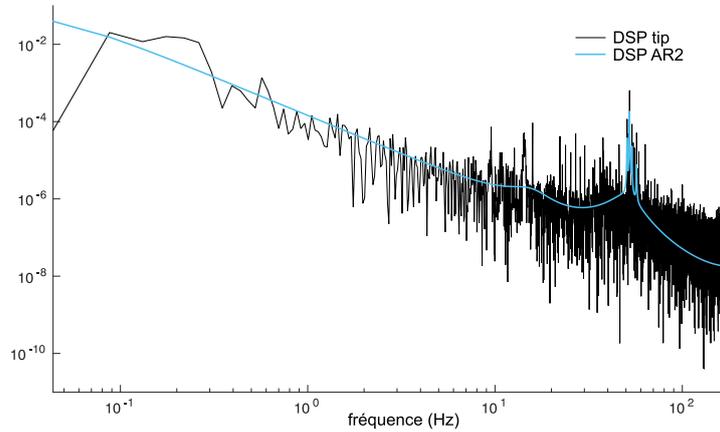


FIGURE 4.3 – DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode AR2. Ordre du modèle : 22 (1 AR2 turbulent + 10 AR2 vibratoires).

L'identification successive de cellules AR2 conduit à un modèle ne contenant que des pôles. La conséquence de l'absence de zéros dans le modèle est l'impossibilité de modéliser des « trous » dans le spectre de la perturbation. On remarque sur la figure 4.3 que la méthode s'est focalisée sur une zone dense de pics autour de 50 Hz en délaissant le reste de la bande. Le réglage des différents paramètres de l'algorithme, et en particulier du seuil $\bar{\delta}\nu$, permet de limiter cet effet, au détriment d'une représentation fidèle de ces zones denses.

La méthode est proposée avec un nombre par défaut de dix vibrations, qui convient à la majorité des jeux de données. L'ordre du modèle sera donc limité à 22 : un modèle AR2 pour la turbulence ainsi que dix pour la modélisation des vibrations (soit 2x11), de manière à conserver une bonne robustesse des modèles identifiés. En effet, forcer systématiquement l'algorithme à fournir un nombre de vibrations inadéquats peut l'amener à créer des modèles qui conduisent à des commandes instables. En particulier, on a remarqué que l'identification d'une vibration, pourtant non significative dans le jeu de données, pouvait conduire

à l'instabilité de la boucle fermée, sans pour autant que cela soit systématique. Cette méthode a toutefois participé avec succès à la validation d'une commande LQG complète en optique adaptative classique [Sivo *et al.*, 2014] et multi-objet [Sivo, 2013] sans présenter de problèmes de stabilité, et opère en option dans l'OA de SPHERE [Sauvage *et al.*, 2014] pour la correction des modes de basculement.

4.3.2 Le filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu (ou *extended Kalman filter* – EKF) est une méthode classique en identification paramétrique, permettant d'estimer les paramètres d'un système dynamique en temps-réel [Anderson et Moore, 1979, Walter et Pronzato, 1994, Ljung, 1999]. Le filtre de Kalman étendu utilise une linéarisation du modèle d'état autour de la dernière estimée disponible. La première étape consiste à définir une structure de modèle *a priori*. On privilégiera ici un modèle auto-régressif d'ordre n_{EKF} , qui présente moins de contraintes structurelles que celles de la méthode AR2, mais conserve un nombre de paramètres réduit, assurant un temps de calcul court. Le modèle de perturbation (scalaire) s'écrit donc :

$$\phi_k = \sum_{i=1}^{n_{\text{EKF}}} a_i \phi_{k-i} + v_k, \quad (4.12)$$

avec $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, les paramètres du modèle, et $\{v\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ un bruit blanc gaussien centré. On définit alors un nouveau vecteur d'état x_k^e , dit étendu,

$$x_k^e = \begin{pmatrix} x_k \\ \theta_k \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

où $\theta_k = (a_1, \dots, a_{n_{\text{EKF}}})^T$. L'équation d'état (2.80) se réécrit alors :

$$\begin{cases} x_{k+1}^e &= \begin{pmatrix} A(\theta_k) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} x_k^e + \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix} v_k, \\ y_k &= \mathcal{C} x_k^e \end{cases}, \quad (4.14)$$

où la matrice de modèle A dépend uniquement de θ_k , et $\mathcal{C} = (C \ 0)$. L'écriture fonctionnelle permet de ré-exprimer l'équation d'état de (4.14) sous forme plus compacte :

$$x_{k+1}^e = f(x_k^e) + v_k^e, \quad (4.15)$$

avec f une fonction matricielle non linéaire des coordonnées du vecteur d'état étendu, et $v_k^e = (\Gamma v_k \ 0)^T$. Ainsi, l'équation du filtre de Kalman étendu, qui est ici un observateur non-linéaire, s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k}^e &= \hat{x}_{k|k-1}^e + H_\infty [y_k - \mathcal{C} \hat{x}_{k|k}^e], \\ \hat{x}_{k+1|k}^e &= f(\hat{x}_{k|k}^e). \end{cases}. \quad (4.16)$$

Le gain d'observateur H_k est défini par :

$$H_k = \Sigma_{k|k-1} \mathcal{C}^T (\Sigma_w + \mathcal{C} \Sigma_{k|k-1} \mathcal{C}^T)^{-1}, \quad (4.17)$$

avec

$$\Sigma_{k|k-1} = \mathcal{A}_{k-1} \Sigma_{k-1} \mathcal{A}_{k-1}^T + \Sigma_w, \quad (4.18)$$

où \mathcal{A}_k désigne la matrice jacobienne de f évaluée en $\hat{x}_{k|k}^e$, et

$$\Sigma_{k-1} = \Sigma_{k-1|k-1} = \Sigma_{k|k-1} - H_{k-1} \mathcal{C} \Sigma_{k-1|k-2}. \quad (4.19)$$

On calcule alors \mathcal{A}_k en utilisant un développement de Taylor du premier ordre de la fonction f autour du point $\hat{x}_{k|k}^e$:

$$f(x_k^e) \approx f(\hat{x}_{k|k}^e) + \mathcal{A}_k (x_k^e - \hat{x}_{k|k}^e). \quad (4.20)$$

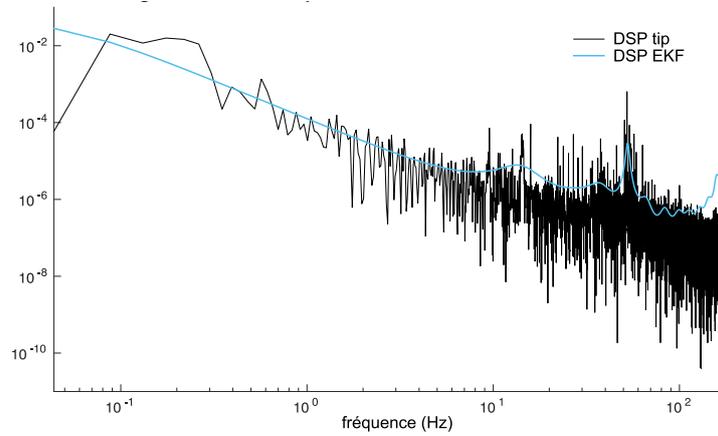


FIGURE 4.4 – DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode EKF. Ordre du modèle : 30.

Dans le cadre de GeMS, le filtre de Kalman étendu est mis en œuvre pour un modèle auto-régressif d'ordre 30, ce qui représente la limite en terme d'ordre de modèle dans l'architecture du CTR de CANOPUS (cf. paragraphe 4.2). Cette méthode, de par sa simplicité, présente seulement l'intérêt de servir de témoin pour analyser les performances des autres méthodes décrites dans ce manuscrit. Une DSP du modèle identifié grâce à cette méthode est reproduite en figure 4.4. Elle présente un aspect plus lisse que les autres modèles, ce qui est lié à sa structure relativement simple (processus ARn), et présente parfois, aux hautes fréquences, une élévation anormale du spectre.

4.3.3 Minimisation de l'erreur de prédiction (PEM)

L'identification par minimisation de l'erreur de prédiction (ou *prediction error minimization* – PEM) est une autre méthode classique en identification paramétrique [Ljung, 1999]. Cela consiste, à partir d'un modèle de mesure donné, à identifier directement le filtre de Kalman sous forme prédicteur :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} &= \mathcal{A} \hat{x}_{k|k-1} + \mathcal{L} y_k \\ \hat{y}_{k|k-1} &= \mathcal{C} \hat{x}_{k|k-1} \end{cases}, \quad (4.21)$$

où \mathcal{A} et \mathcal{L} sont respectivement les estimées de $(A - L_\infty C)$ et L_∞ , en minimisant l'écart quadratique entre la mesure et son modèle :

$$J_{\text{PEM}} = \left\| y_k - \hat{y}_{k|k-1} \right\|_2^2. \quad (4.22)$$

Cet algorithme ne nécessite *a priori* pas de structure de modèle prédéfinie, même s'il est possible de l'y contraindre. En effet, en l'absence de contrainte, il affinera un modèle de type auto-régressif à moyenne mobile (ARMA) d'ordre $(n_{\text{PEM}}, n_{\text{PEM}})$, estimant n_{PEM}^2 paramètres (contre n_{PEM} paramètre pour un modèle AR du même ordre). On se ramène donc à l'optimisation fortement multi variables. Cette routine, intégrée dans les fonctions de base de Matlab[®], est accompagnée de plusieurs méthodes de descente : gradient, Gauss-Newton, Gauss-Newton adaptatif, ou encore Levenberg-Marquardt.

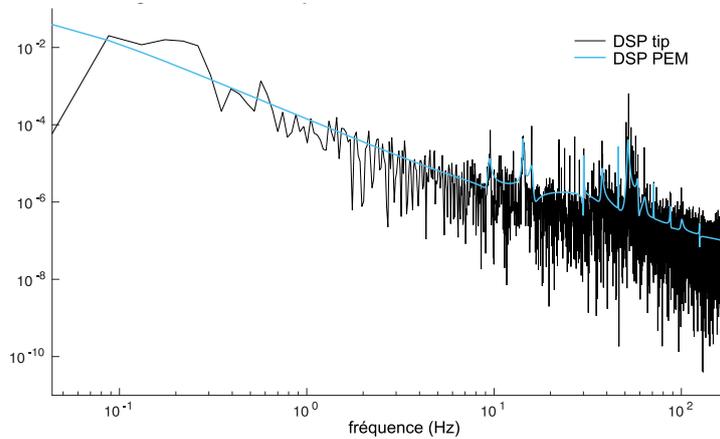


FIGURE 4.5 – DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode PEM. Ordre du modèle : 30.

Une densité spectrale de puissance typique d'un modèle identifié par cette technique est reproduite sur la figure 4.5. De par sa structure de modèle non contrainte, la méthode PEM permet d'affûter la forme du modèle pour coller au mieux à la trajectoire de mesure. Ainsi, la DSP du modèle est très détaillée, modélisant beaucoup de pics vibratoires et d'aspérités présentes sur la DSP empirique.

Cette méthode sera aussi principalement utilisée comme référence pour ses bonnes performances dues à la richesse du modèle identifié. En revanche, son temps d'exécution dépasse les trente secondes allouées sur le PC dédié (mais peu performant). Les modèles identifiés par cette méthode dans la suite de ce paragraphe seront d'ordre 30.

4.3.4 Minimisation d'erreur de prédiction en cascade (cPEM)

La dernière méthode utilisée pour cette étude, baptisée cPEM pour *cascaded*-PEM, et introduite par [Kulcsár *et al.*, 2012a], se veut être un compromis entre les méthodes PEM et

4.3. Identification paramétrique dynamique de modèles tip/tilt vibratoires pour la commande LQG

AR2. En effet, les modèles d'ordre 2 ont montré leur efficacité pour la modélisation des différents phénomènes perturbant un système d'optique adaptative [Petit, 2006, Correia, 2010]. Parallèlement, la simplicité des modèles auto-régressifs semble limiter les performances de la commande LQG [Kulcsár *et al.*, 2012a]. Ainsi, la méthode cPEM consiste à utiliser la méthode PEM pour identifier, en cascade, des modèles ARMA (2, 2), moins contraints que ceux de la méthode AR2. Une DSP typique d'un modèle issu de cette méthode d'identification est reproduite en figure 4.6. Le niveau de détail du spectre se situe entre la méthode PEM et la méthode AR2. En effet, le nombre de phénomènes dont tient compte le modèle cPEM est inférieur à celui de la méthode PEM (figure 4.5), mais présente des aspérités et des pics vibratoires non présents sur le modèle identifié par la méthode AR2 (figure 4.3).

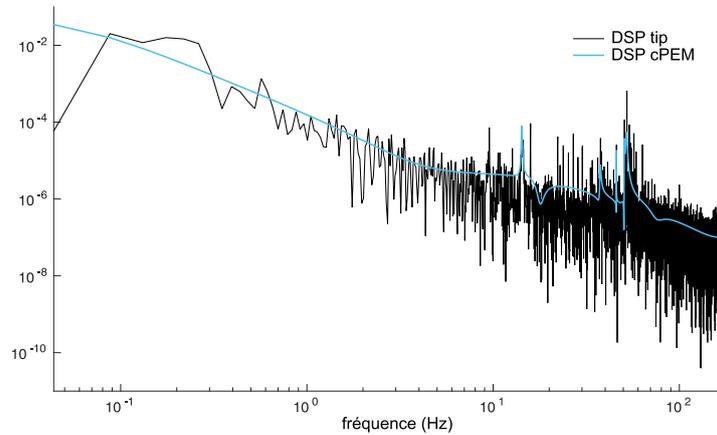


FIGURE 4.6 – DSP du modèle identifié sur le jeu de données NGS15108023248 par la méthode cPEM. Ordre du modèle : 30 (15 cellules d'ordre 2).

L'algorithme fonctionne de la manière suivante :

- On identifie un modèle ARMA (2, 2) avec la méthode PEM à partir d'une trajectoire de mesure.
- On utilise ce modèle pour générer une trajectoire de mesure estimée \hat{y} .
- On soustrait les deux trajectoires :

$$\tilde{y} = y - \hat{y}. \quad (4.23)$$

- On utilise \tilde{y} en entrée d'une nouvelle identification ARMA (2, 2) par PEM.
- On reproduit l'opération jusqu'à obtenir un modèle de l'ordre souhaité.

Un schéma de principe de cet algorithme est reproduit en figure 4.7. Cet algorithme présente plusieurs avantages structurels. En effet, sa complexité reste limitée en comparaison avec un modèle PEM d'ordre élevé, et assure surtout une bonne robustesse de la commande synthétisée à partir du modèle identifié. En effet, l'optimisation au cœur de la méthode PEM est basée sur le calcul de la trajectoire issue du modèle estimé, et minimise sa

distance à la trajectoire de référence, ce qui assure sa convergence, si l'optimisation (et donc l'estimation) converge. On privilégie une optimisation de type Levenberg-Marquardt pour chaque étape de PEM, pour sa meilleure convergence, au léger compromis du temps de calcul. L'ordre global du modèle identifié par cette méthode dans la suite de ce paragraphe est fixé à 30, soit quinze cellules d'ordre deux.

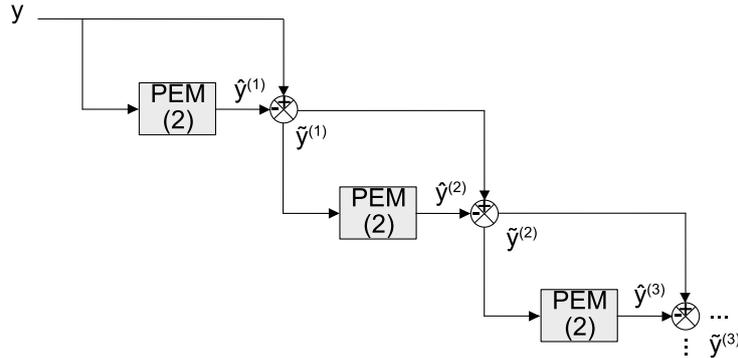


FIGURE 4.7 – Schéma de principe de l'algorithme d'identification c-PEM (PEM en cascade) avec trois cellules d'ordre deux représentées

4.4 Analyse des performances des régulateurs synthétisés en rejeu

L'évaluation des performances des quatre algorithmes d'identification se fait à l'aide de simulations en rejeu. Le principe de ce type de simulation est détaillé dans une première partie, avant de comparer effectivement les différents algorithmes.

4.4.1 Principe de la simulation en rejeu

La simulation en rejeu consiste à utiliser un jeu de données acquises sur le ciel en tant que mesure dans la simulation d'un système d'optique adaptative. GeMS est un instrument fonctionnant en boucle fermée, ce qui veut dire qu'il enregistre des trajectoires de tip/tilt résiduelles. La première étape consiste donc à reconstruire les pentes en boucle ouverte à partir des commandes enregistrées. On parle alors de mesures *pseudo* boucle ouverte (PBO). Ainsi, en considérant un retard de boucle de deux trames, la mesure *pseudo* boucle ouverte est calculée par :

$$y_k^{\text{PBO}} = y_k + u_{k-2}, \quad (4.24)$$

avec y_k , la mesure en boucle fermée enregistrée par GeMS deux trames auparavant, u_{k-2} , la commande calculée et enregistrée par GeMS, et y_k^{PBO} la mesure *pseudo* boucle ouverte reconstruite. La trajectoire de mesure PBO est alors séparée en deux jeux de données (ou *batch*) de taille identique. Le premier jeu de données (4000 premiers échantillons) est utilisé pour identifier le modèle de perturbation. Le régulateur est ensuite synthétisé à partir de ce

modèle et corrige la perturbation sur le deuxième jeu de données. La figure 4.8 résume le fonctionnement de ce type de simulation. Ceci permet de se rapprocher de ce qui serait fait en opération, où la mise à jour du régulateur est faite sur un jeu de données enregistrées, puis le régulateur est appliqué au système.

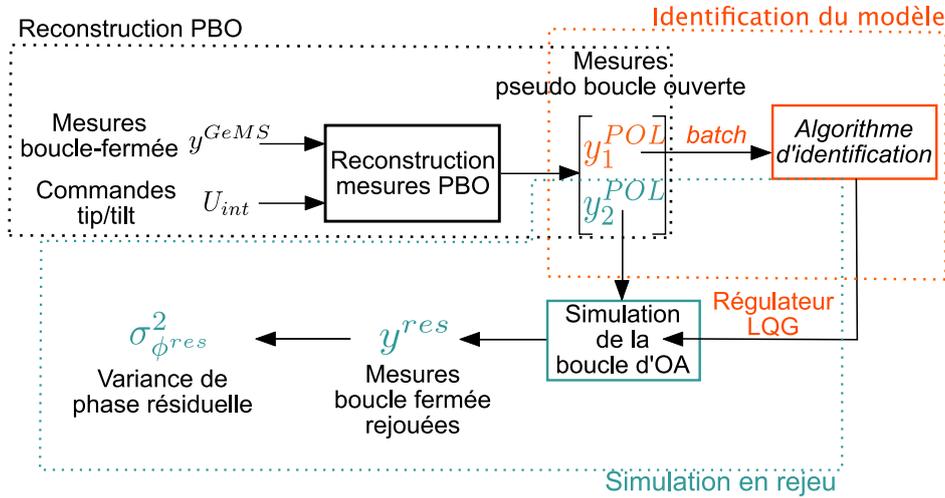


FIGURE 4.8 – Illustration du principe d’une simulation en rejeu à partir de données ciel boucle fermée

4.4.2 Performances des régulateurs

La reconstruction des mesures de tip/tilt pseudo boucle-ouverte a ainsi été effectuée pour les 67 enregistrements de 8000 points fournis par GEMINI. La courbe noire sur la figure 4.9 représente la racine carrée de l’écart quadratique moyen (ou *root mean square* – RMS, ou encore écart-type) des trajectoires pseudo boucle-ouverte sur les deux axes (tip et tilt), pour chacun des enregistrements. Notons tout de même que le RMS des trajectoires pseudo boucle-ouverte est relativement faible. Cela s’explique par l’utilisation de commandes lentes sur le miroir M2 actif de GEMINI, qui décharge le miroir de basculement de GeMS : on parle d’*offloads*. En toute rigueur, ces *offloads* devraient contribuer au calcul des trajectoires pseudo boucle-ouverte. Néanmoins, leur absence ne perturbe pas la comparaison des performances des différents régulateurs puisque ceux-ci sont en aval de l’*offload*.

La figure 4.9 reproduit l’ensemble des performances des différents algorithmes présentés au paragraphe 4.3 appliqués en rejeu sur 67 enregistrements de tip/tilt. La courbe bleue représente le RMS obtenu en rejeu pour l’intégrateur, et concorde avec la performance calculée à partir des mesures résiduelles enregistrées sur le ciel. Les quatre autres courbes représentent quant à elles les performances obtenues par les régulateurs LQG synthétisés à partir de modèles identifiés par chacune des méthodes étudiées : EKF (vert), AR2 (jaune), cPEM (orange) et PEM (rouge). La méthode EKF, qui propose le couple modèle-identification le plus simple offre les moins bonnes performances, à la fois en moyenne (53,3 mas) et au cas par cas pour la plupart des fichiers. La méthode PEM, en revanche,

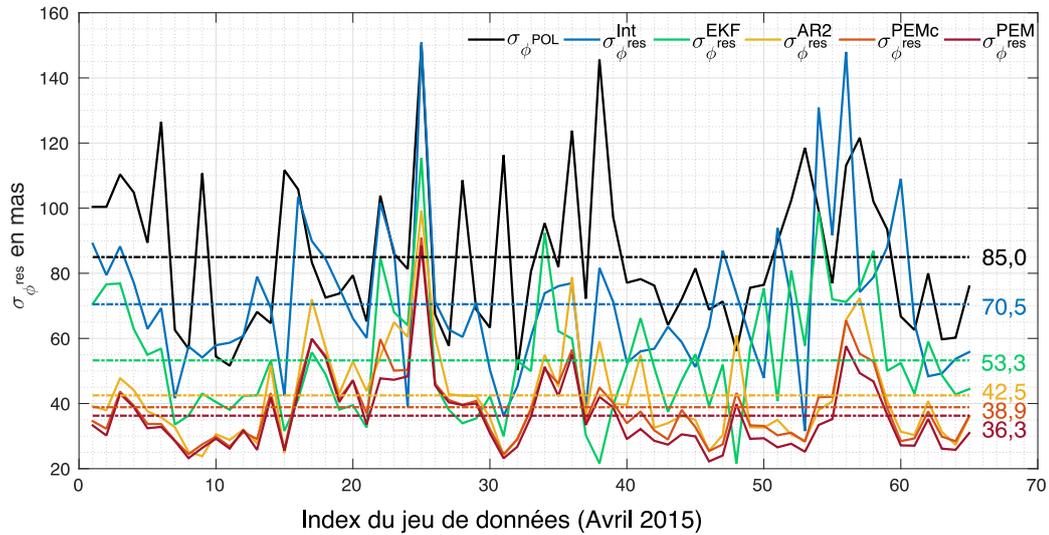


FIGURE 4.9 – Performance en rejeu des différentes commandes envisagées pour GeMS, sur 67 fichiers d’avril 2015

propose le modèle le plus riche, avec le plus de degrés de liberté, et offre quant à elle les meilleures performances (36,3 mas). Ces premières observations confirment que la qualité de la performance de la commande LQG est en partie liée au nombre de degrés de liberté offerts pour l’identification du modèle.

Les régulateurs synthétisés à partir des modèles identifiés par la méthode AR2 présentent une performance moyenne intermédiaire (42,5 mas), significativement meilleure que ceux issus de la méthode EKF, et sont significativement plus simples que les modèles ARMA d’ordre 30 de la méthode PEM. Néanmoins, la méthode AR2 a généré des modèles provoquant l’instabilité du régulateur LQG pour six enregistrements (non présents dans les 67 fichiers). Il s’avère que ce problème de convergence peut être évité en diminuant le nombre de vibrations que l’algorithme AR2 doit identifier. En effet, pour ces cas, la méthode AR2 a tendance à identifier plusieurs cellules AR2 pour la même vibration, ces cellules présentant des fréquences propres et des coefficients d’amortissement très légèrement différents. Les régulateurs basés sur ces modèles présentent alors plusieurs particularités : des matrices d’observabilité et de commandabilité mal conditionnées, et des valeurs propres proches de la limite de stabilité, qui peuvent conduire à l’instabilité de la boucle [Raynaud *et al.*, 2017].

La méthode cPEM offre les performances les plus séduisantes. En effet, l’écart-type moyen (38,9 mas) est très proche de celui obtenu par les régulateurs utilisant la méthode PEM, tout en conservant une complexité réduite par l’utilisation de cellules ARMA d’ordre 2, et ainsi un temps d’exécution plus court. De plus, la méthode cPEM, structurellement, ne présente pas les problèmes d’instabilité rencontrés avec la méthode AR2 (car la convergence de PEM assure la stabilité du régulateur), offrant ainsi toujours le même ordre de modèle pour toutes les situations, là où on serait obligé de le réduire pour faire converger

les régulateurs utilisant la méthode AR2.

4.4.3 Analyse du budget d'erreur

Le formalisme d'évaluation de budget d'erreur présenté au chapitre 3 permet de pousser l'analyse de ces performances un peu plus loin. Le budget d'erreur a ainsi été évalué pour les quatre types de régulateur LQG et pour un intégrateur de gain 0,5, à partir de chacun des 67 enregistrements d'avril 2015. Notons que cette application du formalisme présente quelques particularités. En premier lieu, la procédure de calcul des mesures moyennes des modes de basculement place la commande tip/tilt dans une configuration équivalente à un système SCAO. En effet, la moyenne arithmétique de la mesure des modes de basculement sur les (au plus) trois ASO de GeMS se comporte comme un seul ASO, observant un champ identique à celui de correction (un seul TTM). De plus, les modes de basculement étant décorrélés [Noll, 1976], la simulation est scalaire, c'est-à-dire que l'on ne calcule que des DSP scalaires sur chacun des modes, indépendamment. Enfin, les mesures ASO sont supposées sans repliement, les ASO ne mesurant que la pente moyenne sur la pupille sur les deux axes associés aux modes de basculement. De même l'erreur de *fitting* n'est pas à prendre en compte dans cette situation puisque la boucle bas ordres ne corrige que les modes de basculement, le reste étant géré par la boucle hauts-ordres (qui sera elle affectée par l'erreur de *fitting*).

La figure 4.10 reproduit les budgets d'erreur moyens des modes de basculement sur avril 2015 [Juvénalet al., 2015a]. On observe en premier lieu que l'erreur temporelle est la première responsable des meilleures performances des régulateurs LQG. En effet, la compensation des vibrations sur les modes de basculement se traduit par une diminution de la variance d'erreur temporelle. On peut expliquer ce phénomène en s'orientant vers les fonctions de transfert de réjection. Pour l'intégrateur, par exemple (figure 2.23), on observe une zone de dépassement (gain supérieur à 1) à haute fréquence. Cela veut dire que si une vibration s'y trouve, le régulateur ne sera pas capable de la corriger, et amplifiera même son énergie, ce qui se traduit par une augmentation de l'erreur temporelle. On observe par ailleurs que les régulateurs LQG (hormis ceux utilisant la méthode AR2) propagent moins de bruit que l'intégrateur. Dans le cas de l'intégrateur, le compromis réjection – propagation de bruit est fixé par le choix du gain, qui peut éventuellement être optimisé, ce qui n'est pas le cas dans ces simulations où le gain de l'intégrateur est identique pour tous les jeu de données ($g = 0,5$). Dans le cas de la méthode AR2, le niveau de bruit est identifié sur la DSP de la perturbation. En revanche, les méthodes PEM, cPEM, et EKF fournissent un modèle de mesure issu d'une optimisation qui a pour effet de rejeter plus de bruit. La méthode AR2 a donc tendance à sous-estimer le niveau de bruit. Le niveau de bruit est souvent rehaussé dans le calcul du gain de Kalman pour absorber les erreurs de modèles (*fudge factor*, voir par exemple [Sivo et al., 2014]). Aucun *fudge factor* n'a été utilisé ici dans le calcul de la méthode AR2 ce qui aurait pu améliorer ce point. La figure 4.11 reproduit les transferts de réjection de perturbation (figure 4.11a) et de propagation de bruit (figure 4.11b) pour les cinq régulateurs synthétisés à partir du jeu de données *ngs15105213323*. On peut remarquer que le transfert de propagation de bruit de la méthode

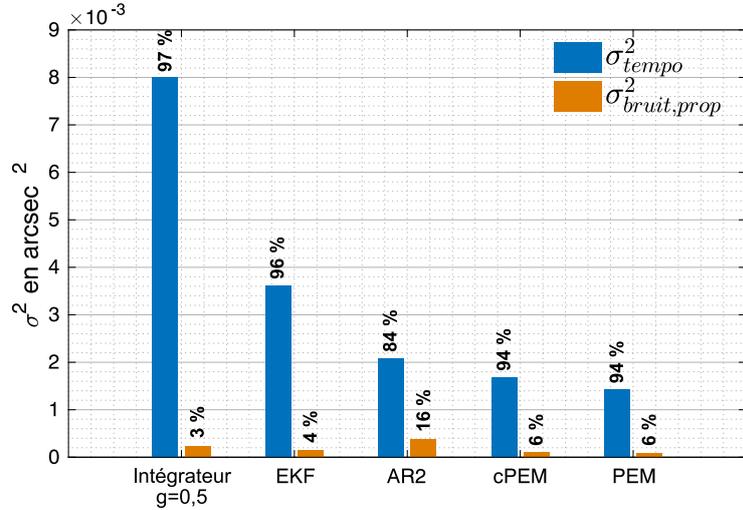


FIGURE 4.10 – Budget d’erreur moyen tip/tilt de GeMS sur les enregistrements d’avril 2015. Les cas d’instabilité de la méthode AR2 ont été supprimés pour tous les régulateurs.

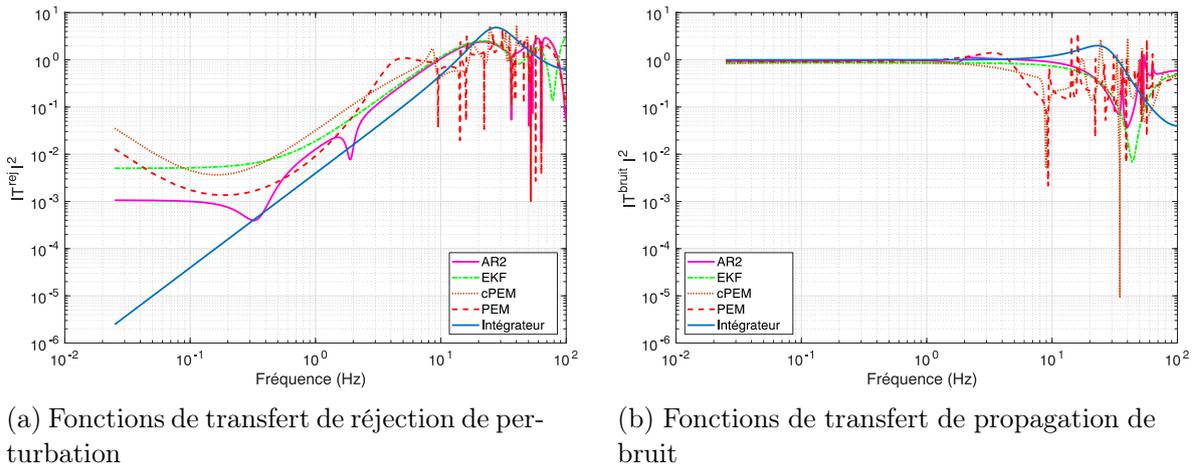


FIGURE 4.11 – Comparaison des fonctions de transfert des différents régulateurs pour le jeu de données ngs15105213323.

AR2 (jaune) rejette globalement moins que ses homologues LQG, ce qui corrobore les allégations précédentes.

4.5 Conclusion

L'apport en performance d'une solution LQG avec filtrage de vibrations pour GeMS est indiscutable en comparaison d'un simple intégrateur. En effet, quelle que soit la stratégie d'identification de modèle mise en œuvre, le gain en performance RMS du tip/tilt est supérieur à vingt millisecondes d'arc. En revanche, des différences significatives existent entre les différentes méthodes : le gain en performance augmente avec la richesse du modèle identifié (au prix du temps d'exécution de l'algorithme), la méthode AR2 présente des problèmes occasionnels d'instabilité de la boucle (pour 9% des jeux de données étudiés), et demande un réglage plus fin (différents seuils, *fudge factor* éventuel, etc), la méthode PEM, très performante, présente un temps d'exécution deux fois supérieur en moyenne aux autres méthodes et la méthode cPEM semble représenter le compromis complexité – performance le plus intéressant.

Ces comparaisons de performance ont motivé l'observatoire GEMINI à accepter une mise à jour du CTR de GeMS. Une mission à La Serena a été réalisée en automne 2015 pour intégrer la nouvelle structure temps-réel, et implémenter les méthodes AR2, cPEM et PEM pour la commande LQG des modes tip et tilt. Une interface graphique (développée avec Matlab®) permet aux différents algorithmes d'identification, développés sous différents environnements de programmation (AR2 avec IDL, PEM et cPEM avec Matlab), d'interagir avec le CTR. L'interface graphique permet en outre de passer très rapidement d'une solution intégrateur à une solution LQG (et vice-versa), ou encore entre les différentes modalités proposées en LQG (cf annexe A).

Chapitre 5

Nouveaux régulateurs tenant compte de la direction du vent : performance et analyse

Sommaire du chapitre

5.1	Quelle modélisation peut-on déduire des données?	114
5.2	Un compromis : le régulateur LQG tiède	115
5.2.1	Mode bouillonnant	115
5.2.2	Mode translation pure	117
5.2.3	Mode tiède	121
5.2.4	Expression en optique adaptative grand champ	122
5.3	Impact de la modélisation sur la performance en SCAO	122
5.3.1	Conditions de simulation	122
5.3.2	Simulation d'une turbulence en translation pure	123
5.3.3	Simulation d'une turbulence bouillonnante	124
5.4	Conclusion et discussion	124

Les analyses de performance en simulation (chapitre 3) et du système GeMS (chapitre 4) présentent une pénalisation importante sur la qualité d'imagerie des systèmes en provenance des termes d'erreur de repliement et d'erreur temporelle. Les simulations du chapitre 3 montrent de plus que ces erreurs chutent significativement avec l'accroissement de la qualité du modèle. En revanche, cet accroissement de qualité s'accompagne, sur la base des modèles utilisés au chapitre 3, d'un accroissement de la complexité calculatoire, et donc d'un accroissement du temps de calcul de la commande LQG. Ce chapitre propose de nouveaux régulateurs, s'adaptant à la nature de la turbulence, tenant ainsi compte de la direction du vent. Ainsi, après une brève discussion à propos de différents travaux sur la caractérisation des phénomènes turbulents, ce chapitre propose de combiner des approches déjà éprouvées pour synthétiser un régulateur LQG tenant compte de la direction de vent, ainsi que des vitesses de décorrélation au sein de la pupille du télescope. Ce nouveau régulateur est alors testé en simulation à partir de données simulées.

5.1 Quelle modélisation peut-on déduire des données ?

Comme l'aborde le paragraphe 2.3.2.3, principalement deux modèles de turbulence atmosphérique sont utilisés dans les modèles pour la commande LQG. En effet, soit la turbulence est considérée comme figée, se translatant sous l'effet du vent, ce qui constitue l'approximation de *frozen flow*, soit elle est considérée comme bouillonnante, auquel cas les modèles représentent des décorrélations spatiales de la phase dans la pupille, dont la vitesse est reliée à la force, ou l'intensité, du vent, sans pour autant prendre en compte une direction d'évolution privilégiée.

Il est néanmoins de coutume de considérer, pour la simulation de turbulence, des modèles de turbulence multi-couche, où chaque couche correspond à une phase turbulente gelée en translation [Gendron et Léna, 1996]. La nature de la turbulence simulée est alors directement liée au nombre de couches considérées. Une turbulence mono-couche représentera une phase purement *frozen flow*, alors que lorsque le nombre de couches est relativement élevé, et la direction des vents au sein des couches suffisamment différente, la phase résultante dans la pupille présente un aspect principalement bouillonnant.

Les instruments d'optique adaptative, classique et grand champ, offrent pour ainsi dire un angle d'observation privilégié sur ces considérations. En effet, plusieurs études sur la nature de la turbulence ont été réalisées à partir de l'analyse de mesures de front d'onde, enregistrées sur différents instruments. A titre d'exemple, on peut citer l'étude de [Poyneer *et al.*, 2007], réalisée à partir de mesures ASO enregistrées à Hawaï par ALTAIR (observatoire GEMINI Nord) et par le système d'optique adaptative du télescope Keck, qui évalue en moyenne à 30% la proportion de *frozen flow* dans la puissance de la turbulence vue par ces deux systèmes d'optique adaptative classique. On peut encore citer le dépouillement de mesures enregistrées par SPHERE (ESO/VLT, Chili) par [Guesalaga *et al.*, 2014] qui met en évidence, en calculant l'évolution de la corrélation spatio-temporelle des pentes dans chaque sous-pupille, des enregistrements allant du *frozen flow* pur à des turbulences très bouillonnantes. L'information présente dans ces études révèle qu'en pratique les cas

extrêmes (*frozen flow* pur ou bouillonnement pur) sont suffisamment rares pour être considérés comme exceptionnels. Par conséquent, les modèles utilisés pour la commande LQG ne sont (statistiquement) jamais adaptés à la nature de la turbulence, ce qui pénalise les performances. Il serait donc intéressant de disposer de modèles de turbulence, ou de lois de commande, pouvant combiner ces deux types de comportement.

5.2 Un compromis : le régulateur LQG tiède

L'objet de ce paragraphe est ainsi de proposer une solution permettant de combiner les comportements turbulents en tirant parti du formalisme de commande déjà éprouvé avec CANARY, SPHERE ou encore GeMS. Ainsi, ce formalisme est dans premier temps réécrit, pour permettre, dans un second temps, de formuler une adaptation purement *frozen flow*. Enfin, on montre que ces deux formalismes se combinent sous une forme permettant un compromis entre *frozen flow* et bouillonnement.

5.2.1 Mode bouillonnant

Le mode « bouillonnant » se base ainsi sur les modèles auto-régressifs du deuxième ordre de turbulence proposés par [Petit, 2011] et utilisés pour CANARY [Sivo *et al.*, 2014]. Ces modèles, exprimés dans une base de représentation de Zernike, consistent à définir, pour chaque mode de Zernike, un processus AR2 décrivant la dynamique turbulente sur celui-ci. De ce fait, l'évolution de la turbulence sur le $i^{\text{ème}}$ mode de Zernike est régie par l'équation de récurrence :

$$\phi_{k+1} = a_1^{(i)} \phi_k + a_2^{(i)} \phi_{k-1} + v_k^{(i)}, \quad (5.1)$$

où $v^{(i)}$ est un bruit blanc gaussien centré, appelé bruit formeur, et de variance connue. Le couplage entre modes se fait grâce à la corrélation entre les $v^{(i)}$ au travers d'une matrice de covariance Σ_v , tenant compte des statistiques Kolmogorov et de la dynamique temporelle induite par le modèle (5.1) pour l'ensemble des modes. Les paramètres de l'AR2 sont définis par :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \exp(-\xi \omega_0 T_e) \cos(\omega_r T_e) \\ a_2 = -\exp(-2\xi \omega_0 T_e) \end{cases}, \quad (5.2)$$

avec ξ le coefficient d'amortissement, en pratique pris égal à 0,9 [Sivo *et al.*, 2014], et (ω_0, ω_r) , les pulsations respectivement de coupure et de résonance. Ces pulsations sont définies par :

$$\begin{cases} \omega_0 = 2\pi \cdot 0.3 (n_i + 1) \frac{V}{D_{\text{pup}}} \\ \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \end{cases}, \quad (5.3)$$

où, pour rappel, V est la norme du vent, et n_i l'ordre radial du $i^{\text{ème}}$ mode de Zernike. Cela assure en outre, pour chaque mode de Zernike, de respecter les fréquences de coupure mises

en évidence par [Conan *et al.*, 1995].

La dynamique de la turbulence sur l'ensemble de la base de Zernike peut alors s'écrire sous la forme d'un modèle d'état, en choisissant, par exemple, comme vecteur d'état

$$x_k = \begin{pmatrix} \phi_k^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_k^{(n_{\text{Zer}})} \\ \phi_{k-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \phi_{k-1}^{(n_{\text{Zer}})} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

avec $\phi_k^{(i)}$ le coefficient du $i^{\text{ème}}$ mode de Zernike à la $k^{\text{ème}}$ occurrence temporelle, et n_{Zer} le nombre de modes de Zernike composant la base de représentation considérée. De ce choix de vecteur d'état résulte la structure des matrices du modèle d'état

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \Gamma v_k \\ y_k = Cx_k + w_k \end{cases} \quad (5.5)$$

données par

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 & a_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & \ddots & \vdots & 0 & a_2^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_1^{(n_{\text{Zer}})} & 0 & \dots & 0 & a_2^{(n_{\text{Zer}})} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (D \quad 0) \quad (5.6)$$

avec I et 0 les matrices respectivement identité et nulle, de dimensions adéquates. La structure de régulateur importe peu en soi pour la configuration bouillonnante du régulateur, les versions LQG prédicteur (paragraphe 3.2.1.2) et LQG estimateur (paragraphe 3.2.1.3) étant complètement équivalentes. Néanmoins, pour la cohérence avec la suite de ces développements, la version LQG estimateur est privilégiée. Ainsi, la commande calculée à l'instant kT_e est

$$u_k = N^+ \widehat{\phi}_{k+1|k}, \quad (5.7)$$

$$= N^+ C_\phi^{(1)} A \widehat{x}_{k|k}, \quad (5.8)$$

$$= N^+ C_\phi^{(2)} A^2 \widehat{x}_{k|k}, \quad (5.9)$$

avec $C_\phi^{(1)}$ la matrice extrayant $(\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(n_{zer})})^T$ de x_k , et $C_\phi^{(2)}$ la matrice extrayant $(\phi_{k-1}^{(1)}, \dots, \phi_{k-1}^{(n_{zer})})^T$ de x_k .

Il a été démontré [Kulcsár *et al.*, 2006] que cette est optimale au sens de la variance de phase résiduelle. Il est montré en effet que ce critère

$$J(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\phi^{\text{res}}(t)\|^2 dt \quad (5.10)$$

se réécrit sous la forme

$$J(u) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \|\phi_k^{\text{tur}} - Nu_{k-1}\|^2 + \sigma_{ie}^2, \quad (5.11)$$

où ϕ_k^{tur} est la moyenne temporelle de la phase sur une trame, et σ_{ie}^2 est un terme constant à l'échelle de l'exécution de la boucle d'optique adaptative, appelé variance *inter-échantillon*, dépendant uniquement de la fréquence d'échantillonnage et des conditions d'observation [Kulcsár *et al.*, 2012b].

5.2.2 Mode translation pure

Le développement de ce régulateur a pour objectif d'utiliser uniquement la direction du vent pour la prédiction, à partir d'une estimée obtenue sur la base d'un modèle bouillonnant Zernike, similairement à ce qui avait été proposé dans [Piatrou et Roggemann, 2007]. Cette configuration est donc le cas extrême d'une phase se translatant simplement, sans dynamique interne. Ce formalisme permet en outre de mettre en place les bases du compromis évoqué au paragraphe 5.1.

5.2.2.1 Description de la stratégie de commande

Le modèle turbulent bouillonnant n'est assurément pas représentatif d'une phase gelée en translation, mais, grâce aux *a priori* statistiques sur la turbulence pris en compte dans le filtre de Kalman, la commande LQG qui en résulte reste globalement performante (en particulier en comparaison d'un intégrateur). Cependant, les erreurs de modèle ont probablement un impact important lors de l'étape de prédiction du filtre de Kalman. L'idée est donc ici de modifier uniquement cette étape de prédiction, en considérant que le filtre de Kalman, tenant compte à la fois d'*a priori* de type Kolmogorov/von Kármán et Taylor, serait parfaitement capable de réaliser une estimation (sans prédiction) fiable. Ainsi, le mode « gelé » de ce régulateur consiste à utiliser une commande de type LQG estimateur (cf. paragraphe 3.2.1.3), basée sur les mêmes modèles bouillonnants que ceux du paragraphe 5.2.1, en changeant uniquement le mode de calcul du gain de commande, qui comprend la prédiction.

Pour un modèle de mesure sous la forme $y_k = D\phi_{k-1} + w_k$, une estimation sans retard consiste à estimer ϕ_{k-1} . La sortie utile du filtre de Kalman est alors $\hat{\phi}_{k-1|k} =$

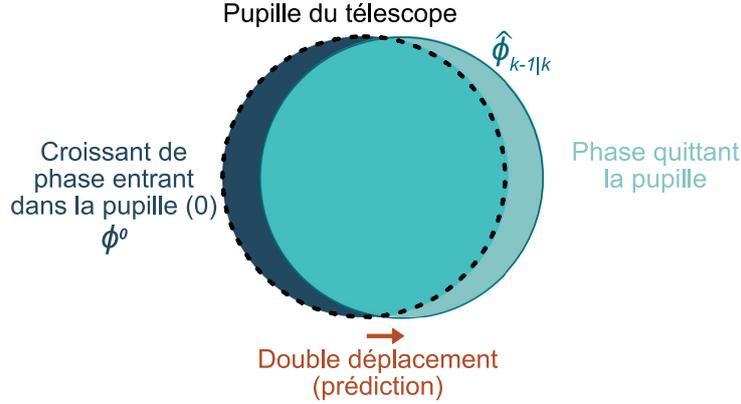


FIGURE 5.1 – Illustration du mécanisme de prédiction pour le régulateur LQG modifié en configuration *frozen flow*

$E(\phi_{k-1}|y_k, \dots, y_0)$. On utilise dans un second temps l'hypothèse de translation pour calculer le gain de commande. En effet, sous hypothèse d'une phase turbulente en translation pure, la meilleure prédiction à deux pas de ϕ_{k-1} , c'est-à-dire l'estimation de ϕ_{k+1} , résulte d'une translation de $\hat{\phi}_{k-1|k}$ équivalente au parcours de la turbulence sur deux trames d'échantillonnage, dans la direction du vent. Ainsi, en notant M_{dep} l'opérateur de déplacement pour une trame d'échantillonnage, le calcul de la commande s'exprime sous la forme :

$$u_k = N^+ M_{\text{dep}}^2 P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} \hat{x}_{k|k}. \quad (5.12)$$

où $P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}$ est le projecteur permettant de passer d'une représentation en Zernike à une représentation en zonal. La présence de $P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}}$ est une astuce d'implémentation pour utiliser un opérateur de déplacement M_{dep} défini en zonal (donc avec une expression très simple). En effet, les modes de Zernike étant définis sur une base circulaire, la définition d'un opérateur de déplacement dans cette représentation pose des problèmes numériques conduisant potentiellement à l'instabilité du modèle dynamique.

5.2.2.2 Remplissage de la phase entrant dans la pupille

Comme le montre schématiquement la figure 5.1, l'utilisation d'un opérateur de déplacement introduit une zone inconnue dans la phase prédite. En effet, le déplacement du contenu de $\hat{\phi}_{k-1|k}$ dans la pupille occasionne mécaniquement l'entrée de zéros (si la zone est remplie de zéros) sur un croissant en bord de pupille, problème qui n'a pas été vu dans [Piatrou et Roggemann, 2007]. Comme cette phase déplacée est en l'état (équation (5.12)) directement projetée sur le miroir déformable, il en résulte une dégradation significative de la performance. Même si la surface relative de cette zone de zéros dans la phase de correction est négligeable (de l'ordre du pourcent pour un système de type VLT, avec une turbulence se translatant à une vitesse de 15 mètres par seconde), son remplissage est déterminant pour assurer un gain en performance.

Pour cela, une première stratégie de remplissage consiste à remplir ce croissant à l'aide d'une estimation de type *Maximum a posteriori* basée uniquement sur des *a priori* spatiaux

de type von Kármán. Cela consiste à évaluer :

$$\widehat{\phi}^0 = \Sigma_{\phi^0, \phi^{\text{dép}}}^{-1} \Sigma_{\phi^0} \phi^{\text{dép}}, \quad (5.13)$$

où ϕ^0 désigne la portion de phase de correction correspondant au croissant, $\widehat{\phi}^0$ désigne l'estimée de ϕ^0 , $\phi^{\text{dép}}$ désigne la portion de $\widehat{\phi}_{k-1|k}$ restant dans la phase de correction après l'étape de double prédiction, $\Sigma_{\phi^0, \phi^{\text{dép}}}$ est la matrice de covariance spatiale de $(\phi^0, \phi^{\text{dép}})$, et Σ_{ϕ^0} est la matrice de covariance de ϕ^0 . Les matrices de covariance sont alors définies hors-ligne en zonal, en évaluant la covariance spatiale pour chaque couple de point grâce à l'équation (2.21). Ainsi, en notant :

$$E^{\text{MAT}} = \Sigma_{\phi^0, \phi^{\text{dép}}}^{-1} \Sigma_{\phi^0}, \quad (5.14)$$

le calcul de la commande devient :

$$u_k = N^+ (I + E^{\text{MAP}}) M_{\text{dép}}^2 P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} \widehat{x}_{k|k}. \quad (5.15)$$

Cette formulation se rapproche de ce qui a été proposé pour la simulation à la volée d'écrans de phase *frozen flow* [Assémat *et al.*, 2006, Fried et Clark, 2008]. La matrice E^{MAP} est la matrice généralisant l'expression du MAP à l'ensemble de la pupille, là où [Assémat *et al.*, 2006] utilisent des cartes de phase carrées (avant masquage par la pupille du télescope), en estimant la colonne (ou ligne) entrante à partir des deux colonnes (ou lignes) précédentes. L'utilisation du MAP en tenant compte ici de la géométrie particulière du problème (estimation d'un croissant en bord de pupille) limite l'estimation aux points du croissant, l'estimation de points hors de la pupille n'apportant rien du point de vue de la performance. Une approche similaire a été utilisée par [Correia *et al.*, 2015, Jackson *et al.*, 2015] pour estimer la phase dans la pupille sous hypothèse de *frozen flow*. Par ailleurs, l'utilisation de l'intégralité de la phase restant dans la pupille (après la double prédiction) pour cette estimation garantit la conservation de grandeurs comme la grande échelle similairement à la méthode de [Fried et Clark, 2008]. Concernant l'optimisation de la complexité calculatoire de cette méthode de remplissage, le tirage aléatoire de points dans la pupille, dans la trempe de ce que propose [Fried et Clark, 2008], pourrait limiter l'éventuelle lourdeur calculatoire de cette estimation. Enfin, notons que l'approche MAP, telle qu'elle est décrite ici n'est pas optimale. En effet, une approche optimale se baserait sur la connaissance de la « vraie » phase dans $\phi^{\text{dép}}$. Or nous n'y avons pas accès.

Par conséquent, une seconde approche est envisagée, consistant à remplacer la portion de phase inconnue par la prédiction fournie par le filtre de Kalman (utilisé pour l'estimation sans retard). Cette prédiction utilisée uniquement pour remplir le croissant est donc basée sur un modèle de perturbation bouillonnant. Cela revient ainsi à calculer :

$$\widehat{\phi}^0 = M^0 P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} A^2 \widehat{x}_{k|k}, \quad (5.16)$$

où M^0 désigne le masque de phase correspondant à ϕ^0 . La commande devient donc :

$$u_k = N^+ \left(M_{\text{dép}}^2 P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} + M^0 P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} A^2 \right) \widehat{x}_{k|k}. \quad (5.17)$$

Cette méthode n'est pas non plus optimale, le modèle bouillonnant utilisé n'étant pas compatible avec l'hypothèse de translation pure de la phase. Néanmoins, cette estimation a l'intérêt de tirer parti des bonnes propriétés du filtre en terme de filtrage du bruit de mesure, et est une sortie directe du filtre de Kalman, limitant ainsi les contraintes pour l'implémentation temps-réel de ce régulateur.

5.2.2.3 Optimalité du régulateur

L'optimalité d'un régulateur LQG est toujours établie dans le cas où l'on suppose que le modèle de perturbation est vrai, ce qui n'est en pratique jamais le cas en ce qui concerne la turbulence en optique adaptative. En revanche, on peut poser la question de l'optimalité de ce régulateur pour une vraie perturbation supposée de type turbulence *frozen flow*.

La performance de ce régulateur est évaluée sur le critère de la variance de phase résiduelle. Son expression, en négligeant la variance inter-échantillon est donnée par :

$$\Sigma_{\phi^{\text{res}}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \|\phi_k - \phi_k^{\text{cor}}\|^2, \quad (5.18)$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \|\phi_k - Nu_{k-1}\|^2. \quad (5.19)$$

En négligeant dans un premier temps ce qu'il advient au sein du croissant de phase ϕ^0 , on introduit dans l'expression de la variance de phase résiduelle l'expression de la commande en équation (5.12) :

$$\Sigma_{\phi^{\text{res}}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left\| \phi_k - M_{\text{dep}}^2 C_{\phi}^{(2)} \hat{x}_{k-1|k-1} \right\|^2, \quad (5.20)$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left\| \phi_k - M_{\text{dep}}^2 \hat{\phi}_{k-2|k-1} \right\|^2, \quad (5.21)$$

où toutes les phases sont considérées être dans une représentation zonale, par souci de simplification des équations.

En toute rigueur, en considérant que la phase turbulente est définie sur un support de dimension infinie, l'hypothèse de *frozen flow* sur un horizon m se traduit par :

$$\phi_k = M_{\text{dep}}^m \phi_{k-m}, \quad \forall m \leq k. \quad (5.22)$$

Ainsi, en reportant l'expression formelle de l'hypothèse de *frozen flow* pour $m = 2$ dans

l'équation (5.21), on peut écrire :

$$\Sigma_{\phi^{\text{res}}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left\| M_{\text{dép}}^2 \phi_{k-2} - M_{\text{dép}}^2 \hat{\phi}_{k-2|k-1} \right\|^2, \quad (5.23)$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left\| M_{\text{dép}}^2 \right\|^2 \left\| \phi_{k-2} - \hat{\phi}_{k-2|k-1} \right\|^2, \quad (5.24)$$

$$= \left\| M_{\text{dép}}^2 \right\|^2 \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left\| \phi_{k-2} - \hat{\phi}_{k-2|k-1} \right\|^2. \quad (5.25)$$

Or, si on considère la phase décrite sur un support de dimension infinie, la norme de l'opérateur de déplacement est unitaire, car il ne modifie pas l'énergie du processus. De ce fait, l'optimalité de ce régulateur, vis-à-vis de la variance de phase résiduelle, est liée à celle du filtre de Kalman. Or le filtre de Kalman est basé sur un modèle inexact vis-à-vis de l'hypothèse de départ : la phase turbulente est un phénomène de *frozen flow*.

Ainsi, la pertinence de cette stratégie de commande non optimale réside dans son pragmatisme : contourner les handicaps des stratégies de commande actuelles, tout en tentant d'en préserver les avantages.

5.2.3 Mode tiède

L'intérêt des régulateurs bouillonnant et avec hypothèse de *frozen flow* est d'avoir une structure identique. En effet, le filtre de Kalman se base sur le même modèle AR2 (exprimé sur une base de Zernike), l'unique différence résidant en le calcul du gain de commande, responsable de l'étape de prédiction. Ainsi, le calcul de la commande avec les modes « bouillonnant » et « gelé » peut s'écrire sous la forme unifiée :

$$u_k = K \hat{x}_{k-1|k}, \quad (5.26)$$

avec,

$$K = \begin{cases} N^+ C_{\phi}^{(2)} A^2, & \text{pour le mode bouillonnant,} \\ N^+ \left(M_{\text{dép}}^2 P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} + M^0 P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} A^2 \right), & \text{pour le mode gelé.} \end{cases}$$

On définit alors le mode « tiède » comme le régulateur ayant comme gain de commande un mélange de bouillonnement et de *frozen flow* :

$$K^{\text{tiède}} = N^+ \left(M_{\text{dép}}^{2-\rho} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} A^{\rho} + M^0(\rho) P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_{\phi}^{(2)} A^{2-\rho} \right), \quad (5.27)$$

où ρ est le paramètre d'ajustement de la nature du modèle, et $M^0(\alpha)$ est la portion de pupille contenant des zéros suite au déplacement de l'estimée par l'opérateur $M_{\text{dép}}^{2-\rho}$. Ainsi, cette forme contient les deux cas extrêmes : hypothèse de phase bouillonnante ou en translation pure, pour respectivement $\rho = 2$ ou $\rho = 0$, ainsi que les cas intermédiaires, pour $\rho \in]0, 2[$.

5.2.4 Expression en optique adaptative grand champ

Ce formalisme de commande se prête tout aussi bien à la commande de systèmes classiques que grand champ, pour lesquels l'apport en performance de la prise en compte de la direction du vent dans les couches a été montré [Ammons *et al.*, 2012]. En effet, en adoptant un formalisme similaire à celui du paragraphe 2.3.1.2, on peut fabriquer le régulateur tiède grand-champ, en utilisant un modèle AR2 par couche turbulente avec comme gain de commande :

$$K^{\text{tiède, GC}} = M_\beta N^+ \left(M_{\text{dép}}^{2-\rho} P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_\phi^{(2)} A^\rho + M^0(\rho) P_{\text{Zer} \rightarrow \text{Zon}} C_\phi^{(2)} A^{2-\rho} \right), \quad (5.28)$$

où M_β est la projection dans la direction d'intérêt β .

5.3 Impact de la modélisation sur la performance en SCAO

L'objet de ce paragraphe est d'évaluer l'apport en performance du régulateur proposé dans le paragraphe précédent. Pour ce faire, les performances des différents régulateurs seront comparées à l'aide d'une simulation d'un système d'optique adaptative classique de type NAOS. Les performances sont dans un premier temps comparées en utilisant une turbulence en entrée du système de type *frozen flow*, puis purement bouillonnante. Dans ces deux cas, le mode *frozen flow* est utilisé avec les deux méthodes de remplissage discutées au paragraphe 5.2.2.2 pour comparer leur performance. Ces résultats ont été publiés dans [Juvénal *et al.*, 2016]

5.3.1 Conditions de simulation

La simulation s'inspire des caractéristiques du système d'OA classique NAOS du VLT [Rousset *et al.*, 2003]. Le diamètre du miroir primaire (pupille du système) est de 8,2 mètres. La boucle d'OA est constituée d'un ASO de type Shack-Hartmann de 14x14 sous-pupilles et d'un miroir déformable de 15x15 actionneurs, positionnés aux coins des sous-pupilles. Les fonctions d'influence du MD sont supposées gaussiennes, et le couplage inter-actionneur est fixé à 20%.

L'occultation centrale est négligée de manière à ne pas compliquer la partie remplissage de croissant. En effet, en toute rigueur, si l'on considère une occultation centrale, un petit croissant de zéro se formerait sur le bord entrant de l'occultation, et nécessite d'être pris en compte. La fréquence d'échantillonnage est fixée à 100 Hertz pour éviter les problèmes d'interpolation dans l'opérateur de déplacement. Une prise en compte de ces interpolations est néanmoins réalisable sans trop de difficultés. La vitesse du vent est prise alternativement à 10 et 20 mètres par seconde. Le seeing est fixé à 0,5 secondes d'arc. La trajectoire de turbulence utilisée pour cette simulation est de 15000 points. Le tableau 5.1 résume ces conditions.

TABLE 5.1 – Conditions de simulation inspirées du système NAOS/VLT

seeing	0,5 arcsec
D_{pup}	8.2 m
$F_{\text{éch}}$	100 Hz
ASO	Shack-Hartmann 14x14
MD N_{act}	15x15
Couplage inter-actionneurs	20 %

5.3.2 Simulation d'une turbulence en translation pure

Dans un premier temps, la turbulence est simulée sous la forme d'un écran en translation, reproduisant le cas *frozen flow* pur. Les régulateurs sont comparés avec le rapport de Strehl calculé à partir de l'approximation de Mahajan (équation (2.39)). Le régulateur LQG bouillonnant obtient un rapport de Strehl de 50 % lorsque le vent est de dix mètres par seconde, et tombe à 35% avec un vent de vingt mètres par seconde. L'application de la nouvelle stratégie de commande (*frozen* LQG) sans remplissage du croissant conduit à une perte significative de performance, avec une chute du rapport de Strehl de 13 points lorsque le vent est modéré, et de 19 points pour un vent plus fort. Ceci confirme que malgré la faible proportion que représente ce croissant, son remplissage est déterminant pour assurer un bon niveau de performance. Les résultats des simulations sont regroupés dans la table 5.2.

On remarque que l'utilisation d'une méthode de remplissage apporte un gain significatif en performance. La méthode de remplissage MAP se trouve être moins efficace que le filtre de Kalman. En effet, lorsque le MAP conduit à un gain de 3 points de Strehl par rapport au cas AR2 en vent modéré, le remplissage du croissant par Kalman en apporte 5. La différence est encore plus significative avec un vent plus fort où le filtre de Kalman fait mieux que le MAP de 5 points de Strehl. On remarque de plus que le *frozen* LQG avec MAP ou Kalman maintient le niveau de performance autour de 50% lorsque la vitesse du vent double alors que le LQG bouillonnant chute de 15 points.

Rappelons que le MAP est optimal dans le cas où le conditionnement se fait par rapport aux vraies phases, c'est-à-dire en les supposant connues. Or ici, le conditionnement se fait par rapport aux phases estimées, ce qui suffit à rompre la condition d'optimalité. En revanche, le filtre de Kalman réalise une estimation tenant compte du compromis réjection - propagation de bruit, ce qui est probablement la raison pour laquelle il conduit à une meilleure performance que le MAP.

TABLE 5.2 – Performances des régulateurs en simulation avec génération d’une turbulence en *frozen flow*, exprimées en rapport de Strehl

R_S en bande H ($1.65 \mu m$)	$V_{\text{vent}} = 10 m.s^{-1}$	$V_{\text{vent}} = 20 m.s^{-1}$
LQG bouillonnant	50 %	35 %
Frozen LQG	37 %	16 %
Frozen LQG + MAP	53 %	47 %
Frozen LQG + Kalman	55 %	52 %

5.3.3 Simulation d’une turbulence bouillonnante

Ce deuxième cas consiste à simuler une turbulence en bouillonnement pur. Les résultats sont regroupés dans la table 5.3. Le LQG bouillonnant utilisant le bon modèle de turbulence conduit au meilleur résultat, avec un avantage de dix points de Strehl par rapport au *frozen LQG*. En effet, la phase turbulente ne présentant pas de direction d’évolution privilégiée, le *frozen LQG* se trompe systématiquement sur la prédiction.

TABLE 5.3 – Performances des régulateurs en simulation avec génération d’une turbulence bouillonnante, exprimées en rapport de Strehl

R_S en bande H ($1.65 \mu m$)	$V_{\text{vent}} = 10 m.s^{-1}$
LQG bouillonnant	48 %
Frozen LQG + MAP	38 %
Frozen LQG + Kalman	38 %

5.4 Conclusion et discussion

En conclusion, le *frozen LQG* introduit dans ce chapitre répond en partie aux attentes. En effet, c’est une solution originale permettant de conserver un temps de calcul réduit (comparé à une solution purement zonale), se basant sur les avantages d’une méthode modale, et utilisant un *a priori* adaptable à la situation (phase bouillonnante ou *frozen flow*). Ainsi, lorsque l’*a priori* correspond à la réalité physique du phénomène turbulent, le gain en performance du système d’OA est significatif, dépassant les 10 points de Strehl dans les simulations préliminaires réalisées. De plus, sa structure permet de passer facilement d’un cas à l’autre, le changement ne nécessitant que le re-calcul du gain hors-ligne, et s’adapte facilement à la commande de systèmes grand champ.

Le « LQG tiède » semble séduisant pour fournir une solution intermédiaire, mêlant à la fois bouillonnement et translation due au vent. Néanmoins, sa validation n'est pas aisée, et requiert des développements plus poussés. L'estimation des paramètres liés au vent est déterminante. En effet, la force de vent à fournir au modèle bouillonnant, liée à la vitesse de décorrélation temporelle de la phase, et la vitesse liée au déplacement de la phase dans la pupille, n'ont aucune raison d'être égales. Une procédure d'estimation est nécessaire, même dans un cas de simulation où tous les paramètres sont connus, pour déterminer la part de chacun des deux comportements dans le modèle de perturbation. On pourrait s'appuyer par exemple sur les travaux de [Guesalaga *et al.*, 2014] dont les résultats d'inter-corrélations spatio-temporelles des pentes (réalisés avec SPHERE, et présentés sous forme de films) présentent distinctement les deux effets : un pic de corrélation marqué se déplaçant, caractéristique du *frozen flow*, et un évanouissement du pic de corrélation, caractéristique du bouillonnement. L'estimation des paramètres de vent (force et direction) pourrait ainsi se baser sur ces développements, et être réalisés hors ligne pour définir le gain du régulateur « tiède ». Il serait également intéressant de s'inspirer des caractérisations en Fourier [Poyneer *et al.*, 2009], ou d'exploiter des résultats de profilométrie comme par exemple [Cortés *et al.*, 2012, Gilles et Ellerbroek, 2013, Osborn *et al.*, 2013].

Chapitre 6

Conclusion et discussion

Les objectifs scientifiques des futurs télescopes, ainsi que les nouvelles attentes pour les télescopes de dernière génération, motivent des développements importants autour des systèmes d'optique adaptative pour repousser leurs limitations. La commande de ces systèmes représente un enjeu primordial pour amener ces instruments d'optique adaptative vers de meilleures performances. Comprendre les limites des lois de commandes actuelles est un enjeu déterminant pour orienter efficacement les futurs développements. De même, l'étude des performances d'une loi de commande envisagée peut permettre d'orienter certains compromis, en particulier ceux de type performance/temps de calcul, qui se révèlent critique dans le cas des systèmes d'OA pour les ELT, ou encore pour les systèmes d'OA extrême.

L'essor des lois de commandes à haute performance a été important ces quinze dernières années. En effet, après la validation de concept en laboratoire pour toutes les modalités d'optique adaptative, la commande LQG a fait son apparition sur des systèmes opérationnels de pointe. La tendance actuelle suggérerait même, pour la plupart des instruments prévus pour l'E-ELT, des commandes mixtes, alliant une commande LQG avec filtrage de vibrations pour les basses fréquences spatiales de la perturbation, et une commande à action intégrale ou une reconstruction par *maximum a posteriori* pour le reste. Néanmoins, l'analyse de performance de ce type de loi de commande peut alors permettre de placer la jauge, en fonction de l'apport en performance, ou de la complexité calculatoire l'accompagnant.

C'est à ces questions que ces travaux de thèse tentent d'apporter des réponses.

Le chapitre 3 présente un formalisme dédié à l'évaluation du budget d'erreur détaillé de n'importe quel système d'optique adaptative classique dans un premier temps, puis son extension au cas grand champ. Nous avons défini la notion de « budget d'erreur commandé », qui comprend les termes dépendant du régulateur utilisé, par opposition au « budget d'erreur libre ». L'outil proposé s'oriente principalement sur l'évaluation du budget d'erreur commandé. Il permet ainsi de comparer les performances de différents régulateurs linéaires. Le calcul est fait selon une approche fréquentielle, et la décomposition de la variance de

phase résiduelle, donc du budget, se base sur une séparation de l'espace des phases, et sur la connaissance de la densité spectrale de puissance de la phase de perturbation. Le budget d'erreur peut alors être évalué à partir de spectres soit théoriques, soit estimés à partir d'une trajectoire de phase simulée, soit estimé à partir d'une trajectoire de mesure. Ce dernier cas nécessite alors une méthode d'estimation du spectre, comme proposé dans ce manuscrit. De très bons résultats d'estimation ont été obtenus à partir de données ASO lorsque le régulateur étudié n'exploite pas les corrélations entre modes. Cependant, elle s'avère moins satisfaisante lorsque le régulateur exploite les corrélations entre les modes de la base de représentation de la phase. Ces simulations montrent l'importance des termes croisés dans la performance d'une commande LQG. Le budget d'erreur est de plus calculé pour plusieurs régulateurs mixtes, et montre que l'utilisation d'une dizaine de modes de Zernike pour la partie LQG conduit à une performance proche des meilleurs cas LQG complets étudiés, avec une complexité calculatoire nettement réduite. La décomposition du budget d'erreur évaluée avec notre outil confirme la prépondérance du terme de repliement spatial lié à l'analyse de front d'onde. Elle montre de plus que l'amélioration des modèles par augmentation du nombre de modes dans le filtre de Kalman (et donc de la richesse du modèle) conduit bien à une diminution significative de cette erreur de repliement.

Le chapitre 4 a présenté les travaux liés à l'intégration d'une commande LQG avec filtrage de vibration pour l'optique adaptative multi-conjuguée GeMS, de l'observatoire GEMINI sud au Chili. Le formalisme d'évaluation de budget d'erreur présenté au chapitre 3 est par ailleurs utilisé pour comparer les performances de modèles issus de quatre différentes méthodes d'identification de la perturbation. L'étude de performance conduit ainsi à proposer trois de ces méthodes pour GeMS : la méthode utilisée sur SPHERE et CANARY, introduite par [Meimon *et al.*, 2010b] et appelée dans ce manuscrit AR2, une méthode classique très performante, mais présentant un temps de calcul élevé, nommée PEM, et une nouvelle méthode, proposée par [Kulcsár *et al.*, 2012a], nommée cPEM, montrant de bons résultats entre AR2 et PEN pour un cout de calcul réduit. Le budget d'erreur permet de mettre en valeur plusieurs défauts de la méthode AR2 liés à la complexité de réglages de ses différents paramètres (amortissement des vibrations identifiées, nombre de vibrations à identifier, facteur de bruit dans le calcul du gain de Kalman) pouvant conduire jusqu'à l'instabilité de la commande. Le budget d'erreur montre en outre que l'accroissement de la richesse du modèle, en particulier le nombre de degrés de libertés utilisés par le modèle identifié, conduit à une amélioration sensible de la performance du régulateur, évaluée en rejeu sur données ciel.

Les chapitres 3 et 4 ont mis en évidence l'importance du modèle dans la performance du régulateur LQG. Le chapitre 5 a donc proposé une modalité de commande originale, basée sur la modification du gain de commande LQG pour tenir compte de la direction du vent dans l'étape de prédiction. En effet, de nombreuses études sur la nature intrinsèque de la turbulence montrent qu'elle est principalement constituée de *frozen flow* (voir par exemple [Gendron et Léna, 1996], [Poyneer *et al.*, 2009] et [Guesalaga *et al.*, 2014]), et que les modèles bouillonnants, ne privilégiant aucune direction d'évolution de la phase, n'étaient pas adaptés à la totalité des situations. Néanmoins, ces modèles ont conduit à

des performances satisfaisantes jusqu'alors. L'approche proposée a donc consisté à utiliser le filtre de Kalman basé sur le modèle bouillonnant pour l'estimation de la phase. En revanche, le gain de commande est calculé pour un processus purement *frozen flow*. La phase estimée est donc simplement déplacée dans la pupille selon la direction du vent, et la partie entrante est remplie en utilisant au choix une estimation MAP ou la prédiction que fournirait le filtre de Kalman avec le modèle AR2 bouillonnant. Ces régulateurs conduisent à un gain en performance important lorsque la turbulence est en effet de type *frozen flow*, particulièrement lorsque le filtre de Kalman est privilégié au MAP pour le remplissage du croissant entrant. En revanche, comme attendu, les modèles bouillonnant sont meilleurs lorsque la turbulence est bouillonnante. On montre néanmoins que la forme des deux régulateurs est similaire, et permet, en ne changeant qu'une matrice (le gain de commande) de passer immédiatement de l'une à l'autre des méthodes, ne nécessitant aucun calcul en ligne.

L'analyse des performances des lois de commande actuelles est l'une des clés pour accroître les performances des systèmes d'OA. Ces travaux de thèse proposent un formalisme complet, basé sur une approche mathématique exacte, permettant de comparer impartialement toute loi de commande linéaire pour tout système d'optique adaptative. Néanmoins, le temps de calcul est un enjeu déterminant pour tout ce qui touche aux très grandes dimensions, à fortiori pour les télescopes géants. En effet, les temps de calcul de budget d'erreur pour des systèmes de type ELT sont aujourd'hui rédhibitoires. Le travail que nous avons réalisé sur l'optimisation de l'algorithme (parallélisation des évaluations fréquentielles, utilisation de modèles d'état) conduit à un temps de calcul dérisoire pour un télescope de classe quatre mètres (environ cinq minutes au total), et acceptable pour un grand télescope (deux heures environ au total). En revanche, l'évaluation du budget d'erreur pour un système d'optique adaptative classique pour les ELT pourrait prendre plusieurs jours consécutifs. De plus, la taille des matrices dans la mémoire vive des calculateurs pourrait aussi poser problème, les matrices de transfert faisant chacune plus de quarante gigaoctets pour un système de type VLT.

Néanmoins, de nombreuses perspectives d'amélioration du code sont d'ores et déjà envisageables. En effet, du point de vue du calcul, la structure creuse des matrices de transfert n'a pas été exploitée, et représente à court terme une perspective séduisante. En effet, la structure des matrices de transfert montre qu'il ne serait nécessaire de travailler que dans l'espace du miroir, diminuant significativement la dimension des matrices engagées. La structure spécifique de ces matrices de transfert repose seulement sur un changement de base de représentation de la phase. Le calcul des blocs de transfert pourrait alors être mené en parallèle. Par ailleurs, Matlab[®], qui offre un panel d'outils prêts à l'emploi et d'une grande qualité, n'est pas spécifiquement optimisé pour ce calcul. Ainsi, une reprogrammation de l'algorithme permettrait justement de gérer directement les allocations mémoires et CPU (voire GPU). D'autres pistes pourraient à plus long terme être exploitées pour diminuer plus encore le temps de calcul et la l'encombrement mémoire nécessaire à

la fois pour l'élaboration de nouvelles lois de commande à haute performance, et pour le calcul du budget d'erreur. La piste la plus directe consiste à exploiter les représentations dans le domaine de Fourier, avec des approches de type DKF [Massioni *et al.*, 2015]. Cette piste sera abordée dans le cadre de la thèse de Léonard Prengère, thèse démarrée fin 2016 et co-encadrée par l'IOGS et l'ONERA. On peut aussi s'inspirer de certaines méthodes numériques comme la décomposition de domaine, qui permet un calcul massivement parallèle, et dont un exemple a été proposé en OA classique [Rosensteiner, 2012].

L'outil de calcul de budget d'erreur présente l'avantage de fonctionner autant pour de l'évaluation théorique qu'en simulation, ou encore à partir de données télémétriques enregistrées sur le ciel. Néanmoins, dans le cas de données ciel, l'estimation de la densité spectrale de puissance est déterminante. En effet, la méthode d'estimation proposée dans ce manuscrit se base sur l'idée que les éléments extra-diagonaux du spectre pour les modes élevés affectent peu le calcul des budgets. C'est pour cela que l'approche d'une reconstruction de front d'onde par MAP a été envisagée avec un schéma classique : estimation bayésienne de la variable d'intérêt, puis calcul de la DSP par transformée de Fourier. L'estimation de l'interspectre est effectivement critique dès que le régulateur se base sur un modèle de perturbation (implicite ou explicite) tenant compte de corrélations au sein du processus. Ainsi, cet outil gagnerait au développement d'une méthode d'estimation d'interspectre à part entière. Les méthodes développées dans le domaine du traitement de signal n'ont pas à ce jour été adaptées au problème de l'estimation de la densité spectrale de puissance d'une phase turbulente à partir de données d'analyse de front d'onde. Ainsi, un travail de recherche important dans ce domaine, qui n'est pas classiquement associé à l'instrumentation astronomique, pourrait s'avérer profitable pour l'optique adaptative en général.

En ce qui concerne les lois de commande, ces travaux ont permis d'analyser la performance des régulateurs mixtes LQG-intégrateur, et ont confirmé leur suprématie par rapport à l'intégrateur. Nous avons montré que les futurs systèmes pourraient gagner en performance avec une plus grande part de LQG. En effet, les lois de commande les plus audacieuses n'emploient ce type de régulateur que pour la correction des modes de basculement et de la défocalisation. Or nous avons montré que le repliement spatial de l'analyseur était la principale limite des systèmes d'optique adaptative classique, et que l'utilisation de commandes à base de modèle permettrait de réduire significativement l'importance de cette erreur. Nous avons mis en évidence que la correction d'uniquement neuf modes avec un régulateur LQG apportait un gain en variance d'erreur résiduelle de l'ordre de quinze pourcents, avec une diminution importante du repliement. Pour autant, les lois de commande entièrement LQG demeurent une option séduisante. Nos travaux montrent en outre que l'adéquation du modèle utilisé pour la prédiction à la nature de la turbulence est bénéfique pour la performance du système. Ainsi, le développement de modèles alliant translation sous l'effet du vent et bouillonnement de la phase pourrait être une solution de premier choix. Utiliser un meilleur modèle pourrait en outre permettre, à niveau de performance égal, de relâcher certaines contraintes comme la fréquence d'échantillonnage, ce qui est utile pour l'observation d'objets très peu lumineux. Une perspective à court terme est donc d'étendre

ce type de modélisation à une turbulence multi-couches, et d'évaluer la performance en rejeu sur données ciel. A moyen terme, il serait intéressant d'explorer plus avant les modélisations mêlant bouillonnement et translation (le mode « tiède ») pour établir leur caractéristiques statistiques, les confronter à des données ciel pour vérifier leur pertinence, et potentiellement les utiliser pour la simulation de turbulence plus réaliste.

Annexe A

Documentation technique : Intégration d'une commande LQG avec filtrage de vibration pour GeMS – Interface graphique et architecture temps-réel.

LQG with vibration filtering for GeMS tip-tilt loop: Matlab GUI for the use of the LQG control structure, matrices computation and sending

VERSION 1.1

Rémy Juvénal*[◇], Caroline Kulcsár*

*Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, France,

[◇]ONERA, The French Aerospace Lab, France

September 6, 2017

Contents

Introduction	2
UI4GeMS Package description	2
1 UI4GeMS: GUI description	4
1.1 Directories path definition	4
1.2 Data loading	5
1.3 First option: Integral controller	7
1.4 Second option: LQG controller	8
1.4.1 With AR2 model identification method	8
1.4.2 With cPEM model identification method	10
1.5 Matrices sending to RTC	12
1.6 Data recording	12
2 RTC Implementation	13
2.1 Inputs/outputs description	13
2.2 Pseudo-code	14
3 Algorithms description	17
3.1 Global presentation of the implemented methods (AO4ELT 2015, Lake Arrowhead, USA)	18
3.2 cPEM model identification method (SPIE 2012, Amsterdam, Netherlands)	26
3.3 AR2 model identification method (JOSAA 2010)	42

Introduction

UI4GeMS is a complete Graphic User Interface (GUI), developed with Matlab, handling matrices generation for GeMS RTC structure (from November 2015) for both integral action and LQG controllers. Indeed, another mode has been added to the GeMS RTC in order to run LQG-type controllers possibly with vibration filtering. Two vibration identification techniques have been implemented in view of on-sky comparison. We have shown in simulation that these two techniques could bring significant improvement for GeMS operation in term of residual phase variance. We thus expect these modifications to improve significantly the Strehl Ratio of scientific images.

Section 1 is dedicated to **UI4GeMS** description: all the modules are described with examples of operations. Section 2 explains the new RTC structure (implemented in November 2015). Finally, Section 3 describes the two model identification techniques implemented in **UI4GeMS** for LQG controller model updating.

UI4GeMS Package description

This document is provided together with a package of Matlab functions and scripts:

- **UI4GeMS.m** – Graphical function which codes all the GUI components.
- **Pseudo_RTC_GeMS_parallel.m** – RTC simulator with multi-thread architecture. This function is called for performance estimation in replay mode.
- **getClockTag.m** – Generates a filename depending on the computer time. This function is called for data storing.
- **IDL_Results_Loading.m** – Communication function between Matlab and IDL. This function is called to load all the ASCII files created by IDL for data transfer during AR2 identification.
- **Ident_PEMc.m** – Algorithm for the PEMc model identification method.
- **Calcul_Matrices_Int.m** – Generation of RTC matrices coding an integral controller.
- **PSD_Emp.m, PSD_AR2.m, PSD_Innov.m** – Matlab functions for Power Spectral Density (PSD) computation and plotting.
- **logo_IOGS.jpg, logo_Gemini.jpg, logo_ONERA.jpg** – logos of the institutions collaborating at the LQG implementation for GeMS tip-tilt loop. These images are loaded by **UI4GeMS**.

And with two directories:

- **/IDL_Codes**, which contains a package of IDL functions, called for AR2 identification.
- **/IntegratorMatrices**, which contains pre-computed matrices defining integral controllers (gain varying from 0.2 to 0.7 with a 0.05 step).

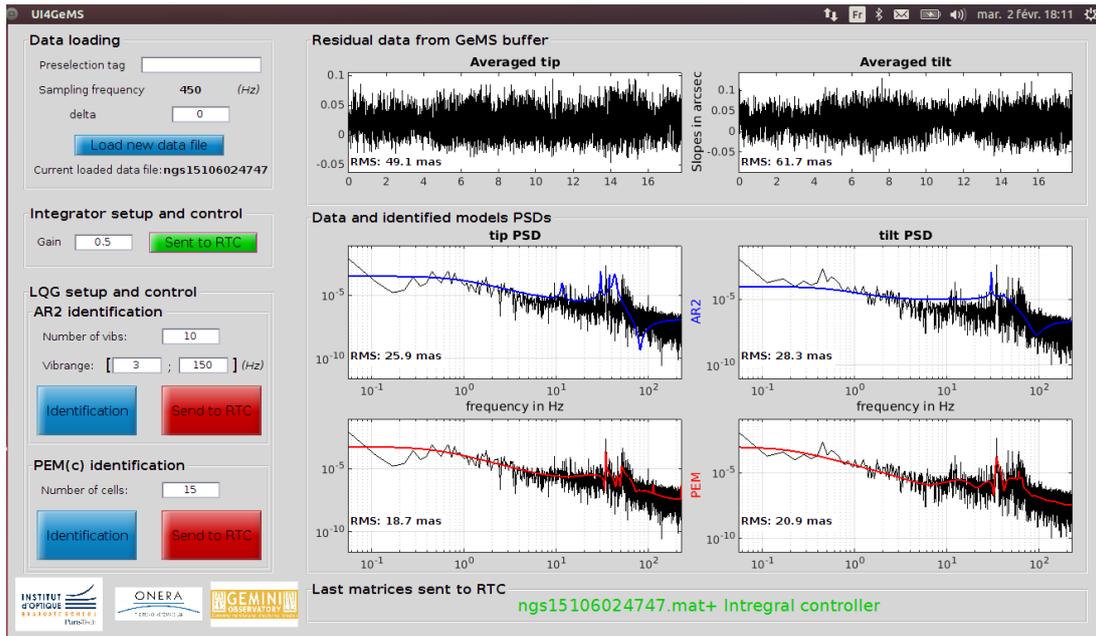


Figure 1 – Overall view of UI4GeMS Graphic User Interface (GUI).

1 UI4GeMS: GUI description

1.1 Directories path definition

The only lines that need to be manually modified in the code are the access paths for four directories:

1. The path for the data directory. The access path to the directory containing all the tip/tilt buffers registered by the RTC has to be filled in the global variable *path_data_GeMS*.
2. The path for matrices sending. This path points the directory where the RTC reads the controller matrices and has to be filled in the global variable *save_rtc_path*.
3. The path for data saving (*save_comp_path*). This directory will contain the records of all the computations + matrices sending realized by this program.
4. The path for a temporary directory, which will contain all the preliminary computations (*path_temp*).

These four paths have to be filled at the beginning of the code **UI4GeMS.m** (see Fig. 2). To do so, write in Matlab command window:

```
>> edit UI4GeMS.m
```

```
>> and replace the paths in the script (see Fig. 2).
```

The temporary path *path_temp* has also to be filled in the IDL script **Script_AR2.pro** (see Fig. 3), located in **/IDL_Codes** directory.

```
>> Write the complete access path to the path_temp directory in the dir variable at the line 17 of Script_AR2.pro.
```

Finally, add the **/IDL_Codes** to IDL default paths writing in a terminal window (or with IDL development environment):

```
>> !path = !path + ';' + expand_path('?path to /IDL_Codes')
```

```
5 | %% Global variables: Directory path definition
6 - | global path_data_GeMS;
7 - | path_data_GeMS = '/home/Documents/Gemini/DataBuffers/';
8 - | global path_temp;
9 - | path_temp = '/home/Documents/temp/';
10 - | global save_rtc_path;
11 - | save_rtc_path = 'RTC/GUI/Gemini/General/';
12 - | global save_comp_path;
13 - | save_comp_path = '/home/Documents/Gemini/SaveComputations/';
```

Figure 2 – Part of **UI4GeMS.m** Matlab script, for directories path changing.

```
17 dir = "/home/juvenal/Bureau/Boulot/MATLAB/Mission_GeMS/temp/"
```

Figure 3 – Part of **Script_AR2.pro** IDL script, for temporary access path configuration.

1.2 Data loading

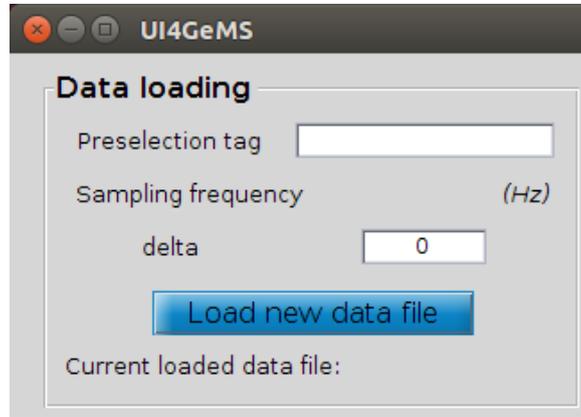


Figure 4 – Part of **UI4GeMS** dedicated to data loading.

The part of **UI4GeMS** reproduced in Fig. 4 allows the user to load a (new) data buffer from GeMS. The pre-selection tag allows to filter the filenames in the data directory (see Section 1.1). *delta* corresponds to the fractional delay in the control loop. Indeed, the system measurement equation is defined as:

$$y_k = D\phi_k - \text{delta } u_{k-1} - (1 - \text{delta}) u_{k-2}, \quad (1)$$

where y is the slopes measurement vector, D is the WFS matrix, ϕ is the disturbance phase and u is the command vector. So, $\text{delta} = 0$ worth for a pure 2 frames delay (classical case), and $\text{delta} = 1$ is to be set for a pure 1 frame delay. The procedure to load (new) data is the following:

- >> (optional) Enter a *preselection tag*.
- >> (optional) Modify *delta* value (default = 0 - 2 pure frame delay-).
- >> Click on *Load new data file*.
- >> Choose a buffer in the pop-up window and load it.

This will load the buffer acquisition sampling frequency (see Fig. 5, [1]), and the buffer name (see Fig. 5, [2]) in the interface. The residual tip (see Fig. 5, [3]) and tilt (see Fig. 5, [4]) and the pseudo open loop PSD for tip (see Fig. 5, [5]) and tilt (see Fig. 5, [6]) are plotted (twice for each PSD, 1 for *AR2* panel and 1 for *PEM* panel) in the right part of the GUI.

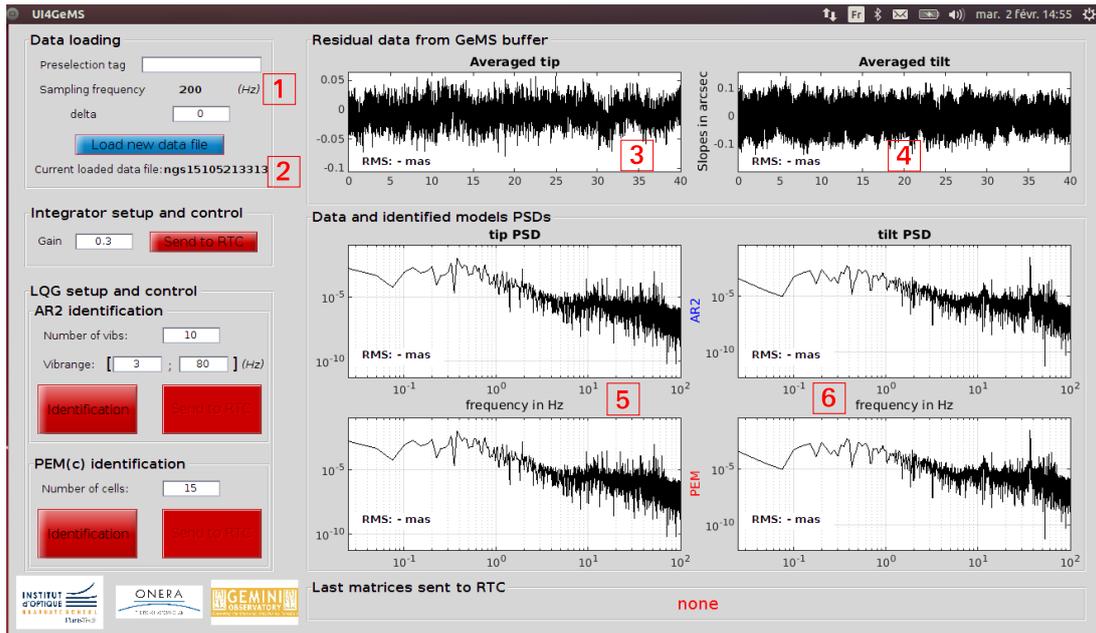


Figure 5 – UI4GeMS just after data loading.

1.3 First option: Integral controller



Figure 6 – Part of **UI4GeMS** dedicated to Integral controller set-up.

Fig. 6 represents the integral controller set-up panel. The only parameter to fill is the gain (default 0.3). Then, just click on *Send to RTC* in order to compute the rightful matrices and send them as an update to the RTC. The procedure is therefore:

- >> Modify the *Gain* value (default 0.3).
- >> Click on *Send to RTC*.

The interface will then inform the user of a performance (on-sky angle) estimation in replay using the current buffer (see Fig. 7 [1] for tip and [2] for tilt). The interface also warns about the last matrices that were sent to the RTC (see Fig. 7, [3]) and the integral controller panel push-button color will change (from red to green). All the matrices sent to the RTC are saved with a tag that contains the time stamp of the sending (more in Section 1.6).

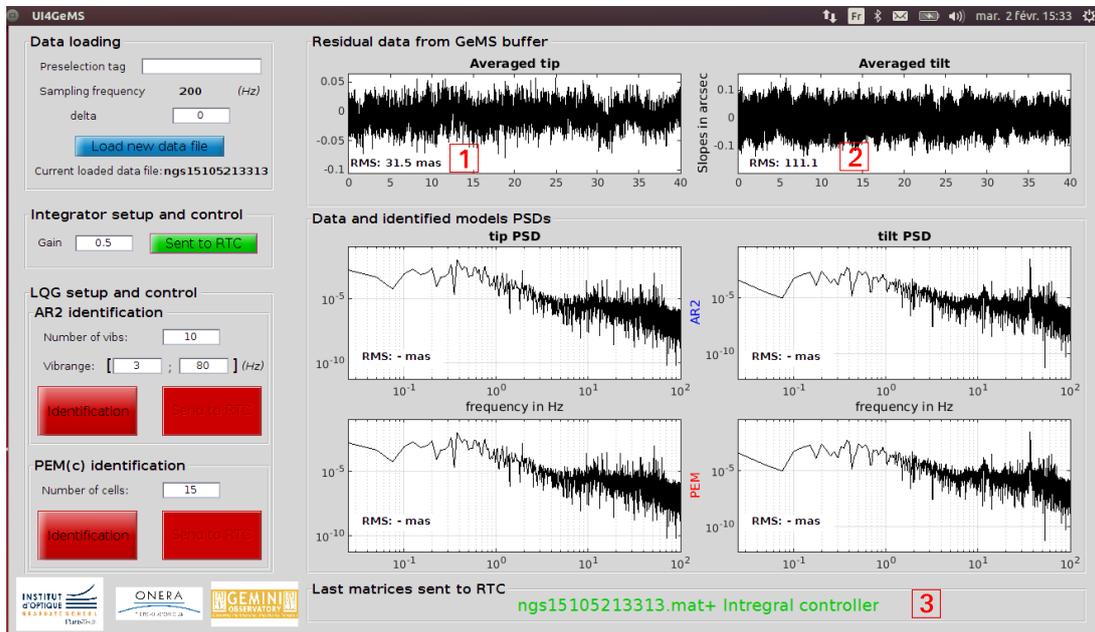


Figure 7 – **UI4GeMS** just after sending integral control matrices to RTC.

1.4 Second option: LQG controller ...

1.4.1 With AR2 model identification method

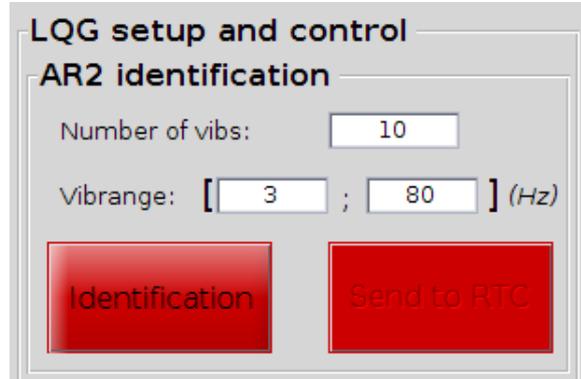


Figure 8 – Part of **UI4GeMS** dedicated to LQG control with AR2 identification.

Fig. 8 represents the control panel of AR2 model identification method for LQG control. The algorithm used by this module is described in Section 3. 3 parameters have to be filled in: the number of vibrations to identify, and the 2 *vibrange* bounds, which define the range for vibration searching in the algorithm. This identification uses a script which launches IDL 8.2. Be sure to have this version of IDL on your system or modify the script **Script_AR2.pro** located in `/IDL_Codes` (see Section 1.1). The procedure is therefore:

- >> (optional) Fill in the number of vibrations you want to identify in *Number of vibs* box (default 10 – asking for a larger number of vibrations can provide an unstable model –). The maximum value is 14.
- >> (optional) Fill in the minimum bound of *vibrange* (default 3 Hz). Choosing a very low value, and specifically 0 can bring very bad results (due to the lack of resolution with the very low frequencies on the PSD).
- >> (optional) Fill in the maximum bound of *vibrange* (default $\frac{F_s}{3}$ or $\frac{F_s}{2} - 10$ or 80 Hz, depending on the sampling frequency F_s). This value has to be lower than the Nyquist frequency ($\frac{F_s}{2}$). Taking a margin from Nyquist frequency is preferable in order to get a trustful estimation of the noise level with the AR2 algorithm.
- >> Click on the *Identification* button.

The color of the *Identification* button will change (from red to blue, see Fig. 9, [1]). That means that AR2 matrices are ready to be sent to the RTC. The pushbutton *Send to RTC* will be released as soon as the matrices are ready to be sent. A performance estimation is realized in replay mode and displayed for tip (see Fig. 9, [2]) and tilt (see Fig. 9, [3]). The PSD of the identified models are also displayed for tip (see Fig. 9, [4]) and tilt (see Fig. 9, [5]).

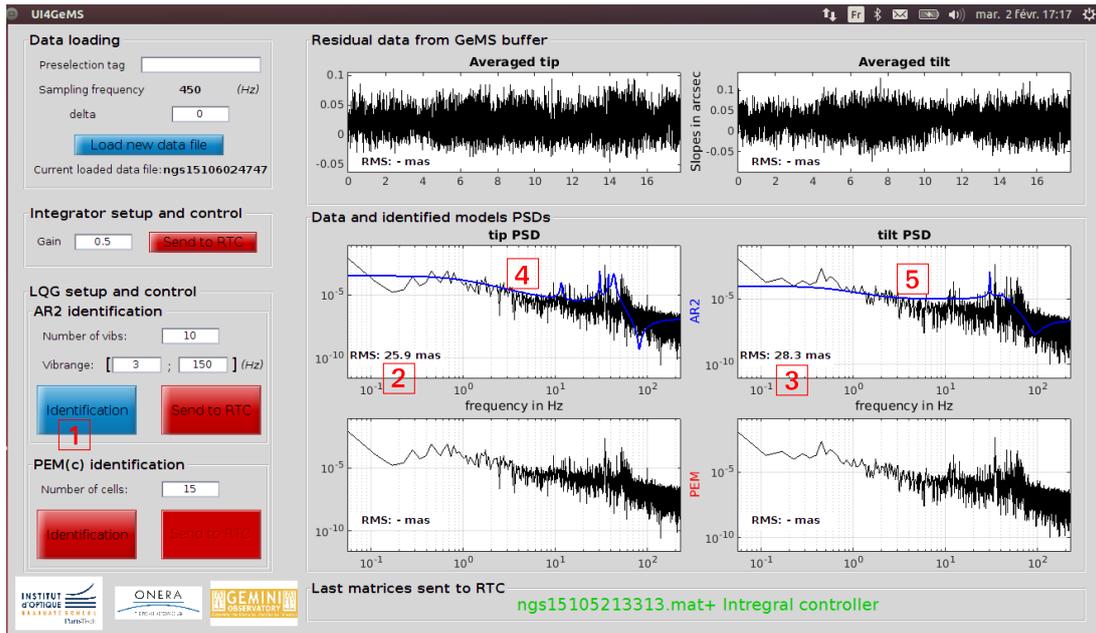


Figure 9 – UI4GeMS just after computing matrices with AR2 model identification method.

1.4.2 With cPEM model identification method

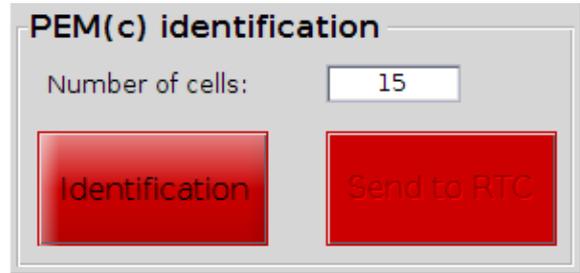


Figure 10 – Part of **UI4GeMS** dedicated to LQG control with PEM/cPEM identification.

Fig. 10 represents the control panel of PEM/cPEM model identification method for LQG control. The algorithm used by this module is described in Section 3. The PEM/cPEM module requires only 1 parameter to be filled in: the number of order 2 models to identify. RTC implementation is limited to 30x30 matrices per axis, which means that the maximum number of models is 15.

Warning: 2 algorithms are available, depending on *Number of cells* parameter. Indeed, choosing *Number of cells* = 1 will call a full order 30 identification with a standard PEM model identification technique. However, choosing *Number of cells* ≥ 2 will call the cPEM algorithm, which identifies *Number of cells* order 2 models in cascade.

The procedure is the following:

- > > (optional) Modify the *Number of cells* to identify (default 15). This technique shows better results with higher model order, that is why choosing the maximum value (or 1) for *Number of cells* is preferable for this module.
- > > Click on the *Identification* button.

The color of the *Identification* button will change (from red to blue, see Fig. 11, [1]). That means that PEM/cPEM matrices are ready to be sent to the RTC. The pushbutton *Send to RTC* will be released as soon as the matrices are ready to be sent. A performance estimation is realized in replay mode and displayed for tip (see Fig. 11, [2]) and tilt (see Fig. 11, [3]). The PSD of the identified models are also displayed for tip (see Fig. 11, [4]) and tilt (see Fig. 11, [5]).

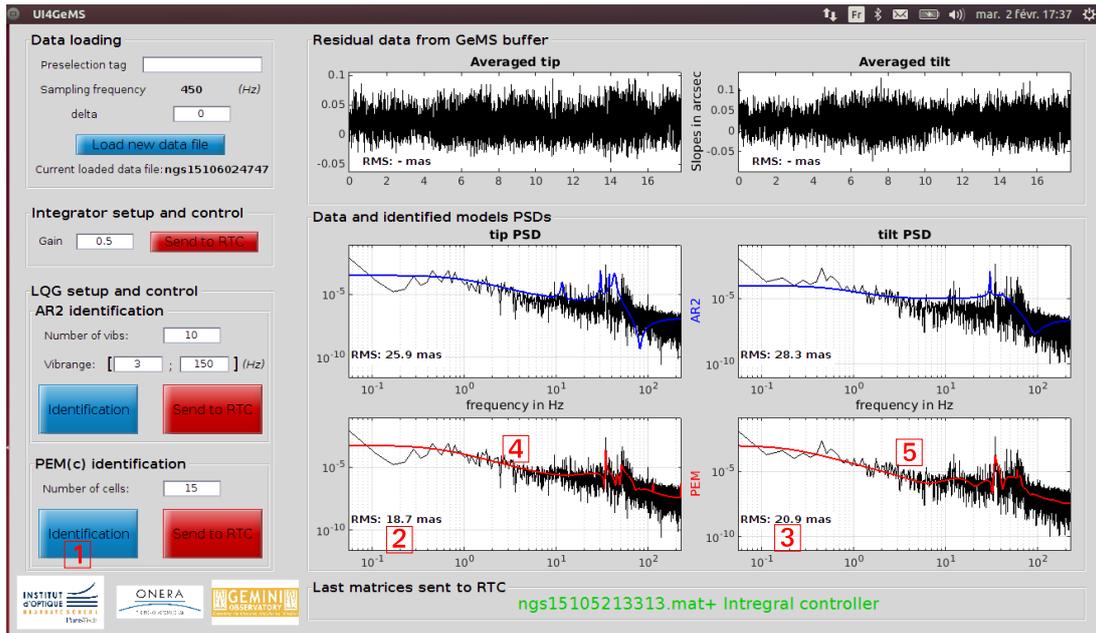


Figure 11 – UI4GeMS just after computing matrices with PEM/cPEM model identification method.

1.5 Matrices sending to RTC

For each controller and/or method, the matrices can be sent by clicking on the button *Send to RTC*. This will have several effects: first the red button *Send to RTC* that is clicked on will change into a green *Sent to RTC* button (see e.g. Fig. 12, [1]). The panel *Last matrices sent to RTC* will also change to display with which buffer and which method/controller the matrices that are in the RTC have been computed (see Fig. 12, [2]). The rightful matrices are sent to the RTC directory whose path has been filled in (see Section 1.1) with the tag-name *NgsLqg.mat*, and which is also used for recording (see Section 1.6).

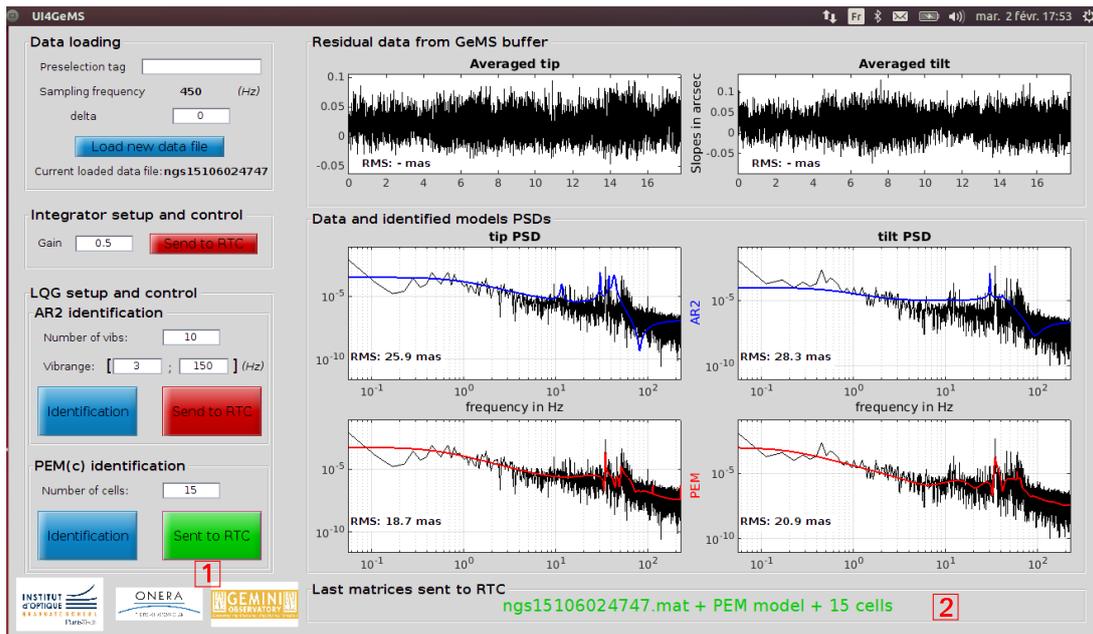


Figure 12 – UI4GeMS just after sending PEM/cPEM matrices to RTC.

1.6 Data recording

UI4GeMS records automatically all the workspace at each important change, which means when:

- a new buffer is loaded: one file is saved for the previous buffer (**BUFFERNAME** (old) **_YYYY_MM_DD_HH_mm_SS_END.mat**) and another is saved for the new buffer (**BUFFERNAME**(new) **_YYYY_MM_DD_HH_mm_SS_BEG.mat**);
- a set of matrices is sent to the RTC: one file is saved (**BUFFERNAME** **_YYYY_MM_DD_HH_mm_SS_MAT.mat**).

All the records can be found in the directory filled in **UI4GeMS** (see Section 1.1).

2 RTC Implementation

2.1 Inputs/outputs description

The code to be implemented in the RTC uses static parameters that are loaded into memory from a mat file, denoted by **NgsLqg.mat** in this document, stored in a specific directory. These will be referred to as "Static input variables" in the following. The code also uses values that have been computed by itself at the previous frame. The corresponding variables, namely the so-called "state" and the commands, will be referred to as "Dynamic input variables".

The code delivers outputs, referred to as "Output variables" in the following, which are the tip and tilt commands in U (corresponding to the C variable `ttnCmndsArcsecF`) and the computed state.

Local variables are also used for the computation, listed in the "Local variables" paragraph.

We give below the names and dimensions of all the variables.

Static input variables

The minimum and maximum values `umin` and `umax` correspond to the values used for command clipping.

`nState`: length of each tip and tilt state vector, default value is 32.

	<code>umin,</code> <code>umax</code>	<code>M1tip, M1tilt</code>	<code>M2tip, M2tilt</code>	<code>M3tip, M3tilt</code>	<code>M4tip,</code> <code>M4tilt</code>
dim.	1	<code>nState</code> x <code>nState</code>	1 col. x <code>nState</code> rows	<code>nState</code> col. x 1 row	1x1

Dynamic input variables

These are the tip and tilt commands (`pT`) and the state (`pXk`).

	<code>pT</code>	<code>pXk</code>
dim.	1 col. x 2 rows	1 col. x (<code>2 nState</code> +2 rows)

Output variables

	U	<code>pK</code>
dim.	1 col. x 2 rows	1 col. x (<code>2 nState</code> +2 rows)

Local variables

	<code>mateltCmndsXkTip,</code> <code>mateltCmndsXkTilt</code>	<code>mateltXk</code>	<code>mateltpT</code>
dim.	1x1	1 col. x <code>nState</code> rows	1 col. x <code>nState</code> rows
init.	0	0	0

2.2 Pseudo-code

The instructions that should be implemented in the RTC are described below using a Matlab syntax. These instructions are the ones that form the Pseudo_RTC_GeMS_parallel.m function used in replay simulation to evaluate some reference performance before closing the loop (see below after the listing).

- Thread 1 (lines 8–13) and thread 2 (lines 15–20) are independent and can be executed in parallel.
- Threads 3, 4, 6 and 7 are independent from threads 1 and 2, and independent one from each other, so they can be executed in parallel.
- Thread 5 needs only the completion of threads 3 and 4.
- Thread 8 needs only the completion of threads 6 and 7.

```

1 % Initialize all variables to zero
2 % Load all static parameters from file NgsLqg.mat into memory
3 nState = 32
4 %%%%%%%%%%% LOOP BEGINS HERE %%%%%%%%%%%
5 %      —> while loop is closed do
6 %%%%%%%%%%% Pseudo_RTC_GeMS_parallel.m starts here %%%%%%%%%%%
7
8 %% THREAD 1 % TIP command computation
9 mateltCmndsXkTip = 0;
10 for ii=1:nState
11     mateltCmndsXkTip = mateltCmndsXkTip+M3tip(ii)*pXk(ii);
12 end
13 U(1) = mateltCmndsXkTip+M4tip*pT(1);
14
15 %% THREAD 2 % TILT command computation
16 mateltCmndsXkTilt = 0;
17 for ii=1:nState
18     mateltCmndsXkTilt = mateltCmndsXkTilt+M3tilt(ii)*pXk(nState+ii);
19 end
20 U(2) = mateltCmndsXkTilt+M4tilt*pT(2);
21
22 %%%%%%%%%%%
23 %% —> Send U to TT mirror %%
24 %%%%%%%%%%%
25
26 %% THREAD 3
27 % => TIP STATE PARTIAL VALUE 1
28 mateltXk = zeros(1,nState);
29 for jj=1:nState
30     for ii=1:nState
31         mateltXk(jj) = mateltXk(jj)+M1tip(jj,ii)*pXk(ii);

```

```

32     end
33 end
34
35 %% THREAD 4
36 % =>TIP STATE PARTIAL VALUE 2
37 for jj=1:nState
38     mateltpT(jj) = M2tip(jj)*pT(1);
39 end
40
41 %% THREAD 5 % needs the completion of threads 3 and 4
42 % ==> TIP STATE FINAL
43 for jj=1:nState
44     pK(jj) = mateltXk(jj) + mateltpT(jj);
45 end
46 pK(nState) = min(max(U(1),umax),umin);
47
48 %% THREAD 6
49 % => TILT STATE PARTIAL VALUE 1
50 mateltXk = zeros(1,nState);
51 for jj=1:nState
52     for ii=1:nState
53         mateltXk(jj) = mateltXk(jj)+M1tilt(jj, ii)*pXk(nState+ii);
54     end
55 end
56
57 %% THREAD 7
58 % => TILT STATE PARTIAL VALUE 2
59 for jj=1:nState
60     mateltpT(jj) = M2tilt(jj)*pT(2);
61 end
62
63 %% THREAD 8 % needs the completion of threads 6 and 7
64 % ==> TILT STATE FINAL
65 for jj=1:nState
66     pK(nState+jj) = mateltXk(jj) + mateltpT(jj);
67 end
68 pK(2*nState) = min(max(U(2),umax),umin);;
69
70 %% COMMANDS AND STATE UPDATE
71
72 pXk=pK
73 %%%%%%%%% Pseudo_RTC_GeMS_parallel.m ends here %%%%%%%%%
74 %     If NgsLqg.mat has been modified, reload NgsLqg.mat into memory
75 %     ——> end (while loop is closed)
76 %%%%%%%%% LOOP ENDS HERE %%%%%%%%%

```

As mentioned in beginning of the Section, the program Pseudo_RTC_GeMS_parallel.m corresponds to the lines 8 to 72 of the code above. It is called by **UI4GeMS** in order to evaluate a reference performance for each method (see Section 1.3 and 1.4). The replay script that calls the function Pseudo_RTC_GeMS_parallel.m from is described below. The performance in replay is evaluated by the variance of yres.

```

770 %%%%%%%%%%% Replay simulation (with pseudo RTC parallel)
771 % Initializations
772 U = zeros(2,8000); % Command vector
773 ypol = [y_tip;y_tilt]; % Pseudo open-loop vector
774 yres = zeros(size(ypol)); % residual slopes initialization
775 pXk = zeros(2*n_state,1); % Current state initialization
776 %%%%%%%%%%% Replay simulation starting
777 for k=3:ny
778     % Residual slopes computation, accounting for
779     % fractionnal delay (delta)
780     yres(1,k) = ypol(1,k)-(1-delta)*U(1,k-2)-delta*U(1,k-1);
781     yres(2,k) = ypol(2,k)+(1-delta)*U(2,k-2)+delta*U(2,k-1);
782     % RTC simulation with the parallelized pseudo code
783     [ U(:,k),pK ] = Pseudo_RTC_GeMS_parallel( M1tip, M1tilt, M2tip,...
784                                             M2tilt, M3tip, M3tilt, ...
785                                             M4tip, M4tilt, yres(:,k),pXk );
786     % State vector update
787     pXk = pK;
788 end
789 %%%%%%%%%%% Replay simulation ends here

```


Bibliographie

- [Akiyama *et al.*, 2014] AKIYAMA, M., OYA, S., ONO, Y. H., TAKAMI, H., OZAKI, S., HAYANO, Y., IWATA, I., HANE, K., WU, T., YAMAMURO, T. *et al.* (2014). TMT-AGE : wide field of regard multi-object adaptive optics for TMT. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 914814–914814. International Society for Optics and Photonics.
- [Ammons *et al.*, 2012] AMMONS, S. M., POYNEER, L., GAVEL, D. T., KUPKE, R., MAX, C. E. et JOHNSON, L. (2012). Evidence that wind prediction with multiple guide stars reduces tomographic errors and expands MOAO field of regard.
- [Anderson et Moore, 1979] ANDERSON, B. D. O. et MOORE, J. B. (1979). *Optimal Filtering*. Prentice-Hall.
- [Arcidiacono *et al.*, 2008] ARCIDIACONO, C., LOMBINI, M., RAGAZZONI, R., FARINATO, J., DIOLAITI, E., BARUFFOLO, A., BAGNARA, P., GENTILE, G., SCHREIBER, L., MARCHETTI, E. *et al.* (2008). Layer oriented wavefront sensor for MAD on sky operations. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 70155P–70155P. International Society for Optics and Photonics.
- [Assémat *et al.*, 2006] ASSÉMAT, F., WILSON, R. et GENDRON, E. (2006). Method for simulating infinitely long and non stationary phase screens with optimized memory storage. *Optics express*, 14(3):988–999.
- [Babcock, 1953] BABCOCK, H. W. (1953). The possibility of compensating astronomical seeing. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 65(386):229–236.
- [Baranec *et al.*, 2006] BARANEC, C., LLOYD-HART, M., MILTON, N. M., STALCUP, T., SNYDER, M. et ANGEL, R. (2006). Tomographic reconstruction of stellar wavefronts from multiple laser guide stars. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics.
- [Baden *et al.*, 2010] BADEN, A., GENG, D., MYERS, R. et YOUNGER, E. (2010). Durham adaptive optics real-time controller. *Applied optics*, 49(32):6354–6363.
- [Baden *et al.*, 2012] BADEN, A., MYERS, R. et GENDRON, E. (2012). Wavefront sensing with a brightest pixel selection algorithm. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(2):1628–1636.
- [Beckers, 1988] BECKERS, J. M. (1988). Increasing the size of the isoplanatic patch with multiconjugate adaptive optics. *In European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, volume 30, page 693.

- [Beuzit *et al.*, 2005] BEUZIT, J.-L., FELDT, M., MOUILLET, D., MOUTOU, C., DOHLEN, K., PUGET, P., FUSCO, T., BAUDOZ, P., BOCCALETTI, A., UDRY, S. *et al.* (2005). A planet finder instrument for the VLT. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 1(C200):317–322.
- [Bond *et al.*, 2016] BOND, C. Z., EL HADI, K., SAUVAGE, J.-F., CORREIA, C., FAUVARQUE, O., RABAUD, D., LAMB, M., NEICHEL, B. *et* FUSCO, T. (2016). Experimental study of an optimised Pyramid wave-front sensor for Extremely Large Telescopes. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 990964–990964. International Society for Optics and Photonics.
- [Cannon, 1995] CANNON, R. C. (1995). Global wave-front reconstruction using Shack–Hartmann sensors. *JOSA A*, 12:2031–2039.
- [Chassat, 1992] CHASSAT, F. (1992). *Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique. Etude modale de l’anisoplanétisme et application à l’optique adaptative*. Thèse de doctorat, Université Paris XI.
- [Chen *et al.*, 2016] CHEN, L., WANG, J., YAO, K., LIU, X., LIN, X., WANG, L. *et* WANG, M. (2016). Experimental Demonstration of Sequential Operation Approach for a Three-Sided Pyramid Wavefront Sensor. *IEEE Photonics Journal*, 8(4):1–13.
- [Conan, 1994] CONAN, J.-M. (1994). *Étude de la correction partielle en optique adaptative*. Thèse de doctorat, Université Paris XI.
- [Conan *et al.*, 1995] CONAN, J.-M., ROUSSET, G. *et* MADEC, P.-Y. (1995). Wave-front temporal spectra in high-resolution imaging through turbulence. *JOSA A*, 12(7):1559–1570.
- [Conan, 2000] CONAN, R. (2000). *Modélisation des effets de l’échelle externe de cohérence spatiale du front d’onde pour l’observation à haute résolution angulaire en astronomie : application à l’optique adaptative, à l’interférométrie et aux très grands télescopes*. Thèse de doctorat, Nice.
- [Correia, 2010] CORREIA, C. (2010). *Conception de lois de commande à hautes performances pour l’optique adaptative des grands/très grands télescopes*. Thèse de doctorat, Université Paris-Nord-Paris XIII.
- [Correia *et al.*, 2015] CORREIA, C. M., JACKSON, K., VÉLAN, J.-P., ANDERSEN, D., LARDIÈRE, O. *et* BRADLEY, C. (2015). Spatio-angular minimum-variance tomographic controller for multi-object adaptive-optics systems. *Applied optics*, 54(17):5281–5290.
- [Correia *et al.*, 2016] CORREIA, C. M., NEICHEL, B., CONAN, J.-M., PETIT, C., SAUVAGE, J.-F., FUSCO, T., VERNET, J. D. *et* THATTE, N. (2016). Natural guide-star processing for wide-field laser-assisted ao systems. *SPIE Adaptive Telescopes and Instrumentation Conference proceedings*.
- [Cortés *et al.*, 2012] CORTÉS, A., NEICHEL, B., GUESALAGA, A., OSBORN, J., RIGAUT, F. *et* GUZMAN, D. (2012). Atmospheric turbulence profiling using multiple laser star wavefront sensors. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(3):2089–2099.
- [Costille, 2009] COSTILLE, A. (2009). *Les optiques adaptatives grand champ : stratégies de correction et validations expérimentales*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.

- [Costille *et al.*, 2011] COSTILLE, A., PETIT, C., CONAN, J.-M., KULCSÁR, C. et RAYNAUD, H.-F. (2011). Linear quadratic gaussian control applied to WFAO systems : simulation and experimental results. *European Journal of Control*, 17(3):302–315.
- [Dicke, 1975] DICKE, R. H. (1975). Phase-contrast detection of telescope seeing errors and their correction. *The Astrophysical Journal*, 198.
- [Diolaiti *et al.*, 2010] DIOLAITI, E., CONAN, J.-M., FOPPIANI, I., LOMBINI, M., MARCHETTI, E., PETIT, C., ROBERT, C., SCHREIBER, L., BARUFFOLO, A., BELLAZZINI, M. *et al.* (2010). Towards the phase A review of MAORY, the multi-conjugate adaptive optics module for the E-ELT. In *AO4ELT*.
- [Eikenberry *et al.*, 2006] EIKENBERRY, S., ANDERSEN, D., GUZMAN, R., BALLY, J., CUEVAS, S., FLETCHER, M., GARDHOUSE, R., GAVEL, D., GONZALEZ, A., GRUEL, N. *et al.* (2006). IRMOS : The near-infrared multi-object spectrograph for the TMT. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics.
- [Ellerbroek et Vogel, 2009] ELLERBROEK, B. et VOGEL, C. (2009). Inverse problems in astronomical adaptive optics. *Inverse Problems*, 25(6):063001.
- [Ellerbroek, 1994] ELLERBROEK, B. L. (1994). First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes. *JOSA A*, 11(2):783–805.
- [Ellerbroek et Rigaut, 2001] ELLERBROEK, B. L. et RIGAUT, F. (2001). Methods for correcting tilt anisoplanatism in laser-guide-star-based multiconjugate adaptive optics. *JOSA A*, 18(10):2539–2547.
- [Esposito *et al.*, 2005] ESPOSITO, S., PINNA, E., TOZZI, A., PUGLISI, A. et STEFANINI, P. (2005). Pyramid Wavefront Sensor at the William Herschel Telescope : Towards Extremely Large Telescopes. *the ING Newsletter*, 10:26–27.
- [Fontanella *et al.*, 1991] FONTANELLA, J. C., ROUSSET, G. et LENA, P. (1991). Adaptive optics, a key-element of the VLT. *Journal of Optics*, 22(2):99.
- [Foy et Labeyrie, 1985] FOY, R. et LABEYRIE, A. (1985). Feasibility of adaptive telescope with laser probe. *Astronomy and Astrophysics*, 152.
- [Fried, 1966] FRIED, D. L. (1966). Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *JOSA*, 56(10):1372–1379.
- [Fried, 1982] FRIED, D. L. (1982). Anisoplanatism in adaptive optics. *JOSA*, 72(1):52–61.
- [Fried et Clark, 2008] FRIED, D. L. et CLARK, T. (2008). Extruding Kolmogorov-type phase screen ribbons. *JOSA A*, 25:463–468.
- [Fusco, 2000] FUSCO, T. (2000). *Correction partielle et anisoplanétisme en optique adaptative : traitement a posteriori et optique adaptative multiconjuguée*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis.
- [Fusco et Mawet, 2014] FUSCO, T. et MAWET, D. (2014). Final performance and lesson-learned of SAXO, the VLT-SPHERE extreme ao : from early design to on-sky results. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE).

- [Fusco *et al.*, 2004] FUSCO, T., ROUSSET, G., RABAUD, D., GENDRON, E., MOUILLET, D., LACOMBE, F., ZINS, G., MADEC, P., LAGRANGE, A., CHARTON, J. *et al.* (2004). NAOS on-line characterization of turbulence parameters and adaptive optics performance. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 6(6):585.
- [Fusco *et al.*, 2006] FUSCO, T., ROUSSET, G., SAUVAGE, J.-F., PETIT, C., BEUZIT, J.-L., DOHLEN, K., MOUILLET, D., CHARTON, J., NICOLLE, M., KASPER, M., BAUDOZ, P. et PUGET, P. (2006). High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets : Application to the SPHERE instrument. *Optics Express*, 14.
- [Gardner *et al.*, 1989] GARDNER, C. S., WELSH, B. M. et THOMPSON, L. A. (1989). Sodium laser guide star technique for adaptive imaging in astronomy. *In 1989 Orlando Symposium*, pages 191–202. International Society for Optics and Photonics.
- [Garrel *et al.*, 2016] GARREL, V., SIVO, G., MARIN, E., DAMELE, E. R. C., MONTES, V., LAZO, M., GIGOUX, P., MORENO, C., TRUJILLO, C. A., DONAHUE, J. *et al.* (2016). Reshaping and polishing the GeMS MCAO system. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics.
- [Gendron et Léna, 1994] GENDRON, E. et LÉNA, P. (1994). Astronomical adaptive optics. I. Modal control optimization. *Astronomy and Astrophysics*, 291.
- [Gendron et Léna, 1995] GENDRON, E. et LÉNA, P. (1995). Astronomical adaptive optics. II. Experimental results of an optimized modal control. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 111.
- [Gendron et Léna, 1996] GENDRON, E. et LÉNA, P. (1996). Single layer atmospheric turbulence demonstrated by adaptive optics observations. *Astrophysics and Space Science*, 239(2):221–228.
- [Gendron et Rousset, 2012] GENDRON, E. et ROUSSET, G. (2012). Temporal analysis of aliasing in shack-hartmann wave-front sensing. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 84476N–84476N. International Society for Optics and Photonics.
- [Gendron *et al.*, 2011] GENDRON, E., VIDAL, F., BRANGIER, M., MORRIS, T., HUBERT, Z., BASDEN, A., ROUSSET, G., MYERS, R., CHEMLA, F., LONGMORE, A. *et al.* (2011). MOAO first on-sky demonstration with CANARY. *Astronomy & Astrophysics*, 529.
- [Gilles et Ellerbroek, 2013] GILLES, L. et ELLERBROEK, B. (2013). Wind profiling via slope detection and ranging : algorithm formulation and performance analysis for laser guide star tomography on extremely large telescopes. *In Proceedings of the 3rd Conference on Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes, Florence, Italy*.
- [Gilles *et al.*, 2013] GILLES, L., MASSIONI, P., KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F. et ELLERBROEK, B. (2013). Distributed Kalman filtering compared to fourier domain preconditioned conjugate gradient for laser guide star tomography on extremely large telescopes. *JOSA A*, 30(5):898–909.
- [Gonsalves, 1982] GONSALVES, R. A. (1982). Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Optical Engineering*, 21(5):215829–215829.
- [Gratadour *et al.*, 2013] GRATADOUR, D., GENDRON, E. et ROUSSET, G. (2013). Practical issues with phase diversity for NCPA compensation resolved on the CANARY demonstrator. *In Proceedings of the Third AO4ELT Conference. Firenze, Italy*.

- [Gratadour *et al.*, 2010] GRATADOUR, D., GENDRON, E., ROUSSET, G. et RIGAUT, F. (2010). Fratricide effect on ELTs. In *1st AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*. EDP Sciences.
- [Guesalaga *et al.*, 2014] GUESALAGA, A., NEICHEL, B., CORTÉS, A., BÉCHET, C. et GUZMÁN, D. (2014). Using the C_n^2 and wind profiler method with wide-field laser-guide-stars adaptive optics to quantify the frozen-flow decay. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(3):1925–1933.
- [Guyon, 2005] GUYON, O. (2005). Limits of adaptive optics for high-contrast imaging. *The Astrophysical Journal*, 629(1):592.
- [Guyon *et al.*, 2010] GUYON, O., MARTINACHE, F., GARREL, V., VOGT, F., YOKOCHI, K. et YOSHIKAWA, T. (2010). The Subaru coronagraphic extreme AO (SCEXAO) system : wavefront control and detection of exoplanets with coherent light modulation in the focal plane. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 773624–773624. International Society for Optics and Photonics.
- [Hammer *et al.*, 2016] HAMMER, F., MORRIS, S., KAPER, L., BARBUY, B., CUBY, J., ROTH, M., JAGOUREL, P., EVANS, C., PUECH, M., FITZSIMONS, E. *et al.* (2016). The E-ELT multi-object spectrograph : latest news from MOSAIC. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics.
- [Hammer *et al.*, 2002] HAMMER, F., SAYÈDE, F., GENDRON, E., FUSCO, T., BURGARELLA, D., CAYATTE, V., CONAN, J.-M., COURBIN, F., FLORES, H., GUINOARD, I. *et al.* (2002). The FALCON concept : multi-object spectroscopy combined with MCAO in near-IR. *Scientific Drivers for ESO Future VLT/VLTI Instrumentation*, pages 139–148.
- [Hampton *et al.*, 2006] HAMPTON, P. J., CONAN, R., BRADLEY, C. et AGATHOKLIS, P. (2006). Control of a woofer tweeter system of deformable mirrors. In *Proc. SPIE*, volume 6274, page 62741Z.
- [Herriot *et al.*, 2014] HERRIOT, G., ANDERSEN, D., ATWOOD, J., BOYER, C., BYRNES, P., CAPUTA, K., ELLERBROEK, B., GILLES, L., HILL, A., LJUSIC, Z., PAZDER, J., ROSENSTEINER, M., SMITH, M., SPANO, P., SZETO, K., VÉRAN, J.-P., WEVERS, I., WANG, L. et WOOFF, R. (2014). NFIRAOS : first facility AO system for the Thirty Meter Telescope. *Proc. SPIE*, 9148:914810–914810–11.
- [Hubin *et al.*, 2005] HUBIN, N., ELLERBROEK, B. L., ARSENAULT, R., CLARE, R. M., DEKANY, R., GILLES, L., KASPER, M., HERRIOT, G., LE LOUARN, M., MARCHETTI, E. *et al.* (2005). Adaptive optics for extremely large telescopes. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 1(S232):60–85.
- [Hudgin, 1977] HUDGIN, R. H. (1977). Wave-front reconstruction for compensated imaging. *JOSA*, 67(3):375–378.
- [Jackson *et al.*, 2015] JACKSON, K., CORREIA, C., LARDIÈRE, O., ANDERSEN, D. et BRADLEY, C. (2015). Linear prediction of atmospheric wave-fronts for tomographic adaptive optics systems : modelling and robustness assessment. *Optics letters*, 40(2):143–146.
- [Jackson *et al.*, 2014] JACKSON, K., CORREIA, C., LARDIÈRE, O., ANDERSON, D., BRADLEY, C., PHAM, L., BLAIN, C., NASH, R., GAMROTH, D. et VÉRAN, J.-P. (2014). Tomography and calibration for raven : from simulations to laboratory results. In *Proc. of SPIE Vol*, volume 9148, pages 91482K–1.

- [Jagourel et Gaffard, 1992] JAGOUREL, P. et GAFFARD, J.-P. (1992). Adaptive optics components in Laserdot. *In San Diego-DL tentative*, pages 76–87. International Society for Optics and Photonics.
- [Juvénal *et al.*, 2016] JUVÉNAL, R., KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F. et CONAN, J.-M. (2016). LQG adaptive optics control with wind-dependent turbulent models. *In Adaptive Optics Systems V. SPIE Astronomical telescopes and instrumentation*.
- [Juvénal *et al.*, 2015a] JUVÉNAL, R., KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F., CONAN, J.-M., PETIT, C., LEBoulLEUX, L., SIVO, G. et GARREL, V. (2015a). Tip-tilt modeling and control for GeMS : a performance comparison of identification techniques. *In AO4ELT4*.
- [Juvénal *et al.*, 2015b] JUVÉNAL, R., KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F., CONAN, J.-M. et SIVO, G. (2015b). Performance assessment for adaptive optics controllers : temporal and noise propagation errors. *In AO4ELT4*.
- [Kern *et al.*, 1989] KERN, P., LENA, P., GIGAN, P., FONTANELLA, J.-C., ROUSSET, G., MERKLE, F. et GAFFARD, J.-P. (1989). Come-on : an adaptive optics prototype dedicated to infrared astronomy. *In 1989 Orlando Symposium*, pages 54–64. International Society for Optics and Photonics.
- [Kolmogorov, 1941a] KOLMOGOROV, A. N. (1941a). Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *In Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 32, pages 16–18. JSTOR.
- [Kolmogorov, 1941b] KOLMOGOROV, A. N. (1941b). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *In Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 30, pages 301–305. JSTOR.
- [Kulcsár *et al.*, 2012a] KULCSÁR, C., MASSIONI, P., SIVO, G. et RAYNAUD, H.-F. (2012a). Vibration mitigation in adaptive optics control. *Adaptive Optics Systems III, SPIE Proceedings*.
- [Kulcsár *et al.*, 2017] KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F., JUVÉNAL, R. et CORREIA, C. (2017). Towards minimum-variance control of ELTs AO systems. *In Fith International Conference on Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes (AO4ELT5)*.
- [Kulcsár *et al.*, 2012b] KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F., PETIT, C. et CONAN, J.-M. (2012b). Minimum variance prediction and control for adaptive optics. *Automatica*, pages 1939–1954.
- [Kulcsár *et al.*, 2006] KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F., PETIT, C., CONAN, J.-M. et de LÉSEGNO, P. V. (2006). Optimal control, observers and integrators in adaptive optics. *Optics express*, 14(17):7464–7476.
- [Kulcsár *et al.*, 2012] KULCSÁR, C., SIVO, G., RAYNAUD, H.-F., NEICHEL, B., RIGAUT, F., CHRISTOU, J., GUESALAGA, A., CORREIA, C., VÉLAN, J.-P., GENDRON, E. *et al.* (2012). Vibrations in AO control : a short analysis of on-sky data around the world. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 84471C–84471C. International Society for Optics and Photonics.
- [Lacoume et Latombe, 1981] LACOUME, J. et LATOMBE, C. (1981). Analyse interspectrale. *In 8^{eme} colloque sur le traitement du signal et des images*.
- [Lane et Tallon, 1992] LANE, R. et TALLON, M. (1992). Wave-front reconstruction using a Shack–Hartmann sensor. *Applied optics*, 31:6902–6908.

- [Lardière *et al.*, 2014] LARDIÈRE, O., ANDERSEN, D., BLAIN, C., BRADLEY, C., GAMROTH, D., JACKSON, K., LACH, P., NASH, R., VENN, K., VÉRAN, J.-P. *et al.* (2014). Multi-object adaptive optics on-sky results with RAVEN. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 91481G–91481G. International Society for Optics and Photonics.
- [Le Louarn, 2000] LE LOUARN, M. (2000). *Laser guide stars for large telescopes : cone effect and astrophysical implications*. Thèse de doctorat, CRAL - Observatoire de Lyon et ESO - Garching.
- [Le Roux *et al.*, 2003] LE ROUX, B., CONAN, J.-M., KULCSAR, C., RAYNAUD, H.-F., MUGNIER, L. M. et FUSCO, T. (2003). Optimal control law for multiconjugate adaptive optics. *In Astronomical Telescopes and Instrumentation*, pages 878–889. International Society for Optics and Photonics.
- [Le Roux *et al.*, 2004] LE ROUX, B., KULCSÁR, C., MUGNIER, L. M., FUSCO, T., RAYNAUD, H.-F. et CONAN, J.-M. (2004). Optimal control law for classical and multiconjugate adaptive optics. *JOSA A*, 21(7):1261–1276.
- [Leboulleux *et al.*, 2015] LÉBOULLEUX, L., SIVO, G., JUVÉNAL, R., KULCSÁR, C., GARREL, V., CONAN, J.-M., RAYNAUD, H.-F., PETIT, C., RAMBOLD, W., MARIN, E. et MONTES, V. (2015). Vibration analysis on GeMS tip-tilt data and performance evaluation using an LQG controller. *In AO4ELT4*.
- [Ljung, 1999] LJUNG, L. (1999). *System identification : theory for the user (2nd edition)*. Prentice-Hall.
- [Lloyd-Hart *et al.*, 2006] LLOYD-HART, M., BARANEC, C., MILTON, N. M., SNYDER, M., STALCUP, T., ROGER, J. et ANGEL, P. (2006). Experimental results of ground-layer and tomographic wavefront reconstruction from multiple laser guide stars. *Optics express*, 14.
- [Macintosh *et al.*, 2007] MACINTOSH, B., GRAHAM, J., PALMER, D., DOYON, R., GAVEL, D., LARKIN, J., OPPENHEIMER, B., SADDLEMYER, L., WALLACE, J. K., BAUMAN, B. *et al.* (2007). Adaptive optics for direct detection of extrasolar planets : the Gemini Planet Imager. *Comptes Rendus Physique*, 8:365–373.
- [Macintosh *et al.*, 2014] MACINTOSH, B., GRAHAM, J. R., INGRAHAM, P., KONOPACKY, Q., MAROIS, C., PERRIN, M., POYNEER, L., BAUMAN, B., BARMAN, T., BURROWS, A. S. *et al.* (2014). First light of the gemini planet imager. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(35):12661–12666.
- [Macintosh *et al.*, 2008] MACINTOSH, B. A., GRAHAM, J. R., PALMER, D. W., DOYON, R., DUNN, J., GAVEL, D. T., LARKIN, J., OPPENHEIMER, B., SADDLEMYER, L., SIVARAMAKRISHNAN, A., WALLACE, J. K., BAUMAN, B., ERICKSON, D. A., MAROIS, C., POYNEER, L. A. et SOUMMER, R. (2008). The Gemini Planet Imager : From Science to Design to Construction. *Astronomical Instrumentation, SPIE Proceedings*.
- [Mahajan, 1983] MAHAJAN, V. (1983). Strehl ratio for primary aberrations in terms of their aberration variance. *JOSA*, 73:860–861.
- [Marchetti *et al.*, 2007] MARCHETTI, E., BRAST, R., DELABRE, B., DONALDSON, R., FEDRIGO, E., FRANK, C., HUBIN, N., KOLB, J., LE LOUARN, M., LIZON, J.-L. *et al.* (2007).

- MAD on-sky results in star oriented mode. *In Adaptive Optics : Methods, Analysis and Applications*, page AMA2. Optical Society of America.
- [Maréchal, 1948] MARÉCHAL, A. (1948). *Etudes des effets combinés de la diffraction et des aberrations géométriques sur l'image d'un point lumineux*. Thèse de doctorat, Paris XI.
- [Martin, 2013] MARTIN, O. (2013). *Démonstration sur le ciel de l'optique adaptative multi-objet avec étoiles lasers par CANARY*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.
- [Martin et al., 2017] MARTIN, O., GENDRON, É., ROUSSET, G., GRATADOUR, D., VIDAL, F., MORRIS, T., BASDEN, A., MYERS, R., CORREIA, C. et HENRY, D. (2017). Wavefront error breakdown in laser guide star multi-object adaptive optics validated on-sky by canary. *Astronomy & Astrophysics*, 598:A37.
- [Massioni et al., 2015] MASSIONI, P., GILLES, L. et ELLERBROEK, B. (2015). Adaptive distributed Kalman filtering with wind estimation for astronomical adaptive optics. *JOSA A*, 32(12):2353–2364.
- [Meimon et al., 2010a] MEIMON, S., FUSCO, T. et MUGNIER, L. M. (2010a). LIFT : a focal-plane wavefront sensor for real-time low-order sensing on faint sources. *Optics letters*, 35(18):3036–3038.
- [Meimon et al., 2010b] MEIMON, S., PETIT, C., FUSCO, T. et KULCSÁR, C. (2010b). Tip-tilt disturbance model identification for kalman-based control scheme : application to XAO and ELT systems. *JOSA A*, 27:122–132.
- [Michau et al., 1993] MICHAU, V., ROUSSET, G. et FONTANELLA, J. (1993). Wavefront sensing from extended sources. *In Real Time and Post Facto Solar Image Correction*, page 124.
- [Morris et al., 2014] MORRIS, T., GENDRON, E., BASDEN, A., MARTIN, O., OSBORN, J., HENRY, D., HUBERT, Z., SIVO, G., GRATADOUR, D., CHEMLA, F. et al. (2014). CANARY phase B : on-sky open-loop tomographic LGS AO results. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 91481I–91481I. International Society for Optics and Photonics.
- [Muller et al., 2011] MULLER, N., MICHAU, V., ROBERT, C. et ROUSSET, G. (2011). Differential focal anisoplanatism in laser guide star wavefront sensing on extremely large telescopes. *Optics letters*, 36(20).
- [Neichel et al., 2014] NEICHEL, B., RIGAUT, F., VIDAL, F., van DAM, M.-A., GARREL, V., RODRIGO CARRASCO, E., PESSEV, P., WINGE, C., BOCCAS, M., D'ORGEVILLES, C., ARRIAGADA, G., SERIO, A., FESQUET, V., RAMBOLD, W., LÁ¹/₄HRS, J., MORENO, C., GAUSACHS, G., GALVEZ, R., MONTES, V., VUCINA, T., MARIN, E., URRUTIA, C., LOPES, A., DIGGS, S., MARCHANT, C., EBBERS, A., TRUJILLO, C., BEC, M., TRANCHO, G., MCGREGOR, P., YOUNG, P., COLAZO, F. et MICHELLE, E. (2014). Gemini multi-conjugate adaptive optics system review II : Commissioning, operation and overall performance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, pages 1002 – 1019.
- [Nicolle, 2006] NICOLLE, M. (2006). *Analyse de front d'onde pour les optiques adaptatives de nouvelle génération : optiques adaptatives à large champ et optique adaptative extrême*. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud. Faculté des Sciences d'Orsay (Essonne).

- [Noël, 1998] NOËL, T. (1998). *Caractérisation spatiale et temporelle de la turbulence atmosphérique par analyse de front d’onde*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [Noll, 1976] NOLL, R. (1976). Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *JOSA*, 66:207–211.
- [Osborn *et al.*, 2013] OSBORN, J., WILSON, R., SHEPHERD, H., BUTTERLEY, T., DHILLON, V. et AVILA, R. (2013). Stereo SCIDAR : Profiling atmospheric optical turbulence with improved altitude resolution. *In Proceedings of the Third AO4ELT Conference*.
- [Parisot, 2012] PARISOT, A. (2012). *Calibrations et stratégies de commandes tomographique pour les optiques adaptatives grand champ : validations expérimentales sur le banc HOMER*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille.
- [Paschall et Anderson, 1993] PASCHALL, R. N. et ANDERSON, D. J. (1993). Linear Quadratic Gaussian control of a deformable mirror adaptive optics system with time-delayed measurements. *Applied optics*, 32(31):6347–6358.
- [Paschall *et al.*, 1991] PASCHALL, R. N., VON BOKERN, M. A. et WELSH, B. M. (1991). Design of a linear quadratic gaussian controller for an adaptive optics system. *In Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pages 1761–1769. IEEE.
- [Petit, 2006] PETIT, C. (2006). *Etude de la commande optimale en OA et OAMC, validation numérique et expérimentale*. Thèse de doctorat, Paris 13.
- [Petit, 2011] PETIT, C. (2011). *Development of a new control law for the adaptive optics facility (AOF)*. DOTA, Onera. Tech. Report RF 1/17838.
- [Petit *et al.*, 2009] PETIT, C., CONAN, J.-M., KULCSÁR, C. et RAYNAUD, H.-F. (2009). Linear Quadratic Gaussian control for adaptive optics and multiconjugate adaptive optics : experimental and numerical analysis. *JOSA A*, 26(6):1307–1325.
- [Petit *et al.*, 2008] PETIT, C., CONAN, J.-M., KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F. et FUSCO, T. (2008). First laboratory validation of vibration filtering with LQG control law for adaptive optics. *Optics Express*, 16(1):87–97.
- [Petit *et al.*, 2005] PETIT, C., CONAN, J.-M., KULCSÁR, C., RAYNAUD, H.-F., FUSCO, T., MONTRI, J., CHEMLA, F. et RABAUD, D. (2005). Off-axis adaptive optics with optimal control : experimental and numerical validation. *In Optics & Photonics 2005*, pages 59030P–59030P. International Society for Optics and Photonics.
- [Pfrommer et Hickson, 2010] PFROMMER, T. et HICKSON, P. (2010). High-resolution lidar observations of mesospheric sodium and implications for adaptive optics. *JOSA A*, 27(11): A97–A105.
- [Piatrou et Roggemann, 2007] PIATROU, P. et ROGGEMANN, M. C. (2007). Performance study of kalman filter controller for multiconjugate adaptive optics. *Applied optics*, 46(9): 1446–1455.
- [Pilkington *et al.*, 1987] PILKINGTON, J., THOMPSON, L. et GARDNER, C. (1987). Artificial Guide Star for Adaptive Imaging. *Nature*.
- [Plantet *et al.*, 2016] PLANTET, C., WIZINOWICH, P., FUSCO, T., NEICHEL, B., RAGLAND, S., FEMENIA, B. et RAMPY, R. (2016). LIFT on Keck : analysis of performance and first experimental results. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 990963–990963. International Society for Optics and Photonics.

- [Poyneer *et al.*, 2009] POYNEER, L., van DAM, M. et VÉRAN, J.-P. (2009). Experimental verification of the frozen flow atmospheric turbulence assumption with use of astronomical adaptive optics telemetry. *JOSA A*, 26(4):833–846.
- [Poyneer *et al.*, 2003] POYNEER, L. A., LAFORTUNE, K. et AWWAL, A. (2003). Correlation wave-front sensing algorithms for shack-hartmann-based adaptive optics using a point source. *Lawrence Livermore National Lab Document Spetember 2003*.
- [Poyneer *et al.*, 2007] POYNEER, L. A., MACINTOSH, B. A. et VÉRAN, J.-P. (2007). Fourier transform wavefront control with adaptive prediction of the atmosphere. *JOSA A*, 24(9): 2645–2660.
- [Poyneer *et al.*, 2016] POYNEER, L. A., PALMER, D. W., MACINTOSH, B., SAVRANSKY, D., SADAKUNI, N., THOMAS, S., VÉRAN, J.-P., FOLLETTE, K. B., GREENBAUM, A. Z., AMMONS, S. M., BAILEY, V. P., BAUMAN, B., CARDWELL, A., DILLON, D., GAVEL, D., HARTUNG, M., HIBON, P., PERRIN, M. D., RANTAKYRÖ, F. T., SIVARAMAKRISHNAN, A. et WANG, J. J. (2016). Performance of the Gemini Planet Imager’s adaptive optics system. *Appl. Opt.*, 55:323–340.
- [Poyneer et VÉran, 2008] POYNEER, L. A. et VÉRAN, J.-P. (2008). Toward feasible and effective predictive wavefront control for adaptive optics. *In proc. SPIE*, volume 7015, page 70151E.
- [Ragazzoni, 1996] RAGAZZONI, R. (1996). Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism. *Journal of modern optics*, 43(2):289–293.
- [Raynaud *et al.*, 2017] RAYNAUD, H.-F., DESVAGES, H., KULCSÁR, C., JUVÉNAL, R. et PETIT, C. (2017). Bumpless SPHERE LQG tip/tilt control with the control switching adapter. *In AO4ELT5*.
- [Rigaut et Gendron, 1992] RIGAUT, F. et GENDRON, E. (1992). Laser guide star in adaptive optics-The tilt determination problem. *Astronomy and Astrophysics*, 261:677–684.
- [Rigaut *et al.*, 2012] RIGAUT, F., NEICHEL, B., BOCCAS, M., D’ORGEVILLE, C., ARRIAGADA, G., FESQUET, V., DIGGS, S. J., MARCHANT, C., GAUSACH, G., RAMBOLD, W. N. *et al.* (2012). GeMS : first on-sky results. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics.
- [Rigaut *et al.*, 2014] RIGAUT, F., NEICHEL, B., BOCCAS, M., D’ORGEVILLE, C., VIDAL, F., van DAM, M. A., ARRIAGADA, G., FESQUET, V., GALVEZ, R. L., GAUSACHS, G., CAVEDONI, C., EBBERS, A. W., KAREWICZ, S., JAMES, E., LUHRS, J., MONTES, V., PEREZ, G., RAMBOLD, W. N., ROJAS, R., WALKER, S., BEC, M., TRANCHO, G., SHEEHAN, M., IRARRAZAVAL, B., BOYER, C., ELLERBROEK, B. L., FLICKER, R., GRATADOUR, D., GARCIA-RISSMANN, A. et DARUICH, F. (2014). Gemini multiconjugate adaptive optics system review - I. Design, trade-offs and integration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 437 (3):2361 – 2375.
- [Rigaut *et al.*, 1998] RIGAUT, F., VÉRAN, J.-P. et LAI, O. (1998). Analytical model for Shack-Hartmann-based adaptive optics systems. *Adaptive Optical System Technology, SPIE Proceedings*, 3353.
- [Robert *et al.*, 2010] ROBERT, C., CONAN, J.-M., GRATADOUR, D., PETIT, C. et FUSCO, T. (2010). Shack-Hartmann tomographic wavefront reconstruction using LGS : analysis

- of spot elongation and fratricide effect. *In 1st AO4ELT conference-Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*. EDP Sciences.
- [Roddier, 1981] RODDIER, F. (1981). The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progress in optics*, 19:281–376.
- [Roddier, 1999] RODDIER, F. (1999). *Adaptive optics in astronomy*. Cambridge university press.
- [Roddier, 1990] RODDIER, N. A. (1990). Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials. *Optical Engineering*, 29:1174–1180.
- [Rosensteiner, 2012] ROSENSTEINER, M. (2012). Wavefront reconstruction for extremely large telescopes via cure with domain decomposition. *JOSA A*, 29(11):2328–2336.
- [Rousset, 1999] ROUSSET, G. (1999). Wave-front sensors. *Adaptive optics in astronomy dans [Roddier, 1999]*.
- [Rousset *et al.*, 1990] ROUSSET, G., FONTANELLA, J., KERN, P., GIGAN, P. et RIGAUT, F. (1990). First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics. *Astronomy and Astrophysics*, 230:L29–L32.
- [Rousset *et al.*, 2014] ROUSSET, G., GRATADOUR, D., GENDRON, E., BUEY, T., MYERS, R., MORRIS, T., BASDEN, A., TALBOT, G., CALIA, D. B., MARCHETTI, E. *et al.* (2014). Proposal for a field experiment of elongated Na LGS wave-front sensing in the perspective of the E-ELT. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 91483M–91483M. International Society for Optics and Photonics.
- [Rousset *et al.*, 2000] ROUSSET, G., LACOMBE, F., PUGET, P., GENDRON, E., ARSENAULT, R., KERN, P. Y., RABAUD, D., MADEC, P.-Y., HUBIN, N. N., ZINS, G. *et al.* (2000). Status of the VLT Nasmyth adaptive optics system (NAOS). *In Astronomical Telescopes and Instrumentation*, pages 72–81. International Society for Optics and Photonics.
- [Rousset *et al.*, 2003] ROUSSET, G., LACOMBE, F., PUGET, P., HUBIN, N. N., GENDRON, E., FUSCO, T., ARSENAULT, R., CHARTON, J., FEAUTRIER, P., GIGAN, P. *et al.* (2003). NAOS, the first ao system of the VLT : on-sky performance. *In Astronomical Telescopes and Instrumentation*, pages 140–149. International Society for Optics and Photonics.
- [Rousset *et al.*, 1992] ROUSSET, G., MADEC, P. et RABAUD, D. (1992). Adaptive optics partial correction simulations for two telescope interferometry. *In European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, volume 39.
- [Rudy *et al.*, 2015] RUDY, A., POYNEER, L., SRINATH, S., AMMONS, S. M. et GAVEL, D. (2015). A laboratory demonstration of an LQG technique for correcting frozen flow turbulence in adaptive optics systems. *arXiv preprint arXiv :1504.03686*.
- [Sauvage *et al.*, 2014] SAUVAGE, C. P. A.-F., FUSCO, T., SEVIN, A., SUAREZ, M., COSTILLE, A., VIGAN, A., SOENKE, C., PERRET, D., ROCHAT, S., BARRUFOLO, A., SALASNICH, B., BEUZIT, J.-L., DOHLEN, K., MOUILLET, D., PUGET, P., WILDI, F., KASPER, M., CONAN, J.-M., KULCSÁR, C. et RAYNAUD, H.-F. (2014). SPHERE eXtreme AO control scheme : final performance assessment and on sky validation of the first auto-tuned LQG based operational system.

- [Sauvage *et al.*, 2007] SAUVAGE, J.-F., FUSCO, T., ROUSSET, G. et PETIT, C. (2007). Calibration and precompensation of noncommon path aberrations for extreme adaptive optics. *JOSA A*, 24(8):2334–2346.
- [Sechaud, 1999] SECHAUD, M. (1999). Wave-front compensation devices. *Adaptive optics in astronomy dans [Roddier, 1999]*.
- [Sedghi, 2007] SEDGHI, B. (2007). *E-ELT main axis control analysis*. European Southern Observatory. Tech. Rep. 3.
- [Shack et Platt, 1971] SHACK, R. V. et PLATT, B. (1971). Production and use of a lenticular hartmann screen. In *Journal of the Optical Society of America*, volume 61, page 656.
- [Sivo, 2013] SIVO, G. (2013). *Validation ciel d'une commande haute performance en optique adaptative classique et multi-objet sur le démonstrateur CANARY*. Thèse de doctorat, Université Paris 13.
- [Sivo *et al.*, 2016] SIVO, G., JUVÉNAL, R., KULCSÁR, C., GARREL, V., GIGOUX, P., RAYNAUD, H.-F., MARIN, E., CONAN, J.-M., PETIT, C., RAMBOLD, W., MONTES, V., MORENO, C., DONAHUE, J., CARRASCO, E., van DAM, M., NEICHEL, B. et TRUJILLO, C. (2016). Real-time implementation of an LQG tip-tilt controller for regular science observation on GeMS. In *Adaptive Optics Systems V*. SPIE Astronomical telescopes and instrumentation.
- [Sivo *et al.*, 2013] SIVO, G., KULCSÁR, C., CONAN, J.-M., RAYNAUD, H.-F., GENDRON, E., BASDEN, A., VIDAL, F., MORRIS, T., MEIMON, S., PETIT, C., GRATADOUR, D., MARTIN, O., HUBERT, Z., ROUSSET, G., DIPPER, N., TALBOT, G., YOUNGER, E. et MYERS, R. (2013). First on-sky validation of full LQG control with the CANARY MOAO pathfinder. In *AO4ELT3*.
- [Sivo *et al.*, 2014] SIVO, G., KULCSÁR, C., CONAN, J.-M., RAYNAUD, H.-F., GENDRON, E., BASDEN, A., VIDAL, F., MORRIS, T., MEIMON, S., PETIT, C., GRATADOUR, D., MARTIN, O., HUBERT, Z., SEVIN, A., PERRET, D., CHEMLA, F., ROUSSET, G., DIPPER, N., TALBOT, G., YOUNGER, E., MYERS, R., HENRY, D., TODD, S., ATKINSON, D., DICKSON, C. et LONGMORE, A. (2014). First on-sky SCAO validation of full LQG control with vibration mitigation on the CANARY pathfinder. *Optics Express*, 22:23565–23591.
- [Tallon et Foy, 1990] TALLON, M. et FOY, R. (1990). Adaptive telescope with laser probe-Isoplanatism and cone effect. *Astronomy and Astrophysics*, 235:549–557.
- [Tallon *et al.*, 2008] TALLON, M., TALLON-BOSC, I., BÉCHET, C. et THIÉBAUT, E. (2008). Shack-Hartmann wavefront reconstruction with elongated sodium laser guide stars : improvements with priors and noise correlations. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics.
- [Taylor, 1938] TAYLOR, G. I. (1938). The spectrum of turbulence. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 164, pages 476–490. The Royal Society.
- [Thatte *et al.*, 2016] THATTE, N. A., CLARKE, F., BRYSON, I., SHNETLER, H., TECZA, M., FUSCO, T., BACON, R. M., RICHARD, J., MEDIÁVILLA, E., NEICHEL, B. *et al.* (2016). The E-ELT first light spectrograph HARMONI : capabilities and modes. In *SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*. International Society for Optics and Photonics.

- [Thomas *et al.*, 2006] THOMAS, S., FUSCO, T., TOKOVININ, A., NICOLLE, M., MICHAU, V. et ROUSSET, G. (2006). Comparison of centroid computation algorithms in a Shack–Hartmann sensor. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371.
- [Thomas *et al.*, 2011] THOMAS, S., MULLER, N., MICHAU, V., FUSCO, T. et GAVEL, D. (2011). LGS WFS on ELTs II : Impact of the sodium layer fluctuations. *In Second International Conference on Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes*. Online at [http://ao4elt2.lesia.obspm.fr, id. 43](http://ao4elt2.lesia.obspm.fr/id.43).
- [Thompson et Castle, 1992] THOMPSON, L. A. et CASTLE, R. M. (1992). Experimental demonstration of a Rayleigh-scattered laser guide star at 351 nm. *Optics letters*, 17(21).
- [Tokovinin *et al.*, 2001] TOKOVININ, A., LE LOUARN, M., VIARD, E., HUBIN, N. et CONAN, R. (2001). Optimized modal tomography in adaptive optics. *Astronomy & Astrophysics*, 378(2).
- [Vernet *et al.*, 2012] VERNET, E., CAYREL, M., HUBIN, N., MUELLER, M., BIASI, R., GALLIENI, D. et TINTORI, M. (2012). Specifications and design of the E-ELT M4 adaptive unit. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 844761–844761. International Society for Optics and Photonics.
- [Viard *et al.*, 2002] VIARD, E., LE LOUARN, M. et HUBIN, N. (2002). Adaptive optics with four laser guide stars : correction of the cone effect in large telescopes. *Applied optics*, 41.
- [Vidal *et al.*, 2014] VIDAL, F., GENDRON, E., ROUSSET, G., MORRIS, T., BASDEN, A., MYERS, R., BRANGIER, M., CHEMLA, F., DIPPER, N., GRATADOUR, D., HENRY, D., HUBERT, Z., LONGMORE, A., MARTIN, O., TALBOT, G. et YOUNGER, E. (2014). Analysis on on-sky MOAO performance of CANARY using natural guide stars. *Astronomy & Astrophysics*, 569.
- [Vigan *et al.*, 2016] VIGAN, A., BONNEFOY, M., GINSKI, C., BEUST, H., GALICHER, R., JANSON, M., BAUDINO, J.-L., BUENZLI, E., HAGELBERG, J., D’ORAZI, V. *et al.* (2016). First light of the VLT planet finder SPHERE-I. Detection and characterization of the substellar companion GJ 758 B. *Astronomy & Astrophysics*, 587.
- [Von Karman, 1948] VON KARMAN, T. (1948). Progress in the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 34:530–539.
- [Walter et Pronzato, 1994] WALTER, É. et PRONZATO, L. (1994). *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson.
- [Wang *et al.*, 2010] WANG, L., OTAROLA, A. et ELLERBROEK, B. (2010). Impact of laser guide star fratricide on TMT MCAO system. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 77360G–77360G. International Society for Optics and Photonics.
- [Wang *et al.*, 2012] WANG, M., UHLENDORF, K., JONES, D., CÔTÉ, P., CHÂTEAUNEUF, F., GAUVIN, J., CONAN, R. et ESPELAND, B. (2012). Optical designs of the LGS WFS system for GMT-LTAO. *In SPIE Astronomical Telescopes+ Instrumentation*, pages 84473Q–84473Q. International Society for Optics and Photonics.
- [Wu et Jonckheere, 1992] WU, B.-F. et JONCKHEERE, E. A. (1992). A simplified approach to Bode’s theorem for continuous-time and discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1797–1802.

Titre : MODÉLISATION ET COMMANDE POUR LES OPTIQUES ADAPTATIVES DES VLT ET ELT : DE L'ANALYSE DE PERFORMANCE À LA VALIDATION CIEL

Mots clefs : Optique adaptative, Commande optimale, Modélisation, Évaluation de performance.

Résumé : L'optique adaptative a révolutionné l'imagerie astronomique en permettant de corriger en temps réel les déformations du front d'onde introduites l'atmosphère, et d'atteindre la limite de diffraction des télescopes. Plus récemment, différentes modalités d'optique adaptative grand-champ ont permis de repousser les limites d'utilisation de ces instruments, compensant l'anisoplanétisme de l'atmosphère, et la faible couverture du ciel. L'asservissement de ces systèmes est sans aucun doute un point clé pour améliorer encore les performances de ces systèmes, pour ainsi converger vers les programmes scientifiques des futurs ELT. Le premier objectif de ces travaux de thèse est de définir un outil général d'analyse de performance, permettant de comparer, sous la forme de budgets d'erreur, différents régulateurs linéaires. Ceci

permet d'améliorer les instruments actuels, ou de faire des choix dans la conception des futurs instruments des ELT. Pour cela, un formalisme d'analyse fréquentielle est développé dans le cadre de l'optique adaptative classique, et étendu au cas grand-champ. On montre que cet outil permet aussi bien de décomposer les performances calculées en simulation qu'à partir de données télémétriques enregistrées sur le ciel. De nouvelles stratégies de commande, basées sur de nouveaux modèles de perturbation sont proposées, et leur apport en performance discuté au regard de leur budget d'erreur. Ces résultats ont servi à la caractérisation d'une commande LQG tip-tilt avec filtrage de vibration qui doit être intégrée à l'instrument d'optique adaptative multi-conjuguée GeMS, au Chili.

Title : Modeling and control for VLT and ELT adaptive optics : from performance assessment to on-sky validation

Keywords : Adaptive Optics, Optimal control, Disturbance modeling, Performance assessment.

Abstract : Adaptive Optics (AO) systems have revolutionized ground-based astronomical imagery, allowing for real-time compensation of turbulence-induced deformations of the optical wavefront, and therefore allowing to reach the diffraction limit. More recently, wide-field AO modalities have been proposed to expand the operational range of instruments by compensating anisoplanatism and increase sky coverage. Controlling such systems is certainly a key issue to further improve their performance and to converge towards the goals of the ELTs science programs.

The first objective of this thesis work is to define a general-purpose performance analysis tool, enabling to compare different linear controllers through their error budgets, in order to improve

existing instruments or make choices in the design of future instruments. To achieve this aim, a frequency-domain formalism is developed for single-conjugated AO and extended to wide-field configurations. It is shown that this tool allows to decompose controller performance using either simulations or on-sky data. New control strategies based on new disturbance models (turbulence, vibrations...) are proposed, and the improvement in performance is discussed based on their error budget. Furthermore, these results contributed to characterize an LQG controller with vibration mitigation that is to be integrated in the tip/tilt loop of the multi-conjugate AO system GeMS, at Gemini South Observatory, in Chile.