



**HAL**  
open science

# Une méthode hybride couplant la méthode des équations intégrales et la méthode des rayons en vue d'applications au contrôle non destructif ultrasonore.

Laure Pesudo

► **To cite this version:**

Laure Pesudo. Une méthode hybride couplant la méthode des équations intégrales et la méthode des rayons en vue d'applications au contrôle non destructif ultrasonore.. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT : 2017SACL009 . tel-01680366

**HAL Id: tel-01680366**

**<https://pastel.hal.science/tel-01680366v1>**

Submitted on 10 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY**

préparée à

**L'ENSTA ParisTech**

Laboratoire d'accueil : POEMS (UMR 7231)|UMA

ÉCOLE DOCTORALE N°574

École Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)

Spécialité de doctorat : Mathématiques Appliquées

par

**Laure PESUDO**

Une méthode hybride couplant la méthode des équations intégrales  
et la méthode des rayons en vue d'applications au contrôle non  
destructif ultrasonore.

**Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 6 Octobre 2017**

**Composition du jury:**

M. Housseem HADDAR	Président du jury	DeFI, INRIA Saclay
Mme Hélène BARUCQ	Rapporteur	Magique3D, INRIA Pau
M. Marc BONNET	Directeur de thèse	POEMS, ENSTA ParisTech
M. Francis COLLINO	Examinateur	
M. Marc DESCHAMPS	Rapporteur	I2M, Université de Bordeaux
M. Alexandre IMPERIALE	Examinateur	CEA LIST

NNT: 2017SACLY009



## Remerciements

*Quand on arrive à destination on dit que la route a été bonne !*

Le présent manuscrit est l'aboutissement de trois années de thèse réalisées entre l'UMR 7231, connue sous le sigle POEMS, hébergée à l'Unité de Mathématiques appliquées de l'ENSTA ParisTech et le LSMA du département DISC du CEA de Saclay. Cette thèse m'a permis de démystifier l'idée que je me faisais du milieu de la recherche et de rectifier les illusions que je m'étais forgée pendant mes études. Le métier de chercheur est un métier difficile et solitaire. Je ne regrette pas cette expérience qui m'a permis de faire évoluer ma façon de raisonner et d'appréhender de nouvelles connaissances.

Je remercie ici l'ensemble des personnes qui ont été impliquées dans ma thèse. Je commence par mon encadrement direct. Je souhaite remercier mon directeur de thèse, Marc Bonnet, et mon encadrant CEA, Alexandre Imperiale, d'avoir respecté leur engagement d'encadrement jusqu'au bout. On oublie trop souvent l'importance de ces deux personnes pour un doctorant. Je les remercie de leur patience et de leurs conseils. Je remercie également chaleureusement Francis Collino de s'être intéressé à mon sujet et d'avoir initié la trajectoire de ce travail de thèse. Sa collaboration a été très importante pour moi tant humainement que scientifiquement. Je remercie également Edouard Demaldent, encadrant CEA officieux, de m'avoir fourni les outils numériques pour réaliser les simulations numériques en dimension 3. Mon plus grand regret sera de ne pas avoir présenté à ma soutenance de résultats de diffraction par le 'requin' ! De façon plus générale, merci pour ta franchise.

J'aimerais maintenant remercier mes rapporteurs, Hélène Barucq et Marc Deschamps d'avoir accepté la charge de rapporteur et du temps qu'ils ont consacré à la relecture de mon manuscrit.

Je salue les doctorants et post-docs de l'ENSTA et du LSMA que j'ai pu rencontré et qui parfois seulement par un sourire ont sans le savoir contribué à me donner un peu plus de courage. Je ne cite pas de noms de peur d'en oublier, mais ils se reconnaîtront j'en suis sûre à l'évocation de souvenirs de randonnées, marches, repas et goûters partagés.

Je remercie enfin tous les membres de ma famille, et plus particulièrement ma sœur Lucie qui m'a supportée au quotidien pendant deux longues années, Marion, Benjamin et Quentin pour leurs encouragements (directs ou indirects) toujours remotivants et biensur mes parents qui m'ont permis d'arriver où je suis.

Enfin, je remercie une personne très spéciale qui se reconnaîtra sous le sigle MPM pour son écoute et sa présence inconditionnellement réconfortante pendant ces deux années.

Laure Pesudo, 21 décembre 2017



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation des méthodes de simulation de la diffraction acoustique pour la stratégie de couplage haute fréquence</b>	<b>19</b>
1.1	Contexte d'étude et problème modèle . . . . .	19
1.1.1	Contexte général et objectifs . . . . .	19
1.1.2	Le problème modèle . . . . .	22
1.2	État de l'art sur les méthodes de propagation en milieu complexe . . . . .	24
1.2.1	Les méthodes numériques . . . . .	24
1.2.2	Méthode de propagation approchées en milieu inhomogène . . . . .	25
1.2.3	Une méthode asymptotique : la méthode des rayons . . . . .	28
1.3	Etat de l'art sur la modélisation de l'interaction d'un faisceau incident par un défaut . . . . .	36
1.3.1	Les méthodes numériques . . . . .	36
1.3.2	Les modèles d'interaction haute fréquence . . . . .	37
1.3.3	L'approximation de Born . . . . .	40
1.4	La méthode des équations intégrales . . . . .	40
1.4.1	La fonction de Green . . . . .	40
1.4.2	L'identité de réciprocité . . . . .	41
1.4.3	Formule de représentation intégrale, potentiels et formules de trace . . . . .	41
1.4.4	Construction des équations intégrales . . . . .	43
1.4.5	La résolution numérique des équations intégrales . . . . .	47
1.4.6	Conclusions sur les équations intégrales . . . . .	51
1.5	Le principe de réciprocité dans CIVA . . . . .	51
1.6	Stratégie du couplage BEM-Rayons : principe . . . . .	52
<b>2</b>	<b>Couplage hybride BEM-rayons : la méthode barycentrique</b>	<b>55</b>
2.1	Principe du couplage par la méthode barycentrique . . . . .	55
2.2	Méthode de couplage barycentrique pour l'équation des ondes en milieu infini . . . . .	58
2.2.1	Les approximations des noyaux en 2D et cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain . . . . .	59
2.2.2	Approximation rayon des noyaux. . . . .	64
2.2.3	Approximation rayon du champ incident . . . . .	67
2.2.4	Construction du coefficient de diffraction pour la méthode barycentrique . . . . .	69
2.3	Étude numérique de l'approximation rayon du noyau de Green 2D et de sa dérivée normale . . . . .	71
2.3.1	Cadre de validité du développement asymptotique . . . . .	71
2.3.2	Cadre de validité de la linéarisation de la phase du développement asymptotique . . . . .	72
2.3.3	Cadre de validité de la linéarisation de l'amplitude sur $H_{v,lin}^{(1)}$ . . . . .	74
2.3.4	Contrôle de l'erreur d'approximation des noyaux par leur approximation rayon . . . . .	76
2.3.5	Conclusion . . . . .	78
2.4	Expérience numérique : calcul de la diffraction 2D par la méthode barycentrique . . . . .	79
2.4.1	Validation de l'approximation haute fréquence du champ diffracté par la méthode barycentrique : diffraction par un disque en milieu homogène . . . . .	79

2.4.2	Approximation haute fréquence de la diffraction par un cerf-volant en milieu homogène	83
2.4.3	Limite de la méthode barycentrique pour l'approximation haute fréquence du champ diffracté : un cercle diffractant hors gabarit	86
2.5	Conclusion du chapitre	89
<b>3</b>	<b>Extension de la méthode hybride : la méthode multi-centres</b>	<b>91</b>
3.1	Méthode multi-centres : principe	91
3.1.1	Partitionnement	92
3.1.2	Approximation du champ incident.	93
3.1.3	Résolution de l'équation de Helmholtz par équation intégrale	94
3.1.4	Propagation du champ diffracté vers le récepteur	94
3.2	Méthode hybride multi-centres pour l'équation des ondes en milieu infini	96
3.2.1	Les approximations des noyaux en 2D et cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain dans le contexte de la méthode multi-centres	96
3.2.2	Approximation rayon des noyaux.	105
3.2.3	Construction de l'opérateur de diffraction	107
3.3	Expérience numérique : calcul de la diffraction 2D par la méthode multi-centres	108
3.3.1	Validation de la méthode dans le cadre de la mise en défaut de la méthode barycentrique : cas du cercle	109
3.3.2	Méthode multi-centres et géométrie non strictement convexe : cas du cerf-volant	114
3.4	Conclusion de chapitre	117
<b>4</b>	<b>Une accélération de la méthode hybride par procédure <i>online-offline</i></b>	<b>119</b>
4.1	Description de la procédure <i>online-offline</i> pour la méthode barycentrique	119
4.1.1	Reformulation matricielle du calcul du champ diffracté et complexité numérique	120
4.1.2	Approximation de rang faible et interpolation pour le calcul de la matrice de diffraction	123
4.1.3	Algorithme de résolution par la procédure <i>online-offline</i> et complexité numérique	124
4.2	Illustration de l'accélération de la méthode barycentrique et choix des paramètres	128
4.2.1	L'accélération	128
4.2.2	La précision de l'interpolation <i>online-offline</i>	130
4.2.3	L'approximation de rang faible	130
4.3	Accélération <i>online-offline</i> pour la méthode hybride multi-centres	130
4.3.1	Reformulation matricielle du calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres et complexité pour une unique source et un unique récepteur	131
4.3.2	Calcul du champ diffracté et complexité pour $N_s$ sources et $N_r$ récepteurs	132
4.3.3	Approximation de la matrice de diffraction par SVD et interpolation	134
4.3.4	Algorithme de résolution par la méthode multi-centres accélérée par la procédure <i>online-offline</i>	136
4.4	Illustration de l'accélération de la méthode multi-centres et choix des paramètres	138
4.4.1	L'accélération	139
4.4.2	La précision de l'interpolation	141
4.4.3	L'approximation de rang faible	142
4.5	Conclusion	143
<b>5</b>	<b>Extension à l'acoustique 3D et à l'élastodynamique 3D</b>	<b>145</b>
5.1	Extension de la méthode hybride à l'acoustique 3D	145
5.1.1	Approximation champ lointain du noyau de Green 3D et de sa dérivée normale	146
5.1.2	Méthode barycentrique en 3D	149
5.1.3	Modification des fonctions de partition	151
5.1.4	Illustrations	152
5.2	Description de la méthode hybride dans le cadre de l'élastodynamique 3D	152
5.2.1	La propagation des ondes dans un milieu solide élastique 3D	153
5.2.2	Représentation intégrale de la solution et problème de frontière	155

5.2.3	Principe de la méthode barycentrique pour l'élasticité 3D . . . . .	157
5.2.4	Interaction des ondes élastiques avec des interfaces et conversion de modes . . . . .	161
5.3	Conclusion . . . . .	161
<b>6</b>	<b>Perspectives d'adaptations de la méthode hybride pour la propagation haute fréquence en milieu inhomogène et en milieu borné</b>	<b>163</b>
6.1	La stratégie de couplage en milieu borné . . . . .	163
6.1.1	Le choix du couplage temporel BEM-rayons . . . . .	163
6.1.2	La stratégie pour un obstacle à cœur . . . . .	165
6.1.3	La stratégie pour un défaut proche du bord . . . . .	167
6.2	Perspectives d'adaptation de la méthode hybride aux milieux inhomogènes . . . . .	172
6.2.1	Discussion . . . . .	172
6.2.2	Application de la méthode hybride pour la simulation de la diffraction par une fissure en milieu faiblement inhomogène non borné et perspective d'étude . . . . .	173
6.2.3	Deux types de milieux inhomogènes adaptés à l'application de la méthode hybride . . . . .	174
6.3	Mise en œuvre du couplage BEM-rayon temporel avec CIVA . . . . .	176
6.4	Conclusion . . . . .	178
<b>A</b>	<b>Solutions analytiques des problèmes de diffraction d'ondes planes et cylindrique par un disque</b>	<b>183</b>
A.1	Séparation des variables . . . . .	183
A.2	Fonctions de Bessel et de Hankel . . . . .	184
A.2.1	Fonctions de Bessel de première espèce . . . . .	184
A.2.2	Fonctions de Bessel de deuxième espèce . . . . .	184
A.2.3	Fonctions de Hankel . . . . .	184
A.2.4	Propriétés élémentaires . . . . .	185
A.2.5	Forme de la solution de l'équation de Helmholtz en domaine circulaire . . . . .	185
A.3	Solution explicite du problème de diffraction . . . . .	185
A.3.1	Champ incident de type onde plane . . . . .	186
A.3.2	Onde incidente cylindrique . . . . .	186
<b>B</b>	<b>Noyaux de Green pour l'équation de Helmholtz en domaine borné</b>	<b>189</b>
B.1	Noyau de Green pour l'équation d'Helmholtz 2D en domaine borné circulaire . . . . .	189
B.2	Noyau de Green du demi-espace . . . . .	189
<b>C</b>	<b>Résolution numérique des équations intégrales</b>	<b>191</b>
C.1	La méthode de Nyström . . . . .	191
<b>D</b>	<b>Méthode multi-centres : choix du partitionnement</b>	<b>195</b>
D.1	Le choix des splines . . . . .	195
D.2	Construction de la fonction mère . . . . .	195
<b>E</b>	<b>Propriétés de l'opérateur de diffraction</b>	<b>197</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>





## Résumé

Cette étude s'inscrit dans le cadre du développement d'outils pour la simulation de la diffraction pour le Contrôle Non Destructif par ultrasons. Très utilisé pour le diagnostic de pièces industrielles, le contrôle non destructif par méthode ultrasonore consiste à détecter la présence de défauts à l'intérieur de la pièce inspectée, par transmission et réflexion d'une onde acoustique haute fréquence.

Afin d'interpréter et d'optimiser ces contrôles, il est important de pouvoir simuler avec précision la réponse en régime haute fréquence d'un obstacle diffractant de géométrie arbitraire dans un milieu étendu de forme complexe. Cependant ni les méthodes numériques basées sur la discrétisation du domaine de calcul (FEM, FDM, BEM), ni les méthodes asymptotiques, lorsqu'appliquées individuellement ne permettent de prédire à la fois de façon rapide et précise les phénomènes de diffraction dans cette configuration : les méthodes numériques sont précises mais coûteuses dans ce régime de fréquence, alors que les méthodes asymptotiques, bien adaptées à la propagation haute fréquence sur de longues distances sont imprécises pour le calcul de la diffraction par des obstacles de taille de l'ordre de la longueur d'onde. On propose ici une stratégie hybride combinant la méthode des équations intégrales (BEM) et la méthode des rayons.

La méthode hybride proposée repose sur un modèle multi-échelles de l'obstacle diffractant qui permet à la fois de découpler les effets de propagation et de diffraction, et de les calculer séparément respectivement par la méthode des rayons et la méthode des équations intégrales, mais aussi de combiner les résultats issus de ces deux méthodes pour évaluer le champ diffracté.

La méthode hybride est d'abord décrite dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain. Sous cette hypothèse, la méthode appelée barycentrique modélise l'obstacle par son barycentre et un coefficient de diffraction haute fréquence calculé par la méthode des équations intégrales. Cette stratégie permet un formalisme simple et rapide d'évaluation du champ diffracté. Lorsque l'hypothèse de champ lointain est mise en défaut, on étend sous certaines conditions le principe de la méthode barycentrique, cette extension est appelée méthode multi-centres. Par l'introduction d'un partitionnement de l'unité du contour de l'obstacle on modélise l'obstacle, comme un ensemble de points récepteurs et émetteurs de rayons, chacun associés à un coefficient de diffraction haute fréquence. Le contexte industriel d'application de la méthode hybride développée impose une contrainte de rapidité qui nous a amené à proposer une stratégie d'accélération de la méthode hybride reposant sur une procédure Online-Offline afin d'accélérer l'évaluation du champ diffracté dans un contexte multi-sources, multi-récepteurs. On a en particulier obtenu des résultats probant pour l'accélération de la méthode dans le cas 2D, qui laisse supposer des résultats d'accélération d'autant plus intéressants dans le cadre de la dimension 3. Les méthodes hybrides barycentrique et multi-centres sont décrites et illustrées dans le cadre du problème de diffraction acoustique 2D en milieu homogène. Cependant leur caractère générique autorise leur extension à des problèmes acoustiques 3D et élastodynamiques 3D. On discute enfin, dans ce manuscrit, de l'extension du formalisme de la méthode hybride dans ces deux cadres et on présente des exemples de couplage sur des configurations de diffraction simples en acoustique.

Le manuscrit se divise en 6 chapitres.

- Le premier chapitre est dédié à des rappels bibliographiques concernant les outils de modélisation de la diffraction et de la propagation haute fréquence les plus courants. On insiste en particulier sur l'intérêt et le principe de la méthode des rayons et des équations intégrales. On précise également la stratégie du couplage proposée.
- Dans le deuxième chapitre, on présente le principe de la méthode hybride barycentrique dans le contexte de la diffraction en dimension 2 et on donne les paramètres de contrôle a priori de l'erreur. On illustre également la méthode sur quelques expériences numériques de diffraction 2D en milieu homogène, menées comme une preuve de concept de la méthode.
- Au chapitre trois, on présente le principe et les outils de la méthode multi-centres. Cette stratégie

hybride étend la méthode barycentrique pour traiter des configurations de diffraction pour lesquelles les hypothèses de champ lointain ne sont plus satisfaites. Contrairement à la méthode barycentrique, on ne peut contrôler l'erreur globale que par des paramètres liés à la géométrie locale de l'obstacle. On illustre enfin l'intérêt de cette extension sur une configuration de diffraction 2D en milieu homogène.

- Le chapitre 4 présente une stratégie d'accélération basée sur une procédure de calcul Online-Offline. On présente son principe dans le cadre de la méthode hybride barycentrique puis multi-centres et on illustre ses performances sur une configuration de diffraction 2D impliquant un grand nombre de positions de la source et du point d'observation.
- Au chapitre 5, on s'attache à décrire les choix faits pour appliquer la méthode hybride dans un contexte plus réaliste : la diffraction dans un milieu borné inhomogène. On construit pas à pas la méthodologie de résolution complète dans ce contexte. D'une part, par transformée de Fourier inverse, on simule la propagation de l'onde dans le milieu borné sur un intervalle de temps donné. D'autre part, on donne des pistes de travail pour adapter la stratégie hybride à la simulation de la diffraction par un obstacle proche du bord du milieu de propagation.
- Le chapitre 6 discute de l'extension de la méthode hybride à l'acoustique et à l'élastodynamique 3D. On présente d'abord le principe de la méthode barycentrique pour un problème acoustique 3D, on en réalise une analyse de l'erreur *a priori*, puis on l'illustre sur la configuration académique de la diffraction par une sphère. On donne ensuite quelques pistes pour étendre la méthode multi-centres à la dimension 3. On décrit enfin les outils nécessaires à l'extension de la méthode barycentrique à des problèmes élastodynamiques en dimension 3. Aucun développement numérique n'a cependant été réalisé pour ces problèmes.

# Notations

## Notations communes à tous les chapitres

- $t$  : variable de temps
- $x$  : variable d'espace
- $\Omega^e$  : domaine de propagation extérieur au défaut
- $\Omega$  : domaine de l'obstacle diffractant
- $\Gamma$  : contour de l'obstacle diffractant
- $y$  : points de  $\Gamma$
- $\omega$  : pulsation des ondes (dépendance temporelle de la forme  $e^{i\omega t}$ )
- $c$  : célérité du milieu
- $k$  : nombre d'onde
- $x_s$  : position de la source
- $x_r$  : position du point d'observation
- $u^i$  : champ incident
- $u^T$  : champ total solution de l'équation des ondes
- $u$  : champ diffracté, solution sortante du problème de diffraction
- $W$  : enveloppe temporelle de l'ondelette d'émission
- $F_s$  : fréquence centrale de l'ondelette  $W$
- $\mathcal{R}$  : coefficient de diffraction obtenu par approximation champ lointain de la formule de représentation intégrale
- $P$  : nombre de sous-domaines dans le recouvrement
- $(\Gamma_p)_{1 \leq p \leq P}$  : famille de sous-domaines du recouvrement de *Gamma*
- $(\eta_p)_{1 \leq p \leq P}$  : famille de fonctions de partition de l'unité subordonnée au recouvrement
- $\mathcal{R}_p^q$  : coefficient de diffraction pour le couple  $(q, p)$  de sous-domaines
- $\times$  : produit matriciel
- $\cdot \times$  : produit composante par composante entre matrices
- $\mathbb{1}_N$  : vecteur ligne de  $N$  dont les coefficients valent tous 1
- $\text{diag}(A)$  : matrice diagonale construite à partir du vecteur  $A$

- $\cdot^T$  : symbole pour la transposition
- $\bar{\cdot}$  : symbole pour le conjugué
- $\cdot^H$  : symbole pour la transposition hermitienne d'une matrice,  $A^H = \bar{A}^T$
- $A^r(x,z)$  : amplitude complexe de propagation du rayon diffracté entre le point d'émission  $z$  et le point de réception  $x$
- $\phi^r(x,z)$  : phase du rayon diffracté émis par le point  $z$  et propagé jusqu'à  $x$
- $A^s(z,x)$  : amplitude complexe de propagation du rayon diffracté entre le point d'émission  $x$  et le point de réception  $z$
- $\phi^s(z,x)$  : phase du rayon incident émis par le point  $x$  et propagé jusqu'à  $z$
- $N_s$  : nombre de sources
- $N_r$  : nombre de points d'observation
- $N_d$  : nombre de points de quadrature sur  $\Gamma$

# Introduction

## Simulation pour le Contrôle Non Destructif : contexte et besoin industriel

Au fil du temps, l'utilisation de champs ultrasonores est devenue dans de nombreuses disciplines, un précieux outil pour sonder les milieux continus complexes. On l'utilise en imagerie médicale pour sonder la santé des tissus (radiographie, scanners, IRM, élastographie), en géophysique pour analyser les propriétés des sols (pétrole), mais aussi dans le milieu industriel, aéronautique et spatial, dans le génie civil ou nucléaire pour contrôler la robustesse et la fiabilité de fonctionnement de certaines structures et pièces (pièces de moteur, tuyauterie, pipelines, soudures, etc...). Le principe de son utilisation est simple et repose sur des phénomènes de propagation à haute fréquence similaires à ceux de l'optique géométrique : réflexion/réfraction, et diffraction. On génère dans le milieu à inspecter des ondes hautes fréquences de faible amplitude (afin de ne pas altérer le milieu), par des émetteurs ultrasonores au contact ou à une certaine distance du milieu à inspecter. Lors de leur propagation dans le milieu, la course de ces ondes est modifiée : elles sont réfléchies et réfractées par les bords du domaine de propagation, ou ses interfaces, et diffractées par les éventuels défauts (fissures, inhomogénéités) présents dans le milieu. Après un certain temps de propagation on mesure ces ondes à l'aide d'un récepteur ultrasonore. L'interprétation de cette mesure permet de déduire la présence de défauts et un post-traitement d'obtenir des informations sur leur nature, leur géométrie et leur dimension. Les milieux sont ainsi sondés sur toute leur profondeur et extension spatiale avec une sensibilité suffisante pour détecter des obstacles de taille de l'ordre du centimètre ou du millimètre. Cette technique d'inspection de milieux continus (pièce de moteurs, sol, bâtiment) basée sur l'analyse de l'écho de propagation d'ondes ultrasonores de faible amplitude s'appelle contrôle non destructif par ultrasons (CND US).

Dans le milieu industriel, cette technique est devenue incontournable pour quantifier l'intégrité des pièces inspectées. Elle intervient à plusieurs niveaux dans la vie d'une pièce. On l'utilise dans une large mesure pour déterminer le niveau de dégradation (présence de fissures ou d'inclusions fragilisantes, usure) d'une pièce, soumise à des contraintes mécaniques ou thermiques importantes, et dont le rôle est essentiel au bon fonctionnement de systèmes industriels plus complexes (pièce d'avion ou pipeline d'acheminement d'hydrocarbures, ailes d'avion, cuve de centrale nucléaire) au cours de tests d'usure. Les contrôles peuvent alors par exemple servir à détecter les pièces trop défectueuses dans le but de les remplacer afin d'éviter les accidents. Le CND US intervient également pour contrôler la conformité à un cahier des charges, la robustesse, et la fiabilité de pièces industrielles après leur production comme c'est le cas dans l'industrie de fabrication des tôles, avant conditionnement. De plus, certains procédés d'assemblages (matériaux composites, soudures) ou de fabrication comme la fabrication additive peuvent nécessiter un contrôle non destructif des pièces de façon ponctuelle ou continue, pour s'assurer de la pureté (absence d'inclusions d'air ou autres matériaux) de la pièce créée. La question de la fiabilité de l'interprétation des résultats de mesure prend tout son sens lorsque le contrôle doit servir à détecter des tumeurs, ou le caractère obsolète de pièces industrielles critiques, ou encore à prévenir des fuites dans des pipelines.

C'est pour améliorer l'interprétation des mesures de contrôle dans le milieu contrôlé, c'est à dire aider au diagnostic de pièces, que la modélisation et la simulation des configurations de CND par ultrasons s'est imposée. En effet, la modélisation et la simulation des interactions d'ondes ultrasonores avec un milieu permet de prédire les résultats de mesure associés à une configuration complexe donnée. La simulation numérique est aujourd'hui devenue un outil à chaque étape du processus de CND (Calmon (2012), Thompson (2001)). On l'utilise en plus de l'aide au diagnostic pour concevoir et optimiser les sondes d'émission et de réception, appelées traducteurs, et pour concevoir la configuration des expériences de contrôle optimales. Pour répondre à ces nouveaux besoins, des outils de simulation automatiques et rapides sont développés pour mener des

études paramétriques dans le but d'optimiser le choix et le calibre du traducteur pour une inspection en fonction de la nature des pièces et des zones à contrôler. On compte aujourd'hui de nombreuses plate-formes d'outils de simulation pour le CND. Le large spectre des nouvelles applications de la simulation pour le CND impose à ces plate-formes de simulation de proposer des outils numériques, adaptés à un usage industriel intensif, à la fois précis et rapides.

Le CEA est un acteur majeur de la modélisation pour le CND, développant depuis 25 ans, avec ses partenaires (EDF/INRIA/CNRS) une plate-forme de simulation pour le CND par ultrasons, courants de Foucault, ondes guidées ou radiographie/tomographie, appelée CIVA. Son module ultrasonore prédit de façon précise et rapide une mesure d'inspection ultrasonore réaliste complète, dans un large spectre d'applications nécessitant à la fois le calcul de la propagation de champs et des interactions avec des défauts.

## Méthodologie de simulation du Contrôle Non Destructif dans CIVA

Le calcul de la propagation de champ et d'interactions avec des défauts dans CIVA fait appel à une succession de modèles communicants. La chaîne complète de calcul comprend une modélisation des traducteurs et de leur émission par la surface émettrice, afin de traduire l'impulsion électrique en onde incidente du milieu, ainsi que le calcul de la propagation de cette onde ultrasonore, à travers un milieu complexe, par un modèle adapté au régime haute fréquence, le calcul de son interaction/diffraction avec les défauts présents, et enfin celui de la propagation et de la réception de cet écho d'interaction par le capteur en réception, Darmon *et al.* (2009), Darmon et Chatillon (2013), Dorval *et al.* (2015), Toullelan *et al.* (2013). Les traducteurs dans CIVA sont des sondes piezoélectriques dont la surface émettrice est discrétisée sous la forme d'une distribution de sources ponctuelles. Le champ incident en un point est approché comme la somme des contributions de chaque source élémentaire, calculées par le modèle de propagation asymptotique choisi : la méthode des rayons Cerveny (2000), Keller et Lewis (1995). Les interactions de l'onde incidente ultrasonore avec les éventuels défauts présents dans le milieu sont prises en compte par un ensemble de modèles de diffraction/interaction asymptotiques Darmon *et al.* (2013), Darmon *et al.* (2009), Engquist et Runborg (2003) ou hybrides Leymarie *et al.* (2006), Imperiale *et al.* (2016). Pour le calcul d'écho au récepteur, on combine les phénomènes de propagation et de réception de l'écho en utilisant la relation de réciprocité de Auld, Auld (1979). Cette relation convertit par une relation intégrale les pressions acoustiques ou déplacements élastiques mesurés par la sonde ultrasonore en signal électromagnétique équivalent généré par excitation du capteur en réception, Dorval *et al.* (2015), Kino (1978), Achenbach (2003).

De façon plus générale, la stratégie de simulation dans CIVA repose sur la séparation du traitement de la propagation et de la diffraction. On distingue deux modes de fonctionnement. Le premier mode de fonctionnement appelé mode de calcul de champ prédit exclusivement la propagation de l'onde dans le milieu. Il repose sur la méthode des rayons Cerveny (2000), Chapman (2004). Cette méthode cherche une approximation haute fréquence du champ solution en régime harmonique sous la forme  $u(x) = A(x)e^{i\omega\phi(x)}$ , pour laquelle l'amplitude et la phase, sont des fonctions réelles indépendantes de la fréquence. Ces deux nouvelles inconnues sont calculées en résolvant successivement l'équation eikonale, équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre 1 qui gouverne la phase, par la méthode des caractéristiques puis l'équation de transport régissant l'évolution de l'amplitude le long des caractéristiques. Le terme rayon qui donne son nom à la méthode désigne la caractéristique le long de laquelle on propage la solution. Le mode de calcul de champ trace le trajet des différents rayons émis depuis la source dans le milieu en fonction de sa structure et des variations de sa célérité. Ce choix de modèle de propagation garantit la rapidité et la souplesse des simulations de propagation de champ haute fréquence sur de grandes distances dans des milieux complexes pouvant être homogènes/inhomogènes et isotropes/anisotropes. Ce mode gère en outre les rebonds de l'onde sur les bords du milieu de propagation et calcule les effets de réflexion et de réfraction au passage des interfaces du milieu, lorsque ces structures peuvent localement être considérées comme planes Cerveny (2000), Gengembre et Lhémy (2000).

Le deuxième mode, dit de réponse-défaut, prédit l'écho d'interaction de l'onde avec des défauts diffractants aux capteurs en réception. Il repose sur la relation de réciprocité de Auld qui convertit l'écho de diffraction au récepteur en champ électromagnétique équivalent, Auld (1979). Plus exactement, elle exprime la différence des grandeurs électromagnétiques équivalentes aux champs mesurés par la sonde pour deux configurations de

contrôle : la réponse de la propagation de l'onde incidente dans le milieu en l'absence de défaut et la réponse de l'interaction du champ incident avec le défaut. Cette quantité s'évalue par une intégrale de surface reliant ces deux états. Afin de calculer l'interaction/diffraction de l'onde incidente avec les défauts, CIVA dispose d'une batterie de modèles d'interaction : asymptotiques, exacts ou hybrides, dont l'utilisation dépend du type de défaut impliqué et de la configuration. Plus précisément, chaque modèle dépend de la taille des défauts par rapport à la longueur d'onde et de leurs propriétés physiques relativement au milieu environnant, ainsi que de leur position relative par rapport au bord de pièce. Les premières méthodes implémentées dans CIVA sont issues de modèles asymptotiques. Ces méthodes calculent l'écho de l'onde incidente par le défaut comme un rayon pondéré par un coefficient dépendant des directions d'incidence et d'observation, appelé coefficient de diffraction ou d'interaction. Ces méthodes asymptotiques découplent le calcul de la propagation (méthode des rayons) de celui des effets d'interaction, contenus dans le coefficient de diffraction. Ce formalisme garantit la rapidité du calcul du champ diffracté et donc des simulations, pour un usage intensif du logiciel (étude paramétrique) adapté aux besoins industriels. On compte un ensemble de méthodes asymptotiques dans CIVA chacune adaptée au calcul d'interactions bien spécifiques, Bo (2011), Engquist et Runborg (2003). La méthode de Kirchhoff tient compte des phénomènes de réflexion spéculaire (dans la direction de réflexion de l'optique géométrique) de l'onde incidente sur de grands défauts en termes de longueur d'onde et partiellement de certains phénomènes de diffraction. La théorie géométrique de la diffraction (GTD) approche les effets de diffraction par les coins ou les arêtes. Toutefois, les méthodes de Kirchhoff et GTD présentent une certaine directivité. Alors que la précision de la méthode de Kirchhoff se dégrade dans des zones éloignées de la direction de réflexion spéculaire, la GTD calcule un coefficient qui n'est pas borné dans toutes les directions. Pour dépasser cet inconvénient des méthodes uniformes comme la théorie géométrique de la diffraction uniforme (UTD) Kouyoumjian et Pathak (1974) ou la théorie asymptotique uniforme (UAT) Lewis et Boersma (1969), Ahluwalia (1970), Lee et Deschamps (1976) ont vu le jour. Ces méthodes permettent un calcul de coefficient de diffraction borné dans toutes les directions. L'UTD aussi appelée théorie Physique de la diffraction (PTD) combine les méthodes de Kirchhoff et la GTD afin de prendre en compte simultanément les effets de réflexion spéculaire et les effets de diffraction d'un gros défaut présentant des coins ou des arêtes. On citera enfin la méthode retenue dans CIVA pour gérer l'interaction de l'onde incidente avec une inclusion petite devant la longueur d'onde et dont les propriétés varient faiblement par rapport à celles du milieu hôte : l'approximation de Born ; Woodward (1992) ; Rajan et Frisk (1989). Ces méthodes sont faciles à mettre en œuvre et peu coûteuses en terme de temps de calcul et de mémoire, mais elles ont un cadre de validité restreint. Elles ont été validées expérimentalement dans leur domaine de validité respectif, Darmon *et al.* (2013). En particulier, les méthodes asymptotiques échouent à simuler les interactions avec un défaut diffractant de taille de l'ordre de ou plus petit que la longueur d'onde et dans d'autres cas plus complexes. Elles se limitent au calcul d'interactions avec des défauts grands devant la longueur d'onde, ne présentant pas de concavité et dits à cœur, c'est à dire dont la distance aux bords de pièce est grande devant la longueur d'onde. Ces méthodes ne permettent pas de prendre en compte les effets de diffraction multiple : rebonds du champ diffracté par le défaut sur lui même, rebonds du champ diffracté entre plusieurs défauts en interaction, ou bien les rebonds du champ diffracté entre le défaut et le bord de pièce lorsque le défaut en est à une distance de l'ordre de la longueur d'onde ou lorsque le défaut est sur le bord de pièce (défaut débouchant).

Il est important de souligner que CIVA fournit directement la réponse temporelle de l'interaction de l'onde avec le milieu de propagation élastique : la méthode des rayons et les méthodes asymptotiques du calcul des interactions sont donc déployées en régime instationnaire. On obtient la solution au problème de diffraction en combinant les résultats des effets de propagation et d'interaction par le principe de réciprocité en régime temporel Gengembre *et al.* (2003).

## **Le rôle des méthodes numériques dans la simulation du CND**

Il existe des méthodes plus précises pour prédire ces phénomènes complexes, ce sont les méthodes numériques. On peut citer la méthode des différences finies (FD) Moczo *et al.* (2007), la méthode des éléments finis (FEM) Bécache *et al.* (2007), Komatitsch et Tromp (1999), Cohen (2013), ou encore la méthode des éléments finis de frontière (BEM) Beskos (1987), Colton et Kress (1992). Toutes ces méthodes résolvent sur



un domaine discrétisé les équations aux dérivées partielles modélisant le problème physique. Leur précision est déterminée par le nombre de points ou d'éléments par longueur d'onde et leur coût de calcul à précision constante augmente avec la fréquence. Pour des fréquences suffisamment grandes, une résolution complète de problèmes posés sur des domaines de grande taille (de l'ordre de la centaine de longueurs d'onde) par méthode numérique n'est pas envisageable pour une utilisation industrielle (étude paramétrique). Elle devient trop coûteuses. Cependant, pour mettre au service de la simulation CND les avantages des méthodes numériques, des méthodes hybrides combinant la méthode des rayons et une méthode numérique ont été développées au cours de la dernière décennie. On compte actuellement deux méthodes hybrides dans CIVA qui combinent la méthode des rayons et la méthode des éléments finis, Imperiale *et al.* (2016), Leymarie *et al.* (2006). Ces méthodes développées pour mieux tenir compte des phénomènes complexes sus-cités et non-prédictibles par des méthodes asymptotiques qui peuvent intervenir dans des configurations de CND réalistes, dissocient le traitement de la propagation et de l'interaction avec le défaut selon la logique de CIVA. Les phénomènes de propagation sont calculés par la méthode des rayons, et le champ issu de l'interaction avec le défaut est calculé dans une petite région de l'espace contenant le défaut par la méthode des éléments finis. En appliquant une relation de réciprocité de Auld, adaptée au régime temporel, Gengembre *et al.* (2003), Leymarie *et al.* (2006), aux résultats de la propagation et de la diffraction on obtient la réponse transitoire du problème de diffraction au capteur en réception. La première méthode hybride combinant la méthode des rayons et la méthode des éléments finis a été développée en collaboration avec EDF et l'INRIA qui ont fourni le code de calcul éléments finis (FEM) (ATHENA) pour résoudre des problèmes 2D. De récents travaux menés au CEA, Imperiale *et al.* (2016), proposent une alternative de résolution plus adaptée aux problèmes 3D qui allie les performances de la méthode des éléments finis spectraux (méthode d'éléments finis de Lagrange d'ordre élevé associée à une stratégie d'intégration de la forme variationnelle par une quadrature de Gauss-Legendre-Lobatto) à la souplesse de la décomposition de domaine. Ces méthodes partagent toutefois des inconvénients communs. La partie résolution FEM est d'autant plus coûteuse que la taille du domaine de calcul FEM est grande. Pour permettre des simulations rapides, on limite donc la taille de ce domaine. Par conséquent, les phénomènes d'interaction multiples (défaut-défaut, défaut-bord de pièce) ne seront pris en compte que si les différents éléments en interaction sont suffisamment proches pour être inclus dans le même domaine FEM. Le cadre de ces méthodes se prête donc mal au calcul précis des interactions multiples lorsque les différents éléments en interaction sont trop éloignés.

## **Présentation de la contribution du travail de thèse pour la simulation en CND : couplage BEM-rayons**

Le travail de thèse présenté ici s'inscrit dans cette logique de mise au point de méthodes hybrides pour améliorer la prédiction des phénomènes complexes intervenant dans la simulation de configurations de CND réalistes. On propose une méthode hybride combinant la méthode des rayons pour simuler la propagation et la méthode des éléments finis de frontière (BEM) pour calculer les effets de diffraction ou d'interaction multiples. La BEM s'adapte bien à la stratégie d'hybridation de CIVA qui sépare le traitement des phénomènes de propagation et de diffraction. En outre elle permet de prédire les interactions dans un plus large spectre de configurations, indépendamment de la distance entre les éléments interagissant. Ces avantages sont dus à la spécificité de la BEM. On résume ici le principe de la BEM puis on précise son rôle dans la méthode hybride proposée.

La méthode des équations intégrale Colton et Kress (1992), Nédélec (2001), Beskos (1987) reformule l'équation différentielle modélisant le problème physique initial sous forme d'un problème surfacique équivalent régi par une équation intégrale de surface. En adjoignant à l'équation intégrale une condition de radiation ou de Sommerfeld à l'infini, qui permet de sélectionner la solution sortante du problème, on se ramène à un problème bien posé dont l'inconnue est cherchée sur les bords du domaine de calcul. Cela réduit donc significativement le nombre de degrés de liberté par rapport à une méthode numérique volumique (FEM par exemple). La méthode des éléments finis de frontière désigne la méthode numérique permettant de résoudre cette équation intégrale. Elle résout numériquement le problème sans approximation du modèle physique, la rendant plus précise que les méthodes asymptotiques. Par ailleurs, elle a l'avantage de n'en-

gagner qu'une faible dispersion numérique, ce qui en fait une méthode numérique très précise. Cependant elle possède deux inconvénients majeurs. Le premier est que la discrétisation de l'équation intégrale conduit à la définition d'un système linéaire dont la matrice ( $\in \mathbb{C}^{N \times N}$ ) est pleine, posant le problème du coût de calcul d'une résolution par inversion directe. Les coûts mémoire  $O(N^2)$ , et d'inversion directe,  $O(N^3)$  de ces matrices peuvent devenir prohibitifs lorsque les surfaces discrétisées sont de grande taille par rapport à la longueur d'onde. Des techniques d'accélération et de compression telles les FFM, [Greengard *et al.* (1998), Sylvand (2002), Chaillat (2009)], et les H-matrices, [Borm (2010), Kachanovska (2014), Desiderio (2017)], rendent toutefois possible le traitement des problèmes à grand nombre de degrés de liberté. On retiendra que la BEM est efficace et précise lorsqu'on résout des problèmes de diffraction impliquant des surfaces de petite dimension. Pour résoudre de façon précise les problèmes de propagation (CND) en milieu borné de grande taille (taille en  $O(100\lambda)$ ), l'utilisation de la BEM seule serait trop coûteuse, on doit combiner méthode numérique et méthode asymptotique pour garantir rapidité et précision. Le deuxième inconvénient est la limite d'applicabilité de la BEM qui nécessite de pouvoir définir l'expression analytique de la solution fondamentale de l'équation des ondes. Cela n'est possible que pour un milieu de propagation homogène.

La méthode hybride que nous proposons résout séparément, en régime fréquentiel, les phénomènes de diffraction et d'interactions, et réalise la synthèse temporelle de la réponse au problème par transformée de Fourier inverse. L'évaluation des effets d'interaction par la méthode proposée repose sur le calcul par la BEM dans le régime haute fréquence d'un coefficient de diffraction associé à chaque obstacle diffractant. On approche ainsi le champ diffracté comme un seul rayon ou un ensemble fini de rayons, issus de points, aussi appelés centres, bien choisis sur la géométrie, pondérés par un coefficient de diffraction qui cristallise les effets de diffraction du défaut autour de chaque centre. Elle rejoint dans leur formalisme les méthodes asymptotiques, tout en résolvant de façon précise les effets de diffraction. Parallèlement, la méthode est plus souple que la méthode des éléments finis pour prédire les effets complexes d'interaction multiples du défaut sur lui-même, du défaut avec les autres défauts, du défaut avec le bord de pièce. Toutefois, elle ne s'y substitue pas car ne permet pas de traiter des problèmes en milieux inhomogènes. Elle fournit donc un outil, pour CIVA, rapide et précis pour simuler les interactions avec les défauts. Ce manuscrit en décrit le développement et la validation.

On rappelle que les outils de simulation pour le CND sont bien souvent développés dans le cadre de problèmes élastodynamique ou électromagnétique 3D, afin de résoudre des configurations réalistes. On prévient le lecteur que notre apport vise à proposer un couplage répondant au besoin du CND mais étudié dans un cadre simplifié afin de pouvoir mener une analyse la plus fine possible. En particulier, on choisit de se placer en dimensions deux d'espace de façon à pouvoir réaliser des calculs numériques sans être limité par les capacités des calculateurs actuels pour les problèmes 3D. De même, on retient dans un premier temps le modèle acoustique plutôt que le modèle élastique afin de simplifier la validation de la méthode proposée. Se placer dans ce cadre simplifié nous a donc permis de bien cerner les limites et les performances de la méthode hybride pour un faible coût de développement du solveur BEM. Cependant la méthode hybride est conçue de sorte à être aisément transposable à la 3D ou encore à l'élastodynamique. Une transposition de ce couplage à l'acoustique 3D et à l'élastodynamique seront d'ailleurs mentionnées dans ce manuscrit. L'analyse sera principalement menée en milieu homogène, pour simplifier une fois encore. Et enfin, afin de s'affranchir des erreurs d'approximations de la solution liées à la méthode de résolution numérique des équations intégrales, la méthode des éléments finis de frontière, nous choisissons de résoudre les équations intégrales par la méthode de Nyström. Cette méthode de collocation s'appuie sur la quadrature de Nyström pour évaluer les intégrales singulières. Elle est très précise par rapport à la solution exacte pour des surfaces régulières. Ce choix nous permettra ainsi de mieux interpréter les erreurs d'approximation de la solution liées à notre méthode.

Au chapitre 1, on introduit le contexte de l'étude et on décrit brièvement les différentes méthodes de résolution de l'équation des ondes en fonction du régime de fréquence. On distingue dans ce chapitre les méthodes asymptotiques des méthodes numériques classiques. On décrit en particulier, brièvement, le principe des principaux outils présents dans CIVA pour le calcul des interactions d'une onde par un défaut : la méthode de Kirchhoff, la TGD etc. On détaille ensuite plus en profondeur les deux méthodes mises en jeu dans le couplage que nous proposons : la méthode des rayons, et la méthode des éléments finis de frontière. Enfin, on

conclut en dévoilant la stratégie de couplage retenue.

Dans le chapitre 2, on détaille le principe de la version barycentrique de la stratégie de couplage, dans le contexte d'un problème de diffraction posé en milieu non-borné et homogène. On se place dans ce contexte très simplifié pour étudier sous forme d'une analyse d'erreur et d'une étude numérique le cadre de validité de la méthode. On conclut ce chapitre par quelques illustrations des performances et des limites de l'extension de la méthode sur des configurations de diffraction académiques.

Dans le chapitre 3, on décrit une extension de la méthode hybride pour traiter la diffraction par des objets de taille de l'ordre de quelques longueurs d'onde. On donne le principe de cette extension de la méthode hybride dans le cadre d'une configuration de diffraction en milieu non-borné et homogène, pour clarifier l'exposé. On réalise en outre une analyse de l'erreur et par une étude numérique on éprouve l'influence des différents paramètres sur l'erreur de la méthode. On conclut ce chapitre comme le précédent par des illustrations numériques de son intérêt et de ses performances, sur des configurations académiques.

Au chapitre 4, on expose la stratégie d'accélération de la méthode hybride proposée. Cette accélération repose sur une procédure de calcul Online-Offline. On détaille son principe et l'algorithme de mise en œuvre dans le cadre de la méthode barycentrique et multi-centres et on éprouve ses performances dans les deux cas sur des configurations de diffraction en milieu non-borné et homogène.

Au chapitre 5, on montre qu'il est possible d'étendre la méthode à l'acoustique 3D. On développe le formalisme dans le cadre de l'acoustique 3D une fois encore pour une configuration de diffraction en milieu non-borné homogène et on donne quelques illustrations. On conclut en étendant le principe de la méthode hybride à des problèmes élastodynamiques 3D.

Dans le chapitre 6, on s'intéresse à des configurations de diffraction en milieu borné et inhomogène. C'est un chapitre exploratoire qui donne quelques perspectives à ce travail. On discute d'une part de l'extension de la méthode à des milieux inhomogènes, puis on présente la stratégie de résolution en milieu borné. On distingue le cas de la diffraction par un défaut à cœur ou proche du bord.

Communications :

- CFA : 13e Congrès Français d'Acoustique, avril 2016, Le Mans.

Proceeding :

*Couplage BEM-Rayon pour le Contrôle Non Destructif par Ultrasons*,  
<http://www.conforg.fr/cfa2016/cdrom/data/articles/000544.pdf>

- CANUM, Obernai, mai 2016,

- AFPAC 2017 : 16th Anglo-French Physical Acoustics Conference, janvier 2017, Marseille.

Proceeding :

*A hybrid method combining the surface integral equation method and ray tracing for the numerical simulation of high frequency diffraction involved in ultrasonic NDT*,  
à paraître dans *Journal of Physics : Conference Series*.

- WAVES 2017 : 13th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation

Abstract :

*A hybrid method combining boundary elements and ray tracing for high frequency diffraction. Application to NDT*, 2017, Minneapolis.

Production scientifique :

- développement de code BEM 2D par la méthode de Nyström

# Chapitre 1

## Présentation des méthodes de simulation de la diffraction acoustique pour la stratégie de couplage haute fréquence

On présente dans ce chapitre les principaux outils utiles au développement de la méthode hybride que l'on propose. On commence par donner le contexte d'étude qui a motivé la mise au point de la méthode hybride et le problème modèle sur lequel on s'appuiera pour la présenter. On dresse ensuite synthétiquement l'état de l'art sur les méthodes de résolution de l'équation des ondes en séparant la présentation des méthodes de simulation de la propagation de celles qui résolvent le problème de diffraction. On décrit d'abord les différentes méthodes asymptotiques de calcul de propagation, puis on détaille la méthode asymptotique retenue dans CIVA pour traiter la propagation : la méthode des rayons. On présente ensuite la liste des méthodes numériques ou asymptotiques qui calculent les effets de diffraction et on décrit en particulier la méthode des équations intégrales, principal outil de notre méthode hybride. On conclut enfin ce chapitre en expliquant la stratégie de CIVA pour la résolution du problème de diffraction ainsi que la stratégie que l'on a adopté pour le couplage proposé.

Par souci de simplicité et dans l'optique d'une preuve de concept, la méthode hybride a dans ce travail principalement été développée et éprouvée en acoustique 2D. On se place dans ce cadre dès ce chapitre.

### 1.1 Contexte d'étude et problème modèle

#### 1.1.1 Contexte général et objectifs

Le travail exposé dans ce manuscrit s'inscrit dans le cadre plus général de l'enrichissement de la plateforme CIVA de simulation pour le CND développée par le CEA LIST. Il propose un nouvel outil pour simuler la propagation d'ondes haute fréquence dans un milieu complexe (géométrie, propriété). Cet outil prend la forme d'une méthode de résolution hybride capable de simuler avec précision la physique du problème sous de moins grandes contraintes de modélisation que CIVA. Il repose toutefois sur une stratégie de résolution multi-échelle qui consiste à séparer le traitement des phénomènes de propagation et de diffraction. Cette stratégie spécifique à la simulation de configurations de CND signifie en particulier résoudre le problème de diffraction sur un domaine non borné et traiter les interactions des champs avec le bord du milieu par méthode asymptotique.

Les configurations de CND US se modélisent comme des problèmes de propagation en milieu borné perturbé par un ensemble d'inhomogénéités ou de fissures de géométrie quelconque (isolées ou organisées en réseau et/ou en interaction avec le bord du milieu) posés en régime haute fréquence. Ce sont par nature des problèmes multi-échelles où peuvent coexister des phénomènes d'interaction de nature différente intervenant à des échelles différentes. Pour prédire ces phénomènes à chaque échelle, il existe des méthodes classiques, que CIVA reprend et met à disposition des utilisateurs pour le calcul d'interactions. Ces méthodes sont basées sur une modélisation haute fréquence du problème physique spécifique à l'échelle à laquelle on le considère.

Dans les configurations de CND, on distingue au moins trois échelles de longueur : l'échelle du milieu de propagation ( $L$ ), sur laquelle on observe les effets de propagation haute fréquence, l'échelle de la longueur d'onde ( $\lambda$ ) qui correspond à l'échelle des effets de diffraction, et une échelle intermédiaire ( $O(\lambda)$ ) correspondant à une zone de taille de l'ordre de quelques longueurs d'onde où champs diffractés et réfléchis interagissent. La méthode la plus efficace pour simuler l'interaction d'onde haute fréquence avec des obstacles à chaque échelle dépend de leur taille, de leur position relative et de leur position par rapport au bord du milieu. On distingue en particulier les modèles d'interactions avec un obstacle (de contour  $\Gamma$ ) de taille caractéristique  $r_\Gamma$  gros en terme de longueur d'onde ( $r_\Gamma > 10\lambda$ ) ou petit ( $r_\Gamma \leq \lambda$ ). En outre, ces défauts peuvent être proches du bord voire débouchants, ou suffisamment éloignés des bords du milieu de propagation pour que les interactions du champ (réfléchi ou diffracté) qu'ils diffusent puissent être modélisées comme des rebonds au sens de l'optique géométrique.

On décrit ces modèles d'interactions en s'appuyant sur la configuration non-réaliste schématisée par la figure 1.1 qui fait intervenir 4 types de défauts emblématiques des différentes échelles de modélisation. On a représenté un défaut  $D_1$  de grande taille en terme de longueur d'onde, situé loin du bord, mais en interaction avec un agglomérat de petits défauts diffractants noté  $D_2$ , un petit défaut diffractant  $D_3$  éloigné du bord de pièce et une petite fissure  $D_4$  proche de la frontière du milieu. On décrit maintenant pour chaque catégorie de défaut le modèle de CND US le mieux adapté, dont CIVA dispose, pour prédire la physique des interactions et la méthode avec laquelle la traiter. On en donne en particulier les spécificités.

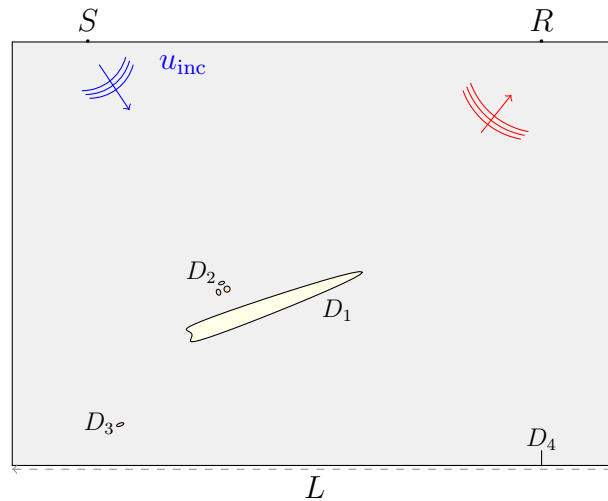


FIGURE 1.1 – Un exemple schématique de milieu complexe

- Interaction haute fréquence avec un gros défaut à cœur  $D_1$ .  
Un obstacle de grande taille par rapport à la longueur d'onde se comporte essentiellement comme un réflecteur. L'approximation de Kirchhoff permet de calculer le champ généré par l'interaction d'une onde incidente haute fréquence avec ce type d'obstacle lorsque sa face éclairée est régulière. Cette méthode repose sur l'approximation de l'optique géométrique et modélise la face éclairée de l'obstacle comme réfléchissante et localement plane. Pour affiner les résultats du calcul d'interaction, c'est à dire prendre en compte les effets de diffraction au niveau de la frontière ombre-lumière ou lorsque l'obstacle présente un coin ou une arête, on utilise la théorie physique de la diffraction (PTD).
- Interaction haute fréquence avec un petit défaut à cœur  $D_3$ .  
Lorsqu'une onde haute fréquence rencontre un défaut dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde ( $r_\Gamma = O(\lambda)$ ), l'onde est diffractée. À cette échelle, les méthodes asymptotiques décrivent mal les phénomènes de diffraction. Si on veut prendre en compte ces effets de façon plus précise, CIVA offre deux options :
  - approximation de Born : si le petit défaut est une inclusion présentant un faible contraste de vitesse par rapport au milieu hôte, on peut simuler les effets de diffraction par l'approximation de Born.

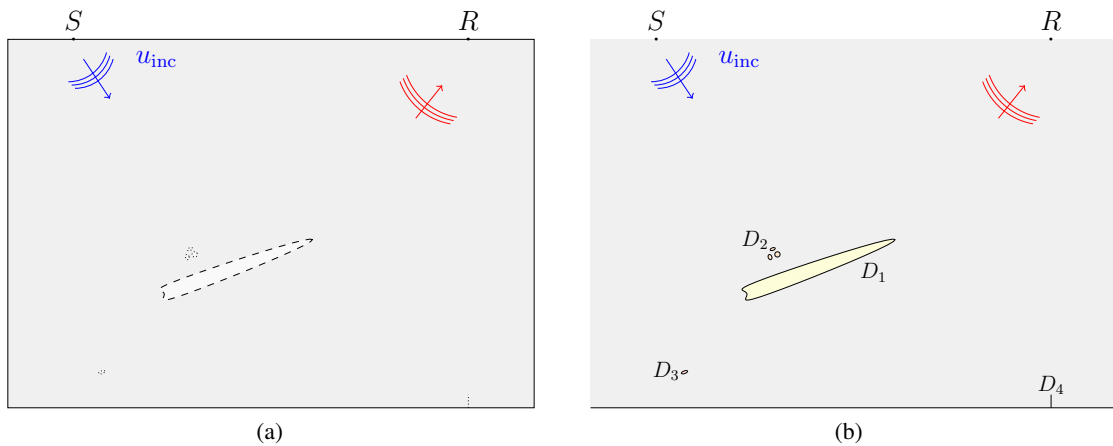


FIGURE 1.2 – Pour traiter la configuration 1.1, CIVA calcule les effets de propagation (gauche) et les interactions (droite) séparément.

Si le défaut est très petit on suppose le champ transmis dans l'inclusion égal au champ incident, mais s'il est plus gros, on tient compte de sa loi de variation de célérité pour y propager le champ.

- méthode hybride : si le défaut est une fissure ou une inclusion, CIVA propose une méthode hybride qui calcule la propagation du champ incident dans le milieu en l'absence de l'obstacle par la méthode des rayons puis résout par éléments finis l'EDP décrivant le problème de propagation dans un petit domaine contenant l'obstacle. Les résultats sont ensuite combinés par le principe de réciprocité de Auld pour évaluer le champ diffracté. Cette méthode est détaillée en section 1.6.
- Interaction haute fréquence avec un gros défaut près du bord.
 

Lorsqu'un gros défaut est très proche du bord (distance défaut-bord de l'ordre de  $O(\lambda)$ ), ses interactions avec le bord ne peuvent plus être traitées par l'approximation de l'optique géométrique : il n'est plus suffisant de calculer les réflexions entre le défaut et le bord par l'approximation de Kirchhoff ou la PTD. Pour prendre en compte les multi-rebonds du champ réfléchi avec le bord on doit utiliser une approche plus précise. L'option la plus précise proposée par CIVA pour cette configuration est l'approche hybride qui repose sur la méthode des éléments finis. Cependant, le calcul peut devenir très coûteux si le domaine de calcul contenant le défaut est trop grand. Ce type de configuration est donc critique pour CIVA en terme d'efficacité de calcul.
- Interaction haute fréquence avec un petit défaut près du bord, voire débouchant  $D_4$ .
 

La méthode hybride est la méthode de CIVA la mieux adaptée pour simuler cette interaction. On se donne un domaine contenant le défaut et la partie du bord en interaction avec le défaut, et on résout le problème par éléments finis. On prend ainsi en compte les effets de diffraction du défaut et l'interaction complexe de son champ diffracté avec le bord du milieu. La méthode est la même si le défaut est débouchant.
- Interaction haute fréquence avec un agglomérat  $D_2$  de petits défauts à cœur.
 

Les effets de diffraction générés par un agglomérat de défauts sont complexes. Chaque petit défaut diffracte et chaque champ diffracté interagit avec les autres défauts après une propagation sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde. Pour correctement modéliser et simuler ces phénomènes qui ne sont pas prédictibles par méthodes asymptotiques, la meilleure option dans CIVA est de les résoudre par méthode numérique à l'aide de la méthode hybride.
- Interaction haute fréquence avec deux défauts en interaction proche  $D_2 \cup D_1$ .
 

Lorsque deux défauts, quelle que soit leur taille, sont en interaction sur l'échelle intermédiaire ( $\propto \lambda$ ) : c'est à dire distants l'un de l'autre de quelques longueurs d'onde, on calcule dans CIVA leur interaction comme une succession de rebonds. Chaque défaut génère une perturbation du champ incident qui est calculée par le modèle CIVA le mieux adapté au type de défaut (Kirchhoff, PTD, Born). Les champs

qu'ils gènèrent sont propagés puis réfléchis selon les lois de Snell-Descartes d'un défaut à l'autre de façon itérative jusqu'à atteindre un nombre de rebonds prédéfini. C'est en particulier la stratégie que l'on adopterait avec CIVA pour calculer l'interaction entre le gros défaut  $D_1$  et le conglomérat de défauts  $D_2$  sur la configuration du schéma 1.1. Cette stratégie est aussi utilisée pour traiter l'interaction à la même échelle d'un objet diffractant ou non avec le bord du milieu lorsqu'ils sont distants de plusieurs longueurs d'onde. Mais cette stratégie ne rend pas bien compte de la complexité des effets d'interaction entre obstacles à cette échelle.

À la plupart des configurations présentées correspond une méthode de simulation plus ou moins satisfaisante dans CIVA. Toutefois, de nombreuses configurations sont mal résolues et motivent la mise au point de nouvelles méthodes hybrides. Parmi les configurations les plus critiques en terme de coût ou de précision pour les méthodes présentes dans CIVA, on en donne ici deux :

- le cas d'un gros défaut de forme concave pour lequel les multi-réflexions ou diffractions créées au niveau de la partie concave de sa frontière ne peuvent pas être calculées précisément par approche asymptotique,
- le cas du calcul de l'interaction à moyenne échelle d'un petit défaut ou d'un conglomérat de petits défauts avec un plus gros défaut ou le bord. Ces cas sont actuellement traités par méthode itérative.

Une dernière configuration non citée précédemment motive également l'étude de nouvelles stratégies de simulation, il s'agit du cas de la diffraction d'ondes de surface par un défaut débouchant (en particulier en élastodynamique 3D).

On propose dans ce travail une nouvelle approche capable de décrire avec précision la diffraction et les interactions entre de petits obstacles et de 'gros' obstacles ou avec la frontière du milieu. Cette approche est hybride et combine la méthode des rayons et la méthode des éléments finis de frontière. L'objet principal de ce manuscrit est d'en décrire le principe et d'illustrer ses performances sur des configurations académiques. Pour développer et éprouver cette méthode on se place dans un cadre de travail simplifié que l'on décrit maintenant.

### 1.1.2 Le problème modèle

Le problème modèle considéré pour décrire la méthode de couplage est le problème de propagation acoustique instationnaire en milieu homogène non borné. On le résout par une approche fréquentielle. On donne ici les notations et les équations du problème d'onde instationnaire. Les développements sont faits dans le cadre de l'acoustique en dimension 2, le chapitre 5 montrant ensuite que le travail est transposable à la dimension 3.

**Le problème d'ondes instationnaires.** On considère la propagation d'une onde cylindrique, générée en un point source  $x_s$ , dans le domaine plan  $\Omega^e := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ ,  $\Omega$  étant le support borné d'un obstacle impénétrable de taille caractéristique  $r_\Gamma$  et de frontière  $\Gamma$  (figure 1.3). On note  $c$  la vitesse du son dans ce milieu. Le système d'équations qui gouverne le champ total  $u^T$  se propageant dans le milieu se compose de l'équation des ondes instationnaires, d'une condition initiale, et d'une condition de bord qui fixe le comportement de la solution sur le bord  $\Gamma$  de l'obstacle à tout temps :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^T(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u^T(x,t) = \delta(x-x_s)W(t;\omega_s), & x \in \Omega^e, t > 0, \\ u^T(x,0) = \partial_t u^T(x,0) = 0, & x \in \Omega^e, \\ \Lambda u^T(x,t) = 0, & x \in \Gamma, t > 0, \quad \partial\Omega = \partial\Omega^e = \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans ce système  $W(t;\omega_s)$  est le signal d'émission. On le suppose caractérisé par une fonction  $w$  et une fréquence caractéristique  $F_s = 2\pi\omega_s$ ,

$$W(t;\omega_s) = \sqrt{\omega_s} w(\omega_s, t). \quad (1.2)$$

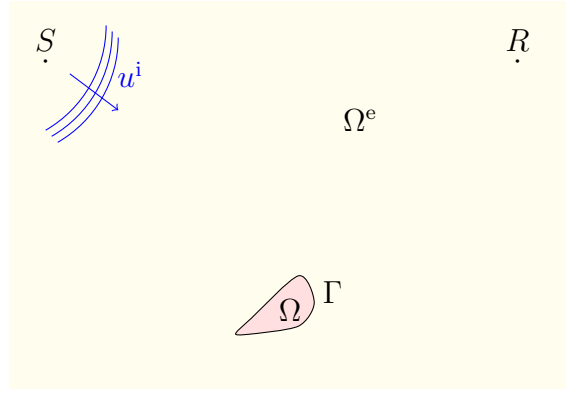


FIGURE 1.3 – Problème modèle : géométrie et notations.

On interprète  $F_s$  comme une fréquence typique du spectre du signal d'émission tandis que  $w$  est une fonction régulière et de moyenne nulle. Le choix de  $W$  est donc tel que sa norme  $L^2$  ne dépend que de  $\omega_s$ .

Il est classique de décomposer le champ total comme la somme d'un champ incident  $u^i$  et du champ diffracté  $u$ , interprété comme la perturbation du champ incident par l'obstacle  $\Omega$  :

$$u^T(x,t) = u^i(x,t) + u(x,t), \quad (1.3)$$

où  $u^i(x,t)$  est solution du problème sans obstacle,

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^i(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u^i(x,t) = \delta(x - x_s) W(t; \omega_s), & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u^i(x,0) = \partial_t u^i(x,0) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

et  $u$  est cherché comme solution du problème instationnaire

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,t) = -u^i(x,t), & x \in \Gamma, t > 0, \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

De façon générale on distingue les conditions aux limites en fonction du type d'objet que l'on veut modéliser : pénétrable ou impénétrable. On traite ici le cas d'un obstacle diffractant impénétrable. Deux conditions aux limites seront étudiées au cours de ce travail : la condition *sound-soft* ou de Dirichlet homogène qui fixe la valeur du champ à zéro sur  $\Gamma$

$$\Lambda u^T(x,t) := u^T(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, t > 0, \quad (1.6)$$

et la condition *sound-hard* ou de Neumann homogène

$$\Lambda u^T(x,t) := \frac{\partial u^T}{\partial \mathbf{v}}(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, t > 0, \quad (1.7)$$

qui modélise un obstacle rigide. On commencera par traiter le problème de propagation académique avec condition aux bords de Dirichlet homogène (1.6).

**Résolution du problème instationnaire par une approche fréquentielle.** La stratégie hybride présentée s'appuie sur une résolution par équation intégrale de surface du problème (1.1). La résolution en régime temporel de ce problème surfacique, appelée méthode des potentiels retardés Ha-Duong (2003), Jieliin *et al.* (2014), van't Wout (2013), est relativement instable, c'est pourquoi on fait le choix de résoudre le problème



en régime fréquentiel. Cette approche fréquentielle repose sur la transformée de Fourier en temps des champs incident et diffracté que l'on exprime (ces fonctions étant causales) comme :

$$\begin{cases} u^i(x_r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^\infty \hat{W}(\omega; \omega_s) \hat{u}^i(x_r; \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right), \\ u(x_r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^\infty \hat{W}(\omega; \omega_s) \hat{u}(x_r; \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right), \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\hat{W}(\omega; \omega_s)$  est la transformée de Fourier du signal source,

$$\hat{W}(\omega; \omega_s) = \int_0^\infty W(t; \omega_s) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{\omega_s}} w\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right).$$

Les champs  $\hat{u}^i$  et  $\hat{u}$ , transformées de Fourier des champs incident  $u^i$  et diffracté  $u$ , sont solutions des problèmes stationnaires,

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}^i(x; \omega) + \Delta \hat{u}^i(x; \omega) = -\delta(x - x_s), & x \in \mathbb{R}^2, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial \hat{u}^i(x; \omega)}{\partial |x|} - \frac{i\omega}{c} \hat{u}^i(x; \omega) \right) = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} \hat{u}(x; \omega) + \Delta \hat{u}(x; \omega) = 0, & x \in \Omega^e, \\ \hat{u}(x; \omega) = -\hat{u}^i(x; \omega), & x \in \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial \hat{u}(x; \omega)}{\partial |x|} - \frac{i\omega}{c} \hat{u}(x; \omega) \right) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Les conditions de radiation à l'infini sont nécessaires pour assurer le caractère causal (i.e  $u, u^i$  nuls pour  $t < 0$ ) des solutions en temps après transformée de Fourier inverse (Colton et Kress, 1992). Le champ incident  $\hat{u}^i$  n'est autre que la fonction de Green sortante de l'équation d'Helmholtz, soit

$$\hat{u}^i(x; \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \frac{\omega |x - x_s|}{c} \right),$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0.

Ainsi pour résoudre le problème instationnaire (1.1), on résout le problème (1.10) en régime fréquentiel et on retrouve la solution temporelle  $u^T = u^i + u$  en appliquant la transformée de Fourier inverse (1.8). La section suivante dresse un état de l'art des méthodes de résolution du problème (1.10).

## 1.2 État de l'art sur les méthodes de propagation en milieu complexe

La propagation des ondes hautes fréquences à travers les milieux complexes (inhomogènes, parfois anisotropes) est un sujet de grand intérêt avec de nombreuses applications, aussi bien en sismologie qu'en contrôle non destructif ou en imagerie médicale. Différentes méthodes de résolution des équations de propagation instationnaires peuvent être mises en œuvre. On distingue les approches numériques (différences finies, éléments finis ou éléments finis de frontière), des approches asymptotiques (méthode des rayons, ou encore l'approximation parabolique) ou analytiques (la méthode des faibles perturbations de Born, la méthode de Rytov) et on brosse un tableau sommaire et non-exhaustif des méthodes les plus utilisées pour prédire la propagation d'une onde dans un milieu complexe.

### 1.2.1 Les méthodes numériques

Les méthodes numériques – FD (différences finies) [Virieux (1986), Moczo *et al.* (2007)], FEM (méthode des éléments finis) [Raviart et Thomas (1998), Komatitsch et Tromp (1999), Bécache *et al.* (2007), Cohen (2013)], BEM (méthode des éléments finis de frontière) [Nédélec (2001), Colton et Kress (1992), Beskos

(1987), Thierry (2011)], DG (méthode des éléments finis de Galerkin discontinus) Cohen (2013), Pietro et Ern (2010), Chung et Engquist (2006) – constituent les méthodes de référence pour résoudre un problème physique modélisé par une EDP lorsqu'on ne peut pas accéder à la forme analytique de la solution exacte. Puisqu'elles résolvent directement numériquement les EDP dans tout le domaine de calcul, sans rajouter d'approximations au modèle physique, ces méthodes sont plus précises que les méthodes asymptotiques, qui introduisent une approximation supplémentaire dans le modèle physique. En particulier elles décrivent tous les phénomènes mis en jeu lors de la propagation dans des milieux complexes. Les erreurs qu'elles génèrent sont de façon générale d'origine numérique (discrétisation, quadratures) ou géométrique (représentation approchées des géométries sur un maillage) et peuvent être liées à des choix d'approximation des solutions. Leur précision est ajustable par un ensemble de paramètres : la taille du pas de discrétisation pour les FD, la taille des mailles, le degré de l'espace d'approximation polynomiale ou l'ordre des quadratures pour le calcul d'intégrales pour les méthodes FEM et BEM. Un facteur limitant pour toutes ces méthodes est le nombre d'éléments du maillage ou de points de la grille par longueur d'onde. Théoriquement, cinq points par longueur d'onde suffisent à représenter une oscillation mais en pratique on fixe un minimum de 10 points par longueur d'onde pour obtenir une précision donnée, Basabe et Sen (2007). À précision constante, le coût de résolution par méthode numérique croît donc rapidement avec la fréquence. Ces techniques ont par conséquent un temps de calcul et un coût mémoire important en régime haute fréquence, devenant prohibitif pour résoudre efficacement la propagation en milieu étendu. Or, la résolution d'une configuration de CND US type implique la propagation de champs haute fréquence dans un milieu de propagation borné et grand en terme de longueur d'onde (typiquement  $L = O(100\lambda)$ ). Compte tenu des limites des calculateurs actuels et des contraintes de rapidité accompagnant les besoins industriels, la résolution complète de ce type de configuration par une méthode numérique classique est difficilement envisageable. On leur préfère des méthodes asymptotiques ou analytiques qui reposent sur un modèle approché mais qui permettent à moindre coût une prédiction relativement précise des champs dans le milieu. On présente dans le prochain paragraphe un ensemble de méthodes mieux adaptées à la simulation de la propagation haute fréquence.

### 1.2.2 Méthode de propagation approchées en milieu inhomogène

Dans le cadre haute fréquence, il existe un ensemble de méthodes moins coûteuses que les méthodes numériques pour résoudre l'équation des ondes en milieu inhomogène : l'approximation de Born, l'approximation de Rytov, l'approximation paraxiale. On décrit brièvement ici leur principe et on donne des références pour plus de détails.

**Méthode des faibles perturbations de Born.** La méthode des faibles perturbations de Born, Aki et Richards (1980), Woodward (1992), Rajan et Frisk (1989), Cairns et Wolf (1990), Rath-Spivack (2012) fournit une relation linéaire entre le champ propagé (champ incident  $u^i$ ) et le modèle de perturbation de vitesse du milieu de propagation afin de prédire les fluctuations de champ dans un milieu inhomogène. Cette approximation est valide sous les hypothèses d'inhomogénéité de faible variation de contraste sur de petites distances. La méthode est en particulier bien adaptée au calcul du champ rétro-diffusé par une perturbation de vitesse (inhomogénéité) de faible amplitude et du champ propagé dans une perturbation de petit diamètre. Elle est cependant moins précise que la méthode de Rytov pour calculer la propagation de l'énergie dans une perturbation de vitesse de grande taille (risque de divergence des champs). Sa précision décroît lorsque l'angle d'incidence ou le contraste de vitesse augmentent.

Pour résumer, elle fournit une approximation de la solution de l'équation des ondes, sous forme intégrale. On exhibe ici comment obtenir cette relation pour la propagation d'une onde incidente quelconque notée  $u^i(x,t)$  dans un milieu noté  $V$  présentant une perturbation de vitesse d'ordre 1, modélisée par la fonction  $\xi$ , par rapport à la vitesse moyenne du milieu  $c_0$ ,

$$c(x) = c_0(1 - \xi(x)). \quad (1.11)$$

L'approximation de Born tient compte de la perturbation de la vitesse dans le domaine pour reformuler l'équation des ondes sous une forme linéarisée par rapport à la perturbation :

$$\left( \Delta - \frac{1}{c_0^2} (1 + 2\xi(x)) \partial_t^2 \right) u(x,t) = 0. \quad (1.12)$$

La solution de cette équation est cherchée comme la somme d'un champ  $u_0$  et d'une perturbation  $u_1$ ,

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

cherchées, en tenant compte de la linéarité de (1.12), comme les solutions respectives des deux EDP,

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right) u_0(x,t) &= 0, \\ \left( \Delta - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right) u_1(x,t) &= \frac{2}{c_0^2} \xi(x) \partial_t^2 u(x,t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

On interprète  $u_0$  comme l'onde incidente du milieu, et on calcule  $u_1$  par produit de convolution de la solution fondamentale  $G$  de l'équation des ondes par le terme source (second membre),

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{u}_1(x; \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{u}_1(x; \omega) = G(x; \omega) \star \left( \frac{2\omega^2}{c_0^2} \xi(x) u \right). \quad (1.14)$$

Cette équation intégrale de Lippmann-Schwinger ne fournit pas une expression explicite de la perturbation  $u_1$ . L'approximation de Born consiste à approcher le champ  $u$  sous l'intégrale par le champ incident :

$$u_1(x,t) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{u}_1(x; \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \hat{u}_1(x; \omega) = \frac{2\omega^2}{c_0^2} \int_V G(x-x'; \omega) \xi(x') u^i(x') dx'. \quad (1.15)$$

En outre, en se plaçant dans la zone de champ lointain de l'inhomogénéité, aussi appelée zone de Fraunhofer, on approche la fonction de Green (2D) par son développement asymptotique à l'ordre 1 et on calcule la forme de l'approximation de champ lointain de la solution obtenue par l'approximation de Born,

$$u(x,t) = u^i(x,t) + \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{c_0 \sqrt{8\pi|x|}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \omega^{3/2} e^{i(k_0|x| - \omega t)} \left( \int_V \xi(x') e^{ik_0 x \cdot x'} dx' \right) d\omega, \quad k_0 = \omega/c_0. \quad (1.16)$$

**Approximation de Rytov.** L'approximation de Rytov (Woodward (1992), Rajan et Frisk (1989), Cairns et Wolf (1990), Rath-Spivack (2012)) fournit également une relation linéaire entre le champ propagé (champ incident  $u^i$ ) et le modèle de perturbation de vitesse. Cette méthode est bien adaptée au calcul de la propagation de l'onde à travers l'inhomogénéité de vitesse quelque soit son diamètre, sous réserve que le contraste de vitesse ne soit pas trop élevé. Elle étend donc l'approximation de Born mais n'est cependant pas valide pour prédire les effets de rétro-diffusion de l'onde. Elle devient également moins précise lorsque l'angle d'incidence ou le contraste de vitesse augmentent.

On expose ici brièvement comment obtenir le champ diffusé dans une inhomogénéité par l'approximation de Rytov. La méthode repose sur la recherche de la solution de l'équation des ondes linéarisée autour de la perturbation (1.12), en régime harmonique :

$$\Delta \hat{u}(x) + k_0^2 (1 + 2\xi(x)) \hat{u}(x) = 0, \quad k_0 = \omega/c_0, \quad (1.17)$$

sous la forme

$$\hat{u}(x) = \hat{u}_0(x) P(x), \quad P(x) = e^{\gamma(x)}, \quad \gamma(x) = \ln(\chi) + i\phi, \quad (1.18)$$

où  $\chi$  et  $\phi$  sont des fonctions réelles représentant respectivement la fluctuation d'amplitude et de phase du champ diffusé dans l'inhomogénéité. En injectant cet ansatz dans (1.17), on obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$2\nabla \hat{u}_0 \cdot \nabla \psi e^\psi + \hat{u}_0 \Delta \psi e^\psi = -(\nabla \psi \cdot \nabla \psi + 2\xi k_0^2) \hat{u}_0 e^\psi. \quad (1.19)$$

qui se réécrit encore :

$$(\Delta + k_0^2) (\hat{u}_0 \psi) = -(\nabla \psi \cdot \nabla \psi + 2\xi k_0^2) \hat{u}_0. \quad (1.20)$$

La solution de l'équation (1.20) s'exprime alors sous la forme intégrale :

$$\hat{u}_0(x) \psi(x) = \int_V G(x-x'; \omega) \hat{u}_0(x') [\nabla \psi \cdot \nabla \psi(x') + 2k_0^2 \xi(x')] dx', \quad (1.21)$$

où ici encore  $G$  est la solution fondamentale de l'équation des ondes pour le milieu environnant de célérité moyenne  $c_0$ . En supposant que  $|\nabla\psi \cdot \nabla\psi| \ll 2k_0^2\xi$ , on néglige le terme en  $\nabla\psi \cdot \nabla\psi$  et on obtient l'approximation de Rytov de la solution de (1.17) :

$$\hat{u}(x) = \hat{u}_0(x)e^{\psi(x)}, \quad \psi(x) = \frac{k_0^2}{\hat{u}_0(x)} \int_V G(x-x'; \omega) \hat{u}_0(x') (2\xi(x')) dx'. \quad (1.22)$$

On voit maintenant le lien entre les approximations de Born et de Rytov du champ diffusé. Lorsque la variation de phase dans l'inhomogénéité est très faible,  $|\psi| \ll 1$ , par développement de Taylor de l'exponentielle  $e^\psi$  à l'ordre 1, l'approximation de Rytov se réduit à l'approximation de Born :

$$\hat{u}(x) = \hat{u}_0(x)(1 + \psi(x)) = \hat{u}_0(x) + k_0^2 \int_V G(x-x'; \omega) \hat{u}_0(x') 2\xi(x') dx', \quad (1.23)$$

où on rappelle que  $\hat{u}_0 = \hat{u}^i$ . Dans le cas de forte fluctuation de phase pour lequel l'approximation de Born cesse d'être valide, l'approximation de Rytov est valable tant que  $|\nabla\psi \cdot \nabla\psi| \ll 2k_0^2|\xi|$ . Cela suppose en particulier que l'inhomogénéité soit suffisamment régulière pour garantir que  $|\nabla\psi \cdot \nabla\psi|$  soit petit devant la perturbation  $2k_0^2\xi$ . En outre la quantité  $|\nabla\psi \cdot \nabla\psi|$  étant liée à l'angle de propagation, cette condition limite le cadre de validité de l'approximation de Rytov : l'inégalité  $|\nabla\psi \cdot \nabla\psi| \ll 2k_0^2|\xi|$  n'est plus correctement satisfaite dans les directions de rétro-diffusion. Par conséquent, l'approximation de Rytov est une sorte d'approximation à petits angles, qui constitue avec l'approximation parabolique un outil analytique pour les problèmes de propagation.

**L'approximation parabolique.** L'approximation paraxiale (Rytov *et al.* (1989), Rath-Spivack (2012)), est utilisée pour résoudre l'équation de propagation en milieu inhomogène perturbé par la fonction  $\xi$ , (1.11) sous l'hypothèse où l'onde incidente se propage autour d'une direction préférentielle, appelée direction axiale et que l'on néglige les ondes rétro-diffusées. On décrit ici le principe de la méthode en dimension deux. On cherche la solution de l'équation des ondes, sous la forme réduite :

$$u(x) = u_0(x) + \psi(x)e^{-ik_0x},$$

où  $k_0 = \omega/c_0$  est le nombre d'onde de référence,  $\psi$  est solution de l'EDP

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \psi = 0,$$

où  $n(x,z) = c_0/c(x,z)$  est l'indice de réfraction et  $u$  satisfait l'équation scalaire :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2 - 1) \right) u = 0, \quad (1.24)$$

On cherche donc une solution dont l'amplitude est lentement variable par rapport à la direction axiale ( $\mathbf{e}_x$ ), lorsque l'onde incidente se propage avec un faible angle par rapport à cette direction. L'équation (1.24) peut se réécrire de façon formelle,

$$(A + ik_0(1 - B))(A + ik_0(1 + B))u - ik_0[A, B]u = 0,$$

à l'aide des opérateurs pseudo-différentiels  $A$  et  $B$  :

$$A = \frac{\partial}{\partial x}, \quad B = \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2}, \quad \text{avec } [A, B] = AB - BA.$$

Sous l'hypothèse où les opérateurs  $A$  et  $B$  commutent presque :  $[A, B] \approx 0$ , qui est équivalente à supposer que l'indice de réfraction varie lentement dans la direction axiale,  $n(x,z) \approx n(z)$ , on peut découpler l'équation (1.24) en un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ik_0(1 - B)u, \quad (1.25a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ik_0(1+B)u, \quad (1.25b)$$

La solution de ces équations respectivement appelées équation de propagation sortante et rentrante correspondent à une onde respectivement propagative et rétrograde selon la direction axiale. La solution sortante qui vérifie (1.25a) s'écrit de façon formelle :

$$u(x,z) = e^{-ik_0(1-B)x}u(0,z). \quad (1.26)$$

En pratique cette expression nécessite pour être utilisée de développer l'opérateur pseudo-différentiel  $B$  sous la forme d'une série. Pour cela, on doit faire une approximation supplémentaire cohérente avec l'hypothèse de la propagation faible angle par rapport à la direction axiale, et supposer une faible variation de l'indice de réfraction :  $n \approx 1$ . On écrit alors  $B = \sqrt{1+b}$ , avec

$$b = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2 - 1,$$

où si  $b$  est petit, par un développement de Taylor à l'ordre 1, on approche  $B$  par :

$$B \approx 1 + \frac{b}{2} = 1 + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{n^2 - 1}{2} \quad (1.27)$$

En substituant l'approximation (1.27) à  $B$  dans (1.25a), on obtient l'équation parabolique décrivant la propagation dans l'approximation paraxiale :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{ik_0^2}{2}(n^2 - 1)u, \quad (1.28)$$

Le membre de droite de cette équation de propagation a deux termes : le premier décrit la diffraction, le second la diffusion due à l'inhomogénéité du milieu. (1.28) aurait pu être obtenue à partir de (1.24) en négligeant  $\partial^2 u / \partial x^2$  devant les autres termes, cependant il est intéressant de connaître ce formalisme qui permet d'obtenir d'autres formes d'équation paraboliques lorsqu'on utilise d'autres approximations de l'opérateur racine carré. En particulier, cette équation décrit la propagation paraxiale pour de petits angles autour de la direction axiale en milieu inhomogène mais on obtient l'équation décrivant la propagation à grand angle à partir de (1.25a) en approchant l'opérateur  $B$  par approximation de Padé : on parle alors de méthode grand-angle.

L'approximation parabolique a connu un grand succès dans les problèmes de propagation électromagnétique, en fournissant des précisions de prédiction inaccessibles avec le modèle de rayons. Par contre, sa résolution numérique doit être traitée avec soin pour obtenir des temps de calcul raisonnables.

On vient de décrire des méthodes très utilisées dans la littérature pour résoudre des problèmes de propagation en milieu inhomogène. Ces méthodes sont présentes dans CIVA. La méthode de propagation retenue pour notre couplage est cependant la méthode des rayons. On la décrit maintenant.

### 1.2.3 Une méthode asymptotique : la méthode des rayons

On s'intéresse dans cette partie à la description de la méthode de simulation choisie dans CIVA pour la propagation haute fréquence en milieu inhomogène : la méthode des rayons, aussi appelée *ray-tracing*. On décrit d'abord l'ansatz sur lequel le modèle asymptotique repose avant de détailler son principe de résolution numérique par *ray-tracing* et de conclure par ses limites d'applicabilité. La méthode est ici présentée dans le contexte de résolution de l'équation des ondes en acoustique 2D (1.10) en régime fréquentiel. Pour plus de détails on pourra se référer à Chapman (2004), Engquist et Runborg (2003), Keller et Lewis (1995). Cette section s'inspire de Cerveny (2000) et Bo (2011).

### 1.2.3.1 Principe de la théorie asymptotique des rayons

La méthode des rayons est une approche classique de construction de solutions approchées de l'équation des ondes en milieu inhomogène dans l'asymptotique haute fréquence, ( $\omega \rightarrow \infty$ ). Elle repose sur l'hypothèse que la solution peut être cherchée sous la forme du développement en puissance inverse de  $k$ , dit développement WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin),

$$\begin{aligned} u(x; \omega) &= A(x; \omega) e^{i\omega\phi(x)}, \\ &= e^{i\omega\phi(x)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) (ik)^{-n}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

où  $\phi$  et la famille  $(A_n)_n$ , sont des fonctions réelles, indépendantes de  $\omega$  qui désignent respectivement la phase et les amplitudes des différents ordres de l'approximation. Ces nouvelles inconnues  $\phi$  et  $(A_k)_k$ , qui caractérisent l'approximation de la solution exacte oscillante  $u$ , varient sur une échelle beaucoup plus grossière. Par conséquent leur évaluation sera beaucoup moins coûteuse que celle de  $u$ . Afin de les déterminer, on injecte cet ansatz dans l'équation des ondes et en identifiant à zéro les coefficients des puissances inverses de  $\omega$ , on obtient un système d'équations aux dérivées partielles couplées régissant l'évolution spatiale de la phase et des termes d'amplitude,

$$|\nabla\phi|^2 = c^{-2}, \quad (1.30a)$$

$$2\nabla\phi \cdot \nabla A_0 + A_0 \Delta\phi = 0, \quad (1.30b)$$

$$2\nabla\phi \cdot \nabla A_j + A_j \Delta\phi = -\Delta A_{j-1}, \quad \forall j \leq 1. \quad (1.30c)$$

On rappelle que  $n(x) = \frac{c_0}{c(x)}$  désigne l'indice de réfraction du milieu. L'équation (1.30a), appelée équation eikonale, gouverne l'évolution de la phase de l'ansatz, alors que les équations (1.30b)–(1.30c), appelées équations de transport, régissent le comportement spatial des termes d'amplitude. La résolution successive de ces équations permet de calculer la phase et la famille d'amplitudes à une constante près. On les détermine de façon unique par la donnée des conditions aux limites du système obtenues à partir des données sur la géométrie de la source et le champ qu'elle génère. Le développement asymptotique de la solution haute fréquence de l'équation des ondes est ensuite reconstruit selon (1.29).

On précise avant de détailler les outils numériques de résolution des équations eikonale et de transport le cadre de validité de la méthode des rayons. On peut approcher l'onde haute fréquence se propageant dans un milieu inhomogène par cet ansatz sous réserve que le milieu ne soit pas trop diffractant et que l'on puisse définir un temps de vol de première arrivée. Ces deux contraintes impliquent que la taille des inhomogénéités dans le milieu soient plus grande que la longueur d'onde et que les variations de la célérité soient continues et faibles sur une longueur d'onde.

Quand  $\omega$  est grand, le premier terme de la série asymptotique (1.29) est dominant, la série est donc en pratique tronquée à un nombre fini de termes. En particulier, à suffisamment haute fréquence on ne retient que le premier terme de (1.29) qui donne le comportement de l'optique géométrique. On parle alors d'approximation à l'ordre zéro ou d'approximation haute fréquence de l'optique géométrique. C'est par cet ansatz que l'on cherche à approcher les ondes haute fréquence dans CIVA, c'est pourquoi on va maintenant se focaliser sur l'ansatz d'ordre 0

$$u(x; \omega) = e^{i\omega\phi(x)} A_0(x). \quad (1.31)$$

Le système satisfait par le couple d'inconnues  $(\phi, A_0)$  est alors,

$$\begin{cases} |\nabla\phi|^2 = c^{-2}, \\ 2\nabla\phi \cdot \nabla A_0 + A_0 \Delta\phi = 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

La méthode de résolution traditionnelle de ce système, appelée *ray-tracing* ou méthode des rayons, repose sur sa reformulation lagrangienne. Elle revient à résoudre le système le long de trajectoires, appelées rayons, obtenues comme caractéristiques de l'équation eikonale par la méthode des caractéristiques. On décrit maintenant cette méthode qui se décompose en deux temps (Cerveny (2000)) : la résolution de l'équation eikonale (la théorie cinématique des rayons), puis de l'équation de transport (la théorie dynamique des rayons).

### 1.2.3.2 Théorie cinématique des rayons : résolution de l'équation eikonale

La théorie cinématique des rayons consiste à résoudre l'équation eikonale, afin de décrire les trajectoires des rayons et d'évaluer leur phase  $\phi$ , aussi appelée temps de vol, le long de ses trajectoires. Elle consiste à écrire l'équation eikonale sous forme d'une équation d'Hamilton-Jacobi

$$H(x,p) = 0,$$

décrite dans l'espace des phases constitué des coordonnées cartésiennes  $(x, p)$  – vecteur position et lenteur  $p = \nabla\phi$  défini comme le gradient de la phase  $\phi$  – et à la résoudre. La méthode la plus répandue pour la résoudre est la méthode des caractéristiques. On cherche les courbes paramétrées  $(x(u), p(u))$  le long desquelles le Hamiltonien est constant :

$$\frac{dH}{du}(x,p) = \nabla_x H \cdot \frac{dx}{du} + \nabla_p H \cdot \frac{dp}{du} = 0. \quad (1.33)$$

On déduit ainsi un système d'équations différentielles du premier ordre couplées qui définit le comportement des bicaractéristiques  $(x(u), p(u))$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \nabla_p H(x,p), \\ \frac{dp}{du} &= -\nabla_x H(x,p), \\ \frac{d\phi}{du} &= p \cdot \nabla_p H(x,p). \end{aligned} \quad (1.34)$$

La résolution de ce système pour des conditions initiales données, par une méthode d'intégration classique, permet de calculer directement le trajet  $x(u)$  et le vecteur lenteur  $p(u)$  des rayons. On peut alors déduire du vecteur lenteur les temps de vol le long du rayon.

D'un point de vue physique, une isosurface de  $\phi$ , c'est à dire une surface où  $\phi$  est constante, décrit un front de l'onde qui se propage en un point donné de l'espace dans la direction du vecteur lenteur  $p$ . Le vecteur  $p$  est orthogonal au front d'onde en tout point. Les rayons sont les courbes  $x(u)$  le long desquelles  $H$  est constant, elles sont tangentes en tout point à  $p$ . Ce sont des courbes orthogonales aux fronts d'onde paramétrées par les variables  $s$  et  $u$ , respectivement position du pied du rayon sur le front d'onde dont il est issu et abscisse curviligne du point courant le long du rayon, voir figure 1.4.

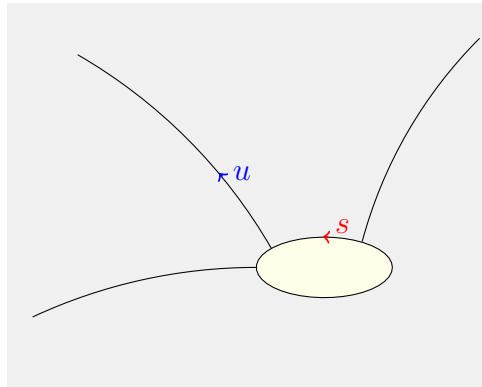


FIGURE 1.4 – Emission de rayon depuis une source (en jaune) étendue

**Système de tracé de rayons acoustiques.** Le Hamiltonien  $H$  est, comme en mécanique hamiltonienne, défini comme l'énergie totale du système. On peut le définir de façon naturelle à partir de l'équation eikonale par

$$H(x,p) = \frac{1}{2} (|\nabla\phi|^2 - c^{-2}) = \frac{1}{2} (|p|^2 - c^{-2}) = 0. \quad (1.35)$$

Mais il existe des formes plus générales du hamiltonien en fonction du sens physique que l'on veut donner au paramètre  $u$ . Le lecteur pourra se reporter à [Cerveny (2000), chapitre 3 p.106-112]. Pour l'exposé et les

calculs numériques on choisit de poser le Hamiltonien comme la limite lorsque  $\eta$  tend vers 0 du hamiltonien plus général  $H_\eta$ ,

$$H_\eta(x,p) = \frac{1}{\eta} [|p|^\eta - c^{-\eta}], \quad (1.36)$$

qui par la règle de l'Hopital<sup>1</sup> donne pour  $\eta \rightarrow 0$ ,

$$H(x,p) = \frac{1}{2} \ln(p \cdot p) + \ln(c) = 0. \quad (1.37)$$

Pour cet Hamiltonien on déduit le système de tracé de rayon,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= c^2(x)p, \\ \frac{dp}{du} &= -\frac{\nabla_x c(x)}{c(x)}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

où on rappelle que  $c$  désigne la vitesse du son. On déduit de ce système que la phase satisfait l'équation

$$\frac{d\phi}{du} = 1, \quad (1.39)$$

indiquant une correspondance directe entre la phase et le paramètre sur le rayon pour ce Hamiltonien. Pour résoudre le système du tracé de rayons (1.38), composé d'EDO d'ordre 1, on adjoint des conditions initiales correspondant à la position du rayon sur la source  $x_0 = x(u_0)$  et au vecteur lenteur initial  $p_0 = p(u_0)$ . Ce dernier est déterminé à partir de la direction initiale du rayon spécifiée par un angle  $\alpha$ ,

$$p_0 = \frac{1}{c(x_0)} [\cos(\alpha), \sin(\alpha)]^T.$$

Les expressions en 3D se trouvent de la même façon. Le lecteur intéressé pourra se reporter à Cervený (2000), Bouche et Molinet (1994). Dans certains cas, on peut accéder à l'expression analytique des solutions du système de tracé de rayon. C'est en particulier le cas lorsqu'on travaille en milieu homogène, décrit par une vitesse du son constante,  $c_0$ . Dans ce cas le vecteur lenteur est constant le long des rayons et conserve sa valeur initiale  $p_0$ . Les rayons sont alors définis par le paramétrage,

$$x(u) = x_0 + c_0^2 p_0 (u - u_0). \quad (1.40)$$

En milieu homogène, les rayons sont des segments de droites issus de la source et dont la direction est fixée par le vecteur lenteur initial. Le front d'onde se propageant à vitesse constante, les écartements entre deux fronts d'onde sont constants, comme on peut l'observer sur la figure (1.8). Pour des milieux isotropes inhomogènes quelconques, où on ne dispose pas de l'expression analytique des caractéristiques, le système de rayon doit être résolu par intégration numérique. Pour un milieu dont la célérité est à gradient constant suivant la loi, par exemple,

$$c(x_1, x_2) = 2x_1,$$

on obtient la distribution de rayon sur la figure (1.12). On remarque avec cette deuxième illustration que les rayons ne sont plus rectilignes et ne remplissent pas tout l'espace à étudier à cause de leur divergence géométrique : leur espacement dépend de la variation locale de la célérité. La divergence des rayons est d'autant plus importante que la variation de vitesse du milieu est grande ou que l'on observe la solution à grande distance de la source. Des zones de champ nul où il n'y a pas de distribution de rayons peuvent artificiellement être créées, altérant la précision de calcul du champ dans l'espace. Pour obtenir des informations sur le champ solution dans ces zones entre les rayons on doit alors réaliser une interpolation.

Une technique pour éviter les problèmes de non-couverture de l'espace du fait de la divergence des rayons a été introduite par Vinje *et al.* (1993). Appelée méthode de front d'onde, elle consiste à construire les fronts

---

1. Énoncé simple : Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions définies sur  $[a,b]$ , nulles en  $a$ , dérivables en  $a$  et telles que  $f(a) = g(a) = 0$  et que le quotient  $\frac{f'(a)}{g'(a)}$  existe, alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ .



d'onde les plus précis possibles et quasi-uniformes dans tout l'espace, à partir des tracés de rayons. Sachant que les fronts d'onde sont des courbes orthogonales aux rayons, ces surfaces sont d'autant plus précises que le nombre de rayons pour les représenter augmente. La méthode consiste donc à tracer automatiquement des rayons au fur et à mesure à partir du front d'onde précédent dès que certains critères imposés ne sont plus respectés, par exemple, la distance entre deux rayons voisins ou la différence de direction de propagation entre deux rayons voisins.

Pour éviter les difficultés de divergence géométrique des rayons, on peut aussi changer de méthode de résolution. Différents auteurs ont développé des méthodes numériques basées sur la méthode des différences finies, (Podvin et Lecomte (1991), Vidale (1988), Trier et Symes (1991)). D'autres méthodes comme le fast marching method (Sethian (1996)), group marching method (Kim (2000)) ou fast sweeping method (Tsai *et al.* (2003)) se sont montrées plus efficaces que les précédentes. Mais ces méthodes numériques présentent des problèmes d'instabilité et de précision dans les zones où la variation de vitesse est très forte du fait de la non linéarité de l'équation.

Enfin, la méthode des rayons trace des rayons dans une zone donnée de l'espace sans pouvoir contrôler le point d'arrivée de chaque rayon. Si on souhaite tracer un rayon entre deux points, on peut reformuler le système de tracé de rayon en une EDO d'ordre 2 avec conditions au bord puis intégrer cette EDO numériquement. Cette technique s'appelle tracé de rayons entre deux points. Les articles Pereyra *et al.* (1980), Um et C.Thurber (1980) en donnent deux méthodes de résolution numérique.

Dans cette section, on a pu présenter la méthode de tracé de rayon, qui permet de résoudre l'équation eikonale, ainsi que quelques méthodes alternatives que l'on peut trouver dans la littérature. La méthode des rayons ou *ray-tracing* est celle utilisée dans CIVA pour le calcul de propagation.

### 1.2.3.3 Théorie dynamique des rayons : résolution de l'équation de transport

La méthode de résolution de l'équation eikonale présentée calcule la trajectoire des rayons au cours de la propagation de l'onde dans le milieu, ainsi que le vecteur lenteur le long des rayons. Ce vecteur donne lui-même accès à la forme des fronts d'onde et permet après intégration d'évaluer le temps de vol le long des rayons. Reste maintenant à évaluer l'amplitude du champ le long des rayons pour caractériser son approximation haute fréquence. Pour cela on décrit ici une méthode de résolution de l'équation de transport (1.30c), appelée théorie dynamique des rayons (Cerveny (2000)).

L'équation de transport est une équation conservative. La théorie dynamique des rayons utilise cette propriété pour montrer que l'amplitude évolue le long des rayons en fonction de leur divergence géométrique. On commence ici par donner le détail pour la propagation en milieu homogène avant de présenter la méthode générique applicable à tous types de milieux.

**Résolution de l'équation de transport : conservation de l'énergie.** On met ici en évidence la propriété de conservation de l'énergie du système acoustique dans un volume fermé. En multipliant (1.30b) par l'amplitude

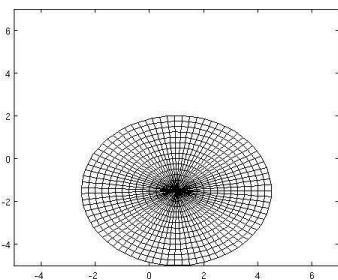


FIGURE 1.5 –  $t = 1,4s$

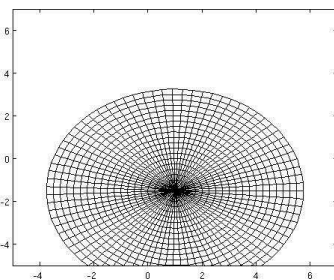


FIGURE 1.6 –  $t = 2,5s$

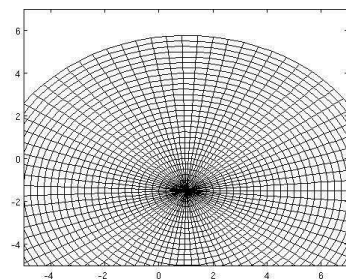


FIGURE 1.7 –  $t = 3,5s$

FIGURE 1.8 – Tracé de rayons en milieu homogène ( $c_0 = 200$ ) issus de la source ponctuelle  $x_s = (1; -1,5)$ . Représentation des rayons à trois instants différents.

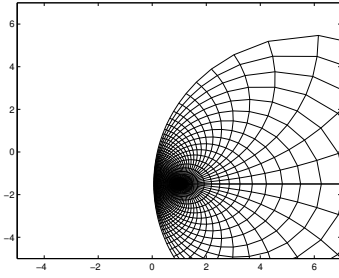


FIGURE 1.9 –  $t = 1,4s$

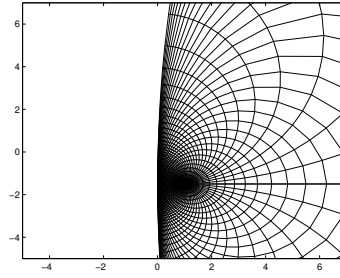


FIGURE 1.10 –  $t = 2,5s$

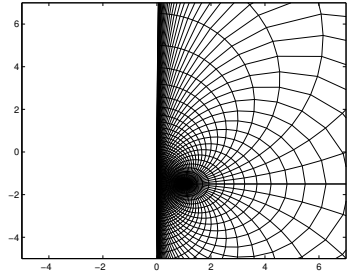


FIGURE 1.11 –  $t = 3,5s$

FIGURE 1.12 – Tracé de rayons issus de la source ponctuelle  $x_s = (1; -1,5)$  en milieu inhomogène. Représentation des rayons à trois instants différents.

$A_0$  du champ solution, l'équation de transport devient :

$$2A_0 \nabla A_0 \cdot \nabla \phi + A_0^2 \Delta \phi = \text{div} (A_0^2 \nabla \phi) = 0. \quad (1.41)$$

Cette équation montre que le flux d'énergie  $A_0^2 \nabla \phi$  du système acoustique est de divergence nulle. Donc d'après la formule de Green-Ostrogradsky, son flux se conserve dans un volume fermé. En particulier, on considère le volume fermé  $V$  délimité par un tube de rayons associés au rayon principal dont l'orientation est définie par le vecteur lenteur  $p$ . Ce tube de rayons est défini comme le volume délimité par deux portions de front d'onde à deux instants très proches  $S_1$  et  $S_2$ , et par la surface latérale  $P$  formée par les rayons s'appuyant sur les bords  $S_1$  et  $S_2$ . En intégrant (1.41) sur ce tube de rayons, et en appliquant la formule de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$0 = \int_V \text{div} (A_0^2 \nabla \phi) dV = \int_{P+S_1+S_2} A_0^2 p \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_1} \frac{A_0^2}{c} dS + \int_{S_2} \frac{A_0^2}{c} dS. \quad (1.42)$$

L'intégrale sur la surface latérale  $P$  est nulle car  $p \cdot \mathbf{n} = 0$ . Le flux d'énergie ne traverse donc que les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . La conservation de l'énergie s'exprime comme l'égalité des flux d'énergie entrant et sortant :

$$\int_{S_1} \frac{A_0^2}{c} dS = \int_{S_2} \frac{A_0^2}{c} dS. \quad (1.43)$$

En supposant les grandeurs uniformes sur la section infinitésimale du front d'onde considérée, on peut calculer l'amplitude  $A_0^{S_2}$  associée à un rayon en un point de la surface  $S_2$  à partir de sa valeur  $A_0^{S_1}$  connue sur le même rayon en un point de  $S_1$ , comme suit :

$$A_0^{S_2} = A_0^{S_1} \sqrt{\frac{c_2 S_1}{c_1 S_2}}. \quad (1.44)$$

La déformation du tube de rayon est donc évaluée par le rapport  $S_1/S_2$ , appelé divergence géométrique du champ de propagation. En milieu homogène, le tube de rayons est composé de rayons droits, la forme du tube ressemble à un pinceau de forme parallélépipédique en 3D et de trapèze en 2D et le rapport des sections  $\frac{S_1}{S_2}$  peut être calculé par des considérations géométriques simples.

Le calcul de l'amplitude le long des rayons n'est pas aussi aisé pour des milieux inhomogènes. Les rayons en milieu inhomogène ne sont plus rectilignes et l'équation de conservation (1.42) ne peut plus être approchée par (1.44). En particulier, la divergence géométrique du tube de rayon va devoir être évaluée par calcul différentiel à l'aide du jacobien de la transformation qui permet le passage du système de coordonnées du rayon au système de coordonnées cartésiennes. On décrit dans le paragraphe suivant comment évaluer la divergence géométrique d'un tube de rayon en milieu inhomogène.

**Détermination du jacobien le long des rayons.** Cette partie reprend la review de Engquist et Runborg (2003). Pour calculer l'amplitude le long des rayons, on a besoin d'informations locales de la source du rayon ainsi que de la divergence géométrique locale du rayon. On définit la transformation  $T$  qui à la position du

ped du rayon sur la source rayonnante, condition initiale du système de tracé de rayons, associe la position courante du rayon.

$$T : (u, \xi_0) \rightarrow T(u, \xi_0) = x(u, \xi_0), \quad (1.45)$$

Il s'agit en fait du flot du système de tracé de rayon. La position du point courant sur un rayon est alors repéré à partir de la position initiale du rayon sur la source  $\xi^0$  et de l'abscisse curviligne  $u$  du point courant sur le rayon par rapport à sa position initiale, voir figure 1.13. On définit la matrice jacobienne  $Q = D_{\xi_0} T$  de cette

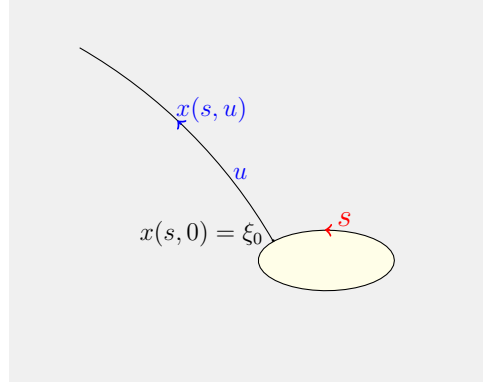


FIGURE 1.13 – Transformation du système de coordonnées du rayon en coordonnées cartésiennes le long d'un rayon

transformation par rapport à la donnée initiale  $\xi^0$ ,

$$Q = D_{\xi_0} x(u, \xi_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1^0} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1^0} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2^0} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2^0} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

et  $J = \det(Q)$  le jacobien de cette transformation et on applique enfin le théorème de Liouville, rappelé ci-dessous, à la fonction  $v(u) = \ln(J)(u)$ , où  $f(v) = \nabla(c^2 \nabla \phi)$ .

**Théorème 1.2.1.** (Théorème de Liouville) Soit l'équation différentielle  $\frac{dv}{du} = f(v)$  posée dans  $\mathbb{R}^2$ , avec la condition initiale  $v(0) = a$ . Elle induit le flot  $a \rightarrow v(a, u)$ . Soit  $J = \det(\frac{\partial v(a, u)}{\partial a})$ , le jacobien de cette application. On a,

$$\frac{d \ln(J)}{du} = \text{div}(f(v)).$$

Grâce au théorème de Liouville et à (1.38), on montre [Engquist et Runborg (2003), p.14] que si  $Q$  est non singulière, on a

$$\frac{dJ}{du} = J \text{div}\left(\frac{dx}{du}\right) = J \text{div}(c^2(x)p). \quad (1.47)$$

En différentiant la quantité  $A^2(x(u, \xi^0)) c(x(u, \xi^0)) J(u, \xi^0)$  le long du rayon, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d [A^2(x(u, \xi^0)) c^2(x(u, \xi^0)) J(u, \xi^0)]}{du} &= J (\nabla(A^2 c^2)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + JA^2 c^2 \text{div}(c^2 \nabla \phi) \\ &= J \text{div}(A^2 \nabla \phi) \\ &= JA [2 \nabla A \cdot \nabla \phi + \Delta \phi A] = 0, \end{aligned} \quad (1.48)$$

en utilisant pour la dernière étape l'équation de conservation (1.42). On déduit alors l'amplitude le long du rayon,

$$A(x(u, \xi^0)) = A(\xi^0) \frac{c(x(u, \xi^0))}{c(\xi^0)} \sqrt{\frac{|J(0, \xi^0)|}{|J(u, \xi^0)|}}. \quad (1.49)$$

Cette équation donne la loi de décroissance de l'amplitude du champ propagé le long d'un rayon. Le déterminant  $J$  de la transformation  $T$  est souvent appelé divergence géométrique puisqu'elle mesure l'accroissement paraxial de la surface infinitésimale transportée par le rayon au cours de sa propagation. Cette relation est valable tant que la matrice  $Q$  n'est pas singulière, c'est à dire hors des zones de superposition des rayons de type caustiques ou points de focalisation. Par ailleurs elle n'est pas valable non plus pour le calcul de l'amplitude dans les zones d'ombre où le développement (1.29) n'est plus valable. Grâce à (1.49), on remarque qu'au voisinage de ces points l'amplitude devient non bornée.

Pour calculer l'amplitude du champ solution, on a donc besoin de déterminer le jacobien de la transformation. On obtient chaque élément de la matrice jacobienne en résolvant un nouveau système d'EDO appelé système de tracé de rayons dynamiques. Pour l'obtenir on définit la matrice jacobienne  $S$  de la transformation qui à la condition initiale du vecteur lenteur au pied du rayon associe la valeur du vecteur lenteur au point courant sur le rayon :

$$S = D_{\xi_0} p(u, \xi_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \xi_1^0} & \frac{\partial p_2}{\partial \xi_1^0} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \xi_2^0} & \frac{\partial p_2}{\partial \xi_2^0} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

En différenciant les matrices jacobienes (1.50) et (1.46) le long du rayon, on obtient

$$\frac{d}{du} \begin{pmatrix} Q \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{px}^2 H & D_{pp}^2 H \\ D_{xx}^2 H & D_{xp}^2 H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ S \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

avec des conditions initiales relatives à la source rayonnante. Pour une source non ponctuelle, les conditions initiales s'écrivent,

$$D_{\xi_0} x(0, \xi^0) = I, \quad D_{\xi_0} p = D^2 \phi(\xi_0).$$

Dans le cas du hamiltonien que nous avons choisi,  $H(x, p) = c^2 |p|^2 - 1 = 0$ , le système de tracé de rayons dynamique s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} Q_{i,j} &= p_i \sum_k \frac{\partial c^2}{\partial x_k} Q_{k,j} + c^2 S_{i,j}, \\ \frac{d}{du} S_{i,j} &= -\frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 c^2}{\partial x_i \partial x_k} c^{-2} Q_{k,j} - \frac{\partial c^2}{\partial x_i} \sum_k p_k S_{k,j}. \end{aligned}$$

Après résolution de ce système, on calcule l'amplitude le long du rayon par la formule (1.49).

#### 1.2.3.4 La méthode des rayons : ses avantages et ses limites

La méthode des rayons présente de nombreux avantages. Elle est relativement facile à mettre en place et peu coûteuse par rapport aux méthodes numériques pour la résolution de problèmes en régime haute fréquence. Elle est en particulier bien adaptée pour simuler la propagation d'une onde sur de longues distances. L'ansatz sur lequel elle s'appuie permet de reformuler l'équation des ondes, équation aux dérivées partielles d'ordre 2 en un système couplé de deux équations différentielles d'ordre 1. Cependant elle compte aussi de sérieuses limites liées au modèle asymptotique sur lequel on se base pour chercher la solution. On s'attache dans cette partie à en donner les limites.

Le premier inconvénient de la méthode des rayons est due à la non-linéarité de l'équation eikonale. Cette spécificité n'autorise pas de solution avec phase multiple : les rayons d'une même source ne sont pas autorisés à se croiser. La solution calculée en un point donné de l'espace n'est pas une solution physique puisqu'elle ne vérifie pas le principe de superposition, mais est simplement la première onde arrivée en ce point. On l'appelle aussi solution du temps de première arrivée. Plus précisément cette solution ne vérifie pas le principe de superposition en tous points de l'espace de propagation, l'approximation rayon s'effondre aux points où les rayons se croisent : au niveau des points de focalisation des rayons, des caustiques et de discontinuité de vitesse du milieu. Le gradient de la phase est de plus discontinu autour de ces points, ce qui provoque la divergence de l'amplitude des rayons. En ces points, l'ansatz n'est plus approprié.

Par ailleurs, dans le cadre de la propagation dans un milieu contenant un obstacle, cette méthode ne permet pas de décrire la bonne solution autour des frontières d'ombre-lumière liées à cet obstacle ni même les phénomènes d'ondes rampantes rayonnées le long de la géodésique dans la zone d'ombre. En effet, cette méthode s'appuie sur le terme d'ordre 0 du développement asymptotique WKB, qui ne décrit pas les phénomènes de diffraction. En particulier elle échoue pour la prise en compte des effets de diffraction par de petits objets. Cette dernière limitation résulte du cadre de validité du modèle asymptotique. L'approximation WKB repose sur la modélisation locale des ondes hautes fréquences par des ondes planes. Cette approximation est possible lorsqu'on considère un problème de propagation dans un milieu inhomogène pour lequel la taille des inhomogénéités est plus grande que la longueur d'onde et dont les variations de célérité sont continues et faibles sur une longueur d'onde. Enfin, l'approximation WKB suppose une régularité assez forte de la condition initiale de l'équation des ondes instationnaire afin de garantir une régularité suffisante de la phase et de l'amplitude du développement et donc sa convergence (Rauch (2012)).

### 1.2.3.5 Traitement des interactions avec le bord et les interfaces

Dans CIVA les rayons sont réfléchis et réfractés par les bords du milieu de propagation selon les lois de Snell-Descartes (Bouche et Molinet (1994)). Lorsque le milieu est stratifié (constitué d'une juxtaposition de milieux homogènes d'indices différents) ou présente une structure complexe avec des interfaces, l'interaction de l'onde avec les interfaces est prise en compte par des matrices d'évolution des tubes de rayons à la traversée de l'interface (Cerveny (2000), Gengembre et Lhémery (2000)). Cet outil rend possible de prédire dans le mode de calcul de champ les échos dus aux spécificités de structure du milieu.

## 1.3 Etat de l'art sur la modélisation de l'interaction d'un faisceau incident par un défaut

On s'intéresse dans cette section aux outils de simulation de l'interaction du faisceau acoustique avec les éléments diffractants (bords du milieu, défauts) du milieu inhomogène, après propagation. L'interaction d'un faisceau incident avec une cible implique un ensemble de phénomènes différents : diffraction, réflexion spéculaire, réflexions successives, diffraction multiple, ondes rampantes et onde de surface. On liste ici plusieurs modèles de diffraction utilisés couramment et notamment dans CIVA : les méthodes numériques, deux méthodes asymptotiques (approximation de Kirchhoff, et GTD) et une méthode analytique (approximation de Born). On présente ces méthodes dans le cadre de l'acoustique 2D.

### 1.3.1 Les méthodes numériques

Les méthodes numériques – FD, FEM, BEM – constituent les méthodes les plus précises pour tenir compte de l'ensemble des phénomènes d'interaction. Elles résolvent numériquement les équations aux dérivées partielles qui modélisent le problème de diffraction. Leur précision dépend directement du nombre de points ou d'éléments par longueur d'onde de la discrétisation du domaine de propagation et à précision constante, leur coût de résolution du problème augmente donc avec la fréquence. Dans les régimes haute fréquence, elles deviennent trop coûteuses pour simuler avec rapidité les configurations de CND ultrasonores impliquant des domaines de propagation étendus. Sous cette contrainte d'efficacité, on leur préfère souvent des méthodes asymptotiques rapides, peu coûteuses et donnant une bonne première approximation des interactions. Développées plus récemment, des méthodes hybrides combinant la méthode des rayons avec une méthode numérique permettent de prédire les phénomènes d'interaction avec rapidité et précision. On donne ici quelques références détaillant des méthodes hybrides basées sur la méthode des éléments finis (Gengembre *et al.* (2003), Barbone *et al.* (1998), Gómez-Revuelto *et al.* (2005), Mahaut *et al.* (2010), Imperiale et Joly (2012)), les éléments finis de frontière (Barbone et Michael (1999)), autres (Medgyesi-Mitschang et Wang (1989)). On s'intéressera plus en détail à ces méthodes en section 1.6.

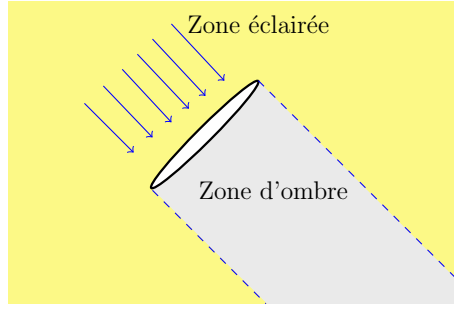


FIGURE 1.14 – Délimitation zone d'ombre/zone éclairée.

### 1.3.2 Les modèles d'interaction haute fréquence

Deux modèles asymptotiques de diffraction par des défauts sont implémentés dans CIVA : l'approximation de Kirchhoff (KA) et la théorie géométrique de la diffraction (GTD). Elles présentent des avantages et des inconvénients complémentaires. On commence par décrire brièvement leur principe puis on verra comment leur combinaison fournit une modélisation correcte de l'interaction avec la cible à la fois en réflexion et en diffraction.

**L'approximation de Kirchhoff.** L'approximation de Kirchhoff, aussi appelée optique physique (Engquist et Runborg (2003) p.24), offre dans CIVA un modèle de calcul de réflexion spéculaire d'une onde incidente par des inclusions de vide, ou des fissures libres de contrainte. Elle combine l'optique géométrique et la représentation du champ diffusé, solution de l'équation de Helmholtz, sous forme d'une intégrale de surface. Pour introduire les notations, on considère le problème de diffraction d'une onde se propageant dans le plan  $\mathbb{R}^2$  perturbé par un domaine  $\Omega$  parfaitement rigide, de contour noté  $\Gamma$ . Le champ total  $u^T$  est cherché comme la somme du champ incident  $u^i$  et d'une perturbation  $u$  appelée champ diffusé :  $u^T = u^i + u$ . Lorsque  $u^i$  satisfait les conditions de radiation de Sommerfeld, le champ total est représenté de façon rigoureuse, en tout point du domaine de propagation, à l'aide de la formule de représentation intégrale, (1.52) :

$$u^T(x) = \int_{\Gamma} \left( u^T(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^T(y)}{\partial \nu(y)} G(x,y) \right) dS(y). \quad (1.52)$$

où on note  $y$  la variable d'intégration le long du défaut,  $x$  la position du point du domaine extérieur au défaut en lequel on évalue le champ diffusé et  $G(x,y)$  la fonction de Green qui en 2D vaut  $G(x,y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|)$ . La prise en compte de la condition aux limites de l'équation des ondes donne sa valeur à l'une des traces précisant, ainsi la forme de l'intégrale. Pour un défaut parfaitement rigide (condition de Neumann) on a :  $\partial u^T(y)/\partial \nu(y) = 0$ ,  $y \in \Gamma$  et pour un défaut mou (condition de Dirichlet) :  $u^T(y) = 0$ ,  $y \in \Gamma$ .

L'approximation de Kirchhoff du champ total s'obtient en adjoignant à (1.52) deux résultats de l'optique géométrique. On rappelle d'abord que l'optique géométrique distingue sur la surface du défaut une zone éclairée, notée ici  $\Gamma^+$ , sur laquelle l'onde incidente se réfléchit selon les lois de Snell Descartes et les propriétés d'absorption de  $\Omega$ , et une zone non éclairée notée  $\Gamma^-$  dans la zone d'ombre derrière le défaut (voir figure 1.14) dans laquelle le champ diffracté est supposé nul. L'approximation de l'optique physique consiste à appliquer les conditions de bord de Kirchhoff qui négligent selon les lois de l'optique géométrique la perturbation du champ incident par l'obstacle (Goodman (2005)) :

- le champ total est nul sur la zone non éclairée de l'objet :  $u^T = 0$ , sur  $\Gamma^-$ ,
- l'onde diffusée est égale à l'onde incidente sur la zone éclairée de l'objet :  $u = u^i$  sur  $\Gamma^+$ .

L'approximation de Kirchhoff du champ total est alors définie par :

$$u^T(x) \approx 2 \int_{\Gamma^+} u^i(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)} dS(y), \quad (1.53)$$

dans le cas d'un problème avec conditions aux limites de Neumann, ou

$$u^T(x) \approx -2 \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u^i(y)}{\partial \mathbf{v}(y)} G(x,y) dS(y), \quad (1.54)$$

dans le cas d'un problème avec conditions aux limites de Dirichlet. Cette approximation du champ diffusé s'interprète en un point  $x$  comme la superposition des champs générés en tout point  $y$  de la face éclairée de l'obstacle par la source image en  $y$  à la source de champ incident : la source image étant définie comme le symétrique de la source par rapport au plan tangent à l'obstacle en  $y \in \Gamma$ .

Le champ ainsi calculé est borné si l'obstacle est borné, et continu à la traversée de la zone d'ombre-lumière. Cette approximation améliore donc l'optique géométrique. Cependant, son coût de calcul, contrairement à celui de la solution de l'optique géométrique qui est indépendant de la fréquence, augmente avec la fréquence. Cette méthode est tout de même vue comme une approximation asymptotique au sens où sa précision augmente avec la fréquence.

Dans CIVA, l'approximation de Kirchhoff calcule l'approximation haute fréquence du champ  $u^T$  en assimilant localement l'obstacle à son plan tangent en tout point de la zone éclairée. Elle tient de plus compte du régime haute fréquence en approchant dans les intégrales (1.53) ou (1.54) le noyau de Green par son développement asymptotique :

$$\frac{i}{4} H_0^1(k|x-y|) \simeq \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{ik|x-y|}}{\sqrt{|x-y|}},$$

et calcule l'approximation champ lointain du champ diffusé :

$$u^T(x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2k\pi}} \int_{\Gamma^+} u^i(y) \left( \frac{x-y}{|x-y|}, \mathbf{v}(y) \right) \frac{e^{ik|x-y|}}{\sqrt{|x-y|}} ds(y), \quad (1.55)$$

en intégrant à l'aide de méthodes de développements asymptotiques d'intégrale (méthode de la phase stationnaire par exemple).

Dans le cas du demi-plan, et du dièdre, on approche la formule de représentation intégrale du champ diffusé comme la somme du champ incident, du champ réfléchi et d'un champ diffracté (par le bord du demi-plan ou le coin du dièdre), exprimé comme une onde sphérique pondérée par un coefficient de directivité  $D^{KA}$  analytique, appelé coefficient de Kirchhoff :

$$u^T(x) = u^i + u^r + D^{KA} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (1.56)$$

Pour plus de détail sur l'expression de ces coefficients on pourra se référer à Bo (2011).

L'approximation de Kirchhoff dans CIVA conduit dans la plupart des situations de CND à une prédiction peu coûteuse et quantitativement satisfaisante à haute fréquence de l'interaction d'une onde avec un obstacle dans la zone éclairée. Toutefois, ce modèle réalise des erreurs en dehors de la direction de réflexion spéculaire (donnée par l'optique géométrique) et dans la zone d'ombre de l'obstacle, puisqu'elle ne modélise pas les ondes rampantes le long du défaut dans sa zone d'ombre. En outre elle ne permet pas de prédire de façon précise le champ diffracté par une arête ni même par un défaut de taille de la longueur d'onde.

**La théorie géométrique de la diffraction.** La théorie géométrique de la diffraction (GTD) est une généralisation de l'optique géométrique développée par J.B. Keller dans les années 60, (Keller et Lewis (1995)). Elle fournit une technique systématique pour ajouter les effets de diffraction à l'approximation de l'optique géométrique. L'optique géométrique standard prédit la propagation des champs dans le milieu de propagation par la méthode des rayons. Elle s'appuie sur le développement WKB (1.29) qui exclut les phénomènes de diffraction. Son exploitation mène à un système d'équations (1.30a)–(1.30b) qui ne permet ni de prendre en compte les effets de géométrie ni les conditions aux bords. Elle engendre donc souvent des solutions discontinues. La GTD propose d'ajouter des termes au développement WKB afin de tenir compte des effets

de diffraction. Un développement typique ajoute à l'ansatz de l'optique géométrique une série définie avec une nouvelle échelle qui représente les effets de diffraction,

$$u = e^{i\omega\phi} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (i\omega)^{-k} + e^{i\omega\phi_d} \sum_{k=0}^{\infty} B_k (i\omega)^{-k-\frac{1}{2}}.$$

Plusieurs types de géométries, chacune avec ses spécificités, peuvent être à l'origine de diffraction, telles que le demi-plan et le dièdre. L'extrémité d'une arête ou un coin diffracte l'onde incidente dans toutes les directions, alors qu'une ligne de discontinuité de courbure diffracte dans toutes les directions du cône de diffraction ayant l'arête pour axe. Lorsque l'onde incidente rencontre un obstacle courbe de surface régulière, il y a également diffraction et dans ce cas, la diffraction génère des rayons rampants le long de la géodésique qui eux même rayonnent des ondes dans la zone d'ombre.

À haute fréquence, on ne garde que les termes d'ordre 1 du développement. Les rayons diffractés  $(\phi_d, B_0)$  obéissent aux mêmes équations de l'optique géométrique que  $(\phi, A_0)$ . Leur propagation est gérée depuis la source de champ diffracté par la méthode des rayons mais leur amplitude est pondérée par un coefficient de diffraction  $D$ , appelé coefficient de diffraction GTD. Ce coefficient dépend des directions d'incidence et de diffraction  $(\theta_d, \theta_i)$ , de la fréquence, de la géométrie locale de la surface diffractante et de la célérité du milieu.

Dans le cadre de l'interaction d'une onde incidente haute fréquence avec un demi-plan ou un dièdre, le bord du demi-plan ou le coin sont modélisés comme des sources ponctuelles de champ diffracté rayonnant dans toutes les directions des rayons de la forme

$$u_s = \frac{u^i}{\sqrt{r}} D(\theta_d, \theta_i, \omega) e^{-i\omega r}.$$

où  $r$  est la distance du point d'observation au point source de rayons diffractés. Le champ total dans le domaine de propagation s'écrit comme la somme des contributions rayons de l'optique géométrique et des rayons diffractés. On pourra trouver l'expression analytique du coefficient de diffraction GTD d'un ensemble de géométries canoniques : arêtes, fentes, demi-plan, dièdres, en fonction du milieu de propagation et du type d'équation des ondes (Helmholtz, Maxwell, élastodynamique) dans Bouche et Molinet (1994).

CIVA utilise cette bibliothèque de coefficients de diffraction pour calculer la réponse locale en diffraction d'un obstacle de géométrie complexe. Pour cela, elle approche localement cette géométrie par une géométrie canonique.

Le coefficient de diffraction GTD n'est toutefois pas borné dans toutes les directions. Il diverge dans la direction de réflexion spéculaire. D'autres développements doivent être utilisés pour calculer une approximation uniforme des champs diffractés et tenir compte des champs rampants dans la zone d'ombre. Ces développements sont issus de théories uniformes telles que la théorie uniforme de la diffraction (UTD, Kouyoumjian et Pathak (1974), Lewis et Boersma (1969)) et la théorie asymptotique uniforme (UAT, Ahluwalia (1970)).

**La théorie physique de la diffraction (Physical Theory of Diffraction, PTD).** Les deux modèles classiques GTD et KA présentent chacun des avantages et des inconvénients qui semblent complémentaires : la KA calcule la réflexion spéculaire due à un obstacle de diamètre de plusieurs longueurs d'onde alors que la GTD calcule les effets de diffraction de ses discontinuités de courbure. La théorie physique de la diffraction a été développée par Ufimtsev (Ufimtsev (2007)) comme un modèle d'interaction plus générique qui s'appuie sur ces deux modèles dans le but de modéliser correctement à la fois la réflexion spéculaire et la diffraction par une arête. Elle repose sur la décomposition du champ de surface dans l'intégrale en une partie uniforme : correspondant à la densité prise en compte par l'approximation de Kirchhoff; et une partie non-uniforme appelée champ de frange. La PTD ([Bouche et Molinet (1994), pp.343]) décrit donc le champ rayonné par une discontinuité de courbure comme la somme de la solution de l'approximation de Kirchhoff qui évalue la contribution de l'optique géométrique (champs incident et réfléchi) et d'un terme correcteur qui prend en compte les phénomènes de diffraction localisés au bord de l'objet de type diffraction d'arête, et les ondes rampantes.

Cette correction est obtenue comme la différence entre la solution exacte du problème et l'approximation de Kirchhoff. Dans la pratique, cette différence est approchée par celle de leur solution asymptotique. Or, le premier terme du développement asymptotique de la solution exacte est la solution GTD, composée de



la contribution de l'optique géométrique et d'un champ de diffraction d'arête, caractérisé par le coefficient de diffraction  $D^{\text{GTD}}$ . Ainsi, chercher le champ de frange défini comme la différence de l'asymptotique de la solution exacte et de la solution de l'approximation de Kirchhoff, revient à calculer un coefficient de diffraction de frange  $D^f$  comme la différence des coefficients de diffraction GTD et Kirchhoff,

$$u^f = u^{\text{ex}} - u^{\text{KA}} \approx (D^{\text{GTD}} - D^{\text{KA}}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} = D^f A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}.$$

Cette méthode est implémentée dans CIVA (Darmon *et al.* (2013)). Cependant il faut souligner que tous les effets de diffraction, en particulier les ondes rampantes, ne sont correctement pris en compte uniquement en théorie. Dans la pratique, l'approximation haute fréquence des champs ne permet pas de simuler les ondes rampantes.

### 1.3.3 L'approximation de Born

L'approximation de Born donne la forme analytique de la perturbation de l'onde incidente par une inclusion de petit diamètre par rapport à la longueur d'onde, et de faibles contrastes de densité et de vitesse par rapport au milieu qui la contient. Elle donne la perturbation sous la forme d'une intégrale de surface. Cette technique est souvent utilisée pour calculer la réponse à l'extérieur de la perturbation (inclusion). Son principe et ses spécificités ont été décrits au paragraphe (1.2.2). Dans CIVA, l'approximation de Born est utilisée, sous une forme un peu différente, pour décrire la rétro-diffusion de l'onde par une inclusion de petit diamètre par rapport à la longueur d'onde et de géométrie canonique (sphères, cylindres, ellipsoïdes), Darmon *et al.* (2013), Darmon *et al.* (2009).

## 1.4 La méthode des équations intégrales

L'objectif de cette partie est de décrire le principe permettant l'obtention des équations intégrales associées au problème de propagation d'une onde acoustique émise au point  $z$ ,

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -\delta(x-z), & x \in \Omega^e : \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}(x) - ik u(x) \right) = 0, \end{cases} \quad (1.57)$$

et de présenter les différentes stratégies de discrétisation que nous avons choisies au cours de ce travail. Cette partie s'inspire largement de Nédélec (2001) et Thierry (2011). La méthode est présentée dans le cas 2D mais la stratégie est la même en 3D.

La méthode des équations intégrales repose sur la reformulation de l'équation des ondes en un problème surfacique régi par une équation intégrale dont l'inconnue est définie non plus dans tout  $\Omega^e$  mais sur ses bords  $\Gamma$ . Elle réduit donc la dimension du problème et est particulièrement bien adaptée à la résolution de problèmes posés en milieu non borné puisqu'elle diminue drastiquement la taille du domaine à considérer. On obtient l'équation intégrale à partir d'une identité de réciprocity faisant intervenir la solution du problème de diffraction et la fonction de Green  $G(r)$ , aussi appelée solution fondamentale, qui se définit comme la solution sortante du problème de propagation dans l'espace libre. En appliquant à cette identité des opérateurs de trace, on obtient l'équation intégrale surfacique équivalente au problème (1.57).

### 1.4.1 La fonction de Green

La fonction de Green est l'unique solution de l'équation d'Helmholtz associée à une source ponctuelle, placée ici au point  $z$ ,

$$\Delta G(x,z) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G(x,z) = -\delta(x-z), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

satisfaisant aussi la condition de radiation à l'infini, appelée dans le cadre de l'acoustique condition de Sommerfeld,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| (\partial_{|x|} G(x) - ik G(x)) = 0,$$

où  $k = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde. Ces solutions présentent un flux sortant d'énergie à l'infini. On rappelle l'expression de la fonction de Green en dimension 2,

$$\forall x, z \in \mathbb{R}^d, x \neq z, \quad G(x, z) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-z|). \quad (1.58)$$

### 1.4.2 L'identité de réciprocité

L'identité de réciprocité, qui dans le cadre de l'élastodynamique s'appellerait théorème des travaux virtuels, est une formulation qui relie une paire de solutions  $u^1, u^2$  de l'équation des ondes respectivement excitées par les seconds membres  $F^1$  et  $F^2$ , sur un domaine borné  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  supposée régulière,

$$\Delta u^1 + k^2 u^1 = F^1, \quad (1.59a)$$

$$\Delta u^2 + k^2 u^2 = F^2. \quad (1.59b)$$

En considérant  $(1.59a)u^2 - (1.59b)u^1$ , on écrit,

$$\Delta u^1 u^2 - \Delta u^2 u^1 = F^1 u^2 - F^2 u^1. \quad (1.60)$$

Puis en intégrant l'équation (1.60) sur tout le domaine  $\Omega$ , et en utilisant la formule de Green, on écrit l'identité de réciprocité,

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^1}{\partial \mathbf{v}}(y) u^2(y) - \frac{\partial u^2}{\partial \mathbf{v}}(y) u^1(y) \right) dS(y) = \int_{\Omega} (F^1(y) u^2(y) - F^2(y) u^1(y)) dV(y), \quad (1.61)$$

qui s'écrit aussi

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^1}{\partial \mathbf{v}}(y) u^2(y) - \frac{\partial u^2}{\partial \mathbf{v}}(y) u^1(y) \right) dS(y) = \int_{\Omega} (\Delta u^1(y) u^2(y) - \Delta u^2(y) u^1(y)) dV(y). \quad (1.62)$$

### 1.4.3 Formule de représentation intégrale, potentiels et formules de trace

Lorsqu'on applique l'identité de réciprocité dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\Omega^i$  et de frontière  $\Gamma = \partial\Omega^i$ , à la paire  $(G, u^-)$  respectivement solution de l'équation des ondes pour les seconds membres  $(-\delta_z, 0)$ , on aboutit à la formule de représentation intégrale de la solution en dehors en tout point  $x \in \Omega^i \setminus \Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} \left( u^-(y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(x-y) - \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{v}(y)}(y) G(x-y) \right) = \langle -\delta(\cdot - x), u^- \rangle = -\kappa u(x), \quad \Gamma = \partial\Omega^i, \quad (1.63)$$

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega^i \setminus \Gamma, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega^e \setminus \Gamma, \end{cases}$$

où  $\mathbf{v}$  est la normale sortante à  $\Omega^i$ , cette notation sera respectée dans tout le reste du manuscrit. On peut également définir la formule de représentation intégrale pour toute solution de l'équation d'Helmholtz dans un domaine non borné satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld. On énonce ce résultat dans le théorème suivant, en gardant les notations  $\Omega^i, \Omega^e$  et  $\Gamma$  respectivement pour le domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ , son complémentaire et sa frontière :

**Théorème 1.4.1.** Théorème de représentation intégrale.

Si  $u^-$  est solution de l'équation d'Helmholtz dans l'ouvert borné  $\Omega^i$ , alors on a,

$$\int_{\Gamma} \left( u^-(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(y)} G(x-y) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(y)} u^-(y) G(x-y) \right) dS(y) = \begin{cases} -u^-(x), & \text{si } x \in \Omega^i, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega^e. \end{cases} \quad (1.64)$$

Si  $u$  est solution de l'équation d'Helmholtz dans l'ouvert non borné  $\Omega^e$  et vérifie la condition de radiation à l'infini, alors on a,

$$\int_{\Gamma} \left( u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(y)} G(x-y) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(y)} u(y) G(x-y) \right) dS(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \Omega^i, \\ u(x), & \text{si } x \in \Omega^e. \end{cases} \quad (1.65)$$

Le lecteur intéressé par une démonstration de ce théorème pourra se référer à [Colton et Kress (1983), Théorème 3.1 et 3.3].

**Remarque 1.** Les intégrales sur  $\Gamma$  doivent être vues comme des crochets de dualité entre l'espace de Sobolev  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et son dual  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Cependant lorsque le champ incident et la frontière  $\Gamma$  sont suffisamment réguliers, le champ diffracté devient lui-même régulier, on peut identifier le produit de dualité à un produit scalaire  $L^2(\Gamma)$ , et le représenter par une intégrale sur  $\Gamma$ .

On fait de plus remarquer que la formule de représentation intégrale s'interprète comme une convolution au sens des distributions de  $G$  avec  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}$ , et de  $u$  avec  $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}}$ .

On introduit maintenant les potentiels de simple couche  $\mathcal{S}$  et de double couche  $\mathcal{D}$  définis pour toute densité  $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , ou  $p \in H^{1/2}(\Gamma)$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}q(x) &= \int_{\Gamma} G(x,y;\omega)q(y)dS(y), \\ \mathcal{D}p(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(x,y;\omega)p(y)dS(y). \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (1.66)$$

Ces deux potentiels sont des solutions sortantes de l'équation de Helmholtz (Colton et Kress (1992)). À l'aide de ces définitions, les représentations intégrales (1.64) et (1.65) se réécrivent comme sommes d'un potentiel de simple couche et de double couche appliqués respectivement à la trace normale et de Dirichlet de la solution :

$$\begin{cases} u(x) = \mathcal{D}(u|_{\Gamma}) - \mathcal{S}\left(\frac{\partial u|_{\Gamma}}{\partial \mathbf{v}}\right), \\ u^-(x) = -\mathcal{D}(u^-|_{\Gamma}) + \mathcal{S}\left(\frac{\partial u^-|_{\Gamma}}{\partial \mathbf{v}}\right) \end{cases}$$

Parmi ces deux traces l'une est donnée par la condition de bord du problème (1.57), l'autre demeure inconnue. La méthode des équations intégrales consiste à reformuler le problème (1.57) sous la forme d'une équation intégrale sur  $\Gamma$  d'inconnue liée à la trace inconnue. La façon la plus naturelle de faire consiste à appliquer les conditions aux bords du problème de propagation à cette représentation intégrale de la solution. On rappelle donc maintenant les relations de traces et de traces normales vérifiées par les potentiels (Colton et Kress (1992), Nédélec (2001)).

**Proposition 1.4.1.** Pour tout  $z$  appartenant à  $\Gamma$ , la trace et la trace normale des opérateurs  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$  sont données par les relations :

$$\lim_{x \in \Omega^i/e \rightarrow z} \mathcal{S}[p](x) = \mathcal{S}[p](z), \quad (1.67a)$$

$$\lim_{x \in \Omega^i/e \rightarrow z} \frac{\partial \mathcal{S}[p]}{\partial \mathbf{v}(x)}(x) = \left(\pm \frac{1}{2}I + M'\right)[p](z), \quad (1.67b)$$

$$\lim_{x \in \Omega^i/e \rightarrow z} \mathcal{D}[q](x) = \left(\mp \frac{1}{2}I + M\right)[q](z), \quad (1.67c)$$

$$\lim_{x \in \Omega^{\epsilon} \rightarrow z} \frac{\partial \mathcal{D}[q]}{\partial \mathbf{v}(x)}(x) = \mathbf{T}[q](z). \quad (1.67d)$$

où  $I$  est l'identité et les quatre opérateurs intégraux de frontière  $S$ ,  $M$ ,  $M'$ ,  $T$  sont définis par :

pour  $z \in \Gamma$ ,

$$\begin{aligned} S[p](z) &= \int_{\Gamma} G(z,y; \omega) p(y) dS(y), \\ M'[p](z) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(z)}(z,y; \omega) p(y) dS(y), \\ M[q](z) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(z,y; \omega) q(y) dS(y), \\ T[q](z) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(z)} \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(z,y; \omega) q(y) dS(y). \end{aligned} \quad (1.68)$$

**Remarque 2.** La dérivée normale du potentiel de double couche s'exprime sous la forme d'une intégrale impropre à cause de la singularité du noyau.

Dans la suite du manuscrit, les opérateurs intégraux de frontière seront toujours notés avec une lettre romaine (ex :  $S$ ) tandis que les opérateurs intégraux volumiques le seront avec une lettre calligraphique (ex :  $\mathcal{S}$ ).

Les relations de trace mettent en évidence l'éventuelle discontinuité du champ solution au passage de la frontière  $\Gamma$ , selon la condition de bord appliquée : le potentiel de simple couche et la dérivée normale du potentiel de double couche sont continus à travers la surface  $\Gamma$ , alors que le potentiel de double couche et la dérivée normale du potentiel de simple couche sont discontinus. On trouve dans la littérature une autre version du théorème de représentation intégrale qui s'appuie sur de nouvelles inconnues, les sauts de trace et de trace normale des champs, définies par :

$$[u] = u^- - u \quad \text{et} \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right] = \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}.$$

**Théorème 1.4.2.** Formule des sauts.

La solution de l'équation de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^2$  s'écrit

$$au(x) + bu^-(x) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{v}(y)} \right] G(x-y) dS(y) - \int_{\Gamma} [u](y) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(x-y) dS(y), \quad (1.69)$$

avec  $(a,b) = (1,0)$  si  $x \in \Omega^e$ ,  $(0,1)$  si  $x \in \Omega^i$ , et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  si  $x \in \Gamma$ .

Les formules de représentation intégrale et les relations des sauts constituent les briques de base de la méthode des équations intégrales. On explique maintenant comment les utiliser pour reformuler le problème (1.57) les équations intégrales de surfaces.

#### 1.4.4 Construction des équations intégrales

On présente dans cette section une approche de construction des équations intégrales directes les plus usuelles (EFIE, MFIE et CFIE) ainsi que de l'équation intégrale indirecte de Brakhage et Werner (BRWR). Les formulations EFIE (*Electric Field Integral Equation*), MFIE (*Magnetic Field Integral Equation*) et CFIE (*Combined Field Integral Equation*) ont d'abord été mises au point dans le contexte de problème d'électrodynamique, mais le principe de leur construction est transposable à l'acoustique comme un cas particulier d'équation scalaire, c'est pourquoi on conservera ces acronymes pour les désigner.

De manière générale, comme l'exprime le théorème de représentation intégrale 1.4.2, le champ diffracté  $u$ , solution sortante de (1.57), s'écrit comme la combinaison d'un potentiel de simple et double couche,

$$u(x) = S[\rho](x) - \mathcal{D}[\lambda](x), \quad (1.70)$$

où les sauts de trace  $\lambda := [u]_{|\Gamma} = u_{|\Gamma} - u_{|\Gamma}^-$  et  $\rho := \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu} \right]_{|\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\Gamma} + \frac{\partial u^-}{\partial \nu}_{|\Gamma}$  sont les nouvelles inconnues du problème. On définit le champ total, solution de (1.57), comme la somme du champ incident et de ce champ diffracté,

$$u^T(x) = u^i(x) - \mathcal{D}\lambda(x) + \mathcal{S}\rho(x), \quad x \in \Omega^e, \quad (1.71)$$

Dans l'hypothèse d'obstacle impénétrable, on construit l'équation intégrale directe, de type EFIE et MFIE, équivalente au problème de propagation en appliquant à la formule de représentation intégrale (1.70) une condition de bord qui va nous permettre de prolonger par 0 le champ total à l'intérieur de l'objet  $\Omega$ . Les inconnues ont alors un sens physique, elles sont ramenées aux traces inconnues du champ diffracté solution du problème extérieur. On peut également construire des équations intégrales dites indirectes à partir d'une représentation intégrale du champ solution comme combinaison linéaire complexe du potentiel de simple et de double couche. Pour ces équations indirectes, les inconnues n'ont pas de sens physique, ce sont les sauts des traces du champ diffracté.

#### 1.4.4.1 Équations intégrales directes

Pour construire les équations intégrales directes permettant de résoudre l'équation d'Helmholtz où  $\Omega$  est impénétrable, on utilise la méthode dite du champ nul, qui consiste à imposer au champ total intérieur  $u_T^-$  d'être nul dans le défaut.

Initialement on ne dispose que d'une seule équation portant sur  $(\lambda, \rho)$ , la formule de représentation intégrale du champ diffracté valable dans  $\Omega^e$ . En prenant en compte les conditions aux bord du problème extérieur, on précise l'inconnue. Pour une condition de Dirichlet homogène, le saut du champ total,  $\lambda$ , est nul et le saut des dérivées normales  $\rho$  est l'inconnue, alors que pour une condition de Neumann homogène,  $\lambda$  est l'inconnue et  $\rho$  est nul. À ce stade, quelque soit la condition de bord, l'inconnue est un saut. On peut se ramener aux traces du champ diffracté en utilisant l'hypothèse que le domaine borné  $\Omega^i$  est impénétrable et en prolongeant alors le champ total dans  $\Omega^i$  par 0. Pour cela, on introduit un problème intérieur dont la solution  $u_T^-$  définie dans  $\Omega^i$  par

$$u_T^-(x) = u^i(x) - \mathcal{D}\lambda(x) + \mathcal{S}\rho(x), \quad x \in \Omega^i. \quad (1.72)$$

est solution de l'équation de Helmholtz à laquelle on adjoint une condition de bord représentée par l'opérateur de trace  $\Lambda^-$ ,

$$\begin{cases} \Delta u_T^- + k^2 u_T^- = 0, & \text{dans } \Omega^i, \\ \Lambda^- u_T^- = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.73)$$

On pourra choisir des conditions de bord de Dirichlet, Neumann ou des conditions mixtes pour le problème intérieur fictif, mais la condition est toujours choisie de sorte à ce que  $u_T^-$  soit identiquement nul dans  $\Omega^i$ . En particulier, on aura nullité de la trace et de la trace normale du champ intérieur sur  $\Gamma$ ,

$$\begin{cases} u_T^-|_{\Gamma} = 0, \\ \frac{\partial u_T^-}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

On retrouve par conséquent l'égalité entre les sauts et les données de Cauchy naturelles du problème,

$$\begin{cases} \lambda = -u^T|_{\Gamma}, \\ \rho = -\frac{\partial u^T}{\partial \nu}|_{\Gamma}. \end{cases}$$

On obtient ensuite l'équation intégrale à résoudre, en appliquant l'opérateur trace  $\Lambda^-$  à la formulation intégrale simplifiée de la solution du problème intérieur  $u_T^-$  : on se ramène à résoudre le problème intérieur. L'expression et la nature de l'équation intégrale dépend donc de la condition aux limites appliquée au problème intérieur.

On met cette démarche en application dans les prochains paragraphes pour construire les formulations EFIE, MFIE et CFIE, pour deux cas de conditions aux limites pour le problème extérieur : les conditions *sound-soft* et *sound-hard*. On s'appuie pour l'exposé sur la thèse de Thierry (2011) et l'ouvrage de Nédélec (2001).

### Condition *sound-soft* pour le problème extérieur

On s'intéresse d'abord au problème de propagation extérieur avec condition de Dirichlet homogène. Cette condition rend la densité de saut  $\lambda$  nulle, l'inconnue est alors le saut de dérivée normale  $\rho$ . On exprime par conséquent le champ diffracté sous la forme d'un potentiel de simple couche,

$$\begin{aligned} u^T(x) &= u^i(x) + S[\rho](x), \quad \forall x \in \Omega^e, \\ u_T^-(x) &= u^i(x) + S[\rho](x), \quad \forall x \in \Omega^i. \end{aligned}$$

**EFIE.** On obtient l'équation intégrale dite EFIE en imposant une condition aux limites de Dirichlet homogène au problème intérieur.

En prenant la trace de la formule de représentation intégrale du champ intérieur, on a l'équation intégrale de première espèce,

$$u_T^-(x) = u^i(x) + S[\rho](x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (1.74)$$

Cette équation intégrale est bien posée et est équivalente au problème extérieur (1.57) pour tout nombre d'onde hormis pour les fréquences de Dirichlet du Laplacien.

**MFIE.** On obtient l'équation intégrale MFIE en imposant une condition aux limites de Neumann au problème intérieur. En appliquant cette condition au problème intérieur, les relations de sauts donnent,

$$\frac{\partial u_T^-}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(x) + \left( \frac{1}{2}I + M' \right) \rho(x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (1.75)$$

Cette équation est une équation de Fredholm de deuxième espèce. Elle est bien posée et équivalente au problème de diffraction extérieur (1.57) pour tout nombre d'onde distinct des fréquences irrégulières de Neumann du Laplacien.

**Remarque sur l'inversibilité de l'équation.** Le caractère bien posé des équations intégrales directes EFIE et MFIE n'est pas garanti pour tout nombre d'onde. Pour certaines fréquences appelées fréquences de résonance (ou fréquences de Dirichlet ou de Neumann), le nombre d'onde est valeur propre du laplacien pour  $\Omega^i$ , l'opérateur intégral  $S$  ou  $\left( \frac{1}{2}I + M' \right)$  n'est plus injectif. Il reste cependant surjectif et pour ces fréquences, tous les éléments du noyau de l'opérateur sont solutions. Ainsi, le problème initial (1.57) a toujours une unique solution, mais l'équation intégrale a une solution non unique pour ces fréquences.

Par exemple, aux fréquences de résonance du Laplacien intérieur avec condition de Dirichlet, la densité solution  $\tilde{\rho}$  de 1.74 s'écrit, comme la somme de la solution physique  $\rho = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu}$  et de  $\rho^*$ , élément du noyau de  $S$ ,

$$\tilde{\rho} = \rho^* + \rho.$$

La solution dans  $\Omega^i$  est donc parasitée par le terme  $S\rho^*$ ,

$$\tilde{u}^T = S\tilde{\rho} + u^i = u^T + S\rho^*, \quad (1.76)$$

qui agit comme une source pour le problème extérieur. Pour le problème de Dirichlet extérieur, et la formulation EFIE, l'onde parasite  $S\rho^*$  s'annule dans  $\Omega^e$ , on dit qu'elle ne rayonne pas, mais ce n'est pas le cas pour la densité solution de la formulation MFIE aux fréquences de résonance de Neumann.

Pour s'abstraire de cette difficulté, d'autres types d'équations intégrales ont été construites. Burton et Miller (1971) ont proposé une équation intégrale directe dite CFIE, mais aussi une équation intégrale indirecte dite de Brakhage-Werner, toutes deux bien posées pour tout nombre d'onde. On décrit de suite comment obtenir l'équation CFIE.

**CFIE.** Pour éviter les fréquences irrégulières, Burton et Miller ont décidé de prendre une combinaison linéaire de la EFIE et de la MFIE, en imposant une condition aux limites mixte au problème intérieur,

$$\Lambda^- u_T^- = (1 - \alpha) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}_{|\Gamma} + \alpha \eta u_{|\Gamma} = 0. \quad (1.77)$$

Cette condition nous assure que l'onde interne  $u_T^-$  est nulle dans  $\Omega^i$  dès que les paramètres  $\alpha$  et  $\eta$  vérifient

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad I(\eta) \neq 0,$$

où  $I(\eta)$  est la partie imaginaire de  $\eta$ . Avec une telle condition, nous obtenons la CFIE

$$\left[ (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2} I + M' \right) + \alpha \eta S \right] \rho = - \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{v}}_{|\Gamma} + \alpha \eta u_{|\Gamma}^i \right] \quad (1.78)$$

Cette équation de deuxième espèce est bien posée pour tout nombre d'onde  $k$ .

### Condition *sound-hard* pour le problème extérieur

On traite maintenant le cas du problème de propagation extérieur avec condition de Neumann homogène. Maintenant, la densité de saut des dérivées normales  $\rho$  est nulle et l'inconnue est le saut de champ  $\lambda$ . Le champ diffracté s'exprime donc sous la forme d'un potentiel de double couche,

$$\begin{aligned} u^T(x) &= u^i(x) - \mathcal{D}[\lambda](x), \quad \forall x \in \Omega^e, \\ u_T^-(x) &= u^i(x) - \mathcal{D}[\lambda](x), \quad \forall x \in \Omega^i. \end{aligned}$$

**EFIE.** La formulation EFIE lorsque le problème extérieur est de Neumann s'obtient en appliquant une condition de Neumann homogène au problème intérieur. Les relations de sauts appliquées à (1.4.4.1) donnent,

$$\frac{\partial u_T^-}{\partial \mathbf{v}}(x) = \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{v}}(x) - T[\lambda](x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma, \quad (1.79)$$

qui est une équation de Fredholm de première espèce. Elle est bien posée et équivalente au problème de diffraction extérieur 1.57 pour tout nombre d'onde distinct des fréquences irrégulières de Neumann. Cependant, malgré la perte d'injectivité de  $T$  pour ces fréquences, après reconstruction, la solution obtenue par EFIE reste la solution du problème de diffraction. Les modes parasites ne rayonnent pas.

**MFIE.** On obtient l'équation intégrale dite MFIE lorsqu'on impose une condition aux limites de Dirichlet au problème intérieur. Or, la trace de (1.4.4.1) donne,

$$u_T^-(x) = u^i(x) + \left( \frac{1}{2} I - M[\lambda] \right) (x) = 0, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (1.80)$$

Cette équation est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce, elle est bien posée et est équivalente au problème extérieur 1.57 pour tout nombre d'onde distinct des fréquences de Dirichlet. Pour ces fréquences de résonance, la solution obtenue par la MFIE est parasitée, par les éléments du noyau de l'opérateur intégral. La cavité est résonante.

**CFIE.** Comme précédemment, on obtient l'équation intégrale CFIE en imposant une condition aux limites mixte au problème intérieur,

$$\left[ \alpha \eta \left( \frac{1}{2} I - M' \right) + (1 - \alpha) M' \right] \lambda = - \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{v}}_{|\Gamma} + \alpha \eta u_{|\Gamma}^i \right] \quad (1.81)$$

avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ , et  $\eta \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(\eta) \neq 0$ . Cette équation intégrale de deuxième espèce est bien posée et est équivalente au problème extérieur 1.57 pour tout nombre d'onde  $k$ .

Une alternative à la CFIE est l'équation intégrale indirecte de Brackhage-Werner, que l'on présente ici et avec laquelle on a choisi de travailler dans le reste du document.

### 1.4.4.2 Équations intégrales indirectes de Brakhage-Werner

On construit ces intégrales en appliquant la condition de bord du problème extérieur sur la formule de représentation intégrale pour laquelle on lie linéairement les inconnues  $\lambda$  et  $\rho$  par un paramètre complexe. On se ramène ainsi à une équation intégrale à une seule inconnue  $\psi$ , non physique.

- Condition *sound-soft*.

Pour un problème extérieur avec condition aux limites de Dirichlet, on pose,

$$\psi = -\lambda = -\frac{\rho}{\eta}, \quad \eta \in \mathbb{C}.$$

On cherche le champ diffracté, solution du problème extérieur, comme la combinaison linéaire des potentiels de simple couche et de double couche :

$$u = (\mathcal{D} - \eta\mathcal{S})\psi, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (1.82)$$

Pour que l'équation intégrale soit bien posée pour tout nombre d'onde, le paramètre  $\eta$  doit être un nombre complexe de partie imaginaire non nulle,  $\text{Im}(\eta) \neq 0$ . En appliquant la trace de Dirichlet à 1.82, on obtient l'équation intégrale de deuxième espèce de Brakhage-Werner, équivalente au problème extérieur,

$$-u|_{\Gamma}^i = \left[ \frac{1}{2}I + M - \eta\mathcal{S} \right] \psi(x). \quad (1.83)$$

Les travaux de [Amini (1990), Kress (1985), Kress et Spassov (1983)] ont montré que  $\eta = -ik$  est une valeur presque optimale pour obtenir un conditionnement optimum de l'équation intégrale de Brakhage-Werner associée au cas du problème de Dirichlet.

- Condition *sound-hard*.

Dans le cas d'un problème extérieur avec condition de Neumann homogène, on pose

$$\psi = -\frac{\lambda}{\eta} = -\rho, \quad \eta \in \mathbb{C},$$

et on cherche le champ diffracté, solution du problème extérieur, comme la combinaison linéaire complexe des potentiels de simple couche et de double couche :

$$u = (\eta\mathcal{D} - \mathcal{S})\psi, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (1.84)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}|_{\Gamma} = \left[ \eta T - \left( \frac{1}{2}I + M' \right) \right] \psi(x), \quad (1.85)$$

Les travaux de [Amini (1990), Kress (1985), Kress et Spassov (1983)] ont montré que  $\eta = -1/(ik)$  est une valeur presque optimale pour obtenir un conditionnement optimum de l'équation intégrale de Brakhage-Werner associée au cas du problème de Neumann.

On a jusqu'ici décrit la construction des équations intégrales directes et indirectes pour le problème de Helmholtz (1.57). On s'intéresse donc maintenant aux méthodes numériques que l'on a mises en place pour résoudre ces équations.

### 1.4.5 La résolution numérique des équations intégrales

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales les plus répandues sont la méthode de Galerkin et la méthode de collocation. Dans ce travail, on a opté pour des solveurs numériques de l'équation intégrale basés sur la méthode de Galerkin et la méthode de Nyström. On décrit ici brièvement ces deux méthodes de résolution numériques, leur intérêt dans ce travail et leurs principaux avantages.



### 1.4.5.1 La méthode de discrétisation de Nyström

Le choix de la mise en œuvre de la méthode de Nyström pour résoudre numériquement le problème intégral a été motivé par la conjonction de sa précision et de notre besoin d'éprouver le modèle multi-échelle de la méthode hybride. Cette méthode fournit une solution dont la précision est complètement affranchie des erreurs d'approximations numériques classiques liées au solveur BEM. Elle a permis en particulier de cerner l'origine des erreurs d'approximation introduites par la méthode de couplage. L'inconvénient de la méthode de Nyström implémentée (décrite dans [Colton et Kress (1992) p.66-71]) cependant est qu'elle est très restrictive. Elle suppose des contours réguliers (au moins  $C^2$ ) et périodiques. Ces contraintes ne nous permettent donc pas de résoudre des problèmes de diffraction par des défauts présentant une discontinuité de courbure ou des défauts ouverts (fissures), pour cela on doit utiliser la méthode BEM de type Galerkin. Dans son cadre d'applicabilité, la méthode de Nyström est beaucoup plus pratique, moins coûteuse et plus précise en dimension 2 que la méthode de Galerkin pour résoudre des équations intégrales sur des surfaces analytiques et  $2\pi$ -périodiques.

Comme pour la méthode de Galerkin, sa résolution de l'équation intégrale passe par l'inversion d'un système linéaire de dimension finie. Pour la méthode de Nyström cependant, on se donne une distribution de points sur la surface, qui jouent le double rôle de nœuds et de points de quadrature, et on construit chaque élément de la matrice comme l'approximation de l'équation intégrale en un point de la discrétisation, calculée par une règle de quadrature à poids, spécifique à l'intégration de fonctions ayant une singularité logarithmique. La construction de la matrice du système linéaire est donc beaucoup moins coûteuse dans le cadre de la méthode de Nyström que de la méthode de Galerkin puisque le calcul de chaque terme de la matrice ne requiert que le calcul du noyau de Green contre l'évaluation d'une intégrale double dans le cas de la méthode de Galerkin.

On décrit ici brièvement le principe de la méthode de Nyström pour des courbes  $\Gamma$ , au moins  $C^2$ , discrétisées par un ensemble de points équidistants, et décrites par une paramétrisation  $\gamma$   $2\pi$ -périodique :

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow x(t) = (x_1(t), x_2(t)).$$

On trouvera tous les détails de la méthode en annexe C.1, mais on en donne ici les grandes lignes pour la résolution de l'équation intégrale de Brakhage-Werner, où on choisit  $\eta = ik$ ,  $k$  étant le nombre d'onde,

$$\forall x \in \Gamma, \quad \psi(x) - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(y, x, \omega) - ik G(y, x, \omega) \right) \psi(y) dS(y) = -2u^i(x).$$

La première étape consiste à utiliser la paramétrisation de  $\Gamma$  pour ramener l'intégrale sur  $\Gamma$  à une intégrale sur le cercle unité  $[0; 2\pi]$  par changement de variable. On note  $\phi(t) = \psi(\gamma(t))$  et  $f(t) = -2u^i(\gamma(t))$  respectivement la composée de la densité inconnue  $\psi$  et la composée du second membre  $-2u^i$  avec le paramétrage  $\gamma$  et on désigne par  $M$  et  $L$  respectivement les noyaux des potentiels de double et simple couche après changement de variable,

$$\phi(t) - \int_0^{2\pi} (M(t, \tau) - ikL(t, \tau)) \phi(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (1.86)$$

Les fonctions  $M$  et  $L$  conservent la singularité logarithmique de la solution fondamentale  $G$ , pour  $t = \tau$ . La méthode de Nyström utilise l'analyticité du noyau de Green 2D pour séparer, dans le développement en série entière des fonctions  $M$  et  $L$ , les parties de singularité logarithmique des parties régulières,

$$M(t, \tau) = M_1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\right) + M_2(t, \tau), \quad (1.87)$$

$$L(t, \tau) = L_1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\right) + L_2(t, \tau). \quad (1.88)$$

où  $M_1$ ,  $M_2$ , et  $L_1$ ,  $L_2$  sont des fonctions analytiques intervenant respectivement dans le développement en série entière des fonctions  $M$  et  $L$ . On réécrit ainsi l'équation intégrale comme l'intégrale de la somme d'un

intégrande à singularité logarithmique et un intégrande régulier,

$$\begin{aligned} \phi(t) - \int_0^{2\pi} Q(t,\tau)\phi(\tau)d\tau &= f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \text{où } Q(t,\tau) &= Q_1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\right) + Q_2(t,\tau), \\ \text{avec } Q_1 &= M_1 + ikL_1, \quad \text{et } Q_2 = M_2 + ikL_2. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Afin de calculer ces intégrales, on se donne un ensemble de  $2N$  points de quadrature sur  $\Gamma$ , dont le nombre est lié au nombre d'onde du problème. On calcule d'une part la partie régulière de l'intégrale par une règle de quadrature permettant une intégration exacte, on choisit ici la règle du trapèze,

$$\int_0^{2\pi} Q_2(t,\tau)\phi(\tau)d\tau \approx \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} Q_2(t,t_j)\phi(t_j), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (1.90)$$

et d'autre part on évalue la partie singulière par la quadrature de Nyström,

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\right)Q_1(t,\tau)\phi(\tau)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2N-1} R_j^N(t)Q_1(t,t_j)\phi(t_j), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (1.91)$$

dont on définit les poids  $R_j^N$  par,

$$R_j^N(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} \cos(m(t-t_j)) - \frac{\pi}{N^2} \cos(N(t-t_j)), \quad j = 0, \dots, 2N-1. \quad (1.92)$$

On évalue alors la densité  $\phi$  solution de l'équation intégrale sur  $\Gamma$  en inversant le système linéaire discret :

$$\forall i \in [0, 2N-1], \quad \phi(t_i) - \sum_{j=0}^{2N-1} (R_j^N(t_i)Q_1(t_i,t_j) + \frac{\pi}{N}Q_2(t_i,t_j))\phi(t_j) = f(t_i), \quad (1.93)$$

qui se réécrit matriciellement

$$A\phi = F,$$

où  $A$ , la matrice,  $F$  le second membre et  $\phi$  l'inconnue sont définies par

$$A = I + (R_j^N(t_i)Q_1(t_i,t_j) + \frac{\pi}{N}Q_2(t_i,t_j))_{1 \leq i,j \leq 2N}, \quad (1.94)$$

$$F = (-2u^{inc}(x_i))_{1 \leq i \leq 2N}, \quad (1.95)$$

$$\phi = (\phi(t_i) = \psi(x_i))_{1 \leq i \leq 2N} = \psi. \quad (1.96)$$

Les premiers à utiliser cette quadrature furent Martensen (1963), et Kussmaul (1969). Leurs travaux et ceux de Kress Kress (1989) ont permis de montrer que si les fonctions  $Q_1$  et  $Q_2$  sont analytiques, l'erreur d'approximation de la solution évaluée par cette quadrature est exponentiellement décroissante en fonction du nombre de points de quadrature. On trouve aussi ce résultat dans [Colton et Kress (1992), p.70]. On retient que la méthode de Nyström est très précise pour un faible effort de discrétisation. Dans le cas de la diffraction par un disque, on a pu éprouver cette efficacité mais surtout remarquer une précision de l'ordre de l'erreur machine entre la solution numérique et la solution analytique.

Enfin, la quadrature de Nyström peut être adaptée en 2D pour des courbes possédant un coin [Colton et Kress (1992) p.71-79] et en dimension 3 pour le calcul d'intégrales de singularité en  $1/r$ , [Colton et Kress (1992) p.78-83].

#### 1.4.5.2 Discrétisation de la formulation variationnelle : méthode de Galerkin

De façon générale, dans des applications pour le CND, on n'accède à la géométrie de l'obstacle diffractant que par la donnée de son maillage. La géométrie peut de plus ne pas être régulière. Pour s'affranchir de la contrainte de régularité des frontières, et permettre de traiter des configurations de diffraction plus réalistes,

on s'est doté d'un solveur BEM pour l'acoustique 2D qui résout les équations intégrales par une approche de type Galerkin, cf. Nédélec (2001) : les éléments finis de frontière. On décrit ici brièvement le principe de la méthode pour la résolution de l'équation intégrale de type EFIE (1.74) associée au problème extérieur avec condition aux limites de Dirichlet homogène.

La méthode s'appuie sur la représentation discrète de la surface, son maillage  $\mathcal{T}_h$ , sous forme d'éléments de surface de type segments en 2D ou triangles en 3D. La méthode permet d'évaluer numériquement une approximation de la solution du problème aux points du maillage  $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$  ou éventuellement en un certain nombre de points sur chaque maille dans le cas de méthode d'ordre élevé. Plus spécifiquement, on approche la solution du problème par sa projection sur un sous espace discret de dimension  $N$  de l'espace des solutions, appelé espace d'approximation, noté  $\mathcal{V}_h$ , et engendré par la base de fonctions nodales  $(\chi_i)_{1 \leq i \leq N}$  définies par rapport à un point du maillage de sorte que

$$\chi_i(S_j) = \delta_{i,j}, \quad \text{pour tout } S_j \text{ sommet du maillage.}$$

Cela revient à chercher la solution de l'équation intégrale en chaque point de la surface sous la forme

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i \chi_i, \quad \rho_i \in \mathbb{C}. \quad (1.97)$$

Pour trouver les coefficients  $\rho_i$  inconnus de la décomposition, on s'appuie sur la formulation variationnelle de l'équation intégrale qui régit le problème,

$$-u^i(x) = \int_{\Gamma} G(x,y) \rho(y) dS(y), \quad \forall x \in \Gamma.$$

Cette formulation est la brique de base de la méthode des éléments finis. Elle se construit en multipliant l'équation intégrale par une fonction test admissible  $q$  et en intégrant le résultat sur la surface du domaine étudié. La formulation variationnelle associée à l'équation intégrale de type EFIE est donnée comme suit,

$$-\int_{\Gamma} u^i(x) q(x) dS(x) = \int_{\Gamma} q(x) \left( \int_{\Gamma} G(x,y) \rho(y) dS(y) \right) dS(x). \quad (1.98)$$

On discrétise ensuite cette équation en y injectant la forme de la solution 1.97, et en choisissant pour fonction test  $q$  une fonction de base. On construit ainsi le système linéaire,

$$\forall k = 1, N, \quad -\int_{\Gamma} u^i(x) \chi_k(x) dS(x) = \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{\Gamma} \chi_k(x) \left( \int_{\Gamma} G(x,y) \chi_j(y) dS(y) \right) dS(x). \quad (1.99)$$

qui se réécrit matriciellement

$$AR = F,$$

où  $A$  est appelée matrice d'assemblage,  $F$  second membre et  $R$  l'inconnue et sont définis par

$$\begin{aligned} A &= \left( \int_{\Gamma} \chi_k(x) \left( \int_{\Gamma} G(x,y) \chi_j(y) dS(y) \right) dS(x) \right)_{k,j}, \\ F &= \left( \int_{\Gamma} u^i(x) \chi_k(x) dS(x) \right)_k, \\ R &= (\rho_k)_k. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Cette formulation permet de surmonter les problèmes de singularité des intégrales au prix d'une double intégration, par conséquent son coût de mise en œuvre est plus élevé que pour les méthodes de collocation ou de Nyström. La stratégie de Galerkin réalise en outre un bon compromis entre souplesse et précision. Sa précision peut de plus être améliorée par un raffinement intelligent du maillage, un choix judicieux de l'espace d'approximation et des quadratures pour l'évaluation des intégrales doubles. Dans le code que l'on a développé, les intégrales doubles sont évaluées par la quadrature de Gauss-Legendre.

## 1.4.6 Conclusions sur les équations intégrales

Bien adaptée à la résolution de problèmes de diffraction en milieu infini, la méthode des équations intégrales résout un problème surfacique équivalent au problème d'origine. La dimension du problème est réduite de 1 et la taille du problème discret résolu est donc très inférieure comparativement à celle du système linéaire résolu par méthodes numériques volumiques (FD, FEM). Deux méthodes de résolution numérique ont été présentées : la méthode de Nystrom et la méthode de Galerkin. La première est plus compétitive et plus précise en dimension 2 mais se limite à des problèmes aux frontières régulières. La méthode de Galerkin, elle, est certes plus coûteuse mais sa précision est contrôlée par le choix de l'espace d'approximation ainsi que par le raffinement du maillage. De récents travaux illustrent l'intérêt de méthodes de raffinement auto-adaptatif, Bakry (2016), pour améliorer la convergence des solutions d'équation intégrale par une résolution de type Galerkin.

La résolution numérique des équations intégrales mène à des systèmes linéaires pleins, non nécessairement hermitiens et souvent mal conditionnés. Le caractère plein de la matrice du système rend son stockage ( $O(N^2)$ ) et son inversion par méthode directe ( $O(N^3)$ ) coûteux. On estime la limite de son applicabilité sur des ordinateurs ordinaires à des problèmes de taille  $O(10^4)$ . Pour pouvoir augmenter la taille des problèmes que l'on peut traiter ( $O(10^6)$  degrés de liberté), on utilise simultanément des pré-conditionneurs afin d'améliorer la précision de l'inversion du système linéaire et des méthodes d'accélération qui reposent sur une résolution par méthode itérative du système linéaire et sur une approximation pratique de sa matrice. Ces techniques d'accélération réduisent le coût du produit matrice-vecteur intervenant à chaque itération de la résolution itérative (de  $O(N^2)$  à  $O(N \log(N))$  opérations). On cite notamment la méthode des H-matrices (H-matrix) Borm (2010) qui utilise des méthodes d'approximation de rang faible de la matrice du système et la méthode multipôles rapides (FMM), Chaillat (2009), Sylvand (2002), Greengard *et al.* (1998), qui approche le noyau de l'opérateur intégral sous la forme d'une série tronquée de fonctions à variables séparées qui permet d'accélérer le calcul des intégrales de surface.

## 1.5 Le principe de réciprocité dans CIVA

La simulation de la diffraction dans CIVA fait appel à deux types d'outils pour prédire les interactions d'une onde haute fréquence avec des défauts de type inhomogénéités ou fissures : un outil de propagation et un outil de calcul d'écho. La propagation et les interactions sont traitées séparément : par des méthodes distinctes et pour deux configurations différentes. Les phénomènes de propagation sont évalués par méthode asymptotique (la méthode des rayons) sur une configuration sans défaut alors que les phénomènes d'interactions sont prédits pour le même milieu contenant le défaut. L'outil de calcul d'écho dispose d'un ensemble de modèles pour le calcul des interactions dont le choix d'utilisation dépend de la taille du défaut, du type de structure contrôlée (pièce, soudures, composites, etc) et de la précision de contrôle souhaitée. Les principales méthodes qui composent ces outils ont été développées plus tôt dans ce chapitre, on détaille maintenant comment CIVA fait le lien entre ces résultats.

Le lien entre les résultats de simulation de ces deux configurations est réalisé par la relation de réciprocité introduite à la fin des années 70 par Auld (1979), Kino (1978), Thomson et Gray (Thompson (2001)). Ces relations relient deux solutions différentes d'un même système d'équation. Longtemps utilisées pour montrer l'interchangeabilité des sources et des récepteurs, elles sont aussi très utilisées pour calculer les coefficients de transmission de l'onde élastique aux terminaux électriques des transducteurs en réception. Elles relient grâce à un modèle de capteur les champs élastiques propagés aux champs électromagnétiques générés par excitation du capteur.

La relation de réciprocité utilisée dans CIVA établit donc une relation entre les champs électro-mécaniques mesurés par les capteurs piézoélectriques respectivement obtenus comme solutions des configurations sans défaut et avec défaut désignés par état 1 et état 2 sur la figure 1.15. Ces deux états sont reliés par une équation intégrale de surface qui exprime la différence entre

- le coefficient de transmission  $\Gamma'_{ba}$  du transducteur b au transducteur a en présence de défaut
- le coefficient de transmission  $\Gamma_{ab}$  du transducteur a au transducteur b en l'absence de défaut

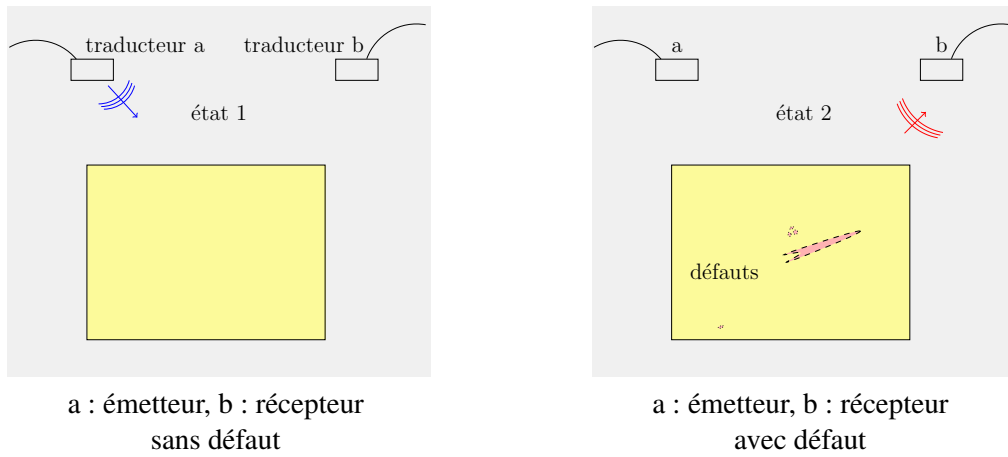


FIGURE 1.15 – Définition de l'état 1 et 2 dans le principe de réciprocité de Auld

$$(\Gamma'_{ba} - \Gamma_{ab})P = \delta\Gamma_{ba}P = \int_{S_f} (v_1 \cdot T_2 - v_2 \cdot T_1) \cdot ndS \quad (1.101)$$

où  $v$  désigne la vitesse de déplacement et  $T$  le tenseur de contrainte,  $n$  est le vecteur normal à  $S_f$ ,  $dS$  est l'élément de surface,  $S_f$  est la surface d'intégration autour du défaut et  $P$  est la puissance fournie par l'émetteur.  $C'$  est cette relation qui est calculée dans CIVIA pour prédire la mesure de l'écho de la pièce au traducteur en réception. Une relation de réciprocité similaire est établie en régime transitoire (Gengembre *et al.* (2003)).

## 1.6 Stratégie du couplage BEM-Rayons : principe

Comme on a pu le voir dans ce chapitre, on peut résoudre un problème de propagation par plusieurs méthodes en fonction du régime de fréquences dans lequel on se place. La simulation pour le CND vise toutefois à résoudre des problèmes de propagation d'ondes dans des configurations critiques à la fois pour les méthodes numériques et les méthodes asymptotiques. Elle cherche à résoudre des problèmes de diffraction haute fréquence dans des milieux bornés et étendus (en terme de longueur d'onde) par des obstacles qui peuvent aussi être impliqués dans des phénomènes d'interactions complexes (réflexion/diffraction multiple) avec le reste du milieu (bord de pièce ou autre défaut) sur une échelle de l'ordre d'une ou de quelques longueurs d'onde.

Depuis plus d'une décennie, des méthodes hybrides sont développées pour fournir des outils numériques capables de prédire avec précision et efficacité la réponse de ce type de milieu à des excitations haute fréquence. Il serait difficile d'être exhaustif mais on sélectionne ici trois références qui ont joué un rôle important au cours des dernières années.

La plus ancienne correspond aux travaux de Barbone *et al.* Ils proposent un couplage entre la GTD et la méthode des éléments finis (Barbone *et al.* (1998)) ou la méthode des équations intégrales de frontière (Barbone et Michael (1999)) pour traiter les problèmes de diffraction haute fréquence par de gros obstacles. Ces travaux reposent sur une décomposition de domaine qui distingue les parties de l'obstacle (coins, discontinuités de courbure) génératrices de diffraction du reste du milieu. Le calcul se fait ensuite en deux étapes : les ondes incidente et diffracté sont propagées à l'extérieur des zones de diffraction par méthode asymptotique, et les effets de diffraction sont traités numériquement dans la zone de diffraction, virtuellement séparée du reste du milieu par une frontière fictive transparente.

Le deuxième groupe de méthode hybride que l'on cite ici correspond aux travaux du CEA LIST qui, au cours des deux dernières décennies, a proposé une méthode hybride combinant la méthode des rayons à la méthode des éléments finis (pour la dimension 2 (Leymarie *et al.* (2006))), puis à la méthode des éléments finis spectraux (pour la dimension 3 (Imperiale *et al.* (2016))). La stratégie de cette méthode hybride repose sur la séparation du calcul des effets de propagation et de diffraction. On résout d'une part le problème de propagation de l'onde incidente en l'absence de défaut (état 1 de la figure 1.15) par méthodes asymptotiques et on résout séparément par éléments finis le problème d'interaction de l'onde avec les défauts, localement,

dans un sous-domaine du milieu de propagation qui les contient. Les résultats sont ensuite combinés selon le principe de réciprocité de Auld décrit au paragraphe 1.5.

La dernière méthode hybride que l'on mentionne ici est celle introduite par Chandler-Wilde et ses collaborateurs : 'the hybrid numerical-asymptotic Boundary Integral Method'. Elle consiste à approcher la solution du problème de diffraction par éléments finis de frontière sur un espace d'approximation enrichi de fonctions oscillantes. Les fonctions de la base de cet espace d'approximation sont choisies intelligemment en fonction de la connaissance a priori du comportement asymptotique de la solution sur l'obstacle. On pourra se référer à (Chandler-Wilde *et al.* (2012)) et (Groth *et al.* (2013b)).

Dans ce manuscrit, on propose une nouvelle stratégie de couplage qui combine la méthode des rayons à la méthode des éléments finis de frontière pour le calcul de la diffraction haute fréquence. Cette stratégie s'appuie sur le caractère multi-échelle du problème haute fréquence à résoudre et distingue trois échelles en terme de longueur d'onde sur lesquelles on observe des phénomènes physiques spécifiques : l'échelle des phénomènes de propagation haute fréquence,  $L \gg \lambda$ , l'échelle de l'obstacle  $O(\lambda)$  sur laquelle l'interaction de l'onde incidente avec le défaut génère des phénomènes de diffraction, et l'échelle intermédiaire qui correspond à la zone d'interaction en champ proche du défaut. La stratégie hybride proposée introduit un modèle de l'obstacle spécifique à chaque échelle qui permet de dissocier le calcul des phénomènes de propagation et de diffraction.

D'une part, les phénomènes de propagation haute fréquence sont résolus par la méthode asymptotique de tracé de rayons. À cette échelle, l'obstacle n'est plus modélisé par sa géométrie mais par un point ou un ensemble de points bien choisis autour de l'obstacle auxquels on associe un coefficient de diffraction. Résoudre les problèmes de propagation se ramène donc à tracer les rayons émis par la source vers chacun de ces points et de chacun de ces points vers le point d'observation. D'autre part, les phénomènes de diffraction sont calculés par la méthode des équations intégrales afin de décrire la physique de la diffraction avec précision. À cette échelle, l'obstacle est décrit par sa géométrie exacte et les ondes incidente et diffracté sur  $\Gamma$  approchées comme les approximations onde plane des rayons émis et reçus par cet ensemble de points bien choisis. La validité de cette approche est d'abord discutée au chapitre 2 et 3 dans le cadre de la diffraction d'un obstacle loin des bords du domaine de calcul. Dans ce cas, les interactions haute fréquence du champ diffracté avec les bords de pièce sont calculés par méthode asymptotique. Propagation et diffraction sont alors parfaitement découplés, la stratégie fournit un formalisme de calcul du champ diffracté similaire à celui des méthodes asymptotiques GTD, UTD, UAT et s'accorde donc parfaitement avec celle de CIVA. On détaille ensuite au chapitre 6 plusieurs perspectives d'adaptation de la stratégie hybride dans le cas où l'objet diffractant est dans la zone d'interaction de champ proche du bord de pièce ou d'un autre obstacle non diffractant.



## Chapitre 2

# Couplage hybride BEM-rayons : la méthode barycentrique

On expose dans ce chapitre le principe de la méthode de couplage dans sa version la plus simple que l'on nomme méthode barycentrique. On en donne le principe et on étudie comment contrôler l'erreur introduite par cette méthode pour le calcul du champ diffracté afin de dégager son cadre de validité et ses limites. On présente ensuite quelques illustrations de validation de la méthode sur des expériences numériques académiques ou plus physiques afin d'en dégager les intérêts, inconvénients, et limites.

On rappelle tout d'abord les notations du problème sur la figure 2.1. On note  $\Omega^e$  le milieu de propagation infini et supposé homogène,  $S$  la source,  $R$  le point d'observation,  $\Gamma$  le bord de l'objet diffractant. L'objet diffractant est supposé impénétrable, son barycentre est noté  $y_c$  et sa taille caractéristique est donnée par  $2r_\Gamma$  où  $r_\Gamma = \sup_{y \in \Gamma} |y - y_c|$ .

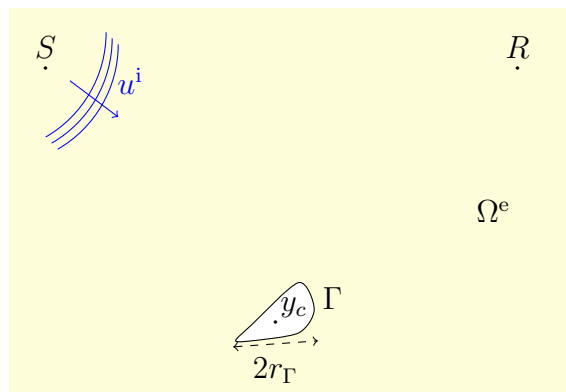


FIGURE 2.1 – Configuration de diffraction en milieu infini

### 2.1 Principe du couplage par la méthode barycentrique

Le développement de ce couplage repose sur une approche multi-échelle. On distingue en effet dans le problème de propagation en régime haute fréquence, deux échelles sur lesquelles la physique de la propagation est différente : l'échelle de la longueur d'onde sur laquelle des phénomènes de diffraction peuvent être générés et l'échelle des grandes distances qui correspond à l'échelle de la propagation haute fréquence. L'idée de la méthode hybride est de proposer une modélisation du défaut spécifique à chaque échelle afin de séparer le calcul des effets de propagation et de diffraction et ainsi retrouver un formalisme de calcul de la diffraction similaire à celui des méthodes asymptotiques GTD, UTD, UAT. La méthode hybride permet en effet de calculer le champ diffracté sous la forme d'une onde sphérique émise en un point du défaut et pondérée par un coefficient qui dépend de la direction d'observation et d'incidence de la géométrie diffractante. Dans la méthode proposée ici, le coefficient, aussi appelé coefficient de diffraction, est calculé par la méthode des



équations intégrales.

Plus précisément, pour comprendre comment on arrive à un tel formalisme, rappelons les spécificités des configurations de diffraction étudiées. On cherche à prédire le champ diffracté généré par l'interaction d'une onde émise depuis une source éloignée du défaut avec un obstacle de taille de l'ordre de la longueur d'onde  $r_\Gamma = O(\lambda)$ . Lorsque source et point d'observation sont suffisamment éloignés du défaut, c'est à dire situés dans sa zone de champ lointain, ce dernier peut être modélisé par un unique point, récepteur d'une approximation haute fréquence de l'onde incidente et émetteur d'une approximation haute fréquence de l'onde diffractée auquel on adjoint un coefficient de diffraction.

Cette modélisation du défaut, sous couvert de la validité de l'hypothèse de champ lointain, permet de découpler les problèmes de propagation, du champ incident de la source vers le défaut, et du champ diffracté du défaut vers le point d'observation, du problème de diffraction original. On résout d'une part les phénomènes de propagation par méthode asymptotique, la méthode des rayons, et d'autre part les phénomènes de diffraction par la méthode des équations intégrales. En particulier, les effets de diffraction haute fréquence de l'onde incidente sur l'obstacle sont pris en compte sous la forme d'un coefficient de diffraction calculé par équation intégrale. Le calcul du champ diffracté au point d'observation par la méthode hybride se déroule donc en trois étapes que l'on résume dans cette section : propagation et approximation rayon du champ source, résolution de l'équation intégrale et enfin évaluation du coefficient de diffraction et propagation rayon du champ diffracté.

### Les étapes du couplage :

#### 1. Propagation et approximation rayon du champ incident.

On se donne un champ incident cylindrique  $u^i$  émis depuis une source ponctuelle  $S$  située à la position  $x_s$ . Dans le régime haute fréquence, ce champ peut être approché sous forme de rayons propagés de la source vers le défaut. Si en outre la source et le point d'observation sont situés dans la zone de champ lointain de l'obstacle, on peut modéliser l'obstacle comme un voisinage de son barycentre  $y_c$ . Dans la méthode hybride barycentrique, ce point joue le double rôle de récepteur et émetteur des approximations rayon des champs incident et diffracté.

Plus précisément, pour cette première étape de la méthode barycentrique, on propage le champ incident comme un unique rayon issu de la source et reçu par le barycentre de l'obstacle comme illustré sur la figure 2.2. Ce rayon, caractérisé par le triplet amplitude-phase et direction de propagation  $(A^s(y_c; x_s), \phi^s(y_c; x_s), \nabla\phi^s(y_c; x_s))$ , est obtenu par la méthode des rayons par résolution du système (1.32) le long des caractéristiques de l'équation eikonale. On évalue le champ incident en  $y_c$  à partir de ces grandeurs caractéristiques sous la forme,

$$u^i(y_c) = A^s(y_c; x_s) e^{ik\phi^s(y_c; x_s)}. \quad (2.1)$$

Sous l'hypothèse de champ lointain, on approche ensuite le champ incident en tout point de l'obstacle  $\Gamma$  par  $\tilde{u}$ , linéarisation de (2.1) autour du barycentre  $y_c$ ,

$$\forall y \in \Gamma, \quad \tilde{u}^i(y) = A^s(y_c; x_s) e^{ik\phi^s(y_c; x_s)} e^{ik\nabla\phi^s(y_c; x_s) \cdot (y - y_c)}.$$

L'approximation rayon du champ incident sur le défaut se ramène alors à l'approximation onde plane du rayon émis de la source vers le barycentre de l'obstacle.

Par la suite, pour simplifier les notations, on désignera par  $B^s(y_c; x_s) = A^s(y_c; x_s) e^{ik\phi^s(y_c; x_s)}$ , l'amplitude complexe de propagation rayon du champ incident et  $\hat{s} = \nabla\phi^s(y_c; x_s)$ , la direction de propagation du rayon incident en  $y_c$ . En milieu homogène, il existe un unique rayon issu de la source et arrivant en  $y_c$ , ses grandeurs caractéristiques peuvent être calculées analytiquement à partir de l'approximation rayon de l'onde cylindrique comme détaillé en 2.2.

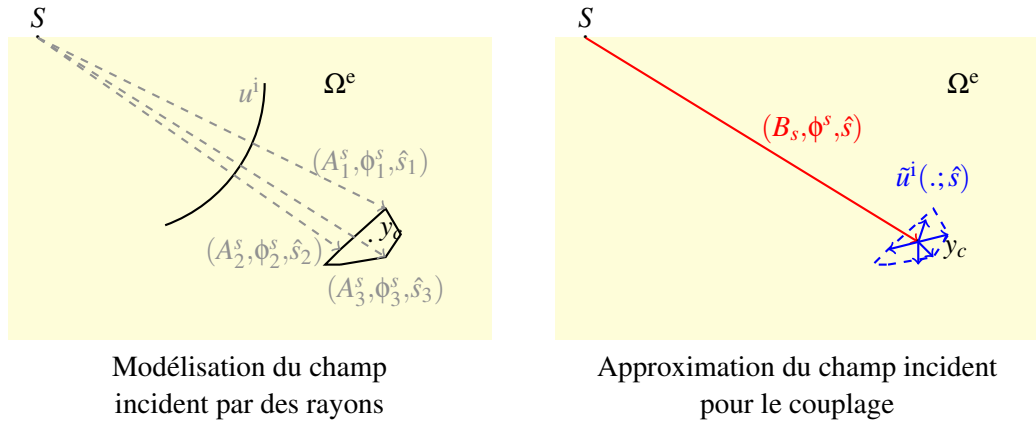


FIGURE 2.2 – Approximation du champ incident sur  $\Gamma$ .

## 2. Résolution de l'équation d'Helmholtz par équation intégrale

La deuxième étape du calcul consiste à résoudre le problème de diffraction (1.10) par la méthode des équations intégrales. On reformule le problème sous la forme de l'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner afin d'éviter les instabilités liées aux fréquences de résonance du problème, Colton et Kress (1992), avec  $\eta = k$ .

L'approximation rayon du champ incident revenant à approcher le champ incident sur l'obstacle par une onde plane de direction de propagation  $\hat{s}$  pondérée par l'amplitude complexe  $B^s(y_c; x_s)$ , on peut, par linéarité du problème intégral, chercher l'inconnue  $\psi$  de l'équation intégrale équivalente à (1.10), sous la forme,

$$\psi(\cdot) = B^s(y_c; x_s) \tilde{\psi}(\cdot, \hat{s}), \quad (2.2)$$

où  $\tilde{\psi}$  est solution de l'équation,

$$\frac{1}{2} \tilde{\psi}(x; \hat{s}) + \int_{\Gamma} K(x, y; \omega) \tilde{\psi}(y; \hat{s}) dS(y) = -e^{ik\hat{s} \cdot (x - y_c)}, \quad x \in \Gamma. \quad (2.3)$$

On rappelle que le noyau de l'opérateur intégral de Brakhage-Werner  $K$  est défini par

$$K(x, y; \omega) = \frac{\partial G(x, y, \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} - ikG(x, y, \omega), \quad (2.4)$$

où  $G$  désigne la solution fondamentale du problème dans l'espace libre, (1.58), et  $\mathbf{v}(y)$  est la normale sortante au point  $y \in \Gamma$ .

La résolution du problème de diffraction ne nécessite donc ni la connaissance a priori de la position de la source ni des grandeurs liées à la propagation du champ incident, mais seulement celle de la direction de propagation du rayon incident en  $y_c, \hat{s}$ .

La résolution numérique du problème est réalisée par la méthode de Nyström associée à une discrétisation uniforme de l'obstacle diffractant. La méthode est très précise mais restreint l'applicabilité à des courbes analytiques, régulières et fermées. Le lecteur pourra se reporter à 1.4.5.1 et C.1 pour plus de précisions sur le formalisme mais aussi le cadre d'applicabilité et les extensions possibles de la méthode. Ce choix a été fait afin d'étudier l'influence des approximations de la méthode de couplage en s'affranchissant des erreurs dues au solveur BEM.

## 3. Propagation du champ diffracté du défaut vers le récepteur.

La dernière étape consiste à approcher la propagation du champ diffracté de l'obstacle vers le point d'observation  $R$  en  $x_r$  sous la forme d'un rayon, issu du barycentre du défaut et se propageant vers le point  $x_r, (A^r(x_r; y_c), \phi^r(x_r; y_c), \nabla \phi^r(x_r; y_c))$ , comme illustré figure 2.3.

Dans l'hypothèse de champ lointain, la formule de représentation intégrale du champ diffracté associée au problème surfacique (2.3),

$$u(x_r; \omega) = \int_{\Gamma} K(x_r, y; \omega) \psi(y; \hat{s}) dS(y), \quad (2.5)$$

est approchée par son approximation champ lointain,

$$u(x_r; \omega) \approx \int_{\Gamma} \tilde{K}(x_r, y; \omega) \psi(y; \hat{s}) dS(y), \quad (2.6)$$

où le noyau  $\tilde{K}$  s'exprime sous la forme de l'approximation onde plane d'un rayon issu de  $y_c$  et propagé vers  $x_r$ ,  $(A^r(x_r; y_c), \phi^r(x_r; y_c), \nabla\phi^r(x_r; y_c))$ ,

$$\tilde{K}(x_r, y; \omega) \propto B^r(x_r; y_c) e^{-ik\hat{r} \cdot (y - y_c)}, \quad (2.7)$$

avec  $\hat{r} = -\nabla\phi^r(x_r; y_c)$  la direction de propagation du rayon en  $x_r$  et  $B^r(x_r; y_c) = A^r(x_r; y_c) e^{ik\phi^r(x_r; y_c)}$ , son amplitude complexe de propagation. L'hypothèse de champ lointain permet donc de convertir le champ diffracté en un rayon et de le calculer sous la forme du produit,

$$u(x_r; \omega) = B^r(x_r; y_c) \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) B^s(y_c; x_s) \quad (2.8)$$

des amplitudes complexes de propagation des rayons incidents et diffractés, respectivement notées  $B^s$  et  $B^r$ , par le coefficient de diffraction  $\mathcal{R}$  de l'obstacle défini par,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{r} \cdot (y - y_c)} (1 + \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}) \tilde{\psi}(y; \hat{s}) dS(y). \quad (2.9)$$

Proportionnel à l'amplitude de champ lointain, ce coefficient ne dépend que des directions d'incidence et d'observation, de la fréquence et de la géométrie de l'objet diffractant et permet de faire le lien entre la résolution du problème de diffraction par équation intégrale en champ proche et la propagation rayon des champs incident et diffracté en champ lointain. Comme pour le rayon incident, les grandeurs caractéristiques du rayon diffracté sont obtenues par la méthode des rayons.

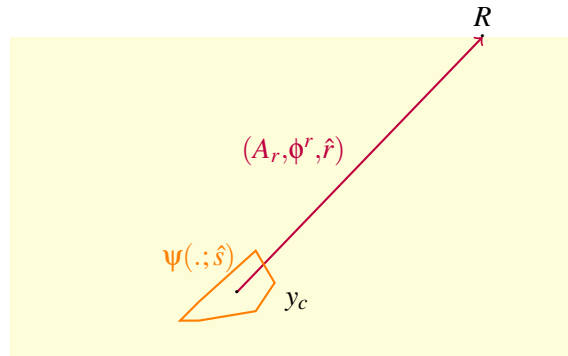


FIGURE 2.3 – Propagation rayon du champ diffracté jusqu'au point d'observation.

La modélisation multi-échelle du défaut découple les étapes de calcul des effets de propagation et de diffraction, et autorise un traitement de chaque phénomène par des méthodes distinctes. Connaissant les positions de la source et du point d'observation, on peut calculer chaque phénomène de façon indépendante. Cette propriété sera utilisée pour accélérer la méthode hybride, comme on le voit au chapitre 4.

Tout le principe de ce couplage tient dans la validité de l'hypothèse de champ lointain. Cette hypothèse est capitale pour pouvoir adopter une modélisation multi-échelle du défaut. Elle permet de faire le lien entre l'approximation du champ incident et du champ diffracté par des rayons et la résolution de l'équation intégrale associée au problème de diffraction. Dans la section suivante on décrit de façon précise sa validité ainsi que son rôle dans la construction du coefficient de diffraction.

## 2.2 Méthode de couplage barycentrique pour l'équation des ondes en milieu infini

L'essentielle difficulté de la méthode barycentrique consiste à garantir une bonne précision du calcul du champ diffracté dans le cadre de l'approximation rayon. Cette approximation repose à la fois sur l'hypothèse

d'un régime haute fréquence et l'hypothèse de champ lointain qui est au cœur de la modélisation multi-échelle de l'obstacle.

Lorsqu'elle est valide, cette dernière hypothèse autorise à modéliser l'obstacle comme un voisinage de son barycentre dans les étapes de calcul de propagation de la méthode hybride. Ce modèle permet d'approcher la propagation du champ incident de la source vers l'obstacle sous la forme d'un rayon reçu en son barycentre puis de reconstruire le champ incident sur l'obstacle comme l'approximation onde plane de ce rayon. Il permet également à la fois d'évaluer les effets de diffraction par l'obstacle sous la forme d'un coefficient de diffraction et de convertir le champ diffracté en un rayon issu du barycentre de l'obstacle. Ces deux derniers points sont obtenus en substituant au noyau  $K$  de la formule de représentation intégrale (de Brakhage-Werner) de la solution son approximation rayon. Champ incident et noyau  $K$  étant tous deux formés d'une combinaison des fonctions de Hankel de première espèce d'ordre 0 et 1, la précision de leur approximation rayon et donc du modèle est intrinsèquement liée à la précision de l'approximation rayon des fonctions de Hankel.

Dans la suite de cette section, on étudie dans un premier temps l'approximation champ lointain des fonctions de Hankel. En particulier, pour la clarté de l'exposé, on décrit l'hypothèse de champ lointain puis les trois étapes de l'approximation champ lointain des fonctions de Hankel. On extrait en particulier de cette étude des paramètres de contrôle de l'erreur relative d'approximation. On exploite ensuite ces résultats d'approximation rayon des fonctions de Hankel pour décrire l'approximation rayon du noyau de l'opérateur intégral et en dégager une estimation a priori de l'erreur. On donne en outre le lien entre l'erreur d'approximation champ lointain du noyau et celle du champ diffracté. Dans un troisième paragraphe, on détaille la propagation approchée du champ incident sous forme de rayon ainsi que sa reconstitution sur le bord de l'obstacle,  $\Gamma$ . L'influence des paramètres de contrôle de l'erreur sera illustrée plus loin, au paragraphe 2.3, par une étude paramétrique. Enfin, on détaille dans un dernier paragraphe comment construire le coefficient de diffraction selon la formulation choisie et les conditions aux limites associées à l'équation des ondes.

## 2.2.1 Les approximations des noyaux en 2D et cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain

Pour la clarté de la lecture, avant de rentrer dans le détail de l'approximation rayon des fonctions de Hankel, du champ incident et du noyau de l'opérateur intégral,  $K$ , on décrit les hypothèses liées à la configuration de diffraction étudiée et on définit l'hypothèse de champ lointain. On considère le problème de diffraction d'une onde incidente haute fréquence issue d'une source  $S$  en  $x_s$  par un obstacle de contour  $\Gamma$  de taille caractéristique  $r_\Gamma = O(\lambda)$  en milieu homogène non borné. On cherche à évaluer une approximation haute fréquence par procédure hybride du champ diffracté au point d'observation  $R$  en  $x_r$ .

On suppose d'une part que la source et le point d'observation sont suffisamment éloignés de l'obstacle pour pouvoir approcher les phénomènes de propagation par la méthode des rayons,

$$k|x_s/r - y_c| \gg 1,$$

et on suppose d'autre part qu'ils sont situés dans la zone de champ lointain de l'obstacle diffractant  $\Gamma$ . On définit cette zone de champ lointain  $\mathcal{Z}$ , comme l'ensemble des points  $x$  du domaine de propagation,  $\Omega^e$ , tels que  $k|x - y_c| \gg 1$  et dont la distance relativement à l'obstacle est bien supérieure à la distance de Fraunhofer  $d_{\mathcal{F}} = \frac{r_\Gamma^2}{2\lambda}$ ,

$$\mathcal{Z} = \left\{ x \in \Omega^e \setminus \bar{\Omega} \mid \forall y \in \Gamma, k|x - y_c| \gg 1, \text{ et } \frac{r_\Gamma^2}{2\lambda|x - y_c|} \ll 1 \right\}. \quad (2.10)$$

Dans cette zone, l'obstacle peut être modélisé comme le voisinage de son barycentre.

Le cadre de champ lointain désigne donc une configuration pour laquelle source et point d'observation sont situés loin du barycentre de l'obstacle en terme de longueur d'onde et dans la zone de champ lointain. Cela peut être vérifié dans deux cas distincts : soit l'obstacle est très éloigné de la source et du point d'observation, soit l'obstacle est petit relativement à la distance de son barycentre à ces points. Dans la suite, on caractérisera

l'hypothèse de champ lointain par les inégalités :

$$\begin{cases} k|x-y_c| \gg 1, \\ \frac{kr_\Gamma^2}{2|x-y_c|} \ll 1, \end{cases} \iff \begin{cases} kr_\Gamma = O(1), \\ \frac{r_\Gamma}{2|x-y_c|} \ll 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

que l'on reformule en introduisant les notations  $d = |x-y_c|$ ,  $\gamma = kr_\Gamma$  et  $\beta = \frac{r_\Gamma}{d}$  par

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} \gg 1, \\ \frac{1}{2}\gamma\beta \ll 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = O(1), \\ \frac{1}{2}\beta \ll 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain, on obtient l'approximation rayon des fonctions de Hankel  $H_\nu^{(1)}$  sur l'obstacle, où  $\nu = 0, 1$  après trois étapes d'approximations successives :

- développement asymptotique :  $H_{\nu,dv}^{(1)}$ ,
- linéarisation de la phase de  $H_{\nu,dv}^{(1)} : H_{\nu,lin}^{(1)}$ ,
- développement à l'ordre 0 de l'amplitude de  $H_{\nu,lin}^{(1)} : H_{\nu,ray}^{(1)}$ .

On résume dans le théorème 2.2.1 l'expression de l'approximation rayon des fonctions de Hankel  $H_\nu^{(1)}$ ,  $\nu = 0, 1$  et les résultats de l'étude d'erreur menée en norme infinie. On note et définit la norme infinie d'une fonction  $f(x,y)$  donnée dépendant des deux variables,  $x \in \Omega^e$ ,  $y \in \Gamma$  par  $\|f\|_{\infty,\Gamma} = \sup_{y \in \Gamma} |f(x,y)|$ .

**Théorème 2.2.1.** *Pour tout point  $x$  dans la zone de champ lointain  $Z$  de l'obstacle  $\Gamma$ , on approche la fonction de Hankel  $H_\nu^{(1)}$  par son approximation rayon  $H_{\nu,ray}^{(1)}$ ,*

$$\forall y \in \Gamma, H_{\nu,ray}^{(1)}(x,y;\omega) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2})}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{\sqrt{|x-y_c|}} e^{-ik(\hat{s},y-y_c)}, \quad (2.13)$$

avec une erreur relative en norme infini

$$er_{ray}^\infty(H_\nu^{(1)}) = \left\| \frac{H_\nu^{(1)}(\cdot,y) - H_{\nu,ray}^{(1)}(\cdot,y)}{H_\nu^{(1)}(\cdot,y)} \right\|_{\infty,\Gamma} \leq C \left[ \frac{(2\nu+1)\beta}{8\gamma(1-\beta)} + \frac{1}{2}\beta\gamma + \frac{1}{2}\beta\left(1 + \frac{1}{2}\beta\right) \right], \quad (2.14)$$

contrôlée par les deux paramètres  $\gamma = kr_\Gamma$  et  $\beta = \frac{r_\Gamma}{d}$ .

On décrit dans les prochaines sous-sections chacune des étapes d'approximation pour pouvoir démontrer ces résultats.

### 2.2.1.1 Développement asymptotique des fonctions de Hankel de première espèce.

La première étape de l'approximation rayon consiste à approcher les fonctions de Hankel  $H_\nu^{(1)}$  pour de grandes valeurs de leur argument  $z$  (c'est à dire lorsque le point de calcul est situé à une grande distance en terme de longueur d'onde du barycentre de l'obstacle)

$$\forall y \in \Gamma, z = k|x-y| \gg 1. \quad (2.15)$$

On pourra se reporter à [Watson (1966) chapitre 7 p.198-224] pour étudier le détail des propriétés des fonctions de Bessel et Hankel, ou plus succinctement aux références Abramowitz et Stegun (1964) ou Colton et Kress (1992).

**Résumé bibliographique.** On retient de Watson (1966) que les fonctions de Hankel de première espèce d'ordre  $\nu \in \mathbb{C}$  admettent pour de grandes valeurs de leur argument,  $|z| \gg 1$  ( $z \in \mathbb{C}$  tel que  $-\pi + 2\delta \leq \arg(z) \leq \pi - 2\delta$ , pour tout angle aigu  $\delta$  positif [Watson (1966), formule (2) p.198]) le développement asymptotique

$$H_\nu^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^m (\nu, m)}{(2iz)^m} + O(z^{-p}) \right], \quad (2.16)$$

$$\text{où } (\nu, m) = \frac{\prod_{l=1}^m (4\nu^2 - (2l-1)^2)}{2^{2m} m!},$$

sous réserve que  $\text{Re}(\nu + \frac{1}{2}) > 0$ . Dans [Watson (1966), section 7.3 p.205], une étude plus précise du reste du développement asymptotique des fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce montre de plus que lorsque  $\nu$  est réel et l'argument positif  $z > 0$ , le module du reste n'excède jamais le module du premier terme négligé à partir d'un certain rang dans le développement (lorsque  $2p > \nu - \frac{1}{2}$ ) et qu'il est du signe du premier terme négligé.

**Application à l'approximation.** À partir de (2.18), lorsque  $z \gg 1$ , on calcule le développement asymptotique des fonctions de Hankel d'ordre 0 et 1 à l'ordre 1 en prenant  $p = 2$ ,

$$H_\nu^{(1)}(z) = e^{-i(\frac{\pi}{4} + \nu\frac{\pi}{2})} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} \left( 1 - i \frac{(2\nu+1)}{8z} + O\left(\frac{1}{(2(8z)^2)}\right) \right). \quad (2.17)$$

Pour la construction de l'approximation rayon, on ne retient que l'ordre 0 du développement asymptotique, c'est à dire son premier terme, que l'on note par la suite  $H_{\nu, \text{dv}}^{(1)}$ ,

$$H_{\nu, \text{dv}}^1(z) = e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{\nu\pi}{2})} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}. \quad (2.18)$$

**Analyse d'erreur développement asymptotique.** Par suite, d'après le résultat rappelé plus haut sur le comportement du reste du développement asymptotique, on peut contrôler la norme infinie de l'erreur relative ponctuelle d'approximation de  $H_\nu^1$  par  $H_{\nu, \text{dv}}^1$  par le premier terme négligé du développement :

$$\text{er}_{\text{dv}}^\infty(H_\nu^{(1)}) = \left\| \frac{H_\nu^{(1)} - H_{\nu, \text{dv}}^{(1)}}{H_{\nu, \text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \leq \sup_{y \in \Gamma} \left( \frac{2\nu+1}{8k|y-x|} \right). \quad (2.19)$$

Or,  $\forall y \in \Gamma$ ,  $\frac{1}{|y-x|} \leq \frac{1}{|y_c-x| - \frac{r_\Gamma}{2}}$ , on peut donc majorer  $\text{er}_{\text{dv}}^\infty(H_\nu^{(1)})$  par

$$\text{er}_{\text{dv}}^\infty(H_\nu^{(1)}) \leq \frac{2\nu+1}{8kd(1 - \frac{r_\Gamma}{2d})} = \frac{(2\nu+1)\beta}{8\gamma(1-\beta)}. \quad (2.20)$$

Pour obtenir l'approximation rayon des fonctions de Hankel, on linéarise ensuite  $H_{\nu, \text{dv}}^{(1)}$  en deux étapes pour se ramener à une approximation de type onde plane du noyau : linéarisation de sa phase à l'ordre 1 et développement de Taylor à l'ordre 0 de l'amplitude.

### 2.2.1.2 Approximation par linéarisation de la phase du développement asymptotique.

On décrit dans ce paragraphe la linéarisation de la phase de  $H_{\nu, \text{dv}}^{(1)}$ ,

$$z = k|x-y|, \quad x \in \Omega^e \setminus \Gamma \text{ et } y \in \Gamma. \quad (2.21)$$

On rappelle d'une part que  $d = |x - y_c|$ , et  $r_\Gamma = \sup_{y \in \Gamma} |y - y_c|$ , puis on définit  $z_c = k|x - y_c| = \gamma/\beta$ , les vecteurs  $\hat{s} = \frac{x - y_c}{|x - y_c|}$ ,  $\hat{d} = \frac{y - y_c}{|y - y_c|}$  et le rapport  $\rho = \frac{|y - y_c|}{|x - y_c|}$ . On fait d'ailleurs remarquer que  $\sup_{y \in \Gamma} \rho = \beta$ . À l'aide de ces notations, on peut réécrire la phase  $z$  sous la forme,

$$z = k|x - y_c + y_c - y| = z_c q(\rho), \text{ où } q(\rho) = \sqrt{(1 - 2\rho(\hat{s} \cdot \hat{d}) + \rho^2)}. \quad (2.22)$$

**Linéarisation de la phase et approximation de  $H_{v,dv}^{(1)}$ .** On est toujours sous l'hypothèse  $z \gg 1$ . Si de plus  $\rho \ll 1$  (taille caractéristique du défaut petite devant la distance du point  $x$  au défaut), un développement de Taylor de  $z$  autour de  $\rho = 0$  donne,

$$z = z_c (1 - (\hat{s} \cdot \hat{d})\rho + \frac{1}{2}(1 - (\hat{s} \cdot \hat{d})^2)\rho^2 + o(\rho^2)). \quad (2.23)$$

Le terme d'ordre 1 est de l'ordre de  $\gamma$ ,

$$\sup_{\rho, \hat{d}} (z_c (\hat{s} \cdot \hat{d})\rho) = \gamma.$$

Le conserver dans le développement (2.23) a un sens dès que  $\gamma = O(1)$ , c'est à dire lorsque le défaut a une taille de l'ordre d'une fraction de la longueur d'onde  $r_\Gamma = \lambda/(2\pi)$ . Le terme d'ordre 2 d'autre part est majoré par le terme  $\frac{1}{2}\gamma\beta$ , le négliger revient à satisfaire les hypothèses de champ lointain.

Par conséquent, dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain, on approche la phase par son linéarisé,

$$z = z_c (1 - (\hat{s} \cdot \hat{d})\rho + o(\rho)), \quad (2.24)$$

et on approche  $H_{v,dv}^{(1)}$  par  $H_{v,lin}^{(1)}$ ,

$$H_{v,lin}^{(1)}(k|x - y|) = e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{\nu\pi}{2})} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \frac{e^{ik|x - y_c|}}{\sqrt{|x - y|}} e^{-ik\hat{s} \cdot (y - y_c)}. \quad (2.25)$$

**Analyse de l'erreur.** L'erreur relative en norme infini créée par l'approximation de  $H_{v,dv}^{(1)}$  par  $H_{v,lin}^{(1)}$ , s'estime par le calcul de

$$\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)}) = \left\| \frac{H_{v,lin}^{(1)} - H_{v,dv}^{(1)}}{H_{v,dv}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} = \left\| 1 - e^{ik(d - \hat{s} \cdot (y - y_c) - |x - y|)} \right\|_{\infty}. \quad (2.26)$$

En utilisant le développement de Taylor (2.24), on écrit,

$$\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)}) = \left\| 1 - e^{-iR_1^q(\rho; \xi)} \right\|_{\infty}, \quad (2.27)$$

où  $R_1^q(\rho; \xi)$  est le reste d'ordre 1 du développement (2.24) donné par la formule de Taylor Lagrange :

$$R_1^q(\rho; \xi) = \frac{q''(\xi)}{2} \rho^2, \quad 0 < \xi < \rho, \quad \text{où } q''(\rho) = \frac{1 - (\hat{s} \cdot \hat{d})^2}{(1 + \rho^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d})\rho)^{3/2}}.$$

$q''$  est bien défini : son dénominateur ne peut s'annuler que lorsque  $|c| = (\hat{s} \cdot \hat{d}) = 1$  et pour la seule racine  $\rho = 1$  ; cependant par hypothèse  $\rho \ll 1$ , par conséquent  $q''$  est bien défini pour notre domaine d'application. On peut donc majorer ce terme, il vérifie :  $\sup_{\rho} |q''(\rho)| \leq 1$ .

Par ailleurs, puisque  $\rho \ll 1$ , un développement de Taylor de l'exponentielle en  $\rho = 0$  dans (2.27), permet de majorer l'erreur relative introduite par la linéarisation de la phase de  $H_{v,dv}^{(1)}$  par le reste d'ordre 0 du développement de l'exponentielle,  $R_0^e$  :

$$\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)}) \leq \|R_0^e(X(\rho; \xi); \zeta)\|_{\infty}, \quad \text{où } X(\rho; \xi) = -i z_c R_1^q(\rho; \xi), \quad (2.28)$$

où  $R_0^e(X(\rho; \xi); \zeta) = e^{X(\zeta; \xi)} X(\rho; \xi)$ ,  $0 < \zeta < \rho$ . Ici  $X(\rho) \in \mathbb{C}$ , par conséquent :

$$\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)}) \leq \sup_{\rho, \xi} |z_c R_1^q(\rho; \xi)| \leq \frac{z_c \beta^2}{2} = \frac{\gamma \beta}{2}. \quad (2.29)$$

### 2.2.1.3 Approximation rayon des fonctions de Hankel de première espèce.

La troisième approximation consiste à linéariser l'amplitude de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  à l'ordre 0 afin de se ramener à une onde plane d'amplitude constante.

**La linéarisation de l'amplitude à l'ordre 0 et approximation de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$ .** Un développement de Taylor autour de  $\rho = 0$  de l'amplitude  $\frac{1}{\sqrt{z}}$ , avec  $z$  donné par (2.22), donne

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z_c}} \left( 1 + \frac{1}{2}\rho(\hat{s} \cdot \hat{d}) + o(\rho) \right). \quad (2.30)$$

L'ordre 0 de (2.30) est de l'ordre de  $\sqrt{\beta/\gamma}$  alors que l'ordre 1,

$$\sup_{y,\hat{d}} \left( \frac{1}{2\sqrt{z_c}} \frac{|y-y_c|}{d} (\hat{s} \cdot \hat{d}) \right) \leq \frac{1}{2}\beta\sqrt{\beta/\gamma},$$

est d'ordre  $\beta\sqrt{\beta/\gamma}$  ( $\gamma/\beta = z_c$ ). Par conséquent sous les hypothèses de champ lointain,  $\gamma/\beta \gg 1$ ,  $\gamma = O(1)$  et  $\beta \ll 1$ , on approche l'amplitude de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  à l'ordre 0 par,

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \sim \frac{1}{\sqrt{z_c}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma/\beta}}.$$

et on définit l'approximation rayon de  $H_v^{(1)}$ ,  $H_{v,\text{ray}}^1$  par,

$$H_{v,\text{ray}}^1(k|x-y|) = e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{v\pi}{2})} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{\sqrt{|x-y_c|}} e^{-ik(\hat{s},y-y_c)}. \quad (2.31)$$

**Analyse d'erreur.** L'erreur générée par l'approximation de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  par  $H_{v,\text{ray}}^1$  est donnée par

$$\text{er}_{\text{linA}}^\infty(H_v^1) = \left\| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)} - H_{v,\text{ray}}^1}{H_{v,\text{lin}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma}. \quad (2.32)$$

Pour un  $x \in \Omega^e$  donné et tout  $y \in \Gamma$ , on calcule en utilisant (2.22) puis par développement limité en  $\rho = 0$ ,

$$\left| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)}(x,y) - H_{v,\text{ray}}^1(x,y)}{H_{v,\text{lin}}^{(1)}(x,y)} \right| = \left| 1 - \sqrt{\frac{z}{z_c}} \right| = \sqrt{q(\rho)} = \left| -\frac{c}{2}\rho + R_1^t(\rho; \xi) \right|. \quad (2.33)$$

où  $R_1^t(\rho; \xi)$  est le terme d'ordre 1 du développement de Taylor de  $t(\rho) = \sqrt{q(\rho)} = (1 + \rho^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d}))^{1/4}$ , donné par la formule de Taylor-Lagrange (et après calcul) :

$$R_1^t(\rho; \xi) = \frac{t''(\xi)}{2}\rho^2, \quad 0 \leq \xi \leq \rho, \quad \text{où} \quad t''(\rho) = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{(1 + \rho^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d})\rho)^{3/4}} - \frac{3(1 - (\hat{s} \cdot \hat{d})^2)}{(1 + \rho^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d})\rho)^{7/4}} \right].$$

Par les mêmes arguments que pour  $q''$ , on vérifie que  $t''$  est bien défini. De plus on a :

$$t''(\rho) \leq \frac{1}{4} \left| -\frac{2}{(1 + \rho^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d})\rho)^{3/4}} + \frac{3(1 - (\hat{s} \cdot \hat{d})^2)}{(1 + \rho^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d})\rho)^{3/4}} \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

On montre donc que l'erreur engendrée par la linéarisation de l'amplitude de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  à l'ordre 0 est contrôlée par  $\beta$  selon :

$$\text{er}_{\text{linA}}^\infty(H_v^1) = \left\| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)} - H_{v,\text{ray}}^1}{H_{v,\text{lin}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \leq \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\beta^2. \quad (2.35)$$



### 2.2.1.4 Bilan : Analyse de l'erreur de l'approximation rayon des fonctions de Hankel.

On rassemble maintenant les résultats d'analyse d'erreur des trois étapes d'approximation pour quantifier l'erreur totale due à l'approximation rayon des fonctions de Hankel  $H_V^1$ . On cherche à majorer la norme infini de l'erreur relative d'approximation rayon de  $H_V^1$ ,  $\text{er}_{\text{ray}}^\infty(H_V^1)$ ,

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(H_V^1) = \left\| \frac{H_V^{(1)} - H_{V,\text{ray}}^{(1)}}{H_V^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma}. \quad (2.36)$$

Par inégalité triangulaire, on majore cette erreur à partir de la somme des contributions à l'erreur de chacune des trois étapes de l'approximation rayon,

$$\begin{aligned} \text{er}_{\text{ray}}^\infty(H_V^1) &= \left\| \frac{H_{V,\text{dv}}^{(1)}}{H_V^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \left\| \frac{H_V^{(1)} - H_{V,\text{dv}}^{(1)} + H_{V,\text{dv}}^{(1)} - H_{V,\text{lin}}^{(1)} + H_{V,\text{lin}}^{(1)} - H_{V,\text{ray}}^{(1)}}{H_{V,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma}, \\ &\leq \left\| \frac{H_{V,\text{dv}}^{(1)}}{H_V^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \left( \left\| \frac{H_V^{(1)} - H_{V,\text{dv}}^{(1)}}{H_{V,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} + \left\| \frac{H_{V,\text{dv}}^{(1)} - H_{V,\text{lin}}^{(1)}}{H_{V,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} + \left\| \frac{H_{V,\text{lin}}^{(1)} - H_{V,\text{ray}}^{(1)}}{H_{V,\text{lin}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \left\| \frac{H_{V,\text{lin}}^{(1)}}{H_{V,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

En utilisant les développements précédents, on calcule,

$$\left| \frac{H_{V,\text{lin}}^{(1)}}{H_{V,\text{dv}}^{(1)}} \right| = \left| e^{ik[|x-y_c| - \hat{s} \cdot (y-y_c) - |x-y|]} \right| = 1,$$

et par conséquent, on déduit

$$\left\| \frac{H_{V,\text{lin}}^{(1)}}{H_{V,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} = 1.$$

En reprenant maintenant les résultats d'erreur des trois étapes d'approximation, on obtient

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(H_V^1) \leq \left\| \frac{H_{V,\text{dv}}^{(1)}}{H_V^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \left( \frac{(2\nu+1)\beta}{8\gamma(1-\beta)} + \frac{1}{2}\gamma\beta + \frac{1}{2}\beta \left( 1 + \frac{1}{2}\beta \right) \right). \quad (2.38)$$

Ce contrôle de l'erreur totale  $\text{er}_{\text{ray}}^\infty(H_V^1)$  n'est pas optimal mais il permet de calibrer les expériences numériques pour garantir une précision donnée de l'approximation rayon des fonctions de Hankel. En particulier, elle met en lumière que l'erreur d'approximation est contrôlée par seulement deux paramètres :  $\gamma = kr_\Gamma$  et  $\beta = \frac{r_\Gamma}{d}$ , à partir desquels on obtient les quantités intervenant dans le contrôle de l'approximation du noyau de

Green :  $kd$ ,  $kr_\Gamma$ ,  $\frac{r_\Gamma}{d}$ , et  $\frac{k}{2} \frac{r_\Gamma^2}{d}$ .

On met à profit cette analyse d'erreur, dans la section 2.3 afin de définir les seuils de valeur pour les grandeurs  $d$  et  $r_\Gamma$  en fonction de  $k$ , constitutives des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . Mais dans l'immédiat on utilise ces résultats pour donner une majoration de l'erreur d'approximation rayon du noyau  $K$ .

## 2.2.2 Approximation rayon des noyaux.

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'approximation rayon du noyau  $K$  de l'opérateur intégral de Brakhage-Werner, donné par (2.4) en fonction de  $H_0^{(1)}$  et  $H_1^{(1)}$ . L'approximation rayon de  $H_0^{(1)}$  et  $H_1^{(1)}$  permet de quantifier l'erreur d'approximation induite sur  $K$ . On dégage en particulier une estimation a priori de l'erreur qui sera très utile pour contrôler l'erreur d'approximation du champ diffracté.

**Approximation des fonctions de Hankel dans les noyaux  $K_S$  et  $K_d$ .**

On déduit tout d'abord des développements précédents les approximations onde plane des noyaux des potentiels de simple et double couche, notés respectivement  $\tilde{K}_S$  et  $\tilde{K}_d$  :

$$\begin{aligned}\tilde{K}_S(x,y;\omega) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k8\pi}} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{\sqrt{|x-y_c|}} e^{-ik(\hat{s},y-y_c)}, \\ \tilde{K}_d(x,y;\omega) &= -ik \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k8\pi}} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{\sqrt{|x-y_c|}} e^{-ik(\hat{s},y-y_c)} \left( \mathbf{v}(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} \right),\end{aligned}$$

où on rappelle que  $\mathbf{v}(y)$  est la normale sortante au défaut en  $y$ .

On obtient ensuite l'approximation finale du noyau du potentiel de double couche en introduisant une approximation supplémentaire sur le produit scalaire.

**Approximation du produit scalaire dans l'hypothèse de champ lointain.**

Comme on se place dans la zone de champ lointain,  $\beta = \frac{r_\Gamma}{d} \ll 1$ , on peut approcher la direction  $\frac{x-y}{|x-y|}$  par  $\hat{s} = \frac{x-y_c}{|x-y_c|}$  au moyen d'un développement de Taylor. En utilisant (2.23) on écrit,

$$\frac{(x-y)}{|x-y|} = \hat{s} + \rho (\hat{s}(\hat{s} \cdot \hat{d}) - \hat{d}) + o(\rho). \quad (2.39)$$

Comme de plus  $\sup_{y \in \Gamma} \rho = \beta$ , on peut négliger dans le cadre de l'hypothèse de champ lointain tous les termes en  $\rho$  dans (2.39) et approcher le produit scalaire noté  $p = \mathbf{v}(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|}$  à l'ordre 0 par son approximation  $\tilde{p} = \mathbf{v}(y) \cdot \hat{s}$ ,

$$p = \tilde{p} + R_0^p(\rho), \quad R_0^p(\rho) = o(\rho),$$

où  $R_0^p(\rho)$  est le reste d'ordre 0 du développement de Taylor de la fonction  $p$  en  $\rho = 0$ ,

$$R_0^p(\rho) = p'(\xi)\rho, \quad 0 < \xi < \rho, \quad p'(\rho) = \frac{-(c\hat{d} + \hat{s}) \cdot \mathbf{v}(y)\rho + (\hat{d} + c\hat{s}) \cdot \mathbf{v}(y)}{(1 + \rho^2 - 2c\rho)^{3/2}}, \quad \text{avec } c = \hat{s} \cdot \hat{d}.$$

En majorant  $p'$  :

$$p'(\rho) \leq \frac{-(c\hat{d} + \hat{s}) \cdot \mathbf{v}(y)\rho + (\hat{d} + c\hat{s}) \cdot \mathbf{v}(y)}{(1 + \rho^2 - 2\rho)^{3/2}} = \frac{-(c\hat{d} + \hat{s}) \cdot \mathbf{v}(y)\rho + (\hat{d} + c\hat{s}) \cdot \mathbf{v}(y)}{(1 - \rho)^3}.$$

on montre que :  $|R_0^p(\rho)| \leq 2(\beta + 1)$  et par conséquent, que l'erreur absolue d'approximation de  $p$  par  $\tilde{p}$  est contrôlée par le paramètre  $\beta$  selon l'inégalité :

$$er_p = \|p(y) - \tilde{p}(y)\|_{\infty, \Gamma} \leq 2(\beta + \beta^2). \quad (2.40)$$

Cependant on vérifie par expérience numérique (figure 2.10) que l'erreur est en fait contrôlée comme suit :  $er_p \leq \beta + \beta^2$ . Finalement, l'approximation rayon du noyau du potentiel de double couche s'écrit,

$$\tilde{K}_d(x,y;\omega) = -ik \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{\sqrt{|x-y_c|}} e^{-ik(y-y_c, \hat{s})} (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{s}). \quad (2.41)$$

et on déduit l'expression de l'approximation rayon du noyau  $K$  de la formule de représentation intégrale de Brakhage-Werner,

$$\tilde{K}(x,y;\omega) = -ik \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{-8ik\pi}} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{\sqrt{|x-y_c|}} e^{-ik(y_\Gamma - y_c, \hat{s})} (\hat{s} \cdot \mathbf{v}(y) + 1). \quad (2.42)$$

### Analyse d'erreur pour le noyau du potentiel de simple couche

Le noyau du potentiel de simple couche étant directement proportionnel à la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0,  $H_0^{(1)}$ , l'erreur relative  $\text{er}_{\text{ray}}(K_s)$  commise en approchant le noyau par son approximation rayon est la même que pour  $H_0^{(1)}$ , (2.38),

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_s) = \frac{\|K_s - \tilde{K}_s\|_{\infty, \Gamma}}{\|K_s\|_{\infty, \Gamma}} \leq \left\| \frac{K_s - \tilde{K}_s}{K_s} \right\|_{\infty, \Gamma} \leq \left\| \frac{H_{0, \text{dv}}^{(1)}}{H_0^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \left( \frac{\beta}{8\gamma(1-\beta)} + \frac{k}{2}\gamma\beta + \frac{1}{2}\beta \left(1 + \frac{1}{2}\beta\right) \right). \quad (2.43)$$

### Analyse d'erreur pour le noyau du potentiel de double couche

Le noyau du potentiel de double couche est proportionnel au produit  $(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{s}}) H_1^{(1)}$ . Son erreur d'approximation rayon notée  $\text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d)$  fait donc intervenir à la fois celle de la fonction de Hankel  $H_1^{(1)}$  et celle du produit scalaire. La fonction  $K_d$  s'annulant sur  $\Gamma$ , on ne peut donc pas définir l'erreur relative comme précédemment par la norme infinie de l'erreur relative ponctuelle, on la définit ici par le ratio,

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d) = \frac{\|K_d - \tilde{K}_d\|_{\infty, \Gamma}}{\|K_d\|_{\infty, \Gamma}}. \quad (2.44)$$

En utilisant l'expression analytique de  $K_d$  et les différentes étapes d'approximation, on obtient par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d) &= \frac{\|kH_1^{(1)}\mathbf{p} - kH_{1, \text{ray}}^{(1)}\tilde{\mathbf{p}}\|_{\infty, \Gamma}}{\|kH_1^{(1)}\mathbf{p}\|_{\infty, \Gamma}} = \frac{\|k(H_1^{(1)} - H_{1, \text{ray}}^{(1)})\mathbf{p} - kH_{1, \text{ray}}^{(1)}(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}})\|_{\infty, \Gamma}}{\|kH_1^{(1)}\mathbf{p}\|_{\infty, \Gamma}} \\ &\leq \frac{\|H_1^{(1)} - H_{1, \text{ray}}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|H_1^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}} + \frac{\|kH_{1, \text{ray}}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|kH_1^{(1)}\mathbf{p}\|_{\infty, \Gamma}} \|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}\|_{\infty, \Gamma} \\ &\leq \left\| \frac{H_1^{(1)} - H_{1, \text{ray}}^{(1)}}{H_1^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} + \frac{\|kH_{1, \text{ray}}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|kH_1^{(1)}\mathbf{p}\|_{\infty, \Gamma}} \|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}\|_{\infty, \Gamma} \\ &\leq \left\| \frac{H_{1, \text{dv}}^{(1)}}{H_1^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \left( \left\| \frac{H_1^{(1)} - H_{1, \text{dv}}^{(1)}}{H_{1, \text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} + \left\| \frac{H_{1, \text{dv}}^{(1)} - H_{1, \text{lin}}^{(1)}}{H_{1, \text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} + \left\| \frac{H_{1, \text{lin}}^{(1)} - H_{1, \text{ray}}^{(1)}}{H_{1, \text{lin}}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \left\| \frac{H_{1, \text{lin}}^{(1)}}{H_{1, \text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \right) \\ &\quad + \frac{\|H_{1, \text{ray}}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|H_1^{(1)}\mathbf{p}\|_{\infty, \Gamma}} \|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}\|_{\infty, \Gamma}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ainsi, d'après (2.38) et (2.40), on contrôle l'erreur relative d'approximation du noyau du potentiel de double couche par,

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d) \leq \left\| \frac{H_{1, \text{dv}}^{(1)}}{H_1^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \left( \frac{3\beta}{8\gamma(1-\beta)} + \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{1}{2}\beta \left(1 + \frac{1}{2}\beta\right) \right) + 2 \frac{\|H_{1, \text{ray}}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|H_1^{(1)}\mathbf{p}\|_{\infty, \Gamma}} (\beta + \beta^2). \quad (2.46)$$

### Analyse d'erreur pour le noyau $K$

On déduit ici des résultats sur l'erreur d'approximation des noyaux  $K_s$  et  $K_d$  une estimation d'erreur a priori de l'approximation du noyau de Brakhage-Werner  $K$ . On montre d'abord que l'estimation d'erreur d'approximation du noyau intervient dans l'estimation de l'erreur d'approximation du champ diffracté.

L'erreur absolue de l'approximation haute fréquence du champ diffracté obtenue par la méthode barycentrique, notée  $u$  et la solution exacte notée  $u^{\text{ex}}$  (solution BEM) se majore par,

$$\begin{aligned} |u^{\text{ex}}(x_r; \omega) - \tilde{u}(x_r; \omega)| &= \left| \int_{\Gamma} (K(x_r, y; \omega) - \tilde{K}(x_r, y; \omega)) \Psi(y, \hat{s}) dS(y) \right|, \\ &\leq \|K(x_r, y; \omega) - \tilde{K}(x_r, y; \omega)\|_{\infty, \Gamma} \|\Psi\|_{L^1(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pour le problème de Brakhage-Werner,  $\Psi$  est  $L^2(\Gamma)$ , voir annexe E, par conséquent, par inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |u^{\text{ex}}(x_r; \omega) - \tilde{u}(x_r; \omega)| &= \left| \int_{\Gamma} (K(x_r, y; \omega) - \tilde{K}(x_r, y; \omega)) \Psi(y, \hat{s}) dS(y) \right|, \\ &\leq \sqrt{\text{mes}(\Gamma)} \|K(x_r, y; \omega) - \tilde{K}(x_r, y; \omega)\|_{\infty, \Gamma} \|\Psi\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Contrôler l'erreur d'approximation rayon du noyau  $K$  permet donc de contrôler l'approximation champ lointain du champ diffracté et de plus ce contrôle dépend des mêmes paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  qui contrôlent l'erreur d'approximation des fonctions de Hankel.

On a en particulier,

$$\begin{aligned} \|K - \tilde{K}\|_{\infty, \Gamma} &\leq \|K_d\|_{\infty, \Gamma} \frac{\|K_d - \tilde{K}_d\|_{\infty, \Gamma}}{\|K_d\|_{\infty, \Gamma}} + \|K_s\|_{\infty, \Gamma} \left\| \frac{K_s - \tilde{K}_s}{K_s} \right\|_{\infty, \Gamma}, \\ &\leq \|K_d\|_{\infty, \Gamma} \text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(K_d) + \|K_s\|_{\infty, \Gamma} \text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(K_s), \\ &\leq \left( \|K_d\|_{\infty, \Gamma} \left\| \frac{H_{1, \text{dv}}^1}{H_1^1} \right\|_{\infty, \Gamma} + \|K_s\|_{\infty, \Gamma} \left\| \frac{H_{0, \text{dv}}^1}{H_0^1} \right\|_{\infty, \Gamma} \right) \left( \frac{\beta}{8\gamma(1-\beta)} + \frac{\gamma\beta}{2} + \frac{1}{2}\beta \left( 1 + \frac{1}{2}\beta \right) \right) \\ &\quad + \|K_d\|_{\infty, \Gamma} \left\| \frac{H_{1, \text{dv}}^1}{H_1^1} \right\|_{\infty, \Gamma} \frac{\beta}{4\gamma(1-\beta)} + 2 \|K_d\|_{\infty, \Gamma} \frac{\|H_{1, \text{ray}}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|H_1^{(1)}\|_{\text{ps}}}_{\infty, \Gamma} (\beta + \beta^2). \end{aligned} \quad (2.49)$$

On poursuit maintenant cette partie de description de la méthode barycentrique par un paragraphe justificatif de l'approximation rayon du champ incident.

### 2.2.3 Approximation rayon du champ incident

On s'intéresse ici à l'approximation rayon du champ incident. On justifie d'abord le choix de l'onde cylindrique comme champ incident dans nos configurations d'étude et on détaille ensuite son processus d'approximation rayon en régime haute fréquence.

#### Modélisation de la source pour le problème instationnaire

La méthode hybride présentée dans ce manuscrit ayant pour objectif long terme d'être intégrée à la plate-forme de simulation du CEA LIST, CIVA, on reprend dans notre étude le modèle de source de CIVA.

La source peut être choisie ponctuelle ou étendue. Lorsqu'elle est étendue, on la modélise en régime temporel comme une distribution de sources ponctuelles émettant le même signal temporel  $W(t)$ . Ainsi, on formalise ce modèle de source ponctuelle ( $P = 1$ ) ou étendue ( $P > 1$ ) en régime temporel comme suit,

$$u^i(x, t) = \sum_{p=1}^P \delta_p(x - x_s^p) W(t).$$

Ramener ce type de source en régime harmonique, revient à la représenter comme une somme de fonctions cylindriques pondérées par le spectre de  $W(t)$ ,

$$u^i(x) = \frac{i}{4} \sum_{p=1}^P H_0^1(k|x - x_s^p|) \hat{W}(\omega),$$

qui en régime haute fréquence s'approche par le développement asymptotique suivant,

$$u^i(x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8k\pi}} \sum_{p=1}^P \frac{e^{ik|x-x_s^p|}}{\sqrt{|x-x_s^p|}} \hat{W}(\omega).$$

### Le développement asymptotique des fonctions de Hankel : solutions rayons

Le développement asymptotique des fonctions de Hankel s'interprète comme un rayon :  $H_{v,dv}^1$  s'écrit sous la forme de l'ordre 0 de l'ansatz WKB,

$$H_{v,dv}^1(x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8k\pi}} A(x) e^{ik\phi(x)} + o\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

avec  $A(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ , et  $\phi(x) = |x|$ ,

(2.50)

où les fonctions d'amplitude  $A$  et de phase  $\phi$  satisfont de plus l'équation eikonale et l'équation de transport,

$$\begin{cases} \nabla\phi(x) = \frac{x}{|x|} \implies |\nabla\phi(x)| = 1, \\ \text{div}(A^2(x)\nabla\phi) = 0. \end{cases}$$
(2.51)

Comme tout Ansatz WKB du type (2.50),  $H_{v,dv}^{(1)}$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u + (k^2 + \Delta A) u = 0,$$

où  $\Delta A(x) = 1/(4|x|^2)$  est un terme de perturbation que l'on peut négliger dans la zone dite de champ rayon, c'est à dire en dehors des zones de forte variation de l'amplitude (caustique) et des couches limites autour de l'obstacle. Dans l'étude réalisée ici, le milieu est supposé homogène, ce terme est négligeable pour un calcul en tout point suffisamment éloigné de l'obstacle. On interprète donc  $H_{v,dv}^{(1)}$  comme la solution rayon de l'équation de Helmholtz dans un régime haute fréquence où le terme perturbatif est négligeable.

On résume maintenant à partir des remarques précédentes le processus de calcul de l'approximation rayon de l'onde incidente.

### Approximation rayon du champ incident

Sous l'hypothèse  $k|x-x_s| \gg 1$ , chaque onde cylindrique composant le champ incident est approchée par son développement asymptotique et s'interprète alors comme un rayon se propageant entre la source  $x_s$  et le point de calcul  $x$ . En milieu homogène l'évaluation de  $A(x-x_s)$  calcule l'amplitude de l'approximation haute fréquence du champ incident après sa propagation entre la source et le point  $x$ . Dans le cas inhomogène, la situation est plus complexe, les rayons ne sont plus rectilignes, la fonction  $A$  ne donne pas la bonne estimation de la divergence géométrique des rayons. Dans un tel milieu, on approche  $A$  par l'amplitude complexe  $A^s(x;x_s) e^{ik\phi^s(x;x_s)}$  en  $x$  du rayon émis de la source et dont les grandeurs caractéristiques ( $A^s, \phi^s$ ) sont calculées par résolution du système,

$$\begin{cases} |\nabla\phi^s| = 1 \text{ dans } \Omega \\ 2\nabla\phi^s \cdot \nabla A^s + A^s \Delta\phi^s = 0, \\ \text{avec } \phi^s(x_s;x_s) = 0 \text{ et } A^s(x_s;x_s) = 1, \end{cases}$$
(2.52)

le long des caractéristiques de l'équation eikonale,  $(x(l))$ , définies par

$$\begin{cases} \frac{dx}{dl} = p, \\ \frac{dp}{dl} = -n\nabla_x n, \end{cases}$$
(2.53)

où  $p = \nabla_x \phi$  et  $l$  désigne l'abscisse curviligne le long des caractéristiques. On tient ainsi compte des effets de l'inhomogénéité du milieu sur la propagation de l'onde cylindrique.

### Reconstitution du champ incident sur l'obstacle diffractant

En utilisant le modèle multi-échelle de la méthode hybride qui consiste à représenter l'obstacle par un point (son barycentre  $y_c$ ) pour le calcul des effets de propagation, et comme un voisinage de ce point pour le calcul des effets de diffraction, on calcule d'une part le rayon émis de la source vers  $y_c$  et on reconstitue le champ incident sur l'obstacle comme l'approximation onde plane de ce rayon,

$$\forall y \in \Gamma \quad \tilde{u}^i(y) = \hat{W}(\omega; \omega_s) A^s(y_c; x_s) e^{ik\hat{\phi}^s(y_c; x_s)} e^{ik\hat{s} \cdot (y - y_c)}, \quad \hat{s} = \nabla \phi^s(x; x_s). \quad (2.54)$$

Dans le prochain paragraphe, on détaille la méthode de construction du coefficient de diffraction. On donne en particulier l'expression analytique du coefficient de diffraction en fonction du type de condition aux limites associée au problème résolu et de la formulation intégrale choisie pour sa résolution.

#### 2.2.4 Construction du coefficient de diffraction pour la méthode barycentrique

Le coefficient de diffraction s'obtient comme l'amplitude de champ lointain du problème de diffraction pour lequel le champ incident est approché par son approximation rayon  $\tilde{u}^i$ , (2.54),

$$\tilde{u}^i(y) = \hat{W}(\omega; \omega_s) B^s(y_c; x_s) e^{ik\hat{s} \cdot (y - y_c)},$$

où on rappelle que  $B^s(y_c; x_s)$  est l'amplitude complexe de propagation rayon du champ incident de la source vers  $y_c$ . Le coefficient de diffraction est une fonction des deux variables  $\hat{r}$ ,  $\hat{s}$  que l'on obtient à partir de l'approximation champ lointain de la solution du problème de diffraction (1.10) résolu par équation intégrale. On donne ici les deux étapes qui permettent à la fois de le définir et de l'évaluer :

- on résout d'abord le problème surfacique équivalent au problème (1.10) d'inconnue  $\psi = \hat{W}(\omega) B^s(y_c; y_c) \tilde{\psi}$ , où par linéarité,  $\tilde{\psi}$  est solution du problème,

$$\frac{1}{2} \tilde{\psi}(x; \hat{s}) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \nu(y)} - ikG \right) (x, y; \omega) \tilde{\psi}(y; \hat{s}) dS(y) = -e^{ik\hat{s} \cdot (x - y_c)}, \quad x \in \Gamma. \quad (2.55)$$

- on évalue ensuite l'approximation champ lointain du champ diffracté en tout point de l'espace  $x_r$  en appliquant à la solution surfacique  $\psi$  la formule de représentation intégrale pour laquelle on substitue au noyau  $K$  son approximation rayon  $\tilde{K}$  (2.42),

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_r; \omega) &= \int_{\Gamma} \Psi(y; \hat{s}) \tilde{K}(x_r, y; \omega) dS(y) \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{ik|x_r - y_c|}}{\sqrt{|x_r - y_c|}} \int_{\Gamma} \Psi(y; \hat{s}) (k\nu(y) \cdot \hat{r} - \eta) e^{-ik\hat{r} \cdot (y - y_c)} dS(y), \\ &= -ik \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{ik|x_r - y_c|}}{\sqrt{|x_r - y_c|}} \left[ \int_{\Gamma} \tilde{\Psi}(y; \hat{s}) (\nu(y) \cdot \hat{r} + 1) e^{-ik\hat{r} \cdot (y - y_c)} dS(y) \right] B^s(y_c; x_s), \end{aligned} \quad (2.56)$$

L'approximation champ lointain du champ diffracté s'interprète alors comme un rayon pondéré par le coefficient de diffraction défini pour la formulation de Brakhage-Werner de l'équation de Helmholtz avec condition aux bords de Dirichlet homogène par,

$$\mathcal{R} : (\hat{r}, \hat{s}; \omega) \rightarrow \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} \tilde{\Psi}(y; \hat{s}) (\nu(y) \cdot \hat{r} + 1) e^{-ik\hat{r} \cdot (y - y_c)} dS(y), \quad (2.57)$$

et l'amplitude complexe de propagation rayon du champ incident. Le coefficient de diffraction  $\mathcal{R}$  calcule l'amplitude du champ diffracté générée loin du défaut dans la direction  $\hat{r}$  par la propagation d'une onde incidente plane unitaire de direction de propagation notée  $\hat{s}$ . Il s'interprète comme le coefficient de réflexion provoquée par la cible  $\Gamma$  sous l'incidence d'un rayon émis de la source vers le barycentre de  $\Gamma$  (dans la direction  $\hat{s}$ ) et renvoyé dans la direction du récepteur  $\hat{r}$  à partir du centre de gravité de  $\Gamma$ . Il est spécifique à la géométrie du défaut diffractant.

L'expression du coefficient de diffraction dépend du formalisme que l'on choisit pour reformuler le problème traité, et des conditions aux limites. On donne ici, en restant fidèle aux conventions exposées au 1.4, la définition analytique du coefficient de diffraction pour chaque type de condition aux limites (Dirichlet ou Neumann homogène) associées à l'équation de Helmholtz en 2D.

- Condition de Dirichlet homogène,

- Formulation EFIE/MFIE/CFIE,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \sqrt{\frac{i}{8k\pi}} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] (y; \hat{s}) e^{-ik(\hat{r} \cdot (y-y_c))} dS(y),$$

où  $\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  est solution d'une des équations intégrales directes (1.74),(1.75),(1.78).

- Formulation de Brackage-Werner,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} \psi(y; \hat{s}) (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{r} + 1) e^{-ik(\hat{r} \cdot (y-y_c))} dS(y)$$

où  $\psi = [u] = ik \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  est solution de l'équation intégrale indirecte (1.83).

- Condition de Neumann homogène,

- Formulation EFIE/MFIE/CFIE,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} [u](y; \hat{s}) \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r} e^{-ik(\hat{r} \cdot (y-y_c))} dS(y)$$

où  $[u]$  est solution d'une des équations intégrales directes (1.79),(1.80),(1.81).

- Formulation Brackage-Werner,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = -\sqrt{\frac{i}{8k\pi}} \int_{\Gamma} \psi(y; \hat{s}) (k^2 \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r} + 1) e^{-ik(\hat{r} \cdot (y-y_c))} dS(y)$$

où  $\psi = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = ik [u]$  est solution de l'équation intégrale indirecte (1.85).

L'introduction de ce coefficient de diffraction permet d'approcher le champ diffracté dans la zone de champ lointain du défaut dans un formalisme qui découple le calcul des phénomènes de diffraction et de propagation du champ diffracté,

$$\tilde{u}(x_r; \omega) = \hat{W}(\omega; \omega_s) B^r(x_r; y_c) \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) B^s(y_c; x_s). \quad (2.58)$$

Le champ diffracté dû à l'approximation rayon du champ incident  $\tilde{u}^i$  est évalué comme le produit du coefficient de diffraction dans les directions d'incidence  $\hat{s}$  et d'observation  $\hat{r}$ , et des amplitudes  $B^r$  et  $B^s$  qui quantifient respectivement la divergence géométrique des rayons diffracté et incident lors de leur propagation. L'amplitude  $B^r$  du rayon diffracté pour lequel on approche les effets de propagation est comme pour le champ incident, en milieu homogène, obtenue par la formule  $B^r = \frac{e^{ik|x_r-y_c|}}{|x_r-y_c|}$  et, en milieu inhomogène, approchée comme l'amplitude complexe du rayon  $(A_r, \phi_r)$  solution du système de tracé de rayon,

$$\begin{cases} |\nabla \phi| = 1, \\ 2\nabla \phi \cdot \nabla A + 2A\Delta \phi = 0, \\ \phi(y_c) = 0, \quad A(y_c) = 1. \end{cases} \quad (2.59)$$

On se propose maintenant sur une étude paramétrique de mettre en évidence le cadre de validité de la stratégie d'approximation rayon du champ diffracté et d'éprouver numériquement les paramètres contrôlant son erreur.

## 2.3 Étude numérique de l'approximation rayon du noyau de Green 2D et de sa dérivée normale

On illustre ici numériquement le cadre de validité de l'approximation rayon des fonctions de Hankel  $H_v^{(1)}$  qui interviennent dans l'approximation du champ incident et du noyau de l'opérateur intégral. On décompose cette étude selon les trois opérations d'approximation décrites en 2.2 et on réalise à chaque étape, une étude paramétrique de sorte à éprouver les estimations d'erreur relative obtenues en 2.2. On donnera en particulier les valeurs seuils des paramètres contrôlant l'erreur à précision fixée afin de faciliter le calibrage de la méthode.

Pour cette étude paramétrique, on se donne une configuration de diffraction adimensionnée liée aux applications de la méthode de couplage pour la synthèse temporelle du champ diffracté. On se place dans le contexte d'un problème de diffraction en milieu homogène pour une onde incidente de spectre étendu, centré autour de la fréquence  $F_s$  ( $\lambda_s = c/F_s$ ) se propageant dans un milieu homogène de célérité  $c = 1$ . On considère la diffraction par un disque de diamètre  $\lambda_s$  ( $r_\Gamma = \lambda_s/2$ ) centré en  $y_c = (0,0)$  en un point  $x$  situé à  $gr_\Gamma$  ( $g = 30$ ) du barycentre du défaut  $y_c$  dans la direction  $(\cos(\pi/8), \sin(\pi/8))$ .

L'étude consiste à calculer les approximations à chaque étape de l'approximation rayon des fonctions de Hankel  $H_v^1$  ( $v = 0,1$ ) ainsi que l'erreur relative associée, pour l'ensemble des fréquences du spectre de l'onde incidente :  $H_{v,dv}^{(1)}$ ,  $H_{v,lin}^{(1)}$ , et  $H_{v,ray}^{(1)}$ . On rappelle ici leur expression,

$$\begin{aligned} H_{v,dv}^{(1)}(x,y) &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-v\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{ik|y-x|}}{\sqrt{|y-x|}}, \\ H_{v,lin}^{(1)}(x,y) &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-v\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{ik|y_c-x|}}{\sqrt{|y_c-x|}} e^{-ik\hat{r}\cdot(y-y_c)}, \\ H_{v,ray}^{(1)}(x,y) &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-v\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{8k\pi}} \frac{e^{i|ik|y_c-x|}}{\sqrt{|y_c-x|}} e^{-ik\hat{r}\cdot(y-y_c)}, \end{aligned}$$

où  $\hat{r} = \frac{x-y_c}{|x-y_c|}$ .

La variation de la fréquence sur l'intervalle  $[f_{\min}, f_{\max}] = [a;b]F_s$  ( $a < 0, b > 1$ ) modifie la taille du défaut et la distance du point  $x$  au défaut en terme de longueur d'onde, en même temps que l'erreur d'approximation. Les différentes grandeurs du problème évoluent comme suit au cours de l'expérience,

$$f \in [aF_s; bF_s] \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{c}{f} \in [\frac{1}{b}; \frac{1}{a}]\lambda_s, \\ \frac{r_\Gamma}{\lambda} = \frac{\lambda_s}{\lambda} \in [a; b], \\ \frac{d}{\lambda} = \frac{gr_\Gamma}{\lambda} \in 30[a; b]. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma/\beta = 2g\pi \in [a; b], \\ \beta = \frac{1}{g}, \\ \frac{1}{2}\gamma\beta \in \frac{\pi}{g}[a; b]. \end{cases}$$

### 2.3.1 Cadre de validité du développement asymptotique

On s'intéresse en premier lieu à l'erreur d'approximation des fonctions  $H_v^{(1)}$  pour  $v = 0$  ou  $1$  par l'ordre 0 de leur développement asymptotique,  $H_{v,dv}^{(1)}$ . D'après (2.20), l'erreur relative due à cette étape d'approximation,  $er_{dv}(H_v^{(1)})$ , est contrôlée par la quantité  $\frac{(2v+1)\beta}{8\gamma(1-\beta)}$ . Dans la configuration d'étude la quantité  $\beta$  étant constante, on s'attend à une évolution décroissante de l'erreur en  $\beta/\gamma$ .

Après calcul des approximations  $H_{v,dv}^{(1)}$  des fonctions  $H_v^{(1)}$  pour l'ensemble des fréquences de l'intervalle  $[a;b]F_s$ , on calcule les erreurs relatives  $er_{dv}^\infty(H_v^{(1)})$  pour  $v = 0$  et  $v = 1$  et on visualise leur évolution en échelle logarithmique en fonction de  $\gamma/\beta$  sur la figure 2.4. L'évolution observée est linéaire et décroissante en  $\beta/\gamma$ , pour  $v = 0$  et  $1$ , conformément à l'analyse d'erreur. En outre, une régression linéaire permet de retrouver avec une très bonne précision la loi de décroissance prédite par l'inégalité (2.20) de l'analyse d'erreur :  $\log(er_{dv}^\infty(H_0^{(1)})) = -\log(kd) - 2.0874$ , et  $\log(er_{dv}^\infty(H_1^{(1)})) = -\log(kd) - 0.9776$ .



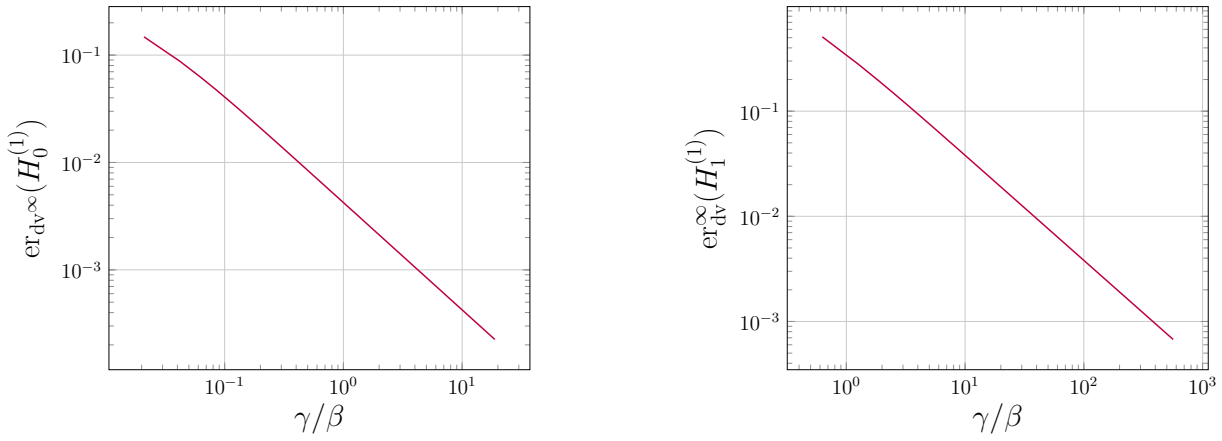


FIGURE 2.4 – Erreur relative entre  $H_{v,dv}^{(1)}$  et  $H_v^{(1)}$  (en norme infinie), en fonction du paramètre  $\gamma/\beta$

Par soucis de calibrage de la méthode numérique, on exploite maintenant ces courbes et on relève les valeurs minimales du paramètre de contrôle  $\gamma/\beta$  qui garantissent une précision de l'approximation de l'ordre de  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ , ou  $10^{-4}$ . On répertorie ces valeurs pour chaque précision dans les tableaux 2.1 et 2.2 respectivement pour  $v = 0$  et  $v = 1$ . On adjoint à ces tableaux le calcul de la valeur minimale du paramètre de contrôle  $(kd)^{th}$ , obtenue à partir de (2.20), pour garantir ces précisions pour  $v = 0$  et  $v = 1$ . Ces valeurs coïncident avec les valeurs mesurées sur les courbes, validant l'estimation a priori.

On retient en particulier de ces tableaux que l'on garantit une erreur inférieure au 1% dès lors qu'on évalue l'approximation en des points au delà de  $2\lambda$  de l'obstacle pour  $v = 0$ , et de  $6\lambda$  pour  $v = 1$  et on garantit de plus une erreur d'approximation inférieure à 0.1% dès lors qu'on évalue l'approximation au delà de  $20\lambda$  pour  $v = 0$  et  $60\lambda$  pour  $v = 1$ . On remarque donc qu'à  $kd$  fixé, l'approximation de  $H_1^{(1)}$  est donc moins précise que celle de  $H_0^{(1)}$ .

$er_{dv}^\infty(H_0^{(1)})$	$1 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$1/3 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$	$1/3 \times 10^{-3}$	$2,25 \times 10^{-4}$
$(kd)^{th}$	12,7	25,4	38,1	127,1	254,2	381,3	565,4
$(kd)$	13,19	25,7	38,3	127,5	254,4	381,3	565,4
$d/\lambda$	2,1	4,1	6,1	20,3	40,5	60,7	90

TABLE 2.1 – Valeurs minimales (théoriques  $(kd)^{th}$  et mesurées  $kd$ ) des paramètres de contrôle de l'erreur garantissant une précision donnée de l'approximation de  $H_0^{(1)}$ .

$er_{dv}^\infty(H_1^{(1)})$	$1 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$1/3 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-3}$	$6,74 \times 10^{-4}$
$(kd)^{th}$	38,1	76,2	114,4	381,3	565,8
$(kd)$	38,3	76,6	114,9	381,3	565,4
$d/\lambda$	6,1	12,2	18,3	60,7	90

TABLE 2.2 – Valeurs minimales (théoriques  $(kd)^{th}$  et mesurées  $kd$ ) des paramètres de contrôle de l'erreur garantissant une précision donnée de l'approximation de  $H_1^{(1)}$ .

### 2.3.2 Cadre de validité de la linéarisation de la phase du développement asymptotique

On s'intéresse ici à l'erreur introduite lorsqu'on approche les fonctions  $H_{v,dv}^{(1)}$  ( $v = 0, 1$ ) par  $H_{v,lin}^{(1)}$  obtenues par linéarisation de leur phase à l'ordre 1. D'après l'analyse 2.2.1.2, cette étape d'approximation introduit une erreur relative  $er_{lin}^\infty(H_v^{(1)})$  contrôlée par la quantité  $\frac{1}{2}\gamma\beta$ . On tâche ici de mettre en évidence ce contrôle de l'erreur numériquement.

### Approximation de $H_{v,dv}^{(1)}$ par $H_{v,lin}^{(1)}$ .

On trace tout d'abord l'évolution de l'erreur relative  $er_{lin}^{\infty}(H_v^{(1)})$  en fonction du paramètre de contrôle  $(\gamma\beta)/2$  en échelle logarithmique, figure 2.5. Les développements asymptotiques de  $H_0^{(1)}$  et  $H_1^{(1)}$  étant proportionnels, les erreurs dues à la linéarisation de leur phase sont égales, c'est pourquoi on ne trace sur cette figure que le comportement de l'erreur pour  $v = 0$ .

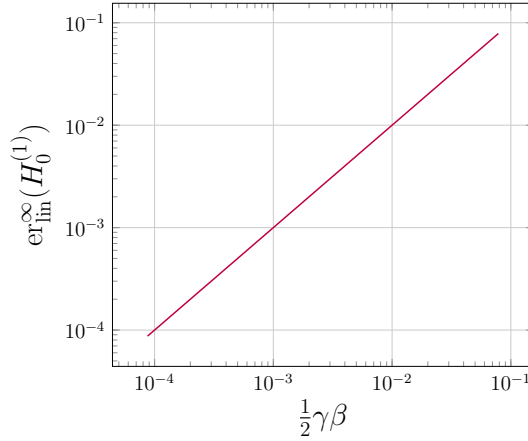


FIGURE 2.5 – Erreur relative entre  $H_{v,dv}^{(1)}$  et son approximation onde plane  $H_{v,lin}^{(1)}$  (en norme infinie) pour  $v = 0$  (à droite) et  $v = 1$  (à gauche), en fonction du paramètre  $\frac{1}{2}\gamma\beta$

On observe une évolution linéaire croissante, identifiée par régression linéaire comme la dépendance  $er_{lin}^{\infty}(H_0^{(1)}) = 0,9997\frac{1}{2}\gamma\beta + 4,05 \times 10^{-6}$ , en adéquation avec l'inégalité (2.29) obtenue par l'analyse d'erreur. Par une lecture plus approfondie de la courbe 2.5, on répertorie dans le tableau 2.3 les valeurs de différents paramètres de contrôle dont  $\frac{1}{2}\gamma\beta$  et le ratio  $\frac{\gamma}{\pi}$  pour des précisions données. Ces relevés confirment que le

$er_{lin}^{\infty}(H_0^{(1)})$	$1 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$1/3 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-3}$
$\gamma\beta/2$	$9,9 \times 10^{-2}$	$4,9 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^{-3}$	$9,6 \times 10^{-4}$
$\gamma/\pi$	0,3800	0,1900	0,1266	0,0366
$\gamma/\beta$	71,62	35,81	23,87	6,91
$f$	63,08	31,54	21,02	6,08
$er_{lin}^{\infty}(H_0^{(1)})$	$5 \times 10^{-4}$	$1/3 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$	
$\gamma\beta/2$	$4,4 \times 10^{-4}$	$2,6 \times 10^{-4}$	$8,7 \times 10^{-5}$	
$\gamma/\pi$	0,0166	0,0100	0,0033	
$\gamma/\beta$	3,14	1,88	0,62	
$f$	2,76	1,66	0,553	

TABLE 2.3 – Valeurs des paramètres de contrôle  $(\gamma\beta)/2$ ,  $\gamma/\pi$ ,  $\gamma/\beta$ , et de la fréquence  $f$  pour une précision donnée.

paramètre  $(\gamma\beta)/2$  contrôle la précision de l'approximation. On retient en particulier de ce tableau que l'erreur d'approximation est toujours inférieure ou égale à 1% lorsque le défaut a une taille inférieure à  $0.4\lambda_s$ . De façon plus générale, on remarque qu'à  $\beta$  (ratio taille du défaut sur distance au défaut) fixé, l'approximation est d'autant plus précise que le défaut est petit en terme de longueur d'onde. Inversement, plus l'obstacle est grand en terme de longueur d'onde, ce qui est le cas lorsque la fréquence augmente, moins l'approximation est précise.

Pour conclure cette étude, on superpose sur la figure 2.6 l'évolution de l'erreur relative (en norme infinie)

de l'approximation de  $H_v^{(1)}$  par  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  (en pointillés bleus), notée  $\text{er}_{\text{lin-ex}}^\infty(H_v^{(1)})$ , et définie par

$$\text{er}_{\text{lin-ex}}^\infty(H_v^{(1)}) = \left\| \frac{H_v^{(1)} - H_{v,\text{lin}}^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma},$$

l'erreur d'approximation de  $H_v^{(1)}$  par son développement asymptotique  $H_{v,\text{dv}}^{(1)}$ ,  $\text{er}_{\text{dv}}^\infty(H_v^{(1)})$  (en vert), et l'erreur due à la linéarisation de la phase de ce développement  $\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)})$  (en rouge) en fonction de  $\gamma/\pi$  pour  $\nu = 0$  (figure de droite) et pour  $\nu = 1$  (figure de gauche). Cette superposition fait apparaître le cadre de validité de l'approximation.

On observe un comportement asymptotique croissant aux basses et hautes fréquences de l'erreur  $\text{er}_{\text{lin-ex}}^\infty(H_v^{(1)})$ . Aux basses fréquences, l'erreur  $\text{er}_{\text{lin-ex}}^\infty(H_v^{(1)})$  tend vers l'erreur due au développement asymptotique qui domine lorsque la distance du point d'observation au défaut en terme de longueur d'onde n'est pas suffisante. À plus haute fréquence, il existe un seuil de fréquence fixé par l'intersection des courbes  $\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)})$  et  $\text{er}_{\text{dv}}^\infty(H_v^{(1)})$ , au delà duquel la courbe de l'erreur  $\text{er}_{\text{lin-ex}}^\infty(H_v^{(1)})$  passe au dessus de la courbe d'erreur  $\text{er}_{\text{dv}}^\infty(H_v^{(1)})$  et rejoint asymptotiquement l'erreur  $\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)})$ . Dans ce régime de fréquence le défaut devient trop grand (par rapport à la longueur d'onde) pour une modélisation barycentrique, et l'erreur d'approximation de  $H_v^{(1)}$  par  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  se dégrade comme  $\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_v^{(1)})$  linéairement par rapport à la fréquence. L'erreur due à la linéarisation de la phase devient prédominante.

Une lecture de la courbe 2.6, permet de mesurer ce seuil à  $\gamma/\pi = 0,2266$  pour  $\nu = 0$  et  $\gamma/\pi = 0,28$  pour  $\nu = 1$ . On lit de plus une erreur d'approximation de  $H_v^{(1)}$  par  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  inférieure à  $2 \times 10^{-2}$  pour le régime de fréquence assurant que  $\gamma/\pi \in [0,036; 0,7933]$  pour  $\nu = 0$  et  $\gamma/\pi \in [0,120; 0,643]$  pour  $\nu = 1$ . Pour de plus grandes valeurs de ce ratio, la précision du modèle barycentrique se dégrade.

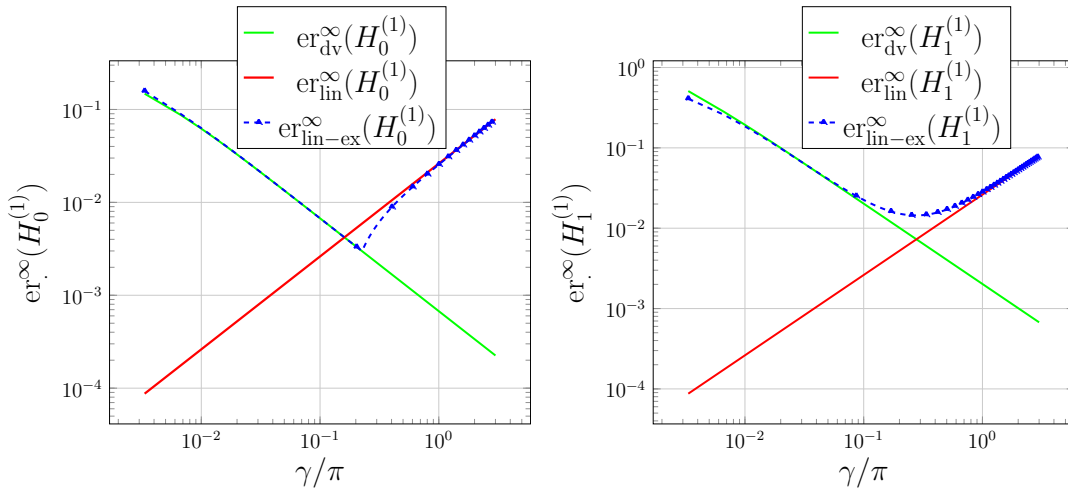


FIGURE 2.6 – Erreur relative entre  $H_v^{(1)}$  et son approximation onde plane  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  (en norme infinie), en fonction du paramètre  $\gamma/\pi$

### 2.3.3 Cadre de validité de la linéarisation de l'amplitude sur $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$

On illustre ici l'erreur que l'on commet en approchant l'approximation onde plane  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  du noyau par l'approximation rayon  $H_{v,\text{ray}}^{(1)}$ . Cette approximation consiste à linéariser l'amplitude de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  à l'ordre 0, (2.31). L'analyse d'erreur a montré que cette étape d'approximation introduit une erreur contrôlée par le paramètre  $\beta$  selon l'inégalité (2.35). Les fonctions  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  étant proportionnelles, les erreurs introduites par cette étape d'approximation pour  $\nu = 0$  et 1 seront ici encore égales.

On trace sur la figure 2.7 l'erreur d'approximation de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  par  $H_{v,\text{ray}}^{(1)}$ , notée  $\text{er}_{\text{linA}}^\infty(H_v^{(1)})$ , pour  $v = 0$  (courbe de droite) et  $v = 1$  (courbe de gauche). L'erreur due à cette approximation est constante,  $\text{er}_{\text{linA}}^\infty(H_0^{(1)}) = 8,36 \times 10^{-3}$  (courbe verte) puisque dans la configuration d'étude, la taille de l'obstacle et la distance du point  $x$  au centre de l'obstacle sont fixées. La quantité qui contrôle l'erreur est donc constante et vaut  $\beta/2 + \beta^2/4 = 8,40 \times 10^{-3}$ . Il est préférable de retenir comme quantité de contrôle de l'erreur  $\beta/2 + \beta^2/4$  plutôt que de négliger l'ordre 2 en  $\beta$  :  $\beta/2 = 1/120 \approx 8,33 \times 10^{-3} < \text{er}_{\text{linA}}^\infty(H_0^{(1)})$ .

On superpose également sur cette figure l'erreur relative d'approximation de  $H_v^{(1)}$  par son approximation  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$ ,  $\text{er}_{\text{lin-ex}}^\infty(H_v^{(1)})$ , et l'erreur relative d'approximation rayon de  $H_v^{(1)}$  par  $H_{v,\text{ray}}^{(1)}$ ,  $\text{er}_{\text{ray-ex}}^\infty(H_v^{(1)})$  définies par

$$\begin{cases} \text{er}_{\text{lin-ex}}^\infty(H_v^{(1)}) = \left\| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)} - H_v^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma}, \\ \text{er}_{\text{ray-ex}}^\infty(H_v^{(1)}) = \left\| \frac{H_{v,\text{ray}}^{(1)} - H_v^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma}, \end{cases}$$

à l'erreur  $\text{er}_{\text{linA}}^\infty$  pour  $v = 0,1$ . On observe que la linéarisation de l'amplitude à l'ordre 0 limite la précision globale de l'approximation champ lointain dans cette configuration.

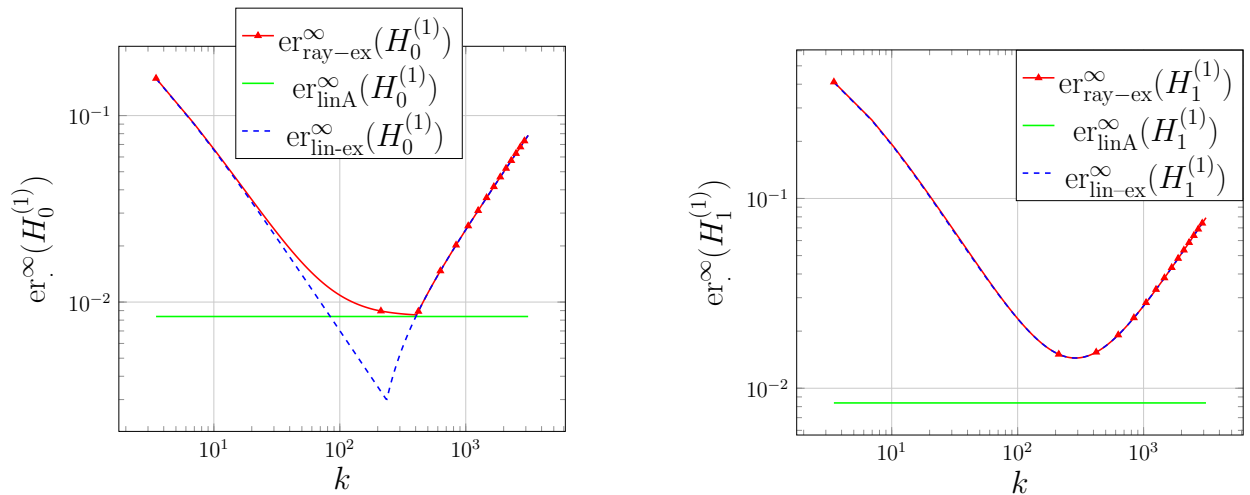


FIGURE 2.7 – Superposition de l'erreur relative d'approximation champ lointain des fonctions de Hankel  $H_v^{(1)}$  ( $v = 0,1$ ) et des erreurs d'approximation du développement asymptotique de  $H_v^{(1)}$  par linéarisation de sa phase et de son amplitude.

On poursuit maintenant l'étude et on souhaite mettre en évidence l'évolution de l'erreur lorsque le ratio  $1/\beta$  varie. On fait progressivement augmenter la distance au défaut à fréquence fixée, choisie de sorte à ce que les deux premières approximations soient suffisamment précises et on calcule l'erreur d'approximation  $\text{er}_{\text{linA}}^\infty$ . On observe sur la figure 2.8 le comportement décroissant de l'erreur de façon proportionnelle à  $\beta$  et son adéquation avec l'évolution du paramètre de contrôle  $\beta/2 + \beta^2/4$ . On relève les valeurs de l'erreur et du paramètre de contrôle pour différentes valeurs de  $\beta$  dans le tableau 2.4. On conclut donc que l'erreur d'approximation due à la linéarisation est limitante en champ proche uniquement : on améliore la précision en éloignant le point d'observation  $x$  du défaut.

$1/\beta$	30	50	70	90	110	130	150	200	300
$\text{er}_{\text{linA}}^\infty(H_0^{(1)}) (\times 10^{-3})$	8,368	5,012	3,577	2,781	2,275	1,924	1,667	1,250	0,833
$[\beta/2(1 + \beta/2)]^{\text{th}} (\times 10^{-3})$	8,402	5,025	3,584	2,785	2,277	1,926	1,669	1,251	0,834

TABLE 2.4 – Relevé de l'erreur  $\text{er}_{\text{linA}}^\infty(H_0^{(1)})$  et du paramètre de contrôle en fonction de l'évolution de  $1/\beta$ .

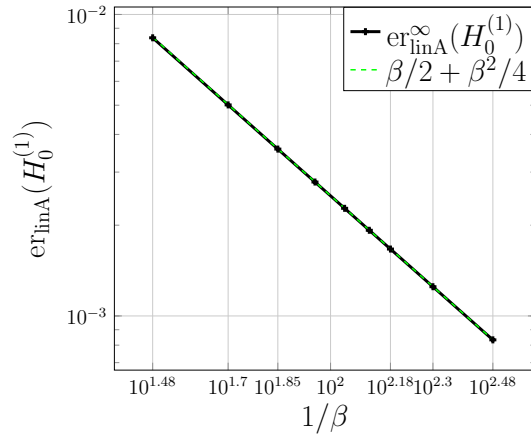


FIGURE 2.8 – Évolution de l'erreur relative  $er_{\text{linA}}^\infty(H_0^{(1)})$  (en noir) et du paramètre de contrôle de cette erreur  $\beta/2 + \beta^2/4$  (en vert) en fonction de  $1/\beta$ .

### 2.3.4 Contrôle de l'erreur d'approximation des noyaux par leur approximation rayon

On a vu au paragraphe 2.2 que l'erreur relative d'approximation du noyau de Green par son approximation rayon, est contrôlée comme suit par la somme des trois erreurs d'approximation sus-citées,

$$er_{\text{ray}}^\infty(H_v^{(1)}) \leq \left\| \frac{H_{v,dv}^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \left( \left\| \frac{H_v^{(1)} - H_{v,dv}^{(1)}}{H_{v,dv}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} + \left\| \frac{H_{v,dv}^{(1)} - H_{v,\text{lin}}^{(1)}}{H_{v,dv}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} + \left\| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)} - H_{v,\text{ray}}^{(1)}}{H_{v,\text{lin}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \right). \quad (2.60)$$

On connaît les différentes contributions de l'erreur, reste à étudier dans le cadre de l'étude paramétrique l'évolution du rapport  $\left\| \frac{H_{v,dv}^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma}$  en fonction de la fréquence pour le quantifier par rapport aux autres contributions à l'erreur. On trace l'évolution de ce facteur multiplicatif en fonction de  $k$  sur la figure 2.9, pour  $v = 0$  et 1. On observe qu'il prend des valeurs proches de 1 ce qui par conséquent affectera peu la

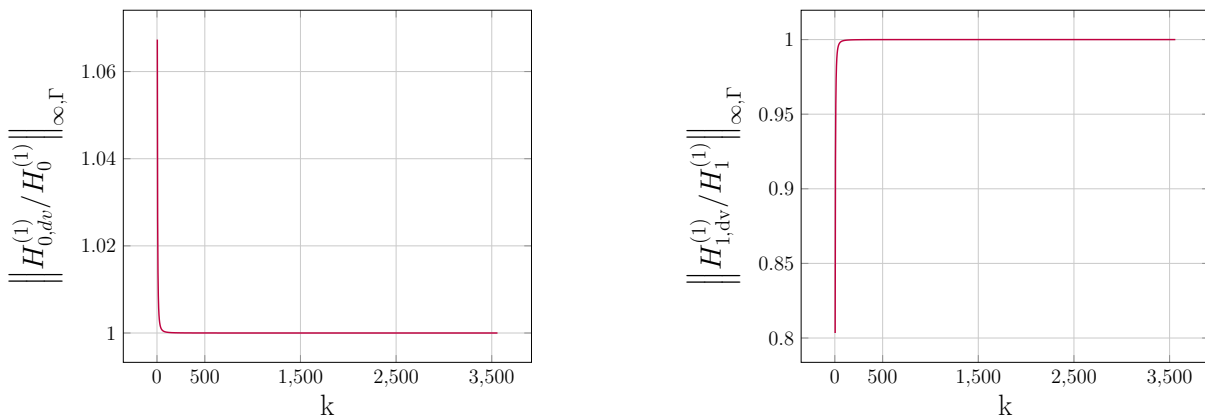


FIGURE 2.9 – Évolution du ratio des normes  $\left\| \frac{H_{v,dv}^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty}$  (en norme infinie), en fonction de  $k$ , pour  $v = 0$  (courbe de gauche) et  $v = 1$  (courbe de droite).

majoration de l'erreur (2.60). À titre indicatif, on répertorie dans les tableaux 2.5 et 2.6 les valeurs du paramètre  $\gamma/(2\pi\beta) = d/\lambda$  pour garantir une précision donnée de l'approximation de ce facteur par 1.

On retiendra de ces tableaux que l'erreur relative  $er_{\text{ray}}^\infty(H_v^{(1)})$  peut être strictement contrôlée par la somme

$1 - \left\  H_{0,dv}^{(1)} / H_0^{(1)} \right\ _{\infty, \Gamma}$	$1.10^{-2}$	$1.10^{-3}$	$1.10^{-4}$	$1.10^{-5}$	$1.10^{-6}$
$\gamma / (2\pi\beta)$	0,4	1,3	4,1	12,8	40,5

TABLE 2.5 – Évolution du rapport  $\left| 1 - \left\| H_{0,dv}^{(1)} / H_0^{(1)} \right\|_{\infty} \right|$  et du ratio  $\frac{\gamma}{2\pi\beta}$ .

$1 - \left\  H_{1,dv}^{(1)} / H_1^{(1)} \right\ _{\infty, \Gamma}$	$1.10^{-2}$	$1.10^{-3}$	$1.10^{-4}$	$1.10^{-5}$	$1.10^{-6}$
$\gamma / (2\pi\beta)$	0,7	2,3	7,0	12,2	70

TABLE 2.6 – Évolution du rapport  $\left| 1 - \left\| H_{1,dv}^{(1)} / H_1^{(1)} \right\|_{\infty} \right|$  et du ratio  $\frac{\gamma}{2\pi\beta}$ .

des erreurs des trois étapes d'approximation,

$$\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(H_v^{(1)}) \leq \left( \frac{(2v+1)\beta}{8\gamma(1-\beta)} + \frac{\gamma\beta}{2} + \frac{1}{2}\beta \left( 1 + \frac{1}{2}\beta \right) \right),$$

lorsque le ratio  $\gamma/(2\pi\beta)$  est supérieur à 2,3. Cela correspond à calculer l'approximation rayon en des points éloignés de plus de  $2,3\lambda$  de l'obstacle. Pour ces valeurs du ratio  $\gamma/(2\pi\beta)$ , l'écart à 1 de ce facteur multiplicatif est de l'ordre de  $1 \times 10^{-3}$  alors que l'erreur d'approximation des  $H_v^{(1)}$  par leur développement asymptotique est supérieure à  $10^{-2}$ . Ce facteur devient franchement négligeable dans les zones de calcul qui nous intéressent ici :  $\gamma/(2\pi\beta) > 5$ .

### Approximation du noyau du potentiel de simple couche

Comme remarqué dans l'analyse d'erreur 2.2.1.1, l'erreur  $\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(K_s)$  de l'approximation rayon du noyau  $K_s$  du potentiel de simple couche est égale à celle de  $H_0^{(1)}$ ,  $\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(H_0^{(1)})$ . On résume simplement les résultats de l'étude paramétrique : la précision de l'approximation est inférieure à 1% dès qu'on l'évalue en des points  $x$  tel que  $d = |x - y_c| > 2\lambda$ , que la taille caractéristique du défaut est telle que  $\gamma/(2\pi) \in [0,070; 0,436]$ , et que  $\beta/2 > 50$  de sorte à ne pas limiter l'erreur globale.

### Approximation du noyau du potentiel de double couche

Pour le noyau du potentiel de double couche  $K_d$ , proportionnel à la fonction  $H_1^{(1)}$ , le contrôle de l'erreur d'approximation  $\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(K_d)$  rajoute à l'approximation rayon de  $H_1^{(1)}$  celle du produit scalaire comme indiqué en (2.46).

On étudie donc ici numériquement l'approximation du produit scalaire. On a montré en section 2.2.2 que l'erreur absolue d'approximation du produit scalaire  $\text{er}_p$  dépend du paramètre  $\beta$ , selon l'inégalité (2.40). On réalise donc une expérience différente de celle décrite en début de section : on calcule l'évolution de  $\text{er}_p^{\infty}$  en fonction du paramètre  $\beta$  pour  $10^{-3} \leq \beta \leq 1/3 \times 10^{-1}$  à la fréquence fixée  $f = 83$  et  $\gamma/(2\pi) = \lambda/2$ . On visualise l'évolution de l'erreur et du paramètre de contrôle  $2(\beta + \beta^2)$  et  $\beta + \beta^2$  sur la figure 2.10. On observe que le paramètre  $2(\beta + \beta^2)$  majore bien l'erreur mais que le paramètre  $\beta + \beta^2$  est un meilleur contrôle. On répertorie les valeurs de l'erreur et de  $\beta + \beta^2$  dans le tableau 2.7 pour s'en convaincre. L'inégalité (2.40) n'est donc pas optimale.

Pour conclure sur l'approximation du noyau du potentiel de double couche, on superpose sur la figure 2.11 l'évolution des erreurs relatives d'approximation rayon du potentiel de double couche (courbe rouge), de  $H_1^{(1)}$  (courbe noir pointillé) et l'erreur absolue d'approximation du produit scalaire (courbe bleue). La superposition est éloquent. Aux basses fréquences, l'erreur  $\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(K_d)$  colle d'abord avec celle de  $H_1^{(1)}$ , l'erreur est limitée par l'erreur due au développement asymptotique, puis elle est limitée par l'erreur d'approximation du produit scalaire et remonte sous l'influence de la dégradation de la linéarisation de la phase aux hautes fréquences. Cependant aux hautes fréquences l'approximation du produit scalaire améliore l'approximation de  $K_d$  relativement à celle prédite pour  $H_1^{(1)}$ .

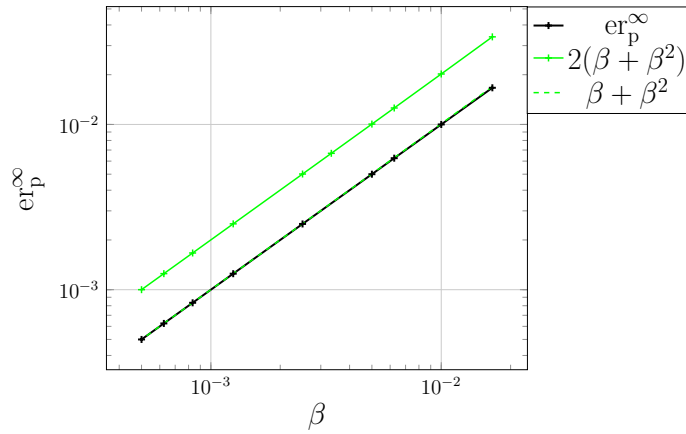


FIGURE 2.10 – Évolution de l’erreur d’approximation du produit scalaire  $er_{ps}$  (en norme infinie) en fonction de  $d$ .

$\gamma/(2\pi\beta)$	30	50	80	100	150	200	400	600	800	1000
$er_{ps} (\times 10^{-3})$	16,66	10,00	6,249	4,999	3,332	2,499	1,249	0,8332	0,6249	0,499
$\beta + \beta^2 (\times 10^{-3})$	16,94	10,10	6,289	5,025	3,344	2,506	1,251	0,8340	0,6253	0,5002

TABLE 2.7 – Erreur absolue d’approximation du produit scalaire et valeurs du paramètre de contrôle en fonction de  $\gamma/(2\pi\beta)$ .

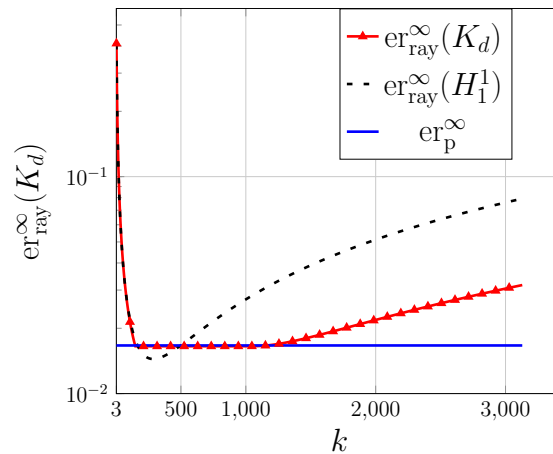


FIGURE 2.11 – Évolution de l’erreur relative d’approximation rayon de  $K_d$  (rouge), de  $H_1^1$  (noir pointillé) et du produit scalaire  $er_{ps}$  (bleu) en fonction de  $\beta$ .

### 2.3.5 Conclusion

L’approximation champ lointain des fonctions de Hankel et des noyaux des potentiels de simple et double couche s’obtient après trois phases d’approximation. L’analyse d’erreur a permis de dégager des paramètres de contrôle de l’erreur pour chaque phase de l’approximation. Les expériences illustrent la validité de ces paramètres de contrôle et mettent en évidence un comportement limitant de chaque étape d’approximation sur la précision globale. En particulier, à configuration fixée, on retient que la précision de l’étape de linéarisation de la phase se dégrade lorsque la fréquence augmente, que celle de l’étape de linéarisation de l’amplitude est constante et que celle de l’étape associée au développement asymptotique se dégrade aux basses fréquences. Ainsi à fréquence fixée, on peut prévoir l’ordre de grandeur de l’erreur globale d’approximation rayon des fonctions de Hankel à partir de la valeur du paramètre de contrôle le plus élevé.

## 2.4 Expérience numérique : calcul de la diffraction 2D par la méthode barycentrique

On illustre dans cette section les performances de la méthode barycentrique pour un problème de diffraction adimensionné en régime harmonique. On considère le problème de diffraction d'une onde sphérique issue du point source positionné en  $x_s$ , de fréquence  $F_s$ , par un défaut diffractant,  $\Gamma$ , plongé dans un milieu infini de célérité  $c$ . On calcule le champ diffracté au point d'observation par la méthode barycentrique. La solution obtenue par la résolution de l'équation intégrale de surface par la méthode de Nyström constituera la solution de référence. Pour étudier la propagation des erreurs dans la chaîne de calcul on sépare l'étude de l'approximation rayon de l'opérateur de diffraction de celle de l'approximation rayon de l'onde incidente. On considère dans cette section deux configurations de diffraction avec condition aux bords de Dirichlet. La première traite la diffraction par un disque, la seconde par un cerf-volant.

### 2.4.1 Validation de l'approximation haute fréquence du champ diffracté par la méthode barycentrique : diffraction par un disque en milieu homogène

On se donne une source ponctuelle cylindrique située à une distance  $d_s = |x_s - y_c| = 120\lambda$  du défaut à la position  $x_s = [-1; 1] d_s / \sqrt{2}$ , générant le champ incident  $u^i$ ,

$$u^i(x) = \frac{i}{4} H_0^1(k|x - x_s|).$$

On cherche à évaluer le champ diffracté par le disque diffractant, de diamètre  $r_\Gamma = 0,4\lambda$  et centré en  $y_c = (0,0)$ , sur une couronne de récepteurs centrée en  $y_c$  et s'étendant de  $2\lambda$  à  $102\lambda$  autour du défaut, comme représenté sur la figure (2.12). On note  $d_r = |x_r - y_c|$  la distance de tous les points  $x_r$  de la couronne d'observation au centre du défaut. La couronne est discrétisée avec un pas de rayon égal à  $\lambda$  et un pas angulaire de 1 degré. La couronne est donc composée de 201 cercles concentriques discrétisés par 361 points, soit 72561 points récepteurs. On ne réalise pas dans cette expérience un couplage avec un solveur rayon, puisque dans le cadre de la propagation en milieu homogène, le phénomène de propagation rayon de l'onde cylindrique peut être calculé analytiquement selon la description 2.2.3. On évalue le champ diffracté par l'obstacle en ces points de deux façons :

- selon la méthode barycentrique (2.8) pour laquelle les amplitudes de propagation sont calculées analytiquement,
- directement par résolution du problème de diffraction par la méthode des éléments finis de frontière (Nyström).

On évalue ensuite numériquement la précision de la méthode barycentrique relativement à cette deuxième solution qui sert de référence et on présente ici les résultats. L'expérience est construite de sorte à assurer une erreur a priori de l'approximation rayon des fonctions de Hankel inférieure à 1%.

#### Approximation du champ incident

L'onde incidente est émise depuis la source  $x_s$ , sous les hypothèses de champ lointain, on l'approche sur le défaut par son approximation rayon obtenue à partir de (2.31). D'après la section 2.2.3, cette approximation s'interprète comme l'approximation onde plane de l'unique rayon émis par  $x_s$  et propagé vers le barycentre du défaut  $y_c$ , selon la direction  $\hat{s} = (\cos(3\pi/4); \sin(3\pi/4))^T$ . L'erreur d'approximation rayon du champ incident est égale à celle de la fonction de Hankel  $H_0^{(1)}$ , (2.36). L'analyse d'erreur réalisée section 2.2 permet de prévoir une erreur d'approximation rayon d'un ordre de grandeur de  $10^{-3}$  et limitée par l'erreur d'approximation de la linéarisation de l'amplitude : le paramètre contrôlant l'erreur relative due au développement asymptotique vaut ici  $1,66 \times 10^{-4}$ , celui contrôlant l'erreur de la linéarisation de l'amplitude vaut  $8,33 \times 10^{-4}$  et enfin celui qui contrôle l'erreur de linéarisation de la phase vaut  $1,55 \times 10^{-4}$ .



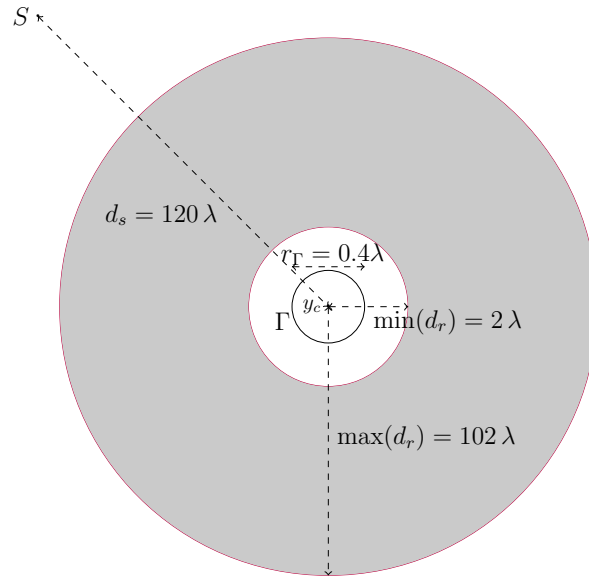


FIGURE 2.12 – Schéma de la configuration d'étude.

On mesure en effet que l'erreur d'approximation rayon évolue en fonction de  $\theta$  dans l'intervalle  $[6,89 \times 10^{-4}; 8,81 \times 10^{-4}]$ . On observe l'évolution de l'erreur relative ponctuelle  $er_{\text{ray}}(u^i)$ ,

$$er_{\text{ray}}(u^i) = \frac{|H_0^1 - H_{0,\text{ray}}^1|}{\sup_{y \in \Gamma} |H_0^1(y)|} \quad (2.61)$$

en fonction de  $\theta$  sur la figure (2.13). Elle laisse apparaître une certaine directivité en fonction de  $\theta$  : le maximum global est atteint aux points de  $\Gamma$  où la normale au défaut est orthogonale à la direction de propagation de l'onde plane  $\hat{s}$  ( $\theta = 45^\circ, 225^\circ$ ), le minimum global est atteint aux points du cercle situés à exactement  $45^\circ$  de la direction de propagation  $\hat{s}$  ( $\theta = 90^\circ, 180^\circ$ ). On observe en outre deux maxima locaux dans les directions  $\hat{s}$  et  $-\hat{s}$ . L'approximation rayon de l'onde incidente se dégrade sur  $\Gamma$  dans les zones où la normale à  $\Gamma$  est orthogonale à la direction de propagation et dans une moindre mesure dans les zones proches de la direction de propagation.

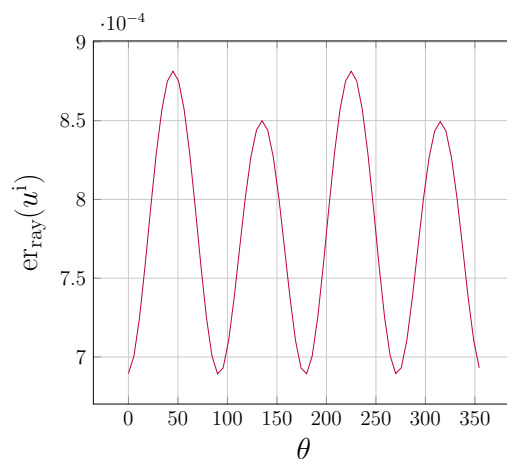


FIGURE 2.13 – Évolution de l'erreur d'approximation du champ incident en fonction de  $\theta$ .

### Influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la solution du problème surfacique.

On calcule ici la solution du problème surfacique (2.55) pour 2 seconds membres : l'approximation rayon du champ incident et le champ incident exact. On note  $\hat{\psi}$  et  $\psi$  respectivement ces deux solutions et on calcule

leur erreur relative ponctuelle  $er_{\text{ray}}(\psi)$  définie par

$$er_{\text{ray}}(\psi) = \frac{|\psi - \hat{\psi}|}{\sup_{y \in \Gamma} |\psi|}, \quad (2.62)$$

afin d'évaluer l'influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la précision du calcul de la solution du problème surfacique. On trace  $er_{\text{ray}}(\psi)$  en fonction de  $\theta$  sur la figure 2.14.  $er_{\text{ray}}(\psi)$  évolue dans l'intervalle

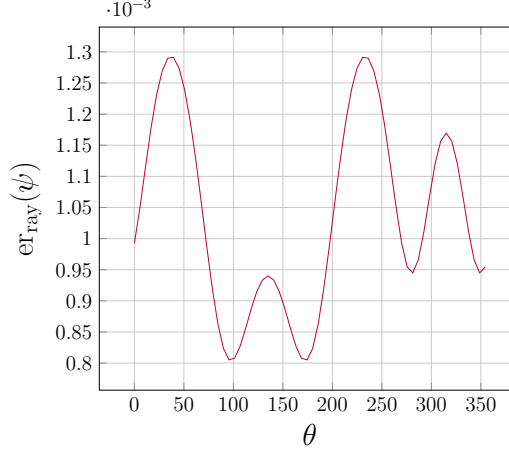


FIGURE 2.14 – Influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la précision de la solution du problème surfacique.  $er_{\text{ray}}(\psi)$  en fonction de la position sur le cercle.

$[8,05 \times 10^{-4}; 1,3 \times 10^{-3}]$ , elle atteint un maximum global dans le voisinage des points du défaut où la normale est orthogonale à la direction de propagation de l'onde plane et deux maxima locaux dans le voisinage de la direction  $\hat{s}$  et  $-\hat{s}$  sur le défaut et un minimum local en les points situés à  $45^\circ$  de la direction de propagation. Le comportement global de l'erreur respecte l'évolution de l'erreur du champ incident.

### Champ diffracté : résultats et erreur d'approximation du calcul du champ diffracté au récepteur.

On illustre ici la précision de l'approximation rayon du champ diffracté obtenu par la méthode barycentrique par rapport à la solution BEM, sur la couronne de récepteur. On étudie d'abord la précision de l'erreur d'approximation rayon du champ diffracté calculé à partir de la solution du problème surfacique pour un second membre exact, afin de quantifier l'erreur due à l'approximation rayon du noyau de l'opérateur intégral sur la précision finale du champ diffracté. On observe sur la figure 2.15 la carte de champ diffracté approché par la méthode barycentrique (à gauche) et la carte de champ total (à droite) sur la couronne de récepteurs. On obtient la carte d'erreur relative ponctuelle entre le champ diffracté calculé par la méthode barycentrique  $u$  et la solution de référence  $u^{\text{BEM}}$ , solution BEM du problème, représentée figure 2.16, en calculant en tous points de la couronne l'erreur  $\epsilon_{\text{bary}}(u^{\text{icx}})$  définie par,

$$\epsilon_{\text{bary}}(u^{\text{icx}}) = \frac{|u(y) - u^{\text{BEM}}(y)|}{\sup_{y \in \Gamma} |u^{\text{BEM}}(y)|}.$$

Le maximum d'erreur relative vaut 4,46% et est atteint en un point à  $2\lambda$  de l'obstacle (au plus près du défaut sur la couronne). Le minimum vaut  $6,78 \times 10^{-6}$  et est atteint à  $102\lambda$  de  $y_c$  (au plus loin du défaut). On relève en particulier que pour les points de la couronne dont la distance à  $y_c$ ,  $d_r$ , est supérieure à  $5,5\lambda$ ,  $\epsilon_{\text{bary}}(u^{\text{icx}})$  reste inférieur à 1%, pour  $d_r \geq 9\lambda$ , on a  $\epsilon_{\text{bary}} \leq 0,5\%$  et pour  $d_r \geq 25,5\lambda$ , on a  $\epsilon_{\text{bary}}(u^{\text{icx}}) \leq 0,1\%$ .

D'autre part, on représente sur la figure 2.17, la carte d'erreur relative  $\epsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}})$  du champ diffracté calculé par la méthode barycentrique, à partir de la solution du problème surfacique avec second membre approché  $\hat{\psi}$ , par rapport à la solution de référence (Nyström),

$$\epsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}}) = \frac{|u(y) - u^{\text{BEM}}(y)|}{\sup_{y \in \Gamma} |u^{\text{BEM}}(y)|}. \quad (2.63)$$

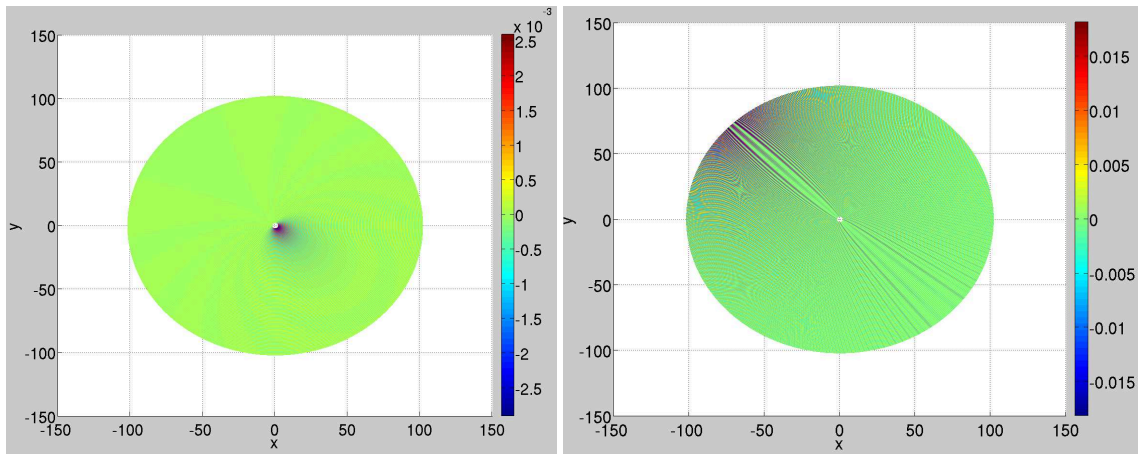


FIGURE 2.15 – Carte de l’approximation rayon du champ diffracté (gauche) et champ total (droite) calculés pour un second membre exact. Disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0.2\lambda$ .

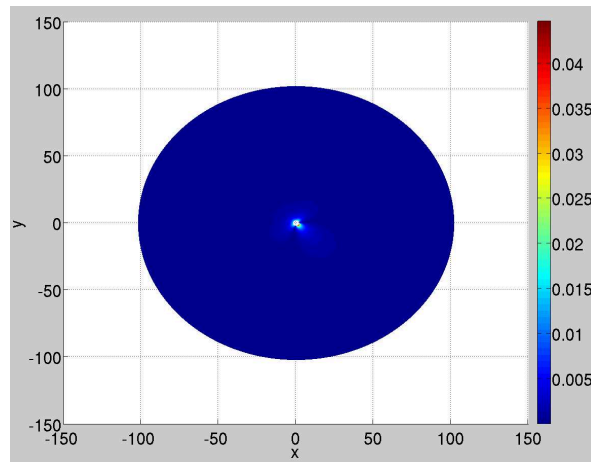


FIGURE 2.16 – Carte d’erreur relative d’approximation rayon du champ diffracté, pour un champ incident exact. Disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0.2\lambda$ .

Dans ce deuxième cas, champs incident et diffracté sont approchés par leur approximation rayon. On lit un

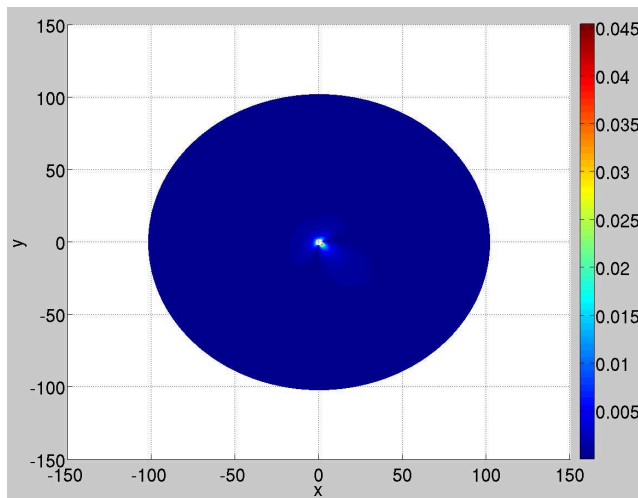


FIGURE 2.17 – Carte d’erreur relative d’approximation rayon du champ diffracté calculé à partir d’un second approché. Disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0.2\lambda$ .

maximum d’erreur relative de 4,54%, qui est atteint en un point de la couronne situé à  $2\lambda$  de  $y_c$ . L’erreur

relative minimale est de  $1,28 \times 10^{-5}$ , et est atteint à  $102\lambda$  du centre de l'obstacle. En outre, on relève que l'erreur relative entre la solution de référence et la solution calculée par la méthode barycentrique  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}})$  est inférieure à 1% pour tous les points de la couronne éloignés d'au moins  $6\lambda$ , pour  $d_r \geq 9\lambda$ , on a  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}}) < 0,5\%$ , pour  $d_r \geq 29,5\lambda$ , on a  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}}) < 0,1\%$ .

En comparant ces résultats à ceux de la figure 2.16, on observe une légère augmentation de l'erreur : par linéarité, l'erreur d'approximation du champ incident se propage dans la chaîne de calcul et s'ajoute à l'erreur due à l'approximation rayon du noyau de l'opérateur intégral. On a calculé pour le vérifier l'erreur relative entre le champ diffracté obtenu par la méthode barycentrique pour un champ incident exact et approché : on estime ainsi l'influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la précision finale de l'approximation rayon du champ diffracté. On trace cette carte d'erreur sur la figure 2.18. Sa lecture indique que cette erreur évolue dans l'intervalle  $[5,68 \times 10^{-6}; 7,25 \times 10^{-4}]$  selon la distance du point d'observation au centre du défaut. Lorsqu'on somme cette erreur à  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{ie}})$ , on retrouve l'ordre de grandeur de  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}})$ .

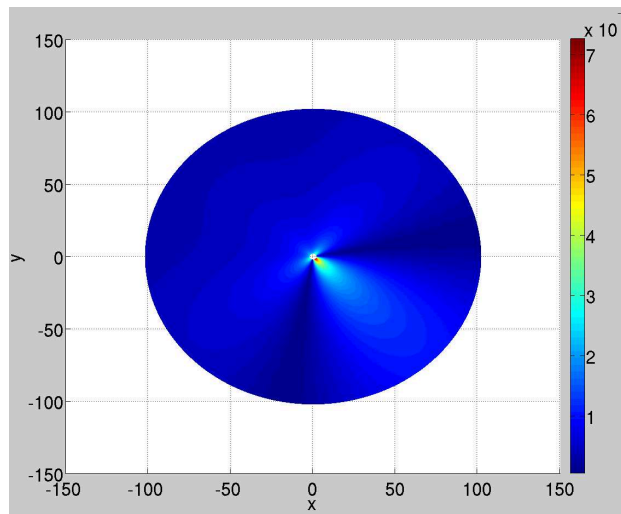


FIGURE 2.18 – Carte d'erreur relative de l'approximation rayon du champ diffracté calculée pour un second membre approché et un second membre exact. Disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0,2\lambda$ .

## 2.4.2 Approximation haute fréquence de la diffraction par un cerf-volant en milieu homogène

La méthode barycentrique est aussi applicable dans le cadre de la diffraction par des obstacles de géométrie non strictement convexes. On illustre ici sa mise en œuvre et sa précision pour le calcul du champ diffracté par un cerf-volant centré en  $y_c = (0,0)$  et de diamètre  $r_{\Gamma} = \sup_{y \in \Gamma} |y - y_c| = 0,2\lambda$ . On calcule comme en 2.4.1 le champ diffracté sur une couronne de récepteurs situés autour de l'obstacle, centrée en  $y_c$  et s'étendant de  $2\lambda$  à  $102\lambda$ .

### Approximation du champ incident

On décrit ici l'évolution de l'erreur d'approximation rayon du champ incident sur le défaut. On trace l'erreur relative ponctuelle définie par (2.61) en fonction de  $\theta$  sur la figure 2.20.  $er_{\text{ray}}(u^i)$  évolue entre un maximum de  $8,29 \times 10^{-4}$  et un minimum de  $3,06 \times 10^{-5}$ . Du fait de la non-strict convexité du contour de l'obstacle, la distance du contour au barycentre quantifiée par  $r = |y - y_c|$  varie sur l'obstacle faisant varier la précision de l'approximation rayon de l'onde cylindrique. En particulier, on observe que sur la partie concave du contour de l'obstacle ( $112^\circ \leq \theta \leq 247^\circ$ ),  $er_{\text{ray}}(u^i)$  diminue avec  $r$ . En outre, l'analyse a priori de l'erreur fournit dans cette configuration les mêmes bornes que dans le cas du disque, la section 2.4.1. On retrouve par l'expérience que l'erreur relative ponctuelle  $er_{\text{ray}}(u^i)$  est contrôlée par l'erreur due à l'étape de linéarisation de la phase et son maximum est de l'ordre du paramètre  $\gamma\beta/2$ .

### Influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la précision de la solution du problème surfacique

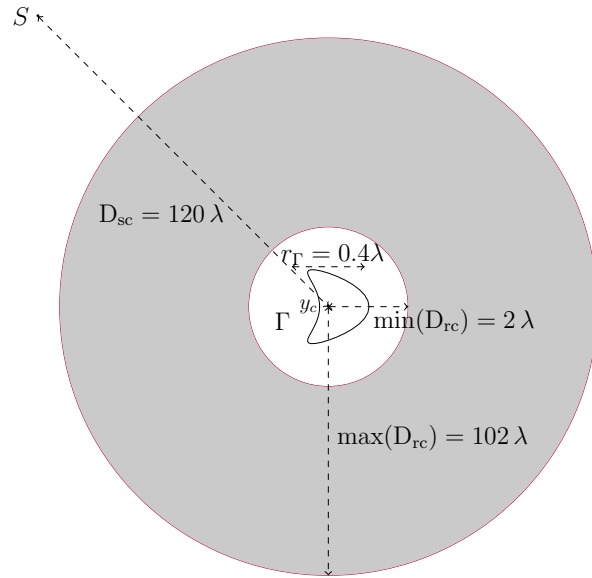


FIGURE 2.19 – Schéma de configuration pour l'étude de la diffraction par un cerf-volant

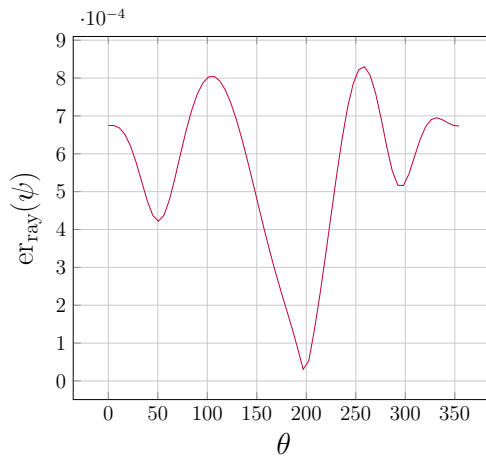


FIGURE 2.20 – Évolution de l'erreur d'approximation du champ incident en fonction de  $\theta$ .

On s'intéresse ici à l'influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la solution du problème surfacique. On trace l'erreur  $e_{\text{ray}}(\psi)$  définie par (2.62) sur la figure 2.21. On retrouve ici le comportement de l'onde incidente avec une erreur plus petite sur la zone concave de  $\Gamma$ . On relève en particulier un maximum de  $8,61 \times 10^{-4}$  et un minimum de  $1,00 \times 10^{-4}$ .

### Approximation du champ diffracté

On s'intéresse enfin à la précision de l'approximation rayon (par la méthode barycentrique) du champ diffracté dans cette configuration pour un champ incident approché sur l'obstacle par l'approximation rayon. On visualise, sur la figure 2.22, la carte des valeurs du champ diffracté (à gauche sur la figure) et le champ total (à droite sur la figure) sur la couronne de récepteurs. On présente également la carte d'erreur relative ponctuelle  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}})$ , définie par 2.63, sur la figure 2.23. On observe d'une part comme dans le cas du cercle un comportement décroissant de l'erreur lorsque la distance du récepteur à  $y_c$ ,  $d_r$ , augmente. On relève d'autre part un maximum d'erreur relative atteint à  $2\lambda$  de  $y_c$  de 6,52%, et un minimum atteint à  $102\lambda$  de  $y_c$  de  $9,98 \times 10^{-4}$ . En particulier on donne à titre indicatif l'ordre de grandeur de la distance du récepteur à  $y_c$  qui garantit une approximation rayon à précision donnée :  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}}) \leq 1\%$  pour  $d_r \geq 4\lambda$ ,  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}}) \leq 0.5\%$  pour  $d_r \geq 8\lambda$ , et  $\varepsilon_{\text{bary}}(u^{\text{iap}}) \leq 0.1\%$  pour  $d_r \geq 48,7\lambda$ .

Les expériences de diffraction par le disque et le cerf-volant montrent que la méthode barycentrique

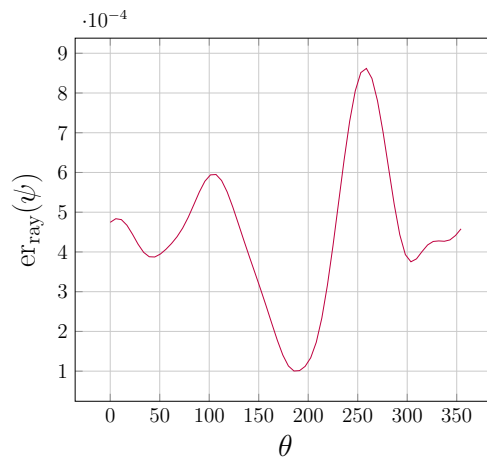


FIGURE 2.21 – Évolution de l’erreur d’approximation de la solution du problème surfacique en fonction de  $\theta$ .

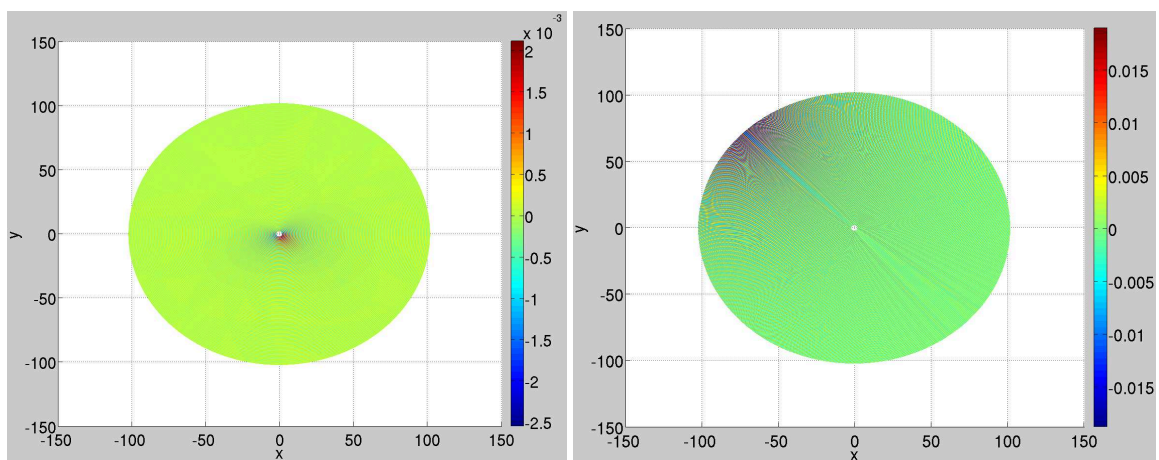


FIGURE 2.22 – Carte de l’approximation rayon du champ diffracté (gauche) et de champ total (droite) calculées pour un second membre exact. Cas du cerf-volant.

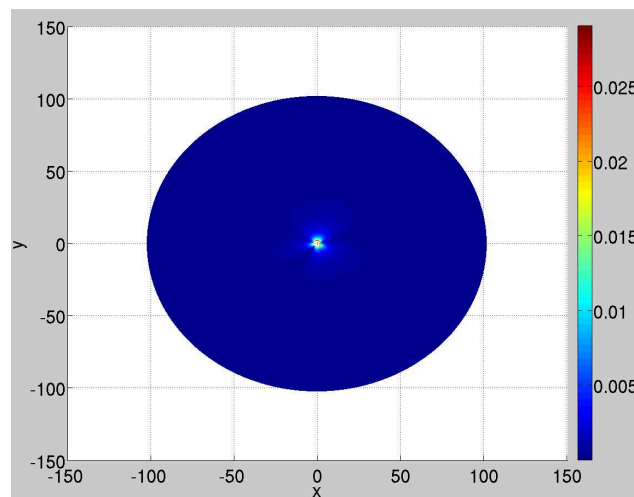


FIGURE 2.23 – Carte d’erreur relative d’approximation rayon du champ diffracté calculé à partir d’un second membre approché. Cas du cerf-volant.

permet, pour des configurations de diffraction en accord avec la validité de l’hypothèse de champ lointain, de calculer l’approximation haute fréquence du champ diffracté de façon relativement précise en champ proche. La définition du champ proche dépendra en fait de la précision qu’autorisera le solveur rayon avec lequel elle

sera couplée. On s'intéresse maintenant à une configuration de diffraction par un disque qui met en défaut la méthode barycentrique.

### 2.4.3 Limite de la méthode barycentrique pour l'approximation haute fréquence du champ diffracté : un cercle diffractant hors gabarit

On reprend la configuration d'étude du paragraphe 2.4.1 pour un disque que l'on suppose maintenant de diamètre égal à  $1,5\lambda$  et une couronne s'étendant de  $5\lambda$  à  $105\lambda$  du centre de l'obstacle. On expose les résultats des calculs suivant le même plan que précédemment.

#### Estimation a priori de l'erreur

Avant d'exposer les résultats numériques, on déroule ici la méthode pour obtenir une estimation a priori de l'approximation du champ diffracté. On calcule séparément les erreurs relatives dues à chaque étape de l'approximation rayon pour le champ incident et le noyau  $K$ . Le maximum des paramètres de contrôle de l'approximation rayon de  $K$  est obtenu pour  $d_r = 5\lambda$ , et le minimum pour  $d = 105\lambda$ . On rassemble les bornes des 3 paramètres de contrôle de l'erreur dans le tableau 2.8.

L'évaluation des paramètres de contrôle pour l'approximation du champ incident indique d'une part une

Paramètres de contrôle d'erreur		$\beta/(8\gamma(1-\beta))$	$\beta\gamma/2$	$\beta/2$
champ incident		$1,66 \times 10^{-4}$	$1,47 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-3}$
noyau $K$	max	$1,96 \times 10^{-4}$	$1,68 \times 10^{-2}$	$3,67 \times 10^{-3}$
	min	$4,68 \times 10^{-3}$	$3,53 \times 10^{-1}$	$7,5 \times 10^{-2}$

TABLE 2.8 – Évaluation des paramètres de contrôle de l'erreur d'approximation rayon pour le champ incident et le noyau  $K$  de l'opérateur intégral pour une estimation a priori.

erreur limitante de l'ordre du pour cent causée par l'étape d'approximation de la phase de la fonction de Hankel. D'autre part, on prédit des maxima d'erreur d'approximation de la phase et de l'amplitude pour l'approximation rayon du noyau  $K$  de l'ordre de  $10^{-1}$ , mettant en lumière que ces deux approximations sont incorrectes en champ proche.

Les résultats numériques corroborent cette estimation a priori.

#### Approximation du champ incident

On donne l'erreur relative d'approximation rayon (barycentrique) du champ incident sur la figure 2.24. On observe une évolution de l'erreur entre 0,0146 (comme prédit par l'estimation d'erreur) et 0,0031. En outre, l'erreur relative augmente fortement aux points de  $\Gamma$  en lesquels la normale sortante est orthogonale à la direction de propagation  $\hat{s}$ . L'approximation est mauvaise car le défaut est maintenant trop grand pour satisfaire l'hypothèse de champ lointain : le ratio  $r_\Gamma/\lambda = 1,5 \neq O(1/(2\pi))$  et  $r_\Gamma/d_s = 0,0125$  n'est plus suffisamment petit pour que l'on puisse considérer l'obstacle dans la zone de champ lointain de la source.

#### Influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la précision de la solution du problème surfacique

On observe sur la figure 2.25 l'erreur relative ponctuelle d'approximation de la solution du problème surfacique pour un champ incident approché,  $\epsilon_{\text{ray}}(\psi)$  définie par (2.62). Le comportement de cette erreur respecte celui de l'erreur d'approximation de l'onde incidente. On relève le maximum de l'erreur à  $1,45 \times 10^{-2}$  et le minimum à  $3,06 \times 10^{-3}$ .

#### Calcul du champ diffracté : résultats et erreur d'approximation du champ diffracté au récepteur

On présente maintenant les cartes de champ diffracté calculées par la méthode de Nyström et la méthode barycentrique sur la couronne de récepteur sur la figure 2.26. On montre sur la figure 2.27 la carte de l'erreur relative entre l'approximation champ lointain du champ diffracté pour un second membre exact par rapport à la solution BEM du problème aux points de la couronne. L'erreur relative maximale est de 47,28%, elle est

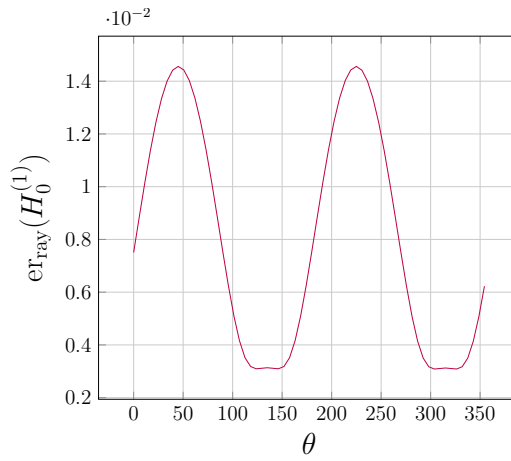


FIGURE 2.24 – Évolution de l’erreur d’approximation du champ incident en fonction de  $\theta$ .

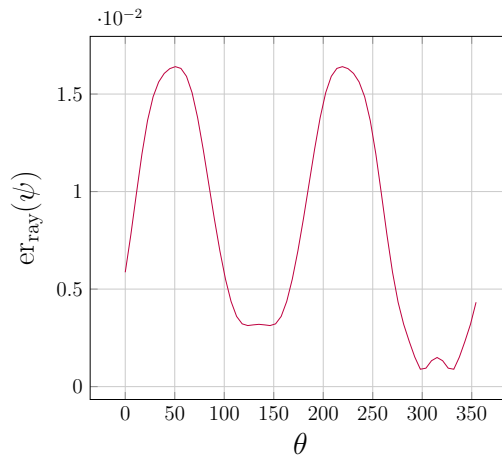


FIGURE 2.25 – Précision de la solution du problème surfacique :  $er_{ray}(\psi)$  en fonction de  $\theta$ , du fait de de l’approximation rayon du champ incident.

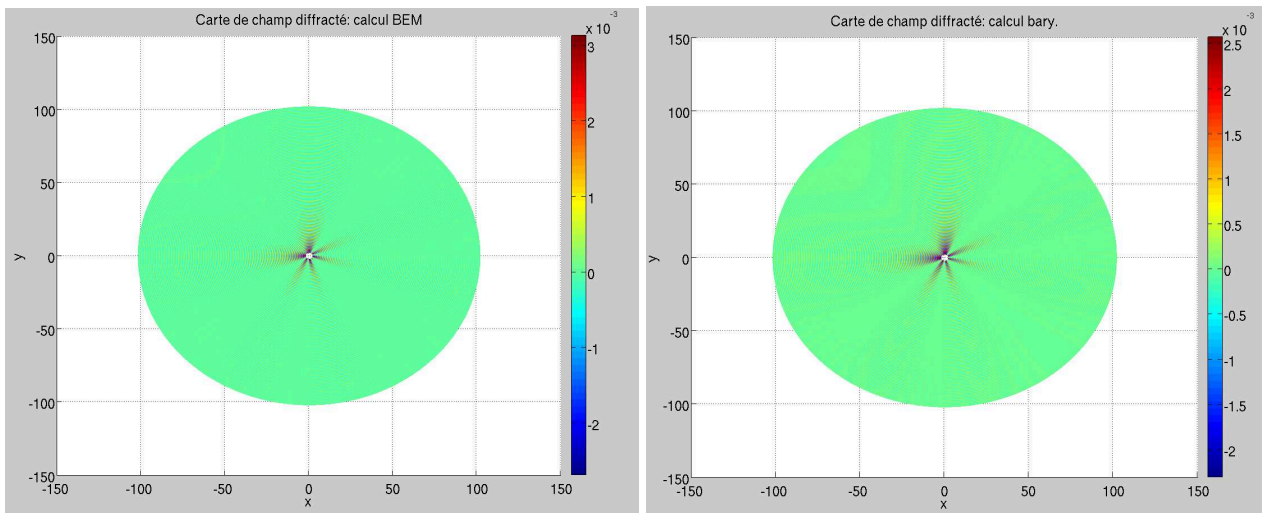


FIGURE 2.26 – Champ diffracté calculé par BEM (gauche) et méthode barycentrique (droite) aux points de la couronne. Disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0.75\lambda$ .

atteinte à  $2\lambda$  du défaut puis l’erreur décroît avec la distance jusqu’à son minimum 0,02% atteint en un point à  $102\lambda$  du défaut. Ces ordres de grandeur sont consistants avec les ordres de grandeur de l’estimation a priori de l’erreur d’approximation du noyau de l’opérateur intégral.



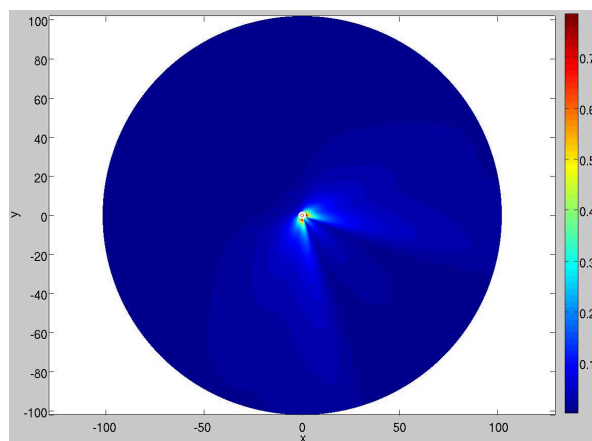


FIGURE 2.27 – Carte d’erreur relative de l’approximation champ lointain du champ diffracté calculée par la méthode barycentrique pour un second membre exact. Disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0.75\lambda$ .

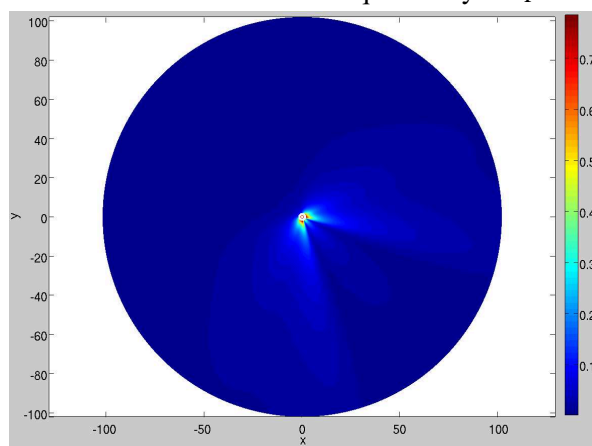


FIGURE 2.28 – Carte d’erreur relative d’approximation champ lointain du champ diffracté calculée par la méthode barycentrique pour un second membre approché. Disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0.75\lambda$ .

L’approximation des noyaux des potentiels de simple et double couche par linéarisation de leur développement asymptotique n’est plus précise. L’erreur limitante est attribuée à la linéarisation de la phase. En effet, à  $5\lambda$  de l’obstacle  $r_{\Gamma}/d_r = O(1)$ , et on ne satisfait plus l’inégalité  $kr_{\Gamma}^2/(8d_r) \ll 1$ . Pour les points les plus proches du défaut, l’erreur due au développement asymptotique est de l’ordre de 1% pour le noyau du potentiel de simple couche et de 3% pour le noyau du potentiel de double couche. L’erreur due à la linéarisation de la phase et de l’amplitude en ces points est pour les deux noyaux de l’ordre respectivement de 18,75% et 13,14%. L’erreur d’approximation du produit scalaire au plus près du défaut est estimée à 37,5% au plus près du défaut. Ces quantités donnent l’ordre de grandeur des approximations de chaque noyau et permettent d’estimer un maximum d’erreur relative du champ diffracté en champ proche de l’ordre de l’unité. Si maintenant on s’intéresse à l’approximation champ lointain du champ diffracté lorsqu’on approche le champ incident par son approximation champ lointain, on obtient la carte d’erreur relative 2.28. On lit son

maximum d’erreur à 0,7978 et son minimum à 0,0034. La part de l’erreur d’approximation champ lointain du champ diffracté obtenu en approchant l’onde incidente est de 0,0016 au plus loin du défaut et de 0,0195 au plus près.

L’intérêt de ce couplage est de prédire de façon la plus précise possible le champ diffracté en champ proche. Cette illustration met en évidence la limite de la méthode barycentrique pour assurer une bonne précision en champ proche dans le cas où l’obstacle diffractant a une taille de l’ordre de la longueur d’onde.

## 2.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a expliqué de façon détaillée le principe de la méthode de couplage dans sa version la plus simple appelée barycentrique. Cette méthode s'applique au calcul de l'approximation haute fréquence de la diffraction par un obstacle de taille caractéristique de l'ordre une fraction de la longueur d'onde. Elle s'appuie sur un modèle à deux échelles de l'obstacle diffractant qui permet à la fois de découpler le calcul des phénomènes de propagation et de diffraction, et de recombinaer leurs résultats.

Une analyse d'erreur a été menée pour dégager le cadre de validité et les paramètres de contrôle de l'erreur. Les conclusions de cette analyse ont ensuite été illustrées numériquement. Sur une deuxième série d'expériences numériques menées dans l'esprit d'une preuve de concept, on a déployé la méthode pour calculer l'approximation rayon du champ diffracté, mettant en évidence son cadre de validité et ses limites en champ proche. Si l'on cherche à observer le champ diffracté à une distance de l'obstacle qui ne permet de satisfaire les hypothèses de champ lointain, ou si l'obstacle diffractant est trop gros pour les vérifier, on devra proposer une modélisation différente de l'obstacle. C'est l'objet du chapitre 3 que de décrire ce nouveau modèle.



## Chapitre 3

# Extension de la méthode hybride : la méthode multi-centres

Le développement d'une extension de la méthode barycentrique a été motivé par la volonté d'étudier des configurations de diffraction où le diamètre de l'obstacle diffractant est de l'ordre de la longueur d'onde. Comme expliqué au chapitre précédent, la méthode barycentrique calcule une approximation haute fréquence de la solution du problème de diffraction avec une précision qui dépend de celle de l'approximation du noyau de Green. Le cadre de validité de ces approximations dépend de deux paramètres qui définissent le régime de champ lointain. L'étude paramétrique réalisée révèle que ce régime est atteint seulement pour des obstacles de diamètre de l'ordre d'une fraction de longueur d'onde.

Pour traiter les configurations de diffraction par des obstacles plus gros mais restant diffractants, on a besoin d'une nouvelle stratégie qui, comme la méthode barycentrique, convertit le champ diffracté en un champ de type rayon. Dans ce but, on étend la méthode barycentrique en introduisant un recouvrement du bord du défaut. Un nombre suffisant de sous-domaines dans ce recouvrement permet alors de traiter avec précision les configurations de diffraction souhaitées. On appelle cette extension la méthode multi-centres. On s'attache dans ce chapitre à décrire son principe dans le cas d'un obstacle plongé dans un milieu infini homogène. On étudie également le contrôle de l'erreur introduite par cette méthode pour le calcul du champ diffracté, puis on illustre son cadre de validité sur des expériences numériques.

### 3.1 Méthode multi-centres : principe

La méthode multi-centres proposée dans ce chapitre est une extension de la méthode barycentrique permettant de traiter des configurations critiques pour la méthode barycentrique. De façon générale, ces configurations critiques impliquent des obstacles de diamètre de l'ordre de la longueur d'onde pour lesquels soit  $\gamma$  n'est plus de l'ordre de l'unité, soit  $\beta$  n'est plus aussi petit que souhaité. Pour retrouver une meilleure précision de l'approximation haute fréquence du champ diffracté en champ proche où la précision de la méthode barycentrique est dégradée (entre  $5$  et  $100\lambda$  de l'obstacle), on introduit de nouveaux outils qui permettent d'en étendre le principe.

La méthode multi-centres repose sur l'introduction d'un recouvrement du contour  $\Gamma$  du défaut, la contribution de chaque sous-domaine  $\Gamma_p \subset \Gamma$  étant alors traitée selon le principe de la méthode barycentrique. On en résume ici brièvement le principe avant de mettre en équation chaque étape de l'extension. On cherche à prédire en un point d'observation donné le champ diffracté généré par l'interaction d'un défaut de diamètre de l'ordre de la longueur d'onde,  $r_\Gamma = O(\lambda)$  avec une onde haute fréquence. L'obstacle n'est plus à la fois dans la zone de champ lointain de la source et du point d'observation : en introduisant les notations  $\beta_s = r_\Gamma/d_s$ ,  $\beta_r = r_\Gamma/d_r$  où  $d_{s/r} = |y_c - x_{s/r}|$ , on ne satisfait plus  $\beta_s, \beta_r \ll 1$ . On introduit donc un recouvrement du contour  $\Gamma$  de l'obstacle diffractant, suffisamment fin pour que chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  de ce recouvrement  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p$  soit dans la zone de champ lointain à la fois de la source et du récepteur. En d'autres termes, le rayon de chaque  $\Gamma_p$  doit être suffisamment petit relativement à la distance de la source et du point d'observation par rapport au centre  $y_c^p$  de chaque  $\Gamma_p$  pour qu'il soit vu à ces distances comme le voisinage de  $y_c^p$ . Le défaut est alors modélisé depuis la source et le récepteur comme l'ensemble des points  $y_c^p$ , qui reçoivent

et émettent respectivement des rayons incidents et diffractés, auxquels on adjoint un coefficient de diffraction.

Sous couvert de l'introduction d'un recouvrement suffisamment fin, la méthode multi-centres découple le traitement des phénomènes de propagation et de diffraction. Les premiers sont traités par la méthode des rayons, les seconds par résolution numérique d'une équation intégrale de surface, comme au chapitre 2. En particulier, le champ incident est approché par un train d'ondes composé de rayons émis de la source vers le centre de chaque sous-domaine, et le champ diffracté au récepteur est approché par la superposition de rayons issus du centre de chaque sous-domaine. L'amplitude de chaque rayon diffracté est pondérée par un coefficient, évalué par la méthode des équations intégrales, qui quantifie la contribution de chaque sous-domaine de l'obstacle au rayonnement de la solution du problème de surface vers le point d'observation, appelé coefficient de diffraction. Enfin, la modélisation multi-centres de l'obstacle permet de combiner les deux étapes de calcul à l'échelle du défaut pour évaluer le champ diffracté.

La résolution par cette nouvelle approche hybride se fait en quatre étapes : définition d'un recouvrement de l'obstacle diffractant, approximation multi-rayons du champ incident, résolution de l'équation intégrale et enfin évaluation du coefficient de diffraction et propagation rayon du champ diffracté. On détaille dans la suite de cette partie la mise en équation de la méthode étape par étape.

### 3.1.1 Partitionnement

Pour construire la partition de l'unité du contour  $\Gamma$  de l'obstacle, on se donne un ensemble  $\mathcal{X}_P = \{y_c^p \in \Gamma, p = 1, \dots, P\}$  de  $P$  points sur  $\Gamma$ , à partir desquels on définit un recouvrement de  $\Gamma$  en  $P$  sous-domaines  $\Gamma_p$ , de sorte que  $\Gamma = \bigcup_{p=1}^P \Gamma_p$ . On subordonne ensuite à ce recouvrement une partition de l'unité, c'est à dire une famille  $(\eta_p)_{1 \leq p \leq P}$  de fonctions continues, positives, définies sur  $\Gamma$  telles que :

$$\text{supp}(\eta_p) = \Gamma_p, \quad 0 \leq \eta_p(y) \leq 1, \quad \forall y \in \Gamma, \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^P \eta_p(y) = 1 \quad \forall y \in \Gamma. \quad (3.1)$$

Plus précisément, considérant dans ce chapitre des obstacles diffractants, de contour fermé régulier, décrits par le paramétrage  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on se donne une distribution de points  $\mathcal{X}_P$  uniformément répartis par rapport au paramètre  $t$  :

$$\mathcal{X}_P = \left\{ y_c^p \in \Gamma \mid y_c^p = \gamma \left( \frac{2\pi p}{P} \right) \right\}.$$

On définit par conséquent les sous-domaines  $\Gamma_p$  du recouvrement par :

$$\Gamma_p = \{y \in \Gamma \mid l(y_c^{p-1}) \leq l(y) \leq l(y_c^p)\},$$

où  $l(y)$  est l'abscisse curviligne du point  $y$  sur  $\Gamma$ , comme illustré en figure 3.1, et  $\Gamma$  étant fermée :  $l(y_c^{p+1}) = l(y^1)$  et  $l(y_c^0) = l(y_c^{P-1})$ . Chaque sous domaine  $\Gamma_p$  est caractérisé par son centre  $y_c^p$  et sa taille caractéristique

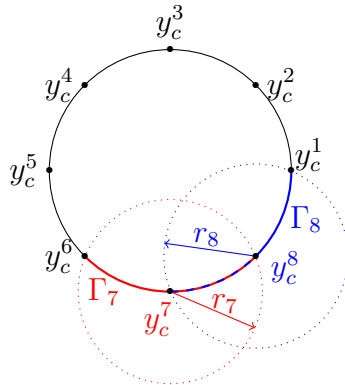


FIGURE 3.1 – Schéma de subdivision du cercle en 8.

définie par  $r_p = \max_{y \in \Gamma} (|y - y_c^p|)$ . On choisit en outre pour les expériences numériques une famille de fonctions de partition de type splines de degré 4 dont on donne la définition en annexe D.

Dans le cadre de la méthode hybride, le nombre  $P$  de sous-domaines du recouvrement est choisi de sorte à ce que chaque  $\Gamma_p$  soit dans la zone de champ lointain de la source et du point d'observation, c'est à dire satisfasse :

$$\frac{1}{2}\gamma^p \beta_s^p, \frac{1}{2}\gamma^p \beta_r^p \ll 1 \iff \gamma^p = O(1), \quad \beta_s^p, \beta_r^p \ll 1,$$

où pour alléger les notations, on introduit comme au chapitre 2 les paramètres  $\gamma^p = kr_p$ ,  $\beta_s^p = r_p/d_s^p$ ,  $\beta_r^p = r_p/d_r^p$ , avec  $d_{s/r}^p = |x_{s/r} - y_c^p|$ , définis sur chaque partition. Sous ces hypothèses, on peut alors calculer la contribution de chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  au champ diffracté total en lui appliquant le principe de la méthode barycentrique.

### 3.1.2 Approximation du champ incident.

On se donne un champ incident cylindrique  $u^i$  émis depuis une source ponctuelle située à la position  $x_s$ . Dans le régime haute fréquence, ce champ incident peut être approché sous forme de rayons propagés de la source vers l'obstacle. La méthode hybride multi-centres permet une représentation multi-rayons du champ incident dans le régime haute fréquence.

En effet, l'introduction de la partition de l'unité permet de décrire le champ incident sur  $\Gamma$  comme la somme de contributions  $u_p^i$  du champ incident à chaque sous-domaine :

$$\forall y \in \Gamma, \quad u^i(y) = \sum_{p=1}^P \eta_p(x) u^i(x) = \sum_{p=1}^P u_p^i(y). \quad (3.2)$$

Par définition du recouvrement, chaque sous-domaine est dans la zone de champ lointain de la source et peut donc être modélisé comme le voisinage de son centre. On approche donc sur chaque sous domaine  $\Gamma_p$  le champ incident au moyen de l'approximation onde plane d'un rayon incident unique, caractérisé par le triplet amplitude, phase et direction de propagation  $(A_p^s, \phi_p^s, \nabla \phi_p^s)$ , propagé de la source vers le centre  $y_c^p$  de  $\Gamma_p$  :

$$\forall y \in \Gamma_p, \quad u_p^i(y) \approx \tilde{u}_p^i(y) = \eta_p(y) B_p^s(y_c^p; x_s) e^{ik \nabla \phi_p^s(y_c^p) \cdot (y - y_c^p)}, \quad (3.3)$$

où pour alléger les notations, on note  $B_p^s(y_c^p; x_s) = A_p^s(y_c^p; x_s) e^{ik \phi_p^s(y_c^p; x_s)}$  l'amplitude complexe du rayon reçu par le pième sous-domaine. Cette approximation du champ incident sur  $\Gamma$ , appelée par la suite approximation rayon du champ incident, dépend donc ici de ces seuls  $P$  rayons, et est d'autant plus précise que  $P$  est grand. Lorsque le milieu de propagation est homogène, il existe un unique rayon liant  $x_s$  à chaque  $y_c^p$ , qui est rectiligne. On définit ses grandeurs caractéristiques analytiquement à partir de l'approximation rayon locale à chaque sous-domaine de l'onde incidente cylindrique :

$$\begin{cases} \hat{s}^p = \frac{y_c^p - x_s}{|y_c^p - x_s|}, \\ \phi_p^s(y_c^p; x_s) = |x_s - y_c^p|/c, \\ A_p^s(y_c^p; x_s) = \frac{1}{\sqrt{2k\pi|x_s - y_c^p|}}, \end{cases} \quad (3.4)$$

comme on le justifiera en 3.2.1. Lorsque le milieu est inhomogène, les grandeurs caractéristiques des  $P$  rayons incidents qui permettent l'approximation du champ incident sur  $\Gamma$  sont calculées par résolution du système de tracé de rayon (1.30). La stratégie de propagation multi-rayons du champ incident de la version multi-centres de la méthode hybride est illustrée sur la figure 3.2 : l'obstacle diffractant est modélisé par  $P$  points et le champ incident est propagé jusqu'à l'obstacle sous forme de  $P$  rayons.

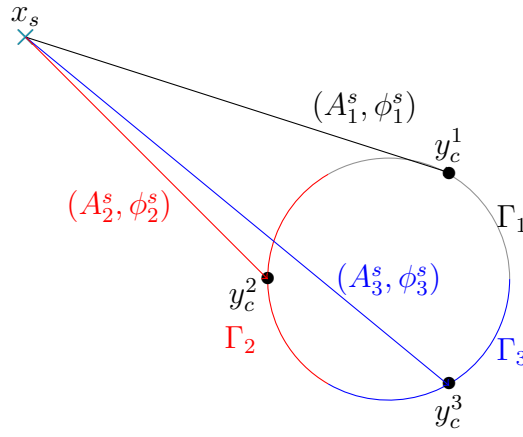


FIGURE 3.2 – Approximation rayon de la contribution au champ incident de chaque  $\Gamma_p$ .

### 3.1.3 Résolution de l'équation de Helmholtz par équation intégrale

On résout ensuite le problème de diffraction (1.10) sur  $\Gamma$  par la méthode des équations intégrales. On choisit de le reformuler par l'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner pour garantir son caractère bien posé à toute fréquence,

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)} - ikG \right) (x, y; \omega) \psi(y) dS(y) = -u^i(x), \quad \forall x \in \Gamma. \quad (3.5)$$

Cette reformulation conserve la linéarité du problème de diffraction. Par conséquent en prenant en compte l'approximation haute fréquence du champ incident propre à la méthode multi-centres, définie par (3.2) et (3.3), le problème surfacique (3.5) conduit à  $P$  problèmes de diffraction d'inconnue  $\tilde{\psi}^p$  :

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)} - ikG \right) (x, y; \omega) \tilde{\psi}^p(y) dS(y) = -\eta_p(x) e^{-ik\hat{s}^p \cdot (x - y_c^p)}, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (3.6)$$

Par linéarité, la solution  $\psi$  du problème de diffraction (3.5) est donnée par

$$\psi = \sum_{p=1}^P B_p^s(y_c^p; x_s) \tilde{\psi}^p.$$

Comme au chapitre 2, cette décomposition rend indépendantes les étapes de propagation et de diffraction dans le calcul du champ diffracté.

### 3.1.4 Propagation du champ diffracté vers le récepteur

La dernière étape consiste à calculer le champ diffracté en un récepteur  $x_r$  en évaluant le rayonnement dans le milieu de propagation de la solution surfacique  $\Psi$  par application de la formule de représentation intégrale,

$$u(x_r; \omega) = \int_{\Gamma} K(x, y; \omega) \Psi(y) dS(y), \quad (3.7)$$

avec  $K(x, y; \omega) = \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)} - ikG \right) (x, y; \omega)$ .

En injectant la partition de l'unité (3.1) dans l'intégrale (3.7) et en utilisant la décomposition du champ incident (3.3), on réécrit (3.7) comme la somme de  $P$  contributions au rayonnement total de la solution surfacique  $\Psi$  jusqu'à  $x_r$ , dues à chaque sous-domaine pour une approximation sous-domaine par sous-domaine (3.3) du champ incident :

$$u(x_r; \omega) = \sum_{q=1}^P B_q^s(y_c^q; x_s) \sum_{p=1}^P \int_{\Gamma_p} \eta_p(y) K(x, y; \omega) \tilde{\psi}^q(y) dS(y). \quad (3.8)$$

On découple ainsi le rôle de chaque sous-domaine en terme de réception du champ incident et d'émission de champ diffracté. L'application de l'hypothèse de champ lointain permet d'approcher chaque contribution sur  $\Gamma_p$  du noyau de l'opérateur intégral,  $\eta_p K$ , par son approximation champ lointain,  $\eta_p \tilde{K}^p$ , qui s'exprime sous la forme d'un rayon issu de  $y_c^p$  et propagé vers  $x_r$  selon la direction  $\hat{r}^p$  en  $y_c^p$ , et caractérisés par les triplets amplitude-phase-direction de propagation  $(A_p^r(x_r; y_c^p), \phi_p^r(x_r; y_c^p), \hat{r}^p)$ ,

$$\eta_p(y) \tilde{K}^p(x_r, y; \omega) \propto B_p^r(x_r; y_c^p) e^{-ik\hat{r}^p \cdot (y - y_c^p)}, \quad (3.9)$$

où  $B_p^r(x_r; y_c^p) = A_p^r(x_r; y_c^p) e^{ik\phi_p^r(x_r; y_c^p)}$  désigne l'amplitude complexe de chaque rayon diffracté. L'hypothèse de champ lointain permet donc de formuler le champ diffracté au point d'observation  $x_r$  comme la superposition de  $P$  rayons, figure 3.3,

$$\tilde{u}(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P B_p^r(x_r; y_c^p) \sum_{q=1}^P B_q^s(y_c^q; x_s) \mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega). \quad (3.10)$$

avec une amplitude pondérée par le coefficient  $\mathcal{R}_q^p$ , donné par

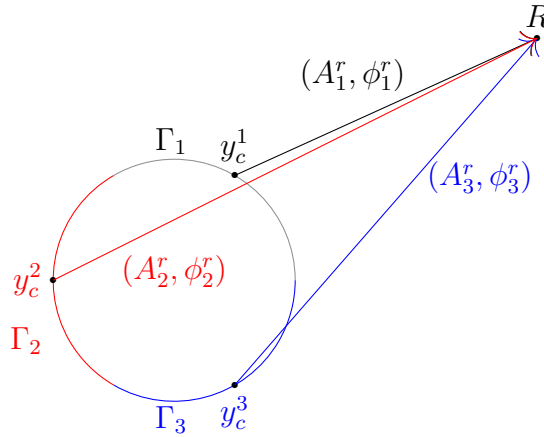


FIGURE 3.3 – Approximation du champ diffracté comme un train d'ondes de rayon

$$\mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} \eta_p(y) e^{-ik(y - y_c^p, \hat{r}^p)} (\hat{r}^p \cdot \mathbf{v}(y) + 1) \tilde{\Psi}^q(y) dS(y). \quad (3.11)$$

$\mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega)$  ne dépend que des directions  $\hat{r}^p$ ,  $\hat{s}^q$ , de la géométrie  $\Gamma$  de l'obstacle diffractant et de la fréquence. Il donne la contribution à la perturbation par le sous-domaine  $\Gamma_p$  du champ incident reçu par  $\Gamma_q$ , on l'appellera coefficient de diffraction.

Lorsque le milieu de propagation est homogène, chaque rayon est rectiligne, et les grandeurs qui caractérisent les rayons diffractés  $(A_p^r(x_r; y_c^p), \phi_p^r(x_r; y_c^p), \hat{r}^p)$  sont calculées analytiquement à partir de l'approximation champ lointain du noyau  $K$  par,

$$\begin{cases} \hat{r}^p = \frac{y_c^p - x_s}{|y_c^p - x_s|}, \\ \phi_p^r(x_r; y_c^p) = |x_r - y_c^p|/c, \\ A_p^r(x_r; y_c^p) = \frac{1}{\sqrt{8k\pi}|x_r - y_c^p|}, \end{cases} \quad (3.12)$$

comme on le verra en 3.2.1. Pour un milieu inhomogène, ces grandeurs sont obtenues par la méthode des rayons.

On conclut cette partie par quelques remarques importantes. La méthode multi-centres propose une modélisation multi-échelle du défaut qui rend possible le calcul précis du champ diffracté par méthode hybride. Elle rend les étapes de calcul des effets de propagation et de diffraction indépendantes les unes des autres en découplant le calcul du coefficient de diffraction des données positions des sources et des récepteurs.



L'évaluation du champ diffracté à partir des résultats obtenus à chaque étape se fait par combinaison linéaire, selon (3.10). Cette séparation des étapes sera précieuse pour accélérer le calcul du champ diffracté comme on le verra au chapitre 4.

## 3.2 Méthode hybride multi-centres pour l'équation des ondes en milieu infini

L'extension de la méthode hybride repose sur la modélisation du défaut à l'échelle de la propagation par un ensemble de points choisis comme les centres des sous-domaines recouvrant  $\Gamma$ . Cette modélisation est valide lorsque chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  satisfait  $\gamma^p \beta_s^p \ll 1$  et  $\gamma^p \beta_r^p \ll 1$ . Dans ce cadre, les centres des sous-domaines jouent le double rôle de récepteurs et de sources de rayons. La précision de l'approximation multi-rayons de la propagation des champs incident et diffracté dépend cependant de la précision de l'approximation rayon locale des contributions du noyau et du champ incident sur chaque sous-domaine du recouvrement de  $\Gamma$ . Ces précisions locales de l'approximation rayon conditionnent le degré de validité de l'hypothèse de champ lointain et donc du modèle.

On réalise dans cette section une analyse d'erreur à la fois locale et globale afin de dégager des termes de contrôle de l'erreur. En particulier, noyau  $K$  et champ incident étant construits comme combinaison linéaire des fonctions  $H_v^{(1)}$ , on commence par décrire brièvement les trois étapes de l'approximation rayon des fonctions de Hankel sur chaque sous-domaine ainsi que l'analyse d'erreur associée à leur approximation globale sur  $\Gamma$ . On exploite ensuite ces résultats pour obtenir les paramètres de contrôle de l'erreur locale et globale du noyau  $K$  de l'opérateur intégral. On s'intéressera en particulier à l'influence du nombre de sous-domaines sur cette erreur. On détaille enfin dans un dernier paragraphe la construction des coefficients de diffraction selon la formulation choisie et les conditions aux limites associées à l'équation des ondes.

Pour la présentation, on choisit toujours de se baser sur la formule de représentation intégrale de surface de type Brakhage-Werner. On détaille donc les approximations sur le noyau

$$K(x,y;\omega) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}}(x,y;\omega) - ikG(x,y;\omega).$$

### 3.2.1 Les approximations des noyaux en 2D et cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain dans le contexte de la méthode multi-centres

Les approximations champ lointain de l'onde incidente et de la formule de représentation intégrale sont liées à l'approximation des fonctions de Hankel de première espèce  $H_v^1$  sur chaque sous-domaine par le linéarisé de leur développement asymptotique de type onde plane, obtenue au moyen des trois étapes d'approximation utilisées au chapitre 2 :

- développement asymptotique,
- la linéarisation de sa phase,
- développement à l'ordre 0 de l'amplitude du développement asymptotique.

On appellera dans la suite cette approximation champ lointain : approximation rayon. Pour rendre la lecture plus facile, on définit d'abord la zone de champ lointain associée à un sous-domaine et on introduit pour cela les quantités :  $\beta = r_p/d$ , et  $\beta^p = r_p/d^p$ , où  $d = |x - y|$ , et  $d^p = |x - y_c^p|$ .

**Définition 1.** Pour un problème de propagation, de nombre d'onde  $k$ , en milieu homogène  $\Omega^e$ , contenant un défaut  $\Omega$  de contour  $\Gamma$ , pour lequel on définit un recouvrement en  $P$  sous-domaines caractérisés par leurs centres  $y_c^p$  et leur taille caractéristique  $r_p$ , on définit la zone de champ lointain  $Z^p$  associée au sous-domaine  $\Gamma_p$ ,

$$Z^p = \left\{ x \in \Omega^e \setminus \bar{\Omega} \mid \forall y \in \Gamma_p, \gamma^p/\beta \gg 1, \text{ et } \frac{1}{2}\gamma^p\beta \ll 1 \right\} \quad (3.13)$$

comme l'ensemble des points de  $\Omega^e$  situés suffisamment loin de la partition  $\Gamma_p$  pour négliger le paramètre de Fresnel  $F^p = \gamma^p \beta^p / (2\pi)$ .

En outre, les points de la zone de champ lointain satisfont également les inégalités équivalentes :  $\gamma^p = O(1)$ ,  $\gamma^p/\beta^p \ll 1$ . On décrit maintenant brièvement les différentes étapes de l'approximation des fonctions de Hankel et du noyau, puis on réalise une étude des erreurs d'approximation locale et globale afin d'identifier les éventuels paramètres de contrôle qui permettraient, comme au chapitre 2, de calibrer l'erreur d'approximation globale. Cette étude est accompagnée d'expériences numériques. Les résultats numériques ne sont cependant exposés en détail que pour l'approximation rayon de  $H_0^{(1)}$ , puisque les développements asymptotiques de  $H_0^1$  et  $H_1^1$  sont proportionnels.

### 3.2.1.1 Approximation rayon des fonctions de Hankel de première espèce

L'obtention de l'approximation rayon passe par trois étapes d'approximation successives que l'on détaille ici.

#### Développement asymptotique des fonctions de Hankel de première espèce.

L'approximation du noyau par son développement asymptotique est une approximation globale à tout  $\Gamma$ . Lorsque le point de calcul  $x$  est suffisamment éloigné du défaut, de sorte que

$$\forall y \in \Gamma, z = k|x - y| \gg 1, \quad (3.14)$$

on a (comme au chapitre 2),

$$H_v^{(1)}(z) = H_{v,dv}^{(1)}(z) + O(z^{3/2}), \quad H_{v,dv}^{(1)}(z) := e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{v\pi}{2})} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}. \quad (3.15)$$

#### Linéarisation de la phase du développement asymptotique.

La deuxième étape d'approximation consiste à linéariser la phase du développement asymptotique localement, sur chaque sous-domaine du recouvrement. On se donne pour cela un point  $x \in \Omega^e \setminus \Gamma$ , un point  $y$  du sous-domaine  $\Gamma_p$  dont le rayon est défini par  $r_p = \sup_{y \in \Gamma_p} |y - y_c^p|$ .

On note la phase de  $H_{v,dv}^{(1)}$ ,  $z = k|x - y|$ , et on suppose encore ici  $z \gg 1$ . On introduit un ensemble de paramètres relatifs au sous-domaine  $\Gamma_p$  :  $z_c^p = \gamma^p/\beta^p$ , le rapport  $\rho_p = \frac{|y - y_c^p|}{|x - y_c^p|}$ , tel que  $\sup_{y \in \Gamma_p} \rho_p = \beta^p$ , et les vecteurs directeurs des ondes planes incidentes et diffractées, respectivement notées  $\hat{d}^p = \frac{y - y_c^p}{|y - y_c^p|}$  et  $\hat{s}^p = \frac{x - y_c^p}{|x - y_c^p|}$ . En utilisant ces paramètres, on réécrit la phase des développements asymptotiques (3.15) comme suit,

$$\begin{aligned} z &= k|x - y| = k|x - y_c^p + y_c^p - y|, \\ &= z_c^p \sqrt{(1 - 2\rho_p(\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p) + \rho_p^2)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse de champ lointain :  $\rho_p \leq \beta^p \ll 1$ . Un développement de Taylor en  $\rho_p = 0$  donne

$$\forall y \in \Gamma_p, z = z_c^p \left( 1 - (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)\rho_p + \frac{1}{2}(1 - (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)^2)\rho_p^2 + o(\rho_p^2) \right). \quad (3.16)$$

Si le recouvrement de l'obstacle  $\Gamma$  est suffisamment fin pour assurer que  $x \in \mathcal{Z}^p$ , les bornes supérieures de l'ordre un et deux de ce développement de Taylor local à  $\Gamma_p$  vérifient,

$$\begin{cases} \sup_{\rho_p, \hat{d}^p} (z_c^p (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)\rho_p) = \gamma^p = O(1) \\ \sup_{\rho_p, \hat{d}^p} \left( \frac{z_c^p}{2} (1 - (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)^2)\rho_p^2 \right) = \frac{1}{2}\gamma^p \beta^p \ll 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Ainsi, dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain, la phase sur  $\Gamma_p$  est approchée par son linéarisé,

$$z = k|x - y_c^p| - k(y - y_c^p, \hat{s}^p) + R_1^q(\rho_p; \xi_p), \quad (3.18)$$

où en reprenant les notations du chapitre 2, on rappelle que

$$q(\rho_p) = \sqrt{1 + \rho_p^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d}^p)\rho_p}, \quad R_1^q(\rho_p; \xi_p) = \frac{q''(\xi_p)}{2}\rho_p^2, \quad 0 < \xi_p < \rho_p,$$

$$q''(\rho_p) = \frac{1 - (\hat{s} \cdot \hat{d}^p)^2}{(1 + \rho_p^2 - 2(\hat{s} \cdot \hat{d}^p)\rho_p)^{3/2}}, \quad \sup_{\rho_p} |q''(\rho_p)| \leq 1,$$

et on définit l'approximation du développement asymptotique (3.15) sur le sous-domaine  $\Gamma_p$  sous la forme d'une onde plane,  $H_{v,\text{lin}}^{(1)p}$  définie par,

$$\forall y \in \Gamma_p, \quad H_{v,\text{lin}}^{(1)p}(k|x - y|) = e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{v\pi}{2})} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \frac{e^{ik|x - y_c^p|}}{\sqrt{|x - y|}} e^{-ik\hat{s}^p \cdot (y - y_c^p)}. \quad (3.19)$$

On définit alors l'approximation globale  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  par,

$$\forall y \in \Gamma, \quad H_{v,\text{lin}}^{(1)}(k|x - y|) := \sum_{p=1}^P \eta_p(y) H_{v,\text{lin}}^{(1)p}(k|x - y|). \quad (3.20)$$

### Linéarisation de l'amplitude de l'approximation $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$ de $H_{v,\text{dv}}^{(1)}$ .

La troisième approximation consiste à linéariser l'amplitude de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  à l'ordre 0 pour se ramener à une onde plane d'amplitude constante. Cette approximation s'écrit en tout point  $y$  de  $\Gamma$ ,

$$H_{v,\text{ray}}^{(1)}(k|x - y|) = \sum_{p=1}^P \eta_p(y) H_{v,\text{ray}}^{(1)p}(k|x - y|), \quad (3.21)$$

$$\text{avec } H_{v,\text{ray}}^{(1)p}(k|x - y|) = e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{v\pi}{2})} \sqrt{\frac{2}{k\pi}} \frac{e^{ik|x - y_c^p|}}{\sqrt{|x - y_c^p|}} e^{-ik\hat{s}^p \cdot (y - y_c^p)}.$$

#### 3.2.1.2 Étude de l'erreur d'approximation rayon de $H_v^{(1)}$

Dans cette partie, on reprend chaque étape d'approximation et on en fait une analyse d'erreur à la fois locale et globale. Chaque résultat est éprouvé par expérience numérique. On s'appuiera pour les illustrations numériques sur la configuration de l'étude paramétrique du paragraphe 2.3 : diffraction par un disque de diamètre  $2r_\Gamma = \lambda_s$ , immergé dans un milieu homogène non borné de célérité  $c = 1$ . La source  $x$  située à une distance  $60r_\Gamma$  du barycentre  $y_c$  du défaut dans la direction  $(1,0)$  émet une onde incidente de spectre étendu,  $[f_{\min}, f_{\max}] = [a; b]F_s$ .

L'étude consiste à calculer l'erreur des différentes approximations locales et globales de la fonction de Hankel  $H_0^1$  sur cet intervalle de fréquences lorsque  $\Gamma$  est subdivisé en 5 sous-domaines.

#### a) Erreur due au développement asymptotique des fonctions de Hankel de première espèce.

Comme on a pu le voir au paragraphe 2.2.1.1, l'erreur relative en norme infinie  $er_{dv}^\infty$  due à l'approximation des fonctions de Hankel par leur développement asymptotique est contrôlée sur tout  $\Gamma$  selon l'inégalité,

$$er_{dv}^\infty(H_v^{(1)}) = \left\| \frac{H_v^{(1)} - H_{v,\text{dv}}^{(1)}}{H_{v,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \leq \sup_{y \in \Gamma} \left( \frac{(2v+1)}{8k|x-y|} \right) \leq \frac{(2v+1)\beta}{8\gamma(1-\beta)}, \quad (3.22)$$

où on rappelle que  $\gamma = kr_\Gamma \neq \gamma^p$ ,  $\beta = r_\Gamma/d \neq \beta^p$ .

### b) Erreur d'approximation due à la linéarisation de la phase.

On s'intéresse maintenant à l'erreur que l'on commet localement et globalement en approchant  $H_{v,dv}^{(1)}$  par  $H_{v,lin}^{(1)}$ .

**Analyse de l'erreur locale et globale.** L'erreur relative créée par l'approximation de la restriction du développement asymptotique  $H_{v,dv}^{(1)p}$  sur le sous-domaine  $\Gamma_p$  par son linéarisé  $H_{v,lin}^{(1)p}$  s'écrit,

$$\begin{aligned} \forall y \in \Gamma_p, \quad \left| \frac{H_{v,lin}^{(1)p}(k|x-y|) - H_{v,dv}^{(1)p}(k|x-y|)}{H_{v,dv}^{(1)}(k|x-y|)} \right| &= \left| 1 - e^{ik(d_p - \beta^p \cdot (y-y_p^c) - |x-y|)} \right|, \\ &= \left| 1 - e^{-i \frac{\gamma^p}{\beta^p} R_1^q(\rho_p; \xi_p)} \right|. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Comme justifié en section 2.2.1.2, par développement de Taylor de l'exponentielle en la variable

$X(\rho; \xi_p) = i \frac{\gamma^p}{\beta^p} R_1^q(\rho_p; \xi_p)$ , où  $|X(\rho; \xi_p)| \ll 1$ , on peut majorer l'erreur par :

$$\sup_{y \in \Gamma_p} \left| \eta_p(y) \frac{H_{v,lin}^{(1)p}(k|x-y|) - H_{v,dv}^{(1)p}(k|x-y|)}{H_{v,dv}^{(1)}(k|x-y|)} \right| \leq \frac{\gamma^p}{\beta^p} \sup_{y \in \Gamma_p, 0 < \xi_p < \rho_p} |\eta_p(y) R_1^q(\rho_p; \xi_p)| \leq \frac{1}{2} \gamma^p \beta^p. \quad (3.24)$$

Puis, on déduit la majoration de l'erreur d'approximation globale de  $H_{v,dv}^{(1)}$  par  $H_{v,lin}^{(1)}$  par inégalité triangulaire comme la somme des erreurs locales à chaque sous-domaine,

$$\begin{aligned} \text{er}_{lin}^\infty(H_v^{(1)}) &= \frac{\|H_{v,dv}^{(1)} - H_{v,lin}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|H_{v,dv}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}} \leq \left\| \frac{H_{v,dv}^{(1)} - H_{v,lin}^{(1)}}{H_{v,dv}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma}, \\ &\leq \sum_{p=q}^P \left\| \frac{\eta_p \left( \frac{H_{v,dv}^{(1)p} - H_{v,lin}^{(1)p}}{H_{v,dv}^{(1)}} \right)}{H_{v,dv}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma}, \\ &\leq \sum_{p=1}^P \frac{\gamma^p}{\beta^p} \sup_{y \in \Gamma_p, 0 < \xi_p < \rho_p} |\eta_p(y) R_1^q(\rho_p(y); \xi_p)|. \end{aligned} \quad (3.25)$$

### Étude numérique de l'erreur d'approximation de $H_0^{(1)}$ par $H_{0,dv}^{(1)}$ .

On illustre maintenant ces résultats par étude numérique.

On note  $B_{lin}^p = \frac{\gamma^p}{\beta^p} \sup_{y \in \Gamma_p, 0 < \xi_p < \rho_p} |\eta_p(y) R_1^q(\rho_p(y); \xi_p)|$  la borne de l'erreur localement introduite par la linéarisation

de la phase de  $H_{v,dv}^{(1)p}$  sur chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  et on introduit également  $B_{b,lin}^p = \frac{1}{2} \gamma^p \beta^p$ , le paramètre de contrôle de l'étape de linéarisation de la phase sur  $\Gamma_p$ , introduit au chapitre 2.

On représente, sur la figure 3.4, l'évolution de l'erreur introduite localement par la linéarisation de la phase de  $H_{0,dv}^{(1)}$  sur chacun des 5 sous-domaines du recouvrement en fonction de la fréquence  $f$ . Du fait de la symétrie de l'obstacle diffractant et de la position particulière de la source sur l'axe (Ox), les erreurs d'approximation respectivement sur les sous-domaines 1, 4 et 2, 3 sont identiques. Comme attendu, on remarque une évolution linéaire de l'erreur en fonction de la fréquence. On superpose ensuite, sur les figures 3.5 les erreurs locales introduites par la linéarisation de la phase de  $H_{0,dv}^{(1)}$  sur chaque sous-domaine en fonction de la fréquence ainsi que l'évolution des bornes  $B_{lin}^p$  et  $B_{b,lin}^p$ . On observe numériquement que la borne supérieure  $B_{lin}^p$  contrôle l'erreur d'approximation locale. Le paramètre  $B_{b,lin}^p = \gamma^p \beta^p / 2$  ne joue plus le même rôle que pour la méthode barycentrique : l'approximation locale a une directivité qui influence l'évolution de l'erreur, majorer le reste par  $\beta_p^2 / 2$  ne donne pas une borne satisfaisante de l'erreur. En particulier, on retient que l'erreur locale due à la linéarisation de la phase du développement asymptotique dépend de la géométrie locale et de la partition de l'unité définissant le recouvrement de l'obstacle : tant par la répartition des sous-domaines que par leur nombre.

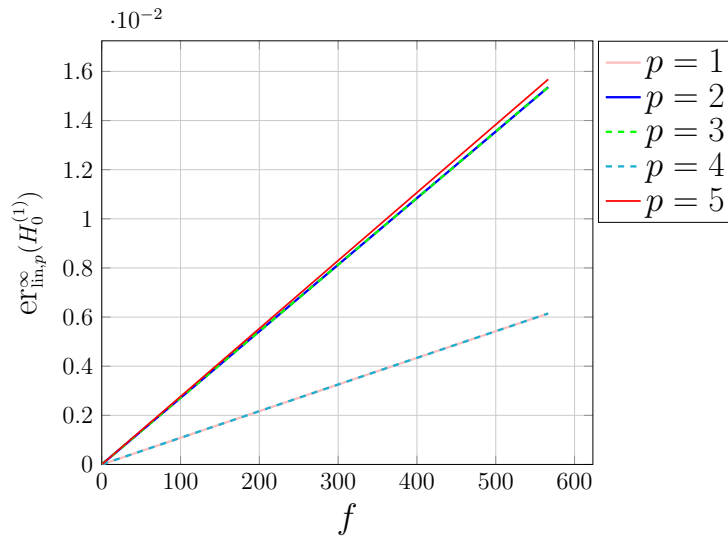
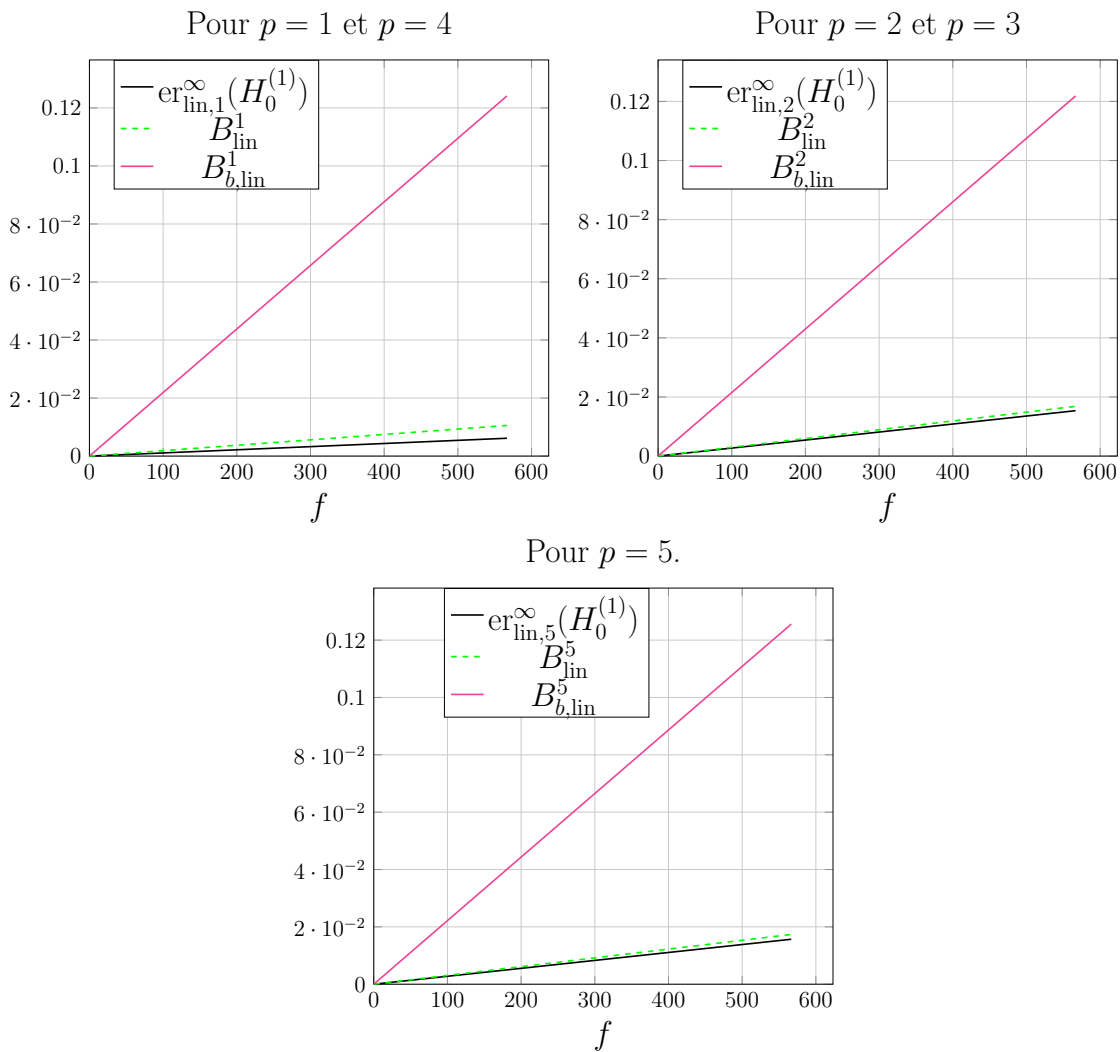


FIGURE 3.4 – Évolution de l’erreur d’approximation multi-rayons de la restriction de  $H_{0,dv}^1$  par  $H_{0,lin}^1$  sur chaque sous-domaine du recouvrement en fonction de la fréquence  $f$ .

FIGURE 3.5 – Évolution de l’erreur locale d’approximation multi-rayons de  $H_{0,dv}^1$  par  $H_{0,lin}^1$  et des paramètres  $B_{lin}^p$ , et  $B_{b,lin}^p$  en fonction de la fréquence  $f$ .



Pour l'approche multi-centres de la linéarisation de la phase, il n'existe pas comme pour l'approche barycentrique, de paramètre global qui contrôle l'erreur introduite par cette étape de l'approximation rayon. Cependant, ce formalisme d'approximation sous-domaine par sous-domaine diminue sensiblement l'erreur globale d'approximation de  $H_{0,dv}^{(1)}$  par  $H_{0,lin}^{(1)}$ . On représente sur la figure 3.6 l'évolution de l'erreur relative globale  $er_{lin-ex}^\infty(H_0^{(1)})$  introduite par la linéarisation sous-domaine par sous-domaine de la phase de  $H_{0,dv}^{(1)}$  relativement à  $H_0^{(1)}$  en fonction de la fréquence

$$er_{lin-ex}^\infty(H_0^{(1)}) = \left\| \frac{H_{v,lin}^{(1)} - H_{v,dv}^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma}$$

ainsi que l'erreur relative  $er_{blin-ex}^\infty$  d'approximation de  $H_{0,dv}^1$  par l'approximation onde plane  $H_{0,blin}^1$  obtenue par l'approche barycentrique de la linéarisation de la phase de  $H_{0,dv}^{(1)}$  (2.25). Pour une meilleure interprétation de l'évolution de l'erreur globale d'approximation de  $H_{0,dv}^{(1)}$  par  $H_{0,lin}^{(1)}$ , on superpose à ces deux courbes, l'évolution de l'erreur globale due au développement asymptotique de  $H_0^{(1)}$   $er_{dv}^\infty(H_0^{(1)})$ , l'erreur due à la linéarisation de la phase de  $H_{0,dv}^{(1)}$ , sous-domaine par sous-domaine, relativement à  $H_{0,dv}^{(1)}$   $er_{lin}^\infty(H_0^{(1)})$  et par rapport au barycentre  $er_{blin}^\infty(H_0^{(1)})$ . On observe que dans le régime des hautes fréquences, régime contrôlé par l'erreur de linéarisation, l'approche multi-centres de linéarisation de la phase autorise une erreur bien inférieure à l'erreur de linéarisation obtenue par l'approche barycentrique.

En outre, on observe sur la figure 3.7 que l'erreur globale due à la linéarisation de la phase de  $H_0^{(1)}$  sous-

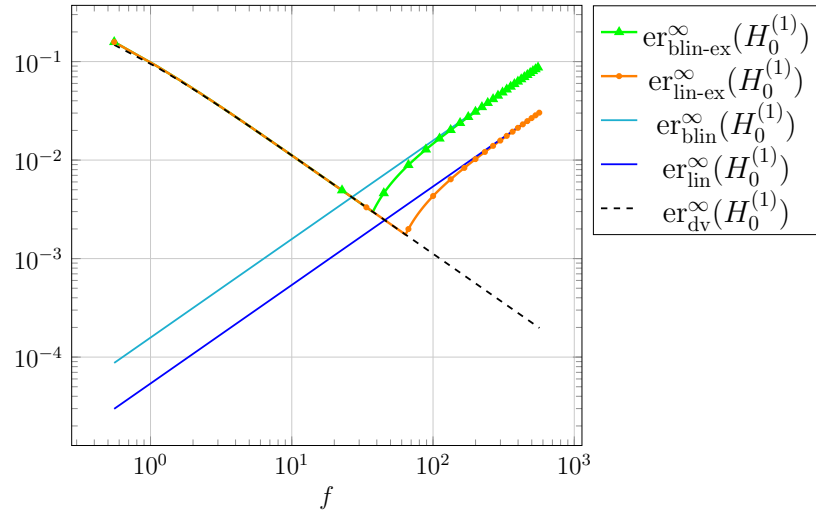


FIGURE 3.6 – Comparaison de l'évolution de l'erreur globale d'approximation multi-centres de  $H_{0,dv}^1$  par  $H_{0,lin}^1$  en fonction de la fréquence avec l'erreur d'approximation barycentrique de  $H_{0,dv}^1$  par  $H_{0,blin}^1$ .

domaine par sous-domaine est encadrée par l'erreur maximale locale de linéarisation de la phase,  $\max(B_{lin}^p)$ , et la somme des erreurs locales  $\sum B_{lin}^p$ . Cependant, contrôler ces deux quantités ne permet pas de contrôler l'erreur globale avec précision. On ne peut donc pas contrôler a priori la précision de cette approximation en fonction du nombre de sous-domaines  $P$ .

### c) Erreur d'approximation due à la linéarisation de l'amplitude.

La dernière étape d'approximation revient à approcher localement l'amplitude de la restriction sur  $\Gamma_p$  de  $H_{v,lin}^{(1)}$  par l'ordre 0 de son développement de Taylor.

#### Analyse de l'erreur locale et globale.

L'erreur introduite par l'approximation locale de l'amplitude de  $H_{v,lin}^{(1)}$  par son linéarisé à l'ordre 0 relativement

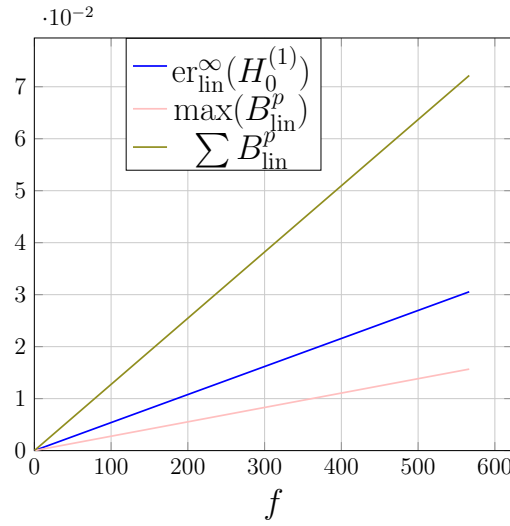


FIGURE 3.7 – Évolution de l’erreur globale d’approximation multi-rayons de  $H_{0,dv}^1$  par  $H_{0,lin}^1$  en fonction de la fréquence et évolution de  $\sum_p B_{lin}^p$  et  $\max_p B_{lin}^p$ .

à  $H_{v,lin}^{(1)}$  sur chaque sous-domaine est majorée par,

$$\forall x \in \Gamma_p, \quad \left| \frac{H_{v,ray}^{(1)p}(k|x-y|) - H_{v,lin}^{(1)p}(k|x-y|)}{H_{v,lin}^{(1)}(k|x-y|)} \right| \leq \sup_{y \in \Gamma_p} \left| -\frac{\rho_p}{2} (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p) + R_1^t(\rho_p; \xi_p) \right|, \quad (3.26)$$

où en reprenant les notations du chapitre 2, on rappelle :

$$R_1^t(\rho_p; \xi_p) = \frac{t''(\xi_p)}{2} \rho_p^2, \quad 0 < \xi_p < \rho_p, \quad t''(\rho) = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{(1 + \rho_p^2 - 2(\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)\rho_p)^{3/2}} - \frac{3(1 - (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)^2)}{(1 + \rho_p^2 - 2(\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)\rho_p)^{7/2}} \right].$$

Par suite, on majore l’erreur globale sur  $\Gamma$  par la somme des contributions à l’erreur locale sur chaque sous domaine,

$$\begin{aligned} er_{linA}^{\infty}(H_v^{(1)}) &= \frac{\|H_{v,ray}^{(1)} - H_{v,lin}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|H_{v,lin}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}} \leq \left\| \frac{H_{v,ray}^{(1)} - H_{v,lin}^{(1)}}{H_{v,lin}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} \leq \sum_{p=1}^P \left\| \frac{\eta_p [H_{v,ray}^{(1)p} - H_{v,lin}^{(1)p}]}{H_{v,lin}^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma}, \\ &\leq \sum_{p=1}^P \sup_{y \in \Gamma_p} \left| \eta_p(y) \left( -\frac{(\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p)}{2} \rho_p + R_1^t(\rho_p(y); \xi_p) \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

D’après (2.34),  $\sup_p |t''(\rho)| \leq 1/2$ , on a donc  $|R_1^t(\rho_p; \xi_p)| \leq \beta_p^2/4$  et donc la majoration plus grossière de

$er_{linA}^{\infty}(H_v^{(1)})$  :

$$er_{linA}^{\infty}(H_v^{(1)}) \leq \sum_{p=1}^P \frac{\beta_p}{2} \left( 1 + \frac{\beta_p}{2} \right). \quad (3.28)$$

### Étude numérique de l’erreur d’approximation de l’amplitude.

On illustre maintenant numériquement ces résultats. On note pour cela

$B_{linA}^p = \sup_{y \in \Gamma_p, 0 < \xi_p < \rho_p} |\eta_p(y) R_1^t(\rho_p(y); \xi_p)|$  la borne de l’erreur localement introduite par la linéarisation de

l’amplitude de  $H_{v,lin}^{(1)}$  sur chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  et on introduit  $B_{b,linA}^p = \frac{\beta_p}{2} \left( 1 + \frac{\beta_p}{2} \right)$ , le paramètre de contrôle de l’étape de linéarisation pour la version barycentrique de l’approximation sur  $\Gamma_p$ . On calcule l’erreur relative locale due à l’approximation de  $H_{0,lin}^{(1)p}$  par  $H_{0,ray}^{(1)p}$  sur chaque sous-domaine du recouvrement

$er_{\text{linA},p}^\infty(H_0^{(1)})$  ainsi que les bornes  $B_{\text{linA}}^p$  et  $B_{b,\text{linA}}^p$  et on les superpose ensuite sur la figure 3.8. L'expérience confirme l'inégalité (3.26). Du fait de la géométrie particulière de la configuration, on ne représente que trois erreurs locales car les contributions des sous-domaines 2 et 3 d'une part et 1 et 4 d'autre part sont égales. En outre, on superpose sur la figure 3.9 les bornes d'erreur  $B_{\text{linA}}^p$  et  $B_{b,\text{linA}}^p$ . L'erreur d'approximation locale de  $H_{v,\text{lin}}^{(1)}$  par  $H_{v,\text{ray}}^{(1)}$  sur chaque sous-domaine du recouvrement est donc contrôlée par  $B_{\text{linA}}^p$ . La directivité de l'erreur locale de linéarisation de l'amplitude, mise en lumière par l'inégalité (3.26) ne peut ici non plus être négligée : la précision de l'approximation dépend aussi du recouvrement et de la géométrie locale de l'obstacle. On ne peut donc pas dégager de paramètres génériques de contrôle de l'erreur aussi précis que pour la méthode barycentrique. On représente enfin l'évolution de l'erreur relative globale de l'approximation multi-rayons de  $H_0^{(1)}$ ,  $er_{\text{ray-ex}}^\infty(H_0^{(1)})$ , sur la figure 3.10. On y superpose l'erreur relative d'approximation rayon obtenue par méthode barycentre  $er_{\text{bary}}^\infty(H_0^{(1)})$  et les erreurs globales introduites à chaque étape de l'approximation multi-rayons : développement asymptotique  $er_{\text{dv}}^\infty(H_0^{(1)})$ , linéarisation de la phase  $er_{\text{lin}}^\infty(H_0^{(1)})$  et de l'amplitude  $er_{\text{linA}}^\infty(H_0^{(1)})$ . Dans la configuration de l'étude paramétrique, l'erreur de linéarisation de l'amplitude n'est pas limitante, le comportement de l'erreur est alors gouverné aux basses fréquences par l'erreur due au développement asymptotique et aux hautes fréquences par l'erreur due à la linéarisation de la phase. L'approximation multi-rayons améliore la précision et déplace la dégradation de l'erreur due à la linéarisation de la phase vers un régime plus haute fréquence que pour la méthode barycentrique.

#### d) Bilan : Analyse de l'erreur d'approximation rayon des fonctions de Hankel.

On quantifie enfin dans ce paragraphe l'erreur globale commise lors de l'approximation rayon des fonctions de Hankel  $H_v^1$ , en calculant l'erreur relative en norme infini,  $er_{\text{ray}}^\infty(H_v^{(1)})$ ,

$$er_{\text{ray}}^\infty(H_v^{(1)}) = \frac{\|H_v^{(1)} - H_{v,\text{ray}}^{(1)}\|_{\infty,\Gamma}}{\|H_v^{(1)}\|_{\infty,\Gamma}}, \quad (3.29)$$

que l'on majore par inégalité triangulaire, en introduisant les contributions à l'erreur de chacune des trois étapes de l'approximation rayon, comme au chapitre 2,

$$er_{\text{ray}}^\infty(H_v^{(1)}) \leq \left\| \frac{H_{v,\text{dv}}^{(1)}}{H_v^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \left( \left\| \frac{H_v^{(1)} - H_{v,\text{dv}}^{(1)}}{H_{v,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} + \left\| \frac{H_{v,\text{dv}}^{(1)} - H_{v,\text{lin}}^{(1)}}{H_{v,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} + \left\| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)} - H_{v,\text{ray}}^{(1)}}{H_{v,\text{lin}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \left\| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)}}{H_{v,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \right). \quad (3.30)$$

Dans le cadre de la méthode multi-centres, on calcule,

$$\left\| \frac{H_{v,\text{lin}}^{(1)}}{H_{v,\text{dv}}^{(1)}} \right\|_{\infty,\Gamma} \leq 1.$$

En reprenant (3.22), (3.25), (3.27), et en approchant le terme multiplicatif de (3.30) par 1 (voir figure 2.9 et tableau 2.5), on obtient la majoration

$$er_{\text{ray}}^\infty(H_v^{(1)}) \leq \left[ \frac{2v+1}{8kd(1-\frac{r_\Gamma}{2d})} + \sum_{p=1}^P \frac{\gamma^p}{\beta^p} \sup_{y \in \Gamma_p} |\eta_p(y) R_1^q(\rho_p; \xi_p)| + \sum_{p=1}^P \sup_{y \in \Gamma_p} \eta_p(y) \left| -\frac{\rho_p}{2} (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p) + R_1^t(\rho_p; \zeta_p) \right| \right] \quad (3.31)$$

L'analyse d'erreur et les expériences mettent en évidence la dépendance de l'erreur d'approximation locale des fonctions de Hankel à la géométrie locale de l'obstacle, le recouvrement et les fonctions de partition de l'unité. Le contrôle a priori de l'erreur en fonction du nombre de sous-domaines  $P$  est donc complexe. Cette approche améliore cependant de façon significative l'approximation rayon des fonctions de Hankel en champ proche.



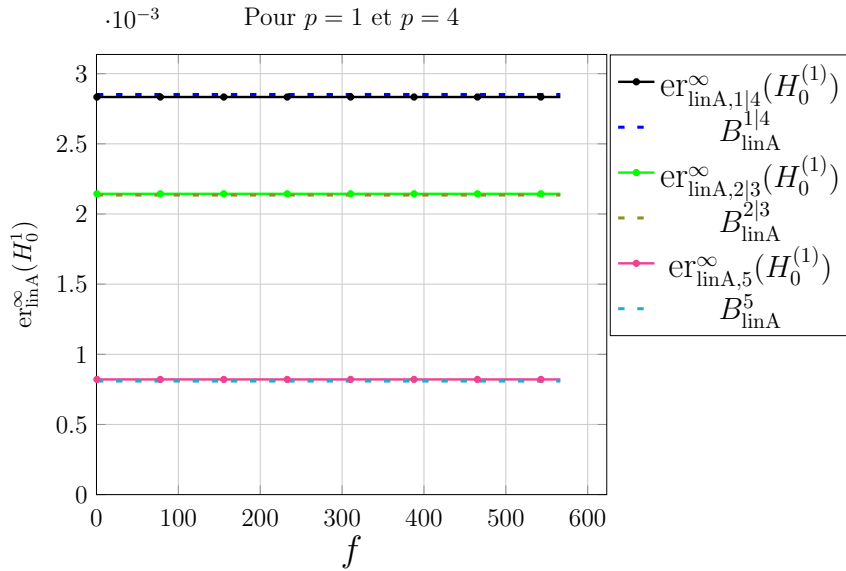


FIGURE 3.8 – Erreur relative locale d’approximation de  $H_{0,\text{lin}}^{(1)p}$  par  $H_{0,\text{ray}}^{(1)p}$  sur chaque sous-domaine en fonction de la fréquence  $f$ .

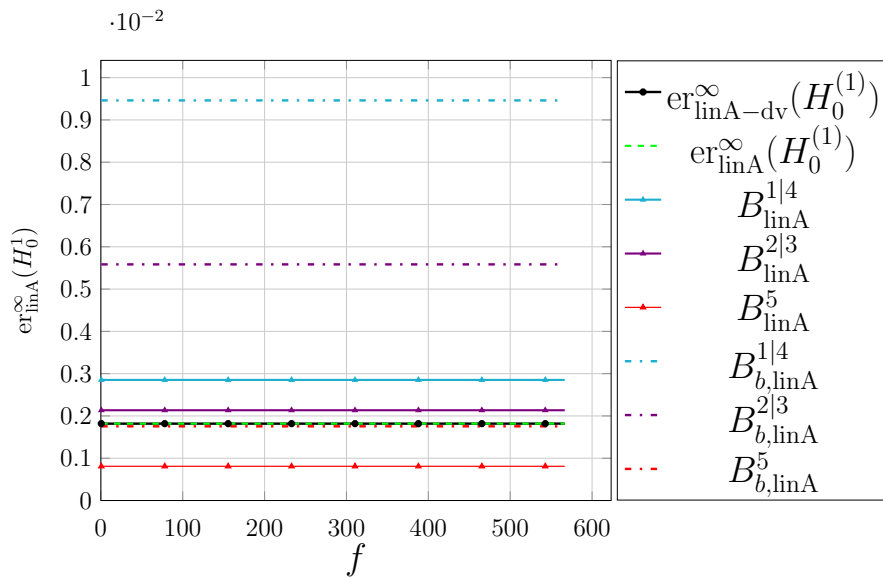


FIGURE 3.9 – Comparaison de l’erreur relative globale d’approximation multi-rayons de  $H_{0,\text{lin}}^{(1)}$  par  $H_{0,\text{ray}}^{(1)}$  aux paramètres de contrôle de l’erreur locale en fonction de la fréquence  $f$ .

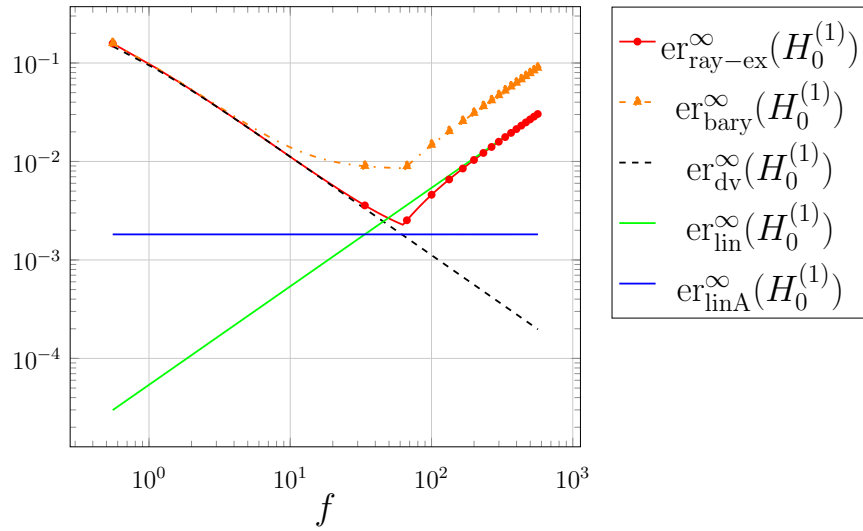


FIGURE 3.10 – Erreur relative globale d'approximation rayon de  $H_0^{(1)}$  en fonction de la fréquence  $f$ .

### 3.2.2 Approximation rayon des noyaux.

On exploite maintenant les résultats précédents d'approximation rayon des fonctions de Hankel de première espèce pour donner l'expression de l'approximation multi-rayons du noyau de Brakhage-Werner  $K$  et analyser l'erreur commise.

#### Approximation rayon du noyau $K_s$ du potentiel de simple couche.

Le noyau du potentiel de simple couche est  $i/4H_0^{(1)}$ . Son approximation rayon résulte directement de l'expression (3.21) :

$$\frac{i}{4}H_{0,\text{ray}}^{(1)}(k|x-y|) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \sum_{p=1}^P \eta_p(y) \frac{e^{ik|x-y_c^p|}}{\sqrt{|x-y_c^p|}} e^{-ik(\hat{s}^p \cdot y - y_c^p)}. \quad (3.32)$$

L'erreur relative  $\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(i/4H_0^{(1)})$  d'approximation de ce noyau vérifie donc la majoration (3.31).

#### Approximation rayon du noyau $K_d$ du potentiel de double couche.

En injectant l'approximation rayon de  $H_1^{(1)}$  dans l'expression du noyau du potentiel de double couche que l'on note  $\tilde{K}_d(x,y) = \frac{i}{4} \partial_v H_0^{(1)}(k|x-y|)$ , on décrit l'approximation rayon  $\tilde{K}_{d,\text{ray}}(x,y)$  par,

$$\tilde{K}_{d,\text{ray}}(x,y; \omega) = -ik \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \sum_{p=1}^P \eta_p(y) \frac{e^{ik|x-y_c^p|}}{\sqrt{|x-y_c^p|}} e^{-ik(\hat{s}^p \cdot y - y_c^p)} \left( \mathbf{v}(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} \right), \quad (3.33)$$

où on rappelle que  $\mathbf{v}(y)$  est la normale sortante à  $\Gamma$  en  $y$ . Cette expression n'est toutefois pas l'expression utilisée pour approcher le noyau de la formule de représentation intégrale, on introduit de plus une approximation du produit scalaire locale à chaque sous-domaine.

Dans le cadre de l'hypothèse de champ lointain, pour chaque sous-domaine on suppose  $\beta^p = \sup \rho_p \ll 1$  et par conséquent un développement de Taylor en  $\rho_p = 0$  permet d'approcher localement la direction  $\frac{x-y}{|x-y|}$

par  $\hat{s}^p = \frac{x-y_c^p}{|x-y_c^p|}$  sur chaque sous-domaine :

$$\forall y \in \Gamma_p, \quad \frac{(x-y)}{|x-y|} = \hat{s}^p + \rho_p (\hat{s}^p c_p - \hat{d}^p) + o(\rho_p), \quad c_p = (\hat{s}^p \cdot \hat{d}^p). \quad (3.34)$$

Comme  $\rho_p = \frac{|y-y_c^p|}{|x-y_c^p|} \leq \beta^p \ll 1$ , on néglige les termes d'ordre supérieur à 1 dans (3.34) et on approche la

restriction du produit scalaire sur  $\Gamma^p$ ,  $\rho_{|\Gamma^p}$ , à l'ordre 0 par :

$$\forall y \in \Gamma_p, \quad \rho_{|\Gamma^p}(y) = \mathbf{v}(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} = \tilde{\rho}_{|\Gamma^p}(y) + o(\beta^p), \quad \tilde{\rho}_{|\Gamma^p}(y) = \mathbf{v} \cdot \hat{s}^p, \quad (3.35)$$

en commettant une erreur majorée par la borne supérieure du reste d'ordre 0,  $R_0^p(\rho_p; \xi_p)$ , de (3.34) :

$$R_0^p(\rho_p; \xi_p) = p'(\xi_p)\rho_p, \quad 0 < \xi_p < \rho_p, \quad p'(\rho) = \frac{-(c_p \hat{d}^p + \hat{s}^p) \cdot \mathbf{v}(y)\rho^p + (\hat{d}^p + c_p \hat{s}^p) \cdot \mathbf{v}(y)}{(1-\rho)^{-3}}$$

qui d'après (2.40) est majoré par :  $|R_0^p| \leq 2(\beta_p + \beta_p^2)$ .

On réécrit donc dans ce cadre l'approximation onde plane du noyau du potentiel de double couche (3.33) par :

$$\forall y \in \Gamma, \quad \tilde{K}_{d,\text{ray}}(x,y;\omega) = -ik \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \sum_{p=1}^P \frac{e^{ik|x-y_c^p|}}{\sqrt{|x-y_c^p|}} \eta_p(y) e^{-ik(y-y_c^p, \hat{s}^p)} (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{s}^p). \quad (3.36)$$

Le potentiel de double couche étant proportionnel au produit de la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 1,  $H_1^{(1)}$ , l'erreur de son approximation rayon notée  $\text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d)$  fait intervenir à la fois celle de la fonction de Hankel  $H_1^{(1)}$  et celle du produit scalaire. Comme pour la méthode barycentrique, on majore l'erreur d'approximation rayon du potentiel de double couche par,

$$\begin{aligned} \text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d) &= \frac{\|K_d - \tilde{K}_d\|_{\infty, \Gamma}}{\|K_d\|_{\infty, \Gamma}} = \left\| \frac{H_1^{(1)} \mathbf{p} - H_{1,\text{ray}}^{(1)} \tilde{\mathbf{p}}}{H_1^{(1)} \mathbf{p}} \right\|_{\infty, \Gamma} \\ &\leq \left\| \frac{H_1^{(1)} - H_{1,\text{ray}}^{(1)}}{H_1^{(1)}} \right\|_{\infty, \Gamma} + \left\| \frac{H_{1,\text{ray}}^{(1)}}{H_1^{(1)} \mathbf{p}} \right\|_{\infty, \Gamma} \|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}\|_{\infty, \Gamma} \end{aligned} \quad (3.37)$$

La majoration du premier terme est donnée par (3.30). Concernant le deuxième terme, le développement (3.35) entraîne

$$\text{er}_p = \|\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \sup_{y \in \Gamma_p, \xi_p} |\eta_p(y) R_0^p(\rho_p; \xi_p)| \leq 2 \sum_{p=1}^P (\beta^p + (\beta^p)^2). \quad (3.38)$$

Par conséquent, on majore l'erreur d'approximation du noyau du potentiel de double couche comme suit,

$$\begin{aligned} \text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d) &\leq \left[ \frac{2\nu+1}{8kd(1-\frac{\nu}{2d})} + \sum_{p=1}^P \frac{\gamma^p}{2\beta^p} \sup_{y \in \Gamma_p, \xi_p} |\eta_p(y) R_1^q(\rho_p(y); \xi_p)| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^P \sup_{y \in \Gamma_p, \xi_p} |\eta_p(y) R_1^q(\rho_p; \xi_p)| \right] \\ &\quad + \frac{\|H_{1,\text{ray}}^{(1)}\|_{\infty, \Gamma}}{\|H_1^{(1)} \mathbf{p}\|_{\infty, \Gamma}} \sum_{p=1}^P \sup_{y \in \Gamma_p, \xi_p} |\eta_p(y) R_0^p(\rho_p(y); \xi_p)|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

### Approximation rayon du noyau $K$ de Brakhage-Werner.

À la lumière de la description de l'approximation rayon des noyaux des potentiels de simple et double couche, on définit l'approximation rayon du noyau  $K$  de la formule de représentation intégrale de Brakhage-Werner par,

$$\forall y \in \Gamma, \quad \tilde{K}(x,y;\omega) = -ik \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \sum_{p=1}^P \frac{e^{ik|x-y_c^p|}}{\sqrt{|x-y_c^p|}} \eta_p(y) e^{-ik(y-y_c^p, \hat{s}^p)} (\hat{s}^p \cdot \mathbf{v}(y) + 1). \quad (3.40)$$

On a vu au chapitre 2 que la précision de l'approximation champ lointain du champ diffracté est directement liée à la précision de  $K$  par  $\tilde{K}$ , qu'il est donc utile d'estimer a priori. Cette erreur est contrôlée selon l'inégalité (2.49) :

$$\begin{aligned} \text{er}_K = \|K - \tilde{K}\|_{\infty, \Gamma} &\leq \|K_d\|_{\infty, \Gamma} \frac{\|K_d - \tilde{K}_d\|_{\infty, \Gamma}}{\|K_d\|_{\infty, \Gamma}} + \|K_s\|_{\infty, \Gamma} \left\| \frac{K_s - \tilde{K}_s}{K_s} \right\|_{\infty, \Gamma}, \\ &\leq \|K_d\|_{\infty, \Gamma} \text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(K_d) + \|K_s\|_{\infty, \Gamma} \text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(K_s). \end{aligned} \quad (3.41)$$

On a jusqu'ici étudié les approximations nécessaires à l'approximation de champ lointain de l'onde incidente cylindrique et des noyaux des potentiels de simple et double couche. On rassemble ces résultats pour décrire dans le prochain paragraphe l'obtention du coefficient de diffraction.

### 3.2.3 Construction de l'opérateur de diffraction

La méthode hybride résout le problème de diffraction par la méthode des équations intégrales, par conséquent elle résout d'abord le problème surfacique (3.6) équivalent puis évalue le champ diffracté en tout point du domaine de propagation en appliquant la formule de représentation intégrale à la solution du problème surfacique. Sa version multi-centres s'appuie sur un partitionnement du défaut qui découple le rôle de chaque sous-domaine du recouvrement en émission et réception dans l'hypothèse de champ lointain afin de permettre une représentation multi-rayons des champs incident et diffracté.

Lorsque source et récepteur sont dans la zone de champ lointain de chaque partition,  $x_s, x_r \in \mathcal{Z}^p$  pour  $p = 1, \dots, P$  où  $\mathcal{Z}^p$  est définie par (3.13), on approche d'une part le champ incident sur chaque sous-domaine par le linéarisé de l'unique rayon issu de la source et propagé vers son centre  $y_c^q$  dans la direction  $\hat{s}^q$  en  $y_c^q$ , avec une amplitude complexe  $B_q^s(y_c^q; x_s) = A_q^s(y_c^q; x_s) e^{ik\Phi_q^s(y_c^q; x_s)}$  :

$$\tilde{u}^i(y) = \sum_{q=1}^P \eta_q(y) B_q^s(y_c^q; x_s) e^{ik\hat{s}^q \cdot (y - y_c^q)}. \quad (3.42)$$

et d'autre part, le champ diffracté au point d'observation comme la somme des contributions des  $P$  sous-domaines au rayonnement de la solution surfacique dans le domaine de propagation,

$$u(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P \int_{\Gamma} \eta_p(y) K(x, y; \omega) \Psi(y) dS(y). \quad (3.43)$$

Sous l'hypothèse de champ lointain, la contribution du noyau à chaque sous-domaine  $\Gamma_p$ ,  $\eta_p K$ , peut être approchée par son approximation champ lointain locale  $\eta_p \tilde{K}^p$ , et l'approximation rayon du champ diffracté au point  $x_r$  s'écrit :

$$\tilde{u}(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P \frac{e^{ik|x_r - y_c^p|}}{\sqrt{|x_r - y_c^p|}} \sum_{q=1}^P B_q^s(y_c^q; x_s) \mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega). \quad (3.44)$$

Le champ diffracté s'interprète alors en milieu homogène comme un train d'onde de rayons issus du centre de chaque sous-domaine, propagés vers le point d'observation dans la direction  $\hat{r}^p = \frac{x_r - x_c^p}{|x_r - x_c^p|}$  respectivement avec une amplitude pondérée par des coefficients  $\mathcal{R}_q^p$ , définis pour la reformulation de l'équation d'Helmholtz avec condition aux bords de Dirichlet homogène, par équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner par

$$\mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} \eta_p(y) e^{-ik(y - y_c^p, \hat{r}^p)} (\hat{r}^p \cdot \mathbf{v}(y) + 1) \tilde{\Psi}^q(y) dS(y). \quad (3.45)$$

Ces coefficients, appelés coefficient de diffraction, évaluent la contribution de chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  au rayonnement de la perturbation du champ incident reçu par le sous-domaine  $\Gamma_q$ . Son expression dépend du formalisme que l'on choisit pour reformuler le problème traité, et des conditions aux limites. On donne ici, en restant fidèle aux conventions exposées au 1.4, la définition analytique du coefficient de diffraction associé au couple de sous-domaines  $(p, q)$  pour chaque type de conditions aux limites (Dirichlet ou Neumann homogène) associées à l'équation de Helmholtz en 2D,

- Condition de Dirichlet homogène,

- Formulation EFIE/MFIE/CFIE,

$$\mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega) = \sqrt{\frac{i}{8k\pi}} \int_{\Gamma} \eta_p(y) \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] (y; \hat{s}^q) e^{-ik(\hat{r}^p \cdot (y - y_c^p))} dS(y)$$

où  $\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  est solution d'une des équations intégrales directes (1.74),(1.75),(1.78).

- Formulation Brackage-Werner,

$$\mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} \eta_p(y) \Psi(y; \hat{s}^q) (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}^p + 1) e^{-ik(\hat{r}^p \cdot (y - y_c^p))} dS(y)$$

où  $\Psi = [u] = ik \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  est solution de l'équation intégrale indirecte (1.83).

- Condition de Neumann homogène,

- Formulation EFIE/MFIE/CFIE,

$$\mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} \eta_p(y) [u](y; \hat{s}^q) \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}^p e^{-ik(\hat{r}^p \cdot (y - y_c^p))} dS(y)$$

où  $[u]$  est solution d'une des équations intégrales directes (1.79),(1.80),(1.81).

- Formulation Brackage-Werner, où  $\Psi = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = ik [u]$ ,

$$\mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega) = -\sqrt{\frac{i}{8k\pi}} \int_{\Gamma} \eta_p(y) \Psi(y; \hat{s}^q) (k^2 \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}^p + 1) e^{-ik(\hat{r}^p \cdot (y - y_c^p))} dS(y)$$

où  $\Psi = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = ik [u]$  est solution de l'équation intégrale indirecte (1.85).

En pratique et en particulier pour la propagation en milieu inhomogène, la détermination de la trajectoire de ces rayons ainsi que l'évolution de leur phase et la décroissance de leur amplitude au cours de leur propagation sont obtenues par la méthode des rayons. On calcule l'approximation de (3.46) sous la forme,

$$\tilde{u}(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P B_p^r(x_r; y_c^p) \sum_{q=1}^P B_q^s(y_c^q; x_s) \mathcal{R}_q^p(\hat{r}^p, \hat{s}^q; \omega), \quad (3.46)$$

où  $B_p^r(x_r; y_c^p) = A_p^r(x_r; y_c^p) e^{ik\phi_p^r(y_c^p; x_r)}$  et les quantités  $(A_p^r, \phi_p^r)$  et  $(A_q^s, \phi_q^s)$  sont calculées comme les solutions du système de tracé de rayons,

$$\begin{cases} |\nabla \phi_p^{s/r}| = 1/c, \\ \nabla \phi_p^{s/r} \cdot \nabla A_p^{s/r} + 2A_p^{s/r} \Delta \phi_p^{s/r} = 0, \\ \phi_p^s(x_s) = 0, \quad A_p^s(x_s) = \hat{W}_s(\omega) \\ \phi_p^r(y_c^p) = 0, \quad A_p^r(y_c^p) = 1. \end{cases} \quad (3.47)$$

### 3.3 Expérience numérique : calcul de la diffraction 2D par la méthode multi-centres

Dans cette section on teste les performances de la méthode multi-centres sur des expériences numériques. On commence par valider la méthode sur le cas du cercle et on montre que l'on peut grâce à un partitionnement suffisant retrouver une bonne précision du calcul du champ diffracté lorsque la méthode barycentrique est en défaut. On étudie ensuite le comportement de la méthode pour des cas de diffraction par une géométrie de contour non strictement convexe.

### 3.3.1 Validation de la méthode dans le cadre de la mise en défaut de la méthode barycentrique : cas du cercle

On cherche à valider la méthode multi-centres sur la configuration de diffraction par un disque décrite en 2.4 qui met en défaut la méthode barycentrique : on cherche à calculer le champ diffracté sur une couronne de récepteurs placés autour du disque diffractant ici de diamètre  $r_\Gamma = 1.5\lambda$ , entre  $5\lambda$  et  $105\lambda$  de son barycentre  $y_c$ , pour une onde incidente cylindrique émise depuis une source ponctuelle  $x_s$  placée à  $120\lambda$  de  $y_c$ . Le milieu est supposé homogène. L'onde incidente est propagée sous forme de son approximation multi-rayons (3.4) où l'amplitude complexe de propagation rayon est calculée analytiquement.

On commence par rappeler les résultats du calcul du champ diffracté par la méthode barycentrique puis on met en œuvre la méthode multi-centres pour différentes valeurs de  $P$ .

#### 3.3.1.1 Calcul par la méthode barycentrique

Comme expliqué au chapitre 2, l'erreur finale sur le champ diffracté est due à la somme de deux erreurs : l'erreur d'approximation rayon du champ incident et celle du noyau  $K$  de la formule de représentation intégrale. On expose dans la section 2.4.3 les résultats de la précision du calcul du champ diffracté par la méthode barycentrique. L'estimation a priori de l'erreur prévoit pour cette configuration de diffraction, une erreur maximale d'approximation du champ diffracté de l'ordre de  $10^{-1}$ , causée par l'approximation de  $K$ . La mesure de l'erreur au cours de l'expérience donne en effet une erreur maximale de champ diffracté de  $3,88 \times 10^{-1}$  alors que l'erreur maximale d'approximation multi-rayons du champ incident est mesurée à  $1,46 \times 10^{-2}$ . La méthode barycentrique est en défaut en champ proche car les hypothèses de champ lointain ne sont plus vérifiées.

L'objectif de la méthode multi-centres est d'améliorer l'erreur d'approximation du champ diffracté dans la zone de champ proche sans dégrader le calcul dans la zone de champ lointain. On décrit dans le prochain paragraphe les résultats obtenus par application de la méthode multi-centres à cette configuration de diffraction.

#### 3.3.1.2 Calcul par la méthode multi-centres

On se donne une partition de l'unité basée sur la répartition angulaire uniforme des  $P$  centres de partition  $y_c^p$  sur l'obstacle. On fait varier  $P$  entre 3 et 40 et on analyse l'influence de ce partitionnement sur la précision de l'approximation des champs incidents et diffractés. L'introduction du partitionnement fait diminuer la taille des segments de courbes sur lesquels on réalise les approximations de champ lointain selon le principe de la méthode barycentrique. On s'attend à ce que le partitionnement du contour de l'obstacle améliore à la fois la prise en compte de la géométrie diffractante dans la zone de champ lointain, et l'approximation rayon des champs incident et diffracté au voisinage du défaut. À titre indicatif, on donne dans le tableau 3.1 le rapport diamètre de l'obstacle-taille du sous domaine,  $r_\Gamma/r_p = \gamma/\gamma^p$ , pour ces valeurs de  $P$ . Le ratio varie entre 1,15 et 12,7.

On expose maintenant les résultats de mesure d'erreur à chaque étape de la méthode multi-centres : approxi-

$P$	3	4	6	8	10	12	16	20	30	40
$r_\Gamma/r_p$	1,15	1,41	2	2,61	3,23	3,86	5,12	6,39	9,5	12,7
$\gamma^p/(2\pi)$	1,30	1,06	0,75	0,57	0,46	0,38	0,29	0,23	0,16	0,12

TABLE 3.1 – Tableau indicatif de la taille  $r_p$  de chaque sous-domaine relativement à la taille caractéristique de l'obstacle  $r_\Gamma$

mation du champ incident, résolution du problème surfacique, évaluation du champ diffracté ; puis on tente d'en dégager les principales tendances.

#### Approximation du champ incident

On présente en figure 3.11 l'évolution de l'erreur d'approximation multi-rayons du champ incident sur le défaut pour 3 recouvrements de  $\Gamma$  ( $P = 8$ ,  $P = 16$  et  $P = 40$ ). La distribution de l'erreur en fonction de  $\theta$  est

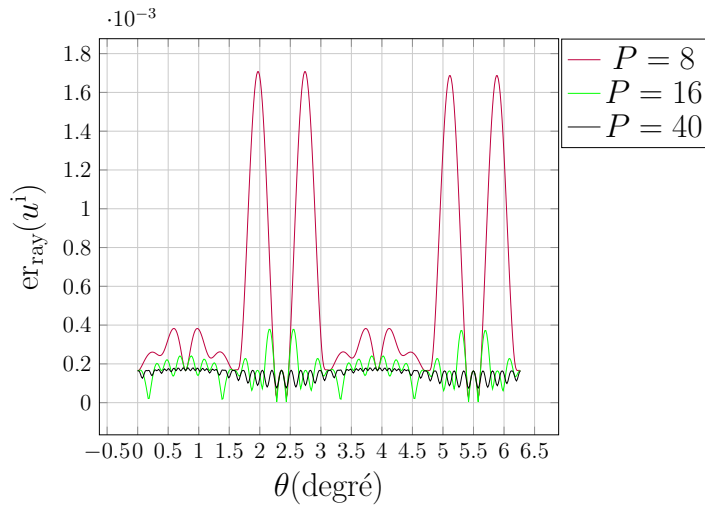


FIGURE 3.11 – Évolution de l’erreur d’approximation multi-rayons de l’onde incidente en fonction de  $\theta$  sur le cercle, pour plusieurs recouvrements.

P	0	3	4	6	8	10
$er_{\text{ray}}^{\infty}(u_i)$	$1,45 \times 10^{-2}$	$1,05 \times 10^{-2}$	$7,3 \times 10^{-3}$	$3,32 \times 10^{-3}$	$1,70 \times 10^{-3}$	$1,22 \times 10^{-3}$
P	12	16	18	20	30	40
$er_{\text{ray}}^{\infty}(u_i)$	$8,32 \times 10^{-4}$	$3,77 \times 10^{-4}$	$2,78 \times 10^{-4}$	$2,17 \times 10^{-4}$	$1,90 \times 10^{-4}$	$1,79 \times 10^{-4}$

TABLE 3.2 – Maximum d’erreur relative d’approximation multi-rayons du champ incident en fonction du nombre de sous-domaines.

complexe, pour la décrire, on se concentre d’abord sur la courbe  $P = 8$ , pour laquelle le phénomène est le plus marqué : l’erreur atteint un minimum local au centre de chaque sous-domaine, et augmente entre chaque centre. On remarque de plus que la variation d’amplitude de l’erreur entre minima locaux diminue lorsque  $P$  augmente.

On relève dans le tableau 3.2 le maximum d’erreur relative sur  $\Gamma$  due à l’approximation multi-rayons du champ incident pour un nombre croissant de sous-domaines  $P$ . Lorsque  $P$  augmente, la taille des sous-domaines diminue et l’erreur globale décroît vers une asymptotique de l’ordre de  $10^{-4}$ , comme on l’observe sur la figure 3.12.

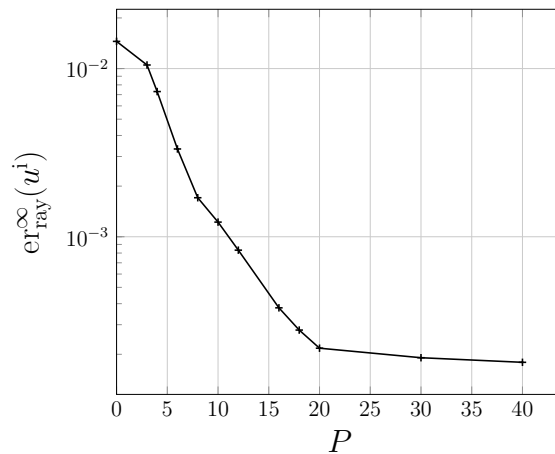


FIGURE 3.12 – Évolution du maximum d’erreur relative d’approximation multi-rayons du champ incident en fonction de  $P$ . Cas du disque de rayon  $r_{\Gamma} = 0.75\lambda$ .

### Influence de l'erreur d'approximation du champ incident sur la solution du problème surfacique

On s'intéresse ici à la transmission de l'erreur relative d'approximation multi-rayons du champ incident à la solution du problème de surface. On calcule, pour différents recouvrements de l'obstacle  $\Gamma$ , la solution du problème surfacique pour un second membre exact et un second membre approché et on calcule l'erreur relative entre ces deux solutions. Cette erreur est représentée en fonction de  $\theta$  sur la figure 3.13 pour  $P = 8$ ,  $P = 16$ ,  $P = 40$ . On remarque le même comportement oscillant que pour l'erreur relative du champ incident. On relève dans le tableau 3.3 les erreurs relatives locales et globales de la solution du problème surfacique. On gagne plus d'un ordre de grandeur sur la précision du calcul de la solution du problème surfacique entre le cas  $P = 3$  et  $P = 40$ . On illustre ce tableau sur la figure 3.14. Comme pour le champ incident, l'approximation de la solution surfacique est d'autant meilleure que  $P$  augmente.

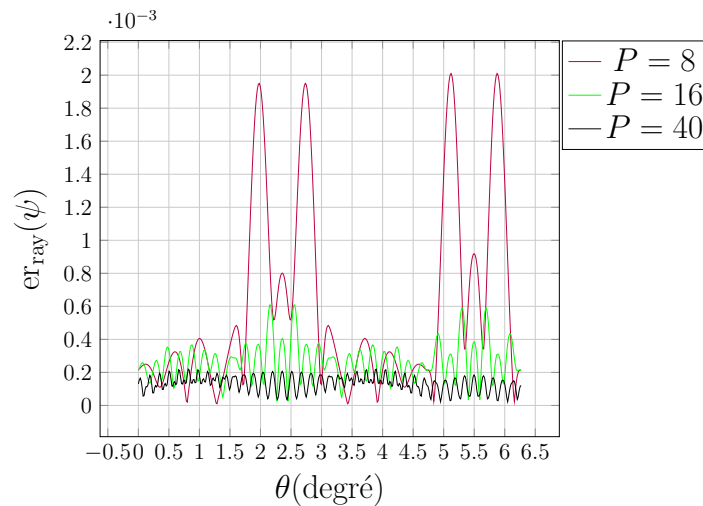


FIGURE 3.13 – Évolution de l'erreur d'approximation de la solution au problème surfacique en fonction de  $\theta$  sur le cercle, pour plusieurs recouvrements.

P	0	3	4	6	8	10
$er_{ray}^{\infty}(\Psi)$	$1,32 \times 10^{-2}$	$8,6 \times 10^{-3}$	$6,7 \times 10^{-3}$	$3,27 \times 10^{-3}$	$2,62 \times 10^{-3}$	$1,64 \times 10^{-3}$
P	12	16	18	20	30	40
$er_{ray}^{\infty}(\Psi)$	$1,22 \times 10^{-3}$	$6,08 \times 10^{-4}$	$4,72 \times 10^{-4}$	$3,61 \times 10^{-4}$	$2,57 \times 10^{-4}$	$2,19 \times 10^{-4}$

TABLE 3.3 – Maximum d'erreur relative d'approximation de la solution du problème surfacique en fonction du nombre de sous-domaines.

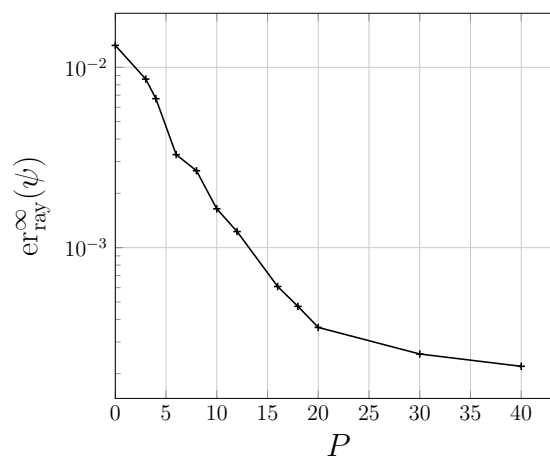


FIGURE 3.14 – Évolution du maximum d'erreur relative d'approximation de la solution au problème surfacique sur le cercle en fonction de  $P$ .



### Approximation du champ diffracté au récepteur

On termine enfin en s'intéressant à l'évolution de l'erreur d'approximation du champ diffracté en fonction du nombre de sous-domaines du recouvrement. On relève le maximum et le minimum d'erreur relative d'approximation du champ diffracté qui sont respectivement atteints à  $5\lambda$  et à  $105\lambda$  du barycentre de l'obstacle. On rassemble ces mesures dans le tableau 3.4 et on visualise l'évolution du maximum et du minimum de l'erreur d'approximation multi-rayons du champ diffracté sur la figure 3.15. Cette courbe permet ainsi de se rendre compte de l'évolution de l'erreur en champ proche et en champ lointain.

P	0	3	4	6	8	10
$\max(\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(u))$	$1,76 \times 10^{-1}$	$9,64 \times 10^{-2}$	$6,76 \times 10^{-2}$	$2,68 \times 10^{-2}$	$2,09 \times 10^{-2}$	$1,11 \times 10^{-2}$
$\min(\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(u))$	$1,44 \times 10^{-4}$	$1,54 \times 10^{-5}$	$3,12 \times 10^{-6}$	$1,26 \times 10^{-5}$	$9,93 \times 10^{-6}$	$1,80 \times 10^{-6}$
P	12	16	18	20	30	40
$\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(u)$	$8,00 \times 10^{-3}$	$5,77 \times 10^{-3}$	$5,33 \times 10^{-3}$	$5,01 \times 10^{-3}$	$4,24 \times 10^{-3}$	$4,58 \times 10^{-3}$
$\text{er}_{\text{ray}}^{\infty}(u)$	$2,15 \times 10^{-6}$	$2,46 \times 10^{-6}$	$1,13 \times 10^{-6}$	$2,41 \times 10^{-6}$	$6,74 \times 10^{-6}$	$8,31 \times 10^{-6}$

TABLE 3.4 – Maximum et minimum d'erreur relative du champ diffracté pour différents recouvrements.

On constate une amélioration globale de la précision de l'approximation multi-rayons du champ diffracté en champ proche lorsque  $P$  augmente. La précision de l'approximation du champ diffracté gagne un ordre de grandeur par rapport au résultat de la méthode barycentrique ( $P = 0$ ) pour  $P = 10$ , puis l'erreur diminue encore de près d'un ordre lorsqu'on raffine la subdivision jusqu'à  $P = 40$ . En champ lointain, on observe une amélioration globale d'un peu plus d'un ordre de grandeur de la précision du champ diffracté par rapport à la méthode barycentrique, avec une précision minimale en champ lointain de  $1,13 \times 10^{-6}$  pour  $P = 18$ . La décroissance observée n'est cependant pas régulière et la précision se dégrade lorsque  $P$  est trop grand :  $P \leq 20$ . La figure 3.15 illustre le gain en précision qu'autorise la méthode multi-centres pour le calcul du champ diffracté en champ proche, mais met aussi en relief que, pour  $P \geq 20$ , il devient négligeable en champ proche, alors que la précision se dégrade en champ lointain et le temps de calcul augmente quadratiquement avec  $P$ , comme on le verra au chapitre 4.

On visualise enfin l'approximation multi-rayons du champ diffracté et son erreur relative par rapport à la solution de référence calculée par la méthode de Nyström pour  $P = 8$ ,  $P = 18$  et  $P = 40$  sur les figures 3.16, 3.17, 3.18.

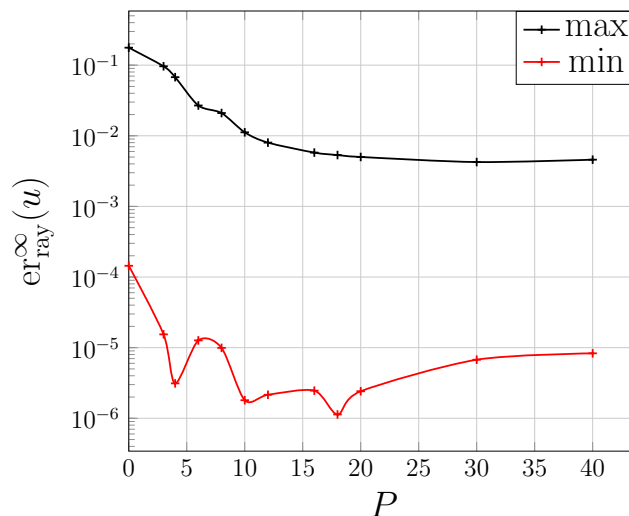


FIGURE 3.15 – Évolution du maximum et du minimum de l'erreur d'approximation multi-rayons du champ diffracté en fonction de  $P$ . Cas du disque de rayon  $0.75\lambda$ .

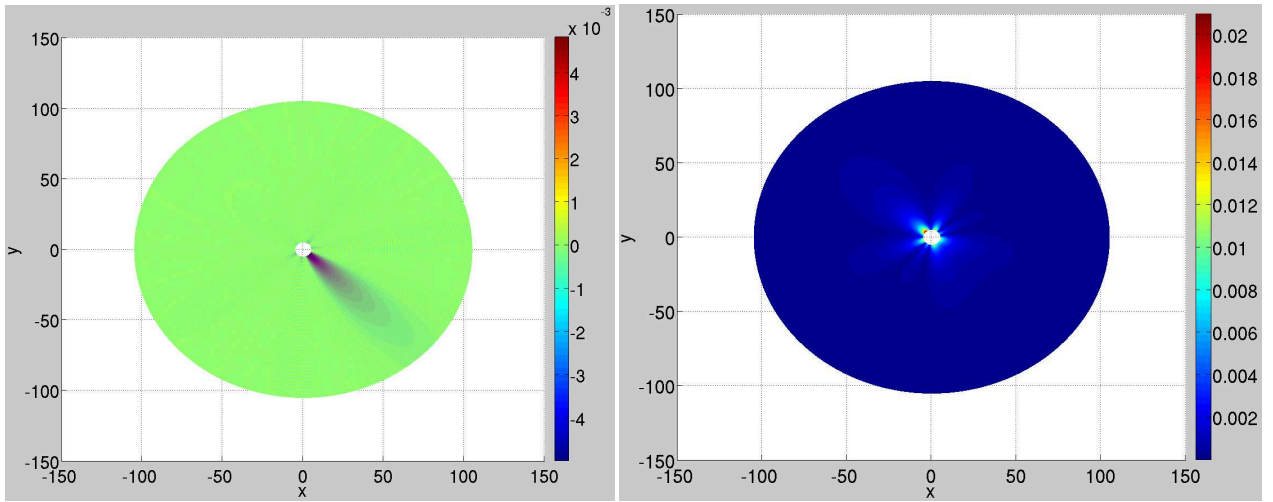


FIGURE 3.16 – Carte de champ diffracté et erreur relative de l’approximation multi-rayons du champ diffracté relativement à la solution exacte pour le disque de rayon  $0.75\lambda$ ,  $P = 8$ .

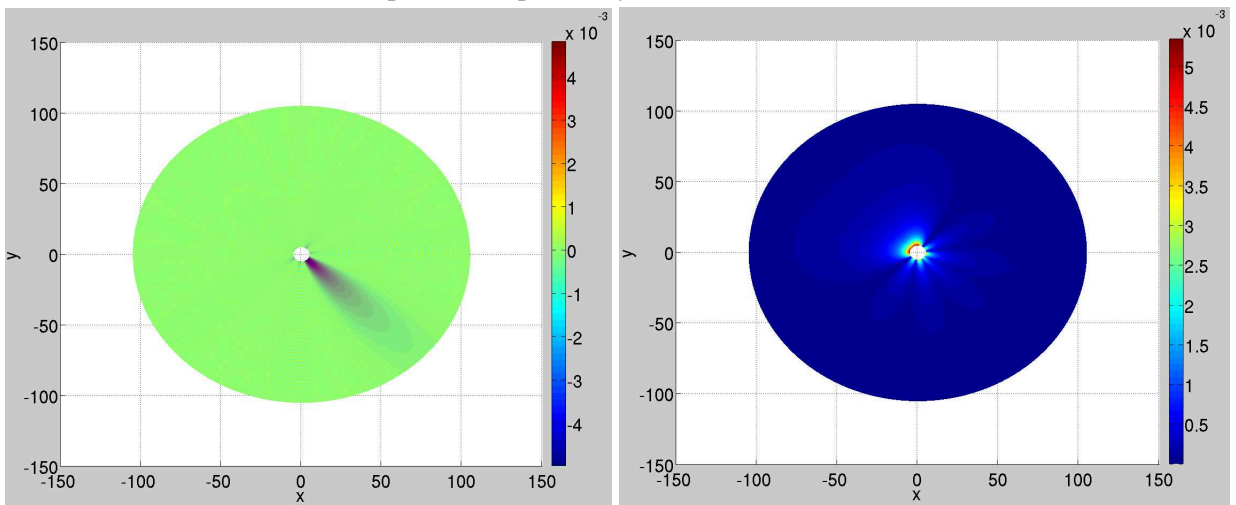


FIGURE 3.17 – Carte de champ diffracté et erreur relative de l’approximation multi-rayons du champ diffracté relativement à la solution exacte pour le disque de rayon  $0.75\lambda$ ,  $P = 18$ .

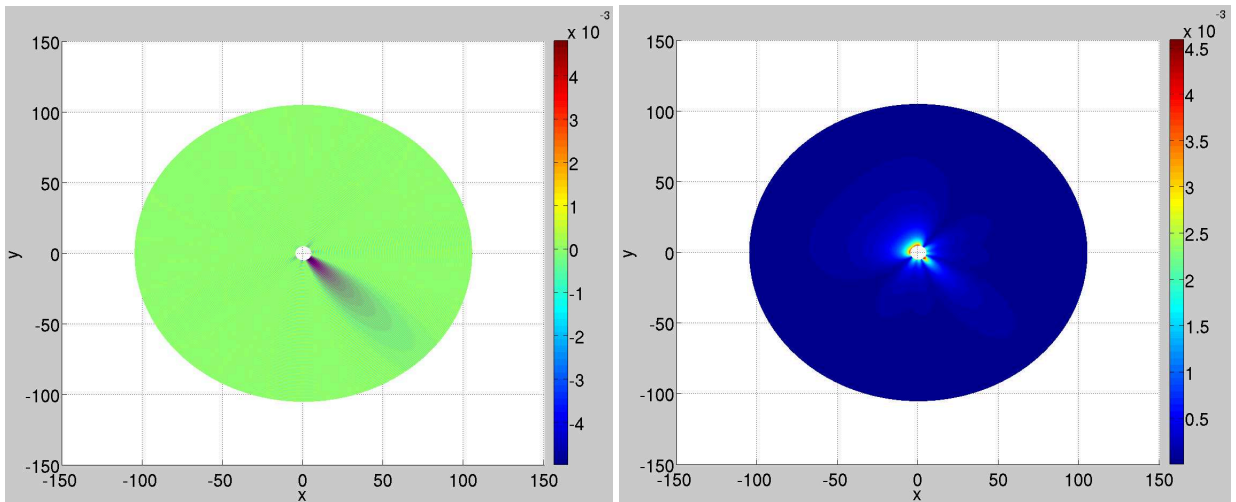


FIGURE 3.18 – Carte de champ diffracté et erreur relative de l’approximation multi-rayons du champ diffracté relativement à la solution exacte pour le disque de rayon  $0.75\lambda$ ,  $P = 40$ .

### 3.3.2 Méthode multi-centres et géométrie non strictement convexe : cas du cerf-volant

La méthode hybride s'applique dans sa version barycentrique et multi-centres à des géométries non strictement convexes. On illustrera ici la méthode multi-centres pour le calcul de la diffraction par un cerf-volant de taille caractéristique  $1,5\lambda$ .

On mène ici la même étude d'erreur en fonction du nombre de sous-domaines du recouvrement que dans le cas du cercle. La subdivision dans ce cas ne découpe pas l'obstacle en sous-domaines de taille égale. On donne à titre indicatif, dans le tableau 3.5, le minimum et maximum du ratio  $r_p/\lambda$  pour les recouvrements que l'on utilise pour les expériences présentées ici.

La colonne  $P = 0$  désigne par la suite les résultats relatifs à la méthode barycentrique.

P	4	8	10	12	16	18	20	30	40
$\max(r_p/\lambda)$	1,23	0,64	0,60	0,51	0,38	0,35	0,31	0,21	0,16
$\min(r_p/\lambda)$	0,68	0,19	0,26	0,12	0,1	0,0812	0,089	0,051	0,036

TABLE 3.5 – Tableau indicatif de la taille  $r_p$  de chaque sous-domaine relativement à la longueur d'onde.

#### Approximation du champ incident

Pour étudier l'erreur d'approximation multi-rayons du champ incident en fonction de  $P$ , on relève d'abord dans le tableau 3.6 l'erreur maximale sur  $\Gamma$  pour différents recouvrements, puis on visualise le comportement de cette erreur sur la figure 3.19 pour trois configurations,  $P = 8$ ,  $P = 16$ ,  $P = 40$ . On trace enfin sur la figure 3.20 l'évolution du maximum d'erreur relative d'approximation multi-rayons du champ incident.

On observe une amélioration progressive de l'approximation lorsque le nombre de sous-domaines augmente. En particulier, on gagne comme dans le cas du cercle deux ordres de grandeur dans la précision de l'approximation pour  $P = 40$  relativement à l'approximation barycentrique. On remarque en outre sur la figure 3.19 le même comportement de l'erreur que pour le cercle : l'erreur atteint des minima locaux aux centres de chaque sous-domaine, mais la variation d'amplitude de l'erreur sur chaque demi sous-domaine s'atténue pour une subdivision plus fine de l'obstacle.

P	0	3	4	6	8	10
$er_{\text{ray}}^{\infty}(u^i)$	$1,33 \times 10^{-2}$	$1,12 \times 10^{-2}$	$9,32 \times 10^{-3}$	$4,97 \times 10^{-3}$	$2,55 \times 10^{-3}$	$1,89 \times 10^{-3}$
P	12	16	18	20	30	40
$er_{\text{ray}}^{\infty}(u^i)$	$1,43 \times 10^{-3}$	$7,19 \times 10^{-4}$	$5,37 \times 10^{-4}$	$4,31 \times 10^{-4}$	$2,05 \times 10^{-4}$	$1,87 \times 10^{-4}$

TABLE 3.6 – Relevé des erreurs relatives maximales d'approximation multi-rayons du champ incident sur l'obstacle pour différentes valeurs de  $P$ .

#### Approximation de la solution surfacique

On s'intéresse maintenant à la précision de la solution du problème surfacique suite à l'approximation du champ incident. On calcule la solution de l'équation intégrale (2.55) pour un second membre exact et approché, puis on mesure l'erreur relative entre les deux,  $er_{\text{ray}}^{\infty}(\Psi)$ . On rassemble les maxima de cette erreur relative pour différents raffinements du recouvrement dans le tableau 3.7. On superpose ensuite l'erreur relative ponctuelle sur  $\Gamma$  pour  $P = 8$ ,  $P = 16$  et  $P = 40$  sur la figure 3.21. On observe que cette erreur décroît avec le même comportement que l'erreur d'approximation du champ incident. On trace enfin l'évolution du maximum d'erreur relative d'approximation du champ incident sur  $\Gamma$  en fonction de  $P$  sur la figure 3.22 afin de visualiser les résultats du tableau 3.7. On observe sur ce graphe une décroissance globale non linéaire de l'erreur lorsque  $P$  augmente.

#### Approximation du champ diffracté

On s'intéresse enfin à l'influence de la subdivision de  $\Gamma$  sur la précision du calcul multi-rayons du champ diffracté. On relève les maxima et minima d'erreur relative d'approximation du champ diffracté par rapport à la solution de référence obtenue par BEM (méthode de Nyström), qui sont souvent atteints respectivement

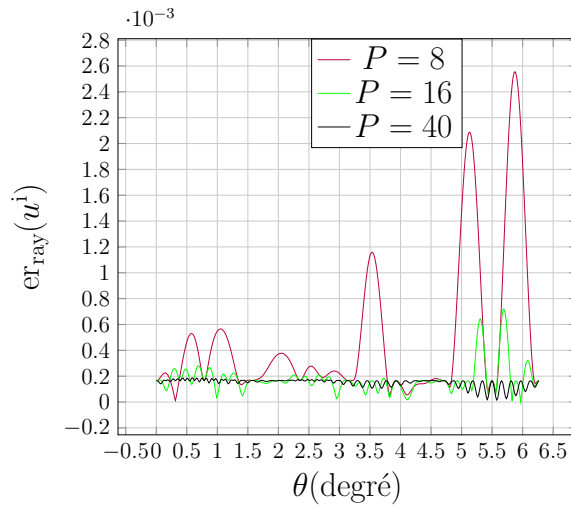


FIGURE 3.19 – Évolution de l’erreur d’approximation du champ incident en fonction de  $\theta$  sur le cerf-volant pour  $P = 8$ ,  $P = 16$ ,  $P = 40$ .

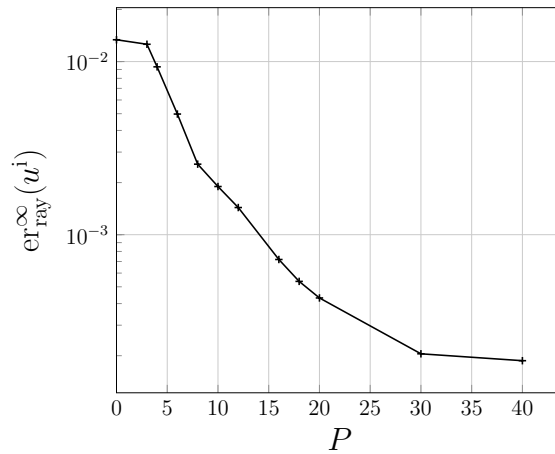


FIGURE 3.20 – Évolution du maximum de l’erreur relative d’approximation multi-rayon du champ incident en fonction de  $P$ , cas du cerf-volant.

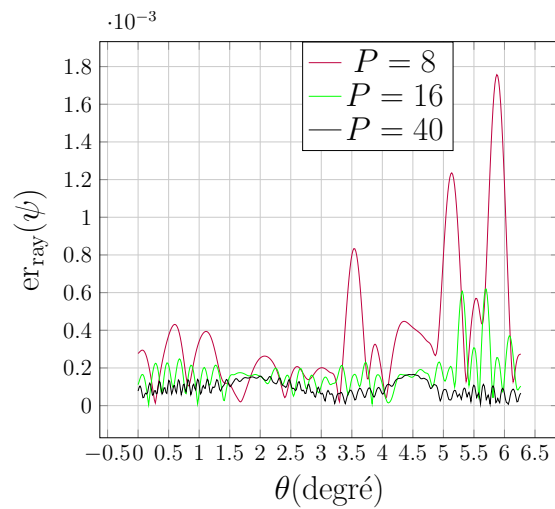


FIGURE 3.21 – Évolution de l’erreur relative de la solution surfacique en fonction de  $\theta$  sur le cerf-volant pour  $P = 8$ ,  $P = 16$  et  $P = 40$ .

à  $5\lambda$  et  $105\lambda$  du barycentre de l’obstacle. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 3.8 et on visualise

P	0	3	4	6	8	10
$er_{ray}^{\infty}(\Psi)$	$1,11 \times 10^{-2}$	$5,61 \times 10^{-3}$	$4,75 \times 10^{-3}$	$2,67 \times 10^{-3}$	$1,75 \times 10^{-3}$	$1,28 \times 10^{-3}$
P	12	16	18	20	30	40
$er_{ray}^{\infty}(\Psi)$	$1,06 \times 10^{-3}$	$6,18 \times 10^{-4}$	$5,13 \times 10^{-4}$	$4,22 \times 10^{-4}$	$1,65 \times 10^{-4}$	$1,65 \times 10^{-4}$

TABLE 3.7 – Relevé des erreurs relatives maximales introduites sur la solution du problème surfacique par l'approximation rayon du champ incident.

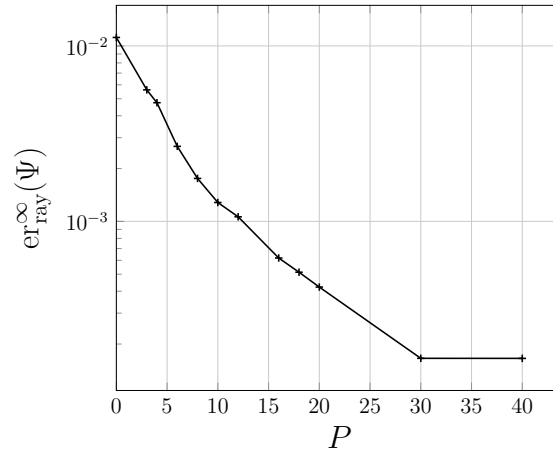


FIGURE 3.22 – Évolution de l'erreur relative d'approximation de la solution de l'équation intégrale sur le cerf-volant.

l'évolution du maximum et du minimum de l'erreur sur la figure 3.23. On observe une décroissance globale de l'erreur d'approximation du champ diffracté à la fois en champ proche (max) et en champ lointain (min). Plus précisément, en champ proche, l'erreur décroît d'un peu plus d'un ordre de grandeur puis atteint un palier. Pour  $P \leq 20$ , l'erreur décroît peu et se dégrade même légèrement à partir de  $P = 40$ . En champ lointain, l'erreur se dégrade lorsque le partitionnement est insuffisant. En particulier, on ne remarque une amélioration de l'erreur par rapport au calcul par méthode barycentrique qu'au delà de 10 sous domaines  $P \leq 10$ . Sur la portion  $P \leq 10$ , l'erreur ne décroît pas strictement. On relève enfin un gain d'un peu moins d'un ordre de grandeur par rapport à la méthode barycentrique pour  $P = 40$ , comme dans le cas du cercle. On visualise enfin la carte de champ diffracté et son erreur relative sur la couronne pour  $P = 8$ ,  $P = 18$  et  $P = 40$  sur une couronne entre  $5\lambda$  et  $105\lambda$  respectivement sur les figures 3.24, 3.25 et 3.26.

P	0	3	4	6	8	10
$\max(er_{ray}^{\infty}(u))$	$1,25 \times 10^{-1}$	$1,05 \times 10^{-1}$	$6,61 \times 10^{-2}$	$3,25 \times 10^{-2}$	$1,68 \times 10^{-2}$	$9,67 \times 10^{-3}$
$\min(er_{ray}^{\infty}(u))$	$7,17 \times 10^{-6}$	$7,08 \times 10^{-3}$	$3,17 \times 10^{-5}$	$8,07 \times 10^{-6}$	$1,76 \times 10^{-5}$	$4,15 \times 10^{-6}$
P	12	16	18	20	30	40
$er_{ray}^{\infty}(u)$	$6,99 \times 10^{-3}$	$4,67 \times 10^{-3}$	$4,27 \times 10^{-3}$	$4,08 \times 10^{-3}$	$3,95 \times 10^{-3}$	$4,11 \times 10^{-3}$
$er_{ray}^{\infty}(u)$	$4,05 \times 10^{-6}$	$6,85 \times 10^{-7}$	$2,39 \times 10^{-6}$	$1,63 \times 10^{-6}$	$1,00 \times 10^{-6}$	$9,01 \times 10^{-7}$

TABLE 3.8 – Minimum et maximum de l'erreur relative de champ diffracté relativement à la solution BEM pour différents P.

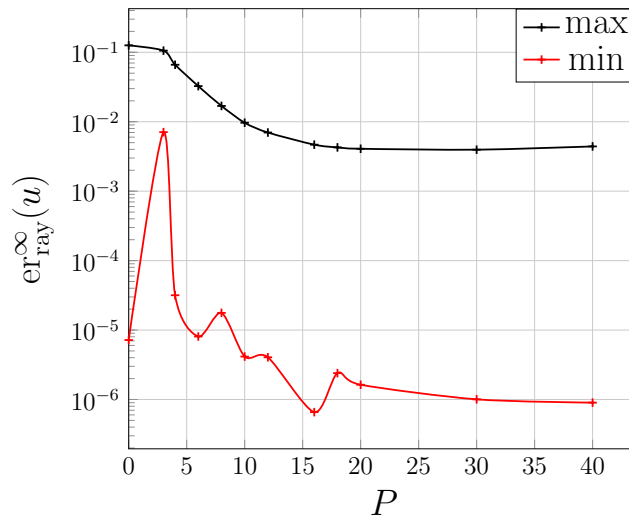


FIGURE 3.23 – Évolution de l’erreur d’approximation multi-rayons du champ diffracté en fonction du nombre  $P$  de sous-domaines du recouvrement  $P$  en le champ proche ( $5\lambda$ ) et en champ lointain ( $105\lambda$ ). Cas du cerf-volant.

### 3.4 Conclusion de chapitre

Ce chapitre décrit le principe de la méthode multi-centres. On a introduit la notion de recouvrement et développé un formalisme de calcul des champs incident et diffracté qui prend mieux en compte la géométrie de l’obstacle diffractant tout en permettant de convertir l’approximation haute fréquence des champs incident et diffracté sous forme de rayons. On a de plus illustré numériquement, sous la forme d’une preuve de concept, les performances en terme de précision de cette version de la méthode hybride relativement à la méthode barycentrique pour des configurations de diffraction par des obstacles de taille de l’ordre de la longueur d’onde non nécessairement strictement convexes, en milieu homogène non-borné. On a observé d’une part un gain intéressant en précision lorsqu’on augmente le nombre de sous-domaines du recouvrement. Il est cependant important de retenir que cette décroissance n’est pas linéaire par rapport au nombre de sous-domaines du recouvrement et au delà d’un nombre  $P$  de sous-domaines ( $P = 20$  dans les expériences), le gain en précision est relativement faible devant l’accroissement important du coût de calcul de la méthode.

Le travail résumé ici doit être poursuivi pour affiner la compréhension de la méthode multi-centres. D’une part, il serait intéressant de réussir à dégager une règle de contrôle a priori de l’erreur en fonction du nombre de sous-domaines. D’autre part, on pourrait tester l’influence sur la précision de la méthode multi-centres d’autres types de recouvrement de l’obstacle en jouant sur deux notions : les fonctions de partition et la distribution des centres sur l’obstacle. On pourrait en particulier envisager : une distribution non-uniforme des centres sur l’obstacle, raffinée dans les zones de forte variation de courbure, afin de mieux tenir compte de la géométrie de l’obstacle ou encore construire un recouvrement de  $\Gamma$  lié à son intersection avec un découpage en quadtree ou octree du domaine de propagation dans l’optique d’une résolution accélérée de l’équation intégrale (FMM ou H-Matrice).

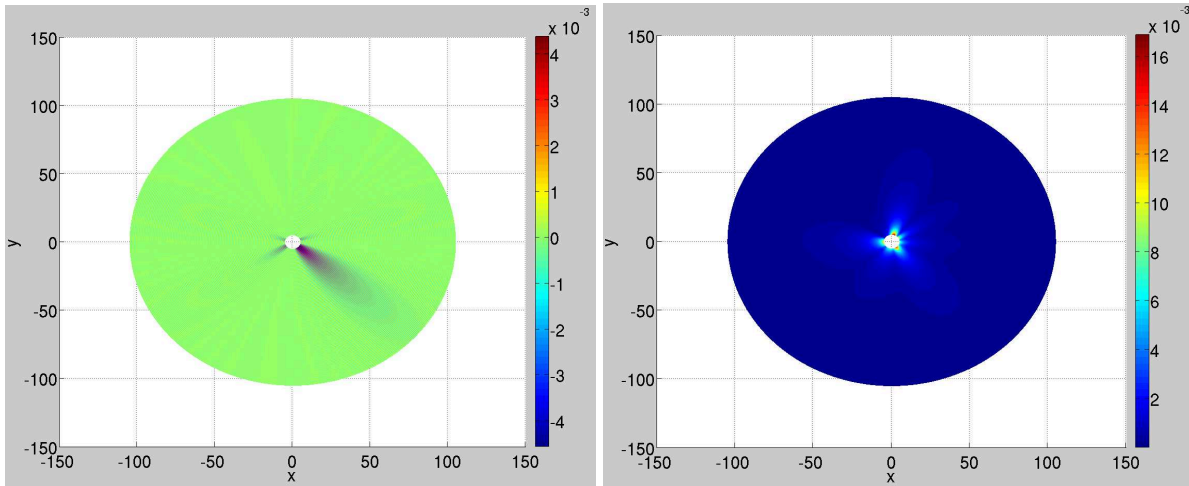


FIGURE 3.24 – Carte de champ diffracté approché et erreur relative pour le cerf-volant,  $P = 8$

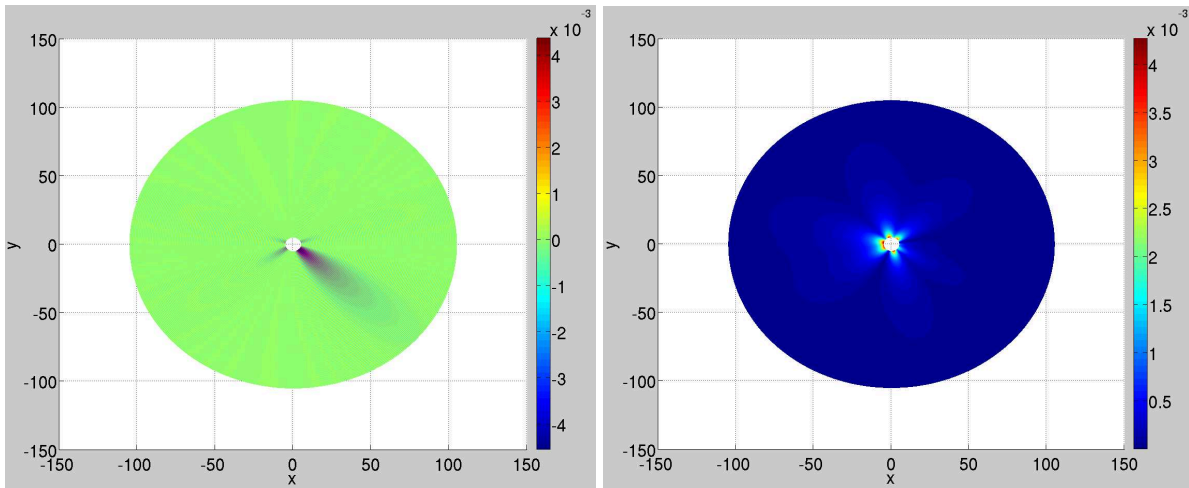


FIGURE 3.25 – Carte de champ diffracté approché et erreur relative pour le cerf-volant,  $P = 18$

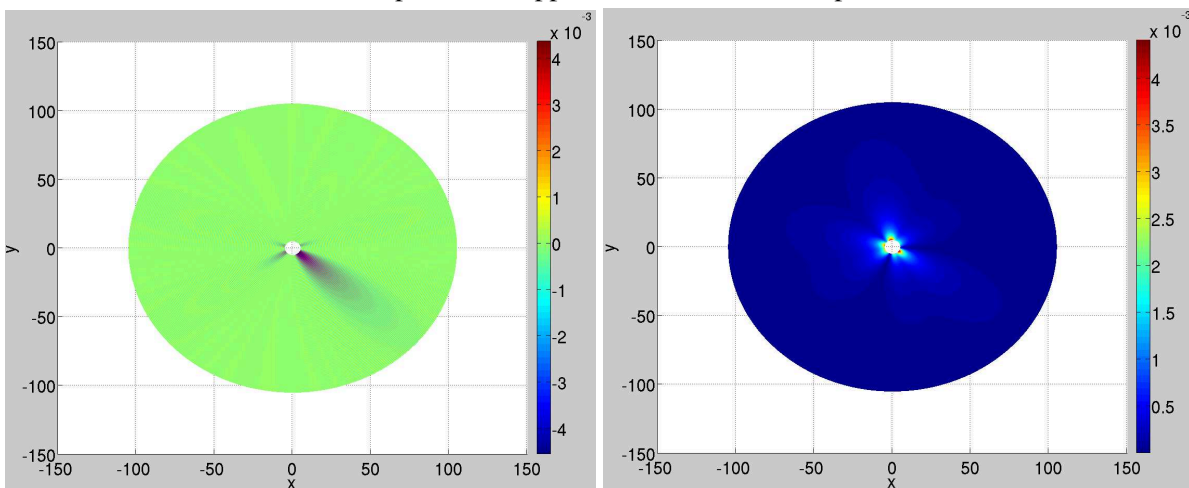


FIGURE 3.26 – Carte de champ diffracté approché et erreur relative pour le cerf-volant,  $P = 40$

## Chapitre 4

# Une accélération de la méthode hybride par procédure *online-offline*

La méthode hybride proposée dans ce manuscrit a vocation à être utilisée pour la simulation de configurations de CND réalistes. La méthode devra donc être adaptée pour permettre le calcul efficace de la réponse d'une pièce de dimension 3 balayée par un grand nombre d'ondes incidentes haute fréquence en un grand nombre de positions du capteur en réception. L'extension à la 3D est traitée au chapitre 5. On présente dans ce chapitre la procédure d'accélération de la stratégie de couplage que nous avons retenue, dans le cadre de l'acoustique 2D.

Basée sur une organisation *online-offline* de la chaîne de calcul du champ diffracté, elle est suffisamment générique pour être adaptable à la dimension 3. On décrit la stratégie d'accélération pour la version barycentrique de la méthode de couplage, puis son adaptation à la méthode de couplage multi-centres. On s'attache également à justifier le choix des différents paramètres de cette accélération et on conclut par quelques illustrations de ses performances sur des expériences numériques.

*Notations :*

*Avant toute chose, on rappelle quelques notations très utilisées dans ce chapitre, définies p.7-8. On fait d'une part la distinction entre le produit matriciel noté ici  $\times$  et le produit composante par composante noté  $\cdot$ . On introduit d'autre part la notation  $\mathbb{1}_N$  pour désigner le vecteur ligne de taille  $N$  dont tous les coefficients valent 1 et  $\text{diag}(A)$  pour définir la matrice diagonale construite à partir du vecteur  $A$ . On distingue enfin la transposition hermitienne  $A^H$  et la transposée  $A^T$  de la matrice  $A$ .*

### 4.1 Description de la procédure *online-offline* pour la méthode barycentrique

On a vu dans les chapitres précédents que l'introduction de l'opérateur de diffraction dans le calcul du champ diffracté en champ lointain permet de séparer le traitement des effets de propagation et de diffraction. Dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain (chapitre 2), on caractérise l'obstacle par son barycentre  $y_c$  et un coefficient de diffraction haute fréquence,  $\mathcal{R}$ . La stratégie de couplage barycentrique fait alors appel d'une part à la méthode des rayons pour calculer la propagation ultrasonore entre le voisinage du défaut, réduit à son barycentre, et les transducteurs émetteurs et récepteurs et d'autre part à la méthode des équations intégrales pour prendre en compte de façon précise les effets de la diffraction par d'éventuels obstacles en champ proche. L'expression du champ diffracté au point d'observation  $x_r$  obtenu par la méthode barycentrique pour la source en émission  $x_s$  s'écrit,

$$u(x_r; \omega) = \left( A^r(x_r; y_c) e^{ik\Phi^r(x_r; y_c)} \right) \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) \left( A^s(y_c; x_s) e^{ik\Phi^s(y_c; x_s)} \right). \quad (4.1)$$

Dans cette expression, le calcul des effets de la propagation par la méthode des rayons est de façon générale moins coûteux que celui du coefficient de diffraction qui requiert la résolution d'un système linéaire plein dans un régime haute fréquence. On envisage accélérer le calcul du champ diffracté par une procédure *online-offline* qui vise à réorganiser en deux étapes l'évaluation des différents facteurs de (4.1). Lors d'une étape amont,



appelée étape *offline*, on pré-calculé et stocke  $\mathcal{R}$  pour un ensemble de directions d'incidence et d'observation prédéfinies. Durant l'étape *online*, on utilise les informations de la configuration de contrôle sur la position de la source et du récepteur pour calculer les termes de propagation, et en particulier les directions d'incidence et d'observation *online*, puis on calcule les coefficients de diffraction des obstacles dans ces directions *online* par interpolation des termes précalculés.

On va dans la suite de cette section décrire la méthode d'accélération pour une configuration de diffraction (en milieu non-borné homogène) comportant un ensemble de  $N_r$  récepteurs et  $N_s$  sources disposés autour du défaut, et un objet diffractant unique de frontière  $\Gamma$ , à fréquence fixée. On commencera par reformuler (4.1) de façon matricielle puis on se concentrera sur la méthode d'approximation et d'interpolation du coefficient de diffraction. Enfin on donnera l'algorithme d'évaluation par la méthode barycentrique accélérée.

#### 4.1.1 Reformulation matricielle du calcul du champ diffracté et complexité numérique

On reprend ici l'expression (4.1) pour exprimer le champ diffracté calculé par la méthode barycentrique en  $N_r$  points d'observation lorsqu'on dispose de  $N_s$  sources et on donne les notations qui nous seront utiles dans la suite. On note  $x_r \in \mathbb{R}^{2 \times N_r}$  et  $x_s \in \mathbb{R}^{2 \times N_s}$  respectivement les vecteurs des positions des récepteurs et des sources. On écrit (4.1) sous forme du produit matriciel,

$$u(x_r; \omega) = [\text{diag}(\text{AR}(x_r; y_c))] \mathcal{D}_b [\text{diag}(\text{AI}(y_c; x_s))] \in \mathbb{C}^{N_r \times N_s}, \quad (4.2)$$

où on note  $\text{AR}(x_r; y_c)$  et  $\text{AI}(y_c; x_s)$  les vecteurs des amplitudes complexes de propagation rayon respectivement des champs diffractés et incidents et  $\mathcal{D}_b \in \mathbb{C}^{N_r \times N_s}$  désigne la matrice de diffraction de l'obstacle  $\Gamma$ . On définit les amplitudes complexes de propagation rayon, en reprenant les notations de la partie 2.1 par :

$$\text{AR}(x_r; y_c) = \left( B^r(x_r^{(t)}; y_c) \right)_t \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}, \quad \text{AI}(y_c; x_s) = \left( B^s(y_c; x_s^{(l)}) \right)_l \in \mathbb{C}^{N_s \times 1}, \quad (4.3)$$

où on note  $x_s^{(l)}$  et  $x_r^{(t)}$  respectivement les vecteurs des coordonnées de la  $l$ -ième source et du  $t$ -ième récepteur, et on rappelle que  $B^s(y_c; x_s^{(l)}) = A^s(y_c; x_s^{(l)}) e^{ik\phi^s(y_c; x_s^{(l)})}$  et  $B^r(x_r^{(t)}; y_c) = A^r(x_r^{(t)}; y_c) e^{ik\phi^r(x_r^{(t)}; y_c)}$  où les couples amplitude-phase  $(A^r(x_r^{(t)}; y_c), \phi^r(x_r^{(t)}; y_c))$  et  $(A^s(y_c; x_s^{(l)}), \phi^s(y_c; x_s^{(l)}))$  caractérisent respectivement le rayon diffracté reçu par le  $t$ -ième récepteur et le rayon incident émis par la  $l$ -ième source. Ici,  $\text{diag}(\text{AR}(x_r; y_c))$  désigne la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont égaux aux coefficients du vecteur AR. Les grandeurs caractérisant la propagation rayon des champs incidents et diffractés sont calculés par la méthode des rayons.

La matrice complexe  $\mathcal{D}_b$  est associée à l'évaluation de l'opérateur  $\mathcal{R}$  en chaque couple de direction  $(\hat{r}_t, \hat{s}_l)_{1 \leq t \leq N_r, 1 \leq l \leq N_s}$ ,

$$\mathcal{D}_b = \left( \mathcal{D}_b[t, l] = \mathcal{R}(\hat{r}_t, \hat{s}_l; \omega) \right)_{1 \leq t \leq N_r, 1 \leq l \leq N_s} \quad (4.4)$$

où on rappelle que  $(\hat{r}_t)_{1 \leq t \leq N_r}$  et  $(\hat{s}_l)_{1 \leq l \leq N_s}$  désignent respectivement les directions de propagation au point  $y_c$  des rayons diffractés et incidents. Le calcul de la matrice  $\mathcal{D}_b$  dépend des directions d'incidence et d'observation pour lesquelles elle est évaluée, de la géométrie du défaut et de la fréquence, et ne requiert pas la connaissance de la position de la source et du récepteur. L'évaluation du coefficient de diffraction représente toutefois l'étape la plus coûteuse dans l'évaluation du champ diffracté. On rappelle que l'opérateur de diffraction est défini comme la fonction de deux variables :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\hat{r}, \hat{s}) &\rightarrow \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{r} \cdot (y - y_c)} (1 + \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}) \Psi(y; \hat{s}) dS(y), \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $\mathbb{S}$  est le disque unité et  $\Psi(\cdot; \hat{s})$  est la solution du problème surfacique équivalent au problème de diffraction par  $\Gamma$  d'une onde incidente plane de direction de propagation  $\hat{s}$  dans l'espace libre :

$$\frac{1}{2} \Psi(x; \hat{s}) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)} - ikG \right) (x, y) \Psi(y; \hat{s}) dS(y) = -e^{ik\hat{s} \cdot (y - y_c)}, \quad \forall y \in \Gamma. \quad (4.6)$$

Chaque composante de la matrice  $\mathcal{D}_b$  nécessite donc la résolution d'un problème intégral de surface et l'évaluation d'une intégrale. De plus, le calcul numérique de l'intégrale (régulière) de champ lointain est réalisé par la règle des trapèzes, soit

$$\mathcal{R}(\hat{r}_t, \hat{s}_l; \omega) \simeq \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \frac{2\pi}{N_d} \sum_{m=1}^{N_d} e^{-ik\hat{r}_t \cdot (y_m - y_c)} (\mathbf{v}(y_m) \cdot \hat{r}_t + 1) \Psi(y_m; \hat{s}_l). \quad (4.7)$$

où on note  $N_d$  le nombre de points de quadrature ( $y_m$ ) sur  $\Gamma$ . Afin de reformuler la chaîne de calcul de la matrice de diffraction de façon matricielle, on note  $K_{BEM}$  la matrice d'assemblage dont chaque composante évalue le noyau de la formule de représentation intégrale pondéré par le poids de la quadrature en un point de quadrature donné. On renvoie le lecteur à (1.4.5.1) pour plus de détails sur l'expression de cette matrice. Cette matrice est obtenue avec un coût d'assemblage en  $O(N_d^3)$ . On décompose maintenant (4.7) sous forme d'un produit matriciel en introduisant les matrices  $PW_r \in \mathbb{C}^{N_d \times N_r}$  et  $PW_i \in \mathbb{C}^{N_d \times N_s}$ ,

$$PW_r[j, t] = e^{-ik\hat{r}_t \cdot (y_j - y_c)}, \quad PW_i[j, l] = e^{ik\hat{s}_l \cdot (y_j - y_c)},$$

définies comme l'évaluation des ondes planes dont les directions de propagation sont respectivement  $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{N_r}$  et  $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{N_s}$  aux degrés de liberté de  $\Gamma$  ainsi que les matrices  $M_r \in \mathbb{R}^{N_d \times N_r}$ , et  $\Psi = K_{BEM}^{-1}(-PW_i) \in \mathbb{C}^{N_d \times N_d}$ ,

$$M_r[j, t] = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \frac{2\pi}{N_d} (\mathbf{v}(y_j) \cdot \hat{r}_t + 1), \quad \Psi[j, l] = \Psi(y_j; \hat{s}_l),$$

qui évaluent respectivement aux points de quadrature sur le défaut les coefficients de la matrice  $M_r$  issus du choix de la formulation intégrale et la solution du problème intégral de surface discret associé aux rayons incidents ( $\Psi(\cdot; \hat{s}_l)$ ). On évalue le coefficient  $\mathcal{R}(\hat{r}_t, \hat{s}_l; \omega)$  par

$$\mathcal{R}(\hat{r}_t, \hat{s}_l; \omega) = (PW_r(\cdot, t) \cdot M_r(\cdot, t))^T \Psi(\cdot, l),$$

et à l'aide du produit matriciel composante par composante  $\cdot \times$ , en utilisant le fait que  $\Psi = K_{BEM}^{-1}(-PW_i)$ , on évalue la matrice  $\mathcal{D}_b$  par :

$$\mathcal{D}_b = (PW_r \cdot \times M_r)^T K_{BEM}^{-1}(-PW_i). \quad (4.8)$$

En pratique, pour calculer (4.2) on n'évalue pas directement (4.8). On introduit le vecteur ligne de 1 de taille  $N$ ,  $\mathbb{1}_N$ , et on réécrit le produit des matrices diagonales avec  $\mathcal{D}_b$  :

$$u(x_r; \omega) = [(AR(x_r; y_c) \times \mathbb{1}_{N_d}) \cdot \times (PW_r \cdot \times M_r)^T] K_{BEM}^{-1}[-PW_i \cdot \times [AI(y_c; x_s) \times \mathbb{1}_{N_d}]^T]. \quad (4.9)$$

pour tirer profit de la différence de taille entre les matrices et diminuer le coût d'évaluation : les produits entre les matrices diagonales et  $\mathcal{D}_b$  de (4.2), dont la complexité de calcul en  $O(N_r^2 N_s + N_s^2 N_r)$ , sont remplacés par des produits composantes par composantes et deux produits matrice-matrice de matrices plus petites, dont la complexité est en  $O(N_r N_s N_d + N_s N_d^2)$ . La réécriture (4.9) de (4.2) permet donc de réduire drastiquement le coût d'évaluation du champ diffracté. C'est cette expression que l'on a implémentée pour le calcul numérique du champ diffracté et les mesures de temps de calcul. Cette expression fait en outre apparaître une certaine symétrie dans les calculs.

Afin de quantifier ultérieurement l'intérêt de l'accélération *online-offline*, on fait une étude de la complexité du calcul du champ diffracté sans accélération et par la procédure *online-offline*. On précise que l'on choisit ici de résoudre numériquement le système linéaire par descente remontée à partir d'une factorisation LU. On rassemble dans le tableau 4.1 les résultats de l'étude de la complexité du calcul numérique du champ diffracté (4.9). Pour estimer la complexité de calcul de chaque composante de AR et de AI, dans une situation générale (de propagation en milieu hétérogène), on introduit le nombre de pas de temps  $N_t$  du système de tracé de rayon. Pour simplifier la présentation, on réécrit (4.9) :

$$\begin{aligned} u(x_r; \omega) &= T_r K_{BEM}^{-1} T_s, \\ \text{avec } T_r &= [P_r^1 \cdot \times P_r^2], \quad T_s = [-PW_i \cdot \times P_s], \\ \text{et } P_r^1 &= (AR(x_r; y_c) \times \mathbb{1}_{N_d}), \quad P_r^2 = (PW_r \cdot \times M_r)^T, \quad P_s = [AI(y_c; x_s) \times \mathbb{1}_{N_d}]^T, \end{aligned} \quad (4.10)$$

TABLE 4.1 – Détail de la complexité de calcul du champ diffracté  $u(x_r; \omega)$  obtenu par (4.9).

Étapes du calcul	Complexité
(1) Calcul directions $(\hat{r}_l)_{l \in [1:N_r]}, (\hat{s}_l)_{l \in [1:N_s]}$	$O(N_r + N_s)$
(2) Assemblage $K_{BEM}$	$O(N_d^3)$
(3) Factorisation LU de $K_{BEM}$	$O(\frac{1}{3}N_d^3)$
(4) Assemblage $PW_i$	$O(N_s N_d)$
(5) Assemblage $PW_r$	$O(N_r N_d)$
(6) Assemblage $M_r$	$O(N_r N_d)$
(7) Assemblage $P_r^2 = (PW_r \cdot M_r)^T$	$O(N_r N_d)$
(8) Calcul AR, AI	$O((N_r + N_s) N_t)$
(9) Calcul $P_r^1 = (AR(x_r; y_c) \times \mathbb{1}_{N_d})$	$O(N_r N_d)$
(10) Calcul de $P_s = (AI(y_c; x_s) \times \mathbb{1}_{N_d})^T$	$O(N_s N_d)$
(11) Produit $T_r = P_r^1 \cdot P_r^2$	$O(N_r N_d)$
(12) Produit $T_s = -PW_i \cdot P_s$	$O(N_s N_d)$
(13) Descente-remontée : $\Psi = K_{BEM}^{-1} T_s$	$O(N_s N_d^2)$
(14) Produit $T_r \Psi$	$O(N_r N_s N_d)$
Coût total du calcul de $u(x_r; \omega)$ :	$O(N_r N_s N_d + N_s (N_d^2 + 3N_d + N_t + 1) + N_r (5N_d + N_t + 1) + \frac{4}{3}N_d^3)$

La complexité du calcul du champ diffracté  $u(x_r; \omega)$  dans le tableau 4.1 est obtenue en supposant que la matrice  $K_{BEM}$  et sa factorisation LU sont calculées une seule fois puis stockées, afin de réaliser le calcul de la matrice  $\Psi$  par descente-remontée avec une complexité de  $O(N_d^2 N_s)$ . Le coût total  $C_b^{\text{nacc}}$  du calcul du champ diffracté au récepteur dans ce cas est de

$$C_b^{\text{nacc}} = O\left(N_r N_s N_d + N_s (N_d^2 + 3N_d + N_t + 1) + N_r (5N_d + N_t + 1) + \frac{4}{3}N_d^3\right).$$

Le calcul des amplitudes de propagation rayon des champs incident et diffracté a un coût linéaire en  $N_s$  et  $N_r$  ( $O(N_d N_t (N_r + N_s))$ ). Les étapes les plus coûteuses sont les étapes (12) et (13) de descente remontée et du produit  $T_r \Psi$  induites par le calcul du coefficient de diffraction qui nécessite la résolution du système linéaire et le produit de deux matrices pleines (voir (4.10)). L'idée de la procédure *online-offline* est de découpler les directions en lesquelles est évalué l'opérateur  $\mathcal{R}$  de la position de la source et du récepteur afin de diminuer le coût de calcul des étapes (12) et (13) (tableau 4.1) et donc de diminuer le coût d'évaluation du champ diffracté.

Pour cela on se donne un ensemble prédéfini de  $n_s$  et  $n_r$  directions d'incidence et de diffraction  $(\hat{d}_r^j, \hat{d}_s^l)_{(j,l) \in [1:n_r] \times [1:n_s]}$  tel que  $n_s < N_s, n_r < N_r$  et on calcule la matrice, notée  $\mathcal{D}_b^{\text{off}}$ , des évaluations de l'opérateur  $\mathcal{R}$  en chacun de ces couples de direction. Cette matrice, appelée matrice de diffraction *offline*, est stockée afin d'être réutilisée ensuite pour calculer la matrice d'approximation de  $\mathcal{D}_b$  dans les directions du problème, notée  $\mathcal{D}_b^{\text{on}}$  (appelée matrice de diffraction *online*), par interpolation. Dans le cas de sources et de récepteurs multiples, le calcul de la matrice de diffraction par interpolation sera alors beaucoup moins coûteux que par calcul direct. La matrice des coefficients de diffraction est une fonction continue de deux variables. On aurait donc pu envisager approcher le coefficient de diffraction par une méthode naïve basée sur son développement limité autour de chaque direction prédéfinie, mais pour garantir une bonne précision de l'approximation on a choisi de l'interpoler à partir d'une approximation de rang faible en faisant appel à sa SVD.

### 4.1.2 Approximation de rang faible et interpolation pour le calcul de la matrice de diffraction

On détaille dans ce paragraphe la stratégie d'interpolation choisie pour calculer l'approximation  $\mathcal{D}_b^{\text{on}}$  de la matrice de diffraction  $\mathcal{D}_b$  dans les directions d'incidence et d'observation du problème  $(\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{N_r}, \text{ et } \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{N_s})$  à partir de la matrice  $\mathcal{D}_b^{\text{off}}$  précalculée *offline* pour l'ensemble des couples de directions prédéfinies  $(\hat{d}_r^1, \dots, \hat{d}_r^{n_r}, \text{ et } \hat{d}_s^1, \dots, \hat{d}_s^{n_s})$ . En particulier, on commence par rappeler ce qu'est une décomposition en valeurs singulières d'une fonction de deux variables, puis on résume quelques résultats sur leur approximation de rang faible. On termine enfin en détaillant le principe de l'approximation de rang faible utilisée dans la phase *online* de la procédure d'accélération proposée.

**Décomposition en valeurs singulières d'une matrice.** On définit la décomposition en valeurs singulières (SVD) d'une matrice  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , comme la factorisation

$$A = USV^H, \quad U \in \mathbb{C}^{m \times p}, \quad V \in \mathbb{C}^{n \times p}, \quad S \in \mathbb{R}^{p \times p}. \quad (4.11)$$

Les matrices  $U$  et  $V$  sont orthogonales et leurs colonnes sont respectivement les vecteurs propres de  $AA^H$  et  $A^HA$ . La matrice diagonale  $S = \text{diag}(s_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est définie de manière unique à partir des valeurs singulières de  $A$ , notées par ordre décroissant  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0$ . Ce résultat de décomposition est dû à Eckart et Young (1936). On appelle les colonnes des vecteurs  $U$  et  $V$  respectivement vecteurs singuliers à gauche et à droite de  $A$  et les racines carrées des valeurs singulières sont valeurs propres de la matrice  $A$ .

**Décomposition en valeurs singulières d'une fonction de deux variables.** On rappelle ici un résultat généralisant (4.11) pour la représentation de fonctions de deux variables, exposé dans Rokhlin et Yarvin (1996) et Griebel et Harbrecht (2014).

**Théorème 4.1.1.** *Soit la fonction  $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $K \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , il existe deux suites de fonctions  $u_i : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u_i \in L^2(\Omega_1)$  et  $v_i : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $v_i \in L^2(\Omega_2)$  et une suite réelle non négative  $s_i$  où  $i = 1, \dots, \infty$  telles que*

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) s_i v_i(t) \quad (4.12)$$

où  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0$ .

Cette décomposition permet de représenter une fonction de deux variables de carré intégrable sous la forme d'une série de produits de fonctions à variables séparées. En tronquant les valeurs singulières plus petites qu'un certain seuil choisi, on construit l'approximation de rang fini de  $K$ ,

$$K_p(x, t) := \sum_{i=1}^p u_i(x) s_i v_i(t), \quad (4.13)$$

qui approche  $K$  avec une erreur,

$$\|K(x, t) - K_p(x, t)\|_{L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)} = \sqrt{\sum_{i=p+1}^{\infty} s_i}. \quad (4.14)$$

**Interpolation de l'approximation de rang faible de l'opérateur de diffraction.** La démarche décrite ici correspond à l'algorithme proposé par [Rokhlin (1990), p.17] pour l'approximation de la décomposition en valeurs singulières d'un opérateur intégral, que l'on applique à l'opérateur de diffraction  $\mathcal{R} : (\hat{r}, \hat{s}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}) \in \mathbb{C}$ .

Comme justifié en annexe E, l'opérateur de diffraction est une fonction  $L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ , par conséquent d'après le théorème 4.1.1 elle peut être décomposée sous la forme d'une série de fonctions à variables séparées (4.12) que l'on approche par troncature par (4.13),

$$\mathcal{R}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{l=0}^M s_l f_l(\hat{x}) g_l(\hat{y}) + \varepsilon_M, \quad \varepsilon_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \quad (4.15)$$

où l'ordre de troncature est déterminé en fonction de la précision désirée. Les fonctions  $(f_l(\hat{x}))_{1 \leq l \leq M}$  et  $(g_l(\hat{y}))_{1 \leq l \leq M}$  (Griebel et Harbrecht (2014)) sont définies comme les fonctions singulières respectivement à droite et à gauche de l'opérateur intégral  $S$  de noyau  $\mathcal{R}$ ,

$$S : L^2(\mathbb{S}) \rightarrow L^2(\mathbb{S})$$

$$u \rightarrow (Su) : y \rightarrow \int_{\mathbb{S}} \mathcal{R}(x,y) u(x) dx,$$

et les  $s_l$  ses valeurs singulières. Cette propriété est l'outil de base de la procédure d'accélération.

L'idée dans l'algorithme proposé par Rokhlin (1990) est de tirer profit de la représentation à variables séparées de  $\mathcal{R}$  (4.15), pour évaluer cet opérateur en un grand nombre de couples de directions  $(\hat{r}, \hat{s})$  à moindre coût. Le principe de cette procédure compte 4 étapes. On évalue d'abord  $\mathcal{R}$  en un petit nombre de directions prédéfinies  $(\hat{d}_r^j)_{1 \leq j \leq n_r}, (\hat{d}_s^i)_{1 \leq i \leq n_s}$ , pour construire la matrice de diffraction *offline*  $\mathcal{D}_b^{\text{off}} \in \mathbb{C}^{n_r \times n_s}$ . On réalise ensuite la décomposition en valeurs singulières de  $\mathcal{D}_b^{\text{off}}$ ,

$$\mathcal{D}_b^{\text{off}} = F \Lambda \bar{G}^H,$$

avec  $F \in \mathbb{C}^{n_r \times p}$ ,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , et  $G \in \mathbb{C}^{n_s \times p}$ . On construit les approximations continues des fonctions singulières de l'opérateur  $\mathcal{R}$  comme les fonctions d'interpolation polynomiales  $\tilde{f}_l$  et  $\tilde{g}_l$  de  $f_l$  et  $g_l$ , respectivement vecteurs colonnes des matrices singulières  $F$  et  $G$ . On a le choix de la méthode d'interpolation. On pourrait utiliser une interpolation de Lagrange avec des points d'interpolation choisis comme zéros des polynômes de Tchebyshev pour d'éviter les instabilités de Runge, cependant on fait le choix d'une interpolation de Tchebyshev. En effet, on rappelle en outre que les sommes partielles de la série Tchebyshev fournissent une approximation polynomiale asymptotiquement optimale d'une fonction  $h$  suffisamment régulière Sommariva *et al.* (2007),

$$h(x) = \sum_{n=0}^Q c_n(h) \Pi_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_n(h) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Pi_n(t) f_l(t) dt, & n > 0. \\ c_0(h) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Pi_n(t) f_l(t) dt, \end{cases} \quad (4.16)$$

où on note  $\Pi_n$  les polynômes de Tchebyshev. Les fonctions  $\tilde{f}_l$ , et  $\tilde{g}_l$  approchent de façon continue les fonctions singulières de l'opérateur  $\mathcal{R}$  et fournissent donc une approximation analytique de l'approximation de rang faible de  $\mathcal{R}$  pour tout couple  $(\hat{x}, \hat{y})$  :

$$\mathcal{R}(\hat{x}, \hat{y}) \approx \sum_{l=0}^M \lambda_l \tilde{f}_l(\hat{x}) \tilde{g}_l(\hat{y}). \quad (4.17)$$

Finalement, cette stratégie revient à interpoler l'approximation de rang faible de la matrice de diffraction *offline*  $\mathcal{D}_b^{\text{off}} \in \mathbb{C}^{n_r \times n_s}$  dans les directions d'intérêt, Rokhlin et Yarvin (1996). La précision de cette approximation dépend de l'ordre  $M$  de troncature et de la précision de la méthode d'interpolation choisie. Le lecteur intéressé pourra se référer à Griebel et Harbrecht (2014) pour une étude précise sur les critères qui permettent de choisir l'ordre de troncature de la série à précision donnée en fonction de la régularité  $L^p$  de la fonction à approcher (ici  $\mathcal{R}$ ).

On décrit maintenant le détail de l'algorithme d'approximation de l'opérateur  $\mathcal{R}$  par SVD.

### 4.1.3 Algorithme de résolution par la procédure *online-offline* et complexité numérique

On donne dans ce paragraphe l'algorithme de calcul du champ diffracté par la méthode barycentrique accélérée et on analyse le gain en terme de coût de calcul que cette accélération engendre. L'algorithme s'inspire de [Rokhlin (1990), p.17], mais en diffère sur la méthode d'interpolation des fonctions singulières. Alors que Rokhlin et al. réalisent une interpolation de Lagrange, on réalise ici une interpolation par quadrature de Tchebyshev.

#### Algorithme

Étapes *offline* :

1. Choix de la formulation intégrale,
2. Lecture du maillage de l'obstacle,
3. Calcul de la position du barycentre de l'obstacle,
4. On se donne  $n_s$  et  $n_r$ , respectivement nombre de directions *offline* des rayons incidents et diffractés.
5. Calcul des directions d'incidence et d'observation *offline*,  $(\hat{d}_r^j)$  et  $(\hat{d}_s^i)$ . On calcule les  $n_r$  et  $n_s$  zéros des polynômes de Tchebyshev dans l'intervalle  $[-1,1]$ , notés :  $(t_r^j)_{1 \leq j \leq n_r}$  et  $(t_s^i)_{1 \leq i \leq n_s}$ . On définit la distribution des directions angulaires sur  $[0,2\pi]$ ,  $(\theta_s^i)_i, (\theta_r^j)_j$  à partir de la distribution des zéros par l'homothétie  $h : t \in [-1,1] \rightarrow \pi t + \pi$ , puis on calcule la distribution des directions *offline* sur la sphère unité :  $\hat{d}_r^j = (\cos(\theta_r^j), \sin(\theta_r^j))^T$ ,  $\hat{d}_s^i = (\cos(\theta_s^i), \sin(\theta_s^i))$ .
6. Choix de la base d'interpolation  $\Pi_n^r$  et  $\Pi_n^s$  : ici les polynômes de Tchebyshev,
7. Évaluation des matrices d'ondes planes  $PW_r \in \mathbb{C}^{N_d \times n_r}$  et  $PW_i \in \mathbb{C}^{N_d \times n_s}$ .
8. Évaluation de la matrice  $M_r \in \mathbb{R}^{N_d \times n_r}$  en fonction du choix de la formulation intégrale.
9. Assemblage de  $K_{\text{BEM}} \in \mathbb{C}^{N_d \times N_d}$  et calcul des matrices triangulaires supérieure L et inférieure U de sa factorisation LU,
10. Résolution des systèmes linéaires par descente-remontée : calcul de  $\psi = K_{\text{BEM}}^{-1}[-PW_i]$ ,
11. Évaluation de l'opérateur de diffraction  $\mathcal{D}_b^{\text{off}} = (\mathcal{R}(\hat{d}_r, \hat{d}_s))_{(t,l)=[1:n_r] \times [1:n_s]}$  dans les directions *offline* prédéfinies.

$$\mathcal{D}_b^{\text{off}} = [PW_r \cdot \times M_r]^T \psi$$

12. Calcul des grandeurs utiles à l'interpolation.

L'interpolation n'est pas réalisée sur la matrice  $\mathcal{D}_b^{\text{off}}$  directement mais sur une matrice  $A \in \mathbb{C}^{n_r \times n_s}$  obtenue à partir de  $\mathcal{D}_b^{\text{off}}$  pondérée coefficients par coefficients par les poids de la quadrature de Tchebyshev, [algorithme Rokhlin et Yarvin (1996), p.17].

- On calcule d'abord les vecteurs  $W_r \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$  et  $W_s \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}$  d'évaluation du poids lié à l'interpolation de Tchebyshev en chaque nœud  $t_{r/s} : W_{s/r}[j] = 1/\sqrt{1 - (t_{r/s}^j)^2}$ .
- On construit ensuite la matrice  $A \in \mathbb{C}^{n_r \times n_s} : A[t,l] = \mathcal{D}_b^{\text{off}}[t,l] \sqrt{W_r[t] W_s[l]}$ . Pour optimiser le coût de calcul, on évalue A par :

$$A = [\sqrt{W_r} \mathbb{1}_{n_s}] \cdot \times \mathcal{D}_b^{\text{off}} \cdot \times [\sqrt{W_s} \mathbb{1}_{n_r}]^T$$

SVD et calculs pré-interpolation :

- On décompose A en valeurs singulières :  $A = F \Lambda \bar{G}^T$ , où  $F = [F_{ik}] \in \mathbb{C}^{n_r \times M}$ , et  $G = [G_{ik}] \in \mathbb{C}^{n_s \times M}$  sont respectivement les matrices des M premiers vecteurs singuliers à droite et à gauche de A et  $\Lambda \in \mathbb{R}^{M \times M}$  est la matrice des M premières valeurs singulières  $(\lambda_l)_l$  de A.
- Construction des matrices  $\hat{F}$  et  $\hat{G}$  définies à partir de F et G par,

$$\hat{F}(j,i) = \frac{F(j,i)}{\sqrt{W_r[j]}}, \quad \hat{G}(j,i) = \frac{G(j,i)}{\sqrt{W_s[j]}}$$

Étapes *online* :

1. Lecture des paramètres du problème : position des sources et des récepteurs,
2. Calcul des directions des rayons interagissant avec le défaut  $(\hat{r}_t)_{1 \leq t \leq N_r}$ ,  $(\hat{s}_l)_{1 \leq l \leq N_s}$  et de leur grandeurs caractéristiques  $(A_t^r, \phi_t^r)$ ,  $(A_l^s, \phi_l^s)$ , à partir de la position des sources et des récepteurs.

3. Évaluation des fonctions de base dans les directions *online* liées aux positions des sources et des récepteurs  $(\hat{r}_t, \hat{s}_l)_{(t,l)}$  pour l'interpolation :

$$\begin{aligned} \Pi^s &= \left( \Pi_k^s(t(\hat{s}_l)) / \sqrt{1 + (t(\hat{s}_l))^2} \right)_{k,l} \in \mathbb{R}^{n_s \times N_s}, \\ \Pi^r &= \left( \Pi_k^r(t(\hat{r}_t)) / \sqrt{1 + (t(\hat{r}_t))^2} \right)_{k,t} \in \mathbb{R}^{n_r \times N_r}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbb{S} \rightarrow [-1; 1], \\ \hat{x} \rightarrow t(\hat{x}) \end{cases}. \end{aligned}$$

4. Interpolation des vecteurs singuliers dans les directions  $(\hat{r}_t, \hat{s}_l)_{(t,l)}$  :

- Calcul des matrices d'interpolation des fonctions singulières  $\tilde{F} = (\tilde{f}_k(\hat{r}_t)) \in \mathbb{C}^{N_r \times M}$  et  $\tilde{G} = (\tilde{g}_k(\hat{s}_l)) \in \mathbb{C}^{N_s \times M}$  : chaque colonne évalue l'approximation des fonctions singulières de  $A$  dans les directions *online*. Pour tout  $k \in [1, M]$ , on évalue  $\tilde{f}_k$  en  $\hat{r}_t$  en interpolant le vecteur  $\hat{F}(:, k)$  sur la base des polynômes de Tchebyshev  $\Pi_n^r$  par

$$\tilde{f}_k(\hat{r}_t) = \sum_{n=0}^{n_r} C(\hat{F})[n, k] \frac{\Pi_n^r(t(\hat{r}_t))}{\sqrt{1 + (t(\hat{r}_t))^2}} = \Pi^r(:, t)^T C(\hat{F})(:, k),$$

où la matrice des poids de l'interpolation  $C(\hat{F}) \in \mathbb{C}^{n_r \times M}$  sont obtenus par résolution du système

$$\hat{F} = \Pi_{\text{quad}}^r C(\hat{F}),$$

où on définit  $\Pi_{\text{quad}}^r = \left( \Pi_n^r(t(\hat{d}_r^j)) / \sqrt{1 + t(\hat{d}_r^j)^2} \right)_{n,j} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ . On réécrit donc matriciellement :  $\tilde{F} = \Pi_r^T C(\hat{F})$ .

On obtient de la même façon  $\tilde{G} = \Pi_s^T C(\hat{G})$ , où  $C(\hat{G}) \in \mathbb{C}^{n_s \times M}$  est solution du système

$$\hat{G} = \Pi_{\text{quad}}^s C(\hat{G}),$$

où on définit  $\Pi_{\text{quad}}^s = \left( \Pi_n^s(t(\hat{d}_s^j)) / \sqrt{1 + t(\hat{d}_s^j)^2} \right)_{n,j} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ .

- On évalue ensuite la matrice de diffraction dans les directions *online*,  $\mathcal{D}_b^{\text{on}}$  (4.17) :  $\mathcal{D}_b^{\text{on}} = \tilde{F} \Lambda \tilde{G}^H$

5. Reconstruction du champ diffracté par le produit matrice vecteur (4.9) :

$$u(x_r; \omega) = [\text{AR}(x_r; y_c) \times \mathbb{1}_{N_s}] \cdot [\mathcal{D}_b^{\text{on}}] \cdot [\text{AI}(y_c; x_s) \times \mathbb{1}_{N_r}]^T, \quad (4.18)$$

que l'on calcule en pratique pour tirer profit de l'approximation de rang faible sous la forme :

$$u(x_r; \omega) = [(\text{AR}(x_r; y_c) \times \mathbb{1}_M) \cdot \tilde{F}] [\Lambda] [\tilde{G}^H \cdot [\text{AI}(y_c; x_s) \times \mathbb{1}_M]^T], \quad (4.19)$$

### Complexité de calcul du champ diffracté par la méthode barycentrique accélérée

On s'intéresse maintenant à la complexité de calcul de la méthode barycentrique accélérée par la procédure *online-offline*. On rassemble dans les tableaux 4.2 et 4.3 les nombres d'opérations nécessaires à l'évaluation du champ diffracté en les  $N_r$  récepteurs, lorsque  $N_s$  sources sont impliquées dans l'expérience de contrôle.

L'étape *offline* a une complexité de calcul  $C_b^{\text{off}}$  en

$$\begin{aligned} C_b^{\text{off}} &= O \left( \frac{4}{3} N_d^3 + n_s N_d^2 + 9n_s^3 + 4n_r^2 n_s + 8n_r n_s^2 + n_s n_r (N_d + 1) + n_s (N_d^2 + N_d + M + 2) \right. \\ &\quad \left. + n_r (3N_d + M + 2) \right) \end{aligned}$$

qui est indépendante de  $N_r$  et  $N_s$ . Le coût de calcul de cette étape est par conséquent fixé. On souligne qu'elle englobe les opérations de résolution du problème surfacique discret et les opérations de SVD et de pré-calcul des quantités utiles à l'interpolation. Le coût de calcul de l'étape *online* s'évalue en

$$\begin{aligned} C_b^{\text{on}} &= O(N_r N_s M + N_r (N_t + 1 + n_r + M n_r + 2M) + N_s (1 + N_t + n_s + M n_s + 2M + M^2) \\ &\quad + (n_r^2 + n_s^2) M + 1/3 (n_r^3 + n_s^3)). \end{aligned}$$

TABLE 4.2 – Détail de la complexité de calcul des étapes *offline* de la méthode barycentrique accélérée par procédure *online-offline*.

Étapes <i>offline</i>	
Étapes du calcul	Complexité
(1) Calcul des directions prédéfinies	$O(n_s + n_r)$
(2) Évaluation de $PW_r$ et $PW_i$	$O(N_d(n_s + n_r))$
(3) Évaluation de $M_r$	$O(N_d n_r)$
(4) Assemblage de $K_{BEM}$	$O(N_d^3)$
(5) Factorisation LU de $K_{BEM}$	$O(\frac{1}{3}N_d^3)$
(6) Évaluation de $\Psi$ par descente remontée	$O(n_s N_d^2)$
(7) Évaluation de $[PW_r \cdot \times M_r]^T$	$O(N_d n_r)$
(8) Calcul $\mathcal{D}_b^{\text{off}} = [PW_r \cdot \times M_r]^T \Psi$	$O(n_s n_r N_d)$
(9) Calcul de $W_r$ et $W_s$	$O(n_s + n_r)$
(10) Construction de $A$	$O(n_s n_r)$
(11) SVD de $A$	$O(4n_r^2 n_s + 8n_r n_s^2 + 9n_s^3)$
(12) Calcul de $\hat{F}$ et $\hat{G}$	$O(M(n_s + n_r))$
Total d'opérations :	$O\left(\frac{4}{3}N_d^3 + n_s N_d^2 + 9n_s^3 + 4n_r^2 n_s\right. \\ \left. + 8n_r n_s^2 + n_s n_r (N_d + 1)\right. \\ \left. + n_s (N_d^2 + N_d + M + 2) + n_r (3N_d + M + 2)\right)$

TABLE 4.3 – Détail de la complexité de calcul des étapes *online* de la méthode barycentrique accélérée par méthode *online-offline* pour l'évaluation de (4.19).

Étapes <i>online</i> (4.19)	
Étapes du calcul	Complexité
(1) Calcul de $(\hat{r}_j, \hat{s}_i)_{j,l}$	$O(N_r + N_s)$
(2) Évaluation de AI et AR	$O(N_t(N_s + N_r))$
(3) Calcul $AI \times \mathbb{1}_M$ et $AR \times \mathbb{1}_M$	$O(M(N_r + N_s))$
(4) Calcul base d'interpolation $\Pi_r$ et $\Pi_s$	$O(n_s N_s + n_r N_r)$
(5) Calcul $C(\hat{F})$ et $C(\hat{G})$	$O(1/3(n_r^3 + n_s^3) + (n_r^2 + n_s^2)M)$
(6) Évaluation de $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$	$O(N_r M n_r + N_s M n_s)$
(7) Produit $(AR \times \mathbb{1}_M) \cdot \tilde{F}$	$O(M N_r)$
(7) Produit $(\tilde{G}^H \cdot \times (AI \times \mathbb{1}_M)^T)$	$O(M N_s)$
(8) Calcul $u(x_r; \omega)$	$O(N_r N_s M + M^2 N_s)$
Coût total <i>online</i> :	$O(N_r N_s M + N_r(N_t + 1 + n_r + M n_r + 2M) \\ + N_s(1 + N_t + n_s + M n_s + 2M + M^2) \\ + 1/3(n_r^3 + n_s^3) + (n_r^2 + n_s^2)M).$

Cette étape englobe les opérations de calcul des grandeurs caractérisant les rayons, mais aussi l'opération d'interpolation et de calcul du champ diffracté par la formule (4.19).

Pour comprendre l'intérêt de la procédure *online-offline*, on compare le comportement asymptotique de la complexité totale de la méthode barycentrique non accélérée  $C_b^{\text{naacc}}$  et celle de la méthode accélérée



$C_b^{\text{acc}} = C_b^{\text{on}} + C_b^{\text{off}}$ . On calcule donc la différence des complexités de calcul du champ diffracté :

$$(C_b^{\text{acc}} - C_b^{\text{nacc}}) = N_s N_r (M - N_d) + N_s (n_s (1 + M) + 2M + M^2 - (N_d^2 + 3N_d)) + N_r (n_r (1 + M) + 2M - 5N_d) + 1/3(n_r^3 + n_s^3) + (n_r^2 + n_s^2)M + C_b^{\text{on}}. \quad (4.20)$$

Asymptotiquement par rapport à  $N_s$  et  $N_r$ , cette différence a un comportement quadratique négatif lorsque  $M \leq N_d$ . En pratique, c'est toujours le cas :  $M$  n'excède pas 30, alors que le nombre de points de quadrature  $N_d$  est souvent bien supérieur. Cette étude de la complexité de calcul met en lumière l'intérêt de la procédure *online-offline* lorsque le nombre de sources et de récepteurs devient grand. Cependant si le nombre de points n'est pas suffisant la méthode *online-offline* peut devenir plus coûteuse que la méthode non-accelérée.

Dans la prochaine section on présente les résultats de mise en œuvre numérique de la procédure d'accélération et on les compare à ceux de la méthode barycentrique non accélérée. On met ainsi en évidence l'accélération mais on illustre aussi le rôle des différents paramètres de la méthode : le rang  $M$  de l'approximation de rang faible, les nombres de directions prédéfinies  $n_s$  et  $n_r$ .

## 4.2 Illustration de l'accélération de la méthode barycentrique et choix des paramètres

On illustre ici les performances de l'accélération *online-offline* de la méthode hybride de résolution dite barycentrique par expérience numérique et on teste l'influence de ses différents paramètres sur la précision de l'interpolation.

On considère une configuration adimensionnée de diffraction en milieu non borné. On prend pour obstacle diffractant  $\Gamma$  un disque de diamètre  $\lambda$  éclairé par un ensemble de  $N_s$  sources cylindriques réparties sur un cercle de rayon  $1200\lambda$  centré au barycentre  $y_c$  de l'obstacle. Le milieu de propagation est supposé homogène et non borné. On calcule le champ diffracté en un ensemble de  $N_r$  points d'observation  $x_r$  uniformément distribués sur un cercle de rayon  $1000\lambda$  centré en  $y_c$ . On impose aux sources et aux points d'observation d'être aussi éloignés du défaut afin de garantir une approximation rayon des champs incident et diffracté de l'ordre de  $10^{-3}$ . Au cours de l'expérience numérique, on mesure le temps de calcul du champ diffracté successivement pour des valeurs croissantes des nombres de source  $N_s$  et de récepteurs  $N_r$  et on étudie l'influence du choix des nombres de directions offline  $n_s$  et  $n_r$  et du rang  $M$  de la décomposition de rang faible de  $\mathcal{R}$  (4.17) sur la précision de l'interpolation. On a ici choisi  $N_s = N_r =: N \in [100; 10000]$ , on suppose  $n_s = n_r = n \in [10; 50]$ , et  $M \in [9; 50]$ . On discrétise enfin l'obstacle diffractant en  $N_d = 100$  éléments.

### 4.2.1 L'accélération

On rassemble dans le tableau 4.4 la mesure des temps de calcul du champ diffracté par la méthode barycentrique. Les calculs sont réalisés sur un ordinateur portable à 1 processeur Intel Core™ i5 – 4310U à  $2 \times 2$ GHz, équipé de 7,7Go de RAM utilisant le système d'exploitation Linux Mint 17.3 Cinnamon 64-bit. On trouve dans la première colonne, nommée  $t_{\text{nacc}}$ , le temps de calcul du champ diffracté par la méthode barycentrique non accélérée, puis, dans les 6 colonnes rassemblées sous  $t_{\text{acc}}$  le temps de calcul du champ diffracté obtenu grâce à la méthode accélérée par la procédure *online-offline*, pour un nombre de directions *offline* propre. Pour une meilleure appréhension des résultats on trace sur la figure 4.1 les courbes  $N \rightarrow t_{\text{acc}}(n, N)$ , pour différents  $n$ , que l'on compare au temps de calcul non accéléré  $N \rightarrow t_{\text{nacc}}(N)$ . Dans cette expérience  $M = n$ .

La figure 4.1 est tracée en échelle logarithmique. Elle met en lumière le comportement asymptotiquement quadratique du temps de calcul par rapport à  $N$ , et un écart asymptotiquement constant entre  $\log(t_{\text{acc}})$  et  $\log(t_{\text{nacc}})$ , traduisant une évolution des temps  $t_{\text{acc}}$  et  $t_{\text{nacc}}$  à un facteur multiplicatif près comme prédit par l'étude de complexité (4.20). Toutefois, au vue de (4.20), il existe une valeur seuil de  $N$  en dessous de laquelle la procédure *online-offline* est moins efficace que la méthode barycentrique originale. Cette valeur seuil est une fonction des autres paramètres de l'expérience, en particulier du nombre de directions offline  $n$  et du nombre de points de la discrétisation de  $\Gamma$ ,  $N_d$ .

TABLE 4.4 – Tableau des temps de calcul du champ diffracté ( $r_\Gamma = \lambda$ ) calculé par la méthode barycentrique accélérée et non-accelérée par méthode *online-offline*.

N	$t_{nacc}$	$t_{acc}(n, N)$					
		$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$
100	0.01300	0.00481	0.00516	0.00548	0.00641	0.00680	0.00771
150	0.01533	0.00501	0.00532	0.00575	0.00650	0.00715	0.00828
200	0.01721	0.00520	0.00567	0.00607	0.00683	0.00776	0.00869
300	0.02276	0.00565	0.00615	0.00646	0.00748	0.00857	0.01108
400	0.03328	0.00680	0.00737	0.00778	0.00862	0.01000	0.01158
600	0.04711	0.00972	0.00997	0.01057	0.01255	0.01459	0.01668
800	0.08238	0.01455	0.01517	0.01623	0.02172	0.02134	0.02434
1000	0.10767	0.02091	0.02163	0.02236	0.02516	0.03186	0.03252
1500	0.19381	0.04072	0.04302	0.04509	0.05556	0.05614	0.06352
2000	0.36308	0.06844	0.07023	0.07709	0.08223	0.08718	0.11307
3000	0.52381	0.12246	0.12753	0.13091	0.14683	0.15658	0.18078
4000	0.96903	0.21434	0.23098	0.25013	0.26125	0.26552	0.30056
6000	1.86189	0.46394	0.49785	0.49895	0.58984	0.69771	0.86986
8000	3.69228	0.84311	0.87116	0.92048	0.96264	1.01988	1.15386
10000	8.08652	1.40838	1.55327	1.58748	1.78657	1.87883	2.18705

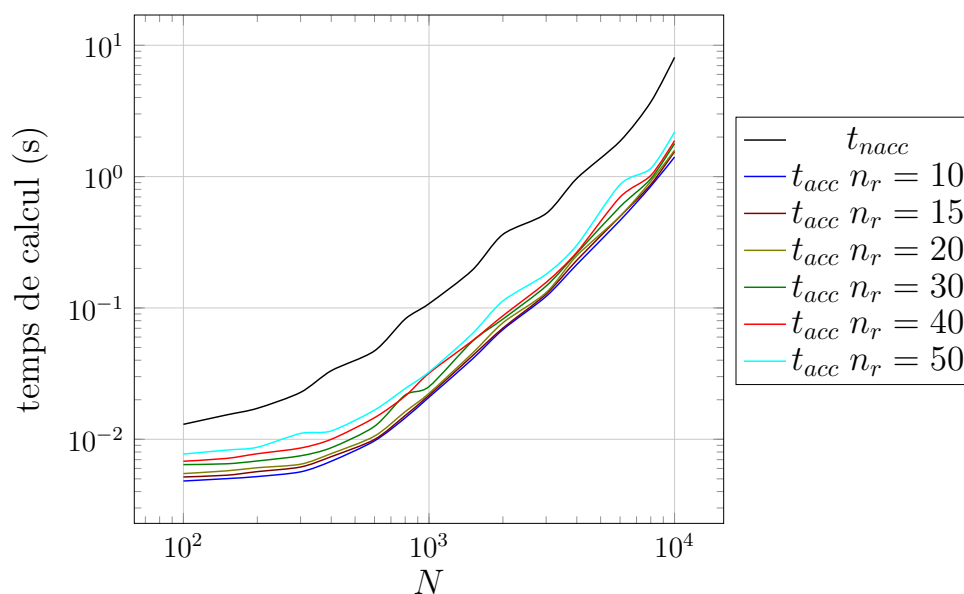


FIGURE 4.1 – Évolution du temps de calcul du champ diffracté ( $r_\Gamma = \lambda$ ) par la méthode barycentrique accélérée ou non en fonction du nombre  $N$  de directions *online*.

On remarque également sur ces résultats que le temps de calcul de la méthode accélérée  $t_{acc}$  croît avec  $n$ . Cette augmentation est prévisible mais reste négligeable devant la dégradation de  $t_{nacc}$  avec  $N$ . En outre,  $n$  a une grande influence sur la précision de l'étape d'interpolation dans la méthode accélérée : plus il est grand plus l'interpolation est précise. Ce nombre devra donc être choisi de sorte à assurer un bon compromis entre performance de l'accélération et précision de l'interpolation.

## 4.2.2 La précision de l'interpolation *online-offline*

On mesure maintenant la précision de l'interpolation asymptotiquement par rapport aux nombres de directions offline  $n_r, n_s$ , pour  $N_s = N_r := N$  avec toujours  $M = n$ . On définit cette précision comme l'erreur relative

$$e_{\text{acc}} = \frac{\|u^{\text{nacc}}(x_r) - u^{\text{acc}}(x_r)\|_{\infty, \Gamma}}{\|u^{\text{nacc}}(x_r)\|_{\infty, \Gamma}}, \quad (4.21)$$

de façon à mesurer seulement l'erreur due à l'interpolation *online*. On donne les résultats de cette mesure pour la configuration du disque diffractant de diamètre  $\lambda$  dans le tableau 4.5 pour  $N = 2000$  et 500. On retrouve des résultats très proches ce qui suggère que la méthode est très stable. On observe de plus que la précision de l'interpolation est d'autant meilleure que  $n$  augmente et en particulier on atteint de bonnes précisions pour de faibles valeurs de  $n$ . On lit sur le tableau que l'erreur due à l'interpolation est inférieure à  $10^{-6}$  pour  $n_s, n_r \geq 30$ , ordre de grandeur très inférieur à l'erreur introduite par l'approximation champ lointain ( $10^{-3}$  dans la configuration d'étude) constitutive de la méthode barycentrique. Il est donc possible d'ajuster la précision de la méthode en jouant sur  $n_r$  et  $n_s$ .

TABLE 4.5 – Tableau indicatif de la précision de l'interpolation dans la méthode *online-offline* (barycentrique) en fonction du nombre de directions *offline*.

$N = 2000$						
$n$	10	15	20	30	40	50
$e_{\text{acc}}$	$7,38 \times 10^{-1}$	$8,54 \times 10^{-2}$	$4,65 \times 10^{-3}$	$1,77 \times 10^{-6}$	$1,72 \times 10^{-10}$	$5,55 \times 10^{-13}$

$N = 500$						
$n$	10	15	20	30	40	50
$e_{\text{acc}}$	$7,38 \times 10^{-1}$	$8,54 \times 10^{-2}$	$4,65 \times 10^{-3}$	$1,77 \times 10^{-6}$	$1,72 \times 10^{-10}$	$5,54 \times 10^{-13}$

## 4.2.3 L'approximation de rang faible

Un dernier paramètre pouvant influencer la vitesse et la précision du calcul est le rang  $M$  de la représentation (4.17). On fixe  $N_s = N_r = N = 2000$  et  $n_s = n_r = n = 30$ , et on fait varier  $M$  de  $n$  à 9. Concrètement, l'approximation de rang  $M$  d'une matrice  $A$  revient à représenter  $A$  par SVD tronquée où on retient les  $M$  plus grandes valeurs singulières et on égale les autres à zéro. La diminution de  $M$  revient donc à perdre de l'information sur  $A$ .

On relève la précision  $e_M$  et le temps d'évaluation  $t_{\text{acc}}$  du champ diffracté pour différentes approximations de rang faible de  $\mathcal{D}_b^{\text{off}}$  (tableau 4.6). On remarque une légère diminution de  $t_{\text{acc}}$  lorsque  $M$  diminue. Cependant  $e_{\text{acc}}$  se dégrade à mesure que  $M$  diminue. Pour  $M = 15$ , le temps de calcul est diminué d'un peu moins de 15% (par rapport à  $M = 30$ ) et la précision de l'interpolation est de l'ordre de  $10^{-5}$ . Pour l'expérience décrite la précision de l'approximation rayon est de l'ordre de  $10^{-3}$  par conséquent, une précision d'ordre  $10^{-5}$  dans le calcul de  $\mathcal{D}^{\text{on}}$  par interpolation ne dégrade pas la précision globale du calcul du champ diffracté par méthode hybride. Les performances de la méthode hybride peuvent donc encore être augmentées si on décide de réaliser une approximation de rang faible plutôt que de rang fini. Il faut cependant être prudent car diminuer le rang de la SVD se fait au détriment de la précision.

## 4.3 Accélération *online-offline* pour la méthode hybride multi-centres

On s'attache dans cette section à décrire la procédure d'accélération *online-offline* dans le cadre de la méthode hybride multi-centres. Pour faciliter la lecture, on commence par reformuler l'expression du champ diffracté calculé par cette méthode sous forme matricielle, pour un point d'observation et une source, puis

TABLE 4.6 – Évolution du temps de calcul et de la précision de l'interpolation lorsqu'on tronque la SVD par un nombre décroissant de termes

$M$	30	20	17	15
$T_{acc}$	0,0847	0,0756	0,0729	0,0724
$e_M$	$1,774 \times 10^{-6}$	$1,777 \times 10^{-6}$	$2,369 \times 10^{-6}$	$3,435 \times 10^{-5}$
$M$	13	11	9	
$T_{acc}$	0,0728	0,0714	0,0693	
$e_M$	$6,756 \times 10^{-4}$	$9,261 \times 10^{-3}$	$1,034 \times 10^{-1}$	

pour  $N_r$  points d'observation et  $N_s$  sources. On décrit ensuite l'algorithme d'accélération. On comparera en particulier la complexité de calcul du champ diffracté calculé avec et sans accélération afin de mettre en évidence la réduction du coût de calcul que permet la procédure *online-offline*. On termine par une illustration de cette accélération.

#### 4.3.1 Reformulation matricielle du calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres et complexité pour une unique source et un unique récepteur

On définit une partition de l'unité  $(\eta_p)_{p \in [1:P]}$  sur  $\Gamma$ , qui induit un recouvrement de  $\Gamma$  en  $P$  sous-domaines  $(\Gamma_p)_{p \in [1:P]}$ , supports des fonctions de partition de l'unité  $(\eta_p)_p$  (section 3.1). Dans le cas d'une source et d'un point d'observation uniques, on obtient le champ diffracté en calculant la double somme

$$u(x_r; \omega) = \sum_{q=1}^P A_r^q(x_r; y_c^q) e^{ik\phi_q^r(x_r; y_c^q)} \left[ \sum_{p=1}^P \mathcal{R}_p^q(\hat{r}^q, \hat{s}^p; \omega) A_s^p(y_c^p; x_s) e^{ik\phi_s^p(y_c^p; x_s)} \right]. \quad (4.22)$$

On rappelle qu'on évalue le coefficient de diffraction dû à la partition  $\Gamma^q$ , lorsque la partition  $\Gamma^p$  est éclairée, par l'intégrale,

$$\mathcal{R}_p^q(\hat{r}^q, \hat{s}^p; \omega) = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \int_{\Gamma_q} \eta_q(y) e^{-ik\hat{r}^q \cdot (y - y_c^q)} (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}^q + 1) \Psi^p(y; \hat{s}^p) ds(y), \quad (4.23)$$

où  $\Psi^p$  est la solution du problème surfacique,

$$\frac{1}{2} \Psi^p(x; \hat{s}^p) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)} - ikG \right) (x, y) \Psi^p(y; \hat{s}^p) ds(y) = -\eta^p(x) e^{ik\hat{s}^p \cdot (y - y_c^p)}, \quad \forall x \in \Gamma, \quad 1 \leq p \leq P. \quad (4.24)$$

Cette formule se réécrit sous la forme du produit matrice vecteur,

$$u(x_r; \omega) = \mathbf{AR}(x_r)^T \mathcal{D}_m \mathbf{AI}(x_s), \quad (4.25)$$

où  $\mathbf{AR}(x_r)$  et  $\mathbf{AI}(x_s)$  sont respectivement les vecteurs colonnes des amplitudes complexes des rayons diffractés issus des centres  $y_c^q$  de chaque sous domaine  $\Gamma_q$  et propagé vers le récepteur  $x_r$  et des rayons incidents issus de la source  $x_s$  et arrivant en chaque centre  $y_c^p$  de  $\Gamma^p$  :

$$\mathbf{AR}(x_r) = \left( A_r^q(x_r; y_c^q) e^{ik\phi_q^r(x_r; y_c^q)} \right)_q \in \mathbb{C}^{P \times 1}, \quad \mathbf{AI}(x_s) = \left( A_s^p(y_c^p; x_s) e^{ik\phi_s^p(y_c^p; x_s)} \right)_p \in \mathbb{C}^{P \times 1}, \quad (4.26)$$

et la matrice  $\mathcal{D}_m$  désigne la matrice de diffraction associée au recouvrement de  $\Gamma$  en  $P$  sous-domaines :

$$\mathcal{D}_m = \left( \mathcal{D}_m[q, p] = \mathcal{R}_p^q(\hat{r}^q, \hat{s}^p; \omega) \right)_{(p, q)} \in \mathbb{C}^{P \times P}. \quad (4.27)$$

où on note  $\hat{r}^q$  la direction en  $y_c^q$  du rayon diffracté issu du centre du sous-domaine  $\Gamma_q$  et propagé vers le récepteur  $x_r$  et  $\hat{s}^p$  la direction en  $y_c^p$  du rayon incident à  $\Gamma^p$  reçu par  $y_c^p$ . Chaque composante de la matrice de diffraction  $\mathcal{D}_m[q, p]$  est le coefficient de diffraction  $\mathcal{R}_p^q(\hat{r}^q, \hat{s}^p)$  associé à la source  $x_s$  et au récepteur  $x_r$  qui donne la contribution du sous-domaine  $q$  à la perturbation du champ incident reçu par le sous-domaine  $p$ .

Les vecteurs  $\text{AR}(x_r)$  et  $\text{AI}(x_s)$  sont calculés par la méthode des rayons connaissant  $x_s$ ,  $x_r$  et la position des centres de chaque sous-domaine du recouvrement :  $y_c^1, \dots, y_c^P$ . La matrice  $D_m$  dépend de la géométrie  $\Gamma$ , de  $\omega$ , du choix des fonctions de partition  $\eta_p$  et des directions  $\hat{r}^1, \dots, \hat{r}^P$  et  $\hat{s}^1, \dots, \hat{s}^P$ . Le calcul numérique de l'intégrale de champ lointain est réalisé par la règle des trapèzes. En rappelant que  $N_d$  représente le nombre de degrés de liberté du problème BEM, on calcule donc chaque coefficient  $\mathcal{R}_p^q$  par

$$\mathcal{R}_p^q(\hat{r}^q, \hat{s}^p; \omega) \approx \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \frac{2\pi}{N_d} \sum_{m=1}^{N_d} \eta_q(y_m) e^{-ik\hat{r}^q \cdot (y_m - y_c^q)} (\mathbf{v}(y_m) \cdot \hat{r}^q + 1) \Psi^p(y_m; \hat{s}^p).$$

On définit les matrices  $\text{PW}_i$  et  $\text{PW}_r$  de  $\mathbb{C}^{N_d \times P}$ , composées respectivement de la famille de vecteurs  $(\text{PW}_i^p)_p$  et  $(\text{PW}_r^q)_q$ , évaluation des ondes planes aux degrés de liberté de  $\Gamma$  dans les directions de propagation des rayons incident et diffracté,

$$\begin{aligned} \text{PW}_i &= [\text{PW}_i^1 \dots \text{PW}_i^P] \in \mathbb{C}^{N_d \times P}, \quad \text{où } \text{PW}_i^p = \left( e^{ik\hat{s}^p \cdot (y_i - y_c^p)} \right)_i \in \mathbb{C}^{N_d \times 1}, \\ \text{PW}_r &= [\text{PW}_r^1 \dots \text{PW}_r^P] \in \mathbb{C}^{N_d \times P}, \quad \text{où } \text{PW}_r^q = \left( e^{-ik\hat{r}^q \cdot (y_i - y_c^q)} \right)_i \in \mathbb{C}^{N_d \times 1}. \end{aligned}$$

On introduit de plus la matrice  $\text{Eta} \in \mathbb{R}^{N_d \times P}$  de partition de l'unité, qui concatène les vecteurs d'évaluation des fonctions de partition aux points de discrétisation de  $\Gamma$  :  $\text{Eta}_i^p = \eta_p(y_i)$ . On définit également les matrices  $\text{M}_r \in \mathbb{R}^{N_d \times P}$ , et  $\Psi = K_{\text{BEM}}^{-1}(-\text{Eta} \cdot \text{Pwi}) \in \mathbb{C}^{N_d \times P}$  respectivement par

$$\text{M}_r[i, q] = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \frac{2\pi}{N_d} (\mathbf{v}(y_i) \cdot \hat{r}^q + 1) \quad \text{et} \quad \Psi[i, p] = \Psi^p(y_i; \hat{s}^p).$$

Comme précédemment, la matrice  $\text{M}_r$  est la matrice des coefficients qui interviennent dans le calcul de la formule de représentation intégrale de l'approximation champ lointain du champ diffracté, associée à la partition de l'unité, et la matrice  $\Psi$  concatène les vecteurs solutions sur  $\Gamma$  des  $P$  problèmes intégraux (4.24). En réutilisant la notation  $\cdot \times$  pour désigner le produit de matrices composante par composante, on a

$$\mathcal{R}_p^q(\hat{r}^q, \hat{s}^p; \omega) = [\text{PW}_r^q \cdot \times \text{M}_r^q \cdot \times \text{Eta}^q]^T K_{\text{BEM}}^{-1}(-\text{Eta}^p \cdot \times \text{PW}_i^p), \quad (4.28)$$

et donc

$$\mathcal{D}_m = [\text{PW}_r \cdot \times \text{M}_r \cdot \times \text{Eta}]^T K_{\text{BEM}}^{-1}[-\text{Eta} \cdot \times \text{PW}_i]. \quad (4.29)$$

On réécrit donc le champ diffracté (4.22) sous la forme du produit matrice vecteur,

$$u(x_r; \omega) = [\text{AR}(x_r)]^T ([\text{PW}_r \cdot \times \text{M}_r \cdot \times \text{Eta}]^T K_{\text{BEM}}^{-1}[-\text{Eta} \cdot \times \text{PW}_i]) [\text{AI}(x_s)]. \quad (4.30)$$

On détaille maintenant dans le tableau 4.7 le nombre d'opérations nécessaires au calcul du champ diffracté  $u(x_r; \omega)$  par (4.30).

Le coût total  $C_m^{\text{nacc}}$  du calcul de  $u(x_r; \omega)$  dépend donc quadratiquement de  $P$ , comme prévu par l'expression (4.22). Cependant, la méthode multi-centres est d'autant plus précise que  $P$  augmente. Il est donc intéressant dans notre contexte d'étude de pouvoir l'accélérer afin de la rendre efficace dans des configurations de CND impliquant un grand nombre de sources et de récepteurs. Avant de détailler le principe de l'accélération dans ce cas, on reformule dans le prochain paragraphe le calcul du champ diffracté pour  $N_s$  sources et  $N_r$  de récepteurs.

### 4.3.2 Calcul du champ diffracté et complexité pour $N_s$ sources et $N_r$ récepteurs

Dans le cas où  $N_s$  sources et  $N_r$  récepteurs sont impliquées dans l'expérience de contrôle, la reformulation matricielle du calcul du champ diffracté devient plus lourde. Pour rendre l'étude de complexité plus lisible, on présente la reformulation matricielle telle qu'elle est implémentée. On reprend pour cela les notations de la section précédente en les précisant dans ce contexte.

On note encore  $x_r \in \mathbb{R}^{2 \times N_r}$  et  $x_s \in \mathbb{R}^{2 \times N_s}$  les vecteurs position respectivement des  $N_r$  récepteurs et des  $N_s$  sources. Pour chaque source  $x_s^{(l)}$  et récepteur  $x_r^{(t)}$ , on note  $(\hat{s}_l^p)_{p \in [1:P]}$  et  $(\hat{r}_t^q)_{q \in [1:P]}$  les directions de propagation

TABLE 4.7 – Détail de la complexité de calcul de la matrice  $\mathcal{D}$  et du champ diffracté par la méthode multi-centres.

Étapes du calcul	Complexité
Calcul $(\hat{r}^q)_{q \in [1:P]}, (\hat{s}^p)_{p \in [1:P]}$	$O(2P)$
Assemblage $K_{BEM}$	$O(N_d^3)$
Factorisation LU de $K_{BEM}$	$O(\frac{1}{3}N_d^3)$
Assemblage $PW_i$	$O(PN_d)$
Assemblage $PW_r$	$O(PN_d)$
Assemblage $M_r$	$O(PN_d)$
Assemblage Eta	$O(PN_d)$
Assemblage $(PW_r \cdot \times M_r \cdot \times \text{Eta})^T$	$O(2PN_d)$
Assemblage $(\text{Eta} \cdot \times PW_i)$	$O(PN_d)$
Calcul de $\Psi$ par descente-remontée	$O(PN_d^2)$
Produit : $(PW_r \cdot \times M_r \cdot \times \text{Eta})^T \Psi$	$O(P^2 N_d)$
Total d'opérations pour le calcul de $\mathcal{D}_m$ :	$O(P^2 N_d + P(N_d^2 + 7N_d + 2) + \frac{4}{3}N_d^3)$
Calcul de AR	$O(PN_t)$
Calcul de AI	$O(PN_t)$
Produit $(AR^T) \mathcal{D}_m AI$	$O(P^2 + P)$
Coût total du calcul de $u(x_r; \omega)$ : $C_m^{\text{nacc}}$	$O\left(P^2(N_d + 1) + P(N_d^2 + 7N_d + 2N_t + 3) + \frac{4}{3}N_d^3\right)$

des rayons incidents à chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  et diffractés par chaque sous-domaine  $\Gamma_q$ . On calcule le champ diffracté (4.22) pour chaque couple  $(x_r^t, x_s^l)_{t,l}$  sous la forme :

$$u(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P [\text{AR}(x_r)[q] \times \mathbb{1}_{N_s}], \times \mathcal{D}_m[q,p] \cdot \times [\text{AI}(x_s)[p] \times \mathbb{1}_{N_r}]^T \in \mathbb{C}^{N_r \times N_s}, \quad (4.31)$$

où les familles de vecteurs  $(\text{AR}(x_r)[q])_{1 \leq p \leq P}$  et  $(\text{AI}(x_s)[p])_{1 \leq p \leq P}$  sont ici construites à partir des amplitudes complexes des rayons respectivement diffractés et incidents pour chaque sous-domaine du recouvrement de  $\Gamma$  : pour  $1 \leq p, q \leq P$ ,

$$\begin{aligned} \text{AR}(x_r)[q] &= \left( B_q^r(x_r^{(t)}; y_c^q) \right)_t \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}, \quad \text{avec} \quad B_q^r(x_r^{(t)}; y_c^q) = A_q^r(x_r^{(t)}; y_c^q) e^{ik\phi_q^r(x_r^{(t)}; y_c^q)}, \\ \text{AI}(x_s)[p] &= \left( B_p^s(y_c^p; x_s^{(l)}) \right)_l \in \mathbb{C}^{N_s \times 1}, \quad \text{avec} \quad B_p^s(y_c^p; x_s^{(l)}) = A_p^s(y_c^p; x_s^{(l)}) e^{ik\phi_p^s(y_c^p; x_s^{(l)})}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

et les  $P^2$  matrices  $\mathcal{D}_m[q,p]$  sont définies comme les matrices des coefficients de diffraction pour les couples  $(q,p)$  de sous-domaines, évalués pour les  $N_r N_s$  couples récepteur-source :

$$\mathcal{D}_m[q,p] = \left( \mathcal{R}_p^q(x_r^{(t)}, x_s^{(l)}; \omega) \right)_{t,l} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_s}. \quad (4.33)$$

D'après (4.28), chaque  $\mathcal{D}_m[q,p]$  se réécrit sous la forme du produit matrice matrice :

$$\mathcal{D}_m[q,p] = [\text{PW}_r[q] \cdot \times M_r[q] \cdot \times [\text{Eta}[q] \times \mathbb{1}_{N_r}]]^T K_{BEM}^{-1} [-(\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{N_s}) \cdot \times \text{PW}_i[p]] \in \mathbb{C}^{N_r \times N_s} \quad (4.34)$$

où on note  $\text{PW}_r[q] \in \mathbb{R}^{N_d \times N_r}$  et  $\text{PW}_i[p] \in \mathbb{R}^{N_d \times N_s}$  les matrices qui évaluent aux points de quadrature de  $\Gamma$  les

ondes planes de vecteur directeur respectivement  $\left(\hat{r}_q^{(t)}\right)_{q \in [1, P]}$ , et  $\left(\hat{s}_p^{(l)}\right)_{p \in [1, P]}$ ,

$$\begin{aligned} \text{PW}_r[q] &= \begin{pmatrix} e^{-ik\hat{r}_1^q \cdot (y_1 - y_c^q)} & \dots & e^{-ik\hat{r}_{N_r}^q \cdot (y_1 - y_c^q)} \\ & \dots & \\ e^{-ik\hat{r}_1^q \cdot (y_{N_d} - y_c^q)} & \dots & e^{-ik\hat{r}_{N_r}^q \cdot (y_{N_d} - y_c^q)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_d \times N_r}, \\ \text{PW}_i[p] &= \begin{pmatrix} e^{ik\hat{s}_1^p \cdot (y_1 - y_c^p)} & \dots & e^{ik\hat{s}_{N_s}^p \cdot (y_1 - y_c^p)} \\ & \dots & \\ e^{ik\hat{s}_1^p \cdot (y_{N_d} - y_c^p)} & \dots & e^{ik\hat{s}_{N_s}^p \cdot (y_{N_d} - y_c^p)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_d \times N_s}, \end{aligned}$$

et où on définit la matrice  $M_r[q] \in \mathbb{C}^{N_d \times N_r}$  des coefficients de la quadrature de la formulation intégrale associée au sous-domaine  $\Gamma_q$ ,

$$M_r[q] = \sqrt{\frac{-ik}{8\pi}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(y_1) \cdot \hat{r}_1^q + 1 & \dots & \mathbf{v}(y_1) \cdot \hat{r}_{N_r}^q + 1 \\ & \dots & \\ \mathbf{v}(y_{N_d}) \cdot \hat{r}_1^q + 1 & \dots & \mathbf{v}(y_{N_d}) \cdot \hat{r}_{N_r}^q + 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_d \times N_r}.$$

En fin de compte, on tire profit de la réécriture des matrices de diffraction (4.34) pour réduire le coût de calcul du champ diffracté (4.31). On le calcule en fait par la formule :

$$\begin{aligned} u(x_r; \omega) &= \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P \left( [\text{AR}(x_r)[q] \times \mathbb{1}_{N_d}] \cdot [\text{PW}_r[q] \cdot M_r[q] \cdot [\text{Eta}[q] \times \mathbb{1}_{N_r}]]^T \right) \times \\ &\quad K_{\text{BEM}}^{-1} [-[\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{N_s}] \cdot [\text{PW}_i[p]] \cdot [\text{AI}(x_s)[p] \times \mathbb{1}_{N_d}]^T] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Analysons maintenant la complexité de calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres dans le cadre multi-sources et multi-récepteurs. Pour simplifier la présentation on introduit les notations suivantes :

$$u(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P \text{T}_r[q] \times \Psi[p], \quad (4.36)$$

où,  $\text{T}_r[q] = \left( \text{P}_r[q] \cdot [\text{PW}_r[q] \cdot M_r[q] \cdot [\text{Eta}[q] \times \mathbb{1}_{N_r}]]^T \right)$ , avec  $\text{P}_r[q] = [\text{AR}(x_r)[q] \times \mathbb{1}_{N_d}]$ , et  $\Psi[p] = K_{\text{BEM}}^{-1} \text{T}_s[p]$ , avec  $\text{T}_s[p] = -[\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{N_s}] \cdot [\text{PW}_i[p]] \cdot \text{P}_s[p]$ , et  $\text{P}_s[p] = [\text{AI}(x_s)[p] \times \mathbb{1}_{N_d}]^T$ .

Les résultats sont rassemblés dans le tableau 4.8. On évalue donc le champ diffracté associé aux  $N_s$  champs incidents en les  $N_r$  points d'observation en un nombre total d'opérations asymptotiquement par rapport à  $N_s, N_r$  de l'ordre de  $P^2(N_r N_s N_d)$ . La procédure *online-offline* consiste ici, comme pour la méthode barycentrique, à découpler le calcul des matrices de diffraction de la position des sources et des récepteurs. En d'autre terme on va chercher à évaluer les  $P^2$  coefficients de diffraction pour un plus petit nombre de couples de directions d'incidence et d'observation prédéfinies dans l'étape *offline* puis à réutiliser ces coefficients pour calculer par interpolation le champ diffracté associé à chaque couple de sous-domaines dans les directions d'intérêt. La procédure d'interpolation utilisée suit le même principe qu'en 4.13. On redétaille rapidement dans le paragraphe suivant la procédure d'interpolation afin d'introduire les notations utiles pour la description de l'algorithme d'accélération *online-offline* adapté à la méthode de résolution multi-centres.

### 4.3.3 Approximation de la matrice de diffraction par SVD et interpolation

L'accélération de la méthode multi-centres s'appuie, comme pour le cas barycentrique, sur la représentation des matrices de diffraction par leur décomposition en valeurs singulières. D'après le théorème 4.1.1, chaque opérateur  $\mathcal{R}_p^q \in L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$  peut être décomposé par l'approximation de rang fini :

$$\forall (\hat{r}, \hat{s}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \quad \mathcal{R}_p^q(\hat{r}, \hat{s}) = \sum_{l=0}^M \lambda_{p,l}^q f_{p,l}^q(\hat{r}) g_{p,l}^q(\hat{s}) + \varepsilon_M, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \varepsilon_M = 0, \quad (4.37)$$

TABLE 4.8 – Détail de la complexité de calcul du champ diffracté ((4.35)) par la méthode multi-centres.

Étapes du calcul de (4.35)	Complexité
Calcul des directions $(\hat{r}^q)_{(t,q)}, (\hat{s}^p)_{(l,p)}$	$O((N_r + N_s)P)$
Assemblage $K_{BEM}$	$O(N_d^3)$
Factorisation LU de $K_{BEM}$	$O(\frac{1}{3}N_d^3)$
Assemblage Eta	$O(PN_d)$
$P$ Assemblages $PW_i[p]$	$O(PN_d N_s)$
$P$ Assemblages $PW_r[q]$	$O(PN_d N_r)$
$P$ Assemblages $M_r[q]$	$O(PN_d N_r)$
$P$ Assemblages $AI(x_s)[p], AR(x_r)[q](x_r)[q]$	$O(PN_t(N_r + N_s))$
$P$ Produits $(\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{N_s})$	$O(PN_d N_s)$
$P$ Produits $(\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{N_r})$	$O(PN_d N_r)$
$P$ Assemblages $P_r[q], P_s[p]$	$O(PN_d N_r + PN_d N_s)$
$P$ Assemblages $T_s[p]$	$O(2PN_d N_s)$
$P$ Assemblages $T_r[p]$	$O(3PN_d N_r)$
Calcul des $P$ descente-remontée	$O(PN_d^2 N_s)$
Assemblage $u(x_r; \omega) : (4.36)$	$O(P^2 N_r N_s N_d)$
Coût total $C_m^{\text{nacc}}$ :	$O(\frac{4}{3}N_d^3 + PN_d + N_r(P + 7N_d P + PN_t) + N_s(P + PN_t + 5N_d P + PN_d^2) + P^2 N_r N_s N_d)$

où  $(\lambda_{p,l}^q)_{l=[1:M]}$  est l'ensemble des  $M$  premières valeurs singulières de  $\mathcal{D}_m[q,p]$  et les fonctions  $(f_{p,l}^q)_{l=[1:M]}$ ,  $(g_{p,l}^q)_{l=[1:M]}$  sont les familles des  $M$  fonctions singulières respectivement à droite et à gauche de la matrice  $\mathcal{D}_m[q,p]$ . La procédure *online-offline* consiste à accélérer l'évaluation de la matrice de diffraction pour un grand nombre de couples de directions d'incidence et d'observation en obtenant une approximation continue de cette approximation de rang faible. Pour cela on procède en 4 étapes.

Premièrement, on calcule les  $P^2$  matrices de diffraction *offline*  $\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q,p]$  pour chaque couple  $(q,p) \in [1,P]^2$  des sous-domaines du recouvrement en évaluant les opérateurs de diffraction  $\mathcal{R}_p^q$  pour l'ensemble des directions prédéfinies  $(\hat{d}_r^j)_{1 \leq j \leq n_r}, (\hat{d}_s^i)_{1 \leq i \leq n_s}$ . On réalise sur chacune de ces matrices une décomposition en valeurs singulières :

$$\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q,p] = F_p^q \Lambda_p^q (G_p^q)^H,$$

où  $F_p^q \in \mathbb{C}^{n_r \times P}$ ,  $\Lambda_p^q \in \mathbb{R}^{P \times P}$  et  $G_p^q \in \mathbb{C}^{n_s \times P}$ . On construit ensuite, par interpolation polynomiale de Tchebyshev, une approximation continue des fonctions singulières afin d'obtenir une approximation analytique de l'opérateur de diffraction :

$$\forall (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}, \quad \mathcal{R}_p^q(\hat{x}, \hat{y}) \approx \sum_{l=0}^M \lambda_{p,l}^q \tilde{f}_{p,l}^q(\hat{x}) \tilde{g}_{p,l}^q(\hat{y}). \quad (4.38)$$

En pratique, les fonctions propres  $(f_{p,l}^q)_{l=[1:M]}$  et  $(g_{p,l}^q)_{l=[1:M]}$  sont approchées par leur interpolé  $(\tilde{f}_{p,l}^q)_l$  et  $(\tilde{g}_{p,l}^q)_l$  sur la base des polynômes de Tchebyshev  $(\Pi_n)_n$ . La troisième étape consiste donc à évaluer les interpolés des fonctions singulières dans les directions *online*, et la quatrième revient à calculer l'expression (4.38) dans ces directions pour évaluer l'approximation de la matrice de diffraction *online*  $\mathcal{D}_m^{\text{on}}$ .

On détaille maintenant l'algorithme de mise en œuvre de la procédure d'accélération *online-offline* puis on l'illustre sur des expériences numériques.



### 4.3.4 Algorithme de résolution par la méthode multi-centres accélérée par la procédure *online-offline*

Pour calculer le champ diffracté en  $N_r$  récepteurs par la méthode multi-centres accélérée par procédure *online-offline*, on se fixe  $n_s$  directions d'incidence et  $n_r$  directions d'observation prédéfinies, telles que  $n_s, n_r \ll N_r, N_s$ . On calcule ensuite la contribution au champ diffracté de chaque sous-domaine  $\Gamma^q$  du recouvrement pour chaque  $\Gamma^p$  éclairé, pour les couples de directions d'incidence et d'observation prédéfinis. Ainsi on calcule non plus comme précédemment  $P^2$  matrices de diffraction de taille  $N_r \times N_s$ , mais  $P^2$  matrices  $\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p]$  de taille  $n_s \times n_r$ . On décrit ici l'algorithme de calcul du champ diffracté par méthode multi-centres accélérée.

Étapes *offline* :

1. Choix de la formulation intégrale,
2. Lecture du maillage de l'obstacle,
3. Choix du recouvrement et du nombre de sous-domaines : calcul de la position des centres de chaque sous-domaine du recouvrement, et de la partition de l'unité  $(\eta_p)_{p=[1,P]}$  sur  $\Gamma$  que l'on concatène dans la matrice Eta.
4. On se donne  $n_s$  et  $n_r$ , respectivement nombre de directions *offline* des rayons incidents et diffractés.
5. Calcul des directions d'incidence et d'observation *offline*,  $(\hat{d}_l^s)_{l=[1:n_s]}$ ,  $(\hat{d}_t^r)_{t=[1:n_r]}$ . On les calcule à partir des  $n_s$  et  $n_r$  zéros des fonctions de Tchebyshev dans l'intervalle  $[-1, 1]$  :  $(t_r^j)_{1 \leq j \leq n_r}$ , et  $(t_s^i)_{1 \leq i \leq n_s}$ . On définit la distribution angulaire sur  $[0, 2\pi]$ ,  $(\theta_r^j)$ ,  $(\theta_s^i)$  à partir de la distribution des zéros par homothétie  $h : t \in [-1, 1] \rightarrow \pi t + \pi$ , puis on calcule la distribution des directions *offline* sur la sphère unité :  $\hat{d}_r^j = (\cos(\theta_r^j), \sin(\theta_r^j))^T$ ,  $\hat{d}_s^i = (\cos(\theta_s^i), \sin(\theta_s^i))^T$ .
6. Choix de la base d'interpolation  $\Pi_n^r$  et  $\Pi_n^s$  : ici les polynômes de Tchebyshev,
7. Évaluation des  $2P$  matrices d'ondes planes  $\text{PW}_r[q] \in \mathbb{C}^{N_d \times n_r}$  et  $\text{PW}_i[p] \in \mathbb{C}^{N_d \times n_s}$  pour l'ensemble des directions prédéfinies :

$$\text{PW}_r[q](i, t) = e^{ik\hat{d}_t^r \cdot (y_i - y_i^q)}, \quad \text{PW}_i[p](i, l) = e^{ik\hat{d}_l^s \cdot (y_i - y_i^p)}.$$

8. Évaluation des  $P$  matrices  $\text{M}_r[q] \in \mathbb{C}^{N_d \times n_r}$  selon le choix de la formulation intégrale.
9. Assemblage de la matrice  $K_{\text{BEM}} \in \mathbb{C}^{N_d \times N_d}$  et de sa factorisation LU,
10. Résolution des  $P$  systèmes linéaires par descente remontée :

$$1 \leq p \leq P, \quad \Psi[p] = K_{\text{BEM}}^{-1}[-\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{n_s}] \cdot \text{PW}_i[p], \in \mathbb{C}^{N_d \times n_s}.$$

11. Évaluation des  $P^2$  coefficients de diffraction  $\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p] \in \mathbb{C}^{n_r \times n_s}$  dans les directions *offline* :  $\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p] = (\mathcal{R}_p^q(\hat{d}_t^r, \hat{d}_l^s))_{1 \leq t \leq n_r, 1 \leq l \leq n_s}$ ,

$$\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p] = [\text{M}_r(q) \cdot \text{PW}_r \cdot \text{Eta}[q] \times \mathbb{1}_{n_r}]^T \Psi[p].$$

12. Calcul des grandeurs utiles à l'interpolation. L'interpolation n'est pas réalisée directement à partir de la matrice  $\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p]$  de chaque opérateur mais à partir d'une matrice  $A[q, p] \in \mathbb{C}^{n_r \times n_s}$  calculée en pondérant chaque coefficient de  $\mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p]$  par les poids de la quadrature de Tchebyshev, [Rokhlin et Yarvin (1996), p.17].

- On calcule d'abord les vecteurs  $W_r \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$  et  $W_s \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}$  d'évaluation des poids d'interpolation de Tchebyshev en chaque nœud  $t_{r/s}$  :  $W_{r/s}[j] = 1/\sqrt{1 - (t_{r/s}^j)^2}$ .

- On construit ensuite la matrice  $A_p^q \in \mathbb{C}^{n_r \times n_s} : A_p^q[j, i] = \mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p](j, i) \sqrt{W_r[j] W_s[i]}$ . Pour optimiser le coût de calcul, on évalue  $A_p^q$  par :

$$A_p^q = [\sqrt{W_r} \times \mathbb{1}_{n_s}] \cdot \mathcal{D}_m^{\text{off}}[q, p] \cdot [\sqrt{W_s} \times \mathbb{1}_{n_r}]^T.$$

SVD et calculs pré-interpolation :

- On décompose chaque  $A_p^q$  en valeurs singulières :  $A_p^q = F_p^q \Lambda_p^q (G_p^q)^H$ .  $F_p^q \in \mathbb{C}^{n_r \times M}$ ,  $G_p^q \in \mathbb{C}^{n_s \times M}$  sont respectivement les matrices des  $M$  premiers vecteurs propres à droite et à gauche de  $A_p^q$  et  $\Lambda_p^q \in \mathbb{R}^{M \times M}$  est la matrice des  $M$  premières valeurs singulières  $(\lambda_{p,l}^q)_l$  de  $A_p^q$ .
- Construction pour chaque sous-domaine du recouvrement des matrices  $\hat{F}_p^q$  et  $\hat{G}_p^q$  définies à partir de  $F_p^q$  et  $G_p^q$  par :

$$\hat{F}_p^q(j, i) = \frac{F_p^q(j, i)}{\sqrt{W_r[j]}}, \quad \hat{G}_p^q(j, i) = \frac{G_p^q(j, i)}{\sqrt{W_s[j]}}.$$

Étapes *online* :

1. Lecture des paramètres du problème : position des sources et des récepteurs,
2. Calcul des directions des rayons interagissant avec l'obstacle à partir de la position des sources et des récepteurs,  $(\hat{s}_l^p)_{1 \leq l \leq N_s, 1 \leq p \leq P}$ ,  $(\hat{r}_t^q)_{1 \leq t \leq N_r, 1 \leq p \leq P}$ .
3. Calcul de l'amplitude complexe des  $N_s$  rayons incidents et  $N_r$  rayons diffractés associés à chaque sous-domaine  $\Gamma_p$  :  $\text{AI}(x_s)[p] \in \mathbb{C}^{N_s \times 1}$ ,  $\text{AR}(x_r)[p] \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$  tels que,

$$\text{AI}(x_s)[p] = \left( A_p^s(y_c^p; x_s^{(l)}) e^{ik\Phi_p^s(y_c^p; x_s^{(l)})} \right)_l, \quad \text{AR}(x_r)[p] = \left( A_p^r(x_r^{(t)}; y_c^p) e^{ik\Phi_p^r(x_r^{(t)}; y_c^p)} \right)_t$$

4. Évaluation des fonctions de la base d'interpolation. On calcule les  $2P$  matrices  $\tilde{\Pi}_p^s$  et  $\tilde{\Pi}_p^r$  qui concatènent l'évaluation des  $n_s$  et  $n_r$  fonctions de la base d'interpolation respectivement en les directions d'incidence et d'observation *online* :

$$\tilde{\Pi}_p^s = \left( \Pi_k^s(\hat{s}_l^p) / \sqrt{1 + (t(\hat{s}_l^p))^2} \right)_{(k,l)} \in \mathbb{R}^{n_s \times N_s},$$

$$\tilde{\Pi}_p^r = \left( \Pi_k^r(\hat{r}_t^q) / \sqrt{1 + (t(\hat{r}_t^q))^2} \right)_{(k,t)} \in \mathbb{R}^{n_r \times N_r}.$$

5. Interpolation des vecteurs singuliers dans les directions  $(\hat{r}_t^q, \hat{s}_l^p)_{(t,l)}$ , pour chaque couple  $(q, p)$  de sous-domaines :

- Calcul des matrices d'interpolation des fonctions singulières  $\tilde{F}_p^q = \left( \tilde{f}_{p,k}^q(\hat{r}_t^q) \right) \in \mathbb{C}^{N_r \times M}$  et  $\tilde{G}_p^q = \left( \tilde{g}_{p,k}^q(\hat{s}_l^p) \right) \in \mathbb{C}^{N_s \times M}$  pour lesquelles chaque colonne correspond à l'interpolé des fonctions singulières de  $A_p^q$  dans les directions *online*.  
Pour tout  $k \in [1, M]$ , on évalue  $\tilde{f}_{p,k}^q$  en  $\hat{r}_t^q$  en interpolant le vecteur  $\hat{F}_p^q(:, k)$  sur la base des polynômes de Tchebyshev  $\Pi_n^r$  par

$$\tilde{f}_{p,k}^q(\hat{r}_t^q) = \sum_{n=0}^{n_r} C(\hat{F}_p^q)[n, k] \frac{\Pi_n^r(t(\hat{r}_t^q))}{\sqrt{1 + (t(\hat{r}_t^q))^2}} = \tilde{\Pi}_p^r(:, t)^T C(\hat{F}_p^q)(:, k),$$

où la matrice des poids de l'interpolation  $C(\hat{F}_p^q) \in \mathbb{C}^{n_r \times M}$  est obtenue par résolution du système

$$\hat{F}_p^q = \Pi_{\text{quad}}^r C(\hat{F}_p^q),$$

où on définit  $\Pi_{\text{quad}}^r = \left( \Pi_n^r(t(\hat{d}_r^j)) / \sqrt{1 + t(\hat{d}_r^j)^2} \right)_{n,j} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ . On réécrit donc matriciellement :  
 $\tilde{F}_p^q = (\tilde{\Pi}_p^r)^T C(\hat{F}_p^q)$ .

On obtient de la même façon  $\tilde{G}_p^q = (\tilde{\Pi}_p^s)^T C(\hat{G}_p^q)$ , où  $C(\hat{G}_p^q) \in \mathbb{C}^{n_s \times M}$  est solution du système

$$\hat{G}_p^q = \Pi_{\text{quad}}^s C(\hat{G}_p^q),$$

où on définit  $\Pi_{\text{quad}}^s = \left( \Pi_n^s(t(\hat{d}_s^j)) / \sqrt{1 + t(\hat{d}_s^j)^2} \right)_{n,j} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ .

- On évalue ensuite la matrice de diffraction dans les directions *online*,  $\mathcal{D}_m^{\text{on}}[q,p]$  (4.17) :

$$\mathcal{D}_m^{\text{on}}[q,p] = \tilde{F}_p^q \Lambda_p^q (\tilde{G}_p^q)^H. \quad (4.39)$$

6. Reconstruction du champ diffracté 4.22) :

$$u(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P \text{AR}(x_r)[q] \mathcal{D}_m^{\text{on}}[q,p] \text{AI}(x_s)[p]^T,$$

qui se réécrit en tirant profit de l'expression (4.39) :

$$u(x_r; \omega) = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^P [[\text{AR}(x_r)[q] \times \mathbb{1}_M] \cdot \tilde{F}_p^q \Lambda_p^q [(\tilde{G}_p^q)^H \cdot [\text{AI}(x_s)[p] \times \mathbb{1}_M]^T]]. \quad (4.40)$$

### Complexité de la méthode multi-centres accélérée par procédure *online-offline*

On détaille dans les tableaux 4.9 et 4.10 le nombre d'opérations impliquées dans le calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres accélérée. On compare ensuite le coût de calcul de la méthode multi-centres non accélérée par rapport à celui de la méthode accélérée. Pour cela, on calcule la différence du nombre total d'opérations que nécessitent le calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres respectivement accélérée et non-accelérée. On obtient :

$$\begin{aligned} C_m^{\text{off}} + C_m^{\text{on}} - C_m^{\text{nacc}} &= N_s N_r P^2 (M - N_d) + N_s (P^2 (M^2 + M(n_s + 2)) + P(n_s - 5N_d - N_d^2)) \\ &\quad + N_r (P^2 M(n_r + 2) + P(n_r - 7N_d)) + \\ &\quad P^2 (4n_r^2 n_s + 8n_s^2 n_r + 9n_s^3) + (n_r^2 + n_s^2)(1 + M) + 1/3(n_s^3 + n_r^3) \\ &\quad + n_r n_s P^2 (N_d + 1) + n_s (2 + 3PN_d + PN_d^2 + P^2 M) + n_r (5PN_d + 2 + P^2 M). \end{aligned} \quad (4.41)$$

On observe un comportement asymptotique quadratique décroissant de cette différence lorsque  $N_r$  et  $N_s$  augmentent. Cependant, cette différence n'est pas strictement négative. Il existe une valeur minimum de  $N_r$  et  $N_s$  en dessous de laquelle la procédure *online-offline* devient plus coûteuse qu'un calcul direct. On va maintenant tenter d'illustrer ce comportement sur des expériences numériques.

## 4.4 Illustration de l'accélération de la méthode multi-centres et choix des paramètres

Comme pour la méthode barycentrique, on illustre l'accélération du temps de calcul rendue possible par la mise en œuvre de la procédure *online-offline* dans le cadre de la méthode multi-centres. On mesure ensuite la précision de l'interpolation en fonction du nombre de directions offline ainsi que l'influence du rang de l'approximation de rang faible dans la représentation de la matrice *offline*.

Pour cette illustration on considère la même configuration qu'en section 4.2 : un disque diffractant de diamètre  $\lambda$  situé dans un milieu homogène non borné. Les sources sont distribuées sur un cercle de rayon  $1200\lambda$  centré en  $y_c$  et on calcule l'approximation haute fréquence du champ diffracté en un ensemble de points d'observation sur un cercle de rayon  $1000\lambda$  et centré au barycentre  $y_c$ . Pour l'expérience on choisit  $N_s = N_r = N$  et  $n_s = n_r = n$ . Dans cette configuration, en exploitant les résultats d'estimation de l'erreur du chapitre 2, on estime pour le calcul du champ diffracté par la méthode barycentrique une erreur relative du champ diffracté de l'ordre de  $10^{-3}$ . Le calcul révèle en fait une erreur de  $1,63 \times 10^{-3}$ . Pour obtenir une meilleure précision, on met en œuvre la méthode multi-centres. On se donne trois recouvrements de  $\Gamma$  en  $P = 5, 10$  puis  $20$  sous-domaines, caractérisés par leur centre  $y_c^p$  et leur taille caractéristique  $r_p$ . Pour ces trois recouvrements, l'approximation multi-centres du champ diffracté atteint une précision par rapport à la solution BEM respectivement de  $3,56 \times 10^{-4}$ ,  $8,07 \times 10^{-5}$  et  $4,46 \times 10^{-5}$ .

TABLE 4.9 – Détail du coût de calcul des étapes *offline* de la méthode multi-centres accélérée par méthode *online-offline*.

Étapes <i>offline</i>	
Étapes du calcul	Complexité
Évaluation de $\text{Eta}$	$O(PN_d)$
Calcul des directions prédéfinies	$O(n_s + n_r)$
Évaluation des $P \text{PW}_r[q]$	$O(PN_d n_r)$
Évaluation des $P \text{PW}_i[p]$	$O(PN_d n_s)$
Évaluation des $P M_r[q]$	$O(PN_d n_r)$
Calcul $\text{Eta}[q] \times \mathbb{1}_{n_r}$	$O(PN_d n_r)$
Calcul $\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{n_s}$	$O(PN_d n_s)$
Calcul des $P$ produits : $\text{PW}_r[q] \cdot M_r[q] \cdot [\text{Eta}[q] \times \mathbb{1}_{n_r}]$	$O(2PN_d n_r)$
Calcul des $P$ produits $[\text{Eta}[p] \times \mathbb{1}_{n_s}] \cdot \text{PW}_i[p]$	$O(PN_d n_s)$
Assemblage de $K_{BEM}$	$O(N_d^3)$
Factorisation LU de $K_{BEM}$	$O(\frac{1}{3}N_d^3)$
Évaluation des $\Psi^p$ par descente remontée	$O(n_s N_d^2 P)$
Calcul des $P^2$ matrices : $D_p^q = [(\text{Eta} \times \mathbb{1}_{n_r}) \cdot M_r \cdot \text{PW}_r]^T \Psi^p$	$O(P^2 N_d n_r n_s)$
Calcul poids d'interpolation : $W_r$ et $W_s$	$O(n_r + n_s)$
Calcul des $P^2$ matrices $A_p^q$	$O(P^2 n_s n_r)$
SVD des $P^2 A_p^q$	$O((4n_r^2 n_s + 8n_r n_s^2 + 9n_s^3)P^2)$
Construction des vecteurs $\hat{F}^q + p$ et $\hat{G}_p^q$	$O(P^2 M (n_r + n_s))$
Total d'opérations $C_m^{\text{off}}$	$O\left(\frac{4}{3}N_d^3 + N_d P + P^2(4n_r^2 n_s + 8n_r n_s^2 + 9n_s^3) + n_s n_r P^2(N_d + 1) + n_s(2 + 3PN_d + PN_d^2 + P^2 M) + n_r(2 + 5PN_d + P^2 M)\right)$

#### 4.4.1 L'accélération

On illustre ici l'accélération que permet la mise en œuvre de la méthode *Online-Offline* dans le cadre de la méthode multi-centres. On fait varier le nombre de directions *offline*  $n$  entre 10 et 50. Pour chaque  $n$ , on mesure le temps de calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres, respectivement accélérée et non accélérée, comme fonction du nombre de directions *online*  $N$ . Pour  $P = 5$ , on prend  $N \in [100; 4000]$ , pour  $P = 10$ ,  $N \in [100; 2500]$  et pour  $P = 20$ ,  $N \in [100; 1000]$ . Les résultats pour chacun des recouvrements sont observés sur les figures 4.2, 4.3 et 4.4 où on trace les courbes  $N \rightarrow t_{\text{acc}}(n, N)$ , pour  $10 \leq n \leq 50$  et  $N \rightarrow t_{\text{nacc}}$ .

Le comportement asymptotique quadratique des temps de calcul  $t_{\text{acc}}$  et  $t_{\text{nacc}}$  n'est pas observé sur ces résultats avec la même exactitude que dans le cas de la méthode barycentrique. Il est donc possible que le code de calcul puisse encore être optimisé. En outre, on observe que l'écart entre les courbes  $N \rightarrow t_{\text{acc}}(n, N)$  et  $N \rightarrow t_{\text{nacc}}(N)$  diminue lorsque  $P$  augmente : cela est dû à la dépendance quadratique des termes d'ordre 1 et 0 en  $N$  de la complexité de calcul par la méthode accélérée (4.41). On observe tout de même un écart constant entre les représentations logarithmiques des deux temps de calcul lorsque  $N$  est assez grand (pour  $P = 5$  et  $P = 20$ ), suggérant la similitude de leur évolution asymptotique à une constante multiplicative près, comme prédit par (4.41).

On observe d'autre part que le choix du nombre de directions *offline* influence sensiblement le temps de calcul de la méthode. C'est pour la méthode multi-centres beaucoup plus notable que pour la méthode barycentrique : plus  $n$  est grand plus le calcul est coûteux. Cette augmentation du temps de calcul s'explique

TABLE 4.10 – Détail du coût de calcul des étapes *online* de la méthode multi-centres accélérée par méthode *online-offline*.

Étapes <i>online</i>	
Étapes du calcul	Complexité
Calcul des couples $(\hat{r}_j^q, \hat{s}_i^p)_{j,l}$	$O(P(N_r + N_s))$
Calcul des 2P vecteurs : $AR(x_r)[q]$ et $AI(x_s)[p]$	$O(N_t P(N_r + N_s))$
Calcul des matrices $\Pi_{\text{quad}}^r$ et $\Pi_{\text{quad}}^s$	$O(n_s^2 + n_r^2)$
Calcul des $P^2$ matrices de poids d'interpolation : $C(\hat{F}_p^q)$ , $C(\hat{G}_p^q)$	$O(P^2(1/3(n_s^3 + n_r^2) + M(n_r^2 + n_s^2)))$
Calcul des 2P bases d'interpolation $\tilde{\Pi}_q^r$ et $\tilde{\Pi}_p^s$	$O(P(n_s N_s + n_r N_r))$
Évaluation des $\tilde{F}_p^q$ et $\tilde{G}_p^q$	$O(P^2 M(n_r N_r + n_s N_s))$
$P^2$ Produits : $[AR(x_r)[q] \times \mathbb{1}_M] \cdot \tilde{F}_p^q$	$O(2P^2 N_r M)$
$P^2$ Produits : $[AI(x_s)[p] \times \mathbb{1}_M] \cdot \tilde{G}_p^q$	$O(2P^2 N_s M)$
$P^2$ Produits : $\Psi[q,p] = \Lambda_p^q[(\tilde{G}_p^q)^H \cdot [AI(x_s)[p] \times \mathbb{1}_M]^T]$	$O(P^2 M^2 N_s)$
$P^2$ Produits : $[[AR(x_r)[q] \times \mathbb{1}_M]^T \cdot \tilde{F}_p^q] \Psi[q,p]$	$O(P^2 N_r N_s M)$
Coût total Online $C_m^{\text{on}}$	$O((n_r^2 + n_s^2)(1 + M) + 1/3(n_s^3 + n_r^3) + P^2 M N_s N_r + N_r[P(1 + N_t + n_r) + P^2 M(n_r + 2)] + N_s[P(n_s + 1 + N_t) + P^2(M(n_s + 2) + M^2)])$

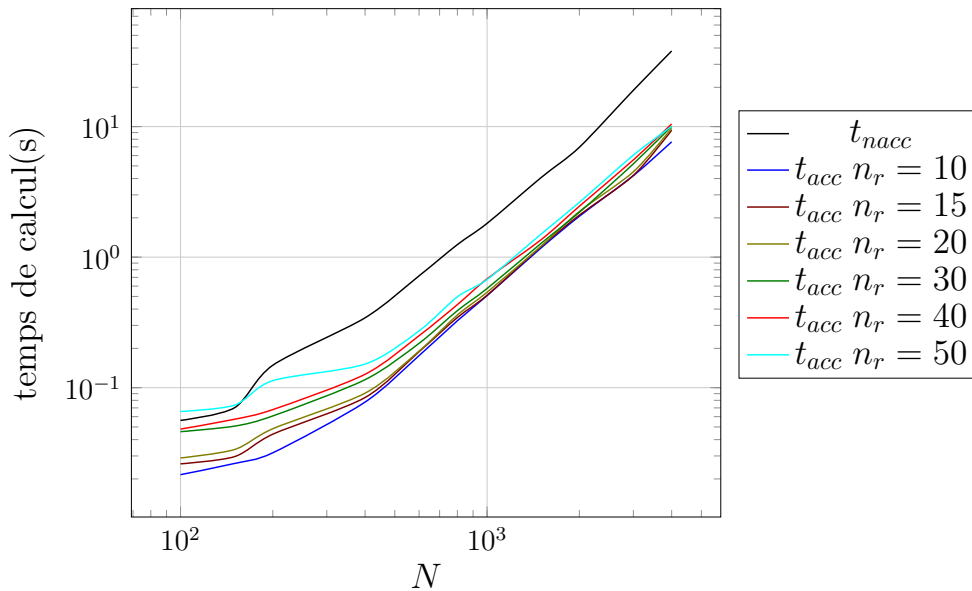


FIGURE 4.2 – Évolution du temps de calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres accélérée ou non en fonction du nombre de directions Online. Cas du recouvrement  $P = 5$ .

par la stratégie de calcul de la méthode multi-centres qui découpe le problème sous-domaine par sous-domaine. On résout en effet ici  $P$  équations intégrales, on calcule  $P^2$  matrices de diffraction de taille  $n_s \times n_s$ , et on réalise une SVD sur chacune de ces matrices. Même si les matrices sont de petite taille, les temps de calcul de chaque étape s'accumulent et la taille des matrices manipulées va jouer un rôle important. On remarque enfin

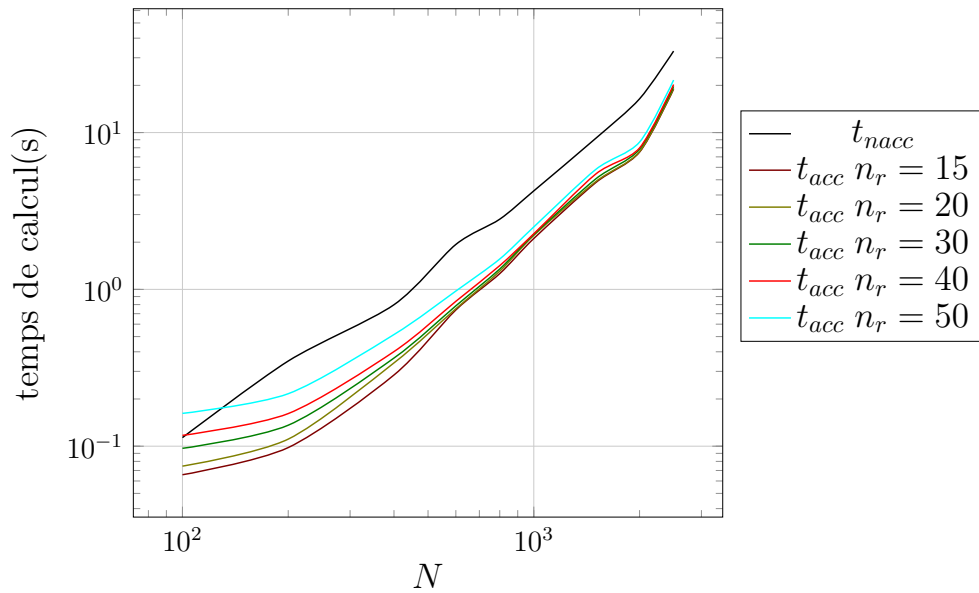


FIGURE 4.3 – Évolution du temps de calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres accélérée ou non en fonction du nombre de directions Online. Cas du recouvrement  $P = 10$ .

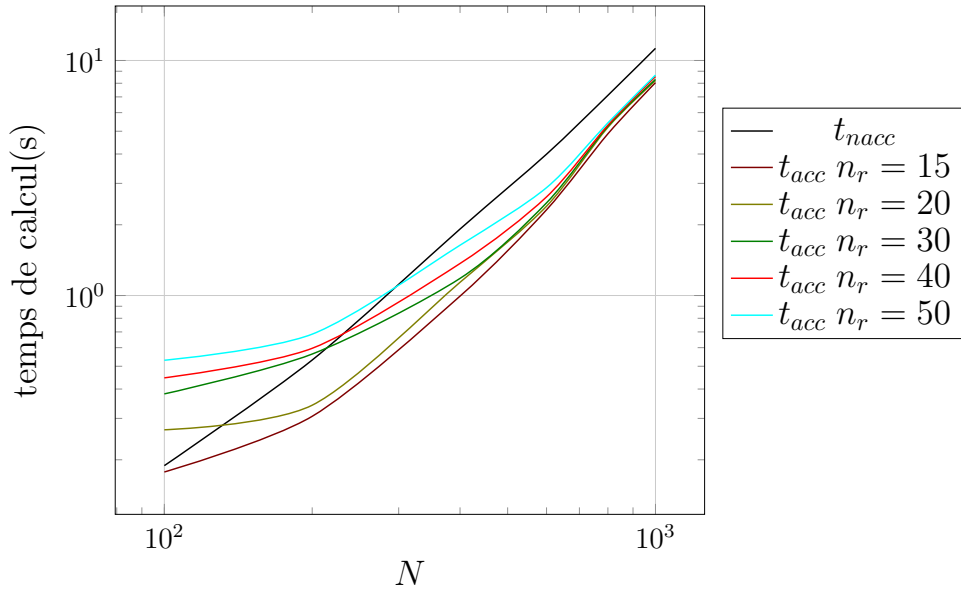


FIGURE 4.4 – Évolution du temps de calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres accélérée ou non en fonction du nombre de directions Online. Cas du recouvrement  $P = 20$ .

sur cette figure que pour un trop faible nombre de directions *online*, la procédure *online-offline* est moins rapide que la méthode multi-centres non accélérée. Il existe une valeur seuil du nombre de directions *online*, qui dépend du nombre de points dans la quadrature et du nombre de directions *offline*, au delà de laquelle la méthode est plus efficace. Ceci illustre les résultats du calcul de complexité du paragraphe précédent.

#### 4.4.2 La précision de l'interpolation

Le deuxième point d'intérêt dans cette expérience est la mesure de l'erreur d'approximation introduite par l'interpolation des vecteurs singuliers de chaque matrice de diffraction. On a pour cela fixé le nombre de directions *online* à  $N = 500$ , et pour chaque nombre  $n$  de directions *offline*, on calcule l'erreur introduite par l'interpolation dans le calcul du champ diffracté. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux 4.11, 4.12 et 4.13 respectivement pour un recouvrement à 5, 10 et 20 sous-domaines. Le choix du paramètre  $n$

conditionne la précision : plus il est grand, meilleure est l'approximation. Cependant ce nombre ne nécessite pas d'être très grand pour que l'erreur d'interpolation devienne négligeable devant l'erreur d'approximation rayon de la méthode hybride. On relève en particulier sur cette configuration que l'erreur due à l'interpolation est inférieure à  $10^{-5}$  lorsqu'on choisit  $n \geq 30$  pour  $P = 5$ ,  $n \geq 20$  pour  $P = 10$  et  $n \geq 17$  pour  $P = 20$ .

TABLE 4.11 – Tableau indicatif de la précision de l'interpolation dans la méthode *online-offline* (multi-centres) en fonction du nombre de directions *offline*  $n$ , lorsque  $P = 5$ .

$n$	10	15	20	30	40	50
$e_{acc}$	$2,82 \times 10^{-1}$	$3,59 \times 10^{-2}$	$2,86 \times 10^{-3}$	$1,53 \times 10^{-5}$	$2,96 \times 10^{-8}$	$5,11 \times 10^{-11}$

TABLE 4.12 – Tableau indicatif de la précision de l'interpolation dans la méthode *online-offline* (multi-centres) en fonction de  $n$ , lorsque  $P = 10$ .

$n$	10	15	20	30	40	50
$e_{acc}$	$5,09 \times 10^{-2}$	$1,99 \times 10^{-3}$	$3,89 \times 10^{-5}$	$9,72 \times 10^{-8}$	$4,66 \times 10^{-11}$	$1,09 \times 10^{-12}$

TABLE 4.13 – Tableau indicatif de la précision de l'interpolation dans la méthode *online-offline* (multi-centres) en fonction de  $n$ , lorsque  $P = 20$ .

$n$	10	15	20	30	40	50
$e_{acc}$	$1,32 \times 10^{-2}$	$1,05 \times 10^{-4}$	$3,61 \times 10^{-6}$	$5,02 \times 10^{-10}$	$1,05 \times 10^{-12}$	$1,05 \times 10^{-12}$

### 4.4.3 L'approximation de rang faible

On fait enfin jouer le dernier paramètre de la méthode *online-offline* : le rang  $M$  de l'approximation de rang faible de la matrice de diffraction *offline*. On a d'abord remarqué un élément important qui distingue la structure des matrices de diffraction calculées sous-domaine par sous-domaine de la matrice de diffraction barycentrique : ces matrices ne comptent qu'un petit nombre de valeurs singulières non-nulles. On mesure ici l'évolution du temps de calcul et de la précision de l'interpolation lorsque  $M$  diminue entre 30 et 2 et on remarque que la précision est inchangée jusqu'à 9, quelque soit le recouvrement.

TABLE 4.14 – Évolution du temps de calcul et de la précision de l'interpolation lorsqu'on tronque la SVD par un nombre décroissant de termes : multi-centres  $P = 5$ .

$M$	30	15	11	9
$T_{acc}$	0,1825	0,1502	0,1451	0,1330
$e_M$	$1,5332 \times 10^{-5}$	$1,5332 \times 10^{-5}$	$1,5332 \times 10^{-5}$	$1,5338 \times 10^{-5}$
$M$	5	4	3	2
$T_{acc}$	0,1296	0,1290	0,1273	0,1251
$e_M$	$8,4185 \times 10^{-4}$	$5,7591 \times 10^{-3}$	$4,5281 \times 10^{-2}$	$2,7159 \times 10^{-1}$

Pour  $P = 5$ , on peut approcher le coefficient de diffraction par une SVD de rang 9 sans dégrader la précision de l'approximation multi-rayons ( $3,5626 \times 10^{-4}$ ) avec une accélération de 27% du temps de calcul. Pour  $P = 10$ , on peut abaisser le rang de l'approximation à 5 sans dégrader l'erreur ( $8,07 \times 10^{-5}$ ) et obtenir une accélération de 37%. Enfin, pour  $P = 20$ , on peut prendre un rang  $M = 4$  et gagner 38% de temps de calcul. À  $n_s$  et  $N_s$  fixé, ce paramètre joue donc un rôle capital pour accélérer la méthode multi-centres par procédure *Online-Offline* sans dégradation de la précision de l'approximation multi-rayons.

TABLE 4.15 – Évolution du temps de calcul et de la précision de l’interpolation lorsqu’on tronque la SVD par un nombre décroissant de termes : multi-centres  $P = 10$ .

$M$	30	15	11	9
$T_{acc}$	0,6872	0,5464	0,5113	0,4809
$e_M$	$9,7232 \times 10^{-8}$	$9,7232 \times 10^{-8}$	$9,7232 \times 10^{-8}$	$9,7232 \times 10^{-8}$
$M$	5	4	3	2
$T_{acc}$	0,4665	0,4607	0,4368	0,4382
$e_M$	$1,5959 \times 10^{-6}$	$5,4322 \times 10^{-5}$	$1,3476 \times 10^{-3}$	$2,0701 \times 10^{-2}$

TABLE 4.16 – Évolution du temps de calcul et de la précision de l’interpolation lorsqu’on tronque la SVD par un nombre décroissant de termes : multi-centres  $P = 20$ .

$M$	30	15	11	9
$T_{acc}$	2,7732	2,4618	2,1126	1,9487
$e_M$	$5,0243 \times 10^{-10}$	$5,0243 \times 10^{-10}$	$5,0243 \times 10^{-10}$	$5,0243 \times 10^{-10}$
$M$	5	4	3	2
$T_{acc}$	1,7890	1,7149	1,7030	1,6965
$e_M$	$1,4356 \times 10^{-9}$	$1,3349 \times 10^{-7}$	$1,9845 \times 10^{-5}$	$1,1868 \times 10^{-3}$

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé une méthode d’accélération de la méthode hybride basée sur une procédure de résolution Online-Offline et une approximation de rang faible du coefficient de diffraction. On a détaillé l’algorithme de résolution et analysé son coût de calcul relativement à celui de la méthode non-accélérée. On a ensuite mis en œuvre la procédure *Online-Offline* sur des configurations de diffraction en milieu non-borné et homogène pour illustrer l’accélération. Dans le cadre de la méthode multi-centres, les résultats ne coïncident pas exactement avec l’analyse de complexité suggérant que le code de calcul peut encore être optimisé.

De façon plus générale, le régime asymptotique de l’accélération est observé pour un nombre élevé de directions *offline*. Il serait donc intéressant de tester d’autres méthodes d’accélération pour tenter de diminuer le seuil de l’asymptotique et/ou d’accroître l’accélération. Cela pourrait dans un premier temps être investigué en implémentant une méthode d’interpolation moins coûteuse, comme l’interpolation de Lagrange sur les nœuds de Tchebyshev ou l’interpolation de Tchebyshev avec un calcul des coefficients par fft comme décrit dans Monro (1979). La procédure *Online-Offline* pourra également être adaptée à la dimension 3 pour laquelle on pressent de biens meilleures performances.





## Chapitre 5

# Extension à l'acoustique 3D et à l'élastodynamique 3D

La méthode hybride proposée dans le manuscrit est décrite jusqu'ici dans le cadre de l'acoustique 2D. Toutefois elle repose sur une stratégie et des approximations génériques qui peuvent être étendues dans le cadre de l'acoustique 3D et de problèmes élastodynamiques. L'objet de ce chapitre est de présenter la transposition de la méthode dans ces deux cadres.

Le chapitre est construit en deux parties. On commence d'abord par décrire l'extension de la méthode hybride dans le cadre de l'acoustique 3D. On détaille en particulier l'approximation de champ lointain du noyau de Green en 3D ainsi que la construction de l'opérateur de diffraction pour la version barycentrique de la méthode. On propose également une partition de l'unité pour mettre en œuvre la version multi-centres de la méthode en dimension 3.

La deuxième partie du chapitre décrit l'extension de la version barycentrique de la méthode hybride pour des problèmes élastodynamiques 3D. L'étude laisse le problème de la modélisation des ondes de surfaces en perspective.

### 5.1 Extension de la méthode hybride à l'acoustique 3D

On présente dans cette section le principe et les particularités de l'extension de la méthode hybride à l'acoustique 3D. La présentation est basée sur l'étude du problème instationnaire de diffraction d'une onde haute fréquence se propageant dans un milieu borné par un défaut impénétrable et à cœur. Celui-ci est résolu par une approche fréquentielle comme expliqué en section 1.1.2.

Pour chaque fréquence, on résout l'équation de Helmholtz 3D selon le principe de la méthode barycentrique exposé au chapitre 2. Le défaut à cœur est supposé suffisamment éloigné des bords du milieu de propagation pour traiter avec une relative précision l'interaction du champ diffracté avec les bords du milieu comme des rebonds au sens de l'Optique Géométrique. Comme pour la dimension 2, sous cette hypothèse, le problème de diffraction est ramené à un problème posé en milieu non borné.

En outre, dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain, on découple le calcul des effets de propagation (méthode des rayons), et de diffraction (résolution d'un problème de diffraction en milieu non borné par la méthode des équations intégrales). Le raccord des solutions des différentes étapes du calcul est rendu possible par la modélisation multi-échelle de l'obstacle. Elle permet d'interpréter l'approximation champ lointain du champ diffracté obtenu par la méthode des équations intégrales, comme un rayon dont l'amplitude est pondérée par l'amplitude de champ lointain.

L'approximation champ lointain du champ diffracté est obtenue à partir de l'approximation champ lointain du noyau  $G$ ,

$$G(x; \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|}, \quad (5.1)$$

intervenant dans la définition de l'opérateur intégral représentant la solution. On décrit dans cette section les différentes étapes de l'approximation champ lointain de  $G$  puis on détaille l'expression du coefficient de diffraction pour la méthode barycentrique.

### 5.1.1 Approximation champ lointain du noyau de Green 3D et de sa dérivée normale

On commence ici par faire remarquer qu'en dimension 3 la solution fondamentale s'interprète comme un rayon puis on donne l'approximation rayon du noyau de Green 3D et de sa dérivée normale et on fait comme au chapitre 2 une analyse d'erreur de cette approximation.

#### 5.1.1.1 Interprétation rayon du noyau de Green 3D

Le noyau de Green 3D (5.1) s'écrit sous la forme de l'ordre 0 du développement WKB,

$$G(x; \omega) = \frac{1}{4\pi} A(x) e^{i\omega\phi(x)},$$

où la phase  $\phi(x) = \frac{|x|}{c}$  et l'amplitude  $A(x) = \frac{1}{|x|}$  vérifient respectivement les équations eikonale (1.30a) et de transport (1.30b) :

$$\begin{cases} \nabla\phi(x) = \frac{1}{c} \frac{x}{|x|} \Rightarrow |\nabla\phi| = \frac{1}{c}, \\ \text{div}(A^2\nabla\phi)(x) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Tout champ incident créé par une source ponctuelle s'interprète donc comme un rayon. La méthode hybride proposée semble de ce fait mieux adaptée à la dimension trois qu'à la dimension deux.

#### 5.1.1.2 Approximations champ lointain du noyau de l'opérateur intégral en 3D

Afin de décrire ces deux étapes d'approximation, on reprend ici les notations de la section 2.2. On note  $x$  le point de calcul,  $y$  un point de  $\Gamma$ ,  $y_c$  la position du barycentre de l'obstacle. On introduit de plus les vecteurs unitaires  $\hat{s} = \frac{x-y_c}{|x-y_c|}$ ,  $\hat{d} = \frac{y-y_c}{|y-y_c|}$ , la distance  $d = |x-y_c|$  et le rapport  $\rho = \frac{|y-y_c|}{d}$ . On rappelle en outre la définition de la taille caractéristique de l'obstacle  $r_\Gamma = \sup_{y \in \Gamma} |y-y_c|$  et les paramètres  $\gamma = kr_\Gamma$  et  $\beta = r_\Gamma/d$  qui permettent de décrire les hypothèses de champ lointain :

$$\gamma = O(1), \quad \beta \ll 1, \quad \frac{1}{2}\gamma\beta \ll 1. \quad (5.3)$$

Dans le cadre de validité de cette hypothèse, on obtient l'approximation de champ lointain du noyau de Green par deux approximations successives : linéarisation de la phase à l'ordre 1 et de l'amplitude à l'ordre 0. On définit l'approximation rayon  $G_{\text{ray}}$  du noyau de Green  $G$  par,

$$G_{\text{ray}}(x-y; \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{|x-y_c|} e^{-ik\hat{s} \cdot (y-y_c)}. \quad (5.4)$$

##### 5.1.1.2.a Approximation rayon du noyau de Green 3D

###### Linéarisation de la phase

En utilisant les développements du paragraphe 2.2.1.2, lorsque  $\rho \ll 1$  et que les hypothèses de champ lointain sont satisfaites, on approche la phase  $\phi$  du noyau de Green par son linéarisé à l'ordre 1 : (2.24). On définit alors  $G_{\text{lin}}$  l'approximation de  $G$  par linéarisation de sa phase,

$$G_{\text{lin}}(x-y; \omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y_c|}}{|x-y|} e^{-ik\hat{s} \cdot (y-y_c)}. \quad (5.5)$$

L'erreur relative  $\text{er}_{\text{lin}}^\infty(G)$  introduite par l'approximation de  $G$  par  $G_{\text{lin}}$  :

$$\text{er}_{\text{lin}}^\infty(G) = \frac{\|G - G_{\text{lin}}\|_{\infty, \Gamma}}{\|G\|_{\infty, \Gamma}} \leq \left\| \frac{G - G_{\text{lin}}}{G} \right\|_{\infty, \Gamma} = \sup_{y \in \Gamma} |1 - e^{ik(|x-y_c| - (\hat{s} \cdot (y-y_c)) - |x-y|)}|. \quad (5.6)$$

a le même majorant que l'erreur due à la linéarisation de la phase de  $H_{v,dv}^{(1)}$ ,  $\text{er}_{\text{lin}}^\infty(H_{v,dv}^1)$ , (2.27). On majore donc  $\text{er}_{\text{lin}}^\infty(G)$  par

$$\text{er}_{\text{lin}}^\infty(G) \leq \frac{\gamma\beta}{2}. \quad (5.7)$$

### Linéarisation de l'amplitude

La deuxième étape d'approximation consiste à linéariser l'amplitude de  $G_{\text{lin}}$  à l'ordre 0 dans l'hypothèse où  $\rho \ll 1$ , pour définir l'approximation rayon  $G_{\text{ray}}$  (5.4) du noyau de Green 3D. L'erreur relative  $\text{er}_{\text{linA}}^\infty(G)$  introduite par cette étape d'approximation

$$\text{er}_{\text{linA}}^\infty(G) = \frac{\|G_{\text{lin}} - G_{\text{ray}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|G_{\text{lin}}\|_{\infty,\Gamma}} \leq \left\| \frac{G_{\text{lin}} - G_{\text{ray}}}{G_{\text{lin}}} \right\| = \left| 1 - \frac{|x-y|}{|x-y_c|} \right|, \quad (5.8)$$

se réécrit :

$$\text{er}_{\text{linA}}^\infty(G) = h(\rho) = \left| 1 - \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho(\hat{s} \cdot \hat{d})} \right|, \quad (5.9)$$

et admet le développement de Taylor à l'ordre 0 :

$$\text{er}_{\text{linA}}^\infty(G) = 1 + R_0^h(\rho), \quad (5.10)$$

où  $R_0^h(\rho)$ , le reste d'ordre 0 de la fonction  $h$  en  $\rho = 0$ , se définit par :

$$R_0^h(\rho) = h'(\xi)\rho, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad h'(\rho) = \frac{(\hat{s} \cdot \hat{d}) - \rho}{(1 + \rho^2 - 2\rho(\hat{s} \cdot \hat{d}))^{3/2}}. \quad (5.11)$$

En remarquant que  $\rho \rightarrow (1 + \rho^2 - 2\rho)^{3/2}$  est décroissante sur  $]0,1[$ , on majore le reste  $R_0^h$  par :

$$|R_0^h(\rho)| \leq \frac{1 + \beta}{(1 - \beta)^3}. \quad (5.12)$$

Par conséquent, on majore  $\text{er}_{\text{linA}}^\infty(G)$  par le paramètre  $\beta$  suivant l'inégalité :

$$\text{er}_{\text{linA}}^\infty(G) = \left| 1 - \frac{|x-y|}{|x-y_c|} \right| \leq \frac{1 + \beta}{(1 - \beta)^3} \beta. \quad (5.13)$$

### Bilan sur le contrôle de l'erreur

On obtient la majoration de l'erreur totale d'approximation rayon de  $G$  par  $G_{\text{ray}}$  par inégalité triangulaire :

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(G) = \frac{\|G - G_{\text{ray}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|G\|_{\infty,\Gamma}} \leq \frac{\|G - G_{\text{lin}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|G\|_{\infty,\Gamma}} + \frac{\|G_{\text{lin}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|G\|_{\infty,\Gamma}} \left\| \frac{G_{\text{ray}} - G_{\text{lin}}}{G_{\text{lin}}} \right\|_{\infty,\Gamma} \quad (5.14)$$

où

$$\frac{\|G_{\text{lin}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|G\|_{\infty,\Gamma}} \leq \left\| \frac{G_{\text{lin}}}{G} \right\|_{\infty,\Gamma} = \sup_{y \in \Gamma} \left( \left| e^{-ik(|x-y_c| - \hat{r} \cdot (y-y_c) - |x-y|)} \right| \right) = 1, \quad (5.15)$$

À partir des résultats (5.13) et (5.7), on majore donc  $\text{er}_{\text{ray}}^\infty(G)$  par

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(G) \leq \frac{\gamma\beta}{2} + \frac{1 + \beta}{(1 - \beta)^3} \beta. \quad (5.16)$$

Ainsi en dimension 3 aussi l'erreur d'approximation du noyau de Green par son approximation champ lointain est contrôlée par les deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . Cependant, l'approximation rayon du noyau de Green en 3D est plus simple qu'en 2D, il y a une étape d'approximation en moins.

### 5.1.1.2.b Approximation rayon de la dérivée normale du noyau de Green 3D

On étudie ici l'approximation rayon de la dérivée normale du noyau de Green 3D, notée  $K_d = \frac{\partial G}{\partial \nu}$  :

$$K_d(x,y;\omega) = f(x,y) p(x,y), \quad f(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \left[ -ik + \frac{1}{|x-y|} \right], \quad p(x,y) = \left( \frac{x-y}{|x-y|}, \mathbf{v}(y) \right).$$

On décrit l'obtention de l'approximation rayon  $K_{d,\text{ray}}$  de  $K_d$ ,

$$K_{d,\text{ray}}(x,y;\omega) = -ik \frac{e^{ik|x-y_c|}}{4\pi|x-y_c|} e^{-ik\hat{s}\cdot(y-y_c)} (\hat{s}, \mathbf{v}(y)), \quad \text{où } \hat{s} = \frac{x-y_c}{|x-y_c|}, \quad (5.17)$$

selon les trois étapes : linéarisation de la phase à l'ordre 0, de l'amplitude à l'ordre 1 et approximation du produit scalaire ; et on présente une analyse d'erreur à chaque étape.

#### Linéarisation de la phase

Comme en section 5.1.1.2, dans le cadre de validité des hypothèses de champ lointain, on linéarise la phase  $z = k|x-y|$  de  $K_d$  à l'ordre 1 par (2.24) :  $z = k|x-y_c| (1 - \hat{s} \cdot (y-y_c)\rho + \rho^2)$  et on approche  $K_d$  par  $K_{d,\text{lin}}$  défini par :

$$K_{d,\text{lin}}(x,y;\omega) = f_{\text{lin}}(x,y) p(x,y), \quad f_{\text{lin}}(x,y) = \frac{e^{ik|x-y_c|}}{4\pi|x-y|} \left[ -ik + \frac{1}{|x-y|} \right] e^{-ik\hat{s}\cdot(y-y_c)},$$

avec une erreur :

$$\text{er}_{\text{lin}}^\infty(K_d) = \frac{\|K_d - K_{d,\text{lin}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} \leq \left\| \frac{f - f_{\text{lin}}}{f} \right\|_{\infty,\Gamma} = \sup_{y \in \Gamma} \left| 1 - e^{ik(|x-y_c| - \rho(\hat{s}\cdot\hat{d}) - |x-y|)} \right| \leq \frac{\gamma\beta}{2}. \quad (5.18)$$

#### Approximation de l'amplitude

L'approximation de l'amplitude de  $K_{d,\text{lin}}$  s'obtient en deux étapes : on néglige d'une part le terme d'ordre 2 en  $1/|x-y|$ , puis on linéarise l'amplitude du terme restant à l'ordre 1.

- On approche dans un premier temps la fonction  $K_{d,\text{lin}}$  par  $K_{d,\text{lin}0}$  où on néglige le terme en  $|x-y|^{-2}$ , lors que  $kd \gg 1$  par :

$$K_{d,\text{lin}0}(x,y;\omega) = f_{\text{lin}0}(x,y) p(x,y), \quad \text{où } f_{\text{lin}0}(x,y) = -ik \frac{e^{ik|x-y_c|}}{4\pi|x-y|} e^{-ik\hat{s}\cdot(y-y_c)}, \quad (5.19)$$

avec une erreur  $\text{er}_{\text{lin}0}(K_d)$ ,

$$\text{er}_{\text{lin}0}^\infty(K_d) = \frac{\|K_{d,\text{lin}} - K_{d,\text{lin}0}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} \leq \left\| \frac{f_{\text{lin}}}{f} \right\|_{\infty,\Gamma} \left\| \frac{f_{\text{lin}} - f_{\text{lin}0}}{f_{\text{lin}}} \right\|_{\infty,\Gamma} = \left\| \frac{1}{1 - ik|x-y|} \right\|_{\infty,\Gamma},$$

car  $\left\| \frac{f_{\text{lin}}}{f} \right\|_{\infty,\Gamma} = 1$ . Pour tout  $y \in \Gamma$  on a :  $d - r_\Gamma \leq |x-y| \leq d + r_\Gamma$ , donc on a

$$\frac{1}{|1 - ik|x-y||} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2|x-y|^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + k^2(d - r_\Gamma)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/\beta)^2(1 - \beta)^2}},$$

et par conséquent, on contrôle l'erreur  $\text{er}_{\text{lin}0}(K_d)$  introduite en négligeant le terme en  $|x-y|^{-2}$  par :

$$\text{er}_{\text{lin}0}^\infty(K_d) \leq \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/\beta)^2(1 - \beta)^2}}. \quad (5.20)$$

- On linéarise ensuite l'amplitude de l'approximation  $K_{d,\text{lin}0}$  à l'ordre 1 et on définit l'approximation  $K_{d,\text{linA}0}$  associée :

$$K_{d,\text{linA}0}(x,y;\omega) = f_{\text{ray}}(x,y) p(x,y), \quad \text{où} \quad f_{\text{ray}}(x,y) = -ik \frac{e^{ik|x-y_c|}}{4\pi|x-y_c|} e^{-ik\hat{s}\cdot(y-y_c)}, \quad (5.21)$$

Cette étape d'approximation introduit une erreur  $\text{er}_{\text{linA}0}(K_d)$

$$\begin{aligned} \text{er}_{\text{linA}0}^\infty(K_d) &= \frac{\|K_{d,\text{lin}0} - K_{d,\text{linA}0}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} \leq \frac{\|K_{d,\text{lin}0}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} \frac{\|K_{d,\text{lin}0} - K_{d,\text{linA}0}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_{d,\text{lin}0}\|_{\infty,\Gamma}} \\ &\leq \left\| \frac{K_{d,\text{lin}0}}{K_d} \right\|_{\infty,\Gamma} \left\| \frac{K_{d,\text{lin}}}{K_d} \right\|_{\infty,\Gamma} \left\| \frac{f_{\text{lin}0} - f_{\text{ray}}}{f_{\text{lin}0}} \right\|_{\infty,\Gamma}. \end{aligned}$$

On peut montrer que :

$$\begin{cases} \left\| \frac{f_{\text{lin}0} - f_{\text{ray}}}{f_{\text{lin}0}} \right\|_{\infty,\Gamma} = \left\| \frac{|x-y|}{|x-y_c|} - 1 \right\|_{\infty,\Gamma} \leq \frac{\beta+1}{(1-\beta)^3} \beta, \\ \left\| \frac{K_{d,\text{lin}0}}{K_{d,\text{lin}}} \right\|_{\infty,\Gamma} = \left\| \frac{f_{\text{lin}0}}{f} \right\|_{\infty,\Gamma} = 1, \\ \left\| \frac{K_{d,\text{lin}}}{K_d} \right\|_{\infty,\Gamma} = \left\| \frac{f_{\text{ray}}}{f_{\text{lin}0}} \right\|_{\infty,\Gamma} \leq \frac{\beta+1}{(1-\beta)^3}, \end{cases}$$

par conséquent :

$$\text{er}_{\text{linA}0}^\infty(K_d) = \frac{\|K_{d,\text{lin}} - K_{d,\text{linA}0}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} \leq \frac{(\beta+1)^2}{(1-\beta)^6} \beta. \quad (5.22)$$

### Approximation du produit scalaire

La dernière étape pour obtenir l'approximation champ lointain de  $K_d$  est d'approcher le produit scalaire  $p(x,y) = \hat{d} \cdot \mathbf{v}(y)$  par  $\tilde{p}(x,y_c) = \hat{s} \cdot \mathbf{v}(y)$ . On procède pour cela comme en section 2.2.2. On rappelle simplement que l'erreur absolue d'approximation de  $p$  par  $\tilde{p}$  est contrôlée par :

$$\text{er}_p^\infty = \|p - \tilde{p}\|_{\infty,\Gamma} \leq \beta. \quad (5.23)$$

### Bilan analyse d'erreur

On rassemble ici les résultats de l'analyse d'erreur a priori pour chaque étape de l'approximation champ lointain de  $K_d$ . Par inégalité triangulaire, on contrôle l'erreur d'approximation de  $K_d$  par  $K_{d,\text{ray}}$  par :

$$\begin{aligned} \text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d) &= \frac{\|K_d - K_{d,\text{ray}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}}, \\ &\leq \frac{\|K_d - K_{d,\text{lin}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} + \frac{\|K_{d,\text{lin}} - K_{d,\text{lin}0}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} + \frac{\|K_{d,\text{lin}0} - K_{d,\text{linA}0}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} + \frac{\|K_{d,\text{linA}0} - K_{d,\text{ray}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}}, \\ &\leq \text{er}_{\text{lin}}^\infty(K_d) + \text{er}_{\text{lin}0}^\infty(K_d) + \text{er}_{\text{linA}0}^\infty(K_d) + \frac{\|f_{\text{ray}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} \text{er}_p^\infty. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ainsi d'après (5.18), (5.20), (5.22) et (5.23), on obtient le contrôle suivant de l'erreur :

$$\text{er}_{\text{ray}}^\infty(K_d) \leq \frac{\gamma\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2(d-r_\Gamma)^2}} + \frac{(\beta+1)^2}{(1-\beta)^6} \beta + \frac{\|f_{\text{ray}}\|_{\infty,\Gamma}}{\|K_d\|_{\infty,\Gamma}} \beta. \quad (5.25)$$

## 5.1.2 Méthode barycentrique en 3D

On reprend maintenant brièvement le principe de la méthode barycentrique en 3D, et on donne en particulier les expressions du coefficient de diffraction pour différentes formulations intégrales du problème pour les conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet.

### 5.1.2.1 Rappel du principe de la méthode barycentrique

Le problème de diffraction par un obstacle à cœur en régime haute fréquence est un problème multi-échelle. On distingue deux échelles par rapport à la longueur d'onde sur lesquelles la physique de la propagation est différente : l'échelle des grandes distances  $L = O(100\lambda)$ , qui est l'échelle des phénomènes de propagation haute fréquence, et l'échelle de l'obstacle,  $O(\lambda)$ , sur laquelle l'interaction de l'onde incidente avec l'obstacle  $\Gamma$  peut générer des phénomènes de diffraction. La stratégie hybride propose un modèle à deux échelles de l'obstacle  $\Gamma$  qui permet de dissocier le calcul des phénomènes de propagation et de diffraction.

Dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain, l'obstacle est caractérisé par la position de son barycentre  $y_c$  et un coefficient de diffraction haute fréquence  $\mathcal{R}$ . Grâce à ce modèle, la stratégie de résolution du problème de diffraction par la méthode hybride se décompose en trois étapes :

- calcul des effets de propagation haute fréquence de l'onde incidente  $u^i$  de la source  $S$  vers l'obstacle,
- calcul des effets de diffraction par l'obstacle,
- calcul des effets de propagation du champ diffracté de l'obstacle vers le récepteur  $R$ ,

résolues séquentiellement par des méthodes spécifiques : la méthode des rayons pour le calcul des effets de propagation et la méthode des équations intégrales pour le calcul des effets de diffraction.

À l'échelle de la propagation, le contour  $\Gamma$  de l'obstacle est modélisé comme le voisinage de son barycentre, la propagation des champs incident et diffracté est approchée sous forme de rayons respectivement reçu  $(A^s, \phi^s, \hat{s})$  et émis  $(A^r, \phi^r, \hat{r})$  par le barycentre de l'obstacle  $y_c$  et le champ incident est approché sur  $\Gamma$  comme l'approximation onde plane du rayon joignant la source à  $y_c$ .

Pour le calcul des phénomènes de diffraction, l'obstacle est décrit par sa géométrie exacte. On ramène le problème à un problème posé en milieu non-borné qui est résolu par la méthode des équations intégrales. On résout d'une part l'équation intégrale reformulant le problème de diffraction (2.55) et on calcule, à partir de l'amplitude de champ lointain, le coefficient de diffraction de l'obstacle dans les directions de propagation,  $(\hat{r}, \hat{s})$ , des rayons incidents et diffractés en  $y_c$ ,  $\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega)$ .

On combine ensuite ces résultats selon (2.8) pour évaluer le champ diffracté au récepteur,

$$\tilde{u}(x_r; \omega) = B^r(x_r; y_c) \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) B^s(y_c; x_s),$$

où on rappelle  $B^r(x_r; y_c) = A^r(x_r; y_c) e^{ik\phi^r(x_r; y_c)}$  et  $B^s(y_c; x_s) = A^s(y_c; x_s) e^{ik\phi^s(y_c; x_s)}$ , les amplitudes complexes de propagation rayon du champ incident et diffracté.

### 5.1.2.2 Expression des coefficients de diffraction en 3D

On donne ici l'expression du coefficient de diffraction  $\mathcal{R}$  pour chaque formulation intégrale, en restant fidèle aux conventions exposées en section 1.4 et pour chaque condition aux limites (Dirichlet ou Neumann homogène),

- Condition de Dirichlet homogène,

– Formulation EFIE/MFIE/CFIE,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] (y; \hat{s}) e^{-ik(\hat{r} \cdot (y - y_c))} dS(y),$$

où  $\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  est solution d'une des équations intégrales directes (1.74), (1.75), (1.78).

– Formulation de Brackage-Werner,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} \Psi(y; \hat{s}) (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{r} + 1) e^{-ik(\hat{r} \cdot (y - y_c))} dS(y)$$

où  $\Psi = [u] = ik \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]$  est solution de l'équation intégrale indirecte (1.83).

• Condition de Neumann homogène,

– Formulation EFIE/MFIE/CFIE,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} [u](y; \hat{s}) (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}) e^{-ik(\hat{r} \cdot (y - y_c))} dS(y)$$

où  $[u]$  est solution d'une des équations intégrales directes (1.79),(1.80),(1.81).

– Formulation Brackage-Werner,

$$\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \Psi(y; \hat{s}) (\mathbf{v}(y) \cdot \hat{r} + 1) e^{-ik(\hat{r} \cdot (y - y_c))} dS(y)$$

où  $\Psi = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{1}{ik} [u]$  est solution de l'équation intégrale indirecte (1.85).

### 5.1.3 Modification des fonctions de partition

Dans ce manuscrit, on ne présente aucun résultat numérique relatif au calcul du champ diffracté par la méthode multi-centres en dimension 3. La principale difficulté de son extension est la définition et l'implémentation d'un partitionnement de l'unité d'une surface. On discute ici de deux pistes de partition de l'unité. La première revient à construire une partition de l'unité basée sur un recouvrement en sous-domaines rectangulaires avec des fonctions de partition construites à partir des fonctions proposées en dimension deux. La seconde définit un recouvrement par calottes et utilise des fonctions de partition sphériques, on reprend Aiton (2014).

#### 5.1.3.1 Pavage de la sphère : adaptation de la partition de l'unité 2D à la dimension 3

L'adaptation de la partition de l'unité décrite au chapitre 3 repose sur un recouvrement de la surface  $\Gamma$  de la sphère en un pavage rectangulaire. La description suivante de la construction de la partition s'inspire de [Cavoretto (2015), p.4].

On se munit d'un repère de coordonnées cartésienne d'axe  $(Ox, Oy, Oz)$ . L'idée du pavage est de découper la surface de la sphère en  $q$  bandes parallèles selon l'axe des  $x$  et  $q$  bandes parallèles selon l'axe des  $y$ , ordonnées et numérotées de 1 à  $q$ . Ces bandes s'intersectent en  $P = q^2$  points  $Y_c^p(x_c^p, y_c^p, z_c^p)$  qui constituent les centres des  $P$  partitions :  $\mathcal{X}_p = \{Y_c^p, p = 1, \dots, P\}$  et forment  $P$  sous-domaines. Ce recouvrement définit un découpage angulaire uniforme de la sphère. Chaque partition  $\Gamma_p$  se définit en particulier comme la réunion des 4 sous-domaines ayant  $Y_c^p$  pour sommet. On ramène ensuite chaque partition  $\Gamma$  sur le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  par un isomorphisme  $\tau$  et on définit la fonction de partition  $\eta_p$  sur  $\Gamma_p$  par produit tensoriel de la fonction spline mère  $f$  définie par (D.5) :

$$\forall Y \in \Gamma, \quad \eta_p(Y) = f(u)f(v), \quad \text{où } (u, v) = \tau(Y - Y_c^p).$$

#### 5.1.3.2 Partitionnement basé sur un découpage en calottes

On propose aussi de tester la partition de l'unité de la sphère basée sur un recouvrement en calottes sphériques proposée par Aiton (2014). L'idée est de construire, connaissant a priori la représentation discrète de la sphère par un ensemble de points  $Q$ , un recouvrement de sa surface en  $P$  calottes centrées en les points  $Y_c^p$ , de rayon  $\rho_p$  et contenant approximativement le même nombre de points, puis de définir une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement à partir d'une fonction de base sphérique. En particulier, si la



distribution  $Q$  n'est pas uniforme, les centres des partitions ne seront pas uniformément répartis sur la sphère et leurs tailles ne seront pas égales. On donne ici le principe de la méthode adaptée à notre contexte.

On cherche dans ce manuscrit à construire un recouvrement de la sphère associé à sa représentation par l'ensemble des points de quadratures. On définit un recouvrement de  $\Gamma$  en  $P$  calottes et on se donne sur chaque partition une fonction de poids  $\psi_p$  continue et à support compact :

$$\psi_p(Y) = \psi\left(\frac{\|Y - Y_c^p\|}{\rho_p}\right)$$

où  $\psi$  est à support compact sur l'intervalle  $[0,1]$ . On définit alors pour tout  $p$  la famille de fonctions  $(\eta_p)_{1 \leq p \leq P}$  :

$$\eta_p : \Gamma_p \rightarrow [0,1], \quad \eta_p(Y) = \frac{\psi_p(Y)}{\sum_{p=1}^P \psi_p(Y)},$$

qui vérifie par construction  $\sum_{p=1}^P \eta_p = 1$ . On pourra en particulier utiliser comme indiqué dans Aiton (2014) la fonction de  $\psi$  définie par la B-spline cubique :

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} + 4(t-1)t^2, & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -\frac{4}{3}(t-1)^3, & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1, \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases} \quad (5.26)$$

qui est continûment deux fois dérivable sur  $[0,1]$ .

#### 5.1.4 Illustrations

On conclut l'exposé sur l'extension de la méthode barycentrique à l'acoustique 3D en présentant les résultats de sa mise en œuvre numérique pour une configuration de diffraction par une sphère. On se donne une onde incidente plane de direction de propagation  $(1,0,0)^T$  avec un nombre d'onde  $k = 10$ . On considère le problème de diffraction par la sphère  $S^1$  centrée en  $y_c = (0,0,0)^T$  et de rayon  $r_\Gamma = 0,2$  associée à une condition de Neumann homogène. On calcule, sur une sphère  $S^2$  centrée en  $y_c$  et de rayon  $d = 10$ , d'une part le champ diffracté,  $u$ , obtenu par l'application de la formule de représentation intégrale à la solution  $\lambda$  du problème intégral de surface de type EFIE, puis l'approximation haute fréquence du champ diffracté,  $\tilde{u}$  obtenu selon le principe de la méthode barycentrique pour laquelle on calcule les effets de propagation analytiquement. Enfin, on calcule l'erreur relative ponctuelle entre ces deux solutions, notée  $er$  et définie par :

$$er = \frac{|u - \tilde{u}|}{\sup_{y \in \Gamma} |u(y)|}.$$

On représente en figure 5.1 la solution  $\lambda$  du problème de surface sur la sphère diffractante. Les figures 5.2 et 5.3 représentent respectivement le champ diffracté  $u$  calculé par BEM et son approximation haute fréquence  $\tilde{u}$ . On donne également en figure 5.4 l'erreur relative ponctuelle du champ diffracté sur la sphère  $S^2$ . L'erreur relative maximale en des points d'observation tels que  $d = 50 r_\Gamma$  vaut 0,0109.

## 5.2 Description de la méthode hybride dans le cadre de l'élastodynamique 3D

On a présenté jusqu'ici la méthode de couplage en acoustique 2D puis 3D. On discute dans cette section de l'extension de son principe à des problèmes de propagation dans des solides élastiques. On rappelle d'abord les équations de l'élastodynamique instationnaire puis en régime fréquentiel. On donne ensuite les outils de

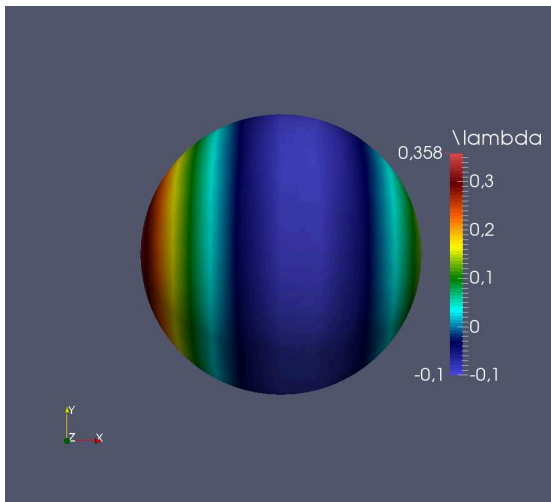


FIGURE 5.1 – Solution  $\lambda$  du problème surfacique sur le sphère diffractante  $\mathcal{S}^2$ .

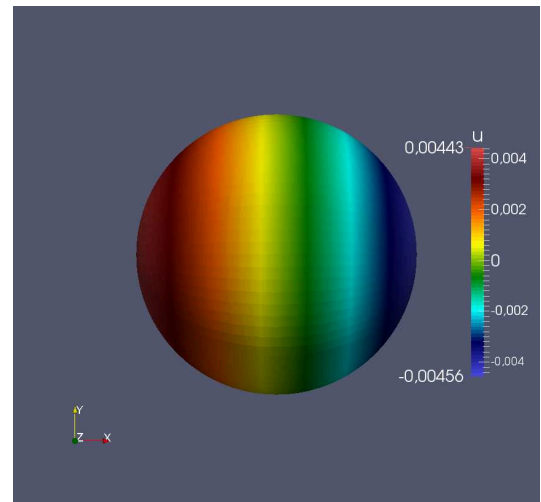


FIGURE 5.2 – Champ diffracté  $u$  obtenu sur  $\mathcal{S}^2$  par résolution BEM.

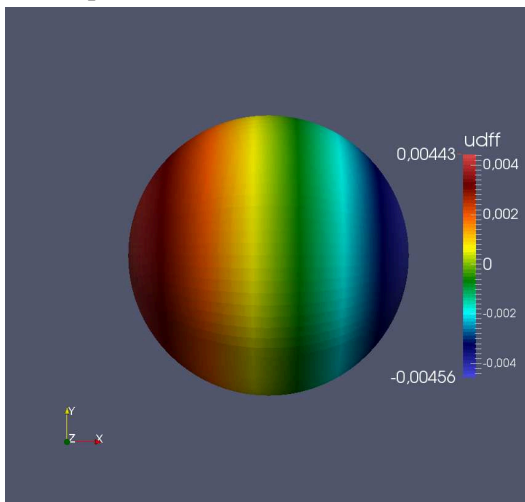


FIGURE 5.3 – Champ diffracté  $\tilde{u}$  (udff) obtenu sur  $\mathcal{S}^2$  par la méthode barycentrique.

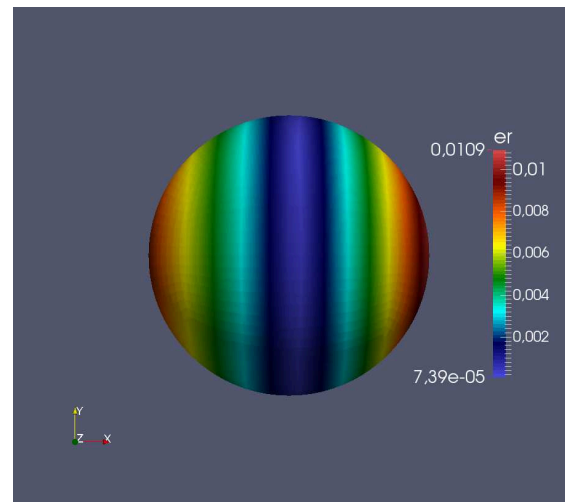


FIGURE 5.4 – Erreur relative ponctuelle  $er$  sur la sphère  $\mathcal{S}^2$ .

représentation intégrale pour reformuler le problème sous forme d'un problème intégral de surface. On définit enfin le cadre de l'approximation champ lointain, les approximations du noyau et la formule des coefficients de diffraction.

La propagation dans des milieux élastiques est plus complexe qu'en acoustique, deux types d'ondes de volume coexistent et sont couplées par des conditions aux limites ou de transmission aux interfaces. On ne considère ici que la propagation des ondes de volume, laissant le traitement des ondes de surface en perspective.

On précise dès maintenant que contrairement à la notation choisie dans le reste du manuscrit ( $v$ ), dans cette section, on note  $n$  la normale sortante à l'obstacle.

### 5.2.1 La propagation des ondes dans un milieu solide élastique 3D

Une onde élastique correspond à la propagation de la déformation locale réversible d'un milieu sous l'effet d'une excitation. Les déformations peuvent être volumiques, de type compression ou cisaillement ou affecter les frontières ou interfaces du milieu (ondes de Love ou de Rayleigh). Chaque type d'ondes est caractérisé par sa vitesse et sa fréquence de propagation propre. Leur présence dans le milieu dépend de ses propriétés mécaniques et de sa géométrie [Cerveny (2000), pp. 9-54, Achenbach *et al.* (1982)].

## Les équations de l'élastodynamique

La propagation d'ondes dans un milieu élastique,  $\Omega^e$ , soumis à une excitation caractérisée par la force  $\mathbf{F}$  et la traction  $\mathbf{t}^B$  est décrite au moyen de 3 quantités : le vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  d'une particule de matière dans le milieu, le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et le tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  du milieu. Ces quantités sont reliées à travers trois équations : l'équation d'équilibre dynamique, la relation de comportement et l'équation de compatibilité.

L'équation de conservation du moment, ou première loi de Cauchy relie le tenseur de contrainte à l'accélération à travers l'équation aux dérivées partielles :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (5.27)$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement et on note  $\mathbf{div}$  l'opérateur de divergence appliqué à une fonction tensorielle. Afin de garantir l'existence et l'unicité de la solution à ce problème, on adjoint à cette EDP des conditions de bord, ainsi que des conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (5.28)$$

Les conditions aux bords de type Dirichlet prescrivent la valeur du déplacement  $\mathbf{u}$  sur la frontière du milieu, et celles de Neuman prescrivent la valeur du vecteur contrainte  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . En particulier, une condition souvent vérifiée est la condition de surface libre  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ .

La loi de comportement élastique linéaire du matériau lie  $\boldsymbol{\sigma}$  au tenseur de déformation linéarisé  $\boldsymbol{\epsilon}$  :

$$\sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (5.29)$$

où  $\boldsymbol{\epsilon}$  est défini par

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{u} + \mathbf{grad}^T \mathbf{u}), \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}), \quad (5.30)$$

où on note  $\mathbf{u}_i$  la  $i$ -ème composante du déplacement, et  $\mathbf{u}_{i,j}$  la dérivée de  $\mathbf{u}_i$  par rapport à  $x_j$ .

## Propagation d'ondes en milieu élastique homogène isotrope

Dans toute la suite, on suppose le milieu de propagation homogène et isotrope, afin de décrire les outils de résolution du problème élastodynamique par la méthode des équations intégrales. Il est alors caractérisé par sa masse volumique  $\rho$ , son module de cisaillement  $\mu$  et son coefficient de Poisson  $\nu$ . Le tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  est alors donné par,

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mu \left[ \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right]. \quad (5.31)$$

En combinant les équations (5.27), (5.29) et (5.31), on obtient l'équation du mouvement de Navier, d'inconnue le vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$ ,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mu}{1-2\nu} \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{u}), \quad (5.32)$$

qui, en utilisant la décomposition  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{u}) - \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u}$ , où  $\mathbf{rot}$  symbolise le rotationnel, se réécrit

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{F} + \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{u}) + \mu \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u}. \quad (5.33)$$

Le théorème de décomposition de Helmholtz-Hodge permet de décomposer le champ de déplacement comme

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad \text{où } \mathbf{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (5.34)$$

où  $\varphi$  est un potentiel scalaire et  $\boldsymbol{\psi}$  est un potentiel vecteur. En introduisant cette décomposition dans l'équation de Navier (5.33), dans l'hypothèse où  $\mathbf{F} = 0$ , on obtient les deux équations découplées pour les potentiels  $\varphi$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  :

$$\begin{cases} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\mu}{\rho} \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\mu}{\rho} \Delta \boldsymbol{\psi} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Le déplacement associé au potentiel scalaire  $\phi$ , colinéaire à la direction de propagation de l'onde, représenté figure 5.5, définit une onde de pression (P) se propageant avec la célérité  $c_p$  définie par

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Le déplacement associé au potentiel vecteur  $\psi$ , orthogonal à la direction de propagation, comme représenté

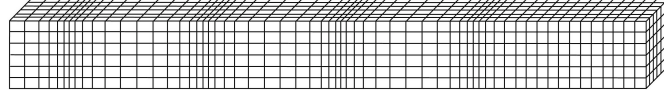


FIGURE 5.5 – “Primary waves”

sur la figure 5.6, définit une onde de cisaillement (S) se propageant à la célérité  $c_s$  définie par,

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

On remarque que  $c_s \leq c_p$ . On introduit pour la suite le paramètre  $\kappa = c_p/c_s$ .

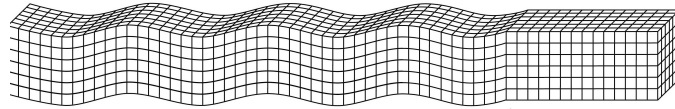


FIGURE 5.6 – “Secondary waves”

### Les équations de Navier en régime fréquentiel

Le problème de diffraction en milieu élastique et en régime fréquentiel reformule le problème élastodynamique en régime harmonique. Pour la suite de la présentation, on choisit une configuration d'étude physique simplifiée. On se donne une onde incidente  $u^{\text{inc}}$  haute fréquence se propageant dans un milieu supposé homogène et isotrope contenant un obstacle de contour  $\Gamma$ , en l'absence de force de volume  $\mathbf{F} = 0$ . On cherche à simuler la diffraction de l'onde incidente par l'obstacle pour des conditions de bord de type Neumann homogène :  $\mathbf{t}(x, \omega) + \mathbf{t}^i(x, \omega) = 0$  sur  $\Gamma$ , le vecteur de traction incident  $\mathbf{t}^{\text{inc}}$  étant défini par  $\mathbf{t}^{\text{inc}} = (\mathbf{C} : \mathbf{grad} \mathbf{u}^{\text{inc}}) \cdot \mathbf{n}$ .

Posée en terme de champ diffracté, l'équation de Navier en régime fréquentiel s'écrit sous ces hypothèses :

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u}(x; \omega) + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(x; \omega)) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(x; \omega) = 0, & x \in \Omega^e \\ \mathbf{t}(x; \omega) = \boldsymbol{\sigma}(x; \omega) \cdot \mathbf{n}(x) = -\mathbf{t}^i, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (5.35)$$

où  $\omega$  désigne la pulsation, et  $\mathbf{n}(x)$  la normale à  $\Gamma$  extérieure à  $\Omega^e$  au point  $x$ . On sélectionne la solution rayonnante à l'infini en lui imposant de vérifier les conditions de radiation de Sommerfeld-Kupradze,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial \mathbf{u}^P(x; \omega)}{\partial |x|} - ik_P \mathbf{u}^P(x; \omega) \right) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial \mathbf{u}^S(x; \omega)}{\partial |x|} - ik_S \mathbf{u}^S(x; \omega) \right) = 0, \quad r = |x|,$$

uniformément dans toutes les directions, où on note les nombres d'ondes respectivement associés à la propagation des ondes (P) et (S) :  $k_P = \sqrt{\omega/c_P}$  et  $k_S = \sqrt{\omega/c_S}$ . L'onde (P),  $\mathbf{u}^P$ , s'obtient à partir de  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{u}^P = -k_P^2 \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{u}$ , et l'onde (S) par  $\mathbf{u}^S = \mathbf{u} - \mathbf{u}^P$ .

### 5.2.2 Représentation intégrale de la solution et problème de frontière

On décrit ici la construction de la formule de représentation intégrale de la solution du problème (5.35) suivant le plan de la section 1.1.2. On donne le principe de réciprocité, puis l'expression analytique de la solution fondamentale du problème élastique en régime fréquentiel. On présente ensuite la formule de

représentation intégrale et on explicite le problème surfacique équivalent au problème (5.35). Cette partie s'inspire de Achenbach *et al.* (1982) et Bonnet (1995).

### Théorème de réciprocité

Selon le même principe qu'expliqué en section 1.4.2, on peut relier deux solutions  $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$  de l'équation de Navier en régime harmonique, (5.35), vérifiant la condition de radiation à l'infini, obtenues pour deux états élastiques différents  $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \mathbf{F}^1)$  et  $(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \mathbf{F}^2)$ , selon l'identité de réciprocité (Kupradze (1965)) :

$$\int_{\partial\Gamma} (T\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{u}^2 - T\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{u}^1) dS = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{u}^1 - \mathbf{F}^1 \cdot \mathbf{u}^2) dV \quad (5.36)$$

où on note  $T$  l'opérateur vectoriel de traction, fonction du déplacement  $\mathbf{u}$  et de la normale extérieure à la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega^e$ , défini par :

$$T\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{n} + \mu \mathbf{n} \wedge \nabla(\mathbf{u}). \quad (5.37)$$

### Solution fondamentale du problème d'élasticité en régime harmonique

Kausel (2006) propose une revue des solutions fondamentales pour les problèmes classiques et canoniques de l'élastodynamique. Un ensemble de travaux ont également permis de donner la solution fondamentale pour des milieux de propagation plus compliqués : Guzina et Pak (1996) traite le problème pour le demi-plan élastique continûment hétérogène, Guzina et Pak (2001) pour le demi-plan multi-couches viscoélastique, Kennett (1983) pour des milieux stratifiés horizontalement, etc..

On travaille ici avec la solution fondamentale, que l'on note  $\mathbf{U}$ , définie comme la solution du problème :

$$-\rho\omega^2 \mathbf{U} - \mu \Delta \mathbf{U} - \frac{\mu}{1-2\nu} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{U}) = \rho \boldsymbol{\delta}, \quad \in \mathbb{R}^3.$$

associé à une excitation ponctuelle unitaire suivant les trois directions d'espace  $\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\delta} \rightarrow \boldsymbol{\delta} \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}$ . On note  $\boldsymbol{\Sigma}$  le tenseur de contrainte associé à la solution fondamentale  $\mathbf{U}$ . D'après [Alves et Kress (2002), p.4], la solution fondamentale de l'espace libre s'exprime en fonction de la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz,  $G(k, \mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}$  :

$$\mathbf{U}(x, y; \omega) = \frac{1}{\mu} \left( G(k_s, x - y) \mathbf{I}_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{k_s^2} \mathbf{grad}_x \mathbf{grad}_x^T (G(k_s, x - y) - G(k_p, x - y)) \right), \quad (5.38)$$

où on définit  $\mathbf{grad}_x$  le laplacien vectoriel par rapport à la variable  $\mathbf{x}$ . Yoshida (2001) a proposé dans sa thèse une reformulation des tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}$  composante par composante :

$$\begin{aligned} U_i^k(x, y; \omega) &= \frac{1}{4\pi\mu r} [A\delta_{ik} + Br_{,i}r_{,k}], \\ \Sigma_{ij}^k(x, y; \omega) &= \frac{1}{4\pi r^2} [2Cr_{,i}r_{,k}r_{,j} + (\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i})D + \delta_{ij}r_{,k}E]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

$U_i^k$  et  $\Sigma_{ij}^k$  désignent respectivement la  $i$ -ème composante de la solution fondamentale de l'espace libre et du tenseur de contrainte associé, générés en  $y \in \mathbb{R}^3$  par une force ponctuelle unitaire appliquée en  $x \in \mathbb{R}^3$  suivant la direction  $k$ . Dans (5.39),  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker,  $r = |y - x|$ ,  $r_{,j}$  la dérivée de  $r$  par rapport à la  $j$ -ème composante et  $A, B, C, D, E$  sont définis par :

$$\begin{aligned} A &= \left( -\frac{1}{x_S^2} + \frac{i}{x_S} + 1 \right) e^{ix_S} - \gamma^2 \left( -\frac{1}{x_P^2} + \frac{i}{x_P} \right) e^{ix_P}, \\ B &= \left( \frac{3}{x_S^2} - \frac{3i}{x_S} - 1 \right) e^{ix_S} - \gamma^2 \left( \frac{3}{x_P^2} - \frac{3i}{x_P} - 1 \right) e^{ix_P}, \\ C &= \left( -\frac{15}{x_S^2} + \frac{15i}{x_S} + 6 - ix_S \right) e^{ix_S} - \gamma^2 \left( -\frac{15}{x_P^2} + \frac{15i}{x_P} + 6 - ix_P \right) e^{ix_P}, \\ D &= (ix_S - 1) e^{ix_S} + 2B, \\ E &= (1 - 2\gamma^2) (ix_P - 1) e^{ix_P} + 2B, \end{aligned} \quad (5.40)$$

avec  $x_p = k_{pr}$ ,  $x_s = k_{sr}$  et  $\gamma = c_s/c_p = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$ .

### Formule de représentation intégrale de la solution

La formule de représentation intégrale émerge de l'application de l'identité de réciprocité (5.36) à une solution  $\mathbf{u}$  correspondant à un état  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{F})$ , caractérisé par la distribution de force  $\mathbf{F}$  et le tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , et à la solution fondamentale du problème posé dans l'espace libre excité par une source ponctuelle  $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma}, -\boldsymbol{\delta})$ .

De façon générale, le vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  est alors donné pour un point  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ , en l'absence de force de volume ( $\mathbf{F} = 0$ ), par la formule de représentation intégrale,

$$u_k(x; \boldsymbol{\omega}) = \int_{\Gamma} [U_i^k(x, y; \boldsymbol{\omega}) t_i(y) - T_i^k(x, y; \boldsymbol{\omega}) u_i(y)] dS_y, \quad (5.41)$$

où  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$  désigne le vecteur de traction associé au tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,

$$T_i^k(x, y; \boldsymbol{\omega}) = \Sigma_{ij}^k(x, y; \boldsymbol{\omega}) n_j(y), \quad k = 1, 2, 3.$$

On déduit alors le problème intégral de surface par application des conditions de bord à la formule de représentation intégrale (5.41).

Dans le cadre de la méthode hybride, on choisit de reformuler le problème de diffraction (5.35) sous forme d'une équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner bien posée pour toutes fréquences. En posant  $\boldsymbol{\psi} = -[t_i] = -\frac{[u_i]}{\eta}$ ,  $\eta \in \mathbb{C}$  ( $\text{Im}(\eta) \neq 0$ ) la nouvelle inconnue de (5.41) qui lie linéairement les sauts  $[t] \in \mathbb{C}^3$  et  $[u] \in \mathbb{C}^3$  du vecteur de contrainte et de déplacement à travers  $\Gamma$  par le paramètre complexe  $\eta$ , la formule de représentation intégrale du champ diffracté devient :

$$x \in \Gamma, \quad u_k(x; \boldsymbol{\omega}) = \int_{\Gamma} [\eta T_i^k(x, y; \boldsymbol{\omega}) - U_i^k(x, y; \boldsymbol{\omega})] \psi_i(y) dS_y. \quad (5.42)$$

En appliquant ensuite la trace de Neumann à (5.42), on obtient l'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner. Dans le cadre de l'élasticité en milieu homogène isotrope, cela revient à dériver (5.41) par rapport à  $x \in \Gamma$  puis à multiplier chaque terme par le tenseur de contrainte  $C_{pqkl}$  et par la normale  $n_q(x)$  :

$$-\frac{1}{2} t_p^{\text{inc}}(x) = \int_{\Gamma} [\eta H_i^p(x, y; \boldsymbol{\omega}) - K_i^p(x, y; \boldsymbol{\omega})] \psi_i(y) dS_y, \quad (5.43)$$

car  $\mathbf{t} = \mathbf{t}^{\text{inc}}$  d'après la condition aux limites, et où les noyaux  $H$  et  $K$  sont définis composantes par composantes par :

$$\begin{aligned} t_p^{\text{inc}}(x) &= \boldsymbol{\sigma}_{pq}^{\text{inc}}(x) n_q(x) = C_{pqkl} \frac{\partial u_k^{\text{inc}}}{\partial x_l}(x) n_q(x), \\ H_i^p(x, y; \boldsymbol{\omega}) &= C_{pqkl} \frac{\partial T_i^k}{\partial x_l}(x, y; \boldsymbol{\omega}) n_q(x) \\ K_i^p(x, y; \boldsymbol{\omega}) &= C_{pqkl} \frac{\partial U_i^k}{\partial x_l}(x, y; \boldsymbol{\omega}) n_q(x) \end{aligned} \quad (5.44)$$

L'équation intégrale (5.43) fait intervenir des intégrales fortement singulières et hypersingulières qui peuvent être reformulées sous forme faiblement singulière pour être intégrées, voir les travaux de Liu et Rizzo (1993) et Bonnet (1995).

### 5.2.3 Principe de la méthode barycentrique pour l'élasticité 3D

Le principe de la méthode barycentrique est directement transposable au cadre de problèmes de l'élasticité 3D. La méthode consiste dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain à propager les champs incidents et diffractés sous la forme de rayons respectivement reçus et émis par le barycentre  $y_c$  de l'obstacle et à prendre en compte les effets de diffraction sous la forme d'un coefficient, obtenu comme l'amplitude de champ lointain du champ diffracté et dépendant de la direction de propagation de ces rayons, de la fréquence et de la géométrie de l'obstacle.

On décrit ici la méthode des rayons dans ce contexte (Achenbach *et al.* (1982), chap.4 pp.76-87) ainsi que les approximations champ lointain du tenseur fondamental  $\mathbf{U}$  et de contrainte  $\Sigma$  associé afin de pouvoir donner l'expression du coefficient de diffraction et enfin rappeler comment évaluer le champ diffracté à partir de ces résultats.

### 5.2.3.1 La méthode des rayons en élasticité 3D

En élasticité, une onde se décompose comme la superposition d'une onde de pression et d'une onde de cisaillement, respectivement caractérisées par un potentiel scalaire  $\phi$  et vectoriel  $\psi$  selon (5.34). Approcher sa propagation sous forme de rayons revient à chercher les rayons respectivement associés aux potentiels  $\phi$  et  $\psi$ . On cherche ces deux potentiels sous l'ansatz WKB tronqué à l'ordre 0 :

$$\phi = e^{ik_P\phi^P} A_0^P(x), \quad \text{et} \quad \psi = e^{ik_S\phi^S} \mathbf{A}_0^S(x), \quad (5.45)$$

où les fonctions réelles scalaires  $\phi^P, \phi^S$  et  $A_0^P$  et vectorielle  $\mathbf{A}_0^S = (A_0^{SH}, A_0^{SV})^T \in \mathbb{R}^2$  sont indépendantes de la fréquence. Le couple amplitude-phase  $(A_0^P, \phi^P)$  est solution du système équation eikonale – équation de transport associé aux ondes (P) :

$$\begin{cases} |\nabla\phi^P| = 1, \\ 2(\nabla\phi^P \cdot \nabla)A_0^P + \Delta\phi^P A_0^P = 0, \end{cases} \quad (5.46)$$

et le couple  $(\mathbf{A}_0^S, \phi^S)$  est solution du système associé aux ondes (S),

$$\begin{cases} |\nabla\phi^S| = 1, \\ 2(\nabla\phi^S \cdot \nabla)\mathbf{A}_0^S + \Delta\phi^S \mathbf{A}_0^S = 0, \\ \nabla\phi^S \cdot \mathbf{A}_0^S = 0, \end{cases} \quad (5.47)$$

où la dernière équation est obtenue à partir de la condition de jauge  $\text{div}\psi = 0$ , (5.34). Ces couples sont définis de manière unique à une constante additive près pour la phase et l'amplitude, qui est fixée par la donnée du champ source au pied du rayon. Ces systèmes sont résolus en deux étapes : on commence par résoudre l'équation eikonale le long des bicaractéristiques puis on résout l'équation de transport le long des rayons définis comme les trajectoires des caractéristiques. Pour plus de détail sur la mise en œuvre de la méthode, se reporter à Achenbach *et al.* (1982), Cerveny (2000).

En outre, d'après Achenbach *et al.* (1982), on calcule les ondes (P) et (S) à partir des rayons  $(A_0^P, \phi^P)$  et  $(\mathbf{A}_0^S, \phi^S)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} u^P &= \rho_{P1}^{-1/2} \rho_{P2}^{-1/2} A_0^P(t) e^{ik_P\phi^P} \mathbf{d}^P + O(k_P^{-1}), \\ u^{SH} &= \rho_{S1}^{-1/2} \rho_{S2}^{-1/2} A_0^{SH}(t) e^{ik_S\phi^S} \mathbf{d}^{SH} + O(k_S^{-1}), \\ u^{SV} &= \rho_{S1}^{-1/2} \rho_{S2}^{-1/2} A_0^{SV}(t) e^{ik_S\phi^S} \mathbf{d}^{SV} + O(k_S^{-1}), \end{aligned} \quad (5.48)$$

avec  $\rho_{\alpha 1}$  et  $\rho_{\alpha 2}$  ( $\alpha = P, SH, SV$ ) sont les rayons de courbure principaux du front d'onde définis par  $\phi_\alpha$ , solution de l'équation eikonale  $|\nabla\phi^\alpha| = 1$ , et  $\mathbf{d}^\alpha$  est la direction de polarisation de l'onde  $\alpha = P, SH, SV$ . On note en outre  $t$  une variable constante le long du rayon considéré et  $A_0^\alpha(t)$  est l'amplitude au pied du rayon.

Dans le cadre de la méthode hybride, lorsque l'obstacle est situé dans la zone de champ lointain à la fois de la source et du point d'observation,  $\gamma\beta_s/2, \gamma\beta_r/2 \ll 1$ , on modélise l'obstacle comme un voisinage de son barycentre. On calcule alors les rayons incident et diffracté respectivement reçus et émis par  $y_c$  et caractérisés par les couples amplitude-phase  $(A_0^P, \phi^P)$  pour les ondes (P) et  $(A_0^{SH}, \phi^{SH})$  et  $(A_0^{SV}, \phi^{SV})$  pour les ondes (S). Afin de calculer le second membre de l'équation intégrale, on approche d'après (5.48) l'onde incidente sur  $\Gamma$  comme le linéarisé du rayon incident :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\text{inc}}(y) &= \mathbf{B}_{\text{inc}}^P(y_c; x_s) e^{ik_P \hat{s}^P \cdot (y-y_c)} \mathbf{d}^P + \mathbf{B}_{\text{inc}}^{SH}(y_c; x_s) e^{ik_S \hat{s}^{SH} \cdot (y-y_c)} \mathbf{d}^{SH} \\ &\quad + \mathbf{B}_{\text{inc}}^{SV}(y_c; x_s) e^{ik_S \hat{s}^{SV} \cdot (y-y_c)} \mathbf{d}^{SV}, \quad y \in \Gamma, \end{aligned} \quad (5.49)$$

où

$$\begin{aligned} B_{\text{inc}}^P(y_c; x_s) &= \rho_{P1}^{-1/2}(y_c) \rho_{P2}^{-1/2}(y_c) A_0^P(t) e^{ik_P \phi^P(y_c; x_s)}, \\ B_{\text{inc}}^\alpha(y_c; x_s) &= \rho_{S1}^{-1/2}(y_c) \rho_{S2}^{-1/2}(y_c) A_0^\alpha(t) e^{ik_S \phi^S(y_c; x_s)}, \quad \alpha = SV, SH. \end{aligned} \quad (5.50)$$

En particulier dans le cas d'un problème avec condition aux limites de Neumann, le second membre est donné par le vecteur de traction incident  $\mathbf{t}^{\text{inc}}$  défini composante par composante par :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i^{\text{inc}}(y) &= ik_P B_{\text{inc}}^P(y_c; x_s) e^{ik_P \hat{s}^P \cdot (y-y_c)} C_{ijkl} \hat{s}_l^P \mathbf{d}_k^P n_j(y) \\ &\quad + ik_S B_{\text{inc}}^{SH}(y_c; x_s) e^{ik_S \hat{s}^{SH} \cdot (y-y_c)} C_{ijkl} \hat{s}_l^{SH} \mathbf{d}_k^{SH} n_j(y) \\ &\quad + ik_S B_{\text{inc}}^{SV}(y_c; x_s) e^{ik_S \hat{s}^{SV} \cdot (y-y_c)} C_{ijkl} \hat{s}_l^{SV} \mathbf{d}_k^{SV} n_j(y). \end{aligned} \quad (5.51)$$

### 5.2.3.2 Approximations champ lointain de la solution fondamentale

L'approximation champ lointain de la solution de l'équation des ondes donne la solution dans sa zone de radiation, c'est une donnée essentielle en problème inverse pour retrouver des informations sur l'objet diffractant, (Dassios et Rigou (1997), Gintides et Kiriaki (2001)). Dans le cadre de la méthode hybride, c'est un outil qui permet de convertir le champ diffracté sous forme de rayon. L'approximation repose en particulier sur l'approximation champ lointain du noyau de l'opérateur de représentation intégrale (5.41). On donne donc ici l'expression de l'approximation champ lointain des tenseurs  $\mathbf{U}$  et  $\Sigma$ .

D'après Dassios et Rigou (1997), l'approximation champ lointain de la solution fondamentale en déplacement s'écrit

$$\mathbf{U}(x, y; \omega) = \mathbf{U}_\infty^S(\hat{s}) \frac{e^{ik_S |x-y_c|}}{|x-y_c|} e^{-ik_S \hat{s} \cdot (y-y_c)} + \mathbf{U}_\infty^P(\hat{s}) \frac{e^{ik_P |x-y_c|}}{|x-y_c|} e^{-ik_P \hat{s} \cdot (y-y_c)} + O\left(\frac{1}{|x-y_c|^2}\right), \quad (5.52)$$

où  $U_\infty^a(\hat{s})$ ,  $a = P$  ou  $S$  est l'amplitude de champ lointain des contributions longitudinales et transverses à la solution fondamentale  $\mathbf{U}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_\infty^S(\hat{s}) = \frac{1}{4\pi\rho c_S^2} (\mathbf{I} - \hat{s} \otimes \hat{s}) \\ \mathbf{U}_\infty^P(\hat{s}) = \frac{1}{4\pi\rho c_P^2} \hat{s} \otimes \hat{s} \end{cases} \quad (5.53)$$

On trouve dans Achenbach *et al.* (1982) l'approximation champ lointain du tenseur de contrainte  $\Sigma$  :

$$\Sigma(x, y; \omega) = ik_P \Sigma_\infty^P \frac{e^{ik_P |x-y_c|}}{|x-y_c|} e^{-ik_P \hat{s} \cdot (y-y_c)} + ik_S \Sigma_\infty^S \frac{e^{ik_S |x-y_c|}}{|x-y_c|} e^{-ik_S \hat{s} \cdot (y-y_c)} + O\left(\frac{1}{|x-y_c|^2}\right), \quad (5.54)$$

avec  $\Sigma_\infty^P$  et  $\Sigma_\infty^S$ , les tenseurs définis par :

$$\begin{cases} \Sigma_\infty^{P;k} [ij] = \frac{1}{4\pi} [2\kappa^{-2} \hat{s}_i \hat{s}_j + (1 - 2\kappa^{-2}) \delta_{ij}] \hat{s}_k \\ \Sigma_\infty^{S;k} [ij] = \frac{1}{4\pi} (\delta_{ik} \hat{s}_j + \delta_{jk} \hat{s}_i - 2\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k) \end{cases} \quad (5.55)$$

où on rappelle  $\kappa = c_P/c_S$ .

### Justifications de l'expression de l'approximation de champ lointain

L'approximation champ lointain de la solution fondamentale  $\mathbf{U}$  et de  $\Sigma$  s'obtient en deux étapes. On linéarise d'abord la phase de  $\mathbf{U}$  à l'ordre 1 :  $r = |x-y| \approx |x-y_c| - (\hat{s} \cdot (y-y_c))$ , lorsque les hypothèses

$$\begin{cases} \beta \ll 1, \\ \gamma = O(1), \frac{1}{2}\gamma\beta \ll 1. \end{cases} \quad (5.56)$$

sont vérifiées. La première hypothèse permet de réaliser le développement de Taylor et les deux suivantes de négliger les termes d'ordre supérieur à 1.



On linéarise ensuite sous les hypothèses (5.56) l'amplitude de  $\mathbf{U}$  à l'ordre 0. D'après (5.39),  $\mathbf{U}$  et  $\Sigma$  s'écrivent comme la somme de deux ondes sphériques pondérées par un polynôme en  $1/r$  de degré 3 pour  $\mathbf{U}$  et 4 pour  $\Sigma$ . D'une part, en supposant la distance de  $x$  à  $\Gamma$  suffisamment grande, les termes  $r^{-\alpha}$ , où  $\alpha \geq 1$ , peuvent être négligés. D'autre part, le développement de Taylor à l'ordre 0 des termes restants en  $\rho = 0$  s'exprime :

$$|x - y|^{-p} = |x - y_c|^{-p} \left( 1 + p\rho \hat{d} \cdot \hat{s} - \frac{p}{2} \rho^2 \left( 1 - (2+p) (\hat{d} \cdot \hat{s})^2 \right) + o(\rho^2) \right), \quad p = 1, 2, 3, 4$$

Comme  $\rho \leq \beta$ , sous les hypothèses (5.56), on néglige les termes en  $\rho^\alpha$ , où  $\alpha \geq 1$ .

L'association de ces deux étapes d'approximation conduisent aux expressions des approximations champ lointain de  $\mathbf{U}$  et  $\Sigma$ , (5.52) et (5.54).

### 5.2.3.3 La construction du coefficient de diffraction et évaluation du champ diffracté

À partir de l'approximation champ lointain de la solution fondamentale (5.52), et du tenseur des contraintes (5.54), on exprime l'approximation champ lointain du champ diffracté  $\mathbf{u}$  sous la forme de deux ondes sphériques :

$$\mathbf{u}(x; \omega) = \mathcal{R}^P(\hat{r}; \omega) \frac{e^{ik_P|x-y_c|}}{|x-y_c|} + \mathcal{R}^S(\hat{r}; \omega) \frac{e^{ik_S|x-y_c|}}{|x-y_c|} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (5.57)$$

pondérées respectivement par les amplitudes de champ lointain  $\mathcal{R}^P$  et  $\mathcal{R}^S$  qui dépendent de l'onde incidente, de la pulsation  $\omega$  et de la direction d'observation  $\hat{r}$ . L'onde (P) et chaque composante de l'onde (S) s'écrivent comme une onde cylindrique qui d'après la section 5.1.1.1 s'interprète comme un rayon.

On donne ci-dessous les expressions des amplitudes de champ lointain pour les ondes S et P lorsqu'on résout le problème avec condition de Neumann par formulation indirecte de Brakhage-Werner (cf. Gintides et Kiriaki (2001)) pour une onde plane incidente de direction de propagation  $\hat{s}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^P(\hat{r}, \hat{s}; \omega) &= \int_{\Gamma} [ik_P \eta \Sigma_{\infty}^P(\hat{r}) \cdot \mathbf{v}(y) + \mathbf{U}_{\infty}^P(\hat{r})] e^{-ik_P(y-y_c) \cdot \hat{r}} \psi^P(y; \hat{s}) dS_y, \\ \mathcal{R}^S(\hat{r}, \hat{s}; \omega) &= \int_{\Gamma} [ik_S \eta \Sigma_{\infty}^S(\hat{r}) \cdot \mathbf{v}(y) + \mathbf{U}_{\infty}^S(\hat{r})] e^{-ik_S(y-y_c) \cdot \hat{r}} \psi^S(y; \hat{s}) dS_y, \end{aligned}$$

où  $\psi^{P/S}$  sont solution de l'équation intégrale indirecte de Brakhage-Werner (5.43) où

$$\mathbf{t}_i^{\text{inc}}(y) = \sum_{\alpha=P,SV,SH} ik_{\alpha} e^{ik_{\alpha} \hat{s}^{\alpha} \cdot (y-y_c)} C_{ijkl} \hat{s}_l^{\alpha} \mathbf{d}_k^{\alpha} n_j(y)$$

est une onde plane suivant les trois directions d'espace.

Dans le contexte de la méthode barycentrique, l'expression du champ lointain (5.57) s'interprète comme une solution rayon du problème dans la zone de rayonnement. Les amplitudes de champ lointain correspondent au coefficient de diffraction de l'obstacle pour chacune de ces ondes. On évalue enfin le champ diffracté à partir des amplitudes complexes des rayons incident et diffracté calculés par la méthode des rayons et le coefficient de diffraction calculé par la méthode des équations intégrales par :

$$u(x_r; \omega) \approx \sum_{\alpha=P,SV,SH} B_r^{\alpha}(x_r; y_c) \mathcal{R}^{\alpha}(\hat{r}, \hat{s}^{\alpha}; \omega) B_{\text{inc}}^{\alpha}(y_c; x_s),$$

où  $B_{\text{inc}}^{\alpha}(y_c; x_s)$  est l'amplitude complexe de propagation rayon de l'onde incidente, elle est donnée par (5.50) et  $B_r^{\alpha}(x_r; y_c)$  est l'amplitude complexe de propagation rayon de l'onde diffracté de  $y_c$  vers  $x_r$ , obtenue à partir des couples amplitude-phase  $(A_r^P(x_r; y_c), \Phi_r^P(x_r; y_c))$ ,  $(\mathbf{A}_r^S(x_r; y_c), \Phi_r^S(x_r; y_c))$  :

$$B_r^{\alpha}(x_r; y_c) = \rho_{\alpha 1}^{-1/2} \rho_{\alpha 2}^{-1/2} A_0^{\alpha}(t) e^{ik_{\alpha} \Phi^{\alpha}}, \quad \alpha = P, SV, SH$$

où on précise,  $k_S = k_{SH} = k_{SV}$ ,  $\Phi_S = \Phi_{SH} = \Phi_{SV}$  et  $\rho_{S,1} = \rho_{SH,1} = \rho_{SV,1}$ ,  $\rho_{S,2} = \rho_{SH,2} = \rho_{SV,2}$ .

## 5.2.4 Interaction des ondes élastiques avec des interfaces et conversion de modes

On résume ici brièvement un phénomène important de la propagation des ondes dans un milieu élastique qui concerne l'interaction d'une onde élastique avec un obstacle ou une interface de discontinuité de propriétés du milieu : le phénomène de conversion de modes et la création d'ondes de surface. Quelque soit le type d'onde incidente (compression ou cisaillement), son interaction avec un obstacle ou une interface crée des ondes réfléchies et/ou transmises à la fois de compression et de cisaillement. Ces ondes sont créées dans des directions obéissant aux lois de Snell-Descartes et leur amplitude est pondérée par des coefficients de transmission et réflexion liés aux propriétés du milieu et obtenus à partir des conditions de bord. Un autre phénomène important accompagne la propagation des ondes élastiques, il s'agit de la création d'ondes de surfaces au niveau des interfaces internes au milieu ou de sa frontière extérieure. Ces ondes sont générées par interférence entre les ondes S et P au niveau des interfaces du milieu de propagation et sont guidées le long de ces surfaces. On en distingue ici deux types : les ondes de Rayleigh et les ondes de Love. Les ondes de Rayleigh provoquent un mouvement elliptique anti horaire des particules de matière au niveau de l'interface, figure 5.7. Leur amplitude décroît exponentiellement avec la profondeur. Les ondes de Love, qui sont les plus rapides, engendrent des déformations horizontales de l'interface au passage de l'onde, figure 5.8. Les ondes de surface sont de plus basse fréquence que les ondes S et P. Pour en savoir plus sur leur condition d'existence, le lecteur pourra se reporter ici à Novotny (1999), Achenbach *et al.* (1982).

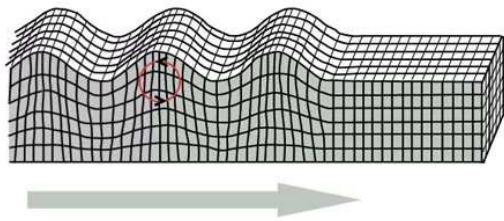


FIGURE 5.7 – Ondes de Rayleigh

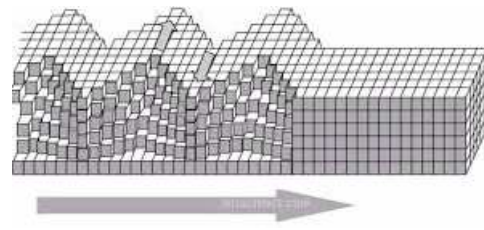


FIGURE 5.8 – Ondes de Love

Ces ondes ont des conséquences importantes sur la simulation de la propagation en milieu élastique. La problématique de leur prise en compte est capitale dans les simulations numériques pour le contrôle non destructif. On ne traite cependant pas cette problématique dans ce manuscrit, elle constitue donc une perspective importante à l'extension de la méthode de couplage proposée à l'élastodynamique.

## 5.3 Conclusion

Dans cette section on a discuté de l'extension du principe de la méthode barycentrique dans le cadre de la diffraction acoustique et élastique en dimension 3, par un obstacle situé loin des bords du milieu de propagation. On a décrit et analysé l'approximation de champ lointain dans le cas de l'acoustique 3D puis on a réalisé une preuve de concept numérique pour mettre en avant la faisabilité et la bonne précision de la méthode en dimension 3. On a ensuite donné les principaux résultats nécessaires à la mise en œuvre de la méthode hybride à des problèmes de diffraction par un obstacle à cœur en milieu élastique 3D.

La principale perspective de ce chapitre est d'étudier l'extension de la méthode hybride pour la diffraction en milieu élastique par un obstacle proche du bord. Cette étude nécessite en particulier de modéliser et de prendre en compte les ondes de surface dans le cadre de la méthode hybride. Il serait également intéressant de mettre en œuvre un nouveau type de partitionnement de la surface de l'obstacle basé sur la décomposition du domaine de calcul en octree et de l'associer à une résolution du système BEM par méthodes rapides (FMM, H-matrix).



## Chapitre 6

# Perspectives d'adaptations de la méthode hybride pour la propagation haute fréquence en milieu inhomogène et en milieu borné

Dans ce chapitre, on discute des perspectives d'adaptation de la méthode hybride à des problèmes de diffraction plus réalistes : en milieu inhomogène et borné. Pour la présentation on découple les difficultés. On donne dans un premier temps la stratégie d'application de la méthode hybride à des problèmes de diffraction en milieu borné. On détaille brièvement la méthode et propose en particulier quelques pistes pour traiter l'interaction de l'obstacle avec le bord de pièce dans le cadre de la méthode hybride. Dans une deuxième section, on discute de l'extension de la méthode pour la simulation de la diffraction en milieu inhomogène non borné.

### 6.1 La stratégie de couplage en milieu borné

La stratégie retenue pour mettre en œuvre la méthode de couplage sur des configurations de diffraction par un obstacle en milieu homogène borné repose sur la synthèse temporelle de la solution. On décrit la stratégie et on distingue deux types de configurations de diffraction : par un obstacle à cœur et par un obstacle proche du bord. Pour ce dernier cas, les phénomènes d'interactions multiples (réflexion, diffraction) générés du fait de la proximité de l'obstacle avec le bord sont mal calculés par méthode asymptotique. On propose donc quatre pistes d'adaptation de la méthode pour les prendre en compte de façon plus précise.

#### 6.1.1 Le choix du couplage temporel BEM-rayons

La stratégie du couplage BEM-rayons en milieu borné repose sur la résolution du problème de diffraction en régime temporel, afin de diminuer le coût de calcul des rayons dans le milieu. En régime harmonique une infinité de rayons coexistent dans un milieu borné : le(s) rayon(s) incident(s) (si la source est étendue), les rebonds du (des) rayon(s) incident(s) sur le bord, les rayons diffractés et ses rebonds. La résolution d'un problème de diffraction en régime harmonique amènerait à prendre en compte tous les rayons qui interagissent avec l'obstacle : le(s) rayon(s) incident(s) se propageant directement vers l'obstacle, ses rebonds propagés vers l'obstacle, le champ diffracté directement propagé jusqu'aux points d'observation, les rayons diffractés rebondissant sur le bord vers les points d'observation et ceux qui rebondissent sur le bord et se redirigent vers l'obstacle pour générer de nouveaux champs diffractés. La résolution en régime temporel revient à simuler la propagation sur un intervalle de temps fini, et permet donc de sélectionner parmi tous ces rayons seulement ceux qui existent sur cet intervalle de temps. La durée de propagation étant liée au chemin optique le long d'un rayon, résoudre le problème de diffraction sur un intervalle de temps fini supprime de nombreux rayons réfléchis. Par ailleurs, ce choix permet de ramener la simulation au plus près de l'expérience de contrôle non destructif qui repose sur la mesure des champs haute fréquence sur une durée finie.

Dans la pratique, la résolution de l'équation des ondes instationnaires en régime haute fréquence est réalisée en deux étapes : on résout d'une part le problème de diffraction en régime harmonique puis on calcule la solution temporelle par transformée de Fourier inverse.

Pour fixer les idées sur l'effort que demande la synthèse temporelle de la solution harmonique, on considère le problème de diffraction instationnaire (1.1), avec condition de transmission ( $\alpha \neq 0$ ) pour assurer le caractère bien posé du problème, et où  $W$  est le signal d'émission défini par (1.2). On définit un problème temporel haute fréquence, comme un problème pour lequel le contenu spectral du signal d'émission est déplacé dans les hautes fréquences : pour le signal  $W$  (1.2), cela revient à supposer  $\omega_s \rightarrow \infty$ . Dans le cadre du régime haute fréquence, on cherche à calculer l'approximation rayon de l'évolution temporelle du champ solution. On résout donc le problème en régime harmonique par la stratégie hybride.

Dans le cadre de la méthode hybride barycentrique, l'approximation haute fréquence  $\tilde{u}$  de la solution du problème de diffraction en milieu homogène non borné, de célérité  $c$ , en régime harmonique,

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c^2} u(x; \omega) + \Delta u(x; \omega) = 0, & x \in \Omega^e, \\ \frac{\partial u(x; \omega)}{\partial \mathbf{v}(x)} = -\frac{\partial u^i(x; \omega)}{\partial \mathbf{v}(x)}, & x \in \Gamma, \\ \frac{\partial u(x; \omega)}{\partial \mathbf{v}(x)} - \alpha u(x; \omega) = -\frac{\partial u^i(x; \omega)}{\partial \mathbf{v}(x)} - \alpha u^i(x; \omega), & x \in \partial\Omega^e \setminus \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial u(x; \omega)}{\partial |x|} - \frac{i\omega}{c} u(x; \omega) \right) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

aussi appelée solution rayon, s'exprime comme le produit des amplitudes complexes de propagation rayon des champs incidents et diffractés,  $B^r(x_r; y_c)$  et  $B^s(y_c; x_s)$ , du coefficient de diffraction  $\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega)$ , évalué dans les directions d'incidence  $\hat{s}$  et d'observation  $\hat{r}$  et de l'amplitude de la source  $\hat{W}$  :

$$\tilde{u}(x_r; \omega) = B^r(x_r; y_c) B^s(y_c; x_s) \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) \hat{W}(\omega; \omega_s), \quad B^{r/s} = A^{r/s} e^{ik\Phi^{r/s}}.$$

On calcule donc l'approximation rayon de la solution du problème instationnaire (6.1) à partir de la solution rayon harmonique par transformée de Fourier inverse ( $\mathcal{F}^{-1}$ ) :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_r, t) &= \frac{A^r(x_r; y_c) A^s(y_c; x_s)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega=0}^{\infty} \hat{W}(\omega; \omega_s) \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ &= A^r(x_r; y_c) A^s(y_c; x_s) W\left(t - \frac{\Phi^s}{c} - \frac{\Phi^r}{c}; \omega_s\right) * \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{R})(\hat{r}, \hat{s}; t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

Le calcul de la solution rayon du problème de diffraction en régime temporel revient donc à réaliser le produit de convolution entre le signal d'émission  $W$ , retardé du temps de parcours des rayons incident et diffracté, et la transformée de Fourier inverse du coefficient de diffraction, pondéré par les amplitudes réelles des rayons incidents et diffractés.

D'après le théorème 2.1 de Collino et Marmorat (2011), la solution rayon en régime temporel est une approximation haute fréquence du problème instationnaire (1.1) d'autant meilleure que la fréquence de la source est grande et que  $\hat{W}$  s'annule aux basses fréquences. Pour une certaine régularité de la fonction  $w$ , on peut écrire l'estimation de l'erreur d'approximation rayon du champ diffracté en régime temporel suivante (voir (Collino et Marmorat (2011), théorème 2.1)) :

**Théorème 6.1.1.** *Soit  $W$  de la forme  $W(t; \omega_s) = w(\omega_s, t)$ . On suppose la fonction  $w$  dans  $H^q(\mathbb{R}^+)$  pour un certain  $q > 0$ ; on suppose de plus qu'il existe  $\xi_0$ ,  $C > 0$  et  $p > -1/2$  tels que la transformée de Fourier de  $w$  vérifie*

$$|\hat{w}(\xi)| \leq C \xi^p, \quad \forall \xi \in [-\xi_0, \xi_0]$$

alors pour tout  $x$  de  $\Omega$  différent du point source, on a

$$\frac{\sup_{t \in [0, \infty[} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)|}{\sup_{t \in [0, \infty[} |\tilde{u}(x, t)|} = O\left(\omega^{-\frac{2p+1}{2p+3}}\right).$$

De plus la limite est uniforme sur tout compact excluant le point où est situé la source.

On décrit maintenant les spécificités de la stratégie de couplage en milieu borné pour un obstacle à cœur puis pour un obstacle proche du bord.

### 6.1.2 La stratégie pour un obstacle à cœur

On appelle obstacle à cœur un obstacle situé suffisamment loin des bords pour que les interactions du champ diffracté ou réfléchi qu'il diffuse puissent être modélisées comme des rebonds au sens de l'optique géométrique. Les interactions sont modélisées par des rayons réfléchis et/ou réfractés dont les directions de propagation et les amplitudes sont obtenues respectivement par les lois de réfraction de Snell Descartes et les conditions de transmission propres au milieu (Staudacher (2013) p.15-18).

Le principe du couplage temporel BEM-rayons pour un défaut à cœur en milieu borné s'applique sans grosse modification au calcul de la diffraction haute fréquence par un obstacle à cœur en milieu homogène borné. On en précise ici les différences d'application. Elle comprend deux étapes :

- application de la méthode hybride pour résoudre le problème de diffraction en régime harmonique.
- transformée de Fourier inverse pour le calcul de l'évolution temporelle du champ diffracté.

La résolution du problème en régime harmonique par la méthode hybride sépare le calcul des phénomènes de diffraction et de propagation et s'appuie sur un modèle à deux échelles de l'obstacle qui revient à le caractériser en champ lointain par son barycentre  $y_c$  ou un ensemble de points (centres)  $(y_c^p)_p$  bien choisis qui jouent le rôle de récepteur et d'émetteur respectivement des rayons incidents et de rayons diffractés. Ils sont associés à un recouvrement de l'obstacle dans le cas du modèle multi-centres.

En milieu homogène non borné, l'obstacle ne connaît l'influence que d'une vague de rayons, les rayons directs et on résout le problème de diffraction en régime harmonique selon les trois grandes phases que l'on connaît déjà.

1. Calcul du(es) rayon(s) incidents et approximation du champ incident sur l'obstacle.

On propage l'onde incidente haute fréquence de la source vers chaque centre  $(y_c^p)_p$  sous la forme de rayons, caractérisés par le triplet amplitude, phase et direction de propagation en  $y_c^p$   $(A_p^s(y_c^p; x_s), \phi_p^s(y_c^p; x_s), \nabla \phi_p^s(y_c^p; x_s))$  évalués comme solution du système équation eikonale—équation de transport :

$$\begin{aligned} |\nabla \phi_p^s| &= n, \\ 2\nabla \phi_p^s \cdot \nabla A_p^s + A_p^s \Delta \phi_p^s &= 0, \\ \text{initialisé en } x_s \text{ par : } A_p^s(x_s; x_s) &= 1, \quad \phi_p^s(x_s; x_s) = 0, \quad \nabla \phi_p^s(x_s; x_s) = \hat{s}^p, \end{aligned}$$

où  $\hat{s}^p$  représente la direction en  $x_s$  du rayon propagé jusqu'à  $y_c^p$ . Dans le cadre de validité de l'hypothèse de champ lointain, on approche ensuite le champ incident sur  $\Gamma$  comme la superposition des approximations onde plane de chaque rayon autour du centre récepteur :

$$y \in \Gamma \quad u^i(y) \approx \begin{cases} A^s(y_c; x_s) e^{ik\phi^s(y_c; x_s)} e^{iks \cdot (y - y_c)}, & \text{(modèle barycentrique)} \\ \sum_{p=1}^P \eta_p(y) A_p^s(y_c^p; x_s) e^{ik\phi_p^s(y_c^p; x_s)} e^{iks^p \cdot (y - y_c^p)}, & \text{(modèle multi-centres)} \end{cases} \quad (6.3)$$

2. Résolution du problème de diffraction par équation intégrale.

Lorsque l'obstacle est à cœur, l'approximation rayon du champ diffracté est valable avec une précision donnée au niveau du bord du milieu. Les interactions (réflexion-réfraction) du champ diffracté avec le bord du milieu de propagation sont alors traitées par méthode asymptotique, ce qui revient à résoudre le problème de diffraction par une équation intégrale équivalente au problème posé en milieu non borné, (6.1).

### 3. Évaluation de l'approximation rayon du champ diffracté.

On calcule d'une part l'amplitude et la phase du(es) rayon(s) diffractés depuis chaque centre vers le récepteur  $(A_p^r(x_r; y_c^p), \phi_p^r(x_r; y_c^p))$  en résolvant le système :

$$\begin{aligned} |\nabla\phi_p^r| &= n, \\ 2\nabla\phi_p^r \cdot \nabla A_p^r + A_p^r \Delta\phi_p^r &= 0, \\ \text{initialisé par : } A_p^r(y_c^p; y_c^p) &= 1, \quad \phi_p^r(y_c^p; y_c^p) = 0, \quad \nabla\phi_p^r(y_c^p; y_c^p) = \hat{r}^p, \end{aligned} \quad (6.4)$$

où  $\hat{r}^p$  est la direction de propagation du rayon diffracté joignant  $y_c^p$  à  $x_r$ . On évalue ensuite le coefficient de diffraction  $\mathcal{R}$  associé à l'obstacle comme expliqué en section 2.2.4, ou  $\mathcal{R}_q^p$  associé à chaque sous-domaine du recouvrement du défaut, comme expliqué en 3.2.3 au couple de directions d'incidence  $\hat{s}^p$  en  $y_c^p$ , et d'observation  $\hat{r}^q$  en  $y_c^q$ .

À l'issue de ces trois étapes on évalue enfin l'approximation rayon du champ diffracté en régime harmonique au point d'observation  $x_r$ , généré par le rayon incident  $(A^s, \phi^s)$  par :

$$\tilde{u}(x_r; x_s, \omega) = \begin{cases} A^s(y_c; x_s) A^r(x_r; y_c) \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}) e^{ik(\phi^r(x_r; y_c) + \phi^s(y_c; x_s))}, & \text{(modèle barycentrique)} \\ \sum_{q=1}^P \sum_{p=1}^P A_p^s(y_c^p; x_s) A_q^r(x_r; y_c^q) \mathcal{R}_q^p(\hat{r}^q, \hat{s}^p) e^{ik(\phi_q^r(x_r; y_c^q) + \phi_p^s(y_c^p; x_s))}, & \text{(modèle multi-centres)} \end{cases} \quad (6.5)$$

En milieu borné, une infinité de rayons coexistent et peuvent interagir avec l'obstacle. En effet, les champs incidents et diffractés diffusent dans toutes les directions autour de l'obstacle avec une amplitude décroissant avec la distance de propagation depuis le centre. Au bout d'une certaine durée de propagation, ils viennent heurter le bord du milieu et se réfléchissent selon les lois de Snell-Descartes, avec une perte d'énergie liée aux propriétés d'absorption du milieu. Dans le cadre du problème instationnaire, en se plaçant sur l'intervalle  $[0, T]$ , le champ total aux récepteurs doit donc être calculé comme la superposition de tous les rayons (incidents, diffractés, réfléchis) dont le temps de propagation dans le milieu jusqu'aux points d'observation est inférieur à  $T$ . On doit donc dans la phase de calcul de la propagation rayon du champ incident à  $\Gamma$  et diffracté tenir compte des interactions avec le bord de pièce.

On distingue dans ce champ total deux contributions : celle des rayons incidents propagé(s) vers les points d'observation sans interaction avec l'obstacle après un ou plusieurs rebonds sur les bords, et celle du(es) rayon(s) diffractés propagés jusqu'aux récepteurs sans rebond ou après rebonds. La première contribution est calculée selon les lois de l'optique géométrique par la méthode des rayons. La seconde contribution se calcule comme la somme des rayons diffractés ayant atteints les points d'observation au cours de l'intervalle de temps. Ces rayons peuvent être obtenus par diffraction du rayon incident propagé directement de la source vers l'obstacle et par diffraction des rayons générés après un ou plusieurs rebonds du(es) rayon(s) incident(s) et diffracté(s). Du fait de la linéarité du problème, la contribution de ces rayons  $u_{\text{ray}}^d$  est calculée (dans le cadre de la méthode barycentrique) comme la somme :

$$\begin{aligned} u_{\text{ray}}^d(x_r) &= \sum_{m=0}^{M_1(T)K(m)} \sum_{k=1}^K A_k^{r,m}(x_r, y_c) e^{ik\phi_k^{r,m}(x_r, y_c)} \sum_{l=0}^{L(T)} \sum_{j=1}^{J(l)} \mathcal{R}(\hat{r}^k, \hat{s}^j; \omega) A_j^{s,l}(y_c; x_s) e^{ik\phi_j^{s,l}(y_c; x_s)} \\ &+ \sum_{q=1}^Q \sum_{e=1}^{M_2(T,q)} \sum_{g=1}^E A_g^{r,e,q}(x_r, y_c, y) e^{ik\phi_g^{r,e,q}(x_r, y_c)} \sum_{l=0}^{L(T)} \sum_{j=1}^{J(l)} \mathcal{R}(\hat{r}^g, \hat{s}^j; \omega) A_j^{s,l}(y_c; x_s) e^{ik\phi_j^{s,l}(y_c; x_s)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dans cette formule,  $L(T)$  est le nombre total de rebonds sur  $\partial\Omega^e \setminus \Gamma$  du champ incident avant qu'il rejoigne  $y_c$ ,  $J(l)$  est le nombre total de rayons incidents arrivant en  $y_c$  après  $l$  rebonds, avec  $\sum_{l=0}^{L(T)} J(l) = N_s(T)$  le nombre total de rayons incidents qui atteignent  $y_c$  (directement ou après rebonds) et génèrent un rayon diffracté rejoignant les récepteurs avant le temps  $T$ .  $M_1(T)$  est le nombre maximum de rebonds du champ diffracté au cours de sa propagation sur l'intervalle  $[0, T]$  sans repasser par le point  $y_c$  et  $K(m)$  est le nombre de rayons diffractés réalisant  $m$  rebonds.  $\sum_{m=0}^{M_1} K(m) = N_r^1(T)$  est le nombre total de rayons diffractés atteignant  $x_r$  avant

l'instant  $T$  sans repasser par  $y_c$ . De même on note  $M_2(T, q)$  le nombre total de rayons diffractés atteignant les récepteurs avant  $T$  en repassant  $q$  fois par  $y_c$  après rebond sur  $\partial\Omega^e \setminus \Gamma$ . Ainsi,  $Q$  compte le nombre total d'interactions du champ diffracté avec l'obstacle  $\Gamma$  avant qu'il soit mesuré au récepteur sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ .  $g$  est un indice permettant de numérotter les rayons qui partant de  $y_c$  rebondissent  $e$  fois sur  $\partial\Omega^e \setminus \Gamma$  et  $q$  fois sur  $\Gamma$ .

La construction des phases et amplitudes en  $y_c$  des rayons incidents rebondissant  $n$  fois sur  $\Gamma$  revient à trouver la suite des  $n + 2$  points  $x_s = z_0^j, \dots, z_{n+1}^j = y_c$  de  $\Gamma$  qui jalonnent leur chemin optique, puis à calculer :

$$A_j^{s,m}(y_c; x_s) = \prod_{p=1}^{n+1} A^s(z_p^j, z_{p-1}^j) N^n,$$

$$\phi_j^{s,m}(y_c; x_s) = \sum_{p=1}^{n+1} \phi^s(z_p^j, z_{p-1}^j),$$

où on note  $N$  le coefficient de réflexion du rayon, lié aux propriétés d'absorption du milieu ( $\alpha \neq 0$  donc à chaque rebond l'onde perd de l'énergie). On pourra en outre fixer un seuil d'amplitude au dessous duquel les rayons réfléchis seront négligés. On construit de même les  $m + 2$  points  $y_c = t_0^m, \dots, t_{m+1}^m = x_r$  de  $\Gamma$  qui jalonnent le chemin optique des rayons diffractés rejoignant  $x_r$  après  $m$  rebonds.

$$A_k^{r,m}(x_r; y_c) = \prod_{p=1}^{m+1} A^r(t_p^k, t_{p-1}^k) N^m,$$

$$\phi_k^{r,m}(x_r; y_c) = \sum_{p=1}^{m+1} \phi^r(t_p^k, t_{p-1}^k).$$

En ce qui concerne les amplitudes et phases des rayons qui partant de  $y_c$  repassent par  $y_c$  en terminant leur course en  $x_r$ , on construit de même la suite des points jalonnant ces chemins optiques  $y_c = b_0^{q,e}, \dots, b_p^{q,e} = x_r$  et on calcule l'amplitude et la phase de ces rayons par :

$$A_g^{r,e,q}(x_r; y_c) = \prod_{p=1}^e A^r(b_p^{q,e}, b_{p-1}^{q,e}) (1 + \delta_{(b_p^{q,e} = y_c)} (\mathcal{R}(\hat{r}^g, s^m; \omega) - 1) N^e),$$

$$\phi_g^{r,e,q}(x_r; y_c) = \sum_{p=1}^e \phi^r(b_p^{q,e}, b_{p-1}^{q,e}).$$

Finalement, on calcule les amplitudes complexes de propagation des rayons diffractés interagissant avec l'obstacle après rebonds sur  $\partial\Omega^e \setminus \Gamma$  revient à multiplier les amplitudes des rayons incidents à l'obstacle quelque soit leur chemin optique par le coefficient de diffraction comme pour le cas du milieu non borné.

La résolution du problème de diffraction dans le cadre d'un milieu borné et d'un obstacle diffractant éloigné des bords de pièce est beaucoup plus complexe que le cas non borné. La méthode hybride est cependant applicable sans de grosses modifications : les phénomènes de propagation sont traités par la méthode des rayons et doivent tenir compte de l'interaction des champs incident et diffracté avec la frontière du milieu, et les effets de diffraction sont eux approchés sous la forme d'un coefficient de diffraction obtenu à partir de la résolution du problème de diffraction par équation intégrale et du modèle de l'obstacle.

On s'intéresse maintenant à la deuxième configuration de diffraction en milieu borné : le cas de la diffraction par un obstacle près du bord de pièce. On décrit ici quelques pistes d'extension de la méthode hybride à ce type de configuration.

### 6.1.3 La stratégie pour un défaut proche du bord

On dit d'un obstacle qu'il est proche du bord lorsque l'approximation rayon du champ diffracté échoue à l'approcher à la précision que l'on se donne. La proximité de l'obstacle avec le bord est donc définie par rapport à une précision souhaitée et peut donc varier entre quelques dizaines de longueur d'ondes et



une fraction de longueur d'onde. Cette proximité de l'obstacle avec le bord de pièce génère des effets de multi-réflexion et diffraction qui interviennent sur de petites distances et qui par conséquent sont peu atténués comparativement aux rebonds intervenant dans le calcul du champ diffracté par un obstacle à cœur. La contribution de ces interactions représente par conséquent une part importante du champ total et doit être calculée avec soin. Dans le cas d'un défaut proche du bord, les méthodes asymptotiques échouent à évaluer correctement ces interactions qui font partie du champ proche. On doit donc les calculer numériquement par équation intégrale. On donne donc ici quatre pistes pour étendre la méthode hybride à ces configurations.

On choisit pour la présentation de ces pistes de considérer le cas du milieu de propagation occupant un domaine rectangulaire.

### 6.1.3.1 Noyau de Green adapté à la géométrie du bord

La première piste d'adaptation de la méthode hybride aux configurations où l'obstacle est proche d'un bord est d'adapter l'équation intégrale à la géométrie du milieu de propagation en changeant le noyau de Green. Lorsqu'il est possible d'exprimer analytiquement le noyau de Green associé à un domaine borné, il est fortement recommandé de l'utiliser à la place du noyau de Green de l'espace libre. D'un point de vue physique, cela permet de résoudre le problème de diffraction sans se soucier des interactions du champ diffracté avec la frontière du milieu : l'équation intégrale modélise de façon précise et intrinsèque à la fois les effets de diffraction et les interactions entre l'obstacle et le bord. D'un point de vue mise en œuvre, prendre le noyau de Green adapté au domaine de propagation permet de diminuer le coût de résolution du problème puisque le problème de diffraction en milieu borné est alors reformulé comme une équation intégrale posée seulement sur l'obstacle diffractant.

Dans le cas d'un milieu rectangulaire et d'un obstacle éloigné d'un coin, on pourra utiliser le noyau de demi-espace pour reformuler le problème de diffraction. Dans le cas du problème acoustique, ce noyau est donné par la méthode des images (Li *et al.* (1992)), et dans le cas de problèmes en milieu élastique, on se réfère à la littérature (Chaillat et Bonnet (2014), Pan *et al.* (1998), Rizzo *et al.* (1995)) pour obtenir son expression. Le noyau de Green du demi-espace s'obtenant par combinaison linéaire du noyau de Green de l'espace libre et de ses dérivées, selon les conditions de bords et le type de milieu considéré, on pourra donc définir un coefficient de diffraction et approcher la propagation du champ diffracté solution sous forme de rayons dans le cadre de l'approximation champ lointain.

La méthode hybride devra alors être appliquée selon le principe décrit en section 6.1.2, mais pour lequel le milieu borné est constitué des trois autres côtés du rectangle seulement.

- On propage les champs incidents de la source vers l'obstacle et diffractés de l'obstacle aux récepteurs sous forme de rayons sans se soucier de leur interaction de l'obstacle avec le bord dont il est proche.
- On résout la nouvelle équation intégrale.
- On calcule le coefficient de diffraction par approximation champ lointain du nouveau noyau de Green.
- Par transformée de Fourier inverse, on évalue le champ diffracté total en régime temporel comme la somme des approximations rayon du champ diffracté généré par excitation de l'obstacle par le champ incident et ses rebonds sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ .

Pour obtenir le champ total, on ajoute au champ diffracté tous les rayons propagés de la source au récepteur au cours de l'intervalle  $[0, T]$  après rebonds sur le bord du milieu de propagation.

### 6.1.3.2 Inclure une partie du bord dans l'équation intégrale et raccordement

On présente ici une deuxième piste d'adaptation de la méthode au calcul hybride de la diffraction par un obstacle  $\Gamma$  proche de la frontière  $\Sigma$  du milieu de propagation.

Elle repose sur la représentation intégrale du champ solution à l'aide du noyau de Green  $G$  de l'espace libre :

$$u(x; \omega) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G(x, y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} u(y; \omega) - G(x, y; \omega) \frac{\partial u(y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} \right) dS(y) + \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial G(x, y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} u(y; \omega) - G(x, y; \omega) \frac{\partial u(y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} \right) dS(y).$$

Si on cherche à atteindre une précision  $\varepsilon$  de l'approximation rayon du champ diffracté, on découpe le bord  $\Sigma$  du milieu de propagation en deux zones : une zone notée  $\Sigma_1$  sur laquelle l'approximation rayon du champ diffracté n'est pas satisfaite à la précision  $\varepsilon$  et une zone notée  $\Sigma_2$  pour laquelle l'approximation rayon est meilleure que  $\varepsilon$ . On les appelle respectivement zone d'interaction de champ proche et zone d'interaction en champ lointain. L'idée de la stratégie est de négliger la contribution de  $\Sigma_2$  dans la formule de représentation intégrale, et de prendre en compte les interactions entre l'obstacle et  $\Sigma_2$  par méthode asymptotique sous la forme de rayons réfléchis. On approche donc la formule de représentation intégrale du champ diffracté par :

$$u(x; \omega) \approx \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G(x, y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} u(y; \omega) - G(x, y; \omega) \frac{\partial u(y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} \right) ds(y) + \int_{\Sigma_1} \chi_1(y) \left( \frac{\partial G(x, y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} u(y; \omega) - G(x, y; \omega) \frac{\partial u(y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} \right) ds(y), \quad (6.7)$$

où  $\chi_1$  désigne l'indicatrice du sous-domaine  $\Sigma_1$  de  $\Sigma$ . Et on résout l'équation intégrale associée au problème de diffraction de l'obstacle  $\Gamma$  en interaction proche avec  $\Sigma_1$ , puis on propage le champ diffracté sous la forme de rayons en appliquant l'approximation champ lointain de (6.7). Dans le cas de la méthode barycentrique, l'approximation rayon  $\tilde{u}$  du champ diffracté s'écrit :

$$u(x; \omega) \approx A^r(x_r; y_c) e^{ik\phi^r(x_r; y_c)} \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega, \Gamma) + \int_{\Sigma_1} \chi_1(y) \left( \frac{\partial G(x, y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} u(y; \omega) - G(x, y; \omega) \frac{\partial u(y; \omega)}{\partial \mathbf{v}(y)} \right) ds(y), \quad (6.8)$$

où, puisqu'on est en milieu homogène,

$$A^r(x_r; y_c) = \frac{1}{|x_r - y_c|}, \quad \phi^r(x_r; y_c) = |x_r - y_c|$$

et  $\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega, \Gamma)$  est obtenu par (2.9). L'approximation champ lointain du champ diffracté s'écrit dans ce cas comme un rayon diffracté par  $\Gamma$  et d'une intégrale sur  $\Sigma_1$ . Pour obtenir le champ total, on calcule par (6.8) le champ diffracté obtenu pour l'ensemble des rayons incidents à  $\Gamma$  (quelque soit son chemin optique) qui génèrent un champ diffracté rejoignant  $x_r$  sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  et on ajoute la contribution calculée par méthode asymptotique des rebonds des rayons incidents (ne passant pas par  $y_c$ ) sur  $\Sigma$  et des rebonds des rayons diffractés sur  $\Sigma_2$ .

Cette perspective pose la question du calibrage de la zone d'interaction proche  $\Sigma_1$  et de la condition aux bords à associer à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  pour raccorder la solution aux points qui leur sont communs. En outre,  $\Sigma_1$  est une surface ouverte, la stratégie impose donc de modifier le solveur BEM pour permettre d'intégrer numériquement sur cette surface. Cette piste constitue en outre une alternative intéressante à la piste décrite en section 6.1.3.1 lorsqu'on n'a pas accès à l'expression analytique du noyau de Green du milieu de propagation.

### 6.1.3.3 Partitionnement du bord et adaptation de la méthode multi-centres

La troisième piste que l'on propose constitue une extension de celle décrite dans le paragraphe 6.1.3.2. Elle consiste à reprendre le principe et à associer à la surface des interactions proches  $\Sigma_1$  un recouvrement  $\Sigma_1 = \bigcup_{q=1}^P \Sigma_1^q$  et une partition de l'unité pour traiter les interactions entre l'obstacle diffractant  $\Gamma$  et  $\Sigma_1$  comme des interactions entre partitions d'un même obstacle. Du point de vue de la propagation du champ diffracté cela revient à propager la contribution de  $\Sigma_1$  sous forme de rayons. On note  $\sigma_p$  la partition de l'unité subordonnée

au recouvrement de  $\Sigma_1$  en  $P$  sous-domaines de centres  $z_c^p$ , si l'obstacle  $\Gamma$  peut être traité par la méthode barycentrique, l'approximation champ lointain du champ diffracté s'écrit :

$$u(x; \omega) \approx A^r(x_r; y_c) e^{ik\phi^r(x_r; y_c)} \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}; \omega, \Gamma) + \sum_{q=1}^P \frac{e^{ik|x_r - z_c^q|}}{\sqrt{|x_r - z_c^q|}} \mathcal{R}^q(\hat{r}^q, \hat{s}; \omega, \Sigma_1), \quad (6.9)$$

$$\text{où } \mathcal{R}^q(\hat{r}^q, \hat{s}; \omega, \Sigma_1) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\Sigma_1^q} \sigma_q(y) e^{ik\hat{r}^q \cdot (y - z_c^q)} \left( -ik(\hat{r}^q \cdot \mathbf{v}(y)) u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{v}(y)} \right) ds(y)$$

Cette piste pose tout de même la question de la définition de la partition de l'unité sur la surface ouverte  $\Sigma_1$ .

#### 6.1.3.4 Méthode itérative et approximation rayon

La dernière perspective décrite ici propose un formalisme itératif d'approximation du champ diffracté par un couple d'obstacles en interaction proche, rendu possible par l'introduction d'un opérateur intégral de rebond. On trouve dans la littérature d'autres techniques de résolution itérative basées sur un point de vue de décomposition de domaine comme par exemple les travaux de Balabane (2004) et Lenoir *et al.* (2017). On la décrit dans le cadre général de l'interaction d'un obstacle diffractant avec un obstacle étendu représenté par la figure 6.1.

On nomme  $A$  le contour de l'obstacle diffractant et  $B$  le contour de l'obstacle étendu. L'objectif de la méthode

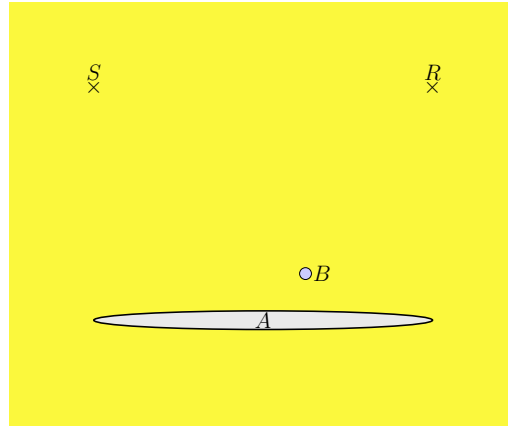


FIGURE 6.1 – Petit obstacle diffractant en interaction proche avec un obstacle étendu

proposée est de reformuler le calcul du champ diffracté au récepteur sous la forme d'une relation de récurrence. On utilise pour cela le formalisme de représentation intégrale des champs solutions pour le noyau de Green de l'espace libre.

On reformule le problème de diffraction sous la forme du système d'équation intégrale à deux corps :

$$\begin{pmatrix} AA & AB \\ BA & BB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_A^i \\ -U_B^i \end{pmatrix}$$

où  $U_A^i$  et  $U_B^i$  sont les vecteurs évaluant le champ incident sur  $A$  et sur  $B$ ,  $AA$  désigne la trace sur  $A$  de l'opérateur intégral posé sur  $A$ ,  $BB$  la trace sur  $B$  de l'opérateur intégral posé sur  $B$ ,  $AB$  est la trace sur  $A$  de l'opérateur intégral posé sur  $B$  et  $BA$  est la trace sur  $B$  de l'opérateur intégral posé sur  $A$ . Le résoudre revient à calculer

$$X_A = -[AA]^{-1} U_A^i - [AA]^{-1} [AB] X_B \quad (6.10a)$$

$$X_B = -[BB]^{-1} U_B^i - [BB]^{-1} [BA] X_A \quad (6.10b)$$

En notant  $TA$  et  $TB$  les opérateurs de représentation intégrale des champs diffractés rayonnés depuis respectivement  $A$  et  $B$ , on calcule le champ diffracté au récepteur sous la forme :

$$u(x_r; \omega) = T A X_A + T B X_B.$$

En injectant successivement l'expression (6.10b) définissant  $X_B$  dans (6.10a) et l'expression (6.10a) définissant  $X_A$  dans (6.10b), on réécrit  $X_A$  et  $X_B$  sous la forme d'une série :

$$X_A = -[AA]^{-1} U_A^i - [AA]^{-1} [AB] [BB]^{-1} \left( \sum_{p \geq 0} ([BAB][BB]^{-1})^p \right) ([BA][AA]^{-1} U_A^i - U_B^i) \quad (6.11a)$$

$$X_B = [BB]^{-1} \left( \sum_{p \geq 0} ([BAB][BB]^{-1})^p \right) ([BA][AA]^{-1} U_A^i - U_B^i) \quad (6.11b)$$

où on note pour alléger l'écriture  $[BAB] = [BA][AA]^{-1}[AB]$  l'opérateur calculant l'influence sur  $B$  de l'interaction entre  $B$  et  $A$ . Par abus de langage on peut dire que  $[BAB]$  est l'opérateur de rebond entre  $A$  et  $B$  depuis  $B$  (vers  $A$  vers  $B$ ).

Ainsi le champ diffracté total s'écrit comme la somme du champ diffracté depuis  $A$  et du champ diffracté depuis  $B$  en prenant en compte les rebonds entre  $A$  et  $B$ ,

$$u(x_r; \omega) = u_A(x_r; \omega) + u_B(x_r; \omega) \quad \text{où} \quad u_A(x_r; \omega) = -[TA][AA]^{-1} U_A^i,$$

$$\text{et} \quad u_B(x_r; \omega) = -([TA][AA]^{-1}[AB] - [TB])[BB]^{-1} \left( \sum_{p \geq 0} ([BAB][BB]^{-1})^p \right) ([BA][AA]^{-1} U_A^i - U_B^i).$$

On cherche maintenant à exprimer le champ diffracté au récepteur comme la somme des champs diffractés générés par chaque interaction de  $B$  et  $A$ . Pour cela, on note le champ incident sur  $B$   $u_B^{\text{inc}}$  :

$$\forall x \in \Gamma_B, \quad u_B^{\text{inc}}(x) = \left( \sum_{p \geq 0} ([BAB][BB]^{-1})^p \right) ([BA][AA]^{-1} U_A^i - U_B^i) \quad (6.12)$$

et on définit son approximation au bout de  $k$  rebonds  $u_{B,k}^{\text{inc}}$  en tronquant la série à l'ordre  $k$  :

$$\forall x \in \Gamma_B, \quad u_{B,k}^{\text{inc}}(x) = \left( \sum_{p \geq 0}^k ([BAB][BB]^{-1})^p \right) ([BA][AA]^{-1} U_A^i - U_B^i).$$

Cela nous amène à établir, en introduisant des densités auxiliaires définies sur  $A$  et  $B$ , la relation de récurrence pour le calcul itératif du champ diffracté au récepteur :

$$u_{k+1}(x_r; \omega) = u_A(x_r; \omega) - ([TA][AA]^{-1}[AB] - [TB])[BB]^{-1} u_{B,k+1}^{\text{inc}}, \quad (6.13)$$

$$\begin{cases} u_{B,k+1}^{\text{inc}} = u_{B,k}^{\text{inc}} + \partial u_{B,k}^{\text{inc}} \\ \partial u_{B,k}^{\text{inc}} = BA \psi_{A,k}, \\ AA \psi_{A,k} = AB \psi_{B,k}, \\ BB \psi_{B,k} = \partial u_{B,k-1}^{\text{inc}}, \\ \partial u_{B,0}^{\text{inc}} = [BA][AA]^{-1} U_A^i - U_B^i. \end{cases} \quad (6.14)$$

Ce formalisme mime les aller-retour du champ diffracté par l'obstacle  $B$  entre  $A$  et  $B$ .

On propose ici un ensemble de perspectives pour adapter cette méthode au calcul du champ diffracté par un obstacle proche du bord. L'idée est alors de diviser  $\Sigma$  en une zone d'interaction proche  $\Sigma_1$  et d'interaction en champ lointain  $\Sigma_2$  comme décrit en 6.1.3.2, et de reprendre la méthode itérative en assimilant  $A$  à  $\Gamma$  et  $B$  à  $\Sigma_1$ . La première perspective est d'étudier la convergence de cette approximation à la solution exacte en fonction de l'ordre de troncature  $k$  de la série (6.12). La seconde est de remplacer les opérateurs de rayonnement  $TA$  et  $TB$  par leur approximation champ lointain. On pourra alors mesurer l'erreur commise en approchant le champ total comme la somme de l'approximation rayon du champ diffracté ainsi obtenu et des rayons réfléchis par  $\Sigma$  en l'absence de l'obstacle.

Ces quelques pistes d'extension de la stratégie hybride visent à élargir le spectre d'application de la méthode à des configurations plus proches de celles qui intéressent la simulation pour le CND. Elles supposent cependant que le milieu de propagation soit homogène. On discute donc maintenant de la possibilité de l'étendre à des milieux de propagation inhomogènes.

## 6.2 Perspectives d'adaptation de la méthode hybride aux milieux inhomogènes

On s'intéresse ici à l'application de la méthode hybride à des configurations de diffraction par un obstacle en milieu inhomogène non borné. On discute des limites d'applicabilité de la méthode dans un cadre où l'inhomogénéité du milieu de propagation permet l'utilisation de la méthode des rayons.

### 6.2.1 Discussion

La stratégie hybride proposée vise à résoudre un problème de diffraction en régime haute fréquence en séparant le traitement des phénomènes de propagation et de diffraction. Elle rend ainsi le calcul de l'approximation haute fréquence de la solution à la fois plus rapide et plus précis. On calcule la propagation des champs par la méthode des rayons et on évalue les effets de diffraction sous forme d'un coefficient obtenu par la méthode des équations intégrales. La combinaison de ces résultats pour évaluer le champ diffracté en un point du milieu de propagation est possible dans le cadre de validité de l'approximation de champ lointain. Dans ce cadre, un modèle de l'obstacle à deux échelles permet d'approcher le champ incident sur le contour  $\Gamma$  de l'obstacle par une onde plane construite à partir des rayons incidents et de convertir le champ diffracté en rayons diffractés.

Ce modèle revient à représenter l'obstacle lors de l'étape de calcul de la propagation (des champs incident et diffracté) par son barycentre, dans le cas de la méthode barycentrique, et par une distribution de points sur  $\Gamma$ , dans le cas de la méthode multi-centres. Un solveur rayon est appliqué pour calculer la trajectoire des rayons incidents et diffractés respectivement depuis de la source et le récepteur vers les points qui représentent l'obstacle ainsi que l'amplitude de ces rayons. On construit ensuite une approximation du champ incident sur  $\Gamma$ , dans le voisinage de chaque point de réception des rayons incidents, sous la forme d'une onde plane de direction de propagation égale à celle du rayon reçu en ces points.

L'approximation onde plane d'un rayon dans le voisinage d'un point donné de sa trajectoire est assez naturelle dans le cadre de la propagation en milieu homogène où les rayons sont rectilignes. Elle est en particulier valable dans un voisinage suffisamment petit du rayon. Elle n'est toutefois pas toujours correcte en milieu inhomogène où les rayons ont une courbure locale. On identifie donc ici une première limite de l'application de la méthode hybride à la diffraction en milieu inhomogène. On pressent qu'une approximation locale d'un rayon par une onde plane n'est possible en milieu inhomogène que lorsque l'échelle de variation de la célérité est grande devant la longueur d'onde.

La deuxième phase du calcul dans la stratégie hybride consiste à résoudre l'équation intégrale de surface qui reformule le problème de diffraction, puis à évaluer le coefficient de diffraction à partir de l'approximation de champ lointain de la formule de représentation intégrale. On combine ensuite ce coefficient avec les amplitudes de propagation rayon pour évaluer le champ diffracté dans la zone de champ lointain de l'obstacle. Peut-on adapter l'approche en milieu inhomogène quelconque ?

Le coefficient de diffraction décrit les effets de diffraction loin de l'obstacle. Il tient donc compte des propriétés du milieu pour propager le champ jusqu'à la zone de champ lointain. Son calcul nécessite en particulier de connaître le noyau de Green associé au milieu. En milieu homogène on connaît son expression analytique pour des milieux de forme simple (espace libre, demi-espace, sphère...), mais en milieu inhomogène on ne peut qu'espérer l'approcher numériquement. Le noyau de Green  $\Phi$  associé au problème de propagation en milieu inhomogène d'indice  $n(x)$

$$\Delta\Phi + k_0^2 n^2(x)\Phi = -\delta(x-x_0), \quad k_0 = \omega/c_0, \quad (6.15)$$

s'obtient d'après la théorie des perturbations comme la somme du noyau de Green  $G$  pour un milieu homogène, d'indice  $n_0$  et de célérité  $c_0$  (constante), choisi comme référence et d'un terme de perturbation  $G^s$

$$\Phi(x, x_0; \omega) = G(x, x_0; \omega) + G^s(x, x_0; \omega).$$

L'obtention de l'expression analytique de  $\Phi$  est complexe. On montre en particulier une exacte équivalence entre le problème (6.15) et l'équation intégrale implicite de Lippmann-Schwinger (Giorgi *et al.* (2013)) :

$$\Phi(x, x_0; \omega) = G(x, x_0; \omega) - k_0^2 \int_{\mathbb{R}^d} G(y, x_0; \omega) (n(y) - n_0) \Phi(y, x_0; \omega) dy, \quad d = 2, 3. \quad (6.16)$$

lorsque  $n$  est continument dérivable dans  $\mathbb{R}^2$ . La résolution numérique de cette équation est certes coûteuse mais pas impossible. On peut de plus écrire une formulation intégrale du champ propagé en milieu inhomogène (Giorgi *et al.* (2013)). La solution du problème de diffraction en milieu infini d'indice  $n(x)$  contenant un défaut  $\Gamma$  impénétrable peut se représenter sous forme intégrale,

$$u(x; \omega) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi(x, y; \omega)}{\partial \nu(y)} u(y; \omega) - \frac{\partial u(y; \omega)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y; \omega) \right) ds(y). \quad (6.17)$$

Il est donc théoriquement possible, à partir de (6.17), de reformuler le problème de diffraction en régime harmonique pour un milieu de propagation inhomogène infini sous forme d'un problème intégral de surface. Sa résolution est cependant non seulement difficile à mettre en œuvre mais aussi très coûteuse car le noyau de Green doit être obtenu numériquement par résolution de l'équation intégrale volumique (6.16). En outre, la forme implicite du noyau ne permet pas d'obtenir une approximation haute fréquence aussi pratique et précise que dans le cas homogène. La méthode des équations intégrales est donc très mal adaptée pour résoudre des problèmes en milieu inhomogène. Le couplage ne peut donc être étendu à des problèmes en milieu inhomogène quelconque.

À quels types de milieux inhomogènes la méthode hybride telle que décrite aux chapitres 2 et 3 est-elle donc applicable ? Dans le cas d'un milieu inhomogène, la stratégie hybride est applicable lorsque la méthode des rayons peut être mise en œuvre et que les approximations hautes fréquences introduites pour approcher le champ incident sur l'obstacle par des ondes planes et le champ diffracté par un rayon sont correctes sous une certaine précision. D'une part, l'obstacle doit être éloigné des points de focalisation, des caustiques, et autres zones critiques où l'ansatz WKB devient invalide. Cela implique en particulier que le milieu soit lentement inhomogène autour de l'obstacle. D'autre part pour pouvoir approcher les rayons sous forme d'ondes planes dans un voisinage de l'obstacle et évaluer le champ diffracté dans la zone de champ lointain (à une précision  $\varepsilon$  donnée) en combinant le coefficient de diffraction et les amplitudes complexes des rayons, l'échelle  $L$  de variation de l'indice du milieu doit être plus grande que l'échelle de distance à l'obstacle  $D$  caractérisant la zone de champ lointain associée à la précision  $\varepsilon$  de l'approximation champ lointain de la formule de représentation. Cette hypothèse paraît très contraignante et suggère que le milieu puisse être localement considéré comme homogène.

Dans la suite on s'intéresse aux perspectives d'applications de la méthode hybride à des milieux inhomogènes.

## 6.2.2 Application de la méthode hybride pour la simulation de la diffraction par une fissure en milieu faiblement inhomogène non borné et perspective d'étude

On illustre dans ce paragraphe l'application de la méthode pour le calcul de la diffraction par une fissure avec condition aux limites de Neumann homogène en milieu non borné et lentement inhomogène, de loi de célérité :

$$c_1(x, y) = 1 - 0,001(y - 20). \quad (6.18)$$

On résout le problème en régime harmonique à une fréquence  $f$  que l'on fixe de sorte que la fissure diffractante, orientée selon l'axe (Ox), ait une taille caractéristique égale à  $\lambda/2$ . L'onde incidente est issue d'une source ponctuelle située en  $x_s = (0, 20)\lambda$ . On calcule le coefficient de diffraction selon le principe de la méthode barycentrique et on observe le champ diffracté le long des rayons tracés depuis le centre de l'obstacle. Pour obtenir ces résultats, on a résolu l'équation intégrale EFIE équivalente au problème de Neumann par BEM.

On représente sur la figure 6.2 quelques rayons incidents tracés depuis la source dans le milieu inhomogène afin de mettre en évidence la courbure des rayons malgré la faible variation de la loi de vitesse. On donne ensuite sur la figure 6.3 la carte de l'approximation rayon du champ diffracté par la fissure en milieu inhomogène.

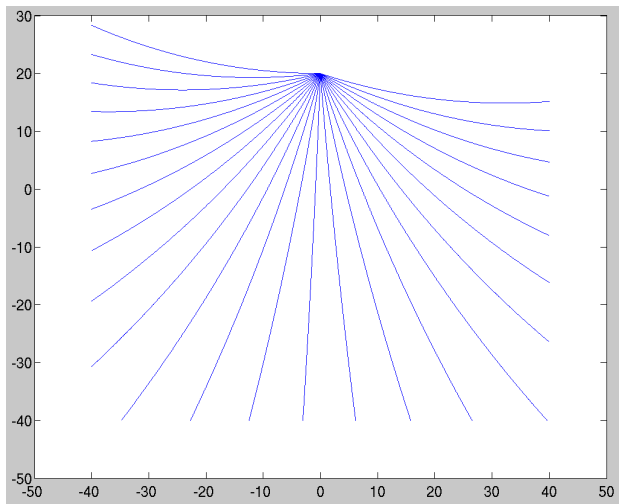


FIGURE 6.2 – Tracé des rayons incidents de puis la source dans le milieu inhomogène

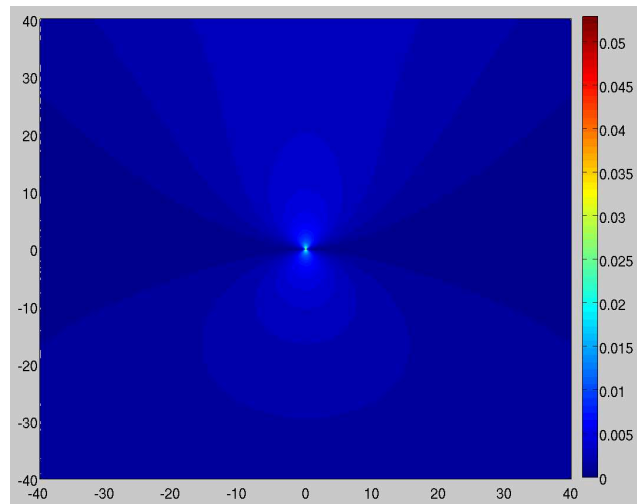


FIGURE 6.3 – Carte de champ diffracté obtenu par la méthode barycentrique : loi de célérité (6.18).

On dispose donc de tous les outils pour mettre en œuvre la méthode hybride en dimension deux et en dimension trois. On propose comme perspective, à cette réflexion sur les applications de la méthode hybride à la propagation en milieu inhomogène, de quantifier par étude numérique l'hypothèse de milieu lentement variable. L'idée serait de comparer les résultats du calcul du champ diffracté en champ lointain avec une solution numérique très précise, par exemple obtenue par FEM, afin de se rendre compte du type de milieu inhomogène qui permet l'application de la méthode hybride avec une précision raisonnable.

### 6.2.3 Deux types de milieux inhomogènes adaptés à l'application de la méthode hybride

On identifie ici deux types de milieux inhomogènes bien adaptés à l'application de la méthode hybride et d'un grand intérêt pour le CND : les milieux stratifiés et les milieux homogènes contenant un ensemble d'inhomogénéités ou de fissures.

#### 6.2.3.1 Les milieux stratifiés

Les milieux stratifiés sont des milieux homogènes par morceaux séparés par une interface. Simuler la diffraction par un obstacle immergé dans une des strates du milieu ou à l'interface entre deux strates constitue une problématique importante pour le CND. On distingue toutefois trois configurations, représentées sur la figure 6.4, pour lesquelles la stratégie est adaptable selon certaines spécificités :

1. Obstacle diffractant à coeur. L'obstacle est dit à coeur lorsqu'il est immergé dans une strate et situé suffisamment loin des interfaces pour que l'on puisse propager le champ diffracté vers l'interface sous la forme de rayons. Dans ce cas, la méthode hybride s'applique directement, comme décrit en section 6.1.2. La méthode des rayons gère la propagation à travers les interfaces et les rebonds qu'elles peuvent générer et l'hypothèse à coeur permet de ramener le problème de diffraction résolu par équation intégrale à un problème posé en milieu homogène non borné. La combinaison des deux résultats donne l'approximation du champ diffracté en tout point de la zone de champ lointain.
2. Obstacle proche de l'interface. Dans ce cas, la méthode des rayons échoue à calculer les interactions multiples entre l'obstacle et l'interface dont il est proche, la stratégie doit être modifiée. On pourra exploiter les pistes décrites dans la section 6.1.3 pour prendre en compte les interactions entre l'obstacle et un bord du milieu dans l'équation intégrale,
3. Obstacle sur l'interface. Dans ce cas, l'équation intégrale devra être modifiée. Cette configuration est laissée en perspective.

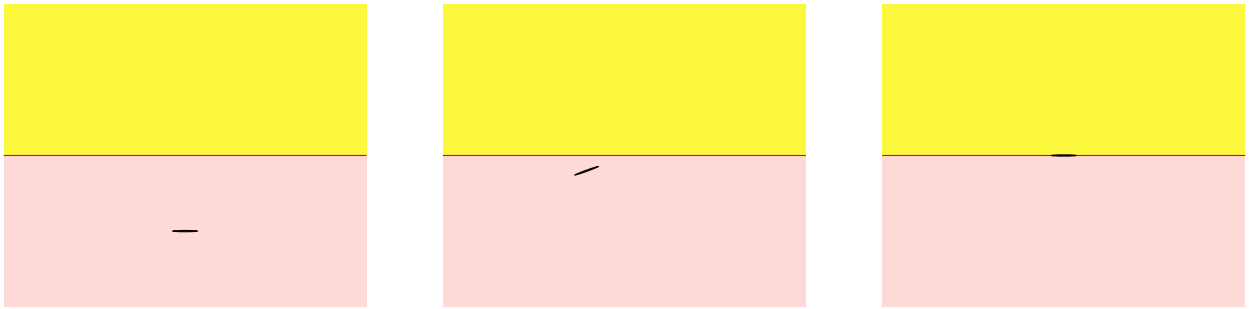


FIGURE 6.4 – Configuration de diffraction en milieu stratifié : obstacle à coeur (figure de gauche), proche de l'interface (figure du centre), sur l'interface (figure de droite).

### 6.2.3.2 Les milieux homogènes avec inhomogénéités

Un autre type de milieu intéressant pour le CND et auquel la méthode hybride serait applicable est le cas de milieux homogènes contenant un ensemble d'obstacles diffractants de type fissures ou inhomogénéités, comme représenté en figure 6.5. L'adaptation de la méthode hybride à ces milieux met en lumière deux

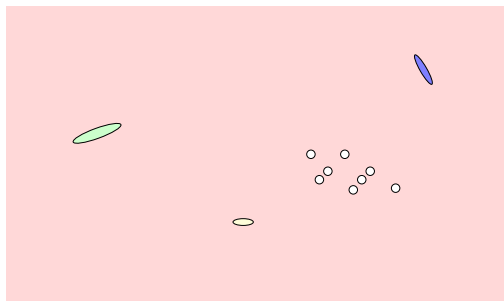


FIGURE 6.5 – Diffraction en milieu homogène.

perspectives intéressantes de la méthode hybride :

1. l'adaptation à des problèmes de transmission,
2. l'adaptation à des obstacles diffractants multiples.

Dans ce manuscrit, seul le cas de l'obstacle impénétrable a été traité, mais la méthode pourrait être adaptée au cas d'obstacles pénétrables sans difficultés importantes. La pénétrabilité des obstacles se traduit simplement par une condition de bord du problème de diffraction de type condition de transmission, et change simplement l'équation intégrale à résoudre et l'expression du coefficient de diffraction.

Pour le problème de la diffraction par plusieurs inclusions, notées  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  de contours respectifs  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ , aux propriétés distinctes dans un milieu homogène, on ne repère aucune difficulté particulière de mise en œuvre lorsque les obstacles sont suffisamment éloignés des bords du milieu. Chaque obstacle pourra être représenté, pour le calcul des effets de propagation, par son barycentre ou la distribution des centres de leur recouvrement, en fonction de sa distance à la source et au récepteur et de sa taille. Après calcul des rayons incidents et diffractés, on résoudra l'équation intégrale équivalente au problème de diffraction (en milieu homogène non borné) posée sur  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ . On calculera ensuite par approximation champ lointain le ou les coefficients de diffraction associés à chaque obstacle et on évaluera le champ diffracté comme la somme des produits des amplitudes des rayons incidents et diffractés et du coefficient de diffraction associé à chaque obstacle.

Toutes ces perspectives sont d'un grand intérêt pour compléter la méthode hybride.

On présente maintenant un exemple d'application de la méthode hybride pour la simulation de la diffraction en milieu borné stratifié.



### 6.3 Mise en œuvre du couplage BEM-rayon temporel avec CIVA

On présente ici une application de la méthode hybride dans le cas d'une configuration de diffraction par un défaut à cœur dans un milieu homogène par morceaux, représentée en figure 6.6. On considère une plaque en acier de forme rectangulaire ( $l = 10\text{mm}$ ,  $L = 400\text{mm}$ ) plongée dans de l'eau. La pièce est perforée de deux disques de diamètre  $r_{\Gamma} = 1\text{mm}$  éloignés des bords du milieu et distants de  $50\text{mm}$ . Ces deux obstacles diffractants sont donc dans la zone de champ lointain l'un de l'autre. La plaque est éclairée par une source ponctuelle très éloignée.

Cette configuration est un cas particulier du problème de diffraction en milieu borné stratifié. On simplifie la résolution en ne calculant que la propagation des ondes P (solutions de l'équation des ondes scalaires) et en négligeant les interactions du champ diffracté avec les bords de pièce. On simule ainsi la propagation d'une onde acoustique se propageant dans un milieu homogène de célérité égale à la vitesse de propagation des ondes P dans l'acier et dont les bords sont absorbants.

On calcule le champ diffracté en régime temporel sur une ligne de récepteurs, placés entre  $70$  et  $220\text{mm}$  du bord de gauche de la plaque. Le calcul de la propagation rayon est réalisé par CIVA et on fournit grâce

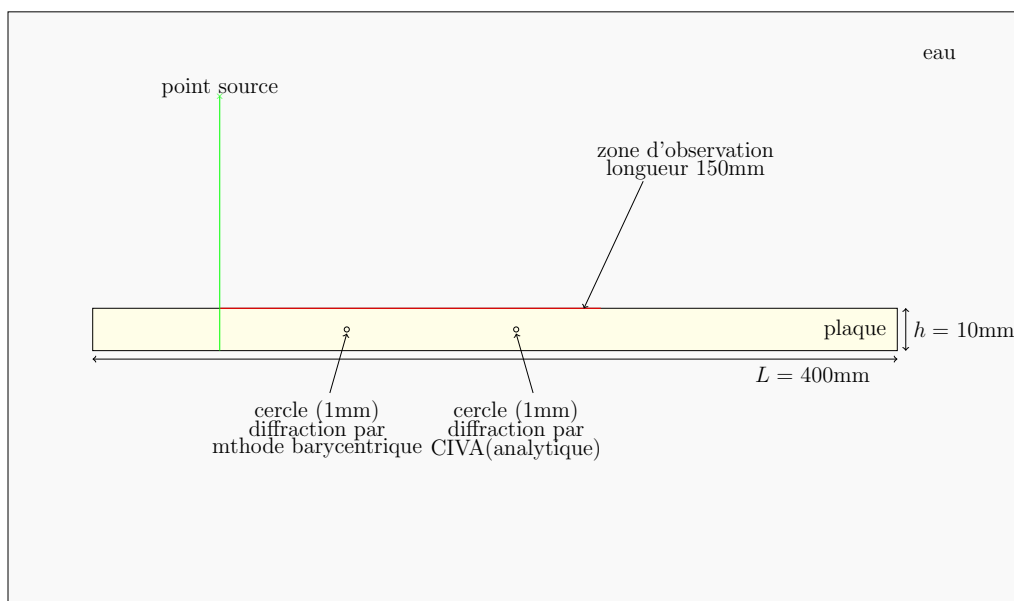


FIGURE 6.6 – Configuration d'application de la méthode hybride à la diffraction en milieu stratifié.

au solveur BEM le coefficient de diffraction pour un ensemble de directions d'observation et un ensemble de fréquences. Le calcul de la réponse temporelle se fait en deux étapes, d'une part on résout le problème de diffraction en régime harmonique puis on calcule la transformée de Fourier en temps de la solution. La réponse du disque de gauche est obtenue par la méthode 'analytique' de CIVA décrite dans (Lopez-Sanchez *et al.* (2005) p.89) et la réponse du disque de droite par la méthode hybride décrite en section 6.1.1.

On compare les résultats et on s'assure qu'ils coïncident. La figure 6.7 superpose la réponse temporelle en diffraction de chaque obstacle sur la ligne de récepteurs. On observe également la superposition des champs diffractés en fonction du temps, confirmant la bonne précision de la méthode hybride par rapport à la solution analytique. On vérifie ainsi que le formalisme de la méthode hybride est bien adapté à CIVA.

L'approche hybride permettant un calcul complètement séparé des effets de propagation et de diffraction, en configurant le solveur rayon de CIVA, on peut facilement calculer la réponse temporelle de la diffraction par l'obstacle en prenant en compte les interactions de l'obstacle avec les bords sur l'intervalle de temps choisi. La mise en œuvre du couplage BEM-CIVA n'a pu être réalisée au cours de ce travail de thèse que pour la version barycentrique de la méthode. Une perspective intéressante de ce travail serait de mettre en œuvre la méthode multi-centres. Pour cela, certains ajustements de l'outil de tracé de rayon du logiciel CIVA seront nécessaires. En l'état, CIVA modélise les points sources et récepteurs comme des surfaces et trace les rayons incidents et diffractés depuis des points sur l'obstacle respectivement vers la source et le récepteur. Par conséquent, chaque rayon tracé depuis des positions différentes sur l'obstacle n'arrive pas à la même

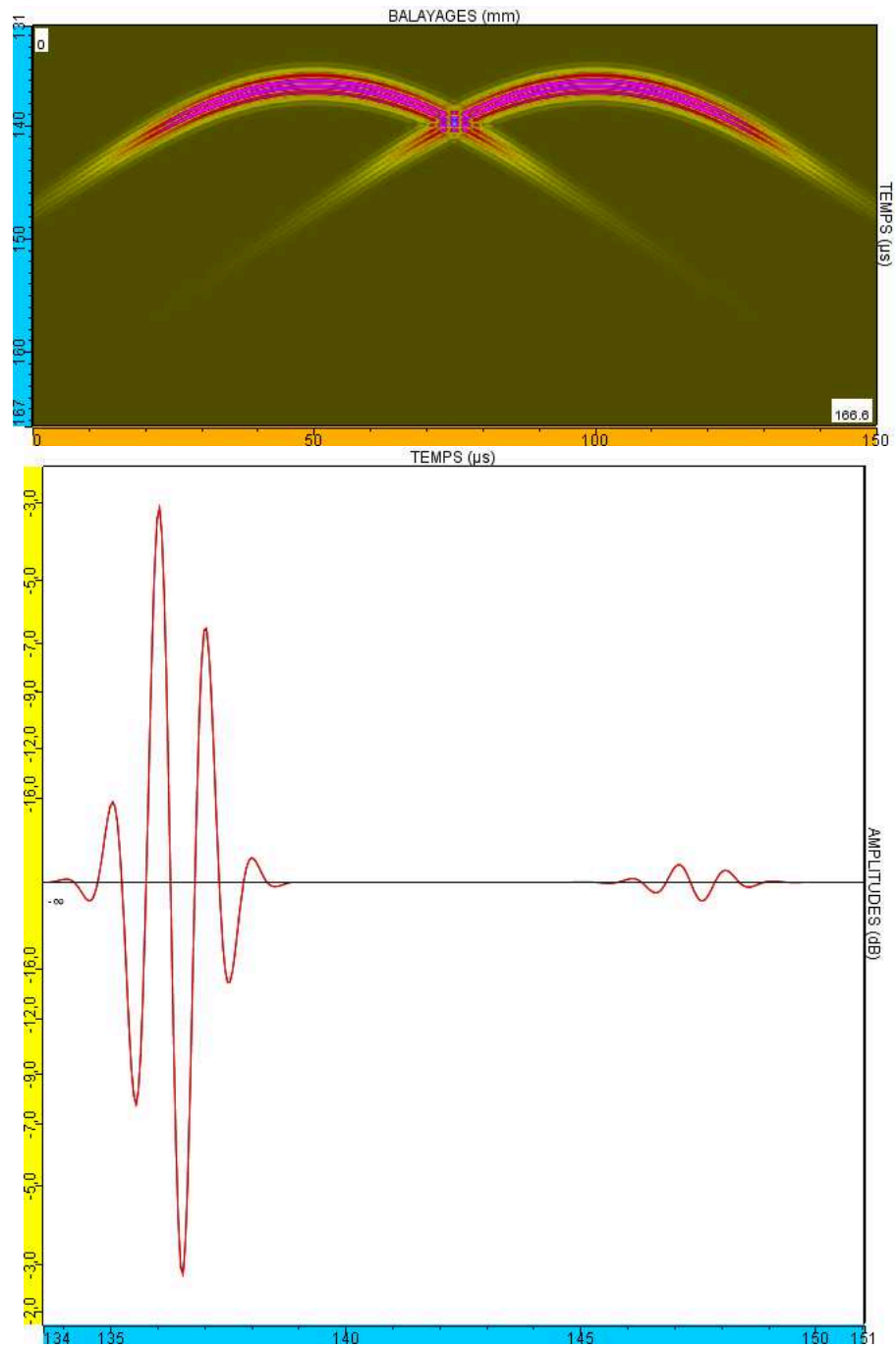


FIGURE 6.7 – Résultats du calcul de diffraction en milieu stratifié.

position sur la surface source et réceptrice. Cette spécificité intrinsèque à la méthode des rayons ne permet pas d'appliquer directement la méthode multi-centres. Une solution serait de calculer les rayons par ray-bending.

## **6.4 Conclusion**

On a brièvement introduit dans ce chapitre un ensemble de perspectives possibles à ce travail pour étendre la méthode hybride à la simulation de la diffraction dans des configurations impliquant un milieu de propagation borné et/ou inhomogène. Bien que la stratégie hybride ne soit pas applicable pour n'importe quel milieu inhomogène, son spectre d'applications est large et adapté à la simulation pour le contrôle non destructif de pièces étendues.

# Conclusions et perspectives

Ce travail de doctorat propose une stratégie hybride couplant la méthode des éléments finis de frontière et la méthode des rayons afin de résoudre avec précision et rapidité le problème de diffraction d'ondes acoustiques ou élastiques en régime haute fréquence. Ces deux méthodes de résolution sont complémentaires pour le type de configuration qui nous intéresse : diffraction en régime haute fréquence par des obstacles de petite taille en milieu étendu borné. La première permet de simuler à moindre coût la propagation en régime haute fréquence des ondes à travers des milieux inhomogènes, la seconde résout avec précision les phénomènes de diffraction que les méthodes asymptotiques ne permettent pas de prédire. Ces méthodes ont cependant un formalisme très différent, et leur couplage n'est pas évident. On a donc proposé de réaliser leur couplage grâce à un modèle multi-échelle de l'obstacle diffractant. On rappelle ici les principaux résultats de ce travail et on met en évidence l'intérêt de cette méthode de couplage.

## Principaux développements et résultats

Le premier chapitre du manuscrit a été dédié à la description du contexte et des motivations de la mise au point du couplage BEM-rayons proposé. On y a rappelé les principaux outils de modélisation de la propagation et de la diffraction en régime haute fréquence en insistant en particulier sur l'intérêt et le principe de la méthode des rayons et des équations intégrales. On a ensuite décrit le principe de quelques méthodes hybrides pour situer la stratégie de couplage que l'on propose par rapport à nos travaux.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté le principe de la méthode hybride barycentrique dans le contexte de la diffraction 2D en milieu homogène non borné. Les résultats principaux de ce chapitre sont les résultats sur le contrôle de l'erreur qui permettent d'estimer a priori l'erreur d'approximation du champ diffracté calculé par la méthode barycentrique pour une configuration donnée. Une preuve de concept numérique a été effectuée dans le cadre de problèmes de diffraction 2D en milieu homogène afin d'illustrer la méthode et son contrôle.

On a présenté au chapitre trois le principe et les outils de la méthode multi-centres. Cette stratégie hybride étend dans une certaine mesure la méthode barycentrique pour traiter des configurations de diffraction pour lesquelles les hypothèses de champ lointain ne sont plus satisfaites. On a en particulier illustré l'intérêt de cette extension sur une configuration de diffraction 2D en milieu homogène. Le principal résultat de ce chapitre est que l'introduction d'une partition de l'unité, subordonnée à un recouvrement du contour de l'obstacle diffractant, améliore la précision de l'approximation rayon du champ diffracté en champ proche dans des configurations de diffraction critiques pour la méthode barycentrique. Cependant, cette précision ne décroît pas linéairement avec le nombre de sous-domaines  $P$  du recouvrement et tend très vite vers un palier de précision alors que le coût de calcul, lui, augmente quadratiquement par rapport à  $P$ . Les expériences ont montré qu'un petit nombre de sous-domaines (inférieur à 20) suffit à gagner près de deux ordres de grandeurs sur l'erreur.

Pour tenir compte des contraintes de performances imposées par les applications industrielles de la méthode hybride sur le long terme, on a développé au chapitre 4 une stratégie d'accélération basée sur une procédure de calcul *Online-Offline*. On a présenté son principe dans le cadre de la méthode hybride barycentrique puis multi-centres et illustré ses performances sur une configuration de diffraction 2D impliquant un grand nombre de positions de la source et du point d'observation. Les résultats obtenus pour la dimension deux promettent de bonnes performances de la procédure *Online-Offline* dans le cas 3D.

Au chapitre 5, on a discuté de l'extension de la méthode hybride à l'acoustique et à l'élastodynamique

3D. On a d'abord présenté le principe de la méthode barycentrique pour un problème acoustique 3D. On en a dégagé des paramètres de contrôle comme au chapitre 2. La méthode a été mise en œuvre sur une configuration de diffraction par une sphère en milieu homogène. La méthode multi-centres, elle, n'a pas été traitée mais on a tout de même proposé deux types de partition de l'unité pour sa mise en œuvre. On a ensuite décrit les outils nécessaires à l'extension de la méthode barycentrique à des problèmes d'élastodynamique en dimension 3 pour des configurations d'obstacle à cœur, laissant en perspective l'extension de la stratégie à des configurations de diffraction par des obstacles proches du bord pour lesquelles les ondes de surface peuvent jouer un rôle important.

Au chapitre 6, un ensemble de perspectives ayant pour but d'appliquer la méthode hybride dans un contexte plus réaliste : la diffraction dans un milieu borné inhomogène ; ont été décrites. On a d'une part proposé une méthodologie basée sur la synthèse temporelle de la solution des problèmes de diffraction en milieu homogène borné et on a en particulier donné des pistes de travail pour adapter la stratégie hybride à la simulation de la diffraction par un obstacle proche du bord du milieu de propagation. D'autre part, on a discuté des perspectives d'applications de la méthode hybride à la résolution de la diffraction en milieu inhomogène.

## Intérêt de la méthode hybride pour la simulation du CND

L'intérêt de la méthode, qui motive son extension à des configurations de CND réalistes est qu'elle permet, dans son cadre de validité, le calcul précis du champ diffracté en champ lointain dans un formalisme très pratique pour un usage industriel. Le calcul des effets de diffraction et de propagation haute fréquence sont interdépendants mais découplés : l'étape de propagation n'utilise pas d'autre information relative à l'obstacle diffractant que la position de son barycentre ou des centres de son recouvrement, seule l'étape de calcul du coefficient de diffraction nécessite la connaissance de la géométrie de l'obstacle. Ce formalisme est donc bien adapté au contrôle de l'usinage de certaines pièces par étude paramétrique. On peut en effet vérifier l'écart d'une géométrie usinée à sa forme théorique en comparant l'écho de diffraction mesuré aux simulations de diffraction par l'obstacle successivement déformé, l'approximation du champ diffracté étant recalculée pour chaque nouvelle géométrie en réactualisant seulement le coefficient de diffraction. Le formalisme est également très utile dans le cadre de la construction d'une bibliothèque de coefficients de diffraction pour un calcul systématique du champ diffracté par des géométries adimensionnées de tailles standardisées.

## Perspectives

Ce travail a été mené dans l'esprit d'une preuve de concept du couplage BEM-rayon, et a été appliqué à des configurations de diffraction académiques. On a identifié au terme de ce travail de nombreuses perspectives pour améliorer cette méthode de résolution. On les rassemble ici.

- On propose de tester deux nouveaux types de recouvrement pour le partitionnement de l'obstacle diffractant :
  - le premier construit à partir de la distribution uniforme des centres des partitions de sorte que la longueur de chaque partition soit égale,
  - le second construit comme l'intersection du contour de l'obstacle diffractant par les sous-domaines liés à une décomposition en quadtree du milieu de propagation.

On propose en outre de comparer l'influence du type de recouvrement sur la précision de la méthode multi-centres. Une autre piste serait d'associer au dernier type de recouvrement une méthode de résolution rapide des équations intégrales (FFM ou  $\mathcal{H}$ -matrix) pour accroître les performances de la méthode hybride. On souhaite également approfondir l'étude a priori de l'erreur dans le cadre de la méthode multi-centres afin de dégager si possible des estimations plus générales que celles présentées au chapitre 3 permettant de fixer a priori le nombre  $P$  de sous-domaines du recouvrement pour obtenir une précision fixée, connaissant la précision de la méthode barycentrique.

- L'implémentation de l'accélération *Online-Offline* proposée au chapitre 4 repose sur une interpolation de Tchebychev, beaucoup plus coûteuse que l'interpolation de Lagrange. En outre, le calcul des coefficients d'interpolation est réalisé par inversion d'un système linéaire. Ainsi le code de calcul de la stratégie *Online-Offline* peut encore être optimisé. On propose pour cela d'évaluer les coefficients d'interpolation par Fast Fourier Transform comme expliqué dans Monro (1979) et d'autre part de mettre en œuvre une interpolation de Lagrange associés aux nœuds d'interpolation de Tchebyshev.
- On propose également de mettre en œuvre et de tester les pistes d'extension de la stratégie hybride, proposée au chapitre 6, pour la diffraction en milieu borné par un obstacle proche du bord. Toutes les techniques proposées reposent sur l'utilisation d'une équation intégrale adaptée à des problèmes à deux corps qui modélise intrinsèquement les interactions de l'obstacle avec le bord.
  1. La première technique consiste à échanger le noyau de l'espace libre par le noyau du milieu de propagation pour calculer les effets dus aux bords directement par résolution du problème de surface.
  2. La seconde et la troisième perspective consistent à écrire le problème intégral de surface associé au problème de diffraction par un obstacle en interaction proche avec la frontière du milieu à l'aide du noyau Green de l'espace libre et à l'approcher par des considérations asymptotiques.
  3. La dernière consiste à calculer itérativement les effets dus à la proximité de l'obstacle et du bord du milieu.

De plus, dans le contexte de l'extension de la méthode aux problèmes acoustiques 3D et élastodynamiques 3D, on met ici en évidence deux perspectives.

- La première est technique et consiste à mettre en œuvre la partition de l'unité proposée en dimension 3 dans la section 5.1.3 pour tester la méthode multi-centres en dimension 3.
- La deuxième nécessite un travail de fond afin d'achever l'étude commencée au chapitre 5 pour étendre le principe de la stratégie hybride à des problèmes élastodynamiques 3D. Une étude mathématique de la formation des ondes de surface, comme proposée par Achenbach *et al.* (1982), devra être réalisée et on devra adapter la stratégie de couplage dans le cas de la diffraction par un obstacle proche du bord pour prendre en compte ces ondes lorsqu'elles existent. L'application de la méthode hybride pour des défauts à cœur ne devrait pas, elle, présenter d'autres difficultés que celles de mise en œuvre numérique.

Enfin, une perspective importante pour l'application de la méthode hybride au CND est sa mise en œuvre dans CIVA. Au cours de ce travail, seule la version barycentrique du couplage BEM-rayons a pu être réalisée. Pour la mise en œuvre de la méthode multi-centres dans CIVA, on devra d'abord adapter son outil de tracé de rayons afin de permettre l'évaluation des grandeurs rayons nécessaires à l'approximation multi-centres.



## Annexe A

# Solutions analytiques des problèmes de diffraction d'ondes planes et cylindrique par un disque

Dans cette annexe, on décrit brièvement comment obtenir les expressions des solutions explicites du problème de diffraction par un disque 2D pour des fonctions sources de type onde plane ou cylindriques. On commence par rappeler des notions élémentaires de séparation de variables puis nous donnons les notations et les propriétés élémentaires associées aux fonctions spéciales. La section suivante établit les expressions de la solution analytique du problème de diffraction par un disque rigide ou non pour ces deux types d'ondes incidentes.

### A.1 Séparation des variables

On se donne un domaine circulaire de  $\mathbb{R}^2$ , noté  $\Omega$ , centré autour de 0 et de rayon  $R$ . On suppose que la fonction  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz homogène  $\Delta u + k^2 u = 0$  dans  $\Omega$ . On cherche à en donner une forme générale qui sera rendue unique pour chaque problème par prise en compte de ses conditions aux bords. On procède par séparation des variables de la fonction  $u$ . En se plaçant dans le système des coordonnées polaires, chaque point de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x, y)$ , est repéré par le couple  $(r, \phi)$  tel que

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi).$$

En particulier, on projette la solution sur l'espace des fonctions  $\{e^{ip\phi}\}_{p \in \mathbb{Z}}$ , en multipliant par  $e^{-ip\phi}$  et en intégrant suivant  $\phi$  sur  $[0, 2\pi]$ . D'après l'expression du Laplacien en coordonnées polaires, on obtient :

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{p}{r^2} + k^2\right)u_p(r) = 0, \quad \text{avec } u_p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_p(r, \phi) e^{-ip\phi} d\phi, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.1})$$

où la fonction  $u_p(r)$  est solution de cette équation différentielle. En faisant le changement de variable  $s = kr$ , et en posant  $v(s) = u_p(r/k)$  on montre que  $v$  est solution de l'équation aux dérivées ordinaire de degré 2,

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s}\right)^2 v(s) - p^2 v(s) + s^2 v(s) = 0, \quad (\text{A.2})$$

que l'on reconnaît être l'équation de Bessel d'ordre  $p$ . Par conséquent, l'espace des solutions est généré par un espace de solutions de dimension 2. On construit classiquement la base de l'espace des solutions en exhibant deux solutions indépendantes cherchées sous la forme de série entières ou de Laurent : les fonctions de Bessel d'ordre  $p$ . La solution de l'équation d'ordre  $p$  positif étant également solution de l'équation d'ordre  $p$  négatif, on suppose pour la suite  $p \geq 0$ .



## A.2 Fonctions de Bessel et de Hankel

### A.2.1 Fonctions de Bessel de première espèce

En cherchant une première solution de l'équation de Bessel d'ordre  $p$  (A.2) sous la forme d'une série entière, on obtient la fonction de Bessel de première espèce, notée  $J_p$  et définie par

$$J_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(p+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{p+2n}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.3})$$

Cette série a un rayon de convergence infini et est  $C^\infty$ . Par construction  $J_p(s)$  est une solution de (A.2) associée à  $p$  ou  $-p$ . Le comportement en 0 de  $J_p$  est donné par,

$$J_p(s) \sim \frac{1}{p!2^p} s^p, \quad \text{quand } s \rightarrow 0. \quad (\text{A.4})$$

### A.2.2 Fonctions de Bessel de deuxième espèce

Une deuxième famille de solutions de l'équation de Bessel d'ordre  $p$  peut être cherchée sous la forme d'une série de Laurent. Elle correspond aux fonctions de Bessel de deuxième espèce notées  $Y_p(s)$  et définies par,

$$\begin{aligned} \forall p \neq 0, Y_p(s) = & -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{s}{2}\right)^{p+2n} \\ & -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(p+n)!} \left[ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+p+1)} \right] \left(\frac{s}{2}\right)^{p+2n} \\ & + \frac{2}{\pi} J_p(s) \ln\left(\frac{s}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} Y_0(s) = & -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{p+2n} + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{s}{2}\right). \\ & + \frac{2}{\pi} J_0(s) \ln\left(\frac{s}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La notation  $\Gamma$  désigne la fonction Gamma d'Euler, qui vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} &= -\gamma_e + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} &= -\gamma_e. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où  $\gamma_e = 0,57721566\dots$  est la constante d'Euler. La fonction  $Y_p$  est  $C^\infty$  sur  $]0, \infty[$ . Autour de zéro,  $Y_p$  a le comportement

$$Y_p(s) \simeq -\frac{(p-1)!2^p}{\pi} s^{-p}, \quad \text{lorsque } s \rightarrow 0. \quad (\text{A.8})$$

### A.2.3 Fonctions de Hankel

On définit les fonction de Hankel de première ( $H_p^{(1)}$ ) et de deuxième espèce ( $H_p^{(2)}$ ) d'ordre  $p$  à partir des fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce comme suit,

$$H_p^{(1,2)}(s) = J_p(s) \pm iY_p(s). \quad (\text{A.9})$$

### A.2.4 Propriétés élémentaires

Les fonctions de Bessel  $J_p, Y_p$  et de Hankel  $H_p^{(1)}, H_p^{(2)}$ , notées de façon générique  $C_p$ , vérifient :

- Relation de dérivation : pour  $p = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} (s^{p+1} C_{p+1}(s)) = s^{p+1} C_p(s), \\ \frac{d}{ds} (s^{-p} C_p(s)) = -s^{-p} C_{p+1}(s). \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

- Relations de récurrence :

$$\begin{cases} 2C'_p(z) = C_{p-1}(z) - C_{p+1}(z), \\ C'_p(z) = C_{p-1}(z) - \frac{p}{z} C_p(z), \\ C_{p+1}(z) = -C_{p-1}(z) - 2\frac{p}{z} C_p(z). \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Pour plus de détails sur ces fonctions se reporter à Abramowitz et Stegun (1964) et Watson (1966).

### A.2.5 Forme de la solution de l'équation de Helmholtz en domaine circulaire

Les deux familles génératrices des solutions de l'équation de Helmholtz (A.1),  $J_p(kr)$  et  $Y_p(kr)$  forment une base de solutions pour cette équation. On peut donc affirmer qu'il existe  $a_p, b_p \in \mathbb{C}$  tels que  $u_p(r) = a_p J_p(kr) + b_p Y_p(kr)$ . On obtient donc la forme générale de la solution à variable séparée de l'équation de Helmholtz homogène dans un disque, ou dans son complémentaire  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$

$$u(r, \phi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (a_p J_p(kr) + b_p Y_p(kr)) e^{ip\phi} \text{ dans } \Omega. \quad (\text{A.12})$$

Pour chaque  $r$  donné, en tant que développement en série de Fourier en  $\phi$ , la série converge en norme  $L^2([0, 2\pi])$ .

Par définition des fonctions de Hankel, on peut également choisir pour base de l'espace des solutions les familles  $H_p^{(1)}, H_p^{(2)}$ . La solution générale (A.12) prend alors la forme

$$u(r, \phi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left( a_p H_p^{(1)}(kr) + b_p H_p^{(2)}(kr) \right) e^{ip\phi} \text{ dans } \Omega. \quad (\text{A.13})$$

Les coefficients  $a_p$  et  $b_p$  sont obtenus par application des conditions aux limites et à l'infini ou à l'origine. On donne dans la section suivante la formule analytique de la solution de l'équation de Helmholtz sur un domaine extérieur à un disque, avec conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.

## A.3 Solution explicite du problème de diffraction

On considère le problème de diffraction d'acoustique d'un faisceau incident  $u^i$  par un objet diffractant circulaire, centré en  $O$  et de rayon  $R$ , dans un milieu infini. On note  $\Omega$  le disque diffractant,  $\Gamma$  son bord et  $\lambda$  est la longueur d'onde du champ incident. On cherche la solution du problème aux limites suivant,

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \\ \Lambda u = -\Lambda u^i, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où  $\Lambda$  désigne l'opérateur trace associé à la condition aux bords et la dernière ligne exprime la condition de radiation de Sommerfeld, qui garantit l'unicité du problème en sélectionnant les solutions sortantes.

Cette dernière condition précise en particulier la forme générale des solutions à retenir : les fonctions  $H_p^{(1)}$  vérifient la condition de radiation sortante (et  $H_p^{(2)}$  la condition entrante), la solution de (A.14) est donc cherchée sous la forme

$$u(r,\phi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p H_p^{(1)}(kr) e^{ip\phi}. \quad (\text{A.15})$$

On trouve ensuite les coefficients  $a_p$  par application de la condition de bord.

### A.3.1 Champ incident de type onde plane

On se donne ici une onde incidente plane de direction de propagation  $\hat{d}$  et d'amplitude  $U_i$ ,  $u^i(x) = U_i e^{ikx \cdot \hat{d}}$ . Le développement de Fourier de  $u^i(x) = e^{ikr \cos(\theta)}$  par rapport à  $\theta$  est donné par la formule de Jacobi-Anger :

$$u^i(x) = U_i e^{ikr \cos(\theta)} = U_i \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p J_p(kr) e^{ip\theta}. \quad (\text{A.16})$$

- Condition de Dirichlet

Lorsqu'on impose une condition aux bords de type Dirichlet dans (A.14),

$$u(x) = -u^i(x), \quad x \in \Gamma,$$

la solution explicite s'écrit

$$u(r,\phi) = -U_i \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p \frac{J_p(kR)}{H_p^{(1)}(kR)} H_p^{(1)}(kr) e^{ip\phi}. \quad (\text{A.17})$$

- Condition de Neumann

Lorsqu'on impose une condition aux bords de type Neumann dans (A.14),

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)} = -\frac{\partial u^i(x)}{\partial \nu(x)}, \quad x \in \Gamma,$$

la solution explicite s'écrit

$$u(r,\phi) = -U_i \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p \frac{J'_p(kR)}{H_p^{(1)'}(kR)} H_p^{(1)}(kr) e^{ip\phi}. \quad (\text{A.18})$$

### A.3.2 Onde incidente cylindrique

Pour une onde cylindrique issue d'une source ponctuelle située en  $x_s$  ( $|x_s| > R$ ),  $u^i(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-x_s|)$ , on utilise la formule d'addition valable dès lors que  $|x_s| < |x|$

$$u^i(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-x_s|) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_p^{(1)}(k|x_s|) J_p(k|x|) e^{ip\theta}. \quad (\text{A.19})$$

- Condition de Dirichlet

Lorsqu'on impose une condition aux bords de type Dirichlet dans (A.14),

$$u(x) = -u^i(x), \quad x \in \Gamma,$$

la solution explicite s'écrit

$$u(r,\phi) = -\frac{i}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{J_p(kR)}{H_p^{(1)}(kR)} H_p^{(1)}(k|x_s|) H_p^{(1)}(kr) e^{ip\phi}. \quad (\text{A.20})$$

- Condition de Neumann

Lorsqu'on impose une condition aux bords de type Neumann dans (A.14),

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu(x)} = -\frac{\partial u^i(x)}{\partial \nu(x)}, \quad x \in \Gamma,$$

la solution explicite s'écrit

$$u(r, \phi) = -\frac{i}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{J'_p(kR)}{H_p^{(1)'}(k|R|)} H_p^{(1)}(k|x_s|) H_p^{(1)}(kr) e^{ip\phi}. \quad (\text{A.21})$$



## Annexe B

# Noyaux de Green pour l'équation de Helmholtz en domaine borné

Cette annexe a pour but de répertorier les noyaux de Green pour l'équation d'Helmholtz 2D pour un domaine circulaire et le demi-espace afin de compléter le chapitre 6 détaillant la stratégie de couplage BEM-ray tracing pour traiter des configuration de diffraction en domaine borné. On résume ici Chapman (2004), p305-321, et Li *et al.* (1992).

### B.1 Noyau de Green pour l'équation d'Helmholtz 2D en domaine borné circulaire

- Condition aux limites de Dirichlet homogène.

Le noyau de Green 2D de l'équation de Helmholtz pour un domaine circulaire, de rayon  $a$ , appliqué au couple  $(x, \xi) = (r, \theta; \rho, \theta')$  est donné par :

$$G(r, \theta; \rho, \theta') = -\frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n(\theta - \theta')) J_n(kr_<) \left[ Y_n(kr_>) - \frac{Y_n(ka)}{J_n(ka)} J_n(kr_>) \right], \quad (\text{B.1})$$

où  $r_> = \max(r, \rho)$ , et  $r_< = \min(r, \rho)$ .

- Condition aux limites de Neumann homogène.

Le noyau de Green 2D pour l'équation d'Helmholtz en domaine circulaire, de rayon  $a$ , appliqué au couple  $(x, \xi) = (r, \theta; \rho, \theta')$  est donné par :

$$G(r, \theta; \rho, \theta') = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{J_n(kr_<) F_n(kr_>)}{\varepsilon_n J'_n(ka)} \cos(n(\theta - \theta')) \quad (\text{B.2})$$

$$= -\frac{1}{4} Y_0(k\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \theta')}) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(k\rho) Y'_n(ka)}{\varepsilon_n J'_n(ka)} J_n(kr) \cos(n(\theta - \theta')), \quad (\text{B.3})$$

où  $F_n(kr) = Y'_n(ka) J_n(kr) - J'_n(ka) Y_n(kr)$ ,  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\varepsilon_n = 1$ ,  $n > 0$ , et  $r_< = \min(r, \rho)$ ,  $r_> = \max(r, \rho)$ .

### B.2 Noyau de Green du demi-espace

Pour plus de précision pour le calcul du noyau de Green du demi-espace en 2D, voir Hoernig (2010). On calcule le noyau de Green pour le demi-plan par la méthode des images.

- Dirichlet homogène :

$$G(x,y) = \frac{i}{4}H_0^1(k|y-x|) - \frac{i}{4}H_0^1(k|y-\bar{x}|) \quad (\text{B.4})$$

- Neumann homogène :

$$G(x,y) = \frac{i}{4}H_0^1(k|y-x|) + \frac{i}{4}H_0^1(k|y-\bar{x}|) \quad (\text{B.5})$$

où  $\bar{x}$  est le symétrique de  $x$  par rapport à la frontière du demi-espace.

## Annexe C

# Résolution numérique des équations intégrales

### C.1 La méthode de Nyström

La méthode de Nyström est une méthode de calcul numérique d'intégrales de surface par collocation, réservée aux surfaces paramétrées régulières, [Colton et Kress (1992)]. Elle consiste en une approximation directe des intégrales de surface faisant intervenir deux types de formules de quadrature selon que l'intégrale est faiblement singulière ou régulière. On développe ici la méthode sur l'équation intégrale de Brackage-Werner.

Pour des milieux perturbés par des défauts de géométrie régulière dont le contour  $\Gamma$  possède une représentation paramétrique au moins  $C^2$ , notée  $\gamma$ ,

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow x(t) = (x_1(t), x_2(t)),$$

on commence par réécrire l'équation intégrale

$$\forall x \in \Gamma, \quad \psi(x) - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(y, x, \omega) - i\eta G(y, x, \omega) \right) \psi(y) dS(y) = -2u^i(x) \quad (\text{C.1})$$

par changement de variable pour de se ramener à une intégration sur le cercle unité  $[0; 2\pi]$ . On note  $\phi(t) = \psi(x(t))$ ,  $f(t) = -2u^i(x(t))$ , respectivement les composées de la densité  $\psi$  et du second membre  $-2u^i$  par le paramétrage  $\gamma$ . On introduit également les notations  $\mathbf{v}(t) = \frac{(x'_2(t), -x'_1(t))^T}{\sqrt{(x'_2(t))^2 + (x'_1(t))^2}}$ , et

$$r(t, \tau) = \sqrt{(x_1(t) - x_1(\tau))^2 + (x_2(t) - x_2(\tau))^2}$$

pour désigner respectivement la dérivée normale en tout point de  $\Gamma$  et la distance entre les points  $x(t)$  et  $x(\tau)$ . Après changement de variable, on écrit :

$$\phi(t) - \int_0^{2\pi} (M(t, \tau) - i\eta L(t, \tau)) \phi(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (\text{C.2})$$

où on note  $M$  et  $L$  les noyaux des potentiels de double et simple couche après composition avec le paramétrage  $\gamma$ . Pour  $t \neq \tau$  on a,

$$M(t, \tau) = \frac{ik}{2} (x'_2(\tau)(x_1(\tau) - x_1(t)) - x'_1(\tau)(x_2(\tau) - x_2(t))) \frac{H_1^1(kr(t, \tau))}{r(t, \tau)}, \quad (\text{C.3})$$

$$L(t, \tau) = \frac{i}{2} H_0^1(kr(t, \tau)) \sqrt{x'_2(\tau)^2 + x'_1(\tau)^2}. \quad (\text{C.4})$$

Les fonctions  $M$  et  $L$  gardent la singularité logarithmique du noyau de Green  $G$  en  $t = \tau$ . Pour un meilleur traitement numérique, on développe le noyau analytique en série entière et on dissocie la partie singulière et



la partie régulière des noyaux, selon [Martensen (1963),Kussmaul (1969)] :

$$M(t,\tau) = M_1(t,\tau) \ln(4 \sin^2(\frac{t-\tau}{2})) + M_2(t,\tau), \quad (C.5)$$

$$L(t,\tau) = L_1(t,\tau) \ln(4 \sin^2(\frac{t-\tau}{2})) + L_2(t,\tau). \quad (C.6)$$

Les noyaux  $L_1, L_2, M_1, M_2$  sont analytiques et par propriétés des fonctions de Bessel, on a pour tout  $t \neq \tau$

$$M_1(t,\tau) = -\frac{k}{2\pi} (x'_2(\tau)(x_1(\tau) - x_1(t)) - x'_1(\tau)(x_2(\tau) - x_2(t))) \frac{J_1(kr(t,\tau))}{r(t,\tau)}, \quad (C.7)$$

$$M_2(t,\tau) = M(t,\tau) - M_1(t,\tau) \ln(4 \sin^2(\frac{t-\tau}{2})), \quad (C.8)$$

$$L_1(t,\tau) = -\frac{1}{2\pi} J_0(kr(t,\tau)) \sqrt{x'_2(\tau)^2 + x'_1(\tau)^2}, \quad (C.9)$$

$$L_2(t,\tau) = L(t,\tau) - L_1(t,\tau) \ln(4 \sin^2(\frac{t-\tau}{2})). \quad (C.10)$$

Et pour  $t = \tau$ ,

$$M_1(t,t) = 0, \quad (C.11)$$

$$M_2(t,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{x'_1(t)x''_2(t) - x'_2(t)x''_1(t)}{x'_2(t)^2 + x'_1(t)^2}, \quad (C.12)$$

$$L_1(t,t) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{(x'_2(t))^2 + (x'_1(t))^2}, \quad (C.13)$$

$$L_2(t,t) = \left(\frac{i}{2} - \frac{\gamma_e}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{k^2}{4}(x'_2(t)^2 + x'_1(t)^2)\right)\right) \sqrt{x'_2(t)^2 + x'_1(t)^2}, \quad (C.14)$$

La constante  $\gamma_e$  est la constante d'Euler.

En injectant cette réécriture des noyaux dans l'équation intégrale et en factorisant les termes singuliers et réguliers, on peut la réécrire sous la forme

$$\phi(t) - \int_0^{2\pi} Q(t,\tau)\phi(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (C.15)$$

avec

$$Q(t,\tau) = Q_1(t,\tau) \ln(4 \sin^2(\frac{t-\tau}{2})) + Q_2(t,\tau), \quad (C.16)$$

$$Q_1 = M_1 + i\eta L_1,$$

$$Q_2 = M_2 + i\eta L_2.$$

Par combinaison linéaire de fonctions analytiques  $Q_1$  et  $Q_2$  sont aussi analytiques.

Afin de calculer cette intégrale, on se donne un ensemble de  $2N$  points de quadrature sur  $\Gamma$ , notés  $(t_j)_{1 \leq j \leq N}$  dont le nombre est lié au nombre d'onde du problème. On calcule la partie régulière de l'intégrale par la règle du trapèze,

$$\int_0^{2\pi} Q_2(t,\tau)\phi(\tau)d\tau \approx \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} Q_2(t,t_j)\phi(t_j), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (C.17)$$

et la partie singulière par la quadrature de Nyström,

$$\int_0^{2\pi} \ln(4 \sin^2(\frac{t-\tau}{2}))Q_1(t,\tau)\phi(\tau)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2N-1} R_j^N(t)Q_1(t,t_j)\phi(t_j), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (C.18)$$

dont on définit les poids de quadrature  $R_j^N$  par,

$$R_j^N(t) = -\frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} \cos(m(t-t_j)) - \frac{\pi}{N^2} \cos(N(t-t_j)), \quad j = 0, \dots, 2N-1. \quad (C.19)$$

L'évaluation de la densité  $\phi$  sur  $\Gamma$  se ramène à la résolution du système linéaire discret :

$$\forall i \in [0, 2N - 1], \quad \phi(t_i) - \sum_{j=0}^{2N-1} (R_j^N(t) Q_1(t_i, t_j) + \frac{\pi}{N} Q_2(t_i, t_j)) \phi(t_j) = f(t_i), \quad (\text{C.20})$$

qui se réécrit matriciellement  $A\phi = F$ , où  $A$ , la matrice de masse,  $F$  le second membre et  $\phi$  l'inconnue sont définies par

$$A = (R_j^N(t_i) Q_1(t_i, t_j) + \frac{\pi}{N} Q_2(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq 2N}, \quad (\text{C.21})$$

$$F = (-2u^{inc}(x_i))_{1 \leq i \leq 2N}, \quad (\text{C.22})$$

$$\phi = (\phi(t_i) = \psi(x_i))_{1 \leq i \leq 2N} = \Psi. \quad (\text{C.23})$$

Le choix du nombre de points de quadrature rendant l'approximation des intégrales précise est lié au nombre d'onde du problème de diffraction. La discrétisation de  $\Gamma$  doit être d'autant plus fine que le nombre d'onde est grand.

**Remarques sur la méthode de Nyström.** Il est possible d'utiliser d'autres règles de quadrature que (C.17) et (C.18), obtenues par d'autres approximations de l'intégrand. Cependant sa simplicité et son haut degré de précision en font des méthodes de choix. On montre que si l'intégrand  $f$  est analytique, l'erreur des règles de quadrature (C.17) et (C.18) est une fonction exponentiellement décroissante de  $N$ . On pourra trouver plus de détail dans Kress (1989).

La méthode décrite est spécifique au traitement d'intégrales sur des courbes régulières en dimension 2. Le cas de domaines avec des coins peut être traité par une méthode de Nyström très différente. Elle résout alors une équation intégrale modifiée, qu'elle intègre par une autre quadrature. On pourra trouver tous les détails p.72-78 de [Colton et Kress (1992)].

Par ailleurs, en dimension 3, la méthode de Nyström n'est plus aussi compétitive par rapport aux méthodes de collocation ou de éléments finis de surface (BEM). En effet, il n'y a pas de quadrature simple et directe, analogue à (C.18) permettant de traiter correctement la singularité de la solution fondamentale 3D. Wienert (1990) a toutefois développé une méthode de Nyström pour les équations intégrales de frontière équivalentes au problème de Helmholtz 3D. Cette méthode basée sur les harmoniques sphériques et la transformation de la surface en sphère, présente également une convergence exponentielle pour des surfaces d'intégrations analytiques. On pourra en trouver une description p.79-84 de [Colton et Kress (1992)].



## Annexe D

# Méthode multi-centres : choix du partitionnement

Dans cette annexe, on décrit la construction de la partition de l'unité de  $\Gamma$  choisie pour la mise en œuvre numérique de la méthode multi-centres.

### D.1 Le choix des splines

La partition de l'unité est construite en deux étapes sous la forme de fonctions polynomiales par morceaux de classe  $C^2(\Gamma)$ . On définit d'une part un isomorphisme  $\tau$  qui à  $\Gamma$  associe le segment  $[-1; 1]$  et d'autre part une fonction polynomiale par morceaux, notée  $f$  et appelée spline mère, définie sur  $[-1, 1]$  et de classe  $C^2([-1, 1])$ . On définit alors chaque fonction de partition  $\eta_p$  par composition de la fonction  $f$  avec une translation de l'abscisse curviligne  $l(y_c^p)$  le long de  $\Gamma$  :

$$\forall y \in \Gamma, \quad \eta_p(y) = f \circ \tau(y - y_c^p).$$

### D.2 Construction de la fonction mère

La fonction spline mère est dans ce manuscrit cherchée de classe  $C^2([-1, 1])$ , et vérifiant à la fois les relations :

$$\begin{cases} f(t) + f(1-t) = 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ f(t) = f(-t), & 0 \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

et les conditions de bord et de continuité des dérivées première et seconde au centre et aux bords de l'intervalle de définition, qui par parité se ramènent à,

$$\begin{cases} f(0) = 1, & f'(0) = 0, & f''(0) = 0, \\ f(1) = 0, & f'(1) = 0, & f''(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Ces propriétés entraînent en particulier  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ .

Du fait de la condition de parité imposée, on construit  $f$  à partir d'une fonction  $g$  paire définie sur  $[0, 1]$  et vérifiant les propriétés (D.2).

#### Choix et calcul de $g$

la fonction  $g$  est en particulier cherchée sous la forme,

$$g(x) = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) G \left( \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right).$$

où  $G$  est un polynôme d'ordre 2, dont les coefficients sont calculés à partir des propriétés aux bords de  $g$ . Par calcul, on trouve :

$$G\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{15}{5} + 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^4. \quad (\text{D.3})$$

**Construction de la fonction mère  $f$**

La propriété  $f(x) + f(x+1) = 1$ , vérifiée par  $f$  permet de la définir à partir de  $g$  par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0,1], \\ 1 - g(x+1), & x \in [-1,0[, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

qui s'écrit en injectant (D.3),

$$f : [-1,1] \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(-1.875 + 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^4\right), & \text{si } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} + \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(-1.875 + 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(x - \frac{3}{2}\right)^4\right), & \text{si } x \in [-1,0[. \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

## Annexe E

# Propriétés de l'opérateur de diffraction

On s'intéresse dans cette annexe aux propriétés de l'opérateur de diffraction  $\mathcal{R}$  défini comme une fonction sur  $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\hat{r}, \hat{s}) &\rightarrow \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{r} \cdot (y-y_c)} (1 + \hat{r} \cdot \mathbf{v}(y)) \Psi(y; \hat{s}), \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

où  $\Psi(y; \hat{s})$  est la solution sur  $\Gamma$ , supposé au moins  $C^2$ , de l'équation intégrale de surface de type Brakhage-Werner bien posée pour toutes fréquences,

$$\frac{1}{2} \Psi(y; \hat{s}) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}(y)}(x, y) - ikG(x, y) \right) \Psi(y; \hat{s}) dS(y) = -e^{ik\hat{s} \cdot (y-y_c)}. \quad (\text{E.2})$$

Pour pouvoir utiliser les résultats de décomposition en valeur singulière de l'opérateur de diffraction  $\mathcal{R}$ , qui est à la base de la procédure d'accélération, on doit vérifier que  $\mathcal{R}$  est  $L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ , où  $\mathbb{S}$  désigne le disque ou la sphère unité. On en donne la preuve dans cette annexe. Deux étapes sont nécessaire pour cela, on justifie d'abord que la solution  $\Psi$  de l'équation intégrale est  $L^2(\Gamma)$  en utilisant des propriétés de mapping conventionnelles, puis par Cauchy-Schwarz on montre que  $\mathcal{R}$  est  $L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ . On montre par ailleurs que  $\mathcal{R}$  est continue par rapport à chacune de ses deux variables.

**Justification :**  $\Psi \in L^2(\Gamma)$

L'équation intégrale de Brakhage-Werner est bien posée pour tout nombre d'onde par construction. Par conséquent, la solution  $\Psi$  de l'équation intégrale existe, est unique et dépend continûment du second membre, qui dans notre étude correspond à la trace de Dirichlet ou la trace normale du champ incident. Il est bien connu que l'opérateur intégral combiné  $(K - ikS)$  peut être vu comme un opérateur intégral de  $L^2(\Gamma)$ , Melenk (2010); Spence *et al.* (2011). Il est borné et inversible, par conséquent,  $\Psi \in L^2(\Gamma)$ . On a donc en particulier, existence d'une constante positive réelle  $C$  telle que,

$$\|\Psi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|(K - ikS)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Gamma))} \|u^i\|_{L^2(\Gamma)} \quad (\text{E.3})$$

De plus, d'après le théorème 1.7 de Spence *et al.* (2011), lorsque  $\Omega_e$  n'est pas borné, on peut montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$ ,  $0 < C \leq 1$  tel que

$$\|(K - ikS)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Gamma))} \leq C.$$

**Preuve :**  $\mathcal{R} \in L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s})|^2 &= \frac{1}{8k\pi} \left| \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{r} \cdot (y-y_c)} (1 + \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}) \Psi(y, \hat{s}) ds(y) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{8k\pi} \left( \int_{\Gamma} |e^{-ik\hat{r} \cdot (y-y_c)} (1 + \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r})|^2 ds(y) \right) \left( \int_{\Gamma} |\Psi(y, \hat{s})|^2 dS(y) \right) \\ &\leq \frac{1}{8k\pi} 4 \text{mes}(\Gamma) \|\Psi\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{S}} |\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s})|^2 d\hat{r} d\hat{s} &= \frac{1}{8k\pi} \int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{S}} \left| \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{r} \cdot (y-y_c)} (1 + \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}) \Psi(y, \hat{s}) ds(y) \right|^2 d\hat{r} d\hat{s} \\ &\leq \frac{1}{8k\pi} 4 \text{mes}(\Gamma) 2\pi \int_{\mathbb{S}} \int_{\Gamma} |\Psi|^2 ds(y) d\hat{s} \\ &\leq \frac{\text{mes}(\Gamma)}{k} \|\Psi\|_{L^2(\Gamma \times \mathbb{S})}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

En insérant le résultat (E.3) dans l'inégalité (E.5), on obtient,

$$\int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{S}} |\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s})|^2 d\hat{r} d\hat{s} \leq \frac{\text{mes}(\Gamma)}{k} \|(K - ikS)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Gamma \times \mathbb{S}), L^2(\Gamma \times \mathbb{S}))}^2 \|u^i\|_{L^2(\Gamma \times \mathbb{S})}^2 \quad (\text{E.6})$$

L'opérateur  $\mathcal{R}$  est construit suite à la résolution de l'équation intégrale (E.2) avec pour second membre l'onde plane unitaire  $u^i(y, \hat{s}) = e^{ik\hat{s} \cdot (y-y_c)}$ . Cette fonction est  $C^\infty(\Gamma \times \mathbb{S})$  par rapport aux variables  $y$  et  $\hat{s}$ . Par conséquent  $u^i$  est dans  $L^2(\Gamma \times \mathbb{S})$ . On rappelle enfin que l'opérateur  $(K - ikS)^{-1}$  est d'inverse borné, on conclut donc,

*Notations :*

$$\int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{S}} |\mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s})|^2 d\hat{r} d\hat{s} < \infty. \quad (\text{E.7})$$

Ce qui prouve que  $\mathcal{R} \in L^2(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$ .

### Continuité de l'opérateur de diffraction sur $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$

On montre enfin dans ce paragraphe la continuité de  $\mathcal{R}$  par rapport à chacune des deux variables.

On définit la fonction de trois variables  $f(\hat{r}, y; \hat{s})$ ,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S} \times \Gamma \times \mathbb{S} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\hat{r}, y, \hat{s}) &\rightarrow e^{ik\hat{r} \cdot (y-y_c)} (1 + \mathbf{v}(y) \cdot \hat{r}) \Psi(y; \hat{s}). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

La restriction de cette fonction à la variable  $\hat{r}$ ,  $\hat{r} \rightarrow f(\hat{r}, y; \hat{s})$  est de façon évidente continue. De plus, on la majore comme suit,

$$|f(\hat{r}, y; \hat{s})| \leq 2|\Psi(y; \hat{s})|, \quad \forall \hat{r}, y, \quad (\text{E.9})$$

par une fonction  $y \rightarrow |\Psi(y; \hat{s})|$  qui est intégrable puisque  $\Psi \in L^2(\Gamma)$ . Par conséquent, par le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction  $\hat{r} \rightarrow \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s})$  est continue sur le disque unité  $\mathbb{S}$ .

Par la relation de réciprocité, Colton et Kress (1992) théorème 3.13 p.54, on a

$$\forall \hat{s}, \hat{r} \in \mathbb{S}, \quad \mathcal{R}(\hat{r}, \hat{s}) = \mathcal{R}(-\hat{s}, -\hat{r}). \quad (\text{E.10})$$

On en déduit la continuité de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\hat{s}$ .

### Bilan

Les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{R}$  sont identiques en dimension 3 et montrées avec les même arguments.

# Bibliographie

- N.N. ABBOUD, G.L. WOJCIK, D.K. VAUGHAN, Jr J. MOULD, D.J. POWELL et L. NIKODYM : Finite element modeling for ultrasonic transducers. *In Medical Imaging'98*, pages 19–42. International Society for Optics and Photonics, 1998.
- M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, volume 55. US Government Printing Office, June 1964.
- J.D. ACHENBACH : *Reciprocity in elastodynamics*. Cambridge University Press, 2003.
- J.D. ACHENBACH, A.K. GAUTESEN et H. MCMACKEN : *Ray methods for waves in elastic solids*. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- D.S. AHLUWALIA : Uniform asymptotic theory of diffraction by edge of a three dimensional body. *Journal of Applied Mathematics*, 10(2) :287–301, 1970.
- K. AITON : A radial basis function partition of unity method for transport on the sphere. Master thesis, Boise State University, 2014.
- K. AKI et P. RICHARDS : *Quantitative Seismology*. Freeman : San Francisco, 1980.
- C. ALVES et R. KRESS : On the far field operator in elastic obstacle scattering. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 67 :1–21, 2002.
- S. AMINI : On the choice of the coupling parameter in boundary integral formulations of the exterior acoustic problem. *Appl. Anal.*, 35(1-4) :75–84, 1990.
- B.A. AULD : General Electromechanical Reciprocity Relations Applied to the Calculation of Elastic Wave Scattering Coefficients. *Wave Motion*, 1(1) :3–10, 1979.
- M. BAKRY : *Fiabilité et optimisation des calculs obtenus par des formulations en propagation d'ondes*. Thèse de doctorat, Université Paris Saclay, 2016.
- M. BALABANE : Boundary decomposition for helmholtz and maxwell equations 1 : disjoint sub-scatterers, asymptotic analysis. *Asymptotic Analysis*, 38(1) :1–10, 2004.
- P.R. BARBONE et O. MICHAEL : Scattering from submerged objects by a hybrid asymptotic-boundary integral equation method. *Wave Motion*, 29(2) :137–156, 1999.
- P.R. BARBONE, J.M. MONTGOMERY, O. MICHAEL et I. HARARI : Scattering by a hybrid asymptotic/finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164(1) :141–156, 1998.
- J.D. De BASABE et M.K. SEN : Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 72 :81–95, 2007.
- D. E. BESKOS : Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 40(1) :1–23, 1987.
- L. BO : *Modélisation de la propagation et de l'interaction d'une onde acoustique pour la télémétrie de structures complexes*. Thèse de doctorat, Université du Maine, 2011.



- M. BONNET : *Équations intégrales et éléments finis de frontière. Applications en mécanique des solides et des fluides*. CNRS Éditions/Eyrolles, 1995.
- S. BORM : *Efficient Numerical Methods for non-local Operators.  $\mathcal{H}^2$ -matrix compression, algorithms and analysis*. European Mathematical Society, 2010.
- D. BOUCHE et F. MOLINET : *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer-Verlag, 1994.
- A.J. BURTON et G.F. MILLER : The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *In Proc. Roy. Soc. London*, volume Ser. A 323, page 201–210, 1971.
- E. BÉCACHE, J. RODRÍGUEZ et C. TSOGKA : A fictitious domain method with mixed finite elements for elastodynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(3) :1244–1267, 2007.
- B. CAIRNS et E. WOLF : Comparison of the born and rytov approximations for scattering on quasi-homogeneous media. *Optics Communications*, 74(5) :284–289, 1990.
- P. CALMON : Trends and Stakes of NDT Simulation. *Journal of Nondestructive evaluation*, 31 :339–341, 2012.
- R. CAVORETTO : Two- and three-dimensional partition of unity interpolation by product-type functions. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 9(1) :1–8, 2015.
- G. CERVENY : *Seismic ray theory*. Cambridge University Press, 2000.
- S. CHAILLAT : *Méthode multipôle rapide pour les équations intégrales de frontière en élastodynamique 3D. Application à la propagation d'ondes sismiques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2009.
- S. CHAILLAT et M. BONNET : A new Fast Multipole formulation for the elastodynamic half-space Green's tensor. *Journal of Computational Physics*, 258 :787–808, 2014.
- P. CHALLANDE : Optimizing ultrasonic transducers based on piezoelectric composites using finite-element method. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 37(3) :135–140, 1990.
- S. N. CHANDLER-WILDE, I. G. GRAHAM, S. LANGDON et E. A. SPENCE : Numerical-asymptotic boundary integral methods in high-frequency acoustic scattering. *Acta Numerica*, 21 :89–305, 2012.
- C.H. CHAPMAN : *Fundamentals of seismic wave propagation*. Cambridge University Press, 2004.
- E. T. CHUNG et B. ENGQUIST : Optimal discontinuous galerkin methods for wave propagation. *Journal of Numerical Analysis*, 44(5) :2131–2158, 2006.
- X. CLAEYS : A single trace integral formulation of the second kind for acoustic scattering. research report, École Polytechnique de Zurich, 2011.
- X. CLAEYS et R. HIPMAIR : Multi-trace boundary integral formulation for acoustic scattering by composite structures. *Communications on pure and applied mathematics*, 66(8) :1163–1201, 2013.
- G. COHEN : *Higer-order numerical methods for transient wave equations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- F. COLLINO et S. MARMORAT : Numerical microlocal anaysis in time domain. Rapport de recherche, INRIA, 2011.
- D. COLTON et R. KRESS : *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983.
- D. COLTON et R. KRESS : *Inverse acoustic and electromagnetoc scattering theory*. Springer, 1992.

- M. DARMON et S. CHATILLON : Main features of a complete ultrasonic measurement model : formal aspects of modeling of both transducers radiation and ultrasonic flaws responses. *In Open Journal of Acoustics : Conference Series*, volume 3, pages 43–53. Scientific Research, 2013.
- M. DARMON, S. CHATILLON, S. MAHAUT, P. CALMON, L.J. FRADKIN et V. ZERNOV : Recent advances in semi-analytical models for NDT simulation. *In Journal of Physics : Conference Series*, volume 269. IOP, 2013.
- M. DARMON, N. LEYMARIE, S. CHATILLON et S. MAHAUT : Modeling of scattering of ultrasounds by flaws. *In Springer Proceedings in Physics*, volume 128, 2009.
- G. DASSIOS et Z. RIGOU : On the reconstruction of a rigid body in the theory of elasticity. *ZAMM– Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 12 :911–923, 1997.
- L. DESIDERIO : *Solveur rapide pour modéliser la propagation des ondes visco-élastiques 3D dans des milieux complexes*. Thèse de doctorat, Université Paris Saclay, 2017.
- D. DORVAL, N. LEYMARIE et S. CHATILLON : Ray-based simulation of defect echoes for ultrasonic Non Destructive Testing. *In Physics Procedia*, volume 70. Elsevier, 2015.
- C. ECKART et G. YOUNG : The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1 (3) :211–218, 1936.
- B. ENGQUIST et O. RUNBORG : Computational high frequency wave propagation. *Acta Numerica*, 1 :1–86, 2003.
- M. EPTON et B. DEMBART : Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations. *SIAM Journal of Scientific Computations*, 16 :865–897, July 1995.
- N. GENGEMBRE : *Modélisation du champ ultrasonore rayonné dans un solide anisotrope et hétérogène par un traducteur immergé*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1999.
- N. GENGEMBRE et A. LHÉMERY : Pencil method in elastodynamics : application to ultrasonic field computation. *Ultrasonics*, 38(1), 2000.
- N. GENGEMBRE, A. LHÉMERY, R. OMOTE, T. FOUQUET et A. SCHUMM : A semi-analytic-FEM hybrid model for simulating UT configurations involving complicated interactions of waves with defects. *In AIP Conference Proceedings*, numéro A, pages 74–80. IOP institute of physics publishing LTD, 2003.
- D. GINTIDES et K. KIRIAKI : The Far Field Equations in Linear Elasticity – an Inverse Scheme. *ZAMM– Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 81 :305–316, 2001.
- G. GIORGI, M. BRIGNONE, R. ARAMINI et M.PIANA : Application of the inhomogeneous Lippmann-Schwinger equation to inverse scattering problems. *SIAM, Journal of Applied Mathematics*, 73(1) :212–231, 2013.
- J.W. GOODMAN : *Introduction to Fourier Optics*. Ben Roberts, 2005.
- L. GREENGARD, J.F. HUANG, V. ROKHLIN et S. WANDZURA : Accelerating fast multipole methods for the Helmholtz equation at low frequencies. *IEEE Computational Science Engng.*, 5(3) :32–38, 1998.
- M. GRIEBEL et H. HARBRECHT : Approximation of bi-variate functions : Singular value decomposition versus regular sparse grids. *IMA, Journal of Numerical Analysis*, 34(1) :28–54, 2014.
- S. GROTH, D.P. HEWETT et S. LANGDON : Hybrid numerical-asymptotic approximation for high-frequency scattering by penetrable convex polygons. *IMA Journal of Applied Mathematics*, pages 1–30, 2013a.
- S. P. GROTH, D. P. HEWETT et S. LANGDON : Hybrid numerical–asymptotic approximation for high-frequency scattering by penetrable convex polygons. *Journal of Applied Mathematics*, 21 :1–30, 2013b.

- B.B. GUZINA et R.Y.S. PAK : Elastodynamic green's functions for a smoothly heterogeneous half- space. *International Journal Solids Structure*, 33 :1005–1021, 1996.
- B.B. GUZINA et R.Y.S. PAK : On the analysis of wave motions in a multi-layered solid. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 54 :1337, 2001.
- I. GÒMEZ-REVUELTO, L.E. GARCÍA-CASTILLO, M. SALAZAR-PALMA et T.K. SARKAR : Fully coupled hybrid-method FEM/high-frequency technique for the analysis of 3D scattering and radiation problems. *Microwave and optical technology letters*, 47(2) :104–107, 2005.
- T. HA-DUONG : On retarded potential boundary integral equations and their discretisation. *Topics in computational wave propagation*, 31 :301–336, 2003.
- R.O. Hein HOERNIG : *Green's functions and integral equations for the Laplace and Helmholtz operators in impedance half-spaces*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2010.
- A. IMPERIALE, S. CHATILLON, P. CALMON, N. LEYMARIE, S. IMPERIALE et E. DEMALDENT : UT simulation of embedded parametric defects using a hybrid model based upon spectral finite element and domain decomposition methods. *In 19th World Conference on Non-Destructive Testing*, 2016.
- S. IMPERIALE et P. JOLY : Mathematical and numerical modelling of piezoelectric sensors. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(4) :875–909, 2012.
- L. JIELIN, P. MONK et D. WEILE : Time domain integral equation methods in computational electromagnetism. Lecture notes in mathematics. *Computational Electromagnetism*, 2148 :111–189, 2014.
- M. KACHANOVSKA : Hierarchical matrices and the high-frequency fast multipole method for the Helmholtz equation with decay. Technical report, Max-Planck Institut fur Mathematik in den Naturwissenschaften Leipzig, 2014.
- E. KAUSEL : *Fundamental solutions in elastodynamics : A compendium*. Cambridge University Press, 2006.
- J.B. KELLER et R.M. LEWIS : Asymptotic methods for partial differential equations : the reduced wave equation and the maxwell's equations. *In Surveys in applied mathematics*, pages 1–82. Springer, 1995.
- B.L.N. KENNETT : *Seismic wave propagation in stratified media*. Cambridge University Press, 1983.
- S. KIM : An  $o(n)$  level set method for eikonal equations. *Journal of Scientific Computing*, 22(6) :2178–2193, 2000.
- G.S. KINO : The application of reciprocity theory to scattering of acoustic waves by flaws. *Journal of Applied Physics*, 49(6) :3190–3199, 1978.
- D. KOMATITSCH et J. TROMP : Introduction to a spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical journal international*, 139(3) :806–822, 1999.
- R.G. KOUYOUMJIAN et P.H. PATHAK : A uniform theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. *In Proceedings of the IEEE*, volume 62, pages 1448–1461. IEEE, 1974.
- Y.A. KRATSOV et Y.I. ORLOV : *Geometrical optics of Inhomogeneous Media*. Springer-Verlag : Heidelberg, 1990.
- R. KRESS : Minimizing the condition number of boundary integral operators in acoustic and electromagnetic scattering. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 38(2) :323–421, 1985.
- R. KRESS : *Linear Integral Equations*. Springer-Verlag, 1989.
- R. KRESS et W. T. SPASSOV : On the condition number of boundary integral operators for the exterior dirichlet problem for the helmholtz equation. *Numer. Math.*, 42(1) :77–95, 1983.

- V.D. KUPRADZE : *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- R. KUSSMAUL : Ein numerisches verfahren zur lösung des neumannschen aussenraum-problems für die Helmholtzsche schwingungsgleichung. *Computing*, 4 :246–273, 1969.
- N. LEBEDEV et R. SILVERMAN : *Special functions and their applications*. Dover Publications, New York, 1972.
- S.-W. LEE et G. DESCHAMPS : A uniform asymptotic theory of edge diffraction. *IEEE Transactions on antennas propagation*, 25(1) :25–34, 1976.
- M. LENOIR, E. LUNEVILLE et N. SALLES : Coupling high-frequency methods and boundary element techniques for scattering problems with several obstacles. In *13th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, 2017.
- R.M. LEWIS et J. BOERSMA : Uniform asymptotic theory of edge diffraction. *Journal of Mathematical Physics*, 10(12) :2291–2305, 1969.
- N. LEYMARIE, P. CALMON, T. FOUQUET et A. SCHUMM : Semi-analytical-FEM hybrid modeling of ultrasonic defect responses. In *ECNDT*, 2006.
- W.L. LI, T.W. WU et A.F. SEYBERT : A half-space boundary element method for acoustic problems with a reflecting plane of arbitrary impedance. *Journal of Sound and Vibration*, 171(2) :173–184, 1992.
- Y. LIU et F.J. RIZZO : Hypersingular boundary integral equations for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 107 :131–144, 1993.
- A.L. LOPEZ-SANCHEZ, H.J. KIM, L.W.Jr. SCHMERR et A. SEDOV : Measurement models and scattering models for predicting the ultrasonic pulse-echo response from side-drilled holes. *Journal of Nondestructive Evaluation : Conference Series*, 24(3), 2005.
- S. MAHAUT, N. LEYMARIE, A.S. Bonnet-Ben DHIA, P. JOLY, F. COLLINO, T. FOUQUET, C. ROSE, O. DUPOND et F. FOUCHER : Simulation of complex ultrasonic NDT cases using coupled analytical-numerical method : the MOHYCAN Project. In *10th European Conference of NDT*, 2010.
- E. MARTENSEN : Über eine methode zum räumlichen neumannschen problem mit einer anwendung für torusartige berandungen. *Acta Math.*, 109 :75–135, 1963.
- L.N. MEDGYESI-MITSCHANG et D.-S. WANG : Hybrid methods for analysis of complex scatterers. *Proceeding of the IEEE*, 77(5) :770–779, 1989.
- J. M. MELENK : Mapping properties of combined field helmholtz boundary integral operators. Technical report n1, Institute for Analysis and Scientific Computing Vienna University of Technology, 2010.
- P. MOCZO, J.O.A. ROBERTSSON et L. EISNER : The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation. *Advances in Geophysics*, 48 :421–516, 2007.
- D.M. MONRO : Interpolation by Fast Fourier ans Chebyshev transforms. *International Journal for numerical methods in Engineering*, 14 :1679–1692, 1979.
- O. NOVOTNY : Seismic Surface Waves. Lecture Notes for post-graduate studies, 1999.
- J.C NÉDÉLEC : *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral representations for harmonic problems.*, volume 144. Springer, 2001.
- L. PAN, J.F. RIZZO et P.A.MARTIN : Some efficient boundary integral strategies for time-harmonic wave problems in an elastic halfspace. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164 :207–221, 1998.

- V. PEREYRA, W.H.K. LEE et H.B. KELLER : Solving two-point seismic ray-tracing problems in a heterogeneous medium. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 70(1) :79–99, 1980.
- D.A. Di PIETRO et A. ERN : *Mathematical aspects of Discontinuous Galerkin Method*. Springer, 2010.
- P. PODVIN et I. LECOMTE : Finite-Difference computation of travel times in very contrasted velocity models. A massively parallel approach and its associated tools. *Geophys. J. Int.*, 105 :271–284, 1991.
- D.S. RAJAN et G.V. FRISK : A comparison between the born and rytov approximations for the inverse backscattering problem. *Geophysics*, 54(7) :864–871, 1989.
- O. RATH-SPIVACK : Waves Propagation and Scattering – 12 lectures of 24 – Part III, May 2012.
- J. RAUCH : Hyperbolic partial differential equations and geometric optics, 2012.
- P.A RAVIART et J.M THOMAS : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunot, 1998.
- F.J. RIZZO, D.J. SHIPPY et M. REZAYAT : A boundary integral equation method for time-harmonic radiation and scattering in an elastic half-space. *Advance Topics in Boundary Element Analysis, ASME*, pages 83–90, 1995.
- V. ROKHLIN : Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 86(2) :414–439, 1990.
- V. ROKHLIN et N. YARVIN : Generalized gaussian quadratures and singular value decompositions of integral operators. Rapport technique Yaleu/DCS/RR-1109, Yale University, Department of Computer Science, May 1996.
- S.M. RYTOV, Y.A. KRATSOV et V.I. TATARSKII : *Principle of statistical radiophysics 4 : Wave propagation through random media*. Springer-Verlag : Berlin, 1989.
- L. RYZHIK, G. PAPANICOLAOU et J.B. KELLER : Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave motion*, 24(4) :327–370, 1996.
- L.W.Jr SCHMERR et S. SONG : Ultrasonic nondestructive evaluation systems : Models and measurements. *Springer, New York*, 2007.
- J.A. SETHIAN : A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *In Proceedings of the National Academic of Science USA*, volume 93, pages 1591–1595, 1996.
- A. SOMMARIVA, M. VIANELLO et R. ZANOVELLO : Adaptive bivariate chebyshev approximation. *Numer Algorithms*, 38 :79–94, 2007.
- E. A. SPENCE, S. N. CHANDLER-WILDE, I. G. GRAHAM et V. P. SMYSHLYAEV : A new frequency uniform coercive boundary integral equation for acoustic scattering. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 64 :1384–1415, 2011.
- J. STAUDACHER : *Conservative numerical schemes for high-frequency wave propagation in heterogeneous media*. Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, 2013.
- G. SYLVAND : *La Méthode Multipôle Rapide en Electromagnétisme : Performances, Parallélisation, Applications*. Thèse de doctorat, CERMICS/INRIA, 2002.
- B. THIERRY : *Analyse et Simulations Numériques du Retournement Temporel et de la Diffraction Multiple*. Thèse de doctorat, Université Henry Poincaré, 2011.
- R.B. THOMPSON : Using physical models of the testing process in the determination of probability of detection. *Materials evaluation*, 59(7) :861–865, 2001.

- R.B. THOMPSON et T.A. GRAY : A model relating ultrasonic scattering measurement to unbounded medium scattering amplitudes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 74 :1279–1290, 1989.
- G. TOULLELAN, R. RAILLON, F. JENSON, S. CHATILLON et S. LONNE : Une revue des travaux de validation du logiciel CIVA UT. Rapport technique, CEA LIST, 2013.
- J. Van TRIER et W.W. SYMES : Upwind finite-difference calculation of traveltimes. *Geophysics*, 56 (6) :812–821, 1991.
- Y.R. TSAI, L.T. CHENG, S. OSHER et H.K. ZHAO : Fast sweeping algorithms for a class of hamilton-jacobi equations. *Journal on Numerical Analysis*, 41(2) :673–694, 2003.
- P.Y. UFIMTSEV : *Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction*. John Wiley & Sons : Hoboken USA, 2007.
- J. UM et C. THURBER : A fast algorithm for two-point seismic ray tracing. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77(3) :972–986, 1980.
- E. van't WOUT : *Stability, Accuracy, and Robustness of the Time Domain Integral Equation Method for Radar Scattering Analysis*. Thèse de doctorat, TU Delft, 2013.
- J. VIDALE : Finite-difference calculation of travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78(6) :2062–2076, 1988.
- V. VINJE, E. IVERSEN, H. GJOYSDAL et K. ASTEBOL : Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction. *Geophysics*, 58(8) :1157–1166, 1993.
- J. VIRIEUX : P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4) :889–901, 1986.
- N.G. WATSON : *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, 1966.
- L. WIENERT : *Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im  $\mathcal{R}^3$* . Thèse de doctorat, University of Gottingen, 1990.
- M.J. WOODWARD : A qualitative comparison of the first order born and rytov approximations. *Geophysics*, 57(1) :15–26, 1992.
- K. I. YOSHIDA : *Application of fast multipole method to boundary integral equation method*. Thèse de doctorat, Kyoto University, 2001.

**Titre :** Une méthode hybride couplant la méthode des équations intégrales et la méthode des rayons en vue d'applications au contrôle non destructif ultrasonore.

**Mots clés :** Diffraction haute fréquence, couplage, équations intégrales, méthode des rayons.

**Résumé :** Le Contrôle Non Destructif (CND) permet de sonder l'intérieur d'un milieu dans le but de surveiller son intégrité et son vieillissement. Assisté d'outils de simulation il permet de détecter, caractériser et localiser les défauts de structure du milieu inspecté. Sa fiabilité dépend toutefois de la précision des méthodes de simulation. Dans le cadre du CND ultrasonore, les méthodes usuelles (numériques et asymptotiques) sont bien souvent inadéquates pour simuler la diffraction par les défauts. On leur préfère des techniques hybrides. On propose dans cette thèse une nouvelle approche hybride pour la simulation numérique de la diffraction haute fréquence en milieu étendu (configuration critique pour le CND). Combinant la méthode des équations intégrales et la méthode des rayons, cette approche exploite le caractère multi-échelle du problème haute fréquence en proposant un modèle d'obstacle à deux échelles. Elle permet le calcul précis de la diffraction et la propagation rayon des champs. D'abord mise au point dans le cadre de la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle de taille inférieure à la longueur d'onde (méthode barycentrique), l'approche est ensuite étendue à des configurations de diffraction par des obstacles de l'ordre de la longueur d'onde grâce à l'introduction d'un partitionnement de l'unité de sa surface (méthode multi-centres). Pour accélérer l'approche hybride, on propose une procédure de résolution Online-Offline, basée sur un pré-calcul de la matrice de diffraction associée à un ensemble réduit de directions d'incidence et d'observation et sur une interpolation polynomiale de ses vecteurs singuliers pour son évaluation dans des directions quelconques d'émetteurs et de récepteurs. On étudie ensuite la stratégie dans le cadre de l'acoustique 3D puis on en fait une extension de principe à l'élastodynamique. On donne enfin un ensemble de pistes pour étendre l'approche hybride dans des cas de diffraction par un ou plusieurs obstacles pouvant être proches des bords du milieu.

**Title :** A hybrid method combining boundary elements and ray tracing for high frequency diffraction involved in ultrasonic non destructive testing

**Keywords :** High frequency diffraction, hybridization, integral equation, ray tracing.

**Abstract :** Non Destructive Testing (NDT) aims at probing a medium to check its integrity and aging. With the help of simulation tools, it allows to detect, characterize and locate flaws inside a material with a precision depending on that of the simulation methods. Usual numerical and asymptotic methods nevertheless often fail at precisely computing diffraction for ultrasonic NDT. Hybrid approaches are thus preferred in this framework. In this thesis, we propose a new hybrid strategy combining the boundary integral equation method and ray tracing to compute high frequency diffraction of an obstacle in a large medium (critical NDT configuration). This strategy allows to compute precisely the diffraction effects and to convert and propagate the diffracted field as rays. The proposed strategy relies on a two-scale model of the diffracting obstacle. First developed to simulate acoustic waves diffraction on an obstacle of size less than the wave length (barycentric method), the hybrid strategy is then extended to compute the diffraction by an obstacle of size some wave lengths (polycentric method) thanks to the introduction of a partition of unity of the obstacle surface. Besides, in order to accelerate the hybrid approach, we propose an Online-Offline resolution procedure based on the Offline computation of the scattering matrix for a reduced set of incidence and observation directions and on the use of a polynomial interpolation of its singular vectors for the Online evaluation of the scattering matrix for any incidence and observation directions. We then study the possibility of extension of the hybrid strategy to 3D acoustics and elastodynamics. We finally give several perspectives for the adaptation of the approach to deal with diffraction by one or several obstacles potentially close to the propagating medium boundaries.