



**HAL**  
open science

# Stabilité d'une onde de gravité interne, analyse locale, globale et croissance transitoire.

Gaétan Lerisson

► **To cite this version:**

Gaétan Lerisson. Stabilité d'une onde de gravité interne, analyse locale, globale et croissance transitoire.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLX017 . tel-01739612

**HAL Id: tel-01739612**

**<https://pastel.hal.science/tel-01739612>**

Submitted on 21 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLX017

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY  
PRÉPARÉE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ecole doctorale n°579

Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences -  
SMEMAG

Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides

par

**M. GAÉTAN LERISSON**

Stabilité d'une onde de gravité interne, analyse locale, globale et  
croissance transitoire.

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 6 avril 2017.

Composition du Jury :

M.	ÉMIL HOPFINGER	Directeur de recherche LEGI	(Président du jury)
M.	MAURICE ROSSI	Directeur de recherche Institut Jean Le Rond D'Alembert	(Rapporteur)
M.	THIERRY DAUXOIS	Directeur de recherche École Normale Supérieure de Lyon	(Rapporteur)
M.	PIERRE-PHILIPPE CORTET	Chargé de recherche FAST	(Examineur)
M.	MICHAEL LE BARS	Chargé de recherche Irphe	(Examineur)
M.	JEAN-MARC CHOMAZ	Directeur de recherche LadHyX	(Directeur de thèse)
Mme.	SABINE ORTIZ	Professeur ENSTA	(Directrice de thèse)



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 J'étudie le mélange océanique...	1
0.2 ...mais je regarde surtout une onde...	3
0.3 ...qui se propage dans les océans...	4
0.4 ...mais moi je regarde sa stabilité...	5
0.5 ...mais de manière plutôt théorique.	9
<b>1 Stabilité théorique</b>	<b>11</b>
1.1 Définition	11
1.1.1 Équations des fluides	11
1.1.2 Équations d'onde	13
1.1.3 Relations et vitesses	14
1.2 Interaction triadique temporelle	16
1.2.1 Somme d'ondes	16
1.2.2 Système d'équations et taux de croissance	17
1.3 Interaction triadique spatio-temporelle	18
1.3.1 Développement et désaccordage	18
1.3.2 vitesse de groupe de l'instabilité triadique	19
<b>2 Stabilité globale</b>	<b>21</b>
2.1 Problème du faisceau d'onde	21
2.1.1 Équations résolues et forçage	23
2.1.2 Paramètres physiques et adimensionnements	25
2.2 Simulation numérique	26
2.2.1 code de calcul	26
2.2.2 Équations résolues	26
2.2.3 Paramètres numériques	27
2.3 Résultats	28
2.3.1 Résultats en espace physique	28
2.3.2 Modes propres linéaires et modes non-linéaires	32
2.4 Analyse	35
2.4.1 Spectres et résonance triadique	35
2.4.2 Influence du nombre de Reynolds	39
2.4.3 Influence du nombre de Froude	41
2.4.4 Influence de la taille du faisceau	46
2.4.5 Influence de la fréquence de forçage	46

2.4.6	Comparaison à un modèle phénoménologique d'équilibre des flux . . . . .	55
2.5	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Stabilité locale</b>	<b>65</b>
3.1	Fonction de Green ou réponse impulsionnelle . . . . .	65
3.1.1	Le cas de l'équation d'advection diffusion . . . . .	65
3.1.2	Problème d'une onde interne . . . . .	71
3.1.3	Paramètres physiques . . . . .	74
3.2	Simulation numérique . . . . .	75
3.2.1	Code de calcul . . . . .	75
3.2.2	Condition initiale . . . . .	76
3.3	Résultats et analyse temporelle . . . . .	78
3.3.1	Spectre . . . . .	78
3.3.2	Taux de croissance . . . . .	79
3.4	Résultat et analyse spatiale . . . . .	84
3.4.1	Énergie en espace réel . . . . .	84
3.4.2	Analyse sur tous les rayons à deux dimensions . . . . .	87
3.4.3	Identification des modes . . . . .	88
3.5	Conclusion . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Croissance transitoire</b>	<b>97</b>
4.1	Norme et optimisation . . . . .	97
4.2	État de base . . . . .	99
4.2.1	Problème étudié . . . . .	99
4.2.2	Selective Frequency Damping <i>SFD</i> . . . . .	100
4.2.3	Méthode numérique . . . . .	101
4.2.4	Résultats . . . . .	102
4.3	Perturbation linéarisée . . . . .	103
4.3.1	Problème linéarisé direct et adjoint . . . . .	103
4.3.2	Méthode numérique . . . . .	104
4.3.3	Validation du code adjoint . . . . .	105
4.4	Résultats . . . . .	107
4.4.1	Modes direct et adjoint . . . . .	107
4.4.2	Croissance transitoire . . . . .	110
4.4.3	Analyse des modes . . . . .	112
4.4.4	Variation de l'angle $\theta_0$ . . . . .	112
4.4.5	Variation du nombre de Reynolds . . . . .	120
4.5	Conclusion . . . . .	127
	<b>Conclusion</b>	<b>128</b>
	<b>A Calcul triadique</b>	<b>135</b>
	<b>B Fonction de forme</b>	<b>143</b>
	<b>C Algorithme d'Arnoldi–Krylov</b>	<b>147</b>

# Introduction

## 0.1 J'étudie le mélange océanique...

Dans les océans, la densité de l'eau varie avec la profondeur. Je trace figure 1 l'évolution de la densité avec la profondeur selon deux mesures effectuées dans le Pacifique nord en novembre 2016. La densité est calculée à l'aide de l'équation d'état de l'eau de mer (Millero and Poisson, 1981) à partir de mesures de la température et de la salinité. La première mesure (o) provient d'un mammifère marin inconnu <sup>1</sup>, et la seconde (ligne) d'une balise dérivante Argo (source : Coriolis.eu). La densité augmente de manière monotone avec la profondeur. La couche supérieure de l'océan voit sa densité varier assez peu avant d'augmenter brusquement autour d'une centaine de mètres de profondeur. Nous désignons cette ligne de fort gradient par pycnocline (ou thermocline selon la contribution de la température). La densité croît ensuite presque linéairement dans les profondeurs abyssales. L'océan est ainsi composé de strates de densité constante, et est dit stratifié.

La figure 2 est un schéma de la circulation océanique géostrophique sur Terre extrait de (Kuhlbrodt et al., 2007). Les courbes représentent les principaux courants océaniques et leurs couleurs, leurs profondeurs. Ces courants parcourent et relient tous les océans. Cette circulation est forcée, entre autre, par la différence de température entre les pôles et l'équateur. Cependant, ce forçage seul ne permet pas d'expliquer l'amplitude élevée de la circulation. Par ailleurs sans autre mécanisme, l'océan ne pourrait maintenir la stratification telle qu'on l'a mesurée. On estime qu'il doit exister une autre source d'énergie (Rossby, 1965 ; Paparella and Young, 2002 ; Wunsch, 2002). Cette source d'énergie supplémentaire se traduit par un ensemble de forçages externes et surtout par des mécanismes de mélange des océans, notamment des océans profonds. Les sources de ce mélange profond (ou abyssal) ne sont pas encore clairement établies ; bien que certains proposent comme responsables la biologie marine, et notamment les méduses (Katija and Dabiri, 2009), nous nous intéresserons à un autre suspect <sup>2</sup>, une onde appelée onde interne (Wunsch and Ferrari, 2004).

---

<sup>1</sup>« Station 50519486 // Code 9900865 // Name Unknown Sea Mammal », probablement un phoque équipé d'une station de mesure

<sup>2</sup>bien moins flasque

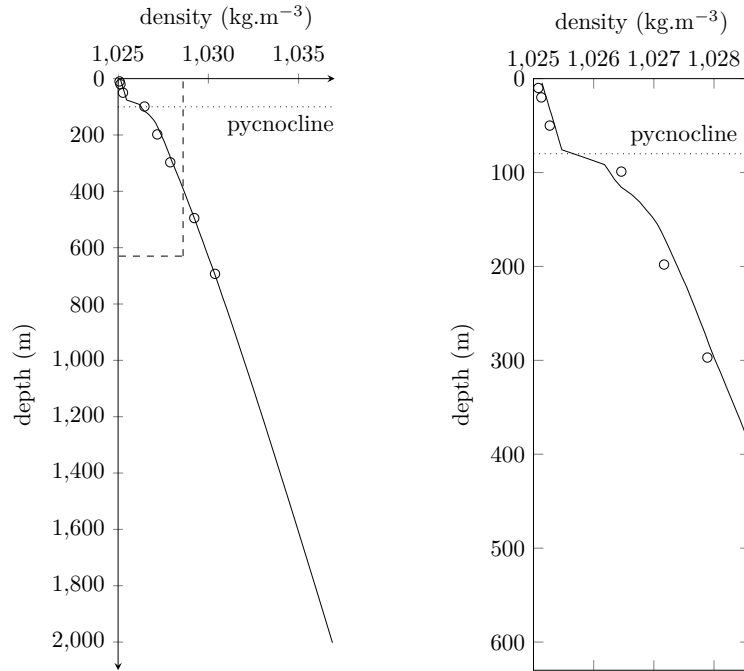


FIG. 1 : Profils de densité en fonction de la profondeur calculés à partir des profils de salinité et de température. Ces mesures faites dans le pacifique nord en novembre 2016 proviennent d'un mammifère marin ( $\circ$ ) et d'une balise Argo (ligne). La pycnocline désigne la variation brusque de la densité autour d'une centaine de mètres de profondeur.

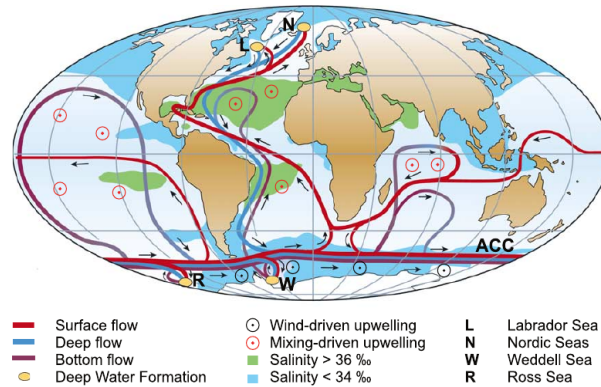


FIG. 2 : Schéma de la circulation océanique sur terre. Les lignes correspondent aux principaux courants et leurs couleurs à leurs profondeurs (ou densité). Les pôles agissent comme source froide et l'équateur comme source chaude, cependant cela ne suffit pas à maintenir une telle circulation et une source de mélange entre ces courants, ainsi que des forçages externes sont nécessaires. Figure extraite de (Kuhlbrodt et al., 2007).



FIG. 3 : Photographie prise le 13 janvier 2013 par un astronaute de l'expédition 34 à bord de la station spatiale internationale *ISS* à une altitude de 400km. On peut voir la côte nord de l'île de Trinidad d'une largeur de 80km. On distingue dans la mer des Caraïbes des lignes régulières courbes distantes de quelques kilomètres. Ces lignes diffèrent des vagues et sont la traces de la présence d'ondes internes.

## 0.2 ...mais je regarde surtout une onde...

La figure 3 montre une photographie prise depuis la station spatiale internationale *ISS* à une altitude de 400km. On y voit la côte nord de l'île de Trinidad au large de laquelle on distingue dans la mer des caraïbes des courbes régulières distantes de quelques kilomètres. Ces lignes ne sont visibles que sous certaines incidences du soleil et leur observation par un astronaute relève souvent du hasard. Elles apparaissent grâce aux variations du spectre des vagues (rugosité de la surface de l'eau) qui modifient la quantité de lumière réfléchie dans une même direction. Ainsi, ces lignes nous montrent une alternance de la rugosité et forment des isophases que l'on peut suivre ensuite à l'aide d'interférométrie radar par satellite pour en mesurer la vitesse de phase. Cette alternance et la vitesse mesurée trahissent la présence d'onde internes (différentes de la houle en surface) se propageant sous la surface, au niveau de la pycnocline. Certains sites comme le détroit de Luçon sont particulièrement propices à la formation et à la propagation de ces ondes (Alford et al., 2015). Il est aussi possible d'observer la propagation de solitons internes sur de grandes distances (Klymak et al., 2006). Ces ondes se propagent horizontalement mais sont cependant capable de mélanger l'océan supérieur et notamment d'entraîner à la surface une faune marine certainement savoureuse dont sont friands les pétrels diabolins (Haney, 1987).

Lorsque la profondeur est élevée, le profil de densité s'approche d'une droite (voir fig. 1) et la densité est presque linéaire avec la profondeur. Dans ces profondeurs (les océans profonds linéairement stratifiés), une autre forme d'onde interne (l'objet de cette thèse) se propage. Contrairement aux ondes internes précédentes et aux vagues (ondes de surface), les ondes internes en milieux linéairement stratifiés se propagent horizontalement et verticalement. Elles sont

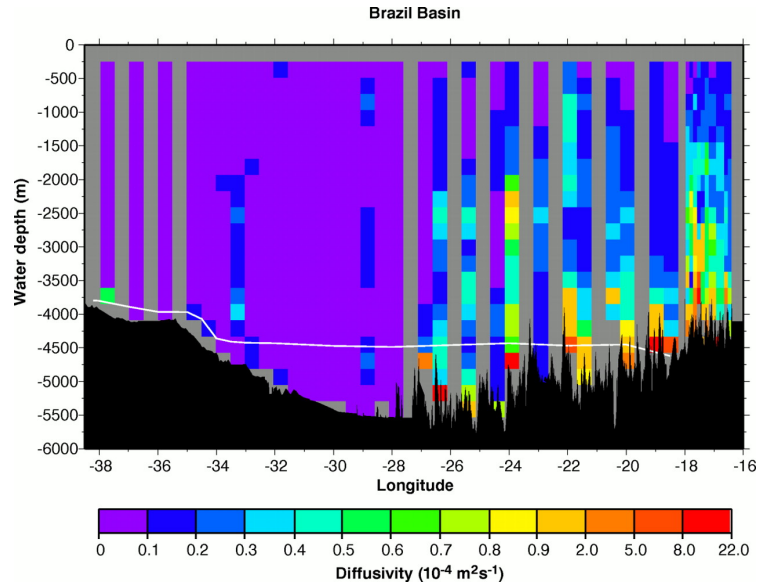


FIG. 4 : Coupe verticale Est-Ouest de l’océan au large du Brésil montrant une mesure de la diffusivité turbulente (mesure du mélange) en échelle de couleur. La bathymétrie est tracée en noir. Le mélange est d’autant plus élevé que la bathymétrie est accidentée. On remarque aussi que le mélange s’étale sur plus de 3000 mètres au dessus du fond marin et que sa décroissance n’est pas monotone en s’éloignant du fond. Figure extraite de Polzin et al. (1997).

alors capables de propager de l’énergie à travers les différentes strates de l’océan et sont suspectées de participer au mélange des océans profonds.

### 0.3 ...qui se propage dans les océans...

Les ondes de gravité internes sont omniprésentes dans les océans profonds ; leurs distribution est classiquement décrite par le spectre de Garrett and Munk (1975). N’importe quelle perturbation de l’eau excitera ces ondes mais il existe plusieurs sources majeures connues. Certaines de ces ondes sont engendrées par l’interaction entre le mouvement des masses océaniques et la bathymétrie (fond océanique) (Bell, 1975 ; Dauxois and Young, 1999 ; Eric and G. Llewellyn Smith, 2004 ; Peacock et al., 2009) et notamment par la marée (Egbert, 1997 ; Egbert and Ray, 2001, 2003). La déstabilisation de ces ondes est susceptible d’entraîner une cascade vers la turbulence et ainsi de contribuer au mélange (Staquet and Sommeria, 2002).

On observe que le mélange océanique n’est pas homogène dans les océans et certaines régions présentent un mélange plus important, notamment lorsque la bathymétrie possède un relief plus marqué (Polzin et al., 1997) figure 4. Cette observation corrobore l’hypothèse d’ondes créées par l’interaction de la masse océanique et de la bathymétrie. Ces ondes se propagent ensuite plus haut dans l’océan profond puis se déstabilisent et cascaded vers la turbulence, entraînant par là du mélange.

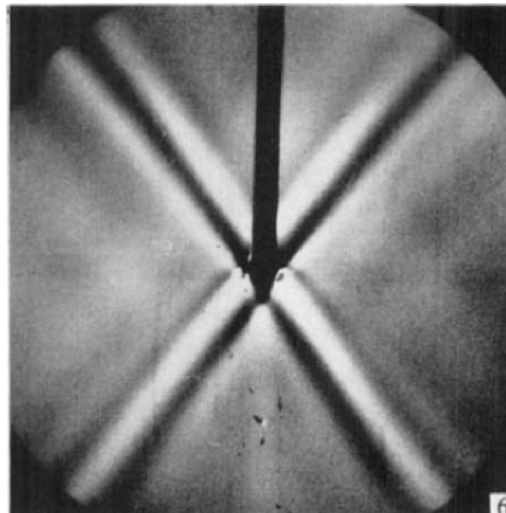


FIG. 5 : Photographie obtenue par Schlieren. Ce système exploite la variation de l'indice de réfraction avec la variation de densité. Par un dispositif optique, le fluide non perturbé ne laissera passer qu'une partie de la lumière. Lorsqu'il est perturbé la déviation des rayons lumineux induite par l'écart de l'indice de réfraction au profil de base laissera passer plus ou moins la lumière, mettant en évidence avec un contraste élevé les perturbations de densité. Dans cette expérience, le fluide est linéairement stratifié et un cylindre (visible au centre) oscille de droite à gauche à une fréquence constante. Quatre faisceaux d'onde interne formant une croix (de Saint-André) s'en éloignent. Figure extraite de Mowbray and Rarity (1967).

## 0.4 ...mais moi je regarde sa stabilité...

**Études en laboratoire.** L'équation des ondes internes fut obtenue par Lord Kelvin mais l'étude de leur stabilité date de 1967 par Phillips (1967). Il montre par une théorie asymptotique d'interaction non-linéaire d'ondes qu'une onde interne plane progressive d'amplitude infinitésimale est toujours instable lorsque la viscosité est nulle. Son calcul, détaillé dans le chapitre 1, montre que l'instabilité est issue de l'interaction de trois ondes et cette théorie est donc appelée théorie des triades résonantes. Parallèlement à cela, Mowbray and Rarity (1967) réalisent une expérience consistant à faire osciller horizontalement un cylindre dans un bassin rempli d'un fluide linéairement stratifié. Il en résulte (fig. 5) la formation de quatre ondes dont la mesure des propriétés leur permet de vérifier la relation de dispersion connue d'une onde interne. Afin d'obtenir des ondes de plus forte amplitude capables de se déstabiliser, une autre expérience fut imaginée (comme dans McEwan (1971)) où un bassin entier (rempli d'un fluide linéairement stratifié) est oscillé, ce qui excite le premier mode de ballonnement. Ce mode étant localement identique à une onde interne, les auteurs parviennent à observer une déstabilisation prédite par la théorie triadique. Des expériences ultérieures dans un bassin cylindrique d'axe horizontal mettent en évidence le caractère paramétrique de l'instabilité (McEwan and

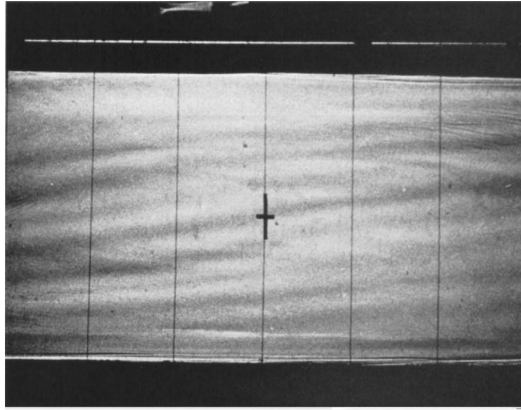


FIG. 6 : Ombroscopie d'une onde interne déstabilisée. L'ombroscopie consiste simplement à observer l'image d'une source de lumière collimatée déformée par la variation de l'indice de réfraction lié à la densité. La déstabilisation visible confirme le mécanisme prédit par le théorie triadique. Figure extraite de McEwan and Robinson (1975).

Robinson, 1975) (voir figure 6).

Afin d'améliorer l'accord avec l'expérimental, McEwan and Plumb (1977) complètent la théorie triadique qui inclut désormais la diffusion visqueuse et celle de l'agent stratifiant, ainsi que la possibilité de s'écarter de la résonance. Ils vérifient leurs prévisions en les comparant à une nouvelle série d'expériences similaires aux précédentes. Une autre approche théorique réside dans le calcul des modes de Floquet d'une onde (Mied, 1976 ; Drazin, 1977 ; Klostermeyer, 1982), ce qui étend la stabilité aux ondes d'amplitudes finies. Bien que ce calcul résolve les interactions d'ordre plus élevé, le résultat confirme que la théorie des triades résonantes capture le plus souvent les modes dominants. Ce calcul est réalisé à nouveau par Lombard and Riley (1996) qui profitent de l'augmentation des capacités de calculs pour améliorer le nombre et l'ordre des modes calculés ainsi que pour regarder les modes en trois dimensions. Ils prévoient que dans le cas d'une onde de forte amplitude, le mode dominant est tridimensionnel. Des expériences sont réalisées à nouveau par Benielli and Sommeria (1996, 1998) et ils mesurent la déstabilisation de l'onde ainsi que la cascade vers la turbulence qui s'ensuit. Les ondes sont aussi étudiées numériquement et Bouruet-Aubertot et al. (1995) réalisent des simulations numériques d'ondes stationnaires dans un bassin (situation très similaire aux expériences déjà réalisées). Ils observent que la transition vers la turbulence est possible grâce au mécanisme d'instabilité décrit dans la théorie triadique. Bouruet-Aubertot et al. (1996) mesurent ensuite la turbulence stratifiée engendrée. Enfin Koudella and Staquet (2006) étudient à l'aide de simulations non-linéaires directes, une onde plane progressive d'amplitude finie dans un domaine périodique contenant une longueur d'onde. Ils montrent que le mécanisme triadique de déstabilisation ne sature pas et mène aussi à la turbulence dans le cas d'une onde progressive. Quant aux ondes dont la propagation n'occupe qu'une partie de l'espace ou faisceaux d'onde, McEwan (1973) étudie



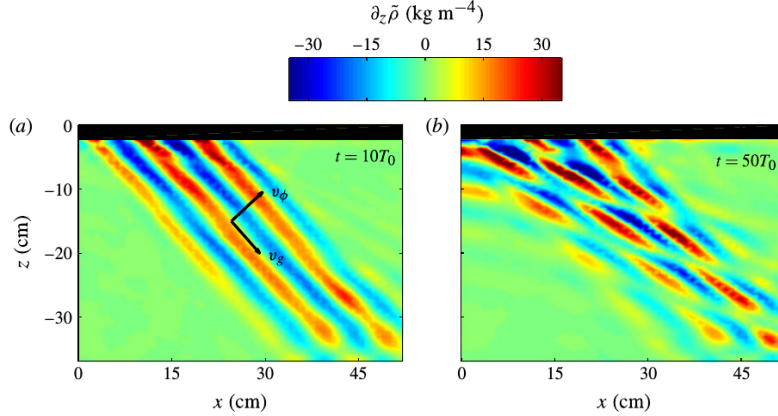


FIG. 7 : Images obtenus par synthetic Schlieren du gradient vertical de l'écart au profil de base de la densité. Cette dernière technique consiste à observer à l'aide d'une caméra les variations induite par le champs de densité sur une mire. Cette mesure quantitative permet d'obtenir le gradient de densité. La figure montre un faisceau d'onde qui s'est développé après 10 périodes de l'onde et qui après 50 périodes s'est déstabilisé. Figures extraites de Bourget et al. (2013).

la déstabilisation provenant de l'interaction de deux faisceaux à l'aide d'un mécanisme ingénieux composé de deux palettes et plus récemment, à l'aide d'un mécanisme non-moins ingénieux composé de cames déphasées développé par Gostiaux et al. (2007), l'étude d'un faisceau d'onde d'amplitude élevée a pu être réalisée (voir figure 7) (Bourget et al., 2013, 2014). Ils observent la déstabilisation du faisceau par un mécanisme triadique.

D'autres expériences d'onde interne existent mais consistent à regarder l'onde formée par l'écoulement continu d'un fluide stratifié au dessus d'un obstacle. Cette onde est appelée onde de sillage ou onde bathymétrique (ou *lee wave*). Les expériences (Long, 1955 ; Davis, 1969 ; Boyer et al., 1989) sont réalisées dans un long bassin rempli d'un fluide stratifié, en translatant un obstacle placé au fond du bassin (ou à une altitude intermédiaire) (voir figure 8). L'observation se fait en suivant l'obstacle et l'on observe une onde interne qui, dans ce référentiel, est stationnaire. Il est même possible de créer une telle onde dans le milieu stratifié qu'est un film de savon vertical (Couder et al., 1989). Théoriquement, Miles and Huppert (1968) calculent la solution analytique linéaire du sillage interne derrière une bosse en demi-disque et obtiennent qu'au delà d'une certaine amplitude les lignes d'isodensité s'inversent ce qui est considéré comme instable, conduisant au déferlement. Expérimentalement, (Bonneton et al., 1993) étudient particulièrement le sillage crée par la translation d'une sphère ainsi que l'onde excitée par la sphère et par le sillage de la sphère, pour des sillages laminaires et turbulents. Enfin, Aguilar et al. (2006) réalisent l'expérience en tractant un obstacle sinusoïdale de plusieurs périodes, plus proche d'une bathymétrie complexe (voir figure 9). L'onde de sillage obtenue est plus proche d'une onde monochromatique restreinte dans l'espace et formant un faisceau. Dans aucun cas l'onde ne se déstabilise. La stabilité d'une onde de

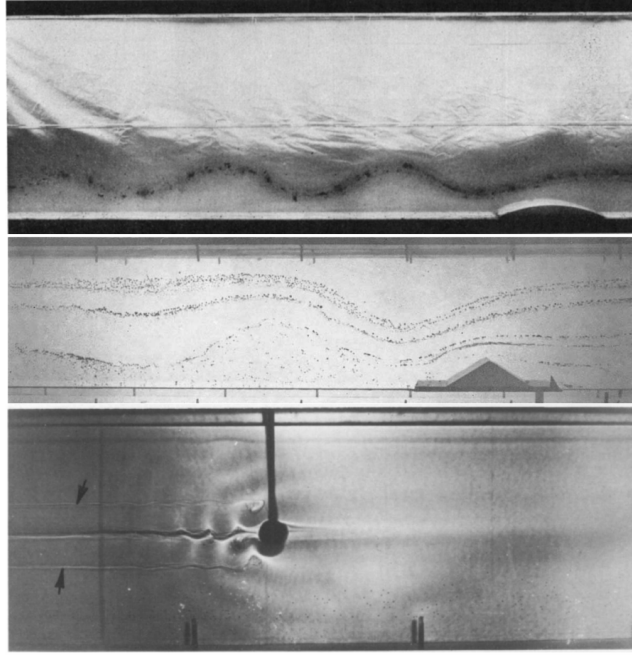


FIG. 8 : Ombroscopies de différentes expériences où est tracté un obstacle dans un fluide stratifié. L'obstacle est tracté vers la droite et l'on devine dans les trois cas le sillage d'onde le suivant. Photographies extraites de Long (1955) ; Davis (1969) ; Boyer et al. (1989).

sillage est étudiée par Lee et al. (2006) où ils s'intéressent à une onde linéaire engendrée par deux bosses. Ils obtiennent que le sillage est instable selon un mécanisme triadique.

Une dernière expérience utilise un dispositif différent. L'obstacle est fixe dans un canal hydraulique dans lequel circule un fluide stratifié. Afin que la mise en circulation du fluide n'altère pas sa stratification, le fluide est entraîné par deux colonnes de disques horizontaux (Odell and Kovaszny, 1971 ; Brighton, 1978 ; Dalziel et al., 2011).

**Observations océaniques** Il existe peu d'observations océaniques d'une instabilité triadique. La plupart des observations se concentrent sur une propriété particulière du mécanisme triadique d'être paramétrique et d'avoir comme fréquence la fréquence moitié de l'onde interne présente. Par exemple, Rainville and Pinkel (2006) ; Carter and Gregg (2006) observent autour d'Hawaï des sites où l'interaction entre la bathymétrie et la marée semi-diurne transfère de grandes quantités d'énergie dans les ondes internes, à la fréquence de forçage semi-diurne, et mesurent ensuite des énergies très importantes à des fréquences diurnes, c'est à dire à la moitié de la fréquence de forçage. Ces observations ont été confirmées à la fois par des mesures plus fines (Alford et al., 2007) et par la mesure d'une phase cohérente entre l'onde forcée par la marée et son instabilité (MacKinnon et al., 2013) ainsi que par le spectre des ondes résultantes (Sun and Pinkel, 2013).

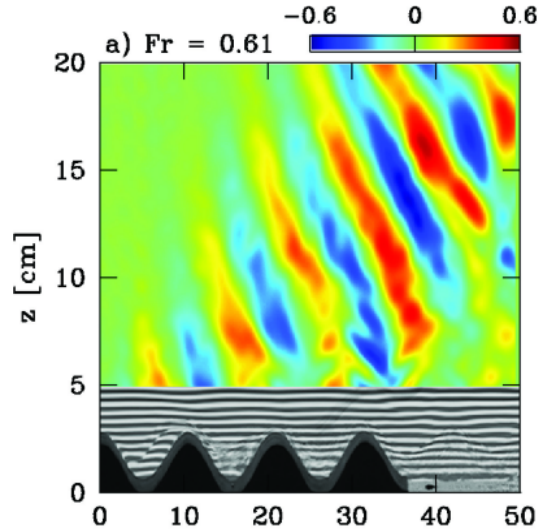


FIG. 9 : Image obtenue par synthetic schlieren ; la topographie est tractée vers la gauche, engendrant un sillage d’onde interne. Celui-ci se propage et s’éloigne de la topographie. Les plans de phases sont réguliers et forment un faisceau monochromatique. Ce faisceau reste néanmoins stable dans les expériences réalisées. Figure extraite de Aguilar et al. (2006)

## 0.5 ...mais de manière plutôt théorique.

La plupart des méthodes théoriques ou numériques dont s’aide l’étude présentée dans ce manuscrit seront présentées en temps et en heure. Le chapitre 1 rappelle sec. 1.1.1 les bases des milieux stratifiés et sec. 1.1.2 des ondes de gravité interne. J’y détaille sec. 1.2.1 l’étude de la stabilité asymptotique d’une onde interne. Je détaille la théorie triadique (interaction non-linéaire d’ondes) en incluant les effets spatiaux sec. 1.3.1. J’étudie au chapitre 2 la stabilité globale de faisceaux d’onde similaires à ceux étudiés expérimentalement par Bourget et al. (2013). J’applique sec. 2.3.2 la théorie des bifurcations et je défini des états non-linéaires saturés. J’introduis la notion de mode globaux ainsi que l’algorithme de Krylov–Arnoldi qui me permet de les obtenir. Je varie ensuite mes différents paramètres et j’interprète les résultats à l’aide de la théorie triadique sec. 2.4.1. Je les compare aussi à un modèle de flux sec. 2.4.6 adapté de Bourget et al. (2014), pour nos configurations où la vitesse moyenne du fluide est non-nulle. Le chapitre 3 étudie la stabilité locale d’une onde interne plane progressive. Je définis les notions d’instabilité convective et absolue en deux dimensions sec. 3.1.1 et les applique sur le cas idéal de l’équation de Ginzburg–Landau linéarisée. Je calcule ensuite numériquement la fonction de Green de la perturbation linéarisée autour d’une onde interne et j’introduis la notion de modes de Floquet sec. 3.3.1 pour comprendre les résultats. Je les interprète ensuite à l’aide du développement spatial de la théorie triadique sec. 3.4.3. Le chapitre 4 étudie les croissances transitoires d’un faisceau d’onde interne. Je rappelle brièvement le cas des opérateurs non-normaux. Je décris la méthode de *Selective frequency damping* employée afin d’obtenir un état stationnaire.

Je calcule la perturbation linéarisée autour de cet état. J'introduis alors l'opérateur adjoint du problème afin de calculer à l'aide d'une boucle direct/adjoint les gains optimaux pour des temps finis. J'interprète ces résultats à l'aide de la théorie triadique et regarde l'influence de la période de l'onde sur le résultat.

# Chapitre 1

## Étude théorique de la stabilité d'une onde interne

### 1.1 Définition d'une onde interne

#### 1.1.1 Équations des fluides

**Conservation de la masse** On considère un fluide dont la masse volumique  $\rho$  varie dans un système de coordonnées cartésiennes  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  avec  $\mathbf{e}_2$  opposé à la gravité. On pose  $\mathbf{x} = (x, z)$  les coordonnées d'espace et  $t$  le temps. La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\rho) + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (1.2)$$

Le vecteur vitesse du fluide  $\mathbf{u}$  possède une composante horizontale  $u$  et une composante verticale  $w$ .

L'écoulement étant incompressible la masse volumique d'une parcelle de fluide dont on suit le mouvement est invariante, ainsi sa dérivée Lagrangienne est nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\rho) = 0, \quad (1.3)$$

et donc

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \quad (1.4)$$

**Conservation de la quantité de mouvement** L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\rho \mathbf{u}) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{u}) \right) = \sum \text{forces}. \quad (1.5)$$

Le fluide subit la force de pression  $-\operatorname{grad}(P)$ , le poids  $\mathbf{g}\rho$  et la force de frottement due à la viscosité. Dans l'hypothèse des fluides newtoniens, la force de frottement devient dans l'équation 1.5  $\mu \Delta \mathbf{u}$  où  $\mu$  est la viscosité dynamique.

Ces équations peuvent être simplifiées en considérant l'hypothèse due à Boussinesq (Boussinesq, 1903) qui est utile lorsque les variations de masse volumique restent petites par rapport au gradient du profil de masse volumique moyen. On sépare alors la masse volumique et la pression en un état homogène  $(\rho_0, p_0)$  et une fluctuation dont une partie est indépendante du temps et est en équilibre hydrostatique  $(\bar{\rho}(z), \bar{p}(z))$  et une partie correspond à la perturbation par rapport au profil,  $(\rho', p')$  :

$$\rho(x, z, t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho'(x, z, t). \quad (1.6)$$

et pour la pression :

$$P(x, z, t) = P_0 + \bar{p}(z) + p'(x, z, t) \quad (1.7)$$

Pour que l'équilibre hydrostatique soit toujours vrai,  $\bar{\rho}$  et  $\bar{p}$  vérifient :

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = \mathbf{g}(\bar{\rho}) + \rho_0. \quad (1.8)$$

L'équation 1.5 devient, en explicitant les forces compte tenu de l'approximation de Boussinesq :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}(\mathbf{u}) \right) = -\text{grad}(p') + \mathbf{g}\rho' + \mu\Delta\mathbf{u} \quad (1.9)$$

Enfin, il faut écrire une équation pour la diffusion de l'agent stratifiant ce qui donne une autre équation pour  $\rho'$  :

$$\frac{D\rho'}{Dt} = D\Delta\rho', \quad (1.10)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion de l'agent stratifiant et  $D/Dt$ , la dérivée lagrangienne. Nous pouvons expliciter la dérivée lagrangienne avec l'équation 1.6 pour obtenir :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}(\rho') = -w \frac{d\bar{\rho}}{dz} + D\Delta\rho'. \quad (1.11)$$

**Fréquence de Brunt-Väisälä** Dans notre cas, nous supposons la stratification linéaire avec la verticale, ainsi :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = cst. \quad (1.12)$$

Nous introduisons la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  :

$$N^2 = \frac{-g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \quad (1.13)$$

comme la fréquence d'oscillation verticale d'une particule de fluide que l'on aurait déplacée verticalement par rapport à sa position d'équilibre puis relâchée (la force de rappel étant la poussée d'Archimède). Nous définissons aussi la flottabilité  $b$  :

$$b = g \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (1.14)$$

**Équations d'état** Nous obtenons enfin les équations de Navier–Stokes pour l'écoulement incompressible d'un fluide stratifié sous l'approximation de Boussinesq :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{u}) = -\operatorname{grad}(p') + b \mathbf{e}_z + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}(b) = -N^2 w + D \Delta b, \quad (1.17)$$

où  $\nu = \mu/\rho_0$  est la viscosité cinématique.

**Remarque** Grâce à l'approximation de Boussinesq, la transformation  $z \rightarrow -z$  laisse les équations inchangées, le système est donc symétrique haut bas.

### 1.1.2 Équations d'onde

Le système 1.15–1.17 admet des solutions ondulatoires. Afin de déterminer la forme de ces solutions et la relation de dispersion, nous définissons la fonction de courant  $\Psi$  tel que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (1.18)$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.19)$$

donnant alors les équations d'états en fonction de courant :

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \mathbf{J}(\Delta \psi, \psi) = -\frac{\partial b}{\partial x} + \nu \Delta^2 \psi, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \mathbf{J}(b, \psi) = +N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + D \Delta b, \quad (1.21)$$

où  $J(f_1, f_2)$  est un Jacobien tel que :

$$\mathbf{J}(f_1, f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x}. \quad (1.22)$$

En dérivant les termes de l'équation 1.20 par rapport au temps et ceux de l'équation 1.21 par rapport à  $x$ , puis en soustrayant les deux résultats, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = + \frac{\partial \mathbf{J}(\Delta \psi, \psi)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{J}(b, \psi)}{\partial x} + \nu \frac{\partial \Delta^2 \psi}{\partial t} - D \frac{\partial \Delta b}{\partial x}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mathbf{J}(b, \psi) + D \Delta b. \quad (1.24)$$

En supposant maintenant un écoulement non diffusif ( $\nu = D = 0$ ), les fonctions d'onde :

$$\psi = A e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \text{c.}, \quad (1.25)$$

$$b = B e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \text{c.}, \quad (1.26)$$

où  $\omega$  est un nombre d'onde et  $(k_x, k_z)$  forment le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , annulent les termes issus des Jacobien et satisfont les équations d'onde composées par les termes de gauche des équations 1.23 et 1.24.

### 1.1.3 Relations et vitesses

Du calcul précédent sort la relation de dispersion des ondes de gravité internes :

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_z^2} = N^2 \cos^2(\theta), \quad (1.27)$$

où  $\theta$  est l'angle formé par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et l'horizontale, ainsi que la relation de polarisation liant l'amplitude de la vitesse à l'amplitude de la densité :

$$B = -N^2 \frac{k_x}{\omega} \Psi. \quad (1.28)$$

Nous pouvons alors calculer la vitesse de phase (bidimensionnelle) des ondes :

$$\mathbf{c}_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \widehat{\mathbf{k}}, \quad (1.29)$$

avec

$$\widehat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (1.30)$$

donnant

$$\mathbf{c}_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k} \quad (1.31)$$

$$= \frac{k_x}{|k_x|} N \frac{k_x}{|\mathbf{k}|^3} \mathbf{k} \quad (1.32)$$

$$= \frac{N}{k_x} \cos^2(\theta) (\cos \theta, \sin \theta), \quad (1.33)$$

ainsi que la vitesse de groupe (bidimensionnelle, elle aussi) :

$$\mathbf{c}_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right) \quad (1.34)$$

$$= \frac{k_x}{|k_x|} N \frac{k_z}{|\mathbf{k}|^3} (k_z, -k_x) \quad (1.35)$$

$$= \frac{N}{k_x} \sin \theta \cos \theta (\sin \theta, -\cos \theta) \quad (1.36)$$

**Remarque 1** Si nous calculons le produit scalaire entre les vecteurs vitesses de phase et de groupe :

$$\mathbf{c}_p \cdot \mathbf{c}_g = k_x k_z \frac{N^2}{|\mathbf{k}|^6} (k_x k_z + k_z (-k_x)) \quad (1.37)$$

$$= 0, \quad (1.38)$$



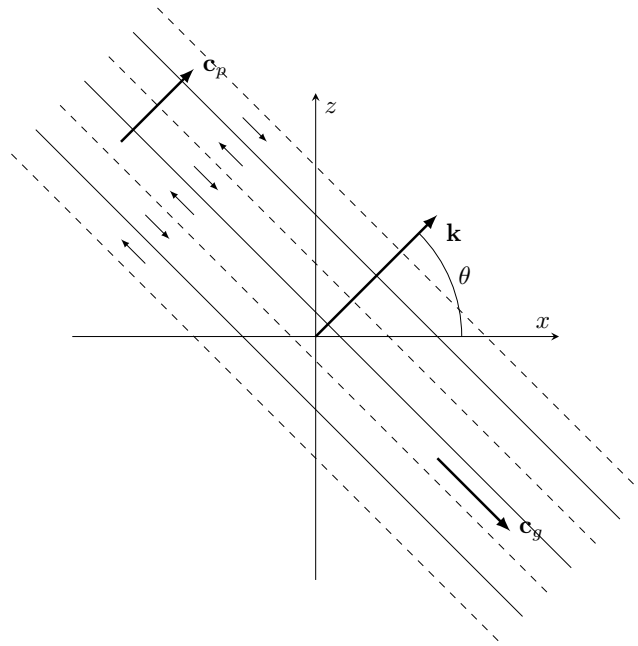


FIG. 1.1 : Schéma d'une onde interne.

nous notons qu'il est toujours nul et qu'ainsi la vitesse de phase est toujours orthogonale à la vitesse de groupe. L'onde se propageant selon sa vitesse de groupe se voit pourtant aller orthogonalement à celle-ci, à la manière d'un crabe en quelque sorte (voir figure 1.1).

**Remarque 2** La relation de dispersion nous montre que la direction de propagation d'une onde dépend du degré de stratification, de l'orientation de celle-ci et de la période temporelle de l'onde. L'orientation en espace met en évidence le caractère anisotropique de la physique d'une onde interne et l'on constate que la connaissance de l'angle des plans de phase avec la verticale (ainsi que celle de  $N$ ) suffit à déterminer la période temporelle. De plus une onde se réfléchira sur une paroi indépendamment de l'angle de celle-ci dans la mesure où l'angle qu'elle forme permette la réflexion. Ceci favorise grandement la possibilité d'attracteurs où après plusieurs réflexions l'onde retombe sur elle-même.

**Remarque 3** La symétrie verticale des équations d'états rend indistinctes les ondes se propageant vers le haut de celles vers le bas. Et une configuration pourra être inversée haut bas sans en altérer la physique.

## 1.2 Interaction triadique temporelle à petite amplitude

### 1.2.1 Somme d'ondes

Phillips (1967) a contribué à l'emploi des triades et autres interactions d'ondes dans l'étude des ondes hydrodynamiques (ondes de gravité d'interface, ondes gravito-capillaires, ondes de gravité internes). L'idée est la suivante : supposer une solution comme une somme d'ondes aux amplitudes d'ordre  $\epsilon$  puis chercher les termes d'interactions non-linéaires constructifs entre ces ondes en ne conservant que les ordres les plus faibles.

Dans le cas des ondes internes, nous anticipons le résultat pour prendre immédiatement la forme la plus appropriée. Nous souhaitons étudier la stabilité d'une seule onde qui sera notre onde primaire, nous supposons notre solution comme la somme de cette onde primaire d'ordre  $\epsilon$  et d'une somme de  $p$  ondes secondaires d'ordre  $\epsilon^2$ . De plus nous supposons l'amplitude de notre onde primaire comme homogène en espace et en temps, contrairement aux amplitudes de nos ondes secondaires, qui elles varient lentement en temps et en espace.

De ce calcul, détaillé en annexe A, il résulte que les ondes secondaires respectent la relation de dispersion des ondes internes et qu'il existe une interaction impliquant deux ondes secondaires et l'onde primaire si ces ondes respectent la relation :

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (1.40)$$

l'indice 0 désignant l'onde primaire et les indices 1 et 2, deux ondes secondaires. Ce couplage de trois ondes est appelé *triade résonante* et la relation précédente, *relation triadique*. L'existence des triades résonantes est intrinsèque à la forme du terme de couplage non-linéaire de l'équation étudiée. Dans le cas des ondes internes, le couplage en amplitude est quadratique et couple deux ondes pour en donner une troisième. C'est aussi le cas pour les ondes gravito-capillaires. Dans le cas d'un terme de couplage cubique comme c'est le cas par exemple pour l'équation des ondes de surface en eau profonde, il est nécessaire d'impliquer 4 ondes pour obtenir une résonance.

**Courbe résonante** Les conditions triadiques associées à la relation de dispersion d'une onde interne engendrent l'ensemble des triades admissibles pour une onde  $\mathbf{k}_0, \omega_0$ . Cet ensemble est tracé figure 1.2 en espace de Fourier  $(k_x, k_z)$ . Chaque élément de cet ensemble est un point en espace de Fourier et représente le vecteur d'onde d'une des deux ondes secondaires. Le second vecteur d'onde s'obtenant en lui soustrayant le vecteur d'onde primaire  $\mathbf{k}_0$ . L'ensemble de ces points forme une courbe appelée courbe ou trace résonante, et par interversion des ondes secondaires  $(\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2 \text{ et } \mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}_1)$ , possède la symétrie  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ . Cette courbe se compose de différentes branches en fonction du

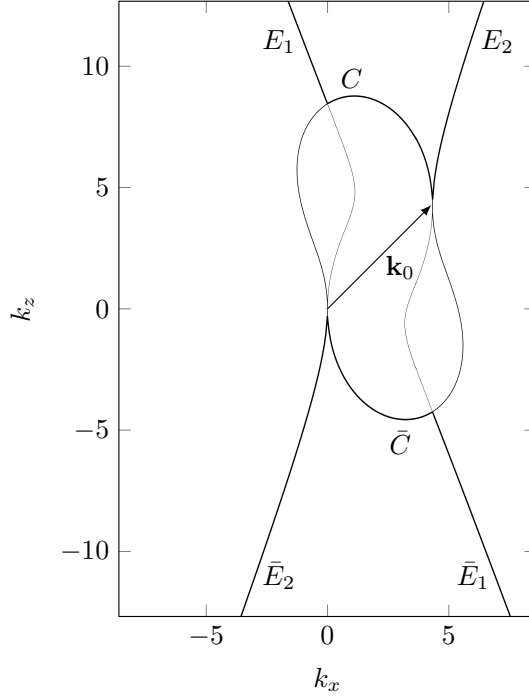


FIG. 1.2 : Lieux des vecteur d'onde d'une onde secondaire possible pour former une triade avec l'onde primaire ( $\mathbf{k}_0, \omega_0$ ). Les ondes doivent respecter les relations triadiques ainsi que la relation de dispersion des ondes internes. La deuxième onde secondaire s'obtient en soustrayant  $\mathbf{k}_0$  à la première, ce qui signifie que les trois vecteurs d'ondes forment un triangle partant d'un point de la courbe jusqu'aux extrémités de  $\mathbf{k}_0$ .

signe des fréquences des ondes secondaires  $i \omega_i$ . Les branches représentant des triades à même d'être instables sont tracées en trait épais ; les autres parties de la courbe décrivent des triades toujours stables (ou neutres dans le cas d'une viscosité nulle). La partie instable de la courbe est composée de trois branches et celle-ci sont notées  $E_1$  (externe 1),  $C$  (centrale) et  $E_2$  (externe 2), ainsi que leur symétrique pour la seconde onde secondaire  $\bar{E}_1, \bar{C}$  et  $\bar{E}_2$ .

## 1.2.2 Système d'équations et taux de croissance

Le calcul des interactions triadiques est détaillé dans l'annexe A dans le cas du fluide parfait et où le mode triadique varie lentement en espace et en temps. Dans le cas d'un mode triadique lorsque la diffusion est prise en compte et sans variations spatiales, les équations d'amplitudes s'écrivent :

$$\frac{\partial A_1}{\partial T} + \lambda_1 A_1 = S_1 A_2 * A_0, \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial T} + \lambda_2 A_2 = S_2 A_1 * A_0, \quad (1.42)$$

où  $A_0$  est l'amplitude de l'onde primaire,  $A_1$  et  $A_2$  sont les amplitudes des ondes secondaires composant la triade,  $S_1$  et  $S_2$  sont des coefficients de couplage.  $T$

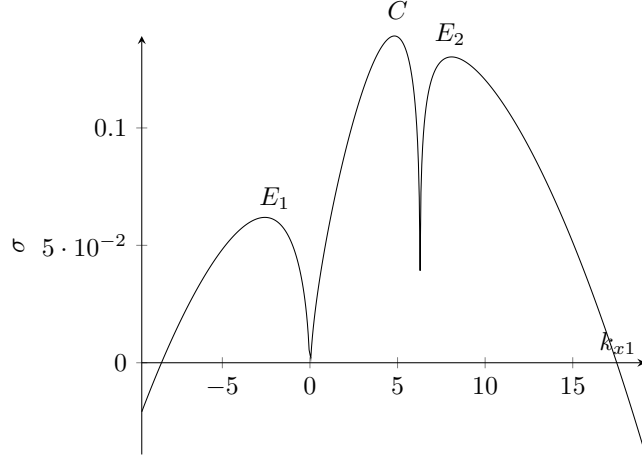


FIG. 1.3 : Taux de croissance des modes triadiques (équation 1.44 ) le long de la courbe résonante en fonction de  $k_{x1}$ , la composante horizontale de la première onde secondaire. Les trois maxima sont annotés avec leurs branches correspondantes de la courbe de résonance ( $E_1$ ,  $C$  et  $E_2$ ). Les paramètres de l'onde sont ceux du cas référence du chapitre 2.

est une variable lente du temps.  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les termes de diffusions et valent :

$$\lambda_i = \frac{1}{2}(\nu + D)|\mathbf{k}_i|^2 \quad (1.43)$$

où  $\nu$  est la diffusion visqueuse et  $D$  la diffusion de la flottabilité.

Des équations d'amplitude nous pouvons calculer le taux de croissance  $\sigma$  qui s'écrit :

$$\sigma = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 + S_1 S_2 \left(\frac{|A_0|}{2}\right)^2}, \quad (1.44)$$

que nous traçons figure 1.3 en fonction de  $k_{x1}$  le long des branches instables de la courbe résonante pour des paramètres identiques à ceux de référence du chapitre 2 ( $\omega_0 = 0.74$ ,  $\psi_0/\nu = 28$ ,  $\lambda_0 = 0.05328$ ). La courbe se divise en trois branches, chacune étant associée à une branche de la courbe résonante et celles-ci possèdent les indices correspondant ( $E_1$ ,  $C$  et  $E_2$ ). Chaque branche instable de la courbe résonante possède son maximum. Le taux de croissance décroît pour les grands  $\mathbf{k}$  selon une parabole pondérée par  $(\nu + D)$ . Les valeurs des  $\mathbf{k}$  limites neutres vont croître avec une augmentation du nombre Reynolds à nombre de Schmidt  $Sc$  constant ( $Sc = \nu/D$ ).

## 1.3 Interaction triadique spatio-temporelle à petit amplitude

### 1.3.1 Développement et désaccordage

Nous nous plaçons dans le cas où l'on peut négliger la diffusion. En suivant le calcul triadique développé en annexe A, nous obtenons le système d'équa-

tions pour les amplitudes des ondes secondaires (McEwan and Plumb, 1977) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial T} + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{Grad}(A_1) &= S_1 A_2 A_0, \\ \frac{\partial A_2}{\partial T} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{Grad}(A_2) &= S_2 A_1 A_0.\end{aligned}\tag{1.45}$$

$T$  est une variable lente en temps et  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  sont les vitesses de groupe des ondes secondaires. Pour obtenir une solution de ce système nous supposons une forme pour l'amplitude en fonction des variables lentes :

$$A_q(X, T) = a_q \mathbf{e}^{i(\mathbf{K}\mathbf{X} - \Omega T)},\tag{1.46}$$

avec  $\Omega = \Omega_r + i\Omega_i$

Ce qui permet de calculer le taux de croissance  $\Omega_i$  de l'instabilité :

$$\Omega_i = \sqrt{S_1 S_2 |A_0|^2 - |K|^2 \left( \frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2}{2} \right)^2}.\tag{1.47}$$

Ce résultat diffère de McEwan and Plumb (1977) qui prend en compte la diffusion et qui ne calcule le taux de croissance que proche de la courbe de stabilité marginale. On retrouve le résultat 1.44 pour une viscosité et des vitesses de groupe nulles.

Peu d'études s'intéressent à la fréquence du paquet d'onde et nous obtenons pour la fréquence de l'instabilité :

$$\Omega_r = \frac{(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)}{2} \cdot \mathbf{K}.\tag{1.48}$$

La modulation de l'amplitude par  $\mathbf{K}$  peut être vue comme un désaccordage de la relation triadique 1.40 par  $\mathbf{K}$  (McEwan and Plumb, 1977) que nous représentons schématiquement figure 1.4. La relation 1.47 donne accès au taux de croissance désaccordé.

### 1.3.2 vitesse de groupe de l'instabilité triadique

Du calcul précédent nous pouvons calculer la vitesse de groupe  $\mathbf{C}_g$  du paquet d'onde instable, celle-ci vaut :

$$\mathbf{C}_g = \left( \frac{\partial \Omega_r}{\partial K_x}, \frac{\partial \Omega_r}{\partial K_z} \right),\tag{1.49}$$

et n'a de signification physique qu'en l'absence de partie imaginaire. La partie imaginaire étant la dérivée du taux de croissance  $\omega_i$  par rapport à  $K$ , celle-ci est nulle aux extrema du taux de croissance dans l'espace des vecteurs d'ondes. Nous avons ainsi la vitesse du paquet d'onde instable lorsque son taux de croissance est un maximum en espace de Fourier, ou encore la vitesse du *sommet* du paquet d'onde :

$$\mathbf{C}_g = \frac{\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2}{2},\tag{1.50}$$

qui vaut pour les triades, la moyenne arithmétique des vitesses de groupe des ondes secondaires.

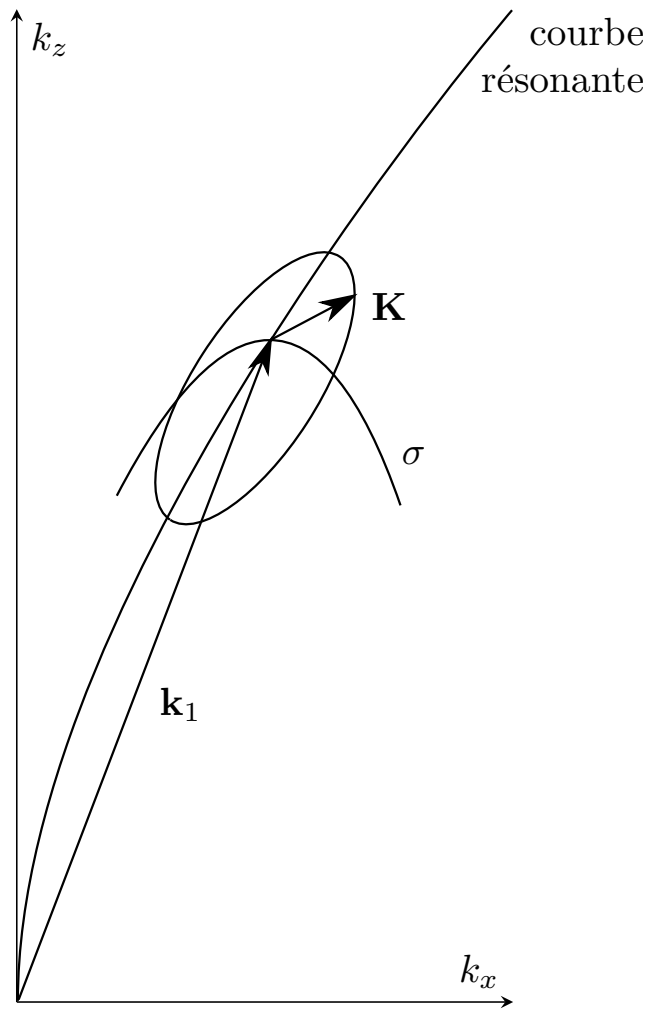


FIG. 1.4 : Schéma du désaccordage.

# Chapitre 2

## Étude numérique de la stabilité globale d'une famille de faisceaux d'onde

Dans ce chapitre nous observons la stabilité d'une onde interne confinée dans une enveloppe spatiale sous la forme d'un faisceau d'onde à l'aide de simulation numérique non-linéaire. En particulier, nous définissons une famille de problèmes en ajoutant un paramètre, un écoulement de fond à vitesse horizontale homogène et constante, et observons l'influence de cet écoulement sur la stabilité d'un faisceau et sur la forme de ses modes instables. Le problème est représenté schématiquement figure 2.1.

### 2.1 Problème du faisceau d'onde

Chaque faisceau est obtenu par simulation non-linéaire. Nous n'imposons pas la forme du faisceau ; nous nous contentons d'exciter localement le fluide stratifié et cette excitation engendre un faisceau d'onde. Le faisceau se propage ensuite selon la vitesse de groupe de l'onde. De cette manière nos simulations s'approchent d'expérimentations numériques où nous limitons le nombre de paramètres et leur influence.

Ainsi, un faisceau d'onde interne se réduit essentiellement à 5 paramètres physiques qui sont ceux d'une onde interne auquel on ajoute une limite spatiale (voir le schéma figure 2.1) :

- l'angle  $\theta_0$  que forme avec le vecteur d'onde de l'onde interne excitée avec la direction horizontale ;
- le nombre de Reynolds ;
- le nombre de Froude ;
- le nombre de Prandtl (ou de Schmidt) ;
- la largeur de l'excitation dont dépendra la largeur du faisceau.

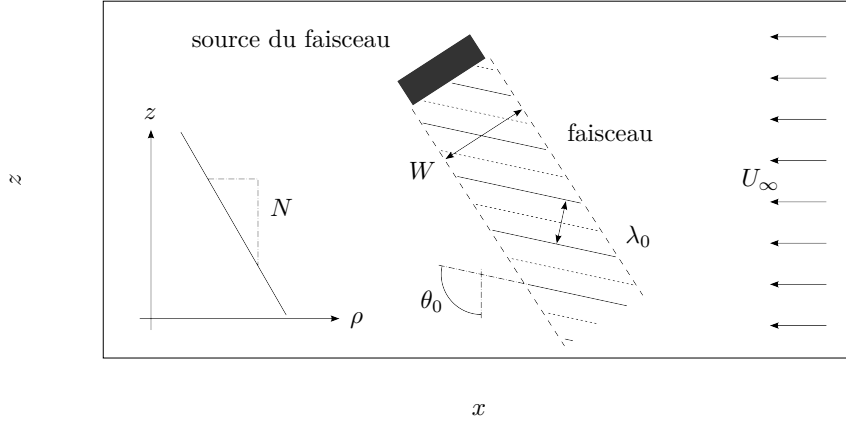


FIG. 2.1 : Schéma du problème global. Dans un écoulement incompressible, linéairement stratifié, une source d'onde  $(\lambda_0, \theta_0)$  de largeur  $W$  excite un faisceau d'onde. Nous ajoutons à ce problème une vitesse horizontale, homogène et constante  $U_\infty$ .

Ces nombres sont définis à la section 2.1.2

Nous définissons une famille comme l'ensemble des simulations ayant ces 5 paramètres fixes et où nous ajoutons un écoulement de fond  $U_\infty$  horizontal, homogène en espace et constant dans le temps et chaque élément de la famille possède une valeur de  $U_\infty$  différente. Cette vitesse  $U_\infty$  permet de reproduire deux cas réels de génération d'ondes interne.

Le premier où la localisation de l'excitation est solidaire du fluide comme dans les expériences de Mowbray and Rarity (1967) où le générateur est un cylindre oscillant dans un fluide au repos ou de Gostiaux et al. (2007) où le générateur est un système de cames permettant une paroi oscillante, toujours dans un fluide au repos. Ce premier cas peut aussi être comparé à celui océanique de la génération des ondes internes par les oscillations de marée au dessus d'une topographie sous-marine où si l'on se place dans le référentiel du fluide, la topographie oscille mais la moyenne temporelle des déplacements reste nulle.

Le second cas est celui où le fluide possède, relativement à la source d'onde, une vitesse et où la source d'onde elle-même est stationnaire. Ce second cas est celui des expériences de Aguilar et al. (2006) où le générateur est un obstacle translaté dans un fluide stratifié au repos ou de Odell and Kovasznay (1971) ou de Dalziel et al. (2011) où le fluide stratifié circule au dessus d'un obstacle fixe. D'un point de vue océanique, ce cas est celui de la circulation océanique profonde au dessus de la topographie sous-marine. Nous appellerons le faisceau d'onde généré dans le premier cas une *onde de marée* et celui dans le second cas une *onde bathygraphique* ou onde de sillage. Si l'on conserve les 5 paramètres physiques décrits plus haut, l'ajout de l'écoulement de fond  $U_\infty$  est accompagné d'une variation de la période de forçage afin de maintenir l'angle du vecteur d'onde  $\theta_0$  constant et il apparaît le cas où le forçage possède une période nulle et devient stationnaire (onde de sillage). L'écoulement de fond permet de passer continuellement du cas d'onde de marée (où écoulement de fond nul) au cas d'onde bathygraphique (où le forçage est à période nulle) en explorant des



cas intermédiaires qui physiquement sont dans les océans une combinaison de marée et de circulation océanique, cas finalement les plus probables.

### 2.1.1 Équations résolues et forçage

Nous reprenons les équations 1.15 et 1.17 décrites au premier chapitre :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + b\mathbf{e}_z + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathcal{F}_s + \mathcal{F}_f, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b = -N^2 w + D \Delta b + \mathcal{B}_s + \mathcal{B}_f, \quad (2.3)$$

en ajoutant 4 termes de forçages par pénalisation ( $\mathcal{F}_s$ ,  $\mathcal{B}_s$ ,  $\mathcal{F}_f$  et  $\mathcal{B}_f$ ). La pénalisation a trois buts, celui de simuler un domaine infini en forçant les perturbations à être nulle au delà du domaine d'étude. L'écoulement n'est pas perturbé depuis l'extérieur et une perturbation sortant du domaine d'étude est absorbée sans pouvoir revenir dans l'écoulement. Le second but est d'imposer l'écoulement de fond  $U_\infty$  et le troisième but est de forcer localement le fluide afin d'exciter une onde interne.

**Forçage par pénalisation : éponge** Les termes  $\mathcal{F}_s$ , et  $\mathcal{B}_s$  sont des termes dit d'*éponge* définis par :

$$\mathcal{F}_s = -A_s M_s (u - U_\infty \mathbf{e}_x), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{B}_s = -A_s M_s (b - 0). \quad (2.5)$$

Ces termes forcent la vitesse (et la flottabilité) à une valeur nulle (ou égale à  $U_\infty$  pour la vitesse horizontale), selon une géométrie définie par la fonction de masque  $M_s(x, z)$  tracée figure 2.2. Le masque définit la localisation spatiale des éponges. L'amplitude de ces forçages est proportionnelle à la valeur de la vitesse (ou de la flottabilité) au point d'application du forçage multiplié par  $A_s$ . Pour la vitesse, le forçage à une vitesse nulle est similaire à un terme de Darcy dans un milieu poreux,  $M_s$  définirait les limites de ce milieu et  $A_s$  serait le rapport entre la viscosité cinématique et la perméabilité du milieu. Nous utilisons aussi l'éponge pour imposer la vitesse de fond  $U_\infty$  en forçant la vitesse horizontale à une valeur non-nulle constante. Nous transposons ce raisonnement à l'équation de la flottabilité pour la forcer à une valeur nulle dans la zone de l'éponge définie par le masque  $M_s$ .

**Forçage par pénalisation : force volumique** Les termes  $\mathcal{F}_f$  et  $\mathcal{B}_f$  pénalisent une force volumique dans l'écoulement selon la fonction masque  $M_f(x, z)$  et proportionnellement à l'écart entre la vitesse de l'écoulement (ou la flottabilité) et la vitesse (ou la flottabilité) souhaitée  $\mathbf{u}_w(x, z, t)$  ( $b_w(x, z, t)$ ) au point de forçage.

Le forçage est défini par :

$$\begin{cases} u_w = -\mathcal{A}_w \sin \theta_0 \sin \phi + U_\infty, \\ w_w = \mathcal{A}_w \cos \theta_0 \sin \phi, \\ b_w = -N \mathcal{A}_w \cos \phi, \\ \phi = \mathbf{k}_0 \mathbf{x} - \omega^s t, \\ \omega^s = \omega_0 + |\mathbf{k}_0| \cos \theta_0 U_\infty, \end{cases} \quad (2.6)$$

ce qui correspond à la solution d'une onde interne dans une stratification continue définie par la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ , de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  formant un angle  $\theta_0$  avec l'horizontale, sa fréquence relative au fluide vaut  $\omega_0$  et son amplitude en vitesse vaut  $\mathcal{A}_w$ . Cette solution est correctement définie dans le référentiel du fluide mais doit être corrigée afin de tenir compte du changement de référentiel engendrée par l'écoulement de fond  $U_\infty$ . Cette vitesse provoque un effet Doppler que l'on corrige en définissant une nouvelle période de forçage  $\omega_s$ , période dans le référentiel source, suivant la loi de sillage 2.6. Grâce à cette correction la fréquence de l'onde relativement au fluide est toujours identique et vaut pour une famille  $\omega_0$

Le forçage essaye de reproduire le générateur d'onde employé dans l'expérience de Bourget et al. (2013) où un générateur à cames décrit dans Gostiaux et al. (2007), impose le déplacement vertical (ou horizontal selon la disposition) du fluide grâce aux translations d'une série de plaques. Ces translations sont imposées par le dispositif de cames et forment une onde progressive.

Dans notre cas les termes de forçage ajoutés dans les équations 2.11 et 2.12 forcent la vitesse et la flottabilité dans un volume et selon la direction exacte de propagation de l'onde.

Ces différences sont majoritairement estompées par la diffusion de l'écoulement mais deux aspects requièrent une attention particulière :

- L'amplitude du faisceau n'est pas forcément égale à l'amplitude forcée. Dans le cas de l'expérience des effets non-linéaires réduisent l'amplitude du faisceau (effets discutés dans Mercier et al. (2010)) et son amplitude est systématiquement mesurée. Dans notre cas, après mesure, elle est identique.
- La largeur du faisceau n'est pas canoniquement définie et dépend de la forme de la fonction utilisée pour la forme de forçage. Voulant reproduire le faisceau de Bourget et al. (2013) nous avons respecté la même définition de la largeur du forçage et des rampes, avec comme différence la forme des rampes puisque les nôtres respectent une fonction  $C^\infty$  alors qu'expérimentalement il s'agit de rampe linéaire.

Nous remarquons qu'il existe une vitesse de fond  $U_\infty$  telle que la période de forçage dans le référentiel source  $\omega^s$  s'annule. Nous définissons cette vitesse par :

$$U_\phi = -\frac{\omega_0}{|\mathbf{k}_0| \cos \theta_0}. \quad (2.7)$$

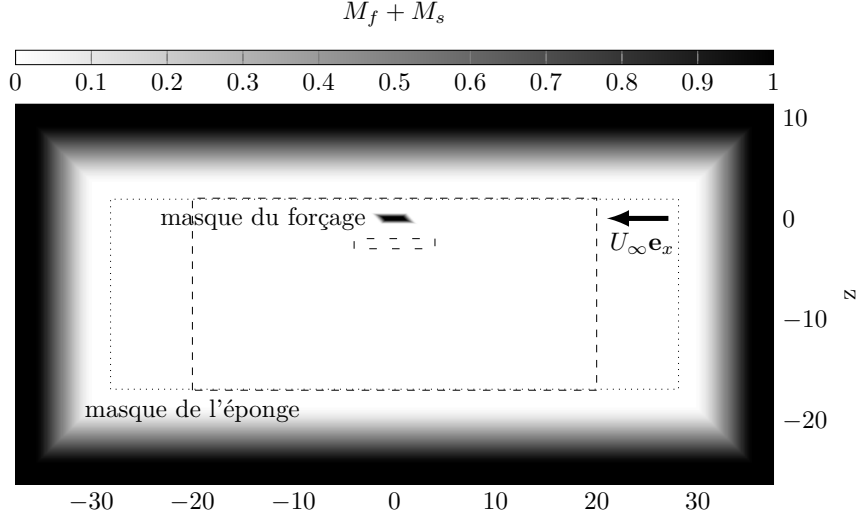


FIG. 2.2 : Masque de l'éponge sommé avec le masque de forçage  $M_s + M_f$ . Les supports de  $M_s$  et de  $M_f$  étant disjoint, l'amplitude varie entre 0 et 1. La ligne pointillée délimite l'extérieur de la surface où l'éponge est nulle. La ligne en tiret indique la fraction du domaine montrée dans toutes les figures de flottabilité en espace réel de ce chapitre. La petite zone entourée d'une ligne en tiret entoure la zone d'intégration utilisée dans la mesure de la norme de l'état non-linéaire saturé. Enfin, la flèche montre la direction de la vitesse d'advection moyenne lorsque  $U_\infty$  est négatif, comme dans le cas de l'onde de sillage.

Lorsque  $U_\infty = U_\phi$  alors  $\omega^s = 0$  et le forçage devient stationnaire. Le problème devient celui d'un faisceau d'onde interne de sillage créée par un écoulement constant perturbé par un obstacle.

## 2.1.2 Paramètres physiques et adimensionnements

Nous désignons par  $\cdot'$  les grandeurs sans dimension. Le temps est adimensionné par la fréquence de Brunt-Väisälä  $t' = tN$  et l'espace par la longueur d'onde du forçage  $\lambda_0 = 2\pi/|\mathbf{k}_0|$ ,  $x' = x/\lambda_0$  et  $z' = z/\lambda_0$ . Les vitesses sont adimensionnées par l'amplitude du forçage  $A_w$ . Par ailleurs nous définissons  $\omega'_0 = \omega_0/N$  et  $T' = 2\pi/\omega'_0$ .

Ainsi nous retrouvons les 4 paramètres physiques d'une onde interne :

- Le nombre de Froude  $\text{Fr} = A_w/N\lambda_0$  ;
- le nombre de Reynolds  $\text{Re} = A_w\lambda_0/\nu$  ;
- le nombre de Prandtl  $\text{Pr} = \frac{\nu}{D}$  ;
- $\theta_0$  l'angle de l'onde forcée  $\mathbf{k}_0$  avec l'horizontal ;

à quoi il faut ajouter, pour un faisceau d'onde, la largeur du faisceau :

$$W = l_f \cos \theta_0 / \lambda_0, . \quad (2.8)$$

Pour définir une famille, nous ajoutons un sixième paramètre qui est la vitesse de l'écoulement de fond :

$$U_a = U_\infty/U_\phi. \quad (2.9)$$

En omettant les ' dans la notation nous obtenons les équations adimensionnées suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + b \mathbf{e}_z + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathcal{F}_s + \mathcal{F}_f, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla b = -w + \frac{\text{Fr}}{\text{PrRe}} \Delta b + \mathcal{B}_s + \mathcal{B}_f, \quad (2.12)$$

avec  $b$  la flottabilité adimensionnée par  $A_w N$ . Par la suite, les ' seront systématiquement omis.

## 2.2 Simulation numérique

### 2.2.1 code de calcul

Le code numérique utilisé est un code pseudo-spectral basé sur des transformées de Fourier. Ce code en Fortran, initialement destiné à la turbulence incompressible fut importé au LadHyX et adapté pour chaque étude. On note, depuis son arrivé, l'ajout d'un schéma temporelle Runge–Kutta 4, de la stratification, de la parallélisation *MPI* (Deloncle et al., 2008), de l'opérateur adjoint (voir chapitre 4) et pour ma part, de la pénalisation (éponge et forçage périodique) de l'opérateur adjoint avec la pénalisation et d'un filtre passe-bas *Selective frequency damping* (voir chapitre 4).

Ce code pseudo-spectral possède des conditions limites périodiques. Les termes linéaires sont calculés en espace de Fourier et les termes non-linéaires en espace réel. Les termes de diffusion visqueuse et de diffusion de la flottabilité sont intégrés exactement en temps.

Le forçage et l'éponge sont calculés en soustrayant la valeur du champ souhaité à la valeur du champ au même endroit à l'itération précédente, qui doit donc être conservée d'un pas de temps à l'autre jusqu'au calcul des termes du forçage. Ceci peut être réalisé sans augmentation de l'espace mémoire nécessaire, mais est réalisé en espace réel et requiert une transformée de Fourier direct et inverse supplémentaire.

### 2.2.2 Équations résolues

Le terme d'advection est écrit sous la forme de Lamb :

$$-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p' / \rho_0 = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla [p' / \rho_0 + \mathbf{u}^2 / 2] \quad (2.13)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est la vorticité.

Finalement les équations intégrées sont :

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}} \mathbf{e}^{\text{FrRe}k^2 t}}{\partial t} = \left[ P(k) \widehat{\mathbf{u}} \times \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{b} \mathbf{e}_z + \widehat{\mathcal{F}}_s + \widehat{\mathcal{F}}_f \right] \mathbf{e}^{\text{Fr/Re}k^2 t}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \widehat{b} \mathbf{e}^{\text{Fr/PrRe}k^2 t}}{\partial t} = \left[ -ik \cdot \widehat{b} \mathbf{u} - \widehat{w} + \widehat{\mathcal{B}}_s + \widehat{\mathcal{B}}_f \right] \mathbf{e}^{\text{FrPrRe}k^2 t}, \quad (2.15)$$

où  $\widehat{\cdot}$  désigne la transformée de Fourier,  $P(k) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  la projection sur le champs de vecteurs à divergence nulle  $k^2 = k_i^2$  en utilisant la règle de sommation d'Einstein sur les indices répétés.

Les points de collocations forment une grille rectangulaire de  $1024 \times 1024$  points avec un pas de temps de  $\Delta t = T'_0 / n_t \approx T_0 / 20$  avec  $T'_0 = 2\pi / \omega'_0$  et  $n_t$ , un entier allant de 20 à 200. Le nombre de Prandtl est fixé dans toutes les simulations à  $\text{Pr} = 7$ .

### 2.2.3 Paramètres numériques

**éponge** La fonction masque de l'éponge  $M_s$  est tracée figure 2.2 et est basée sur la même fonction rampe que celle utilisée dans Hogberg and Henningson (1998). La fonction est explicitée dans l'annexe B. Nous choisissons comme paramètres (visibles sur le masque de l'éponge tracé figure 2.2) une hauteur et épaisseur nulles  $l = h = 0$  et une épaisseur de rampe de  $\delta / \lambda_0 = \gamma / \lambda_0 = 9.4$  afin de maximiser l'épaisseur de transition et ainsi de limiter au maximum les éventuelles réflexions d'ondes internes. L'éponge recouvre les 5/8 du domaine de calcul.

**forçage** La fonction de masque du forçage est aussi tracée figure 2.2 et utilise la même fonction en étant cependant non plus alignée selon  $x$  ou  $z$  mais de telle manière à ce que les isocontours forment des parallélogrammes alignés selon l'horizontale et la vitesse de groupe de l'onde interne forcée dans le référentiel de la source, c'est à dire, en intégrant l'influence de l'écoulement de fond  $U_a$ . Ainsi la zone de forçage est toujours alignée avec le faisceau créé. La largeur horizontale du domaine de forçage est  $l_f$  et son épaisseur verticale est  $h_f$ . La rampe autour de la zone est de taille  $\delta_f$  selon  $x$  et  $\gamma_f$  selon  $z$ . La zone de forçage est centrée en  $(x, z) = (x_f = 0, z_f)$ . La formule explicite est donnée dans l'annexe B.

La largeur du faisceau est fixée à deux longueurs d'onde horizontales  $W = 2$  avec la projection  $l_f \cos \theta_0 / \lambda_0 = W = 2$  avec une transition d'une demi-longueur d'onde  $\gamma_f \cos \theta_0 / \lambda_0 = 0.5$ . La hauteur de la zone de forçage est nulle  $h_f = 0$  afin encore une fois de maximiser la hauteur de la rampe, qui elle est fixée à  $\gamma^f / \lambda_0 = 1$ .

Nous fixons tout d'abord un nombre de Reynolds, de Froude, un angle et une largeur de faisceau égale au faisceau expérimental présenté dans Bourget et al. (2013), (*ie.*  $\text{Fr} = 6.19 \cdot 10^{-2}$ ,  $\text{Re} = 176$ ,  $\theta_0 = 42.3^\circ$  et  $W = 2$ ).

Nos simulations diffèrent dans le nombre de Prandtl qui lui est 100 fois plus grand pour des raisons de capacité numérique.

## 2.3 Résultats

### 2.3.1 Résultats en espace physique

**Cas des ondes de marées,  $U_a = 0$**  Nous démarrons le forçage à l'aide d'une rampe en amplitude de  $t = 0$  à  $t = 3$  où l'amplitude du forçage a atteint sa valeur finale et est ensuite constante. Nous traçons figure 2.3 le champ de perturbation en flottabilité à 4 différents instants, mais toujours à la même phase du forçage périodique. Nous observons des lignes d'alternances de valeurs positives et négatives partant de la zone de forçage. Dans le cas  $U_a = 0$ , l'onde se propage le long de ses plans de phases car la zone de forçage est immobile dans le référentiel du fluide et que la vitesse de phase d'une onde interne est normale à sa vitesse de groupe. Le forçage engendre une onde plane dont la longueur d'onde est aisément identifiable. Son amplitude est comprise dans une enveloppe, formant ainsi un faisceau. Ce faisceau reste localisé spatialement dans la direction horizontale et s'étend dans la direction verticale avant de s'estomper dans la zone éponge. La longueur d'onde  $\lambda_0$  (distance entre deux plans de phase) ainsi que l'angle  $\theta_0$  qu'ils forment avec l'horizontale sont identiques à tous les instants et correspondent à l'onde imposée par la période du forçage dans le référentiel du fluide  $\cos(\theta_0) = \omega_0/N$  et par la longueur d'onde du forçage  $\lambda_0 = 2\pi/|\mathbf{k}_0|$ . Les plans de phases disparaissent en haut et en bas du domaine en étant absorbés par les zones éponges. Nous appelons l'onde forcée l'onde primaire.

Sur la figure 2.3 (c), d'autres plans de phases commencent à apparaître, et l'onde du faisceau commence à se déstabiliser. Sur la figure 2.3 (d), la déstabilisation croît et de nouveaux plans de phase se superposent sur l'onde primaire. Ces nouvelles ondes possèdent des angles et des longueurs d'ondes différents et nous les appelons les ondes secondaires. Les longueurs d'onde des ondes secondaires sont plus petites que celle de l'onde primaire et elles oscillent à des fréquences différentes de la fréquence de forçage  $\omega_0$ . La différence de fréquence temporelle est clairement visible sur une évolution temporelle du champ, *stroboscopé* à phase constante du forçage (film en annexe), c'est à dire en ne conservant que les instants à la même phase avec le forçage périodique (qui est la fréquence de l'onde primaire). On observe qu'une des ondes secondaires se propage vers la gauche depuis le faisceau et l'autre vers la droite. Elles diffèrent l'une de l'autre par l'angle des plans de phase et leur longueur d'onde.

Cette nouvelle fréquence brise l'invariance par translation temporelle de  $T_0 = 2\pi/\omega$  ce qui montre que la solution périodique de période  $\omega_0$  est instable dans le cas  $U_a = 0$ . Le système atteint alors un état non-linéaire saturé.

Le dernier instant tracé figure 2.3 (d) est très proche de l'observation expérimentale de Bourget et al. (2013). Nous utilisons dans notre simulation les mêmes paramètres physiques (nombre de Reynolds, nombre de Froude, angle d'onde et taille du faisceau) à l'exception du nombre de Prandtl qui est lui difficile à reproduire numériquement. Dans nos simulations la flottabilité se diffuse 100 fois plus que dans l'expérience. Cependant nous observons la même dynamique avec la formation du faisceau suivi de sa déstabilisation par

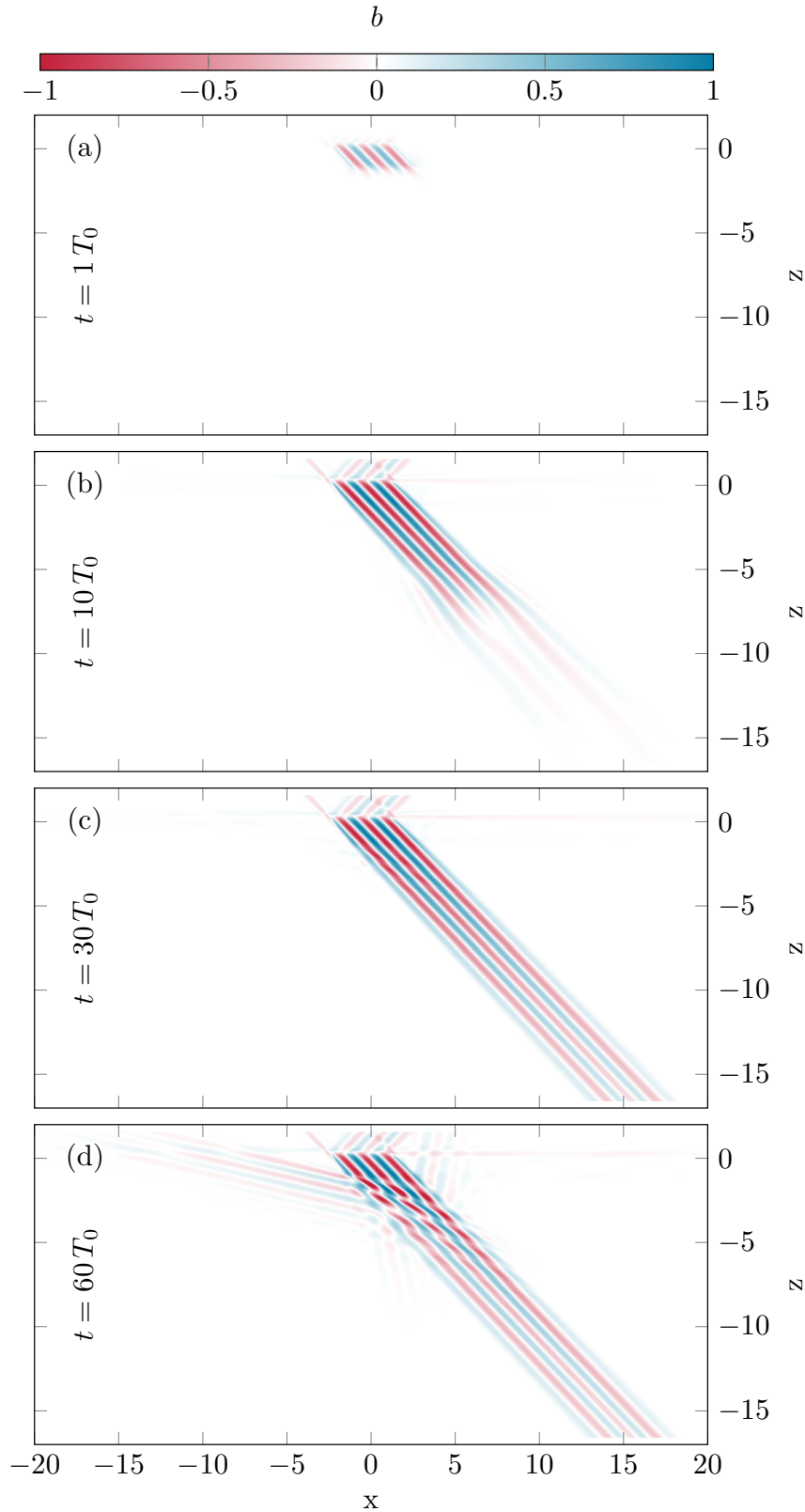


FIG. 2.3 : Évolution temporelle du champ de perturbation en flottabilité dans le cas marée où  $U_a = 0$  pour un nombre de Reynolds de  $Re = 176$  et un nombre de Froude de  $Fr = 6.19 \cdot 10^{-2}$ . Seule une portion du domaine est montrée sur ces figures ( $[-20, 20] \times [-17, 2]$ ), excluant ainsi la zone éponge. Le domaine complet a pour taille  $[-37.5, 37.5] \times [-26.3, 11.3]$  comme cela est visible sur la figure 2.2.

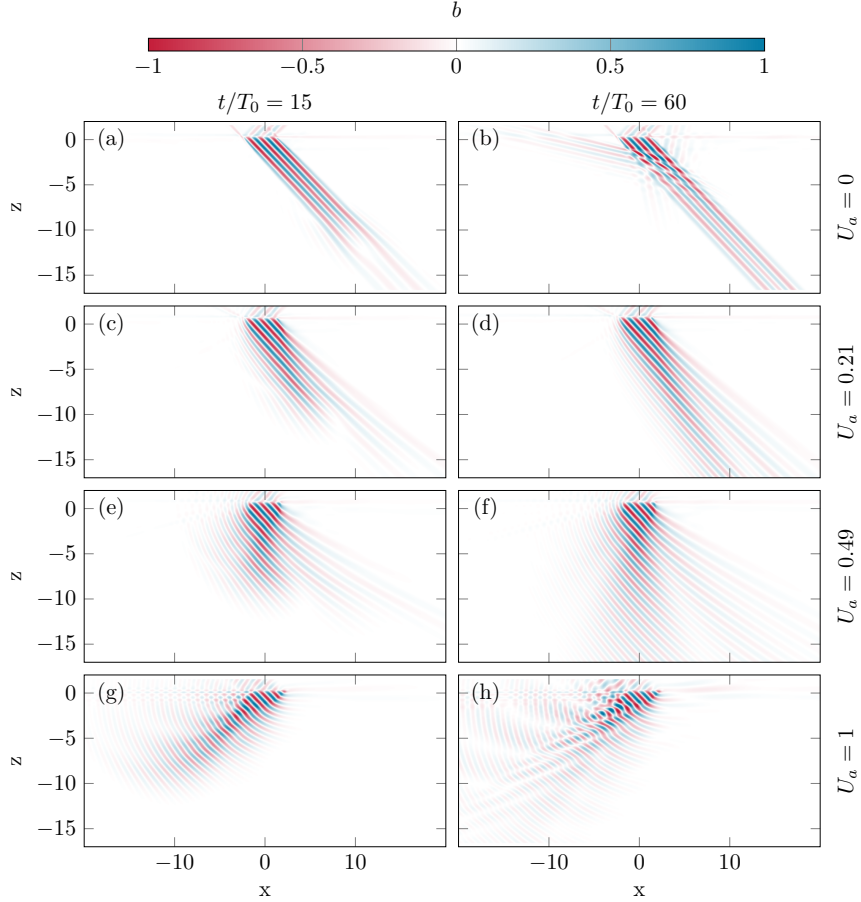


FIG. 2.4 : Champs de perturbation en flottabilité à deux instants  $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$  pour 4 valeurs de  $U_a$  (0, 0.21, 0.49 et 1). Le nombre de Reynolds vaut  $Re = 176$  et le nombre de Froude,  $Fr = 6.19 \cdot 10^{-2}$ . Le champ (b) est identique à celui de la figure 2.3 (d). Les champs (g,h) correspondent au cas bathygraphique.

deux ondes secondaires allant de part et d'autre du faisceau primaire. Bourget et al. (2013) mesurent la fréquence temporelle de leur système en intégrant une fonction d'auto-corrélation des champs du gradient de densité en chaque point d'une zone recouvrant le faisceau primaire puis en moyennant sur cette zone. Ils obtiennent des fréquences pour les ondes secondaires de  $\omega_1/N = 0.5$  et de  $\omega_2/N = 0.24$ . Nous mesurons les fréquences dans notre système en appliquant une transformée de Fourier temporelle au signal en un point situé dans le faisceau primaire en partant d'un instant où le système a atteint l'état non-linéaire saturé et en attendant 100 périodes primaires. Nous mesurons des fréquences de  $\omega_1/N = 0.495$  et  $\omega_2/N = 0.245$ , proches des mesures expérimentales de Bourget et al. (2013).

**Cas intermédiaires,  $U_a \neq 0$**  Les cas intermédiaires où  $U_a \neq 0$  sont les cas où le fluide se déplace de manière homogène selon l'écoulement de fond par rapport à la source du faisceau, la zone de forçage. Comme expliqué plus haut, la fréquence de forçage varie en fonction de l'écoulement de fond selon la loi :  $\omega^s =$



$\omega_0(1 - U_a)$  de manière à ce que la fréquence temporelle de forçage soit toujours identique dans le référentiel du fluide et égale à  $\omega_0$ . Cela revient à compenser l'effet Doppler, comme une ambulance qui diminuerait volontairement la note de sa sirène en augmentant sa vitesse de sorte qu'un piéton immobile la voyant arriver n'entende, lui, aucune variations.

Il vient immédiatement le cas particulier  $U_a = 1$  qui entraîne  $\omega^s = 0$ . Le forçage devient stationnaire en temps mais reste périodique en espace. C'est le cas d'un écoulement homogène horizontal venant de l'infini, au dessus d'une chaîne de montagnes périodique, cas que nous appelons bathygraphique. Le faisceau d'onde devient alors équivalent à celui produit dans l'expérience de Aguilar et al. (2006) par un obstacle sinusoïdal tracté à la surface de l'eau. Dans notre étude, la mise en place du paramètre d'écoulement de fond permet de passer continûment du cas *marée*, où le fluide est au repos et le forçage périodique en temps au cas *bathygraphique*, où le fluide se déplace et le forçage est stationnaire. Nous traçons sur la figure 2.4 le champ de perturbation en flottabilité  $b$  à deux instants  $T = 15$  et  $T = 60$  et pour 4 vitesses d'écoulement de fond  $U_a$ . Lorsque  $U_a$  n'est plus nul, le faisceau d'onde ne se propage plus parallèlement à ses plans de phase mais est progressivement dévié vers la gauche avec l'augmentation de  $U_a$  (écoulement vers la gauche). La vitesse de groupe  $\mathbf{C}_0^s = \mathbf{C}_0^f + U_\infty \mathbf{e}_x$  de l'onde dans le référentiel source (du forçage) n'est plus parallèle aux plans de phases puisque  $\mathbf{C}_0^f$  la vitesse de groupe de l'onde dans le référentiel du fluide vaut  $\mathbf{C}_0^f = -\sin \theta_0 / N |\mathbf{k}| \mathbf{e}_\theta$  avec  $\mathbf{e}_\theta$  le vecteur unité normal à  $\mathbf{k}$  dans le plan vertical. La propagation du faisceau est presque normale aux plans de phases lorsque  $U_a = 1$ . Malgré cela, l'espacement des plans de phase et leur angle avec l'horizontal ne varient pas dans les différents cas, montrant que l'onde primaire possède bien le même nombre d'onde  $\omega_0$  et vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  dans tous les cas.

Dans les cas intermédiaires  $U_a = 0.21$  figure 2.4 c,d et  $U_a = 0.49$  figure 2.4 e,f la solution possède la même période que le forçage et aucune onde secondaire n'apparaît, ce qui semble indiquer la stabilité de ces configurations. La stabilité de ces cas sera montrée plus en détails dans la section suivante.

Dans le cas  $U_a = 1$ , figure 2.4 g,h, le faisceau n'est pas stationnaire, contrairement au forçage, trace de la croissance d'une instabilité. Deux ondes secondaires occupent le faisceau primaire et possèdent la même période  $\omega_p$ . À la différence du cas  $U_a = 0$  où les ondes secondaires possédaient une longueur d'onde plus petite que celle de l'onde primaire, le cas  $U_a = 1$  voit lui une onde secondaire dont la longueur d'onde est plus grande que celle de l'onde primaire. L'autre onde secondaire a quant à elle une longueur d'onde très similaire à la longueur d'onde primaire, mais l'angle de ses plans de phase diffère de celui des ondes secondaires du cas *marée*  $U_a = 0$ .

En faisant varier  $U_a$  entre 0 et 1 dans de nombreux cas intermédiaires non présentés ici, nous parvenons à déterminer trois régions séparées par deux seuils. Dans la région entre ces deux seuils de  $U_a = 0.21$  et  $U_a = 0.49$  les faisceaux obtenus sont stables alors qu'ils sont instables pour les cas au delà de ces seuils (première région entre  $U_a = 0$  et  $U_a = 0.20$  et seconde région entre  $U_a = 0.50$  et  $U_a = 1$ ).

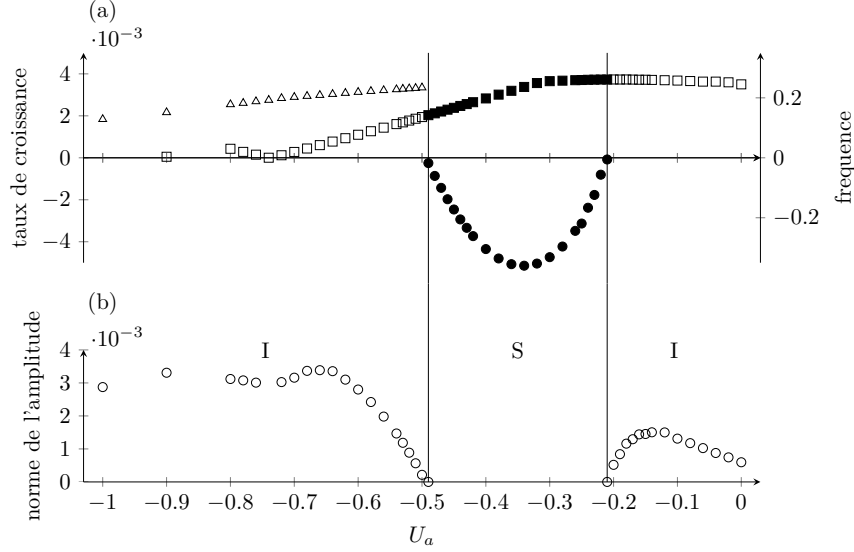


FIG. 2.5 : Deux seuils séparent trois régions notées I pour instable et S pour stable. (a) Dans la région notée S : Taux de croissance (●) et fréquence (■) associées au mode propre dominant calculé à l'aide d'un algorithme d'Arnoldi-Krylov. Dans les régions notées I : fréquence non-linéaire mesurée en un point dans le faisceau primaire et mesurée à phase constante du forçage. Dans la région où  $U_a > 0.5$  nous traçons les harmoniques de la fréquence non-linéaire afin de voir la continuité avec le cas de forçage stationnaire  $U_a = 0$ . (b) Norme de l'amplitude mesurée dans une région dans le faisceau primaire (montrée figure 2.2).

### 2.3.2 Modes propres linéaires et modes non-linéaires

**Modes linéaires** Les cas stables convergent vers une solution qui, à phase du forçage fixe, n'évolue plus dans le temps. Cette solution est un cycle limite de même fréquence que le forçage. Une séquence temporelle de champs comme ceux présentés figure 2.4 (c,d) et (e,f) pour  $U_a = 0.21$  et  $U_a = 0.49$  converge vers une solution périodique à la période du forçage et le champ obtenu, à une phase spécifique du forçage, n'évolue plus dans le temps *ie.* les solutions à un instant  $t$  et un instant  $t + 2\pi/\omega_0^s = t + T$  (où  $T$  est la période de forçage) sont de plus en plus proches pour  $t$  suffisamment grand. La simulation converge vers une solution périodique en temps de période la période de forçage et nous prenons un champ dans chaque période à une phase identique. Nous appelons  $X_n$  cette série de champs  $U_n, b_n$  prise toujours à la même phase. Nous attendons  $M = 200$  périodes de base de manière à ce qu'une norme des variations entre deux instants soit inférieure à  $\|X_M - X_{M+1}\|_{energy} / \|X_M\|_{energy} < 10^{-3}$  avec comme norme  $\|\cdot\|_{energy} = u^2 + w^2 + b^2$ . Le résultat périodique obtenu est très proche de la solution asymptotique.

Nous définissons le propagateur  $P$  comme l'opérateur qui déplace le système de l'instant  $t$  à l'instant  $t + T$  ( $T$  période de forçage). Le système étant périodique en temps, nous construisons l'espace des phases en ajoutant la variable  $\Phi$  avec  $\partial\Phi/\partial t = \omega^s$ . L'équation d'évolution pour le vecteur d'état  $(X, \Phi)$

est autonome et la série des  $X_n$  appartient à la section de Poincaré définie par  $\Phi = 0$  modulo  $2\pi$ . L'opérateur  $P$  est alors l'application de premier retour avec  $X_{n+1} = PX_n$  et la solution asymptotique est un point fixe de l'opérateur  $P$ ,  $P(X_B) = X_B$ . Dans les cas stables, la série des  $X_n$  converge vers  $X_B$  et nous appliquons un algorithme d'Arnoldi–Krylov (décrit dans Barkley and Henderson (1996); Julien et al. (2002) et détaillé annexe C) basé sur la série des instants  $X_n$  allant de  $n = M = 200$  à  $n = M + N = 210$ .  $X_B$  étant un point fixe  $P$ , son taux de croissance est nul, et nous le retrouvons comme mode propre dominant avec un taux de croissance négatif.

Nous traçons sur la figure 2.5 (a) le taux de croissance du mode dominant en fonction de la vitesse de l'écoulement de fond  $U_a$  (●). Le taux de croissance s'annule autour des valeurs  $U_a = -0.21$  et  $U_a = -0.49$ , et nous pouvons suivre les modes globaux non-linéaires depuis ces valeurs seuils jusqu'au valeurs particulières respectives  $U_a = 0$  (cas marée) et  $U_a = 1$  (cas sillage). Ainsi nous ferons référence à la valeur  $U_a = 0.21$  comme le seuil marée et  $U_a = 0.49$  comme le seuil sillage. Pour les valeurs de  $U_a$  comprises entre ces deux seuils, le taux de croissance du mode propre dominant est toujours négatif et définit la région stable noté S entourée de deux régions instables notées I.

Nous traçons sur cette même figure 2.5 (a) la fréquence de mode propre dominant en fonction de la vitesse de l'écoulement de fond  $U_a$  (■).

**Modes globaux non-linéaires** Lorsque l'écoulement est instable, la série des  $X_n$  ne converge plus vers un point fixe mais vers un cycle limite autour du point fixe  $X_B$  qui est maintenant inconnu. Le vecteur d'état  $X_n$  contient les champs des vitesses et de la perturbation en flottabilité à l'instant  $t = nT$ . Nous calculons la moyenne  $X_M^N$  des instants  $X_n$  pour tous les  $n$  dans  $[M, M + N]$ . Lorsque  $M$  est suffisamment grand, nous supposons que l'écoulement atteint un attracteur dans la section de Poincaré et lorsque  $N$  est grand,  $X_M^N$  est l'écoulement moyen périodique et contient toutes les contributions à toutes les fréquences harmoniques du forçage. L'écoulement moyen périodique ne contient cependant que l'état moyen à une phase spécifique du forçage, celle choisie pour la section de Poincaré et les  $X_n$ . Les autres phases pouvant être calculées en choisissant une autre phase pour les  $X_n$ .

Nous définissons alors  $X'_n$  par  $X'_n = X_n - X_M^N$  le vecteur contenant la partie non périodique de l'écoulement et nous appelons ce vecteur le mode global non-linéaire à l'instant  $n$ . L'énergie des  $X'_n$  ne varie plus dans le temps pour des  $n$  proche de  $M + N$ , ce qui nous montre que malgré l'évolution instationnaire des  $X'_n$  qui contiennent une fréquence différente de la fréquence de forçage, ils atteignent un nouvel attracteur à la fréquence du mode global non-linéaire autour de l'attracteur déjà existant à la fréquence du forçage. La trajectoire complète est quasi-périodique et possède la topologie d'un tore dans l'espace des phases. Cette seconde fréquence, la fréquence du mode global non-linéaire est tracée figure 2.5 (a) □.

Nous calculons l'énergie  $e$  du mode global non-linéaire selon la norme  $e = u^2 + v^2 + b^2$  du vecteur  $X'_n$  intégrée dans une zone située dans le faisceau primaire (voir figure 2.2). L'énergie du mode global non-linéaire est tracée fi-

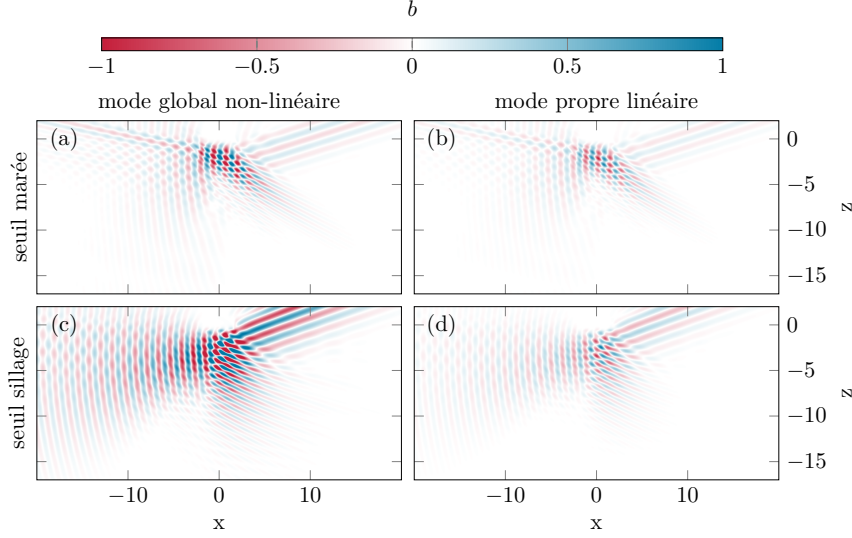


FIG. 2.6 : Perturbation en flottabilité des modes globaux non-linéaires aux seuils de marée (a) et sillage(c) et des modes propres linéaires aux seuils de marée (b) et sillage (d). Les modes propres linéaires sont normalisés en amplitude afin d'être comparable aux modes globaux non-linéaires.

gure 2.5 (b) dans les régions instables. À chaque seuil l'énergie non-linéaire (ainsi que le taux de croissance linéaire) s'annule ce qui est caractéristique d'une bifurcation de Hopf super-critique. De plus l'énergie croît, dans les régions instables, linéairement avec l'écart au seuil. Cette propriété est très nettement marquée autour du seuil de sillage (seuil de gauche) mais l'est moins au seuil marée (seuil de droite) où l'énergie rapidement ne respecte plus la loi de Stuart–Landau et le faisceau est probablement sujet à de nouveaux effets non-linéaires.

À chaque seuil, la pente de la courbe des fréquences des modes propres linéaires est identique à la pente des fréquences des modes globaux non-linéaires (en traversant le seuil l'évolution des fréquences des modes est inchangée) ce qui est compatible avec une bifurcation de Hopf super-critique à coefficient de Landau à partie imaginaire nulle (Manneville, 2004).

Nous traçons figure 2.6 (a,c) la perturbation en flottabilité des modes globaux non-linéaires proche des seuils de marée  $U_a = 0.20$  et sillage  $U_a = 0.50$  pour des valeurs de  $M = 80$  et  $N = 20$ . Le faisceau primaire n'est pas visible dans les modes globaux non-linéaires car il est périodique à la période de forçage et est entièrement inclus dans l'écoulement moyen périodique  $X_M^N$ . À son emplacement la structure du mode non-linéaire est complexe et contient la superposition d'ondes secondaires. Les plans de phases de ces ondes s'étendent ailleurs dans le domaine avant d'être absorbés par la zone éponge. La figure 2.6 (c) nous montre un mode non-linéaire composé de la superposition de trois séries de plans de phases à différents angles. Une série de plans de phases presque verticaux à gauche du domaine, une série au centre et une série à droite s'étendant vers le haut et possédant la plus grande longueur d'onde. La figure 2.6 (a) nous montre un mode non-linéaire composé de la superposition de quatre

séries de plans de phases à différents angles. Une série verticale à gauche, une vers le haut à gauche, une vers le bas à droite ayant la plus petite longueur d'onde et une vers le haut à droite ayant la plus grande longueur d'onde.

Ces deux cas présentent une série de plans de phases similaires, presque verticaux et situés à gauche du domaine. Hormis ces plans de phases, le cas seuil marée (a) possède des ondes de chaque côté (une à gauche et deux à droite) alors que le cas sillage (c) en possède lui deux à droite du domaine.

Dans les deux cas les ondes se recouvrent sur l'emplacement du faisceau primaire et se propagent depuis celui-ci. Du schéma d'interférence et du Moiré qui en résulte nous pouvons aussi en déduire qualitativement que certaines des ondes sont harmoniques avec deux autres.

Nous traçons figure 2.6 (b,d) la partie réelle de la perturbation en flottabilité des modes propres linéaires dominant aux seuils de marée  $U_a = 0.21$  et sillage  $U_a = 0.49$ . À chaque seuil, les champs sont quasiment identiques et la même description que pour les figures (a,c) s'applique. La proximité des champs nous montre qu'autour des seuils les modes globaux non-linéaires sont correctement sélectionnés par un mécanisme linéaire de mode propre.

## 2.4 Analyse

### 2.4.1 Spectres et résonance triadique

Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.1, un écoulement permettant le développement d'ondes, c'est à dire des modes neutres linéaires progressifs et possédant une non-linéarité quadratique peut voir trois de ses modes neutres se coupler grâce à la non-linéarité et échanger de l'énergie si ses trois modes respectent les relations de résonance triadique :

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (2.17)$$

où  $\omega_i$  et  $\mathbf{k}_i$  sont liés par la relation de dispersion. Les champs étant réels en mécanique des fluides,  $(\mathbf{k}, \omega)$  et  $(-\mathbf{k}, -\omega)$  décrivent la même onde et la condition de résonance est écrite ici avec un signe plus basé sur la convention que l'espace des  $(\mathbf{k}, \omega)$  est entièrement utilisé pour les ondes, *ie.* il n'y a aucune restriction sur le signe des composantes de  $\mathbf{k}$  ni sur la fréquence qui peuvent être positifs ou négatifs. Une onde ayant une fréquence de signe opposée à son nombre d'onde se propagera dans la direction opposée.

Pour les ondes internes, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = N^2 k_x^2 / (k_x^2 + k_z^2), \quad (2.18)$$

où  $N$  est la fréquence de Brunt-Väisälä et  $(k_x, k_z)$  les nombres d'ondes horizontaux et verticaux. La déstabilisation d'une onde interne ayant un nombre de Froude faible se décrit très bien grâce à l'application des résonances triadiques et la relation triadique associée à la relation de dispersion donne lieu à la courbe en espace de Fourier des lieux possible des vecteurs d'ondes d'une onde

secondaire résonante pour une onde primaire donnée. Cette courbe est tracée sur la figure 2.7 (a,b) en traits noirs fins et épais pour l'onde primaire  $\mathbf{k}_0$  (dont le vecteur d'onde est tracé) forcée dans les simulations. Sur cette courbe, décrivant un système à trois ondes (une triade), une des ondes est l'onde primaire et est fixe, chaque point sur la courbe est la position du vecteur d'onde d'une onde secondaire et la troisième onde  $\mathbf{k}_2$  est déduite selon la relation triadique en soustrayant  $\mathbf{k}_1$  à  $\mathbf{k}_0$  (2.17). L'indice 1 ou 2 est arbitraire et la courbe résonante est symétrique par échange des ondes secondaires ce qui entraîne une symétrie  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$  de la courbe résonante.

De l'analyse triadique 1.2.1 on obtient le signe du taux de croissance associé à chaque triade et seules trois paires de branches de la courbe résonante décrivent des triades pouvant être instables. Ces trois branches sont tracées en traits épais quand les autres branches (stables) sont tracées en traits fins.

Deux des branches instables, indicées  $E_1$  et  $E_2$ , s'étendent à l'infini et nous les appelons branches extérieures. La troisième, notée  $C$ , est finie en espace de Fourier et nous l'appelons branche centrale. Les branches  $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$  et  $\bar{C}$  sont les branches symétriques des précédentes selon la symétrie décrite plus haut  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$  qui ne correspond qu'à l'échange des indices des ondes secondaires.

En plus de la courbe résonante, nous traçons en traits bleus fins et épais sur la figure 2.7 la courbe symétrique de la courbe résonante selon une symétrie centrale  $(\mathbf{k}_i, \omega_i) \rightarrow (-\mathbf{k}_i, -\omega_i)$ . Cette symétrie est équivalente à une translation de la courbe résonante par  $-\mathbf{k}_0$ . Ces branches symétriques sont indicées par l'ajout d'un tilde.

Sur ces courbes, nous traçons figure 2.7 le spectre des modes propres dominants aux seuils de marée (b) et de sillage (a). Ces modes sont ceux tracés figure 2.6 (b,d). Ces spectres sont obtenus en prenant le module de la transformée de Fourier complexe des champs complexes issus de l'algorithme d'Arnoldi-Krylov. Ceux-ci sont complexes puisque associés à des valeurs propres complexes (modes oscillants). Ainsi les spectres tracés sont définis par :

$$\hat{e}(\mathbf{k}) = |\hat{u}(\mathbf{k})|^2 + |\hat{v}(\mathbf{k})|^2 + |\hat{b}(\mathbf{k})|^2, \quad (2.19)$$

où  $\hat{\cdot}$  est la transformée de Fourier bi-dimensionnelle complexe. Les valeurs du spectre sont ensuite normalisées afin que le maximum soit égal à un.

L'énergie est faible partout sauf autour de quelques vecteurs d'ondes. Le cas marée (b) possède quatre pics d'énergies. Deux assez nettement situés sur les courbes résonantes  $\bar{E}_2$  et  $\bar{C}$ , le pic en haut à droite qui vient toucher la branche externe  $E_2$  et la branche centrale  $C$  et enfin le pic de gauche ayant un vecteur d'onde presque horizontal (noté  $\mathbf{k}_h$ ). Le cas sillage (a) possède lui trois pics d'énergies. Deux sont situés sur les courbes  $C$  et  $\bar{C}$ . Le troisième pic n'est sur aucune courbe et possède un vecteur d'onde presque horizontal (noté  $\mathbf{k}_h$ ). Les deux figures diffèrent par la présence d'énergie sur la branche externe  $E_2$  et sur la branche externe symétrique  $\bar{E}_2$  dans la figure (b), mais pas sur les mêmes branches dans la figure (c). Autrement les autres pics sont similaires.

Chaque pic décrit une onde secondaire (visible figure 2.6 (b,d)) et l'étalement du pic en espace de Fourier va à l'inverse de son étalement en espace réel. Ainsi un pic allongé dans une direction en espace de Fourier se verra confiné

selon cette même direction en espace réel. Réciproquement, un confinement en espace réel, comme celui provenant de la localisation du mode sur le faisceau primaire, génère un étalement de l'énergie en Fourier, ce qui explique l'étalement dans la figure (b) du pic en haut à droite qui est bien aligné avec la propagation du faisceau primaire.

Selon Hasselmann (1967), les ondes secondaires composant une triade résonante instable doivent avoir leurs fréquences inférieures à la fréquence de l'onde primaire ainsi :

$$\begin{aligned} |\omega_1| &< |\omega_0|, \\ |\omega_2| &< |\omega_0|, \end{aligned}$$

ce qui avec la relation triadique 2.16 nous donne  $\omega_2 = \omega_1 - \omega_0$  et comme on choisit  $\omega_0$  positif, alors  $\omega_2$  est toujours de signe opposé à  $\omega_1$ . Or l'algorithme d'Arnoldi-Krylov ne nous donne accès qu'aux fréquences des modes propres modulo la fréquence d'échantillonnage et ne peut faire la distinction entre une fréquence négative et positive, celle-ci apparaîtra positive, puisque modulo la fréquence de base. Ainsi l'algorithme ne peut décrire correctement une triade instable et opposera systématiquement l'une des ondes secondaires. Ce qui signifie que si notre faisceau primaire est sujet à une instabilité triadique, l'une des ondes secondaire devrait être sur la courbe noire en trait épais tandis que l'autre devrait être sur une courbe symétrique, soit la courbe bleue en trait épais.

La présence d'énergie sur la courbe résonante ou sur la courbe symétrique de la courbe résonante confirme le mécanisme triadique qui est un mécanisme local pour une onde d'amplitude infinitésimale comme mécanisme d'instabilité global d'un faisceau d'amplitude fini.

Dans le cas sillage (a) la triade implique une onde secondaire sur la branche centrale  $C$  et une sur la branche centrale symétrique  $\tilde{C}$ . Le cas marée semble lui impliquer deux triades, l'une identique au cas sillage et l'autre sur la branche externe  $E_2$  et sur la branche externe symétrique  $\tilde{E}_2$ . Une particularité de la triade impliquant la branche centrale et exclusive au cas sillage est d'avoir une onde secondaire ayant une longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde de l'onde primaire, cette triade transfère donc de l'énergie d'une échelle de longueur vers une échelle plus grande, ce qui est le cas des mécanismes recherchés pour mieux comprendre les phénomènes de cascade inverse.

Les vecteurs d'ondes presque horizontaux notés  $\mathbf{k}_h$  présents dans les deux cas (sillage et marée) sont proches de  $\mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_0$  (ou  $-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0$ ). Pour que cette harmonique spatiale puisse vivre comme onde interne il faut que sa fréquence satisfasse la relation de dispersion, or  $|\omega_1 - 2\omega_0|$  est proche de  $N$ , la fréquence des ondes ayant un vecteur d'onde horizontal, ce qui est le cas des  $\mathbf{k}_h$  et elles sont donc des ondes harmoniques de la triade, ce qui explique qu'elle même ne soit impliquée dans aucune triade (et ne soit pas sur la une courbe résonante). Par ailleurs les ondes  $\mathbf{k}_h$  ont une vitesse de groupe presque verticale dont la composante horizontale est très faible. Elles sont advectées par l'écoulement de fond horizontal et se retrouvent systématiquement emportées vers la gauche du domaine.

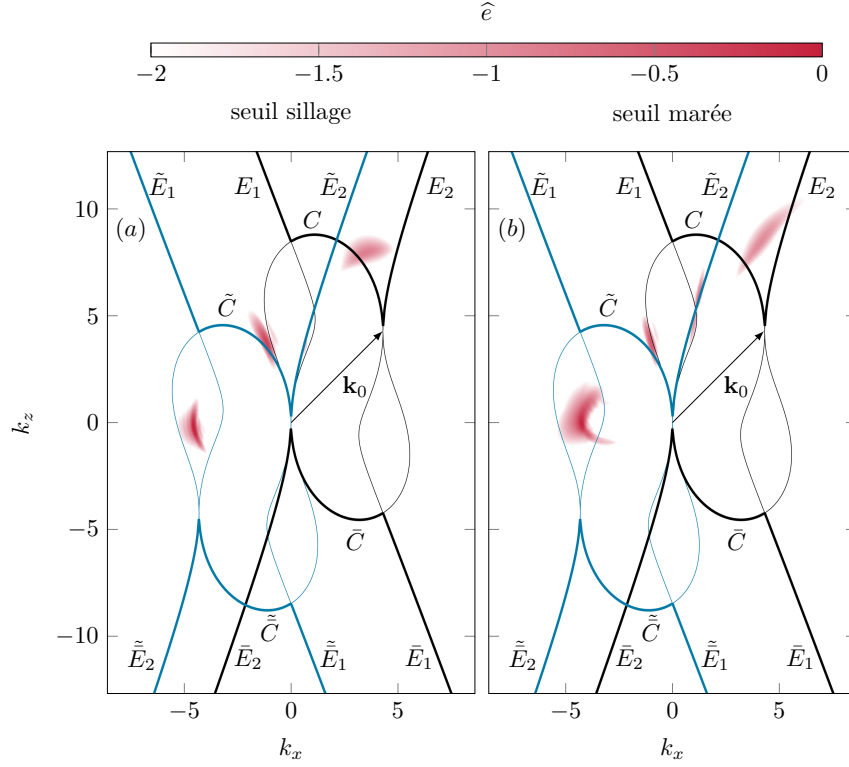


FIG. 2.7 : MODES PROPRES : Spectre d'énergie  $\hat{e}(\mathbf{k}) = (|\hat{u}(\mathbf{k})|^2 + |\hat{w}(\mathbf{k})|^2 + |\hat{b}(\mathbf{k})|^2)$  en espace de Fourier des modes propres linéaires tracés figure 2.6 (b,d) pour des valeurs de  $U_a$  au seuil marée  $U_a = 0.21$  (b) et sillage  $U_a = 0.49$  (a). La courbe noire est le lieu des vecteurs d'onde secondaire des triades possibles pour l'onde primaire  $\mathbf{k}_0, \omega_0$  donné (et tracé) dont la partie épaisse signale les triades pouvant être instable alors que la partie fine signale les triades toujours stables. Cette courbe est symétrique selon  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$  et ces branches sont notées  $E_1, C, E_2$  et  $\tilde{E}_1, \tilde{C}$  et  $\tilde{E}_2$  pour les branches symétriques. La courbe bleue est obtenue par une symétrie centrale de la courbe noire, ce qui équivaut à une translation de  $-\mathbf{k}_0$ . Ces branches sont indicées  $\tilde{\tilde{E}}_1, \tilde{\tilde{C}}, \tilde{\tilde{E}}_2$  et  $\tilde{\tilde{E}}_1, \tilde{\tilde{C}}$  et  $\tilde{\tilde{E}}_2$  pour les branches symétriques. L'énergie suit la courbe résonante montrant que l'instabilité globale d'un faisceau d'amplitude finie est correctement décrite par un mécanisme local de résonance triadique pour une onde d'amplitude infinitésimale. Les ondes notées  $\mathbf{k}_h$  sont des harmoniques résonantes des triades instables.



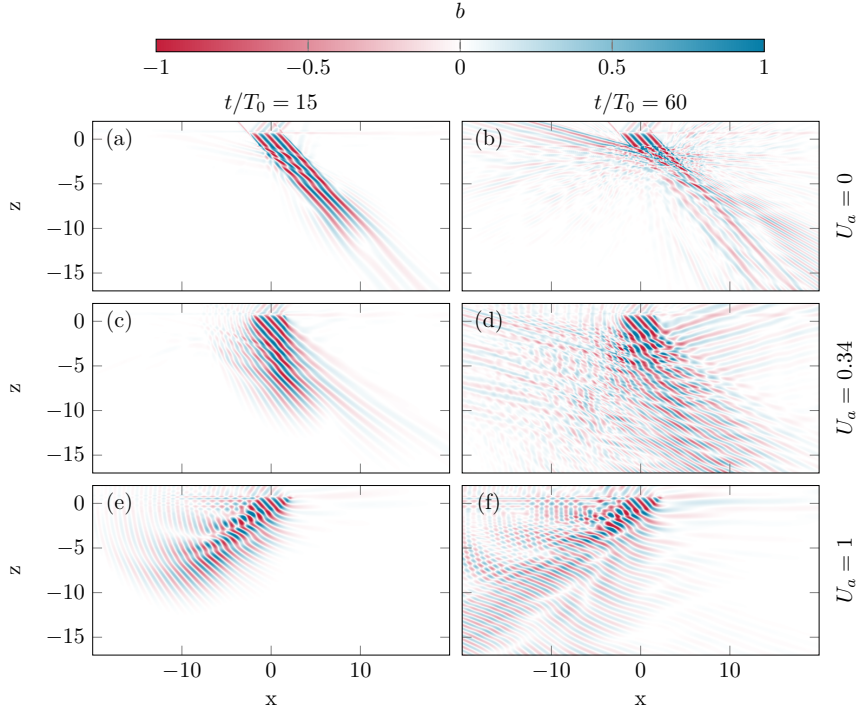


FIG. 2.8 : EFFETS DU NOMBRE DE REYNOLDS : Champs de perturbation en flottabilité pour trois valeurs de  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) à deux instants ( $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ ). Le nombre de Reynolds est ici dix fois plus élevé que dans les simulations précédentes et vaut  $Re = 1760$ . Pour les valeurs de  $U_a$  intermédiaires, la région stable disparaît. Le cas marée  $U_a = 0$  développe des instabilités supplémentaires lorsque le nombre de Reynolds est plus élevé. Le cas sillage  $U_a = 1$  ne voit pas d'instabilité secondaire se développer.

## 2.4.2 Influence du nombre de Reynolds

Nous traçons figure 2.8, la réponse non-linéaire saturée pour un nombre de Reynolds de  $Re = 1760$ , dix fois plus élevé que dans les simulations précédentes ( $Re = 176$ ) mais en gardant un nombre de Froude identique ( $Fr = 6.19 \cdot 10^{-2}$ ). Nous montrons la perturbation en flottabilité pour trois valeurs de l'écoulement de fond,  $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$  à deux instants,  $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ . Dans ces trois cas les faisceaux sont instables et l'étaient pour tous les cas dans la plage  $U_a \in [-1, 0]$  que nous avons testés. L'augmentation du nombre de Reynolds a supprimé la région des  $U_a$  intermédiaires où les faisceaux étaient stables. Dans le cas marée  $U_a = 0$ , l'instabilité est plus marquée et se déstabilise elle-même de manière irrégulière à des échelles plus petites. Dans le cas sillage  $U_a = 1$ , l'instabilité est très similaire mais son extension spatiale est plus grande.

Nous traçons sur la figure 2.9 les spectres d'énergies (obtenus pareillement à ceux section 2.4.1 mais sur les champs réels (réponses non-linéaires saturées) visibles figure 2.8(b,f) et figure 2.4 (b,h)) au seuil de marée (b,d) et de sillage (a,c) à l'instant  $t = 60$  pour des nombres de Reynolds de  $Re = 176$  (a,b) et de  $Re = 1760$  (c,d). De la même manière que sur la figure 2.7 les spectres

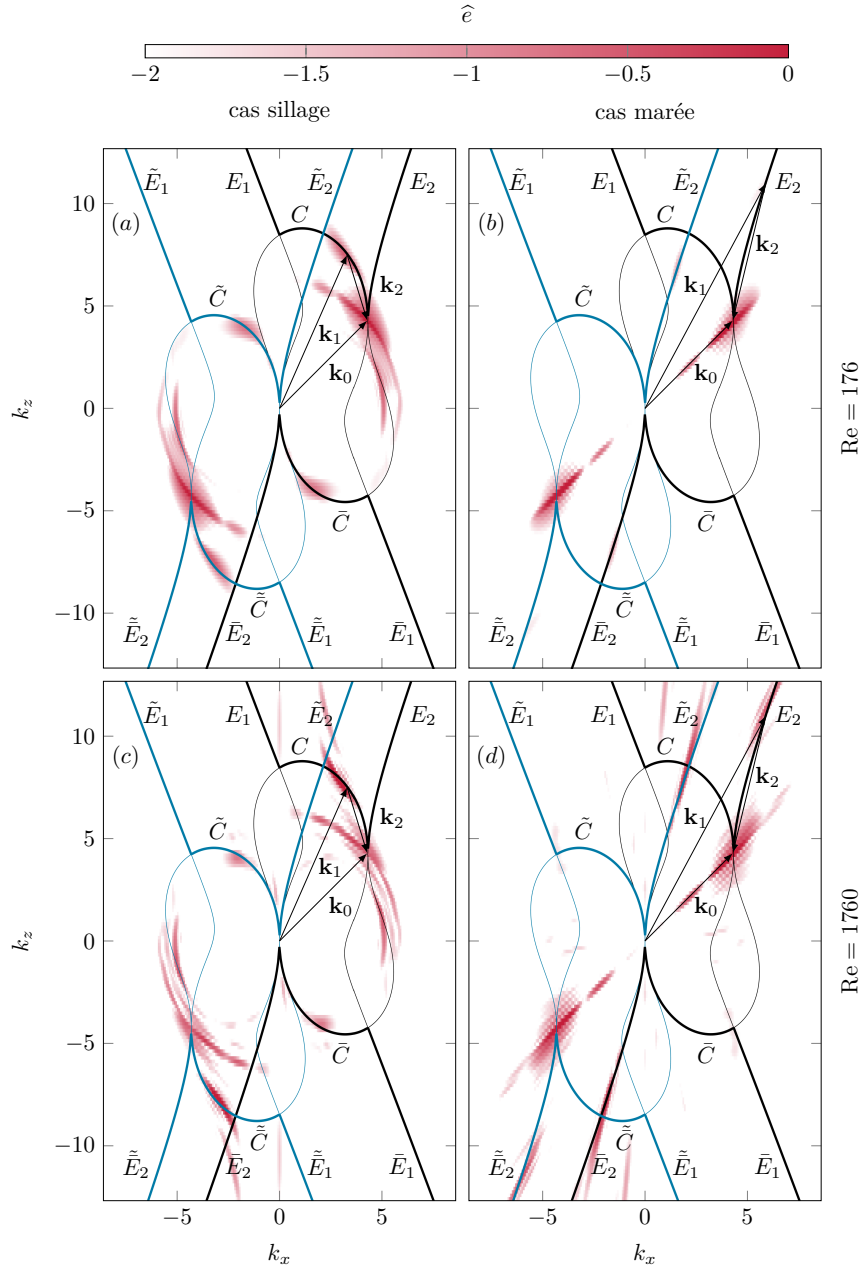


FIG. 2.9 : EFFETS DU NOMBRE DE REYNOLDS : Spectres d'énergie des réponses non-linéaires saturées à l'instant  $t/T_0 = 60$  pour les cas marée et seuil et pour deux nombre de Reynolds  $Re = 176$  et  $Re = 1760$  dont les champs de perturbation en flottabilité sont tracés, (a,b) figure 2.4 (b,h) et (c,d) figure 2.8 (b,f). Les courbes résonantes tracées sont identiques à celles de la figure 2.7 où elles y sont déjà décrites. Les triades excitées dans les différents cas sont tracées sous la forme des vecteurs  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ .

sont tracés sur les courbes résonantes et les courbes symétriques des courbes résonantes.

Contrairement à la figure 2.7, l'onde primaire est présente dans le champ (puisque qu'il s'agit de la réponse complète sans analyse) et se voit par la présence d'énergie sur le vecteur  $\mathbf{k}_0$ . Une autre différence avec la figure 2.7 est que les champs ici étant réels (directement issus de la simulation des équations de Navier-Stokes) leurs transformées de Fourier sont symétriques selon une symétrie centrale  $(k_x, k_z) \rightarrow (-k_x, -k_z)$  et chaque pic d'énergie se voit doubler par son pic symétrique. Il est alors impossible de déterminer la direction de propagation d'une onde associée à un pic d'énergie.

Au cas marée à petit nombre de Reynolds (b), on trouve un pic d'énergie sur la branche  $E_2$  (et donc  $\bar{E}_2$ ) et sur la branche  $\tilde{E}_2$ . Ces pics marquent la présence d'une triade dont les vecteurs sont tracés ( $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ ). Cette triade sur la branche  $E_2$  était déjà présente dans le mode propre au seuil marée  $U_a = 0.21$  figure 2.7 (b) mais elle était accompagnée d'une seconde triade, alors que dans le cas marée à grand Reynolds (d) elle est exclusive. Le cas marée à grand Reynolds (d) présente un spectre plus épars mais l'on retrouve les mêmes pics d'énergie qu'à petit Reynolds sur les branches  $E_2$  et  $\tilde{E}_2$  formant la même triade  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Malgré la présence d'instabilités supplémentaires le mécanisme triadique décrit très bien l'instabilité du faisceau d'onde et la sélection du mode n'est pas influencée par l'augmentation du nombre de Reynolds.

Au cas sillage à petit nombre de Reynolds (a), l'énergie se situe sur les branches centrales  $C$  et  $\tilde{C}$ . De la même manière ces pics traduisent la présence d'ondes formant une triade tracée par  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Cette triade est très similaire à celle obtenue sur le mode propre au seuil sillage  $U_a = 0.49$  figure 2.7 (a) bien que nous soyons ici dans le cas sillage  $U_a = 0$ . Le cas sillage à grand nombre de Reynolds (c) présente lui aussi des pics d'énergie plus épars, cependant centrés sur la même triade qu'à petit Reynolds est excitée. Le mécanisme triadique s'applique et la sélection n'est là non plus pas influencée par l'augmentation du nombre de Reynolds. Le mode reste ici grande échelle avec une secondaire de longueur d'onde plus importante que la longueur d'onde de l'onde primaire.

Dans les deux cas les modes instables excités sont identiques entre les cas au seuils  $U_a = 0.21$  et  $U_a = 0.49$ , et les cas limites  $U_a = 0$  et  $U_a = 1$  et peuvent être suivis dans ces deux régions instables. Indépendamment du nombre de Reynolds, à faibles vitesses de l'écoulement de fond le faisceau tend à sélectionner un mode triadique petite échelle sur une branche extérieure alors qu'une grande vitesse d'écoulement de fond voit une triade grande échelle se développer. Néanmoins, en augmentant le nombre de Reynolds la région stable précédemment obtenue pour un nombre de Reynolds plus faible disparaît.

Dans le cas intermédiaires  $U_a = 0.34$ , la réponse combine deux triades, une sur la branche externe et une sur la branche interne.

### 2.4.3 Influence du nombre de Froude

Le nombre de Froude est directement lié à l'amplitude de l'onde primaire. L'onde interne déforme les isopycnes (lignes à densité constante) et nous pre-

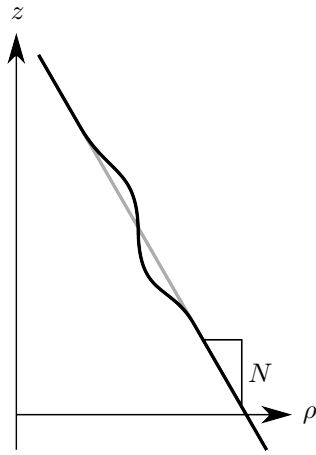


FIG. 2.10 : SCHÉMA DU PROFIL DE DENSITÉ AVEC LA PROFONDEUR : la droite grise représente la stratification linéaire  $\bar{\rho}$  et la courbe noire représente la densité totale  $\rho$ . La perturbation en densité  $\rho'$  est l'écart entre les deux courbes. Lorsque le profil densité  $\rho$  n'est plus monotone avec la profondeur, du fluide lourd surplombe du fluide plus léger et il y risque de déferlement.

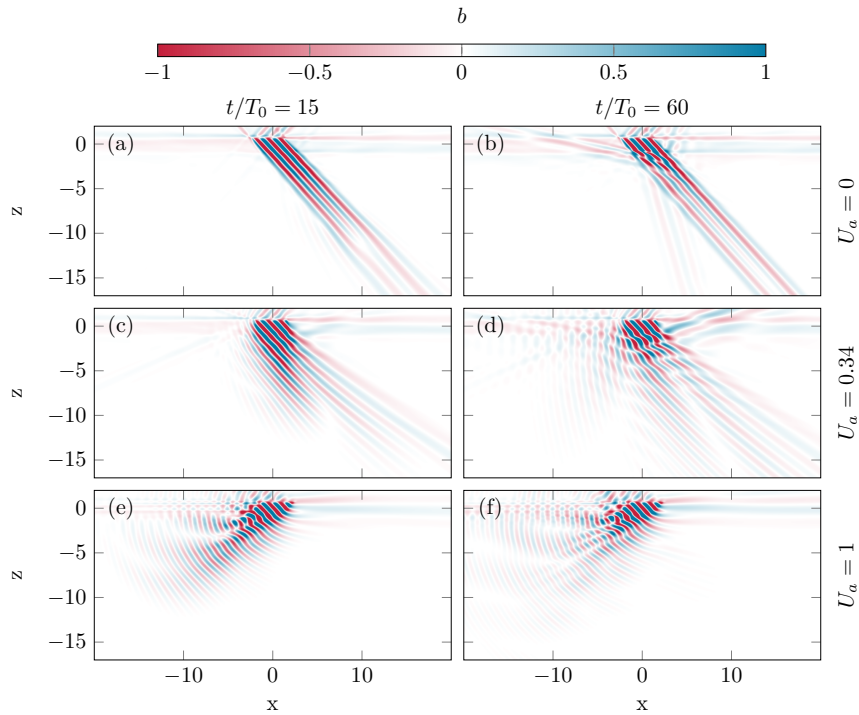


FIG. 2.11 : EFFETS DU NOMBRE DE FROUDE : Champs de perturbation en flottabilité pour trois valeurs de  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) à deux instants ( $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ ). Le nombre de Froude est ici deux fois plus élevé que dans les simulations précédentes et vaut  $Fr = 12.4 \cdot 10^{-2}$ . Ces résultats sont à comparer au résultat obtenu précédemment pour un nombre de Froude de  $Fr = 6.18 \cdot 10^{-2}$  figure 2.4 (b,h). Pour les valeurs de  $U_a$  intermédiaires, la région stable disparaît. Cette valeur du nombre du Froude est proche du nombre de Froude pour lequel les isopycnes deviennent verticales  $Fr = 23.6 \cdot 10^{-2}$ .

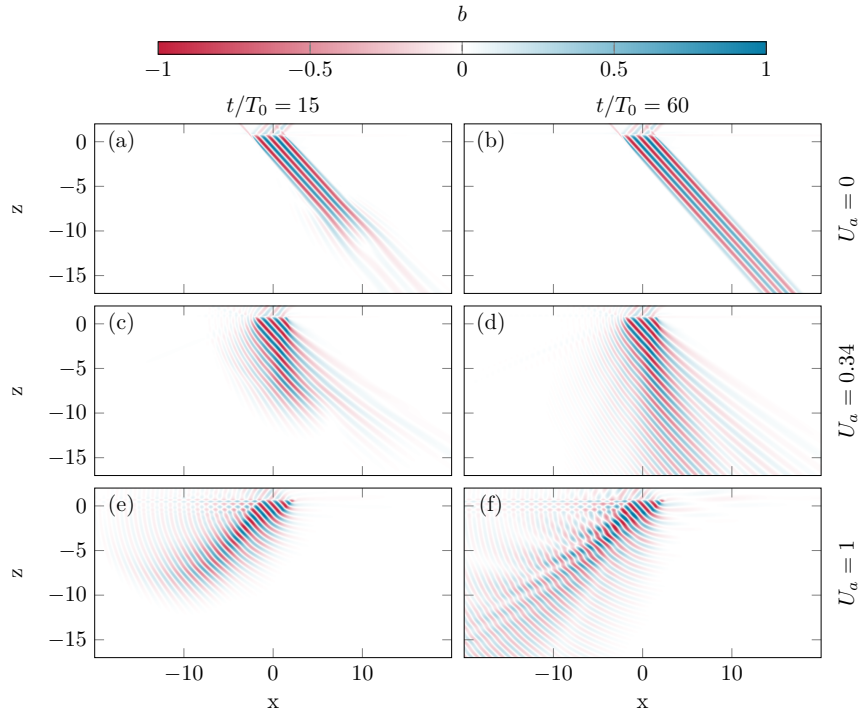


FIG. 2.12 : EFFETS DU NOMBRE DE FROUDE : Champs de perturbation en flottabilité pour trois valeurs de  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) à deux instants ( $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ ). Le nombre de Froude est ici deux fois plus faible que dans les simulations précédentes et vaut  $Fr = 3.1 \cdot 10^{-2}$ . Ces résultats sont à comparer au résultat obtenu précédemment pour un nombre de Froude de  $Fr = 6.19 \cdot 10^{-2}$  figure 2.4 (b,h). Seul le cas sillage  $U_a = 1$  est encore instable et les autres cas se stabilisent, ce qui n'est pas cohérent avec la théorie triadique pour une onde plane sans limites spatiales où la stabilité d'une onde ne dépend pas du nombre de Froude à nombre de Reynolds constant.

nous comme limite d'amplitude, l'amplitude où les isopycnes deviennent verticales en un point :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial \rho'}{\partial z}, \\ N^2 - \frac{\partial b}{\partial z} &= 0,\end{aligned}$$

(voir illustration figure 2.10) or dans l'onde primaire,

$$\begin{aligned}b &= -NA_w \cos \phi, \\ \frac{\partial b}{\partial z} &= k_z NA_w \cos \phi, \\ \max \left( \frac{\partial b}{\partial z} \right) &= k_z NA_w,\end{aligned}$$

et nous obtenons comme amplitude (en vitesse) critique  $A_{OT}$  :

$$A_{OT} = \frac{N}{k_z}. \quad (2.20)$$

Lorsque la densité n'est plus monotone, l'onde peut être sujette au déferlement, la configuration statique étant instable. La manière dont les ondes sont forcées ne nous permet pas d'accéder à des amplitudes d'onde proches du déferlement et en pratique la valeur de forçage  $A_w$  choisie vaut environ le quart de l'amplitude critique  $A_{OT} = 3.82 A_w$ . Nous fixons la limite supérieure de nos variations d'amplitude (et donc de Froude) à  $A = 2 A_w$ , soit un nombre de Froude multiplié par deux et valant dans ce cas  $Fr = 12.4 \cdot 10^{-2}$ . Le cas d'un nombre de Froude plus faible est considéré en prenant un nombre moitié inférieur. Dans les deux cas le nombre de Reynolds est conservé constant et identique à celui des simulations précédentes,  $Re = 176$ . Les champs de perturbation en flottabilité correspondants sont tracés figure 2.11 pour le nombre de Froude plus élevé et figure 2.12 pour le nombre de Froude plus faible. Dans le cas du nombre de Froude plus élevé les résultats sont très similaires aux résultats précédents (figure 2.4) dans les sillage  $U_a = 1$  et marée  $U_a = 0$ . Cependant, de la même manière que pour un nombre de Reynolds plus élevé, la région de valeurs  $U_a$  intermédiaire de faisceau stable disparaît. Dans le cas d'un nombre de Froude plus faible (figure 2.12), seules les valeurs de  $U_a$  proche de 1 (cas sillage) excitent un faisceau instable. Dans les deux cas, ce changement de caractère stable ou instable avec le nombre de Froude n'est pas directement compatible avec la théorie triadique pour une onde plane où la stabilité ne dépend pas du nombre de Froude.

Nous traçons figure 2.13 les spectres des figures 2.11 et 2.12 cas (b,f). Les spectres confirment la même sélection de mode petite échelle sur la branche externe dans le cas marée et grande échelle sur la branche centrale dans le cas

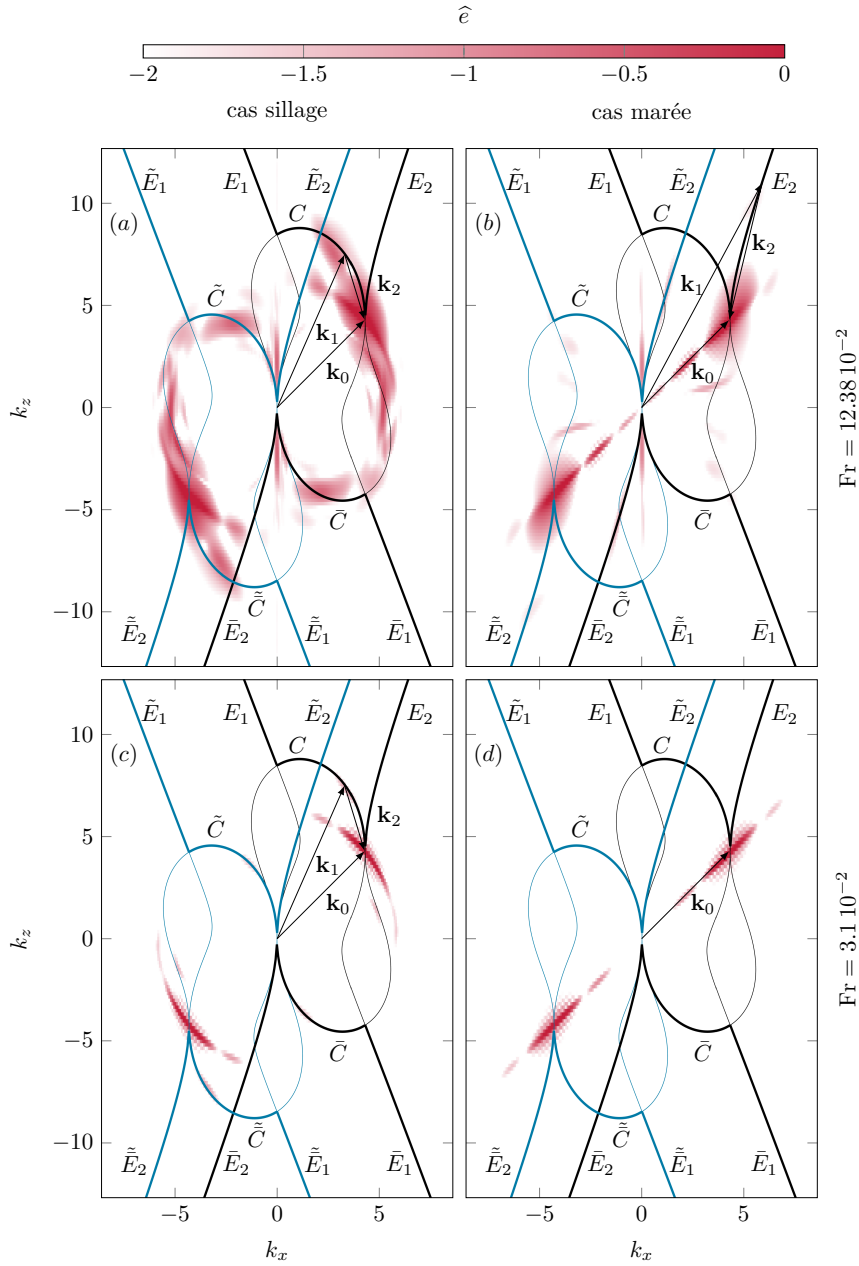


FIG. 2.13 : EFFETS DU NOMBRE DE FROUDE : Spectres d'énergie des réponses non-linéaires saturées à l'instant  $t = 60$  pour les cas marée et seuil et pour deux nombre de Froude  $Fr = 3.1 \cdot 10^{-2}$  (a,b) et  $Fr = 12.4 \cdot 10^{-2}$  dont les champs de perturbation en flottabilité sont tracés, (a,b) figure 2.11 (b,f) et (c,d) figure 2.12 (b,f). Les courbes résonantes tracées sont identiques à celles de la figure 2.7 où elles y sont déjà décrites. Les triades excitées dans les différents cas sont tracées sont la forme des vecteurs  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Ces résultats sont à comparer au résultat obtenu précédemment pour un nombre de Froude de  $Fr = 6.18 \cdot 10^{-2}$  figure 2.9 (a,b).

sillage que les simulation précédentes, y compris avec la variation du nombre de Reynolds (figure 2.9).

Dans le cas du nombre de Froude élevé avec une vitesse d'écoulement de fond intermédiaire  $U_a = 0.34$  le faisceau est instable et contrairement au cas intermédiaire avec un nombre de Reynolds plus grand, un seul mode est sélectionné et il se situe sur la branche centrale de la courbe résonante comme le mode sélectionné dans les cas sillages.

#### 2.4.4 Influence de la taille du faisceau

Dans l'expérience de Bourget et al. (2013), l'instabilité est correctement décrite par la théorie triadique comme un mode situé sur la branche externe  $E_2$  de la courbe résonante. Cependant la prédiction selon le critère du mode le plus instable prédit un mode situé sur la branche centrale  $C$  de la courbe résonante. Pour réconcilier ces faits, Bourget et al. (2014) suppose que cette différence provient de l'aspect fini d'un faisceau alors que la théorie triadique est développée pour une onde plane progressive infinie en espace et que cette différence aurait tendance à stabiliser les modes grandes échelles situés sur la branche centrale de la courbe résonante, privilégiant un mode petite échelle de la branche centrale. L'aspect fini est modifié par la taille du faisceau et nous regardons ici son influence sur le mode instable.

Nous traçons figure 2.14 les champs de perturbations en flottabilité à deux instants ( $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ ) et pour trois valeurs de  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) des réponses à un forçage quatre fois plus large que dans le cas de référence (huit longueurs d'onde horizontales primaire contre deux dans le cas de référence). Aucune valeur intermédiaire testée n'a pu produire un faisceau stable. La structure des modes dans le cas sillage et marée est différente mais l'on retrouve des modes très similaires à ceux obtenus pour le faisceau de référence, plus fin (figure 2.4). Les instabilités s'étendent horizontalement dans le faisceau dans les trois cas.

Nous traçons figure 2.15 (a,b) les spectres des réponses saturées dont la perturbation en flottabilité est visible figure 2.14 (b,f). L'augmentation de la largeur du faisceau n'influe pas la sélection du mode puisque celle-ci est identique au cas de référence, au cas du nombre de Reynolds plus élevé et au cas du nombre de Froude plus élevé. Dans le cas de vitesse d'écoulement de fond intermédiaire  $U_a = 0.34$ , le mode choisi est composé d'une seule triade située sur la branche centrale (grande échelle) de la courbe résonante.

#### 2.4.5 Influence de la fréquence de forçage

L'angle du vecteur d'onde avec l'horizontale (supplémentaire de l'angle formé par les plans de phases et l'horizontale est directement relié à la fréquence de l'onde  $\omega_0$  par la relation de dispersion 2.18). La fréquence de l'onde  $\omega_0$  est définie comme la fréquence de l'onde dans le référentiel du fluide et donc diffère de la fréquence de forçage  $\omega_0^s$  dans le référentiel source selon la loi de sillage dans les équations 2.6. Cela revient à corriger l'effet Doppler.



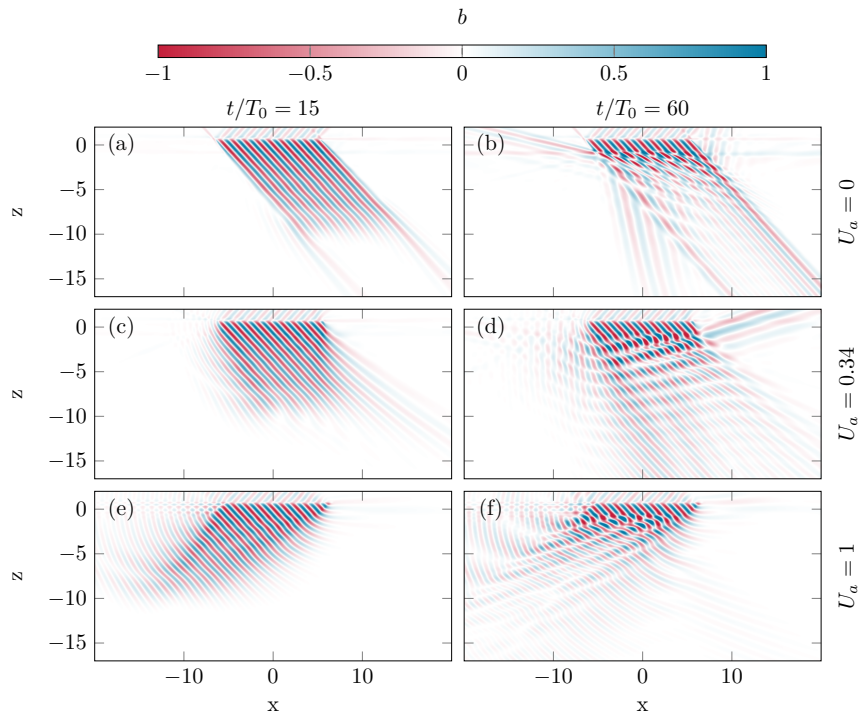


FIG. 2.14 : EFFETS DE LA LARGEUR DU FAISCEAU : Champs de perturbation en flottabilité pour trois valeurs de  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) à deux instants ( $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ ). Le faisceau a pour largeur  $W =$  soit 8 longueurs d'onde horizontales de l'onde primaire. En augmentant la largeur, le faisceau perd la région de stabilité pour des vitesses d'écoulement de fond  $U_a$  intermédiaires. Les cas marée  $U_a = 0$  et sillage  $U_a = 1$  présentent des modes saturés similaires aux cas de références, petite échelle dans le cas marée et grande échelle dans le cas sillage.

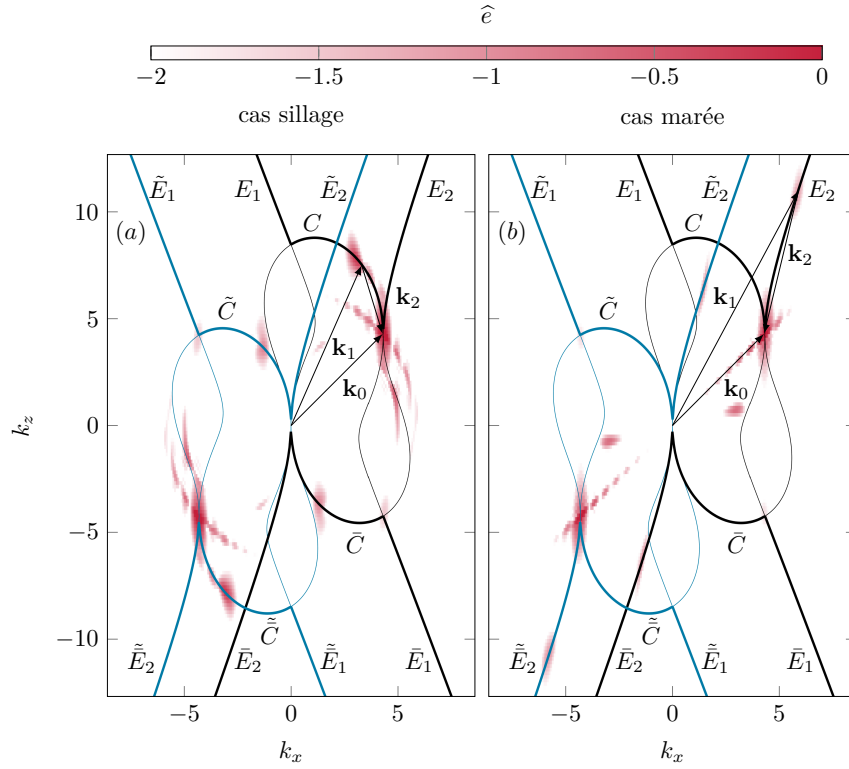


FIG. 2.15 : EFFETS DE LA LARGEUR DU FAISCEAU : Spectres d'énergie des réponses non-linéaires saturées à l'instant  $t/T_0 = 60$  pour les cas marée et seuil dans le cas d'un faisceau large ( $W = 8$  soit 8 longueurs d'onde primaire horizontale de large, quatre fois plus large que le cas de référence). Les champs de perturbation en flottabilité sont tracés figure 2.14 (b,f). Les courbes résonantes tracées sont identiques à celles de la figure 2.7 où elles sont déjà décrites. Les triades excitées dans les différents cas sont tracées sous la forme des vecteurs  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . On retrouve encore la sélection d'un mode petite échelle sur la branche externe de la courbe résonante dans le cas marée et la sélection d'un mode grande échelle sur la branche centrale dans le cas sillage.

**Remarque, largeur du faisceau** Nous voulons dans un premier temps augmenter  $\omega_0^f$  afin d'obtenir des plans de phases plus verticaux. Vient cependant un problème lié à la définition de la largeur du faisceau  $W$ , défini comme le nombre de longueurs d'onde primaires *horizontales* forcées (2.8). Si nous regardons la largeur d'un faisceau comme une dimension  $W_T$  dans une direction normale à l'angle de propagation du faisceau (normale au faisceau), alors cette largeur transversale est une projection de la largeur  $W$  par l'angle de propagation du faisceau. Dans le cas référence où l'onde a une fréquence de  $\omega_0 = 0.74$ , il se trouve que la plage de direction de propagation du faisceau en fonction de  $U_a$  est presque centrée autour de la verticale et ainsi la projection  $W_T$  varie peu et est toujours proche de  $W$  et cette définition n'était pas problématique. En augmentant (ou en diminuant) la fréquence de l'onde, le faisceau devient bien plus vertical (horizontal) dans le cas marée  $U_a = 0$  et bien plus horizontal (vertical) dans le cas sillage  $U_a = 1$  ce qui entraîne une variation bien plus importante de  $W_T$  qui devient plus grand (petit) dans le cas marée et bien plus petit (grand) dans le sillage. De plus, la largeur  $W$  étant définie par une projection de la longueur d'onde primaire sur l'horizontal, celle-ci dépend de l'angle de l'onde et cette définition limite les comparaisons possibles entre des ondes primaires de différents angles. En première approximation, ne sachant pas quel est le choix le plus pertinent, nous choisissons de regarder, pour la variation d'angle, des faisceaux larges en prenant  $W = 8$  soit 8 longueurs d'onde primaire horizontales, ce qui a pour effet de rendre les variations relatives de largeur du faisceau bien plus faibles.

Nous traçons figure 2.16 les champs de perturbations en flottabilité pour les trois vitesses d'écoulement de fond  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) aux instants  $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ . La largeur du faisceau est de  $W = 8$  et la fréquence de l'onde primaire de  $\omega_0 = 0.94$ , fréquence plus proche de la limite 1 et possédant selon la relation de dispersion des plans de phases plus verticaux. Les trois cas sont instables et, pour cette fréquence aussi, le mode obtenu dans le cas sillage  $U_a = 1$  est un mode grande échelle et celui du cas marée  $U_a = 0$  est un mode petit échelle. En espace de Fourier, figure 2.17 malgré les nouveaux ensembles de lieux possibles pour les triades, les spectres montrent, ici aussi, de l'énergie dans le cas marée sur la branche externe et dans le cas sillage sur la branche centrale. La différence d'échelle est encore plus marquée entre le cas marée petite échelle et le cas sillage grande échelle.

Nous traçons les mêmes figures (figure 2.18 et 2.19) pour une fréquence de  $\omega_0 = 0.30$  avec cette fois une largeur de faisceau de  $W = 4$  longueurs d'onde primaire horizontale. Dans ce cas, seul le cas sillage se déstabilise (figure 2.18 (f)) et le mode est un mode triadique grande échelle situé sur la branche centrale  $C$  (figure 2.19 (a)). Dans ces mêmes conditions, un faisceau de largeur  $W = 8$  (non montré ici) a les mêmes propriétés de stabilité.

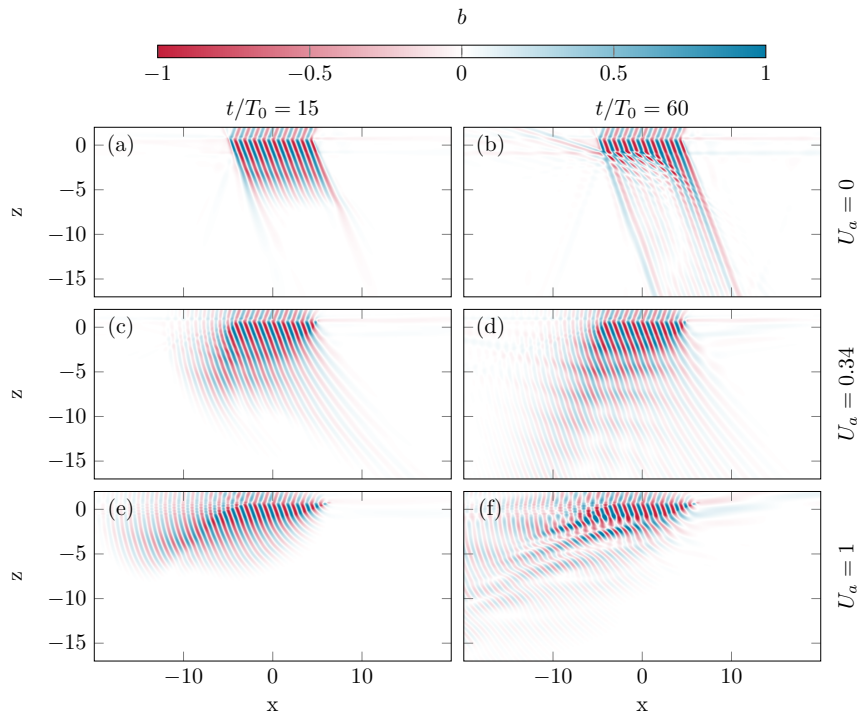


FIG. 2.16 : EFFETS DE LA FRÉQUENCE DE L'ONDE Champs de perturbation en flottabilité pour trois valeurs de  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) à deux instants ( $t = 15$  et  $t = 60$ ). Le faisceau a une fréquence de  $\omega_0 = 0.94$  et ses plans de phases sont proches de la vertical. Le faisceau a une largeur de  $W = 8$  longueurs d'onde primaires horizontales. Pour cette largeur de faisceau, tous les cas testés sont instables. Le mode du cas sillage  $U_a = 1$  est encore grande échelle contrairement au mode du cas marée  $U_a = 0$ .

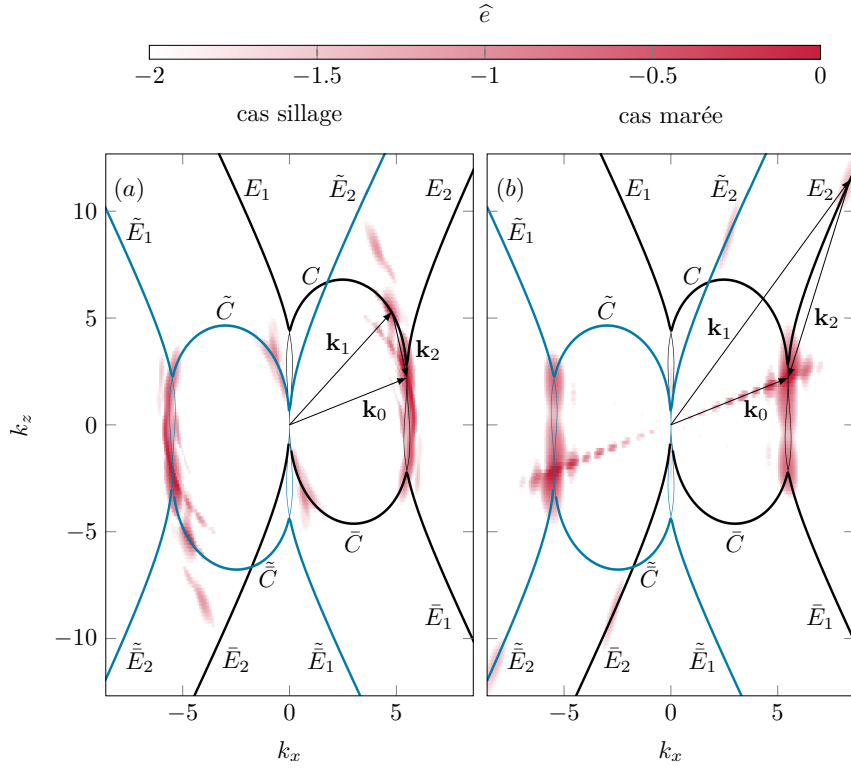


FIG. 2.17 : EFFETS DE LA FRÉQUENCE DE L'ONDE Spectres d'énergie des réponses non-linéaires saturées à l'instant  $t = 60$  pour les cas marée et seuil d'un faisceau primaire de largeur  $W = 8$  et de fréquence  $\omega_0 = 0.94$ . Les courbes résonantes sont tracées pour un vecteur primaire  $\mathbf{k}_0$  et sont donc différentes ici, où l'angle du vecteur  $\mathbf{k}_0$  avec l'horizontale n'est plus le même. Les coordonnées sont toujours adimensionnées par l'onde primaire de référence (ayant une fréquence de 0.74). Les deux cas sont instables et le cas marée développe un mode petite échelle sur la branche externe  $E_2$  alors que le cas sillage développe un mode sur la branche centrale  $C$ .

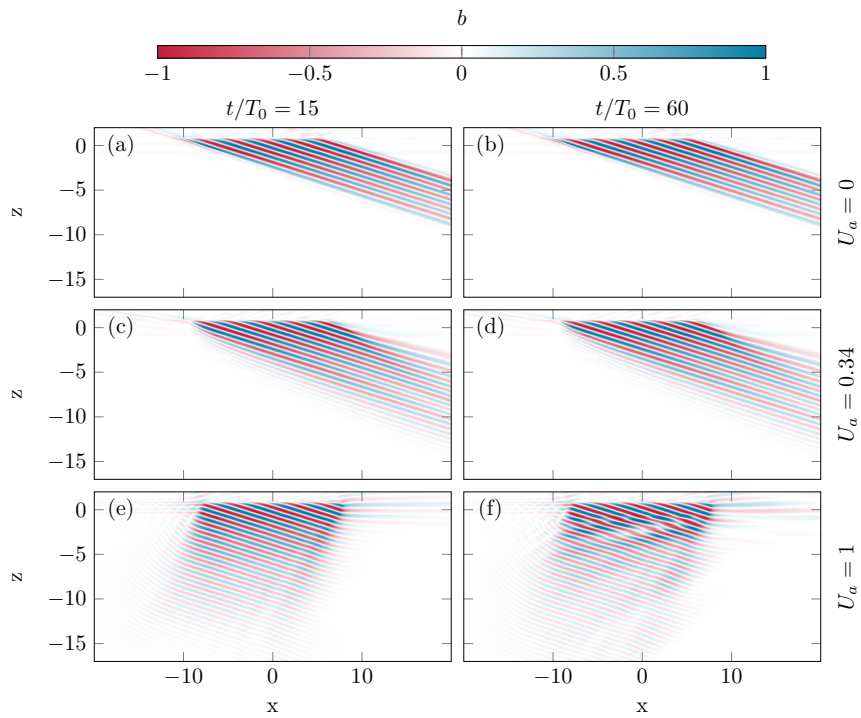


FIG. 2.18 : EFFETS DE LA FRÉQUENCE DE L'ONDE Champs de perturbation en flottabilité pour trois valeurs de  $U_a$  ( $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$ ) à deux instants ( $t/T_0 = 15$  et  $t/T_0 = 60$ ). Le faisceau a une fréquence de  $\omega_0 = 0.30$  et ses plans de phases sont plus proches de l'horizontale. Le faisceau a une largeur de  $W = 4$  longueurs d'onde primaires horizontales. Pour cette largeur de faisceau, seul le cas sillage est instable selon un mode grande échelle.

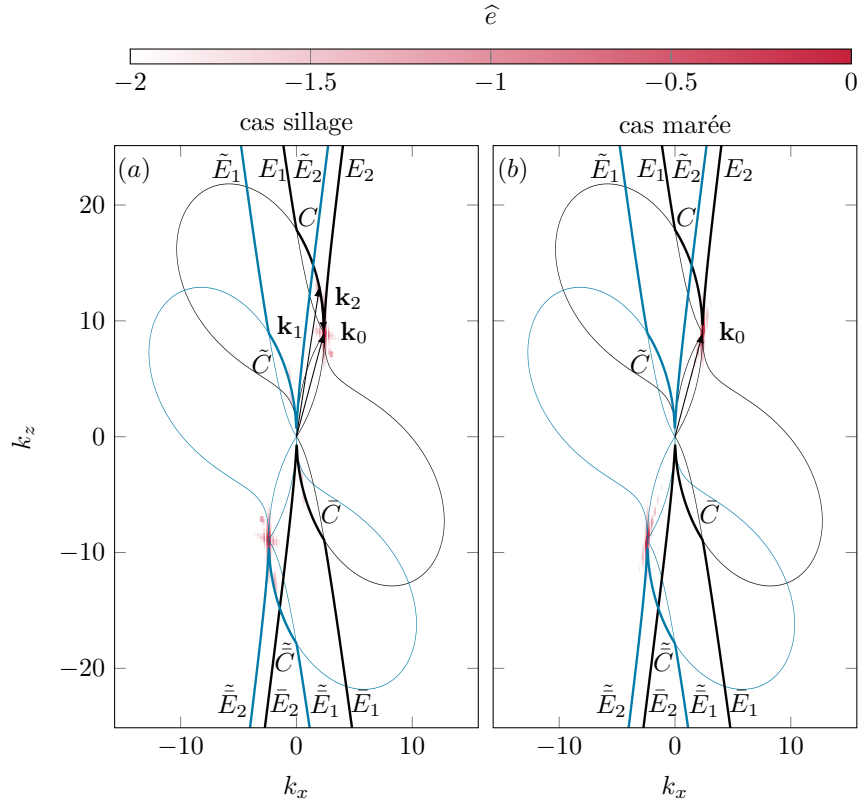


FIG. 2.19 : EFFETS DE LA FRÉQUENCE DE L'ONDE Spectres d'énergie des réponses non-linéaires saturées à l'instant  $t/T_0 = 60$  pour les cas marée et seuil d'un faisceau primaire de largeur  $W = 4$  et de fréquence  $\omega_0 = 0.30$  (champs visibles figure 2.18 (b,f)). Les courbes résonantes sont tracées pour un vecteur primaire  $\mathbf{k}_0$  et sont donc encore différentes ici, où le vecteur  $\mathbf{k}_0$  est plus proche de la verticale. Les coordonnées sont toujours adimensionnées par l'onde primaire de référence (ayant une fréquence de 0.74). Seul le cas sillage est instable selon un mode triadique situé sur la branche centrale  $C$  de la courbe résonante.

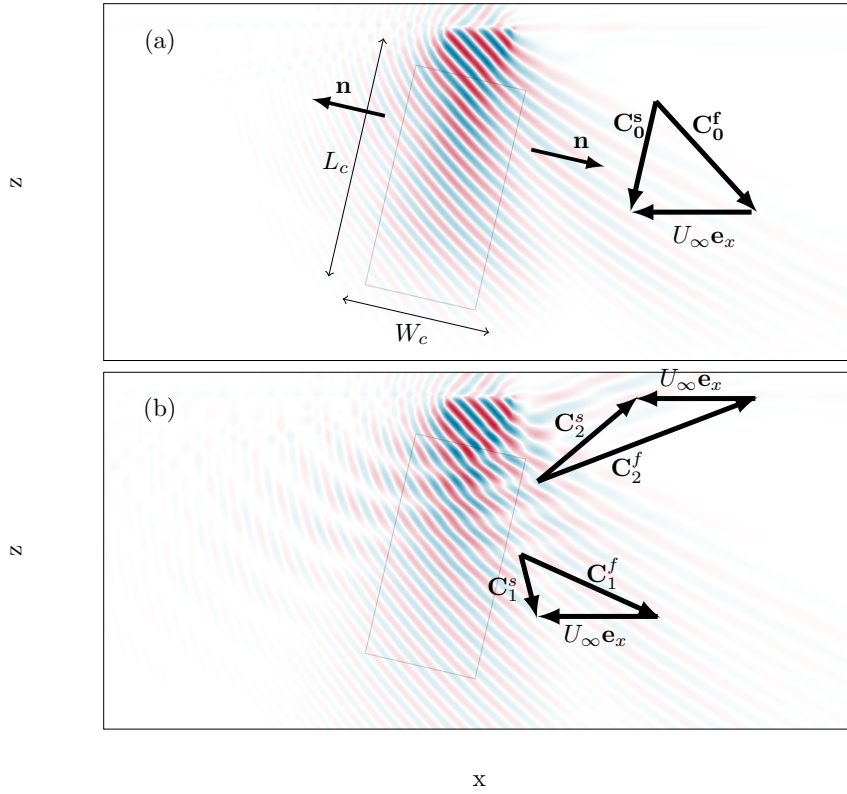


FIG. 2.20 : Schéma de la surface de contrôle, représentée par un rectangle de longueur  $L_c$  et de largeur  $W_c$ . (a) La vitesse de groupe  $\mathbf{C}_0^f$  de l'onde primaire dans le fluide diffère de la vitesse de groupe de l'onde primaire dans le référentiel du forçage (référentiel source) par la vitesse d'écoulement de fond  $U_\infty \mathbf{e}_x$  selon la relation :  $\mathbf{C}_0^s = \mathbf{C}_0^f + U_\infty \mathbf{e}_x$ . Le faisceau se propage selon  $\mathbf{C}_0^s$ . (b) Les vitesses de groupe des ondes secondaires  $\mathbf{C}_1^f$  et  $\mathbf{C}_2^f$  sont aussi modifiées pour donner  $\mathbf{C}_1^s$  et  $\mathbf{C}_2^s$  dans le référentiel source. L'énergie est irradiée hors du faisceau primaire selon les vitesses de groupe dans le référentiel source.



## 2.4.6 Comparaison à un modèle phénoménologique d'équilibre des flux

La théorie triadique (détaillée paragraphe 1.2.1) s'applique à une onde interne plane progressive et inclus les effets diffusifs (diffusion de la quantité de mouvement et de la flottabilité). Cette théorie prédit l'existence de modes triadiques et leurs taux de croissance. Ces modes se représentent sur une courbe en espace de Fourier dite courbe résonante, celle-ci est décrite paragraphe 1.2.1 et 2.3.2. Pour une onde donnée, s'il existe un mode ayant un taux de croissance positif alors l'onde sera instable selon un mode triadique. S'il en existe plusieurs, la sélection la plus simple est que le mode au taux de croissance le plus élevé dominera les autres modes.

Comme expliqué à la section 2.4.4, l'expérience de Bourget et al. (2013) ne voit pas le mode le plus instable de la théorie triadique se développer mais un autre mode triadique et explique cette différence par le confinement de l'onde dans un faisceau. Ils développent un modèle phénoménologique où cet aspect fini permet aux ondes secondaires d'une triade, d'irradier de l'énergie hors du faisceau. S'ensuit un équilibre entre l'énergie extraite par le mode triadique de l'onde primaire aux ondes secondaires et l'énergie irradiée par les ondes secondaires en dehors du mode triadique et de l'onde primaire. Si pour un mode instable donné cette irradiation est plus forte que l'énergie extraite, alors ce mode ne pourra croître et deviendra stable.

Nous étendons le modèle développé dans Bourget et al. (2014) pour y inclure les effets d'un écoulement de fond quelconque. Notre modèle diffère par l'équilibre explicite qui est fait entre le terme de production de l'instabilité au sein du faisceau et les termes de flux des ondes secondaires de cette même instabilité vers l'extérieur du faisceau. La surface de contrôle (voir figure 2.20) est un rectangle de longueur  $L_c$  et de largeur  $W_c$  où  $L_c$  est aligné avec le faisceau, *ie.* parallèle à la vitesse de groupe  $\mathbf{C}_0^s$  de l'onde forcée dans le référentiel source (référentiel du forçage), et  $W_c$  est orthogonal au faisceau. Nous faisons ensuite une approximation locale qui consiste à supposer que le choix de la triade est un choix dépendant des propriétés locales de l'onde sans prendre en compte ses limites spatiales (l'onde est considérée comme infinie et homogène en espace). Cette approximation est faite dans le développement de la théorie triadique (lorsque  $A_0$  est supposé indépendant du temps et de l'espace).

Nous reprenons les résultats du développement triadique (voir annexe A) en prenant toutefois l'adimensionnement présenté dans ce chapitre section 2.1.2 où l'amplitude de l'onde primaire est contenue dans le nombre de Froude. Soit pour les amplitudes :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\lambda_1 \text{Fr} \psi_1 + i S_1 \psi_2^* \text{Fr} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\lambda_2 \text{Fr} \psi_2 + i S_2 \psi_1^* \text{Fr} \quad (2.22)$$

avec  $\lambda_i = |\mathbf{k}_i|^2 (1 + 1/\text{Pr}) / (2\text{Re})$ ,  $\psi_i$  l'amplitude de l'onde  $i$  formant la fonction de courant pour l'onde  $\psi_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega_i t)}$   $\psi_{1,2}^*$  représente le complexe conjugué.  $S_1$  et

$S_2$  sont les coefficients d'interactions et sont définis par :

$$S_1 = \frac{k_{0x}k_{2z} - k_{0z}k_{2x}}{2\omega_1|\mathbf{k}_1|^2} \left( \omega_1(|\mathbf{k}_0|^2 - |\mathbf{k}_2|^2) + k_{1x} \left( \frac{k_{0x}}{\omega_0} - \frac{k_{2x}}{\omega_2} \right) \right),$$

$$S_2 = \frac{k_{0x}k_{1z} - k_{0z}k_{1x}}{2\omega_2|\mathbf{k}_2|^2} \left( \omega_2(|\mathbf{k}_0|^2 - |\mathbf{k}_1|^2) + k_{2x} \left( \frac{k_{0x}}{\omega_0} - \frac{k_{1x}}{\omega_1} \right) \right),$$

$\omega_{0,1,2}$  sont les fréquences des ondes dans le référentiel du fluide,  $k_{0,1,2x}$  (et  $k_{0,1,2z}$ ) sont les composantes horizontales (et verticales) des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_{0,1,2}$ .

Nous écrivons le système sous forme matricielle en posant  $\Psi = (\psi_1, \psi_2^*)^T$  :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \text{Fr} & iS_1 \text{Fr} \\ -iS_2 \text{Fr} & -\lambda_2 \text{Fr} \end{bmatrix} \Psi \quad (2.23)$$

dont la valeur propre positive s'écrit :

$$\sigma = \text{Fr} \left( -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \sqrt{-\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} + S_1 S_2} \right), \quad (2.24)$$

et est associée au vecteur propre :

$$\Psi^e = (\psi_1^e, \psi_2^e) = (iS_1, \sigma + \lambda_1). \quad (2.25)$$

La densité d'énergie  $E_\sigma$  du mode instable est alors égale à :

$$E_\sigma = S_1^2 |\mathbf{k}_1|^2 + (\sigma + \lambda_1)^2 |\mathbf{k}_2|^2. \quad (2.26)$$

Nous supposons la solution comme étant proportionnelle au mode propre dans toute la surface de contrôle et nous négligeons les variations de  $\psi_0$  :

$$\Psi = A(t)\Psi^e \Leftrightarrow (\psi_1, \psi_2) = A(t)(\psi_1^e, \psi_2^e). \quad (2.27)$$

L'ensemble de l'énergie  $\mathcal{E}_V$  présente dans la surface de contrôle obéit à :

$$\partial \mathcal{E}_V / \partial t = \mathcal{P}_V - \mathcal{F} \quad (2.28)$$

avec  $\mathcal{P}_V$ , le terme de production dans la surface de contrôle :

$$\mathcal{P}_V = 2\sigma L_c W_c |A|^2(t) E_\sigma \quad (2.29)$$

où  $L_c W_c$  est la surface de la surface de contrôle.  $\mathcal{P}_V$  (production dans la surface de contrôle) provient du transfert d'énergie de l'onde primaire aux ondes secondaires par l'instabilité triadique. Ce transfert se traduit par la croissance exponentielle des amplitudes des ondes secondaires selon le taux croissance  $\sigma$  (donnant pour l'énergie  $2\sigma$ ).  $\mathcal{F}$  est le flux d'énergie d'irradiation des ondes secondaires à travers les bords de la surface de contrôle. Le flux d'énergie irradié est proportionnel à l'énergie de l'onde secondaire et au produit scalaire de sa vitesse de groupe et du vecteur normal au bord du faisceau. Les amplitudes des ondes secondaires (pour le calcul des énergies) sont liées par le vecteur propre du système  $(\psi_1^e, \psi_2^e)$ . Le flux total vaut la somme des deux flux.

$$\mathcal{F} = L (\mathbf{k}_1^2 |\psi_1^e|^2 \mathbf{C}_1^s \cdot \mathbf{n} + \mathbf{k}_2^2 |\psi_2^e|^2 \mathbf{C}_2^s \cdot \mathbf{n}) A^2(t) \quad (2.30)$$

$$\mathcal{F} = L (S_1^2 |\mathbf{k}_1|^2 \mathbf{C}_1^s \cdot \mathbf{n} + (\sigma + \lambda_1)^2 |\mathbf{k}_2|^2 \mathbf{C}_2^s \cdot \mathbf{n}) A^2(t) \quad (2.31)$$

avec

$$\mathbf{C}_i^s \cdot \mathbf{n} = \left| \mathbf{C}_i^s \times \frac{\mathbf{C}_0^s}{|\mathbf{C}_0^s|} \right|. \quad (2.32)$$

Le flux de chaque onde secondaire est égal à son amplitude multiplié par la projection de sa vitesse de groupe  $\mathbf{C}_i^s$  dans le référentiel source sur la normale  $\mathbf{n}$  au bord de la surface de contrôle (égal au produit vectoriel entre  $\mathbf{C}_i^s$  et  $\mathbf{C}_0^s/|\mathbf{C}_0^s|$ , la vitesse de groupe normalisée de l'onde primaire dans le référentiel source qui est parallèle par construction aux bords de la surface de contrôle).

Les vitesses de groupes des ondes secondaires dans le référentiel source sont données selon les vitesses dans le référentiel du fluide par :

$$\mathbf{C}_i^s = \mathbf{C}_i^f + U_a U_\phi \mathbf{e}_x, \quad (2.33)$$

où

$$\mathbf{C}_i^f = N k_{iz} / |\mathbf{k}_i|^3 (k_{iz}, -k_{ix}). \quad (2.34)$$

Nous obtenons alors l'équation :

$$\frac{\partial A^2(t)}{\partial t} = \sigma_\varepsilon |A^2| \quad (2.35)$$

$$\text{with : } \sigma_\varepsilon = 2\sigma - \frac{\mathbf{k}_1^2 |\psi_1^e|^2}{W_c (\mathbf{k}_1^2 |\psi_1^e|^2 + \mathbf{k}_2^2 |\psi_2^e|^2)} \left| \mathbf{C}_1^s \times \frac{\mathbf{C}_0^s}{|\mathbf{C}_0^s|} \right| - \frac{\mathbf{k}_2^2 |\psi_2^e|^2}{W (\mathbf{k}_1^2 |\psi_1^e|^2 + \mathbf{k}_2^2 |\psi_2^e|^2)} \left| \mathbf{C}_2^s \times \frac{\mathbf{C}_0^s}{|\mathbf{C}_0^s|} \right|$$

La source d'énergie ( $2\sigma$ ) est l'interaction triadique sur toute la surface de contrôle. La dissipation visqueuse est aussi incluse dans  $\sigma$ . La propagation d'ondes secondaires en dehors de la surface de contrôle est puits d'énergie qui s'écrit ici comme un produit vectoriel pondéré par le vecteur propre  $(\psi_1^e, \psi_2^e)$ .

Le taux de croissance pour les différents triades dépend, dans ce modèle de faisceau fini, de la largeur  $W_c$  de la surface de contrôle que nous prendrons égale à la largeur  $W$  du faisceau, mais aussi de la vitesse de l'écoulement de fond  $U_a$ . En changeant  $U_a$ , on modifie  $\mathbf{C}_1^s$  et  $\mathbf{C}_2^s$  en amplitude et en angle et les flux d'énergie venant des ondes secondaires en sont modifiés. On remarque qu'ils peuvent être soit de part et d'autre du faisceau primaire, soit du même côté. La variation de  $U_a$  entraîne aussi une variation de l'angle du faisceau primaire ce qui affecte également les flux des ondes secondaires à travers les bords du faisceau primaires.

Nous traçons, figure 2.21 (a), la prédiction du modèle du taux de croissance  $\sigma_\varepsilon$  donné par (2.35) en fonction de  $k_x$  pour un faisceau de largeur  $W_c = 2$  et deux valeurs de  $U_a$  : (0, -1).

Le taux de croissance est celui des triades suivies le long de la courbe résonante et est affiché en fonction de  $k_x$ , le  $k_y$  est obtenu en prenant le point

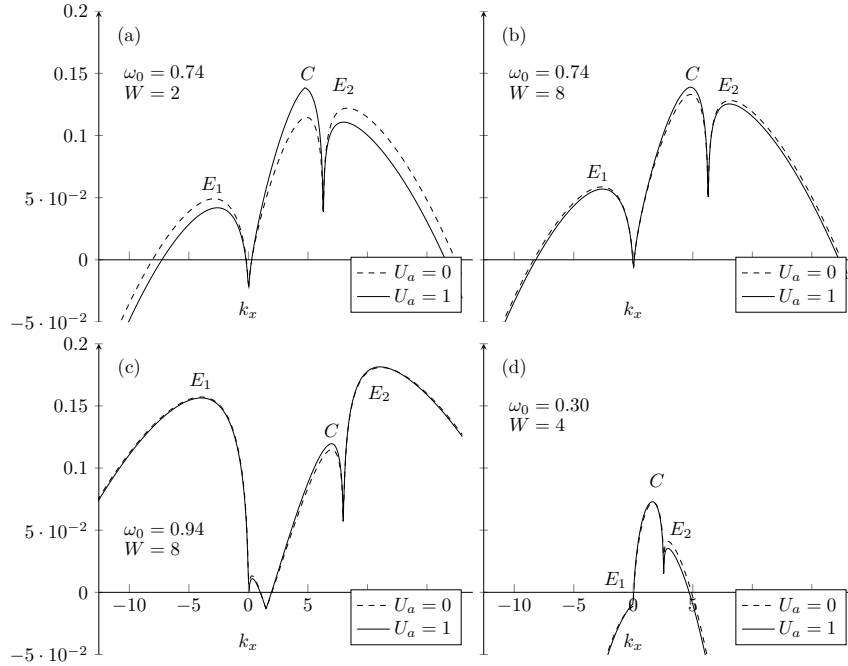


FIG. 2.21 : Résultats du modèle phénoménologique prenant en compte l'énergie irradiée par les ondes secondaires (à comparer à la théorie triadique tracée figure 1.2 page 17). Le taux de croissance est calculé le long des branches supérieure de la courbe résonante correspondante et est tracé en fonction de  $k_x$ . Les branches associées sont indiquées par  $E_1$ ,  $C$  et  $E_2$ . Chaque graphique comprend une courbe dans le cas marée  $U_a = 0$  et une courbe dans le cas sillage  $U_a = 1$ . (a) : cas de référence, la sélection prédite est identique aux simulations (figures 2.4 (b,f) et 2.9 (c,d)), la branche  $E_2$  domine lorsque  $U_a = 0$  et la branche  $C$  domine lorsque  $U_a = 1$ . (b) : cas d'un faisceau large  $W = 8$  la sélection ne prévoit pas le changement de mode apparaissant dans les simulations (figures 2.14 (b,f) et 2.15). (c) : cas d'un faisceau large  $W = 8$  pour une fréquence de forçage de  $\omega_0 = 0.94$ , les branches externes dominent dans les deux cas, contrairement aux simulations (figures 2.16 (b,f) et 2.17). (d) : cas d'un faisceau large  $W = 4$  pour une fréquence de forçage de  $\omega_0 = 0.30$ , la branche centrale domine dans les deux cas contrairement aux simulations (figures 2.18 et 2.17).

de la partie supérieure de la courbe résonante à l'abscisse  $k_x$ . La courbe présente trois maxima, identifié par les branches correspondantes  $E_1$ ,  $C$  et  $E_2$ . Leurs valeurs varient avec  $U_a$  et l'on voit que pour une valeur de  $U_a$  nulle, le mode petit échelle sur la branche  $E_2$  domine alors que pour une valeur de  $U_a = 1$ , le mode grande échelle sur la branche  $C$  domine.

Nous retrouvons bien la sélection de mode décrite dans Bourget et al. (2014) pour  $W = 2$  bien que les deux modèles diffèrent légèrement. Cette sélection correspond bien à celle obtenue numériquement dans les simulations précédentes et présentées figure 2.4 (b,h) et 2.7 (c,d) dans les cas sillage et marée. Toutefois, le modèle peine à décrire la plage de valeurs de  $U_a \in [0.21; 0.49]$  pour laquelle les faisceaux sont stables, et prédit un faisceau toujours instable quelque soit  $U_a$ .

Le modèle présenté repose sur des hypothèses très fortes, en particulier l'homogénéité des amplitudes des ondes dans la surface où les modes triadiques se développent. Cette approximation n'autorise pas une croissance spatiale des ondes. Afin de permettre cette croissance spatiale, les amplitudes de toutes les ondes secondaires doivent être étudiées indépendamment les unes des autres. Cette étude (dite locale) est réalisée dans le chapitre suivant et conclut sur son application réussie au cas (dit global) d'un faisceau d'onde.

**Nombre de Reynolds** L'augmentation du nombre de Reynolds ne change pas selon le modèle (non tracé) la branche instable sélectionnée et l'on retrouve bien les résultats présentées figure 2.8 (b,h) et 2.9 (c,d) (marée, branche  $E_2$  et sillage branche  $C$ ).

**Nombre de Froude** La diminution du nombre de Froude, qui entraîne (figure 2.12) la stabilité du cas marée et un mode branche  $C$  dans le cas sillage, est cohérent avec la sélection du mode dans le cas sillage selon le modèle (non tracé) mais montre un cas marée instable contrairement à la simulation.

L'augmentation du nombre de Froude montre sur les courbes de taux de croissance (non tracées) un maximum pour la branche externe  $E_2$  dans les deux cas (sillage et marée). Là aussi cette prédiction diffère des simulations numériques figure 2.11 (b,f) et 2.13 (a,b) où l'on retrouve la sélection marée branche externe, sillage branche centrale.

**Largeur du faisceau** Dans le modèle, les effets du faisceau décroissent selon l'inverse de la largeur du faisceau et pour un faisceau plus large, le modèle prévoit un taux de croissance plus proche du taux de croissance triadique, le faisceau devenant moins sensible à la radiation des ondes secondaires. Si l'on reprend les faisceaux présentés figure 2.14 (b,f) et 2.15 où  $W = 8$  on obtient les courbes figure 2.21 (b). Sur ces courbes, l'on voit que dans les deux cas le maximum se situe sur la branche externe  $E_2$ , ce qui est bien le cas pour la cas marée mais ne l'est pas dans le cas sillage.

**Fréquence de forçage** En augmentant la fréquence de forçage pour avoir  $\omega_0 = 0.94$ , le taux de croissance (figure 2.21 (c)) prédit la sélection de la branche

externe  $E_2$  dans les cas sillage et marée, ce qui contredit encore la simulation numérique figure 2.16 (b,h) et 2.16. On remarque que le modèle (et la théorie triadique) prédit un taux de croissance plus élevé sur les deux branches externes que sur la branche centrale. Enfin en diminuant la fréquence de forçage ( $\omega_0 = 0.30$ ) le modèle (figure 2.21 (d)) et la théorie triadique sélectionnent la branche centrale dans les cas sillage et marée. Cela contredit la simulation numérique figures 2.18 (b) et 2.19 (b) où le cas marée est stable.

## 2.5 Conclusion

En prenant un compte une vitesse d'écoulement de fond dans le référentiel de la source d'un faisceau d'onde interne, nous étudions la stabilité des faisceaux générées en prenant garde à conserver localement la même onde quelque soit la vitesse de l'écoulement de fond. Par le biais de simulations numériques directes, nous observons une dépendance forte de la stabilité à cette vitesse puisque pour des faibles vitesses, les faisceaux sont instables à un mode petite échelle alors qu'ils sont instables à un mode grande échelle pour des grandes vitesses. Pour des vitesses intermédiaires, les faisceaux sont stables et cette stabilité est confirmée par la recherche de modes propres globaux grâce à un algorithme d'Arnoldi-Krylov. Les modes obtenus pour les deux valeurs limites de stabilité sont très similaires aux modes globaux non-linéaire obtenus aux valeurs limites d'instabilité. Nous identifions les deux modes instables obtenus comme étant des modes issus d'interactions triadiques, théorie classique pour décrire la stabilité des ondes de gravité internes. Nous faisons varier les différents paramètres physiques régissant le faisceau d'onde (nombre de Froude, nombre de Reynolds, largeur du faisceau et fréquence de l'onde) et remarquons que si le caractère stable du faisceau est difficile à prédire, le mode sélectionné est quant à lui toujours triadique et toujours petite échelle pour les faibles vitesses et grande échelle pour les grandes vitesses, ce qui correspond dans la théorie triadique à deux branches distinctes de modes. Cependant, si cette théorie décrit correctement la structure du mode instable, elle ne parvient pas à prédire sa sélection. Pour ce faire, nous étendons un modèle phénoménologique développé récemment par Bourget et al. (2014) pour décrire l'influence de la limite spatiale du faisceau sur la stabilité de l'onde et nous y ajoutons l'influence de la vitesse de l'écoulement de fond. Le résultat de ce modèle est en accord avec la sélection observable dans les simulations du faisceau de référence mais ne parvient pas à prédire la stabilité des faisceaux pour des vitesses intermédiaires. Les prédictions du modèle diffèrent aussi lorsque les paramètres physiques (nombre de Froude, nombre de Reynolds, largeur du faisceau et fréquence de l'onde) sont variés.

Nous pensons que cette sélection robuste de la branche de mode instable s'explique en regardant la vitesse de groupe des modes triadiques (et non pas la vitesse de groupe des ondes secondaires composant le mode triadique). Un mode instable possédant une faible vitesse de groupe pourra se développer dans un faisceau sans écoulement de fond alors qu'un mode instable ayant une grande vitesse de groupe ne pourra croître sans sortir du faisceau. En aug-

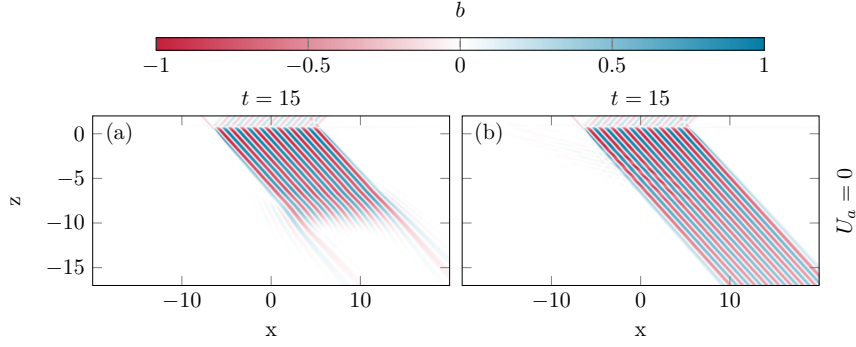


FIG. 2.22 : Champs de perturbation en flottabilité pour  $U_a = 0$  à deux instants ( $t = 15$  et  $t = 60$ ). Le nombre de Froude est diminué et vaut  $Fr = 3.1 \cdot 10^{-2}$  et le faisceau est élargie avec  $W = 8$ . En augmentant la largeur du faisceau par rapport à la simulation présentée figure 2.12 (a,b), le faisceau se déstabilise. Ce résultat est cohérent avec l'idée du modèle d'équilibre entre la production d'énergie par l'instabilité (proportionnelle à la largeur du faisceau) et la perte d'énergie sur les bords par irradiation des ondes secondaires (indépendante de la largeur du faisceau).

mentant la vitesse de l'écoulement de fond, l'inverse se produirait, le mode instable ayant une grande vitesse de groupe sera à même de rester dans le faisceau tandis qu'un mode ayant une faible vitesse de groupe se verra transporté en dehors du faisceau. Pour confirmer cette hypothèse, l'étude de la croissance spatiale des modes instables d'une onde interne est nécessaire et mène à la caractérisation absolue ou convective des instabilités triadiques. Cette étude est réalisée au chapitre 3 de ce manuscrit où l'on calcule numériquement la fonction de Green d'une onde interne.

**Remarque sur la variation du nombre de Froude** Selon le modèle d'équilibre des flux autour du faisceau, le transfert d'énergie dans le mode instable est proportionnel au taux de croissance et donc au nombre de Froude alors que le flux à travers ses limites ne l'est pas. En diminuant le nombre de Froude on affecte un seul des facteurs, ce qui rend cohérent une stabilisation avec une diminution du nombre de Froude telle que présentée figure 2.12 (b). Pour augmenter à nouveau le transfert d'énergie vers le mode instable nous pouvons prendre un faisceau plus large en conservant un Froude faible, c'est ce qui est fait figure 2.22 et dans le cas sillage le faisceau est bien de nouveau instable, accréditant cette hypothèse. Toutefois, le modèle de flux ne parvient pas à prédire la stabilisation avec la diminution du nombre de Froude, et si la taille du faisceau a effectivement une influence sur la stabilité, sa prédiction ne nous est actuellement pas accessible.

**Cas d'un faisceau très large** Nous traçons figure 2.23 un faisceau de largeur  $W = 20$ . Les spectres d'énergie associés (non montrés ici) confirment la sélection marée/petite échelle, sillage/grande échelle identique à celle d'un faisceau fin. Selon le modèle le mode choisi devrait dépendre de la taille du

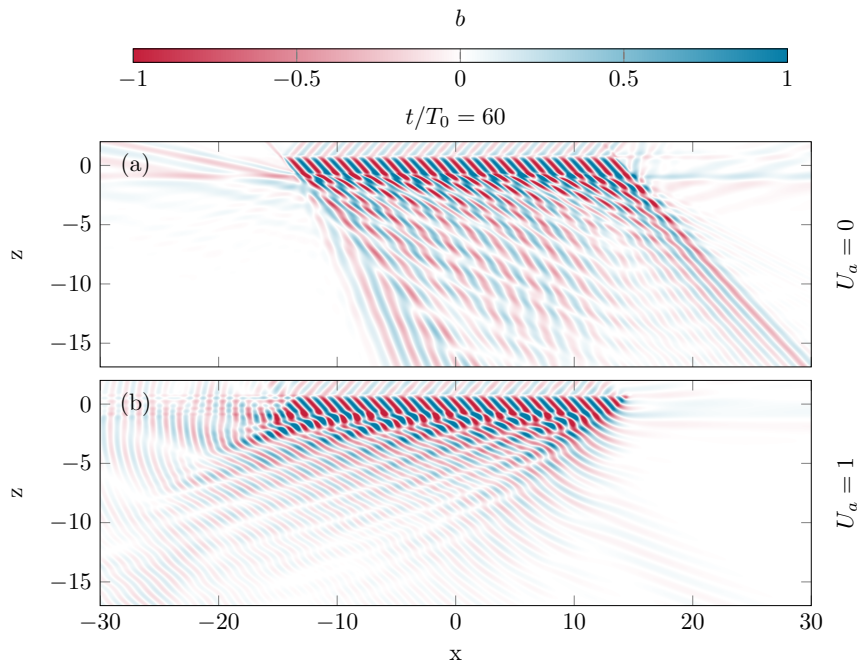


FIG. 2.23 : Champs de perturbation en flottabilité pour  $U_a = 0$  (cas marée) et  $U_a = 1$  (cas sillage) à l'instant  $t = 60$  pour un faisceau de largeur  $W = 20$  longueurs d'onde horizontale de l'onde primaire. Bien que le faisceau soit très large et donc plus proche d'une onde plane progressive, les bords interviennent et la sélection des modes est identique à celle d'un faisceau fin (mode petite échelle dans le cas marée et mode grande échelle dans le cas sillage).



faisceau, ce qui n'est pas ce que nous observons dans nos simulations où seule la stabilité du faisceau est affectée par sa taille.

**Cas océanique** Un cas plus réaliste consiste à considérer une stratification d'océan profond sur une topographie agitée par la marée diurne donnant ainsi une fréquence de  $\omega_0 = 0.14$  en gardant un nombre de Froude identique au cas de référence ( $Fr = 6.19 \cdot 10^{-2}$ ) *Richet et al.(2017) (à paraître)*. Les faisceaux obtenus sont tracés figure 2.24 pour une largeur de  $W = 2$  identique au cas de référence et cependant un nombre de Reynolds 10 fois plus élevé ( $Re = 1760$ ). Dans les trois cas le faisceau se déstabilise et une sélection du mode instable identique aux cas précédents apparaît (marée petite échelle et sillage grande échelle). Le mode petite échelle (a), situé sur la branche externe de la courbe résonante, est proche avec l'augmentation de nombre de Reynolds de *PSI (parametric subharmonic instability)* où les ondes secondaires possèdent des fréquences presque égales et donc égales (selon la relation triadique) à la moitié de la fréquence de l'onde primaire. L'ajout de l'écoulement de fond (similaire à un courant océanique) modifie considérablement le mode instable obtenu.

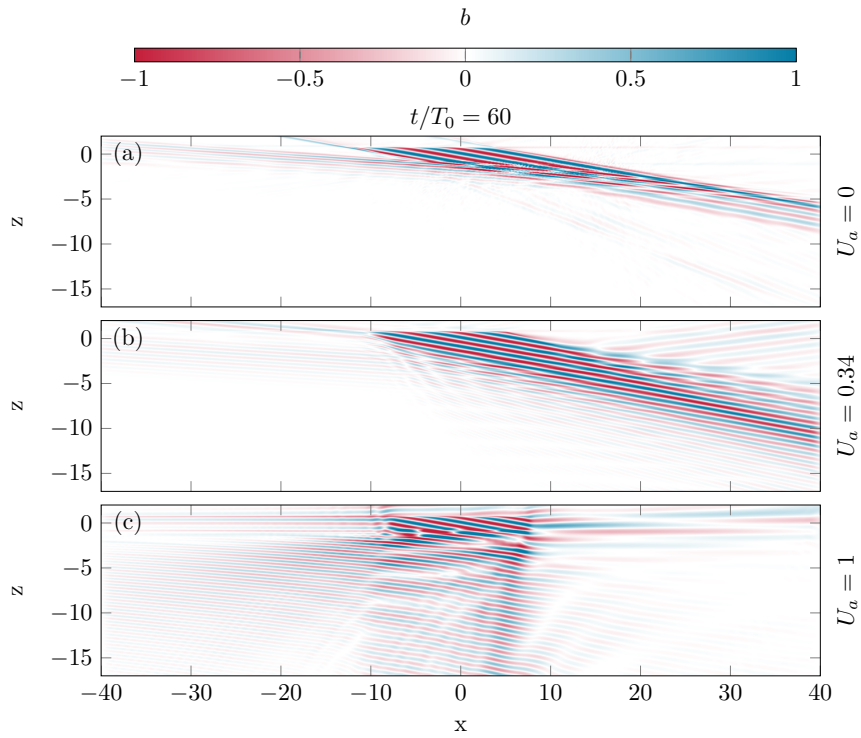


FIG. 2.24 : CAS OCÉANIQUE Champs de perturbation en flottabilité pour  $U_a = 0$ ,  $U_a = 0.34$  et  $U_a = 1$  à l'instant  $t = 60$  pour une fréquence de forçage diminuée à  $\omega_0 = 0.14$  et un nombre de Reynolds augmenté à  $Re = 1760$ . Le faisceau a une largeur de  $W = 2$  longueurs d'onde primaire horizontale. Les valeurs du nombre de Froude et de la fréquence de forçage sont des valeurs océaniques typiques. Les trois cas se déstabilisent et l'on retrouve un mode grande échelle dans le cas sillage et un mode petite échelle dans le cas marée. La fréquence du mode petite échelle est proche de la fréquence moitié du forçage ( $PSI$ ) mais ce mode disparaît pour laisser place à un mode grande échelle avec l'ajout de l'écoulement de fond.

# Chapitre 3

## Étude numérique de la stabilité locale d'une onde interne

Nous appliquons le principe de la réponse impulsionnelle au problème d'une onde interne plane monochromatique en calculant numériquement une approximation de la fonction de Green. Nous simulons l'évolution temporelle d'une perturbation localisée en temps et en espace régie par les équations des fluides stratifiés linéarisés autour de la solution d'une onde interne.

### 3.1 Fonction de Green ou réponse impulsionnelle

La fonction de Green est une réponse d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles à une impulsion (ou fonction de Dirac) pour des conditions limites données. L'impulsion peut être vue comme une perturbation infiniment localisée en temps et en espace. Elle excite le système selon toutes ses fréquences spatiales et temporelles.

#### 3.1.1 Le cas de l'équation d'advection diffusion

À titre d'exemple nous re-dérivons le cas classique d'un paquet d'onde régi par une équation d'advection–diffusion (je remercie la note de cours et ses auteurs de P.-Y. Lagrée et M.Rossi, DEA *Introduction à la Stabilité Hydrodynamique*, Chapitre 4) :

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = a f(x, t) + b \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $b > 0$ .

**Analyse temporelle** En supposant la solution sous la forme  $f(x, t) = \exp(i(kx - \omega t))$ , nous obtenons la relation de dispersion suivante :

$$\omega = kc + ia - ibk^2. \quad (3.2)$$

En prenant  $k \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{C}$  avec  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  (analyse temporelle) nous obtenons :

$$\omega_r = kc, \quad (3.3)$$

$$\omega_i = a - bk^2, \quad (3.4)$$

et obtenons la croissance exponentielle de la solution de cette forme lorsque  $\omega_i > 0$ , ce qui arrive aux  $k < \sqrt{a/b}$  lorsque  $a > 0$ . Nous concluons à l'instabilité linéaire de la solution dès que  $a > 0$ .

**Fonction de Green** Intéressons-nous maintenant à la fonction de Green de cette même équation. Nous savons que la fonction de Green  $G(x, t)$  est par définition la réponse à une fonction de Dirac  $\delta$ , soit :

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} - aG(x, t) - b \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t). \quad (3.5)$$

En prenant la transformée de Fourier en temps ( $t \rightarrow \omega$ ) et en espace ( $x \rightarrow -k$ ) des termes de l'équation, nous obtenons :

$$(-i\omega + ikc - a + bk^2)G(k, \omega) = 1, \quad (3.6)$$

puisque la transformée des fonctions de Dirac vaut 1. Nous simplifions en posant  $k_0 = -ic/2b$  et  $\omega_0 = ia - ic^2/4b$  pour obtenir :

$$(-i(\omega - \omega_0) + b(k - k_0)^2)G(k, \omega) = 1. \quad (3.7)$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse une première fois en temps nous obtenons :

$$G(k, t) = \frac{i}{2\pi} \int_L \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0 + ib(k - k_0)^2} d\omega. \quad (3.8)$$

L'intégrand possède un pôle pour  $\omega_p = \omega_0 - ib(k - k_0)^2$  d'ordre 1, seule contribution qui importe, qu'il convient d'intégrer par application du théorème des résidus, en prenant soin toutefois de considérer la causalité en supposant que les contributions doivent être nulles avant l'impulsion ( $t < 0$ ) et qu'ainsi le sens du contour d'intégration est, dans le plan complexe, vers le bas :

$$G(k, t) = -2i\pi \text{Res} \left[ \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0 + ib(k - k_0)^2} \right], \quad (3.9)$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \omega_p} (\omega - \omega_p) \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_p}, \quad (3.10)$$

$$= e^{-i(\omega_0 - ib(k - k_0)^2)t}. \quad (3.11)$$

En appliquant maintenant une transformée de Fourier inverse en espace, nous avons :

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx - (\omega_0 - ib(k - k_0)^2)t)} dk, \quad (3.12)$$

que nous simplifions par le changement de variable  $K = k - k_0$  :

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_0x - \omega_0t + ibK^2t + Kx)} dK, \quad (3.13)$$

$$G(x, t) = \frac{e^{i(k_0x - \omega_0t)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iKx - bK^2t} dK, \quad (3.14)$$

or  $iKx - bK^2t = -bt(K - ix/2bt)^2 - x^2/4bt$  et :

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{i(k_0x - \omega_0t)} e^{-x^2/4bt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{bt(K - ix/2bt)^2} dK, \quad (3.15)$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi bt}} e^{i(k_0x - \omega_0t)} e^{-x^2/4(bt)^2}, \quad (3.16)$$

ce qui avec  $i(k_0x - \omega_0t) - x^2/4bt = at - (x - ct)^2/4bt$  donne :

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi bt}} e^{at} e^{-(x-ct)^2/4bt}. \quad (3.17)$$

Nous avons donc calculé la fonction de Green de l'équation d'advection-diffusion. Nous voyons que la solution prends la forme d'une fonction Gaussienne centrée en  $ct$ , de "largeur"  $\sqrt{2bt}$  montrant une croissance exponentielle de taux  $a$  modérée algébriquement par  $1/\sqrt{t}$ . On observe donc qu'elle est transportée à la vitesse  $c$  par le terme d'advection; elle s'étale en racine du temps selon le coefficient de diffusion  $b$ ; elle possède un taux de croissance  $a$ .

La compensation algébrique en inverse de la racine du temps compense l'étalement ou diffusion de la solution par l'opérateur Laplacien, en conservant l'intégrale selon l'espace de la solution proportionnelle au taux de croissance  $a$ .

**Observation selon des rayons**  $V_g = x/t = cst$  Nous pouvons observer plus précisément la solution précédente en regardant l'évolution du paquet selon des rayons partant de l'origine  $x = 0, t = 0$ . Soit  $V_g = x/t = cst$  la vitesse d'un rayon, nous pouvons décrire la solution selon  $V_g$  et le taux de croissance du paquet vaut :

$$\sigma(V_g) = a - \frac{(V_g - c)^2}{4b}. \quad (3.18)$$

Celui-ci est maximal lorsque  $V_g = c$  et vaut  $a$ , de plus il est nul sur deux rayons  $V_g = c \pm 2\sqrt{ab}$  formant les deux bords du paquet.

Prenons le cas d'un observateur fixe (à vitesse nulle  $V_g = 0$ ). Si les vitesses des deux bords du paquet sont de même signes et non nulles *ie.*  $c > \pm 2\sqrt{ab}$ , le taux de croissance au niveau de l'observateur sera négatif et le système sera pour lui stable bien que la solution sera exponentiellement croissante avec le temps.

- une solution est dite *linéairement stable* si

$$\forall \frac{x}{t} = C, \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = 0; \quad (3.19)$$

- une solution est dite *linéairement instable* si

$$\exists \frac{x}{t} = C, \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = +\infty; \quad (3.20)$$

- une solution est dite *linéairement convectivement instable* si elle est linéairement instable et que pour :

$$\frac{x}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = 0; \quad (3.21)$$

- une solution est dite *linéairement absolument instable* si elle est linéairement instable et que pour :

$$\frac{x}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = +\infty. \quad (3.22)$$

La distinction entre l'instabilité absolue ou convective dépend donc du taux de croissance sur le rayon  $x/t = 0$  et l'on appelle taux de croissance absolu  $\omega_{0i}|_{\mathcal{R}} = \sigma(0)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Si  $\omega_{0i}|_{\mathcal{R}}$  est positif, l'instabilité est absolue, si  $\omega_{0i}|_{\mathcal{R}}$  est négatif, l'instabilité est convective et il faut qu'il existe  $U$  tel que  $\sigma(U)$  soit positif pour que l'écoulement soit instable, sinon, l'écoulement est stable.

**Changement de référentiel** Nous effectuons le changement de référentiel  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  par translation à la vitesse  $U$ . Ce changement est défini par le changement de variable  $x' = x - Ut$ . Nous obtenons dans ce nouveau référentiel un taux de croissance selon un rayon  $V'_g = x'/t = cst$  valant :

$$\sigma'(V'_g) = a - \frac{(V'_g - c + U)^2}{4b}. \quad (3.23)$$

Le taux de croissance dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  est lié au taux de croissance dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$\sigma'(V'_g)|_{\mathcal{R}'} = \sigma(V'_g + U)|_{\mathcal{R}}. \quad (3.24)$$

Cela signifie que dans ce nouveau référentiel  $\mathcal{R}'$  le sommet du paquet se translate à la vitesse  $c - U$ . En respectant les définitions de 3.21 et 3.22 de la stabilité, une solution absolument instable dans le référentiel  $U = 0$  peut devenir convectivement instable dans un référentiel  $U \neq 0$  et inversement. Nous définissons le taux de croissance absolu  $\omega_{0i}$  comme le taux de croissance le long d'un rayon associé à une vitesse nulle dans un référentiel :

$$\omega_{0i}|_{\mathcal{R}'} = \sigma'(0) = \sigma(U), \quad (3.25)$$

ce qui dans le cas présent donne un taux de croissance absolu dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

$$\omega_{0i}|_{\mathcal{R}'} = a - \frac{(-c + U)^2}{4b}. \quad (3.26)$$

**Cas à deux dimensions** Nous réalisons une analyse similaire dans un cas à deux dimensions spatiales  $(x, z)$ . L'équation d'advection–diffusion peut être étendue à deux dimensions spatiales  $x, z$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = af + b_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (3.27)$$

avec  $a, b, c_x, c_z \in \mathbb{R}$  et  $b > 0$ .

Le même développement s'applique et nous obtenons la solution pour la fonction de Green :

$$G(x, z, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{b_x b_z} t} e^{at} e^{-((x-c_x t)^2)/4b_x t} e^{-((z-c_z t)^2)/4b_z t}. \quad (3.28)$$

Ce qui correspond à une Gaussienne se propageant en  $x$  et en  $z$  selon les deux vitesses  $c_x$  et  $c_z$  et se diffusant selon  $x$  et  $z$  selon les coefficients  $b_x$  et  $b_z$ . On observe cette fois que la modération algébrique du taux de croissance est non plus en inverse de la racine carrée du temps mais en inverse du temps. Cela compense la diffusion qui s'effectue selon les deux directions.

**Observation selon des rayons**  $V_{gx} = x/t = cst, V_{gz} = z/t = cst$  De même que dans le cas à une dimension, nous suivons l'évolution du paquet selon des rayons partant de l'origine  $x = 0, z = 0, t = 0$  et après correction de la modération algébrique (en inverse du temps), nous obtenons le taux de croissance :

$$\sigma(V_{gx}, V_{gz}) = a - \frac{(V_{gx} - c_x)^2}{4b_x} - \frac{(V_{gz} - c_z)^2}{4b_z}. \quad (3.29)$$

Le sommet du paquet (maximum du taux de croissance) se propage le long du rayon  $V_{gx} = c_x, V_{gz} = c_z$ . Les bords du paquets (ensemble des rayons où le taux de croissance associé est nul) forment maintenant une ellipse centrée en  $c_x, c_z$  de demi axe selon  $x$  :  $2\sqrt{ab_x}$  et de demi axe selon  $z$  :  $2\sqrt{ab_z}$ . Le bord a pour équation :

$$a - \frac{(V_{gx} - c_x)^2}{4b_x} - \frac{(V_{gz} - c_z)^2}{4b_z} = 0. \quad (3.30)$$

**Changement de référentiel** Nous effectuons le changement de référentiel  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  par translation selon  $x$  à la vitesse  $U$ , ce changement est défini par le changement de variable  $x' = x - Ut, z' = z$ . Le taux de croissance dans ce nouveau référentiel s'écrit :

$$\sigma'(V'_{gx}, V'_{gz})|_{\mathcal{R}'} = \sigma(V'_{gx} + U, V'_{gz})|_{\mathcal{R}}, \quad (3.31)$$

ce qui dans le cas présent donne :

$$\sigma'(V'_{gx}, V'_{gz}) = a - \frac{(V'_{gx} - c_x + U)^2}{4b_x} - \frac{(V'_{gz} - c_z)^2}{4b_z}, \quad (3.32)$$

et nous définissons le taux de croissance absolu  $\omega_{i0}|_{\mathcal{R}'}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , le taux de croissance le long du rayon associé à une vitesse nulle dans ce référentiel  $\mathcal{R}'$  par :

$$\omega_{0i}|_{\mathcal{R}'} = \sigma'(0, 0) = \sigma(U, 0), \quad (3.33)$$

ce qui donne :

$$\omega_{0i}|_{\mathcal{R}'} = a - \frac{(-c_x + U)^2}{4b_x} - \frac{(-c_z)^2}{4b_z}. \quad (3.34)$$

Nous reprenons la définition de la stabilité dans le cas à deux dimensions :

- une solution est dite *linéairement stable* si

$$\forall \left( \frac{x}{t} = V_{gx}, \frac{z}{t} = V_{gz} \right), \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = 0; \quad (3.35)$$

ce qui implique

$$\forall (V_{gx}, V_{gz}), \sigma(V_{gx}, V_{gz}) \leq 0, \quad (3.36)$$

- une solution est dite *linéairement instable* si

$$\exists \left( \frac{x}{t} = V_{gx}, \frac{z}{t} = V_{gz} \right), \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = +\infty; \quad (3.37)$$

ce qui implique

$$\exists (V_{gx}, V_{gz}), \sigma(V_{gx}, V_{gz}) \leq 0, \quad (3.38)$$

- une solution est dite *linéairement convectivement instable* si elle est linéairement instable et que pour :

$$\left( \frac{x}{t} = 0, \frac{z}{t} = 0 \right), \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = 0; \quad (3.39)$$

ce qui implique

$$\exists \omega_{i0}|_{\mathcal{R}} = \sigma(0, 0) \leq 0, \quad (3.40)$$

- une solution est dite *linéairement absolument instable* si elle est linéairement instable et que pour :

$$\left( \frac{x}{t} = 0, \frac{z}{t} = 0 \right), \lim_{t \rightarrow +\infty} G(x, t) = +\infty. \quad (3.41)$$

ce qui implique

$$\exists \omega_{i0}|_{\mathcal{R}} = \sigma(0, 0) \geq 0, \quad (3.42)$$

Nous traçons schématiquement figure 3.1 (a) le taux de croissance le long de rayons en fonction des vitesses verticales et horizontales associées aux rayons. Le taux de croissance est indiqué par ses contours lorsqu'il est positif. Un point marque l'endroit où il est maximum et un trait épais le contour où le taux est nul. Le trait pointillé marque la position suivie par le changement de référentiel par translation à vitesse constante  $U$ . Le taux est calculé pour des paramètres arbitraires de  $a, c_x, c_z, b_x, b_z$  mais tous sont positifs et distincts. Les contours forment des ellipses décrites par l'équation 3.29 (ou 3.32 dans le nouveau référentiel), centrées autour du maximum du taux de croissance. Le contour pour un taux nul (l'ellipse la plus extérieure) traverse l'axe des abscisses. Ce contour contient aussi l'origine du nouveau référentiel (intersection des axes  $V_{gx}$  et  $U$ ), mais ne contient pas l'origine de l'ancien référentiel. Selon les définitions de la stabilité, la solution de ce système pour ce choix de paramètre est linéairement



instable puisqu'il existe au moins un rayon le long duquel le taux de croissance est positif. Dans l'ancien référentiel la taux de croissance absolu  $\omega_{i0}$  qui vaut  $\sigma$  à l'origine du repère (vitesses nulles) est négatif et le système est linéairement convectivement instable. Dans le nouveau référentiel le taux de croissance absolu est positif et le système est linéairement absolument instable. La figure 3.1 (b) est une coupe horizontale à la vitesse  $V_{gz} = 0$  de la figure (a), on retrouve la même information sur la coupe que sur le champs  $\sigma(V_{gx}, V_{gz})$ , le taux de croissance est négatif lorsque  $V_{gx}$  est nul mais est positif lorsque  $V_{gx} = U$ .

### 3.1.2 Problème d'une onde interne

Pour l'étude d'une onde, nous nous plaçons dans le cadre d'un fluide incompressible linéairement stratifié. Nous reprenons les équations de Navier-Stokes incompressible dans l'approximation de Boussinesq, cependant nous simulons l'écoulement autour d'un état de base et nous linéarisons les équations obtenues. Symboliquement, si nous appelons

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

le vecteur d'état, les équations de Boussinesq s'écrivent

$$NS(\mathbf{q}) = L(\mathbf{q}) + NL(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0, \quad (3.44)$$

où  $L$  est un opérateur linéaire et  $NL$  un opérateur bilinéaire. Dans ce formalisme, la pression a été éliminée en utilisant l'incompressibilité du fluide  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Si nous notons  $\Pi$  le projecteur sur les champs solénoïdaux (champs à divergence nulle), nous avons

$$NL(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \Pi(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

alors que

$$L(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Pi(\mathbf{b} \mathbf{e}_z) - \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial b}{\partial t} + N \mathbf{u} \mathbf{e}_z - D \Delta b \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

où  $b = g\rho'/\rho_0$  avec  $\rho = \rho_0 + \bar{\rho} + \rho'$  où  $\bar{\rho}$  est la stratification de base qui varie linéairement en  $z$ .

Si

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ b_b \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

est l'état de base et

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

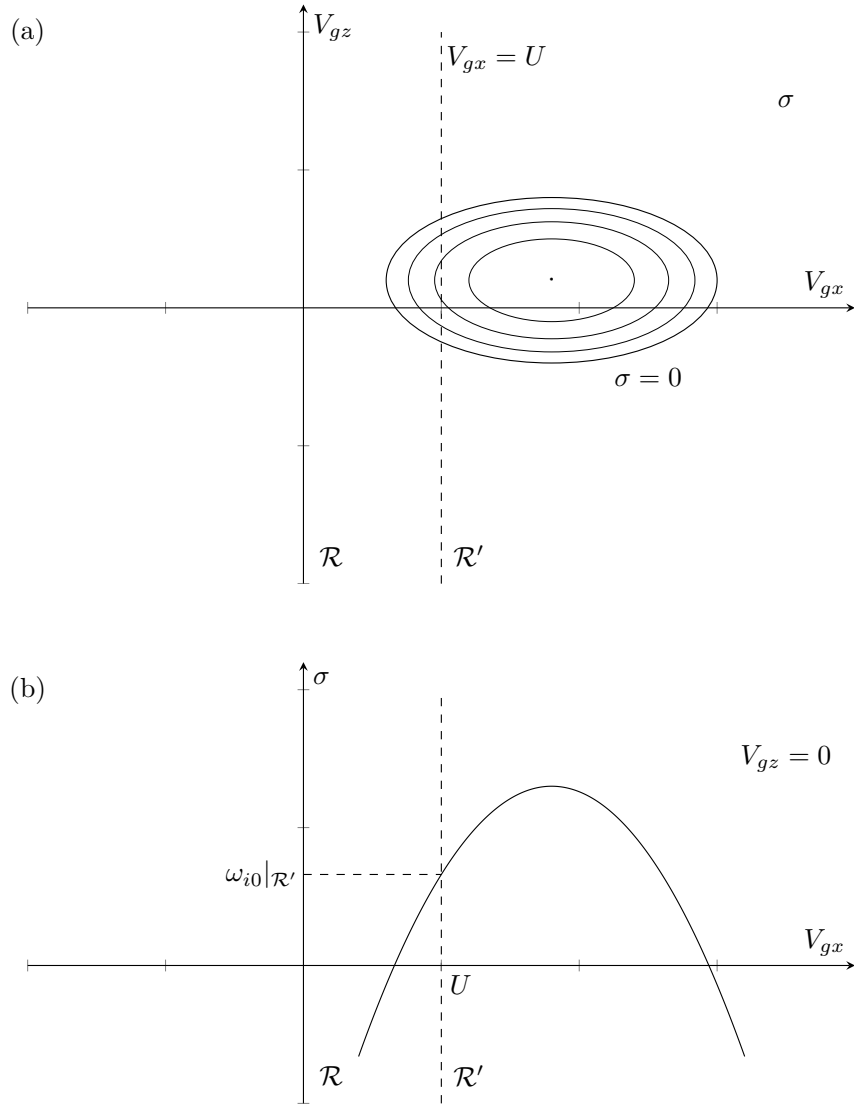


FIG. 3.1 : Schéma du taux de croissance en fonction de la vitesse verticale et horizontale (a) et coupe du taux de croissance lorsque la vitesse verticale est nulle (b). La solution montrée ici est convectivement instable dans le référentiel d'origine mais devient absolument instable dans un référentiel en translation à la vitesse  $U$ . Cette courbe donne aussi le taux de croissance absolu  $\omega_{i0}|_{\mathcal{R}'}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation à la vitesse  $U$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ,  $\omega_{i0}|_{\mathcal{R}} = \sigma(U, 0)$ .

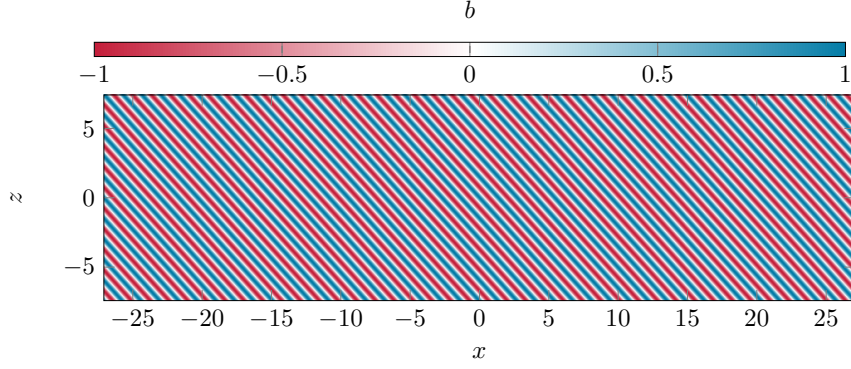


FIG. 3.2 : ÉTAT DE BASE : Champs de flottabilité de l'état de base. Le domaine montré dans cette figure représente un centième du domaine utilisé pour les simulations qui est dix fois plus grand en  $x$  et dix fois plus grand en  $z$  (400 longueurs d'onde horizontales et 100 longueurs d'onde verticale).

la perturbation autour de cet état de base nous avons  $NS(\mathbf{Q} + \mathbf{q}) = 0$ . En sachant que

$$NS(\mathbf{Q}) = 0, \quad (3.49)$$

nous avons

$$NL(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) + L(\mathbf{Q}) = 0. \quad (3.50)$$

Il vient

$$NS(\mathbf{Q} + \mathbf{q}) = NL(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) + L(\mathbf{Q}) \quad (3.51)$$

$$+ NL(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) + NL(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + NL(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + L(\mathbf{q}) \quad (3.52)$$

$$= NL(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) + NL(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + NL(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + L(\mathbf{q}) = 0. \quad (3.53)$$

Pour linéariser les équations, nous supposons  $\mathbf{q}$  petit et nous négligerons le terme non-linéaire quadratique en  $\mathbf{q}$  :  $NL(\mathbf{q}, \mathbf{q})$ . Le terme non-linéaire dans les équations a pour origine le terme d'advection, et la somme du champ de base et du champ perturbé donne lieu à quatre termes, l'advection du champ de base par le champ de base, l'advection du champ de base par le champ perturbé, l'advection du champ perturbé par le champ de base et enfin l'advection du champ perturbé par le champ perturbé. L'équation complète pour  $\mathbf{q}$  s'écrit donc :

$$NL(\mathbf{Q}, \mathbf{q}) + NL(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + L(u) = 0. \quad (3.54)$$

L'état de base  $\mathbf{Q}$  choisi est l'onde interne rendue stationnaire en ajoutant une vitesse uniforme horizontale  $U_\varphi$  exactement opposée à la projection horizontale de la vitesse de phase de l'onde dans le fluide au repos. Ceci est équivalent à se placer dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de phase projetée horizontalement de l'onde. Son champ de flottabilité est tracé en partie figure 3.2. Cette onde interne définie par ses champs de vitesse horizontale

$u_b$ , de vitesse verticale  $w_b$  et de flottabilité  $b_b$  :

$$u_b^* = -A \sin \theta_b \sin \varphi^* + U_\varphi^*, \quad (3.55)$$

$$w_b^* = +A \cos \theta_b \sin \varphi^*, \quad (3.56)$$

$$b_b^* = +N \cos \varphi^*, \quad (3.57)$$

$$\varphi^* = k_{xb}^* x^* + k_{zb}^* z^*, \quad (3.58)$$

où  $N$  est la fréquence de Brunt-Väisälä,  $\theta_b$  l'angle du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_b = (k_{xb}, k_{zb})$  avec l'horizontale et  $A$  son amplitude (vitesse maximale de l'onde de base). Cette définition est expliquée dans le chapitre 1. Le changement de référentiel (associé à l'ajout de la vitesse  $U_\varphi^*$ ) rend  $\varphi^*$ , la phase de l'onde, indépendante du temps. La vitesse  $U_\varphi$  vaut :

$$U_\varphi^* = \frac{\omega_b^*}{k_{xb}^*} = \text{sign}(k_{xb}^*) \frac{N}{|\mathbf{k}_b^*|}, \quad (3.59)$$

où  $\omega_b^*$  est la fréquence de l'onde supposée positive respectant la relation de dispersion des ondes internes  $(\omega_b^*)^2 = N^2 \cos^2(\theta_b)$ .

La perturbation autour de l'onde de base est solution des équations linéarisées qui s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}_b^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}_b^* = -\frac{\nabla p^*}{\rho_b} - b^* \cdot \mathbf{e}_z + \nu \Delta \mathbf{u}^*, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}_b^* \cdot \nabla b^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla b_b^* = -N^2 w^* + D \Delta b^*, \quad (3.62)$$

### 3.1.3 Paramètres physiques

Nous définissons de la même manière qu'au chapitre 2 quatre paramètres adimensionnés :

- $\theta_b$  l'angle que forme le vecteur d'onde de base avec l'horizontal,
- $\text{Re} = A\lambda_b/\nu$ , le nombre de Reynolds,
- $\text{Fr} = A/N\lambda_b$ , le nombre de Froude,
- $\text{Pr} = \nu/D$ , le nombre de Prandtl.

$\lambda_b$  est la longueur d'onde de l'onde de base ( $\lambda_b = 2\pi/|\mathbf{k}_b|$ ),  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $D$  est le coefficient de diffusion de l'agent stratifiant.

Nous prenons comme valeurs dans notre calcul de référence :

- $\theta_b = 42.3^\circ$  soit en utilisant la relation de dispersion  $\omega_0/N = 0.74$ ,
- $\text{Re} = 160$ ,
- $\text{Fr} = 0.056$ ,

- $\text{Pr} = 7$ .

L'espace est adimensionné par la longueur d'onde  $\lambda_b$ , le temps par  $N$  et les vitesses du fluide par l'amplitude de l'état de base  $A$ . Avec ces choix, l'état de base devient :

$$u_b = -\sin \theta_b \sin \varphi - 1/2\pi\text{Fr}^{-1}, \quad (3.63)$$

$$w_b = +\cos \theta_b \sin \varphi, \quad (3.64)$$

$$b_b = +\cos \varphi, \quad (3.65)$$

$$\varphi = 2\pi(\cos(\theta_b)x + \sin(\theta_b)z), \quad (3.66)$$

Nous définissons aussi la période de l'écoulement de base dans le référentiel du fluide

$$T_b = 2\pi / \cos \theta_b. \quad (3.67)$$

Dans l'équation 4.14 le terme  $-1/2\pi\text{Fr}^{-1}$  correspond à l'opposé de la vitesse de phase projeté sur l'horizontale, adimensionnée de l'onde dans le fluide  $U_\varphi = -1/2\pi\text{Fr} = 2.842$ .

La flottabilité  $b$  est adimensionnée par  $AN$ . Les équations s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_b = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + b \cdot \mathbf{e}_z + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u}_b \cdot \nabla b + \text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla b_b = -w + \frac{\text{Fr}}{\text{PrRe}} \Delta b. \quad (3.70)$$

## 3.2 Simulation numérique

### 3.2.1 Code de calcul

Les équations sont résolues numériquement à l'aide du même code que celui utilisé dans le chapitre 2 (voir Deloncle et al. (2008)). Le code étant pseudo-spectral, les conditions limites sont périodiques et le domaine doit être le plus grand possible pour simuler un domaine infini pendant la durée d'une simulation (avant que le signal n'ait le temps de traverser le domaine et de revenir de par les conditions limites périodiques). Dans le chapitre 2 une condition de rayonnement différente était requise (absence de réflexion sur les conditions limites) et était imposée à l'aide de zones éponges entourant le domaine. Dans ce chapitre nous privilégions un domaine de très grande dimension afin de ne pas risquer d'altérer la relation de dispersion et les modes propres du systèmes.

Le domaine choisi a pour taille adimensionnée  $543.54 \times 148.7$ , soit 400 longueurs d'onde de base horizontales et de 100 longueurs d'onde de base verticales pour  $32768 \times 8192$  points, soit une résolution spatiale horizontale de  $\delta_x = 0.018$  et verticale de  $\delta_z = 0.016$ , ce qui équivaut à 82 points par longueur d'onde horizontale ou verticale.

La vitesse horizontale  $U_\varphi$  transporte une particule de fluide horizontalement à la vitesse d'une longueur d'onde par unité de temps et cette particule aura

parcouru le domaine à  $t = 400 T_b$ , donnant une première limite temporelle. Cependant, une autre limite temporelle provient de la croissance du bruit numérique. Les réels (*double precision*) sont codés sur 8 octets ou 64 bits, 1 bit pour le signe, 11 bits pour l'exposant et 52 bits pour la mantisse, donnant une erreur relative pour un réel de  $\epsilon = 2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$  (plus petit écart entre deux réels). Classiquement, pour des champs liés par les opérations de calculs simples (produit et sommes), l'erreur absolue pour chaque variable du champ provient de l'erreur relative de la plus grande valeur du champ et donc la plus petite valeur du champ n'a de sens que si elle est supérieure à l'erreur relative de la plus grande valeur. Ceci limite la dynamique (rapport entre la valeur la plus faible et la plus élevée) du système à  $\epsilon$  soit environ 16 décades (Trefethen and Bau III, 1997). Dans notre cas, l'erreur provient de l'application successive de la transformée de Fourier rapide. L'erreur numérique moyenne de la transformée de Fourier rapide est estimée à  $\mathcal{O}(\epsilon \sqrt{\log(n)})$  (Cooley and Tukey, 1965) où  $n$  est le nombre de points dans le plus grande dimension du système. Ces erreurs s'accroissent avec le nombre de pas de temps mais en supposant une compensation statistique, elles augmenteront en  $\sqrt{n_t}$  où  $n_t$  est le nombre de pas de temps. Nous obtenons une erreur moyenne de  $r \propto \epsilon \sqrt{n_t \log(n)} \approx 10^4 \epsilon \approx 10^{-12}$  soit un bruit de l'ordre de 4 décades supérieur au bruit issu de la double précision.

S'il existe un ou plusieurs modes instables dans notre système nous appelons  $\sigma_{max}$  le taux de croissance du mode le plus instable. Le mode le plus instable entraînera avec lui son erreur relative (bruit numérique) limitée par la dynamique de la double précision, et les modes moins instables finiront par avoir des amplitudes inférieures à l'erreur relative de l'amplitude du mode le plus instable. Ces modes finiront par être noyés dans le bruit numérique en un temps dépendant de l'écart du taux de croissance du mode considéré et de celui du mode le plus instable. Comme le signe du taux de croissance détermine le caractère stable ou instable du mode, nous posons comme limite d'horizon temporelle l'instant où le mode le plus instable aura noyé les modes stables (taux de croissance négatif) et commencera à noyer les modes neutres (taux de croissance nul) L'horizon temporelle est donc limité par  $T_l = -\log(r)/\sigma_{max}$  ce qui pour les taux de croissance que nous observons donne  $T_l \approx 52 T_b$ , soit un temps bien plus faible que la limite de parcours d'une particule de fluide. Les résultats présentés dans ce chapitre sont obtenus en limitant l'horizon temporel à  $T_l = 40 T_b$  et les résultats sont tronqués pour respecter une dynamique de 12 décades en amplitude et 24 décades en énergie.

### 3.2.2 Condition initiale

La réponse impulsionnelle est calculée à partir d'une condition initiale placée au centre du domaine  $x = 0, z = 0$ . Cette perturbation doit être localisée en espace afin d'exciter tous les nombres d'onde en espace de Fourier (approximation de la fonction de Dirac théorique), la limite étant la résolution spatiale de la simulation. La fonction choisie est un multipôle composé de la superposition de tourbillons Gaussien auquel on adjoint également une pertur-

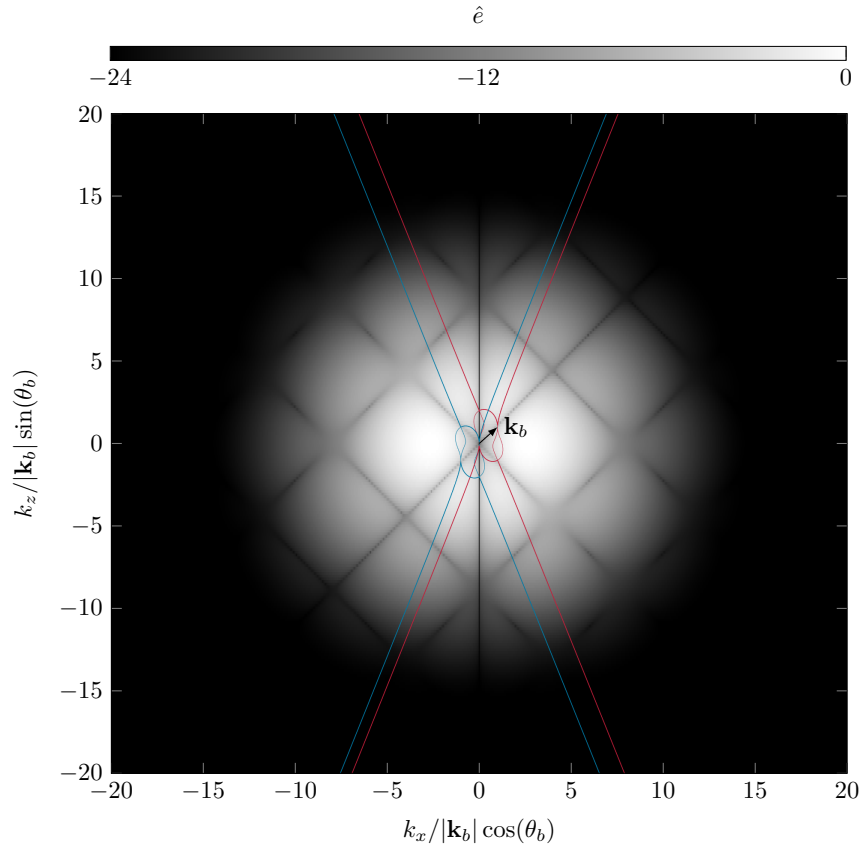


FIG. 3.3 : Champs de flottabilité de la condition initiale (a) (domaine tronqué) et spectre en espace de Fourier (b). La condition initiale est confinée autant que possible en espace, elle recouvre une large partie de l'espace de Fourier tout en limitant l'énergie injectée aux petits nombres d'onde (centre du domaine) et à la troncature  $2\pi/\delta_x$ . Pour cette dernière, la taille des coeurs Gaussiens a été choisie pour que l'énergie à la troncature soit de l'ordre du bruit numérique ( $10^{-24}$  fois plus petite que le maximum d'énergie).

bation Gaussienne en flottabilité de telle sorte à ce que l'énergie injectée soit équirépartie entre énergie cinétique et énergie potentielle. Les tourbillons (et la perturbation en flottabilité) possèdent un coeur de taille  $r = 1/16$  et sont placés aux sommets d'un carré incliné d'un angle de  $\pi/4$  et le rayon du cercle circonscrit au carré est  $R = 1/8$  :

$$x_{pm} = R \cos(m \pi/4) \quad (3.71)$$

$$z_{pm} = R \sin(m \pi/4) \quad (3.72)$$

$$x_m = \frac{x - x_{pm}}{r} \quad (3.73)$$

$$z_m = \frac{z - z_{pm}}{r} \quad (3.74)$$

$$u = \sum_{m=1}^4 (-1)^m 2z_m e^{-(x_m^2 + z_m^2)}, \quad (3.75)$$

$$w = \sum_{m=1}^4 (-1)^m 2x_m e^{-(x_m^2 + z_m^2)}, \quad (3.76)$$

$$b = \sum_{m=1}^4 (-1)^m 2z_m e^{-(x_m^2 + z_m^2)}. \quad (3.77)$$

Cette condition initiale est à divergence nulle, elle décroît exponentiellement en espace, elle ne partage aucune symétrie avec l'état de base et sa taille est choisie suffisamment petite, de manière à recouvrir au maximum d'énergie l'espace de Fourier et suffisamment grande, de manière à ce que l'énergie au nombre d'onde de troncature soit par rapport au maximum de l'énergie dans l'espace de Fourier aussi faible que l'erreur machine  $10^{-24}$ . La quadri-pôle permet aussi de limiter l'injection d'énergie dans les nombres d'onde les plus faibles capables d'envahir le domaine très rapidement et de limiter l'influence de ceux-ci dans les résultats. Des perturbations d'ordre 6 au lieu de 4 (6 tourbillons) ont été testées, donnant des résultats identiques à ceux présentés ici. Ceci est cohérent avec l'idée que l'énergie injectée par la condition initiale change la distribution initiale d'énergie sur les différents modes mais ne change pas le taux de croissance des modes temporels ni le taux de croissance le long des rayons.

## 3.3 Résultats et analyse temporelle

### 3.3.1 Spectre

Nous traçons figure 3.4 la densité d'énergie en espace de Fourier  $(k_x, k_z)$  de la perturbation à l'instant  $t = 40 T_b$  définie par :

$$\hat{e}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left( |\hat{u}(\mathbf{k})|^2 + |\hat{w}(\mathbf{k})|^2 + |\hat{b}(\mathbf{k})|^2 \right) \quad (3.78)$$

où  $\hat{\cdot}$  est la transformée de Fourier en deux dimensions. La densité d'énergie est tronquée à une dynamique de 24 décades (entre l'énergie la plus haute et la plus faible), les valeurs inférieures étant considérées comme du bruit numérique.



L'énergie se concentre sur des modes de Fourier précis et la figure centrale se répète en s'affaiblissant par translation du vecteur de l'onde de base  $\mathbf{k}_b$ . Ceci provient de la périodicité spatiale de l'état de base dont les modes propres doivent être définis comme des modes de Floquet :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ b_n \end{pmatrix} e^{in\mathbf{k}_b\mathbf{x}} + CC., \quad (3.79)$$

où  $\mathbf{k}$  est compris dans une bande de largeur  $[0, \mathbf{k}_b]$ . Le système (l'état de base) étant périodique en espace de période  $2\pi/\mathbf{k}_b$ , la solution peut être écrite comme un mode de Floquet possédant la même périodicité. La répartition de l'énergie entre les harmoniques de  $\mathbf{k}$  par  $\mathbf{k}_b$  étant définie par les coefficients de Floquet  $\mathbf{u}_n$  et  $b_n$ .

Si nous regardons le centre du domaine, la forme que prend la densité d'énergie suit la courbe de résonance triadique et la théorie triadique semble expliquer la distribution d'énergie des modes instables d'une onde interne bien que cette onde possède une amplitude finie alors que la théorie est valide pour une amplitude qui tend vers zéro.

### 3.3.2 Taux de croissance

Nous traçons figure 3.5 le taux de croissance temporelle de la perturbation en espace de Fourier. Le taux est obtenu par la différenciation discrète de la densité d'énergie entre deux instants séparés de  $T_b/5$ , le taux est ensuite moyenné entre  $t = 20 T_b$  et  $t = 40 T_b$ . Afin de ne pas mesurer de taux de croissance dans le bruit numérique, celui-ci n'est calculé que lorsque l'énergie du mode de Fourier correspondant à  $t = 40 T_b$  est supérieure à  $10^{-24} \max(\hat{e}(\mathbf{k}))$  à l'instant  $t = 40 T_b$ . Ne sont représentés que les taux de croissance positifs mais ceux-ci sont entourés d'une zone de taux de croissance négatifs variant régulièrement jusqu'à la troncature à  $10^{-24}$ . De même que pour la densité d'énergie, le taux de croissance forme une structure précise qui suit très correctement la courbe de résonance triadique. Contrairement à l'énergie qui diminue à chaque répétition par périodicité en s'éloignant des petits nombres d'onde, le taux de croissance reste identique dans toute les répétitions et est donc exactement périodique selon des translations du vecteur d'onde de base  $\mathbf{k}_b$ . Les répétitions aux nombres d'ondes les plus élevés sont fortement tronquées par la petitesse de la densité d'énergie correspondante, inférieure à 24 décades du maximum. La concordance des taux de croissance positifs et de la courbe de résonance triadique nous indique, comme nous l'avons déjà commenté pour l'énergie, que la théorie des triades résonantes prévoit correctement le lieu des modes instables malgré le nombre de Froude fini. Le système étant périodique en espace de période  $2\pi/\mathbf{k}_b$ , les modes peuvent être décrits par des modes de Floquet possédant la même périodicité (voir section précédente 3.3.1). Ainsi,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k} + n\mathbf{k}_b$  appartiennent au même mode de Floquet et possèdent donc le même taux de croissance. La simulation numérique vérifie remarquablement cette propriété et les taux de croissances sont identiques à chaque translation de  $\mathbf{k}$  par  $n\mathbf{k}_b$ . La moyenne temporelle du taux de croissance permet de réduire l'erreur liée

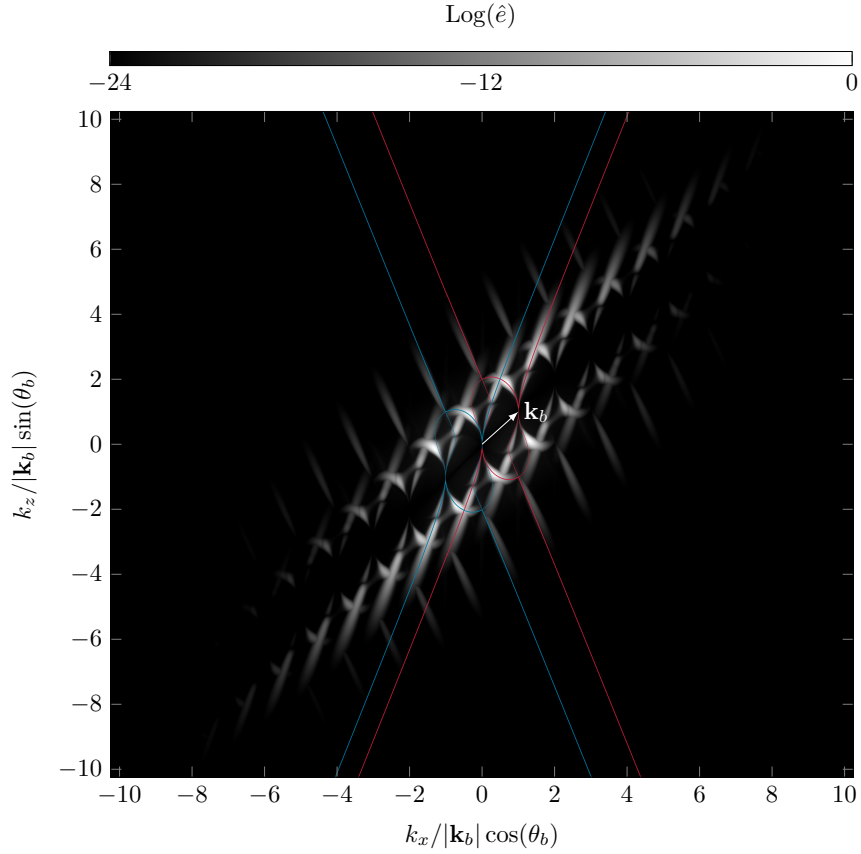


FIG. 3.4 : Densité d'énergie normalisée par son maximum en espace de Fourier à l'instant  $t = 40 T_b$ , tronquée à 24 décades et tracée en fonction de  $k_x/|\mathbf{k}_b| \cos(\theta_b)$ ,  $k_z/|\mathbf{k}_b| \sin(\theta_b)$  afin que le vecteur d'onde de base  $\mathbf{k}_b$  vaille (1, 1) dans cette représentation. La courbe résonante correspondante issue de la théorie triadique (définie aux chapitres 1 et 2) est tracée en bleu et rouge et est détaillée 2.4.1. L'énergie se répète par translation de  $\mathbf{k}_b$  de par la périodicité de l'état de base. La répartition de l'énergie suit la courbe résonante.

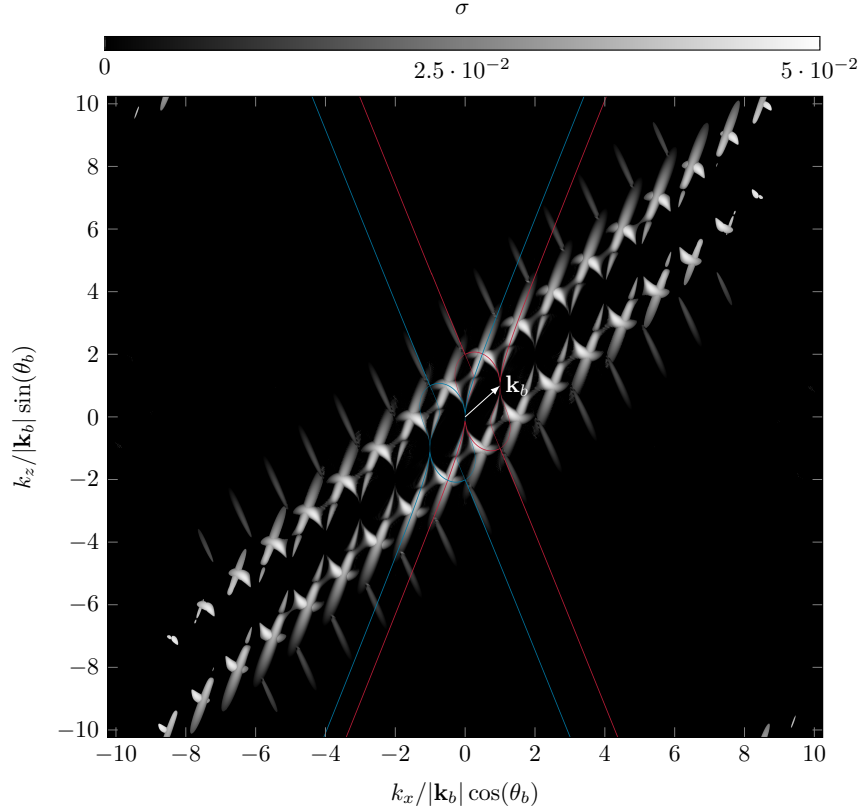


FIG. 3.5 : Taux de croissance temporelle en espace de Fourier calculé entre les instants  $t = 20 T_b$  et  $t = 40 T_b$ . Le taux de croissance n'est montré que pour des modes de Fourier dont l'énergie à l'instant  $t = 40 T_b$  est à moins de 24 décades du maximum d'énergie, le reste, considéré comme du bruit numérique est fixé arbitrairement à zéro.

au battement pouvant apparaître lorsque deux modes de Floquet possèdent un nombre d'onde et un taux de croissance proche.

Nous traçons en rouge figure 3.6 le taux de croissance temporelle le long des branches instables (trois branches supérieures commentées à la section 2.4.1 page 35) de la courbe résonante tracée en fonction de  $k_x$  ainsi qu'en noir, la prévision théorique pour les triades résonantes correspondantes (voir 1). Ces courbes sont tracées pour deux cas, le premier (a) est le calcul de référence dont la croissance temporelle en deux dimensions est présentée figure 3.5 et possède un nombre de Froude de  $Fr = 5,6 \cdot 10^{-2}$  et un nombre de Reynolds de  $Re = 160$ . Le second cas (b) est un autre calcul ayant le même nombre de Reynolds mais un nombre de Froude dix fois plus faible,  $Fr = 5,6 \cdot 10^{-3}$ . Les temps de mesures du taux de croissance sont tous les  $T_b/5$  entre  $t = 20 T_b$  et  $t = 40 T_b$  dans le cas de référence (a) et tous les  $T_b/2$  entre  $t = 200 T_b$  et  $t = 400 T_b$  dans le cas (b).

Les résultats suivent les prévisions théoriques, d'autant mieux que le nombre de Froude est petit. Aux extrémités du domaine, le taux de croissance est tronqué car l'énergie des modes associés est inférieure à 24 décades du maximum d'énergie. Les courbes théoriques montrent la présence de trois maxima, notés  $E_1$ ,  $C$  et  $E_2$ , correspondant aux trois branches de la courbe de résonance

triadique. Dans le cas (b) (petit nombre de Froude), la courbe numérique suit la courbe théorique hormis trois décrochements autour des nombres d'ondes  $0.5 k_{xb}$ ,  $0.93 k_{xb}$  et  $1.25 k_{xb}$  où le taux de croissance décroît brutalement. Aux extrémités extérieures de la courbe, le taux de croissance théorique s'annule aux nombres d'onde  $-0.66 k_{xb}$  et  $2.06 k_{xb}$  et l'accord avec les nombres d'onde de coupure numérique est bon. Au delà, les taux de croissance numériques sont négatifs avant d'être tronqués lorsque l'énergie est trop faible et disparaît dans le bruit à  $10^{-24}$  du maximum. Dans le cas (a) (grand nombre de Froude, cas de référence) nous retrouvons les mêmes décrochements de la courbe du taux de croissance calculée numériquement et de la courbe théorique autour de  $0.5 k_{xb}$ ,  $0.93 k_{xb}$  et de  $1.25 k_{xb}$  mais le taux de croissance numérique y décroît moins brutalement et les décrochements entre les deux courbes s'étendent sur une plus grande plage de longueurs d'onde. Aux extrémités extérieures, la théorie et le numérique s'accordent sur la fréquence de coupure au nombre d'onde  $2.06 k_{xb}$  et au delà pour des taux de croissance négatifs dans une plage plus grande qu'au cas (b). Il existe un écart entre les deux courbes théoriques et numériques au voisinage du nombre d'onde de coupure  $-0.66 k_{xb}$  s'étendant sur l'ensemble de la branche  $E_1$ . Enfin, il existe, ainsi que dans le cas (b) un léger décrochement entre les deux courbes autour du nombre  $0.5 k_{xb}$  s'étendant cette fois sur une plus grande plage de nombres d'onde. Dans ce cas, on remarque la présence de deux autres légers décrochements autour des nombres d'onde  $1.5 k_{xb}$  et  $-0.1 k_{xb}$ .

La théorie triadique requiert pour sa dérivation une amplitude d'onde (nombre de Froude) petite et nous retrouvons bien numériquement le meilleur accord entre la théorie et le numérique lorsque le nombre de Froude est diminué. Les modes ayant un taux de croissance négatif voient leur énergie diminuer et *couler* sous le bruit numérique (à 24 décades du maximum), le taux de croissance est donc tronqué. Les légers décrochements, autour des nombres d'onde  $0.5 k_{xb}$  et  $1.5 k_{xb}$  sont des points où deux modes de Floquet coexistent et possèdent des taux de croissance proches, leurs phases interagissent engendrant des battements, les rendant difficile à mesurer par la méthode employée ici qui repose sur le principe des puissances itérées. L'utilisation d'une méthode d'Arnoldi-Krylov permettrait de séparer ces modes mais n'a pas été implémentée. En décrivant ces modes de Floquet comme des modes triadiques, cette co-existence apparaît lorsque, une branche de la courbe de résonance triadique croise une branche d'une courbe obtenue par translation de  $n\mathbf{k}_b$  de la courbe triadique et les modes existant à l'intersection n'interagissent pas car ils correspondent à deux ondes de même nombre d'onde  $\mathbf{k}_1$  mais de vitesses de phase opposées. Les décrochements plus importants aux nombres d'onde  $0.93 k_{xb}$  et  $1.25 k_{xb}$  correspondent à des croisements similaires mais où cette fois les modes de même nombre d'onde et vitesse de phase coexistent et interagissent de manière ici stabilisante. Ces dernières interactions ne sont pas décrites dans ce manuscrit et font l'objet d'un article en cours de rédaction.

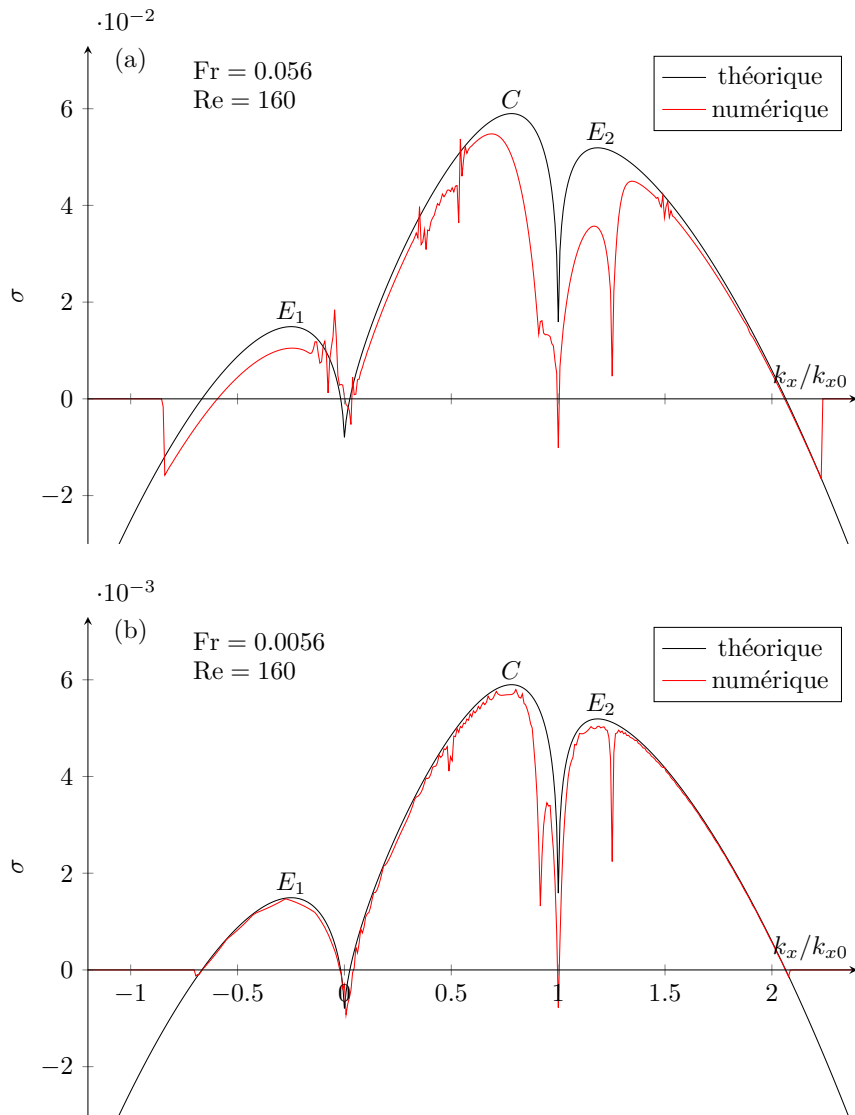


FIG. 3.6 : TAUX DE CROISSANCE TEMPOREL  $\sigma$  LE LONG DES BRANCHES INSTABLES DE LA COURBE DE RÉSONANCE TRIADIQUE Le taux est tracé en fonction de  $k_x/k_{xb} = k_x/|\mathbf{k}_b| \cos(\theta_b)$ . En rouge, mesure du taux issu d'un calcul numérique. En noir, prévision théorique du taux de croissance issu de la théorie triadique présentée chapitre 1, tracée pour les trois branches instables de la courbe résonante, les branches externes de gauche  $E_1$  et de droite  $E_2$  et la branche centrale  $C$ . (a) Calcul de référence présenté figure 3.5,  $Fr = 5.6 \cdot 10^{-2}$  et  $Re = 160$ . (b) Calcul réalisé avec un nombre de Froude dix fois plus faible,  $Fr = 5.6 \cdot 10^{-3}$  mais avec un nombre de Reynolds identique. Attention à l'échelle de  $\sigma$  dix fois plus petite pour la graphique (b) que pour le (a), montrant que le taux de croissance sont proportionnel au nombre de Froude.

## 3.4 Résultat et analyse spatiale

### 3.4.1 Énergie en espace réel

Nous traçons figure 3.7 les champs d'énergie aux instants  $t = T_b$ ,  $t = 10 T_b$ ,  $t = 20 T_b$ ,  $t = 30 T_b$  et  $t = 40 T_b$ . L'énergie  $e(x, z, t)$  est calculée selon la définition  $e = u^2 + w^2 + b^2$ . Les champs ne sont pas normalisés et seul le maximum du champ à  $t = 40 T_b$  (depuis lequel nous gardons 24 décades) correspond à l'échelle ( $[-14, 10]$ ). L'énergie augmente avec le temps et envahit l'ensemble du domaine. Deux paquets d'énergie se distinguent ; ils se superposent au fond et s'étalent horizontalement avec le temps. Les deux paquets gagnent en amplitude et taille avec le temps mais restent auto-similaires. Un des paquets se propage vers les  $x$  négatifs tandis que l'autre reste au centre du domaine. La perturbation initiale excite une large gamme de vecteurs d'ondes. Une partie de cette excitation en fonction du rapport entre  $\mathbf{u}$  et  $b$  forme alors des ondes internes avec toute les fréquences de 0 à  $N$ . Le reste de l'excitation forme des tourbillons qui ne se propagent pas et sont amortis par la viscosité du fluide. Une partie des ondes internes, très peu amorties, forme des modes presque neutres et se propage dans le domaine depuis la perturbation localisée. Selon l'équation de la vitesse de groupe d'une onde interne (voir 1.35 page 14), les ondes se propageant le plus rapidement sont les ondes ayant les plus grandes longueurs d'ondes horizontales. Celles dont les plans de phase sont presque horizontaux se propagent horizontalement et les plus grandes longueurs d'onde parcourent le domaine en  $t = T_b$ . Enfin, dans une dernière partie de ce forçage initial existe des modes instables formant deux paquets d'onde instables.

Nous traçons figure 3.8 les mêmes champs d'énergie que ceux tracés figure 3.7 mais non plus cette fois en fonction de l'espace mais le long de rayons ( $x/t = cste$ ,  $z/t = cste$ ) partant depuis la position initiale de l'impulsion (ici au centre du domaine) et s'éloignant à vitesse constante. Comme pour la figure précédente 3.7, l'échelle de valeurs s'étale du maximum du champ à l'instant  $t = 40 T_b$  jusqu'à  $10^{-24}$  fois ce maximum. L'énergie ne s'étale plus horizontalement avec le temps mais deux paquets distincts apparaissent. Ces deux paquets croissent avec le temps et conservent, dans ce graphique, leur forme et leur position en étant de mieux en mieux contrastées.

Nous traçons figure 3.9 l'énergie compensée par  $t^2$  en échelle logarithmique en fonction du temps, mesurée pour différents rayons associés à une vitesse verticale nulle et des vitesses horizontales différentes. Les énergies présentent un transitoire initial décroissant aux temps courts entre  $t = T_b$  et  $t = 10 T_b$  suivi par une phase de croissance exponentielle aux temps longs. Toutes les courbes partent de la même valeur à  $t = 0$  puis décroissent ou stagnent jusqu'à  $t \approx 10 T_b$ . Entre  $t \approx 10 T_b$  et  $t \approx 50 T_b$ , leurs tendances montrent une croissance exponentielle constante et pour  $x/t = 3U_\varphi$  une décroissance. À partir de  $t = 50 T_b$ , les courbes aux énergies les plus faibles ne sont plus tracées car plus petites que  $10^{-24} e_{max}$  donc pilotées par le bruit. Les courbes aux énergies les plus hautes gardent les mêmes croissances exponentielles. En 10 périodes de base  $T_b$  le système converge vers un régime asymptotique avec des taux de croissance constants. À partir de  $t = 50 T_b$  les énergies les plus faibles sont rat-

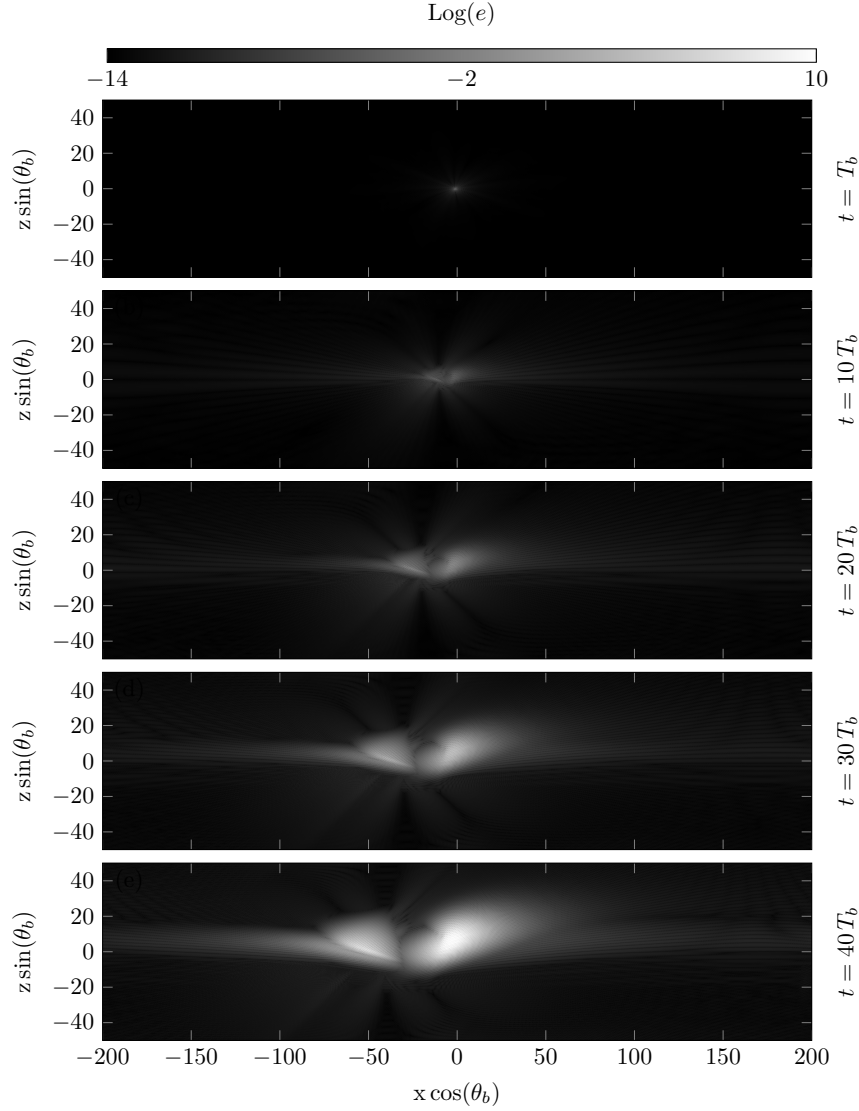


FIG. 3.7 : Champs du logarithme décimal de l'énergie totale  $e$  définie par  $e = u^2 + w^2 + b^2$  aux instants  $t = T_b$ ,  $t = 10 T_b$ ,  $t = 20 T_b$ ,  $t = 30 T_b$  et  $t = 40 T_b$ . Les champs sont tracés en fonction de  $x \cos(\theta_b)$ ,  $z \sin(\theta_b)$  et représentent 400 longueurs d'onde horizontales et 100 verticales de l'onde de base. L'échelle de valeurs correspond à une dynamique de 24 décades depuis le maximum du champ à l'instant  $t = 40 T_b$ . L'énergie envahit rapidement le domaine et deux paquets d'énergie se distinguent.

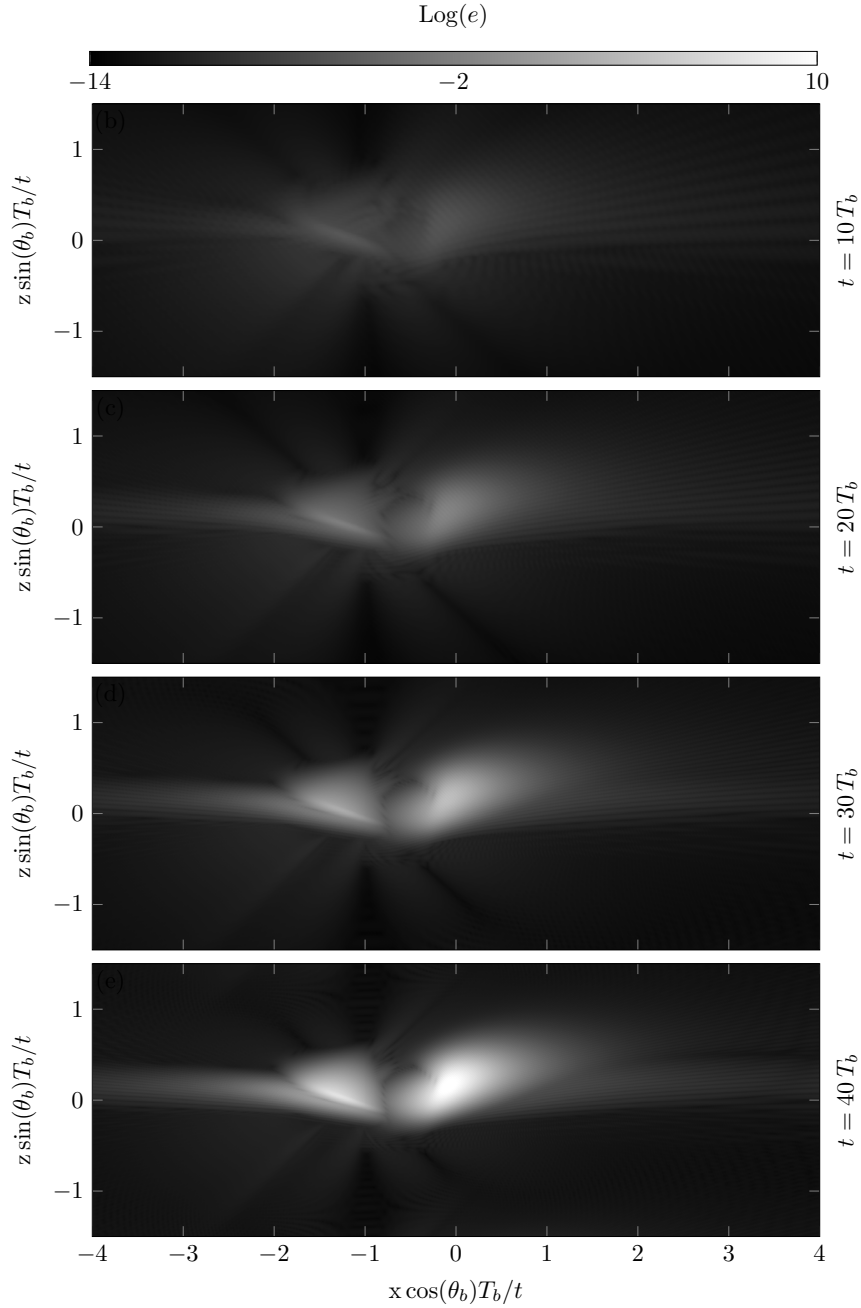


FIG. 3.8 : Champs du logarithme décimal de l'énergie totale  $e$  définie par  $e = u^2 + w^2 + b^2$  et tracée le long de rayons partant du centre du domaine et s'éloignant à des vitesses  $x/y$  et  $z/t$  constantes. Le champ est tracé pour les instants,  $t = 10 T_b$ ,  $t = 20 T_b$ ,  $t = 30 T_b$  et  $t = 40 T_b$  en fonction des vitesses  $(x/t \cos(\theta_b) T_b, z/t \sin(\theta_b) T_b)$ , nécessaires pour parcourir une longueur d'onde horizontale (ou verticale) en une période  $T_0$ . L'échelle de couleur correspond à une dynamique de 24 décades depuis le maximum du champ à l'instant  $t = 40 T_0$ . Les deux paquets d'énergie qui se développent possèdent une position fixe sur ce graphique.



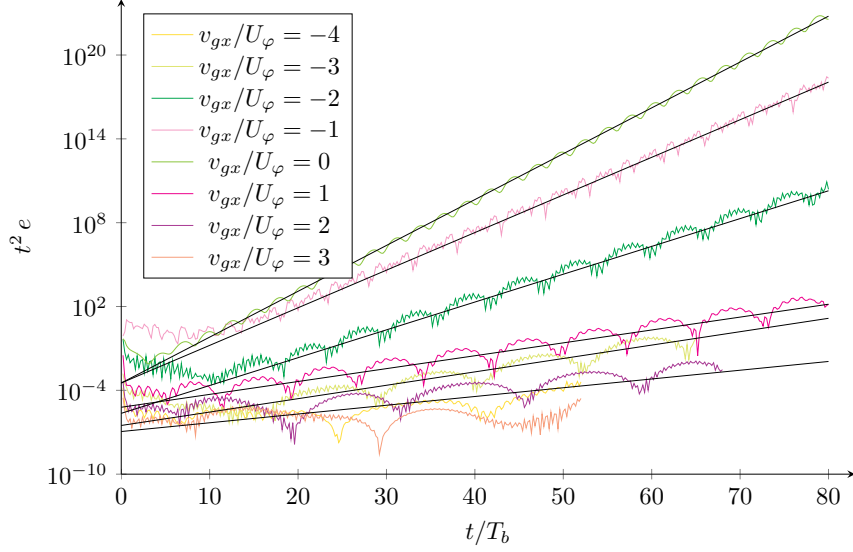


FIG. 3.9 : Énergie en échelle logarithmique (décimal) en fonction du temps pour différents rayons ayant des vitesses de groupe verticales nulles et huit vitesses de groupe horizontales différentes. L'énergie est compensée par  $t^2$ . L'énergie croît exponentiellement et des mesures du taux de croissance sont faites par interpolation de ces courbes entre  $10 T_b$  et  $40 T_b$  et tracées en lignes noires. Les valeurs obtenues sont tracées sur la figure 3.11. À partir de  $t \approx 52 T_b$  les énergies les plus faibles passent en dessous du seuil de  $10^{-24} e_{max}$  et ne sont pas tracées car elles disparaissent alors dans le bruit.

trapées par le bruit numérique croissant comme le mode le plus instable. Avec des temps de calculs plus longs, le bruit numérique rattrape les modes moins instables jusqu'à ne laisser voir que les modes les plus instables. Les oscillations de l'énergie s'expliquent par l'évolution de la phase du mode de Floquet dominant le long de chaque rayon ce qui correspond à la périodicité de l'état de base stationnaire qui, couplé avec la mesure selon un rayon à vitesse constante engendre une oscillation périodique, la phase par rapport à l'état de base sur le rayon  $x/t = cst, z/t = 0$  tourne comme  $\varphi = \text{mod} [2\pi/|\mathbf{k}_b|; \cos(\theta_b) cst t]$ . Nous mesurons, en interpolant chacune de ces courbes par une droite entre  $10 T_b$  et  $40 T_b$ , le taux de croissance des tendances pour chaque rayon et nous reportons ces mesures sur la figure 3.11.

### 3.4.2 Analyse sur tous les rayons à deux dimensions

La croissance des paquets d'onde en deux dimensions suit asymptotiquement une loi similaire à l'exemple développé en introduction de ce chapitre à la section 3.1.1, soit pour  $x/t = u, z/t = w$ ,  $e(u, w) = 1/t^2 e^{2\sigma(u, w)t} A^2(u, w) |F(\varphi)|$ ,  $F$  étant une fonction périodique de période  $2\pi/|\mathbf{k}_b|$  avec  $\varphi = \text{mod} [2\pi/|\mathbf{k}_b|; \cos(\theta_b) ut + \sin(\theta_b) wt]$  et  $\sigma(u, w)$  le taux de croissance le long des rayons ( $x/t = u, z/t = w$ ) qui dépend uniquement de la relation de dispersion et de  $A^2(u, w)$ , une fonction d'enveloppe dépendant de la condition initiale et  $F(\varphi)$  le vecteur propre de Floquet. Afin de calculer  $\sigma$ , nous effectuons une moyenne spatiale glissante

de taille une longueur d'onde horizontale par une longueur d'onde verticale ( $\cos(\theta_b) \times \sin(\theta_b)$ ) sur les champs d'énergie à tous les instants, puis nous prenons la moyenne entre  $t = 20 T_b$  et  $t = 40 T_b$  des taux de croissance mesurés par différenciation discrète de la densité d'énergie compensée en multipliant par  $t^2$ , sur chaque rayon pour deux instants consécutifs séparés par  $T_b/5$ , soit la moyenne de 100 estimations distinctes du taux de croissance. La moyenne spatiale permet d'atténuer les variations spatiales provenant de la dépendance sur une période dans la direction de  $\mathbf{k}_b$  du mode de Floquet  $F(\varphi)$ .

Nous traçons figure 3.10 le taux de croissance  $\sigma$  en fonction de la vitesse de groupe à deux dimensions. Le taux calculé n'est affiché que selon les rayons où l'énergie correspondante est inférieure à 24 décades du maximum d'énergie dans tout le champ à l'instant  $t = 40 T_b$ . Le taux de croissance est positif dans une large zone centrée dans le domaine et est négatif tout autour. La large zone de taux positif possède une extension horizontale supérieure à son extension verticale et deux paquets se distinguent. Ces paquets sont définis par un ensemble de modes instables (taux de croissance positifs) se propageant à des vitesses de groupe différentes et sont entourés par la ligne regroupant des rayons où le taux de croissance est nul en étant positif d'un coté et négatif de l'autre. Les deux paquets visibles sont instables mais une partie se propage vers la gauche tandis que l'autre croît sur place. Les trois croix noires sont détaillées dans la section suivante 3.4.3

Nous traçons figure 3.11 le taux de croissance le long de rayons ayant une vitesse de groupe verticale nulle, en fonction de la vitesse de groupe horizontale. Le taux est calculé par différenciation discrète avec  $\delta t = T_b/5$  comme expliqué précédemment, puis en effectuant une moyenne sur 20 périodes (courbe noire,  $t/T_b \in [20, 40]$ ) soit une moyenne sur 100 estimations et sur 60 périodes (courbe jaune,  $t/T_0 \in [20, 80]$ ) soit une moyenne sur 3- estimations. Une troisième mesure effectuée par des interpolations sur la figure 3.9 donne des valeurs en certains points. La courbe noire est donc une coupe horizontale de la figure 3.10 pour une vitesse de groupe verticale  $z/t = 0$ . Les deux mesures donnent des résultats similaires qui viennent confirmer les mesure ponctuelles d'interpolation. La courbe jaune s'éloigne des deux autres mesures seulement pour les valeurs les plus faibles du taux de croissance. La courbe noire ne possède presque que des valeurs positives. Elle forme deux pics pour des faibles vitesses et décroît pour des valeurs plus élevées (positives et négatives). La courbe est plus régulière au niveau des pics et on distingue ailleurs des oscillations qui se superposent à la tendance de la courbe. Entre les deux pics, le taux de croissance est toujours positif. Les deux pics correspondent aux deux paquets décrit dans la figure 3.10.

### 3.4.3 Identification des modes

Nous avons vu à la section 3.3.1 que l'énergie se répartie le long de la courbe de résonance triadique et à la section 3.3.2 que le taux de croissance est positif le long des branches instables de la courbe résonante et qu'il suit la prévision théorique issue de la théorie des triades résonantes. Nous avons ensuite vu à la

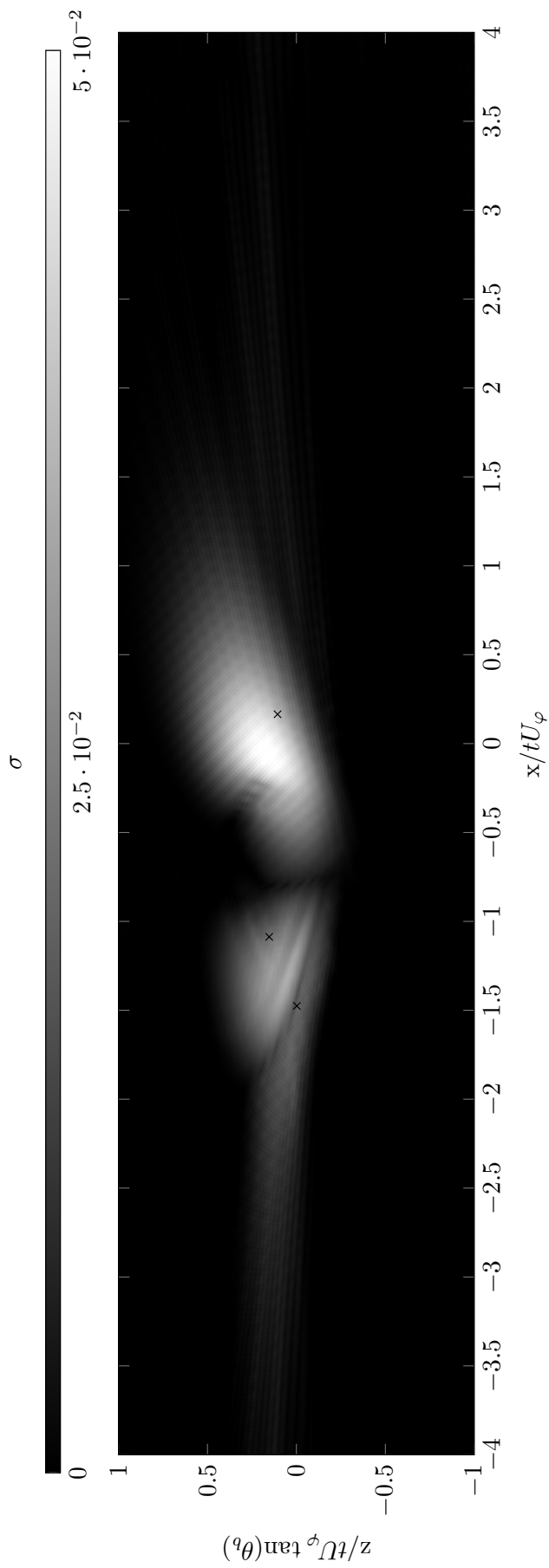


FIG. 3.10 : Taux de croissance en fonction de la vitesse de groupe à deux dimensions. Le taux de croissance est une moyenne des taux de croissance entre  $t = 20 T_b$  et  $t = 40 T_b$  et n'est affiché que le long des rayons où l'énergie correspondante est supérieure à 24 décades du maximum d'énergie à l'instant  $t = 40 T_b$  et est posé nul ailleurs. Deux paquets instables se développent. Les croix sont les vitesses de groupes issus de la théorie triadique des modes les plus instables de chaque branche de la courbe résonante.

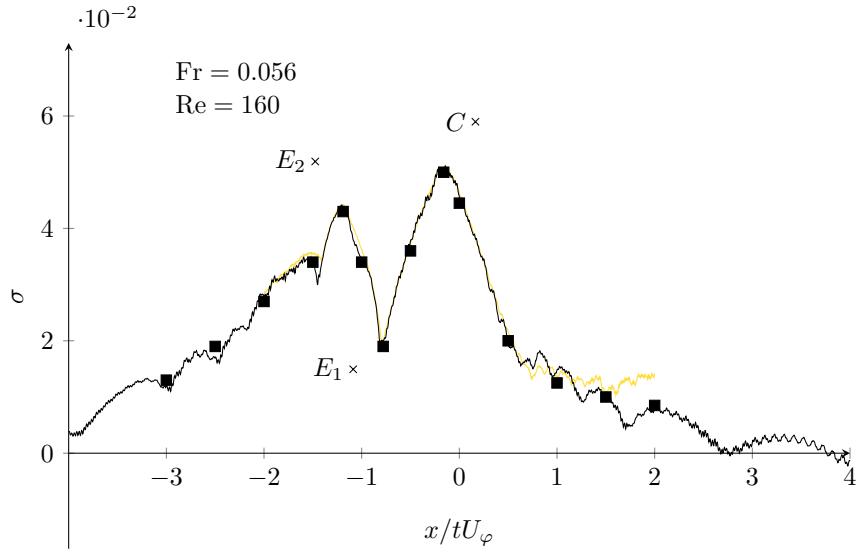


FIG. 3.11 : Taux de croissance mesuré sur des rayons à vitesse de groupe verticale nulle en fonction de la vitesse de groupe horizontale. Cette courbe correspond aussi au taux de croissance absolu dans un référentiel se déplaçant à la vitesse  $u$ ,  $\omega_{0i}|_{\mathcal{R}_\Gamma}$ . La courbe noire est calculée par une moyenne temporelle des taux de croissance entre les instants  $t = 20 T_b$  et  $t = 40 T_b$  et est une coupe horizontale de la figure 3.10 tandis que la courbe jaune est moyennée sur un temps plus long  $t = 20 T_b$  et  $t = 80 T_b$ , elle est tronquée lorsque l'amplitude du mode correspondant devient plus petite que le bruit. Les points correspondent aux interpolations effectuées sur la figure sur la figure 3.9. Les croix représentent la projection sur l'axe  $z/t = 0$  des maxima du taux de croissance prévus par la théorie de l'instabilité triadique (McEwan and Plumb, 1977).

	$u$	$v$	$\sigma$
$E_1$	-1.087	0.153	$1.493 \cdot 10^{-2}$
$C$	0.165	0.106	$5.898 \cdot 10^{-2}$
$E_2$	-1.476	-0.003	$5.191 \cdot 10^{-2}$

FIG. 3.12 : Prévisions théoriques de la vitesse de groupe et du taux de croissance associé au maximum de chaque branche instable de la théorie de l'instabilité triadique selon McEwan and Plumb (1977). Ici,  $\sigma$  est donné pour un nombre de Froude de  $Fr = 0.056$ , il est dans la théorie proportionnel à  $Fr$ .

section 3.4.1 que l'énergie croît avec le temps et se propage dans l'espace selon une forme particulière et que cette forme s'agrandit à vitesse constante. Nous avons ensuite calculé le taux de croissance associé à chaque rayon à vitesses constantes. Le taux de croissance sur les rayons montre que l'ensemble des modes instables forme une zone dans laquelle deux paquets se distinguent et que ces paquets se propagent à des vitesses de groupe différentes.

Nous obtenons, grâce à l'extension de la théorie triadique développée par (McEwan and Plumb, 1977) prenant en compte les variations spatiales des amplitudes des ondes secondaires, la vitesse de groupe d'un mode triadique instable lorsque son taux de croissance est un maximum local en espace de Fourier (voir dérivation expliquée chapitre 1 section 1.2.1 page 16). La courbe de résonance triadique est composée de trois branches pour lesquelles les modes triadiques sont instables. Comme cela est visible à la figure 3.6, le taux de croissance le long de chacune de ces branches n'est pas monotone et possède un maximum. Nous calculons les vitesses de groupe des modes triadiques à ces maxima et les indiquons sur la figure 3.10 par des croix. Ces vitesses prennent en compte le changement de référentiel établi à la section 3.1.2. Le référentiel dans lequel nous étudions l'onde de base est en translation à la vitesse horizontale  $U_\varphi = -1/2\pi Fr^{-1}$ . Une vitesse de groupe dans le référentiel du fluide pour un mode triadique de  $u, w$  sera associée dans le référentiel à la vitesse  $u + U_\varphi, w$ .

Les trois vitesses de groupe indiquées dans le tableau 3.12 possèdent des composantes verticales faibles et deux des vitesses ont également leurs composantes horizontales faibles dans le référentiel du fluide ce qui les place dans le référentiel se déplaçant à la vitesse  $U_\varphi$  (projection horizontale de la vitesse de phase de l'onde de base) autour des vitesses horizontales de  $U_\varphi$ . La troisième vitesse de groupe possède une composante horizontale proche de  $-U_\varphi$  dans le référentiel du fluide et donc une vitesse presque nulle dans le référentiel se déplaçant à la vitesse  $U_\varphi$ .

Sur la figure 3.10, les deux points marquant les vitesses des sommets des paquets d'onde associés aux branches  $E_1$  et  $E_2$  de la théorie triadique se situent proches du centre du paquet instable de gauche obtenu par l'analyse spatio-temporelle et le point associé à la branche  $C$  de la théorie triadique est proche du centre du paquet de droite. Nous remarquons que deux de ces sommets (situés dans le paquet de gauche) sont proches et que les paquets auxquels ils sont associés se superposent. L'analyse spatio-temporelle effectuée ici ne

permet pas de distinguer deux paquets se superposant et le paquet de gauche semble être formé par la superposition de deux paquets. Le troisième sommet est situé dans le paquet observé de droite. Ainsi nous associons au paquet de gauche les paquets formés par les modes des branches instables externes  $E_1$  et  $E_2$  et au paquet de droite les modes formés par la branche instable centrale  $C$ .

Même si la vitesse des maxima du taux de croissance sur des rayons prévus par la théorie triadique de McEwan and Plumb (1977) suivant  $z$  n'est pas exactement nulle, elle est faible et nous avons représenté à la figure 3.11 la valeur du taux de croissance à la vitesse horizontale de ces maxima. Ceux-ci sont raisonnablement proches de la courbe mesurée.

### 3.5 Conclusion

Nous avons calculé numériquement la réponse à une impulsion d'une onde de gravité interne plane progressive. Cette réponse est une approximation de la fonction de Green présentée section 3.1.1 sur une équation modèle. Si nous appliquons la définition de la stabilité, nous obtenons selon les résultats présentés figure 3.11 que la solution est absolument instable dans le référentiel de calcul où le fluide se déplace à la vitesse  $U_\varphi$  rendant l'onde de base stationnaire car  $\omega_{i0} = \sigma(x/t = 0, z/t = 0) = 4.1 \cdot 10^{-2} > 0$ . Nous appelons ce référentiel, référentiel de l'onde  $\mathcal{R}_b$ . Les résultats sont présentés dans ce référentiel. Nous pouvons revenir au référentiel du fluide  $\mathcal{R}_f$  grâce à la relation 3.31 qui nous donne la relation entre le taux de croissance dans le référentiel du fluide et dans le référentiel de l'onde. Cela revient simplement à reconsidérer l'origine du graphique 3.11 (référentiel de l'onde) en la prenant maintenant comme égale à la vitesse moyenne du fluide dans le référentiel de l'onde  $-U_\varphi$ . Dans le cas présent,  $U_\varphi = -1/2\pi Fr$  et selon la relation pour le taux de croissance absolu 3.33 nous obtenons que dans le référentiel du fluide ( $x/tU_\varphi = -1$  sur le graphique) la solution est aussi absolument instable avec  $\omega_{i0}|_{\mathcal{R}_f} = \sigma(x/t = -U_\varphi, 0) = 3.7 \cdot 10^{-2} > 0$  où  $\sigma$  a été mesuré sur la figure 3.11 dans le référentiel  $\mathcal{R}_b$ .

Cependant nous avons vu que plusieurs paquets se distinguaient sur la figure 3.11 par le biais des deux pics et nous voyons que dans le référentiel de l'onde, le taux de croissance absolu ( $\omega_{i0}|_{\mathcal{R}_b} = \sigma(0, 0)$ ) est positif et est mesuré sur le pic de droite alors que dans le référentiel du fluide, le taux de croissance absolu  $\omega_{0i}|_{\mathcal{R}_f}$  est mesuré à la vitesse  $-U_\varphi$  et pointe sur le pic de gauche. Nous savons depuis la section 3.4.3 que le pic de droite suit les taux de croissance d'un paquet décrit par la théorie triadique et appartenant à la branche centrale  $C$  de la courbe de résonance triadique. Le pic de gauche suit les taux de croissance d'un paquet décrit par la théorie triadique appartenant à l'une des branches externes  $E_1$  ou  $E_2$  cependant comme on peut le voir sur la figure 3.6 la branche triadique  $E_1$  contient des modes ayant un taux de croissance plus faible que ceux de la branche  $E_2$  et seule la branche  $E_2$  contient des modes ayant un taux de croissance de l'ordre des taux de croissance mesurés sur le pic de gauche de la figure 3.11. Nous associons donc le paquet suivi par ce pic aux modes de la branche externe  $E_2$  de la courbe de résonance triadique. Ainsi le mode absolu

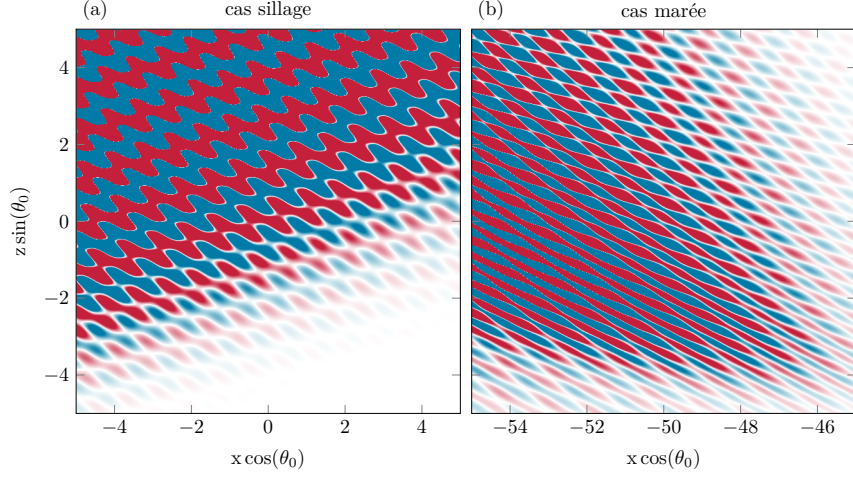


FIG. 3.13 : Champs de densité à l'instant  $t = 40 T_b$ . Les boîtes sont centrées autour du centre du domaine  $x = 0, z = 0$  (référentiel sillage) et sur le rayon  $x = -U_\varphi t, z = 0$  (référentiel marée).

dans le référentiel de l'onde est un mode de la branche centrale  $C$  de la courbe résonante alors que le mode absolu dans le référentiel du fluide est un mode de la branche externe  $E_2$ .

Les modes de la branche externe  $E_2$  étant de plus petite échelle que les modes de la branche  $C$ , il est possible de les comparer qualitativement et nous traçons les champs de flottabilité à l'instant  $t = 40 T_b$  dans une portion du domaine se déplaçant selon le référentiel du fluide 3.13 (a) et celui de l'onde (b). L'échelle de couleur est choisie pour être saturée au centre de chaque figure. On observe des figures de moirés et l'amplitude du champ varie fortement avec la position. Le moiré provient de la superposition de plans de phases entre la perturbation et le champ de base, c'est à dire entre le terme  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega t)}$ , la partie ondulatoire de l'équation des modes 3.79 et le mode propre de Floquet  $F(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ b_n \end{pmatrix} e^{in\mathbf{k}_b\mathbf{x}}$ . On remarque que l'échelle de distance entre ces plans de phases est plus grande dans la figure (a) que dans la figure (b). Cette observation est cohérente avec la sélection d'un mode grande échelle dans le référentiel de l'onde (a) et d'un mode petite échelle dans le référentiel du fluide (b).

À partir des champs dessinés sur la figure 3.13 il est possible de mesurer dans chacun de ces référentiels le taux de croissance spatial absolu en  $x$  et en  $z$  :  $\mathbf{k}_{0i} = (k_{0ix}, k_{0iz})$ . La mesure selon  $x$  est montrée figure 3.14, nous obtenons  $\mathbf{k}_{0i}|_{\mathcal{R}_b} = (-0.6, 1.4)$  et  $\mathbf{k}_{0i}|_{\mathcal{R}_f} = (-0.75, -0.7)$ .

Pour un écoulement in-homogène où l'amplitude de l'onde de base varie en espace, comme cela est le cas pour les faisceaux d'onde étudiés au chapitre 2, il est raisonnable d'émettre la conjecture que l'écoulement sera globalement instable si l'état de base est localement instable absolu et que, dans ce cas, l'onde observée sera celle avec le plus grand taux de croissance absolu. Cette théorie est valable dans le cadre WKBJ où l'état de base peut être représenté par une modulation d'une onde porteuse dont l'amplitude et le vecteur d'onde

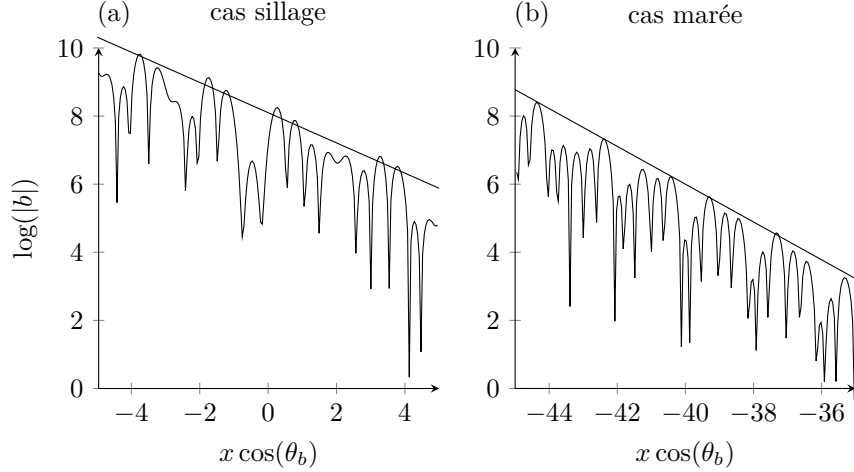


FIG. 3.14 : Logarithme de la valeur absolue du champ de flottabilité en fonction de  $x$  pour  $z = 0$ . Les domaines (a) et (b) correspondent à ceux de la figure 3.13. Les lignes sont les mesures des taux de croissances spatiaux dans les référentiels du fluide (a) et de l'onde de base (b).

varient lentement dans l'espace. Elle n'est prouvée que pour quelques équations modèles à une dimension mais cela constitue une conjecture raisonnable et physiquement fondée de penser que le mode de taux de croissance absolu le plus grand localement dans tout l'espace sera le mode dominant du mode global. La figure 3.11 donne ainsi le taux de croissance absolu  $\omega_{0i}|\mathcal{R}'_U$  dans tous les référentiels en translation à la vitesse  $U$  horizontale. Dans le référentiel de l'onde  $\mathcal{R}_b$ , le mode dominant est associé au mode grande échelle  $C$  pour  $U > -0.8U_\varphi$  et petit échelle  $E_2$  pour  $U < -0.8U_\varphi$ . Cette conjecture prévoit donc que tout faisceau d'onde stationnaire dans le référentiel sillage soit instable absolu par rapport au mode grande échelle  $C$  et que le mode global qui devrait se développer soit associé à la fréquence absolue  $\omega_{0r}$  et au vecteur d'onde absolu  $\mathbf{k}_0$ . Inversement, tout faisceau d'onde engendré dans le référentiel de la marée sera instable absolu par rapport au mode petite échelle  $E_2$  et le mode global qui se développe correspondra à la fréquence absolue  $\omega_{0r}$  et au vecteur d'onde absolu  $\mathbf{k}_0$  petite échelle. Ces prédictions sont cohérentes avec les résultats du chapitre 2 sur la stabilité des faisceaux d'onde et expliquent physiquement la sélection des modes d'instabilité observés, démontrant et expliquant l'effet déterminant de la vitesse moyenne du fluide sur les modes instables qui se développent. Ces résultats sont fondamentaux pour comprendre la dynamique de ces ondes dans toute les configurations réalistes, océaniques, atmosphériques ou astro-physiques.

En effet, ces deux référentiels ont physiquement un sens et il est possible d'engendrer expérimentalement une onde interne plane progressive dans chacun des deux référentiels (voir chapitre 2). Lorsque nous choisissons le référentiel de l'onde, ce référentiel est obtenu par une translation horizontale du référentiel à vitesse constante compensant la projection de la vitesse de phase selon la direction horizontale. C'est ce qu'il se passe quand on observe une onde de sillage (l'onde sous le vent d'une topographie ou *lee wave*) depuis la source



de l'onde. Les plans de phases sont stationnaires par rapport à la source. Cette onde peut être engendrée par un écoulement stratifié horizontal au dessus d'un obstacle (topographie) et le référentiel sera celui dans lequel l'obstacle est stationnaire où une particule de fluide sera advectée par l'écoulement hors du référentiel. Nous faisons référence à ce référentiel comme le référentiel de l'onde ou référentiel *sillage*. Lorsque nous choisissons le référentiel du fluide, une particule de fluide subira une oscillation, advectée par le champ de vitesse de l'onde mais se déplacera à une vitesse moyenne nulle. Physiquement ce cas existe lorsque un écoulement stratifié au repos est perturbé par un obstacle animé d'un mouvement oscillant. Par un changement de point de vue ce cas est identique à celui d'un fluide stratifié animé d'un mouvement oscillant moyen autour d'un obstacle fixe. Cette situation apparaît dans les océans lorsque le fluide se déplace avec la marée au dessus d'une topographie sous-marine. Nous faisons référence à ce référentiel comme le référentiel du fluide ou de *marée*.

Dans le chapitre 2 nous avons étudié la stabilité d'un faisceau d'onde interne en fonction du référentiel. Nous avons observé que les modes non-linéaires instables sélectionnés par l'écoulement étaient correctement décrits par la théorie triadique bien que l'onde interne soit confinée dans un faisceau, d'amplitude finie et qu'elle soit non-linéaire. Dans le référentiel *sillage* le mode obtenu était grande échelle et appartenait à la branche centrale  $C$  de la courbe résonante et dans le référentiel *marée*, le mode obtenu était petit échelle et appartenait à la branche externe  $E_2$  de la courbe résonante. Nous avons vu dans ce chapitre que, sans confinement, la perturbation linéarisée autour d'une onde de base d'amplitude finie développait, dans les référentiels marée et sillage, des modes appartenant aux mêmes branches de la courbe résonante que dans les cas marée et sillage du chapitre 2.

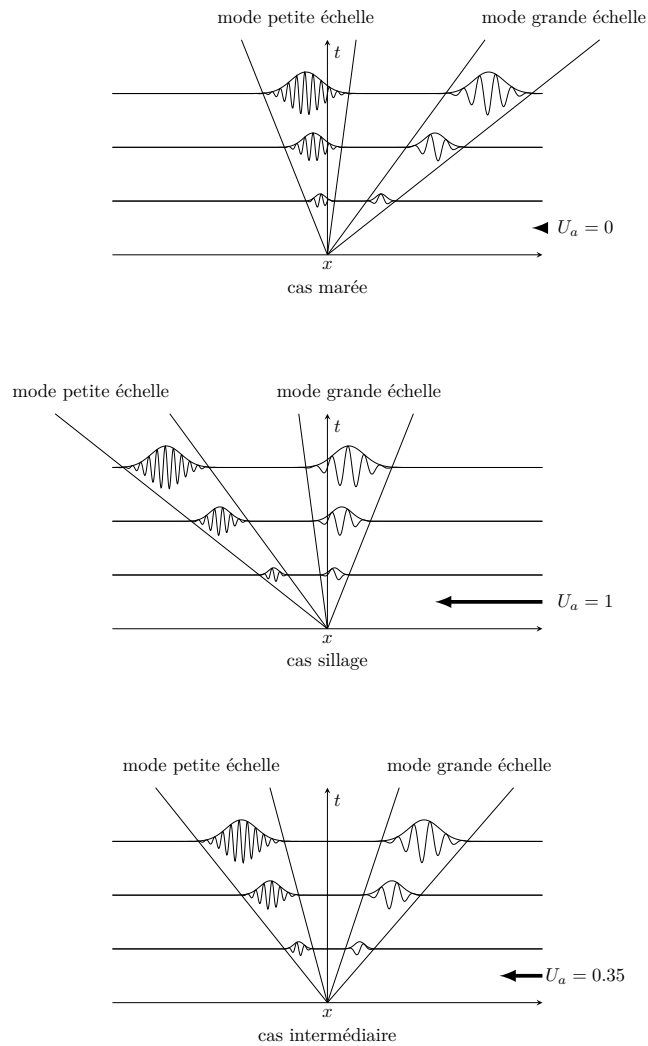


FIG. 3.15 : Schéma de l'évolution spatio-temporelle de deux paquets d'ondes avec l'ajout de la vitesse  $U_a$ . Lorsque  $U_a = 0$ , le schéma représente le cas marée où le mode petite échelle est absolu alors que le mode grande échelle est convectif. Lorsque  $U_a = 1$ , la nature des modes s'inverse et le mode grande échelle est absolu alors que le mode petite échelle est convectif. Dans le cas intermédiaire, les deux modes sont convectifs.

# Chapitre 4

## Croissance transitoire d'un faisceau d'onde

Dans ce chapitre nous effectuons une étude de la stabilité non-modale d'un faisceau d'onde interne. Nous avons vu qu'une analyse spatio-temporelle de la stabilité d'une onde interne plane progressive permettait de mieux comprendre la stabilité d'un faisceau d'onde interne et de cette étude nous en avons déduit qu'une onde plane progressive possédait des modes convectivement instables. Les systèmes convectivement instables sont susceptibles de voir leur perturbation montrer de la croissance transitoire sur des temps courts, supérieure à une croissance exponentielle asymptotique sur des temps longs. Nous étudions dans ce chapitre la présence d'une telle croissance sur un faisceau d'onde interne.

### 4.1 Norme et optimisation

Un système linéaire dont les vecteurs propres ne sont pas orthogonaux selon un produit scalaire et dont les valeurs propres sont négatives peut voir son énergie définie avec le même produit scalaire croître en un temps fini bien que le système soit asymptotiquement stable et que l'énergie mesurée selon n'importe quelle norme tende vers 0 à long terme.

Ainsi un écoulement (une couche de cisaillement, un jet, une onde interne,...) établi pour une gamme de paramètres pour lesquels l'écoulement est asymptotiquement stable peut voir une structure croître en un temps fini, laissant croire à un système instable.

Par ailleurs, un écoulement dont on sait qu'il est linéairement asymptotiquement instable et dont on connaît la structure du mode instable peut montrer sur un temps fini un gain d'énergie supérieur à celui permis par le taux de croissance du mode instable ainsi qu'un mode amplifié différent.

Avec cette propriété, il n'est plus évident pour un système donné de prévoir l'instabilité qui y apparaîtra et réciproquement, la présence d'un certain type d'instabilité ne permet pas de remonter immédiatement au système qui l'a engendré.

L'opérateur adjoint  $L^\dagger$  d'un opérateur  $L$  associé à un système linéaire est

défini par rapport au produit scalaire  $\langle | \rangle$  par :

$$\forall(U, V), \langle LU|V \rangle = \langle U|L^\dagger V \rangle, \quad (4.1)$$

où  $U, V$  sont deux vecteurs d'état du système. Un opérateur est dit normal par rapport à un produit scalaire  $\langle | \rangle$  si il commute avec son opérateur adjoint. Dans ce cas, la propriété de biorthogonalité montre que ses vecteurs propres sont orthogonaux. Un opérateur  $L$  égal à son opérateur adjoint est dit auto-adjoint et est normal.

Afin de mesurer la croissance transitoire de la solution  $U$  d'un système défini par :

$$\frac{dU}{dt} = LU, \quad (4.2)$$

nous définissons le gain optimal  $G$  comme le gain maximum à l'instant  $t_h$  optimisé sur toutes les conditions initiales  $U(0)$  :

$$G(t_h) = \max_{|U(0)} \frac{\langle U(t_h)|U(t_h) \rangle}{\langle U(0)|U(0) \rangle}, \quad (4.3)$$

$$= \max_{|U(0)} \frac{\langle e^{Lt_h}U(0)|e^{Lt_h}U(0) \rangle}{\langle U(0)|U(0) \rangle}, \quad (4.4)$$

$$= \max_{|U(0)} \frac{\langle e^{L^\dagger t_h}e^{Lt_h}U(0)|U(0) \rangle}{\langle U(0)|U(0) \rangle}, \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

Le problème du gain à un temps fini  $t_h$  revient maintenant à étudier l'opérateur  $e^{L^\dagger t_h}e^{Lt_h}$  qui auto-adjoint et sur lequel s'appliquent les méthodes classiques. Le gain maximum au temps  $t_h$  provient du mode le plus instable (mode dominant) de l'opérateur  $e^{L^\dagger t_h}e^{Lt_h}$ . La méthode la plus simple pour obtenir le mode dominant de  $e^{L^\dagger t_h}e^{Lt_h}$  est celle de la puissance itérée qui consiste à appliquer un opérateur à un état quelconque  $n$  fois de suite, de sorte que le mode dominant acquiert une amplitude plus grande que les autres modes (Tuckerman and Barkley, 2000). Pour plus d'information sur les propriétés des opérateurs adjoints en hydrodynamique voir (Schmid and Henningson, 2012).

Dans ce chapitre nous souhaitons mesurer la croissance transitoire autour d'un faisceau d'onde interne. Pour ce faire nous calculons en premier lieu un état de base stationnaire instable que nous stabilisons en utilisant la méthode de relaxation dite *selective frequency damping*. Nous linéarisons les équations du problème autour de cet état de base, ce qui définit l'opérateur linéaire avec lequel nous calculons la perturbation linéarisée autour de l'état de base. Nous calculons l'opérateur adjoint de l'opérateur direct ce qui nous permet de calculer le gain maximum pour différents horizons temporels  $t_h$ . Ce calcul est fait sur les équations continues et non discrétisées. Une série de tests a été mise en place pour garantir la convergence suffisante de la procédure.

## 4.2 État de base

### 4.2.1 Problème étudié

Nous reprenons le problème du faisceau d'onde interne tel que défini au chapitre 2 dans le cas du sillage d'une topographie.

Un écoulement incompressible linéairement stratifié ayant une fréquence de Brunt-Väisälä valant  $N$  possède une vitesse horizontale homogène dans l'espace valant  $U_\phi$  et est forcé localement par pénalisation. Le fluide possède une viscosité cinématique  $\nu$  et l'agent stratifiant est associé à un coefficient de diffusion de la flottabilité  $D$ . Une zone éponge autour de l'écoulement absorbe les perturbations entrantes et sortantes. L'onde de base est engendrée par une méthode de pénalisation. Le forçage local consiste à forcer, dans un domaine de largeur  $W$ , la solution en vitesse et en flottabilité d'une onde de gravité interne plane progressive de longueur d'onde  $\lambda_0 = (\lambda_{0x}, \lambda_{0z})$  (ou de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0 = (k_{0x}, k_{0z})$ ), de fréquence  $\omega_0$  donné par la relation de dispersion  $\omega_0^2 = N^2 k_{0x}^2 / |\mathbf{k}|^2$  et d'amplitude  $A_0$  (la vitesse maximum associée à l'onde).

Le problème est défini par les paramètres sans dimensions suivants :

- Le nombre de Froude  $\text{Fr} = A_0 / N \lambda_0$  ;
- le nombre de Reynolds  $\text{Re} = A_0 \lambda_0 / \nu$  ;
- le nombre de Prandtl  $\text{Pr} = \nu / D$  ;
- $\theta_0$  l'angle de l'onde forcée  $\mathbf{k}_0$  avec l'horizontale (ou de façon équivalente la fréquence  $\omega_0 / N = \cos(\theta_0)$  ;
- la largeur du faisceau forcé  $W / \lambda_{0x}$ .

En adimensionnant le temps par  $N$ ,  $(x, z)$  par  $\lambda_0$ , le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  par  $A_0$  et la flottabilité  $b$  par  $A_0 N$  et la pression par  $\rho A_0 N \lambda_0$ , l'écoulement est régi par les équations adimensionnées suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + b \mathbf{e}_z + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathcal{F}_s + \mathcal{F}_f, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla b - w + \frac{\text{Fr}}{\text{PrRe}} \Delta b + \mathcal{B}_s + \mathcal{B}_f, \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{F}_f$  et  $\mathcal{B}_f$  sont les termes de forçage local de l'écoulement et  $\mathcal{F}_s$  et  $\mathcal{B}_s$  les termes de relaxation dans la zone éponge.

Les équations 4.7 et 4.8 se réduisent, en éliminant la pression, à :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{P} (-\text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + b \mathbf{e}_z + \mathcal{F}_s + \mathcal{F}_f) + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}, \quad (4.10)$$

où  $\mathcal{P}$  est le projecteur sur l'espace des fonctions à divergences nulles.

Le forçage local est défini par :

$$\mathcal{F}_f = +A_f M_f(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}), \quad (4.11)$$

$$\mathcal{B}_f = +A_f M_f(b_0 - b), \quad (4.12)$$

$M_f(x, z)$  est une fonction allant de 0 à 1 définissant le masque (la géométrie) du forçage local.  $A_f$  est le coefficient de pénalisation de la solution.  $\mathbf{u}_0 = (u_0, w_0)$  est l'onde forcée adimensionnée définie par :

$$u_0 = -\sin \theta \sin \varphi - (2\pi \text{Fr})^{-1}, \quad (4.13)$$

$$w_0 = +\cos \theta \sin \varphi, \quad (4.14)$$

$$b_0 = +\cos \varphi, \quad (4.15)$$

$$\varphi = 2\pi[\cos(\theta_0)x + \sin(\theta_0)z], \quad (4.16)$$

Ce forçage est stationnaire car le terme  $-(2\pi \text{Fr})^{-1}$  sur  $u_0$  compense exactement la vitesse de phase de l'onde, projeté sur la direction horizontale, par rapport au fluide.

Les termes d'éponges sont définis par :

$$\mathcal{F}_s = -A_s M_s(\mathbf{u} - (2\pi \text{Fr})^{-1}) \quad (4.17)$$

$$\mathcal{B}_s = -A_s M_s b, \quad (4.18)$$

où  $M_s$  est une fonction allant de 0 à 1 définissant le masque (la géométrie) de la zone éponge et  $A_s$  le coefficient de relaxation de l'éponge. Les fonctions de masque  $M_s$  et  $M_f$  sont définies annexe B.

La taille du domaine, la géométrie de la zone éponge ainsi que le coefficient de forçage sont identiques à ceux du chapitre 2 et sont tracés figure 2.2.

Les valeurs des paramètres sont identiques à ceux utilisés au chapitre 2. Seul la largeur du forçage  $W/\lambda_{0x}$  diffère. Ces nombres valent :

- $\text{Fr} = 6.19 \cdot 10^{-2}$  ;
- $\text{Re} = 176$  ;
- $\text{Pr} = 7$  ;
- $\omega_0/N = 0.74$  soit  $\theta_0 = 42.3^\circ$  ;
- $W/\lambda_{0x} = 8$ ,

avec ici une taille de faisceau plus grande que dans le cas de référence du chapitre 2.

### 4.2.2 Selective Frequency Damping *SFD*

La méthode de SFD (*Selective Frequency Damping*, Åkervik et al. (2006)) est une méthode de relaxation permettant de trouver la solution stationnaire d'un écoulement, même si elle est instable.

Si  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}$  est le vecteur d'état du système et NS les équations de Navier-Stokes, la méthode de la SFD consiste à calculer :

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}}{\partial t} = \text{NS} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} - \chi \cdot \left( \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} \right), \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left( \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} \right), \quad (4.20)$$

où  $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$  est le vecteur d'état de la solution filtrée,  $\chi$  et  $\Delta$  sont les paramètres du filtre,  $\Delta$  est la période de coupure et  $\chi$  le gain du filtre. Cette méthode consiste à calculer par une marche en temps la solution d'un écoulement  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}$  et en parallèle, une solution  $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$  filtrée, issue de l'application d'un filtre temporel passe-bas du premier ordre. On force ensuite la solution de l'écoulement à relaxer vers la solution filtrée. Le forçage s'annule lorsque les deux solutions convergent vers une solution stationnaire identique et elles sont alors solution du problème initial sans forçage

$$0 = \text{NS} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$0 = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

La période de coupure  $\Delta$  doit être choisie plus grande que la période de l'instabilité ayant la période la plus grande et le gain du filtre  $\chi$  doit être supérieur au taux de croissance de l'instabilité dominante. Cependant des valeurs trop importantes feront accroître le temps de convergence entre les deux solutions, aussi ces deux paramètres sont choisis par itération successive de manière à être les plus faibles possible tout en gardant une solution stationnaire. Lorsque qu'un jeu de paramètres prévient l'apparition d'instabilité nous vérifions la convergence en mesurant le logarithme du rapport entre l'énergie à deux instants séparés d'une période de base, et nous prenons comme critère de convergence vers la solution stationnaire, celui-ci inférieur à  $10^{-24}$ , niveau du bruit numérique.

Pour les paramètres sans dimension choisis, cette condition est réalisée pour  $t = 1000 T_0$  avec  $T_0 = 2\pi/\theta_0$ ; les paramètres de filtre  $\chi = 0.1$  et  $\Delta = 81$  donnent une fréquence de coupure  $\omega_c = 1/\Delta = 0.91$ .

### 4.2.3 Méthode numérique

Nous utilisons le même code qu'au chapitre 2 et au chapitre 3 pour calculer les équations non-linéaires instationnaires et les équations *SFD*. Dans ce dernier

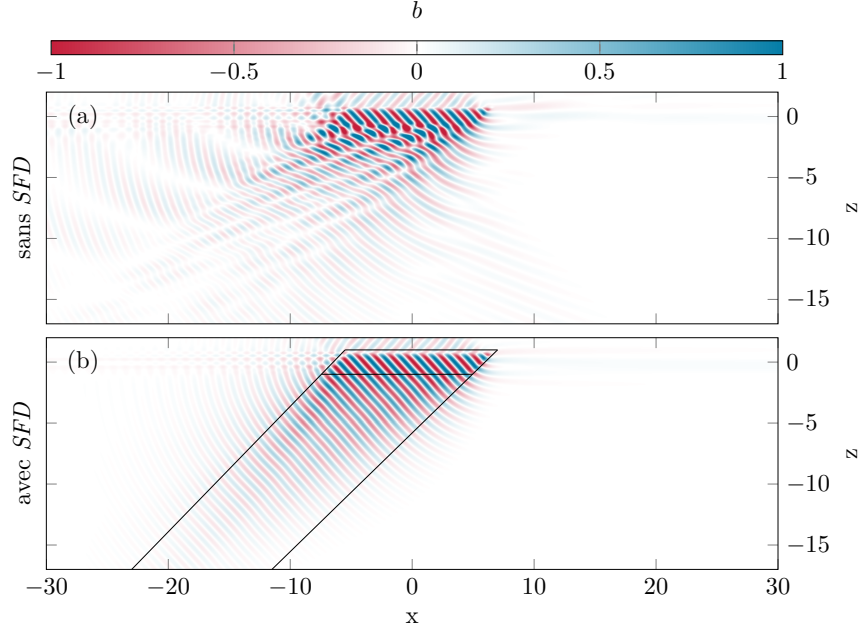


FIG. 4.1 : *SFD* : Champs de flottabilité à l’instant  $t = 200 T_0$  issu de la simulation non-linéaire des équations de Navier-Stokes (a), la solution (non-filtrée) est instationnaire, et des équations de *SFD* (b), la solution filtrée est stationnaire. Le domaine montré est restreint à la zone où l’éponge est nulle.

cas, les termes de relaxations sont traités explicitement dans les équations pour  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}$ . De même, les équations pour la solution filtrée  $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$  sont intégrées dans l’espace spectral de façon explicite avec le même algorithme temporel que pour  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}$ . C’est-à-dire ici un Runge–Kutta d’ordre 4. Le traitement explicite des termes de relaxation rend l’algorithme conditionnellement stable mais le pas de temps imposé par les autres conditions de convergence, en particulier par la condition *CFL*, est suffisamment petit pour que cela ne représente pas une limitation pour le code.

#### 4.2.4 Résultats

Nous traçons figure 4.1 le champs de flottabilité dans un domaine restreint pris à l’instant  $t = 200 T_0$  de deux simulations non-linéaires. La première (a) est libre d’évoluer tandis que la méthode *SFD* est active dans la seconde (b). Les deux cas montrent des champs différents, les motifs étant bien plus complexes dans la figure (a) (sans *SFD*) que dans la (b) (avec *SFD*). On remarque la présence de motifs similaires dans la zone de forçage qui s’étendent dans le domaine de la figure (b) mais restes confinés à cette zone dans la figure (a). Dans le cas (a) la solution d’onde se propage formant un faisceau d’onde venant se déstabiliser après quelques longueurs d’onde. La déstabilisation est identique à celles déjà décrites dans le chapitre 2 pour le cas d’onde de sillage. La figure (b) voit la même solution d’onde se propager mais celle-ci reste stable



et converge vers une solution stationnaire. Cette solution stationnaire constitue une solution linéairement instable dont nous étudions la stabilité linéaire aux temps longs et aux temps courts dans la section suivante.

## 4.3 Perturbation linéarisée

### 4.3.1 Problème linéarisé direct et adjoint

Nous séparons l'état du système en un état de base  $\mathbf{u}_b$  et  $b_b$  (calculé précédemment) et une perturbation  $\mathbf{u}$  et  $b$  (sans ajout de prime pour ne pas alourdir la notation). Nous linéarisons (de la même manière qu'au chapitre 3) les équations du problème autour de l'état de base. Nous obtenons pour la perturbation, les équations suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_b &= \\ -\nabla p + b \cdot \mathbf{e}_z + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}, &-(A_s M_s + A_f M_f) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u}_b \cdot \nabla b + \text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla b_b &= \\ -w + \frac{\text{Fr}}{\text{PrRe}} \Delta b - (A_s M_s + A_f M_f) b. & \end{aligned} \quad (4.25)$$

La partie perturbative des termes de forçages  $\mathcal{F}_s$  et  $\mathcal{F}_f$  des équations non-linéaires sont explicitées en  $-(A_s M_s + A_f M_f) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}$ . Les termes de forçages de l'onde  $\mathbf{u}_0$ ,  $b_0$  et de relaxation vers la vitesse  $(2\pi \text{Fr})^{-1}$  dans l'éponge sont pris en compte dans la solution de l'état de base et disparaissent dans l'équation de la perturbation. De cette manière les termes de forçages restant dans l'équation de la perturbation sont comme ceux de l'éponge.

En introduisant  $\boldsymbol{\omega}$  la vorticité, les équations deviennent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \text{Fr} \mathbf{u}_b \times \boldsymbol{\omega} - \text{Fr} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_b &= \\ -\nabla(p + \mathbf{u} \mathbf{u}_b) + b \cdot \mathbf{e}_z + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} - (A_s M_s + A_f M_f) \mathbf{u}, & \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u}_b \cdot \nabla b + \text{Fr} \mathbf{u} \cdot \nabla b_b &= \\ -w + \frac{\text{Fr}}{\text{PrRe}} \Delta b - (A_s M_s + A_f M_f) b. & \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dans les variables adimensionnelles, l'énergie s'écrit

$$e = \iiint |\mathbf{u}|^2 + b^2 dv, \quad (4.29)$$

le produit scalaire utilisé pour construire l'opérateur adjoint est celui lié à cette énergie :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = \iiint (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b \cdot c) dv. \quad (4.30)$$

Nous pouvons déduire des équations précédentes les équations adjointes en multipliant chaque équation par le champ adjoint (multiplicateur de Lagrange, Ince (1949)) puis en intégrant par partie. Nous obtenons les équations adjointes suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^\dagger = 0, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{u}^\dagger}{\partial t} - \text{Fr} \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{u}^\dagger - \text{Fr} \nabla \times (\mathbf{u}_b \times \mathbf{u}^\dagger) + \nabla b_b \cdot b^\dagger = \\ -\nabla p^\dagger - b^\dagger \cdot \mathbf{e}_z + \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^\dagger - (M_s + M_f) \cdot \mathbf{u}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial b^\dagger}{\partial t} + \text{Fr} \mathbf{u}_b \cdot \nabla b^\dagger = \\ +w^\dagger + \frac{\text{Fr}}{\text{PrRe}} \Delta b^\dagger - (M_s + M_f) \cdot b^\dagger. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Les équations sont similaires, les termes de forçage et d'éponge sont linéaires et sont identiques dans les équations directes et les équations adjointes. Le changement de signe de la dérivée temporelle est résolu en posant  $t' = -t$  et en intégrant les équations adjointes vers les  $t'$  positifs (donc en remontant le temps).

### 4.3.2 Méthode numérique

Les équations directes intégrées dans le calcul linéarisé de la perturbation autour de l'état base sont :

$$P(k) \left[ \widehat{\mathbf{u}_b \times \boldsymbol{\omega}} + \widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_b} + \widehat{b} \mathbf{e}_z - \widehat{A_f M_f} \mathbf{u} - \widehat{A_s M_s} \mathbf{u} \right] \mathbf{e}^{(\text{Fr}/\text{Re})k^2 t}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}} \mathbf{e}^{(\text{Fr}/\text{Re})k^2 t}}{\partial t} = \\ \frac{\partial \widehat{\mathbf{b}} \mathbf{e}^{(\text{Fr}/\text{PrRe})k^2 t}}{\partial t} = \\ \left[ -ik \cdot \widehat{\mathbf{u}} b_b - ik \cdot \widehat{\mathbf{b}} \mathbf{u}_b - \widehat{w} - \widehat{A_f M_f} \mathbf{b} - \widehat{A_s M_s} \mathbf{b} \right] \mathbf{e}^{(\text{Fr}/\text{PrRe})k^2 t}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

Les équations adjointes intégrées dans le calcul linéarisé de la perturbation

autour de l'état base sont, en posant  $t' = -t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}} \mathbf{e}^{(\text{Fr/Re})k^2 t'}}{\partial t'} &= \\ &P(k) [\widehat{\text{Fr} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{b}}} \times \mathbf{u}^\dagger + \text{Fr} \nabla \times (\widehat{\mathbf{u}_{\mathbf{b}}} \times \mathbf{u}^\dagger) - \widehat{b}^\dagger \mathbf{e}_z \\ &+ \widehat{\nabla b_{\mathbf{b}}} \cdot \widehat{b}^\dagger - \widehat{A_f M_f} \mathbf{u}^\dagger - \widehat{A_s M_s} \mathbf{u}^\dagger] \mathbf{e}^{(\text{Fr/Re})k^2 t'}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{b}^\dagger \mathbf{e}^{(\text{Fr/PrRe})k^2 t}}{\partial t'} &= \\ &[-ik \cdot \widehat{b}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{b}} + \widehat{w}^\dagger - \widehat{A_f M_f} \mathbf{b}^\dagger - \widehat{A_s M_s} \mathbf{b}^\dagger] \mathbf{e}^{(\text{Fr/PrRe})k^2 t'}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

### 4.3.3 Validation du code adjoint

Nous utilisons les propriétés théoriques des opérateurs adjoints afin de valider numériquement le code de calcul adjoint et sa convergence.

**définition de l'opérateur adjoint** Par définition, l'opérateur adjoint  $L^\dagger$  de l'opérateur linéaire  $L$  construit avec le produit scalaire  $\langle | \rangle$  vérifie pour tout vecteur  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix}$  :

$$\langle \mathbf{e}^{Lt} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} | \mathbf{e}^{L^\dagger t} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix} \rangle. \quad (4.38)$$

En créant  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix}$  deux vecteurs distincts à partir de bruit blanc, nous calculons numériquement  $q = \langle \mathbf{e}^{Lt} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix} \rangle / \langle \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} | \mathbf{e}^{L^\dagger t} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ c \end{pmatrix} \rangle$  où  $t$  est le temps d'intégration discrétisé en un nombre de pas de temps  $t = n\Delta t$  des opérateurs direct et adjoint. Nous obtenons pour différents  $n$  :

n	q
100	0.999999993458432
200	1.000000001341479
300	0.999999997642933
400	1.000000002055404,

soit une erreur de l'ordre de  $10^{-9}$ .

**Identité des spectres** Une propriété de l'opérateur adjoint est d'avoir un spectre identique au spectre de l'opérateur direct. Numériquement, nous calculons les 9 modes propres les plus instables des opérateurs direct et adjoint à l'aide de la méthode d'Arnoldi–Krylov présentée au chapitre 2. Cette méthode est ici appliquée aux champs issus d'une marche en temps de chacun des opérateurs (direct et adjoint) depuis un bruit blanc. Les modes sont calculés entre les temps  $t = 190 T_0$  et  $t = 200 T_0$  en utilisant 10 états instantanés séparés de  $T_0$  entre eux. Nous obtenons pour les parties réelles des valeurs propres :

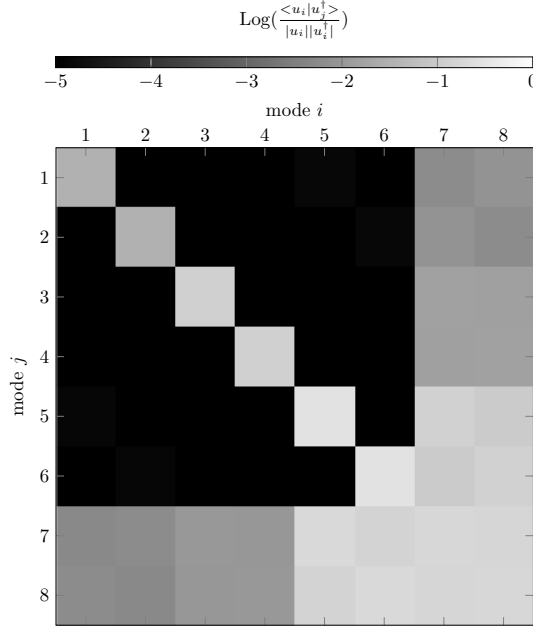


FIG. 4.2 : Produit scalaire normalisé  $\text{Log}\left(\frac{\langle u_i | u_j^\dagger \rangle}{|u_i| |u_i^\dagger|}\right)$  deux à deux des 8 modes dominants directs  $u_i$  et adjoints  $u_j^\dagger$  obtenus par un algorithme d’Arnoldi–Krylov. La bi-orthogonalité se voit ici par les aplats noirs, indiquant des valeurs petites de  $\text{Log}\left(\frac{\langle u_i | u_j^\dagger \rangle}{|u_i| |u_i^\dagger|}\right)$  (inférieures à  $10^{-5}$  pour  $1 \leq i, j \leq 6$ ).

mode direct	mode adjoint
6.910008618920342e-03	6.909922154679098e-03
6.910008618920342e-03	6.909922154679098e-03
1.594163000970908e-02	1.594163000849531e-02
1.594163000970908e-02	1.594163000849531e-02
2.065597734419333e-02	2.065597734433276e-02
2.065597734419333e-02	2.065597734433276e-02
-1.966276384148521e-01	-2.075211228691469e-01
-1.966276384148521e-01	-2.075211228691469e-01
1.566914330925106e-02	2.209374623294623e-02

Les 6 premières valeurs propres sont proches à  $10^{-4}$ , les trois dernières différent fortement car l’espace de Krylov utilisé est de trop faible dimension. La convergence sur ces valeurs propres pourrait être obtenue en augmentant le nombre d’état utilisé dans l’algorithme et en mettant en place une méthode d’Arnoldi normalisant l’amplitude dans chaque direction propre estimée au cours du calcul d’évolution.

**bi-orthogonalité des modes** Les modes de l’opérateur direct et de l’opérateur adjoint sont bi-orthogonaux (selon le même produit scalaire que celui utilisé dans la définition précédente). Nous calculons le produit scalaire normalisé entre les modes obtenus précédemment,  $\frac{\langle u_i | u_j^\dagger \rangle}{|u_i| |u_i^\dagger|}$ . Nous traçons le Log du résultat sur la figure 4.2.

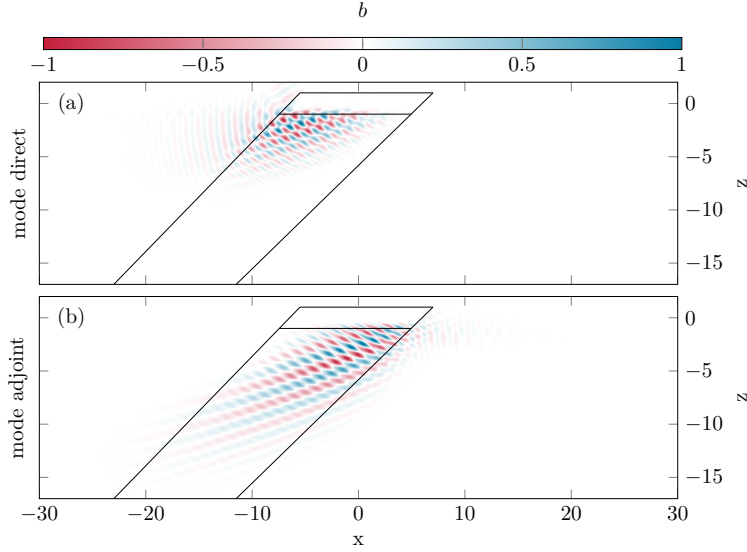


FIG. 4.3 : MODES PROPRE DIRECT ET MODE PROPRE ADJOINT ASSOCIÉ. Modes calculés par la méthode d’Arnoldi–Krylov sur 10 instantanés séparés d’un temps  $T_0$  pris entre  $t = 190 T_0$  et  $t = 200 T_0$  d’une séquence temporelle d’évolution à partir d’une condition initiale aléatoire. Est représenté, la partie réelle du champs de flottabilité.

Les 6 premiers modes, dont les valeurs propres sont très proches, respectent la bi-orthogonalité à  $10^{-4}$  près.

La validation de ces trois propriétés (définition de l’opérateur adjoint par le produit scalaire, par l’identité des spectres direct et adjoint et par la bi-orthogonalité des modes) valident numériquement le calcul de l’opérateur adjoint et sa convergence.

## 4.4 Résultats

### 4.4.1 Modes direct et adjoint

**Gain en fonction de l’horizon temporelle.** Nous traçons figure 4.3 la partie réelle de la flottabilité des modes propres dominants direct et adjoint, normalisés par leur maximum, issus d’un calcul de modes propres par l’algorithme d’Arnoldi–Krylov basé sur 10 instantanés compris entre  $t = 190 T_0$  et  $t = 200 T_0$  et séparés chacun d’une période  $T_0$  de l’évolution des opérateurs direct (a) et adjoint (b). Nous représentons aussi sur la figure en ligne noire la zone occupé par le faisceau de base lorsque la viscosité est nulle, séparée en une zone supérieure recouvrant la zone de forçage du faisceau de base et une zone inférieure recouvrant sa zone de propagation. Les deux champs présentent des échelles d’oscillations plus grandes que celles de l’état de base et les signaux se situent principalement dans la zone de propagation du faisceau de base. Dans le champ direct (a) le signal se concentre en haut, sous la zone de forçage dans la partie gauche du faisceau de base (décalage vers l’aval) alors qu’il est dans la partie droite pour le champ adjoint (b) (décalage vers l’amont) et s’étend

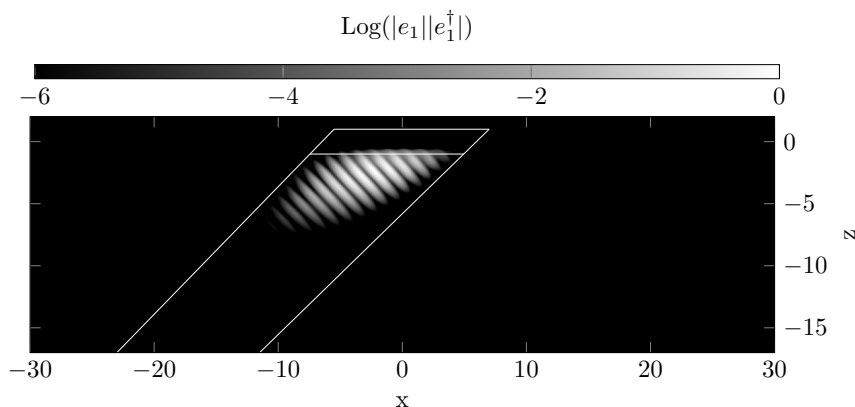


FIG. 4.4 : RÉSONATEUR (*wavemaker*), zone où la valeur propre dominante est sensible à un contrôle par un senseur-actuateur localisé. Le champs représente le logarithme du produit des normes des modes propres adjoint et direct présentés figure 4.3. Le champ est normalisé par son maximum et est tronqué au 6 décades les plus grandes.

bien plus vers le bas. Les deux champs présentent des plans de phases dont les angles avec l'horizontale et les distances les séparant sont très similaires.

En suivant la discussion détaillée dans Chomaz (2005), le mode direct représente la réponse du système aux temps longs car sa croissance exponentielle est la plus importante. Toute condition initiale  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} (0)$  se décompose sur la base des modes propres et le coefficient de cette décomposition sur le mode propre  $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$  vaut :

$$\frac{\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\dagger \\ b_1^\dagger \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ b \end{pmatrix} (0) \rangle}{| \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ b_1 \end{pmatrix} | | \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\dagger \\ b_1^\dagger \end{pmatrix} |}. \quad (4.39)$$

Le mode adjoint représente donc la réceptivité du mode direct associé aux perturbations initiales. Le produit entre le champ d'énergie du mode direct et du champ d'énergie du mode adjoint, donc le produit entre la réceptivité et la réponse associé à un mode particulier, représente la sensibilité de la valeur propre associée à l'ajout d'une boucle de contrôle où le senseur et l'actuateur sont au même point. Il représente le résonateur (*wavemaker*) et sa forme est présentée figure 4.4. Le champ, normalisé par son maximum, est tronqué aux 6 décades les plus grandes.

Nous mesurons l'énergie complète ( $e = u^2 + w^2 + b^2$ ) des solutions de l'opérateur direct que nous traçons, normalisée par l'énergie initiale, en fonction du temps sur la figure 4.5. La courbe inférieure est obtenue avec, comme condition initiale, du bruit blanc et les courbes supérieures avec le mode direct (fig. 4.3 (a)) et adjoint (fig. 4.3 (b)). Les 3 courbes possèdent la même pente. La courbe de l'énergie de la simulation initialisée par un bruit blanc commence

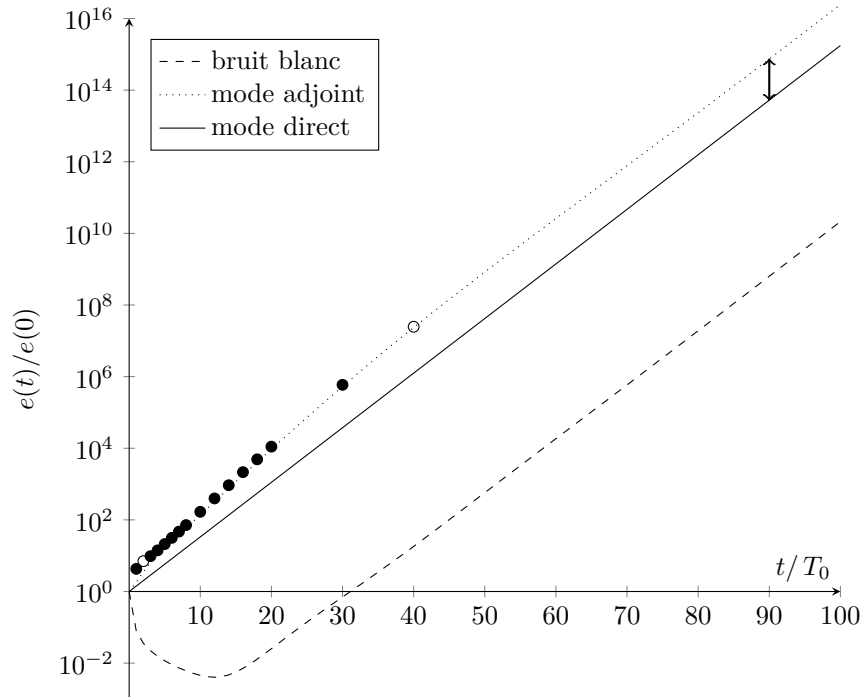


FIG. 4.5 : COURBE DES GAINS EN TEMPS EN FONCTION DES CONDITIONS INITIALES. Énergie complète ( $e = u^2 + w^2 + b^2$ ) normalisée par l'énergie initiale en fonction du temps des solutions de l'opérateur direct issue des conditions initiales : le mode direct (—), le mode adjoint ( $\cdots$ ), ou du bruit blanc (- - -). Les trois courbes tendent vers une pente identique. GAINS OPTIMAUX Les symboles  $\bullet$  indiquent l'énergie complète, normalisée par l'énergie initiale, de la réponse optimale en fonction de l'horizon temporel d'optimisation. Chaque point correspond à un calcul d'optimisation et indique le gain maximum réalisable pour chaque horizon temporel  $t_h$ .

par décroître pendant environ 15 périodes de base  $T_0$ . Elle atteint une pente constante à environ  $t = 25 T_0$ . La courbe de l'énergie initialisée par le mode propre direct dominant a une croissance monotone comme il se doit. La courbe de la solution initialisée par le mode propre adjoint dominant croit plus vite que pour le mode directe puis, à partir de  $t = 40 T_0$ , adopte la même pente. La pente asymptotique correspond au taux de croissance du mode direct. Lorsque la condition initiale est composée de bruit blanc, tous les modes de l'opérateur sont excités, l'énergie des modes stables décroît et celle des modes instables croît ; la somme des énergie des modes commencent donc par décroître avant de croître avec l'énergie du mode dominant du système. Lorsque la condition initiale est le mode adjoint, l'énergie croît plus rapidement pendant un transitoire avant de croître selon un taux de croissance constant. Cette condition initiale est celle qui maximise le gain lorsque  $t \rightarrow \infty$  et ce gain supplémentaire est donné par la prévision théorique et vaut :

$$\sqrt{\frac{e(t)}{e(0)}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\dagger \\ b_1^\dagger \end{pmatrix} \right|}{\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\dagger \\ b_1^\dagger \end{pmatrix} \right\rangle} e^{\sigma_1 t}. \quad (4.40)$$

La double flèche sur la figure 4.5 qui mesure la différence en gain entre l'initialisation par le mode direct et le mode adjoint vaut 3.84, ce qui est proche de la valeur théorique 3.841 calculé dans le tableau figure 4.2. Cet accord apporte une validation supplémentaire de l'opérateur adjoint et de la convergence des modes directs et adjoints.

#### 4.4.2 Croissance transitoire

Nous traçons figure 4.5 les gains optimaux donnés par l'énergie, normalisée par sa valeur initiale, des champs de perturbations optimisés pour des horizons temporels différents. Chaque point marqué par un symbole  $\bullet$  est le résultat d'un calcul d'optimisation où la plus grande valeur propre de l'opérateur  $\mathbf{e}^{L^\dagger t_h} \mathbf{e}^{L t_h}$  est calculé par la méthode des puissances itérées (identique à la méthode direct-adjoint de Corbett and Bottaro (2000)). Pour un horizon temporel valant l'abscisse du point, il indique le gain maximal accessible. Lorsque l'horizon temporel est grand (au delà de  $t = 20 T_0$ ), le gain optimal s'inscrit sur la courbe en trait continu représentant la trajectoire de gain de la solution initialisée par le mode propre adjoint dominant.

Nous traçons figure 4.6 le champ de flottabilité des perturbations initiales optimales (a,c) et réponses (b,d) optimales pour deux horizons temporels différents. La première (a,b) optimisée pour un temps court  $t_h = 2 T_0$ , la seconde (c,d) optimisée pour un temps long  $t_h = 40 T_0$ . Chaque champ est normalisé par sa valeur maximale afin d'être compris entre  $-1$  et  $1$ . La région contenant le faisceau de base est qualitativement représentée par une ligne comme sur la figure 4.4. Pour les temps courts  $t_h = 2 T_0$  la perturbation optimale (a) présente un paquet étalé en espace où l'amplitude la plus élevée se situe sous la zone de forçage de l'état de base. Il contient des structures plus grandes



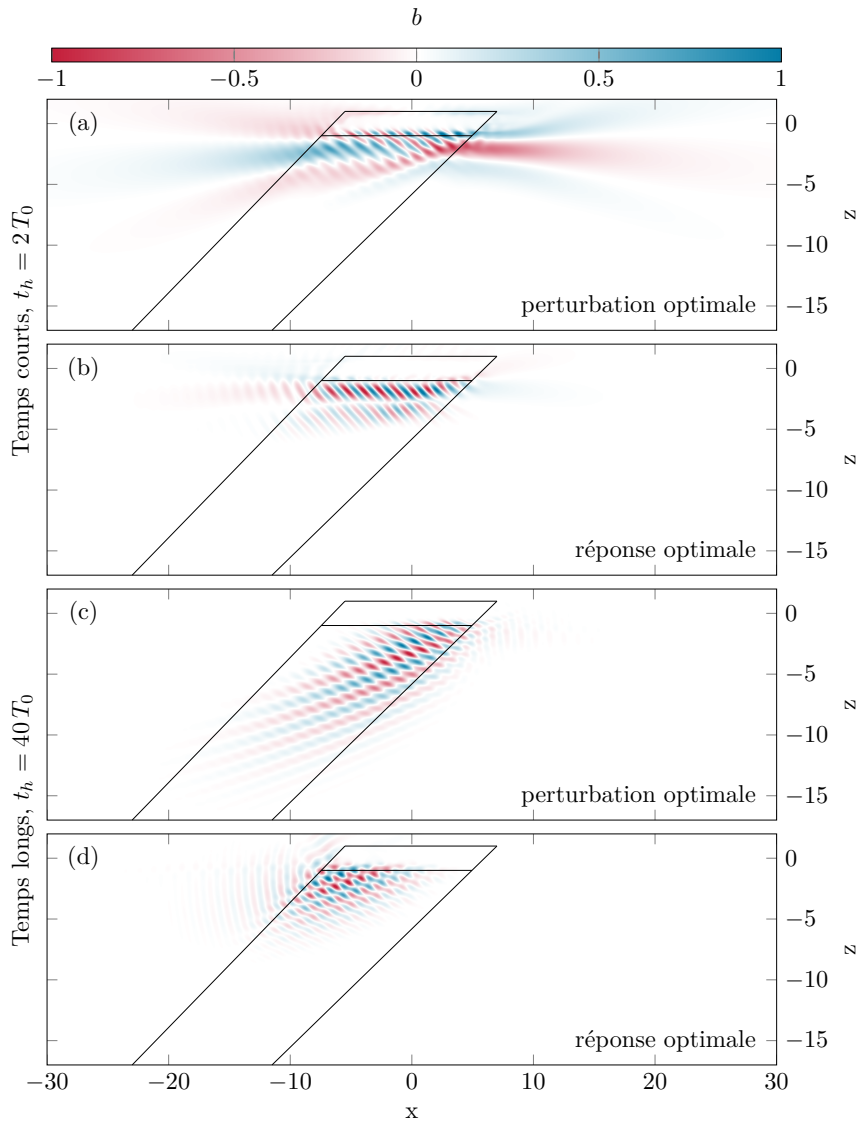


FIG. 4.6 : PERTURBATIONS ET RÉPONSES OPTIMALES en fonction de l'horizon temporel  $t_h$  présentées par leurs champs de flottabilité pour  $t_h = 2T_0$  (a,b) et  $t_h = 40T_0$  (c,d) obtenue par la méthode direct-adjoint après respectivement 48 et 5 aller-retour comme expliqué à la section 4.1.

échelles, comparées à l'échelle de l'état de base. La réponse optimale correspondante (b) est fortement localisée sous la zone de forçage de l'état de base et contient une structure d'une échelle similaire à celle de l'état de base donc de plus petite échelle que la perturbation initiale qui lui a donné naissance. Pour les temps longs  $t_h = 40 T_0$ , la perturbation optimale est très proche du mode adjoint présenté figure 4.3 (a) et la réponse optimale, très proche du mode direct figure 4.3 (b).

### 4.4.3 Analyse des modes

Nous traçons figure 4.7 le logarithme de la densité d'énergie en espace de Fourier des perturbations et réponses optimales pour les deux horizons temporelles  $t_h = 2 T_0$  et  $t_h = 40 T_0$ , dont les champs de flottabilité sont montrés en espace réel figure 4.6. Nous traçons le vecteur  $\mathbf{k}_0$ , vecteur d'onde de l'onde forcée pour obtenir l'état de base et la courbe résonante associée en rouge et, en bleu, la courbe obtenue par translation de la courbe rouge par  $-\mathbf{k}_0$ . Les champs étant réels, leur transformé de Fourier est symétrique par symétrie centrale. Pour les deux horizons temporels, la perturbation est très similaire à la réponse. Elles présentent des pics d'énergie localisés dans l'espace spectral autour des mêmes modes de Fourier, mais l'amplitude de ces modes diffère entre la perturbation et la réponse. Pour les temps longs l'énergie se répartit, pour la perturbation, sur la branche centrale de la courbe triadique et de la courbe triadique translatée, formant deux paquets d'énergie. Les deux autres paquets sont leurs symétriques par la symétrie centrale. Cette répartition subsiste dans la réponse optimale. Dans la réponse, un troisième paquet d'énergie apparaît autour des  $k_z = 0$  et correspond à une excitation quasi-résonante déjà décrite au chapitre 2 à la section 2.4.1 page 35. Ce mode de Fourier est à  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 - 2\mathbf{k}_0$  (quasi-horizontal) et sa fréquence  $\omega = \omega_2 - \omega_0 = \omega_1 - 2\omega_0$  est proche de 1, donc quasi-résonant avec le nombre d'onde horizontal.

Pour le temps court  $t_h = 2 T_0$ , l'énergie de la perturbation initiale se répartit autour de  $k_x = 0$  et de l'axe  $k_z$  avec  $k_z$  petit et se transfert, dans la réponse optimale, par un mécanisme triadique (pas nécessairement une instabilité) vers les  $\mathbf{k}_0 \pm (k_x = 0, k_z)$  avec  $k_z$ .

### 4.4.4 Variation de l'angle $\theta_0$

Nous appliquons la même analyse en modifiant l'état de base. Nous conservons des nombres de Froude, Reynolds, Prandtl identiques mais nous modifions l'angle formé par les plans de phase de l'onde avec l'horizontale. Ceci revient à augmenter la fréquence de l'onde de base par rapport au fluide  $\omega_0$ . Nous avons :

- $Fr = 6.19 \cdot 10^{-2}$ ;
- $Re = 176$ ;
- $Pr = 7$ ;

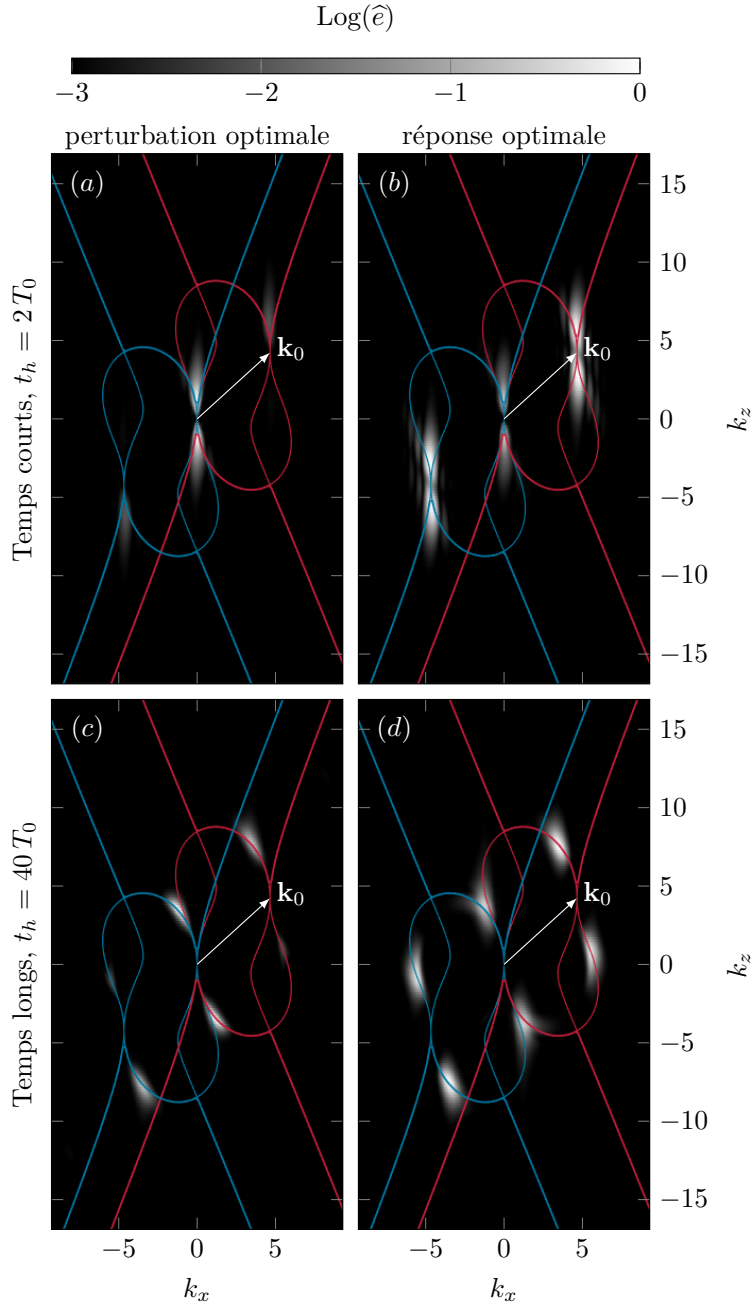


FIG. 4.7 : PERTURBATIONS ET RÉPONSES OPTIMALES DANS L'ESPACE DE FOURIER. Logarithme de la densité d'énergie normalisée par son maximum en espace de Fourier des perturbations (a,c) et réponses (b,d) optimales aux horizons temporels  $t_h = 2T_0$  et  $t_h = 40T_0$  dont les champs, en espace réel, sont présentés figure 4.6. L'énergie est tronquée aux trois décades les plus élevées. Le vecteur  $\mathbf{k}_0$  est le vecteur d'onde de l'onde forcée dans l'état de base. La courbe rouge est la courbe de résonance triadique associée à  $\mathbf{k}_0$  et la courbe bleue est la même courbe translatée de  $-\mathbf{k}_0$ . Ces courbes sont expliquées aux chapitre 1 et 2.

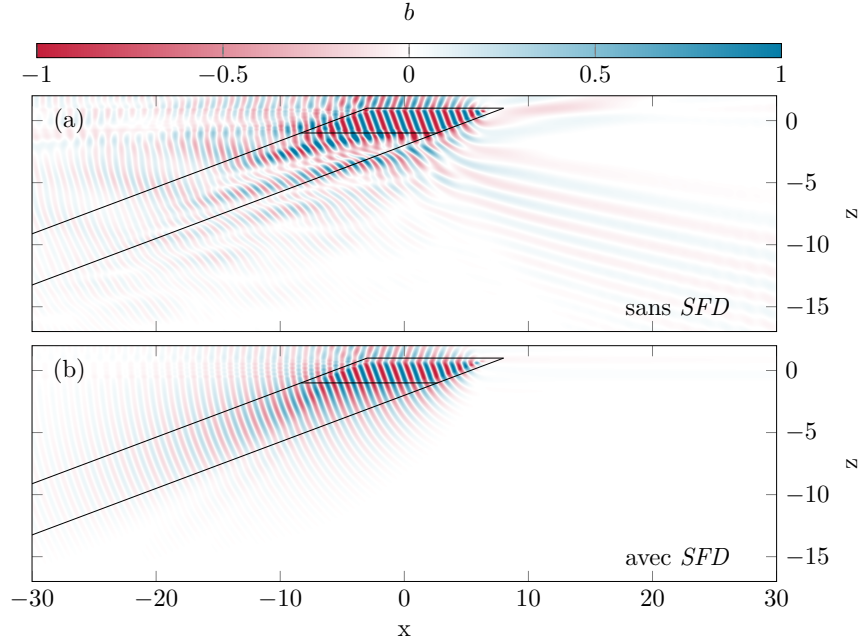


FIG. 4.8 : Solution non-linéaire instationnaire et solution stationnaire obtenue par la méthode de relaxation *SFD*. Figure identique à la figure 4.1 sauf le paramètre d'angle  $\theta_0$  qui vaut ici  $\theta_0 = 19.95^\circ$ .

- $\theta_0 = 19.95^\circ$  ou  $\omega_0/N = 0.94$
- $W/\lambda_{0x} = 8$ .

**État de base :** Nous traçons figure 4.8 le champs de flottabilité dans un domaine restreint pris à l'instant  $t = 200 T_0$  de deux simulations non-linéaires similaires à celles tracées figure 4.8 mais pour une période de l'onde du faisceau de base dans le référentiel du fluide valant  $\omega_0/N = 0.94$ , soit  $\theta_0 = 19.95^\circ$ . La première (a) est libre d'évoluer et devient instationnaire avec une grande complexité des champs instantanés tandis que la méthode de *SFD*, active dans la seconde, permet d'obtenir la solution stationnaire (b).

**Modes direct et adjoint :** Nous traçons figure 4.9 les champs de flottabilité normalisés par leur maximum issus du mode direct (a) et adjoint (b) obtenu par la méthode de Krylov–Arnoldi sur 10 instantanés séparés de  $T_0$  entre 190 et 200  $T_0$ . Cette figure est identique à la figure 4.3 et sont représentés en ligne noire, les zones occupées par le faisceau de base. Ces zones sont séparées en une zone supérieure recouvrant la zone de forçage du faisceau de base et une zone inférieure recouvrant la zone de propagation. La zone de propagation est fortement inclinée vers l'aval dans ce cas où  $\theta_0 = 19.95^\circ$ . Les conclusions sont similaires au cas précédent où  $\theta_0 = 42.27^\circ$ . Les deux champs présentent des échelles plus grandes que celle de l'état de base et les signaux se situent principalement dans la zone de propagation du faisceau de base. Dans le champ direct (a) le signal se concentre sous la zone de forçage, dans la partie aval du faisceau de base alors qu'il se situe dans la partie amont pour le champ

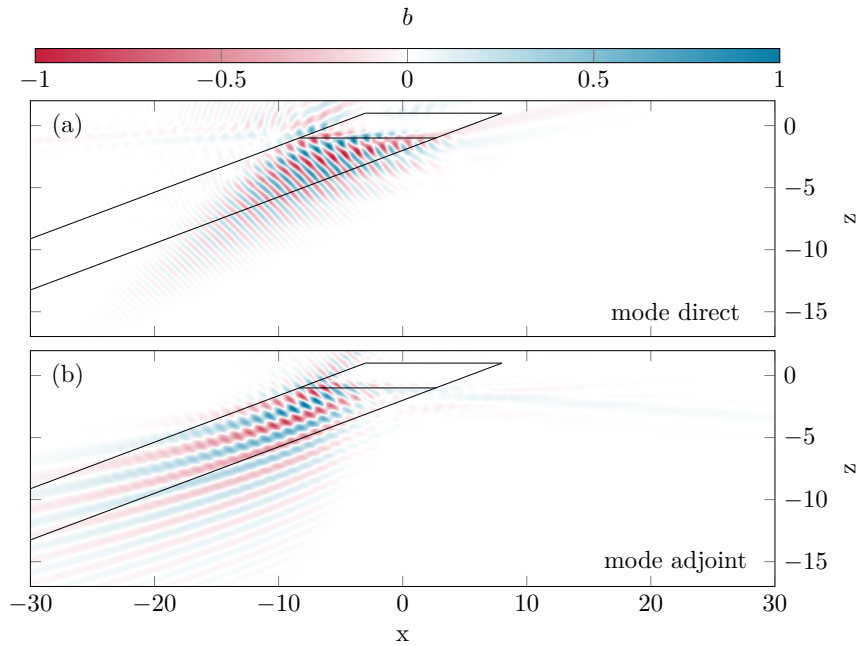


FIG. 4.9 : MODE DIRECT ET MODE ADJOINT, identique à la figure 4.3 sauf pour l'angle de la solution forcée qui vaut ici  $\theta_0$  qui vaut  $\theta_0 = 19.95^\circ$  comme sur la figure 4.8.

adjoint (b). Les deux champs présentent des plans de phases dont les angles avec l'horizontale et les distances les séparant sont très similaires. En laissant évoluer dans le temps les opérateurs linéaires direct (a) et adjoint (b), le calcul sélectionne le mode propre le plus instable.

**Résonateur :** Nous traçons figure 4.16 le logarithme du produit des normes des modes propres direct et adjoint présentés figure 4.15. Le champ est normalisé par son maximum et est tronqué aux 6 décades les plus grandes. Ce champ représente la sensibilité de la valeur propre à un contrôle où actuateur et senseur sont au même point, sensibilité appelée résonateur (*wavemaker*). Il déborde ici du faisceau de base vers l'amont en dessous du générateur.

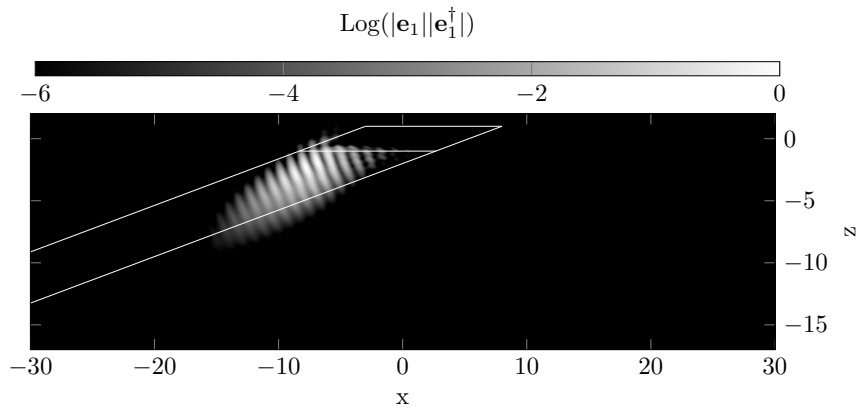


FIG. 4.10 : RÉSONATEUR, identique à la figure 4.4 sauf  $\theta_0 = 19.95^\circ$

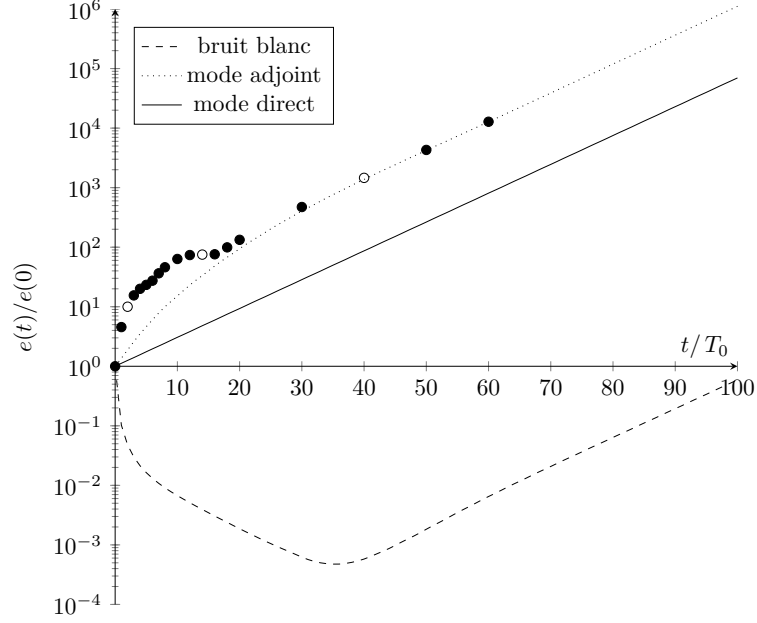


FIG. 4.11 : Figure identique à la figure 4.5 mais pour le champs de base présenté figure 4.8 pour  $\theta_0 = 19.95^\circ$  (au lieu de  $42.27^\circ$  précédemment).

**Gain :** Nous mesurons l'énergie complète ( $e = u^2 + w^2 + N^2 b^2$ ) des champs propagés en temps avec l'opérateur direct que nous traçons, normalisée par rapport à l'énergie initiale, en fonction du temps sur la figure 4.11 comme sur la figure 4.5. La courbe inférieure est obtenue avec comme condition initiale du bruit blanc et les courbes supérieures avec les modes direct et adjoint. Les observations et conclusions sont identiques au cas précédent (où  $\theta_0 = 42.27^\circ$ ). Aux temps longs, les 3 courbes possèdent le même pente, correspondant au taux de croissance de la valeur propre associée. La solution a alors convergé vers le mode propre direct dominant. La courbe de l'énergie initialisée par un bruit blanc (- - -) commence par décroître pendant environ 3 périodes de base  $T_0$  avant de croître et d'atteindre une pente constante à environ  $t = 40 T_0$ . Le transitoire décroissant est donc beaucoup plus court même si  $T_0 = 6.68$  dans le cas présent et valait  $T_0 = 8.49$  pour  $\theta_0 = 42.27^\circ$ . L'énergie de la solution initialisée par le mode adjoint croît plus fortement que dans le cas précédent avant de converger vers une pente constante. Cette condition initiale est celle qui maximise le gain lorsque  $t \rightarrow \infty$  et le gain supplémentaire entre les deux courbes vaut 3.99 ce qui respecte la prévision théorique donnée par le calcul indépendant des modes adjoints et directs  $\langle u_1 | u_1^\dagger \rangle / |u_1| |u_1^\dagger| e^{\sigma_1 t} = 3.995$ . Les symboles ● représentent le gain optimisé pour un horizon temporel valant l'abscisse du point. Ils représentent les gains maximum accessibles aux horizons temporels correspondant. À partir de  $t_h = 16 T_0$ , les gains optimisés sont très proches du gain de la solution initialisée par le mode adjoint et comme dans le cas précédent, la perturbation optimale prend la forme du mode adjoint dès  $t_h = 16 T_0$  (et la réponse optimale celle du mode direct). Aux temps plus courts, les points montrent une première augmentation forte entre  $t_h = T_0$  et  $t_h = 3 T_0$ , suivie d'une augmentation plus faible entre  $t_h = 3 T_0$  et  $t_h = 6 T_0$ . Puis une

nouvelle augmentation a lieu entre  $t_h = 6T_0$  et  $t_h = 10T_0$  avant de saturer entre  $t_h = 10T_0$  et  $t_h = 16T_0$ . Ces gains sont plus importants que dans le cas précédent pour  $\theta_0 = 42.27^\circ$  et nous distinguons ici dans ce comportement trois phases et non deux. La première aux temps courts entre  $t_h = T_0$  et  $t_h = 6T_0$ . La seconde aux temps intermédiaires entre  $t_h = 6T_0$  et  $t_h = 16T_0$  La troisième aux temps longs, au delà de  $t_h = 16T_0$ . Nous analysons par la suite trois cas représentatifs de chacune de ces phases. Un premier cas temps court  $t_h = 2T_0$ , un second cas temps intermédiaire  $t_h = 14T_0$  et un troisième cas temps long  $t_h = 20T_0$ .

**Perturbations et réponse optimales :** Nous traçons figure 4.12 le champs de flottabilité des perturbations (a,c,f) et réponse (b,d,e) optimales pour les trois horizons temporels mentionnés plus haut. Pour les temps courts  $t_h = 2T_0$ , le comportement est similaire au cas précédent, la perturbation optimale (a) présente un paquet encore plus localisé en espace sous la zone de forçage. Il contient des structures grandes échelles, comparé à l'échelle de l'état de base. La réponse optimale pour les temps courts (b) est aussi localisée sous la zone de forçage de l'état de base et contient une structure d'une échelle similaire à celle de l'état de base, elle aussi plus fortement localisée que dans le cas  $\theta_0 = 42.27^\circ$ . Pour les temps intermédiaires, le comportement est entièrement nouveau. La perturbation optimale (c) est localisée en amont du faisceau à une altitude proche du dessous de la zone de forçage et une série de plan de phase est bien visible. La réponse optimale (d) se localise à aval du faisceau, détachée de la zone de forçage et donc décalée vers le bas par rapport à la perturbation initiale. Deux séries de plans de phases formant deux angles différents avec l'horizontale se distinguent. La perturbation prend aussi la forme d'un paquet d'onde transporté par l'écoulement, passant ainsi de l'amont du faisceau à l'aval de celui-ci mais se propageant aussi vers la bas. Pour les temps longs  $t_h = 40T_0$ , la perturbation optimale (e) a presque convergé sur le mode propre adjoint (figure 4.9 (b)) alors que la réponse s'approche du mode propre direct (figure 4.9 (b)). Il est a noté que perturbation et réponse optimales à  $t_h = 40T_0$  sont respectivement légèrement plus en amont et en aval, proche de la zone de forçage, que leurs équivalents aux temps infinis (mode direct et adjoint).

**analyse des perturbations et réponses optimales dans l'espace spectral :** Nous traçons figure 4.7 le logarithme de la densité d'énergie en espace de Fourier des perturbations et réponses optimales pour les trois horizons temporels  $t_h = 2T_0$ ,  $t_h = 14T_0$  et  $t_h = 40T_0$ , dont les champs de flottabilité sont montrés en espace réel figure 4.12. Pour les trois temps la répartition de la densité d'énergie est similaire entre la réponse et la perturbation optimale, mais présente un fort transfert par interaction triadique avec  $\mathbf{k}_0$ .

Pour les temps courts (a,b)  $t_h = 2T_0$ , l'énergie de la perturbation se répartie principalement sur les vecteurs verticaux (avec un nombre d'onde horizontal nul) alors que la réponse est dominée par la même distribution d'énergie initiale sur  $(0, k_z)$  mais décalée de  $\mathbf{k}_0 + (0, k_z)$ . Les champs possèdent une composante grande échelle et une composante de la même échelle que l'onde de base ; au

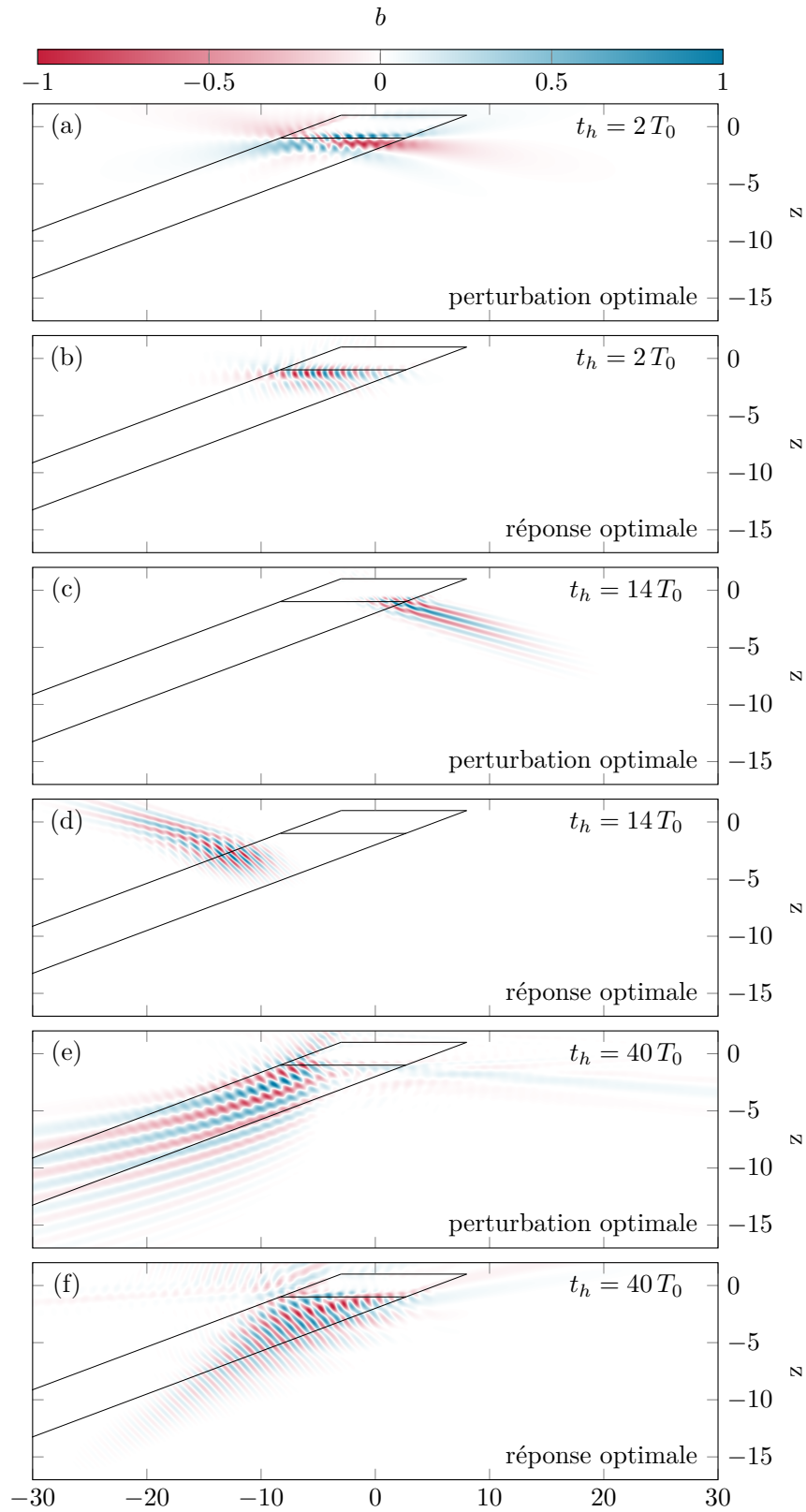


FIG. 4.12 : PERTURBATIONS ET RÉPONSES OPTIMALES en fonction de l'horizon temporel  $t_h$ , similaire à la figure 4.6 mais pour  $\theta_0 = 19.95^\circ$  au lieu de  $42.27^\circ$



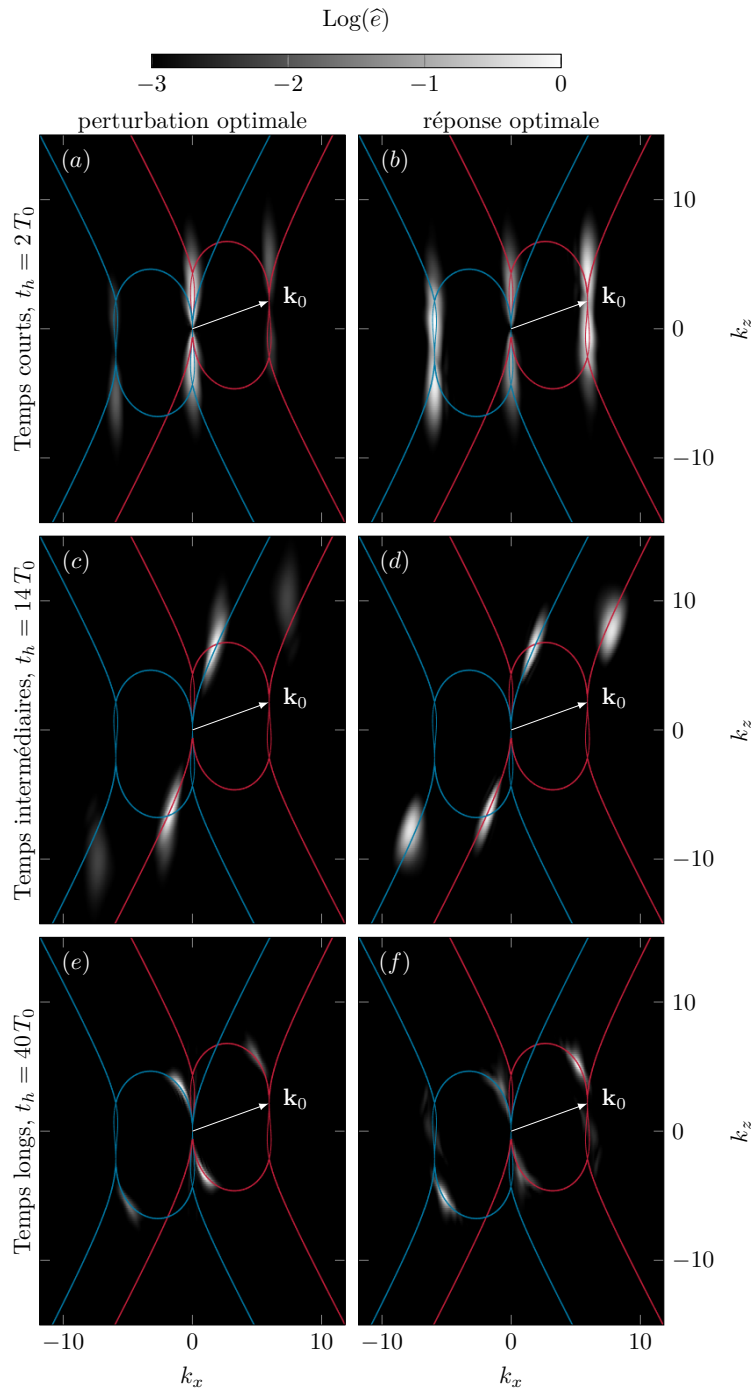


FIG. 4.13 : DENSITÉ D'ÉNERGIE SPECTRALE des perturbations et réponses optimales en fonction de l'horizon temporel  $t_h$ , similaire à la figure 4.7, mais pour  $\theta_0 = 19.95^\circ$ .

court du temps l'énergie se transfère de l'un à l'autre. Tout se passe comme si dans la triade résonante,  $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$ , l'énergie se transférait de  $\mathbf{k}_2$  vers  $\mathbf{k}_1$  au cours du temps. La perturbation favorisant l'onde  $(\mathbf{k}_2, \omega_2)$  avec une localisation dans l'espace physique à l'amont, proche du générateur de l'onde de base alors que pour la réponse, l'énergie a été transférée et amplifiée sur l'onde  $(\mathbf{k}_1, \omega_1)$  et se localise dans l'espace physique en aval et déplacée vers le bas figure 4.12.

La nouveauté comparée au cas  $\theta_0 = 42.27$  présentée figure 4.7 est le cas intermédiaire (c,d)  $t_h = 14 T_0$ , où l'énergie se répartie initialement sur une composante de la branche externe de la courbe résonante et se transfère vers une composante de la branche externe au plus grand  $\mathbf{k}$ . Il est à remarquer que le mode le plus amplifié au temps intermédiaire correspond à la branche triadique externe, petite échelle, et prend la forme d'un paquet d'onde emporté par l'écoulement. Cela le différencie du comportement au temps court qui comme dans le cas précédent correspond à des modes grande échelle, aux plans de phases quasi-horizontaux. Pour les temps longs (e,f)  $t_h = 40 T_0$ , l'énergie se répartit sur la branche centrale de la courbe résonante.

#### 4.4.5 Variation du nombre de Reynolds

Nous appliquons la même analyse en modifiant le nombre de Reynolds de l'écoulement. Nous conservons des nombres de Froude, de Prandtl et l'angle  $\theta_0$  identique au premier cas présenté mais nous modifions le nombre de Reynolds pour l'augmenter d'un facteur 10.

Nous avons :

- $Fr = 6.19 \cdot 10^{-2}$  ;
- $Re = 1760$  ;
- $Pr = 7$  ;
- $\theta_0 = 42.27^\circ$  ou  $\omega_0/N = 0.74$
- $W/\lambda_{0x} = 8$ .

**État de base :** Nous traçons figure 4.14 le champs de flottabilité dans un domaine restreint pris à l'instant  $t = 200 T_0$  de deux simulations non-linéaires similaires à celles tracées figure 4.1 mais pour un nombre de Reynolds valant  $Re = 1760$ . La première (a) est libre d'évoluer et devient fortement instationnaire avec une beaucoup plus grande complexité et gamme d'échelle excitées des champs instantanés tandis que la méthode de SFD, active dans la seconde, permet d'obtenir la solution stationnaire (b). La solution voit son amplitude décroître très faiblement en s'éloignant de la zone de forçage et rester élevée dans presque l'ensemble de la zone de propagation ; ce qui diffère du premier cas, où avec un Reynolds 10 fois plus faible l'amplitude de la solution diminuait fortement en s'éloignant du forçage et seule la région immédiatement sous le faisceau conservait une amplitude élevée.

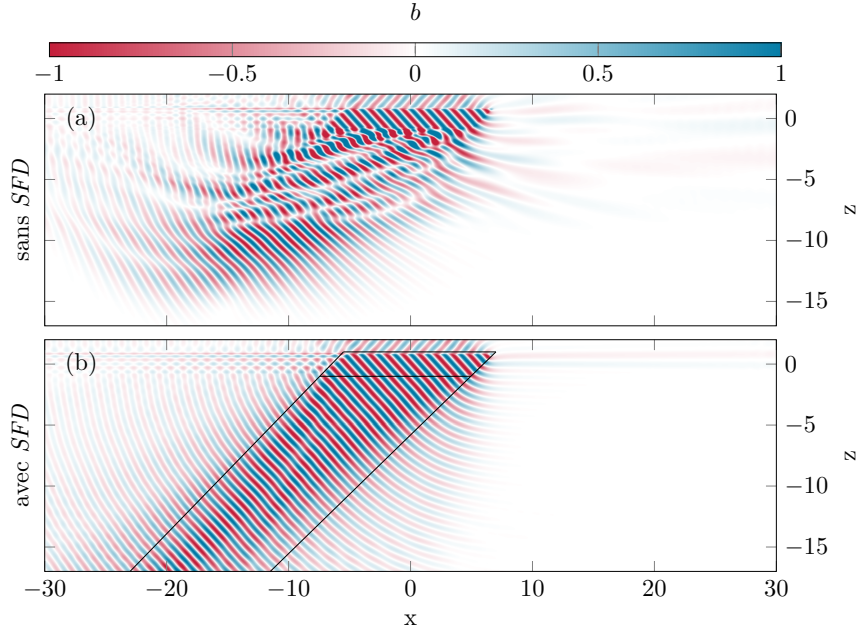


FIG. 4.14 : Solution non-linéaire instationnaire et solution non-linéaire stationnaire obtenue par la méthode de relaxation *SFD*. La figure est identique à la figure 4.1 sauf le nombre de Reynolds qui vaut ici  $Re = 1760$ .

**Modes direct et adjoint :** Nous traçons figure 4.15 les champs de flottabilité normalisés par leur maximum issus des modes direct (a) et adjoint (b) obtenus par la méthode d'Arnoldi–Krylov, mais pour un nombre de Reynolds de  $Re = 1760$ . Comme dans le premier cas (petit nombre de Reynolds), les deux champs présentent des échelles plus grande que celle de l'état de base et les signaux se situent principalement dans la zone de propagation du faisceau de base et les deux champs présentent des plans de phases dont les angles avec l'horizontale et les distances les séparant sont très similaires. La différence avec le premier cas (petit nombre de Reynolds) est que le mode direct et surtout le mode adjoint s'étendent sur une plus grande surface du faisceau.

**Résonateur :** Le champ figure 4.16 représente le résonateur (*wavemaker*) occupé lui de façon plus uniforme dans tout le faisceau de l'onde de base et intense même proche de la zone de forçage.

**Gain :** La figure 4.17, identique aux figures 4.5 et 4.11 mais pour  $Re = 1760$  montre la même dynamique pour les gains instantanés et les gains optimaux. Le gain supplémentaire aux temps longs entre les courbes d'énergie initialisées par le mode direct et le mode adjoint montre un facteur de gain de 6.35, très proche de la valeur prévue par la théorie  $\langle u_1 | u_1^\dagger \rangle / |u_1| |u_1^\dagger| = 6.366$ . Les gains optimisés aux temps longs, à partir de  $t_h = 16 T_0$ , sont très proches du gain de la solution initialisée par le mode propre adjoint, les temps inférieurs à  $t_h = 16 T_0$  se séparent en deux phases annotées A aux temps courts et B aux temps intermédiaires. Ces phases sont peu marquées sur la courbe de gain

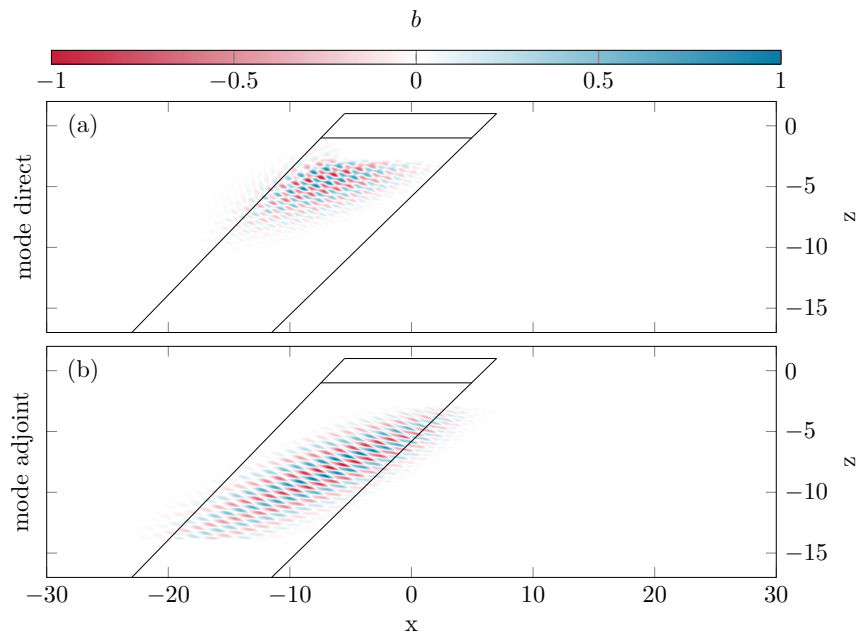


FIG. 4.15 : MODE DIRECT ET MODE ADJOINT identique à la figure 4.3 sauf pour le nombre de Reynolds qui est ici 10 fois plus grand  $Re = 1760$  que dans le premier cas  $Re = 176$ .

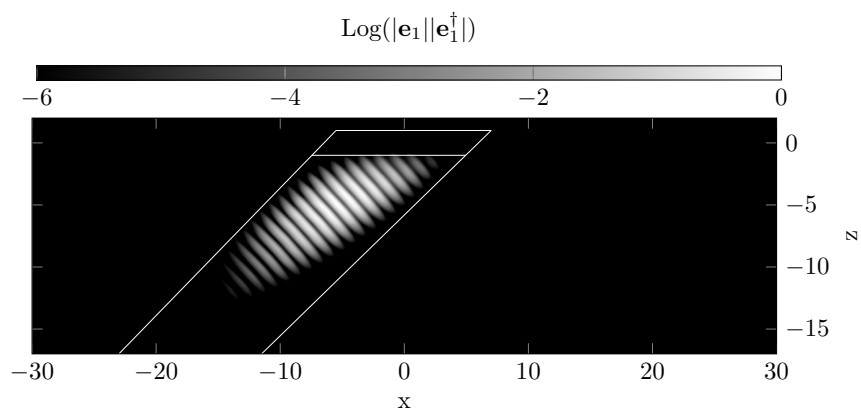


FIG. 4.16 : RÉSONATEUR, identique à la figure 4.4 sauf le nombre de Reynolds qui vaut ici  $Re = 1760$ .

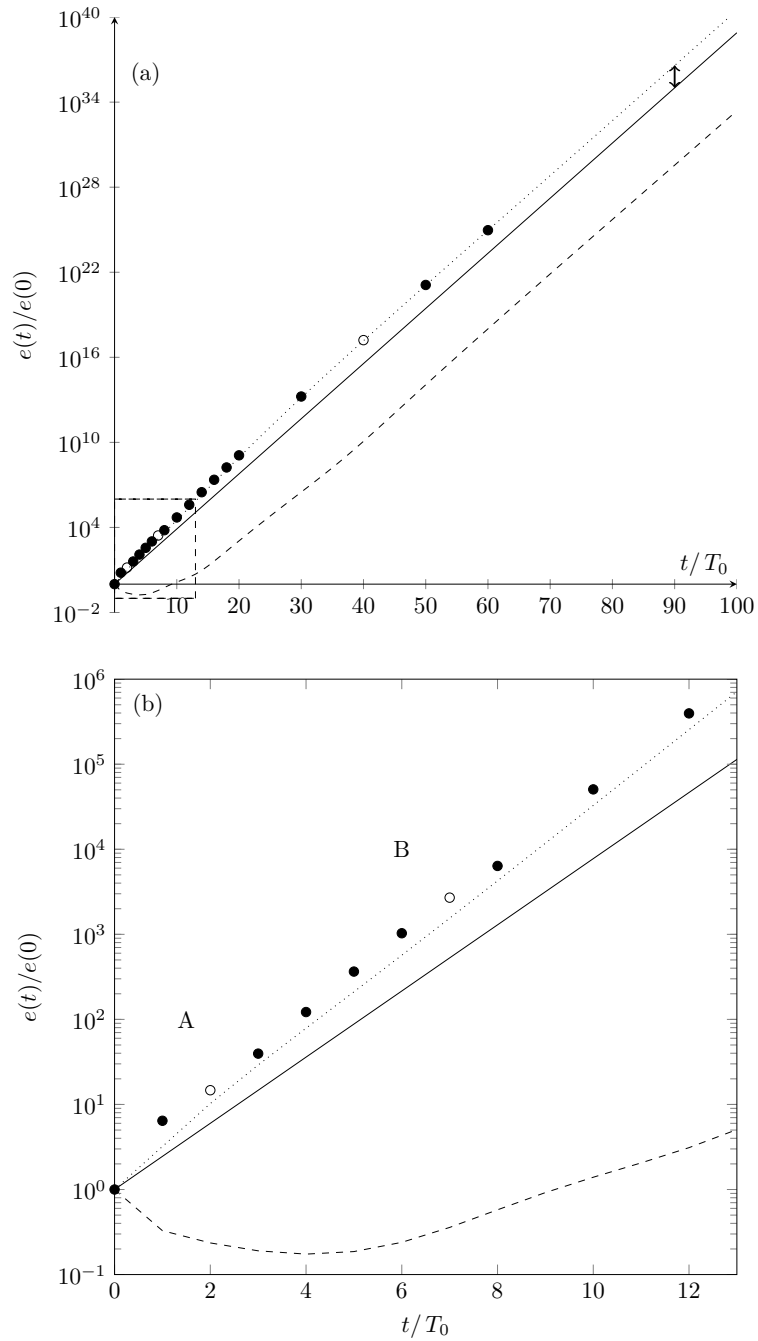


FIG. 4.17 : CROISSANCE INSTANTANÉE ET CROISSANCE OPTIMALE identique à la figure 4.5 mais pour  $Re = 1760$ .

par une légère variation de la pente de la courbe des gains optimaux mais se distinguent par la forme des perturbations et réponses optimales.

**Perturbations et réponses optimales :** Comme pour le cas précédent figure 4.12, nous traçons figure 4.18 le champ de flottabilité des perturbations (a,c,f) et réponses (b,d,e) optimales pour trois horizons temporels.

Pour les temps courts  $t_h = 2T_0$  la perturbation optimale (a) présente un paquet grande échelle s'étalant, cette fois, dans la zone de propagation. Ce paquet se divise verticalement en un paquet plus amont et un paquet plus aval. Il possède aussi des très grandes échelles se propageant à l'extérieur de la zone de propagation. La réponse optimale contient, comme la perturbation, un paquet grande échelle scindé verticalement en deux mais sans composante grande échelle à l'extérieur de la zone de propagation.

Les temps intermédiaires présentent comme dans le cas  $\theta_0 = 19.95^\circ$ , une structure de perturbation et réponse très différente, prenant la forme d'un paquet d'onde petit échelle étendue en amont du faisceau pour la perturbation alors que la réponse, elle aussi petite échelle, est localisée en aval du faisceau. Les deux paquets sont cette fois à la même hauteur l'un et l'autre, proche de la zone de forçage où l'amplitude est la plus élevée. Ce comportement d'une perturbation en amont et d'une réponse en aval correspond bien à la dynamique induite par une non-normalité convective (Marquet et al., 2009) avec la perturbation petite échelle qui est transportée par l'écoulement en même temps que son énergie augmente.

Nous retrouvons pour les temps longs  $t_h = 40T_0$ , une perturbation optimale (e) qui a presque convergé sur le mode propre adjoint (figure 4.15 (b)) ainsi qu'une réponse optimale qui s'approche du mode propre direct (figure 4.15 (b)).

**Analyse des perturbations et réponses optimales en espace spectrale :** Nous traçons figure 4.19, similaire aux figures 4.7 et 4.13, la densité d'énergie en espace de Fourier des perturbations et réponse optimales pour les trois horizons temporels  $t_h = 2T_0$ ,  $t_h = 14T_0$  et  $t_h = 40T_0$ .

Pour les trois temps la répartition de la densité d'énergie est similaire entre la réponse et la perturbation optimale.

Pour les temps courts (a,b), l'énergie de la perturbation forme des ensembles de deux paquets se répétant par le vecteur d'onde forcé  $\mathbf{k}_0$  et se répartissant sur la branche centrale de la courbe résonante. Entre la perturbation et la réponse, l'énergie se transfère, par interaction triadique, des petits vecteurs d'ondes vers des vecteurs d'onde de l'ordre de  $\mathbf{k}_0$ . Cela s'observe en espace physique par une diminution des grandes longueurs d'onde à l'extérieur et à l'intérieur de la zone de propagation.

Pour les temps intermédiaires (c,d), l'énergie se localise sur les branches externes de la courbe résonante de manière très similaire entre la perturbation et la réponse et les paquets en espace physique, bien que distincts, sont eux aussi très similaires. On observe l'apparition d'énergie dans la réponse en

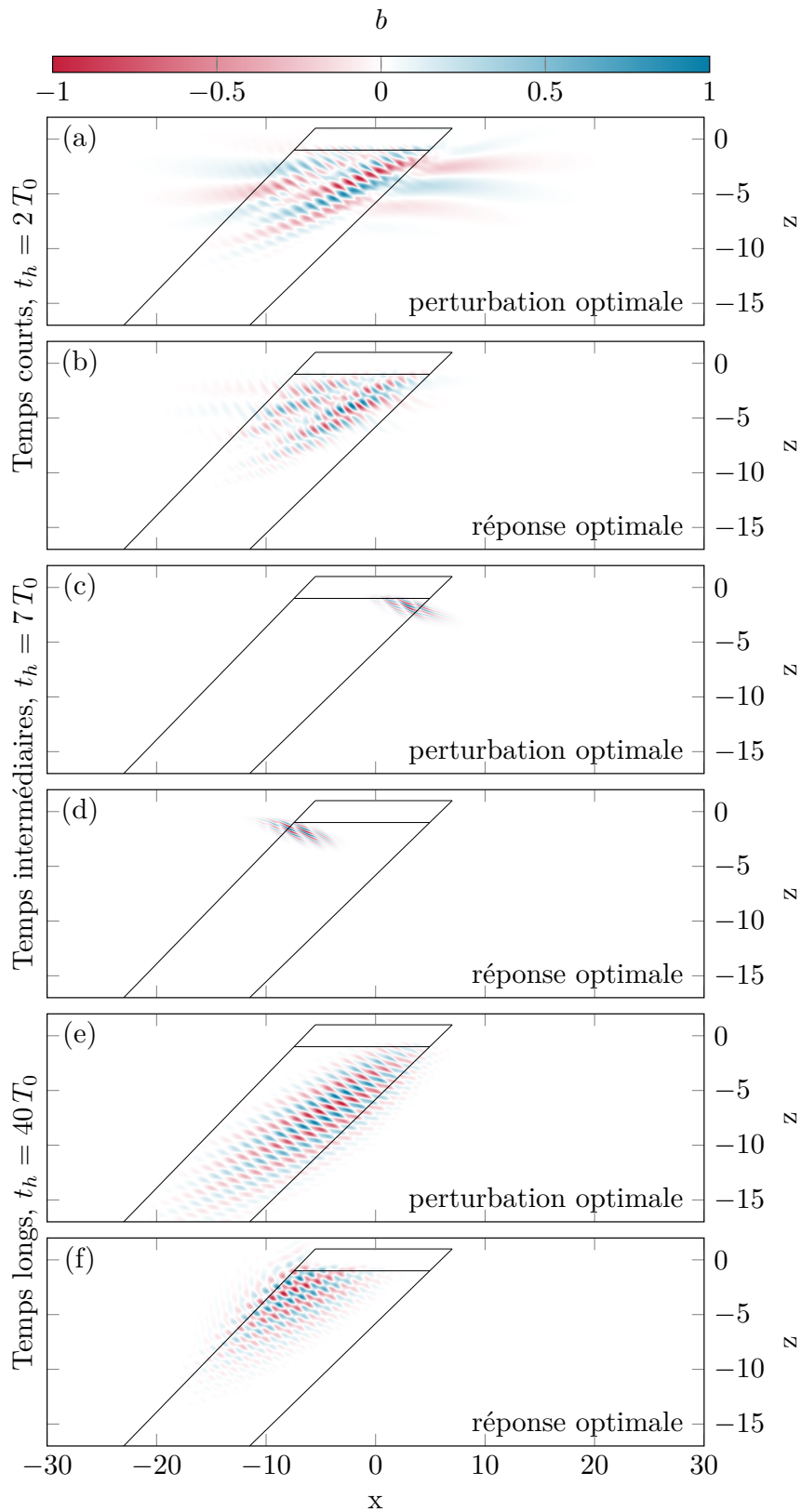


FIG. 4.18 : PERTURBATIONS ET RÉPONSES OPTIMALES en fonction de l'horizon temporel  $t_h$ , similaire à la figure 4.6 mais pour  $Re = 1760$  au lieu de  $Re = 176$ .

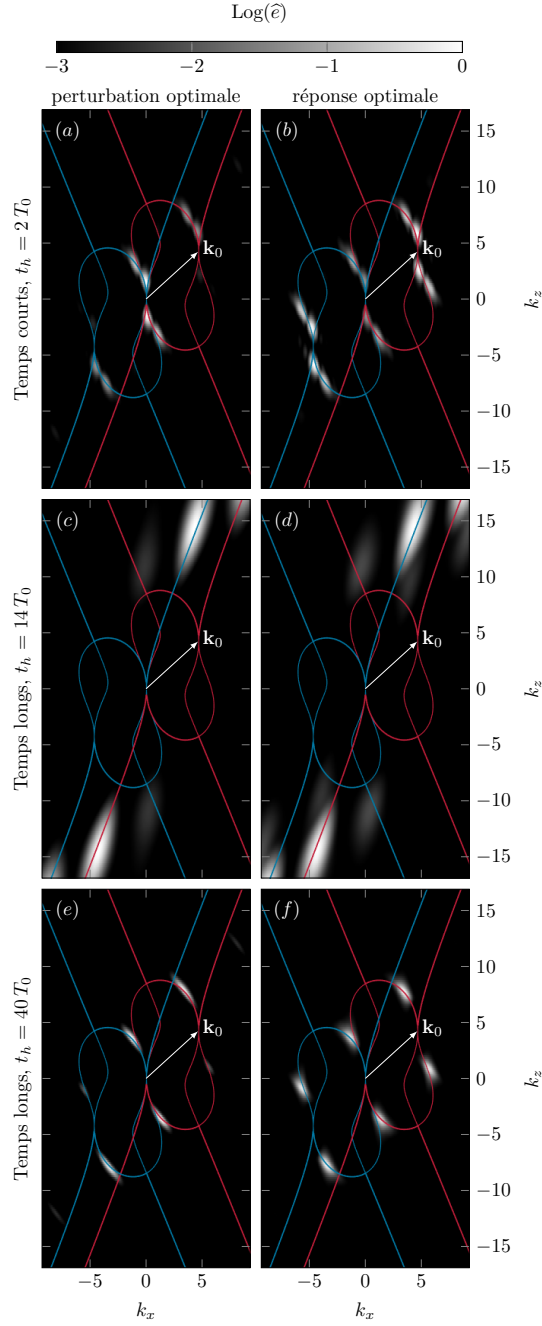


FIG. 4.19 : DENSITÉ D'ÉNERGIE SPECTRALE des perturbations et réponses optimales en fonction de l'horizon temporel  $t_h$ , similaire à la figure 4.7 mais pour  $\text{Re} = 1760$ .



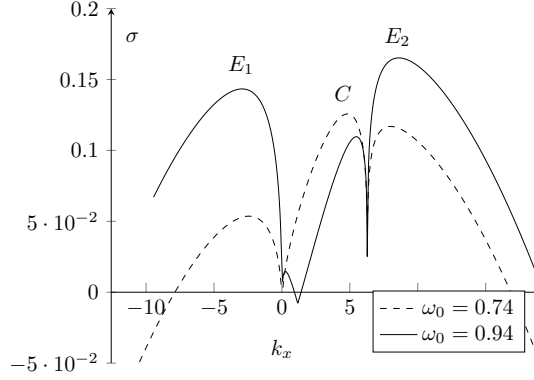


FIG. 4.20 : Taux de croissance  $\sigma$  prédit par la théorie triadique détaillée au chapitre 2 en fonction de  $k_x$  pour deux valeurs de  $\omega_0$ ,  $\omega_0 = 0.74$  et  $\omega_0 = 0.94$ . Lorsque  $\omega_0 = 0.74$ , les branches  $C$  et  $E_2$  ont un taux de croissance maximum similaire supérieur au maximum de la branche  $E_1$ . Lorsque  $\omega_0 = 0.94$ , la branche  $E_2$  possède un taux de croissance maximum supérieur à celui de la branche  $E_1$ , lui-même supérieur à celui de la branche  $C$ .

espace spectral, non située sur des branches externes mais légèrement décalée par rapport à l'énergie déjà présente sur les branches.

Les distributions d'énergie de la perturbation et de la réponse sont très proches de celles du premier (petit nombre de Reynolds), et l'énergie occupe la branche centrale de la courbe résonante. Le mode étant proche des modes sélectionnés pour les ondes de sillage au chapitre 2, il est, ici aussi, peu sensible à la variation du nombre de Reynolds, les spectres du chapitre 2 étant déjà similaires malgré la variation du nombre de Reynolds dans le cas sillage.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilité linéaire de trois faisceaux d'ondes internes stationnaires. Ces faisceaux sont obtenus par simulations non-linéaires où la solution est rendue stationnaire par la méthode de relaxation appelée (*selective frequency damping*). Nous étudions l'opérateur linéarisé de l'écoulement autour de ces faisceaux. En plus de la stabilité asymptotique, nous étudions les croissances transitoires à l'aide de l'opérateur adjoint de l'opérateur linéarisé par la méthode des aller retour (Corbett and Bottaro, 2000). Nous calculons alors le gain optimal pour des horizons temporels et montrons que le mécanisme d'instabilité susceptible de croître varie en fonction de l'horizon temporel optimisé. Nous identifions certains de ces mécanismes comme des instabilités triadiques décrites par la théorie des triades résonantes. Pour des temps longs les trois cas voient comme mécanisme optimal un mode triadique appartenant à la branche centrale  $C$  des triades résonantes, pour lequel au moins une des ondes filles est d'échelle plus grande que l'onde de base (l'autre étant si ce n'est plus grande, comparable). Pour des temps intermédiaires le faisceau  $\theta_0 = 47.27^\circ$  à faible nombre de Reynolds  $Re = 176$  conserve le même mode comme mécanisme de croissance transitoire optimale alors que le faisceau

à plus grand nombre de Reynolds  $Re = 1760$  ou le faisceau à même nombre de Reynolds  $Re = 176$  mais avec  $\theta_0 = 19.95^\circ$  développent un mode triadique appartenant à la branche externe  $E_2$  de la courbe résonante.

Nous traçons figure 4.20 le taux de croissance théorique prédit par la théorie des triades résonantes pour des ondes internes planes progressives ayant un nombre de Froude, un nombre de Reynolds et des périodes identiques aux ondes forcées pour l'obtention des faisceaux dans le premier cas ( $\theta_0 = 47.27^\circ$ ,  $Re = 176$ ) et dans le second cas ( $\theta_0 = 19.95^\circ$ ,  $Re = 176$ ).

Dans le premier cas  $\theta_0 = 47.27^\circ$ , le taux de croissance le plus élevé est détenu par un mode de la branche centrale  $C$  de la courbe résonante et c'est un mode de cette branche que nous avons identifié dans les perturbations et les réponses optimales aux temps intermédiaires et aux temps longs.

Dans le second cas  $\theta_0 = 19.95^\circ$ , le taux de croissance le plus élevé est détenu par un mode appartenant à la branche externe  $E_2$  de la courbe résonante. Cela est cohérent avec le fait que nous identifions, pour les faisceaux correspondant à ces ensembles de paramètres, un mode appartenant à la branche externe de la courbe résonante aux temps intermédiaires, alors qu'aux temps longs, ceux-ci sont dominés par un mode appartenant à la branche centrale  $C$ .

Le taux de croissance triadique pour une onde ayant un même jeu de paramètres que le troisième cas (même angle que le premier cas mais nombre de Reynolds 10 fois plus élevé) n'est pas affiché, mais de la même manière qu'au second cas, la branche  $E_2$  possède un mode ayant un taux de croissance temporel plus élevé que ceux des modes de la branche  $C$ .

Physiquement, cela veut dire que nous observons dans la croissance transitoire de l'écoulement hétérogène le mode temporel le plus instable du problème local où l'écoulement est homogène, par extension de l'écoulement local à l'infini (l'écoulement étant localement périodique). Dans le cas où c'est le mode triadique  $E_2$  qui est localement le plus instable (deuxième  $\theta_0 = 19.95^\circ$  et troisième  $Re = 1760$  cas), il domine le transitoire et la perturbation prend la forme d'un paquet d'onde advecté par l'écoulement. Ceci est l'indice d'une instabilité convective de la branche  $E_2$ . Aux temps longs, c'est dans tous les cas le mode local de la branche interne  $C$  qui apparaît, celle-ci étant, comme nous l'avons montré au chapitre 3, le mode absolument instable. Dans ce cas, aussi bien le taux de croissance global que la fréquence globale sont approximés par le taux de croissance absolu et la fréquence absolue mesurée au chapitre précédent. La comparaison donne :

$$\begin{aligned} \omega_i^G &= 4.13 \cdot 10^{-2} & \omega_{0i} &= 4.45 \cdot 10^{-2} \\ \omega_r^G &= 0.1367 & \omega_{0r} &= 0.1374 \end{aligned}$$

# Conclusion

Cette thèse est un supplément à l'étude et à la compréhension du phénomène d'ondes de gravité internes en milieux linéairement stratifiés. L'intérêt actuel (depuis quelques décennies déjà) étant son implication dans le mélange abyssal des océans selon un ensemble d'axes de recherches que l'on peut décomposer ainsi :

- création (source) des ondes ;
- propagation, réflexion, interaction ;
- déstabilisation ;
- contribution au mélange turbulent.

De ces différentes étapes, nous en avons étudié une, la déstabilisation, et nous avons montré l'influence sur les mécanismes d'instabilité de la forme et de la vitesse de déplacement du fluide par rapport aux sources de ces ondes. Le chapitre 2 étudie, d'abord dans le cadre idéalisé d'expériences numériques, le comportement d'ondes internes sous forme de faisceaux d'ondes, c'est à dire de paquets d'ondes possédant une taille limitée dans le fluide. Dans nos expériences numériques, ces faisceaux sont engendrés par une source idéalisée consistant en un forçage localisé, dans le volume, de notre fluide stratifié. Cette méthode s'apparente à imposer les conditions aux limites sur un bord en mouvement par une méthode de pénalisation. La réalisation pour de forts déplacements d'un tel forçage serait expérimentalement délicate, mais son intérêt provient de sa généralité. Tout mécanisme capable de produire des ondes de gravité dans l'océan, engendre des faisceaux d'ondes dont la forme sera proche de ceux que nous étudions numériquement. Physiquement, quel que soit le mécanisme de production, il privilégie un référentiel particulier où son action est stationnaire, référentiel défini par sa vitesse par rapport au fluide. Dans les océans, le mouvement de l'eau par rapport à la bathymétrie dû aux courant ou aux marées, représente une source d'ondes, et nous représentons ce mécanisme complexe en un ensemble de paramètres physiques qui inclut en particulier la vitesse moyenne du fluide par rapport à la source d'onde. Nous simulons dans nos expériences numériques le comportement d'une famille de faisceau d'onde de même fréquence, longueur d'onde et extension par rapport au fluide pour des vitesses moyennes différentes.

En étudiant cette famille, nous observons des propriétés de stabilité de faisceaux très différents en variant cette vitesse moyenne. Nous interprétons

ces résultats à l'aide d'une théorie de stabilité linéaire locale sans limites spatiales dans la limite asymptotique où l'amplitude de l'onde est faible (théorie des triades résonantes) et nous montrons que la forme de la déstabilisation des faisceaux est correctement décrite par cette théorie mais que le mode sélectionné dépend fortement de la vitesse moyenne du fluide par rapport au faisceau.

La théorie asymptotique utilisée, théorie des triades résonantes, est une théorie temporelle pour une onde de base uniforme et infinie, c'est à dire qu'elle nous renseigne linéairement sur la pulsation temporelle et la croissance exponentielle dans le temps d'une instabilité à un nombre d'onde donné, mais ne nous donne pas d'informations sur la croissance dans l'espace de l'instabilité ni sur la stabilité dite globale du faisceau d'onde fini. Nous calculons alors numériquement la réponse impulsionnelle au chapitre 3 d'une onde interne infinie afin de mesurer le développement spatial et temporel de toutes les instabilités. Ceci nous permet d'identifier plusieurs paquets d'ondes instables qui se déplacent à des vitesses différentes par rapport à l'onde de base ; le mode petite échelle correspondant aux branches dites externes de l'instabilité triadique ayant une vitesse de propagation du maximum presque identique à celle du fluide alors que le mode grande échelle associé à la branche dite interne de l'instabilité triadique se déplace à une vitesse du même ordre que la vitesse de phase horizontale de l'onde de base. Cela permet d'étendre à cet état de base périodique à deux dimensions les notions d'instabilité absolue et convective. Ainsi dans le cas où le faisceau d'onde interne de base est partout localement convectivement instable, des perturbations initiales peuvent croître mais se propager avec leurs propres vitesses et sortir de la surface occupée par le faisceau. Le faisceau sera alors globalement stable. Inversement, lorsque le faisceau est localement absolument instable dans une zone, un mode se développera et les caractéristiques de cette instabilité globale correspondront au mode avec le taux de croissance absolu le plus grand, ie. le mode qui apparaît sur le rayon de vitesse nulle dans la réponse impulsionnelle (dans le référentiel de la source). Quand le fluide a une vitesse moyenne faible par rapport à la source le mode petite échelle devrait être ainsi sélectionné alors que quand le fluide se déplace à une vitesse horizontale opposée à celle de l'onde de base comme dans le cas du sillage d'une montagne, le mode grande échelle devrait être sélectionné. Ces prévisions qualitatives fondées sur l'analyse de la réponse impulsionnelle d'une onde infinie correspondent qualitativement et quantitativement aux résultats de l'analyse de stabilité globale non-linéaire du chapitre 2 et fournissent ainsi l'explication du mécanisme de sélection de la fréquence et de la longueur d'onde du mode sélectionné.

Nous étudions la croissance transitoire autour d'un faisceau d'onde dans le sillage d'une topographie au chapitre 4 et nous parvenons à identifier les modes d'instabilités les plus efficaces en temps fini. Nous montrons que ces perturbations et réponses globales optimales mettent en jeu en temps intermédiaire les modes locaux les plus instables temporellement, qui, dans le cas où ils sont seulement convectivement instables, ne peuvent croître que pendant le temps que le paquet d'onde correspondant traverse tout le faisceau. Dans

le cas où l'onde de base est choisie de manière à ce que le mode local le plus instable temporellement soit de petite échelle, nous obtenons bien que celui-ci domine le transitoire. Le mode local grande échelle, qui est celui avec le taux de croissance absolu le plus grand, domine le comportement aux temps longs et définit le mode globalement instable. Dans l'océan, où des perturbations sont continuellement transportées dans le faisceau d'onde par l'écoulement moyen, les modes de croissance transitoire, correspondant aux modes localement convectivement instables, peuvent dominer la dynamique et être en compétition avec le mode global.

### **Le cas particulier de l'instabilité paramétrique sub-harmonique *PSI***

L'application aux océans profonds de tels résultats est loin d'être immédiate, cette étude montre néanmoins, que les concepts théoriques simples développés ici peuvent expliquer certaines observations. Ainsi, l'instabilité paramétrique sub-harmonique, cas particulier petite échelle dans l'approximation du fluide parfait des triades résonantes, qui est souvent considérée comme l'instabilité dominante des ondes internes, est apparue dans notre étude comme très sensible à la vitesse moyenne du fluide par rapport à la source des ondes. L'ajout d'un écoulement moyen, même faible, modifie l'échelle caractéristique de l'instabilité sélectionnée (mode global), pour passer d'une petite échelle (*PSI*) à une échelle de l'ordre de la longueur d'onde de l'onde du faisceau avec une fréquence de l'instabilité ne valant plus la moitié de la fréquence de l'onde du faisceau. Une variation dans l'échelle de l'instabilité aura des conséquences sur les mécanismes et l'efficacité de transfert d'énergie vers la turbulence et mélange. Une variation dans la fréquence de l'instabilité peut rendre la mesure de celle-ci plus ardue dans le contexte d'une campagne de mesure océanographique.

**Suites possibles de l'étude** Afin de compléter l'étude des croissances transitoires, il serait intéressant d'étendre l'analyse, non plus seulement au cas d'un faisceau de sillage mais à la famille complète d'écoulements calculée au chapitre 2. Cela requiert, d'abord la capacité de calculer un écoulement de base périodique en temps et non plus stationnaire, puis de calculer la perturbation linéarisée autour de cet écoulement périodique. Des tests préliminaires ont montré que cela pourrait être réalisable en ajoutant aux équations de la dynamique un terme de relaxation décalé en temps d'une période de l'écoulement de base  $T_0$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \dots + A(u(t) - u(t - T_0)). \quad (4.41)$$

Afin d'obtenir la croissance spatio-temporelle des instabilités autour d'une onde, nous utilisons la méthode de la réponse impulsionnelle, qui ne suppose rien sur la forme de l'instabilité, si ce n'est qu'elle est linéaire vis à vis de l'onde de base. Nous avons vérifié dans cette étude la justesse de la théorie triadique dans la description des instabilités et il serait raisonnable de ne conserver que les instabilités triadiques, et donc, au lieu de calculer l'ensemble des perturbations linéarisées, de se restreindre à la relation de dispersion triadique (avec

le développement spatial). Bien que l'écriture de ce problème soit non triviale, son intégration numérique serait moins coûteuse et donnerait accès à un résultat plus complet en évitant les problèmes de convergences décrits au chapitre 3.

**Suites possibles à l'étude** Hormis ces deux propositions, la suite doit étendre la physique de l'étude en modifiant les équations du système étudié pour y inclure la rotation (ondes gravito-inertielles). Dans ce cadre la même étude peut être réalisée et pourrait avoir des conclusions similaires tout en étant plus proche du cas réel des océans.

Toujours par soucis de réalisme, il serait probant d'engendrer nos faisceaux d'ondes par un mécanisme similaire à l'expérience de Aguilar et al. (2006). Parce que nous effectuons des simulations numériques directes des équations, nous pourrions notamment inclure des bathymétries réalistes (voir réelles) et tenter d'étendre les résultats de cette étude.

Enfin, cette étude étant motivée par la quantification du mélange turbulent associé aux ondes internes dans les océans abyssaux, les résultats que nous avons obtenus sur la forme des instabilités doivent avoir un impact sur le transfert d'énergie des ondes au mélange. L'étude de cette altération du mélange devrait être quantifiée numériquement et pourrait ensuite intervenir dans la paramétrisation du mélange dans les modèles de calcul des océans et du climat. Le mélange induit dans la colonne d'eau serait alors dépendant de la vitesse moyenne du courant dans celle-ci.

**Étude parallèle** Parmi les déstabilisations possibles des ondes internes, certaines sont grandes échelles et impliquent une longueur d'onde supérieure à la longueur d'onde de l'onde du faisceau. Nous avons montré comment les obtenir (faisceau de sillage) et pourquoi elle n'apparaissent pas dans les expériences réalisées précédemment (analyse spatio-temporelle et vitesses des instabilités). Nous en déduisons la forme de l'expérience qu'il faudrait réaliser pour observer ces instabilités. Dans l'expérience réalisée pour observer une instabilité triadique (Bourget et al., 2013, 2014) la source oscillante du faisceau d'onde possède une vitesse moyenne nulle par rapport au fluide et cette expérience pourrait être à nouveau réalisée en déplaçant à vitesse constante la source de l'onde et en modifiant, comme dans notre étude, sa fréquence pour compenser l'effet Doppler et garder localement la même onde. Le cas limite du sillage correspond au déplacement d'une source non-oscillante (une topographie) dans un fluide stratifié. Les expériences de ce type déjà réalisées (Aguilar et al., 2006) n'atteignent pas des amplitudes d'onde suffisantes au développement d'une instabilité (seuil visqueux) ; de telles amplitudes requièrent un temps de translation à vitesse constante, et donc une longueur de bassin très importante. Une solution consiste à engendrer un sillage d'onde dans un canal annulaire et non plus linéaire, dont la valeur élevée du rayon permet de négliger la courbure ainsi que la périodicité horizontale créée. Nous avons réalisé un dispositif dans ce sens et mené des expériences préliminaires où l'effet d'entraînement du fluide par dépôt de quantité de mouvement ne nous a pas encore permis

d'observer l'effet escompté. Une amélioration du dispositif est à l'étude pour limiter cet effet.





# Annexe A

## Dérivation des termes pour le calcul des résonances triadiques

Soit,

$$\psi = \varepsilon A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p \varepsilon^2 A_p(\mathbf{X}, T) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \quad (\text{A.1})$$

$$b = \varepsilon B_0(\mathbf{X}, T) \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p \varepsilon^2 B_p(\mathbf{X}, T) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_p = \mathbf{k}_p \mathbf{x} - \omega_p t, \quad (\text{A.3})$$

avec  $\mathbf{k}_p = (k_{xp}, k_{zp})$  le vecteur d'onde et les variables rapides  $\mathbf{x} = (x, z)$ ,  $t$  et les variables lentes  $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{x}$  et  $T = \varepsilon t$ .  $A_0$  est une constante. Aux solutions il faut ajouter les complexes conjugués qui sont ici omis pour des raisons de clarté.

Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial T} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial X} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y} \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

Nous utilisons la notation de dérivation  $\frac{\partial A_0}{\partial T} = A_{0,T}$ .

$$\psi_{,x} = \varepsilon i k_{x0} A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p (\varepsilon^2 i k_{xp} A_p + \varepsilon^3 A_{p,X}) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \quad (\text{A.8})$$

$$\psi_{,xx} = -\varepsilon k_{x0}^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p (-\varepsilon^2 k_{xp}^2 A_p + \varepsilon^3 2i k_{xp} A_{p,X}) \mathbf{e}^{i\phi_p} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (\text{A.9})$$

$$\psi_{,z} = \varepsilon i k_{z0} A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p (\varepsilon^2 i k_{zp} A_p + \varepsilon^3 A_{p,Z}) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \quad (\text{A.10})$$

$$\psi_{,zz} = -\varepsilon k_{z0}^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p (-\varepsilon^2 k_{zp}^2 A_p + \varepsilon^3 2i k_{zp} A_{p,Z}) \mathbf{e}^{i\phi_p} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -\varepsilon |k_0|^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} \\ &+ \sum_p (-\varepsilon^2 |k_p|^2 A_p + \varepsilon^3 2i(k_{xp} A_{p,X} + k_{zp} A_{p,Z})) \mathbf{e}^{i\phi_p} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{,x} &= -\varepsilon i k_{x0} |k_0|^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} \\ &+ \sum_p (-\varepsilon^2 i k_{xp} |k_p|^2 A_p - \varepsilon^3 2k_{xp}(k_{xp} A_{p,X} + k_{zp} A_{p,Z}) - \varepsilon^3 |k_p|^2 A_{p,X}) \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{,z} &= -\varepsilon i k_{z0} |k_0|^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} \\ &+ \sum_p (-\varepsilon^2 i k_{zp} |k_p|^2 A_p - \varepsilon^3 2k_{zp}(k_{xp} A_{p,X} + k_{zp} A_{p,Z}) - \varepsilon^3 |k_p|^2 A_{p,Z}) \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{,t} &= +\varepsilon i \omega_0 |k_0|^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} \\ &+ \sum_p (+\varepsilon^2 i \omega_p |k_p|^2 A_p + \varepsilon^3 2\omega_p(k_{xp} A_{p,X} + k_{zp} A_{p,Z}) - \varepsilon^3 |k_p|^2 A_{p,T}) \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{,tt} &= +\varepsilon \omega_0^2 |k_0|^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} \\ &+ \sum_p (+\varepsilon^2 \omega_p^2 |k_p|^2 A_p - \varepsilon^3 2i \omega_p^2(k_{xp} A_{p,X} + k_{zp} A_{p,Z}) + \varepsilon^3 2i \omega_p |k_p|^2 A_{p,T}) \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$b_{,x} = \varepsilon i k_{x0} B_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p (\varepsilon^2 i k_{xp} B_p + \varepsilon^3 B_{p,X}) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \quad (\text{A.17})$$

$$b_{,z} = \varepsilon i k_{z0} B_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p (\varepsilon^2 i k_{zp} B_p + \varepsilon^3 B_{p,Z}) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \quad (\text{A.18})$$

$$b_{,t} = -\varepsilon i \omega_0 B_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} + \sum_p (-\varepsilon^2 i \omega_p B_p + \varepsilon^3 B_{p,T}) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \quad (\text{A.19})$$

Puis viennent les Jacobiens :

$$\begin{aligned}
J(\Delta\psi, \psi) &= \Delta\psi_{,x}\psi_{,z} - \Delta\psi_{,z}\psi_{,x} \\
&= +\varepsilon^2 k_{x0}k_{z0}|k_0|^2 A_0^2 e^{2i\phi_0} - \varepsilon^2 k_{x0}k_{z0}|k_0|^2 A_0^2 e^{2i\phi_0} \\
&+ \sum_p \varepsilon^3 k_{x0}k_{zp}|k_0|^2 A_0 A_p e^{i(\phi_0+\phi_p)} \\
&+ \sum_p \varepsilon^3 k_{xp}k_{z0}|k_p|^2 A_0 A_p e^{i(\phi_0+\phi_p)} \\
&- \sum_p \varepsilon^3 k_{z0}k_{xp}|k_0|^2 A_0 A_p e^{i(\phi_0+\phi_p)} \\
&- \sum_p \varepsilon^3 k_{zp}k_{x0}|k_p|^2 A_0 A_p e^{i(\phi_0+\phi_p)}, \\
&= \sum_p \varepsilon^3 ((k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp})(|k_0|^2 - |k_p|^2) \\
&A_0 A_p e^{i(\phi_0+\phi_p)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \tag{A.20}
\end{aligned}$$

et la dérivé temporelle :

$$\begin{aligned}
J(\Delta\psi, \psi)_{,t} &= - \sum_p \varepsilon^3 i(\omega_0 + \omega_p)((k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp})(|k_0|^2 - |k_p|^2) \\
&A_0 A_p e^{i(\phi_0+\phi_p)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(b, \psi) &= b_{,x}\psi_{,z} - b_{,z}\psi_{,x} \\
&= \sum_p \varepsilon^2 i k_{x0}k_{z0} B_0 A_0 e^{2i\phi_0} - \sum_p \varepsilon^2 i k_{z0}k_{x0} B_0 A_0 e^{2i\phi_0} \\
&- \sum_p \varepsilon^3 k_{x0}k_{zp} B_0 A_p e^{i(\phi_0+\phi_p)} \\
&+ \sum_p \varepsilon^3 k_{z0}k_{xp} B_p A_0 e^{i(\phi_0+\phi_p)} \\
&= \sum_p \varepsilon^3 (A_0 B_p - A_p B_0)(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp}) e^{i(\phi_0+\phi_p)}, \tag{A.22}
\end{aligned}$$

et la dérivé spatiale selon  $x$  :

$$\begin{aligned}
J(b, \psi)_{,x} &= \\
&\sum_p \varepsilon^3 i(k_{xp} + k_{x0})(A_0 B_p - A_p B_0)(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp}) e^{i(\phi_0+\phi_p)}. \tag{A.23}
\end{aligned}$$

**Équation d'onde** Nous développons l'équation d'onde,

$$\Delta\psi_{,tt} + N^2\psi_{,xx} = J(\Delta\psi, \psi)_{,t} - J(b, \psi)_{,x}, \tag{A.24}$$

à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  :

$$\omega_0^2 |k_0|^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} - N^2 k_{x0}^2 A_0 \mathbf{e}^{i\phi_0} = 0, \quad (\text{A.25})$$

où l'on retrouve la relation de dispersion des ondes internes appliquée à l'onde primaire, et à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  :

$$\sum_p \omega_p^2 |k_p|^2 A_p \mathbf{e}^{i\phi_p} - N^2 \sum_p k_{xp}^2 A_p \mathbf{e}^{i\phi_p} = 0. \quad (\text{A.26})$$

En définissant un produit scalaire  $\langle f, g \rangle$  comme :

$$\langle f, g \rangle = \int \int f g^* dt d\mathbf{x}, \quad (\text{A.27})$$

et en prenant le produit scalaire entre les termes de l'équation A.26 et  $\mathbf{e}^{i\alpha}$ , nous obtenons un résultat non nul uniquement si  $\mathbf{e}^{i\phi_p} = \mathbf{e}^{i\alpha}$ . Ainsi l'équation A.26 devient :

$$\omega_p B_p \mathbf{e}^{i\phi_p} - N^2 k_{xp} A_p \mathbf{e}^{i\phi_p} = 0, \quad (\text{A.28})$$

soit la relation de dispersion des ondes internes, cette fois appliquée aux perturbations qui sont donc des ondes internes et que nous appellerons ondes secondaires.

Vient à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  :

$$\begin{aligned} & \sum_p (-2i\omega_p^2 (k_{xp} A_{p,X} + k_{zp} A_{p,Z}) + 2i\omega_p |k_p|^2 A_{p,T}) \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ & + \sum_p N^2 2i k_{xp} A_{p,X} \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ = & - \sum_p i(\omega_0 + \omega_p) (k_{x0} k_{zp} - k_{z0} k_{xp}) (|k_0|^2 - |k_p|^2) A_0 A_p \mathbf{e}^{i(\phi_0 + \phi_p)} \\ & - \sum_p i(k_{x0} + k_{xp}) (A_0 B_p - A_p B_0) (k_{x0} k_{zp} - k_{z0} k_{xp}) \mathbf{e}^{i(\phi_0 + \phi_p)}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

dont nous réorganisons les termes de gauche :

$$\begin{aligned} & \sum_p (-2i\omega_p^2 (k_{xp} A_{p,X} + k_{zp} A_{p,Z}) + 2i\omega_p |k_p|^2 A_{p,T}) \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ & + \sum_p N^2 2i k_{xp} A_{p,X} \mathbf{e}^{i\phi_p} \\ = & \sum_p (2i\omega_p |k_p|^2 A_{p,T} + 2i ((N^2 - \omega_p^2) k_{xp} A_{p,X} - \omega_p^2 k_{zp} A_{p,Z})) \mathbf{e}^{i\phi_p}, \end{aligned}$$

et grâce à la relation de dispersion A.25 nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&= \sum_p \left( 2i\omega_p |k_p|^2 A_{p,T} + 2i \left( \frac{N^2 k_{zp}^2}{|k_p|^2} k_{xp} A_{p,X} - \omega_p^2 k_{zp} A_{p,Z} \right) \right) \mathbf{e}^{\phi_p}, \\
&= \sum_p \left( 2i\omega_p |k_p|^2 A_{p,T} + 2i\omega_p^2 k_{zp} \left( \frac{N^2 k_{zp}}{\omega_p^2 |k_p|^2} k_{xp} A_{p,X} - A_{p,Z} \right) \right) \mathbf{e}^{\phi_p}, \\
&= \sum_p \left( 2i\omega_p |k_p|^2 A_{p,T} + 2i\omega_p^2 k_{zp} \left( \frac{k_{zp}}{k_{xp}} A_{p,X} - A_{p,Z} \right) \right) \mathbf{e}^{\phi_p}, \\
&= \sum_p 2i\omega_p |k_p|^2 \left( A_{p,T} + \frac{\omega_p k_{zp}}{|k_p|^2} \left( \frac{k_{zp}}{k_{xp}}, -1 \right) \cdot \mathbf{Grad}(A_p) \right) \mathbf{e}^{\phi_p},
\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{Grad}(A_p) = (A_{p,X}, A_{p,Z})$ . On remarque que l'on retrouve la vitesse de groupe des ondes internes en facteur du gradient selon les variables lentes de l'amplitude. Nous réorganisons ensuite les termes de droites :

$$\begin{aligned}
&- \sum_p i(\omega_0 + \omega_p)(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp})(|k_0|^2 - |k_p|^2) A_0 A_p \mathbf{e}^{i(\phi_0 + \phi_p)} \\
&- \sum_p i(k_{x0} + k_{xp})(A_0 B_p - A_p B_0)(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp}) \mathbf{e}^{i(\phi_0 + \phi_p)} \\
&= \sum_p i(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp}) \left( (|k_p|^2 - |k_0|^2)(\omega_0 + \omega_p) A_0 A_p + (k_{x0} + k_{xp})(A_0 B_p - A_p B_0) \right) \mathbf{e}^{i(\phi_0 + \phi_p)},
\end{aligned}$$

ce qui, avec la relation de polarisation, donne :

$$\sum_p i(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp}) \left( (|k_p|^2 - |k_0|^2)(\omega_0 + \omega_p) + (k_{x0} + k_{xp})N^2 \left( \frac{k_{xp}}{\omega_p} - \frac{k_{x0}}{\omega_0} \right) \right) A_0 A_p \mathbf{e}^{i(\phi_0 + \phi_p)}. \quad (\text{A.30})$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
&\sum_q 2i\omega_q |k_q|^2 \left( A_{q,T} + \frac{\omega_q k_{zq}}{|k_q|^2} \left( \frac{k_{zq}}{k_{xq}}, -1 \right) \cdot \mathbf{Grad}(A_q) \right) \mathbf{e}^{\phi_q} \\
&= \sum_p i(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp}) \left( (|k_p|^2 - |k_0|^2)(\omega_0 + \omega_p) + (k_{x0} + k_{xp})N^2 \left( \frac{k_{xp}}{\omega_p} - \frac{k_{x0}}{\omega_0} \right) \right) A_0 A_p \mathbf{e}^{i(\phi_0 + \phi_p)},
\end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

dont le produit scalaire avec  $\mathbf{e}^{i\phi_q}$  nous donne la relation triadique :

$$\phi_0 + \phi_p = \phi_q, \quad (\text{A.32})$$

et  $\forall x, t$  :

$$k_{x0} + k_{xp} = k_{xq}, \quad (\text{A.33})$$

$$k_{z0} + k_{zp} = k_{zq}, \quad (\text{A.34})$$

$$\omega_0 + \omega_p = \omega_q, \quad (\text{A.35})$$

conditions nécessaires à l'existence de solutions résonantes. Ces solutions résonantes sont l'interaction de deux ondes secondaires avec l'onde primaire ; elles impliquent trois ondes et sont appelées triades résonantes.

**Remarque, choix de la relation triadique** Selon le terme choisi pour le produit scalaire, nous choisissons le terme parmi les 4 combinaisons incluant complexes conjugués qui sera résonant. Ici nous choisissons le terme parmi les 4 qui ne possède pas de complexe conjugué, d'où cette forme de la relation triadique.

Nous avons finalement les équations pour les amplitudes :

$$\begin{aligned} A_{q,T} + \frac{\omega_q k_{zq}}{|k_q|^2} \left( \frac{k_{zq}}{k_{xq}}, -1 \right) \cdot \mathbf{Grad}(A_q) \\ = \frac{(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp})}{2\omega_q |k_q|^2} \left( (|k_p|^2 - |k_0|^2)\omega_q + k_{xq}N^2 \left( \frac{k_{xp}}{\omega_p} - \frac{k_{x0}}{\omega_0} \right) \right) A_0 A_p, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

et en posant :

$$S_q = \frac{(k_{x0}k_{zp} - k_{z0}k_{xp})}{2\omega_q |k_q|^2} \left( (|k_p|^2 - |k_0|^2)\omega_q + k_{xq}N^2 \left( \frac{k_{xp}}{\omega_p} - \frac{k_{x0}}{\omega_0} \right) \right), \quad (\text{A.37})$$

le coefficient de couplage et :

$$\mathbf{C}_q = \frac{\omega_q k_{zq}}{|k_q|^2} \left( \frac{k_{zq}}{k_{xq}}, -1 \right), \quad (\text{A.38})$$

la vitesse de groupe, nous écrivons les équations aux amplitudes comme :

$$A_{q,T} + \mathbf{C}_q \cdot \mathbf{Grad}(A_q) = S_q A_p A_0, \quad (\text{A.39})$$

ou encore pour une triade :

$$\begin{aligned} A_{1,T} + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{Grad}(A_1) &= S_1 A_2 A_0, \\ A_{2,T} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{Grad}(A_2) &= S_2 A_1 A_0. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

**Développement spatio-temporel** On suppose maintenant une forme pour les amplitudes dépendante des variables lentes :

$$A_1(X, T) = a_1 \mathbf{e}^{i(\mathbf{K}\mathbf{X} - \Omega T)}, \quad (\text{A.41})$$

$$A_2(X, T) = a_2 \mathbf{e}^{i(\mathbf{K}\mathbf{X} - \Omega T)}, \quad (\text{A.42})$$

où  $\Lambda$  est le taux de croissance du paquet d'onde  $(A_1, A_2)$ ,  $\Omega$  sa fréquence temporelle et  $\mathbf{K}$  sa fréquence spatiale.

Les équations d'amplitude deviennent :

$$\Omega A_1 + i\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{K} A_1 = S_1 A_2 A_0, \quad (\text{A.43})$$

$$\Omega A_2 + i\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{K} A_2 = S_2 A_1 A_0, \quad (\text{A.44})$$

que l'on résout :

$$(\Omega + i\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{K})(\Omega + i\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{K}) = S_1 S_2 A_0^2, \quad (\text{A.45})$$

donnant l'équation du seconde degrés en  $\Omega$  :

$$\Omega^2 + \Omega i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) - (|\mathbf{K}|^2 \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + S_1 S_2 |A_0|^2) = 0. \quad (\text{A.46})$$

La solution de ce polynôme nous donne la fréquence :

$$\Omega_r = \frac{(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)}{2} \cdot \mathbf{K} \quad (\text{A.47})$$

et le taux de croissance :

$$\Omega_i = \sqrt{S_1 S_2 |A_0|^2 - |K|^2 \left( \frac{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2}{2} \right)^2} \quad (\text{A.48})$$





# Annexe B

## Fonction de forme pour les masques de forçage et d'éponge

Nous décrivons ici la fonction de forme  $\mathcal{F}(\zeta, \zeta_0, d)$  utilisée au chapitre 2 pour les masques de forçage et d'éponge. Ces fonctions sont décrites dans Hogberg and Henningson (1998). La fonction  $\mathcal{F}(\zeta, \zeta_0, d)$  passe doucement de 1 en  $\zeta = \zeta_0$  à 0 en  $\zeta = \zeta_0 + d$  et ses dérivées s'annulent en  $\zeta = \zeta_0$  et en  $\zeta = \zeta_0 + d$ .

$$\mathcal{F}(\zeta, \zeta_0, d) = 1 / \left( 1 + e^{\frac{d}{\zeta_0 - \zeta} + \frac{d}{\zeta_0 + d - \zeta}} \right) \quad (\text{B.1})$$

### Éponge

$$M_s(x, z) = \max(M_s^x, M_s^z),$$

avec

$$\begin{array}{ll} M_s^x(x, z) = & \\ 1 & \text{for } -L < x < -L + l \\ \mathcal{F}(x, -L + l, \delta) & \text{for } -L + l < x < -L + l + \delta \\ 0 & \text{for } \delta - L + l < x < L - l - \delta \\ \mathcal{F}(-x, -L + l, \delta) & \text{for } -\delta + L - l < x < L - l \\ 1 & \text{for } L - l < x < L \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} M_s^z(x, z) = & \\ 1 & \text{for } -H < z < -H + h \\ \mathcal{F}(z, -H + h, \lambda) & \text{for } -H + h < z < -H + h + \gamma \\ 0 & \text{for } \gamma - H + h < z < H - h - \gamma \\ \mathcal{F}(-z, -H + h, \lambda) & \text{for } -\gamma + H - h < z < H - h \\ 1 & \text{for } H - h < z < H \end{array}$$

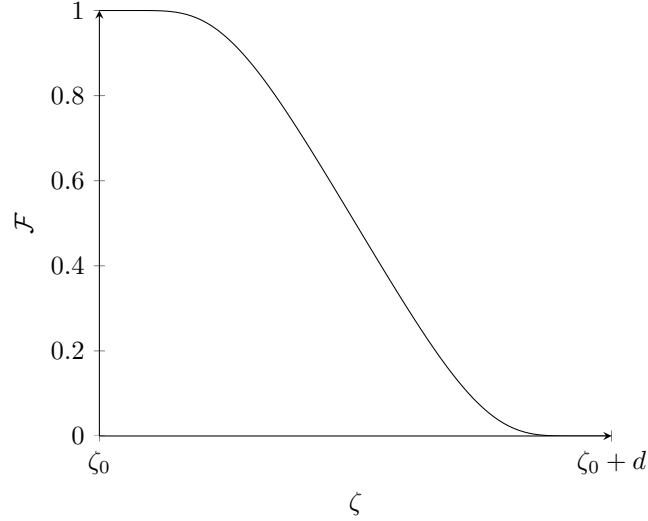


FIG. B.1 : Fonction de forme utilisée pour les masques de forçage et d'éponge dans le chapitre 2.

où  $l, h$  sont les épaisseurs horizontales et verticales de la zone éponge valant 1 et  $\delta, \gamma$  sont les épaisseurs horizontales et verticales des zones de transition où la fonction passe de 0 à 1.

### Forçage

$$M_f(x, z) = \min(M_f^x, M_f^z)$$

De manière à avoir les isocontours du masque parallèles à la vitesse de groupe de l'onde primaire dans le référentiel source (du générateur), nous introduisons la variable :

$$\bar{x}_f(z) = x_f + (z - z_f) \frac{\sin^2 \theta_0 - U_\infty}{\sin \theta_0 \cos \theta_0}$$

avec  $(x_f = 0, z_f)$  le centre la zone de forçage,  $\theta_0$  l'angle du vecteur d'onde de l'onde primaire forcée et  $U_\infty$  la vitesse de l'écoulement de fond.

$$M_f^x(x, z) = \begin{array}{ll} 0 & \text{for } x < \bar{x}_f - l_f - \delta_f \\ \mathcal{F}(-x + \bar{x}_f, l_f, \delta_f) & \text{for } \bar{x}_f - l_f - \delta_f < x < \bar{x}_f - l_f \\ 1 & \text{for } \bar{x}_f - l_f < x < \bar{x}_f + l_f \\ \mathcal{F}(x - \bar{x}_f, l_f, \delta_f) & \text{for } \bar{x}_f + l_f < x < \bar{x}_f + l_f + \delta_f \\ 0 & \text{for } \bar{x}_f + l_f + \delta_f < x \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
0 & \text{for } z < z - h_f - \gamma_f \\
\mathcal{F}(-z + z_f, h_f, \gamma_f) & \text{for } z - h_f - \gamma_f < z < z - h_f \\
1 & \text{for } z - h_f < z < z + h_f \\
\mathcal{F}(z - z_f, h_f, \gamma_f) & \text{for } z + h_f < z < z + h_f + \gamma_f \\
0 & \text{for } z + h_f + \gamma_f < z
\end{array}$$

où  $l_f$  et  $h_f$  sont la largeur et la hauteur de la zone de forçage alors que  $\delta_f$  et  $\gamma_f$  sont les épaisseurs horizontales et verticales des régions de transition où le masque passe de 0 à 1.



## Annexe C

# Algorithme de calcul des modes propres dominants d'Arnoldi–Krylov

Détail de l'algorithme d'Arnoldi-Krylov utilisé. Celui-ci consiste à identifier les modes propres dominants d'un opérateur grâce à une série d'images de cet opérateur.

Soit  $S(i)$  le vecteur d'état à l'instant  $i$ ,  $S(i)$  contient les champs de vitesses et de flottabilité. Soit  $S$ , le sous-espace de Krylov de dimension  $N$  contenant les vecteurs d'états de l'instant  $n$  à  $n+N$ . Nous définissons  $A$  le sous-opérateur tel que  $S(i+1) = AS(i)$ .  $Q$  est une base orthogonale de  $S$  et  $R$  est l'image de  $S$  dans la base  $Q$ , soit  $S(i) = QR(i)$ . L'algorithme d'ortho-normalisation QR consiste à projeter sur l'hyperplan orthogonal au premier vecteur d'état, l'ensemble des vecteurs d'états suivants, à normaliser les vecteur d'états projetés puis à répéter avec la deuxième vecteur d'état (qui a déjà été projeté une fois), puis le troisième... jusqu'à obtenir une base ortho-normale de notre sous-espace.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}S(i) &= QR(i), \\AS(i) &= AQR(i), \\S(i+1) &= AQR(i),\end{aligned}$$

mais

$$S(i+1) = QR(i+1),$$

et ainsi (l'indice n'est là que pour marquer le décalage)

$$\begin{aligned}AQR(i) &= QR(i+1), \\AQ &= QR(i+1)R^{-1}(i), \\Q^{-1}AQ &= R(i+1)R^{-1}(i).\end{aligned}$$

Nous définissons  $H$  la matrice de Hessenberg telle que  $H = Q^{-1}AQ$  (décomposition de Schur) et nous avons  $H = R(i+1)R^{-1}(i)$ . Nous perdons la dernière colonne puisque pour  $N$  vecteurs d'états nous avons  $N-1$  images de

ces vecteurs par  $A$ . Nous calculons ensuite les modes propres de  $H$ , que nous reprojets avec  $Q$ . Ainsi nous calculons les vecteurs propres de  $A$  sans l'exprimer, en utilisant seulement  $R$ , les coefficients des vecteurs d'états dans la base ortho-normale.

# Bibliographie

- Aguilar, D., Sutherland, B., and Muraki, D. (2006). Laboratory generation of internal waves from sinusoidal topography. *Deep-sea research part II-topical studies in oceanography*, 53(1-2) :96–115. International Conference on Ocean Mixing, Victoria, CANADA, OCT 11-14, 2004.
- Åkervik, E., Brandt, L., Henningson, D. S., Hoepffner, J., Marxen, O., and Schlatter, P. (2006). Steady solutions of the navier-stokes equations by selective frequency damping. *Physics of fluids*, 18(6) :068102.
- Alford, M., MacKinnon, J., Zhao, Z., Pinkel, R., Klymak, J., and Peacock, T. (2007). Internal waves across the pacific. *Geophysical Research Letters*, 34(24).
- Alford, M. H., Peacock, T., MacKinnon, J. A., Nash, J. D., Buijsman, M. C., Centuroni, L. R., Chao, S.-Y., Chang, M.-H., Farmer, D. M., Fringer, O. B., et al. (2015). The formation and fate of internal waves in the south china sea. *Nature*, 521(7550) :65–69.
- Barkley, D. and Henderson, R. (1996). Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 322 :215–241.
- Bell, T. (1975). Topographically generated internal waves in the open ocean. *Journal of Geophysical Research*, 80(3) :320–327.
- Benielli, D. and Sommeria, J. (1996). Excitation of internal waves and stratified turbulence by parametric instability. *Dynamics of atmospheres and oceans*, 23(1-4) :335–343.
- Benielli, D. and Sommeria, J. (1998). Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 374 :117–144.
- Bonneton, P., Chomaz, J., and Hopfinger, E. (1993). Internal waves produced by the turbulent wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 254 :23–40.
- Bourget, B., Dauxois, T., Joubaud, S., and Odier, P. (2013). Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves. *J. Fluid Mech.*, 723 :1–20.

- Bourget, B., Scolan, H., Dauxois, T., Le Bars, M., Odier, P., and Joubaud, S. (2014). Finite-size effects in parametric subharmonic instability. *J. Fluid Mech.*, 723 :1–20.
- Bouruet-Aubertot, P., Sommeria, J., and Staquet, C. (1995). Breaking of standing internal gravity waves through two-dimensional instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 285 :265–301.
- Bouruet-Aubertot, P., Sommeria, J., and Staquet, C. (1996). Stratified turbulence produced by internal wave breaking : two-dimensional numerical experiments. *Dynamics of atmospheres and oceans*, 23(1) :357–369.
- Boussinesq, J. (1903). *Théorie analytique de la chaleur, tome II*.
- Boyer, D., Davies, P., Fernando, H., and Zhang, X. (1989). Linearly stratified flow past a horizontal circular cylinder. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 328(1601) :501–528.
- Brighton, P. (1978). Strongly stratified flow past three-dimensional obstacles. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 104(440) :289–307.
- Carter, G. S. and Gregg, M. C. (2006). Persistent near-diurnal internal waves observed above a site of m 2 barotropic-to-baroclinic conversion. *Journal of physical oceanography*, 36(6) :1136–1147.
- Chomaz, J.-M. (2005). Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :357–392.
- Cooley, J. W. and Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90) :297–301.
- Corbett, P. and Bottaro, A. (2000). Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient. *Physics of Fluids*, 12(1) :120–130.
- Couder, Y., Chomaz, J., and Rabaud, M. (1989). On the hydrodynamics of soap films. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 37(1-3) :384–405.
- Dalziel, S. B., Patterson, M. D., Caulfield, C., and Le Brun, S. (2011). The structure of low-froude-number lee waves over an isolated obstacle. *J. of Fluid Mech.*, 689 :3–31.
- Dauxois, T. and Young, W. (1999). Near-critical reflection of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 390 :271–295.
- Davis, R. E. (1969). The two-dimensional flow of a stratified fluid over an obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, 36(01) :127–143.
- Deloncle, A., Billant, P., and Chomaz, J.-M. (2008). Nonlinear evolution of the zigzag instability in stratified fluids : a shortcut on the route to dissipation. *J. Fluid Mech.*, 599 :229–239.



- Drazin, P. (1977). Instability of an internal gravity-wave. *Proceedings of the Royal society of London series A-mathematical physical and engineering sciences*, 356(1686) :411–432.
- Egbert, G. D. (1997). Tidal data inversion : Interpolation and inference. *Progress in Oceanography*, 40(1) :53–80.
- Egbert, G. D. and Ray, R. D. (2001). Estimates of m2 tidal energy dissipation from topex/poseidon altimeter data. *Journal of Geophysical Research : Oceans*, 106(C10) :22475–22502.
- Egbert, G. D. and Ray, R. D. (2003). Semi-diurnal and diurnal tidal dissipation from topex/poseidon altimetry. *Geophysical Research Letters*, 30(17).
- Eric, K. and G. Llewellyn Smith, S. (2004). The role of small-scale topography in turbulent mixing of the global ocean. *Oceanography*, 17.
- Garrett, C. and Munk, W. (1975). Space-time scales of internal waves : A progress report. *Journal of Geophysical Research*, 80(3) :291–297.
- Gostiaux, L., Didelle, H., Mercier, S., and Dauxois, T. (2007). A novel internal waves generator. *Exp. Fluids*, 42(1) :123–130.
- Haney, J. C. (1987). Ocean internal waves as sources of small-scale patchiness in seabird distribution on the blake plateau. *The Auk*, 104(1) :129–133.
- Hasselmann, K. (1967). A criterion for nonlinear wave stability. *J. Fluid Mech.*, 30(4) :737–&.
- Hogberg, M. and Henningson, D. (1998). Secondary instability of cross-flow vortices in Falkner-Skan-Cooke boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 368 :339–357.
- Ince, E. L. (1949). Integration of ordinary differential equations.
- Julien, S., Chomaz, J.-M., and Lasheras, J.-C. (2002). Three-dimensional stability of periodic arrays of counter-rotating vortices. *Phys. Fluids*, 14(2) :732–743.
- Katija, K. and Dabiri, J. O. (2009). A viscosity-enhanced mechanism for biogenic ocean mixing. *Nature*, 460(7255) :624–626.
- Klostermeyer, J. (1982). On parametric-instabilities of finite-amplitude internal gravity-waves. *J. Fluid Mech.*, 119(JUN) :367–377.
- Klymak, J. M., Pinkel, R., Liu, C.-T., Liu, A. K., and David, L. (2006). Prototypical solitons in the South China Sea. *Geophys. Res. Lett.*, 33.
- Koudella, C. and Staquet, C. (2006). Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave. *J. Fluid Mech.*, 548 :165–196.

- Kuhlbrodt, T., Griesel, A., Montoya, M., Levermann, A., Hofmann, M., and Rahmstorf, S. (2007). On the driving processes of the atlantic meridional overturning circulation. *Reviews of Geophysics*, 45(2).
- Lee, Y., Muraki, D. J., and Alexander, D. E. (2006). A resonant instability of steady mountain waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 568 :303–327.
- Lombard, P. and Riley, J. (1996). Instability and breakdown of internal gravity waves .1. Linear stability analysis. *Phys. Fluids*, 8(12) :3271–3287.
- Long, R. R. (1955). Some aspects of the flow of stratified fluids. *Tellus*, 7(3) :341–357.
- MacKinnon, J. A., Alford, M. H., Sun, O., Pinkel, R., Zhao, Z., and Klymak, J. (2013). Parametric subharmonic instability of the internal tide at 29 n. *Journal of Physical Oceanography*, 43(1) :17–28.
- Manneville, P. (2004). *Instabilités, chaos et turbulence*. Editions Ecole Polytechnique.
- Marquet, O., Lombardi, M., Chomaz, J.-M., Sipp, D., and Jacquin, L. (2009). Direct and adjoint global modes of a recirculation bubble : lift-up and convective non-normalities. *Journal of Fluid Mechanics*, 622 :1–21.
- McEwan, A. (1971). Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *Journal of fluid mechanics*, 50(03) :431–448.
- McEwan, A. (1973). Interactions between internal gravity waves and their traumatic effect on a continuous stratification. *Boundary-layer meteorology*, 5(1) :159–175.
- McEwan, A. and Plumb, R. (1977). Off-resonant amplification of finite internal wave packets. *Dynamics of atmospheres and oceans*, 2(1) :83–105.
- McEwan, A. and Robinson, R. (1975). Parametric instability of internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 67(04) :667–687.
- Mercier, M. J., Martinand, D., Mathur, M., Gostiaux, L., Peacock, T., and Dauxois, T. (2010). New wave generation. *J. of Fluid Mech.*, 657 :308–334.
- Mied, R. (1976). Occurrence of parametric-instabilities in finite-amplitude internal gravity-waves. *J. Fluid Mech.*, 78 :763–784.
- Miles, J. W. and Huppert, H. E. (1968). Lee waves in a stratified flow. part 2. semi-circular obstacle. *Journal of Fluid Mechanics*, 33(04) :803–814.
- Millero, F. J. and Poisson, A. (1981). International one-atmosphere equation of state of seawater. *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*, 28(6) :625 – 629.

- Mowbray, D. and Rarity, B. (1967). A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *J. of Fluid Mech.*, 28(01) :1–16.
- Odell, G. M. and Kovasznay, L. S. (1971). A new type of water channel with density stratification. *Journal of Fluid Mechanics*, 50(03) :535–543.
- Paparella, F. and Young, W. (2002). Horizontal convection is non-turbulent. *Journal of Fluid Mechanics*, 466 :205–214.
- Peacock, T., Mercier, M. J., Didelle, H., Viboud, S., and Dauxois, T. (2009). A laboratory study of low-mode internal tide scattering by finite-amplitude topography. *Physics of Fluids (1994-present)*, 21(12) :121702.
- Phillips, O. (1967). The dynamic of the upper ocean, 2nd edition. *Cambridge University Press*.
- Polzin, K., Toole, J., Ledwell, J., and Schmitt, R. (1997). Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean. *Science*, 276(5309) :93–96.
- Rainville, L. and Pinkel, R. (2006). Propagation of low-mode internal waves through the ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 36(6) :1220–1236.
- Rosby, H. (1965). *On thermal convection driven by non-uniform heating from below : an experimental study*, volume 12.
- Schmid, P. J. and Henningson, D. S. (2012). *Stability and transition in shear flows*, volume 142. Springer Science & Business Media.
- Staquet, C. and Sommeria, J. (2002). Internal gravity waves : From instabilities to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34 :559–593.
- Sun, O. M. and Pinkel, R. (2013). Subharmonic energy transfer from the semidiurnal internal tide to near-diurnal motions over kaena ridge, hawaii. *Journal of Physical Oceanography*, 43(4) :766–789.
- Trefethen, L. N. and Bau III, D. (1997). *Numerical linear algebra*, volume 50. Siam.
- Tuckerman, L. S. and Barkley, D. (2000). Bifurcation analysis for timesteppers. In *Numerical methods for bifurcation problems and large-scale dynamical systems*, pages 453–466. Springer.
- Wunsch, C. (2002). What is the thermohaline circulation? *Science*, 298(5596) :1179–1181.
- Wunsch, C. and Ferrari, R. (2004). Vertical mixing, energy and the general circulation of the oceans. *Annual review of fluid mechanics*, 36 :281–314.

**Titre :** Stabilité d'une onde de gravité interne, analyse locale, globale et croissance transitoire.

**Mots clefs :** Mélange océanique profond, ondes de gravité internes, stabilité globale, stabilité locale, croissance transitoire

**Résumé :** Dans les océans profonds linéairement stratifiés, des ondes de gravité internes sont générées sur le plancher océanique. Ces ondes se propagent vers la surface et transportent de l'énergie sur de grandes distances; leur déstabilisation contribue probablement au mélange turbulent et à la circulation thermohaline. À l'aide de simulations numériques directes, linéaires et non-linéaires, nous étudions un faisceau d'ondes internes progressives et montrons que sa stabilité et sa croissance transitoire dépendent fortement du mécanisme de génération de l'onde. Il existe en effet deux mécanismes de génération d'une onde interne (ondes de marée ou de sillage), qui peuvent être discriminés par un seul paramètre de contrôle, le courant horizontal moyen. Ainsi, pour des courants de vitesse faible, des instabilités de petite échelle dominent (ondes de marée). Pour des courants forts, des instabilités de grande échelle dominent (ondes de sillage); néanmoins, des modes petites échelles peuvent dominer aux temps courts. Nous proposons une interprétation de ces résultats basée sur la théorie absolu/convectif appliquée au cas d'un écoulement périodique 2D, en étudiant la réponse impulsionnelle d'une onde interne progressive monochromatique. Nous montrons que les modes les plus instables sont bien décrits par la théorie classique de l'instabilité triadique, bien que le système soit loin des conditions idéales d'application de cette théorie.

**Title :** Internal gravity waves in the ocean: global and local stability analysis and computation of transient growth.

**Keywords :** Deep oceanic mixing, internal gravity waves, global stability, local stability, transient growth

**Abstract :** Internal gravity waves that exist in a linearly stratified fluid are particularly important in the deep ocean. Generated at the bottom of oceans, they transport energy over large distances. It is believed that their destabilization enhances turbulent mixing, a necessary ingredient to maintain the meridional oceanic circulation and the deep oceanic stratification. Through fully non-linear and linear direct numerical simulations, we show that the stability of a gravity wave beam, and its transient growth intensity, strongly depend on the generation mechanism. This mechanism can be described by a single control parameter: the horizontal mean flow. For small mean flows, small scale instabilities dominate, as for internal tides excited beams. For strong mean flows, large scale instabilities dominate as for Lee waves; however, small scales can dominate the short-times growth. By computing the linear impulse response of a monochromatic progressive internal wave, we propose an interpretation based on an absolute and convective theory applied to a 2D periodic flow. We show that most of the unstable modes are well described by the classical triadic instability theory, despite being far from the ideal conditions of its application.