



HAL
open science

Etude de tests du caractère quantique de systèmes de dimension supérieur à deux dans des conditions réalistes

Adel Sohbi

► **To cite this version:**

Adel Sohbi. Etude de tests du caractère quantique de systèmes de dimension supérieur à deux dans des conditions réalistes. Physique mathématique [math-ph]. Télécom ParisTech, 2016. Français. NNT : 2016ENST0083 . tel-01791819

HAL Id: tel-01791819

<https://pastel.hal.science/tel-01791819>

Submitted on 14 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



EDITE - ED 130

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

TELECOM ParisTech

Spécialité « Information Quantique »

présentée et soutenue publiquement par

Adel SOHBI

le 15 Décembre 2016

Étude de tests du caractère quantique de systèmes de dimension supérieure à deux dans des conditions réalistes.

Directeur de thèse : **Isabelle ZAQUINE & Damian MARKHAM**

Co-encadrement de la thèse : **Eleni DIAMANTI**

Jury

M. Nicolas BRUNNER, Professeur Associé, UNIGE, Université de Genève

Mme. Pérola MILMAN, Chargée de Recherche, MPQ, Université de Paris Diderot

M. Rémy MOSSERI, Directeur de Recherche, LPTMC, Université Pierre et Marie Curie

M. Serge MASSAR, Directeur de Recherche, LIQ, Université libre de Bruxelles

M. Nicolas TREPS, Professeur, LKB, Université Pierre et Marie Curie

Mme. Eleni DIAMANTI, Chargée de Recherche, LTCl, Télécom ParisTech

Mme Isabelle ZAQUINE, Professeur, LTCl, Télécom ParisTech

M. Damian MARKHAM, Chargé de Recherche, LTCl, Télécom ParisTech

Rapporteur

Rapporteur

Président

Examineur

Examineur

Directrice de thèse

Directrice de thèse

Encadrant de thèse

TELECOM ParisTech

école de l'Institut Mines-Télécom - membre de ParisTech

Remerciements

Tout d'abord je voudrais remercier ceux qui m'ont encadré durant mon doctorat, Isabelle Zaquine, Eleni Diamanti ainsi que Damian Markham. Ils ont porté une grande attention sur les avancées de mes travaux et ont su me guider quand j'en avais besoin. J'ai pu profiter de leur recule pour mener à bien mes recherches en théorie de l'information quantique.

Je tiens à remercier les membres du jury, Nicolas Brunner, Pérola Milman, Rémy Mosseri, Serge Massar, Nicolas Treps. Notamment Nicolas Brunner et Pérola Milman qui ont participé en tant que rapporteurs et Nicolas Treps qui a aussi été membre du jury de ma soutenance à mi-parcours avec Aslan Tchamkerten que je remercie.

De même, je souhaite remercier Mio Murao, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe à l'Université de Tokyo et qui a réussi avec les autres membres à me faire sentir comme un membre de l'équipe à part entière. Grâce à Akihito Soeda et Fabian Furrer j'ai pu développer, au sein de cette équipe, les connaissances qui m'ont permis de mener à bien mes recherches.

Je remercie aussi Mark Kaplan, Bill Plick et Tom Lawson pour l'aide qu'ils m'ont donné au sein de l'équipe à Télécom Paris Tech. Ils ont su me donner un regard extérieur et les conseils dont j'avais besoin.

Je voudrais remercier les personnes des laboratoires INFRES et LINCS avec qui j'ai passé de mémorables années. J'ai pu me sentir épanoui dans cet environnement et c'est grâce aux amis que je m'y suis fait que ces années ont été agréables à vivre.

Enfin je souhaite remercier ma mère et mon frère pour leurs sacrifices qui m'ont permis de mener à bien toutes mes années d'études dans le supérieur.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Table des matières | 3 |
| 1 Introduction | 1 |
| 2 Notions Préliminaires | 5 |
| 2.1 Notions Essentielles | 5 |
| 2.1.1 État Quantique | 5 |
| 2.1.2 Intrication | 7 |
| 2.1.3 État Symétrique | 8 |
| 2.1.4 Mesure d'un État Quantique | 12 |
| 2.2 Classifications des Corrélations | 13 |
| 2.2.1 Présentation du Problème | 13 |
| 2.2.2 Classification des Corrélations | 15 |
| 2.2.3 Tester la Non-localité | 17 |
| 2.2.4 Non-Localité des États Symétriques | 20 |
| 2.3 Contextualité | 21 |
| 2.3.1 Théorème de Bell-Kochen-Speker | 21 |
| 2.3.2 Représentation par Graphe | 22 |
| 2.3.3 Contextualité de type Indépendante de l'État | 24 |
| 2.3.4 Contextualité de type Dépendant de l'État | 25 |
| 2.3.5 Contextualité et Non-Localité | 28 |
| 2.4 Décohérence | 29 |
| 2.4.1 Opérations Quantiques : Le Formalisme des Opérateurs de Kraus | 29 |
| 2.4.2 Equation Maître Quantique : L'Équation de Lindblad | 30 |
| 2.4.3 Modèles d'Amortissements | 31 |
| 3 Les Effets de la Décohérence sur la Non-Localité des États Symé- | |
| triques | 35 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.1 | Méthode Générale | 36 |
| 3.2 | Résultats pour l'inégalité de Hardy | 38 |
| 3.2.1 | États de Dicke | 38 |
| 3.2.2 | États W | 43 |
| 3.2.3 | États Symétriques Maximale- ment Intriqués | 46 |
| 3.2.4 | États avec Différentes Dégénérescences | 48 |
| 3.3 | Comparatif des États Symétriques | 49 |
| 3.4 | Comparaison Entre les Tests de Non-Localité | 52 |
| 3.5 | Stratégie de Mesures | 54 |
| 3.5.1 | Amortissement de Phase | 54 |
| 3.5.2 | Amortissement d'Amplitude | 57 |
| 3.5.3 | Comparatif des modèles d'amortissement | 57 |
| 3.6 | Sensibilité à l'Équipement Expérimental | 58 |
| 3.7 | Étude de cas pratique : Utilisation des Tests de Non-localité pour la Discrimination de Classes de Dégénérescence d'États de Dicke | 60 |
| 3.8 | Résumé du Chapitre | 61 |
| 4 | Inégalité et Preuve Logique de Contextualité Pour Qudits | 63 |
| 4.1 | Extension du Paradoxe | 64 |
| 4.1.1 | Pentagone et Qudits | 64 |
| 4.1.2 | Approche Générale | 65 |
| 4.1.3 | Construction de la famille de graphes | 66 |
| 4.1.4 | Extension du paradoxe | 66 |
| 4.1.5 | Extension de l'inégalité de KCBS | 67 |
| 4.2 | Observation de la Contextualité avec des Ressources Quantiques | 68 |
| 4.2.1 | Vérification du Paradoxe | 68 |
| 4.2.2 | Construction de la Stratégie de Mesure | 70 |
| 4.2.3 | Violation de l'Extension de l'Inégalité de KCBS | 75 |
| 4.3 | Visualisation avec la Représentation de Majorana | 77 |
| 4.3.1 | Pentagone ($N = 5$) | 77 |
| 4.3.2 | Cas de $N = 7$ et $N = 8$ | 80 |
| 4.4 | Résumé du Chapitre | 82 |
| 5 | Aspects Expérimentaux de la Contextualité et Limitations | 83 |
| 5.1 | Test Expérimental de la Contextualité | 84 |
| 5.1.1 | Observation par l'Inégalité de KCBS | 84 |
| 5.1.2 | Extension à un Qudit | 88 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.2 | La Non Contextualité Ontologique | 89 |
| 5.2.1 | Approche Ontologique de la Non Contextualite | 89 |
| 5.2.2 | Extension de l'Inégalité de KCBS | 90 |
| 5.3 | Approche Expérimentale de l'Observation de la Non-Contextualité . . . | 91 |
| 5.3.1 | Pentagone et Inégalité de KCBS | 91 |
| 5.3.2 | Le cas du graphe à 6 sommets | 94 |
| 5.4 | Effet de la Décohérence sur l'Extension de l'Inégalité de KCBS | 99 |
| 5.5 | Résumé du Chapitre | 101 |
| 6 | Conclusion et Problèmes Ouverts | 103 |
| 6.1 | Résumé des Résultats | 103 |
| 6.2 | Problèmes Ouverts et Futures Directions. | 105 |
| | Bibliographie | 107 |

Chapitre 1

Introduction

La théorie de l'information a des applications dans de nombreux outils technologiques de pointe. Les avancées qui permettent l'application de cette théorie vont de pair avec la révolution numérique que nous connaissons aujourd'hui. Le 20ème siècle a aussi connu la découverte de la mécanique quantique. D'un point de vue pratique, la miniaturisation des technologies pour les applications de la théorie de l'information n'a été possible que par l'utilisation de la physique quantique. Mais aussi d'un point de vue théorique, il est possible d'exploiter certaines propriétés de la mécanique quantique dans la théorie de l'information : en effet, la théorie quantique de l'information généralise la théorie classique qui est utilisée actuellement pour les applications et offre des avantages, par exemple, pour la sécurisation des liens de communications mais aussi en informatique pour une meilleure puissance de calcul.

Les propriétés quantiques à la base de ces avantages sont le principe de superposition, qui implique que les résultats d'une mesure ne sont pas déterminés mais probabilistes, ou l'intrication quantique, phénomène où un système de plusieurs particules se comporte comme un système unique indépendamment des distances qui séparent ces particules.

Il existe d'autres propriétés qui seront mis en avant dans cette thèse. Un système de plusieurs particules distantes est dit non-local si son comportement ne peut pas être expliqué seulement par les propriétés de chacune des ses particules. La non-localité est née d'un débat philosophique sur le déterminisme des résultats de mesures de grandeurs physique en mécanique quantique. Einstein, Podolsky et Rosen ont soulevé ce problème dans le cas de l'intrication quantique en 1935 dans le paradoxe EPR [37]. Ce n'est qu'en 1964 qu'un physicien au nom de John Stewart Bell propose un théorème

qui est une formulation mathématique du paradoxe EPR [18]. Ce théorème permet de réfuter la localité qui est l'hypothèse nécessaire au paradoxe EPR. Enfin, il ouvre la voie à des tests expérimentaux du paradoxe EPR. La première preuve expérimentale est réalisée en 1982 par Alain Aspect [10], mais les limitations techniques des appareils de mesure n'ont pas permis de valider ce résultat. Il a fallu attendre fin 2015 pour avoir des preuves expérimentales [41, 48, 80].

La contextualité est une autre propriété qui généralise la non-localité et selon laquelle le résultat d'une mesure dépend du contexte dans lequel il a été obtenu. Elle fut découverte par Bell en 1966 [19] et Kochen-Specker en 1967 [58], et en 2008 un test est développé par Klyachko et al. [57] et est assez simple pour être vérifiable expérimentalement. Malgré tous les récents efforts, les applications sont encore peu connues et les tentatives d'observations expérimentales controversées. La contextualité a des avantages en puissance de calcul [7, 51, 79] et en cryptographie [49, 83].

La mécanique quantique a donné lieu au siècle dernier à des débats philosophiques fondamentaux. Même si toutes les questions n'ont pas été élucidées, aujourd'hui ses applications connaissent un essor très important en particulier dans le domaine de la théorie de l'information.

La communication entre deux utilisateurs, a beaucoup été étudiée et les propriétés non-locales des systèmes quantiques se révèlent être d'excellentes ressources pour de nombreux protocoles. L'étude d'états à plus de deux utilisateurs joue un rôle important que ce soit en calcul quantique ou en métrologie. Cela nécessite l'utilisation de plus de particules rendant ainsi la structure du système plus riche et complexe que dans le cas de deux particules. En particulier, la tolérance au bruit quantique (la décohérence) lors d'expérimentation est peu connue.

Cette thèse porte sur l'étude de test du caractère quantique de systèmes de dimension supérieure à deux dans des conditions réalistes. La structure du manuscrit est la suivante :

Le Chapitre 2 donne les notions essentielles pour comprendre les grands concepts utilisés dans cette thèse. Dans un premier temps les notions d'états quantiques, d'intrication et de mesure sont introduites. Dans la section 2.2 sont présentés deux types de méthodes (inégalité et preuve logique) pour détecter les corrélations non-locales

de systèmes séparés spatialement. La section 2.3 permet d'introduire le concept de contextualité ainsi que certains outils qui permettent de la détecter. Enfin dans la section 2.4 est introduit le concept de décohérence, ainsi que la méthode qui permet de la modéliser : les opérateurs de Kraus.

Le Chapitre 3 traite des effets de la décohérence sur l'observation de la non-localité de certains états quantiques : les états symétriques. Notre analyse se base sur le développement récent d'inégalités de Bell, dans le but de développer des critères pour tester la non-localité d'états qui peuvent être produits de manière expérimentale en conditions réelles. Nous comparons différentes configurations afin d'évaluer la plus avantageuse pour l'observation de la non-localité en présence de décohérence. L'idée est de fournir aussi un guide qui permet de déterminer si à priori une expérimentation va conduire à une observation de la non-localité, en prenant en compte les limitations de l'appareillage expérimentale.

Le Chapitre 4 présente une extension à de plus hautes dimensions des méthodes déjà existantes pour tester la contextualité. Nous proposons des états quantiques et des choix de mesures nécessaires à la preuve de contextualité. Enfin, nous utilisons une méthode de visualisation qui expose des symétries entre les états quantiques et les mesures impliquées.

Le Chapitre 5 propose une configuration expérimentale qui mettrait en oeuvre le test de contextualité développé dans le Chapitre 4. On utilise deux méthodes pour modéliser les défauts expérimentaux : la première, similaire à celle utilisée au Chapitre 3 applique des modèles de décohérence ; la seconde tente de remédier à de l'observation de la contextualité mais en contrepartie rend celle-ci plus difficile à observer.

Le Chapitre 6 résume les nouveaux résultats obtenus dans cette thèse et donne des questions ouvertes ainsi que des potentielles directions de recherche future.

Pour simplifier la lecture, chaque chapitre commence par une introduction afin de situer le contexte et se termine par un résumé des résultats obtenus.

Chapitre 2

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions de base dont nous avons besoin dans les chapitres suivants, ainsi que les notations et les définitions utilisées.

Dans la section 2.1, nous présentons des notions essentielles mais dont la thèse ne sera pas exactement le sujet. Chacune des sections suivantes donne une introduction sur différents concepts tels que : la non-localité (section 2.2), la contextualité (section 2.3) et la décohérence (section 2.4).

2.1 Notions Essentielles

Les notions présentées ici peuvent être retrouvées en détails dans l'ouvrage [73].

2.1.1 État Quantique

La mécanique quantique postule qu'un système physique est complètement décrit par un vecteur normé défini dans un espace de Hilbert, appelé espace des états. Cela amène à une des propriétés fondamentales de la physique quantique : le *principe de superposition*. De ce principe en découle le fait qu'un état quantique peut être décrit comme étant une superposition de plusieurs états quantiques. Par exemple, un état dit pur peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une base de l'espace de Hilbert dans lequel il est défini. Selon la notation de Dirac un état quantique est noté par un *ket*, $|\psi\rangle$ et son dual *bra*, $\langle\psi|$, vérifiant $|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1$. Un état mixte est un mélange statistique d'états purs $\{|\psi_i\rangle\}$ avec des probabilités respectives $\{p_i\}$. L'opérateur densité, appelé aussi *matrice densité*, ρ , est défini par l'équation suivante :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.1)$$

où $\sum_i p_i = 1$ et $p_i \geq 0$.

La théorie de l'information quantique généralise la théorie de l'information classique au monde quantique, où l'homologue du concept fondamental de *bit* est appelé *qubit*. À la différence d'un bit qui ne peut être qu'à l'état dit 0 ou à l'état dit 1, le qubit, grâce au principe de superposition, peut être une combinaison linéaire d'un état $|0\rangle$ et d'un état $|1\rangle$. Les qubits sont des états quantiques définis dans un espace de Hilbert de dimension 2 dont les vecteurs $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forment une base orthonormée. Un qubit, $|\psi_b\rangle$, peut être écrit de la manière suivante :

$$|\psi_b\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.2)$$

où $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$. Comme le qubit est un état quantique, il est normalisé, donc α et β vérifient : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

L'équation 2.2 peut être aussi écrite de manière équivalente comme :

$$|\psi_b\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (2.3)$$

où θ et ϕ décrivent un point sur une sphère unité où θ est l'angle d'inclinaison et ϕ est l'angle azimuthal par rapport aux axes représentés dans la figure 2.1. Cette sphère où est représenté le qubit est communément appelée sphère de Bloch.

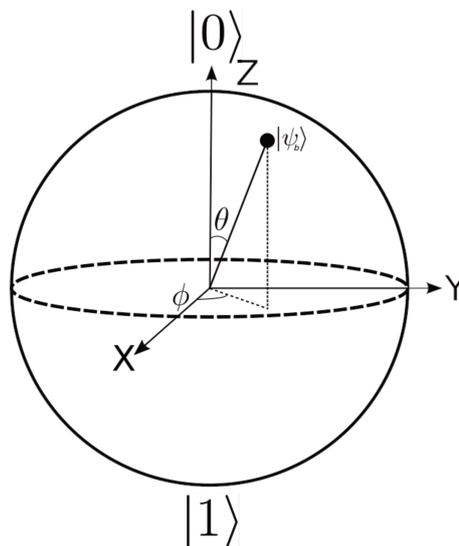


FIGURE 2.1 Représentation graphique de la sphère de Bloch, où le pôle nord représente l'état $|0\rangle$ et le pôle sud $|1\rangle$. La condition de normalisation impose qu'un qubit se trouve sur la surface de la sphère de Bloch. Sur la sphère de Bloch, deux vecteurs orthogonaux sont opposés (par exemple $|0\rangle$ et $|1\rangle$).

Le concept de qubit, système à deux niveaux, peut être généralisé à un système

à d niveaux : le *qudit*. Soit $|\psi_d\rangle$ un qudit défini dans un espace de Hilbert, \mathcal{H}_d , de dimension d . $|\psi_d\rangle$ peut être écrit de la forme suivante :

$$|\psi_d\rangle = \sum_{k=0}^{d-1} c_k |k\rangle, \quad (2.4)$$

où $c_k \in \mathbb{C}$. Un qudit est donc défini par un ensemble de d coefficients complexes $\{c_k\}$ qui vérifient $\sum_k |c_k|^2 = 1$ pour la normalisation du qudit.

La *fidélité* est un outil en information quantique qui permet de mesurer la distance entre deux états quantiques, mais n'est pas à proprement parler une métrique. La fidélité peut s'écrire sous différentes formes, en fonction de la pureté des états quantiques. Entre un état pur, $|\psi\rangle$, et un état arbitraire sous la forme de sa matrice densité ρ , la fidélité s'écrit comme :

$$F(|\psi\rangle, \rho) = \sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle}. \quad (2.5)$$

Étant donné que la fidélité fait intervenir le produit scalaire, si les deux états quantiques comparés sont identiques alors elle est égale à 1, dans l'autre cas extrême, si l'état ρ n'a aucune composante selon l'état pur $|\psi\rangle$ alors la fidélité entre les deux états sera égale à 0.

2.1.2 Intrication

Les systèmes quantiques peuvent être composés de plusieurs sous-systèmes, chacun décrit par son propre état quantique et son espace de Hilbert. Le produit tensoriel est l'outil mathématique qui permet de décrire un système à partir de sous-systèmes. Par exemple, considérons deux états quantiques purs $|\psi_A\rangle$ et $|\psi_B\rangle$ et leurs espaces de Hilbert respectifs \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B . L'espace de Hilbert, \mathcal{H} , du système global est donné par le produit tensoriel $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Pour l'état quantique du système global, un état pur, $|\psi\rangle$, est appelé séparable si il peut être décomposé sous la forme suivante :

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \quad (2.6)$$

Pour décrire cette propriété pour les états mixtes, il faut utiliser la matrice densité. Un état mixte, ρ , est séparable si [87] :

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{A,i} \otimes \rho_{B,i}, \quad (2.7)$$

c'est-à-dire que tous les états purs du mélange statistique de l'état mixte doivent

vérifier le critère de séparabilité évoqué dans l'équation 2.6.

Un état quantique est dit *intriqué* s'il ne peut être écrit sous la forme de 2.6 ou 2.7.

Un état *multipartite* est un état quantique de plus de deux sous-systèmes. L'intrication d'un état multipartite est plus complexe que l'intrication d'un état à deux sous-systèmes, appelé état *bipartite*. En effet, dans le cas bipartite il y a intrication ou non, alors que dans le cas multipartite il existe aussi la notion de séparabilité partielle. Par exemple un état quantique composé de trois qubits peut éventuellement avoir deux de ses sous systèmes intriqués alors que le troisième sous-système peut être écrit de manière séparé des deux autres sous systèmes. Pour un état pur on a alors : $|\psi\rangle = |\psi_{AB}\rangle \otimes |\psi_C\rangle$.

On pourra se référer à l'article [50] pour plus de détails sur l'intrication des états quantiques.

2.1.3 État Symétrique

Pour un système multipartite de n sous-systèmes, un état est dit *symétrique* si il est invariant par permutation de ses sous-systèmes. Nous utilisons deux représentations spécifiques aux états symétriques, la représentation de *Dicke* et la représentation de *Majorana*.

Représentation de Dicke

La première représentation est la représentation de Dicke. Un état de Dicke est un état quantique qui s'écrit sous la forme :

$$|S(n, k)\rangle = \binom{n}{k}^{-\frac{1}{2}} \sum_{perm} |\underbrace{0\dots 0}_{n-k} \underbrace{1\dots 1}_k\rangle. \quad (2.8)$$

Un état de Dicke est une superposition équiprobable d'états quantique de n qubits dont k sont égaux à $|1\rangle$ et $n - k$ des qubits sont égaux à $|0\rangle$. On peut interpréter un état de Dicke comme un état quantique de n modes avec k excitations.

Un état symétrique de n qubits, $|\psi_{sym}\rangle \in \mathcal{H}_2^{\otimes n}$, peut toujours être écrit sous la forme :

$$|\psi_{sym}\rangle = \sum_{k=0}^n c_k |S(n, k)\rangle. \quad (2.9)$$

Les coefficients $\{c_k \in \mathbb{C}\}$ sont les coordonnées d'un état symétrique dans cette base.

Les états de Dicke forment une base orthonormée du sous-espace des états symétriques à n qubits. Dans ce cas, l'état symétrique est décrit par les $n + 1$ coefficients complexes, $\{c_k\}$.

Représentation de Majorana

La seconde représentation, dite représentation de Majorana introduite dans [67], considère n qubits, $\{\eta_i\}$, $i \in \{1, n\}$, sur la sphère de Bloch appelés points de Majorana (MP). Dans cette représentation, l'état quantique, $|\psi_{sym}\rangle$, est exprimé comme une somme sur toutes les permutations du produit tensoriel des points de Majorana $\{\eta_i\}$. L'état quantique $|\psi_{sym}\rangle$ peut être écrit comme :

$$|\psi\rangle = K \sum_{perm} |\eta_1 \dots \eta_n\rangle, \quad (2.10)$$

où K est un facteur de normalisation. Chaque point de Majorana est défini par deux paramètres (nombres réels), correspondant aux angles sur la sphère de Bloch. En ajoutant la constante de normalisation, on obtient bien le même nombre de paramètres que dans le cas de la représentation de Dicke. La représentation des points de Majorana sur la sphère de Bloch fournit une représentation géométrique d'un état symétrique de n qubits.

Pour passer de la représentation de Majorana à celle de Dicke il suffit de décrire chacun des points de Majorana dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Passer de la représentation de Dicke à la représentation de Majorana nécessite de résoudre un polynôme appelé *polynôme de Majorana* [20, 68].

Dégénérescence

Il est important de préciser que les points de Majorana ne sont pas forcément tous distincts. Cela nous mène à définir la *configuration de dégénérescence* d'un état symétrique comme la liste des nombres d'occurrence des points de Majorana [16]. La dégénérescence d est le nombre le plus grand de cette liste. Il n'est pas possible de changer la configuration de dégénérescence d'un état quantique par des opérations stochastiques locales et des communications classiques (SLOCC) [16]. Cette configuration constitue donc une classification de l'intrication des états symétriques. Elle admet un nombre fini de classes pour les états quantiques dont le nombre de qubits, n est inférieur ou égal à 4.

Exemples d'États Symétriques

Nous présentons les exemples d'états symétriques sur lesquels porte notre étude :

- Les états W sont des états de Dicke pour lesquels $k = 1$.

$$|W_n\rangle = |S(n, 1)\rangle. \quad (2.11)$$

- Des états symétriques maximalelement intriqués par rapport à la mesure géométrique de l'intrication [11]. Cette mesure de l'intrication est la distance entre l'état quantique intriqué considéré et l'état séparable le plus proche [81]. Une particularité des ces états est que leurs points de Majorana forment les solides de Platon : le tétraèdre (4 qubits), l'octaèdre (6 qubits) et le cube (8 qubits). Le tétraèdre (figure 2.2) est un état à 4 qubits :

$$|T\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|S(4, 0)\rangle + \sqrt{2}|S(4, 3)\rangle). \quad (2.12)$$

Ses 4 points de Majorana sont :

- $|\eta_1\rangle = |0\rangle$,
- $|\eta_{2,3,4}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + e^{i\xi}\sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$, avec $\xi \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$.

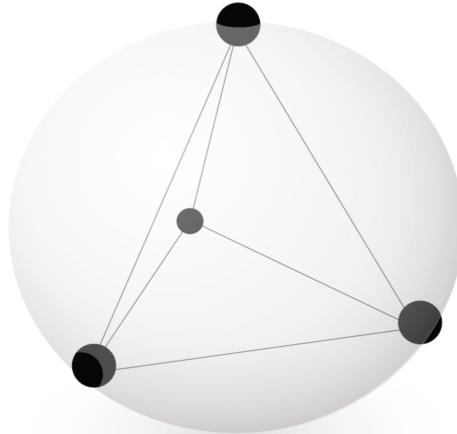


FIGURE 2.2 Le tétraèdre.

L' octaèdre (figure 2.3) est un état à 6 qubits :

$$|O\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S(6, 1)\rangle + |S(6, 5)\rangle). \quad (2.13)$$

Ses 6 points de Majorana sont :

- $|\eta_1\rangle = |0\rangle$,
- $|\eta_{2,3,4,5}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\xi}|1\rangle)$, avec $\xi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$,
- $|\eta_6\rangle = |1\rangle$.

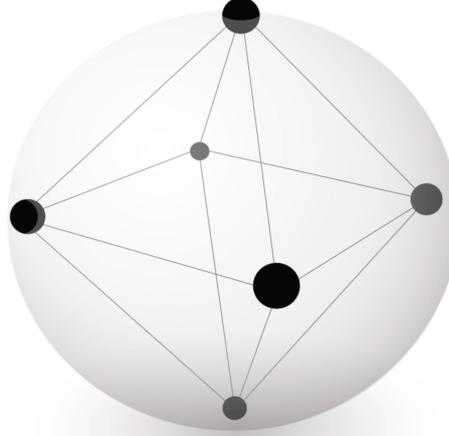


FIGURE 2.3 L'octaèdre.

Le cube (figure 2.4) est un état à 8 qubits :

$$|C\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{5}|S(8,0)\rangle + \sqrt{14}|S(8,4)\rangle + \sqrt{5}|S(8,8)\rangle). \quad (2.14)$$

Ses 8 points de Majorana sont :

- $|\eta_{1,2,3,4}\rangle = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}}|0\rangle + e^{i\xi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}}|1\rangle$, avec $\xi = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$,
 - $|\eta_{5,6,7,8}\rangle = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}}|0\rangle + e^{i\xi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}}|1\rangle$, avec $\xi = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$.
- Deux états quantiques à 4 qubits dont la spécificité est qu'ils ont les mêmes points de Majorana mais une configuration de dégénérescence différente. Le premier état est composé de la somme des permutations de 3 qubits $|0\rangle$ et 1 qubit $|+\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Le second état est composé de 2 qubits $|0\rangle$ et 2 qubits $|+\rangle$.

L'état $|000+\rangle$:

$$|000+\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|S(4,0)\rangle + |S(4,1)\rangle). \quad (2.15)$$

L'état $|00++\rangle$:

$$|000+\rangle = \frac{1}{\sqrt{78}}(6|S(4,0)\rangle + 6|S(4,1)\rangle + \sqrt{6}|S(4,2)\rangle). \quad (2.16)$$

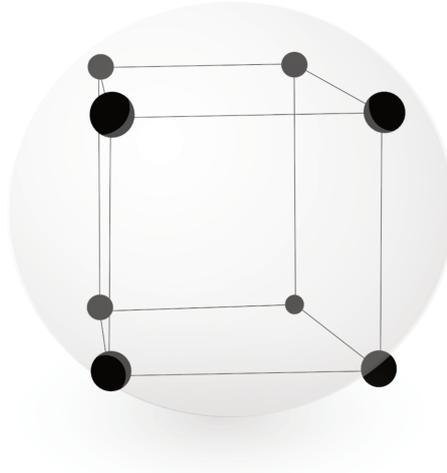


FIGURE 2.4 Le cube.

Leur comparaison permet de tester l'influence de la dégénérescence.

2.1.4 Mesure d'un État Quantique

Dans le formalisme de la mécanique quantique, une grandeur physique A est représentée par une *observable* \hat{A} , c'est-à-dire un opérateur hermitien qui agit sur les vecteurs de l'espace de Hilbert. Le résultat de la mesure de cette grandeur est égal à l'une des valeurs propres de \hat{A} . Un opérateur peut être écrit en utilisant la décomposition spectrale :

$$\hat{A} = \sum_i \alpha_i \Pi_i, \quad (2.17)$$

avec $\{\alpha_i\}$ les valeurs propres de l'observable \hat{A} et $\{\Pi_i\}$ les projecteurs sur chacun des vecteurs propres de \hat{A} . Les projecteurs $\{\Pi_i\}$ vérifient la relation de fermeture, $\sum_i \Pi_i = \mathbb{I}$, où \mathbb{I} est la matrice identité.

Lors de la mesure sur un état quantique pur $|\psi\rangle$, la probabilité d'obtenir le résultat α_i est donnée par :

$$p(\alpha_i) = \langle \psi | \Pi_i | \psi \rangle. \quad (2.18)$$

Cette égalité ne concernant que les états purs, l'expression de cette probabilité en terme de matrice densité permet d'étendre cette formulation pour les états quantiques

mixtes :

$$p(\alpha_i) = \text{Tr}(\Pi_i \rho), \quad (2.19)$$

où ρ est la matrice densité de l'état quantique mesuré et Tr la trace.

Une mesure dichotomique est le cas où une observable \hat{A} n'a que deux valeurs propres, par exemple ± 1 avec les projecteurs associés Π_+ et Π_- . Dans ce cas sa décomposition spectrale est de la forme :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \Pi_+ - \Pi_-, \\ \hat{A} &= \mathbb{I} - 2\Pi_-, \end{aligned} \quad (2.20)$$

en utilisant $\Pi_+ = \mathbb{I} - \Pi_-$.

Un expérience requière la mesure de grandeurs physiques associées à des observables. On doit choisir les bases dans lesquels les observable seront mesurées. C'est l'ensemble de ces bases de mesures qui forment la stratégie de mesure.

Deux grandeurs sont dites compatibles si elles peuvent être mesurées simultanément. Cela implique dans la théorie quantique que les deux observables observables associés à ces grandeurs commutent et ont une base de vecteurs propres commune.

2.2 Classifications des Corrélations

Il existe une classification des corrélations entre la distribution de probabilité des résultats de mesures sur des systèmes distants. Nous abordons trois types de corrélations : *locales*, *non-locales* et *no-signaling*. La ressource utilisée pour obtenir des corrélations non-locales est l'intrication quantique. Nous présentons un grand nombre de résultats présentés dans [24].

2.2.1 Présentation du Problème

Deux différents systèmes physiques séparés spatialement, détenus par Alice et Bob, qui ont pu communiquer par le passé procèdent à des mesures sans communiquer entre eux. Le choix de la mesure d'Alice est noté x et l'ensemble des mesures possibles sur son système est noté X . De la même manière, le choix de mesure de Bob est noté y et l'ensemble des mesures possibles de Bob est noté Y . La mesure de x (ou y) donne le résultats a (ou b), le set des résultats possible est noté A (ou B). En

réalisant plusieurs fois toutes les mesures, on peut calculer la probabilité d'obtenir a et b sachant que x et y ont été mesurés : $p(a,b|x,y)$. On définit la distribution de probabilité $p = \{p(a,b|x,y)|a \in A, b \in B, x \in X, y \in Y\}$, appelée *comportement*, qui contient toutes les probabilités des combinaisons de différentes mesures et résultats. Le comportement p définit la *corrélacion* entre les systèmes physiques d'Alice et Bob.

On considère deux cas visibles dans la figure 2.5 :

- (a) : Alice et Bob ont accès à des ressources quantiques. Avant l'expérience, Alice et Bob sont autorisés à interagir l'un avec l'autre et ont donc la possibilité de partager un état quantique noté ρ . x et y représentent des mesures quantiques sur l'état ρ et a et b sont les résultats.
- (b) : Alice et Bob ont accès à des ressources classiques où λ est appelé *variable cachée* et correspond à la description des propriétés des mesures de Alice et Bob. Le résultat a de la mesure d'Alice est fonction de la mesure x qu'elle a choisi et de λ et similairement pour Bob, dont le résultat b dépend du choix de mesure y et de λ .

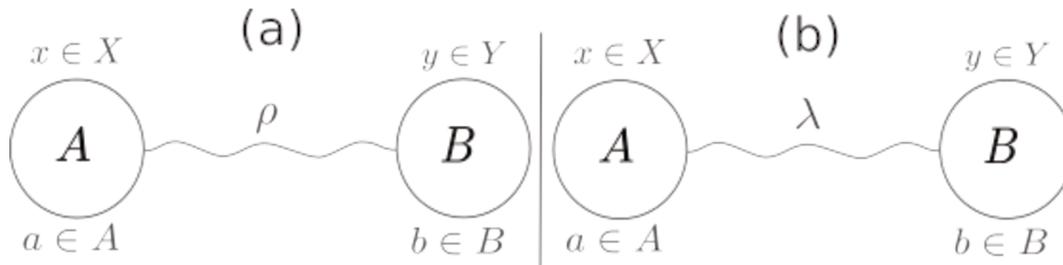


FIGURE 2.5 Deux systèmes physiques distants, Alice qui choisit la mesure x et obtient le résultat a et Bob qui choisit y et obtient le résultat b . La partie de gauche, (a), représente le cas où Alice et Bob partagent un état quantique ρ et la partie de droite, (b), représente le cas où les corrélacions des résultats obtenus par Alice et Bob dépendent de la variable cachée λ .

Il existe des corrélacions obtenues dans le premier cas qui ne peuvent pas être reproduites dans le second. Le but des inégalités de Bell est de différencier quantitativement ces deux situations.

Le cas le plus simple est le cas bipartite présenté ici. Le cas multipartite consiste à considérer n systèmes physiques dans les mêmes conditions qu'énoncées précédemment, c'est-à-dire que les systèmes physiques sont séparés spatialement, ont pu interagir par le passé mais ne peuvent pas interagir pendant les mesures.

Les définitions qui suivent seront toujours présentées dans le cas bipartite mais leur extension à n même si elles deviennent plus subtiles.

2.2.2 Classification des Corrélations

Corrélations Locales

Pour X , Y , A et B fixes, une corrélation est dite *locale* si et seulement si pour chacune des probabilités on a :

$$p(a, b|x, y) = \sum_{\lambda} q(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda), \quad (2.21)$$

où la variable λ , appelée variable cachée est décrite par la distribution de probabilités $q(\lambda)$ et où $p(a|x, \lambda)$ et $p(b|y, \lambda)$ sont les distributions de probabilités de mesure d'Alice et de Bob respectivement. Soit \mathcal{L} le set de corrélations satisfaisant l'équation 2.21. Dans l'équation 2.21 le membre de gauche décrit les propriétés du système global alors que le terme de droite ne fait intervenir que les propriétés locales de chaque sous-système. *Les corrélations locales sont appelées ainsi car les propriétés du système global sont déterminées par les propriétés locales de chaque sous-système.* Des corrélations qui ne peuvent pas être décrites par l'équation 2.21 sont dites non-locales.

Dans l'espace des probabilités, on peut interpréter une distribution de probabilités comme un vecteur dans $\mathbb{R}^{|X||Y||A||B|}$, où $|X||Y||A||B|$ est le produit des cardinaux des ensembles X , Y , A et B . Le set \mathcal{L} forme dans l'espace des probabilités un polytope convexe où chaque corrélation représentée par $p_L \in \mathcal{L}$ est une combinaison convexe de comportements dits déterministes (voir l'équation 2.22). Les comportements déterministes sont caractérisés par des probabilités $p(a|x, \lambda)$ et $p(b|y, \lambda)$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1, c'est-à-dire que la variable λ décrit complètement le résultat de chaque mesure en assignant pour chaque choix de mesure $x \in X$ et $y \in Y$ un résultat particulier $a_x \in A$ et $b_y \in B$. Les comportements déterministes sont les sommets du polytope convexe \mathcal{L} . Soit p_{det} un comportement déterministe, alors il s'écrit sous la forme :

$$p_{det}(a, b|x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = a_x \text{ et } b = b_y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi chaque $p_L \in \mathcal{L}$ peut être écrit comme :

$$p_L = \sum_{\lambda} v_{\lambda} p_{det, \lambda}, \text{ avec } \sum_{\lambda} v_{\lambda} = 1, \quad (2.22)$$

où les $\{v_L\}$ sont des nombres réels positifs. Ce modèle est équivalent à celui présenté à l'équation 2.21 [39].

Corrélations Quantiques

Pour X, Y, A et B fixes, une corrélation est dite *quantique* si il existe $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\{\Pi_{a|x}\}_{a \in A, x \in X}$ et $\{\Pi_{b|y}\}_{b \in B, y \in Y}$ telles que :

$$p(a, b|x, y) = Tr\{\Pi_{a|x} \otimes \Pi_{b|y} \rho\}, \quad (2.23)$$

où \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B sont les espace de Hilbert de Alice et Bob et $\{\Pi_{a|x}\}_{a \in A, x \in X}$ et $\{\Pi_{b|y}\}_{b \in B, y \in Y}$ sont des mesures projectives. Soit \mathcal{Q} le set de corrélations $p_Q \in \mathcal{Q}$ satisfaisant l'équation 2.23.

Il a été montré que les corrélations représentées par $p_L \in \mathcal{L}$ admettent une description définie dans l'équation 2.23 [75], c'est-à-dire que $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q}$. Certaines corrélations représentées par $p_Q \in \mathcal{Q}$ n'appartiennent pas au set \mathcal{L} , ce qui fera l'objet de la section 2.2.3.

L'intrication est un point important pour les propriétés non-locales. Soit un état bipartite séparable $\rho = \sum_i p_i \rho_{A,i} \otimes \rho_{B,i}$, lors de sa mesure on a :

$$\begin{aligned} p(a, b|x, y) &= Tr\{\Pi_{a|x} \otimes \Pi_{b|y} \rho\}, \\ p(a, b|x, y) &= \sum_i p_i Tr\{\Pi_{a|x} \rho_{A,i} \otimes \Pi_{b|y} \rho_{B,i}\}, \\ p(a, b|x, y) &= \sum_i p_i p(a|x) p(b|y). \end{aligned} \quad (2.24)$$

On remarque que les états quantiques séparables donnent toujours des corrélations locales.

Corrélation “No-signaling”

Pour X, Y, A et B fixes, une corrélation est dite *no-signaling* [33, 77] si :

$$\begin{aligned} p(a|x) &\equiv \sum_{b \in B} p(a, b|x, y) = \sum_{b \in B} p(a, b|x, y'), \forall y, y' \in Y \\ p(b|y) &\equiv \sum_{a \in A} p(a, b|x, y) = \sum_{a \in A} p(a, b|x', y), \forall x, x' \in X. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Soit \mathcal{NS} le set de corrélations satisfaisant 2.25. Ces définitions peuvent être comprises d'un point de vue physique. En effet, dans un scénario de Bell, Alice et Bob ne sont pas autorisés à communiquer pendant leurs mesures, c'est-à-dire que le choix de

la mesure d'Alice n'influence pas la mesure de Bob et vice versa. Le set \mathcal{NS} forme un polytope convexe.

Nous avons vu dans la section 2.2.2 qu'il y a l'inclusion $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q}$. De plus il est possible de montrer que les corrélations quantiques représentées par $p_Q \in \mathcal{Q}$ vérifient les contraintes de l'équation 2.25 et enfin il a été montré que certains comportements $p_{NS} \in \mathcal{NS}$ ne peuvent pas être décrits par l'équation 2.23 [76]. On arrive alors aux inclusions suivantes : $\boxed{\mathcal{L} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{NS}}$.

2.2.3 Tester la Non-localité

Inégalités de Bell

Comme le set \mathcal{L} forme un polytope convexe, \mathcal{L} est borné. Étant convexe, il est possible de trouver un hyperplan qui sépare l'espace des probabilités comme représenté à la figure 2.6. Cela permet de détecter certaines corrélations non-locales. On peut écrire cette séparation en terme d'inégalité. Pour le cas particulier des sets locaux, de telles inégalités sont appelées inégalités de Bell.

Les inégalités de Bell sont des outils pour différencier les corrélations non-locales des corrélations locales. Nous introduisons l'opérateur linéaire $\mathcal{B} : \mathcal{R}^{X||Y||A||B} \mapsto \mathbb{R}$ comme :

$$\mathcal{B}.p = \sum_{x,y,a,b} \mathcal{B}_{x,y,a,b} p(a,b|x,y). \quad (2.26)$$

Pour $p \in \mathcal{Q}$ il y a deux cas possibles : soit $p = p_L \in \mathcal{L}$, $|\mathcal{B}.p_L| \leq 1$ ou $p \notin \mathcal{L}$, $|\mathcal{B}.p| > 1$. On peut trouver au moins un hyperplan démontrant $p \notin \mathcal{L}$, c'est à dire qu'il existe un opérateur \mathcal{B} tel que $|\mathcal{B}.p| > 1$. L'expression $|\mathcal{B}.p| \leq 1$ forme une inégalité de Bell où 1 est appelé borne locale ; lorsque la valeur de $|\mathcal{B}.p|$ est plus grande que cette *borne locale*, on parle alors violation et le niveau de violation correspond à la valeur de $|\mathcal{B}.p|$ moins la borne locale.

Les inégalités de Bell séparent l'espace des probabilités en deux parties dont l'une contient le polytope local \mathcal{L} . Les corrélations vérifiant $|\mathcal{B}.p_L| \geq 1$ sont situées dans l'autre partie. Les inégalités de Bell peuvent être ajustées aux faces qui définissent le polytope local.

La plus simple des inégalités de Bell est l'inégalité CHSH [34] : un système bipartite de deux qubits intriqués, pour laquelle chaque partie réalise deux mesures dichotomiques.

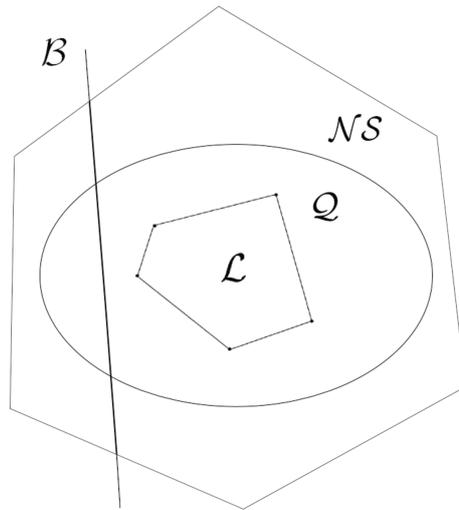


FIGURE 2.6 L'inégalité de Bell représentée par \mathcal{B} coupe l'espace des probabilités en deux parties. Le polytope convexe des comportements locaux \mathcal{L} est situé dans une des parties. L'ensemble quantique, \mathcal{Q} , est représenté par un ensemble convexe. L'ensemble no-signaling', \mathcal{NS} , est représenté par un polytope convexe.

Preuve Logique

Afin de démontrer que des corrélations sont non-locales, on peut trouver une inégalité de Bell et montrer une violation. Cependant il est aussi possible d'avoir des conditions à vérifier par une distribution de probabilité qui est incompatible avec la théorie des variables cachées mais pourtant viable pour la mécanique quantique. La preuve se base alors sur une contradiction logique sans faire intervenir d'inégalité de Bell.

Nous choisissons de détailler le paradoxe de Hardy [46] qui fera l'objet d'une étude dans le Chapitre 3. Il existe d'autres paradoxe exemple le paradoxe GHZ [44].

Le paradoxe de Hardy est une preuve logique de non-localité basée sur un système bipartite. Le paradoxe se base sur quatre conditions portant sur les probabilités des résultats de mesures sur le système de telle sorte qu'il est impossible que ce système soit décrit par un comportement locale et vérifier des conditions. La preuve de non-localité se base alors sur cette contradiction. L'extension multipartite du paradoxe de Hardy peut être vue comme un jeu à n parties : soit n parties qui ont accès à deux mesures dichotomiques \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 , pouvant ainsi obtenir les résultats '0' or '1' pour chaque mesure. On détaille dans ce qui suit les conditions à imposer dans le cas multipartite.

La première condition impose que si toutes les parties utilisent la mesure \mathcal{M}_0 il est

possible qu'elles obtiennent toutes le résultat '0' :

$$P(0\dots 0|\mathcal{M}_0\dots\mathcal{M}_0) > 0. \quad (2.27)$$

La condition suivante (qui est en réalité une collection de conditions) correspond aux cas où toutes les parties sauf une réalisent la mesure \mathcal{M}_0 . Dans ce cas, il est impossible que toutes les parties obtiennent le résultat '0'.

$$\begin{aligned} P(0\dots 0|\mathcal{M}_1\mathcal{M}_0\dots\mathcal{M}_0) &= 0, \\ P(0\dots 0|\mathcal{M}_0\mathcal{M}_1\dots\mathcal{M}_0) &= 0, \\ &\dots \\ P(0\dots 0|\mathcal{M}_0\dots\mathcal{M}_0\mathcal{M}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ces conditions peuvent être résumées par l'égalité :

$$\sum_{\pi} P(0\dots 0|\pi(\mathcal{M}_0\dots\mathcal{M}_0\mathcal{M}_1)) = 0, \quad (2.29)$$

où $\pi \in \mathcal{S}_n$ représente le groupe des permutations de n objets, \mathcal{S}_n .

La dernière condition est que si toutes les parties utilisent la mesure \mathcal{M}_1 , il est impossible que toutes les parties obtiennent le résultat '1',

$$P(1\dots 1|\mathcal{M}_1\dots\mathcal{M}_1) = 0. \quad (2.30)$$

En se basant sur les équations 2.27, 2.29 et 2.30 il est possible d'arriver à une contradiction avec l'équation 2.21.

Unification des deux approches

Les inégalités de Bell et les preuves logiques sont deux manières différentes de démontrer des comportements non-locaux. En effet, si on reprend le formalisme où l'on interprète un comportement p comme un vecteur dans l'espace des probabilités, l'utilisation d'une preuve logique pour montrer qu'un comportement p est non-local veut implicitement dire que ce comportement se situe à l'extérieur du polytope convexe \mathcal{L} . Il existe alors au moins une inégalité de Bell violée par ce comportement p .

Ainsi, pour le paradoxe de Hardy, il est donc possible de trouver des inégalités de Bell démontrant des comportements non-locaux détectés par le paradoxe. Par exemple dans [86] les auteurs obtiennent une inégalité de Bell qui démontre des corrélations

non-locales pour tous les états symétriques purs (voir section 2.1.3). Cette inégalité est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^n &:= P(0\dots 0|0\dots 0) - P(1\dots 1|1\dots 1) \\ &\quad - \sum_{\pi} P(0\dots 0|\pi(0\dots 01)) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Il a été montré par la suite que tous les états purs peuvent violer cette inégalité [89].

2.2.4 Non-Localité des États Symétriques

Il existe une inégalité de Bell, que nous notons \mathcal{H} , initialement prévue pour obtenir un haut niveau de violation par les état W [47], qui a été généralisée pour tous les états de Dicke. Cette inégalité est donnée par [85] :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k^n &:= \sum_{\pi} P(\pi(\underbrace{0\dots 0}_{n-k} \underbrace{1\dots 1}_k) | 0\dots 0) \\ &\quad - \sum_{\pi} P(\pi(\underbrace{0\dots 0}_{n-k-1} \underbrace{1\dots 1}_{k-1} 01) | \pi(\underbrace{0\dots 0}_{n-2} 11)) \\ &\quad - P(0\dots 0|1\dots 1) - P(1\dots 1|1\dots 1) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Il est possible de construire d'autres inégalités de Bell à partir de l'extension multipartite du paradoxe de Hardy qui permettent de détecter la classe d'intrication basée sur la dégénérescence d'un état de Dicke [86] :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_d^n &:= \mathcal{P}^n - P(\underbrace{1\dots 1}_{n-1} | \underbrace{1\dots 1}_{n-1}) - \dots \\ &\quad - P(\underbrace{1\dots 1}_{n-d+1} | \underbrace{1\dots 1}_{n-d+1}) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Il faut noter que dans cette expression toutes les probabilités soustraites à \mathcal{P}^n ont moins de n éléments. Par exemple la probabilité $P(\underbrace{1\dots 1}_{n-1} | \underbrace{\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_1}_{n-1})$ décrit la probabilité que lorsque $n-1$ des parties vont utiliser la mesure \mathcal{M}_1 le résultat de chacune de ces mesures donne le résultat '1'. Afin de calculer ces probabilités il est

nécessaire de réaliser une trace partielle sur l'état quantique des parties qui ne font pas de mesure. Mais il n'est pas précisé quelles sont les parties qui réalisent une mesure dans l'équation 2.33. Étant donné que les états concernés sont des états symétriques par permutation, les sous-systèmes sur lesquels la trace partielle s'applique n'influencent donc pas le résultat final.

Il a été montré que la dégénérescence peut être détectée à partir des propriétés non-locales [86], ce qui permet d'utiliser les propriétés non-locales d'un système pour vérifier sa classe d'intrication. Il est important de préciser que la discrimination de classe d'intrication qui utilise la non-localité [23, 85, 86] peut être réalisée de manière indépendante des appareils de mesure (dit "*measurement device independent*"); cela signifie que même si les parties n'ont pas un contrôle total des équipements, l'observation de la violation de cette inégalité de Bell prouve que l'état étudié appartient bien à la classe de dégénérescence correspondante.

La non-localité n'est pas la seule propriété qui donne lieu à une séparation entre la théorie quantique et la théorie classique.

2.3 Contextualité

La contextualité est un concept fondamental de l'information quantique. Dans le cadre d'une théorie contextuelle, le résultat d'une mesure va dépendre du contexte dans lequel elle est réalisée, c'est-à-dire de la base de mesure dans lequel il a été obtenu. En théorie quantique, le résultat de mesure d'une observable va donc dépendre de la mesure d'une seconde observable avec laquelle elle commute. Cette propriété a tout d'abord été mise en évidence par Bell, Kochen et Specker [19, 58].

2.3.1 Théorème de Bell-Kochen-Specker

Soit un système physique avec des grandeurs physiques notées A_1, A_2, \dots, A_N où la mesure de chaque grandeur physique A_i donne un résultat $\{a_i\}$. Une description non-contextuelle implique que les résultats de mesures ne dépendent pas des grandeurs qui sont mesurés au cours de l'expérience (observable qui commutent entre elles). La possibilité d'assigner des résultats prédéfinis aux mesures indépendamment du contexte de la mesure s'oppose à la théorie quantique. Cela a été formulé dans le cas de projecteurs par Bell-Kochen-Specker (BKS) dans le théorème suivant [19, 58] :

Pour les dimensions plus grandes que deux, il existe des projecteurs Π_i , tels qu'il n'est pas toujours possible d'assigner les résultats '0' ou '1' à tous les projecteurs d'une

manière à ce que :

- Toute base orthogonale complète des projecteurs $\{\Pi_i\}$ satisfait $\sum_i \Pi_i = 1$ (caractère complet de la base).
- Un projecteur Π_i a la même valeur assigné dans toutes les bases $\{\Pi_i\}$ (non-contextualité).

2.3.2 Représentation par Graphe

Considérons un ensemble de questions auxquelles on ne peut répondre que par ‘oui’ ou ‘non’ correspondant à un ensemble de mesures dichotomiques qui donnent les résultats $X_i = 0$ (‘non’) or $X_i = 1$ (‘oui’). Certaines de ces questions peuvent avoir une relation de *compatibilité*, c’est-à-dire qu’elles peuvent être posées simultanément. Certaines de ces questions peuvent avoir une relation *d’exclusivité*, c’est-à-dire qu’elles ne peuvent pas avoir la réponse ‘oui’ simultanément.

On peut représenter les relations de comptabilité et d’exclusivité entre les mesures à l’aide d’un graphe. On définit le graphe $\mathcal{G} = (V, E)$, (où V est l’ensemble des sommets et E l’ensemble des arêtes) de N sommets $i \in V$ pour chacun desquels on associe le résultat d’une mesure dichotomique $X_i = 0$ (‘non’) ou $X_i = 1$ (‘oui’) et où les arêtes représentent à la fois l’exclusivité et la compatibilité des mesures. Lorsque l’on s’interroge sur la valeur de X_i , on dit que l’on mesure X_i . *Pour un graphe donné, un sous-graphe complet représente un ensemble de mesures compatibles entre elles, formant un contexte C .* La relation d’exclusivité implique alors : $\sum_{i \in C} X_i \leq 1$. L’ensemble des contextes forme un hypergraphe Γ . Si un sommet i a deux voisins j et k , alors X_i peut être mesuré avec X_j ou avec X_k , formant ainsi un contexte. Si j et k ne sont pas voisins alors ils ne peuvent pas être mesurés de manière simultanée. La relation d’exclusivité implique que deux sommets adjacents j et k ne peuvent pas avoir le résultat ‘1’ associé. En terme de probabilité on a :

$$P(1, 1 | j, k) = 0. \quad (2.34)$$

Nous considérons maintenant deux classes de théories physiques qui permettent d’assigner des résultats aux sommets d’un graphe donné.

- Dans un modèle déterministe et non-contextuel, chaque mesure amène à un résultat prédéfini (‘0’ ou ‘1’ dans le cas dichotomique). Les résultats sont alors indépendants du contexte dans lequel ils sont obtenus. De cette manière, chacun des sommets $i \in V$ du graphe G a une valeur X_i assignée qui correspond au résultat de la mesure. Comme les arêtes représentent aussi l’exclusivité de la

- mesure, deux sommets adjacents ne peuvent pas avoir le résultat ‘1’ assigné simultanément.
- En théorie quantique, les mesures dichotomiques peuvent être représentées par des projecteurs de rang 1 $\{\Pi_i = |v_i\rangle\langle v_i|\}$ où $|v_i\rangle$ est un vecteur propre normalisé. Le résultat $X_i = 1$ est associé au projecteur Π_i et le résultat $X_i = 0$ est associé à $\mathbb{I} - \Pi_i$. On peut associer le vecteur unitaire $|v_i\rangle$ au sommet i . Chaque relation de compatibilité et d’exclusivité entre des sommets adjacents correspond à une relation d’orthogonalité entre les vecteurs associés à chaque sommet ; c’est la *Représentation Orthonormale* (OR) d’un graphe. Afin de satisfaire les conditions d’orthogonalités du graphe, la dimension minimum requise du système quantique doit être au moins égale au plus grand sous-graphe complet de G , c’est à dire le plus grand sous-graphe dont tous les sommets sont adjacents.

Les propriétés des graphes peuvent être utilisées pour définir des inégalités de contextualité [26].

Dans le cas du modèle classique, on peut borner la somme des résultats de la manière suivante :

$$\beta = \sum_{i \in V} \langle X_i \rangle \leq \beta_{cl} = \alpha(G), \quad (2.35)$$

où $\alpha(G)$ est nombre d’indépendance du graphe [42], c’est-à-dire le nombre maximum d’ensemble de sommets non reliés par une arête et $\langle X_i \rangle$ est la valeur moyenne de X_i .

Dans le cas quantique, pour un état quantique $|\psi\rangle$, on pose :

$$\beta_Q = \sum_{i \in V} |\langle v_i | \psi \rangle|^2. \quad (2.36)$$

β_Q est borné par la fonction appelée la fonction de theta de Lovasz, $\vartheta(G)$, qui est initialement une borne supérieure de la capacité de Shannon du graphe [66].

Pour le graphe G on a :

$$\beta = \sum_{i \in V} \langle X_i \rangle \leq \alpha(G) \leq \vartheta(G). \quad (2.37)$$

Les graphes où $\alpha(G) < \vartheta(G)$ correspondent à des cas qui peuvent être utilisés pour l’observation de la contextualité.

2.3.3 Contextualité de type Indépendante de l'État

Contrairement à la non-localité, en contextualité il est possible d'avoir un test de contextualité qui est indépendant de l'état considéré. Le théorème de BKS prouve que la contextualité est une propriété des opérations quantiques et ne fait pas référence à un quelconque état quantique. Un exemple de contextualité de la théorie quantique avec des observables à valeurs propres égales à ± 1 est le carré de Mermin-Peres [70, 74]. Considérons un système de deux qubits et le tableau suivant, dont chaque élément représente une opération réalisée sur ce système.

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_z \otimes \mathbb{I} & \mathbb{I} \otimes \sigma_z & \sigma_z \otimes \sigma_z \\
 \mathbb{I} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \mathbb{I} & \sigma_x \otimes \sigma_x \\
 \sigma_z \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_z & \sigma_y \otimes \sigma_y,
 \end{array} \tag{2.38}$$

où $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

On arrange sur les lignes et colonnes du tableau 2.38 des triades d'opérateurs commutant entre eux formant ainsi pour chaque opérateur deux contextes donnés par sa ligne et sa colonne. Le produit des opérateurs de chaque colonne et de chaque ligne donne $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ sauf pour la dernière colonne où le produit donne $-\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$. Pour chaque triade, on peut associer des valeurs ± 1 à chaque opérateur de telle sorte que le produit de ces valeurs donne le même résultat que la mesure du produit de la tirade. Or, si chaque opérateur a la même valeur dans toutes les tirades dans laquelle il apparaît il est impossible de reproduire toutes les propriétés multiplicatives fournis par les triades d'opérateurs.

Le carré de Mermin-Peres est en ce sens une preuve du théorème de BKS, la théorie quantique est une théorie contextuelle. La preuve de contextualité vue dans le théorème de BKS ou dans le carré de Mermin-Peres sont sous la forme de preuve logique de contextualité mais il est aussi possible de tester la contextualité avec des inégalités qui sont dépendantes de l'état quantique [25, 61].

2.3.4 Contextualité de type Dépendant de l'État

l'Inégalité de KCBS

La notion de contextualité introduite dans la section précédente est une propriété des mesures et non des états. Nous présentons ici l'une des inégalités qui dépend de l'état quantique. L'attrait pour la contextualité a connu un sursaut après la découverte de l'inégalité de KCBS [57] car cette inégalité est la plus simple et la dimension du système considéré, égal à trois, est la plus petite possible pour tester la contextualité. De plus le nombre de mesures à réaliser, au nombre de cinq, est aussi le plus petit pour cette dimension de système.

Soit un qutrit et cinq mesures dichotomiques. En prenant en compte les conditions d'exclusivité et de compatibilité, le graphe formé correspond à un pentagone et est présenté à la figure 2.7.

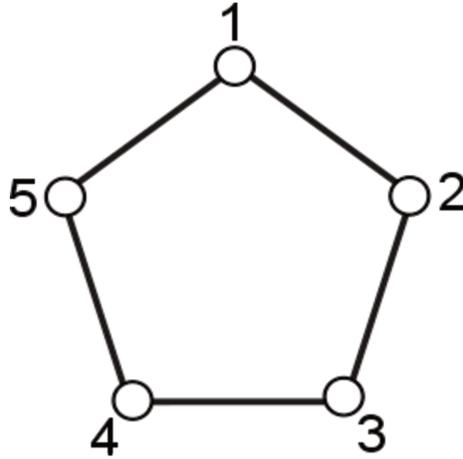


FIGURE 2.7 Pentagone où les projecteurs $\{P_i = |v_i\rangle\langle v_i|\}$, pour $i = \{1, 5\}$, sont associés aux sommets du graphe.

On peut alors calculer β présenté dans l'équation 2.35. On sait que pour un graphe donné, la limite classique est donnée par le nombre d'indépendance et la limite quantique par la fonction du theta de Lovasz.

L'inégalité de KCBS [57] peut alors être écrite :

$$\beta = \sum_i |\langle v_i | \psi \rangle|^2 \leq 2. \quad (2.40)$$

Le maximum possible par la théorie quantique est $\beta_Q = \sqrt{5} \approx 2.236$. Il peut être obtenu dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ avec l'état quantique pur $|\psi\rangle = (0, 0, 1)^T$ et les mesures représentées par les vecteurs :

$$\begin{aligned}
|v_1\rangle &= K(1, 0, \sqrt{c})^T, \\
|v_2\rangle &= K(-c, s, \sqrt{c})^T, \\
|v_3\rangle &= K(C, S, \sqrt{c})^T, \\
|v_4\rangle &= K(C, -S, \sqrt{c})^T, \\
|v_5\rangle &= K(-c, -s, \sqrt{c})^T,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

pour $c = \cos(\pi/5)$, $s = \sin(\pi/5)$, $C = \cos(2\pi/5)$ et $S = \sin(2\pi/5)$ avec les relations $C = c^2 - s^2$ et $S = 2cs$. La constante de normalisation est $K = 1/\sqrt{1+c}$ et l'exposant T correspond à la transposée.

Preuve Logique de Contextualité

Comme montré pour la non-localité (voir à la section 2.2.3), la contextualité peut être prouvée à partir d'une série de propriétés que doit vérifier un système physique.

Dans [27] les auteurs proposent la situation suivante : soit un système composé de cinq boîtes numérotées de 1 à 5. Chacune des boîtes peut être soit vide (associé à la valeur '0') soit pleine (associé à la valeur '1'). La vérification si une boîte est vide ou pleine correspond à une mesure dichotomique. On prépare les boîtes de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
P(0, 1|1, 2) + P(0, 1|2, 3) &= 1, \\
P(0, 1|3, 4) + P(0, 1|4, 5) &= 1,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

où la première condition implique que si la boîte 2 est pleine alors la boîte 1 est vide et si la boîte 2 est vide alors la boîte 3 est pleine. La deuxième condition implique que si la boîte 4 est pleine alors la boîte 3 est vide et si la boîte 4 est vide alors la boîte 5 est pleine. La notion de non-contextualité consiste ici à considérer que les boîtes sont vides ou pleines de manière prédéterminée et indépendamment de quelles boîtes sont ouvertes simultanément. On arrive à la conclusion suivante :

$$P(0, 1|5, 1) = 0. \tag{2.43}$$

En effet si la boîte 1 est pleine, alors la boîte 2 est vide car si la boîte 2 est pleine

alors la boîte 1 doit être vide. Comme la boîte 2 est vide alors la boîte 3 est pleine. Comme la boîte 3 est pleine alors la boîte 4 est vide car si la boîte 4 est pleine alors la boîte 3 doit être vide. Enfin si la boîte 4 est vide alors la boîte 5 est pleine. Donc si la boîte 1 est pleine alors la boîte 5 est pleine aussi. Ainsi la probabilité d'avoir la boîte 1 pleine et la boîte 5 vide est nulle.

Or si l'on prépare le système quantique suivant :

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T. \quad (2.44)$$

Ainsi que les mesures suivantes :

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \\ |v_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \\ |v_3\rangle &= (0, 0, 1)^T, \\ |v_4\rangle &= (1, 0, 0)^T, \\ |v_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T, \end{aligned} \quad (2.45)$$

on arrive à la valeur $P(0, 1|5, 1) = \frac{1}{9}$ tout en respectant les conditions de l'équation 2.42.

Pour un système physique de dimension 3, la contextualité est donc prouvée si on peut trouver un ensemble de mesures et un état quantique qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} P(0, 1|1, 2) + P(0, 1|2, 3) &= 1, \\ P(0, 1|3, 4) + P(0, 1|4, 5) &= 1. \\ P(1|1) &> 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

En réalité la condition $P(0, 1|5, 1) > 0$ peut se simplifier en $P(1|1) > 0$. L'intérêt de la première forme est que la connexion avec l'inégalité de KCBS est explicite. Cette preuve logique est liée à l'inégalité de KCBS [57]. En effet, en sommant les probabilités

des équations 2.43 et 2.42 on obtient l'inégalité de KCBS :

$$\sum_i^5 P(0, 1, |i, i+1) \leq 2. \quad (2.47)$$

En effet, en mécanique quantique on a $P(0, 1, |i, i+1) = \langle \psi | (\mathbb{I} - P_i) P_{i+1} | \psi \rangle = \langle \psi | (P_{i+1} - P_i P_{i+1}) | \psi \rangle$, or par relation de compatibilité $P_i P_{i+1} = 0$, il ne reste que le premier terme et on en déduit $P(0, 1, |i, i+1) = P(0 | i+1)$. En reproduisant cela pour les cinq terme dans on obtient l'inégalité de KCBS de l'équation 2.40.

Mais les conditions du paradoxe ne permettent pas d'obtenir une violation plus élevée que $2 + \frac{1}{9}$ [12].

Le paradoxe peut aussi être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P(1, 1 | i, i+1) &= 0, \\ P(0, 0 | 2, 3) &= 0, \\ P(0, 0 | 4, 5) &= 0, \\ P(0, 1 | 5, 1) &> 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.3.5 Contextualité et Non-Localité

La non-localité dépend de l'intrication de l'état quantique dans la mesure où elle ne peut pas être prouvée pour un état séparable (voir l'équation 2.24). Considérons le cas bipartite suivant où Alice et Bob réalisent un ensemble de mesures $\{A_i\}$ pour Alice et $\{B_i\}$ pour Bob. En réalité lorsque Alice choisit de mesurer A_i sur son système elle réalise $A_i \otimes \mathbb{I}$ sur le système global. De même, Bob qui souhaite mesurer B_i sur son système, réalise $\mathbb{I} \otimes B_i$. On a alors $[A_i \otimes \mathbb{I}, \mathbb{I} \otimes B_i] = 0$. Chaque mesure de Alice commute avec toutes les mesures de Bob, c'est-à-dire que chaque mesure de Bob correspond à un contexte pour une mesure de Alice et vice versa. La séparation spatiale implique naturellement une relation de commutativité entre les observables de chaque sous-système physique.

La contextualité est une propriété des mesures et non une propriété des états. Elle nuance la notion de non-localité car elle n'impose pas la séparation spatiale d'observateur. On peut observer la contextualité sur un système unique.

Le cadre mathématique donnant la généralisation de la non-localité à la contextualité est encore aujourd'hui un sujet d'étude ouvert. Différentes approches ont été étudiées dans [1, 26, 40].

2.4 Décohérence

2.4.1 Opérations Quantiques : Le Formalisme des Opérateurs de Kraus

L'évolution d'un état quantique, ρ , en un état ρ' peut être représentée par une fonction ε appelée opération quantique :

$$\rho' = \varepsilon(\rho). \quad (2.49)$$

Il y a différentes manières de représenter les opérations quantiques, mais elles sont toutes équivalentes. Celle que nous allons utiliser est appelée la *représentation de la somme d'opérateurs* [59]. La dynamique d'un système quantique dit fermé est régie par des transformations unitaires où l'équation 2.49 devient alors :

$$\rho' = U\rho U^\dagger. \quad (2.50)$$

La décohérence est un cas particulier d'opération quantique que nous abordons ici. Les systèmes quantiques qui subissent la décohérence sont des systèmes ouverts à l'environnement, mais lorsque l'on s'intéresse à un système composé à la fois du système quantique étudié et de son environnement, on peut considérer que le système global est alors un système quantique fermé dont la dynamique peut être décrite par des opérateurs unitaires comme à l'équation 2.50. Si on considère le système global avant l'interaction entre le système étudié et son environnement, la matrice densité du système global est donnée par le produit tensoriel des matrices densités du système étudié et de son environnement. L'évolution du système global est donnée par une opération unitaire, puis afin d'obtenir l'état du système étudié seulement, on utilise une trace partielle sur l'environnement. On obtient ainsi la matrice densité du système ρ_{dec} après l'interaction avec son environnement :

$$\rho_{\text{dec}} = \text{Tr}_{emv}[U(\rho \otimes |0\rangle\langle 0|_{emv})U^\dagger], \quad (2.51)$$

où $|0\rangle\langle 0|_{emv}$ représente la matrice densité de l'environnement. Elle est écrite sous la forme d'un état pur car il est toujours possible d'utiliser une *purification* afin d'écrire l'état quantique sous la forme d'un état pur [73]. Ce procédé consiste à prendre un état mixte et à agrandir l'espace de Hilbert dans lequel il est défini. En développant

la trace dans l'équation 2.51 on obtient :

$$\rho_{\text{dec}} = \sum_k K_k \rho K_k^\dagger, \quad (2.52)$$

où les opérateurs $\{K_k\}$ sont appelés *éléments d'opération* ou *opérateurs de Kraus* et $K_k = \langle e_k | U | 0 \rangle_{\text{env}}$ où $\{e_k\}$ forment la base de l'environnement utilisée lors de la trace partielle dans l'équation 2.51. Afin de conserver la valeur de la trace de la matrice densité dans l'évolution du système quantique, ils vérifient $\sum_k K_k^\dagger K_k = \mathbb{I}$.

Dans le cas d'un état multipartite, on peut écrire :

$$\rho_{\text{dec}} = \sum_{\vec{k}=(0,\dots,0)}^{(1,\dots,1)} \mathcal{K}_{\vec{k}} \rho \mathcal{K}_{\vec{k}}^\dagger, \quad (2.53)$$

où $\mathcal{K}_{\vec{k}}$ est le produit tensoriel d'une certaine combinaison d'opérateurs de Kraus K_K donnée par un vecteur \vec{k} , c'est-à-dire $\mathcal{K}_{\vec{k}} = \otimes_i K_{k_i}$. L'intuition derrière l'équation 2.53 est que l'on somme toutes les combinaisons possibles des opérateurs de Kraus appliquées à chaque sous-système.

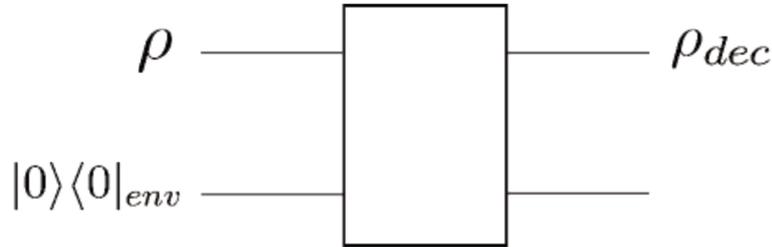


FIGURE 2.8 Représentation d'un système quantique ouvert, ρ , le système global est composé de ρ et de son environnement $|0\rangle\langle 0|_{\text{env}}$, l'opérateur unitaire U agit sur le système global $\rho \otimes |0\rangle\langle 0|_{\text{env}}$.

La méthode montrée ici se place dans le cadre du modèle d'un circuit quantique qui est habituellement utilisé pour décrire les calculateurs quantiques. Dans la figure 2.8, on voit la porte logique qui applique l'opérateur unitaire U sur l'état quantique ρ ainsi que son environnement $|0\rangle\langle 0|_{\text{env}}$. En sortie de la porte logique, l'état quantique est modifié et est donné par l'équation 2.53.

2.4.2 Equation Maître Quantique : L'Équation de Lindblad

Une autre méthode complémentaire pour décrire l'évolution des états quantiques utilise l'équation de Schrödinger. L'approche de l'équation maîtresse quantique fait

apparaître le temps en utilisant une équation différentielle. La dynamique des systèmes quantiques ouverts fait intervenir des évolutions non-unitaires. La forme de Lindblad [64] de cette équation est :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_j ([L_j \rho, L_j^\dagger] + [L_j, \rho L_j^\dagger]), \quad (2.54)$$

où H représente le Hamiltonien, $\{L_j\}$ représentent le couplage entre le système et son environnement.

Il est possible de lier les deux approches [64]. Après une résolution de l'équation différentielle de 2.54 la matrice densité peut s'écrire alors avec la représentation de la somme d'opérateurs :

$$\rho(t) = \sum_k K_k(t) \rho(0) K_k^\dagger(t), \quad (2.55)$$

où $\{K_k(t)\}$ ont maintenant une dépendance au temps.

2.4.3 Modèles d'Amortissements

Nous considérons des modèles de décohérence qui sont pertinents pour des implémentations expérimentales, à savoir *l'amortissement d'amplitude* et *l'amortissement de phase*. L'amortissement d'amplitude décrit la dissipation d'énergie qui est omniprésente lors d'expérimentation. Cela peut modéliser à la fois un atome qui émet spontanément un photon ou bien les l'imperfections des appareils de détection lors d'une expérience basée sur la photonique. L'amortissement de phase apparaît dans des systèmes photoniques implémentant des protocoles de communications quantiques [17]. Les opérateurs de Kraus pour ces deux types d'amortissements peuvent être obtenus à partir de l'équation maîtresse quantique [65] et sont étudiés dans différentes situations utilisant des qudits comme le calcul quantique [32, 43, 84] où l'étude de canaux quantiques [4]. Les modèles d'amortissement présentés ici seront utilisés dans le Chapitre 3 et le Chapitre 5.

Amortissement d'Amplitude

Pour l'amortissement d'amplitude, les opérateurs de Kraus sont :

$$A_k = \sum_{r=k}^{\infty} \sqrt{\binom{r}{k}} \sqrt{(1-\gamma)^{r-\gamma} \gamma^k} |r-k\rangle \langle r|, \quad (2.56)$$

où le coefficient $\gamma \in [0, 1]$ est le taux de perte, appelé aussi facteur de bruit et k est un entier positif.

Dans le cas d'un qudit de dimension d , en utilisant l'équation 2.52 et comme la dimension de l'espace de Hilbert est finie, les opérateurs de Kraus se réduisent à :

$$A_k = \sum_{r=k}^{d-1} \sqrt{\binom{r}{k}} \sqrt{(1-\gamma)^{r-\gamma} \gamma^k} |r-k\rangle \langle r|, \quad (2.57)$$

où k est un entier positif vérifiant $k \leq d-1$. En particulier, dans le cas d'un qubit, les opérateurs de Kraus sont réduits aux deux éléments suivants :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Dans le cas d'un état multipartite dont les sous-systèmes sont des qubits, l'état $|0\rangle$ peut représenter la non-présence d'un photon et l'état $|1\rangle$ peut représenter la présence d'un photon. L'action de l'opérateur de Kraus sur un qubit de la forme donnée à l'équation 2.2 est :

$$\begin{aligned} \rho_{dec} &= A_0 \rho A_0^\dagger + A_1 \rho A_1^\dagger, \\ \rho_{dec} &= (\alpha|0\rangle + \sqrt{1-\gamma}\beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \sqrt{1-\gamma}\beta^*\langle 1|) + (\sqrt{\gamma}\beta|0\rangle)(\sqrt{\gamma}\beta^*\langle 0|). \end{aligned} \quad (2.59)$$

On obtient alors :

$$\rho_{dec} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \gamma|\beta|^2 & \sqrt{1-\gamma}\alpha\beta^* \\ \sqrt{1-\gamma}\alpha^*\beta & (1-\gamma)|\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Dans le second membre de l'équation 2.59, on voit que l'opérateur A_1 amène la perte du photon. Dans le cas extrême où $\gamma = 1$ on a $\rho_{dec} = |0\rangle\langle 0|$.

Amortissement de Phase

Dans le cas de l'amortissement en phase, les opérateurs de Kraus sont :

$$P_k = \sum_{r=0}^{\infty} (1-\lambda)^{r^2/2} \sqrt{\frac{(-r^2 \ln(1-\lambda))^k}{k!}} |r\rangle \langle r|, \quad (2.61)$$

où le coefficient $\lambda \in [0, 1]$ est le taux de dispersion, appelé aussi facteur de bruit et k est un entier positif.

Dans le cas d'un qudit de dimension finie d , les opérateurs de Kraus se réduisent à :

$$P_k = \sum_{r=0}^{d-1} (1-\lambda)^{r^2/2} \sqrt{\frac{(-r^2 \ln(1-\lambda))^k}{k!}} |r\rangle\langle r|. \quad (2.62)$$

Si on injecte l'expression obtenue à l'équation 2.62 dans l'équation 2.52 on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_{dec} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k \rho P_k^\dagger, \\ \rho_{dec} &= P_0 \rho P_0^\dagger + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{d-1} (1-\lambda)^{r^2} \frac{(-r^2 \ln(1-\lambda))^k}{k!} |r\rangle\langle r| \rho |r\rangle\langle r|, \\ \rho_{dec} &= P_0 \rho P_0^\dagger + \sum_{r=1}^{d-1} (1-\lambda)^{r^2} |r\rangle\langle r| \rho |r\rangle\langle r| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-r^2 \ln(1-\lambda))^k}{k!}, \\ \rho_{dec} &= P_0 \rho P_0^\dagger + \sum_{r=1}^{d-1} (1-\lambda)^{r^2} |r\rangle\langle r| \rho |r\rangle\langle r| \left(\frac{1}{(1-\lambda)^{r^2}} - 1 \right), \\ \rho_{dec} &= P_0 \rho P_0^\dagger + \sum_{r=1}^{d-1} (1 - (1-\lambda)^{r^2}) |r\rangle\langle r| \rho |r\rangle\langle r|. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Finalement les opérateurs de Kraus pour l'amortissement de phase sont :

$$P_k = \begin{cases} \sum_{r=0}^{d-1} (1-\lambda)^{r^2/2} |r\rangle\langle r| & \text{si } k = 0, \\ \sqrt{(1 - (1-\lambda)^{r^2})} |r\rangle\langle r| & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.64)$$

où k est un entier positif vérifiant $k \leq d-1$. En particulier, dans le cas d'un qubit, les opérateurs de Kraus sont réduits aux deux éléments suivants :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

où λ peut être interprété comme la probabilité qu'un photon soit diffusé. Ici les opérateurs de Kraus vont réduire les éléments non-diagonaux de la matrice densité, rendant dans le cas extrême la matrice densité complètement diagonale, réduisant à zéro les possibilités d'observation de la non-localité car la matrice densité peut être écrite comme le produit tensoriel des éléments diagonaux qui est donc un état séparable.

Chapitre 3

Les Effets de la Décohérence sur la Non-Localité des États Symétriques

Le bruit affecte de manière drastique les performances des corrélations non-locales. C'est pourquoi nous avons étudié la non-localité de certains états symétriques en présence de décohérence de type amortissement d'amplitude et d'amortissement de phase. Notre analyse se base sur le développement récent d'inégalités de Bell pour ces états [85, 86], dans le but de développer des critères pour tester la non-localité d'états qui peuvent être produits de manière expérimentale en conditions réelles.

L'essor de l'informatique quantique se fait en parallèle sur les plans théorique et expérimental. À long terme la nécessité d'unifier ces deux aspects entraîne que les avancées de l'un peuvent parfois être inhibées par les contraintes de l'autre. Par exemple dans [47], les auteurs proposent une inégalité de Bell, pour laquelle *la violation par les états quantiques de type W augmente en fonction du nombre de qubits*. L'étude de la caractérisation de la non-localité en utilisant cette inégalité n'a été faite dans un premier temps qu'avec des états quantiques purs. Toutefois, d'un point de vue pratique, c'est à dire en injectant les modèles de décohérence, ces propriétés se dégradent jusqu'à perdre l'avantage énoncé précédemment. Il a été montré que l'augmentation asymptotique de la violation de l'inégalité présentée dans [47] s'inverse avec le nombre de qubits en présence de certains types de modèles de décohérence car les corrélations non-locales deviennent alors plus fragiles pour un nombre élevé de qubits [28, 60].

Malgré cela, il est aussi possible que l'augmentation du nombre de qubits soit un avantage par rapport à la décohérence, par exemple dans [52] les auteurs montrent que les états *GHZ* sont plus résistants au déphasage avec un plus grand nombre de qubits. Dans [29, 62] les auteurs montrent que la tolérance de la non-localité des états quantiques face à la décohérence est un phénomène complexe, en fonction des états

et du type de décohérence l'augmentation du nombre de qubits peut avoir un effet bénéfique ou non sur la tolérance à la décohérence ; les auteurs de [14, 30] ont aussi comparé plusieurs inégalités dans ces conditions.

Dans un premier temps, dans la section 3.1, nous détaillons les méthodes, à savoir l'utilisation des modèles de décohérence, afin de quantifier l'évolution de l'observation de la non-localité en fonction du bruit. Dans la section 3.2, sont présentés les résultats analytiques et des modèles numériques des cas particuliers que nous étudions. Dans les sections suivantes sont présentées diverses limitations des différents tests de non-localité dues à la décohérence pour ces états. Nous comparons, dans la section 3.3, les résistances de plusieurs états symétriques avec différents modèles de bruits. Dans la section 3.4, nous comparons les tests de Bell étudiés et nous commentons leur comportement par rapport aux bruits considérés. Dans la section 3.5, nous présentons l'importance des stratégies de mesures comme un facteur pertinent quant à la résistance à la décohérence. Il est intéressant de noter que le choix de mesure optimal en terme de violation d'une inégalité de Bell n'est pas de manière générale le choix de mesures qui mène à la meilleure résistance au bruit de la non-localité. Dans la section 3.6, nous abordons les effets de la décohérence sur la sensibilité requise des systèmes de mesure afin d'obtenir une violation des inégalités de Bell. Enfin, dans la section 3.7, nos techniques sont appliquées à la discrimination d'états de Dicke en utilisant un test de non-localité qui détecte leurs dégénérescences.

3.1 Méthode Générale

Nous commençons notre analyse en détaillant notre approche pour quantifier les effets de la décohérence sur la non-localité des états symétriques. Dans un premier temps, nous utilisons les équations 2.53, 2.58 et 2.65 pour calculer l'état quantique bruité, ρ_{dec} , à partir de l'état pur, ρ , pour les deux modèles de bruits (amortissement d'amplitude et de phase). Cela nous permet alors de calculer par la suite la *fidélité* (voir l'équation 2.5) de l'état bruité par rapport à l'état pur initial, que nous notons F_{amp} et F_{ph} pour les deux modèles de bruits. Les deux fidélités, F_{amp} et F_{ph} , sont fonctions des coefficients présents dans les éléments des opérateurs de Kraus (voir section 2.4.1), c'est à dire γ et λ , respectivement. Nous appelons ces deux coefficients les *facteurs de bruit*. Dans le cadre de l'amortissement d'amplitude, en outre, nous interprétons la probabilité d'absorption, γ , en terme d'efficacité de détection, en assumant que la probabilité de perdre un photon est principalement due au processus de détection dans une implémentation expérimentale. En particulier, nous définissons l'efficacité de

détection comme $\eta = \sqrt{1-\gamma}$ et nous attribuons différentes efficacités de détection, η_0 et η_1 , aux deux mesures dichotomiques, \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 respectivement, de nos tests de non-localité. Ce choix correspond à une implémentation expérimentale utilisant de la photonique, où chacune des mesures \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 a des performances différentes.

La seconde étape est de calculer les différentes probabilités correspondant aux inégalités des équations 2.31, 2.32 et 2.33 et d'obtenir les possibles niveaux de violations atteintes par les états bruités au cas par cas. Dans cet objectif, il est nécessaire de suivre une stratégie de mesures, c'est-à-dire de procéder à la mesure d'un \mathcal{M}_0 et d'un \mathcal{M}_1 particulier pour chaque système. Pour simplifier le calcul, nous sélectionnons les stratégies de mesures pour lesquelles chaque partie effectue les mêmes mesures (même \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1). Il ne s'agit pas d'une stratégie de mesure optimale en terme de violation, mais elle donne une borne inférieure quant à la résistance à la décohérence car en considérant un ensemble de stratégies plus large la violation maximum ne peut être au pire que la même. Nous considérons par la suite différentes constructions de stratégies de mesures qui sont soit basées sur les points de Majorana de l'état pur [86], soit optimales en terme de violation (dans le cadre de l'hypothèse où chaque système est mesuré avec la même stratégie de mesures). Après que la stratégie de mesures ait été décidée et en considérant des mesures projectives, les probabilités peuvent être calculées de la manière suivante :

$$P(r_1 \dots r_n | \mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_n) = \text{tr} \left\{ \rho_{\text{dec}} \bigotimes_{i=1}^n \Pi_{r_i | \mathcal{M}_i} \right\}, \quad (3.1)$$

où r_i , \mathcal{M}_i représentent respectivement le résultat de la mesure et le choix de mesure, pour le qubit i . Les $\Pi_{r_i | \mathcal{M}_i}$ sont des projecteurs de rang 1, $\Pi_{r_i | \mathcal{M}_i} = |b_{r_i | \mathcal{M}_i}\rangle \langle b_{r_i | \mathcal{M}_i}|$, où les $|b_{r_i | \mathcal{M}_i}\rangle$ sont donnés par l'équation :

$$|b_{r_i | \mathcal{M}_i}\rangle = \cos \left(\frac{\theta_{\mathcal{M}_i}}{2} - r_i \frac{\pi}{2} \right) |0\rangle + e^{i\phi_{\mathcal{M}_i}} \sin \left(\frac{\theta_{\mathcal{M}_i}}{2} - r_i \frac{\pi}{2} \right) |1\rangle, \quad (3.2)$$

où $\theta_{\mathcal{M}_i}$ et $\phi_{\mathcal{M}_i}$ sont l'angle d'inclinaison et l'angle azimutal sur la sphère de Bloch, respectivement, et sachant que le résultat de la mesure r_i ne peut prendre que la valeur 0 ou la valeur 1. On voit donc que les vecteurs $|b_{0 | \mathcal{M}_i}\rangle$ et $|b_{1 | \mathcal{M}_i}\rangle$ sont orthogonaux formant ainsi une base pour le qubit mesuré. En injectant les valeurs des projecteurs en terme de leur vecteurs propres dans l'équation 3.1, les expressions de \mathcal{P}^n , \mathcal{Q}_d^n , et \mathcal{H}_k^n peuvent être écrites comme des fonctions polynomiales de cosinus et sinus des angles de chaque stratégie de mesures et des facteurs de bruits seulement.

La dernière étape est de déterminer les seuils de décohérence au-delà la détection de la non-localité n'est plus possible. Un seuil dépend de la stratégie de mesures et du test de non-localité utilisé. Il est obtenu en déterminant le niveau de décohérence (quantité de bruit) au delà duquel une inégalité de Bell n'est plus violée. Ces seuils peuvent être exprimés de manières différentes, par exemple avec un seuil de fidélité $F_{\text{amp,th}}$ pour l'amortissement d'amplitude et $F_{\text{ph,th}}$ pour l'amortissement de phase. En dessous de la valeur seuil de fidélité, la violation n'est plus possible. Il est aussi possible d'utiliser une limite sur les facteurs de bruit γ_{th} pour l'amortissement d'amplitude et λ_{th} pour l'amortissement de phase. Au dessus de cette valeur il n'est plus possible d'observer une violation. Dans le cas de l'amortissement d'amplitude il est aussi possible d'utiliser les efficacités de détection $\eta_{0,\text{th}}$ et $\eta_{1,\text{th}}$ en dessous desquelles il n'est pas possible d'observation une violation. Ces différents facteurs sont utiles pour comparer les états quantiques, les stratégies de mesures et les tests de non-localité sous des conditions réalistes. On cherchera donc à obtenir les valeurs de $F_{\text{amp,th}}$, $F_{\text{ph,th}}$, $\eta_{0,\text{th}}$ et $\eta_{1,\text{th}}$ les plus petites possible et les valeurs de γ_{th} et λ_{th} les plus grandes possible.

3.2 Résultats pour l'inégalité de Hardy

Nous traitons les exemples des états symétriques présentés en 2.1.3. Dans chaque cas, nous expliquons le choix de notre stratégie de mesures, dont le rôle est analysé ensuite, dans la section 3.5.

3.2.1 États de Dicke

En partant des états de Dicke purs, présentés dans l'équation 2.8, on peut écrire les états sous l'effet de l'amortissement de phase (voir section 2.4.3) de la manière suivante :

$$\rho_{\text{dec,ph}} = \sum_{\vec{k}=(0,\dots,0)}^{(1,\dots,1)} \mathcal{K}_{\vec{k}} |S(n,k)\rangle \langle S(n,k)| \mathcal{K}_{\vec{k}}^\dagger, \quad (3.3)$$

où $\mathcal{K}_{\vec{k}} = \bigotimes_{i=1}^n P_{k_i}$, $k_i \in \{0, 1\}$, et P_0, P_1 sont définis dans l'équation 2.65. L'état quantique $\rho_{\text{dec,ph}}$ devient un mélange statistique. Comme les inégalités de Bell sont linéaires en terme de probabilités (voir equation 2.26), la valeur de \mathcal{P}^n d'un état quantique peut être écrite comme un mélange statistique des valeurs de \mathcal{P}^n correspondant à chaque composante. En utilisant la stratégie de mesures basée sur les points de Majorana (non optimal en terme de violation), définie par $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = \pi/2, \varphi_0 = 0\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = \pi, \varphi_1 = \pi\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^n(\rho_{\text{dec,ph}}) &= \mathcal{P}^n(P_0^{\otimes n} |S(n, k)\rangle \langle S(n, k)| P_0^{\otimes n}) \\
&+ \sum_{j=1}^k \sum_{\text{perm}} \mathcal{P}^n(P_0^{\otimes n-j} \otimes P_1^{\otimes j} |S(n, k)\rangle \langle S(n, k)| P_0^{\otimes n-j} \otimes P_1^{\otimes j}), \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{k} (1-\lambda)^k \left(1 - \frac{2k^2}{n}\right) + \sum_{j=1}^k \lambda^j (1-\lambda)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{n-j}{k-j} (1-2k) \right). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

En reproduisant un raisonnement similaire dans le cas de l'amortissement d'amplitude, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^n(\rho_{\text{dec,amp}}) &= \frac{1}{2^n} \left(\binom{n}{k} (1-\gamma)^k \left(1 - \frac{2k^2}{n}\right) - 2^n \gamma^k \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^k \gamma^j (1-\gamma)^{k-j} \binom{n}{j} \binom{n}{k}^{-1} \binom{n-j}{k-j} (1-2(k-j)) \right). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Dans les équations 3.4 et 3.5 chaque terme correspond à un degré auquel l'état quantique a été exposé à la décohérence. Le premier terme, avant la somme sur j correspond à la contribution de l'état de Dicke non bruité car les opérateurs de Kraus P_0 et A_0 n'ajoutent qu'un coefficient à l'état quantique. On constate qu'en l'absence de bruit, la violation de $\mathcal{P}^n \leq 0$ peut être obtenue seulement sous la condition que le terme $(1 - \frac{2k^2}{n})$ soit positif, ce qui implique $k \leq \sqrt{n/2}$. Pour un n donné, on ne peut pas obtenir de violation si k , le nombre de qubits égaux à $|1\rangle$, est trop grand. Quant au second terme, il correspond à la contribution quand les différents qubits subissent la décohérence, étant donné la forme des secondes matrices dans les modèles d'amortissements dans les équations 2.58 et 2.65 la somme ne va que jusqu'à k . Chacun des termes de la somme donne une contribution négative à la valeur de \mathcal{P}^n car le terme $(1-2k)$ dans l'équation 3.4 ou le terme $(1-2(k-j))$ dans l'équation 3.5 sont toujours négatifs pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, k\}$.

La figure 3.1 montre les valeurs de \mathcal{P}^n d'états de Dicke purs en fonction du nombre de qubits pour $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$. Lorsque k augmente la violation diminue fortement d'où l'utilisation de l'échelle logarithmique. La violation de l'inégalité de Hardy diminue en fonction du nombre de qubits et cela pour tous les k . Cela s'explique principalement par le facteur $\frac{1}{2^n}$ dans les deux expressions dans les équations 3.4 et 3.5.

Les figures 3.2, 3.3 et 3.4 montrent la valeur de $\mathcal{P}^n(\rho_{\text{dec,ph}})$ et $\mathcal{P}^n(\rho_{\text{dec,amp}})$ pour

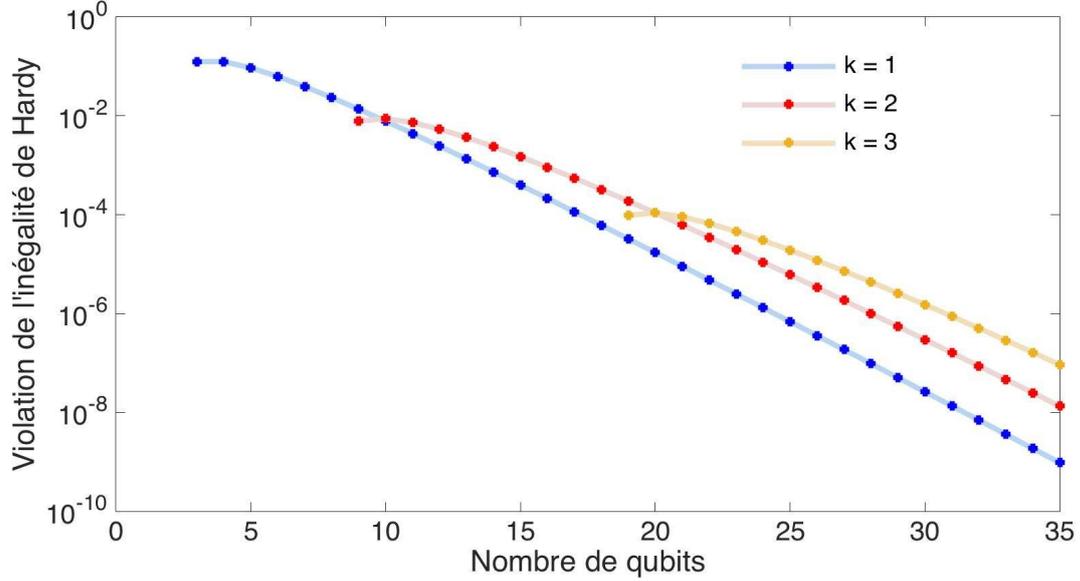


FIGURE 3.1 Violation de l'inégalité de Hardy par des états de Dicke pour $k = 1$ (bleu), $k = 2$ (rouge) et $k = 3$ (jaune) en fonction du nombre de qubits.

$n = 4$ et $k = 1$, $n = 10$ et $k = 2$ et $n = 20$ et $k = 3$. Seulement les courbes de la figure 3.2 sont linéaires car \mathcal{P}^n est un polynôme dont le degré est égal à k . La relation entre la violation et les modèles de bruits semble non triviale. En effet dans la figure 3.2, l'amortissement d'amplitude affecte moins la violation de l'inégalité que celui en phase contrairement à la figure 3.4. Dans la figure 3.3 on peut observer les deux tendances.

Pour comprendre le lien entre violation et décohérence, on s'intéresse à la fidélité entre les états de Dicke sans bruit et les états de Dicke qui ont subit les effets de la décohérence. On obtient les expressions suivantes :

$$F_{\text{ph}} = \left((1 - \lambda)^k + \sum_{j=1}^k \lambda^j (1 - \lambda)^{k-j} \binom{n}{j} \binom{n}{k}^{-2} \binom{n-k}{k-j}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.6)$$

$$F_{\text{amp}} = (1 - \gamma)^{k/2}. \quad (3.7)$$

Les valeurs des paramètres de bruits de seuils sont obtenues lorsque l'on résout $\mathcal{P}^n(\rho_{\text{dec,ph}})(\lambda) = 0$ (voir équation 3.4) pour l'amortissement de phase et $\mathcal{P}^n(\rho_{\text{dec,amp}})(\gamma) = 0$ (équation 3.5) pour l'amortissement d'amplitude. On calcule ensuite la fidélité pour ces facteurs de bruits pour obtenir les seuils de fidélité. Les figures 3.6 et 3.5 présentent les seuils de fidélité F_{ph} et F_{amp} en fonction du nombre de qubits pour les valeurs de $k = \{1, 2, 3\}$. Il est d'abord pertinent de noter que les comportements des deux bruits

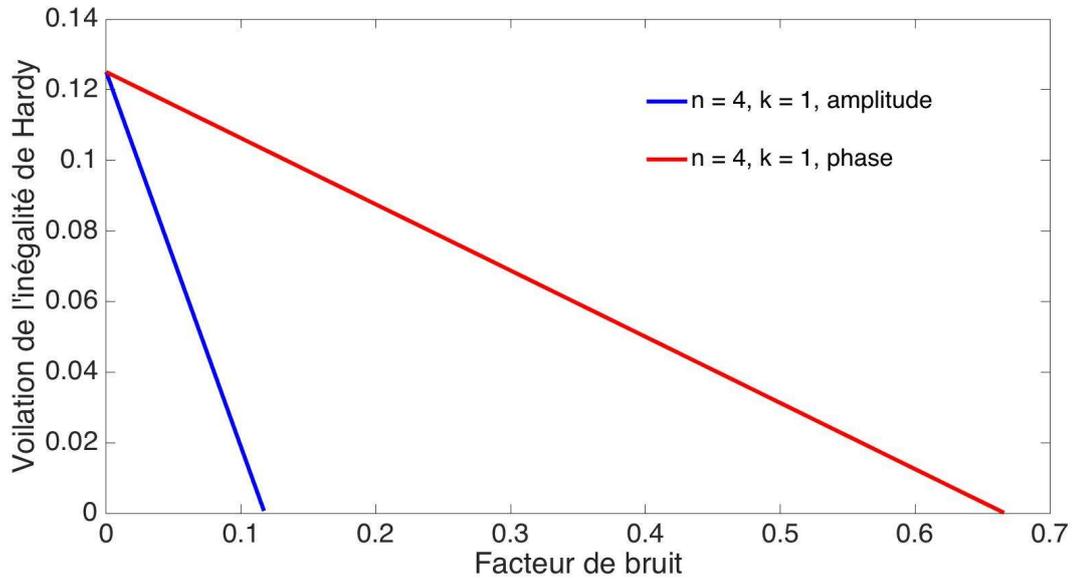


FIGURE 3.2 Violation de l'inégalité de Hardy pour l'état de Dicke pour $n = 4$ et $k = 1$ pour les deux modèles de bruit.

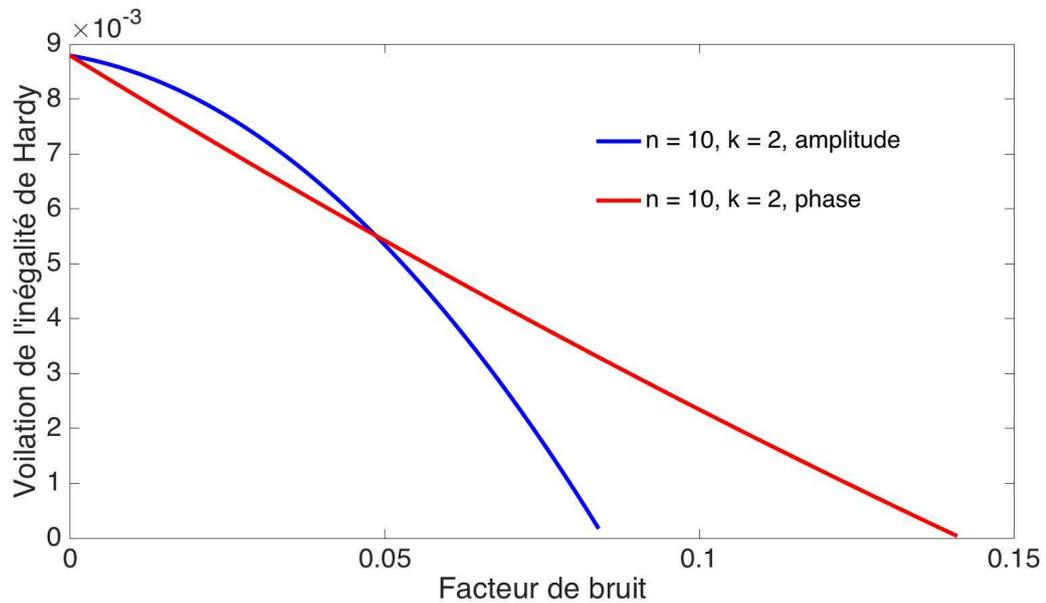


FIGURE 3.3 Violation de l'inégalité de Hardy pour l'état de Dicke pour $n = 10$ et $k = 2$ pour les deux modèles de bruit.

en fonction de n et k sont complètement différents.

Dans le cas de l'amortissement de phase, le seuil de fidélité diminue quand le nombre de qubits augmente. Il semble qu'utiliser un k faible semble plus tolérant à l'amortissement de phase. Dans le cas de l'amortissement d'amplitude le seuil de

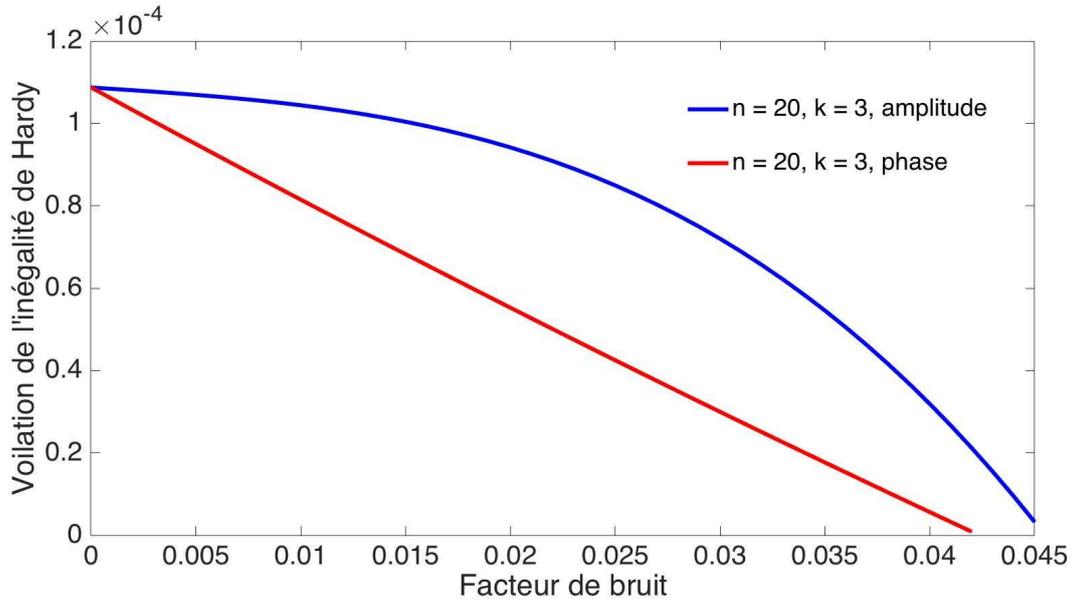


FIGURE 3.4 Violation de l'inégalité de Hardy pour l'état de Dicke pour $n = 20$ et $k = 3$ pour les deux modèles de bruit.

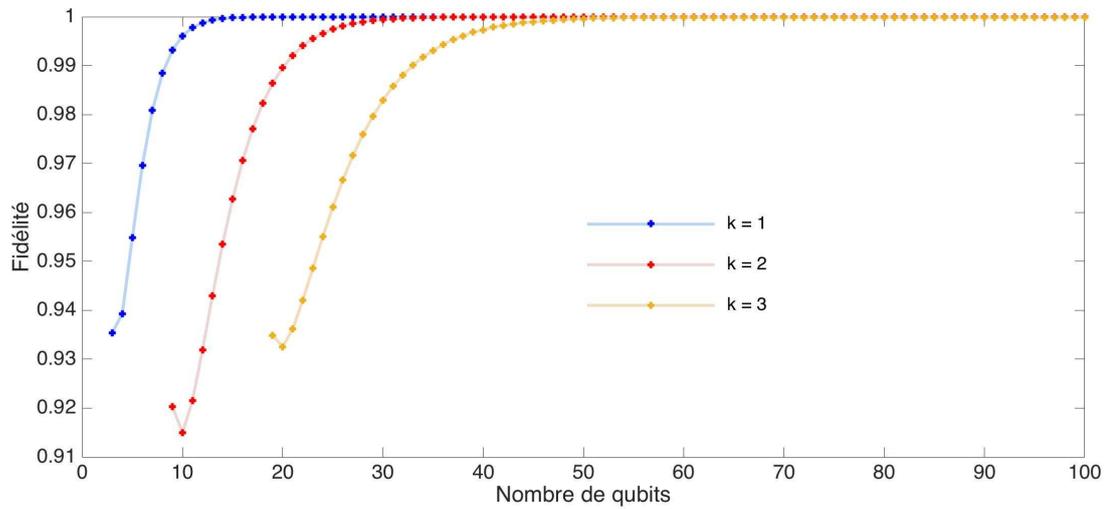


FIGURE 3.5 Seuil de fidélité des états de Dicke exposés à l'amortissement d'amplitude par rapport au nombre de qubit n pour les valeurs de $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

fidélité augmente rapidement quand on augmente le nombre de qubits et dans ce cas là, il semble qu'utiliser un k plus élevé donne une meilleure résistance au bruit. Cela montre que la résistance à la décohérence des états de Dicke dépend de manière cruciale du type de bruit auquel ils sont exposés.

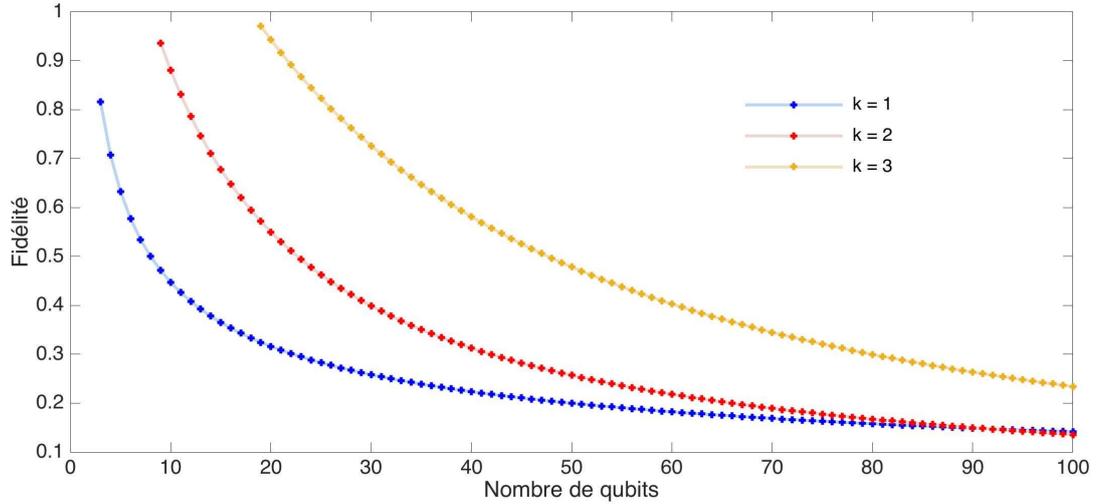


FIGURE 3.6 Seuil de fidélité des états de Dicke exposés à l'amortissement de phase par rapport au nombre de qubit n pour les valeurs de $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

3.2.2 États W

Les états W sont un cas particulier des états de Dicke, ils correspondent à $k = 1$ (voir équation 2.11). Alors que nos résultats pour les seuils des états de Dicke sont numériques, pour les états W nous obtenons des résultats analytiques. En terme de représentation de Majorana ces états possèdent tous un point de Majorana qui correspond au qubit $|1\rangle$ alors que tous les autres points de Majorana correspondent à $|0\rangle$. À partir de cela on peut définir la stratégie de mesures basée sur les points de Majorana : $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = \pi/2, \varphi_0 = 0\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = \pi, \varphi_1 = \pi\}$. On remarquera que de par la géométrie des états W (tous les points de Majorana sont situés sur les pôles), la mesure est invariante par rapport à une rotation dans le plan formé par les vecteurs propres des matrices de Pauli σ_x et σ_y (le plan de l'équateur). En considérant que toutes les parties utilisent la stratégie de mesure que l'on vient de définir, la violation de l'inégalité donnée à l'équation $\mathcal{P}^n \leq 0$ peut être observée en absence de bruit pour tous les état W à n qubits comme nous l'avons vu dans la section précédente.

Dans le cas de l'amortissement d'amplitude, les valeurs de violation sont présentées dans le tableau 3.1, pour les états $W_{3,4,5,6}$ avec les efficacités de détection $\eta_{0,\text{th}}$ and $\eta_{1,\text{th}}$ correspondant à la stratégie de mesure évoquée dans le paragraphe précédent.

Le point important ici est qu'il y a une asymétrie entre les efficacités de détection des deux mesures. Cela est du à la structure même de l'inégalité où \mathcal{P}^n n'a pas de symétrie entre les probabilités associées aux résultats des mesures \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 (voir l'équation 2.31). On remarque aussi que l'efficacité de détection $\eta_{0,\text{th}}$ pour la mesure

| État | \mathcal{P}^n | $\eta_{0,\text{th}}$ | $\eta_{1,\text{th}}$ |
|-------|-----------------|----------------------|----------------------|
| W_3 | 0.1250 | 70.7% | 91.3% |
| W_4 | 0.1250 | 57.7% | 92.6% |
| W_5 | 0.0938 | 50.0% | 94.9% |
| W_6 | 0.0625 | 45.8% | 96.7% |

TABLE 3.1 Valeurs de \mathcal{P}^n pour les états purs $W_{3,4,5,6}$ et les efficacités de détection pour l'amortissement d'amplitude. Les seuils d'une mesure sont donnés en considérant l'autre mesure sans défaut.

\mathcal{M}_0 diminue tandis que $\eta_{1,\text{th}}$ pour la mesure \mathcal{M}_1 augmente quand on augmente le nombre de qubit de l'état W .

Si l'on considère l'égalité des efficacités de détection ($\eta_0 = \eta_1$), on peut obtenir une expression analytique pour le seuil du facteur de bruit ainsi que pour le seuil de fidélité. On utilise l'expression de \mathcal{P}^n de l'équation 3.5 pour obtenir la valeur du seuil de facteur de bruit, γ_{th} , puis l'équation 3.7 pour calculer le seuil de fidélité.

$$\gamma_{\text{th}} = \frac{n-2}{2^n+n-3} \text{ et } F_{\text{amp,th}} = \sqrt{\frac{2^n-1}{2^n+n-3}}. \quad (3.8)$$

On remarque dans la figure 3.7 que le seuil du facteur de bruit tend vers zéro asymptotiquement quand le nombre de qubits augmente, montrant ainsi que plus l'état est grand, plus il est sensible au bruit d'amplitude.

Dans le cas de l'amortissement de phase, en utilisant la même stratégie de mesures, on peut calculer de manière similaire les valeurs de \mathcal{P}^n en fonction du facteur de bruit, pour les états $W_{3,4,5,6}$. Le résultat est montré dans la figure 3.8. Il est intéressant de préciser que le niveau de violation diminue quand le facteur de bruit augmente, mais les courbes deviennent de plus en plus plates quand on augmente le nombre de qubits. Cela signifie que la résistance des états W à l'amortissement de phase augmente avec le nombre de qubits.

Il est aussi possible d'obtenir dans ce cas, les expressions analytiques de facteur de bruit de seuil, λ_{th} , ainsi que la fidélité de seuil, $F_{\text{ph,th}}$:

$$\lambda_{\text{th}} = \frac{n-2}{n-1} \text{ et } F_{\text{ph,th}} = \sqrt{\frac{2}{n}}. \quad (3.9)$$

Contrairement au cas de l'amortissement d'amplitude, dans le cas de l'amortissement de phase présenté dans la figure 3.7, le seuil de fidélité décroît quand le nombre de qubits, n , augmente. Nous remarquons une nouvelle fois que, comme pour les états

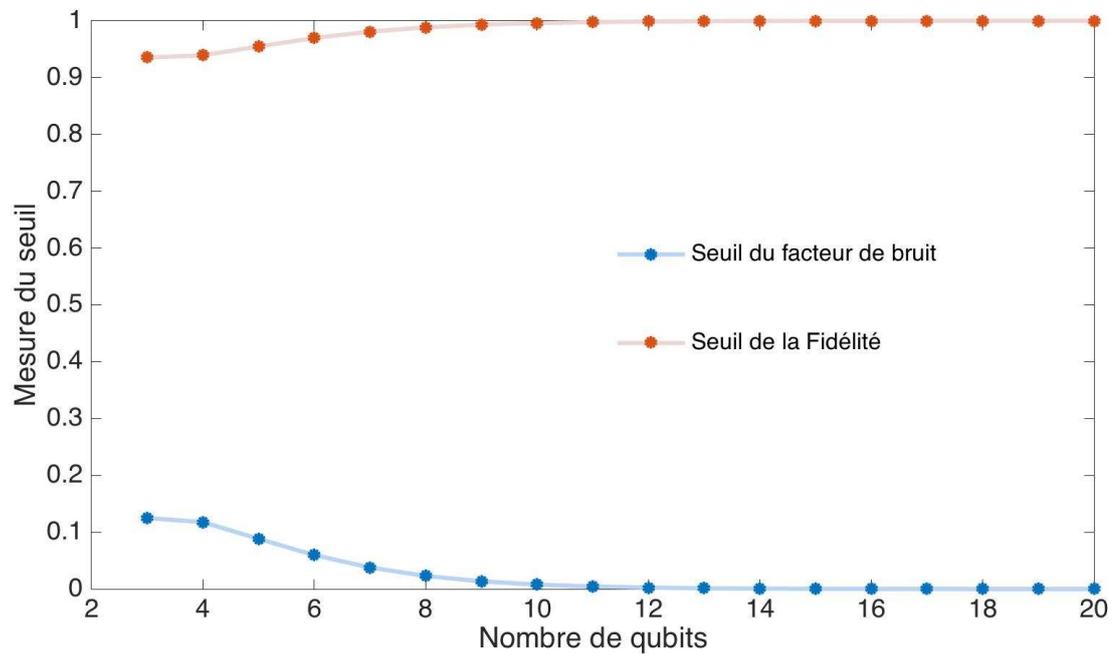


FIGURE 3.7 Mesure du seuil de décohérence pour différents états W de 3 à 20 qubits exposés à l'amortissement d'amplitude.

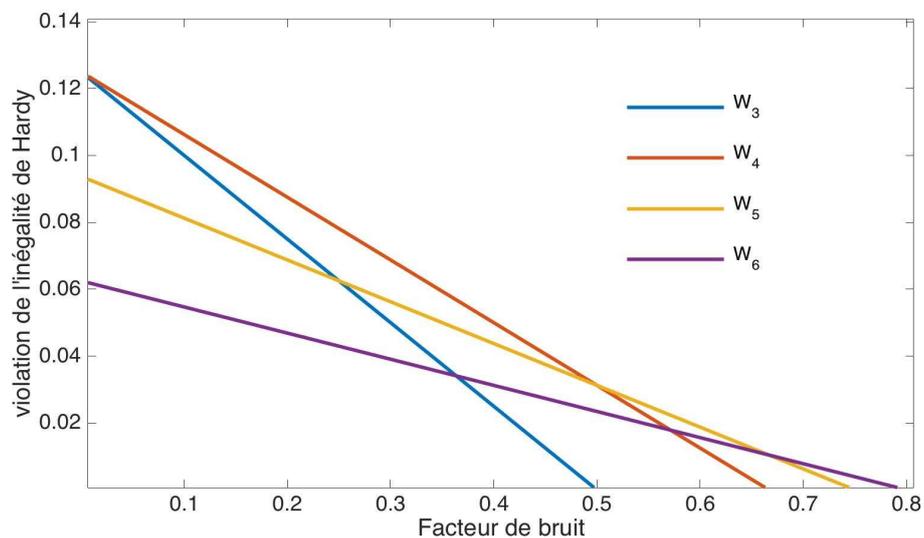


FIGURE 3.8 Valeurs de \mathcal{P}^n en fonction du facteur de bruit pour les états $W_{3,4,5,6}$ exposés à l'amortissement de phase.

de Dicke de manière générale, la résistance à l'amortissement de phase des états W est meilleure que la résistance à l'amortissement d'amplitude.

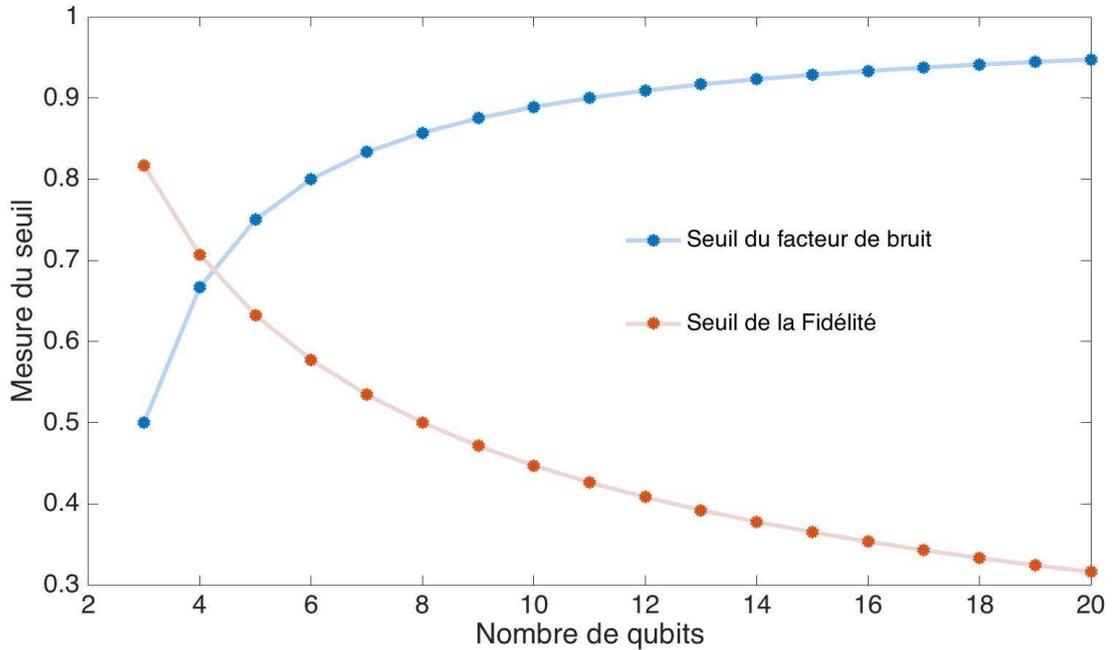


FIGURE 3.9 Mesure du seuil de décohérence pour différents état W de 3 à 20 qubits exposés à l'amortissement de phase.

3.2.3 États Symétriques Maximalemeent Intriqués

Des états symétriques maximalemeent intriqués présentés dans la section 2.1.3 sont le tétraèdre 2.12, l'octaèdre 2.13 et le cube 2.14.

Les valeurs de \mathcal{P}^n en fonction des efficacités de détection η_0 et η_1 dans le cas de l'amortissement d'amplitude des états symétriques cités sont présentées dans la figure la 3.10.

En haut à gauche se trouve le tétraèdre pour la stratégie de mesures basée sur la violation maximum de l'état non bruité, $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 1.885, \varphi_0 = 1.047\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = 0.105, \varphi_1 = 4.189\}$, qui donne une valeur $\mathcal{P}^n = 0.1638$. Dans ce cas là, les seuils d'efficacités de détection sont $\eta_{0,\text{th}} = 71.41\%$ et $\eta_{1,\text{th}} = 90\%$.

En haut à droite se trouve le tétraèdre lorsque l'on utilise la stratégie de mesures définie par les points de Majorana; dans ce cas on a atteint $\mathcal{P}^n = 0.1621$ pour $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 0.899, \varphi_0 = 2.435\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = 2.005, \varphi_1 = 4.285\}$. Nous obtenons alors $\eta_{0,\text{th}} = 87.18\%$ et $\eta_{1,\text{th}} = 76.16\%$. Il est intéressant de préciser que contrairement à l'état W , plus de pertes dues au bruit peuvent être tolérées sur la mesure de \mathcal{M}_1 que de \mathcal{M}_0 . Cela montre bien l'importance du choix de la stratégie de mesures pour la résistance au bruit des tests de non-localité.

En bas à gauche, le cube avec la stratégie de mesure donnant la violation maximum de l'état pur est : $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 1.7278, \varphi_0 = 5.5292\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = 2.13628, \varphi_1 = 2.38761\}$ et donne une violation de $\mathcal{P}^n = 0.0890$. On a des seuils d'efficacités de détection $\eta_{0,\text{th}} = \eta_{1,\text{th}} = 79.37\%$.

En bas à droite, l'octaèdre avec la stratégie de mesure donnant la violation maximum de l'état pur est : $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 2.13, \varphi_0 = 5.51\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = 0.09, \varphi_1 = 2.40\}$ et donne une violation de $\mathcal{P}^n = 0.1234$. On a des seuils d'efficacités de détection $\eta_{0,\text{th}} = 72.80\%$ et $\eta_{1,\text{th}} = 92.74\%$.

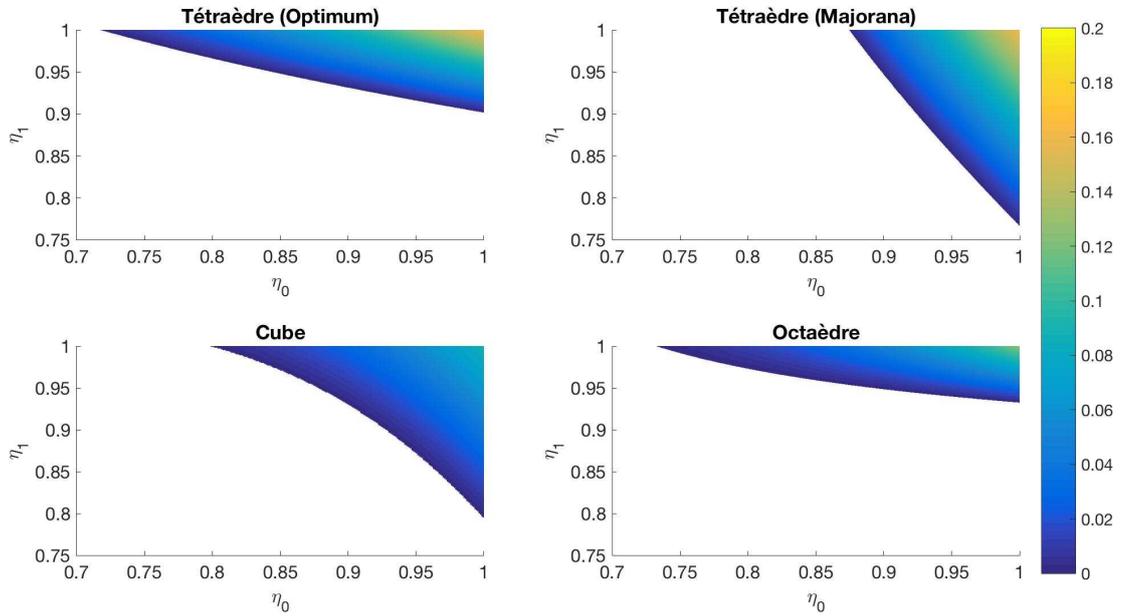


FIGURE 3.10 Valeurs de la violation de l'inégalité de Hardy en fonction des efficacités de détection η_0 et η_1 de l'amortissement d'amplitude pour le tétraèdre (pour les stratégies optimale et de Majorana), le cube (stratégie optimale) et l'octaèdre (stratégie optimale). Les parties non colorées ne donnent pas de violation.

Les valeurs de \mathcal{P}^n en fonction du facteur de bruit dans le cas de l'amortissement de phase pour les quatre mêmes situations sont présentées dans la figure 3.11. Les seuils de facteur de bruit sont les valeurs du facteur de bruit pour laquelle la violation est la plus faible. Ainsi on obtient pour le tétraèdre $\lambda_{th} = 0.438$ pour la stratégie donnant la violation maximum et $\lambda_{th} = 0.304$ pour la stratégie de mesure qui se base sur les points de Majorana. Pour le cube on a $\lambda_{th} = 0.183$ et pour l'octaèdre on a $\lambda_{th} = 0.463$.

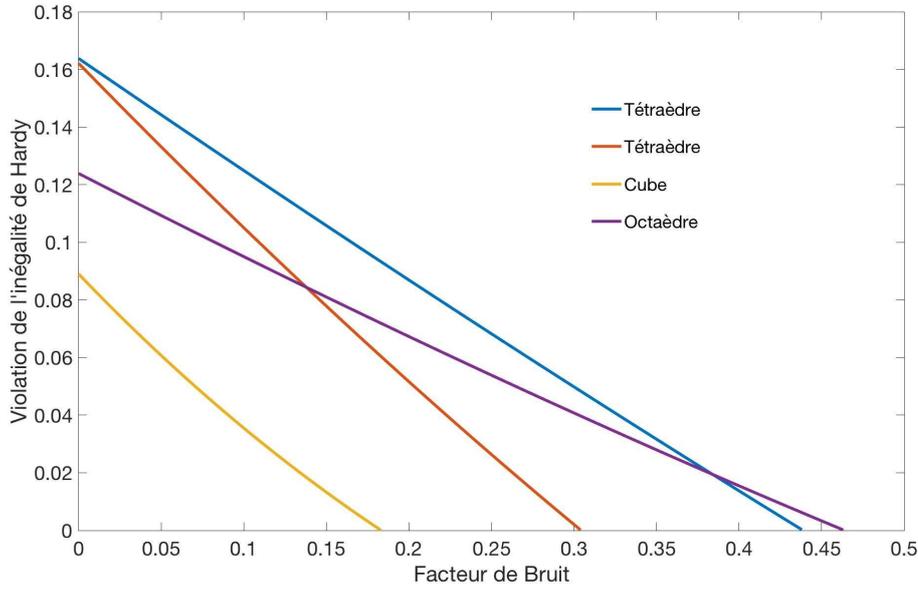


FIGURE 3.11 Valeurs de la violation de l'inégalité de Hardy en fonction du facteur de bruit de l'amortissement de phase pour le tétraèdre (pour les stratégies optimale et de Majorana), le cube (stratégie optimale) et l'octaèdre (stratégie optimale). Les parties non colorées ne donnent pas de violation.

3.2.4 États avec Différentes Dégénérescences

Les valeurs de \mathcal{P}^n en fonction des efficacités de détection η_0 et η_1 dans le cas de l'amortissement d'amplitude des états $|00++\rangle$ et $|000+\rangle$ sont présentées dans la figure 3.12.

À gauche, pour l'état $|00++\rangle$, la stratégie de mesure donnant la violation maximum avec l'état pur est : $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 0.722566, \varphi_0 = 0\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = 1.916371, \varphi_1 = \pi\}$ et donne une violation de $\mathcal{P}^n = 0.0194$. On a des seuils d'efficacités de détection $\eta_{0,\text{th}} = \eta_{1,\text{th}} = 90\%$.

À droite, pour l'état $|000+\rangle$, la stratégie de mesure donnant la violation maximum avec l'état pur est : $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 0.471239, \varphi_0 = 0\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = \pi, \varphi_1 = 0\}$ et donne une violation de $\mathcal{P}^n = 0.0141$. On a des seuils d'efficacités de détection $\eta_{0,\text{th}} = 82.46\%$ et $\eta_{1,\text{th}} = 73.48\%$.

Les valeurs de \mathcal{P}^n en fonction du facteur de bruit dans le cas de l'amortissement de phase pour les deux mêmes situations sont présentées dans la figure 3.13. Les seuils de facteur de bruit sont les valeurs du facteur de bruit pour laquelle la violation est la plus proche d'être nulle. Ainsi on obtient pour $|00++\rangle$ un seuil de facteur de bruit $\lambda_{th} = 0.037$ et pour $|000+\rangle$ un seuil de facteur de bruit $\lambda_{th} = 0.076$.

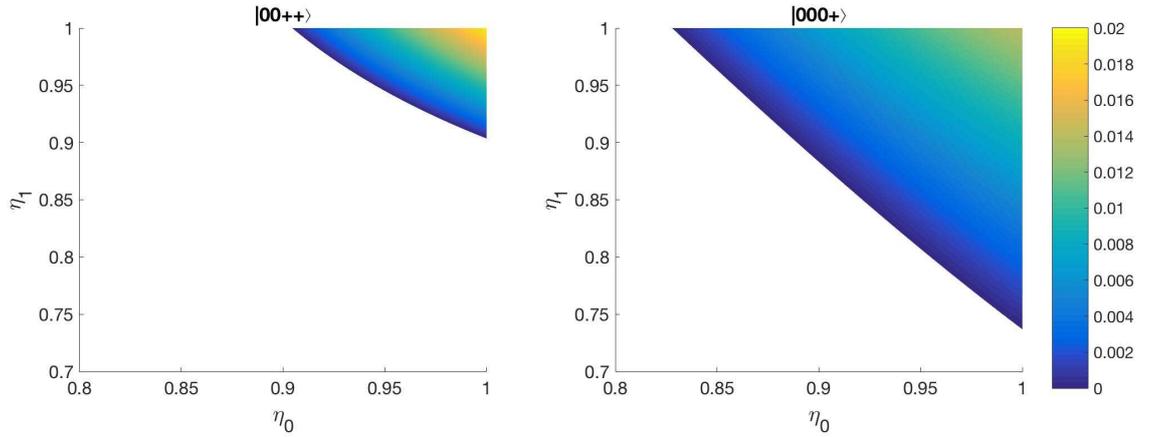


FIGURE 3.12 Valeurs de la violation de l'inégalité de Hardy en fonction des efficacités de détection η_0 et η_1 de l'amortissement d'amplitude pour l'état $|00++\rangle$ et l'état $|000+\rangle$.

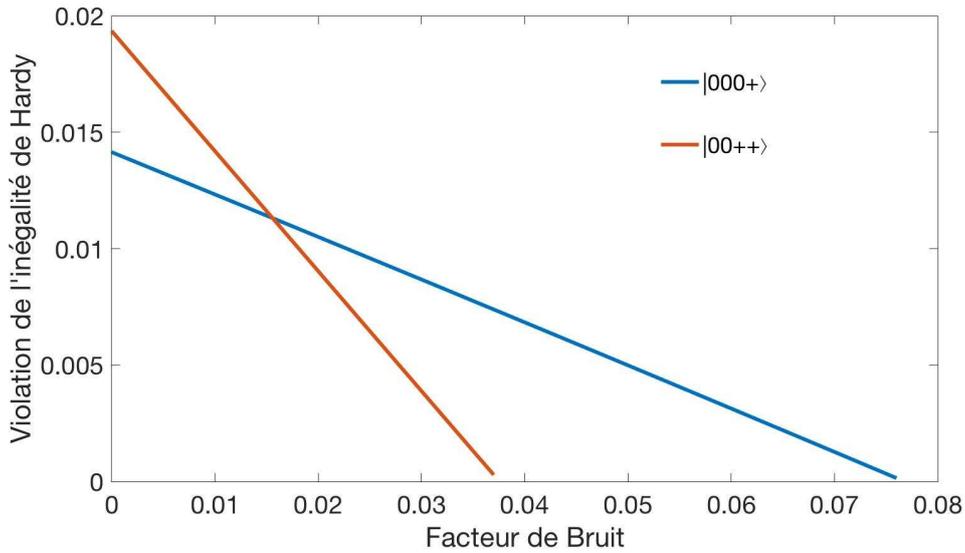


FIGURE 3.13 Valeurs de la violation de l'inégalité de Hardy en fonction du facteur de bruit de l'amortissement de phase pour l'état $|00++\rangle$ et l'état $|000+\rangle$.

3.3 Comparatif des États Symétriques

Nous présentons un comparatif de la tolérance aux bruits des états vus dans la section 2.1.3, en analysant les seuils des efficacités de détection ainsi que les seuils de fidélité du test de non-localité basé sur le paradoxe de Hardy (voir équation 2.31).

Dans le tableau 3.2, nous présentons pour quelques états symétriques ayant différents nombres de qubits, les valeurs de \mathcal{P}^n pour les stratégies de mesures basées sur les

violations optimales des états non bruités et les efficacités de détection $\eta_{0,\text{th}}$ et $\eta_{1,\text{th}}$.

| État | \mathcal{P}^n | $\eta_{0,\text{th}}$ | $\eta_{1,\text{th}}$ |
|----------------|-----------------|----------------------|----------------------|
| 3 Qubits | | | |
| W_3 | 0.1926 | 64.07% | 85.40% |
| 4 Qubits | | | |
| $S(4,2)$ | 0.1407 | 76.81% | 90% |
| W_4 | 0.1811 | 64.04% | 85.36% |
| Tétraèdre | 0.1638 | 71.41% | 90% |
| $ 000+\rangle$ | 0.0141 | 82.46% | 73.48% |
| $ 00++\rangle$ | 0.0194 | 90% | 90% |
| 5 Qubits | | | |
| W_5 | 0.1835 | 55.64% | 86.80% |
| 6 Qubits | | | |
| W_6 | 0.1815 | 53.08% | 87.06% |
| Octaèdre | 0.1234 | 72.80% | 92.74% |
| 8 Qubits | | | |
| Cube | 0.0890 | 79.37% | 79.37% |
| W_8 | 0.1791 | 49.07% | 87.46% |

TABLE 3.2 Valeurs de \mathcal{P}^n et les efficacités de détections correspondante pour l'amortissement d'amplitude des états présentés dans la section 2.1.3 avec les stratégies de mesures utilisées dans la section 3.2.

Comme mentionné précédemment, on remarque une asymétrie entre les deux seuils, qui est due à la construction de \mathcal{P}^n . En général, les seuils sur la mesure \mathcal{M}_0 sont plus faibles que sur la mesure \mathcal{M}_1 , c'est à dire qu'on peut tolérer plus de bruits sur \mathcal{M}_0 . Les $|000+\rangle$, cube et W ont des seuils inférieurs à 90% sur les deux types de mesure, cela les désignant comme les états les plus résistants parmi les états symétriques analysés.

Un autre point important concerne les valeurs de la violation qui peuvent être attendues pendant une expérience. Clairement, même si un état peut atteindre un haut niveau de violation, si l'efficacité de détection seuil est élevée, il est difficile d'observer la non-localité en pratique [28, 60]. Il est donc aussi important de prendre en compte à la fois quel niveau de violation est désiré et les caractéristiques du matériel expérimental disponibles lorsque l'on se réfère à une application en informatique quantique qui utilise les propriétés non-locales. Cela suggère une classification des états symétriques par rapport à une expérience donnée.

Dans le tableau 3.3, nous comparons les deux types de décohérence en utilisant les

fidélités seuils des états symétriques déjà comparés pour leur efficacités de détection seuils au tableau 3.2 pour les stratégies de mesures optimales. Pour l'amortissement d'amplitude les fidélités sont obtenues en égalisant les efficacités de détection des deux mesures \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 .

| État | \mathcal{P}^n | $F_{\text{amp,th}}$ | $F_{\text{ph,th}}$ |
|----------------|-----------------|---------------------|--------------------|
| 3 Qubits | | | |
| W_3 | 0.1926 | 90.04% | 79.16% |
| 4 Qubits | | | |
| $S(4,2)$ | 0.1407 | 86% | 81.34% |
| W_4 | 0.1811 | 89.94% | 77.14% |
| Tetrahedron | 0.1638 | 85.62% | 77.15% |
| $ 000+\rangle$ | 0.0141 | 99.48% | 99.22% |
| $ 00++\rangle$ | 0.0194 | 99.16% | 98.95% |
| 5 Qubits | | | |
| W_5 | 0.1835 | 90.24% | 75.89% |
| 6 Qubits | | | |
| Octahedron | 0.1234 | 83.23% | 65.85% |
| W_6 | 0.1815 | 90.27% | 75.28% |
| 8 Qubits | | | |
| Cube | 0.0890 | 70.93% | 81.81% |
| W_8 | 0.1791 | 90.32% | 75.06% |

TABLE 3.3 Valeurs de \mathcal{P}^n et les fidélités seuils pour l'amortissement d'amplitude et l'amortissement de phase des états présentés dans la section 2.1.3 avec les stratégies de mesures utilisées dans la section 3.2.

À l'exception du cube, les seuils de fidélité pour l'amortissement de phase sont plus faibles que celles de l'amortissement d'amplitude, ce qui suggère que les états symétriques sont plus résistants à l'amortissement de phase. Certains états possèdent une différence très prononcée entre les deux fidélités seuils. Par exemple les état W ont une résistance relativement faible à l'amortissement d'amplitude mais une résistance très élevée à l'amortissement de phase. Cela peut s'expliquer par le fait que les états W sont des états de Dicke pour lesquels $k = 1$, c'est à dire que parmi les n qubits seulement un des qubits est égal à $|1\rangle$. Dans les expériences telles qu'en photonique par exemple, l'action de l'amortissement d'amplitude se traduit par la perte d'un photon. Si l'on décide d'encoder l'information dans le nombre de photons, l'état W ne compterait donc qu'un seul photon, dont la perte lors d'une expérience inhiberait toute chance d'ob-

server des corrélations non-locales. Pour s'en convaincre on peut aussi voir que l'état de Dicke $|\mathcal{S}(4,2)\rangle$ compte deux qubits $|1\rangle$; en reprenant l'idée d'encoder l'information dans le nombre de photons on obtient alors deux photons, on comprend alors bien que la perte d'un photon affecte les corrélations non-locales mais qu'il reste tout de même possible d'observer une violation. Il n'est donc pas surprenant que son seuil de fidélité pour l'amortissement d'amplitude, $F_{\text{amp,th}}$, soit alors plus faible que celui de l'état W_4 . Il est aussi intéressant de remarquer que l'octaèdre possède une importante différence entre les deux seuils de fidélité pour les deux types d'amortissement.

Les tableaux 3.2 et 3.3 imposent des contraintes drastiques sur les conditions expérimentales afin d'observer des corrélations non-locales en présence de décohérence avec des modèles tels que l'amortissement d'amplitude et l'amortissement de phase. Dans les expériences utilisant la photonique, les efficacités de détection présentées dans le tableau 3.2 peuvent être atteintes par l'utilisation de détecteurs supraconducteurs où les efficacités de détection peuvent atteindre jusqu'à 95% [38]. Les fidélités qui peuvent être atteintes expérimentalement sont autour de 80% et 85% pour l'état W_3 et $\mathcal{S}(4,2)$ respectivement, pour des systèmes photoniques [55, 72].

3.4 Comparaison Entre les Tests de Non-Localité

Jusqu'à maintenant nous avons examiné la résistance à la décohérence du test de non-localité basé sur le paradoxe de Hardy de certains états symétriques. Il est également intéressant de voir si la résistance au bruit dépend aussi de la manière dont la non-localité est évaluée. C'est pourquoi, nous considérons une autre inégalité de Bell $\mathcal{H}_k^n \leq 0$ définie à la section 2.2.4 pour laquelle nous déterminons les facteurs de bruit seuils dans le cas de l'amortissement d'amplitude et de l'amortissement de phase pour des états W de 3 à 10 qubits car la stratégie de mesure est la même pour chacun des états et test de non-localité.

Dans la figure 3.14 on représente les valeurs des seuils de facteurs de bruit à la fois pour \mathcal{P}^n et pour \mathcal{H}_k^n , pour les deux types d'amortissements en fonction du nombre de qubits des états W mentionnés. Nous remarquons que les résultats obtenus dans le cas de l'amortissement d'amplitude sont sensiblement les mêmes pour les deux inégalités de Bell étudiées. En effet, la variation du seuil de facteur de bruit avec le nombre de qubit suit le même comportement même si les deux courbes semblent au final marquer une légère différence où le facteur de bruit requis pour l'inégalité de Bell utilisant \mathcal{H}_k^n est plus élevée (donc plus résistant à l'amortissement d'amplitude).

Pour le cas de l'amortissement de phase, on observe des comportements complète-

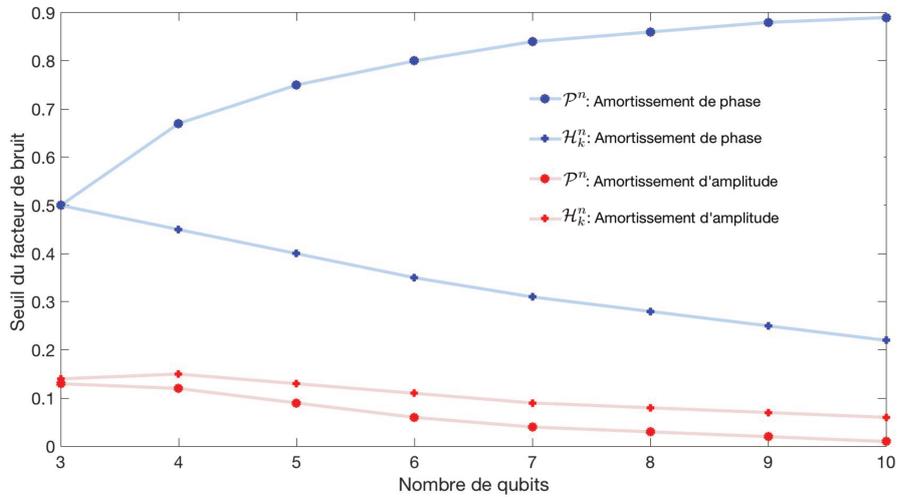


FIGURE 3.14 Facteurs de bruit seuils de $\mathcal{P}^n \leq 0$ et $\mathcal{H}_k^n \leq 0$ en fonction du nombre de qubits des états W states exposés à l'amortissement d'amplitude et l'amortissement de phase.

ment différents : pour le test \mathcal{H}_k^n on observe un comportement similaire à l'amortissement d'amplitude, alors que le seuil de facteur de bruit pour l'inégalité de Bell basée sur le paradoxe de Hardy tend vers 0 pour les grands nombres de qubits, comme vu précédemment (3.2.2, figure 3.8 et 3.9). Clairement, le test de non localité joue un rôle crucial quant à la résistance à la décohérence et doit être choisi au cas par cas avec attention.

3.5 Stratégie de Mesures

Nous utilisons plusieurs stratégies de mesures pour examiner la résistance à la décohérence de la non-localité des états symétriques. Dans cette section, nous allons présenter l'importance du choix de la stratégie de mesures, pour le cas du W_4 en utilisant l'inégalité basée sur le paradoxe de Hardy pour l'amortissement de phase puis l'amortissement d'amplitude. Nous calculons les valeurs de \mathcal{P}^n de l'état W_4 non bruité et du seuil de facteur de bruit pour un ensemble de stratégies de mesures obtenues par un échantillonnage de la sphère de Bloch.

3.5.1 Amortissement de Phase

Le cas de l'amortissement de phase est montré dans la figure 3.15 où chaque point représente une stratégie de mesures. Y sont représentés la valeur de \mathcal{P}^n et le facteur de bruit seuil de l'état W_4 . Sur cette figure une ligne horizontale indique les différentes stratégies de mesures qui donnent la même violation pour l'état W_4 pur mais différents facteur de bruit seuils, alors qu'une ligne verticale indique les stratégies de mesures qui donnent le même seuil de facteur de bruit mais différents niveaux de violation de l'état pur.

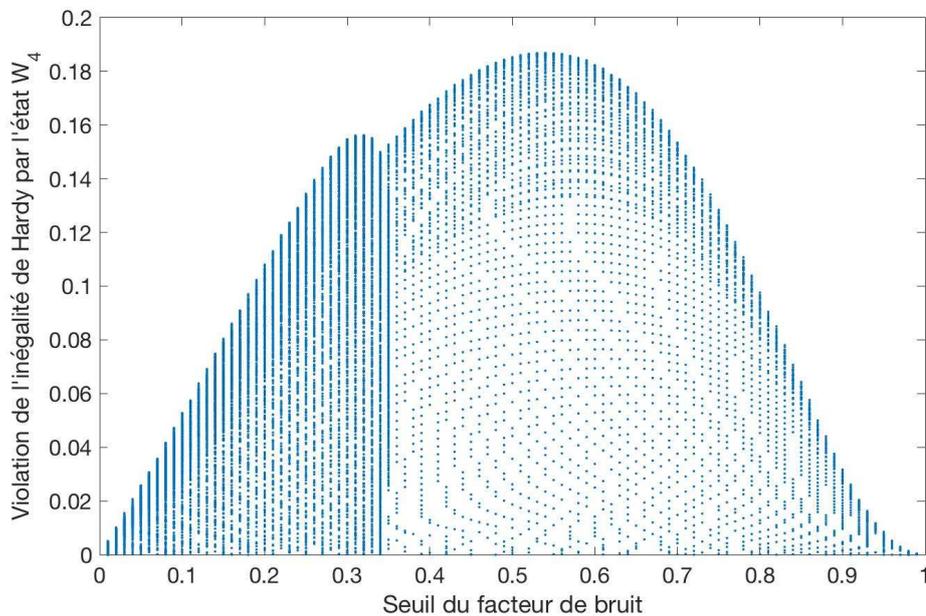


FIGURE 3.15 Valeurs de \mathcal{P}^n pour l'état W_4 pur en fonction du facteur de bruit seuil de l'amortissement de phase. Chaque point de la figure représente une stratégie de mesures.

On remarque sur cette figure que les deux paramètres ne peuvent pas être maximisés dans les mêmes conditions. Pour un seuil facteur de bruit donné, les plus intéressantes stratégies de mesures sont celles qui donnent le plus haut niveau de violation de $\mathcal{P}^n \leq 0$ par l'état pur, c'est-à-dire celles qui sont situées sur l'enveloppe du nuage de points de la figure 3.15. Cela indique que **les stratégies de mesures qui sont optimales en terme de niveau de violation ne sont pas nécessairement optimales en terme de résistance à la décohérence**. Un compromis doit être fait en fonction de l'application visée.

Pour avoir une meilleure intuition de ce compromis, nous montrons dans la figure 3.16 une vue à deux dimensions des valeurs de \mathcal{P}^n pour l'état W_4 pour différents niveaux de bruit, en fonction des angles θ_0 et θ_1 des mesures \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 respectivement (voir l'équation 3.2), alors que les angles φ_0 et φ_1 sont configurés pour avoir une différence égale à π , ce qui nous permet de maximiser \mathcal{P}^n . En effet pour un état de Dicke pur, seule la différence de phase entre les deux mesures \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 joue un rôle. Elle n'intervient que dans le second terme de \mathcal{P}^n (voir l'équation 2.31), qui peut être minimisé en prenant cette différence de phase elle à π . Les angles θ_0 et θ_1 sont compris entre 0 et 2π , ce qui explique la symétrie sur la figure. On voit qu'il y a quatre différentes surfaces colorées où l'on peut obtenir une violation, expliquant la présence des deux "bulbes" dans la figure 3.15.

Dans la figure 3.16, on observe non seulement une diminution du nombre de stratégies de mesures possibles quand le bruit augmente (diminution des surfaces colorées sur la figure) mais aussi un décalage de la position du maximum de violation. Clairement, lorsque que le bruit augmente, la stratégie de mesures optimale en terme de violation pour l'état pur ne permettra plus l'observation de la non-localité. Mais comme vu à la figure 3.15, d'autres stratégies de mesures permettent tout de même d'observer une violation même si elle est de niveau moindre. Ce phénomène s'enchaîne alors plusieurs fois provoquant cet effet de décalage de maximum de violation.

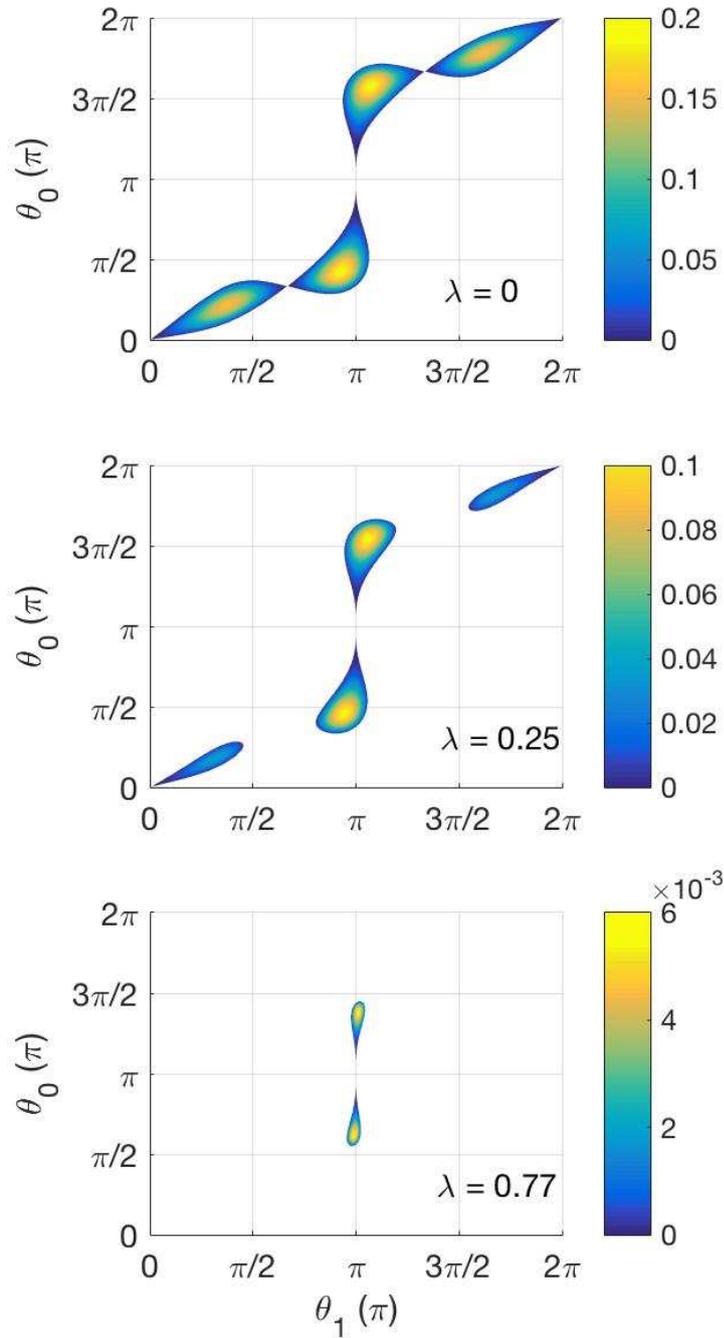


FIGURE 3.16 Les surfaces colorées représentent les valeurs de \mathcal{P}^n donnant une violation pour l'état W_4 exposé à l'amortissement de phase à différents niveaux de bruit donnés par $\lambda = 0, 0.25, 0.77$ (de haut en bas). Les angles θ_0 et θ_1 définissent les deux mesures \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 .

3.5.2 Amortissement d'Amplitude

En suivant la même procédure, nous calculons le facteur de bruit γ_{th} sur les stratégies de mesures en considérant cette fois un état W_4 exposé à l'amortissement d'amplitude. Le résultat se trouve à la figure 3.17. On observe que les stratégies de mesures qui donnent les plus hauts niveaux de violation de l'inégalité basée sur le paradoxe de Hardy pour l'état W_4 pur donnent aussi les seuils de facteur de bruit optimaux. Comme vu dans la section 3.2, la résistance à la décohérence des états symétriques que nous avons étudiés dépend très fortement du type de bruit considéré. Il n'est donc pas surprenant d'observer aussi un comportement différent par rapport aux stratégies de mesures.

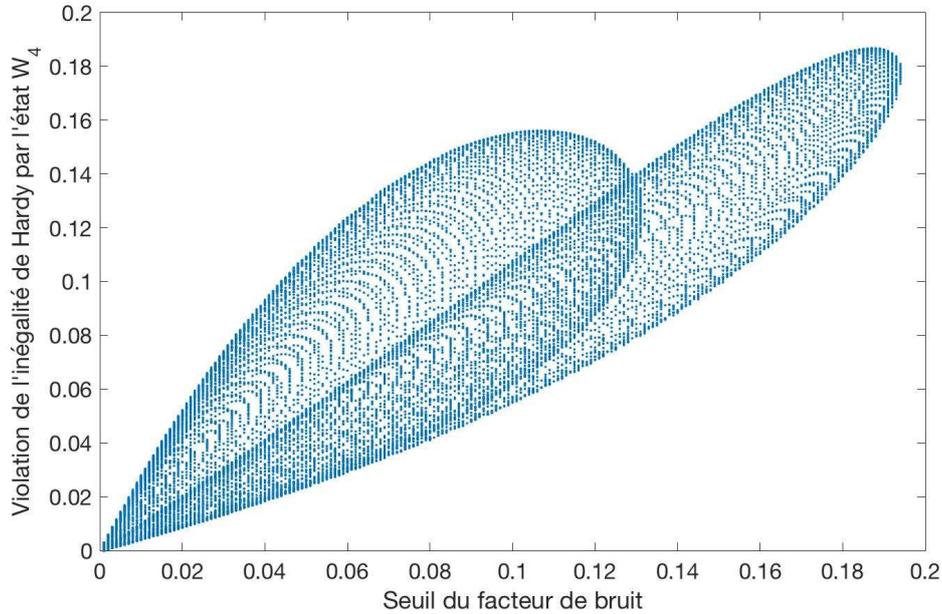


FIGURE 3.17 Valeurs de \mathcal{P}^n pour l'état W_4 pur en fonction du facteur de bruit seuil pour l'amortissement d'amplitude. Chaque point représente une stratégie de mesures.

3.5.3 Comparatif des modèles d'amortissement

Finalement, nous comparons l'effet de l'utilisation des stratégies de mesures basées sur les points de Majorana ou sur la violation optimale pour les deux types de modèles de bruit. Dans le tableau 3.4, nous montrons pour les états $W_{3,4,5,6}$, les valeurs optimales de \mathcal{P}^n correspondantes ainsi que les fidélités seuils pour chaque état et cela pour les deux stratégies de mesures. Dans le cas de l'amortissement de phase les fidélités seuils sont plus dispersées par rapport au nombre de qubits. La stratégie de mesures basée

sur les points de Majorana donne des seuils de fidélité plus faibles ; elle est donc plus résistante au bruit de phase.

| État | \mathcal{P}^n | $F_{\text{amp,th}}$ | $F_{\text{ph,th}}$ |
|--------------------|-----------------|---------------------|--------------------|
| Majorana | | | |
| W_3 | 0.1250 | 93.27% | 81.65% |
| W_4 | 0.1250 | 93.81% | 70.53% |
| W_5 | 0.0938 | 95.39% | 62.61% |
| W_6 | 0.0625 | 96.95% | 57.74% |
| Violation Optimale | | | |
| W_3 | 0.1926 | 90.04% | 79.16% |
| W_4 | 0.1811 | 89.94% | 77.14% |
| W_5 | 0.1835 | 90.24% | 75.89% |
| W_6 | 0.1815 | 90.27% | 75.28% |

TABLE 3.4 Valeurs de \mathcal{P}^n pour l'état pur ainsi que les fidélités seuils pour les deux modèles de bruit et pour deux stratégies de mesures différentes.

3.6 Sensibilité à l'Équipement Expérimental

Les bases de mesures de chaque partie définissent la stratégie de mesures du test de non-localité ; dans notre cas, cela correspond au choix des angles d'inclinaison et azimutal sur la sphère de Bloch. Mais la précision de la mesure actuelle de ces angles est limitée par les possibilités expérimentales. Par exemple, dans les expériences où l'information est codée sur la polarisation des photons, supposons une erreur typique sur la base de mesure d'une polarisation par l'utilisation de lames d'ondes d'environ $\pm 2^\circ$, c'est-à-dire ± 0.07 rad sur la sphère de Bloch. On se demande naturellement à partir de quand cette imprécision d'alignement peut empêcher de mesurer la non-localité quand l'état quantique est exposé à la décohérence.

Comme vu à la figure 3.16, la violation évolue quand on augmente la quantité de bruit. Le point important est que l'incertitude sur l'angle peut empêcher l'observation de la violation lorsque la surface est trop petite. Cette incertitude mène en général à réduire d'autant plus le facteur de bruit seuil, que la précision possible d'une expérience est limitée. En considérant l'exemple donné précédemment, nous obtenons que le facteur de bruit seuil diminue de $\lambda_{\text{th}} = 0.996$ à 0.83 .

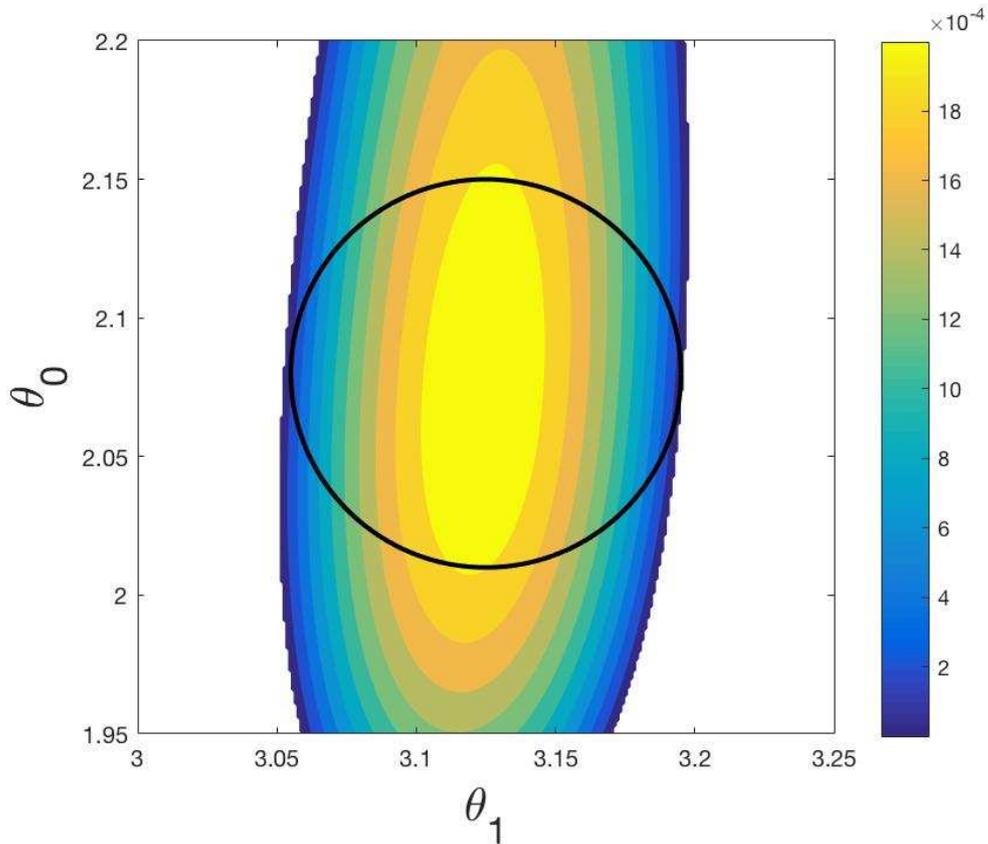


FIGURE 3.18 Valeurs de \mathcal{P}^n pour l'état W_4 exposé à l'amortissement d'amplitude pour une valeur du facteur de bruit $\lambda = 0.83$. Le cercle centré sur le maximum de violation représente une incertitude de 0.007 rad sur les angles θ_0 et θ_1 .

Nous procédons à la même analyse dans le cas de l'amortissement d'amplitude, et nous montrons dans la figure 3.19 les résultats pour une valeur du facteur de bruit spécifique. Cela nous permet d'observer en détail la variation de la violation dans la limite de la précision d'une mesure lors d'une expérience. Bien que pour ce facteur de bruit, la violation puisse être observée, cela n'est pas le cas pour les valeurs plus élevées de facteur de bruit car l'incertitude nous fait sortir de la zone de violation. Le seuil de facteur de bruit diminue de $\gamma_{th} = 0.194$ (figure 3.17) à 0.186 lorsque la sensibilité de la mesure est prise en compte.

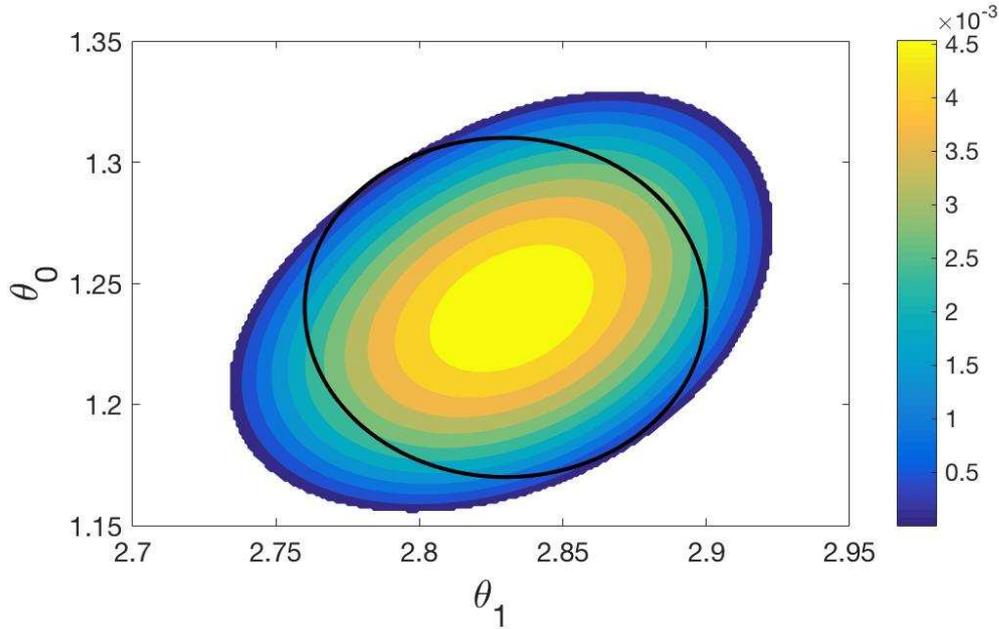


FIGURE 3.19 Valeurs de \mathcal{P}^n pour l'état W_4 exposé à l'amortissement d'amplitude pour une valeur du facteur de bruit $\gamma = 0.186$. Le cercle centré sur le maximum de violation représente une incertitude de 0.007 rad sur les angles θ_0 et θ_1 .

3.7 Étude de cas pratique : Utilisation des Tests de Non-localité pour la Discrimination de Classes de Dégénérescence d'États de Dicke

Afin d'appliquer les techniques utilisées dans les sections précédentes, nous nous intéressons à la dégénérescence d des états symétriques (voir la section 2.1.3). En particulier, nous nous intéressons aux conditions expérimentales pour lesquelles la non-localité peut être utilisée pour déterminer la classe de dégénérescence de ces états sous l'effet de la décohérence. Pour cela nous allons utiliser l'inégalité de Bell de \mathcal{Q}_d^n présentée dans l'équation 2.33, qui peut être violée par les états de Dicke à n qubits et de dégénérescence d [86].

Nous analysons le cas de trois états de Dicke à 6 qubits, ayant différentes dégénérescences ($S(6,1)$ ($d = 4$), $S(6,2)$ ($d = 3$) et $S(6,3)$ ($d = 2$)) : les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.5. Nous pouvons tout d'abord remarquer que si nous obtenons $\mathcal{Q}_4^6 > 0$ (avec un maximum de violation $\mathcal{Q}_4^6 = 0.0177$ obtenu par l'état $S(6,1)$ en utilisant la stratégie de mesures donnée par $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 0.60, \varphi_0 = 0\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = 0.65, \varphi_1 = \pi\}$), l'état mesuré est nécessairement $S(6,1)$, indépendamment

des mesures réalisées. Le résultat identifie la classe de dégénérescence des états avec une dégénérescence $d > 4$ indépendamment des appareils de mesure. De plus, nous pouvons voir que si l'on restreint notre analyse aux états de dégénérescence égale à $d = 2$ ou $d = 3$, alors le résultat $\mathcal{Q}_3^6 > 0$ identifiera l'état $S(6,2)$ (avec un niveau de violation maximum à $\mathcal{Q}_3^6 = 0.0069$ obtenu avec la stratégie de mesures donnée par $\mathcal{M}_0 = \{\theta_0 = 0.56, \varphi_0 = 0\}$ et $\mathcal{M}_1 = \{\theta_1 = 0.61, \varphi_1 = \pi\}$).

| Test | \mathcal{Q}_3^6 | \mathcal{Q}_4^6 | \mathcal{Q}_5^6 |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $S(6,1)$ | 0.0519 | 0.0177 | 0 |
| $S(6,2)$ | 0.0069 | 0 | <0 |
| $S(6,3)$ | 0 | <0 | <0 |

TABLE 3.5 Valeurs de \mathcal{Q}_d^6 pour des états de Dicke à 6 qubits.

En utilisant les techniques de la section 3.6, on peut déterminer les conditions expérimentales requises pour observer cette discrimination de classes. Par exemple, pour l'état $S(6,1)$, une violation peut être observée si le facteur de bruit est en dessous de $\lambda_{\text{th}} = 0.004$, avec un angle de précision $\pm 0.15^\circ$ pour une expérience qui encode l'information dans la polarisation des photons. Finalement, la discrimination de l'état $S(6,2)$ requiert un facteur de bruit en dessous de $\lambda_{\text{th}} = 0.008$, avec une précision de $\pm 0.1^\circ$. Clairement, ces seuils définissent de fortes contraintes pour des expériences qui auraient pour but d'utiliser ces propriétés non-locales pour la discrimination de classe de dégénérescence.

3.8 Résumé du Chapitre

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode afin de tester la tolérance à la décohérence de test de non localité pour les états symétriques, l'inégalité basée sur le paradoxe de Hardy et les modèles d'amortissement de phase et d'amplitude. Nous avons étudié sous différents angles la faisabilité expérimentale de l'observation de la non-localité :

- L'importance du modèle de bruit : pour les états symétriques étudiés, on observe une tolérance plus grande à l'amortissement de phase qu'à celui d'amplitude.
- Le choix de l'état quantique. Les états W ont une très bonne tolérance à l'amortissement de phase, mais en contre partie ont une mauvaise tolérance à l'amortissement d'amplitude comparés aux autres états symétriques étudiés.

Les états symétriques maximale­ment intriqués (le tétraèdre, l'octaèdre et le cube) ont des tolérances plus équilibrés.

- Le choix de la stratégie de mesures en fonction du modèle de bruit. La stratégie de mesures offrant la violation maximum de l'état pur ne donne pas forcément le seuil de facteur de bruit le plus élevé.
- Le choix de l'inégalité de Bell. En fonction de l'inégalité de Bell choisie on peut obtenir des tendances de résistance à la décohérence différente, par exemple plus un état W contient des qubits plus il sera tolérant à la décohérence pour certaines inégalités de Bell et moins tolérant pour d'autres inégalités de Bell.
- La sensibilité de l'équipement de mesure. La précision réduit le seuil de facteur de bruit car la décohérence réduit l'ensemble des stratégies possibles pour observer une violation d'inégalité de Bell. Si cet ensemble devient trop petit alors il se peut que la précision ne permette plus l'observation de la non-localité.

Chapitre 4

Inégalité et Preuve Logique de Contextualité Pour Qudits

Les méthodes qui permettent d'identifier les propriétés quantiques sont essentielles à la fois pour leurs aspects fondamentales que pour leurs utilisations en pratique. Des inégalités et des preuves logiques basées sur des résultats de mesures sont en général les méthodes utilisées. Les relations entre les mesures peuvent être représentées par un graphe et les propriétés de ces graphes peuvent être utilisées pour définir des inégalités de contextualité [26]. L'inégalité de CHSH [34] et de KCBS [57] peuvent être comprises comme des cas particuliers d'une famille plus large où N mesures dichotomiques dont les relations de compatibilité et d'exclusivité permettent de former un graphe de la forme d'un cycle. L'inégalité de CHSH correspond à un cas où $N = 4$ pour un état quantique de dimension quatre et l'inégalité de KCBS $N = 5$ pour un état quantique de dimension trois. L'article [8] donne une généralisation de l'inégalité de CHSH et KCBS en trouvant la borne quantique pour le cas du graphe N -cycle de l'inégalité présentée dans [26]. Une approche entropique du N -cycle a été abordée dans [31]. D'autres graphes ont été abordés dans [63]. Les auteurs de [27] relient l'inégalité de KCBS à une preuve logique de contextualité inspirée des travaux de Hardy [46].

Dans ce chapitre, nous proposons une famille de graphes ainsi qu'une extension du paradoxe de [27] qui se relie aussi à une extension de l'inégalité de KCBS de [26]. La dimension des qudits nécessaire à la preuve de contextualité augmente quand le nombre de sommets N dans le graphe augmente. Inspiré de l'état quantique utilisé pour la preuve de contextualité dans [27], nous donnons aussi pour tous les graphes de notre famille un état quantique et une stratégie de mesure qui donne une preuve de contextualité par le paradoxe et par inégalité.

Dans la section 4.1, après avoir rappelé les résultats dans le cas du paradoxe pour

le pentagone, nous présentons l'extension du paradoxe, du pentagone et de l'inégalité de KCBS.

Dans la section 4.2, nous parlons de la possibilité d'observer de la contextualité avec des ressources quantiques. Pour cela il faut tout d'abord décrire un état quantique et une stratégie de mesure qui vérifie les conditions du graphe.

Enfin dans la section 4.3, on montre que les relations de compatibilité et d'exclusivité ont des répercussions sur les points de Majorana, lorsque l'on utilise des états symétriques de qubits pour réaliser des qudits.

4.1 Extension du Paradoxe

4.1.1 Pentagone et Qudits

On a vu dans la section 2.3.4 l'inégalité de KCBS [57] pour un état quantique et des mesures correspondant à un espace de dimension 3 (voir la section 2.3.4). Si on prend un qudit de dimension d de la forme $|\psi\rangle = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ exprimé dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d\rangle\}$, on peut écrire les vecteurs propres des projecteurs associés aux sommets du pentagone sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= (1, 0, \dots, 0)^T, \\ |v_2\rangle &= (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \\ |v_3\rangle &= N_3(1, 0, x_{33}, 0, \dots, 0)^T, \\ |v_4\rangle &= N_4(1, x_{42}, x_{43}, 0, \dots, 0)^T, \\ |v_5\rangle &= N_5(0, 1, x_{53}, 0, \dots, 0)^T, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où les coefficients $\{x_{i,j}\}$ sont des nombres complexes et les $\{N_i\}$ sont les facteurs de normalisation des vecteurs. De par les relations d'orthogonalité dues aux relations de compatibilité et d'exclusivité entre $|v_3\rangle$ et $|v_4\rangle$ et entre $|v_4\rangle$ et $|v_5\rangle$, on peut écrire : $|v_4\rangle = N_4(1, x_{53}^*/x_{33}^*, -1/x_{33}^*, 0, \dots, 0)^T$, où x_{53}^* et x_{33}^* sont les complexes conjugués de x_{53} et x_{33} respectivement.

Si l'on cherche à maximiser la valeur de β_Q (voir l'équation 2.36) on peut utiliser le programme d'optimisation suivant :

$$\max_{|\psi\rangle, \{|v_i\rangle\}} \beta_Q$$

$$\begin{aligned} \text{sujet à} \quad & \langle \psi | \psi \rangle = 1, \\ & \langle v_i | v_i \rangle = 1, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

En d'autres termes il s'agit de donner la valeur la plus élevée à β_Q lorsque les vecteurs $\{|v_i\rangle\}$ sont soumis à normalisation. En utilisant les expressions précédentes, le problème peut être résolu. On obtient la solution $\beta_Q = \sqrt{5}$, qui correspond au maximum connu. Cette solution est atteinte lorsque $x_i = 0$ pour $i \in \{4, \dots, d\}$. La solution optimale en terme de violation pour l'inégalité de KCBS est l'utilisation d'un qutrit. Même si il est possible d'utiliser une ressource quantique de dimension plus élevée, il est préférable d'utiliser seulement un sous-espace pour former un qutrit. L'inégalité de KCBS telle qu'elle a été présentée dans la section 2.3.4 et dans l'article [57] n'est donc pas un outil adapté pour observer la contextualité pour les qudits de dimension $d > 3$.

Dans les tests de contextualité que nous définissons dans les sections suivantes, il est nécessaire d'utiliser des qudits de dimension $d > 3$ afin d'observer des propriétés contextuelles.

4.1.2 Approche Générale

Dans le cas du pentagone, le paradoxe se compose d'une série de conditions (voir les équations 2.48) que doit vérifier un système afin de montrer des propriétés contextuelles. Nous reformulons ici de manière à introduire l'extension à de plus grandes dimension. La condition $P(00|2, 3) = 0$ concerne le sous-graphe $G_A = (V_A, E_A)$ avec $V_A = \{2, 3\}$. De même pour la probabilité $P(00|4, 5) = 0$, le sous-graphe complet $G_B = (V_B, E_B)$ avec $V_B = \{4, 5\}$. Pour chacun de ces sous-graphes complets, un seul des sommets de chaque graphe peut avoir le résultat '1' et tous les autres auront le résultat '0'.

Afin de créer le paradoxe, pour la dernière condition, c'est à dire, $P(1|1) > 0$, il faut en quelque sorte construire l'impossibilité d'associer le résultat '1' au sommet 1 pour les théories déterministes. Pour cela, on peut connecter le sommet 1 à tous les sommets sauf un dans chaque sous-graphe G_A et G_B . Dans le pentagone ces sommets non connectés à 1 sont 3 et 4. Le fait que ces deux sommets soient connectés entre eux limite le nombre d'indépendance du graphe à 2, définissant la limite classique de l'inégalité 2.37.

L'extension présentée dans la section suivante se base sur l'idée d'augmenter le nombre de sommets dans chacun des sous-graphes G_A et G_B de manière à ce que ceux ci soient complets. Cela va forcer l'utilisation de qudit de dimension plus élevée, car pour satisfaire les conditions d'orthogonalité il faut que la dimension de l'espace où

sont définis les vecteurs soit au moins égale au nombre de sommets dans le sous graphe complet le plus grand, à savoir G_A et G_B , qui ont le même nombre de sommets.

4.1.3 Construction de la famille de graphes

La définition de notre famille de graphe qui généralise le pentagone est la suivante. Soit un graphe $G = (V, E)$ à $N \geq 5$ sommets et $G_A = (V_A, E_A)$ et $G_B = (V_B, E_B)$ deux sous graphes complets où $V_A = \{2, \dots, (N+1)/2\}$ and $V_B = \{(N+1)/2 + 1, \dots, N\}$ pour N impair et $V_A = \{2, \dots, N/2 + 1\}$ et $V_B = \{N/2 + 1, \dots, N\}$ pour N pair. Selon la parité de N les deux sous-graphes peuvent partager un sommet, si N est pair $V_A \cap V_B = \{N/2 + 1\}$. Indépendamment de cela, les deux sous-graphes G_A et G_B sont tout de même connectés l'un à l'autre par les sommets 2 et N . Enfin le sommet 1 est connecté à tous les sommets sauf 2 et N .

La figure 4.1 montre un exemple d'un cas impair où $N = 7$. On remarque que les deux sous-graphes sont composés de deux triangles. Dans la figure 4.2, on voit un exemple pair où $N = 8$, on peut voir que les deux sous-graphes forment des quadrilatères et partagent le sommet 5.

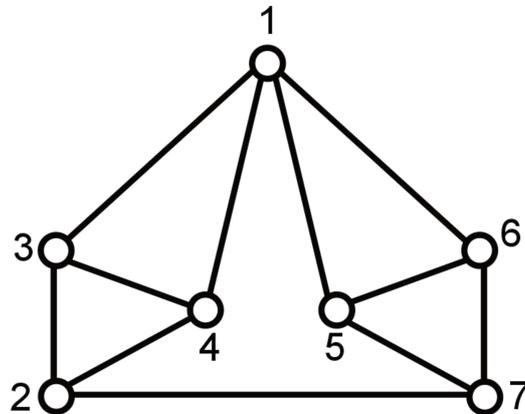


FIGURE 4.1 Un exemple de notre construction de graphe pour N impair ($N = 7$). Les deux sous-graphes complets forment deux triangles composés de $\{2, 3, 4\}$ et $\{5, 6, 7\}$.

4.1.4 Extension du paradoxe

On peut le reformuler de manière similaire à 2.48 :

$$P(11|i, j) = 0, \text{ où } i \text{ et } j \text{ sont deux sommets connectés,}$$

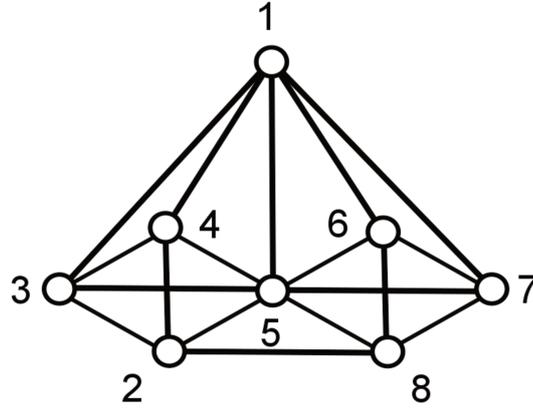


FIGURE 4.2 Un exemple de notre construction de graphe pour N pair ($N = 8$). Les deux sous-graphes complets forment deux quadrilatères composés de $\{2, 3, 4, 5\}$ et $\{5, 6, 7, 8\}$.

$$\begin{aligned}
 P(0 \dots 0 | \{i\}_{i \in V_A}) &= 0, \\
 P(0 \dots 0 | \{i\}_{i \in V_B}) &= 0, \\
 P(1|1) &> 0.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

La première condition est définie à partir des relations de compatibilité et d'exclusivité du graph G . Les deux conditions suivantes signifient qu'il doit y avoir au moins un sommet avec le résultat '1' associé à un sommet dans chacun des sous graphes G_A et G_B . En prenant comme hypothèse ces trois conditions et en utilisant une théorie déterministe et non-contextuelle, on déduit la dernière condition de 4.3. En effet, en essayant d'assigner la valeur '1' au sommet 1, seulement les sommets 2 et N peuvent donner le résultat '1'. Étant donné que ces deux sommets sont adjacents, seulement l'un d'eux peut donner le résultat '1'. Ceci implique qu'au moins un des sous graphes G_A et G_B aura seulement le résultat '0' associé à tous ses sommets. Donc sous l'hypothèse d'une théorie déterministe et non-contextuelle il n'est pas possible d'assigner le résultat '1' à 1 et on a $P(1|1) = 0$.

4.1.5 Extension de l'inégalité de KCBS

L'inégalité de KCBS reformulée dans l'équation 2.37 borne supérieurement la somme des valeurs moyennes de toutes les mesures associées aux sommets du graphe. Les bornes de la théorie classique et de la théorie quantique sont reliées aux propriétés de la représentation graphique des relations d'exclusivité et de compatibilité des mesures. Pour la borne classique, elle est donnée par le nombre d'indépendance du graphe $\alpha(G)$, le plus grand cardinal parmi tous les ensembles de sommets indépendants. Dans notre

cas, cette propriété peut être simplement obtenue en comptant le nombre maximum de sommets donnant le résultat ‘1’. On peut obtenir la valeur de $\alpha(G)$ en considérant les différents cas suivants :

- Si on assigne la valeur ‘1’ au sommet 1, seulement les sommets 2 ou N peuvent être à ‘1’ (non simultanément), ce qui donne au maximum 2 sommets à ‘1’.
- Si on assigne un ‘1’ à 2 (ou N), on peut éventuellement assigner un second ‘1’ dans $V_B - \{N\}$ ou 1 (ou $V_A - \{2\}$ ou 1), mais tous ces sommets sont connectés entre eux, il n’est donc pas possible d’assigner un troisième ‘1’.
- Si on assigne la valeur ‘1’ à $i \in V_A - \{2\}$ (ou $i \in V_B - \{N\}$), seulement un second ‘1’ peut être assigné dans V_B (ou V_A). À noter que dans le cas où N est pair le sommet $N/2 + 1$ est connecté à tous les autres sommets, donc il n’est pas possible d’ajouter un second ‘1’.

On obtient donc l’inégalité suivante pour tester la contextualité :

$$\beta \leq \alpha(G) = 2. \quad (4.4)$$

On remarque que cette borne classique est indépendante du nombre N de sommets dans le graphe.

4.2 Observation de la Contextualité avec des Ressources Quantiques

4.2.1 Vérification du Paradoxe

La contextualité d’un système peut être prouvée en montrant qu’il satisfait les conditions de l’équation 4.3. Pour cela, il faut choisir une stratégie de mesure et un état quantique. La première condition est donnée par le graphe et se traduit en relation de compatibilité et d’exclusivité que doivent vérifier les mesures. Les deuxième et troisième conditions imposent que la mesure de l’état quantique dans le contexte formé par les mesures associées aux $i \in V_A$ ou les $i \in V_B$ donne au moins un ‘1’ (en réalité comme chacun de ces deux ensembles forme un sous-graphe complet un seul ‘1’ est possible dans chacun des contextes). Cela impose que l’état quantique doit être une combinaison des vecteurs $\{|v_i\rangle\}_{i \in V_A}$ d’une part et de $\{|v_i\rangle\}_{i \in V_B}$ d’autre part, c’est à dire :

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \sum_{i \in V_A} \alpha_i |v_i\rangle, \\
|\psi\rangle &= \sum_{i \in V_B} \beta_i |v_i\rangle,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

où α_i et β_i sont des nombres complexes.

Enfin la dernière condition pour prouver la contextualité est que le produit scalaire entre l'état quantique $|\psi\rangle$ et $|v_1\rangle$ soit non nul.

Afin d'obtenir la preuve de la contextualité par le paradoxe, on décide de fixer l'état quantique ainsi que le vecteur $|v_1\rangle$ pour tout $N > 5$. Afin d'assurer la vérification de la condition de l'équation 4.5, on choisit un état quantique invariant par la permutation $\sigma(|i\rangle) = |d - i - 1\rangle$, où d est la dimension du qudit. L'idée est ensuite de construire les vecteurs associés aux sommets de V_A et V_B de manière à ce qu'il existe pour tout $i \in V_A$ un $j \in V_B$, $\sigma(|v_i\rangle) = |v_j\rangle$ et réciproquement.

Pour un graphe donné, tous les vecteurs et l'état quantique sont des qudits de dimension $d = N - 2$. Pour N pair on a :

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{2}|0\rangle + \left|\frac{N}{2} - 2\right\rangle + \left|\frac{N}{2} - 1\right\rangle + \sqrt{2}|N - 3\rangle \right), \\
|v_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\sqrt{2}|0\rangle + \left|\frac{N}{2} - 2\right\rangle + \left|\frac{N}{2} - 1\right\rangle - \sqrt{2}|N - 3\rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour N impair on a :

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle + \left|\frac{N-3}{2}\right\rangle + |N-3\rangle \right), \\
|v_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle - \left|\frac{N-3}{2}\right\rangle + |N-3\rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Dans les deux cas, la probabilité d'obtenir le résultat '1' au sommet 1 est :

$$\begin{aligned}
P(1|1) &= |\langle v_1 | \psi \rangle|^2, \\
P(1|1) &= \frac{1}{9}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Si il est possible de construire les vecteurs restants, on aura une preuve de contex-

tualité.

4.2.2 Construction de la Stratégie de Mesure

Nous nous sommes donnés l'état quantique $|\psi\rangle$ et le vecteur $|v_1\rangle$. L'enjeu est de construire les autres vecteurs tout en vérifiant les conditions de compatibilité et d'exclusivité du graphe et la correspondance entre les vecteurs de V_A et V_B par la permutation σ . On impose :

$$\begin{aligned} |v_2\rangle &= |0\rangle, \\ |v_N\rangle &= |N-3\rangle. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux entre eux, mais sont non-orthogonaux à $|v_1\rangle$. La construction des autres vecteurs dépend de la parité de N .

N impair

Les vecteurs $|v_i\rangle$ pour $i \in V_A$, $i \neq 2$ sont de la forme suivante :

$$|v_i\rangle = N_i \left(\left| \frac{N-3}{2} \right\rangle + \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-4} c_{i,k} |k\rangle + |N-3\rangle \right), \tag{4.10}$$

où les coefficients $\{c_{i,k}\}$ sont complexes et N_i est le facteur de normalisation. Ainsi les vecteurs associés aux sommets $j \in V_B$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} |v_j\rangle &= \sigma(|v_i\rangle), \\ |v_j\rangle &= N_j \left(\sigma\left(\left| \frac{N-3}{2} \right\rangle\right) + \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-4} c_{i,k} \sigma(|k\rangle) + \sigma(|N-3\rangle) \right), \\ |v_j\rangle &= N_j \left(\left| \frac{N-3}{2} \right\rangle + \sum_{\ell=1}^{\frac{N-5}{2}} c_{i,N-3-\ell} |\ell\rangle + |0\rangle \right), \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $N_i = N_j$.

Pour respecter les conditions imposées par le paradoxe, il faut :

- La non-orthogonalité entre un vecteur $|v_{i \neq 2}\rangle$ du sous-graphe G_A et un vecteur $|v_{j \neq N-3}\rangle$ du sous-graphe G_B . Or :

$$\langle v_{i \neq 2} | v_{j \neq N-3} \rangle = N_i N_j. \quad (4.12)$$

Cette condition est vérifiée par construction des vecteurs $\{|v_i\rangle\}_{i \in V_A \cup V_B}$.

- Les relations d'orthogonalité dans les sous-graphes G_A et G_B , c'est à dire entre les vecteurs $|v_{i \neq 2}\rangle$, $i \in V_A$ et $|v_{j \neq \{2, i\}}\rangle$ $j \in V_A$ d'une part et $|v_{i \neq N-3}\rangle$, $i \in V_B$ et $|v_{j \neq \{N-3, i\}}\rangle$ $j \in V_B$ d'autre part.
- La possibilité de générer l'état quantique $|\psi\rangle$, d'une part par les vecteurs des sommets de G_A et par ceux de G_B .

Les coefficients $\{c_{i,k}\}$ de l'équation 4.10 doivent permettre de vérifier les deux dernières conditions. Pour les calculer, on les écrit sous la forme d'une matrice \mathcal{M} dont chaque ligne i est formée des $(N-5)/2$ coordonnées $\{c_{i,k}\}$ des vecteurs $|v_{i \in V_A, i \neq 2}\rangle$. Par exemple, pour $N=7$, en s'aidant des équations 4.7, 4.9 et 4.10 on a :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 0, 1)^T, \\ |v_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 0, 1)^T, \\ |v_2\rangle &= (1, 0, 0, 0, 0)^T, \\ |v_3\rangle &= N_3(0, 0, 1, c_{3,3}, 1)^T, \\ |v_4\rangle &= N_4(0, 0, 1, c_{4,3}, 1)^T, \\ |v_5\rangle &= N_5(1, c_{5,1}, 1, 0, 0)^T, \\ |v_6\rangle &= N_6(1, c_{6,1}, 1, 0, 0)^T, \\ |v_7\rangle &= (0, 0, 0, 0, 1)^T. \end{aligned} \quad (4.13)$$

On en déduit :

$$\mathcal{M}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} c_{3,3} \\ c_{4,3} \end{pmatrix},$$

or comme $\sigma(|v_3\rangle) = |v_5\rangle$ et $\sigma(|v_4\rangle) = |v_6\rangle$, on a aussi :

$$\mathcal{M}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} c_{5,1} \\ c_{6,1} \end{pmatrix}.$$

Les deux dernières conditions citées plus haut peuvent alors être exprimées en terme de propriétés que la matrice \mathcal{M} .

— Le produit scalaire de deux vecteurs du même sous-graphe s'écrit :

$$\langle v_{i \neq 2} | v_{j \neq 2, i} \rangle = N_i N_j \left(2 + \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-4} c_{i,k} c_{j,k}^* \right). \quad (4.14)$$

Ce produit scalaire est nul si et seulement si $\sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-4} c_{i,k} c_{j,k}^* = -2$, c'est à dire qu'il faut que le produit scalaire entre deux lignes de \mathcal{M} soit égal à -2 .

— Étant donné que les composantes nulles de l'état quantique de l'équation 4.6 correspondent aux coefficient $\{c_{i,k}\}$ utilisées pour construire la matrice \mathcal{M} sont nulles, on doit trouver une combinaison linéaire des éléments de chaque colonne de \mathcal{M} égale à zéro. Sans perte de généralité on peut simplement imposer que la somme des coefficients de chaque colonne soit égale à zéro.

En d'autre terme on a :

- (i) $\forall (i, j)$ avec $i \neq j$, $\sum_k c_{i,k} c_{j,k} = -2$.
- (ii) $\forall j$, $\sum_i c_{i,j} = 0$.

On prouve par récurrence qu'il existe une telle matrice pour $N \geq 7$

Pour $N = 7$ la matrice \mathcal{M} est :

$$\mathcal{M}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

Si on prend comme hypothèse l'existence d'une matrice $\mathcal{M}_{k,k-1}$ vérifiant les propriétés (i) et (ii). On peut construire la matrice $\mathcal{M}_{k+1,k}$ tel que

$$\mathcal{M}_{k+1,k} = \left[\begin{array}{c|c} \beta & \mathbf{0 \dots 0} \\ \alpha & \\ \vdots & c \times \mathcal{M}_{k,k-1} \\ \alpha & \end{array} \right],$$

où α , β et c sont des coefficients complexes. Afin de vérifier les conditions (i) et (ii)

les coefficients α , β et c doivent vérifier le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \beta + k \times \alpha = 0, \\ \beta \times \alpha = -2, \\ \alpha^2 - 2c = -2. \end{cases}$$

Ce qui donne comme solution :

$$\begin{cases} \beta = -\sqrt{2k}, \\ \alpha = \sqrt{2/k}, \\ c = \sqrt{(1+k)/k}. \end{cases}$$

Si l'on veut implémenter cette méthode on peut calculer les coefficients de la matrice $\mathcal{M}_{3 \times 2}$ avec $k = 2$ pour $N = 9$, sachant que l'on a déjà cette matrice pour $N = 7$ (voir l'équation 4.2.2).

$$\begin{cases} \beta = -2, \\ \alpha = 1, \\ c = \sqrt{3/2}. \end{cases}$$

On obtient alors la matrice suivante :

$$\mathcal{M}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

L'état quantique, $|\psi\rangle$, de l'équation 4.7 peut être obtenu par la combinaison linéaire suivante :

$$|\psi\rangle = N_\psi \left(\sum_{i \in V_A, i \neq 2} |v_i\rangle + \frac{N-3}{2} |v_2\rangle \right), \quad (4.15)$$

où la constante de normalisation vaut $N_\psi = \frac{2}{\sqrt{3(N-3)}}$. Comme à l'équation 4.8, on obtient $P(1|1) = 1/9$. Nous avons donc montré qu'il existe au moins un état quantique et un ensemble de mesures pour tous graphes de notre famille tels que N est impair $N \geq 7$ qui permet de vérifier le paradoxe.

N pair

Dans le cas où N est pair, l'approche est assez similaire. On reprend les vecteurs $|v_1\rangle$ et $|\psi\rangle$ de l'équation 4.6 et les vecteurs $|v_2\rangle$ et $|v_N\rangle$ de 4.9. De plus V_A et V_B partagent le sommet associé au vecteur $|v_{N/2+1}\rangle$ que l'on impose égal à :

$$|v_{N/2+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| \frac{N}{2} - 2 \rangle - | \frac{N}{2} - 1 \rangle \right). \quad (4.16)$$

Afin de respecter les relations d'orthogonalité, les autres vecteurs associés aux sommets dans V_A sont de la forme :

$$|v_i\rangle = N_i \left(| \frac{N}{2} - 2 \rangle + | \frac{N}{2} - 1 \rangle + \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-4} c_{i,k} |k\rangle + \sqrt{2} |N-3\rangle \right), \quad (4.17)$$

où les coefficients $\{c_{i,k}\}$ sont des nombres complexes et N_i est le facteur de normalisation.

Pour un vecteur $|v_j\rangle$ avec $j \in V_B$ il existe $i \in V_A$ tel que :

$$\begin{aligned} |v_j\rangle &= \sigma(|v_i\rangle), \\ |v_j\rangle &= N_i \left(\sigma(| \frac{N}{2} - 2 \rangle) + \sigma(| \frac{N}{2} - 1 \rangle) + \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-4} c_{i,k} \sigma(|k\rangle) + \sqrt{2} \sigma(|N-3\rangle) \right), \\ |v_j\rangle &= N_i \left(\sqrt{2} |0\rangle + \sum_{l=1}^{N/2-3} c_{i,l} |l\rangle + | \frac{N}{2} - 2 \rangle + | \frac{N}{2} - 1 \rangle \right). \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent :

- La non-orthogonalité entre un vecteur $|v_{i \neq 2}\rangle$ tel que $i \in V_A$ et un vecteur $|v_{j \neq N-3}\rangle$ tel que $j \in V_B$,

$$\langle v_{i \neq 2} | v_{j \neq N-3} \rangle = 2N_i N_j \quad (4.18)$$

est vérifiée. Il reste deux autres conditions à satisfaire.

- Les relations d'orthogonalités dans les sous-graphes G_A et G_B , c'est à dire entre les vecteurs $|v_{i \neq 2}\rangle$, $i \in V_A$ et $|v_{j \neq 2,i}\rangle$ $j \in V_A$ d'une part et $|v_{i \neq N-3}\rangle$, $i \in V_B$ et

$|v_{j \neq N-3, i}\rangle$ $j \in V_B$ d'autre part.

$$\langle v_{i \neq 2} | v_{j \neq 2, i} \rangle = N_i N_j \left(4 + \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-4} c_{i,k} c_{j,k}^* \right). \quad (4.19)$$

— La génération de l'état quantique $|\psi\rangle$ par les vecteurs des sommets associés à V_A et de V_B .

De la même manière, afin de vérifier les propriétés d'orthogonalité et d'assurer que l'état $|\psi\rangle$ peut être généré, on utilise une matrice \mathcal{M} , de dimension $\frac{N-4}{2} \times \frac{N-6}{2}$, qui doit vérifier :

- (i) $\forall (i, j)$ avec $i \neq j$, $\sum_k c_{i,k} c_{j,k} = -4$.
- (ii) $\forall j$, $\sum_i c_{i,j} = 0$.

En reprenant la même preuve que pour N impair, on sait qu'une telle matrice existe pour $N \geq 7$. Pour $N = 8$, on a :

$$\mathcal{M}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour le cas où $N = 6$, la matrice \mathcal{M} n'est pas définie, on peut alors utiliser les vecteurs suivants $|v_3\rangle = (0, 1, 1, \sqrt{2})^T / 2$ et $|v_5\rangle = (\sqrt{2}, 1, 1, 0)^T / 2$.

L'état quantique peut être obtenu en prenant la combinaison linéaire suivante :

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{(N-4)} \left(\sum_{i \in V_A, i \neq \{2, N/2+1\}} |v_i\rangle + \sqrt{2} \frac{N-4}{2} |v_2\rangle \right). \quad (4.20)$$

Ici encore, on obtient $P(1|1) = 1/9$. En considérant le cas N impair dans un premier temps et N pair dans un second temps, nous avons montré que pour tous graphes de notre famille tel que $N \geq 6$ il est possible de montrer la contextualité avec le paradoxe que nous avons développé.

4.2.3 Violation de l'Extension de l'Inégalité de KCBS

Nous avons vu dans la section 2.3.2 que la limite quantique est donnée par la fonction ϑ de Lovasz du graph G . Comme les vecteurs associés aux sommets des sous-graphes G_A ou B_B génèrent $|\psi\rangle$, la condition de normalisation de celui-ci peut

s'écrit :

$$\sum_{i \in V_A} |\langle v_i | \psi \rangle|^2 = \sum_{i \in V_B} |\langle v_i | \psi \rangle|^2 = 1. \quad (4.21)$$

L'extension de l'inégalité de KCBS présentée à l'équation 4.4 donne dans le cas quantique $\beta_Q = \sum_{i \in V} |\langle v_i | \psi \rangle|^2$ et pour N impair :

$$\begin{aligned} \beta_Q &= |\langle v_1 | \psi \rangle|^2 + \sum_{i \in V_A} |\langle v_i | \psi \rangle|^2 + \sum_{i \in V_B} |\langle v_i | \psi \rangle|^2, \\ \beta_Q &= \frac{1}{9} + 2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dans le cas où N est pair il faut remarquer que le vecteur $|v_{N/2+1}\rangle$ n'intervient pas dans la combinaison linéaire générant $|\psi\rangle$ (voir l'équation 4.20), donc $|\langle v_{N/2+1} | \psi \rangle|^2 = 0$. La valeur de β_Q dans ce cas est :

$$\begin{aligned} \beta_Q &= |\langle v_1 | \psi \rangle|^2 + \sum_{i \in V_A, i \neq N/2} |\langle v_i | \psi \rangle|^2 + \sum_{i \in V_B, i \neq N/2} |\langle v_i | \psi \rangle|^2, \\ \beta_Q &= \frac{1}{9} + 2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Le premier des trois termes dans les équations 4.22 et 4.23 correspond à la probabilité $P(1|1)$ quant aux deux termes suivants ils valent 1 étant donné la normalisation de l'état quantique précisé dans l'équation 4.21.

Nous avons donc montré que l'état quantique avec l'ensemble des mesures qui permettent de montrer la contextualité avec notre famille de graphes et l'extension du paradoxe peuvent aussi être utilisés avec l'extension de l'inégalité de KCBS. L'avantage de l'utilisation de l'inégalité est que l'implémentation expérimentale est plus souple car les conditions du paradoxe sont difficiles à obtenir dans l'absolu.

La violation que nous obtenons n'est pas la violation maximum. Comme dans le cas du pentagone la violation maximale de l'inégalité de KCBS sous les conditions du paradoxe n'est pas maximale. Malheureusement, une recherche à la fois sur l'état quantique et sur les mesures devient trop difficile numériquement. Il est tout de même possible de faire une recherche au niveau de l'état quantique en gardant la même stratégie de mesure, ce qui donne une violation maximum de 2.22 jusqu'à $N = 10$. Cette valeur reste malgré tout plus faible que la violation maximum pour le pentagone.

4.3 Visualisation avec la Représentation de Majorana

Dans cette section nous utilisons la représentation de Majorana pour visualiser les propriétés de symétrie dans nos constructions graphiques. Pour cela nous décidons de faire correspondre un élément de la base d'un qudit de dimension d , $\{|0\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$ à un élément de la base des états de Dicke $\{|S(n,0)\rangle, |S(n,1)\rangle, \dots, |S(n,d-1)\rangle\}$ d'un état symétrique. En particulier nous choisissons d'associer l'état $|k\rangle$ à $|S(n,k)\rangle$. La fonction σ qui relie les vecteurs associés aux sommets de G_A et de G_B peut alors être vue comme une opération "bit flip" appliquée à tous les qubits de l'état symétrique.

Les relations d'orthogonalité qui sont imposées par le graphe peuvent être interprétées par des relations géométriques entre les $d-1$ points de Majorana de chaque vecteur. Afin de trouver les points de Majorana à partir de la base du qudit on résout numériquement le polynôme de Majorana [20, 68] pour chacun des vecteurs des stratégies de mesures et des états quantiques.

Nous présentons les deux cas concernant le pentagone où nous analysons le cas de la violation maximale connue puis la violation maximale dans les conditions du paradoxe. Enfin nous étudions les cas $N=7$ et $N=8$ de notre famille de graphes avec la stratégie de mesures fournie dans la section précédente.

4.3.1 Pentagone ($N=5$)

Dans le cas du pentagone nous connaissons deux situations de violation maximale de l'inégalité suivant que l'on travaille ou non sous les conditions du paradoxe.

Dans la figure 4.3, sont représentés les points de Majorana des vecteurs de la stratégie de mesure donnés dans l'équation 5.1 et de l'état quantique $|\psi\rangle = (0, 0, 1)^T$ donnant la violation maximale de l'inégalité de KCBS. Les cercles représentent des sphères de Bloch et les points sont les points de Majorana.

Pour le cas de cette stratégie de mesure les angles sur la sphère de Bloch des points de Majorana des vecteurs associés aux sommets du pentagone sont :

- Pour $|v_1\rangle$ on a $\{\theta = 1.51784, \phi = -\pi/2\}$ et $\{\theta = -1.51784, \phi = -\pi/2\}$.
- Pour $|v_2\rangle$ on a $\{\theta = 2.07124, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 1.16558, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_3\rangle$ on a $\{\theta = -2.58909, \phi = 0\}$ et $\{\theta = -1.37982, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_4\rangle$ on a $\{\theta = 1.37982, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 2.58909, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_5\rangle$ on a $\{\theta = 1.16558, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 2.07124, \phi = 0\}$.
- Pour $|\psi\rangle$ on a $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$ et $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$.

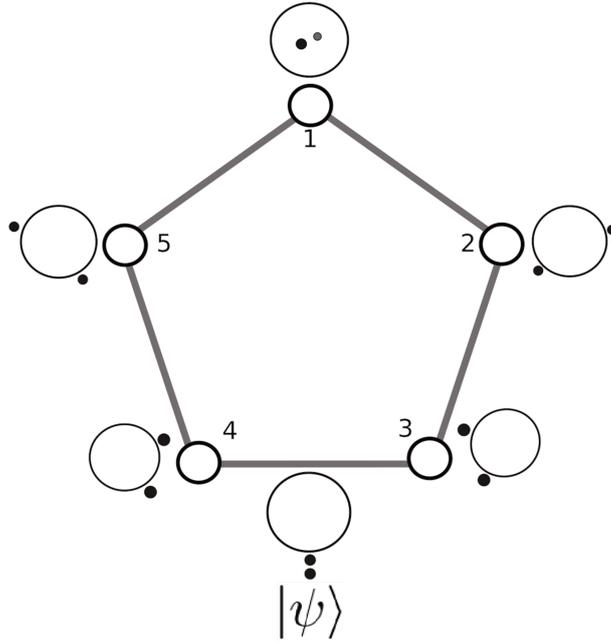


FIGURE 4.3 Représentation des points de Majorana de l'état quantique et de la stratégie de mesure pour $N = 5$ ($d = 3$). Chacun des vecteurs a donc 2 points de Majorana. L'état quantique et la stratégie de mesure correspondent au cas connu dans le cas de la violation maximum de l'inégalité de KCBS.

Il existe des relations de symétrie entre les points de Majorana des sommets du pentagone. Dans le cas de la stratégie de mesure qui donne la violation maximum pour l'inégalité de KCBS, chaque point de Majorana a un point de Majorana qui lui est symétrique, c'est à dire un angle d'inclinaison opposé.

Sur la sphère de Bloch, il s'agit de la symétrie par rapport au centre du plan parallèle au plan de l'équateur. Pour un qubit $|\eta\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$ son symétrique est le qubit d'inclinaison $-\theta$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 |\eta_{sym}\rangle &= \cos(-\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(-\theta/2)|1\rangle, \\
 |\eta_{sym}\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle - e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle, \\
 |\eta_{sym}\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i(\phi+\pi)}\sin(\theta/2)|1\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Ainsi on voit que le symétrique garde la même valeur de l'angle de d'inclinaison mais les angles azimutaux différent de π .

On peut observer cette symétrie entre les points de Majorana du vecteur $|v_1\rangle$, ainsi qu'entre les points de Majorana de $|\psi\rangle$. De plus on remarque que les points de

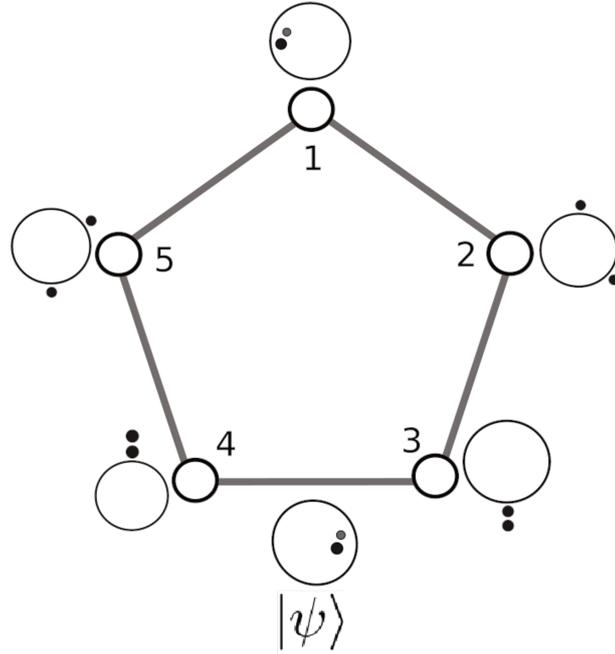


FIGURE 4.4 Représentation des points de Majorana de l'état quantique est de la stratégie de mesure pour $N = 5$ ($d = 3$). Chacun des vecteurs a donc 2 points de Majorana. L'état quantique et la stratégie de mesure correspondent au cas connu où l'inégalité de KCBS est violée à son maximum sous les conditions du paradoxe.

Majorana symétriques de ceux du vecteur $|v_2\rangle$ correspondent à ceux de $|v_5\rangle$. Enfin ceux de $|v_3\rangle$ correspondent à ceux de $|v_4\rangle$.

Dans la figure 4.4, les points de Majorana des vecteurs de la stratégie de mesure donnés dans l'équation 5.1 et de l'état quantique donné à l'équation 5.1 pour la violation maximum sous les conditions du paradoxe.

Pour le cas de cette stratégie de mesure les angles sur la sphère de Bloch des points de Majorana des vecteurs associés aux sommets du pentagone sont :

- Pour $|v_1\rangle$ on a $\{\theta = -\pi/2, \phi = \pi/4\}$ et $\{\theta = -\pi/2, \phi = -\pi/4\}$.
- Pour $|v_2\rangle$ on a $\{\theta = 0, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 1.91063, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_3\rangle$ on a $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$ et $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_4\rangle$ on a $\{\theta = 0, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 0, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_5\rangle$ on a $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 1.23096, \phi = 0\}$.
- Pour $|\psi\rangle$ on a $\{\theta = \pi/2, \phi = \pi/4\}$ et $\{\theta = \pi/2, \phi = -\pi/4\}$.

Dans le cas de la stratégie de mesure qui donne la preuve de contextualité en suivant le paradoxe, il y a une symétrie différente entre les points de Majorana. Cette symétrie correspond au bit flip, ce qui correspond à l'opération σ décrite dans la section 4.2.1. À l'exception des vecteurs $|v_1\rangle$ et $|\psi\rangle$ on retrouve les mêmes couples de

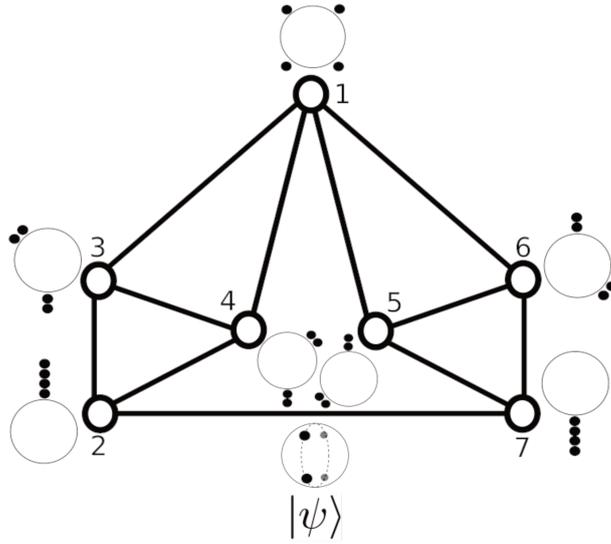


FIGURE 4.5 Représentation des points de Majorana de l'état quantique est de la stratégie de mesure pour $N = 7$ ($d = 5$). Chacun des vecteurs a donc 4 points de Majorana.

sommets dont les points de Majorana sont symétriques dans le cas précédent. Pour les deux cas abordés, les symétries entre les points de Majorana traduisent graphiquement la correspondance que nous avons construite entre les sommets de G_A et ceux de G_B . Quant aux vecteurs $|v_1\rangle$ et $|\psi\rangle$ ils sont leur propres vecteurs associés.

4.3.2 Cas de $N = 7$ et $N = 8$

Dans les figures 4.5 et 4.6, on peut voir les points de Majorana de l'état quantique et des vecteurs de mesure pour un exemple où N est impair ($N = 7$ avec quatre points de Majorana à chaque vecteur) et où N est pair ($N = 8$ avec cinq points de Majorana pour chaque vecteur). L'état quantique et les vecteurs de la stratégie de mesure ont été construits en suivant une symétrie similaire au cas du pentagone sous les conditions du paradoxe. Les vecteurs $|v_1\rangle$ et $|\psi\rangle$ ont leur propres couples de points de Majorana. Dans le cas $N = 8$, on a la même propriété pour $|v_5\rangle$ dont le sommet appartient à la fois à G_A et G_B . Les points de Majorana d'un vecteur $|v_i\rangle$ d'un sommet de V_A ont leurs points de Majorana symétriques dans le vecteur $|v_j\rangle = \sigma(|v_i\rangle)$ associé à un sommet de V_B .

Pour $N = 7$ les points de Majorana sont :

- Pour $|v_1\rangle$: $\{\theta = 2.35619, \phi = 0\}$, $\{\theta = 2.35619, \phi = \pi\}$, $\{\theta = 0.785398, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 0.785398, \phi = \pi\}$.
- Pour $|v_2\rangle$: $\{\theta = 0, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_3\rangle$: $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$, $\{\theta = 0.462955, \phi = \pi\}$ et $\{\theta = 1.23096, \phi = \pi\}$.

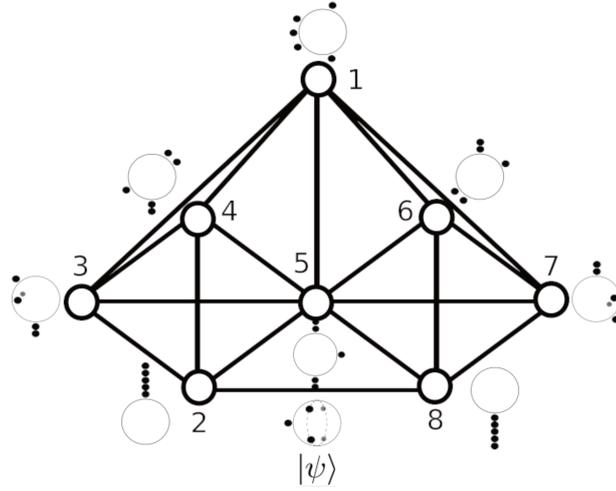


FIGURE 4.6 Représentation des points de Majorana de l'état quantique est de la stratégie de mesure pour $N = 8$ ($d = 5$). Chacun des vecteurs a donc 4 points de Majorana.

- Pour $|v_4\rangle$: $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$, $\{\theta = 0.462955, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 1.23096, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_5\rangle$: $\{\theta = 0, \phi = 0\}$, $\{\theta = 1.910637, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 2.67838, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_6\rangle$: $\{\theta = 0, \phi = 0\}$, $\{\theta = 1.910637, \phi = \pi\}$ et $\{\theta = 2.67838, \phi = \pi\}$.
- Pour $|v_7\rangle$: $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$.
- Pour $|\psi\rangle$: $\{\theta = 2.35619, \phi = \pm\pi/2\}$ et $\{\theta = 0.785398, \phi = \pm\pi/2\}$.

Pour $N = 8$ les points de Majorana sont :

- Pour $|v_1\rangle$: $\{\theta = \pi/2, \phi = \pi\}$, $\{\theta = 0.994903, \phi = \pi\}$, $\{\theta = 2.14669, \phi = \pi\}$, $\{\theta = 0.63213, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 2.50941, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_2\rangle$: $\{\theta = 0, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_3\rangle$: $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$, $\{\theta = 0.324864, \phi = \pi\}$ et $\{\theta = 1.49718, \phi = \pm 2.03759\}$.
- Pour $|v_4\rangle$: $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$, $\{\theta = 2.05487, \phi = \pi\}$, $\{\theta = 0.888921, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 0.354951, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_5\rangle$: $\{\theta = \pi/2, \phi = 0\}$, $\{\theta = 0, \phi = 0\}$ et $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_6\rangle$: $\{\theta = 0, \phi = 0\}$, $\{\theta = 1.86722, \phi = \pi\}$, $\{\theta = 2.25267, \phi = 0\}$ et $\{\theta = 2.786642, \phi = 0\}$.
- Pour $|v_7\rangle$: $\{\theta = 0, \phi = 0\}$, $\{\theta = 2.816729, \phi = \pi\}$ et $\{\theta = 1.644127, \phi = \pm 2.03759\}$.
- Pour $|v_8\rangle$: $\{\theta = \pi, \phi = 0\}$.
- Pour $|\psi\rangle$: $\{\theta = \pi/2, \phi = \pi\}$, $\{\theta = 0.685916, \phi = \pm 2.03759\}$ et $\{\theta = 2.45568, \phi = \pm 1.72981\}$.

Étant donné que pour $N = 8$ il y a un nombre impair de points de Majorana dans un vecteur, il y a un point de Majorana qui sera son propre symétrique. Il doit donc être situé sur l'équateur de manière à ce que le "bit flip" n'ait aucun effet sur ce qubit.

4.4 Résumé du Chapitre

Dans ce chapitre, il est décrit une nouvelle méthode pour tester la contextualité des états quantiques. Cette méthode donne une extension d'une preuve logique (approche similaire au paradoxe de Hardy) et de l'inégalité de KCBS. Pour cela nous avons défini une famille de graphes qui définit les relations de compatibilité et d'exclusivité des mesures. À cela s'ajoute une série de conditions que doit vérifier le système quantique afin de prouver la contextualité de manière logique.

Après avoir obtenu le paradoxe logique auquel aboutit un modèle déterministe et non-contextuel, nous donnons pour tout entier $d > 3$, un qudit et une stratégie de mesure qui vérifient les conditions imposées par le paradoxe pour chaque graphe de notre famille.

Enfin il est aussi possible d'utiliser la représentation de Majorana des états symétriques pour visualiser les relations entre les vecteurs des sommets du graphe. On se rend compte que dans le cas du pentagone, les deux stratégies de mesures donnent deux types de symétries entre les points de Majorana. Dans les stratégies de mesure que nous définissons, on observe la même symétrie que dans le cas de la stratégie de mesure du pentagone qui respecte les conditions du paradoxe.

Chapitre 5

Aspects Expérimentaux de la Contextualité et Limitations

Il existe de nombreux travaux concernant l'observation de la contextualité, notamment sur différentes technologies qui utilisent des systèmes physique variés, de plus ces technologies peuvent parfois utiliser plusieurs degrés de liberté de ceux-ci. Par exemple, en utilisant des sources de photons on trouve des expériences qui utilise : la polarisation/chemin [3, 5, 6, 36], le moment angulaire orbital [9], le chemin [9, 21, 90], et les propriétés temporelles [3]. Il possible d'utiliser des ions piégés [56], des neutrons [15] ou des qubits supraconducteurs [53]. Ces expériences sont en général dans le cas d'un qutrit.

Malgré tous ces efforts, il est improbable qu'une série de mesures parfaites soit implémentée, car il n'est seulement possible d'assurer qu'une mesure a été réalisé qu'avec une précision limité. On peut se demander si les résultats de mesures sur un système quantique peuvent avoir une description par une théorie classique. C'est cette direction qu'ont pris les auteurs des articles [35, 54, 71]. Pour résoudre ce problème dans la lignée de l'article de Spekkens [82], Andreas Winter propose un modèle ontologique de la non contextualité avec une fiabilité dépendant de la précision des mesures [88] qui sera présenté dans ce chapitre.

Dans ce chapitre nous abordons les aspects expérimentaux des tests de contextualité développés au Chapitre 4.

Dans la section 5.1 nous présentons une implémentation expérimentale [69] d'observation de la contextualité. Pour un qutrit dans le cas du pentagone, les auteurs montrent une observation de la contextualité avec l'inégalité de KCBS [57] ainsi que par preuve logique [27]. À partir de cette expérience nous proposons une méthode pour observer expérimentalement la contextualité avec notre famille de graphes.

Dans la section 5.2, nous considérons que la limitation expérimentale correspond à l’incapacité d’avoir la certitude de réaliser la même mesure dans différents contextes. Pour palier à cela nous utilisons la notion de “fiabilité ontologique à ε près” de la contextualité [88], qui exprime cette imperfection à la fois sur l’inégalité utilisée et sur la différence entre une même mesure dans différents contextes.

Dans la section 5.3 nous proposons une méthode pour tester expérimentalement la “fiabilité ontologique à ε près” de la contextualité pour notre famille de graphes. Pour cela nous réunissons l’expérience présentée dans la section 5.1 et le formalisme décrit dans la section 5.2. Nous présentons tout d’abord comment cette technique s’applique au cas du pentagone pour l’inégalité de KCBS, puis nous présentons à travers l’exemple de $N = 6$ comment cette méthode s’applique dans le cas de notre famille de graphes.

Dans la section 5.4, nous considérons le cas où l’état quantique est soumis à de la décohérence. Pour cela nous utilisons les mêmes méthodes que celles utilisées dans le Chapitre 3. Il s’agit d’appliquer les modèles de décohérence présentés dans la section 2.4.3 qui permettent de quantifier le bruit et ainsi de déterminer des seuils de tolérances au bruit afin d’observer la contextualité. Pour la famille de graphes que nous avons proposée au Chapitre 4, il y a une inégalité, une stratégie de mesure et un état quantique pour chaque graphe donné en suivant la procédure décrite dans la section 4.2. Dans ce cas, l’état quantique est un qudit qui peut être réalisé de manières différentes, déterminant une interaction avec l’environnement et une tolérance au bruit différente.

5.1 Test Expérimental de la Contextualité

5.1.1 Observation par l’Inégalité de KCBS

Dans l’article [69], les auteurs présentent une observation expérimentale de la contextualité. Ils ont utilisé l’inégalité de KCBS présentée sous les conditions du paradoxe développé dans [27] pour prouver la contextualité.

L’inégalité de KCBS est composée de cinq observables dont chacune peut être mesurée dans deux contextes différents. L’expérience proposée mesure un contexte composé de deux mesures. Les cinq vecteurs propres des projecteurs sont les suivants :

$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,$$

$$\begin{aligned}
|v_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \\
|v_3\rangle &= (0, 0, 1)^T, \\
|v_4\rangle &= (1, 0, 0)^T, \\
|v_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^T.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

L'état quantique est :

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T. \tag{5.2}$$

L'état quantique est un qutrit qui est encodé en chemin et réalisé par un photon unique. La superposition de l'état quantique vient du fait que le photon a une probabilité d'utiliser chaque chemin. Les vecteurs de base du qutrit $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$ correspondent alors aux différents chemins que le photon peut emprunter.

Afin de rendre la mesure des observables possible il faut pour chacune d'elle que le résultat '1' soit associé à l'un des chemins. Il faut alors que les chemins correspondent un à un aux vecteurs propres de cette observable. Alors le chemin associé au résultat '1' de l'observable sera associé au vecteur $|v_1\rangle$. Pour cela on utilise une opération unitaire U_i telle que $U_i|v_i\rangle = |0\rangle$. Ces opérations unitaires sont réalisées en pratique par des lames séparatrices.

Pour pouvoir mesurer la seconde observable sur le même système que la première, on ne mesure pas effectivement la présence du photon sur les différents chemins mais on la mémorise dans le système sur un degré de liberté indépendant : la polarisation du photon. La polarisation d'un photon peut être représentée dans la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ où $|H\rangle$ est la polarisation horizontale et $|V\rangle$ la polarisation verticale. Lorsque que le photon utilise le chemin associé au résultat 1 sa polarisation sera tournée en verticale alors que sur les deux autres chemins sa polarisation reste horizontale. On peut ainsi garder la trace du résultat malgré l'application de l'opération U_i^\dagger qui doit restituer l'état initial $|\eta\rangle$.

Après la seconde opération U_j du contexte testé, on mesure la position et la polarisation du photon, qui nous fournissent les résultats correspondant aux deux observables du contexte. L'ensemble du processus est résumé sur la figure 5.1.

On décrit maintenant l'évolution de l'état quantique étape par étape.

L'état $|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ dans la base des chemins est d'abord préparé. En consi-

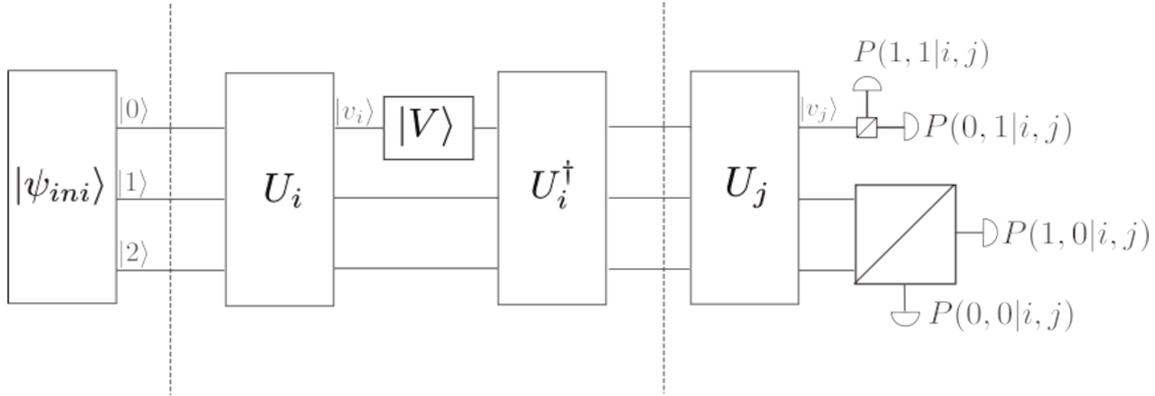


FIGURE 5.1 Synthèse du processus montrant dans le cas du pentagone, la mesure des projections d'un contexte. On peut voir que les trois chemins correspondent à la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$. Après préparation de l'état $|\psi_{ini}\rangle$, on procède à la mesure P_i , ce qui donne l'état $|\psi_1\rangle$. Ensuite on procède à la seconde mesure en appliquant l'opérateur U_j ce qui donne l'état $|\psi_f\rangle$. Enfin on procède à la mesure de la polarisation et de la détection du photon sur chaque chemin. Afin de détecter la polarisation on utilise un polariseur à séparation de faisceaux. Deux détecteurs sont nécessaires pour chaque chemin.

dérant la polarisation du photon on a l'état initial :

$$|\psi_{ini}\rangle = |\eta\rangle \otimes |H\rangle. \quad (5.3)$$

Après la première mesure (entre U_i^\dagger et U_j sur la figure 5.1) l'état quantique est :

$$|\psi_1\rangle = \alpha_i |v_i\rangle \otimes |V\rangle + (\alpha_j |v_j\rangle + \alpha_{i,j} |v_{i,j}\rangle) \otimes |H\rangle, \quad (5.4)$$

où les coefficients α_i , α_j et $\alpha_{i,j}$ sont des nombres complexes tels que $|\alpha_i|^2 + |\alpha_j|^2 + |\alpha_{i,j}|^2 = 1$. Le vecteur $|v_{i,j}\rangle$ correspond au vecteur unitaire orthogonal à la fois à $|v_i\rangle$ et $|v_j\rangle$, formant avec ces deux derniers une base de l'espace de Hilbert du qutrit encodé sur le chemin.

Avant les détecteurs (après U_j sur la figure 5.1) l'état quantique est :

$$|\psi_f\rangle = \alpha_j |0\rangle \otimes |H\rangle + \alpha_i U_j |v_i\rangle \otimes |V\rangle + \alpha_{i,j} U_j |v_{i,j}\rangle \otimes |H\rangle. \quad (5.5)$$

Les opérations unitaires peuvent être réalisées avec des lames séparatrices dont le nombre varie pour chaque opérateur, les matrices des opérations unitaires sont décrites par le produit des matrices de chacune des lames utilisée pour la composer.

En se basant sur la matrice de la lame séparatrice, on calcule les matrices correspondant aux cinq transformations unitaires pour cette expérience sur un qutrit encodé en chemin.

| i | $ v_i\rangle$ | U_i | Schéma |
|---|---|---|--------|
| 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ | |
| 2 | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ | |
| 3 | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | |
| 4 | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | |
| 5 | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | |

TABLE 5.1 Ce tableau contient pour chaque sommet i , le vecteur $|v_i\rangle$, la matrice U_i et un schéma du réseau de lames séparatrices nécessaire. Il est indiqué en sortie quelle est le résultat associé à chaque chemin.

En suivant cette procédure, les auteurs de l'article [69] obtiennent :

$$\beta_{Q,exp} = 2.078 \pm 0.038, \quad (5.6)$$

ce qui démontre une violation expérimentale de l'inégalité de KCBS sous la condition

du paradoxe.

5.1.2 Extension à un Qudit

Dans le cas de notre famille de graphes, pour laquelle un contexte peut comporter plus de deux mesures, la polarisation ne suffit plus pour conserver les résultats des premières mesures. Nous proposons d'utiliser les propriétés temporelles du photon. Au lieu d'utiliser une lame d'onde, on applique au photon un retard Δt_i caractéristique de la mesure effectuée. Chaque mesure du contexte (sauf la dernière effectuée qui utilise uniquement le chemin) a son propre temps caractéristique afin de pouvoir reconnaître quel chemin le photon a emprunté.

L'état initial, $|\psi_{ini}\rangle$, est :

$$|\psi_{ini}\rangle = |\eta\rangle \otimes |0\rangle_t, \quad (5.7)$$

où $|\eta\rangle$ est le qudit sur lequel la mesure doit être faite pour tester la contextualité et $|0\rangle_t$ renseigne sur le retard du photon.

Ensuite, le photon passe au travers des différentes portes logiques réalisant les opérateurs unitaires associés aux mesures du contexte C . Soit C^\perp l'ensemble qui complète la base du qudit à partir des vecteurs $|v_i\rangle, \forall i \in C$.

Avant la dernière mesure on obtient l'état $|\psi\rangle$ suivant :

$$|\psi\rangle = \sum_{i \in C, i \neq i_f} \alpha_i |v_i\rangle \otimes |\Delta t_i\rangle_t + \sum_{j \in C^\perp} \alpha_j |v_j\rangle \otimes |0\rangle_t + \alpha_f |v_f\rangle \otimes |0\rangle_t, \quad (5.8)$$

où l'indice i_f correspond à la dernière mesure qui utilise seulement la position du photon.

Enfin, le qudit avant les détecteurs est :

$$|\psi_f\rangle = \alpha_{i_f} |0\rangle \otimes |0\rangle_t + \sum_{i \in C, i \neq i_f} \alpha_i U_{i_f} |v_i\rangle \otimes |\Delta t_i\rangle_t + \sum_{j \in C^\perp} \alpha_j U_{i_f} |v_j\rangle \otimes |0\rangle_t, \quad (5.9)$$

où U_{i_f} est l'opérateur unitaire de la dernière mesure.

La figure 5.2 résume le procédé dans le cas $N = 6$ où un contexte se compose de trois mesures et le qudit est de dimension $d = 4$.

Ce procédé permet aussi de vérifier constamment la relation d'exclusivité entre les mesures du contexte car si le retard obtenu lors d'une mesure ne correspond pas à un seul Δt_i mais à une combinaison de différents Δt_i la condition d'exclusivité n'est pas respectée. La condition de compatibilité peut aussi être validée en vérifiant que la

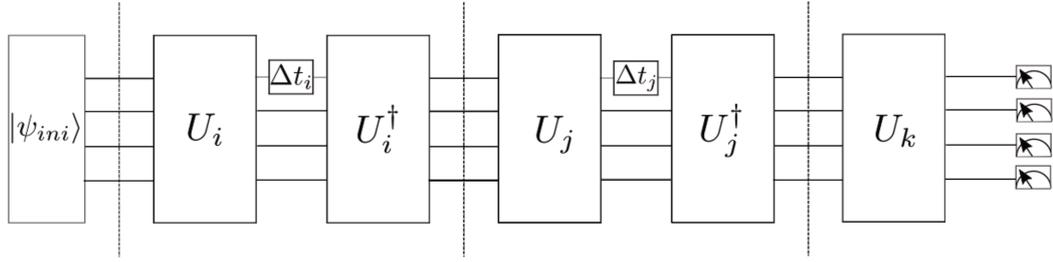


FIGURE 5.2 Circuit montrant l'expérience pour un contexte composé de trois mesures qui correspondent aux cas $N = 6$. L'état initial est préparé dans l'état $|\psi_{ini}\rangle$. Le photon va ensuite passer à travers deux blocs de mesures accumulant éventuellement un retard relatif aux mesures. À la dernière mesure la position du photon est déterminée en utilisant un détecteur sur chaque chemin.

distribution de probabilité sur les résultats des mesures du contexte est invariante par l'ordre dans lequel les opérations unitaires sont appliquées.

5.2 La Non Contextualité Ontologique

5.2.1 Approche Ontologique de la Non Contextualité

Afin d'observer la contextualité lors d'une expérience, on a vu qu'il est nécessaire de procéder à une même mesure dans différents contextes afin de montrer que le contexte d'une mesure influence son résultat. Pour valider cette observation il faut justifier de la capacité à mesurer une même observable dans différents contextes. On peut se demander dans quelle mesure de légères fluctuations des conditions expérimentales pourraient invalider le test et pour quantifier ce problème on introduit un paramètre ε prenant en compte les limitations expérimentales.

Dans le cas quantique, le résultat d'une projection P_i , est obtenu en mesurant en réalité $P_{i,C}$ donnant le résultat $X_{i,C}$ correspondant à chaque contexte. Dans l'article [88], l'auteur introduit un modèle quantique à précision ε :

- Pour tout contexte C : $\sum_{i \in C} \langle X_{i,C} \rangle \leq 1$.
- Pour toute mesure d'un contexte C et associée au sommet $i \in V$: $\|P_i - P_{i,C}\| \leq \varepsilon$, où $\|P_i - P_{i,C}\|$ est la norme de la distance définie par :

$$\|A - B\| = \max |\text{Tr}(\rho(A - B))|. \quad (5.10)$$

où A et B sont des opérateurs et ρ est la matrice densité du système considéré. En d'autres termes, ce modèle garantit que la distance entre la projection théorique

et les projections réalisées expérimentalement n'est pas supérieure à la valeur ε , ce qui donne un sens à l'utilisation de résultats de la même mesure obtenus dans différents contextes.

Dans le cas classique, on peut définir la fiabilité ontologique à ε près de la non contextualité de la manière suivante :

- Pour tout contexte C : $\sum_{i \in C} \langle X_{i,C} \rangle \leq 1$.
- Pour toute mesure d'un contexte C et C' associée au sommet $i \in V$: $Pr\{X_{i,C} \neq X_{i,C'}\} \leq \varepsilon$.

C'est à dire que la probabilité que le résultat d'une mesure soit différent dans deux contextes différents doit être inférieure à une valeur ε .

En utilisant ces deux approches dans une inégalité de contextualité de la forme $\beta = \sum_i \langle X_i \rangle \leq \beta_{cl}$, l'inégalité devient :

$$\sum_i \langle X_i \rangle \leq \beta_{cl} + \varepsilon \sum_i (k_i - 1), \quad (5.11)$$

où k_i est le nombre de contextes dans lequel le résultat associé au sommet i apparaît.

Dans le cas quantique où, $\beta_Q = \sum_i \langle X_i \rangle$, on obtient :

$$\varepsilon \geq \frac{\beta_Q - \beta_{cl}}{\sum_i (k_i - 1)}. \quad (5.12)$$

Les résultats de mesure qui violent cette inégalité ne peuvent pas être décrits par un modèle ontologique non contextuel fiable à ε près. L'auteur de l'article [88] montre qu'en introduisant un degré d'approximation dans les modèles de mesures des inégalités de contextualité, il est possible de tester la nature ontologique de la non contextualité de façon fiable à ε près.

5.2.2 Extension de l'Inégalité de KCBS

Dans le cas de notre famille de graphes, l'inégalité 5.12 dépend de la parité du nombre de sommets, N .

- Dans le cas où le nombre de sommets est impair, la liste des contextes est :
 - $C_1 = \{i \in V_A\}$,
 - $C_2 = \{i \in \{1\} \cup V_A - \{2\}\}$,
 - $C_3 = \{i \in V_B\}$,
 - $C_4 = \{i \in \{1\} \cup V_B - \{N\}\}$,
 - $C_5 = \{i \in \{2\} \cup \{N\}\}$.

On peut vérifier que chacun des sommets intervient dans deux contextes. Par

exemple $i = 1$ dans les contextes C_2 et C_4 ; $i = 2$ est dans les contextes C_1 et C_5 ; $i = N$ est dans les contextes C_3 et C_5 . Les sommets $i \in \{V_A - 2\}$ sont dans les contextes C_1 et C_2 et les sommets $i \in \{V_B - \{N\}\}$ sont dans les contextes C_3 et C_4 . On a $k_i = 2$ pour tout $i \in V$.

L'équation 5.12 devient :

$$\varepsilon \geq \frac{1}{9N}, \quad (5.13)$$

où le facteur $1/9$ est la différence entre la violation quantique de l'extension de KCBS et la limite classique, pour l'état quantique et le choix de mesures décrits dans le Chapitre 4.

- Le cas où N est pair est similaire sauf que le sommet central pour $i = \frac{N}{2} + 1$ est connecté à tous les sommets du graphe. On a alors pour le nombre d'occurrence du résultat associé au sommet i :

$$k_i = \begin{cases} 5 & \text{si } i = \frac{N}{2} + 1, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.14)$$

L'équation 5.12 devient alors :

$$\varepsilon \geq \frac{1}{9(N+3)}. \quad (5.15)$$

Pour nos graphes, les résultats ne peuvent pas être décrits par un modèle ontologique non contextuel fiable à ε près si l'imprécision des mesures est $\varepsilon < \frac{1}{9N}$ (pour N impair) et $\varepsilon < \frac{1}{9(N+3)}$ (pour N pair). On voit que ε varie comme $1/N$, il est donc plus difficile d'obtenir une violation quand N augmente.

5.3 Approche Expérimentale de l'Observation de la Non-Contextualité

5.3.1 Pentagone et Inégalité de KCBS

Dans la section 5.1.1, nous avons vu l'exemple d'une observation expérimentale [69] de la contextualité qui utilise l'inégalité KCBS [57] et un paradoxe prouvant la contextualité [27].

L'idée de l'article [88] présenté dans la section 5.2 permet de tester la non-contextualité ontologique pour palier l'impossibilité de mesurer avec certitude la même observable

dans des contextes différents.

Afin de relier cette approche à l'expérience réalisée dans [69] nous prenons comme hypothèse que l'impossibilité de réaliser la même mesure dans différents contextes provient d'une dispersion sur la valeur de la réflexivité de transmission des lames séparatrices utilisées. Par souci de simplicité nous considérons que l'erreur typique de chaque lame séparatrice est la même, notée δ . Pour la même raison nous négligeons les erreurs de phase sur les coefficient de réflexion et transmission.

La matrice d'une lame 50 : 50 s'écrit alors :

$$B_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+2\delta} & \sqrt{1-2\delta} \\ \sqrt{1-2\delta} & -\sqrt{1+2\delta} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

Dans le cas du pentagone les 5 opérateurs unitaires donnés à la section 5.1.1 deviennent :

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+3(-1)^\phi \delta} & \sqrt{2-3(-1)^\phi \delta} & 0 \\ \sqrt{2-3(-1)^\phi \delta} & \sqrt{1+3(-1)^\phi \delta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1+2\delta} & \sqrt{1-2\delta} \\ 0 & \sqrt{1-2\delta} & \sqrt{1+2\delta} \end{pmatrix}, \\ U_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+2\delta} & \sqrt{1-2\delta} & 0 \\ \sqrt{1-2\delta} & -\sqrt{1+2\delta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ U_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ U_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ U_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+2\delta} & \sqrt{1-2\delta} \\ 0 & \sqrt{1-2\delta} & -\sqrt{1+2\delta} \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

où $\phi = \{0, 1\}$, ce qui permet, lorsque plusieurs lames séparatrices sont impliquées de considérer les cas où les coefficients de transmission et réflexion varient dans le même sens ou d'un sens opposé. Comme on l'a vu dans la section 5.1, l'opérateur unitaire U_1 est obtenu à partir du produit des matrices des lames séparatrices nécessaires.

L'idée développée dans l'article [88] est que pour tester la non-contextualité dite

ontologique, la violation de l'équation 5.12 est requise. Dans le cas du pentagone, la condition nécessaire est $\varepsilon < \frac{1}{45}$ où ε est une borne supérieure de la distance entre la projection $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$ associé au sommet i et chacune des projections mesurée dans chaque contexte $P_{i,\delta} = |v_{i,\delta}\rangle\langle v_{i,\delta}|$ avec $U_{i,\delta}|v_{i,\delta} = |0\rangle$, c'est à dire :

$$\|P_i - P_{i,\delta}\| < \varepsilon. \quad (5.18)$$

Soit $M_{i,\delta} = P_i - P_{i,\delta}$. Comme P_i et $P_{i,\delta}$ sont des projections et que la transposée est une application linéaire, alors $M_{i,\delta}$ est symétrique et donc diagonalisable. Soit $D_{i,\delta}$ la matrice $M_{i,\delta}$ exprimée dans la base de ses vecteurs propres et $\tilde{P}_{i,\delta}$ la matrice de passage telle que :

$$M_{i,\delta} = \tilde{P}_{i,\delta} D_{i,\delta} \tilde{P}_{i,\delta}^{-1}. \quad (5.19)$$

La norme de la matrice $M_{i,\delta}$ est alors :

$$\|M_{i,\delta}\| = \max |Tr(\rho \tilde{P}_{i,\delta} D_{i,\delta})| \quad (5.20)$$

$$\|M_{i,\delta}\| = \max |\lambda_i(\delta)|, \quad (5.21)$$

où les $\lambda_i(\delta)$ sont les valeurs propres de $M_{i,\delta}$.

Afin de réfuter la possibilité de décrire ces résultats par un modèle ontologique non contextuel dans le cas de l'inégalité de KCBS il faut vérifier $\lambda_i(\delta) < \frac{1}{45}$ pour chacune des mesures.

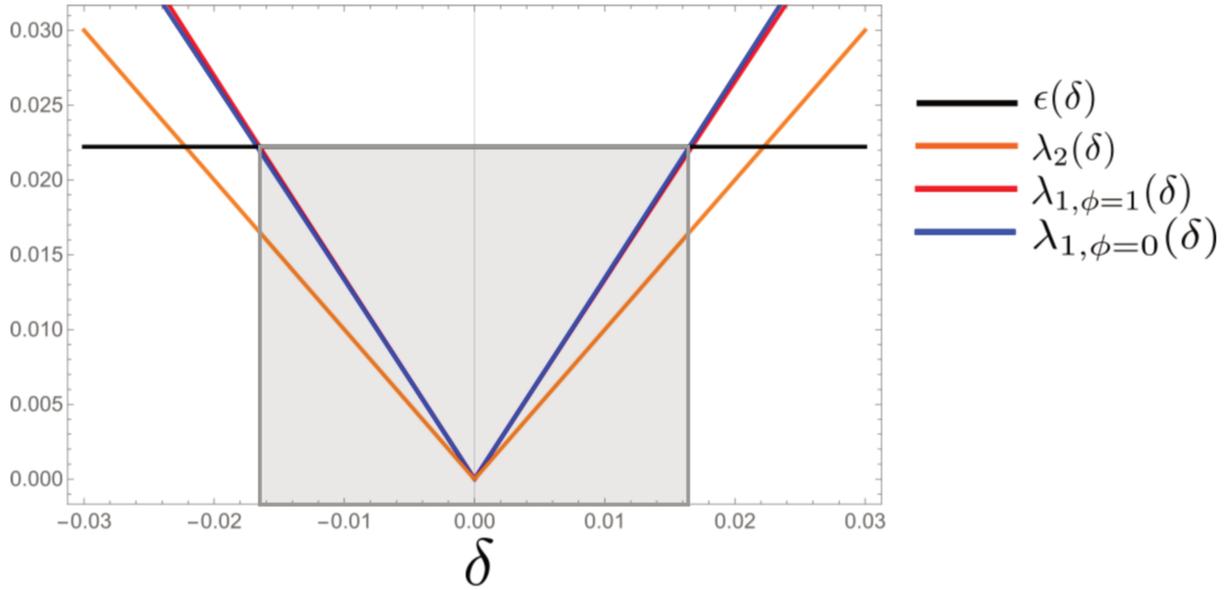


FIGURE 5.3 Distance entre l'opérateur théorique et l'opérateur expérimental en fonction de δ , avec la limite $\varepsilon = \frac{1}{45}$ représenté par une droite. La ligne horizontale représente la limite $\frac{1}{45}$. Les autres courbes correspondent aux valeurs propres les plus grandes des différents opérateurs unitaires U_1 (représentée par deux courbes $\lambda_{1,\phi=\{0,1\}}$) et U_2 (qui représente aussi U_5 car les lames séparatrices sont les mêmes), qui sont fonctions de δ . La zone grisé représente les valeurs de δ qui amènent à une violation.

Dans la figure 5.3 sont représentées les différentes courbes des $\max|\lambda_i(\delta)|$ afin de les comparer avec la valeur de ε représentée par la ligne horizontale. Les réseaux optiques pour U_3 et U_4 n'ont pas de lame séparatrice, c'est pourquoi elles ne sont pas affichées sur la figure. Afin de violer l'équation 5.12 et ainsi réfuter une description ontologique non contextuelle fiable à ε près il faut que toutes les courbes soient en dessous de cette ligne horizontale. La valeur maximale de δ pour avoir une violation est alors la plus grande de δ pour laquelle toutes les courbes sont en dessous de la ligne horizontale. Ainsi on obtient la valeur $\delta_{th} = \pm 0.0164974$. Cela correspond à une erreur de 1.6% sur les coefficients de transmission et de réflexion des lames séparatrices.

5.3.2 Le cas du graphe à 6 sommets

Pour comprendre l'utilisation de cette méthode nous proposons d'étudier le cas particulier du graphe $N = 6$.

Experimentation Proposée Dans le cas du graphe à 6 sommets des cinq contextes suivants :

- $C_1 = \{i \in \{2, 3, 4\}\}$,
- $C_2 = \{i \in \{1, 3, 4\}\}$,
- $C_3 = \{i \in \{4, 5, 6\}\}$,
- $C_4 = \{i \in \{1, 4, 5\}\}$,
- $C_5 = \{i \in \{2, 4, 6\}\}$.

Afin d'obtenir les opérations unitaires $\{U_i\}$ tel que $U_i|v_i\rangle = |0\rangle$, on applique la technique suivante. La première étape est de compter le nombre de composantes non nulles de chaque $|v_i\rangle$. On construit les circuits des U_i à l'aide de réseaux de lames séparatrices. Chaque lame séparatrice ajoutée permet en ajustant les coefficients de réflexion et transmission, d'annuler une composante non voulue de $U_i|v_i\rangle$ jusqu'à obtenir une seule composante sur le chemin voulu. Le nombre de lames séparatrices nécessaire correspond au nombre de composante à annuler moins un. Par exemple pour $|v_1\rangle$ il faut trois lames séparatrices, aucune pour $|v_2\rangle$, deux pour $|v_3\rangle$ et une pour $|v_4\rangle$. Les opérateurs unitaires pour $N = 6$ sont :

- Pour le vecteur $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}, 1, 1, -\sqrt{2})^T$.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\
 U_1 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & \sqrt{6} & \sqrt{6} & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{6} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 0 & 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

- Pour le vecteur $|v_2\rangle = (1, 0, 0, 0)^T$.

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

- Pour le vecteur $|v_3\rangle = \frac{1}{2}(0, 1, 1, \sqrt{2})^T$.

$$U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

— Pour le vecteur $|v_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0)^T$.

$$U_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

— Pour le vecteur $|v_5\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1, 0)^T$.

$$U_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

— Pour le vecteur $|v_5\rangle = (0, 0, 0, 1)^T$.

$$U_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Implémentation de l'Imprecision de Mesure Dans la section 5.3.1, nous relient l'approche ontologique de la non-contextualité aux limitations expérimentales dans le cas du pentagone avec l'inégalité de KCBS. Nous appliquons cette méthode au cas $N = 6$ de notre famille de graphes. Nous reprenons les opérations unitaires U_i en incluant δ . On obtient alors :

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1+3(-1)\phi_2\delta} & -\sqrt{2-3(-1)\phi_2\delta} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2-3(-1)\phi_2\delta} & \sqrt{1+3(-1)\phi_2\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&\cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1+4(-1)\phi_1\delta} & \sqrt{3-4(-1)\phi_1\delta} & 0 \\ 0 & \sqrt{3-4(-1)\phi_1\delta} & \sqrt{1+4(-1)\phi_1\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1+3\delta} & \sqrt{2+3\delta} \\ 0 & 0 & \sqrt{2+3\delta} & \sqrt{1+3\delta} \end{pmatrix}, \\
U_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
U_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{1+2(-1)\phi\delta} & \sqrt{1-2(-1)\phi\delta} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-2(-1)\phi\delta} & -\sqrt{1+2(-1)\phi\delta} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+2\delta} & \sqrt{1-2\delta} & 0 & 0 \\ \sqrt{1-2\delta} & -\sqrt{1+2\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\
U_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1+2\delta} & \sqrt{1-2\delta} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-2\delta} & \sqrt{1+2\delta} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\
U_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+2(-1)\phi\delta} & \sqrt{1-2(-1)\phi\delta} & 0 & 0 \\ -\sqrt{1-2(-1)\phi\delta} & \sqrt{1+2(-1)\phi\delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+2\delta} & \sqrt{1-2\delta} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-2\delta} & -\sqrt{1+2\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$U_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

où ϕ , ϕ_1 et ϕ_2 sont égaux soit à 0 ou à 1.

Afin de tester la non-contextualité ontologique avec l'extension de l'inégalité de KCBS il faut que la distance entre la projection P_i associée au sommet i et chacune des projections mesurée dans chaque contexte $P_{i,\delta}$ soit inférieure à $\frac{1}{9(N+3)} = \frac{1}{81}$.

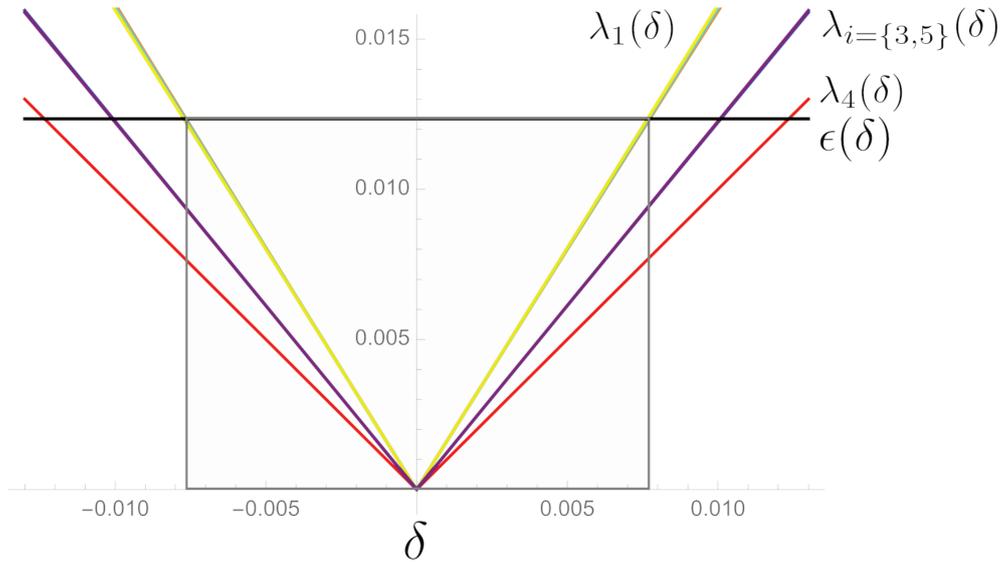


FIGURE 5.4 Superposition des courbes des différentes distances entre les résultats d'une mesure dans un contexte en fonction de δ avec la limite de violation $\varepsilon = \frac{1}{81}$ représentée par une ligne horizontale pour le cas $N = 6$. Les autres courbes correspondent aux valeurs propres les plus grandes des différentes opérations unitaires U_1 (pour toutes les combinaisons de ϕ_1 et ϕ_2), U_3 (avec U_5) et U_4 qui sont fonctions de δ .

Dans la figure 5.4, les différentes courbes représentent les valeurs maximales de $\lambda_i(\delta)$ de chacune des mesures associée aux sommets du graphe. Les réseaux optiques pour U_2 et U_6 n'ont pas de lame séparatrice, c'est pourquoi elles ne sont pas affichées sur la figure. La courbe horizontale est le seuil à partir duquel il n'y a plus de violation observable. La limite est la valeur de δ maximum pour laquelle toutes les courbes sont en dessous de la ligne horizontale à $\varepsilon = \frac{1}{81}$. Ainsi on obtient la valeur $\delta_{th} = 0.0077$. Cela correspond à une erreur de 0.8% sur les coefficients de réflexion et transmission de chaque lame séparatrice. Ce résultat est plus petit que la limite obtenue pour pentagone mais l'observation de la contextualité ontologique reste tout de même possible dans ces conditions.

Il semblerait que la contextualité ontologique soit de plus en plus difficile à observer quand N augmente. On peut comprendre cela par le fait que les plus grandes dimensions nécessitent plus de composants entraînant une plus grande accumulation d'erreur.

5.4 Effet de la Décohérence sur l'Extension de l'Inégalité de KCBS

Dans cette section nous considérons que la limitation expérimentale se répercute au travers de l'état quantique par la décohérence. La méthode que nous appliquons ici correspond à la méthode utilisée dans la section 3.1. Pour décrire la décohérence d'un qudit nous modélisons le système de dimension d de trois manières différentes qui amènent à des interactions différentes avec l'environnement.

- *État unique.* Nous appliquons comme modèles d'amortissements ceux décrits dans l'équation 2.57 pour l'amortissement d'amplitude et à l'équation 2.64 pour l'amortissement de phase. Dans ce modèle les opérateurs de Kraus agissent sur la globalité du système.
- *État composé de qubits.* L'utilisation de qubits impose une restriction sur la dimension possible du qudit. En effet, la dimension totale du système global est donnée par le produit des dimensions des sous systèmes. Étant donné qu'il n'y a que des qubits, la dimension du qudit d doit être de la forme $d = 2^n$, où n est le nombre de qubits utilisé pour réaliser le qudit. Les opérateurs agissent sur chacun des sous systèmes séparément, en suivant le modèle de l'équation 2.53.
- *État composé d'un état symétrique.* Le qudit est réalisé par un état symétrique de qubits. La dimension du sous espace symétrique est égale à la dimension du qudit. Elle est donnée par le nombre d'états de Dicke, c'est à dire $n + 1$ pour n qubits, alors que la dimension de l'espace des états à n qubits est 2^n . C'est dans l'espace donné par le produit tensoriel de chaque espace des qubits que les opérateurs de Kraus s'appliquent. Le calcul de l'éventuelle violation se fait ensuite dans la base des états de Dicke.

La figure 5.5 nous montre l'évolution du seuil de facteur de bruit en fonction du nombre de sommets dans notre famille de graphe. Les seuils de facteur de bruit suivent tous la même tendance, ils diminuent quand le nombre de sommets du graphe augmente. Dans les deux modèles de décohérence, l'utilisation de qubits semble être plus tolérante au bruit. Dans le cas des qubits et des états symétriques, l'amortissement en phase semble avoir un effet moindre, alors que c'est l'amortissement d'amplitude dans

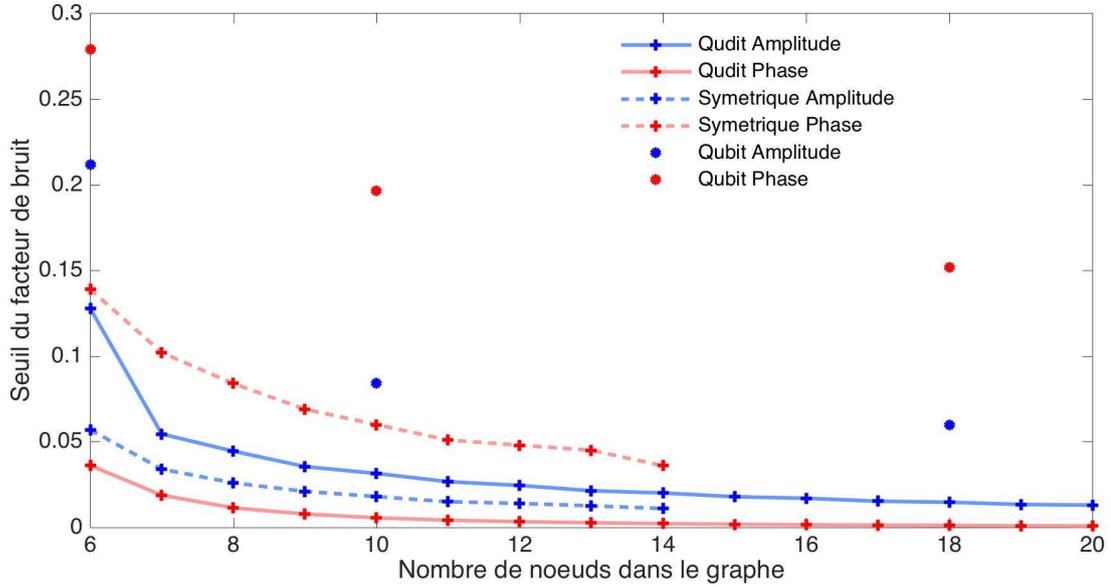


FIGURE 5.5 Seuil de facteur de bruit pour l’amortissement d’amplitude et de phase, pour les trois types de systèmes considérés, pour le test de contextualité basé sur l’inégalité de KCBS.

le cas du qudit. Il est difficile de comparer les différents systèmes. Pour illustrer le fait que les modèles de décohérence n’agissent pas de la même manière sur les états quantique considérons l’exemple suivant : pour un qudit de dimension $d = 4$, on a le choix d’encoder l’information dans le nombre de photons avec base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ correspondant aux états de zéro à trois photons. En utilisant deux qubits on peut prendre la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ et faire correspondre un à un ces vecteurs avec ceux de la base précédente. On peut remarquer qu’il y a une différence évidente au niveau du nombre de photons. Ensuite, si l’on applique l’amortissement d’amplitude avec la perte d’un photon, sur le troisième vecteur de la base, par exemple, dans le premier cas le vecteur $|2\rangle$ donne $|1\rangle$, ce qui correspond au vecteur $|01\rangle$. Mais si on applique la perte d’un photon au troisième vecteur de la base dans le second cas, c’est à dire $|10\rangle$, alors on obtient $|00\rangle$, qui correspond au vecteur $|0\rangle$. Cette différence se répercute sur la mesure d’un état et donc a une forte influence sur la possible violation.

Dans le cas de l’amortissement d’amplitude, le meilleur cas pour $N = 6$ correspond au modèle de qubits, donnant un seuil en efficacité de détection à 89%, alors que pour le qudit le seuil de l’efficacité de détection est à 92% et pour les états symétriques à 97%. Les seuils de facteur de bruit diminuent ensuite lorsque que le nombre de qubits augmente, rendant ainsi l’observation de la violation plus difficile.

5.5 Résumé du Chapitre

Ce chapitre se penche sur les enjeux expérimentaux de l'observation de la contextualité. Dans un premier temps nous montrons comment notre méthode pour tester la contextualité peut être expérimentalement vérifiée. Puis, nous présentons deux approches des limitations de l'observation expérimentale de la contextualité, qui s'accordent pour dire qu'il est plus difficile d'obtenir une observation de la contextualité avec l'augmentation de la dimension.

- La première approche est basée sur l'approche ontologique de la non-contextualité présentée par Andreas Winter dans l'article [88], pour faire le lien entre sa théorie et le cas pratique présenté dans [69], en reliant les imperfections des lames séparatrices à la différence entre les mesures successives de la même observable dans des contextes différents. De plus nous avons appliqué cette analyse à une idée d'expérience inspirée de [69] pour notre famille de graphes et l'extension de KCBS.
- La seconde approche utilise la *décohérence* au travers des *opérateurs de Kraus* pour modéliser l'interaction du système avec son environnement. Nous avons déterminé les tolérances au bruit sur l'observation de la contextualité avec l'extension de l'inégalité de KCBS. Un qudit peut être réalisé de différentes manières ce qui influence sa tolérance au bruit. Nous avons vu comment la tolérance au bruit ne dépend pas seulement de la dimension du qudit mais aussi de la façon dont il est réalisé physiquement. Nous avons vu que la tolérance au bruit devient plus faible pour les graphes qui nécessitent des qudits de plus hautes dimensions.

Chapitre 6

Conclusion et Problèmes Ouverts

Ce chapitre est découpé en deux parties. Tout d'abord nous parlons des avancées scientifiques apportées par cette thèse puis nous abordons les problèmes encore ouverts et les directions de recherche à venir.

6.1 Résumé des Résultats

Dans cette thèse nous nous intéressons aux conditions réalistes de l'observation de la non-localité et de la contextualité pour les systèmes quantiques à haute dimension. Les résultats obtenus peuvent être séparés en deux grandes thématiques :

- Les effets de la décohérence et les limitations des appareils de mesures sur l'observation de la contextualité et la non-localité.
- Le développement de tests de contextualité pour toute dimension de qudit supérieure à deux et la proposition d'une méthode d'implémentation expérimentale.

Pour le premier point, dans le Chapitre 3 et une partie du Chapitre 5, nous étudions la tolérance à la décohérence de l'observation de la non-localité ou de la contextualité. Parmi les états symétriques étudiés, la majorité des états ont des seuils de fidélité moins élevés pour l'amortissement de phase. Par ailleurs dans le cas de l'état W_4 , nous montrons que le choix de la stratégie de mesure qui offre la meilleure tolérance au bruit dépend du type de décohérence. En effet, avec de l'amortissement d'amplitude il est plus judicieux de choisir la stratégie de mesure offrant la meilleure violation alors que pour l'amortissement de phase on peut trouver un meilleur choix mais la violation sera plus faible. Nous analysons la tolérance des états W avec deux inégalités de Bell différentes et nous observons des différences de comportements à l'augmentation du nombre de qubits drastique pour l'amortissement de phase, mais identique pour l'amortissement d'amplitude. De plus, en considérant une précision de mesure finie,

nous montrons que pour l'état W_4 que le un seuil de facteur de bruit en phase de 0.996 se retrouve réduit à 0.83 soit une diminution de 17% ; le seuil de facteur de bruit en amplitude passe de 0.194 à 0.186 soit une diminution de 4% environ. Dans le cas pratique du chapitre 3 où nous traitons du test de dégénérescence des états du Dicke, les résultats ne sont malheureusement pas réalisable avec les technologies d'aujourd'hui. Les niveaux de violation sont trop faibles ce qui se répercute sur les tolérances de bruits ; il est alors préférable dans ce type de situation de chercher d'autres inégalités. Enfin avec la contextualité nous montrons l'influence de trois types d'encodage d'un qudit par rapport à la tolérance à la décohérence. En prenant le qudit composé de qubits on obtient les meilleures performances mais en contrepartie la dimension du qudits doit être une puissance de deux. Pour la comparaisons entre un système unique et un qudit composé d'un état symétrique la situation est plus ambigu et dépend du type de bruit. En effet, avec un amortissement de phase un état symétrique est plus judicieux, mais avec un amortissement d'amplitude il faut choisir un un système unique. De plus, nous proposons une autre méthode qui permet une interpretation de la non-contextualité ontologique en terme des défauts expérimentaux que nous utilisons dans le cas du pentagone et d'un graphe de notre famille. Nous donnons l'erreur maximum permise sur les lames séparatrices de l'expérience que nous proposons. Le cas du graphe à six sommets est plus restrictif que le pentagone ce qui suggère qu'avec la méthode expérimentale que nous proposons il est de plus en plus difficile de tester la non-contextualité ontologique. Les niveaux de précisions des lames séparatrices qui sont nécessaires pour le pentagone ou pour le graphe à six sommets de notre famille sont acceptables. Si la tolérance diminue quand on augmente le nombre de sommet du graphe on arrivera alors à un niveau inférieur aux imprécisions actuelles.

Pour le second point, contenu principalement du Chapitre 4 et du Chapitre 5. En se basant sur une représentation graphique des relations de compatibilité et d'exclusivité entre les mesures, nous développons un test de contextualité pour toutes les dimensions de qudit supérieur à trois. Nous définissons une famille de graphes qui généralise le pentagone et pour laquelle nous donnons de manière explicite les stratégie de mesures et les états quantiques qui permettent d'observer la contextualité. Dans ce cas, la violation reste constante quand on augmente la dimension mais ces valeurs sont donc à prendre comme des bornes inférieures. Nous montrons que la représentation de Majorana, utilisé pour les états symétriques, permet aussi de visualiser les relations de compatibilité et d'exclusivité en terme de symétries entre les mesures et l'état quantique. Enfin nous proposons une méthode qui permet d'utiliser les tests développés

avec notre famille de graphes, les états quantiques et les stratégies de mesures fournis de manière expérimentale.

6.2 Problèmes Ouverts et Futures Directions.

Augmenter les seuils de tolérance aux modèles de bruit. Dans notre étude dans le Chapitre 3 nous considérons que tous les sous-systèmes quantiques sont mesurés selon la même stratégie de mesure. En considérant des mesures différentes pour chaque sous-système il serait éventuellement possible d'obtenir d'une part des violations plus élevées mais aussi des seuils de tolérance à la décohérence plus élevés. Les résultats obtenus dans le Chapitre 3 sont des bornes inférieures et permettent de donner un premier aperçu des possibilités. En ayant des meilleurs niveaux de tolérances on pourra accéder pour certains états à des niveaux de violation plus élevés en sélectionnant une stratégie de mesure adaptée au seuil de tolérance.

Analyse des comportements différents face à la décohérence entre différentes inégalités. Dans la section 3.4, nous avons vu au travers de l'exemple des états W et deux inégalités de Bell on peut obtenir des comportements différents par rapport au types de bruit considéré. Une investigation plus en détails entre ces deux inégalités ouvrirait des perspectives permettant de construire des inégalités de Bell en fonction des besoins d'une expérience pour optimiser le seuil de tolérance de bruit pour un état et un modèle de bruit donné.

Extension de KCBS sur notre famille de graphes pour tester la dimension d'un système quantique. Dès lors que l'on utilise une représentation graphique pour représenter les relations de compatibilité et d'exclusivité, on sait que la dimension du qudit doit être au moins égale à la connectivité du sous-graphe complet le plus grand. Cette limitation apparente sur la dimension du qudit peut servir de test sur la dimension d'un état quantique. Cela donne une relation entre la contextualité d'un état et sa dimension qui est un caractère intrinsèque de celui-ci.

Augmentation du niveau de violation pour l'extension de KCBS avec notre famille de graphes. Avec les mesures et les états quantiques que nous présentons pour observer la contextualité nous obtenons le même résultat que celui obtenu pour le pentagone dans les conditions du paradoxe. En effet, la violation de l'extension de KCBS est la même que celle obtenue pour le pentagone sous les conditions du paradoxe

pour tous les graphes de notre famille. On peut seulement considérer que nos résultats sont des bornes inférieures et que les preuves de contextualité avec notre famille de graphes peuvent au moins obtenir le maximum réalisable dans le cas du pentagone. On peut essayer aussi de s'intéresser aux violations en dehors des conditions du paradoxe. Le plus intéressant que l'on peut espérer est d'obtenir un gap de plus en plus grand entre la limite non-contextuelle et le quantique quand le nombre de sommets du graphe augmente.

Observation expérimentale de la contextualité avec notre famille de graphes.

Nous proposons une méthode pour observer expérimentalement la contextualité avec notre famille de graphe. Les sensibilités expérimentales requises que nous donnons permettent de réaliser cette expérience avec la technologie actuelle. Cette méthode permet d'observer à la contextualité de qudits à dimension élevée.

Bibliographie

- [1] Samson Abramsky and Adam Brandenburger. The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality. *New Journal of Physics*, 13(11) :113036, 2011. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/13/i=11/a=113036>.
- [2] A. Acin, N. Brunner, N. Gisin, S. Massar, S. Pironio, and V. Scarani. Device-independent security of quantum cryptography against collective attacks. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :230501, 2007.
- [3] Johan Ahrens, Elias Amsellem, Adan Cabello, and Mohamed Bourennane. Two fundamental experimental tests of nonclassicality with qutrits. *arXiv*, January 2013.
- [4] Grigori G Amosov, Stefano Mancini, and Vladimir I Manko. Transmitting qudits through larger quantum channels. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39(13) :3375, 2006. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/39/i=13/a=015>.
- [5] Elias Amsellem, Magnus Rådmark, Mohamed Bourennane, and Adán Cabello. State-independent quantum contextuality with single photons. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :160405, Oct 2009. doi : 10.1103/PhysRevLett.103.160405. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.160405>.
- [6] Elias Amsellem, Lars Eirik Danielsen, Antonio J. López-Tarrida, José R. Portillo, Mohamed Bourennane, and Adán Cabello. Experimental fully contextual correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :200405, May 2012. doi : 10.1103/PhysRevLett.108.200405. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.200405>.
- [7] Janet Anders and Dan E Browne. Computational power of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 102(5) :050502, 2009.
- [8] Mateus Araújo, Marco Túlio Quintino, Costantino Budroni, Marcelo Terra Cunha, and Adán Cabello. All noncontextuality inequalities for the n -cycle scenario. *Phys. Rev. A*, 88 :022118, Aug 2013. doi : 10.1103/PhysRevA.88.022118. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.022118>.
- [9] Mauricio Arias, Gustavo Cañas, Esteban S. Gómez, Johanna F. Barra, Guilherme B. Xavier, Gustavo Lima, Vincenzo D'Ambrosio, Flavio Baccari, Fabio Sciarrino, and Adán Cabello. Testing noncontextuality inequalities that are building blocks of quantum correlations. *Phys. Rev. A*, 92 :032126, Sep 2015. doi : 10.1103/PhysRevA.92.032126. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.032126>.

- [10] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm *Gedankenexperiment* : A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :91–94, Jul 1982. doi : 10.1103/PhysRevLett.49.91. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.91>.
- [11] Martin Aulbach, Damian Markham, and Mio Muraio. The maximally entangled symmetric state in terms of the geometric measure. *New Journal of Physics*, 12 (7) :073025, 2010. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=7/a=073025>.
- [12] Piotr Badziag, Ingemar Bengtsson, Adan Cabello, Helena Granstrom, and Jan-Ake Larsson. Pentagrams and paradoxes. *Foundations of Physics*, 2010. doi : 10.1007/s10701-010-9433-3. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10701-010-9433-3>.
- [13] J.-D. Bancal, N. Gisin, Y.-C. Liang, and S. Pironio. Device-independent witnesses of genuine multipartite entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :250404, 2011.
- [14] Tomer Jack Barnea, Gilles Pütz, Jonatan Bohr Brask, Nicolas Brunner, Nicolas Gisin, and Yeong-Cherng Liang. Nonlocality of w and dicke states subject to losses. *Phys. Rev. A*, 91 :032108, Mar 2015. doi : 10.1103/PhysRevA.91.032108. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.032108>.
- [15] H. Bartosik, J. Klepp, C. Schmitzer, S. Sponar, A. Cabello, H. Rauch, and Y. Hasegawa. Experimental test of quantum contextuality in neutron interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :040403, Jul 2009. doi : 10.1103/PhysRevLett.103.040403. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.040403>.
- [16] T. Bastin, S. Krins, P. Mathonet, M. Godefroid, L. Lamata, and E. Solano. Operational families of entanglement classes for symmetric n -qubit states. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :070503, 2009.
- [17] B. Bell, A. S. Clark, M. S. Tame, M. Halder, J. Fulconis, W. J. Wadsworth, and J. G. Rarity. Experimental characterization of photonic fusion using fiber sources. *New J. Phys.*, 14 :023021, 2012.
- [18] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, 1 :195, 1964.
- [19] JOHN S. BELL. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38 :447–452, Jul 1966. doi : 10.1103/RevModPhys.38.447. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.38.447>.
- [20] I. Bengtsson and K. Zyczkowski. *Geometry of Quantum States : An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2007.
- [21] Gilberto Borges, Marcos Carvalho, Pierre-Louis de Assis, José Ferraz, Mateus Araújo, Adán Cabello, Marcelo Terra Cunha, and Sebastião Pádua. Quantum contextuality in a young-type interference experiment. *Phys. Rev. A*, 89 :052106, May 2014. doi : 10.1103/PhysRevA.89.052106. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.052106>.
- [22] C. Brukner, M. Zukowski, J.-W. Pan, and A. Zeilinger. Bell's inequalities and quantum communication complexity. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :127901, 2004.

- [23] N. Brunner, J. Sharam, and T. Vertesi. Testing the structure of multipartite entanglement with bell inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :110501, 2012.
- [24] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86 :419–478, Apr 2014. doi : 10.1103/RevModPhys.86.419. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.419>.
- [25] Adán Cabello. Finite-precision measurement does not nullify the kochen-specker theorem. *Phys. Rev. A*, 65 :052101, Apr 2002. doi : 10.1103/PhysRevA.65.052101. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.052101>.
- [26] Adan Cabello, Simone Severini, and Andreas Winter. (non-)contextuality of physical theories as an axioms. *arXiv*, Oct 2010. doi : arXiv:1010.2163.
- [27] Adán Cabello, Piotr Badziag, Marcelo Terra Cunha, and Mohamed Bourennane. Simple hardy-like proof of quantum contextuality. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :180404, Oct 2013. doi : 10.1103/PhysRevLett.111.180404. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.180404>.
- [28] R. Chaves and J. B. Brask. Feasibility of loophole-free nonlocality tests with a single photon. *Phys. Rev. A*, 84 :062110, 2011.
- [29] R. Chaves, D. Cavalcanti, L. Aolita, and A. Acin. Multipartite quantum nonlocality under local decoherence. *Phys. Rev. A*, 86 :012108, 2012.
- [30] R. Chaves, A. Acin, L. Aolita, and D. Cavalcanti. Detecting nonlocality of noisy multipartite states with the chsh inequality. *Phys. Rev. A*, 89 :042106, 2014.
- [31] Rafael Chaves. Entropic inequalities as a necessary and sufficient condition to noncontextuality and locality. *Phys. Rev. A*, 87 :022102, Feb 2013. doi : 10.1103/PhysRevA.87.022102. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.022102>.
- [32] Isaac L. Chuang, Debbie W. Leung, and Yoshihisa Yamamoto. Bosonic quantum codes for amplitude damping. *Phys. Rev. A*, 56 :1114–1125, Aug 1997. doi : 10.1103/PhysRevA.56.1114. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.1114>.
- [33] B.S. Cirel’son. Quantum generalizations of bell’s inequality. *Letters in Mathematical Physics*, 4 :93, 1980.
- [34] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :880, 1969.
- [35] R. Clifton and A. Kent. Simulating quantum mechanics by non-contextual hidden variables. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 456 :2101–2114, 2001.
- [36] Vincenzo D’Ambrosio, Isabelle Herbauts, Elias Amselem, Eleonora Nagali, Mohamed Bourennane, Fabio Sciarrino, and Adán Cabello. Experimental implementation of a kochen-specker set of quantum tests. *Phys. Rev. X*, 3 :011012, Feb 2013. doi : 10.1103/PhysRevX.3.011012. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.3.011012>.

- [37] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47 :777, 1935.
- [38] M. D. Eisaman, J. Fan, A. Migdall, and S. V. Polyakov. Single-photon sources and detectors. *Rev. Sci. Instrum.*, 82 :071101, 2011.
- [39] Arthur Fine. Hidden variables, joint probability, and the bell inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 48 :291–295, Feb 1982. doi : 10.1103/PhysRevLett.48.291. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.291>.
- [40] Tobias Fritz, Anthony Leverrier, and Ana Belén Sainz. Probabilistic models on contextuality scenarios. In *Proceedings of the 10th International Workshop on Quantum Physics and Logic*, Barcelone, Spain, July 2013. doi : 10.4204/EPTCS.171.6. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00931584>.
- [41] Marissa Giustina, Marijn A. M. Versteegh, Sören Wengerowsky, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Kevin Phelan, Fabian Steinlechner, Johannes Kofler, Jan-Åke Larsson, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Morgan W. Mitchell, Jörn Beyer, Thomas Gerrits, Adriana E. Lita, Lynden K. Shalm, Sae Woo Nam, Thomas Scheidl, Rupert Ursin, Bernhard Wittmann, and Anton Zeilinger. Significant-loophole-free test of bell’s theorem with entangled photons. *Phys. Rev. Lett.*, 115 :250401, Dec 2015. doi : 10.1103/PhysRevLett.115.250401. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.250401>.
- [42] C. Godsil and G.F. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag New York, 2001.
- [43] M. Grassl, L. Kong, Z. Wei, Z.Q. Yin, and B. Zeng. Quantum error-correcting codes for qudit amplitude damping. 2015.
- [44] D.M. Greenberger, M.A. Horne, and A. Zeilinger. Going beyond bell’s theorem. *Bell’s Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, pages 69–72, 1989.
- [45] H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al kar, M. Chwalla, T. Kärber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür, and R. Blatt. Scalable multiparticle entanglement of trapped ions. *Nature*, 438 : 643, 2005.
- [46] L. Hardy. Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :1665, 1993.
- [47] L. Heaney, A. Cabello, M. F. Santos, and V. Vedral. Extreme nonlocality with one photon. *New J. Phys.*, 13 :053054, 2011.
- [48] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dreau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok, J. Ruitenberg, R. F. L. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellan, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, M. Markham, D. J. Twitchen, D. Elkouss, S. Wehner, T. H. Taminiau, and R. Hanson. Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 526 :682–686, 2015.

- [49] Karol Horodecki, Michał Horodecki, Paweł Horodecki, Ryszard Horodecki, Marcin Pawłowski, and Mohamed Bourennane. Contextuality offers device-independent security. *arXiv preprint arXiv :1006.0468*, 2010.
- [50] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81 :865–942, Jun 2009. doi : 10.1103/RevModPhys.81.865. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>.
- [51] Mark Howard, Joel Wallman, Victor Veitch, and Joseph Emerson. Contextuality supplies the /‘magic/’ for quantum computation. *Nature*, 510(7505) :351–355, 06 2014. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature13460>.
- [52] S. S. Jang, Y. W. Cheong, J. Kim, and H.-W. Lee. Robustness of multiparty nonlocality to local decoherence. *Phys. Rev. A*, 74 :062112, 2006.
- [53] Markus Jerger, Yarema Reshitnyk, Markus Oppliger, Anton Potočnik, Mintu Mondal, Andreas Wallraff, Kenneth Goodenough, Stephanie Wehner, Kristinn Juliusson, Nathan K. Langford, and Arkady Fedorov. Contextuality without non-locality in a superconducting quantum system. 2016.
- [54] A. Kent. Noncontextual hidden variables and physical measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :3755–3757, 1999.
- [55] N. Kiesel, C. Schmid, G. Tóth, E. Solano, and H. Weinfurter. Experimental observation of four-photon entangled dicke state with high fidelity. *Phys. Rev. Lett.*, 98(6) :063604, Feb 2007.
- [56] G. Kirchmair, F. Zähringer, R. Gerritsma, M. Kleinmann, O. Gühne, R. Blatt, A. Cabello, and C. F. Roos. State-independent experimental test of quantum contextuality. *Nature*, 460(7254) :494–497, July 2009.
- [57] Alexander A. Klyachko, M. Ali Can, Sinem Binicioğlu, and Alexander S. Shmumovsky. Simple test for hidden variables in spin-1 systems. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :020403, Jul 2008. doi : 10.1103/PhysRevLett.101.020403. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.020403>.
- [58] Simon Kochen and E. P. Specker. The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17 :59–87, 1967.
- [59] K. Kraus. *States, Effects, and Operations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- [60] A. Laghaout, G. Björk, and U. L. Andersen. Realistic limits on the nonlocality of an n-partite single-photon superposition. *Phys. Rev. A*, 84 :062110, 2011.
- [61] J.-A. Larsson. A kochen-specker inequality. *Europhys. Lett.*, 58(6) :799 – 805, 2002.
- [62] W. Laskowski, T. Paterek, C. Brukner, and M. Żukowski. Entanglement and communication-reducing properties of noisy n-qubit states. *Phys. Rev. A*, 81 : 042101, 2010.

- [63] Yeong-Cherng Liang, Robert W. Spekkens, and Howard M. Wiseman. Specker's parable of the overprotective seer : A road to contextuality, nonlocality and complementarity. *Physics Reports*, 506 :1 – 39, 2011. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2011.05.001>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157311001517>.
- [64] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2) :119–130, 1976. ISSN 0010-3616. doi : 10.1007/BF01608499. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01608499>.
- [65] Y. Liu, S. K. Ozdemir, A. Miranowicz, and N. Imoto. Kraus representation of a damped harmonic oscillator and its application. *Phys. Rev. A*, 70 :042308, 2004.
- [66] L. Lovasz. On the shannon capacity of a graph. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 25(1) :1–7, Jan 1979. ISSN 0018-9448. doi : 10.1109/TIT.1979.1055985.
- [67] E. Majorana. Atomi orientati in campo magnetico variabile. *Il Nuovo Cim.*, 9 : 43–50, 1932.
- [68] D. Markham. Entanglement and symmetry in permutation-symmetric states. *Phys. Rev. A*, 83 :042332, 2011.
- [69] Breno Marques, Johan Ahrens, Mohamed Nawareg, Adán Cabello, and Mohamed Bourennane. Experimental observation of hardy-like quantum contextuality. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :250403, Dec 2014. doi : 10.1103/PhysRevLett.113.250403. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.250403>.
- [70] N. David Mermin. Hidden variables and the two theorems of john bell. *Rev. Mod. Phys.*, 65 :803–815, Jul 1993. doi : 10.1103/RevModPhys.65.803. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.65.803>.
- [71] D. A. Meyer. Finite precision measurement nullifies the kochen-specker theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :3751–3754, 1999.
- [72] H. Mikami, Y. Li, K. Fukuoka, and T. Kobayashi. New high-efficiency source of a three-photon w state and its full characterization using quantum state tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :150404, 2005.
- [73] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2000.
- [74] Asher Peres. Incompatible results of quantum measurements. *Physics Letters A*, 151(3) :107 – 108, 1990. ISSN 0375-9601. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90172-K](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(90)90172-K). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019090172K>.
- [75] Itamar Pitowsky. The range of quantum probability. *j-J-MATH-PHYS*, 27(6) : 1556–1565, June 1986. ISSN 0022-2488 (print), 1089-7658 (electronic), 1527-2427. doi : <http://dx.doi.org/10.1063/1.527066>. URL http://jmp.aip.org/resource/1/jmapaq/v27/i6/p1556_s1.

- [76] S. Popescu and D. Rohrlich. Quantum nonlocality as an axiom. *Foundations of Physics*, 24 :379–385, 1994.
- [77] Sandu Popescu. Bell’s inequalities versus teleportation : What is nonlocality? *Phys. Rev. Lett.*, 72 :797–799, Feb 1994. doi : 10.1103/PhysRevLett.72.797. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.797>.
- [78] R. Ramanathan, F. Brandao, A. Grudka, K. Horodecki, M. Horodecki, and P. Horodecki. Robust device independent randomness amplification. 2013.
- [79] Robert Raussendorf. Contextuality in measurement-based quantum computation. *Phys. Rev. A*, 88(2) :022322, 2013.
- [80] Lynden K. Shalm, Evan Meyer-Scott, Bradley G. Christensen, Peter Bierhorst, Michael A. Wayne, Martin J. Stevens, Thomas Gerrits, Scott Glancy, Deny R. Hamel, Michael S. Allman, Kevin J. Coakley, Shellee D. Dyer, Carson Hodge, Adriana E. Lita, Varun B. Verma, Camilla Lambrocco, Edward Tortorici, Alan L. Migdall, Yanbao Zhang, Daniel R. Kumor, William H. Farr, Francesco Marsili, Matthew D. Shaw, Jeffrey A. Stern, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Thomas Jennewein, Morgan W. Mitchell, Paul G. Kwiat, Joshua C. Bienfang, Richard P. Mirin, Emanuel Knill, and Sae Woo Nam. Strong loophole-free test of local realism*. *Phys. Rev. Lett.*, 115 :250402, Dec 2015. doi : 10.1103/PhysRevLett.115.250402. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.250402>.
- [81] A. Shimony. Degree of entanglement. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755(1) :675–679, 1995. ISSN 1749-6632. doi : 10.1111/j.1749-6632.1995.tb39008.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1749-6632.1995.tb39008.x>.
- [82] R. W. Spekkens. Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements. *Phys. Rev. A*, 71 :052108, May 2005. doi : 10.1103/PhysRevA.71.052108. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.052108>.
- [83] Robert W Spekkens, Daniel H Buzacott, Anthony J Keehn, Ben Toner, and Geoff J Pryde. Preparation contextuality powers parity-oblivious multiplexing. *Phys. Rev. Lett.*, 102(1) :010401, 2009.
- [84] M. S. Tame, M. Paternostro, C. Hadley, S. Bose, and M. S. Kim. Decoherence-based exploration of d -dimensional one-way quantum computation : Information transfer and basic gates. *Phys. Rev. A*, 74 :042330, Oct 2006. doi : 10.1103/PhysRevA.74.042330. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.74.042330>.
- [85] Z. Wang and D. Markham. Nonlocality and entanglement for symmetric states. *Phys. Rev. A*, 87 :012104, 2013.
- [86] Zizhu Wang and Damian Markham. Nonlocality of symmetric states. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :210407, May 2012. doi : 10.1103/PhysRevLett.108.210407. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.210407>.

-
- [87] Reinhard F. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40 :4277–4281, Oct 1989. doi : 10.1103/PhysRevA.40.4277. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.4277>.
- [88] Andreas Winter. What does an experimental test of quantum contextuality prove or disprove? *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 47(42) :424031, 2014. URL <http://stacks.iop.org/1751-8121/47/i=42/a=424031>.
- [89] Sixia Yu, Qing Chen, Chengjie Zhang, C. H. Lai, and C. H. Oh. All entangled pure states violate a single bell’s inequality. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :120402, Sep 2012. doi : 10.1103/PhysRevLett.109.120402. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.120402>.
- [90] C. Zu, Y.-X. Wang, D.-L. Deng, X.-Y. Chang, K. Liu, P.-Y. Hou, H.-X. Yang, and L.-M. Duan. State-independent experimental test of quantum contextuality in an indivisible system. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :150401, Oct 2012. doi : 10.1103/PhysRevLett.109.150401. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.150401>.

