



**HAL**  
open science

# Méthodes d'échantillonnage appliquées à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes élastiques

Arnaud Recoquillay

► **To cite this version:**

Arnaud Recoquillay. Méthodes d'échantillonnage appliquées à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes élastiques. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. NNT : 2018SACL001 . tel-01712219

**HAL Id: tel-01712219**

**<https://pastel.hal.science/tel-01712219>**

Submitted on 19 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : École nationale supérieure de techniques avancées

*Laboratoire d'accueil* : Unité de mathématiques appliquées, ENSTA-CNRS-INRIA

*Spécialité de doctorat* : Mathématiques appliquées

**Arnaud RECOQUILLAY**

## Méthodes d'échantillonnage appliquées à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes élastiques

*Date de soutenance* : 16 Janvier 2018

*Après avis des rapporteurs* : PETER MONK (University of Delaware)  
VINCENT PAGNEUX (Université du Maine)

<i>Jury de soutenance</i> :	VAHAN BARONIAN	(CEA List)	Encadrant de thèse
	LAURENT BOURGEOIS	(ENSTA ParisTech)	Directeur de thèse
	CÉDRIC BELLIS	(Aix-Marseille Université)	Examinateur
	HOUSSEM HADDAR	(École Polytechnique)	Examinateur
	VINCENT PAGNEUX	(Université du Maine)	Rapporteur
	CLAIRE PRADA	(ESPCI Paris)	Présidente



## Remerciements

Je remercie tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que les nombreuses questions et remarques qui y sont liées : MM. Cédric BELLIS et Housseem HADDAR, Mme Claire PRADA et en particulier MM. Peter MONK et Vincent PAGNEUX qui ont accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit.

Je remercie aussi mes encadrants de thèse, MM. Laurent BOURGEOIS et Vahan BARONIAN pour leur implication. Votre suivi régulier, la liberté d'action que vous m'avez laissée et votre bonne humeur ont rendu ces trois années très agréables. J'espère avoir l'occasion de travailler avec vous à l'avenir. J'en profite pour remercier aussi M. Bastien CHAPUIS pour son aide sur les aspects expérimentaux.

Cette thèse est issue d'une collaboration entre l'équipe POEMS de l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA ParisTech et le Département Imagerie et Simulation pour le Contrôle du CEA/LIST. Il est clair que je n'aurais pas pu aller aussi loin sur mon sujet sans l'aide qui m'a été apportée de part et d'autre. Je tiens donc à remercier les membres des deux équipes pour leur accueil et leur aide. J'ai vraiment apprécié cette chance qui m'était offerte de travailler dans deux environnements différents, de profiter de deux points de vue sur une même thématique.

Je tiens aussi à remercier les membres des deux équipes pour la bonne ambiance qui règne dans les deux équipes. Merci notamment à tous mes partenaires de sport pour ces parenthèses toujours appréciées.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour m'avoir supporté (avec ou sans anglicisme) durant cette thèse.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Cadre théorique de la Linear Sampling Method</b>	<b>7</b>
1.1 Espaces fonctionnels et prolongement unique . . . . .	8
1.2 Défaut volumique à cœur . . . . .	9
1.3 Défaut volumique débouchant . . . . .	19
1.4 Défaut de type fissure . . . . .	26
1.5 Données partielles . . . . .	29
<b>2 Extension aux données en surface</b>	<b>31</b>
2.1 Analyse modale de la LSM . . . . .	32
2.2 LSM fondée sur des sollicitations et mesures à la surface . . . . .	37
2.3 Lien entre la formulation modale et des sollicitations et mesures sur la surface	42
2.4 Conditionnement des matrices d'émission et de réception . . . . .	46
2.4.1 Étude théorique . . . . .	46
2.4.2 Étude numérique . . . . .	55
<b>3 Extension au régime temporel et applications numériques</b>	<b>61</b>
3.1 Extension aux données temporelles . . . . .	62
3.1.1 Lien entre problème fréquentiel et problème temporel . . . . .	62
3.1.2 Résolution multi-fréquentielle du problème d'imagerie . . . . .	66
3.1.3 Lien avec la Linear Sampling Method temporelle . . . . .	67
3.2 Synthèse des données artificielles . . . . .	70
3.2.1 Calcul direct en régime fréquentiel . . . . .	70
3.2.2 Calcul direct en régime temporel . . . . .	74
3.3 Applications numériques . . . . .	76
3.3.1 Choix de la fonction d'excitation . . . . .	76
3.3.2 Résultats numériques . . . . .	79
<b>4 Application de la Linear Sampling Method à un guide d'ondes élastiques</b>	<b>89</b>
4.1 Modes guidés et formalisme $XY$ . . . . .	90

4.2	Linear Sampling Method dans un guide d'ondes élastiques . . . . .	95
4.3	Analyse modale de la LSM . . . . .	104
4.4	Extension aux données surfaciques . . . . .	107
4.5	Étude du conditionnement des matrices d'émission et de réception . . . . .	113
4.5.1	Étude théorique . . . . .	113
4.5.2	Étude numérique . . . . .	116
4.6	Extension au régime temporel et applications numériques . . . . .	120
4.6.1	Extension au régime temporel. Choix de la forme de la source en temps	121
4.6.2	Synthèse de données artificielles . . . . .	122
4.6.3	Résultats numériques . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Validation expérimentale</b>	<b>131</b>
5.1	Dispositif expérimental . . . . .	132
5.1.1	Instrumentation . . . . .	132
5.1.2	Protocole expérimental . . . . .	134
5.1.3	Détermination des paramètres matériau . . . . .	135
5.1.4	Modélisation des fonctions de source et de mesure . . . . .	135
5.1.5	Détermination des fréquences d'intérêt . . . . .	136
5.2	Résultats expérimentaux . . . . .	137
5.2.1	Résultat préliminaire : obtention des courbes de dispersion . . . . .	137
5.2.2	Imagerie d'un défaut calibré . . . . .	140
5.2.3	Conclusions sur les résultats expérimentaux . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Cas d'une seule sollicitation : l'approche "extérieure"</b>	<b>149</b>
6.1	Introduction . . . . .	150
6.2	The abstract framework . . . . .	152
6.2.1	A general ill-posed problem . . . . .	152
6.2.2	A mixed formulation of Tikhonov regularization . . . . .	153
6.3	Two examples . . . . .	155
6.3.1	The Cauchy problem for the Laplace equation . . . . .	155
6.3.2	The backward heat equation . . . . .	157
6.4	An inverse obstacle problem in an acoustic waveguide . . . . .	159
6.4.1	Introduction . . . . .	159
6.4.2	Application of the mixed Tikhonov formulation . . . . .	159
6.4.3	The "exterior approach" . . . . .	161
6.4.4	Some numerical experiments . . . . .	162
6.5	A relaxed mixed formulation of Tikhonov regularization . . . . .	165
6.5.1	Back to the abstract case . . . . .	165
6.5.2	Back to the inverse obstacle problem . . . . .	167
6.5.3	Some numerical experiments . . . . .	168
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>171</b>
<b>A</b>	<b>Expression de la solution fondamentale pour une sollicitation au bord</b>	<b>177</b>
A.1	Guide d'ondes acoustiques . . . . .	177
A.2	Guide d'ondes élastiques . . . . .	178
<b>B</b>	<b>Conditionnement des matrices de Vandermonde à coefficients sur le cercle unité</b>	<b>183</b>
<b>C</b>	<b>Inversibilité de la matrice des modes de Lamb</b>	<b>189</b>

# TABLE DES FIGURES

1	Exemples d'applications de Contrôle Non Destructif . . . . .	1
1.1	Défaut à coeur . . . . .	11
1.2	Solution de $\lambda_m(k) = k^2$ . . . . .	13
1.3	Défaut débouchant . . . . .	20
1.4	Défaut de type fissure . . . . .	26
1.5	Configuration "back-scattering" . . . . .	29
2.1	Sources et mesures à la surface du guide . . . . .	42
2.2	Évolution de $\delta_{\text{opt}}/\lambda$ en fonction de $\lambda/2d$ . . . . .	55
2.3	Encadrement donné par (2.31) (traits pointillés) du logarithme du conditionnement de $V$ (traits pleins) dans le cas carré ( $M = P$ ) en fonction de $\delta/\lambda$ . . . . .	56
	(a) 4 modes propagatifs . . . . .	56
	(b) 8 modes propagatifs . . . . .	56
	(c) 12 modes propagatifs . . . . .	56
2.4	Logarithme du conditionnement de $V$ en fonction de $\delta/\lambda$ . . . . .	57
	(a) 4 modes propagatifs . . . . .	57
	(b) 8 modes propagatifs . . . . .	57
	(c) 12 modes propagatifs . . . . .	57
2.5	Comparaison du logarithme du conditionnement de $V$ (trait rouge) avec celui de sa borne supérieure (2.32) (trait bleu) en fonction de $M$ . . . . .	58
2.6	Logarithme du conditionnement de $V$ en fonction de la fréquence $k$ . . . . .	59
	(a) Large plage de fréquences . . . . .	59
	(b) Plage de fréquences correspondant à 8 modes propagatifs . . . . .	59
3.1	Variations de $\xi$ en fonction de $\omega$ et $s_0$ . . . . .	64
3.2	Schéma de principe du calcul direct fréquentiel . . . . .	71
3.3	Comparaison des champs incidents. De haut en bas : champ incident numérique, champ incident analytique avec $P + 2$ modes, erreur relative entre les champs incidents numérique et analytique . . . . .	74
3.4	Champ incident analytique pour différents nombres de modes dans la somme . . . . .	75
	(a) $P$ . . . . .	75



(b)	$P + 1$ . . . . .	75
(c)	$P + 3$ . . . . .	75
3.5	Schéma de principe des PMLs . . . . .	75
3.6	Influence de la fonction d'excitation. Champ diffracté en deux points d'observation . . . . .	78
(a)	Source en temps de la forme $\chi$ . . . . .	78
(b)	Source en temps de la forme $\rho$ . . . . .	78
3.7	LSM modale, un obstacle carré . . . . .	80
(a)	$P = 4$ . . . . .	80
(b)	$P = 8$ . . . . .	80
(c)	$P = 12$ . . . . .	80
3.8	LSM modale, deux obstacles rectangulaires . . . . .	80
(a)	$P = 4$ . . . . .	80
(b)	$P = 8$ . . . . .	80
(c)	$P = 12$ . . . . .	80
3.9	Données temporelles avec $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie à une fréquence pour $P$ modes propagatifs . . . . .	81
(a)	$P = 4$ . . . . .	81
(b)	$P = 8$ . . . . .	81
(c)	$P = 12$ . . . . .	81
3.10	Données temporelles avec $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie à une fréquence correspondant à $P$ modes propagatifs . . . . .	81
(a)	$P = 4$ . . . . .	81
(b)	$P = 8$ . . . . .	81
(c)	$P = 12$ . . . . .	81
3.11	Données temporelles avec $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie avec plusieurs fréquences dans le support de $\chi_P$ . . . . .	82
(a)	$P = 4$ . . . . .	82
(b)	$P = 8$ . . . . .	82
(c)	$P = 12$ . . . . .	82
3.12	Données temporelles avec $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie avec plusieurs fréquences dans l'union des supports de $\chi_n$ , $n = 8, \dots, 12$ . . . . .	82
3.13	Imagerie dans le cas du back-scattering . . . . .	83
(a)	LSM modale . . . . .	83
(b)	LSM multi-fréquentielle . . . . .	83
3.14	Comparaison des fonctions caractéristiques avec des données temporelles. . . . .	84
(a)	$\psi^P$ . . . . .	84
(b)	$\psi^S$ . . . . .	84
(c)	$\psi_\chi^P$ . . . . .	84
(d)	$\psi_\chi^S$ . . . . .	84
(e)	$\psi_{\max}^P$ . . . . .	84
(f)	$\psi_{\max}^S$ . . . . .	84
3.15	Influence de la valeur de $M$ . Données temporelles avec $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie pour une fréquence correspondant à $P = 12$ modes propagatifs. . . . .	85
(a)	$M = P$ . . . . .	85
(b)	$M = 2P$ . . . . .	85
(c)	$M = 3P$ . . . . .	85
3.16	Influence de la forme de la source en espace . . . . .	86
(a)	Source ponctuelle . . . . .	86

(b)	Source à support de largeur 0.2 . . . . .	86
(c)	Source à support de largeur 2 . . . . .	86
(d)	Source à support de largeur 5 . . . . .	86
3.17	Cas des données bruitées. Données temporelles avec $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie avec plusieurs fréquences dans l'union des supports $\chi_n, n = 8, \dots, 12$ . . . . .	87
(a)	$\sigma = 0.01$ . . . . .	87
(b)	$\sigma = 0.1$ . . . . .	87
(c)	$\sigma = 0.5$ . . . . .	87
4.1	Défaut à coeur . . . . .	96
4.2	Schémas des modes de Lamb . . . . .	114
(a)	Mode symétrique . . . . .	114
(b)	Mode antisymétrique . . . . .	114
4.3	Conditionnement de la matrice des modes dans le cas 2D. En haut : évolution du logarithme du conditionnement en fonction de la fréquence. En bas : courbes de dispersion des modes symétrique (bleu continu), antisymétrique (rouge continu), SH (vert pointillé) et "pseudo-Lamb" (noir pointillé) . . . . .	117
4.4	Logarithme du conditionnement de $V$ en fonction de $\delta/\delta_0$ . . . . .	118
4.5	Schéma du guide 3D et du placement des lignes . . . . .	118
4.6	Position des lignes sur le bord de la section dans la première configuration (I) en haut et dans la seconde (II) en bas . . . . .	119
4.7	Conditionnement en fonction du nombre de lignes $Q$ dans le cas d'un guide de section rectangulaire. Logarithme du conditionnement de la matrice de Vandermonde (en bleu), de la matrice $T_r^Q$ (en rouge), de la matrice $\mathcal{T}_r$ (en jaune) et de la matrice de réception $R$ (en violet). En haut : bonne répartition des points évitant les symétries. En bas : points mal répartis . . . . .	120
4.8	Un défaut de type Dirichlet, dimension 2 . . . . .	124
(a)	Full-scattering, mesure du déplacement normal . . . . .	124
(b)	Full-scattering, mesure du déplacement tangentiel . . . . .	124
(c)	Back-scattering, mesure du déplacement normal . . . . .	124
(d)	Back-scattering, mesure du déplacement tangentiel . . . . .	124
4.9	Deux défauts de type Dirichlet, dimension 2 . . . . .	124
(a)	Full-scattering, mesure du déplacement normal . . . . .	124
(b)	Full-scattering, mesure du déplacement tangentiel . . . . .	124
(c)	Back-scattering, mesure du déplacement normal . . . . .	124
(d)	Back-scattering, mesure du déplacement tangentiel . . . . .	124
4.10	Influence de la polarisation, cas de la fissure de Neumann . . . . .	126
(a)	Polarisation $u_S$ . . . . .	126
(b)	Polarisation $u_3$ . . . . .	126
(c)	Polarisation $t_S$ . . . . .	126
(d)	Polarisation $t_3$ . . . . .	126
4.11	Optimisation de la normale . . . . .	126
(a)	... à chaque fréquence . . . . .	126
(b)	... sur les fonctions caractéristiques combinées . . . . .	126
4.12	Influence du temps final . . . . .	127
(a)	$T = 0.75T_{\max}$ . . . . .	127
(b)	$T = 0.5T_{\max}$ . . . . .	127
4.13	Influence de l'atténuation : mesures effectuées pour $R = 1$ (gauche) et $R = 2$ (droite) . . . . .	128

4.14	Atténuation non prise en compte lors de l'imagerie . . . . .	128
4.15	Élimination d'un mode pour un nombre d'onde double . . . . .	129
	(a) sans élimination d'un mode . . . . .	129
	(b) avec élimination d'un mode . . . . .	129
4.16	Cas d'un obstacle débouchant . . . . .	129
4.17	Fissure à l'interface entre deux matériaux . . . . .	129
4.18	Imagerie d'un guide de section rectangulaire . . . . .	130
	(a) $Q = 2$ . . . . .	130
	(b) $Q = 4$ . . . . .	130
5.1	Photographie du montage : mesures dans la zone du défaut circulaire de la plaque en acier . . . . .	134
5.2	Schéma du principe de la mesure de vitesse . . . . .	135
5.3	Courbes de dispersion en nombre d'onde de la plaque en acier . . . . .	139
5.4	Signal mesuré présentant une réflexion en bout de plaque . . . . .	140
5.5	Schéma de la plaque en acier . . . . .	140
5.6	Identification d'un trou circulaire de diamètre 2 mm pour deux positions du capteur proche du défaut . . . . .	141
5.7	Identification d'une rainure pour deux positions du capteur proche du défaut .	141
5.8	Identification d'un trou circulaire de diamètre 2 mm pour deux positions du capteur loin du défaut . . . . .	142
5.9	Identification d'un trou circulaire de diamètre 2 mm avec $v_T$ non optimisé . .	142
	(a) Capteur proche du défaut . . . . .	142
	(b) Capteur loin du défaut . . . . .	142
5.10	Identification d'un trou circulaire sans soustraction du champ incident . . . .	142
5.11	Identification du trou circulaire à plus basse fréquence . . . . .	143
5.12	Schéma de la plaque en aluminium . . . . .	144
5.13	Différence entre deux champs incidents mesurés par le capteur pour deux positions différentes dans la deuxième zone (pas de défaut usiné) . . . . .	144
5.14	Identification du trou circulaire de diamètre 2 mm dans la plaque en aluminium	145
	(a) Avec soustraction du champ incident, sans annulation du début du signal	145
	(b) Sans soustraction du champ incident, avec annulation du début du signal	145
5.15	Identification du trou circulaire de diamètre 2 mm pour trois positions du capteur loin du défaut dans la plaque en aluminium sans soustraction du champ incident . . . . .	146
5.16	Identification du trou circulaire de diamètre 1 mm dans la plaque en aluminium	146
5.17	Identification de défauts avec et sans élimination du deuxième mode dans la plaque en acier . . . . .	146
	(a) Trou de génératrice, capteur éloigné, avec élimination . . . . .	146
	(b) Trou de génératrice, capteur éloigné, sans élimination . . . . .	146
5.18	Imagerie de la troisième et la quatrième zone de la plaque en aluminium sans soustraction du champ incident . . . . .	148
	(a) Quatrième zone, avec élimination . . . . .	148
	(b) Quatrième zone, sans élimination . . . . .	148
	(c) Troisième zone, avec élimination . . . . .	148
	(d) Troisième zone, sans élimination . . . . .	148
	(e) Troisième zone, avec élimination, capteur éloigné . . . . .	148
	(f) Troisième zone, sans élimination, capteur éloigné . . . . .	148

6.1	Values of $ u_\varepsilon^\delta - u /(\max  u )$ in $\Omega$ for $\varepsilon = 10^{-3}$ . Top left : $\sigma = 0.01$ . Top right : $\sigma = 0.05$ . Bottom : $\sigma = 0.1$ . . . . .	163
6.2	Identification of obstacle (1) for $k = 3$ . Top left : $\sigma = 0.01$ . Top right : $\sigma = 0.05$ . Bottom : $\sigma = 0.1$ . . . . .	164
6.3	Identification of obstacle (2) for $k = 5$ . Top left : $\sigma = 0.01$ . Top right : $\sigma = 0.05$ . Bottom : $\sigma = 0.1$ . . . . .	165
6.4	Application of Morozov's discrepancy principle. Continuous line : $E^\delta(\varepsilon)$ , dashed line : constant $\Delta$ (log – log scale). Top left : $\sigma = 0.01$ . Top right : $\sigma = 0.05$ . Bottom : $\sigma = 0.1$ . . . . .	169
6.5	Error $\ u_\varepsilon^\delta - u\ _{H^1(\Omega)}$ between the regularized solution for noisy data $(f^\delta, g^\delta)$ and the exact solution, as a function of $\varepsilon$ (log – log scale). Continuous line : $u_\varepsilon^\delta$ is the solution of (6.30), dashed line : $u_\varepsilon^\delta$ is the solution of (6.39) (the vertical line represents the Morozov's value of $\varepsilon$ ). Top left : $\sigma = 0.01$ . Top right : $\sigma = 0.05$ . Bottom : $\sigma = 0.1$ . . . . .	169
6.6	Identification of obstacle (1) for $k = 3$ and using the relaxed mixed formulation with Morozov's procedure. Left : $\sigma = 0.05$ . Right : $\sigma = 0.1$ . . . . .	170



# INTRODUCTION

Le Contrôle Non Destructif (CND) a pour objectif de vérifier l'intégrité d'une pièce ou d'une structure sans l'altérer. Il est utilisé dans un grand nombre de domaines industriels tels que le nucléaire, l'aéronautique ou encore l'automobile. Suivant le matériau de la pièce à contrôler, les défauts peuvent être de nature diverse : par exemple, la corrosion et les fissures sont classiques dans les pièces métalliques, alors que le délaminage est le type de détérioration que l'on recherche dans les assemblages multi-couches (composites). Beaucoup des méthodes du CND reposent sur la réponse en vibration de la pièce à inspecter, et donc sur la physique des ondes. Ainsi, en analysant par exemple la façon dont les ondes se propagent dans la pièce inspectée, nous pouvons déduire l'état de santé de cette dernière. Concernant les géométries d'intérêt, beaucoup de pièces utilisées industriellement peuvent être considérées comme des guides d'ondes : il s'agit de domaines dont une ou deux dimensions sont petites par rapport à la troisième. Nous trouvons entre autres dans cette catégorie les plaques, les tuyaux mais aussi les rails. Une propriété essentielle des guides d'ondes est qu'une partie du champ diffracté par le défaut (dite propagative) se propage à longue distance sans atténuation. Dans le cadre du CND, ces structures ont donc l'avantage de permettre l'inspection d'une zone éten-

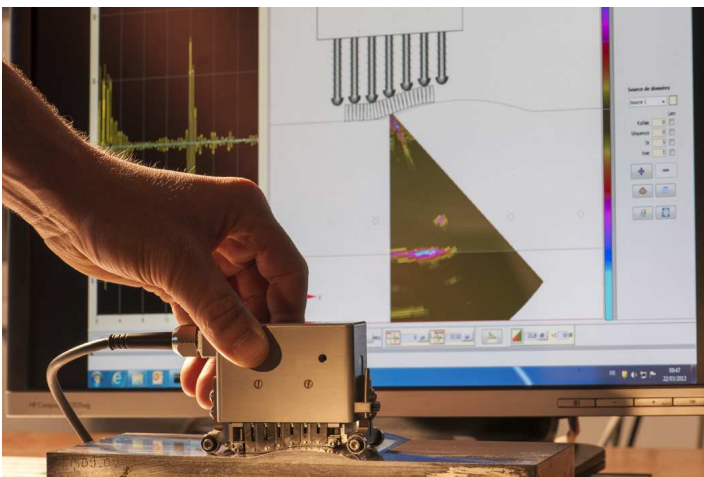


FIGURE 1 – Exemples d'applications de Contrôle Non Destructif

due située entre des émetteurs et des récepteurs fixés pendant toute la durée de l'acquisition. Toutefois, une difficulté est que les ondes se propagent de manière dispersive, l'onde se déforme lors de sa propagation. Il est donc difficile de déduire d'une simple lecture des signaux mesurés les caractéristiques du défaut entre les émetteurs et les récepteurs. Il convient alors de développer des méthodes particulières à ces structures permettant d'exploiter au mieux ces signaux.

Depuis plusieurs années, le CEA LIST et plus particulièrement le Département d'Imagerie et de Simulation pour le Contrôle (DISC) innove dans le domaine du CND grâce au développement du logiciel de simulation pour le CND CIVA et la mise au point de nouvelles méthodes de contrôle. Si l'on observe l'état de l'art des méthodes de CND en vigueur, deux situations sont bien maîtrisées. D'une part, à haute fréquence, de nombreuses méthodes de contrôle existent pour des mesures proches du défaut, permettant une très bonne résolution dans une zone restreinte (zone d'insonification) [100, 101, 104]. D'autre part, à basse fréquence, des méthodes par ondes guidées fondées sur l'utilisation de quelques modes propagatifs (un ou deux en général) ont été développées pour inspecter à longue distance. En se concentrant sur un mode particulier [121], elles permettent donc d'imager une grande zone. Toutefois, le choix du mode utilisé dépend du type de défaut recherché. Nous pouvons citer parmi ces méthodes la tomographie en temps de vol par ondes guidées [64, 84, 130] qui permet de déterminer l'épaisseur d'une plaque grâce à la variation de vitesse du mode considéré dans une zone délimitée par les capteurs, la détection d'une perte d'épaisseur en étudiant la variation locale, au point de mesure, du nombre d'onde d'un mode [70], ou encore l'étude du coefficient de réflexion d'un mode particulier dans le cas d'un défaut de corrosion [62] ou d'une fissure [69].

Notre objectif est de compléter les techniques existantes en élaborant une méthode d'imagerie par ondes guidées pour une zone étendue exploitant simultanément l'information de tous les modes guidés, et ce pour un grand nombre de modes propagatifs (au moins 8 empiriquement dans le cas des plaques), ce qui revient à travailler à haute fréquence. Notre méthode envisage le CND comme un problème de diffraction inverse, suivant la terminologie en vogue dans la littérature des mathématiques appliquées. Ceci nous amène à faire un rapide tour d'horizon des méthodes d'inversion à base d'ondes.

De nombreuses méthodes de diffraction inverse ont été étudiées ces dernières années, en particulier pour le régime établi en temps, ou régime fréquentiel. Nous pouvons les décomposer en deux grandes familles [97, 111] : les méthodes itératives [56, 82] et les méthodes d'échantillonnage [41, 55]. Les méthodes itératives reposent sur de multiples résolutions du problème direct de manière à optimiser la forme et les paramètres du milieu à imager. Elles permettent d'obtenir une reconstruction précise. Toutefois, elles présentent un coût de calcul élevé et nécessitent des connaissances a priori sur les défauts, comme leur nombre et leurs caractéristiques. Un trop grand nombre de travaux ont porté sur ces méthodes pour que nous puissions donner ici une vue d'ensemble des différentes méthodes existantes. Citons simplement les travaux fondateurs d'Andreas Kirsch et Rainer Kress [93, 94], ainsi que quelques travaux plus récents à titre d'exemples : l'utilisation de méthodes fondées sur la minimisation des moindres carrés [66, 82], sur l'écart à la réciprocité [98] tel qu'introduit dans [3] ou encore sur la transformation conforme [79] dans le cas particulier de la dimension 2.

Nous nous intéressons plus précisément aux méthodes d'échantillonnage puisque nos travaux utilisent la plus connue d'entre elles, soit la Linear Sampling Method (LSM). Ces méthodes

reposent sur la résolution d'un problème linéaire de petite taille en chaque point d'une grille d'échantillonnage pour déterminer si celui-ci appartient ou non au défaut. Plus précisément, le système est résolu sous sa forme régularisée au sens de Tikhonov. Elles ne demandent aucune connaissance a priori sur le défaut et sont simples à mettre en œuvre. Toutefois, elles requièrent beaucoup de données (théoriquement, la connaissance du champ diffracté dans toutes les directions pour toutes les directions d'incidence). La Linear Sampling Method a été introduite pour la première fois dans [55], sa justification a été améliorée dans [5] et l'utilisation du principe de Morozov pour sélectionner le paramètre de régularisation dans la formulation de Tikhonov a été introduite dans [57]. Un des raffinements les plus utilisés de la LSM est la méthode de factorisation [91] qui exploite une factorisation ad hoc de l'opérateur pour obtenir une caractérisation rigoureuse du défaut. La LSM et la méthode de factorisation sont décrites dans un contexte général, respectivement dans [42] et [53]. Citons aussi dans la catégorie des méthodes d'échantillonnage les méthodes de point source [118, 119] ainsi que [54] qui présente une méthode partant de l'écart à la réciprocité pour élaborer une méthode d'échantillonnage originale.

Initialement conçues pour détecter des obstacles d'intérieur non vide, les méthodes d'échantillonnage ont aussi été adaptées pour imager des fissures [17, 40, 95], qui constituent un défaut réaliste pour les structures métalliques. Plus récemment, des travaux ont porté sur l'extension des méthodes d'échantillonnage en régime temporel (non établi) [49, 80].

Les travaux cités précédemment portent sur une équation scalaire, ce qui revient à considérer des ondes acoustiques ou électro-magnétiques dans le cas particulier d'une polarisation Transverse Électrique (TE) ou Transverse Magnétique (TM). L'élasticité en général n'entre pas dans ce cadre. Beaucoup des méthodes précédentes ont été adaptées au cas de l'élasticité [20]. Nous retrouvons des méthodes basées sur l'écart à la réciprocité, en particulier sur l'identification de fissures en régime temporel [37], parmi les méthodes d'échantillonnage, la Linear Sampling Method, en dimension 2 [4, 46], en dimension 3 [8, 45, 113] et pour des milieux stratifiés [78], ainsi que la méthode de factorisation [2, 48]. Signalons que les méthodes basées sur la dérivée topologique [16, 21, 72, 76] peuvent être considérées comme des méthodes d'échantillonnage.

Dans le cadre spécifique des guides d'ondes, de nombreux travaux ont été réalisés, en particulier dans le cas scalaire en régime établi : citons [61] qui se base sur une décomposition selon ses vecteurs propres de la matrice de scattering pour imager un défaut mais est limité par une approximation de Born, [47] qui utilise la méthode de factorisation et [108] qui propose une méthode d'imagerie panachant le principe de réciprocité et la LSM, comme dans [54]. Notons qu'il apparaît dans [6, 33, 47] que pour appliquer la méthode de factorisation à un guide d'ondes, il est nécessaire d'utiliser pour champ incident les conjugués des points sources, ce qui peut apparaître artificiel. Nous pouvons par ailleurs citer l'application de la LSM à l'imagerie des fonds marins [6, 25], ou aux guides périodiques [29].

De même que pour l'espace libre, des travaux récents ont porté sur l'adaptation des méthodes d'échantillonnage au guide d'onde en régime temporel [109].

Afin de remplir nos objectifs, à savoir développer une méthode d'imagerie par ondes guidées à haute fréquence utilisable dans le cadre du CND, nous nous sommes basés sur les travaux de Laurent Bourgeois, Eric Lunéville et Frédéric Le Louër [30, 32] dans lesquels la Linear Sampling Method est décrite respectivement pour un guide d'ondes acoustiques et un guide d'ondes élastiques, en régime fréquentiel avec des données dont le support est formé par des sections transverses du guide. Ce cadre ne correspond pas à une situation réelle de



CND. C'est pourquoi nous allons adapter ces méthodes à un cadre plus réaliste : des sources et des mesures à la surface du guide en régime temporel. Nous allons pour cela considérer dans un premier temps le cas d'un guide d'ondes acoustiques en dimension 2. Cette étude permettra de mettre en place notre méthode dans un cas simple et d'exhiber certains paramètres déterminants pour l'imagerie de défauts. Nous allons ensuite pouvoir généraliser ces résultats au cas d'un guide d'ondes élastiques en dimension 2 ou 3. Le manuscrit comprend six chapitres :

- **Chapitre 1 : Cadre théorique de la Linear Sampling Method.** Ce chapitre présente la théorie justifiant l'utilisation de la Linear Sampling Method pour détecter des défauts dans un guide d'ondes acoustiques en régime fréquentiel et pour des données sur des sections transverses du guide. Nous nous concentrons sur trois cas pour lesquels la justification de la méthode varie : le cas d'un défaut à coeur, classique dans la théorie mais peu réaliste en pratique, celui d'un défaut en surface et celui d'une fissure, plus réalistes. Nous considérons dans les trois cas un défaut de type Neumann.
- **Chapitre 2 : Extension aux données en surface.** Les données internes telles que celles sur les sections transverses du guide ne sont pas réalistes dans le cadre du CND. Nous cherchons alors à utiliser des données à la surface du guide. Après avoir adapté la LSM à cette nouvelle configuration, nous décrivons comment relier nos données de surface à la formulation modale de la LSM, c'est-à-dire utilisant les modes guidés. Nous en déduisons une manière d'optimiser les points d'émission et de réception, en particulier leur nombre et la distance qui les sépare.
- **Chapitre 3 : Extension au régime temporel et applications numériques.** Enfin, le chapitre 3 traite du lien entre le régime temporel et le régime fréquentiel. Nous y justifions l'utilisation d'une transformée de Fourier pour lier les deux régimes et nous montrons le lien entre notre méthode et celle développée dans [109]. Nous présentons ensuite quelques essais numériques de la méthode. Cela nous permet notamment de mettre en exergue l'influence des paramètres importants identifiés au chapitre 2 ainsi que d'étudier la sensibilité au bruit de la méthode, point essentiel pour pouvoir l'appliquer à des données réelles.
- **Chapitre 4 : Application de la Linear Sampling Method à un guide d'ondes élastiques.** Nous suivons la même démarche que dans les trois chapitres précédents pour appliquer la LSM à un guide d'ondes élastiques en dimension 2 ou 3, avec des données en surface et en régime temporel. Contrairement au cas de l'acoustique, les fonctions propres transverses en déplacement ne forment plus une base dans la section. Il est alors nécessaire d'introduire le formalisme  $XY$  mêlant des composantes du déplacement et de la contrainte pour obtenir un cadre similaire. Les résultats obtenus dans les chapitres précédents peuvent alors se généraliser. En particulier, dans le cas de la dimension 3, de nouveaux paramètres apparaissent : le placement des sources et des mesures sur le bord de la section influence la qualité de l'imagerie. Nous concluons ce chapitre par des résultats numériques présentant la méthode sur différents défauts, en commençant par les mêmes que dans le cas de l'acoustique pour comparer les deux cas, puis des cas plus intéressants en pratique tels que des fissures.
- **Chapitre 5 : Utilisation de données expérimentales.** Ce chapitre est consacré à l'application de la méthode à des données obtenues expérimentalement. Nous expliquons les choix faits dans l'élaboration du protocole expérimental ainsi que la modélisation des capteurs avant de présenter des images obtenues de défauts réels.

- **Chapitre 6 : Une “approche extérieure” dans le cas d’une sollicitation unique.** Nous terminons cette thèse par un chapitre présentant une approche alternative dans le cas où les données se limitent à des mesures en surface pour une seule source, ce qui interdit l’utilisation de la LSM. Cette approche, dite “approche extérieure”, couple une formulation mixte de quasi-réversibilité et une méthode de ligne de niveau. En particulier, la formulation mixte de quasi-réversibilité peut-être vue comme une régularisation de Tikhonov pour une certaine classe de problèmes mal posés, ce qui permet de la définir dans un cadre général. Deux formulations de quasi-réversibilité sont ainsi présentées. Ce chapitre coïncide avec un article récemment soumis.
- **Annexes.** Trois annexes viennent compléter le manuscrit avec les démonstrations de certaines propriétés. L’annexe A établit les fonctions de Green pour le guide d’ondes, acoustiques ou élastiques, lorsque la source se trouve au bord du guide. L’annexe B concerne les matrices de Vandermonde à coefficients sur le cercle unité : il s’agit de la démonstration de la majoration du conditionnement de ces matrices, majoration qui nous permet d’optimiser le placement des points de source et de mesure. Enfin, l’annexe C nous permet de déterminer à quelles fréquences une composante du déplacement d’un mode de Lamb s’annule à la surface d’une plaque, ce qui implique que notre méthode d’inversion n’est pas applicable.

Cette thèse est issue d’une collaboration entre le CEA LIST et le laboratoire POEMS (UMR CNRS-INRIA-ENSTA).

---

Le travail présenté ici a mené aux publications suivantes :

- V. Baronian, L. Bourgeois, A. Recoquillay. Imaging an acoustic waveguide from surface data in the time domain. *Wave Motion*, 66 : 68–87, 2016.
- L. Bourgeois, A. Recoquillay. A mixed formulation of the Tikhonov regularization applied to inverse PDE problems. *Soumis à M2AN*, 2017.
- V. Baronian, L. Bourgeois, B. Chapuis, A. Recoquillay. Linear Sampling Method applied to Non Destructive Testing of an elastic waveguide : theory, numerics and experiments. *En préparation*.



# CHAPITRE

## 1

# CADRE THÉORIQUE DE LA LINEAR SAMPLING METHOD

## Sommaire

1.1	Espaces fonctionnels et prolongement unique . . . . .	8
1.2	Défaut volumique à cœur . . . . .	9
1.3	Défaut volumique débouchant . . . . .	19
1.4	Défaut de type fissure . . . . .	26
1.5	Données partielles . . . . .	29

Notre but est d'adapter la Linear Sampling Method au Contrôle Non Destructif des guides d'ondes élastiques. De nombreuses difficultés sont liées à cet objectif. Les données réelles ne sont jamais harmoniques en temps, présentent du bruit et dépendent fortement des capteurs et de l'accessibilité de la pièce inspectée. De plus, la méthode est plus adaptée aux hautes fréquences, ce qui implique une atténuation des signaux et une interprétation qualitative difficile de ceux-ci à cause de la dispersion des modes dont nous n'avons pas une expression analytique complète. C'est pourquoi nous avons décidé de traiter les difficultés séparément, en commençant par un cas que nous considérerons comme idéal, avant de complexifier au fur et à mesure le modèle. Nous pourrions ainsi aborder le problème complet avec une connaissance a priori des conditions idéales d'application de notre méthode, et de sa sensibilité aux différents paramètres, qu'ils concernent le guide d'ondes étudié (paramètres matériau, géométrie) ou la méthode en elle-même (localisation des données,...). Nous commençons donc par considérer le cas d'un guide d'ondes acoustiques, notre but étant de retrouver un éventuel défaut à partir des données obtenues sur des sections transverses.

La notion de défaut recouvre un grand nombre d'objets possibles dans un domaine. Nous pourrions la définir comme une altération du milieu, volumique ou non. Ainsi, une fissure et une inclusion sont toutes deux des défauts, la première étant d'intérieur vide et non la

seconde, ce qui implique des phénomènes de diffraction différents. Dans un obstacle pénétrable, les propriétés physiques, comme la vitesse de l'onde ou l'atténuation dans le défaut, peuvent varier suivant le type de défaut considéré. Nous présentons dans ce chapitre quelques cas de défauts non pénétrables pour lesquels la Linear Sampling Method s'applique, en suivant la démarche présentée dans [32]. Celle-ci consiste à vérifier, en chaque point  $z$  d'une grille d'échantillonnage, si une certaine fonction test appartient à l'image de l'opérateur de champ proche dont le noyau est formé par les données. Nous considérons d'abord le cas d'un défaut volumique à coeur, qui est le cas le plus simple mais aussi le moins réaliste, puis un obstacle débouchant et le cas d'une fissure. Les deux derniers cas sont moins classiques, mais sont plus proches de cas réels observés dans le cadre du Contrôle Non Destructif. Ainsi, un défaut de corrosion est en première approximation une perte d'épaisseur à la surface du guide et peut donc s'identifier à un obstacle débouchant. Les fissures, comme par exemple les fissures de fatigue, sont elles aussi fréquentes en CND.

La manière dont la Linear Sampling Method est appliquée ne dépend pas du défaut. En revanche, sa justification en dépend. C'est pourquoi nous avons choisi pour illustrer cette variété de réaliser l'analyse pour trois types de défauts.

Dans le cas du défaut à coeur, les propriétés des opérateurs intégraux associés au guide d'ondes peuvent se déduire de celles des opérateurs intégraux correspondants dans l'espace libre. Cette méthode n'est pas valable dans le cas du défaut débouchant, ce qui nous amène à introduire et démontrer les formules de représentation intégrale dans ce cas. Enfin, dans le cas du défaut de type fissure, l'analyse étant détaillée dans [33], nous n'en présentons ici qu'un résumé. Dans chaque cas, la bonne fonction test à considérer découle de l'analyse.

Enfin, nous n'avons considéré que des obstacles non pénétrables de type Neumann dans ce chapitre car il s'agit de la condition la plus proche des applications ciblées, et celle-ci n'a pas été traitée dans [32].

## 1.1 Espaces fonctionnels et prolongement unique

Tout au long de ce chapitre, nous aurons besoin de divers espaces de Sobolev que nous allons introduire succinctement ici. Considérons  $\Omega$  un domaine borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ . Notons  $\partial\Omega$  son bord et  $\Gamma$  une portion de ce dernier ouverte pour la topologie induite, non vide. Nous définissons, pour  $s \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$  :

$$\begin{aligned} H^s(\Gamma) &:= \{u|_{\Gamma}, u \in H^s(\partial\Omega)\}, \\ \tilde{H}^s(\Gamma) &:= \{u \in H^s(\partial\Omega), \text{supp } u \subset \bar{\Gamma}\}. \end{aligned}$$

Nous avons alors les identifications suivantes concernant la dualité :

$$\begin{aligned} [H^s(\Gamma)]' &= \tilde{H}^{-s}(\Gamma), \\ [\tilde{H}^s(\Gamma)]' &= H^{-s}(\Gamma). \end{aligned}$$

Ces propriétés sont prouvées dans [106]. Notons en particulier que, si nous considérons le bord complet  $\partial\Omega$ ,

$$[H^s(\partial\Omega)]' = H^{-s}(\partial\Omega).$$

Les guides d'ondes sont des domaine infinis selon une direction. C'est pourquoi nous avons besoin d'introduire une notion particulière d'espace de solutions localement  $H^1$ . Soit donc un

guide d'ondes  $W$  de section transverse  $\Sigma$ . Le guide peut s'écrire  $W = \Sigma \times \mathbb{R}$ , et nous noterons, pour  $x \in W$ ,  $x = (x_S, x_3)$  avec  $x_S$  la coordonnée dans la section et  $x_3$  celle selon l'axe du guide. Soit  $\Omega$  un guide d'ondes présentant éventuellement un défaut, à savoir  $\Omega = W \setminus \overline{D}$ , où  $D$  sera précisé plus loin. Nous pouvons définir l'espace

$$H_{\text{loc}}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid u(x_S, x_3)\varphi(x_3) \in H^1(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\},$$

où  $\mathcal{D}'(\Omega)$  désigne l'ensemble des distributions sur  $\Omega$  et  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions d'une variable infiniment dérivables à support compact.

Ainsi, les solutions de l'équation de Helmholtz dans le guide, avec des conditions de bord sur les parois, seront cherchées dans cet espace comme nous le verrons dans la suite.

Toutefois, la solution fondamentale n'est pas un élément de  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , elle n'appartient qu'à  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$  :

$$L_{\text{loc}}^2(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid u(x_S, x_3)\varphi(x_3) \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}.$$

Introduisons à présent le théorème de prolongement unique, un outil classique dans les problèmes inverses qui nous servira de nombreuses fois par la suite. Nous l'énonçons sous deux formes dans le cas particulier de l'équation de Helmholtz.

### **Théorème 1.1**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert connexe, et soit  $\omega$  un ouvert non vide inclus dans  $\Omega$ . Si  $\Delta u + k^2 u = 0$  dans  $\Omega$  pour  $k > 0$ , alors

$$u = 0 \text{ dans } \omega \Rightarrow u = 0 \text{ dans } \Omega.$$

### **Théorème 1.2**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert borné connexe et lipschitzien, et soit  $\Gamma$  une partie ouverte non vide de son bord. Si  $u \in H^1(\Omega)$  vérifie

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

avec  $k > 0$  et  $\nu$  la normale sortante au domaine  $\Omega$ , alors  $u = 0$  dans  $\Omega$ .

Ce théorème se révélera particulièrement utile pour prouver l'injectivité de certains opérateurs.

## **1.2 Défaut volumique à cœur**

Nous reprenons dans cette partie l'approche adoptée pour un obstacle de type Dirichlet dans [32], l'obstacle considéré ici étant de type Neumann.

Nous considérons donc un guide d'ondes acoustiques  $W$  dans  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d = 2$  ou  $3$ , présentant un défaut  $D$  inclus dans le guide. Nous noterons  $\Omega$  le domaine composé du guide d'ondes privé du défaut,  $\Gamma$  le bord du guide,  $\Sigma$  sa section et  $\nu$  la normale sortante à  $\Omega$ . Ainsi, le guide peut s'écrire  $W = \Sigma \times \mathbb{R}$ ,  $\Omega = W \setminus \overline{D}$  avec  $\overline{D} \subset W$ ,  $D$  étant un ouvert lipschitzien. Le domaine  $\Omega$  est supposé connexe. Par ailleurs, nous noterons  $\Sigma_s = \Sigma \times \{s\}$ , pour  $s \in \mathbb{R}$ . Enfin, nous considérons  $R > 0$  tel que l'obstacle  $D$  soit situé entre les sections  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$ , et nous posons

$\widehat{\Sigma} = \Sigma_R \cup \Sigma_{-R}$  (voir figure 1.1).

Commençons par introduire les modes guidés : nous considérons le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_{\nu} u = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \end{cases}$$

avec  $\Delta_{\perp}$  le laplacien transverse défini selon les coordonnées de la section. Les solutions de ce problème sont formées par les couples  $(k_n, \theta_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , les valeurs propres  $k_n$  formant une suite positive croissante non bornée alors que les fonctions transverses  $\theta_n$  forment pour une normalisation bien choisie une base orthonormale de  $L^2(\Sigma)$ . Nous considérons les nombres d'onde associés aux modes  $\beta_n$  définis par

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_n^2} & \text{si } k \geq k_n, \\ i\sqrt{k_n^2 - k^2} & \text{si } k < k_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Soit enfin le problème de Helmholtz dans le guide :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_{\nu} u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.2)$$

Un mode guidé est défini comme une solution à variables séparées de (1.2). On peut montrer que les modes guidés s'écrivent

$$u_n^{\pm}(x_S, x_3) = \theta_n(x_S) e^{\pm i\beta_n x_3}.$$

Plusieurs types de modes sont à distinguer. Tout d'abord, les modes guidés peuvent se propager dans deux sens suivant l'axe du guide. Ainsi, les modes  $u_n^+$  se propagent dans le sens des  $x_3$  croissants, alors que les modes  $u_n^-$  se propagent selon les  $x_3$  décroissants. Par ailleurs, étant donné que les  $k_n$  forment une suite positive croissante non bornée, il existe un entier  $P$  tel que

$$k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{P-1} < k \leq k_P.$$

Les  $P$  premiers modes ont alors un nombre d'onde réel, ce qui implique qu'ils se propagent sans perte dans le guide. Nous appellerons donc ces modes les modes propagatifs. Les autres modes sont appelés modes évanescents puisque leur amplitude décroît exponentiellement dans leur sens de propagation le long de l'axe du guide, et il en existe une infinité.

### Hypothèse 1

Le nombre d'onde  $k$  est tel qu'aucun des  $\beta_n$  n'est nul.

Nous introduisons le problème direct suivant : pour  $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ , trouver  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\nu} u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{\nu} u = f & \text{sur } \partial D, \\ (CR), \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $(CR)$  une condition de radiation : cette condition, rendue nécessaire par le caractère non borné du guide d'ondes, revient à sélectionner, dans la décomposition du champ diffracté

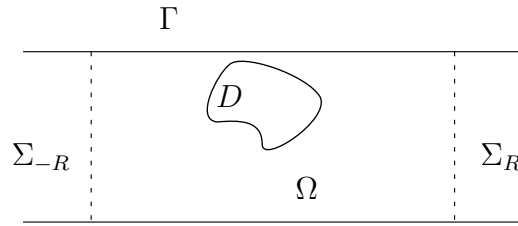


FIGURE 1.1 – Défaut à cœur

suitant les modes guides  $u_n^\pm$ , les seuls modes sortants.

Le problème (1.3) peut être réécrit en domaine borné : pour cela nous allons commencer par expliciter la condition de radiation en introduisant les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann  $T_\pm$  :

$$T_\pm : \left( \begin{array}{l} H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}) \\ h \mapsto \sum_{n \geq 0} i\beta_n(h, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}} \theta_n \end{array} \right), \quad (1.4)$$

où  $(\cdot, \cdot)_\Sigma$  désigne le produit scalaire sur  $L^2(\Sigma)$ . Nous allons justifier pourquoi ces opérateurs nous permettent d'exprimer la condition de radiation. Nous aurons besoin du lemme suivant, prouvé dans [32] :

**Lemme 1.3**

Pour tout  $s > 0$  et  $h \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_s)$ , le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Sigma \times (s, +\infty), \\ \partial_\nu u = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma \times (s, +\infty), \\ u = h \quad \text{sur } \Sigma_s, \\ (CR), \end{array} \right.$$

possède une unique solution dans  $H^1(\Sigma \times (s, t))$ , pour tout  $t > s$ , donnée par

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (h, \theta_n)_{\Sigma_s} e^{i\beta_n(x_3 - s)} \theta_n(x_S).$$

La solution dans  $(-\infty, s)$  est définie de la même façon en remplaçant  $\beta_n$  par  $-\beta_n$  dans l'expression de  $u$ .

Soit  $W_R$ , respectivement  $\Omega_R$  et  $\Gamma_R$ , la portion de guide  $W$ , respectivement du domaine  $\Omega$  et du bord  $\Gamma$ , comprise entre les sections d'abscisse  $-R$  et  $R$ . Nous allons nous concentrer sur l'expression de la condition de radiation à droite de  $\Omega_R$ , soit sur  $\Sigma_R$ . Étant donné que  $R$  a été choisi de sorte que  $D$  soit inclus dans  $W_R$ , nous pouvons appliquer le lemme 1.3 à  $u$  dans  $\Sigma \times (R, +\infty)$  :

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{i\beta_n(x_3 - R)} \theta_n(x_S), \quad x_3 \geq R,$$

avec  $a_n = (u|_{\Sigma_R}, \theta_n)_{\Sigma_R}$ . Nous pouvons alors aisément exprimer la dérivée normale de  $u$  dans  $\Omega_R$  sur  $\Sigma_R$  :

$$\partial_\nu u|_{\Sigma_R} = \partial_{x_3} u|_{\Sigma_R} = \sum_{n \geq 0} i\beta_n a_n \theta_n(x_S),$$



soit

$$\partial_\nu u = T_+ u, \quad \text{sur } \Sigma_R. \quad (1.5)$$

Nous voyons donc que, si la solution est effectivement une solution sortante, elle vérifie l'équation (1.5). Ceci justifie par ailleurs l'appellation "Dirichlet-to-Neumann" : cet opérateur nous permet de lier la donnée de Dirichlet, la trace de la solution, à la donnée de Neumann, sa trace normale. De la même façon, nous obtiendrions  $\partial_\nu u = T_- u$  sur  $\Sigma_{-R}$ .

Finalement, le problème (1.3) est équivalent en domaine borné à trouver  $u \in H^1(\Omega_R)$  solution de

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_R, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma_R, \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial D, \\ \partial_\nu u = T_\pm u & \text{sur } \Sigma_{\pm R}. \end{cases} \quad (1.6)$$

#### Lemme 1.4

Sauf pour au plus un ensemble dénombrable de nombres d'onde  $k$ , les problèmes (1.3) et (1.6) sont bien posés.

*Démonstration.* Cette démonstration s'inspire de [22, 23]. Le problème (1.6) admet la formulation faible suivante : trouver  $u \in H^1(\Omega_R)$  telle que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega_R), \quad (1.7)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v} \, dx - \int_{\Sigma_R} T_+ u \bar{v} \, ds - \int_{\Sigma_{-R}} T_- u \bar{v} \, ds, \\ \ell(v) &= \int_{\partial D} f \bar{v} \, ds, \end{aligned}$$

où  $\bar{v}$  désigne le conjugué complexe de  $v$ . Les intégrales de surface sont à comprendre au sens de crochets de dualité. Ainsi, par exemple,  $\int_{\Sigma_R} T_+ u \bar{v} \, ds$  est le crochet de dualité entre  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$ .

Remarquons que

$$\int_{\Sigma_{\pm R}} T_\pm u \bar{v} \, ds = \sum_{n \geq 0} i \beta_n(u, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}} \overline{(v, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}}}$$

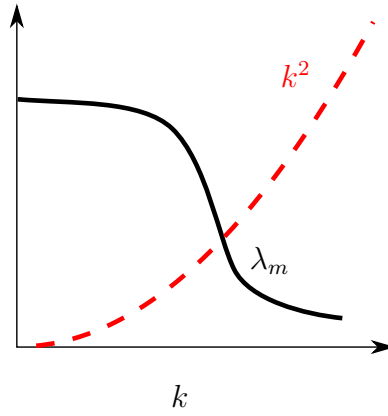
grâce à l'orthonormalité des fonctions transverses  $\theta_n$ .

Nous allons montrer que ce problème est de Fredholm : pour cela, nous écrivons  $a = b + c$  avec

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + u \bar{v} \, dx - \sum_{n \geq 0} i \beta_n(u, \theta_n)_{\Sigma_R} \overline{(v, \theta_n)_{\Sigma_R}} - \sum_{n \geq 0} i \beta_n(u, \theta_n)_{\Sigma_{-R}} \overline{(v, \theta_n)_{\Sigma_{-R}}}, \\ c(u, v) &= -(1 + k^2) \int_{\Omega_R} u \bar{v} \, dx. \end{aligned}$$

L'opérateur associé à la forme sesquilinéaire  $b$  définit un isomorphisme sur  $H^1(\Omega_R)$  car

$$\operatorname{Re} b(u, u) \geq \|u\|_{H^1(\Omega_R)}^2,$$

FIGURE 1.2 – Solution de  $\lambda_m(k) = k^2$ 

alors que celui associé à  $c$  définit un opérateur compact car l'injection de  $H^1(\Omega_R)$  dans  $L^2(\Omega_R)$  est compacte.

L'unicité de la solution est alors équivalente à son existence. Nous allons montrer que nous avons effectivement unicité de la solution sauf pour au plus un ensemble dénombrable de nombres d'onde  $k$ .

Soit donc  $u$  telle que  $a(u, v) = 0, \forall v \in H^1(\Omega_R)$ . En prenant la partie imaginaire de  $a(u, u) = 0$ , il vient

$$\sum_{n=0}^{P-1} \sqrt{k^2 - k_n^2} |(u, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}}|^2 = 0,$$

soit

$$(u, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}} = 0, \quad n = 0, \dots, P-1.$$

Nous pouvons à présent écrire

$$a_H(k; u, v) = \lambda \int_{\Omega_R} u \bar{v} \, dx, \quad (1.8)$$

avec  $\lambda = k^2$  et

$$a_H(k; u, v) = \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx + \sum_{n=P}^{+\infty} \sqrt{k_n^2 - k^2} (u, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}} \overline{(v, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}}}.$$

La forme  $a_H$  est une forme sesquilinéaire hermitienne de  $H^1(\Omega_R)$ . Par ailleurs, pour tout  $c > 0$ , la forme  $a_H(k; \cdot, \cdot) + c \|\cdot\|_{L^2(\Omega_R)}^2$  est coercive. Les solutions  $\lambda_m(k)$  de (1.8) forment donc une suite positive ou nulle et croissante qui tend vers l'infini (voir par exemple [120], chapitre 6). De plus, nous avons la caractérisation suivante :

$$\lambda_m(k) = \min_{V_m \subset \mathcal{V}_m} \max_{\substack{v \in V_m \\ v \neq 0}} \frac{a_H(k; v, v)}{\int_{\Omega_R} |v|^2 \, dx},$$

où  $\mathcal{V}_m$  est l'ensemble des sous-espaces de dimension  $m$  de  $H^1(\Omega_R)$ .

On en déduit que  $k \mapsto \lambda_m(k)$  est une fonction continue et décroissante de  $k$ , ce qui implique que l'équation  $\lambda_m(k) = k^2$  ne peut avoir au plus qu'une solution (voir fig. 1.2) et que donc, pour chaque  $m$ , il existe au plus un  $k$  pour lequel  $u \neq 0$ .

□

**Hypothèse 2**

Le nombre d'onde  $k$  est tel que le problème (1.3) est bien posé.

Soient  $G$  la fonction de Green du guide et  $y \in W$ . La fonction  $G(\cdot, y)$  est l'unique solution dans  $L^2_{\text{loc}}(W)$  du problème suivant :

$$\begin{cases} -(\Delta G(\cdot, y) + k^2 G(\cdot, y)) = \delta_y & \text{dans } W, \\ \partial_\nu G(\cdot, y) = 0 & \text{sur } \partial W, \\ (CR). \end{cases}$$

Sous l'hypothèse 1, nous pouvons exprimer la fonction de Green en fonction des modes guidés :

$$G(x, y) = - \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n |x_3 - y_3|}}{2i\beta_n} \theta_n(x_S) \theta_n(y_S).$$

Notons que, si  $y \in W$ , alors  $G(\cdot, y) \notin H^1_{\text{loc}}(W)$ . Par ailleurs, nous avons

$$G(x, y) = G(y, x). \quad (1.9)$$

Considérons dorénavant  $u^s(\cdot, y)$  la solution de (1.3) avec  $f = -\partial_\nu G(\cdot, y)|_{\partial D}$  et introduisons l'opérateur de champ proche  $N : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  qui à  $h$  associe :

$$(Nh)(x) = \int_{\widehat{\Sigma}} u^s(x, y) h(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma}.$$

La Linear Sampling Method consiste en la résolution dans  $L^2(\widehat{\Sigma})$  de l'équation

$$Nh = G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}, \quad z \in \mathcal{G},$$

où  $\mathcal{G} \subset W_R$  est la grille d'échantillonnage choisie, c'est-à-dire un ensemble fini de points dans  $W_R$ .

Pour cela, de manière analogue à [32], introduisons les différents opérateurs qui vont permettre d'écrire la factorisation de l'opérateur de champ proche. Tout d'abord, nous introduisons  $B : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$ , qui à  $f$  associe la restriction à  $\widehat{\Sigma}$  de la solution du problème (1.3) ainsi que  $\mathcal{H} : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ , défini par

$$(\mathcal{H}h)(x) = \partial_\nu \int_{\widehat{\Sigma}} G(x, y) h(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Introduisons ensuite  $\mathcal{F} : H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  tel que

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \int_{\partial D} \partial_{\nu_y} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma},$$

et enfin  $\mathcal{T} : H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  tel que

$$(\mathcal{T}\varphi)(x) = \partial_\nu \int_{\partial D} \partial_{\nu_y} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Nous allons avoir besoin d'une nouvelle hypothèse pour que la Linear Sampling Method soit applicable :

**Hypothèse 3**

Le nombre d'onde  $k$  est tel que la seule solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } D, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases} \quad (1.10)$$

est  $u = 0$ .

Sous cette hypothèse, nous pouvons écrire

$$N = -B\mathcal{H}, \quad \mathcal{F} = B\mathcal{T}.$$

En effet, pour la première factorisation,  $u^s(\cdot, y)|_{\widehat{\Sigma}}$  est l'image par  $B$  de  $-\partial_\nu G(\cdot, y)|_{\partial D}$ . Par linéarité et unicité,  $Nh$  est donc l'image par  $B$  de

$$-\left(\partial_\nu \int_{\widehat{\Sigma}} G(\cdot, y)h(y) ds(y)\right)\Big|_{\partial D} = -\mathcal{H}h.$$

Pour la deuxième factorisation, soient  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  et  $v$  la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_\nu v = \mathcal{T}\varphi & \text{sur } \partial D, \\ (CR). \end{cases}$$

Cette solution a pour expression

$$v(x) = \int_{\partial D} \partial_{\nu_y} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \Omega.$$

Nous en déduisons que, pour  $x \in \widehat{\Sigma}$ ,

$$\begin{aligned} (B\mathcal{T}\varphi)(x) &= \int_{\partial D} \partial_{\nu_y} G(x, y)\varphi(y) ds(y) \\ &= (\mathcal{F}\varphi)(x). \end{aligned}$$

**Lemme 1.5**

Sous réserve que les hypothèses 1, 2 et 3 soient vérifiées, nous avons les propriétés suivantes :

- i) L'opérateur  $\mathcal{T}$  est un isomorphisme ;
- ii) Les opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{F}$  satisfont  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$  ;
- iii) Les opérateurs  $B$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $N$  sont compacts, injectifs et d'image dense.

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $\mathcal{T}$  est un isomorphisme : notons  $\mathcal{T}_\infty$  l'analogie de  $\mathcal{T}$  avec pour noyau la fonction de Green de l'équation de Helmholtz dans l'espace libre, et  $\mathcal{T}_{\infty, i}$  cet opérateur dans le cas particulier où  $k = i$ . D'après le théorème 1.26 de [92],  $\mathcal{T}_{\infty, i}$  est un opérateur autoadjoint coercif. Par ailleurs, le noyau de  $\mathcal{T} - \mathcal{T}_{\infty, i}$  est régulier et donc cet opérateur est compact. En écrivant  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\infty, i} + (\mathcal{T} - \mathcal{T}_{\infty, i})$ ,  $\mathcal{T}$  est un opérateur de Fredholm et donc montrer son injectivité revient à montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Soit  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  telle que  $\mathcal{T}\varphi = 0$ . Soit  $\mathcal{D}$  le potentiel de double couche

$$(\mathcal{D}\varphi)(x) = \int_{\partial D} \partial_{\nu_y} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in W \setminus \partial D,$$

et  $\mathcal{D}_\infty$  l'analogie pour l'espace libre. Le noyau de  $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_\infty)$  est régulier donc  $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_\infty)\varphi$  ainsi que sa dérivée normale sont continus au travers de  $\partial D$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{D} - \mathcal{D}_\infty)\varphi)^+ &= ((\mathcal{D} - \mathcal{D}_\infty)\varphi)^-, \\ \partial_\nu((\mathcal{D} - \mathcal{D}_\infty)\varphi)^+ &= \partial_\nu((\mathcal{D} - \mathcal{D}_\infty)\varphi)^-, \end{aligned}$$

où la normale  $\nu$  est toujours définie comme étant la normale sortante à  $\Omega$  et l'exposant  $+$ , respectivement  $-$ , désigne la trace sur  $\partial D$  de la fonction définie dans  $D$ , respectivement dans  $\bar{\Omega}$ . Notons qu'usuellement, la normale est plutôt choisie comme étant sortante au défaut  $D$ , mais nous trouvons cette définition plus cohérente avec l'orientation des normales sur les sections transverses  $\Sigma_{\pm R}$  et le bord du guide  $\Gamma$ .

Par ailleurs, les propriétés de saut de l'opérateur double couche pour l'espace libre nous apprennent que

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\infty\varphi)^- - (\mathcal{D}_\infty\varphi)^+ &= \varphi, \\ \partial_\nu(\mathcal{D}_\infty\varphi)^- - \partial_\nu(\mathcal{D}_\infty\varphi)^+ &= 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors les mêmes propriétés pour notre opérateur dans le guide :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}\varphi)^- - (\mathcal{D}\varphi)^+ &= \varphi, \\ \partial_\nu(\mathcal{D}\varphi)^+ - \partial_\nu(\mathcal{D}\varphi)^- &= 0. \end{aligned}$$

La fonction  $\mathcal{D}\varphi$  est solution du problème de Neumann (1.3) avec  $f = 0$  sur le bord du défaut. Par unicité,  $\mathcal{D}\varphi$  est nulle dans  $\Omega$ . Par ailleurs,  $\mathcal{D}\varphi$  satisfait le problème (1.10), ce qui implique qu'elle est nulle dans  $D$ . Nous en déduisons que ses traces intérieure et extérieure sont nulles sur  $\partial D$ , ce qui amène  $\varphi = 0$  sur  $\partial D$ , d'où l'injectivité.

Montrons à présent que  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\varphi, h)_{L^2(\hat{\Sigma})} &= \int_{\hat{\Sigma}} \left( \int_{\partial D} \varphi(x) \partial_{\nu(x)} G(y, x) ds(x) \right) \overline{h(y)} ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \varphi(x) \left( \int_{\hat{\Sigma}} \partial_{\nu(x)} G(y, x) \overline{h(y)} ds(y) \right) ds(x) \\ &= \int_{\partial D} \varphi(x) \left( \int_{\hat{\Sigma}} \partial_{\nu(x)} G(x, y) \overline{h(y)} ds(y) \right) ds(x) \\ &= \int_{\partial D} \varphi(x) \left( \int_{\hat{\Sigma}} \overline{h(y) \partial_{\nu(x)} G(x, y)} ds(y) \right) ds(x) \\ &= \langle \varphi, \overline{\mathcal{H}h} \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D), H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}, \end{aligned}$$

où le passage de la deuxième à la troisième ligne se fait grâce à la propriété de symétrie (1.9) de la fonction de Green. Nous avons bien  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$ .

Montrons enfin que les opérateurs  $B$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $N$  sont compacts, injectifs et d'image dense : la compacité de  $B$  vient du fait que la trace sur  $\hat{\Sigma}$  de la solution du problème de Neumann appartient à  $H^{\frac{1}{2}}(\hat{\Sigma})$  et que l'injection de  $H^{\frac{1}{2}}(\hat{\Sigma})$  dans  $L^2(\hat{\Sigma})$  est compacte. Elle implique la même propriété pour  $\mathcal{F}$  et  $N$  d'après les factorisations  $\mathcal{F} = B\mathcal{T}$  et  $N = -B\mathcal{H}$ . La compacité de  $\mathcal{H}$  vient quant à elle de *ii*).

Prouvons l'injectivité de  $B$  : soient  $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  telle que  $Bf = 0$  et  $u$  la solution du problème de Neumann (1.3) associée à  $f$ . Le fait que  $Bf$  soit nulle implique que  $u$  est nulle sur les sections  $\Sigma_{\pm R}$ , ce qui signifie, d'après le lemme de propagation 1.3, qu'au delà des sections  $\Sigma_{\pm R}$  la solution  $u$  est nulle. Par le théorème du prolongement unique 1.1,  $u$  est nulle dans  $\Omega$

et donc  $f = 0$ . Cela implique l'injectivité de  $\mathcal{F}$  et la densité de l'image de  $\mathcal{H}$ .

Pour montrer que  $B$  est d'image dense, nous allons prouver l'injectivité de  $\mathcal{H}$  : soit donc  $h \in L^2(\widehat{\Sigma})$  telle que  $\mathcal{H}h = 0$ . Alors  $v_h(x) = \int_{\widehat{\Sigma}} h(y)G(x, y) ds(y)$  est solution du problème de Neumann (1.3) avec  $f = 0$ , ce qui implique que  $v_h = 0$  dans  $\Sigma \times (-R, R)$ . Décomposons les fonctions  $G$  et  $h = (h_-, h_+)$  sur les sections  $\Sigma_R$  et  $\Sigma_{-R}$  selon les fonctions transverses  $\theta_n$  :

$$\begin{aligned} h_-(y_S) &= \sum_{n \geq 0} h_n^- \theta_n(y_S), \\ G((x_S, x_3), (y_S, -R)) &= - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} e^{i\beta_n(x_3+R)} \theta_n(y_S) \theta_n(x_S), \\ h_+(y_S) &= \sum_{n \geq 0} h_n^+ \theta_n(y_S), \\ G((x_S, x_3), (y_S, R)) &= - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} e^{i\beta_n(R-x_3)} \theta_n(y_S) \theta_n(x_S). \end{aligned}$$

L'équation  $v_h(x) = 0$  devient alors grâce à l'orthogonalité des fonctions transverses,  $\forall x = (x_S, x_3) \in \Sigma \times (-R, R)$ ,

$$- \sum_n \frac{\theta_n(x_S)}{2i\beta_n} (h_n^- e^{i\beta_n(x_3+R)} + h_n^+ e^{i\beta_n(R-x_3)}) = 0.$$

À nouveau grâce à l'orthogonalité des fonctions transverses, il vient

$$h_n^- e^{i\beta_n(x_3+R)} + h_n^+ e^{i\beta_n(R-x_3)} = 0,$$

pour  $x_3$  dans un intervalle ouvert, ce qui implique  $h_n^- = h_n^+ = 0$ , étant donné que  $\beta_n \neq 0$ , d'où  $h = 0$ . L'opérateur  $\mathcal{H}$  est donc injectif, ce qui implique la densité de l'image de  $\mathcal{F}$  et de  $B$ . Enfin, la factorisation  $N = -B\mathcal{H}$  implique l'injectivité de  $N$  et la densité de son image.  $\square$

Nous avons donc la factorisation suivante de notre opérateur de champ proche :

$$N = -\mathcal{F}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{H}.$$

Notons  $R(F)$  l'image d'un opérateur  $F$ . Nous avons alors la caractérisation suivante du défaut :

**Proposition 1.6**

On a  $z \in D$  si et seulement si  $G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}} \in R(\mathcal{F})$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que l'image de  $\mathcal{F}$  est égale à celle de  $B$  ( $\mathcal{T}$  étant un isomorphisme).

Soit  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ . Alors,  $\mathcal{F}\varphi$  est la trace sur  $\widehat{\Sigma}$  de la solution  $u$  du problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_\nu u = \mathcal{T}\varphi & \text{sur } \partial D, \\ (CR). \end{cases} \quad (1.11)$$

Si  $z \in D$ , considérons

$$\varphi_z = \mathcal{T}^{-1} [\partial_\nu G(\cdot, z)|_{\partial D}].$$

La fonction  $\partial_\nu G(\cdot, z)|_{\partial D}$  appartient bien à  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  et  $u = G(\cdot, z)$  est la solution de (1.11) associée à  $\varphi = \varphi_z$ , ce qui montre que  $G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}$  est dans l'image de  $\mathcal{F}$ .

Si  $z \notin D$ , alors la fonction  $G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}$  ne peut pas être dans l'image de  $B$  : en effet, si c'était le cas, il existerait  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  et  $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  telles que

$$u|_{\widehat{\Sigma}} = G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \partial D, \\ (CR). \end{cases}$$

Or, grâce au lemme de propagation 1.3,  $G(\cdot, z)$  et  $u$  sont égales dans le demi-guide gauche  $\Sigma \times (-\infty, -R)$  et le demi-guide droit  $\Sigma \times (R, +\infty)$ . Grâce au théorème du prolongement unique 1.1, nous en déduisons que  $u = G(\cdot, z)$  dans  $\Omega \setminus \{\overline{D} \cup \{z\}\}$ , ce qui n'est pas possible étant donné que  $G(\cdot, z) \notin H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .

La fonction  $G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}$  n'appartient donc pas à l'image de  $B$  et n'est pas non plus dans celle de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

La Linear Sampling Method consiste alors à résoudre au sens de Tikhonov l'équation suivante, pour tout  $z \in \mathcal{G}$  :

$$Nh = G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}.$$

Cette méthode est partiellement justifiée par le théorème suivant [31] :

### Théorème 1.7

1. Si  $z \in D$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_\varepsilon(\cdot, z) \in L^2(\widehat{\Sigma})$  satisfaisant

$$\|Nh_\varepsilon(\cdot, z) - G(\cdot, z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

et telle que  $\mathcal{H}h_\varepsilon(\cdot, z)$  converge dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

De plus, à  $\varepsilon$  fixé, la fonction  $h_\varepsilon(\cdot, z)$  vérifie

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \|h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \partial D} \|\mathcal{H}h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

2. Si  $z \in W \setminus \overline{D}$ , alors pour toute fonction  $h_\varepsilon(\cdot, z) \in L^2(\widehat{\Sigma})$  telle que

$$\|Nh_\varepsilon(\cdot, z) - G(\cdot, z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H}h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

*Démonstration.* Si  $z \in D$ , alors  $-G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}} \in R(\mathcal{F})$  d'après la proposition 1.6. Étant donné que  $\mathcal{F}$  est injectif,

$$\exists! \varphi_z \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D), \quad \mathcal{F}\varphi_z = -G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}.$$

Par ailleurs,  $-\mathcal{T}\varphi_z \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  et  $\mathcal{H}$  est d'image dense, donc pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $h_{\varepsilon,z} \in L^2(\widehat{\Sigma})$  tel que

$$\|\mathcal{H}h_{\varepsilon,z} + \mathcal{T}\varphi_z\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} \leq \varepsilon.$$

De plus,  $\mathcal{F}\mathcal{T}^{-1}$  étant continu, il existe  $c > 0$  tel que

$$\|\mathcal{F}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{H}h_{\varepsilon,z} + \mathcal{F}\varphi_z\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} = \|Nh_{\varepsilon,z} - G(\cdot, z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \leq c\varepsilon,$$

ce qui, avec la convergence de  $\mathcal{H}h_{\varepsilon,z}$  vers  $-\mathcal{T}\varphi_z$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , constitue le résultat annoncé.

Enfin,  $G(\cdot, z) \notin H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  pour  $z \in W \setminus D$ . Pour  $\varepsilon$  fixé, si  $z$  tend vers  $\partial D$  avec  $z \in D$ ,

$$\|\partial_\nu G(\cdot, z)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} = \|\mathcal{T}\varphi_z\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} \rightarrow +\infty,$$

ce qui implique que  $\|\mathcal{H}h_{\varepsilon,z}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} \rightarrow +\infty$  et donc que  $\|h_{\varepsilon,z}\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \rightarrow +\infty$  grâce à la continuité de  $\mathcal{H}$ .

Nous considérons à présent le cas où  $z \notin D$ . La fonction  $-G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}$  n'est plus dans l'image de  $\mathcal{F}$  d'après la proposition 1.6. Comme  $N$  est d'image dense, il existe  $h_{\varepsilon,z} \in L^2(\widehat{\Sigma})$  telle que

$$\|Nh_{\varepsilon,z} - G(\cdot, z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon.$$

Nous pouvons alors définir  $\varphi_{\varepsilon,z} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  par  $\varphi_{\varepsilon,z} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{H}h_{\varepsilon,z}$ , ce qui implique  $-Nh_{\varepsilon,z} = \mathcal{F}\varphi_{\varepsilon,z}$  et donc

$$\|\mathcal{F}\varphi_{\varepsilon,z} + G(\cdot, z)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon.$$

À  $z$  fixé,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi_{\varepsilon,z}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

Si ce n'était pas le cas, nous pourrions trouver une sous-suite  $\varphi_{\varepsilon,z}$  qui converge faiblement vers un  $\varphi_z$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ . Or,  $\mathcal{F}$  étant compact,  $\mathcal{F}\varphi_{\varepsilon,z}$  convergerait fortement vers  $\mathcal{F}\varphi_z$  dans  $L^2(\widehat{\Sigma})$ , ce qui impliquerait que  $\mathcal{F}\varphi_z = -G(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}$  grâce à l'inégalité précédente, ce qui n'est pas possible.

Ainsi, grâce à la continuité de  $\mathcal{T}^{-1}$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{T}\varphi_{\varepsilon,z}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty,$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H}h_{\varepsilon,z}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_{\varepsilon,z}\|_{L^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty,$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

### 1.3 Défaut volumique débouchant

Nous nous intéressons à présent au cas d'un défaut débouchant sur la surface du guide, les conditions de bord étant de type Neumann (voir figure 1.3). Plus précisément, soit  $D_0$  un



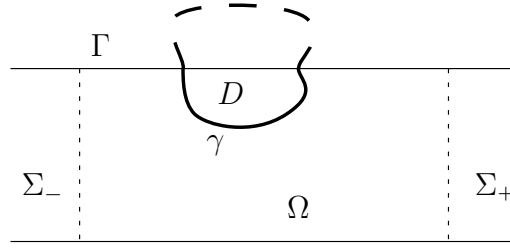


FIGURE 1.3 – Défaut débouchant

ouvert borné tel que  $D_0 \not\subset W$  et  $D_0 \cap W \neq \emptyset$ . On note  $D = D_0 \cap W$  et  $\partial D$  son bord supposé lipschitzien. Soit encore  $\Omega = W \setminus \overline{D_0}$  et  $\nu$  la normale sortante à  $\Omega$ . Enfin, on note  $\gamma = \partial D \setminus \Gamma$ . Les notations concernant les sections restent inchangées.

Nous considérons le problème suivant : pour  $f \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ , trouver  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \partial D, \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \gamma, \\ (CR). \end{cases} \quad (1.12)$$

Ce problème est bien posé : comme précédemment, nous allons commencer par le réécrire dans un domaine borné. Le problème (1.12) est équivalent à

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_R, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma_R \setminus \partial D, \\ \partial_\nu u = f & \text{sur } \gamma, \\ \partial_\nu u = T_\pm u & \text{sur } \Sigma_{\pm R}, \end{cases} \quad (1.13)$$

où les opérateurs  $T_\pm$  sont les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann définis par (1.4). Ce problème admet la formulation faible suivante : trouver  $u \in H^1(\Omega_R)$  telle que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega_R),$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) \, dx - \int_{\Sigma_R} T_+ u \bar{v} \, ds - \int_{\Sigma_{-R}} T_- u \bar{v} \, ds, \\ \ell(v) &= \int_{\partial D} f \bar{v} \, ds. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors comme précédemment démontrer le

### Lemme 1.8

Le problème (1.12) est bien posé sauf pour au plus un ensemble dénombrable de nombres d'onde  $k$ .

### Hypothèse 4

Le nombre d'onde  $k$  est tel que le problème (1.12) est bien posé.

Définissons les opérateurs nécessaires à la justification de la Linear Sampling Method. Tout d'abord, considérons  $u^s(\cdot, y)$  la solution du problème (1.12) avec  $f = -\partial_\nu G(\cdot, y)|_\gamma$ ,  $y \in \widehat{\Sigma}$ . L'opérateur de champ proche est l'opérateur  $N : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  qui à  $h$  associe :

$$(Nh)(x) = \int_{\widehat{\Sigma}} u^s(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma}.$$

De même, l'opérateur  $B : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  associe à  $f$  la restriction à  $\widehat{\Sigma}$  de la solution du problème (1.12) et  $\mathcal{H} : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  est défini par

$$(\mathcal{H}h)(x) = \partial_\nu \int_{\widehat{\Sigma}} G(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in \gamma.$$

Introduisons ensuite  $\mathcal{F} : H^{\frac{1}{2}}(\gamma) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  tel que

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \int_{\gamma} \partial_{\nu_y} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma},$$

et enfin  $\mathcal{T} : H^{\frac{1}{2}}(\gamma) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  tel que

$$(\mathcal{T}\varphi)(x) = \partial_\nu \int_{\gamma} \partial_{\nu_y} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \gamma.$$

Nous avons toujours les factorisations

$$N = -B\mathcal{H}, \quad \mathcal{F} = B\mathcal{T}.$$

Introduisons l'analogie de l'hypothèse 3 :

### Hypothèse 5

Le nombre d'onde  $k$  est tel que la seule solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } D, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (1.14)$$

est  $u = 0$ .

### Lemme 1.9

Sous réserve que les hypothèses 1, 4 et 5 soient vérifiées, nous avons les propriétés suivantes :

- i) L'opérateur  $\mathcal{T}$  est un isomorphisme ;
- ii) Les opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{F}$  satisfont  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$  ;
- iii) Les opérateurs  $B$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $N$  sont compacts, injectifs et d'image dense.

*Démonstration.* Les démonstrations sont les mêmes que pour le lemme 1.5, hormis pour le point i). Montrons donc que  $\mathcal{T}$  est un isomorphisme.

Pour cela, nous introduisons le problème de transmission, posé dans  $D \cup \Omega$  pour  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$  :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } D \cup \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \llbracket u \rrbracket = \varphi & \text{sur } \gamma, \\ \llbracket \partial_\nu u \rrbracket = 0 & \text{sur } \gamma, \\ (CR), \end{cases} \quad (1.15)$$

avec le saut défini de la manière suivante : soit  $v$  une fonction définie sur  $D \cup \Omega$ . Notons  $v^-$  la restriction de  $v$  à  $\Omega$  et  $v^+$  celle à  $D$ . Nous avons alors

$$[[v]] := (v^+ - v^-)|_{\gamma}.$$

Ce problème admet une unique solution, donnée par le potentiel de double couche :

$$u(x) = \int_{\gamma} \partial_{\nu_y} G(x, y) \varphi(y) ds(y) := \mathcal{D}\varphi(x). \quad (1.16)$$

Commençons par prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.15). Considérons le relèvement  $U \in H^1(\Omega_R) \times H^1(D)$ ,  $U = (U^-, U^+)$ , vérifiant

$$\begin{cases} \Delta U^+ = 0 & \text{dans } D, \\ U^+ = \varphi & \text{sur } \gamma, \\ \partial_{\nu} U^+ = 0 & \text{sur } \Gamma \cap \overline{D}, \end{cases}$$

ce problème étant bien posé dans  $H^1(D)$ , et  $U^- = 0$  dans  $\Omega_R$ . Nous avons en particulier  $[[U]] = \varphi$  et  $\partial_{\nu} U^+ \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ .

Posons  $\tilde{u} = u - U$ . Le problème (1.15) devient, avec ce changement de variable,

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = -k^2 U & \text{dans } \Omega_R \cup D, \\ \partial_{\nu} \tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_R, \\ [[\tilde{u}]] = 0 & \text{sur } \gamma, \\ [[\partial_{\nu} \tilde{u}]] = -\partial_{\nu} U^+ & \text{sur } \gamma, \\ \partial_{\nu} \tilde{u} = T_{\pm} \tilde{u} & \text{sur } \Sigma_{\pm}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Posons  $g = -\partial_{\nu} U^+ \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  et  $f = k^2 U \in L^2(\Omega_R \cup D)$ .

Le problème (1.17) admet la formulation faible équivalente suivante : trouver  $\tilde{u} \in H^1(\Omega_R \cup D)$  telle que

$$a(\tilde{u}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega_R \cup D),$$

avec

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}, v) &= \int_{\Omega_R \cup D} (\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \bar{v} - k^2 \tilde{u} \bar{v}) dx - \int_{\Sigma_+} T_+ \tilde{u} \bar{v} ds - \int_{\Sigma_-} T_- \tilde{u} \bar{v} ds, \\ \ell(v) &= \int_{\gamma} g \bar{v} ds + \int_D f \bar{v} dx. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors démontrer de la même façon que précédemment l'existence et l'unicité d'une solution sous réserve que les hypothèses 4 et 5 soient vérifiées.

Montrons que la solution du problème (1.15) a pour expression (1.16). Pour cela, nous procédons comme dans [29, 102].

Considérons le cas où  $x \in D$  et soit  $r > 0$  tel que  $B(x, 2r) \subset D$ . Définissons  $g_x$  et  $\tilde{g}_x$  telles que

$$g_x(y) = \begin{cases} G(x, y) & y \in B(x, r), \\ 0 & y \notin B(x, r), \end{cases}$$

et

$$\tilde{g}_x(y) = g_x(y) - G(x, y).$$

Soit  $\psi \in \mathcal{D}(B(x, 2r))$ . Nous avons

$$\langle (\Delta + k^2)\tilde{g}_x, \psi \rangle = \int_{B(x, 2r)} \tilde{g}_x(y)(\Delta + k^2)\psi(y) \, dy,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de distribution. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta + k^2)\tilde{g}_x, \psi \rangle &= - \int_{B(x, 2r) \setminus B(x, r)} G(x, y)(\Delta + k^2)\psi(y) \, dy \\ &= \int_{B(x, 2r) \setminus B(x, r)} (\psi(y)(\Delta_y + k^2)G(x, y) - G(x, y)(\Delta + k^2)\psi(y)) \, dy, \end{aligned}$$

puisque  $(\Delta_y + k^2)G(x, y) = 0$  sur  $B(x, 2r) \setminus B(x, r)$ . Grâce à la formule de Green, cette expression devient

$$\langle (\Delta + k^2)\tilde{g}_x, \psi \rangle = \int_{\partial B(x, r)} (\psi(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}\psi(y)G(x, y)) \, ds(y),$$

où  $\nu_y$  est la normale orientée vers l'intérieur de  $B(x, r)$ , ce qui implique

$$\langle (\Delta + k^2)g_x, \psi \rangle = -\psi(x) + \int_{\partial B(x, r)} (\psi(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}\psi(y)G(x, y)) \, ds(y).$$

Choisissons à présent  $\psi = \theta u$  avec  $\theta \in \mathcal{D}(B(x, 2r))$ ,  $\theta = 1$  sur  $\overline{B(x, r)}$ . Par définition,  $\text{supp } g_x \subset \overline{B(x, r)}$ , donc

$$\begin{aligned} \langle (\Delta + k^2)g_x, \theta u \rangle &= \int_{B(x, 2r)} g_x(\Delta + k^2)(\theta u) \, dy \\ &= \int_{B(x, r)} g_x(\Delta + k^2)u \, dy = 0, \end{aligned}$$

dont nous déduisons

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y). \quad (1.18)$$

Par ailleurs, dans  $D_r := D \setminus \overline{B(x, r)}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_r} (u(y)(\Delta_y + k^2)G(x, y) - G(x, y)(\Delta_y + k^2)u(y)) \, dy \\ &= \int_{\partial B(x, r)} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y) \\ &\quad - \int_{\gamma} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y) \\ &\quad + \int_{\Gamma \cap \partial D} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y), \end{aligned} \quad (1.19)$$

où les signes viennent de la définition de la normale  $\nu_y$  : celle-ci a été définie comme étant orientée vers l'extérieur de  $\Omega_r$ , hormis sur  $\partial B(x, r)$  et  $\Gamma \cap \partial D$  où elle est orientée vers l'intérieur de  $D_r$ . Notons que l'intégrale sur  $\Gamma \cap \partial D$  est nulle, d'après les conditions de bord.

En soustrayant les deux équations (1.18) et (1.19), il vient pour  $x \in D$

$$u^+(x) = \int_{\gamma} (u^+(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u^+(y)G(x, y)) \, ds(y), \quad (1.20)$$

où nous avons noté  $u^+$  la solution de (1.15) dans  $D$ . Par ailleurs, dans  $\Omega_R$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_R} (u(y)(\Delta_y + k^2)G(x, y) - G(x, y)(\Delta_y + k^2)u(y)) \, dy \\ &= \int_{\Gamma \setminus \partial D} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y) + \int_{\gamma} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y) \\ &\quad + \int_{\Sigma_{-R}} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y) + \int_{\Sigma_R} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) \, ds(y). \end{aligned}$$

Les traces normales de  $G(x, \cdot)$  et  $u$  sont nulles sur  $\Gamma \setminus \partial D$  donc l'intégrale correspondante est nulle. De même,  $G(x, \cdot)$  et  $u$  vérifient les conditions de radiation sur  $\Sigma_{\pm R}$ , ce qui implique que les intégrales sur ces sections sont nulles : en effet,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_R} u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) \, ds(y) &= \int_{\Sigma_R} u(y)T_+G(x, y) \, ds(y) \\ &= \int_{\Sigma_R} \left( \sum_{m \geq 0} (u|_{\Sigma_R}, \theta_m)_{\Sigma_R} \theta_m(y_S) \right) \left( \sum_{n \geq 0} i\beta_n(G(x, \cdot)|_{\Sigma_R}, \theta_n)_{\Sigma_R} \theta_n(y_S) \right) \, ds(y) \\ &= \sum_{n \geq 0} i\beta_n(u|_{\Sigma_R}, \theta_m)_{\Sigma_R} (G(x, \cdot)|_{\Sigma_R}, \theta_n)_{\Sigma_R}, \end{aligned}$$

et de même

$$\int_{\Sigma_R} \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y) \, ds(y) = \sum_{n \geq 0} i\beta_n(u|_{\Sigma_R}, \theta_m)_{\Sigma_R} (G(x, \cdot)|_{\Sigma_R}, \theta_n)_{\Sigma_R}.$$

Nous en déduisons

$$0 = \int_{\gamma} (u^-(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u^-(y)G(x, y)) \, ds(y), \quad (1.21)$$

où nous avons noté  $u^-$  la solution de (1.15) dans  $\Omega$ .

En soustrayant les deux équations (1.20) et (1.21) et en utilisant les relations de saut, nous obtenons (1.16). La démonstration se fait de la même façon pour  $x \in \Omega_R$ .

Revenons à présent à la démonstration du lemme 1.9 et commençons par montrer l'injectivité de l'opérateur  $\mathcal{T}$  : pour  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ , soit  $u^-$  la solution du problème extérieur

$$\begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_{\nu} u^- = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \partial D, \\ \partial_{\nu} u^- = \mathcal{T}\varphi & \text{sur } \gamma, \\ (CR), \end{cases} \quad (1.22)$$

et  $u^+$  la solution du problème intérieur :

$$\begin{cases} \Delta u^+ + k^2 u^+ = 0 & \text{dans } D, \\ \partial_{\nu} u^+ = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \partial D, \\ \partial_{\nu} u^+ = \mathcal{T}\varphi & \text{sur } \gamma. \end{cases} \quad (1.23)$$

Soit  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$  telle que  $\mathcal{T}\varphi = 0$ . Il est clair que, grâce aux hypothèses 4 et 5,  $u^+ = u^- = 0$ . Donc  $\varphi = \llbracket u \rrbracket = 0$ , ce qui prouve l'injectivité.

Intéressons-nous maintenant à la surjectivité de cet opérateur. Considérons pour cela  $f \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ , et  $u^-$  et  $u^+$  les solutions respectivement du problème de Neumann extérieur (1.22) et intérieur (1.23) associés à  $f$ . Posons

$$\begin{aligned} \varphi &= (u^+ - u^-)|_\gamma, \\ u(x) &= \begin{cases} u^-(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ u^+(x) & \text{si } x \in D. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction  $u$  est solution du problème de transmission associé à  $\varphi$ , elle satisfait d'après (1.16)

$$u(x) = \int_\gamma \partial_{\nu_y} G(x, y) \varphi(y) \, ds(y).$$

Par ailleurs,

$$\partial_\nu u|_\gamma = f = \mathcal{T}\varphi,$$

d'où la surjectivité. □

Le même raisonnement que pour la proposition 1.6 nous donne

**Proposition 1.10**

On a  $z \in D$  si et seulement si  $G(\cdot, z)|_{\hat{\Sigma}} \in R(\mathcal{F})$ .

Enfin, nous en déduisons le théorème justifiant l'utilisation de la Linear Sampling Method pour imager un défaut débouchant :

**Théorème 1.11**

1. Si  $z \in D$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_\varepsilon(\cdot, z) \in L^2(\hat{\Sigma})$  satisfaisant

$$\|Nh_\varepsilon(\cdot, z) - G(\cdot, z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

et telle que  $\mathcal{H}h_\varepsilon(\cdot, z)$  converge dans  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

De plus, à  $\varepsilon$  fixé, la fonction  $h_\varepsilon(\cdot, z)$  vérifie

$$\lim_{z \rightarrow \gamma} \|h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \gamma} \|\mathcal{H}h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} = +\infty.$$

2. Si  $z \in W \setminus \bar{D}$ , alors pour toute fonction  $h_\varepsilon(\cdot, z) \in L^2(\hat{\Sigma})$  telle que

$$\|Nh_\varepsilon(\cdot, z) - G(\cdot, z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H}h_\varepsilon(\cdot, z)\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} = +\infty.$$

Nous pouvons donc appliquer la même méthode pour imager un obstacle de Neumann, qu'il soit ou non au bord du domaine.

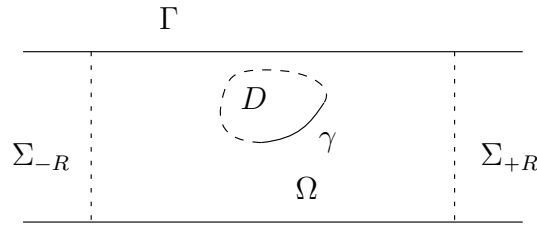


FIGURE 1.4 – Défaut de type fissure

## 1.4 Défaut de type fissure

Nous résumons ici l'analyse des défauts de type fissure réalisée dans [33]. Soit un guide  $W$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , et un domaine  $D$  avec  $\overline{D} \subset W$ . Une fissure  $\gamma$  est une portion du bord de  $D$ ,  $\partial D$ , ouverte pour la topologie induite sur  $\partial D$  et régulière (voir figure 1.4). Nous supposons de plus que  $\overline{\gamma} \in W$  et que, en dimension 3, sa frontière  $\partial\gamma$  est aussi régulière. La normale  $\nu$  à la fissure  $\gamma$  est définie comme la normale entrante à  $D$ . Nous ne considérerons ici que le cas de la fissure de Neumann, la fissure de type Dirichlet étant analysée dans [33].

Nous supposons comme précédemment que le défaut  $\gamma$  est compris entre les sections d'abscisse  $R$  et  $-R$ ,  $\Sigma_R$  et  $\Sigma_{-R}$ , et nous noterons  $\Omega = W \setminus \overline{\gamma}$  et  $\Omega_R = (\Sigma \times (-R, R)) \setminus \overline{\gamma}$ .

Nous considérons alors le problème suivant : pour  $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ , trouver  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_\nu u^\pm = f & \text{sur } \gamma, \\ (CR), \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $\partial_\nu u^\pm$  désigne la trace normale de la fonction  $u$  sur les deux faces de la fissure, le signe étant caractérisé par l'orientation de la normale  $\nu$ . Le problème équivalent en domaine borné est : trouver  $u \in H^1(\Omega_R)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega_R, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma_R, \\ \partial_\nu u^\pm = f & \text{sur } \gamma, \\ \partial_\nu u = T_\pm u & \text{sur } \Sigma_{\pm R}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Comme dans les deux cas précédents, nous pouvons écrire une formulation faible de ce problème, ce qui nous permet de démontrer le

### Lemme 1.12

Le problème (1.24) est bien posé sauf pour au plus un ensemble dénombrable de nombres d'onde  $k$ .

### Hypothèse 6

Le nombre d'onde  $k$  est tel que le problème (1.24) est bien posé.

Nous allons comme d'habitude introduire l'opérateur de champ proche ainsi que les opérateurs nécessaires à sa factorisation. Soit donc  $u^s(\cdot, y)$  la solution du problème (1.24) avec

$f = -\partial_\nu G(\cdot, y)|_\gamma$ ,  $y \in \widehat{\Sigma}$ . L'opérateur de champ proche est l'opérateur  $N : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  qui à  $h$  associe

$$(Nh)(x) = \int_{\widehat{\Sigma}} u^s(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma}.$$

L'opérateur  $B : H^{-\frac{1}{2}}(\gamma) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  associe à  $f$  la restriction à  $\widehat{\Sigma}$  de la solution du problème (1.24), et  $\mathcal{H} : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  est défini par

$$(\mathcal{H}h)(x) = \partial_\nu \int_{\widehat{\Sigma}} G(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in \gamma.$$

Introduisons ensuite  $\mathcal{F} : \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\gamma) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  tel que

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \int_\gamma \partial_{\nu_y} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma},$$

et enfin  $\mathcal{T} : \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  tel que

$$(\mathcal{T}\varphi)(x) = \partial_\nu \int_\gamma \partial_{\nu_y} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \gamma.$$

Nous avons ainsi les factorisations

$$N = -B\mathcal{H}, \quad \mathcal{F} = B\mathcal{T},$$

ainsi que le lemme

**Lemme 1.13**

*Sous réserve que les hypothèses 1 et 6 soient vérifiées, nous avons les propriétés suivantes :*

- i) *L'opérateur  $\mathcal{T}$  est un isomorphisme ;*
- ii) *Les opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{F}$  satisfont  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$  ;*
- iii) *Les opérateurs  $B$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $N$  sont compacts, injectifs et d'image dense.*

*Démonstration.* Les démonstrations sont analogues à celles du lemme 1.5. □

Ces propriétés nous permettent de choisir la fonction test à utiliser pour imager une fissure :

**Proposition 1.14**

*Soit  $L$  une fissure. Notons  $\mathcal{F}^L : \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(L) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$ , l'analogue de  $\mathcal{F}$  pour  $\gamma$  remplacée par  $L$ . Soit  $\alpha$  une fonction continue,  $\alpha \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(L)$  satisfaisant  $|\alpha| > 0$  sur  $L$ . Nous avons alors*

$$L \subset \gamma \quad \text{si et seulement si} \quad \mathcal{F}^L \alpha \in R(\mathcal{F}).$$

*Démonstration.* Si  $L \subset \gamma$ , puisque  $\widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(L) \subset \widetilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ , alors  $\mathcal{F}^L \alpha \in R(\mathcal{F})$ .

Réciproquement, si  $\mathcal{F}^L \alpha = \mathcal{F}\varphi$  pour un certain  $\varphi \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ , supposons que  $L \not\subset \gamma$ . Définissons les potentiels de double couche  $\mathcal{D}_L$  et  $\mathcal{D}_\gamma$ , définis respectivement sur  $W \setminus \overline{L}$  et  $\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\gamma)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L(x) &:= \int_L \alpha(y) \partial_{\nu_y} G(x, y) ds(y), & x \in W \setminus \overline{L}, \\ (\mathcal{D}_\gamma \varphi)(x) &:= \int_{\partial D} \varphi(y) \partial_{\nu_y} G(x, y) ds(y), & x \in \Omega. \end{aligned}$$



Les deux fonctions  $\mathcal{D}_L$  et  $\mathcal{D}_\gamma\varphi$  vérifient le lemme de propagation 1.3, elles coïncident donc sur  $\Sigma \times (R, +\infty)$  et, par le théorème de prolongement unique 1.1, elles coïncident sur  $W \setminus (\bar{\gamma} \cup \bar{L})$ . Soit alors  $x_0 \in L$  tel que  $x_0 \notin \bar{\gamma}$ . Soit  $B(x_0, \varepsilon)$  une boule ouverte telle que  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap \bar{\gamma} = \emptyset$  et  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap \partial D_L \subset L$ , avec  $D_L$  le domaine du guide pour lequel  $L \subset \partial D_L$ , selon la définition d'une fissure. La fonction  $\mathcal{D}_\gamma\varphi$  est régulière dans  $B(x_0, \varepsilon)$  alors que  $\mathcal{D}_L$  est singulière au point  $x_0$  puisque  $|\alpha| > 0$  sur  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap L$ . Ceci implique donc que  $L \subset \bar{\gamma}$  et, puisque  $L$  et  $\gamma$  sont des ouverts, nous trouvons finalement que  $L \subset \gamma$ .  $\square$

Nous pouvons désormais justifier l'utilisation de la Linear Sampling Method grâce au théorème suivant, qui se prouve de la même façon que 1.7 :

### Théorème 1.15

1. Si  $L \subset \gamma$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_{L,\varepsilon} \in L^2(\hat{\Sigma})$  satisfaisant

$$\|Nh_{L,\varepsilon} - \mathcal{F}^L\alpha\|_{L^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

et telle que  $\mathcal{H}h_{L,\varepsilon}$  converge dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Si  $L \not\subset \gamma$ , alors pour toute fonction  $h_{L,\varepsilon} \in L^2(\hat{\Sigma})$  telle que

$$\|Nh_{L,\varepsilon} - \mathcal{F}^L\alpha\|_{L^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_{L,\varepsilon}\|_{L^2(\hat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H}h_{L,\varepsilon}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} = +\infty.$$

La Linear Sampling Method consiste alors en la résolution au sens de Tikhonov du problème

$$Nh = \mathcal{F}^L\alpha, \tag{1.26}$$

avec

$$(\mathcal{F}^L\alpha)(x) := \int_L \partial_{\nu_y} G(x, y) \alpha(y) ds(y), \quad x \in \hat{\Sigma},$$

où  $\alpha \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  est une fonction continue vérifiant  $|\alpha| > 0$  sur  $L$  et  $L$  une fissure test à déterminer. Nous choisissons de nous restreindre à des fissures  $L$  infinitésimales au point  $z \in \mathcal{G}$ , en imposant  $\int_L \alpha ds = 1$ , si bien que nous avons l'approximation

$$\mathcal{F}^L\alpha \simeq \partial_{\nu_z} G(\cdot, z),$$

et nous obtenons ainsi une fonction test différente de celles obtenues pour l'obstacle volumique à coeur et celui débouchant, puisqu'il nous faut prendre la dérivée normale à la fissure infinitésimale de la fonction de Green  $G$  pour une source en  $z$ . Le problème est alors que cette dérivée normale est inconnue, puisque nous ne connaissons pas le défaut. Toutefois, étant donné que le problème (1.26) est linéaire, nous pouvons procéder de la façon suivante : nous définissons les fonctions test  $\partial_{e_i} G(\cdot, z)$  pour  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^d$ . En résolvant, pour  $z \in \mathcal{G}$ ,

$$Nh_i = \partial_{e_i} G(\cdot, z)|_{\hat{\Sigma}},$$

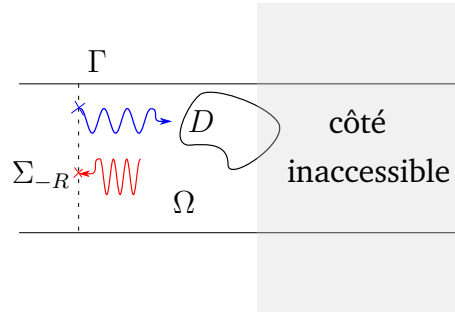


FIGURE 1.5 – Configuration “back-scattering”

nous obtiendrons une solution  $h_i$  pour chacune de ces polarisations. Nous pouvons alors écrire

$$\nu(z) = \sum_{i=1}^d p_i(z) e_i,$$

$$h(z) = \sum_{i=1}^d p_i(z) h_i,$$

avec  $\sum_{i=1}^d p_i(z)^2 = 1$ .

Étant donné que  $\|h\|_{L^2(\hat{\Sigma})}$  doit être infinie si  $z \notin \gamma$ , nous allons chercher à minimiser  $\|h\|_{L^2(\hat{\Sigma})}$  en chaque point sous la contrainte  $\sum_{i=1}^d p_i(z)^2 = 1$ . Nous obtenons ainsi la normale optimale et la fonction  $h$  correspondante solution de (1.26).

## 1.5 Données partielles

Jusqu'à présent, nous avons considéré des configurations dans lesquelles nous avons des données de chaque côté du défaut : le noyau de l'opérateur de champ proche était formé par le champ diffracté  $u^s(\cdot, y)$  mesuré sur les sections  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$  pour des sources  $y$  sur ces mêmes sections. Une situation plus réaliste est celle où le champ diffracté  $u^s(\cdot, y)$  est mesuré seulement sur  $\Sigma_{-R}$  pour un point source  $y$  décrivant  $\Sigma_{-R}$  seulement (voir figure 1.5). Nous pouvons toujours appliquer la Linear Sampling Method : il suffit d'adapter de manière ad hoc nos opérateurs, notamment celui de champ proche  $N : L^2(\Sigma_{-R}) \rightarrow L^2(\Sigma_{-R})$ , qui à  $h$  associe

$$(Nh)(x) = \int_{L^2(\Sigma_{-R})} u^s(x, y) h(y) ds(y), \quad x \in \Sigma_{-R},$$

où  $u^s(\cdot, y)$  est le champ diffracté solution du problème de Neumann (1.3), (1.12) ou (1.24) associé à la trace normale sur le bord du défaut de la fonction de Green pour un point source en  $y$ . Le théorème 1.7 (et ses équivalents pour les autres types de défauts) s'adapte alors aisément à ce cas, que nous nommerons “back-scattering” dans la suite.

Nous verrons dans les simulations numériques que l'imagerie reste alors possible, bien que les résultats soient dégradés.



## CHAPITRE

# 2

## EXTENSION AUX DONNÉES EN SURFACE

### Sommaire

<b>2.1 Analyse modale de la LSM</b>	<b>32</b>
<b>2.2 LSM fondée sur des sollicitations et mesures à la surface</b>	<b>37</b>
<b>2.3 Lien entre la formulation modale et des sollicitations et mesures sur la surface</b>	<b>42</b>
<b>2.4 Conditionnement des matrices d'émission et de réception</b>	<b>46</b>
2.4.1 Étude théorique	46
2.4.2 Étude numérique	55

Nous avons présenté au chapitre 1 le cadre théorique d'application de la Linear Sampling Method dans un guide d'ondes pour différents types de défauts. Nous allons à présent nous intéresser à l'application pratique de la méthode. Pour cela, nous considérerons un problème canonique, l'obstacle volumique à cœur de type Dirichlet, comme étudié dans [11]. Nous rappellerons brièvement les théorèmes justifiant l'application de la Linear Sampling Method à ce cas. Comme dans le chapitre 1, nous aurons à notre disposition une méthode nécessitant des sollicitations et des mesures selon les sections du guide. Grâce au comportement modal des champs dans le guide d'ondes, nous allons pouvoir réécrire la LSM comme une formulation modale qui induit une discrétisation naturelle du système et rend la méthode simple d'application. En particulier, nous obtiendrons un petit système linéaire à résoudre, de taille deux fois le nombre de modes propagatifs  $P$ , en supposant que nos sollicitations et mesures sont réalisées loin du défaut. Cela revient à dire que toute l'information est contenue dans les modes propagatifs, celle contenue dans les modes évanescents étant négligée. Nous serons donc amenés à résoudre, en chaque point  $z$  de la grille d'échantillonnage, un système

$$\mathcal{U}H = F(z), \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{U}$  est une matrice carrée de taille  $2P$  formée des données, et  $F(z)$  est un vecteur dépendant du point  $z$ . Nous obtiendrons alors une image du défaut en traçant l'inverse de la norme

de  $H$  en fonction de  $z$ .

Cette situation peut-être vue comme idéale car permettant une caractérisation du défaut simple et peu sensible au bruit compte tenu de la faible taille de la matrice  $\mathcal{U}$ . Elle est toutefois peu réaliste : elle nécessite d'une part d'avoir accès aux sections du guide à inspecter et d'autre part de savoir exciter séparément chaque mode propagatif. Le Contrôle Non Destructif n'offre pas cette possibilité en pratique. Néanmoins nous nous servons de la Linear Sampling Method modale comme d'une référence pour juger de la qualité des reconstructions obtenues grâce aux méthodes développées par la suite, qui permettront d'imager le défaut à partir de sollicitations et mesures à la surface du guide. Nous présentons d'abord une formulation de la LSM écrite directement avec des sources et des mesures à la surface du guide. Cette formulation est utilisable en pratique grâce à une discrétisation du bord, mais elle ne tire pas profit de la décomposition modale des champs. Nous présentons donc dans un deuxième temps une méthode faisant un lien direct entre les données de bord et la Linear Sampling Method modale. Cette méthode fera apparaître naturellement des paramètres tels que le nombre de points de source et de mesure ou leur écartement sur la surface. Nous pourrions ainsi optimiser ces paramètres au travers de l'étude du conditionnement des matrices intervenant dans la méthode pour obtenir la meilleure caractérisation possible du défaut. En particulier, nous verrons que nous avons intérêt à considérer autant de points que possible et que l'espacement optimal entre les points de source et de mesure est la longueur d'onde associée à  $k$ .

Nous pourrions alors imager un défaut à partir de données à la surface du guide en deux étapes : dans un premier temps, nous calculerons la matrice  $\mathcal{U}$  du système de la Linear Sampling Method modale à partir de la matrice des mesures. Dans un second temps nous résoudrons le système (2.1) pour chaque point d'échantillonnage.

## 2.1 Analyse modale de la LSM

Dans ce paragraphe et les suivants, pour fixer les idées, nous considérons le problème de Dirichlet pour un obstacle volumique à coeur. Toutes les conclusions obtenues seront valables pour les autres types de défauts.

Le problème direct est : pour  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ , trouver  $u \in H_{loc}^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = f & \text{sur } \partial D, \\ (CR). \end{cases} \quad (2.2)$$

Par un lemme analogue à 1.4 pour le problème de Neumann, ce problème est bien posé sauf pour au plus un ensemble dénombrable de nombres d'onde  $k$ . Notons  $u^s(\cdot, y)$  la solution du problème (2.2) avec  $f = -G(\cdot, y)|_{\partial D}$ ,  $y \in \Omega$ . L'opérateur de champ proche est  $N : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  qui à  $h = (h^-, h^+) \in L^2(\Sigma_{-R}) \times L^2(\Sigma_R)$  associe

$$(Nh)(x) = \int_{\Sigma_{-R}} u^s(x, y) h^-(y) ds(y) + \int_{\Sigma_R} u^s(x, y) h^+(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma}. \quad (2.3)$$

### Hypothèse 7

Le nombre d'onde  $k$  est tel que le problème (2.2) est bien posé.

**Hypothèse 8**

Le nombre d'onde  $k$  est tel que la seule solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } D, \\ u = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (2.4)$$

est  $u = 0$ .

Sous réserve que les hypothèses 1, 7 et 8 soient vérifiées, l'analogie du théorème 1.7 est satisfait. Nous allons supposer dans la suite que ces hypothèses sont vérifiées. Nous voulons exploiter la décomposition modale des champs pour réécrire sous une forme de système l'équation

$$Nh = G(\cdot, z)|_{\hat{\Sigma}}, \quad (2.5)$$

avec  $z$  un point de la grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$ . Rappelons que les modes guidés  $u_n^\pm$  s'écrivent

$$u_n^\pm(x_S, x_3) = \theta_n(x_S) e^{\pm i\beta_n x_3},$$

et notons  $u_n^{s\pm}$  la solution de (2.2) pour  $f = -u_n^\pm|_{\partial D}$ .

**Proposition 2.1**

Le champ diffracté  $u^s$  peut se décomposer de la façon suivante : pour  $-R < x_3 < R$ ,

$$u^s(x, y) = \begin{cases} -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} u_n^-(y) u_n^{s+}(x) & \text{si } y_3 = -R, \\ -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} u_n^+(y) u_n^{s-}(x) & \text{si } y_3 = R, \end{cases}$$

*Démonstration.* Supposons que  $y_3 = R$  et posons

$$H(x, y) = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} u_n^+(y) u_n^{s-}(x).$$

Nous savons déjà que le problème (2.2) est bien posé pour  $f = -G(\cdot, y)|_{\partial D}$ . Nous n'avons donc qu'à montrer que  $H(\cdot, y)$  est bien solution de ce problème. Nous savons que  $H(\cdot, y)$  est solution de l'équation d'Helmholtz, vérifie les conditions au bord du guide et les conditions de radiation par linéarité. Il nous reste donc à montrer que  $H(\cdot, y) = -G(\cdot, y)$  sur  $\partial D$ . Pour  $x \in \partial D$ , nous avons grâce à la définition des  $u_n^{s-}$ ,

$$\begin{aligned} H(x, y) &= -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} u_n^+(y) u_n^{s-}(x) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} u_n^+(y) u_n^-(x) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} e^{i\beta_n y_3} \theta_n(y_S) e^{-i\beta_n x_3} \theta_n(x_S) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n |x_3 - y_3|}}{2i\beta_n} \theta_n(y_S) \theta_n(x_S), \end{aligned}$$

car  $x_3 < R = y_3$ , soit  $H(x, y) = -G(x, y)$ . Le cas  $y_3 = -R$  se prouve de la même façon.  $\square$

Nous pouvons aussi décomposer  $h^-$  et  $h^+$  selon les fonctions transverses  $\theta_n$ , qui forment une base de  $L^2(\Sigma_{\pm R})$  :

$$\begin{aligned} h^- &= \sum_{n \geq 0} h_n^- \theta_n, \\ h^+ &= \sum_{n \geq 0} h_n^+ \theta_n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous remplaçons alors  $h^-$  et  $h^+$  par leur expression (2.6) dans (2.3) ce qui nous donne, grâce au caractère orthonormal des fonctions transverses, pour  $x \in \Sigma_{-R}$  :

$$\begin{aligned} (Nh)(x) &= - \int_{\Sigma_{-R}} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} u_n^-(y, -R) u_n^{s^+}(x) \right) \left( \sum_{m \geq 0} h_m^- \theta_m(y) \right) ds(y) \\ &\quad - \int_{\Sigma_R} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} u_n^+(y, R) u_n^{s^-}(x) \right) \left( \sum_{m \geq 0} h_m^+ \theta_m(y) \right) ds(y) \\ &= - \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (u_n^{s^+}(x) h_n^- + u_n^{s^-}(x) h_n^+). \end{aligned}$$

Nous pouvons à nouveau décomposer les champs diffractés selon les fonctions transverses :

$$u_n^{s^+}(x_S, -R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{+-} \theta_m(x_S), \quad u_n^{s^-}(x_S, -R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{--} \theta_m(x_S),$$

ce qui nous permet finalement d'obtenir

$$(Nh)(x) = - \sum_m \sum_n \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{+-} h_n^- + S_{mn}^{--} h_n^+) \theta_m(x_S),$$

et de même, pour  $x \in \Sigma_R$  :

$$(Nh)(x) = - \sum_m \sum_n \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{++} h_n^- + S_{mn}^{-+} h_n^+) \theta_m(x_S),$$

avec

$$u_n^{s^+}(x_S, R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{++} \theta_m(x_S), \quad u_n^{s^-}(x_S, R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{-+} \theta_m(x_S).$$

Notre but est de résoudre l'équation  $Nh = G(\cdot, z)|_{\hat{\Sigma}}$  pour tous les points  $z$  de la grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$ , supposés compris entre les sections transverses  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$ . Rappelons l'expression de la fonction de Green :

$$G(x, z) = - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} \theta_n(x_S) \theta_n(z_S) e^{i\beta_n |x_3 - z_3|}.$$

Cette expression devient, pour  $x \in \Sigma_{\pm R}$  et  $-R < z_3 < R$ ,

$$G(x, z) = - \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n (R \mp z_3)}}{2i\beta_n} \theta_n(x_S) \theta_n(z_S).$$

L'équation (2.5) s'écrit alors

$$\begin{cases} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{+-} h_n^- + S_{mn}^{--} h_n^+) \theta_m(x_S) = \sum_{m \geq 0} \frac{e^{i\beta_m (R+z_3)}}{2i\beta_m} \theta_m(x_S) \theta_m(z_S), \\ \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{++} h_n^- + S_{mn}^{-+} h_n^+) \theta_m(x_S) = \sum_{m \geq 0} \frac{e^{i\beta_m (R-z_3)}}{2i\beta_m} \theta_m(x_S) \theta_m(z_S), \end{cases}$$

ce qui nous donne, après projection sur les fonctions transverses, le système infini

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{+-} h_n^- + S_{mn}^{--} h_n^+) = \frac{e^{i\beta_m(R+z_3)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_S), \\ \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{++} h_n^- + S_{mn}^{+-} h_n^+) = \frac{e^{i\beta_m(R-z_3)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_S), \end{cases} \quad m \geq 0. \quad (2.7)$$

Nous utilisons dorénavant une approximation de champ lointain : nous supposons que les sections  $\Sigma_{\pm R}$  sont “loin” du défaut, ce qui implique que l’information n’est portée que par les  $P$  modes propagatifs. Nous pouvons donc tronquer toutes les séries précédentes aux  $P$  premiers termes.

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{P-1} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{+-} h_n^- + S_{mn}^{--} h_n^+) = \frac{e^{i\beta_m(R+z_3)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_S), \\ \sum_{n=0}^{P-1} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} (S_{mn}^{++} h_n^- + S_{mn}^{+-} h_n^+) = \frac{e^{i\beta_m(R-z_3)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_S), \end{cases} \quad m = 0, \dots, P-1.$$

Nous pouvons réécrire ce système matriciellement : nous notons

$$\begin{aligned} S^{-\pm} &= (S_{mn}^{-\pm}), & S^{+\pm} &= (S_{mn}^{+\pm}), & m, n &= 0, \dots, P-1, \\ H^{\pm} &= (h_m^{\pm}), & F^{\pm} &= \left( \frac{e^{i\beta_m(R \mp z_3)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_S) \right), & m &= 0, \dots, P-1, \end{aligned}$$

et  $K$  la matrice diagonale de taille  $P \times P$ , de termes diagonaux  $(e^{i\beta_n R}/2i\beta_n)$ ,  $n = 0, \dots, P-1$ . Le système s’écrit alors

$$\mathcal{U}H = F, \quad (2.8)$$

où nous avons défini

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S^{+-} & S^{--} \\ S^{++} & S^{+-} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H^- \\ H^+ \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F^- \\ F^+ \end{pmatrix}.$$

Nous appellerons  $\mathcal{S}$  la matrice de scattering et  $\mathcal{U}$  la matrice de LSM. Nous allons aussi utiliser dans la suite les différents blocs de la matrice de LSM, que nous définissons ici comme suit :

$$U^{-\pm} = S^{-\pm}K, \quad U^{+\pm} = S^{+\pm}K.$$

### Remarque 2.1

Il est à noter que la matrice de scattering  $\mathcal{S}$  que nous définissons ici n’est pas exactement celle rencontrée dans la littérature sur les guides d’ondes élastiques [9, 115] : la définition usuellement utilisée considère les coefficients de réflexion et de transmission, qui sont alors définis à partir du champ total et où le déphasage lié au choix de la section n’apparaît pas. En notant  $\tilde{\mathcal{S}}$  la matrice de scattering définie usuellement, nous avons la définition suivante de ses coefficients :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{mn}^{++} &= \frac{(u_n^{s+} + u_n^+, \theta_m)_{\Sigma_R}}{(u_n^+, \theta_n)_{\Sigma_{-R}}}, & \tilde{\mathcal{S}}_{mn}^{--} &= \frac{(u_n^{s-} + u_n^-, \theta_m)_{\Sigma_{-R}}}{(u_n^-, \theta_n)_{\Sigma_R}}, \\ \tilde{\mathcal{S}}_{mn}^{+-} &= \frac{(u_n^{s+}, \theta_m)_{\Sigma_{-R}}}{(u_n^+, \theta_n)_{\Sigma_{-R}}}, & \tilde{\mathcal{S}}_{mn}^{-+} &= \frac{(u_n^{s-}, \theta_m)_{\Sigma_R}}{(u_n^-, \theta_n)_{\Sigma_R}}. \end{aligned}$$



Le lien entre les deux matrices est donc direct :

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{mn}^{++} &= S_{mn}^{++} e^{i\beta_n R} + e^{2i\beta_n R} \delta_{mn}, & \tilde{S}_{mn}^{--} &= S_{mn}^{--} e^{i\beta_n R} + e^{2i\beta_n R} \delta_{mn}, \\ \tilde{S}_{mn}^{+-} &= S_{mn}^{+-} e^{i\beta_n R}, & \tilde{S}_{mn}^{-+} &= S_{mn}^{-+} e^{i\beta_n R}.\end{aligned}$$

Dans le cas du back-scattering, nous pouvons décomposer notre opérateur de la même façon :

$$(Nh)(x) = \int_{\Sigma_{-R}} u^s(x, y) h^-(y) ds(y), \quad (2.9)$$

où  $u^s(\cdot, y)$  est le champ diffracté associé à  $G(\cdot, y)$  pour une source au point  $y \in \Sigma_{-R}$ . Nous obtenons donc le système

$$\sum_{n=0}^{P-1} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} S_{mn}^{+-} h_n^- = \frac{e^{i\beta_m(R+z_S)}}{2i\beta_m} \theta_m(z_S), \quad m = 0, \dots, P-1,$$

soit matriciellement

$$U^{+-} H^- = F^+.$$

Revenons au problème (2.5). Nous voyons d'après (2.7) que la mesure en tout  $x \in \hat{\Sigma}$  des champs diffractés  $u^s(x, y)$  dus aux champs incidents de la forme  $G(\cdot, y)$  pour tout  $y \in \hat{\Sigma}$  est équivalente à la mesure de la projection sur  $\hat{\Sigma}$  selon les fonctions transverses  $\theta_m$  des champs diffractés  $u_n^{s\pm}$  associés aux champs incidents  $u_n^\pm$  et ce pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ . De même, dans le cas du back-scattering, la mesure en tout  $x \in \Sigma_{-R}$  des champs diffractés  $u^s(x, y)$  dus aux champs incidents de la forme  $G(\cdot, y)$  pour tout  $y \in \Sigma_{-R}$  est équivalente à la mesure de la projection sur  $\hat{\Sigma}$  selon les fonctions transverses  $\theta_m$  des champs diffractés  $u_n^{s+}$  associés aux champs incidents  $u_n^+$  et ce pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Nous obtenons un système de taille  $2P$  lorsque nous considérons les modes propagatifs se propageant dans les deux sens et de taille  $P$  dans le cas du back-scattering. Ce système est résolu en chaque point d'échantillonnage afin d'imager le défaut. Dans la pratique,  $P$  est petit, c'est-à-dire inférieur à 20, ce qui rend cette résolution rapide. De plus, comme il a déjà été souligné dans [11] et [32], le fait de ne considérer que les modes propagatifs revient à régulariser fortement notre système, il n'est donc pas nécessaire en présence de données bruitées d'utiliser un procédé de régularisation supplémentaire comme celui de Tikhonov.

Dans le cas où nous avons accès aux deux côtés du guide, la LSM modale se déroule de la manière suivante :

- les modes propagatifs  $(u_n^\pm)_{n=0, \dots, P-1}$  sont émis successivement et les champs diffractés associés sont mesurés sur les sections  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$  puis décomposés selon les fonctions transverses ;
- la matrice  $\mathcal{U}$  est formée à partir de ces projections ;
- le problème (2.8) est résolu pour tous les points  $z$  de la grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$  ;

- la fonction caractéristique

$$\psi(z) = \frac{1}{\|H(z)\|_2}$$

est construite à partir des solutions de (2.8), où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne du vecteur ;

- l'image du défaut est donnée par les lignes de niveau de la fonction caractéristique  $\psi$ .

Cette méthode est théoriquement applicable, mais elle présente un inconvénient majeur dans la pratique : nous devons avoir accès à la section du guide et être capable d'exciter les différents modes propagatifs séparément. Ce sont deux obstacles en pratique. C'est pourquoi nous orientons la suite de notre étude vers une méthode prenant en compte des sources et des mesures à la surface du guide.

## 2.2 LSM fondée sur des sollicitations et mesures à la surface

Nous allons dorénavant considérer une version de la Linear Sampling Method fondée sur des sollicitations et mesures à la surface du guide.

Nous considérons toujours notre problème de Dirichlet : pour  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ , trouver  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = f & \text{sur } \partial D, \\ (CR). \end{cases} \quad (2.10)$$

Soit  $\gamma \subset \Gamma$ , une portion du bord du guide sur laquelle nous allons appliquer nos sollicitations et faire nos mesures, et soit  $u^s(\cdot, y)$ , la solution de (2.10) pour  $f = -G(\cdot, y)|_{\partial D}$ ,  $y \in \gamma$ . Nous définissons notre opérateur de champ proche  $N : L^2(\gamma) \rightarrow L^2(\gamma)$  qui à  $h$  associe

$$(Nh)(x) = \int_\gamma u^s(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in L^2(\gamma).$$

Nous allons, comme d'habitude, factoriser  $N$  pour obtenir une caractérisation du défaut.

Introduisons le potentiel de simple couche  $\mathcal{S} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^1(\Omega \cup D)$ , qui à  $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  associe

$$(\mathcal{S}\varphi)(x) = \int_{\partial D} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \Omega \cup D,$$

ainsi que les quatre opérateurs de la factorisation,  $B : H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2(\gamma)$ , qui à  $f$  associe la trace sur  $\gamma$  de la solution du problème (2.10),  $\mathcal{H} : L^2(\gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  qui à  $h$  associe

$$(\mathcal{H}h)(x) = \int_\gamma G(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in \partial D,$$

l'opérateur  $\mathcal{F} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2(\gamma)$  qui à  $\varphi$  associe la trace sur  $\gamma$  de  $(\mathcal{S}\varphi)$  et enfin l'opérateur  $S : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  qui à  $\varphi$  associe

$$(S\varphi)(x) = \int_{\partial D} \varphi(y)G(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Nous obtenons l'analogie des factorisations du chapitre précédent :

$$\begin{aligned} N &= -B\mathcal{H}, \\ \mathcal{F} &= BS. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $y$  un point de  $\Gamma$ . Considérons  $G(\cdot, y)$ , solution du problème

$$\begin{cases} \Delta G(\cdot, y) + k^2 G(\cdot, y) = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_\nu G(\cdot, y) = \delta_y & \text{sur } \Gamma, \\ (CR). \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous pouvons montrer (voir Annexe A) que le problème (2.11) a une solution unique dans  $L^2_{\text{loc}}(W)$  et que cette solution admet la même expression que la solution fondamentale lorsque la source se trouve à l'intérieur du guide, soit

$$G(x, y) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2i\beta_n} e^{i\beta_n|x_3-y_3|} \theta_n(x_S) \theta_n(y_S), \quad (2.12)$$

où nous avons supposé que l'hypothèse 1 (les  $\beta_n$  sont tous non nuls) est vérifiée. Les deux lemmes suivants vont nous permettre de justifier la LSM dans ce cas :

### Lemme 2.2

Soient  $\gamma \subset \Gamma$  et  $h \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ . Notons  $\tilde{h}$  le prolongement par 0 de  $h$  à  $\Gamma$ . Le problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_\nu u = \tilde{h} & \text{sur } \Gamma, \\ (CR), \end{cases} \quad (2.13)$$

est bien posé dans  $H^1_{\text{loc}}(W)$  sauf pour au plus un ensemble discret de nombres d'onde  $k$ .

*Démonstration.* Réécrivons le problème en domaine borné, en supposant sans perte de généralité que  $\gamma \subset (\partial\Sigma \times (-R, R))$  : trouver  $u \in H^1(W_R)$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } W_R, \\ \partial_\nu u = \tilde{h} & \text{sur } \Gamma_R, \\ \partial_\nu u = T_\pm u & \text{sur } \Sigma_{\pm R}. \end{cases}$$

Une formulation faible équivalente à ce problème est alors : trouver  $u \in H^1(W_R)$  telle que

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(W_R),$$

où  $a$  et  $\ell$  sont la forme hermitienne et la forme antilinéaire définies par

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{W_R} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v} \, dx - \int_{\Sigma_R} T_+ u \bar{v} \, ds(x) - \int_{\Sigma_{-R}} T_- u \bar{v} \, ds(x), \\ \ell(v) &= \int_{\gamma} h \bar{v} \, ds(x). \end{aligned}$$

Nous retrouvons le même type de problème variationnel que dans le lemme 1.4. Nous en déduisons que le problème est bien posé sauf pour au plus un ensemble discret de nombres d'onde  $k$ .  $\square$

**Lemme 2.3**

La solution du problème (2.13) a pour expression

$$u(x) = \int_{\gamma} h(y)G(x, y) ds(y), \quad x \in W.$$

*Démonstration.* Soit  $x \in W$  et  $r > 0$  tels que  $B(x, 2r) \in W_R$ . En raisonnant comme dans la preuve du lemme 1.9 (voir équation (1.18)), nous obtenons l'expression de  $u$

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) ds(y), \quad (2.14)$$

avec  $\nu_y$  la normale orientée vers l'intérieur de  $B(x, r)$ .

Par ailleurs, dans  $W_{R, r} := W_R \setminus \overline{B(x, r)}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{W_{R, r}} (u(y)(\Delta_y + k^2)G(x, y) - G(x, y)(\Delta_y + k^2)u(y)) dy \\ &= \int_{\partial B(x, r)} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) ds(y) + \int_{\Gamma_R} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) ds(y) \\ &\quad + \int_{\Sigma_R} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) ds(y) + \int_{\Sigma_{-R}} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) ds(y). \end{aligned}$$

Traitons séparément ces intégrales. Tout d'abord, l'intégrale sur  $\Gamma_R$  devient

$$\int_{\Gamma_R} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) ds(y) = - \int_{\Gamma_R} \tilde{h}(y)G(x, y) ds(y) = - \int_{\gamma} h(y)G(x, y) ds(y).$$

Les intégrales sur les sections  $\Sigma_{\pm R}$  s'annulent étant donnée l'expression des opérateurs  $T_{\pm}$ . Finalement, nous obtenons

$$\int_{\partial B(x, r)} (u(y)\partial_{\nu_y}G(x, y) - \partial_{\nu_y}u(y)G(x, y)) ds(y) = \int_{\gamma} h(y)G(x, y) ds(y),$$

ce qui nous donne, en remplaçant dans l'expression de  $u$  obtenue en (2.14), le résultat escompté.  $\square$

Nous pouvons à présent prouver le lemme :

**Lemme 2.4**

Sous réserve que les hypothèses 1, 7 et 8 soient vérifiées, nous avons les propriétés suivantes :

- i) L'opérateur  $S$  est un isomorphisme ;
- ii) Les opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{F}$  satisfont  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$  ;
- iii) Les opérateurs  $B$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $N$  sont compacts, injectifs et d'image dense.

*Démonstration.* Le fait que  $S$  soit un isomorphisme se montre comme pour  $\mathcal{T}$  dans la preuve du lemme 1.5. De même, la preuve du point ii) est identique.

Montrons donc le dernier point. Les opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{H}$  sont compacts car ce sont des opérateurs intégraux à noyaux réguliers.

Or  $N = -\mathcal{F}S^{-1}\mathcal{H}$ , donc  $N$  est aussi compact et la compacité de  $B$  se déduit de la factorisation

$\mathcal{F} = BS$ .

Montrons l'injectivité de  $\mathcal{H}$  :

Soit  $h \in L^2(\gamma)$  telle que  $\mathcal{H}h = 0$ . Posons

$$v_h(x) = \int_{\gamma} G(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in W,$$

si bien que nous avons

$$v_h(x) = 0, \quad \forall x \in \partial D,$$

ce qui implique que  $v_h$  est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta v_h + k^2 v_h = 0 & \text{dans } D, \\ v_h = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (2.15)$$

Comme  $k^2$  n'est pas une valeur propre de  $-\Delta$  dans  $D$  avec condition de Dirichlet d'après l'hypothèse 8,  $v_h$  est nulle dans  $D$ . Grâce au théorème du prolongement unique 1.1,  $v_h$  est alors nulle dans tout le guide.

Par ailleurs, considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_{\nu} v = \tilde{h} & \text{sur } \Gamma, \\ (CR), \end{cases}$$

où  $\tilde{h}$  est le prolongement de  $h$  par 0 à  $\Gamma$ . D'après les lemmes 2.2 et 2.3, ce problème est bien posé et sa solution a pour expression

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\Gamma} \tilde{h}(y)G(x, y) ds(y) \\ &= \int_{\gamma} h(y)G(x, y) ds(y) \\ &= v_h(x). \end{aligned}$$

Or, la solution de ce problème est nulle dans tout  $W$ , ce qui implique en particulier que  $\partial_{\nu} v = 0$  sur  $\Gamma$ , et donc a fortiori que  $h = 0$ , ce qui prouve l'injectivité de  $\mathcal{H}$ .

Montrons à présent l'injectivité de  $\mathcal{F}$ . Soit donc  $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  telle que  $\mathcal{F}\varphi = 0$ . Cela revient à avoir  $\mathcal{S}\varphi|_{\gamma} = 0$ . Nous avons par ailleurs  $\partial_{\nu}(\mathcal{S}\varphi)|_{\gamma} = 0$ , ce qui nous permet d'appliquer le théorème de prolongement unique 1.2. Nous en déduisons donc que  $\mathcal{S}\varphi = 0$  dans  $\Omega$ .

Par ailleurs, introduisons le potentiel de simple couche de l'espace libre  $\mathcal{S}_{\infty}$ , opérateur pour lequel nous avons remplacé le noyau  $G$  dans l'expression de  $\mathcal{S}$  par le noyau de Green de l'espace libre. L'opérateur  $\mathcal{S} - \mathcal{S}_{\infty}$  est un opérateur intégral à noyau régulier, ce qui implique la continuité de sa trace et de sa trace normale au travers de  $\partial D$  :

$$\begin{aligned} ((\mathcal{S} - \mathcal{S}_{\infty})\varphi)^+ &= ((\mathcal{S} - \mathcal{S}_{\infty})\varphi)^-, \\ \partial_{\nu}((\mathcal{S} - \mathcal{S}_{\infty})\varphi)^+ &= \partial_{\nu}((\mathcal{S} - \mathcal{S}_{\infty})\varphi)^-, \end{aligned}$$

où l'exposant  $+$ , respectivement  $-$ , désigne la trace sur  $\partial D$  de la fonction définie sur  $D$ , respectivement sur  $\Omega$ .

Par ailleurs, les propriétés de saut du potentiel de simple couche pour l'espace libre nous apprennent que

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{\infty}\varphi)^- - (\mathcal{S}_{\infty}\varphi)^+ &= 0, \\ \partial_{\nu}(\mathcal{S}_{\infty}\varphi)^- - \partial_{\nu}(\mathcal{S}_{\infty}\varphi)^+ &= \varphi. \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors les mêmes propriétés pour notre opérateur dans le guide :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}\varphi)^- - (\mathcal{S}\varphi)^+ &= 0, \\ \partial_\nu(\mathcal{S}\varphi)^- - \partial_\nu(\mathcal{S}\varphi)^+ &= \varphi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La première équation de (2.16) implique que  $\mathcal{S}\varphi$  est solution du problème (2.15), ce qui entraîne que  $\mathcal{S}\varphi = 0$  dans  $D$ , si bien que nous pouvons exprimer  $\varphi$  à partir de la seconde équation de (2.16) :

$$\varphi = \partial_\nu(\mathcal{S}\varphi)^- - \partial_\nu(\mathcal{S}\varphi)^+ = 0,$$

ce qui conclut la preuve de l'injectivité de  $\mathcal{F}$ .

Enfin,  $S$  étant un isomorphisme, l'injectivité de  $\mathcal{F}$  implique celle de  $B$ , et la factorisation  $N = -B\mathcal{H}$  nous donne celle de  $N$ .

La densité de l'image de  $\mathcal{F}$  vient de l'injectivité de  $\mathcal{H}$  et de l'égalité  $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}^*}$ , et de même pour la densité de l'image de  $\mathcal{H}$ . Nous en déduisons la même propriété pour  $N$  et  $B$  grâce aux factorisations.  $\square$

### Proposition 2.5

On a  $z \in D$  si et seulement si  $G(\cdot, z) \in R(\mathcal{F})$ .

*Démonstration.* Rappelons que les images de  $B$  et de  $\mathcal{F}$  sont égales.

Soit  $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ . Alors,  $\mathcal{F}\varphi$  est la trace sur  $\gamma$  de la solution  $u$  du problème

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = \mathcal{S}\varphi & \text{sur } \partial D, \\ (CR). \end{cases} \quad (2.17)$$

Si  $z \in D$ , nous pouvons considérer

$$\varphi_z = S^{-1}(G(\cdot, z)|_{\partial D}).$$

La fonction  $G(\cdot, z)|_{\partial D}$  est bien un élément de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  et la fonction  $u = G(\cdot, z)$  est la solution du problème (2.17) associée à  $\varphi_z$ , ce qui montre que  $G(\cdot, z)|_\gamma \in R(\mathcal{F})$ .

Considérons à présent le cas où  $z \notin D$ , et supposons que  $G(\cdot, z)|_\gamma \in R(B)$ . Il existe alors  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  et un certain  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$  tels que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = f & \text{sur } \partial D, \\ (CR), \end{cases}$$

avec  $u|_\gamma = G(\cdot, z)|_\gamma$ .

Considérons alors  $w = u - G(\cdot, z)$ . Cette fonction vérifie l'équation de Helmholtz homogène dans  $\Omega \setminus \{z\}$ , et nous avons que  $\partial_\nu w|_\gamma = w|_\gamma = 0$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème du prolongement unique 1.2 à cette fonction dans  $\Omega \setminus \{z\}$ , ce qui implique que  $w = 0$  dans  $\Omega \setminus \{z\}$ . Or, ceci est impossible étant donné que  $G(\cdot, z) \notin H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .

La fonction  $G(\cdot, z)|_\gamma$  ne peut donc pas appartenir à l'image de  $B$  et de  $\mathcal{F}$ .  $\square$

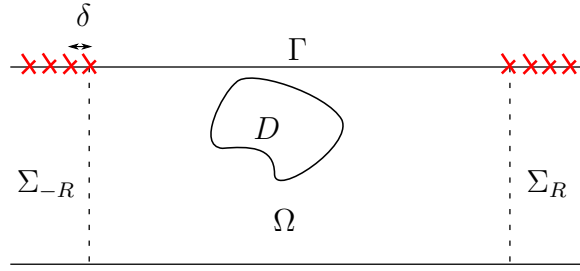


FIGURE 2.1 – Sources et mesures à la surface du guide

Nous avons enfin l'analogue du théorème 1.7, l'énoncé étant le même au remplacement de  $\widehat{\Sigma}$  par  $\gamma$  près. Il est donc possible de formuler la Linear Sampling Method avec sollicitations et mesures sur la surface du guide.

Nous pourrions résoudre numériquement l'équation  $Nh = G(\cdot, z)|_\gamma$  en l'approchant par une équation matricielle dans un espace de dimension finie, mais une telle discrétisation serait arbitraire et indépendante de la nature modale des champs diffractés. Nous proposons plutôt, afin d'optimiser l'emplacement et le nombre des points sources et des points de mesure, d'établir un lien entre la formulation modale et l'utilisation de sollicitations et mesures à la surface.

## 2.3 Lien entre la formulation modale et des sollicitations et mesures sur la surface

Nous allons maintenant voir comment obtenir la matrice de scattering à partir de données acquises à la surface du guide.

L'idée est la suivante. Nous considérons des points sources et des points de mesure situés sur la surface du guide  $\Gamma$ . Nous allons être à même de déterminer la matrice de scattering à partir des champs diffractés en chaque point de mesure et pour des sollicitations en chaque point source. Nous n'allons considérer ici que le cas d'un guide en dimension 2, la dimension 3 sera traitée dans le cas d'un guide d'ondes élastiques. La section  $\Sigma$  est donc réduite à un intervalle ouvert que nous noterons  $(0, d)$  avec  $d > 0$ , et sa coordonnée transverse  $x_S$  est notée  $x_1$ .

Soit  $h$  une fonction à support compact définie sur  $\Gamma$ . Grâce au lemme 2.3 précédent, nous sommes à même d'exprimer la solution de (2.13), appelée champ incident, par

$$u^i(x_1, x_3) = - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\beta_n} \theta_n(x_1) \theta_n(d) \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_n |x_3 - y_3|} h(y_3) dy_3. \quad (2.18)$$

Considérons  $(x_3^{r\pm})_{0 \leq r \leq M-1}$  l'ensemble des abscisses des points de mesure, et  $(x_3^{s\pm})_{0 \leq s \leq M-1}$  l'ensemble des abscisses des points d'émission pour  $M \geq P$ , avec  $P$  le nombre de modes propagatifs à la fréquence considérée. Plus précisément, nous avons

$$\begin{aligned} x_3^{r\pm} &= \pm(R + r\delta), \\ x_3^{s\pm} &= \pm(R + s\delta), \end{aligned}$$

avec  $\delta > 0$  la distance entre deux points sources ou deux points de mesure successifs et  $R$  l'abscisse des sections  $\Sigma_{\pm R}$  définie précédemment. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions paires à support compact. Nous supposons désormais que les sources dans (2.18) sont de la forme

$h = g(\cdot - x_3^{s\pm})$ . Par ailleurs, les mesures réalisées à la surface du guide ne seront pas forcément ponctuelles. C'est pourquoi la mesure sera pondérée par une fonction de la forme  $f(\cdot - x_3^{r\pm})$ . Par exemple, dans le cas concret d'un interféromètre laser, la mesure réalisée donne plutôt la valeur moyenne du déplacement dans la tache focale. Cela revient à choisir une fonction de mesure de la forme

$$f(x_3) = \frac{\chi_{[-L/2, L/2]}(x_3)}{L},$$

où  $\chi_{[-L/2, L/2]}$  désigne la fonction caractéristique du segment  $[-L/2, L/2]$  et  $L > 0$  est la largeur de la tache focale. Cette fonction tend vers le Dirac lorsque  $L$  tend vers 0, ce qui correspond à une mesure ponctuelle.

Enfin, les points de source et de mesure seront situés sur le bord supérieur du guide, d'autres cas (mesures sur le bord supérieur et sources sur le bord inférieur, par exemple) se traiteraient de manière analogue.

Nous avons donc quatre configurations différentes à traiter, selon que la source se trouve à gauche ou à droite de la zone à imager suivant l'axe du guide (l'abscisse de la source est alors respectivement inférieure à  $-R$  ou supérieure à  $R$ ) et de même pour le point de mesure. En étudiant chaque configuration, nous serons à même d'exprimer notre champ diffracté à la surface en fonction des coefficients de la matrice de LSM.

Plaçons-nous pour commencer dans le cas où la source se trouve à gauche en  $x_3^{s-}$  et la mesure à droite en  $x_3^{r+}$ . Nous déduisons de (2.18) l'expression du champ incident

$$\begin{aligned} u^i(x) &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2i\beta_n} \theta_n(d) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_n y_3} g(y_3 + R + s\delta) dy_3 \right) e^{i\beta_n x_3} \theta_n(x_1) \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n \delta} u_n^+(x), \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_n z} g(z) dz.$$

Considérons à présent le problème de diffraction (2.2) avec  $f = -u^i|_{\partial D}$  : trouver  $u^s \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  solution de

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u^s = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u^s = -u^i & \text{sur } \partial D, \\ & (CR). \end{cases} \quad (2.20)$$

Le champ diffracté  $u^s$  associé à  $u^i$  donné par (2.18) avec  $h = g(\cdot - x_3^{s-})$  est alors par linéarité

$$u^s = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n \delta} u_n^{s+}, \quad (2.21)$$

où  $u_n^{s+}$  est la solution de (2.20) pour  $u^i = u_n^+$ .

Nous pouvons alors écrire, grâce au lemme de propagation 1.3, pour un point à la surface du guide,

$$u_n^{s+}(d, x_3) = \sum_{m \in \mathbb{N}} (u_n^{s+}(\cdot, R), \theta_m)_{\Sigma_R} e^{i\beta_m(x_3 - R)} \theta_m(d), \quad x_3 > R,$$



et nous obtenons, en injectant cette expression dans (2.21),

$$u^s(d, x_3) = - \sum_{m, n \in \mathbb{N}} e^{i\beta_m(x_3 - R)} \theta_m(d) \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} S_{mn}^{++} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n \delta}. \quad (2.22)$$

Nous supposons que la mesure du champ diffracté n'est pas strictement ponctuelle. Considérons donc la mesure pondérée par la fonction  $f$ , supposée à support compact. La mesure au point d'abscisse  $x_3^+ = R + r\delta$  a alors pour expression

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u^s(d, x_3) f(x_3 - x_3^+) dx_3 &= - \sum_{m, n \in \mathbb{N}} e^{i\beta_m r \delta} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_m y} f(y) dy \right) \theta_m(d) \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} S_{mn}^{++} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n \delta} \\ &= - \sum_{m, n \in \mathbb{N}} e^{i\beta_m r \delta} \gamma_m \theta_m(d) \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} S_{mn}^{++} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n \delta}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

où

$$\gamma_m = \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_m y} f(y) dy.$$

Nous nous plaçons dorénavant dans l'hypothèse de champ lointain, ce qui nous permet de tronquer les séries modales dans (2.23) aux  $P$  premiers termes. Le champ diffracté mesuré au point  $(d, x_3^+)$  pour une source située au point  $(d, x_3^s)$ ,  $r, s = 0, \dots, M-1$ , peut être approché par  $M_{rs}^{++}$  donné par

$$M_{rs}^{++} = - \sum_{m=0}^{P-1} \sum_{n=0}^{P-1} e^{ir\beta_m \delta} \gamma_m \theta_m(d) \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} S_{mn}^{++} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n \delta}.$$

Introduisons à présent différentes matrices : soit  $V$  la matrice de Vandermonde de taille  $M \times P$ , dont les coefficients sont

$$V_{mn} = e^{im\beta_n \delta}, \quad m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, P-1,$$

$F_e$ ,  $F_r$  et  $T$  les matrices diagonales, de termes généraux respectifs  $\alpha_n$ ,  $\gamma_n$  et  $\theta_n(d)$  pour  $n = 0, \dots, P-1$ . La matrice  $M^{++}$  de taille  $M \times M$  de terme général  $M_{rs}^{++}$  a donc pour expression

$$M^{++} = -(VTF_r)(S^{++}K)(VTF_e)^T = -RU^{++}E^T,$$

avec  $\cdot^T$  désignant la transposition et  $E$  et  $R$  les matrices d'émission et de réception définies par

$$\begin{aligned} E &= VTF_e, \\ R &= VTF_r. \end{aligned}$$

De la même manière, nous considérons à présent une mesure à gauche du défaut pour la même source. Grâce au lemme 1.3 appliqué à  $u_n^{s+}$ , nous avons pour  $x_3 < -R$

$$u_n^{s+}(d, x_3) = \sum_{m \in \mathbb{N}} (u_n^{s+}(\cdot, -R), \theta_m)_{\Sigma_{-R}} e^{-i\beta_m(x_3+R)} \theta_m(d) = \sum_{m \in \mathbb{N}} S_{mn}^{+-} e^{-i\beta_m(x_3+R)} \theta_m(d).$$

En procédant comme précédemment, la mesure du champ diffracté au point  $(d, -R - r\delta)$  pour une source au point  $(d, -R - s\delta)$ ,  $r, s = 0, \dots, M - 1$  peut être approchée par  $M_{rs}^{+-}$ , avec

$$M_{rs}^{+-} = - \sum_{m=0}^{P-1} \sum_{n=0}^{P-1} e^{ir\beta_m\delta} \gamma_m \theta_m(d) \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} S_{mn}^{+-} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n\delta},$$

qui est le terme général de la matrice

$$M^{+-} = -RU^{+-}E^T.$$

Remarquons que nous avons utilisé la parité de  $f$  : la mesure est effectuée en  $x_3^{r-}$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_m(x_3+R)} f(x_3 - x_3^{r-}) dx_3 &= e^{i\beta_m r\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_m y} f(y) dy \\ &= e^{i\beta_m r\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_m y} f(y) dy \\ &= e^{i\beta_m r\delta} \gamma_m. \end{aligned}$$

Considérons à présent une source au point d'abscisse  $x_3^{s+} = R + s\delta$ . D'après (2.18), nous pouvons réécrire

$$\begin{aligned} u^i &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2i\beta_n} \theta_n(d) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_n y_3} g(y_3 - R - s\delta) dy_3 \right) u_n^- \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n\delta} u_n^-. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ici le fait que  $g$  est paire :

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_n z} g(z) dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_n z} g(z) dz.$$

Le champ diffracté a alors pour expression

$$u^s = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n R}}{2i\beta_n} \alpha_n \theta_n(d) e^{is\beta_n\delta} u_n^{s-},$$

de sorte que, pour  $r, s = 0, \dots, M - 1$ , le champ mesuré au point  $(d, -R - r\delta)$  pour une source en  $(d, R + s\delta)$  peut être approché par  $M_{rs}^{--}$ , qui est le terme général de la matrice

$$M^{--} = -RU^{--}E^T,$$

et le champ mesuré au point  $(d, R + r\delta)$  peut être approché par  $M_{rs}^{-+}$ , terme général de la matrice

$$M^{-+} = -RU^{-+}E^T.$$

Nous pouvons alors réunir les résultats précédents pour former le système

$$\mathcal{M} = -\mathcal{R}\mathcal{U}\mathcal{E}^T, \tag{2.24}$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M^{+-} & M^{--} \\ M^{++} & M^{-+} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

La Linear Sampling Method modale nécessite de former la matrice  $\mathcal{U}$  (voir section 2.1, en particulier la formule (2.8)). Il nous faut donc résoudre le système (2.24), c'est-à-dire obtenir  $\mathcal{U}$  à partir de  $\mathcal{M}$ . Si  $M \neq P$ , la résolution est alors à comprendre au sens des moindres carrés. Dans la pratique, nous résolvons le système (2.24) pour chaque bloc séparément, c'est-à-dire

$$M^{\circ\bullet} = -RU^{\circ\bullet}E^T,$$

où  $\circ$  et  $\bullet$  remplacent le symbole  $+$  ou  $-$ . Comme nous le verrons dans la section suivante, nous pouvons aisément choisir les fonctions  $f$  et  $g$  de sorte que les matrices diagonales  $F_e$  et  $F_r$  soient inversibles. De même, la matrice diagonale  $T$  est inversible car aucun des  $\theta_n(d)$  n'est nul, et nous choisirons les paramètres  $\delta$  et  $M$  de sorte que  $V^*V$  soit inversible. Nous en déduisons l'expression de  $U$  en fonction de  $M$  :

$$U^{\circ\bullet} = -F_r^{-1}T^{-1}(V^*V)^{-1}(V^*M^{\circ\bullet}V^{*T})(V^*V)^{-T}T^{-1}F_e^{-1}. \quad (2.25)$$

### Remarque 2.2

*Nous avons dans tout ce qui précède choisi les mêmes points pour les sources et les mesures. Nous avons par ailleurs choisi des fonctions de source  $g$  et de mesure  $f$  paires. Ces restrictions ont été faites pour simplifier les expressions des matrices  $R$  et  $E$  mais ne sont en aucun cas nécessaires. Notons que, dans le cas où la mesure est ponctuelle ( $f = \delta$ ) et où la source est ponctuelle également ( $g = \delta$ ), où  $\delta$  désigne le Dirac, les matrices  $F_e$  et  $F_r$  coïncident avec la matrice identité, et donc les matrices  $E$  et  $R$  sont alors toutes les deux égales à  $VT$ .*

À nouveau, dans le cas du back-scattering, on ne considère que la configuration où la source et la mesure sont à gauche du défaut. L'équation matricielle est alors

$$M^{+-} = -RU^{+-}E^T.$$

Contrairement à la Linear Sampling Method exprimée directement à la surface du guide (décrite en section 2.2), nous obtenons une méthode applicable pour imager un défaut sans discrétisation de la zone de mesure ou régularisation supplémentaire. De plus, certains paramètres liés aux capteurs apparaissent naturellement : le nombre de points  $M$ , l'espacement  $\delta$  entre ces points et les fonctions de pondération associées aux sources et aux mesures, respectivement  $g$  et  $f$ . Nous allons nous intéresser à l'influence de ces différents paramètres sur l'efficacité de l'imagerie du défaut.

## 2.4 Conditionnement des matrices d'émission et de réception

### 2.4.1 Étude théorique

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, nous pouvons déterminer les blocs de la matrice  $\mathcal{U}$  de Linear Sampling Method à partir de ceux de la matrice de mesure  $\mathcal{M}$  au moyen de l'inversion de deux matrices d'émission et de réception,  $E$  et  $R$ , que nous pouvons décomposer suivant

$$\begin{aligned} E &= VTF_e, \\ R &= VTF_r, \end{aligned} \quad (2.26)$$

où  $V$ ,  $T$ ,  $F_e$  et  $F_r$  sont respectivement une matrice de Vandermonde, la matrice des modes et les matrices de pondération pour l'émission et la réception.

Il est important dans le cadre de la reconstruction de défauts de s'intéresser à la sensibilité au bruit de la méthode, à savoir le procédé complet nous permettant de passer des données de surface à l'image du défaut. Il s'agit donc d'une part du calcul nous permettant d'obtenir  $\mathcal{U}$  à partir de  $\mathcal{M}$  à l'aide de (2.24) et d'autre part de la résolution de (2.8). La sensibilité au bruit de la résolution de (2.8) a déjà été étudiée dans [32]. Nous nous concentrons donc ici sur la première étape. Dans le cadre du Contrôle Non Destructif, les mesures utilisées comme données d'entrée possèdent toujours une part de bruit inhérente à la mesure. C'est pourquoi il nous faut quantifier cette sensibilité, et nous le faisons au travers du conditionnement des matrices à inverser.

Rappelons la définition du conditionnement. Soit une matrice  $A$  à valeurs complexes inversible. Le conditionnement de  $A$  est

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

pour une certaine norme matricielle  $\|\cdot\|$  associée à une norme vectorielle que nous noterons de la même façon. Prenons un exemple simple : soit le système linéaire  $Ax = b$ , où  $A$  est une matrice inversible et  $b$  un vecteur de données. Supposons que les données  $b$  soient entachées d'un bruit  $\delta b$  et intéressons-nous à l'erreur relative sur la solution, soit  $\|\delta x\|/\|x\|$ , en fonction de l'erreur relative sur la donnée, soit  $\|\delta b\|/\|b\|$ . Nous avons

$$\begin{aligned}\delta x &= A^{-1}\delta b, \\ b &= Ax.\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Ce calcul nous montre que le conditionnement permet d'évaluer la robustesse de l'inversion vis-à-vis du bruit. Pour la quantifier, nous nous contenterons d'une estimation de l'ordre de grandeur du conditionnement. Pour fixer les idées, un conditionnement proche de 1 sera dit bon alors qu'un conditionnement dépassant 100 sera considéré comme mauvais.

Dans notre cas, nous retenons pour  $\|\cdot\|$  la norme subordonnée à la norme euclidienne, notée  $\|\cdot\|_2$  :

$$\|A\|_2 = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^P \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

Notons que  $\|A\|_2$  coïncide avec le rayon spectral de  $A$ .

Dans le cas où  $A$  est une matrice diagonalisable de taille  $P$ , nous avons alors

$$\kappa(A) = \left| \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_P(A)} \right|,$$

où  $\lambda_1(A)$  et  $\lambda_P(A)$  désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de  $A$ .

Considérons à présent une matrice  $A$  injective de taille  $M \times P$ , avec  $M \geq P$ . Le conditionnement de  $A$  est défini comme la racine carrée de celui de  $A^*A$ , il a donc pour expression

$$\kappa(A) = \sqrt{\frac{\lambda_1(A^*A)}{\lambda_P(A^*A)}}. \quad (2.27)$$

Ces valeurs propres sont toutes strictement positives car  $A^*A$  est définie positive grâce à l'injectivité de  $A$ . Par ailleurs, il est clair que, pour deux matrices  $A$  et  $B$  telles que le produit  $AB$  ait un sens,

$$\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B).$$

Nous allons donc nous intéresser successivement au conditionnement des matrices impliquées dans les factorisations (2.26) pour évaluer le conditionnement des matrices  $E$  et  $R$ .

### Les matrices de pondération

Tout d'abord, considérons les matrices de pondération,  $F_e$  et  $F_r$ , qui sont diagonales de terme général

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_n x} g(x) dx, \\ \gamma_n &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_n x} f(x) dx,\end{aligned}$$

avec  $f$  et  $g$  des fonctions paires à support compact. Nous n'allons considérer que  $F_r$  ici, l'analyse de  $F_e$  étant identique.

Il est clair que les coefficients  $\gamma_n$  sont liés à la transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\hat{f}$  :

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu x} f(x) dx.$$

Le conditionnement de  $F_r$  est alors

$$\kappa(F_r) = \frac{\max_{n=0,\dots,P-1} |\hat{f}(\beta_n)|}{\min_{n=0,\dots,P-1} |\hat{f}(\beta_n)|}.$$

Rappelons à présent que, dans le cas du guide acoustique de Neumann en deux dimensions,  $\beta_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}$ , avec  $k_n = n\pi/d$ ,  $d$  étant l'épaisseur du guide d'onde. Pour les modes propagatifs, nous voyons que  $\beta_n \in (0, k)$ . Par ailleurs, rappelons la propriété suivante de la transformée de Fourier : soient  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $\psi$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{C}$ . Posons

$$\psi_a : x \mapsto \psi(ax).$$

La transformée de Fourier de  $\psi_a$  s'écrit alors

$$\widehat{\psi_a}(\nu) = \frac{1}{|a|} \widehat{\psi}\left(\frac{\nu}{a}\right).$$

Choisissons donc  $\psi$  une fonction paire à support compact et considérons  $f = \psi_a$ ,  $a > 0$ . De manière heuristique, nous pouvons choisir  $a$  suffisamment petit pour que la transformée de Fourier de  $f$  varie peu sur  $(0, k)$ , de sorte que le conditionnement de la matrice  $F_r$  soit proche de 1. le cas idéal est obtenu pour  $f = \delta$  pour laquelle  $F_r$  coïncide alors avec l'identité.

### La matrice des modes

Il s'agit de la matrice diagonale  $T$ , de terme général  $\theta_n(d)$ ,  $n = 0, \dots, P - 1$ . Rappelons l'expression des fonctions transverses dans le cas particulier du guide acoustique de Neumann en deux dimensions :

$$\begin{cases} \theta_0(x_1) = \sqrt{\frac{1}{d}}, \\ \theta_n(x_1) = \sqrt{\frac{2}{d}} \cos\left(\frac{n\pi}{d}x_1\right) \quad n \geq 1. \end{cases}$$

La matrice  $T$  étant diagonale, nous avons

$$\begin{aligned} \kappa(T) &= \frac{\max_{n=0, \dots, P-1} |\theta_n(d)|}{\min_{n=0, \dots, P-1} |\theta_n(d)|} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Cette matrice est donc bien conditionnée quelque soit la fréquence.

### La matrice de Vandermonde

Il nous reste donc à étudier la matrice de Vandermonde  $V$ , de terme général

$$V_{mn} = e^{im\beta_n\delta}, \quad m = 0, \dots, M - 1, \quad n = 0, \dots, P - 1. \quad (2.28)$$

Rappelons ce qu'est une matrice de Vandermonde. Il s'agit d'une matrice de taille  $M \times P$ ,  $M, P > 0$  de la forme

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{M-1} & z_2^{M-1} & \dots & z_P^{M-1} \end{pmatrix},$$

avec  $(z_1, \dots, z_P) \in \mathbb{C}^P$ . La matrice  $V$  est une matrice de Vandermonde dont les coefficients appartiennent au cercle unité.

Nous rappelons le résultat classique suivant.

#### Lemme 2.6

Dans le cas où la matrice  $\mathcal{V}$  est carrée, c'est-à-dire  $M = P$ , son déterminant est donné par

$$\det(\mathcal{V}) = \prod_{1 \leq k < l \leq P} (z_k - z_l). \quad (2.29)$$

Elle est donc inversible si et seulement si tous les  $z_k$  sont différents,  $k = 1, \dots, P$ .

Dans le cas où  $M > P$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) La matrice  $\mathcal{V}$  est injective ;
- ii) La matrice  $\mathcal{V}^*\mathcal{V}$  est inversible ;
- iii) Tous les  $z_k$  sont différents,  $k = 1, \dots, P$ .

Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante pour que  $V^*V$  soit inversible : il faut et il suffit que

$$e^{i\beta_m\delta} - e^{i\beta_n\delta} \neq 0, \quad 0 \leq m < n \leq P-1,$$

soit

$$(\beta_m - \beta_n)\delta \neq 2\pi q, \quad m \neq n, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (2.30)$$

Nous cherchons à étudier le conditionnement de la matrice de Vandermonde  $V$ , donné par (2.27). Le conditionnement des matrices de Vandermonde, dans le cas où les coefficients sont sur le cercle unité, a fait l'objet de nombreuses études. Ces matrices interviennent en effet dans de nombreux domaines comme les statistiques, le traitement du signal ou encore le machine learning [68, 73, 107, 128]. Trois paramètres peuvent jouer sur le conditionnement de  $V$ , à un nombre de modes propagatifs  $P$  donné :

- le nombre de points  $M$  considéré, qui correspond au nombre de lignes de  $V$  ;
- l'écartement  $\delta$  entre ces points ;
- la fréquence du signal  $k$ .

Le cas le plus simple et le plus naturel est de considérer le cas carré ( $M = P$ ), qui simplifie la formule (2.25) en

$$U = -F_r^{-1}T^{-1}V^{-1}MV^{-T}T^{-1}F_e.$$

### Conditionnement dans le cas $M = P$

Nous allons ici considérer le conditionnement pour la norme infinie, dans le cas d'une matrice carrée inversible  $A$  :

$$\kappa_\infty(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty,$$

où la norme infinie matricielle s'écrit

$$\|A\|_\infty = \max_{m=1,\dots,P} \left( \sum_{n=1}^P |A_{mn}| \right).$$

La dimension étant finie, les normes sont équivalentes et donc un encadrement sur le conditionnement pour la norme infinie nous fournit un encadrement pour le conditionnement pour la norme euclidienne à une constante multiplicative près.

Dans le cas d'une matrice de Vandermonde carrée, un encadrement de la norme infinie de l'inverse de la matrice a été obtenu par Gautschi dans [73] : soit  $\mathcal{V}$  une matrice de Vandermonde carrée de taille  $P$ , avec  $(z_1, \dots, z_P) \in \mathbb{C}^P$  ses coefficients :

$$\max_m \prod_{n \neq m} \frac{\max(1, |z_n|)}{|z_m - z_n|} \leq \|\mathcal{V}^{-1}\|_\infty \leq \max_m \prod_{n \neq m} \frac{1 + |z_n|}{|z_m - z_n|}.$$

La borne supérieure est atteinte si  $z_n = |z_n|e^{i\theta}$  avec  $\theta$  réel fixé pour tout  $n$ .

Dans le cas de notre matrice  $V$  (2.28), nous pouvons simplifier cette expression du fait que ses coefficients sont de module 1. De plus,

$$\begin{aligned} |e^{i\beta_m\delta} - e^{i\beta_n\delta}| &= \sqrt{\left[ 2 \sin\left(\frac{\beta_m + \beta_n}{2}\delta\right) \sin\left(\frac{\beta_m - \beta_n}{2}\delta\right) \right]^2 + \left[ 2 \cos\left(\frac{\beta_m + \beta_n}{2}\delta\right) \sin\left(\frac{\beta_m - \beta_n}{2}\delta\right) \right]^2} \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{\beta_m - \beta_n}{2}\delta\right) \right|. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\|V\|_\infty = P,$$

d'où l'encadrement du conditionnement,

$$P \max_m \prod_{n \neq m} \frac{1}{2|\sin(\frac{\beta_m - \beta_n}{2}\delta)|} \leq \kappa_\infty(V) \leq P \max_m \prod_{n \neq m} \frac{1}{|\sin(\frac{\beta_m - \beta_n}{2}\delta)|}. \quad (2.31)$$

L'encadrement donné par (2.31) caractérise les valeurs de l'espacement  $\delta$  pour lesquelles le conditionnement est infini. Ces valeurs coïncident avec celles données par (2.30) pour lesquelles la matrice  $V^*V$  n'est pas inversible.

### Remarque 2.3

Nous constatons d'après (2.30) que, pour  $q$  fixé, il existe  $P(P-1)/2$  valeurs de  $\delta$  telles que  $V^*V$  n'est pas inversible. La densité des valeurs de  $\delta$  pour lesquelles la matrice  $V^*V$  n'est pas inversible augmente donc quadratiquement avec le nombre de modes propagatifs.

Nous allons voir qu'en augmentant le nombre de points  $M$ , ce qui a pour effet de travailler avec des matrices  $V$  rectangulaires de taille  $M \times P$  avec  $M > P$ , nous allons grandement améliorer le conditionnement de  $V^*V$ .

### Une remarque qualitative

Nous allons dans un premier temps nous intéresser au cas où le nombre de points  $M$  est deux fois plus grand que celui de modes propagatifs  $P$  :  $V$  est une matrice rectangulaire  $2P \times P$ . Nous pouvons alors l'écrire par blocs

$$V = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix},$$

$V_0$  et  $V_1$  étant carrées, avec  $V_1 = V_0 D_P$ ,

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\beta_0\delta} & e^{i\beta_1\delta} & \dots & e^{i\beta_{P-1}\delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i(P-1)\beta_0\delta} & e^{i(P-1)\beta_1\delta} & \dots & e^{i(P-1)\beta_{P-1}\delta} \end{pmatrix},$$

$$D_P = \begin{pmatrix} (e^{i\beta_0\delta})^P & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (e^{i\beta_1\delta})^P & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & (e^{i\beta_{P-2}\delta})^P & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (e^{i\beta_{P-1}\delta})^P \end{pmatrix}.$$

Notons que  $V_0$  est la matrice de Vandermonde que nous avons dans le cas carré  $M = P$ .

### Théorème 2.7

Si  $V_0^*V_0$  est à valeurs propres simples, nous avons

$$\kappa(V) < \kappa(V_0).$$



*Démonstration.* Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} V^*V &= V_0^*V_0 + V_1^*V_1 \\ &= V_0^*V_0 + D_P^*V_0^*V_0D_P. \end{aligned}$$

Notons aussi que  $D_P^*D_P = D_PD_P^* = I$ , où  $I$  est l'identité.

Or,  $V_0^*V_0$  et  $V_1^*V_1$  ont les mêmes valeurs propres : en effet, soit  $x$  un vecteur propre associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $V_1^*V_1$ . Alors,

$$\begin{aligned} V_1^*V_1x &= \lambda x, \\ D_P^*V_0^*V_0D_Px &= \lambda x, \\ V_0^*V_0D_Px &= \lambda D_Px. \end{aligned}$$

D'après l'expression de  $D_P$ ,  $D_Px \neq 0$  si  $x \neq 0$ , ce qui implique que  $\lambda$  est valeur propre de  $V_0^*V_0$  associée à  $D_Px$ .

Pour obtenir le conditionnement de  $V$ , nous allons exprimer  $\lambda_1(V^*V)$  et  $\lambda_P(V^*V)$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1(V^*V) &= \max_{\|x\|_2=1} x^*(V_0^*V_0 + V_1^*V_1)x \\ &\leq \max_{\|x\|_2=1} x^*V_0^*V_0x + \max_{\|x\|_2=1} x^*V_1^*V_1x \\ &\leq 2\lambda_1(V_0^*V_0). \end{aligned}$$

Nous avons en réalité une inégalité stricte : l'égalité n'est en effet possible, étant donné que  $V_0^*V_0$  et  $V_1^*V_1$  possèdent les mêmes valeurs propres, que si le vecteur unitaire  $x$  réalisant le maximum de  $x^*V^*Vx$  est vecteur propre associé aux deux matrices  $V_0^*V_0$  et  $V_1^*V_1$ . Cela reviendrait à dire que  $x$  et  $D_Px$  sont vecteurs propres de  $V_0^*V_0$  associés à  $\lambda_1$ . Or nous nous sommes restreint au cas où  $V_0^*V_0$  est à valeurs propres simples. Les vecteurs  $x$  et  $D_Px$  n'étant pas colinéaires, c'est impossible.

De même,

$$\begin{aligned} \lambda_P(V^*V) &= \min_{\|x\|_2=1} x^*(V_0^*V_0 + V_1^*V_1)x \\ &> \min_{\|x\|_2=1} x^*V_0^*V_0x + \min_{\|x\|_2=1} x^*V_1^*V_1x \\ &> 2\lambda_P(V_0^*V_0). \end{aligned}$$

D'où la majoration du conditionnement,

$$\begin{aligned} \kappa(V) &= \sqrt{\frac{\lambda_1(V^*V)}{\lambda_P(V^*V)}} \\ &< \kappa(V_0). \end{aligned}$$

□

Nous avons ainsi montré qu'en doublant le nombre de lignes par rapport au nombre de colonnes, c'est-à-dire en passant de  $M = P$  à  $M = 2P$ , nous diminuons strictement le conditionnement de  $V$ .

#### Remarque 2.4

La matrice  $V_0^*V_0$  n'est pas toujours à valeurs propres simples : un contre-exemple simple est obtenu pour  $P = 2$  et

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette étude qualitative nous montre qu'il est intéressant de considérer  $M > P$ . Nous nous demandons donc à présent quel est le comportement du conditionnement de  $V$  pour  $M$  grand par rapport à  $P$ .

### Conditionnement dans le cas $M > P$

Dans ce cas, des majorations du conditionnement de  $V$  ont été proposées dans la littérature [107, 128]. Nous utilisons celle de [107], dont la preuve est détaillée dans l'annexe B et qui dépend de manière simple des paramètres  $M$  et  $\delta$ . Cette majoration est donnée par :

$$\kappa(V) \leq \sqrt{\frac{M + \frac{1}{\Delta} - 1}{M - \frac{1}{\Delta} - 1}}, \quad (2.32)$$

avec  $\Delta$  défini comme suit. Posons  $f_n = \beta_n \delta / 2\pi$  et soit  $d_w$  la distance modulo 1, c'est-à-dire

$$d_w(f, g) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |f - g + q|.$$

Alors,

$$\Delta = \min_{\substack{n, m=0, \dots, P-1 \\ n \neq m}} d_w(f_n, f_m). \quad (2.33)$$

La majoration (2.32) n'est évidemment valable que si  $M > 1/\Delta + 1$ .

Elle montre que  $\kappa(V)$  tend vers 1 lorsque  $M$  tend vers l'infini à  $\delta$  fixé. Autrement dit, nous pouvons réduire le conditionnement de la matrice de Vandermonde autant que nous le voulons en augmentant le nombre de points  $M$ , à un espacement  $\delta$  donné.

Un autre paramètre sur lequel nous pouvons jouer est le paramètre  $\Delta$ . Nous allons chercher à le maximiser pour ainsi minimiser la borne supérieure du conditionnement de  $V$ .

Nous savons déjà qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $V^*V$  soit inversible est que la relation (2.30) soit vérifiée. Posons

$$\delta_0 = \frac{2\pi}{\max_{\substack{m, n=0, \dots, P-1 \\ m \neq n}} |\beta_m - \beta_n|}. \quad (2.34)$$

Une condition suffisante pour que  $V^*V$  soit inversible est donc que  $\delta < \delta_0$ . Or  $\beta_m = \sqrt{k^2 - k_m^2}$  avec  $k_m = m\pi/d$ . Le maximum dans (2.34) est donc atteint pour  $m = 0$  et  $n = P - 1$  :

$$\delta_0 = \frac{2\pi}{\beta_0 - \beta_{P-1}} = \frac{2\pi}{k \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{k_{P-1}^2}{k^2}} \right)}$$

Nous voyons alors apparaître naturellement la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ . Une condition suffisante sur  $\delta$  pour que la matrice soit inversible est alors

$$\delta \leq \lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

### Lemme 2.8

Supposons qu'il existe au moins 2 modes propagatifs, c'est-à-dire  $\lambda < 2d$ . Si de plus  $\delta \leq \lambda$ , alors nous avons

$$\delta_{\text{opt}} = \min \left( \lambda, \frac{\lambda}{2 - \left( \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4d^2}} + \sqrt{1 - \left[ \frac{2d}{\lambda} \right]^2 \frac{\lambda^2}{4d^2}} \right)} \right),$$

où  $\delta_{\text{opt}}$  est la valeur de  $\delta$ , inférieure ou égale à  $\lambda$ , qui maximise  $\Delta$  et  $[\cdot]$  désigne la partie entière.

*Démonstration.* D'après l'expression des  $\beta_n$ , nous avons

$$\Delta = \min_{\substack{n,m=0,\dots,P-1 \\ n \neq m}} d_w(f_n, f_m) = \min(d_w(f_0, f_1), d_w(f_{P-1}, f_0)),$$

avec

$$d_w(f_0, f_1) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4d^2}}\right) \frac{\delta}{\lambda},$$

$$d_w(f_{P-1}, f_0) = 1 - \left(1 - \sqrt{1 - (P-1)^2 \frac{\lambda^2}{4d^2}}\right) \frac{\delta}{\lambda}.$$

Or, étant donné qu'il existe  $P$  modes propagatifs, nous avons

$$(P-1) \frac{\lambda}{2d} < 1 < P \frac{\lambda}{2d},$$

les égalités n'étant pas permises car, par hypothèse, aucun des nombres d'onde  $\beta_n$  n'est nul. Nous en déduisons que  $P-1 = \lfloor \frac{2d}{\lambda} \rfloor$ . La distance  $d_w(f_0, f_1)$  est une fonction croissante de  $\delta$ , nulle en 0 alors que  $d_w(f_{P-1}, f_0)$  en est une fonction décroissante, qui vaut 1 à l'origine. Ces deux droites s'intersectent en

$$\delta_{\text{int}} = \frac{\lambda}{2 - \left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4d^2}} + \sqrt{1 - \left[\frac{2d}{\lambda}\right]^2 \frac{\lambda^2}{4d^2}}\right)}.$$

Nous avons alors deux possibilités :

- soit  $\delta_{\text{int}} \geq \lambda$ , alors  $\Delta = d_w(f_0, f_1)$ , ce qui implique que pour  $\delta \in [0, \lambda]$  la valeur maximale de  $\Delta$  est atteinte en  $\delta = \lambda$  ;
- soit  $\delta_{\text{int}} < \lambda$ , alors  $\Delta = d_w(f_0, f_1)$  pour  $\delta \leq \delta_{\text{int}}$  et  $\Delta = d_w(f_{P-1}, f_0)$  pour  $\delta \geq \delta_{\text{int}}$ , ce qui implique que  $\Delta$  est une fonction croissante de  $\delta$  sur  $(0, \delta_{\text{int}})$  et décroissante sur  $(\delta_{\text{int}}, \lambda)$ . Ainsi, la valeur de  $\Delta$  est maximale en  $\delta_{\text{int}}$ .

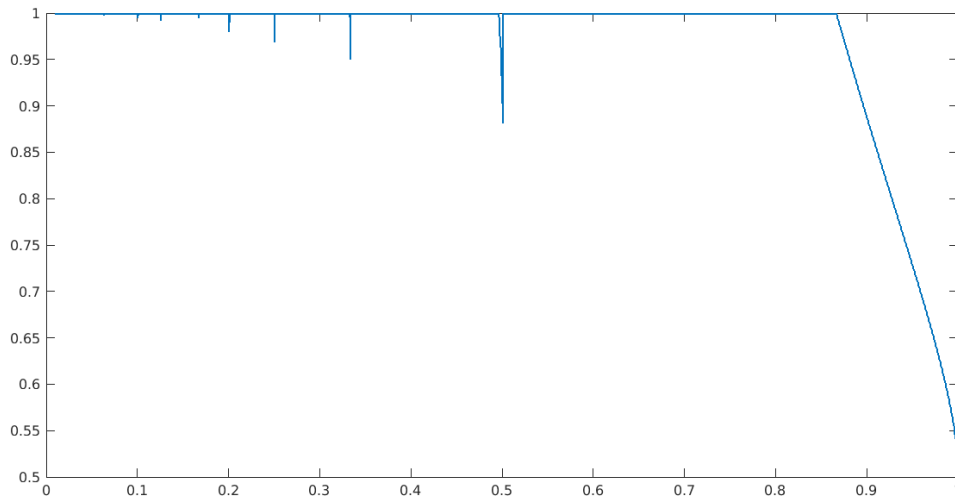
En réunissant ces deux cas, nous obtenons bien

$$\delta_{\text{opt}} = \min \left( \lambda, \frac{\lambda}{2 - \left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4d^2}} + \sqrt{1 - \left[\frac{2d}{\lambda}\right]^2 \frac{\lambda^2}{4d^2}}\right)} \right).$$

□

Nous voyons donc que la valeur optimale de l'espacement  $\delta$  peut être inférieure à  $\lambda$ . Nous avons représenté figure 2.2 le rapport  $\delta_{\text{opt}}/\lambda$  en fonction de la quantité  $\lambda/2d$ . Nous voyons que ce rapport vaut 1 hormis pour  $\lambda$  proche de  $2d$  et dans un voisinage des valeurs telles que  $2d/\lambda$  est un entier. Dans la pratique nous considérons au minimum 4 modes propagatifs afin d'obtenir une image correcte, ce qui implique que  $\lambda/2d < 1/3$ . Nous voyons alors numériquement que le rapport  $\delta/\lambda$  reste supérieur à 0.9 et qu'il diffère de 1 dans des voisinages restreints des valeurs telles que  $2d/\lambda$  est un entier. C'est pourquoi nous convenons de négliger ces cas et de considérer  $\delta = \lambda$  dans la suite. Nous déduisons de cette étude que, pour obtenir la meilleure image possible du défaut, nous allons prendre un espacement  $\delta$  égal à la longueur d'onde  $\lambda$  et un nombre de points  $M$  le plus grand possible.

Enfin, il résulte de la preuve du lemme 2.8 que  $\Delta$  est une fonction croissante de  $\delta$  sur  $(0, \delta_{\text{opt}})$ , ce qui implique que le majorant du conditionnement de  $V$  dans (2.32) en est une fonction décroissante. En conclusion, nous nous attendons donc à ce que le conditionnement de  $V$  soit décroissant avec le nombre de points  $M$  et l'espacement  $\delta$  sur  $(0, \lambda)$ .

FIGURE 2.2 – Évolution de  $\delta_{\text{opt}}/\lambda$  en fonction de  $\lambda/2d$ 

### 2.4.2 Étude numérique

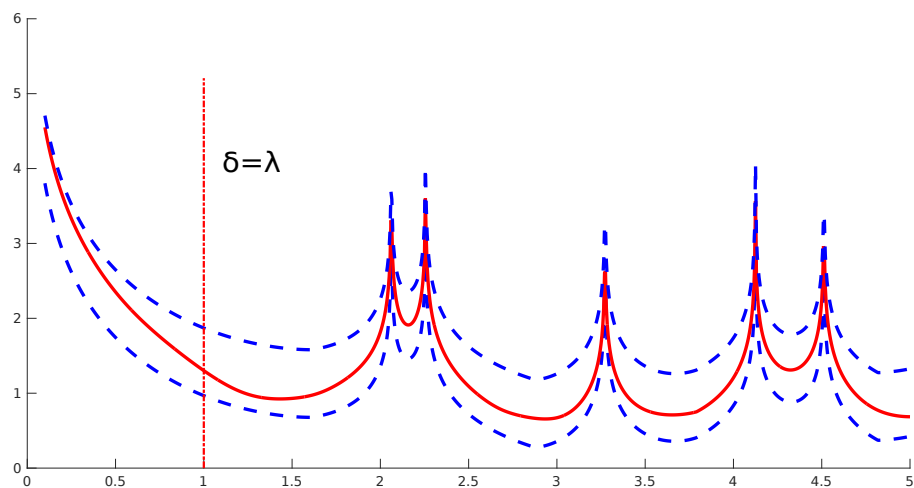
Nous allons maintenant illustrer numériquement les résultats théoriques de l'étude précédente, et plus particulièrement l'influence des différents paramètres sur le conditionnement de la matrice de Vandermonde. Il est en effet intéressant d'observer l'évolution de ce conditionnement en fonction du nombre de points  $M$  et de l'espacement  $\delta$  puisque, dans un cas réel, nous n'aurons accès qu'à un nombre limité d'acquisitions, dans une zone elle aussi limitée. Par exemple, nous ne pouvons pas utiliser un trop grand nombre de points très espacés, que cela soit pour des données simulées ou des données réelles.

Nous avons donc fait varier les trois paramètres dont dépend le conditionnement des matrices d'émission et de réception. Nous rappelons qu'il s'agit :

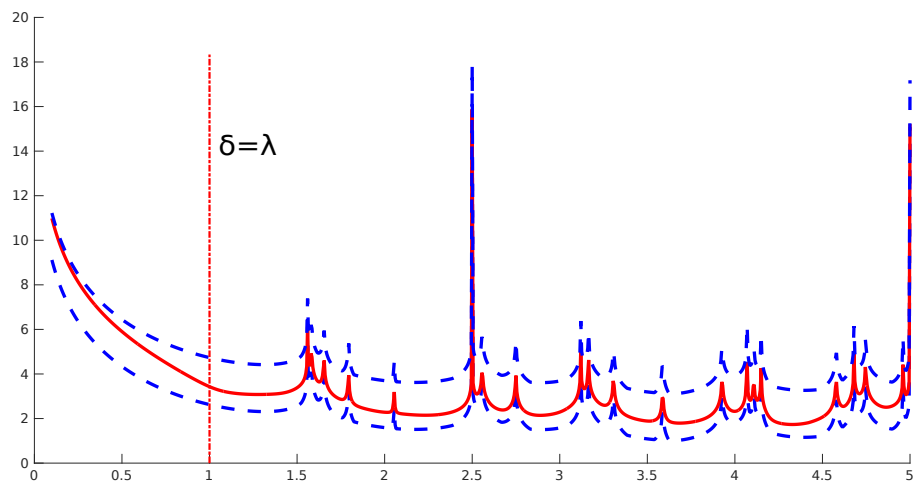
- du nombre de points (source ou mesure)  $M$  ;
- de l'espacement  $\delta$  ;
- du nombre d'onde  $k$ .

Pour des raisons pratiques, le nombre de points  $M$  est choisi comme un multiple entier du nombre de modes propagatifs considéré  $P$ , à savoir  $M$  est de la forme  $M = nP$  avec  $n \geq 1$ . Nous nous attendons à ce que le conditionnement soit décroissant avec  $M$  et  $\delta$ . Commençons donc par étudier l'influence de  $\delta$  et  $M$  pour un nombre d'onde fixé : choisissons un nombre de modes propagatifs  $P$  et prenons  $k = (P - 1/2)\pi/d$ , c'est-à-dire que  $k$  est la moyenne de deux fréquences de coupure consécutives. Nous avons tracé figure 2.3 le logarithme du conditionnement de  $V$ , en traits pleins, dans le cas carré ( $M = P$ ) en fonction de  $\delta/\lambda$  pour différentes valeurs de  $P$ , ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'encadrement (2.31) en traits pointillés. Nous voyons que le conditionnement augmente avec le nombre de modes propagatifs, et les valeurs de la borne inférieure montrent que nous ne pouvons pas espérer obtenir un conditionnement raisonnable dans le cas carré.

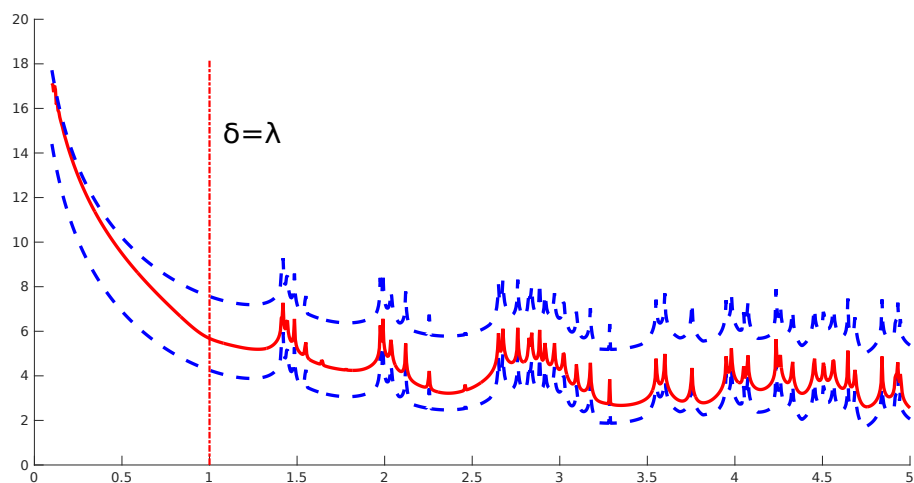
Nous nous intéressons donc dorénavant au cas rectangulaire, soit  $M \geq P$ . Nous avons tracé figure 2.4 le conditionnement de  $V$  en fonction de  $\delta/\lambda$  pour différentes valeurs de  $P$  et de  $M$ . Ces courbes sont en accord avec les propriétés trouvées précédemment : tout d'abord, nous retrouvons bien la décroissance du conditionnement de  $V$  en fonction du nombre de points



(a) 4 modes propagatifs

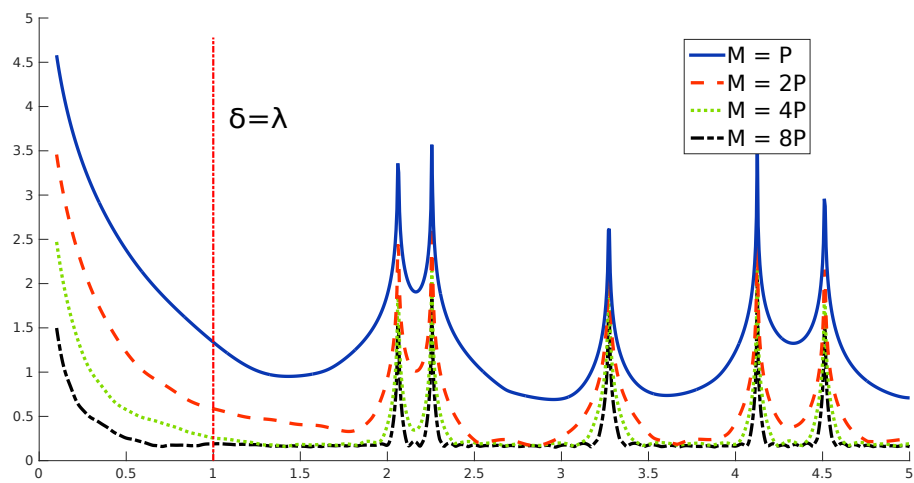


(b) 8 modes propagatifs

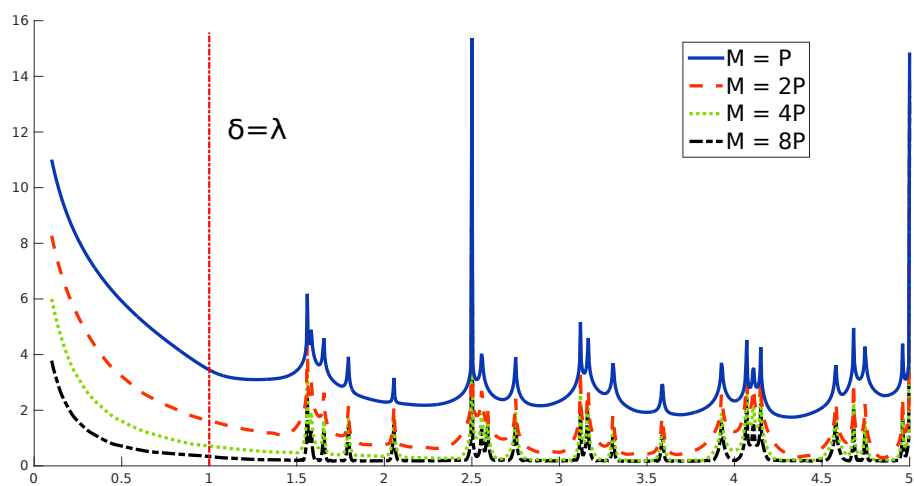


(c) 12 modes propagatifs

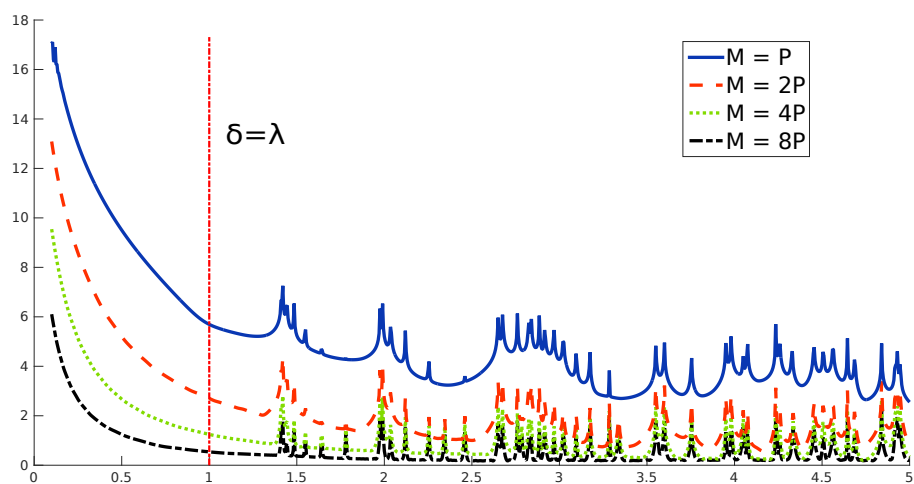
FIGURE 2.3 – Encadrement donné par (2.31) (traits pointillés) du logarithme du conditionnement de  $V$  (traits pleins) dans le cas carré ( $M = P$ ) en fonction de  $\delta/\lambda$



(a) 4 modes propagatifs



(b) 8 modes propagatifs



(c) 12 modes propagatifs

FIGURE 2.4 – Logarithme du conditionnement de  $V$  en fonction de  $\delta/\lambda$

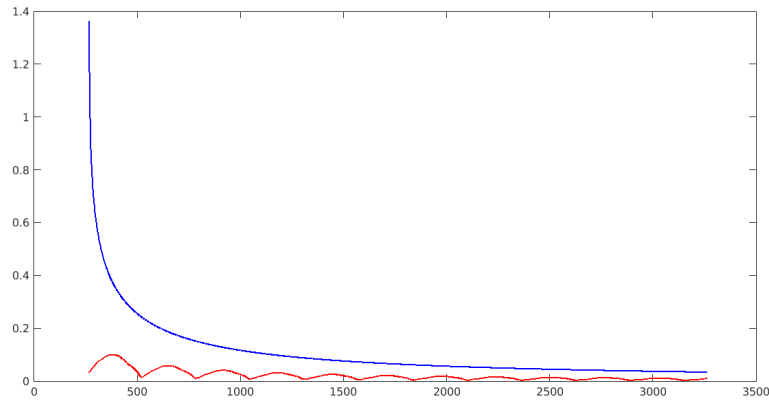


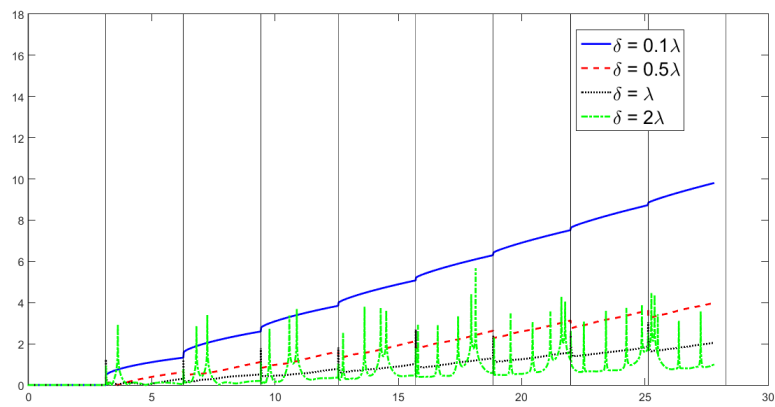
FIGURE 2.5 – Comparaison du logarithme du conditionnement de  $V$  (trait rouge) avec celui de sa borne supérieure (2.32) (trait bleu) en fonction de  $M$

$M$  et de l'espacement  $\delta$  lorsque celui-ci est inférieur à la longueur d'onde. Quand l'espacement  $\delta$  est plus grand qu'une longueur d'onde apparaissent des valeurs de  $\delta$  pour lesquelles le conditionnement est infini, correspondant aux cas où la matrice  $V^*V$  n'est plus inversible. Par ailleurs, une observation attentive des courbes nous montre que les rôles de  $\delta$  et  $M$  sur le conditionnement peuvent se compenser. Pour une fréquence donnée, à savoir  $P$  et  $\lambda$  fixés, et pour  $M$  et  $\delta$  eux aussi fixés, par exemple  $M = P$  et  $\delta = \lambda$ , nous trouvons sensiblement le même conditionnement pour  $\ell M$  et  $\delta/\ell$ , avec  $\ell$  entier, par exemple  $M = 2P$  et  $\delta = \lambda/2$  ou  $M = 4P$  et  $\delta = \lambda/4$ . Cela nous montre que si nous réalisons nos mesures dans une zone de taille limitée, alors le conditionnement sera le même que nous fassions de nombreuses acquisitions peu espacées ou peu d'acquisitions très espacées, sous réserve que l'espacement  $\delta$  reste inférieur à la longueur d'onde.

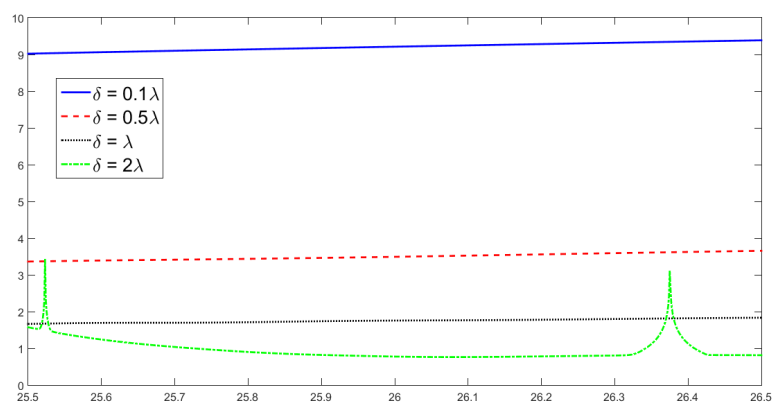
Nous avons tracé figure 2.5 le logarithme du conditionnement de la matrice de Vandermonde ainsi que le logarithme de la borne supérieure fournie par (2.32), pour  $P = 12$  et  $\delta = \lambda$ . Ces courbes confirment la convergence du conditionnement vers 1 lorsque le nombre de points  $M$  tend vers l'infini, ainsi que la qualité de l'approximation donnée par (2.32).

Enfin, nous nous sommes intéressés à l'influence de la fréquence au travers de  $k$ . Nous avons représenté figure 2.6 le logarithme du conditionnement en fonction de  $k$ , pour différentes valeurs de l'espacement  $\delta$  et  $M = 2P$ . Dans la première figure, nous avons choisi une plage de fréquences large, comprenant plusieurs fréquences de coupures matérialisées par les traits noirs verticaux. Nous observons alors que, globalement, le conditionnement se détériore avec  $k$ , c'est-à-dire avec le nombre de modes propagatifs. En revanche, le conditionnement évolue peu dans une plage de fréquences correspondant à un nombre de modes propagatifs donné : ceci est confirmé par la deuxième figure, dans laquelle nous nous sommes restreints à la plage de fréquences  $k$  pour laquelle nous avons 8 modes propagatifs. Nous voyons sur cette figure une décroissance puis une croissance relativement faibles du conditionnement comparées à celles observées en fonction de l'espacement  $\delta$  et du nombre de points  $M$ . Par ailleurs, nous observons l'apparition de pics de conditionnement dans le cas où  $\delta = 2\lambda$ , ce qui corrobore les observations faites précédemment : quand  $\delta > \lambda$ , il existe des valeurs de  $\delta$  pour lesquelles notre matrice n'est plus inversible, et donc le conditionnement explose. Nous avons vu qu'il s'agissait des valeurs de l'espacement pour lesquelles (2.30) n'est plus respectée.

En prévision d'une application de la méthode avec des données temporelles, donc multi-fréquentielles, nous avons intérêt à fixer l'espacement à une valeur inférieure ou égale à la plus petite longueur d'onde du spectre utilisé.



(a) Large plage de fréquences



(b) Plage de fréquences correspondant à 8 modes propagatifs

FIGURE 2.6 – Logarithme du conditionnement de  $V$  en fonction de la fréquence  $k$





# CHAPITRE

## 3

# EXTENSION AU RÉGIME TEMPOREL ET APPLICATIONS NUMÉRIQUES

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Extension aux données temporelles</b>	<b>62</b>
3.1.1	Lien entre problème fréquentiel et problème temporel	62
3.1.2	Résolution multi-fréquentielle du problème d'imagerie	66
3.1.3	Lien avec la Linear Sampling Method temporelle	67
<b>3.2</b>	<b>Synthèse des données artificielles</b>	<b>70</b>
3.2.1	Calcul direct en régime fréquentiel	70
3.2.2	Calcul direct en régime temporel	74
<b>3.3</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>76</b>
3.3.1	Choix de la fonction d'excitation	76
3.3.2	Résultats numériques	79

---

Dans le chapitre 2, nous avons élaboré une méthode pour imager un défaut à partir de données à la surface d'un guide en régime harmonique. Il nous reste à considérer la généralisation de cette méthode à des champs plus généraux, qui ne sont pas nécessairement harmoniques en temps. Nous allons commencer par exhiber le lien entre le problème harmonique et le problème temporel. Nous verrons notamment que pour passer du problème temporel au problème fréquentiel à fréquence fixée, il est nécessaire d'utiliser la "bonne" transformée de Fourier afin de sélectionner la solution sortante pour le problème harmonique.

Comme dans le chapitre précédent où nous avons deux manières d'exploiter les données à la surface du guide dans la LSM, nous avons ici deux manières de prendre en compte le temps : une première méthode est d'appliquer une transformée de Fourier aux données pour nous ramener au cadre du chapitre précédent. Nous obtiendrons alors une fonction caractéristique

pour chaque fréquence du spectre des données, et nous verrons plusieurs façons de les combiner afin d'améliorer la qualité de la reconstruction. Une seconde méthode, développée dans [109], est d'appliquer la LSM directement aux données en temps, en introduisant un opérateur de champ proche prenant en compte les champs diffractés dépendant du temps. Nous présenterons succinctement cette méthode afin de la comparer à la nôtre. De plus, la LSM temporelle nous permettra de faire apparaître une façon naturelle de combiner les fonctions caractéristiques fréquentielles, ce qui fera un critère supplémentaire pour nous concentrer sur une combinaison particulière.

Nous aurons donc élaboré à la fin de ce chapitre une méthode remplissant nos objectifs dans le cas d'un guide d'ondes acoustiques : nous pourrons imager un défaut à partir de données en surface en régime temporel. La fin du chapitre sera donc consacrée à des expériences numériques. Toute l'analyse réalisée dans le cas du guide acoustique permettra de généraliser notre méthode aux guides d'ondes élastiques dans la partie suivante.

## 3.1 Extension aux données temporelles

### 3.1.1 Lien entre problème fréquentiel et problème temporel

Considérons le problème en régime temporel : trouver  $v$  solution dans  $\Omega \times (0, +\infty)$  de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 v - \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu v = \varphi \chi & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ v = 0 & \text{sur } \partial D \times \mathbb{R}_+, \\ v = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \\ \partial_t v = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $\varphi$  est une fonction à support compact de  $\Gamma$  et  $\chi$  est une fonction du temps, causale et à support compact. Le caractère bien posé de ce problème pourrait être établi grâce au théorème de Lions-Magenes ou à celui de Hille-Yosida (voir [35]). Dans la suite et notamment lors des applications numériques, la célérité des ondes  $c$  sera prise égale à 1. Considérons par ailleurs le problème en régime fréquentiel : trouver  $u$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = h & \text{sur } \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \partial D, \\ (CR), \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où  $h$  est une fonction à support compact de  $\Gamma$ . Notons que  $u = u^s + u^i$ , avec  $u^i$  et  $u^s$  les solutions respectivement de (2.13) et (2.20).

#### Remarque 3.1

*Contrairement aux problèmes que nous avons considéré dans les chapitres 1 et 2, nous travaillons ici avec le champ total (et non le champ diffracté). Nous avons choisi ce cadre car il s'agit de la situation rencontrée lors des expériences. De plus, comme nous le verrons dans la partie numérique, il est plus aisé pour nous de faire les calculs en régime temporel du champ total et du champ incident (avec et sans le défaut) que de calculer directement le champ diffracté.*

Nous voulons établir un lien entre les problèmes fréquentiel (3.2) et temporel (3.1). Nous pourrions ainsi appliquer la méthode détaillée dans le chapitre précédent pour imager un éventuel défaut au moyen de données issues de la résolution du problème (3.1). Ce lien repose évidemment sur une transformée de Fourier, que nous pouvons définir de deux façons différentes :

$$\mathcal{F}_\pm[f](\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{\pm i\omega t} dt. \quad (3.3)$$

Soit  $\tilde{v}(\cdot, \omega)$  la transformée de Fourier de  $v$  à une fréquence  $\omega$  donnée, le signe dans la définition (3.3) étant supposé fixé. Nous souhaitons que  $\tilde{v}(\cdot, \omega)$  soit solution du problème (3.2) avec  $h = \tilde{\chi}(\omega)\varphi$ , où  $\tilde{\chi}$  est la transformée de Fourier de  $\chi$ , et  $k^2 = \omega^2/c^2$ , c'est-à-dire que  $\tilde{v}(\cdot, \omega)$  soit une solution sortante (vérifie les conditions de radiation). Nous allons voir que pour que ce soit le cas, la transformée de Fourier doit être définie avec un  $+$  dans (3.3), comme c'est le cas dans [43] pour l'espace libre.

Nous allons expliquer cela au moyen d'un problème modèle, sans défaut dans le guide mais en présence d'une source volumique. Considérons donc notre guide d'ondes  $W \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , et le champ  $v$  solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v = f & \text{dans } W \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ v = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \\ \partial_t v = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $f$  est une fonction causale.

Formellement, on peut voir le problème (3.4) comme un problème du type

$$\begin{cases} d_t^2 v + \mathcal{A}v = f & \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ v, f \text{ causales,} \end{cases} \quad (3.5)$$

avec  $\mathcal{A}v = -\Delta v$  dans  $L^2(W)$ .

Introduisons maintenant la transformée de Laplace :

$$\hat{v}(s) = \mathcal{L}v(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}v(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Nous appliquons cette transformée à notre équation, ce qui nous donne

$$s^2\hat{v} + \mathcal{A}\hat{v} = \hat{f}.$$

Nous pouvons enfin introduire la résolvante

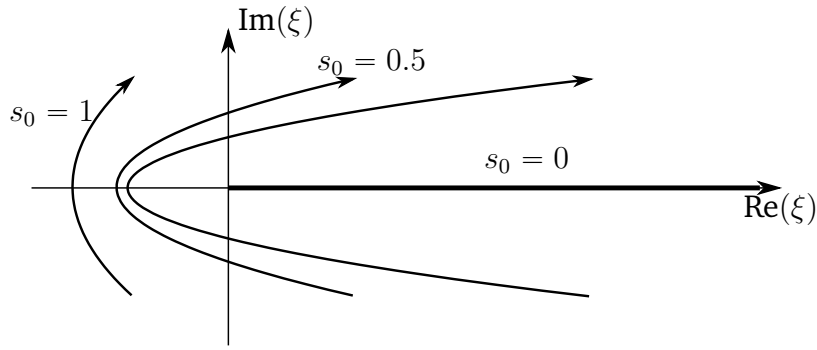
$$\mathcal{R}(\xi) = (\mathcal{A} - \xi I)^{-1},$$

qui nous permet d'écrire

$$\hat{v} = \mathcal{R}(-s^2)\hat{f}.$$

Nous en déduisons une expression de la solution en temps :

$$v(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{s_0+i\mathbb{R}} e^{st}\mathcal{R}(-s^2)\hat{f} ds,$$

FIGURE 3.1 – Variations de  $\xi$  en fonction de  $\omega$  et  $s_0$ 

avec  $s_0 > 0$  quelconque.

Posons à présent  $s = s_0 - i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . La variable  $\xi = -s^2 = \omega^2 - s_0^2 + 2is_0\omega$  décrit alors une parabole quand  $\omega$  décrit  $\mathbb{R}$ . Lorsque  $s_0 \rightarrow 0^+$ , cette parabole dégénère en la demi-droite  $\mathbb{R}_+$  (voir figure 3.1), qui se trouve être le spectre de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

Nous allons maintenant exprimer la résolvante au moyen de la solution fondamentale du problème harmonique. Pour cela, commençons par rappeler l'expression des modes guidés. Soient  $(\lambda_n, \theta_n)$  les valeurs propres et vecteurs propres du problème transverse

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} \theta_n + \lambda_n \theta_n = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_{\nu} \theta_n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \end{cases}$$

les  $\lambda_n$  formant une suite positive croissante et tendant vers l'infini et les  $\theta_n$  une base orthonormale de  $L^2(\Sigma)$ . Considérons le cas particulier  $\hat{f} = \delta_y$  pour  $y \in W$  et  $\hat{G}(\cdot, y)$  la solution fondamentale correspondante.

La fonction  $\hat{G}(\cdot, y)$  vérifie

$$-\Delta \hat{G}(\cdot, y) + s^2 \hat{G}(\cdot, y) = \delta_y.$$

En décomposant  $\hat{G}(\cdot, y)$  sous la forme

$$\hat{G}(x, y) = \sum_{n \geq 0} a_n(x_3) \theta_n(x_S)$$

et en posant  $\beta_n^2 = -(s^2 + \lambda_n)$ , on obtient les équations dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  :

$$-\left( \frac{d^2 a_n}{dx_3^2} + \beta_n^2 a_n \right) = \delta_{y_3} \theta_n(y_S), \quad n \in \mathbb{N},$$

d'où l'on déduit

$$a_n(x_3) = -\frac{\theta_n(y_S)}{2i\beta_n} e^{i\beta_n|x_3-y_3|} + a_n^+ e^{i\beta_n x_3} + a_n^- e^{-i\beta_n x_3}.$$

Une condition nécessaire pour que la solution soit décroissante simultanément en  $x_3 \rightarrow \pm\infty$  est  $a_n^+ = a_n^- = 0$ , d'où l'expression de  $\hat{G}(x, y)$

$$\hat{G}(x, y) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i\beta_n|x_3-y_3|}}{2i\beta_n} \theta_n(x_S) \theta_n(y_S).$$

La suite du calcul consiste à exprimer les  $\beta_n$  de sorte que  $\widehat{G}(\cdot, y)$  soit effectivement décroissante à l'infini, puis de faire tendre  $s_0$  vers 0. Posons

$$\begin{cases} A = \omega^2 - s_0^2 - \lambda_n, \\ B = 2s_0\omega, \end{cases}$$

ce qui nous permet d'écrire  $\beta_n^2 = A + iB$ , avec  $A, B \in \mathbb{R}$ . Pour obtenir la solution sortante, nous allons choisir la racine de  $\beta_n^2$  telle que la partie imaginaire de  $\beta_n$  soit positive. Plus précisément, si nous notons  $\beta_n = a + ib$ , nous avons

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = A, \\ 2ab = B. \end{cases} \quad (3.6)$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} a &= s_1 \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}}, \\ b &= s_2 \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}}, \end{aligned}$$

avec  $s_i \in \{-1, 1\}$ ,  $i = 1, 2$ .

En injectant les expressions de  $a$  et  $b$  dans (3.6), nous obtenons que  $s_1 = s_2$  pour  $\omega > 0$ , et  $s_1 = -s_2$  pour  $\omega < 0$ . Nous choisissons finalement les signes  $s_1$  et  $s_2$  tels que la partie imaginaire de  $\beta_n$  soit positive.

- **Premier cas** :  $\omega > 0$ .

Nous avons

$$\beta_n = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}}.$$

- **Deuxième cas** :  $\omega < 0$ .

Nous avons

$$\beta_n = -\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}}.$$

Faisons tendre  $s_0$  vers 0. L'expression des  $\beta_n$  devient

$$\beta_n = \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{\frac{A + |A|}{2}} + i \sqrt{\frac{|A| - A}{2}},$$

où  $\operatorname{sgn}$  est la fonction signe.

Nous obtenons les deux types de modes :

- $\omega^2 > \lambda_n$  : mode propagatif

$$\beta_n = \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{\omega^2 - \lambda_n};$$

- $\omega^2 < \lambda_n$  : mode évanescent

$$\beta_n = i\sqrt{\lambda_n - \omega^2}.$$

Pour  $\omega > 0$  en particulier, nous retrouvons bien les nombres d'onde que nous avons utilisé jusqu'ici (voir équation (1.1)), et la solution calculée va donc bien vérifier la condition de radiation

$$\partial_\nu u = T_\pm u, \quad \text{sur } \Sigma_{\pm R},$$

avec

$$T_\pm : \left( h \mapsto \sum_{n=0}^{P-1} i\sqrt{\omega^2 - \lambda_n}(h, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}} \theta_n - \sum_{n \geq P} \sqrt{\lambda_n - \omega^2}(h, \theta_n)_{\Sigma_{\pm R}} \theta_n \right),$$

où  $P$  désigne le nombre de modes propagatifs.

La solution du problème temporel s'écrit alors, avec  $s = -i\omega$  :

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} (\hat{G} * \hat{f}) d\omega,$$

où  $*$  est une convolution selon l'axe du guide :

$$(\hat{G} * \hat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(x_S, x_3; y_S, y_3) \hat{f}(y_S, y_3) dy_3.$$

Si nous avons choisi l'autre convention pour le signe de la transformée de Laplace (et donc pour celui de la transformée de Fourier une fois que nous avons fait tendre la partie réelle de  $s$  vers 0), nous n'aurions pas trouvé une solution sortante, mais bien une solution entrante, qui n'aurait pas vérifié la condition de radiation.

Il faut donc bien définir la transformée de Fourier avec un  $+$  dans (3.3).

### 3.1.2 Résolution multi-fréquentielle du problème d'imagerie

Intéressons-nous à présent à l'application de la Linear Sampling Method pour la détection de défauts en régime temporel. Nous considérons donc  $v$ , la solution dans  $\Omega \times (0, +\infty)$  du problème temporel (3.1). Comme dans le cas fréquentiel, les excitations et les mesures seront effectuées loin du défaut selon l'axe du guide, à savoir de part et d'autre de la portion de guide comprise entre les sections  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$ , entre lesquelles se trouve le défaut.

D'après la section précédente, si nous considérons la transformée de Fourier de la solution  $v$

$$\hat{v}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} v(x, t) e^{i\omega t} dt,$$

pour  $\omega > 0$  fixé la fonction  $u = \hat{v}(\cdot, \omega)$  est solution du problème de diffraction (3.2) avec  $h = \hat{\chi}(\omega)\varphi$  et  $k^2 = \omega^2/c^2$ .

Nous retrouvons donc le cadre du chapitre 2, avec comme terme source  $g(x_3 - x_3^{s\pm}) = \varphi(x_3)\hat{\chi}(\omega)$ . Nous supposons dorénavant le spectre de  $\chi$  à support compact  $(\omega_-, \omega_+)$  dans le sens où, pour  $\omega \notin (\omega_-, \omega_+)$ ,

$$|\hat{\chi}(\omega)| \ll \max_{\nu \in (\omega_-, \omega_+)} |\hat{\chi}(\nu)|.$$

En appliquant la méthodologie développée au chapitre 2, nous obtenons ainsi pour chaque fréquence du spectre de notre source temporelle  $\chi$  une configuration dans laquelle nous pouvons appliquer la Linear Sampling Method, chaque fréquence donnant une image du défaut. Nous pouvons chercher à combiner ces images de manière à obtenir une image de meilleure qualité. Deux possibilités ont déjà été proposées dans [77] pour l'espace libre, conduisant respectivement à la fonction caractéristique série  $\psi^s$  et à la fonction caractéristique parallèle  $\psi^p$ , définies sur la grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$  par

$$\psi^s = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} |\psi(\cdot, \omega)|^{-2} d\omega \right)^{-1/2}, \quad \psi^p = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} |\psi(\cdot, \omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

Comme nous le verrons plus loin, l'indicatrice série peut-être reliée à l'indicatrice qui serait obtenue si nous appliquions directement la Linear Sampling Method dans le domaine temporel suivant [109]. Par ailleurs, nous avons remarqué que, pour  $z$  fixé, l'amplitude de  $\psi(z, \cdot)$  varie beaucoup, ce qui revient à privilégier certaines fréquences. Plus précisément, à  $\omega$  fixé, les valeurs de  $\psi$  en fonction de  $z \in \mathcal{G}$  couvrent une plage plus faible à basse fréquence qu'à haute fréquence. Ceci entraîne que l'image globale correspond à l'image à basse fréquence (image avec le plus petit nombre de modes propagatifs) dans le cas de la fonction caractéristique série et à l'image à haute fréquence (image avec le plus grand nombre de modes propagatifs) pour la fonction caractéristique parallèle. C'est pourquoi nous avons choisi de modifier les fonctions caractéristiques précédentes en les normalisant :

$$\psi_{\max}^s = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\max_{z \in \mathcal{G}} |\psi(z, \omega)|^2}{|\psi(\cdot, \omega)|^2} d\omega \right)^{-1/2}, \quad \psi_{\max}^p = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{|\psi(\cdot, \omega)|^2}{\max_{z \in \mathcal{G}} |\psi(z, \omega)|^2} d\omega \right)^{1/2}.$$

### 3.1.3 Lien avec la Linear Sampling Method temporelle

Nous allons présenter brièvement dans cette sous-section la Linear Sampling Method temporelle développée par Peter Monk et Virginia Selgas dans [109] avant d'en expliciter les liens avec notre méthode. Nous aurons besoin pour cela de quelques espaces fonctionnels : Soient  $X$  un espace de Hilbert,  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$  l'espace des distributions à valeurs dans  $X$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$  l'espace des distributions tempérées à valeurs dans  $X$ . Nous pouvons alors définir, pour  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L}'_{\sigma}(\mathbb{R}, X) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, X); e^{-\sigma t} f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)\}.$$

Ainsi, pour  $f \in \mathcal{L}'_{\sigma}(\mathbb{R}, X)$  avec  $e^{-\sigma t} f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, X)$ , nous pouvons définir sa transformée de Fourier-Laplace :

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}_{\sigma},$$

avec  $\mathbb{C}_{\sigma} = \{s \in \mathbb{C}; \text{Im}(s) > \sigma\}$ .

Enfin, pour  $p \in \mathbb{R}$ , nous définissons l'espace de Hilbert

$$H_{\sigma}^p(\mathbb{R}, X) = \left\{ f \in \mathcal{L}'_{\sigma}(\mathbb{R}, X); \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} |s|^{2p} \|\mathcal{L}[f](s)\|_X^2 ds < \infty \right\}.$$



Comme précédemment, nous supposons que le défaut est localisé entre les deux sections  $\Sigma_{\pm R}$ . Nous notons  $\widehat{\Sigma} = \Sigma_R \cup \Sigma_{-R}$ . Soit  $u^i(\cdot, y)$  le champ incident, solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u^i(\cdot, y) - \Delta u^i(\cdot, y) = \chi(t)\delta_y & \text{dans } W \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u^i(\cdot, y) = 0 & \text{sur } \partial W \times \mathbb{R}_+, \\ u^i(\cdot, y) = 0 & \text{sur } W \times \{0\}, \\ \partial_t u^i(\cdot, y) = 0 & \text{sur } W \times \{0\}, \end{array} \right.$$

pour  $y \in W$  et  $\chi$  une fonction régulière à support compact dans  $(0, +\infty)$ . Le champ diffracté  $u^s(\cdot, y)$  est alors solution du problème de diffraction

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u^s(\cdot, y) - \Delta u^s(\cdot, y) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u^s(\cdot, y) = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u^s(\cdot, y) = -u^i(\cdot, y) & \text{sur } \partial D \times \mathbb{R}_+, \\ u^s(\cdot, y) = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \\ \partial_t u^s(\cdot, y) = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right.$$

Nous pouvons dorénavant introduire l'opérateur de champ proche défini en régime temporel  $N : H_\sigma^p(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma})) \rightarrow H_\sigma^{p-2}(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))$  :

$$Nh(t, x) = \int_{\widehat{\Sigma}} \int_0^t u^s(t - \tau, x, y) h(\tau, y) d\tau ds(y),$$

ainsi que le théorème justifiant ce que les auteurs de [109] appellent la “Time Domain Linear Sampling Method” :

### Théorème 3.1

1. Pour tout  $z \in D$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_{\varepsilon,p}(\cdot, z) \in H_\sigma^{p+1}(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))$  telle que

$$\|Nh_{\varepsilon,p}(\cdot, z) - u^i(\cdot, z)\|_{H_\sigma^{p-1}(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))} < \varepsilon.$$

De plus, à  $\varepsilon$  fixé, la fonction  $h_{\varepsilon,p}(\cdot, z)$  vérifie

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \|h_{\varepsilon,p}(\cdot, z)\|_{H_\sigma^{p+1}(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))} \rightarrow +\infty.$$

2. Si  $z \in W \setminus \overline{D}$ , alors pour toute fonction  $h_{\varepsilon,p}(\cdot, z) \in H_\sigma^{p+1}(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))$  telle que

$$\|Nh_{\varepsilon,p}(\cdot, z) - u^i(\cdot, z)\|_{H_\sigma^{p-1}(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))} < \varepsilon,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_{\varepsilon,p}(\cdot, z)\|_{H_\sigma^{p+1}(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))} \rightarrow +\infty.$$

Le problème à résoudre en chaque point de la grille d'échantillonnage est alors

$$Nh = u^i(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}.$$

Explicitons le lien entre cette méthode et la nôtre, au moins formellement : pour  $h \in H_\sigma^p(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))$ , nous pouvons appliquer la transformée de Laplace à l'équation précédente :

$$\mathcal{L}[Nh](s) = \mathcal{L}[u^i|_{\widehat{\Sigma}}(\cdot, z)](s). \quad (3.7)$$

Développons les deux membres de l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Nh](s) &= \int_{\widehat{\Sigma}} \mathcal{L}[u^s(\cdot, y)](s) \mathcal{L}[h(\cdot, y)](s) \, ds(y) \\ &= \int_{\widehat{\Sigma}} \widehat{u}^s(\cdot, y, s) \widehat{h}(y, s) \, ds(y) \\ &:= (\widehat{N}_s \widehat{h})(\cdot, s), \end{aligned}$$

avec  $\widehat{N}_s : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  et  $\widehat{u}^s(\cdot, y, s)$  le champ diffracté solution de

$$\begin{cases} \Delta \widehat{u}^s(\cdot, y, s) + s^2 \widehat{u}^s(\cdot, y, s) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu \widehat{u}^s(\cdot, y, s) = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \widehat{u}^s(\cdot, y, s) = -\widehat{u}^i(\cdot, y, s) & \text{sur } \partial D, \end{cases}$$

le champ incident  $\widehat{u}^i(\cdot, y, s)$  étant lui-même solution de

$$\begin{cases} \Delta \widehat{u}^i(\cdot, y, s) + s^2 \widehat{u}^i(\cdot, y, s) = \widehat{\chi}(s) \delta_y & \text{dans } W, \\ \partial_\nu \widehat{u}^i(\cdot, y, s) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Notons que  $\mathcal{L}[u^i|_{\widehat{\Sigma}}(\cdot, z)](s) = \widehat{u}^i|_{\widehat{\Sigma}}(\cdot, z, s)$ . Nous avons donc par ailleurs  $\widehat{u}^i(\cdot, y, s) = \widehat{\chi}(s) \widehat{G}_s(\cdot, y)$ , avec  $\widehat{G}_s(\cdot, y)$  la solution fondamentale de

$$\begin{cases} \Delta \widehat{G}_s(\cdot, y) + s^2 \widehat{G}_s(\cdot, y) = \delta_y & \text{dans } W, \\ \partial_\nu \widehat{G}_s(\cdot, y) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

L'équation (3.7) devient alors

$$\widehat{N}_s \widehat{h}(\cdot, s) = \widehat{\chi}(s) \widehat{G}_s(\cdot, z)|_{\widehat{\Sigma}}. \quad (3.8)$$

Nous pouvons définir, en faisant tendre la partie imaginaire de  $s$  vers 0, un nouvel opérateur  $N_0 : L^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Sigma})$  qui se trouve être l'opérateur de champ proche  $N$  défini dans la section 2.2. Par ailleurs,

$$\widehat{G}_s(\cdot, y) \xrightarrow{\text{Im}(s) \rightarrow 0} G_0(\cdot, y),$$

où  $G_0(\cdot, y)$  est la solution fondamentale définie en (2.12).

L'équation (3.8) est donc équivalente à (2.5), à un coefficient multiplicatif  $\widehat{\chi}(s)$  près.

Intéressons nous donc à présent à la fonction indicatrice du défaut : il s'agit pour la TDLSM de

$$\psi_{\text{TDLSM}}(z) = \|h(z)\|_{H_\sigma^p(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))}^{-1},$$

avec

$$\|h\|_{H_\sigma^p(\mathbb{R}, L^2(\widehat{\Sigma}))} = \left( \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |s|^{2p} \|\mathcal{L}[h](s)\|_{L^2(\widehat{\Sigma})}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons le cas  $p = 0$ . Formellement, nous avons

$$\|\mathcal{L}[h](s)\|_{L^2(\hat{\Sigma})}^2 = \|\hat{h}(\cdot, s)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} \xrightarrow{\text{Im}(s) \rightarrow 0} \frac{\|\tilde{h}(\cdot, \omega)\|_{L^2(\hat{\Sigma})}^2}{|\hat{\chi}(\omega)|^2},$$

où  $\omega$  est la partie réelle de  $s$  et  $\tilde{h}$  désigne la solution de (2.5). Avec  $\psi(z, \omega) = 1/\|\tilde{h}(z, \omega)\|_{L^2(\hat{\Sigma})}$ , nous retrouvons donc notre indicatrice en série à la normalisation près :

$$\begin{aligned} \psi_{\text{TDLSM}}(z) &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\tilde{h}(z, \omega)\|_{L^2(\hat{\Sigma})}^2}{|\hat{\chi}(\omega)|^2} d\omega \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (|\hat{\chi}(\omega)|\psi(z, \omega))^{-2} d\omega \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous voyons que notre Linear Sampling Method multi-fréquentielle fournit la même image du défaut que la Linear Sampling Method temporelle, à condition d'utiliser la fonction  $\psi_{\text{TDLSM}}$  ci-dessus comme fonction indicatrice.

Nous verrons dans les essais numériques que les indicatrices séries  $\psi_{\text{max}}^s$  et  $\psi_{\text{TDLSM}}$  sont celles donnant les meilleures images des défauts. Le choix naturel semble alors de considérer  $\psi_{\text{TDLSM}}$ . Toutefois, nous avons préféré nous concentrer sur  $\psi_{\text{max}}^s$  car nous trouvons que les images sont légèrement meilleures. Par ailleurs, dans le cas de données expérimentales, nous ne connaissons au mieux notre source qu'à une constante multiplicative près. C'est pourquoi une normalisation par le maximum permettra de compenser cette information manquante.

## 3.2 Synthèse des données artificielles

Dans le cas scalaire, nous allons nous limiter à l'application des méthodes inverses décrites précédemment à partir de données artificielles obtenues numériquement. Pour obtenir ces données, nous allons voir que plusieurs possibilités s'offrent à nous. Nous allons discuter rapidement dans cette partie des différents calculs envisageables dans le cas du régime fréquentiel pour des sources et des mesures en surface, et nous évoquerons ensuite le cas du régime temporel, régime pour lequel les possibilités de formulation du problème sont plus limitées en pratique. Nous nous intéresserons ensuite au choix de la source dans nos simulations avant de présenter quelques résultats.

### 3.2.1 Calcul direct en régime fréquentiel

Dans le cas du régime fréquentiel, le calcul numérique autour du défaut sera toujours effectué grâce à des éléments finis de Lagrange d'ordre 2, en discrétisant une formulation variationnelle de la forme de (1.7). Les maillages utilisés ont été générés grâce à Gmsh [74].

#### *Choix du domaine de calcul*

Un premier choix s'offre alors à nous concernant la taille du domaine de calcul : une première possibilité est de résoudre un problème à spécifier par éléments finis dans un domaine comprenant les points sources et les points de mesure. L'inconvénient de cette méthode est que, si ces derniers sont loin du défaut, le domaine sera grand et donc le calcul long. Une autre possibilité est d'exploiter le lemme de propagation 1.3 : nous n'effectuons le calcul éléments

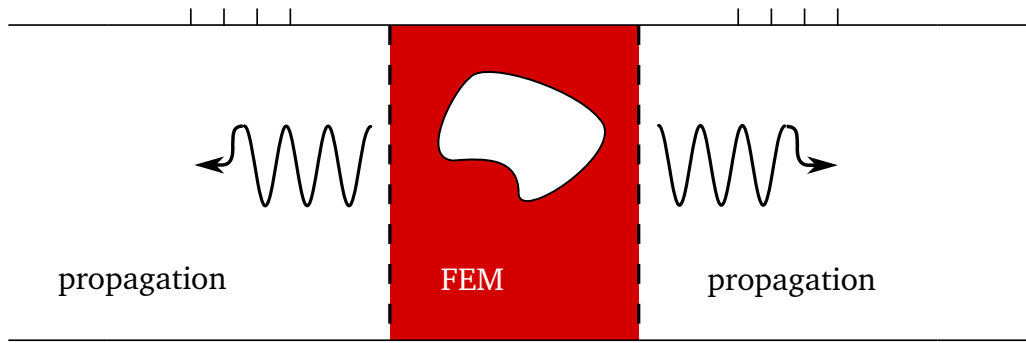


FIGURE 3.2 – Schéma de principe du calcul direct fréquentiel

finis que dans une zone proche du défaut, ne comprenant ni les points sources ni les points de mesure, puis nous appliquons le lemme pour obtenir notre champ dans le reste du domaine (voir figure 3.2). Les sources sont alors extérieures au domaine de calcul, mais apparaissent dans le problème au travers du champ incident  $u^i$  défini par l'intégrale sur  $\Gamma$  donnée par (3.10).

### Choix du problème résolu numériquement

#### Calcul du champ total

Une première possibilité est de calculer numériquement le champ total. Si nous considérons  $L$  tel que les sources et les mesures soient comprises entre les sections  $\Sigma_{-L}$  et  $\Sigma_L$ , soit

$$L > R + (M - 1)\delta + s_{f,g}$$

avec  $s_{f,g}$  le maximum de la taille du support de  $f$  et  $g$ , le champ total est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u^{tot} + k^2 u^{tot} = 0, & \text{dans } \Omega_L, \\ \partial_\nu u^{tot} = g(x), & \text{sur } \Gamma_L, \\ u^{tot} = 0, & \text{sur } \partial D, \\ \partial_\nu u^{tot} = T_\pm u^{tot} & \text{sur } \Sigma_{\pm L}. \end{cases}$$

Si nous considérons à présent un calcul semi-analytique (utilisant le lemme de propagation), dans un domaine ne contenant pas les sources, soit un domaine compris entre les sections  $\Sigma_{-s}$  et  $\Sigma_s$ , avec  $s < R$  tel que le défaut soit compris entre ces deux sections, alors la source apparaît dans les conditions de radiation :

$$\begin{cases} \Delta u^{tot} + k^2 u^{tot} = 0, & \text{dans } \Omega_s, \\ \partial_\nu u^{tot} = 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ u^{tot} = 0, & \text{sur } \partial D, \\ \partial_\nu u^{tot} = T_\pm u^{tot} + \partial_\nu u^i - T_\pm u^i & \text{sur } \Sigma_{\pm s}, \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $u^i$  est le champ incident, dont nous rappelons l'expression

$$u^i(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) g(y) ds(y), \quad (3.10)$$

avec  $G$  la fonction de Green définie par

$$G(x, y) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2i\beta_n} e^{i\beta_n|x_3-y_3|} \theta_n(x_S) \theta_n(y_S). \quad (3.11)$$

Remarquons que, si la source est à gauche du domaine de calcul, alors le terme  $\partial_\nu u^i - T_+ u^i$  est nul sur  $\Sigma_s$ . Cela vient du fait que le champ  $u^i$  produit se propage de la gauche vers la droite à l'intérieur du domaine, et donc ce champ est bien sortant à droite du domaine et vérifie la condition de radiation. De même, si la source est à droite, le terme  $\partial_\nu u^i - T_- u^i$  est nul sur  $\Sigma_{-s}$ .

Une fois le champ total calculé, il nous reste à lui soustraire le champ incident pour obtenir le champ diffracté. Nous pouvons calculer ce champ incident soit analytiquement en utilisant les expressions (3.10) et (3.11), soit numériquement en résolvant le même problème que pour le champ total sans conditions aux limites sur le défaut.

### Calcul du champ diffracté

L'autre possibilité est de calculer directement un champ diffracté. Le problème à résoudre est alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, & \text{dans } \Omega_s, \\ \partial_\nu u^s = 0, & \text{sur } \Gamma_s, \\ u^s = -u^i, & \text{sur } \partial D, \\ \partial_\nu u^s = T_\pm u^s & \text{sur } \Sigma_{\pm s}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La taille du domaine de calcul n'a alors pas d'influence sur le problème à résoudre, et un seul calcul est nécessaire.

### Discussion

Nous allons dorénavant discuter des avantages et inconvénients de ces différentes méthodes pour obtenir nos données. Nous nous intéressons pour cela à leur précision et leur coût de calcul. Bien qu'il ne s'agisse pas de résoudre les mêmes problèmes en régime temporel, nous allons utiliser les observations faites pour le régime fréquentiel pour conclure quant au régime temporel.

Dans le cas du régime fréquentiel, il nous est apparu que la meilleure méthode est de calculer directement le champ diffracté. En effet, les champs total et incident présentent des singularités au niveau des sources, qui sont mal calculées numériquement mais sont les mêmes. En utilisant un calcul directement en champ diffracté, celles-ci se compensent naturellement. De plus, nous pouvons résoudre ce problème dans un domaine de calcul restreint autour du défaut : en effet, numériquement nous devons tronquer les séries définissant les opérateurs Dirichlet-to-Neumann (voir (1.4)) ainsi que celles dans le terme source (voir (3.10) et (2.12)). Dans les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann, la troncature dépend de la distance entre les sections délimitant le domaine de calcul et le défaut. En effet, le champ diffracté peut être décomposé selon les modes. Si les sections sont proches du défaut, les composantes du champ selon certains modes évanescents doivent être prises en compte dans les opérateurs DtN. Dans la pratique, le coût de calcul lié à l'ajout de termes dans la somme de l'approximation de l'opérateur DtN est faible par rapport au coût lié à l'agrandissement du domaine de calcul à une finesse de maillage donnée. Par ailleurs, en terme de mémoire, l'ajout de termes dans la somme du DtN a un coût négligeable alors que l'agrandissement du maillage peut

devenir problématique (cela est d'autant plus vrai pour des simulations en trois dimensions). Si la source est loin du défaut, nous pouvons ne retenir qu'un petit nombre de termes de la série dans (3.10) (les modes propagatifs et quelques évanescents suffisent). Une fois le champ diffracté calculé dans le domaine autour du défaut, sa propagation jusqu'aux points de mesure grâce au lemme de propagation 1.3 présente un temps de calcul négligeable.

Une méthode proche est de calculer le champ total avec les sources en dehors du domaine de calcul. Nous retrouvons les mêmes spécificités du calcul, à savoir un coût de mémoire limité et un calcul rapide. Il faut cependant a posteriori soustraire au champ total le champ incident avant de propager le champ diffracté jusqu'aux points de mesure, ce qui ajoute une étape dans le calcul global.

Enfin, le calcul du champ total avec les points de source à l'intérieur du domaine de calcul est a priori moins intéressant puisque demandant beaucoup plus de mémoire et un temps de calcul plus long. Toutefois, ce calcul ne nécessite pas de propager le champ diffracté jusqu'aux points de mesure.

Dans les trois cas, il est nécessaire de calculer à un moment donné le champ incident. Dans le calcul en régime fréquentiel, toutes les conditions sont réunies pour qu'il soit calculé analytiquement : le calcul est simple et rapide. C'est pourquoi la résolution du problème (3.12) est toute indiquée. Par contre, pour le calcul du champ total dans un domaine comprenant les points de source, une erreur importante est causée par ces singularités : celles-ci sont mal prises en compte par le calcul numérique, mais mieux par le calcul analytique. La différence entre le champ total calculé numériquement et celui incident calculé analytiquement présente alors une erreur importante, ce qui n'est pas le cas en utilisant deux fois la même méthode numérique, puisqu'alors le même ordre d'erreur est commis.

Dans le cas de la résolution du problème en régime temporel, le calcul du champ incident pose problème. Si nous voulions le calculer analytiquement, nous devrions évaluer une convolée en espace et en temps, ce qui rend le calcul beaucoup plus lourd et moins précis. C'est pourquoi le calcul du champ total dans un domaine comprenant les points de source est intéressant dans ce cas. Nous devons cependant soustraire le champ incident au champ total, champ incident qui sera calculé selon la même méthode numérique pour avoir des erreurs du même ordre.

Pour illustrer nos propos, nous avons représenté figure 3.3 les champs incidents obtenus respectivement numériquement et analytiquement en régime fréquentiel pour

$$g(x_3) = \frac{1}{d} \max \left( 0, 1 - \frac{|x_3|}{d} \right).$$

La troisième image représente l'erreur relative entre ces deux champs. Nous voyons que cette erreur est localisée dans le voisinage de la section comportant la source. Par ailleurs, le champ incident analytique a été représenté figure 3.4 pour différents seuils de troncature dans (3.11) : en effet, la précision du champ près de la source dépend fortement de ce paramètre, et il est difficile de choisir le nombre de termes dans la somme pour obtenir un champ comparable numériquement et analytiquement. Pour réduire la taille du domaine de calcul tout en gardant des sources et des mesures loin du défaut, nous voulons que nos points de source et de mesure soient proches les uns des autres. Dans ces conditions, l'erreur liée aux singularités devient problématique et l'utilisation d'un champ incident calculé analyti-

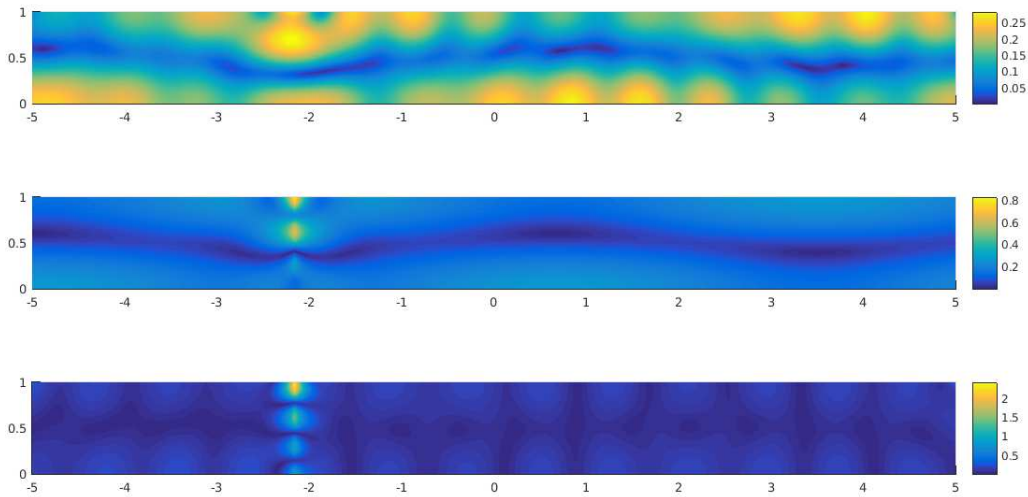


FIGURE 3.3 – Comparaison des champs incidents. De haut en bas : champ incident numérique, champ incident analytique avec  $P + 2$  modes, erreur relative entre les champs incidents numérique et analytique

quement n'est pas envisageable.

### Conclusion

Pour résumer, en régime harmonique toutes les conditions sont réunies pour utiliser une méthode peu coûteuse et précise telle que le calcul du champ diffracté. Cette méthode ne sera toutefois pas applicable en régime temporel pour lequel nous utiliserons un calcul plus classique du champ total, auquel nous soustrairons un champ incident calculé avec la même méthode.

### 3.2.2 Calcul direct en régime temporel

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, la résolution du problème de diffraction en régime temporel est plus compliquée qu'en régime fréquentiel. La première difficulté est de délimiter le domaine de calcul sans introduire d'erreur. Plusieurs méthodes sont envisageables : nous pouvons citer notamment l'utilisation de conditions de frontière absorbante [75, 81]. Toutefois, ces méthodes peuvent s'avérer coûteuses pour obtenir un résultat précis : le domaine est tronqué et des inconnues supplémentaires sont introduites sur les bords de troncature. Il faut ajouter un grand nombre d'inconnues additionnelles sur le bord et résoudre les systèmes correspondants pour limiter les réflexions créées par la troncature du domaine. C'est pourquoi nous utilisons des couches parfaitement absorbantes (Perfectly Matched Layers) [19, 67, 89], qui sont simples d'utilisation et qui pourront de plus être utilisées dans le cas de l'élasticité. Le principe est le suivant : le domaine de calcul, borné, est prolongé par une bande d'un milieu non-physique, dans lequel les ondes vont s'atténuer sans réflexions parasites dans la direction de sortie du domaine physique. Ainsi, tout champ sortant du domaine à cet endroit est absorbé (voir figure 3.5). Par contre, des inconnues supplémentaires sont nécessaires pour discrétiser cette couche, ce qui peut rendre le coût de calcul élevé si elle est choisie trop grande. Nous avons donc intérêt à considérer une couche la plus petite possible.

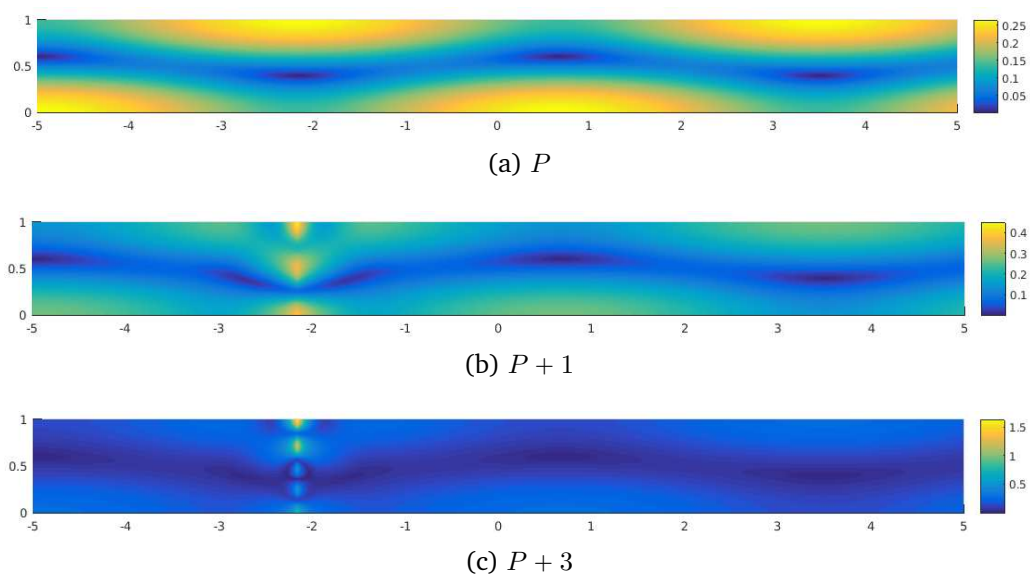


FIGURE 3.4 – Champ incident analytique pour différents nombres de modes dans la somme

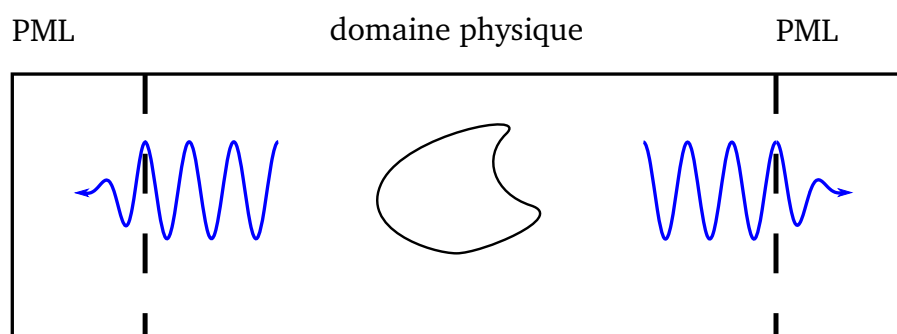


FIGURE 3.5 – Schéma de principe des PMLs



Dans la pratique, deux types de réflexions peuvent avoir lieu dans une couche PML : la première est une réflexion à l'extrémité de la couche si l'onde ne s'est pas complètement atténuée avant d'en atteindre le bord. La seconde vient de la discrétisation. Un coefficient d'absorption est défini dans la couche PML. Si ce dernier n'est pas constant, nous pouvons montrer (voir [89] pour plus de détails) qu'une réflexion proportionnelle au pas du maillage et à la différence des valeurs du coefficient d'absorption au début et à la fin de la maille selon la direction de sortie du domaine physique a lieu à chaque pas du maillage. Nous pourrions prendre un coefficient d'absorption constant, mais alors toute la réflexion aura lieu à l'entrée de la couche PML. Une pratique courante [52] consiste à considérer un profil quadratique nul au début de la couche : la couche PML n'atténue que peu l'onde dans les premières mailles, mais n'entraîne par ailleurs que de faibles réflexions numériques. Au fur et à mesure que l'onde s'atténue, le saut de coefficient d'absorption devient plus important mais l'amplitude de l'onde est alors suffisamment faible pour que ces réflexions restent comparables à celles ayant eu lieu dans les mailles précédentes (pour un profil bien choisi).

Une alternative consiste à utiliser une méthode de décomposition de domaines. Dans le cas où le coefficient d'absorption est nul, le système PML dégénère en le problème physique considéré (ici la propagation des ondes acoustiques). Si nous n'utilisons pas de décomposition de domaine, nous résolvons le système PML dans tout le domaine. Il s'agit d'une solution simple d'implémentation, mais comme le système PML nécessite des inconnues supplémentaires, nous complexifions le calcul inutilement. La décomposition de domaine permet alors de résoudre le bon système dans chaque domaine. Une méthode particulièrement adaptée est la méthode des éléments mortiers [86] : dans une formulation bien choisie, ceux-ci "absorbent" l'éventuelle réflexion numérique ayant lieu à l'interface entre le domaine physique et la couche PML. Nous pouvons alors considérer un coefficient d'absorption constant, plus pratique d'utilisation.

Une difficulté supplémentaire par rapport au calcul en régime fréquentiel est que l'utilisation de la forme analytique du champ incident se révèle coûteuse, c'est pourquoi les calculs du champ total et du champ incident sont réalisés numériquement. Cela signifie que nous avons besoin d'un domaine de calcul grand. Par ailleurs, pour pouvoir appliquer la transformée de Fourier à nos données, il est indispensable de les connaître en tout temps. Cela revient à effectuer un calcul du champ diffracté sur un intervalle de temps suffisamment grand, c'est à dire jusqu'à l'annulation de ce champ. Enfin, étant donné les problèmes de conditionnement mentionnés dans la section 2.4, le calcul doit être précis. Un premier code a été écrit pour résoudre ce problème, mais ses performances n'étaient pas suffisantes. Nous avons donc utilisé par la suite le code Echo [85], développé au CEA, qui permet la résolution de l'équation des ondes au moyen d'éléments finis spectraux, qui permettent une montée en ordre en espace et un coût de calcul réduit grâce à la condensation de masse [127]. Ce code exploite par ailleurs les éléments mortiers et les PMLs, permettant un calcul simple et rapide.

## 3.3 Applications numériques

### 3.3.1 Choix de la fonction d'excitation

Jusqu'à présent, nous n'avons pas précisé la source utilisée dans (3.1), nous l'avons seulement supposée à variables séparées, de la forme  $\varphi(x_3)\chi(t)$ , et à support compact. La fonction  $g$  telle que  $\varphi(x_3)\hat{\chi}(\omega) = h(x_3) = g(x_3 - x_3^{s\pm})$  a déjà été évoquée au travers de l'étude du condition-

nement de la section 2.4. Dans les simulations numériques, sauf indication contraire, nous choisissons la source  $g$  de la forme

$$g(x_3) = \frac{10}{d} \max \left( 1 - \frac{10|x_3|}{d}, 0 \right). \quad (3.13)$$

Pour pouvoir appliquer la transformée de Fourier, nous souhaitons que le champ  $v$  solution de (3.1) s'annule le plus vite possible en fonction du temps. Dans le cas des guides d'ondes, si le milieu ne présente pas d'atténuation, cet objectif est difficile à réaliser : en effet, la vitesse de déplacement d'une composante modale du champ selon l'axe du guide est sa vitesse de groupe

$$\begin{aligned} v_n^g &= \frac{\partial \omega}{\partial \beta_n} \\ &= \frac{c\beta_n}{k}. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que celle-ci est nulle si  $\beta_n = 0$ , ce qui signifie que la composante modale "stationne" à l'intérieur du guide, elle ne se déplace pas selon l'axe. C'est pourquoi nous allons chercher à éviter les fréquences correspondants à l'annulation d'un des  $\beta_n$ .

Nous choisissons  $\chi$  de la forme

$$\chi_P(t) = [\sin(at) \exp(-b(t-c)^2)]',$$

où l'indice  $P$  sera explicité plus loin.

Notre but va alors être de choisir  $a$ ,  $b$  et  $c$  au mieux pour nos simulations.

La transformée de Fourier de cette fonction est

$$\hat{\chi}_P(\omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{2b}} e^{i\omega c} \left( e^{-iac - \frac{(\omega-a)^2}{4b}} - e^{+iac - \frac{(\omega+a)^2}{4b}} \right). \quad (3.14)$$

Les critères pour choisir  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont alors :

- i)  $|\chi_P(0)| \ll 1$  et  $|\chi_P'(0)| \ll 1$  pour respecter la causalité ;
- ii)  $|\hat{\chi}_P(\omega)|$  possède son maximum en  $\omega_{\max} = (P - 1/2)\pi/d$  pour un entier  $P \geq 1$  ;
- iii)  $|\hat{\chi}_P(\omega)| \ll 1$  pour  $\omega$  à l'extérieur de l'intervalle  $((P - 1)\pi/d, P\pi/d)$ .

Nous respectons les trois critères précédents en imposant

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{\pi^2}{200d^2}, \\ c = \frac{5}{\sqrt{2b}}, \\ \frac{a + \sqrt{a^2 + 16b}}{2} = \frac{(P - 1/2)\pi}{d}. \end{array} \right.$$

Nous voyons donc que la fréquence  $\omega_{\max}$  associée au maximum de  $\hat{\chi}_P$  est la moyenne des fréquences de coupure consécutives  $k_{P-1}$  et  $k_P$  avec  $k_n = n\pi/d$ , le support de  $\hat{\chi}_P$  étant presque entièrement inclus dans  $(k_{P-1}, k_P)$ . Le nombre de modes propagatifs associé aux fréquences dans  $(k_{P-1}, k_P)$  est alors  $P$ .

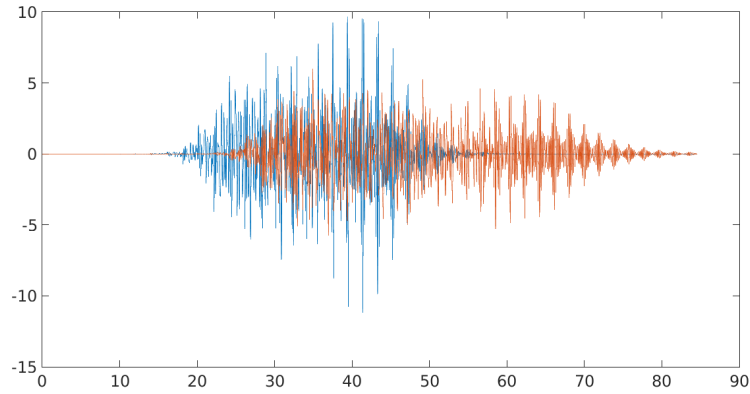
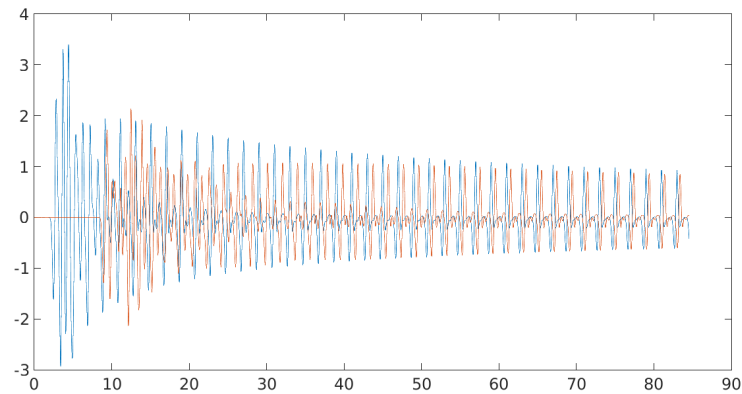
(a) Source en temps de la forme  $\chi$ (b) Source en temps de la forme  $\rho$ 

FIGURE 3.6 – Influence de la fonction d'excitation. Champ diffracté en deux points d'observation

Afin d'enrichir le contenu fréquentiel de notre signal incident nous serons amené à considérer la fonction  $\chi$  définie par

$$\chi(t) = \sum_{n=1}^{P_{\max}} \chi_n(t). \quad (3.15)$$

Notons que le support de  $\hat{\chi}$  évite toutes les fréquences de coupure  $k_n$ . Dans nos simulations, nous prenons  $P_{\max} = 12$ .

Pour illustrer l'intérêt de la fonction  $\chi$  choisie, nous avons représenté figure 3.6 le champ diffracté obtenu pour une source en temps de la forme  $\chi$  et une source de la forme

$$\rho(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left( e^{-(t-D)^2/E} \right),$$

avec  $D = 5/4\sqrt{2}$  et  $E = 5/16$ . Le champ diffracté est mesuré en deux points de la surface : en  $(-R, d)$  (courbe bleue) et en  $(R + (M - 1)\delta, d)$  (courbe rouge), pour  $R = 1$ ,  $d = 1$ ,  $M = 36$  et  $\delta = 1/6$ . Le spectre de la fonction  $\rho$  coupe plusieurs fréquences de coupure. Nous vérifions comme attendu sur la figure 3.6 que le champ diffracté, en fonction du temps, s'atténue rapidement dans le cas de la source localisée  $\chi$ , ce qui n'est pas le cas pour  $\rho$ .

### 3.3.2 Résultats numériques

#### Comparaison des méthodes

Nous présentons ici quelques résultats numériques obtenus avec notre méthode utilisant des données en régime temporel à la surface du guide et avec la Linear Sampling Method modale, afin de pouvoir les comparer. En effet, la méthode initiale, la Linear Sampling Method dans une formulation modale, sera considérée comme notre référence, puisqu'il s'agit d'un cas idéal : nous avons un champ purement harmonique, et nous avons accès aux données sur des sections de part et d'autre de la portion de guide à caractériser, ce qui n'est pas possible en général. Nous allons tester quatre configurations :

1. La LSM modale : nous résolvons le problème fréquentiel (2.2) avec comme source  $f$  les modes du guide  $u_n^\pm$ ,  $n = 0, \dots, P - 1$ , et nous mesurons le champ diffracté sur les sections pour reconstruire la matrice de LSM ;
2. La LSM en temps : nous résolvons le problème temporel (3.1) avec des sources et des mesures à la surface du guide, la source étant de la forme  $g(\cdot - x_3^{s\pm})\chi$ , avec  $g$  donnée par (3.13) et  $\chi$  par (3.15). Nous utilisons ensuite ces données
  - (a) pour une seule fréquence,
  - (b) pour un jeu de fréquences correspondant toutes au même nombre de modes propagatifs,
  - (c) pour un jeu de fréquences correspondant à différents nombres de modes propagatifs.

Par ailleurs,  $d = R = 1$ , la célérité des ondes  $c$  est prise égale à 1 et nous prenons pour nombre de points de mesure  $M = 3P_{\max}$  et pour pas  $\delta$  la plus petite longueur d'onde utilisée dans le cas 2.(c), conformément aux conclusions de l'étude sur le conditionnement des matrices d'émission et de réception. Enfin, sauf mention contraire, la fonction caractéristique considérée pour les données temporelles est  $\psi_{\max}^s$ , la fonction caractéristique en série normalisée par le maximum en espace pour chaque fréquence, dont l'expression est rappelée en (3.17).

Il est intéressant d'étudier des défauts non connexes, puisque les méthodes d'échantillonnage s'affranchissent de la connaissance a priori du nombre de composantes connexes du défaut. Nous pourrions ainsi regarder la capacité des méthodes à séparer plusieurs défauts. C'est pourquoi deux cas seront montrés ici : un défaut carré et deux défauts rectangulaires. Dans les deux cas, les conditions au bord du défaut sont de type Dirichlet.

#### Remarque 3.2

*Dans tout le manuscrit, nous avons tracé le logarithme des fonctions caractéristiques pour obtenir les images présentées. Par ailleurs, les échelles de couleur n'ont pas été indiquées puisque l'identification du défaut est qualitative. Ainsi, les zones rouges correspondent à un éventuel défaut et les zones bleues à son complémentaire. Les teintes intermédiaires, à savoir jaunes et orangées, peuvent être considérées comme indéterminées et apparaîtront dans le cas d'images bruitées.*

Tout d'abord, en comparant les figures 3.7, 3.8 et 3.9, 3.10 nous constatons que, comme prévu, une dégradation de l'image a lieu lors du passage de la méthode de référence en fréquentiel à des données temporelles en surface : elle est due au mauvais conditionnement des matrices d'émission et de réception, et donc à une sensibilité accrue à l'erreur (numérique ici)

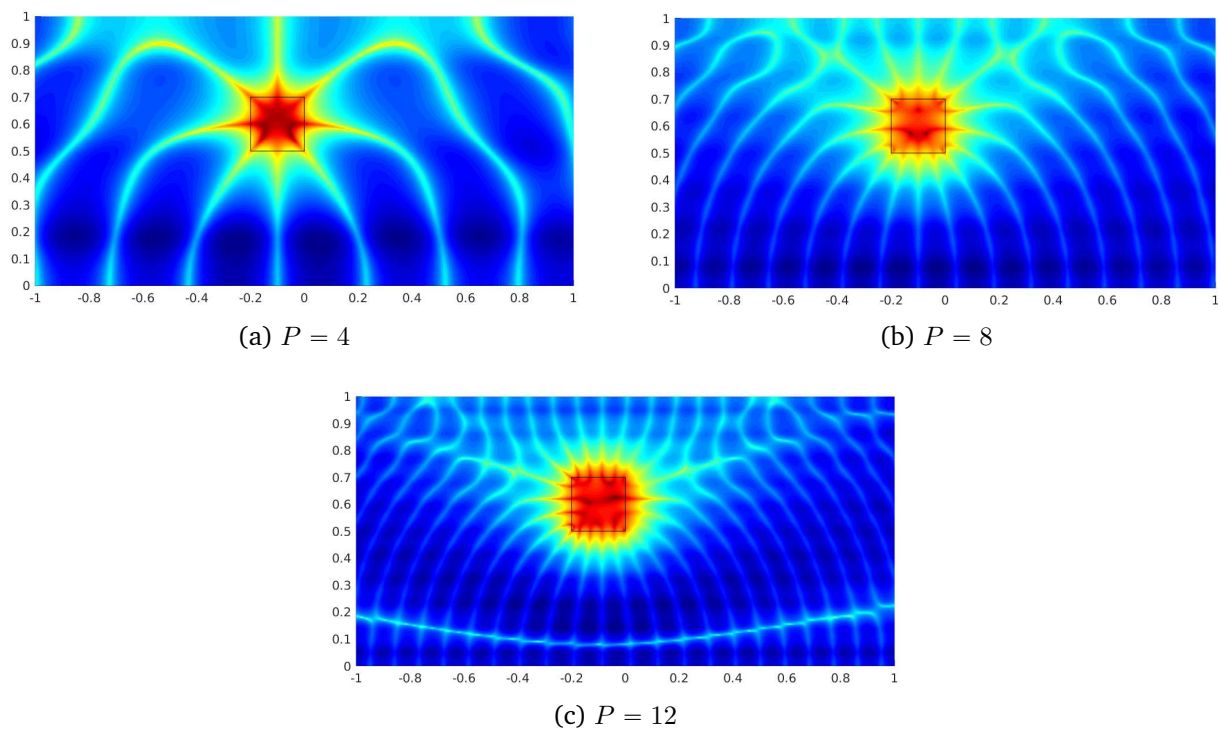


FIGURE 3.7 – LSM modale, un obstacle carré

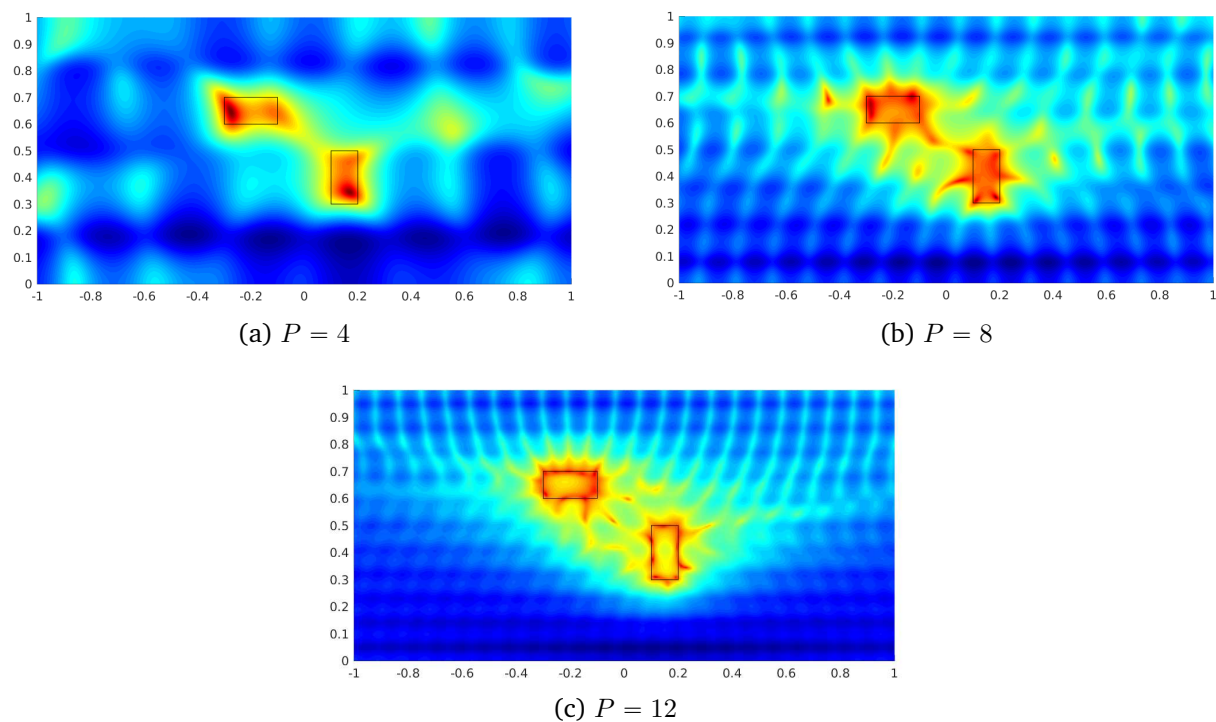


FIGURE 3.8 – LSM modale, deux obstacles rectangulaires

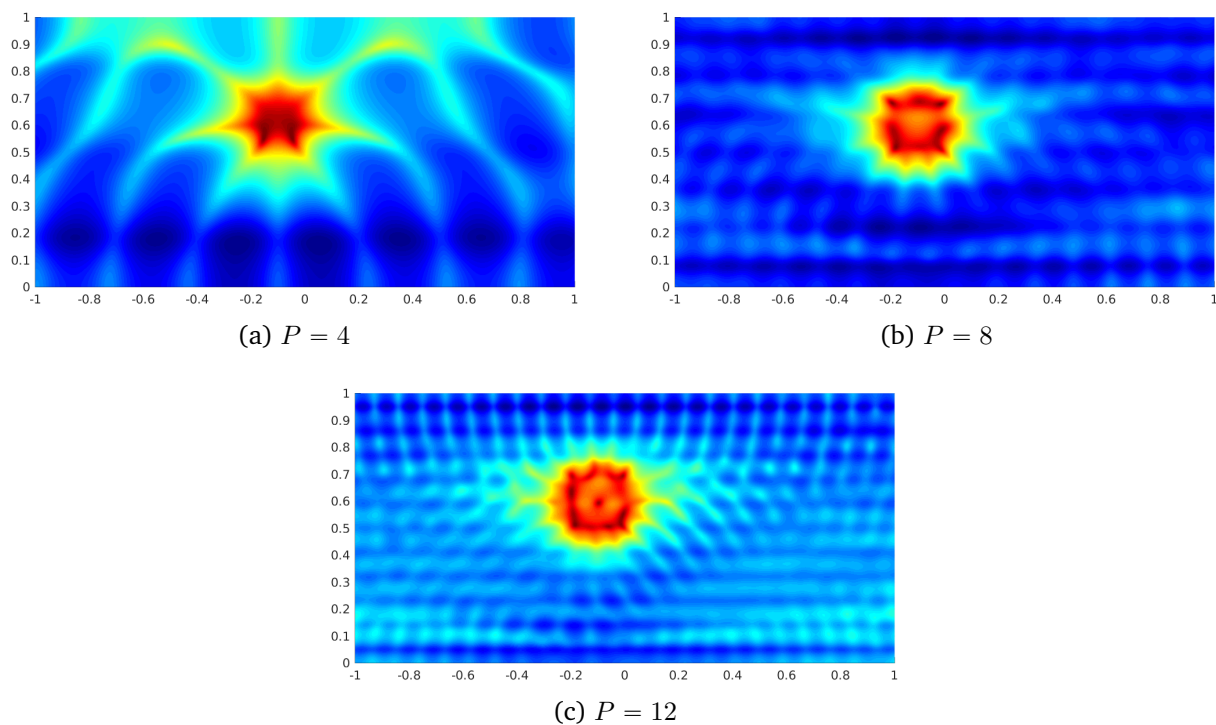


FIGURE 3.9 – Données temporelles avec  $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie à une fréquence pour  $P$  modes propagatifs

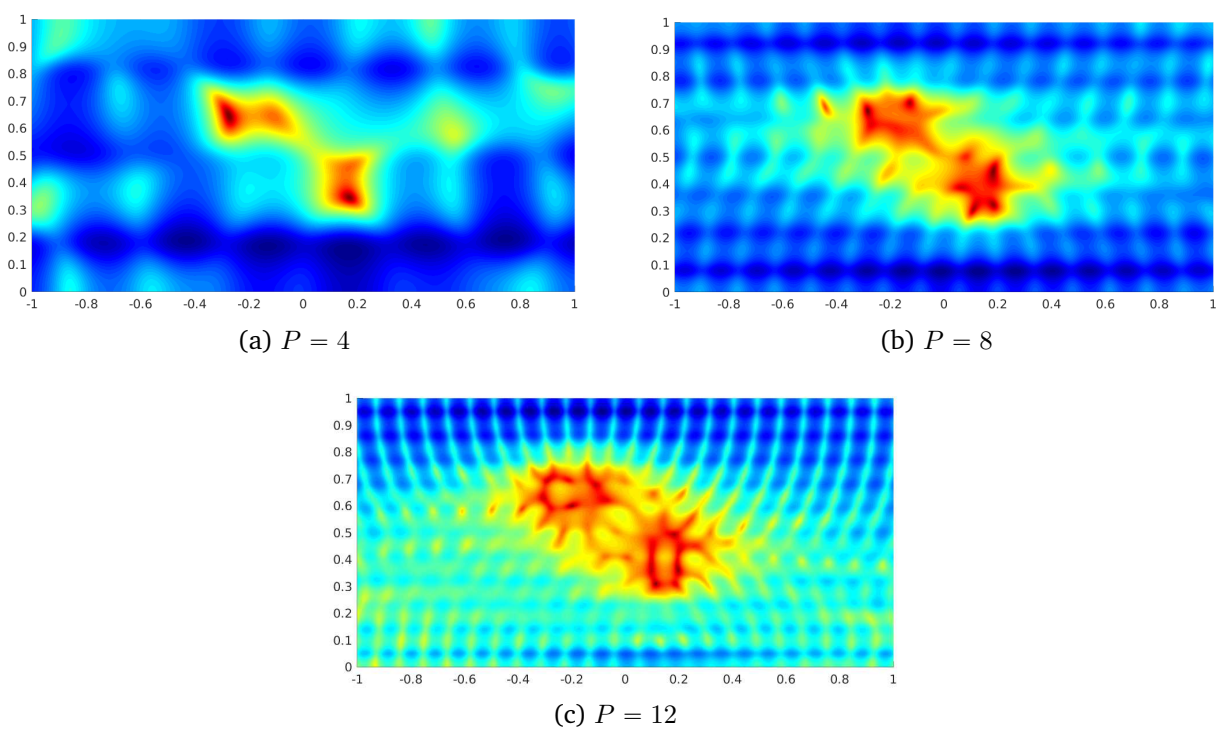


FIGURE 3.10 – Données temporelles avec  $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie à une fréquence correspondant à  $P$  modes propagatifs

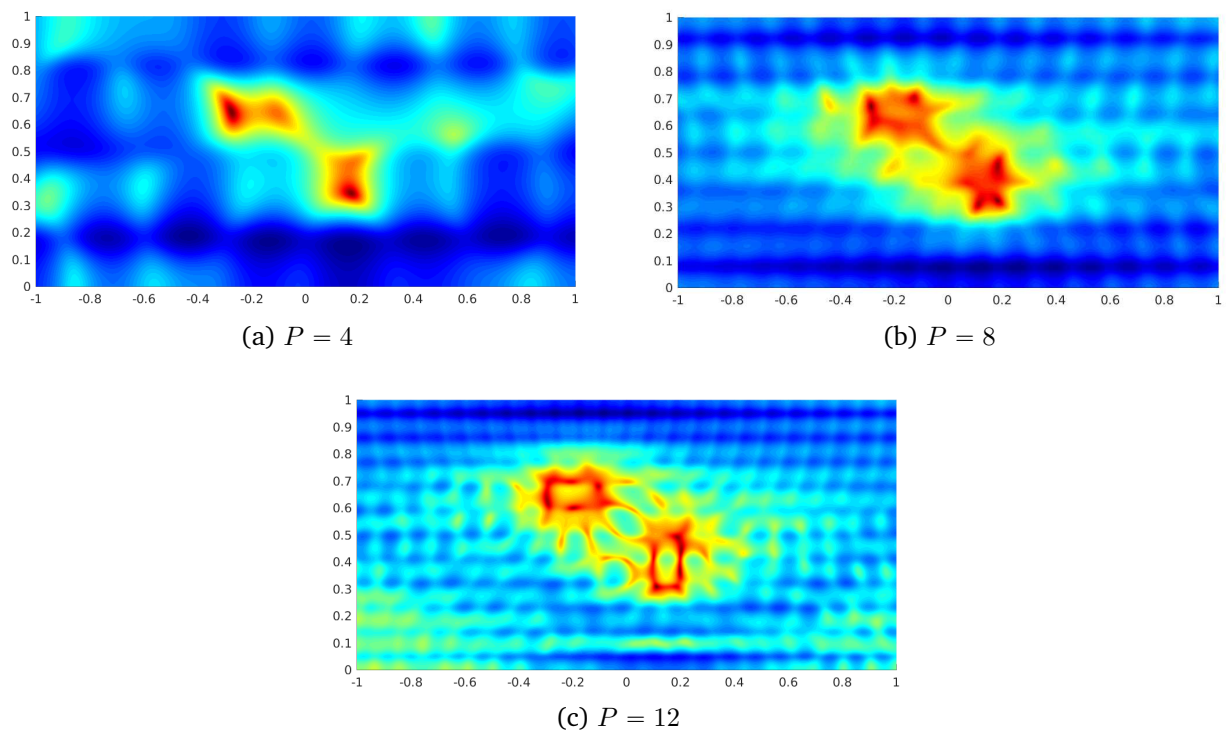


FIGURE 3.11 – Données temporelles avec  $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie avec plusieurs fréquences dans le support de  $\chi_P$ .

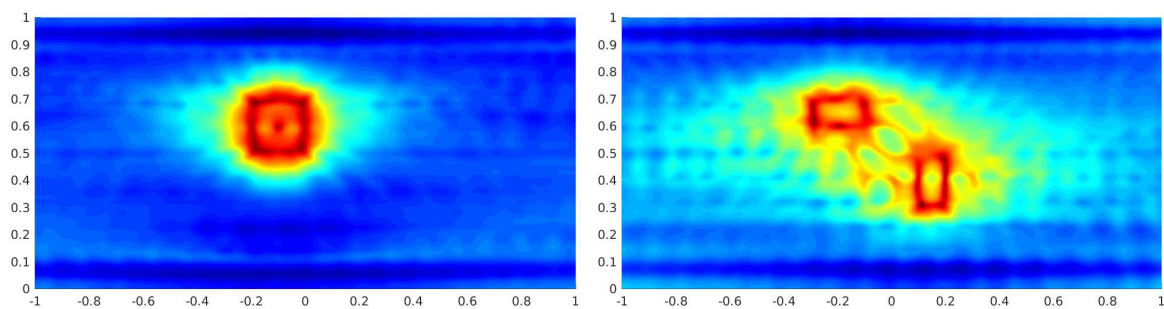


FIGURE 3.12 – Données temporelles avec  $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie avec plusieurs fréquences dans l'union des supports de  $\chi_n$ ,  $n = 8, \dots, 12$ .

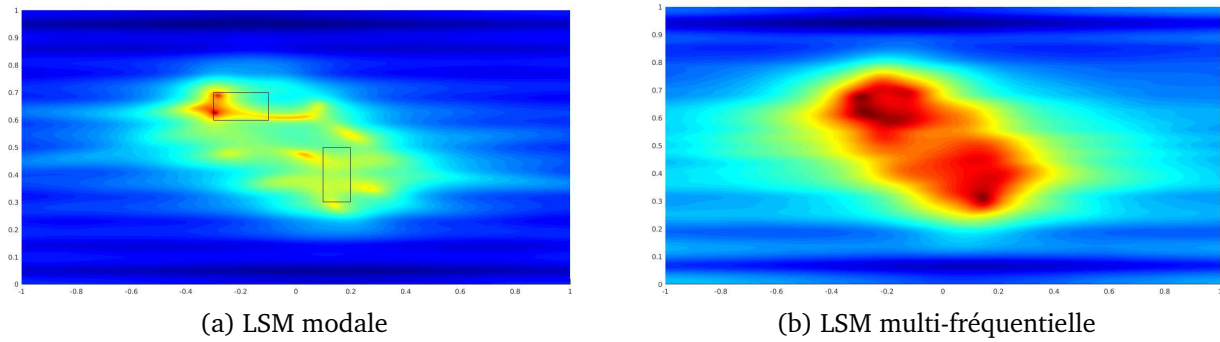


FIGURE 3.13 – Imagerie dans le cas du back-scattering

dans les mesures. Toutefois, nous constatons une amélioration dans 3.11, où plusieurs fréquences pour un même nombre de modes propagatifs sont utilisées pour obtenir les images. La précision de la méthode est fortement liée à la fréquence et au nombre de modes propagatifs, comme nous pouvons le voir figures 3.7 et 3.8. Nous pourrions donc nous attendre à ce que l'ajout de fréquences pour lesquelles le nombre de modes propagatifs est inférieur à celui des fréquences utilisées figure 3.11 n'améliore pas, voire détériore la qualité de l'image obtenue. Or, nous voyons que la précision est encore accrue figure 3.12, avec des résultats proches de ceux obtenus avec la méthode de référence. Nous voyons donc qu'il est intéressant d'enrichir l'image en n'utilisant pas uniquement les fréquences pour lesquelles le nombre de modes propagatifs est maximal.

Un autre point intéressant est présenté figure 3.13 : comme nous l'avons déjà mentionné, nous ne pouvons pas toujours en pratique avoir accès aux deux côtés de la zone à inspecter, et nous ne pouvons donc pas toujours construire les matrices de mesure complètes. C'est pourquoi il est intéressant d'envisager le cas du back-scattering, où seul un bloc sur quatre de la matrice de mesure est construit. Nous voyons ici que dans ce cas la méthode temporelle réagit mieux au manque de données que la méthode initiale. Cela peut s'expliquer de la façon suivante : à chaque fréquence, nous obtenons une image approchant le défaut comportant beaucoup de bruit dans son voisinage. L'image du défaut est la même pour chaque fréquence, alors que le bruit va se répartir différemment. La combinaison des différentes images a donc pour effet de lisser ces artefacts en préservant l'image significative du défaut pour chaque fréquence. Ce constat a déjà été fait dans [109].

### Comparaison des différentes fonctions caractéristiques

Intéressons nous à présent au choix de la fonction caractéristique pour imager le défaut. Rappelons que nous avons deux façons de combiner les fonctions caractéristiques fréquentielles  $\psi(\cdot, \omega)$ , respectivement en parallèle ou en série :

$$\psi^s = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} |\psi(\cdot, \omega)|^{-2} d\omega \right)^{-1/2}, \quad \psi^p = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} |\psi(\cdot, \omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

À ces deux méthodes s'ajoutent deux normalisations possibles. La première vient compenser les fortes variations d'amplitude des fonctions caractéristiques fréquentielles en fonction de



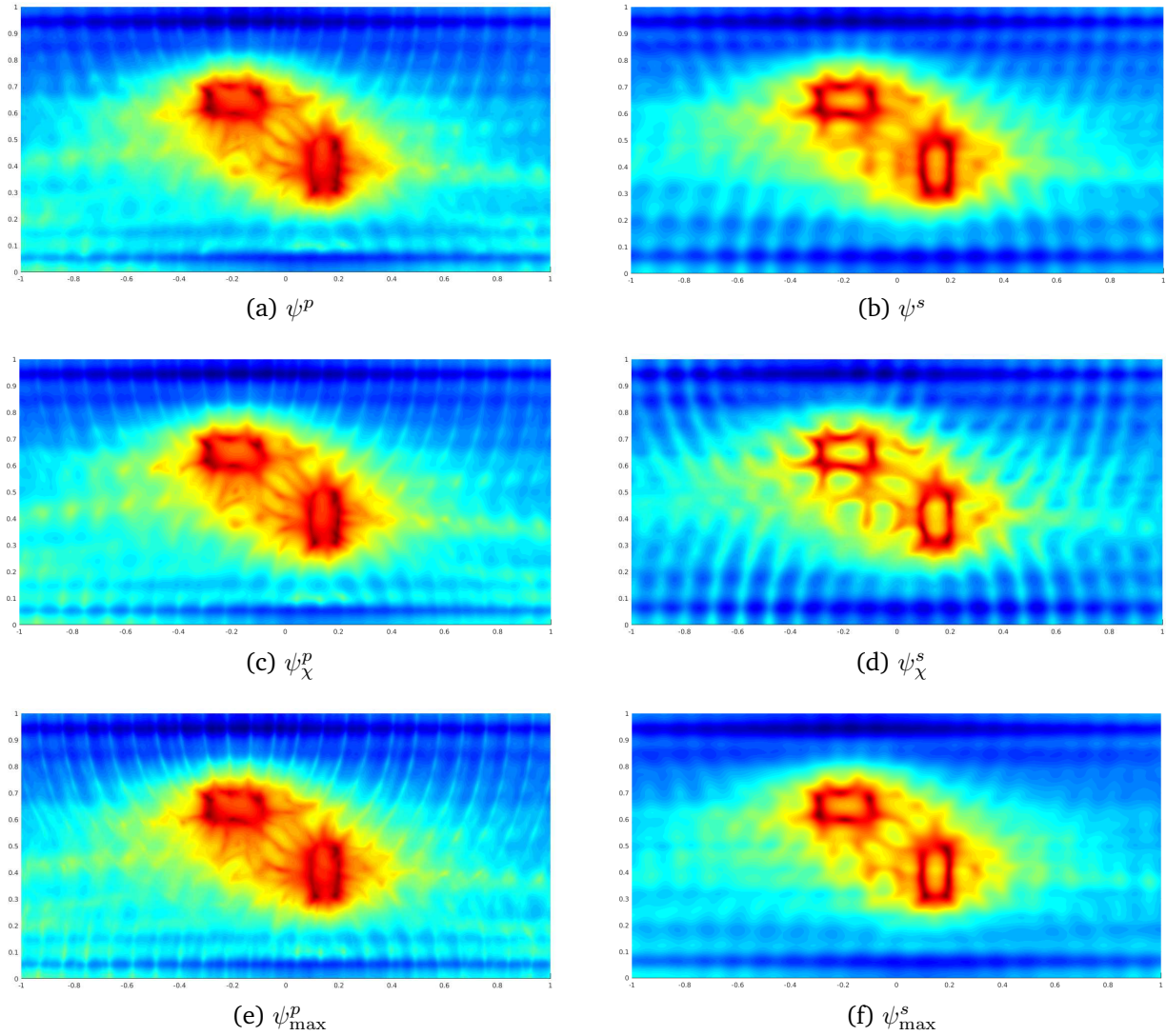


FIGURE 3.14 – Comparaison des fonctions caractéristiques avec des données temporelles.

la fréquence, ce qui nous a amené à normaliser  $\psi^s$  et  $\psi^p$  par le maximum à chaque fréquence,

$$\psi_{\max}^s = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\max_{z \in \mathcal{G}} |\psi(z, \omega)|^2}{|\psi(\cdot, \omega)|^2} d\omega \right)^{-1/2}, \quad \psi_{\max}^p = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{|\psi(\cdot, \omega)|^2}{\max_{z \in \mathcal{G}} |\psi(z, \omega)|^2} d\omega \right)^{1/2}, \quad (3.17)$$

tandis que la seconde vient du lien entre la Linear Sampling Method fréquentielle appliquée à des données temporelles et la Time Domain Linear Sampling Method,

$$\psi_\chi^s = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} (|\hat{\chi}(\omega)| |\psi(\cdot, \omega)|)^{-2} d\omega \right)^{-1/2}, \quad \psi_\chi^p = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} (|\psi(\cdot, \omega)| |\hat{\chi}(\omega)|)^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Notons que le lien avec la TDLSM n'a été établi que pour la fonction caractéristique série (voir section 3.1.3), mais nous avons essayé aussi cette normalisation pour la fonction caractéristique parallèle. Nous avons représenté figure 3.14 les différentes fonctions caractéristiques appliquées au même jeu de données. Nous voyons que, globalement, les fonctions caractéristiques en série donnent une meilleure qualité d'identification des défauts que celles en parallèle. Ces identifications sont légèrement améliorées par les normalisations, qui donnent

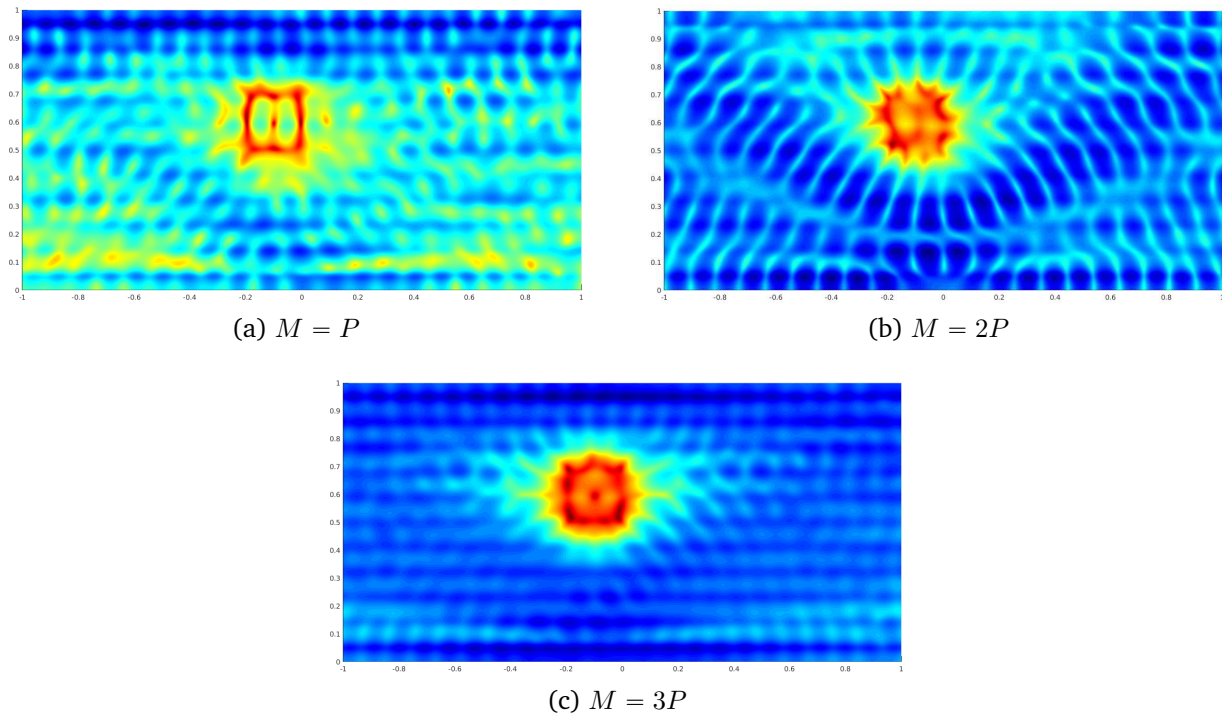


FIGURE 3.15 – Influence de la valeur de  $M$ . Données temporelles avec  $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie pour une fréquence correspondant à  $P = 12$  modes propagatifs.

des résultats similaires. Nous préférons la normalisation par le max car nous estimons l'image produite plus précise, au sens où le bord du défaut est rendu plus fidèlement et l'intérieur est restitué : par exemple sur la figure 3.14 (d), on ne fait que difficilement la différence entre l'intérieur du défaut en haut à gauche et l'espace entre les deux défauts, alors que la différence semble légèrement plus nette figure 3.14 (f). De plus, dans le cas de données expérimentales, nous ne connaissons nos fonctions de source qu'à un coefficient multiplicatif près. Le fait de normaliser par le maximum permet de contourner cette difficulté.

### ***Influence du conditionnement des matrices d'émission et de réception***

Comme mentionné précédemment, le conditionnement des matrices d'émission et de réception joue un rôle central dans le succès ou non de l'imagerie. Pour illustrer ce fait, nous avons fait varier le nombre de points de source et de mesure, pour un même jeu de données, et nous avons tracé la fonction caractéristique pour une fréquence correspondant à 12 modes propagatifs sur la figure 3.15. Nous observons assez rapidement une dégradation de l'image avec la diminution de  $M$ , alors que la seule erreur présente dans les données est l'erreur numérique du calcul direct.

Un autre paramètre pouvant influencer sur le conditionnement est la forme de la source  $g$  en espace. Plus précisément, sa transformée de Fourier intervient dans la matrice de pondération  $F_e$  et nous avons vu que, les  $\beta_n$  associés aux modes propagatifs étant inclus dans l'intervalle  $(0, k)$ , si  $\hat{g}$  varie peu sur cet intervalle, alors la source ne jouera que peu sur le conditionnement. Pour illustrer cette propriété, nous avons pris figure 3.16 une fonction  $g$  de la forme

$$g(x) = \frac{a}{d} \max \left( 1 - \frac{a|x_3|}{d}, 0 \right),$$

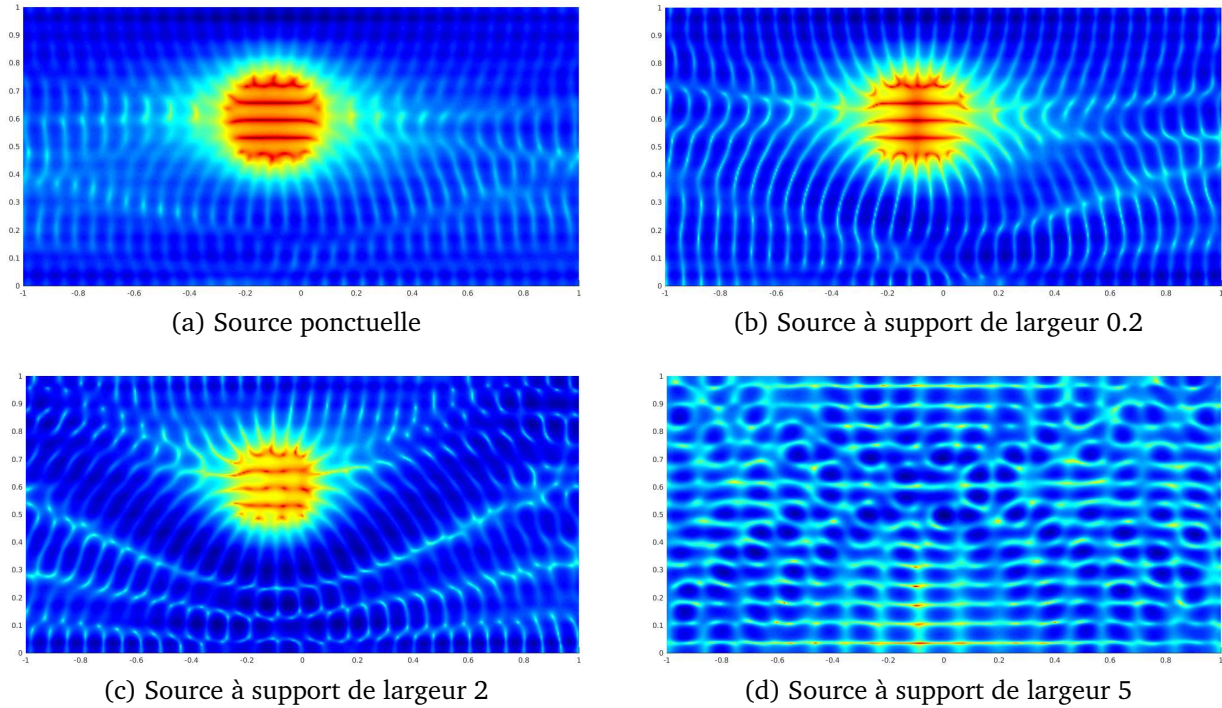


FIGURE 3.16 – Influence de la forme de la source en espace

avec  $a \in \{0.1, 1, 2.5\}$ , ou  $g = \delta$ . Ainsi, nous pouvons comparer le cas idéal d'une source ponctuelle, pour laquelle le conditionnement de la matrice de pondération vaut 1, à des approximations de plus en plus dégradées. Nous observons une légère dégradation de l'image lorsque le support de  $g$  s'étale, l'imagerie dans le dernier cas étant impossible.

### *Influence du bruit*

Enfin, la figure 3.17 présente des images réalisées avec des données bruitées : soit  $U$  le vecteur des données temporelles mesurées en un point  $(d, x_3^{\pm})$  pour une source en  $(d, x_3^{\pm})$ . Nous construisons la donnée bruitée  $U^\delta$  en ajoutant au vecteur  $U$  un bruit ponctuel gaussien, dont l'amplitude est prise telle que

$$\|U^\delta - U\|_2 = \sigma \|U\|_2,$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne du vecteur et  $\sigma$  est le niveau de bruit souhaité.

Nous voyons ainsi que la méthode est peu sensible au bruit. Toutefois, ces images sont obtenues pour un nombre de points  $M$  élevé ( $M = 3P$ ). La sensibilité au bruit serait accrue pour un conditionnement moins bon.

### **Remarque 3.3**

*Dans toutes les images présentées précédemment, les mesures sont ponctuelles. Étant donné la symétrie des rôles de la source et de la mesure dans cette méthode, nous n'avons pas présenté l'effet de la pondération de cette dernière. Il est toutefois intéressant de garder à l'esprit ce paramètre pour les applications expérimentales.*

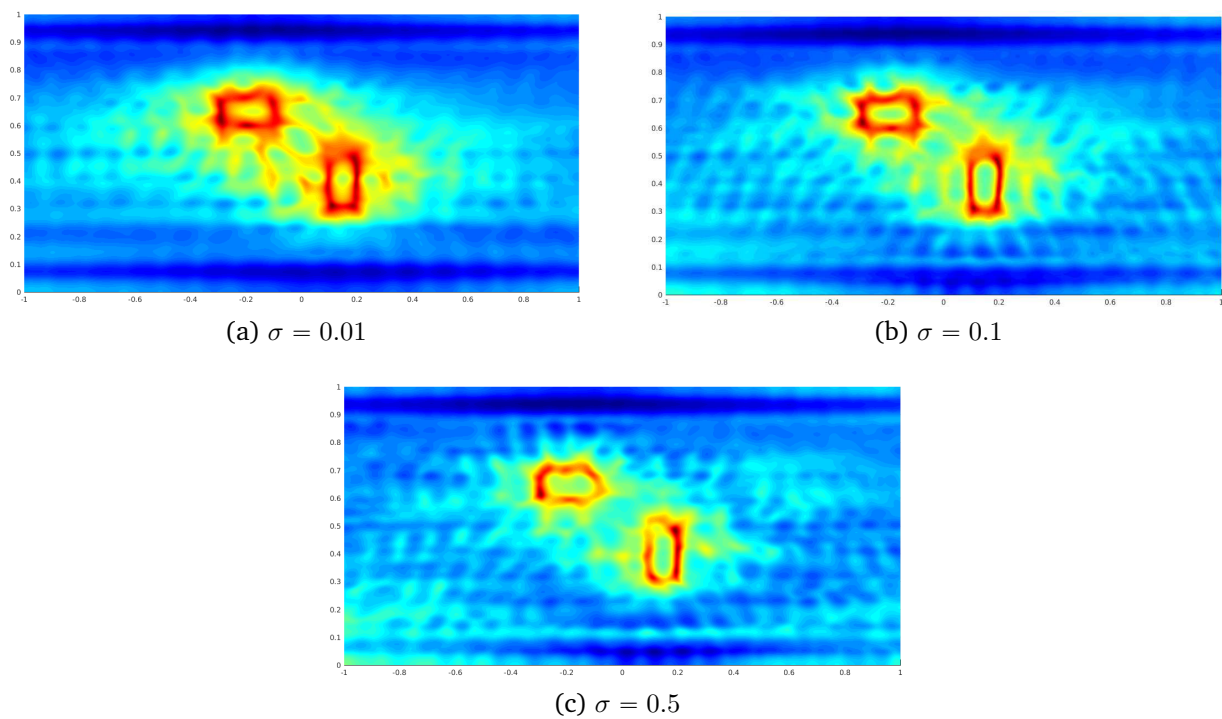


FIGURE 3.17 – Cas des données bruitées. Données temporelles avec  $\chi = \sum_{n=1}^{12} \chi_n$ . Imagerie avec plusieurs fréquences dans l'union des supports  $\chi_n$ ,  $n = 8, \dots, 12$ .



# CHAPITRE

## 4

# APPLICATION DE LA LINEAR SAMPLING METHOD À UN GUIDE D'ONDES ÉLASTIQUES

## Sommaire

---

4.1 Modes guidés et formalisme $XY$ . . . . .	90
4.2 Linear Sampling Method dans un guide d'ondes élastiques . . . . .	95
4.3 Analyse modale de la LSM . . . . .	104
4.4 Extension aux données surfaciques . . . . .	107
4.5 Étude du conditionnement des matrices d'émission et de réception . . .	113
4.5.1 Étude théorique . . . . .	113
4.5.2 Étude numérique . . . . .	116
4.6 Extension au régime temporel et applications numériques . . . . .	120
4.6.1 Extension au régime temporel. Choix de la forme de la source en temps	121
4.6.2 Synthèse de données artificielles . . . . .	122
4.6.3 Résultats numériques . . . . .	123

---

Nous avons étudié dans la partie précédente l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes acoustiques à partir de données de surface en régime temporel. Nous avons vu notamment que nous pouvions, grâce à une transformée de Fourier et à la résolution d'un système linéaire pour chaque fréquence, nous ramener à des données selon les sections du guide et appliquer une version modale de la Linear Sampling Method. Ainsi, une régularisation naturelle du problème est effectuée quand nous nous restreignons aux modes propagatifs. Cela nous permet par ailleurs de manipuler de petits systèmes. Nous avons vu qu'adapter la LSM modale à des données à la surface nous permettait d'exploiter la décomposition modale des champs, et d'optimiser le choix du nombre de points de source et de mesure  $M$  ainsi que leur espacement  $\delta$ . Nous avons ainsi choisi de considérer l'espacement  $\delta$  égal à la plus petite longueur d'onde  $\lambda$  rencontrée et le nombre de points  $M$  aussi grand que possible. Enfin, une

transformée de Fourier ayant été appliquée aux champs diffractés, nous obtenons ainsi une fonction caractéristique pour chaque fréquence du spectre, ce qui nous permet d'obtenir une image de bonne qualité en combinant ces dernières.

Nous considérons dans ce chapitre un guide d'ondes élastiques, et nous allons suivre la même démarche pour atteindre notre objectif, à savoir imager un défaut à partir de données de surface en régime temporel. Nous allons notamment généraliser les résultats de la partie précédente. L'une des principales différences par rapport à l'acoustique est que les champs sont dorénavant vectoriels, voir matriciels. Pour insister sur ce point et bien différencier les différents objets manipulés, nous notons les vecteurs en gras. Ainsi, le déplacement, qui est un vecteur, est noté  $\mathbf{u}$  alors que la contrainte associée au déplacement  $\mathbf{u}$ , qui est une matrice, est notée  $\sigma(\mathbf{u})$ .

Nous commençons dans la première section de ce chapitre par introduire le formalisme des modes guidés dans le cas du guide d'ondes élastiques, puis nous présentons dans la deuxième section la justification théorique de la Linear Sampling Method. Nous considérons ensuite dans la troisième section sa formulation modale, avant de nous intéresser aux sources et mesures en surface du guide dans la quatrième, et au conditionnement des matrices d'émission et de réception dans la cinquième. Enfin, l'aspect temporel et des essais numériques sont présentés dans la sixième section.

## 4.1 Modes guidés et formalisme $\mathbf{XY}$

Nous allons présenter succinctement ici le formalisme  $\mathbf{XY}$  introduit dans [9, 114, 115, 116] pour décrire les modes élastiques et mettre en avant certaines de leurs propriétés. Nous serons ainsi dans un cadre proche de celui des modes guidés acoustiques, ce qui nous permettra d'écrire la LSM modale.

Nous considérons ici un guide d'ondes  $W$  dans  $\mathbb{R}^3$ , de section transverse  $\Sigma$  et de bord  $\Gamma$ . Le guide peut s'écrire  $W = \Sigma \times \mathbb{R}$  et nous noterons pour  $x \in W$ ,  $x = (x_S, x_3)$  avec  $x_S$  la coordonnée dans la section et  $x_3$  celle selon l'axe du guide. Le cas où  $W \subset \mathbb{R}^2$  se déduit en éliminant la deuxième composante dans la section. La masse volumique du matériau est notée  $\rho$  et le tenseur des constantes élastiques  $C$ . Nous ne considérerons que des matériaux isotropes ce qui implique que  $C$  est de la forme

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}$$

en notations de Voigt, avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé du matériau, réels positifs dans le cas sans atténuation et complexes sinon. Nous faisons l'hypothèse suivante :

### Hypothèse 9

*Le premier coefficient de Lamé  $\lambda$  est positif en l'absence d'atténuation. Dans le cas avec atténuation, sa partie réelle est positive.*

Cette hypothèse simplifiera certaines démonstrations dans la suite et n'exclue que quelques matériaux qui ne nous intéressent pas en pratique.

**Remarque 4.1**

Nous nous sommes restreints au cas de matériaux isotropes mais le formalisme  $\mathbf{XY}$  a aussi été écrit dans [9] pour des matériaux orthotropes dont la direction d'orthotropie coïncide avec l'axe du guide, ce qui signifie que nous pourrions de la même façon développer notre méthode pour ces matériaux. Par ailleurs, la masse volumique  $\rho$  et les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  ne sont pas nécessairement constants dans le guide. Nous pouvons donc aussi traiter par exemple le cas d'un guide composé d'une superposition de plusieurs matériaux, cas que nous nommerons multi-couche dans la suite.

Nous notons  $\mathbf{u}$  le déplacement, qui est à présent un vecteur de taille 3, et  $\sigma(\mathbf{u})$  la contrainte liée au déplacement par la loi de Hooke

$$\sigma(\mathbf{u}) = C \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}.$$

Pour les champs vectoriels, nous indiquons par  $S$  leurs composantes suivant la section. Plus précisément, nous séparons les composantes du déplacement et de la contrainte suivant qu'elles appartiennent à la section ou sont selon l'axe. Nous notons aussi  $\mathbf{t}$  le vecteur des contraintes selon l'axe du guide  $\mathbf{e}_3$ . Plus précisément nous avons :

$$\mathbf{u}_S = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_S = \begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix}, \quad t_3 = -\sigma_{33}.$$

De même, nous noterons  $\text{div}_S$  l'opérateur

$$\text{div}_S : \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mapsto \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2.$$

Les modes guidés sont des solutions à variables séparées du problème

$$\begin{cases} \text{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } W \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\boldsymbol{\nu}$  désigne la normale sortante à  $W$ . Afin de décrire ces modes guidés, nous introduisons le formalisme  $\mathbf{XY}$ , qui va nous permettre d'exhiber un opérateur à résolvante compacte dont les fonctions propres seront les fonctions transverses associées à ces modes guidés. Ce formalisme consiste en la réécriture du problème de l'élastodynamique (4.1) au moyen de variables  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ , définies comme suit :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_S \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

Elles sont dites mixtes car panachant des composantes du déplacement  $\mathbf{u}$  et du vecteur contrainte  $\sigma \mathbf{e}_3$ .

D'après [9], le système de l'élastodynamique (4.1) se réécrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} & \text{dans } W, \\ \sigma_S(\mathbf{Y}) \boldsymbol{\nu}_S = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{t}_S \cdot \boldsymbol{\nu}_S = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.2)$$



les opérateurs  $F_X$  et  $F_Y$  étant définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_Y \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} -\operatorname{div}_S \sigma_S(\mathbf{Y}) - \rho \omega^2 \mathbf{u}_S \\ -\alpha \operatorname{div}_S \mathbf{u}_S - \frac{\alpha}{\lambda} t_3 \end{pmatrix}, \\ F_X \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \frac{t_S}{\mu} - \nabla_S u_3 \\ \operatorname{div}_S \mathbf{t}_S + \rho \omega^2 u_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec  $\alpha = \lambda/(\lambda + 2\mu)$ .

Nous voyons clairement que, dans le problème d'évolution (4.2), le calcul des modes revient à un problème aux valeurs propres : en effet, les modes du guide sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}(x) \\ \mathbf{Y}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(x_S) \\ \mathbf{Y}(x_S) \end{pmatrix} e^{i\beta x_3}, \quad \beta \in \mathbb{C}. \quad (4.3)$$

Ils vérifient donc le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} i\beta \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} & \text{dans } \Sigma, \\ \sigma_S(\mathbf{Y}) \boldsymbol{\nu}_S = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ \mathbf{t}_S \cdot \boldsymbol{\nu}_S = 0 & \text{sur } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (4.4)$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix},$$

notons  $D(F_X)$  et  $D(F_Y)$  les domaines de  $F_X$  et  $F_Y$  :

$$\begin{aligned} D(F_X) &= \{ \mathbf{X} = (\mathbf{t}_S, u_3) \in (L^2(\Sigma))^2 \times H^1(\Sigma), \operatorname{div}_S \mathbf{t}_S \in L^2(\Sigma) \text{ et } \mathbf{t}_S \cdot \boldsymbol{\nu}_S = 0 \text{ sur } \partial\Sigma \}, \\ D(F_Y) &= \{ \mathbf{Y} \in (H^1(\Sigma))^2 \times L^2(\Sigma), \operatorname{div}_S \sigma_S(\mathbf{Y}) \in (L^2(\Sigma))^2 \text{ et } \sigma_S(\mathbf{Y}) \boldsymbol{\nu}_S = 0 \text{ sur } \partial\Sigma \}, \end{aligned}$$

et introduisons le produit scalaire (non hermitien) de  $\mathbf{L}^2(\Sigma) = (L^2(\Sigma))^3$  :

$$(\mathbf{X} | \mathbf{Y})_\Sigma = \int_\Sigma (\mathbf{t}_S \cdot \mathbf{u}_S + u_3 t_3) \, ds(x).$$

Citons quelques propriétés de ces opérateurs [10] :

#### Proposition 4.1

Les opérateurs  $F_X$  et  $F_Y$  vérifient les propriétés suivantes :

- i) Les domaines  $D(F_X)$  et  $D(F_Y)$  sont denses dans  $\mathbf{L}^2(\Sigma)$ ;
- ii)  $F_X$  et  $F_Y$  sont symétriques pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)_\Sigma$ ;
- iii) Sauf pour au plus un ensemble dénombrable de pulsations  $\omega$ , les opérateurs  $F_X$  et  $F_Y$  sont autoadjoints ;
- iv) Sauf pour au plus un ensemble dénombrable de pulsations  $\omega$ , les opérateurs  $F_X F_Y$  et  $F_Y F_X$  sont à résolvante compacte.

En appliquant  $A$  à la première équation du problème (4.4), nous obtenons un nouveau problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\beta^2 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} & \text{dans } \Sigma, \\ \sigma_S(\mathbf{y})\boldsymbol{\nu}_S = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ \mathbf{t}_S \cdot \boldsymbol{\nu}_S = 0 & \text{sur } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (4.5)$$

### Corollaire 4.2

*Sauf pour au plus un ensemble dénombrable de pulsations  $\omega$ , l'opérateur  $A^2$  est à résolvante compacte, ce qui implique que le spectre de  $A$  est composé d'un ensemble discret de valeurs propres, de multiplicité finie.*

Il existe donc une famille discrète de solutions propres  $(-\beta_n^2, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$  de (4.5) qui définit nos modes guidés

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^\pm(x) \\ \mathbf{Y}_n^\pm(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \mathbf{x}_n(x_S) \\ \mathbf{y}_n(x_S) \end{pmatrix} e^{\pm i\beta_n x_3}.$$

En particulier, les modes guidés en déplacement, solutions de (4.1), sont de la forme

$$\mathbf{U}_n^\pm(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(x_S) \\ \pm u_3^n(x_S) \end{pmatrix} e^{\pm i\beta_n x_3}.$$

Il existe trois types de modes élastiques :

- les modes propagatifs, pour lesquels  $\beta_n$  est réel ;
- les modes évanescents, pour lesquels  $\beta_n$  est imaginaire pur ;
- les modes inhomogènes, pour lesquels  $\beta_n$  est complexe.

Dans la suite, nous ne ferons en général pas la distinction entre les modes évanescents et ceux inhomogènes. Cela vient du fait que, hormis dans le cas avec atténuation, nous ne considérerons que les modes propagatifs dans l'application effective de la Linear Sampling Method. Dans le cas avec atténuation, il n'existe plus de modes propagatifs et nous travaillerons donc avec des modes inhomogènes, que nous appellerons pseudo-propagatifs : il s'agit de modes qui seraient propagatifs pour le même guide sans atténuation.

Une difficulté majeure de l'élasticité par rapport à l'acoustique est que les fonctions transverses  $(\mathbf{u}_S^n(x_S) \pm u_3^n(x_S))^T$  ne forment pas une base orthonormale de  $L^2(\Sigma)$ . Nous ne pouvons pas exploiter la décomposition modale dans ces conditions pour obtenir la LSM modale. C'est pourquoi nous utilisons dans la suite le formalisme  $\mathbf{XY}$ .

### Hypothèse 10

*La pulsation  $\omega$  est telle que les points *iii*) et *iv*) de la proposition 4.1 sont vrais et telle qu'aucune solution  $(\beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  de (4.4) ne vérifie  $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_\Sigma = 0$ . De plus, on suppose  $\beta \neq 0$  pour tous les modes.*

Cette hypothèse nous permet de classer les modes suivant leur direction de propagation :

- $(\beta_n, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$  qui se propagent dans le sens des  $x_3$  croissants, ce qui correspond à  $\partial\omega/\partial\beta > 0$  pour les modes propagatifs et à  $\text{Im}(\beta_n) > 0$  pour les autres ;

- $(\beta_{-n}, \boldsymbol{x}_{-n}, \boldsymbol{y}_{-n}) = (-\beta_n, -\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)$  qui se propagent dans le sens des  $x_3$  décroissants.

Cette classification peut se voir en estimant la vitesse de groupe d'un mode propagatif, qui s'écrit (voir [9])

$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = - \frac{(i\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})_\Sigma}{\omega \int_\Sigma \rho(|\boldsymbol{u}_S|^2 + |u_3|^2) ds}.$$

Les triplets  $(-\beta_n^2, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)$  sont donc solutions de (4.5) mais, les opérateurs  $F_X F_Y$  et  $F_Y F_X$  n'étant pas autoadjoints, les familles  $\boldsymbol{x}_n$  et  $\boldsymbol{y}_n$  ne sont pas orthogonales. Par contre, les modes élastiques vérifient une relation de bi-orthogonalité [71] : soient  $(\beta_n, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)$  et  $(\beta_m, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m)$  deux modes, avec  $n, m \geq 0$ , alors

$$(\beta_n^2 - \beta_m^2)(\boldsymbol{x}_m|\boldsymbol{y}_n)_\Sigma = 0. \quad (4.6)$$

Nous pouvons alors écrire

$$(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_m)_S = \delta_{nm} J_n, \quad (4.7)$$

avec  $J_n$  la constante de Fraser. Dans la suite, nous normalisons les modes de sorte que

$$J_n = 1.$$

### Remarque 4.2

Dans le cas d'un espace propre de dimension supérieure à 1, soit le cas par exemple d'un mode double, il est possible de trouver une base bi-orthogonale de cet espace : soit  $(\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{y}_1)^T$  et  $(\boldsymbol{x}_2 \ \boldsymbol{y}_2)^T$  deux vecteurs propres non colinéaires associés à  $\beta \neq 0$ , valeur propre double. Nous avons

$$\begin{aligned} (i\beta \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_2) &= (F_Y \boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{y}_2) \\ &= (\boldsymbol{y}_1|F_Y \boldsymbol{y}_2) \\ &= (\boldsymbol{y}_1|i\beta \boldsymbol{x}_2), \end{aligned}$$

$F_Y$  étant autoadjoint. Cela implique  $(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{y}_1)$ . Supposons à présent que  $(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_2) \neq 0$  et, sans perte de généralité, que  $(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_1) = 1$ . Alors, en posant

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix} - (\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{y}_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix},$$

nous obtenons bien une base bi-orthogonale de l'espace propre associé à  $\beta$ . En utilisant une adaptation de l'algorithme de Gram-Schmidt à la bi-orthogonalité, il est possible d'obtenir une base bi-orthogonale pour n'importe quelle dimension d'espace propre.

Enfin, nous faisons l'hypothèse de complétude des modes :

### Hypothèse 11

Soit  $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{t}_S, u_3) \in (\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))^2 \times H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . Nous avons

$$\boldsymbol{x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_n)_\Sigma \boldsymbol{x}_n. \quad (4.8)$$

Soit  $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_S, t_3) \in (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^2 \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . Nous avons

$$\boldsymbol{y} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y})_\Sigma \boldsymbol{y}_n. \quad (4.9)$$

De plus, il existe  $c, C > 0$  tels que

$$c(\|\mathbf{t}_S\|_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))^2}^2 + \|u_3\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |(\mathcal{X}|\mathbf{y}_n)_\Sigma|^2 \leq C(\|\mathbf{t}_S\|_{(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma))^2}^2 + \|u_3\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2),$$

$$c(\|\mathbf{u}_S\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^2}^2 + \|t_3\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |(\mathcal{X}_n|\mathbf{y})_\Sigma|^2 \leq C(\|\mathbf{u}_S\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma))^2}^2 + \|t_3\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2).$$

Les décompositions (4.8) et (4.9) sont aussi valables pour  $\mathcal{X} = (\mathbf{t}_S, u_3) \in \mathbf{L}^2(\Sigma)$  et pour  $\mathcal{Y} = (\mathbf{u}_S, t_3) \in \mathbf{L}^2(\Sigma)$ .

Ainsi, on peut montrer [10] que les solutions  $(\mathbf{X} \ \mathbf{Y})^T$  de (4.2) sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \sum_{n>0} a_n^+ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^+ \\ \mathbf{Y}_n^+ \end{pmatrix} + a_n^- \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^- \\ \mathbf{Y}_n^- \end{pmatrix}.$$

### Remarque 4.3

Dans le cas où le guide est de dimension 2, soit une plaque infinie, il existe deux types de modes : les modes SH et les modes de Lamb. Les premiers sont des modes scalaires, ce qui nous ramène au problème de l'acoustique traité dans la première partie. Nous n'en parlerons donc pas ici. Sauf mention contraire, nous appellerons donc "modes" en dimension 2 les modes de Lamb.

Dans la suite, nous noterons  $P$  le nombre de modes propagatifs. Notons que contrairement au cas de l'acoustique, il est possible qu'un mode se propageant dans le sens des  $x_3$  croissant possède un nombre d'onde  $\beta$  négatif. Ces modes sont appelés rétrogrades. Ce cas est relativement rare et nous faisons donc l'hypothèse

### Hypothèse 12

Aucun des modes propagatifs n'est rétrograde.

Cette hypothèse n'est pas nécessaire dans la suite, elle permet de simplifier le discours. Ainsi, dans le cas où il n'y a pas d'atténuation, nous imposons

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_{P-1} > 0,$$

et dans le cas avec atténuation nous imposons

$$|\operatorname{Re}\beta_0| > |\operatorname{Re}\beta_1| > |\operatorname{Re}\beta_2| > \cdots > |\operatorname{Re}\beta_{P-1}| > 0.$$

## 4.2 Linear Sampling Method dans un guide d'ondes élastiques

Nous allons justifier dans cette partie l'utilisation de la Linear Sampling Method pour détecter un défaut dans un guide d'ondes élastiques. Nous n'allons considérer ici que le cas d'un défaut volumique à coeur, les conditions au bord étant de type Neumann (voir figure 4.1). Un tel défaut correspond à un obstacle à frontière libre (trou à l'intérieur du guide). Nous reprenons l'analyse faite dans [30] pour une condition au bord de type Dirichlet afin de compléter cette étude. Le problème de diffraction est le suivant : pour  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D) = (H^{-\frac{1}{2}}(\partial D))^3$ , trouver

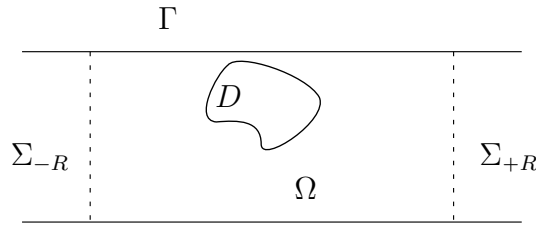


FIGURE 4.1 – Défaut à coeur

$\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega) = (H_{\text{loc}}^1(\Omega))^3$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f} & \text{sur } \partial D, \\ & (CR). \end{cases} \quad (4.10)$$

Comme dans le cas de l'acoustique, la condition de radiation est rendue nécessaire par le caractère non borné du guide d'ondes.

Pour réécrire le problème (4.10) en domaine borné, nous introduisons les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann  $T_{\pm}$ , qui vont exploiter le formalisme  $\mathbf{XY}$  introduit dans la section précédente :

$$T_{\pm} : \left( \begin{array}{l} (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}))^2 \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}) \\ \mathbf{y} \mapsto \sum_{n>0} (\mathbf{X}_n | \mathbf{y})_{\Sigma_{\pm R}} \mathbf{X}_n \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{l} (\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}))^2 \times H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm R}) \end{array} \right). \quad (4.11)$$

Nous aurons besoin de nombreuses fois dans la suite d'un lemme de propagation, analogue du lemme 1.3 dans le cas de l'acoustique : rappelons que  $\Sigma_t = \Sigma \times \{t\}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

### Lemme 4.3

Pour tout  $s > R$  et  $\mathbf{h} \in (\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R))^2 \times H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$ , le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma \times (R, s), \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \times (R, s), \\ \mathbf{X} = \mathbf{h} & \text{sur } \Sigma_R, \\ T_+ \mathbf{Y} = \mathbf{X} & \text{sur } \Sigma_s, \end{cases}$$

possède une unique solution dans  $\mathbf{H}^1(\Sigma \times (R, s))$ . De plus, son extension  $\mathbf{X}$  s'écrit

$$\mathbf{X}(x) = \sum_{n \geq 0} (\mathbf{h} | \mathbf{y}_n)_{\Sigma_R} e^{i\beta_n(x_3 - R)} \mathbf{X}_n(x_S). \quad (4.12)$$

De manière analogue, si la condition  $\mathbf{X} = \mathbf{h}$  est remplacée par la condition  $\mathbf{Y} = \mathbf{g}$  sur  $\Sigma_R$ , avec  $\mathbf{g} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R))^2 \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$ , alors  $\mathbf{Y}$  s'écrit

$$\mathbf{Y}(x) = \sum_{n \geq 0} (\mathbf{X}_n | \mathbf{g})_{\Sigma_R} e^{i\beta_n(x_3 - R)} \mathbf{y}_n(x_S). \quad (4.13)$$

Enfin, le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma \times (-s, -R), \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma \times (-s, -R), \\ \mathbf{X} = \mathbf{h} & \text{sur } \Sigma_{-R}, \\ T_- \mathbf{Y} = -\mathbf{X} & \text{sur } \Sigma_{-s}, \end{cases}$$

possède lui aussi une unique solution définie de la même façon en remplaçant  $\beta_n$  par  $-\beta_n$  et  $R$  par  $-R$  dans les expressions de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ .

*Démonstration.* La preuve est donnée ici pour l'expression (4.12). La preuve pour (4.13) s'obtient selon les mêmes lignes.

Commençons par décomposer  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  selon les modes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}(x) \\ \mathbf{Y}(x) \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 0} a_n^+ \begin{pmatrix} \mathcal{X}_n(x_S) \\ \mathcal{Y}_n(x_S) \end{pmatrix} e^{i\beta_n x_3} + a_n^- \begin{pmatrix} -\mathcal{X}_n(x_S) \\ \mathcal{Y}_n(x_S) \end{pmatrix} e^{-i\beta_n x_3}.$$

La condition de radiation va nous donner la nullité des  $a_n^-$  : en utilisant l'expression de l'opérateur  $T_+$  donnée par (4.11), nous avons en effet

$$T_+ \mathcal{Y}_n = \mathcal{X}_n,$$

ce qui donne, en utilisant notre condition sur  $\Sigma_s$ , soit  $T_+ \mathbf{Y} - \mathbf{X} = 0$ ,

$$2 \sum_{n \geq 0} a_n^- e^{-i\beta_n s} \mathcal{X}_n = 0.$$

En utilisant la relation de bi-orthogonalité, nous obtenons la nullité des  $a_n^-$ . Nous avons donc

$$\mathbf{X}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n^+ \mathcal{X}_n(x_S) e^{i\beta_n x_3}, \quad x_3 \in (R, s).$$

En particulier, sur  $\Sigma_R$ ,

$$\mathbf{X}(x_S, R) = \sum_{n \geq 0} a_n^+ \mathcal{X}_n(x_S) e^{i\beta_n R} = \mathbf{h}(x_S) = \sum_{n \geq 0} (\mathbf{h}, \mathcal{Y}_n)_{\Sigma_R} \mathcal{X}_n(x_S).$$

Grâce aux relations de bi-orthogonalité, nous obtenons :

$$a_n^+ e^{i\beta_n R} = (\mathbf{h}, \mathcal{Y}_n)_{\Sigma_R},$$

D'où nous déduisons

$$\mathbf{X}(x_S, x_3) = \sum_{n \geq 0} (\mathbf{h}, \mathcal{Y}_n)_{\Sigma_R} \mathcal{X}_n(x_S) e^{i\beta_n (x_3 - R)}.$$

□

Nous pouvons alors réécrire le problème (4.10) en domaine borné :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega_R, \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_R, \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f} & \text{sur } \partial D, \\ T_{\pm} \mathbf{Y} = \pm \mathbf{X} & \text{sur } \Sigma_{\pm R}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Le caractère bien posé des problèmes (4.10) et (4.14) pourrait se traiter grâce aux techniques présentées dans [112]. Nous faisons l'hypothèse

### Hypothèse 13

La pulsation  $\omega$  est telle que le problème (4.10) (ou (4.14)) est bien posé.

Introduisons à présent la solution fondamentale d'un guide d'ondes élastiques, notée  $G_u^\sigma$ . Le problème qu'elle vérifie est : pour  $y \in W$ , trouver  $G_u^\sigma(\cdot, y)$  telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma(G_u^\sigma(\cdot, y)) - \rho\omega^2 G_u^\sigma(\cdot, y) = \delta(\cdot - y)I_3 & \text{dans } W_R, \\ \sigma(G_u^\sigma(\cdot, y))\boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_R, \\ T_\pm G_Y^\sigma = \pm G_X^\sigma & \text{sur } \Sigma_{\pm R}, \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $G_Y^\sigma$ , respectivement  $G_X^\sigma$ , désigne la variable  $\mathbf{Y}$ , respectivement  $\mathbf{X}$ , associée à  $G_u^\sigma$ .

Nous allons avoir besoin pour justifier la LSM d'un tenseur de Green généralisé introduit dans [30], correspondant à la solution fondamentale du problème d'évolution (4.2). Dans la suite,  $G$  désignera ce tenseur de Green généralisé et nous noterons  $G_a^b$  la restriction de  $G$  aux lignes correspondant à la variable  $a$  et aux colonnes correspondant à une sollicitation selon la variable  $b$ . Le problème vérifié par  $G$  est le suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_3} G(\cdot, y) + \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} G(\cdot, y) = \delta(\cdot - y) \begin{pmatrix} I_3 & O_3 \\ O_3 & I_3 \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega_R, \\ \left. \begin{array}{l} \sigma_S(G_Y(\cdot, y))\boldsymbol{\nu}_S = 0 \\ G_{t_S}(\cdot, y)\boldsymbol{\nu}_S = 0 \end{array} \right\} & \text{sur } \Gamma_R, \\ T_\pm G_Y(\cdot, y) = \pm G_X(\cdot, y) & \text{sur } \Sigma_{\pm R}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Le tenseur  $G$  a alors pour expression [34] :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \begin{pmatrix} G_X^X & G_X^Y \\ G_Y^X & G_Y^Y \end{pmatrix} (x, y) \\ &= -\sum_n \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) \boldsymbol{\mathcal{X}}_n(x_S) \otimes \boldsymbol{\mathcal{Y}}_n(y_S) & \boldsymbol{\mathcal{X}}_n(x_S) \otimes \boldsymbol{\mathcal{X}}_n(y_S) \\ \boldsymbol{\mathcal{Y}}_n(x_S) \otimes \boldsymbol{\mathcal{Y}}_n(y_S) & \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) \boldsymbol{\mathcal{Y}}_n(x_S) \otimes \boldsymbol{\mathcal{X}}_n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n|x_3 - y_3|}}{2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

où  $\operatorname{sgn}$  désigne la fonction signe. Détaillons les expressions des blocs :

$$\begin{aligned} G_X^X(x, y) &= -\operatorname{sgn}(x_3 - y_3) \sum_n \begin{pmatrix} t_1^n(x_S)u_1^n(y_S) & t_1^n(x_S)u_2^n(y_S) & t_1^n(x_S)t_3^n(y_S) \\ t_2^n(x_S)u_1^n(y_S) & t_2^n(x_S)u_2^n(y_S) & t_2^n(x_S)t_3^n(y_S) \\ u_3^n(x_S)u_1^n(y_S) & u_3^n(x_S)u_2^n(y_S) & u_3^n(x_S)t_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n|x_3 - y_3|}}{2}, \\ G_X^Y(x, y) &= -\sum_n \begin{pmatrix} t_1^n(x_S)t_1^n(y_S) & t_1^n(x_S)t_2^n(y_S) & t_1^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ t_2^n(x_S)t_1^n(y_S) & t_2^n(x_S)t_2^n(y_S) & t_2^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ u_3^n(x_S)t_1^n(y_S) & u_3^n(x_S)t_2^n(y_S) & u_3^n(x_S)u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n|x_3 - y_3|}}{2}, \\ G_Y^X(x, y) &= -\sum_n \begin{pmatrix} u_1^n(x_S)u_1^n(y_S) & u_1^n(x_S)u_2^n(y_S) & u_1^n(x_S)t_3^n(y_S) \\ u_2^n(x_S)u_1^n(y_S) & u_2^n(x_S)u_2^n(y_S) & u_2^n(x_S)t_3^n(y_S) \\ t_3^n(x_S)u_1^n(y_S) & t_3^n(x_S)u_2^n(y_S) & t_3^n(x_S)t_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n|x_3 - y_3|}}{2}, \\ G_Y^Y(x, y) &= -\operatorname{sgn}(x_3 - y_3) \sum_n \begin{pmatrix} u_1^n(x_S)t_1^n(y_S) & u_1^n(x_S)t_2^n(y_S) & u_1^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ u_2^n(x_S)t_1^n(y_S) & u_2^n(x_S)t_2^n(y_S) & u_2^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ t_3^n(x_S)t_1^n(y_S) & t_3^n(x_S)t_2^n(y_S) & t_3^n(x_S)u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n|x_3 - y_3|}}{2}. \end{aligned}$$

De même, le tenseur de Green usuel  $G_u^\sigma$  a pour expression

$$G_u^\sigma(x, y) = -\sum_n \begin{pmatrix} u_1^n(x_S)u_1^n(y_S) & u_1^n(x_S)u_2^n(y_S) & -\operatorname{sgn}(x_3 - y_3)u_1^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ u_2^n(x_S)u_1^n(y_S) & u_2^n(x_S)u_2^n(y_S) & -\operatorname{sgn}(x_3 - y_3)u_2^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ \operatorname{sgn}(x_3 - y_3)u_3^n(x_S)u_1^n(y_S) & \operatorname{sgn}(x_3 - y_3)u_3^n(x_S)u_2^n(y_S) & -u_3^n(x_S)u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n|x_3 - y_3|}}{2}.$$

Il s'obtient à partir de l'expression de  $G$  (4.17) en sélectionnant parmi les lignes celles correspondant à  $u_1, u_2, u_3$  et parmi les colonnes celles correspondant à  $t_1, t_2$  et  $-t_3$ .

Notons que le tenseur  $G$  satisfait les propriétés de symétrie suivantes :

$$G_u^\sigma(x, y) = G_u^\sigma(y, x)^T, \quad (4.18)$$

$$G_u^Y(x, y) = -G_X^\sigma(y, x)^T. \quad (4.19)$$

Dans toute la suite, afin de ne pas surcharger les notations, nous utilisons les opérateurs différentiels suivants :

- l'opérateur  $d_\nu$  qui s'applique à un vecteur,

$$d_\nu : \mathbf{u} \mapsto \sigma(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu};$$

- l'opérateur  $\partial_\nu$  qui à une matrice  $3 \times 3$   $M$  associe la matrice  $3 \times 3$  dont les lignes sont  $d_\nu(\mathbf{M}_i)$ ,  $\mathbf{M}_i$  étant la  $i$ -ème ligne de  $M$  ;
- l'opérateur  $\tilde{\partial}_\nu$  qui à une matrice  $3 \times 3$   $M$  associe la matrice  $3 \times 3$  dont les colonnes sont  $d_\nu(\mathbf{M}^j)$ ,  $\mathbf{M}^j$  étant la  $j$ -ème colonne de  $M$ .

Par ailleurs, lorsque cela est nécessaire,  $\nu$  est indiquée dans ces opérateurs par la variable par rapport à laquelle la dérivation s'effectue.

Nous pouvons enfin introduire la Linear Sampling Method : soit  $u_Y^s(\cdot, y)$  la solution de (4.10) avec  $f = -\left(\tilde{\partial}_\nu G_u^Y(\cdot, y)\right)|_{\partial D}$ ,  $y \in W$  (notons qu'il s'agit d'une matrice). Soit  $X_Y^s$  la variable  $\mathbf{X}$  correspondant à  $u_Y^s(\cdot, y)$ . Soit l'opérateur de champ proche  $N_X : \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  qui à  $\mathbf{h}$  associe

$$(N_X \mathbf{h})(x) = \int_{\hat{\Sigma}} X_Y^s(x, y) \mathbf{h}(y) ds(y), \quad x \in \hat{\Sigma},$$

avec  $\hat{\Sigma} = \Sigma_{-R} \cup \Sigma_R$ .

La Linear Sampling Method consiste en la résolution dans  $\mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  de

$$N_X \mathbf{h} = G_X^Y(\cdot, z) \mathbf{p}|_{\hat{\Sigma}},$$

où  $z$  est un point de la grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$  et  $\mathbf{p}$  est un vecteur de polarisation, que nous décrirons plus loin.

Introduisons les opérateurs nécessaires à la factorisation. Tout d'abord, présentons l'opérateur  $B : \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  qui à  $\mathbf{f}$  associe la restriction à  $\hat{\Sigma}$  de la variable  $\mathbf{X}$  associée à la solution du problème (4.10), ainsi que  $\mathcal{H} : \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma}) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ , défini par

$$(\mathcal{H} \mathbf{h})(x) = d_\nu \int_{\hat{\Sigma}} G_u^Y(x, y) \mathbf{h}(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Introduisons ensuite  $\mathcal{F} : \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  tel que

$$(\mathcal{F} \boldsymbol{\varphi})(x) = \int_{\partial D} \partial_{\nu_y} G_X^\sigma(x, y) \boldsymbol{\varphi}(y) ds(y), \quad x \in \hat{\Sigma},$$

et  $\mathcal{T} : \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  tel que

$$(\mathcal{T} \boldsymbol{\varphi})(x) = d_\nu \int_{\partial D} \partial_{\nu_y} G_u^\sigma(x, y) \boldsymbol{\varphi}(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Ajoutons une dernière hypothèse :



**Hypothèse 14**

La pulsation  $\omega$  est telle que la seule solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } D, \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (4.20)$$

est  $\mathbf{u} = 0$ .

Nous avons alors les factorisations

$$N_X = -B\mathcal{H}, \quad \mathcal{F} = B\mathcal{T}.$$

Nous aurons besoin pour démontrer le lemme suivant du théorème de prolongement unique, analogue de celui déjà énoncé dans le chapitre 1 pour l'acoustique :

**Théorème 4.4**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert connexe et soit  $\mathcal{O}$  un ouvert non vide inclus dans  $\Omega$ . Si  $\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$ , alors

$$\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \Rightarrow \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega.$$

**Lemme 4.5**

Sous réserve que les hypothèses 10, 11, 13 et 14 soient vérifiées, nous avons les propriétés suivantes :

- i) L'opérateur  $\mathcal{T}$  est un isomorphisme ;
- ii) Les opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{F}$  satisfont  $\mathcal{F} = -\overline{\mathcal{H}^*}$  ;
- iii) Les opérateurs  $B$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $N_X$  sont compacts, injectifs et d'image dense.

*Démonstration.* La preuve peut se faire de manière semblable au cas du défaut à coeur dans un guide acoustique (voir section 1.2). Ainsi, pour le point i), nous introduisons  $\mathcal{T}_0$ , analogue de  $\mathcal{T}$  où  $G_u^\sigma$  a été remplacé par le noyau de Green pour l'espace libre. Les propriétés de  $\mathcal{T}_0$  peuvent être trouvées par exemple dans [106]. Pour le deuxième point, le changement de signe provient du changement de signe présent dans la relation de symétrie sur le tenseur de Green (4.19). En effet, soient  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})$  et  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{h})_{\mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})} &= \int_{\widehat{\Sigma}} \left( \int_{\partial D} \partial_{\nu_x} G_X^\sigma(y, x) \boldsymbol{\varphi}(x) \, ds(x) \right) \cdot \overline{\mathbf{h}(y)} \, ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \left( \int_{\widehat{\Sigma}} (\partial_{\nu_x} G_X^\sigma(y, x))^T \overline{\mathbf{h}(y)} \, ds(y) \right) \, ds(x) \\ &= \int_{\partial D} \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \left( \int_{\widehat{\Sigma}} -\tilde{\partial}_{\nu_x} G_u^Y(x, y) \overline{\mathbf{h}(y)} \, ds(y) \right) \, ds(x) \\ &= - \int_{\partial D} \boldsymbol{\varphi}(x) \cdot \overline{\left( \mathbf{d}_\nu \int_{\widehat{\Sigma}} G_u^Y(x, y) \mathbf{h}(y) \, ds(y) \right)} \, ds(x) \\ &= - \langle \boldsymbol{\varphi}, \overline{\mathcal{H}\mathbf{h}} \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial D), \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}. \end{aligned}$$

Démontrons le dernier point : la compacité de  $B$  vient du fait que la trace sur  $\widehat{\Sigma}$  de la solution du problème de Neumann (4.10) appartient à  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Sigma})$  et que l'injection de  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Sigma})$  dans

$L^2(\widehat{\Sigma})$  est compacte. Cela implique la même propriété pour  $\mathcal{F}$  et  $N_X$  d'après les factorisations  $\mathcal{F} = B\mathcal{T}$  et  $N_X = -B\mathcal{H}$ , et la compacité de  $\mathcal{H}$  vient de *ii*).

Prouvons l'injectivité de  $B$  : soient  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  telle que  $B\mathbf{f} = 0$  et  $\mathbf{u}$  la solution du problème de Neumann (4.10) associée à  $\mathbf{f}$ . Le fait que  $B\mathbf{f}$  soit nulle implique que  $\mathbf{u}$  est nulle sur les sections  $\Sigma_{\pm R}$ , ce qui signifie d'après le lemme de propagation 4.3 qu'au delà des sections  $\Sigma_{\pm R}$  la solution  $\mathbf{u}$  est nulle. Par le théorème de prolongement unique 4.4,  $\mathbf{u}$  est nulle dans  $\Omega$  et donc  $\mathbf{f} = 0$ . Nous en déduisons l'injectivité de  $\mathcal{F}$  et la densité de l'image de  $\mathcal{H}$ .

Montrons à présent que  $\mathcal{H}$  est injectif : soit  $\mathbf{h} \in L^2(\widehat{\Sigma})$  telle que  $\mathcal{H}\mathbf{h} = 0$ . Alors

$$\mathbf{v}_h(x) = \int_{\widehat{\Sigma}} G_u^Y(x, y) \mathbf{h}(y) \, ds(y)$$

est solution de (4.10) avec  $\mathbf{f} = 0$ , ce qui implique que  $\mathbf{v}_h = 0$  dans  $\Sigma \times (-R, R)$ . Décomposons  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_-, \mathbf{h}_+)$  sur les sections  $\Sigma_{-R}$  et  $\Sigma_R$  selon les fonctions transverses  $\mathbf{y}_n$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_-(y_S) &= \sum_{n \geq 0} h_n^- \mathbf{y}_n(y_S), \\ \mathbf{h}_+(y_S) &= \sum_{n \geq 0} h_n^+ \mathbf{y}_n(y_S), \end{aligned}$$

et remarquons que nous pouvons écrire, d'après l'expression (4.17) de  $G$ ,

$$\begin{aligned} G_u^Y(\cdot, y) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^+(x) \otimes \mathbf{X}_n^-(y), & x_3 > y_3, \\ G_u^Y(\cdot, y) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^-(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y), & x_3 < y_3. \end{aligned}$$

En injectant ces décompositions dans l'expression de  $\mathbf{v}_h$  et en utilisant la bi-orthogonalité des fonctions transverses, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h(x) &= \int_{\Sigma_{-R}} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^+(x) \otimes \mathbf{X}_n^-(y) \right) \left( \sum_{n \geq 0} h_n^- \mathbf{y}_n(y_S) \right) \, ds(y) \\ &+ \int_{\Sigma_R} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^-(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y) \right) \left( \sum_{n \geq 0} h_n^+ \mathbf{y}_n(y_S) \right) \, ds(y) \\ &= \sum_{m, n \geq 0} \frac{e^{i\beta_m R}}{2} \left( \mathbf{U}_m^-(x) h_n^+ \int_{\Sigma} \mathbf{x}_m(y_S) \cdot \mathbf{y}_n(y_S) \, ds(y) - \mathbf{U}_m^+(x) h_n^- \int_{\Sigma} \mathbf{x}_m(y_S) \cdot \mathbf{y}_n(y_S) \, ds(y) \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2} (h_n^+ \mathbf{U}_n^-(x) - h_n^- \mathbf{U}_n^+(x)). \end{aligned}$$

Considérons à présent la variable  $\mathbf{X}$  associée à  $\mathbf{v}_h$ , soit  $\mathbf{X}_h$ . Par linéarité, elle a pour expression

$$\mathbf{X}_h = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} e^{i\beta_n R} (-h_n^- \mathbf{X}_n^+(x) + h_n^+ \mathbf{X}_n^-(x)) \quad (4.21)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} e^{i\beta_n R} (-h_n^- \mathbf{x}_n(x_S) e^{i\beta_n x_3} - h_n^+ \mathbf{x}_n(x_S) e^{-i\beta_n x_3}) = 0. \quad (4.22)$$

Considérons le produit scalaire dans  $L^2(\Sigma)$  de (4.22) avec  $\mathbf{y}_n$ . Grâce à la bi-orthogonalité des fonctions transverses et à la normalisation choisie, il vient

$$e^{i\beta_n(R+x_3)} h_n^- + e^{i\beta_n(R-x_3)} h_n^+ = 0,$$

pour  $x_3$  dans l'intervalle ouvert  $(-R, R)$  et  $\beta_n \neq 0$ , ce qui implique  $h_n^- = h_n^+ = 0$  pour tout  $n > 0$ , d'où  $\mathbf{h} = 0$ . L'opérateur  $\mathcal{H}$  est donc injectif, ce qui implique la densité des images de  $\mathcal{F}$  et  $B$ .

Enfin, la factorisation  $N_X = -B\mathcal{H}$  implique l'injectivité de  $N_X$  et la densité de son image.  $\square$

Nous pouvons dorénavant énoncer le théorème justifiant partiellement la LSM :

### Théorème 4.6

1. Si  $z \in D$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p}) \in \mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})$  satisfaisant

$$\|N_X \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p}) - G_X^Y(\cdot, z) \mathbf{p}\|_{\mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

et telle que  $\mathcal{H} \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p})$  converge dans  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

De plus, à  $\varepsilon$  fixé, la fonction  $\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p})$  vérifie

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \|\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p})\|_{\mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \partial D} \|\mathcal{H} \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p})\|_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} = +\infty.$$

2. Si  $z \in W \setminus \overline{D}$ , alors pour toute fonction  $\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p}) \in \mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})$  telle que

$$\|N_X \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p}) - G_X^Y(\cdot, z) \mathbf{p}\|_{\mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p})\|_{\mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H} \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot, z, \mathbf{p})\|_{\mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})} = +\infty.$$

*Démonstration.* La preuve étant très similaire à celle du théorème 1.7, nous ne la détaillons pas.  $\square$

Notons enfin qu'un autre choix d'opérateur de champ proche est possible : soit  $u_X^s$  la solution de (4.10) avec  $f = -\left(\tilde{\partial}_\nu G_u^X(\cdot, y)\right)|_{\partial D}$ ,  $y \in W$ , et soit  $Y_X^s$  la variable  $\mathbf{Y}$  associée à  $u_X^s$ . Nous définissons l'opérateur de champ proche  $N_Y : \mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\widehat{\Sigma})$  qui à  $\mathbf{h}$  associe

$$(N_Y \mathbf{h})(x) = \int_{\widehat{\Sigma}} Y_X^s(x, y) \mathbf{h}(y) ds(y), \quad x \in \widehat{\Sigma}.$$

En définissant des opérateurs analogues à  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $B$ , nous pourrions démontrer un théorème analogue à 4.6 justifiant que, pour imager le défaut, nous résolvons l'équation

$$N_Y \mathbf{h} = G_Y^X(\cdot, z) \mathbf{p}|_{\widehat{\Sigma}}$$

pour tout point  $z$  de la grille d'échantillonnage.

Nous allons dorénavant justifier brièvement l'utilisation de la Linear Sampling Method pour imager des fissures dans un guide d'ondes élastiques. Nous rappelons qu'une fissure  $\gamma$  est une portion du bord d'un domaine  $D \subset \Omega$ ,  $\partial D$ , ouverte pour la topologie induite sur  $\partial D$  et régulière. Nous supposons de plus que  $\bar{\gamma} \in W$  et que, en dimension 3, sa frontière  $\partial\gamma$  est

aussi régulière. La normale  $\boldsymbol{\nu}$  à la fissure  $\gamma$  est définie comme la normale entrante à  $D$ . Le problème de diffraction s'écrit alors, pour  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ ,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_\pm) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f} & \text{sur } \gamma, \\ (CR). \end{cases} \quad (4.23)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_\pm) \boldsymbol{\nu}$  désigne la trace de la contrainte normale à la fissure, le signe étant lié à l'orientation de la normale  $\boldsymbol{\nu}$ .

Soit  $u_Y^s(\cdot, y)$  la solution du problème (4.23) avec  $f = -\left(\tilde{\partial}_\nu G_u^Y(\cdot, y)\right)|_\gamma$ ,  $y \in \hat{\Sigma}$ , et soit  $X_Y^s(\cdot, y)$  la variable  $\mathbf{X}$  associée à  $u_Y^s(\cdot, y)$ . Nous définissons l'opérateur de champ proche  $N_X : \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  tel que

$$N_X \mathbf{h}(x) = \int_{\hat{\Sigma}} X_Y^s(x, y) \mathbf{h}(y) \, ds(y), \quad x \in \hat{\Sigma},$$

ainsi que les opérateurs  $\mathcal{H} : \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma}) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ , défini par

$$(\mathcal{H} \mathbf{h})(x) = d_\nu \int_{\hat{\Sigma}} G_u^Y(x, y) \mathbf{h}(y) \, ds(y), \quad x \in \partial D,$$

et pour une fissure  $L$ ,  $\mathcal{F}^L : \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(L) \rightarrow \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  tel que

$$(\mathcal{F}^L \boldsymbol{\varphi})(x) = \int_L \partial_{\nu_y} G_X^\sigma(x, y) \boldsymbol{\varphi}(y) \, ds(y), \quad x \in \hat{\Sigma}.$$

Nous cherchons alors à résoudre l'équation

$$N_X \mathbf{h} = \mathcal{F}^L \boldsymbol{\alpha}$$

pour une fissure test  $L$  et  $\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(L)$  vérifiant  $|\boldsymbol{\alpha}| > 0$  sur  $L$ .

La Linear Sampling Method est alors partiellement justifiée dans le cas des fissures par le théorème suivant (voir [34]).

### Théorème 4.7

1. Si  $L \subset \gamma$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\mathbf{h}_{L,\varepsilon} \in \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  satisfaisant

$$\|N_X \mathbf{h}_{L,\varepsilon} - \mathcal{F}^L \boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

et telle que  $\mathcal{H} \mathbf{h}_{L,\varepsilon}$  converge dans  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Si  $L \not\subset \gamma$ , alors pour toute fonction  $\mathbf{h}_{L,\varepsilon} \in \mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})$  telle que

$$\|N_X \mathbf{h}_{L,\varepsilon} - \mathcal{F}^L \boldsymbol{\alpha}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{h}_{L,\varepsilon}\|_{\mathbf{L}^2(\hat{\Sigma})} = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathcal{H} \mathbf{h}_{L,\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\gamma)} = +\infty.$$

### 4.3 Analyse modale de la LSM

Nous allons exploiter la décomposition modale des champs pour réécrire sous une forme de système les équations

$$N_X \mathbf{h} = G_X^Y(\cdot, z) \mathbf{p}|_{\hat{\Sigma}}, \quad (4.24)$$

$$N_Y \mathbf{h} = G_Y^X(\cdot, z) \mathbf{p}|_{\hat{\Sigma}}. \quad (4.25)$$

Nous allons nous concentrer sur l'équation (4.24), la démonstration se faisant de la même façon pour (4.25). Pour cela, notons  $\mathbf{U}_n^{s\pm}$  le champ diffracté associé au mode  $\mathbf{U}_n^\pm$ , à savoir la solution de (4.10) avec  $\mathbf{f} = -(\tilde{\partial}_\nu \mathbf{U}_n^\pm)|_{\partial D}$ . Nous noterons  $\mathbf{X}_n^{s\pm}$  et  $\mathbf{Y}_n^{s\pm}$  les variables  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  associées.

#### Proposition 4.8

Le champ diffracté  $u_Y^s$ , solution de (4.10) avec  $f = -(\tilde{\partial}_\nu G_u^Y(\cdot, y))|_{\partial D}$ ,  $y \in W$ , peut se décomposer de la façon suivante, pour  $-R < x_3 < R$  :

$$u_Y^s(x, y) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^{s+}(x) \otimes \mathbf{X}_n^-(y), & \text{si } y_3 = -R, \\ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^{s-}(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y), & \text{si } y_3 = R. \end{cases}$$

*Démonstration.* Rappelons que, d'après l'expression (4.17) de  $G$ , nous avons

$$G_u^Y(x, y) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^+(x) \otimes \mathbf{X}_n^-(y), & \text{si } y_3 = -R, \\ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^-(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y), & \text{si } y_3 = R. \end{cases}$$

Supposons que  $y_3 = R$  et posons

$$H(x, y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^{s-}(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y).$$

Nous avons déjà supposé que le problème (4.10) était bien posé, montrons alors que  $H(\cdot, y)$  en est solution. Tout d'abord,  $H(\cdot, y)$  est solution de l'équation de l'élastodynamique et vérifie les conditions au bord du guide et les conditions de radiation par linéarité. Il ne nous reste qu'à montrer que  $\tilde{\partial}_\nu H(\cdot, y) = -(\tilde{\partial}_\nu G_u^Y(\cdot, y))$  sur  $\partial D$ . Or d'après la définition de  $\mathbf{U}_n^{s-}$ , nous avons pour  $x \in \partial D$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_{\nu_x} H(x, y) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} d_\nu \mathbf{U}_n^{s-}(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} d_\nu (-\mathbf{U}_n^-(x)) \otimes \mathbf{X}_n^+(y) \\ &= -\tilde{\partial}_{\nu_x} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{U}_n^-(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y) \\ &= -(\tilde{\partial}_{\nu_x} G_u^Y(x, y)) \end{aligned}$$

car  $x_3 < R = y_3$ . Le cas  $y_3 = -R$  se prouve de la même façon. □

De la proposition 4.8, nous déduisons que  $X_Y^s$  peut s'écrire, pour  $-R < x_3 < R$ ,

$$X_Y^s(x, y) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{X}_n^{s+}(x) \otimes \mathbf{X}_n^-(y), & \text{si } y_3 = -R, \\ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{X}_n^{s-}(x) \otimes \mathbf{X}_n^+(y), & \text{si } y_3 = R, \end{cases}$$

Par ailleurs, décomposons  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_-, \mathbf{h}_+)$  selon les fonctions transverses :

$$\mathbf{h}_- = - \sum_{n \geq 0} h_n^- \boldsymbol{\nu}_n, \quad \mathbf{h}_+ = \sum_{n \geq 0} h_n^+ \boldsymbol{\nu}_n,$$

ce qui nous permet d'écrire, pour  $x \in \hat{\Sigma}$ ,

$$\begin{aligned} (N_X \mathbf{h})(x) &= \int_{\Sigma_{-R}} \left( -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} e^{i\beta_n R} \mathbf{X}_n^{s+}(x) \otimes \boldsymbol{\chi}_n(y_S) \right) \left( -\sum_{n \geq 0} h_n^- \boldsymbol{\nu}_n(y_S) \right) ds(y) \\ &+ \int_{\Sigma_R} \left( \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} e^{i\beta_n R} \mathbf{X}_n^{s-}(x) \otimes \boldsymbol{\chi}_n(y_S) \right) \left( \sum_{n \geq 0} h_n^+ \boldsymbol{\nu}_n(y_S) \right) ds(y) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n R}}{2} (h_n^- \mathbf{X}_n^{s+}(x) + h_n^+ \mathbf{X}_n^{s-}(x)). \end{aligned}$$

Nous pouvons décomposer les champs diffractés selon les fonctions transverses. Nous posons donc

$$\mathbf{X}_n^{s+}(x_S, -R) = \sum_{m \geq 0} -S_{mn}^{+-} \boldsymbol{\chi}_m(x_S), \quad \mathbf{X}_n^{s-}(x_S, -R) = \sum_{m \geq 0} -S_{mn}^{--} \boldsymbol{\chi}_m(x_S), \quad (4.26)$$

$$\mathbf{X}_n^{s+}(x_S, R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{++} \boldsymbol{\chi}_m(x_S), \quad \mathbf{X}_n^{s-}(x_S, R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{-+} \boldsymbol{\chi}_m(x_S), \quad (4.27)$$

le choix du signe dans (4.26) sera justifié plus loin.

Intéressons nous à présent au second membre de (4.24), à savoir  $G_X^Y$ . Son expression est, pour  $x \in \Sigma_{\pm R}$  et  $-R < z_3 < R$ ,

$$G_X^Y(x, z) = - \sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\beta_n(R \mp z_3)}}{2} \boldsymbol{\chi}_n(x_S) \otimes \boldsymbol{\chi}_n(z_S).$$

L'équation (4.24) s'écrit alors

$$\begin{cases} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{+-} h_n^- \boldsymbol{\chi}_m(x_S) + S_{mn}^{--} h_n^+ \boldsymbol{\chi}_m(x_S)) = \sum_{m \geq 0} e^{i\beta_m(R+z_3)} \boldsymbol{\chi}_m(x_S) (\boldsymbol{\chi}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), \\ \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{++} h_n^- \boldsymbol{\chi}_m(x_S) + S_{mn}^{-+} h_n^+ \boldsymbol{\chi}_m(x_S)) = - \sum_{m \geq 0} e^{i\beta_m(R-z_3)} \boldsymbol{\chi}_m(x_S) (\boldsymbol{\chi}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), \end{cases}$$

ce qui nous donne, après une nouvelle projection sur les fonctions transverses, le système infini

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 0} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{+-} h_n^- + S_{mn}^{--} h_n^+) = e^{i\beta_m(R+z_3)} (\boldsymbol{\chi}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), \\ \sum_{n \geq 0} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{++} h_n^- + S_{mn}^{-+} h_n^+) = -e^{i\beta_m(R-z_3)} (\boldsymbol{\chi}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), \end{cases} \quad m \geq 0.$$

Nous utilisons dorénavant l'hypothèse de champ lointain pour tronquer les séries et le système aux  $P$  modes propagatifs. Nous obtenons finalement le système

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{P-1} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{+-} h_n^- + S_{mn}^{--} h_n^+) = e^{i\beta_m (R+z_3)} (\boldsymbol{\mathcal{X}}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), \\ \sum_{n=0}^{P-1} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{++} h_n^- + S_{mn}^{-+} h_n^+) = -e^{i\beta_m (R-z_3)} (\boldsymbol{\mathcal{X}}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), \end{cases} \quad m = 0, \dots, P-1.$$

Comme dans le cas de l'acoustique, nous réécrivons ce système matriciellement. nous notons

$$\begin{aligned} S^{-\pm} &= (S_{mn}^{-\pm}), & S^{+\pm} &= (S_{mn}^{+\pm}), & m, n &= 0, \dots, P-1, \\ H_p^{\pm} &= (h_m^{\pm}), & F_{X,p}^{\pm} &= (\mp e^{i\beta_m (R \mp z_3)} \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), & m &= 0, \dots, P-1. \end{aligned}$$

Le système s'écrit alors

$$\mathcal{U} H_p = F_{X,p}, \quad (4.28)$$

où nous avons défini

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S^{+-} & S^{--} \\ S^{++} & S^{-+} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad H_p = \begin{pmatrix} H_p^- \\ H_p^+ \end{pmatrix}, \quad F_{X,p} = \begin{pmatrix} F_{X,p}^- \\ F_{X,p}^+ \end{pmatrix},$$

avec  $K$  la matrice diagonale de taille  $P \times P$  de terme général  $e^{i\beta_n R}$ . Selon le même principe, (4.25) devient

$$\mathcal{U} H_p = F_{Y,p}, \quad (4.29)$$

où nous avons défini

$$H_p = \begin{pmatrix} H_p^- \\ H_p^+ \end{pmatrix}, \quad F_{Y,p} = \begin{pmatrix} F_{Y,p}^- \\ F_{Y,p}^+ \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

avec

$$H_p^{\pm} = (h_m^{\pm}), \quad F_{Y,p}^{\pm} = (e^{i\beta_m (R \mp z_3)} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(z_S) \cdot \mathbf{p}), \quad m = 0, \dots, P-1,$$

$\mathbf{h}$  étant décomposée cette fois-ci selon la variable  $\mathbf{X} : \mathbf{h} = (\mathbf{h}_-, \mathbf{h}_+)$  avec

$$\mathbf{h}_- = \sum_{n \geq 0} h_n^- \boldsymbol{\mathcal{X}}_n, \quad \mathbf{h}_+ = \sum_{n \geq 0} h_n^+ \boldsymbol{\mathcal{X}}_n.$$

Nous obtenons l'expression (4.29) en remarquant que les décompositions modales (4.26) et (4.27) impliquent

$$\mathbf{Y}_n^{s+}(x_S, -R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{+-} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S), \quad \mathbf{Y}_n^{s-}(x_S, -R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{--} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S), \quad (4.31)$$

$$\mathbf{Y}_n^{s+}(x_S, R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{++} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S), \quad \mathbf{Y}_n^{s-}(x_S, R) = \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{-+} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S). \quad (4.32)$$

En effet,  $(\mathbf{X}_n^{s-} \quad \mathbf{Y}_n^{s-})^T$  par exemple est de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{s-} \\ \mathbf{Y}_n^{s-} \end{pmatrix} = \sum_{m \geq 0} a_m^+ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_m^+ \\ \mathbf{Y}_m^+ \end{pmatrix} + a_m^- \begin{pmatrix} \mathbf{X}_m^- \\ \mathbf{Y}_m^- \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{s-}(x_S, -R) \\ \mathbf{Y}_n^{s-}(x_S, -R) \end{pmatrix} &= \sum_{m \geq 0} a_m^- \begin{pmatrix} \mathbf{X}_m^- \\ \mathbf{Y}_m^- \end{pmatrix} = \sum_{m \geq 0} a_m^- \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_m \\ \mathbf{y}_m \end{pmatrix} e^{i\beta_m R} \\ &= \sum_{m \geq 0} S_{mn}^{--} \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_m \\ \mathbf{y}_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui implique, par identification, la seconde équation de (4.31). En procédant de même pour les autres configurations, nous obtenons (4.31) et (4.32).

#### Remarque 4.4

La remarque 2.1 est aussi valable ici : notre définition de la matrice de scattering n'est pas la même que dans la littérature.

De plus, le choix des signes fait ici sur la définition des coefficients de la matrice de scattering sera important dans le cas des sollicitations et des mesures à la surface.

Nous pouvons donc définir une fonction caractéristique pour chaque polarisation (en  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ ) :

$$\psi_{\mathbf{Z},p} = \frac{1}{\|H_{\mathbf{Z},p}(z)\|_2},$$

où  $\mathbf{Z}$  désigne  $\mathbf{X}$  ou  $\mathbf{Y}$ .

## 4.4 Extension aux données surfaciques

Intéressons nous maintenant au lien entre des sollicitations et des mesures à la surface du guide et la LSM modale. Nous nous limitons au cas où une contrainte est imposée au bord, cas correspondant à nos applications. Pour ce faire, commençons par considérer la solution fondamentale pour une impulsion au bord. Nous cherchons donc  $G(\cdot, y)$ , dont les colonnes sont solution, pour  $b \in \{t_1, t_2, t_3\}$ , de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_3} G^b(\cdot, y) = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} G^b(\cdot, y) \quad \text{dans } \Omega, \\ \sigma_S(G_Y^b) \boldsymbol{\nu}_S = \delta_y \begin{pmatrix} \delta_{t_1 j} \\ \delta_{t_2 j} \end{pmatrix} \\ G_{t_S}^b \cdot \boldsymbol{\nu}_S = -\delta_y \delta_{t_3 j} \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma, \quad (CR),$$

Nous pouvons montrer (voir annexe A) que  $G^t$  coïncide avec les colonnes  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  du tenseur de Green généralisé donné en (4.17), soit :

$$G^t = - \sum_{n > 0} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) t_1^n(x_S) u_1^n(y_S) & s(x_3 - y_3) t_1^n(x_S) u_2^n(y_S) & t_1^n(x_S) u_3^n(y_S) \\ \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) t_2^n(x_S) u_1^n(y_S) & s(x_3 - y_3) t_2^n(x_S) u_2^n(y_S) & t_2^n(x_S) u_3^n(y_S) \\ \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) t_3^n(x_S) u_1^n(y_S) & s(x_3 - y_3) t_3^n(x_S) u_2^n(y_S) & t_3^n(x_S) u_3^n(y_S) \\ u_1^n(x_S) u_1^n(y_S) & u_1^n(x_S) u_2^n(y_S) & \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) u_1^n(x_S) u_3^n(y_S) \\ u_2^n(x_S) u_1^n(y_S) & u_2^n(x_S) u_2^n(y_S) & \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) u_2^n(x_S) u_3^n(y_S) \\ t_3^n(x_S) u_1^n(y_S) & t_3^n(x_S) u_2^n(y_S) & \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) t_3^n(x_S) u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n |x_3 - y_3|}}{2}.$$



Intéressons nous tout d'abord au problème vérifié par notre champ incident  $\mathbf{u}^i$ . Considérons pour cela une contrainte  $\varphi$  imposée au bord du guide, supposée à support compact. Le problème est alors

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^i) + \rho \omega^2 \mathbf{u}^i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}^i) \boldsymbol{\nu} = \varphi & \text{sur } \Gamma, \\ (CR). \end{cases}$$

Nous pouvons montrer que les variables  $\mathbf{XY}$  associées au champ incident,  $\mathbf{X}^i$  et  $\mathbf{Y}^i$ , vérifient le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{Y}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{Y}^i \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_S(\mathbf{Y}^i) \boldsymbol{\nu}_S &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{t}_S^i \cdot \boldsymbol{\nu}_S &= -\varphi_3 \end{aligned} \right\} & \text{sur } \Gamma, \\ (CR). \end{cases} \quad (4.33)$$

Rappelons que le tenseur  $G^\sigma$  est égal au tenseur  $G^t$  avec un changement de signe sur la dernière colonne, associée à  $t_3$ .

#### Lemme 4.9

Le problème (4.33) admet pour solution

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{Y}^i \end{pmatrix} (x) = \int_{\Gamma} G^\sigma(x, y) \varphi(y) \, ds(y).$$

*Démonstration.* La preuve du lemme se fait de manière analogue à celle du lemme 2.3.  $\square$

Nous sommes enfin à même d'exprimer notre champ diffracté, solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} & \text{dans } \Omega, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_S(\mathbf{Y}^s) \boldsymbol{\nu}_S &= 0 \\ \mathbf{t}_S^s \cdot \boldsymbol{\nu}_S &= 0 \end{aligned} \right\} & \text{sur } \Gamma, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_S(\mathbf{Y}^s) \boldsymbol{\nu}_S &= -\sigma_S(\mathbf{Y}^i) \boldsymbol{\nu}_S \\ \mathbf{t}_S^s \cdot \boldsymbol{\nu}_S &= -\mathbf{t}_S^i \cdot \boldsymbol{\nu}_S \end{aligned} \right\} & \text{sur } \partial D, \\ (CR). \end{cases} \quad (4.34)$$

En effet, commençons par développer l'expression du champ incident : d'après le lemme 4.9 et l'expression de  $G^\sigma$  donnée par

$$\begin{pmatrix} G_X^\sigma \\ G_Y^\sigma \end{pmatrix} (x, y) = - \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) \boldsymbol{\chi}_n(x_S) \\ \boldsymbol{\nu}_n(x_S) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -\operatorname{sgn}(x_3 - y_3) u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n |x_3 - y_3|}}{2},$$

nous déduisons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{Y}^i \end{pmatrix} (x) = - \sum_n \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(x_3 - y_3) \boldsymbol{\chi}_n(x_S) \\ \boldsymbol{\nu}_n(x_S) \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -\operatorname{sgn}(x_3 - y_3) u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \varphi(y) \right] \frac{e^{i\beta_n |x_3 - y_3|}}{2} \, ds(y).$$

Supposons que le défaut soit compris entre les sections d'abscisse  $-R$  et  $R$ , avec  $R > 0$ . Nous allons avoir quatre configurations, suivant que le support de la fonction source et de la fonction de mesure se trouvent à gauche ou à droite de la zone du défaut.

Considérons donc une source à gauche du défaut. Notre champ incident a alors l'expression suivante ( $x_3 > y_3$ ) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{Y}^i \end{pmatrix} (x) = - \sum_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^+(x_S) \\ \mathbf{Y}_n^+(x_S) \end{pmatrix} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} ds(y),$$

ce qui implique que le champ diffracté peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{s+}(x_S) \\ \mathbf{Y}_n^{s+}(x_S) \end{pmatrix} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} ds(y).$$

En utilisant le lemme de propagation 4.3 pour une mesure à gauche ( $x_3 < -R$ ),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_n^{s+}(\cdot, -R) | \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m)_{\Sigma_{-R}} \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(x_S) \\ (\boldsymbol{\mathcal{X}}_m | \mathbf{Y}_n^{s+}(\cdot, -R))_{\Sigma_{-R}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \end{pmatrix} e^{-i\beta_m(x_3+R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} ds(y),$$

et de même pour une mesure à droite ( $x_3 > R$ ),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_n^{s+}(\cdot, R) | \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m)_{\Sigma_R} \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(x_S) \\ (\boldsymbol{\mathcal{X}}_m | \mathbf{Y}_n^{s+}(\cdot, R))_{\Sigma_R} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \end{pmatrix} e^{i\beta_m(x_3-R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} ds(y),$$

nous avons l'expression de notre champ diffracté en fonction des coefficients de la matrice de scattering.

Nous faisons de même pour une source à droite : le champ incident a pour expression

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{Y}^i \end{pmatrix} (x) = - \sum_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^-(x_S) \\ \mathbf{Y}_n^-(x_S) \end{pmatrix} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{i\beta_n y_3}}{2} ds(y),$$

dont nous déduisons le champ diffracté,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n^{s-}(x_S) \\ \mathbf{Y}_n^{s-}(x_S) \end{pmatrix} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{i\beta_n y_3}}{2} ds(y),$$

puis nous utilisons le lemme de propagation 4.3 dans le cas d'une mesure à gauche,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_n^{s-}(\cdot, -R) | \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m)_{\Sigma_{-R}} \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(x_S) \\ (\boldsymbol{\mathcal{X}}_m | \mathbf{Y}_n^{s-}(\cdot, -R))_{\Sigma_{-R}} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \end{pmatrix} e^{-i\beta_m(x_3+R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{i\beta_n y_3}}{2} ds(y),$$

et de même pour une mesure à droite

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_n^{s-}(\cdot, R) | \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m)_{\Sigma_R} \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(x_S) \\ (\boldsymbol{\mathcal{X}}_m | \mathbf{Y}_n^{s-}(\cdot, R))_{\Sigma_R} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \end{pmatrix} e^{i\beta_m(x_3-R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{i\beta_n y_3}}{2} ds(y).$$

Enfin, nous pouvons réécrire les relations précédentes avec les coefficients de la matrice de scattering  $S$  définis par (4.26) et (4.27) ou (4.31) et (4.32) :

- pour une source à gauche et

– une mesure à gauche

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_m(x_S) \\ \mathbf{y}_m(x_S) \end{pmatrix} S_{mn}^{+-} e^{-i\beta_m(x_3+R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} ds(y), \quad (4.35)$$

– une mesure à droite

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m(x_S) \\ \mathbf{y}_m(x_S) \end{pmatrix} S_{mn}^{++} e^{i\beta_m(x_3-R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} ds(y); \quad (4.36)$$

• pour une source à droite et

– une mesure à gauche

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_m(x_S) \\ \mathbf{y}_m(x_S) \end{pmatrix} S_{mn}^{--} e^{-i\beta_m(x_3+R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{i\beta_n y_3}}{2} ds(y), \quad (4.37)$$

– une mesure à droite

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^s \\ \mathbf{Y}^s \end{pmatrix} (x) = - \sum_{m,n} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m(x_S) \\ \mathbf{y}_m(x_S) \end{pmatrix} S_{mn}^{-+} e^{i\beta_m(x_3-R)} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S^n(y_S) \\ u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{i\beta_n y_3}}{2} ds(y). \quad (4.38)$$

Considérons à présent  $\boldsymbol{\varphi}$  de la forme

$$\boldsymbol{\varphi}(x_S, x_3) = g(x_3 - x_3^{s\pm}) \boldsymbol{\xi}_\sigma^q(x_S), \quad (4.39)$$

avec  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction paire à support compact,  $\boldsymbol{\xi}_\sigma^q : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $x_3^{s\pm}$  l'abscisse des points de source.

Contrairement au guide en deux dimensions, nous avons à présent un nouveau degré de liberté, qui est le placement de la source et de la mesure sur le bord de la section  $\partial\Sigma$ . Comme dans le cas de l'acoustique nous définissons donc  $M$  le nombre de points selon l'axe du guide, et nous définissons  $Q$  le nombre de points selon le bord de la section, appelé nombre de lignes. Nous considérons donc  $M \times Q$  points de source et de mesure, de la forme  $(x_S^q, x_3^{s\pm})$  pour les points de source et  $(x_S^q, x_3^{r\pm})$  pour les points de mesure, avec

$$\begin{aligned} x_3^{s\pm} &= \pm(R + s\delta), & s &= 0, \dots, M-1, \\ x_3^{r\pm} &= \pm(R + r\delta), & r &= 0, \dots, M-1, \end{aligned}$$

et les points  $(x_S^q)_{0 \leq q \leq Q-1}$  tels que  $x_S^q \in \partial\Sigma$ . Ces derniers ne seront pas définis plus précisément et dépendent de la géométrie du guide considéré. Nous les utilisons pour définir des familles de fonctions sur  $\partial\Sigma$  notées  $(\boldsymbol{\xi}_\sigma^q)_{0 \leq q \leq Q-1}$  et  $(\boldsymbol{\zeta}^q)_{0 \leq q \leq Q-1}$  telles que ces fonctions sont centrées en  $x_S^q$ . Étant donné que nous n'avons pas précisé les composantes de la mesure, notons que nous avons  $\boldsymbol{\zeta}^q : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^6$ .

#### Remarque 4.5

Nous avons choisi de considérer les fonctions de source  $\boldsymbol{\xi}_\sigma$  à image dans  $\mathbb{R}^3$  (de type contrainte normale) et celles de mesure à image dans  $\mathbb{R}^6$  (de type contrainte normale ou déplacement). Bien que cela brise la symétrie entre les sources et les mesures, nous avons fait ce choix pour alléger les notations et les calculs tout en présentant la méthode d'une manière générale.

Par ailleurs, la mesure sera pondérée par une fonction  $\psi$ , de la forme

$$\psi(x_S, x_3) = f(x_3 - x_3^{r\pm}) \zeta^p(x_S), \quad (4.40)$$

avec  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction paire à support compact.

Considérons le cas d'une source et d'une mesure à gauche du défaut, les autres cas se traiteraient de la même manière (voir aussi la section 2.3 dans le cas du guide d'ondes acoustiques). En injectant l'expression de  $\varphi$  dans (4.35), il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \varphi(y) \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} ds(y) &= \int_{\partial\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s^n(y_S) \\ -u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\xi}_\sigma^q(y_S) ds(y_S) \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\beta_n y_3}}{2} g(y_3 - x_3^{s-}) dy_3 \\ &= e^{i\beta_n(R+s\delta)} \tau_n^{-q} \alpha_n, \end{aligned}$$

avec

$$\tau_n^{\pm q} = \int_{\partial\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s^n(y_S) \\ \pm u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\xi}_\sigma^q(y_S) ds(y_S), \quad (4.41)$$

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\beta_n y_3}}{2} g(y_3) dy_3. \quad (4.42)$$

Par ailleurs, en considérant la mesure pondérée par  $\psi$ , il vient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^s(x) \\ \mathbf{Y}^s(x) \end{pmatrix} \cdot \psi(x) ds(x) \\ &= - \int_{\Gamma} \sum_{m,n} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\chi}_m(x_S) \\ \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \end{pmatrix} \cdot \zeta^p(x_S) S_{mn}^{+-} e^{-i\beta_m(x_3+R)} f(x_3 - x_3^{r-}) ds(x) \times e^{i\beta_n(R+s\delta)} \tau_n^{-q} \alpha_n \\ &= - \sum_{m,n} \int_{\partial\Sigma} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\chi}_m(x_S) \\ \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \end{pmatrix} \cdot \zeta^p(x_S) ds(x_S) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\beta_m(x_3+R)} f(x_3 - x_3^{r-}) dx_3 \times U_{mn}^{+-} e^{i\beta_n s \delta} \tau_n^{-q} \alpha_n \\ &= - \sum_{m,n} \theta_m^{-p} \gamma_m e^{i\beta_m r \delta} U_{mn}^{+-} e^{i\beta_n s \delta} \tau_n^{-q} \alpha_n, \end{aligned}$$

avec

$$\theta_m^{\pm p} = \int_{\partial\Sigma} \begin{pmatrix} \pm \boldsymbol{\chi}_m(x_S) \\ \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \end{pmatrix} \cdot \zeta^p(x_S) ds(x_S), \quad (4.43)$$

$$\gamma_m = \int_{\mathbb{R}} e^{i\beta_m x_3} f(x_3) dx_3, \quad (4.44)$$

et  $U_{mn}^{+-}$  les coefficients de  $U^{+-}$ , bloc de la matrice  $\mathcal{U}$ , définie par

$$\mathcal{U} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix},$$

$K$  étant une matrice diagonale de terme général  $e^{i\beta_n R}$ .

#### Remarque 4.6

Dans le cas de la dimension 2, notons que les intégrales sur  $\partial\Sigma$  dans les définitions de  $\theta_m^{\pm p}$  et  $\tau_n^{\pm q}$  (équations (4.43) et (4.41)) sont remplacées par des sommes,  $\partial\Sigma$  se réduisant à deux points.

Grâce à l'hypothèse de champ lointain, le champ diffracté mesuré au point  $(x_S^p, x_3^{r-})$  pour une source située au point  $(x_S^q, x_3^{s-})$ ,  $r, s = 0, \dots, M-1$ ,  $p, q = 0, \dots, Q-1$ , peut être approché par  $M_{(M(p-1)+r, M(q-1)+s)}^{+-}$  donné par

$$M_{(M(p-1)+r, M(q-1)+s)}^{+-} = - \sum_{m=0}^{P-1} \sum_{n=0}^{P-1} \theta_m^{-p} \gamma_m e^{i\beta_m r \delta} U_{mn}^{+-} e^{i\beta_n s \delta} \tau_n^{-q} \alpha_n. \quad (4.45)$$

Contrairement au cas de l'acoustique, nous voyons une dissymétrie apparaître suivant la position de la source et de la mesure selon l'axe du guide, qui se traduit par l'apparition de matrices d'émission  $E^-$ ,  $E^+$  et de réception  $R^-$ ,  $R^+$  (on avait simplement  $E^- = E^+$  et  $R^- = R^+$  en acoustique).

En appliquant le même raisonnement aux trois autres configurations, nous obtenons finalement le système

$$\mathcal{M} = -\mathcal{R}\mathcal{U}\mathcal{E}^T, \quad (4.46)$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M^{+-} & M^{--} \\ M^{++} & M^{-+} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} R^- & 0 \\ 0 & R^+ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} E^- & 0 \\ 0 & E^+ \end{pmatrix},$$

$$R^\pm = \begin{pmatrix} VF_r T_r^{\pm 0} \\ VF_r T_r^{\pm 1} \\ \vdots \\ VF_r T_r^{\pm Q-1} \end{pmatrix}, \quad E^\pm = \begin{pmatrix} VF_e T_e^{\pm 0} \\ VF_e T_e^{\pm 1} \\ \vdots \\ VF_e T_e^{\pm Q-1} \end{pmatrix},$$

où  $V$  est la matrice de Vandermonde de taille  $M \times P$ , dont les coefficients sont

$$V_{mn} = e^{im\beta_n\delta}, \quad m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, P-1,$$

$F_e$ ,  $F_r$ ,  $T_e^{\pm q}$  et  $T_r^{\pm q}$  sont les matrices diagonales, de termes généraux respectifs  $\alpha_n$ ,  $\gamma_n$ ,  $\tau_n^{\pm q}$  et  $\theta_n^{\pm q}$  pour  $n = 0, \dots, P-1$  et  $q = 0, \dots, Q-1$ . Nous les nommons respectivement matrice de pondération pour l'émission, matrice de pondération pour la réception, matrice des modes pour l'émission et matrice des modes pour la réception. Les matrices d'émission  $E^\pm$  et de réception  $R^\pm$  sont donc dorénavant de taille  $MQ \times P$ , et la matrice de mesures  $\mathcal{M}$  est de taille  $MQ \times MQ$ .

Nous voyons que la répartition des sources et des mesures selon l'axe ne joue pas le même rôle que celle selon le bord de la section. Nous pouvons ainsi traiter séparément la répartition des points selon l'axe et celle sur le bord de la section. La répartition des points selon l'axe a déjà été étudiée dans le cas où une seule ligne est considérée dans le cas de l'acoustique. Les conclusions obtenues dans ce cas sur le conditionnement des matrices  $E^\pm$  et  $R^\pm$  se généralisent au cas où plusieurs lignes sont considérées. Entrent en jeu de nouveaux paramètres, qui sont le nombre de lignes  $Q$  et leur répartition selon le bord de la section, soit les fonctions  $\zeta^q$  et  $\xi_\sigma^q$ ,  $q = 0, \dots, Q-1$ .

Notons que nous pouvons aussi écrire

$$R^\pm = \mathcal{V}\mathcal{F}_r\mathcal{T}_r^\pm, \quad E^\pm = \mathcal{V}\mathcal{F}_e\mathcal{T}_e^\pm$$

les matrices  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{F}_r$  et  $\mathcal{F}_e$  étant diagonales par blocs, de blocs respectifs  $V$ ,  $F_r$  et  $F_e$ , et

$$\mathcal{T}_r^\pm = \begin{pmatrix} T_r^{\pm 0} \\ T_r^{\pm 1} \\ \vdots \\ T_r^{\pm Q-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_e^\pm = \begin{pmatrix} T_e^{\pm 0} \\ T_e^{\pm 1} \\ \vdots \\ T_e^{\pm Q-1} \end{pmatrix},$$

matrices formées de  $Q$  blocs de taille  $P \times P$ .

Dans la pratique, le terme source sera une contrainte imposée au bord soit selon la section transverse soit selon l'axe du guide et les mesures seront les composantes du déplacement. Nous nous plaçons dans ce cadre dans la suite, ce qui implique  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_6 = 0$ , et nous notons  $\zeta_u$  la fonction telle que

$$\begin{pmatrix} \pm \mathbf{x}_m \\ \mathbf{y}_m \end{pmatrix} \cdot \zeta = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_S \\ \pm u_3 \end{pmatrix} \cdot \zeta_u,$$

autrement dit

$$\zeta_u = \begin{pmatrix} \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}.$$

Nous définissons à nouveau notre fonction de mesure

$$\psi(x_S, x_3) = f(x_3 - x_3^{r\pm}) \zeta_u^p(x_S), \quad (4.47)$$

où nous avons remplacé dans (4.40)  $\zeta$  par  $\zeta_u$ .

## 4.5 Étude du conditionnement des matrices d'émission et de réception

Comme dans le cas de l'acoustique, nous allons nous intéresser au conditionnement des matrices d'émission et de réception  $E^\pm$  et  $R^\pm$ , et plus particulièrement à son optimisation. Nous omettons dans cette partie l'exposant  $\pm$  des matrices d'émission et de réception ainsi que de celles intervenant dans leur factorisation, ce signe n'ayant pas d'influence sur la discussion.

### 4.5.1 Étude théorique

#### *Les matrices de pondération*

Les conclusions dans le cas acoustique en dimension 2 restent valables ici (voir section 2.4) : les matrices  $F_e$  et  $F_r$  ne dépendent que de la forme des fonctions de mesure  $f$  et de source  $g$  selon l'axe du guide, et des nombres d'onde  $\beta_n$ . En choisissant des fonctions  $f$  et  $g$  telles que leur transformée de Fourier varie peu sur  $(0, \beta_0)$ , le conditionnement des matrices  $F_e$  et  $F_r$  est proche de 1.

#### *Les matrices des modes*

Les matrices  $T_e^q$  et  $T_r^q$  sont diagonales, leurs coefficients dépendant des valeurs des modes sur le bord.

#### **Cas du guide en dimension 2**

Considérons dans un premier temps la dimension 2 avec un guide de section  $(0, d)$  et une seule ligne de sources en contrainte et une seule ligne de mesures en déplacement, avec

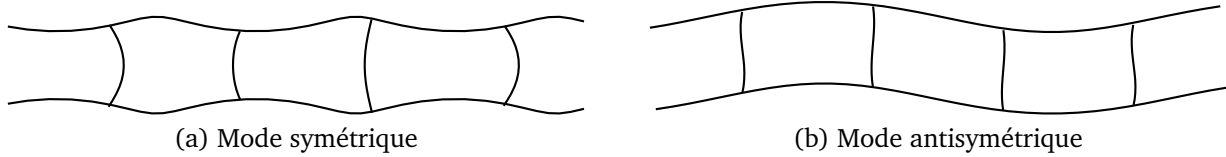


FIGURE 4.2 – Schémas des modes de Lamb

$\zeta_u = \xi_\sigma$  dans (4.39) et (4.47). Cela revient à avoir  $Q = 1$  et  $T_e^0 = T_r^0 = T$ , avec

$$T = \begin{pmatrix} \xi_S u_S^0(d) + \xi_3 u_3^0(d) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_S u_S^1(d) + \xi_3 u_3^1(d) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_S u_S^{P-1}(d) + \xi_3 u_3^{P-1}(d) \end{pmatrix}.$$

Les modes sont appelés dans ce cas les modes de Lamb. Il en existe deux types, suivant la symétrie de  $u_3$  par rapport à  $x_S = d/2$  (voir figure 4.2) : si  $u_3$  est symétrique, alors le mode est dit symétrique. Sinon,  $u_3$  est antisymétrique et le mode est dit antisymétrique. Notons que la composante  $u_S$  est antisymétrique lorsque le mode est symétrique et symétrique lorsque le mode est antisymétrique. Nous pouvons montrer dans ce cas que le conditionnement de la matrice des modes explose lorsqu'au moins un des modes a une amplitude nulle à la surface. Plus précisément, nous montrons (voir annexe C) dans le cas particulier  $\xi_S = 1$  et  $\xi_3 = 0$  que

#### Proposition 4.10

L'amplitude du déplacement normal d'un mode est nulle en  $d$  si et seulement si  $\exists p \in 0, \dots, P-1$ , tel que  $\exists(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{cases} \beta_p^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{m\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, & (4.48) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_p^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left( \frac{n\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, & (4.49) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + n = 2q, \quad q \in \mathbb{Z}. & (4.50) \end{cases}$$

où  $\kappa = 0$  si le mode est symétrique et  $\kappa = \pi/2$  si le mode est antisymétrique.

Physiquement, ces résultats peuvent s'interpréter grâce aux courbes de dispersion : dans le plan  $(\omega, \beta)$ , il s'agit des courbes décrites par les modes, de Lamb ou SH. L'amplitude d'au moins un mode est alors nulle au point où s'intersectent les courbes correspondant à un mode SH (relation (4.48)) et à un mode "pseudo-Lamb" (relation (4.49)). En particulier, nous montrons dans l'annexe C que ces points sont aussi les points d'intersection d'un mode de Lamb symétrique et d'un mode de Lamb antisymétrique, sauf dans le cas où  $n = 0$  dans (4.49). Dans ce cas, le mode antisymétrique est identiquement nul.

Nous prouvons ainsi des résultats déjà observés grâce à des observations physiques dans [129].

#### Cas du guide en dimension 3

Dans le cas général, le conditionnement des matrices  $T_e^q$  et  $T_r^q$  va dépendre fortement du choix des fonctions de source et de mesure  $\xi_\sigma$  et  $\zeta_u$  et des modes du guide, donc de sa géométrie. De plus, nous n'avons pas d'expression analytique des modes en général. Ces questions doivent donc être traitées numériquement au cas par cas. Nous avons cependant la propriété suivante,

qui nous donne une majoration du conditionnement des matrices d'émission et de réception  $E$  et  $R$  en fonction des valeurs propres des matrices d'émission et de réception associées aux différentes lignes.

**Proposition 4.11**

Soient  $\lambda_1(X)$  et  $\lambda_P(X)$  respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice  $X$  symétrique définie positive de taille  $P \times P$ . Alors

$$\kappa(R) \leq \sqrt{\frac{\sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_1(R_q^* R_q)^2}{\sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_P(R_q^* R_q)^2}},$$

$$\kappa(E) \leq \sqrt{\frac{\sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_1(E_q^* E_q)^2}{\sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_P(E_q^* E_q)^2}},$$

avec

$$R_q = V F_r T_r^q,$$

$$E_q = V F_e T_e^q.$$

*Démonstration.* Nous n'écrivons la démonstration que pour la matrice de réception  $R$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1(R^* R)^2 &= \max_{\|x\|_2=1} x^* R^* R x \\ &= \max_{\|x\|_2=1} \sum_{q=0}^{Q-1} x^* R_q^* R_q x \\ &\leq \sum_{q=0}^{Q-1} \max_{\|x\|_2=1} x^* R_q^* R_q x \\ &\leq \sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_1(R_q^* R_q)^2. \end{aligned}$$

De même,

$$\lambda_P(R^* R)^2 \geq \sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_P(R_q^* R_q)^2,$$

ce qui implique

$$\kappa(R) \leq \sqrt{\frac{\sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_1(R_q^* R_q)^2}{\sum_{q=0}^{Q-1} \lambda_P(R_q^* R_q)^2}}.$$

□

Cette proposition n'assure pas la décroissance du conditionnement de  $E$  et  $R$  lorsque  $Q$  augmente, mais montre que même si certaines lignes présentent un mauvais conditionnement (des matrices  $E_q$  et  $R_q$ ), celui de la matrice globale reste borné. Nous verrons dans la pratique que ce dernier décroît en général lors de l'ajout d'une ligne.



### La matrice de Vandermonde

La matrice de Vandermonde  $V$  a la même expression que dans le cas de l'acoustique :

$$V_{mn} = e^{im\beta_n\delta}, \quad m = 0, \dots, M-1, \quad n = 0, \dots, P-1.$$

Toutefois, nous n'avons plus d'expression analytique pour les nombres d'onde  $\beta_n$ . Nous allons chercher à optimiser le conditionnement malgré cela. Tout d'abord, pour que  $V^*V$  soit inversible, nous imposons dans la suite que

$$(\beta_m - \beta_n)\delta \neq 2\pi q, \quad m \neq n, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Dans le cas où tous les  $\beta_n$  sont différents, cette condition est vérifiée si

$$\delta < \frac{2\pi}{\beta_0 - \beta_{P-1}}.$$

Or dans un guide d'ondes élastiques il est possible que deux modes aient le même nombre d'onde : cette situation survient par exemple dans un guide de dimension 3 de section carré. De même, en dimension 2, la différence entre les deux premiers nombres d'onde tend vers 0 lorsque la fréquence augmente. Ces situations ne se présentent pas dans le cas du guide d'ondes acoustiques en dimension 2. Pour que  $V^*V$  soit inversible et que notre méthode soit applicable, nous n'avons pas d'autre choix que de choisir arbitrairement un des deux modes ayant le même nombre d'onde et de ne pas l'inclure dans les décompositions modales. Nous perdons ainsi l'information liée à ce mode mais nous restons capable d'imager le défaut.

Dans le cas de l'élasticité, nous proposons de fixer l'espacement entre deux points de mesure et de source  $\delta$  à  $\delta = \delta_0 = 2\pi/\beta_0$ , qui assure l'inversibilité de  $V^*V$  sous réserve que l'hypothèse 12 soit vérifiée (pas de mode rétrograde). Remarquons que cette valeur coïncide avec celle choisie dans le cas de l'acoustique, cas pour lequel  $\beta_0 = k$ , soit  $\delta_0 = \lambda$ , où  $\lambda$  désignait la longueur d'onde.

#### 4.5.2 Étude numérique

Intéressons-nous d'abord au cas de la dimension 2 et au conditionnement de la matrice des modes  $T$ . Nous avons représenté figure 4.3, graphique du haut, le conditionnement de la matrice  $T$  en fonction de la fréquence dans le cas où ses coefficients sont les  $u_s^n(d)$ , avec  $d = 1$ . Le graphique du bas représente les courbes de dispersion des modes symétriques en bleu, anti-symétriques en rouge et SH en vert, ainsi que les modes "pseudo-Lamb" en pointillés noirs. Ces derniers correspondent à un nombre d'onde  $\beta$  vérifiant une relation de dispersion de la forme

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.51)$$

Les courbes de dispersion des modes symétriques et antisymétriques sont obtenues grâce à l'algorithme SAFE décrit brièvement section 4.6.2, celles des "pseudo-Lamb" sont définies par (4.51) et celles des modes SH pour  $n \in \mathbb{N}$ , par

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous observons ainsi que chaque pic du conditionnement correspond à l'intersection des courbes de dispersion d'un mode SH et d'un mode "pseudo-Lamb", et que ces intersections

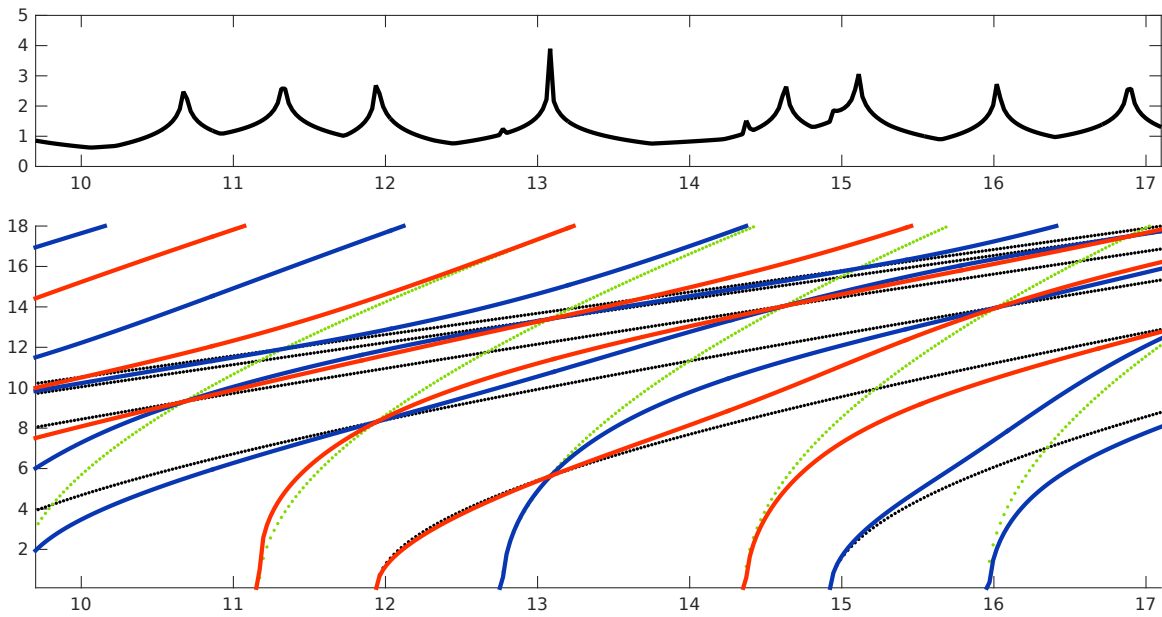


FIGURE 4.3 – Conditionnement de la matrice des modes dans le cas 2D. En haut : évolution du logarithme du conditionnement en fonction de la fréquence. En bas : courbes de dispersion des modes symétrique (bleu continu), antisymétrique (rouge continu), SH (vert pointillé) et “pseudo-Lamb” (noir pointillé)

coïncident avec celles d'un mode de Lamb symétrique et d'un mode de Lamb antisymétrique. En particulier, le deuxième pic correspond au cas  $\beta = \omega\sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$  où le mode antisymétrique est identiquement nul. Par ailleurs, nous voyons que les intersections entre un mode SH, un mode de Lamb et un mode “pseudo-Lamb” n'ont lieu que lors d'une intersection sur deux d'un mode SH et d'un mode “pseudo-Lamb” : si l'on suit par exemple la courbe correspondant à un mode SH, il n'y aura un mode de Lamb à l'intersection avec un mode “pseudo-Lamb” qu'une fois sur deux. Nous pourrions vérifier que cela correspond aux cas où les parités de  $m$  et  $n$  sont les mêmes dans (4.48) et (4.49). Cela conforte l'étude théorique menée en annexe C. Nous voyons par ailleurs qu'en dehors de ces valeurs, le conditionnement de la matrice  $T$  varie peu. Nous pouvons donc, en évitant les fréquences pour lesquelles ces intersections se produisent, avoir un bon conditionnement de la matrice  $T$ , et donc nous retrouver dans le même cadre que dans le cas du guide d'ondes acoustiques en deux dimensions.

Nous avons par ailleurs représenté figure 4.4 le logarithme du conditionnement de la matrice de Vandermonde  $V$  en fonction du rapport  $\delta/\delta_0$  pour différentes valeurs de  $M$ , avec  $P = 12$ . Cette figure confirme que l'étude réalisée dans le cas de l'acoustique se généralise au cas de l'élasticité.

Illustrons à présent le cas de la dimension 3. Comme mentionné précédemment, les modes et donc le conditionnement des matrices des modes  $T_r^q$  et  $T_e^q$  dépendent beaucoup de la géométrie du guide. Nous avons choisi de considérer ici un guide de section rectangulaire  $[0; 30] \times [0; 10]$  (voir figure 4.5). Nous avons représenté figure 4.7 l'évolution du conditionnement de la matrice de réception  $R$  et des matrices intervenant dans sa factorisation en fonction du nombre de lignes de source  $Q$ , pour un nombre de points par ligne  $M$  fixé. Plus précisément, les fonctions  $\zeta_u^q$  dans (4.47) sont de la forme

$$\zeta_u^q = \delta_{x_S^q} \nu_S(x_S^q), \quad q = 0, \dots, Q - 1,$$

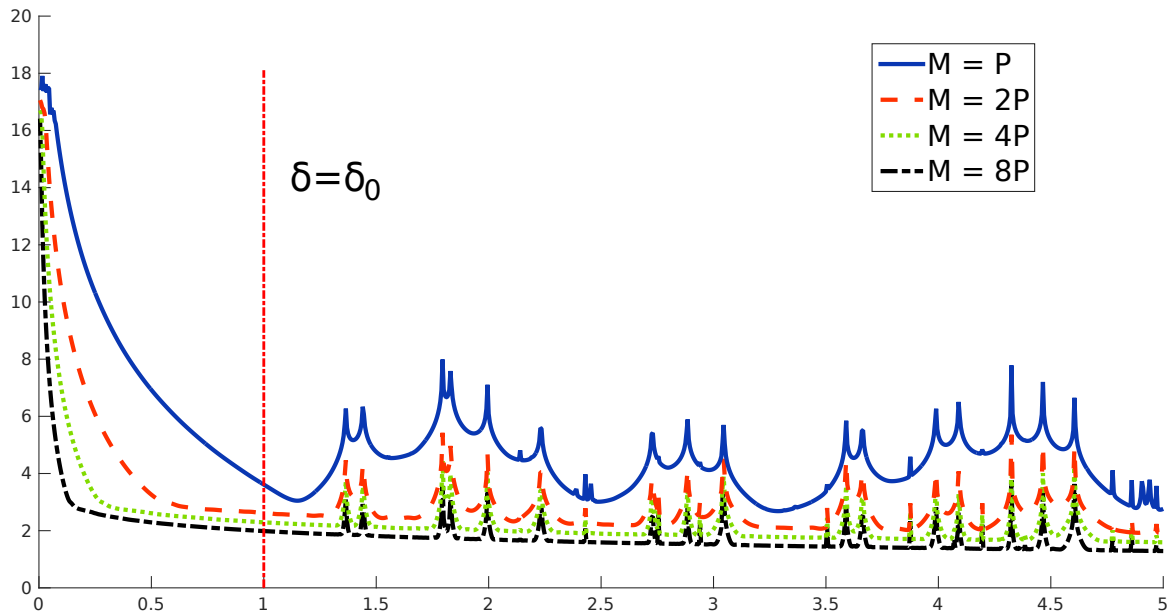


FIGURE 4.4 – Logarithme du conditionnement de  $V$  en fonction de  $\delta/\delta_0$

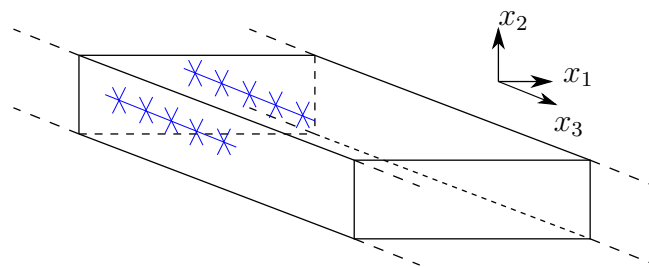


FIGURE 4.5 – Schéma du guide 3D et du placement des lignes

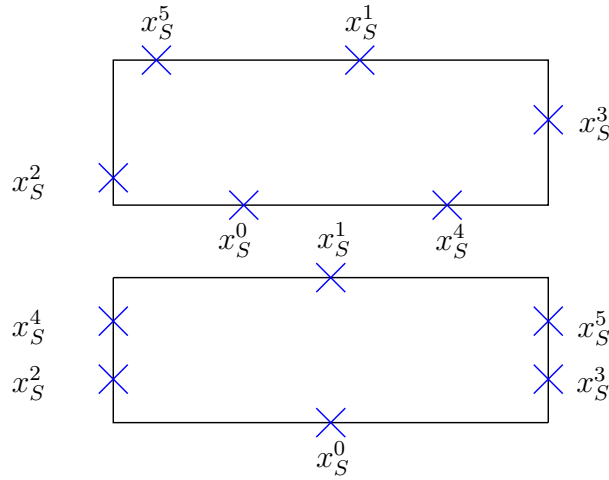


FIGURE 4.6 – Position des lignes sur le bord de la section dans la première configuration (I) en haut et dans la seconde (II) en bas

de sorte que les matrices  $T_r^q$  sont de terme général  $\mathbf{u}_S^n(x_S^q) \cdot \boldsymbol{\nu}_S(x_S^q)$ ,  $n = 0, \dots, P - 1$ , avec, pour la première sous-figure,

$$x_S^0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_S^1 = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x_S^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_S^3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_S^4 = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_S^5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix},$$

et, pour la seconde,

$$x_S^0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_S^1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad x_S^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_S^3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_S^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x_S^5 = \begin{pmatrix} 30 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(voir figure 4.6 pour un schéma du positionnement de ces points).

Nous avons donc tracé le logarithme du conditionnement des différentes matrices intervenant dans la factorisation de  $R$  en fonction du nombre de lignes  $Q$  choisi : le logarithme du conditionnement de la matrice de Vandermonde  $V$  est tracé en bleu (constant car indépendant du nombre de lignes), celui de la matrice des modes  $T_r^{Q-1}$  associée à la ligne  $Q - 1$  est tracé en rouge, celui de la matrice globale des modes  $\mathcal{T}_r$  est tracé en jaune et celui de la matrice de réception  $R$  est tracé en violet. Ces courbes ont été tracées pour un espacement  $\delta = \delta_0$ , un nombre de modes propagatifs  $P = 16$  et un nombre de points (par ligne)  $M = 4P$ . Étant donnée la forme du guide, nous nous attendons à ce que des modes s'annulent sur les axes de symétrie et que le conditionnement des matrices des modes explose pour des points sur ces axes.

De plus, pour avoir le plus d'information possible pour un nombre de lignes  $Q$  donné, il semble naturel d'espacer régulièrement nos lignes sur le bord de la section. Nous avons donc deux critères pour choisir la position de nos lignes : éviter les symétries du guide et bien répartir nos points sur le bord de la section du guide.

La première configuration (I) correspond alors à un positionnement des points évitant les symétries avec une répartition régulière sur le bord de la section. Nous voyons ainsi que le conditionnement de  $\mathcal{T}_r$  ainsi que celui de  $R$  sont améliorés lorsque la deuxième ligne est ajoutée, alors que le conditionnement associé à  $T_r^1$  est moins bon que celui associé à  $T_r^0$ . Cela montre que nous avons intérêt à utiliser plusieurs lignes  $q$  dans nos acquisitions, et ce indépendamment du conditionnement des différentes matrices des modes  $T_r^q$ . Globalement, les

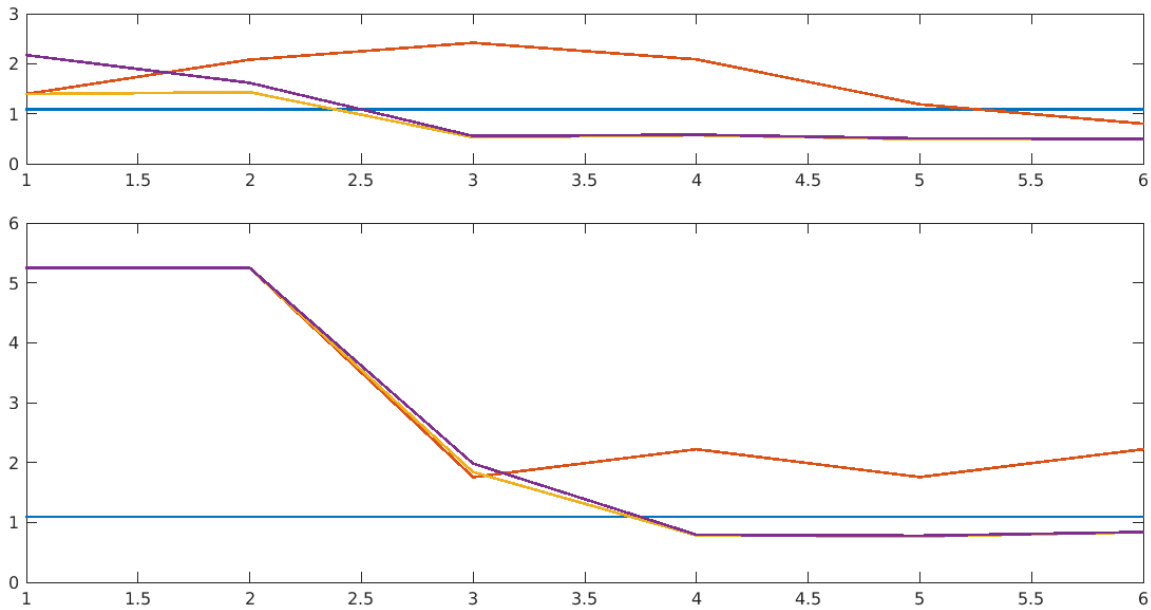


FIGURE 4.7 – Conditionnement en fonction du nombre de lignes  $Q$  dans le cas d’un guide de section rectangulaire. Logarithme du conditionnement de la matrice de Vandermonde (en bleu), de la matrice  $T_r^Q$  (en rouge), de la matrice  $T_r$  (en jaune) et de la matrice de réception  $R$  (en violet). En haut : bonne répartition des points évitant les symétries. En bas : points mal répartis

conditionnements de  $T_r$  et  $R$  diminuent à l’ajout de chaque ligne. Toutefois, cette diminution présente un effet de saturation et nous n’avons pas intérêt à considérer trop de lignes. Ainsi, le gain entre l’ajout de la quatrième et de la cinquième ligne est minime.

La deuxième configuration (II) consiste en une mauvaise répartition des points avec des symétries. Il est alors intéressant de noter que le conditionnement de  $T_r$  et  $R$  diminue peu lors de l’ajout de la deuxième ligne. Notons que le conditionnement de  $R$  augmente légèrement lors de l’ajout de la sixième ligne, ce qui met l’accent sur l’importance du choix du nombre de lignes  $Q$  et du positionnement de celles-ci.

Les conditionnements obtenus dans les deux sous-figures sont proches lorsque 6 lignes sont considérées. Il ne faut cependant pas oublier que l’ajout d’une ligne a un coût sur le temps d’acquisition, et que toutes les faces ne sont pas nécessairement accessibles lors d’une inspection. C’est pourquoi il est important d’étudier le placement des lignes a priori, pour déterminer le nombre de lignes considérées ainsi que leur position.

## 4.6 Extension au régime temporel et applications numériques

Nous allons présenter rapidement dans cette section l’extension au régime temporel, qui est l’analogie de la section 3.1.2 dans le cas de l’acoustique, avant de nous intéresser aux applications numériques. Pour cela nous décrivons le calcul des modes, qui ne sont pas connus analytiquement comme dans le cas du guide acoustique en deux dimensions, puis des résultats numériques, d’abord pour les mêmes défauts que dans le cas de l’acoustique afin de comparer les performances obtenues (problème de Dirichlet), puis sur d’autres types de défauts, tels que les fissures ou les obstacles en bord de guide. Nous parlerons à cette occasion notamment de l’influence de la composante du déplacement mesurée, à savoir normale ou

tangentielle, ainsi que l'influence de la polarisation sur l'image finale.

#### 4.6.1 Extension au régime temporel. Choix de la forme de la source en temps

Soit  $\mathbf{v}$  la solution dans  $\Omega \times (0, +\infty)$  de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{v} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{v}) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \sigma(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu} = \varphi \chi & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \partial D \times \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{v}(\cdot, 0) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \partial_t \mathbf{v}(\cdot, 0) = 0 & \text{sur } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.52)$$

où  $\varphi$  est une fonction à support compact de  $\Gamma$  et  $\chi$  une fonction du temps, causale et à support compact. À nouveau, le caractère bien posé de ce problème pourrait être établi au moyen du théorème de Lions-Magenes ou au moyen de celui de Hille-Yosida (voir [35]). Comme dans le cas de l'acoustique, si nous considérons la transformée de Fourier de la solution  $\mathbf{v}$

$$\widehat{\mathbf{v}}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{v}(x, t) e^{i\omega t} dt,$$

pour  $\omega > 0$  fixé la fonction  $\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{v}}(\cdot, \omega)$  est solution du problème de diffraction

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \omega^2 \mathbf{u} + \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{h} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial D, \\ (CR), & \end{array} \right. \quad (4.53)$$

avec  $\mathbf{h} = \widehat{\chi}(\omega) \varphi$ . Nous avons, comme dans le cas de l'acoustique,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^i$  avec  $\mathbf{u}^s$  solution du problème (4.10) où la condition de Neumann  $\sigma(\mathbf{u}^s) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}$  avec  $\mathbf{f} = -\sigma(\mathbf{u}^i) \boldsymbol{\nu}$  sur  $\partial D$  a été remplacée par la condition de Dirichlet  $\mathbf{u}^s = -\mathbf{u}^i$ , et  $\mathbf{u}^i$  est la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \omega^2 \mathbf{u}^i + \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^i) = 0 & \text{dans } W, \\ \sigma(\mathbf{u}^i) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{h} & \text{sur } \Gamma, \\ (CR). & \end{array} \right.$$

Nous pouvons à nouveau résoudre le problème d'imagerie à chaque fréquence du spectre de la fonction de source  $\chi$ , ce qui nous permet de calculer différentes fonctions caractéristiques en combinant celles obtenues pour chaque fréquence. Toutefois, étant données les conclusions obtenues dans le cas de l'acoustique, nous ne considérerons que la fonction caractéristique en série normalisée par le maximum :

$$\psi_{Z,p,\max}^s = \left( \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\max_{z \in G} |\psi_{Z,p}(z, \omega)|^2}{|\psi_{Z,p}(\cdot, \omega)|^2} d\omega \right)^{-1/2}, \quad (4.54)$$

avec  $\omega_-$ , respectivement  $\omega_+$  l'infimum, respectivement le supremum, du support de  $\widehat{\chi}$ .

Intéressons-nous maintenant à la fonction source  $\chi$ . Comme dans le cas de l'acoustique, nous allons vouloir éviter les fréquences pour lesquelles la vitesse de groupe d'un mode est nulle.

Notons que contrairement au cas de l'acoustique, il ne s'agit pas toujours des fréquences pour lesquelles un nombre d'onde  $\beta_n$  est nul. Nous considérons donc la même forme de source

$$\chi(t) = \sum_{n \in \mathcal{I}} \chi_n(t) \quad (4.55)$$

$$= \sum_{n \in \mathcal{I}} [\sin(a_n t) \exp(-b_n(t - c_n)^2)]'. \quad (4.56)$$

avec  $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ .

Toutefois, nous devons déterminer au préalable numériquement les fréquences de coupure  $\omega_n$  pour pouvoir déterminer nos paramètres. Nous imposons donc, comme dans le cas de l'acoustique,

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = \frac{\pi^2}{200d^2}, \\ c_n = \frac{5}{\sqrt{2b}}, \\ \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + 16b_n}}{2} = \frac{1}{2}(\omega_n - \omega_{n-1}). \end{array} \right.$$

Contrairement au cas de l'acoustique, les fréquences de coupure  $\omega_n$  ne sont pas espacées régulièrement. Remarquons alors qu'en pratique, si les deux fréquences de coupure  $\omega_{n-1}$  et  $\omega_n$  sont proche l'une de l'autre, alors le support de  $\hat{\chi}_n$  est petit, ce qui implique que celui de  $\chi_n$  est grand. Nous n'allons donc plus considérer tous les intervalles jusqu'à  $\omega_P$  mais seulement ceux pour lesquels le support de  $\chi_n$  est suffisamment petit pour que le temps final  $T_{\max}$  ne soit pas trop grand.

Dans la pratique, nous avons choisi  $\mathcal{I} = \{8, 11, 14\}$ .

## 4.6.2 Synthèse de données artificielles

Nous avons adopté la même stratégie que dans le cas de l'acoustique. Ainsi, dans le cas fréquentiel, le champ diffracté est calculé par éléments finis dans une zone restreinte autour du défaut, avant d'être propagé selon l'axe du guide grâce au lemme de propagation 4.3. Le calcul éléments finis a été réalisé au moyen de la bibliothèque C++ XLIFE++ développée dans l'équipe POEMS de l'ENSTA ParisTech [105]. Dans le cas du domaine temporel, les données ont été simulées au moyen du code Echo [85].

### Calcul des modes

Nous n'avons plus accès aux modes analytiquement. En effet même en dimension 2, bien que nous connaissions la relation de dispersion (C.1) (voir [122]), nous ne sommes pas à même de déterminer  $\beta$  analytiquement. Nous devons donc a minima résoudre numériquement la relation de dispersion pour obtenir  $\beta_n$  et  $\kappa_n \in \{0, \pi/2\}$  avant d'utiliser les expressions analytiques des modes lorsque celles-ci sont disponibles. Nous avons choisi d'utiliser la méthode SAFE [9, 88] car elle nous permet de calculer les nombres d'onde ainsi que les modes simultanément, quel que soit le guide d'onde considéré. Nous avons ainsi vérifié dans le cas de la dimension 2 que la reconstruction est de même qualité en utilisant des modes calculés numériquement et analytiquement (non présenté ici) avant d'utiliser les modes numériques pour d'autres géométries pour lesquelles nous n'avons plus d'expression analytique en général.

Le principe est le suivant : nous discrétisons par éléments finis un problème vérifié par les modes écrit sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé. Nous résolvons ensuite numériquement ce problème, ce qui nous donne les valeurs propres  $\beta_n$  et les vecteurs

propres associés  $\mathbf{U}_n = (\mathbf{u}_S^n \ u_3^n)^T$ . Plus précisément, soit le problème vérifié par les modes dans la section

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_\beta \sigma_\beta(\mathbf{u}) - \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \sigma_\beta(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (4.57)$$

où l'indice  $\beta$  signifie que les dérivées par rapport à la variable  $x_3$  dans (4.57) ont été remplacées par une multiplication par  $i\beta$ . Ce problème est un problème aux valeurs propres quadratique, et ne peut donc être résolu directement. Nous introduisons donc  $\mathbf{p} = \beta\mathbf{u}$  et nous écrivons une formulation variationnelle de (4.57) : trouver  $(\beta, \mathbf{u}, \mathbf{p})$  tels que,  $\forall (\mathbf{v}, \mathbf{q}) \in \mathbf{H}^1(\Sigma)^2$ ,

$$\begin{aligned} & \int_\Sigma \rho \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx = \beta \int_\Sigma \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx, \\ & \int_\Sigma \rho \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} - C \varepsilon_{1S}(\mathbf{u}) : \varepsilon_{1S}(\mathbf{q}) \, dx \\ & + \int_\Sigma \rho \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - iC \varepsilon_{03}(\mathbf{p}) : \varepsilon_{1S}(\mathbf{q}) - iC \varepsilon_{1S}(\mathbf{p}) : \varepsilon_{03}(\mathbf{q}) \, dx = \beta \int_\Sigma C \varepsilon_{03}(\mathbf{p}) : \varepsilon_{03}(\mathbf{q}) \, dx, \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_{03}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_2 \\ \frac{1}{2}u_1 & \frac{1}{2}u_2 & u_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{1S}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Après discrétisation, nous obtenons un problème de la forme

$$AX = \beta BX$$

que nous savons résoudre numériquement.

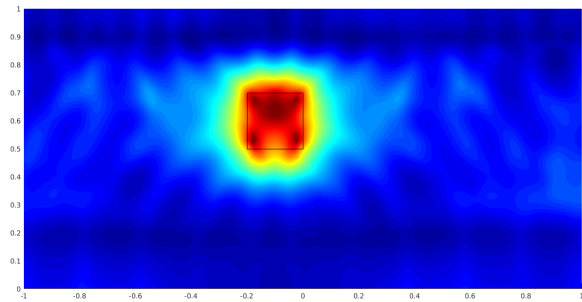
### 4.6.3 Résultats numériques

Nous avons considéré dans un premier temps un guide en dimension 2 présentant les mêmes défauts que dans le cas de l'acoustique, à savoir un défaut carré et deux défauts rectangulaires, avec des conditions de bord de Dirichlet (voir figures 4.8 et 4.9), à polarisation fixée. Pour une source selon la normale du guide, de la forme

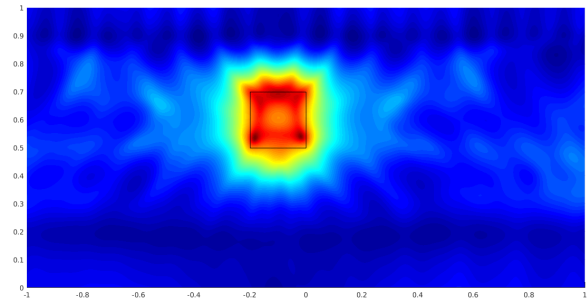
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_\sigma &= \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \\ g(x_3) &= \frac{10}{d} \max \left( 1 - \frac{10|x_3|}{d}, 0 \right) \end{aligned}$$

dans (4.39), nous avons imagé les défauts pour une mesure ponctuelle ( $f = \delta$ ) de la composante normale  $u_S$  du déplacement ou de la composante tangentielle  $u_3$ , dans le cas des données complètes (full-scattering) et partielles (back-scattering). Le nombre de modes propagatifs  $P$  aux fréquences utilisées dans l'imagerie, d'après l'expression de  $\chi$  (4.56), est 8, 11 ou 14, et  $M = 42$ . Nous obtenons ainsi des images de qualité proche de celles obtenues dans le cas de l'acoustique, comme attendu suite à l'étude du conditionnement des matrices d'émission et de réception.

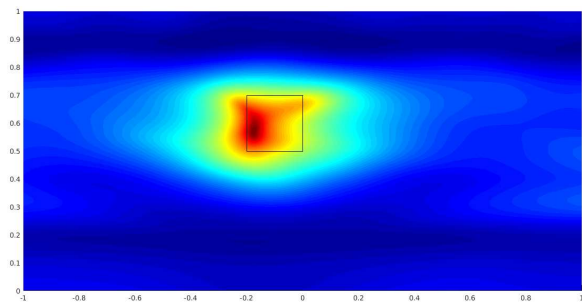




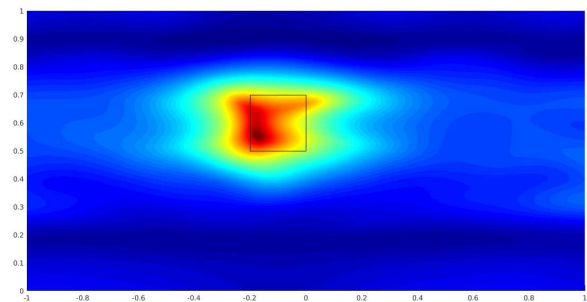
(a) Full-scattering, mesure du déplacement normal



(b) Full-scattering, mesure du déplacement tangentiel

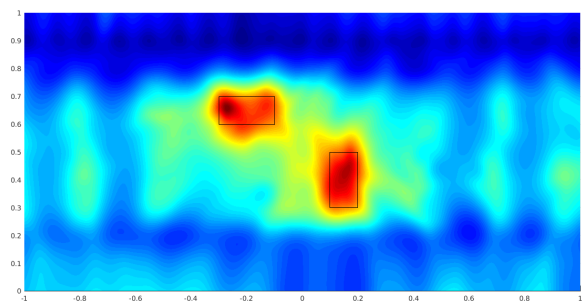


(c) Back-scattering, mesure du déplacement normal

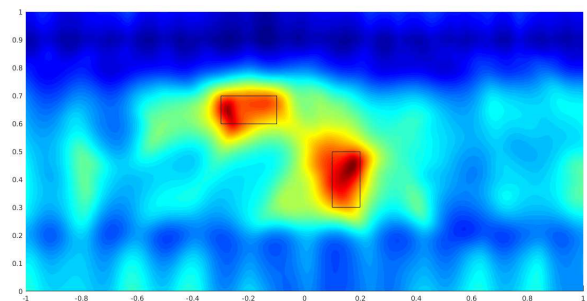


(d) Back-scattering, mesure du déplacement tangentiel

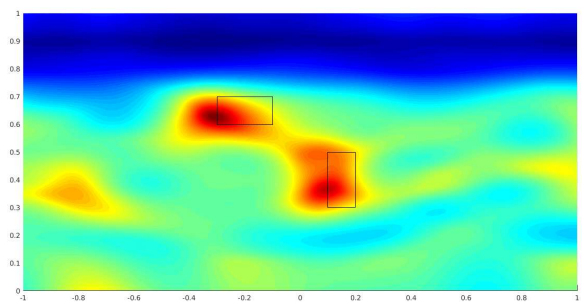
FIGURE 4.8 – Un défaut de type Dirichlet, dimension 2



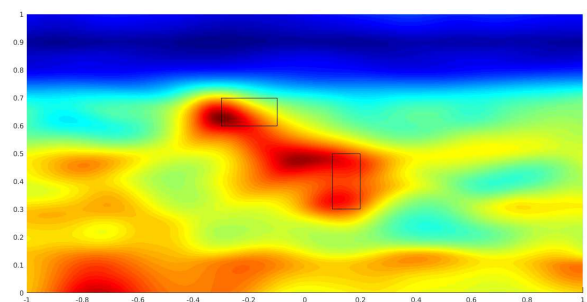
(a) Full-scattering, mesure du déplacement normal



(b) Full-scattering, mesure du déplacement tangentiel



(c) Back-scattering, mesure du déplacement normal



(d) Back-scattering, mesure du déplacement tangentiel

FIGURE 4.9 – Deux défauts de type Dirichlet, dimension 2

### Influence de la polarisation

Les images précédentes ont été obtenues pour une polarisation  $\mathbf{p}$  fixée. Plus précisément, nous considérons figures 4.8 et 4.9 la polarisation  $u_S$ , ce qui revient à résoudre le système

$$\mathcal{U}H_p = F_{Y,p},$$

avec  $\mathbf{p} = (1 \ 0)^T$  et  $F_{Y,p}$  défini en (4.30).

En dimension 2 nous pouvons donc obtenir 4 images : en effet, étant données les deux polarisations  $\mathbf{p}_1 = (1 \ 0)^T$  et  $\mathbf{p}_2 = (0 \ 1)^T$ , nous obtenons une image par polarisation pour chacun des systèmes

$$\begin{aligned}\mathcal{U}H_p &= F_{Y,p} \\ \mathcal{U}H_p &= F_{X,p},\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien quatre images. Revenons dans le cadre général de la dimension 3. Il est alors intéressant de chercher à optimiser la polarisation pour obtenir la meilleure image possible. En particulier dans le cas des fissures [34], il a été montré que le système résolu pour la fissure de Neumann est

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{P-1} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{+-} h_n^- + S_{mn}^{--} h_n^+) = e^{i\beta_m (R+z_3)} (-\mathbf{t}_S(z_S) \cdot \boldsymbol{\nu}_S^m(z) + t_3^m(z_S) \nu_3(z)), \\ \sum_{n=0}^{P-1} e^{i\beta_n R} (S_{mn}^{++} h_n^- + S_{mn}^{+-} h_n^+) = e^{i\beta_m (R-z_3)} (\mathbf{t}_S(z_S) \cdot \boldsymbol{\nu}_S^m(z) + t_3^m(z_S) \nu_3(z)), \end{cases} \quad m = 0, \dots, P-1, \quad (4.58)$$

avec  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_S \ \nu_3)^T$  la normale à la fissure (lorsque  $z$  appartient à la fissure).

Le problème est alors que la normale à la fissure fait partie des inconnues. Cependant, grâce à la linéarité du système, nous pouvons résoudre le problème pour les polarisations  $(1 \ 0 \ 0)^T$ ,  $(0 \ 1 \ 0)^T$  et  $(0 \ 0 \ 1)^T$  et déduire la normale en cherchant le vecteur unitaire qui pour chaque point  $z$  minimise  $\|\mathbf{h}\|_{L^2(\hat{\Sigma})}$  conformément au théorème 4.7.

En dimension 2, nous posons  $(\nu_S, \nu_3) = (\cos \theta, \sin \theta)$  et nous résolvons le problème (4.58) pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$ . Nous en déduisons respectivement  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}_2$ . Par linéarité, nous avons

$$\mathbf{h} = (\cos \theta) \mathbf{h}_1 + (\sin \theta) \mathbf{h}_2,$$

ce qui implique que, par une simple minimisation de  $\|\mathbf{h}\|_{L^2(\hat{\Sigma})}$ , nous obtenons notre normale. Nous avons représenté figure 4.10 les images obtenues pour les polarisations  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  pour deux fissures de Neumann. Comme il avait déjà été justifié dans [34], les polarisations en contrainte donnent une image plus fidèle des fissures de Neumann.

S'agissant de l'optimisation de la normale, nous avons deux possibilités : soit nous appliquons cette optimisation à chaque fréquence et nous obtenons une fonction caractéristique en combinant les fonctions caractéristiques optimisées, soit nous appliquons l'optimisation aux fonctions caractéristiques après combinaison des différentes fréquences.

Nous avons représenté figure 4.11 les images obtenues après optimisation de la normale respectivement à chaque fréquence et sur les fonctions caractéristiques combinées. Nous voyons alors que, dans le premier cas, une des deux fissures n'est pas trouvée. Il semble donc plus intéressant d'effectuer l'optimisation de la normale sur les fonctions caractéristiques combinées. De plus, en dimension 2, l'optimisation est peu coûteuse car le calcul est direct. En

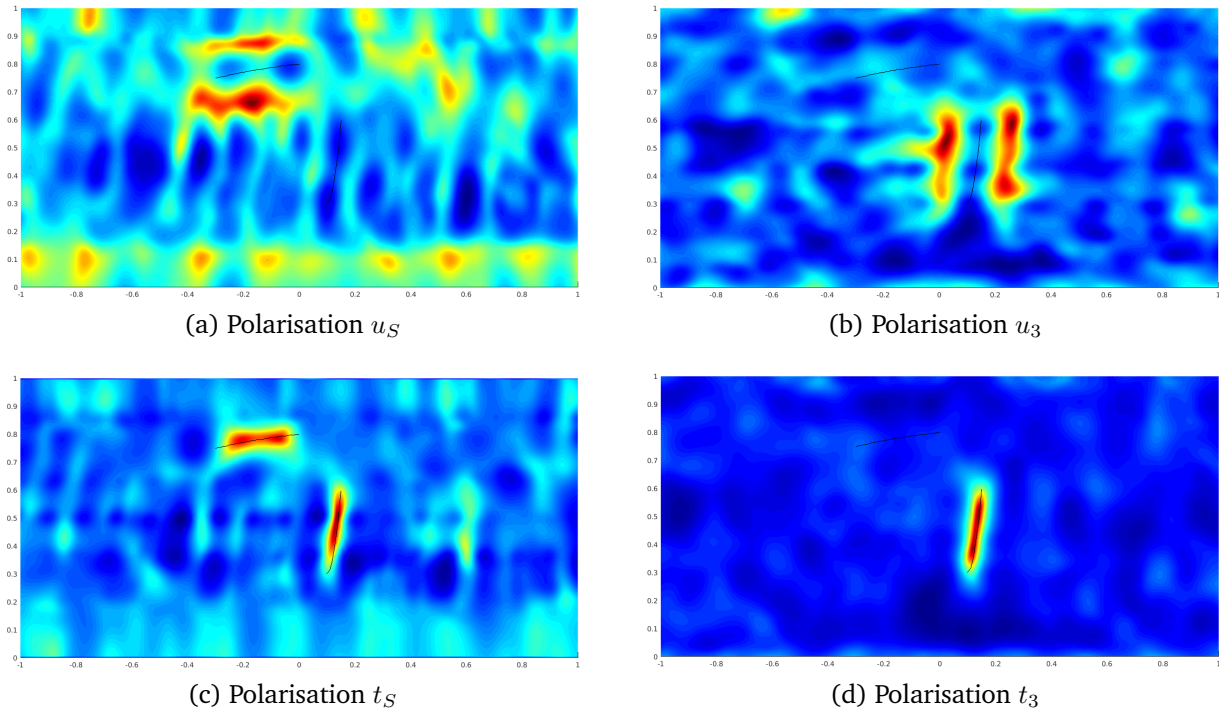


FIGURE 4.10 – Influence de la polarisation, cas de la fissure de Neumann

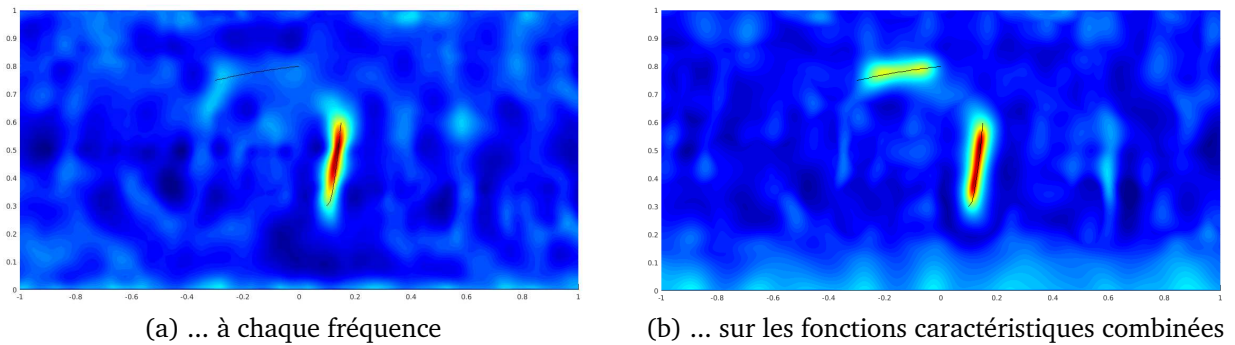


FIGURE 4.11 – Optimisation de la normale

dimension 3, nous devrions avoir recours à un algorithme tel qu'une descente de gradient pour chaque point de la grille d'échantillonnage. Il serait donc plus intéressant de ne faire cette optimisation qu'une seule fois, ce qui est le cas pour l'optimisation sur les fonctions caractéristiques combinées.

### *Influence de la durée d'acquisition*

Nous avons jusqu'à présent considéré que nos mesures étaient effectuées sur un intervalle de temps  $[0, T_{\max}]$  avec  $T_{\max}$  choisi de sorte que le champ se soit annulé en tous les points de mesure. Nous considérons figure 4.12 les mêmes mesures tronquées à un instant  $T$  plus petit, de sorte que le champ diffracté n'a pas été totalement mesuré. Nous voyons alors que l'image est dégradée, mais que nous restons capable de déterminer le défaut. Ce cas correspond à des conditions expérimentales, où nous ne pourrions mesurer notre champ que dans un intervalle de temps limité.

Dans la suite, nous considérons des simulations en régime fréquentiel pour tester certains

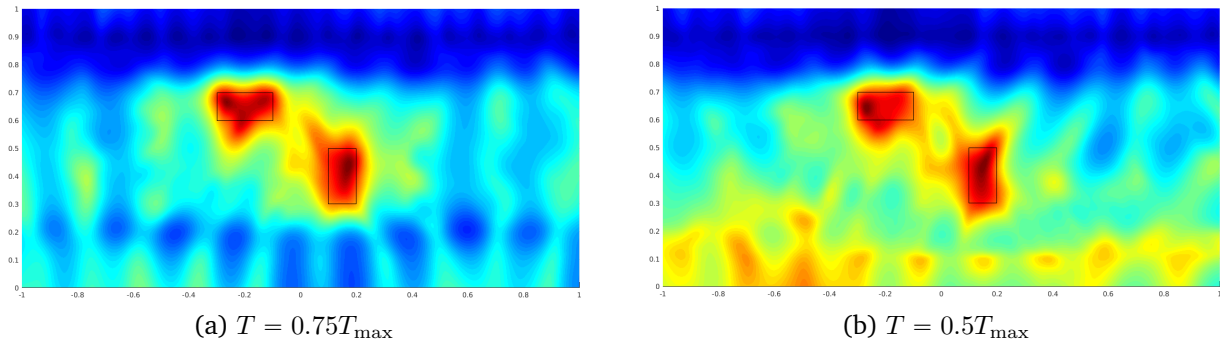


FIGURE 4.12 – Influence du temps final

paramètres. En effet, ces paramètres sont soit liés à la nature du guide ou du défaut, soit à l’acquisition des données en surface. Nous avons vu que nous obtenions des résultats similaires en régime fréquentiel et en régime multi-fréquentiel. Nous pouvons donc nous concentrer sur le régime fréquentiel, régime pour lequel la résolution du problème direct est la moins chère en ressources de calcul.

Nous voulons ainsi nous rapprocher le plus possible d’un cas réaliste avant d’appliquer notre méthode à des données expérimentales.

### Influence de l’atténuation

Un premier paramètre intéressant est l’atténuation : jusqu’à présent, nous avons considéré des matériaux parfaits dans lesquels les ondes se propagent sans atténuation, ce qui n’est bien évidemment pas réaliste. Nous considérons à présent un acier légèrement atténuant. Pour ce faire, les coefficients de Lamé du matériau  $\lambda$  et  $\mu$  ont une partie imaginaire non nulle. Introduisons pour cela le coefficient d’atténuation pour les ondes longitudinales  $\alpha_L$  et pour les ondes transversales  $\alpha_T$ , définis de la façon suivante dans l’espace libre : soit  $A_L$  (respectivement  $A_T$ ) l’amplitude d’une onde longitudinale (respectivement transversale) se propageant d’un plan d’abscisse  $x_1$  à un plan d’abscisse  $x_2$ . Le coefficient d’atténuation est alors tel que

$$\frac{A_{L/T}(x_2)}{A_{L/T}(x_1)} = e^{-\alpha_{L/T}(x_2-x_1)}.$$

Nous avons considéré dans nos simulations  $\alpha_L = \alpha_T = 10^{-3}$ , et nous avons calculé les coefficients de Lamé correspondants [12, 13] pour prendre en compte cette atténuation dans le calcul des modes, qui seront calculés comme précédemment. Toutefois, il n’existe plus de modes propagatifs au sens propre : tous les nombres d’onde  $\beta_n$  possèdent une partie imaginaire non-nulle. Nous considérons donc des “pseudo” modes propagatifs, qui sont les modes qui seraient propagatifs en l’absence d’atténuation. Dans notre cas, la partie imaginaire de  $\lambda$  et  $\mu$  ayant été prise petite devant leur partie réelle, les modes “pseudo” propagatifs possèdent aussi une partie imaginaire faible devant leur partie réelle. Nous avons ensuite réalisé figure 4.13 l’imagerie pour des points de mesure avec  $R = 1$  et  $R = 2$ , les autres paramètres étant fixes avec  $P = 20$  et  $M = 3P$ . Les obstacles sont deux disques, le premier centré en  $(-0.2, 0.7)$  de rayon 0.05 et le second centré en  $(0.3, 0.5)$ , de rayon 0.07. Nous voyons tout d’abord que l’imagerie est possible et qu’elle ne semble pas être influencée par l’atténuation. Notons toutefois que ces valeurs d’atténuation et de distance des points de mesure ont été choisis arbitrairement. Ces images montrent simplement que l’imagerie est théoriquement

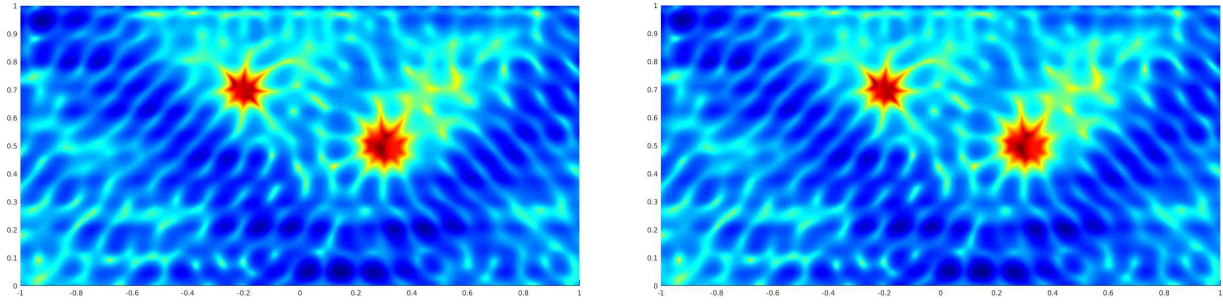


FIGURE 4.13 – Influence de l’atténuation : mesures effectuées pour  $R = 1$  (gauche) et  $R = 2$  (droite)

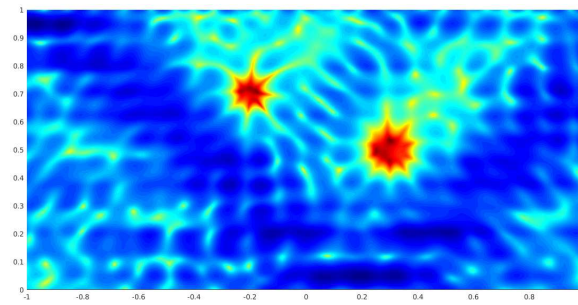


FIGURE 4.14 – Atténuation non prise en compte lors de l’imagerie

possible en présence d’atténuation. Par ailleurs, nous n’avons pas bruité nos mesures. Nous nous attendons donc à une dégradation liée au Ratio de Signal sur Bruit (RSB) dans des cas plus réalistes.

Il est aussi intéressant de considérer le cas où l’on ignore l’atténuation lors de la phase d’imagerie : en effet, il est difficile de quantifier l’atténuation des ondes dans des matériaux tels que l’acier ou l’aluminium puisque celle-ci est très faible. Nous sommes alors tentés d’appliquer la méthode d’imagerie en utilisant des modes calculés pour un guide parfait, ne présentant pas d’atténuation. C’est ce que nous avons fait figure 4.14. Nous voyons que l’image reste de bonne qualité.

### *Élimination d’une composante modale*

Enfin, nous avons mentionné dans la section 4.5 que certains modes présentaient des nombres d’onde proches ou égaux dans le cas de l’élasticité, ce qui se traduit par une dégradation du conditionnement voir une perte d’inversibilité des matrices d’émission  $E^\pm$  et de réception  $R^\pm$  et donc par l’inapplicabilité de notre méthode. Nous allons montrer ici que, dans le cas où deux nombres d’onde sont très proches, nous pouvons ne considérer qu’un des deux modes dans les systèmes (4.28), (4.29) et (4.46).

Nous avons pour cela considéré le même cas que précédemment, à savoir deux défauts circulaires (voir figure 4.15), avec  $P = 28$ . Cela implique que les deux premiers modes ont des nombres d’onde très proches (la différence relative est inférieure à  $10^{-3}\%$ ), d’où un mauvais conditionnement des matrices d’émission  $E^\pm$  et de réception  $R^\pm$ . Nous voyons dans la figure 4.15 que l’élimination d’un des deux modes améliore légèrement l’image. Toutefois, cette amélioration est minime et il serait plus intéressant d’étudier l’élimination sur un guide d’ondes 3D dont la section possède des symétries par rotation (section carré ou circulaire)

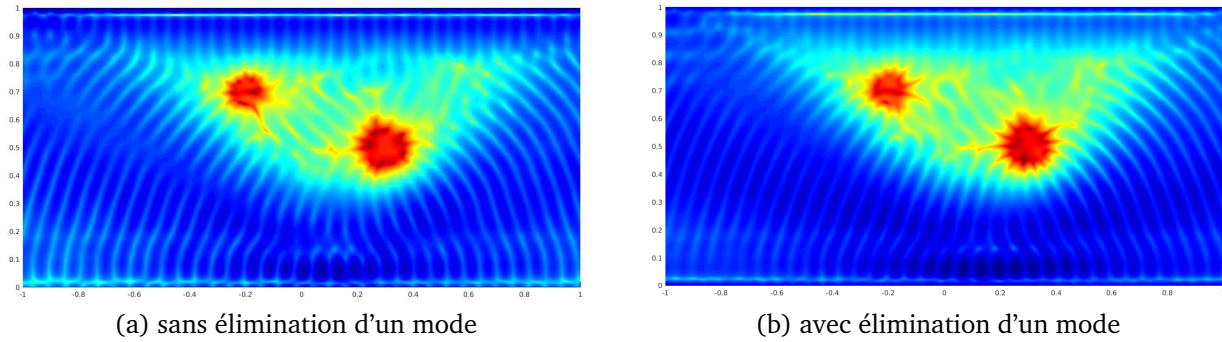


FIGURE 4.15 – Élimination d'un mode pour un nombre d'onde double

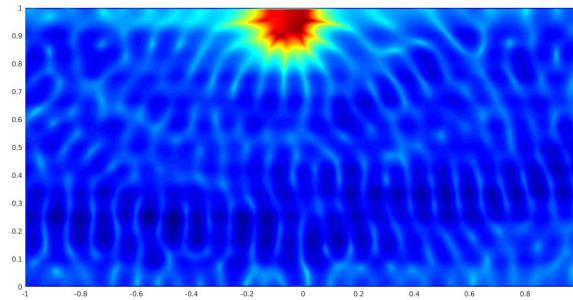


FIGURE 4.16 – Cas d'un obstacle débouchant

pour des données réelles. En effet, nous aurions des modes avec exactement le même nombre d'onde, rendant l'imagerie plus compliquée en présence de bruit. Ce type de cas n'a pas encore été étudié. Ce test montre que l'élimination d'une composante modale est envisageable si nécessaire sans dégrader l'image finale, mais nous ne pouvons affirmer actuellement que cela est utile en pratique.

### *Autres types de défauts*

Nous présentons ici quelques tests numériques supplémentaires. En section 1.3, nous avons introduit le cas d'un obstacle au bord du guide dans le cas de l'acoustique. Nous avons donc simulé l'analogie pour le guide d'ondes élastiques figure 4.16. Il s'agit d'un défaut carré de type Neumann, de côté 0.1. Les paramètres sont  $P = 20$  et  $M = 6P$ .

Nous avons ensuite voulu tester notre méthode dans le cas d'un défaut de collage, défaut intéressant en pratique car difficile à détecter. Pour cela, nous avons considéré une structure

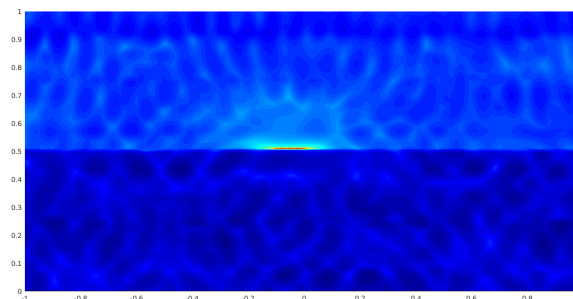


FIGURE 4.17 – Fissure à l'interface entre deux matériaux

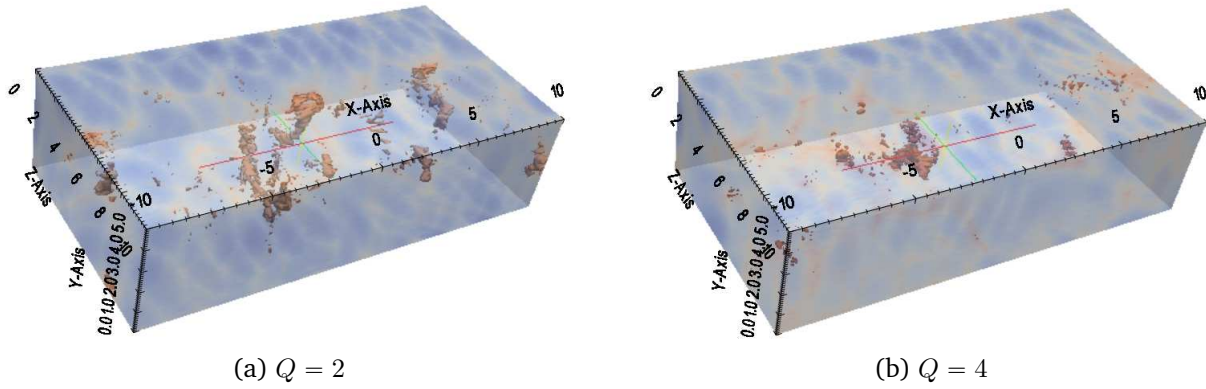


FIGURE 4.18 – Imagerie d'un guide de section rectangulaire

composée de trois couches, respectivement d'acier, d'époxy et d'acier, la couche d'époxy étant fine devant les deux autres : les épaisseurs sont respectivement 0.49, 0.02 et 0.49. Par ailleurs, nous avons considéré l'acier comme étant non atténuant et l'époxy présente une atténuation de 0.006 pour les ondes transverses et de 0.013 pour les ondes longitudinales. Pour modéliser le défaut de collage, nous avons en première approximation introduit une fissure de type Dirichlet de largeur 0.1 à l'interface supérieure (voir figure 4.17). Cet essai montre que la méthode fonctionne pour des structures plus complexes qu'un guide composé d'un unique matériau isotrope. Un travail supplémentaire serait nécessaire pour identifier un réel défaut de collage.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux guides en dimension 3. Nous avons considéré un guide en acier de section  $[0; 5] \times [0; 10]$  dans lequel se trouve un défaut parallélépipédique de type Neumann (voir figure 4.18). Plus précisément, le défaut occupe le domaine

$$[-1; -0.5] \times [1.5; 2.5] \times [3; 3.5].$$

À la fréquence utilisée, nous avons  $P = 23$ . Les paramètres sont  $M = 12P$  et  $Q = 2$  pour la première image,  $Q = 4$  pour la seconde, avec

$$x_S^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_S^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_S^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_S^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Pour que les images soient lisibles, nous avons seuillé les fonctions caractéristiques à un niveau arbitraire. Nous voyons ainsi que dans le cas où  $Q = 2$  le défaut n'est pas retrouvé alors que dans le cas où  $Q = 4$  nous le voyons apparaître. Toutefois, les images sont de moins bonne qualité qu'en dimension 2, et ce malgré le grand nombre de points considéré, soit  $(2MQ)^2$ . Nous pensons que cela provient de la qualité des données : nous ne pouvons en effet nous permettre d'utiliser des maillages très fins dans le cas de la dimension 3.

# CHAPITRE

## 5

# VALIDATION EXPÉRIMENTALE

## Sommaire

---

<b>5.1 Dispositif expérimental</b> . . . . .	<b>132</b>
5.1.1 Instrumentation . . . . .	132
5.1.2 Protocole expérimental . . . . .	134
5.1.3 Détermination des paramètres matériau . . . . .	135
5.1.4 Modélisation des fonctions de source et de mesure . . . . .	135
5.1.5 Détermination des fréquences d'intérêt . . . . .	136
<b>5.2 Résultats expérimentaux</b> . . . . .	<b>137</b>
5.2.1 Résultat préliminaire : obtention des courbes de dispersion . . . . .	137
5.2.2 Imagerie d'un défaut calibré . . . . .	140
5.2.3 Conclusions sur les résultats expérimentaux . . . . .	147

---

Une méthode pour imager un éventuel défaut dans un guide d'ondes élastiques à partir de données surfaciques en régime temporel a été présentée dans le chapitre précédent. Nous avons notamment vu comment optimiser le nombre et la position des émetteurs et des récepteurs considérés afin d'obtenir la meilleure image possible, et présenté des résultats d'imagerie pour des données simulées. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'application de la méthode pour des données réelles, mesurées expérimentalement. Dans un premier temps nous expliquons pourquoi nous avons choisi d'éprouver la méthode sur une plaque en utilisant des multi-éléments piézoélectriques linéaires pour émettre des ondes et les mesurer, puis nous exposons le protocole expérimental ainsi que les méthodes utilisées pour déterminer les paramètres de notre expérience, à savoir les paramètres du guide d'ondes et les caractéristiques des capteurs. Nous présentons enfin des courbes de dispersion obtenues expérimentalement comme une première validation du protocole, puis surtout les images de défauts obtenues.



## 5.1 Dispositif expérimental

Notre but est d'obtenir une preuve de l'applicabilité de la méthode. Nous voulons donc dans un premier temps établir les conditions optimales pour réaliser un premier test. Il est clair que nous allons travailler avec un guide en métal (acier ou aluminium) pour limiter les phénomènes d'atténuation que nous pourrions rencontrer de manière plus prononcée dans d'autres structures comme les multi-couches. Nous avons aussi décidé de nous concentrer sur un guide en dimension 2, à savoir une plaque. Cela pose quelques difficultés techniques : pour pouvoir considérer une plaque comme un guide en dimension 2, il faut que le défaut, mais aussi la source utilisée, soient invariants selon une des directions du plan de la plaque. Nous devons donc choisir la source et les défauts à imager en conséquence.

### Remarque 5.1

*Cela revient à nous placer dans l'hypothèse de déformation plane.*

Le choix d'un guide de dimension 2 repose sur les arguments suivants : nous avons réalisé davantage d'expériences numériques dans ce cas, nous donnant une meilleure connaissance de l'influence des différents paramètres. Par ailleurs, le calcul numérique est moins coûteux dans le cas de la dimension 2. En plus, nous n'avons pas à disposition de capteur adapté pour la dimension 3 : pour que le calcul des modes ne soit pas trop coûteux, nous souhaitons travailler avec une vingtaine de modes propagatifs. Dans le cas d'un guide en dimension 3 de section raisonnable, à savoir de longueur caractéristique de l'ordre d'une dizaine de millimètres pour pouvoir y placer les capteurs, cela revient à travailler à une fréquence basse, inférieure au mégahertz. Nous ne disposons pas de capteur adapté pour une telle acquisition.

### 5.1.1 Instrumentation

Nous pouvons distinguer deux familles de capteurs, utilisables indifféremment comme source ou comme récepteur : les capteurs au contact et ceux à distance. Les capteurs à distance ont pour avantage de ne pas perturber la propagation des ondes dans le milieu. Citons les lasers qui permettent d'émettre des ondes acoustiques dans une pièce selon deux régimes [125] : le régime thermo-acoustique et le régime ablatif. Dans le cadre du CND, seul le régime thermo-acoustique est envisageable. Un interféromètre laser peut aussi être utilisé pour la mesure du déplacement. Les capteurs au contact quant à eux perturbent le champ, ce qui les rend moins attrayants de prime abord. Il s'agit principalement de capteurs piézoélectriques qui, suivant leurs dimensions par rapport à celles de la pièce, peuvent émettre et mesurer un déplacement ou une contrainte [44, 63, 123]. Par ailleurs, suivant l'orientation des cristaux du matériau piézoélectrique [122], le capteur peut être sensible aux composantes normales ou tangentielles du champ de déplacement ou de contrainte.

### Remarque 5.2

*Cette classification est simplificatrice et non-exhaustive : par exemple, nous aurions pu considérer une inspection en immersion, dans laquelle un capteur à base de piézoélectriques est utilisé pour générer des ondes dans l'eau à distance de la pièce. Cette configuration ne nous a pas semblé pertinente étant donné que nous voulons limiter au maximum l'atténuation, et donc aussi le couplage entre la pièce et le milieu extérieur (cette configuration correspondrait plutôt à celle d'un guide ouvert, non envisagé ici). Nous nous sommes concentrés sur les solutions technologiques accessibles et admissibles.*

Donnons une liste des capteurs envisageables et de leurs caractéristiques :

- Les pastilles piézoélectriques sont peu onéreuses, ce qui permet d'en utiliser un grand nombre. Les pastilles disponibles possèdent une large bande passante et sont asservies par un générateur. Nous pouvons donc choisir précisément la forme du signal temporel que nous imposons, et donc le contenu fréquentiel. Toutefois, elles ne permettent pas d'exciter les hautes fréquences (supérieures à 1MHz), ce qui est limitant pour les plaques. Par ailleurs, leur installation est longue : il faut les coller une par une sur la pièce et réaliser les branchements avec un multiplexeur. De plus, leur forme (circulaire) n'est pas adaptée pour le modèle de déformation plane. Nous pouvons montrer [44, 63] qu'elles excitent et mesurent respectivement la contrainte de cisaillement et le déplacement tangentiel.
- Le multi-élément est un capteur composé de plusieurs transducteurs piézoélectriques, généralement de surface rectangulaire. Il peut être linéaire ou matriciel. Son inconvénient est que les transducteurs le composants ont une bande passante étroite. Nous ne pouvons pas choisir librement la forme de la source en temps et le contenu fréquentiel. L'orientation du matériau piézoélectrique implique, sous certaines hypothèses simplificatrices, une excitation selon la contrainte normale et une mesure selon le déplacement normal.
- Un laser en régime thermo-acoustique permet d'imposer un déplacement. Il est aussi possible de déformer le faisceau pour obtenir une source ponctuelle ou linéique, ce qui est adapté à la modélisation 2D. Le signal produit est large bande. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'avantage de cette source est qu'elle n'est pas au contact. Nous n'avons par contre qu'un de ces capteurs à disposition dans notre département, ce qui implique de le déplacer pour atteindre les différentes position de la source.
- Un interféromètre laser permet de mesurer le déplacement sans contact. Suivant son orientation par rapport à la surface de l'objet, il mesure une combinaison linéaire des composantes de déplacement. Ainsi, si le faisceau est dirigé suivant la normale à la surface, l'interféromètre mesure le déplacement normal. Il est possible avec plusieurs interféromètres d'obtenir toutes les composantes du déplacement [125]. De même que pour la source laser, nous n'avons qu'un interféromètre à disposition dans notre département, ce qui implique de le déplacer en chaque position de mesure, et de ne mesurer que le déplacement normal.

Nous avons vu que notre méthode est applicable dans toutes les configurations : source en déplacement ou en contrainte, mesure du déplacement ou de la contrainte. Nous avons donc essayé différents capteurs pour les sources et les mesures, et il est apparu que pour réussir l'imagerie, il est primordial de connaître avec précision (erreur plus petite que la longueur d'onde) les positions relatives des sources et des mesures. Étant donné que nous travaillons à haute fréquence, le matériel asservissant le déplacement des capteurs ne permettait pas une précision suffisante. C'est pourquoi nous avons opté pour la solution minimisant les déplacements, à savoir un capteur multi-élément. En effet, chaque élément peut être utilisé simultanément comme une source et un récepteur. Chaque élément est donc utilisé successivement comme source, tous les éléments étant utilisés comme récepteurs. Par ailleurs, les éléments sont positionnés avec précision les uns par rapport aux autres. L'approximation de la dimension 2 implique que nous allons utiliser des multi-éléments linéaires, dont chaque élément est rectangulaire, le côté long mesurant quelques centimètres.

Signalons que pour que la vibration du transducteur piézoélectrique soit transmise à la pièce

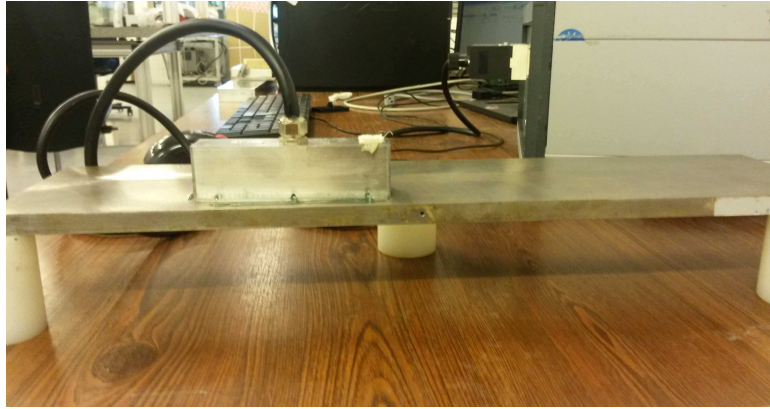


FIGURE 5.1 – Photographie du montage : mesures dans la zone du défaut circulaire de la plaque en acier

à inspecter et inversement, et donc qu'une onde puisse être transmise ou puisse être mesurée, il est nécessaire d'utiliser un couplant, en l'occurrence liquide. Nous nous sommes contentés d'un couplant usuel. Par contre, le couplant étant un milieu atténuant, pour limiter l'atténuation et les erreurs liées à la propagation des ondes dans le couplant, la quantité utilisée doit être réduite au maximum.

Pour être dans les meilleures conditions d'utilisation de notre méthode d'inversion, nous souhaitons que le spectre de la source soit tel que la majorité des fréquences excitées correspondent à un nombre de modes propagatifs compris entre 10 et 20 dans la plaque considérée. Nous cherchons par ailleurs à avoir le plus d'éléments possible sur le capteur et à ce que ceux-ci soient le moins large possible : nous avons en effet vu dans la section 2.4 que plus la source, respectivement la mesure, a un support petit en espace, meilleur est le conditionnement de la matrice de pondération en émission  $F_e$ , respectivement en réception  $F_r$ .

### 5.1.2 Protocole expérimental

Le protocole expérimental est le suivant. Nous commençons par déterminer les paramètres géométriques et matériau de la plaque considérée grâce aux méthodes décrites en 5.1.3. En fonction du matériau et de l'épaisseur de la plaque, nous choisissons parmi les capteurs multi-éléments à notre disposition ceux ayant une fréquence centrale permettant d'avoir une dizaine ou une vingtaine de modes propagatifs, et parmi ceux-ci, celui ayant le meilleur compromis nombre d'éléments - largeur des pastilles. Dans le cas d'une acquisition complète (full-scattering), nous utiliserions deux capteurs identiques, ce qui restreint les choix. Toutefois, n'ayant pas obtenu de résultats satisfaisants dans cette configuration à cause de la précision nécessaire sur le placement relatif des capteurs, il ne sera présenté ici que le cas du back-scattering, utilisant un seul capteur.

Nous réalisons ensuite deux acquisitions : une dans une zone saine de la plaque et une dans la zone présentant le défaut. Nous avons ainsi à notre disposition les champs total et incident (voir section 3.1.1), donc le champ diffracté. Nous pouvons alors appliquer notre algorithme d'inversion.

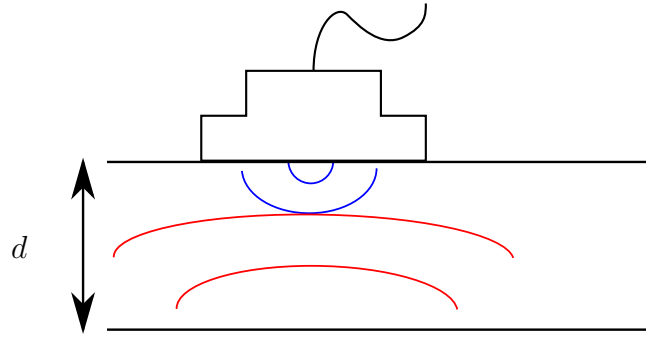


FIGURE 5.2 – Schéma du principe de la mesure de vitesse

### 5.1.3 Détermination des paramètres matériau

Pour connaître avec précision les paramètres matériau du guide considéré, nous mesurons le volume et la masse du guide pour obtenir la masse volumique  $\rho$ , puis nous mesurons les vitesses des ondes longitudinales  $v_L$  et transversales  $v_T$ . Ainsi, grâce aux formules

$$v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

nous pouvons en déduire les coefficients de Lamé.

Pour déterminer les vitesses, nous utilisons deux transducteurs (mono-éléments) piézoélectriques, le premier étant adapté à la génération des ondes longitudinales  $L$  et le second à celles transversales  $T$ . Le transducteur est utilisé à la fois en émission et en réception. L'onde émise traverse le milieu, rebondit sur l'extrémité et revient au capteur (voir figure 5.2). En mesurant le temps de vol entre les deux paquets d'ondes et connaissant la distance parcourue, nous en déduisons aisément la vitesse.

Toutefois, il est difficile de ne générer que des ondes  $T$ , ce qui implique que la mesure de  $v_T$  est moins précise que celle de  $v_L$ . C'est pourquoi la valeur de  $v_T$  a ensuite été affinée en réalisant l'imagerie avec un jeu de données pour différentes valeurs de  $v_T$  autour de la valeur mesurée. La valeur de  $v_T$  utilisée pour les autres jeux de données liée à une même plaque est alors celle ayant fourni la meilleure image, à savoir celle donnant l'image du défaut la moins bruitée.

#### Remarque 5.3

*Comme dit précédemment, la masse volumique de l'échantillon a été déterminée expérimentalement mais il semblerait que ce paramètre n'ait aucune influence sur l'imagerie : nous obtenons les mêmes images quelque soit la valeur de  $\rho$  utilisée dans l'algorithme d'inversion.*

### 5.1.4 Modélisation des fonctions de source et de mesure

Pour pouvoir calculer nos matrices d'émission  $E^\pm$  et de réception  $R^\pm$ , nous avons besoin de connaître les fonctions de source  $\chi\varphi$  et de mesure  $\psi$  (voir (4.39) et (4.47)). Comme nous l'avons déjà mentionné en section 3.3.2, nous ne pouvons les connaître qu'à un coefficient multiplicatif près. Cela n'est toutefois pas gênant grâce à la normalisation de la fonction caractéristique (voir (4.54)).

Pour ce qui est de la fonction du temps  $\chi$ , il s'agit de la convolée du signal temporel (électrique) transmis au piézoélectrique et de sa fonction propre. Ne connaissant pas précisément sa fonction propre, nous avons décidé de mesurer directement la source en temps : pour ce faire, nous avons placé le capteur sur un bloc étalon et nous avons mesuré la réponse en temps dans le milieu.

#### Remarque 5.4

*En toute rigueur, chaque élément piézoélectrique a sa fonction propre dans le capteur. Les éléments ayant des caractéristiques proches, nous avons fait l'approximation selon laquelle ils ont tous la même réponse en temps.*

La transformée de Fourier de ce signal intervient dans le calcul des matrices d'émission  $E^\pm$  : en effet, nous avons vu en section 4.6 que la source au bord du guide à une fréquence  $\omega$  donnée a pour expression  $\hat{\chi}(\omega)\varphi$ , ce qui implique que dans la section 4.4  $\varphi$  est remplacée par

$$\hat{\chi}(\omega)\varphi(x_S, x_3) = \hat{\chi}(\omega)g(x_3 - x_3^{s\pm})\xi_\sigma(x_S),$$

où  $\xi_\sigma^q$  a été remplacée par  $\xi_\sigma$  étant donné que nous sommes en dimension 2 (une seule ligne de sources).

La transformée de Fourier du signal permet en particulier de déterminer les fréquences excitées.

En ce qui concerne les fonctions en espace, les éléments fonctionnent en piston : ils excitent et mesurent respectivement la contrainte normale et le déplacement normal. Par ailleurs, la sensibilité n'est pas la même en tout point de la surface du capteur. C'est pourquoi nous le modélisons avec les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \xi_\sigma &= \begin{pmatrix} \delta_{x_1 d} \\ 0 \end{pmatrix}, & g(x_3) &= e^{-\frac{x_3^2}{\sigma^2}} \chi_{[-\ell/2, \ell/2]}(x_3), \\ \xi_u &= \begin{pmatrix} \delta_{x_1 d} \\ 0 \end{pmatrix}, & f(x_3) &= e^{-\frac{x_3^2}{\sigma^2}} \chi_{[-\ell/2, \ell/2]}(x_3), \end{aligned}$$

avec

$$\delta_{x_1 d} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = d \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $d$  est l'épaisseur de la plaque,  $\chi_{[-\ell/2, \ell/2]}$  est la fonction caractéristique du segment  $[-\ell/2, \ell/2]$  avec  $\ell$  la largeur de l'élément et  $\sigma$  est choisi empiriquement en fonction de  $\ell$ , de sorte que le champ mesuré à l'extérieur du capteur soit moins influent qu'au centre. Cette modélisation correspond à des observations expérimentales.

#### Remarque 5.5

*Notons qu'il s'agit d'une modélisation simplificatrice de l'interaction d'un capteur piézoélectrique avec un échantillon. Citons notamment [16] où la propagation des ondes est modélisée à la fois dans le capteur et dans l'échantillon.*

### 5.1.5 Détermination des fréquences d'intérêt

Pour appliquer notre méthode d'inversion, nous avons indiqué que nous voulions utiliser au moins une dizaine de modes propagatifs aux fréquences retenues. C'est pourquoi nous

n'utilisons pas toutes les fréquences du spectre temporel de la source. De même, pour que les données soient exploitables, il est utile que l'amplitude du signal soit suffisamment grande par rapport au niveau de bruit. C'est pourquoi nous pratiquons une sélection des fréquences en deux temps :

- Nous sélectionnons les fréquences du signal dont l'amplitude est supérieure à un certain seuil (25% du maximum) ;
- Nous éliminons les fréquences pour lesquelles le nombre de modes est trop petit.

Pour la seconde étape, il est coûteux en terme de temps de calcul de calculer les modes à chaque fréquence pour les trier. C'est pourquoi nous déterminons a priori les fréquences pour lesquelles le nombre de modes propagatifs augmente d'une unité grâce à SAFE (voir section 4.6.2), en cherchant les fréquences de transition pour lesquelles il existe un mode à nombre d'onde nul. Nous résolvons donc le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_0 \sigma_0(\mathbf{u}) - \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \sigma_0(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \partial \Sigma, \end{cases} \quad (5.1)$$

où l'indice 0 signifie que les dérivées par rapport à la variable  $x_3$  dans (5.1) sont nulles (multiplication par  $i\beta$  avec  $\beta = 0$ ).

Nous pouvons alors déterminer à partir de quelle fréquence il existe suffisamment de modes propagatifs dans le guide considéré pour effectuer l'imagerie.

### Remarque 5.6

*Il est à noter que la résolution du problème 5.1 fournit les fréquences présentant un mode à nombre d'onde nul pour les modes de Lamb mais aussi pour les modes SH. Il faut donc tenir compte de ces derniers pour déterminer la première fréquence intéressante, sous peine de considérer un certain nombre de fréquences trop basses et donc d'augmenter inutilement le temps de calcul.*

## 5.2 Résultats expérimentaux

### 5.2.1 Résultat préliminaire : obtention des courbes de dispersion

Une première étape avant de tenter d'imager un défaut à partir de données expérimentales est de vérifier que notre protocole est pertinent, c'est-à-dire que le modèle est suffisamment proche de la réalité et que les données sont exploitables. Pour ce faire, nous avons utilisé un algorithme classique pour obtenir les courbes de dispersion du guide considéré. Cet algorithme est peu sensible au bruit de mesure [117], il est donc impératif que nos données nous permettent de retrouver les courbes de dispersion avant de tenter d'imager un défaut.

L'algorithme, qui repose sur une double transformée de Fourier discrète, est appelé bi-FFT [1]. Son principe est le suivant : soit  $\mathbf{v}$  le champ solution de

$$\begin{cases} \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{v} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{v}) = 0 & \text{dans } W \times \mathbb{R}_+, \\ \sigma(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\varphi} \chi & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{v}(\cdot, 0) = 0 & \text{sur } W, \\ \partial_t \mathbf{v}(\cdot, 0) = 0 & \text{sur } W, \end{cases}$$

avec  $\varphi$  et  $\chi$  des fonctions respectivement de l'espace et du temps, supposées à support compact.

Nous pouvons écrire le champ  $v$  comme une combinaison de modes :

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(\omega) e^{i(\beta_n(\omega)x_3 - \omega t)} \mathbf{u}_n(x_S) d\omega,$$

où  $A_n$  est l'amplitude associée à chaque mode  $\mathbf{u}_n$  ( $A_n$  et  $\mathbf{u}_n$  dépendent de la fréquence). Nous supposons par ailleurs que pour tout  $n$ ,  $A_n \in L^2(\mathbb{R})$ , ce qui revient à avoir un signal d'énergie finie.

Commençons par appliquer une transformée de Fourier selon la variable de temps. Formellement,

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(\omega) e^{i(\beta_n(\omega)x_3 - \omega t)} \mathbf{u}_n(x_S) d\omega e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(\omega) e^{i\beta_n(\omega)x_3} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega t - \omega t)} dt \mathbf{u}_n(x_S) d\omega \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(\omega) e^{i\beta_n(\omega)x_3} \mathbf{u}_n(x_S). \end{aligned}$$

En appliquant une deuxième transformée de Fourier selon  $x_3$ , il vient

$$\begin{aligned} \hat{\hat{v}}(x_S, k_3, \omega) &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(\omega) e^{i\beta_n(\omega)x_3} \mathbf{u}_n(x_S) e^{-ik_3 x_3} dx_3 \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(\omega) \int_{\mathbb{R}} e^{i(\beta_n(\omega)x_3 - k_3 x_3)} dx_3 \mathbf{u}_n(x_S) \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n(\omega) \mathbf{u}_n(x_S) \delta_{\beta_n(\omega)}(k_3). \end{aligned}$$

Nous voyons donc que dans le plan  $(\omega, k_3)$  les seuls points  $(\omega, \beta)$  pour lesquels  $\hat{\hat{v}}$  est différente de 0 sont ceux pour lesquels il existe un mode de nombre d'onde  $\beta$  à la fréquence  $\omega$ .

### Remarque 5.7

*Insistons sur le fait que la réciproque est fautive, à savoir que la nullité de  $\hat{\hat{v}}$  pour un couple  $(\omega, \beta)$  n'implique pas qu'il n'existe pas de mode en ce point. Pour le voir, il suffit de se placer à une fréquence en dehors du spectre de la source  $\chi$ . Des modes existeront à cette fréquence mais l'amplitude de  $\hat{\hat{v}}$  pour cette fréquence  $\omega$  est nulle, ce qui implique que pour tout  $\beta$ , l'amplitude en  $(\omega, \beta)$  sera nulle (au bruit près). La bi-FFT nous permet donc de visualiser les modes de la plaque mais aussi de connaître quels modes sont excités par notre source.*

Considérons à présent des mesures ponctuelles. Pour cela, nous supposons que le spectre de  $\chi$  (et donc de  $v$ ) est compris dans l'intervalle  $(-\omega_M, \omega_M)$ . Nos mesures en temps sont alors effectuées aux points  $k\Delta t$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  et

$$\Delta t < \frac{\pi}{\omega_M}$$

d'après le critère de Shannon [124]. Les mesures en espaces sont réalisées aux points  $(x_S^0, l\Delta x_3)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , avec  $x_S^0 \in \partial\Sigma$  et  $\Delta x_3$  vérifiant lui aussi le critère de Shannon, mais en espace :

$$\frac{\pi}{\Delta x} > \max_{\omega \in [-\omega_M, \omega_M]} \max_{n=0, \dots, P(\omega)-1} \beta_n(\omega),$$

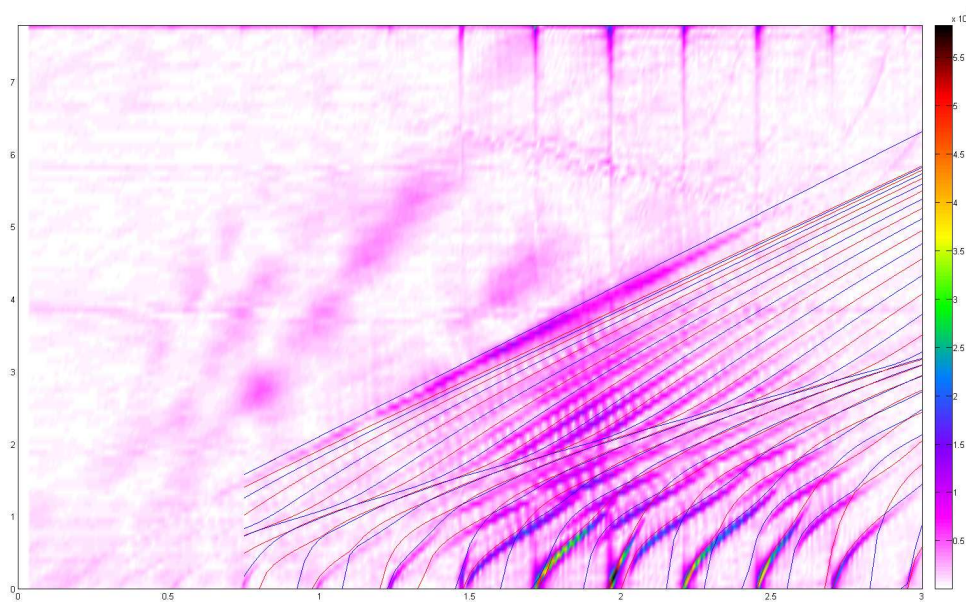


FIGURE 5.3 – Courbes de dispersion en nombre d’onde de la plaque en acier

où  $P(\omega)$  désigne le nombre de modes propagatifs à la fréquence  $\omega$ . Sous ces conditions, la transformée de Fourier du signal discret est égale à celle du signal continu à un coefficient multiplicatif près [124].

Nous pouvons donc, en appliquant une double transformée de Fourier discrète à des données convenablement échantillonnées en temps et en espace, obtenir les courbes de dispersion de notre milieu. Nous avons représenté figure 5.3 les courbes de dispersion obtenues expérimentalement (niveau de couleur) et celles obtenues grâce à SAFE en utilisant les paramètres matériau mesurés (lignes bleues et rouges, correspondant respectivement aux modes de Lamb symétriques et antisymétriques). Plus précisément, il s’agit d’une plaque d’acier, d’épaisseur  $d = 12$  mm et de paramètres

$$v_L = 5897 \text{ m.s}^{-1}, \quad v_T = 3225 \text{ m.s}^{-1}, \quad \rho = 7926 \text{ kg.m}^{-3}.$$

Nous constatons un accord relativement bon entre les deux méthodes, ce qui nous permet d’une part de valider les paramètres matériau obtenus et d’autre part d’estimer que les données sont d’assez bonne qualité en vue de l’inversion.

Notons toutefois l’apparition de perturbations liées au capteur : nous observons dans la moitié supérieure de la figure 5.3 des lignes diagonales ne correspondant à aucun mode de la plaque. Il s’agit de modes liés à la propagation des ondes dans le couplant. Nous voyons donc d’une part que l’utilisation d’un capteur au contact n’est pas sans conséquence et d’autre part qu’une couche trop importante de couplant a été utilisée dans cette acquisition.

### Remarque 5.8

*Les courbes de dispersion obtenues avec la bi-FFT ne sont pas très précises. Cela vient d’une part du bruit de nos mesures mais aussi de la discrétisation en espace : nous utilisons 100 points avec un pas de 0.8 mm. L’écart entre les courbes de dispersion obtenues avec SAFE et celles obtenues avec la bi-FFT est de l’ordre de la graduation induite par la finesse des mesures en terme de nombre d’onde (ordonnée des courbes de dispersion), soit  $2\pi/(99 * 0.8) \sim 0.08$ . Si nous voulions déterminer plus précisément nos paramètres matériau, nous ferions une acquisition avec une*



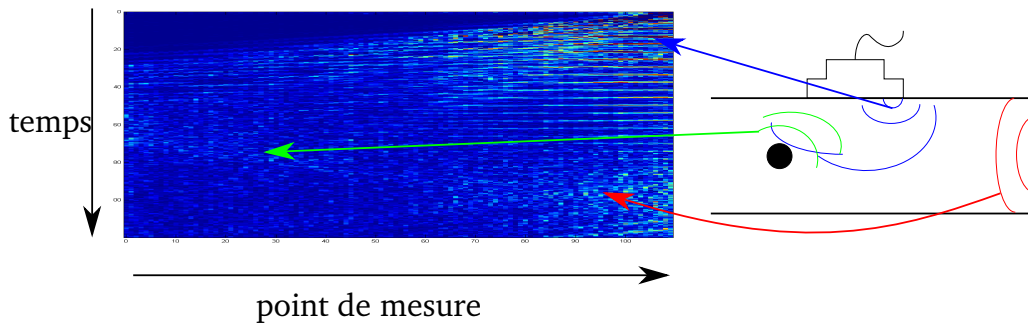


FIGURE 5.4 – Signal mesuré présentant une réflexion en bout de plaque

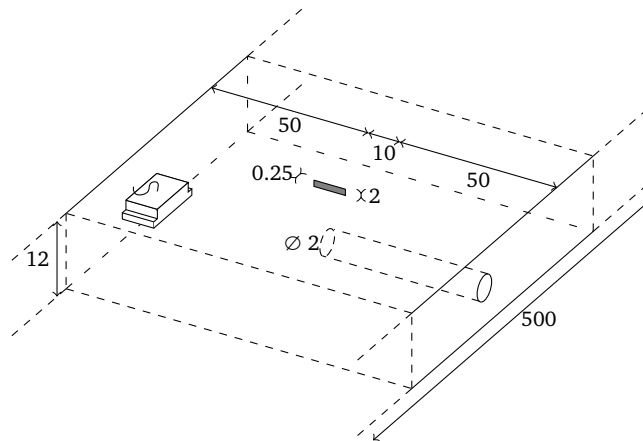


FIGURE 5.5 – Schéma de la plaque en acier

*discrétisation plus fine en espace pour obtenir plus précisément les courbes de dispersion avec la bi-FFT.*

## 5.2.2 Imagerie d'un défaut calibré

### *Cas de la plaque en acier*

Reprenons la plaque en acier précédente. Il s'agit d'une cale de  $500 \times 110 \times 12 \text{ mm}^3$  décomposée en trois zones selon sa largeur (voir schéma 5.5) : une première zone large de 50 mm sans défaut, une deuxième large de 10 mm présentant une entaille en surface de largeur 0.25 mm et de profondeur 2 mm, et une dernière de 50 mm présentant un trou de génératrice de diamètre 2 mm. À l'aide de notre algorithme d'inversion en dimension 2, ces défauts devraient donc être visibles sous la forme respectivement d'un rectangle débouchant de 0.25 sur 2 mm et d'un disque de diamètre 2 mm centré dans la section du guide.

Étant donnée l'épaisseur de la plaque, nous avons choisi un multi-élément de fréquence centrale 2 MHz, ce qui correspond à une vingtaine de modes aux fréquences sollicitées. Ce capteur possède 128 éléments de longueur 18 mm et de largeur 0.55 mm. Par ailleurs, il existe un espace inter-éléments de 0.25 mm, ce qui implique que l'espacement intervenant dans les matrices d'émission et de réception  $E^\pm$  et  $R^\pm$  (voir section 4.4, équation (4.45)) est de  $\delta = 0.8 \text{ mm}$ .

Nous avons cherché à imager les deux défauts, d'une part parce qu'ils présentent des ca-

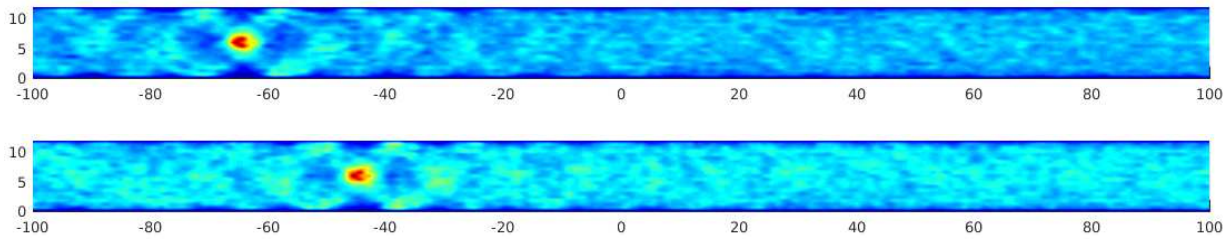


FIGURE 5.6 – Identification d'un trou circulaire de diamètre 2 mm pour deux positions du capteur proche du défaut

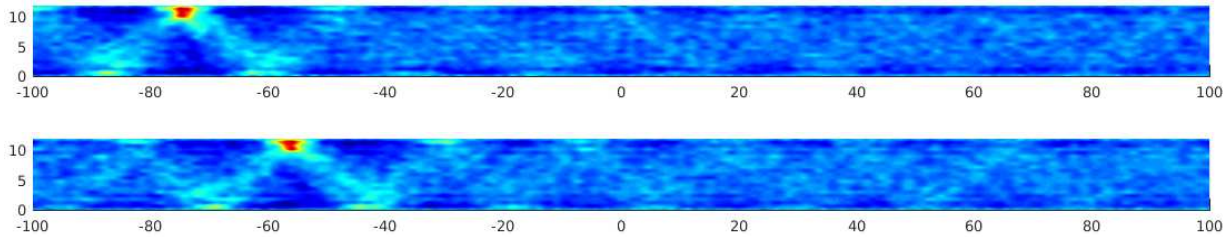


FIGURE 5.7 – Identification d'une rainure pour deux positions du capteur proche du défaut

ractéristiques différentes (forme, débouchant ou non) et d'autre part parce que le trou de génératrice satisfait notre hypothèse d'invariance dans la largeur (déformation plane) alors que la rainure en est plus éloignée, étant donné qu'elle est moins large que le capteur.

Par ailleurs, cette plaque ne vérifie pas la propriété essentielle d'un guide d'ondes en dimension 2, soit une longueur infinie dans une direction. Elle est même particulièrement courte (270 mm au maximum entre un défaut et le bord de plaque dans le sens de la longueur), ce qui implique que nos mesures seront perturbées par des réflexions en bout de plaque. Nous avons représenté figure 5.4 une acquisition pour un élément émetteur particulier. Nous distinguons trois ondes distinctes, que nous pouvons identifier grâce à leur direction et à leur temps d'arrivée au capteur : l'onde émise par le capteur (flèche bleue), l'onde réfléchi par le défaut (flèche verte) et celle réfléchi par le bord de plaque (flèche rouge). Nous voyons que cette dernière onde ne pourra pas être séparée de l'écho du défaut.

Nous avons cependant tenté l'expérience dans ces conditions. L'acquisition a été réalisée avec une fréquence d'échantillonnage (en temps) de 10 MHz. Le temps d'acquisition varie entre 80  $\mu$ s et 220  $\mu$ s pour s'adapter à la distance entre le défaut et le capteur. Dans les images qui suivent, le capteur est toujours placé à la limite gauche de l'image. Ainsi, entre la première et la seconde image figures 5.6 et 5.7 par exemple, le capteur a été décalé vers la gauche (éloigné du défaut), ce qui implique un décalage du défaut vers la droite de l'image, le référentiel étant celui du capteur. Par ailleurs, nous avons remarqué qu'à haute fréquence, lorsque les deux premiers modes ont des nombres d'onde très proches, le fait de ne considérer qu'un des deux dans la décomposition modale peut améliorer la qualité de l'image. Plus précisément, nous avons imposé que si

$$\left| \frac{\beta_0 - \beta_1}{\beta_0} \right| < 10^{-5}, \quad (5.2)$$

alors seul le premier mode est pris en compte dans l'algorithme, le deuxième étant éliminé.

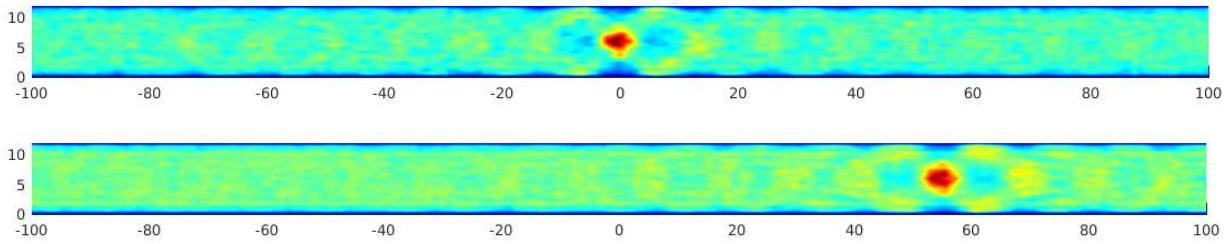


FIGURE 5.8 – Identification d'un trou circulaire de diamètre 2 mm pour deux positions du capteur loin du défaut

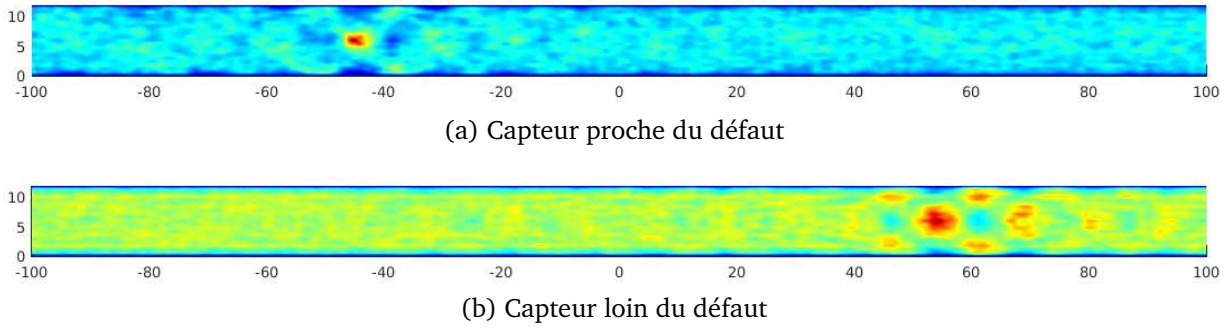


FIGURE 5.9 – Identification d'un trou circulaire de diamètre 2 mm avec  $v_T$  non optimisé

### Capteur proche du défaut

Pour limiter les réflexions en bord de plaque, nous avons dans un premier temps placé notre capteur proche des défauts (voir figures 5.6 et 5.7). Nous obtenons alors des images de bonne qualité : les dimensions du défaut reconstruit sont bonnes selon l'axe transverse, alors que celles selon l'axe du guide le sont moins, ce qui est usuel dans la configuration de back-scattering. En rapprochant le capteur du bord de la plaque dans la deuxième sous-figure de 5.6 et 5.7, nous obtenons une image du défaut de même qualité. Nous voyons donc que, contrairement à ce que nous craignons, les réflexions en bout de plaque ne semblent pas gêner l'imagerie. Nous obtenons même une image du défaut d'une qualité proche de ce que nous obtenions avec des données simulées, voir légèrement meilleure. Cela vient de la richesse du signal utilisé : beaucoup plus de fréquences (de l'ordre de 200) pour des nombres de modes propagatifs allant de 12 à 25, ont été utilisées.

Notons que, pour obtenir ces images et les suivantes, nous n'avons utilisé que 70 éléments du capteur : les acquisitions ont été réalisées avec tous les éléments mais il est apparu que la qualité de l'image était meilleure pour 70 éléments. Nous l'expliquons de la façon suivante : bien que la théorie nous indique qu'une augmentation du nombre de points d'émission et de réception entraîne une moins grande sensibilité au bruit et donc une meilleure reconstruction, le capteur lui-même est source d'erreur car au contact. Ainsi, l'onde mesurée par les derniers éléments a traversé une zone plus grande du capteur que celle mesurée par les premiers éléments, ce qui implique qu'elle a été davantage modifiée par le capteur.

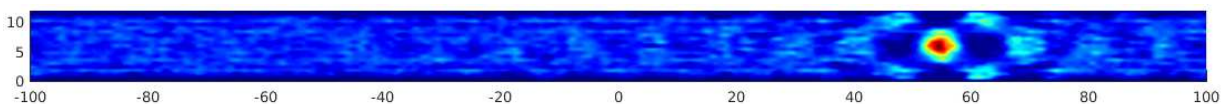


FIGURE 5.10 – Identification d'un trou circulaire sans soustraction du champ incident

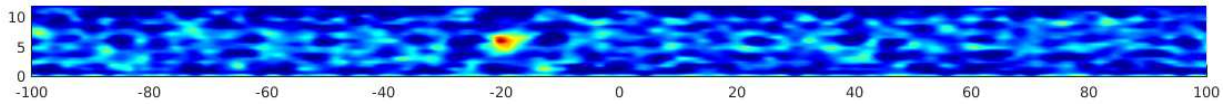


FIGURE 5.11 – Identification du trou circulaire à plus basse fréquence

### Capteur loin du défaut

Nous avons alors réalisé une nouvelle image figure 5.8 dans le cas du trou de génératrice en nous plaçant loin du défaut. Nous retrouvons toujours le défaut bien que les images soient plus bruitées. En particulier, dans la seconde image de la figure 5.8, le capteur est placé au bout de la plaque. La distance entre le capteur et le défaut à imager, et donc l'atténuation des signaux, semblent avoir une influence sur l'imagerie. Il se peut aussi que la divergence des ondes entre en ligne de compte : dans le modèle 2D, le milieu et la source sont supposés invariants (infinis) selon une direction ce qui implique que les ondes se propageant dans le milieu sont aussi invariantes selon cette direction. En réalité, la source étant d'extension finie, l'onde émise n'est pas un front plan infini et présente une légère divergence selon la direction supposée d'invariance. Lorsque l'onde se propage sur une longue distance, cette divergence modifie l'onde, notamment en l'atténuant. Le modèle 2D est donc potentiellement faux à partir d'une certaine distance de propagation, fonction de la largeur du capteur et du défaut. Toutefois, la position du défaut reste aisément retrouvée malgré une qualité d'image légèrement dégradée.

Mentionnons par ailleurs l'influence des paramètres matériau : comme mentionné précédemment, la valeur de  $v_T$  a été déterminée à la fois grâce à une mesure de temps de vol et une optimisation grossière sur la qualité de la reconstruction. Nous présentons figure 5.9 des images obtenues avec  $v_T = 3237 \text{ m.s}^{-1}$ , soit la valeur mesurée. Nous voyons que l'image est d'une qualité proche pour le capteur proche du défaut (sous-figure (a)), alors que sa qualité se dégrade de manière significative avec l'éloignement (sous-figure (b)). Il est donc crucial pour imager un défaut éloigné de déterminer avec précision les paramètres matériau.

Notons que dans le cas où les capteurs sont loin du défaut, les différentes ondes n'atteignent pas le capteur au même moment : l'onde incidente, émise à  $t = 0$ , est présente au début du signal. Le capteur étant dans ce cas proche du bout de la plaque, l'onde réfléchi en bout de plaque apparaît dans le signal pour des temps faibles. L'écho du défaut quant à lui n'apparaît que tardivement, c'est-à-dire au temps nécessaire à l'onde pour atteindre le défaut et revenir. Par ailleurs, le milieu présentant une atténuation, les différents signaux s'atténuent relativement rapidement. Dès que le capteur est suffisamment loin du défaut, l'onde incidente et l'écho du bord de plaque s'atténuent avant que l'écho du défaut ne soit mesuré. Nous pouvons donc annuler le champ incident et l'écho en bout de plaque pour ne garder que le champ diffracté. C'est ce que nous avons fait figure 5.10. Nous voyons que l'image en est légèrement améliorée. Ceci s'explique de la façon suivante : la plaque n'est pas exactement homogène, et donc la soustraction du champ incident mesuré introduit une erreur. Étant donnée l'atténuation, nous pouvons considérer que le champ incident s'annule au bout d'un certain nombre de pas de temps  $N_{\text{cut}}$ , ce qui nous permet, sous réserve que le défaut soit suffisamment loin, de l'éliminer complètement dans l'acquisition, le nombre de pas de temps  $N_{\text{cut}}$  étant déterminé empiriquement pour chaque acquisition. De ce fait, le champ diffracté par le défaut, qui n'est présent dans le signal mesuré qu'après  $N_{\text{cut}}\Delta t$ , n'est pas perturbé par cette manipulation. L'erreur ainsi introduite (présence éventuelle de champ incident résiduel pour un nombre de pas de temps supérieur à  $N_{\text{cut}}$ ) est plus faible que lors de la soustraction d'un champ incident mesuré, qui modifie le signal à tous les pas de temps.

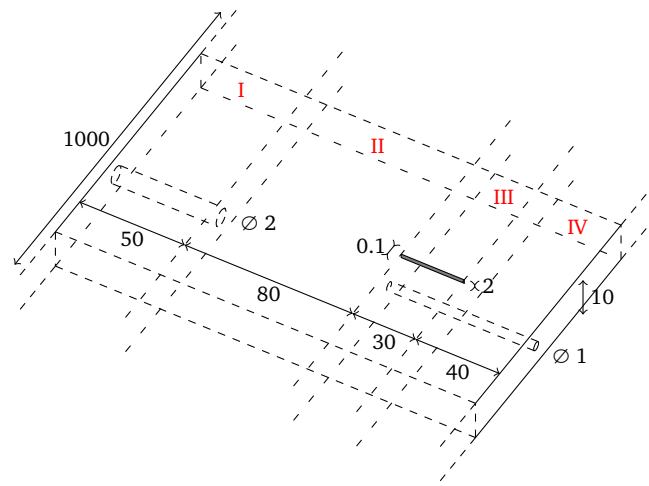


FIGURE 5.12 – Schéma de la plaque en aluminium

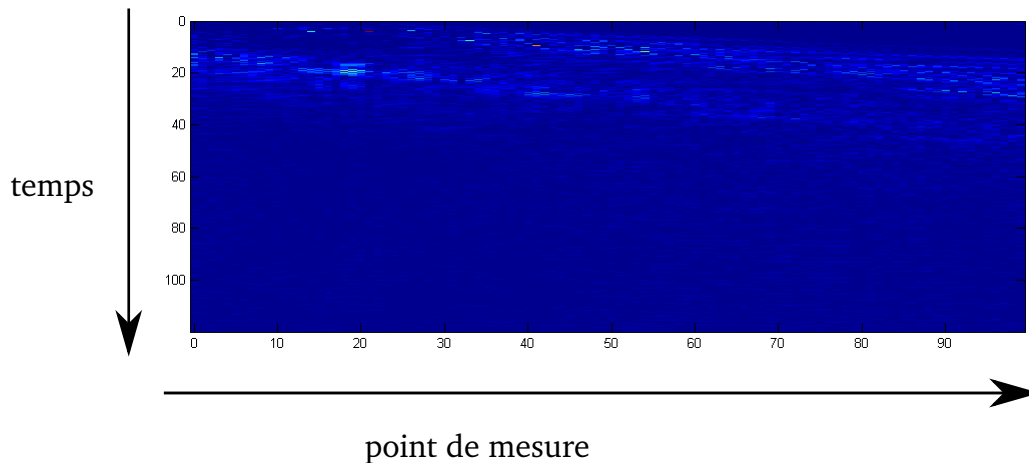


FIGURE 5.13 – Différence entre deux champs incidents mesurés par le capteur pour deux positions différentes dans la deuxième zone (pas de défaut usiné)

### Essai d'un autre capteur

Nous avons testé la méthode pour les mêmes défauts à des fréquences plus basses. Parmi les capteurs disponibles au CEA, nous avons utilisé un multi-élément de fréquence centrale 1 MHz avec 64 éléments et  $\delta = 1.4$  mm, les éléments étant de longueur 20 mm et de largeur 0.9 mm. La fréquence plus faible implique un plus petit nombre de modes propagatifs aux fréquences utilisables : il est compris entre 8 et 15 aux fréquences du spectre. De plus, la largeur des éléments dégrade l'image de deux façons : d'une part, comme nous l'avons vu dans la section 2.4, plus le support de la fonction de source est large, plus la matrice de pondération de la source sera mal conditionnée. D'autre part, l'onde traverse une grande zone couverte par le capteur pour atteindre les derniers éléments ce qui, comme pour le capteur précédent, implique une erreur. C'est ce que nous observons figure 5.11, qui est à comparer avec la première sous-figure de 5.8 (distances capteur-défaut comparables). Toutefois, l'imagerie reste possible. Notons que le champ incident n'a pas été soustrait ici non plus.

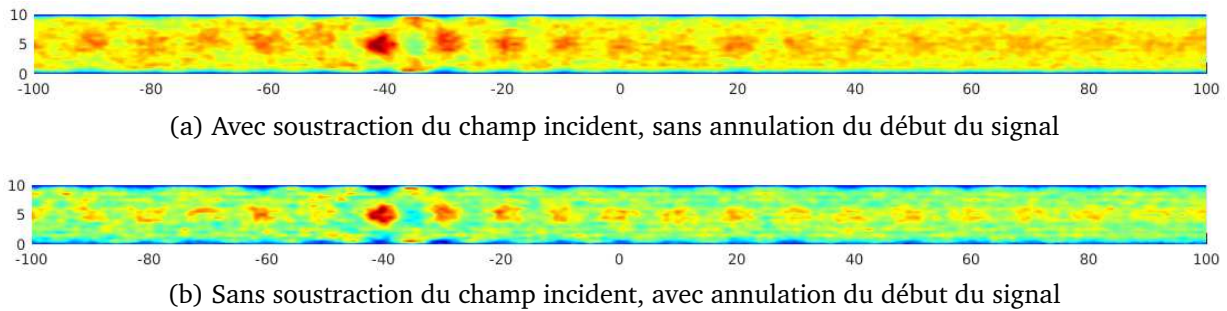


FIGURE 5.14 – Identification du trou circulaire de diamètre 2 mm dans la plaque en aluminium

### *Cas de la plaque en aluminium*

Nous nous sommes intéressés ensuite à une deuxième plaque, non plus en acier mais en aluminium (voir figure 5.12). Celle-ci a pour dimensions  $1000 \times 200 \times 10 \text{ mm}^3$  et elle est découpée en 4 zones selon la largeur :

- I. Une zone de 50 mm de large présentant un trou de génératrice de diamètre 2 mm dont le centre est à 5 mm du fond de la pièce (trou centré selon la hauteur) ;
- II. Une zone de 80 mm de large sans défaut ;
- III. Une zone de 30 mm de large présentant une entaille de largeur 0.1 mm et de profondeur 3 mm et un trou de génératrice de diamètre 1 mm, les deux défauts étant espacés de 50 mm selon la longueur ;
- IV. Une zone de 40 mm de large présentant un trou de génératrice de diamètre 1 mm dont le centre est à 4 mm du fond de la pièce (trou décentré selon la hauteur).

Par ailleurs, les paramètres matériau mesurés sont les suivants :

$$v_L = 6421 \text{ m.s}^{-1}, \quad v_T = 3155 \text{ m.s}^{-1}, \quad \rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}.$$

Nous avons cherché à imager ces différents défauts. Nous avons utilisé pour cela le premier capteur, à 128 éléments et de fréquence centrale 2 MHz. Toutefois, comme il peut être vu figures 5.14, 5.15, 5.16 et 5.18, les images obtenues présentent un bruit plus important que dans le cas de l'acier. Nous expliquons la mauvaise qualité des reconstructions par l'aspect non homogène de la plaque. Nous avons testé l'homogénéité de la manière suivante : plusieurs acquisitions ont été réalisées dans la zone saine, pour un capteur décalé selon la longueur. Si nous omettons les réflexions en bout de plaque (ayant lieu tardivement car le capteur est "loin" des bords), les signaux mesurés devraient être sensiblement les mêmes. Nous avons donc tracé la différence entre deux de ces acquisitions (voir figure 5.13) et nous voyons apparaître un écho parasite. La forme et l'amplitude de cet écho ne semblent pas cohérentes avec une variation de l'épaisseur de couplant, qui impliquerait une différence significative plus tôt dans l'acquisition. Il semblerait donc que le milieu de propagation correspondant aux deux acquisitions ne soit pas le même. Nous obtenons les mêmes résultats (non présentés ici) pour différents couples de mesures. Nous pensons que ces inhomogénéités viennent perturber la reconstruction de l'obstacle.

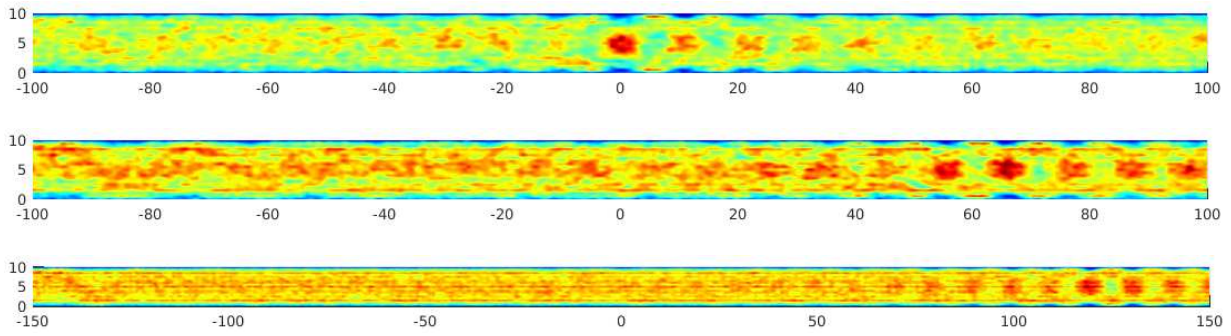


FIGURE 5.15 – Identification du trou circulaire de diamètre 2 mm pour trois positions du capteur loin du défaut dans la plaque en aluminium sans soustraction du champ incident

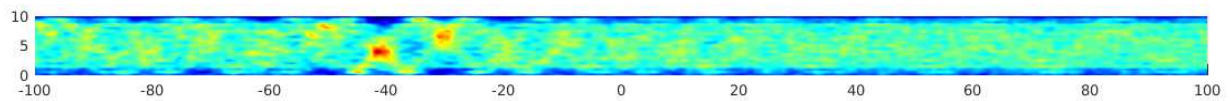


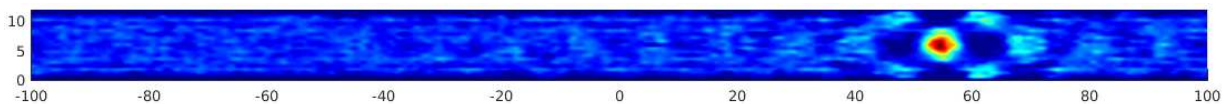
FIGURE 5.16 – Identification du trou circulaire de diamètre 1 mm dans la plaque en aluminium

### Imagerie de la première zone

Plus précisément, nous avons représenté figure 5.14 les images obtenues dans la première zone avec et sans soustraction du champ incident, pour le capteur proche du défaut. Nous voyons une nette amélioration de la qualité de l'image lorsque le champ incident est annulé. Nous réussissons de même à imager le défaut pour un capteur éloigné (voir figure 5.15). Comme dans le cas de la plaque en acier, l'image se détériore quand la distance entre le capteur et le défaut augmente. Nous réussissons à déterminer la position du défaut pour une distance capteur-défaut allant jusqu'à 16 cm et difficilement dans la dernière sous-figure, correspondant à une distance capteur-défaut de 26 cm.

### Imagerie de la quatrième zone

Nous avons ensuite imagé la quatrième zone figure 5.16. Nous arrivons à localiser le trou de 1 mm de diamètre dans ce cas, avec une reconstruction d'une qualité proche de celle obtenue dans le cas du trou de 2 mm.



(a) Trou de génératrice, capteur éloigné, avec élimination



(b) Trou de génératrice, capteur éloigné, sans élimination

FIGURE 5.17 – Identification de défauts avec et sans élimination du deuxième mode dans la plaque en acier

### *Influence de l'élimination d'un mode*

Enfin, nous présentons ici quelques exemples représentatifs de l'influence de l'élimination d'un mode lorsque la condition (5.2) est vérifiée. La figure 5.17 contient les images obtenues dans la plaque en acier avec et sans élimination du deuxième mode, pour permettre de comparer les images. Nous voyons qu'en l'absence d'élimination le bord inférieur de l'image semble identifié comme un défaut à cause de sa coloration. Le trou est cependant identifiable dans tous les cas, ce qui ne permet pas de juger de l'utilité de l'élimination.

La figure 5.18 présente le cas de la troisième et de la quatrième zone de la plaque en aluminium avec et sans élimination du deuxième mode lorsque la condition (5.2) est vérifiée. Dans le cas de la quatrième zone, le trou de 1 mm est identifiable avec et sans élimination, mais le bord de plaque peut à nouveau être identifié comme un défaut dans le cas sans élimination. Dans le cas de la troisième zone avec élimination, nous pouvons déterminer la position de l'entaille et sa profondeur mais ni sa largeur ni la position du trou de 1 mm de diamètre. Dans le cas sans élimination, les défauts sont masqués par le bruit du bord inférieur. Nous voyons donc que pour la troisième zone de la plaque en aluminium l'élimination d'un mode a une réelle influence sur la capacité de notre méthode à localiser un défaut. Notons que le trou de 1 mm n'est pas visible à cause de sa distance au capteur : celui-ci se trouvant en aval de l'entaille, à 5 cm de cette dernière, il est loin du capteur.

### **5.2.3 Conclusions sur les résultats expérimentaux**

Nous avons imagé avec succès une plaque en acier et une plaque en aluminium avec notre méthode d'inversion pour des défauts nous permettant de nous placer dans un modèle bidimensionnel. Plus précisément, nous avons imagé les défauts pour une distance capteur-défaut allant jusqu'à 60 fois la longueur d'onde des ondes transverses. Nous avons observé une détérioration de la qualité de l'image avec l'éloignement, mais la position du défaut pouvait néanmoins être déterminée. Dans le cas de la plaque d'aluminium, il semble qu'il ne soit pas envisageable d'imager un défaut plus éloigné. Nous pensons que la modeste qualité de l'image est liée à des inhomogénéités présentes dans la plaque, non prévues dans le modèle. Il nous faudrait alors soit réussir à déterminer avec précision ces inhomogénéités, soit imager une autre plaque en aluminium plus homogène pour confirmer nos hypothèses. Dans le cas de la plaque en acier, la difficulté provenait de la faible longueur de la plaque qui nous a empêché de placer le capteur très loin du défaut et a induit des réflexions parasites. À notre surprise, ces artefacts ne nous ont pas empêché de réaliser une imagerie de bonne qualité.

En conclusion, les deux plaques testées ici ne représentent pas le cas idéal d'application de la méthode : la plaque en acier est courte alors que celle en aluminium semble présenter des inhomogénéités. Nous pensons donc que des résultats de meilleure qualité auraient pu être obtenus pour une plaque idéale, à savoir longue et homogène. Cependant, les résultats présentés semblent indiquer qu'il serait possible d'utiliser notre méthode d'inversion industriellement, sans se limiter à des pièces très longues. Par ailleurs, il serait intéressant de réaliser une acquisition avec un autre type de capteur, par exemple sans contact, pour déterminer l'influence de ce dernier.



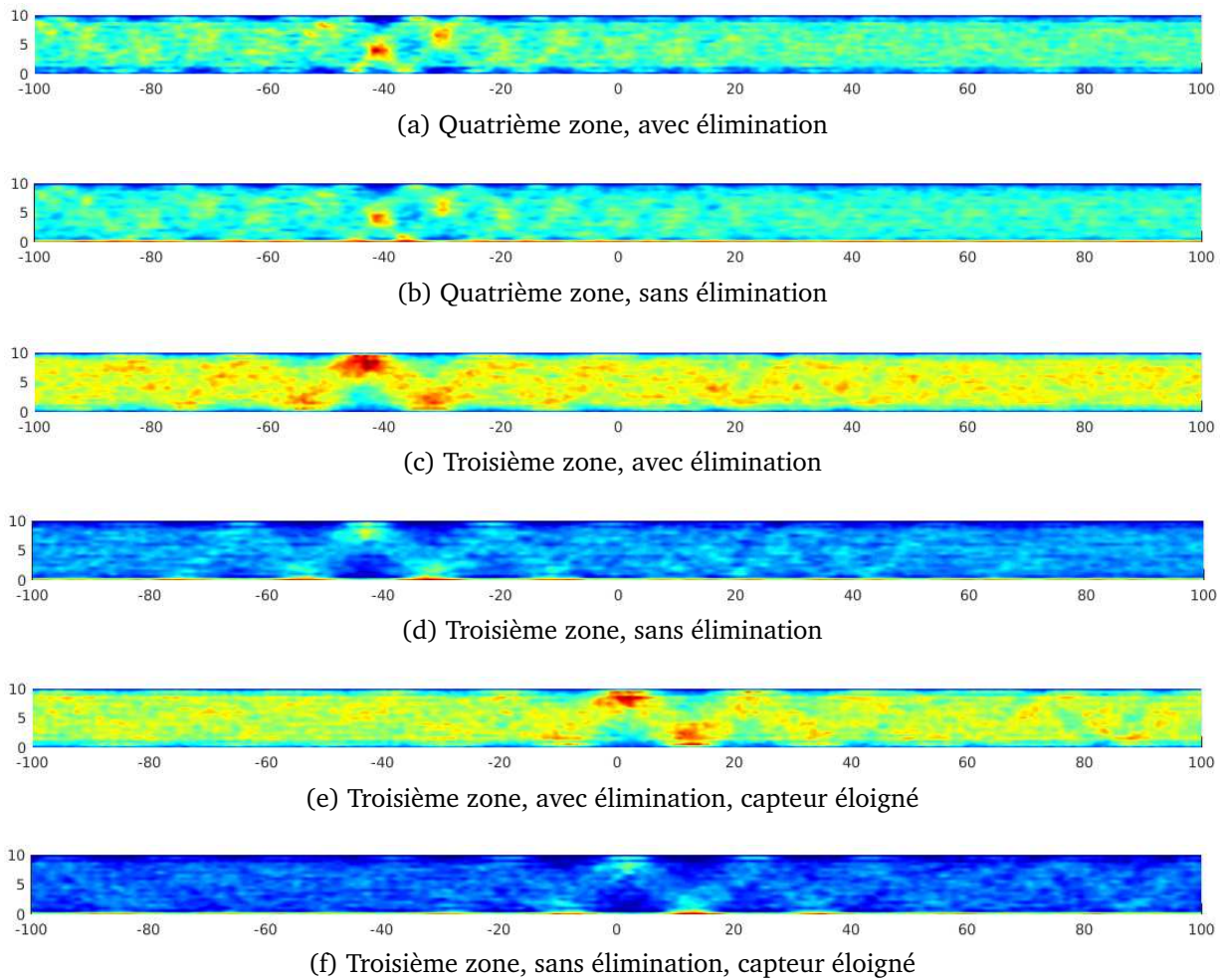


FIGURE 5.18 – Imagerie de la troisième et la quatrième zone de la plaque en aluminium sans soustraction du champ incident

## CHAPITRE

# 6

## CAS D'UNE SEULE SOLLICITATION : L'APPROCHE "EXTÉRIEURE"

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>150</b>
<b>6.2</b>	<b>The abstract framework</b>	<b>152</b>
6.2.1	A general ill-posed problem	152
6.2.2	A mixed formulation of Tikhonov regularization	153
<b>6.3</b>	<b>Two examples</b>	<b>155</b>
6.3.1	The Cauchy problem for the Laplace equation	155
6.3.2	The backward heat equation	157
<b>6.4</b>	<b>An inverse obstacle problem in an acoustic waveguide</b>	<b>159</b>
6.4.1	Introduction	159
6.4.2	Application of the mixed Tikhonov formulation	159
6.4.3	The "exterior approach"	161
6.4.4	Some numerical experiments	162
<b>6.5</b>	<b>A relaxed mixed formulation of Tikhonov regularization</b>	<b>165</b>
6.5.1	Back to the abstract case	165
6.5.2	Back to the inverse obstacle problem	167
6.5.3	Some numerical experiments	168

---

Nous présentons dans ce chapitre un travail complémentaire à l'application de la Linear Sampling Method au Contrôle Non Destructif des guides d'ondes. Contrairement aux chapitres précédents où nos données étaient constituées de nombreuses mesures au bord du guide pour de nombreuses sources au bord du guide également, nous considérons ici le cas où une seule source est disponible. La matrice de mesures  $\mathcal{M}$  que nous formions à partir des données

dans les chapitres précédents se réduit alors à une seule colonne. Ainsi les données manquent pour reconstruire la matrice  $\mathcal{U}$  de LSM (ou de manière équivalente la matrice  $\mathcal{S}$  de scattering) à partir des mesures. Nous introduisons une méthode alternative pour imager le défaut dans ce cas nettement plus défavorable, appelée "approche extérieure" : itérativement, une approximation du champ total est calculée grâce à une formulation mixte de quasi-réversibilité dans un domaine présentant un défaut estimé, puis le défaut est mis à jour grâce à une méthode de lignes de niveau utilisant le champ total précédent. Cette méthode n'est pour le moment opérationnelle que dans le cas où les conditions aux limites au bord du défaut sont de type Dirichlet. De plus, nous nous sommes limités au cas du guide d'ondes acoustiques en régime fréquentiel.

La méthode de quasi-réversibilité, introduite pour la première fois dans [99], peut-être vue comme une régularisation de Tikhonov associée directement à l'opérateur différentiel du problème étudié, ici l'opérateur de Helmholtz. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle double l'ordre de l'équation initiale (quatre au lieu de deux), ce qui du point de vue des éléments finis suppose d'utiliser des éléments  $H^2$  au lieu de  $H^1$ . Sous forme mixte, la méthode de quasi-réversibilité conserve l'ordre de l'équation initiale, ce qui autorise d'utiliser des éléments  $H^1$  classiques. Deux formulations sont développées : la première impose fortement les données de Dirichlet (mesures) et faiblement celles de Neumann (sources), ce qui induit une dissymétrie entre les données. Cette formulation est donc inadaptée à la présence de bruit sur les données, et en particulier ne permet pas de fixer le paramètre de régularisation en fonction de l'amplitude du bruit. C'est pourquoi une seconde formulation est proposée, dans laquelle les deux données sont imposées faiblement. Cette méthode permet d'appliquer le principe de Morozov pour choisir le paramètre de régularisation de Tikhonov.

Concernant la méthode de ligne de niveau, nous reprenons la méthode introduite dans [27]. Cette méthode non standard ne repose pas sur la résolution d'une équation eikonale mais sur un simple problème de Poisson. Elle a déjà été utilisée dans d'autres cas tels que les ondes pour un domaine borné [28] ou l'équation de Laplace [27]. La méthode est ici appliquée à la détection d'un défaut dans un guide d'ondes acoustiques.

Ce travail est exposé dans l'article retranscrit ci-après : *A mixed formulation of the Tikhonov regularization and its application to inverse PDE problems*, L. Bourgeois & A. Recoquillay, soumis à *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2017.

---

**Abstract** : This paper is dedicated to a new way of presenting the Tikhonov regularization in the form of a mixed formulation. Such formulation is well adapted to the regularization of linear ill-posed partial differential equations because when it comes to discretization, the mixed formulation enables us to use some standard finite elements. As an application of our theory, we consider an inverse obstacle problem in an acoustic waveguide. In order to solve it we use the so-called "exterior approach", which couples the mixed formulation of Tikhonov regularization and a level set method. Some 2d numerical experiments show the feasibility of our approach.

## 6.1 Introduction

In this paper we introduce a mixed formulation of the standard well-known Tikhonov regularization in a general Hilbert setting. The terminology "mixed" refers to the introduction

of an additional unknown which transforms the initial Tikhonov regularized problem into a system of two coupled problems of two unknowns, following the ideas developed in [36] in the context of partial differential equations. The most useful application of such mixed formulation of Tikhonov regularization seems to be the numerical resolution of linear ill-posed partial differential equations, because the mixed formulation is directly in the form of a weak formulation which can be discretized with the help of classical finite elements. Our paper also offers a connection with the old concept of quasi-reversibility in the sense that our mixed formulation of Tikhonov regularization can also be seen as a mixed formulation of quasi-reversibility. The quasi-reversibility method was first introduced by R. Lattès and J.-L. Lions in [99] to regularize some linear ill-posed PDE problems and later studied and applied by M.V. Klibanov and several collaborators (see for example [96, 51]). From the numerical point of view, the main drawback of these first formulations of quasi-reversibility was the fact that the order of the regularized problem is twice the order of the initial ill-posed problem, which requires the use of cumbersome finite elements (for example Hermite finite elements instead of Lagrange ones). Our mixed formulation of quasi-reversibility allows us to use some standard Lagrange finite elements. The present paper unifies within a single abstract framework all the previous results presented in [24], [14] and [28] for the Laplace, heat and wave equations. It should be noted that a second family of mixed formulation of quasi-reversibility was introduced in [59] and generalized in [58]. Such second family will not be discussed in the present paper.

As an illustration of possible application of our mixed formulation of Tikhonov regularization to solve inverse PDE problems, we consider an inverse obstacle problem for an acoustic waveguide in the time harmonic regime. More precisely, the objective is to identify a sound soft obstacle from a single pair of Cauchy data on the boundary of the waveguide. When many pairs of Cauchy data are known, which amounts to measure the scattered field at many receivers for many point sources, then we can compute a measurement matrix. In this case an efficient sampling type method can be used, as done in [47, 32, 109, 11]. In contrast, when only a single pair of Cauchy data is given, the measurement matrix degenerates into a single column and such a sampling type method is not applicable any longer. In this paper we propose to apply an alternative iterative method called the “exterior approach”. It couples a mixed formulation of quasi-reversibility as discussed before and a level set method. Such approach was introduced first in [27] for the Laplacian and then applied in [28] for the heat equation and [26] for the Stokes system. Our inverse obstacle problem is both non-linear and ill-posed : the non-linearity stems from the fact that we handle a geometric inverse problem while the ill-posedness stems from the nature of the boundary conditions. The “exterior approach” consists in fixing separately the problems caused by the ill-posedness and the non-linearity. More precisely, for a given obstacle, the mixed formulation of quasi-reversibility enables us to update the solution while for a given solution, the level set method enables us to update the obstacle. Note that the level set method that we use does not rely on a traditional eikonal equation (see for example [38]) but on a simple Poisson equation, which enables us to base our computations of the regularized solution and of the level set function on a single finite element mesh. Let us remark that, in the present article as in [11], and contrary to [47, 32, 109], the data are supported by the boundary of the waveguide, which is realistic in the framework of Non Destructive Testing.

Our paper is organized as follows. The abstract framework of the mixed formulation of Tikhonov regularization is presented in section 2. Two examples of application of such theory are presented in section 3 : the Cauchy problem for the Laplace equation and the backward heat equation. Section 4 is dedicated to our inverse obstacle problem in an acoustic waveguide and the exterior approach to solve it. In particular, some numerical experiments are

presented. As explained at the end of section 4, in order to better take the Cauchy data into account and compute the regularization parameter, we come back in section 5 to the abstract framework in order to introduce a relaxed mixed formulation of Tikhonov regularization. Again some numerical experiments are presented in order to compare the initial and modified formulations.

## 6.2 The abstract framework

### 6.2.1 A general ill-posed problem

Let us consider three Hilbert spaces  $V$ ,  $M$  and  $H$ , equipped with the scalar products  $(\cdot, \cdot)_V$ ,  $(\cdot, \cdot)_M$  and  $(\cdot, \cdot)_H$  and corresponding norms  $\|\cdot\|_V$ ,  $\|\cdot\|_M$  and  $\|\cdot\|_H$ . Let us denote  $A : V \rightarrow H$  a continuous onto operator. For some  $f \in H$ , we consider the affine space  $V_f = \{u \in V, Au = f\}$ . The corresponding vector space is denoted  $V_0$ , equipped with the norm  $\|\cdot\|_V$ . For a continuous bilinear form  $b$  on  $V \times M$  and a linear form  $\ell$  on  $M$ , let us consider the weak formulation : find  $u \in V_f$  such that for all  $\mu \in M$ ,

$$b(u, \mu) = \ell(\mu). \quad (6.1)$$

The bilinear form  $b$  is said to satisfy the inf – sup property on  $V_0 \times M$  if

#### Assumption 6.1

There exists  $\alpha > 0$  such that

$$\inf_{\substack{u \in V_0 \\ u \neq 0}} \sup_{\substack{\mu \in M \\ \mu \neq 0}} \frac{b(u, \mu)}{\|u\|_V \|\mu\|_M} \geq \alpha.$$

The bilinear form  $b$  is said to satisfy the solvability property on  $V_0 \times M$  if

#### Assumption 6.2

For all  $\mu \in M$ ,

$$\forall u \in V_0, \quad b(u, \mu) = 0 \implies \mu = 0.$$

Lastly,  $b$  is said to satisfy the uniqueness property on  $V_0 \times M$  if

#### Assumption 6.3

For all  $u \in V_0$ ,

$$\forall \mu \in M, \quad b(u, \mu) = 0 \implies u = 0.$$

Clearly, assumption 6.1 implies assumption 6.3, the converse implication is false. Besides, it is well-known from the Brezzi-Nečas-Babuška theorem (see for example [65]) that problem (6.1) is well-posed if and only if both conditions 6.1 and 6.2 are satisfied. In what follows, it is assumed that the bilinear form  $b$  does not satisfy the inf – sup condition 6.1, which from the Brezzi-Nečas-Babuška theorem implies that the problem (6.1) for a given  $\ell$  is in general ill-posed.

### 6.2.2 A mixed formulation of Tikhonov regularization

A first regularized formulation of ill-posed problem (6.1) is the following : for  $\varepsilon > 0$ , find  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V_f \times M$  such that for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon(u_\varepsilon, v)_V + b(v, \lambda_\varepsilon) = 0 \\ b(u_\varepsilon, \mu) - (\lambda_\varepsilon, \mu)_M = \ell(\mu). \end{cases} \quad (6.2)$$

We have the following theorem.

#### Theorem 6.2.1

For any  $f \in H$  and  $\ell \in M'$ , the problem (6.2) has a unique solution. For some  $f \in H$  and  $\ell \in M'$  such that (6.1) has at least one solution, then the solution  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V_f \times M$  satisfies  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \rightarrow (u_m, 0)$  in  $V \times M$  when  $\varepsilon \rightarrow 0$ , where  $u_m$  is the unique solution to the minimization problem

$$\inf_{v \in K} \|v\|_V, \quad K := \{v \in V_f, b(v, \mu) = \ell(\mu), \forall \mu \in M\}. \quad (6.3)$$

In particular, if the uniqueness condition 6.3 is satisfied, then  $u_m = u$ , where  $u$  is the unique solution to problem (6.1).

*Proof.* Let us introduce some  $U \in V$  such that  $AU = f$ , which exists since  $A$  is onto, and let us set  $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon - U$ , so that problem (6.2) is equivalent to : find  $(\hat{u}_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V_0 \times M$  such that for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon(\hat{u}_\varepsilon, v)_V + b(v, \lambda_\varepsilon) = -\varepsilon(U, v)_V \\ b(\hat{u}_\varepsilon, \mu) - (\lambda_\varepsilon, \mu)_M = \ell(\mu) - b(U, \mu), \end{cases} \quad (6.4)$$

which is itself equivalent to : find  $(\hat{u}_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V_0 \times M$  such that for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$A_\varepsilon((\hat{u}_\varepsilon, \lambda_\varepsilon); (v, \mu)) = L_\varepsilon((v, \mu)),$$

where the bilinear form  $A_\varepsilon$  and the linear form  $L_\varepsilon$  are given on  $V_0 \times M$  by

$$A_\varepsilon((u, \lambda); (v, \mu)) = \varepsilon(u, v)_V + b(v, \lambda) - b(u, \mu) + (\lambda, \mu)_M$$

and

$$L_\varepsilon((v, \mu)) = -\varepsilon(U, v)_V - \ell(\mu) + b(U, \mu).$$

Since for  $(u, \lambda) \in V_0 \times M$ ,

$$A_\varepsilon((u, \lambda); (u, \lambda)) \geq \varepsilon \|u\|_V^2 + \|\lambda\|_M^2,$$

$A_\varepsilon$  is coercive on  $V_0 \times M$ , which implies from the Lax-Milgram lemma that the problem (6.2) is well-posed for all  $\varepsilon > 0$ .

Now let us assume that  $f \in H$  and  $\ell \in M'$  are such that (6.1) has at least one solution. In this case, the set  $K$  is a non empty, convex and closed subset of  $V$ , while the mapping  $u \mapsto \|u\|_V$  is continuous and strictly convex. Then by standard results on minimization problems, the problem (6.3) has a unique solution  $u_m$ , which in particular satisfies  $u_m \in V_f$  and

$$b(u_m, \mu) = \ell(\mu), \quad \forall \mu \in M. \quad (6.5)$$

By subtracting (6.5) to the second equation of (6.2), we obtain that for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon(u_\varepsilon, v)_V + b(v, \lambda_\varepsilon) = 0 \\ b(u_\varepsilon - u_m, \mu) - (\lambda_\varepsilon, \mu)_M = 0. \end{cases}$$

Choosing  $v = u_\varepsilon - u_m \in V_0$ ,  $\mu = \lambda_\varepsilon \in M$  and subtracting the two obtained equations we end up with

$$\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u_m)_V + \|\lambda_\varepsilon\|_M^2 = 0.$$

This in particular implies that

$$\|u_\varepsilon\|_V \leq \|u_m\|_V, \quad \|\lambda_\varepsilon\|_M \leq \sqrt{\varepsilon}\|u_m\|_V.$$

The second inequality directly implies that  $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0$  in  $M$  when  $\varepsilon \rightarrow 0$ . From the first inequality, there exists some subsequence of  $u_\varepsilon$ , still denoted  $u_\varepsilon$ , such that  $u_\varepsilon \rightharpoonup w$  in  $V$  for some  $w \in V$ . Since the set  $\{v \in V_f, \|v\|_V \leq \|u_m\|_V\}$  is convex and closed, it is weakly closed, that is  $w \in V_f$  and  $\|w\|_V \leq \|u_m\|_V$ . Moreover, by passing to the limit in the second equation of (6.2), we obtain that for all  $\mu \in M$ ,  $b(w, \mu) = \ell(\mu)$ . Since the minimization problem (6.3) has a unique solution, we conclude that  $w = u_m$ . We lastly remark that

$$\|u_\varepsilon - u_m\|_V^2 \leq -(u_m, u_\varepsilon - u_m)_V,$$

so that weak convergence in  $V$  implies strong convergence in  $V$ . By a standard argument by contradiction, all the sequence  $u_\varepsilon$  (not only a subsequence), converges to  $u_m$  in  $V$ .

Now let us show the link between our regularized formulation (6.2) and the standard well-known Tikhonov regularization. More precisely, we can interpret (6.2) as a mixed formulation, in the sense of Brezzi-Fortin [36] for instance, of the Tikhonov regularization. Indeed, by the Riesz theorem, there exists a unique continuous operator  $B : V \rightarrow M$  and a unique  $L \in M$  such that for all  $u \in V$  and all  $\mu \in M$ ,

$$(Bu, \mu)_M = b(u, \mu) \tag{6.6}$$

and

$$(L, \mu)_M = \ell(\mu). \tag{6.7}$$

Hence problem (6.1) is equivalent to find  $u \in V_f$  such that  $Bu = L$ . The Tikhonov regularization of such ill-posed problem consists in solving, for  $\varepsilon > 0$ , the well-posed minimization problem

$$\inf_{v \in V_f} (\|Bv - L\|_M^2 + \varepsilon\|v\|_V^2). \tag{6.8}$$

The following proposition specifies the relationship between problems (6.2) and (6.8) :

#### Proposition 6.4

Let us denote by  $v_\varepsilon$  the unique solution to problem (6.8) and set  $\mu_\varepsilon = Bv_\varepsilon - L$ . Then  $(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$  coincides with the unique solution  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$  to problem (6.2).

*Proof.* Let us denote  $v_\varepsilon$  the solution to problem (6.8). Such solution is characterized by  $v_\varepsilon \in V_f$  and

$$(Bv_\varepsilon - L, Bv)_M + \varepsilon(v_\varepsilon, v)_V = 0, \quad \forall v \in V_0,$$

that is by setting  $\mu_\varepsilon = Bv_\varepsilon - L \in M$ , for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon(v_\varepsilon, v)_V + (Bv, \mu_\varepsilon)_M = 0 \\ (Bv_\varepsilon, \mu)_M - (\mu_\varepsilon, \mu)_M = (L, \mu)_M, \end{cases}$$

that is  $(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon) \in V_f \times M$  solves problem (6.2) by using the definitions of  $B$  and  $L$  given by (6.6) and (6.7). We conclude that  $(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon) = (u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ , which completes the proof.

## 6.3 Two examples

In our examples, we will need the following functional spaces (see for example [106]). If  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  is a bounded Lipschitz domain and  $\Gamma$  is an open subset of  $\partial\Omega$ , we denote by  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  the set of restrictions to  $\Gamma$  of distributions in  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , while  $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  is the subspace of functions in  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  which, once extended by 0 on the complementary part of  $\partial\Omega$ , belongs to  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . We recall that  $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  is the dual space of  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Similarly, we denote by  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  the set of restrictions to  $\Gamma$  of functions in  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , while  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  is the subspace of distributions in  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  which are supported by  $\bar{\Gamma}$ . We recall that  $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  is the dual space of  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

### 6.3.1 The Cauchy problem for the Laplace equation

The Cauchy problem for the Laplace equation is a simple and well-known example of ill-posed problem. We first illustrate our approach on that example. Let us consider a bounded Lipschitz domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d > 1$ , the boundary  $\partial\Omega$  of which is partitioned into two sets  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_1$ . More precisely,  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_1$  are non empty open sets for the topology induced on  $\partial\Omega$  from the topology on  $\mathbb{R}^d$ ,  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$  and  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . The Cauchy problem consists, for some data  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , to find  $u \in H^1(\Omega)$  such that

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{on } \Gamma_0 \\ \partial_\nu u = g & \text{on } \Gamma_0, \end{cases} \quad (6.9)$$

where  $\nu$  is the outward unit normal to  $\Omega$ . The problem (6.9) is equivalent to a weak formulation of type (6.1).

#### Lemma 6.5

For  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , the function  $u \in H^1(\Omega)$  is a solution to problem (6.9) if and only if  $u|_{\Gamma_0} = f$  and for all  $\mu \in H^1(\Omega)$  with  $\mu|_{\Gamma_1} = 0$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \mu \, dx = \langle g, \mu|_{\Gamma_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}, \quad (6.10)$$

where the brackets stand for duality pairing between  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  and  $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ .

*Proof.* First, let us assume that  $u \in H^1(\Omega)$  and satisfies the weak formulation (6.10). We have  $u = f$  on  $\Gamma_0$  and by first choosing  $\mu = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , where  $\mathcal{D}(\Omega)$  denotes the space of infinitely smooth functions which are compactly supported in  $\Omega$ , we obtain  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  in the distributional sense. By using a classical Green formula, we have for all  $\mu \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \mu \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u \, \mu \, dx + \langle \partial_\nu u, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

If in addition  $\mu|_{\Gamma_1} = 0$  and using the fact that  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , we obtain that for all  $\mu \in H^1(\Omega)$  with  $\mu|_{\Gamma_1} = 0$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \mu \, dx = \langle \partial_\nu u, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)},$$

and by comparison with (6.10) we obtain that for all  $\mu \in H^1(\Omega)$  with  $\mu|_{\Gamma_1} = 0$ ,

$$\langle \partial_\nu u, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = \langle g, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)},$$

which implies that  $\partial_\nu u = g$  in  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ . We conclude that  $u$  satisfies (6.9). Conversely, we would prove the same way that if  $u \in H^1(\Omega)$  satisfies (6.9), then it satisfies (6.10).



The weak formulation (6.10) is hence a particular instance of abstract problem (6.1) with  $V = H^1(\Omega)$ ,  $H = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ ,  $M = \{\mu \in H^1(\Omega), \mu|_{\Gamma_1} = 0\}$ ,  $A : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  is the trace operator on  $\Gamma_0$  (which is onto),  $V_f = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_0} = f\}$  while for  $(u, \mu) \in V \times M$ ,

$$b(u, \mu) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \mu \, dx, \quad \ell(\mu) = \langle g, \mu|_{\Gamma_0} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}. \quad (6.11)$$

For this particular bilinear form  $b$ , only the two last conditions 6.2 and 6.3 are satisfied.

### Proposition 6.6

For the bilinear form  $b$  given by (6.11), the conditions 6.2 and 6.3 are satisfied while the condition 6.1 is not.

*Proof.* We start by condition 6.2. For  $\mu \in M = \{\mu \in H^1(\Omega), \mu|_{\Gamma_1} = 0\}$ , let us assume that for all  $u \in V_0 = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_0} = 0\}$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla \mu \cdot \nabla u \, dx = 0.$$

Choosing  $u = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , we obtain that  $\Delta \mu = 0$  in the distributional sense in  $\Omega$ . The Green formula then gives that for all  $u \in V_0$ ,

$$\langle \partial_{\nu} \mu, u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \langle \partial_{\nu} \mu, u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = 0.$$

We conclude that  $\mu \in H^1(\Omega)$  satisfies the homogeneous Cauchy problem

$$\begin{cases} \Delta \mu = 0 & \text{in } \Omega \\ \mu = 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ \partial_{\nu} \mu = 0 & \text{on } \Gamma_1, \end{cases}$$

so that  $\mu = 0$  by the Holmgren's theorem. Similarly, condition 6.3 amounts to prove that if  $u$  solves the Cauchy problem (6.9) with  $(f, g) = 0$ , then  $u = 0$ . Besides, we know that the problem (6.9) is ill-posed (see for example [15]), which by contradiction proves from the Brezzi-Nečas-Babuška theorem that the inf – sup condition 6.1 is not satisfied.

The mixed formulation (6.2) of the Tikhonov regularization can be applied, that is : for  $\varepsilon > 0$ , find  $(u_{\varepsilon}, \lambda_{\varepsilon}) \in V_f \times M$  such that for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \lambda_{\varepsilon} \, dx = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon} \cdot \nabla \mu \, dx - \int_{\Omega} \nabla \lambda_{\varepsilon} \cdot \nabla \mu \, dx = \langle g, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}. \end{cases} \quad (6.12)$$

Compared to the abstract formulation (6.2), in formulation (6.12) we have used the scalar product associated with the semi-norm in  $H^1(\Omega)$  instead of the full norm in  $H^1(\Omega)$ , which is possible thanks to Poincaré's inequality. From Theorem 6.2.1 and since condition 6.3 is satisfied, the problem (6.12) is well-posed for any Cauchy data  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  and for  $(f, g)$  such that problem (6.9) has a (unique) solution  $u$ , we have  $(u_{\varepsilon}, \lambda_{\varepsilon}) \rightarrow (u, 0)$  in  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ . A mixed formulation such as (6.12) to regularize the Cauchy problem for the Laplace equation was first introduced in [24], where the discretization with a Finite Element Method is analyzed and numerical examples are shown. Note that [39] presents, in the particular case when  $f = 0$ , an analysis of some nonconforming discretizations of a regularized formulation such as (6.12).

### 6.3.2 The backward heat equation

We consider  $\Omega$  as in the previous section and we consider the domain  $Q = \Omega \times (0, T)$  of  $\mathbb{R}^{d+1}$ , with  $T > 0$ ,  $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ ,  $S_0 = \Omega \times \{0\}$  and  $S_T = \Omega \times \{T\}$ . The backward heat equation consists, for some data  $h \in H^{-\frac{1}{2}}(S_T)$ , to find  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  such that

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{on } \Sigma \\ u = h & \text{on } S_T. \end{cases} \quad (6.13)$$

We now prove that the problem (6.13) is equivalent to a weak formulation of type (6.1).

#### Lemma 6.7

For  $h \in H^{-\frac{1}{2}}(S_T)$ , the function  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  is the solution to problem (6.13) if and only if  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  and for all  $\mu \in H^1(Q)$  with  $\mu|_{\Sigma \cup S_0} = 0$ ,

$$-\int_Q u \partial_t \mu \, dx dt + \int_Q \nabla u \cdot \nabla \mu \, dx dt = -\langle h, \mu|_{S_T} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(S_T), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_T)}. \quad (6.14)$$

*Proof.* To begin with, let us assume that  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  and satisfies the weak formulation (6.14). We have  $u = 0$  on  $\Sigma$  and by first choosing  $\mu = \varphi \in \mathcal{D}(Q)$ , we obtain  $\partial_t u - \Delta u = 0$  in  $Q$  in the distributional sense. Let us now introduce the vector field  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d+1}$  defined in  $Q$  by

$$\mathbf{u} = (\nabla u, -u) = (\partial_{x_i} u, -u), \quad i = 1, \dots, d. \quad (6.15)$$

We clearly have  $\operatorname{div}_{d+1} \mathbf{u} = \Delta u - \partial_t u = 0$  in  $Q$ , which implies that

$$\mathbf{u} \in H_{\operatorname{div}, Q} := \{\mathbf{u} \in (L^2(Q))^{d+1}, \operatorname{div}_{d+1} \mathbf{u} \in L^2(Q)\}.$$

As a consequence we have  $\mathbf{u} \cdot \nu_{d+1} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial Q)$ , where  $\nu_{d+1}$  is the unit outward normal on  $\partial Q$ . In addition, from a classical integration by parts formula, we have for all  $\mu \in H^1(Q)$ ,

$$\int_Q \mathbf{u} \cdot \nabla_{d+1} \mu \, dX = - \int_Q (\operatorname{div}_{d+1} \mathbf{u}) \mu \, dX + \langle \mathbf{u} \cdot \nu_{d+1}, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial Q), H^{\frac{1}{2}}(\partial Q)},$$

where  $\nabla_{d+1} = (\nabla, \partial_t)$  and  $X$  is the Lebesgue measure on  $Q$ . Now, for  $\mu|_{\Sigma \cup S_0} = 0$  and given that  $\operatorname{div}_{d+1} \mathbf{u} = 0$  in  $Q$ , we obtain

$$\int_Q \mathbf{u} \cdot \nabla_{d+1} \mu \, dX = \langle \mathbf{u} \cdot \nu_{d+1}, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(S_T), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_T)}. \quad (6.16)$$

Besides, the weak formulation (6.14) is equivalent to

$$\int_Q \mathbf{u} \cdot \nabla_{d+1} \mu \, dX = -\langle h, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(S_T), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_T)}, \quad \forall \mu \in H^1(Q), \quad \mu|_{\Sigma \cup S_0} = 0. \quad (6.17)$$

Comparing equations (6.16) and (6.17) we end up with  $-\mathbf{u} \cdot \nu_{d+1} = h$  in the sense of  $H^{-\frac{1}{2}}(S_T)$ , which implies that  $u = h$  on  $S_T$ , that is  $u$  solves problem (6.13). We prove similarly that if  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  solves the problem (6.13) then it satisfies  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  and the weak formulation (6.14).

The weak formulation (6.14) is again an instance of abstract problem (6.1) in the particular case when  $V = L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $H = L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ,  $M = \{\mu \in H^1(Q), \mu|_{\Sigma \cup S_0} = 0\}$ ,  $A : L^2(0, T; H^1(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$  is the trace operator on  $\Sigma$ ,  $f = 0$  so that

$$V_f = V_0 = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

while for  $(u, \mu) \in V \times M$ ,

$$b(u, \mu) = - \int_Q u \partial_t \mu \, dxdt + \int_Q \nabla u \cdot \nabla \mu \, dxdt, \quad (6.18)$$

$$\ell(\mu) = -\langle h, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(S_T), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_T)}. \quad (6.19)$$

### Proposition 6.8

For the bilinear form  $b$  given by (6.18), the conditions 6.2 and 6.3 are satisfied while the condition 6.1 is not.

*Proof.* Let us begin with condition 6.2. For  $\mu \in H^1(Q)$  with  $\mu|_{\Sigma \cup S_0} = 0$ , let us assume that for all  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,

$$- \int_Q u \partial_t \mu \, dxdt + \int_Q \nabla u \cdot \nabla \mu \, dxdt = 0.$$

We obtain that  $\mu \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  satisfies

$$\begin{cases} \partial_t \mu + \Delta \mu = 0 & \text{in } Q \\ \mu = 0 & \text{on } \Sigma \\ \mu = 0 & \text{on } S_0, \end{cases}$$

which from uniqueness in the backward heat equation (see for example [87]) implies that  $\mu = 0$  in  $Q$ . Similarly, condition 6.3 amounts to prove that if  $u$  solves the backward heat equation (6.13) with  $h = 0$ , then  $u = 0$ . Lastly, since the backward heat equation (6.13) is ill-posed (see for example [90]), the Brezzi-Nečas-Babuška theorem implies that the inf – sup condition 6.1 is not satisfied.

The mixed formulation (6.2) of the Tikhonov regularization applies as follows : for  $\varepsilon > 0$ , find  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V_0 \times M$  such that for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon \int_Q \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dxdt - \int_Q v \partial_t \lambda_\varepsilon \, dxdt + \int_Q \nabla v \cdot \nabla \lambda_\varepsilon \, dxdt = 0 \\ - \int_Q u_\varepsilon \partial_t \mu \, dxdt + \int_Q \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \mu \, dxdt - \int_Q \nabla \lambda_\varepsilon \cdot \nabla \mu \, dxdt = -\langle h, \mu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(S_T), \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(S_T)}. \end{cases} \quad (6.20)$$

Again, from Theorem 6.2.1 and since condition 6.3 is satisfied, the problem (6.20) is well-posed for any data  $h \in H^{-\frac{1}{2}}(S_T)$  and for  $h$  such that problem (6.13) has a (unique) solution  $u$ , we have  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \rightarrow (u, 0)$  in  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \times H^1(Q)$ . In [14], a similar mixed formulation as (6.20) is used to regularize the backward heat equation in 1D ( $d = 1$ ). A discretization with a Finite Element Method is analyzed and illustrated with the help of numerical examples.

## 6.4 An inverse obstacle problem in an acoustic waveguide

### 6.4.1 Introduction

We consider a  $d$  dimensional waveguide  $W = \Sigma \times \mathbb{R}$  for  $d \geq 2$ , where  $\Sigma$  is a  $(d - 1)$  dimensional Lipschitz domain. The boundary of  $W$  is denoted  $\partial W$ . A generic point  $x \in W$  has coordinates  $(x_\Sigma, x_d)$  with  $x_\Sigma \in \Sigma$  and  $x_d \in \mathbb{R}$ . Let us consider a smooth Lipschitz domain  $D$  such that  $\overline{D} \subset W$ , referred to as the obstacle. For some wave number  $k > 0$  and data  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial W) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial W)$  that are compactly supported with  $(f, g) \neq (0, 0)$ , the inverse obstacle problem consists in finding a domain  $D$  and a function  $u \in H_{\text{loc}}^1(W \setminus \overline{D})$  such that

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{in } W \setminus \overline{D} \\ (u, \partial_\nu u) = (f, g) & \text{on } \partial W \\ u = 0 & \text{on } \partial D \\ (RC), \end{cases} \quad (6.21)$$

where

$$H_{\text{loc}}^1(W \setminus \overline{D}) = \{v \in \mathcal{D}'(W \setminus \overline{D}), \varphi(x_d)v(x) \in H^1(W \setminus \overline{D}), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\},$$

$\nu$  is the outward unit normal to  $W$  and  $(RC)$  is a radiation condition which forces the field  $u$  to be outgoing. Physically,  $D$  can be seen as a sound-soft obstacle,  $u$  is the pressure field outside  $D$ ,  $g$  is the prescribed normal component of the velocity while  $f$  is the resulting measured pressure on the boundary. The first question related to this inverse obstacle problem is identifiability : is the obstacle  $D$  uniquely defined from a single pair of Cauchy data  $(f, g)$ ? Uniqueness for this problem is unknown in general, only a local uniqueness result is known. For example, the following result is proved in [126].

#### Theorem 6.4.1

Let  $D_- \subset D_+$  be two obstacles such that  $\text{Vol}(D_+ \setminus D_-) < \omega_d k^{-d}$ , where  $\omega_d$  is the volume of the unit ball in  $\mathbb{R}^d$ . Let  $D_j$ ,  $j = 1, 2$ , be two other obstacles such that  $D_- \subset D_j \subset D_+$ , and corresponding solutions  $u_j$  which satisfy problem (6.21). If we assume in addition that the functions  $u_j$  are continuous in  $\overline{W} \setminus D_j$ ,  $j = 1, 2$ , then  $D_1 = D_2$ .

In what follows we will assume that global uniqueness holds in the inverse obstacle problem. In order to solve it, we propose an ‘‘exterior approach’’ coupling a mixed Tikhonov formulation such as (6.2) and the level set method introduced in [27] in the case of the Laplacian. In such iterative approach, for a given estimated defect  $\tilde{D}$  we update the solution  $\tilde{u}$  with the help of a mixed formulation of quasi-reversibility while for a given estimated solution  $\tilde{u}$  we update the defect  $\tilde{D}$  with the help of a level set method based on a Poisson problem.

### 6.4.2 Application of the mixed Tikhonov formulation

First of all, we wish to transform the problem (6.21) into an equivalent one set in a bounded domain. To this aim, we assume that the obstacle  $D$  lies within the bounded subdomain  $W_R$  of  $W$  delimited by the two sections  $\Sigma_\pm = \Sigma \times \{x_d = \pm R\}$  and let us introduce  $\Omega = W_R \setminus \overline{D}$ . The portion of  $\partial W$  contained between  $\Sigma_-$  and  $\Sigma_+$  is denoted by  $\Gamma$ . It is well-known that for  $k > 0$  and  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , the problem (6.21) is equivalent to find a domain  $D$  and a function  $u \in H^1(\Omega)$  such that

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{in } \Omega \\ (u, \partial_\nu u) = (f, g) & \text{on } \Gamma \\ u = 0 & \text{on } \partial D \\ \pm \partial_{x_d} u = T_\pm u & \text{on } \Sigma_\pm, \end{cases} \quad (6.22)$$

where the operators  $T_{\pm} : H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm}) \rightarrow \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm})$  are the so-called Dirichlet-to-Neumann operators. A convenient way to define such operators consists in introducing the eigenvalues  $\lambda_n$  and the eigenfunctions  $\theta_n$  of the following eigenvalue problem set in the  $(d-1)$  dimensional domain  $\Sigma$  :

$$\begin{cases} (\Delta_{\perp} + \lambda)v = 0 & \text{in } \Sigma \\ \partial_{\nu_{\perp}} v = 0 & \text{on } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (6.23)$$

where  $\Delta_{\perp}$  is the Laplacian in  $\Sigma$  while  $\nu_{\perp}$  is the outward unit normal vector to domain  $\Sigma$ . The  $(\lambda_n)$  form a non negative and increasing sequence of reals that tends to  $+\infty$  while the  $(\theta_n)$  can be chosen to form a complete orthonormal basis of  $L^2(\Sigma)$ .

**Remark 6.9**

In particular, for  $d = 2$ ,  $\Sigma = (0, h)$  for some  $h > 0$ , the solutions to problem (6.23) are given for  $n \in \mathbb{N}$  by  $\lambda_n = n^2\pi^2/h^2$  and by

$$\begin{cases} \theta_0(x_1) = \sqrt{\frac{1}{h}} \\ \theta_n(x_1) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cos\left(\frac{n\pi}{h}x_1\right) \quad (n \geq 1). \end{cases} \quad (6.24)$$

Setting for all  $n \in \mathbb{N}$

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n} \quad \text{with} \quad \text{Re}(\beta_n) \geq 0, \quad \text{Im}(\beta_n) \geq 0, \quad (6.25)$$

the operators  $T_{\pm}$  can be defined, for  $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm})$ , by

$$T_{\pm}\varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} i\beta_n (\varphi, \theta_n)_{L^2(\Sigma_{\pm})} \theta_n. \quad (6.26)$$

Assume that the obstacle  $D$  is known. Given some Cauchy data  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , let us consider the linear ill-posed problem of finding  $u \in H^1(\Omega)$  such that the following problem be satisfied :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{in } \Omega \\ (u, \partial_{\nu} u) = (f, g) & \text{on } \Gamma \\ \pm \partial_{x_d} u = T_{\pm} u & \text{on } \Sigma_{\pm}. \end{cases} \quad (6.27)$$

We can easily check that the problem (6.27) is equivalent to a weak formulation of type (6.1).

**Lemma 6.10**

For  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , the function  $u \in H^1(\Omega)$  is a solution to problem (6.27) if and only if  $u|_{\Gamma} = f$  and for all  $\mu \in H^1(\Omega)$  with  $\mu|_{\partial D} = 0$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{\mu} dx - k^2 \int_{\Omega} u \bar{\mu} dx - \langle T_{\pm} u|_{\Sigma_{\pm}}, \bar{\mu}|_{\Sigma_{\pm}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm})} = \langle g, \bar{\mu}|_{\Gamma} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

where  $\pm$  means the summation of the bracket on  $\Sigma_{-}$  and the bracket on  $\Sigma_{+}$ .

The weak formulation of Lemma 6.10 is a particular instance of abstract problem (6.1) with  $V = H^1(\Omega)$ ,  $H = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $M = \{\mu \in H^1(\Omega), \mu|_{\partial D} = 0\}$ ,  $A : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  is the trace operator on  $\Gamma$ ,  $V_f = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = f\}$  while for  $(u, \mu) \in V \times M$ ,

$$b(u, \mu) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{\mu} dx - k^2 \int_{\Omega} u \bar{\mu} dx - \langle T_{\pm} u|_{\Sigma_{\pm}}, \bar{\mu}|_{\Sigma_{\pm}} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm})}, \quad (6.28)$$

$$\ell(\mu) = \langle g, \bar{\mu}|_{\Gamma} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (6.29)$$

We have to note that, contrary to the abstract problem presented in section 6.2, the functions have complex values, which means in particular that the forms  $b$  and  $\ell$  are sesquilinear and antilinear instead of bilinear and linear, respectively. However, it is readily seen that all the results of sections 6.2 remain valid in this context of complex Hilbert spaces provided a complex modulus be applied to  $b$  in the inf-sup condition 6.1. Once again, we have the following proposition, the proof of which is very similar to that of Proposition 6.6.

### Proposition 6.11

For the sesquilinear form  $b$  given by (6.28), the conditions 6.2 and 6.3 are satisfied while the condition 6.1 is not.

The mixed formulation (6.2) of the Tikhonov regularization applies as follows : for  $\varepsilon > 0$ , find  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V_f \times M$  such that for all  $(v, \mu) \in V_0 \times M$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \bar{\lambda}_\varepsilon \, dx \\ \quad - k^2 \int_{\Omega} v \bar{\lambda}_\varepsilon \, dx - \langle T_{\pm} v, \bar{\lambda}_\varepsilon \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm})} = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mu} \, dx - k^2 \int_{\Omega} u_\varepsilon \bar{\mu} \, dx \\ \quad - \langle T_{\pm} u_\varepsilon, \bar{\mu} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm}), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{\pm})} - \int_{\Omega} \nabla \lambda_\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mu} \, dx = \langle g, \bar{\mu} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{array} \right. \quad (6.30)$$

Again, from Theorem 6.2.1 and since condition 6.3 is satisfied, the problem (6.30) is well-posed for any data  $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and for  $(f, g)$  such that problem (6.27) has a (unique) solution  $u$ , we have  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \rightarrow (u, 0)$  in  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ .

### 6.4.3 The “exterior approach”

In this paragraph, we simply adapt to the Helmholtz equation the approach introduced in [27] in the case of the Laplace equation. We here briefly give a sketch of this approach : the reader will refer to [27] for a more detailed description. For a defect  $D$  and a solution  $u$  satisfying the inverse obstacle problem (6.22) for Cauchy data  $(f, g)$ , let us consider a function  $c \in H^1(W_R)$  such that  $c = |u|$  in  $\Omega$  and  $c \leq 0$  in  $D$  (this is always possible, take  $c = 0$  in  $D$  in view of the Dirichlet boundary condition on  $\partial D$ ) and a distribution  $F \in H^{-1}(W_R)$  such that  $F - \Delta c \geq 0$ . For some open domain  $\omega \subset W_R$  and  $G \in H^{-1}(W_R)$ , let us denote by  $v_{G, \omega}$  the solution  $v \in H_0^1(\omega)$  of the Poisson problem  $\Delta v = G$  in  $\omega$ . We now define a sequence of open domains  $D_n$  by following induction. We first consider an open domain  $D_0$  such that  $D \subset D_0 \Subset W_R$ . The domain  $D_n$  being given, we define

$$D_{n+1} = D_n \setminus \text{supp}(\text{sup}(\varphi_n, 0)),$$

where (supp denotes the support of a function)

$$\varphi_n = c + v_{G, D_n}, \quad G = F - \Delta c. \quad (6.31)$$

From [83], since the open domains  $D_n$  form a decreasing sequence, it converges in the sense of Hausdorff distance to some open domain  $D_\infty$ , with  $D \subset D_\infty$ . Lastly, the following convergence theorem justifies the method.

**Theorem 6.4.2**

If we assume that the sequence of functions  $v_{G,D_n}$  converges in  $H_0^1(W_R)$  to the function  $v_{G,D_\infty}$  and if  $k^2$  is not a Dirichlet eigenvalue of operator  $-\Delta$  in  $D_\infty \setminus \overline{D}$ , then  $D_\infty = D$ .

Since the proof of Theorem 6.4.2 is very close to that obtained in [27] for the case of the Laplace equation, it is omitted. However, while 0 is not a Dirichlet eigenvalue of the operator  $-\Delta$  in  $D_\infty \setminus \overline{D}$ , the positive number  $k^2$  for  $k > 0$  might be one of them, which explains why there is an assumption on  $k$  in the statement of Theorem 6.4.2.

**Remark 6.12**

The convergence of the sequence of the  $v_{G,D_n}$  functions with respect to the domain  $D_n$  is a classical question which is for example extensively studied in [83] (see also [27]). The reader will find in [83, 27] some sufficient assumptions, depending on the dimension  $d$ , that guarantee such convergence.

The statement of Theorem 6.4.2 means that the sequence of open domains  $D_n$  defined with the help of the solution  $u$  converges under some assumptions to the true obstacle  $D$ , in the sense of Hausdorff distance. In practice, the exact solution  $u$  is unknown, but it can be approached by the regularized solution  $u_\varepsilon$  to problem (6.30). This is why it is natural to consider the following algorithm.

**Algorithm :**

1. Choose an initial guess  $D_0$  such that  $D \subset D_0 \Subset W_R$ .
2. Step 1 : for a given  $D_n$ , compute the quasi-reversibility solution  $u_n$  of system (6.30) in  $\Omega_n$  for sufficiently small  $\varepsilon$ , where  $\Omega_n := W_R \setminus \overline{D_n}$ .
3. Step 2 : for a given  $u_n$  in  $\Omega_n$ , compute  $c_n(x) = |u_n|$  in  $\Omega_n$  and the solution  $\varphi_n$  to problem (6.31) for sufficiently large  $F$ , which simply reads for smooth  $D_n$  as :

$$\begin{cases} \Delta \varphi_n = F & \text{in } D_n \\ \varphi_n = c_n & \text{on } \partial D_n. \end{cases}$$

Compute  $D_{n+1} = \{x \in D_n, \varphi_n(x) < 0\}$ .

4. Go back to step 1 until some stopping criterion is satisfied.

**6.4.4 Some numerical experiments**

In this paragraph we apply the exterior approach in a 2d waveguide of height  $h = 1$  (see remark 6.9) and by choosing  $R = 1$ . We consider two different obstacles  $D$  :

1. the disk of center  $(-0.2, 0.6)$  and radius 0.1 ;
2. the union of the previous disk and the disk of center  $(0.3, 0.4)$  and radius 0.15.

The artificial data on  $\Gamma$  are obtained by solving the forward problem in  $\Omega$  : for  $g \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , find  $u \in H^1(\Omega)$  such that

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = g & \text{on } \Gamma \\ u = 0 & \text{on } \partial D \\ \pm \partial_{x_d} u = T_\pm u & \text{on } \Sigma_\pm, \end{cases} \quad (6.32)$$

and then by setting  $f = u|_{\Gamma}$ , which provides some cauchy data  $(f, g)$  on  $\Gamma$ . In what follows we refer to  $u$  as the exact solution and  $(f, g)$  as the exact Cauchy data. Here we have chosen  $g(x_2) = 20 \max(1 - 4|x_2|, 0)$  both on  $\Gamma \cap \{x_1 = h\}$  and on  $\Gamma \cap \{x_1 = 0\}$ . The forward problem (6.32) is discretized with the help of a standard finite element method. Before solving the inverse obstacle problem, let us first apply the mixed formulation (6.30) in  $\Omega$  to solve problem (6.27), assuming the obstacle  $D$  is a priori known to be the obstacle (2). In order to test the robustness of formulation (6.30) with respect to noise on the data, we perturb data  $(f, g)$  as follows. Considering  $f$  and  $g$  as vectors the components of which are the degrees of freedom induced by the finite element space, each component is contaminated pointwise by some Gaussian noise, namely

$$f^\delta = f + \sigma \frac{\|f\|}{\|b_f\|} b_f, \quad g^\delta = g + \sigma \frac{\|g\|}{\|b_g\|} b_g, \quad (6.33)$$

where  $b_f, b_g$  are given by a standard normal distribution,  $\sigma > 0$  is a scaling factor and  $\|\cdot\|$  denotes a discretized  $L^2$  norm. With such definition, both  $f$  and  $g$  are perturbed by a relative error of amplitude  $\sigma$  in  $L^2$  norm. In the figure 6.1 we have plotted the discrepancy  $|u_\varepsilon^\delta - u|/(\max |u|)$  in  $\Omega$  for  $\varepsilon = 10^{-3}$ , where  $u$  is the solution to problem (6.32) and  $u_\varepsilon^\delta$  is the solution to problem (6.30) with noisy data  $(f^\delta, g^\delta)$ , for three different values of  $\sigma$ , that is  $\sigma = 0.01$ ,  $\sigma = 0.05$  and  $\sigma = 0.1$ . It can be seen that the error between the regularized solution  $u_\varepsilon^\delta$  and the exact solution  $u$  is small everywhere in  $\Omega$  except near the obstacle  $D$ , since no boundary condition is given on  $\partial D$ . This localized error obviously explodes with respect to the noise, due the fact that the problem (6.27) is exponentially ill-posed.

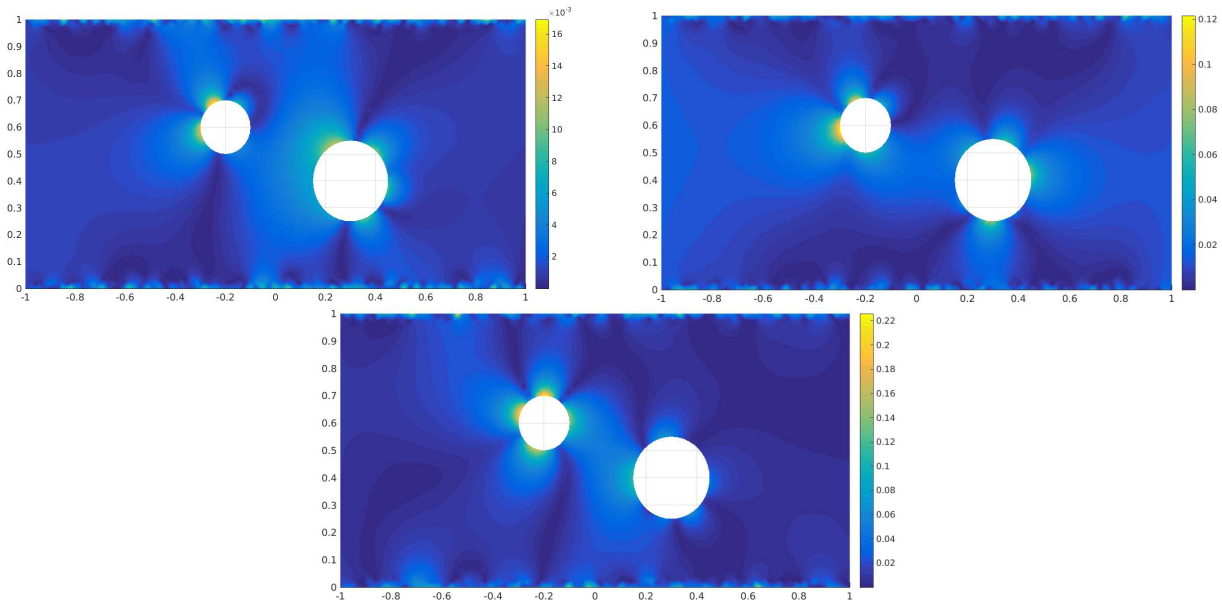


FIGURE 6.1 – Values of  $|u_\varepsilon^\delta - u|/(\max |u|)$  in  $\Omega$  for  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Top left :  $\sigma = 0.01$ . Top right :  $\sigma = 0.05$ . Bottom :  $\sigma = 0.1$

Now let us come back to the inverse obstacle problem and show some numerical experiments using the exterior approach algorithm. We emphasize the fact that a single finite element triangular mesh of  $W_R$  is used both for the quasi-reversibility problem (6.30) in  $\Omega_n$  and the Poisson problem (6.31) in  $D_n$ . Such mesh is the same for all  $n \in \mathbb{N}$  and is different from the one used to obtain the artificial data. Both problems are discretized with standard  $P2$  elements. The size of the mesh is such that it corresponds to 80 triangle edges on each part of  $\Gamma$  while the infinite sum (6.26) defining the operators  $T_\pm$  is truncated to 100 terms. It should



be noted that, due to the fact that the common boundary of  $\Omega_n$  and  $D_n$  is supported by a polygonal line based on the finite element mesh, the sequence of domains  $D_n$  is stationary for sufficiently large  $n$ , which provides a simple stopping criterion for our algorithm. Again, we arbitrarily set  $\varepsilon = 10^{-3}$  in the quasi-reversibility problem while the function  $F$  is fixed to a constant in the Poisson problem. Such constant is fixed to a large value at step 0 and is updated following a simple dichotomy procedure in order to avoid "too early" stationarity. The initial guess  $D_0$  is an ellipse. In figure 6.2, one can see, for obstacle (1), the sequence of computed obstacles  $D_n$  until complete stationarity, for  $k = 3$  and with our three different amplitudes of noise  $\sigma$ . The retrieved obstacle has to be compared to the true one. The same results are shown in figure 6.3 for obstacle (2) and  $k = 5$ . We mention that those values of  $k$  are rather small :  $k = 3$  corresponds to a single purely real value of  $\beta_n$  defined by (6.25) while  $k = 5$  corresponds to two purely real values of  $\beta_n$ , which means that the number of propagating guided modes (see [32]) is 1 for  $k = 3$  and 2 for  $k = 5$ . We can see on figure 6.2 that when the amplitude of noise increases, not only the obstacle is not as well retrieved but the number of iterations in the level set method becomes larger. In the case of two obstacles, we can check on figure 6.3 that our level set method manages to separate the two obstacles starting from the connected initial guess  $D_0$ , which is well-known for level set methods in general. Here, in the quasi-reversibility problem (6.30), we have set  $\varepsilon$  to an arbitrary value

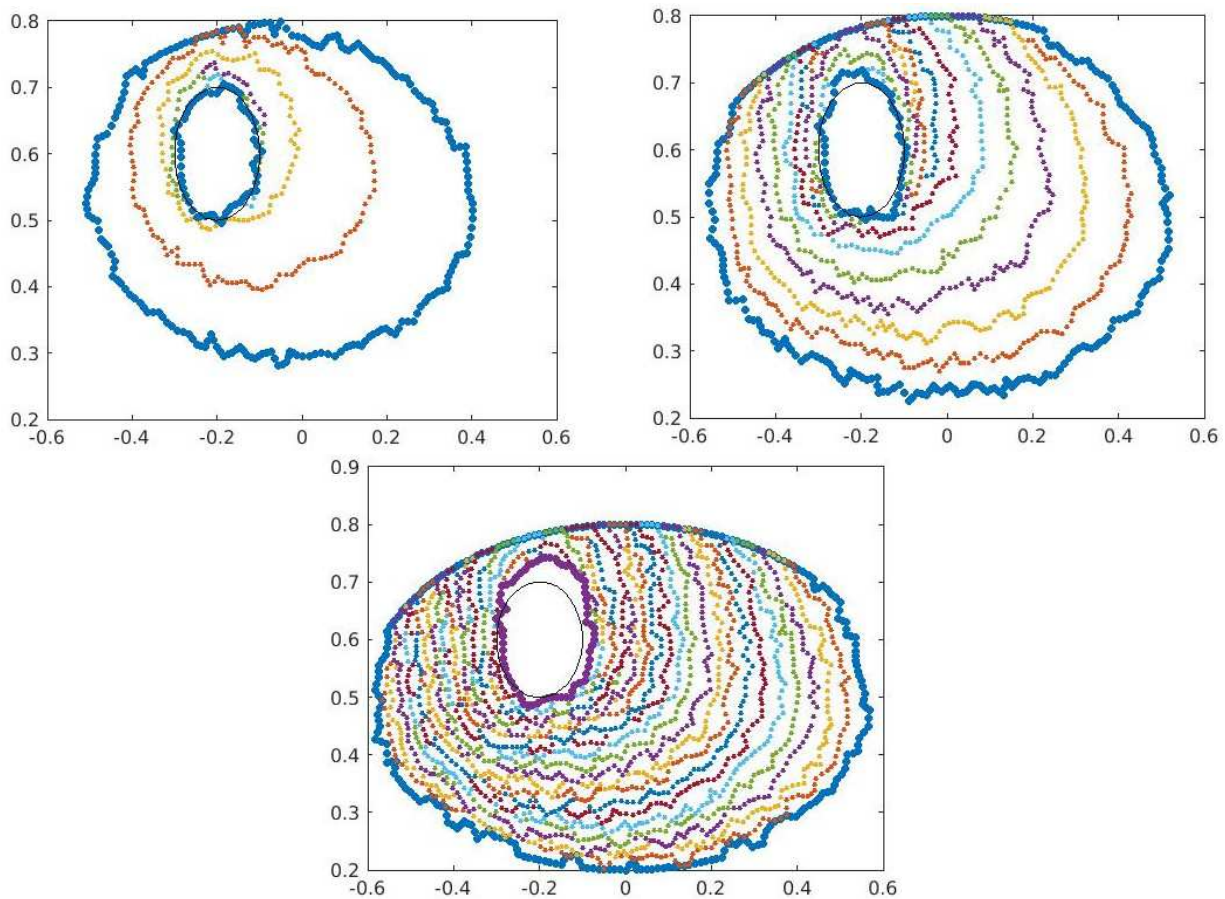


FIGURE 6.2 – Identification of obstacle (1) for  $k = 3$ . Top left :  $\sigma = 0.01$ . Top right :  $\sigma = 0.05$ . Bottom :  $\sigma = 0.1$ .

of  $10^{-3}$ , which was a posteriori a good choice in our numerical experiments. But such value of  $\varepsilon$  is difficult to guess in general and has classically to be chosen as a function of the amplitude of noise that corrupts the Cauchy data  $(f, g)$ . In addition, the natural setting for  $(f, g)$

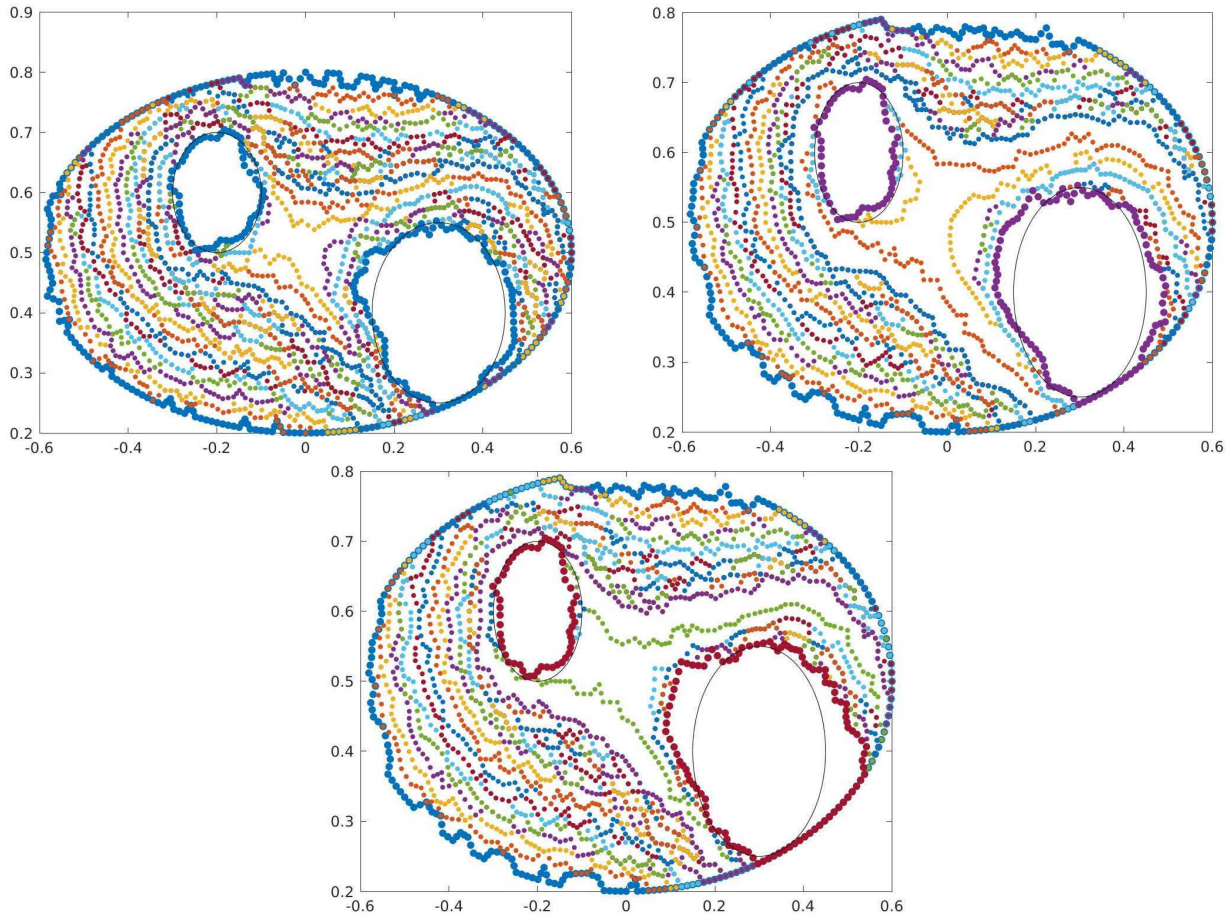


FIGURE 6.3 – Identification of obstacle (2) for  $k = 5$ . Top left :  $\sigma = 0.01$ . Top right :  $\sigma = 0.05$ . Bottom :  $\sigma = 0.1$ .

in (6.30) is  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , which is not appropriate for experimental noisy data that are rather expected to belong to simpler space  $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ . And lastly, in the weak formulation problem (6.30), the Dirichlet data  $f$  is strongly imposed and the Neumann data  $g$  is weakly imposed, while both data are noisy and should be weakly imposed. These issues can be seen as general drawbacks of the abstract mixed formulation (6.2). This is why we introduce in the next section a relaxed mixed formulation of Tikhonov regularization.

## 6.5 A relaxed mixed formulation of Tikhonov regularization

### 6.5.1 Back to the abstract case

We come back to the notations of section 6.2 concerning spaces  $V$ ,  $M$ ,  $H$ , the bilinear form  $b$  and the linear form  $\ell$ . Let us consider the case when the operator  $A : V \rightarrow H$  is no more onto but has only a dense range. This framework is well-adapted to the case when the data  $f \in H$  is corrupted by noise and hence is not sufficiently smooth to be in the range of  $A$ . We additionally assume that condition 6.2 is satisfied, which implies that the operator  $B$  defined by (6.6) has a dense range too. A second regularized formulation of problem (6.1) is the following : for  $\varepsilon > 0$ , find  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V \times M$  such that for all  $(v, \mu) \in V \times M$ ,

$$\begin{cases} \varepsilon(u_\varepsilon, v)_V + \eta^2(Au_\varepsilon, Av)_H + b(v, \lambda_\varepsilon) = \eta^2(f, Av)_H \\ b(u_\varepsilon, \mu) - (\lambda_\varepsilon, \mu)_M = \ell(\mu). \end{cases} \quad (6.34)$$

Note that in problem (6.34),  $\eta$  is a fixed parameter that will be discussed later. We can prove the following result, which is the analogous of Theorem 6.2.1 for problem (6.34) instead of problem (6.2).

**Theorem 6.5.1**

For any  $f \in H$  and  $\ell \in M'$ , the problem (6.34) has a unique solution. For some  $f \in H$  and  $\ell \in M'$  such that (6.1) has at least one solution, the solution  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in V \times M$  satisfies  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \rightarrow (u_m, 0)$  in  $V \times M$  when  $\varepsilon \rightarrow 0$ , where  $u_m$  is the unique solution to the minimization problem (6.3). In particular, if the uniqueness condition 6.3 is satisfied, then  $u_m = u$ , where  $u$  is the unique solution to problem (6.1).

Since the proof of Theorem 6.5.1 is very similar to that of Theorem 6.2.1, it is omitted. Additionally, in the same vein as Proposition 6.4, we have the following proposition :

**Proposition 6.13**

Let us denote  $v_\varepsilon$  the unique solution to the minimization problem

$$\inf_{v \in V} (\eta^2 \|Av - f\|_H^2 + \|Bv - L\|_M^2 + \varepsilon \|v\|_V^2)$$

and  $\mu_\varepsilon = Bv_\varepsilon - L$ . Then  $(v_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$  coincides with the unique solution  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$  to problem (6.34).

Now let us introduce some noise on the data  $\mathcal{L} = (f, L) \in H \times M$ , namely we consider  $\mathcal{L}^\delta = (f^\delta, L^\delta) \in H \times M$  such that for some  $\delta_f, \delta_\ell, \rho > 0$ ,

$$\|f^\delta - f\|_H \leq \delta_f, \quad \|L^\delta - L\|_M \leq \rho \delta_\ell, \quad \|\mathcal{L}^\delta\| > \sqrt{\eta^2 \delta_f^2 + \rho^2 \delta_\ell^2}, \quad (6.35)$$

where

$$\|\mathcal{L}\| = \sqrt{\eta^2 \|f\|_H^2 + \|L\|_M^2}. \quad (6.36)$$

Denoting

$$\Delta = \sqrt{\eta^2 \delta_f^2 + \rho^2 \delta_\ell^2}, \quad (6.37)$$

it is readily seen from (6.35), (6.36) and (6.37) that

$$\|\mathcal{L}^\delta - \mathcal{L}\| \leq \Delta, \quad \|\mathcal{L}^\delta\| > \Delta. \quad (6.38)$$

The parameter  $\eta$  is introduced in order to take into account the fact that  $f$  and  $L$  are different physical quantities. Let us recall that  $L \in M$  is computed from  $\ell \in M'$  thanks to (6.7). Given some noise on  $\ell$  of given amplitude  $\delta_\ell$ , the parameter  $\rho$  is the ratio between the amplitude of the resulting noise on  $L$  and  $\delta_\ell$ . We will see later how these two parameters  $\eta$  and  $\rho$  can be chosen in practice. A classical strategy to choose the regularization parameter  $\varepsilon$  consists in the Morozov's discrepancy principle. It relies on the following well-known result (see for example [90] for a proof in the restricted case of a compact operator).

**Lemma 6.14**

We consider two Hilbert spaces  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{H}$  and a continuous operator  $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$  which has a dense range. For  $\Delta > 0$ , let us consider some data  $\mathcal{L}^\Delta \in \mathcal{H}$  such that  $\|\mathcal{L}^\Delta\|_{\mathcal{H}} > \Delta$  and denote by  $u_\varepsilon^\Delta$  the unique minimizer in  $\mathcal{V}$  of the Tikhonov functional  $v \mapsto \|\mathcal{A}v - \mathcal{L}^\Delta\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|v\|_{\mathcal{V}}^2$ . There exists a unique  $\varepsilon > 0$  such that  $\|\mathcal{A}u_\varepsilon^\Delta - \mathcal{L}^\Delta\|_{\mathcal{H}} = \Delta$ .

From Lemma 6.14, we obtain the following theorem.

**Theorem 6.5.2**

Let us denote by  $(u_\varepsilon^\delta, \lambda_\varepsilon^\delta)$  the solution to problem (6.34) for noisy data  $(f^\delta, \ell^\delta)$  instead of exact data  $(f, \ell)$ . Assume that if  $L^\delta$  and  $L$  are derived by (6.7) from  $\ell^\delta$  and  $\ell$ , the noisy data  $(f^\delta, L^\delta)$  satisfy (6.35). Then there exists a unique  $\varepsilon > 0$  such that the solution  $(u_\varepsilon^\delta, \lambda_\varepsilon^\delta)$  satisfies

$$\sqrt{\eta^2 \|Au_\varepsilon^\delta - f^\delta\|_H^2 + \|\lambda_\varepsilon^\delta\|_M^2} = \Delta,$$

where  $\Delta$  is defined by (6.37).

*Proof.* We directly apply Lemma 6.14 for  $\mathcal{V} = V$ ,  $\mathcal{H} = H \times M$  equipped with the norm (6.36) and  $\mathcal{A}$  defined for  $v \in V$  by  $\mathcal{A}v = (Av, Bv)$ , in view of (6.38) and Proposition 6.13. Note that the operator  $\mathcal{A}$  has a dense range since both operators  $A$  and  $B$  have a dense range.

**6.5.2 Back to the inverse obstacle problem**

Let us apply the relaxed formulation (6.34) to problem (6.27), that is the obstacle  $D$  is supposed to be known. To this aim we consider some Cauchy data  $(f, g) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$  instead of  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . In order to apply the regularized formulation (6.34), we now consider  $V = H^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Gamma)$ ,  $M = \{\mu \in H^1(\Omega), \mu|_{\partial D} = 0\}$ ,  $A : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  is the trace operator on  $\Gamma$  (which has a dense range), while the sesquilinear form  $b$  and the antilinear form  $\ell$  are again given by (6.28) and (6.29), except that the duality bracket defining  $\ell$  is now an integral since  $g \in L^2(\Gamma)$ . The regularized formulation (6.34) is in this case : for  $\varepsilon > 0$ , find  $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times \{\mu \in H^1(\Omega), \mu|_{\partial D} = 0\}$  such that for all  $(v, \mu) \in H^1(\Omega) \times \{\mu \in H^1(\Omega), \mu|_{\partial D} = 0\}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} \, dx + \eta^2 \int_{\Gamma} u_\varepsilon \bar{v} \, ds + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \bar{\lambda}_\varepsilon \, dx \\ \quad - k^2 \int_{\Omega} v \bar{\lambda}_\varepsilon \, dx - \langle T_\pm v, \bar{\lambda}_\varepsilon \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_\pm), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\pm)} = \eta^2 \int_{\Gamma} f \bar{v} \, ds, \\ \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mu} \, dx - k^2 \int_{\Omega} u_\varepsilon \bar{\mu} \, dx \\ \quad - \langle T_\pm u_\varepsilon, \bar{\mu} \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_\pm), H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\pm)} - \int_{\Omega} \nabla \lambda_\varepsilon \cdot \nabla \bar{\mu} \, dx = \int_{\Gamma} g \bar{\mu} \, ds. \end{array} \right. \quad (6.39)$$

Note that in formulation (6.39), both data  $f$  and  $g$  are imposed weakly. Now assume that the problem (6.27) has a (unique) solution  $u \in H^1(\Omega)$  for exact data  $(f, g)$  while we measure some noisy data  $(f^\delta, g^\delta) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$  so that

$$\|f^\delta - f\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta_f, \quad \|g^\delta - g\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta_g.$$

Let us apply the weak formulation (6.7). For any  $g \in L^2(\Gamma)$ , there exists a unique  $L \in H^1(\Omega)$  with  $L|_{\partial D} = 0$  such that for all  $\mu \in H^1(\Omega)$  with  $\mu|_{\partial D} = 0$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla L \cdot \nabla \mu \, dx = \int_{\Gamma} g \mu \, ds. \quad (6.40)$$

Assume that  $L^\delta$  is associated with data  $g^\delta \in L^2(\Gamma)$  via (6.7), so that

$$\|f^\delta - f\|_{L^2(\Gamma)} \leq \delta_f, \quad \|L^\delta - L\|_{H^1(\Omega)} \leq \rho \delta_g.$$

We assume in addition that

$$\eta^2 \|f^\delta\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|L^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \eta^2 \delta_f^2 + \rho^2 \delta_g^2,$$

so that our noisy data  $(f^\delta, L^\delta)$  satisfy (6.35). Theorem 6.5.2 is hence directly applicable and we obtain that there exists a unique  $\varepsilon > 0$  such that the solution  $(u_\varepsilon^\delta, \lambda_\varepsilon^\delta)$  to problem (6.39) associated with the corresponding data  $(f^\delta, g^\delta)$  satisfies

$$E^\delta(\varepsilon) := \sqrt{\eta^2 \|u_\varepsilon^\delta - f^\delta\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\lambda_\varepsilon^\delta\|_{H^1(\Omega)}^2} = \sqrt{\eta^2 \delta_f^2 + \rho^2 \delta_g^2}. \quad (6.41)$$

### 6.5.3 Some numerical experiments

Let us first focus on the numerical results of formulation (6.39) when the obstacle  $D$  is known. In practice,  $f^\delta$  and  $g^\delta$  are artificially computed with the help of (6.33), so that we take

$$\delta_f = \sigma \|f^\delta\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \delta_g = \sigma \|g^\delta\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \Delta = \sqrt{\eta^2 \delta_f^2 + \rho^2 \delta_g^2}.$$

We now describe how to choose the constants  $\eta$  and  $\rho$ . In view of Proposition 6.13, a natural choice is

$$\eta = \frac{\|L^\delta\|_{H^1(\Omega)}}{\|f^\delta\|_{L^2(\Gamma)}}. \quad (6.42)$$

The constant  $\rho$  is heuristically defined as follows. We consider many functions  $g$  such that

$$g = \frac{\delta_g}{\|b_g\|} b_g,$$

where  $b_g$  is defined as in (6.33), which means that  $g$  is 0 up to some random noise of fixed  $L^2(\Gamma)$  norm  $\delta_g$ , and we solve the corresponding problems (6.40). Computing the mean value  $\delta_L$  of the  $H^1(\Omega)$  norms of all the obtained  $L$ , the constant  $\rho$  is given by the ratio  $\rho = \delta_L / \delta_g$ . The constant  $\eta$  and  $\rho$  being determined, the value of  $\varepsilon$  is now obtained by solving the equation (6.41) by a simple dichotomy method. We present some numerical experiments related to the relaxed formulation in the case of obstacle (1). In order to illustrate the fact that equation (6.41) indeed uniquely determines  $\varepsilon$  in the discretized case, we have plotted on figure 6.4 on the one hand the function  $E^\delta$  of  $\varepsilon$  and on the other hand the constant  $\Delta$ , for  $\sigma = 0.01$ ,  $\sigma = 0.05$  and  $\sigma = 0.1$ . In figure 6.5, we compare the error between the exact solution  $u$  and the regularized solution  $u_\varepsilon^\delta$  in the presence of noisy data  $(f^\delta, g^\delta)$  obtained with the initial formulation (6.30) and with the relaxed formulation (6.39), as a function of  $\varepsilon$ . We notice that on the whole the relaxed formulation provides a better solution in  $\Omega$  than the initial formulation. The figure 6.5 also illustrates the fact that the Morozov's value of  $\varepsilon$  is a rather good choice in the relaxed formulation. We conclude this numerical section by presenting the application of the exterior approach when the regularized solution is obtained with the relaxed formulation (6.39) instead of the initial one (6.30), the data  $(f^\delta, g^\delta)$  being the same as in figure 6.2 and  $\varepsilon$  being determined with the Morozov's procedure. Let us remark that  $\varepsilon$ ,  $\eta$  and  $\rho$  depend on the current domain  $\Omega_n$  and should be determined for each  $n$ . This is actually the case for  $\eta$ , but since the computations of  $\rho$  and  $\varepsilon$  are quite heavy, we computed them once and for all at iteration  $n = 0$ . The identification results are presented in figure 6.6 for  $\sigma = 0.05$  and  $\sigma = 0.1$ . The reader could be frustrated by the fact that the identification results of figure 6.6 seem no better than the results of figure 6.2. This is maybe due to the high sensitivity of the results with respect to  $\eta$ : the choice given by (6.42) is maybe not optimal. Some further work on that choice should be continued.

#### Remark 6.15

*We have shown that our method works for small values of the wavenumber  $k$  but acknowledge it fails for large values, which is expected in view of the uniqueness Theorem 6.4.1.*

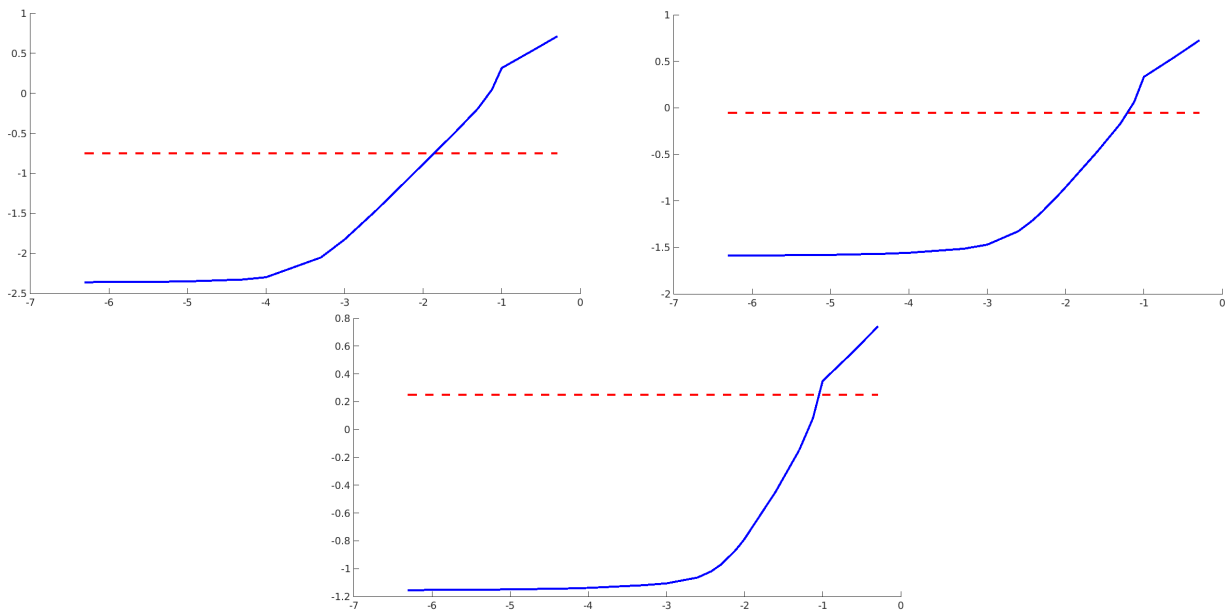


FIGURE 6.4 – Application of Morozov’s discrepancy principle. Continuous line :  $E^\delta(\varepsilon)$ , dashed line : constant  $\Delta$  (log – log scale). Top left :  $\sigma = 0.01$ . Top right :  $\sigma = 0.05$ . Bottom :  $\sigma = 0.1$ .

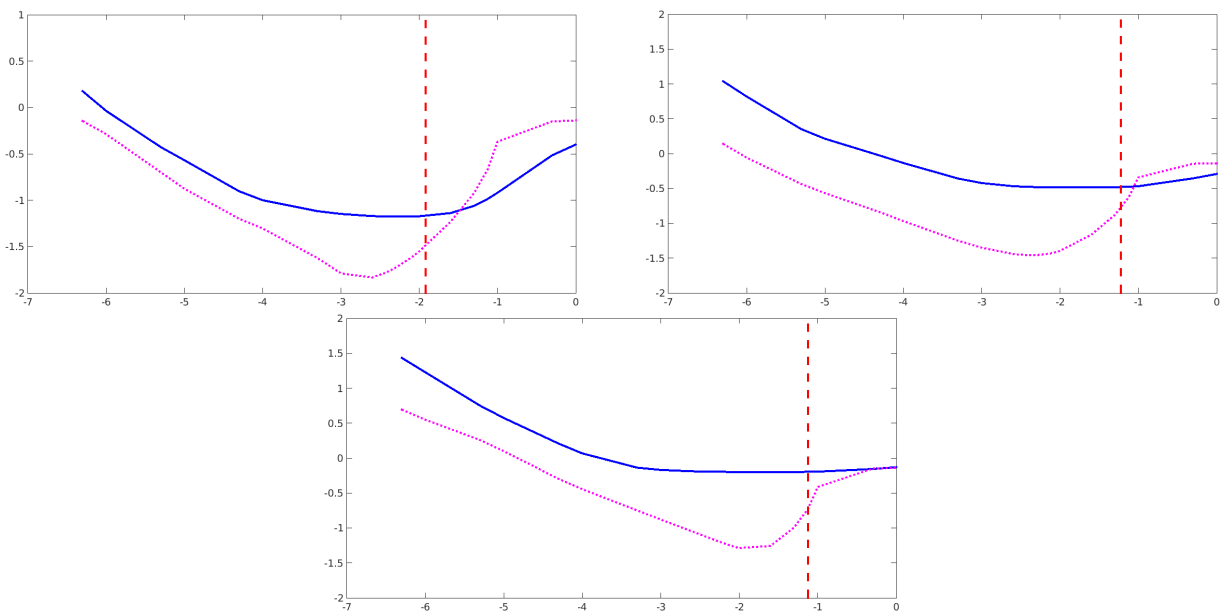


FIGURE 6.5 – Error  $\|w_\varepsilon^\delta - u\|_{H^1(\Omega)}$  between the regularized solution for noisy data  $(f^\delta, g^\delta)$  and the exact solution, as a function of  $\varepsilon$  (log – log scale). Continuous line :  $w_\varepsilon^\delta$  is the solution of (6.30), dashed line :  $u_\varepsilon^\delta$  is the solution of (6.39) (the vertical line represents the Morozov’s value of  $\varepsilon$ ). Top left :  $\sigma = 0.01$ . Top right :  $\sigma = 0.05$ . Bottom :  $\sigma = 0.1$ .

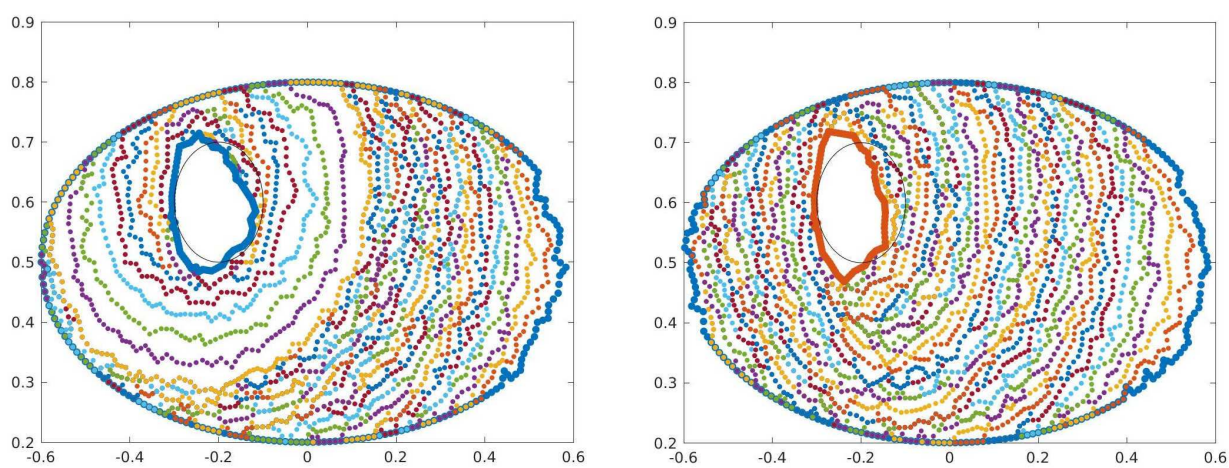


FIGURE 6.6 – Identification of obstacle (1) for  $k = 3$  and using the relaxed mixed formulation with Morozov's procedure. Left :  $\sigma = 0.05$ . Right :  $\sigma = 0.1$ .

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons vu dans ce mémoire comment adapter une méthode d'échantillonnage du type Linear Sampling Method à un cadre réaliste de Contrôle Non Destructif d'une structure de type guide d'ondes.

Ce travail a été fait en plusieurs étapes : tout d'abord, dans le chapitre 1, nous nous sommes concentrés sur le guide d'ondes acoustiques en dimension 2 et en régime harmonique, plus simple du point de vue mathématique. Nous avons démontré le caractère bien fondé de la Linear Sampling Method dans le cas de mesures ponctuelles sur des sections transverses du guide. Trois types d'obstacles ont été examinés, à savoir les obstacles d'intérieur non vide à cœur, cas théorique usuel mais peu représentatif des défauts cherchés en pratique, les obstacles débouchants au bord du guide, qui peuvent modéliser dans une première approche des défauts comme la corrosion, et les fissures, qui sont également des défauts réalistes.

Nous avons exploité au chapitre 2 le comportement modal des champs pour montrer qu'imager le guide d'ondes revient à résoudre un système linéaire infini en chaque point de la grille d'échantillonnage. Grâce à l'hypothèse de champ lointain, qui consiste à se restreindre aux modes propagatifs dans le système ainsi obtenu, nous résolvons un petit système linéaire (de taille égale au nombre de modes propagatifs) en chaque point. Notons que cette discrétisation régularise suffisamment l'opérateur, de sorte qu'aucune régularisation supplémentaire n'est requise. Nous appelons la méthode d'inversion la Linear Sampling Method modale. L'inconvénient du cadre théorique précédent est qu'il met en jeu des sources et des mesures selon les sections du guide en régime établi. Nous nous sommes alors intéressés à l'écriture de la LSM pour des données à la surface du guide, ce qui correspond à la situation réelle du CND. Nous avons notamment vu que l'écriture de la LSM directement à la surface ne permettait pas d'exploiter l'aspect modal du problème. Nous avons donc exhibé un lien entre la matrice  $\mathcal{U}$  de LSM et la matrice des mesures  $\mathcal{M}$  obtenue pour des sources et des mesures à la surface du guide. Ce lien nous permet notamment d'optimiser le choix des sources et des mesures grâce à l'étude du conditionnement des matrices d'émission et de réception à inverser pour obtenir  $\mathcal{U}$  à partir de  $\mathcal{M}$  et donc d'améliorer la qualité de l'imagerie.

La méthode en régime harmonique a ensuite été étendue au régime temporel au chapitre



3, en utilisant une transformée de Fourier. Ceci nous permet de réaliser une imagerie multi-fréquentielle qui améliore la qualité de la reconstruction du défaut, comme nous l'avons vu dans les validations numériques. Nous avons aussi comparé cette méthode avec l'écriture de la LSM directement en régime temporel, soit la "Time Domain Linear Sampling Method". Cette comparaison a mis en évidence une combinaison naturelle des fonctions caractéristiques à fréquence fixée. Toutefois, les résultats numériques nous ont induit à privilégier une combinaison légèrement différente pour la suite. L'influence du bruit sur la qualité de la reconstruction a par ailleurs été étudiée numériquement.

Nous avons traité au chapitre 4 le cas du guide d'ondes élastiques en dimension 3, le cas de la dimension 2 s'en déduisant aisément. Nous avons repris pour cela la même démarche que pour le guide d'ondes acoustiques et nous avons pu étendre les résultats obtenus dans les chapitres précédents. Des difficultés supplémentaires apparaissent : tout d'abord, les champs ne sont plus scalaires comme en acoustique et il est nécessaire d'avoir recours aux variables  $X$  et  $Y$ , qui panachent les composantes des champs de déplacement et des champs de contrainte, pour obtenir un cadre proche de celui de l'acoustique. L'analyse de l'inversibilité et du conditionnement des matrices d'émission et de réception est plus délicate, notamment à cause de l'absence d'expression analytique des nombres d'onde  $\beta_n$ . Par ailleurs, des paramètres supplémentaires inhérents à la troisième dimension apparaissent, qui sont le nombre et la position des sources selon le bord de la section transverse. Nous avons ainsi validé numériquement l'utilisation de la méthode pour imager un défaut dans un guide d'ondes élastiques, puis nous avons étudié l'influence de quelques paramètres supplémentaires qui pourraient être problématiques dans le cas de données réelles comme l'atténuation des ondes lors de la propagation.

Enfin, nous avons appliqué la méthode à des données réelles dans le cas d'une plaque dans le chapitre 5. Les résultats obtenus sont prometteurs et semblent indiquer qu'il est possible d'utiliser notre méthode d'inversion dans le cadre du Contrôle Non Destructif. Il est notamment apparu que nous étions capable d'imager une pièce de longueur relativement faible avec une modélisation 2D de la plaque. Toutefois, des essais supplémentaires seront nécessaires pour étudier l'influence des différents paramètres sur la reconstruction dans le cas des données réelles. Le cas d'éprouvettes 3D n'a pas été traité pour des raisons matérielles.

Parallèlement à cette méthode d'échantillonnage, nous nous sommes intéressés à une situation plus contraignante en pratique, à savoir l'identification de défauts pour une seule source, ce problème ne pouvant être résolu au moyen de la Linear Sampling Method. Nous avons ré-écrit pour cela dans le chapitre 6 la méthode de quasi-réversibilité comme une régularisation de Tikhonov associée à un problème d'équations aux dérivées partielles mal posé. Deux formulations de la quasi-réversibilité sont présentées en fonction de la façon dont les données sont prises en compte (au sens faible ou au sens fort). En particulier la seconde formulation, qui prend en compte les données au sens faible, permet de choisir le paramètre de régularisation en fonction du niveau de bruit en appliquant le principe de Morozov. Par contre, cela implique l'introduction de paramètres supplémentaires dont le choix reste à étudier. Nous avons ensuite mis en œuvre ces deux formulations combinées à une méthode de lignes de niveau pour imager un guide d'ondes acoustiques. À l'aide de cette approche "extérieure", nous avons été à même d'imager un défaut de type Dirichlet à basse fréquence.

En ce qui concerne les perspectives, sur les méthodes d'échantillonnage tout d'abord, il reste un certain nombre de pistes à explorer :

- **Validation pour des guides en dimension 3.** Bien que quelques résultats numériques aient été présentés en 3D, il reste beaucoup à faire. Nous n'avons considéré qu'un guide de section rectangulaire dans les essais numériques, alors que la méthode est valable théoriquement pour des sections de forme quelconque. Par exemple, le cas d'un rail de chemin de fer est intéressant en pratique. Par ailleurs, une des difficultés de la dimension 3 est l'éventuelle présence de modes associés à un même nombre d'onde, cas pour lequel les matrices d'émission et de réception ne sont plus inversibles. Ce problème n'a été que rapidement abordé dans le cas simple d'une plaque. Dans des cas plus représentatifs, comme un guide de section carré, le conditionnement des matrices d'émission et de réception est très mauvais du fait de ces modes doubles. Il serait intéressant de voir si la prise en compte d'un seul des modes présentant le même nombre d'onde permet de réaliser l'imagerie dans ce cas.
- **Étude détaillée des paramètres expérimentaux.** Les résultats expérimentaux obtenus au chapitre 5 sont encourageants quant à la faisabilité du Contrôle Non Destructif avec cette méthode. Toutefois, il reste à étudier les limites de celle-ci ainsi que l'influence des paramètres sur la possibilité de détecter un défaut. Citons certains points qui nous semblent importants :
  - Il serait souhaitable d'obtenir une image de bonne qualité en full-scattering. Bien que le back-scattering soit le cas le plus intéressant du point de vue des applications, aussi bien par sa simplicité de mise en œuvre que par sa capacité à imager une zone étendue éventuellement inaccessible, la configuration de full-scattering reste intéressante, au moins théoriquement. En effet, elle devrait permettre d'obtenir des images plus précises des défauts. Nous pourrions imaginer une procédure en deux étapes : une première étape en back-scattering couvrant une grande zone rapidement, puis une seconde étape en full-scattering en complément dans les zones où la résolution de l'image ne permet pas de conclure de manière satisfaisante. Il nous semble que le principal obstacle expérimental pour une imagerie en full-scattering est le positionnement relatif des capteurs, qui doit être réalisé avec précision.
  - Une acquisition avec des capteurs sans contact permettrait de mettre en évidence l'influence des capteurs au contact sur les résultats de la méthode d'inversion. En effet, le montage réalisé dans ce manuscrit est simple et permet une acquisition rapide, ce qui n'est pas le cas d'une acquisition avec des lasers en émission et réception. S'il est mis en évidence que le capteur au contact détériore grandement la qualité de la reconstruction, il faudra peut-être envisager un nouveau dispositif.
  - Nous n'avons étudié que des plaques épaisses (épaisseur de l'ordre de 10 mm), ce qui nous permettait de travailler avec des fréquences de l'ordre de 1 MHz. Pour des plaques plus fines, il nous faudrait utiliser des fréquences plus élevées pour avoir un nombre équivalent de modes propagatifs, ce qui implique une atténuation des signaux plus importante. L'épaisseur de la plaque à imager risque donc d'être un paramètre déterminant pour l'applicabilité de la méthode. Des essais pour des plaques d'épaisseur variée sont à réaliser.
  - Citons pour finir l'influence du matériau. Les résultats obtenus sont bien meilleurs pour la plaque en acier que pour celle en aluminium. Nous soupçonnons que cela soit dû à une inhomogénéité inhérente à la plaque en aluminium. Une étude plus poussée pour d'autres plaques, métalliques ou non, permettrait de mieux comprendre pour quels matériaux la méthode est applicable.

- **Extension à d'autres types d'obstacles.** Dans ce manuscrit, nous nous sommes limités aux obstacles de type Dirichlet et Neumann. De nombreux auteurs se sont intéressés aux conditions d'impédance (ou de type Robin). Le travail présenté ici devrait s'y adapter aisément [18, 80]. D'autres obstacles intéressants en pratique n'entrent pas a priori dans ces catégories. Par exemple, nous avons dans une première approximation considéré la corrosion comme étant une perte d'épaisseur locale. Nous pourrions la modéliser par un changement de milieu. Ainsi, le défaut ne serait plus caractérisé par une condition de bord mais par des coefficients matériau différents. De même, les défauts de collage sont problématiques industriellement car il s'agit de collages de mauvaise qualité. On ne peut pas les modéliser par des fissures à l'interface et il serait intéressant d'étendre notre méthode à ce type de défauts.
- **Autres géométries de guide d'ondes.** La méthode a été développée pour les guides d'ondes fermés acoustiques et élastiques. Il serait intéressant de l'appliquer à des structures plus compliquées. Nous pouvons par exemple étudier le cas d'un guide enfoui, cas où un guide d'ondes élastiques est inclus dans un domaine infini, acoustique en général. L'analyse des modes guidés est plus compliquée dans ce cas. De manière similaire, un tuyau rempli d'un fluide est un cas intéressant pour les applications. Nous pourrions par exemple chercher à localiser un dépôt à l'intérieur d'une canalisation. Industriellement, de nombreux défauts se trouvent à la jonction (par exemple dans une soudure) entre deux guides de propriétés éventuellement différentes. Ce cas nécessite une extension non triviale.
- **Utilisation d'une méthode d'échantillonnage plus raffinée.** Nous nous sommes concentrés dans cette thèse sur la Linear Sampling Method, mais le même travail aurait pu être réalisé avec un de ses raffinements, comme par exemple la méthode de factorisation ou la "Generalized Linear Sampling Method" (GLSM) [7]. L'applicabilité de la LSM ayant été démontrée, il peut être intéressant d'essayer ces méthodes qui peuvent offrir une résolution du défaut légèrement meilleure.

Ensuite, les résultats présentés pour la reconstruction de défauts avec les méthodes couplant quasi-réversibilité et lignes de niveau ne sont pas totalement aboutis. La deuxième méthode de quasi-réversibilité en particulier offre de nombreuses possibilités d'amélioration :

- **Montée en fréquence.** Nos résultats d'identification ont été obtenus pour des fréquences faibles, correspondants à quelques modes propagatifs. Le critère local d'unicité du défaut indique que plus la fréquence sera élevée et plus la reconstruction du défaut sera difficile. Nous aimerions comprendre plus précisément le rôle joué par la fréquence.
- **Choix des paramètres.** Comme mentionné dans le chapitre 6, nous avons déterminé d'une façon un peu empirique les paramètres  $\eta$  et  $\delta$  de la deuxième formulation ou encore le second membre du problème de Poisson, mais ces choix ne sont pas a priori optimaux. D'autres stratégies pourraient s'avérer plus efficaces. En particulier, nous avons observé que la valeur de  $\eta$  influençait beaucoup la convergence de l'approche "extérieure".
- **Plusieurs sollicitations.** Une autre piste est l'utilisation de plusieurs jeux de données, soit pour plusieurs sollicitations. Il faudrait alors trouver une façon d'exploiter ces données pour améliorer l'image du défaut ou accélérer la convergence. L'utilisation de plusieurs sollicitations s'est avérée utile dans le cas du problème de Laplace (fréquence

nulle), où des lignes de niveau 0 parasites (extérieures à l'obstacle) peuvent apparaître [60]. Ce problème n'a pas été observé dans le cas de l'équation de Helmholtz et l'utilisation de plusieurs jeux de données dans nos essais numériques a eu tendance à freiner l'algorithme, c'est pourquoi nous n'avons pas cherché plus avant dans cette direction. Toutefois, une utilisation astucieuse des données pourrait améliorer la vitesse de convergence et la précision de la méthode.

L'utilisation de plusieurs fréquences semble quant à elle prometteuse : une fréquence basse est utilisée pour obtenir une première approximation du défaut puis, une fois que les lignes de niveau se sont arrêtées pour cette fréquence, les données associées à une fréquence plus élevée sont utilisées pour affiner l'image du défaut. Cette stratégie est inspirée de [50].

- **Autres types de défauts.** Dans le manuscrit, nous n'avons considéré que des obstacles de type Dirichlet. Le cas de la plasticité a déjà été étudié dans [28] et le cas des défauts de type Neumann a été abordé dans [60], mais les défauts de type Neumann n'ont été correctement identifiés que dans des cas particuliers (forme du défaut proche d'un disque). La généralisation de notre méthode de lignes de niveau à des défauts de type Neumann nous semble être une étape importante avant de pouvoir essayer de l'appliquer à des données réelles.



## ANNEXE

### A

# EXPRESSION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE POUR UNE SOLLICITATION AU BORD

## A.1 Guide d'ondes acoustiques

Soit  $\mathcal{D}(\overline{W})$  l'ensemble des restrictions à  $W$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , et soit  $L^2_{\text{loc}}(W)$  l'ensemble des fonctions  $u$  définies sur  $W$  telles que  $\varphi u \in L^2(W)$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{W})$ . Nous allons démontrer ici que, pour  $y = (y_S, y_3)$ , avec  $y_S \in \partial\Sigma$ , l'unique solution  $G(\cdot, y)$  dans  $L^2_{\text{loc}}(W)$  du problème

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)G(\cdot, y) = 0 & \text{dans } W, \\ \partial_\nu G(\cdot, y) = \delta_{y_3} & \text{sur } \Gamma, \\ & (CR), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

est donnée par

$$G(x, y) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{i\beta_n |x_3 - y_3|}}{2i\beta_n} \theta_n(x_S) \theta_n(y_S). \quad (\text{A.2})$$

Considérons pour cela  $G$  solution de (A.1) et une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{W})$  telle que  $\partial_\nu \varphi = 0$  sur  $\Gamma$ . Nous supposons de plus que le support de  $\varphi$  est inclus dans  $\Sigma \times (-R, R) =: W_R$  et que  $y_3 \in (-R, R)$  pour  $R > 0$ , et nous introduisons  $\Omega$  un domaine régulier tel que  $\overline{W_R} \subset \Omega$ . Notons que  $G$  et  $\Delta G$  sont des éléments de  $L^2_{\text{loc}}(W)$ , ce qui implique que

$$\int_W \Delta G \varphi \, dx + k^2 \int_W G \varphi \, dx = 0.$$

Étant donné que  $G$  et  $\Delta G$  sont aussi des éléments de  $L^2(\Omega)$  et que  $\varphi \in H^2(\Omega)$ , nous pouvons appliquer une formule de Green dans le domaine  $\Omega$  comme dans [103], ce qui nous donne

$$\int_{\Omega} \Delta G \varphi \, dx = \int_{\Omega} G \Delta \varphi \, dx + \langle \partial_{\nu} G, \varphi \rangle_{\partial\Omega} - \langle G, \partial_{\nu} \varphi \rangle_{\partial\Omega},$$

où le premier crochet désigne la dualité entre  $H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$  et  $H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ , et le second désigne celle entre  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Les intégrales sur  $\Omega$  coïncidant avec celles sur  $W$ , nous obtenons

$$- \int_W G(\Delta \varphi + k^2 \varphi) \, dx = \langle \delta_y, \varphi \rangle_{\Gamma}, \quad (\text{A.3})$$

où le crochet désigne la dualité entre  $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  et  $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Posons à présent  $\varphi = \varphi_n$  avec  $\varphi_n(x_S, x_3) = \theta_n(x_S) \psi(x_3)$ , pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  de support inclus dans  $(-R, R)$ . Pour tout  $R > 0$ ,  $G \in L^2(\Sigma \times (-R, R))$ . Or, cet espace coïncide avec  $L^2((-R, R), L^2(\Sigma))$  et les  $\theta_n$  forment une base complète de  $L^2(\Sigma)$ . Nous pouvons donc, presque partout en  $x_3$  décomposer  $G(x)$  en

$$G(x_S, x_3) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(x_3) \theta_n(x_S)$$

et

$$\|G\|_{L^2(\Sigma \times (-R, R))}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|_{L^2(-R, R)}^2 < +\infty.$$

En particulier,  $a_n \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  pour tout  $n$ . En injectant les expressions de  $G$  et  $\varphi$  dans (A.3) et en utilisant le fait que  $\Delta_{\perp} \theta_n = k_n^2 \theta_n$ , et  $\beta_n^2 = k^2 - k_n^2$ , nous avons finalement : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$- \int_{\mathbb{R}} a_n(x_3) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} + \beta_n^2 \psi \right) dx_3 = \theta_n(y_S) \langle \delta_{y_3}, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Cette équation est équivalente à dire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  est solution de

$$- \left( \frac{\partial^2 a_n}{\partial x_3^2} + \beta_n^2 a_n \right) = \theta_n(y_S) \delta_{y_3}$$

au sens des distributions dans  $\mathbb{R}$ . Étant donné que  $\beta_n \neq 0$  pour tout  $n$ , nous en déduisons aisément que

$$a_n(x_3) = - \frac{\theta_n(y_S)}{2i\beta_n} e^{i\beta_n|x_3-y_3|} + a_n^+ e^{i\beta_n x_3} + a_n^- e^{-i\beta_n x_3}.$$

Les conditions de radiation impliquent que  $a_n^+ = a_n^- = 0$  pour tout  $n$ , ce qui nous permet d'obtenir l'expression de  $G(\cdot, y)$  annoncée. Inversement,  $G(\cdot, y)$  est solution de (A.1). Enfin, le fait que  $G(\cdot, y) \in L^2_{\text{loc}}(W)$  est une conséquence directe de l'expression des  $a_n$ .

## A.2 Guide d'ondes élastiques

Nous cherchons donc  $G(\cdot, y)$ , dont les colonnes sont solution, pour  $j \in \{t_1, t_2, t_3\}$ , de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_3} G^j(\cdot, y) = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} G^j(\cdot, y) \quad \text{dans } W, \\ \left. \begin{array}{l} \sigma_S(G_Y^j) \boldsymbol{\nu}_S = \delta_y \begin{pmatrix} \delta_{t_1 j} \\ \delta_{t_2 j} \end{pmatrix} \\ G_{t_S}^j \cdot \boldsymbol{\nu}_S = -\delta_y \delta_{t_3 j} \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma, \\ (CR), \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

et pour  $j \in \{u_1, u_2, u_3\}$ , de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_3} G^j(\cdot, y) = \begin{pmatrix} 0 & F_Y \\ F_X & 0 \end{pmatrix} G^j(\cdot, y) \quad \text{dans } W, \\ G_{u_S}^j = \delta_y \begin{pmatrix} \delta_{u_1 j} \\ \delta_{u_2 j} \end{pmatrix} \\ G_{u_3}^j = \delta_y \delta_{u_3 j} \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\text{A.5})$$

(CR).

Rappelons que les opérateurs  $F_X$  et  $F_Y$ , ainsi que leur domaine  $D(F_X)$  et  $D(F_Y)$ , sont définis dans la section 4.1.

Nous nous concentrons sur la solution du problème (A.4). Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant, inspiré de [9] :

**Lemme A.1**

Soit  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\tilde{\mathcal{X}}$  et  $\tilde{\mathcal{Y}}$  des fonctions suffisamment régulières. Alors

$$\begin{aligned} (F_Y \mathcal{Y} | \tilde{\mathcal{Y}})_\Sigma - (\mathcal{Y} | F_Y \tilde{\mathcal{Y}})_\Sigma &= \int_{\partial \Sigma} \left( \sigma_S(\tilde{\mathcal{Y}}) \nu_S \cdot \mathbf{u}_S - \sigma_S(\mathcal{Y}) \nu_S \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S \right) ds(x) \\ (F_X \mathcal{X} | \tilde{\mathcal{X}})_\Sigma - (\mathcal{X} | F_X \tilde{\mathcal{X}})_\Sigma &= \int_{\partial \Sigma} \left( \mathbf{t}_S \cdot \nu_S \tilde{u}_3 - \tilde{\mathbf{t}}_S \cdot \nu_S u_3 \right) ds(x). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Considérons la première égalité et posons  $\mathcal{Y} = (\mathbf{u}_S \ t_3)^T$ ,  $\tilde{\mathcal{Y}} = (\tilde{\mathbf{u}}_S \ \tilde{t}_3)^T$ . Nous avons alors

$$(F_Y \mathcal{Y} | \tilde{\mathcal{Y}})_\Sigma = - \int_\Sigma (\operatorname{div}_S \sigma_S(\mathcal{Y}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}_S) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S ds(x) - \int_\Sigma (\alpha \operatorname{div}_S(\mathbf{u}_S) + \frac{\alpha}{\lambda} t_3) \tilde{t}_3 ds(x).$$

En utilisant la formule de Stokes sur la surface  $\Sigma$

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (\operatorname{div}_S \sigma_S(\mathcal{Y}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S + \sigma_S(\mathcal{Y}) : \varepsilon_S(\tilde{\mathbf{u}}_S)) ds(x) &= \int_\Sigma \operatorname{div}_S(\sigma_S(\mathcal{Y}) \tilde{\mathbf{u}}_S) ds(x) \\ &= \int_{\partial \Sigma} (\sigma_S(\mathcal{Y}) \nu_S) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S ds(x), \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} \sigma_S(\mathcal{Y}) : \varepsilon_S(\tilde{\mathbf{u}}_S) + \alpha (\operatorname{div}_S \tilde{\mathbf{u}}_S) t_3 &= \sigma_S(\tilde{\mathcal{Y}}) : \varepsilon_S(\mathbf{u}_S) + \alpha (\operatorname{div}_S \mathbf{u}_S) \tilde{t}_3 \\ &= 2\mu \varepsilon_S(\tilde{\mathbf{u}}_S) : \varepsilon_S(\mathbf{u}_S) + \delta \operatorname{div}_S \tilde{\mathbf{u}}_S \operatorname{div}_S \mathbf{u}_S, \end{aligned}$$

et en utilisant la condition de bord sur  $\tilde{\mathcal{Y}}$ , nous obtenons l'égalité

$$(F_Y \mathcal{Y} | \tilde{\mathcal{Y}})_\Sigma - (\mathcal{Y} | F_Y \tilde{\mathcal{Y}})_\Sigma = \int_{\partial \Sigma} \left( \sigma_S(\tilde{\mathcal{Y}}) \nu_S \cdot \mathbf{u}_S - \sigma_S(\mathcal{Y}) \nu_S \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S \right) ds(x).$$

La deuxième égalité se démontre de la même façon.  $\square$

Écrivons la formulation variationnelle associée à (A.4) : soit  $\mathcal{D}(\overline{W})$  l'ensemble des restrictions à  $W$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ , et soient  $\tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{\mathbf{t}}_S \ \tilde{u}_3)^T \in \mathcal{D}(\overline{W})$  et  $\tilde{\mathcal{Y}} = (\tilde{\mathbf{u}}_S \ \tilde{t}_3)^T \in \mathcal{D}(\overline{W})$ . À partir de la première équation de (A.4), nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_W \left( \frac{\partial G_X^j}{\partial x_3} \cdot \tilde{\mathcal{Y}} - F_Y G_Y^j \cdot \tilde{\mathcal{Y}} \right) dx = 0, \\ \int_W \left( \frac{\partial G_Y^j}{\partial x_3} \cdot \tilde{\mathcal{X}} - F_X G_X^j \cdot \tilde{\mathcal{X}} \right) dx = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$



Nous cherchons à écrire le problème faible vérifié par  $G^j$  :

$$\begin{aligned} \int_W F_Y G_Y^j \cdot \tilde{\mathbf{Y}} &= \int_{\mathbb{R}} (F_Y G_Y^j | \tilde{\mathbf{Y}})_{\Sigma_{x_3}} dx_3 \\ \int_W F_X G_X^j \cdot \tilde{\mathbf{X}} &= \int_{\mathbb{R}} (F_X G_X^j | \tilde{\mathbf{X}})_{\Sigma_{x_3}} dx_3. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme A.1,

$$\begin{aligned} (F_Y G_Y^j | \tilde{\mathbf{Y}})_{\Sigma} - (G_Y^j | F_Y \tilde{\mathbf{Y}})_{\Sigma} &= - \int_{\partial\Sigma} \sigma_S(G_Y^j) \boldsymbol{\nu}_S \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S ds(x) \\ (F_X G_X^j | \tilde{\mathbf{X}})_{\Sigma} - (G_X^j | F_X \tilde{\mathbf{X}})_{\Sigma} &= \int_{\partial\Sigma} G_{t_S}^j \cdot \boldsymbol{\nu}_S \tilde{u}_3 ds(x). \end{aligned}$$

Notons que le lemme est appliqué au sens faible : la régularité de  $\tilde{\mathbf{X}}$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}$  permet d'appliquer le lemme à  $G_X^j$  et  $G_Y^j$  qui ne vérifient pas les hypothèses.

Nous en déduisons, en remplaçant dans les équations (A.6),

$$\begin{cases} \int_W \frac{\partial G_X^j}{\partial x_3} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} dx = \int_{\mathbb{R}} \left( (G_Y^j | F_Y \tilde{\mathbf{Y}})_{\Sigma_{x_3}} - \int_{\partial\Sigma} \sigma_S(G_Y^j) \boldsymbol{\nu}_S \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S ds(x) \right) dx_3 \\ \int_W \frac{\partial G_Y^j}{\partial x_3} \cdot \tilde{\mathbf{X}} dx = \int_{\mathbb{R}} \left( (G_X^j | F_X \tilde{\mathbf{X}})_{\Sigma_{x_3}} + \int_{\partial\Sigma} G_{t_S}^j \cdot \boldsymbol{\nu}_S \tilde{u}_3 ds(x) \right) dx_3, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \int_W \left( G_X^j \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{Y}}}{\partial x_3} + G_Y^j \cdot F_Y \tilde{\mathbf{Y}} \right) dx = \int_{\Gamma} \sigma_S(G_Y^j) \boldsymbol{\nu}_S \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S ds(x) \\ - \int_W \left( G_Y^j \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{X}}}{\partial x_3} + G_X^j \cdot F_X \tilde{\mathbf{X}} \right) dx = \int_{\Gamma} G_{t_S}^j \cdot \boldsymbol{\nu}_S \tilde{u}_3 ds(x). \end{cases}$$

Supposons à présent que  $\tilde{\mathbf{X}} = \varphi(x_3) \boldsymbol{\mathcal{X}}_n(x_S)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}} = \varphi(x_3) \boldsymbol{\mathcal{Y}}_n(x_S)$ , avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} G_X^j(x, y) = \sum_m a_m^j(x_3) \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(x_S) \\ G_Y^j(x, y) = \sum_m b_m^j(x_3) \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S), \end{cases}$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{cases} \int \sum_m \int_W a_m^j(x_3) \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(x_S) \cdot \boldsymbol{\mathcal{Y}}_n(x_S) \frac{d\varphi(x_3)}{dx_3} + i\beta_n b_m^j(x_3) \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}}_n(x_S) \varphi(x_3) dx = \mathbf{u}_S^n(y_S) \cdot \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \end{pmatrix} < \delta_{y_3}, \varphi > \\ \int \sum_m \int_W b_m^j(x_3) \boldsymbol{\mathcal{Y}}_m(x_S) \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}}_n(x_S) \frac{d\varphi(x_3)}{dx_3} + i\beta_n a_m^j(x_3) \boldsymbol{\mathcal{X}}_m(x_S) \cdot \boldsymbol{\mathcal{Y}}_n(x_S) \varphi(x_3) dx = u_3^n(y_S) \delta_{6j} < \delta_{y_3}, \varphi >. \end{cases}$$

Nous en déduisons le système d'équations suivant, grâce à la bi-orthogonalité des fonctions transverses :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \left( a_n^j \frac{d\varphi}{dx_3} + i\beta_n b_n^j \varphi \right) dx_3 = \mathbf{u}_S^n(y_S) \cdot \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \end{pmatrix} < \delta_{y_3}, \varphi > \\ \int_{\mathbb{R}} \left( b_n^j \frac{d\varphi}{dx_3} + i\beta_n a_n^j \varphi \right) dx_3 = u_3^n(y_S) \delta_{6j} < \delta_{y_3}, \varphi > \end{cases}$$

$a_n^j$  et  $b_n^j$  vérifient donc les problèmes suivants au sens des distributions :

$$\begin{cases} -a_n^{j'} + i\beta_n b_n^j = (u_1^n(y_S)\delta_{1j} + u_2^n(y_S)\delta_{2j})\delta_{y_3} \\ -b_n^{j'} + i\beta_n a_n^j = u_3^n(y_S)\delta_{6j}\delta_{y_3} \end{cases}$$

Distinguons à présent deux cas, suivant que  $j$  soit égal à  $t_1$  ou  $t_2$  d'une part ou que  $j$  soit égal à  $t_3$  d'autre part, ce qui correspond à la distinction entre une contrainte dans le plan de la section transverse et une contrainte tangentielle :

### Contrainte dans le plan transverse

Le système à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} a_n^{j'} - i\beta_n b_n^j = -u_j^n(y_S)\delta_{y_3} \\ b_n^{j'} - i\beta_n a_n^j = 0. \end{cases}$$

Nous allons procéder comme dans [30].  $b_n^j$  est alors solution de l'équation différentielle suivante :

$$b_n^{j''} + \beta_n^2 b_n^j = -i\beta_n u_j^n(y_S)\delta_{y_3}. \quad (\text{A.7})$$

Nous avons alors

$$\begin{cases} b_n^j(x_3) = A_n^- e^{i\beta_n(x_3-y_3)} + B_n^- e^{-i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 < y_3 \\ b_n^j(x_3) = A_n^+ e^{i\beta_n(x_3-y_3)} + B_n^+ e^{-i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 > y_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n^j(x_3) = A_n^- e^{i\beta_n(x_3-y_3)} - B_n^- e^{-i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 < y_3 \\ a_n^j(x_3) = A_n^+ e^{i\beta_n(x_3-y_3)} - B_n^+ e^{-i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 > y_3. \end{cases}$$

Par ailleurs, les conditions de radiation impliquent que  $A_n^- = B_n^+ = 0$ . D'où

$$\begin{cases} b_n^j(x_3) = B_n e^{-i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 < y_3 \\ b_n^j(x_3) = A_n e^{i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 > y_3. \end{cases}$$

Nous allons obtenir les constantes  $A_n$  et  $B_n$  en injectant  $b_n^j$  dans (A.7) : Notons d'abord que

$$b_n^{j'} = (A_n - B_n)\delta_{y_3} + \begin{cases} -B_n i\beta_n e^{-i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 < y_3 \\ A_n i\beta_n e^{i\beta_n(x_3-y_3)} & x_3 > y_3 \end{cases}$$

$$b_n^{j''} = (A_n - B_n)\delta'_{y_3} + i\beta_n(A_n + B_n)\delta_{y_3} - \beta_n^2 b_n^j.$$

Il vient que  $A_n = B_n = -\frac{1}{2}u_j^n(y_S)$  et

$$\begin{cases} b_n^j(x_3) = -\frac{u_j^n(y_S)}{2} e^{i\beta_n|x_3-y_3|} \\ a_n^j(x_3) = -s(x_3 - y_3) \frac{u_j^n(y_S)}{2} e^{i\beta_n|x_3-y_3|}. \end{cases}$$

**Contrainte tangentielle**

Le système vérifié à présent est :

$$\begin{cases} a_n^{t_3'} - i\beta_n b_n^{t_3} = 0 \\ b_n^{t_3'} - i\beta_n a_n^{t_3} = -u_3^n(y_S)\delta_{y_3} \end{cases}$$

La résolution est alors la même que précédemment, en inversant les rôles de  $a_n^j$  et  $b_n^j$ . D'où

$$\begin{cases} a_n^{t_3}(x_3) = -\frac{u_3^n(y_S)}{2} e^{i\beta_n|x_3-y_3|} \\ b_n^{t_3}(x_3) = -s(x_3 - y_3) \frac{u_3^n(y_S)}{2} e^{i\beta_n|x_3-y_3|} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant exprimer la restriction de  $G$  aux trois colonnes correspondants à  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$  :

$$G^{\mathbf{t}} = -\sum_{n>0} \begin{pmatrix} s(x_3 - y_3)t_1^n(x_S)u_1^n(y_S) & s(x_3 - y_3)t_1^n(x_S)u_2^n(y_S) & t_1^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ s(x_3 - y_3)t_2^n(x_S)u_1^n(y_S) & s(x_3 - y_3)t_2^n(x_S)u_2^n(y_S) & t_2^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ s(x_3 - y_3)u_3^n(x_S)u_1^n(y_S) & s(x_3 - y_3)u_3^n(x_S)u_2^n(y_S) & u_3^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ u_1^n(x_S)u_1^n(y_S) & u_1^n(x_S)u_2^n(y_S) & s(x_3 - y_3)u_1^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ u_2^n(x_S)u_1^n(y_S) & u_2^n(x_S)u_2^n(y_S) & s(x_3 - y_3)u_2^n(x_S)u_3^n(y_S) \\ t_3^n(x_S)u_1^n(y_S) & t_3^n(x_S)u_2^n(y_S) & s(x_3 - y_3)t_3^n(x_S)u_3^n(y_S) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta_n|x_3-y_3|}}{2}$$

**Remarque A.1**

La démarche est la même pour résoudre le problème (A.5) (déplacement imposé au bord). On obtient alors l'expression donnée en (4.17).

## ANNEXE

### B

# CONDITIONNEMENT DES MATRICES DE VANDERMONDE À COEFFICIENTS SUR LE CERCLE UNITÉ

Cette annexe est dédiée à une démonstration du théorème sur la majoration du conditionnement des matrices de Vandermonde à coefficients sur le disque unité, énoncé dans [107]. Nous considérons donc une matrice de Vandermonde rectangulaire  $V$ , de la forme

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{2\pi i f_0} & e^{2\pi i f_1} & \dots & e^{2\pi i f_{N-1}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ e^{2\pi i (M-1) f_0} & e^{2\pi i (M-1) f_1} & \dots & e^{2\pi i (M-1) f_{N-1}} \end{pmatrix},$$

où les  $f_n$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  sont réels et  $M \geq N$ .

Dans le cas où  $M = N$ , le déterminant se calcule aisément :

$$\det(V) = \prod_{n \neq n'} (e^{2\pi i f_n} - e^{2\pi i f_{n'}}),$$

ce qui implique que  $V$  est inversible si et seulement si  $f_n - f_{n'}$  n'est pas un entier pour tout  $n \neq n'$ . Nous en déduisons, dans le cas où  $M \geq N$ , que  $V$  est injective si  $f_n - f_{n'}$  n'est pas un entier pour tout  $n \neq n'$ , ce qui implique que  $V^*V$  est alors inversible.

Intéressons-nous à présent au conditionnement de  $V$ . Remarquons tout d'abord que, pour  $n, n' = 0, \dots, N-1$ , nous avons

$$(V^*V)_{nn'} = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-2\pi i (f_n - f_{n'})m} \tag{B.1}$$

$$= \begin{cases} M & \text{si } f_n - f_{n'} \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1 - e^{-2\pi i (f_n - f_{n'})M}}{1 - e^{-2\pi i (f_n - f_{n'})}} & \text{si } f_n - f_{n'} \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{B.2}$$

Nous en déduisons que, si  $M/N$  est entier et que les  $f_n$  sont répartis de manière uniforme sur le segment unité  $[0, 1]$ , alors

$$V^*V = MI_N,$$

où  $I_N$  désigne la matrice identité de taille  $N \times N$ . Cela implique que  $V$  aurait alors le meilleur conditionnement possible, à savoir 1. Dans le cas général, nous n'avons pas trouvé d'expression du conditionnement en fonction de  $M$  et de  $f_n$ , mais une borne supérieure existe :

### **Théorème B.1**

Soit la distance minimale, définie par

$$\Delta = \min_{\substack{n, n'=0, \dots, N-1 \\ n \neq n'}} d_w(f_n, f_{n'}),$$

où

$$d_w(f, g) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |f - g + q|.$$

Si cette dernière vérifie  $M > 1/\Delta + 1$ , alors

$$\kappa(V) \leq \sqrt{\frac{M + 1/\Delta - 1}{M - 1/\Delta - 1}}.$$

*Démonstration.* Commençons par introduire la fonction de Beurling,

$$B(t) = \left( \frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^2 \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(t-j)^2} - \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(t-j)^2} + \frac{2}{t} \right), \quad (\text{B.3})$$

qui est telle que la fonction  $(B - \text{sgn})$  est intégrable et vérifie

$$B(t) - \text{sgn}(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} B(t) - \text{sgn}(t) dt = 1.$$

Introduisons par ailleurs, pour un intervalle  $[a, b]$  et  $\delta > 0$ , le majorant et le minorant de Selberg

$$S_+(t) = \frac{1}{2}B(\delta(t-a)) + \frac{1}{2}B(\delta(b-t)), \quad S_-(t) = -\frac{1}{2}B(\delta(a-t)) - \frac{1}{2}B(\delta(t-b)).$$

Les deux fonctions  $S_{\pm}$  sont elles aussi intégrables et satisfont

$$S_-(t) \leq \chi_{[a,b]}(t) \leq S_+(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\pm}(t) dt = b - a \pm \frac{1}{\delta},$$

où  $\chi_{[a,b]}$  désigne la fonction indicatrice de l'intervalle  $[a, b]$ . De plus, les transformées de Fourier de  $B$  et  $S_{\pm}$  vérifient  $\widehat{B}(x) = 0$  pour  $|x| \geq 1$ , et  $\widehat{S}_{\pm}(x) = 0$  pour  $|x| \geq \delta$ , ce qui implique en particulier que  $B$  et  $S_{\pm}$  sont à support non borné. Nous utilisons ici la définition de la transformée de Fourier

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i x t} dt.$$

Les propriétés citées précédemment des fonctions  $B$  et  $S_{\pm}$  ont déjà été montrées, par exemple, dans [110]. Nous aurons besoin de la majoration suivante : il existe  $C > 0$  (qui dépend de  $a$ ,  $b$  et  $\delta$ ) tel que

$$|S_{\pm}(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.4})$$

Prouvons d'abord qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$0 \leq B(t) - \operatorname{sgn}(t) \leq \frac{c}{1+t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.5})$$

D'après l'expression de  $B$  et l'identité

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-j)^2} = \left( \frac{\pi}{\sin \pi t} \right)^2,$$

nous déduisons l'expression

$$B(t) = 1 + 2 \left( \frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{t} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(t+j)^2} \right),$$

dont nous avons besoin pour  $t > 0$ . En effet,

$$\frac{1}{t+1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+u)^2} du \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(t+j)^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+u)^2} du = \frac{1}{t}.$$

Pour  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} B(t) - \operatorname{sgn}(t) &\leq 2t^2 \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) \\ &\leq \frac{2}{1+t^2}, \end{aligned}$$

et pour  $t \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} B(t) - \operatorname{sgn}(t) &\leq \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) \\ &\leq \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{1+t^2}, \end{aligned}$$

ce qui implique (B.5) pour  $t > 0$ . Pour  $t < 0$  nous allons utiliser l'expression

$$B(t) = -1 + 2 \left( \frac{\sin \pi t}{\pi} \right)^2 \left( \frac{1}{t} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(t-j)^2} \right).$$

Nous en déduisons que

$$-\frac{1}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-u)^2} du \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(t-j)^2} \leq \frac{1}{t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-u)^2} du = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t},$$

ce qui implique (B.5) pour  $t < 0$ . Pour prouver (B.4), notons que

$$S_+(t) = \frac{1}{2} (B(\delta(t-a)) - \operatorname{sgn}(\delta(t-a))) + \frac{1}{2} (B(\delta(b-t)) - \operatorname{sgn}(\delta(b-t)))$$

$$+\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(\delta(t-a)) + \operatorname{sgn}(\delta(b-t))).$$

Nous appliquons alors (B.5) aux deux premières fonctions, la troisième s'annulant en dehors de  $[a, b]$ . La preuve s'obtient de manière analogue pour  $S_-$ . Fixons à présent  $a = 0$ ,  $b = M - 1$  et  $\delta = \Delta$  dans la définition de  $S_{\pm}$ . Nous considérons alors la fonction  $v(x) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-2\pi i f_n x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout vecteur  $U = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ . Premièrement, nous avons

$$\sum_{m=0}^{M-1} |v(m)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} u_n \bar{u}_{n'} e^{-2\pi i (f_n - f_{n'}) m},$$

ce qui, d'après (B.2) implique

$$\sum_{m=0}^{M-1} |v(m)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} (V^* V)_{nn'} u_n \bar{u}_{n'} = \|VU\|^2.$$

Nous avons par ailleurs

$$\sum_{m=0}^{M-1} |v(m)|^2 = \langle \chi_{[0, M-1]} D, |v|^2 \rangle,$$

où  $D$  désigne le peigne de Dirac  $D = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_l$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre la distribution  $\chi_{[0, M-1]} D$  et la fonction  $\mathcal{C}^\infty \psi : x \mapsto |v(x)|^2$ . Notons que le peigne de Dirac peut être appliqué aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que leur produit avec la fonction  $x \mapsto 1 + x^2$  est borné : En effet, soit  $\varphi$  satisfaisant les hypothèses précédentes, et soit  $C > 0$  tel que  $(1 + x^2) |\varphi(x)| \leq C$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} |\langle D, \varphi \rangle| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) \frac{\varphi(n)}{1 + n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{C}{1 + n^2}. \end{aligned}$$

La série ainsi obtenue est convergente, ce qui montre que  $\langle D, \varphi \rangle$  est bien défini. Dans notre cas, la fonction  $\psi$  étant bornée, l'inégalité (B.4) pour  $S_+$  implique que  $\langle S_+ D, \psi \rangle = \langle D, S_+ \psi \rangle$  est bien défini. Puisque nous avons  $\chi_{[0, M-1]}(t) \leq S_+(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , nous obtenons que

$$\sum_{m=0}^{M-1} |v(m)|^2 \leq \langle D, S_+ |v|^2 \rangle.$$

Étant donné que le peigne de Dirac est sa propre transformée de Fourier, à savoir  $D = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i l x}$ , nous obtenons que

$$\sum_{m=0}^{M-1} |v(m)|^2 \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle e^{-2\pi i l x}, S_+ |v|^2 \rangle$$

et, d'après la définition de  $v$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} |v(m)|^2 &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_n \bar{u}_{n'} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i l x} S_+(x) e^{-2\pi i (f_n - f_{n'}) x} dx \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} u_n \bar{u}_{n'} \hat{S}_+(f_n - f_{n'} + l) = \hat{S}_+(0) \sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^2. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de fait que, d'après la définition de  $\Delta$ , nous avons

$1 > \inf_{l \in \mathbb{Z}} |f_n - f_{n'} + l| \geq \Delta$  pour  $n \neq n'$ , tandis que le support de  $\widehat{S}_+$  est inclus dans  $[-\Delta, \Delta]$ .  
Puisque

$$\widehat{S}_+(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_+(t) dt = M - 1 + 1/\Delta,$$

nous obtenons finalement que

$$\sum_{m=0}^{M-1} |v(m)|^2 \leq (M - 1 + 1/\Delta) \|U\|^2.$$

En procédant de manière analogue avec l'inégalité  $S_-(t) \leq \chi_{[0, M-1]}(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , nous obtenons que, pour tout vecteur  $U \in \mathbb{C}^N$

$$(M - 1 - 1/\Delta) \|U\|^2 \leq \|VU\|^2 \leq (M - 1 + 1/\Delta) \|U\|^2,$$

ce qui achève la démonstration. □





## ANNEXE

### C

# INVERSIBILITÉ DE LA MATRICE DES MODES DE LAMB

Considérons un guide d'ondes élastiques de dimension 2, de section  $(0, d)$ , et considérons dans un premier temps que nos sources sont selon la contrainte normale  $t_S$  et nos mesures selon la composante normale  $u_S$  du déplacement. Cela revient à avoir  $Q = 1$  et

$$\zeta_u = \xi_\sigma = \begin{pmatrix} \delta_{x_S d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dans (4.39) et (4.40), où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker.

Nous supposons par ailleurs que l'hypothèse 9 est vérifiée, à savoir  $\lambda > 0$ . La matrice des modes est la matrice diagonale  $T$ , de terme général  $u_S^n(d)$  :

$$T = \begin{pmatrix} u_S^0(d) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_S^1(d) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u_S^{P-1}(d) \end{pmatrix}.$$

Contrairement à l'acoustique, cette matrice peut ne pas être inversible : il est possible que l'amplitude d'un mode  $u_S^n(d)$  soit nulle à la fréquence considérée. Nous cherchons donc à déterminer les fréquences pour lesquelles au moins un des  $u_S^n(d)$  est nul. Nous pouvons exprimer analytiquement les modes de Lamb [9] : commençons par rappeler la relation de dispersion [122]

$$(\alpha_s^2 - \beta^2)^2 \cos\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) \sin\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) + 4\beta^2 \alpha_p \alpha_s \sin\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) = 0, \quad (\text{C.1})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_s^2 &= k_s^2 - \beta^2, & \alpha_p^2 &= k_p^2 - \beta^2, \\ k_s &= \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, & k_p &= \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}, \end{aligned}$$

$\beta$  le nombre d'onde du mode considéré et  $\kappa$  le terme de phase. Celui-ci est égal à 0 si le mode est symétrique et  $\pi/2$  s'il est antisymétrique. Étant donné que si  $\beta$  est le nombre d'onde associé à un mode, alors  $-\beta$  est associé à un mode se propageant en sens inverse, nous considérons sans perte de généralité dans tout ce qui suit que  $\beta > 0$ .

Nous avons alors l'expression suivante pour la composante normale du déplacement :

$$u_S(x_S) = -2A_p\alpha_p \sin\left(\alpha_p\left(x_S - \frac{d}{2}\right) + \kappa\right) + 2A_s\beta \sin\left(\alpha_s\left(x_S - \frac{d}{2}\right) + \kappa\right).$$

Les indices  $n$  ont été omis ici et dans la suite pour améliorer la lisibilité. Les amplitudes  $A_p$  et  $A_s$  peuvent être obtenues grâce aux conditions de bord libre :

$$\begin{cases} t \cos\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) A_p - 2\beta\alpha_s \cos\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) A_s = 0, \\ 2\beta\alpha_p \sin\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) A_p + t \sin\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) A_s = 0, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

avec  $t = \alpha_s^2 - \beta^2$ .

Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que le système soit lié, ce qui nous donne à nouveau la relation de dispersion (C.1). Sous cette condition, nous choisissons la solution suivante :

$$\begin{cases} A_p = 2\beta\alpha_s \cos\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) \\ A_s = t \cos\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right). \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

En injectant cette solution dans l'expression de la composante normale, il vient

$$u_S(d) = -4\beta\alpha_s\alpha_p \sin\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) + 2\beta t \sin\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right).$$

Compte tenu de  $\beta \neq 0$  (en vertu de l'hypothèse 10) et en utilisant à nouveau la relation de dispersion (C.1), il vient :

$$u_S(d) = \beta \sin\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) \left(\frac{(\alpha_s^2 - \beta^2)^2}{\beta^2} + 2t\right),$$

soit

$$u_S(d) = t \frac{k_s^2}{\beta} \sin\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right). \quad (\text{C.4})$$

Cette expression va nous permettre de déterminer pour quelles fréquences l'amplitude d'au moins un mode est nulle. Ces fréquences seront alors à éviter pour conserver l'inversibilité de la matrice.

Différents cas sont à distinguer :

1.  $t = 0$

Ceci implique

$$\alpha_s^2 - \beta^2 = 0,$$

soit

$$k_s^2 = 2\beta^2,$$

soit

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}. \quad (\text{C.5})$$

Par ailleurs, la relation de dispersion (C.1) nous apprend que, pour qu'un mode existe avec  $t = 0$ , il faut

$$4\beta^2 \alpha_p \alpha_s \sin\left(\alpha_p \frac{d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\alpha_s \frac{d}{2} + \kappa\right) = 0.$$

Or, nous avons déjà supposé  $\beta \neq 0$ , ce qui implique  $\alpha_s \neq 0$ . Cette condition devient donc

$$\alpha_p \sin\left(\alpha_p \frac{d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\alpha_s \frac{d}{2} + \kappa\right) = 0.$$

(a)  $\alpha_p = 0$

Nous aurions alors  $\beta = k_p = \frac{k_s}{\sqrt{2}}$ , ce qui n'est pas possible car  $\lambda > 0$  d'après l'hypothèse 9.

(b)  $\sin(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$  avec  $\kappa = 0$  ou  $\pi/2$

Outre (C.5), une deuxième relation lie le nombre d'onde à la fréquence :  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left(\frac{2(m\pi - \kappa)}{d}\right)^2.$$

Or, remarquons que  $k_p < \frac{k_s}{\sqrt{2}}$  puisque  $\lambda > 0$ . Ce cas n'est donc pas possible.

(c)  $\cos(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$

Ce cas est en réalité impossible : le choix fait dans (C.3) n'est pas valable. En prenant  $A_s = 1$ , il vient que l'amplitude du déplacement normal n'est pas nulle à la surface du guide :

$$u_S(d) = 2\beta \sin\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) \neq 0$$

Le cas  $t = 0$  n'est donc pas réalisable.

2.  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) \cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$

Sous cette condition, (C.1) devient

$$4\beta^2 \alpha_p \alpha_s \sin\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) \cos\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) = 0.$$

Étant donné que  $\beta \neq 0$ , nous avons à nouveau trois cas à considérer :

(a)  $\sin(\alpha_p d/2 + \kappa) \cos(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$

Cette condition, couplée avec  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) \cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$ , nous donne finalement

$$\sin\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) = \sin\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) = 0.$$

Remarquons que cela implique que la relation de dispersion (C.1) est vérifiée pour les deux valeurs de  $\kappa$ . Nous obtenons donc deux relations entre  $\beta$  et  $\omega$  :  $\exists(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \frac{4(m\pi - \kappa)^2}{d^2}, \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \frac{4(n\pi - \kappa)^2}{d^2}. \end{cases}$$

De même, si nous considérons

$$\cos\left(\frac{\alpha_s d}{2} + \kappa\right) = \cos\left(\frac{\alpha_p d}{2} + \kappa\right) = 0,$$

nous obtenons :  $\exists(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \frac{4(m\pi + \frac{\pi}{2} - \kappa)^2}{d^2}, \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \frac{4(n\pi + \frac{\pi}{2} - \kappa)^2}{d^2}. \end{cases}$$

Nous pouvons réunir ces deux cas :  $\exists(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \frac{1}{d^2} (m\pi - 2\kappa)^2, \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{d^2} (n\pi - 2\kappa)^2, \\ m + n = 2q, \quad q \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Nous voyons que la première équation de (C.6) correspond à la relation de dispersion d'un mode SH. La seconde équation ne correspond pas à un mode de Lamb, mais nous appellerons les courbes de dispersion correspondantes les courbes des modes "pseudo-Lamb" par abus de langage. Par ailleurs, la relation de dispersion (C.1) est alors vérifiée pour les deux valeurs de la phase  $\kappa$ . Les fréquences pour lesquelles ces conditions sont vérifiées correspondent donc, en observant les courbes de dispersion, à celles pour lesquelles il y a une intersection entre un mode symétrique, un antisymétrique et un SH.

(b)  $\alpha_p = 0$

Nous en déduisons

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}.$$

Par ailleurs ceci implique, pour que  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) \cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$  soit aussi vérifiée, que  $\kappa = \pi/2$  ou  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$ . Remarquons que, si  $\kappa = \pi/2$ , alors  $A_s$  est nul. Rappelons l'expression des deux composantes du mode :

$$u_S(x_S) = -2A_p \alpha_p \sin\left(\alpha_p \left(x_S - \frac{d}{2}\right) + \kappa\right) + 2A_s \beta \sin\left(\alpha_s \left(x_S - \frac{d}{2}\right) + \kappa\right) \quad (\text{C.7})$$

$$u_3(x_S) = 2A_p i \beta \cos\left(\alpha_p \left(x_S - \frac{d}{2}\right) + \kappa\right) + 2A_s i \alpha_s \cos\left(\alpha_s \left(x_S - \frac{d}{2}\right) + \kappa\right). \quad (\text{C.8})$$

Nous constatons que si  $\kappa = \pi/2$ , les deux composantes du déplacement sont nulles. Nous avons donc affaire à une solution triviale, que nous excluons. Nous en déduisons  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$  et  $\kappa = 0$ . Le fait que  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$  implique une deuxième relation entre  $\beta$  et  $\omega$ , qui n'est valable que pour un mode symétrique :  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{2m\pi}{d} \right)^2.$$

Graphiquement, ceci se traduit par l'intersection de la droite  $\beta = k_p$  avec un mode symétrique et un mode SH.

- (c)  $\alpha_s = 0$   
Nous en déduisons

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}.$$

Par ailleurs ceci implique, pour que  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) \cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$  soit vérifiée, que  $\kappa = 0$  ou  $\cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$ . Dans le cas où  $\kappa = 0$ , nous avons  $A_p = 0$  ce qui implique d'après (C.7) et (C.8) que le mode est trivial. Nous avons donc  $\cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$ , ce qui implique une deuxième relation entre  $\beta$  et  $\omega$  pour un mode antisymétrique :  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left( \frac{(2m-1)\pi}{d} \right)^2.$$

Ce cas est impossible car  $k_p < k_s$ .

Finalement, l'amplitude d'au moins un mode en surface est nulle dans les cas suivants :

- $\exists p \in 0, \dots, P-1, \exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{m\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left( \frac{n\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ m + n = 2q, \quad q \in \mathbb{Z}; \end{array} \right.$$

- $\exists p \in 0, \dots, P-1, \exists m \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_p^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \\ \beta_p^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{2m\pi}{d} \right)^2, \\ \kappa_p = 0. \end{array} \right.$$

Physiquement, ces résultats peuvent s'interpréter grâce aux courbes de dispersion : dans le plan  $(\omega, \beta)$ , il s'agit des courbes  $(\omega, \beta_p)$ ,  $p = 0, \dots, P-1$ . Le premier cas est un point où s'intersectent les courbes correspondant à un mode de Lamb symétrique, un mode de Lamb antisymétrique et un mode SH. Le deuxième cas est le point d'intersection d'un mode de Lamb symétrique, d'un mode SH et de la courbe d'équation  $\beta = \omega \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$ .

Remarquons à présent que le deuxième cas est en réalité inclus dans le premier : dans le deuxième cas, la relation de dispersion (C.1) est bien vérifiée aussi pour  $\kappa = \pi/2$  mais la fonction propre associée est identiquement nulle. C'est pourquoi ce mode antisymétrique n'existe pas. Le deuxième cas peut donc être réécrit

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{2m\pi}{d} \right)^2. \end{cases}$$

Finalement, nous obtenons la condition nécessaire et suffisante suivante :

**Proposition C.1**

Il existe  $p = 0, \dots, P - 1$  tel que  $u_S^p(d) = 0$  si et seulement si il existe  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tels que

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{m\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left( \frac{n\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ m + n = 2q, \quad q \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

*Démonstration.* Le sens direct a été montré dans ce qui précède. Intéressons-nous donc à la réciproque. Remarquons que (C.9) implique les expressions suivantes pour  $\alpha_s$  et  $\alpha_p$  :

$$\alpha_s^2 = \left( \frac{m\pi - 2\kappa}{d} \right)^2 \quad (\text{C.10})$$

$$\alpha_p^2 = \left( \frac{n\pi - 2\kappa}{d} \right)^2. \quad (\text{C.11})$$

En injectant (C.10) dans (C.4), nous voyons tout de suite que  $u_S^p(d) = 0$ , et ce avec  $\kappa = 0$  ou  $\pi/2$ . Par ailleurs, nous voyons en injectant (C.10) et (C.11) dans la relation de dispersion (C.1) que  $\beta$  est bien le nombre d'onde associé à un mode de Lamb.  $\square$

**Remarque C.1**

Remarquons par ailleurs que les expressions de  $\alpha_s$  et  $\alpha_p$  (C.10) et (C.11) impliquent que la relation de dispersion (C.1) est vérifiée pour  $\kappa = 0$  et  $\pi/2$ . Cela signifie que les valeurs de  $\beta_p$  correspondent à la fois à un mode symétrique et à un mode antisymétrique (éventuellement trivial) en ces points  $(\omega, \beta)$ .

### Cas de la composante tangentielle en déplacement

Une étude similaire peut être menée dans le cas où la mesure est effectuée selon la composante tangentielle du déplacement  $u_3$ . Il suffit pour cela de prendre comme solutions particulières de (C.2)

$$\begin{cases} A_p = -t \sin \left( \alpha_s \frac{d}{2} + \kappa \right) \\ A_s = 2\beta\alpha_p \sin \left( \alpha_p \frac{d}{2} + \kappa \right). \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

La composante tangentielle du déplacement a pour expression

$$u_3(x_S) = 2A_p i \beta \cos \left( \alpha_p \left( x_S - \frac{d}{2} \right) + \kappa \right) + 2A_s i \alpha_s \sin \left( \alpha_s \left( x_S - \frac{d}{2} \right) + \kappa \right),$$

ce qui nous donne, après un calcul similaire à celui effectué sur la composante normale,

$$u_3(d) = -it \frac{k_s^2}{\beta} \sin \left( \alpha_s \frac{d}{2} + \kappa \right) \cos \left( \alpha_p \frac{d}{2} + \kappa \right).$$

Comme dans le cas de la composante normale du déplacement, différents cas sont à considérer. Nous les rappelons succinctement ici en insistant sur les points où le raisonnement diffère, à savoir les points 1.(c), 2.(b) et 2.(c).

1.  $t = 0$

Cette équation implique

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu}}, \quad (\text{C.13})$$

et la relation de dispersion (C.1) devient

$$\alpha_p \sin \left( \alpha_p \frac{d}{2} + \kappa \right) \cos \left( \alpha_s \frac{d}{2} + \kappa \right) = 0.$$

(a)  $\alpha_p = 0$

Ce cas n'est pas possible car  $\lambda > 0$  d'après l'hypothèse 9.

(b)  $\sin(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$  avec  $\kappa = 0$  ou  $\pi/2$

Ce cas n'est pas non plus possible puisque  $k_p < \frac{k_s}{\sqrt{2}}$ , étant donné que  $\lambda > 0$ .

(c)  $\cos(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$

Ce cas n'entre pas en contradiction avec les valeurs particulières prises pour  $A_p$  et  $A_s$  dans (C.12). Nous en déduisons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{(2n+1)\pi - 2\kappa}{d} \right)^2 \\ \beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \end{cases}$$

Graphiquement, il s'agit de l'intersection de la courbe de dispersion correspondant à un mode de Lamb, symétrique ou antisymétrique, avec la courbe correspondant à un mode "pseudo-Lamb" et la droite d'équation  $\beta = \omega/(\sqrt{2}c_S)$ .

2.  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) \cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$

Sous cette condition, (C.1) devient

$$4\beta^2 \alpha_p \alpha_s \sin \left( \frac{\alpha_p d}{2} + \kappa \right) \cos \left( \frac{\alpha_s d}{2} + \kappa \right) = 0.$$

Étant donné que  $\beta \neq 0$ , nous avons à nouveau trois cas à considérer :



(a)  $\sin(\alpha_p d/2 + \kappa) \cos(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$

Comme dans le cas du déplacement normal, ce cas nous amène au système  $\exists(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{m\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left( \frac{n\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ m + n = 2q, \quad q \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

(b)  $\alpha_p = 0$

Nous en déduisons

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}.$$

Par ailleurs, remarquons que ceci implique que  $A_s$  est nulle dans (C.12). Pour que  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) \cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$  soit aussi vérifiée, il faut soit  $\kappa = \pi/2$  soit  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$ . Si  $\kappa = \pi/2$ , alors le mode est identiquement nul d'après (C.7) et (C.8). Ce cas est donc exclu. Nous en déduisons  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$  et  $\kappa = 0$ . Le fait que  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) = 0$  implique une deuxième relation entre  $\beta$  et  $\omega$ , qui n'est valable que pour un mode symétrique :  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{2m\pi}{d} \right)^2.$$

Comme dans le cas du déplacement normal, cette condition d'annulation du déplacement peut-être considérée comme incluse dans la condition (C.14).

(c)  $\alpha_s = 0$

Nous en déduisons

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}.$$

Par ailleurs ceci implique, pour que  $\sin(\alpha_s d/2 + \kappa) \cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$  soit vérifiée, que  $\kappa = 0$  ou  $\cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$ . Dans le cas où  $\kappa = 0$ , nous avons  $A_p = 0$  ce qui implique d'après (C.7) et (C.8) que le mode est trivial. Nous avons donc  $\cos(\alpha_p d/2 + \kappa) = 0$ , ce qui implique une deuxième relation entre  $\beta$  et  $\omega$  pour un mode antisymétrique :  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left( \frac{(2m-1)\pi}{d} \right)^2.$$

Ce cas est impossible car  $k_p < k_s$ .

Par rapport au cas du déplacement normal, il existe donc une famille de points  $(\omega, \beta)$  supplémentaire pour laquelle la matrice des modes  $T$  n'est pas inversible. Plus précisément, cette matrice n'est pas inversible s'il existe  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tels que

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{m\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - \left( \frac{n\pi - 2\kappa}{d} \right)^2, \\ m + n = 2q, \quad q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ou s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\begin{cases} \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\mu} - \left( \frac{(2n+1)\pi - 2\kappa}{d} \right)^2 \\ \beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \end{cases}$$

Notons que ces résultats ont déjà été observés dans [129], aussi bien pour le déplacement normal que pour le déplacement tangentiel.



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Alleyne and P. Cawley. A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(3) :1159–1168, 1991.
- [2] C. J. S. Alves and R. Kress. On the far-field operator in elastic obstacle scattering. *IMA J. Appl. Math.*, 67(1) :1–21, 2002.
- [3] S. Andrieux, A. Ben Abda, and H. D. Bui. Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *C.R. de l'Académie des Sciences Paris*, 324(12) :1431–1438, 1997.
- [4] T. Arens. Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering. *Inverse Problems*, 17(5) :1445–1464, 2001.
- [5] T. Arens. Why linear sampling works. *Inverse Problems*, 20(1) :163–173, 2004.
- [6] T. Arens, D. Gintides, and A. Lechleiter. Direct and Inverse Medium Scattering in a Three-Dimensional Homogeneous Planar Waveguide. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(3) :753–772, 2011.
- [7] L. Audibert and H. Haddar. A generalized formulation of the Linear Sampling Method with exact characterization of targets in terms of farfield measurements. *Inverse Problems*, 30(3) :035011, 2014.
- [8] K. Baganas, B. B. Guzina, A. Charalambopoulos, and G. D. Manolis. A linear sampling method for the inverse transmission problem in near-field elastodynamics. *Inverse Problems*, 22(5) :1835–1853, 2006.
- [9] V. Baronian. *Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffractions des ondes élastiques guidées*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2009.
- [10] V. Baronian, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, and E. Lunéville. Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide. *Journal of Computation and Applied Mathematics*, 234(6) :1945–1952, 2010.

- [11] V. Baronian, L. Bourgeois, and A. Recoquilly. Imaging an acoustic waveguide from surface data in the time domain. *Wave Motion*, 66 :68–87, 2016.
- [12] J. N. Barshinger and J. L. Rose. Guided Waves Propagation in an Elastic Hollow Cylinder Coated with a Viscoelastic Material. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 51(11) :1547–1556, 2004.
- [13] I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea, and E. Viola. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of sound and vibration*, 295(3) :685–707, 2006.
- [14] E. Bécache, L. Bourgeois, L. Franceschini, and J. Dardé. Application of mixed formulations of quasi-reversibility to solve ill-posed problems for heat and wave equations : the 1D case. *Inverse Probl. Imaging*, 9(4) :971–1002, 2015.
- [15] F. B. Belgacem. Why is the Cauchy problem severely ill-posed? *Inverse Problems*, 23(2) :823–836, 2007.
- [16] C. Bellis and S. Imperiale. Reciprocity identities for quasi-static piezoelectric transducer models : Application to cavity identification using iterated excitations and a topological sensitivity approach. *Wave Motion*, 2013.
- [17] F. Ben Hassen, Y. Boukari, and H. Haddar. Application of the linear sampling method to identify cracks with impedance boundary conditions. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 21(2) :210–234, 2013.
- [18] F. Ben Hassen, Y. Boukari, and H. Haddar. Application of the linear sampling method to retrieve cracks with impedance boundary conditions. *Rapport de recherche RR-7478,INRIA*, Dev. 2010.
- [19] J.-P. Berenger. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200, 1994.
- [20] M. Bonnet and A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2) :R1, 2005.
- [21] M. Bonnet and R. Cornaggia. Higher order topological derivatives for three-dimensional anisotropic elasticity. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2017.
- [22] A.-S. Bonnet-Bendhia, L. Dahi, E. Luneville, and V. Pagneux. Acoustic diffraction by a plate in a uniform flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(5) :625–647, 2002.
- [23] A.-S. Bonnet-Bendhia and F. Starling. Guided waves by electromagnetic gratings and nonuniqueness examples for the diffraction problem. *Math. Methods Appl. Sci.*, 17(5) :305–338, 1994.
- [24] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace’s equation. *Inverse Problems*, 21(3) :1087–1104, 2005.
- [25] L. Bourgeois, C. Chambeyron, and S. Kusiak. Locating an obstacle in a 3D finite depth ocean using the convex scattering support. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 204(2) :387–399, 2007.

- [26] L. Bourgeois and J. Dardé. The “exterior approach” to solve the inverse obstacle problem for the Stokes system. *Inverse Probl. Imaging*, 8(1) :23–51, 2014.
- [27] L. Bourgeois and J. Dardé. A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem. *Inverse Problems and Imaging*, 4(3) :351–377, 2010.
- [28] L. Bourgeois and J. Dardé. About identification of defects in an elastic-plastic medium from boundary measurements in the antiplane case. *Applicable Analysis*, 90(10) :1481–1497, 2011.
- [29] L. Bourgeois and S. Fliss. On the identification of defects in a periodic waveguide from far field data. *Inverse Problems*, 30(9) :095004, 2014.
- [30] L. Bourgeois, F. Le Louër, and E. Lunéville. On the use of Lamb modes in the linear sampling method for elastic waveguides. *Inverse Problems*, 27(5) :055001, 2011.
- [31] L. Bourgeois and E. Lunéville. The linear sampling method in a waveguide : a formulation based on modes. *Journal of Physics : Conference Series*, 135(1) :12–23, 2008.
- [32] L. Bourgeois and E. Lunéville. The Linear Sampling Method in a waveguide : a modal formulation. *Inverse Problems*, 24 :15–18, 2008.
- [33] L. Bourgeois and E. Lunéville. On the use of sampling methods to identify cracks in acoustic waveguides. *Inverse Problems*, 28(10) :105011, 2012.
- [34] L. Bourgeois and E. Lunéville. On the use of the Linear Sampling Method to identify cracks in elastic waveguides. *Inverse Problems*, 29(2) :025017, 2013.
- [35] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*. Dunod, 2005.
- [36] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [37] H. D. Bui, A. Constantinescu, and H. Maigre. Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, 20(4) :993, 2004.
- [38] M. Burger and S. J. Osher. A survey on level set methods for inverse problems and optimal design. *European J. Appl. Math.*, 16(2) :263–301, 2005.
- [39] E. Burman. A stabilized nonconforming finite element method for the elliptic Cauchy problem. *Math. Comp.*, 86(303) :75–96, 2017.
- [40] F. Cakoni and D. Colton. The linear sampling method for cracks. *Inverse Problems*, 19 :279–295, 2003.
- [41] F. Cakoni and D. Colton. On the mathematical basis of the Linear Sampling Method. *Georgian Mathematical Journal*, pages 411–425, 2003.
- [42] F. Cakoni and D. Colton. *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*. Springer, 2006.
- [43] M. Cassier and C. Hazard. Space-time focusing of acoustic waves on unknown scatterers. *Wave Motion*, 50(1) :18–28, 2014.

- [44] B. Chapuis. *Contrôle Santé Intégré par méthode ultrasonore des réparations composites collées sur des structures métalliques*. PhD thesis, Université Paris 7 Diderot, 2010.
- [45] A. Charalambopoulos, D. Gintides, and K. Kiriaki. The linear sampling method for the transmission problem in three-dimensional linear elasticity. *Inverse Problems*, 18(3) :547–558, 2002.
- [46] A. Charalambopoulos, D. Gintides, and K. Kiriaki. The linear sampling method for non-absorbing penetrable elastic bodies. *Inverse Problems*, 19(3) :549–561, 2003.
- [47] A. Charalambopoulos, D. Gintides, K. Kiriaki, and A. Kirsch. The Factorization Method for an acoustic wave guide. *7th Int. Workshop on Mathematical Methods in Scattering Theory and Biomedical Engineering*, pages 120–127, 2006.
- [48] A. Charalambopoulos, A. Kirsch, K. A. Anagnostopoulos, D. Gintides, and K. Kiriaki. The factorization method in inverse elastic scattering from penetrable bodies. *Inverse Problems*, 23(1) :27–51, 2007.
- [49] Q. Chen, H. Haddar, A. Lechleiter, and P. Monk. A sampling method for inverse scattering in the time domain. *Inverse Problems*, 26(8) :085001, 17, 2010.
- [50] Y. Chen. Inverse scattering via Heisenberg’s uncertainty principle. *Inverse Problems*, 13(2) :253, 1997.
- [51] C. Clason and M. V. Klibanov. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medium. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(1) :1–23, 2007/08.
- [52] F. Collino and P. B. Monk. Optimizing the perfectly matched layer. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 164(1-2) :157–171, 1998.
- [53] D. Colton, J. Coyle, and P. Monk. Recent developments in Inverse Acoustic Scattering Theory. *SIAM Review*, 42(3) :369–414, 2000.
- [54] D. Colton and H. Haddar. An application of the reciprocity gap functional to inverse scattering theory. *Inverse Problems*, 21(1) :383, 2005.
- [55] D. Colton and A. Kirsch. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region. *Inverse Problems*, 12(4) :383–393, 1996.
- [56] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, 1997.
- [57] D. Colton, M. Piana, and R. Potthast. A simple method using Morozov’s discrepancy principle for solving inverse scattering problems. *Inverse Problems*, 13(6) :1477–1493, 1997.
- [58] J. Dardé. Iterated quasi-reversibility method applied to elliptic and parabolic data completion problems. *Inverse Probl. Imaging*, 10(2) :379–407, 2016.
- [59] J. Dardé, A. Hannukainen, and N. Hyvönen. An  $H_{\text{div}}$ -based mixed quasi-reversibility method for solving elliptic Cauchy problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(4) :2123–2148, 2013.
- [60] J. Dardé. *Méthodes de quasi-réversibilité et de lignes de niveau appliquées aux problèmes inverses elliptiques*. PhD thesis, Université Paris 7 Diderot, 2010.

- [61] S. Dediu and J. R. McLaughlin. Recovering inhomogeneities in a waveguide using eigensystem decomposition. *Inverse Problems*, 22(4) :1227–1246, 2006.
- [62] A. Demma, P. Cawley, M. Lowe, A. G. Roosenbrand, and B. Pavlakovic. The reflection of guided waves from notches in pipes : a guide for interpreting corrosion measurements. *NDT&E International*, 37(3) :167–180, 2004.
- [63] D. Devillers. *Étude de faisabilité d'un contrôle santé intégré de plaques composites sandwich utilisant des ondes de Lamb*. PhD thesis, Université Paris 7 Diderot, 2002.
- [64] T. Druet, B. Chapuis, M. Jules, G. Laffont, and E. Moulin. Pzt array for passive guided wave tomography of extended defects using ambient elastic noise cross-correlations. *7th Int. Symposium on NDT in Aerospace*, page Tu.2.A.4, 2015.
- [65] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [66] C. Farhat, R. Tezaur, and R. Djellouli. On the solution of three-dimensional inverse obstacle acoustic scattering problems by a regularized Newton method. *Inverse Problems*, 18(5), 2002.
- [67] S. Fauqueux. *Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2003.
- [68] P. J. S. G. Ferreira. Superresolution, the recovery of missing samples, and vandermonde matrices on the unit circle. *Proceedings of the 1999 Workshop on Sampling Theory and Applications*, pages 216–220, 1999.
- [69] S. Fletcher, M. J. Lowe, M. Ratassepp, and C. Brett. Detection of Axial Cracks in Pipes Using Focused Guided Waves. *Journal of Nondestructive Evaluations*, 31(1) :56–64, 2012.
- [70] E. B. Flynn, S. Y. Chong, G. J. Jarmer, and J.-R. Lee. Structural imaging through local wavenumber estimation of guided waves. *NDT&E International*, 59 :1 – 10, 2013.
- [71] W. B. Fraser. Orthogonality relation for the rayleigh-lamb modes of vibration of a plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59 :215–216, 1976.
- [72] R. Gallego and G. Rus. Identification of cracks and cavities using the topological sensitivity boundary integral equation. *Computational Mechanics*, 33(2) :154–163, 2004.
- [73] W. Gautschi. How (Un)stable Are Vandermonde Systems? *Asymptotic and Computational Analysis*, 124 :193–210, 1990.
- [74] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79 :1309–1331, 2009.
- [75] D. Givoli and B. Neta. High-Order Non-Reflecting Boundary Scheme for Time-Dependent Waves. *Journal of Computational Physics*, 186(1) :24–46, 2003.
- [76] B. B. Guzina and M. Bonnet. Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves. *Quarterly Journal Mechanics Applied Mathematics*, 57(2) :161–179, 2004.



- [77] B. B. Guzina, F. Cakoni, and C. Bellis. On the multi-frequency obstacle reconstruction via the linear sampling method. *Inverse Problems*, 26(12) :125005, 2010.
- [78] B. B. Guzina and A. I. Madyarov. A linear sampling approach to inverse elastic scattering in piecewise-homogeneous domains. *Inverse Problems*, 23(4) :1467–1493, 2007.
- [79] H. Haddar and R. Kress. A conformal mapping method in inverse obstacle scattering. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 59(6) :863–882, 2014.
- [80] H. Haddar, A. Lechleiter, and S. Marmorat. An improved time domain linear sampling method for Robin and Neumann obstacles. *Applicable Analysis*, 93(2) :1–22, 2013.
- [81] T. Hagstrom, A. Mar-Or, and D. Givoli. High-order local absorbing conditions for the wave equation : Extensions and improvements. *Journal of computational physics*, 227(6) :3322–3357, 2007.
- [82] H. Harbrecht and T. Hohage. Fast methods for three-dimensional inverse obstacle scattering problems. *Journal of integral Equations and Applications*, 19(3) :237–260, 2007.
- [83] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2005. Une analyse géométrique. [A geometric analysis].
- [84] P. Huthwaite. Evaluation of inversion approaches for guided wave thickness mapping. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470(2166), 2014.
- [85] A. Imperiale, S. Chatillon, P. Calmon, N. Leymarie, S. Imperiale, and E. Demaldent. UT Simulation of Embedded Parametric Defects Using a Hybrid Model Based Upon Spectral Finite Element and Domain Decomposition Methods. *Proceedings of the 19th World Conference on Non-Destructive Testing*, 2016.
- [86] S. Imperiale. *Modélisation mathématique et numérique de capteurs piézoélectrique*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 2012.
- [87] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [88] K. Jezzine. *Approche modale pour la simulation globale des contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2006.
- [89] P. Joly. An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation. *SeMA Journal*, 57 :5–48, 2012.
- [90] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [91] A. Kirsch. Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator. *Inverse Problems*, 14(6) :1489–1512, 1998.
- [92] A. Kirsch and N. Grinberg. *The factorization Method for Inverse Problems*. Oxford Lecture series in mathematics and its applications, 2008.

- [93] A. Kirsch and R. Kress. On an integral equation of the first kind in inverse acoustic scattering. *Inverse Problems*, pages 93–102, 1986.
- [94] A. Kirsch and R. Kress. A numerical method for an inverse scattering problem. *Inverse Problems*, pages 279–290, 1987.
- [95] A. Kirsch and S. Ritter. A Linear Sampling Method for inverse scattering from an open arc. *Inverse Problems*, 16(1) :89–105, 2000.
- [96] M. V. Klibanov and F. Santosa. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace’s equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 51(6) :1653–1675, 1991.
- [97] R. Kress. Uniqueness and numerical methods in inverse obstacle scattering. *Journal of Physics : Conference series*, 73(1) :012003, 2007.
- [98] R. Kress and W. Rundell. Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem. *Inverse Problems*, 21(4) :1207, 2005.
- [99] R. Lattès and J.-L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 15. Dunod, Paris, 1967.
- [100] L. Le Jeune. *Imagerie ultrasonore par émission d’ondes planes pour le contrôle de structures complexes en immersion*. PhD thesis, Université Paris 7 Diderot, 2016.
- [101] L. Le Jeune, S. Robert, E. L. Villaverde, and C. Prada. Plane wave imaging for ultrasonic non-destructive testing : Generalization to multimodal imaging. *Ultrasonics*, 64 :128–138, 2016.
- [102] M. Lenoir. *Equations intégrales et problèmes de diffraction*. Cours de l’Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées, 2005.
- [103] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1. Travaux et Recherches Mathématiques, Dunod, Paris, 1968.
- [104] E. R. López Villaverde. *Imagerie ultrasonore dans des matériaux complexes par focalisation en tous points : Développement d’une méthode de débruitage des images basée sur la décomposition de l’opérateur de retournement temporel*. PhD thesis, Université Paris 7 Diderot, 2017.
- [105] E. Lunéville and N. Salles. eXtended Library of Finite Elements in C++. <http://uma.ensta-paristech.fr/soft/XLiFE++>.
- [106] W. McLean. *Strongly Elliptic System and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [107] A. Moitra. Super-resolution, Extremal Functions and the Condition Number of Vandermonde Matrices. *CoRR*, abs/1408.1681, 2014.
- [108] P. Monk and V. Selgas. Sampling type methods for an inverse waveguide problem. *Inverse Problems and Imaging*, 6(4) :709–747, 2012.
- [109] P. Monk and V. Selgas. An inverse acoustic waveguide problem in the time domain. *Inverse Problems and Imaging*, 32(5) :055001, 2016.

- [110] H. L. Montgomery. Harmonic analysis as found in analytic number theory. *Twentieth century harmonic analysis-a celebration (Il Ciocco, 2000)*, Vol. 33 of NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., Kluwer Acad. Publ., Dodrecht, pages 271–293, 2001.
- [111] A. Munnier and K. Ramdani. Conformal mapping for cavity inverse problem : an explicit reconstruction formula. *Applicable Analysis*, 96(1) :108–129, 2016.
- [112] S. A. Nazarov. The Mandelstam energy radiation conditions and the Umov-Poynting vector in elastic waveguides. *Journal of Mathematical Sciences*, 195(5) :676–729, 2013.
- [113] S. Nintcheu Fata and B. B. Guzina. A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics. *Inverse Problems*, 20(3) :713–736, 2004.
- [114] V. Pagneux and A. Maurel. Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 458(2024) :1913–1930, 2002.
- [115] V. Pagneux and A. Maurel. Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(4) :1913–1920, 2004.
- [116] V. Pagneux and A. Maurel. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 462(2068) :1315–1339, 2006.
- [117] S. Pierce, B. Culshaw, W. Philp, F. Lecuyer, and R. Farlow. Broadband Lamb wave measurements in aluminium and carbon/glass fibre reinforced composite materials using non-contacting laser generation and detection. *Ultrasonics*, 35(2) :105–114, 1997.
- [118] R. Potthast. A point source method for inverse acoustic and electromagnetic scattering problems. *IMA Journal of Appl. Math.*, 61(2) :119–140, 1998.
- [119] R. Potthast and J. Schulz. From the Kirsch-Kress potential method via the range test to the singular sources method. *Journal of Physics : Conference series*, 12(1) :116, 2005.
- [120] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1983.
- [121] J. L. Rose. A Baseline and Vision of Ultrasonic Guided Wave Inspection Potential. *Journal of pressure vessel technology*, 124(3) :273–282, 2002.
- [122] D. Royer and E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides Tome 1, Propagation libre et guidée*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Masson, Paris, 1996.
- [123] D. Royer and E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides Tome 2, Génération, interaction acousto-optique, applications*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Masson, Paris, 1996.
- [124] G. Scorletti. *Traitement du signal*. Cours de l'École Centrale de Lyon, 2015.
- [125] C. B. Scruby and L. E. Drain. *Laser Ultrasonics Techniques and Applications*. CRC Press, 1990.

- [126] P. Stefanov and G. Uhlmann. Local uniqueness for the fixed energy fixed angle inverse problem in obstacle scattering. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(5) :1351–1354, 2004.
- [127] N. Tordjman. *Éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1995.
- [128] G. H. Tucci and P. A. Whiting. Eigenvalue Results for Large Scale Random Vandermonde Matrices with Unit Complex Entries. *Proceedings of the 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, pages 1816–1823, 2011.
- [129] I. A. Veres, T. Berer, C. Grünsteidl, and P. Burgholzer. On the crossing points of the lamb modes and the maxima and minima of displacements observed at the surface. *Ultrasonics*, 54(3) :759–762, 2014.
- [130] C. L. Willey, F. Simonetti, P. B. Nagy, and G. Instanes. Guided wave tomography of pipes with high-order helical modes. *NDT&E International*, 65 :8–21, 2014.

**Titre :** Méthodes d'échantillonnage appliquées à l'imagerie de défauts dans un guide d'ondes élastiques

**Mots Clefs :** Linear Sampling Method, guide d'ondes, élasticité, données expérimentales, Contrôle Non Destructif

**Résumé :** De nombreuses structures utilisées industriellement peuvent être considérées comme des guides d'ondes, comme les plaques, les tuyaux ou encore les rails. La maintenance de ces structures nécessite de pouvoir détecter efficacement des défauts internes par le Contrôle Non Destructif. Nous nous intéressons dans ce manuscrit à l'application d'une méthode d'échantillonnage, la Linear Sampling Method, au CND des guides d'ondes élastiques, qui en particulier impose des sollicitations et des mesures à la surface du guide en régime temporel. La stratégie choisie repose sur une formulation modale et multi-fréquentielle de la LSM, spécifique aux guides d'ondes, qui permet une régularisation efficace et de nature physique du problème inverse, qui est par nature mal posé. Cette stratégie permet par ailleurs une optimisation du nombre et de la position des émetteurs et des récepteurs. Nous nous limitons dans un premier temps au cas scalaire du guide d'ondes acoustiques, pour ensuite s'attaquer au cas vectoriel, et par conséquent plus complexe, du guide d'ondes élastiques. L'efficacité de la méthode inverse est dans un premier temps démontrée sur des données artificielles (obtenues numériquement), puis sur des données réelles obtenues à l'aide d'expériences réalisées sur des plaques métalliques. Ces expériences confirment la faisabilité du CND par méthode d'échantillonnage dans un cadre industriel.

Dans le cas où une seule sollicitation est réalisée, l'utilisation de la LSM est exclue. Nous utilisons une approche tout à fait différente et dite "extérieure", couplant une formulation mixte de quasi-réversibilité et une méthode de lignes de niveau, pour reconstruire le défaut.

**Title :** Sampling methods applied to Non Destructive Testing for elastic waveguides

**Keys words :** Linear Sampling Method, waveguide, elasticity, experimental data, Non Destructive Testing

**Abstract :** Widely used structures in an industrial context, such as plates, pipes or rails, can be considered as waveguides. Hence efficient Non Destructive Testing techniques are needed in order to detect defects in these structure during their maintenance. This work is about adapting a sampling method, the Linear Sampling Method, to the context of NDT for elastic waveguides. This context implies that the sollicitations and measurements must be on the surface of the waveguide in a time-dependent regime. A modal and multi-frequency formulation of the LSM, specific to waveguides, has been chosen to solve the problem. This formulation allows an efficient and physical regularization of the inverse problem, which is naturally ill-posed. An optimization of the number of sources and measurements and of their positioning is possible thanks to the methodology used to solve the problem. The scalar case of an acoustic waveguide is considered as a first step, while the vectorial case of an elastic waveguide, more complex by nature, is addressed in a second time.

The efficiency of the method is at first tested on artificial data (numerically made), and then on real data obtained from experiments on metallic plates. These experiments show the feasibility of using sampling methods for Non Destructive Testing in an industrial context.

In the case when only one sollicitation is available, the LSM can not be applied. A completely different approach is then used, which is called the "exterior" approach, coupling a mixed formulation of quasi-reversibility and a level-set method in order to recover the shape of the defect.