



**HAL**  
open science

# Expériences d'Optique Atomique Quantique, Interféromètres à 2 et 4 modes

Pierre Dussarrat

► **To cite this version:**

Pierre Dussarrat. Expériences d'Optique Atomique Quantique, Interféromètres à 2 et 4 modes. Optique [physics.optics]. Université Paris Saclay (COmUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLO010 . tel-01686709

**HAL Id: tel-01686709**

**<https://pastel.hal.science/tel-01686709v1>**

Submitted on 17 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLO010

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY  
PRÉPARÉE À L' INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE  
SCHOOL

Ecole doctorale n°572  
Onde et Matière  
Spécialité de doctorat : Physique

par

**M. DUSSARRAT PIERRE**

Expériences d'Optique Atomique Quantique  
Interféromètres à 2 et 4 modes

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 20 novembre 2017.

Composition du Jury :

M.	NICOLAS TREPS	Professeur UPMC, LKB	(Rapporteur)
Mme.	MATHILDE FOUCHÉ	Chargée de Recherche Institut de Physique de Nice	(Rapporteur)
M.	CARSTEN KLEMP	Professeur MPI of Quantum Optics	(Examinateur)
Mme.	JACQUELINE BLOCH	Directrice de Recherche C2N	(Présidente du Jury)
M.	DENIS BOIRON	Professeur des Universités Laboratoire Charles Fabry	(Directeur de thèse)
M.	ALAIN ASPECT	Professeur Laboratoire Charles Fabry	(Invité)



Expériences d'Optique Atomique Quantique  
Interféromètres à 2 et 4 modes

Laboratoire Charles Fabry



# Remerciements

Lorsque j'intégrais l'Institut d'Optique en septembre 2011 je ne me doutais vraiment pas que je ne repartirai qu'en décembre 2017.

Durant ces six années, un professeur revient plusieurs fois de manière significative dans mon parcours : Denis BOIRON. Après quelques cours de mécanique quantique avec lui, un premier stage d'un mois en 2012 puis un second de quatre mois en 2014, j'ai finalement réalisé une thèse de trois ans sous sa direction. Je tiens à le remercier en premier car son encadrement durant toutes ces années m'a été très bénéfique. Denis a su tiré le meilleur de moi et cela toujours dans la bonne humeur. Il m'a fait progresser en rigueur scientifique à coup de calculs mentaux à la vitesse de éclair et de "bah oui grand malin!". Malgré ses nombreuses responsabilités au sein de l'école, Denis est resté proche de l'expérience, il est vraiment inestimable pour He\*1!

J'ai réalisé ma thèse au Laboratoire Charles Fabry et j'aimerais remercier ses cadres. Pour commencer, le directeur, Patrick Georges. Tout du long de ma rédaction Patrick est passé dans le bureau me saluer et m'encourager. Patrick est vraiment sympathique et irréprochable dans son travail, merci à lui! Ensuite Alain Aspect, notre ambassadeur de marque à l'accent chantant. Alain apporte régulièrement son expertise sur nos travaux, son expérience est précieuse. J'espère que nous pourrons montrer une nouvelle violation d'inégalité de Bell très bientôt afin de lui permettre de boucler la boucle. Quelle chance d'avoir pu travailler avec lui! Enfin Christoph Westbrook, le chef du groupe. J'ai particulièrement apprécié voir Chris' descendre au sous-sol, nous tendre un papier en souriant avec quelques équations et un ordre de grandeur et dire "refait le truc, je crois que c'est intéressant" car ça l'était toujours. A propos, je pense que Chris' aide énormément les jeunes à comprendre les présentations en posant pleins de questions!

En intégrant le laboratoire Charles Fabry quelques-uns de mes anciens professeurs sont devenus des collègues ainsi je salue Fabienne Bernard, Julien Villemejeane, François Marquier, Jean-Jacques Greffet, Yvan Sortais et

---

Antoine Broaweys (Denis et Alain également) avec qui j'ai eu des contacts réguliers. Passer de l'autre côté du rideau est très instructif et j'ai pu remarquer comme il pouvait être éreintant de préparer ses cours et de mener des recherches à la fois. J'ai vu ces professeurs réussir les deux brillamment et je leur tire mon chapeau.

Faisant parti du groupe Optique Atomique j'ai évidemment interagi avec ses permanents : Thomas Bourdel, Vincent Josse, David Clement, Isabelle Bouchoule et Marc Cheneau. Cela a toujours été un plaisir de discuter avec eux de physique (mais pas seulement) à la cafèt', en réunion ou dans les couloirs. Ils sont tous de très bons conseils et de plus vraiment sympathiques. J'aimerais remercier particulièrement Marc qui a beaucoup participé à l'encadrement de ma thèse. J'ai énormément appris grâce à lui. Attention à vous et gare aux "re-Marc" car vous verrez ça "Marc", puis s'il joue en double avec Isabelle, accrochez vous ! Marc est très humain et comprend les difficultés des jeunes au laboratoire, je pense que c'est vraiment important pour le bon fonctionnement du groupe, merci à lui !

Big up à l'équipe YAO : Eva, Sébastien et Chayma. Que de bons moments avant, pendant et après YAO. Il y en aura d'autres, c'est sur !

L'ambiance est magnifique au laboratoire et cela vient évidemment de ses doctorants. Je pense, entre autres, aux vieux : Jeremy, Raf', Kilian, Steven, Benjamin ou Asling, aux jeunes : Amaudric, Guillaume, Mukhtar, Batiste, Clémence, Hugo, Cécile (les deux), Ziyad, Julien et aussi aux voisins : Ilan, Martin ou Sylvain. Spéciale dédicace à Vincent, Anaïs, Almaz' et Maxime avec qui je pense avoir créé de forts liens d'amitié pendant la thèse. Les alignements à quatre mains, du Céline Dion ou du The Algorithm à fond dans la salle de manip' et des petites soirées ça rapproche, hein ! Bon courage à vous tous !

Merci à ma famille pour son soutien. L'imposante délégation présente à ma soutenance m'a surprise et bien sûr ravie !

Dédicace aux RDs : Kev', Théo, Max', Nini et Bubu. Les bons weekends au pub, à la campagne ou sur le canap' c'était vital pour ma santé mentale ! Grâce à vous je ne me souviens que de bons moments de ces trois dernières années !

Merci à Jérphine qui, en plus de son soutien, m'a apporté une véritable stabilité. Je suis très heureux de l'avoir eu à mes côtés pendant le doctorat.

Et maintenant, en avant pour de nouvelles aventures !

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Optique Atomique Quantique</b>	<b>11</b>
1.1	Révolutions quantiques . . . . .	11
1.2	Deux expériences fondatrices . . . . .	12
1.2.1	Hong-Ou-Mandel . . . . .	13
1.2.2	Inégalité de Bell . . . . .	18
1.2.3	L'Optique quantique au 21 <sup>ème</sup> siècle . . . . .	25
1.3	Optique atomique quantique . . . . .	26
1.3.1	Motivations . . . . .	26
1.3.2	Deux avancées technologiques . . . . .	27
1.4	Conclusion . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Création de Paires Atomiques</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction : Conversion paramétrique en optique . . . . .	36
2.2	Éléments de base de la création de paires . . . . .	37
2.2.1	Non-linéarités : Interactions entre atomes . . . . .	37
2.2.2	Conservation de l'énergie et de l'impulsion . . . . .	39
2.3	Formalisme . . . . .	40
2.3.1	Condensat dans un réseau 1D . . . . .	41
2.3.2	Calcul des intégrales de recouvrement . . . . .	49
2.3.3	Correction de champ moyen . . . . .	49
2.4	Modèle simple : Émission à deux modes . . . . .	51
2.4.1	Représentation de Heisenberg . . . . .	52
2.4.2	Valeur moyenne des observables . . . . .	53
2.4.3	Représentation de Schrödinger . . . . .	54
2.4.4	Probabilités d'émission de plusieurs paires . . . . .	55
2.4.5	Source thermique . . . . .	56
2.5	Développement multi-mode . . . . .	57
2.5.1	Équations du mouvement . . . . .	58
2.5.2	Développement en ordre du couplage . . . . .	59
2.5.3	Densités . . . . .	60
2.5.4	Corrélations . . . . .	64

TABLE DES MATIÈRES

---

2.5.5	Approximation de la conservation de la quasi-impulsion stricte	66
2.5.6	Nombre de paires	68
2.5.7	Émission cohérente et corrélation anormale	69
2.6	Dispositif expérimental et résultats	72
2.6.1	Condensat dans un piège optique	73
2.6.2	Réseau optique	75
2.6.3	Protocole de création de paires	77
2.6.4	Densité	78
2.6.5	Distribution	80
2.6.6	Corrélations	81
2.7	Conclusion	87
<b>3</b>	<b>Miroir et Séparatrice à Atomes</b>	<b>89</b>
3.1	Modélisation	90
3.1.1	Base du problème	90
3.1.2	Développement	92
3.2	Réalisation expérimentale	103
3.3	Pour aller plus loin	106
3.3.1	Équivalence avec le problème d'un spin 1/2 dans un champ magnétique	106
3.3.2	Retournement adiabatique	109
3.3.3	Pulse Sinus cardinal	113
3.4	Conclusion	115
<b>4</b>	<b>Hong-Ou-Mandel atomique</b>	<b>117</b>
4.1	Introduction	117
4.1.1	Protocole	118
4.1.2	Contrôle de la discernabilité	119
4.2	Formalisme	121
4.2.1	Émission	121
4.2.2	Évolution libre	122
4.2.3	Miroir	123
4.2.4	Séparatrice	124
4.2.5	Détection	124
4.2.6	Densité	125
4.2.7	Corrélations croisées en sortie d'interféromètre	126
4.2.8	Corrélations locales en sortie d'interféromètre	128
4.2.9	Forme du trou/pic	128
4.3	Expérience	130
4.3.1	Évolution des densités et corrélations	131

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.3.2	Visibilité	133
4.3.3	Taille du trou	134
4.3.4	Corrélation locale	135
4.3.5	Coïncidences	136
4.4	Conclusion	137
<b>5</b>	<b>Interféromètre à 4 modes et 2 atomes</b>	<b>139</b>
5.1	Introduction	140
5.1.1	Test des inégalités de Bell en impulsion	140
5.1.2	Expérience avec des atomes	142
5.2	Formalisme	145
5.2.1	Émission	146
5.2.2	Propagation/Miroir/Séparatrice	147
5.2.3	Nombre d'expériences en parallèle	148
5.2.4	Densité en sortie des interféromètres	149
5.2.5	Corrélations en sortie des interféromètres	150
5.2.6	Probabilités	151
5.2.7	Corrélateur	152
5.3	Résultats	153
5.3.1	Mesure de probabilités et corrélateurs	153
5.3.2	Vérification du zéro du corrélateur	154
5.4	Implications	156
5.5	Perspectives	158
5.6	Conclusion	160
<b>A</b>	<b>Atome d'Hélium</b>	<b>163</b>
<b>B</b>	<b>Paramètres des réseaux optiques</b>	<b>165</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Introduction

En 1825, le mathématicien et physicien Pierre-Simon de Laplace écrit dans son Essai philosophique sur les probabilités [1] :

“ Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d’ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l’Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l’univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle et l’avenir, comme le passé serait présent à ses yeux. ”

Cette remarque intervient après un siècle et demi d’avancées sans précédent sur la compréhension de la nature, Isaac Newton a publié en 1687 les principes mathématiques de la philosophie naturelle [2] dans lequel il a formalisé les lois de la gravitation, puis au cours du dix-huitième siècle d’Alembert, Maupertuis et Laplace (entre autres) ont développé la mécanique analytique qui permet de décrire et prédire d’une manière générale le mouvement des planètes, les oscillations d’un pendule, les vibrations d’une corde ou l’hydrodynamique. La théorie de la thermodynamique s’est développée grâce, en particulier, aux travaux de Sadi Carnot [3] (1824) et l’électricité et le magnétisme ont acquis leur premières formalisations mathématiques (bien que non encore unifiés, ce que Maxwell fera en 1864 [4]). Ces réussites expérimentales et théoriques permettent alors d’envisager, comme Laplace l’écrit, la possibilité d’un formalisme général permettant de décrire l’évolution de l’univers entier à toutes les échelles à partir d’un état initial connu.

Cependant, à présent, les connaissances physiques ont considérablement évolué et le développement de la mécanique quantique en particulier, à partir du début du vingtième siècle entache cette vision déterministe de la nature que Laplace présente. Prenons l’exemple d’un photon percutant une lame de verre. Le résultat de cette expérience est aléatoire et distribué entre la réalisation photon transmis et photon réfléchi. Ce caractère aléatoire persiste

même si à chaque réalisation les photons et la lame de verre semblent identiques. Seules les probabilités d'occurrence des deux événements peuvent être influencées en changeant par exemple l'indice de la lame. La mécanique quantique décrit fidèlement ce phénomène en introduisant la superposition d'état, le photon est placé dans une superposition d'état transmis et réfléchi. C'est seulement au moment de la détection de celui-ci que l'état est projeté vers un des sous-états. L'issue d'une expérience particulière (photon transmis ou réfléchi) est bien aléatoire dans la théorie quantique et seules les probabilités de chacun des événements sont calculables. Cette expérience et sa description quantique donne un caractère probabiliste à la nature, ce qui est assez surprenant et semble incompatible a priori avec le déterminisme de Laplace.

Le déterminisme peut en fait être conservé en introduisant des variables cachées associées aux particules lors de leur création, paramètres inconnus de l'expérimentateur, qui décident du résultat des expériences à l'avance. Le probabilisme de la mécanique quantique apparaît comme provenant seulement de notre connaissance incomplète des processus. Cependant là encore certaines expériences de mécanique quantique (décrites dans ce manuscrit), utilisant des états dit intriqués ne peuvent être interprétées par les théories à variables cachées (locales). Cela a pour implication de repousser dans ses retranchements la vision déterministe de la nature (sans pour autant complètement les invalider, voir chapitre 1).

La mécanique quantique n'a jamais été mis en défaut jusqu'ici, elle décrit fidèlement toutes observations mais elle continue de surprendre par certains de ses aspects contre-intuitifs. Son caractère probabiliste et son incompatibilité avec les théories à variable cachée (locale) en sont deux exemples. La mécanique quantique mérite donc notre attention et ce manuscrit s'inscrit dans l'étude de ses effets les plus subtils et surprenants.

Il existe de plus un problème de taille avec la mécanique quantique, l'impossibilité d'intégrer à son formalisme la gravité décrite par la relativité générale. Dans l'optique d'une possible unification de ces deux théories, les physiciens doivent mettre en place des expériences mettant en œuvre des effets quantiques impliquant des particules massives. Les travaux de l'équipe Hélium\* 1 du Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique que j'ai intégré en octobre 2014, s'inscrivent dans cette démarche en implémentant des expériences de mécanique quantique avec des atomes, particulièrement les atomes d'hélium.<sup>[1]</sup> Deux de ces expériences réalisées pendant ma thèse sont reportées dans ce manuscrit.

---

1. Notez cependant que les masses considérées sur notre expérience sont celle de l'atome d'Hélium (4 unités atomiques voir Annexe A) ce qui est bien trop faible pour exclure certaines théories de la gravité quantique [5].



## Organisation du manuscrit

Le manuscrit est organisé en cinq chapitres et deux annexes brièvement décrits ici :

### Chapitre 1 : Optique Atomique Quantique

Le premier chapitre présente un bref historique de la mécanique quantique pour ensuite se focaliser sur deux expériences fondatrices de l'optique quantique : l'expérience Hong-Ou-Mandel et la violation des inégalités de Bell. Les motivations de la réalisations de ces expériences avec des atomes ainsi que les avancées techniques le permettant sont discutées.

### Chapitre 2 : Création de Paires Atomiques

Le second chapitre décrit théoriquement et expérimentalement le processus de création de paires atomiques par instabilité dynamique. Ce manuscrit introduit une nouvelle modélisation du processus dont le principal atout est d'être analytique. Le profil de densité et les corrélations entre atomes sont analysés.

### Chapitre 3 : Miroir et Séparatrices à Atomes

La manipulation des paires atomiques avec transfert d'impulsion par transition Bragg est présentée au chapitre 3. L'équivalent de miroirs et séparatrices optiques pour des atomes sont décrits. Finalement, l'implémentation de deux méthodes plus complexes inspirées du domaine de la RMN (résonance magnétique nucléaire) est envisagé afin d'améliorer les propriétés des miroirs et séparatrices de l'expérience.

### Chapitre 4 : Hong-Ou-Mandel Atomique

Au chapitre 4, les éléments décrits aux chapitres précédents sont associés afin de présenter l'expérience Hong-Ou-Mandel avec des atomes d'Hélium. Une nouvelle description théorique est présentée et celle-ci est comparée aux mesures expérimentales.

### Chapitre 5 : Interféromètre à 4 modes et 2 atomes

Le cinquième chapitre décrit les derniers résultats publiés par l'équipe : un interféromètre à 4 modes et 2 atomes. Cette expérience est proche d'un test

## TABLE DES MATIÈRES

---

des inégalités de Bell avec des particules massives sur leurs impulsions. Les résultats expérimentaux et les améliorations possibles vers un test complet sont présentés.

### **Annexe A : Atome d'Hélium**

Les principales propriétés de l'atome d'Hélium sont décrites en annexe A du manuscrit.

### **Annexe B : Paramètres des réseaux optiques**

Les principales propriétés des différents réseaux optiques présents sur l'expérience sont résumées en annexe B du manuscrit.

# Chapitre 1

## Optique Atomique Quantique

### 1.1 Révolutions quantiques

En 1905, Albert Einstein introduit pour la première fois un quantum d'énergie de la lumière pour expliquer l'effet photo-électrique [6]. La lumière est constituée de paquets d'énergie, des corpuscules qui seront nommés photons à partir de 1920. C'est la naissance d'une théorie où les objets ont une énergie échelonnée en quanta, la mécanique quantique. D'autre part la lumière est aussi connue pour son aspect ondulatoire qui permet les expériences de diffraction et d'interférométrie. La lumière possède donc un double aspect, ondulatoire et corpusculaire, on parle de dualité onde-corpuscule. Cette aspect non intuitif de la lumière sera mis en évidence à de nombreuses reprises et sera ensuite étendue aux autres particules (électrons 1927 [7], protons 1929 [8], molécules 1999 [9] ...) et constitue un des piliers de la mécanique quantique. Tous les objets quantiques possèdent à la fois les caractéristiques d'une onde et d'un corpuscule.

De cette dualité va découler le principe de superposition d'état et l'aspect probabiliste de la nature, par exemple, une onde peut se séparer sur une lame 50/50 mais un corpuscule doit choisir, ainsi tant que le système n'a pas été mesuré on décrit l'état du système par une superposition d'état des deux réalisations possibles, corpuscule transmis ou réfléchi, et l'onde associée représente en fait la distribution de probabilité de présence du corpuscule (voir interview de Serge Haroche [10]).

A partir de ces nouvelles règles de la nature, on peut comprendre les structures atomiques, la chimie, les semi-conducteurs, le tout avec une précision incroyable. La compréhension nouvelle de ces mécanismes et les applications technologiques actuelles qui en découlent (capteurs, lasers, ordinateurs ..) constitue ce que l'on nomme la première révolution quantique [11].

Actuellement, une seconde révolution quantique est en marche. Au lieu de simplement observer les effets quantiques, on manipule les propriétés quantiques des objets (atomes, photons, boîtes quantiques artificielles ..) pour à terme les insérer dans les technologies du futur. On façonne donc des états quantiques pour, par exemple, améliorer les précisions de mesures (interférométrie optique [12], champs électriques et magnétiques ..) ou nos systèmes de communications [13].

Théoriquement cette seconde révolution est souvent associée aux aspects les plus surprenants de la mécanique quantique : les interférences à plusieurs particules et surtout l'intrication. Les systèmes constitués de plusieurs particules doivent toujours être considérés de manière globale et agir sur une partie du système peut avoir des répercussions instantanées ailleurs sur l'autre partie. Ces aspects que l'on précisera à travers deux expériences historiques dans la partie suivante ne peuvent être expliqués avec des considérations du type dualité onde-corpuscule et bousculent encore plus notre intuition classique de la physique.

Ainsi, on voit que l'on peut distinguer théoriquement et dans les applications technologiques deux strates de la mécanique quantique, la première et seconde révolution quantique. Il est important de noter que la distinction est floue pour certains systèmes et que cela ne permet évidemment pas de juger de la valeur d'une expérience ou d'une technologie.

### 1.2 Deux expériences fondatrices

Dans cette partie, deux expériences clefs de la compréhension contemporaine de la mécanique quantique seront présentées : l'expérience Hong-Ou-Mandel [14] et la violation des inégalités de Bell. La violation des inégalités de Bell consiste en fait en une série d'expérience menées par de nombreux groupes, des premiers résultats des années 80 aux tests récents sans équivoque (références dans [15] et [16]).

Comme on le verra, ces deux expériences dépassent la première révolution quantique et font bien partie de la seconde révolution quantique. Les concepts utilisés pour les décrire dépassent la dualité ondes corpuscule et choquent notre intuition classique.

Bien que les premières violation d'inégalité de Bell ( $\sim 1980$ ) soient antérieures à l'expérience Hong-Ou-Mandel (1987) leurs implications sont plus fortes et seront présentées en second.

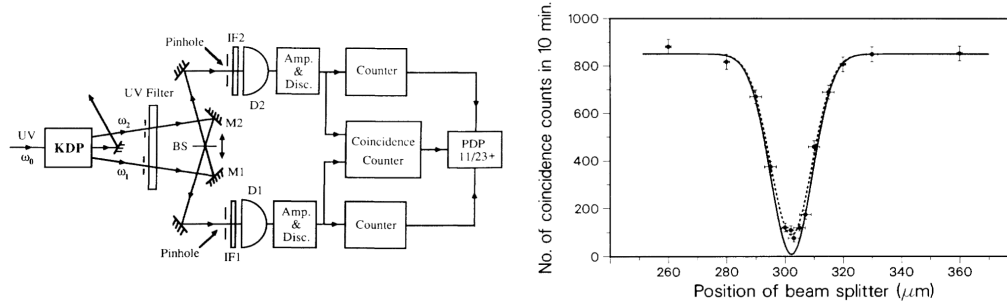


FIGURE 1.1 – Schéma et résultat de l'expérience réalisée par Hong Ou et Mandel en 1987, images extraites de [14]. A gauche, schéma de l'expérience, des paires de photons sont créées à partir d'un laser de pompe UV dans un cristal KDP. Les photons sont ensuite recombinaés sur une séparatrice puis détectés à la sortie. L'électronique suivant les détecteurs permet le comptage des coïncidences de détection entre les deux bras. A droite, le nombre de coïncidences est enregistré pendant 10min et est représenté en fonction de la position de la séparatrice.

### 1.2.1 Hong-Ou-Mandel

Commençons par décrire l'expérience Hong-Ou-Mandel [14] (abréviation HOM) de 1987. Une paire de photons de même longueur d'onde et polarisation, est créée par conversion paramétrique type I (voir section 2.1) dans un cristal non-linéaire. Les deux photons sont recombinaés sur une lame séparatrice 50/50. Les photo-multiplicateurs placés en sortie de la séparatrice détectent les photons émergents de la lame et une électronique adaptée permet le comptage des coïncidences en sortie du montage (un photon à chaque sortie de la séparatrice). Finalement, le délai d'arrivée entre les deux photons peut être ajusté en déplaçant physiquement la séparatrice, notez qu'un décalage de la lame d'une dizaine de microns implique un décalage temporel d'arrivée des photons sur les détecteurs de  $3 \cdot 10^{-14}$ s ce que l'électronique ne peut pas détecter (même actuellement).

En mesurant le taux de coïncidences en sortie de montage tout en déplaçant la séparatrice de quelques dizaines de microns, on remarque une baisse significative de celui-ci, jusqu'à son annulation lorsque les chemins des deux photons jusqu'à la séparatrice sont équilibrés, c'est à dire lorsque les deux photons se recouvrent sur la séparatrice (Fig. 1.1). La courbe du taux de coïncidences en fonction du délai à la recombinaison forme un trou, on le nomme trou Hong-Ou-Mandel (ou HOM). Notons que le taux de détection

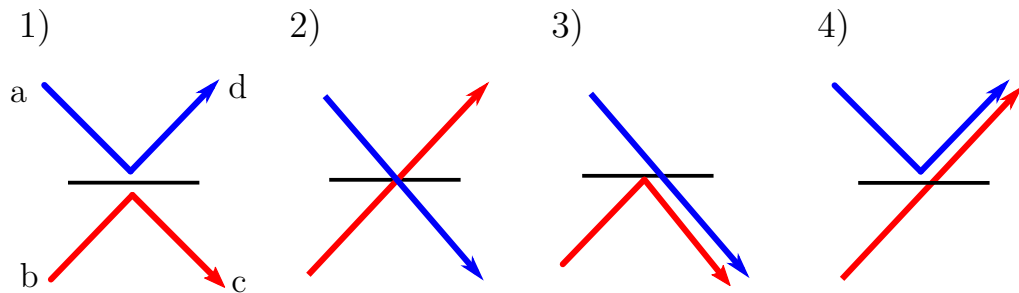


FIGURE 1.2 – Quatre scénarios possibles pour les deux photons heurtant une séparatrice 50 :50. Les deux photons arrivent par les modes d’entrée  $a$  et  $b$  puis sont distribués dans les modes de sortie  $c$  et  $d$ . Chaque photon d’entrée a classiquement 50% de chance d’être réfléchi et de même d’être transmis, il en résulte les quatre réalisations 1-4) de la figure toutes équiprochantes. Attention : les couleurs ne représentent pas une caractéristique des photons (les longueurs d’ondes ..), les photons incidents sont identiques.

à chaque port de sortie reste constant quelque soit le délai.

Il est important de noter que les deux photons incidents n’ont pas à provenir d’une source commune, par exemple dans [17] les photons sont émis par deux atomes piégés indépendamment. Il est en fait simplement plus pratique d’utiliser un processus de création par paire pour la synchronisation d’arrivée des photons sur la séparatrice.

Pour expliquer le phénomène, modélisons le problème de façon classique puis quantique.

### 1.2.1.1 Classique

Classiquement on attend quatre scénarios et ce quelque soit le délai présentés sur la figure 1.2 : 1) les deux photons se réfléchissent sur la lame, 2) les deux photons sont transmis, 3) le premier est transmis et le second réfléchi et 4) le premier réfléchi et le second transmis. Les photons n’interagissant pas ensemble, leurs comportements sont non corrélés et donc les quatre scénarios sont equiprochantes. Au final, quelque soit le délai d’arrivée des photons, seul les scénarios 1) et 2) donnent des coïncidences en sortie de montage, et ce donc une réalisation sur deux. La vision classique n’explique donc pas l’évolution des coïncidences obtenue.

### 1.2.1.2 Quantique

Pour comprendre ce résultat considérons deux cas extrémaux avec une description quantique du phénomène :

**Cas discernable** Le délai temporel noté  $\tau$  entre les deux photons implique qu'ils arrivent vraiment séparés sur la séparatrice. La longueur temporelle du paquet d'onde noté  $\delta T$  est donc tel que :  $\tau \gg \delta T$  [1]. On se retrouve avec des expériences decorrélées de photons percutant une séparatrice. Les photons à la sortie se retrouvent à chaque fois dans une superposition d'état "réfléchi" et "transmis" ce qui se traduit par 50% de chance d'être détecté dans chacun des détecteurs de sortie, comme dans le cas classique. Le taux de coïncidence aux ports de sortie est donc constant concernant une réalisation sur deux et le taux de détection moyen à chaque port est égal à un.

Rien ne se passe ici car le décalage temporel entre les photons ne permet pas de "mélanger" le comportement des photons en sortie. Du point de vue d'un observateur aux ports de sortie on peut discerner le cheminement du premier du second photon.

Expérimentalement on peut aussi réaliser cette discernabilité en annulant l'intégrale de recouvrement des deux modes incidents sur la séparatrice ou en changeant la polarisation d'un des photons.

**Cas indiscernable** Le délai temporel entre les photons s'annule. Les photons étant identiques il est alors impossible de discerner d'où proviennent les photons lors de la mesure en sortie de la séparatrice. Dans une description quantique l'état de sortie du système va donc réunir l'évolution des deux photons simultanément. La matrice de passage de la séparatrice est notée  $\hat{S}$  [18], elle lie les opérateurs d'entrée  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  aux sorties  $\hat{c}$  et  $\hat{d}$  (Fig. 1.2) comme :

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

L'état initial est composé d'un photon dans chaque bras d'entrée :  $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger |0\rangle = |1_a, 1_b\rangle$ . En retournant (1.1), l'état de sortie s'écrit :

$$|\Psi\rangle_{out} = \frac{1}{2} \left[ \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger - \hat{d}^\dagger \hat{d}^\dagger + \hat{c}^\dagger \hat{d}^\dagger - \hat{d}^\dagger \hat{c}^\dagger \right] |0\rangle \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [|2_c, 0_d\rangle - |0_c, 2_d\rangle] \quad (1.3)$$

---

1.  $\delta T$  est relié à la largeur spectrale du photon  $\delta f$  et :  $\delta T = 1/\delta f$

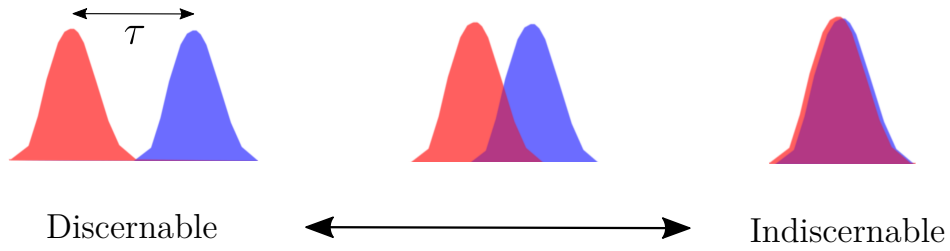


FIGURE 1.3 – Degrés de discernabilité entre les photons. A gauche, l'écart temporel  $\tau$  est grand devant la taille caractéristique de photons  $\delta T$  on peut discerner les scénarios de l'expérience. A droite, l'écart temporel est nul les photons se recouvrent, il y a indiscernabilité entre les photons. Au milieu,  $\tau \sim \delta T$  cas intermédiaire de partiel discernabilité.

Les composantes de l'état de sortie correspondant aux scénarios 3) et 4) de la figure 1.2 (termes 1 et 2 de l'équation 1.2) sont de signe opposé. Les scénarios 1) et 2) étant expérimentalement indiscernables ils s'annulent dans l'état de sortie et seuls les scénarios 3) et 4) subsistent. Notez que cet effet est dû au caractère bosonique des particules considérées, pour des fermions c'est l'effet inverse qui se produit et les photons quittent la séparatrice toujours séparés.

C'est un phénomène d'interférence à deux particules lié à l'indiscernabilité entre les réalisations 1) et 2) de l'expérience. Au final les photons quittent donc toujours la séparatrice ensemble ce qui explique l'annulation des coïncidences en sortie de montage. Le taux de détection moyen à chaque port de sortie reste quand à lui constant toujours égal à un, comme observé expérimentalement.

**Trou HOM** En décalant légèrement la séparatrice de la position équilibrée où les photons se recouvrent parfaitement, on se retrouve alors entre les cas discernable et indiscernable précédents. Sur la figure 1.3 les paquets d'ondes temporels associés aux deux photons incidents sont représentés pour différents délais afin d'illustrer la possibilité d'un cas intermédiaire où les photons sont partiellement discernable. Ces cas intermédiaires impliquent un rétablissement partiel du nombre de coïncidences ce qui forme le trou HOM de la figure 1.1.

On montre [14, 19] que la forme du trou provient de la convolution temporelle des paquets d'ondes incidents sur la séparatrice. Plus les photons sont fins spectralement, plus ils sont "longs" temporellement et plus le trou est large et inversement. Au final la largeur du trou en déplacement de la sé-



paratrice permet de remonter à la longueur caractéristique temporelle des photons en divisant par la vitesse de la lumière.

Le modèle quantique complet explique donc le phénomène observé, là où le modèle classique échoue. Il est maintenant intéressant de vérifier si ce phénomène peut être expliqué par une description ondulatoire de la lumière, c'est à dire par une vision de la première révolution quantique.

### 1.2.1.3 Pas d'explication ondulatoire

Comme on va le voir ici, le phénomène Hong-Ou-Mandel ne peut pas être décrit par une description ondulatoire. Pour commencer, on écrit le champ électrique associé à chacun des photons des modes d'entrée  $a$  et  $b$  :

$$\varepsilon_a = \sqrt{I_0}e^{i\phi_a} \quad \varepsilon_b = \sqrt{I_0}e^{i\phi_b} \quad (1.4)$$

où  $I_0$  est l'intensité lumineuse de chaque bras et  $\phi_a$  et  $\phi_b$  sont les phases des deux faisceaux incidents.

En utilisant la matrice de passage (1.1), on peut ensuite calculer les champs électriques puis les intensités en sortie de la séparatrice dans les modes  $c$  et  $d$  :

$$I_c = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [\varepsilon_a + \varepsilon_b] \right|^2 = 2I_0 \cos^2 \left[ \frac{\phi_b - \phi_a}{2} \right] \quad (1.5)$$

$$I_d = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [-\varepsilon_a + \varepsilon_b] \right|^2 = 2I_0 \sin^2 \left[ \frac{\phi_b - \phi_a}{2} \right] \quad (1.6)$$

les intensités attendues manifestent donc des franges en fonction de la différence de phase des deux faisceaux. Cette différence de phase peut être variée expérimentalement en déplaçant, par exemple, la séparatrice. Afin d'évaluer les coïncidences on calcule le produit des intensité  $I_c$  et  $I_d$  :

$$I_c I_d = 4I_0^2 \cos^2 \left[ \frac{\phi_b - \phi_a}{2} \right] \sin^2 \left[ \frac{\phi_b - \phi_a}{2} \right] = I_0^2 \sin^2 [\phi_b - \phi_a] \quad (1.7)$$

$I_c I_d = 0$  pour  $\phi_b - \phi_a = 0$  ou  $\pi[2\pi]$ , donc il existe bien des situations où le nombre de coïncidences s'annule entre les sorties de la séparatrice. Cependant cela correspond toujours à un cas où l'intensité lumineuse d'un des modes  $c$  ou  $d$  s'annule et expérimentalement ce n'est pas observé. Lors de la mesure du trou HOM le taux de détection des deux voies de sortie individuellement reste parfaitement constant.

Finalement, on ne peut pas expliquer avec une modélisation ondulatoire en même temps un trou dans le compte de coïncidences et un taux de détection individuel par voie de sortie constant.

En conclusion l'expérience HOM met en évidence un phénomène d'interférence à deux particules qui dépasse toute interprétation en terme d'onde. C'est une expérience d'entrée vers la seconde révolution quantique.

### 1.2.2 Inégalité de Bell

La seconde expérience fondatrice de la mécanique quantique contemporaine est la mise en évidence de l'intrication quantique avec la violation des inégalités de Bell.

#### 1.2.2.1 Présentation de l'intrication

L'intrication est une propriété qui lie le résultat de mesures sur deux objets potentiellement séparés spatialement.

Pour fixer les idées, considérons l'émission de paires de billes en sens opposé (comme sur Fig. 1.4), chacune des billes pouvant être "bleue" ou "rouge". De plus leur interaction passée fait qu'elles sont toujours soit les deux bleues soit les deux rouges. Du point de vue de la mécanique quantique tant qu'une mesure de couleur n'a pas été réalisée sur une des billes, chacune d'elle est dans une superposition des deux couleurs. Puis dès lors qu'une mesure est réalisée sur une des billes on connaît alors sa couleur et donc instantanément le couleur de l'autre : on dit que l'état est projeté. Ce lien à distance qui lie les couleurs des billes instantanément est l'intrication quantique.

Ce comportement comporte des difficultés d'interprétation qui seront présentées dans la partie suivante.

#### 1.2.2.2 Action fantomatique et Incomplétude

L'expérience de pensée réalisée dans la partie précédente fait apparaître une action à distance instantanée entre les particules lors de la mesure. Les particules communiquent et ce potentiellement plus rapidement que la vitesse de la lumière. Cette action fantomatique comme la nomme Einstein semble donc en contradiction avec la relativité. Bien que l'on montre que le lien entre les particules ne peut pas être utilisé pour transporter de l'information car le résultat de la première mesure est aléatoire et donc l'information transportée est aussi aléatoire, la non-localité des comportements choque notre conception de la physique.

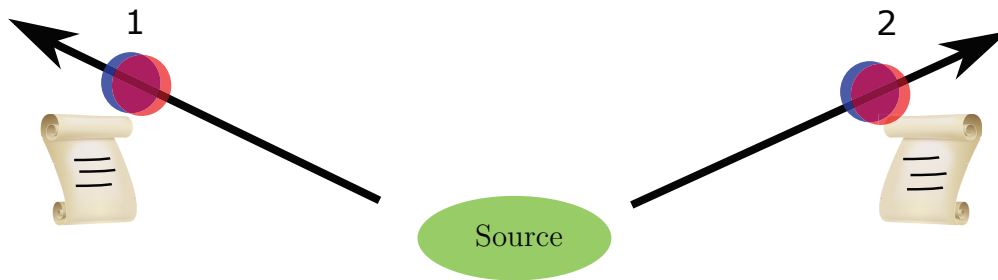


FIGURE 1.4 – Représentation des variables cachées. Deux particules sont émises par une source dans deux directions différentes. Les particules emportent avec elles une variable qui nous ait inaccessible mais qui décide les résultats des mesures faites ultérieurement sur les deux particules, c'est la variable cachée.

Einstein, Podolsky et Rosen vont en 1935 grâce à une expérience de pensée similaire [20] conclurent à l'incomplétude de la mécanique quantique (paradoxe EPR). C'est à dire, l'interprétation en terme d'action à distance de la mécanique quantique vient simplement de notre connaissance incomplète de la réalité. En effet la non-localité des comportements s'efface si on considère que les particules partagent dès le début le choix qu'elle vont faire lors des mesures.

Cet accord que font les particules au départ de l'expérience se matérialise mathématiquement par une "variable cachée" (Fig. 1.4). "Cachée" signifiant simplement que ce paramètre de l'expérience nous est inconnu ou inaccessible. Ainsi, la variable cachée que partagent les particules permet de prévoir toutes issues de mesures dès l'émission en évitant l'action fantomatique.

Plus généralement, cette idée permet de créer une représentation de la nature plus intuitive ayant comme propriétés :

- Causalité** : les causes précèdent les conséquences.
- Déterminisme** : l'évolution du système est logique et prévisible (si les variables cachées étaient connues).
- Réalisme local** : les particules véhiculent leurs propriétés avec elles et il n'y a pas d'action à distance instantanée entre les particules.

Les théories à variables cachées semblent donc pouvoir prédire tous les résultats de la mécanique quantique avec une vision plus raisonnable de la réalité, où l'on retrouve le déterminisme cité en introduction. Ces problèmes d'interprétations n'ont en fait intéressé que peu de scientifiques car la mécanique quantique restait incroyablement précise dans ces prédictions et l'in-

interprétation n'était qu'un problème philosophique. Cependant c'était sans compter sur John Bell.

### 1.2.2.3 John Bell

John Bell montre en 1964 [21] une incompatibilité entre certains résultats de la mécanique quantique et les théories à variables cachées. Peu de temps après des expériences sont proposées [22] pour permettre de former une quantité, appelé paramètre de Bell, mesurable qui exclut les théories à variables cachées (locale) si il dépasse une certaine valeur, c'est à dire si l'inégalité de Bell est violée. Les problématiques d'interprétation de la mécanique quantique deviennent alors adressables expérimentalement.

Dans la partie suivante une de ces expériences est présentée utilisant des photons et leur polarisation. Il est important de noter qu'une expérience visant à la violation des inégalités de Bell peut être entreprise avec a priori n'importe quelle particules et degré de liberté associé, deux exemples supplémentaires seront discuté au chapitre 5 de ce manuscrit.

### 1.2.2.4 Une expérience de Bell

L'exemple choisie ici pour illustrer une expérience qui vise à violer les inégalités de Bell est celui où on mesure la polarisation de deux photons émis par paire d'une source commune. C'est le principe d'expérience des premiers tests (concluants) des inégalités de Bell [23, 24, 25].

Considérons donc une source émettant des paires de photons dans des directions opposées dans un état de polarisation intriquées du type :

$$|\Psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |H, H\rangle_{1,2} + |V, V\rangle_{1,2} \right] \quad (1.8)$$

où  $H$  et  $V$  désignent respectivement la polarisation horizontale et verticale du photon. Cet état est dit intriqué car la polarisation de chaque photon est inconnue avant toute mesure, mais dès lors qu'un des photons est détecté alors celui-ci choisit une polarisation et la polarisation de l'autre photon est instantanément décidée, les mesures des propriétés de chaque photon sont parfaitement corrélées. Mathématiquement l'intrication se manifeste par le fait que l'état ne peut être factorisé en deux parties concernant chacune un seul des photons. Il est appelé état de Bell ou maximalelement intriqué car il implique la violation la plus importante de l'inégalité de Bell (voir 1.2.2.6).

Les expériences historiques utilisaient les structures internes particulières de certains atomes Calcium [23, 25] ou Mercure [24] pour forcer l'émission

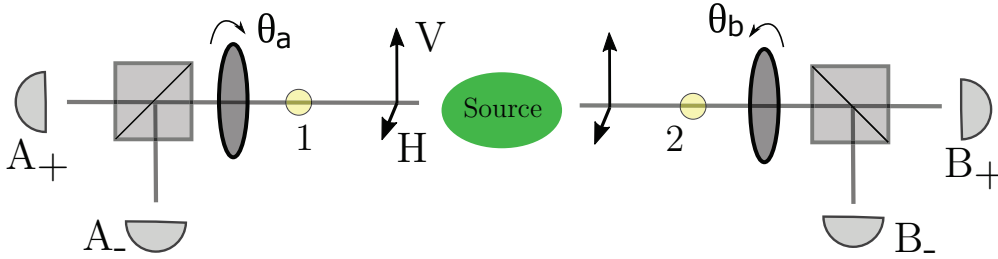


FIGURE 1.5 – Schéma d’une expérience menant au test d’une inégalité de Bell. Les photons sont émis par paires de la source, il passe ensuite chacun dans un système de mesure. Les systèmes de mesures sont composés d’une lame demi-onde tournée de  $\theta_a$  à gauche et  $\theta_b$  à droite ainsi qu’un cube séparateur de polarisation. Les détecteurs permettent ensuite d’enregistrer les détections  $A_+$  ou  $A_-$  à gauche et  $B_+$  ou  $B_-$  à droite.

d’état comparable, ceux-ci ont été ensuite remplacés par les cristaux non-linéaires [26] moins contraignant expérimentalement (utilisé par exemple pour l’expérience HOM de la partie précédente).

Considérons maintenant deux systèmes de mesures placés sur le chemin des deux photons chacun d’eux constitué d’une lame demi-onde, d’un cube séparateur de polarisation et deux détecteurs (voir Fig. 1.5). On se retrouve donc maintenant avec une expérience donnant pour chaque émission de paire deux détections :  $[A_{\pm}, B_{\pm}]$  ce qui permet de calculer expérimentalement après un grand nombre d’expériences les quatre probabilités conjointes de détection entre les deux côtés de l’expérience :  $P(A_{\pm}, B_{\pm})$  notées plus simplement  $P_{\pm\pm}$ . Regardons ce qui est attendu théoriquement en mécanique quantique.

### 1.2.2.5 Calcul Quantique

En considérant que la lame demi-onde du côté gauche de l’expérience fait un angle  $\theta_a$  avec la direction horizontale et que les cubes laissent passer la polarisation verticale (V) et réfléchissent l’horizontale (H), on trouve que les états aux deux sorties gauches sont (Fig. 1.5) :

$$|A_+\rangle = \sin(2\theta_a) |H\rangle_1 - \cos(2\theta_a) |V\rangle_1 \quad (1.9)$$

$$|A_-\rangle = \cos(2\theta_a) |H\rangle_1 + \sin(2\theta_a) |V\rangle_1 \quad (1.10)$$

De même, aux sorties droites :

$$|B_+\rangle = \sin(2\theta_b) |H\rangle_2 - \cos(2\theta_b) |V\rangle_2 \quad (1.11)$$

$$|B_-\rangle = \cos(2\theta_b) |H\rangle_2 + \sin(2\theta_b) |V\rangle_2 \quad (1.12)$$

Maintenant les probabilités conjointes peuvent être calculées. Par exemple la probabilité conjointe d'avoir une détection en  $A_+$  et  $B_+$  notée  $P_{++}$  est :

$$P_{++} = |\langle A_+, B_+ | \Psi \rangle_B|^2 \quad (1.13)$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(2\theta_a) \sin(2\theta_b) + \cos(2\theta_a) \cos(2\theta_b)]^2 \quad (1.14)$$

$$= \frac{1}{2} \cos^2(2(\theta_b - \theta_a)) \quad (1.15)$$

Les autres probabilités sont :

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{2} \cos^2(2(\theta_b - \theta_a)) \quad (1.16)$$

$$P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{2} \sin^2(2(\theta_b - \theta_a)) \quad (1.17)$$

Les probabilités conjointes oscillent en fonction des positions des lames demi-onde. Par exemple, pour  $2(\theta_b - \theta_a) = 0, \pi[2\pi]$  on a  $P_{++} = P_{--} = 1/2$  et  $P_{+-} = P_{-+} = 0$  ce qui signifie qu'à toute itération de l'expérience les photons sortent du même côté des cubes. Il y a ici accord parfait entre les mesures du coté gauche et droit de l'expérience. Au contraire si  $2(\theta_b - \theta_a) = \pi/2, 3\pi/2[2\pi]$  alors  $P_{++} = P_{--} = 0$  et  $P_{+-} = P_{-+} = 1/2$ , les photons ne sortent jamais du même coté des cubes. Il y a maintenant parfait désaccord entre les mesures des deux côtés de l'expérience. Il existe aussi le cas intermédiaire où aucune corrélation n'apparaît entre les mesures de part et d'autre de l'expérience.

Pour quantifier ce taux d'accord entre les mesures des deux cotés de l'expérience on définit le corrélateur  $E_{MQ}$  qui est la somme des probabilités d'accord sur les mesures ( $P_{++}, P_{--}$ ) retranché des probabilités de désaccord ( $P_{-+}, P_{+-}$ ) :

$$\boxed{E_{MQ} = P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+} = \cos(4(\theta_b - \theta_a))} \quad (1.18)$$

$E_{MQ}$  contient toute l'information sur les corrélations existant entre les mesures conjointes sur les deux photons. Le corrélateur évolue entre  $E_{MQ} = -1$  désignant une parfaite anti-corrélation entre les mesures de polarisation et  $E_{MQ} = 1$  désignant cette fois une parfaite corrélation (Fig. 1.6).

Finalement, le paramètre de Bell noté  $S_{MQ}$  est formé en combinant quatre mesures de corrélateur pour quatre choix d'angles des lames demi-onde :

$$S_{MQ} = E_{MQ}(\theta_a, \theta_b) - E_{MQ}(\theta_a, \theta'_b) + E_{MQ}(\theta'_a, \theta_b) + E_{MQ}(\theta'_a, \theta'_b) \quad (1.19)$$

En prenant les quatre angles  $4 \times [\theta_a, \theta_b, \theta'_a, \theta'_b] = [0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4]$ , le paramètre  $S_{MQ}$  atteint sa valeur maximale égale à  $2\sqrt{2}$  :

$$S_{MQ}^{max} = \cos(\pi/4) - \cos(3\pi/4) + \cos(-\pi/4) + \cos(\pi/4) = 2\sqrt{2} \quad (1.20)$$

Dans la suite, le même développement est appliqué avec les théories à variable cachée afin de confronter les prédictions.

### 1.2.2.6 Limite des théories à variable cachée locale

Regardons maintenant comment décrire l'expérience en terme de théorie à variable cachée locale. On va considérer qu'à chaque itération de l'expérience les photons émis par paire emportent avec eux une variable cachée notée  $\lambda$ . Cette variable possède une distribution de probabilité  $P(\lambda)$  non explicitée. La normalisation de cette dernière implique :  $\int d\lambda P(\lambda) = 1$ . Les photons atteignent ensuite les systèmes de mesures, en fonction de la rotation de la lame demi-onde et de la variable cachée chaque photon est soit transmis soit réfléchi. On définit ensuite les fonctions  $A$  et  $B$  qui contiennent tous les choix des photons pour n'importe quelles positions des lames et variable cachée :

$$A(\lambda, \theta_a) = \pm 1, \quad B(\lambda, \theta_b) = \pm 1 \quad (1.21)$$

$A(\lambda, \theta_a)$  est égale à 1 si le photon finit en  $A_+$  et  $-1$  en  $A_-$ . De même  $B(\lambda, \theta_b)$  est égale à 1 si le photon finit en  $B_+$  et  $-1$  en  $B_-$ . Le modèle considéré est bien local car les résultats de mesure en  $A$  ne sont pas corrélés à la position de la lame demi-onde en  $B$  et vice versa.

Pour une variable cachée particulière  $\lambda_0$  le corrélateur précédemment défini est ici :  $dE(\lambda_0) = A(\lambda_0, \theta_a) \times B(\lambda_0, \theta_b)$ , égale à  $+1$  si les photons finissent du même côté des cubes et  $-1$  sinon. Et finalement pour retrouver le corrélateur moyen  $E_{VC}$  on intègre sur la distribution de probabilité de la variable cachée soit :

$$E_{VC}(\theta_a, \theta_b) = \int d\lambda P(\lambda) A(\lambda, \theta_a) \times B(\lambda, \theta_b) \quad (1.22)$$

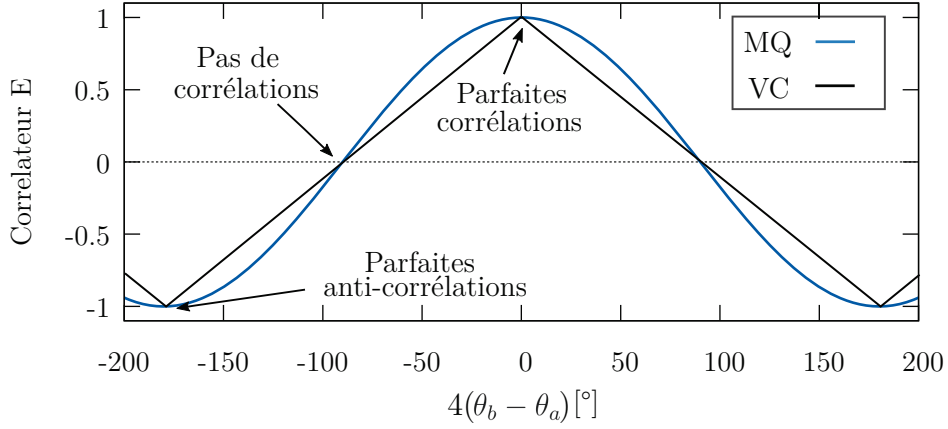


FIGURE 1.6 – Représentation du corrélateur en mécanique quantique (bleu) et pour la "meilleure" théorie à variable cachée (noir) défini dans le texte en fonction de la différence d'angle des lames demi-ondes. L'écart entre les courbes entraîne une différence pour le paramètre de Bell attendu en mécanique quantique et dans le cadre d'une théorie à variable cachée. Pour le choix d'angle  $4 \times [\theta_a, \theta_b, \theta'_a, \theta'_b] = [0, 45, 90, 135]^\circ$  on trouve ici  $S_{VC} = 2$  et  $S_{MQ} = 2\sqrt{2} > 2$ .

Le paramètre de Bell pour les théories à variable cachée  $S_{VC}$  est défini comme son analogue en mécanique quantique (1.19) :

$$S_{VC} = E_{VC}(\theta_a, \theta_b) - E_{VC}(\theta_a, \theta'_b) + E_{VC}(\theta'_a, \theta_b) + E_{VC}(\theta'_a, \theta'_b) \quad (1.23)$$

On va maintenant montrer que dans le cadre des théories à variables cachées le paramètre de Bell est contraint à une valeur absolue inférieure à 2, ce qui formera l'inégalité de Bell.

$s(\lambda)$  est défini comme :

$$s(\lambda) = A(\lambda, \theta_a)B(\lambda, \theta_b) - A(\lambda, \theta_a)B(\lambda, \theta'_b) \quad (1.24)$$

$$+ A(\lambda, \theta'_a)B(\lambda, \theta_b) + A(\lambda, \theta'_a)B(\lambda, \theta'_b) \quad (1.25)$$

$$= [A(\lambda, \theta_a) + A(\lambda, \theta'_a)] B(\lambda, \theta_b) - [A(\lambda, \theta_a) - A(\lambda, \theta'_a)] B(\lambda, \theta'_b) \quad (1.26)$$

en considérant toutes les possibilités de résultats pour  $A$  et  $B$ , on vérifie que  $s(\lambda) = \pm 2$ . Et finalement l'inégalité de Bell est formée :

$$|S_{VC}| = \left| \int d\lambda P(\lambda) s(\lambda) \right| \leq 2 \quad (1.27)$$



On montre que la limite supérieure de 2 est atteinte en considérant, par exemple, que la variable cachée est uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$  et que  $A = \text{sign}(\cos[2(\theta_a - \lambda)])$  et  $B = \text{sign}(\cos[2(\theta_b - \lambda)])$ . Le corrélateur qui en découle (1.22) est représenté sur la figure 1.6.

Ces résultats sont en contradiction avec ceux de la mécanique quantique de la partie précédente car le paramètre de Bell peut atteindre  $2\sqrt{2}$  pour un choix particulier d'angles des lames demi-onde (1.20). Expérimentalement l'interprétation des résultats en terme de théorie à variable cachée peut être écartée si les prédictions de la mécanique quantique sont justes et que l'inégalité de Bell (1.27) est violée.

### 1.2.2.7 Résultats

Les résultats sont sans appel, les inégalités de Bell sont systématiquement violées lorsque l'état émis est intriqué du type (1.8) et la mécanique quantique décrit parfaitement les observations. Les théories à variable cachée locale ne peuvent donc pas imiter les corrélations de mesures intrinsèques à un état intriqué.

L'importance de ce résultat a poussé les expérimentateurs à monter des expériences de plus en plus irréprochables pour éviter tout échappatoire, c'est à dire des biais expérimentaux pouvant mener à des faux positifs de violation. Une liste de ces échappatoires peut être trouvée ici [27]. En 2015 trois expériences ont réussi à écarter la quasi-totalité des échappatoires [28, 29, 30].

En conclusion, pour conserver la causalité nous devons abandonner la localité de la nature, deux particules intriquées doivent être traitées dans leur ensemble et une mesure sur l'une d'elle peut impliquer des changements instantanés sur l'autre.

Si l'on tient à conserver une vision déterminisme de la nature comme discutée en introduction du manuscrit, la violation des inégalités de Bell implique que connaître les propriétés locales de toutes les particules ne suffit plus. Pour prévoir le futur il faut aussi connaître les éventuels liens entre particules acquis pendant leurs passés communs, mathématiquement décrit par des variables cachées non-locales.

### 1.2.3 L'Optique quantique au 21ième siècle

Fort des résultats obtenus avec les photons, entre autres les deux expériences présentées précédemment (HOM et Bell), le domaine de l'optique quantique a vu un incroyable essor à partir des années 90. Une revue d'un grand nombre de phénomènes d'optique quantique peut être trouvée dans

[31], de la gomme quantique à la téléportation quantique ou la cryptographie quantique ... Un grand nombre de ces expériences sont de plein pied dans la seconde révolution quantique discutée en introduction de ce chapitre où l'on manipule directement les états quantiques pour se servir de leur propriétés. Progressivement on voit même certaines expériences sortir du laboratoire comme le premier réseau de communication [32] et la première connection avec un satellite tout deux sécurisés par cryptographie quantique [33] réalisés en Chine (méthode basée sur l'intrication quantique [34]).

Le fait que les photons interagissent peu avec l'air ambiant, puis que certaines technologies utilisées pour leur manipulation avaient déjà été développées (miroirs, lentilles, plaques luminescentes) ont favorisé leur étude dans les laboratoires à la fin du 20ième siècle. Cependant toutes ces expériences ne sont a priori pas réservées aux photons. Et c'est pourquoi dans la partie suivante, on s'intéressera à la possibilité de réaliser de nouveau ces expériences d'optique quantique, en particulier HOM et Bell, en remplaçant les photons par des atomes.

## 1.3 Optique atomique quantique

L'équipe Hélium\*1 dont je fais parti entreprend des expériences d'optique quantique en remplaçant les photons par des atomes, appelées expériences d'optique atomique quantique. Dans cette partie, les motivations d'un tel projet ainsi que deux avancées technologiques majeures permettant d'envisager ce genre d'expériences à l'heure actuelle sont présentés.

### 1.3.1 Motivations

La première motivation est simplement la vérification des prédictions de la mécanique quantique, consolider nos connaissances en prouvant que l'on peut contrôler assez finement l'expérience pour réaliser par exemple une interférences à deux particules ou de l'intrication avec des atomes. Les atomes interagissant énormément avec l'environnement (champs électrique, magnétique, autres atomes ..) les effets fins de la mécanique quantique comme ceux décrits dans les parties précédentes sont souvent gommés et difficilement observables.

La seconde motivation réside dans l'avancée des expériences quantiques utilisant des particules massives. En effet, il serait intéressant d'étudier la robustesse d'effet comme l'intrication lorsque les objets considérés sont sous l'influence de la gravité [5] afin de toucher du doigt l'interface entre mécanique quantique et gravitation. Bien que les expériences présentées dans ce

manuscrit soient très loin des régimes d'intérêt pour invalider des théories de gravité quantique elles ouvrent une voie d'étude.

### 1.3.2 Deux avancées technologiques

Décrivons à présent deux avancées technologiques récentes très intéressantes pour entreprendre des expériences d'optique atomique quantique.

La première est le détecteur d'atome unique, en effet celui-ci permet le comptage de coïncidences nécessaire à la réalisation des deux expériences présentées au 1.2. La méthode la plus commune pour réaliser du comptage d'atome unique est le microscope optique [35], après avoir réalisée l'expérience voulue les atomes sont figés dans un réseau très profond et on observe ensuite leur fluorescence, notez que cette méthode nécessite d'approcher de très près le nuage afin de collecter un maximum de photon ce qui est contraignant expérimentalement. Nous présentons dans la partie 1.3.2.1 une méthode différente réservée aux atomes métastables basée sur une détection électronique après temps de vol, permettant une reconstruction des vitesses atomiques en trois dimensions. Le comptage d'atome unique est très pratique expérimentalement mais notez qu'il n'est pas indispensable à la mise en place d'expériences d'optique atomique quantique de manière générale, voir par exemple les travaux de Philipp Treutlein sur les corrélations de Bell [36].

La seconde avancée technologique est la création de sources atomiques condensées en laboratoire. De telles sources permettent de former une collection dense<sup>2</sup> d'atomes dans le même état quantique. Le premier avantage est le renforcement des effets non-linéaires lorsque le nuage est dense ce qui intervient par exemple dans le processus de création de paires (voir chapitre 2). Deuxièmement la distribution de vitesses d'une telle source devient très piquée autour de zéro et cela simplifie la manipulation du nuage (piégeage et détection). Finalement les effets parasites dûs à la température du nuage deviennent négligeables devant les effets quantiques.

Dans la suite les mises en œuvre dans le laboratoire du détecteur d'atome unique d'une part et de la source atomique condensée d'autre part sont discutés.

#### 1.3.2.1 Galette à micro-canaux et Hélium métastable

L'équipe utilise de l'Hélium 4 dans son état excité métastable  $2^3S_1$  ( $\cong$  8000 s de temps de vie [37]) car en plus d'être manipulable optiquement à la longueur d'onde 1083 nm cet état a une énergie interne de 19.8 eV (Annexe

---

2. Les travaux décrits dans cette thèse implique une densité d'environ  $5 \cdot 10^{18} \text{m}^{-3}$ , situation vraiment dilué par rapport aux cristaux solides  $\cong 10^{29} \text{m}^{-3}$ .

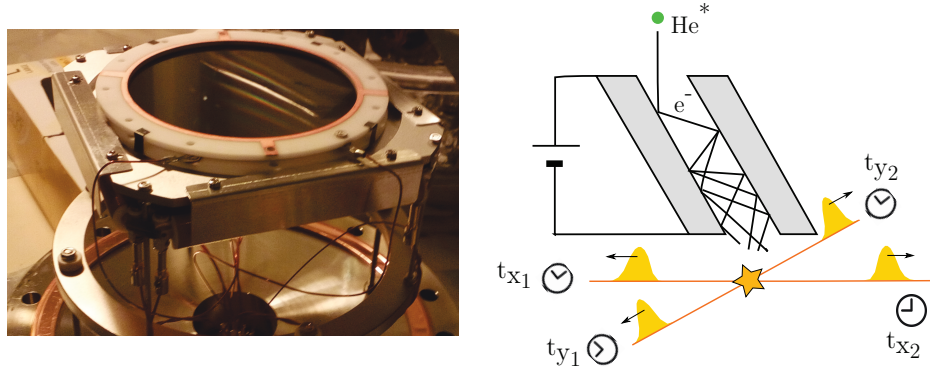


FIGURE 1.7 – A gauche : photo d’une galette à micro-canaux, le disque noir est la matrice de micro-canaux ( $8 \text{ cm}^2$ ) percée d’environ  $10^4$  canaux, en dessous se trouvent les quatre bouts des deux lignes à retard qui sortent de la chambre à vide. A droite : schéma de principe d’une détection. Un atome d’Hélium métastable percute un canal, un électron est arraché, celui-ci est accéléré par la haute tension, il percute de nouveau la paroi et crée une avalanche. L’avalanche atteint ensuite deux lignes à retard croisées ce qui produit quatre signaux électriques. L’électronique permet finalement de mesurer les temps  $t_{x_1, x_2}$  et  $t_{y_1, y_2}$  d’arrivée au bout des lignes.

A) ce qui est suffisant pour arracher des électrons d’une surface métallique ouvrant la voie à une détection électronique.

Le matériel utilisé est la galette à micro-canaux associée à des lignes à retard présentés sur la figure 1.7. La galette est constituée d’une matrice de micro canaux de  $20 \mu\text{m}$  de côté et chaque canal est sous haute tension ( $\cong 2200\text{V}$ ). Ainsi lorsqu’un atome d’Hélium métastable pénètre dans un canal, son énergie interne est suffisante pour arracher un électron et ce dernier est accéléré par le champ électrique. L’électron percute de nouveau le canal, arrache un électron secondaire, ce qui finalement crée une avalanche électronique, c’est l’équivalent d’un photo-multiplieur en optique. L’avalanche atteint deux lignes à retard croisées, ce qui produit quatre signaux électriques. Une électronique adaptée permet la détection des impulsions électroniques et le stockage des temps d’arrivée des signaux en bout de lignes. Une étude récente sur cette technique de détection peut être trouvée dans [38, 39]. La connaissance de ces quatre temps  $t_{x_1, x_2}$  et  $t_{y_1, y_2}$  (voir Fig.1.7) permet finalement de reconstruire la position  $(X, Y)$  et le temps d’impact  $T$  de l’atome sur la galette :

$$X = \frac{1}{2}(t_{x_1} - t_{x_2}) \times v \quad (1.28)$$

$$Y = \frac{1}{2}(t_{y_1} - t_{y_2}) \times v \quad (1.29)$$

$$T = t_{x_1} + t_{x_2} - \frac{L}{v} = t_{y_1} + t_{y_2} - \frac{L}{v} \quad (1.30)$$

La vitesse de propagation des impulsions électriques dans les fils est d'environ  $1 \times 10^8 \text{m/s}$ , cependant sur la galette les lignes sont bobinées pour passer sous tous les canaux, ainsi dans (1.28-30) c'est la vitesse effective de propagation du signal  $v$  qui est utilisée, égale à  $1.05 \cdot 10^6 \text{m/s}$  [40].  $L$  correspond à la longueur de la ligne égale à environ 7cm.

Dans des conditions de bas flux ( $< 10^5 \text{at/cm}^2/\text{s}$ ) ce qui est le cas dans les expériences décrites aux chapitre 4 et 5, la détection est efficace, le rendement quantique globale de la chaîne de détection s'élevant à  $\eta = 25(5)\%$  environ. La détectivité n'a jamais été mesurée directement, cependant des expériences récentes semblent converger vers la valeur de 25% (voir [41] pour les détails). A haut flux, la détectivité baisse à cause du temps mort des canaux après une avalanche, du recouvrement des impulsions électriques et de la saturation de l'électronique.

La galette de micro-canaux est placée dans notre cas 46cm en dessous de la zone d'expérience d'un volume d'un  $1 \text{mm}^3$  environ. La détection se fait après une chute libre d'environ 300 ms. Dans cette configuration de champ lointain, la position initiale des atomes n'intervient plus et la position et le temps d'impact des atomes sur la galette reflètent seulement leur vitesse initiale.

En notant  $H$  la hauteur du MCP, le temps d'arrivée d'un atome de vitesse initiale nulle est :  $T_0 = \sqrt{2H/g} = 306 \text{ms}$ . En résolvant le principe fondamental de la dynamique à trois dimensions, on trouve la relation entre la vitesse initiale d'un atome  $(v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$  et sa position et temps d'impact  $(X, Y, T)$  (1.28-30) :

$$v_{x_0} = \frac{X}{T} \quad (1.31)$$

$$v_{y_0} = \frac{Y}{T} \quad (1.32)$$

$$v_{z_0} = \frac{g}{2} \left[ \frac{T^2 - T_0^2}{T} \right] \cong g\delta T \quad (1.33)$$

Pour  $v_{z_0}$ , le développement limité pour un temps proche de  $T_0$ ,  $T = T_0 + \delta T$  a été fait pour montrer la proportionnalité du décalage temporel avec la

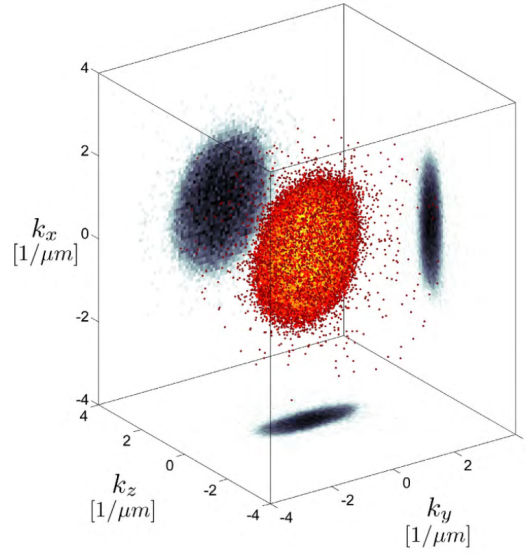


FIGURE 1.8 – Reconstruction en trois dimensions de la distribution initiale d’impulsion ( $\hbar k = mv$ ). Chaque point sur le graphe est un atome. Image tirée de [43], seconde équipe travaillant avec l’Hélium métastable à l’institut.

vitesse initiale longitudinale. Toute l’analyse de ce manuscrit est donc faite dans l’espace des vitesses (ou impulsions reliées par  $\hbar k = mv$ ). Sur la figure 1.8 est représentée un exemple de reconstruction à trois dimensions dans l’espace des impulsions.

La précision de mesure des vitesses initiales est de  $1.3 \cdot 10^{-3} \text{m/s}$  (soit  $1.4 \cdot 10^{-2} v_{rec}$ , voir Annexe A) transversalement limitée par l’électronique et de  $4.6 \cdot 10^{-4} \text{m/s}$  (soit  $5 \cdot 10^{-3} v_{rec}$ ) longitudinalement limitée par la géométrie des canaux, voir [42].

Au final, l’utilisation conjuguée d’atomes d’Hélium métastable et d’un détecteur à micro-canaux permet la détection d’atome unique avec un bon rendement (25(5)%) et précision ( $\text{mm/s} \leftrightarrow 10^{-2} v_{rec}$ ). On peut alors envisager de faire des expériences d’optique atomique quantique qui requièrent par exemple la mesure de coïncidences de détections. Il est important de noter que tous les impacts d’atomes sont enregistrés, ainsi on peut donc analyser plusieurs fois et de manières différentes les données comme c’est le cas pour les expériences des chapitres 4 et 5 de ce manuscrit.

### 1.3.2.2 Source cohérente atomique

Le second élément très intéressant pour commencer une expérience d'optique atomique quantique est une source condensée atomique dont les avantages sont décrits en introduction de section.

En 1925, Einstein prévoit à la suite des travaux de Bose une transition de phase pour des bosons sans interaction en dessous d'une certaine température. Il prédit que l'état fondamental du système est alors peuplé de manière macroscopique, c'est la condensation de Bose-Einstein.

Pour décrire le seuil de condensation, définissons la longueur d'onde de Broglie  $\lambda_{dB}$ , la taille de l'onde de probabilité associée à une particule massive de masse  $m$  et température  $T$  :

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (1.34)$$

La condensation de Bose-Einstein intervient dès lors que la longueur d'onde de Broglie est de l'ordre de l'intervalle moyen entre particules. Les ondellettes associées aux particules se rencontrent et condensent en une unique onde. Plus précisément le seuil est [44] :

$$n\lambda_{dB}^3 \geq 2.61 \quad (1.35)$$

où  $n$  est la densité du nuage.

Au delà du seuil (1.35), la densité dans l'espace des impulsions des atomes du nuage devient très piquée autour de l'impulsion nulle. Le condensat de Bose-Einstein peut alors être rapproché du laser en optique où tous les photons partagent le même mode. Notez que les deux systèmes sont légèrement différents, car les particules n'ont pas la même relation de dispersion, les atomes interagissent entre eux à l'inverse des photons<sup>3</sup> et les systèmes atomiques possèdent un potentiel chimique car le nombre d'atome est une quantité conservée.

Les premières productions de condensat sont réalisées en 1995 avec du Rubidium [45] et Sodium [46]. A présent un grand nombre d'atomes peuvent être condensé en laboratoire. Nous utilisons au laboratoire Charles Fabry l'Hélium 4 (Annexe A) dont la première condensation a été enregistrée en 2001 [47, 48] simultanément à l'Institut d'Optique et l'ENS. Les étapes menant à la condensation sont rappelées brièvement à la section 2.6.1 et leur description détaillée peut être trouvée dans les manuscrits de thèses suivants [49, 50, 41].

---

3. Cas particulier des résonances de Feshbach qui peuvent annuler les interactions.

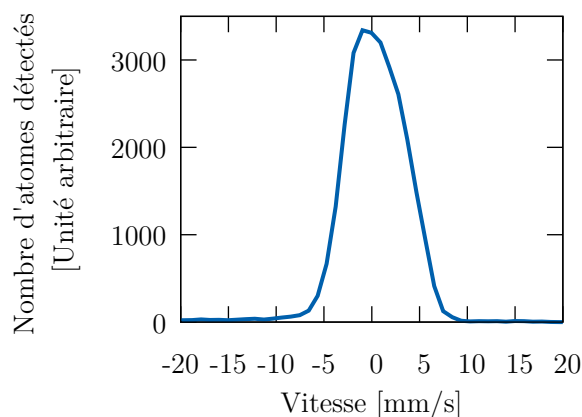


FIGURE 1.9 – Distribution des vitesses atomiques dans le condensat projeté sur l’axe vertical. Il y a accumulation des atomes dans l’état fondamental du piège, la distribution est très piquée sur la vitesse nulle.

Sur la figure 1.9 est représentée la distribution de vitesse longitudinale d’un condensat réalisé quotidiennement sur l’expérience. La distribution est piquée sur zéro et de forme non gaussienne : c’est la signature d’un condensat de Bose-Einstein [44]. Celui-ci est composé de  $4 - 7 \cdot 10^4$  atomes d’Hélium métastable et est produit environ toutes les 30 s. La fraction condensée compose 95% du nuage et la température de la fraction thermique résiduelle est évaluée à 300 nK.

Finalement l’utilisation conjuguée de nuage froid d’atomes d’Hélium métastables et d’une détection électronique semble constituer un point de départ très intéressant vers la réalisation d’expériences d’optique atomique quantique.

## 1.4 Conclusion

En résumé nous avons présenté dans le premier chapitre de ce manuscrit premièrement une brève introduction de la création de la mécanique quantique en dégagant deux strates dans sa compréhension et sa mise en pratique que sont la première et seconde révolution quantique. Ensuite nous avons mis en avant deux de ses aspects les plus surprenants, une interférence à deux particules et l’intrication à travers deux expériences historiques : l’expérience Hong-Ou-Mandel et la violation des inégalités de Bell. Nous avons décrit les motivations d’une réalisation de ces expériences avec des atomes et présenté



deux avancées technologiques récentes permettant leur mise en œuvre.

Dans la suite du manuscrit les différentes étapes vers la réalisations de ces expériences sont décrites pas à pas. Le chapitre suivant traite de la création de paires atomiques qui comme l'a montré ce chapitre est nécessaire lorsque l'on souhaite effectuer des expériences d'optique atomique quantique.

### — Résumé Chapitre 1 —

- Les expériences d'Hong-Ou-Mandel [14] et les violations de inégalités de Bell [16] sont deux expériences clefs dans la compréhension contemporaine de la mécanique quantique.
- Notre équipe souhaite réaliser de telles expériences avec des atomes, en particulier des atomes d'Hélium 4 métastables.
- L'utilisation d'une détection électronique d'atome unique et la réalisation de condensat d'Hélium en laboratoire ouvrent la voie à ce genre d'expériences.



# Chapitre 2

## Création de Paires Atomiques

Comme le montre les deux expériences historiques présentées dans le chapitre précédent, pour faire de l'optique quantique atomique il est souvent requis d'avoir une source de paires atomiques à sa disposition [1].

Pour y parvenir différentes méthodes ont été développées dans la communauté des atomes froids durant les quinze dernières années. Les premières s'intéressent à des mélanges de spin, dans ces expériences un ensemble de spin peut être placé dans un état compressé manifestant de fortes propriétés quantiques [51, 52, 53]. Ensuite il y a les sources émettant des paires d'atomes d'impulsions différentes, c'est celles-ci qui nous intéressent car elles permettent de réaliser des schémas interférométriques en espace libre. Il est possible d'utiliser, par exemple, la dissociation de molécules [54] ou une excitation paramétrique d'un condensat d'atomes [55, 56, 57]. Dans ce but, notre équipe a d'abord développé entre 2006 et 2012 une première source basée sur la collision de deux condensats. Celle-ci a permis, en particulier, la violation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec des ondes de matières [58, 59]. Notez que cette méthode est toujours utilisée avec succès, en Australie [60, 61] et en Autriche [62]. Depuis 2013, la source de paires utilisée sur notre expérience est basée sur une instabilité dynamique du condensat chargé dans un réseau optique [63].

Bien que son fonctionnement ait déjà été discuté dans les thèses de mes prédécesseurs [64, 42, 41, 50] on présentera ici une nouvelle modélisation dont le principal atout par rapport aux précédentes est d'être analytique.

Avant tout, comme la technique d'instabilité dynamique est très proche dans son formalisme de la création de paires par conversion paramétrique en optique cette méthode sera présentée en premier. Puis les hypothèses et développements théoriques permettant la compréhension du processus avec

---

1. notez que pour HOM, il n'est pas impératif de produire des paires, c'est seulement plus pratique [17].

les atomes seront décrits pas à pas. Finalement, les résultats théoriques seront confrontés aux observations expérimentales.

## 2.1 Introduction : Conversion paramétrique en optique

Commençons par présenter un exemple commun de création de paires en optique afin d'extraire les points clés d'une émission de paires.

A la fin des années 80, des expérimentateurs comme Rupamanjari Ghosh et Leonard Mandel vont utiliser les propriétés non-linéaires d'un cristal de  $LiIO_3$  pour créer une paire de photons de même polarisation à partir d'un photon de pompe [65], ce processus est appelé la conversion paramétrique descendante spontanée de type I. A présent, de nombreux cristaux ont été développés et ce type de conversion de photon est très largement utilisé.

Dans le processus de conversion paramétrique un photon de pompe de pulsation  $\omega_p$  et vecteur d'onde  $k_p$  peut spontanément se séparer dans un cristal biréfringent en deux photons appelés "signal"  $(\omega_s, k_s)$  et "passif" [2]  $(\omega_i, k_i)$ . On utilisera le même vocabulaire pour les paires atomiques. Pour le processus dit de type I [3] le photon de pompe a une polarisation selon l'axe ordinaire du cristal d'indice  $n_o(\omega_p)$  et les photons produits selon l'axe extraordinaire d'indice  $n_e(\omega_{s,i})$ .

Premièrement, pour que le processus se produise il faut conservation de l'énergie et de l'impulsion, ces dernières s'écrivent :

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \quad (2.1)$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i \quad (2.2)$$

où  $|\mathbf{k}_p| = n_o\omega_p/c$ ,  $|\mathbf{k}_s| = n_e\omega_s/c$  et  $|\mathbf{k}_i| = n_e\omega_i/c$ . C'est la résolution du système (2.1-2) qui définit les longueurs d'onde et les directions d'émission des photons. En considérant seulement le cas d'émission dégénéré :  $\omega_s = \omega_i$  et donc  $\omega_p = 2\omega_s$ , on trouve que l'angle  $\theta$  entre les directions d'émission des photons signaux et passifs est donné par  $\cos(\theta/2) = n_o(2\omega_s)/n_e(\omega_s)$ . L'émission se fait donc par paires de photons sur un cône d'angle au sommet  $\theta$ .

Deuxièmement, on montre [66] que le cristal doit manifester une réponse non-linéaire par rapport au champ excitateur pour autoriser l'émission

---

2. Ce processus permet, par exemple, le changement de longueur d'onde d'un photon si seul le photon signal est conservé après le cristal, c'est pourquoi le deuxième photon est appelé passif. Dans notre cas les deux photons produits sont conservés.

3. Pour le type II les photons émis ont des polarisations perpendiculaires, cas non traité ici.

des paires de photons. La polarisation du milieu ne doit pas être simplement proportionnel au champ électrique incident mais au carré de celui-ci :  $P = \epsilon_0 \chi^{(1)} E_{inc} + \epsilon_0 \chi^{(2)} E_{inc}^2$ . L'hamiltonien décrivant le processus de création est finalement proportionnel au paramètre de non-linéarité  $\chi^{(2)}$  du cristal et s'écrit :

$$\boxed{\hat{H}_{NL} = \hbar \kappa [\hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2]} \quad (2.3)$$

où  $\hat{a}_0^\dagger$ ,  $\hat{a}_1^\dagger$  et  $\hat{a}_2^\dagger$  sont les opérateurs créations des photons pompes, signaux et passifs (conservant énergie et impulsion lors du processus) et  $\kappa$  est une constante proportionnelle au paramètre de non-linéarité  $\chi^{(2)}$ . Il est donc possible de convertir un photon de pompe en une paire de photon signal et passif par le terme " $\hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger$ " ainsi que l'inverse par " $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2$ " si  $\chi_2 \neq 0$ .

Au final à travers cet exemple historique, on voit apparaître deux points importants pour la création de paires spontanée dans un milieu : le processus visé doit conserver énergie et impulsion et des non-linéarités doivent exister dans le système.

## 2.2 Éléments de base de la création de paires

Comme on l'a vu dans la partie précédente avec les photons pour qu'un processus de création de paires se manifeste il faut des non-linéarités et que le processus visé conserve énergie et impulsion. Nous verrons qu'un condensat d'atomes possède intrinsèquement les non-linéarités mais que qu'aucun processus d'émission de paires ne peut conserver énergie et impulsion en espace libre ce qui contraint à changer la relation de dispersion des atomes.

### 2.2.1 Non-linéarités : Interactions entre atomes

Dans un nuage atomique bosonique dans le régime de dégénérescence quantique (condensat), l'entière des interactions entre atomes peut être modélisée par une seule constante de couplage  $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$  où intervient la longueur de diffusion en onde 's'  $a$  et la masse de l'atome  $m$ . Le système est alors gouvernée par l'Hamiltonien [44] :

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \quad (2.4)$$

où  $V(\mathbf{r}, t)$  est le potentiel extérieur de piégeage qui dépend à priori du temps et de l'espace. Le premier terme correspond à l'énergie cinétique, le deuxième à l'énergie potentielle et le dernier est dû aux interactions entre atomes.

Pour vérifier si la collision de deux atomes est possible on va réinjecter dans l'équation (2.4) une solution du type :  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r})\hat{a}_0 + \Psi_1(\mathbf{r})\hat{a}_1 + \Psi_2(\mathbf{r})\hat{a}_2$ , où l'opérateur champ est décomposé en trois composantes désignant des modes atomiques orthogonaux. La première composante est le mode des atomes du BEC appelé mode "pompe", la seconde et troisième correspondent à deux modes d'émission atomique appelés "signal" et "passif", les noms faisant référence à l'exemple d'optique précédent (2.1). Les énergies potentielle et cinétique associées à chaque mode ne sont pour l'instant pas explicitées et seulement notées  $E_0, E_1$  et  $E_2$ .

L'hamiltonien (2.4) devient :

$$\hat{H} = E_0\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0 + E_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + E_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \quad (2.5)$$

$$+ \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} |\Psi_0(\mathbf{r})|^4 \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0\hat{a}_0 \quad (2.6)$$

$$+ \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} |\Psi_1(\mathbf{r})|^4 \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_1 + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} |\Psi_2(\mathbf{r})|^4 \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\hat{a}_2 \quad (2.7)$$

$$+ 2g \int d\mathbf{r} |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 |\Psi_1(\mathbf{r})|^2 \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 \quad (2.8)$$

$$+ 2g \int d\mathbf{r} |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 |\Psi_2(\mathbf{r})|^2 \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \quad (2.9)$$

$$+ 2g \int d\mathbf{r} |\Psi_1(\mathbf{r})|^2 |\Psi_2(\mathbf{r})|^2 \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \quad (2.10)$$

$$+ g \int d\mathbf{r} \Psi_0(\mathbf{r})^2 \Psi_1^*(\mathbf{r}) \Psi_2^*(\mathbf{r}) \hat{a}_0\hat{a}_0\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger \quad (2.11)$$

$$+ g \int d\mathbf{r} \Psi_0^*(\mathbf{r})^2 \Psi_1(\mathbf{r}) \Psi_2(\mathbf{r}) \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2 \quad (2.12)$$

$$+ \dots \quad (2.13)$$

Dans la décomposition on retrouve les composantes d'énergie cinétiques et potentielles (2.5), puis toutes les interactions possibles entre les trois modes (2.6 - 10). Enfin (2.11) traduit la possibilité que deux atomes de la pompe collisionnent pour donner un atome dans le mode "signal" et un dans le mode "passif" et (2.12) décrit le processus inverse. Tous les autres termes (2.13) de la décomposition ne peuvent pas vérifier la conservation de l'impulsion et de l'énergie et ne sont donc pas considérés.

L'hamiltonien complet comporte donc bien un terme du type (2.3) à l'exception que deux atomes du condensat sont nécessaires pour émettre une paire ( $\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger$ ) par conservation du nombre d'atomes alors qu'un seul photon

peut suffire en optique comme dans (2.3)<sup>4</sup>. Les interactions entre atomes produisent donc la non-linéarité nécessaire à la création de paires.

Analysons maintenant la conservation de l'énergie et de l'impulsion d'un processus de création de paires afin de préciser les conditions d'émission.

### 2.2.2 Conservation de l'énergie et de l'impulsion

Considérons deux atomes du BEC à l'impulsion  $\mathbf{k}_0$  dans le référentiel du laboratoire,  $\mathbf{k}_0$  pouvant être non nul dans le cas, par exemple, d'un transfert d'impulsion type "Bragg" (Chapitre 3). On note  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  les impulsions de deux atomes signal et passif potentiellement émis par paires. La première relation que les atomes doivent respecter est la conservation de l'impulsion donnée par :

$$2\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (2.14)$$

Ensuite le processus doit conserver l'énergie, pour cela la relation de dispersion des atomes doit être précisée. Le BEC est considéré en espace libre avec l'énergie d'interaction entre atomes négligeable devant l'énergie cinétique<sup>5</sup>. L'énergie d'un atome à l'impulsion  $\mathbf{k}$  s'écrit :  $E(k) = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$  et la conservation de l'énergie est donnée par :

$$2\frac{\hbar^2\mathbf{k}_0^2}{2m} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}_1^2}{2m} + \frac{\hbar^2\mathbf{k}_2^2}{2m} \quad (2.15)$$

En plaçant le référentiel sur un atome à  $\mathbf{k}_0$ , on définit  $\Delta\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0$  et  $\Delta\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0$ . (2.14) donne  $\Delta\mathbf{k}_1 = -\Delta\mathbf{k}_2$  ce qui correspond à une émission avec impulsions opposées. En réinjectant dans (2.15), on trouve finalement :

$$\Delta\mathbf{k}_1 = -\Delta\mathbf{k}_2 = \vec{0} \quad (2.16)$$

Les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion en espace libre n'autorise donc que le processus trivial : deux atomes à  $\mathbf{k}_0$  donne deux atomes à  $\mathbf{k}_0$ . Cela vient du fait que la relation de dispersion  $E(k) = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$  est une fonction convexe ; on ne peut pas aligner les trois points  $M_0 = [\mathbf{k}_0, E(\mathbf{k}_0)]$ ,  $M_1 = [\mathbf{k}_1, E(\mathbf{k}_1)]$  et  $M_2 = [\mathbf{k}_2, E(\mathbf{k}_2)]$  sur une droite avec  $M_0$  au centre du segment  $[M_1, M_2]$  qui permettrait la conservation de l'impulsion

---

4. Notez que le processus créant deux photons à partir de deux autres photons existent aussi en optique.

5. L'effet des interactions sera pris en compte au premier ordre dans la suite en introduisant un effet de champ moyen, voir 2.3.3

et de l'énergie simultanément. Notons cependant que si la pompe n'est pas dégénérée comme c'est le cas lors de la collision de deux BEC [58] alors un processus de création de paire est quand même possible.

Afin de "tordre" la relation de dispersion, une solution est d'utiliser un réseau. Dans la partie suivante on montrera que l'application d'un potentiel périodique permet de rendre périodique l'énergie des atomes en fonction de l'impulsion (la quasi-impulsion en fait voir 2.3.1.2) ce qui va autoriser la création de paire avec pompe dégénérée.

En conclusion, les condensats contiennent de façon intrinsèque les non-linéarités menant à l'émission de paires, cependant on est contraint de changer la relation de dispersion des atomes pour que le processus se produise.

## 2.3 Formalisme

Dans cette partie on développera le formalisme permettant l'émission de paires atomiques à partir d'un condensat soumis à une réseau optique. Ce processus est appelé dans la littérature émission par instabilité dynamique<sup>6</sup>.

De premières études théoriques [67, 68, 69] ont été réalisées au début des années 2000 afin d'expliquer les pertes observées dans les nuages atomique soumis à un réseau optique en mouvement [70, 71], qui ont mis en évidence l'existence d'instabilités dynamiques. Ensuite il a été montré théoriquement [72] et expérimentalement [73] que le mécanisme associé aux pertes s'effectuait en fait par paires.

Finalement, une étude approfondie théorique et expérimentale a été mise en oeuvre dans l'équipe qui est reportée dans la thèse de Jocelin Ruandel (ancien collègue 2010-2013) [42], des détails supplémentaires sont présentés par Marie Bonneau [64], Raphaël Lopes [41] et Almazbek Imanaliev [50] dans leur thèse respective. Les calculs numériques de Jocelin sont inspirés des références [67, 69, 74] et ont permis d'expliquer avec succès les vitesses des maxima de densités observées [63], les effets de profondeur du réseau ainsi que les effets de saturation du gain du processus. Cependant, les profils de densité n'étaient pas encore parfaitement décrits et les corrélations entre atomes attendues non accessibles. Ainsi j'ai travaillé à un nouveau modèle venant appuyer les simulations dont le principal atout est d'être pratiquement analytique.

Les différences d'hypothèses entre les deux travaux sont résumées dans le tableaux ci-dessous et seront rappelées au fur et à mesure.

---

6. Par opposition à une instabilité énergétique (ou de Landau) qu'il existe lorsque le condensat interagit avec une impureté à une vitesse plus rapide que la vitesse du son dans ce dernier, voir [67] pour plus de détails et références



<b>Hypothèses</b>	Jocelin et al. [42]	Ce travail
Condensat	Onde plane infinie	Uniforme taille finie
Profondeur du réseau	Profondeur quelconque	Faible profondeur
Évolution temporelle	Oui	Temps court
Effet des interactions	Exact	Approché en considérant les interactions faibles

Les différences dans les observables accessibles sont :

<b>Observables</b>	Jocelin et al. [42]	Ce travail
Densité	Oui	Oui
Corrélations	Non	Oui

Ainsi, au détriment de la prise en compte exacte des interactions entre atomes, de la profondeur du réseau et de la dynamique à long terme on peut introduire les effets de taille finie du condensat et avoir accès aux corrélations entre atomes. Le condensat sera considéré uniforme, cela ne représente pas fidèlement la forme du condensat (profil Thomas-Fermi voir [44]), cependant cela va permettre une résolution analytique en introduisant tout de même les effets de taille finie. Les deux approches sont complémentaires et leurs différences et points communs seront discutés dans la suite.

Les éléments de base du modèle développés dans les paragraphes suivants sont, en premier la structure des niveaux d'énergie en présence d'un réseau optique, puis le calcul des intégrales de recouvrement apparaissant dans l'hamiltonien (2.5-12) et enfin la prise en compte des interactions par correction de champ moyen.

### 2.3.1 Condensat dans un réseau 1D

Afin de modifier la relation de dispersion des atomes pour autoriser le processus de création de paire, un réseau optique est appliqué sur les atomes.

Dans un premier temps, le potentiel ressenti par les atomes en présence d'un réseau optique sera décrit, puis pour montrer comment un tel réseau peut drastiquement changer la relation de dispersion les états d'énergie des atomes seront calculés. Finalement cela permettra de prédire les fonctions d'ondes des atomes qui seront utilisées dans la suite du développement.

### 2.3.1.1 Potentiel induit par réseau optique

En allumant deux lasers de même polarisation avec un angle  $\theta$ , sans bruit de phase et désaccordés en pulsation de  $\delta = \omega_i - \omega_j$ , un profil d'intensité est créé sur les atomes (Fig. 2.15). Ce profil est de la forme :

$$I(z) = 4I_0 \sin^2 \left( k_{res}z - \frac{\delta}{2}t \right) \quad (2.17)$$

avec,  $I_0$  l'intensité des lasers (supposée égale) et  $k_{res} = \sin(\theta/2)2\pi/\lambda_{res}$  le vecteur d'onde du réseau. Ce réseau est en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire, vers les  $z$  positifs si  $\delta > 0$  et inversement si  $\delta < 0$ . La vitesse du réseau s'extrait de (2.17) et :

$$v_{res} = \frac{\delta}{2k_{res}} \quad (2.18)$$

Le profil d'intensité produit un potentiel dipolaire ressenti par les atomes [44] et vaut :

$$V_{res}(z) = \frac{\hbar\Gamma^2 I(z)d^2}{8I_{sat}\Delta} \quad (2.19)$$

avec,  $\Gamma^{-1}$  le temps de vie de l'état excité,  $d$  l'élément de dipôle de la transition [7],  $I_{sat}$  l'intensité de saturation de la transition et  $\Delta$  le désaccord des laser par rapport à la transition. Le réseau est produit avec des lasers à  $\lambda_{res} = 1064\text{nm}$ , la transition la plus proche étant à  $\lambda_0 = 1083\text{nm}$ , ainsi  $\Delta = c \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\lambda_{res}} \right) = -2\pi \times 5\text{THz} < 0$  et le potentiel est donc répulsif aux maxima d'intensité. Dans son référentiel en mouvement le potentiel est :

$$V_{res}(z) = V_0 \sin^2(k_{res}z), \quad V_0 = \frac{\hbar\Gamma^2 I_0 d^2}{2I_{sat}\Delta} \quad (2.20)$$

Ce problème fait intervenir une échelle naturelle d'énergie, d'impulsion et de vitesse :  $E_{res} = \hbar^2 k_{res}^2 / 2m$ ,  $\hbar k_{res}$  et  $v_{res} = \hbar k_{res} / m$ . Sur l'expérience l'angle entre les faisceaux laser du réseau est de  $\theta = 166^\circ$  ainsi  $k_{res} = 5.86 \cdot 10^6 \text{m}^{-1}$ . Cette valeur est très proche de l'impulsion transférée à un atome lors de l'absorption d'un photon à sa fréquence de transition  $k_{rec} = 2\pi/\lambda_0 = 5.80 \cdot 10^6 \text{m}^{-1}$ . Ainsi, lors de l'analyse des données  $k_{res}$  et  $k_{rec}$  sont souvent confondus (voir Annexe B pour le résumé des propriétés du réseau de création de paire).

---

7. En général on doit sommer toutes les transitions accessibles :  $\frac{d^2}{\Delta} = \sum_{i \neq j} \frac{d_{ij}^2}{\Delta_{ij}}$ .

### 2.3.1.2 Structure de bande

Dans cette partie, la structure de bande d'énergie induite par la présence du réseau est décrite. L'énergie d'interaction entre atomes est négligée dans le calcul suivant. La simulation exacte de Jocelin montre [42](p.71) que cette approximation est raisonnable car elle permet de décrire avec précision les vitesses des maxima d'émission si on applique a posteriori une correction de champ moyen (voir 2.3.3).

Le développement suivant est décrit en détail dans le cours du collège de France de Jean Dalibard de 2014 [75].

A partir de l'hamiltonien (2.4) (sans interactions  $g = 0$ ), on réinjecte la fonction d'onde d'un atome  $\phi(z)$  du nuage et l'énergie moyenne s'écrit :

$$\langle E \rangle = N_0 \int dz \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 |\phi(z)|^2 + V_{res}(z) |\phi(z)|^2 \right] \quad (2.21)$$

On cherche ensuite à minimiser (2.21) tout en gardant la fonction d'onde normalisée :  $\int dz |\phi(z)|^2 = 1$ . La fonction de Lagrange associée à ce problème de minimisation est donc :

$$\mathcal{L} = \langle E \rangle - \lambda \int dz |\phi(z)|^2 \quad (2.22)$$

$$= \int dz N_0 \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 |\phi(z)|^2 + V_{res}(z) |\phi(z)|^2 - \lambda |\phi(z)|^2 \right] \quad (2.23)$$

avec  $\lambda$  un multiplicateur de Lagrange. La dérivée de (2.23) par  $\phi^*$  est nulle lorsque  $\mathcal{L}$  est minimum, ce qui donne l'équation de Schrödinger sans interaction :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial z^2} + V_0 \sin^2(k_{res} z) \phi(z) = \lambda \phi(z)} \quad (2.24)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est en fait le potentiel chimique, et comme ici on néglige les interactions il est égal à l'énergie par atome notée  $E$  [44].

Comme le potentiel est périodique, par le théorème de Bloch, les solutions sont de la forme :

$$\phi_q(z) = e^{iqz} u_q(z) \quad (2.25)$$

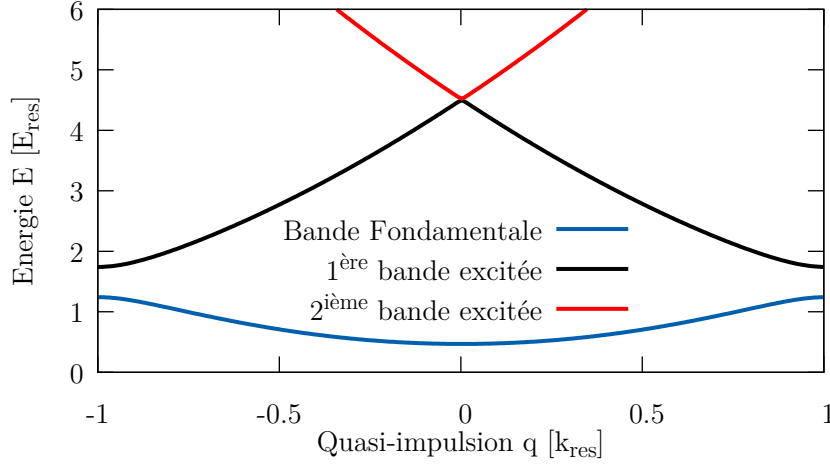


FIGURE 2.1 – Bandes d'énergie. Énergies d'un atome en fonction de sa quasi-impulsion dans un réseau de profondeur  $1 \times E_{res}$  calculées à partir des équations (2.29). Seules les trois premières bandes sont représentées.

où  $u_q(z)$  est une fonction de période  $a = \pi/k_{res}$  (comme le potentiel). De plus  $\phi_{q+2k_{res}}(z) = \phi_q(z)$ , l'étude peut donc être restreinte à la première zone de Brillouin,  $q \in [-k_{res}, k_{res}]$ . La variable  $q$  ressemble à une impulsion, elle est nommée quasi-impulsion.

En injectant la transformée de Fourier discrète de  $u_q(z)$  dans (2.25),  $\phi_q(z)$  devient :

$$\phi_q(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} C_j(q) e^{iz(q+2\pi j/a)} \quad (2.26)$$

où les coefficients  $C_j$  sont les composantes de la transformée.

En réinjectant la solution de forme (2.26) dans l'équation de Schrödinger (2.24), on forme une infinité d'équations couplées :

$$E(q)\phi_q(z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi_q(z)}{\partial z^2} + V_0 \sin^2(k_{res}z)\phi_q(z) \quad (2.27)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi_q(z)}{\partial z^2} + \frac{V_0}{4} [2 - e^{2ik_{res}z} - e^{-2ik_{res}z}] \phi_q(z) \quad (2.28)$$

Et donc,  $\forall j \in \mathbb{Z}$  et  $q \in [-k_{res}, k_{res}]$  :

$$\frac{E(q)}{E_{res}} C_j = \left[ \left( \frac{q}{k_{res}} + 2j \right)^2 + \frac{V_0}{2E_{res}} \right] C_j - \frac{V_0}{4E_{res}} [C_{j-1} + C_{j+1}] \quad (2.29)$$

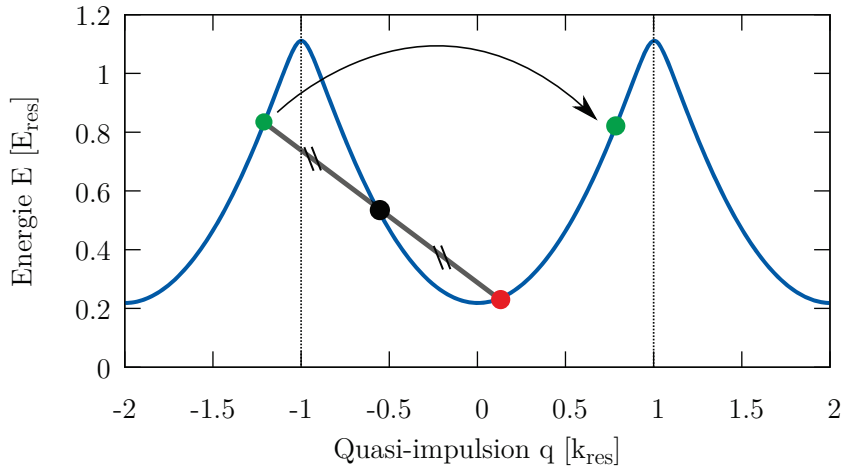


FIGURE 2.2 – Processus de création de paires. Un BEC est chargé dans la bande fondamentale d'un réseau de profondeur  $0.45 E_{res}$  et de vitesse  $0.6 v_{res}$  selon  $z$ . Deux atomes du BEC (chargé à  $-0.6 k_{res}$ ) vont pouvoir interagir et créer un couple de quasi-impulsion  $[-1.3$  'vert' et  $0.15$  'rouge'] dans la bande fondamentale. Ce processus est résonnant : il conserve l'énergie et la quasi-impulsion. L'atome vert est hors de la première zone de Brillouin, il est "rabattu".

Cela revient à la diagonalisation d'une matrice trigonale infinie pour chaque couple  $(q, V_0)$  avec comme valeurs propres les énergies accessibles du système; en pratique on limite le calcul à  $|j| < 20$  [75]. Les différentes solutions pour  $E(q)$  vont former des bandes en fonction de  $q$  (Fig.2.1).

La relation de dispersion n'est alors plus convexe, elle est même périodique en fonction de la quasi-impulsion ce qui autorise un processus de création de paires. Un processus possible est présenté sur la figure 2.2, le BEC est chargée dans la bande fondamentale d'un réseau en mouvement (point noir), alors il existe un couple de mode qui conserve à la fois énergie et quasi-impulsion (points vert et rouge). Le point vert sur la figure est ensuite rabattu dans la première zone de Brillouin car les deux points représentant exactement le même état. On montre (voir Fig. 2.8) qu'un tel couple de mode existe si la quasi-impulsion du condensat est supérieure (en valeur absolue) à environ  $0.5 k_{res}$ , c'est pourquoi ce processus est appelé instabilité dynamique.

### 2.3.1.3 Fonctions d'ondes

La diagonalisation permet ensuite de calculer les fonctions d'onde atomiques en fonction de la profondeur du réseau et de la quasi-impulsion, on

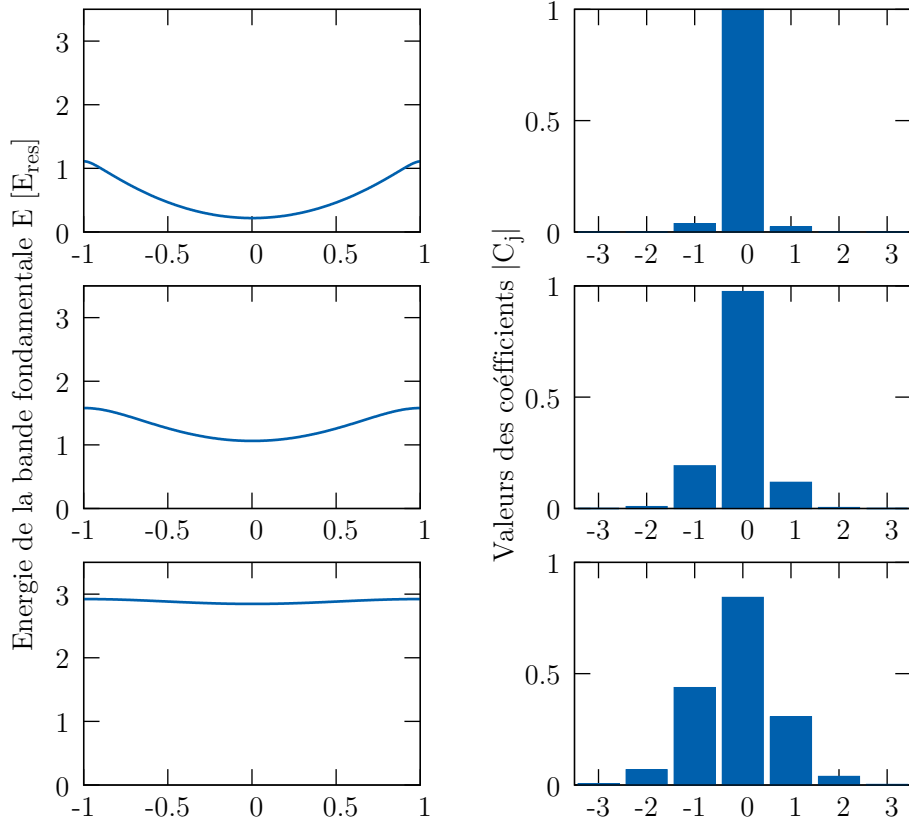


FIGURE 2.3 – Bande fondamentale et coefficients de décomposition en ondes planes. Colonne de gauche : Énergie  $E[E_{res}]$  de la bande fondamentale en fonction de la quasi-impulsion  $q[k_{res}]$ . Colonne de droite coefficients  $C_j$  de la décomposition (2.26) calculé à partir des équations (2.29) pour  $q = 0.25q_{res}$ . Le tout pour trois profondeurs de réseau : ligne 1 : 0.45, ligne 2 : 2.5 et ligne 3 :  $10 E_{res}$ .

se restreint ici à la bande fondamentale.

Les termes de la décomposition en ondes planes des modes 0,1 et 2 intervenant dans (2.26) sont représentés sur la figure 2.3 . Pour les réseaux profonds la décomposition en  $C_j$  comporte beaucoup de termes, cela se traduisant par une modulation de la densité selon  $z$ . À l'inverse, lorsque le réseau est peu profond les fonctions d'onde n'ont qu'une composante non négligeable ( $j = 0$ ). La modulation de la densité est alors très légère (Fig. 2.4), environ 10% pour une profondeur de réseau  $V_{res} = 0.45E_{res}$  typique de l'expérience.

Jocelin montre [42](p72-73) que la modulation de la fonction d'onde entraîne l'élargissement de la courbe de gain, c'est à dire qu'il existe plus de couples de modes pouvant être émis du condensat (voir 2.3.3 pour l'explica-

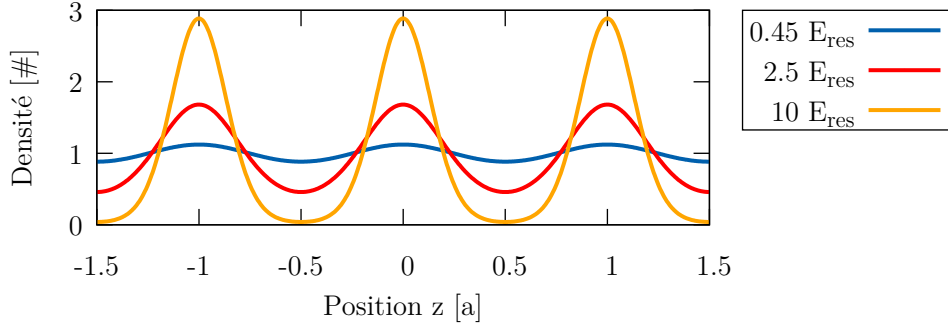


FIGURE 2.4 – Modulation de la densité atomique. Le module au carré de la fonction d’onde (2.26) avec  $q = 0.25 q_{res}$  est représenté en fonction de la position en unité du pas du réseau  $a$  pour trois profondeurs de réseau :  $V_{res} = 0.45, 2.5$  et  $10 E_{res}$ . Pour des réseaux peu profonds, la modulation est négligeable.

tion). Cependant pour les réseaux peu profonds ( $V_{res} \ll E_{rec}$ ) cet élargissement est faible et on montre dans la suite qu’il est dominé par des effets de temps fini d’allumage du réseau (voir 2.5). Au final, dans la limite des réseaux peu profonds, on peut négliger la modulation de la fonction d’onde et l’approximer pour toute quasi-impulsion  $Q$  à :

$$\phi_Q(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{L}} e^{izQ} \quad (2.30)$$

où on introduit  $L$  la longueur du mode égale à la longueur du condensat pour la normalisation, et  $P$  une fonction porte égale à 1 sur  $[-L/2, L/2]$  nulle ailleurs.

Pour que (2.30) soit compatible avec le raisonnement précédent la longueur du mode doit être grande devant le pas du réseau. Sur l’expérience on a bien  $L \gg a$  :  $L \cong 70 \mu\text{m}$  et  $a = 0.54 \mu\text{m}$ . Le choix d’une fonction d’onde uniforme de taille  $L$  ne représente pas fidèlement la forme du condensat, cependant cela permet une résolution analytique en introduisant tout de même les effets de taille finie, non présents dans l’analyse de Jocelin [42].

### 2.3.1.4 Taille de mode

Une taille spatiale finie de la fonction d’onde des atomes implique une taille de mode dans l’espace des quasi-impulsions. Pour calculer cette taille on calcule par exemple le produit scalaire :

$$\int dz \phi_Q(z) \phi_{Q'}^*(z) = \frac{1}{L} \int dz P^2(z) e^{i(Q-Q')z} \quad (2.31)$$

$$= \text{sinc} \left[ (Q - Q') \frac{L}{2} \right] \quad (2.32)$$

La position du premier zéro se situe pour  $Q - Q' = 2\pi/L$ , ce qui définit la taille d'un mode  $\Delta q_m$  car cela maximise le nombre de mode dans la bande fondamentale. Cette taille est égale à :

$$\boxed{\Delta q_m = \frac{2\pi}{L}} \quad (2.33)$$

Il existe donc  $2k_{res}/\Delta q_m$  modes écartés de  $\Delta q_m$  dans la bande fondamentale. L'équation (2.33) forme une relation d'incertitude (ou transformée de Fourier spatiale) entre position et quasi-impulsion.

### 2.3.1.5 Extinction du réseau

Lors de l'extinction du réseau les modes de quasi-impulsion  $q$  sont projetés vers les modes d'ondes planes de l'espace libre. Dans notre cas de réseau peu profond les fonctions d'onde sont déjà sous la forme d'ondes planes (2.30) et elles ne sont donc pas déformées. Seule la quasi-impulsion est traduite en impulsion dans le référentiel du laboratoire. Le condensat est immobile dans le piège et sert donc de référence, une quasi-impulsion  $q$  devient l'impulsion  $k = q - q_0$  lors de l'extinction du réseau.

Pour le processus de création de paires c'est la conservation de la quasi-impulsion qui compte et non la conservation de l'impulsion, ainsi on peut se retrouver dans des situations où après extinction du réseau cette dernière n'est pas conservée. Par exemple, sur la figure 2.2 (cas proche de l'expérience), les impulsions finales des paires émises du condensat sont  $k_1 = q_1 - q_0 = 0.75 k_{res}$  et  $k_2 = q_2 - q_0 = 1.3 k_{res}$ . Les deux atomes sont donc expulsés du même coté du condensat (voir profil de densité Fig. 2.19).

Au final la modélisation du nuage dans le réseau optique nous a permis de déterminer le diagramme d'énergie (en particulier la bande fondamentale) qui est périodique et donc autorise des processus de création de paires, puis la forme des fonctions d'onde a été déterminée ainsi que la taille des modes dans la bande fondamentale. Ces informations vont nous permettre d'avancer dans le développement du modèle en calculant les intégrales de recouvrement apparaissant dans l'hamiltonien (2.5-12) dans la partie suivante.



### 2.3.2 Calcul des intégrales de recouvrement

Le calcul des fonctions d'onde de la partie précédente va permettre le calcul des intégrales de recouvrements qui apparaissent dans le développement (2.5-12) de l'hamiltonien du système.

Le condensat est considéré à la quasi-impulsion  $q_0$ , et les modes d'émission aux quasi-impulsions  $q_1$  et  $q_2$ . En réinjectant les fonctions d'onde propres du système (2.30), l'intégrale de recouvrement notée  $I$  apparaissant devant le terme de création de paire (2.11) s'écrit en 1D :

$$I = \int d\mathbf{r} \Psi_0^*(\mathbf{r})^2 \Psi_1(\mathbf{r}) \Psi_2(\mathbf{r}) \quad (2.34)$$

$$= \int dz \phi_0^*(z)^2 \phi_1(z) \phi_2(z) \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{L} \text{sinc} \left[ (q_1 + q_2 - 2q_0[2k_{res}]) \frac{L}{2} \right] \quad (2.36)$$

Le modulo  $2k_{res}$  venant du fait que les fonctions d'onde peuvent être "repliées" dans la première zone de Brillouin. (2.36) est maximal si  $q_1 + q_2 - 2q_0 = 0[2k_{res}]$ , c'est à dire s'il y a conservation de quasi-impulsion et nul si on s'en écarte trop. Seuls les processus conservant la quasi-impulsion sont donc autorisés, ce qui est en accord avec l'analyse de l'introduction 2.1.

Ensuite on peut aussi calculer toutes les intégrales de densité apparaissant dans les termes (2.5-10) de l'hamiltonien (2.4),  $\forall i, j$  :

$$\int dz |\phi_i(z)|^2 |\phi_j(z)|^2 = \frac{1}{L} \quad (2.37)$$

Les résultats (2.36-37) seront utilisés dans la suite pour former les équations de la dynamique du système mais avant cela ils vont permettre de calculer une correction nécessaire pour la compréhension du problème : la correction de champ moyen.

### 2.3.3 Correction de champ moyen

Jusqu'ici les interactions ont été négligées. Pour en rendre compte au premier ordre on choisit d'appliquer une correction de type "champ moyen". Pour calculer cette correction on va s'intéresser à l'équilibre d'énergie du processus : " $N_0$  atomes dans le mode du condensat 0 donne  $N_0 - 2$  atomes dans 0 et un atome dans chaque mode d'émission 1 et 2". Cela va permettre de

faire apparaître un décalage à la conservation de l'énergie que l'on intégrera dans la modélisation.

En réinjectant les résultats précédents sur les intégrales de densité (2.36-37) dans l'hamiltonien initial (2.5-12), l'énergie du système avant le processus de création de paire peut être calculée, celle-ci est égal à :

$$E_{init} = \langle N_0, 0, 0 | \hat{H} | N_0, 0, 0 \rangle \quad (2.38)$$

$$= N_0 E_0 + \frac{g}{2} \frac{N_0(N_0 - 1)}{L} \quad (2.39)$$

L'énergie initiale est donc égale à  $N_0$  fois l'énergie d'un atome plus  $N_0$  fois l'énergie d'interaction d'un atome avec les  $N_0 - 1$  autres. L'énergie du système est une fonction non-linéaire du nombre d'atome, c'est cette non-linéarité du milieu qui est à l'origine de l'instabilité.

A la fin du processus, il y a maintenant deux atomes dans les modes 1 et 2 et  $N_0 - 2$  dans 0, l'énergie vaut alors :

$$E_{final} = \langle N_0 - 2, 1, 1 | \hat{H} | N_0 - 2, 1, 1 \rangle \quad (2.40)$$

$$= E_1 + E_2 + (N_0 - 2)E_0 + \frac{g}{2} \frac{(N_0 - 2)(N_0 - 3)}{L} + 2g \frac{2N_0 - 3}{L} \quad (2.41)$$

En égalisant les énergies avant et après le processus, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$2E_0 - E_1 - E_2 = 2g \frac{N_0 - 3/2}{L} \quad (2.42)$$

Et si  $N_0 \gg 1$ , ce qui est toujours le cas,

$$\boxed{2E_0 - E_1 - E_2 = 2gn_0} \quad (2.43)$$

où  $n_0 = N_0/L$  est la densité du BEC. Ainsi les interactions décalent la conservation de l'énergie proportionnellement à la densité du BEC et aux interactions. On vérifie aussi que la conservation de l'énergie (2.43) reste la même pour un processus de création de plusieurs paires tant que le nombre de paires créées reste faible devant le nombre d'atome du condensat.

L'équation (2.4) permet d'expliquer l'élargissement de la courbe de gain en fonction de la profondeur du réseau montré par Jocelin [42](p72-73). En effet, pour les réseaux profonds la densité est modulée (Fig. 2.4) et donc la conservation de l'énergie aussi :  $2E_0 - E_1 - E_2 = 2gn_0(z)$ , ce qui autorise

plus de couples de modes à être émis. Dans ce manuscrit, on néglige cet effet en se restreignant aux réseaux peu profonds  $n_0 = cst$ . On montrera dans la suite que cet élargissement est en fait négligeable devant les effets de temps fini d'allumage du réseau.

Ainsi, dans la suite, on va négliger les termes d'interactions entre modes (2.6 - 10) de l'hamiltonien complet et à la place décaler l'énergie du mode du condensat de  $gn_0$  pour rendre compte des interactions au premier ordre. On note dans la suite  $\tilde{E}_0$  l'énergie décalée du condensat égale à  $E_0 - gn_0$ . Les simulations numériques de Jocelin [42](p.71) montre que la correction de champ moyen prédit, par exemple, avec succès les vitesses des maxima de densité ce qui appuie notre approximation.

## 2.4 Modèle simple : Émission à deux modes

Nous avons maintenant les bases pour former les équations d'évolution du système. Dans un premier temps seul un processus de création de paires conservant parfaitement énergie et quasi-impulsion est considéré. Ainsi l'émission de paires ne se fera à travers seulement deux modes de quasi-impulsions  $q_1$  et  $q_2$ . La quasi-impulsion du condensat est  $q_0$ . Comme introduit précédemment les interactions ne sont prises en compte qu'au premier ordre grâce à une correction de champ moyen qui revient à décaler l'énergie des atomes du condensat :  $\tilde{E}_0 = E_0 - gn_0$ . De l'hamiltonien général (2.5 - 12) il reste :

$$\hat{H} = \tilde{E}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \sum_{i=1,2} E_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + gI \left[ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + h.c. \right] \quad (2.44)$$

où  $I$  est l'intégrale de recouvrement (2.36) calculée au 2.3.2, comme la conservation de la quasi-impulsion est considérée stricte elle est égale à  $I = 1/L$ .

Le condensat est considéré comme un grand réservoir d'atomes non déplété pendant l'émission de paires. Expérimentalement c'est toujours le cas car seulement quelques atomes ( $\cong 200$ ) sont émis en comparaison des  $N_0 = 5 \cdot 10^4$  initiaux. Le condensat est traité classiquement ce qui revient à prendre :  $\hat{a}_0(t) = \sqrt{N_0} \exp\left(\frac{-i\tilde{E}_0 t}{\hbar}\right)$  où l'évolution libre des atomes est prise en compte. Ainsi (2.44) devient :

$$\hat{H} = N_0 \tilde{E}_0 + \sum_{i=1,2} E_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hbar \kappa \left[ \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \exp\left(\frac{-2i\tilde{E}_0 t}{\hbar}\right) + h.c. \right] \quad (2.45)$$

où  $\kappa = gN_0/\hbar L = gn_0/\hbar$  est le coefficient de gain du processus, qui est dans le cas d'une émission à deux modes simplement proportionnel aux interactions et à la densité du condensat.

### 2.4.1 Représentation de Heisenberg

Afin de suivre l'évolution du système avec le temps on choisit la représentation de Heisenberg dans laquelle ce sont les opérateurs qui dépendent du temps. Les opérateurs annihilations obéissent aux équations du mouvement (pour  $i \in [1, 2]$ ) :

$$\dot{\hat{a}}_i(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_i(t), \hat{H}] \quad (2.46)$$

Soit,

$$\dot{\hat{a}}_1(t) = -i\frac{E_1}{\hbar}\hat{a}_1(t) - i\kappa\hat{a}_2^\dagger(t) \exp\left(\frac{-2i\tilde{E}_0 t}{\hbar}\right) \quad (2.47)$$

Les équations sont symétriques en 1 et 2, échanger 1 et 2 dans (2.47) permet de construire l'équation sur l'autre opérateur. En introduisant les opérateurs annihilations prenant en compte l'évolution libre :

$$\hat{A}_1(t) = \hat{a}_1(t) \exp\left(\frac{iE_1 t}{\hbar}\right) \quad (2.48)$$

$$\hat{A}_2(t) = \hat{a}_2(t) \exp\left(\frac{iE_2 t}{\hbar}\right) \quad (2.49)$$

(2.47) devient :

$$\dot{\hat{A}}_1(t) = -i\kappa\hat{A}_2^\dagger(t) \exp\left(\frac{i(E_1 + E_2 - 2\tilde{E}_0)t}{\hbar}\right) \quad (2.50)$$

La conservation de l'énergie étant considérée stricte ici, cela impose  $E_1 + E_2 - 2\tilde{E}_0 = 0$ , d'où :

$$\dot{\hat{A}}_1(t) = -i\kappa\hat{A}_2^\dagger(t) \quad (2.51)$$

$$\dot{\hat{A}}_2(t) = -i\kappa\hat{A}_1^\dagger(t) \quad (2.52)$$

En dérivant (2.51) et en réinjectant (2.52) (et l'inverse), on trouve pour  $i \in [1, 2]$  :

$$\boxed{\ddot{\hat{A}}_i(t) - |\kappa|^2 \hat{A}_i(t) = 0} \quad (2.53)$$

On résout (2.53), puis en réinjectant les conditions initiales sur  $\hat{A}_i$  et  $\dot{\hat{A}}_i$  grâce à (2.51-52) l'évolution des opérateurs  $\hat{A}_1$  et  $\hat{A}_2$  est calculée :

$$\hat{A}_1(t) = \hat{A}_1(0) \cosh(|\kappa| t) - i \frac{\kappa}{|\kappa|} \hat{A}_2^\dagger(0) \sinh(|\kappa| t) \quad (2.54)$$

$$\hat{A}_2(t) = \hat{A}_2(0) \cosh(|\kappa| t) - i \frac{\kappa}{|\kappa|} \hat{A}_1^\dagger(0) \sinh(|\kappa| t) \quad (2.55)$$

### 2.4.2 Valeur moyenne des observables

A partir des solutions, on peut calculer les valeurs moyennes des observables associées aux modes 1 et 2. L'état initial est  $|0, 0\rangle_{1,2}$  : aucun atome dans les modes 1 et 2. Le nombre moyen d'atomes dans les modes 1 et 2 noté  $\bar{n}(t)$  ainsi que les corrélations entre modes (locales et croisées) s'écrivent donc en fonction du temps :

$$N_1(t) = \langle \hat{A}_1^\dagger(t) \hat{A}_1(t) \rangle = \sinh^2(|\kappa| t) = N_2(t) = \bar{n}(t) \quad (2.56)$$

$$G_{11}^{(2)}(t) = \langle \hat{A}_1^\dagger(t) \hat{A}_1^\dagger(t) \hat{A}_1(t) \hat{A}_1(t) \rangle = 2 \sinh^4(|\kappa| t) = G_{22}^{(2)}(t) \quad (2.57)$$

$$G_{12}^{(2)}(t) = \langle \hat{A}_1^\dagger(t) \hat{A}_2^\dagger(t) \hat{A}_1(t) \hat{A}_2(t) \rangle = \sinh^2(|\kappa| t) + 2 \sinh^4(|\kappa| t) \quad (2.58)$$

Les corrélations locales et croisées normalisées sont :

$$g_{11}^{(2)}(t) = \frac{G_{11}^{(2)}(t)}{N_1^2(t)} = 2 = g_{22}^{(2)}(t) \quad (2.59)$$

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{G_{12}^{(2)}(t)}{N_1(t)N_2(t)} = 2 + \frac{1}{\bar{n}(t)} \quad (2.60)$$

$\kappa = gn_0/\hbar$  est le gain du processus de création de paire qui apparaît dans le nombre moyen de paires émises  $\bar{n}$  (2.56), le nombre moyen de paires émises est représenté sur la figure 2.5. La corrélation locale normalisée ne dépend pas du nombre de paires émises  $\bar{n}$  et est toujours égale à 2, au contraire la corrélation croisée est fortement dépendante de  $\bar{n}$  et diverge quand  $\bar{n} \ll 1$ .

### 2.4.3 Représentation de Schrödinger

Pour résoudre le problème en représentation Schrödinger le point de départ est de nouveau l'hamiltonien (2.45). La référence d'énergie est fixée en  $\tilde{E}_0$ . Puis les opérateurs  $\hat{A}_1^\dagger$  et  $\hat{A}_2^\dagger$  sont définis comme à la partie précédente par les équations (2.48-49) seulement cette fois avec une phase supplémentaire égale à  $e^{-i\pi/4}$ . Finalement en prenant la conservation stricte de l'énergie l'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = (E_1 - \tilde{E}_0)\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 + (E_2 - \tilde{E}_0)\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2 + i\hbar\kappa \left[ \hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger - \hat{A}_1\hat{A}_2 \right] \quad (2.61)$$

Il en découle l'équation de Schrödinger suivante :

$$|\phi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}((E_1 - \tilde{E}_0)\hat{N}_1 + (E_2 - \tilde{E}_0)\hat{N}_2)t} e^{\kappa(\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger - \hat{A}_1\hat{A}_2)t} |\phi(0)\rangle \quad (2.62)$$

avec  $|\phi(0)\rangle = |0, 0\rangle_{1,2}$ . Les exponentielles de (2.62) sont séparées car  $(E_1 - \tilde{E}_0)\hat{N}_1 + (E_2 - \tilde{E}_0)\hat{N}_2$  commute avec  $\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger - \hat{A}_1\hat{A}_2$  à résonance<sup>8</sup>. La première exponentielle appliquée à  $|0, 0\rangle_{1,2}$  donne l'opérateur unité puis le calcul de l'effet de la seconde est réalisé grâce à la formule de Baker–Campbell–Hausdorff [76] :

$$e^{\kappa(\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger - \hat{A}_1\hat{A}_2)t} = e^{-\tanh(\kappa t)\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_1^\dagger} e^{-\ln(\cosh(\kappa t))(\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + 1)} e^{-\tanh(\kappa t)\hat{A}_1\hat{A}_2} \quad (2.63)$$

La première exponentielle de (2.63) va pouvoir être développée, la seconde donne le pré-facteur  $\cosh(\kappa t)^{-1}$  et la troisième donne l'opérateur unité lorsqu'elle est appliquée à l'état initial  $|0, 0\rangle_{1,2}$ . Finalement l'état final s'écrit en fonction du temps :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\cosh(\kappa t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh^n(\kappa t)}{n!} \hat{A}_1^{\dagger n} \hat{A}_2^{\dagger n} |0, 0\rangle_{1,2} \quad (2.64)$$

$$= \frac{1}{\cosh(\kappa t)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(\kappa t) |n, n\rangle_{1,2} \quad (2.65)$$

L'état final s'écrit sous la forme d'une superposition d'émission de  $n$  paires d'atomes.

---

8.  $[(E_1 - \tilde{E}_0)\hat{N}_1 + (E_2 - \tilde{E}_0)\hat{N}_2, \hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger - \hat{A}_1\hat{A}_2] = (E_1 + E_2 - 2\tilde{E}_0)(\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2^\dagger - \hat{A}_1\hat{A}_2)$

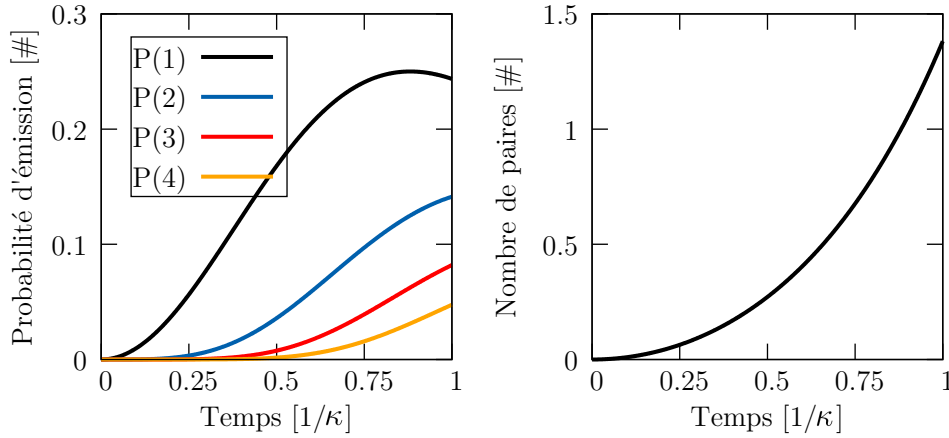


FIGURE 2.5 – Probabilité d’émission de une à quatre paires et nombre de paires moyen en fonction du temps. A gauche sont tracées les probabilités d’émission de une à quatre paires en fonction du temps en unité de  $[1/\kappa]$  à partir de (2.66). A droite est tracé le nombre moyen de paires émises en fonction du temps en unité de  $[1/\kappa]$  à partir de (2.56).

#### 2.4.4 Probabilités d’émission de plusieurs paires

De (2.65) sont déduites les probabilités d’émission de  $n$  paires en fonction du temps notée  $P(n)$  :

$$P(n) = \frac{\tanh^{2n}(\kappa t)}{\cosh^2(\kappa t)} \quad (2.66)$$

Les probabilités d’émission de 1 à 4 paires sont représentées sur la figure 2.5. Aux temps courts il est très probable que rien ne soit émis ou seulement une paire, puis progressivement les probabilités d’émission de 2,3,4 paires augmentent et deviennent de moins en moins négligeables.

Dans l’optique de mener des expériences d’optique atomique quantique comme les expériences HOM et Bell présentées en introduction, on souhaite n’émettre qu’une seule paire à la fois. Cela se réalise dans la limite de temps tendant vers zéro, lorsque le nombre moyen de paires tend aussi vers zéro. La probabilité d’émission de plus d’une paire  $P(> 1) = P(2) + P(3) + \dots = 1 - P(0) - P(1)$  devient alors négligeable devant la probabilité d’émission d’une paire  $P(1)$ . Cependant expérimentalement, dans cette limite, le nombre de réalisations exploitables devient très faible. Par exemple, pour  $\kappa t = 0.1$ , on a

$P(1)/P(> 1) = 100$  et la source peut alors être considérée comme "propre"<sup>9</sup> cependant dans ce régime  $P(1) = 0.01$  et  $P(0) = 0.99$  et donc pour 99% des réalisations aucun atome n'a été émis. Le cycle expérimental de l'expérience étant de 30s on cherche un gain intermédiaire où la source reste "propre" mais où le nombre de cycles exploitables par jour n'est pas négligeable. Le nombre moyen de paires émises par cycle dans les travaux des chapitres 4 et 5 est évalué à environ  $\bar{n} = 0.35$ . Cela correspond à  $\kappa t = 0.48$ , soit  $P(1)/P(> 1) \cong 3$  et  $P(1) = 0.2$ . Ainsi, pour une journée de 1200 réalisations (10h), cela donne environ 240 réalisations pour lesquelles une paire a été émise puis en prenant en compte la détectivité du MCP évaluée à 25%, les deux atomes de la paire seront détectés environ 15 fois, soit une réalisation exploitable<sup>10</sup> toutes les 40 minutes.

### 2.4.5 Source thermique

Il apparait que la distribution du nombre d'atome par mode suit une distribution thermique ([31], p25-28). En effet (2.66) peut s'écrire :

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad (2.67)$$

avec  $\bar{n}$  le nombre moyen d'atome dans le mode (2.56). En comparant à la distribution attendue pour un corps noir à la température  $T$  on trouve :

$$\exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} = \tanh^2(\kappa t) \quad (2.68)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $E$  l'énergie du mode émis.

En considérant les paramètres expérimentaux typiques :  $\bar{n} = 0.35$  et  $E = \hbar^2 k_{rec}^2 / 2m$  (seule l'énergie cinétique est considérée ici), on trouve que la température équivalente de la source est d'environ  $1 \mu\text{K}$ . Il est intéressant de remarquer qu'une température effective apparait dans ce problème où l'état initial est un condensat sans température. Attention cette température n'est pas liée à celle de la très faible fraction thermique résiduelle du nuage.

Ainsi comme attendu pour une source thermique les corrélations locales normalisées sont égale à deux (2.59), c'est l'effet Hanbury, Brown et Twiss [77] : il est plus probable que deux particules soient émises dans le même mode plutôt que dans deux adjacents.

---

9. Le critère de propreté dépend des applications et des observables mesurées (voir chapitres 4 et 5).

10. Pour mesurer des corrélations on a besoin de détecter au moins deux atomes.



En conclusion, dans cette partie on a montré que l'hamiltonien (2.45) rend instable le condensat ce qui entraîne l'émission spontanée de paires d'atomes. Les densités et corrélations attendues ont été ensuite calculées et les difficultés liées au compromis entre propreté de la source (pas d'émission de plusieurs paires) et statistique ont aussi été discutées. L'étude du modèle "simple" à deux modes nous a donc permis de découvrir les aspect clefs du processus de création de paires et nous pouvons à présent nous intéresser au modèle complet multi-mode.

## 2.5 Développement multi-mode

Revenons sur le problème globale de création de paire à partir de l'Hamiltonien (2.5-12). On souhaite dépasser le modèle simple à deux modes où l'on ne considèrait que le processus conservant strictement l'énergie et l'impulsion. En effet, dans l'expérience le réseau est "pulsé" ce qui rend la conservation de l'énergie plus lâche et de même le BEC a une longueur finie ce qui assouplit la conservation de la quasi-impulsion.

Afin de pouvoir résoudre l'évolution, on fera l'approximation supplémentaire que le nombre d'atomes émis par mode est faible, on s'intéresse donc aux temps courts de l'émission. Ce régime est visé expérimentalement car assurant que l'émission de deux paires dans les mêmes modes soit rare (voir 2.4.4).

On considère donc un BEC de longueur  $L$  chargé dans la bande fondamentale d'un réseau peu profond à la quasi-impulsion  $q_0$ . Le réseau est allumé pendant un temps  $t \in [-T/2, T/2]$  (allumage et extinction adiabatique). Toute paire de modes de quasi-impulsion  $[q_i, q_j]$  et énergies  $[E_i, E_j]$  est considérée comme pouvant être émise du condensat, leurs opérateurs créations sont  $\hat{a}_i^\dagger$  et  $\hat{a}_j^\dagger$ . Les modes sont écartés en quasi-impulsion de  $\Delta q_m$  la taille de mode définie au 2.3.1.4. Les énergies  $E_i$  considérées sont celles de la bande fondamentale du réseau calculée au 2.3.1.2 et l'énergie du mode 0  $\tilde{E}_0$  est implicitement décalé de  $gn_0$  pour prendre en compte l'effet de champ moyen (2.3.3). L'Hamiltonien complet (2.4) s'écrit :

$$\hat{H} = N_0 \tilde{E}_0 + \sum_i E_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (2.69)$$

$$+ \sum_{ij} \hbar \kappa(q_i, q_j) \left[ \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \exp\left(\frac{-2i \tilde{E}_0 t}{\hbar}\right) + h.c. \right] \quad (2.70)$$

Avec  $\kappa(q_i, q_j) = gN_0 I(q_i, q_j)/\hbar$  le gain associé à la création de paires  $[q_i, q_j]$ . D'après (2.36) il est égal à :

$$\boxed{\kappa(q_i, q_j) = \frac{gn_0}{\hbar} \operatorname{sinc} \left[ \Delta q(q_i, q_j) \frac{L}{2} \right]} \quad (2.71)$$

avec  $\Delta q(q_i, q_j) = (q_i + q_j - 2q_0[2k_{res}])$  l'écart à la conservation de la quasi-impulsion. Le gain est donc maximal pour les processus conservant la quasi-impulsion, et la souplesse à l'écart de la conservation parfaite est inversement proportionnelle à la longueur du nuage initial.

### 2.5.1 Équations du mouvement

L'équation du mouvement pour l'opérateur d'annihilation du mode I,  $\hat{a}_I$  est  $\forall I$  :  $\square$

$$\dot{\hat{a}}_I(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_I, \hat{H}] \quad (2.72)$$

$$= -i \frac{E_I}{\hbar} \hat{a}_I(t) + \sum_j \kappa(q_I, q_j) e^{\frac{-2iE_0 t}{\hbar}} \hat{a}_j^\dagger(t) \quad (2.73)$$

En posant  $\forall I$ ,

$$\hat{A}_I(t) = \hat{a}_I(t) \exp \left( \frac{iE_I t}{\hbar} \right), \quad (2.74)$$

les équations régissant le processus de création de paires multi-mode s'écrivent :

$$\boxed{\dot{\hat{A}}_I(t) = \sum_j \kappa(q_I, q_j) e^{\frac{i\Delta E(q_I, q_j)t}{\hbar}} \hat{A}_j^\dagger(t)} \quad (2.75)$$

où  $\Delta E(q_i, q_j) = E_i + E_j - 2\tilde{E}_0$  est l'écart à la conservation de l'énergie. L'évolution du mode  $\hat{A}_I$  est donc couplée principalement aux modes pour lesquels  $\Delta E(q_i, q_j) \cong 0$  car sinon l'exponentiel complexe se moyenne temporellement à zéro et  $\Delta q(q_i, q_j) \cong 0$  pour que  $\kappa(q_I, q_j)$  soit non nul. Ainsi comme considéré dans la partie 2.4 les atomes seront principalement émis par paires correspondant à un processus conservant énergie et quasi-impulsion.

---

11. L'équation (2.70) a en toute rigueur un facteur  $(1 + \delta_{I,j})$  ( $\delta$  : symbole de Kronecker) sous la somme, négliger ce terme revient à réduire d'un facteur deux l'effet des paires émises à la même quasi-impulsion, ce processus étant peu probable par conservation de l'énergie il est raisonnable de faire cette simplification.

### 2.5.2 Développement en ordre du couplage

Afin de résoudre les équations couplées (2.75), le produit couplage maximum  $gn_0/\hbar = K$  et temps  $T$  est considéré petit devant 1,  $KT \ll 1$ . Les opérateurs annihilations sont décomposés en puissance de  $KT$ ,  $\forall I$  ils s'écrivent :

$$\hat{A}_I(t) = \hat{A}_I^{(0)}(t) + KT\hat{A}_I^{(1)}(t) + (KT)^2\hat{A}_I^{(2)}(t) + \dots \quad (2.76)$$

A  $t = 0$ , le couplage n'est pas allumé et on considère les conditions initiales  $\hat{A}_I(0) = \hat{A}_I^{(0)}(0)$ . On réinjecte (2.76) dans (2.75) et on égalise les composantes de même puissance de  $KT$  :

**Ordre 0 en  $KT$  :**

$$\dot{\hat{A}}_I^{(0)}(t) = 0 \quad (2.77)$$

$$\Rightarrow \hat{A}_I^{(0)}(t) = cst = \hat{A}_I^{(0)}(0) = \hat{A}_I(0) \quad (2.78)$$

**Ordre 1 en  $KT$  :**

$$KT\dot{\hat{A}}_I^{(1)}(t) = \sum_j \kappa(q_I, q_j) e^{\frac{i\Delta E(q_I, q_j)t}{\hbar}} \hat{A}_j^{\dagger(0)}(t) \quad (2.79)$$

$$KT\hat{A}_I^{(1)}(T) = \sum_j \kappa(q_I, q_j) \int_{-T/2}^{T/2} dt' \left[ e^{\frac{i\Delta E(q_I, q_j)t'}{\hbar}} \right] \hat{A}_j^{\dagger}(0) \quad (2.80)$$

$$= \sum_j \kappa(q_I, q_j) T \operatorname{sinc} \left[ \frac{\Delta E(q_I, q_j)T}{2\hbar} \right] \hat{A}_j^{\dagger}(0) \quad (2.81)$$

Pour passer de (2.79) à (2.81), l'ordre 0 en  $KT$  ainsi que les conditions initiales ont été réinjectés.

Dans la suite la notation  $\epsilon(q, q') = T \operatorname{sinc} [\Delta E(q, q')T/2\hbar]$  est utilisée pour alléger les équations. Ainsi à l'ordre 1 en  $KT$ , l'opérateur d'annihilation du mode I  $\hat{A}_I(t)$ , s'écrit  $\forall I$  :

$$\boxed{\hat{A}_I(t) = \hat{A}_I(0) + \sum_j \kappa(q_I, q_j) \epsilon(q_I, q_j) \hat{A}_j^{\dagger}(0)} \quad (2.82)$$

Maintenant que l'on connaît les opérateurs, on va pouvoir calculer toutes les observables, densité puis corrélations.

### 2.5.3 Densités

En restant à l'ordre 1 en  $KT$  pour les opérateurs on peut maintenant évaluer les densités moyennes attendues. L'état initial est pris avec aucun atome dans les modes d'émission :  $|0\rangle$ . Le nombre moyen d'atomes dans le mode  $q_I$  s'écrit à partir des opérateurs créations et annihilations :

$$N(q_I, T) = \left\langle \hat{A}_I^\dagger(T) \hat{A}_I(T) \right\rangle \quad (2.83)$$

$$\cong \sum_{jj'} \kappa(q_I, q_j) \kappa^*(q_I, q_{j'}) \epsilon(q_I, q_j) \epsilon^*(q_I, q_{j'}) \left\langle \hat{A}_j(0) \hat{A}_{j'}^\dagger(0) \right\rangle \quad (2.84)$$

$$= \sum_j |\kappa(q_I, q_j)|^2 |\epsilon(q_I, q_j)|^2 \quad (2.85)$$

où on a utilisé  $\left\langle \hat{A}_I^\dagger(0) \hat{A}_I(0) \right\rangle = \left\langle \hat{A}_I^\dagger(0) \hat{A}_j^\dagger(0) \right\rangle = \left\langle \hat{A}_{j'}(0) \hat{A}_I(0) \right\rangle = 0$  et  $\left\langle \hat{A}_j(0) \hat{A}_{j'}^\dagger(0) \right\rangle = \delta_{jj'}$  où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Au final, le nombre d'atomes par mode s'écrit :

$$N(q_I, T) \cong K^2 T^2 \sum_j \text{sinc}^2 \left[ \Delta q(q_I, q_j) \frac{L}{2} \right] \text{sinc}^2 \left[ \frac{\Delta E(q_I, q_j) T}{2\hbar} \right] \quad (2.86)$$

En considérant l'émission de seulement deux modes conservant exactement l'énergie et quasi-impulsion comme dans la partie précédente 2.4, le nombre moyen de paires émises devient  $N = K^2 T^2$ . Ce résultat est compatible avec l'équation (2.56)  $\bar{n}(t) = \sinh^2(\kappa t)$  du modèle à deux modes et notre approximation  $KT \ll 1$  car  $\sinh^2(\kappa t) \cong \kappa^2 t^2$  à l'ordre le plus bas en  $\kappa t$ .

La bande fondamentale du réseau est composée d'une multitude de modes ce qui permet de changer les sommes en intégrale<sup>[2]</sup>. D'après 2.3.1.4 la taille d'un mode est  $\Delta q_m = 2\pi/L$ , la double somme (2.84) est changée en une double intégrale  $\int \int dq dq' / (\Delta q_m)^2$  et le symbole de Kronecker en une fonction de Dirac. Le nombre d'atome émis par mode  $\Delta q_m$  à la quasi-impulsion  $q_I$  s'écrit finalement :

$$\boxed{n(q_I, T) = K^2 T^2 \int \frac{dq}{\Delta q_m} \text{sinc}^2 \left[ \Delta q(q_I, q) \frac{L}{2} \right] \text{sinc}^2 \left[ \frac{\Delta E(q_I, q) T}{2\hbar} \right]} \quad (2.87)$$

Ainsi le nombre d'atome émis à  $q_I$  se retrouve sous la forme d'une intégrale sur tous les appariements envisageables pondérés par une fonction piquée sur les processus conservant énergie et quasi-impulsion.

---

12. Avec les chiffres de l'expérience (longueur du condensat  $L \cong 50\mu\text{m}$  et pas du réseau  $0.54\mu\text{m}$ ) il existe  $2k_{res}/\Delta q_m \cong 90$  modes dans la bande fondamentale.

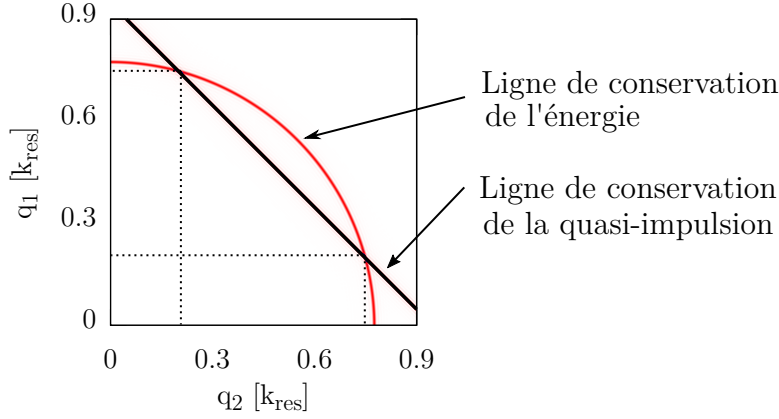


FIGURE 2.6 – Lignes de conservations de l'énergie et de la quasi-impulsion tracées à partir des équations (2.86-87). Le graphe montre que le couple de quasi-impulsion  $[0.2, 0.75] k_{res}$  conserve parfaitement les deux quantités, le processus permettant leurs émissions seront donc favorisés ce qui se vérifie sur l'évolution des densités de la figure 2.7. Les paramètres sont :  $q_0 = -0.55 k_{res}$ ,  $K = gn_0/\hbar = 0.024 E_{res}$ ,  $V_0 = 0.45 E_{res}$ .

### Maximaux d'émission

Les paires  $[q_1, q_2]$  émises en priorité lors du processus seront donc d'après (2.87), celles impliquées dans un processus conservant parfaitement énergie et quasi-impulsion, c'est à dire tel que :

$$E(q_1) + E(q_2) - 2E(q_0) = 2gn_0 = 2\hbar K \quad (2.88)$$

$$q_1 + q_2 - 2q_0 = 0[2k_{res}] \quad (2.89)$$

Sur la figure 2.6 est représentée les lignes de conservation parfaite de l'énergie et quasi-impulsion pour une quasi-impulsion du condensat de  $q_0 = -0.55 k_{res}$  (typique de l'expérience). L'intersection des deux lignes permet de prédire les maximaux d'émission ce qui se vérifie sur l'évolution des densités de la figure 2.7.

En changeant la quasi-impulsion du BEC dans la bande fondamentale du réseau, les quasi-impulsions des paires émises en priorité vont se déplacer. Expérimentalement, une vitesse effective est appliquée au condensat (à l'arrêt dans le référentiel du laboratoire) en mettant en mouvement le réseau à vitesse constante  $v_{res}$  (voir 2.3.1.1). Le condensat sera ainsi chargé à  $-v_{res}$ , c'est la stratégie utilisée sur l'expérience. Sur la figure 2.8 sont tracées les densités attendues (2.87) au bout de  $590 \mu s$  d'interaction avec le réseau en

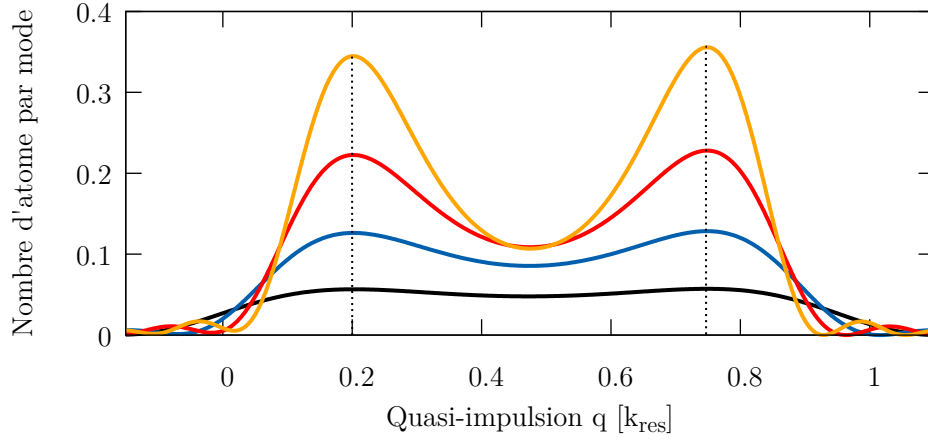


FIGURE 2.7 – Évolution du nombre d’atomes par mode  $n(q, T)$  (2.87) en fonction de la durée du réseau. Les pointillés correspondent aux quasi-impulsions définies par les intersections des lignes de conservations de la figure 2.6. Les paramètres de calcul sont :  $q_0 = -0.55 k_{res}$ ,  $L = 50 \mu\text{m}$ ,  $K = 0.024 E_{res}$ ,  $V_0 = 0.45 E_{res}$  et  $T = [230, 350, 470, 590] \mu\text{s}$

fonction de sa vitesse ( $v_{res} = -q_0$ ). Le processus de création de paire se déclenche à partir d’une vitesse de réseau suffisante :  $v_{min} \cong 0.5 k_{res}$ , c’est pourquoi le processus est appelé instabilité dynamique. Puis les maximaux d’émission s’écartent lorsque la vitesse du réseau augmente. L’écart d’impulsion des maximaux d’émission peut être accordé entre 0 et  $2 k_{res}$  ce qui est pratique pour leur manipulation ultérieure [63, 64].

### Évolution de la densité atomique

Le nombre d’atome par mode  $n(q, T)$  calculé à partir de l’équation (2.87) pour plusieurs durées de réseau  $T$  est représenté sur la figure 2.7. A temps court le profil est large et plat, tous les processus ont la même probabilité de se produire car la conservation de l’énergie est très souple. Puis le profil s’affine autour du couple de quasi-impulsions impliqué dans un processus conservant quasi-impulsion et énergie déterminées à partir des équations (2.88-89) et représentées sur la figure 2.6.

Les atomes émis entre les deux pics de densité (Fig. 2.7) proviennent de processus non résonnants mais autorisés car le temps d’interaction avec le réseau est court. Lorsque la quasi-impulsion du condensat est proche de  $0.5 k_{res}$  comme c’est le cas sur les figures 2.6-7 les lignes de conservation restent proches l’une de l’autre aux alentours de  $[q_1, q_2] = [0.2, 0.75] k_{res}$ . Il est donc probable d’émettre des paires dans cette région c’est à dire entre

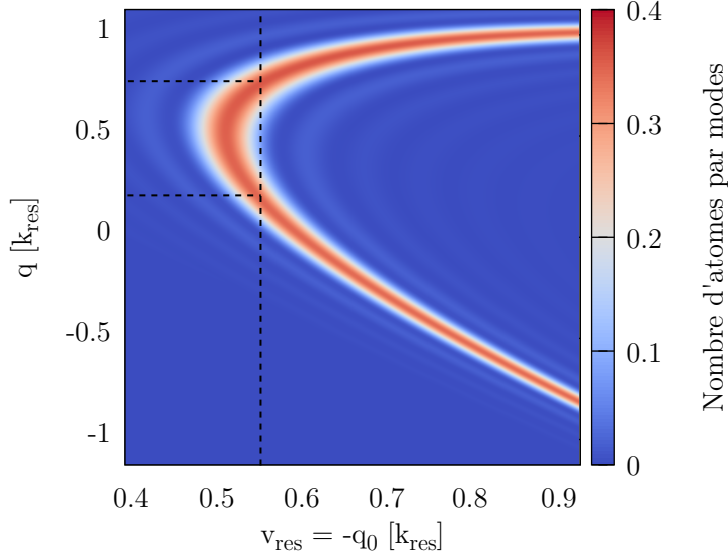


FIGURE 2.8 – Nombre d’atome par mode  $n(q, T)$  en fonction de la vitesse du réseau. Les paramètres de calcul sont :  $L = 50 \mu\text{m}$ ,  $K = 0.024 E_{res}$ ,  $T = 590 \mu\text{s}$ ,  $V_0 = 0.45 E_{res}$ . Les maximaux d’émission déduits de cette figure sont en accord avec l’analyse numérique et les mesures expérimentales reportées dans [63, 42]. Les pointillés correspondent aux positions des maxima de densité de la figure 2.7.

les pics de densité principaux ce qui explique les profils de la figure 2.7. A l’inverse, lorsque la vitesse du réseau est plus importante ( $v_{res} > 0.65$ ) les pics de densité sont plus séparés (Fig.2.8) car les lignes de conservation se croisent alors avec un angle plus important.

Expérimentalement, les deux régimes sont intéressants. Une vitesse de réseau plus grande que  $0.65 k_{res}$  permet d’avoir une émission bien définie où seulement une paire de mode est émise, c’est le régime naturel pour la réalisation de l’expérience HOM par exemple. Au contraire une vitesse de réseau proche de  $0.5 k_{res}$  permet des profils larges dans lesquels de multiples paires de modes sont émis, c’est intéressant lorsque l’on souhaite mettre en place une expérience type test des inégalités de Bell où deux paires de modes sont requis. Le nombre de paires de modes émis par la source sera précisé à la section 2.5.6 grâce à l’étude des corrélations de la partie suivante. Pour les expériences de ce manuscrit (chapitre 4 et 5), la vitesse du réseau est prise dans le second régime ( $v_{res} = 0.55 k_{res}$ ) ce qui permet de réaliser, comme on le montrera dans la suite, les deux types d’expériences (HOM et Bell) en même temps.

Sur la figure 2.7 le temps maximal représenté est  $590 \mu\text{s}$  ce qui permet de conserver le produit  $KT < 1$  et donc de préserver la validité du développement théorique précédent. La résolution numérique des équations (2.75) n'est pas réalisée dans ce manuscrit, elle permettrait de vérifier précisément l'assertion précédente.

### 2.5.4 Corrélations

Les corrélations entre les atomes émis aux deux quasi-impulsions  $q_1$  et  $q_2$  se calculent à partir du développement des opérateurs annihilation à l'ordre 1 en  $KT$  (2.80). L'état initial est pris avec aucun atome dans les modes d'émission  $|0\rangle$ . On utilise les égalités  $\langle \hat{A}_j(0)\hat{A}_{j'}(0)\hat{A}_{j''}^\dagger(0)\hat{A}_{j'''}^\dagger(0) \rangle = \delta_{jj'''}\delta_{j'j''} + \delta_{jj''}\delta_{j'j'''} + \delta_{jj'''}\delta_{j'j''}$  et  $\langle \hat{A}_j(0)\hat{A}_2^\dagger(0)\hat{A}_1(0)\hat{A}_{j'''}^\dagger(0) \rangle = \delta_{1j'''}\delta_{2j}$ . De même que pour la densité, les corrélations sont écrites sous forme intégrale. Finalement la fonction de corrélation  $G^{(2)}$  entre les quasi-impulsions  $q_1$  et  $q_2$  est égale à :

$$G^{(2)}(q_1, q_2) = n(q_1, T)n(q_2, T) \quad (2.90)$$

$$+ \left| \int \frac{dq}{\Delta q_m} \kappa^*(q_1, q)\kappa(q_2, q)\epsilon^*(q_1, q)\epsilon(q_2, q) \right|^2 \quad (2.91)$$

$$+ |\kappa(q_1, q_2)|^2 |\epsilon(q_1, q_2)|^2 \quad (2.92)$$

La corrélation (2.90-92) comporte un premier terme de produit des densités qui constitue le fond non-corrélé. Puis le terme (2.91) est lié aux corrélations locales de la source car ce terme est non négligeable devant (2.90) seulement si  $q_1 \cong q_2$ . Finalement le terme (2.92) représente les corrélations croisées car il est non négligeable devant (2.90) pour des couples de quasi-impulsions impliqués dans des processus conservant énergie et quasi-impulsion, c'est à dire pour des paires de modes appartenant aux deux sur-densités (Fig. 2.7).

### Corrélation locale

Sur la figure 2.9 les corrélations locales  $G^{(2)}(q_1, q_1')$  entre quasi-impulsions  $q_1$  et  $q_1'$  proches sont représentées pour deux durées de réseau à partir de l'équation (2.90-92). Un fond non-corrélé est présent donné par le terme (2.90), plus une structure plus fine de même amplitude donnée par (2.91).

L'excès de corrélation sur la ligne  $q_1' = q_1$  représente le fait qu'il est plus probable d'émettre dans le même mode que dans deux différents, c'est l'effet Hanbury Brown et Twiss [77].



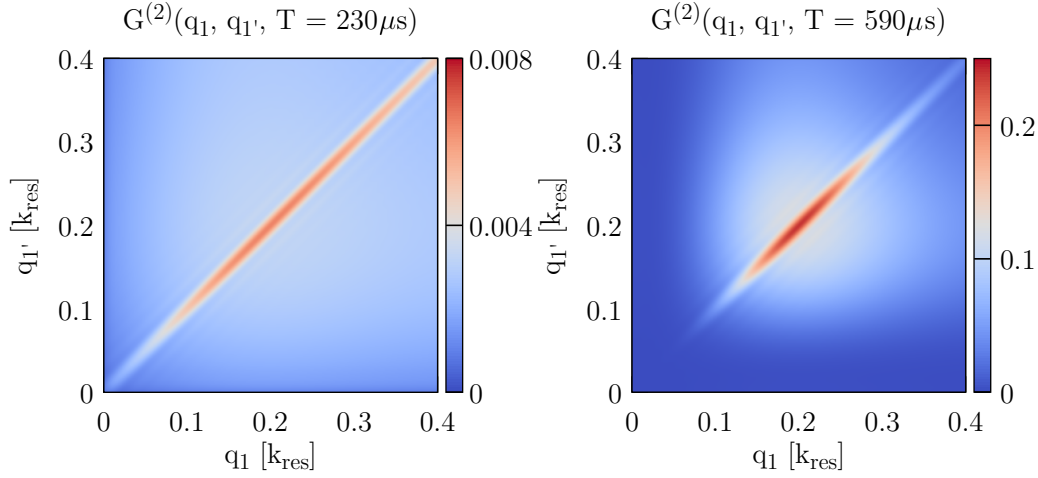


FIGURE 2.9 – Évolution des corrélations locales en fonction du temps. On trace :  $G^{(2)}(q_1, q_{1'}, T)$  pour deux temps croissants. Les paramètres de calcul sont :  $q_0 = -0.55 k_{res}$ ,  $L = 50 \mu\text{m}$ ,  $K = 0.021 E_{res}$ ,  $T = 230, 590 \mu\text{s}$ ,  $V_0 = 0.45 E_{res}$ .

A temps court la corrélation est très allongée le long de  $q_1 = q_{1'}$ , puis à temps plus long la conservation de l'énergie devient plus stricte ce qui resserre les densités et donc aussi les corrélations. Les largeurs caractéristiques apparaissant sur la figure 2.9 sont discutées au 2.5.5.

Pour la corrélation locale normalisée, on montre que quelque soit le temps elle forme une ligne le long de  $q_1 = q_{1'}$  d'amplitude égale à deux comme pour le modèle à deux modes (2.59) (voir partie 2.5.5).

## Corrélation croisée

Sur la figure 2.10, la carte de corrélation  $G^{(2)}(q_1, q_2)$  entre quasi-impulsions  $q_1$  et  $q_2$  appartenant aux deux sur-densités est représentée. On y retrouve de nouveau un fond dû au terme de densité au carré (2.90) plus une structure allongée donnée par (2.92). Ce terme de corrélation confirme l'émission par paires des atomes des deux sur-densités.

La forme de la corrélation croisée s'explique en remarquant qu'elle est donnée par le produit  $|\kappa(q_1, q_2)|^2 |\epsilon(q_1, q_2)|^2$  qui sont deux sinus cardinaux maximaux pour les couples conservant quasi-impulsion et énergie. Ainsi, les corrélations se forment à l'intersection des lignes de conservation de la figure 2.6 et les souplesses respectives des conservations donnent la forme et l'orien-

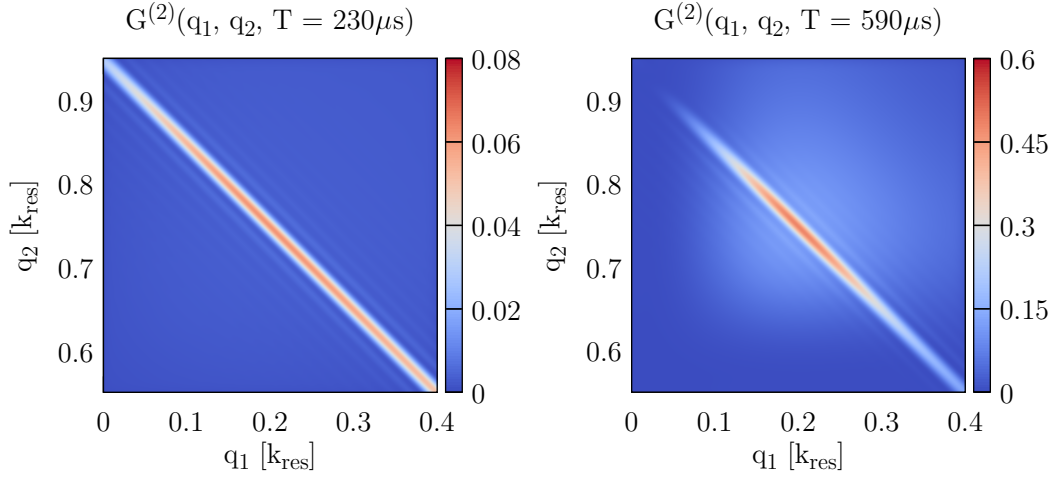


FIGURE 2.10 – Évolution des corrélations croisées en fonction du temps. On trace :  $G^{(2)}(q_1, q_2)$  pour deux temps croissants. Les paramètres de calcul sont :  $q_0 = -0.55 k_{res}$ ,  $L = 50 \mu\text{m}$ ,  $K = 0.021 E_{res}$ ,  $T = 230, 590 \mu\text{s}$ ,  $V_0 = 0.45 E_{res}$ .

tation de cette dernière. Les paramètres typiques de l'expérience impliquant que la conservation de la quasi-impulsion est toujours plus stricte que la conservation de l'énergie, les corrélations croisées s'alignent sur  $q_1 + q_2 = 2q_0$ . Puis à temps long la conservation de l'énergie devenant plus stricte elles se resserrent.

### 2.5.5 Approximation de la conservation de la quasi-impulsion stricte

Les cartes de corrélation croisée, calculée à partir des paramètres expérimentaux, montrent que les atomes émis conservent strictement la quasi-impulsion. Ainsi théoriquement on va considérer la fonction  $\kappa(q_i, q_j)$  très piquée sur la ligne  $q_i + q_j = 2q_0$  par rapport à la fonction  $\epsilon(q_i, q_j)$ . Cela va permettre de simplifier les densités et corrélations calculées précédemment et évaluer analytiquement leurs largeurs caractéristiques.

#### Densité simplifiée

Sous cette hypothèse la densité (2.87) se simplifie en :

$$n(q, T) = n(2q_0 - q, T) = K^2 T^2 \text{sinc}^2 \left[ \Delta E(q, 2q_0 - q) \frac{T}{2\hbar} \right] \quad (2.93)$$

où l'égalité  $\int dq' \text{sinc}^2 [\Delta q(q, q')L/2] = \Delta q_m$  a été utilisée. Cela correspond à l'émission de  $K^2 T^2 \text{sinc}^2 [\Delta E(q, 2q_0 - q)T/2\hbar]$  atomes par mode à la quasi-impulsion  $q$ . La largeur de la densité est donc entièrement définie par le durée du réseau et la forme de la bande fondamentale (elle-même reliée à la profondeur du réseau). Avec les paramètres expérimentaux la formule (2.93) prédit exactement (au pourcent près) le même profil de densité que la formule sans approximation (2.87).

### Tailles caractéristiques de corrélation locale

La corrélation locale de la figure 2.9 manifeste deux tailles caractéristiques une longueur le long de  $q_1 = q_{1'}$  et une largeur perpendiculairement. Sous l'hypothèse de conservation stricte de la quasi-impulsion, la longueur est donnée directement par la densité (2.93) au carré calculée ci-dessus ce qui ne donne pas plus d'information.

Ensuite la largeur de corrélation locale est évaluée pour tout décalage  $\delta q$  de la ligne  $q_1 = q_{1'}$  par :

$$G^{(2)}(q_1, q_1 + \delta q) \cong n(q_1)n(q_1 + \delta q) \quad (2.94)$$

$$+ K^4 T^4 \text{sinc}^2 \left[ \delta q \frac{L}{2} \right] \text{sinc}^4 \left[ \Delta E(q_1, 2q_0 - q_1) \frac{T}{2\hbar} \right] \quad (2.95)$$

où l'égalité  $\int dx' \text{sinc}[x'] \text{sinc}[x' + x] = \pi \text{sinc}[x]$  a été utilisée. Et la corrélation locale normalisée par les densités est égale à :

$$\boxed{g^{(2)}(q_1, q_1 + \delta q) \cong 1 + \text{sinc}^2 \left[ \delta q \frac{L}{2} \right]} \quad (2.96)$$

De nouveau, avec les paramètres expérimentaux la formule approchée précédente (2.96) est de nouveau très proche de la formule sans approximation (2.90-92).

La largeur de la fonction de corrélation locale en impulsion est donc uniquement déterminée par la longueur du condensat et est égale à la taille du mode  $\Delta q_m$  (position du premier zéro du sinus cardinal) . Ce résultat rappelle l'expérience Hanbury Brown and Twiss [77] pour laquelle les largeurs de corrélations locale d'une source sont liées à sa taille. L'indétermination sur la position initiale de l'atome dans le nuage donne une largeur en impulsion aux modes par relation de transformée de Fourier spatiale. Cette propriété implique la possibilité d'une mesure indirecte de la taille du condensat ce qui est réalisé au 2.6.6.

### Tailles caractéristiques de corrélation croisée

Pour les corrélations croisées, la longueur de la corrélation croisée le long de  $q_1 + q_2 = 2q_0$  est aussi donnée par la densité au carré. Puis sa largeur est évaluée pour un décalage à la conservation de la quasi-impulsion de  $\delta q$  par l'équation :

$$G^{(2)}(q_1, 2q_0 - q_1 + \delta q) \cong n(q_1)n(2q_0 - q_1 + \delta q) \quad (2.97)$$

$$+ K^2 T^2 \operatorname{sinc}^2 \left[ \delta q \frac{L}{2} \right] \operatorname{sinc}^2 \left[ \Delta E(q_1 + \delta q, 2q_0 - q_1 + \delta q) \frac{T}{2\hbar} \right] \quad (2.98)$$

Et la corrélation croisée normalisée est égale à :

$$\boxed{g^{(2)}(q_1, 2q_0 - q_1 + \delta q) \cong 1 + \frac{1}{n(q_1)} \operatorname{sinc}^2 \left[ \delta q \frac{L}{2} \right]} \quad (2.99)$$

Le maximum de corrélation est atteint pour les couples de modes conservant la quasi-impulsion ( $\delta q = 0$ ), et on retrouve là encore une taille dépendant uniquement de la taille du condensat. L'amplitude maximale de la corrélation croisée décroît en un sur le nombre moyen de paires émises dans le mode considéré comme dans le modèle à 2 modes (2.60). Cependant le terme 2 de (2.60) est manquant ; cela venant du fait que notre calcul est approximatif à cause du développement tronqué en puissance de  $KT$ . Ici sous l'hypothèse  $KT \ll 1$  le second terme de (2.99) est de toute façon grand devant 1. Notez qu'en toute rigueur pour la corrélation croisée le terme 1 doit être négligé car des composantes à l'ordre deux en  $KT$  de la troncature initial des opérateurs (2.76) peuvent mener à des termes comparables à 1 dans (2.99).

#### 2.5.6 Nombre de paires

L'étude de l'émission avec les paramètres de l'expérience montrent des densités larges, de diamètre à mi-hauteur  $2\sigma_d \cong 0.2k_{res}$  (voir Fig. 2.7 pour  $590 \mu s$ ) et des corrélations locales et croisées fines de largeur  $\Delta q_m = 0.022k_{res}$  (position du premier zéro des équations 2.96 et 2.99). La source peut donc être décomposée en plusieurs paires indépendantes de modes et le rapport  $2\sigma_d$  sur  $\Delta q_m$  donne l'ordre de grandeur du nombre de paires de modes émises par la source égale ici à 9. Sur la figure 2.11 est représentés de manière schématique plusieurs paires de modes propres attendue sur l'expérience. La conservation stricte de la quasi-impulsion implique ici que les paires soient distribuées symétriquement par rapport au centre du profil de densité.

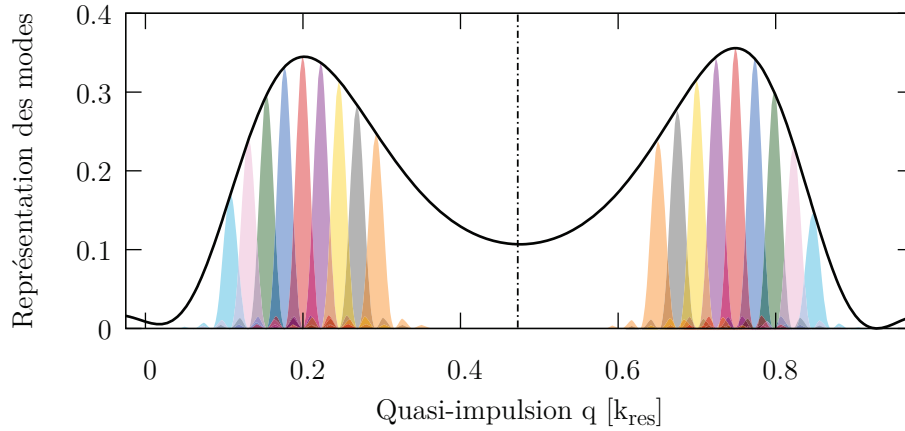


FIGURE 2.11 – Représentation de paires de modes propres émises par la source. Les modes de même couleur sont appariés. Le rapport de la taille d’un mode  $\Delta q_m$  et du diamètre à mi-hauteur de la densité est ici égale à 9 environ, ce qui permet de définir autant de canaux d’émission. Les paramètres de calcul sont :  $q_0 = -0.55 k_{res}$ ,  $L = 50 \mu\text{m}$ ,  $K = 0.024 E_{res}$ ,  $T = 590 \mu\text{s}$ ,  $V_0 = 0.45 E_{res}$ .

Le nombre de paires de modes peut être influencé en changeant la taille des modes ou la forme de la densité. Comme discuté précédemment la taille de mode est entièrement définie par la longueur du condensat et la forme de la densité est liée au choix de vitesse du réseau de création (Fig.2.8). Ainsi pour maximiser le nombre de paires de modes émises par la source il faut une vitesse de réseau proche de  $0.5 k_{res}$ , ce qui est le cas sur l’expérience et un condensat long. A l’inverse pour atteindre le régime où seul une paire de mode est émise il faut privilégier un condensat plus court et une vitesse de réseau importante  $v_{res} > 0.65 k_{res}$ . Sur la figure 2.12, les assertions précédentes sont confirmées par le calcul du rapport  $2\sigma_d$  sur  $\Delta q_m$  attendu en fonction de la vitesse du réseau pour plusieurs longueur de condensat et un temps de création fixe<sup>[13]</sup>.

### 2.5.7 Émission cohérente et corrélation anormale

Dans cette partie on s’intéresse à la formalisation de l’état produit par la source et à ses propriétés de corrélation anormale.

13. Pour une taille de condensat plus petite que  $25 \mu\text{m}$  la conservation de la quasi-impulsion n’est plus parfaitement stricte devant celle de l’énergie, les tailles de modes ne peuvent alors plus être décrites par les formules de la partie 2.5.5.

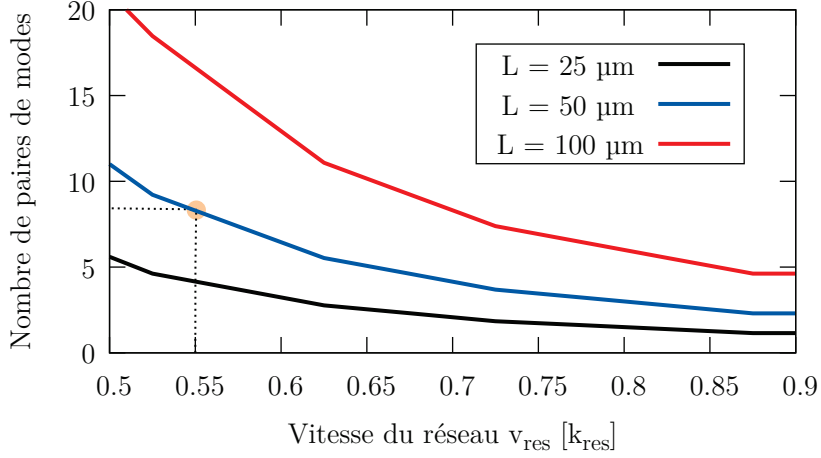


FIGURE 2.12 – Nombre de paires de modes émises par la source. Ce nombre est approché en calculant le rapport du diamètre à mi-hauteur des pics de densité  $2\sigma_d$  sur la taille d’un mode  $\Delta q_m$ . Les paramètres de calculs sont :  $L = [25, 50, 100] \mu\text{m}$ ,  $K = 0.024 E_{\text{res}}$ ,  $T = 590 \mu\text{s}$ ,  $V_0 = 0.45 E_{\text{res}}$ . Le point orange représente les conditions expérimentales usuelles.

D’après (2.99), des corrélations croisées apparaissent seulement pour les couples réalisant la conservation de la quasi-impulsion. Ainsi l’état associé à l’émission d’une paire d’atomes peut être noté de manière générale  $\forall q$  :  $|1, 1\rangle_{q, 2q_0-q}$ . Puis l’état produit par la source peut s’écrire comme la somme sur les quasi-impulsions  $q$  (espacées de  $\Delta q_m$ ) et sur le nombre d’atomes émis par paires de modes :

$$|\psi\rangle = \sum_q \sum_{N=0}^{\infty} \alpha(N, q) |N, N\rangle_{q, 2q_0-q} \quad (2.100)$$

où  $\alpha$  est une fonction permettant de rendre compte de la densité d’atomes émis par mode :  $\sum N \times |\alpha(N, q)|^2 = n(q)$ .

Si l’on considère de plus que l’émission de deux atomes dans le même mode est rare car le gain du processus est faible (voir 2.4.4) ce qui est le cas dans le cadre de notre modèle multi-mode ( $KT \ll 1$ ), la sommation sur l’indice  $N$  dans (2.100) peut être tronquée à  $N_{\text{max}} = 1$  et l’état de la source est approché par <sup>[14]</sup> :

14. État non normalisé.

$$|\psi\rangle \cong |0\rangle + \sum_q \alpha(q) |1, 1\rangle_{q, 2q_0 - q} \quad (2.101)$$

$$= |0\rangle + \sum_q \alpha(q) |q, 2q_0 - q\rangle \quad (2.102)$$

Avec le paramètre  $\alpha$  suivant à présent la relation  $|\alpha(q)|^2 = n(q)$ . Entre l'équation (2.101) et (2.102) la notation du ket a changé, l'impulsion est notée à l'intérieur de celui-ci et le nombre d'excitation est fixée à une.

Après coupure du réseau, les quasi-impulsions de l'état (2.104) sont traduites en impulsions dans le référentiel du laboratoire (processus décrit au 2.3.1.5). Et finalement celui-ci peut s'écrire dans le référentiel du centre de masse des paires comme :

$$\boxed{|\psi\rangle \cong |0\rangle + \sum_k \alpha(k) |k, -k\rangle} \quad (2.103)$$

L'état (2.103) décrit l'émission d'une paire d'atomes dans une superposition intriquée de plusieurs paires de modes en impulsion. Avant détection l'impulsion de chaque atome est inconnue mais dès lors que l'on mesure l'impulsion d'un des atomes l'état est projeté et la quasi-impulsion du second atome instantanément connue.

Le détecteur à micro-canaux (voir 1.3.2.1) permet de sélectionner avec précision les impulsions à étudier. Ainsi en fonction des situations l'état équivalent de la source décrivant l'expérience pourra être simplifié. Pour une expérience HOM on souhaitera par exemple sélectionner seulement deux impulsions  $[k_0, -k_0]$  et réduire l'état à  $|\psi\rangle_{HOM} = |0\rangle + \alpha(k_0) |k_0, -k_0\rangle$  (voir chapitre 4) ou pour une expérience type Bell sélectionner cette fois deux paires de modes  $[k, -k]$  et  $[k', -k']$  et réduire l'état à  $|\psi\rangle_{Bell} = |0\rangle + \alpha(k) |k, -k\rangle + \alpha(k') |k', -k'\rangle$  (voir chapitre 5)<sup>15</sup>.

Notez que la forme de l'état (2.103) suppose implicitement la cohérence de l'émission des différentes paires de modes. Pour le vérifier théoriquement on calcule la corrélation anormale qu'il existe entre deux paires de modes. La corrélation anormale se retrouve dans le calcul des observables d'une expérience type Bell et c'est un témoin de cohérence.

Considérons deux paires de modes en quasi-impulsion  $[q_1, q_2 = 2q_0 - q_1]$  et  $[q_{1'}, q_{2'} = 2q_0 - q_{1'}]$  avec  $q_{1'} - q_1 > \Delta q_m$  la corrélation anormale est définie ( $\forall q_1$  et  $q_{1'}$ ) par :

---

15. États  $|\psi\rangle_{HOM}$  et  $|\psi\rangle_{Bell}$  non normalisés dans le texte.

$$G_{anormale}^{(2)} = \left\langle \hat{A}_1^\dagger(T) \hat{A}_2^\dagger(T) \hat{A}_{1'}(T) \hat{A}_{2'}(T) \right\rangle \quad (2.104)$$

et sous les mêmes hypothèses que la partie 2.5.5 elle est égale à :

$$G_{anormale}^{(2)} = K^2 T^2 \operatorname{sinc} \left[ \Delta E(q_1, q_2) \frac{T}{2\hbar} \right] \operatorname{sinc} \left[ \Delta E(q_{1'}, q_{2'}) \frac{T}{2\hbar} \right] \quad (2.105)$$

La corrélation anormale normalisée est :

$$g_{anormale}^{(2)} = \frac{G_{anormale}^{(2)}}{n(q_1)n(q_{1'})} = \frac{1}{\sqrt{n(q_1)n(q_{1'})}} \quad (2.106)$$

A faible population par mode  $KT \ll 1$ , la corrélation anormale normalisée est grande devant 1 ( $\forall q_1$  et  $q_{1'}$ ) et tend vers les corrélations croisées (2.99). Comme on le verra au chapitre 5 (partie 5.2) cette propriété implique qu'une inégalité de Bell peut être violée et cela confirme la forme théorique intriquée de l'état (2.103).

Un calcul plus complet [78] permet d'évaluer la corrélation anormale normalisée lorsque  $n(q_1) = n(q_{1'}) = n$  à  $n(1+n)$ . Notre résultat approche cette solution lorsque  $n \ll 1$  ce qui est cohérent avec notre hypothèse  $KT \ll 1$ .

Notez que si, au contraire, la source émettait un mélange statistique de paires de modes alors la corrélation anormale serait bien nulle.

## 2.6 Dispositif expérimental et résultats

Dans cette partie nous décrirons le dispositif expérimental, les méthodes de réglages et les résultats de l'implémentation de la méthode de création de paire par instabilités dynamiques.

Comme décrit au 2.3.1.5, à l'extinction du réseau de création de paire les quasi-impulsions sont traduites en impulsion dans le référentiel du laboratoire. Ces dernières sont ensuite mesurées grâce à une mesure électronique après temps de vol, voir 1.3.2.1. Ainsi dans la suite l'analyse est toujours faite dans l'espace des impulsions. L'unité de mesure de l'impulsion est  $k_{rec}$ , l'impulsion de recul. Cette dernière est très proche de  $k_{res}$  ( $= 1.01 k_{rec}$ ) utilisée dans la partie théorique précédente, voir résumés en annexe A et B.



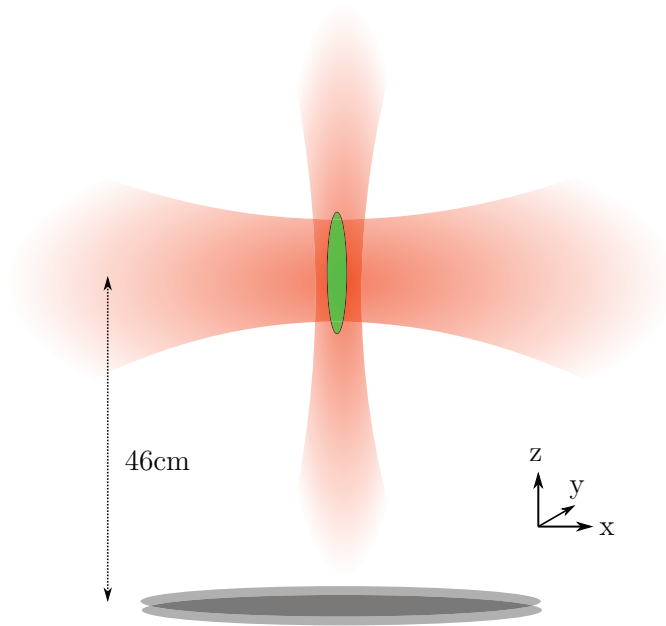


FIGURE 2.13 – Condensat dans le piège optique final. Le condensat a la forme d’un cigare le long de la verticale  $z$ . Le détecteur à micro-canaux est placé 46cm plus bas.

### 2.6.1 Condensat dans un piège optique

L’élément de départ pour la création de paire est le condensat de Bose-Einstein. Celui-ci est produit dans notre expérience à la suite de multiples étapes conventionnelles de refroidissement : mélasse transverse, ralentisseur Zeeman, piège magnéto-optique, refroidissement Doppler, évaporation radio-fréquence et finalement évaporation dans un piège optique. Ces étapes sont décrites de manière exhaustive dans plusieurs manuscrits de thèses [49] [50] [41] et ne seront pas détaillées ici. Au final, après un cycle d’environ 30 secondes un condensat quasi-pur (de fraction condensée de plus de 95%) de  $4 - 7 \cdot 10^4$  atomes d’Hélium métastable est formé<sup>[16]</sup>. La température de la fraction thermique résiduelle est évaluée à 300 nK.

Le piège optique final est constitué de deux faisceaux focalisés de longueur d’onde 1550nm<sup>[17]</sup>. Les fréquences de piégeage mesurées sont  $\omega_l = 2\pi \times 170\text{Hz}$  longitudinalement le long de  $z$  et  $\omega_t = 2\pi \times 1150\text{Hz}$  transversalement. Une

---

16. La barre d’erreur sur le nombre d’atome provient de la connaissance approchée de la détectivité  $\eta = 25(5)\%$

17. Sur le rouge des transitions les plus proches à 1083nm, voir Annexe A. Les atomes sont attirés par force dipolaire au maximum d’intensité des faisceaux (2.19).

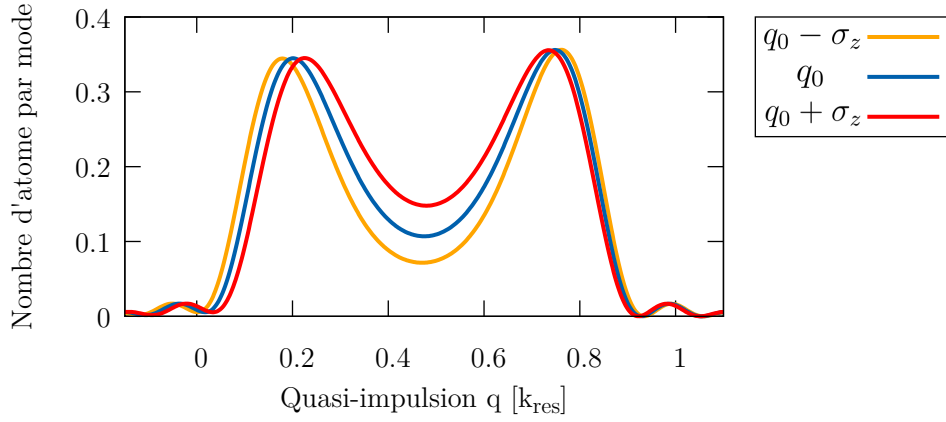


FIGURE 2.14 – Effet de la fluctuation de la vitesse initiale du condensat. Le profil de densité théorique est représentée pour trois quasi-impulsions :  $q_0 - \sigma_z$ ,  $q_0$  et  $q_0 + \sigma_z$  avec  $q_0 = -0.55 k_{res}$  et  $\sigma_z = 5.0 \cdot 10^{-3} k_{res}$ .

description plus complète du piège peut être trouvée dans [41]. Sur la figure 2.13 sont représentés le condensat d’atomes d’Hélium dans le piège croisé au dessus du détecteur à micro-canaux. Le nuage prend la forme d’un cigare dont les tailles caractéristiques peuvent être calculées dans l’approximation de Thomas-Fermi [44]<sup>18</sup>. Pour les fréquences de piégeage considérées et un nombre d’atome de  $N = 4 - 7 \cdot 10^4$ , le diamètre de Thomas-Fermi longitudinal et transversal sont évalués à  $L_{BEC} = 70(4)\mu\text{m}$  et  $D_{BEC} = 11(1)\mu\text{m}$ <sup>19</sup>.

A chaque cycle expérimental le condensat est créé de nouveau, la dispersion de vitesse initiale de celui-ci doit être la plus fine possible afin d’avoir des conditions initiales d’expérience constantes. Par exemple, comme discuté au 2.5.3, la vitesse initiale du condensat influe sur les vitesses d’émission des paires. Les écarts types de vitesse des condensats produits sont  $\sigma_z = 4.6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$  ( $5.0 \cdot 10^{-3} k_{res}$ , voir Annexe A) longitudinalement et  $\sigma_x = \sigma_y = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$  ( $1.4 \cdot 10^{-2} k_{res}$ ) transversalement.

La fluctuation de vitesse longitudinale mesurée n’implique qu’un déplacement très faible de la relation de conservation de la quasi-impulsion (2.89), ce qui ne cause au coup par coup qu’un léger décalage des maxima de densité, comme représenté sur la figure 2.14. Cette fluctuation peut néanmoins influencer sur les corrélations croisées, ce point est discuté à la section 2.6.6.

18. L’approximation de Thomas-Fermi consiste à négliger l’énergie cinétique devant l’énergie potentielle de piégeage. C’est une bonne approximation lorsque le nombre d’atome est grand.

19. Les barres d’erreur sur le diamètre et la longueur du condensat proviennent de notre connaissance approchée de la détectivité.

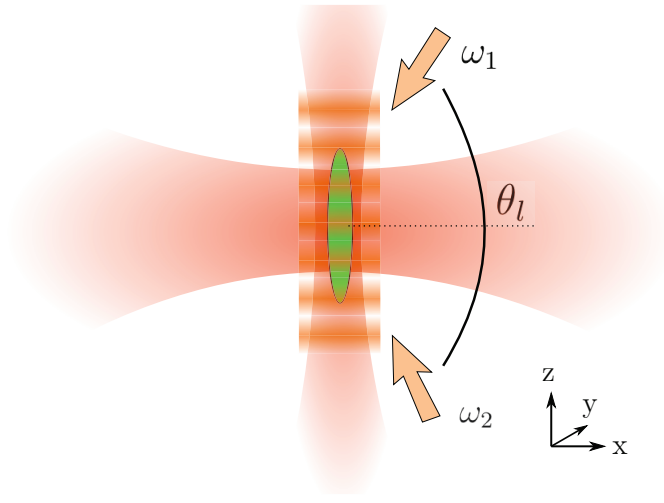


FIGURE 2.15 – Réseau de création de paire. Un réseau optique vertical en mouvement est formé sur les atomes piégés. Les deux faisceaux proviennent d’un même laser à 1064 nm décalé l’un par rapport à l’autre d’environ 100 kHz par des éléments acousto-optiques.

La fluctuation de vitesse dans le plan  $0_{xy}$  est faible devant toutes les tailles caractéristiques des densités et de corrélations mesurées dans ce plan dans la suite. Il semble que cette fluctuation soit assez bien contrôlée pour n’avoir aucun d’impact sur l’expérience.

## 2.6.2 Réseau optique

Le réseau optique dans lequel est chargé le condensat afin de déclencher le processus de création de paires est constitué de deux faisceaux provenant d’un même laser à 1064 nm (Fig. 2.15). Chaque faisceau est décalé en fréquence par un modulateur acousto-optique. Lorsque le décalage n’est pas le même pour les deux bras le réseau est alors en mouvement dans le référentiel du laboratoire et sa vitesse est donnée par l’équation (2.18). Sur l’expérience la différence de fréquence est de 105 kHz ce qui correspond à une vitesse de  $0.6 k_{rec}$ . L’angle entre les faisceaux est de  $\theta_l = 166^\circ$  et le réseau final est aligné sur la vertical  $z$  (Résumé en Annexe B).

L’alignement des deux faisceaux sur les atomes est réalisé en créant un trou dans la distribution transverse du condensat. En effet, la longueur d’onde des faisceaux lasers est de 1064 nm ce qui est sur le bleu des plus proches transitions (à 1083 nm, voir Annexe A) et cela crée une force dipolaire qui repousse les atomes. En allumant un des faisceaux pendant la chute du condensat il déforme sa distribution qui manifeste alors un trou dans le plan trans-

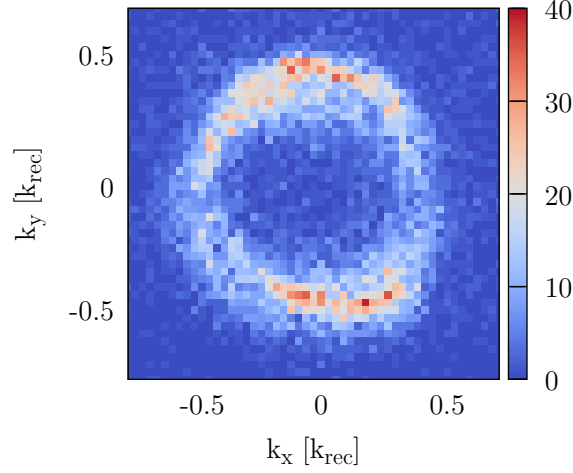


FIGURE 2.16 – Distribution de vitesse transverse des atomes après avoir interagi avec le faisceau supérieur pendant 20 ms. L’alignement du faisceau est réalisé en cherchant une distribution homogène et symétrique des atomes sur le cercle ainsi formé.

verse en impulsion. Une telle mesure est représentée sur la figure 2.16. En cherchant une distribution uniforme du cercle atomique après application du faisceau, on optimise alors son alignement. On procède indépendamment pour les deux faisceaux.

La profondeur du réseau est évaluée par oscillation de Rabi à deux photons par transition de Bragg (Cet effet est décrit au chapitre 3). En appliquant une différence de fréquence  $\Delta\omega$  entre les deux composantes laser telle que  $\Delta\omega = \hbar(2k_{res})^2/2m$  on couple de manière résonnante les états d’impulsion  $|k_i = 0\rangle$  et  $|2\hbar k_{res}\rangle$  du condensat (avec  $k_{res} = 1.01 \times k_{rec}$ , voir Annexe B). On observe alors une oscillation de la probabilité de transfert du condensat vers  $|2\hbar k_{res}\rangle$  en fonction de la durée d’application du réseau. Finalement la fréquence mesurée permet de remonter à la profondeur du réseau [41].

La distribution des atomes après interaction avec le réseau est représentée sur la figure 2.17, les deux tâches correspondent aux atomes restants du condensat à  $k_z = 0$  et aux atomes diffractés par le réseau à  $2\hbar k_{res}$ . La probabilité de diffraction du condensat en fonction de la durée d’application du réseau est également représentée. Dans l’exemple de la figure 2.14, la puissance des faisceaux est de 144 mW chacun et la pulsation mesurée de l’oscillation est  $\Omega = 2\pi \times 22.2(2)\text{kHz}$  ce qui correspond à une profondeur de réseau de  $V_0 = 2\hbar\Omega = 1.04 E_{rec}$  (Annexe A). A partir de cette calibration on connaît toute profondeur de réseau par règle de trois avec la puissance des lasers [41]. Les expériences du chapitre 4 et 5 de ce manuscrit ont été

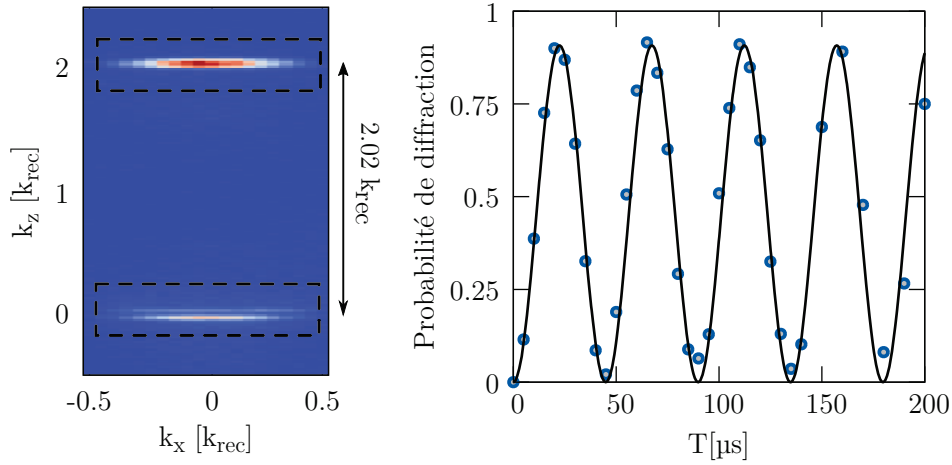


FIGURE 2.17 – Diffraction de Bragg avec le réseau de création de paire. A gauche, condensat et fraction diffractée représentée dans le plan  $k_{x,z}$ , cette image permet de vérifier la valeur théorique de l’incrément d’impulsion  $2k_{res} = 2.02 \times k_{rec}$  (Annexe B) ainsi que l’alignement du réseau sur la verticale. A droite, oscillation de la fraction diffractée à  $2k_{res}$  en fonction de la durée du réseau. La fréquence ajustée des oscillations donne 22.2(2)kHz ce qui correspond à une profondeur de réseau de  $1.04 E_{rec}$ .

réalisées avec une profondeur de  $0.45 E_{rec}$ .

### 2.6.3 Protocole de création de paires

Pour déclencher le processus de création de paires atomiques le condensat doit être chargé dans la bande fondamentale du réseau optique décrit dans la partie précédente. La projection de sa fonction d’onde sur les bandes d’énergie du réseau doit alors être intégralement dans la bande fondamentale. Cette condition est vérifiée si le chargement est adiabatique (voir [79]). Théoriquement on montre [41] que la durée d’allumage du réseau doit être grande devant  $\cong 5 \mu\text{s}$ <sup>20</sup>. Expérimentalement plusieurs pentes d’allumage et d’extinction sont essayées jusqu’à n’avoir aucun atome du condensat diffracté aux impulsions  $\pm 2k_{res}$  signe que le chargement est bien adiabatique.

Ainsi, l’allumage et l’extinction du réseau sont réalisés en  $100 \mu\text{s}$  environ et le réseau est typiquement maintenu à profondeur constante pendant  $550 \mu\text{s}$ , comme représenté sur la figure 2.18. La différence de fréquence entre les deux bras du réseau est maintenue à 105 kHz, ce qui correspond à une

20. Dans les conditions d’utilisations habituelles la vitesse du réseau est de  $v_{res} = 0.6 k_{rec}$  et  $V_0 = 0.45 E_{rec}$

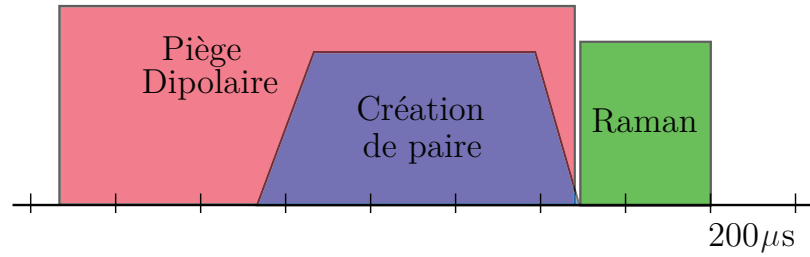


FIGURE 2.18 – Protocole expérimentale de la création de paires atomique (figure à l'échelle). Après évaporation dans le piège optique, le condensat est chargé dans le réseau optique pour déclencher le processus d'émission de paires. Le réseau et le piège optique sont ensuite coupé simultanément et les atomes transféré dans un état insensible aux champs magnétiques par transition Raman.

vitesse du réseau de  $0.6 k_{rec}$  (2.18). Le piège optique est coupé dès que le réseau est éteint et s'en suit immédiatement un transfert Raman de  $300 \mu s$  qui permet de transférer les atomes dans l'état  $2^3S_1 m_j = 0$  insensible aux champs magnétiques résiduels. Le temps de vol est finalement d'environ  $300$  ms jusqu'au détecteur à micro-canaux.

### 2.6.4 Densité

Après une chute libre de  $46$  cm les atomes atteignent le détecteur à micro-canaux ce qui permet de reconstruire leur impulsion initiale en trois dimensions (voir 1.3.2.1). Sur la figure 2.19<sup>21</sup> sont représentés une coupe de la densité atomique dans le plan  $0_{kyz}$  ainsi que la densité sur l'axe  $z$ . La distribution atomique est symétrique par rotation autour de l'axe  $k_x = k_y = 0$  et forme deux sur-densités au niveau de  $k_z = 0.75$  et  $1.3 k_{rec}$ . L'asymétrie observée sur le nombre d'atome des deux sur-densités semble provenir de pertes dépendant de l'impulsion dans le système lors de la phase de séparation avec le condensat. L'origine physique de ces pertes est pour l'instant inconnue.

Sur la figure 2.19 est aussi représenté un ajustement du profil de densité sur l'axe  $z$  à partir du développement théorique des sections 2.2-5. On suppose ici que les zones d'intégration de diamètre et longueur  $[0.042, 0.028]k_{rec}^2$  sont proches de la taille d'un mode, cet ordre de grandeur est appuyé par plusieurs mesures dans la suite.

Les paramètres de la modélisation sont :

---

21. Attention, la densité représentée est mesurée après l'application d'un miroir (voir chapitre 3).

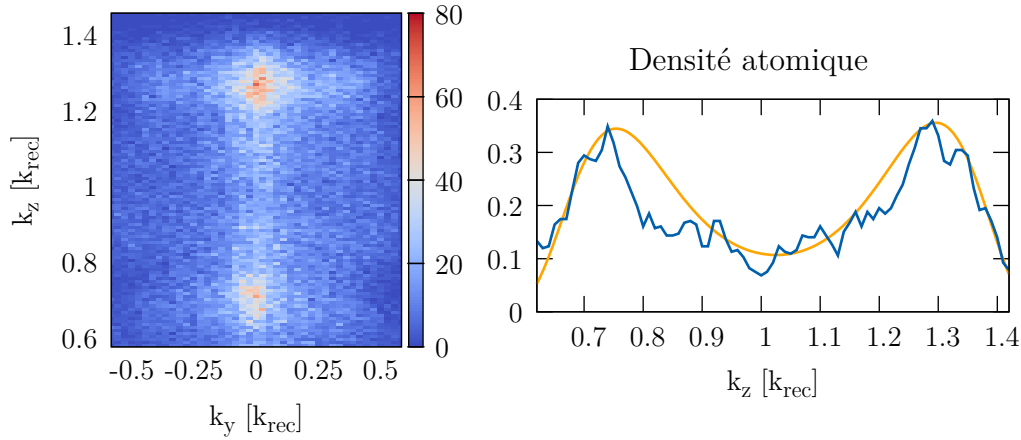


FIGURE 2.19 – Densité atomique. A gauche : densité dans le plan  $0_{k_{yz}}$ . Les zones d'intégrations sont des pavés de côtés  $[0.1, 0.027, 0.008]k_{rec}^3$ . A droite : densité sur l'axe vertical  $z$  et ajustement à la théorie (voir texte). Les zones d'intégrations sont cylindriques centrées sur l'axe  $k_x = k_y = 0$  et de diamètre et longueur égaux à  $[0.042, 0.028]k_{rec}^2$ .

- La longueur du condensat choisie à  $70 \mu\text{m}$ . Cette valeur provient du modèle Thomas-Fermi et des mesures des fréquences de piégeage (2.6.1).
- Le temps d'interaction avec le réseau (Fig. 2.18) égal à  $590 \mu\text{s}$ . L'allumage et l'extinction du réseau n'étant pas abrupte ( $\cong 100 \mu\text{s}$ ) on considère une durée effective légèrement plus longue que la durée à profondeur maximale égale à  $550 \mu\text{s}$ .

Puis, les paramètres ajustés sont :

- Le gain du processus proportionnel à la densité du condensat ajusté ici à  $gn_0 = 0.0245 E_{rec}$ . Cette valeur est proche de l'ordre de grandeur attendu sur l'expérience lorsque l'on considère les diamètres Thomas-Fermi de la section (2.6.1) et que l'on calcule la densité moyenne par l'équation  $n_0 = N/(L_{BEC} \times D_{BEC}^2) = 0.033(3) E_{rec}$ . La différence peut provenir du fait que le condensat n'est en fait pas parfaitement uniforme ni à une dimension comme cela est supposé dans la partie théorique.
- La vitesse du réseau est ajustée à  $0.56 k_{rec}$ . Expérimentalement elle est connue par la différence de fréquence appliquée entre les bras du réseau et est proche de  $0.6 k_{rec}$  (2.18). Cette différence pourrait provenir du fait que le condensat possède une légère vitesse initiale ( $3.7 \text{ mm/s}$ ) reproductible produit par la fin de l'évaporation. D'autres mesures sont nécessaire pour clarifier ce point.

- Le résultat de la simulation est aussi décalé de  $0.03 k_{rec}$  afin d'être ajusté à l'expérience. La cause de ce léger décalage de l'impulsion moyenne d'émission n'a pas été identifiée.

Finalement, bien que la courbe expérimentale ne puisse pas être ajustée parfaitement par le modèle il semble que la modélisation décrite dans ce manuscrit capture les aspects principaux du profil de densité, en particulier la présence d'atome entre les sur-densités.

### 2.6.5 Distribution

Dans la section 2.4.4 la distribution du nombre d'atomes attendue dans le cas du modèle simple d'émission à deux modes a été dérivée. La probabilité d'émettre  $k$  atomes dans un mode est :  $P(k) = \tanh^{2k}(\kappa t) / \cosh^2(\kappa t)$  avec un nombre moyen d'atomes émis égal à :  $\bar{n} = \sinh^2(\kappa t)$ . Sur l'expérience on peut placer une zone d'intégration sur un maximum de densité et mesurer la distribution du nombre d'atomes en faisant évoluer sa taille. En comparant la distribution mesurée à la distribution attendue on va pouvoir ainsi donner l'ordre de grandeur de la taille d'une mode. Les mesures de ces distributions sont représentées sur la figure 2.20 pour trois zones d'intégrations différentes.

Afin de confronter les résultats avec la distribution attendue on doit prendre en compte la détectivité de la galette à micro-canaux. En effet, par exemple, la détection de deux atomes peut provenir d'une réalisation pour laquelle plus de deux atomes ont été émis mais seulement deux détectés. Avec  $\eta$  la détectivité la distribution du nombre d'atomes par mode devient :

$$P_\eta(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} \eta^n (1-\eta)^{k-n} P(k) \quad (2.107)$$

Le nombre moyen d'atomes détectés devient quand à lui  $\bar{n}_\eta = \eta \times \bar{n}$ . Ainsi, la mesure de  $\bar{n}_\eta$ , permet de calculer  $\bar{n}$ , qui permet à son tour de calculer  $P(n)$ , et finalement  $P_\eta(n)$ . Sur la figure 2.20 les lignes bleues représente cette distribution avec  $\eta = 25\%$ .

Ensuite, pour donner la tendance de la distribution lorsqu'une zone d'intégration englobe plus d'un mode, on calcul la distribution  $P_{2\eta}$  attendue pour deux modes indépendant émettant chacun  $\bar{n}_2 = \bar{n}/2$  :

$$P_{2\eta}(n) = \sum_{k=n}^{\infty} P_\eta(k) P_\eta(n-k) \quad (2.108)$$



$P_{2\eta}(n)$  produit le même nombre moyen d'atomes détectés ( $2\eta \times \bar{n}_2 = \eta \times \bar{n}$ ) que  $P_\eta(n)$  mais une distribution légèrement différente. Cette dernière est représentée sur la figure 2.20 par les lignes rouges.

La figure 2.20 permet de vérifier que le modèle simple fonctionne effectivement lorsque la zone d'intégration est petite ici de l'ordre de  $[0.03, 0.05]k_{rec}$ . Pour des zones d'intégration plus grandes la distribution mesurée s'écarte de la modélisation à un mode (2.107) et s'approche du modèle pour lequel deux modes indépendants émettent dans la même zone (2.108). Expérimentalement on peut même atteindre des tailles de zones d'intégration pour lesquels aucun des deux modèles précédents ne concorde avec les données.

Afin d'être plus quantitatif sur les tailles de zone d'intégration de transition entre le régime à un et deux modes, on définit les fonctions d'erreur des modèles par les deux formules suivantes :

$$F_\eta = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \frac{|P_m(k) - P_\eta(k)|}{P_m(k)}, \quad F_{2\eta} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \frac{|P_m(k) - P_{2\eta}(k)|}{P_m(k)} \quad (2.109)$$

avec  $P_m$  les probabilités mesurées et  $N$  le nombre de probabilités accessibles expérimentalement (à cause du temps d'acquisition finit on ne détecte par exemple jamais 10 atomes dans une zone d'intégration car cela est trop peu probable).

L'évolution de ces erreurs est représentée sur la figure 2.21 en fonction des tailles de zone d'intégration. Les fonctions d'erreur des modèles se croisent pour un diamètre de zone d'intégration de  $0.07 k_{rec}$  et une longueur de  $0.045 k_{rec}$ . Finalement, la taille d'un mode est évalué grossièrement à la moitié de ces tailles de transition soit un diamètre et une longueur de  $0.035$  et  $0.025 k_{rec}$  respectivement.

## 2.6.6 Corrélations

Dans cette section, on s'intéresse particulièrement aux corrélations que manifeste la source. Dans un premier temps les corrélations locales seront étudiées puis on formera des cartes de corrélations mettant en avant les corrélations croisées.

### 2.6.6.1 Corrélations locales

Théoriquement on a montré que la source manifeste des corrélations locales, c'est à dire que l'émission d'un atome dans un mode est corrélé avec l'émission d'un autre atome dans ce même mode. La valeur maximale de

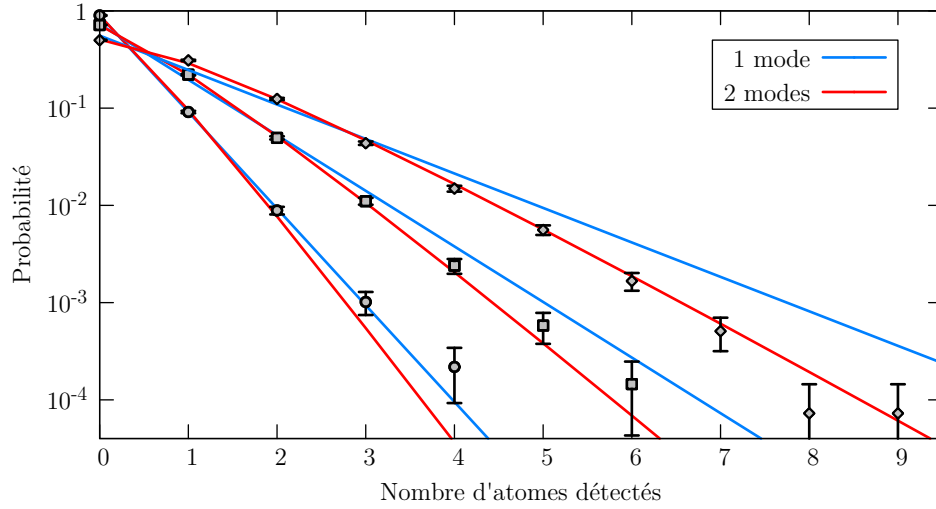


FIGURE 2.20 – Distribution du nombre d’atomes dans une zone d’intégration cylindrique de diamètre et longueur  $[0.03, 0.05]k_{rec} \times n, n \in [1, 3]$ , de gauche à droite sur le graphe. Pour la première zone d’intégration ( $n = 1$ ) le modèle à un mode (2.107) décrit bien la distribution, ensuite pour des zones d’intégration plus grandes ( $n = 2, 3$ ) la distribution approche la modélisation à deux modes indépendants (2.108).

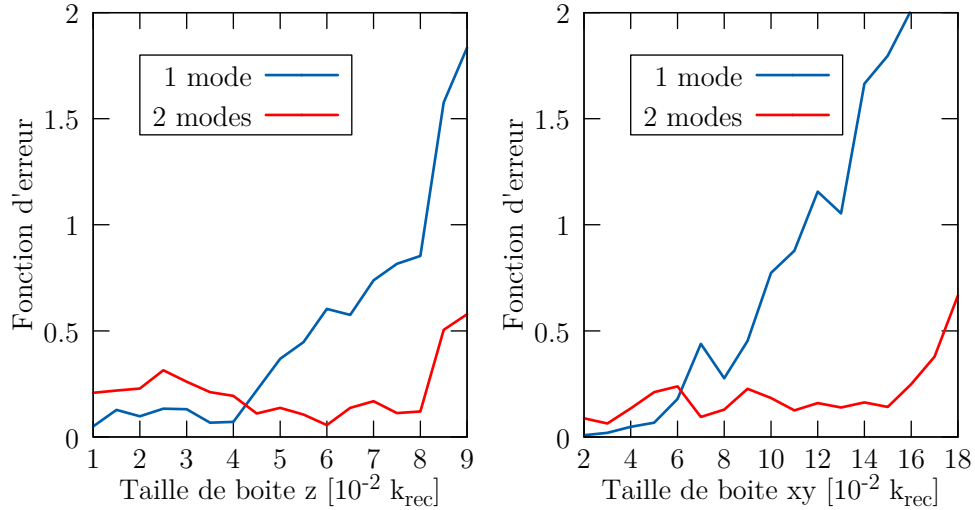


FIGURE 2.21 – Fonction d’erreur des modèles à un (bleu) et deux (rouge) modes. A gauche, la diamètre de la zone d’intégration est constante égale à  $0.05 k_{rec}$  et sa longueur est variée. A droite, la longueur de la zone d’intégration est constante égale à  $0.035 k_{rec}$  et son diamètre est varié.

cette corrélation est 2 (2.59) et l'équation (2.96) donne sa forme pour un écart d'impulsion longitudinal  $dk_z : \forall k, g^{(2)}(k, k + dk_z) = 1 + \text{sinc}[dk_z L/2]$ . La largeur en impulsion de la corrélation locale est seulement proportionnelle à l'inverse de la taille de la source  $L$  ce qui va nous permettre de réaliser une mesure indirecte de la taille du condensat.

Expérimentalement la source manifeste aussi une structure transverse (Fig. 2.19), on peut alors généraliser la forme de la corrélation locale à trois dimensions :  $g^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k})$  ce qui permet de lier également la largeur de corrélation locale transverse au diamètre du condensat.

Pour mesurer la corrélation locale avec une statistique suffisante, on utilise le fait qu'elle est indépendante de l'impulsion de référence  $\mathbf{k}$  considérée et on l'intègre sur tout le nuage atomique composant les paires pour un écart  $d\mathbf{k}$  particulier. On enregistre donc environ 5000 réalisations d'émission ( $\cong 140$  atomes émis à chaque fois), on compte le nombre de couples d'atomes écartés en impulsion de  $|d\mathbf{k}|$  pour former la probabilité que deux atomes soient émis lors d'une réalisation avec une différence d'impulsion  $|d\mathbf{k}| : P_{corr}^{(2)}(|d\mathbf{k}|)$ . Puis les 5000 réalisations sont mélangées pour former une réalisation moyenne pour laquelle les corrélations entre atomes sont diluées, puis on calcule de nouveau la probabilité précédente :  $P_{decorr}^{(2)}(|d\mathbf{k}|)$ , correspondant donc à une expérience sans corrélations. Finalement, le rapport des deux probabilités donne la corrélation normalisée intégrée :  $g_{int}^{(2)}(|d\mathbf{k}|)$ .

Sur la figure 2.22 sont représentées les projections sur les axes  $dk_{x,y,z}$  de la fonction de corrélation locale intégrée :  $g_{int}^{(2)}(|dk_x|, |dk_y| < \Delta k_y, |dk_z| < \Delta k_z)$ ,  $g_{int}^{(2)}(|dk_x| < \Delta k_x, |dk_y|, |dk_z| < \Delta k_z)$  et  $g_{int}^{(2)}(|dk_x| < \Delta k_x, |dk_y| < \Delta k_y, |dk_z|)$ , avec  $\Delta k_x = \Delta k_y = 0.03k_{rec}$  et  $\Delta k_z = 0.075k_{rec}$  choisis plus petits que les tailles caractéristiques de corrélation sur chaque axe (ceci est vérifié a posteriori sur les graphes, zones rouges sur Fig. 2.22). Les trois fonctions sont piquées pour  $|dk|$  tendant vers zéro confirmant la présence de corrélation locale sur l'expérience. L'amplitude maximale de la corrélation s'approche de la valeur théorique de 2, l'écart pouvant être imputé aux paramètres  $\Delta k_{x,y,z}$  non parfaitement négligeable devant les tailles caractéristiques de corrélation.

Les courbes expérimentales sont ensuite ajustées avec la fonction  $g^{(2)}(dk_i) = 1 + A \times \text{sinc}[dk_i L_i/2]$  (généralisée aux trois dimensions), ce qui permet de mesurer à travers les corrélations les dimensions du nuage initial, les valeurs trouvées sont présentées dans le tableau de la figure 2.22. La fonction d'ajustement utilise la forme théorique (2.96) qui suppose que le condensat initial est uniforme de taille finie, bien que l'on sache que cette description n'est pas exacte les valeurs extraites des ajustements permettent de confirmer l'anisotropie attendue du condensat qui est allongé le long de la vertical et l'ordre de grandeur des dimensions Thomas-Fermi théoriques du conden-

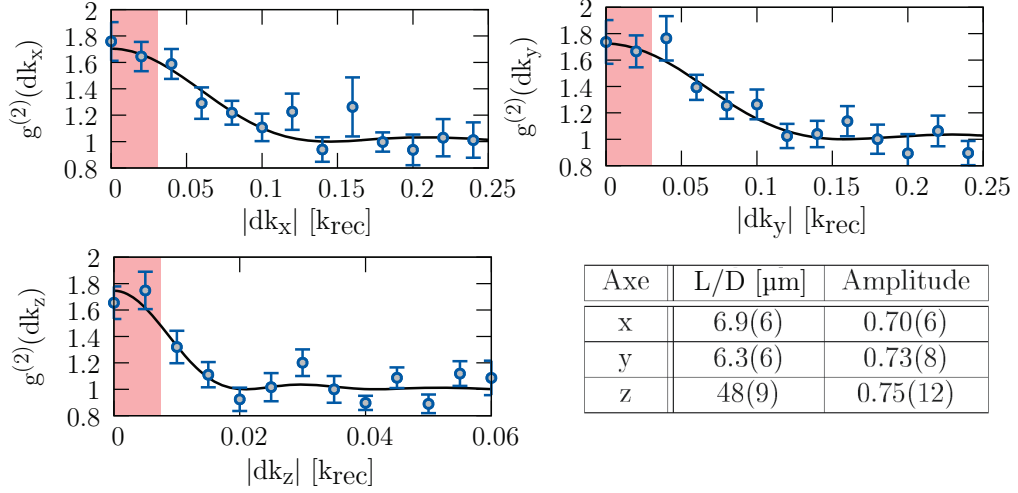


FIGURE 2.22 – Corrélation locale intégrée sur tout le nuage  $g_{int}^{(2)}(|d\mathbf{k}|)$  et projetée sur les axes  $dk_{x,y,z}$ . Les trois fonctions représentées sont  $g_{int}^{(2)}(|dk_x|, |dk_y| < \Delta k_y, |dk_z| < \Delta k_z)$ ,  $g_{int}^{(2)}(|dk_x| < \Delta k_x, |dk_y|, |dk_z| < \Delta k_z)$  et  $g_{int}^{(2)}(|dk_x| < \Delta k_x, |dk_y| < \Delta k_y, |dk_z|)$ , avec  $\Delta k_x = \Delta k_y = 0.03k_{rec}$  et  $\Delta k_z = 0.075k_{rec}$ . Les zones d'intégrations  $\Delta k_{x,y,z}$  sont représentées en rouge sur les graphes. Les courbes sont ajustées avec une fonction :  $1 + A \text{sinc}[dkL/2]$ , où  $A$  et  $L$  sont variés, les résultats sont présentés dans le tableau.

sat  $L_{BEC} = 70(4) \mu\text{m}$  et  $D_{BEC} = 11(1) \mu\text{m}$ . En fait sachant que les paires ont une plus grande probabilité d'être émises à partir du centre du condensat car la densité  $y$  est plus importante, il n'est pas surprenant de trouver des dimensions effectives plus faibles. Les valeurs trouvées sont même très proches des diamètres à mi-hauteur des fonctions d'onde calculées à partir de l'approximation Thomas-Fermi :  $L_{mh} = 49(3) \mu\text{m}$  et  $D_{mh} = 8(1) \mu\text{m}$ .

Au final la source manifeste donc des corrélations locales en accord avec la modélisation décrite dans ce manuscrit et de la taille supposée du condensat.

Concernant les corrélations croisées, c'est à dire les corrélations entre atomes provenant des deux sur-densités, expérimentalement il s'est avéré plus difficile de mettre en place une méthode similaire d'intégration sur le nuage<sup>[22]</sup>. La première cause peut être la sensibilité de la corrélation croisée aux fluctuations de vitesse longitudinale du condensat, en effet comme le montre l'équation (2.97) une fluctuation de  $\sigma_z$  de la quasi-impulsion du condensat implique un décalage de  $2\sigma_z$  de celle-ci. Au final pour la fluctuation mesurée de la quasi-impulsion du condensat d'écart type  $\sigma_z = 0.005 k_{rec}$

22. Certains signaux ont quand même pu être mesurés, voir [41]

et en considérant qu'elle devrait être de même largeur que la corrélation locale mesurée sur la figure 2.22, on s'attend à une réduction d'amplitude de la corrélation croisée d'environ de moitié. La seconde cause provient sûrement des propriétés non triviales des corrélations transverses. Comme on ne sait pas comment sont émis les atomes hors de l'axe  $k_x = k_y = 0$  on ne peut réaliser une intégration comme pour les corrélations locales.

### 2.6.6.2 Cartes de corrélation

Dans cette partie des cartes de corrélation vont être formées, à la manière de la partie théorique 2.5.4, afin de visualiser quelles impulsions sont corrélées entre elles.

L'étude est restreinte à l'axe  $k_x = k_y = 0$ . Deux zones d'intégrations cylindriques sont alignées sur l'axe  $z$  afin de calculer la corrélation  $g^{(2)}(k_{z1}, k_{z2})$  entre les deux impulsions  $k_{z1}$  et  $k_{z2}$ . Puis les positions verticales des deux zones sont ensuite balayées pour former une carte. Lorsque  $k_{z1} \cong k_{z2} \cong 0.75 k_{rec}$  ou  $1.3 k_{rec}$  c'est les corrélations locales que l'on examine (deux premiers graphes de la figure 2.23) et lorsque  $k_{z1} \cong 0.75 k_{rec}$  et  $k_{z2} \cong 1.3 k_{rec}$  c'est les corrélations croisées qui sont étudiées (dernier graphes de la figure 2.23).

Afin d'atteindre une statistique suffisante sur les cartes, les zones d'intégration sont prises plus grandes que la taille d'un mode : diamètre  $0.35 k_{rec}$  et longueur  $0.03 k_{rec}$ . A cause de cette intégration l'amplitude des corrélations observées va décroître. Pour les corrélations locales on peut évaluer le facteur de diminution en formant le rapport entre le volume des corrélations mesuré sur la figure 2.22 :  $V_C \cong 4/3\pi \times 0.16 \times 0.02$  et le volume d'intégration  $V_{int} = \pi \times 0.35^2 \times 0.03$ . L'amplitude maximale des corrélations locales est donc attendue à  $1 + V_C/V_{int} = 1.19$  environ, c'est effectivement ce qui est mesuré sur les cartes de la figure 2.23. Un effet similaire est envisagé pour les corrélations croisées. Il reste cependant surprenant de mesurer une amplitude de corrélation croisée plus faible que celle des corrélations locales car théoriquement elles doivent toujours être supérieur (2.59-60). Comme cela est décrit au 2.6.6.1 cet effet pourrait provenir en partie des fluctuations de vitesse initiale du condensat qui baisse l'amplitude de corrélation.

Contrairement à la partie théorique 2.5.4 pour laquelle les corrélations sont représentées non normalisées on mesure ici seulement les corrélations normalisées. En effet comme les corrélations observées ont une amplitude assez faibles on ne peut les déceler sur les graphes non normalisés à cause du fond dû à la densité.

La figure 2.23 confirme la présence de corrélations croisées entre les deux sur-densités atomiques à  $0.75$  et  $1.3 k_{rec}$ . La corrélation croisée est alignée sur la ligne  $k_{z2} + k_{z1} = 2.05 k_{rec}$ , cette relation reflète la conservation de la

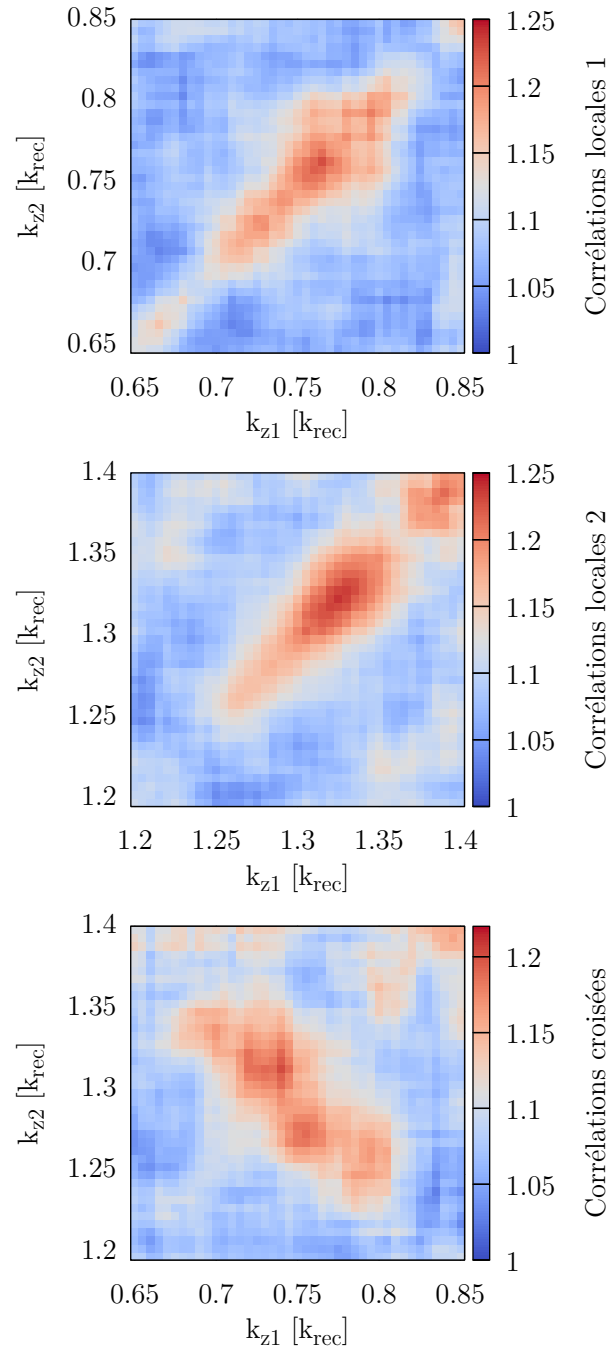


FIGURE 2.23 – Corrélations locales et croisée  $g^{(2)}(k_{z1}, k_{z2})$  mesurées entre les deux sur-densités selon l'axe  $z$ . Les zones d'intégration utilisées sont cylindriques de diamètre et longueur  $0.35$  et  $0.03 k_{rec}$ . Attention : le pas échantillonnage sur les cartes est de  $0.005 k_{rec}$  ce qui est plus petit que la longueur de la zone d'intégration, il y a donc l'équivalent d'une moyenne glissante sur les figures.

quasi-impulsion pendant le processus traduite en impulsion après l'extinction du réseau. Notez cependant que l'on attend théoriquement  $k_{z2}+k_{z1} = 2 k_{res} = 2.02 k_{rec}$  ce qui est légèrement différent. L'origine de cette différence n'est pour l'instant pas connue.

La forme allongée des corrélations confirme également l'aspect multi-mode de l'émission des paires comme décrit aux sections 2.5.6-7. On ne peut pas mesurer directement sur la carte le nombre de mode émis par la source car les largeurs sont lissées par la zone d'intégration. Cependant en définissant la taille d'un mode selon  $z$  à  $0.02 k_{rec}$  grâce à la mesure de corrélation locale de la figure 2.22 et en évaluant la taille des densités à  $0.1 k_{rec}$  cela donne une émission d'environ 5 modes indépendants par pic de densité. Comme sur la figure 2.11, les atomes sur les bords externes des densités sont émis par paires et de même pour les bords internes et en tout 5 émetteurs indépendants peuvent être définis. Ce résultat est légèrement inférieur à la prédiction théorique de 9 de la partie 2.5.6 principalement car la taille de mode mesurée est plus grande que prévue.

Au final, ces cartes ne permettent pas une comparaison quantitative avec les résultats théoriques mais confirme les remarques générales de la partie théorique sur l'émission de paire avec la méthode d'instabilité dynamique.

## 2.7 Conclusion

En résumé, nous avons présenté dans le second chapitre de ce manuscrit premièrement une modélisation approchée du processus de création de paires atomiques par instabilité dynamique. Cela nous a permis de mettre en avant l'aspect multi-mode et potentiellement intriquée de l'émission. Ensuite la réalisation expérimentale a été décrite et les résultats expérimentaux commentés. Bien que nos mesures manquent de statistique la modélisation présentée dans ce manuscrit s'accorde relativement bien aux mesures.

Au chapitre suivant la manipulation des paires par transition à deux photons est discutée. Cette étape est cruciale pour pouvoir former des interféromètres qui sont requis pour les expériences type Hong-ou-mandel et inégalités de Bell.

— Résumé Chapitre 2 —

- La présence d'un réseau optique en mouvement au niveau du condensat peut déclencher l'émission de paires atomiques.
- Le processus d'émission d'une paire à partir du condensat doit conserver énergie et quasi-impulsion. Avec les paramètres typiques de l'expérience la quasi-impulsion est rigoureusement conservée mais pas l'énergie. Il en découle théoriquement une émission multi-mode de la forme :

$$|\psi\rangle \cong |0\rangle + \sum_k \alpha(k) |k, -k\rangle$$

- L'émission peut être décrite d'une manière approchée avec un modèle analytique présenté dans ce chapitre. Les résultats sont en relatif accord avec les mesures expérimentales.
- Le nombre de paires de modes émis par la source est d'environ 5.



# Chapitre 3

## Miroir et Séparatrice à Atomes

Les expériences d'optique atomique quantique discutées au chapitre 1 nécessitent la mise en place de schémas interférométriques. C'est pourquoi, dans ce chapitre, la réalisation d'analogues atomiques de miroirs et séparatrices sera discutée. En prévision de l'expérience traitée au chapitre 5 de ce manuscrit, une attention particulière sera portée aux déphasages que peuvent subir les ondes atomiques.

Une onde de matière comme le condensat ou les paires atomiques décrites au chapitre 2 peut diffracter sur un réseau optique formé par deux lasers contra-propageant et ainsi voir son impulsion s'accroître ou diminuer sans changer d'état interne. C'est une transition cohérente à deux photons entre deux états d'impulsion que l'on nomme transition de Bragg ou diffraction Bragg [80, 81], ce processus est décrit en détail dans la suite (3.1).

Le dénomination de ce phénomène provient de l'analogie qu'il est possible de réaliser entre celui-ci et les miroirs de Bragg en optique conçus par William Lawrence Bragg au début du vingtième siècle [82]. En effet, un réseau optique forme un potentiel périodique à la manière des miroirs de Bragg qui sont composés de couches successives de matériaux d'indices différents. Les rôles de la matière et de la lumière étant ici inversés, pour les miroirs de Bragg ce sont les photons qui diffractent sur un élément de matière structurée, alors que pour les transitions de Bragg c'est une onde de matière qui diffracte sur un potentiel de lumière.

Dans un premier temps la modélisation du processus sera discutée puis on présentera la réalisation expérimentale des miroirs et séparatrices à atomes. Finalement la possibilité d'implémentation expérimentale de *pulses* complexes de lumière aux propriétés intéressantes sera discutée.

## 3.1 Modélisation

Dans cette partie, la base théorique des transitions de Bragg est présentée. Un développement analogue peut être trouvé dans la thèse de Valentina Krachmalnicoff [83].

### 3.1.1 Base du problème

Considérons un atome à deux niveaux (fondamental et excité) en espace libre et sans interaction. Son énergie totale est la somme de son énergie interne ( $\hbar\omega_f$  ou  $\hbar\omega_e$ ) et de son énergie cinétique égale à  $\hbar^2 k^2/2m$  où  $\hbar k$  est l'impulsion de l'atome et  $m$  sa masse (Fig. 3.2).

Afin d'accroître ou diminuer l'impulsion de l'atome, il est possible de le soumettre à deux lasers contra-propageant et échanger des impulsions de recul en absorbant et émettant de manière stimulée des photons provenant des lasers (figure 3.1). La transition à deux photons considérée est représentée sur les figures 3.1-2, après absorption d'un photon d'un des lasers et émission stimulée d'un photon dans l'autre laser, l'état initial d'impulsion  $k_i$  est couplé par l'intermédiaire de l'état excité à l'état d'impulsion finale  $k_f$ . Dans ce processus l'état excité n'est pas peuplé car les lasers sont fortement désaccordés de cette transition.

Afin de préciser les conditions de réalisation d'un tel processus considérons la condition de conservation d'énergie de ce dernier. La différence d'énergie des deux photons doit être égale à la différence d'énergie entre les deux états couplés, soit :

$$\hbar(\omega_1 - \omega_2) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_f^2 - k_i^2) \quad (3.1)$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les pulsations des deux lasers et  $\hbar k_i$  et  $\hbar k_f$  sont les impulsions initiale et finale de l'atome.

On considère le cas général où les deux lasers sont écartés d'un angle  $\theta_B$  et forment à leur intersection un réseau optique au niveau des atomes définissant dans la direction  $z$  (voir figure 3.1). Au bout d'un cycle absorption puis émission stimulée l'atome a vu son impulsion changer de deux fois l'impulsion d'un photon projeté le long de l'axe du réseau (axe  $z$  ici). L'incrément d'impulsion est noté  $\hbar\Delta k_B$  et est égal à  $2\hbar k_0 \sin(\theta_B/2)$  avec  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  [1]. Dans la suite seules les projections des impulsions selon l'axe  $z$  sont considérées.

---

1. Bien que les laser aient une fréquence différente on considère qu'ils ont le même vecteur d'onde  $k_0$ , en effet avec les chiffres de l'expérience ( $\Delta f \cong 50\text{kHz}$ ) on a  $(k_1 - k_2)/k_0 = (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0 \cong 10^{-10}$ .

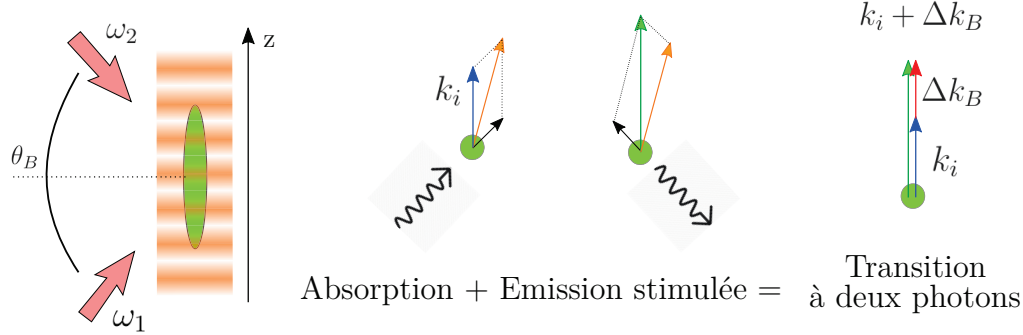


FIGURE 3.1 – Transition de Bragg à deux photons. A gauche : schéma des deux lasers créant un réseau au niveau du nuage atomique. A droite : décomposition de la transition à deux photons. Premièrement l'atome à l'impulsion  $k_i$  (flèche bleue) absorbe un photon du laser à  $\omega_1$  et l'impulsion de ce dernier (flèche noire) vient s'additionner à l'impulsion initiale de l'atome (flèche orange). Puis le photon est ré-émis de manière stimulée dans le laser à  $\omega_2$ , de nouveau une impulsion de recul est additionnée (flèche noire) pour donner l'impulsion finale de l'atome (flèche verte). Finalement après un cycle absorption émission stimulée l'atome a vu son impulsion changer de  $\Delta k_B$  (flèche rouge).

En réinjectant  $\Delta k_B$  dans (3.1), la différence de pulsation souhaitée pour coupler les deux modes d'impulsion  $k_i$  et  $k_i + \Delta k_B$  est :<sup>2]</sup>

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\hbar \Delta k_B^2}{2m} + \frac{\hbar \Delta k_B}{m} k_i \quad (3.2)$$

Ainsi qualitativement il a été montré qu'éclairer un atome avec deux lasers respectant la condition (3.2) permet en principe de coupler de manière résonnante deux modes d'impulsion de ce dernier.

Ici et dans la suite la possibilité d'atteindre les autres états d'impulsion  $k_i + n\Delta k_B$ ,  $n > 1$  et  $< 0$  n'est pas envisagée. Les transitions à deux photons successives ou autre transition à  $n$ -photons menant à la population de ces modes sont non résonnantes si (3.2) est respectée du fait de la relation de dispersion quadratique des atomes (voir Fig. 3.2) et donc leur probabilité est négligée. Cette hypothèse est remplie tant que le couplage effectif  $\Omega_{2ph}$  (calculé plus loin 3.28) entre les états d'impulsion  $k_i$  et  $k_i + \Delta k_B$  est faible devant l'écart à la résonance des transitions adjacentes les plus proches divisé par  $\hbar$ . Les transitions adjacentes les plus proches sont :  $k_i \rightarrow k_i - \Delta k_B$  et

2. On omet les  $\hbar$  pour alléger les notations.

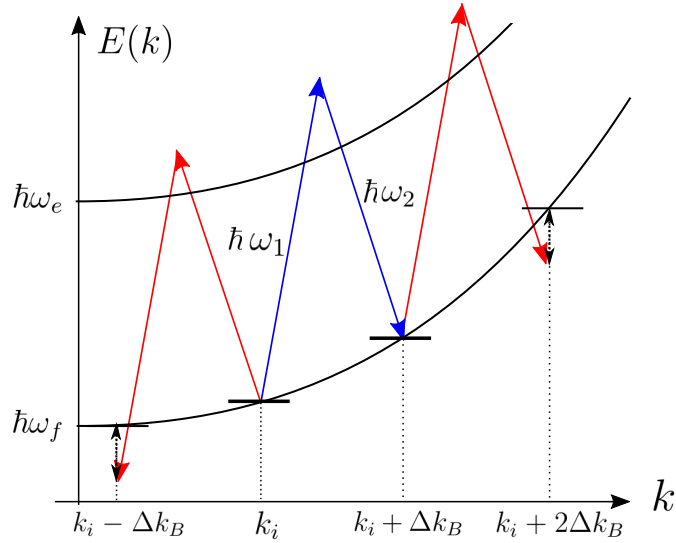


FIGURE 3.2 – Schéma énergétique d’une transition de Bragg à deux photons. Les deux lignes noires correspondent à l’énergie des atomes en fonction de leur impulsion  $k$  pour deux états internes (fondamental et excité) d’énergies  $\hbar\omega_e$  et  $\hbar\omega_f$ . Les états d’impulsion  $k_i$  et  $k_i + \Delta k_B$  de l’état fondamental sont couplés de manière résonnante par le réseau (flèches bleues) par l’intermédiaire de l’état excité. Les états d’impulsion voisins  $k_i - \Delta k_B$  et  $k_i + 2\Delta k_B$  ne peuvent cependant pas être atteints avec des transitions à deux photons (flèches rouges) à cause du désaccord matérialisé par les flèches pointillées.

$k_i + \Delta k_B \rightarrow k_i + 2\Delta k_B$  (flèches rouges sur la figure 3.2). Leur écart à résonance en pulsation est calculé en utilisant (3.2) et la relation de dispersion des atomes, il est égal pour les deux transitions à  $2\hbar\Delta k_B^2/2m = 2\pi \times 26\text{kHz}$  (représenté par les flèches pointillées sur la figure 3.2). Ainsi tant que  $\Omega_{2ph} \ll 2\pi \times 26\text{kHz}$  seuls les deux états d’impulsion  $k_i$  et  $k_i + \Delta k_B$  peuvent être considérés.

Dans la suite, une modélisation de cette transition Bragg est discutée plus en détail.

### 3.1.2 Développement

Le développement théorique suivant va permettre de calculer l’évolution des atomes sous l’influence des deux lasers contra-propageant introduits précédemment. Après avoir écrit l’hamiltonien du système et en avoir déduit son évolution, la possibilité de créer des miroirs et séparatrices à atomes sera discutée.

La base sur laquelle l'état du système peut être décrit est formée de l'état initial dans l'état interne fondamental et à l'impulsion  $k_i$  noté  $|f, k_i\rangle$ , de l'état final noté de la même manière  $|f, k_i + \Delta k_B\rangle$  et également de l'état intermédiaire de transition  $|e, k_i + \Delta k_B/2\rangle$ <sup>3</sup>.

### 3.1.2.1 Hamiltonien du problème

L'hamiltonien total du système est formé de  $\hat{H}_0$  l'hamiltonien sans interaction comprenant l'énergie interne et l'énergie cinétique et  $\hat{H}_I$  l'hamiltonien d'interaction avec le champ électrique des deux lasers :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \quad (3.3)$$

L'hamiltonien sans interaction s'écrit :

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_f |f\rangle \langle f| + \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| + \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \quad (3.4)$$

avec  $\hbar\omega_e - \hbar\omega_f = \hbar\omega_0$  la différence d'énergie entre les états fondamental et excité à impulsion nulle. Dans la base  $[|f, k_i\rangle, |e, k_i + \Delta k_B/2\rangle, |f, k_i + \Delta k_B\rangle]$ ,  $\hat{H}_0$  est diagonale d'énergies propres  $E_1, E_2$  et  $E_3$  telles que :

$$E_1 = \hbar\omega_f + \frac{\hbar k_i^2}{2m} \quad (3.5)$$

$$E_2 = \hbar\omega_e + \frac{\hbar(k_i + \Delta k_B/2)^2}{2m} \quad (3.6)$$

$$E_3 = \hbar\omega_f + \frac{\hbar(k_i + \Delta k_B)^2}{2m} \quad (3.7)$$

Le champ électrique des lasers interagit avec le dipôle de l'atome, l'hamiltonien décrivant cette interaction est [84] :

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{d}}\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.8)$$

avec  $\hat{\mathbf{d}}$  l'élément de dipôle électrique et  $\mathcal{E}$  le champ électrique total des deux lasers. Celui-ci est considéré comme la somme de deux ondes planes d'amplitudes  $\mathcal{E}_{1,2}$ , pulsations  $\omega_{1,2}$ , vecteurs d'ondes  $k_{1z,2z}$  et phases  $\phi_{1,2}$ . Seule la

---

3. La notation  $k_i + \Delta k_B/2$  dans l'état intermédiaire ne considère que la projection sur la verticale  $z$  de l'impulsion de recul.

composante selon  $z$  des vecteurs d'onde est considérée car, comme présenté au 3.1.1., au final l'incrément d'impulsion est purement vertical.

$$\mathcal{E}(z, t) = \frac{1}{2} [\mathcal{E}_1 e^{i(k_{1z}z - \omega_1 t + \phi_1)} + \mathcal{E}_2 e^{i(k_{2z}z - \omega_2 t + \phi_2)} + c.c.] \mathbf{e}_y \quad (3.9)$$

Grâce aux égalités suivantes (avec  $k_{1z} = -k_{2z} = \Delta k_B/2$ ) :

$$e^{ik_{1z}} |k_i\rangle = |k_i + \Delta k_B/2\rangle \quad (3.10)$$

$$e^{-ik_{2z}} |k_i + \Delta k_B/2\rangle = |k_i + \Delta k_B\rangle \quad (3.11)$$

et à la définition de la pulsation de Rabi à un photon de chaque faisceau<sup>4</sup> :

$$\boxed{\Omega_{1,2} = -\frac{\langle f | \hat{\mathbf{d}} \mathcal{E}_{1,2} \mathbf{e}_y | e \rangle}{\hbar} e^{i\mp\phi_{1,2}}} \quad (3.12)$$

l'hamiltonien total du système s'écrit finalement dans la base des états  $|f, k_i\rangle$ ,  $|e, k_i + \Delta k_B/2\rangle$  et  $|f, k_i + \Delta k_B\rangle$  :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{-i\omega_2 t} & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_1^*}{2} e^{-i\omega_1 t} + \frac{\hbar\Omega_2^*}{2} e^{i\omega_2 t} & E_2 & \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{-i\omega_2 t} \\ 0 & \frac{\hbar\Omega_1^*}{2} e^{-i\omega_1 t} + \frac{\hbar\Omega_2^*}{2} e^{i\omega_2 t} & E_3 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Maintenant que l'on connaît l'hamiltonien du système, regardons l'évolution du système en résolvant l'équation de Schrödinger.

### 3.1.2.2 Equation de Schrödinger

L'état du système est défini, à tout instant, dans la base des états  $|f, k_i\rangle$ ,  $|e, k_i + \Delta k_B/2\rangle$  et  $|f, k_i + \Delta k_B\rangle$ . Il s'écrit de manière général :

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t) e^{-iE_1 t/\hbar} |f, k_i\rangle + C_2(t) e^{-iE_2 t/\hbar} |e, k_i + \Delta k_B/2\rangle \quad (3.14)$$

$$+ C_3(t) e^{-iE_3 t/\hbar} |f, k_i + \Delta k_B\rangle \quad (3.15)$$

avec les coefficients complexes  $C_{1,2,3}$  dépendant du temps. Le choix des phases prenant en compte l'évolution libre permet de simplifier la suite du calcul.

---

4. Phase égale à  $-\phi_1$  pour  $\Omega_1$  et un  $+\phi_2$  pour  $\Omega_2$

Dans la suite les lasers sont allumés à  $t = 0$  puis on considère que leurs amplitudes peuvent être modulées ; les pulsations de Rabi (3.12) dépendent donc du temps.

L'évolution du système est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (3.16)$$

En remplaçant  $|\psi(t)\rangle$  par son expression et en projetant sur chaque état de la base, on trouve les trois équations différentielles couplées décrivant l'évolution du système :

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = -i \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{i\Delta t} C_2(t) \quad (3.17)$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = -i \frac{\Omega_1^*(t)}{2} e^{-i\Delta t} C_1(t) - i \frac{\Omega_2(t)}{2} e^{i(\delta-\Delta)t} C_3(t) \quad (3.18)$$

$$\frac{dC_3(t)}{dt} = -i \frac{\Omega_2^*(t)}{2} e^{i(\Delta-\delta)t} C_2(t) \quad (3.19)$$

où  $\Delta$  est le désaccord au niveau excité :  $\Delta = \omega_1 - (E_2 - E_1)/\hbar$  et  $\delta$  le désaccord à la conservation de l'énergie (3.1) de la transition à deux photons :

$$\boxed{\delta = \omega_1 - \omega_2 - (E_3 - E_1)/\hbar} \quad (3.20)$$

Les équations (3.17-19) négligent les composantes aux fréquences du type  $\Delta \pm 2\omega$  et  $\Delta - \delta \pm 2\omega$ . Elles n'ont pas d'effet sur la dynamique car elles oscillent trop vite (fréquence laser  $\omega \cong 2\pi \times 3 \cdot 10^{14}$  Hz) par rapport aux autres composantes ( $\Delta = 2\pi \times 600$  MHz et  $\delta < 2\pi \times 10$  kHz), c'est l'approximation des ondes tournantes [85].

Dans le cas d'un désaccord au niveau excité  $\Delta$  grand devant le couplage  $\Omega_{1,2}$ , l'équation (3.18) sur le poids de l'état intermédiaire  $C_2(t)$  va pouvoir être intégrée par partie et simplifiée. L'intégration du premier terme de (3.18) donne :

$$-\frac{i}{2} \int_0^t \Omega_1^*(\tau) e^{-i\Delta\tau} C_1(\tau) d\tau = \left[ \Omega_1^*(\tau) C_1(\tau) \frac{e^{-i\Delta\tau}}{2\Delta} \right]_0^t \quad (3.21)$$

$$- \int_0^t \Omega_1^*(\tau) \dot{C}_1(\tau) \frac{e^{-i\Delta\tau}}{2\Delta} d\tau - \int_0^t \dot{\Omega}_1^*(\tau) C_1(\tau) \frac{e^{-i\Delta\tau}}{2\Delta} d\tau \quad (3.22)$$

Premièrement, d'après l'équation (3.17), le coefficient  $C_1$  évolue à la pulsation  $\Omega_1/2$ . Si de plus on suppose que la fréquence d'évolution des pulsations Rabi (liées aux amplitudes laser) est faible devant  $\Delta$  alors après intégration les termes (3.22) seront au deuxième ordre en  $\Omega/\Delta$  et pourront être négligés devant (3.21) qui est au premier ordre en  $\Omega/\Delta$ . Ainsi en considérant les lasers éteints à  $t = 0$ , on a :

$$-\frac{i}{2} \int_0^t \Omega_1^*(\tau) e^{-i\Delta\tau} C_1(\tau) d\tau = \Omega_1^*(t) C_1(t) \frac{e^{-i\Delta t}}{2\Delta} + o\left(\frac{\Omega_1}{\Delta}\right) \quad (3.23)$$

Le même raisonnement est appliqué pour le second terme de l'équation (3.18) et finalement l'intégration de  $C_2(t)$  donne (avec  $C_2(0) = 0$ ) :

$$C_2(t) = \Omega_1^*(t) C_1(t) \frac{e^{-i\Delta t}}{2\Delta} + \Omega_2(t) C_3(t) \frac{e^{i(\delta-\Delta)t}}{2(\Delta-\delta)} + o\left(\frac{\Omega_{1,2}}{\Delta}\right) \quad (3.24)$$

L'état excité intermédiaire n'est donc que très peu peuplé si le rapport  $\Omega/\Delta$  est conservé très petit devant un. Comme l'on souhaite créer un couplage entre seulement les états fondamentaux du système on choisira les paramètres expérimentaux pour satisfaire cette condition (voir section 3.2).

On peut maintenant réinjecter l'équation (3.24) dans (3.17) et (3.19) en négligeant les termes au deuxième ordre et plus en  $\Omega/\Delta$ . En considérant de plus que  $\delta \ll \Delta$  (toujours vérifié expérimentalement, voir 3.2), les deux équations couplées régissant la transition de Bragg à deux photons sont :

$$\dot{C}_1(t) = -i \left[ \frac{|\Omega_1(t)|^2}{4\Delta} C_1(t) + \frac{\Omega_1(t)\Omega_2(t)}{4\Delta} e^{i\delta t} C_3(t) \right] \quad (3.25)$$

$$\dot{C}_3(t) = -i \left[ \frac{\Omega_1^*(t)\Omega_2^*(t)}{4\Delta} e^{-i\delta t} C_1(t) + \frac{|\Omega_2(t)|^2}{4\Delta} C_3(t) \right] \quad (3.26)$$

Les approximations précédentes nous ont donc permis de restreindre l'évolution dans le sous espace des états fondamentaux  $[|f, k_i\rangle, |f, k_i + \Delta k_B\rangle]$ .

Les équations (3.25-26) font apparaître une nouvelle pulsation caractéristique appelée pulsation de Rabi à deux photons égale à :

$$\boxed{\Omega_{2ph}(t) = \frac{\Omega_1(t)\Omega_2(t)}{2\Delta} = \frac{\langle f | \hat{\mathbf{d}}\mathcal{E}_1 \mathbf{e}_y | e \rangle \langle f | \hat{\mathbf{d}}\mathcal{E}_2 \mathbf{e}_y | e \rangle}{2\hbar^2 \Delta} e^{i(\phi_2 - \phi_1)}} \quad (3.27)$$



### 3.1.2.3 Hamiltonien dans le sous espace du fondamental

Les équations (3.25-26) peuvent en fait être retrouvées avec l'hamiltonien suivant<sup>5</sup> (exprimé dans le sous espace formé par les états  $|f, k_i\rangle$  et  $|f, k_i + \Delta k_B\rangle$ ) :

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} E_1 + \hbar \frac{|\Omega_1(t)|^2}{4\Delta} & \frac{\hbar\Omega_{2ph}(t)}{2} e^{i\Delta\omega t} \\ \frac{\hbar\Omega_{2ph}^*(t)}{2} e^{-i\Delta\omega t} & E_3 + \hbar \frac{|\Omega_2(t)|^2}{4\Delta} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

En définissant  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ .

Celui-ci se simplifie si de plus on considère  $|\Omega_1| = |\Omega_2|$  et que l'on décale l'échelle d'énergie :

$$\hat{H}'' = \begin{pmatrix} E_1 & \frac{\hbar\Omega_{2ph}(t)}{2} e^{i\Delta\omega t} \\ \frac{\hbar\Omega_{2ph}^*(t)}{2} e^{-i\Delta\omega t} & E_3 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Cette forme d'Hamiltonien sera associée à l'évolution d'un moment magnétique sous l'effet d'un champ magnétique oscillant à la section 3.3.

### 3.1.2.4 Résolution de l'évolution du système

Si les lasers sont gardés à puissance constante  $\Omega_{2ph}$  ne dépend pas du temps et la résolution de l'évolution devient analytique. L'équation de Schrödinger avec l'hamiltonien (3.29) donne deux équations couplées sur les coefficients  $C_1(t)$  et  $C_3(t)$  :

$$\dot{C}_1(t) = -i \frac{\Omega_{2ph}}{2} e^{i\delta t} C_3(t) \quad (3.30)$$

$$\dot{C}_3(t) = -i \frac{\Omega_{2ph}^*}{2} e^{-i\delta t} C_1(t) \quad (3.31)$$

En dérivant (3.30) et réinjectant (3.31), le poids  $C_1(t)$  satisfait l'équation différentielle<sup>6</sup> :

$$\ddot{C}_1(t) - i\delta\dot{C}_1(t) + \frac{\Omega_{2ph}^2}{4} C_1(t) = 0 \quad (3.32)$$

Le poids  $C_3(t)$  suit une équation similaire, pour laquelle il faut changer  $\delta$  en  $-\delta$ . En résolvant les deux équations différentielles et en injectant les

---

5. Pour retrouver (3.25-26) il faut en fait décaler en énergie la diagonale de  $\hbar\Omega_{2ph}/2$ , cette redéfinition de l'échelle des énergies revient à un terme de phase en commun dans la définition de l'état et n'a aucune incidence sur la physique du phénomène.

6. On note  $|\Omega_{2ph}|^2$  simplement  $\Omega_{2ph}^2$  pour alléger les notations.

conditions initiales :  $[C_1(0), C_3(0)]$ , l'évolution des poids  $C_1$  et  $C_3$  en fonction du temps se met sous la forme matricielle avec  $\hat{M}$  la matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_3(t) \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} C_1(0) \\ C_3(0) \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \left[ \cos\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega_{eff}} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) \right] e^{i\delta t/2} & -i\frac{\Omega_{2ph}}{\Omega_{eff}} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) e^{i\delta t/2} \\ -i\frac{\Omega_{2ph}^*}{\Omega_{eff}} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) e^{-i\delta t/2} & \left[ \cos\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega_{eff}} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}t}{2}\right) \right] e^{-i\delta t/2} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

avec  $\Omega_{eff} = \sqrt{\delta^2 + \Omega_{2ph}^2}$  le couplage effectif. Le couplage entre les deux états d'impulsion entraine une oscillation de Rabi (à deux photons) entre les poids de la distribution initiale.

### 3.1.2.5 Oscillation de Rabi à deux photons

Considérons un atome à l'impulsion  $k_i$  que l'on soumet aux deux faisceaux laser décrits précédemment. Les conditions initiales sont  $C_1(0) = 1$  et  $C_3(0) = 0$ . La probabilité de diffraction de l'atome dans l'état d'impulsion supérieure  $k_i + \Delta k_B$  en fonction du temps est calculée à partir de la matrice (3.34) :

$$P_{diff}(t) = |C_3(t)|^2 = \frac{\Omega_{2ph}^2}{\Omega_{2ph}^2 + \delta^2} \sin^2 \left[ \sqrt{\Omega_{2ph}^2 + \delta^2} \frac{t}{2} \right] \quad (3.35)$$

La probabilité de diffraction oscille en fonction du temps, c'est une oscillation de Rabi à deux photons. (3.35) est tracée sur la figure 3.4 en fonction du temps pour différents désaccords à la transition  $\delta$  (3.20).

Lorsque  $\delta \neq 0$ , le couplage est alors non résonnant entre les deux états d'impulsion et le contraste de l'oscillation décroît. Expérimentalement ce phénomène de perte de contraste peut être observé de deux manières :

- Lorsque l'on regarde l'oscillation de probabilité de diffraction d'un état d'impulsion  $k_i$  et que la différence de pulsation des lasers ne respecte pas la relation de résonance (3.2).

- De manière indirecte sur les états d'impulsion adjacents à  $k_i$  et  $k_i + \Delta k_B$  présents lorsque les profils de densité sont larges en impulsion. La différence de pulsation des lasers est choisie pour réaliser le couplage résonnant des deux états d'impulsions particuliers  $k_i$  et  $k_i + \Delta k_B$  (3.2) puis d'autres couples

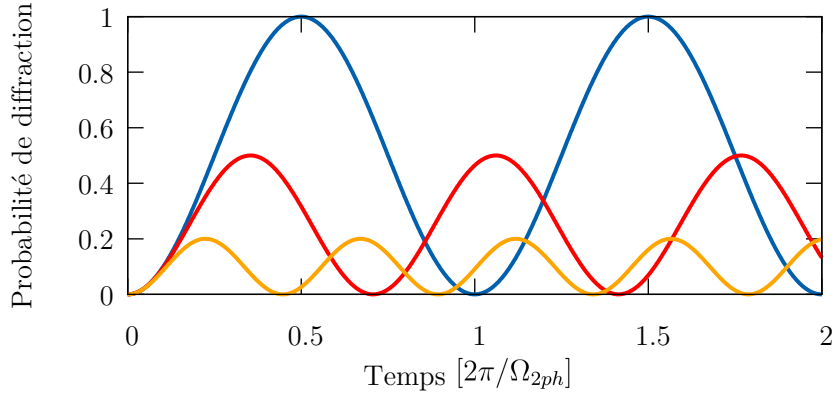


FIGURE 3.3 – Probabilité de diffraction en fonction du temps pour différent désaccord. Les désaccords sont  $\delta = 0$  (bleu),  $1$  (rouge),  $2$  (orange)  $\Omega_{2ph}$  et le temps est représenté en unité de  $2\pi/\Omega_{2ph}$ .

d'états d'impulsion du type  $k_i + \delta k$  et  $k_i + \Delta k_B + \delta k$  se retrouvent également couplés entre eux mais de manière non résonnante. Pour un écart d'impulsion  $\delta k$  le désaccord à la résonance  $\delta$  est égal à :

$$\delta = -\frac{\hbar\Delta k_B}{m}\delta k = -\Delta v_B \times \delta k \quad (3.36)$$

où  $\Delta v_B$  est l'incrément de vitesse donné par le réseau pendant la transition<sup>[7]</sup>.

Dans les deux sections suivantes la mise place de miroirs et séparatrices à atomes basés sur le couplage des états d'impulsion réalisé avec le réseau optique est discuté.

### 3.1.2.6 Miroir

Pour une durée d'interaction avec les lasers de  $T_M = \pi/\Omega_{2ph}$  la probabilité de diffraction (3.35) des atomes d'impulsion  $k_i$  tel que  $\delta = 0$  est égale à 1. Ces atomes sont diffractés par le réseau optique, c'est un *pulse*  $\pi$  l'équivalent atomique d'un miroir. De même les atomes à l'impulsion  $k_i + \Delta k_B$  sont eux diffractés vers l'impulsion  $k_i$ .

Comme discuté à la partie précédente, les états d'impulsion adjacents sont eux aussi couplés par les lasers mais de manière non résonnante. Pour caractériser la largeur de la réponse du miroir à l'impulsion initiale, la probabilité de diffraction est tracée sur la figure 3.4 en fonction du décalage à l'impulsion

7. Avec les chiffres expérimentaux,  $\Delta v_B$  est égale à 50.6 mm/s et un décalage de 0.0214  $k_{rec}$  implique un désaccord de  $\delta = 2\pi \times 1$  kHz

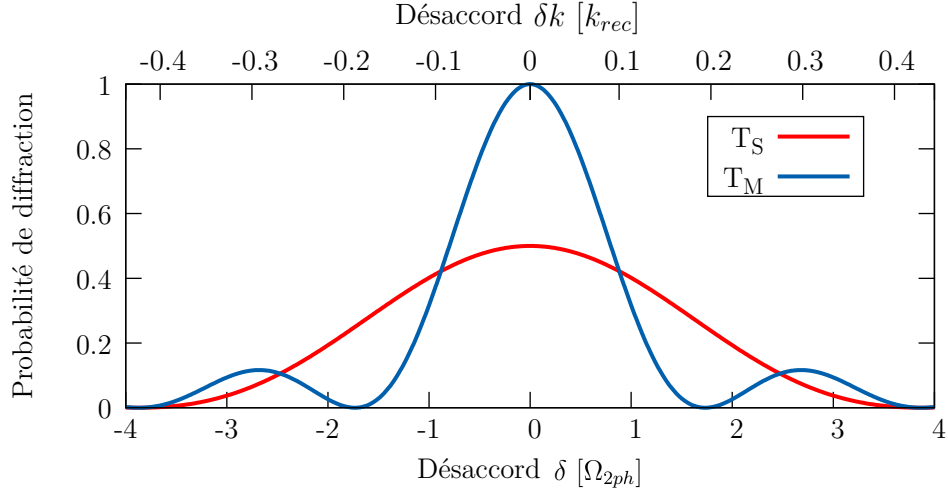


FIGURE 3.4 – Probabilité de diffraction en fonction du désaccord à la transition pour deux durée d’interaction :  $t = \pi/\Omega_{2ph}$  (bleu) et  $\pi/2\Omega_{2ph}$  (rouge). Le désaccord à résonance est représenté en unité de  $\Omega_{2ph}$  (bas) ainsi qu’en unité de  $k_{rec}$  (haut).

résonnante noté  $\delta k$  (3.36). La position du premier zéro en impulsion  $\delta k_M$  de la probabilité de diffraction (3.35) est égale à :

$$\delta k_M \cong 1.73 \times \frac{\Omega_{2ph}}{\Delta v_B} \quad (3.37)$$

Ainsi pour un écart d’impulsion  $\delta k$  de module nul ou petit devant  $\delta k_M$ , au temps  $T_M = \pi/\Omega_{2ph}$  la probabilité de diffraction (3.35) des atomes à  $k_i + \delta k$  vers  $k_i + \Delta k_B + \delta k$  est proche de 1 (Fig. 3.4). De même pour la diffraction inverse de  $k_i + \Delta k_B + \delta k$  vers  $k_i + \delta k$ . Le miroir reste donc efficace sur une certaine plage d’impulsion, dont la taille est d’après (3.37) proportionnelle à la pulsation Rabi à deux photons  $\Omega_{2ph}$  soit inversement proportionnelle au temps d’interaction avec les lasers  $T_M$ . En effet, lorsque le temps d’interaction avec les lasers est court l’énergie peut ne pas être strictement conservée ce qui élargit la réponse à un désaccord. Le fait de pouvoir diffracter toute une plage d’impulsion initial est utilisé au chapitre 5 de ce manuscrit.

Pour la plage d’impulsion dont la probabilité de diffraction est proche de 1 la matrice de passage (3.34) peut être simplifiée. Seul l’ordre le plus bas en  $\delta/\Omega_{2ph}$  pour les termes d’amplitudes est conservé (et sans approximation pour les phases) ce qui donne :

$$\hat{M}_\pi = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i(\delta T_M/2+\varphi_M)} \\ -ie^{-i(\delta T_M/2+\varphi_M)} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

où on note  $\varphi_M$  la phase de la pulsation Rabi à deux photons (3.27). La phase de la pulsation Rabi est égale à une première composante liée à l'élément de dipôle plus une seconde composante égale à la différence de phase des deux lasers  $\phi_2 - \phi_1$  au moment du miroir.

Le terme de phase  $\delta T_M$  s'interprète comme résultant de l'effet Doppler ressenti par les atomes pendant le *pulse*. Ce terme de phase est calculé en fonction du désaccord sur la figure 3.5.

### 3.1.2.7 Séparatrice

Pour un temps  $T_S = \pi/2\Omega_{2ph}$ , les atomes à  $k_i$  tel que  $\delta = 0$  sont alors placés dans une superposition cohérente d'être diffractés ou non. De même pour les atomes à l'impulsion  $k_i + \Delta k_B$ . C'est un *pulse*  $\pi/2$ , l'équivalent atomique d'une séparatrice 50/50 (Fig. 3.4). Comme pour le miroir on peut évaluer la largeur de la réponse en calculant la position du premier zéro en impulsion  $\delta k_S$  de la probabilité de diffraction (3.35) :

$$\delta k_S \cong 3.87 \times \frac{\Omega_{2ph}}{\Delta v_B} > \delta k_M \quad (3.39)$$

La largeur de la réponse de la séparatrice est plus large que celle du miroir. Expérimentalement c'est donc le miroir qui limite les plages d'impulsions exploitables, comme dans l'expérience du chapitre 5.

De même que pour le miroir on peut simplifier la matrice de passage pour les atomes proche de résonance. A l'ordre le plus bas en  $\delta/\Omega_{2ph}$  pour les termes d'amplitudes (et sans approximation pour les phases) la matrice de passage de la séparatrice s'écrit :

$$\hat{M}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\delta T_S/2+\psi_S(\delta))} & -ie^{i(\delta T_S/2+\varphi_S)} \\ -ie^{-i(\delta T_S/2+\varphi_S)} & e^{-i(\delta T_S/2+\psi_S(\delta))} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

où on note de même  $\varphi_S$  la phase de la pulsation Rabi lors du *pulse*. Le terme d'effet Doppler est de nouveau présent :  $\delta T_S/2$ , il est représenté en fonction du désaccord sur la figure 3.5.

$\psi_S$  est un terme de phase supplémentaire dépendant du désaccord  $\delta$  que l'on trace également sur la figure 3.5, il est égal à :

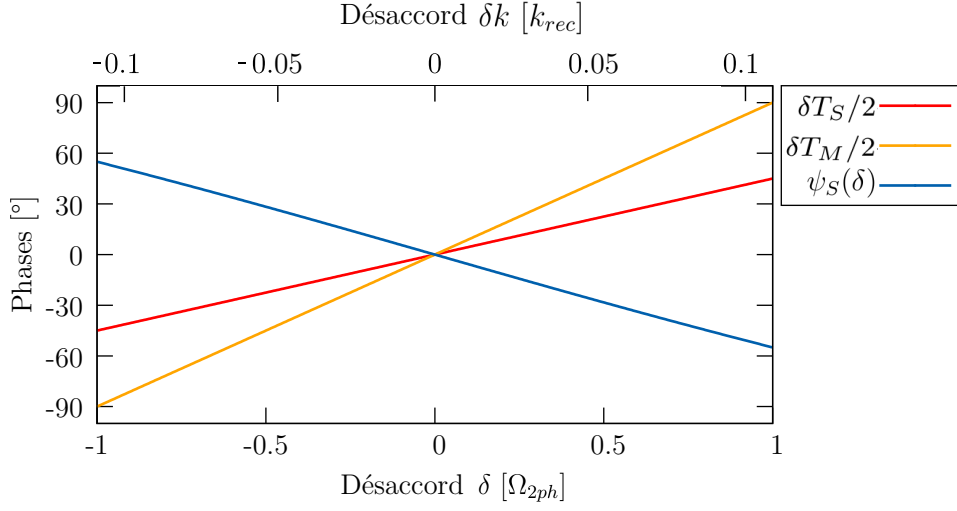


FIGURE 3.5 – Phases pouvant être acquises par les ondes atomiques lors d’une transition de Bragg type miroir ou séparatrice en fonction du désaccord.

$$\psi_S(\delta) = -\arctan \left[ \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \Omega_{2ph}^2}} \tan \left( \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\Omega_{2ph}^2}} \right) \right] \quad (3.41)$$

$$\cong -\frac{\delta}{\Omega_{2ph}} = -\frac{2}{\pi} \times \delta T_S \quad (3.42)$$

où (3.42) est le développement limité au premier ordre en  $\delta/\Omega_{2ph}$ . Cela montre que sous l’hypothèse de faible désaccord la phase est proportionnelle à celui-ci.

Finalement tant que l’écart à résonance est faible devant la pulsation Rabi à deux photons les matrices de passage du miroir et de la séparatrice peuvent s’écrire de manière approchée (3.38) et (3.40). Comme le montrent les deux sections précédentes et la figure 3.5, les transitions de Bragg à deux photons permettent, en plus de réaliser les équivalents atomiques des miroirs et séparatrices, le déphasage des ondes atomiques. L’onde atomique peut acquérir une composante de phase venant de la phase du réseau  $\varphi_{M,S}$  ainsi qu’une composante dépendant de l’écart à la conservation d’énergie  $\delta t/2$  ou  $\psi_S(\delta)$ . Cette propriété est utilisée dans l’expérience présentée au chapitre 5 afin de créer deux interféromètres atomiques avec des phases différentes.

## 3.2 Réalisation expérimentale

Dans cette partie, la réalisation expérimentale des miroirs et séparatrices atomiques est présentée.

Le diagramme d'énergie permettant de décrire les transitions de Bragg est représenté sur la figure 3.6. Initialement les atomes peuplent l'état fondamental  $2^3S_1m_j = 0$ . L'état excité jouant le rôle d'état intermédiaire pour la transition à deux photons est l'état  $2^3P_0$ , il est accessible par transition optique à 1083 nm (voir Annexe A). Les lasers interagissant avec les atomes sont désaccordés de 600 MHz par modulateurs acousto-optiques de cette transition, cela assure que l'état  $2^3P_0$  ne soit jamais peuplé. De plus comme les lasers sont polarisés  $\Pi$ , les états adjacents  $2^3S_1m_j \pm 1$ , décalé de 8 MHz par un champ magnétique de biais, ne sont également pas accessibles (Fig.3.6). Les modulateurs acousto-optiques permettent également d'ajuster finement la différence de fréquence entre les deux lasers afin de remplir la condition de résonance (3.2). Finalement les atomes dans  $2^3S_1m_j = 0$  peuvent interagir avec les deux lasers via l'état excité  $2^3P_0$ , et ainsi incrémenter de  $\hbar\Delta k_B$  leur impulsion sans changer d'état interne par transition à deux photons.

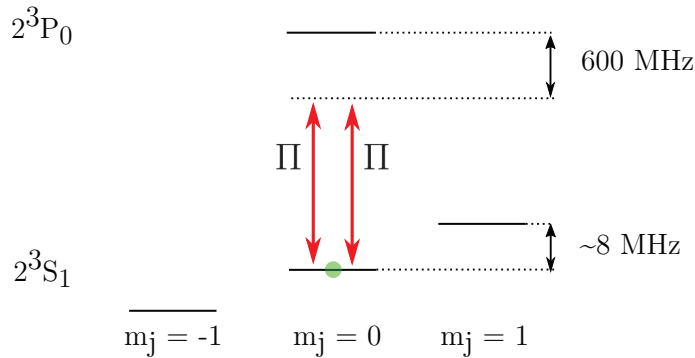


FIGURE 3.6 – Diagramme d'énergie permettant de décrire les transitions de Bragg. Les atomes peuplent initialement l'état  $2^3S_1m_j = 0$ , après interaction avec deux lasers polarisés  $\pi$  et décalés de 600MHz de l'état excité  $2^3P_0$ , les atomes peuvent accroître ou diminuer leur impulsion comme décrit au 3.1.

Sur la figure 3.7 est représentée la distribution de densité du condensat après qu'il ait subi un *pulse* très court (quelque  $\mu s$ ) et à forte puissance par les deux lasers permettant les transitions Bragg. La description de ce phénomène sort de l'étude théorique précédente, c'est le régime de Kapitza-Dirac [86]. Dans ce cas particulier de nombreux états d'impulsion  $n \times \Delta k_B$  sont alors

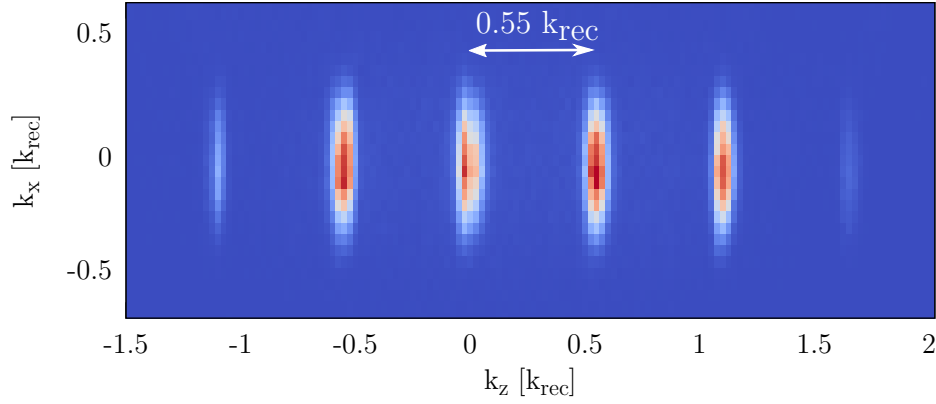


FIGURE 3.7 – Condensat diffracté dans de multiples états d’impulsion  $n\Delta k_B$  après l’application des faisceaux Bragg à puissance maximale et pendant un temps court (régime de Kapitza-Dirac). Cette image permet de mesurer avec précision l’incrément d’impulsion  $\Delta k_B = 0.550(5)k_{rec}$  ainsi que l’alignement du réseau avec la verticale  $1.0(5)^\circ$ .

peuplés, cela permet de vérifier avec précision la valeur de l’incrément d’impulsion  $\Delta k_B$  ainsi que l’alignement du réseau. On mesure  $\Delta k_B = 0.550(5)k_{rec}$  ce qui correspond bien à l’angle  $\theta_B = 32^\circ$  présent entre les faisceaux laser ( $\Delta k_B = 2k_0 \sin(\theta_B/2) = 0.55 k_{rec}$ , voir Annexe B). Cette valeur a été choisie afin de pouvoir échanger l’impulsion des paires décrites au chapitre 2 dont les maxima de densité sont écartés de  $0.55 k_{rec}$ . L’inclinaison du réseau après optimisation est mesurée à  $1.0(5)^\circ$ , cet écart à la verticale transmet une légère vitesse transverse aux atomes égale à  $1.0(4) 10^{-2}k_{rec}$ , cela reste plus petit que les zones d’intégration des expériences de ce manuscrit.

La puissance des deux lasers (égales entre elles) est choisie afin que la pulsation de Rabi à deux photons (3.27) soit  $\Omega_{2ph} = 2\pi \times 5\text{kHz}$  (voir Fig. 3.8). Cette fréquence permet de réaliser un miroir en  $100 \mu\text{s}$  et une séparatrice en  $50 \mu\text{s}$ , ce qui est suffisamment rapide pour mettre en place les protocoles des chapitres 4 et 5 de ce manuscrit sans que les atomes quittent les *waists* des faisceaux d’un millimètre environ de largeur. Sur la figure 3.8, le *pulse* est calibré en utilisant le condensat, la différence de fréquence des lasers est ajustée afin de coupler l’état d’impulsion du condensat  $k_i = 0$  avec  $k_f = \Delta k_B = 0.55 k_{rec}$ . L’oscillation de la fraction diffractée du condensat  $0.55k_{rec}$  en fonction de la durée du *pulse* est reportée sur la figure 3.8. Le processus reste cohérent sur plusieurs millisecondes.

La valeur de la pulsation de Rabi à deux photons permet de valider en partie les hypothèses de la partie théorique. Premièrement on peut appliquer



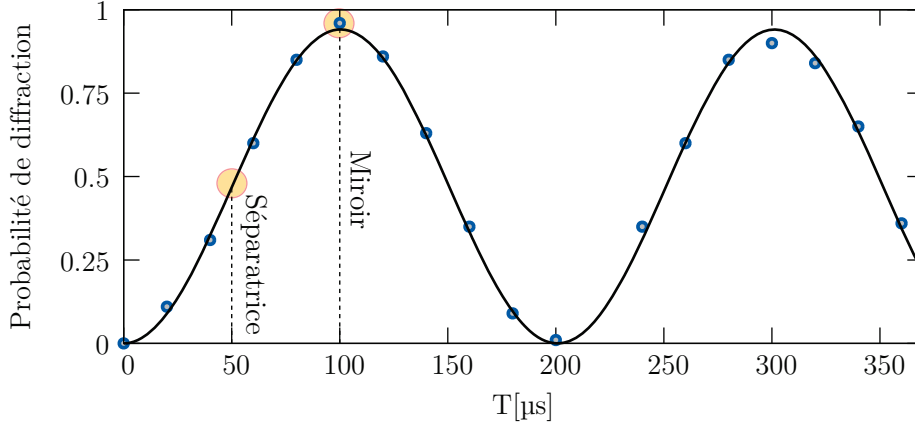


FIGURE 3.8 – Oscillation de Bragg. Fraction diffractée du condensat à  $0.55k_{rec}$  en fonction du temps d’application des faisceaux Bragg. La pulsation Rabi à deux photons mesurée est  $\Omega_{2ph} = 2\pi \times 4.98(2)\text{kHz}$ . Ainsi au bout de  $50\mu\text{s}$  le *pulse* réalise une séparatrice et au bout de  $100\mu\text{s}$  un miroir de réflectivité  $\cong 96\%$ .

le développement en puissance de  $\Omega_{1,2}/\Delta$  de la partie 3.1.2.2, car dans ces conditions, la pulsation Rabi à un photon est  $\Omega_{1,2} = \sqrt{2\Delta\Omega_{2ph}} = 2\pi \times 2.4\text{ MHz}$  ce qui est bien petit devant  $\Delta = 2\pi \times 600\text{ MHz}$ . Deuxièmement, les états d’impulsion adjacents  $k_i - \Delta k_B$  et  $k_i + 2\Delta k_B$  ne sont presque pas couplés car  $\Omega_{2ph} = 2/\pi \times 5\text{kHz}$  est bien petit devant l’écart à la résonance des transitions adjacents (voir 3.1.1)  $2\hbar\Delta k_B^2/2m = 2\pi \times 26\text{ kHz}$ . La seconde relation n’étant pas parfaitement réalisée, c’est en fait expérimentalement que l’on vérifie que  $\Omega_{2ph} = 2\pi \times 5\text{ kHz}$  est la pulsation maximale pour laquelle très peu d’atomes ( $< 1\%$ ) atteignent les états d’impulsion adjacents  $k_i - \Delta k_B$  et  $k_i + 2\Delta k_B$ .

Lors de l’application des *pulses* Bragg, les atomes sont en chute libre. La partie théorique précédente suppose en fait implicitement que la fréquence d’un des faisceaux laser est balayée pour corriger l’accélération des atomes, ce qui est bien réalisé expérimentalement. L’impulsion des atomes évoluent linéairement avec le temps :  $k(t) = k_0 - mg/\hbar \times t$  en réinjectant dans (3.2), on calcule que la pente de la rampe de fréquence doit être de :  $g\Delta k_B = 4.98\text{ kHz/ms}$ .

### 3.3 Pour aller plus loin

Dans les sections précédentes 3.1-2 les lasers étaient allumés et éteints abruptement avec une différence de fréquence constante entre les deux lasers. Ce sont des *pulses* dit "carrés", cependant il est possible de créer des séquences plus complexes dans lesquelles on s'autorise à moduler indépendamment l'intensité des lasers ainsi que leurs différences de fréquence et phase. L'avantage de tel *pulse* est qu'il est alors possible de changer la forme de la probabilité de transfert en fonction de l'impulsion initiale des atomes. Expérimentalement, comme cela sera discuté au chapitre 5, on souhaite mettre en place de telles séquences afin de créer des miroirs et séparatrices quasi indépendants de l'impulsion initiale, c'est à dire avec une probabilité de transfert plate sur une certaine plage d'impulsion.

Le développement de telle séquence expérimentale est inspiré principalement des travaux entrepris dans le domaine de la résonance magnétique nucléaire (RMN). En effet on montre dans la suite que le problème d'une transition de Bragg est équivalent à celui d'un spin 1/2 plongé dans un champ magnétique oscillant. Ainsi on peut utiliser le développement technologique de la RMN afin de l'appliquer aux transitions de Bragg. Dans cette section, deux *pulses* issus de la RMN pouvant être implémentés expérimentalement sont présentés.

En réitérant le développement de la partie 3.1.2.2, on peut montrer que l'hamiltonien (3.29) ne change pas si en plus des amplitudes, les différences de fréquence évoluent lentement devant le désaccord à l'état excité  $\Delta$ . L'hamiltonien du système est noté avec toutes les dépendances en temps possibles :

$$\hat{H}'(t) = \begin{pmatrix} E_1 & \frac{\hbar\Omega_{2ph}(t)}{2} e^{i\Delta\omega(t)t} \\ \frac{\hbar\Omega_{2ph}(t)}{2} e^{-i\Delta\omega(t)t} & E_3 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

#### 3.3.1 Équivalence avec le problème d'un spin 1/2 dans un champ magnétique

Dans cette partie, on montre que l'hamiltonien (3.43) est équivalent à celui d'un spin 1/2 plongé dans un champ magnétique oscillant formé d'un composante longitudinale selon  $z$  et d'une composante transverse dans le plan  $Oxy$ , puis on rappelle comment décrire ce problème en terme de champ magnétique équivalent.

Considérons un champ s'écrivant  $\mathbf{B}(t) = B_0\mathbf{e}_z + B_1 [\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y]$ , avec  $\omega$  la fréquence de rotation dans le plan. L'hamiltonien d'interaction d'un spin avec un champ magnétique extérieur est :  $\hat{H}(t) = -\gamma\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{B}(t)$ , avec  $\gamma$  le

rapport gyromagnétique. Dans la base des états propres  $[|-\rangle, |+\rangle]$  de la projection du spin sur  $Oz$  de valeur propre  $\mp\hbar/2$ , l'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H}_{spin1/2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

avec  $\omega_0 = \gamma B_0$  et  $\omega_1 = \gamma B_1$ . L'équivalence est parfaite avec l'hamiltonien (3.43) avec comme relations de passage :

$$|-\rangle \rightarrow |k_i\rangle \quad (3.45)$$

$$|+\rangle \rightarrow |k_i + \Delta k_B\rangle \quad (3.46)$$

$$\hbar\omega_0 \rightarrow E_3 - E_1 \quad (3.47)$$

$$\gamma B_1 = \omega_1 \rightarrow \Omega_{2ph} \quad (3.48)$$

$$\omega \rightarrow \Delta\omega \quad (3.49)$$

$$(3.50)$$

L'allumage des lasers revient donc à l'allumage du champ magnétique transverse et une différence de fréquences des lasers ou un décalage en phase implique une rotation de celui-ci.

Pour retrouver l'évolution du spin en terme de champ équivalent, on calcule la valeur moyenne de l'aimantation :  $\hat{\mathbf{M}} = \gamma \hat{\mathbf{S}}$ . Cela va permettre de retrouver les équations classiques de l'évolution d'un aimant dans un champ magnétique oscillant. Le théorème d'Ehrenfest donne l'évolution de la valeur moyenne de l'aimantation :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\mathbf{M}} \rangle (t) = \langle [\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{H}}_{spin1/2}] \rangle \quad (3.51)$$

En développant le commutateur, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{m}(t) = \gamma \mathbf{m}(t) \wedge \mathbf{B}(t) \quad (3.52)$$

avec  $\langle \hat{\mathbf{M}} \rangle (t) = \mathbf{m}(t)$  le moment magnétique classique. Cette équation décrit le mouvement de précession du moment magnétique autour du champ magnétique. En utilisant la forme du champ magnétique décrit plus haut, on montre que le problème est en fait ramené dans la référentiel tournant  $0_{XYZ}$  avec  $X$  le long du champ magnétique transverse et  $Z$  le long du champ longitudinal à un précession du spin autour d'un champ magnétique effectif [87] :

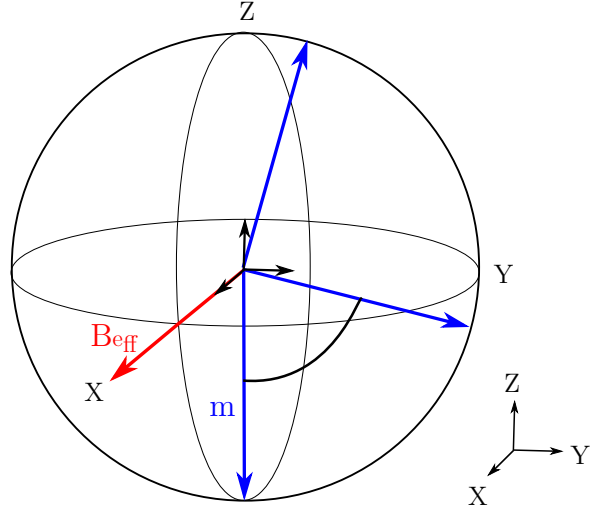


FIGURE 3.9 – Précession du moment magnétique (bleu) autour d'un champ magnétique effectif (rouge) purement transverse, selon  $0_X$ . Le moment magnétique précesse dans le plan  $0_{YZ}$ . Lorsque le moment magnétique pointe vers le sud l'état équivalent est  $|k_i\rangle$ , vers le nord l'état est  $|k_i + \Delta k_B\rangle$ .

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{m}(t)\right)_{Ref T} = \gamma \mathbf{m}(t) \wedge \mathbf{B}_{eff}(t) \quad (3.53)$$

avec le champ magnétique effectif :

$$\mathbf{B}_{eff} = \frac{1}{\gamma} [(\omega - \omega_0)\mathbf{e}_Z - \omega_1\mathbf{e}_X] \quad (3.54)$$

où la précession se fait autour de l'axe défini par le vecteur :  $(\omega_0 - \omega)\mathbf{e}_Z - \omega_1\mathbf{e}_X$  et ce à une pulsation de :

$$\omega_p = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \quad (3.55)$$

Ce résultat permet de retrouver, par exemple, les oscillations de Rabi à deux photons décrites au 3.1. En effet allumer les lasers ( $\Omega_{2ph} \neq 0 \leftrightarrow \omega_1 \neq 0$ ) à résonance ( $\Delta\omega - (E_3 - E_1)/\hbar = 0 \leftrightarrow \omega - \omega_0 = 0$ ) revient à avoir un champ magnétique effectif purement transverse le long de l'axe  $0_X$  pour le

moment magnétique équivalent. Sur la figure 3.7 est représentée la précession du moment magnétique autour d'un champ magnétique effectif purement transverse. Le moment magnétique étant relié à la valeur moyenne du spin, la rotation de ce dernier s'interprète directement dans le formalisme Bragg aux oscillations entre les deux états d'impulsions  $|k_i\rangle$  et  $|k_i + \Delta k_B\rangle$  observées au 3.2. Le moment magnétique initial pointe vers le pôle sud, l'état équivalent d'impulsion est  $|k_i\rangle$ . Le moment précesse ensuite autour du champ magnétique effectif dans le plan  $0_{YZ}$ , lorsqu'il atteint l'axe  $0_Y$  la valeur moyenne du moment magnétique projeté sur l'axe  $0_Z$  est nulle, cela correspond à une séparatrice, l'état d'impulsion équivalent est une superposition de l'état  $|k_i\rangle$  et  $|k_i + \Delta k_B\rangle$ . Puis, lorsqu'il atteint le pôle nord cela correspond au miroir, l'état d'impulsion équivalent est  $|k_i + \Delta k_B\rangle$ . Le moment magnétique tourne à la fréquence  $\omega_1$  ce qui correspond bien pour les transitions de Bragg à  $\Omega_{2ph}$ .

### 3.3.2 Retournement adiabatique

Dans cette partie, on décrit comment le mouvement de précession du moment magnétique décrit par les équations (3.53-55) peut être utilisé pour construire une séquence menant à un miroir quasi indépendant de l'état initial.

Dans le chapitre 5 de ce manuscrit, une expérience où un même miroir transfère différentes impulsions initiales est présentée, et la baisse de probabilité de diffraction de celui-ci à cause du désaccord est un facteur limitant. On souhaite alors construire un *pulse* permettant d'avoir une probabilité de diffraction en fonction du désaccord constante à 1. On peut penser premièrement à augmenter fortement la puissance des faisceaux afin de faire un *pulse* court et donc avec une réponse large (3.36), cependant on rend alors accessible les états d'impulsion adjacents comme discuté au 3.2. On propose donc une méthode différente inspirée des techniques de résonance magnétique nucléaire, appelé retournement adiabatique.

Considérons l'état initial  $|k_i\rangle$ , équivalent du moment magnétique pointant vers le bas. On commence par appliquer un champ magnétique effectif le long du moment magnétique  $-0_Z$ . Puis le champ magnétique effectif est retourné lentement vers  $0_Z$  en passant par  $0_X$ . Si la vitesse de rotation de ce dernier est lente à tout instant devant la fréquence de précession alors le moment magnétique va suivre adiabatement le champ magnétique. Sur la figure 3.10 est représentée l'évolution du moment magnétique dans ces conditions, celui-ci est bien retourné, l'effet est donc bien de type miroir.

En se référant aux équations (3.53-55), pour parvenir au retournement adiabatique d'un moment magnétique on doit faire évoluer les paramètres  $\omega$  et  $\omega_1$  comme sur la figure 3.11.  $\omega$ , équivalent de la différence de fréquence des

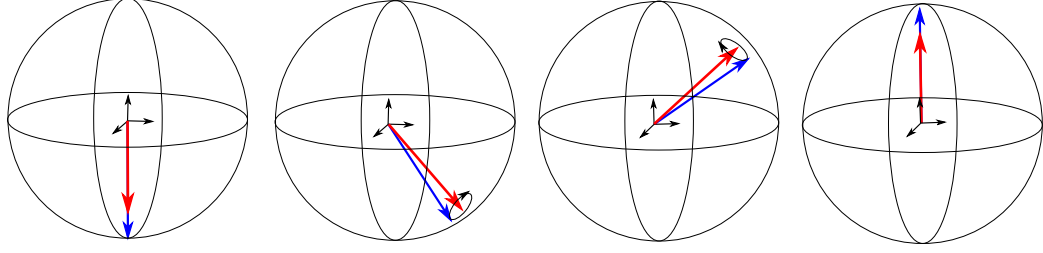


FIGURE 3.10 – Retournement adiabatique du moment magnétique (bleu). Le champ magnétique effectif (rouge) tourne lentement du sud vers le nord dans le plan  $0_{YZ}$ , la vitesse de précession du moment magnétique étant rapide devant celle de la rotation du champ, le moment magnétique suit le champ effectif.

lasers pour les transition de Bragg, augmente pour que la différence  $\omega - \omega_0$  change de signe pendant le *pulse* et  $\omega_1$ , équivalent de la pulsation Rabi à deux photons, forme une cloche. Les fonctions sont choisies pour que l'angle du champ magnétique effectif ne fasse pas d'à-coups afin de garder la vitesse de rotation du champ magnétique toujours plus faible que la fréquence de précession (3.55) : une tangente hyperbolique pour  $\omega$  et l'inverse d'un cosinus hyperbolique pour  $\omega_1$ .

Pour que le *pulse* fonctionne il faut que le champ magnétique effectif pointe vers le bas au début du *pulse*  $\omega_{init} - \omega_0 < 0$  et vers le haut à la fin  $\omega_{fin} - \omega_0 > 0$ , cela encadre les valeurs de  $\omega_0$  pour lesquelles il y a retournement :

$$\omega_{init} < \omega_0 < \omega_{fin} \quad (3.56)$$

Avec l'équivalence en transition de Bragg, les impulsions  $k_i$  qui subissent bien un miroir suivent la relation :

$$\Delta\omega_{init} < \frac{\hbar\Delta k_B^2}{2m} + \frac{\hbar\Delta k_B}{m}k_i < \Delta\omega_{fin} \quad (3.57)$$

où  $\Delta\omega_{init}$  et  $\Delta\omega_{fin}$  sont les différences de fréquences entre les lasers au début et à la fin du *pulse*.

On peut donc à souhait choisir la bande d'impulsions initiales qui sera diffractée en agrandissant l'étendue de différence de pulsation des lasers balayée. Cependant pour conserver l'adiabaticité du retournement et donc le fonctionnement du *pulse* choisir une large bande d'impulsion implique un *pulse* long.

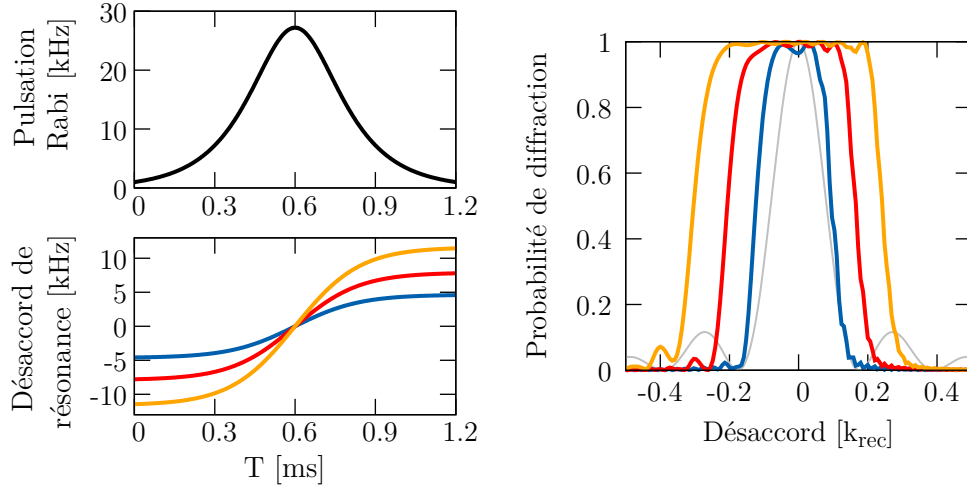


FIGURE 3.11 – *Pulsions* adiabatiques. En haut à gauche, la pulsation Rabi à deux photons suit l'inverse d'une fonction sinus hyperbolique. En bas à gauche, la différence de fréquence des lasers est balayée dans le temps autour d'une fréquence centrale suivant une tangente hyperbolique. A droite, la probabilité de transfert des atomes est tracée en fonction de l'écart à l'impulsion centrale (résonnante avec la fréquence centrale). Trois *pulsions* différents sont représentés, la pulsation Rabi est commune aux trois. Comme prédit par (3.57) un écartement plus important en fréquence lors du balayage implique une zone de transfert plus large. En gris clair est reportée la courbe de transfert du *pulse* carré (Fig. 3.4).

Sur la figure 3.11 sont représentés plusieurs *pulsions* avec différentes étendues de différence de pulsation des lasers ainsi que leur réponse à l'impulsion initiale calculée numériquement, on peut alors vérifier que la probabilité de transfert est proche de un pour les impulsions réalisant (3.57). Pour les *pulsions* carrés des parties précédentes on choisissait  $\Omega_{2ph}$  maximum égale à  $2\pi \times 5\text{kHz}$  pour ne pas peupler les états d'impulsion adjacents. Comme ici l'allumage est plus lent on peut dépasser cette limite jusqu'à environ  $2\pi \times 26\text{kHz}$  (sur la figure 3.11). Pour le vérifier on simule en fait l'évolution du système global avec les quatre états adjacents les plus proches  $k_i + n\Delta k_B$ ,  $n \in [-2, -1, +2, +3]$ , et on vérifie que dans les zones de transferts leur probabilité d'occupation est négligeable. Augmenter la pulsation Rabi permet d'augmenter la pulsation de précession (3.55) et donc avoir un *pulse* plus court tout en conservant l'adiabaticité.

Les probabilités de transfert proposées sur la figure 3.11 sont intéressantes car elles englobent entièrement les pics de densité des paires atomiques du chapitre précédent. Pour comparaison avec les *pulsions* carrés, sur la figure 3.11

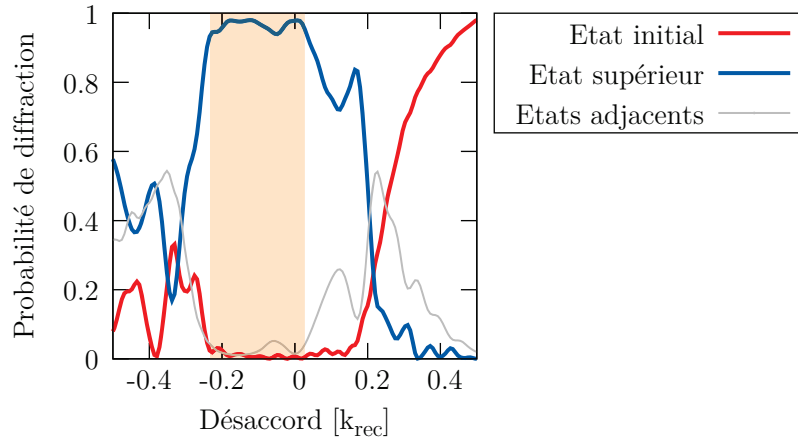


FIGURE 3.12 – *Pulse* raccourci à  $500\mu\text{s}$ . Probabilités de rester dans l’état initial à  $k_i$  (rouge), de diffracter vers l’état d’impulsion supérieur  $k_i + \Delta k_B$  (bleu) et de peupler un état d’impulsion adjacents autre que  $k_i$  et  $k_i + \Delta k_B$  à la fin du *pulse* (gris). Une zone de  $0.2k_{rec}$  de miroir de réflectivité  $> 95\%$  est représentée en orange.

est aussi reportée la fonction de transfert du miroir de la partie 3.2 qui est bien plus fine<sup>8</sup>. Cette méthode permet donc de réaliser de bons miroirs avec une réponse presque indépendante de l’impulsion initiale, c’est l’équivalent d’un traitement pour les miroirs optiques.

Le point faible de cette méthode est la durée importante des *pulses*, les exemples de la figure 3.11 donnent une durée de 1.2ms. Expérimentalement, cela oblige d’avoir des faisceaux lasers de grands *waist* pour que les atomes ne voient pas de zones d’intensités différentes pendant leur déplacement, d’autant plus si l’on souhaite mettre en place un schéma d’interférométrie comme c’est le cas dans les expériences des chapitres 4 et 5 de ce manuscrit. Sur la figure 3.12 est représentée la probabilité de diffraction d’un *pulse* raccourci : le *pulse* orange de la figure 3.11 compressé en  $500\mu\text{s}$ . La probabilité de diffraction n’est alors plus parfaitement plate car l’adiabaticité n’est plus respectée et les états adjacents d’impulsion peuvent aussi être peuplés. Cependant cela permet quand même de créer une zone de miroir avec une réflectivité de plus de 95% et de largeur en impulsion initiale  $0.2k_{rec}$ .

En conclusion, la méthode de retournement adiabatique semble donc intéressante pour créer l’équivalent de miroirs optiques traités. Bien que le fonctionnement de ces *pulses* soit basé sur l’adiabaticité et donc sur une durée longue d’interaction, des *pulses* raccourcis de durées raisonnables ( $\cong 500\mu\text{s}$ )

8. C’est la réponse la plus large expérimentalement réalisable sans coupler les états d’impulsion adjacents :  $100\mu\text{s}$  et  $\Omega_{2ph} = 2\pi \times 5\text{ kHz}$ .



peuvent être mis en place expérimentalement (Fig. 3.12).

### 3.3.3 Pulse Sinus cardinal

Maintenant que l'on a vu une méthode permettant d'élaborer des miroirs indépendant dans une certaine mesure de l'état initial, on souhaite pouvoir faire de même avec une séparatrice. Dans cette partie, on va montrer que dans la limite de faible déplacement du moment magnétique à partir des pôles (Fig. 3.9), l'angle de rotation de ce dernier peut s'écrire sous la forme d'une transformée de Fourier. Cela nous permettra d'introduire un *pulse* réalisant une séparatrice insensible à l'état initial.

La composante transverse du moment magnétique est définie comme :  $m_{\perp} = m_X + im_Y$ . En projetant l'équation (3.53) sur  $X$  et  $Y$ ,  $m_{\perp}$  évolue selon l'équation :

$$\frac{\partial m_{\perp}}{\partial t} = -im_{\perp}(\omega_0 - \omega) - im_Z\omega_1 \quad (3.58)$$

En faisant le changement de variable  $m_{\perp} = \tilde{m}_{\perp} \exp(-i(\omega_0 - \omega)t)$  puis en intégrant formellement (3.58),  $\tilde{m}_{\perp}$  est égal en fonction du temps à :

$$\tilde{m}_{\perp}(t) = \tilde{m}_{\perp}(-\infty) - i \int_{-\infty}^t m_Z(t') \omega_1(t') e^{i(\omega_0 - \omega)t'} dt' \quad (3.59)$$

On considère maintenant que le moment magnétique débute au pôle sud de la sphère unité  $m_{\perp}(-\infty) = 0$ . On réinjecte les définitions de  $m_{\perp}$  et  $m_Z$  dans (3.59), puis on introduit l'angle de rotation du moment magnétique à partir du pôle sud  $\theta \in [0, \pi]$  avec les projections  $|m_{\perp}| = m_0 \sin(\theta)$  et  $m_Z = m_0 \cos(\theta)$ ,  $m_0$  étant le module du moment magnétique. Ainsi, l'angle final de rotation  $\theta_f$  s'écrit :

$$\sin(\theta_f) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta(t')) \omega_1(t') e^{i(\omega_0 - \omega)t'} dt' \right| \quad (3.60)$$

Si de plus l'hypothèse est faite que le moment magnétique ne s'écarte que très peu du pôle sud. L'angle du moment magnétique avec le pôle sud s'écrit au premier ordre en  $\theta$  :

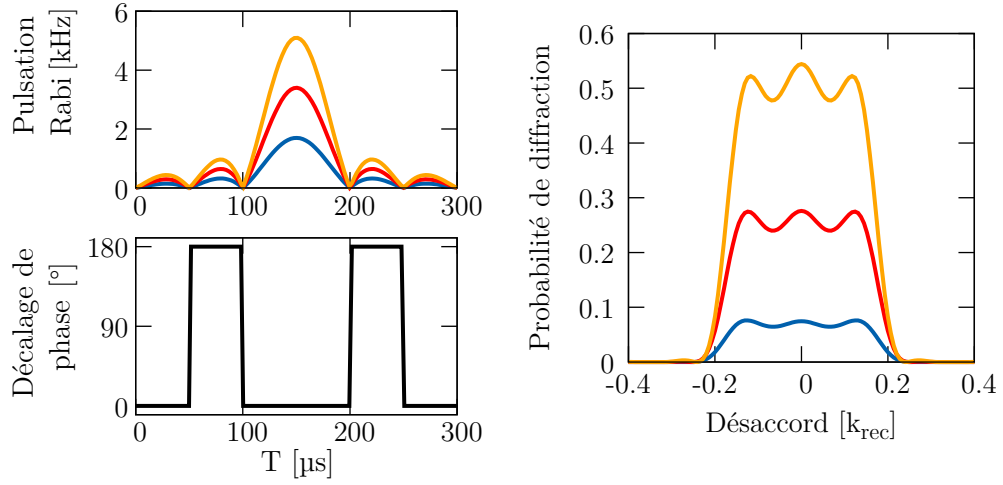


FIGURE 3.13 – *Pulse* sinus cardinal. En haut à gauche, la pulsation suit une fonction module de sinus cardinal, la pulsation moyenne est variée (courbes bleu, rouge et orange). En bas à gauche, un saut de phase est appliqué entre les lasers pour simuler une pulsation Rabi négative. A droite, la probabilité de diffraction en fonction de l'écart à l'impulsion résonnante avec les lasers pour les trois pulsations Rabi.

$$\theta_f(\omega_0 - \omega) \cong \left| \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(t') e^{i(\omega_0 - \omega)t'} dt' \right| = |TF[\omega_1(t)](\omega_0 - \omega)| \quad (3.61)$$

L'angle final de rotation est égal au module de la transformée de Fourier temporelle de  $\omega_1$  (proportionnelle à l'amplitude du champ magnétique) pour les pulsations  $\omega_0 - \omega$ .

Cette propriété nous guide donc vers le choix d'un *pulse* modulant le champ magnétique sous la forme d'un sinus cardinal car sa transformée de Fourier est une fonction porte. Même si la relation (3.61) n'est vérifiée que pour les faibles rotations du moment magnétique, on va pouvoir l'étendre jusqu'à des rotation de  $90^\circ$ , correspondant à des séparatrices.

Maintenant, on souhaite revenir aux transitions de Bragg. L'équivalent de la relation (3.61) est que la probabilité de transfert de  $k_i$  vers  $k_i + \Delta k_B$  est proportionnelle au module de la transformée de Fourier de la pulsation de Rabi à deux photons  $\Omega_{2ph}(t)$  évalué en  $\Delta\omega$ . Cependant, il semble a priori impossible de changer le signe de la pulsation Rabi à deux photons  $\Omega_{2ph}$  afin qu'elle suive un sinus cardinal. Pour simuler le changement de signe de  $\Omega_{2ph}$

on peut en fait décaler de  $\pi$  la différence de phase des lasers  $\phi_2 - \phi_1$  (voir définition 3.27), c'est ce qui est réalisé sur les simulations de la figure 3.13.

Sur la figure 3.13 sont représentés différents *pulses* sinus cardinaux avec les paramètres de l'expérience ainsi que leur probabilité de diffraction associée en fonction de l'impulsion initiale des atomes. La probabilité forme donc un plateau et en augmentant la pulsation Rabi moyenne du *pulse* la probabilité du plateau augmente, pour atteindre 50%, ce qui forme une séparatrice. Dans ces exemples la pulsations Rabi n'excède pas  $2\pi \times 5$  kHz ainsi aucun état d'impulsion adjacent n'est couplé. La relation de transformée de Fourier implique que la largeur de la porte de probabilité est inversement proportionnel à la durée du *pulse*, le choix de  $300 \mu\text{s}$  de *pulse* (Fig. 3.13) permet de créer une porte de probabilité de  $0.3 k_{rec}$  de large ce qui est suffisant pour englober le pic de densité des paires atomiques du chapitre précédent.

L'approximation (3.61) et le nombre fini de lobes du sinus cardinal considéré entraînent des rebonds sur la probabilité de diffraction<sup>9</sup>, cependant la probabilité de diffraction dans le cas de la séparatrice reste proche de  $50\% \pm 3\%$  (courbe orange Fig. 3.13) ce qui est très satisfaisant.

En conclusion sur les *pulses* sinus cardinaux, cette méthode permet de réaliser l'équivalent de traitement sur une séparatrice optique en la rendant insensible dans une certaine mesure à l'état initial.

### 3.4 Conclusion

En résumé nous avons présenté dans le troisième chapitre de ce manuscrit premièrement une modélisation des transitions de Bragg à deux photons qui permettent d'incrémenter l'impulsion des atomes. Ces transitions permettent de créer l'équivalent de miroirs et séparatrices atomiques et également de déphaser les ondes atomiques. Ensuite la réalisation expérimentale de ces transitions a été décrite. Finalement, une étude préliminaire sur de nouvelles séquences expérimentales permettant la création de miroirs et séparatrices aux coefficients de réflexion indépendant de l'impulsion initiale des atomes a été présentée.

Aux deux chapitres suivants la combinaison de l'émission de paires atomiques et de leurs manipulations par transition de Bragg permettra de mettre en place deux expériences : l'expérience Hong-Ou-Mandel et une expérience

---

9. Le sinus cardinal de la pulsation Rabi est en fait multiplié par une gaussienne centrée sur le lobe principal et de largeur RMS la moitié du *pulse*, afin de baisser les composantes hautes fréquences des lobes secondaires de la pulsation Rabi ce qui par la relation de transformée de Fourier lisse légèrement les rebonds de la probabilité de diffraction, cette méthode est appliquée sur la figure 3.13.

préliminaire au test des inégalités de Bell.

— Résumé Chapitre 3 —

- Un réseau optique peut être utilisé afin de coupler deux états d'impulsion d'un atome. Le couplage est cohérent et permet de réaliser l'équivalent de miroirs et séparatrices à atomes.
- Lors de la diffraction sur le réseau l'onde atomique peut être déphasée, ce déphasage est particulièrement important lorsque l'on souhaite réaliser des expériences type inégalités de Bell (voir chapitre 5).
- Il est possible d'envisager des séquences plus complexes (non réalisées sur l'expérience) de modulation des propriétés des lasers afin de rendre indépendant de l'impulsion initiale les coefficients de réflexion des miroirs et séparatrice.

# Chapitre 4

## Hong-Ou-Mandel atomique

L'expérience Hong-Ou-Mandel dans laquelle les photons sont remplacés par deux atomes neutres, ici deux atomes d'Hélium métastables, a été réalisée pour la première fois pendant l'été 2014 par l'équipe [88]. Le protocole et les résultats de cette expérience sont décrits en détails dans les thèses de Raphaël Lopes [41] et Almazbek Imanaliev [50]. Durant ma thèse l'expérience a été renouvelée et légèrement améliorée, ainsi dans ce chapitre on présentera de nouveau son principe et les résultats expérimentaux seront comparés.

Notez que cette expérience est une des seules mettant en jeu des particules massives dans une configuration Hong-Ou-Mandel, les autres ont été réalisées avec des électrons [89] et des plasmons polaritons [90, 91]. Une interférence à deux particules entre atomes a aussi été mesurée avec un protocole analogue dans l'équipe de Cindy Regal [92].

En introduction on rappellera le principe et le protocole de l'expérience Hong-Ou-Mandel atomique, puis on introduira un formalisme nouveau permettant de décrire le trou HOM (voir 1.2.1.2) et finalement les mesures expérimentales seront analysées.

### 4.1 Introduction

Comme on l'a vu en introduction de ce manuscrit (1.2.1), une expérience Hong-Ou-Mandel consiste à recombinaison deux particules sur une séparatrice 50/50 et à compter le nombre de coïncidences observées en sortie de cette dernière (une détection à chaque port de sortie) en fonction de la discernabilité des deux particules.

Pour l'expérience décrite dans ce chapitre, les particules sont des atomes d'Hélium métastable et ils sont produits par paire grâce au processus d'instabilité dynamique présenté au chapitre 2. Ces derniers sont ensuite recombinaison

grâce à des miroirs puis une séparatrice atomique, décrits quand à eux au chapitre 3. Finalement le compte de coïncidence est réalisé grâce à notre détecteur d'atome unique. Dans les sections suivantes le protocole est présenté plus en détail puis la possibilité d'accorder la discernabilité des atomes après la séparatrice est discutée.

### 4.1.1 Protocole

Le protocole expérimental ainsi qu'un schéma équivalent de propagation des atomes est représenté sur la figure 4.1.

Afin d'assurer que les atomes se recombinent bien par paires au niveau de la séparatrice, on choisit d'utiliser au départ de l'expérience des atomes émis également par paires<sup>[1]</sup>. Pour cela on utilise la méthode d'instabilité dynamique présentée au chapitre 2. Il a été montré que cette méthode permet l'émission de plusieurs paires de modes en impulsion (2.5.6-7) et on s'intéresse ici à seulement une de ces paires, d'impulsions  $k_1$  et  $k_2$  ou dans le référentiel du centre de masse  $k$  et  $-k$  (avec  $k = (k_2 - k_1)/2$ ). Cette sélection est possible car notre système de détections permet d'isoler finement des classes d'impulsions (1.3.2.1) en sortie de l'expérience. Un réseau en mouvement est donc appliqué sur les atomes du condensat encore piégé d'une durée approximative de  $600 \mu s$  ce qui déclenche l'émission des paires atomiques. Finalement, comme représenté sur la figure 4.1, dans le référentiel du centre de masse le premier atome se dirige vers le bas à  $-k$  (chemin bleu) et le second vers le haut à  $+k$  (chemin rouge). Notez que le nombre de paires atomiques émises à chaque itération n'est pas fixe (2.4.4), néanmoins les paramètres de l'expérience sont choisis afin d'éviter au maximum l'émission de plus d'une paire à la fois, voir 4.3.2.

Le piègeage optique est ensuite coupé et les atomes transférés dans un niveau insensible aux champs magnétiques résiduels par transition Raman d'une durée de  $300 \mu s$ . Afin de former le schéma interférométrique permettant de recombiner les atomes, on utilise les éléments d'optique atomique décrits au chapitre 3 de ce manuscrit. D'abord un miroir de Bragg d'une durée de  $100 \mu s$  qui permet d'échanger les impulsions de la paire, c'est à dire d'accélérer les atomes à  $-k$  vers  $+k$  et inversement. Dans le référentiel du centre de masse en chute libre les atomes sont réfléchis par le réseau de Bragg comme cela est représenté sur la figure 4.1. Finalement une séparatrice de Bragg de durée  $50 \mu s$  est appliquée afin de mélanger les impulsions des atomes lorsque

---

1. C'était aussi le choix des auteurs de l'expérience historique [14] décrite dans l'introduction. L'utilisation de paires simplifie le protocole expérimental mais ce n'est pas fondamentalement important car l'expérience peut aussi être réalisée avec deux sources indépendantes [17].

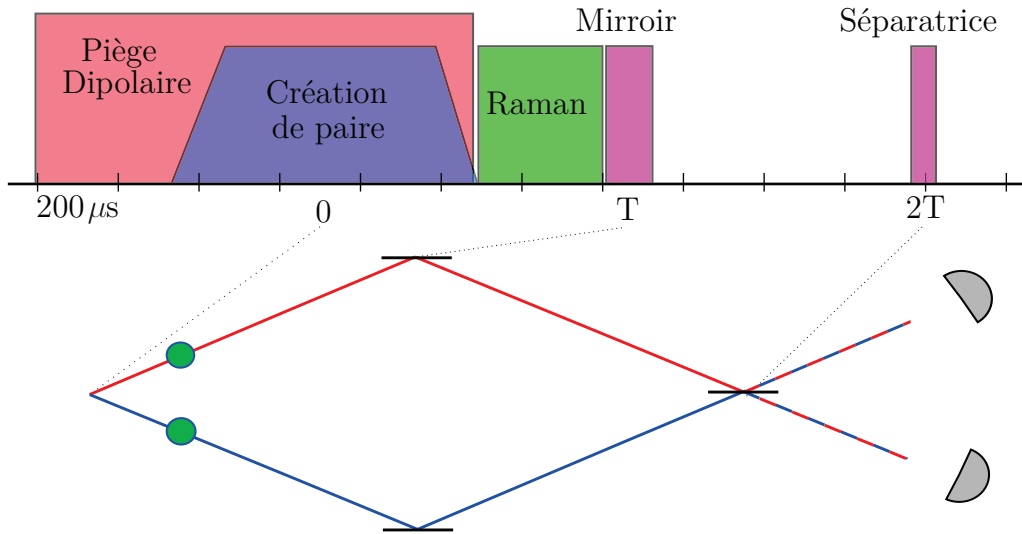


FIGURE 4.1 – Protocole expérimental et schéma dans le référentiel de centre de masse en chute libre de l’interféromètre HOM (voir corps du texte). Les vitesses des atomes sont échangées par un miroir de Bragg au temps  $T$  puis les atomes sont mélangés sur une séparatrice de Bragg à  $2T$ . Dans cette configuration il y a parfaite indiscernabilité des chemins pris par les atomes après la séparatrice.

ces derniers se recombinaient. La durée totale de l’interféromètre est d’une milliseconde et demi environ.

En sortie de séparatrice et après une chute libre d’environ 300 ms, les atomes atteignent le détecteur à micro-canaux (1.3.2.1) où on enregistre les détections. La reconstruction en impulsion initiale permet de déterminer avec précision l’impulsion avec laquelle chaque atome a quitté l’expérience et de sélectionner les impulsions d’intérêt  $k$  et  $-k$  (Fig. 4.1).

Le temps zéro est défini au temps moyen d’émission de la paire atomique. Ce temps n’est pas connu a priori<sup>2</sup> et sera défini a posteriori par le trou Hong-Ou-Mandel (voir section suivante).

### 4.1.2 Contrôle de la discernabilité

A présent regardons comment l’on peut ajuster la discernabilité des atomes afin de reproduire les résultats de l’expérience historique.

2. Il pourrait potentiellement être extrait d’une simulation numérique complète du système ce qui n’a pas été réalisé.

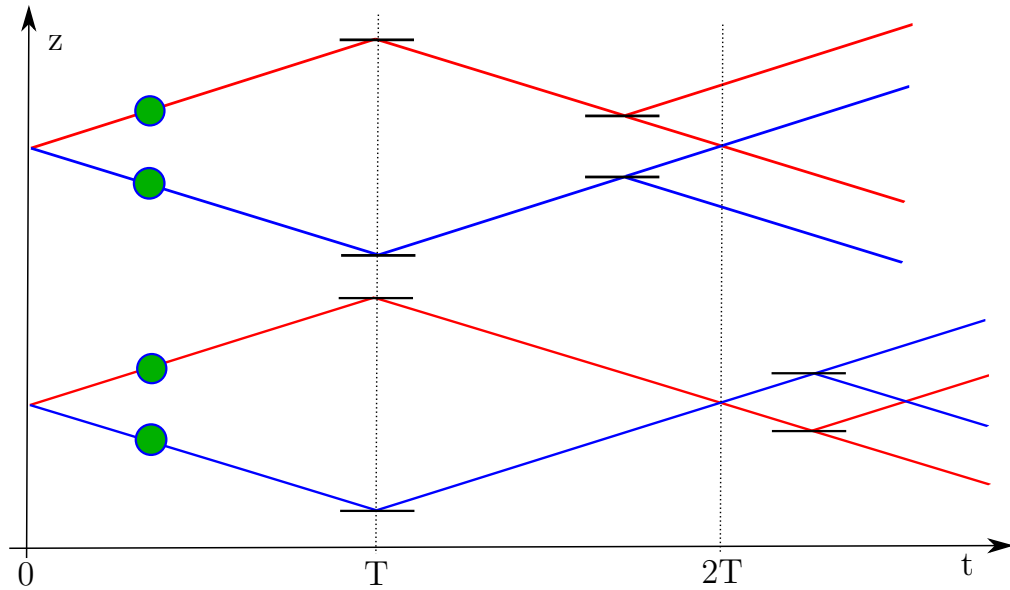


FIGURE 4.2 – Contrôle de la discernabilité. En appliquant la séparatrice plus tôt (haut) ou plus tard (bas) les chemins choisis par les atomes deviennent discernables.

Premièrement, la situation expérimentale décrite sur la figure 4.1 réalise le cas indiscernable de l'expérience HOM. Les atomes se recombinaient parfaitement sur la séparatrice, du point de vue des ports de sortie on ne peut discerner d'où proviennent les atomes. On s'attend alors à une baisse du nombre de coïncidences mesurées comme dans l'expérience historique.

Ensuite si le *pulse* réalisant la séparatrice est appliqué plus tôt ou plus tard, chaque atome interagit avec la séparatrice décalé spatialement. Cette situation fait donc intervenir deux séparatrices comme cela est représenté sur la figure 4.2. La provenance de chaque atome devient discernable du point de vue des ports de sortie et le compte de coïncidences doit alors se rétablir. Ainsi, en fonction du moment d'application de la séparatrice le taux de coïncidence forme un trou, l'équivalent du trou HOM historique (1.2.1.2). Finalement, le fond du trou permet de calibrer le moment de recouvrement spatial des atomes et de définir par symétrie de l'interféromètre le temps moyen de création des paires atomiques.

Dans la partie suivante, un nouveau formalisme basé sur des calculs équivalents d'optique quantique est présenté. Celui-ci permet entre autre de montrer qu'une baisse du nombre de coïncidence est bien attendue en sortie de la séparatrice comme dans l'expérience historique et aussi d'expliquer l'origine de la taille du trou HOM attendu. L'ajout principal de cette modélisation



par rapport aux descriptions antérieures [50, 41] est la prise en compte de la taille spatiale des modes atomiques.

## 4.2 Formalisme

Dans cette partie, l'évolution des opérateurs créations associés aux modes atomiques émis du condensat est calculée à travers l'interféromètre afin de déterminer le comportement des densités et corrélations en sortie de séparatrice.

Comme décrit précédemment on considère une émission à deux modes d'impulsions  $k$  et  $-k$  (et de vitesses  $v$  et  $-v$ ) dans le référentiel du centre de masse en chute libre. L'incrément d'impulsion  $\Delta k_B$  communiqué par les éléments d'optiques atomiques est ajusté afin de coupler parfaitement ces deux états d'impulsion :  $\Delta k_B = 2k$ .

La détection est réalisée par le détecteur à micro-canaux après une chute libre de 46 cm d'une durée d'environ 300 ms. Cette mesure en champ lointain permet la mesure des impulsions initiales indépendamment des positions initiales des atomes dans le nuage constituant la source (comme décrit au 1.3.2.1).

L'opérateur création associé à un mode d'impulsion  $k$  est noté  $\hat{a}_k^\dagger$ . Celui-ci peut être exprimé avec les opérateurs créations à la position  $z$ ,  $\hat{a}^\dagger(z)$  par transformée de Fourier sous la forme :

$$\hat{a}_k^\dagger(t) = \int dz \hat{a}^\dagger(z, t) e^{ikz} \quad (4.1)$$

Où on a ajouté une dépendance temporelle venant de la propagation à travers l'interféromètre. Notez qu'en fonction de la position et du bras de l'interféromètre considéré la lettre désignant l'opérateur sera changée, la figure 4.3 résume ces notations.

### 4.2.1 Émission

Définissons dans un premier temps les opérateurs création des paires atomiques avant toute propagation dans l'interféromètre ainsi que leurs principales propriétés.

L'opérateur création d'un atome du condensat dans le mode 1 (à  $-k$ ) à la position  $z$  est noté  $\hat{a}_0^\dagger(z)$ , l'indice 0 signifiant qu'il n'y a pas encore eu de propagation :  $t = 0$ . De même, l'opérateur associé à l'émission d'un atome dans le mode 2 (à  $k$ ) à la position  $z$  est noté  $\hat{b}_0^\dagger(z)$ .

On note  $n$  le nombre moyen de paires émises aux impulsions  $-k$  et  $k$ , il est égal par définition à :

$$n = \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \quad (4.2)$$

$$= \int dk \langle \hat{a}_0^\dagger(z) \hat{a}_0(z') \rangle e^{ik(z-z')} \quad (4.3)$$

$$= \int dz \langle \hat{a}_0^\dagger(z) \hat{a}_0(z) \rangle = \int dz \langle \hat{b}_0^\dagger(z) \hat{b}_0(z) \rangle \quad (4.4)$$

Où l'état de la source  $|\Psi\rangle$  n'est pour l'instant pas explicité.

De même les corrélations locales de la source sont notées  $G_{AA}^{(2)}$  et  $G_{BB}^{(2)}$  et sont égales à :

$$G_{AA}^{(2)} = \iint dzdz' \langle \hat{a}_0^\dagger(z) \hat{a}_0^\dagger(z') \hat{a}_0(z) \hat{a}_0(z') \rangle \quad (4.5)$$

$$G_{BB}^{(2)} = \iint dzdz' \langle \hat{b}_0^\dagger(z) \hat{b}_0^\dagger(z') \hat{b}_0(z) \hat{b}_0(z') \rangle \quad (4.6)$$

La corrélation croisée est notée  $G_{AB}^{(2)}$  et est égale à :

$$G_{AB}^{(2)} = \iint dzdz' \langle \hat{a}_0^\dagger(z) \hat{b}_0^\dagger(z') \hat{a}_0(z) \hat{b}_0(z') \rangle \quad (4.7)$$

$$= \iint dzdz' \langle \hat{b}_0^\dagger(z) \hat{a}_0^\dagger(z') \hat{b}_0(z) \hat{a}_0(z') \rangle \quad (4.8)$$

Dans la suite ces différentes quantités (4.4-8) pourront être reconnues dans les densités et corrélations calculées en sortie d'interféromètre. Cela permettra de lier les propriétés de la source avant et après la séparatrice.

### 4.2.2 Évolution libre

Après l'émission du condensat les paires ne sont soumises plus qu'à la gravité. Dans le référentiel du centre de masse des paires en chute libre elles se déplacent à impulsion constante  $k$  et  $-k$  et leurs énergies cinétiques sont :  $E_1 = E_2 = \hbar^2 k^2 / 2m = E$ . La phase accumulée par les opérateurs créations pendant un temps  $t$  est donc  $E/\hbar \times t$  et les opérateurs créations s'écrivent en fonction des opérateurs initiaux :

$$\hat{a}^\dagger(z, t) = \hat{a}_0^\dagger(z + vt) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (4.9)$$

$$\hat{b}^\dagger(z, t) = \hat{b}_0^\dagger(z - vt) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (4.10)$$

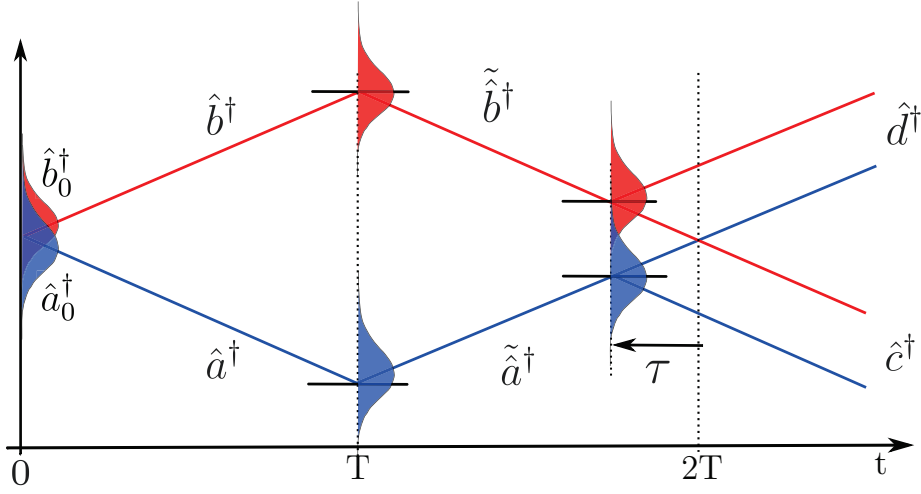


FIGURE 4.3 – Schéma de l'interféromètre, représentation de la propagation des opérateurs créations et des fonctions d'onde associées aux deux atomes de la paire. La séparatrice est appliquée au temps  $2T + \tau$ .

où les opérateurs se déplacent dans l'espace,  $\hat{a}$  vers le bas à la vitesse  $-v$  et  $\hat{b}$  vers le haut à  $+v$  dans le référentiel du centre de masse comme cela est représenté sur la figure 4.3. On peut vérifier que l'évolution libre ne change pas ni les densités ni les corrélations de la source comme attendu.

### 4.2.3 Miroir

Au temps  $T$  une transition Bragg  $\pi$  résonnante est appliquée afin d'échanger les impulsions des deux atomes formant la paire (Fig 4.3). Le *pulse* est considéré infiniment court, on néglige donc le déplacement des fonctions d'ondes pendant les transitions ainsi que les phases accumulées provenant de l'énergie cinétique. La réflexion se produit entre les temps  $T_-$  et  $T_+$ . En appliquant les résultats du chapitre précédent et la matrice de passage (3.38) à résonance ( $\delta = 0$ ), après réflexion l'opérateur  $\hat{a}^\dagger$  (4.9) est changé en  $\tilde{a}^\dagger$  égale à :

$$\begin{aligned}\tilde{a}^\dagger(z, T_+) &= -ie^{-i\varphi_M} \hat{a}^\dagger(z, T_-) \\ &= -i\hat{a}_0^\dagger(z + vT) e^{-i(\varphi_M + \frac{E}{\hbar}T)}\end{aligned}\quad (4.11)$$

De même  $\hat{b}^\dagger$  (4.10) est changé en  $\tilde{b}^\dagger$  :

$$\begin{aligned}\tilde{b}^\dagger(z, T_+) &= -ie^{i\varphi_M} \hat{b}^\dagger(T_-) \\ &= -i\hat{b}_0^\dagger(z - vT) e^{i(\varphi_M - \frac{E}{\hbar}T)}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Notez que les propriétés de densité et de corrélation de la source ne sont toujours pas altérées.

#### 4.2.4 Séparatrice

Au temps  $T + \tau$  après le miroir, une transition de Bragg  $\pi/2$  résonnante est appliquée afin de mélanger les impulsions des deux bras (Fig. 4.3). La séparatrice est appliquée entre les temps  $2T + \tau_-$  et  $2T + \tau_+$ .

Avant la séparatrices les opérateurs sont :

$$\tilde{a}^\dagger(z, 2T + \tau_-) = -i\hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) e^{-i[\varphi_M + \frac{E}{\hbar}(2T + \tau)]} \quad (4.13)$$

$$\tilde{b}^\dagger(z, 2T + \tau_-) = -i\hat{b}_0^\dagger(z + v\tau) e^{i[\varphi_M - \frac{E}{\hbar}(2T + \tau)]} \quad (4.14)$$

Ensuite la matrice de passage de la séparatrice (3.40) à résonance ( $\delta = 0$ ) permet de définir les opérateurs de sortie  $\hat{c}^\dagger$  et  $\hat{d}^\dagger$  (voir Fig. 4.3) égaux à :

$$\hat{c}^\dagger(z, 2T + \tau_+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \tilde{b}^\dagger(z, 2T + \tau_-) - ie^{i\varphi_S} \tilde{a}^\dagger(z, 2T + \tau_-) \right] \quad (4.15)$$

$$\hat{d}^\dagger(z, 2T + \tau_+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -ie^{-i\varphi_S} \tilde{b}^\dagger(z, 2T + \tau_-) + \tilde{a}^\dagger(z, 2T + \tau_-) \right] \quad (4.16)$$

Finalement, à un temps  $t$  quelconque après la séparatrice :

$$\hat{c}^\dagger(z, t) = \frac{-e^{i\Psi_c(t)}}{\sqrt{2}} \left[ \hat{a}_0^\dagger(z + v(t - \tau)) + i \hat{b}_0^\dagger(z + v(t + \tau))e^{i\Phi} \right] \quad (4.17)$$

$$\hat{d}^\dagger(z, t) = \frac{-e^{i\Psi_d(t)}}{\sqrt{2}} \left[ \hat{b}_0^\dagger(z - v(t - \tau)) + i\hat{a}_0^\dagger(z - v(t + \tau))e^{-i\Phi} \right] \quad (4.18)$$

avec  $\Psi_c(t) = \varphi_S - \varphi_M - E/\hbar \times t$ ,  $\Psi_d(t) = \varphi_M - \varphi_S - E/\hbar \times t$ , et  $\Phi = 2\varphi_M - \varphi_S$ .

Les opérateurs composant  $\hat{c}$  se dirigent vers le bas après la séparatrice dans le référentiel du centre de masse et sont décalés l'un par rapport à l'autre de  $2v\tau$ . De même les opérateurs composant  $\hat{d}$  se dirigent vers le haut et sont écartés de la même quantité.

#### 4.2.5 Détection

On définit finalement les opérateurs création liés à la détection au niveau de la galette à multi-canaux. Cette légère ré-écriture des opérateurs permet d'alléger les notations.

Le premier détecteur permet de compter les atomes quittant la séparatrice à l'impulsion  $-k$ . Dans son référentiel l'opérateur création d'un atome est noté  $\hat{m}^\dagger(z)$  et est égal à :

$$\hat{m}^\dagger(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) + i \hat{b}_0^\dagger(z + v\tau) e^{i\Phi} \right] \quad (4.19)$$

De même, le second détecteur permet de compter les atomes quittant la séparatrice à l'impulsion  $k$ . Dans son référentiel l'opérateur création d'un atome est noté  $\hat{n}^\dagger(z)$  et est égal à :

$$\hat{n}^\dagger(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \hat{b}_0^\dagger(z + v\tau) + i \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) e^{-i\Phi} \right] \quad (4.20)$$

Les termes de phases  $\Psi_c$  et  $\Psi_d$  ont été omis car ils n'interviennent dans aucune observable expérimentale.

Au final, nous avons pu lier les opérateurs créations au niveau de la détection  $\hat{m}^\dagger$  et  $\hat{n}^\dagger$  aux opérateurs créations lors de l'émission de condensat  $\hat{a}_0^\dagger$  et  $\hat{b}_0^\dagger$ .

### 4.2.6 Densité

Calculons les densités attendues aux deux ports de sortie de la séparatrice. La densité mesurée sur le port de sortie inférieur de la séparatrice est égale à :

$$\int dz \langle \hat{m}^\dagger(z) \hat{m}(z) \rangle = \frac{1}{2} \int dz \langle \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) \hat{a}_0(z - v\tau) \rangle \quad (4.21)$$

$$+ \frac{1}{2} \int dz \langle \hat{b}_0^\dagger(z + v\tau) \hat{b}_0(z + v\tau) \rangle \quad (4.22)$$

$$= \frac{n + n}{2} = n \quad (4.23)$$

avec  $n$  le nombre moyen de paires émises à chaque réalisation de l'expérience défini au 4.2.1. Pour le calcul l'égalité  $\langle \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) \hat{b}_0(z + v\tau) e^{i\Phi} \rangle = 0$  a été utilisée car les atomes sont supposés toujours être émis par paires du condensat. La densité attendue sur le détecteur de sortie supérieur est également égal à  $n$ .

Les densités calculées sont indépendantes du décalage temporel  $\tau$ . Il n'y a donc pas d'effet d'interférence dans les densités. Ce résultat est cohérent avec l'analyse de l'expérience historique décrite au 1.2. pour laquelle le taux de détection par port reste constant lorsque la séparatrice est déplacée.

### 4.2.7 Corrélations croisées en sortie d'interféromètre

Calculons à présent les corrélations attendues entre les détections sur les deux ports de sortie en fonction du décalage temporel  $\tau$ . La corrélation croisées en sortie de séparatrice est égale à :

$$G_{MN}^{(2)} = \iint dzdz' \langle \hat{m}^\dagger(z) \hat{n}^\dagger(z') \hat{m}(z) \hat{n}(z') \rangle \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{4} \iint dzdz' \langle \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) \hat{a}_0^\dagger(z' - v\tau) \hat{a}_0(z - v\tau) \hat{a}_0(z' - v\tau) \rangle \quad (4.25)$$

$$+ \frac{1}{4} \iint dzdz' \langle \hat{b}_0^\dagger(z + v\tau) \hat{b}_0^\dagger(z' + v\tau) \hat{b}_0(z + v\tau) \hat{b}_0(z' + v\tau) \rangle \quad (4.26)$$

$$+ \frac{1}{4} \iint dzdz' \langle \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) \hat{b}_0^\dagger(z' + v\tau) \hat{a}_0(z - v\tau) \hat{b}_0(z' + v\tau) \rangle \quad (4.27)$$

$$+ \frac{1}{4} \iint dzdz' \langle \hat{b}_0^\dagger(z + v\tau) \hat{a}_0^\dagger(z' - v\tau) \hat{b}_0(z + v\tau) \hat{a}_0(z' - v\tau) \rangle \quad (4.28)$$

$$- \frac{1}{4} \iint dzdz' \langle \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau) \hat{b}_0^\dagger(z' + v\tau) \hat{b}_0(z + v\tau) \hat{a}_0(z' - v\tau) \rangle \quad (4.29)$$

$$- \frac{1}{4} \iint dzdz' \langle \hat{b}_0^\dagger(z + v\tau) \hat{a}_0^\dagger(z' - v\tau) \hat{a}_0(z - v\tau) \hat{b}_0(z' + v\tau) \rangle \quad (4.30)$$

Parmi les 16 termes de la décomposition de  $G_{MN}^{(2)}$  seuls 6 termes conservent le nombre de particule et l'impulsion (4.25-30). Des changements de variables (translations) sont appliqués dans les intégrales (4.25-28) ce qui permet de reconnaître les corrélations locales  $G_{AA}^{(2)}/4$  et  $G_{BB}^{(2)}/4$  (4.25-26) et croisées  $G_{AB}^{(2)}/2$  (4.27-28) d'après les équations (4.5-8).

Les termes (4.29-30) ressemblent à des corrélations croisées où les opérateurs créations des deux modes auraient été décalées dans l'espace. Regardons ce qu'ils valent dans deux cas particuliers :

**Cas indiscernable** Si  $\tau = 0$  c'est le cas indiscernable de l'expérience Hong-Ou-Mandel représenté sur la figure 4.1. Les termes (4.29-30) sont tout deux égaux à  $-G_{AB}^{(2)}/4$  et la corrélation croisée vaut alors :

$$G_{MN,ind}^{(2)} = \frac{G_{AA}^{(2)} + G_{BB}^{(2)}}{4} \quad (4.31)$$

La corrélation entre les ports de sortie de la séparatrice est simplement égale à la somme des corrélations locales de la source divisée par quatre.

**Cas discernable** Si  $v|\tau|$  est grand devant la longueur caractéristique des fonctions d'ondes des modes 1 et 2 alors elles ne se recouvrent pas au niveau de la séparatrice. C'est le cas discernable représenté sur la figure 4.2.

Sans calcul, les opérateurs  $\hat{b}_0^\dagger$  et  $\hat{b}_0$  du terme (4.29) crée une première particule de fonction d'onde centrée sur  $-v\tau$  et les opérateurs  $\hat{a}_0^\dagger$  et  $\hat{a}_0$  une seconde particule de fonction d'onde centrée sur  $v\tau$ . Au final le terme (4.29) semble donc être proportionnel à une intégrale de recouvrement entre les deux modes qui va tendre vers zéro lorsque  $v|\tau|$  est grand devant la longueur caractéristique des fonctions d'ondes considérées. Le même raisonnement appliqué à (4.30) permet de conclure que dans le cas discernable la corrélation croisée vaut :

$$G_{MN,dis}^{(2)} = \frac{G_{AA}^{(2)} + G_{BB}^{(2)}}{4} + \frac{G_{AB}^{(2)}}{2} \quad (4.32)$$

Un calcul approché des termes (4.29-30) à la section 4.2.9 permettra de valider ce résultat.

La corrélation entre les ports de sortie est maintenant égale à la somme des corrélations locales de la source divisées par 4 plus la corrélation croisée divisée par deux.

**Visibilité** Les corrélations croisées en sortie de l'interféromètre manifestent donc un trou lorsque que celui-ci est parfaitement refermé et sa visibilité est évaluée par :

$$V = \frac{G_{MN,dis}^{(2)} - G_{MN,ind}^{(2)}}{G_{MN,dis}^{(2)} + G_{MN,ind}^{(2)}} = \frac{1}{1 + \frac{G_{AA}^{(2)} + G_{BB}^{(2)}}{2G_{AB}^{(2)}}} \quad (4.33)$$

Ainsi plus le rapport des corrélations croisées sur les locales de la source est important plus le trou est visible. En utilisant les relations du modèle à deux modes (2.59-60), la visibilité s'écrit en fonction seulement du nombre d'atomes par mode  $\bar{n}$  :

$$V = \frac{1}{1 + \frac{2}{2+1/\bar{n}}} \quad (4.34)$$

La visibilité du trou Hong-Ou-Mandel tend vers 1 si  $\bar{n}$  tend vers 0 comme attendu car dans cette limite la source n'émet jamais deux paires dans les mêmes modes.

### 4.2.8 Corrélations locales en sortie d'interféromètre

De même les corrélations locales en sortie d'interféromètre peuvent être évaluées, elles sont égales à la corrélation croisée (4.25-30) avec inversion de signes des termes (4.29-30).

Dans le cas indiscernable ( $\tau = 0$ ) la corrélation locale est égale à :

$$G_{MM,ind}^{(2)} = G_{NN,ind}^{(2)} = \frac{G_{AA}^{(2)} + G_{BB}^{(2)}}{4} + G_{AB}^{(2)} \quad (4.35)$$

Et dans le cas discernable ( $v\tau$  grand devant la taille caractéristique des modes 1 et 2) :

$$G_{MM,dis}^{(2)} = G_{NN,dis}^{(2)} = \frac{G_{AA}^{(2)} + G_{BB}^{(2)}}{4} + \frac{G_{AB}^{(2)}}{2} = G_{MN,dis}^{(2)} \quad (4.36)$$

Les corrélations locales et croisées sont donc égales dans le cas discernable. Puis à l'inverse des corrélations croisées les corrélations locales manifestent un pic lorsque l'interféromètre est parfaitement refermé.

### 4.2.9 Forme du trou/pic

Afin de calculer une forme approchée du trou Hong-Ou-Mandel (et de manière équivalente celle du pic) on va considérer ici que l'état produit par la source est proche de :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{n}}} \left[ |0\rangle + \sqrt{\tilde{n}} \iint dzdz' \phi_1(z)\phi_2(z')\hat{a}_0^\dagger(z)\hat{b}_0^\dagger(z') |0\rangle \right] \quad (4.37)$$

Avec  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les fonctions d'ondes des deux modes constituant les paires émises non précisées pour l'instant. La forme (4.37) suppose que la source n'émet jamais deux atomes dans le même mode à chaque réalisation de l'expérience. Cet état est en fait approché expérimentalement lorsque le nombre moyen de paires émises est faible devant 1 ( $\tilde{n} \ll 1$ ), voir 2.5.7. Le nombre moyen de paires émises  $n$  est alors égal à  $\tilde{n}/(1+\tilde{n}) \cong \tilde{n}$ . Dans cette limite la visibilité du trou HOM est parfaite par l'équation (4.34).



En utilisant les deux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 & \hat{b}_0(z + v\tau)\hat{a}_0(z' - v\tau) |\Psi\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{\tilde{n}}{1 + \tilde{n}}} \hat{b}_0(z + v\tau)\hat{a}_0(z' - v\tau) \iint dz'' dz''' \phi_1(z'')\phi_2(z''')\hat{a}_0^\dagger(z'')\hat{b}_0^\dagger(z''') |0\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{\tilde{n}}{1 + \tilde{n}}} \phi_1(z' - v\tau)\phi_2(z + v\tau) |0\rangle
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

et,

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi | \hat{a}_0^\dagger(z - v\tau)\hat{b}_0^\dagger(z' + v\tau) \\
 &= \sqrt{\frac{\tilde{n}}{1 + \tilde{n}}} \iint dz'' dz''' \phi_1^*(z'')\phi_2^*(z''') \langle 0 | \hat{a}_0(z'')\hat{b}_0(z''')\hat{a}_0^\dagger(z - v\tau)\hat{b}_0^\dagger(z' + v\tau) \\
 &= \sqrt{\frac{\tilde{n}}{1 + \tilde{n}}} \phi_1^*(z - v\tau)\phi_2^*(z' + v\tau) \langle 0 |
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

on peut calculer le terme (4.29) égal à :

$$-\frac{\tilde{G}_{AB}^{(2)}}{4} [I_{1,2}(\tau) \times I_{1,2}^*(-\tau)] \tag{4.40}$$

Avec  $\tilde{G}_{AB}^{(2)} = \tilde{n}/(1 + \tilde{n}) = n$  les corrélations croisées de la source calculées avec l'état (4.37)<sup>3</sup> et  $I_{1,2}(\tau)$  l'intégrale de recouvrement entre les deux modes atomiques des paires égales à :

$$\boxed{I_{1,2}(\tau) = \int dz \phi_2(z + v\tau)\phi_1^*(z - v\tau)} \tag{4.41}$$

De la même manière on peut calculer le terme (4.30) égal à  $-\tilde{G}_{AB}^{(2)}/4(I_{1,2}^*(\tau) \times I_{1,2}(-\tau))/2$ , puis les termes de corrélations croisées (4.27-28) valant  $\tilde{G}_{AB}^{(2)}/2$  et finalement les termes de corrélations locales (4.25-26) qui sont nuls car on néglige ici l'émission de plusieurs atomes par modes.

La corrélation croisée calculée à partir de l'état (4.37) en sortie d'interféromètre en fonction du décalage au recouvrement sur la séparatrice  $\tau$  est finalement égale à :

$$\tilde{G}_{MN}^{(2)} = \frac{\tilde{G}_{AB}^{(2)}}{2} \left[ 1 - \frac{I_{1,2}(\tau) \times I_{1,2}^*(-\tau) + I_{1,2}^*(\tau) \times I_{1,2}(-\tau)}{2} \right] \tag{4.42}$$

---

3. La corrélation croisée normalisée calculée à partir de l'état (4.37) est donc  $\tilde{g}_{AB}^{(2)} = 1/n$  ce qui est cohérent avec le modèle à deux modes quand  $n \rightarrow 0$ .

Si de plus on suppose que les fonctions d'ondes sont symétriques dans l'espace (4.42) se simplifient en :

$$\boxed{\tilde{G}_{MN}^{(2)} = \frac{\tilde{G}_{AB}^{(2)}}{2} [1 - |I_{1,2}(\tau)|^2]} \quad (4.43)$$

La valeur de la corrélation croisée en sortie d'interféromètre dépend finalement du recouvrement des fonctions d'ondes sur la séparatrice. Lorsque le décalage temporel  $\tau$  est tel que  $v|\tau|$  est grand devant la taille caractéristique des fonctions d'ondes il n'y a aucun recouvrement,  $|I_{1,2}|^2$  est nul et les corrélations sont maximales. Si au contraire elle se recouvrent  $|I_{1,2}|^2$  est maximale et les corrélations diminuent. Il y a donc bien un trou Hong-Ou-Mandel et sa largeur temporelle dépend de la longueur des modes atomiques.

La modélisation nous a permis de prédire un trou dans les corrélations croisées en sortie d'interféromètre lorsque les modes se recouvrent parfaitement sur la séparatrice à la manière de l'expérience historique. De plus la visibilité attendue du trou est donnée seulement par le nombre moyen de paires émises par mode (4.34). Finalement dans le cas particulier où la source émet un maximum d'une paire à chaque réalisation la forme du trou a pu être liée à l'intégrale de recouvrement des fonctions d'ondes atomiques sur la séparatrice (4.41) à la manière de l'expérience historique.

### 4.3 Expérience

Expérimentalement, on réalise le protocole présenté en introduction 4.1 pour différents moments d'application de la séparatrice. Afin de moyennner les dérives lentes, de l'ordre de l'heure, du nombre d'atomes dans le condensat et donc du nombre de paires par modes, la position temporelle de la séparatrice est tirée aléatoirement (méthode non employée dans [88]).

Le profil de densité et les corrélations des paires atomiques utilisées dans les résultats suivants sont ceux présentés au chapitre 2. La source émet donc entre autres des paires d'atomes aux impulsions  $k_1$  et  $k_2$  égale à 0.75 et 1.3  $k_{rec}$  correspondant aux deux maxima du profil de densité (Fig. 2.19). Le réseau utilisé pour réaliser les éléments d'optique atomique (miroirs et séparatrices) est celui présenté au chapitre 3, celui-ci permet d'incrémenter l'impulsion des atomes de  $\pm\Delta k_B = 0.55k_{rec}$  correspondant exactement à la différence d'impulsion de la paire  $[k_1, k_2]$ .

L'ensemble des données expérimentales présentées dans la suite est le fruit d'environ 12 jours (10 heures par jour) de données cumulées. Chaque position

temporelle de la séparatrice correspond à en moyenne 720 réalisations de l'expérience durant chacune environ 30 secondes.

### 4.3.1 Évolution des densités et corrélations

Les détections des atomes quittant la séparatrice aux impulsions  $k_1 = 0.75$  et  $k_2 = 1.3 k_{rec}$  selon la verticale et nulles transversalement sont enregistrées. Ces dernières permettent de calculer le nombre moyen de détection par port de sortie  $n_{k_1}$  et  $n_{k_2}$  ainsi que les corrélations entre les ports  $G_{MN}^{(2)}$  et  $g_{MN}^{(2)}$ . Ces quantités sont représentées sur la figure 4.4 en fonction du moment d'application de la séparatrice prenant comme origine le centre du miroir.

Les corrélations manifestent, comme attendues, un trou pour un temps entre le miroir et la séparatrice d'environ  $750 \mu s$  alors que les densités à chaque port de sortie restent stables : c'est donc bien une interférence à deux particules, l'effet Hong-Ou-Mandel. Par symétrie de l'interféromètre on peut maintenant placer le temps moyen de création des paires au centre du réseau de création de paire (comme sur la figure 4.1).

Les zones d'intégration sont choisies cylindriques de longueur  $0.03 k_{rec}$  selon la verticale et de diamètre  $0.042 k_{rec}$ . Ce volume d'intégration est en fait défini expérimentalement en optimisant le rapport signal sur bruit de la visibilité du trou. D'après l'étude des distributions et des corrélations locales du chapitre 2 ces dimensions semblent proches de celle d'un mode bien que légèrement plus large longitudinalement. Dans la suite on considère que ce volume permet de définir le nombre moyen de paires émises par réalisation dans les modes  $[k_1, k_2]$ , celui-ci est évalué à  $\bar{n} = \langle (n_{k_1} + n_{k_2})/2 \rangle / \eta = 0.33(7)$  avec  $\eta = 25(5)\%$  la détectivité de la galette à micro-canaux.

Finalement, les niveaux de corrélation au fond et sur les bords du trou renseignent d'après (4.31-32) sur les corrélations avant la séparatrice. De la courbe  $G_{MN}^{(2)}$  (Fig. 4.4) on extrait :  $(G_{AA}^{(2)} + G_{BB}^{(2)})/2 = 0.006(2)$  et  $G_{AB}^{(2)} = 0.024(5)$ . De même, de  $g_{MN}^{(2)}$  on extrait<sup>4</sup> :  $(g_{AA}^{(2)} + g_{BB}^{(2)})/2 = 1.0(2)$  et  $g_{AB}^{(2)} = 2.8(5)$ . Ces valeurs ne semblent pas en accord avec le modèle simple pour lequel les corrélations locales normalisées sont égales à 2 (2.59) et les corrélations croisées à  $2 + 1/\bar{n} = 5.0(5)$  (2.60). Ce déficit de corrélation peut être expliqué en partie si le volume d'intégration est légèrement trop grand par rapport à la taille du mode. En considérant l'intégration longitudinale deux fois trop large, l'amplitude des corrélations attendues serait divisée par deux environ soit les corrélations locales égales à 1.5 et croisées à 3(3). Cependant ce n'est pas suffisant et ce problème reste ouvert. Cet effet avait aussi été

---

4. Le nombre d'atome par mode incident n'étant pas précisément le même on ne peut pas relier exactement les corrélations normalisées avant et après la séparatrice.

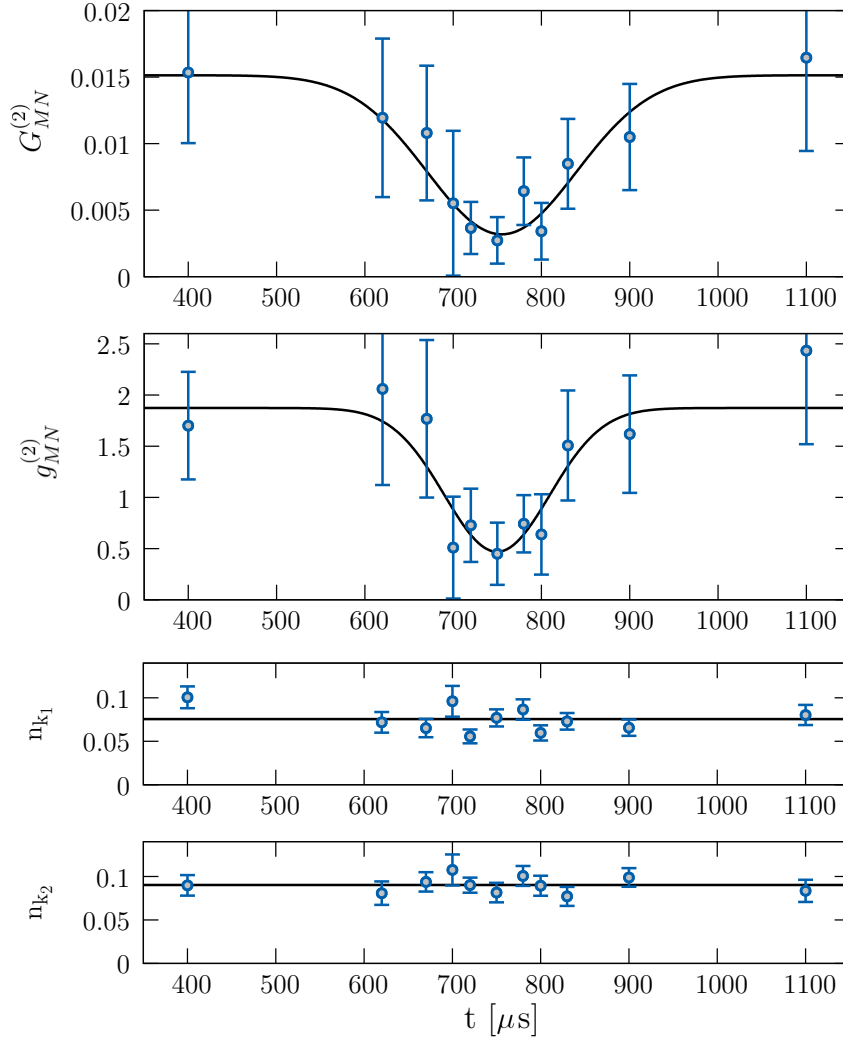


FIGURE 4.4 – Corrélation croisée  $G_{MN}^{(2)}$  (ligne 1) et  $g_{MN}^{(2)}$  (ligne 2) et densités  $n_{k_1}$  (ligne 3) et  $n_{k_2}$  (ligne 4) en sortie d’interféromètre en fonction du moment d’application de la séparatrice avec origine le centre du miroir. Les deux zones d’intégration sont cylindriques dans l’espace des impulsions de longueur  $0.03k_{rec}$  selon  $z$  et de diamètre  $0.042k_{rec}$  dans le plan  $0xy$ . Les corrélations manifestent un trou que l’on ajuste avec une gaussienne renversée de visibilité et largeur RMS variables. Pour  $G_{MN}^{(2)}$ ,  $\sigma = 85(23)\mu s$  et  $V = 78(6)\%$  et pour  $g_{MN}^{(2)}$ ,  $\sigma = 60(16)\mu s$  et  $V = 75(8)\%$ . Les densités sont stables et le nombre moyen d’atomes détectés sur les ports sont  $n_{k_1} = 0.076(14)$  et  $n_{k_2} = 0.090(9)$ . Les barres d’erreur des graphes sont évaluées par méthode de *bootstrapping* [93].

remarqué pour la première expérience [41].

### 4.3.2 Visibilité

Bien que les niveaux de corrélation mesurés sur les courbes de la figure 4.4 ne semblent pas en parfait accord avec le modèle simple, on montre dans la suite que cela est bien le cas pour la visibilité du trou Hong-Ou-Mandel. La formule (4.34) permet d'évaluer la visibilité du trou avec comme seul paramètre le nombre moyen de paires émises  $\bar{n}$ . Celui-ci est évalué comme discuté dans la section précédente en optimisant le volume d'intégration permettant le meilleur signal sur bruit de la visibilité. En effet, on considère que si les volumes d'intégration sont plus grands qu'un mode les modes adjacents vont venir interférer avec l'expérience HOM et la visibilité décroître puis si le volume d'intégration est plus petit qu'un mode le trou reste aussi profond mais la statistique baisse ce qui augmente le bruit de mesure.

On applique donc ce raisonnement pour les deux expériences Hong-Ou-Mandel réalisées ([88] et Fig. 4.4) et on regroupe les résultats dans le tableau suivant :

Expériences	$\bar{n}$	$V_{th}$ (4.34)	$V_{exp}$
Lopes et al. [88, 41]	0.74(15)	0.63(3)	0.65(7)
Ce travail	0.33(7)	0.72(2)	0.75(8)

Le nombre moyen d'atome par mode  $\bar{n}$  est pris comme la moyenne du nombre d'atome détecté sur chaque port divisée par la détectivité du MCP évaluée à  $\eta = 25(5)\%$ . L'erreur sur  $\bar{n}$  dans le tableau est calculée à partir de la barre d'erreur de la détectivité, elle est ensuite propagée à la barre d'erreur sur la visibilité attendue  $V_{th}$  par l'équation (4.34). La visibilité expérimentale  $V_{exp}$  considérée dans les deux travaux est celle de la corrélation normalisée  $g_{MN}^{(2)}$ .

Finalement, les mesures expérimentales de la visibilité du trou HOM sont en bon accord avec les prédictions du modèle simple. Le nombre moyen de paires émises sur la nouvelle expérience est deux fois plus faible ce qui permet de réduire la probabilité d'émission de plus d'une paire par réalisation et cela se traduit par une visibilité accrue du trou Hong-Ou-Mandel. Comme discuté à la section 2.4.4, la probabilité d'émission d'une paire divisée par la probabilité d'émission de plus d'une paire est égale à 1.3 pour l'expérience précédente ( $\bar{n} = 0.74$ ) et égal à 3 pour ce travail ( $\bar{n} = 0.33$ ).

### 4.3.3 Taille du trou

Commentons à présent la largeur du trou Hong-Ou-Mandel observée. D'après (4.43) elle peut être directement liée aux largeurs des modes atomiques incidents et à leur recouvrement sur la séparatrice. Cela va nous permettre une mesure indirecte de la taille des modes.

Les deux fonctions d'ondes associées aux modes atomiques sont considérées uniformes de longueur  $L$ . Bien que l'on sache que cette description n'est pas exacte cela va permettre de donner un ordre de grandeur de la longueur des modes. Cette même hypothèse avait permis d'évaluer la taille des modes à  $48(9) \mu\text{m}$  avec la mesure de la largeur de corrélation locale à la section 2.6.6.1. L'intégrale de recouvrement  $I_{1,2}(\tau)$  (4.41) est alors égale à une fonction triangle  $T(\tau)$  de largeur à mi-hauteur  $L/4v$ . Sur la figure 4.5, on ajuste la forme de la corrélation  $G_{MN}^{(2)}$  avec la fonction :  $A + B \times (1 - T^2(\tau))$ , où  $A$ ,  $B$  et  $L$  sont les paramètres d'ajustement. La longueur ajustée des fonctions d'ondes est de  $L = 17(5) \mu\text{m}$ .

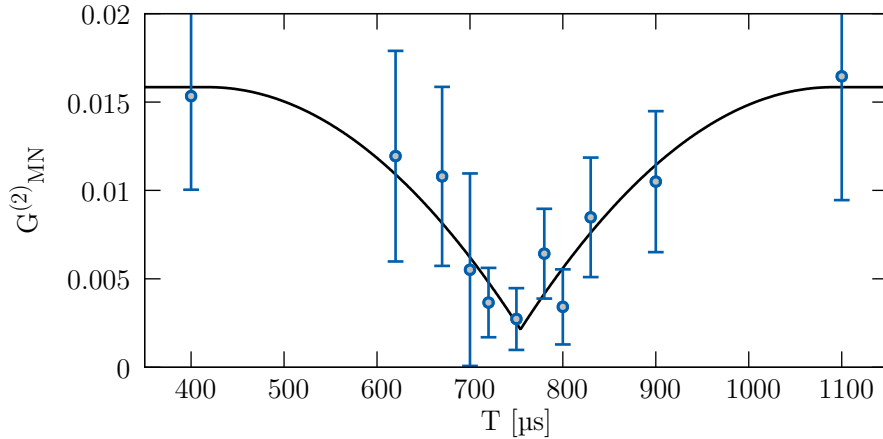


FIGURE 4.5 – Ajustement du trou Hong-Ou-Mandel des corrélations croisées  $G_{MN}^{(2)}$  en considérant les fonctions d'ondes incidentes uniformes de taille  $L$ . La fonction d'ajustement est de la forme :  $A + B(1 - T^2(\tau))$  (voir texte) ce qui permet d'extraire  $L = 17(5)\mu\text{m}$ .

Cette taille est de l'ordre de grandeur du condensat  $L_{BEC} = 70(4)\mu\text{m}$  (voir 2.6.1) mais sensiblement plus petite. Bien que les raisons de cette différence ne soient pas parfaitement identifiées, certains effets pouvant mener à ce résultat sont listés dans la suite :

- Il y a une probabilité accrue d'être émis à partir du centre du condensat qui est plus dense car le gain du processus est proportionnel à la densité.

Ainsi on s'attend à trouver une dimension des modes plus faible que le condensat. Cela explique aussi la mesure de largeur de corrélation locale de la section 2.6.6.1 ajustée avec une longueur effective également plus faible de  $48(9) \mu\text{m}$ .

- Il est possible que les zones d'intégration choisies ne soient pas assez petites et que certains atomes des modes adjacents soient aussi détectés pouvant mener à un élargissement du trou.
- La modélisation présentée dans la section 4.2.9 ne considère que le cas parfait pour lequel jamais plus d'une paire est émise du condensat. Comme discuté à la section précédente expérimentalement la probabilité d'émission de plus d'une paire n'est pas négligeable et seulement trois fois plus faible que la probabilité d'émission d'une paire.

Finalement, l'ajustement de la forme du trou Hong-Ou-Mandel permet de retrouver l'ordre de grandeur de la longueur théorique des modes atomiques. Pour vérifier la validité de la modélisation de la section 4.2.9 il faudrait recommencer l'expérience avec une meilleure statistique et dans un régime de très faible émission. Cependant les données présentées correspondent déjà à 12 jours de mesure et les problèmes de dérive très lente de l'expérience, principalement le nombre d'atome dans le condensat, ne permettent pas pour l'instant une intégration beaucoup plus longue. Certaines améliorations possibles de l'expérience pouvant améliorer la statistique sont discutées à la section 5.5.

### 4.3.4 Corrélation locale

Les corrélations locales en sortie d'interféromètre peuvent ensuite être analysées. D'après la section 4.2.8 les corrélations locales doivent manifester un pic lorsque l'interféromètre est parfaitement refermé. Dans notre cas comme le montre la figure 4.6, les données expérimentales de la moyenne des corrélations locales à chaque port  $(G_{MM}^{(2)} + G_{NN}^{(2)})/2$  ne sont pas convaincantes. On remarque de plus que le niveau de corrélation sur les bords n'est pas égal (aux barres d'erreur près) aux corrélations croisées comme cela est attendu par l'équation (4.36).

Cette difficulté de mesure des corrélations locales dans l'expérience Hong-Ou-Mandel avait déjà été remarquée dans l'expérience précédente [41]. L'explication la plus probable est un effet de saturation du détecteur lorsque deux atomes atteignent le détecteur simultanément ayant pour effet de manquer une des détections. Cependant dans le régime de l'expérience le flux atomique

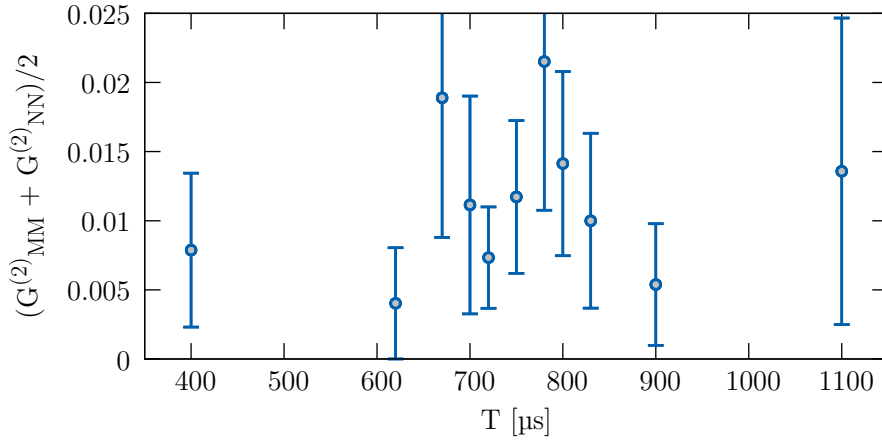


FIGURE 4.6 – Corrélation locales en sortie d’interféromètre. La corrélation  $(G_{MM}^{(2)} + G_{NN}^{(2)})/2$  est tracée en fonction du moment d’application de la séparatrice  $T[\mu\text{s}]$

est faible ( $\cong 10^4$  at/cm<sup>2</sup>/s) et cette saturation n’a pas pu pour l’instant être caractérisée.

### 4.3.5 Coïncidences

Finalement la dernière façon de présenter les résultats expérimentaux est de tracer le nombre de coïncidences entre les deux détecteurs de sortie comme dans l’expérience historique [14].

Sur la figure 4.7 est représenté le taux de détection de coïncidences croisées (courbe bleu) : nombre de réalisations expérimentales avec exactement une détection d’atomes dans chaque port de sortie (normalisé par le nombre total de réalisations), ainsi que le nombre de coïncidences locales (courbe rouge) : nombre de réalisations expérimentales avec exactement deux détections d’atome dans un des ports de sortie (normalisé également par le nombre total de réalisations)<sup>5</sup>.

Comme attendu pour l’effet Hong-Ou-Mandel le taux de coïncidences croisées baisse et le taux de coïncidences locales augmente lorsque l’interféromètre est équilibré. Cependant comme pour les corrélations locales le taux de coïncidences locales est plus faible que prévu et n’atteint pas le taux de coïncidences croisées sur les bords du trou. Comme pour les corrélations locales

5. Comme la détectivité de la galette à micro-canaux n’est pas de 100% (= 25%) la sélection des réalisations avec deux détections ne permet pas d’écarter a posteriori celles avec émission de plus d’une paire.



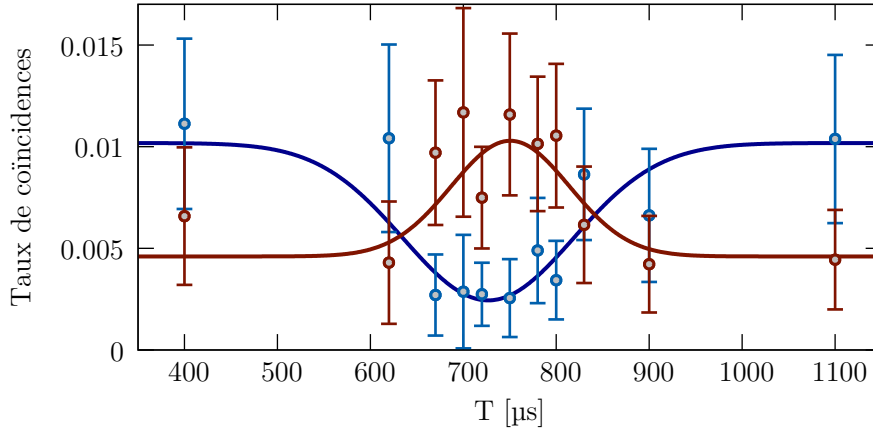


FIGURE 4.7 – Coïncidences en sortie d’interféromètre. Les taux de coïncidences croisées (bleu) et locales (rouge) sont tracés en fonction du moment d’application de la séparatrice  $T[\mu\text{s}]$ .

l’effet le plus probable pouvant expliquer le déficit de coïncidences locales est la saturation du détecteur lorsque deux atomes l’atteignent simultanément.

La figure 4.7 permet d’apprécier le fait que les événements significatifs sont rares, en effet une coïncidence locale ou croisée n’est détectée que dans 1.5% des réalisations expérimentales soit une toutes les 30 minutes environ.

## 4.4 Conclusion

En résumé nous avons présenté dans le quatrième chapitre de ce manuscrit une modélisation puis une mise en pratique de l’expérience Hong-Ou-Mandel atomique. La corrélation croisée manifeste un trou lorsque le moment d’application de la séparatrice est décalé à la manière de l’expérience historique. En comparant avec l’expérience précédente [88] on a également montré que la visibilité du trou HOM est en accord avec le modèle simple à deux modes. Ensuite la modélisation a permis de lier l’intégrale de recouvrement des modes atomiques sur la séparatrice à la forme temporelle du trou et on a montré que l’ordre de grandeur de sa largeur est compatible avec les paramètres expérimentaux. Finalement, des questions restent ouvertes sur l’interprétation de certains niveaux de corrélations observés ainsi que sur les mesures de corrélations locales.

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, les données de l’expérience Hong-Ou-Mandel seront analysées sous un nouvel angle révélant ainsi une expérience préliminaire au test des inégalités de Bell.

— Résumé Chapitre 4 —

- Le processus de création de paires par instabilité dynamique (chapitre 2) peut être couplé à des miroirs et séparatrices à atomes (chapitre 3) afin de mettre en place une expérience Hong-Ou-Mandel atomique.
- Déplacer temporellement le moment d'application de la séparatrice permet d'ajuster la discernabilité des atomes ce qui permet de former l'équivalent du trou HOM.
- La visibilité du trou HOM est compatible avec le modèle simple à deux modes.
- La forme temporelle du trou HOM est liée à l'intégrale de recouvrement des modes au niveau de la séparatrice à la manière de l'expérience historique. L'ordre de grandeur de la largeur de trou est compatible avec les paramètres expérimentaux.

# Chapitre 5

## Interféromètre à 4 modes et 2 atomes

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, la réalisation d'un interféromètre à quatre modes et deux atomes est présentée [94]. La configuration de l'expérience permet un test partiel d'une inégalité de Bell sur la variable d'impulsion de particules massives et peut être étendue afin de réaliser un test complet. L'expérience proposée s'intéresse à l'intrication de seulement deux atomes afin d'étudier une configuration au plus proche des premières expériences de pensée [21] présentes de nos jours dans tous les manuels scolaires de mécanique quantique [95]. De plus l'intrication étant portée sur les variables d'impulsion des atomes, ces derniers se séparent naturellement ce qui permet d'envisager des tests de non-localité. Aucune expérience n'a pu jusqu'à présent former un tel test avec des particules massives<sup>1</sup> et les résultats dans ce domaine sont souhaitables afin de pouvoir approcher l'interface entre mécanique quantique et gravitation [5].

Notez que plusieurs systèmes d'atomes ultra froids ont déjà pu réaliser de l'intrication dans des systèmes formés d'un grand nombre d'atomes [97, 98, 99]. Dans ce régime de grand nombre de particules des indicateurs de corrélation non classique et de non localité ont pu être développés [100, 101] ce qui a permis la démonstration d'expériences type paradoxe EPR [102] et inégalités de Bell [36].

Les résultats expérimentaux décrits dans la suite sont donc préliminaires à un test rigoureux des inégalités de Bell sur la variable d'impulsion de deux atomes. Les mesures présentées sont encourageantes car incompatibles avec une description de l'émission par un mélange statistique de paires. On montre ainsi qu'elles contraignent fortement les interprétations vers une description

---

1. Une expérience approchée utilisant des électrons est reportée dans [96].

de la source en terme d'état intriqué sans pour autant prouver l'intrication à ce stade. Les améliorations expérimentales possibles menant au test futur des inégalités de Bell sont également discutées.

## 5.1 Introduction

Le but de cette introduction est de montrer comment l'expérience Hong-Ou-Mandel du chapitre précédent peut être analysée sous un nouvel angle faisant apparaître un test partiel d'une inégalité de Bell sur la variable d'impulsion des atomes. Dans un premier temps on montrera comment réaliser un tel test quand l'intrication porte sur l'impulsion des particules en s'appuyant sur la première expérience de ce type, l'expérience Rarity-Tapster [103]. Puis on la compara avec notre système afin de montrer comment nous pouvons réaliser une tel expérience avec notre protocole.

### 5.1.1 Test des inégalités de Bell en impulsion

Afin de présenter comment un test des inégalités de Bell sur la variable d'impulsion de particules peut être entrepris on s'intéresse ici à la première expérience de ce type réalisée par Rarity et Tapster en 1990 [103].

Les auteurs de cette expérience utilisent un cristal non-linéaire afin de créer des paires de photons (Fig.5.1), à la manière du montage Hong-Ou-Mandel historique présenté en introduction 1.2.1. Les deux photons constituant une paire sont émis avec une différence d'angle  $\theta_2 - \theta_1$  précisément égale à  $28.9^\circ$  l'un de l'autre par conservation stricte de l'impulsion. Cependant l'angle moyen d'émission des deux photons  $(\theta_1 + \theta_2)/2$  n'est pas fixé car le laser de pompe est légèrement focalisé dans le cristal. Il en résulte que plusieurs paires de photons avec écart angulaire constant peuvent être émises par le cristal et quatre ouvertures sont placées pour en sélectionner seulement deux. Les quatre impulsions sélectionnées sont notées  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  et sont reportées sur la figure 5.1.

Dans un régime de faible pompage du cristal, deux paires de photons ne sont jamais émises en même temps dans les quatre modes sélectionnés précédemment et l'état du système après le cristal s'écrit :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p_1, p_3\rangle + |p_4, p_2\rangle) \quad (5.1)$$

L'état produit est une superposition cohérente de  $|p_1, p_3\rangle$  et  $|p_4, p_2\rangle$ . C'est un état intriqué car la mesure d'impulsion d'un des photons implique la connaissance instantanée de l'impulsion de l'autre photon.

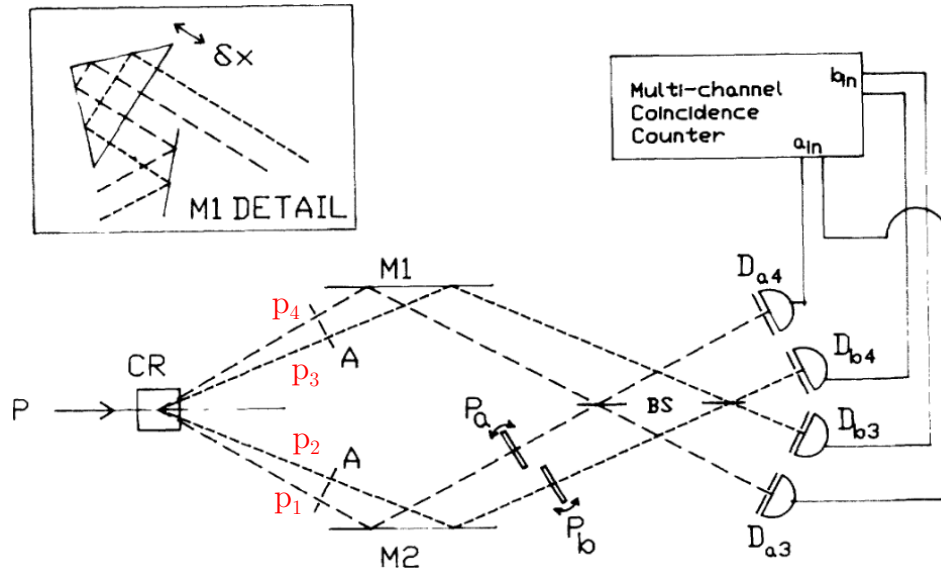


FIGURE 5.1 – Schéma de l'expérience de Rarity Tapster (image prise dans [103], impulsions en rouge ajoutées). Des paires de photons sont émis d'un cristal non-linéaire, des ouvertures permettent de sélectionner deux sets de paires. Les faisceaux sont recombinés sur deux séparatrices et une électronique adaptée permet le comptage des coïncidences aux sorties des deux interféromètres.

Afin d'exclure toute interprétation en terme de variables cachées locales, les auteurs de [103] ont formé un test d'inégalité de Bell. Si l'on se réfère à l'expérience présentée en introduction 1.2.2 on remarque que le protocole menant à un test d'inégalité de Bell implique de procéder à des mesures sur chaque particule après avoir mélangé leur deux états possibles. En effet dans le protocole décrit à la section 1.2.2.4 les composantes verticale et horizontale de polarisation de chacun des photons étaient mélangées grâce à une lame demi-onde et un cube polariseur. Pour réaliser ce mélange avec l'impulsion des photons il faut former deux interféromètres regroupant les deux états possibles de chaque photon. Sur la figure 5.1 on voit donc que les composantes d'impulsion du premier photon  $p_1$  et  $p_4$  sont réfléchies puis mélangées sur une séparatrice et de même les composantes d'impulsion du second photon  $p_2$  et  $p_3$  sont mélangées sur une seconde séparatrice. Finalement l'ajout de lame de verre inclinable par les auteurs dans chaque interféromètre permet d'ajuster la phase relative de ces derniers.

Ce protocole est mathématiquement équivalent à celui présenté au chapitre 1 : l'angle de rotation des lames  $\lambda/2$  étant remplacé par le déphasage ajouté

par les lames de verre. En répétant l'expérience pour différents déphasages, les probabilités conjointes de détection des photons aux sorties des deux séparatrices peuvent être formées ainsi qu'un corrélateur. Les auteurs de [103] observent ensuite l'évolution du corrélateur en fonction de la différence de phase des interféromètres, ce qui mène à la violation des inégalités de Bell.

L'équivalence mathématique entre cette configuration et celle présentée au chapitre 1 sera précisée à la section 5.2 lors du développement du formalisme de l'expérience. L'équivalence est aussi traitée dans l'article [94] reporté en fin de manuscrit.

## 5.1.2 Expérience avec des atomes

Afin de réaliser l'expérience Rarity-Tapster [103] avec des atomes cela nécessite en premier lieu une source émettant différentes paires atomiques sous la forme d'un état intriqué. Puis les atomes doivent être recombinaés deux à deux dans deux interféromètres comme décrit dans la section précédente. Finalement les phases des deux interféromètres doivent pouvoir être manipulées. Ces trois points sont traités dans l'ordre dans les paragraphes suivants.

### 5.1.2.1 État intriqué

Au chapitre 2 les propriétés de corrélations de la source atomique ont été analysées et la forme allongée de ces dernières (Fig. 2.23) nous ont indiqué le caractère multi-mode de l'émission, voir les sections 2.5.6-7. Comme pour l'analyse HOM on souhaite à présent décrire l'expérience dans le centre de masse des paires ainsi la figure 2.23 décrivant les corrélations est reportée sur la figure 5.2 en retranchant en abscisse et ordonnée l'impulsion moyenne des paires  $k_m$  égale à  $1.025 k_{rec}$ . La source peut être décomposée en plusieurs paires de modes et deux de ces paires sont représentées sur la figure 5.2. Les quatre modes d'émission sont notés  $p$ ,  $-p$ ,  $p'$  et  $-p'$ . La conservation stricte de la quasi-impulsion dans notre système implique un appariement des modes d'impulsion opposés sur ce graphe soit  $p$  avec  $-p$  et  $p'$  avec  $-p'$ . Comme discuté au 2.5.7 dans un régime de faible émission (jamais plus de deux atomes sont émis<sup>2</sup>) et si l'on suppose la cohérence de l'émission, l'état de la source peut s'écrire de manière approchée dans le sous-espace des quatre impulsions  $(p, -p, p', -p')$  :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p, -p\rangle + |-p', p'\rangle) \quad (5.2)$$

---

2. Expérimentalement ce n'est jamais vraiment le cas, voir discussion à la section 5.2.7.

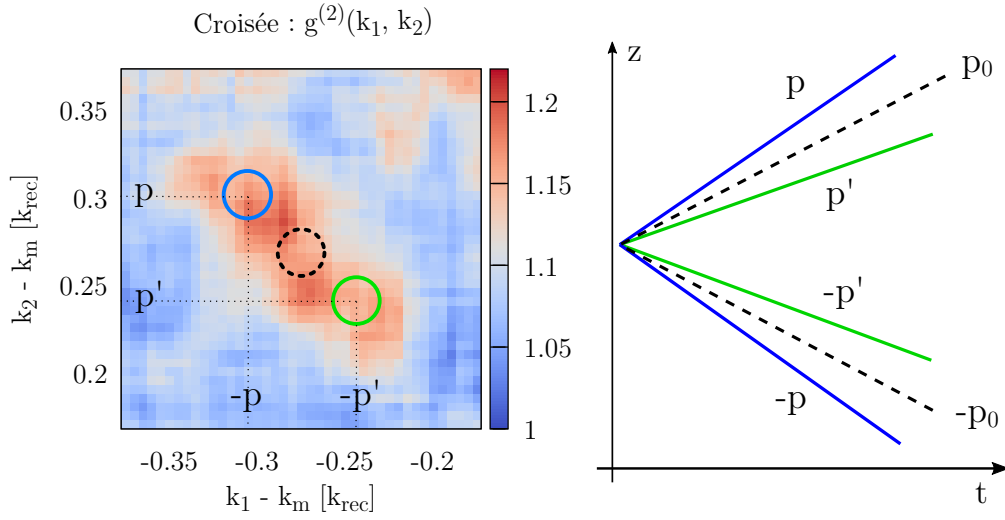


FIGURE 5.2 – Émission de différentes paires par la source. A gauche : Carte de corrélation croisée de la source dans le référentiel de centre de masse. A droite : Deux paires (ligne bleu  $[p, -p]$  et vert  $[p', -p']$ ) pouvant être émises de la source sont représentées dans un diagramme temps position dans le référentiel de centre de masse. Les paires émises aux impulsions  $p_0$  et  $-p_0$  ont été utilisées dans l'expérience HOM du chapitre précédent.

Notez que (5.2) suppose également que la probabilité d'émission de la paire  $[p, -p]$  est égale à celle de  $[p', -p']$ , c'est en fait le cas dans l'expérience proposée. On omet aussi le fait que la plupart du temps aucun atome n'est émis par la source.

Ainsi la source semble émettre un état intriqué comme (5.1) c'est donc le bon point de départ d'un test de violation des inégalités de Bell. Notez que le diagramme temps position de la figure 5.2 permet une représentation similaire à la propagation des photons dans l'expérience Rarity-Tapster (Fig. 5.1) cependant ici l'angle moyen d'émission des paires  $\theta_2 - \theta_1$  est constant égal à zéro.

### 5.1.2.2 Recombinaison 2 à 2

Ensuite pour réaliser l'expérience Rarity-Tapster il faut maintenant pouvoir recombinaison l'impulsion  $p$  avec  $-p'$  dans un premier interféromètre et  $-p$  avec  $p'$  dans un second. On montre dans la suite que le protocole HOM (4.1.1) permet de réaliser ce mélange sous deux conditions sur  $p$  et  $p'$ .

Dans l'expérience HOM présentée au chapitre précédent une seule paire

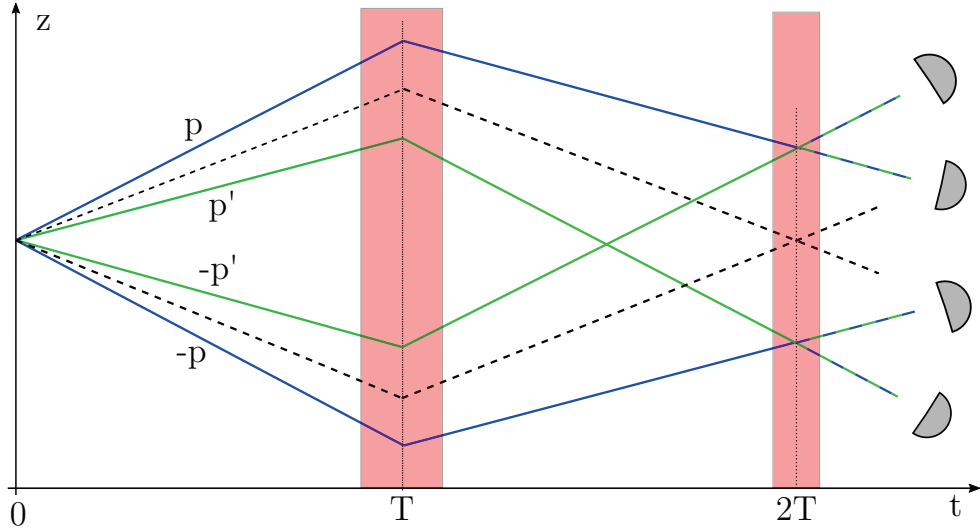


FIGURE 5.3 – Interféromètre à deux atomes et quatre modes. Deux paires de modes sont recombinaés dans deux interféromètres. A l’instant  $T$  un miroir de Bragg est appliqué puis à  $2T$  une séparatrice de Bragg afin de fermer les interféromètres. Attention, les miroirs et séparatrices de Bragg sont différents de leur équivalent optique, ils s’ajoutent ou ôte une impulsion fixe :  $\hbar k_B$ .

de modes a été manipulée. Cette paire est notée à présent  $[p_0, -p_0]$ <sup>3</sup> dans le référentiel de centre de masse. Le réseau de Bragg permettant sa manipulation était donc ajusté afin d’incrémenter l’impulsion des atomes de :  $\pm \hbar \Delta k_B$  avec  $\hbar \Delta k_B = 2p_0$  (4.1.1).

Définissons d’abord deux paramètres  $\delta p$  et  $\delta p'$  tel que  $p = p_0 + \delta p$  et  $p' = p_0 + \delta p'$ . Pour que les états d’impulsion  $p$  et  $-p'$  d’une part et  $-p$  et  $p'$  d’autre part puissent se recombinaer il faut :  $p + p' = 2p_0 + \delta p + \delta p' = \hbar k_B$ , soit  $\delta p = -\delta p'$  (comme représenté sur la figure 5.2). Au final le réseau Bragg semble permettre l’expérience si les deux paires choisies  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$  remplissent la condition :

$$\boxed{\forall \delta p, \quad p = p_0 + \delta p \quad p' = p_0 - \delta p} \quad (5.3)$$

Ainsi, pour recombinaer les différentes impulsions le protocole expérimental HOM du chapitre précédent est suffisant. En effet, si les *pulses* de Bragg sont appliqués pendant un temps suffisamment court leurs fonctions de transfert en fonction de l’impulsion sont larges (sections 3.1.2.6-7). Ainsi, avec un seul *pulse* miroir choisi initialement pour échanger l’impulsion  $p_0$  avec  $-p_0$ ,

3. Au lieu de  $[k, -k]$  au chapitre précédent où on avait privilégié une écriture en vecteur d’onde.



les impulsions  $p$  avec  $-p'$  ainsi que  $p'$  avec  $-p$  sont aussi échangées de manière efficace, comme représenté sur la figure 5.3. De même une seule séparatrice permet de fermer les deux interféromètres en même temps.

Cette configuration expérimentale permet donc en plus de réaliser l'expérience HOM (pointillé sur Fig. 5.3), de produire les deux interféromètres de l'expérience Rarity-Tapster. Expérimentalement, les deux interféromètres type Rarity-Tapster mais aussi l'interféromètre HOM se referment par construction au même instant, et donc le fond du trou HOM (Fig. 4.4) permet de définir le bon moment pour appliquer les séparatrices pour l'expérience type Rarity-Tapster.

### 5.1.2.3 Manipulation de la différence de phase des interféromètres

Finalement, le dernier point concerne la manipulation de la différence de phase des deux interféromètres. Le contrôle indépendant de ces deux différences de phases, comme le contrôle de la rotation des deux lames demi-ondes dans l'expérience du chapitre 1 est nécessaire pour former un test des inégalités de Bell (voir 1.2.2).

Le protocole présenté ici ne permet pas ce contrôle et c'est pourquoi cette expérience n'est qu'un test préliminaire des inégalités de Bell. Les miroirs et séparatrices étant communs aux deux interféromètres on ne peut pas ajuster leur différence de phase. Les améliorations expérimentales pouvant menées à un contrôle de la différence de phase de chaque interféromètre seront discutées à la section 5.5.

Cependant, à ce point il est quand même possible de réaliser la mesure d'au moins un corrélateur (1.2.2.5) ce qui va nous donner de précieux renseignements sur la source. En fait, un total de trois expériences indépendantes menant à trois mesures de corrélateurs vont pouvoir être réalisées. En effet, comme le schéma présenté (Fig. 5.3) est indépendant du choix de décalage  $\delta p$  défini à l'équation (5.3) expérimentalement plusieurs schémas Rarity-Tapster sont réalisés en parallèle. La limite de trois mesures de corrélateurs est discutée à la section 5.2.3. De plus le formalisme décrit dans la section suivante va pouvoir nous renseigner sur la différence de phase présente entre les interféromètres en fonction du paramètre  $\delta p$  et comprendre les mesures expérimentales des corrélateurs reportées ensuite.

## 5.2 Formalisme

Dans cette partie, l'évolution des opérateurs créations à travers les deux interféromètres sont calculée. Les densités et corrélations attendues en sortie

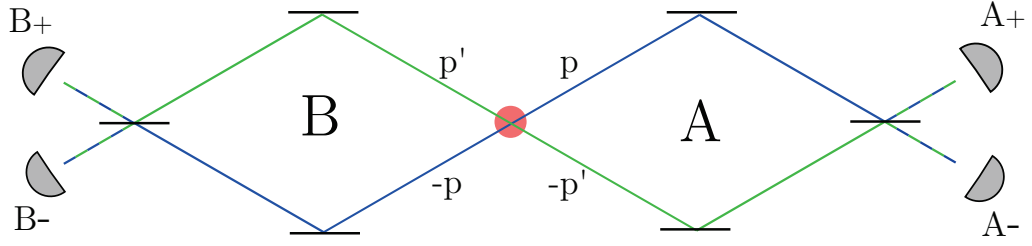


FIGURE 5.4 – Interféromètre à 4 modes topologiquement équivalent. La source émet une superposition cohérente de paires d’impulsions  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$ . Les modes sont ensuite recombinaés dans deux interféromètres  $A$  et  $B$ , quatre détecteurs (expérimentalement seulement la galette à microcanaux) permettent le comptage des atomes aux sorties  $A_{\pm}$  et  $B_{\pm}$ .

des séparatrices sont aussi déterminées. On montrera ainsi que cette expérience est proche de l’expérience de violation des inégalités de Bell présentée au premier chapitre (1.2.2).

Pour commencer, le schéma de la figure (5.3) est déplié en une configuration topologiquement équivalente sur la figure 5.4. L’interféromètre de droite est noté  $A$  de celui de gauche  $B$ . Chaque interféromètre possède deux sorties  $A_{\pm}$  et  $B_{\pm}$ . Les opérateurs créations associés aux 4 modes d’émission aux impulsions  $p, -p, p'$  et  $-p'$  sont notés :  $\hat{a}_p^{\dagger}, \hat{b}_p^{\dagger}, \hat{a}_{-p'}^{\dagger}$  et  $\hat{b}_{-p}^{\dagger}$  (les lettres  $a$  et  $b$  se référant aux deux interféromètres  $A$  et  $B$ ).

### 5.2.1 Émission

Dans cette étude, au contraire du chapitre précédent on ne considère aucune dépendance avec la position  $z$  pour les opérateurs. Seul le cas parfait de recombinaison des ondes atomiques sur les séparatrices est considéré et donc cela ne joue aucun rôle.

On définit ici des quantités importantes de la source qui pourront être reconnues dans le calcul des observables en sortie des interféromètres. Le nombre moyen de paires émises dans la première paire de mode est noté  $n$  et est égal par définition à :

$$n = \langle \hat{a}_p^{\dagger} \hat{a}_p \rangle = \langle \hat{b}_{-p}^{\dagger} \hat{b}_{-p} \rangle \quad (5.4)$$

L’état du système  $|\Psi\rangle$  n’est pas explicité pour l’instant. De même pour la seconde paire de modes, le nombre moyen de paires émises est noté  $n'$  et est

égal à :

$$n' = \langle \hat{a}'^\dagger \hat{a}_{p'} \rangle = \langle \hat{b}'^\dagger \hat{b}_{-p'} \rangle \quad (5.5)$$

La corrélation croisée de la source entre les modes  $p$  et  $-p$  est :

$$G_{p,-p}^{(2)} = \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{b}_{-p}^\dagger \hat{a}_p \hat{b}_{-p} \rangle \quad (5.6)$$

Ensuite, la corrélation locale entre le mode  $p$  et  $p'$  est égale à :

$$G_{p,p'}^{(2)} = \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_p \hat{a}_{p'} \rangle \quad (5.7)$$

L'autre corrélation locale  $G_{-p,-p'}^{(2)}$  et l'autre corrélation croisée  $G_{p',-p'}^{(2)}$  sont définies de la même manière.

Finalement la corrélation anormale (2.5.7) liée à la cohérence de l'émission entre les deux paires de modes  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$  est égale à :

$$G_{anorm}^{(2)} = \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{b}_{-p}^\dagger \hat{a}_{p'} \hat{b}_{-p'} \rangle \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Propagation/Miroir/Séparatrice

Les opérateurs  $\hat{a}_p^\dagger$  et  $\hat{a}_{-p'}^\dagger$  sont re-mélangés grâce à l'application de miroirs et séparatrices de Bragg aux temps  $T$  et  $2T$ , de même pour  $\hat{b}_{p'}^\dagger$  et  $\hat{b}_{-p}^\dagger$ . Les durées des *pulses* miroir et séparatrice sont respectivement notées  $T_M$  et  $T_S$ .

Les quatre miroirs et deux séparatrices sont réalisés avec deux transitions de Bragg résonnantes pour les états d'impulsion  $p_0$  et  $-p_0$ , permettant l'expérience HOM (ligne pointillée sur Fig. 5.3). Ainsi ces mêmes transitions se retrouvent légèrement hors résonance pour les atomes se propageant dans les deux interféromètres type Rarity-Tapster. Les impulsions  $p$  et  $p'$ , déterminées par la relation (5.3), étant écartées de manière symétrique de l'impulsion  $p_0$  le désaccord à la condition de résonance pour l'interféromètre  $A$  est toujours l'opposé de celui pour  $B$  et ce désaccord est noté  $\delta_A = -\delta_B = \delta$  (3.36).

Après propagation à travers l'interféromètre à quatre modes, les opérateurs de sortie sont notés :  $\hat{A}_\pm^\dagger$  et  $\hat{B}_\pm^\dagger$ . Grâce aux matrices de passage (3.38 et 3.40) calculées pour des désaccords faibles ( $\delta/\Omega_{2ph} \ll 1$ ) les opérateurs de sortie sont exprimés en fonction des opérateurs initiaux :

$$\hat{A}_+^\dagger = \frac{-e^{i\Phi_A}}{\sqrt{2}} \left[ \hat{a}_p^\dagger + ie^{-i\xi_A} \hat{a}_{-p'}^\dagger \right] \quad (5.9)$$

$$\hat{A}_-^\dagger = \frac{-e^{-i\Phi_A}}{\sqrt{2}} \left[ i\hat{a}_p^\dagger e^{i\xi_A} + \hat{a}_{-p'}^\dagger \right] \quad (5.10)$$

$$\hat{B}_+^\dagger = \frac{-e^{i\Phi_B}}{\sqrt{2}} \left[ \hat{b}_{p'}^\dagger + ie^{-i\xi_B} \hat{b}_{-p}^\dagger \right] \quad (5.11)$$

$$\hat{B}_-^\dagger = \frac{-e^{-i\Phi_B}}{\sqrt{2}} \left[ i\hat{b}_{p'}^\dagger e^{i\xi_B} + \hat{b}_{-p}^\dagger \right] \quad (5.12)$$

avec  $\Phi_{A/B} = \pm\delta(T_M - T_S)/2 + \varphi_M - \varphi_S$  des termes de phase en pré-facteur qui n'ont pas d'incidence sur les observables. Par contre il existe un terme de déphasage entre les bras de chaque interféromètre :

$$\boxed{\xi_{A/B} = 2\varphi_M - \varphi_S \pm (\delta T_M + \psi_S(\delta))} \quad (5.13)$$

où on retrouve les phases des réseaux optiques  $\varphi_{M/S}$  et les déphasages induits par désaccord à la résonance introduits au chapitre 3. Expérimentalement la phase de chaque interféromètre varie à chaque réalisation car les phases des réseaux ne sont pas contrôlées cependant la différence de phase entre les deux interféromètres  $\Theta(\delta p)$  ne dépend que de  $\delta p$  et égale à :

$$\boxed{\Theta(\delta p) = \xi_A - \xi_B = 2(\delta T_M + \psi_S(\delta))} \quad (5.14)$$

On remarque donc que notre protocole ne permet pas de fixer la différence de phase absolue de chaque interféromètre mais permet, en fonction du paramètre  $\delta p$ , de déphaser les deux interféromètres l'un par rapport à l'autre. Au final plusieurs schémas correspondant à plusieurs déphasages  $\Theta(\delta p)$  peuvent être analysés séparément.

### 5.2.3 Nombre d'expériences en parallèle

Expérimentalement le nombre d'expériences pouvant être analysées en parallèle est limité par plusieurs facteurs :

- Les matrices de passage (3.38 et 3.40) utilisées pour les calculs des opérateurs de sortie (5.9-12) ne sont valables que si le désaccord  $\delta$  est petit devant la pulsation Rabi à deux photons  $\Omega_{2ph}$ . Si ce n'est pas le cas la réflectivité du miroir baisse et la séparatrice n'est plus équilibrée. D'après le chapitre 3 (Fig. 3.4), ne pas dépasser  $\delta p_{max} = 0.07 k_{rec}$  permet de conserver un miroir de réflexion de plus de 70% et une séparatrice 50/50 à 5% près avec nos paramètres expérimentaux.

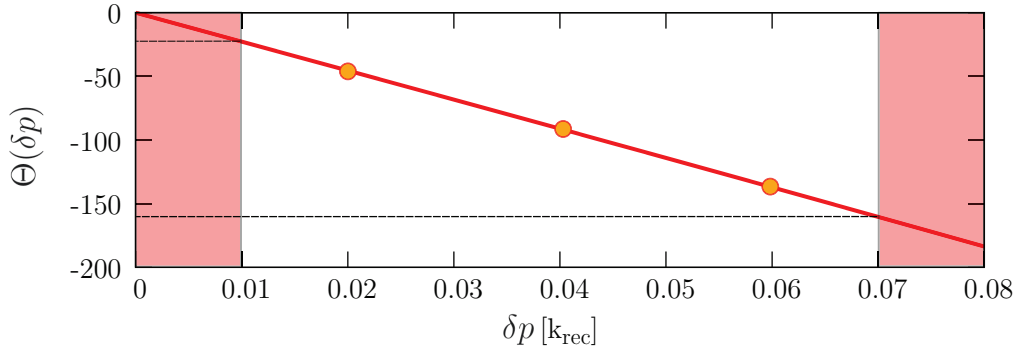


FIGURE 5.5 – Différence de déphasage des deux interféromètre  $A$  et  $B$  :  $\Theta(\delta p)$  en fonction du décalage en impulsion  $\delta p$  (Eq. 5.3) calculées avec les paramètres expérimentaux. La limite gauche assure une expérience à quatre modes distincts et la limite droite un miroir et une séparatrice corrects. La plage de phase accessible pour  $\Theta(\delta p)$  est donc d'environ  $180^\circ$ . Les points correspondent aux trois *sets* étudiés à la partie 5.3.

- Afin de pouvoir définir quatre modes distincts dans l'état (5.2) le décalage en impulsion  $\delta p$  doit être pris plus grand que la taille d'un mode divisé par deux (2.6.6.1), soit  $\delta p_{min} \cong 0.01 k_{rec}$ .
- Ensuite les quatre zones d'intégrations correspondant aux quatre détecteur (Fig. 5.4) ne doivent pas englober une différence  $\Theta(\delta p)$  de phase trop importante pour ne pas réduire le contraste des probabilités conjointes et des corrélateurs mesurés dans la suite (voir 5.2.6-7). Pour limiter cette différence de phase à  $50^\circ$  les zones d'intégrations longitudinales sur  $p$ ,  $-p$ ,  $p'$  et  $-p'$  ne peuvent excéder  $0.022 k_{rec}$  avec les paramètres expérimentaux (voir Fig. 5.5).
- Finalement les zones d'intégrations doivent être suffisamment grandes pour limiter le bruit statistique, on choisit la zone d'intégration longitudinale "maximale" égale à  $0.022 k_{rec}$ .

Finalement, les contraintes précédentes font que l'expérience peut être analysée indépendamment un maximum de trois fois. Les choix de décalages  $\delta p$  et les zones d'intégrations sont rappelés à la section 5.3.1.

## 5.2.4 Densité en sortie des interféromètres

Grâce à la détermination des opérateurs (5.9-12), les densités attendues aux quatre ports peuvent maintenant être calculées. Par exemple au port  $A_+$

(Fig. 5.4) le nombre moyen de détection est :

$$n_{A_+} = \langle \hat{A}_+^\dagger \hat{A}_+ \rangle \quad (5.15)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{a}_{-p'}^\dagger \hat{a}_{-p'} \rangle \quad (5.16)$$

$$= \frac{n + n'}{2} \quad (5.17)$$

où l'égalité  $\langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p'} \rangle = 0$  a été utilisée car dans notre problème les atomes sont toujours émis par paires  $[p, -p]$  ou  $[p', -p']$ . La densité est la même sur tous les autres ports de sortie :  $n_{A_+} = n_{A_-} = n_{B_+} = n_{B_-}$ . Il n'y a donc aucune modulation de densité en fonction de la différence de phase entre les interféromètres  $\Theta(\delta p)$  mais on va montrer qu'il en existe une pour les corrélations.

### 5.2.5 Corrélations en sortie des interféromètres

On cherche à calculer les quatre corrélations de mesure existantes entre les deux côtés  $A$  et  $B$  de l'expérience (Fig. 5.4). Par exemple la corrélation entre les ports  $A_+$  et  $B_+$  notée  $G_{++}^{(2)}$  est égale à :

$$G_{++}^{(2)} = \langle \hat{A}_+^\dagger \hat{B}_+^\dagger \hat{A}_+ \hat{B}_+ \rangle \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{a}_p \hat{b}_{p'} \rangle + \langle \hat{a}_{-p'}^\dagger \hat{b}_{-p}^\dagger \hat{a}_{-p'} \hat{b}_{-p} \rangle \right] \quad (5.19)$$

$$+ \frac{1}{4} \left[ \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{b}_{-p}^\dagger \hat{a}_p \hat{b}_{-p} \rangle + \langle \hat{a}_{-p'}^\dagger \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{a}_{-p'} \hat{b}_{p'} \rangle \right] \quad (5.20)$$

$$+ \frac{1}{4} \left[ \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{b}_{-p}^\dagger \hat{a}_{p'} \hat{b}_{-p'} \rangle e^{-i\Theta(\delta p)} + \langle \hat{a}_{-p'}^\dagger \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{a}_p \hat{b}_{-p} \rangle e^{i\Theta(\delta p)} \right] \quad (5.21)$$

Où seuls les termes conservant l'impulsion ont été conservés. Les termes (5.19) correspondent aux corrélations locales (5.7), puis les termes (5.20) aux corrélations croisées (5.6). Finalement (5.21) correspond à la corrélation anormale (5.8). En notant  $\theta$  la phase de la corrélation anormale telle que  $G_{anorm}^{(2)} = \langle \hat{a}_{-p'}^\dagger \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{a}_p \hat{b}_{-p} \rangle = |G_{anorm}^{(2)}| e^{i\theta}$ , la corrélation  $G_{++}^{(2)}$  s'écrit :

$$G_{++}^{(2)} = \frac{G_{p,p'}^{(2)} + G_{-p,-p'}^{(2)}}{4} + \frac{G_{p,-p}^{(2)} + G_{p',-p'}^{(2)}}{4} + \frac{|G_{anorm}^{(2)}|}{2} \cos [\Theta(\delta p) + \theta] \quad (5.22)$$

De même entre les ports  $A_+$  et  $B_-$  la corrélation est :

$$G_{+-}^{(2)} = \frac{G_{p,p'}^{(2)} + G_{-p,-p'}^{(2)}}{4} + \frac{G_{p,-p}^{(2)} + G_{p',-p'}^{(2)}}{4} - \frac{|G_{anorm}^{(2)}|}{2} \cos[\Theta(\delta p) + \theta] \quad (5.23)$$

Finalement, les deux dernières corrélations sont :

$$G_{-+}^{(2)} = G_{+-}^{(2)}, \quad G_{--}^{(2)} = G_{++}^{(2)} \quad (5.24)$$

Les corrélations évoluent donc en fonction du choix de décalage en impulsion  $\delta p$  si la source émet bien de manière cohérente les paires et donc manifeste une corrélation anormale.

### 5.2.6 Probabilités

Dans le cas idéal l'état de la source est de la forme (5.2), c'est à dire une superposition cohérente d'une émission de paire  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$ . Il n'y a alors qu'une détection par côté  $A$  et  $B$  de l'expérience à chaque réalisation et donc seulement quatre possibilités de résultat, les probabilités associées à ces quatre possibilités sont :

$$P_{\pm,\pm} = \frac{G_{\pm\pm}^{(2)}}{G_{++}^{(2)} + G_{--}^{(2)} + G_{-+}^{(2)} + G_{+-}^{(2)}} \quad (5.25)$$

En prenant en compte les égalités  $G_{p,p'}^{(2)} = G_{-p,-p'}^{(2)} = 0$  et  $[G_{p,-p}^{(2)} + G_{p',-p'}^{(2)}]/2 = G_{anorm}^{(2)} = 1/2$  pour l'état (5.2), on peut calculer les probabilités (5.25) :

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{2} \cos^2[\Theta(\delta p)/2] \quad (5.26)$$

Et,

$$P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{2} \sin^2[\Theta(\delta p)/2] \quad (5.27)$$

(5.26) sont appelées probabilité d'accord, car elle correspond à la probabilité que les deux atomes sortent du même côté des séparatrices sur la figure 5.4. De même (5.27) sont les probabilités de désaccord. Ces probabilités évoluent en fonction de la différence de phase entre les deux interféromètres à la manière des probabilités dans l'expérience Rarity-Tapster (voir [104]).

### 5.2.7 Corrélateur

En combinant les 4 probabilités on forme le corrélateur qui quantifie les corrélations sur les mesures en sortie des deux interféromètres,  $E = P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+}$  défini au chapitre 1 (1.18) :

$$\boxed{E = \cos [\Theta(\delta p)]} \quad (5.28)$$

Au final, on trouve mathématiquement exactement le même développement qu'au chapitre 1 où la différence d'angle entre les lames demi-ondes est échangée avec la différence de phase entre les interféromètres. Ces expériences sont donc équivalentes, à la différence que l'on ne peut pas faire varier la phase de chaque interféromètre indépendamment et en déduire un paramètre de Bell (1.19). En effet, pour un choix particulier du décalage  $\delta p$ , seulement un corrélateur correspondant à une différence de phase  $\Theta(\delta p)$  peut être mesuré. On peut ensuite renouveler l'analyse pour un nouveau décalage mais la mesure de corrélateur qui en découle correspond un nouvel état initial de la forme (5.2). Comme discuté à la section 5.2.3 expérimentalement trois corrélateurs vont pouvoir être mesurés et ces derniers vont nous renseigner partiellement sur l'état de la source.

Si l'on revient au cas général où l'état n'est pas forcément idéal comme (5.2), il peut alors y avoir plus de deux atomes émis pour certaines réalisations, l'amplitude de modulation des corrélateurs va alors baisser. En gardant la définition des probabilités (5.26-27) le corrélateur devient :

$$\boxed{E = \frac{2 |G_{anorm}^{(2)}|}{G_{p,p'}^{(2)} + G_{-p,-p'}^{(2)} + G_{p,-p}^{(2)} + G_{p',-p'}^{(2)}} \cos [\Theta(\delta p) + \theta]} \quad (5.29)$$

La phase  $\theta$  dans (5.29) provient de la phase du corrélateur anormal (5.8), elle est inconnue expérimentalement. La modélisation du chapitre 2 ne prévoit pas son comportement et elle pourrait a priori dépendre de  $\delta p$ .

Dans le cas d'une émission équilibrée d'un nombre moyen de  $n$  paires  $[p, -p]$  et de même pour  $[p', -p']$ <sup>4</sup>, les corrélations croisées sont égales à  $n(1 + 2n)$  (2.58), les locales à  $n^2$  (2.57) et la corrélation anormale à  $n(1 + n)$  ([78] voir section 2.5.7).

---

4. C'est le cas expérimentalement car les paires considérées sont symétriquement distribuées autour des maxima de densités, voir Fig. 2.11.



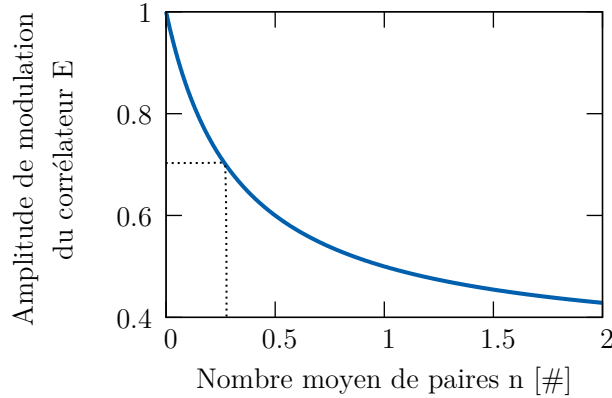


FIGURE 5.6 – Amplitude de modulation du corrélateur (5.30) en fonction du nombre moyen de paires émises dans  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$ . Une inégalité de Bell peut être violée si  $A > 1/\sqrt{2} \cong 0.7$ , cette limite est représentée en lignes pointillées sur la figure.

Au final, l'amplitude  $A$  du corrélateur est égale à :

$$A = \frac{1+n}{1+3n} \quad (5.30)$$

Cette amplitude est représentée en fonction du nombre moyen de paires émises dans les modes  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$  sur la figure 5.6. Lorsque le nombre moyen de paire tend vers zéro, l'état de la source tend vers (5.2) et l'amplitude de modulation du corrélateur est maximale égale à 1, on retrouve le cas parfait (5.28). Pour espérer violer les inégalités de Bell, il faut  $A > 1/\sqrt{2} \cong 0.7$  [22] ce qui correspond à  $n_{max} = 0.26$ .

## 5.3 Résultats

Dans cette partie, les données HOM du chapitre précédent sont analysées de nouveau afin de calculer les probabilités (5.25) puis un corrélateur associé à une expérience type Rarity-Tapster. Les données présentées ici correspondent à trois positions temporelles de la séparatrice placées au fond du trou HOM du chapitre précédent (points 4,5,6 sur la figure 4.4) pour un total 2200 réalisations.

### 5.3.1 Mesure de probabilités et corrélateurs

Comme discuté à la section 5.2.3 le nombre d'expériences type Rarity-Tapster pouvant être réalisées en parallèle est restreint et égal à trois avec nos

paramètres expérimentaux. Les zones d'intégrations longitudinales sont choisies de longueur  $0.022 k_{rec}$  (voir 5.2.3) et les trois décalages  $\delta p$  permettant de définir les impulsions  $p$ ,  $-p$ ,  $p'$  et  $-p'$  à analyser sont  $[0.019, 0.041, 0.063] k_{rec}$ . Chaque décalage est écartés de  $0.022 k_{rec}$  du précédent, ainsi aucune détection n'est utilisée dans deux *sets* ce qui rend les trois mesures bien indépendantes.

Sur la figure 5.7 sont représentés les probabilités et corrélateur mesurés pour les trois expériences. Les probabilités ainsi que le corrélateur semblent dépendre du décalage en impulsion  $\delta p$  comme attendu par les équations (5.26-28). En abscisse haute est reportée la valeur de la différence de phase entre les interféromètres  $\Theta(\delta p)$  calculée, cela permet de voir que l'on attend bien une évolution des quantités. Cependant, on ne peut pas ajuster la courbe du corrélateur avec la formule (5.29) car comme expliqué au 5.2.7 la dépendance de la phase du corrélateur anormale  $\theta$  est inconnue. Les trois corrélateurs mesurés sont  $[-0.34(17), -0.13(21), 0.50(20)]$ .

En augmentant  $\delta p$  les impulsions s'éloignent des maxima de densité, le nombre moyen d'atomes par boîte d'intégration diminue alors légèrement, dans le tableau suivant est reportée l'évolution des densités en fonction de  $\delta p$  :

$\delta p[k_{rec}]$	$n_{A_+}$	$n_{A_-}$	$n_{B_+}$	$n_{B_-}$	$n_{moy}$	$n_{moy}/\eta$
0.022	0.057	0.065	0.058	0.074	0.064	0.25
0.041	0.052	0.061	0.051	0.057	0.055	0.22
0.063	0.036	0.045	0.048	0.057	0.047	0.19

Le nombre moyen d'atomes détectés dans les zones d'intégration pour les trois expériences est de 0.22. En considérant que les zones d'intégration sont de dimensions proches de la taille d'un mode, ce qui est confirmé par les mesures de corrélation locale (2.6.6.1), il n'est pas surprenant de voir un corrélateur égal à 0.5 sur la figure 5.7 car l'amplitude théorique de ce dernier est égale à 0.73 donnée par (5.30).

### 5.3.2 Vérification du zéro du corrélateur

Afin de confirmer les résultat de la figure 5.7, on peut vérifier qu'il n'y a pas de biais de mesure et étudier le bruit de fond en analysant des expériences dont le corrélateur est théoriquement nul.

Les zones d'intégration utilisées dans les mesures précédentes peuvent être mélangées afin de construire de nouvelles expériences pour lesquelles les probabilités et donc le corrélateur ne doit pas manifester de modulation. Il s'agit de construire des expériences où aucune des probabilités  $P_{\pm\pm}$  de la figure 5.7 n'est représentées. Il existe 18 configurations de ce type. L'histogramme des

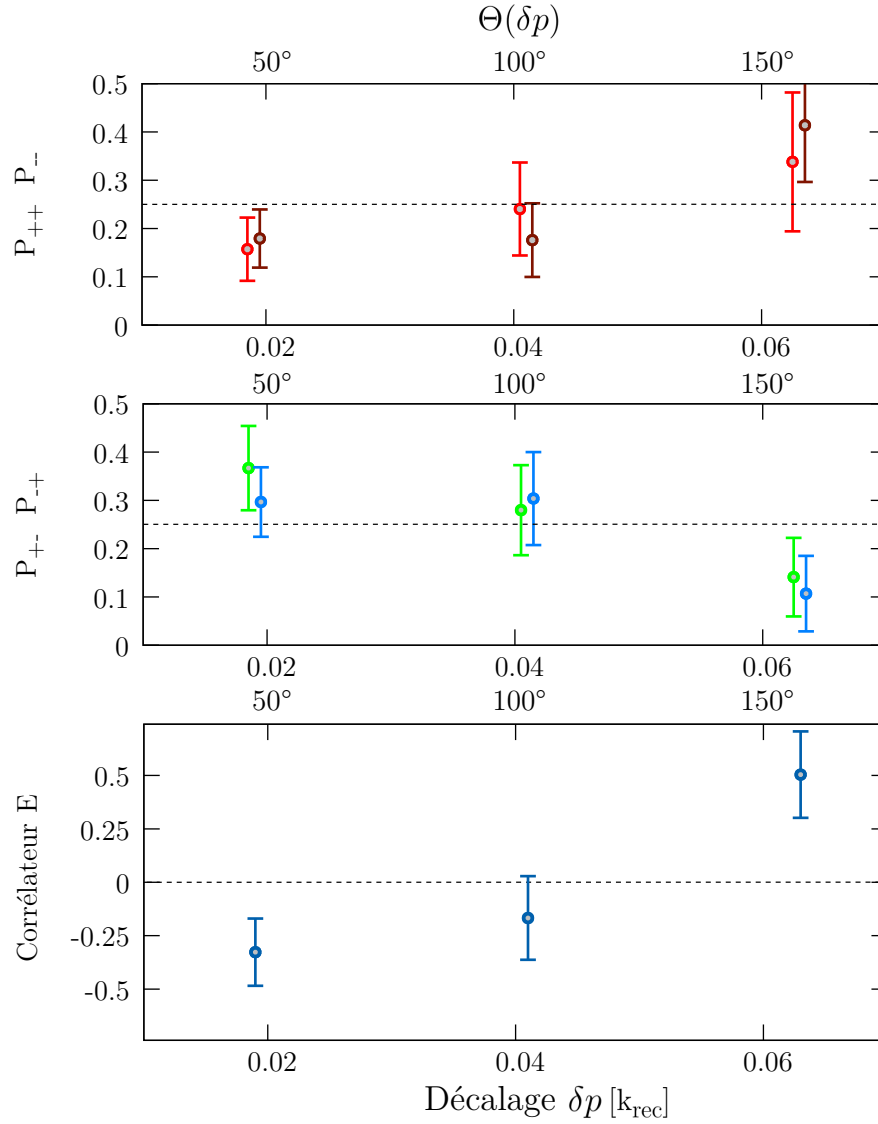


FIGURE 5.7 – Probabilités et corrélateur en fonction du décalage en impulsion  $\delta p$  et de la différence de déphasage des deux interféromètre  $\Theta(\delta p)$ . Premier graphe : les probabilités d'accord  $P_{++}$  (rouge) et  $P_{--}$  (marron). Second graphe : les probabilités de désaccord  $P_{+-}$  (vert) et  $P_{-+}$  (bleu). Les points sont légèrement décalés pour plus de visibilité. Troisième graphe : corrélateur calculé à partir des quatre probabilités. Les boîtes d'intégration sont de longueur  $0.022k_{rec}$  et diamètre  $0.043k_{rec}$ .

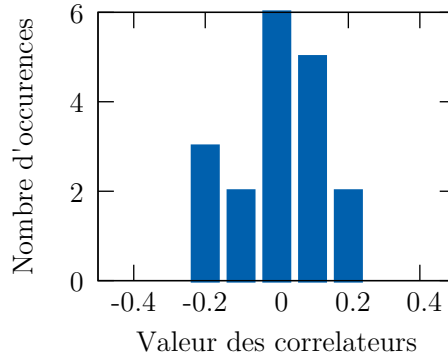


FIGURE 5.8 – Histogramme des corrélateurs mesurés avec des expériences pour lesquelles la valeur théorique du corrélateur est nul. La distribution des ces valeurs renseigne sur le bruit de mesure et sur un éventuel biais. la valeur moyenne des corrélateurs mesurés est  $m_E = 0.04(2)$  ce qui est raisonnablement proche de zéro et l'écart type des réalisations est  $\sigma_E = 0.139$

18 corrélateurs mesurés est représenté sur la figure 5.8, les corrélateurs sont bien resserrés autour de zéro comme attendu. La valeur moyenne de ces derniers est  $m_E = -0.001(30)$  ce qui confirme qu'il n'y a pas de biais dans les mesures de corrélateur. Puis l'écart type sur les valeurs des corrélateurs est égal à  $\sigma_E = 0.12$ , ce qui nous renseigne sur le fait qu'il est plutôt improbable que les corrélateurs n°1 et 3 de la figure 5.7 soient dû à un bruit statistique car tous deux sont respectivement à  $-2.7$  et  $4 \sigma_E$  du zéro  $m_E$ .

Ces mesures permettent également de vérifier séparément les valeurs de référence des probabilités  $P_{\pm\pm} = 1/4$  attendues<sup>5</sup> pour une expérience sans modulation. Les probabilités moyennes calculées à partir des 18 configurations définies précédemment sont :  $P_{++} = 0.258(15)$ ,  $P_{--} = 0.241(11)$ ,  $P_{-+} = 0.259(18)$  et  $P_{+-} = 0.242(13)$ .

## 5.4 Implications

Le montage expérimental a permis de montrer la mesure de plusieurs probabilités et corrélateurs qui semblent être dépendants de la différence de phase entre les interféromètres. Deux des trois corrélateurs sont de plus écartés significativement de zéro. Dans cette partie les implications de telles mesures sont discutées.

Dans les paragraphes suivants premièrement deux modélisations des ré-

---

5. D'après l'équation (5.25) avec  $G_{anorm}^{(2)} = 0$

sultats observés seront discutées avant d'être écartées puis on s'interrogera sur l'interprétation de l'expérience en terme d'état intriqué.

### Mélange statistique de paires ?

Considérons une source composée d'un mélange statistique de paires  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$ . A chaque réalisation de l'expérience un seul des bras des deux interféromètres est peuplé par un atome. Les deux atomes arrivant sur les séparatrices ont alors indépendamment 50% chacun d'être réfléchis ou transmis par ces dernières. Au final les probabilités conjointes de détection sont toutes égales à  $1/4$  et le corrélateur est nul. Ce n'est pas compatible avec nos mesures expérimentales.

Si l'on considère un cas plus général pour lequel l'émission est constituée d'un mélange statistique de deux sources pouvant émettre plus d'une paire dans les modes  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$  les résultats sont les mêmes. En effet, comme les deux sources n'ont pas de relation de phase entre elles la corrélation anormale (5.8) s'annule et aucune modulation n'est attendue.

Le mélange statistique est donc écarté par nos mesures expérimentales.

### Mélange d'état à une particule ?

La seconde modélisation envisagée ici est le mélange d'état à une particule du type :  $|\Psi\rangle = 1/2[e^{i\theta_1}|p\rangle + e^{i\theta_2}| -p\rangle + e^{i\theta_3}|p'\rangle + e^{i\theta_4}| -p'\rangle]$ . Les relations de phase existantes entre les composantes de l'état vont entraîner des interférences à la sortie de deux interféromètres. Ces dernières vont ainsi moduler les probabilités conjointes de détection entre les interféromètres. Cet état semble donc pouvoir expliquer les modulations des probabilités et corrélateurs. Cependant on ne doit pas oublier que les propriétés de corrélation de la source sont connues et un tel état n'étant pas composé de paires il ne manifeste pas de corrélation comme celles observées à la section 2.6.6.

En effet, l'interprétation des résultats des expériences décrites à la section 5.3 doit prendre en compte les propriétés de corrélation mesurées de la source et donc intégrer des composantes appariées de type  $|p, -p\rangle$  et  $|p, -p'\rangle$ . Cette modélisation est donc aussi écartée par les mesures expérimentales. Notez que les diagrammes de corrélation excluent également les composantes de type  $|p, -p'\rangle$  et  $|p', -p\rangle$  dans l'état car aucune corrélation n'est mesurée entre ces impulsions.

### État intriqué ?

Les deux tentatives de modélisation précédentes nous ont permis de montrer que l'interprétation est fortement contrainte par les mesures expérimentales.

tales composées des diagrammes de corrélation (2.6.6) et des mesures de corrélateurs (5.3.1).

Le développement théorique de la section 5.2 a permis de montrer que les mesures de corrélateur peuvent être interprétées grâce à un état proche de (5.2) qui est intriqué. Celui-ci permet également de prédire les diagrammes de corrélations. Cependant cela est-il suffisant pour prouver l'intrication de la source ? Bien que cette question reste ouverte il semble raisonnable de penser à ce stade que non.

L'expérience doit être améliorée afin de réaliser un test rigoureux des inégalités de Bell car une violation de celles-ci prouverait incontestablement l'intrication de la source. Cette perspective est discutée dans la section suivante.

## 5.5 Perspectives

Les améliorations techniques qu'il est possible de mettre en œuvre sur l'expérience afin de réaliser un test rigoureux des inégalités de Bell sont discutées dans les paragraphes suivants.

### Meilleur statistique

L'expérience HOM du chapitre précédent ainsi que l'expérience type Rarity-Tapster de ce chapitre manquent toutes les deux de statistique. Cela provient du mode de production des paires qui oblige à un taux d'émission faible afin d'éviter l'émission de plusieurs paires dans les mêmes modes. Ainsi la plupart du temps la source n'émet aucun atome et le cycle expérimental de 30s n'est pas exploitable.

Des améliorations techniques sont en cours sur l'expérience afin de raccourcir la durée de production du condensat. La seconde expérience d'hélium à l'institut a montré qu'il était par exemple possible de produire un condensat en 6s [105]. Une autre solution envisagée pour améliorer la statistique réside dans le recyclage du condensat, en effet sur les  $5 \cdot 10^4$  atomes qu'il contient seulement 200 environ sont émis à chaque cycle. Les paires pourraient donc être extraites et le condensat conservé dans le piège afin de le réutiliser de multiple fois.

### Comment réaliser deux séparatrices ?

L'expérience présentée dans ce chapitre ne permet pas un test rigoureux des inégalités de Bell car pour un choix de  $\delta p$  particulier, la différence de phase des deux interféromètres ne peuvent être changées. Dans la suite deux

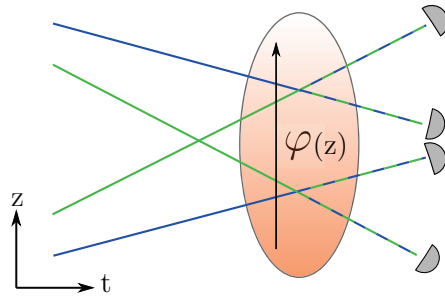


FIGURE 5.9 – Représentation des deux séparatrices de l’expérience Rarity-Tapster réalisées avec un réseau de Bragg dont la phase dépend de la position verticale.

solutions techniques envisageables permettant un contrôle de la différence de phase entre les interféromètres sont discutées.

La première possibilité consiste à utiliser deux séparatrices indépendantes. Cette première solution est discutée dans la thèse d’Almazbek Imanaliev [50]. Les deux séparatrices sont formées par deux réseaux optiques dont la relation de phase est contrôlée. Chaque réseau est résonnant avec des états d’impulsion différents  $[p, -p']$  pour l’un et  $[p', -p]$  pour l’autre. Expérimentalement cela requiert un DDS (double digital synthesizer) formant deux signaux radio-fréquences avec une différence de fréquence et phase contrôlée, propriétés ensuite transmises à un des lasers formant le réseau Bragg avec un modulateur acousto-optique, le détail expérimental et sa mise en œuvre sont reportés dans [50]. Pour que les deux séparatrices agissent sur des états d’impulsions différents, les *pulses* doivent être sélectifs et donc être appliqués à très basse puissance et longuement ( $\cong 500\mu s$ ).

Une autre possibilité consiste à utiliser un faisceau laser avec un plan equi-phase incliné par rapport à sa direction de propagation dans l’un des bras du réseau Bragg. La phase du réseau Bragg dépendrait ainsi de la position verticale et les deux séparatrices de l’expérience étant spatialement séparées cette différence pourrait être imprimée aux deux interféromètres. L’écart spatiale des séparatrices est de  $17\ \mu m$  pour la troisième expérience présentée au 5.3 ( $\delta p = 0.063\ k_{rec}$ ) ce qui rend envisageable cette méthode. L’inclinaison du plan de phase pourrait être créer par un SLM (Spatial light modulator) ou par un prisme. Une représentation de cette méthode est proposée sur la figure 5.9.

Notez que ces deux méthodes permettent de définir la différence de phases des deux interféromètres mais pas la phase absolue de chacun d’eux. Le contrôle de la phase absolue des réseaux peut être réalisé avec un asservissement de phase des faisceaux lasers.

## 5.6 Conclusion

En résumé nous avons présenté dans le cinquième et dernier chapitre de ce manuscrit une modélisation puis une mise en pratique d'une expérience préliminaire au test des inégalités de Bell sur la variable d'impulsion d'espèce atomique. Une analyse sous un nouvel angle de l'expérience Hong-Ou-Mandel du chapitre précédent a permis de révéler un schéma interférométrique à quatre modes équivalent du schéma Rarity-Tapster. Expérimentalement trois corrélateurs ont pu être mesurés permettant d'écarter toutes interprétations en terme de mélange statistique émis par la source. Le protocole peut être amélioré afin de réaliser le premier test des inégalités de Bell sur la variable d'impulsion de particules massives.

— Résumé Chapitre 5 —

- Le protocole Hong-Ou-Mandel du chapitre précédent permet de réaliser dans le même temps une expérience préliminaire de test des inégalités de Bell.
- Les mesures de corrélateurs sont compatibles avec une émission d'état intriqué de la forme :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p, -p\rangle + |p', -p'\rangle)$$

- Les mesures écartent une modélisation de la source par un mélange statistique de paires  $[p, -p]$  et  $[p', -p']$ . Elles contraignent fortement les états possibles de la source sans pour autant prouver l'intrication de l'émission.
- Le protocole peut être amélioré afin de réaliser le premier test des inégalités de Bell sur la variable d'impulsion de particules massives.



# Conclusion

En conclusion de ce manuscrit, deux expériences d'optique atomique quantique ont été étudiées : l'expérience Hong-Ou-Mandel atomique ainsi qu'une expérience préliminaire au test des inégalités de Bell sur la variable d'impulsion d'atomes avec un protocole proche de l'expérience Rarity-Tapster.

Ces deux expériences ont permis de révéler des comportements très particulier des atomes. Premièrement, dans l'expérience Hong-Ou-Mandel une interférence à deux particules a pu être réalisée. Puis pour l'expérience Rarity-Tapster les résultats suggèrent que notre source est composée de paires d'atomes intriquées en impulsions.

Les interférences à plusieurs particules et l'intrication sont deux aspects de la mécanique quantique parmi les plus surprenants. Pouvoir les réaliser avec quelques atomes dans des environnements contrôlés est nécessaire à la consolidation de nos connaissances des lois de la nature, en particulier quand mécanique quantique et gravitation sont à l'œuvre simultanément.

L'équipe Hélium souhaite continuer dans cette voie en réalisant la première violation d'inégalités de Bell sur les variables d'impulsion de particules massives.



# Annexe A

## Atome d'Hélium

L'hélium est le plus léger des gaz rares avec un numéro atomique de 2. Il possède deux isotopes stables un fermionique  ${}^3\text{He}$  et un bosonique  ${}^4\text{He}$ . Nous travaillons avec l'isotope bosonique  ${}^4\text{He}$  dans deux expériences à l'Institut d'Optique et à l'heure actuelle trois autres groupes le manipulent également dans des expériences d'atomes froids : l'Australian National University de Canberra, l'Institute for Quantum Optics and Quantum Information de Vienne et le Laser Centre Vrije Universiteit à Amsterdam.

Sur la figure A.1 est représentée la structure atomique de l'hélium 4. Le premier état excité  $2^3S_1$  possède une grande énergie 19.8 eV ainsi qu'un temps de vie très long égale à 7870(510)s [37], c'est un état métastable. Cet état est atteint par décharge électrique puis comme son temps de vie est grand devant le cycle expérimental il constitue un nouvel état fondamental.

Comme décrit au chapitre 1 du manuscrit, la haute énergie interne de l'état  $2^3S_1$  permet la détection électronique des atomes. Ces derniers peuvent arracher un électron d'une surface métallique et ainsi créer une avalanche électronique détectable. Nous utilisons un détecteur à micro-canaux pour enregistrer avec précision la position et le temps d'impact des atomes (voir chapitre 1).

La transition optique proche infrarouge à 1083 nm  $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_{0,1,2}$  permet la manipulation des atomes. En particulier la ligne  $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_2$  est utilisée pour la mélasse transverse, le ralentisseur Zeeman, les mélasses optiques, le repompage et le refroidissement Doppler. Puis la ligne  $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_0$  sert pour le transfert Raman et les transitions Bragg réalisant miroirs et séparatrices (voir thèses précédentes pour plus de détails [41, 50]).

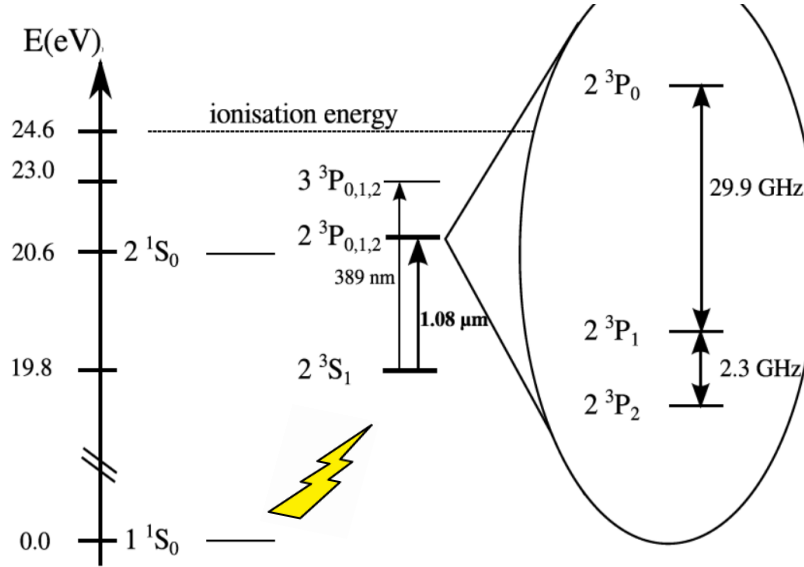


FIGURE A.1 – Structure atomique de l'Hélium 4. L'état  $2^3S_1$  est un état métastable de longue vie 7870(510)s [37], manipulable optiquement grâce aux transitions avec  $2^3P_{0,1,2}$  à 1083nm. Son importante énergie interne 19.8eV permet une détection électronique.

Les principales propriétés de l'hélium et de sa transition  $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_2$  de refroidissement sont décrites dans le tableau suivant :

Quantité	Notation	Valeur
Temps de vie de l'état $2^3S_1$		7870(510)s
Masse	m	$4u = 6.64 \cdot 10^{-27}$ kg
Longueur de diffusion en onde s (piège dipolaire)	a	$7.512 \cdot 10^{-9}$ m
Constante de couplage GP (2.4)	$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$	$1.58 \cdot 10^{-49}$ J/m <sup>3</sup>
Longueur d'onde de transition	$\lambda_{rec}$	1083 nm
Largeur de transition	$\Gamma$	$2\pi \times 1.62$ MHz
Intensité de saturation	$I_{sat}$	$1.6$ W/m <sup>2</sup>
Impulsion de recul ( $/\hbar$ )	$k_{rec}$	$5.80 \cdot 10^6$ m <sup>-1</sup>
Vitesse de recul	$v_{rec} = \frac{\hbar k_{rec}}{m}$	9.2 cm/s
Énergie de recul	$E_{rec} = \frac{\hbar^2 k_{rec}^2}{2m}$	$2.81 \cdot 10^{-29}$ J
Pulsation de recul	$\omega_{rec} = \frac{E_{rec}}{\hbar}$	$2\pi \times 42.5$ kHz

Les quantités associées à l'absorption d'un photon à 1083 nm (impulsion, vitesse, énergie et pulsation de recul) constituent des échelles naturelles pour décrire l'expérience, elles sont donc utilisées dans le manuscrit.

# Annexe B

## Paramètres des réseaux optiques

Deux réseaux optiques sont utilisés sur l'expérience, le premier permet de déclencher le processus de création de paires atomiques (chapitre 2) et le second permet la manipulation de l'impulsion des atomes par transition Bragg (chapitre 3). Les réseaux optiques introduisent de nouvelles échelles d'énergie, de vitesse et d'impulsion (voir 2.3.1.1) qui sont différentes des échelles naturelle définie à l'annexe A associées à l'absorption d'une photon à résonance ( $E_{rec}, v_{rec}, k_{rec}$ ). Les principales propriétés des réseaux et la conversion de leurs impulsions caractéristiques vers l'échelle naturelle ( $k_{rec}$ ) sont donc résumées dans les paragraphes et tableaux suivants.

Le premier réseau présent sur l'expérience est celui associé à la création de paires dont les principales propriétés sont :

Quantité	Notation	Valeur
Longueur d'onde des lasers	$\lambda_{res}$	1064 nm
Angle entre les faisceaux	$\theta_{res}$	166°
Pas du réseau	$a = \frac{\lambda_{res}}{2 \sin(\theta_{res}/2)}$	0.54 $\mu\text{m}$
Vecteur d'onde	$k_{res} = \frac{2\pi}{\lambda_B} \sin(\theta_{res}/2)$	5.86 $10^6 \text{ m}^{-1}$
Énergie caractéristique	$E_{res} = \frac{\hbar^2 k_{res}^2}{2m}$	2.87 $10^{-29} \text{ J}$

Pour les réseaux, l'impulsion caractéristique est égale au module de l'incrément d'impulsion acquis lors de l'absorption d'une photon d'un des faisceaux projeté sur l'axe du réseau, c'est à dire :  $\hbar k_{res}$  □

Le réseau associé à la création de paire a la particularité d'avoir un vecteur d'onde très proche de l'impulsion de recul (divisée par  $\hbar$ ) définie à l'annexe A. Les deux quantités diffèrent de seulement 1%.

---

1. Souvent noté sans  $\hbar$  dans le manuscrit pour alléger les notations, vecteur d'onde et impulsion sont alors confondus.

## ANNEXE B. PARAMÈTRES DES RÉSEAUX OPTIQUES

---

Le second réseau réalise les miroirs et séparatrices atomiques, ces principales propriétés sont :

Quantité	Notation	Valeur
Longueur d'onde des lasers	$\lambda_B = \lambda_{rec}$	1083 nm
Angle entre les faisceaux	$\theta_B$	$32^\circ$
Pas du réseau	$a_B = \frac{\lambda_B}{2 \sin(\theta_B/2)}$	$1.96 \mu\text{m}$
Vecteur d'onde	$k_B = \frac{2\pi}{\lambda_B} \sin(\theta_B/2)$	$1.60 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$
Énergie caractéristique	$E_B = \frac{\hbar^2 k_B^2}{2m}$	$2.17 \cdot 10^{-30} \text{ J}$

Pour ce réseau l'impulsion d'intérêt est celle accumulée après absorption d'un photon d'un des lasers formant le réseau et émission stimulée dans l'autre laser. Cette impulsion est notée  $\Delta k_B$  dans le texte est égale à  $2k_B$ . Avec les unités de recul :  $\Delta k_B = 0.55 k_{rec}$ .

# Bibliographie

- [1] Pierre Simon marquis de Laplace. *Essai philosophique sur les probabilités*. Bachelier, 1825.
- [2] Isaac Newton, marquise Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil Du Châtelet, and Voltaire. *Principia : PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE. Les lois du Mouvement. Du mouvement des corps, livre premier. Du mouvement des corps, livre second. Du système du Monde, livre troisième. 2. SYNTHÈSE COMMENTÉE ET ANALYSE DES PRINCIPIA. Exposition abrégée du Système du Monde et explication des principaux phénomènes astronomiques tirée des Principes de M Newton. Solution analytique des principaux problèmes qui concernent le Système du Monde*. Dunod, 2005.
- [3] Sadi Carnot. *Réflexions sur la puissance motrice du feu*. Number 26. Vrin, 1978.
- [4] James Clerk Maxwell. *A dynamical theory of the electromagnetic field*. The Society, 1864.
- [5] Roger Penrose. On gravity's role in quantum state reduction. *General Relativity and Gravitation*, 28(5) :581–600, 1996.
- [6] Albert Einstein. Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light. *American Journal of Physics*, 33(5) :367, 1965.
- [7] Clinton Davisson and Lester H Germer. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. *Physical review*, 30(6) :705, 1927.
- [8] Immanuel Estermann and Otto Stern. Beugung von molekularstrahlen. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 61(1) :95–125, 1930.
- [9] Markus Arndt, Olaf Nairz, Julian Vos-Andreae, Claudia Keller, et al. Wave-particle duality of c60 molecules. *nature*, 401(6754) :680, 1999.
- [10] Serge Haroche. Il était deux fois la révolution quantique. *Pour La Science*, 2016.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [11] Jonathan P Dowling and Gerard J Milburn. Quantum technology : the second quantum revolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 361(1809) :1655–1674, 2003.
- [12] Henning Vahlbruch, Simon Chelkowski, Boris Hage, Alexander Franzen, Karsten Danzmann, and Roman Schnabel. Demonstration of a squeezed-light-enhanced power-and signal-recycled michelson interferometer. *Physical review letters*, 95(21) :211102, 2005.
- [13] Gilles Brassard. Quantum communication complexity (a survey). *arXiv preprint quant-ph/0101005*, 2001.
- [14] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :2044–2046, Nov 1987.
- [15] A Aspect. Bell’s inequality test : more ideal than ever. *Nature*, 398(6724) :189–190, 1999.
- [16] Alain Aspect. Closing the door on einstein and bohr’s quantum debate. *Physics*, 8 :123, 2015.
- [17] J. Beugnon, M. P. A. Jones, J. Dingjan, B. Darquié, G. Messin, A. Browaeys, and P. Grangier. Quantum interference between two single photons emitted by independently trapped atoms. *Nature*, 440(7085) :779–782, 2006.
- [18] Richard A Campos, Bahaa EA Saleh, and Malvin C Teich. Quantum-mechanical lossless beam splitter : Su (2) symmetry and photon statistics. *Physical Review A*, 40(3) :1371, 1989.
- [19] A.M. Branczyk. Notes on hong-ou-mandel interference. 2013.
- [20] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47 :777–780, May 1935.
- [21] J. S. Bell. On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics*, 1(3) :195–200, 1964.
- [22] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :880–884, Oct 1969.
- [23] Stuart J. Freedman and John F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28 :938–941, Apr 1972.
- [24] Edward S. Fry and Randall C. Thompson. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 37 :465–468, Aug 1976.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [25] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm *Gedankenexperiment* : A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :91–94, Jul 1982.
- [26] Y. H. Shih and C. O. Alley. New type of einstein-podolsky-rosen-bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion. *Physical Review Letters*, 61(26) :2921–2924, December 1988.
- [27] Jan-Åke Larsson. Loopholes in bell inequality tests of local realism. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 47(42) :424003, 2014.
- [28] Bas Hensen, Hannes Bernien, Anaïs E Dréau, Andreas Reiserer, Norbert Kalb, Machiel S Blok, Just Ruitenbergh, Raymond FL Vermeulen, Raymond N Schouten, Carlos Abellán, et al. Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 526(7575) :682–686, 2015.
- [29] Marissa Giustina, Marijn AM Versteegh, Sören Wengerowsky, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Kevin Phelan, Fabian Steinlechner, Johannes Kofler, Jan-Åke Larsson, Carlos Abellán, et al. Significant-loophole-free test of bell's theorem with entangled photons. *Physical review letters*, 115(25) :250401, 2015.
- [30] Lynden K Shalm, Evan Meyer-Scott, Bradley G Christensen, Peter Bierhorst, Michael A Wayne, Martin J Stevens, Thomas Gerrits, Scott Glancy, Deny R Hamel, Michael S Allman, et al. Strong loophole-free test of local realism. *Physical review letters*, 115(25) :250402, 2015.
- [31] C Gerry and P Knight. *Introductory quantum optics*. 2005.
- [32] Jane Qiu et al. Quantum communications leap out of the lab. *Nature*, 508(7497) :441–442, 2014.
- [33] Sheng-Kai Liao, Wen-Qi Cai, Wei-Yue Liu, Liang Zhang, Yang Li, Ji-Gang Ren, Juan Yin, Qi Shen, Yuan Cao, Zheng-Ping Li, et al. Satellite-to-ground quantum key distribution. *arXiv preprint arXiv :1707.00542*, 2017.
- [34] Artur K Ekert. Quantum cryptography based on bell's theorem. *Physical review letters*, 67(6) :661, 1991.
- [35] Jacob F. Sherson, Christof Weitenberg, Manuel Endres, Marc Cheneau, Immanuel Bloch, and Stefan Kuhr. Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic mott insulator. *Nature*, 467(7311) :68–72, September 2010.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [36] Roman Schmied, Jean-Daniel Bancal, Baptiste Allard, Matteo Fadel, Valerio Scarani, Philipp Treutlein, and Nicolas Sangouard. Bell correlations in a bose-einstein condensate. *Science*, 352(6284) :441–444, 2016.
- [37] S. S. Hodgman, R. G. Dall, L. J. Byron, K. G. H. Baldwin, S. J. Buckman, and A. G. Truscott. Metastable helium : A new determination of the longest atomic excited-state lifetime. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :053002, Jul 2009.
- [38] F Nogrette, D Heurteau, R Chang, Q Bouton, CI Westbrook, R Sellem, and D Clément. Characterization of a detector chain using a fpga-based time-to-digital converter to reconstruct the three-dimensional coordinates of single particles at high flux. *Review of Scientific Instruments*, 86(11) :113105, 2015.
- [39] Quentin Bouton. *investigation of the momentum distribution of Bose-Einstein condensates of metastable Helium*. Theses, Université Paris-Saclay, November 2016.
- [40] Roentdek, mcp delay-line detector manual. 2015.
- [41] Raphael Lopes. *Réalisation expérimentale de l'effet Hong-Ou-Mandel atomique*. Theses, Institut d'Optique Graduate School, April 2015.
- [42] Josselin Ruaudel. *Creation and characterization of a tunable source of correlated atoms pairs*. Theses, Institut d'Optique Graduate School, December 2013.
- [43] R Chang, Q Bouton, H Cayla, C Qu, A Aspect, CI Westbrook, and D Clément. Momentum-resolved observation of thermal and quantum depletion in a bose gas. *Physical review letters*, 117(23) :235303, 2016.
- [44] C.J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [45] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221) :198–201, 1995.
- [46] Kendall B Davis, M-O Mewes, Michael R Andrews, NJ Van Druten, DS Durfee, DM Kurn, and Wolfgang Ketterle. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical review letters*, 75(22) :3969, 1995.
- [47] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, and A. Aspect. A bose-einstein condensate of metastable atoms. *Science*, 292(5516) :461–464, 2001.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [48] F Pereira Dos Santos, Jérémie Léonard, Junmin Wang, CJ Barrelet, F Perales, E Rasel, CS Unnikrishnan, M Leduc, and C Cohen-Tannoudji. Bose-einstein condensation of metastable helium. *Physical Review Letters*, 86(16) :3459, 2001.
- [49] Antoine Browaeys. *Piégeage magnétique d'un gaz d'hélium métastable : vers la condensation de Bose-Einstein*. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, November 2000.
- [50] Almazbek Imanaliev. *Towards testing Bell's inequality using atoms correlated in momentum*. Theses, Université Paris-Saclay, March 2016.
- [51] Helmut Strobel, Wolfgang Muessel, Daniel Linnemann, Tilman Zibold, David B. Hume, Luca Pezzè, Augusto Smerzi, and Markus K. Oberthaler. Fisher information and entanglement of non-gaussian spin states. *Science*, 345(6195) :424–427, 2014.
- [52] Bernd Lücke, Jan Peise, Giuseppe Vitagliano, Jan Arlt, Luis Santos, Géza Tóth, and Carsten Klempt. Detecting multiparticle entanglement of dicke states. *Phys. Rev. Lett.*, 112 :155304, Apr 2014.
- [53] Karsten Lange, Jan Peise, Bernd Lücke, Ilka Kruse, Giuseppe Vitagliano, Iagoba Apellaniz, Matthias Kleinmann, Geza Toth, and Carsten Klempt. Entanglement between two spatially separated atomic modes. *arXiv preprint arXiv :1708.02480*, 2017.
- [54] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin. Probing pair-correlated fermionic atoms through correlations in atom shot noise. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :110401, Mar 2005.
- [55] Logan W Clark, Anita Gaj, Lei Feng, and Cheng Chin. Collective emission of matter-wave jets from driven bose-einstein condensates. *arXiv preprint arXiv :1706.05560*, 2017.
- [56] J.-C. Jaskula, G. Partridge, M. Bonneau, R. Lopes, J. Ruaudel, D. Boiron, and C. Westbrook. Acoustic analog to the dynamical casimir effect in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :220401, Nov 2012.
- [57] Robert Bucker, Julian Grond, Stephanie Manz, Tarik Berrada, Thomas Betz, Christian Koller, Ulrich Hohenester, Thorsten Schumm, Aurelien Perrin, and Jorg Schmiedmayer. Twin-atom beams. *Nat Phys*, 7(8) :608–611, August 2011.
- [58] A. Perrin, H. Chang, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook. Observation of atom pairs in spontaneous four-wave mixing of two colliding bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :150405, Oct 2007.

- [59] K. V. Kheruntsyan, J.-C. Jaskula, P. Deuar, M. Bonneau, G. B. Partridge, J. Ruaudel, R. Lopes, D. Boiron, and C. I. Westbrook. Violation of the cauchy-schwarz inequality with matter waves. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :260401, Jun 2012.
- [60] Roman I Khakimov, BM Henson, DK Shin, SS Hodgman, RG Dall, KGH Baldwin, and AG Truscott. Ghost imaging with atoms. *Nature*, 540(7631) :100–103, 2016.
- [61] Sean S Hodgman, Roman I Khakimov, Robert J Lewis-Swan, Andrew G Truscott, and Karen V Kheruntsyan. Solving the quantum many-body problem via correlations measured with a momentum microscope. *Physical Review Letters*, 118(24) :240402, 2017.
- [62] Johannes Kofler, Mandip Singh, Maximilian Ebner, Michael Keller, Mateusz Kotyrba, and Anton Zeilinger. Einstein-podolsky-rosen correlations from colliding bose-einstein condensates. *Physical Review A*, 86(3) :032115, 2012.
- [63] M. Bonneau, J. Ruaudel, R. Lopes, J.-C. Jaskula, A. Aspect, D. Boiron, and C. I. Westbrook. Tunable source of correlated atom beams. *Phys. Rev. A*, 87 :061603, Jun 2013.
- [64] Marie Bonneau. *Atomic four-wave mixing in an optical lattice*. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, December 2011.
- [65] R. Ghosh and L. Mandel. Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :1903–1905, Oct 1987.
- [66] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. OUP Oxford, 2000.
- [67] Biao Wu and Qian Niu. Superfluidity of bose–einstein condensate in an optical lattice : Landau–zener tunnelling and dynamical instability. *New. J. Phys.*, 5(1) :104, 2003.
- [68] C Menotti, A Smerzi, and A Trombettoni. Superfluid dynamics of a bose–einstein condensate in a periodic potential. *New Journal of Physics*, 5(1) :112, 2003.
- [69] M Modugno, C Tozzo, and F Dalfovo. Role of transverse excitations in the instability of bose-einstein condensates moving in optical lattices. *Physical Review A*, 70(4) :043625, 2004.
- [70] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, and M. Inguscio. Quasi-2d bose-einstein condensation in an optical lattice. *EPL (Europhysics Letters)*, 57(1) :1, 2002.
- [71] Leonardo Fallani, Luigi De Sarlo, Jessica E Lye, Michele Modugno, Robert Saers, Chiara Fort, and Massimo Inguscio. Observation of dynamical instability for a bose-einstein condensate in a moving 1d optical lattice. *Physical review letters*, 93(14) :140406, 2004.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [72] Karen Marie Hilligsøe and Klaus Mølmer. Phase-matched four wave mixing and quantum beam splitting of matter waves in a periodic potential. *Phys. Rev. A*, 71 :041602, Apr 2005.
- [73] Gretchen K. Campbell, Jongchul Mun, Micah Boyd, Erik W. Streed, Wolfgang Ketterle, and David E. Pritchard. Parametric amplification of scattered atom pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :020406, Jan 2006.
- [74] Robert Bücker. Twin-atom beam generation in a one-dimensional bose gas (phd thesis). 2013.
- [75] J. Dalibard. *Cours du collège de France*. 2014.
- [76] R Gilmore. Baker-campbell-hausdorff formulas. *Journal of Mathematical Physics*, 15(12) :2090–2092, 1974.
- [77] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177(4497) :27–29, January 1956.
- [78] Robert J Lewis-Swan. Proposal for a motional-state bell inequality test with ultracold atoms. In *Ultracold Atoms for Foundational Tests of Quantum Mechanics*, pages 57–69. Springer, 2016.
- [79] A. Messiah. *Quantum mechanics*. Number vol. 1 in Quantum Mechanics. North-Holland, 1965.
- [80] P. J. Martin, B. G. Oldaker, A. H. Miklich, and David E. Pritchard. Bragg scattering of atoms from a standing light wave. 60(6) :515–518, 1988.
- [81] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. Coherent splitting of bose-einstein condensed atoms with optically induced bragg diffraction. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :871–875, Feb 1999.
- [82] W. L. Bragg. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 17 :43, 1912.
- [83] Valentina Krachmalnicoff. *Two experiments on quantum correlations in gases of metastable helium : fermion antibunching and a study of boson pair correlations in the collision of two condensates*. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, June 2009.
- [84] Gilbert Grynberg, Alain Aspect, and Claude Fabre. *Introduction to quantum optics : from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge university press, 2010.
- [85] Kazuyuki Fujii. Introduction to the rotating wave approximation (rwa) : Two coherent oscillations. *Journal of Modern Physics*, 8(12) :2042, 2017.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [86] Phillip L Gould, George A Ruff, and David E Pritchard. Diffraction of atoms by light : The near-resonant kapitza-dirac effect. *Physical review letters*, 56(8) :827, 1986.
- [87] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, Gilbert Grynberg, and Patricia Thickstun. *Atom-photon interactions : basic processes and applications*. Wiley Online Library, 1992.
- [88] R. Lopes, A. Imanaliev, A. Aspect, M. Cheneau, D. Boiron, and C. I. Westbrook. Atomic Hong-Ou-Mandel experiment. *Nature*, 520(7545) :66–68, April 2015.
- [89] RC Liu, B Odom, Y Yamamoto, and S Tarucha. Quantum interference in electron collision. *Nature*, 391(6664) :263, 1998.
- [90] Giuliana Di Martino, Yannick Sonnefraud, Mark S Tame, Stéphane Kéna-Cohen, F Dieleman, ŞK Özdemir, MS Kim, and Stefan A Maier. Observation of quantum interference in the plasmonic hong-ou-mandel effect. *Physical Review Applied*, 1(3) :034004, 2014.
- [91] Benjamin Vest, Marie-Christine Dheur, Éloïse Devaux, Thomas Ebbesen, Alexandre Baron, Emmanuel Rousseau, Jean-Paul Hugonin, Jean-Jacques Greffet, Gaétan Messin, François Marquier, et al. Coalescence and anti-coalescence of surface plasmons on a lossy beamsplitter. *arXiv preprint arXiv :1610.07479*, 2016.
- [92] A. M. Kaufman, B. J. Lester, C. M. Reynolds, M. L. Wall, M. Foss-Feig, K. R. A. Hazzard, A. M. Rey, and C. A. Regal. Two-particle quantum interference in tunnel-coupled optical tweezers. *Science*, 345(6194) :306–309, 2014.
- [93] Bradley Efron and Robert J Tibshirani. *An introduction to the bootstrap*. CRC press, 1994.
- [94] Pierre Dussarrat, Maxime Perrier, Almazbek Imanaliev, Raphael Lopes, Alain Aspect, Marc Cheneau, Denis Boiron, and Christoph I. Westbrook. Two-particle four-mode interferometer for atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :173202, Oct 2017.
- [95] Michel Le Bellac. *Physique quantique-Fondements : Fondements*, volume 1. EDP sciences, 2013.
- [96] M Waitz, D Metz, J Lower, C Schober, M Keiling, M Pitzer, K Mertens, M Martins, J Viehhaus, S Klumpp, et al. Two-particle interference of electron pairs on a molecular level. *Physical review letters*, 117(8) :083002, 2016.
- [97] Robert McConnell, Hao Zhang, Jiazhong Hu, Senka Ćuk, and Vladan Vuletić. Entanglement with negative wigner function of almost 3,000 atoms heralded by one photon. *Nature*, 519(7544) :439–442, 2015.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [98] Florian Haas, Jürgen Volz, Roger Gehr, Jakob Reichel, and Jérôme Estève. Entangled states of more than 40 atoms in an optical fiber cavity. *Science*, 344(6180) :180–183, 2014.
- [99] Onur Hosten, Nils J Engelsen, Rajiv Krishnakumar, and Mark A Kasevich. Measurement noise 100 times lower than the quantum-projection limit using entangled atoms. *Nature*, 529(7587) :505, 2016.
- [100] Jordi Tura, Remigiusz Augusiak, Ana Belén Sainz, Tamas Vértesi, Maciej Lewenstein, and Antonio Acín. Detecting nonlocality in many-body quantum states. *Science*, 344(6189) :1256–1258, 2014.
- [101] Jordi Tura, Remigiusz Augusiak, Ana Belén Sainz, Bernd Lücke, Carsten Klempt, Maciej Lewenstein, and Antonio Acín. Nonlocality in many-body quantum systems detected with two-body correlators. *Annals of Physics*, 362 :370–423, 2015.
- [102] Jan Peise, I Kruse, K Lange, Bernd Lücke, Luca Pezzè, Jan Arlt, Wolfgang Ertmer, Klemens Hammerer, L Santos, Augusto Smerzi, et al. Satisfying the einstein–podolsky–rosen criterion with massive particles. *Nature communications*, 6 :8984, 2015.
- [103] J. G. Rarity and P. R. Tapster. Experimental violation of bell’s inequality based on phase and momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :2495–2498, May 1990.
- [104] J. G. Rarity and P. R. Tapster. Fourth-order interference in parametric downconversion. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6(6) :1221–1226, Jun 1989.
- [105] Q Bouton, R Chang, AL Hoendervanger, F Nogrette, A Aspect, CI Westbrook, and D Clément. Fast production of bose-einstein condensates of metastable helium. *Physical Review A*, 91(6) :061402, 2015.

## BIBLIOGRAPHIE

---



# Publication

## **A two-particle, four-mode interferometer for atoms**

Pierre Dussarrat, Maxime Perrier, Almazbek Imanaliev, Raphael Lopes, Alain Aspect, Marc Cheneau, Denis Boiron, Christoph Westbrook

[\[94\]](#) dans la bibliographie.



## Two-Particle Four-Mode Interferometer for Atoms

Pierre Dussarrat,<sup>1</sup> Maxime Perrier,<sup>1</sup> Almazbek Imanaliev,<sup>2</sup> Raphael Lopes,<sup>3</sup> Alain Aspect,<sup>1</sup> Marc Cheneau,<sup>1</sup>  
Denis Boiron,<sup>1</sup> and Christoph I. Westbrook<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Université Paris-Saclay, 91120 Palaiseau, France

<sup>2</sup>LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University,

CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Université Paris 06, 75014 Paris, France

<sup>3</sup>Cavendish Laboratory, University of Cambridge, Cambridge CB3 0HE, United Kingdom

(Received 30 June 2017; published 24 October 2017)

We present a free-space interferometer to observe two-particle interference of a pair of atoms with entangled momenta. The source of atom pairs is a Bose-Einstein condensate subject to a dynamical instability, and the interferometer is realized using Bragg diffraction on optical lattices, in the spirit of our recent Hong-Ou-Mandel experiment. We report on an observation ruling out the possibility of a purely mixed state at the input of the interferometer. We explain how our current setup can be extended to enable a test of a Bell inequality on momentum observables.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.173202

A key element of the second quantum revolution [1,2] is entanglement [3]. Its extraordinary character comes from the fact that the many-body wave function of entangled particles can only be described in a configuration space associated with the tensor product of the configuration spaces of the individual particles. When one insists on describing it in our ordinary space-time, one has to face the problem of non-locality [4–6]. This is clearly illustrated by the violation of Bell's inequalities [7], which apply to any system that can be described in the spirit of the local realist worldview of Einstein, in which physical reality lies in our ordinary space-time [8].

While the violation of Bell's inequalities stems from two-particle interferences observed with entangled pairs, the converse is not true: not all phenomena associated with two-particle interference can lead to a violation of Bell's inequalities. This is, for instance, the case of the Hanbury Brown–Twiss effect for thermal bosons [9,10], or the Hong-Ou-Mandel effect [11]: the quantum description appeals to two-particle interference but no nonlocality is involved. This is because the latter effects involve only two modes for two indistinguishable particles [12], while a configuration leading to the violation of Bell's inequalities requires four modes that can be made to interfere two by two in different places [13].

Ever more ideal experimental tests of Bell's inequalities have been performed with low energy photons, internal states of trapped ions and nitrogen-vacancy centers (see references in Refs. [16,17]). But we know of no experiments on two-particle interference in four modes associated with the motional degrees of freedom (position or momentum) of massive particles, and in a configuration permitting a Bell inequality test [18]. Such tests involving mechanical observables are desirable, in particular, because they may allow one to touch upon the interface between quantum mechanics and gravitation [20].

In this Letter, we present a two-particle interferometer for momentum entangled atoms and report on an initial implementation. To understand the experiment, consider an entangled state consisting of a pair of atoms in a superposition of distinct momentum modes labeled by  $\pm p$  and  $\pm p'$ :

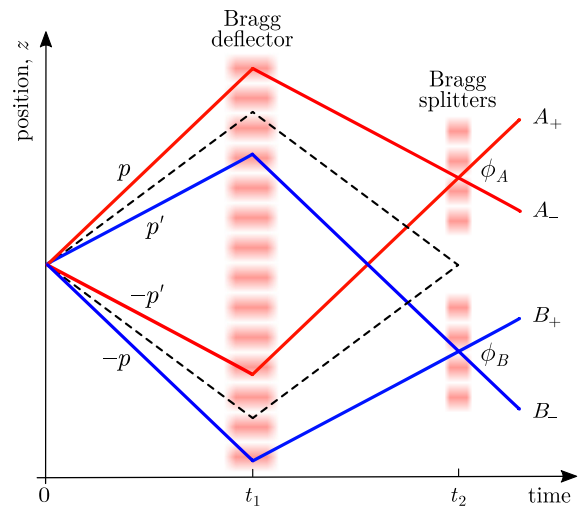


FIG. 1. Diagram of a two-particle, four-mode interferometer. An atom pair in the entangled momentum state (1) is emitted at time  $t = 0$ . Using Bragg diffraction on optical lattices, the four input modes are then deflected at time  $t_1$ , and mixed two by two at time  $t_2 = 2t_1$  on two independent splitters  $A$  and  $B$ , with phases  $\phi_A$  and  $\phi_B$ . The interference is read out by detecting the atoms in the output modes  $A_{\pm}$ ,  $B_{\pm}$ , and measuring the probabilities of joint detection  $\mathcal{P}(A_{\pm}, B_{\pm})$ . The Bragg deflector and splitters differ from their optical analogs, because rather than reversing the incident momentum, they translate the momentum by a reciprocal lattice vector  $\pm \hbar k_{\ell}$ . The dashed lines show the Hong-Ou-Mandel configuration.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p, -p\rangle + |p', -p'\rangle). \quad (1)$$

This superposition can be probed with the interferometer shown in Fig. 1. An analogous interferometer for photons was proposed in Ref. [21], implemented in Ref. [22], and resulted in a Bell inequality violation. Similar configurations for atoms were also analyzed in Refs. [23,24]. Although our results do not yet prove that we have an entangled state, they do exclude the possibility of a statistical mixture.

The input modes  $p$  and  $-p'$  of our interferometer are deflected and mixed on the 50:50 splitter  $A$ . Similarly, the input modes  $p'$  and  $-p$  are deflected and mixed on the 50:50 splitter  $B$ . The deflection and mixing are realized with Bragg diffraction on optical lattices. The deflecting lattice is common to the four input modes and is applied at time  $t_1$ . The splitting lattices  $A$  and  $B$  are applied at time  $t_2 = 2t_1$  (the time origin is set at the instant of pair emission). The four output modes of the interferometer,  $A_{\pm}$  and  $B_{\pm}$ , can be written in terms of the four input modes [25]

$$|A_{+}\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(e^{-i(\phi_A - \phi_D)}|p\rangle + ie^{-i\phi_D}|-p'\rangle), \quad (2)$$

$$|A_{-}\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(ie^{i\phi_D}|p\rangle + e^{i(\phi_A - \phi_D)}|-p'\rangle), \quad (3)$$

$$|B_{+}\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(e^{-i(\phi_B - \phi_D)}|p'\rangle + ie^{-i\phi_D}|-p\rangle), \quad (4)$$

$$|B_{-}\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}(ie^{i\phi_D}|p'\rangle + e^{i(\phi_B - \phi_D)}|-p\rangle). \quad (5)$$

Here, the phases  $\phi_D$ ,  $\phi_A$ , and  $\phi_B$  are the phase differences between the laser beams forming the deflecting lattice ( $\phi_D$ ) and the splitting lattices ( $\phi_A$  and  $\phi_B$ ); they can, in principle, be separately controlled. In the above equations we have omitted overall phase factors due to propagation.

Inverting equations (2)–(5), one readily obtains the expression of the entangled state (1) at the output of the interferometer, which solely depends on  $\phi_A$  and  $\phi_B$ :

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{out}}\rangle = & \frac{1}{2\sqrt{2}}[-i(e^{i\phi_A} + e^{i\phi_B})|A_{+}, B_{+}\rangle \\ & + (e^{i(\phi_A - \phi_B)} - 1)|A_{+}, B_{-}\rangle + (e^{-i(\phi_A - \phi_B)} - 1)|A_{-}, B_{+}\rangle \\ & - i(e^{-i\phi_A} + e^{-i\phi_B})|A_{-}, B_{-}\rangle]. \end{aligned} \quad (6)$$

The probabilities of joint detection in the output modes are given by the squared modulus of the complex amplitudes of the corresponding pair states,

$$\mathcal{P}(A_{+}, B_{+}) = \mathcal{P}(A_{-}, B_{-}) = \frac{1}{2}\cos^2[(\phi_A - \phi_B)/2], \quad (7)$$

$$\mathcal{P}(A_{+}, B_{-}) = \mathcal{P}(A_{-}, B_{+}) = \frac{1}{2}\sin^2[(\phi_A - \phi_B)/2], \quad (8)$$

while the probabilities of single detection are all equal to  $1/2$ . The entangled nature of the initial state is manifest in the oscillation of the joint detection probabilities as a function of the phase difference ( $\phi_A - \phi_B$ ). If rather, we had initially a statistical mixture of the pair states  $|p, -p\rangle$  and  $|p', -p'\rangle$ , there would be no modulation and the probabilities of joint detection would all be equal to  $1/4$ . The four joint detection probabilities can also be combined in a single correlation coefficient,

$$\begin{aligned} E = & \mathcal{P}(A_{+}, B_{+}) + \mathcal{P}(A_{-}, B_{-}) \\ & - \mathcal{P}(A_{+}, B_{-}) - \mathcal{P}(A_{-}, B_{+}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$= V \cos(\phi_A - \phi_B). \quad (10)$$

The visibility  $V$  is equal to unity for the input state (1), but it may be reduced in a real experiment due, for example, to decoherence, or the presence of additional pairs. In the case of a statistical mixture, the correlation coefficient would be equal to zero. Of course, a Bell inequality test remains possible provided  $V > 1/\sqrt{2}$  [26].

We now come to our experimental realization. A gaseous Bose-Einstein condensate (BEC) containing  $7 \times 10^4$  Helium-4 atoms in the metastable  $2^3S_1$ ,  $m_J = 1$  electronic state is confined in an ellipsoidal optical trap with its long axis along the vertical ( $z$ ) direction. The emission of atom pairs occurs in the presence of a vertical, moving optical lattice formed by the interference of two laser beams with slightly different frequencies [25]. It results from the scattering of two atoms from the BEC and can be thought of as a spontaneous, degenerate four-wave mixing process [27]. The lattice is switched on and off adiabatically in  $100 \mu\text{s}$ , and is maintained at a constant depth for  $600 \mu\text{s}$ . The lattice hold time is tuned to produce a peak atom pair density in velocity space of about  $3 \times 10^{-3}$  detected pairs per  $(\text{mm/s})^3$ . The optical trap is switched off abruptly as soon as the lattice depth is returned to zero. The atoms are then transferred to the magnetically insensitive  $m_J = 0$  state with a two-photon Raman transition and fall freely under the sole influence of gravity. They end their fall on a microchannel plate detector located 46 cm below the position of the optical trap [28]. The detector records the impact of each atom with an efficiency  $\sim 25\%$ . We store the arrival times and horizontal positions ( $x$ - $y$  plane), and reconstruct the initial three-dimensional velocity of every detected atom.

In Fig. 2, we show the initial velocity distribution of the emitted atom pairs in the  $y$ - $z$  plane. Here, and in the rest of the Letter, velocities are expressed in the center-of-mass reference frame of the free-falling pairs. The distribution is bimodal, and symmetric under rotation about the  $z$  axis, reflecting the one-dimensional character of the pair emission. We do observe, however, a slight asymmetry in the height of the two maxima. We attribute this asymmetry to momentum-dependent losses occurring during the

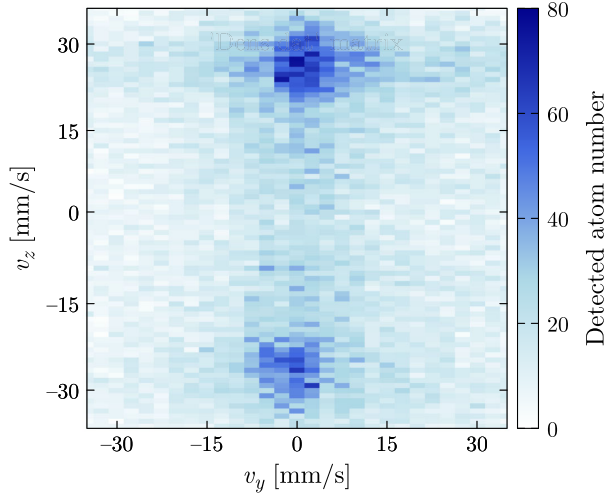


FIG. 2. Initial velocity distribution of the emitted atom pairs in the  $y$ - $z$  plane. The color scale represents the total number of atoms detected over 1169 repetitions of the experiment inside an integration volume of  $9.2 \times 2.4 \times 0.9$  (mm/s)<sup>3</sup> [25]. The velocities are defined with respect to the center-of-mass velocity of the atom pairs, which was measured to be 0, 0, and 94 mm/s along the  $x$ ,  $y$ , and  $z$  directions, respectively.

short time when the emitted atoms spatially overlap with the BEC.

The pairwise emission process is characterized by the normalized cross-correlation

$$g^{(2)}(v_z^+, v_z^-) = \frac{\langle n(v_z^+)n(v_z^-) \rangle}{\langle n(v_z^+) \rangle \langle n(v_z^-) \rangle}, \quad (11)$$

where  $n(v_z^\pm)$  represents the number of atoms with a velocity  $v_z^+ > 0$ , or  $v_z^- < 0$ , along the  $z$  axis and 0 along the  $x$  and  $y$  axes. Experimentally, we measure this correlation by counting the number of detected atoms inside two small integration volumes in velocity space [25], and averaging their product over many realizations (as denoted by  $\langle \cdot \rangle$ ). The correlation obtained in the experiment is displayed in Fig. 3. A two-particle correlation centered around  $v_z^+ = -v_z^- \approx 25$  mm/s is clearly visible, and confirms that atoms are indeed emitted in pairs with opposite velocities. Because the pair emission fulfills the quasimomentum conservation strictly, but the energy conservation only loosely [27], our source emits several pairs of modes, as shown by the correlation peak which is elongated along the line  $v_z^+ = -v_z^-$  [25].

If the pair production process is coherent, emitted pairs will be in a superposition of several pair states, each with well defined velocities. In other words, our source of atom pairs should produce pairs of entangled atoms. By filtering the velocities at the detector according to  $mv_z^+ = p$  or  $p'$ , and  $mv_z^- = -p$  or  $-p'$ , where  $m$  is the mass of the atom, we therefore expect to obtain a Bell state of the form (1), expressed in the center-of-mass reference frame of the pairs. The next step is to observe an interference between the two

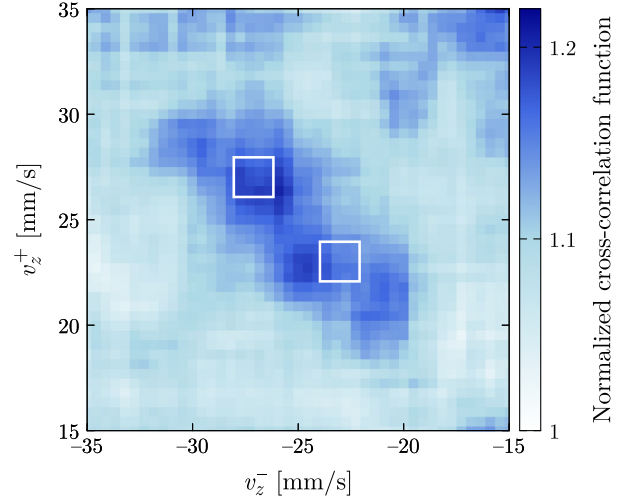


FIG. 3. Normalized cross-correlation  $g^{(2)}(v_z^+, v_z^-)$ . The velocities are measured along the  $z$  axis and relative to the center-of-mass velocity of the atom pairs. A sliding average was performed to reduce the statistical noise. The correlation peak is elongated along the antidiagonal because the source can emit in several pairs of modes. The width of the correlation peak along the diagonal corresponds to the diffraction limit imposed by the spatial extent of the source. The white squares show the size and position in the plane  $(v_z^+, v_z^-)$  of the integration volumes used to obtain the points in Fig. 4 for the set of modes 1.

components of the superposition state with the interferometer in Fig. 1. This is realized using Bragg diffraction of the atoms on a second optical lattice oriented along the  $z$  axis, distinct from the lattice driving the pair emission. This Bragg lattice is pulsed first for 100  $\mu$ s to realize the Bragg deflector ( $\pi$  pulse), and then for 50  $\mu$ s to realize the Bragg splitters ( $\pi/2$  pulse). During the whole time, the frequency difference between the laser beams forming the lattice is chirped to compensate for the atoms' free fall. The Bragg resonance is met when  $v_z^\pm = \pm 25$  mm/s but the finite pulse duration broadens the Bragg energy condition such that all mode pairs  $(p, -p')$ , or  $(-p, p')$ , produced in the experiment are coupled with almost the same strength if they fulfill the Bragg momentum condition

$$p + p' = \hbar k_\ell, \quad (12)$$

where  $k_\ell = m/\hbar \times 50$  mm/s is the lattice reciprocal vector. This has two practical consequences. First, a single Bragg lattice simultaneously realizes the deflection, or the mixing, of the two pairs of modes  $(p, -p')$  and  $(-p, p')$ , in contrast with the configuration shown in Fig. 1, where two independent splitters are shown. Second, since by construction the interferometer is closed for any pair of modes satisfying Eq. (12), the same sequence of two successive Bragg lattices realizes several interferometers simultaneously.

We apply the deflecting pulse right after the transfer to the  $m_j = 0$  state, at  $t_1 = 1100$   $\mu$ s, where the time origin is

set at the instant when the optical lattice driving the pair emission is switched on, and  $t_1$  is the beginning of the pulse. To close the interferometer, the time  $t_2$  for the splitting pulse is determined experimentally. This is achieved by performing a Hong-Ou-Mandel experiment [29]; that is, we vary the time at which the splitting pulse is applied and measure the probability of joint detection at velocities  $v_z^\pm = \pm 25$  mm/s (dashed lines in Fig. 1). The interferometer is closed at the Hong-Ou-Mandel dip, that is when the joint detection probability is minimum. In our experiment, this occurs when the Bragg splitting pulse starts at  $t_2 = 1950 \mu\text{s}$  [25].

Ideally, one would vary the phase difference  $(\phi_A - \phi_B)$  in a controlled manner to observe the modulation predicted in Eq. (10). This is not possible with the setup described here because the two splitters are realized with a single Bragg lattice. Active control of the phase difference could be achieved using independent Bragg lattices for the splitters  $A$  and  $B$ , and we intend to implement this procedure in the future. However, we still have a way to probe different relative phases in the current setup by filtering modes for which the Bragg energy condition is not exactly satisfied, which adds a velocity-dependent contribution to  $(\phi_A - \phi_B)$  [25]. We therefore obtain different relative phases by filtering different output momenta.

In our experiment, the multiplexed character of the interferometer allows us to select three sets of mode pairs  $(p, -p')$ , and  $(-p, p')$ , for which the interferometer is closed with different relative phases  $(\phi_A - \phi_B)$ . A simple model for the Bragg diffraction [25] indicates that the relative phases for these three sets span an interval of about  $100^\circ$ . For each set we measure the joint detection probabilities in the output modes using small integration volumes in velocity space [25]. The white squares in Fig. 3 show the corresponding areas in the  $(v_z^+, v_z^-)$  plane for one of the sets. The size of the integration volumes is a compromise between two opposing constraints: maximizing the signal-to-noise ratio and minimizing the variations across the volume of the phase imprinted upon diffraction. With our settings [25], the average population in one integration volume is 0.2 atoms per repetition (corrected for the 25% detection efficiency) and the phase varies by up to  $50^\circ$ .

Figure 4 displays the result of our measurements on each set. The upper two graphs show the four joint detection probabilities. As expected from Eqs. (7) and (8), the values of  $\mathcal{P}(A_+, B_+)$  and  $\mathcal{P}(A_-, B_-)$  on the one hand, and  $\mathcal{P}(A_+, B_-)$  and  $\mathcal{P}(A_-, B_+)$  on the other, appear to be correlated. Note that, for each set, the sum of all four joint detection probabilities is equal to unity by construction. The lower graph shows the correlation coefficient  $E$  defined in Eq. (10). We observe that, for at least one set of modes, this coefficient takes a nonzero value (set 3 gives  $E = 0.51 \pm 0.20$ ). We have also used our data to verify the zero level of  $E$ : By combining the modes analyzed in Fig. 4 in a way that avoids two-particle interferences by

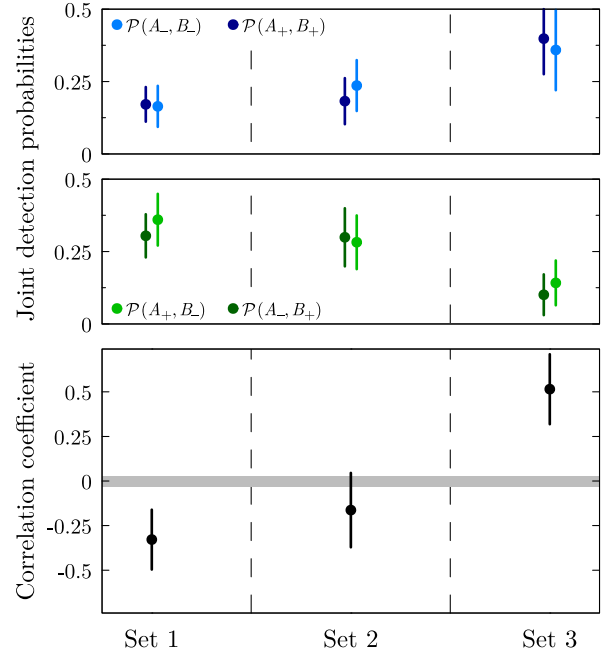


FIG. 4. Joint detection probabilities measured at the output of the four-mode interferometer for three independent sets of momentum modes  $(p, -p')$  and  $(-p, p')$ . The lower graph displays the correlation coefficient  $E$ . The gray line represents the zero level of this coefficient, calibrated using different combinations of the same modes for which no two-particle interference can occur by construction; the width of the line is the uncertainty on the zero level. The velocities  $v_z^+$  corresponding to the modes  $p$  are 27, 29, and 31 mm/s for sets 1, 2, and 3, respectively. The velocities corresponding to  $p'$  can be deduced from Eq. (12). Averages were taken over 2218 repetitions of the experiment. Error bars denote the statistical uncertainty and are obtained by bootstrapping.

construction, we can build 18 sets of modes that should exhibit a zero correlation coefficient [25]. For those reference sets, we find indeed  $E = 0.00$  with a statistical uncertainty of 0.03 (gray line in the lower graph of Fig. 4).

Our results thus rule out the possibility of a completely mixed state at the input of the interferometer. To make a claim about the presence of entanglement, we would need to observe the modulation of  $E$  when we vary the phase difference  $(\phi_A - \phi_B)$ . This is best achieved by introducing separate Bragg splitters, and performing a correlation measurement on a single set of momentum modes to render common any velocity dependent phase. A contrast of the oscillation in excess of  $1/\sqrt{2}$  would permit the observation of a Bell inequality violation for freely falling massive particles using their momentum degree of freedom. Finally, we note that the setup described here can in principle be adapted to mix the mode  $p$  with  $p'$ , and  $-p$  with  $-p'$ , by changing the reciprocal wave vector of the Bragg lattices. This variant, where the trajectories of the two atoms never cross, can also lead to a violation of a Bell inequality, in a situation where nonlocality is more striking.



The research leading to these results has received funding from the European Research Council and from the People Programme (Marie Curie Actions) under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2007–2013) and H2020 Programme (2014–2020) / ERC Grant Agreement No. 267775, and REA Grant Agreements No. 618760 and No. 704832. We also acknowledge funding from the ANR through the Grant Agreement No. 15-CE30-0017 and support from Churchill College, Cambridge.

- 
- [1] J. P. Dowling and G. J. Milburn, *Phil. Trans. R. Soc. A* **361**, 1655 (2003).
- [2] A. Aspect, Introduction: John Bell and the second quantum revolution, in *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004), p. xvii.
- [3] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [4] N. Gisin and M. Rigo, *J. Phys. A* **28**, 7375 (1995).
- [5] A. Aspect, Bell's Theorem: The Naive View of an Experimentalist, in *Quantum (Un)speakables: From Bell to Quantum Information* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2002), p. 119.
- [6] M. C. Tichy, F. Mintert, and A. Buchleitner, *J. Phys. B* **44**, 192001 (2011).
- [7] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [8] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [9] U. Fano, *Am. J. Phys.* **29**, 539 (1961).
- [10] R. J. Glauber, in *Quantum Optics and Electronics*, edited by C. de Witt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [11] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [12] By mode, we mean a single-particle wave function, whether in real space or some other space, which can be occupied by some number of identical particles.
- [13] The requirement for four modes holds for systems of two particles. In the context of continuous variables, configurations involving only two modes can also lead to violations of Bell's inequalities (see, for instance, Refs. [14,15]).
- [14] J. Wenger, M. Hafezi, F. Grosshans, R. Tualle-Brouiri, and P. Grangier, *Phys. Rev. A* **67**, 012105 (2003).
- [15] D. Cavalcanti, N. Brunner, P. Skrzypczyk, A. Salles, and V. Scarani, *Phys. Rev. A* **84**, 022105 (2011).
- [16] A. Aspect, *Nature (London)* **398**, 189 (1999).
- [17] A. Aspect, *Physics* **8**, 123 (2015).
- [18] A two-electron interference in four momentum modes was reported in Ref. [19], but without access to all four joint detection probabilities.
- [19] M. Waitz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 083002 (2016).
- [20] R. Penrose, *Gen. Relativ. Gravit.* **28**, 581 (1996).
- [21] M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2209 (1989).
- [22] J. G. Rarity and P. R. Tapster, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495 (1990).
- [23] J. Kofler, M. Singh, M. Ebner, M. Keller, M. Kotyba, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. A* **86**, 032115 (2012).
- [24] R. J. Lewis-Swan and K. V. Kheruntsyan, *Phys. Rev. A* **91**, 052114 (2015).
- [25] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.119.173202> for a model of Bragg diffraction and details of other methods.
- [26] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [27] M. Bonneau, J. Ruauadel, R. Lopes, J.-C. Jaskula, A. Aspect, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Phys. Rev. A* **87**, 061603 (2013).
- [28] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. V. Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Science* **310**, 648 (2005).
- [29] R. Lopes, A. Imanaliev, A. Aspect, M. Cheneau, D. Boiron, and C. I. Westbrook, *Nature (London)* **520**, 66 (2015).

# Supplemental Material for the Article “A two-particle, four-mode interferometer for atoms”

Pierre Dussarrat, Maxime Perrier, Almazbek Imanaliev, Raphael Lopes,  
Alain Aspect, Marc Cheneau, Denis Boiron, and Christoph I. Westbrook

## OPTICAL LATTICE FOR PAIR EMISSION

The optical lattice driving the dynamical instability at the origin of the pair creation has a period  $a = 550$  nm and a depth of  $0.45 E_{\text{rec}}$ , where  $E_{\text{rec}} = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$  is the recoil energy and  $m$  is the mass of an atom. The frequency difference between the two laser beams forming the lattice is  $\nu = 105$  kHz, resulting in a velocity  $\nu a = 57$  mm/s for the motion of the standing wave in the laboratory frame of reference.

## INTEGRATION VOLUMES FOR COUNTING THE ATOM NUMBERS

Depending on the observable, we choose different integration volumes in velocity space in order to optimize the signal-to-noise ratio. In Tab. SI, we summarize the integration volumes used to count the number of atoms for each graph of the main text and supplemental material.

TAB. SI. Integration volumes. Rectangular boxes have a size  $\delta v_x$ ,  $\delta v_y$  and  $\delta v_z$  along  $x$ ,  $y$  and  $z$ , respectively. Cylindrical boxes are oriented along  $z$ ; their diameter is  $\delta v_x = \delta v_y$  and their length is  $\delta v_z$ . All sizes are given in mm/s.

	box shape	$\delta v_x$	$\delta v_y$	$\delta v_z$
Fig. 2	rectangular	9.2	2.4	0.9
Fig. 3	cylindrical	32.2	32.2	2.8
Fig. 4	cylindrical	4.0	4.0	2.0
Fig. S1 (left)	cylindrical	18.4	18.4	1.8
Fig. S1 (right)	cylindrical	18.4	18.4	0.9
Fig. S3	cylindrical	4.0	4.0	2.6

## NORMALIZED CROSS-CORRELATION

The normalized cross-correlation  $g^{(2)}(v_z^+, v_z^-)$  shown in Fig. 3 of the main text displays a peak centered around  $v_z^+ = -v_z^- \simeq 25$  mm/s. This peak is elongated along the line  $v_z^+ = -v_z^-$ , indicating that the source emits several pairs of modes. Projections of the two-dimensional cross-correlation function along the lines  $v_z^+ = -v_z^-$  and  $v_z^+ - v_z^- = 50$  mm/s, corresponding to the long and short axes of the correlation peaks, respectively, are given in Fig. S1. Unlike the two-dimensional map displayed in

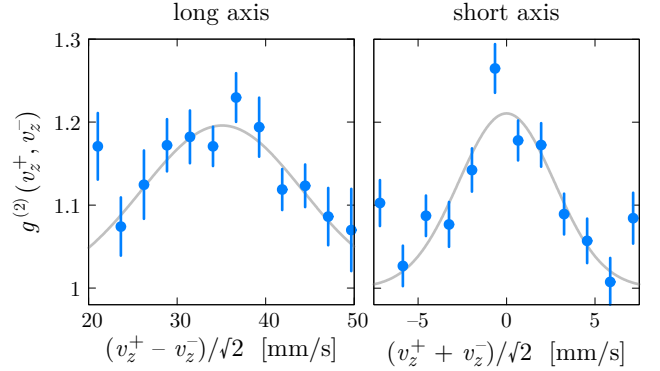


FIG. S1. Projections of the two-dimensional cross-correlation function on its long and short axes. The blue points represent the experimental data. The error bars represent the statistical uncertainty and are obtained by bootstrapping. The grey lines are Gaussian fits with an offset fixed at unity.

Fig. 3 of the main text, no sliding average was performed and all experimental points are statistically independent. The different amplitudes of the correlation peak along the long and short axes stem from the different integration volumes. A Gaussian fit yields the half-widths (standard deviation)  $\sigma = (9.0 \pm 2.3)$  mm/s for the long axis, and  $\sigma = (2.7 \pm 0.7)$  mm/s for the short axis. These values are to be compared to the half-width of the auto-correlation functions,  $\sigma_{\text{auto}} = (1.9 \pm 0.4)$  mm/s, which is the diffraction limit of our source.

## TIMING OF THE BRAGG PULSES

In principle, the interferometer is closed when the time  $t_2$  at which the mixing is realized equals twice the time  $t_1$  at which the deflection is realized. However, neither the pair emission, nor the Bragg diffraction, occur at a well defined time and we have to determine experimentally the time at which the Bragg splitting pulse must be applied in order to close the interferometer. We solve this problem by performing a Hong–Ou–Mandel experiment. This is achieved by filtering two symmetric output modes,  $C_+$  and  $C_-$ , associated with the input state  $|p'', -p''\rangle$ , where  $2p'' = \hbar k_\ell$  (see Fig. S2). In the experiment, these modes correspond to the velocities  $v_z^+ = -v_z^- = 25$  mm/s, which are located at the maxima of the initial velocity distribution of the emitted atom pairs. We then vary the time at which the Bragg split-

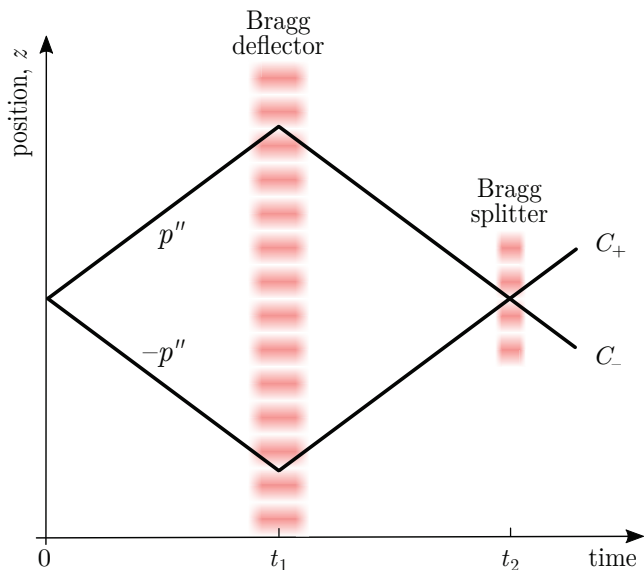


FIG. S2. Diagram of the Hong–Ou–Mandel interferometer. By filtering only two output modes corresponding to the initial pair state  $|p'', -p''\rangle$ , the four-mode interferometer folds onto a two-mode interferometer. The Hong–Ou–Mandel effect occurs when the Bragg splitting pulse mixes the two input modes  $p''$  and  $-p''$ . It manifests as a reduction of the probability of joint detection in the output modes  $C_+$  and  $C_-$ , shown in Fig. S3.

ting pulse is applied, and measure the probability of joint detection in the two output modes:

$$\mathcal{P}(C_+, C_-) = 2\Lambda^{-1} \langle n(p'') n(-p'') \rangle, \quad (\text{S1})$$

where the normalization factor is given by

$$\Lambda = \langle n(p'')(n(p'') - 1) \rangle + \langle n(-p'')(n(-p'') - 1) \rangle + 2\langle n(p'')n(-p'') \rangle, \quad (\text{S2})$$

and we have used the notation  $n(\pm p'')$  instead of  $n(v_z^\pm)$ , with  $mv_z^\pm = \pm p''$ .

In a closed interferometer, the “which-path” information is erased and the two atoms of a pair become indistinguishable after the Bragg splitter. A two-particle interference then results in the cancellation of the joint detection probability for bosons. We show the result of this measurement in Fig. S3. The dip in the joint detection probability is clearly visible when the Bragg splitting pulse begins at time  $t_2 = 1950 \mu\text{s}$ , and we use this timing to realize the four-mode interferometer.

### BRAGG DIFFRACTION MODEL

The Bragg reflectors and splitters are realized by Bragg diffraction on a vertical, moving optical lattice formed by the interference pattern of two laser beams with slightly different frequencies. The frequency difference between

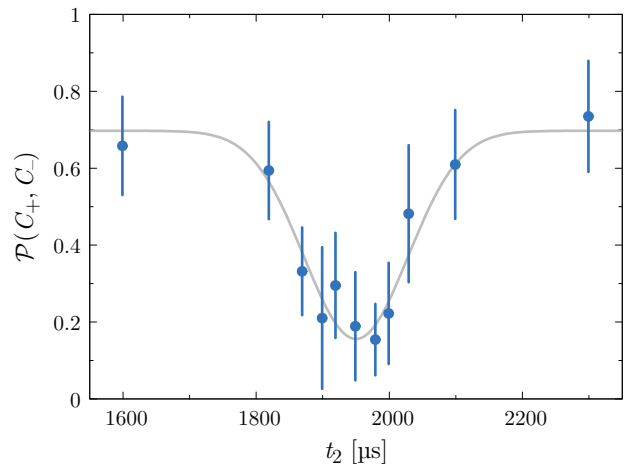


FIG. S3. Joint detection probability in the two symmetric output modes as a function of the time at which the Bragg splitting pulse is applied. The blue points represent the experimental data. The error bars represent the statistical uncertainty and are obtained by bootstrapping. The grey line is a Gaussian fit. The reduction of the joint detection probability at  $t_2 = 1950 \mu\text{s}$  results from the Hong–Ou–Mandel effect, and signals that the interferometer is closed.

the two beams forming the lattice is chirped to compensate for the atoms’ free fall. In the limit of a shallow lattice, i.e. when the lattice depth is smaller than the recoil energy  $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k_\ell^2 / 2m$ , Bragg diffraction couples only pairs of momentum states  $(p, -p')$ , or  $(-p, p')$ , satisfying both momentum conservation,  $p + p' = \hbar k_\ell$ , and energy conservation,  $p^2 / 2m = p'^2 / 2m$ . If the interaction time between the atoms and the lattice is short, however, the energy conservation condition is not strict. In contrast, the momentum conservation condition will always be strictly fulfilled because of the spatial extension of the optical lattice and the high velocity resolution of our detector.

### Diffraction at the Bragg energy condition

We consider here the pair of input modes  $p$  and  $-p'$  fulfilling exactly the Bragg energy condition. We write the coupling Hamiltonian in the basis  $\{|p\rangle, |-p'\rangle\}$  as:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{S3})$$

where  $\Omega/2\pi$  is the two-photon Rabi frequency and  $\phi$  is the phase difference between the two laser beams forming the Bragg lattice. The Bragg lattice drives a Rabi oscillation between the two modes  $p$  and  $-p'$ . The evolution



operator describing this dynamics takes the simple form:

$$\hat{U}(t) \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t/2) & -i e^{-i\phi} \sin(\Omega t/2) \\ -i e^{i\phi} \sin(\Omega t/2) & \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix}, \quad (\text{S4})$$

where the time origin is set at the instant when the laser beams are switched on. An interaction time  $t = \pi/\Omega$  ( $\pi$ -pulse) turns an input state  $|p\rangle$  into an output state  $|-p'\rangle$ , and an input state  $|-p'\rangle$  into an output state  $|p\rangle$ ; it therefore realizes a Bragg deflector. Similarly, an interaction time  $t = \pi/2\Omega$  ( $\pi/2$ -pulse) turns  $|p\rangle$  or  $|-p'\rangle$  into a superposition with equal weights of  $|p\rangle$  and  $|-p'\rangle$ ; it therefore realizes a 50:50 Bragg splitter.

In our interferometer, a  $\pi$ -pulse and a  $\pi/2$ -pulse are successively applied to realize the deflection and the splitting. Using the subscripts  $D$  and  $A$  to label the deflecting pulse and the splitting pulse  $A$ , respectively, and omitting overall phase factors due to propagation, we therefore obtain the output modes  $A_+$  and  $A_-$  by writing:

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = \hat{U}_A(\pi/2\Omega) \hat{U}_D(\pi/\Omega) \begin{pmatrix} p \\ -p' \end{pmatrix} \quad (\text{S5})$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\phi_A - \phi_D)} & i e^{-i\phi_D} \\ i e^{i\phi_D} & e^{i(\phi_A - \phi_D)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ -p' \end{pmatrix}. \quad (\text{S6})$$

The same reasoning applies if we consider the pair of input modes  $p'$  and  $-p$ . We then obtain:

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = \hat{U}_B(\pi/2\Omega) \hat{U}_D(\pi/\Omega) \begin{pmatrix} p' \\ -p \end{pmatrix} \quad (\text{S7})$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\phi_B - \phi_D)} & i e^{-i\phi_D} \\ i e^{i\phi_D} & e^{i(\phi_B - \phi_D)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ -p \end{pmatrix}. \quad (\text{S8})$$

Equations (S4–S7) directly give Eqs. (2–5) in the main text.

### Diffraction away from the Bragg energy condition

We now consider a pair of input modes  $p$  and  $-p'$  for which the Bragg energy condition is not exactly satisfied, meaning that the input and output states have slightly different energies. We introduce the detuning  $\hbar\delta = p^2/2m - p'^2/2m$  and assume  $\delta > 0$ . To first order in  $\delta/\Omega$ , the evolution operator in the basis  $\{|p\rangle, |-p'\rangle\}$  is modified according to:

$$\hat{U}(t) \simeq \begin{pmatrix} e^{-i\delta t/2} \cos(\Omega t/2) & -i e^{-i(\phi + \delta t/2)} \sin(\Omega t/2) \\ -i e^{i(\phi + \delta t/2)} \sin(\Omega t/2) & e^{i\delta t/2} \cos(\Omega t/2) \end{pmatrix}. \quad (\text{S9})$$

If we consider instead the input states  $p'$  and  $-p$ , but keep the same definition for  $\delta$ , we must take care to replace  $\delta$  by  $-\delta$  in this evolution operator. Compared to the resonant case, one sees that an additional phase  $\delta t$  is accumulated between the components  $|p\rangle$  and  $|-p'\rangle$  during the interaction with the Bragg lattice. At the output of the interferometer, the modes  $A_{\pm}$  and  $B_{\pm}$  are now

given by the matrix equations

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} \simeq \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\phi_A - \phi_D - \pi\delta/4\Omega)} & i e^{-i(\phi_D + 3\pi\delta/4\Omega)} \\ i e^{i(\phi_D + 3\pi\delta/4\Omega)} & e^{i(\phi_A - \phi_D - \pi\delta/4\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ -p' \end{pmatrix} \quad (\text{S10})$$

and

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} \simeq \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\phi_B - \phi_D + \pi\delta/4\Omega)} & i e^{-i(\phi_D - 3\pi\delta/4\Omega)} \\ i e^{i(\phi_D - 3\pi\delta/4\Omega)} & e^{i(\phi_B - \phi_D + \pi\delta/4\Omega)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ -p \end{pmatrix}. \quad (\text{S11})$$

Inverting the matrix equations (S10) and (S11), we can express the entangled state  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p, -p\rangle + |p', -p'\rangle)$  at the output of the interferometer as

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle \simeq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ -i(e^{i(\phi_A - \pi\delta/\Omega)} + e^{i(\phi_B + \pi\delta/\Omega)})|A_+, B_+\rangle \right. \\ \left. + (e^{i(\phi_A - \phi_B - \pi\delta/2\Omega)} - e^{3i\pi\delta/2\Omega})|A_+, B_-\rangle \right. \\ \left. + (e^{-i(\phi_A - \phi_B - \pi\delta/2\Omega)} - e^{-3i\pi\delta/2\Omega})|A_-, B_+\rangle \right. \\ \left. - i(e^{-i(\phi_A - \pi\delta/\Omega)} + e^{-i(\phi_B + \pi\delta/\Omega)})|A_-, B_-\rangle \right]. \quad (\text{S12})$$

We finally obtain the joint detection probabilities

$$\mathcal{P}(A_{\pm}, B_{\pm}) \simeq \frac{1}{2} \cos^2 [(\phi_A - \phi_B - 2\pi\delta/\Omega)/2], \quad (\text{S13})$$

$$\mathcal{P}(A_{\pm}, B_{\mp}) \simeq \frac{1}{2} \sin^2 [(\phi_A - \phi_B - 2\pi\delta/\Omega)/2]. \quad (\text{S14})$$

To first order in  $\delta/\Omega$ , the mismatch in the Bragg energy condition thus adds an offset  $-2\pi\delta/\Omega$  to the relative phase  $(\phi_A - \phi_B)$ . This off-resonance contribution depends on  $p$  and  $p'$  through the detuning  $\delta$ .

In the sets of modes 1, 2 and 3 shown in Fig. 4, the mode  $p$  corresponds, respectively, to the velocities  $v_z^{\pm} = 27.0, 29.1$  and  $31.1$  mm/s, and the mode  $p'$  corresponds to the velocities  $v_z^{\pm} = 23.0, 20.9$  and  $18.9$  mm/s. The mismatch in the Bragg energy condition for these three sets of modes are thus:  $\delta_1/2\pi = 0.9$  kHz,  $\delta_2/2\pi = 1.9$  kHz and  $\delta_3/2\pi = 2.9$  kHz. For these values of the detuning  $\delta$ , the condition  $\delta \ll \Omega$  is only marginally satisfied and the lowest order approximation overestimates the relative phases by about 30%. For a better estimation, we wrote the exact evolution operator for the two-mode dynamics, and numerically calculated the additional phases with respect to the resonant case. We found  $-43, -94$  and  $-144^\circ$  for sets 1, 2 and 3, respectively.

### EXPERIMENTAL MEASUREMENT OF THE JOINT DETECTION PROBABILITIES

The probabilities of joint detection in the output modes  $A_{\pm}$  and  $B_{\pm}$  are measured by counting the number

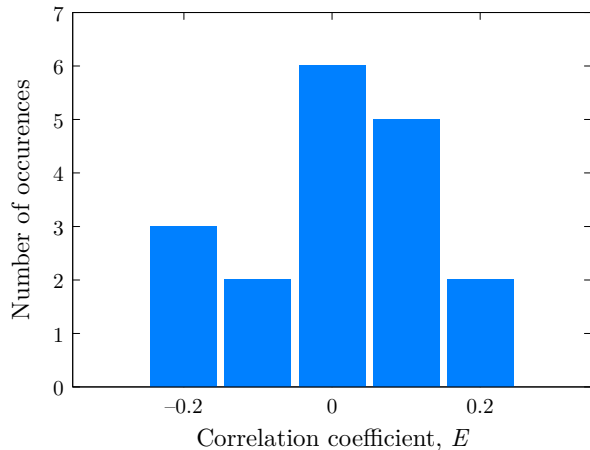


FIG. S4. Histogram of the correlation coefficient  $E$  measured with 18 combinations of the modes analyzed in Fig. 4 of the main text for which no two-particle interference can occur by construction. The distribution is peaked around zero, showing that there is no bias in the evaluation of the correlation coefficient.

of atoms with velocities  $mv_z^+ = p$  or  $p'$ , and  $mv_z^- = -p$  or  $-p'$ , and using the relations

$$\mathcal{P}(A_+, B_+) = \Lambda^{-1} \langle n(p) n(p') \rangle, \quad (\text{S15})$$

$$\mathcal{P}(A_-, B_-) = \Lambda^{-1} \langle n(-p) n(-p') \rangle, \quad (\text{S16})$$

$$\mathcal{P}(A_+, B_-) = \Lambda^{-1} \langle n(p) n(-p) \rangle, \quad (\text{S17})$$

$$\mathcal{P}(A_-, B_+) = \Lambda^{-1} \langle n(-p') n(p') \rangle, \quad (\text{S18})$$

where the normalization factor is given by

$$\Lambda = \langle n(p)n(p') \rangle + \langle n(-p)n(-p') \rangle + \langle n(p)n(-p) \rangle + \langle n(-p')n(p') \rangle, \quad (\text{S19})$$

and we have used the notation  $n(\pm p)$  or  $n(\pm p')$  instead of  $n(v_z^\pm)$ , with  $mv_z^\pm = \pm p$  or  $\pm p'$ .

### ZERO LEVEL OF THE CORRELATION COEFFICIENT

In order to confirm the zero level of the correlation coefficient  $E$ , we have constructed a correlation coefficient using 18 combinations of the modes analyzed in Fig. 4 of the main text for which no two-particle interference can occur by construction. Denoting by  $A_\pm^{(i)}$  and  $B_\pm^{(i)}$  the output modes of the set  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), those combinations are of the form  $\{A_+^{(i)}, A_-^{(j)}, B_+^{(k)}, B_-^{(l)}\}$  with  $i \neq k, l$  and  $j \neq k, l$ . The mean values of the joint detection probabilities measured with these reference sets are all close to  $1/4$ , as summarized in Tab. SII. In Fig. S4, we show a histogram of the corresponding values of  $E$ . The distribution has a mean value of  $-0.001$  and a standard deviation of  $0.125$ . The uncertainty on the mean value is  $0.125/\sqrt{18} = 0.029$ . These calibration measurements give us confidence that we have no systematic bias in the estimation of the correlation coefficient.

TAB. SII. Mean values of the joint detection probabilities for uncorrelated data.

$\mathcal{P}(A_+, B_+)$	$0.258 \pm 0.015$
$\mathcal{P}(A_-, B_-)$	$0.241 \pm 0.011$
$\mathcal{P}(A_+, B_-)$	$0.259 \pm 0.018$
$\mathcal{P}(A_-, B_+)$	$0.242 \pm 0.013$

**Titre :** Expériences d'Optique Atomique Quantique  
Interféromètres à 2 et 4 modes

**Mots clefs :** Mécanique Quantique, Intrication, Inégalités de Bell, Hong-Ou-Mandel Atomique, Hélium Métastable.

**Résumé :** Deux expériences d'Optique Atomique Quantique sont étudiées dans ce manuscrit : l'expérience Hong-Ou-Mandel atomique ainsi qu'une expérience préliminaire au test des inégalités de Bell sur la variable d'impulsion de deux atomes. Ces deux expériences permettent de révéler des comportements très particuliers de la matière. La première produit une interférence à deux particules et la seconde suggère l'intrication de deux atomes en impulsion. Ces deux aspects de la mécanique quantique sont non-intuitifs et surprenants. Pouvoir les réaliser avec quelques atomes dans des environnements contrôlés est nécessaire à la consolidation de nos connaissances des lois de la nature et tout particulièrement quand mécanique quantique et gravitation sont à l'oeuvre simultanément.

**Title :** Quantum Atom Optics experiments, 2 and 4 modes interferometers

**Keywords :** Quantum Mechanics, Entanglement, Bell's inequalities, Atomic Hong-Ou-Mandel, Metastable Helium.

**Abstract :** We report two Quantum Atom Optics experiments : the atomic Hong-Ou-Mandel experiment and preliminary results toward Bell's inequality test on momentum of two atoms. Both experiments reveal interesting behaviors of matter. The first one shows a 2-particle interference and the second one suggests entanglement momenta between two atoms. These aspects of quantum mechanics are really surprising and unintuitive. Realizing these experiments with a few atoms in a controlled environment are necessary to strengthen our understanding of the world, particularly when quantum mechanics and gravitation act simultaneously.