HAL
open science

Vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson

Vincent Denechaud

▶ **To cite this version:**

Vincent Denechaud. Vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson. Optique [physics.optics]. Université Paris Saclay (COmUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLO002 . tel-01802753

HAL Id: tel-01802753

https://pastel.hal.science/tel-01802753

Submitted on 29 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2018SACLO002

THESE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY

préparée à

L'INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL

ÉCOLE DOCTORALE N°572
Ondes et Matière (EDOM)

Spécialité de doctorat : Physique

par

Vincent Denechaud

Vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson avec des atomes froids : mesures de fonctions spectrales

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 13 Avril 2018

Composition du jury :

M. Pierre Pillet	Président	Laboratoire Aimé Cotton
M. Frédéric Chevy	Rapporteur	Laboratoire Kastler Brossel
Mme. Patrizia Vignolo	Rapporteur	Institut de Physique de Nice
M. Radu Chicireanu	Examinateur	Laboratoire PhLAM
M. Vincent Josse	Directeur de thèse	Institut d'Optique Graduate School
M. Dominique Delande	Invité	Laboratoire Kastler Brossel
M. Olivier Vancauwenberghe	Invité	Safran Tech

Remerciements

Ces quatre années passées à l'Institut d'Optique ont constitué pour moi une aventure incroyablement riche, si riche que j'ai toujours un peu de mal à réaliser la chance que j'ai eu d'y participer. Impossible pour moi donc de vraiment résumer tout ce que j'ai appris durant ces années (aussi bien scientifiquement que d'un point de vue personnel). Mais une chose est sûre : cette thèse n'aurait jamais été ce qu'elle a été sans toutes ces personnes qui m'ont accompagné, et que je me dois de remercier ici.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Vincent JOSSE. Lorsque je suis arrivé à l'Institut en 2014 pour mon stage de fin d'études, je ne connaissais presque rien aux atomes froids, et encore moins à la physique expérimentale ! Et pourtant, cela ne l'a pas empêché de me faire confiance et de me laisser ma chance pour continuer en thèse au sein de son équipe "Pince" par la suite. Vincent fait partie de ces gens qui ont un sens viscéral de la transmission de savoirs. Je ne le remercierais jamais assez de m'avoir donné ce goût pour la pédagogie, aussi bien par le biais des nombreuses discussions scientifiques que nous avons pu avoir, que lors des différentes préparations et répétitions de présentations orales.

Bien sûr, ce qui est présenté dans ce manuscrit n'est, de loin, pas de mon seul fait, mais résulte d'un effort commun d'arrache-pied de toute l'équipe Pince. Je voudrais vivement remercier chacun des membres de cette équipe dans laquelle j'ai pris beaucoup de plaisir à évoluer. Je pense dans un premier temps aux "très vieux" ex-thésards : Kilian MÜLLER et Jérémie RICHARD qui m'ont accueillis lorsque que je suis arrivé en 2014, et qui m'ont initié à l'art de "maniper" sur l'expérience, toujours avec générosité et pédagogie. Merci au "vieux" post-doc Valentin VOLCHKOV, qui est la personne avec laquelle j'ai peut être passé le plus de temps en salle de manip' par la suite. Je lui dois la quasi-totalité de mon savoir-faire d'expérimentateur, il n'a jamais rechigné à répondre à toutes mes questions (souvent débiles et répétitives), et ce, toujours avec une grande patience et une grande précision. Sachant que je n'avais jamais pratiqué la physique expérimentale lorsque je suis arrivé à l'Institut, j'estime avoir eu beaucoup de chance d'apprendre avec quelqu'un comme lui. Merci à Mukhtar MUSAWWADAH qui nous a rejoint par la suite en thèse, avec qui j'ai aussi beaucoup appris et pris de plaisir à échanger (mon seul regrès restera de n'avoir jamais su le convaincre que les Pokemons étaient supérieurs aux Digimons). Je lui souhaite beaucoup de courage pour la fin de sa thèse ainsi que pour la rédaction. Je reste convaincu qu'un travail de grande qualité en ressortira. Enfin, merci aux nouveaux arrivants venus rafraichir l'équipe Pince en 2017 : Baptiste LECOUTRE en thèse, et Adrien SIGNOLES en post-doc. J'ai été très impressionné par la vitesse avec laquelle ils se sont appropriés l'expérience, et je suis sûr qu'ils sauront en tirer le meilleur.

Je tiens aussi à remercier chaudement tout le groupe Optique Atomique dans lequel s'inscrit l'équipe Pince, à commencer par ses permanents : Chris WESTBROOK, David CLÉMENT, Denis BOIRON, Isabelle BOUCHOULE, Marc CHENEAU et Thomas BOURDEL. Vous rencontrer et interagir avec vous dans cette athmosphère d'entre-aide entre équipes et de bienveillance a été pour moi une véritable chance, et je suis pratiquement certain qu'un bon nombre des problémes que j'ai rencontré n'auraient pas trouvé de solution sans vos conseils et votre soutien.

Merci à Alain ASPECT de m'avoir accordé sa confiance et son soutien infaillible au cours de ces années. L'avoir côtoyer a été pour moi une occasion unique de profiter de son immense savoir scientifique et de ses expériences personnelles. Ses encouragements lors des moments difficiles et ses conseils m'ont apporté une aide inestimable pour lesquels je ne le remercierais jamais assez.

Comment évoquer le groupe Optique Atomique sans parler de ses thésards et post-docs passés et présents : Aisling, Alessandro, Almaz, Amaudric, Anaïs, Cécile (Ca.), Cécile (Cr.), Clémence, Giuseppe, Guillaume, Hugo, Julien, Lauriane, Lorenzo, Marco, Maxime (longtemps resté petit stagiaire, bientôt thésard aguerri), Maximilian, Pierre, Quentin, Raphaël, Steven et Ziyad. L'ambiance bon enfant que j'ai pu trouver auprès de vous chaque jour de labo et lors de nos différentes sorties et soirées (dont les fameuses soirées "tartiflette"!) a largement contribué au fait que je me sente bien à l'Institut.

Au delà du groupe Optique Atomique, je souhaite remercier pour leur sympathie les membres des autres groupes du laboratoire Charles Fabry que j'ai pu rencontrer. Un trés grand merci également à nos ingénieurs électroniciens Fred' MORON et André VILLING qui font un travail incroyable permettant aussi bien de maintenir en l'état que de faire évoluer et d'améliorer les appareils électroniques de notre expérience. Selon le même registre, merci à André GUILBAUD, Patrick ROTH et Jean-René RULLIER de l'atelier mécanique pour leur réactivité et leur travail de grande qualité.

Ce travail a été effectué dans le cadre d'une thèse CIFRE co-financée par le groupe Safran et la Direction Générale des Armées. Je remercie Olivier VANCAUWENBERGHE et Phillipe DEJEAN du groupe Safran pour m'avoir fait confiance. Sans leur intérêt et leur soutien régulier, je n'aurais jamais eu l'opportunité de vivre cette aventure. Le travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit aussi dans le cadre d'une collaboration entre notre équipe et Dominique DELANDE et Michaël PASEK du Laboratoire Kastler Brossel. Un grand merci à eux deux pour leurs qualités humaines et scientifiques, qui ont permis de rendre chaque réunion à la fois instructive et sympathique.

La thèse aura été aussi pour moi une occasion de m'essayer à l'enseignement par le biais de l'encadrement de travaux dirigés à l'Institut d'Optique. Merci à Denis BOIRON de m'avoir fait confiance et de m'avoir laissé l'opportunité de vivre cette expérience que j'ai beaucoup apprécié, et à laquelle j'attache une valeur personnelle toute particulière. Merci aussi aux différents responsables de cours qui m'ont encadré lors de la préparation des séances de TD : Jean-Jacques GREFFET et François MARQUIER (Électromagnétisme), François GOUDAIL et Matthieu BOFFETY (Mathématiques et Traitement du Signal), Gaëlle LUCAS-LECLIN (Physique des semi-conducteurs) et Rosa TUALLE-BROURI (Mécanique Quantique).

Tout au long de ces quatre années, de très nombreuses personnes m'ont aussi entouré en dehors du labo, à commencer par les membres des différentes colocations : Alice pour la coloc' parisienne originale, puis Adrien, Antoine, Cécile et Morgane pour la coloc' massicoise. Merci à vous de m'avoir supporté (dans les deux sens du terme...) au quotidien et pour tous les bons moments passés ensemble. Un énorme merci au duo de qualité Valentin et Mathieu ちんちんpour les soirées vapeur régulières qui ont été absolument vitales pour moi. Merci à la bande savoyarde, ma famille de cœur, quel plaisir de vous savoir avec moi depuis plus de 10 ans maintenant! Merci à mes parents et mes grands-parents, que j'aime, qui m'ont élevé et m'ont toujours tout donné. Merci à mes frères Adrien et Côme, et ma sœur Anna, pour lesquels je suis très fier.

Enfin, merci Anaïs pour ton soutien et tout le bonheur que tu m'apportes au quotidien. J'espère continuer à faire route commune et partager de nouvelles aventures avec toi. :)

Table des matières

1 Introduction **9**
1.1 Atomes froids et localisation . . . 10
1.2 Déroulement de la thèse . . . 11
1.3 Plan du manuscrit . . . 12

2 Transport quantique en milieu désordonné **13**
2.1 Diffusion pour les systèmes mésoscopiques . . . 13
2.1.1 Diffusion à une impureté : la formule de Landauer . . . 15
2.1.2 Diffusion à multiples impuretés . . . 16
2.2 Théorie microscopique du transport . . . 18
2.2.1 Paramètres microscopiques de transport . . . 18
2.2.2 Désordre et interférences : localisation faible . . . 21
2.2.3 Localisation d'Anderson . . . 26
2.3 Théorie d'échelle de la transition d'Anderson . . . 30
2.3.1 Critère phénoménologique de transition de phase . . . 30
2.3.2 Lois d'échelle de la conductance . . . 33
2.3.3 Synthèse . . . 36
2.4 Expériences sur la localisation d'Anderson . . . 38
2.4.1 Localisation des électrons . . . 38
2.4.2 Localisation des ondes classiques . . . 38
2.4.3 Localisation des atomes froids . . . 40

3 Préparation d'une source d'onde de matière cohérente **45**
3.1 Quelques propriétés des condensats de Bose-Einstein . . . 45
3.1.1 Statistique de Bose-Einstein et condensation . . . 45
3.1.2 Équation de Gross-Pitaevskii . . . 49
3.1.3 Régime de Thomas-Fermi . . . 52
3.2 Manipulation d'atomes par champs électromagnétiques . . . 55
3.2.1 Quelques propriétés atomiques du ^{87}Rb . . . 55
3.2.2 Refroidissement Doppler et potentiel dipolaire . . . 56
3.2.3 Potentiel magnétique . . . 60
3.2.4 Couplage radio-fréquence de niveaux atomiques . . . 62
3.3 Description d'un cycle expérimental . . . 64
3.3.1 Vue d'ensemble du dispositif expérimental . . . 64
3.3.2 Ralentisseur Zeeman et piège magnéto-optique . . . 66
3.3.3 Évaporation RF dans un piège magnétique . . . 69
3.3.4 Transport du nuage dans une pince optique . . . 72
3.3.5 Condensation dans la seconde cellule . . . 73
3.3.6 Techniques d'imagerie . . . 77
3.3.7 Quelques caractéristiques du nuage final . . . 79

4 Propriétés statistiques d'une figure de *speckle* **81**
4.1 Définition et propriétés d'un *speckle* . . . 81
4.1.1 Propriétés du diffuseur . . . 82
4.1.2 Propriétés statistiques en intensité . . . 84
4.1.3 Propriétés statistiques spatiales . . . 86
4.1.4 Distance de Rayleigh de la figure de *speckle* . . . 90
4.2 Implémentation . . . 90
4.2.1 Montage expérimental . . . 91
4.2.2 Caractérisation du *speckle* au niveau des atomes . . . 93
4.3 Propriétés du potentiel désordonné associé au *speckle* . . . 96

5 Transport d'atomes froids dans un *speckle* **99**
5.1 Paramètres microscopiques de transport dans un *speckle* . . . 99
5.1.1 Dynamique de diffusion anisotrope dans une figure de *speckle* . . . 99
5.1.2 Temps de diffusion élastique pour un *speckle* 2D . . . 102
5.1.3 Échelles pertinentes en énergie . . . 104
5.1.4 Régimes de localisation dans un désordre corrélé . . . 107
5.2 Étude de la transition d'Anderson par expansion de nuages ultra-froids dans un *speckle* . . . 110
5.2.1 L'expérience d'Urbana-Champaign . . . 110
5.2.2 L'expérience de Palaiseau . . . 113
5.2.3 L'expérience de Florence . . . 116
5.2.4 Synthèse . . . 120
5.2.5 Le besoin d'une méthode spectroscopique . . . 121

6 Caractérisation des excitations d'un système : la fonction spectrale **123**
6.1 Illustrations par un exemple simple : l'oscillateur amorti . . . 123
6.1.1 Spectre d'excitation et fonction spectrale . . . 123
6.1.2 Comparaison avec l'oscillateur non-amorti : la *self-energy* . . . 126
6.2 La fonction spectrale pour un système quantique . . . 128
6.2.1 Définition de la fonction de Green pour un système quantique . . . 128
6.2.2 Définitions et propriétés de la fonction spectrale . . . 129
6.2.3 Interprétations . . . 130
6.2.4 Fonction spectrale d'un système à N-corps . . . 131
6.3 Expériences de mesures de fonctions spectrales . . . 133
6.3.1 En physique des solides : la méthode ARPES . . . 134
6.3.2 En optique atomique : la spectroscopie RF . . . 136
6.4 Fonction spectrale pour une particule dans un *speckle* . . . 138
6.4.1 Désordre perturbatif et approximation de Born . . . 139
6.4.2 Désordre classique . . . 140
6.4.3 Vers une spectroscopie des états d'énergie dans un *speckle* . . . 142

7 Mesure de fonctions spectrales dans un désordre de type *speckle* **145**
7.1 Réalisation d'un désordre sélectif en état de spin . . . 145
7.2 Choix de la transition hyperfine et lévitation . . . 147
7.3 Couplage entre états de spin hyperfins . . . 149
7.3.1 Transition à deux photons . . . 150
7.3.2 Dispositif de génération de fréquences . . . 151
7.3.3 Caractéristiques de la spectroscopie . . . 151
7.3.4 Ajustement du biais magnétique "magique" $B_0 \sim 3.23\,\mathrm{G}$ . . . 155
7.3.5 Effet des interactions inter-atomiques . . . 156

7.4 Calibration photométrique de l'amplitude du désordre 158
7.4.1 Potentiel dipolaire pour un atome à plusieurs transitions 158
7.4.2 Calibration des désaccords laser symétriques en amplitude de désordre 159
7.4.3 Calibration photométrique de l'amplitude du désordre 161
7.5 Modélisation du couplage entre le condensat et le potentiel désordonné . . . 162
7.5.1 L'outil de base : la règle d'or de Fermi 163
7.5.2 Lien avec la fonction spectrale : les effets de moyennage 165
7.5.3 Méthodes numériques 166
7.6 Mesures de fonctions spectrales 167
7.6.1 Condition de couplage faible 168
7.6.2 Calibration fine de l'amplitude du désordre 168
7.6.3 Vue d'ensemble des mesures 171
7.6.4 Régime de désordre quantique 174
7.6.5 Régime de désordre classique 174
7.6.6 Influence du désordre résiduel sur l'état du condensat 178

8 Conclusion et perspectives 181
8.1 Vers une spectroscopie de la transition d'Anderson ? 181
8.1.1 Limitations du montage actuel 182
8.1.2 Dépasser ces limitations : un *speckle* bichromatique ? 184
8.2 Explorer d'autres signatures de la localisation d'Anderson 186
8.2.1 Multi-fractalité de la fonction d'onde dans le régime critique 186
8.2.2 Signatures dans l'espace des impulsions 188

A Étude du point fixe de la théorie d'échelle de la localisation d'Anderson 193

B Calcul du potentiel dipolaire pour le ^{87}Rb 197
B.1 Polarisabilité et potentiel dipolaire pour un atome à plusieurs transitions . . . 197
B.2 Limite des grands désaccords 199
B.3 Longueur d'onde magique et potentiel sélectif en état interne 200

C Définition de l'énergie de corrélation anisotrope 201

D Calcul de la transformée de Fourier de la fonction de Green 203

E Constantes fondamentales 205

Bibliographie 209

Chapitre 1

Introduction

La propagation d'ondes en milieu aléatoire est une thématique transverse à de nombreuses branches de la physique. Un exemple quotidien est celui de la diffusion de la lumière du soleil dans les nuages. Si les nuages nous apparaissent blancs et opaques, c'est parce que la lumière du jour qui les traversent rebondit sur les gouttelettes d'eau qui les composent en suivant un chemin sinueux.

Un autre exemple est celui des électrons dans les conducteurs électriques. La conduction d'un courant dans un métal peut se comprendre comme le déplacement d'électrons au sein d'un arrangement spatialement périodique (un cristal) d'atomes qui composent le métal. Au même titre que toutes les autres particules élémentaires, la dynamique d'un électron est dictée par la mécanique quantique, qui lui confère donc un comportement ondulatoire. Les exemples de matériaux conducteurs "propres", c'est à dire composés d'un unique monocristal sans imperfection, restent rares. Dans la plupart des situations, un électron se propageant dans un conducteur pourra rencontrer sur son chemin différents types de défauts (impuretés, joints de grain , etc) qui pourront perturber sa course pour la rendre erratique.

D'une manière générale, la façon qui paraît la plus naturelle et intuitive de conceptualiser la propagation d'une onde dans un milieu aléatoire est celle de la *marche aléatoire* : la direction de propagation de l'onde est changée aléatoirement tout le long de sa propagation jusqu'à que celle-ci ne soit éventuellement plus corrélée avec la direction initiale. Une conséquence usuelle de cette marche aléatoire est le phénomène de *diffusion* de l'onde dans le milieu, qui tend à rendre le déplacement de l'onde dans le milieu moins rapide. Plus précisément, pour une particule se déplaçant d'une manière ballistique (i.e. sans collision ni désordre) la distance x que celle-ci peut parcourir en un temps t est donnée par sa vitesse c, de sorte que :

$$x = ct\,. \tag{1.1}$$

En présence d'un milieu aléatoire, en revanche, la diffusion prévoit que cette distance x évolue comme la racine carrée de la durée t, de sorte que :

$$x = \sqrt{Dt}\,, \tag{1.2}$$

où D est le *coefficient de diffusion*. La diffusion décrit donc *a priori* une dynamique beaucoup plus lente qu'une propagation ballistique.

En 1958, la physicien P.W. Anderson s'est intéressé au phénomène de diffusion des électrons dans les solides. Dans son article "*Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*" [10], il a montré que sous certaines conditions, la diffusion des électrons dans un milieu aléatoire pouvait être stoppée, c'est à dire associée à un coefficient de diffusion $D = 0$. Cet arrêt de la propagation des électrons impliquait donc que les électrons soient piégés, ou bien "localisés", autour de certains points du milieu, et ce spontanément sans aucune intervention extérieure. Cet effet surprenant, ainsi baptisé "localisation d'Anderson", a depuis été très extensivement étudié, aussi bien théoriquement qu'expérimentalement. [1]

1.1 Atomes froids et localisation

Les méthodes de refroidissement laser d'échantillons atomiques ont permis pour la première fois en 1995 [9] de produire expérimentalement un condensat de Bose-Einstein, c'est à dire, un état de la matière pour lequel toutes les particules le composant occupent un même et unique état quantique. Les propriétés de cohérence (c'est à dire, la capacité à produire des interférences en temps qu'onde) de cet état font de lui une source d'ondes quantiques intéressante pour étudier la localisation d'Anderson. En effet, les systèmes d'atomes froids offrent un contrôle précis et inédit des paramètres microscopiques [22], ce qui est rendu possible à l'aide de différents outils de l'interaction matière-rayonnement :

- ⋆ Les potentiels soumis aux atomes peuvent être entièrement contrôlés pour produire différentes configurations : particules dans un potentiel périodique (réseau), dans un piège, et même dans un potentiel désordonné [46].

- ⋆ Les interactions entre particules peuvent être contrôlées (i.e. tel qu'elles soient attractives, répulsives, ou supprimées) à l'aide d'une résonance de Feshbach [176].

- ⋆ Les fonctions d'onde associées aux nuages d'atomes condensés sont *macroscopiques* (typiquement d'une centaine de μm) et peuvent donc être directement imagées (par fluorescence des atomes par exemple) avec une grande résolution [126].

Parmi tous les systèmes qui ont visé l'étude de la localisation d'Anderson, les systèmes d'atomes ultra-froids ont bénéficié d'une position particulière. Notre équipe a été l'une des premières à pouvoir observer *directement* la localisation d'Anderson d'atomes froids, d'abord pour le cas d'un système unidimensionnel en 2008 [20], puis pour un système tridimensionnel en 2012 [92]. Comme nous le verrons au cours de ce manuscrit, la dimension d'un système modifie profondément ses propriétés de localisation. Plus particulièrement, pour le cas des systèmes désordonnés à trois dimensions, on verra qu'il existe une *transition de phase quantique* entre des états pour lesquels une onde est localisée, et des états pour lesquels l'onde peut diffuser au travers du milieu désordonné. Déterminer les caractéristiques de cette *transition d'Anderson* est un problème ardu que les différents outils théoriques peinent à aborder avec exactitude.

Le haut degré de précision sur les paramètres microscopiques offert par les expériences d'atomes ultra-froids en font des candidats de choix pour une étude contrôlée de cette transition, avec des résultats expérimentaux pouvant être comparés *quantitativement* avec des calculs théoriques ou numériques adaptés.

1. A titre de référence, Google Scholar répertorie plus de 11000 citations de la référence originale [10].

1.2 Déroulement de la thèse

Lorsque je suis arrivé à l'Institut d'Optique en 2014 dans le cadre de mon stage de master, l'équipe s'intéressait aux liens entretenus entre localisation et symétrie par renversement du temps du système étudié. En mesurant les signatures de la localisation sur la distribution en impulsion d'atomes s'étant propagés dans un potentiel aléatoire, ces études ont montré qu'il était possible de supprimer d'une manière contrôlée les effets de localisation à l'aide d'un champ magnétique pulsé. Ces travaux font l'objet principale de la thèse de Kilian Müller [121] et ont été publiés [122] en 2015. Nous n'aborderons pas le contenu ces résultats dans ce manuscrit.

Par la suite, entre fin 2014 et début 2015, l'équipe s'est concentrée sur la mesure de temps élastiques de diffusion, toujours sur la base de mesures de distribution en impulsion. Pour ce faire, il a fallu caractériser et implémenter sur le montage expérimental un nouveau type de potentiel aléatoire. En parallèle de cette expérience, des simulations numériques réalisées par Lih-King Lim sous la direction de Laurent Sanchez-Palencia du Centre de Physique Théorique (Polytechnique), ont permis de comparer avec succès les mesures avec le régime de diffusion de l'approximation de Born. Un article résumant ce travail est en cours de rédaction, les travaux expérimentaux relatifs à cette étude font l'objet principal de la thèse de Jérémie Richard [141].

Après ces études des phénomènes de localisation dans l'espace des impulsions, l'équipe a voulu se diriger vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson. Toute la période s'étalant de 2015 à début 2016 a été nécessaire pour implémenter les éléments nécessaires à cette expérience comme la spectroscopie à deux photons ou encore un montage de génération du désordre stable. Dans un premier temps, le but était de faire une preuve de principe du bon fonctionnement de la spectroscopie en montrant que cette dernière était capable de mesurer la *fonction spectrale* d'atomes placés dans un potentiel désordonné (nous reviendrons longuement sur cette notion tout au long de ce manuscrit).

A partir du moment où l'expérience a commencé à donner ses premières mesures de fonctions spectrales, il a eu un travail collaboratif très étroit entre notre équipe et une équipe de théorie du Laboratoire Kastler Brossel (Jussieu) composée de Michael Pasek et Dominique Delande. La comparaison active de nos mesures avec leurs simulations numériques a réellement permis à notre équipe de converger vers une configuration expérimentale très bien calibrée, pour laquelle la spectroscopie permettait une mesure directe de fonctions spectrales en excellent accord avec les calculs numériques. Le fruit de cette collaboration a été publié dans un article [174], et fait l'objet principale du contenu de cette thèse.

1.3 Plan du manuscrit

Ce manuscrit se découpe de la manière suivante :

- ⋆ **Chapitre 2** : Dans un premier temps, nous effectuerons un rappel des propriétés de localisation des ondes dans un milieu désordonné. Après une courte illustration du phénomène de localisation d'Anderson dans le cas de conducteurs mésoscopiques, nous introduirons quelques notions sur la théorie auto-consistante et la théorie d'échelle de la localisation d'Anderson. Plus particulièrement, nous verrons que ces formalismes prédisent l'existence d'une transition de phase séparant des états localisés et diffusifs pour un système à trois dimensions. Nous terminerons ce chapitre par un rapide état de l'art des expériences réalisées sur la localisation d'Anderson, avec un accent particulier sur celles s'intéressant à la transition.

- ⋆ **Chapitre 3** : Nous ferons ensuite un rappel des propriétés particulières des condensats de Bose-Einstein et des phénomènes d'interaction matière-rayonnement pertinents pour notre expérience. S'en suivra une présentation générale du fonctionnement du montage permettant de générer des nuages d'atomes condensés.

- ⋆ **Chapitre 4** : Ensuite, un chapitre sera dédié à la manière dont le potentiel désordonné des atomes est généré. Nous verrons qu'il s'agit d'une figure de *speckle* (ou tavelures optiques), dont les propriétés peuvent être entièrement déterminées par les lois de l'optique. Les résultats de la caractérisation de ce potentiel désordonné seront résumés en fin de chapitre.

- ⋆ **Chapitre 5** : Ce chapitre sera l'occasion de revoir les concepts généraux abordés lors du chapitre 2 et de les appliquer dans le cadre particulier de la propagation d'atomes froids dans un potentiel de type *speckle*. Nous ferons un état de l'art des expériences sur la transition d'Anderson avec des atomes froids. Nous verrons que toutes ces expériences ont été jusqu'à présent limitées par leur manque de contrôle de l'énergie des états occupés par les atomes dans le désordre. Nous verrons aussi que ces expériences ne pouvaient pas déduire les propriétés de la transition des mesures sans connaître une quantité appelée *fonction spectrale*. Tout ceci motivera alors la mise en place d'une méthode spectroscopique nécessaire pour contourner ces difficultés.

- ⋆ **Chapitre 6** : Ce chapitre s'attardera en détail sur la notion de fonction spectrale et sur le lien que cette quantité entretient avec le spectre des excitations d'un système. Après une définition générale de la fonction spectrale pour les systèmes quantiques, nous verrons qu'il existe plusieurs techniques expérimentales permettant sa mesure directe, dont certaines adaptées pour les systèmes d'atomes froids. Ce faisant, les propriétés de la fonction spectrale pour des atomes dans un potentiel de type *speckle* seront déterminées dans différents régimes.

- ⋆ **Chapitre 7** : Ce dernier chapitre fera une présentation détaillée du protocole expérimental de la méthode spectroscopique implémentée sur l'expérience. Après une justification complète du choix des paramètres expérimentaux, suivi d'une présentation des méthodes de calibration, les résultats de la spectroscopie seront présentées. L'accord excellent des mesures avec les simulations fera office de preuve de principe que la méthode de spectroscopie implémentée permet effectivement un contrôle de l'énergie des atomes dans le désordre, ainsi qu'une mesure directe de la fonction spectrale.

Chapitre 2

Transport quantique en milieu désordonné

Ce chapitre a pour but de rappeler quelques éléments de compréhension des phénomènes de propagation d'onde dans les milieux désordonnés. Le problème de la diffusion dans les systèmes mésoscopiques nous servira d'entrée en matière pour illustrer l'influence du comportement ondulatoire sur les propriétés de transport des matériaux. Ensuite, on s'attachera à rappeler quelques éléments théoriques permettant d'introduire les paramètres microscopiques du problème et leurs liens avec les phénomènes de localisation. Par la suite, on verra comment ces mêmes paramètres microscopiques permettent de définir les échelles d'énergie pertinentes soutenant l'existence d'une transition de phase entre des états d'énergie localisés et diffusifs. Enfin, on fera un bref (et non-exhaustif) état de l'art des résultats expérimentaux obtenus sur ces thématiques.

2.1 Diffusion pour les systèmes mésoscopiques

On sait, au moins empiriquement depuis les travaux pionniers d'Ohm (XIXe siècle), que la résistance électrique R d'un échantillon *macroscopique* de matériau conducteur croît *linéairement* avec sa longueur L :

$$R = \frac{\rho L}{S}\,, \tag{2.1}$$

où S est la section de l'échantillon, et ρ la *résistivité* du matériau. Le point important ici est donc que la résistance R est une propriété extrinsèque de l'échantillon, qui dépend des différentes dimensions de l'échantillon. Au contraire, la résistivité ρ est une propriété intrinsèque caractéristique du matériau composant l'échantillon.

Drude (début du XXe siècle) a été le premier à essayer d'expliquer et de quantifier la résistivité des matériaux à partir de mécanismes microscopiques. Sur la base d'arguments fondés sur la physique classique, Drude a montré que la résistivité finie des matériaux pouvait s'expliquer par la propagation d'électrons dont l'impulsion est perturbée par des évènements de collision. Plus particulièrement, il a montré que :

$$\rho = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau}\,, \tag{2.2}$$

où m_e est la masse d'un électron, n_e la densité d'électrons, e la charge élémentaire, et τ le *temps de relaxation*, c'est à dire le durée typique avec laquelle un électron peut se propager ballistiquement dans le solide avant de subir un évènement de collision.

La grande force du modèle de Drude (2.2) est qu'il permet de comprendre au moins qualitativement la réponse d'un conducteur à un champ électrique sans pour autant donner de description précise du mécanisme microscopique responsable de la relaxation des électrons. Mais avec la mise en évidence de phénomènes de conduction singuliers tels que la supra-conductivité ou le comportement semi-conducteur, il est assez rapidement apparu nécessaire de comprendre la nature précise des évènements microscopiques de relaxation des électrons, notamment afin de pouvoir déterminer le temps τ.

Il est courant d'opposer la mécanique quantique (qui permet de décrire les phénomènes microscopiques) à la physique classique (qui permet de décrire les phénomènes à l'échelle macroscopique). Mais alors comment expliquer que certains conducteurs d'une taille *macroscopique* L répondent d'un comportement inexplicable avec les outils de la physique classique ? L'identification des mécanismes responsables de cette dichotomie (s'il y en a une) entre mécanique classique et mécanique quantique reste une question encore ouverte à ce jour [189]. Néanmoins, la *physique mésoscopique* a déjà permis d'apporter quelques éléments de réponse.

Par définition, la *physique mésoscopique* tient à décrire les propriétés des solides dont la taille typique L est inférieure à la *longueur de cohérence* L_ϕ des électrons dans les matériaux. Cette longueur L_ϕ caractérise la distance sur laquelle peut se propager un électron avant perdre sa cohérence en phase (et donc sa capacité à produire des interférences) en tant qu'onde quantique. [1] Cette perte de cohérence en phase, ou "*décohérence*", est issue de la présence de phénomènes irréversibles d'interaction de l'électron avec son environnement (interaction électron-phonon, électron-électron, couplage au spin, etc).

Il faut insister ici sur le fait que seuls des processus irréversibles, c'est à dire inélastiques (où l'énergie de l'électron n'est pas conservée au cours du processus), mènent à une décohérence des électrons. Plus particulièrement, il a été montré que le désordre, qui est fortement présent dans tous les solides sous forme d'impuretés statiques brisant la périodicité du réseau cristallin, ne détruit pas la cohérence en phase des électrons. Ceci a été mis en évidence expérimentalement dans les années 80 par des expériences comme celle de Sharvin & Sharvin [156] et de Webb [179]. La phase des électrons se propageant dans des circuits mésoscopiques désordonnés a pu être mesurée par effet Aharonov-Bohm sur la base de mesures de magnétorésistance. Si l'on s'intéresse donc à la propagation d'électrons dans un conducteur mésoscopique désordonné, ces expériences suggèrent que la longueur de cohérence L_ϕ n'est pas égale au *libre parcours moyen* l_s, c'est à dire la longueur moyenne sur laquelle peut se propager un électron avant de subir un évènement de collision avec une impureté statique du désordre.

Une question légitime serait alors : qu'advient-il de la résistance d'un échantillon mésoscopique dont la taille typique $L < L_\phi$ serait du même ordre de grandeur, voire inférieure, à l_s ? Serait-il possible de déterminer la résistance associée à la présence d'une seule impureté statique ? Et si oui, est-il possible de retrouver la loi d'Ohm 2.1 en augmentant progressivement le nombre d'impuretés diffusantes ?

1. Cette longueur de cohérence porte donc exactement le même sens que la longueur de cohérence d'une source telle que définit en optique, soit $L_\phi \propto \lambda^2/\delta\lambda$, où λ est la longueur d'onde centrale de la source, et $\delta\lambda$ est sa largeur spectrale.

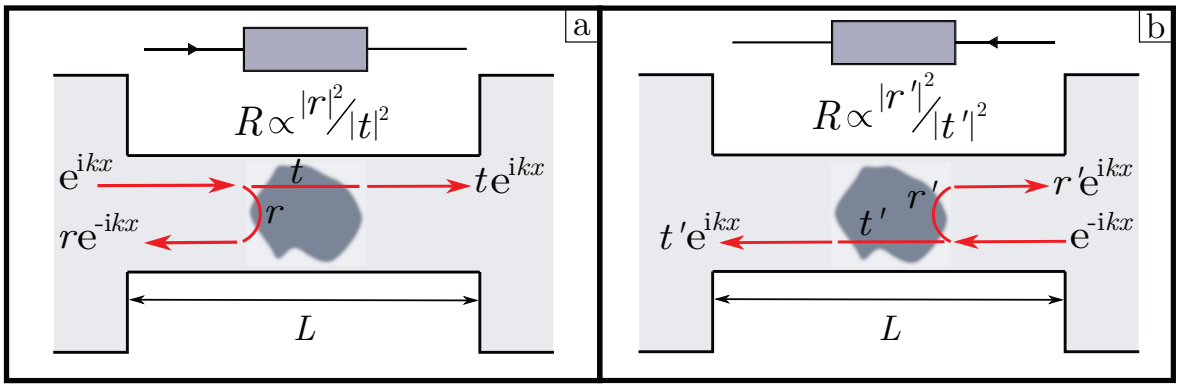

FIGURE 2.1 – **Propagation d'ondes électroniques dans un canal mésoscopique. a.** Canal de longueur L ne comportant qu'une seule impureté. La résistance adimensionnée (2.5) associée est donnée par le rapport entre la réflexion $\mathcal{R}$ et la transmission $\mathcal{T}$ de l'impureté, et est *indépendante* de L. **b.** Symétrique par renversement du temps de la situation a. La résistance du canal doit en rester inchangée.

2.1.1 Diffusion à une impureté : la formule de Landauer

Ce sont ces problématiques qui ont motivé les travaux de Landauer, qui s'intéressait aux conséquences des effets quantiques comme l'effet tunnel sur la résistance, et notamment sur les canaux unidimensionnels désordonnés [102]. La discussion qui suit reprend dans les grandes lignes celle exposée en référence [160].

On s'intéresse donc à un canal mésoscopique unidimensionnel de taille L ne comportant qu'une seule impureté diffusante, représenté en figure 2.1 a. On considère une fonction d'onde plane électronique incidente $\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ se propageant selon les x croissants (avec un nombre d'onde k). L'impureté va alors réfléchir et transmettre une partie de cette onde que l'on peut exprimer selon une partie diffusée ψ_G à gauche et ψ_D à droite de l'impureté telles que :

$$\begin{cases} \psi_G = \frac{1}{\sqrt{L}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}) \\ \psi_D = \frac{1}{\sqrt{L}}\,t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \end{cases}, \tag{2.3}$$

où r et t définissent respectivement les coefficients de réflexion et transmission *en amplitude* de l'onde électronique. Bien sûr, les électrons se propageant dans le canal ne peuvent, *en probabilité*, qu'être transmis ou réfléchis. Cela implique donc que :

$$|r|^2 + |t|^2 = 1\,, \tag{2.4}$$

où les quantités $\mathcal{R} = |r|^2$ et $\mathcal{T} = |t|^2$ désignent respectivement les coefficient de réflexion et transmission *en probabilité*. En calculant les densités de courant de probabilité associées à ψ_G et ψ_D, on peut alors montrer [54, 160] que la résistance R du canal est donnée par la formule de Landauer :

$$R = \frac{h}{e^2}\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}}\,, \tag{2.5}$$

où $h/e^2 \approx 25.8\ \mathrm{k}\Omega$ est le *quantum de résistance*.

Une propriété fondamentale de la propagation électronique est *sa symétrie par reversement du temps*, qui se caractérise par le fait que si une fonction d'onde est solution de l'équation de Schrödinger, alors son complexe conjugué l'est aussi. Cette situation est représentée en figure 2.1 b., où r' et t' désignent les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour une onde incidente $\propto e^{-\mathrm{i}kx}$ se propageant selon les x décroissants.

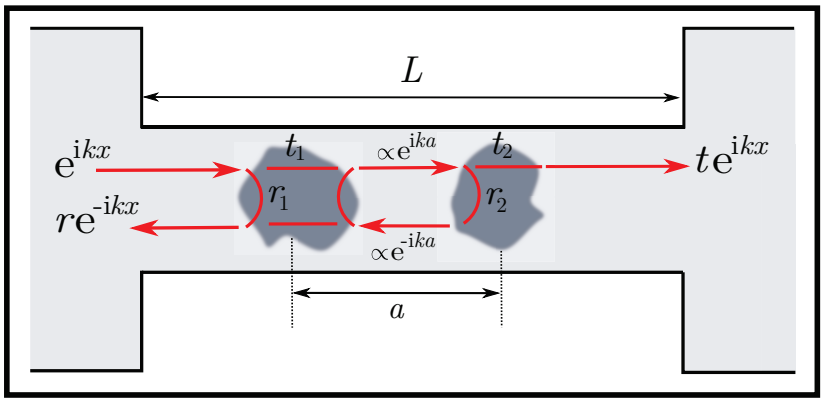

FIGURE 2.2 – **Canal à deux impuretés.** Les impuretés sont séparées d'une distance a aléatoire. Les interférences entre processus à réflexions multiples ayant lieu entre les deux impuretés aboutissent à la non-linéarité de la résistance en fonction du nombre d'impuretés.

Cette symétrie par renversement du temps implique que la résistance du canal ne dépend pas du sens du courant la parcourant, autrement dit que :

$$\mathcal{R}' = |r'|^2 = \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}' = |t'|^2 = \mathcal{T}\,. \tag{2.6}$$

2.1.2 Diffusion à multiples impuretés

La formule de Landauer (2.5) établit le fait que la résistance d'un canal unidimensionnel de taille mésoscopique L contenant une seule impureté diffusante ne dépend que du ratio des probabilités de réflexion et transmission $\mathcal{R}/\mathcal{T}$ de l'impureté. En particulier, il faut noter que cette résistance *ne dépend pas de la longueur L du canal*. L'approche suivante va donc consister à voir s'il est possible de retrouver une dépendance en L de la résistance du canal lorsque des impuretés diffusantes supplémentaires *disposées aléatoirement le long du canal* sont ajoutées.

Résistance d'un canal mésoscopique à deux impuretés

On considère un canal mésoscopique de taille L comportant deux impuretés en série séparées d'une distance a, comme représenté en figure 2.2. Chaque impureté est caractérisée par ses coefficients de réflexion et transmission en amplitude r_i et t_i. On peut calculer l'amplitude totale t de l'onde transmise au travers des deux impuretés en sommant toutes les amplitudes d'onde ayant subi une, deux, trois, etc réflexions multiples entre les deux impuretés :

$$\begin{aligned} t &= t_1 t_2 + t_1 \left(r_2\, e^{2ika}\, r_1'\right) t_2 + t_1 \left(r_2\, e^{2ika}\, r_1'\right)^2 t_2 + \cdots \\ &= t_1 t_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(r_2\, e^{2ika}\, r_1'\right)^n \\ &= \frac{t_1 t_2}{1 - r_1' r_2 e^{2ika}}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

On peut alors en déduire le ratio réflexion/transmission total $\mathcal{R}/\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} &= \frac{|r|^2}{|t|^2} = \frac{1}{|t|^2} - 1 \\ &= \frac{\left|1 - r_1' r_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka}\right|^2}{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2} \quad \text{d'après (2.7).} \\ &= \frac{1 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 - 2\sqrt{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}\cos(2ka)}{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2} \\ &= \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2\sqrt{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}\cos(2ka)}{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2}\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

où les calculs ont été simplifiés en utilisant conjointement la conservation (2.4) et la symétrie par renversement du temps (2.6).

S'il on s'intéresse à des propriétés de transport *universelles* au sens où le résultat attendu ne doit pas dépendre de l'échantillon spécifiquement utilisé, la grandeur d'intérêt est en fait $\overline{\mathcal{R}/\mathcal{T}}$ où $\overline{\cdot}$ désigne la moyenne sur les réalisation du désordre, portant ici sur l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire a.

Dans ce cas, s'il on se place dans une configuration où $ka \gg 2\pi$ (c'est à dire que la phase ka peut être considérée comme uniformément réparti sur $[0, 2\pi]$), alors $\overline{\cos(2ka)} = 0$ et :

$$\overline{\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}}\right)} = \frac{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2} = \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{T}_1} + \frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{T}_2} + 2\frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{T}_1}\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{T}_2}\,. \tag{2.9}$$

Par la formule de Landauer (2.5), en multipliant l'expression (2.9) par h/e^2, on obtient la résistance totale associée du canal :

$$R^{(2)} = \frac{h}{e^2}\overline{\left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}}\right)} = R_1 + R_2 + \frac{2e^2}{h}R_1R_2\,. \tag{2.10}$$

où $R_{1,2}$ désignent les résistances associées à chaque impureté. L'équation (2.10) montre donc que la résistance $R^{(2)}$ du canal comportant deux impuretés en série n'est pas simplement donnée par $R_1 + R_2$, comme attendu classiquement. [2] Le terme non-linéaire en R_1R_2 est une conséquence directe du fait que le coefficient de transmission total t résulte de l'interférence de tous les processus à réflexions multiples ayant lieu entre les deux impuretés. De plus, ce terme illustre le fait que, *même après un moyennage* sur les différentes réalisations du désordre annulant les déphasages $\propto \cos(2ka)$, des effets à diffusions multiples subsistent.

Résistance d'un canal mésoscopique dense en impuretés

On considère maintenant un canal mésoscopique de taille L avec une densité linéique d'impuretés associée à une résistance par unité de longueur ϱ. Le but est de calculer la résistance totale $R(L)$ du canal. Supposons que l'on allonge la longueur du canal par une quantité infinitésimale $\mathrm{d}L$. Par (2.10), la variation de résistance $\mathrm{d}R$ du canal associée s'exprime comme :

$$R(L + \mathrm{d}L) - R(L) = \mathrm{d}R = \varrho\,\mathrm{d}L + \frac{2e^2}{h}R(L)\varrho\,\mathrm{d}L\,. \tag{2.11}$$

2. Plus particulièrement, si $R_{1,2} \gg h/e^2$ on voit que R est obtenue en *multipliant* les résistances en série plutôt qu'en les sommant. Dans ce régime, cela signifie que la résistance R n'est plus une quantité additive mais que son *logarithme* $\ln R$ l'est.

En séparant les variables, puis en intégrant (2.11) de 0 à L, on obtient :

$$\int_0^L \mathrm{d}L\, \varrho = \int_0^{R(L)} \mathrm{d}R\, \frac{1}{1+2e^2R/h}\,, \tag{2.12}$$

ce qui donne :

$$R(L) = \frac{h}{2e^2}(\mathrm{e}^{2e^2\varrho L/h}-1) \underset{L\gg h/e^2\varrho}{\sim} \mathrm{e}^{2e^2\varrho L/h}\,. \tag{2.13}$$

Autrement dit, la résistance du canal ne croît plus linéairement avec sa taille (comme pourrait le prévoir la loi d'Ohm (2.1)), mais *exponentiellement*, et ce pour n'importe quelle valeur de ϱ (aussi petite soit elle). Ceci signifie qu'à terme, le canal se comporte comme un isolant du fait de l'existence de phénomènes d'interférences à diffusions multiples générées par un potentiel désordonné.

Ceci est une signature de la localisation d'Anderson pour les systèmes unidimensionnels. Comme nous le verrons dans la suite, du fait de la présence seule d'un potentiel désordonné, tous les états propres d'un système unidimensionnel deviennent liés (et donc ne peuvent pas produire de transport). La longueur caractéristique ξ_{loc} sur laquelle le transport est supprimé est appelée *longueur de localisation*, et est déterminée ici par $\xi_{\mathrm{loc}} = h/\varrho e^2$. [3]

A ce stade, il est important de remarquer que les outils conceptuels utilisés dans ce qui précède (coefficient de réflexion/transmission, etc) ne sont pas exclusifs à la physique quantique et peuvent être rencontrés dans le cadre de n'importe quelle théorie ondulatoire (optique, mécanique des solides, etc). [4] Par exemple, un calcul tout à fait analogue aurait pu être mené pour montrer la localisation de la lumière traversant des couches de milieux optiques différents [18].

2.2 Théorie microscopique du transport

La discussion précédente a permis de mettre en évidence l'existence du phénomène dit de localisation d'Anderson avec une description adaptée aux systèmes mésoscopiques unidimensionnels. La suite va permettre d'étendre la définition de la localisation d'Anderson à tout système désordonné.

2.2.1 Paramètres microscopiques de transport

La manière la plus générique de comprendre la propagation d'une particule dans un milieu désordonné est la *marche aléatoire* associée à une dynamique de *diffusion*.

3. Même si cette expression pour ξ_{loc} contient bien toute la physique du problème, elle n'est pas tout à fait exacte dans l'absolu. En effet, l'expression (2.11) laisse entendre que la résistance $R^{(n+1)}$ associée à $n+1$ impuretés en série est reliée à $R^{(n)}$ de telle sorte que :

$$R^{(n+1)} = R^{(n)} + R_{n+1} + \frac{2e^2}{h}\, R^{(n)}\, R_{n+1}\,,$$

Ceci serait vrai si $R^{(n)}$ correspondait bien à la résistance "typique" (i.e. la plus probable) d'un canal avec n impuretés. Néanmoins, par une étude attentive des propriétés statistiques de $R^{(n)}$, on peut montrer que moyenne et valeur typique $R^{(n)}$ ne sont pas égale [118]. L'expression correcte de la longueur de localisation est retrouvée en utilisant $-\ln(\mathcal{T})$ comme grandeur additive par rapport à la longueur du canal : $\xi_{\mathrm{loc}} = h/2\varrho e^2$.

4. A titre d'exemple, l'expression (2.7) est en tout point semblable au calcul de la transmission d'une cavité Fabry-Pérot.

On considère donc une particule de masse m se propageant dans un potentiel désordonné matérialisé par un ensemble de diffuseurs ponctuels positionnés aléatoirement dans l'espace $\mathbb{R}^d$ à d dimensions. On suppose les collisions entre particule et désordre comme *élastiques* (c'est à dire que la norme v du vecteur vitesse est conservée à chaque évènement de collision). Le mouvement de la particule va être perturbé sur une échelle de longueur typique l_s appelée *libre parcours moyen*, qui est la longueur moyenne que peut parcourir librement la particule entre deux évènements de collision.

Collisions anisotropes : lien entre libre parcours moyen et longueur de transport

En pratique, une particule subissant de multiples collisions à partir d'un certain vecteur vitesse initial peut subir un certain nombre de collisions avant de perdre l'information sur la direction initiale de sa vitesse. C'est le cas lorsque la diffusion est dite *anisotrope*.

Il faut donc différencier le *libre parcours moyen* l_s, qui est la longueur moyenne parcourue par la particule avant qu'une collision ne change la direction de son vecteur vitesse, et la *longueur de transport* l^* qui est la longueur sur laquelle la particule doit se propager avant de perdre complètement l'information sur la direction de son vecteur vitesse initial.

On peut voir la trajectoire d'une diffusion anisotrope à N évènements de diffusion comme un ensemble de segments de longueur l_s (libre parcours moyen) avec un angle de diffusion $\theta_{i\,i+1}$ entre chaque segment i et $i+1$, comme représenté en figure 2.3 a. La longueur de transport l^* correspondrait à la longueur *moyenne* de la projection de la trajectoire totale selon l'axe de la direction initiale de propagation ê de la particule :

$$l^* = l_s + l_s\langle\cos\theta_{12}\rangle + l_s\langle\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\rangle + l_s\langle\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos\theta_{34}\rangle + \cdots . \tag{2.14}$$

Les angles $\{\theta_{i\,i+1}\}_i$ étant supposés statistiquement identiques et décorrélés, on a alors :

$$\langle\cos\theta_{i\,i+1}\cos\theta_{i+1\,i+2}\rangle = \langle\cos\theta_{i\,i+1}\rangle\langle\cos\theta_{i+1\,i+2}\rangle = \langle\cos\theta\rangle^2 . \tag{2.15}$$

La longueur de transport s'exprime donc comme :

$$l^* = l_s\sum_{i=0}^{N}\langle\cos\theta\rangle^i \underset{N\to+\infty}{=} \frac{l_s}{1-\langle\cos\theta\rangle} . \tag{2.16}$$

l^* désigne alors la distance parcourue par la particule avant que sa trajectoire ne commence à "rebrousser chemin", et donc à perdre l'information sur sa direction de propagation ê initialement considérée [5].

Enfin, on notera que le cas d'évènements de collisions isotropes correspond à $\langle\cos\theta\rangle = 0$ (puisque l'angle de diffusion θ est uniformément répartit sur l'intervalle $[0, 2\pi]$), ce qui implique par (2.16) que $l^* = l_s$.

5. Dans le cadre de la physique des polymères, la longueur l^* est appelée *longueur de persistance* [24] et correspond à la longueur sur laquelle le polymère maintient sa forme malgré les déformations aléatoires dues aux fluctuations thermiques.

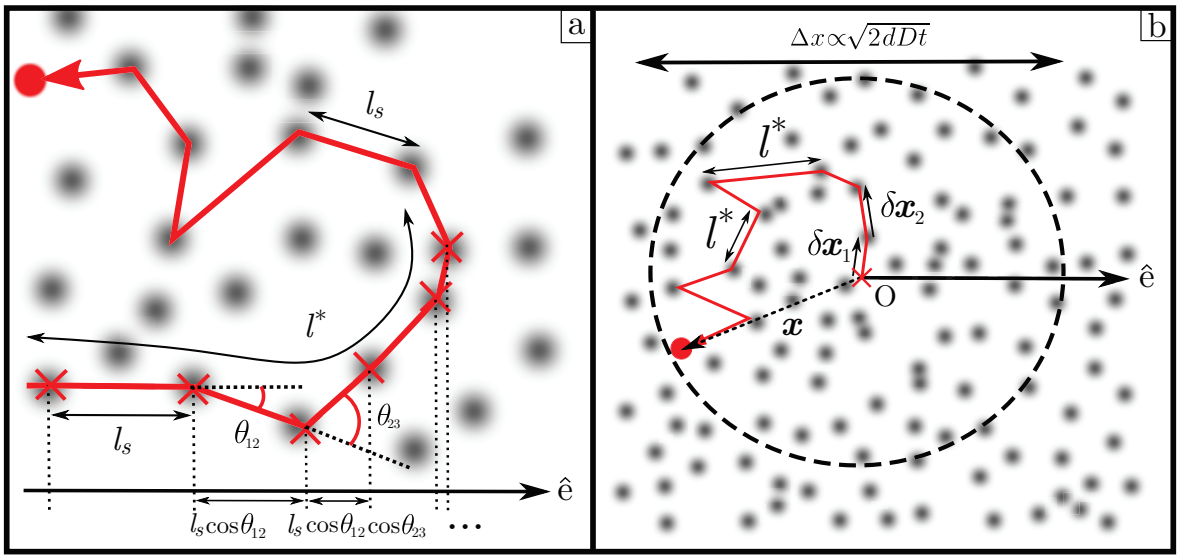

FIGURE 2.3 – **Représentation usuelle d'une marche aléatoire. a.** Lors d'un régime de propagation *anisotrope*, le libre parcours moyen l_s est *inférieur* à la longueur de transport l^*. **b.** En régime de diffusion isotrope, la marche aléatoire peut être vue comme un ensemble de pas $\{\delta\mathbf{x}_i\}_i$ statistiquement indépendant. La zone explorée, d'une taille $\Delta x = \sqrt{\langle \mathbf{x}^2 \rangle}$, croît en fonction du temps t de propagation selon une loi en $\sqrt{t}$.

Lien entre coefficient de diffusion et longueur de transport

Une fois que la particule a parcouru une distance de l'ordre ou supérieure à l^*, la diffusion de la particule peut être considérée comme *isotrope*. On peut donc s'intéresser dans un premier temps à l'évolution en marche aléatoire isotrope de la position $\mathbf{x}$ d'une particule classique (initialement à l'origine O), comme représenté en figure 2.3 b. Après un nombre N d'évènements de collision, la position $\mathbf{x}$ de la particule s'écrit :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \delta\mathbf{x}_i \tag{2.17}$$

où les $\{\delta\mathbf{x}_i\}_{i\in[1,n]}$ désignent les vecteurs de déplacement associés à chaque pas de la marche aléatoire. Les caractéristiques statistiques des pas $\{\delta\mathbf{x}_i\}_i$ sont connues, telles que :

$$\langle \delta\mathbf{x}_i \rangle = 0 \quad \text{par isotropie des collisions,} \tag{2.18}$$

$$\langle \delta\mathbf{x}_i^2 \rangle = 2\, l^{*2} \quad \text{où } l^* \text{ est la longueur de transport,} \tag{2.19}$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne sur la séquence temporelle des N pas $\{\delta\mathbf{x}_i\}_i$ de la marche aléatoire.[6] Puisque la diffusion est isotrope, les pas $\{\delta\mathbf{x}_i\}_i$ peuvent alors être considérés comme *décorrélés*.[7]

6. En supposant que la probabilité de collision isotrope par unité de distance parcourue par la particule est donnée par $1/l^*$, on peut montrer que la probabilité $p_x(x)$ que la particule *ne subisse pas* de collision après avoir parcouru une distance x est donnée par $p_x(x) = \frac{1}{l^*}\,\mathrm{e}^{-x/l^*}$. Cette probabilité permet de calculer la variance :

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^2\, p_x(x) = 2\, l^* \,.$$

7. Cela n'aurait pas été le cas en régime de diffusion anisotrope (cf figure 2.3 a.). En effet, même si les angles de diffusion $\{\theta_{i\,i+1}\}_i$ sont décorrélés entre eux, le fait que $\forall i$, $\langle \cos\theta_{i\,i+1} \rangle = \langle \cos\theta \rangle \neq 0$ aurait induit une corrélation non-diagonale entre les pas $\{\delta\mathbf{x}_i\}_i$ telle que $\langle \delta\mathbf{x}_i \cdot \delta\mathbf{x}_j \rangle = l_s^2 \langle \cos\theta \rangle^{|i-j|}$.

Pour un nombre N d'évènements de collision indépendants, le théorème central limite[8] permet de déterminer les caractéristiques statistiques de la position $\mathbf{x}$:

$$\langle \mathbf{x} \rangle = N \langle \delta \mathbf{x}_i \rangle = 0 \,, \tag{2.20}$$

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle = N \langle \delta \mathbf{x}_i^2 \rangle = 2N\, l^{*2} \,, \tag{2.21}$$

où $\mathbf{x}$ est donc une variable aléatoire gaussienne.

On *définit* le *coefficient de diffusion* D à partir de la variance $\langle \mathbf{x}^2 \rangle = 2dDt$ après un temps t de propagation dans le milieu désordonné. On peut introduire τ^* le *temps de transport* tel que $\tau^* = l^*/v$, qui s'interprète donc comme le temps moyen séparant deux évènements de diffusion isotrope.

On a donc $t = N\tau^*$, et en identifiant avec (2.21) on obtient :

$$D = \frac{v l^*}{d} \,. \tag{2.22}$$

On voit donc que plus le milieu sera désordonné, plus l^* sera petit et plus le coefficient de diffusion D sera faible.

2.2.2 Désordre et interférences : localisation faible

La partie précédente a permis de dégager les paramètres microscopiques nécessaires à la description de la diffusion d'une particule *classique* dans un potentiel désordonné. Si l'on s'intéresse maintenant à la diffusion d'une particule quantique de longueur d'onde de de Broglie λ_{dB}, et de nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda_{\text{dB}} = mv/\hbar$, la question qui se pose naturellement est donc de savoir si les interférences vont venir modifier la dynamique de diffusion décrite par l'expression (2.22). Il serait tentant d'affirmer que les éventuels effets d'interférences dues à la nature ondulatoire de la particule ne vont se manifester que lorsque $\lambda_{\text{dB}} \sim l^*$, ou d'une manière équivalente lorsque $kl^* \sim 1$.

Cependant, on a vu en section 2.1.2 que le phénomène de localisation (2.13) pouvait être systématiquement observé pour tout système de dimension $d = 1$, même pour un canal très peu résistif pour lequel $\varrho \ll 1$. Ceci suggère qu'il serait donc possible d'observer la localisation d'une particule dans système uni-dimensionnel pour toute valeur de kl^*, même dans la limite d'une particule "classique" où $kl^* \gg 1$, i.e. $\lambda_{\text{dB}} \ll l^*$.

Dans ce qui suit, on s'attache donc à généraliser l'approche développée en section 2.1.2 à tout type de système désordonné. On verra, notamment que la dimension d du système joue un rôle capital dans la diversité des phénomènes observables.

8. Le *théorème central limite* stipule que si $\{X_i\}_{i\in[1,N]}$ sont des variables aléatoires *indépendantes*, distribuées selon une même loi de probabilité avec une moyenne $\langle X \rangle$ et une variance $\langle X^2 \rangle$, alors la loi de probabilité de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{N} X_i$ tend vers une gaussienne de moyenne $N\langle X \rangle$ et de variance $N\langle X^2 \rangle$ dans la limite où $N \gg 1$.

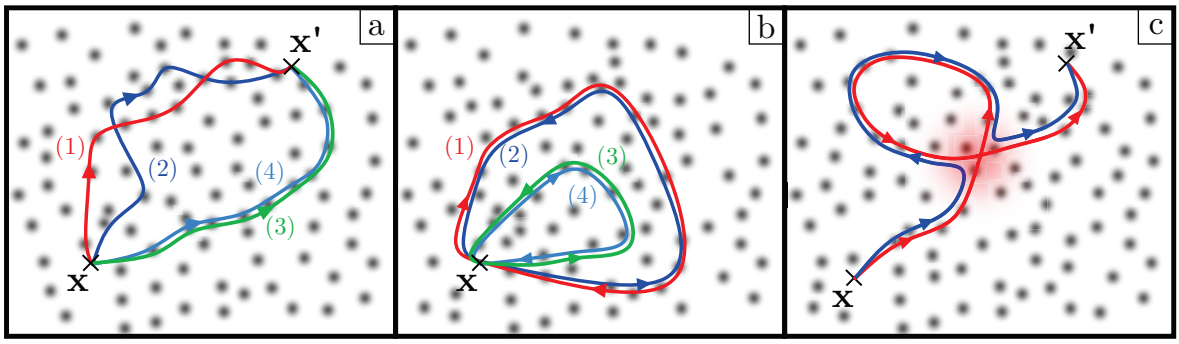

FIGURE 2.4 – **Rétro-diffusion et localisation faible. a.** L'*amplitude* de propagation entre **x** et **x**′ est déterminée par l'interférence entre couples de chemins. L'interférences entre les chemins (1) et (2) ne participe pas au transport en moyenne sur les réalisations du désordre. Les chemins (3) et (4) participent au premier terme de (2.23). **b.** Les couples (1,2) et (3,4) sont constitués de chemins symétriques par renversement du temps l'un de l'autre. Leurs interférences constructives doublent la probabilité de retour à l'origine (2.24). **c.** Formation d'une *boucle de rétro-diffusion* par croisement quantique lors de la propagation de **x** à **x**′, phénomène responsable de la *localisation faible* (2.26).

Interférences et boucles de rétro-diffusion

On s'intéresse à la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ qu'une particule partie en **x** soit détectée en **x**′ après s'être propagée dans un milieu désordonné. Dans la limite $kl^* \gg 1$, l'extension du paquet d'onde d'une taille λ_{dB} associé à la particule devient très petite devant la longueur de transport l^*, il est donc *a priori* possible de décrire la propagation de la particule en terme de trajectoire d'une marche aléatoire, comme cela a été fait en section 2.2.1. Néanmoins, il existe un grand nombre de trajectoires possibles reliant les points **x** et **x**′. D'un point de vue quantique, il est donc commode d'associer à chaque trajectoire j une amplitude de probabilité $A_j = |A_j|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j}$ où ϕ_j correspond à la phase accumulée par l'onde le long du chemin j. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \left| \sum_j |A_j| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j} \right|^2 = \sum_{jm} |A_j||A_m| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_j - \phi_m)} \\ &= \sum_j |A_j|^2 + \sum_{j \neq m} |A_j||A_m| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_j - \phi_m)} \,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Le premier terme de (2.23) est un terme de transmission classique associé à chaque chemin j (représenté en figure 2.4 a. par les amplitudes (3) et (4)), et le second est un terme d'interférence entre couple de chemins j et m. L'intuition voudrait qu'en moyenne sur les réalisations du désordre, le second terme de (2.23) soit nul puisque les différences de phases $\phi_j - \phi_m$ seraient distribuées uniformément sur $[0, 2\pi]$. On aurait alors $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_j - \phi_m)}} = 0$. Ceci est vrai pour les couples de chemins tels que le couple (1,2) représenté en figure 2.4 a.

Néanmoins, il existe certaines trajectoires pour lesquelles le terme d'interférence de (2.23) n'est pas nul, même en moyenne. Plus particulièrement, si l'on s'intéresse à la probabilité de *retour à l'origine* $P(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, chaque chemin participant à $P(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ forme une boucle qui peut être parcourue dans un sens ou dans l'autre de manière équiprobable (telle que $|A_j| = |A_m|$), comme représenté en figure 2.4 b. par les couples (1,2) et (3,4). Comme les collisions sont *élastiques*, chaque sens de propagation est le *symétrique par renversement du temps* de l'autre, c'est à dire que la phase accumulée par l'onde le long de chaque sens est la même.

De fait, pour toute trajectoire en boucle, chaque chemin et son symétrique par renversement du temps interfèrent constructivement, et ce même en moyenne sur les réalisations du désordre [9]. Ceci implique un doublement de la probabilité de retour à l'origine par rapport au cas classique :

$$P(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2\sum_j |A_j|^2 \,. \tag{2.24}$$

La conclusion est que les interférences générées par le désordre sous la forme de trajectoires formant des boucles *par croisement*, comme représenté en figure 2.4 c., *doublent* la probabilité de rétro-diffusion, ce qui aurait tendance à rendre le phénomène de diffusion quantique moins efficace que la diffusion classique.

Si D_0 correspond au coefficient de diffusion purement classique donné par (2.22) :

$$D_0 = \frac{\hbar}{md}\, kl^* \,, \tag{2.25}$$

on peut donc s'attendre à ce que le coefficient D prenant en compte les effets d'interférences dans la propagation soit inférieur. Autrement dit, il serait possible d'introduire une correction quantique δD à la diffusion classique telle que :

$$D = D_0 - \delta D \,. \tag{2.26}$$

Une telle correction caractérise un phénomène appelé *localisation faible*. C'est un phénomène qui a été très extensivement étudié et répertorié expérimentalement, aussi bien dans le domaine de la physique des solides [4, 98], que dans le domaine de l'optique [183], de l'acoustique des solides [16], ou bien de l'optique atomique et des atomes froids [91, 122].

Correction de localisation faible à la diffusion classique

Dans ce qui suit, on s'attache à décrire d'une manière un peu plus quantitative l'effet de la localisation faible sur la dynamique de diffusion d'une particule dans la limite très diffusive classiquement où $kl^* \gg 1$. [10] Généralement, la dynamique de diffusion d'une particule se caractérise par l'équation de diffusion [4] :

$$\left(\partial_t - D_0 \Delta_{\mathbf{x}'}\right) P(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t) \,, \tag{2.27}$$

où $P(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)$ désigne la probabilité classique qu'une particule parti du point source (terme "source" du membre de droite représenté par une distribution de Dirac δ) en $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ à $t = 0$ soit détectée en $\mathbf{x}'$ après un temps t de propagation dans le désordre.

L'équation (2.27) peut se résoudre par transformation de Fourier [11] :

$$P(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \tilde{P}(\mathbf{q},\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})-\omega t)} \,. \tag{2.28}$$

Remplacer (2.28) dans (2.27) permet de déterminer $\tilde{P}(\mathbf{q},\omega) = \mathrm{TF}\left[P(\mathbf{x},\mathbf{x}',t)\right](\mathbf{q},\omega)$:

$$(-\mathrm{i}\omega + D_0\mathbf{q}^2)\tilde{P}(\mathbf{q},\omega) = 1 \quad \text{soit} \quad \tilde{P}(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{-\mathrm{i}\omega + D_0\mathbf{q}^2} \,. \tag{2.29}$$

9. En effet, le fait que les phases ϕ_j et ϕ_m associées à un sens de propagation et son symétrique soient les mêmes implique de fait que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_j-\phi_m)} = 1$, et *a fortiori* que $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_j-\phi_m)}} = 1$.
10. Selon l'expression (2.25), plus kl^* est grand, plus D_0 l'est aussi.
11. Avec cette définition (2.28) de la transformée de Fourier, on a $\mathrm{TF}\left[\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\right](\mathbf{q}) = 1$ et $\mathrm{TF}\left[\delta(t)\right](\omega) = 1$.

Autrement dit, après calculs on a :

$$P(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})-\omega t)}}{-\mathrm{i}\omega + D_0\mathbf{q}^2} \tag{2.30}$$

$$= \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|^2}{4D_0 t}\right)\Theta(t)\,. \tag{2.31}$$

Ici, Θ désigne la distribution d'Heaviside et assure donc que P est causale [12].

La probabilité P décrit donc une gaussienne dont la largeur spatiale s'élargit en fonction du temps de propagation t de manière diffusive en $\sqrt{2D_0 t}$. [13] C'est à dire qu'il devient possible de détecter la particule avec une probabilité appréciable dans un volume $\Omega(t) \sim (D_0 t)^{d/2}$. L'équation (2.31) permet de tirer une expression de la probabilité de retour à l'origine :

$$P(\mathbf{x},\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{d/2}} \sim \frac{1}{\Omega(t)}\,. \tag{2.32}$$

Dans une logique *semi-classique* faisant appel aux intégrales de chemin [6], on peut dire que la "trajectoire quantique" d'une particule de vitesse v peut être contenue dans un tube de diamètre $\lambda_{\mathrm{dB}} = h/mv$, et donc de section $\lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1}$ en dimension d, et de longueur vt après un temps t de propagation dans le désordre, comme représenté en figure 2.5. Bien évidemment, cette notion de "trajectoire quantique" n'a de sens que dans la limite où $kl^* \gg 1$, c'est à dire lorsque la notion de "tube" est bien définie entre chaque évènement de diffusion séparés d'une distance moyenne l^* .

Pour estimer δD, il paraît nécessaire de connaître la probabilité $P_\times$ qu'une boucle de rétro-diffusion se forme par croisement de la trajectoire avec elle-même. D.Vollhardt et P.Wölfle ont raisonnablement proposé que la correction relative $\delta D/D_0$ devait être proportionnelle à $P_\times$ [175].

Si l'on considère une trajectoire de longueur vt suivi après un temps t de diffusion dans le désordre, la probabilité infinitésimale $\mathrm{d}P_\times$ qu'un croisement de cette trajectoire avec elle même se produise à l'instant $t + \mathrm{d}t$ est donné par le ratio entre l'incrément supplémentaire $\lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v\,\mathrm{d}t$ de volume de trajectoire gagné pendant $\mathrm{d}t$ et le volume moyen occupé par la trajectoire totale par diffusion jusqu'à l'instant t, donné par $\Omega(t) \sim (D_0 t)^{d/2}$:

$$\mathrm{d}P_\times = \frac{\lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v}{\Omega(t)}\mathrm{d}t\,. \tag{2.33}$$

En intégrant sur un temps de diffusion asymptotiquement long, on obtient :

$$P_\times = \int \mathrm{d}P_\times = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \frac{\lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v}{\Omega(t)}$$

$$\sim \lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, P(\mathbf{x},\mathbf{x},t) \quad \text{donné par (2.32).} \tag{2.34}$$

Cette dernière expression montre que la probabilité de croisement $P_\times$ est donnée par l'intégrale sur le temps total de propagation de la probabilité de retour à l'origine $P(\mathbf{x},\mathbf{x},t)$.

12. C'est à dire que $\forall t < 0,\ P(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) = 0$.
13. Ceci est complètement compatible avec les conclusions du théorème central limite utilisé pour obtenir l'expression (2.21).

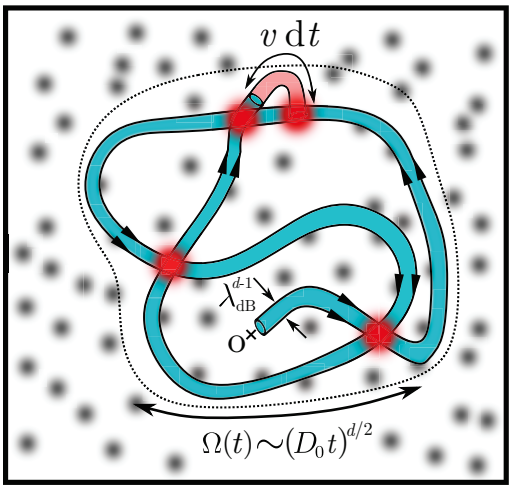

FIGURE 2.5 – **Evaluation de la probabilité de croisement quantique.** Après un temps de diffusion t, la trajectoire quantique de la particule est contenue dans un tube de volume total $\lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} vt$ et occupe un volume moyen $\Omega(t) \sim (D_0 t)^{d/2}$ par diffusion. Après un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ de propagation supplémentaire, le volume de la trajectoire a augmenté d'une quantité $\lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v\,\mathrm{d}t$ alors que le volume occupé par diffusion a été essentiellement constant : $\Omega(t+\mathrm{d}t) \sim \Omega(t)$. L'accroissement de probabilité de croisement $\mathrm{d}P_\times$ que la trajectoire se croise avec elle même sur l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est donc donnée par le ratio entre ces deux volumes.

La quantité $P_\times$ renseigne donc sur le nombre de fois que la particule va repasser par son point d'origine au cours de la diffusion.

On peut se douter que la façon dont une particule va repasser par son point d'origine est fortement dépendante de la dimension d du système. En effet, en dimension $d = 1$ par exemple, le volume $\Omega(t) \sim \sqrt{t}$ accessible par diffusion croît plus lentement selon le temps de propagation t que le volume $\lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} vt$ de la trajectoire de la particule. De fait, les croisements quantiques de la trajectoire avec elle même sont très fréquents. A l'inverse, pour $d = 3$ le volume de diffusion $\Omega(t) \sim t^{3/2}$ croît plus vite que le volume quantique de la trajectoire, ce qui devrait rendre les croisements quantiques moins fréquents.

En réalité, le théorème de Pólya précise que la quantité (2.34) *diverge* lorsque $d \leq 2$ [4]. Autrement dit, en dimension $d \leq 2$, une particule peut repasser une infinité de fois par son point d'origine pour des temps t asymptotiquement longs : on parle alors de marche aléatoire *récurrente*. A l'inverse, pour $d = 3$ la quantité (2.34) est finie, et la particule quitte son point de départ sans jamais y retourner.

Ce qui suit vise donc à examiner comment cette récurrence d'une marche aléatoire affecte les propriétés de localisation faible selon la dimension d du système.

Par définition de la transformée de Fourier (2.28), on a donc :

$$\begin{aligned} P_\times &\sim \lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v\, \tilde{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega = 0^+) \\ &\sim \lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v \int \frac{\mathrm{d}^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{-\mathrm{i}0^+ + D_0 \mathbf{q}^2} \quad \text{par (2.30).} \end{aligned} \tag{2.35}$$

On peut donc en déduire que l'expression du coefficient D de diffusion (2.26), qui tient compte des corrections de localisation, s'exprime (en oubliant quelques pré-facteurs) comme :

$$D = D_0 - D_0\, \lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v \int \frac{\mathrm{d}^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{-\mathrm{i}0^+ + D_0 \mathbf{q}^2}\,. \tag{2.36}$$

L'équation (2.36) suggère que le coefficient D que l'on vient d'évaluer soit la limite en $\omega \to 0^+$ d'une quantité $D(\omega)$:

$$D(\omega) = D_0 - D_0\, \lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{-\mathrm{i}\omega + D_0\mathbf{q}^2}\,, \tag{2.37}$$

qui, par transformation de Fourier inverse, peut être associé à une coefficient de diffusion $D(t)$ dépendant du temps de propagation. La limite $\omega \to 0^+$ pour $D(\omega)$ correspond donc à la limite des temps longs $t \to +\infty$.

On peut démontrer plus rigoureusement (2.37) par des méthodes dites *diagrammatiques* [4, 118, 175] où les quantités relatives au transport, comme la constante D de diffusion, sont calculées à partir de l'équation de Schrödinger. Ces méthodes *perturbatives* sont construites de telle sorte que la correction $\delta D(\omega)$ est supposée rester petite devant D_0, ce qui est compatible avec le calcul simplifié effectué précédemment dans la limite où $kl^* \gg 1$. En effet, dans la limite où $kl^* \gg 1$, le volume des zones de croisement quantique (zones rouges en figure 2.5) est d'autant plus petit que le diamètre λ_{dB} de la trajectoire est petit, soit une probabilité de croisement $P_\times \sim \delta D/D_0 \ll 1$ d'autant plus faible.

Mais comme cela a été précisé plus tôt, le terme intégral de l'expression (2.37) correspondant à $\delta D/D_0$ renseigne aussi sur le nombre de fois que la trajectoire de la particule repasse par son point d'origine. Or le théorème de Pólya précise que cette quantité *diverge* dans la limite où $\omega \to 0^+$. Cette divergence suggère donc que, dans la limite des temps de diffusion longs $\omega \to 0^+$, l'équation (2.37) ne permet pas de décrire correctement la dynamique de diffusion de la particule. En effet, dans ce cas, la correction quantique δD devient de l'ordre du coefficient de diffusion classique D_0 : on sort donc du régime perturbatif où $\delta D \ll D_0$, et ce, même si $kl^* \gg 1$.

2.2.3 Localisation d'Anderson

Comme on vient de le voir, la diffusion aux temps longs pour $d \leq 2$ ne peut pas être décrite par une théorie où l'effet des interférences sur le transport serait traité de manière perturbative par rapport au transport purement classique, comme c'est le cas avec l'expression (2.37). Cette constatation invite donc à développer de nouvelles méthodes permettant d'aborder ce problème.

Théorie auto-consistante de la localisation d'Anderson

Afin de pousser l'étude au-delà du régime perturbatif décrit par (2.37), D.Vollhardt et P.Wölfle ont proposé une approche auto-consistante [175] permettant d'estimer $D(\omega)$ dans des régimes non-perturbatifs où $kl^* \leq 1$ et $\delta D \sim D_0$. Leur méthode consiste à remplacer dans le terme correctif δD de (2.37) les occurrences du coefficient de diffusion classique D_0 par le coefficient $D(\omega)$. Dans ce cas, (2.37) devient une équation auto-consistante en $D(\omega)$:

$$D(\omega) = D_0 - D(\omega)\, \lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{-\mathrm{i}\omega + D(\omega)\mathbf{q}^2} \tag{2.38}$$

Il n'a pas été rigoureusement démontré qu'une telle substitution peut correctement décrire ce qu'il se passe dans la limite $\omega \to 0^+$. Mais on peut la motiver en se rappelant que la correction δD est essentiellement déterminée par l'existence de trajectoires en forme de boucles.

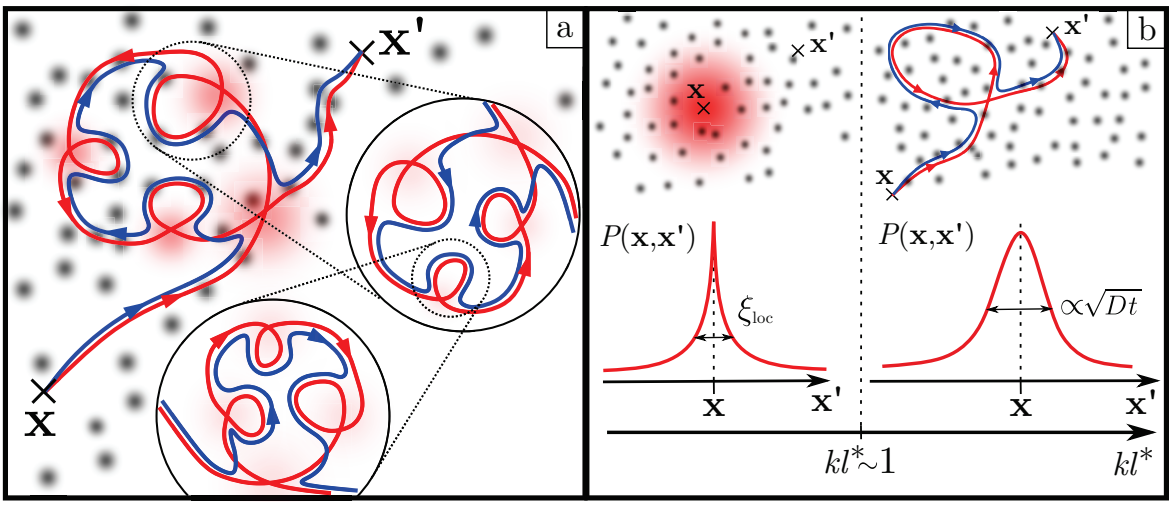

FIGURE 2.6 – **Théorie auto-consistante de la localisation d'Anderson. a.** Dans la limite d'un milieu fortement désordonné, les processus de diffusion peuvent former des croisements quantiques imbriqués d'autant plus petits que l^* est petite. **b.** Pour $d = 3$, l'expression (2.38) prévoit l'existence d'une transition de phase séparant une phase où la particule est localisée sur une taille ξ_{loc}, d'une phase où la particule diffuse selon une loi en $\sqrt{t}$. Les deux phases sont séparées selon le critère de Ioffe-Regel $kl^* \sim 1$.

Or, dans la limite d'un milieu fortement désordonné où $kl^* \leq 1$, on pourrait avoir le sentiment que la trajectoire quantique suivi par la particule est composée de boucles imbriquées les unes dans les autres, ces boucles se dessinant sur une taille d'autant plus petite que la longueur de transport l^* est petite, comme représenté en figure 2.6 a. Une telle formulation de la localisation impose implicitement qu'aucune boucle de diffusion ne peut avoir une taille inférieur à l^*. Enfin, cette substitution a la bonne propriété d'être compatible avec la localisation faible puisque qu'un passage continu vers un régime où $kl^* \gg 1$ et $\delta D/D_0 \ll 1$ permet de passer de (2.38) vers (2.37).

Là encore, les solutions $D(\omega)$ de l'équation (2.38) ont un comportement fortement dépendant de la dimension d du système. Plus particulièrement, on peut montrer [118, 175] que :

$$D(\omega \to 0^+) = 0 \quad \text{pour } d \leq 2 \tag{2.39}$$

Cette annulation du coefficient de diffusion aux temps longs de propagation caractérise le phénomène de *localisation d'Anderson*, appelée aussi *localisation forte*.

Ce qu'il faut déduire de (2.39), c'est que toute particule se propageant dans un potentiel désordonné en dimension $d \leq 2$ subit un arrêt du processus de diffusion classiquement attendu (dans la limite des temps longs de propagation), et ce, *pour toute valeur de* kl^*.

Transition d'Anderson en dimension $d = 3$

En revanche, le cas $d = 3$ ne présente pas de localisation pour toute valeur de kl^*. En effet, le calcul du terme intégral de (2.38) donne dans la limite où $\omega \ll 1/\tau^*$ [118] : [14]

$$\frac{D(\omega)}{D_0} - \frac{8\pi^4}{(kl^*)^2}\sqrt{-\frac{\mathrm{i}\omega l^{*2}}{D(\omega)}} = 1 - \frac{16\pi^3}{(kl^*)^2}\,. \tag{2.40}$$

14. Cela revient à s'intéresser à la limite des temps de diffusion longs $t \gg \tau^*$.

Il est important de noter que le résultat (2.40) a été obtenu avec l'hypothèse qu'aucun des processus de diffusion responsables du terme intégral de l'expression (2.38) ne pouvait avoir une impulsion plus grande que $1/l^*$. [15]

L'équation (2.40) admet alors différentes solutions suivant le signe du membre de droite. Plus particulièrement, il y a deux régimes qui se dégagent :

- ⋆ Un régime *diffusif* lorsque $kl^* > 4\pi^{3/2}$. Dans ce cas, le membre de droite de (2.40) est positif et le terme en $\sqrt{-\mathrm{i}\omega/D(\omega)}$ de (2.40) doit tendre vers zéro lorsque $\omega \to 0^+$, laissant ainsi :
$$D(\omega \to 0^+) = D_0 \left(1 - \frac{16\pi^3}{(kl^*)^2}\right) , \tag{2.41}$$
qui est inférieur au coefficient de diffusion classique D_0. C'est donc un régime où l'on observe la localisation faible malgré tout.

- ⋆ Un régime *localisé* lorsque $kl^* < 4\pi^{3/2}$. En effet, dans ce cas le membre de droite de (2.40) est négatif et $D(\omega)/D_0$ de (2.40) doit s'annuler lorsque $\omega \to 0^+$, ce qui donne :
$$D(\omega \to 0^+) = -\mathrm{i}\omega\xi_{\text{loc}}^2 \quad \text{avec} \quad \xi_{\text{loc}} = \frac{8\pi^4 l^*}{16\pi^3 - (kl^*)^2} , \tag{2.42}$$
où ξ_{loc} définit la *longueur de localisation*, c'est à dire, la longueur sur laquelle la particule va stopper sa propagation. En effet, en remplaçant le coefficient D_0 de l'expression (2.30) par l'expression (2.42) de $D(\omega)$, on trouverait après calcul que la probabilité de détecter la particule aurait un comportement *exponentiellement décroissant*, i.e. :
$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \propto \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\xi_{\text{loc}}}\right) . \tag{2.43}$$
D'ailleurs, l'expression (2.43) explique pourquoi on parle de "*localisation*" : la particule est confinée (donc "localisable") dans un volume de taille typique ξ_{loc}.

15. Autrement dit, le terme intégral de (2.38) ne porte pas sur l'ensemble $\mathbb{R}^d$ des impulsions $\mathbf{q}$ mais sur les impulsions contenues dans une boule de dimension d et de rayon $|\mathbf{q}| = 1/l^*$. L'introduction de ce "*cutoff*" $1/l^*$ en impulsion permet de *régulariser* la divergence l'intégrale (2.38) lorsque $|\mathbf{q}| \to +\infty$. C'est une manière de procéder que l'on retrouvera en section 2.3.2.

A la différence des cas en dimension $d \leq 2$ où la particule localise pour toute valeur de kl^*, pour $d = 3$ il existe donc une valeur de *transition* $(kl^*)_c = 4\pi^{3/2}$ séparant un régime diffusif caractérisé par un coefficient de diffusion $D < D_0$ non-nul, et un régime localisé caractérisé par un coefficient de diffusion nul et une longueur de localisation ξ_{loc} finie, comme représenté en figure 2.6 b. Puisque cette transition affecte le coefficient de diffusion, qui est une propriété *macroscopique* et *thermodynamique* du système, cela suggère en réalité que l'on a affaire à une *transition de phase* dont le paramètre d'ordre serait le coefficient de diffusion D, et le paramètre de contrôle la quantité kl^*. Cette transition de phase revêt d'un caractère *universel*, c'est à dire commun à tout système désordonné, en remarquant que l'existence d'un critère de transition, ici appelé *critère de Ioffe-Regel* [88] :

$$kl^* \leq (kl^*)_c \quad \text{avec } (kl^*)_c \sim 1 \tag{2.44}$$

a été obtenue sans aucune considération du modèle microscopique utilisé pour décrire le désordre (distribution de probabilité, anisotropie, etc) [16].

La localisation d'Anderson peut donc être observée dans tout système désordonné lorsque la longueur de transport l^* devient comparable ou plus petite que la longueur d'onde λ_{dB} de la particule.

Le paramètre d'ordre D passant continument de zéro à une valeur non-nulle de la phase localisée à la phase diffusive, cette transition d'Anderson serait classée comme *transition de phase continue*. Une propriété essentielle et commune aux transitions continues est *l'invariance d'échelle* des propriétés statistiques du système étudié lorsque celui-ci est *critique* (c'est à dire proche de la transition). Cette invariance d'échelle provient de la *divergence* de la longueur typique sur laquelle s'exprime des corrélations. Les corrélations ayant lieu à toutes les échelles, il devient alors impossible de faire la différence entre un système et ce même système dilaté ou contracté [78].

Dans le cas de la transition d'Anderson, la longueur typique sur laquelle s'expriment les corrélations pour la phase localisée est donnée par la longueur de localisation ξ_{loc}. [17] L'expression (2.42) montre une divergence de ξ_{loc} à la transition :

$$\xi_{\text{loc}} \sim \left|(kl^*)^2 - (kl^*)_c^2\right|^{-\nu} \quad \text{avec} \quad \nu = 1\,, \tag{2.45}$$

qui est donc caractérisée par un *loi de puissance* [18]. De même, dans la phase diffusive, d'après (2.41), le coefficient de diffusion D diverge de zéro à la transition selon la loi de puissance :

$$D \sim \left|(kl^*)^2 - (kl^*)_c^2\right|^{s} \quad \text{avec} \quad s = 1 \tag{2.46}$$

Les exposants ν et s sont appelés *exposants critiques* associés à la transition d'Anderson. D'une manière générale, les exposants critiques sont *universels*, c'est à dire qu'ils ne dépendent pas des détails microscopiques et peuvent donc être communs à des systèmes critiques très différents. Ils permettent donc classer les transitions de phase selon des *classes d'universalité*, chaque classe d'universalité regroupant les transitions ayant les mêmes exposants critiques.

16. Les détails microscopiques relatifs au désordre jouent un rôle sur le calcul de la longueur de transport l^*, ce qui fixe la valeur de $(kl^*)_c$.

17. Même si la notion de trajectoire perd son sens lorsque $kl^* \lesssim 1$, on peut comprendre ceci en se rappelant que la probabilité $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est calculée par la corrélation $\sum_{jm} A_j\, A_m$ de différents processus aléatoires à diffusions multiples $\{A_j\}_j$, comme indiqué par l'expression (2.23).

18. Les fonctions puissance répondent naturellement à la contrainte d'invariance d'échelle. En effet, appliquer un changement d'échelle $x \to bx$ à une fonction $y = x^\alpha$ donne $y \to b^\alpha y$. Une fonction puissance x^α reste donc (à un facteur multiplicatif b^α près) la même loi de puissance après changement d'échelle.

2.3 Théorie d'échelle de la transition d'Anderson

Dans la section précédente, la localisation d'Anderson a été introduite en temps que propriété de *transport* pour des systèmes *infinis* (c'est à dire sans condition aux limites). Cependant, en pratique, il est nécessaire de pouvoir caractériser la localisation d'Anderson pour des systèmes *finis*. On a vu en section 2.1.2 que cela était possible, notamment par une dépendance non-Ohmique (2.13) de la résistance d'un échantillon en fonction de sa taille.

Cela soulève une autre question qui est celle de la caractérisation de la transition d'Anderson pour les systèmes de taille finie. En effet, le critère de Ioffe-Regel (2.44) à lui seul ne permet d'assurer l'observation de la localisation pour un système de taille finie. La raison est que l'on pourrait imaginer un système désordonné satisfaisant le critère $kl^* \leq 1$, et donc possédant *a priori* une longueur de localisation ξ_{loc} finie, mais dont la taille L serait inférieur à ξ_{loc}.

Dans cette situation, la particule peut tout de même diffuser jusqu'aux bords de l'échantillon et donc présenter une dynamique diffusive, quand bien même cette dernière devrait être localisée si l'échantillon était infini. D'où la nécessité d'un autre critère de localisation prenant en compte la taille finie de l'échantillon.

Dans cette section, on va voir comment le critère de Thouless permet de comprendre la transition d'Anderson pour les systèmes de taille finie comme une compétition entre deux échelles d'énergie. Puis, on verra avec la théorie d'échelle comment la taille et la dimension du système influent sur cette compétition.

2.3.1 Critère phénoménologique de transition de phase

Les transitions de phase peuvent souvent être commodément comprises comme une compétition entre des interactions entre constituants microscopiques ayant tendance à faire émerger un ordre à longue portée, et des fluctuations. Un exemple typique est celui de la transition ferromagnétique/paramagnétique pour les modèles de spins : l'énergie d'interaction J entre spins individuels tend à former un ordre magnétique longue portée associé à la phase ferromagnétique alors que les fluctuations thermiques d'énergie typique $k_B T$ tendent à casser cet ordre, ces fluctuations étant dominantes dans la phase paramagnétique. Cette situation est représentée en figure 2.7 a_1. La transition de phase a donc lieu pour une température critique $T = T_c$ telle que $J/k_B T_c \sim 1$.

De tels arguments sont aussi valables pour les transitions de phase qui admettent un paramètre de contrôle autre que la température, comme par exemple la *transition de Mott* pour un système sur réseau, représenté en figure 2.7 a_2. Lorsque deux particules se trouvent sur un même site du réseau, elles augmentent l'énergie totale d'une quantité U.

Les particules peuvent aussi passer d'un site à l'autre par effet tunnel selon leur énergie cinétique t (aussi appelée *intégrale de saut*). Cette possibilité pour les particules de passer d'un site à l'autre génère alors des fluctuations, non pas thermiques, mais quantiques. On distingue ainsi deux phases : lorsque $U/t < 1$ on observe une phase métallique "désordonnée" dominée par les fluctuations de densités générées par effet tunnel ; et pour $U/t > 1$ on observe une phase *isolant de Mott* ordonnée où il n'y a qu'une seule particule par site et pas d'effet tunnel. La transition de phase a donc lieu pour un paramètre de contrôle critique $(U/t)_c \sim 1$.

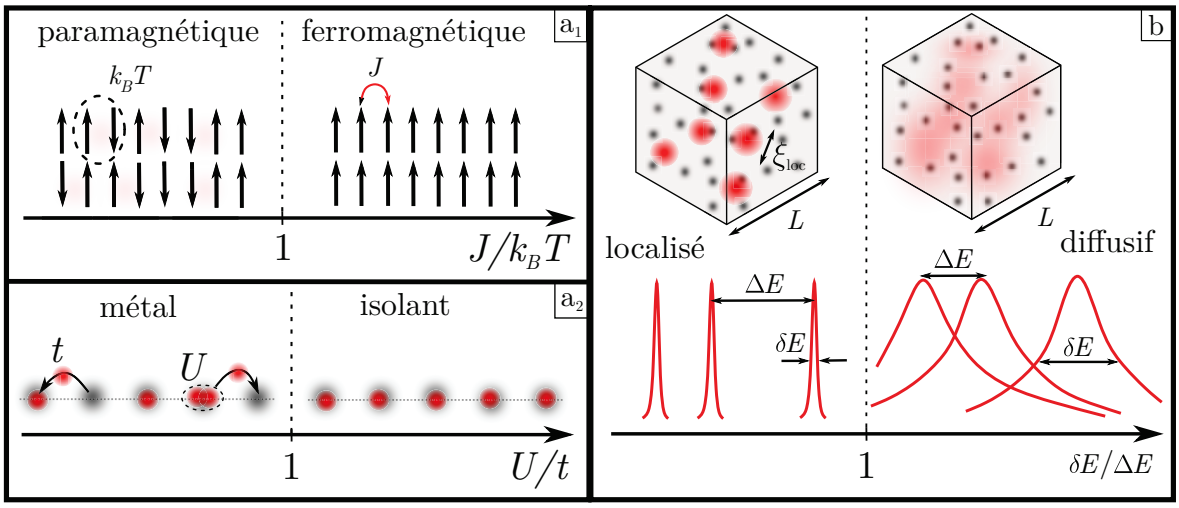

FIGURE 2.7 – **Critères phénoménologiques de transition de phase. a$_1$.** La transition ferromagnétique/paramagnétique peut être vue comme une compétition entre des fluctuations thermiques k_BT et un paramètre d'interaction magnétique J entre spins. **a$_2$.** Pour la transition de Mott, la densité du système est soit déterminée par effet tunnel t entre sites pour la phase métallique, soit par la répulsion sur site U pour la phase isolante. **b.** Selon le critère de Thouless, une particule localisée n'atteint jamais les bords d'un système fini car il n'y a pas de recouvrement spatial entre états localisés. Inversement, lorsqu'il y a recouvrement entre états localisés, il y a couplage et la particule peut sauter d'état en état et atteindre le bord de l'échantillon.

Critère de Thouless

C'est à Thouless que l'on doit les premiers arguments analogues permettant d'expliquer la transition d'Anderson. On considère un échantillon désordonné en dimension d de taille L contenant une particule. Le système étant de taille finie, les états propres d'énergie associés sont *liés* (au sens de *bound state* en anglais) et répartis selon un spectre *discret*. On note ΔE l'écart moyen entre deux niveaux distincts, qui est relié à la densité d'état $\nu(E)$ (c'est à dire le nombre d'états associé à l'énergie E par unité de volume) par :

$$\nu(E) = \frac{1}{\Delta E\, L^d}\,. \tag{2.47}$$

Si le système est maintenant *ouvert*, il est possible pour la particule de s'échapper de l'échantillon par les bords. Ceci implique donc que les états d'énergie ne sont pas infiniment fins, mais possèdent une largeur finie δE par couplage avec l'extérieur de l'échantillon. En effet, en diffusant la particule peut espérer atteindre le bord de l'échantillon en un temps de diffusion typique $\tau_D \sim L^2/D$. La particule ne peut donc résoudre les niveaux d'énergie qu'avec une précision δE telle que :

$$\delta E\, \tau_D \sim \hbar \quad \text{soit} \quad \delta E \sim \frac{\hbar D}{L^2}\,. \tag{2.48}$$

La quantité δE est communément appelée *énergie de Thouless*. L'argument évoqué par Thouless [60, 104], illustré en figure 2.7 b., consiste à dire que si le système est localisé, la quantité δE est infinitésimale telle que $\delta E \ll \Delta E$. La particule peut alors résoudre un état d'énergie donné et l'occuper indéfiniment. [19]

19. Ceci sous-tend donc l'idée qu'un état propre lié d'un système ouvert est analogue à un état localisé. C'est une idée qui a déjà été explorée dans la littérature [58, 59, 70]. Nous reviendrons sur cette idée importante en section 5.1.4.

Inversement, si $\delta E \gg \Delta E$ il y a recouvrement entre les niveaux, et donc couplage, ce qui permet à la particule de transiter d'un état localisé à un autre, et donc de diffuser. Il apparaît alors naturel de définir la quantité $g = \delta E/\Delta E$ comme le paramètre de contrôle de la transition.

Lien entre g et la conductance de l'échantillon

On peut montrer par analyse dimensionnelle que ce nouveau paramètre de contrôle g n'est pas complètement déconnecté de ce qui a été explicité en section 2.2.3. En effet, la conductance *classique* $G = 1/R$ d'un échantillon de taille L en dimension d est alors donnée par la loi d'Ohm (2.1) telle que :

$$G = \frac{S\sigma}{L} \sim \sigma L^{d-2}\,, \tag{2.49}$$

où $\sigma = 1/\rho$ est la conductivité de l'échantillon. Or, la *relation d'Einstein* permet de lier σ et le coefficient de diffusion D [140], de sorte que :

$$\sigma \propto e^2 \nu(E)\, D\,. \tag{2.50}$$

En définitive, en combinant les expressions (2.49) et (2.50), on obtient :

$$G \sim e^2 \nu(E)\, D\, L^{d-2}\,. \tag{2.51}$$

Cette dernière expression (2.51) montre donc qu'il y a proportionnalité entre la conductance G d'un échantillon désordonné de taille L finie et le coefficient de diffusion D.

A partir des définitions (2.47) et (2.48), on peut reconnaître :

$$g = \frac{\delta E}{\Delta E} \sim \hbar\, \nu(E)\, D\, L^{d-2}\,. \tag{2.52}$$

En comparant (2.51) et (2.52), on en déduit donc que g est une *conductance adimensionnée* exprimée en unité de quantum de conductance e^2/h, telle que $G \sim (e^2/h)g$.

Le critère de Thouless permet donc de distinguer deux phases bien distinctes :

- ⋆ Une phase diffusive (ou métallique) pour laquelle $g \gg 1$ et :

$$g(L) \sim D\, L^{d-2}\,, \tag{2.53}$$

  selon la loi d'Ohm (2.49).

- ⋆ Une phase localisée (ou isolante) pour laquelle $g \ll 1$ et :

$$g(L) \sim \mathrm{e}^{-L/\xi_{\mathrm{loc}}}\,, \tag{2.54}$$

  d'une manière analogue à l'expression (2.13), où ξ_{loc} est la longueur de localisation.

La question qui vient alors naturellement serait de savoir sous quelle(s) condition(s) un échantillon de taille L en dimension d va occuper une phase plutôt que l'autre.

2.3.2 Lois d'échelle de la conductance

Le critère de Thouless a permis de distinguer deux phases distinctes, chacune caractérisée par des comportements de conductance $g(L)$ selon la taille du système (2.53) et (2.54) très différents. On s'attend à retrouver ces comportements *asymptotiquement* suivant s'il on se trouve dans une phase ou l'autre en augmentant la taille de l'échantillon.

Définition de la fonction β

On s'intéresse donc à la manière dont un échantillon désordonné de volume L^d voit sa conductance $g(L)$ changer lorsque celui-ci est dilaté d'un facteur b quelconque. Le nouveau système ainsi obtenu est de donc volume $(bL)^d$ et peut être vu comme un ensemble de b^d blocs initiaux de volume L^d.

Thouless [170], puis Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan [1] ont alors fait l'hypothèse selon laquelle la conductance $g(bL)$ du nouveau bloc de volume $(bL)^d$ *ne dépend uniquement que de la conductance $g(L)$ des sous-blocs* de volume L^d (et pas explicitement de L ou des détails microscopiques du désordre par exemple). Autrement dit, il existe une *unique* fonction d'échelle f telle que :

$$g(bL) = f(b, g(L))\,. \tag{2.55}$$

L'unicité de la fonction f définit par (2.55) constitue *l'hypothèse d'échelle à un paramètre* (*single parameter scaling hypothesis* en anglais). L'inconvénient de la fonction d'échelle telle que définit avec (2.55) est qu'elle donne l'évolution de g en fonction d'une dilatation b donnée. Il serait plus avantageux de trouver une définition de la fonction d'échelle ne dépendant que de $g(L)$ et donnant l'évolution d'échelle peu importe b. Pour trouver cette fonction, on peut considérer le cas d'une dilatation infinitésimale $b = 1 + \varepsilon$ telle que :

$$g((1+\varepsilon)L) \underset{\varepsilon \ll 1}{\sim} g(L) + \varepsilon L \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}L}(L)\,. \tag{2.56}$$

L'expression (2.56) suggère donc que la variation relative de g à une dilatation infinitésimale est donnée par :

$$\frac{g((1+\varepsilon)L) - g(L)}{\varepsilon\, g(L)} \underset{\varepsilon \ll 1}{\sim} \frac{L}{g(L)} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}L}(L)\,, \tag{2.57}$$

qui définit la *fonction d'échelle* β ne dépendant directement que de g :

$$\beta(g) = \frac{L}{g(L)} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}L}(L) = \frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln L}\,. \tag{2.58}$$

Comportements asymptotiques de la fonction β

D'une manière générale, on ne connaît pas entièrement β, mais on peut estimer ses comportements asymptotiques. Par exemple, dans la limite des grandes conductances $g \gg 1$, il est tentant de considérer que les effets de localisation ont un effet négligeable tel que $D \sim D_0$. Ainsi, la loi d'Ohm (2.53) donne :

$$\beta(g) \underset{g \gg 1}{\sim} d - 2\,, \tag{2.59}$$

Néanmoins, on sait que même dans la limite d'un échantillon bon conducteur $g \gg 1$, le coefficient de diffusion D associé doit comporter des corrections de localisation faible selon l'expression (2.37). On avait vu que le terme intégral de (2.37) portant sur l'ensemble des impulsions $\mathbf{q}$ divergeait dans la limite des temps longs $\omega \to 0^+$.

En réalité, il est possible de *régulariser* ce terme en introduisant des impulsions "*cutoff*" aux bornes de l'intégrale. Techniquement, les phénomènes de localisation ne se manifestent que lorsque la particule s'est propagée sur une distance plus grande que l^*. Les impulsions typiques $|\mathbf{q}|$ associées à ces phénomènes sont donc généralement inférieures à $1/l^*$. Inversement, lorsque le système possède une taille L finie, aucun processus ne peut être associé à une impulsion $|\mathbf{q}|$ plus faible que $1/L$.

Ceci implique que l'on peut estimer sans trop commettre d'erreur le terme intégral de (2.37) dans la limite $\omega \to 0^+$, de sorte que :

$$D = D_0 \left(1 - \lambda_{\mathrm{dB}}^{d-1} v \, \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_{1/L}^{1/l^*} \mathrm{d}q \, \frac{q^{d-1}}{D_0 q^2} \right) , \tag{2.60}$$

où $q = |\mathbf{q}|$, et S_d est la surface d'une sphère unité de dimension d. [20]

Après calculs, l'expression (2.60) permet de déterminer la dépendance en taille L du coefficient de diffusion d'un échantillon sous l'effet des effets de localisation faible :

$$\begin{cases} D(L) \underset{L \gg l^*}{\sim} D_0 \left(1 - L/\pi l^*\right) \quad \text{pour} \quad d = 1 \\ D(L) \underset{L \gg l^*}{\sim} D_0 \left(1 - \frac{2}{kl^*} \ln(L/l^*)\right) \quad \text{pour} \quad d = 2 \\ D(L) \underset{L \gg l^*}{\sim} D_0 \left(1 - 6/(kl^*)^2\right) \quad \text{pour} \quad d = 3 \, . \end{cases} \tag{2.61}$$

On notera qu'en dimension $d \leq 2$, les corrections de localisation faible des coefficients de diffusion $D(L)$ (2.61) divergent dans la limite d'un échantillon infini $L \to +\infty$, ce qui est bien compatible avec ce qui a été explicité en fin de section 2.2.2.

Les effets de localisation faible impliquent donc une correction du comportement purement ohmique (2.59) de la fonction $\beta(g)$ associée à une conductance $g(L) \sim D(L)\, L^{d-2}$ telle que [175] :

$$\beta(g) \underset{g \gg 1}{\sim} d - 2 - \frac{c_d}{g} \, , \tag{2.62}$$

où c_d est une constante positive qui dépend de la dimension.

Inversement, on peut aussi évaluer $\beta(g)$ dans la limite des faibles conductances $g \ll 1$, là où les effets de localisation (d'Anderson) sont prédominants. En phase localisée, l'expression (2.54) de $g(L)$ donne :

$$\beta(g) \underset{g \ll 1}{\sim} -L/\xi_{\mathrm{loc}} = \ln g < 0 \, . \tag{2.63}$$

20. L'intégration a été calculée sur l'ensemble des impulsions réparties de manière isotrope en dimension d, ce qui est valable du moment que la diffusion est isotrope :

$$\int \frac{\mathrm{d}^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \to \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}q \, q^{d-1} \, .$$

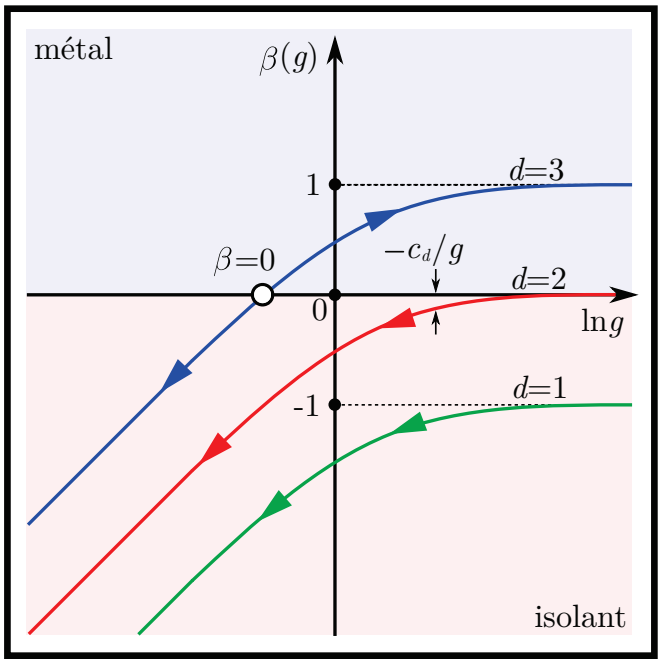

FIGURE 2.8 – **Fonction d'échelle β de la conductance g.** Le signe de $\beta \propto \frac{dg}{dL}$ détermine le comportement de l'échantillon lorsqu'on augmente sa taille. Pour $d \leq 2$, β est toujours négatif, donc dans la limite des grandes tailles L, l'échantillon est isolant. Pour $d = 3$, il existe une valeur critique $\ln g_c \sim 0$ pour laquelle β change de signe, ce qui est la marque d'une transition de phase.

Détermination du flot selon la dimension

Il est commun de représenter l'allure de la fonction β comme sur la figure 2.8 en fonction de $\ln g$. A partir de (2.62) et (2.63), on peut déterminer le flot du paramètre d'ordre g (matérialisé par la direction des flèches sur le graphe 2.8), c'est à dire la manière dont varie $g(L)$ lorsque l'on augmente la taille L de l'échantillon :

- ⋆ Pour $d = 1$ et $d = 2$, $\beta(g)$ est toujours négatif. Or, d'après (2.58), comme $\beta(g) \propto \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}L}$, cela signifie que la conductance g de l'échantillon ne peut que diminuer en augmentant L. Le flot ramène donc toujours l'échantillon en phase localisée : *tous les états sont donc localisés en une dimension et deux dimensions*.
- ⋆ Pour $d = 3$, $\beta(g)$ change de signe entre les deux régimes (2.62) et (2.63). Cela sous-entend que, par continuité, il existe une valeur $g_c \sim 1$ de conductance telle que $\beta(g_c) = 0$. Ce point est très spécial puisque $\beta(g) = 0$ signifie que la conductance de l'échantillon *ne varie pas* en fonction de sa taille. Autrement dit, à condition qu'un système de taille L soit bien complètement caractérisé par sa conductance $g(L)$ (par hypothèse (2.55)), il est impossible de différencier d'un point de vue extérieur (simplement en mesurant sa conductance par exemple) les états d'un échantillon de taille L et de son dilaté de taille bL (et ce, quelque soit b).

  Pour $g = g_c$, l'échantillon devient donc auto-similaire : il y a *invariance d'échelle*, ce qui est la marque d'une transition de phase continue. Le point $g = g_c$ est appelé *point fixe* de la transition dans la mesure où il laisse le flot de la transition invariant par changement de taille.

La théorie d'échelle basée sur la fonction $\beta(g)$ permet donc de retrouver tous les comportements critiques de localisation qui avaient été déterminés en section 2.2.3.

En ce qui concerne la transition de phase ayant lieu en dimension $d = 3$, on aurait pu pousser l'étude plus loin en linéarisant la fonction $\beta(g)$ autour du point fixe $g = g_c$. Une telle approche permet de montrer que le coefficient de diffusion D et la longueur de localisation ξ_{loc} suivent certaines lois d'échelle lorsque le flot de g s'éloigne du point critique. En d'autres termes, la théorie d'échelle permet de démontrer l'*existence* des exposants critiques s et ν, sans pour autant en donner la valeur. Quelques éléments de compréhension à ce sujet sont développés en annexe A.

2.3.3 Synthèse

La section 2.2.3 a permis de mettre en évidence l'existence du phénomène de localisation d'Anderson d'une particule se propageant dans un potentiel désordonné par un raisonnement basé sur des phénomènes d'interférences constructives entre processus à diffusions multiples. Cette description, basée sur une formulation auto-consistante (2.38), a permis de montrer que toute particule dans un désordre en dimension $d \leq 2$ localise, alors qu'il existe une transition de phase métal-isolant pour $d = 3$. Cette transition de phase a été caractérisée comme étant continue avec un seuil de transition délimité par le critère de Ioffe-Regel $kl^* \sim 1$, où k est le nombre d'onde associé à la particule, et l^* la longueur de transport. Le régime de transition est caractérisé par des lois d'échelle (2.45) et (2.46) définissant des exposants critiques s et ν tels que $s = \nu = 1$.

Dans un second temps, il a été nécessaire de formuler un critère de localisation plus fort que le critère de Ioffe-Regel, notamment adapté aux systèmes de taille finie : le critère de Thouless, basé sur un raisonnement de couplage entre états d'énergie propres localisés. Ce critère de Thouless a permis de déterminer un paramètre de contrôle de la transition adapté aux systèmes de taille finie : la conductance adimensionnée g. L'hypothèse d'échelle à un paramètre (2.55) sur g a ensuite permis de construire une théorie phénoménologique de la transition d'Anderson où l'accès d'un système à la phase localisée ou diffusive est entièrement déterminé par les variations de la conductance g en fonction de sa taille, c'est à dire par la fonction β (2.58). La théorie d'échelle 2.3.2 explique pourquoi tout état est localisé pour $d \leq 2$ et démontre l'existence d'une transition de phase pour $d = 3$, déterminée par un paramètre d'ordre de transition g_c.

Du point de vue de ces deux théories, le paramètre de contrôle de la transition d'Anderson peut être vu soit en terme de nombre kl^*, soit en terme de conductance adimensionnée g. Dans les deux cas, le paramètre de contrôle peut être relié à l'énergie E de la particule dans la mesure où $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ et la conductance g dépend de la densité d'état $\nu(E)$ (2.47).[21] Ceci invite donc à définir un paramètre de contrôle de la transition plus uniforme, basé sur l'énergie, avec l'existence d'une *énergie critique de transition* E_c appelée *seuil de mobilité* (*mobility edge* en anglais) séparant la phase localisée/isolante pour $E < E_c$ de la phase diffusive/métallique pour $E > E_c$, comme représenté en figure 2.9. Le régime critique serait toujours caractérisé par les mêmes exposants critiques s et ν sur le coefficient de diffusion D la longueur de localisation ξ_{loc} :

$$D(E) \underset{E \gtrsim E_c}{\sim} |E - E_c|^s \quad \text{et} \quad \xi_{\text{loc}}(E) \underset{E \lesssim E_c}{\sim} |E - E_c|^{-\nu} \tag{2.64}$$

21. L'énergie *totale* E de la particule dans le désordre ayant irrémédiablement une composante cinétique et potentielle, la dépendance en E de la longueur de transport $l^*(E)$ doit aussi être prise en compte dans le critère de Ioffe-Regel pour que les descriptions en terme d'énergie des deux paramètres kl^* et g soient compatibles.

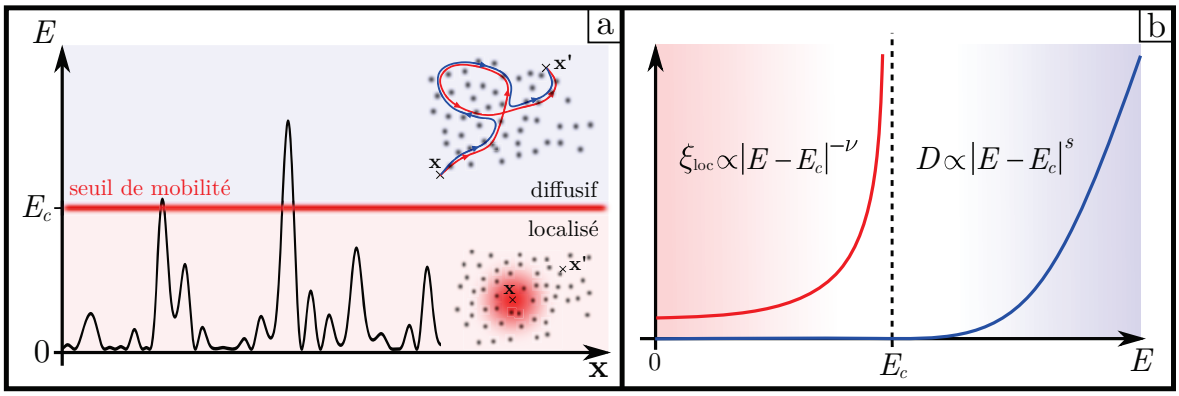

FIGURE 2.9 – **Caractérisation de la transition en terme d'énergie. a.** Le seuil de mobilité E_c est l'énergie critique séparant les états d'énergie localisés des états diffusifs. **b.** A l'approche du seuil de mobilité, les états d'énergie localisés ont une longueur de localisation qui diverge selon l'exposant ν, et les états diffusifs ont un coefficient de diffusion qui s'écarte de zéro selon l'exposant s.

Appuyé par des simulations numériques [163, 164], il est maintenant globalement accepté que les exposants critiques de la transition en $d = 3$ sont $s = \nu = 1.58$, ce qui est assez éloigné de la prédiction $s = \nu = 1$ de la théorie auto-consistante. La raison en est que la théorie auto-consistante (2.40) ne prends pas en compte les fluctuations de la fonction d'onde associée à la particule ayant lieu à toutes les échelles à l'approche du régime critique (y compris aux échelles d'une taille inférieure à l^*). De manière générique, en négligeant les fluctuations, la théorie auto-consistante de la localisation d'Anderson est construite à la manière d'une théorie de champ moyen [22].

Dans le cadre de l'étude des transitions de phase, il n'est pas rare de s'intéresser à la *dimension critique supérieure* d'une transition, qui est la dimension spatiale $d^{\uparrow}$ au-delà de laquelle une théorie de champ moyen donne les bons exposants critiques associés à une transition. Malheureusement, dans le cas de la transition d'Anderson, il a été montré [30, 73] que $d^{\uparrow}$ est infinie, rendant ainsi vain tout espoir de description de la transition avec des outils de champs moyen. On notera néanmoins qu'un effort théorique considérable a été fourni [136, 135] afin d'améliorer la théorie auto-consistante au-delà des quelques idées qui ont été présentées en section 2.2.3.

Il est aussi parfois possible de démontrer les résultats donnés par une théorie d'échelle phénoménologique en partant d'un modèle microscopique en utilisant des méthodes du *groupe de renormalisation*. Ces méthodes mettent à profit l'invariance d'échelle des systèmes critiques pour déterminer les exposants critiques à partir d'un modèle microscopique en effectuant des moyennages successifs des degrés de liberté microscopiques [78]. Là encore, les approches de théorie des champs de localisation d'Anderson théoriquement tractables faisant appel à ces techniques échouent à déterminer les exposants critiques de la transition [6].

La localisation d'Anderson est donc un phénomène complexe à appréhender, plus encore lorsqu'il s'agit de sa composante critique liée à la transition de phase métal-isolant en dimension $d = 3$. L'ensemble des travaux théoriques et numériques conduit depuis près de 60 ans a permis, malgré tout, d'en étendre significativement la compréhension, ces travaux se faisant souvent conjointement avec des études expérimentales qu'il est important d'aborder à présent.

22. Par exemple, l'auto-cohérence de (2.38) n'est pas sans rappeler le caractère auto-cohérent de la condition $m = \tanh(mJ/k_BT)$ permettant de déterminer l'aimantation m d'un ensemble de spins à l'aide d'une théorie de champ moyen pour le modèle d'Ising [78].

2.4 Expériences sur la localisation d'Anderson

Comme cela a été souligné précédemment, les effets de localisation tiennent de la nature ondulatoire du système étudié, et seraient donc *a priori* observables pour avec tout type d'ondes, aussi bien classiques (sonores, lumineuses) que quantiques (électrons, atomes utra-froids). Dans ce qui suit, on dresse un rapide (et volontairement incomplet) historique des les résultats expérimentaux sur la localisation d'Anderson en mettant un accent particulier sur ceux s'intéressant à la transition métal-isolant. A toutes fins utiles, un état de l'art plus complet est disponible en référence [93].

2.4.1 Localisation des électrons

Historiquement, les premières signatures de localisation remontent aux années 70-80 et concernent les propriétés de conduction des électrons dans les solides. Les matériaux utilisés sont essentiellement semi-conducteurs, le désordre étant introduit de manière contrôlée par dopage en impureté. La localisation se présente alors sous la forme d'une conductivité de l'échantillon variant en température T selon une loi en *saut à distance variable* (*variable range hopping* en anglais) $\sigma \propto e^{-(1/T)^{1/4}}$ [117]. Les échantillons étant à température finie, les électrons baignent dans un bain de phonons qui permettent d'activer thermiquement une conductivité finie en faisant sauter les électrons d'état localisé en état localisé. Un gros effort expérimental [5, 146, 127, 74] a été développé pour essayer de produire des matériaux exhibant une transition métal-isolant, dont un exemple est donné en figure 2.10 a. Mais généralement, les mesures ne permettent pas de différencier de manière systématique les transitions métal-isolant uniquement induites par le désordre (transition d'Anderson) des transitions métal-isolant induites par les interactions électroniques (transition de Mott). Ceci est d'autant plus marquant que les tentatives de mesures de l'exposant critique associés à la conductivité ne sont pas compatibles avec ce qui est attendu pour la transition d'Anderson (par exemple, [158] rapporte une mesure de $s = 1$, très éloignée de $s = 1.58$), ce qui est donc directement imputable à la présence d'interactions dans le système [23].

En partant de ce constat, l'étude de la localisation des ondes classiques telles que les ondes électromagnétiques (lumière, ondes radio-fréquences), mécaniques et acoustiques est apparue comme naturelle, les interactions étant *a priori* absentes dans ces systèmes. On notera néanmoins que la recherche de matériaux isolants au sens d'Anderson est un sujet toujours actif [159, 188].

2.4.2 Localisation des ondes classiques

L'étude de la localisation d'Anderson des ondes classiques a commencé dans les années 90 avec des premiers résultats expérimentaux faisant usage d'ultrasons [177], d'ondes mécaniques de flexion dans des plaques métalliques [186], d'onde électromagnétiques micro-ondes dans des guides [75] et de lumière laser dans des poudres semi-conductrices [181]. Toutes prenaient comme caractérisation de la localisation une décroissance exponentielle de l'intensité moyenne mesurée, ce qui est très ambigu du point de vue de l'interprétation des résultats, localisation et absorption ayant dans cette situation la même signature [24] [151].

23. La conclusion est donc que la présence d'interaction change la classe d'universalité de la transition, ce qui fait des systèmes désordonnés en interaction un sujet d'étude à part entière [7, 61].

24. L'absorption d'un échantillon de taille L se caractérise par une extinction de sa transmission selon une loi de *Beer-Lambert* $\mathcal{T} \propto e^{-\alpha L}$, alors que la localisation est caractérisée par $\mathcal{T} \propto e^{-L/\xi_{\text{loc}}}$.

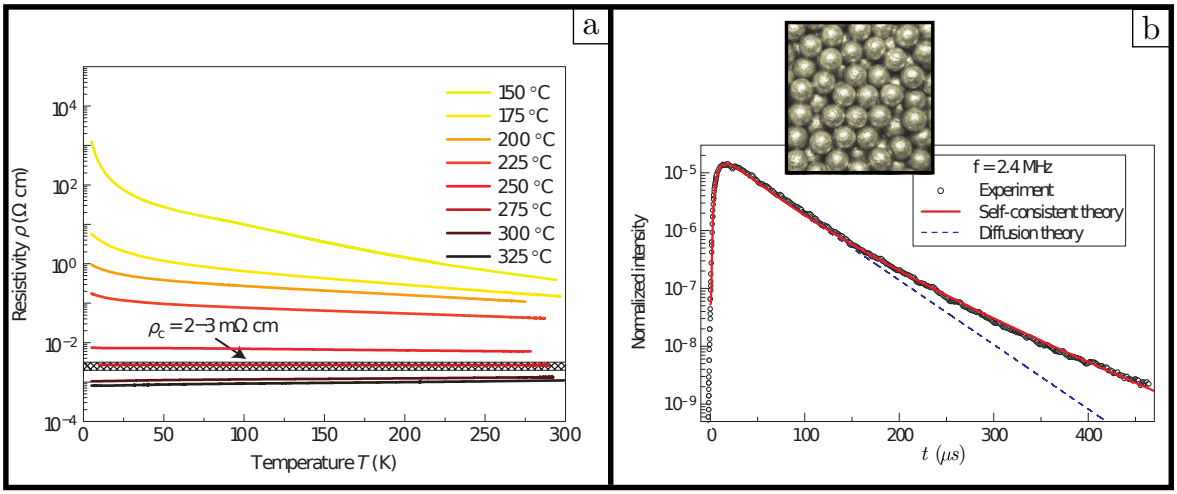

FIGURE 2.10 – **Quelques exemples d'études de la localisation d'Anderson. a.** Mesures de résistivité d'échantillons de $GeSb_2Te_4$ en fonction de la température T de l'échantillon, tiré de [159]. Les différentes courbes correspondent à différentes températures de recuit pour lesquelles le $GeSb_2Te_4$ subit un changement de structure en passant d'amorphe (courbes jaune) à cristallin (courbes noires). Le sens de variation de la résistivité ρ en fonction de la température T est caractéristique du comportement isolant ($\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}T < 0$) et métallique ($\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}T > 0$). Le changement de signe de $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}T$ est donc caractéristique d'une transition métal-isolant. **b.** Intensité transmise au travers un milieu granulaire en aluminium (cf encart) à partir d'un pulse d'ultrasons, tiré de [86]. La localisation est caractérisée par le fait que l'onde reste plus longtemps dans l'échantillon par rapport à une situation diffusive, ce qui explique que l'intensité transmise (courbe noire) aux temps longs de propagation surestime la dynamique diffusive (courbe pointillée).

La difficulté est d'autant plus marquante pour le cas de la lumière, dans la mesure où le critère de Ioffe-Regel $kl^* \sim 1$ nécessaire à l'observation de la localisation nécessite la fabrication de matériaux très diffusants, à très forts indices optiques (typiquement $n \sim 3$), et donc potentiellement très absorbants.

Les expériences ont donc ensuite choisi d'autres critères pour caractériser la localisation : dynamique temporelle de transmission, fluctuations de l'intensité en transmission, etc, qui permettent de différencier clairement absorption et localisation [125, 178]. On notera ici les nombreux résultats obtenus par une expérience de propagation d'ondes mécaniques ultrasonores dans des milieux granulaires en billes d'aluminium [86], un exemple étant donné en figure 2.10 b., ainsi que les expériences réalisées sur des cristaux photoniques [152, 23]. En revanche, même en suivant ces nouvelles méthodes, les tentatives d'observation de la localisation à $d = 3$ [169, 166] et de mesures du régime critique et des exposants [3] pour la lumière se propageant dans des poudres de TiO_2 ont fait débat [25]. Les résultats ont même été ré-analysées *a posteriori* par les auteurs de ces travaux comme étant explicables par de la fluorescence résiduelle des échantillons utilisés [165]. Une étude numérique [162] va encore plus loin et prédit même l'absence pure et simple de localisation de la lumière à $d = 3$ pour un désordre fait de diffuseurs ponctuels si l'on prend en compte le caractère *vectoriel* de l'onde électromagnétique [26] (ce qui est une différence par rapport aux ondes mécaniques et quantiques qui sont *scalaires*). Il n'y a donc pas, à ce jour, d'observation de la localisation de la lumière en $d = 3$ qui fasse réellement consensus [161].

25. Notamment [3] qui rapporte une mesure d'exposant critique $\nu = 0.5$ très éloigné de ce qui est attendu.
26. L'argument de base consiste à dire que le critère de Ioffe-Regel nécessite des densités de diffuseurs très fortes, régimes pour lesquels le couplage dipolaire entre diffuseurs n'est plus négligeable. Celui-ci étant anisotrope (un dipole ne pouvant pas émettre du rayonnement selon son axe de polarisation), il pourrait complètement modifier la dynamique locale de propagation de l'onde dans le milieu.

2.4.3 Localisation des atomes froids

Depuis près de 10 ans, un nouveau type de système est entré dans la course à l'étude de la localisation d'Anderson : les atomes ultra-froids. Souvent produits sous forme de *condensats de Bose-Einstein*, et bien connus pour leur cohérence (et donc leur capacité à produire des interférences), les atomes froids s'avèrent être de très bons candidats en tant que source d'onde quantique pour l'étude des phénomènes de localisation, tant leur degré de contrôle est élevé [22]. Alors que les expériences de localisation d'électrons ou d'ondes classiques se limitent souvent à des expériences de transmission ou des mesures conductance sur des matériaux "*bulk*", les atomes froids se distinguent par leur possibilité de mesurer *directement* les fonctions d'ondes, aussi bien en espace réel par imagerie *in-situ* [126], qu'en espace des impulsions par de l'imagerie par temps de vol. Les atomes froids offrent aussi un possible contrôle absolu des paramètres décrivant la dynamique microscopique, notamment ici les paramètres du désordre (anisotropie, distribution de probabilité, amplitude, etc), mais aussi les interactions entre particules via des outils comme la *résonance de Feshbach* [87]. Ce dernier point est capital dans la mesure où il a été montré que la présence d'effets non-linéaires (comme des interactions entre particules) peuvent *détruire la localisation* et rendre le système diffusif [27] là où celui-ci est localisé sans ces derniers [134, 109]. Les interactions entre particules seraient donc un obstacle à l'observation de la localisation d'Anderson.

Localisation dynamique

Historiquement, l'étude des phénomènes de localisation à l'aide de l'optique atomique et des atomes froids à commencé dans les années 90 avec la réalisation expérimentale des systèmes rotateurs forcés, ou *kicked rotors* en anglais. Ces systèmes peuvent exhiber un phénomène de *localisation dynamique*, un équivalent de la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions. Classiquement, le *kicked rotor périodique* décrit une particule pouvant se déplacer sur un cercle à laquelle on applique périodiquement un pulse de potentiel $\cos\theta$, comme représenté en figure 2.11 a. L'hamiltonien associé est :

$$\mathcal{H}(t) = \frac{p^2}{2} + K\cos\theta \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(t-n) \tag{2.65}$$

où θ sa position angulaire, $p = \dot{\theta}$ le moment angulaire de la particule et K l'amplitude du *kick*. Pour certains paramètres K, le *kicked rotor* classique exhibe un comportement *chaotique* caractérisé par une diffusion ergodique dans l'espace des impulsions.

De la même manière que l'on puisse s'intéresser à la diffusion quantique d'une particule dans un potentiel désordonné, on peut aussi s'intéresser à la diffusion quantique du *kicked rotor* dans l'espace des impulsions. On peut notamment montrer qu'il existe un *mapping* (donc une équivalence mathématique exacte) entre le problème *kicked rotor périodique* quantique et un modèle d'Anderson [28], ce *mapping* étant valable aussi bien en $d = 1$ que $d = 2$ et $d = 3$. Le *kicked rotor* exhibe donc un phénomène de *localisation dynamique* dans l'espace des impulsions tout à fait analogue à la localisation d'Anderson des systèmes désordonnés, ainsi qu'une transition métal-isolant en $d = 3$ pour un paramètre de forçage critique K_c.

27. Notamment *sous-diffusif*, c'est à dire que le système devient diffusif selon un loi $\Delta x \propto t^n$ avec $n < 1/2$.

28. Il est à noter, cependant, que le modèle d'Anderson mappé par le *kicked rotor* n'est pas aléatoire mais pseudo-aléatoire. Mais, il est possible de quantifier à quel point le modèle mappé approche un modèle aléatoire par un test du χ^2 [27].

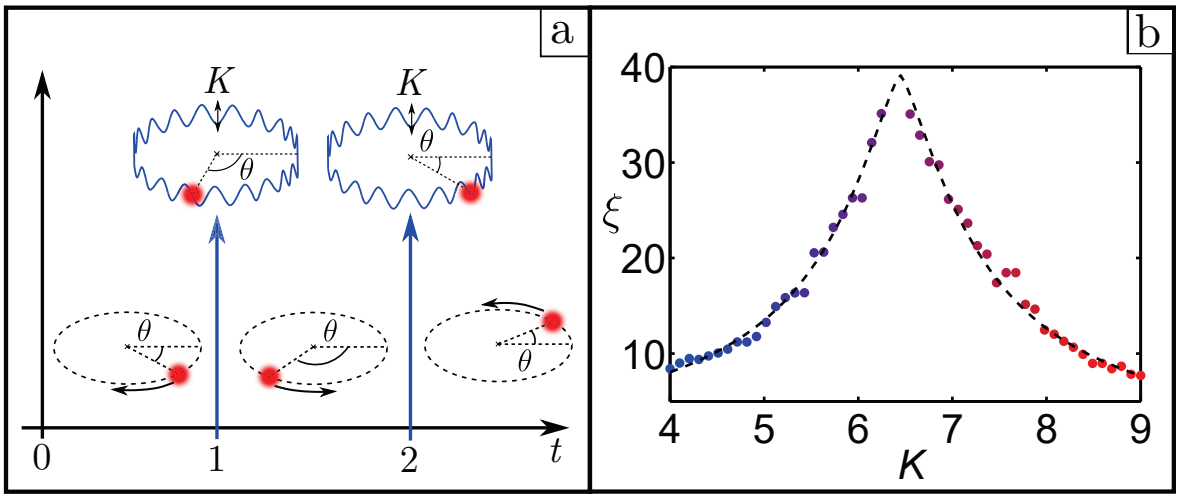

FIGURE 2.11 – **Kicked rotor. a.** Le kicked rotor décrit une particule pouvant se mouvoir sur un anneau qui est forcée périodiquement par un potentiel en $\cos\theta$. **b.** Courbe tirée de l'expérience de kicked rotor atomique quasi-périodique de Chabé et al [33] représentant le paramètre d'échelle ξ en fonction du forçage K. Dans la phase localisée (points bleus) ξ désigne la longueur de localisation, dans la phase diffusive (points rouges) ξ s'apparente à l'inverse du coefficient de diffusion. Les données sont ajustée (pointillés) par une loi de puissance $1/\xi(K) \sim |K - K_c|^\nu$ où $\nu = 1.4 \pm 0.3$, en accord avec les simulations de la localisation d'Anderson. Cette mesure d'exposant critique a été par la suite raffinée par de nouvelles mesures donnant $\nu = 1.63 \pm 0.05$ [108].

Cette correspondance est d'autant plus marquante que ce *mapping* garantirait le fait que le *kicked rotor périodique* quantique et la localisation d'Anderson appartiennent à la même classe d'universalité [105].

La localisation dynamique unidimensionnelle a été extensivement étudiée au courant des années 90 et 2000 avec des expériences d'atomes froids où des atomes placés dans un piège magnéto-optique étaient soumis à un réseau optique pulsé [115, 8] : dans cette situation, les atomes sont très justement décrits par l'hamiltonien (2.65). On notera, à ce titre, que les atomes froids ne sont pas les seuls systèmes quantiques ayant permis une étude expérimentale de la localisation dynamique. En effet, l'existence de ce *mapping* garantit une certaine universalité et offre donc de nombreuses possibilités originales d'étudier la physique de la localisation, comme le montre ces mesures de Bitter et al. [21] de localisation dynamique réalisées sur des jets supersoniques de molécules de N_2 excitées par laser femto-secondes.

Réaliser expérimentalement la généralisation du *kicked rotor périodique* (2.65) en $d = 2$ et $d = 3$ s'avère compliqué, mais une voie alternative a pu être empruntée pour étudier la localisation dynamique en dimension $d > 1$. L'idée est de simuler la présence de dimensions supplémentaires sur le *kicked rotor périodique unidimensionnel* en rendant le *kicked rotor quasi-périodique*. Ceci peut se faire par l'introduction d'une amplitude de *kick* dépendante du temps $K(t)$ dans (2.65) comportant autant de fréquences incommensurables entre elles que l'on veut de dimensions supplémentaires [29]. Cette correspondance entre localisation d'Anderson en $d = 3$ et *kicked rotor quasi-périodique* est supportée théoriquement par l'existence d'un mapping [107], ainsi que des études numériques [106] montrant que les exposants critiques de la transition métal-isolant du *kicked rotor quasi-périodique* sont les mêmes que la transition métal-isolant au sens d'Anderson.

Une étude de la transition métal-isolant en $d = 3$ par l'expérience de Chabé et al. [33], menée au Laboratoire Ph-LAM à Lille (France), rapporte la première mesure d'exposants critiques compatibles avec les simulations numériques.

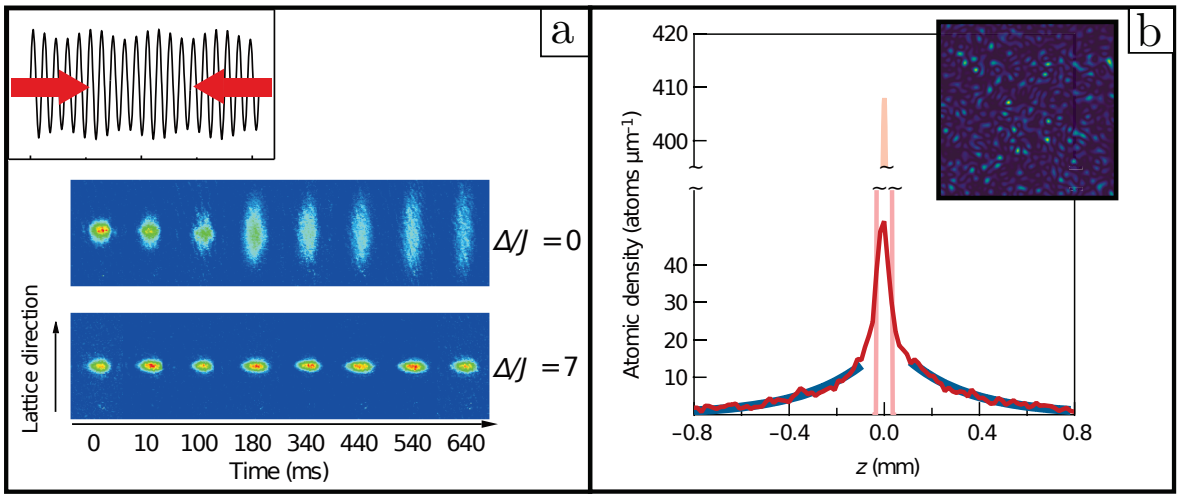

FIGURE 2.12 – **Observation de la localisation d'atomes ultra-froids. a.** Expérience d'expansion d'un condensat en espace libre (panneau haut) et dans un potentiel quasi-périodique (panneau bas), tiré de Roati et al. [144]. La présence du potentiel quais-périodique permet d'arrêter complètement l'expansion du nuage, signature de la localisation. L'encart représente le potentiel quasi-périodique. Ce potentiel est créé par la combinaison de deux faisceaux lasers contra-propageant dont le ratio des longueurs d'onde est *irrationnel*. Cette irrationalité implique que la séquence de profondeurs des puits de potentiel associés à chacun des sites du réseau ne présente aucune régularité. **b.** Mesure de la densité atomique d'un condensat après un temps $t = 1$ s d'expansion dans une figure de tavelures, tiré de Billy et al. [20]. La densité présente des ailes exponentielles, signature de l'observation d'une fonction d'onde localisée.

Ce résultat, représenté en figure 2.11 b., a été obtenu avec la réalisation expérimentale du *kicked rotor quasi-périodique* sur un nuage d'atomes de Cs dans un piège magnéto-optique. Ceci constitue, à ce jour, la seule mesure d'exposants critiques compatible avec ce qui est connu de la localisation d'Anderson, aussi bien sur le plan théorique que numérique.

Localisation d'ondes atomiques

L'engouement de l'optique atomique pour la localisation d'Anderson s'est encore amplifié au courant des années 2000 avec la publication quasiment simultanées en 2008 de deux travaux rapportant la mesure directe de fonctions d'onde localisées. L'expérience de Roati et al. [144] menée au LENS à Florence (Italie) met en avant l'observation de l'arrêt de la diffusion d'un condensat d'atomes de ^{39}K placés dans un potentiel unidimensionnel quasi-périodique, représenté en figure 2.12 a. Il est à noter ici que la localisation "dite d'Anderson" associée à ce type de systèmes *n'appartient pas à la même classe d'universalité* que la localisation d'Anderson pour les systèmes réellement désordonnés[29]. La grande force de cette expérience réside dans le contrôle des interactions (de cœur dur, répulsives) entre atomes formant le condensat par résonance de Feshbach, permettant ainsi d'annuler la longueur de diffusion inter-atomique et d'assurer l'absence totale d'interaction au sein du système.

L'expérience de Billy et al. [20] menée au Laboratoire Charles Fabry à Palaiseau (France) rapporte l'arrêt de la diffusion d'un condensat d'atomes de ^{87}Rb dans un potentiel désordonné unidimensionnel ainsi que la mesure directe d'une fonction d'onde localisée (caractérisée par une décroissance exponentielle), représenté en figure 2.12 b.

29. Par exemple, les modèles d'Aubry-André permettant de décrire ces systèmes prédisent une transition métal-isolant même pour $d = 1$ [53].

Le potentiel désordonné est ici généré par une figure de tavelures (ou *speckle* en anglais), qui est une figure d'intensité aléatoire spatialement générée par la diffraction d'un faisceau laser sur une surface rugueuse. [30]

Le ^{87}Rb ne possédant pas de résonance de Feshbach [31], le contrôle des interactions présentes initialement dans le condensat se fait ici par dilution (diminution de la densité atomique par expansion du condensat). Néanmoins, même si la dilution permet une diminution drastique de l'énergie d'interaction du condensat de sorte que celle-ci soit négligeable (notamment devant l'énergie potentielle moyenne du désordre), elle ne permet pas d'assurer l'absence *totale* d'interaction (même résiduelles) au cours de la propagation des atomes dans le désordre. Dans ces conditions, une dynamique sous-diffusive très lente induite par les interactions répulsives résiduelles peut être attendue dans la limite des temps d'expérience longs [57].

A partir de ces travaux fondateurs sur la localisation unidimensionnelle de condensats, les efforts expérimentaux se sont tournés vers des expériences visant l'étude de localisation en $d = 2$ puis $d = 3$, et notamment sur la transition métal-isolant d'Anderson en $d = 3$ que l'on abordera au chapitre 5.

30. Nous reviendrons longuement sur les caractéristiques d'un tel potentiel au chapitre 4.
31. Ou plus exactement, le ^{87}Rb possède des résonances de Feshbach demandant des contraintes expérimentales extrêmement fortes pour être mises à profit [110].

Chapitre 3

Préparation d'une source d'onde de matière cohérente

Le chapitre précédent a permis de discuter avec quelle pertinence les atomes ultra-froids permettent une étude en conditions contrôlées des phénomènes de localisation. La solution expérimentale qui a été retenue dans le cadre de cette thèse est l'expansion d'un nuage d'atomes condensés dans un désordre créé par une figure de *speckle*. Dans ce chapitre, on s'attachera dans un premier temps à rappeler les conditions d'observation, ainsi que les quelques propriétés des condensats de Bose-Einstein pertinentes pour notre étude. Dans un second temps, on décrira dans les grandes lignes le fonctionnement du dispositif expérimental permettant de produire des nuages atomiques qui serviront de source d'ondes à l'étude de la localisation d'Anderson.

3.1 Quelques propriétés des condensats de Bose-Einstein

La condensation de Bose-Einstein est un phénomène basé sur l'*indiscernabilité* des particules quantiques. Cette indiscernabilité change les statistiques d'occurrence de certains évènements par rapport au cas de particules classiques, plus particulièrement des évènements où les particules occuperaient un même état individuel. Après avoir illustré cet effet avec de la combinatoire élémentaire de particules sans interaction, on s'attachera à définir le phénomène de condensation de Bose-Einstein. Puis on rappellera quelques propriétés des condensats pour des particules en interaction répulsive, en mettant un accent particulier sur le régime de Thomas-Fermi qui permet de décrire les propriétés de la densité d'un condensat piégé par un potentiel externe.

3.1.1 Statistique de Bose-Einstein et condensation

On considère la situation simple où deux particules *identiques* peuvent être réparties aléatoirement dans deux puits de potentiel. L'état d'une particule est complètement spécifié par sa présence dans l'un des deux puits. On pourrait alors se poser la question suivante : avec quelle probabilité les deux particules peuvent-elles occuper le même état ?

- ⋆ Dans le cas de particules *discernables*, représenté en figure 3.1 a., il est possible d'assigner un numéro à chaque particule, respectivement 1 et 2. Il y a alors 4 configurations différentes dont 2 où les particules occupent un même état.

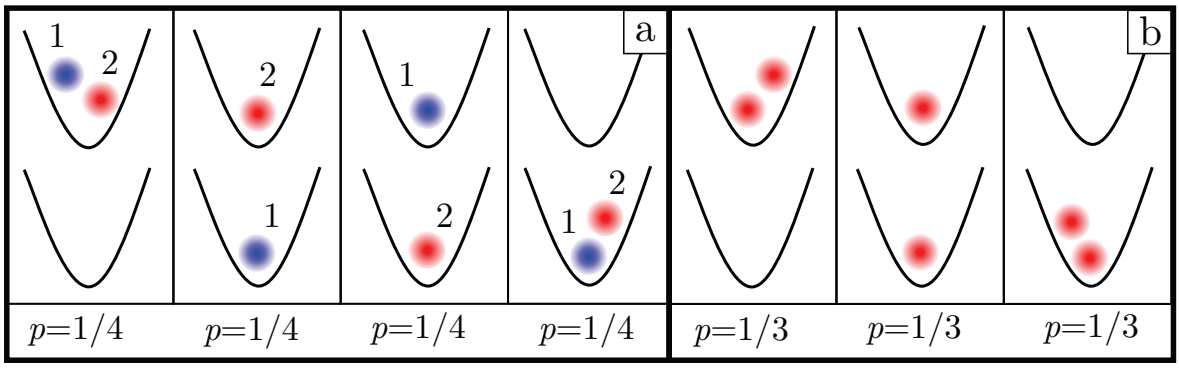

FIGURE 3.1 – **Effet de l'indiscernabilité sur une statistique. a.** Pour des particules discernables, il y a 4 configurations différentes équiprobables. **b.** Pour des particules indiscernables, il n'y a que 3 configurations différentes équiprobables.

Après tirages aléatoires, on trouvera donc les particules dans un même état avec une probabilité $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

⋆ Dans le cas de particules *indiscernables*, représenté en figure 3.1 b., la configuration ayant une particule par puits ne peut pas être comptée deux fois, il n'y a donc que 3 possibilités différentes. Après tirage aléatoire, on trouvera donc les deux particules dans le même état avec une probabilité $p = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.

Des particules indiscernables ont donc une probabilité accrue de se trouver dans un même état par rapport à des particules discernables. La mécanique quantique décrivant des particules identiques comme étant fondamentalement indiscernables, on s'attend donc à ce que la statistique d'occupation d'états de particules quantiques soit fondamentalement différentes de celle de particules classiques.

Dans le cadre de la mécanique quantique, les particules indiscernables sont réparties selon deux grandes familles : les bosons et les fermions. On s'attend à ce que l'effet grégaire statistique mis en évidence plus haut ne soit observable qu'avec des particules bosoniques, le principe d'exclusion de Pauli interdisant les situations où deux fermions se trouveraient dans un même état.

Condensation dans un piège

On considère donc un ensemble de N bosons, *sans interaction*, à l'équilibre thermodynamique avec un *réservoir* de particules à une température T et un potentiel chimique μ,[1] placé dans un potentiel externe harmonique donné par :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)\,, \tag{3.1}$$

où les $\{\omega_i\}_i$ correspondent aux fréquences de piégeage associées à chaque direction de l'espace. L'ensemble des états propres d'énergie accessibles par chaque atome correspond donc à l'ensemble des états liés associé au piège harmonique, soit [124] :

$$E_{\mathbf{n}} = \hbar\omega_x\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y\left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} \in \mathbb{N}^3\,. \tag{3.2}$$

1. Ils sont donc décrit statistiquement à l'aide de l'ensemble *grand-canonique* [56].

La population *moyenne* $N_{\mathbf{n}}$ d'atomes occupant un niveau d'énergie $E_{\mathbf{n}}$ est alors donnée par la *distribution de Bose-Einstein* [56] :

$$N_{\mathbf{n}} = \frac{g_{\mathbf{n}}}{\mathrm{e}^{(E_{\mathbf{n}}-\mu)/k_B T} - 1}\,, \tag{3.3}$$

où $g_{\mathbf{n}}$ désigne la dégénérescence du niveau d'énergie $E_{\mathbf{n}}$. Dans ces conditions, le potentiel chimique μ se doit d'être inférieur à l'énergie $E_{\mathbf{0}}$ de l'état fondamental. En effet, dans le cas contraire où on aurait $\mu > E_{\mathbf{0}}$, il est plus avantageux énergiquement pour une particule du réservoir de venir occuper l'état $E_{\mathbf{0}}$. Et comme il n'y a pas de limite de nombre de bosons pouvant occuper un état donné (contrairement aux fermions par principe d'exclusion de Pauli), il est possible de continuer à ajouter des particules sur le niveau fondamental $E_{\mathbf{0}}$ jusqu'à éventuellement vider le réservoir. Ce raisonnement aberrant se traduit sur l'expression (3.3) par le fait que $N_{\mathbf{n}}$ est négatif si $\mu > E_{\mathbf{n}}$ (et ce, quel que soit $\mathbf{n}$ car $E_{\mathbf{n}} > E_{\mathbf{0}}$).

La condition $\mu < E_{\mathbf{0}}$ permet donc de garantir un nombre $N_{\mathbf{0}}$ *fini* de particules occupant l'état fondamental $E_{\mathbf{0}}$. Le nombre total N *moyen* de particules peut alors être écrit comme :

$$N = N_{\mathbf{0}} + N_e \quad \text{avec} \quad N_e = \sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{0}} N_{\mathbf{n}}\,, \tag{3.4}$$

où $N_{\mathbf{0}}$ désigne donc l'occupation du niveau fondamental $E_{\mathbf{0}}$, et N_e l'occupation des niveaux excités.

Il est ici remarquable que la condition $\mu < E_{\mathbf{0}}$ implique qu'à une température fixée T, la population N_e de particules dans les états excités *admet une borne supérieure* $N_e^{\max}$ telle que [45] :

$$N_e(\mu, T) \leq N_e^{\max}(T) = \sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{0}} \frac{g_{\mathbf{n}}}{\mathrm{e}^{(E_{\mathbf{n}}-E_{\mathbf{0}})/k_B T} - 1}\,. \tag{3.5}$$

Cette saturation implique donc qu'à température T fixée, disposer d'une quantité totale $N > N_e^{\max}$ de particules permet de s'assurer qu'au moins $N - N_e^{\max}$ occuperont l'état fondamental. De plus, à température T fixée, c'est le potentiel chimique μ qui permet de fixer le nombre de particules, et en particulier l'occupation du fondamental :

$$N_{\mathbf{0}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E_{\mathbf{0}}-\mu)/k_B T} - 1}\,. \tag{3.6}$$

Le phénomène de *condensation de Bose-Einstein* résulte de la combinaison de ces deux considérations. Puisque la population des états excités est saturée, augmenter le nombre de particules au-delà de $N_e^{\max}$ garantit d'augmenter à coup sûr la population $N_{\mathbf{0}}$ du fondamental. Cela se traduit notamment sur l'expression (3.6) qui montre que la population $N_{\mathbf{0}}$ du fondamental diverge lorsque μ tend vers $E_{\mathbf{0}}$. Cette divergence caractérise donc une *occupation macroscopique* de l'état fondamental du piège, ce qui constitue une définition de la condensation de Bose-Einstein. L'occupation est d'autant plus macroscopique que le potentiel chimique μ se rapproche du fondamental $E_{\mathbf{0}}$. En effet, en faisant un développement limité à l'ordre 1 de (3.6), on a :

$$N_{\mathbf{0}} \underset{\mu\sim E_{\mathbf{0}}}{\sim} \frac{k_B T}{E_{\mathbf{0}} - \mu} \quad \text{soit} \quad \mu \sim E_{\mathbf{0}} - \frac{k_B T}{N_{\mathbf{0}}}\,. \tag{3.7}$$

D'après (3.7), la température T apparait comme un paramètre permettant de contrôler la manière dont le potentiel chimique μ s'approche du niveau fondamental $E_{\mathbf{0}}$, et donc de piloter la population $N_{\mathbf{0}}$ du fondamental.

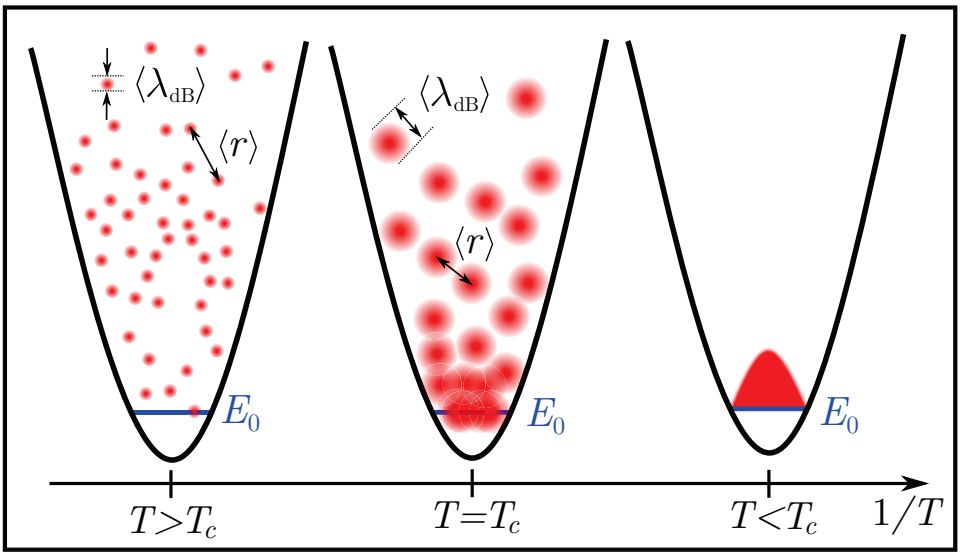

FIGURE 3.2 – **Critère phénoménologique de condensation.** Pour que le phénomène de condensation sur l'état fondamental d'énergie E_0 ait lieu, il ne doit pas être possible de discerner les différentes particules sur la base de leur position spatiale. Cette condition est vérifiée pour des températures inférieures à une certaine température T_c, lorsque la longueur d'onde moyenne thermique des particules $\langle\lambda_{\mathrm{dB}}\rangle$ est de l'ordre ou plus grande que la distance moyenne $\langle r\rangle$ entre particules.

En réalité, on peut montrer [133] que cette divergence peut être associée à une *transition de phase* pour un gaz parfait de bosons entre une phase thermique et une phase condensée, une transition qui est donc caractérisée par une température critique T_c ainsi que des exposants critiques. Dans la suite, on cherchera à déterminer un critère phénoménologique de transition qui servira de référence pour les expériences visant à produire des condensats en laboratoire.

Critère phénoménologique de condensation

Comme on l'a vu précédemment, le phénomène de condensation repose fondamentalement sur l'utilisation d'une statistique quantique comme (3.3) pour expliquer l'occupation d'états d'énergie par des particules bosoniques indiscernables. *A priori*, les particules classiques ne sont pas indiscernables puisqu'il est théoriquement possible de différencier chacune d'elle par leur position spatiale, d'assigner à chacune une étiquette avec un numéro, et de suivre leur mouvement classique au cours du temps.

Mais on sait que tout cela est interdit du point de vue de la mécanique quantique, puisqu'une particule est en réalité toujours délocalisée spatialement sur une taille typique Δx déterminée par la relation d'incertitude d'Heisenberg $\Delta x\,\Delta p \sim \hbar$. En estimant l'incertitude en impulsion par la longueur d'onde de Broglie λ_{dB} telle que $\Delta p \sim h/\lambda_{\mathrm{dB}}$, on en déduit que la largeur spatiale d'un paquet d'onde associé à une particule individuelle est donnée par $\Delta x \sim \lambda_{\mathrm{dB}}$.

Les effets liés l'indiscernabilité seront donc non-négligeables s'il y a *recouvrement* des paquets d'onde individuels. Dans ce cas, la mesure d'une particule en une position $\mathbf{x}$ de l'espace où plusieurs fonctions d'onde se recouvrent ne permet pas discriminer une quelconque identité d'une particule qui proviendrai d'un paquet d'onde en particulier.

Pour le cas d'un gaz parfait de particules décrit par la statistique de Maxwell-Boltzmann, l'énergie cinétique moyenne par particule $\langle E_k \rangle / N$ est reliée à la température T du gaz par le théorème d'équipartition de l'énergie $\langle E_k \rangle / N \sim k_B T$ [56]. Ici, $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne sur les réalisations de l'ensemble statistique considéré. On peut donc définir une longueur d'onde de de Broglie *moyenne thermique* $\langle \lambda_{\text{dB}} \rangle$ associée au gaz telle que :

$$\frac{\langle E_k \rangle}{N} = \frac{\hbar^2 (2\pi / \langle \lambda_{\text{dB}} \rangle)^2}{2m} \sim k_B T \quad \text{soit que} \quad \langle \lambda_{\text{dB}} \rangle \propto 1/\sqrt{T}\,. \tag{3.8}$$

La situation est représentée en figure 3.2. Plus la température du gaz est basse, plus l'énergie cinétique moyenne est faible et donc plus la taille moyenne $\langle \lambda_{\text{dB}} \rangle$ d'un paquet d'onde individuel augmente. Si le gaz est enfermé dans un volume fini V, sa densité $n = N/V$ permet de définir une distance moyenne inter-particule $\langle r \rangle$ telle que $n = 1/\langle r \rangle^3$. Il y a donc recouvrement des fonctions d'onde individuelles des particules du gaz lorsque $\langle \lambda_{\text{dB}} \rangle \gtrsim \langle r \rangle$, autrement dit lorsque :

$$n \, \langle \lambda_{\text{dB}} \rangle^3 \gtrsim 1\,, \tag{3.9}$$

où la quantité $n \, \langle \lambda_{\text{dB}} \rangle^3$ est appelée *densité dans l'espace des phases*. La condition (3.9) indique donc qu'il y a condensation du nuage lorsque sa température T est inférieure à une certaine température de transition T_c dont un ordre de grandeur est donné par $\langle \lambda_{\text{dB}} \rangle (T_c) \sim \langle r \rangle$.

3.1.2 Équation de Gross-Pitaevskii

Dans la partie précédente a été présenté le phénomène de condensation pour des bosons *sans interaction*. En pratique, un gaz n'est jamais parfait et les particules peuvent entrer en collision les unes avec les autres via un potentiel $U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = g\,\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ d'interaction dite *de contact*, où $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont les positions des deux particules entrant en collision.

Intuitivement, on pourrait penser que des interactions pourraient détruire l'état de condensat. En effet, supposons que l'on ait deux particules occupant le niveau fondamental $E_{\mathbf{0}}$ et qui interagissent avec avec une énergie typique U. Si $U > E_{\mathbf{1}} - E_{\mathbf{0}}$ où $E_{\mathbf{1}}$ est l'énergie du premier niveau excité, une collision pourrait expulser les deux particules du niveau fondamental vers le premier niveau excité, et ce, sans même évoquer la notion de température. Cet effet, appelé *déplétion quantique*, a été longuement étudié dans des gaz quantiques d'hélium superfluide [80] et est sujet à investigation expérimentalement avec des condensats d'atomes froids [185, 34].

Paramètre d'interactions entre particules

Dans la majorité des situations discutées ici, les gaz utilisés seront dits *dilués*, au sens où les densités de particules utilisées sont suffisamment faibles pour que les collisions inter-particules soient traitées comme étant à basses énergies, c'est à dire des collisions en onde s sphériques. Dans ces conditions, la collision entre deux particules est entièrement déterminée par un paramètre appelé *longueur de diffusion* [176], noté a_s, représenté succintement en figure 3.3. Le coefficient g qui décrit l'intensité du potentiel d'interaction entre particules peut être alors relié à a_s de sorte que $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$. Le signe de a_s détermine si les interactions sont attractives ou répulsives. Dans la suite, les interactions considérées seront *exclusivement* répulsives, soit $a_s > 0$.

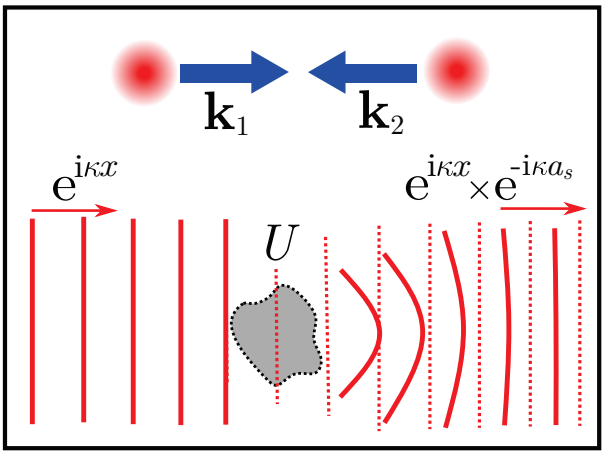

FIGURE 3.3 – **Définition qualitative de la longueur de diffusion.** Par changement de référentiel, le problème de la collision de deux particules identiques d'impulsions $\hbar\mathbf{k}_1$ et $\hbar\mathbf{k}_2$ peut se ramener à la diffusion d'une particule d'impulsion $\hbar\kappa = \hbar\sqrt{|\mathbf{k}_1|^2 + |\mathbf{k}_2|^2}$ sur un potentiel effectif d'interaction U. Le produit κa_s, où a_s est la longueur de diffusion, définit le déphasage entre l'onde incidente et l'onde diffusée. $a_s > 0$ est donc associée à un potentiel U répulsif (retard de phase), et $a_s = 0$ est équivalent à l'absence d'interaction (pas de déphasage). La résonance de Feshbach est basée sur le contrôle de ce déphasage κa_s à l'aide d'un champ magnétique [176].

Équation d'évolution d'un condensat

La connaissance du potentiel d'interaction inter-particule U permet de connaître l'expression générale de l'hamiltonien associé à un gaz de bosons. Comme il l'a été évoqué plus haut, des particules quantiques sont fondamentalement indiscernables. [2]

Pour décrire la dynamique d'un gaz de bosons, il faut donc définir un opérateur champ $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ au sens de la seconde quantification. Selon cette formulation, les opérateurs $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^\dagger$ sont respectivement des opérateurs *annihilation* et *création* de particules, et le produit $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ est alors un opérateur comptant le nombre de particules à la position $\mathbf{x}$ à l'instant t [6]. [3] L'hamiltonien associé à un gaz de bosons piégé par un potentiel (3.1) s'écrit alors :

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \mathrm{d}\mathbf{x}\, \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) + \int \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{x}'\, U(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)\hat{\Psi}(\mathbf{x}', t)\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)\,. \tag{3.10}$$

Le premier terme est un terme d'énergie (cinétique et potentielle) par particule, le second un terme d'interaction faisant intervenir un double produit $\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}$. L'hamiltonien permet (3.10) de déterminer la dynamique de $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ par l'équation de Heisenberg [31] :

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \left[\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\mathcal{H}} \right] , \tag{3.11}$$

2. Ceci tient du fait que les particules quantiques sont, à proprement parler, des *excitations* d'un champ quantique. La notion de particule ne fait donc référence qu'à une manière de compter, une unité de mesure, de comment un champ quantique est excité. Il n'y a donc aucun sens à donner une quelconque individualité à une unité de mesure.

3. On peut par ailleurs montrer [31, 6] que l'opérateur $\hat{\Psi}$ possède des propriétés de commutation caractéristiques des bosons telles que $\left[\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{x}', t') \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$.

qui peut se développer sous la forme :

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x})\right]\hat{\Psi}(\mathbf{x},t) + \left[\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, U(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}',t)\hat{\Psi}(\mathbf{x}',t)\right]\hat{\Psi}(\mathbf{x},t)\,, \quad (3.12)$$

en utilisant les relations de commutation sur l'opérateur bosonique $\hat{\Psi}$, et l'isotropie du potentiel $U(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = U(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$. Comme évoqué plus haut, les interactions d'intérêt ici sont dites "de contact", de sorte que $U(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) = g\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, ce qui simplifie le terme d'interaction de (3.12) en :

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}) + g\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x},t)\hat{\Psi}(\mathbf{x},t)\right]\hat{\Psi}(\mathbf{x},t)\,. \quad (3.13)$$

Comme on l'a vu plus haut, un condensat de Bose-Einstein se caractérise par une occupation macroscopique de l'état fondamental du système, noté $|\mathbf{0}\rangle$. Pour le cas d'un gaz de bosons sans interaction, l'état fondamental $|\mathbf{0}\rangle$ correspond à l'état de plus basse énergie des états à une seule particule.[4] En présence d'interactions, il est certain que cela n'est plus le cas (notamment à cause de la déplétion quantique), mais on peut au moins supposer l'existence de $|\mathbf{0}\rangle$.

D'un point de vue pratique, la quantité physique relative à un condensat qui sera mesurable expérimentalement est sa densité $n = \langle\mathbf{0}|\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}|\mathbf{0}\rangle = \langle\hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi}\rangle_0$. Il fait alors sens de séparer l'opérateur champ $\hat{\Psi}$ selon sa moyenne $\langle\hat{\Psi}\rangle_0$ et ses fluctuations $\delta\hat{\Psi}$ tel que :

$$\hat{\Psi} = \phi_0 + \delta\hat{\Psi} \quad \text{où} \quad \phi_0 = \langle\hat{\Psi}\rangle_0 \quad \text{et} \quad \langle\delta\hat{\Psi}\rangle_0 = 0\,. \quad (3.14)$$

Cela signifie du point de vue de la densité n que :

$$\begin{aligned} n &= \langle(\phi_0^* + \delta\hat{\Psi}^\dagger)(\phi_0 + \delta\hat{\Psi})\rangle_0 \\ &= |\phi_0|^2 + \langle\delta\hat{\Psi}^\dagger\delta\hat{\Psi}\rangle_0\,. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Une occupation *macroscopique* de l'état fondamental signifie qu'il y a tellement de particules dans le condensat que les fluctuations quantiques de la densité $\langle\delta\hat{\Psi}^\dagger\delta\hat{\Psi}\rangle_0$ deviennent négligeables devant la moyenne $|\phi_0|^2$.[5] Cela revient donc à remplacer l'opérateur $\hat{\Psi}$ par sa moyenne ϕ_0, où ϕ_0, qui est une grandeur scalaire complexe, s'apparente ici à un *champ classique* [184]. ϕ_0 est alors appelée *fonction d'onde macroscopique* associée au condensat et est normalisée pour donner le nombre de particules N_0 dans l'état fondamental tel que :

$$\int \mathrm{d}\mathbf{x}\,|\phi_0|^2 = N_\mathbf{0}\,. \quad (3.16)$$

Dans cette approximation, l'équation d'évolution (3.13) devient l'*équation de Gross-Pitaevskii* :

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\phi_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}) + g|\phi_0|^2\right]\phi_0(\mathbf{x},t)\,. \quad (3.17)$$

4. Pour un système homogène, il s'agit donc l'état d'impulsion nulle $|\mathbf{k}=0\rangle$. Pour un gaz piégé, il s'agit du niveau fondamental du piège.

5. Cela revient à négliger la déplétion quantique, ce qui est effectivement valable lorsque le gaz considéré est dit *dilué*, i.e. tel que $n\,a_s^3 \ll 1$ [133]. Dans cette limite, on conserve une occupation macroscopique de particules dans l'état fondamental même en présence d'interactions.

Le fait d'avoir négliger les fluctuations dans (3.15) devant la moyenne est justement caractéristique d'une théorie de champ moyen. [6] Par ailleurs, il est remarquable que (3.17) corresponde à une équation de Schrödinger sur la fonction d'onde ϕ_0 avec un terme supplémentaire non-linéaire $g|\phi_0|^2$ dû aux interactions. Produire expérimentalement une situation où le terme d'interaction serait négligeable devant les autres termes d'énergie (soit par dilution, soit à l'aide des résonances de Feshbach) conduit le condensat à adopter une dynamique associée à une particule unique de fonction d'onde macroscopique ϕ_0.

Enfin, on peut ajouter que la prise en compte des fluctuations (et donc de la déplétion quantique) dans la dynamique peut se faire en linéarisant en $\delta\hat{\Psi}$ l'équation (3.13) par l'*approche de Bogoliubov*, ce qui permet de dériver de manière perturbative le spectre complet des excitations du condensat [31, 133].

Recherche de solutions stationnaires

Dans une situation stationnaire, on peut chercher des solutions à (3.17) de la forme $\phi_0(\mathbf{x}, t) = \phi_0(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t/\hbar}$, soit :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}) + g|\phi_0|^2\right]\phi_0(\mathbf{x}) = \mu\,\phi_0(\mathbf{x})\,, \tag{3.18}$$

qui est appelée *équation de Gross-Pitaevskii stationnaire*. Le coefficient μ correspond bien au *potentiel chimique* du condensat [44]. Une manière de s'en convaincre est de considérer le cas d'un gaz homogène enfermé dans un volume $\mathcal{V}$. L'énergie totale du gaz est alors donnée par $\langle E\rangle = N_\mathbf{0}(N_\mathbf{0}-1)g/2\mathcal{V}$ où $g/\mathcal{V}$ est le coût énergétique d'une interaction entre deux particules, et $N_\mathbf{0}(N_\mathbf{0}-1)/2 \sim N_\mathbf{0}^2/2$ le nombre de paires différentes qu'il est possible de faire en combinant deux particules deux à deux. La définition thermodynamique du potentiel chimique donne $\mu = \partial\langle E\rangle/\partial N_\mathbf{0} = gN_\mathbf{0}/\mathcal{V}$, ce qui est compatible avec ce que donne la solution homogène $\phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0$ de (3.18), à savoir $\mu = g|\phi_0|^2 = gN_\mathbf{0}/\mathcal{V}$.

3.1.3 Régime de Thomas-Fermi

L'équation de Gross-Pitaevskii (3.18) permet de déterminer la densité locale $n(\mathbf{x}) = |\phi_0(\mathbf{x})|^2$ d'un condensat placé dans un potentiel externe $V(\mathbf{x})$. Dans la suite, on détermine la densité d'un condensat piégé à l'aide de l'approximation de Thomas-Fermi.

Détermination de la taille du condensat

Par simplicité, on considère dans un premier temps un condensat *sans interaction* dans un piège (3.1) isotrope tel que $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_0$. En supposant une taille typique ζ_h pour le condensat, on donner un ordre de grandeur de l'énergie potentielle moyenne par particule $\langle E_p\rangle/N_\mathbf{0} \sim m\omega_0\zeta_\mathrm{h}^2/2$. Pour s'étaler sur une taille ζ_h, les particules individuelles doivent avoir une impulsion typique de l'ordre $\hbar/\zeta_\mathrm{h}$, et donc une énergie cinétique de l'ordre $\langle E_k\rangle/N_\mathbf{0} \sim \hbar^2/2m\zeta_\mathrm{h}^2$.

6. On reconnaîtra, par ailleurs, la caractère auto-cohérent de (3.18) par le fait que le terme d'énergie d'interaction $g|\phi_0|^2$ dépend de la variable dynamique ϕ_0, dont l'évolution est déterminée par le terme $g|\phi_0|^2$, etc.

Le théorème du viriel[7] assure que l'énergie totale d'un système placé dans un potentiel harmonique est équitablement répartie entre énergie cinétique et potentielle, soit :

$$\frac{\langle E_k \rangle}{N_0} = \frac{\langle E_p \rangle}{N_0} \quad \text{soit} \quad \zeta_\text{h} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\,, \tag{3.19}$$

où ζ_h se réfère à la *taille de l'oscillateur harmonique*. Sans interaction, la taille du condensat est donc déterminée par un équilibre entre le piège qui tend à confiner le gaz en son centre, et l'énergie cinétique des particules qui tend à étendre le gaz autour de cette position.

En prenant en compte des interactions *répulsives* entre particules, on peut s'attendre à ce que la taille réelle ζ du nuage soit supérieure à ζ_h. D'après ce qui précède, en augmentant la taille du condensat à ζ, on note que l'on augmente l'énergie potentielle du gaz comme $\langle E_p \rangle \sim \zeta^2$ et que l'on diminue l'énergie cinétique comme $\langle E_k \rangle \sim 1/\zeta^2$. On peut évaluer l'énergie moyenne d'interaction par particule $\langle E_\text{int} \rangle / N_0$, qui est, comme on l'a vu en section 3.1.2 :

$$\frac{\langle E_\text{int} \rangle}{N_0} \sim \frac{g\, N_0}{2\mathcal{V}}\,. \tag{3.20}$$

Lorsque le nombre de particules N_0 est suffisant, il devient alors possible de *négliger l'énergie cinétique devant l'énergie d'interaction* telle que $\langle E_\text{int} \rangle \gg \langle E_k \rangle$, ce qui correspond à la situation où $\zeta \gg \zeta_\text{h}$. Dans cette situation, la taille du condensat est déterminée par un équilibre entre le confinement du piège et l'expansion du gaz par répulsion inter-particules.

Approximation de Thomas-Fermi

L'*approximation de Thomas-Fermi* revient donc à négliger le terme cinétique devant le terme d'interaction dans l'équation (3.18), soit :

$$\left[V(\mathbf{x}) + g|\phi_0|^2\right] \phi_0(\mathbf{x}) = \mu\, \phi_0(\mathbf{x})\,, \tag{3.21}$$

ce qui permet de déterminer la densité locale $n(\mathbf{x}) = |\phi_0(\mathbf{x})|^2$ du condensat :

$$n(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mu - V(\mathbf{x}))\,/g & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{x}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.22}$$

Dans le régime de Thomas-Fermi, la densité est donc donnée par l'opposé $-V(\mathbf{x})$ du potentiel externe. Dans le cas d'un piège harmonique (3.1), la densité prend donc la forme d'une parabole inversée, représentée en figure 3.4 a., s'étalant sur une taille typique ζ_TF appelée *rayon de Thomas-Fermi* :

$$\zeta_\text{TF} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2}}\,. \tag{3.23}$$

Cette longueur a été déterminée par la condition $n(|\mathbf{x}| = \zeta_\text{TF}) \sim 0$, où $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ est la fréquence moyenne du piège harmonique (3.1). La condition $\zeta_\text{TF} \gg \bar{\zeta}_h$, où $\bar{\zeta}_h = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ est la taille moyenne de l'oscillateur harmonique associé au piège, peut alors se réécrire :

$$\mu \gg \hbar\bar{\omega}\,. \tag{3.24}$$

7. Le théorème du viriel permet de relier l'énergie cinétique $\langle E_k \rangle$ et potentielle $\langle E_p \rangle$ moyennes lorsqu'un système est soumis à un potentiel conservatif $V(x) \propto x^n$. Plus particulièrement, on montre [56] que $2\langle E_k \rangle = n\langle E_p \rangle$.

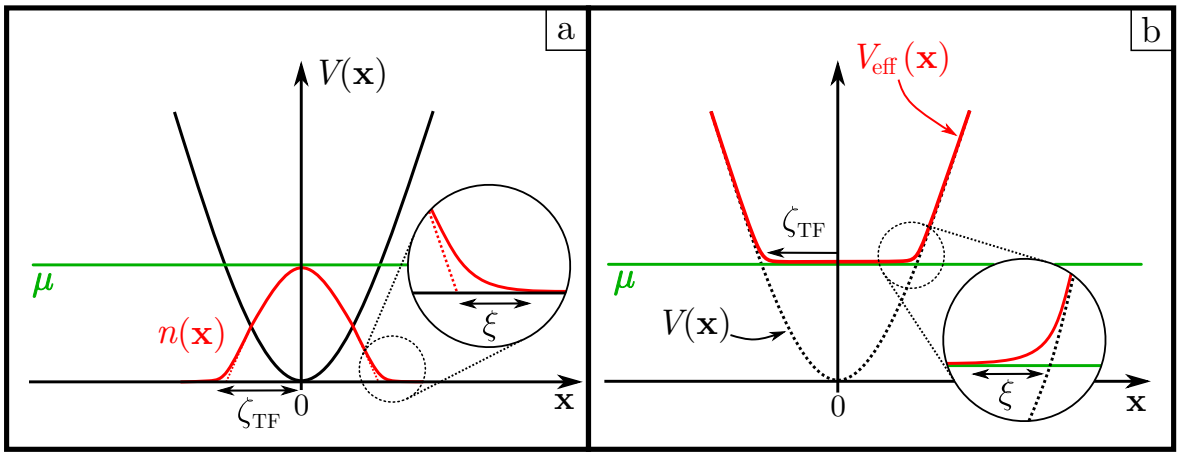

FIGURE 3.4 – **Régime de Thomas-Fermi. a.** Dans un piège harmonique, la densité $n(\mathbf{x})$ d'un condensat prend la forme d'une parabole inversée sur une taille typique donnée par le rayon de Thomas-Fermi ζ_{TF}. L'approximation échoue à décrire "les bords" du condensat, sur une distance $\xi \ll \zeta_{\mathrm{TF}}$ appelée *longueur de cicatrisation* **b.** Au centre du piège, le potentiel externe $V(\mathbf{x})$ est totalement écranté par le champ moyen $g\,n(\mathbf{x})$. Du point de vue des particules individuelles, le potentiel effectif total $V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + g\,n(\mathbf{x})$ ressenti est donc homogène et égal au potentiel chimique μ.

Autrement dit, les particules ont une énergie d'interaction telle qu'elles ne peuvent pas résoudre les états discrets (3.2) de l'oscillateur harmonique supportés par le piège $V(\mathbf{x})$.

Du point de vue des particules individuelles du condensat, le potentiel de champ moyen $g\,n(\mathbf{x})$ *écrante* exactement le potentiel externe $V(\mathbf{x})$ [8]. On peut donc considérer que chaque particule prise individuellement "voit" un potentiel effectif total $V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + g\,n(\mathbf{x})$ tel que :

$$V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu & \text{lorsque } \mu > V(\mathbf{x}) \\ V(\mathbf{x}) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.25}$$

Tout se passe donc comme si chaque particule du condensat occupait individuellement un unique niveau d'énergie μ homogène spatialement, comme représenté en figure 3.4 b.

En combinant la normalisation (3.16) et le résultat (3.22), on obtient l'expression du potentiel chimique μ en fonction du nombre N_0 de particules condensées [133] :

$$\mu = \frac{m^{1/5}}{2}(15\,a_s\,\hbar^2\bar{\omega}^3\,N_0)^{2/5} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2}\left(\frac{15\,N_0\,a_s}{\bar{\zeta}_h}\right)^{2/5}. \tag{3.26}$$

En pratique, l'approximation de Thomas-Fermi décrit bien la densité d'un condensat proche du centre du piège. En effet, sur les "bords" du condensat, la densité $|\phi_0|^2$ n'est pas assez importante pour que l'énergie d'interaction locale $g|\phi_0|^2$ associée y soit négligeable devant l'énergie cinétique. Il existe donc une certaine longueur ξ sur laquelle énergie cinétique $\langle E_k\rangle/N_0 \sim \hbar^2/2m\xi^2$ et énergie d'interaction (3.20) deviennent du même ordre de grandeur :

$$\frac{\langle E_{\mathrm{int}}\rangle}{N_0} = \frac{\langle E_k\rangle}{N_0} \quad \text{soit} \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{n_0 m g}}, \tag{3.27}$$

8. Cet écrantage est d'ailleurs très similaire à l'écrantage électrostatique de Thomas-Fermi que subissent les électrons dans les solides [160].

où $n_0 = N_0/\mathcal{V} \sim N_0/\zeta_{\text{TF}}^3$ est la densité moyenne du gaz. La longueur ξ est appelée *longueur de cicatrisation* (ou *healing length* en anglais), et correspond donc à la longueur typique sur laquelle le condensat va s'étaler avant de pouvoir écranter un potentiel externe par mécanisme de Thomas-Fermi selon (3.22), comme indiqué en figures 3.4.

Dans le cadre de l'approximation de Thomas-Fermi, on notera que cette longueur de cicatrisation ξ est très petite devant le rayon ζ_{TF} de Thomas-Fermi du condensat puisque :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\zeta_{\text{TF}}}{\xi}\right)^2 &\sim \frac{\zeta_{\text{TF}}^2}{\hbar^2/m\mu} \quad \text{avec} \quad n_0 g \sim \mu \\ &\sim \frac{\zeta_{\text{TF}}^2}{\hbar^2/m^2\bar{\omega}^2\zeta_{\text{TF}}^2} \quad \text{avec} \quad \mu \sim m\bar{\omega}^2\,\zeta_{\text{TF}}^2 \quad \text{par (3.23)}, \\ &\sim \zeta_{\text{TF}}^2 \left(\frac{\zeta_{\text{TF}}}{\bar{\zeta}_h}\right)^2 \gg 1 \quad \text{car} \quad \zeta_{\text{TF}} \gg \bar{\zeta}_h\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2 Manipulation d'atomes par champs électromagnétiques

La partie précédente a permis de définir le phénomène de la condensation de Bose-Einstein et d'en donner quelques propriétés importantes. Notamment, il a été possible de déterminer un critère de condensation (3.9) qui servira de référence à atteindre pour le dispositif expérimental. Dans la section qui va suivre, on fait un rapide rappel des différentes méthodes de refroidissement et de manipulation des atomes utilisés par le montage pour atteindre le régime de dégénérescence (3.9) et produire des condensats d'atomes de rubidium ^{87}Rb.

3.2.1 Quelques propriétés atomiques du ^{87}Rb

Tout d'abord, on rappelle ici les quantités physiques d'intérêt pour la suite concernant le ^{87}Rb. Le ^{87}Rb est un élément alcalin possédant deux raies de transition : les transitions D_1 et D_2, comme représenté en figure 3.5. Comme on le verra dans la suite, la raie D_2, d'une longueur d'onde $\lambda_0 = 780\,\text{nm}$, est la seule raie produisant une interaction appréciable avec les atomes pour la plupart des fréquences optiques utilisées dans ce montage. On notera par ailleurs que l'état fondamental $5^2S_{1/2}$ est dégénéré par interaction hyperfine en deux états fondamentaux $F = 1$ et $F = 2$ séparés d'une énergie hyperfine $h\Delta_{\text{hf}}$.

A toutes fins utiles, le tableau suivant rappelle les valeurs numériques d'intérêt pour la suite concernant le ^{87}Rb. Ces valeurs sont tirées des références [167, 48].

Quantité	Symbole	Valeur
Masse	m	$1.44 \times 10^{-25}\,\text{kg}$
Fréquence de transition D_2	ω_0	$2\pi \times 384.230\,\text{THz}$
Longueur d'onde de transition D_2 (vide)	λ_0	$780.241\,\text{nm}$
Longueur d'onde de transition D_2 (air)	λ_0^{air}	$780.033\,\text{nm}$
Largeur naturelle de la transition D_2	Γ	$2\pi \times 6.07\,\text{MHz}$
Structure hyperfine	Δ_{hf}	$6.834682611\,\text{GHz}$
Vitesse de recul	v_{r}	$0.59\,\text{cm.s}^{-1}$
Intensité de saturation	I_{sat}	$1.66\,\text{mW.cm}^{-2}$

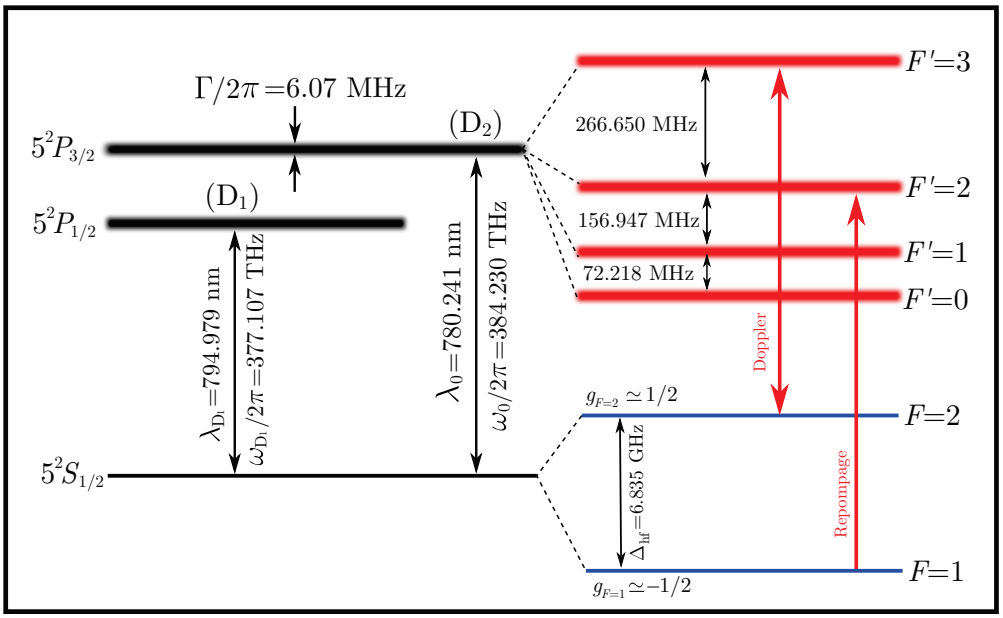

FIGURE 3.5 – **Structure hyperfine de la raie D_2 du ^{87}Rb.** Dans la suite, seule la transition D_2 : $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ sera *a priori* utilisée pour produire de l'interaction matière-rayonnement optique sur les atomes de ^{87}Rb. Par couplage hyperfin, il y a levée de dégénérescence de l'état fondamental $5^2S_{1/2}$ selon deux états $F = 1$ et $F = 2$ séparés d'une énergie $h\Delta_{\text{hf}}$.

3.2.2 Refroidissement Doppler et potentiel dipolaire

A la différence des techniques usuelles de cryogénie qui permettent de refroidir des systèmes macroscopiques de quelques 10^{23} particules à des températures typiques de quelques μK, l'optique atomique se distingue par le fait de pouvoir de manipuler et refroidir des échantillons de matière beaucoup plus petits (variant de quelques milliards d'atomes à l'atome unique) à des températures usuelles de quelques nK, avec un degré de maîtrise élevé du potentiel extérieur ressenti par les atomes. Ce contrôle des degrés de liberté atomiques se fait majoritairement à l'aide de champs électromagnétiques.

Mécanisme microscopique du refroidissement Doppler

Refroidir un échantillon suppose pouvoir dissiper son énergie interne. L'énergie interne d'un gaz à température ambiante étant essentiellement cinétique, la question pertinente est donc de savoir s'il est possible de ralentir des atomes par une action extérieur quelconque. En optique atomique, cela est rendu possible à l'aide de la force de pression de radiation que peut exercé une source laser sur un atome.

On considère donc un atome de masse m, de fréquence de résonance ω_0, d'une vitesse initiale $\mathbf{v}_i$, plongé dans un champ laser, supposé par simplicité comme étant une onde plane monochromatique de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ (donc de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ et de fréquence $\omega = c/|\mathbf{k}|$) :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_i)t}\,, \tag{3.29}$$

dans le référentiel de l'atome. Si l'atome est à résonance avec le champ laser, celui-ci peut absorber un photon de ce dernier. La condition de résonance de l'atome avec le champ laser dans son référentiel est :

$$\omega_0 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i \,. \tag{3.30}$$

L'atome se trouve alors dans un état excité et peut retrouver son état fondamental en émettant spontanément un photon dans un mode du vide électromagnétique d'énergie $\hbar\omega_0$. A ce point, il est remarquable que l'énergie du photon émis $\hbar\omega_0$ *n'est pas la même* que celle du photon absorbé $\hbar\omega$. Plus particulièrement, on peut se mettre dans une situation où $\omega - \omega_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i < 0$ (c'est à dire où l'atome est contra-propageant au laser). Dans cette configuration, le photon émis possède une énergie *plus grande* que le photon absorbé : on parle alors de *décalage* de la fréquence laser *vers le rouge* de la transition atomique. [9]. Par conservation de l'énergie, on en déduit que cette énergie supplémentaire du photon émis a été extraite de l'énergie cinétique de l'atome. C'est précisément ce mécanisme qui est à l'origine du *refroidissement Doppler* : l'énergie cinétique est dissipée des atomes par émission spontanée de photons.

Ce refroidissement peut aussi s'interpréter par la présence d'une force dissipative appelée *force de pression de radiation* ayant lieu après un grand nombre de cycles d'absorption et émission spontanée. En effet, l'absorption d'un photon transfert une impulsion $\hbar\mathbf{k}$ à l'atome. Par contre, l'émission spontanée ne transfert pas d'impulsion à l'atome s'il on considère une moyenne sur plusieurs cycles d'absorption/émission. En effet, l'émission spontanée d'un photon selon une direction de l'espace est symétrique par rapport à l'atome [14], sa contribution s'annule donc en moyenne. A ce changement d'impulsion, on peut associer une variation de vitesse $v_\mathrm{r} = \hbar|\mathbf{k}|/m$ appelée *vitesse de recul*.

En ce qui concerne plus spécifiquement le ^{87}Rb, la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ sera la transition cyclante utilisée pour réaliser ces cycles d'absorption/émission spontanée du refroidissement Doppler. En effet, les règles de sélection de transition à un seul photon [43] imposent $F' - F = \{0, \pm 1\}$. Du point de vue de la structure atomique du ^{87}Rb (représentée en figure 3.5), les atomes dans l'état $|F' = 3\rangle$ ne peuvent se désexciter que dans l'état $|F = 2\rangle$, ce qui conduit les atomes à effectuer des cycles d'absorption/émission entre les états $|F = 2\rangle$ et $|F' = 3\rangle$.

Néanmoins, les états $|F' = 3\rangle$ et $|F' = 2\rangle$ n'étant séparés que de 266 MHz, la probabilité d'exciter un atome de $|F = 2\rangle$ vers $|F' = 2\rangle$ avec un laser accordé sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ n'est pas du tout négligeable [10]. Les atomes dans l'état $|F' = 2\rangle$ peuvent alors aussi bien se désexciter dans $|F = 2\rangle$ que $|F = 1\rangle$. Les atomes tombés dans $|F = 1\rangle$ sont alors perdus car ils ne peuvent plus interagir avec la lumière (le champ laser n'étant plus résonance). Pour pallier à ces pertes, la lumière résonante sur $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ que l'on utilisera pour le refroidissement Doppler sera toujours mélangée avec une seconde lumière résonante avec $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ qui permet de *repomper* les atomes perdus dans la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$.

9. Inversement, lorsque $\omega > \omega_0$, on parlera de *décalage vers le bleu* de la transition.

10. Les intensités des faisceaux utilisés pour refroidir les atomes peuvent être estimer à $I \sim 6\,\mathrm{mW.cm^{-2}}$. Pour une lumière à résonance avec $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, le paramètre de saturation (3.39) est de l'ordre de $s \sim 4$, ce qui donne un taux d'émission spontanée $\Gamma_\mathrm{sp} \sim 1.5 \times 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$. Ce même faisceau est décalé de +266 MHz vers le bleu de la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$, soit $s \sim 2 \times 10^{-2}$, et $\Gamma_\mathrm{sp} \sim 3 \times 10^5\mathrm{s}^{-1}$. Un atome ne peut donc effectuer, en moyenne, qu'une cinquantaine de cycles avant de se retrouver dans un état noir.

Description semi-classique de l'interaction lumière-matière

En théorie, l'interaction lumière-matière requiert un traitement quantique complet aussi bien du point de vue des degrés de libertés atomiques que du champ électromagnétiques [43]. Plus particulièrement, l'étude du mouvement d'un atome dans un champ électromagnétique donné doit, *a priori*, se faire avec l'équation de Schrödinger.

Cependant, si l'on considère un gaz parfait d'atomes de ^{87}Rb initialement à température ambiante $T = 300$K (qui sera le point de départ pour les expériences de refroidissement d'atomes), la longueur d'onde de de Broglie thermique (3.8) $\langle\lambda_{\mathrm{dB}}\rangle$ associée au gaz est de l'ordre du pm. Cette taille est à comparer avec la longueur d'onde typique de résonance du ^{87}Rb $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 780\,$nm. Dans cette situation où $\lambda_0 \gg \langle\lambda_{\mathrm{dB}}\rangle$, la description du mouvement atomique dans un champ électromagnétique peut se faire de manière quasi-classique, c'est à dire en assimilant la position de l'atome avec le centre de son paquet d'onde.

De plus, comme on le verra dans la suite, les puissances optiques utilisées en expérience varient de l'ordre du W au μW, ce qui correspond, pour des photons de longueur d'onde 780 nm, à des flux optiques variant de 10^{18} à 10^{12} photons par seconde. La description de l'interaction lumière-matière en terme d'échange de photons ne paraît donc pas forcément appropriée pour ces types de champs électromagnétiques. Dans ces conditions, la densité de photons est tellement grande que le caractère quantique du champ électromagnétique peut être négligé et on se contentera de le décrire par un champ électrique classique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$.

On peut donc écrire l'état de l'atome comme un simple produit $|\psi\rangle = |\psi_{\mathrm{in}}\rangle \otimes |\mathbf{x}\rangle$ de son état interne $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$ et de son état de position $|\mathbf{x}\rangle$. On peut montrer [14] que cette séparation permet d'écrire la "force radiative" $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ dérivant de l'interaction dipolaire $-\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)/2$ entre le moment dipolaire *induit* $\hat{\mathbf{d}}$ de l'atome et le champ $\mathbf{E}$ comme :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \langle\psi_{\mathrm{in}}|\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \,, \tag{3.31}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est la direction de polarisation de l'atome. En supposant que l'on peut écrire le champ (supposé monochromatique) $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ en notation complexe sous la forme générale :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E(\mathbf{x}) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi(\mathbf{x}))} \, \boldsymbol{\epsilon} \,, \tag{3.32}$$

on peut séparer la force radiative (3.31) en deux termes :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} \langle\psi_{\mathrm{in}}|\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi(\mathbf{x}))} \boldsymbol{\nabla} E(\mathbf{x})\right] + \mathrm{Re}\left[-\frac{\mathrm{i}}{2} \langle\psi_{\mathrm{in}}|\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle \, E(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi(\mathbf{x}))} \boldsymbol{\nabla} \varphi(\mathbf{x})\right] . \tag{3.33}$$

En basant l'interaction lumière-matière sur une théorie de réponse linéaire [81], le moment dipolaire $\mathbf{d}$ de l'atome peut être relié au champ excitateur $\mathbf{E}$ par la polarisabilité $\alpha(\omega)$ de l'atome $\langle\psi_{\mathrm{in}}|\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle = \alpha(\omega) \, \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ qui dépend de l'état interne $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$, notamment des transitions atomiques permises.

Potentiel dipolaire

La partie réelle $\mathrm{Re}\,\alpha(\omega)$ de la polarisabilité renseigne sur la facilité avec laquelle l'atome acquiert un moment dipolaire sous l'effet du champ $\mathbf{E}$. Le premier terme de (3.33), appelé *force dipolaire*, s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\alpha(\omega)\;E(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}E(\mathbf{x})\,. \tag{3.34}$$

La force dipolaire (3.34) est une force *conservative*, tous les phénomènes liés à la dissipation étant intégrés dans la pression de radiation (qui sera le second terme de (3.33)). Elle dérive donc d'un *potentiel dipolaire* $U_{\mathrm{dip}}(\mathbf{x})$ tel que $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{dip}} = -\boldsymbol{\nabla}U_{\mathrm{dip}}(\mathbf{x})$. L'intensité $I(\mathbf{x})$ étant reliée au champ électrique $E(\mathbf{x})$ par $I(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 c\,E^2(\mathbf{x})/2$, [11] on peut exprimer la force dipolaire (3.34) en fonction de l'intensité :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{2\varepsilon_0 c}\,\mathrm{Re}\,\alpha(\omega)\;\boldsymbol{\nabla}I(\mathbf{x})\,, \tag{3.35}$$

où l'on a utilisé le fait que $E(\mathbf{x})\boldsymbol{\nabla}E(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\boldsymbol{\nabla}I(\mathbf{x})$.

La polarisabilité dépendant de l'état interne de l'atome, un calcul pleinement quantique est nécessaire pour la déterminer [43]. Pour un atome à deux niveaux de fréquence de résonance ω_0 (associée à la longueur d'onde $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$) et de largeur de transition Γ, on peut montrer que [46, 81] :

$$\mathrm{Re}\,\alpha(\omega) = -\frac{\mathrm{d}_0^2}{\hbar}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{\omega+\omega_0}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}_0^2 = \frac{3\pi\hbar c^3\Gamma\varepsilon_0}{\omega_0^3} \tag{3.36}$$

où d_0 est l'élément de matrice du moment dipolaire associé à la transition de l'atome. [12] On obtient alors l'expression du potentiel dipolaire $U_{\mathrm{dip}}(\mathbf{x})$:

$$U_{\mathrm{dip}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}_0^2\,I(\mathbf{x})}{2\hbar\varepsilon_0 c}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{\omega+\omega_0}\right) = \frac{3\pi c^2\Gamma\,I(\mathbf{x})}{2\omega_0^3}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0} - \frac{1}{\omega+\omega_0}\right)\,. \tag{3.37}$$

On notera donc la possibilité de faire des potentiels attractifs pour un *désaccord* $\omega - \omega_0 < 0$ où l'atome subit une force qui l'attire vers les *maxima* d'intensité, ainsi que des potentiels répulsifs pour $\omega - \omega_0 > 0$ où l'atome subit une force l'attirant vers les *minima* d'intensité.

On verra dans la suite que c'est très précisément à l'aide du potentiel $U_{\mathrm{dip}}(\mathbf{x})$ que l'on peut produire des pièges optiques pour les atomes, ainsi que des potentiels plus complexes comme des réseaux ou des potentiels désordonnés, les variations spatiales du potentiel étant purement déterminée par les variations spatiales de l'intensité lumineuse.

11. Le facteur $1/2$ provient du fait que le mouvement des atomes n'est sensible qu'à la *moyenne* des oscillations temporelles en $\cos^2(\omega t - \varphi(\mathbf{x}))$ de l'intensité locale du champ $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ puisque la fréquence d'oscillation du champ pour des fréquences optiques est de l'ordre de 100 THz. Ceci est beaucoup plus rapide que n'importe quelle autre échelle de temps associée au mouvement de l'atome.

12. Concernant le ^{87}Rb, l'expression (3.36) de d_0^2 n'est valable que lorsque le désaccord $\omega - \omega_0$ est très grand devant la structure fine séparant les raies D_1 et D_2 [81].

Force de pression de radiation

Le second terme de (3.33) est appelé *force de pression de radiation*. Il dépend de la partie imaginaire $\mathrm{Im}\,\alpha(\omega)$ de la polarisabilité, qui renseigne sur l'absorption, et donc la dissipation par émission spontanée. C'est précisément cette même force qui est responsable de la dissipation de l'énergie pour le refroidissement Doppler.

Là encore, le calcul de $\mathrm{Im}\,\alpha(\omega)$ nécessite une approche quantique complète, et on se contentera de donner ici le taux d'émission spontanée Γ_{sp} associé à la force de pression de radiation, qui donne le nombre moyen d'évènements d'émission spontanée par unité de temps [81] :

$$\Gamma_{\mathrm{sp}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}_0^2\, I(\mathbf{x})\Gamma\omega^3}{2\hbar^2\,\varepsilon_0 c}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0}-\frac{1}{\omega+\omega_0}\right)^2 = \frac{3\pi c^2\omega^3\, I(\mathbf{x})}{2\hbar\,\omega_0^6}\left(\frac{\Gamma}{\omega-\omega_0}-\frac{\Gamma}{\omega+\omega_0}\right)^2 . \tag{3.38}$$

Le taux Γ_{sp} d'émission spontanée permet donc de quantifier à quel point il est facile pour l'atome d'absorber des photons de la lumière utilisée, et ce notamment en fonction du désaccord $\omega-\omega_0$ et de la largeur naturelle Γ de la transition atomique. S'il on cherche à générer de la dissipation pour refroidir des atomes, on a tout intérêt à maximiser Γ_{sp}. Au contraire, on cherchera à minimiser Γ_{sp} lorsque l'on veut placer des atomes dans des potentiels optiques conservatifs.

On notera que les expressions (3.37) et (3.38) ne sont valables que dans un régime de *faible saturation*. Ce régime est caractérisé par un *paramètre de saturation* [46] :

$$s = \frac{I/I_{\mathrm{sat}}}{1+4(\omega-\omega_0)^2/\Gamma^2}\,, \tag{3.39}$$

très petit devant 1. Ici, $I_{\mathrm{sat}} = \pi h c\Gamma/3\lambda_0^3$ est appelée *intensité de saturation* [13].

3.2.3 Potentiel magnétique

Jusqu'à présent, on a traité le cas d'une interaction dipolaire *électrique* entre un atome et champ électromagnétique appartenant aux domaines des fréquences optiques. Mais il est aussi possible de considérer une interaction dipolaire *magnétique* entre un atome et un champ magnétique. Les atomes de ^{87}Rb possèdent un moment cinétique interne total $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{I}}+\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{S}}$, où $\hat{\mathbf{I}}$ est le moment de spin nucléaire, $\hat{\mathbf{L}}$ est le moment cinétique orbital total, et $\hat{\mathbf{S}}$ le moment de spin électronique. Pour les alcalins comme le ^{87}Rb, le moment cinétique orbital $\hat{\mathbf{L}}$ de la structure électronique *dans l'état fondamental* (ici, $5^2S_{1/2}$) est nul car l'ensemble des couches de cœur sont remplies et l'électron célibataire occupant la couche de valence est dans un état s. On peut alors associer au moment total $\hat{\mathbf{F}}$ un moment magnétique de spin $\hat{\boldsymbol{\mu}}_F = -\mu_B\, g_F\,\hat{\mathbf{F}} = -\mu_B(g_J\hat{\mathbf{J}} + g_I\hat{\mathbf{I}})$, où $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{S}}$, et les $g_{I,J,F}$ sont les facteurs de Landé associés.

13. De manière générale, on peut exprimer le taux d'émission spontanée Γ_{sp} en fonction du paramètre de saturation s selon :

$$\Gamma_{\mathrm{sp}} = \frac{\Gamma}{2}\frac{s}{s+1}\,,$$

et est donc maximiser à $\Gamma_{\mathrm{sp}}^{\max} = \Gamma/2$ pour $s \gg 1$. Dans ce cas, on parle de *saturation* de la transition : l'atome a autant de chance de se trouver dans son état excité que son état fondamental.

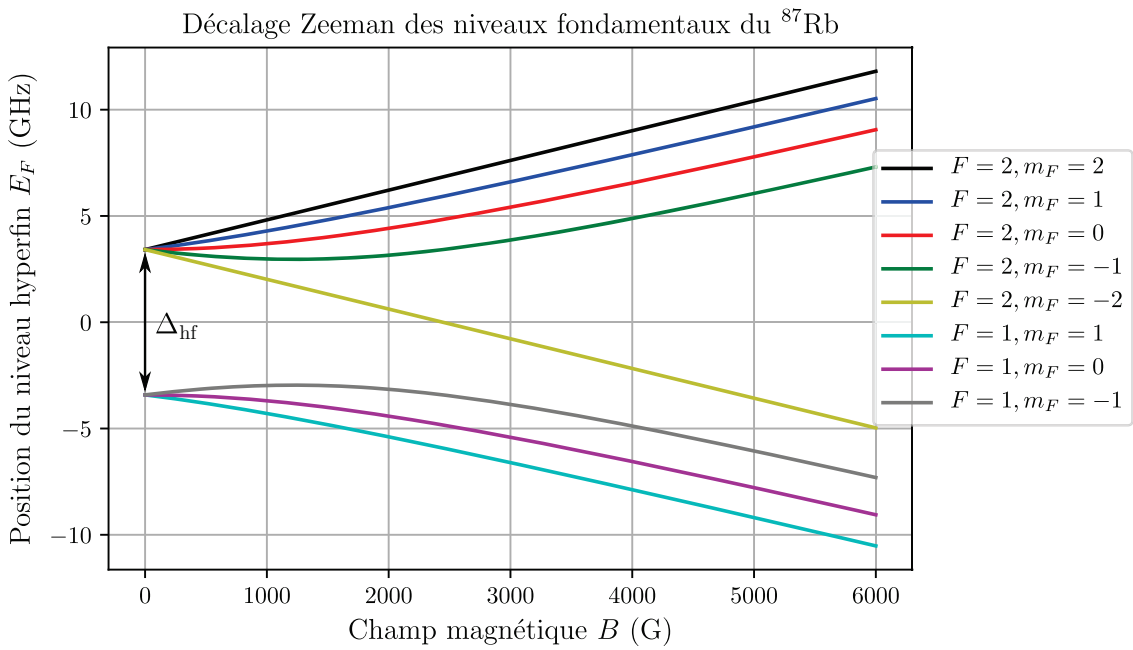

FIGURE 3.6 – **Effet Zeeman sur les niveaux hyperfins du ^{87}Rb**. Le décalage en fréquence des niveaux E_F pour tout champ magnétique externe B est donné par la formule de Breit-Rabi (3.40). L'effet Zeeman linéaire correspond au comportement à bas champ $B \ll h\Delta_{\mathrm{hf}}/(g_J - g_I)\mu_B$ de (3.40).

L'interaction entre ce moment magnétique intrinsèque $\hat{\boldsymbol{\mu}}_F$ et un champ magnétique $\mathbf{B}$ externe donne une énergie d'interaction $-\hat{\boldsymbol{\mu}}_F \cdot \mathbf{B}$ qui se caractérise en terme de décalage par effet Zeeman sur les énergies des transitions atomiques. Ce décalage, ainsi que son signe, dépendent des valeurs possibles m_F du moment magnétique et de l'état atomique $|F\rangle$ considéré. A champs relativement faibles, la formule de Breit-Rabi [133, 167] permet de déterminer ce décalage par effet Zeeman des niveaux atomiques. Dans le cas de l'atome de ^{87}Rb, les énergies des niveaux fondamentaux hyperfins[14] $E_{F=1}$ et $E_{F=2}$ en fonction du champ magnétique externe $|\mathbf{B}| = B$ sont alors donnés par :

$$\begin{aligned} E_{F=2} &= \mu_B g_I m_F B + \frac{h\Delta_{\mathrm{hf}}}{2}\sqrt{1 + m_F\beta + \beta^2} \\ E_{F=1} &= \mu_B g_I m_F B - \frac{h\Delta_{\mathrm{hf}}}{2}\sqrt{1 + m_F\beta + \beta^2}\,, \end{aligned} \tag{3.40}$$

où $\beta = (g_J - g_I)\mu_B B/h\Delta_{\mathrm{hf}}$, $\Delta_{\mathrm{hf}} = 6.835\,\mathrm{GHz}$ est l'écart en fréquence entre les deux niveaux hyperfins, $g_J \simeq 2.00233113$ le facteur de Landé de structure fine, et $g_I \simeq -0.9951414 \times 10^{-3}$ le facteur de Landé nucléaire [167].

Pour des champs faibles $B \ll h\Delta_{\mathrm{hf}}/(g_J - g_I)\mu_B$,[15] on peut faire un développement à l'ordre 1 en $\beta \ll 1$ de (3.40) de sorte que :

$$E_{F=2} \underset{\beta\ll 1}{\sim} \frac{h\Delta_{\mathrm{hf}}}{2} + \frac{g_J + 3g_I}{4} m_F \mu_B B \quad \text{et} \quad E_{F=1} \underset{\beta\ll 1}{\sim} -\frac{h\Delta_{\mathrm{hf}}}{2} + \frac{-g_J + 5g_I}{4} m_F \mu_B B\,, \tag{3.41}$$

14. L'état fondamental $5^2S_{1/2}$ du ^{87}Rb est caractérisé par un moment $J = 1/2$ et un spin nucléaire $I = 3/2$. Comme $|J - I| \leq F \leq J + I$ [167], on a nécessairement $F = 1$ ou $F = 2$.
15. On peut estimer ici $h\Delta_{\mathrm{hf}}/(g_J - g_I)\mu_B \sim 2300\,\mathrm{G}$.

ce qui correspond à l'*effet Zeeman linéaire*. Dans ce régime, l'énergie d'interaction magnétique prend donc la forme d'un potentiel U_{mag} tel que :

$$U_{\text{mag}} = m_F g_F \mu_B B \,, \tag{3.42}$$

avec $g_{F=2} = (g_J + 3g_I)/4 \simeq 1/2$, et $g_{F=1} = (-g_J + 5g_I)/4 \simeq -1/2$. Générer un champ magnétique variant dans l'espace $B = B(\mathbf{x})$ offre donc la possibilité de créer un potentiel externe magnétique conservatif $U_{\text{mag}}(\mathbf{x})$.

3.2.4 Couplage radio-fréquence de niveaux atomiques

Comme on l'a vu précédemment, l'interaction entre un atome et un champ électromagnétique offre de larges possibilités autant en terme de potentiels conservatifs (aussi bien optiques que magnétiques) que de contrôle de la dissipation (par émission spontanée de photons). Toutes ses possibilités de contrôle sont entièrement déterminées par l'état dipolaire et magnétique interne de l'atome considéré. La manipulation contrôlée de l'état interne est donc un atout supplémentaire permettant de choisir exactement à quel potentiel doit être soumis l'atome.

Le fait que l'écart Δ_{hf} entre les deux niveaux hyperfins $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ du ^{87}Rb soit de l'ordre du GHz rend techniquement possible à l'aide de l'électronique de génération de signaux hautes fréquences le couplage radio-fréquence cohérent entre ces deux niveaux. Les niveaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ étant *fondamentaux*, *a priori* aucun phénomène d'émission spontanée n'est à prendre en compte dans leur interaction avec des champs radio-fréquences.

Dans cette situation, un atome de ^{87}Rb réalise parfaitement un système quantique à deux niveaux séparés d'une énergie $h\Delta_{\text{hf}}$, associé à l'hamiltonien :

$$\hat{H}_0 = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} -\Delta_{\text{hf}} & 0 \\ 0 & \Delta_{\text{hf}} \end{pmatrix} \,, \tag{3.43}$$

et l'interaction dipolaire entre un champ (3.32) radio-fréquence prend la forme :

$$\hat{W}(t) = -\frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t) = h\Omega\cos(\omega t - \varphi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \tag{3.44}$$

où les matrices de (3.43) et (3.44) ont été écrites dans la base $\{|F = 1\rangle, |F = 2\rangle\}$. Ici, on a définit la quantité $\Omega = -(\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})E/2h$ qui est la *fréquence de Rabi*. L'hamiltonien total $\hat{H}$ de l'atome à deux niveaux interagissant avec le champ RF s'écrit donc :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}(t) = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} -\omega/2\pi + \delta & 2\Omega\cos(\omega t - \varphi) \\ 2\Omega\cos(\omega t - \varphi) & \omega/2\pi - \delta \end{pmatrix} \,, \tag{3.45}$$

où l'on a définit le *désaccord* $\delta = \omega/2\pi - \Delta_{\text{hf}}$ entre la fréquence $\omega/2\pi$ du champ de couplage et la fréquence Δ_{hf} de résonance des deux états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$.

A priori, l'hamiltonien (3.45) n'est pas directement diagonalisable. C'est la raison pour laquelle on a souvent recours à l'*approximation du champ tournant* qui permet de négliger les termes oscillant au double de la fréquence d'excitation $\omega/2\pi$ (ces derniers pouvant être

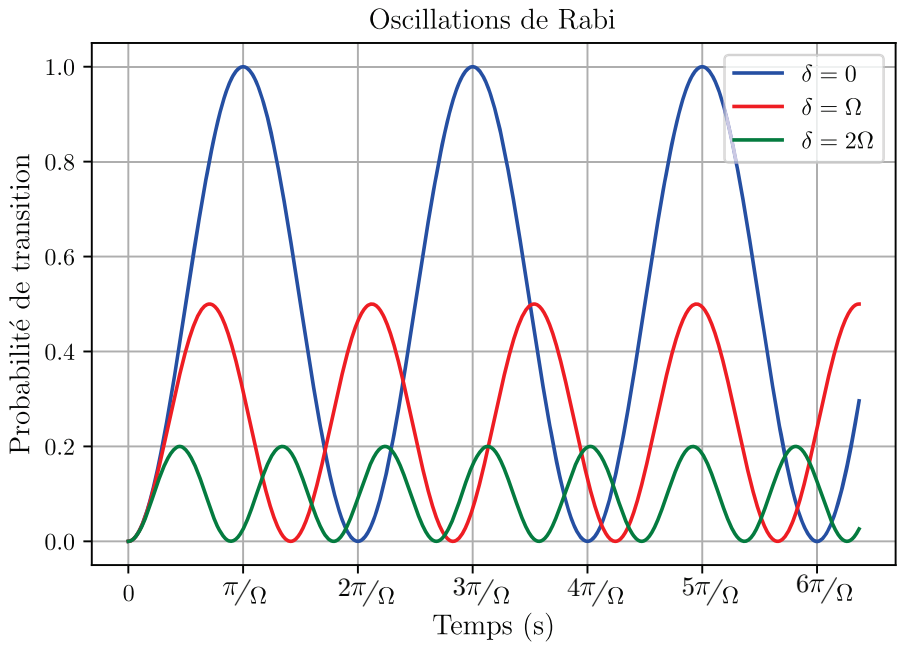

FIGURE 3.7 – **Oscillations de Rabi d'un système à deux niveaux**. La probabilité de couplage (3.48) entre les deux niveaux hyperfins $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ du ^{87}Rb décrit des oscillations de fréquence $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ où Ω^2 est proportionnel à la puissance du champ excitateur. On constate que plus le désaccord δ est grand, plus l'amplitude des oscillations est faible, et plus leur fréquence Ω_R est grande.

considérés comme *en moyenne* nuls devant les termes oscillant à la fréquence $\omega/2\pi$).[16] On peut montrer [11] que l'hamiltonien (3.45) se met alors sous la forme :

$$\hat{H} = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} \delta & \Omega e^{-i\varphi} \\ \Omega e^{i\varphi} & -\delta \end{pmatrix} . \tag{3.47}$$

La diagonalisation de (3.47) permet alors de déterminer la dynamique temporelle $|\psi(t)\rangle$ de l'atome à deux niveaux initialement dans l'état $|\psi_0\rangle$. Dans le cas où l'atome est initialement dans l'état $|\psi_0\rangle = |F = 1\rangle$, on montre [14, 11] que la probabilité $|\langle F = 2|\psi(t)\rangle|^2$ de transférer l'atome vers l'état $|F = 2\rangle$ en fonction du temps d'interaction t produit des *oscillations de Rabi*, représentées en figure 3.7 :

$$|\langle F = 2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2}\sin^2(\pi\,\Omega_R\,t)\,, \tag{3.48}$$

où $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ est la *fréquence de Rabi généralisée*.

16. Les termes en $2\cos(\omega t)$ dans (3.45) peut être décomposés selon :

$$2\cos(\omega t) = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = e^{i\omega t}\left(1 + e^{-2i\omega t}\right) . \tag{3.46}$$

En principe, l'approximation du champ tournant consiste à négliger le terme $e^{-2i\omega t}$ devant 1 en considérant que le terme en $e^{-2i\omega t}$ se résume à sa moyenne temporelle (qui est nulle). On a alors $2\cos(\omega t) \sim e^{i\omega t}$.

3.3 Description d'un cycle expérimental

Toutes les notions d'interaction matière-rayonnement nécessaires à la compréhension du fonctionnement du dispositif expérimental ont été introduites dans la section précédente. Dans la suite, on fera une présentation rapide et minimale du dispositif expérimental permettant d'obtenir des condensats de Bose-Einstein d'atomes de ^{87}Rb.

3.3.1 Vue d'ensemble du dispositif expérimental

Le montage expérimental, résumé en figure 3.8 a., est fondamentalement monté autour d'une chambre à vide que l'on peut séparer en deux segments. Un premier segment s'articule autour d'un montage ralentisseur Zeeman et d'une cellule en verre dans laquelle est formé un piège magnéto-optique. Le second segment est construit autour d'une seconde cellule en verre dans laquelle est réalisée la condensation dans un piège dipolaire, ainsi que les expériences de transport d'atomes en milieu désordonné.

L'intérieur de la chambre du montage est maintenu en continu dans un vide variant de 10^{-9} mbar pour l'étage associé à la mélasse transverse et au ralentisseur Zeeman, à une pression inférieure à 10^{-11} mbar pour l'étage associé aux deux cellules en verre. Ce vide poussé assure l'absence plus ou moins totale de collisions inélastiques entre les gaz d'atomes refroidis très proche du zéro absolu et les particules d'air résiduel à température ambiante [17].

Le banc optique permettant de générer les fréquences laser est présenté en figure 3.8 b. Les lasers L1, L2 et L3 permettent de générer et stabiliser toutes les fréquences résonantes nécessaires au refroidissement Doppler, repompage, imagerie par absorption, imagerie par fluorescence, etc. Le laser *Toptica*, quant à lui, sert de source pour générer la figure de *speckle* (cf. chapitre 4).

De nombreux détails techniques sur les différentes parties du montage peuvent être retrouvés dans les manuscrits de thèse de Marie Fauquembergue [69] et de Jean-Félix Riou [143] en ce qui concerne le premier segment, et dans les manuscrits de thèse d'Alain Bernard [17], Fred Jendrzejewski [90] et de Kilian Müller [121] pour le second segment.

17. A titre indicatif, le temps de vie d'un condensat formé dans la seconde cellule a été mesuré à 30 s.

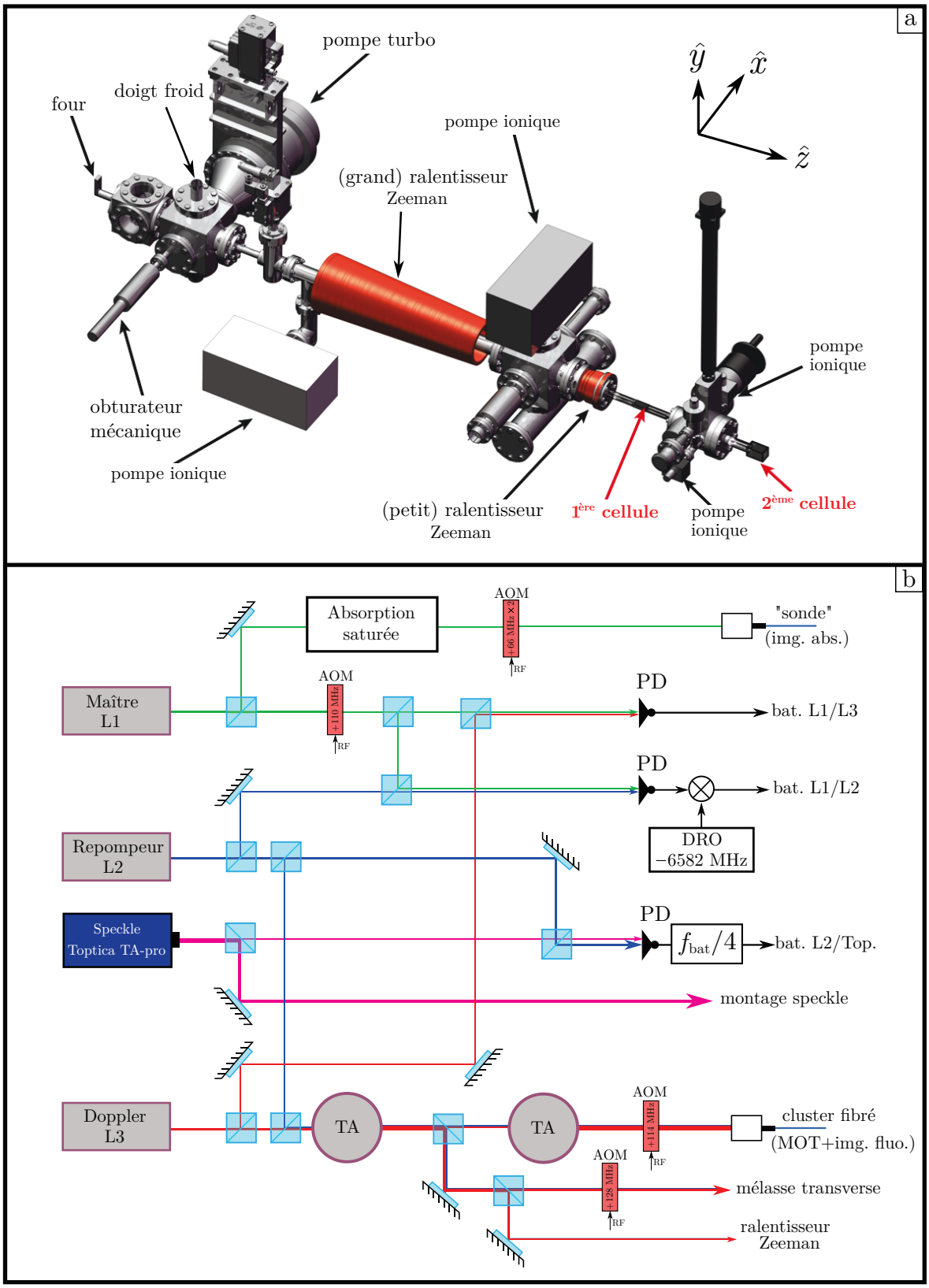

FIGURE 3.8 – **Vue d'ensemble du montage expérimental. a.** Figure tirée de la référence [121]. Le maintien sous ultra-vide de l'ensemble de la chambre est garanti par un ensemble de pompes (turbo-moléculaire et ioniques) tournant en continu. **b.** Montage simplifié de la génération des fréquences laser de l'expérience. Le laser L1 est asservit en fréquence sur une absorption saturée, et sert de référence en fréquence pour les autres sources qui sont asservis en fréquence par battement. L2 permet de générer la fréquence de repompage des atomes, et L3 la fréquence de refroidissement Doppler. Des amplificateurs à semi-conducteur (*tapered amplifiers* en anglais, TA) assurent une puissance de faisceaux suffisante pour chaque application.

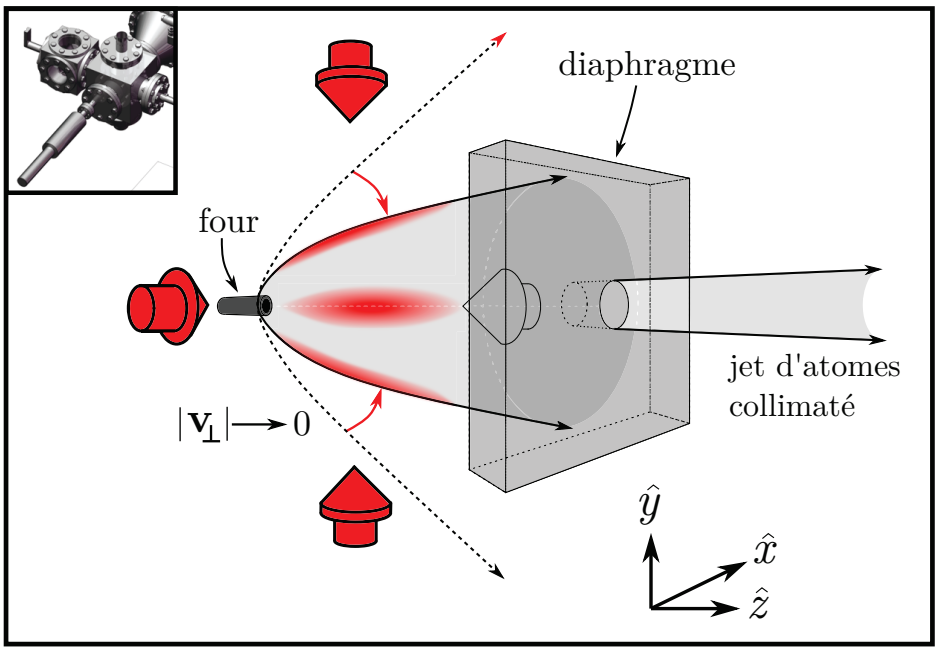

FIGURE 3.9 – **Principe de la mélasse transverse.** Deux paires de faisceaux contra-propageants permettent de réaliser un refroidissement Doppler de la vitesse transverse $|\mathbf{v}_\perp|$, et donc une collimation du jet d'atomes sortant du four. Le jet est ensuite filtré par un diaphragme. Les quatres faisceaux lasers sont contrôlés par un même modulateur acousto-optique (*Acousto-Optic Modulator*, AOM en anglais).

3.3.2 Ralentisseur Zeeman et piège magnéto-optique

Les atomes sont issus d'un échantillon de rubidium contenu dans une ampoule[18]. L'ampoule est placée dans un four à 120°C faisant passer les atomes à l'état gazeux. Il se produit alors un jet atomique par effusion en sortie de four.

Mélasse transverse

Dans un premier temps, le jet d'atomes sortant du four est "collimaté" par deux paires transverses de faisceaux lasers contra-propageants, comme représenté en figure 3.9. La fréquence des faisceaux est désaccordée vers le rouge de la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ pour produire un refroidissement Doppler. Chaque paire de faisceaux contra-propageants forment une *mélasse optique* qui produit un refroidissement Doppler de la vitesse transverse $\mathbf{v}_\perp$ du jet d'atomes selon la direction de propagation $\hat{x}$ ou $\hat{y}$ des faisceaux. Le vecteur vitesse total des atomes $\mathbf{v}$ tend donc à s'aligner selon la direction $\hat{z}$ du ralentisseur Zeeman.

Cette collimation du jet atomique va permettre d'augmenter significativement la vitesse de chargement du piège magnéto-optique (typiquement d'un facteur 2). Le faisceau atomique est ensuite filtré spatialement par une plaque métallique percée d'un diaphragme et en contact avec un doigt froid thermalisé à -30°C. Les atomes ne passant pas par le trou sont adsorbés à la surface de la plaque métallique et ne peuvent donc pas participer à l'augmentation de la pression ambiante à l'intérieur de la chambre à vide.

18. Le rubidium est extrait de minerais naturels sous la forme de deux isotopes : le ^{85}Rb (à 72.2%) et le ^{87}Rb (à 27.8%). Mais le ^{85}Rb n'est pas sélectionné par défaut car il ne possède pas les mêmes fréquences de résonance que le ^{87}Rb.

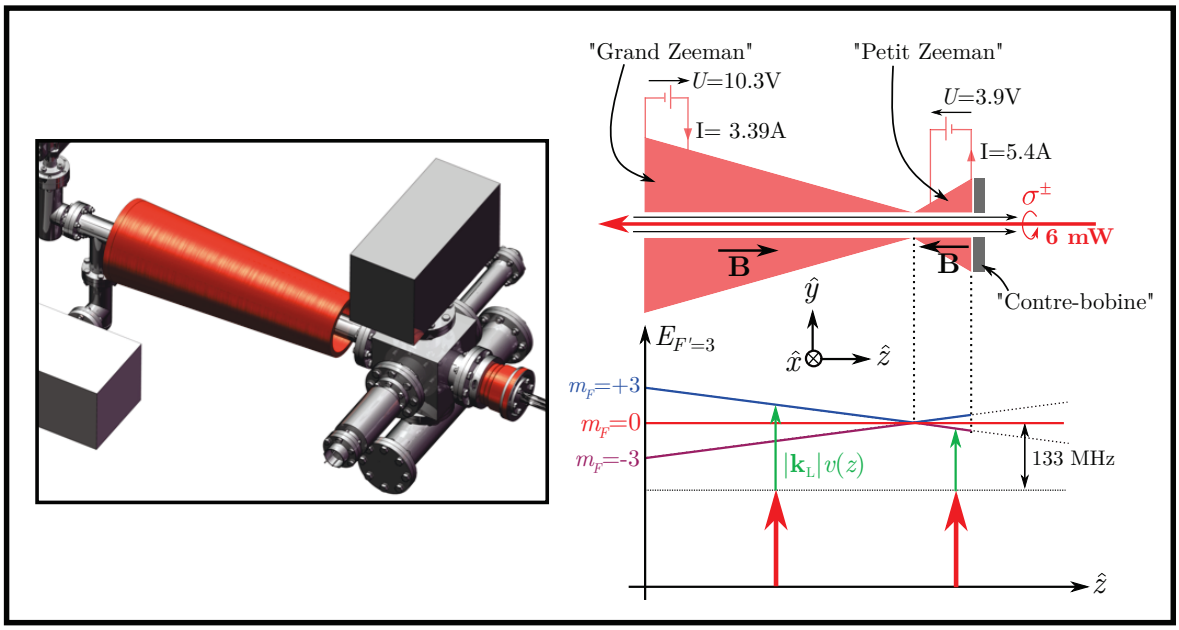

FIGURE 3.10 – **Principe du ralentisseur Zeeman.** Les atomes sont maintenus à résonance (3.49) selon $\hat{z}$ par un champ magnétique $B(z)$ qui s'ajuste au décalage Doppler $|\mathbf{k}_L|v(z)$. Le faisceau utilisé est décalé de 133 MHz afin que ce dernier ne soit pas résonant avec les atomes dans le piège magnéto-optique (ce qui induirait des pertes). Sa polarisation circulaire est ajustée sur la transition cyclante $|F=2\rangle \rightarrow |F'=3, m_F=\pm 3\rangle$ selon le sens du champ magnétique généré par le bobinage du ralentisseur. Le taux de chargement du piège magnéto-optique est optimal pour une puissance de faisceau de 6 mW.

La chambre du four est séparée du tube sur lequel est monté le ralentisseur Zeeman par un obturateur mécanique activé par air comprimé. Cet obturateur permet de séparer la chambre du four de la première cellule lorsque le piège magnéto-optique n'est pas en chargement. De cette manière, on évite que les atomes très chauds expulsés en continu du four ne viennent chauffer les atomes refroidis dans le piège magnéto-optique lorsque le faisceau du ralentisseur Zeeman n'est pas allumé.

Ralentisseur Zeeman

En plus d'être collimaté par la mélasse transverse, le faisceau d'atomes est exposés à un faisceau contra-propageant selon $-\hat{z}$ désaccordé vers le rouge de la transition $|F=2\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$, opérant ainsi un refroidissement Doppler de la vitesse selon l'axe $\hat{z}$, comme représenté en figure 3.10.

Néamoins, après avoir subi plusieurs cycles d'absorption/émission spontanée, les atomes sont ralentis à une vitesse $|\mathbf{v}_f| < |\mathbf{v}_i|$. Dans ce cas, la condition de résonance (3.30) du laser n'est plus satisfaite et les atomes n'interagissent plus avec le laser et ne sont donc plus ralentis. Le ralentisseur Zeeman est un montage permettant de pallier à ce problème.

Pour ce faire, des bobines produisant un champ magnétique $B(z)$ variant le long de l'axe longitudinal permettent de maintenir à résonance les atomes en décalant les fréquences de résonance par effet Zeeman. Le long de l'axe du ralentisseur, les atomes satisfont en tout point z à la nouvelle condition de résonance [84] :

$$\omega - \omega_0 + |\mathbf{k}|v(z) - \frac{\mu_B B(z)}{\hbar} = 0\,, \tag{3.49}$$

où $v(z)$ est la vitesse longitudinale des atomes selon l'axe du ralentisseur. Un tel ralentissement est très efficace, à un tel point que l'on ralentit un jet atomique d'une vitesse typique de $100\,\mathrm{m.s}^{-1}$ en sortie de four avant le ralentisseur à un vitesse de $20\,\mathrm{m.s}^{-1}$ après le ralentisseur, et ce, sur une distance d'environ un mètre.

Piège magnéto-optique et mélasse

A $20\,\mathrm{m.s}^{-1}$ les atomes sont assez lents pour être capturés par le piège magnéto-optique (*Magneto-Optical Trap*, ou MOT en anglais) [19] qui est réalisé au niveau de la première cellule en verre.

Un MOT, schématisé en figure 3.11, consiste en la combinaison de paires de faisceaux contra-propageant selon les trois directions, et d'un gradient de champ magnétique dans chaque direction de l'espace qui permet de réaliser un confinement (et donc d'augmenter la densité) des atomes capturés. Les faisceaux sont toujours désaccordés sur le rouge de la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ pour effectuer un refroidissement Doppler. Les gradients de champ magnétique sont générés par une paire de bobines gravées sur des circuits imprimés collés sur la cellule [20]. Ces bobines sont en configuration anti-Helmholtz (i.e. parcourues de courants allant dans des sens opposés). Elles produisent un champ quadrupolaire à symétrie sphérique, ce qui assure la présence d'un gradient magnétique selon la direction de chaque paire de faisceaux laser.

A cause du refroidissement Doppler, les atomes piégés subissent des cycles d'absorption et émission spontanée en émettant une grande quantité de photons dans toutes les directions de l'espace. On mesure cette fluorescence à l'aide d'une photodiode, ce qui permet de contrôler le chargement du MOT en fonction du temps. Le temps de saturation du signal de chargement varie typiquement de 2 à $5\,\mathrm{s}$ selon la qualité de l'alignement de la mélasse transverse.

Après chargement et saturation du MOT, l'obturateur mécanique est fermé et le jet d'atomes provenant du four est bloqué. La température du nuage piégé, à l'équilibre, est d'environ $500\,\mu$K. Le champ magnétique du MOT est alors éteint, la fréquence des faisceaux est décalée vers le rouge de la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ pour opérer à un refroidissement Doppler des atomes plus poussé. Cette phase de *mélasse optique* permet d'abaisser la température du nuage à $50\,\mu$K [21].

Cette étape nécessite un contrôle rigoureux des champs magnétiques éventuellement restant dans la chambre (champ rayonné par les pompes, champ terrestre, etc). Ce contrôle est effectué à l'aide de bobines de compensation placées selon chaque direction de l'espace. En l'absence de champ magnétique, les atomes ne sont alors plus confinés et le gaz perd en densité. C'est pour cette raison que cette étape est limitée à une durée de $6\,\mathrm{ms}$.

A ce stade de l'expérience, la densité du nuage peut être estimée à $10^{16}\,\mathrm{m}^{-3}$ et une température de $50\,\mu$K. Cela donne une longueur d'onde de de Broglie de l'ordre de $10\,\mathrm{nm}$, soit une densité dans l'espace des phases de $n\langle\lambda_{\mathrm{dB}}\rangle^3 \sim 10^{-8}$.

19. Cette capture est améliorée par l'introduction d'une *contre-bobine*, représentée en figure 3.10 placée juste après le dernier bobinage du ralentisseur, qui créer un champ magnétique de compensation du champ rayonné au niveau du piège magnéto-optique par le ralentisseur Zeeman.

20. Cette proximité des bobines avec la cellule permet de générer les gradients magnétiques souhaités avec des courants moindres parcourant les bobines.

21. Cette température est déterminée par la présence de mécanisme de type *refroidissement Sisyphe* dont la température d'équilibre varie en $k_B T \sim 1/(\omega_0 - \omega)$ [48]. Plus le désaccord est grand, plus la température atteignable est basse.

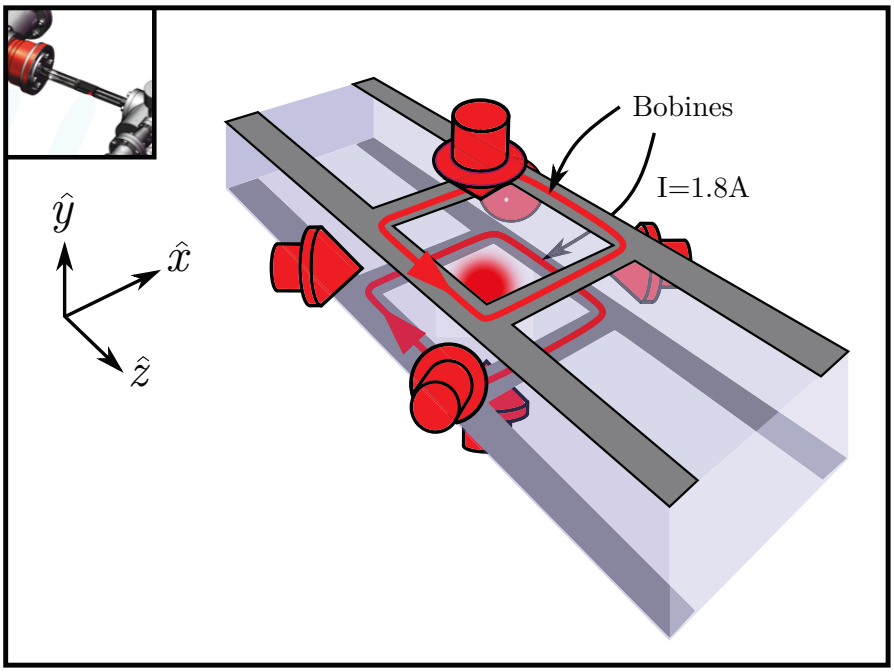

FIGURE 3.11 – **Principe du piège magnéto-optique.** La combinaison de 3 paires de faisceaux contra-propageant et d'un gradient de champ magnétique permet de refroidir et piéger conjointement les atomes. Les puissances de chacun des faisceaux (d'environ 9 mW chacun) sont équilibrées par un *cluster* fibré.

L'étape suivante va permettre d'augmenter considérablement ce chiffre et de se rapprocher du seuil de condensation en effectuant une étape d'évaporation dans un piège magnétique.

3.3.3 Évaporation RF dans un piège magnétique

Créer un potentiel magnétique (3.42) confinant basé sur un minimum de champ magnétique impose de choisir des états magnétiques tels que $g_F m_F > 0$. Vu que $g_{F=1} \simeq -1/2$ et $g_{F=2} \simeq 1/2$, les états piégeant sont $|F = 1, m_F = -1\rangle$, $|F = 2, m_F = 1\rangle$ et $|F = 2, m_F = 2\rangle$. Pour des raisons de minimisation de pertes d'atomes, on choisira de piéger les atomes dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ [69].

Les atomes provenant du MOT étant dans un état $|F = 2\rangle$, on effectue un transfert par *dépompage* des atomes de l'état $|F = 2\rangle$ à $|F = 1\rangle$. Pour ce faire, la fréquence de repompage est bloquée, et les faisceaux du MOT sont pulsés pendant 3 ms avec une fréquence décalée pour être résonant avec la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. Ce faisant, les atomes dans $|F' = 2\rangle$ peuvent se désexciter dans $|F = 1\rangle$ et ne sont plus résonant avec la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$.

Piégeage magnétique

L'allumage du piège magnétique, qui sélectionne de fait les atomes dans l'état piégeant $|F = 1, m_F = -1\rangle$, s'effectue en 200 μs. Le piège utilisé est un piège *Ioffe-Pritchard*, dont le monatge est représenté en figure 3.12 a. C'est un piège combinant un champ quadrupolaire, ainsi qu'un champ dipolaire. Le champ quadrupolaire créé un confinement radial linéaire des atomes dans le plan $\{\hat{y}, \hat{z}\}$ et possède un champ nul en son centre.

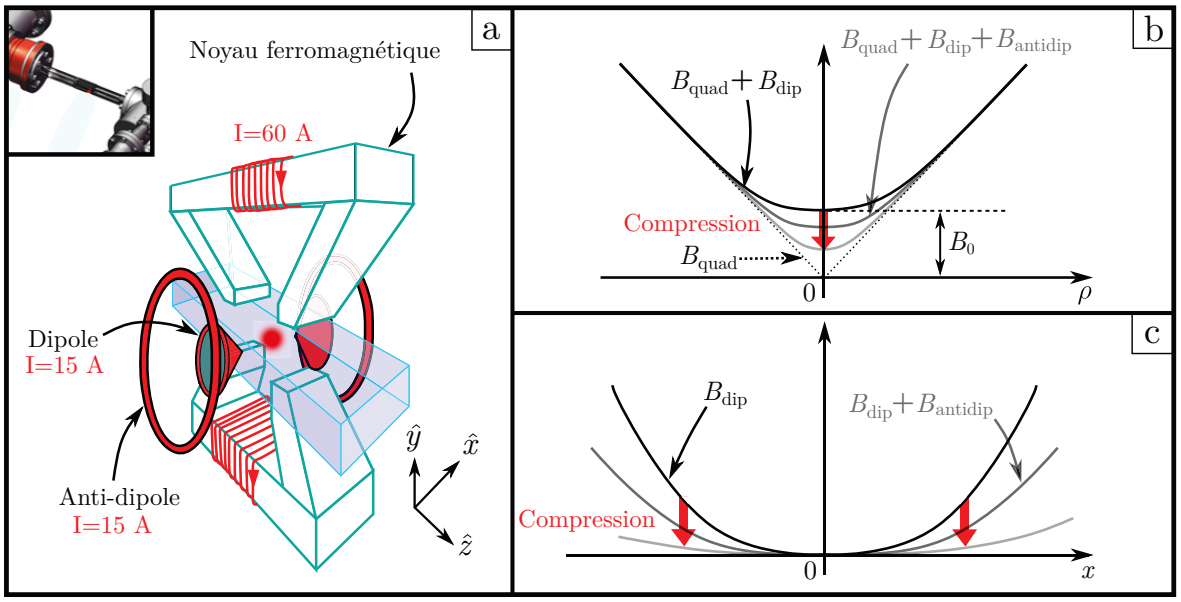

FIGURE 3.12 – **Réalisation d'un piège magnétique. a.** Le piège magnétique est formé en combinant un champ quadrupolaire généré par un électroaimant dont les bobines sont parcourues par 60 A, ainsi qu'un champ dipolaire créé par une paire de bobines parcourues par 15 A. **b.** Lors de la compression du piège, la courbure radiale du piège selon $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ est augmentée en compensant *partiellement* le champ dipolaire par un champ "anti-dipolaire" créé par des bobines parcourues par 15 A. **c.** La compression diminue la courbure selon $\hat{x}$ créé par le champ dipolaire.

Il est créé par une paire de bobines en configuration anti-Helmholtz entourant une pièce de matériau ferromagnétique formant ainsi un électro-aimant [22]. Le champ dipolaire, dirigé selon l'axe $\hat{x}$, est généré par une paire de bobines en configuration Helmholtz (i.e. parcourues de courants allant dans le même sens) placées de part et d'autre de la cellule. Il ajoute un biais magnétique non-nul au centre du piège, ce qui permet de limiter les pertes par dépolarisation [23]. Le champ dipolaire ajoute aussi des courbures de champs, de sorte que, proche du minimum de champ magnétique au centre du piège, les atomes subissent un potentiel magnétique conservatif proche d'un potentiel harmonique (3.1) dont les fréquences de piégeages sont déterminées par les courbures de champ magnétiques associées au champ dipolaire, comme représenté en figures 3.12 b. et c. (courbes noires).

Après un temps de thermalisation de 1 s, on obtient un nuage dans le piège de 8×10^8 atomes, soit une densité de $10^{15}\,\text{m}^{-3}$, à la température de $300\,\mu\text{K}$ [24]. Avant de commencer l'évaporation, il est nécessaire d'augmenter la densité afin d'assurer un taux de collision entre atomes suffisant. Ceci est réalisé par la *compression* du piège magnétique qui passe par l'augmentation des fréquences de piégeage. Pour ce faire, une paire de bobines créent un champ "antidipolaire" dirigé selon $-\hat{x}$ s'opposant au champ dipolaire.

22. L'utilisation d'un électro-aimant présente l'avantage de pouvoir générer des gradients relativement forts (ici $830\,\text{G.cm}^{-1}$ [69]) avec des courants moindres parcourant les bobines (ici 60 A) comparés aux expériences utilisant des bobines seules (qui peuvent nécessiter plus de 100 A [123]). En contrepartie, le matériau ferromagnétique génère toujours des champs rémanents qu'il est difficile de complètement compenser, même avec l'aide des bobines de compensation du MOT, ce qui rend l'étape de mélasse particulièrement difficile à contrôler.

23. Dans une zone où il n'y a pas de champ magnétique, le potentiel magnétique (3.42) est absolument nul. Un atome passant dans cette zone peut alors être affecté par la gravité et s'échapper du piège en tombant.

24. L'augmentation de la température de 50 à $300\,\mu\text{K}$ entre la fin de l'étape de mélasse et le chargement du piège est essentiellement dû au fait que les atomes les plus éloignés du centre du piège magnétique se voient conférés de l'énergie potentielle qui, après thermalisation, augmente la température globale du nuage.

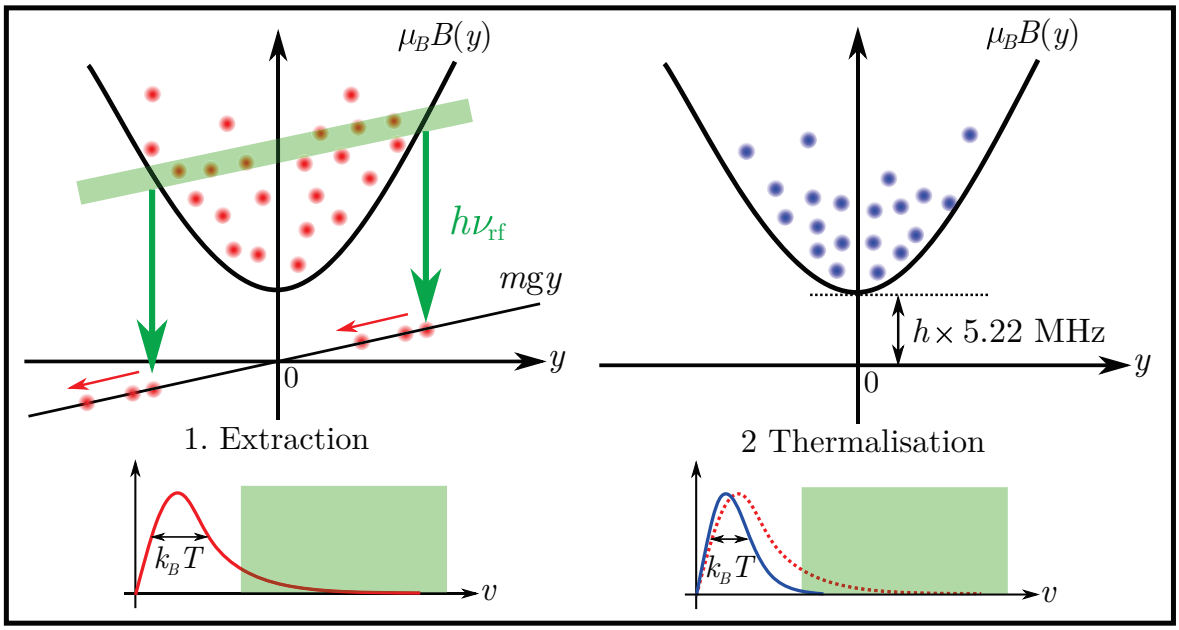

FIGURE 3.13 – **Principe de l'évaporation radio-fréquence.** Les atomes les plus énergétiques sont extraits du piège à une énergie $h\nu_{\rm rf}$ déterminée par le champ radio-fréquence de fréquence $\nu_{\rm rf}$. Transférés dans l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$, ces derniers quittent le piège magnétique par gravité. Cette perte en énergie du gaz est ensuite redistribuée après thermalisation du gaz par collision des atomes, ce qui induit un abaissement global de la température. Chaque encart représente la distribution de vitesse des atomes du gaz avant et après thermalisation. Le "fond du piège", c'est à dire la radio-fréquence permettant d'enlever tous les atomes du piège, a été mesurée à 5.22 MHz.

Cette compensation partielle du champ dipolaire permet d'augmenter la fréquence radiale du piège magnétique et diminuer la fréquence de piégeage longitudinale, comme représenté en figure 3.12 b. et c. (courbes grises).

Évaporation radio-fréquence

La compression du piège assure une densité suffisante et donc un taux de collision (nombre de collisions entre atome par unité de temps) satisfaisant pour opérer efficacement au refroidissement par évaporation. Un refroidissement par évaporation, schématisé en figure 3.13, s'effectue en deux étapes : une étape d'extraction des particules les plus énergétiques, suivi d'une étape de thermalisation du gaz. L'extraction à énergie contrôlée des atomes du piège magnétique est effectuée par un rayonnement radio-fréquence généré par les bobines du MOT, qui permet un couplage cohérent entre l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ piégeant et l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$ non-piégé (les atomes sortent donc du piège par gravité). L'évaporation graduelle est réalisée par la variation quasi-exponentielle en 10 s de la fréquence du couplage de 90 MHz à 6 MHz.

Après l'étape d'évaporation, on obtient un nuage de 1.5×10^7 atomes dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$, d'une densité de 10^{17} m^{-3} et à la température de $5\,\mu$K. La longueur d'onde thermique associée est proche de 100 nm, ce qui donne une densité dans l'espace des phases estimée à $n\langle\lambda_{\rm dB}\rangle^3 \sim 10^{-4}$.[25]

25. En pratique, il est possible de passer le seuil de condensation lors de l'évaporation dans le piège magnétique. Mais le manque d'accès optiques disponibles a été l'argument principal pour l'ajout d'une seconde cellule en verre dans laquelle condenser et faire des expériences avec le condensat.

3.3.4 Transport du nuage dans une pince optique

Le nuage est maintenant assez froid pour être chargé dans un piège optique. Un tel piège, appelé *pince optique*, est réalisé à l'aide d'un faisceau gaussien focalisé au centre du piège magnétique.

L'intensité en un point $\mathbf{x} = \{r = \sqrt{x^2+y^2}, z\}$ d'un faisceau gaussien se propageant le long de l'axe $\hat{z}$ focalisé en $z = 0$ est donnée par :

$$I(\mathbf{x}) = \frac{2P}{\pi \mathrm{w}^2(z)} \mathrm{e}^{-2r^2/\mathrm{w}^2(z)} \quad \text{avec} \quad \mathrm{w}(z) = \mathrm{w}_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}\,, \tag{3.50}$$

où P est la puissance du faisceau, et $\mathrm{w}(z)$ le *waist* i.e. la taille du faisceau en fonction de l'abscisse z autour du point focal $z = 0$, (w_0 étant le minimum en $z = 0$). La longueur de Rayleigh $z_R = \pi \mathrm{w}_0^2/\lambda$ détermine la longueur typique de divergence du faisceau autour du point focal. Ici, il a été caractérisé $\mathrm{w}_0 = 28\,\mu$m et $z_R = 230\,\mu$m [90] (voir l'encart de la figure 3.14).

La lumière de la pince est générée par un laser *Keopsis* à $\lambda = 1070$ nm fournissant une puissance utile au niveau des atomes de 1.5 W environ. La fréquence optique de la pince est donc fortement décalée vers le rouge de la transition à 780 nm du ^{87}Rb, ceci garantissant l'absence d'émission spontanée générée par le faisceau pour les temps d'expériences considérés [26]. L'interaction lumière-atome est donc majoritairement déterminée par la force dipolaire. Le potentiel dipolaire associé (3.37) est attractif, le faisceau forme donc un piège où les atomes sont attirés vers le maximum d'intensité au point focal $r = z = 0$.

Un développement limité au premier ordre de (3.50) au point focal $r = z = 0$ montre que le potentiel dipolaire (3.37) ressenti par les atomes est harmonique :

$$U(\mathbf{x}) \sim \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \bar{\Delta}} \times \frac{2P}{\pi \mathrm{w}_0^2} \left(1 - \frac{2r^2}{\mathrm{w}_0^2} - \frac{z^2}{z_R^2}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\bar{\Delta}} = \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0}\right). \tag{3.51}$$

On peut alors caractériser la pince en terme de profondeur de piège (potentiel au point focal) :

$$U_0 = \frac{3c^2 \Gamma P}{\omega_0^3 \mathrm{w}_0^2 \bar{\Delta}}\,, \tag{3.52}$$

telle que $-U_0/k_B = 86\,\mu$K, et de fréquences de piégeage radiale ω_r et longitudinale ω_z :

$$\omega_r = \sqrt{-\frac{4U_0}{m\mathrm{w}_0^2}} \quad \text{et} \quad \omega_z = \sqrt{-\frac{2U_0}{m z_R^2}}\,, \tag{3.53}$$

estimées à $\omega_r/2\pi = 1.03$ kHz et $\omega_z/2\pi = 89$ Hz.

Lors du chargement des atomes depuis le piège magnétique dans la pince, plus de la moitié des atomes sont perdus, ceci étant majoritairement dû au fait que le recouvrement spatial des deux pièges n'est pas optimal [27].

26. L'intensité moyenne au point focal peut être estimée à $I = 2P/\pi \mathrm{w}_0^2 \sim 8.8 \times 10^8$ mW.cm^{-1}, ce qui permet de donner un ordre de grandeur du paramètre de saturation (3.39) $s \sim 10^{-8}$. A basse saturation, l'expression (3.38) permet d'estimer un taux d'émission spontanée des atomes dans le piège optique à $\Gamma_{\mathrm{sp}} \sim 10^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$, soit un temps de vie typique des atomes dans le piège d'une minute.

27. La forme très allongée selon $\hat{x}$ du piège magnétique est un héritage des anciennes expériences de laser à atomes réalisées sur ce montage [17, 143].

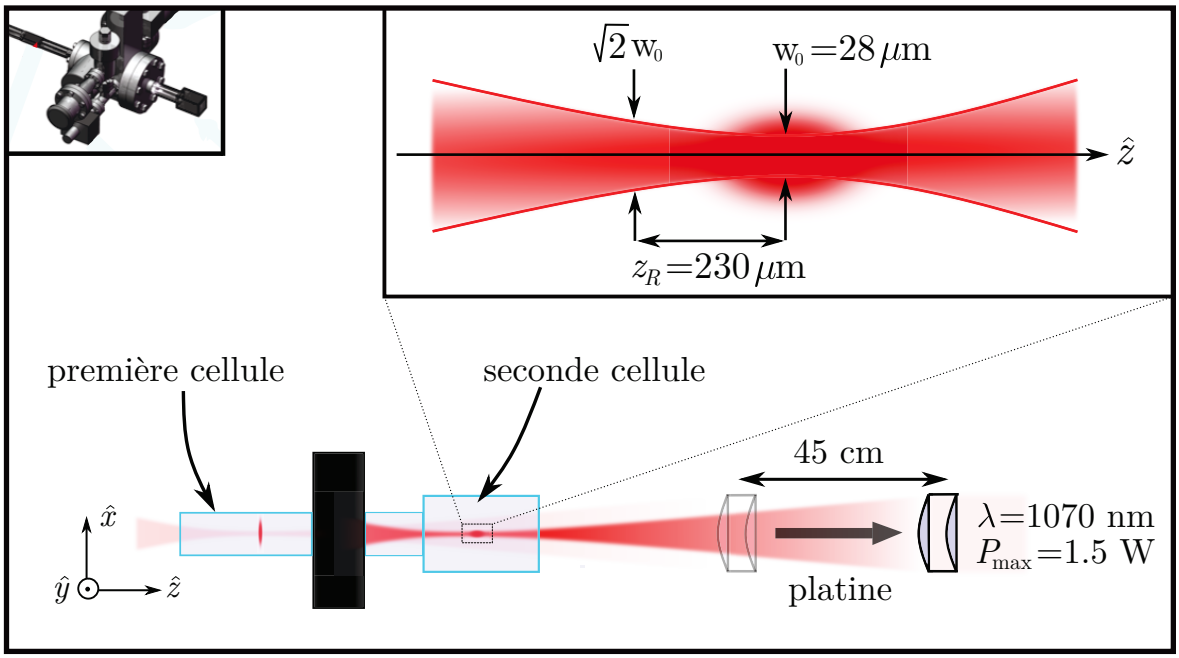

FIGURE 3.14 – **Transport du nuage dans une pince optique.** Les optiques de focalisation de la pince optique sont montées par une platine sur coussin d'air. Les atomes piégés au point focal du faisceau peuvent donc être déplacés sur 45 cm de la première cellule à la seconde cellule avec la platine.

Les lentilles de focalisation de la pince sont montées sur une platine de translation qui permet de déplacer le nuage d'atomes sur 35 cm en 2 s (avec une répétabilité de $\pm 0.2\,\mu$m) de la première cellule à la seconde cellule en verre, comme schématisé en figure 3.14.

La platine est portée sur coussin d'air comprimé afin de limiter les vibrations (et donc le chauffage du nuage). Néanmoins le nuage est légèrement chauffé par les vibrations résiduelles de $5\,\mu$K à $10\,\mu$K, et une partie des atomes est perdue pendant le transport lors des phases d'accélération de la platine. Autour de l'enceinte à vide reliant la première et la seconde cellule ont été ajoutées des bobines produisant un faible champ magnétique selon lequel les atomes peuvent restés polarisés dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ pendant le transport.

3.3.5 Condensation dans la seconde cellule

Formation d'un piège optique croisé

Après transfert dans la seconde cellule, un second faisceau gaussien se propageant selon la direction verticale $\hat{y}$ est focalisé sur le nuage afin de former un *piège optique croisé*, un situation schématisée en figure 3.16 a. La lumière de ce nouveau faisceau, dit *faisceau "dimple"*, provient du même laser à $\lambda = 1070$ nm qui permet de générer la pince optique, fournissant une puissance utile estimée à 7 W au niveau des atomes. Les potentiels dipolaires créés par chacun des faisceaux laser sont sommés [28] et aboutissent à la formation d'un piège plus profond.

28. La longueur de cohérence de la source laser utilisée pour générer la pince et le faisceau dimple est de l'ordre du millimètre. La longueur des faisceaux partant depuis la source vers les atomes dépassant les deux mètres, les phénomènes d'interférences pouvant se produire au croisement des deux bras sont négligeables.

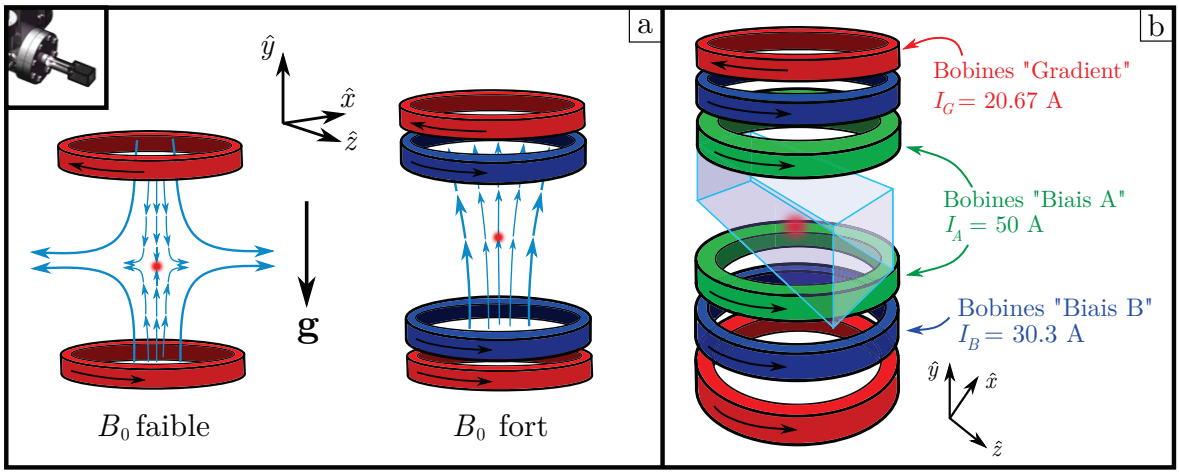

FIGURE 3.15 – **Principe de la lévitation magnétique. a.** Un champ quadrupolaire produit un gradient magnétique b' permettant de compenser la gravité selon $\hat{y}$. Néanmoins, la courbure radiale associée au champ quadrupolaire ne permet pas une lévitation homogène du nuage. En ajoutant un champ dipolaire permettant d'augmenter le biais B_0 et générant une courbure b'', on peut atténuer la courbure radiale totale résultante $b'^2/8B_0 - b''/2$. **b.** Implémentation de la lévitation sur l'expérience à l'aide de trois paires de bobines placées de part et d'autre de la cellule.

Le dimple est rendu elliptique par une collimation avec un télescope cylindrique [29], lui donnant ainsi un waist au point focal de $\mathrm{w}_z = 91\,\mu$m selon $\hat{z}$ et $\mathrm{w}_x = 203\,\mu$m selon l'axe $\hat{x}$ [121]. Le confinement du nuage selon $\hat{z}$ est alors majoritairement déterminé par le faisceau dimple alors que le confinement selon $\hat{y}$ généré sur la longueur de Rayleigh du faisceau dimple est largement négligeable devant le confinement radial de la pince.

On obtient ainsi un nuage de 3×10^6 atomes piégés de manière quasi-isotrope, d'une densité de 10^{20} m^{-3}, à une température d'environ $10\,\mu$K. La longueur d'onde thermique associée est de 60 nm, soit une densité dans l'espace des phases de $n\langle\lambda_{\mathrm{dB}}\rangle^3 \sim 10^{-2}$.

Lévitation magnétique

Comme on l'a vu précédemment, la localisation d'Anderson est un phénomène observable sur la dynamique aux temps longs (typiquement très grands devant le temps de transport τ^*) des systèmes désordonnées. On peut estimer les temps typiques d'expériences nécessaires en se rappelant que le critère de Ioffe-Regel $kl^* \sim 1$ de la localisation implique des coefficients de diffusion *classiques* (2.25) $D_0 \sim \hbar/3m = 240\,\mu\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$ pour des états proches du seuil de mobilité. Pour que le nuage puisse diffuser sur une taille observable typique de $L \sim 100\,\mu$m, les temps de diffusion associés $\tau_{D_0} \sim L^2/D_0$ sont de l'ordre de la dizaine de secondes. Il est donc nécessaire de compenser la gravité subie par les atomes s'il on ne veut pas que les atomes sortent très vite du champ du système d'imagerie.

Tout comme le piégeage magnétique, la lévitation magnétique repose sur l'utilisation d'un potentiel magnétique (3.42) avec un gradient magnétique s'opposant exactement au potentiel de pesanteur mgy des atomes. *A priori*, on pourrait penser que seule une paire de bobines anti-Helmholtz produisant le gradient de champ magnétique (c'est à dire un champ quadrupolaire) approprié selon la direction $\hat{y}$ devrait suffire à réaliser une lévitation des atomes.

29. Le détail du montage complet permettant la mise en forme du faisceau dimple est explicité dans le manuscrit de thèse de Kilian Müller [121].

Cependant, l'existence d'un gradient de champ selon la direction $\hat{y}$ implique toujours, par $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, l'existence de gradients de champ selon les directions $\hat{x}$ et $\hat{z}$. Cela signifie qu'une seule paire de bobines ne suffit pas à produire un potentiel de lévitation *homogène*.

Pour pallier à ce problème, il est possible d'ajouter un biais magnétique (plus exactement, un champ dipolaire) qui repousse les gradients des directions $\hat{x}$ et $\hat{z}$ loin de la zone de lévitation des atomes. Plus précisément, on peut montrer [69] que la norme du champ total $B(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x} = \{y, \rho\}$ créé par une paire de bobines Helmholtz (générant un biais B_0 et une courbure b'') et une paire de bobines anti-Helmholtz (générant un gradient b') placées selon le même axe $\hat{y}$ autour de la cellule :

$$B(\mathbf{x}) \sim B_0 + b'y + b''y^2 + \left(\frac{b'^2}{8B_0} - \frac{b''}{2}\right)\rho^2 \,, \tag{3.54}$$

où ρ est la coordonnée radiale $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$. Réaliser une lévitation implique la condition $b' = mg/g_F m_F \mu_B$ sur le gradient de champ magnétique. Dans ce cas, le potentiel externe total (magnétique et de gravité) ressentit par le nuage s'écrit :

$$U_{\text{mag}}(\mathbf{x}) \sim g_F m_F \mu_B B_0 + \frac{1}{2} m w_y^2 \, y^2 + \frac{1}{2} m w_\rho^2 \, \rho^2 \,, \tag{3.55}$$

où w_y^2 et w_ρ^2 sont les courbures ($w^2 > 0$) ou anti-courbures ($w^2 < 0$) du potentiel magnétique soumis aux atomes :

$$w_y^2 = \frac{2 g_F m_F \mu_B}{m} \, b'' \quad \text{et} \quad w_\rho^2 = \frac{g_F m_F \mu_B}{m} \left(\frac{b'^2}{4B_0} - b''\right) \,. \tag{3.56}$$

La deuxième expression de (3.54) montre que plus le biais B_0 est important, plus la courbure radiale w_ρ^2 est faible, ce qui est exactement l'effet illustré en figure 3.15 a.

La méthode de lévitation magnétique présentée précédemment est implémentée sur le montage expérimental, schématisé en figure 3.15 b., à l'aide de trois paires de bobines placée selon l'axe $\hat{y}$ de part et d'autre autour de la cellule : une paire de bobines anti-Helmholtz générant le gradient b', et deux paires de bobines Helmholtz A et B générant un biais B_0 (et une courbure b''). Ces deux paires de bobines de biais sont alimentées indépendamment en courant I_A et I_B, elles se comportent donc comme une unique paire de bobines Helmholtz effective où le ratio en courant I_A/I_B détermine la distance effective séparant les deux bobines de la paire équivalente. Les trois alimentations en courant associées à chaque paire de bobines permettent un contrôle très stable du courant au mA près, pour des courants pouvant typiquement aller jusqu'à 50 A [17].

Ce schéma d'implémentation permet une compensation précise de la gravité, ainsi qu'un très bon contrôle sur le potentiel magnétique (3.55) exposé aux atomes, notamment sur les courbures (3.56) qui peuvent être rendues isotropes telles que $w_y^2 = w_\rho^2$ et de l'ordre du Hz.

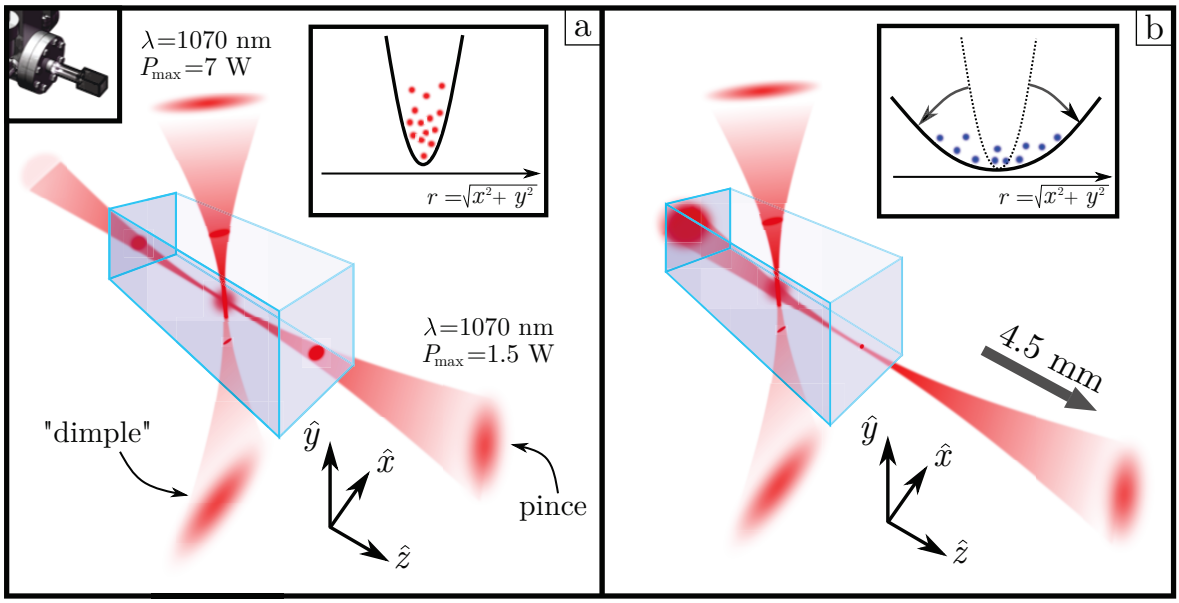

FIGURE 3.16 – **Piège dipolaire croisé. a.** Le confinement des atomes dans le potentiel dipolaire est assuré par la pince selon les directions $\hat{x}$ et $\hat{y}$, et par le faisceau *dimple* selon $\hat{z}$. **b.** A l'issue de l'évaporation *tout optique*, la température du gaz peut être encore abaissée par une ouverture adiabatique du piège dipolaire (cf encarts). Pour ce faire, le confinement de la pince ω_r est diminué à ω'_r en reculant de 4.5 mm les optiques de focalisation de la pince.

Évaporation et ouverture adiabatique du piège croisé

Une fois les atomes chargés dans le piège dipolaire croisé, on opère à un refroidissement par évaporation *tout optique*. Le principe de fonctionnement est strictement le même que pour l'évaporation radio-fréquence : les atomes les plus énergétiques sont sélectivement retirés en diminuant la puissance des faisceaux (ce qui diminue la profondeur du piège optique), puis la thermalisation du nuage permet une redistribution de la perte en énergie sur tout le gaz et donc une diminution de la température.

En même temps que l'étape d'évaporation est entamée, le potentiel de lévitation est allumé afin de compenser la gravité. En procédant ainsi, il est possible de garder des atomes dans des pièges optiques extrêmement peu profonds et très décomprimés [30]. En effet, le potentiel total ressenti par les atomes combinant gravité et piège croisé n'admet pas de minimum pour des profondeurs de pièges inférieures à $1.5\,\mu$K.

Au terme de 4.5 s d'évaporation, où les puissances des faisceaux du piège dipolaire croisé ont été diminuées exponentiellement au cours du temps, on obtient un condensat piégé d'atomes de ^{87}Rb lévité contre l'action de la gravité. Afin de descendre encore plus bas en température, on réalise une *ouverture adiabatique* du piège optique en reculant les optiques de focalisation de la pince de 4.5 mm en 1 s à l'aide de la platine de translation, comme illustré en figure 3.16 b. Au croisement avec le dimple, le waist de la pince passe de $w_0 = 28\,\mu$m à $60\,\mu$m, ce qui ouvre le piège optique en diminuant la fréquence (3.53) de piègeage radial de la pince ω_r à $\omega'_r < \omega_r$ (cf encarts de la figure 3.16).

Si cette ouverture du piège se fait de manière adiabatique, le gaz reste à l'équilibre thermodynamique lors du passage de ω_r à ω'_r. S'il on oublie un temps les interactions, la taille du gaz piégé δx est donnée par la taille de l'oscillateur harmonique (3.19) $\delta x \sim 1/\sqrt{\omega_r}$.

30. On rappelle que les fréquences (3.53) de piégeage optique varient comme $\propto \sqrt{P}$ où P est la puissance du faisceau optique utilisé pour le piège.

Dans cette situation, δx est reliée à la température T du gaz par le théorème équipartition :

$$\frac{1}{2}m\omega_r^2\delta x^2 = \frac{1}{2}mk_BT. \tag{3.57}$$

Après l'ouverture du piège, on a donc $\delta x' \sim 1/\sqrt{\omega_r'} > \delta x$, et la nouvelle température T' est donnée par (3.57) :

$$T' = \left(\frac{\omega_r'}{\omega_r}\right) T < T. \tag{3.58}$$

L'ouverture adiabatique permet donc un refroidissement du gaz, sans pour autant augmenter la densité dans l'espace des phases [31].

3.3.6 Techniques d'imagerie

La quasi-totalité des informations concernant les atomes est collectée par une imagerie de la densité atomique à la fin de chaque cycle expérimental. Deux méthodes sont utilisées : l'imagerie par absorption, et l'imagerie par fluorescence.

Imagerie par absorption

Un faisceau résonant sur la transition cyclante $|F = 2\rangle \to |F' = 3\rangle$, dirigé directement vers la caméra selon l'axe $\hat{x}$, éclaire les atomes pendant $50\,\mu$s. L'intensité détectée sur la caméra est déterminée par l'absorption du nuage qui dépend de l'épaisseur de nuage traversée par le faisceau selon une loi de Beer-Lambert :

$$I(y,z) = I_0(y,z)\exp\left(-\sigma\, n_{2\mathrm{D}}(y,z)\right) \quad \text{avec} \quad n_{2\mathrm{D}}(y,z) = \int \mathrm{d}x\, n(x,y,z) \tag{3.59}$$

où $I_0(y,z)$ est l'intensité incidente éclairée sur les atomes, σ est la section efficace d'absorption des atomes, et $n_{2\mathrm{D}}(y,z)$ est la densité atomique apparente (i.e. la densité atomique n intégrée selon l'axe $\hat{x}$ de l'imagerie).

On peut montrer [17] que la section efficace d'absorption des atomes est *indépendante* de I_0 si l'interaction lumière-atome se fait dans un régime de *faible saturation*. Pour un faisceau d'imagerie résonant $\omega = \omega_0$, ce régime est caractérisé par un paramètre de saturation (3.39) $s = I_0/I_{\text{sat}} \ll 1$, soit $I_0 \ll I_{\text{sat}}$.

Dans cette situation, la densité atomique $n_{2\mathrm{D}}(y,z)$ peut directement être déduite de l'intensité $I(y,z)$ mesurée par la caméra à partir (3.59) sans qu'aucune information supplémentaire ne soit requise :

$$n_{2\mathrm{D}}(y,z) = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{I(y,z)}{I_0(y,z)}\right). \tag{3.60}$$

L'imagerie par absorption permet donc une calibration du nombre d'atomes en deux images, une image mesurant l'absorption des atomes $I(y,z)$, et une autre mesurant l'intensité incidente $I_0(y,z)$.

31. L'ouverture du piège se fait à $\delta x\,\delta v$ constant, où la dispersion en vitesse des atomes du gaz $\delta v \sim \sqrt{\omega_r}$.

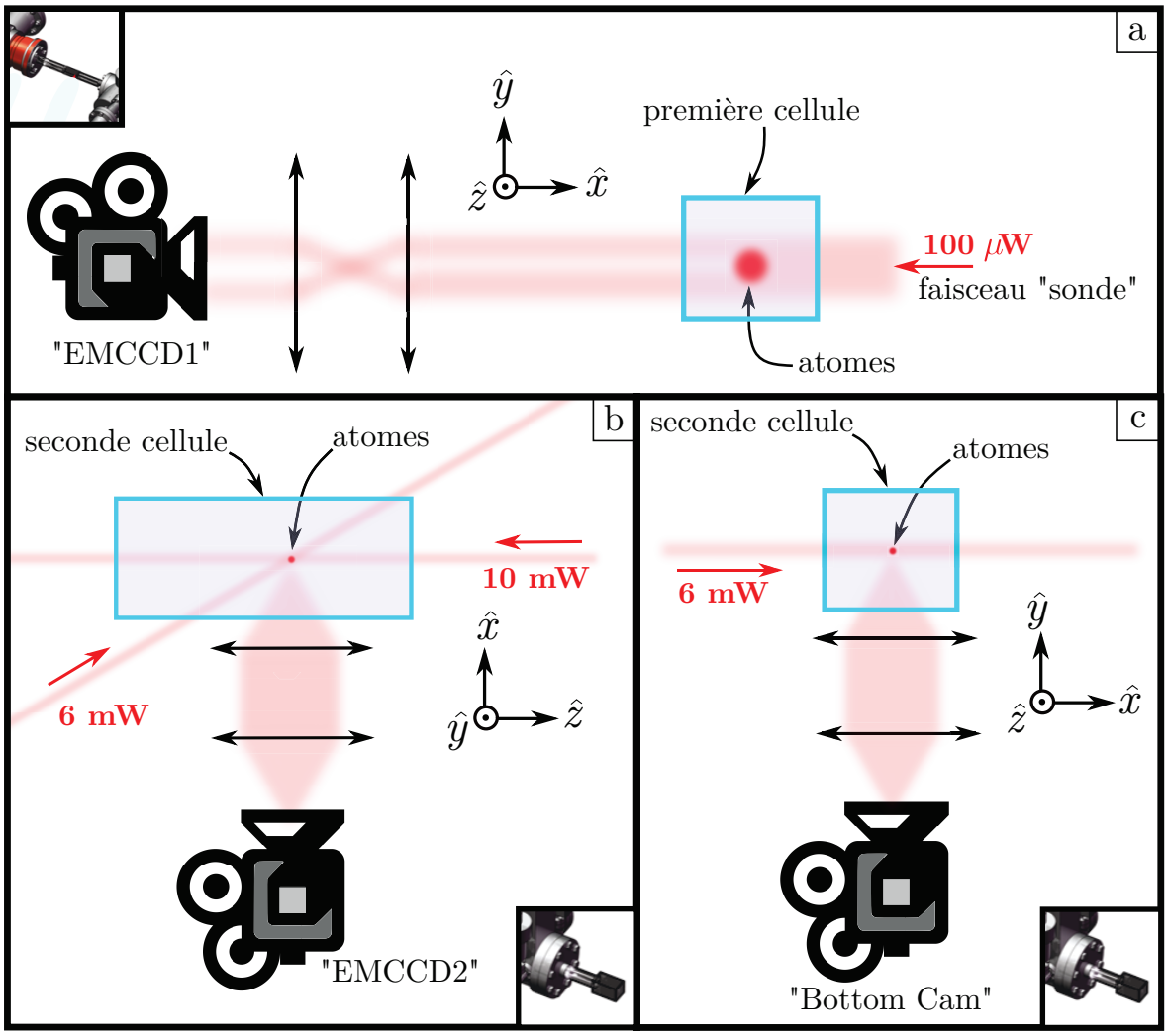

FIGURE 3.17 – **Imageries pour la première et seconde cellule. a.** Schéma d'imagerie par absorption au niveau de la première cellule. L'intensité du faisceau d'imagerie est estimée à $I_0 \sim 0.2\,\mathrm{mW.cm^{-2}}$, ce qui est près d'un ordre de grandeur inférieur à l'intensité de saturation I_{sat}. **b.** Positionnement des faisceaux d'imagerie par fluorescence et des caméras autour de la seconde cellule. Toutes les données expérimentales discutées dans le cadre de ces travaux ont été mesurées avec la caméra *"EMCCD2"*. L'intensité des faisceaux est estimée à $I_0 \sim 25\,\mathrm{mW.cm^{-2}}$, soit plus d'un ordre de grandeur de I_{sat}. **c.** Positionnement de la troisième caméra permettant d'imager selon l'axe $\hat{y}$.

Imagerie par fluorescence

Un faisceau d'intensité I_0, résonant avec transition $|F=2\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$, éclaire les atomes pendant $50\,\mu$s en dehors de l'axe de la caméra. Le nuage émet alors de la lumière par fluorescence dans toutes les directions de l'espace. Une partie de cette lumière est alors collectée par la caméra, de préférence avec un système d'imagerie à grande ouverture numérique pour maximiser la quantité de lumière captée. Afin de maximiser le nombre de photons émis par fluorescence, il est préférable d'imager avec des faisceaux *à saturation*, c'est à dire tels que le paramètre de saturation (3.39) résonant $s = I_0/I_{\mathrm{sat}} \gg 1$.[32]

32. Un autre avantage à travailler à saturation est que l'intensité captée par fluorescence devient indépendante de l'intensité incidente I_0. En effet, on peut montrer [17] que l'intensité émise par fluorescence est proportionnelle au taux d'émission spontanée $\Gamma_{\mathrm{sp}} = \frac{\Gamma}{2}\frac{s}{s+1}$. A saturation $s \gg 1$, $\Gamma_{\mathrm{sp}} \sim \Gamma/2$, ce qui est indépendant de s, c'est à dire indépendant de I_0.

Mise en œuvre expérimentale

Les images sont prises à l'aide de cameras amplifiées EMCCD (pour *Electron Multiplier CCD*) *Hamamastu C9102* disposées autour de chaque cellule en verre. Chaque matrice de détection CCD comporte 1000×1000 pixels.

Au niveau de la première cellule, schématisée en figure 3.17 a., une caméra est placée selon l'axe $\hat{x}$ et permet de récolter de la lumière provenant des atomes selon les deux méthodes : par fluorescence en utilisant les faisceaux résonant du MOT comme faisceaux d'imagerie, ou par absorption avec un faisceau dirigé selon la direction $-\hat{x}$. Dans le cas de l'imagerie par absorption, le grandissement du système d'imagerie a été mesuré [17] à $8\,\mu$m par pixel, soit une zone d'imagerie de $8\,\text{mm} \times 8\,\text{mm}$.

Au niveau de la seconde cellule, schématisée en figure 3.17 b., deux caméras sont disposées selon les axes $\hat{x}$ et $\hat{y}$. Mesurer selon deux axes différents la densité intégrée $n_{2\text{D}}$, offre la possibilité de faire de la reconstruction 3D de la densité n totale, ou encore de l'imagerie par tomographie. L'imagerie est réalisée par fluorescence en utilisant deux faisceaux résonants. Ici, le grandissement a été mesuré [90] à $2.7\,\mu$m par pixel, soit une zone d'imagerie de $2.7\,\text{mm} \times 2.7\,\text{mm}$.

Pour l'imagerie par fluorescence, il est préférable d'utiliser plusieurs faisceaux synchronisés, idéalement contra-propageant, afin de limiter les déformations de la densité atomique dues à la pression de radiation. En effet, après quelques cycles d'absorption/émission de photons, on a vu qu'un atome se voit attribué une *vitesse de recul* v_r dans la direction de propagation du faisceau. Avec un unique faisceau d'imagerie exposé aux atomes pendant $50\,\mu$s, les atomes peuvent donc se déplacer sur une distance de $30\,\mu$m, une échelle de longueur pouvant être largement résolue par le système d'imagerie. Utiliser deux faisceaux contra-propageant permet de "pousser" le nuage de manière isotrope et limiter les déformations.

3.3.7 Quelques caractéristiques du nuage final

Au terme de l'évaporation et de l'ouverture adiabatique, on obtient donc un nuage de 2×10^5 atomes dans l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$, lévité contre l'action de la gravité, dans un piège dipolaire croisé. Ce piège est caractérisé par des fréquences de piégeage $\omega_{x,y,z}$ et une profondeur U_0 que l'on peut estimer à :

$$\omega_x/2\pi = \omega_y/2\pi = 3.4\,\text{Hz}, \quad \omega_z/2\pi = 4.6\,\text{Hz} \quad \text{et} \quad -U_0/k_B = 11\,\text{nK}\,, \tag{3.61}$$

Un exemple d'imagerie par fluorescence est représenté en figure 3.18 a_1. La taille du nuage piégé, qui donne donc le rayon de Thomas-Fermi ζ_TF (cf section 3.1.3), est estimée à $\zeta_\text{TF} = 15\,\mu$m. On peut alors estimer la densité du nuage à $10^{19}\,\text{m}^{-3}$.

Les fréquences de piégeage (3.61) et l'expression (3.26) permettent d'estimer le potentiel chimique du nuage à $\mu \simeq h \times 40\,\text{Hz}$ (avec $a_s = 100\,a_0$ [62]).

En éteignant les faisceaux du piège croisé, on peut laisser le condensat s'étendre dans l'espace libre, comme représenté en figure 3.18 a_2. L'expansion du nuage étant amorcée par les interactions répulsives entre atomes : l'énergie d'interaction $\langle E_\text{int}\rangle$ du nuage est alors majoritairement convertie en énergie cinétique $\langle E_k\rangle$. C'est sur ce principe que fonctionne la *dilution*, permettant ainsi de supprimer les interactions entre atomes au sein d'un nuage froids.

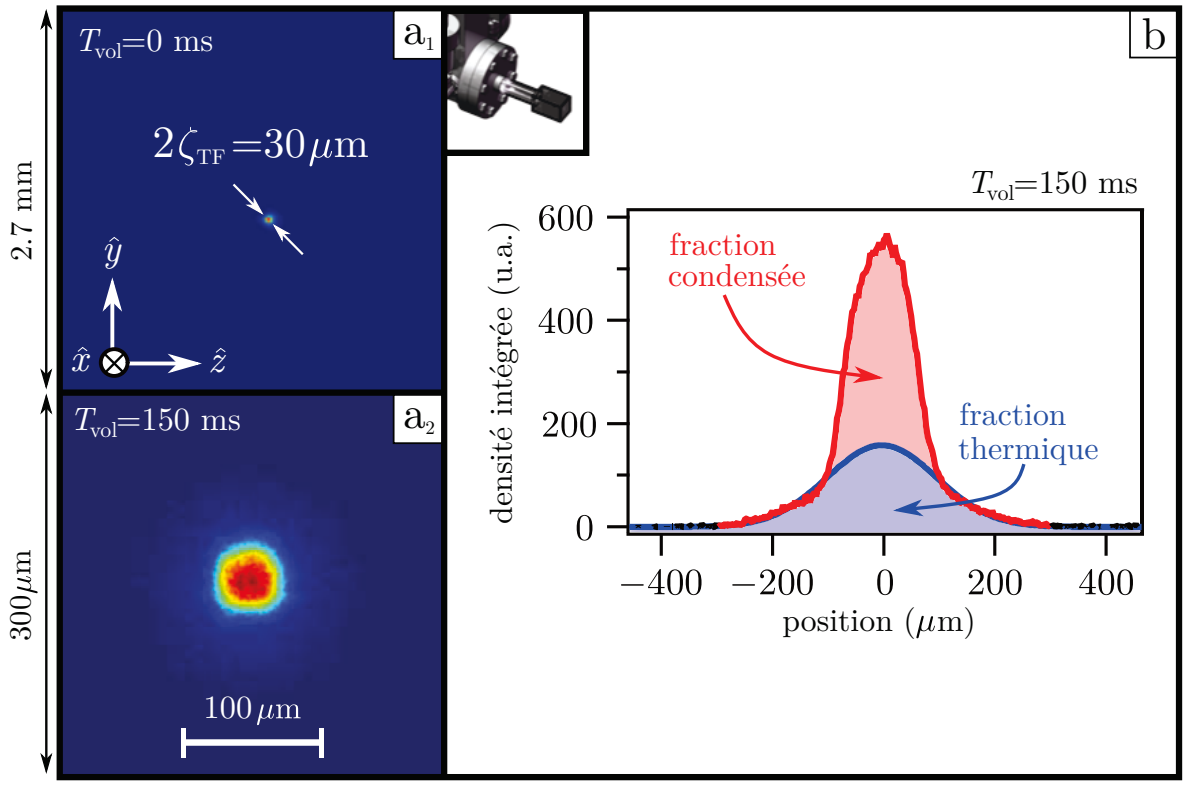

FIGURE 3.18 – **Exemple de condensat obtenu expérimentalement. a$_1$.** Condensat dans le piège croisé après évaporation, par imagerie par fluorescence. On estime la taille du nuage à $2\zeta_{TF} = 30\,\mu$m. **a$_2$.** Après un temps de vol de $T_{vol} = 150$ ms dans l'espace libre, le nuage s'étend sur une taille typique de $100\,\mu$m. **b.** Le profil en densité obtenu par intégration selon un axe montre une double structure caractéristique d'un nuage refroidi sous le seuil de condensation : une densité centrale parabolique associée à une fraction condensée, et une base gaussienne associée à une fraction thermique non-condensée. Figures tirées de la référence [121].

Après un temps de vol de 150 ms, le profil en densité du nuage en expansion, représenté en figure 3.18 b., révèle une double structure qui caractérise deux fractions distinctes : un profil parabolique caractéristique d'une fraction d'atomes condensés dans un piège harmonique (aire rouge), et des ailes gaussiennes caractéristiques d'une fraction d'atomes thermiques non-condensés (aire bleue). On estime que plus de la moitié des 2×10^5 atomes est condensée. La température de la fraction thermique est de l'ordre de 5 nK, soit une longueur d'onde de de Broglie de $5\,\mu m$. La densité dans l'espace des phases associée est donc de l'ordre de $n\langle\lambda_{dB}\rangle^3 \sim 10^3$.

Chapitre 4

Propriétés statistiques d'une figure de *speckle*

Le chapitre précédent a permis de montrer en quoi un condensat de Bose-Einstein pouvait être considéré comme une source contrôlable d'ondes quantiques, pour peu que l'on sache contrôler les interactions. Ensuite, on a évoqué comment il était possible de produire un tel état en laboratoire, notamment par une certaine maîtrise de l'interaction matière-rayonnement. On a vu qu'il était notamment possible de produire des potentiels externes *conservatifs* (c'est à dire sans dissipation) par le biais de la *force dipolaire*. On a montré que le *potentiel dipolaire* associé est proportionnel à la figure d'intensité $I(\mathbf{x})$ appliquée aux atomes.

Être capable de réaliser un figure d'intensité aléatoire revient donc à appliquer un potentiel désordonné sur le condensat, et permet donc de *simuler* un problème décrit par l'équation de Schrödinger pour une particule plongée dans un potentiel externe aléatoire. En optique, on obtient une figure d'intensité aléatoire lorsqu'un faisceau laser transverse un milieu diffusant ou lorsqu'il diffracte sur une surface rugueuse. Une telle figure est appelée *figure de tavelure*, ou *speckle* en anglais. Comme on va le voir dans la suite, l'énorme avantage que procure le *speckle* est que l'ensemble de ses caractéristiques statistiques est connu et complètement déterminé par les lois de la diffraction. Cette connaissance complète des propriétés statistiques du potentiel aléatoire associé au *speckle* est un véritable atout pour une comparaison quantitative entre théorie et expérience.

Dans ce chapitre, on rappellera les différentes propriétés statistiques d'une telle figure de *speckle* (distribution en intensité, corrélations spatiales), la plupart de ces notions pouvant être retrouvées dans un grand détail à la référence [79]. Dans un second temps, le schéma d'implémentation de la figure de *speckle* sur le montage expérimental, ainsi que les résultats de sa caractérisation seront présentés.

4.1 Définition et propriétés d'un *speckle*

Une figure de *speckle* consiste en une distribution d'intensité aléatoire spatialement, telle que représentée en figure 4.1 a. Les fluctuations de l'intensité dessinent des grains de lumière contrastés par de larges zones d'obscurité. Une telle figure peut être générée lorsqu'une onde monochromatique traverse un élément diffusant qui lui imprime une distribution de phases aléatoires.

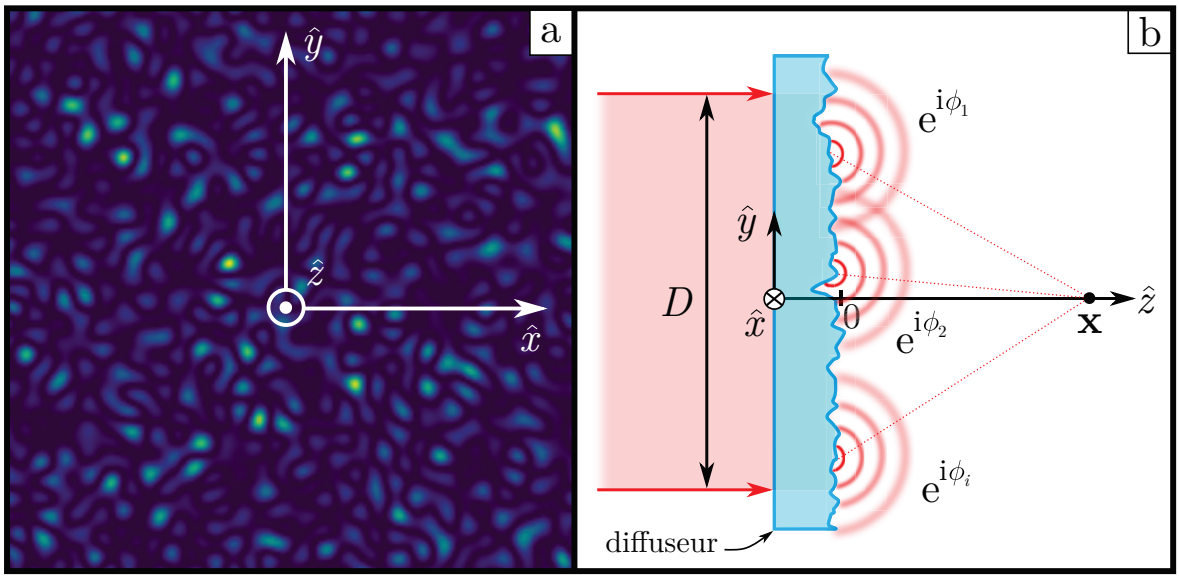

FIGURE 4.1 – **Formation d'une figure de *speckle*. a.** Une figure de *speckle* consiste en un ensemble de grains d'intensité très brillants, entourés de larges zones où l'intensité est quasiment nulle.**b.** Une figure de *speckle* résulte de l'interférence multiple d'ondes sphériques issues d'un objet diffusant (*diffuseur*), dont les déphasages $\{e^{i\phi_i}\}_i$ sont déterminés par l'épaisseur de verre traversée.

Dans le cadre de l'expérience, l'élément diffusant employé sera une lame de verre dépoli (c'est à dire rugueuse à sa surface) appelé *diffuseur*, une situation représentée en figure 4.1 b. Le but de cette section est de déterminer les propriétés statistiques de la figure d'intensité représentée en figure 4.1 a. : distribution en intensité, taille typique des grains, etc ; à l'aide des lois de l'optique.

4.1.1 Propriétés du diffuseur

Dans un premier temps, on s'intéresse aux propriétés de surface du diffuseur ainsi qu'à sa transmission optique. La situation d'intérêt, représentée en figure 4.2, est la suivante : un faisceau laser de longueur d'onde λ est éclairé selon un axe $\hat{z}$ sur une lame mince de verre dépoli (c'est à dire rugueuse à sa surface) appelé *diffuseur*. On suppose l'amplitude du champ incident donnée par $E_{\text{inc}}(\mathbf{x})$.

La rugosité de surface du diffuseur se caractérise par une épaisseur $\ell(\mathbf{x}_0)$ variant *aléatoirement*. Dans la suite, on supposera que l'épaisseur du diffuseur est distribuée selon une loi $p(\ell(\mathbf{x}_0))$ gaussienne centrée sur une moyenne $\overline{\ell}$ et d'une largeur σ_ℓ, où $\overline{\cdot}$ désigne donc la moyenne sur l'ensemble des réalisations du diffuseur. On supposera, de plus, que le verre du diffuseur a été dépoli de manière *homogène* de sorte que $\{\ell(\mathbf{x}_0)\}_{\mathbf{x}_0}$ soit un processus *stationnaire*. Autrement dit, la distribution de probabilité $p(\ell)$ ne dépend pas de $\mathbf{x}_0$, tout comme la moyenne $\overline{\ell}$ et l'écart-type σ_ℓ.

Dans la limite d'une lame de verre *mince*, la traversée du diffuseur imprime au champ un déphasage local $\phi(\mathbf{x}_0)$ selon l'épaisseur $\ell(\mathbf{x}_0)$ de verre traversée :

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\,\ell(\mathbf{x}_0)\,, \tag{4.1}$$

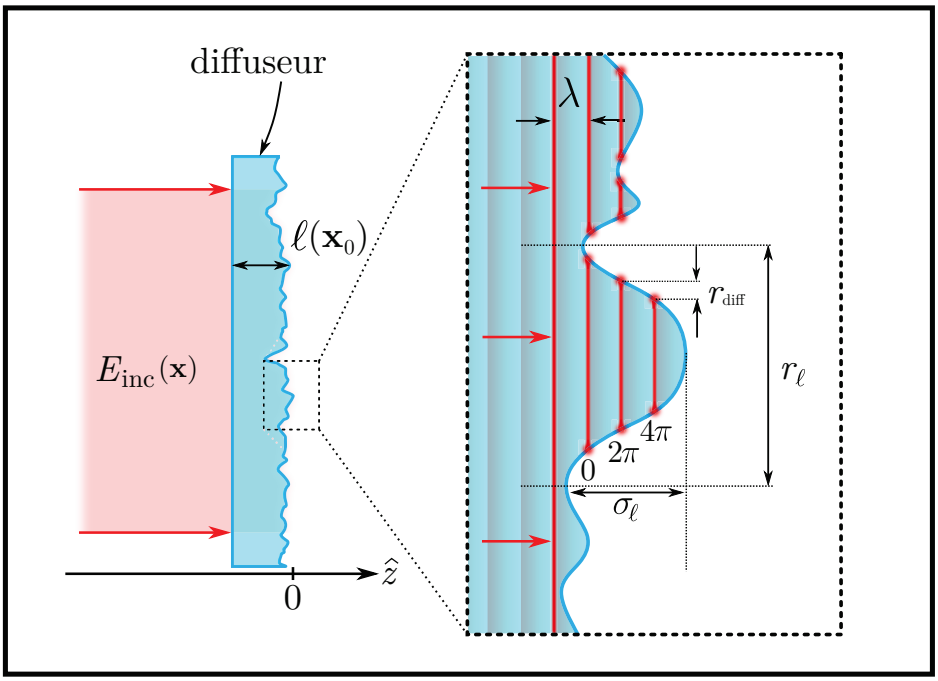

FIGURE 4.2 – **Longueur de corrélation de la transmission du diffuseur**. La granularité de surface du diffuseur est statistiquement caractérisée une épaisseur moyenne de rugosité de verre σ_ℓ, ainsi une taille moyenne de rugosité de verre r_ℓ. La limite $\sigma_\phi \gg 2\pi$ peut s'écrire de manière équivalente $\sigma_\ell \gg \lambda$. Ceci implique que la phase ϕ du champ au niveau du diffuseur varie de nombreuses fois au-delà de 2π sur une seule rugosité. De fait, la transmission $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, qui est une fonction 2π-périodique de ϕ, perd sa corrélation sur une taille $r_{\text{diff}} \ll r_\ell$.

où λ est la longueur d'onde du champ incident $E_{\text{inc}}(\mathbf{x})$, et n l'indice optique du verre utilisé pour le diffuseur. Dans cette situation, la transmission $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ du diffuseur est :

$$t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\mathbf{x}_0)} \,. \tag{4.2}$$

Le pouvoir diffusant de la lame de verre rugueuse est caractérisé par $\overline{t_{\text{diff}}}$. En effet, un diffuseur "très peu rugueux" correspond à la limite $\overline{t_{\text{diff}}} \sim 1$: en moyenne, le faisceau n'est pas modifié en traversant le diffuseur. A l'inverse, $\overline{t_{\text{diff}}} \sim 0$ correspond donc à un diffuseur "très rugueux". Il est possible de calculer $\overline{t_{\text{diff}}}$ par la définition :

$$\overline{t_{\text{diff}}} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \int \mathrm{d}\phi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} p(\phi) \quad \text{avec} \quad p(\phi) = \frac{1}{\sigma_\phi\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(\phi-\overline{\phi})^2/2\sigma_\phi^2} \,, \tag{4.3}$$

qui n'est donc rien d'autre que la *fonction caractéristique* de la distribution $p(\phi)$.[1] Dans le cas d'une variable ϕ gaussienne, on montre [13] que :

$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \mathrm{e}^{-\overline{\phi^2}/2} \,. \tag{4.4}$$

En choisissant de manière appropriée l'origine de l'axe temporel du problème, on peut arbitrairement fixer la moyenne de la phase $\overline{\phi} = 2\pi(n-1)\overline{\ell}/\lambda$ à zéro. Dans ce cas, $\overline{\phi^2} = \sigma_\phi^2$ et :

$$\overline{t_{\text{diff}}} = \mathrm{e}^{-\sigma_\phi^2/2} \quad \text{avec} \quad \sigma_\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\,\sigma_\ell \,. \tag{4.5}$$

1. Au préfacteur près, la définition (4.3) est la transformée de Fourier de la distribution de la phase $p(\phi)$.

La limite d'un diffuseur "très rugueux" est donc obtenue lorsque $\sigma_\phi \gg 1$, ou de manière équivalente, $\sigma_\phi \gg 2\pi$. La distribution $p(\phi)$ peut alors être considérée comme *uniforme* sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Au-delà de la moyenne $\overline{t_{\text{diff}}}$, il est important d'estimer la *corrélation* spatiale C_{diff} de la transmission qui renseigne sur le degré de cohérence spatiale du champ au niveau du diffuseur :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0') = \overline{t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)\, t^*_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0')} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi(\mathbf{x}_0)-\phi(\mathbf{x}_0'))}}\,. \tag{4.6}$$

En supposant que la variable aléatoire $\phi(\mathbf{x}_0) - \phi(\mathbf{x}_0')$ est elle aussi gaussienne, la propriété (4.4) permet de calculer :

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi(\mathbf{x}_0)-\phi(\mathbf{x}_0'))}} &= \mathrm{e}^{-\overline{(\phi(\mathbf{x}_0)-\phi(\mathbf{x}_0'))^2}/2} \\ &= \mathrm{e}^{-\left(\overline{\phi^2(\mathbf{x}_0)}+\overline{\phi^2(\mathbf{x}_0')}-2\overline{\phi(\mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x}_0')}\right)/2} \\ &= \mathrm{e}^{-\sigma_\phi^2\left(1-\overline{\phi(\mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x}_0')}/\sigma_\phi^2\right)}\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Comme l'épaisseur ℓ du diffuseur et la phase ϕ sont proportionnelles selon (4.1), ces deux grandeurs sont chacune corrélées sur une même taille r_ℓ qui correspond à la taille typique de la granularité de surface. En revanche, dans la limite où $\sigma_\ell \gg \lambda$ (ce qui sera le cas en situation d'expérience), la phase ϕ au niveau de la surface du diffuseur peut varier de nombreuse fois au-delà de 2π sur une taille typique r_ℓ de rugosité, comme représenté en figure 4.2.

De fait, même si l'épaisseur de verre ℓ, et donc la phase ϕ, restent corrélées sur une même longueur r_ℓ, la transmission $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ du diffuseur (qui est une fonction 2π-périodique de ϕ) perd sa corrélation sur une certaine taille $r_{\text{diff}} \ll r_\ell$. Afin d'étudier le comportement de C_{diff}, il fait donc sens de s'intéresser d'abord aux comportements des corrélations de ℓ et ϕ à courtes portées $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0'| \ll r_\ell$:

$$\frac{\overline{\ell(\mathbf{x}_0)\,\ell(\mathbf{x}_0')}}{\sigma_\ell^2} = \frac{\overline{\phi(\mathbf{x}_0)\,\phi(\mathbf{x}_0')}}{\sigma_\phi^2} \underset{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0'|\ll r_\ell}{\sim} 1 - \frac{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0'|^2}{2r_\ell^2}\,, \tag{4.8}$$

tout en sachant que la corrélation C_{diff}, qui s'annule sur une distance typique r_{diff}, sera déjà sensiblement nulle pour des distances $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0'| \sim r_\ell$.

En combinant (4.7) et (4.8), on a donc :

$$C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0') \underset{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0'|\ll r_\ell}{\sim} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0'|^2}{2r_{\text{diff}}^2}\right) \quad \text{avec} \quad r_{\text{diff}} = \frac{r_\ell}{\sigma_\phi}\,. \tag{4.9}$$

La longueur de corrélation r_{diff} de la transmission du diffuseur est donc d'autant plus petite que $\sigma_\phi \gg 2\pi$ (ou de manière équivalent $\sigma_\ell \gg \lambda$).

4.1.2 Propriétés statistiques en intensité

La partie précédente a permis de déterminer les propriétés du champ *au niveau du diffuseur*. Dans ce qui suit, on s'attache décrire la propagation d'un tel champ *au-delà du diffuseur* selon les lois de l'optique, pour en déterminer les propriétés statistiques en intensité.

Dans un premier temps, on peut commencer avec une modélisation simplifiée où le diffuseur d'une taille typique D peut être vu comme un ensemble de $N \gg 1$ un émetteur d'une taille typique $r_{\text{diff}} \ll D$ produisant une onde sphérique imprimée d'un phase locale ϕ_i selon l'épaisseur traversée, comme représenté en figure 4.1 b.

La figure de *speckle* va résulter de l'*interférence* de toutes ces ondes sphériques en chaque point $\mathbf{x}$ de l'espace : c'est le principe de Huygens-Fresnel. Ainsi, une figure de *speckle* n'est rien d'autre qu'une figure de *diffraction* résultant de l'interférence de tous les ondes sphériques émises par l'ensemble des points sources matérialisant la surface du diffuseur.

Autrement dit, le champ complexe total $E(\mathbf{x})$ rayonné au point $\mathbf{x}$ après le diffuseur résulte de la somme de toutes ces ondes :

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} E_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i} \, . \tag{4.10}$$

Comme $\{\phi(\mathbf{x}_0)\}_{\mathbf{x}_0}$ est un processus stationnaire, les propriétés statistiques des phases ϕ_i (distributions de probabilité, moyennes, etc) ne dépendent pas de l' émetteur i considéré. On supposera dans la suite que les variables aléatoires $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i}\}_i$ sont statistiquement *indépendantes*.

Le théorème central limite assure alors que la variable aléatoire complexe $E = E_{\mathcal{R}} + \mathrm{i}E_{\mathcal{I}}$ voit ses parties réelle $E_{\mathcal{R}}$ et imaginaire $E_{\mathcal{I}}$ distribuées selon une loi $p(E_{\mathcal{R},\mathcal{I}})$ gaussienne :

$$p(E_{\mathcal{R},\mathcal{I}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E^2} \exp\left(-\frac{E_{\mathcal{R},\mathcal{I}}^2}{2\sigma_E^2}\right) \, . \tag{4.11}$$

Le changement de variable $\{E_{\mathcal{R}}, E_{\mathcal{I}}\} \to \{\sqrt{I}\cos\varphi, \sqrt{I}\sin\varphi\}$, où $I = |E|^2 = E_{\mathcal{R}}^2 + E_{\mathcal{I}}^2$ est l'intensité et φ la phase totale du champ, permet de déterminer la distribution de probabilité jointe $p(I, \varphi)$ du couple de variables aléatoires $\{I, \varphi\}$ [79] :

$$p(I, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma_E^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma_E^2}\right) \, , \tag{4.12}$$

dans l'hypothèse où la phase totale φ est uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, telle que $p(\varphi) = 1/2\pi$. En intégrant la phase totale φ sur $[0, 2\pi]$, on obtient à partir de (4.12) la distribution $p(I)$ en intensité, qui suit une loi exponentielle :

$$p(I) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, p(I, \varphi) = \frac{1}{2\sigma_E^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma_E^2}\right) . \tag{4.13}$$

La loi de probabilité (4.13) permet alors d'évaluer la moyenne $\bar{I}$ en intensité :

$$\bar{I} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}I \, I \, p(I) = 2\sigma_E^2 \, , \tag{4.14}$$

ainsi que la variance $\overline{I^2}$:

$$\overline{I^2} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}I \, I^2 \, p(I) = 8\sigma_E^4 = 2\bar{I}^2 \, , \tag{4.15}$$

soit un écart-type σ_I en intensité :

$$\sigma_I = \sqrt{\overline{I^2} - \bar{I}^2} = \bar{I} \, . \tag{4.16}$$

Autrement dit, le *contraste* des fluctuations d'intensité $\sigma_I/\bar{I}$ d'une figure de *speckle* est égal à 1. Ce résultat explique l'apparence générale d'une figure de *speckle*, représentée en figure 4.1 a. : des maxima d'intensité très brillants, entourés de zones sombres d'intensité quasi-nulle. Les propriétés statistiques (4.13) à (4.16) caractérisent une figure de *speckle pleinement développée*, c'est à dire un *speckle* obtenu dans le régime où $\sigma_\phi \gg 2\pi$.

4.1.3 Propriétés statistiques spatiales

Si l'on se place "suffisamment loin" de la surface du diffuseur, la courbure des fronts d'ondes sphériques peut être négligée et les fronts d'ondes émis par le diffuseur peuvent être considérés comme *plans* : c'est le régime de diffraction de Fraunhofer. La figure d'intensité observée est alors simplement donnée par la *transformée de Fourier* de la transmission de l'objet diffractant [132].

Le lieu d'observation de cette figure de diffraction de Fraunhofer est appelé *plan de Fourier*. La position du plan de Fourier de l'objet dépend du champ incident : si $E_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ est une onde *plane*, le plan de Fourier est *à l'infini* [2] ; si $E_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ est un faisceau rendu convergent par une lentille, le plan de Fourier se trouve dans le plan focal de la lentille. C'est cette dernière configuration qui sera envisagée dans la suite.

On considère donc un faisceau incident $E_{\text{inc}}(\mathbf{x})$ éclairant une lentille mince convergente de focale f accolée au diffuseur placé en $z = 0$, comme représenté en figure 4.3. Par vœux de concision, dans la suite on notera $\{\mathbf{x}_0\}$ l'ensemble des points du plan du diffuseur $\{x, y, z = 0\}$, ainsi que $\{\mathbf{x}_\text{f}\}$ l'ensemble des points du plan de focal $\{x, y, z = f\}$. Comme on va le voir dans la suite, toutes les propriétés de la figure de *speckle* autour du plan focal d'une lentille peuvent être déterminées précisément à l'aide des lois de la diffraction. En plaçant les atomes au focus de la lentille, on s'assure donc de connaître toutes les propriétés du potentiel désordonné appliqué aux atomes.

Dans le régime de la diffraction de Frauhofer, on montre [132] alors que le champ $E(\mathbf{x}_\text{f})$ diffracté par l'ensemble au point focal de la lentille $z = f$ est donné par :

$$E(\mathbf{x}_\text{f}) \propto \text{TF}\left[E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)\, t(\mathbf{x}_0)\right](\mathbf{u} = \mathbf{x}_\text{f}/\lambda f) = \int \mathrm{d}\mathbf{x}_0\, E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)\, t(\mathbf{x}_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\mathbf{x}_\text{f}\cdot\mathbf{x}_0}\,, \tag{4.17}$$

où $E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)$ est le champ incident, et $t(\mathbf{x}_0)$ la transmission de la lentille et du diffuseur combinés. Elle peut être décomposée comme le produit de deux termes :

$$t(\mathbf{x}_0) = \mathrm{m}(\mathbf{x}_0)\, t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)\,, \tag{4.18}$$

où $\mathrm{m}(\mathbf{x}_0)$ désigne la *fonction d'éclairement* du diffuseur, et $t_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0)$ la transmission du diffuseur seul. En pratique, la fonction d'éclairement $\mathrm{m}(\mathbf{x}_0)$ est le masque matérialisant la monture des éléments optiques, que l'on supposera dans la suite comme étant circulaire, de diamètre D. Dans ce cas, le produit $E_0(\mathbf{x}_0) = \mathrm{m}(\mathbf{x}_0)E_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)$ désigne le champ *au niveau du diffuseur*, et $I_0(\mathbf{x}_0) = |E_0(\mathbf{x}_0)|^2$ l'intensité éclairant le diffuseur.

2. La diffraction de Fraunhofer s'apparente alors à un régime de champ lointain.

L'intérêt de l'expression (4.17) est qu'elle donne la dépendance spatiale en $\mathbf{x}_\mathrm{f}$ du champ diffracté. Calculer les corrélations spatiale du champ puis de l'intensité à partir de (4.17) va donc permettre de déterminer les différentes longueurs de corrélation qui fixent la taille moyenne des grains observés en figure 4.1 a.

De manière générale, la taille des grains de *speckle* est déterminée par une longueur de corrélation, qui est définie comme la *largeur* de la fonction de corrélation en intensité :

$$\begin{aligned}\overline{I(\mathbf{x})I(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})} &= \overline{E(\mathbf{x})E^*(\mathbf{x})E(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})E^*(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})}\\ &= \overline{E(\mathbf{x})E^*(\mathbf{x})}\;\overline{E(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})E^*(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})} + \overline{E(\mathbf{x})E^*(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})}\;\overline{E^*(\mathbf{x})E(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})}\\ &= \bar{I}(\mathbf{x})\;\bar{I}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) + \left|\overline{E(\mathbf{x})E^*(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})}\right|^2 , \end{aligned} \tag{4.19}$$

en utilisant le théorème de Wick pour les variables gaussiennes. [3]

Afin d'évaluer chacun des termes de (4.19), on peut calculer la corrélation du champ *dans le plan focal de la lentille* à l'aide de l'expression (4.17) :

$$\overline{E(\mathbf{x}_\mathrm{f})E^*(\mathbf{x}_\mathrm{f}+\delta\mathbf{x}_\mathrm{f})} \propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_0\mathrm{d}\mathbf{x}_0'\, E_\mathrm{inc}(\mathbf{x}_0)E^*_\mathrm{inc}(\mathbf{x}_0')\,\overline{t(\mathbf{x}_0)\,t^*(\mathbf{x}_0')}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\mathbf{x}_\mathrm{f}\cdot(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0')}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{x}_0'} . \tag{4.20}$$

En développant la transmission $t(\mathbf{x}_0)$ selon (4.18), puis en effectuant le changement de variable $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0'\} \to \{\mathbf{x}_+ = (\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_0')/2, \Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0'\}$, on peut écrire (4.20) sous la forme :

$$\begin{aligned}\overline{E(\mathbf{x}_\mathrm{f})E^*(\mathbf{x}_\mathrm{f}+\delta\mathbf{x}_\mathrm{f})} &\propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_0\mathrm{d}\mathbf{x}_0'\, E_0(\mathbf{x}_0)E_0^*(\mathbf{x}_0')\,\overline{t_\mathrm{diff}(\mathbf{x}_0)\,t^*_\mathrm{diff}(\mathbf{x}_0')}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\mathbf{x}_\mathrm{f}\cdot(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0')}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}\cdot\mathbf{x}_0'}\\ &\propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_+\mathrm{d}(\Delta\mathbf{x})\; E_0\left(\mathbf{x}_+ + \Delta\mathbf{x}/2\right) E_0^*\left(\mathbf{x}_+ - \Delta\mathbf{x}/2\right)\; C_\mathrm{diff}(\Delta\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\Delta\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}_\mathrm{f}-\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}/2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\mathbf{x}_+\cdot\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}} .\end{aligned} \tag{4.21}$$

Si l'on se limite à un cas simple où l'éclairement du diffuseur $I_0(\mathbf{x}_0)$ est un faisceau homogène diaphragmé par un masque circulaire de diamètre $D \gg r_\mathrm{diff}$, on pourra considérer le champ $E_0(\mathbf{x}_0)$ au niveau du diffuseur comme une fonction spatialement *molle* comparée à C_diff. [4] Dans ce cas, on peut faire l'approximation que $E_0\left(\mathbf{x}_+ \pm \Delta\mathbf{x}/2\right) \sim E_0(\mathbf{x}_+)$ de sorte que :

$$\begin{aligned}\overline{E(\mathbf{x}_\mathrm{f})E^*(\mathbf{x}_\mathrm{f}+\delta\mathbf{x}_\mathrm{f})} &\propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_+\, I_0(\mathbf{x}_+)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\mathbf{x}_+\cdot\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}} \int \mathrm{d}(\Delta\mathbf{x})\, C_\mathrm{diff}(\Delta\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}\Delta\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}_\mathrm{f}-\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}/2)}\\ &\propto \mathrm{TF}\left[I_0\right](\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}/\lambda f)\cdot\mathrm{TF}\left[C_\mathrm{diff}\right]\left((\mathbf{x}_\mathrm{f}-\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}/2)/\lambda f\right) .\end{aligned} \tag{4.22}$$

3. Le théorème de Wick assure que si $\{X_i\}_i$ est un ensemble de variables gaussiennes centrées, alors :

$$\overline{\prod_i X_i} = \sum_{ij} \overline{X_i X_j}.$$

4. Dans la pratique, on verra que l'éclairement I_0 du diffuseur est un faisceau gaussien de waist w_0 et limité par un diaphragme de diamètre $D > w_0$ (cf figure 4.7). E_0 sera considérée comme "fonction molle" si sa plus petite échelle de variation, ici son waist w_0, est très grande devant r_diff.

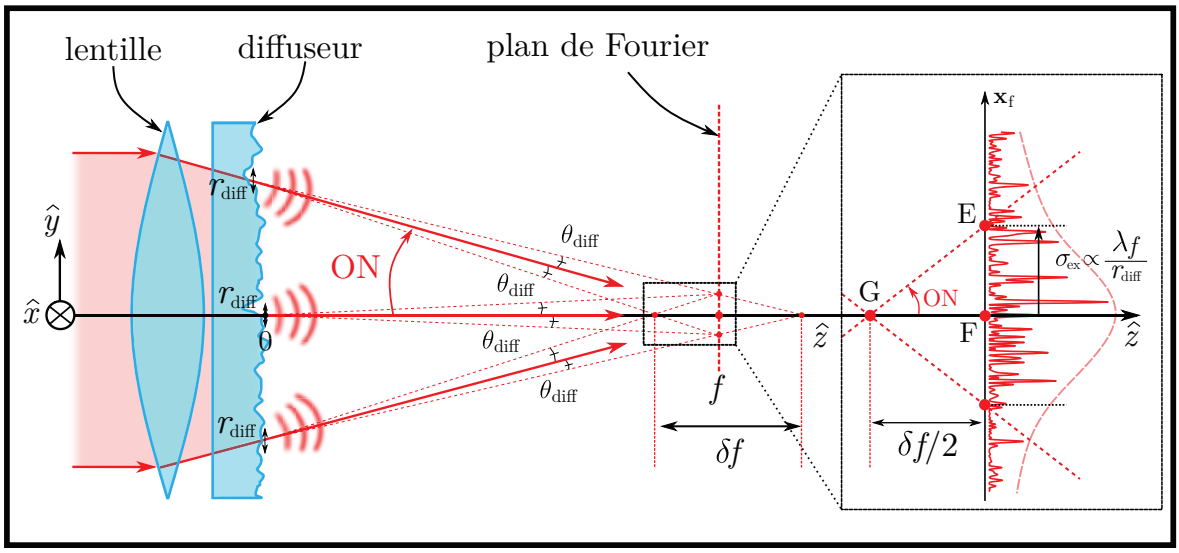

FIGURE 4.3 – **Intensité moyenne et distance de Rayleigh d'une figure de *speckle*.** L'extension spatiale $\sigma_{\text{ex}} \sim \lambda/\text{ON}_{\text{diff}}$ du *speckle* au foyer d'une lentille peut être vue comme le résultat de la diffraction de chaque rugosité de surface du diffuseur de taille r_{diff} observé depuis le plan de Fourier selon une ouverture numérique $\text{ON}_{\text{diff}} = r_{\text{diff}}/f$. Cette tâche de diffraction moyenne est visible sur une distance δf autour du point focal appelée *distance de Rayleigh*. Dans la limite où $\text{ON} \gg \theta_{\text{diff}}$, l'angle formé entre les segments GF et GE est donné par ON, ce qui permet d'estimer par trigonométrie $\delta f/2 \sim \sigma_{\text{ex}}/\text{ON}$.

Extension spatiale d'une figure de *speckle*

En se limitant au cas $\delta\mathbf{x}_{\text{f}} = 0$ dans (4.22), on obtient directement la moyenne de l'intensité lumineuse dans le plan focal :

$$\bar{I}(\mathbf{x}_{\text{f}}) \propto \text{TF}\left[C_{\text{diff}}\right](\mathbf{x}_{\text{f}}/\lambda f) \ . \tag{4.23}$$

Or, d'après (4.9), la corrélation C_{diff} est gaussienne. Sa transformée de Fourier est donc elle aussi gaussienne, de sorte que :

$$\bar{I}(\mathbf{x}_{\text{f}}) = \overline{E(\mathbf{x}_{\text{f}})E^*(\mathbf{x}_{\text{f}})} \propto \exp\left(-\frac{2|\mathbf{x}_{\text{f}}|^2}{\sigma_{\text{ex}}^2}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\text{ex}} = \frac{\lambda f}{\pi r_{\text{diff}}} \ . \tag{4.24}$$

La longueur typique σ_{ex} de variation correspond donc à l'*extension spatiale* de l'intensité moyenne $\bar{I}(\mathbf{x}_{\text{f}})$. Cette dernière peut s'interpréter comme la figure d'intensité délimitée par les cônes de diffraction d'ouverture angulaire $\theta_{\text{diff}} \sim \lambda/r_{\text{diff}}$ de chaque rugosité de surface du diffuseur de taille typique r_{diff}, comme représenté en figure 4.3.

Bien sûr, dans les situations d'intérêt vis à vis de l'expérience, l'extension spatiale σ_{ex} sera toujours très grande devant la taille d'un grain de *speckle* (ce qui sera le cas lorsque $D \gg r_{\text{diff}}$). En pratique, on pourra donc considérer que le premier terme de (4.19) comme constant et égal à $\bar{I}^2$. Ainsi, la taille typique des grains est donnée par la corrélation des fluctuations $\delta I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) - \bar{I}$ de l'intensité par rapport à la moyenne, qui varie spatialement selon :

$$\overline{\delta I(\mathbf{x})\,\delta I(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})} \propto \left|\overline{E(\mathbf{x})E^*(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})}\right|^2 \ . \tag{4.25}$$

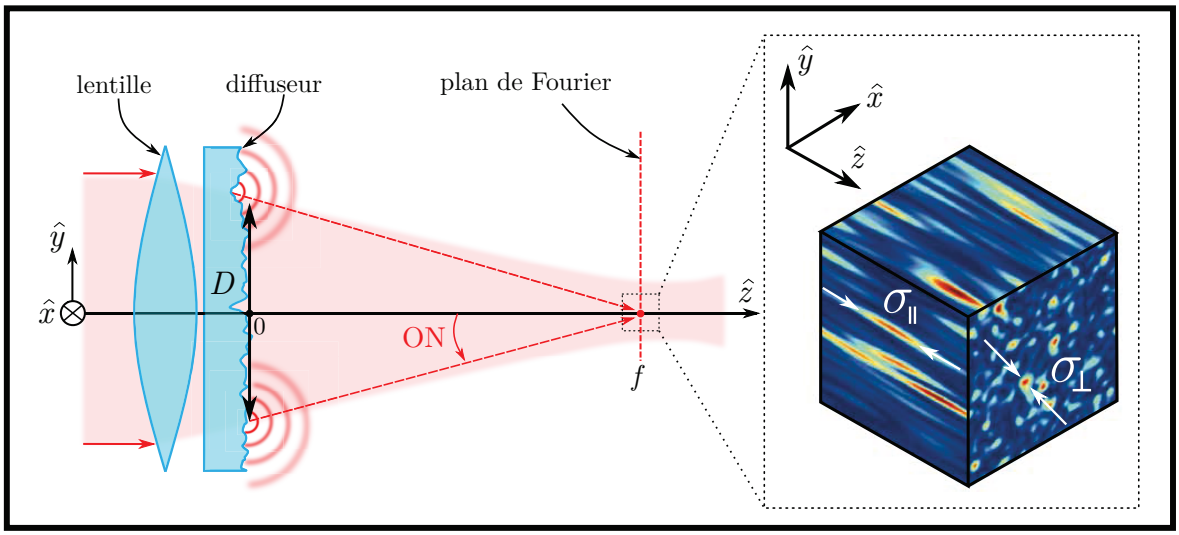

FIGURE 4.4 – **Longueur de corrélation d'une figure de *speckle*.** La taille moyenne des grains d'intensité autour du plan focal est limitée par la diffraction. Dans le plan focal $\{\mathbf{x}_\mathrm{f}\}$, la taille transverse des grains $\sigma_\perp \sim \lambda/2\,\mathrm{ON}$ est limitée par l'ouverture numérique $\mathrm{ON} = D/2f$ de l'éclairement du diffuseur. Autour du plan focal, la taille longitudinale des grains selon $\hat{z}$ est limitée par une longueur de Rayleigh $\sigma_\parallel \sim \lambda/\mathrm{ON}^2$. L'encart est un exemple de mesure *in-situ* d'une figure de *speckle* tirée de la référence [121].

Corrélation dans le plan transverse à l'axe optique

Dans la limite où l'intensité moyenne est homogène, le second facteur de (4.22) est constant, et d'après (4.25) :

$$\overline{\delta I(\mathbf{x}_\mathrm{f})\,\delta I(\mathbf{x}_\mathrm{f}+\delta\mathbf{x}_\mathrm{f})} \propto \left|\mathrm{TF}\left[I_0\right](\delta\mathbf{x}_\mathrm{f}/\lambda f)\right|^2 . \tag{4.26}$$

La corrélation spatiale d'une figure de *speckle* est donc entièrement déterminée par l'intensité I_0 éclairant le diffuseur. Dans le cas simple où l'intensité incidente est uniforme $I_\mathrm{inc}(\mathbf{x}) = \mathrm{c}^\mathrm{ste}$, l'éclairement I_0 du diffuseur est délimité par la pupille circulaire $|\mathrm{m}(\mathbf{x}_0)|^2$ de diamètre D. Dans ce cas, $\overline{\delta I(\mathbf{x}_\mathrm{f})\,\delta I(\mathbf{x}_\mathrm{f}+\delta\mathbf{x}_\mathrm{f})}$ est une fonction d'Airy dont la largeur $\sigma_\perp$ est donnée par $\sigma_\perp \sim \lambda/2\,\mathrm{ON}$ où $\mathrm{ON} = D/2f$ est l'*ouverture numérique* du système optique. La taille transverse $\sigma_\perp$ des grains de *speckle* est donc délimitée par la limite de diffraction du diffuseur. On notera que l'on a bien $\sigma_\mathrm{ex} \gg \sigma_\perp$ dans la limite où $D \gg r_\mathrm{diff}$.

Corrélation selon l'axe optique

Déterminer la fonction de corrélation en intensité le long de l'axe optique $\hat{z}$ nécessite de pouvoir exprimer le champ diffracté le long de l'axe optique autour du plan focal de la lentille $E(x=0, y=0, z) = E(z)$. Le régime de diffraction associé, dit *régime de diffraction de Fresnel* [132], est donné par :

$$E(z) \propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_0\, E_0(\mathbf{x}_0)\, t_\mathrm{diff}(\mathbf{x}_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi \mathbf{x}_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)} . \tag{4.27}$$

La corrélation du champ selon l'axe optique est donc :

$$\overline{E(z)E^*(z+\delta z)} \propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_0\,\mathrm{d}\mathbf{x}_0'\, E_0(\mathbf{x}_0)E_0^*(\mathbf{x}_0')\, C_\mathrm{diff}(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\mathbf{x}_0^2}{z}-\frac{\mathbf{x}_0'^2}{z+\delta z}-\frac{\mathbf{x}_0^2-\mathbf{x}_0'^2}{f}\right)} . \tag{4.28}$$

Toujours dans la limite où $D \gg r_{\text{diff}}$, la corrélation C_{diff} varie beaucoup plus rapidement spatialement que l'éclairement $E_0(\mathbf{x}_0)$ du diffuseur, si bien que l'on peut assimiler $C_{\text{diff}}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0') \sim \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0')$, ce qui simplifie (4.28) en :

$$\begin{aligned}\overline{E(z)E^*(z+\delta z)} &\propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_0\, |E_0(\mathbf{x}_0)|^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi \mathbf{x}_0^2}{\lambda}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+\delta z}\right)} \\ &\propto \int \mathrm{d}\mathbf{x}_0\, I_0(\mathbf{x}_0)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi \mathbf{x}_0^2\, \delta z/\lambda z^2}\,, \end{aligned} \tag{4.29}$$

en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $\delta z/z$. Dans le cas où l'éclairement I_0 du diffuseur est homogène et délimité par une pupille circulaire de diamètre D, on peut montrer [79] que $\overline{E(z)E^*(z+\delta z)}$ est une fonction sinus cardinal de largeur $\sigma_{\parallel} \sim \lambda z^2/D^2 \sim \lambda/\text{ON}^2$ en $z = f$. Cette longueur de corrélation $\sigma_{\parallel}$ s'identifie donc à la longueur de Rayleigh.

A ouverture numérique fixée, les grains de la figure de *speckle* sont donc anisotropes, avec un facteur d'anisotropie $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp} \sim 1/\text{ON} > 1$. Cette anisotropie des grains de *speckle* est illustrée par un exemple de mesure à trois dimensions d'une figure de *speckle* dans l'encart de la figure 4.4.

4.1.4 Distance de Rayleigh de la figure de *speckle*

En plus de délimiter l'extension spatiale à la figure de *speckle*, la diffraction sur une ouverture angulaire $\theta_{\text{diff}} \sim \lambda/r_{\text{diff}}$ des rugosités de surface du diffuseur définie aussi une distance δf selon l'axe optique $\hat{z}$, sur laquelle les propriétés de la figure de *speckle* peuvent être toujours déduite par la formule de Fraunhofer (4.17). Cette distance, appelée *distance de Rayleigh*, est délimitée par les points où tous les cônes de diffraction issus du diffuseur se rejoignent au niveau de l'axe optique, comme représenté en figure 4.3 [141].

On peut évaluer δf à partir du triangle EFG représenté dans l'encart de la figure 4.3. Dans la limite où l'ouverture numérique $\text{ON} = D/2f \ll 1$, on peut écrire $\tan \text{ON} \sim \text{ON} = \sigma_{\text{ex}}/(\delta f/2)$, soit :

$$\delta f \sim \frac{2\sigma_{\text{ex}}}{\text{ON}} \sim \frac{\lambda f^2}{r_{\text{diff}} D}\,. \tag{4.30}$$

En pratique, on verra que l'extension spatiale σ_{ex}, ainsi que la distance δf, sont beaucoup plus grandes (typiquement quelques mm) que la taille du nuage (typiquement entre 10 et 100 μm). Autrement dit, il existe une zone relativement large autour du plan de Fourier pour laquelle les propriétés de la figure de *speckle* ne change pas, ce qui laisse une certaine souplesse quant au positionnement précis des atomes par rapport au plan focal de la lentille.

4.2 Implémentation

Comme on vient de le voir, l'ensemble des caractéristiques d'une figure de *speckle* est connu et peut être déterminé par les lois de la diffraction. En particulier, on se rappellera que l'intensité moyenne (4.24) de la figure de *speckle* est déterminée par la corrélation en transmission (4.9) du diffuseur, alors que les corrélations spatiales (4.26) et (4.29) sont majoritairement déterminées par l'intensité éclairant le diffuseur. Comme on va le voir dans cette section, la connaissance expérimentale de ces deux grandeurs est nécessaire pour comprendre les propriétés du potentiel désordonné qui sera soumis aux atomes.

4.2.1 Montage expérimental

La méthode d'implémentation du *speckle* décrite ci-dessous est globalement restée la même depuis le montage de l'expérience [17, 90]. Historiquement, la source laser utilisée pour générer le *speckle* avait une longueur d'onde très désaccordée par rapport à la transition à 780 nm du ^{87}Rb. Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, les expériences de localisation d'Anderson nécessites des temps de diffusion dans le désordre très longs qui peuvent dépasser la seconde, il est donc nécessaire que les phénomènes d'émission spontanée soient négligeables sur cette durée. C'est donc pour cette raison que les expériences de localisation réalisées jusqu'en 2014 faisaient usage d'un laser à 532 nm très désaccordé vers le bleu de la transition du ^{87}Rb (qui produit donc un désordre répulsif).[5] De nombreux détails concernant ce *speckle* conservatif à 532 nm peuvent être trouvés dans les thèses de Fred Jendrzejewski [90] et de Kilian Müller [121].

Néanmoins, on verra dans la suite qu'utiliser une source laser proche de résonance peut aussi présenter un certain nombre d'avantages, notamment si cette dernière est *accordable en longueur d'onde* autour de 780 nm : explorer les différences de dynamique de propagation d'atomes entre un désordre répulsif ou attractif selon si le laser est désaccordé vers le bleu ou le rouge de la transition (cf section 5.1.2), ou encore réaliser un potentiel désordonné dépendant du spin de l'atome permettant la mise en place d'une spectroscopie des états d'énergie d'une particule dans un *speckle* (cf chapitre 7). En retour, dans ces situations, l'émission spontanée peut être limitée par l'utilisation d'intensités moyennes de *speckle* très faibles au niveau des atomes. De nombreux détails théoriques et de méthodes expérimentales concernant ce *speckle* résonant pourront être retrouvés dans la thèse de Jérémie Richard [141].

Mise en forme du faisceau initial

Le montage permettant la mise en forme et la stabilisation du faisceau pour la génération de la figure de *speckle* est schématisé en figure 4.5. La source laser utilisée pour générer la figure de *speckle* est un ensemble laser industriel *Toptica TA-Pro* pouvant fournir jusqu'à 2 W de puissance à 780 nm. Le mode spatial et la polarisation du faisceau sont filtrés à l'aide d'une fibre optique monomode à maintien de polarisation *Thorlabs P3-780PM-FC-5*. En sortie de fibre, la polarisation du faisceau est ajustée par une lame demi-onde ($\lambda/2$) afin que celle-ci puisse être transmise au travers de deux cubes polarisant (PBS), chacun ayant un facteur d'extinction en transmission de 0.1%. Cette étape permet de s'assurer que la polarisation du faisceau qui sera éclairé sur les atomes sera bien *linéaire*.

La principale difficulté que permet d'aborder ce montage est la stabilisation en intensité du faisceau à de très faibles puissances (typiquement de l'ordre du μW). Pour ce faire, 90% de la puissance du faisceau après filtrage en polarisation est prélevée à l'aide d'une lame séparatrice (BS) et mesurée par une photo-diode (PD). Cette photo-diode est reliée par une boucle d'asservissement à la source RF d'un modulateur acousto-optique (AOM) placé avant la fibre. Cette boucle de rétro-action permet alors d'asservir autour d'une consigne externe les éventuelles fluctuations de puissance issues du passage du faisceau dans la fibre (fluctuations de pointé d'injection dues à l'AOM, fluctuations de polarisation, etc). Les 10% restant traversent une densité optique *Thorlabs NE30A-B* qui divise par 1000 la puissance.

5. A titre indicatif, les intensités moyennes de figure de *speckle* utilisées pour ce type d'expérience étaient de l'ordre de $I \sim 10^6$ mW.cm^{-2}. Le paramètre de saturation associé pour une longueur d'onde de 532 nm est de l'ordre de $s \sim 1.7 \times 10^{-10}$, d'où un taux d'émission spontanée $\Gamma_{\rm sp} \sim 3.3 \times 10^{-3}$ s^{-1} et un temps de vie des atomes dans le désordre de plus de 30 s.

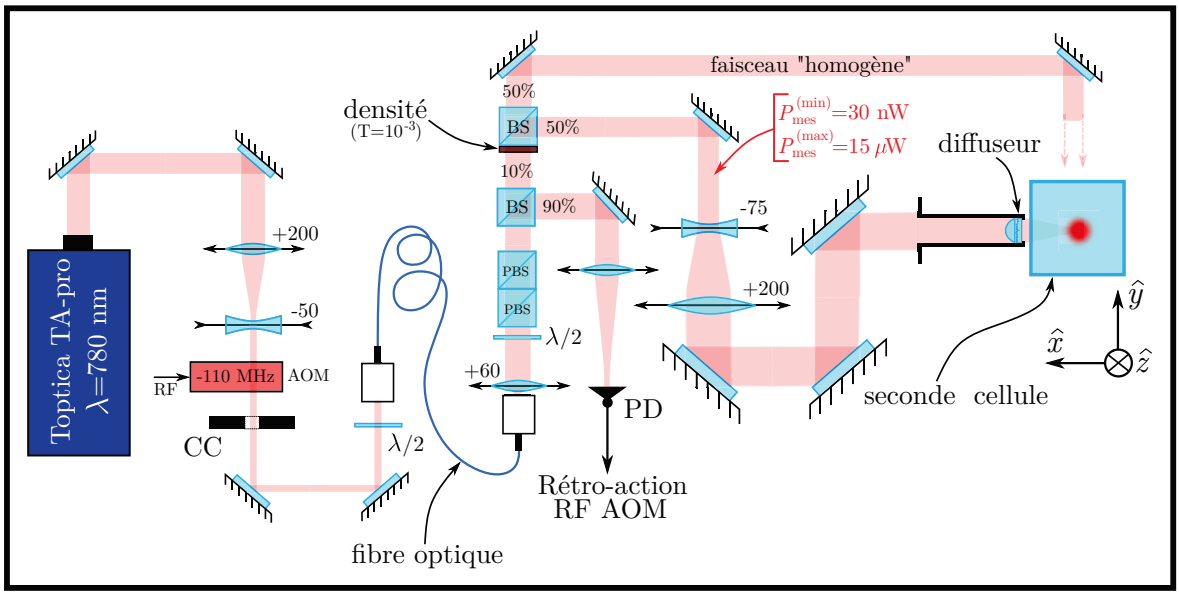

FIGURE 4.5 – **Montage du faisceau *speckle*.** Le modulateur acousto-optique (AOM) joue le rôle d'un interrupteur pour le faisceau *speckle* commutable en quelques dizaines de ns. En pratique, ce temps de commutation n'est jamais atteint car il est limité par la bande passante de la rétro-action (mesurée à 50 kHz) à laquelle est reliée la source RF de l'AOM. Un obturateur mécanique (CC) permet de bloquer complètement le faisceau *speckle* en dehors des phases d'expériences de transport dans le désordre. Le repère $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ représenté ici correspond au même repère utilisé dans les figures de description du dispositif expérimental du chapitre 3.

Cette séparation de la puissance permet donc à la fois de maximiser la sensibilité de la boucle d'asservissement aux fluctuations de puissance en maximisant le signal généré par la photo-diode, et de minimiser la puissance envoyée sur les atomes.

Enfin, le faisceau est de nouveau scindé entre deux bras : 50% pour le faisceau qui servira à produire la figure de *speckle*, 50% pouvant être directement éclairé sur les atomes sans passer par le diffuseur. Comme on le verra dans la suite (cf section 7.4.2), ce faisceau "homogène" sera nécessaire pour calibrer correctement l'amplitude du potentiel désordonné soumis aux atomes via la figure de *speckle*.

A l'issue de ces étapes, on obtient un faisceau gaussien d'un waist de 5.6 mm dont la polarisation est linéaire et la puissance asservie. Le waist du faisceau est ensuite augmenté à 14.6 mm par un télescope.

Montage du diffuseur

La situation est représentée en figure 4.6. Le diffuseur et la lentille sont montés dans un tube de 1" de diamètre (avec un diamètre intérieur de 22.9 mm) placé très proche (0.5 mm) de la cellule en verre de la chambre à vide. La lentille (asphérique *Thorlabs ACL2520-B*) possède une focale de 16 mm, et une frontale (distance entre la face plane de la lentille et le point focal) de 15.7 mm. Le diffuseur (*Newport FSD10-3*) est directement accolé à la lentille. Il possède une épaisseur de 0.3 mm (cale d'espacement entre la lentille et le diffuseur comprise) et, selon les données du fabriquant, diffuse la lumière selon un cône d'angle $\theta_{\text{diff}} = 5°$.

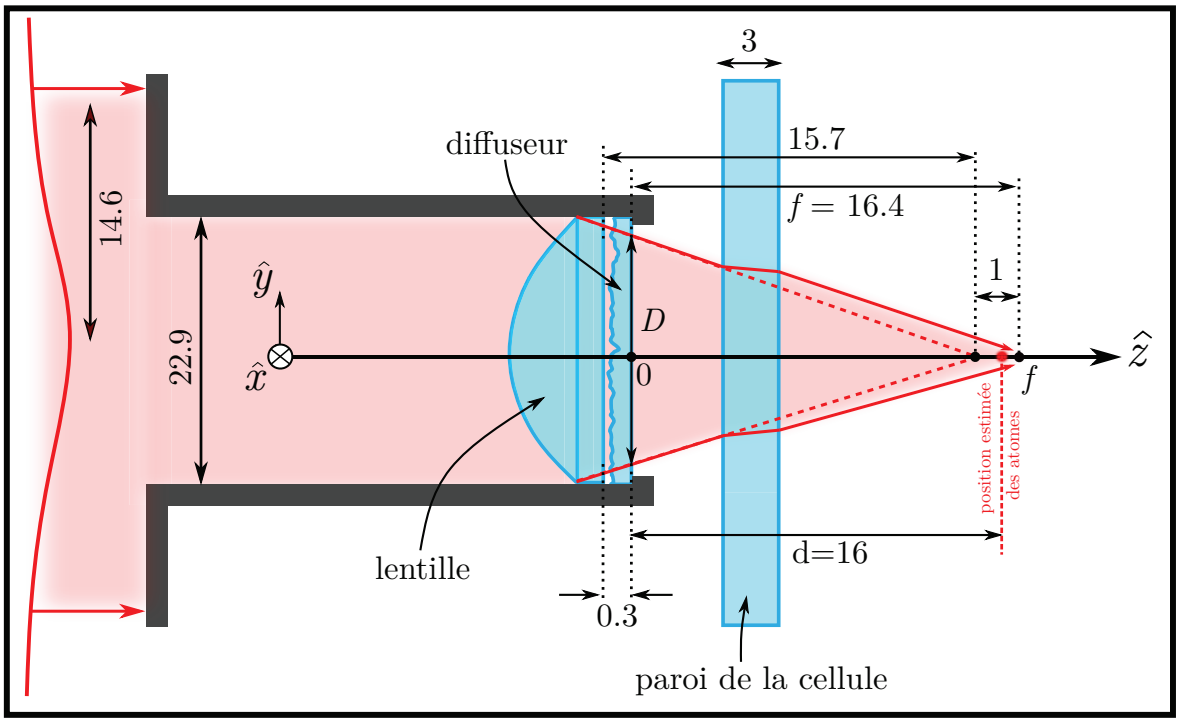

FIGURE 4.6 – **Montage du diffuseur au niveau de la cellule**. Toutes les longueurs indiquées sur cette figure sont en millimètre. Une partie de la puissance du faisceau de 14.6 mm de waist est coupée par la monture portant la lentille et le diffuseur. La paroi de la cellule en verre d'épaisseur $\delta e = 3$ mm provoque un décalage $\delta e\,(n-1)/n \sim 1$ mm de la position du point focal (en prenant $n = 1.46$ pour l'indice du verre).

Les parois en verre de la chambre contenant les atomes sous ultra-vide ont une épaisseur de 3 mm. On peut estimer le décalage de la position du plan focal occasionnée par l'épaisseur de verre à 1 mm. La position du point focal par rapport à la surface du diffuseur est donc estimée à $f = 16.4$ mm.

4.2.2 Caractérisation du *speckle* au niveau des atomes

Toutes les propriétés de la figure de *speckle* générée par le montage présenté dans les figures 4.5 et 4.6 ont été caractérisées en chaque point de l'axe optique. Pour ce faire, l'ensemble du montage a été reproduit avec les mêmes optiques sur un banc optique en dehors du montage expérimental. L'ensemble des méthodes utilisées pour cette caractérisation sont présentées et détaillées dans le manuscrit de thèse de Jérémie Richard [141].

Lorsque les atomes sont retenus dans le piège dipolaire, il a été estimé que le nuage se trouvait à un distance $z = \mathrm{d} = 16 \pm 0.5$ mm de la surface du diffuseur. Autrement dit, les atomes sont susceptibles de se placer jusqu'à 0.9 mm en dehors du plan de Fourier. Ce décalage est donc à comparer avec la distance de Rayleigh δf (4.30) du champ *speckle*, qui a été évaluée à 5 mm. Les propriétés de la figure *speckle* sont donc peu changées jusqu'à 2.5 mm de part et d'autre du plan de Fourier, ce qui est inférieur à 0.9 mm : les atomes sont donc bien exposés à une figure de *speckle* pleinement développée telle que décrite précédemment.

Comme le montre (4.26) et (4.29), la détermination des longueurs de corrélation transverse $\sigma_\perp$ et longitudinale $\sigma_\parallel$ nécessite de connaître l'intensité $I_0(\mathbf{x}_0)$ éclairée au niveau du diffuseur.

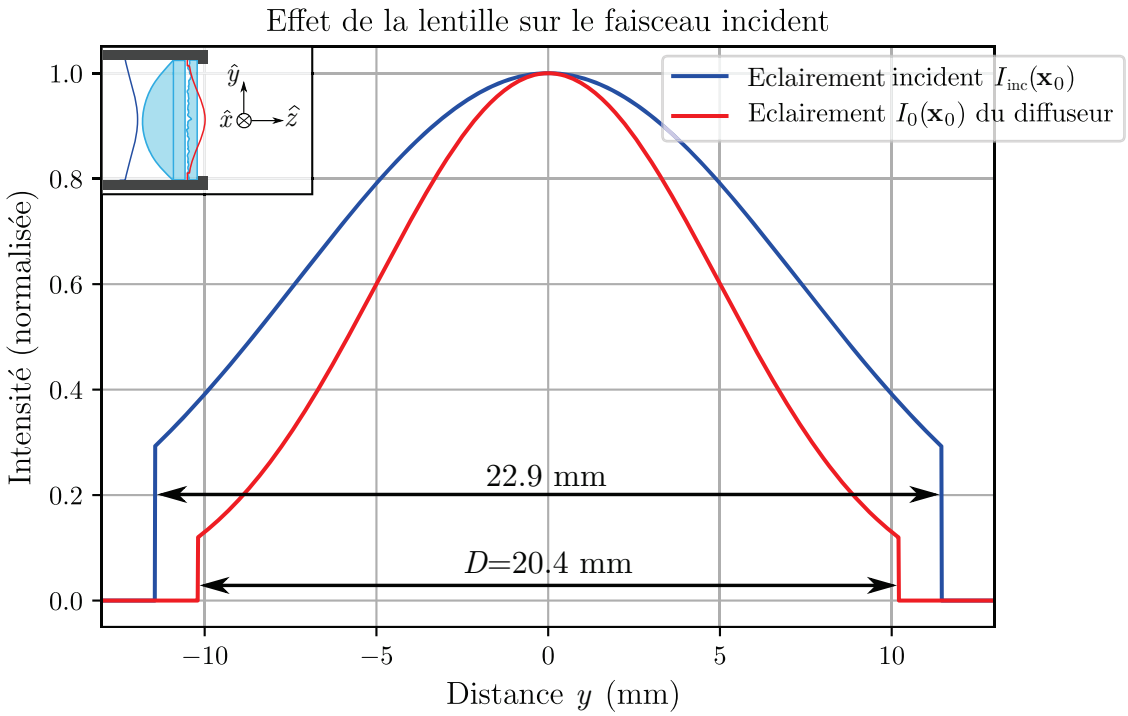

FIGURE 4.7 – **Effet de la lentille sur l'éclairement du diffuseur**. Lors du passage au travers de la lentille, l'allure du profil en intensité du faisceau incident (en bleu) est modifiée pour donner l'allure de l'éclairement du diffuseur (en rouge). Par photographie, il a été estimé au niveau du diffuseur un diaphragme effectif $D = 20.4$ mm et un waist $w_0 = 9.0$ mm.

La lentille utilisée étant *épaisse* [6], la forme du faisceau incident $I_{\text{inc}}(\mathbf{x}_0)$ (de 14.6 mm de waist, diaphragmé par la monture du diffuseur d'un diamètre de 22.9 mm) est fortement modifiée par son passage au travers de la lentille, comme représenté en figure 4.7. La connaissance seule du faisceau incident n'est donc pas suffisante pour déterminer l'intensité au niveau du diffuseur. A l'aide d'une photographie, l'éclairement du diffuseur a pu être estimé expérimentalement : dans la suite, on considèrera que l'éclairement $I_0(\mathbf{x}_0)$ du diffuseur est gaussien, avec un waist $w_0 = 9.0$ mm et un diaphragme effectif $D = 20.4$ mm.

La figure 4.8 représente les résultats de la mesure des fonctions de corrélations transverse et longitudinale (points noirs) comparés avec différentes expressions théoriques. Dans chaque cas, la courbe bleue est issue des expressions (4.26) et (4.29) en prenant pour éclairement du diffuseur $I_0(\mathbf{x}_0)$ la courbe représentée en figure 4.7. On constate que l'accord avec l'expérience n'est pas tout à fait satisfaisant, ni pour la fonction de corrélation transverse, ni longitudinale.

La raison vient du fait que les expressions (4.26) et (4.29) reposent sur l'*approximation paraxiale* selon laquelle les angles de diffraction θ par rapport à l'axe optique doivent rester assez petits pour que l'on puisse estimer $\sin\theta \sim \theta$. Cette estimation fait une erreur inférieure au % pour des angles $\theta < 15°$. Or, ici l'ouverture numérique ON $\sim D/2f$ est de l'ordre de 30°, ce qui peut expliquer une erreur de quelques %.

Mais, un meilleur accord entre théorie et expérience peut être retrouvé lorsque l'on s'emploie à utiliser une description théorique sans faire appel à l'approximation paraxiale. Pour ce faire, M.Pasek et D.Delande ont proposé d'effectuer un calcul numérique se basant sur le principe de Huygens-Fresnel (4.10).

6. Les données du constructeur prévoient une épaisseur de 12 mm pour un rayon de courbure de 10 mm.

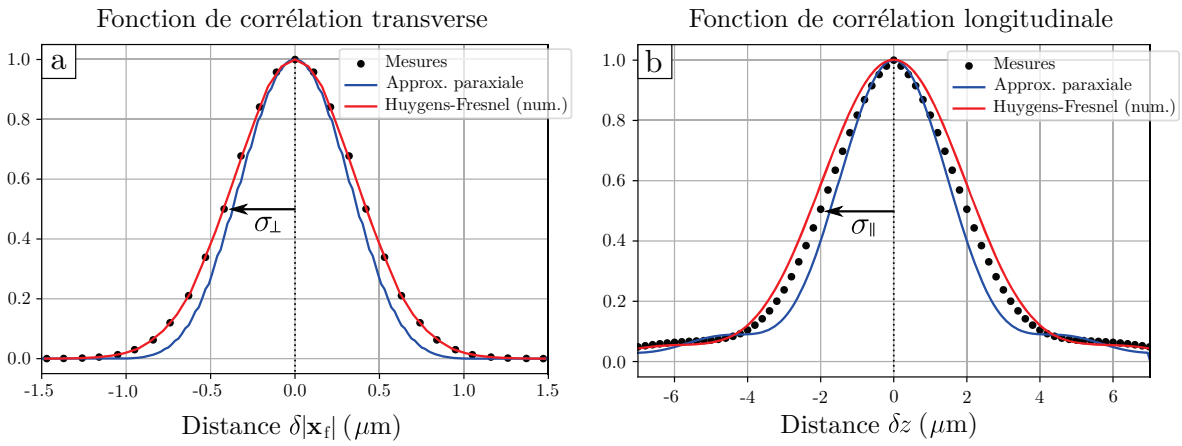

FIGURE 4.8 – **Mesures des corrélations spatiales**. **a.** La largeur $\sigma_\perp$ de la corrélation transverse $\overline{I(\mathbf{x}_f)I(\mathbf{x}_f+\delta\mathbf{x}_f)}$ définie la taille moyenne transverse des grains de *speckle*. **b.** La largeur $\sigma_\parallel$ de la corrélation longitudinale $\overline{I(z)I(z+\delta z)}$ définie la taille moyenne des grains d'intensité le long de l'axe optique. Les courbes théoriques ont été accordées sur les données expérimentales en fixant le diaphragme au niveau du diffuseur à $D = 20.4\,\text{mm}$ et la focale $f = 16.4\,\text{mm}$, et en ajustant le waist de l'éclairement du diffuseur à $w_0 = 9.9\,\text{mm}$.

Selon cette approche, le champ $E(\mathbf{x})$ diffracté au point $\mathbf{x}$ se décompose sous la forme d'une somme de modes de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ tel que [174] :

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k})\,\mathcal{P}(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{4.31}$$

où $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ est une variable aléatoire gaussienne décorrélée qui correspond à la phase aléatoire qu'acquiert le faisceau $E_0(\mathbf{x}_0)$ éclairé au niveau du diffuseur en le traversant[7].

$\mathcal{P}(\mathbf{k})$ est un *masque de phase* qui vient moduler la phase aléatoire du diffuseur $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ selon une amplitude gaussienne de waist w_0 limitée par un diaphragme d'ouverture D, de sorte que :

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \delta(|\mathbf{k}| - 2\pi/\lambda)\,\exp\left(-\frac{(\tan\theta)^2}{(w_0/\mathrm{d})^2}\right)\,\Theta\left(\frac{D}{2\mathrm{d}} - \tan|\theta|\right)\,, \tag{4.32}$$

où $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est l'angle entre l'axe optique $\hat{z}$ et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

Avec les paramètres de l'expérience (D, d et w_0), la simulation d'une figure de *speckle* selon (4.31) donne des fonctions de corrélation spatiales représentées par les courbes rouges en figures 4.8. L'accord est très bon pour la corrélation transverse, et est meilleur pour la corrélation longitudinale, du moins s'il on s'en tient aux ailes de la fonction.

Un ajustement gaussien permet de déduire les longueurs de corrélation définies comme *mi-largeur à mi-hauteur* (*Half Width, Half Maximum : HWHM* en anglais) des fonctions de corrélation :

$$\sigma_\perp = 0.42 \pm 0.01\,\mu\text{m} \quad \text{et} \quad \sigma_\parallel = 2.02 \pm 0.03\,\mu\text{m}\,. \tag{4.33}$$

Ce choix de définir les longueurs de corrélation (4.33) en HWHM permet de comparer des configurations très différentes où les fonctions de corrélations peuvent largement varier d'une expérience à une autre, les corrélations des figures de *speckle* réalisées expérimentalement ne s'identifiant pas systématiquement à des fonctions connues du type gaussiennes, lorentzienne, sinus cardinal, etc.

7. Autrement dit, $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ est proportionnel à t_{diff}.

A toutes fins utiles, l'ensemble des résultats obtenus par cette calibration sont résumés dans le tableau suivant :

Quantité	Symbole	Valeur
Waist de l'éclairement du diffuseur	w_0	9.0 ± 0.1 mm
Diaphragme de l'éclairement du diffuseur	D	20.4 ± 0.1 mm
Longueur de corrélation de la transmission du diffuseur	r_{diff}	$2.7 \pm 0.1\,\mu$m
Position du nuage le long de l'axe optique	d	16 ± 0.5 mm
Position du plan focal	f	16.4 ± 0.1 mm
Ouverture numérique	ON	$0.5 = 30°$
Distance de Rayleigh du champ *speckle*	δf	5 ± 0.1 mm
Extension spatiale (à $z =$ d)	σ_{ex}	1.5 ± 0.1 mm
Longueur de corrélation transverse (HWHM)	$\sigma_\perp$	$0.42 \pm 0.01\,\mu$m
Longueur de corrélation longitudinale (HWHM)	$\sigma_\parallel$	$2.02 \pm 0.03\,\mu$m

4.3 Propriétés du potentiel désordonné associé au *speckle*

Comme on l'a vu en section 3.2.2, le potentiel dipolaire $V(\mathbf{x})$ généré sur un atome soumis à un champ monochromatique de fréquence ω et d'intensité $I(\mathbf{x})$ est déterminé, d'après (3.37), par :

$$V(\mathbf{x}) \propto I(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) . \tag{4.34}$$

où ω_0 est la fréquence de résonance de l'atome.

Pour un laser d'une fréquence ω relativement proche de résonance (comme cela sera le cas dans le suite, cf section 7.1), le terme en $1/(\omega+\omega_0)$ est largement négligeable devant le terme en $1/(\omega - \omega_0)$, ce qui laisse alors :

$$V(\mathbf{x}) \propto \frac{I(\mathbf{x})}{\Delta} . \tag{4.35}$$

où $\Delta = (\omega-\omega_0)/2\pi$ est le *désaccord* entre la fréquence du laser et la résonance de l'atome.

Le potentiel dipolaire $V(\mathbf{x})$ et l'intensité $I(\mathbf{x})$ du champ étant proportionnels par (4.35), les propriétés statistiques spatiales de la figure de *speckle* et celle du potentiel dipolaire associé sont *les mêmes*. En particulier, le potentiel dipolaire moyen $\overline{V}$ est, en toute rigueur, spatialement gaussien selon (4.24), avec un waist typique σ_{ex} au niveau des atomes situés proche du plan focal de la lentille.

Néanmoins, dans la mesure où cette extension spatiale σ_{ex} (de l'ordre du mm) est très grande devant la taille typique d'un nuage condensé (de l'ordre de quelques dizaines de μm), on pourra considérer dans la suite que l'intensité moyenne $\bar{I}(\mathbf{x}_{\text{f}})$ éclairée au niveau des atomes (dans le plan focal de la lentille) est homogène et égale à l'intensité moyenne *au centre de la figure* de *speckle*. Selon les caractéristiques d'un faisceau gaussien (3.50), l'intensité $\bar{I}(\mathbf{x}_{\text{f}} = 0)$ au centre de la figure moyenne gaussienne est déterminée par la puissance P du laser utilisé pour générer le *speckle* par :

$$\bar{I}(\mathbf{x}_{\text{f}} = 0) = \frac{2P}{\pi \sigma_{\text{ex}}^2} . \tag{4.36}$$

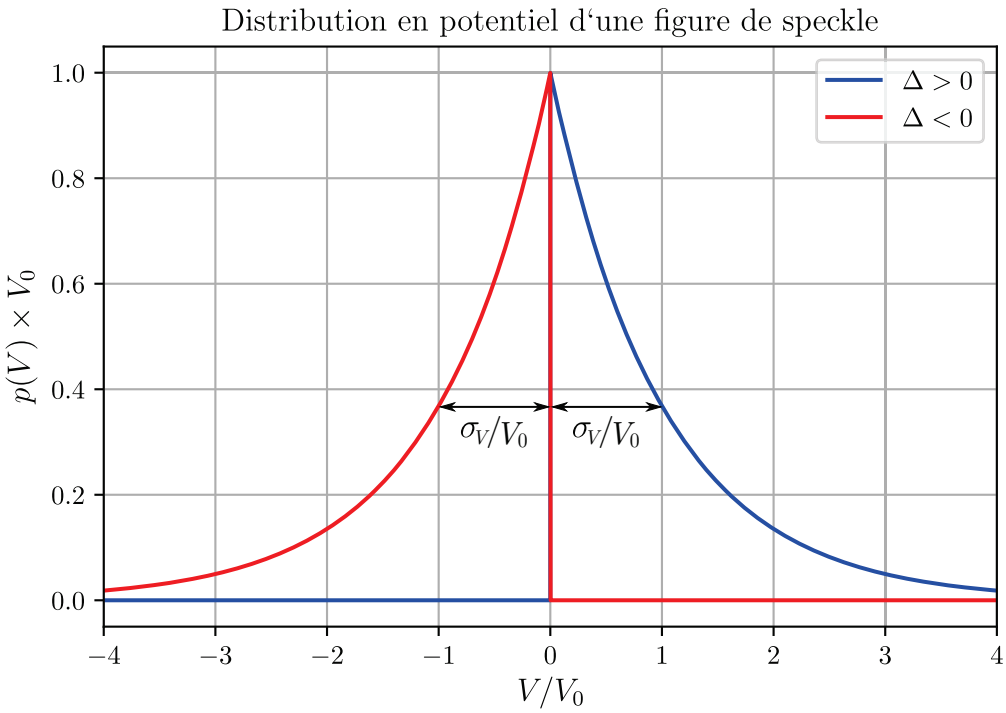

FIGURE 4.9 – **Distribution en potentiel d'un désordre de type *speckle***. Selon le signe de désaccord laser Δ, le potentiel désordonné peut être répulsif ($\Delta > 0$ et $\overline{V} > 0$) ou attractif ($\Delta < 0$ et $\overline{V} < 0$). L'amplitude du désordre $\sigma_V = V_0$ est, quant à elle, toujours positive.

Dans la suite, la moyenne du potentiel $\overline{V}$ pourra donc être considérée comme homogène à l'échelle du nuage.

La distribution en potentiel $p(V)$ est donc donnée par celle de l'intensité du *speckle* (4.13), à ceci près que le signe du désaccord à la résonance Δ détermine le signe du potentiel, comme représenté en figure 4.9. Plus particulièrement, un désaccord $\Delta > 0$ (courbe bleue) génère un potentiel désordonné *répulsif* en moyenne, tel que :

$$p(V) = \frac{1}{V_0} \mathrm{e}^{-V/V_0}\, \Theta(V) \quad \text{avec} \quad \overline{V} = V_0 > 0 \quad \text{et} \quad \sigma_V = \sqrt{\overline{V^2} - \overline{V}^2} = V_0 > 0\,. \tag{4.37}$$

Inversement un désaccord $\Delta < 0$ (courbe rouge) génère un potentiel désordonné *attractif* en moyenne, tel que :

$$p(V) = \frac{1}{V_0} \mathrm{e}^{+V/V_0}\, \Theta(-V) \quad \text{avec} \quad \overline{V} = -V_0 < 0 \quad \text{et} \quad \sigma_V = \sqrt{\overline{V^2} - \overline{V}^2} = V_0 > 0\,. \tag{4.38}$$

Dans chaque configuration, l'écart-type $\sigma_V = V_0$, qui désigne l'*amplitude du désordre*, sera une quantité toujours positive.

Au delà du fait que la distribution $p(V)$ du potentiel soit en partie déterminée par le signe du désaccord laser Δ, les propriétés statistiques spatiales du potentiel aléatoire de type *speckle* sont identiques à la figure d'intensité associée. En particulier, les fonctions de corrélation transverse (4.26) et longitudinale (4.29) sont les mêmes. En conséquence, le désordre généré par une figure de *speckle* est *anisotrope*, la taille typique des fluctuations spatiales du potentiel étant donnée par $\sigma_{\parallel}$ dans proche du plan focal de la lentille, et par $\sigma_{\perp}$ le long de l'axe optique.

Chapitre 5

Transport d'atomes froids dans un *speckle*

Les chapitres précédents ont permis d'introduire toutes les notions nécessaires à la compréhension des expériences de localisation d'atomes froids dans un potentiel désordonné de type *speckle*. Le chapitre qui suit a pour but de rappeler succinctement, dans un premier temps, les paramètres microscopiques qui permettent de décrire la propagation d'onde dans un *speckle*. Ces éléments de compréhension permettront ensuite de présenter et discuter les principaux résultats expérimentaux visant l'étude de la transition d'Anderson avec ce type de système. Plus spécifiquement, on s'attachera à décrire les limites de ces expériences. Notamment, on verra que toutes pointent vers un seul et même problème : la détermination et le contrôle de l'énergie des états occupés par une particule dans le potentiel désordonné. Ce point est absolument fondamental lorsqu'on sait que le *paramètre de contrôle* de la transition d'Anderson est très justement l'*énergie* de la particule (cf section 2.3.3). Ce bref état de l'art permettra alors de motiver le développement d'une nouvelle méthode d'étude de la transition d'Anderson basée sur une spectroscopie *contrôlée en énergie* des états accessibles par un atome dans un *speckle*.

5.1 Paramètres microscopiques de transport dans un *speckle*

En section 2.2.1, on a vu que la propagation d'une particule dans un désordre pouvait se caractériser à l'aide de deux paramètres microscopiques : la longueur de libre parcours moyen l_s, et la longueur de transport l^*. Dans cette section, on s'attachera à préciser ces deux grandeurs dans le cadre de la diffusion d'une particule dans une figure de *speckle*. Plus particulièrement, on verra que ces grandeurs sont directement accessibles expérimentalement à l'aide d'une imagerie par temps de vol de la distribution en impulsion. Enfin, on verra en quoi ces quantités permettent de définir un ensemble d'échelles d'énergie pertinentes caractérisant la nature des états localisés accessibles dans un potentiel désordonné.

5.1.1 Dynamique de diffusion anisotrope dans une figure de *speckle*

On considère une source d'onde atomique plane d'impulsion initiale $\mathbf{k}_i$ envoyée sur une figure de *speckle*. Comme on l'a montré en section 4.3, le potentiel désordonné associé à une figure de *speckle* est *corrélé* sur une longueur σ, c'est à dire qu'un *speckle* peut être vu comme un ensemble d'impuretés possédant une taille moyenne σ.

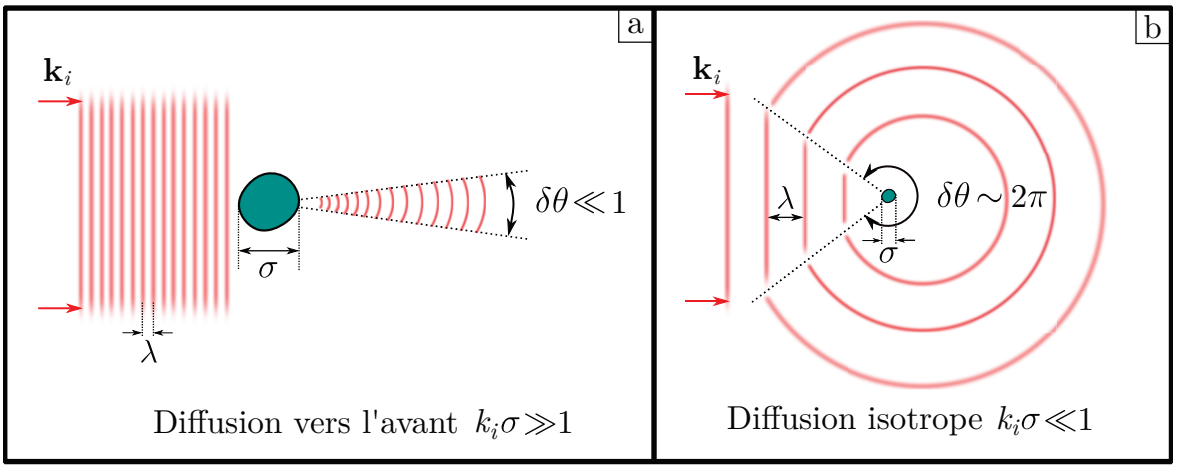

FIGURE 5.1 – **Diffraction d'une onde sur une impureté**. Lorsqu'une onde d'impulsion $|\mathbf{k}_i| = k_i = 2\pi/\lambda$ diffuse sur un objet de taille σ, on distingue deux régimes de diffraction : **a.** la diffusion vers l'avant $\lambda \ll \sigma$, **b.** et la diffusion isotrope $\lambda \gg \sigma$.

D'un point de vue simplement ondulatoire, l'angle typique $\delta\theta$ du cône selon lequel chaque impureté va diffracter l'onde incidente sera donné par la limite de diffraction :

$$\delta\theta \sim \frac{\lambda}{\sigma} \sim \frac{1}{k_i\sigma} \quad \text{avec} \quad k_i = |\mathbf{k}_i| = \frac{2\pi}{\lambda}\,. \tag{5.1}$$

Il y a alors deux cas limites représentés en figure 5.1 a. et b. :

- ⋆ Dans la limite où $k_i\sigma \gg 1$, l'angle typique de diffraction est faible $\delta\theta \ll 1$, c'est à dire que l'évènement de diffusion modifie peu la direction de l'impulsion initiale $\mathbf{k}_i$ de la particule : on parle de "*diffusion vers l'avant*".

- ⋆ Inversement, lorsque $k_i\sigma \ll 1$, l'angle typique de diffraction est grand $\delta\theta \sim 2\pi$. Un seul évènement de diffusion suffit à changer l'impulsion initiale $\mathbf{k}_i$ de la particule selon n'importe quelle direction : la diffusion est alors *isotrope*.

Du point de vue de la dynamique temporelle, cette anisotropie de la diffusion se traduit par l'existence de deux échelles de temps : le *temps de diffusion élastique* $\tau_s = l_s/v$ (où $v = \hbar k_i/m$ est la norme en vitesse de la particule) qui correspond au temps typique pendant lequel la particule peut se propager avant qu'un évènement de diffusion ne lui fasse changer son impulsion, et $\tau^* = l^*/v$ le *temps de transport* qui correspond au temps typique de propagation à attendre avant que la diffusion soit isotrope. Comme cela a été présenté en section 2.2.1, ces deux échelles de temps sont reliées (cf expression (2.16)) par la relation :

$$\tau^* = \frac{\tau_s}{1 - \langle \cos\theta \rangle}\,, \tag{5.2}$$

où $\langle\ \cdot\ \rangle$ désigne la moyenne sur l'ensemble des directions possibles de diffusion, et θ est l'angle formé entre l'impulsion initiale et la direction de diffusion de la particule.

Dans la limite d'une diffusion vers l'avant $k_i\sigma \gg 1$, la distribution des directions θ de diffusion est centrée autour de la direction avant $\theta \sim 0$ et possède une largeur $\delta\theta \ll 1$. De fait l'angle moyen de diffusion $\langle\theta\rangle \sim 0$, et $\langle\cos\theta\rangle \sim 1$. D'après (5.2), on retrouve donc bien le fait que $\tau^* \gg \tau_s$. Inversement, pour une diffusion isotrope $k_i\sigma \ll 1$, la distribution des angles θ de diffusion est uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, soit $\langle\cos\theta\rangle \sim 0$ et $\tau^* \sim \tau_s$.

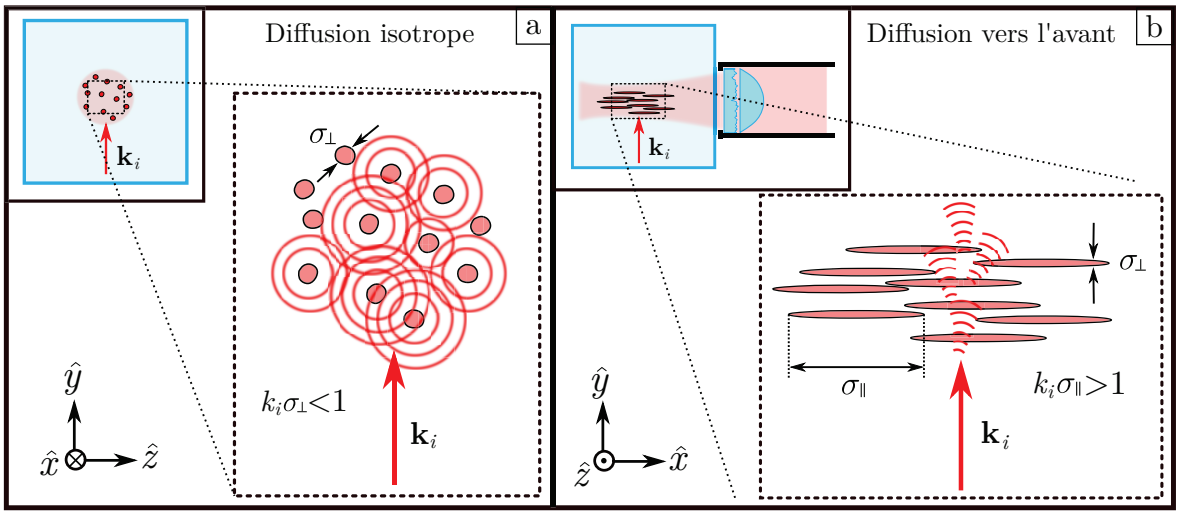

FIGURE 5.2 – **Diffusion isotrope quasi-2D dans un figure de *speckle*.** On communique une impulsion initiale $\mathbf{k}_i$ à un nuage d'atomes froids selon la direction $\hat{y}$. **a.** Dans le plan transverse à l'axe optique $-\hat{x}$ de la figure de *speckle*, le potentiel désordonné est isotrope avec une longueur de corrélation $\sigma_\perp$. Il est donc possible de se placer dans une situation où la condition de diffusion isotrope $k_i\sigma_\perp < 1$ est respectée. **b.** Dans le même temps, le long de l'axe optique du *speckle* le désordre possède une longueur de corrélation $\sigma_\parallel \sim 5\sigma_\perp$ telle que la diffusion se fait majoritairement vers l'avant $k_i\sigma_\parallel > 1$. A temps courts, la direction de l'impulsion initiale $\mathbf{k}_i$ des atomes est très peu changée selon cette direction, si bien que l'on peut considérer la dynamique de diffusion comme essentiellement 2D dans le plan $\{\hat{y}, \hat{z}\}$.

Comme indiqué en section 4.1.3, une réalisation d'une figure de *speckle* produit un désordre anisotrope dans le sens où sa longueur de corrélation spatiale dans le plan transverse à l'axe optique $\sigma_\perp$ est toujours plus courte que la longueur de corrélation $\sigma_\parallel$ selon l'axe optique. D'après les mesures (4.33) de corrélation relatives au *speckle* utilisé dans l'expérience, on a $\sigma_\parallel \sim 5\,\sigma_\perp$. Autrement dit, *à k_i fixé* il est possible de se placer dans une situation où la diffusion est quasiment isotrope ($k_i\sigma_\perp > 1$) dans le plan transverse à l'axe optique , et a lieu majoritairement vers l'avant selon l'axe optique ($k_i\sigma_\parallel > 1$), comme représenté en figure 5.2.

D'un point de vue dynamique, une diffusion anisotrope peut être vue comme une série d'évènements de diffusion statistiquement indépendants pour lesquels l'angle de diffusion θ est aléatoire de moyenne $\langle\theta\rangle \sim 0$ et d'écart-type $\sqrt{\langle\theta^2\rangle} = \delta\theta = 1/k_i\sigma_\parallel$. La diffusion devient isotrope à l'issue de N évènements de diffusion, lorsque la dispersion $\Delta\theta_N$ de la somme des N angles θ devient de l'ordre de 2π : $\Delta\theta_N = \sqrt{N}\,\delta\theta \sim 2\pi$. Pour des valeurs typiques d'expériences pour lesquelles $k_i \sim 1\,\mu\text{m}^{-1}$ et $\sigma_\parallel \sim 2\,\mu\text{m}$, il faut donc en moyenne $N = (2\pi\, k_i\sigma_\parallel)^2 \sim 150$ évènements de diffusion pour que la diffusion devienne isotrope *à trois dimensions*.

Ainsi, même sans véritable confinement du mouvement des atomes à un plan, en se limitant à des temps de diffusion dans le désordre assez courts, on peut considérer la diffusion de la particule comme étant principalement bi-dimensionnelle et réduite au plan transverse à l'axe optique de la figure de *speckle*. Dans la suite de cette section, on supposera les temps de propagation dans le désordre seront toujours assez courts pour que la propagation dans le *speckle* puisse être considérée comme étant 2D et confinée au plan $\{\hat{y}, \hat{z}\}$.

5.1.2 Temps de diffusion élastique pour un *speckle* 2D

Le temps de diffusion élastique τ_s donne une échelle de temps typique sur laquelle il faut attendre avant que l'impulsion initiale de la particule ne change sous l'effet du désordre. Autrement dit, τ_s détermine dans quelle mesure il est facile de coupler un état d'impulsion initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ avec l'ensemble des états d'impulsion $\{|\mathbf{k}_f\rangle\}_{\mathbf{k}_f}$ accessibles par diffusion élastique (i.e. tels que $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$), ces derniers formant un *continuum*. Cette image d'un couplage entre un état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ et un continuum $\{|\mathbf{k}_f\rangle\}_{\mathbf{k}_f}$ est celle qui est communément utilisée pour comprendre la diffusion d'une particule quantique dans un désordre. En effet, dans la limite où le potentiel désordonné V peut être traité *perturbativement* par rapport à l'énergie cinétique de la particule incidente $\varepsilon_{\mathbf{k}_i} = \hbar^2\mathbf{k}_i^2/2m$, le *taux de couplage* (en moyenne sur les réalisations du désordre) $\overline{\Gamma}_s$ entre l'état initial $\mathbf{k}_i$ et le continuum $\{|\mathbf{k}_f\rangle\}_{\mathbf{k}_f}$ est donné par une *règle d'or de Fermi* [82] :

$$\overline{\Gamma}_s = \frac{2\pi}{\hbar}\int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}_f}{(2\pi)^2}\,\overline{|\langle\mathbf{k}_i|\hat{V}|\mathbf{k}_f\rangle|^2}\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_i}-\varepsilon_{\mathbf{k}_f})\,. \tag{5.3}$$

Ce traitement perturbatif de l'effet du désordre sur l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ est aussi appelé *approximation de Born* dans le cadre de la théorie de la diffusion. [1]

On montre que la quantité $\overline{|\langle\mathbf{k}_i|\hat{V}|\mathbf{k}_f\rangle|^2}$ n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la corrélation spatiale $\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \overline{V(\mathbf{x})V(\mathbf{x}')}$ du potentiel désordonné. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\overline{|\langle\mathbf{k}_i|\hat{V}|\mathbf{k}_f\rangle|^2} &= \overline{\langle\mathbf{k}_i|\hat{V}|\mathbf{k}_f\rangle\langle\mathbf{k}_f|\hat{V}|\mathbf{k}_i\rangle} \\ &= \int \mathrm{d}^2\mathbf{x}\,\mathrm{d}^2\mathbf{x}'\,\overline{\langle\mathbf{k}_i|\hat{V}|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|\mathbf{k}_f\rangle\langle\mathbf{k}_f|\mathbf{x}'\rangle\langle\mathbf{x}_f|\hat{V}|\mathbf{k}_i\rangle} &(5.4)\\ &= \int \mathrm{d}^2\mathbf{x}\,\mathrm{d}^2\mathbf{x}'\,\overline{V(\mathbf{x})V(\mathbf{x}')}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f)(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} &(5.5)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\langle\mathbf{x}|\mathbf{k}_i\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}}$. [2] Étant donné que la dynamique de diffusion de la particule est limitée au plan transverse à l'axe optique du *speckle*, le désordre 2D associé est isotrope, et sa corrélation spatiale $\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \overline{V(\mathbf{x})V(\mathbf{x}')}$ ne dépend que de la distance $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$. De fait, on a :

$$\overline{|\langle\mathbf{k}_i|\hat{V}|\mathbf{k}_f\rangle|^2} = \mathrm{TF}\left[\mathcal{C}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\right](\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f) = \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f)\,. \tag{5.6}$$

La quantité $\overline{\Gamma}_s$ n'étant rien d'autre que la probabilité par unité de temps que la particule transite de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ vers un état $|\mathbf{k}_f\rangle$ quelconque, on a $\overline{\Gamma}_s = 1/\tau_s$ et :

$$\frac{1}{\tau_s(\mathbf{k}_i)} = \frac{2\pi}{\hbar}\int \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{k}_f}{(2\pi)^2}\,\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f)\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_i}-\varepsilon_{\mathbf{k}_f})\,. \tag{5.7}$$

Comme indiqué en section 4.1.3, la corrélation transverse d'une figure de *speckle* est majoritairement déterminée par l'éclairement du diffuseur.

1. Une définition plus précise de ce qu'est l'approximation de Born à l'aide du concept de *self-energy* sera donnée dans la suite en section 6.4.1.

2. Même si le résultat (5.5) est effectivement correct, sa dérivation est un peu plus problématique puisqu'elle ne fait pas intervenir la bonne normalisation des ondes planes $\langle\mathbf{x}|\mathbf{k}_i\rangle = \frac{1}{L^{d/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}}$, où L est la taille du système, et d sa dimension. Une dérivation plus exacte de (5.5) nécessite donc de partir d'un système de taille finie L, de calculer le produit (5.4), puis de prendre la limite $L \to +\infty$. Par vœux de concision, ce calcul ne sera pas détaillé ici et pourra être retrouvé à la référence [17].

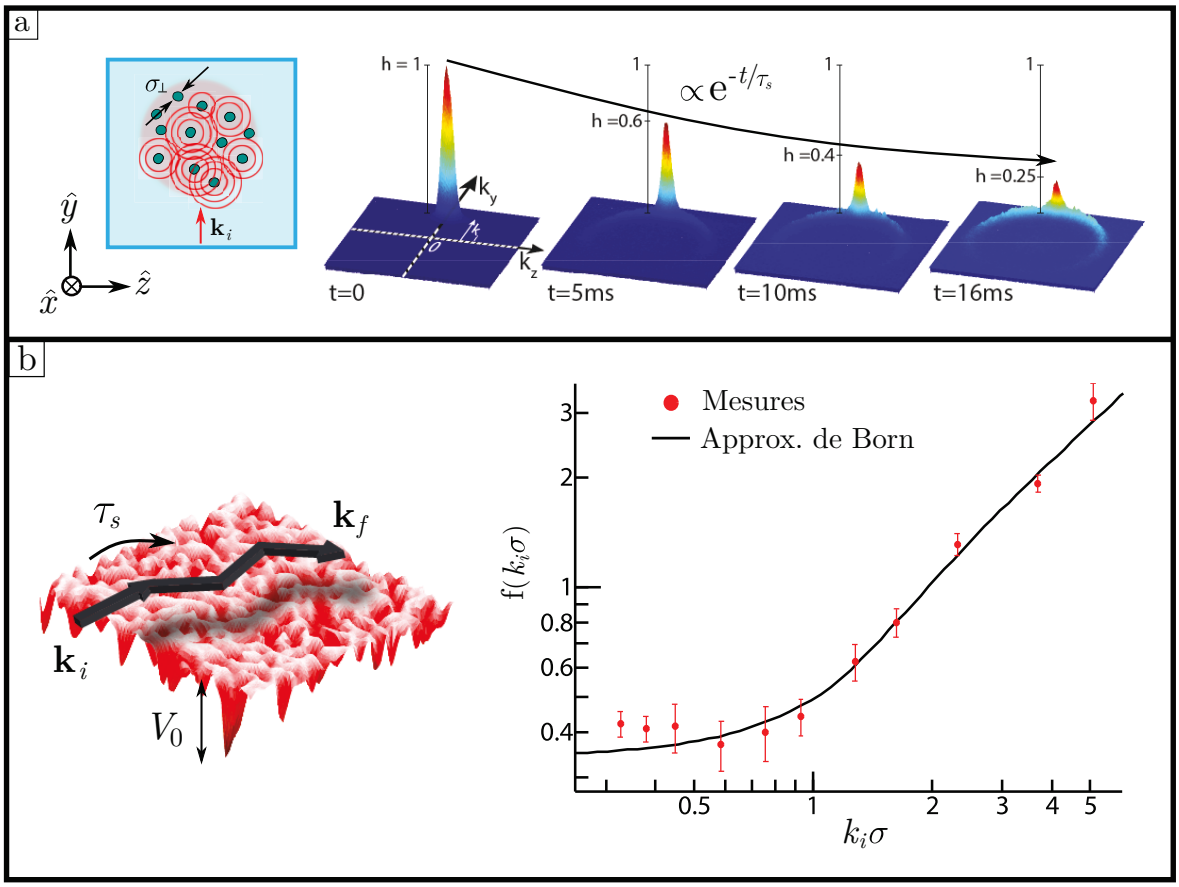

FIGURE 5.3 – **Mesure directe de τ_s dans l'espace des impulsions**. La situation expérimentale est la même que celle représentée en figure 5.2. Un pulse magnétique permet de communiquer une impulsion initiale $\mathbf{k}_i$ à un nuage froid dilué. **a.** Après un temps t de propagation dans un *speckle*, la distribution en impulsion $\mathfrak{D}_\mathbf{k}(\mathbf{k}, t)$ du nuage est mesurée par temps de vol. Initialement à $t = 0$, la distribution $\mathfrak{D}_\mathbf{k}(\mathbf{k}_i, t = 0)$ est piquée autour de l'impulsion initiale $\mathbf{k}_i$. Au fur et à mesure de la propagation dans le désordre, de nouveaux états $|\mathbf{k}_f\rangle$ sont peuplés et se répartissent sur un cercle de rayon k_i. La décroissance de la hauteur du pic initial selon (5.10) donne alors une mesure directe de τ_s. **b.** Pour différentes amplitudes V_0 d'un *speckle* attractif (représenté à gauche), le temps de diffusion τ_s mesuré en fonction de l'impulsion initiale k_i peut être comparé avec l'expression (5.9) adimensionnée $\mathrm{f}(k_i\sigma) = (\hbar^3/\pi m V_0^2 \sigma^2)\, \tau_s(\mathbf{k}_i)$ (courbe noire). Pour des amplitudes V_0 allant de $h \times 30\,\mathrm{Hz}$ à $h \times 200\,\mathrm{Hz}$ (points rouges), l'accord théorie/expérience est satisfaisant.

Par vœux de simplicité, on supposera dans la suite que ce dernier est *gaussien*, de sorte que la corrélation (4.26) soit elle aussi gaussienne :

$$C(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = V_0^2\, \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2/\sigma^2} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) = \sqrt{\pi}\, \sigma\, V_0^2\, \mathrm{e}^{-\pi|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f|^2\sigma^2}\,, \tag{5.8}$$

où la longueur de corrélation σ est donc définie ici en waist.[3] En remplaçant (5.8) dans (5.7) et après calculs, on obtient [99, 141, 155] :

$$\frac{1}{\tau_s(\mathbf{k}_i)} = \frac{\pi m}{\hbar^3}\, V_0^2 \sigma^2\, \mathrm{e}^{-k_i^2\sigma^2/2}\, \mathrm{I}_0(k_i^2\sigma^2/2) \tag{5.9}$$

où I_0 est une fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro.

3. Les longueurs de corrélation σ (waist) et $\sigma_\perp$ (HWHM) sont donc reliées de sorte que $\sigma = \sigma_\perp/\sqrt{\ln 2}$.

Le fait que τ_s décrive la dynamique de population des états d'impulsion $|\mathbf{k}\rangle$ rend possible sa mesure *directe* pour peu que l'on sache mesurer la dynamique de la *distribution en impulsion* $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, t)$ d'un nuage d'atomes s'étant propagé pendant une durée t dans un *speckle*, ce qui est possible avec une imagerie par temps de vol, comme représenté en figure 5.3 a.

En effet, s'il on considère une source d'onde atomique quasi-monochromatique, par exemple un nuage froid auquel on aurait initialement communiqué une impulsion initiale $\mathbf{k}_i$, la distribution en impulsion attendue est une fonction $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_i, t = 0)$ piquée autour de l'impulsion $\mathbf{k}_i$. Au fur et à mesure de la diffusion dans le *speckle*, l'état d'impulsion initial $\mathbf{k}_i$ est déplété sous l'effet des collisions dans d'autres états $\mathbf{k}$. Le temps typique avec lequel s'effectue cette déplétion est précisément le temps de couplage τ_s de couplage de l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ au continuum $\{|\mathbf{k}\rangle\}_{\mathbf{k}}$, de sorte que [137] :

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_i, t) = \mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_i, t = 0)\, \mathrm{e}^{-t/\tau_s(\mathbf{k}_i)} \,. \tag{5.10}$$

En mesurant la décroissance du pic initial $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_i, t = 0)$ en fonction du temps de propagation t, il devient donc possible de mesurer *directement* le temps de diffusion élastique τ_s. Ceci offre donc la possibilité de tester expérimentalement plusieurs régimes de diffusion, dont celui de la validité de l'approximation de Born (5.9) pour τ_s, comme représenté en figure 5.3 b. Ces travaux font l'objet d'un article en cours de rédaction, et constituent les travaux de thèse de Jérémie Richard [141]. Une analyse détaillée des méthodes expérimentales ainsi que des résultats pourront être trouvées dans son manuscrit de thèse.

Techniquement, le temps de transport τ^* à 2D est lui aussi mesurable directement, et correspond au temps de propagation t nécessaire à l'isotropisation de la distribution en impulsion [137]. La diffusion dans le *speckle* étant élastique, chaque évènement de collision conserve la norme de l'impulsion initiale k_i (c'est à dire l'énergie cinétique $\varepsilon_{\mathbf{k}_i}$) de l'atome mais pas sa direction. Les nouveaux états $|\mathbf{k}_f\rangle$ peuplés au fur et à mesure de la diffusion se répartissent donc un cercle de rayon k_i qui devient occupé de manière homogène à $t = \tau^*$.

5.1.3 Échelles pertinentes en énergie

Jusqu'à présent, les états accessibles par une particule se propageant dans un désordre *speckle* n'ont été caractérisés que par leur impulsion $\mathbf{k}_f$. Dans cette section , on s'attache à donner les échelles d'énergie pertinentes permettant de caractériser la nature de ces états.

Élargissement en énergie

En l'absence de désordre, les états propres $\{|\mathbf{k}\rangle\}_{\mathbf{k}}$ de l'impulsion sont aussi les états propres de l'énergie de la particule. Autrement dit, l'impulsion $\mathbf{k}$ de la particule permet toujours de spécifier son énergie E via la relation de dispersion $E = \varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$. D'un point de vue dynamique, l'onde plane associée à cet état $|\mathbf{k}\rangle$ possède une extension temporelle infinie, soit un spectre limité à l'énergie $E = \varepsilon_{\mathbf{k}}$, comme représenté en figure 5.4 a_1.

Inversement, en présence d'un potentiel désordonné, les états propres $\{|\mathbf{k}\rangle\}_{\mathbf{k}}$ de l'impulsion ne sont pas les états propres de l'énergie. Ainsi une particule initialement dans un état $|\mathbf{k}_i\rangle$ n'a aucune raison d'y rester au cours de son évolution temporelle $|\Psi(t)\rangle$. Plus particulièrement, on avait vu dans la section précédente que l'échelle de temps typique de couplage d'un état $|\mathbf{k}_i\rangle$ vers un ensemble d'états $\{|\mathbf{k}_f\rangle\}_{\mathbf{k}_f}$ était donnée par le temps de diffusion élastique τ_s.

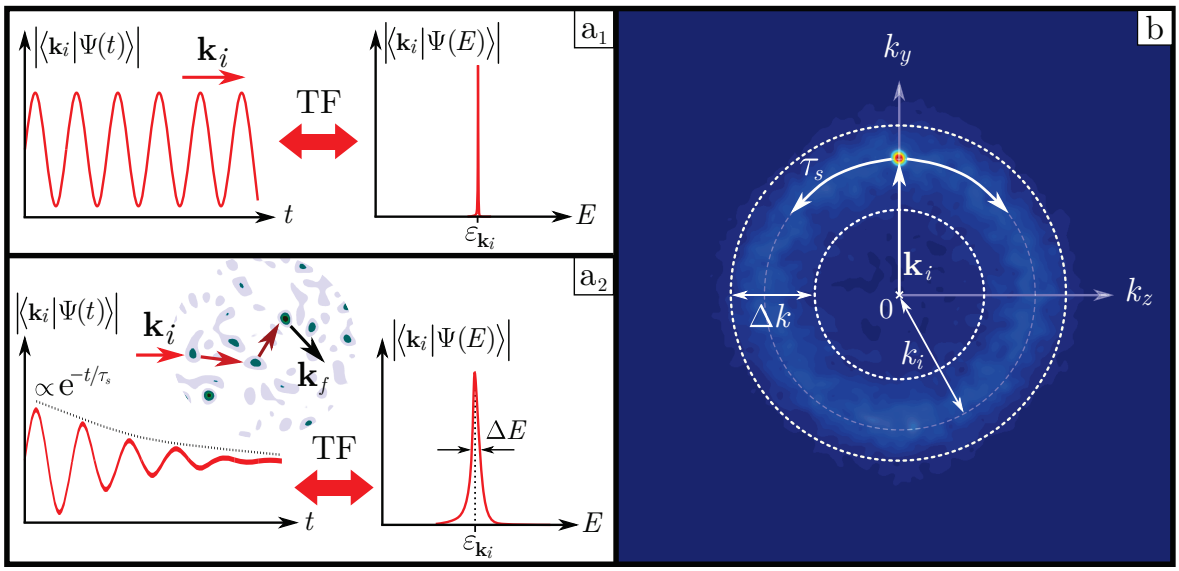

FIGURE 5.4 – **Élargissement en énergie**. **a**$_1$. Sans désordre, une onde plane $|\mathbf{k}_i\rangle$ possède une extension temporelle infinie, soit un spectre en énergie infiniment fin centré sur la relation de dispersion $E = \varepsilon_{\mathbf{k}_i}$. **a**$_2$. En présence de désordre, l'état initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ est déplété au profit d'autres états d'impulsion $|\mathbf{k}_f\rangle$ en un temps typique donné par τ_s. τ_s peut alors être vu comme un "temps vie" de l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ dans le désordre. Cette extension temporelle τ_s finie implique, par transformation de Fourier, un spectre en énergie d'une largeur ΔE finie. **b.** Mesure d'une distribution en impulsion $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, t)$ d'un nuage après un temps t de propagation dans un désordre *speckle*, lancé avec une impulsion $|\mathbf{k}_i| = k_i$. Après diffusion dans le désordre, les nouveaux états $|\mathbf{k}_f\rangle$ occupés se répartissent sur un anneau d'une largeur Δk associée à un élargissement ΔE de l'énergie.

Autrement dit, l'onde plane associée à l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ se propageant dans un désordre est atténuée sur une échelle de temps τ_s, comme représenté en figure 5.4 a$_2$. Cette extension temporelle limitée implique alors en retour un *élargissement en énergie* du spectre en énergie par transformation de Fourier tel que :

$$\langle \mathbf{k}_i|\Psi(t)\rangle \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_{\mathbf{k}}\, t/\hbar}\, \mathrm{e}^{-t/\tau_s} \overset{\mathrm{TF}}{\longleftrightarrow} \langle \mathbf{k}_i|\Psi(E)\rangle \propto \frac{\hbar/\tau_s}{(E-\varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + (\hbar/\tau_s)^2}\,. \tag{5.11}$$

La distribution de probabilité que la particule occupe une énergie E possède donc une largeur ΔE reliée à τ_s par une relation temps/fréquence (ou inégalité d'Heisenberg) :

$$\Delta E \sim \hbar/\tau_s\,. \tag{5.12}$$

De fait, même si l'énergie de la particule est bien conservée au niveau de chaque évènement de diffusion, le recouvrement partiel des états d'onde plane $\{|\mathbf{k}\rangle\}_{\mathbf{k}}$ et des états propres de l'énergie $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ implique qu'il n'est pas possible de spécifier l'énergie d'une particule en mesurant son impulsion avec une précision meilleure que $\Delta E \sim \hbar/\tau_s$. En pratique, la distribution en impulsion $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$ attendue pour une particule diffusant dans un désordre élastique n'est donc pas exactement un cercle de rayon k_i, mais un *anneau* de rayon k_i et d'épaisseur Δk associée à ΔE, comme représenté en figure 5.4 b.

Il est possible de quantifier ce recouvrement entre états d'impulsion et états d'énergie à l'aide d'une quantité $A(\mathbf{k}, E)$ appelée *fonction spectrale* :

$$A(\mathbf{k}, E) = \sum_{\alpha} |\langle \mathbf{k}|E_\alpha\rangle|^2 \, \delta(E - E_\alpha) \,, \tag{5.13}$$

où $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ désigne l'ensemble des états propres de l'énergie accessibles pour une particule dans un potentiel désordonné. Dans le chapitre 6, on montrera explicitement que la largeur en énergie (à $\mathbf{k}$ fixé) de cette fonction $A(\mathbf{k}, E)$ est égale à $\Delta E \sim \hbar/\tau_s$.

Concrètement, il n'est donc pas possible de déduire *directement* la distribution $\mathfrak{D}_E(E)$ des états d'énergie $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ occupés par la particule à partir de la distribution en impulsion $\mathfrak{D}_\mathbf{k}(\mathbf{k})$. En effet, lier ces deux quantités nécessites de connaître la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, de sorte que [119] :

$$\mathfrak{D}_E(E) = \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \, A(\mathbf{k}, E) \, \mathfrak{D}_\mathbf{k}(\mathbf{k}) \,. \tag{5.14}$$

Selon (5.14), $A(\mathbf{k}, E)$ peut donc s'interpréter comme la *probabilité conditionnelle* qu'une particule avec une impulsion $\mathbf{k}$ possède une énergie E. On verra dans la suite de ce chapitre que la détermination de $\mathfrak{D}_E(E)$, et donc de $A(\mathbf{k}, E)$, joue un rôle déterminant dans l'étude de la transition d'Anderson avec des atomes froids.

Énergie de corrélation

Comme cela a été vu en section 5.1.1, la longueur de corrélation σ joue un rôle important dans la description de la dynamique de diffusion dans un désordre *speckle*. Du point de vue de la figure de *speckle*, cette longueur σ désigne aussi bien la taille typique de grains d'intensité que la largeur typique des tranchées formées par les minima d'intensité. Si on considère que le désordre forme un puits harmonique autour de chacun de ses *minima*, on peut assimiler σ à la taille de l'oscillateur harmonique d'un état lié pouvant être supporté par le puits. L'énergie de cet état s'écrit alors :

$$E_\sigma = \frac{\hbar^2}{m\sigma^2} \,, \tag{5.15}$$

et est appelée *énergie de corrélation*. Si les puits sont assez profonds pour supporter plusieurs états liés, E_σ désigne alors l'écart moyen en énergie entre ces niveaux.

Condition de désordre perturbatif

Comme cela avait été indiqué plus tôt, l'expression (5.9) de τ_s a été déterminée dans la limite d'un désordre perturbatif par rapport à l'énergie cinétique $\varepsilon_\mathbf{k}$. Cette expression permet donc de donner un ordre de grandeur de l'élargissement ΔE :

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau_s} \sim \frac{V_0^2}{E_\sigma} \,, \tag{5.16}$$

en utilisant la définition (5.15) de l'énergie de corrélation E_σ.

D'une manière générale, il ne fait sens de parler de "temps de vie" τ_s d'un état $|\mathbf{k}\rangle$ couplé au désordre que si sa fonction d'onde associée peut réaliser plusieurs oscillations avant d'être amortie (cf figure 5.4 a_2.).

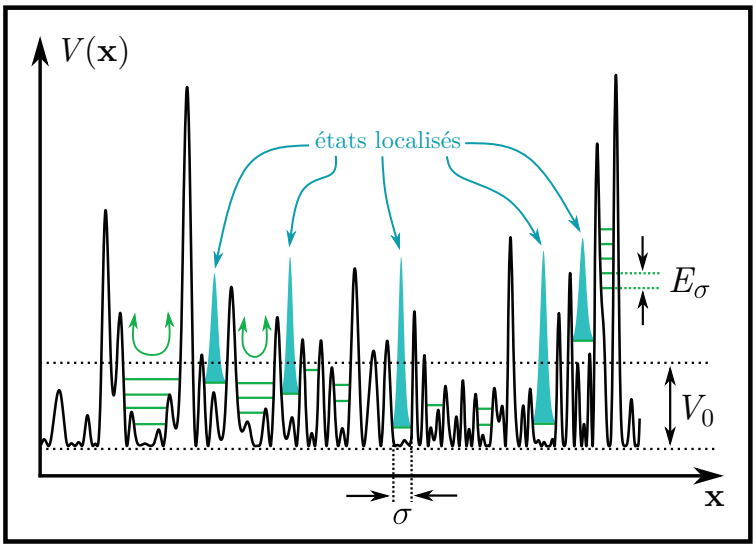

FIGURE 5.5 – **Régime de désordre classique.** Dans la limite $V_0 \gg E_\sigma$, un grand nombre d'états localisés peut être supporté par chaque fluctuation du désordre d'une taille typique σ. Lorsque $V_0/E_\sigma \to +\infty$, l'extension de la fonction d'onde associée à un état localisé devient plus petite que n'importe quel autre échelle de longueur : la dynamique devient essentiellement classique, et le seuil de mobilité se confond avec le seuil de percolation.

Autrement dit, cette condition est respectée lorsque [99] :

$$\frac{\Delta E}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \ll 1 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} \gg \frac{V_0^2}{E_\sigma}\,, \tag{5.17}$$

d'après (5.16). La quantité V_0^2/E_σ semble ici jouer le rôle d'une amplitude de désordre effectif qui doit rester négligeable devant l'énergie cinétique $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ dans la limite d'un désordre perturbatif.

Le critère (5.16) peut aussi être exprimé en terme de nombre kl_s :

$$\frac{\Delta E}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \sim \frac{\hbar}{mv^2\tau_s} \sim \frac{1}{kl_s} \ll 1\,, \tag{5.18}$$

où $l_s = v\tau_s$ est le libre parcours moyen, et $v = \hbar k/m$ la vitesse de la particule. Le temps de vie d'un état $|\mathbf{k}\rangle$ est donc bien défini dans un régime fortement diffusif où $kl_s \gg 1$.

Inversement, on sait depuis la section 2.2.3 que le phénomène de localisation d'Anderson est attendu dans des situations où le critère de Ioffe-Regel $kl^* \lesssim 1$ est vérifié. Comme $l^* \geq l_s$, la localisation d'Anderson est *a priori* observable dans un régime où $kl_s \ll 1$. D'après (5.18), la localisation d'Anderson sera donc observable dans une situation où les effets d'élargissements en énergie sont prédominants $\Delta E \gg \varepsilon_{\mathbf{k}}$.

5.1.4 Régimes de localisation dans un désordre corrélé

Comme cela a déjà été abordé en section 2.3.1, il est possible d'interpréter la localisation d'une particule comme le piégeage de celle-ci dans un état lié au potentiel désordonné. En comparant E_σ à l'amplitude du désordre V_0, on peut distinguer deux régimes pour lesquels la nature de ces états liés est très différentes.

Localisation en désordre classique

Dans la limite où $V_0 \gg E_\sigma$, représenté en figure 5.5, chaque fluctuation du désordre soutient de nombreux états liés. Dans cette situation, les états localisés ne s'étalent pas au-delà d'une taille σ et restent confinés aux *minima* de potentiel. Dans la limite $V_0/E_\sigma \to +\infty$, le très grand nombre de niveaux supporté par chaque fluctuations du désordre forme un continuum et le mouvement des particules est essentiellement classique. Dans ce cas, le seuil de mobilité séparant les états localisés et diffusifs s'approche du *seuil de percolation* [157], c'est à dire de l'énergie minimale nécessaire à une particule classique pour qu'elle puisse toujours se propager entre deux points quelconques, et ne soit donc jamais piégée autour d'un *minima* de potentiel. On appelle ainsi le régime $V_0 \gg E_\sigma$ le régime de "*désordre classique*".

Localisation en désordre quantique

Dans la limite où $V_0 \ll E_\sigma$, représenté en figure 5.6 a., l'amplitude du désordre est trop faible pour que celui-ci puisse soutenir des états liés sur la taille σ d'une fluctuation moyenne de potentiel.

Néanmoins, on pourrait imaginer qu'il existe une certaine taille de fluctuation $\mathcal{L} \geq \sigma$ assez grande pour supporter un ou plusieurs états liés. De tels états liés auraient alors une fonction d'onde s'étendant sur un nombre $\mathcal{L}/\sigma$ de fluctuations moyennes de taille σ. D'un point de vue énergétique, tout se passe comme si la particule était soumise à un potentiel désordonné effectif $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ d'amplitude $\mathcal{V}_0$ résultant de la moyenne sur des $\mathcal{L}/\sigma$ différents grains recouverts par l'extension du paquet d'onde.

Si l'on considère que les grains sont statistiquement indépendants, c'est à dire que sur une distance $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ plus grande que σ la corrélation spatiale $\mathcal{C}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ du potentiel $V(\mathbf{x})$ "tend suffisamment vite vers zéro",[4] alors l'amplitude $\mathcal{V}_0$ résultant de la moyenne des $\mathcal{L}/\sigma$ grains d'amplitude V_0 est donnée par[5] :

$$\mathcal{V}_0 \sim \frac{V_0}{\sqrt{\mathcal{L}/\sigma}}\,, \tag{5.19}$$

qui est valable pour un désordre en dimension $d = 1$. En dimension $d = 3$, la moyenne a lieu sur $(\mathcal{L}/\sigma)^3$ grains indépendants, d'où un potentiel effectif d'amplitude [157] :

$$\mathcal{V}_0 \sim \frac{V_0}{(\mathcal{L}/\sigma)^{3/2}}\,. \tag{5.20}$$

La localisation peut donc se comprendre dans ce régime comme la présence d'au moins un état lié dans ce potentiel effectif $\mathcal{V}(\mathbf{x})$. Pour qu'un tel état lié existe, il faut que l'énergie de corrélation $\hbar^2/m\mathcal{L}^2$ associée à cet état étendu sur une taille $\mathcal{L}$ soit au moins égale (ou inférieure) à l'amplitude effective $\mathcal{V}_0$. La taille $\mathcal{L}$ typique sur laquelle un état localisé lié au potentiel $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ peut exister est alors appelée *longueur de Larkin* :

$$\mathcal{L} \sim \sigma \left(\frac{E_\sigma}{V_0}\right)^2\,, \tag{5.21}$$

4. Ce critère de convergence rapide de la corrélation spatiale $\mathcal{C}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ vers zéro à longues distances s'exprime plus exactement selon le fait que $\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{k}) \sim \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ pour $|\mathbf{k}| \sim 0$. Dans ce cas, on parle de *limite de bruit blanc* du potentiel désordonné : pour des longues distances $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \gg \sigma$, le désordre n'est plus corrélé de sorte que $\mathcal{C}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \sim \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$.

5. En effet, d'une manière générale, si on considère un ensemble $\{X_i\}_i$ de n variables aléatoires *indépendantes* et d'écart-type σ_X, l'écart-type σ_Y de la moyenne $Y = \sum_{i=1}^n X_i/n$ est donné par $\sigma_Y = \sigma_X/\sqrt{n}$.

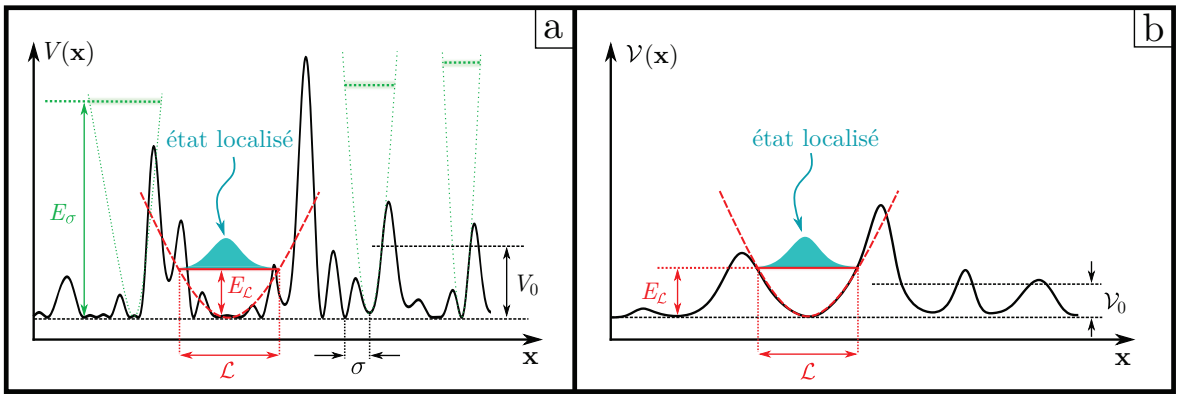

FIGURE 5.6 – **Régime de désordre quantique. a.** Dans la limite où $V_0 \ll E_\sigma$, aucun état ne peut être confiné sur une fluctuation de potentiel de taille σ. En revanche, il peut exister une taille $\mathcal{L} \geq \sigma$ sur laquelle un état lié peut exister. **b.** Un tel état s'étendant sur plusieurs fluctuations du désordre, tout se passe comme si la particule occupant cet état était soumise à un potentiel effectif $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ d'amplitude $\mathcal{V}_0 \leq V_0$ issu d'une moyenne sur les fluctuations recouvertes par la fonction d'onde. L'énergie de corrélation $E_\mathcal{L} = \hbar^2/m\mathcal{L}^2$ associée à la taille $\mathcal{L}$ de l'état lié est appelée énergie de Larkin.

et est donc du même ordre de grandeur que la longueur de localisation ξ_{loc}. L'énergie de corrélation $E_\mathcal{L} = \hbar^2/m\mathcal{L}^2$ associée à la longueur de Larkin est appelée *énergie de Larkin* :

$$E_\mathcal{L} \sim \frac{V_0^4}{E_\sigma^3}\,, \tag{5.22}$$

et donne donc une estimation du seuil de mobilité E_c [68].

Il faut insister sur le fait que l'estimation (5.20) de l'amplitude $\mathcal{V}_0$ du potentiel lissé, et donc de l'énergie de Larkin (5.22), n'est valable que dans le cas d'un désordre $V(\mathbf{x})$ corrélé "à courtes distances", ce qui n'est pas le cas d'un désordre *speckle*.[6] Néanmoins, les arguments de lissage du désordre par la fonction d'onde restent valables même lorsque les grains de potentiel ne sont pas statistiquement indépendants. Pour un désordre *speckle*, on peut montrer que l'énergie de Larkin est alors estimée à [155] :

$$E_\mathcal{L} \sim \frac{V_0^2}{E_\sigma}\,. \tag{5.23}$$

Comme l'énergie de Larkin (5.23) est du même ordre de grandeur que le seuil de mobilité, la condition de désordre perturbatif (5.18) est respectée lorsque l'énergie cinétique $\varepsilon_\mathbf{k}$ de la particule l'oblige à occuper des états diffusifs bien au dessus du seuil de mobilité.

Ce régime est appelé "*désordre quantique*" dans le sens où s'il y a localisation, alors cette dernière ne peut pas être attribuée à un piégeage classique des atomes autour des minima de potentiel de taille σ. Dans cette situation, un état localisé peut s'étaler spatialement sur plusieurs fluctuations de potentiel de taille σ.

6. En effet, on peut montrer [135] que pour une figure de *speckle* 3D la corrélation $\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{k})$ *diverge* en $1/|\mathbf{k}|$ lorsque $|\mathbf{k}| \to 0$. Autrement dit, il n'y a pas de limite de bruit blanc pour un désordre de type *speckle* : il n'existe pas de distance $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ au-delà de laquelle les grains de *speckle* peuvent être considérés comme statistiquement indépendants.

5.2 Étude de la transition d'Anderson par expansion de nuages ultra-froids dans un *speckle*

A ce jour, on dénombre trois expériences de localisation d'atomes froids en $d = 3$ dans un potentiel désordonné de type *speckle*. Toutes ont pour but de démontrer l'existence d'un seuil de mobilité E_c séparant les états d'énergie localisés et diffusifs, et de le mesurer pour différentes amplitude V_0 du potentiel désordonné. Afin de contextualiser les travaux présentés dans le cadre de cette thèse, il est important de présenter les résultats obtenus par chacune de ces expériences et d'en tracer les limitations.

5.2.1 L'expérience d'Urbana-Champaign

L'expérience de Kondov et al. [97], menée à l'Université d'Urbana-Champaign (États-Unis) en 2011, constitue la première tentative d'étude de la transition d'Anderson par expansion d'atomes froids dans un *speckle*. Un nuage *thermique* de quelques centaines de nK d'atomes de ^{40}K (espèce fermionique) est initialement préparé et retenu dans un piège dipolaire. Le nuage est alors polarisé en spin afin de supprimer les collisions, et donc les interactions entre particules.[7] Le champ *speckle* est ensuite allumé progressivement en $200\,$ms, puis le piège dipolaire est éteint rapidement afin de permettre l'expansion des atomes dans le *speckle*. Le laser utilisé pour générer la figure de *speckle* possède une longueur d'onde de $532\,$nm, c'est à dire très désaccordée vers le bleu de la résonance du ^{40}K. Par conséquent, le potentiel désordonné ressenti par les atomes est *conservatif* (très peu d'émission spontanée) et *répulsif*. Le nuage est aussi soumis à un gradient magnétique exerçant une force qui compense l'action de la gravité sur le nuage. Enfin, une imagerie par absorption permet de mesurer la densité atomique $n(\mathbf{x}, t)$ après un temps t donné de propagation dans le désordre.

A temps de propagation courts $t < 20\,$ms, le nuage subit une expansion jusqu'à ce que les mesures suggèrent l'apparition d'une densité atomique possédant une double structure, comme représenté en figure 5.7 a. : une composante immobile (en rouge) pour des temps de propagation dans le désordre $t > 20\,$ms allant jusqu'à plusieurs centaines de ms, et une composante qui continue de s'étendre (en bleu) pour des temps d'expérience $t \geq 20\,$ms.

Cette double structure est alors directement interprétée comme la signature de l'existence d'un seuil de mobilité E_c séparant états localisés et états diffusifs. Ainsi, les auteurs Kondov et al. supposent que la densité atomique peut se décomposer sous la forme :

$$n(\mathbf{x}, t) = n_{\text{loc}}(\mathbf{x}) + n_D(\mathbf{x}, t) \quad \text{pour} \quad t \geq 20\,\text{ms}\,, \tag{5.24}$$

où la composante $n_{\text{loc}}(\mathbf{x})$ immobile de la densité est identifiée à une densité d'atomes localisés, et où la composante mobile $n_D(\mathbf{x}, t)$ est associée à une densité d'atomes diffusifs.

Dans un premier temps, la densité diffusive $n_D(\mathbf{x}, t)$ est ajustée par un profil gaussien, qui est ensuite soustrait aux données expérimentales $n(\mathbf{x}, t)$, afin d'obtenir les profils localisés $n_{\text{loc}}(\mathbf{x})$, dont quelques exemples sont donnés en figure 5.7 b. Cette soustraction est appliquée pour les densités $n(\mathbf{x}, t)$ mesurées après un temps $t = 20\,$ms de propagation dans le désordre, et $n_{\text{loc}}(\mathbf{x})$ est à son tour ajustée par une fonction qui est le produit d'une gaussienne et d'une exponentielle décroissante (qui, selon les auteurs, donne une estimation d'une longueur de localisation ξ_{loc}).

7. En effet, si tous les atomes sont dans le même état de spin, les collisions "basses énergies" en onde s sont interdites par principe d'exclusion de Pauli [176]. Restent alors les collisions "hautes énergies" en onde p, processus dont la section efficace devient négligeable à basse température [55].

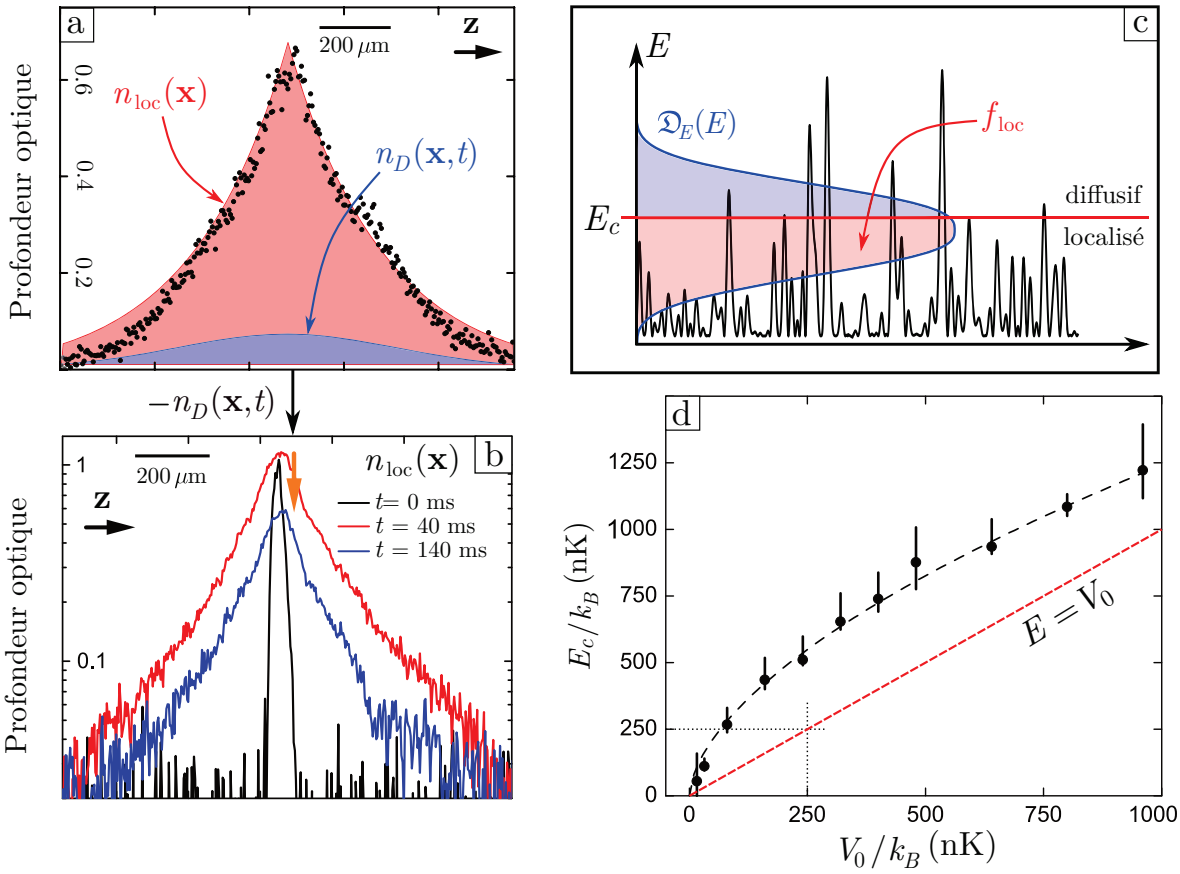

FIGURE 5.7 – **Résultats de l'expérience d'Urbana-Champaign [97, 96]**. **a.** Exemple de mesure (points noirs) de la densité atomique $n(\mathbf{x},t)$ après un temps $t = 20$ ms d'expansion dans un *speckle* ($\hat{z}$ étant l'axe optique de la figure de *speckle*). Cette densité est ajustée selon deux contributions : une fraction localisée $n_{\rm loc}(\mathbf{x})$ (courbe rouge), et une fraction diffusive $n_D(\mathbf{x},t)$ (courbe bleue). Les nombres d'atomes localisés $N_{\rm loc}$ et diffusifs N_D sont estimés par intégration respective des profils $n_{\rm loc}(\mathbf{x})$ et $n_D(\mathbf{x},t)$. **b.** Déduction des profils $n_{\rm loc}(\mathbf{x})$ localisés après un temps $t = 0$ ms (en noir), 40 ms (en rouge), 140 ms (en bleu), de propagation dans le désordre après soustraction de la composante diffusive $n_D(\mathbf{x},t)$. On constate que la densité localisée perd des atomes (flèche orange) entre les temps $t = 40$ ms et $t = 140$ ms. **c.** Le seuil de mobilité E_c est ajuster en temps que paramètre libre de sorte que l'intégrale (5.25) soit égale la fraction localisée $f_{\rm loc} = N_{\rm loc}/(N_{\rm loc} + N_D)$ estimée à partir des ajustements de $N_{\rm loc}$ et N_D. **d.** Seuil de mobilité E_c pour différentes amplitudes V_0 de désordre. On notera que le seuil estimé ici est systématiquement supérieur à l'amplitude V_0 du désordre.

L'intégration spatiale des profils $n_{\rm loc}(\mathbf{x})$ et $n_D(\mathbf{x},t)$ obtenus à $t = 20$ ms permet d'évaluer les nombres d'atomes $N_{\rm loc}$ localisés et diffusifs N_D associés à chaque composante, et donc la *fraction localisée* $f_{\rm loc} = N_{\rm loc}/(N_{\rm loc} + N_D)$. Le seuil de mobilité E_c est alors ajusté en temps que paramètre libre à partir de la fraction localisée $f_{\rm loc}$ à l'aide de :

$$f_{\rm loc} = \int_{-\infty}^{E_c} \mathrm{d}E\, \mathfrak{D}_E(E)\,, \tag{5.25}$$

où $\mathfrak{D}_E(E)$ est la *distribution en énergie* E des atomes dans le potentiel désordonné, comme représenté en 5.7 c.

Dans leur analyse, Kondov et al. font l'hypothèse que la distribution en énergie des atomes du nuage initialement préparé *n'est pas modifiée* par l'introduction lente (en 200 ms) du potentiel désordonné.

Cette hypothèse est étayée par les auteurs selon le fait que l'allumage du *speckle* ne produit pas d'effet significatif sur la distribution en impulsion $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$ du nuage (mesurée par temps de vol). Autrement dit, la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ utilisée par les auteurs pour inférer la fraction localisée f_{loc} à partir de (5.25) est celle d'un nuage thermique :

$$\mathfrak{D}_E(E) \propto \mathfrak{D}_{\mathbf{k}}\left(|\mathbf{k}| = \sqrt{2mE/\hbar^2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) \propto \mathrm{e}^{-\hbar^2|\mathbf{k}|^2/2mk_BT}\,, \tag{5.26}$$

où $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$ est une distribution d'impulsion *thermique* de Maxwell-Boltzmann. Cette méthode d'évaluation du seuil de mobilité E_c est alors reproduite pour différentes amplitudes V_0 de désordre, les résultats sont représentés en figure 5.7 d.

Avant même de comparer ces résultats avec les autres expériences (cf section 5.2.4), on pourrait noter qu'un certain nombre de critiques [120, 112] ont été formulées vis à vis de la méthodologie employée pour traiter les données expérimentales.

Tout d'abord, les temps d'expansion dans le désordre utilisés pour évaluer la fraction localisée (20 ms) ne semblent pas assez long pour faire proprement la différence entre la localisation et une diffusion lente du nuage atomique. En effet, pour des états diffusifs proche du seuil de mobilité E_c, on pourrait s'attendre à des coefficients de diffusion $D_0 = \hbar/3m \sim 530\,\mu\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ pour le ^{40}K, soit des temps typiques de diffusion $\tau_{D_0} \sim L^2/D_0$ de l'ordre de 10 s (pour une distance typique $L \sim 100\,\mu$m, cf échelle figures 5.7 a. et b.) nécessaires pour différencier correctement localisation et diffusion lente. Ce biais impliquerait alors une surestimation de la fraction localisée, et par la même du seuil de mobilité E_c, en comptant dans la fraction localisée des atomes qui continuent de diffuser (même très lentement) sur des temps d'expérience de l'ordre de 10 ms.

Par ailleurs, les mesures présentées dans l'article montrent des éléments en faveur de cet argument. En effet, en figure 5.7 b., on peut voir une déplétion de la fraction localisée entre les instants à $t = 40$ ms et $t = 140$ ms de propagation dans le désordre (matérialisé par la flèche orange). Dans leurs études, les auteurs n'expliquent pas cette perte d'atomes [97, 96]. Mais cette déplétion pourrait s'expliquer par le fait qu'à $t = 40$ ms la densité n_{loc} surestime très largement la véritable fraction localisée. De fait, certains atomes qui étaient comptés comme localisés à $t = 40$ ms, se retrouve comptés comme diffusifs à $t = 140$ ms et sont donc soustraits en même temps que $n_D(\mathbf{x}, t)$ dans le traitement de f_{loc}.

Enfin, l'hypothèse (5.26) selon laquelle la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ des atomes n'est pas affectée par la présence du *speckle* revient à assimiler la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ à une distribution de Dirac infiniment fine :

$$A(\mathbf{k}, E) \sim \delta\left(E - \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}\right)\,, \tag{5.27}$$

de sorte que la relation (5.14) se ramène à l'expression (5.26). [8] L'approximation (5.27) consiste donc à négliger l'élargissement en énergie $\Delta E \sim \hbar/\tau_s$ que subit une particule diffusant dans un désordre (cf section 5.1.3). Ceci aurait pu être une bonne approximation dans la limite d'un désordre perturbatif (5.18). Malheureusement, comme cela a été souligné plus tôt, la localisation d'Anderson est attendue dans des régimes non-perturbatifs où l'élargissement ΔE est justement prédominant, et donc non-négligeable, devant les autres échelles d'énergie du problème.

8. Comme on le verra au chapitre 6, (5.27) correspond à la fonction spectrale d'une particule libre pour laquelle les états d'implusion $|\mathbf{k}\rangle$ sont aussi les états propres de l'énergie.

Pour toutes ces raisons, les résultats de cette expérience ne sont généralement pas considérés comme étant concluant [129, 153].

5.2.2 L'expérience de Palaiseau

L'expérience de Jendrzejewski et al. [92], réalisée à l'Institut d'Optique à Palaiseau (France) en 2012, constitue la seconde tentative d'étude de la transition d'Anderson par expansion d'atomes froids dans un *speckle*. Le montage expérimental utilisé est sensiblement le même que celui ayant été présenté dans les chapitres 3 et 4, à la différence près que le désordre est ici généré par l'interférence de deux figures de *speckle*. [9] Un nuage condensé d'atomes de ^{87}Rb est donc préparé dans un piège dipolaire et suspendu contre la gravité par lévitation magnétique. Le laser utilisé pour le *speckle* possède, là aussi, une longueur d'onde de $532\,\mathrm{nm}$. Dans un premier temps, le condensat est relâché du piège pour une propagation libre de $50\,\mathrm{ms}$. Par interaction répulsive, les atomes du nuage se repoussent les uns les autres, ce qui provoque l'expansion du condensat. Après ce temps de vol de $50\,\mathrm{ms}$, la densité du gaz a suffisamment diminué pour que l'énergie d'interaction entre particules puissent être négligée devant toutes les autres échelles d'énergie pertinentes : on parle alors de *dilution* du nuage. Le potentiel *speckle* est alors allumé en quelques dizaines de μs et pendant une durée t pour laquelle les atomes se propagent dans un potentiel désordonné . Enfin, la densité atomique $n(\mathbf{x}, t)$ est mesurée par fluorescence.

Là encore, les mesures suggèrent une densité atomique $n(\mathbf{x}, t)$ à deux composantes que les auteurs décomposent selon :

$$n(\mathbf{x}, t) = f_{\mathrm{loc}}\, n_i(\mathbf{x}) + n_D(\mathbf{x}, t) \tag{5.28}$$

où f_{loc} est la fraction d'atomes localisés, $n_i(\mathbf{x})$ est la densité initiale du nuage [10] (avant la propagation dans le désordre), et $n_D(\mathbf{x}, t)$ la densité des atomes diffusifs.

Pour estimer la fraction localisée f_{loc}, les auteurs Jendrzejewski et al. mesurent l'évolution temporelle de la densité centrale $\tilde{n}(t) = \int \mathrm{d}x\, n(\mathbf{x} = 0, t)$, où $\hat{x}$ est l'axe de l'imagerie. Les atomes de la fraction diffusive $n_D(\mathbf{x}, t)$ s'éloignant du centre $\mathbf{x} = 0$, il est attendu que la densité centrale $\tilde{n}(t)$ diminue jusqu'à une certaine saturation correspondant à la densité d'atomes localisés (qui sont donc immobiles et restés proches du centre). Cette saturation est partiellement observée en figure 5.8 a$_1$. Afin de quantifier f_{loc}, l'évolution de la densité centrale est ajustée selon l'asymptote :

$$\frac{\tilde{n}(t)}{\tilde{n}_0} = f_{\mathrm{loc}} + \frac{\chi}{t}\,, \tag{5.29}$$

où $\tilde{n}_0 = n(\mathbf{x} = 0, t = 0)$ est la densité centrale initiale. Le comportement temporel en $1/t$ de la partie diffusive de la densité centrale est attendu dans la limite des temps de diffusion assez long pour que les atomes diffusifs se soient propagés sur une taille plus grande que la taille du nuage initial. [11] La fraction localisée se lit donc dans la limite des temps longs lorsque l'asymptote (5.29) croise l'ordonnée $1/t = 0$, comme représenté en figure 5.8 a$_2$.

9. L'intérêt d'un tel montage est qu'il permet de générer un désordre plus isotrope que celui généré à l'aide d'une seule figure de *speckle* [90].

10. Autrement dit, les atomes localisés le sont sur une taille inférieure à la taille initiale du nuage, si bien que le profil en densité associé à ces atomes est le même que le profil $n_i(\mathbf{x})$ initial.

11. En effet, dans cette limite, la partie diffusive suit essentiellement l'expression (2.31), i.e. :

$$n_D(\mathbf{x}, t) \propto \frac{1}{t^{3/2}} \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|^2/4Dt}\,.$$

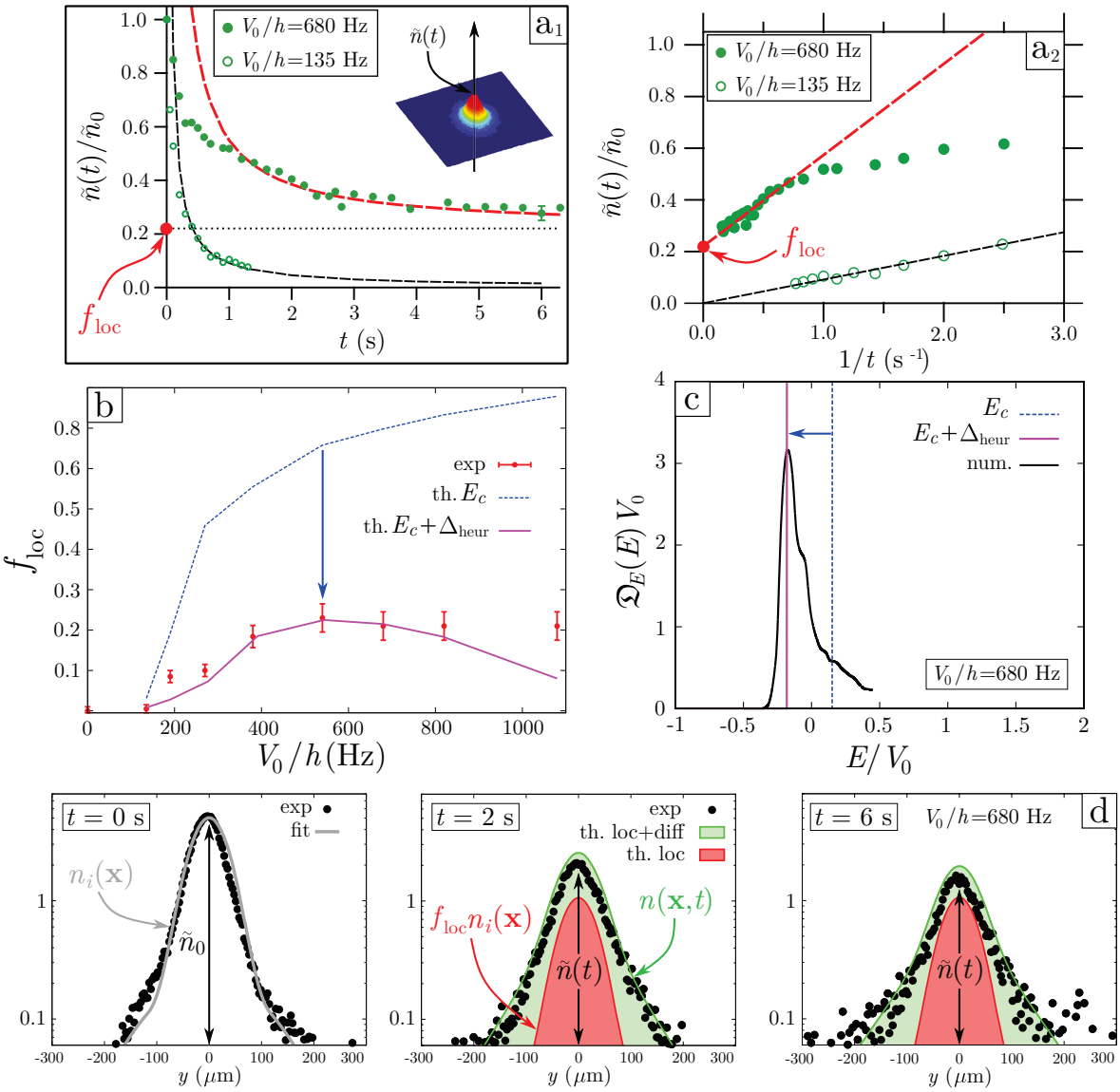

FIGURE 5.8 – **Résultats de l'expérience de Palaiseau [90, 92, 135]**. **a**$_1$. Mesure de la densité centrale $\tilde{n}(t)$ selon le temps de propagation t pour des désordres d'amplitude $V_0/h = 135$ Hz et 680 Hz. Dans la limite des temps longs $t > 6$ s à $V_0 = 680$ Hz, la densité centrale semble saturer, signe qu'une partie des atomes est localisée. **a**$_2$. Même mesures qu'en a$_1$., mais tracées selon $1/t$. L'ajustement (5.29) permet de quantifier la fraction localisée $f_{\rm loc}$ associée à la saturation de a$_1$. **b.** Fractions localisées $f_{\rm loc}$ mesurées pour différentes amplitudes V_0 et comparées avec la fraction théorique attendue avec la théorie auto-consistante (courbe pointillée), et avec le décalage heuristique $\Delta_{\rm heur}$. **c.** Distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E) = A(\mathbf{k} = 0, E)$ des atomes dans un désordre à 680 Hz d'amplitude calculée numériquement. Le trait en pointillé repère le seuil de mobilité E_c donné par la théorie auto-cohérente, le trait plein repère le seuil E_c décalé par la quantité *ad-hoc* $\Delta_{\rm heur}$. L'axe des énergie a ici été décalé par rapport à la moyenne du potentiel $E \to E - \overline{V}$. La moyenne $\overline{V} = V_0$ se situe donc en $E = 0$. **d.** Densités atomiques après un temps $t = 0$, 2, et 6 s de propagation dans un désordre de 680 Hz d'amplitude. Les points expérimentaux sont comparés avec des profils en densités $n(\mathbf{x}, t)$ (en vert) et des fractions localisées (en rouge) théoriques calculés à partir de la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ (cf c.). Plus le temps de diffusion t est long, plus la densité $n(\mathbf{x}, t)$ mesurée est révélatrice de la fraction localisée $f_{\rm loc}\, n_i(\mathbf{x})$.

En intégrant selon l'axe $\hat{x}$ de l'imagerie, on obtient donc une densité centrale qui évolue comme $\tilde{n}(t) \propto \sqrt{t}/t^{3/2} \propto 1/t$.

Elle est alors estimée selon cette méthode pour différentes amplitudes V_0 de désordre, les résultats sont présentés en figure 5.8 b. (points rouges).

En parallèle des expériences, des calculs numériques et théoriques sont effectuées pour estimer le seuil de mobilité E_c. La distribution en énergie des atomes juste après la dilution est supposée infiniment fine. En effet, après dilution du condensat, l'énergie des atomes est majoritairement *cinétique*, avec une distribution en impulsion s'étalant de $|\mathbf{k}| = 0$ à $|\mathbf{k}| \sim \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$, où μ est le potentiel chimique du nuage initialement piégé. Dans la limite où $\mu \ll V_0$, l'énergie cinétique du nuage après dilution peut être négligée devant le potentiel aléatoire, et tous les atomes comme étant dans l'état $|\mathbf{k} = 0\rangle$. Autrement dit, tous les atomes se trouvent dans l'état $|\mathbf{k} = 0\rangle$, de sorte que la distribution en impulsion du nuage soit bien approchée par $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k})$.

Au moment où les atomes sont mis en contact avec le *speckle*, cette distribution s'élargit par le biais de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ qui possède une certaine largeur en énergie ΔE. D'après (5.14), la nouvelle distribution en énergie s'écrit alors :

$$\mathfrak{D}_E(E) = \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\, A(\mathbf{k}, E)\, \delta(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k} = 0, E)\,. \tag{5.30}$$

Dans ce cas, déterminer la distribution en énergie est équivalent à déterminer la fonction spectrale. La fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$ est donc calculée numériquement par diagonalisation d'un hamiltonien $\mathcal{H} = -\hbar^2\Delta/2m + V(\mathbf{x})$, où $V(\mathbf{x})$ est le potentiel *speckle* [135]. Un exemple de résultat est représenté en figure 5.8 c. On notera que la distribution est centrée sur l'amplitude moyenne V_0 du potentiel, qui correspond donc à l'énergie potentielle moyenne communiquée aux atomes lors de l'allumage du *speckle* en quelques dizaines de μs.

Une fois la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ connue, il devient possible d'estimer le seuil de mobilité E_c à partir de l'intégration (5.25). Pour cela, les auteurs évaluent le seuil de mobilité E_c à partir d'une théorie auto-consistante de la localisation (cf section 2.2.3). Les résultats de cette analyse, présentés en figure 5.8 b. (courbe pointillée), montrent un écart significatif avec la fraction localisée mesurée expérimentalement (points rouge). Néanmoins, un accord quantitatif entre la théorie et l'expérience est retrouvé en décalant de manière heuristique le seuil de mobilité E_c donné par la théorie auto-consistante (courbe pleine) par une quantité $\Delta_{\text{heur}} = -\alpha V_0^2$, où α est le seul paramètre ajustable du traitement de données.

Même si l'origine physique de ce décalage Δ_{heur} est certainement en partie imputable à une conjonction d'incertitudes expérimentales (température non-nulle du nuage atomique, incertitude sur l'amplitude du désordre, etc) et numériques (incertitudes sur le calcul de $A(\mathbf{k}, E)$), il ne fait aucun doute que la nécessité de son introduction montre avant tout que la théorie auto-cohérente de la localisation *dans sa formulation la plus simple* (cf section 2.2.3) n'est pas un bon outil pour estimer le seuil de mobilité (cf section 2.3.3). Le fait que ce décalage heuristique Δ_{heur} dépende de V_0^2 n'a, en fait, rien d'anodin. En effet, dans le cadre de cette expérience, l'énergie de corrélation E_σ est de l'ordre de 5 kHz, ce qui est bien supérieur aux amplitudes V_0 de désordre considérée ici. Les expériences de localisation sont donc menées dans un régime de *désordre quantique*, régime pour lequel l'échelle d'énergie typique des états localisés est donnée par l'énergie de Larkin V_0^2/E_σ (cf expression (5.23)). [12]

12. On notera que l'existence d'un tel décalage Δ_{heur} en énergie est prévue par une théorie auto-consistante affinée de la localisation dans un potentiel *speckle* [136, 187].

En connaissant la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ et le seuil de mobilité $E_c + \Delta_{\text{heur}}$ (et donc la fraction localisée f_{loc}), les auteurs ont pu aussi simuler l'évolution temporelle de la densité totale $n(\mathbf{x}, t)$ [135].

Ces simulations sont en bon accord avec les expériences, comme représenté en figure 5.8 d. Elles révèlent notamment que la densité totale $n(\mathbf{x}, t)$ surestime toujours la densité localisée $f_{\text{loc}}\, n_i(\mathbf{x})$, et ce, même après des temps de propagation dans le désordre très longs (6 s).

Au-delà du fait qu'un accord satisfaisant entre théorie et expériences peut être obtenu, il n'en demeure pas moins le fait que l'estimation du seuil de mobilité donnée par ces expériences est très indirecte car basée sur deux calculs intermédiaires : le calcul numérique de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, le calcul théorique de E_c, et l'ajustement du décalage Δ_{heur} en tant que paramètre libre.

5.2.3 L'expérience de Florence

L'expérience de Semeghini et al. [154], réalisée au LENS à Florence (Italie) en 2015, est la dernière en date à s'atteler à la mesure du seuil de mobilité de la transition d'Anderson avec des atomes froids. Le protocole expérimental est représenté en figure 5.9 a. Dans un premier temps, un condensat de ^{39}K (espèce bosonique) est préparé dans un piège croisé et lévité contre l'action de la gravité par un gradient magnétique. Il s'en suit une procédure de chargement "*quasi-adiabatique*" des atomes dans le désordre, étape de 200 ms au cours de laquelle le piège croisé est éteint, le potentiel *speckle* est allumé progressivement (il est toujours généré à l'aide d'un laser à 532 nm, et est aussi formé par l'interférence de deux figures de *speckle*), et les interactions inter-atomiques supprimées par résonance de Feshbach. Toutefois, même si cette étape a été optimisée afin de minimiser l'énergie cinétique des atomes en fin de procédure, les auteurs font remarquer que cette méthode ne permet pas de transférer l'ensemble des atomes de l'état fondamental du piège croisé à l'état fondamental du potentiel *speckle*. [13] Il subsiste donc toujours *in fine* un élargissement de la distribution en énergie des atomes chargés dans le *speckle*.

Là où l'expérience de Palaiseau avait opté pour une évaluation "tout numérique" de la distribution en énergie, la détermination de $\mathfrak{D}_E(E)$ est ici réalisée par une association de résultats numériques et expérimentaux, comme représenté en figure 5.9 b. Ainsi, pour différentes amplitudes V_0 du désordre, la distribution en impulsion $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$ des atomes après chargement dans le *speckle* est mesurée expérimentalement par temps de vol. Elle est ensuite connectée à la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ par la relation (5.14) pour laquelle la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ a été évaluée numériquement par diagonalisation d'un hamiltonien $\hat{\mathcal{H}} = -\hbar^2\Delta/2m + \hat{V}(\mathbf{x})$, où $V(\mathbf{x})$ est le désordre *speckle*.

L'expérience de Florence se détache vis à vis des expériences précédentes dans sa manière de *contrôler* l'énergie des états peuplés par les atomes placés dans le désordre. En effet, après l'étape de chargement dans le désordre, à l'issue de laquelle les atomes sont sensés occupés majoritairement des états de "basses énergies", l'amplitude du *speckle* est modulée périodiquement (en modulant la puissance du laser utilisé) pendant une durée $T = 500$ ms telle que :

$$\overline{V}(T) = V_0\left(1 + \gamma\cos(\omega T)\right). \tag{5.31}$$

13. Un transfert *adiabatique* des atomes d'un état d'énergie E_i vers un état d'énergie E_f ne peut se faire que s'il existe un gap $|E_i - E_f| \gg \hbar/T$ où T est le temps de transfert [47]. Or, en moyenne sur les réalisations du désordre, les états propres d'une particule dans un potentiel désordonné forment un spectre *continu* (cf chapitres 6 et 7).

Dans le cadre d'une *théorie de réponse linéaire* $\gamma \ll 1$, les auteurs en déduisent que cette excitation permet de transférer une quantité d'énergie $\hbar\omega$ à une partie des atomes présents dans le désordre, et que la probabilité p_{ex} d'exciter un atome d'un état d'énergie E vers un état d'énergie $E + \hbar\omega$ est indépendante aussi bien de E que de ω.

Ce faisant, une fraction des atomes est excitée dans des états "hautes énergies", dont certains se situent à une énergie E supérieure au seuil de mobilité E_c. La distribution en énergie des atomes dans le désordre après transfert s'exprime donc comme :

$$\mathfrak{D}_E(E, \hbar\omega) = (1 - p_{\text{ex}})\, \mathfrak{D}_E(E) + p_{\text{ex}}\, \mathfrak{D}_E(E - \hbar\omega)\,, \tag{5.32}$$

où $(1 - p_{\text{ex}})\, \mathfrak{D}_E(E)$ désigne la fraction des atomes n'ayant pas été excités lors de la modulation du potentiel, et $p_{\text{ex}}\, \mathfrak{D}_E(E - \hbar\omega)$ la fraction d'atomes excités dont la distribution est centrée autour d'une énergie $\hbar\omega$. Un exemple est donné en figure 5.9 c.

Après cette étape d'excitation à $\gamma = 0.2$, et une fréquence ω pendant $T = 500\,\text{ms}$, les atomes sont laissés dans le désordre pour un temps de propagation de $t = 500\,\text{ms}$, puis une imagerie par absorption permet de mesurer la densité atomique. Les auteurs font ensuite l'hypothèse que cette densité mesurée en fin d'expérience s'identifie à la fraction localisée f_{loc}. Cette fraction localisée est alors mesurée pour différentes fréquences ω de modulation, les résultats sont représentés en figure 5.10 a. La distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E, \hbar\omega)$ des atomes après transfert étant connue et déterminée par (5.32), il est possible d'estimer le seuil de mobilité E_c à partir de (5.25) selon :

$$f_{\text{loc}}(\omega) = \int_{-\infty}^{E_c} \mathrm{d}E\, \mathfrak{D}_E(E, \hbar\omega)\,, \tag{5.33}$$

en ajustant E_c de sorte que la courbe $f_{\text{loc}}(\omega)$ ainsi obtenue corresponde à la fraction localisée mesurée expérimentalement. En procédant ainsi, on obtient la courbe jaune représentée en figure 5.10 a.

On notera que le modèle (5.32) utilisé pour déterminer la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E, \hbar\omega)$ des atomes après modulation du désordre ne semble pas reproduire complètement la fraction localisée $f_{\text{loc}}(\omega)$ mesurée. En effet, le modèle utilisé prévoit une saturation de la fraction localisée au-delà d'une fréquence d'excitation $\omega^* = (E_c - E_0)/\hbar$, où E_0 est l'énergie la plus basse occupée après le chargement des atomes dans le *speckle* (cf courbe jaune figure 5.10 a.). En effet, pour $\omega > \omega^*$, tous les atomes excités par la modulation occupent un énergie $E > E_c$ et ne sont donc pas observés après un temps t de diffusion dans le *speckle* suffisamment long.

Dans ce cas, la fraction localisée restante est donnée par :

$$f_{\text{loc}} = (1 - p_{\text{ex}}) \int_{-\infty}^{E_c} \mathrm{d}E\, \mathfrak{D}_E(E)\,, \tag{5.34}$$

qui est indépendante de ω puisque, selon les auteurs, p_{ex} ne dépend ni de E ni de ω pour leur gamme de paramètres expérimentaux. Or, cette saturation de la fraction localisée n'est pas observée : pour $\omega > \omega^*$, la fraction localisée mesurée semble *augmenter*. Les points de mesure de f_{loc} pour des fréquences de transfert $\omega > \omega^*$ n'ont donc pas été pris en compte dans l'ajustement de E_c.

Cette méthode de détermination de E_c est ensuite répétée pour différentes amplitudes V_0 de désordre, les résultats sont résumés en figure 5.10 b.

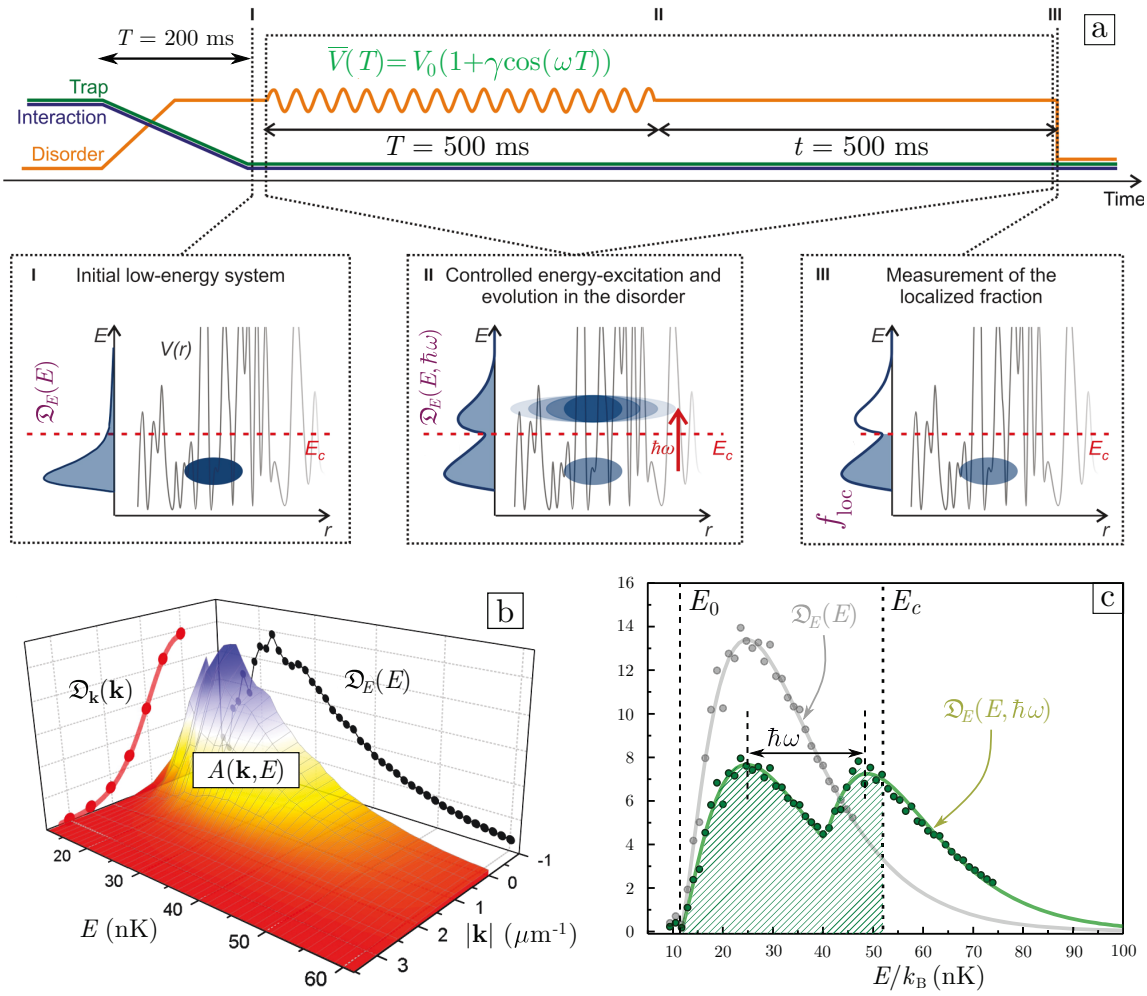

FIGURE 5.9 – **Protocole et méthodes de l'expérience de Florence [153, 154]. a.** Frise chronologique d'une séquence expérimentale. Après une étape de préparation où le désordre est lentement allumé et les interactions inter-particule ainsi que le piège éteints, l'amplitude du désordre est modulée à une fréquence ω pendant 500 ms afin que des états d'énergie supérieure au seuil de mobilité soient peuplés. Après un temps de propagation de $t = 500$ ms supplémentaires, la densité atomique est mesurée et supposée quantifier uniquement la fraction localisée. **b.** Exemple de reconstitution de la distribution en énergie des atomes chargés dans le désordre. A l'issue du chargement, la distribution en impulsion $\mathfrak{D}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$ est mesurée par temps de vol. La distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ s'en déduit après calcul numérique de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ par (5.14). **c.** Exemple de distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ après chargement dans le désordre (courbe grise), et après modulation du désordre à la fréquence ω (courbe verte) donnée par le modèle (5.32). E_0 délimite l'énergie la plus basse occupée, et E_c le seuil de mobilité associé à la fraction localisée mesurée expérimentalement.

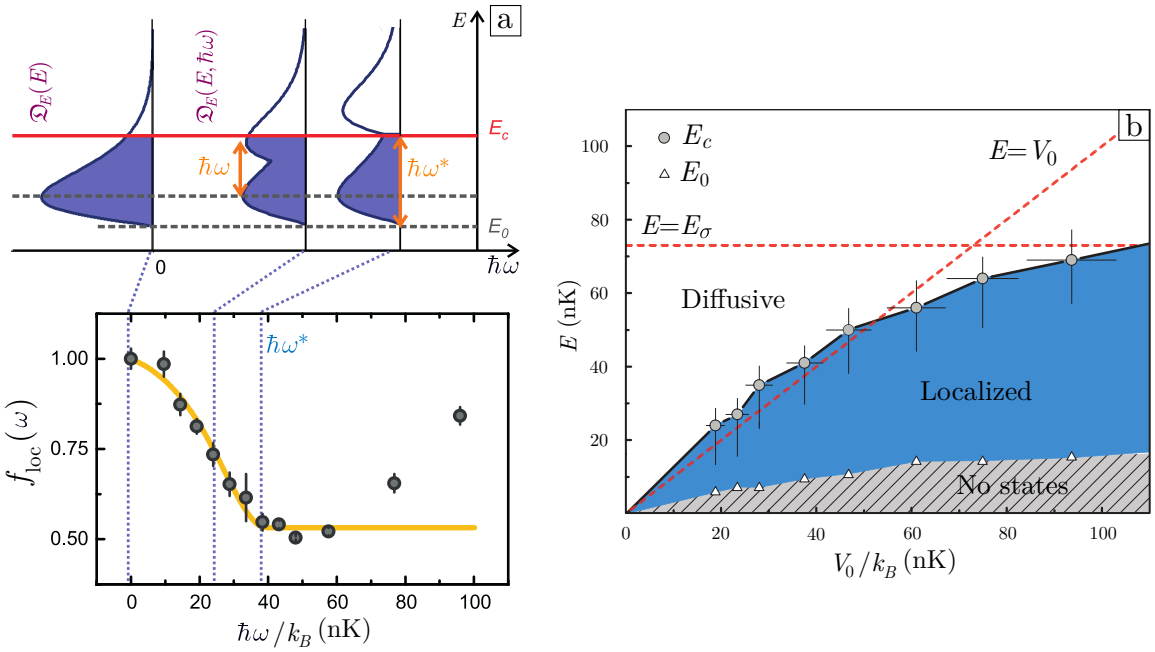

FIGURE 5.10 – **Résultats de l'expérience de Florence [154]. a.** Mesures de la fraction localisée $f_{\rm loc}$ en fonction de la fréquence ω de modulation pour un désordre d'amplitude $V_0/k_B = 47$ nK. Les points expérimentaux sont ajustés à l'aide de l'expression (5.33) (courbe jaune) où la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E, \hbar\omega)$ a été évaluée avec le modèle (5.32). La saturation de la fraction condensée prévue par ce modèle à partir d'une fréquence $\omega^* = (E_c - E_0)/\hbar$ n'est pas observée. Ainsi les points expérimentaux à $\omega > \omega^*$ n'ont pas été pris en compte lors de l'ajustement des mesures par la courbe jaune. **b.** Seuil de mobilité E_c (◯) déduit de (5.33) pour différents amplitude V_0 de désordre. E_0 (△) repère l'énergie la plus basse occupée après modulation, énergie en dessous de laquelle aucun état ne peut donc être occupé.

Il est certain que l'attention particulière que porte cette expérience à une certaine *sélection de l'énergie* des états peuplés par les atomes placés dans le potentiel désordonné trace la voie à suivre vers une étude *résolue* de la transition d'Anderson, et notamment du régime critique.

Par cet aspect, l'expérience de Florence marque donc une très nette amélioration par rapport aux expériences la précédant. On peut néanmoins tracer quelques limites aux résultats de cette expérience ;

L'hypothèse selon laquelle la densité atomique mesurée après un temps $t = 500$ ms de propagation dans le désordre s'identifie exclusivement à la fraction localisée des atomes peut sembler un peu trop optimiste, surtout lorsqu'on sait que la densité atomique totale ne tend vers la densité localisée qu'aux temps d'expériences très longs dont l'ordre de grandeur dépasse la seconde (cf 5.8 d.).

On pourrait aussi formuler une critique similaire que celle formulée vis à vis de l'expérience de Palaiseau : la détermination du seuil de mobilité E_c reste, malgré tout, très indirecte car basée sur des calculs théoriques intermédiaires (ici la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, et la probabilité d'excitation $p_{\rm ex}$) qui doivent être menés avec la plus grande des précautions vis à vis de leurs hypothèses.

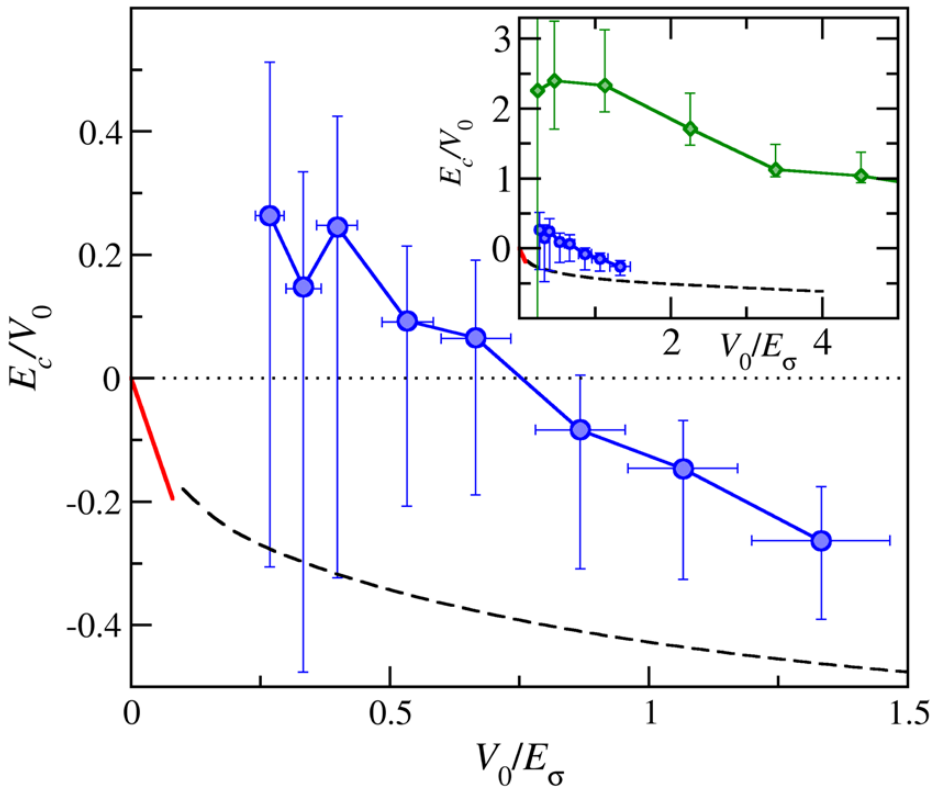

FIGURE 5.11 – **Comparaison entre simulations numériques et résultats expérimentaux [129]**. Seuil de mobilité E_c de localisation dans un *speckle* répulsif en fonction de l'amplitude V_0 du désordre : calculé numériquement pour un *speckle* isotrope (courbe noire pointillée), mesuré par l'expérience d'Urbana-Champaign (courbe verte, reportée de la figure 5.7 d.), par l'expérience de Palaiseau (courbe rouge, seuil $E_c + \Delta_{\text{heur}}$ estimé à partir de la fraction localisée de la figure 5.8 b.), et l'expérience de Florence (courbe bleue, reportée de la figure 5.10 b.). L'axe des ordonnées en énergie a été décalé par rapport à la moyenne du potentiel $E_c \to E_c - \overline{V}$ de sorte que la moyenne $\overline{V} = V_0$ se situe en $E_c = 0$.

5.2.4 Synthèse

Les trois sections précédentes ont permis de présenter les méthodes et les résultats des trois expériences [97, 92, 154] visant l'étude de la transition d'Anderson par expansion de nuages froids dans un potentiel *speckle*. Toutes ont tâché de montrer l'existence d'un seuil de mobilité E_c séparant des états d'énergie localisés d'états diffusifs par la mesure d'une *fraction localisée* pour différentes amplitudes V_0 de désordre.

Même si le potentiel *speckle* a été implémenté différemment d'une expérience à une autre, Pasek et al. [129] ont montré à l'aide de simulations numériques qu'il est possible de définir une échelle d'énergie "universelle" rendant les résultats insensibles aux détails microscopiques du *speckle* (notamment aux fonctions de corrélations transverse et longitudinale). Cette échelle n'est autre qu'une généralisation de l'énergie de corrélation introduite en section 5.1.3. Pour un *speckle* caractérisé par les longueurs de corrélation $\sigma_{x,y,z}$ selon chaque direction de l'espace, cette énergie de corrélation généralisée est :

$$E_{\bar{\sigma}} = \frac{\hbar^2}{m\bar{\sigma}^2} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = (\sigma_x\,\sigma_y\,\sigma_z)^{1/3} \tag{5.35}$$

où $\bar{\sigma}$ joue le rôle de "longueur de corrélation moyenne" du *speckle*.

Chaque courbe E_c/V_0 en fonction de V_0/E_σ associée à chaque résultats expérimentaux peut alors être comparée à une unique courbe universelle $E_c/V_0 = \mathcal{F}(V_0/E_\sigma)$, représentée en figure 5.11 (courbe pointillée), associée à une simulation numérique de localisation dans un *speckle* isotrope (i.e. tel que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$). On notera qu'une définition un peu particulière des longueurs de corrélation $\sigma_{x,y,z}$ est nécessaire pour quelle soit compatible avec la définition de la longueur de corrélation d'un *speckle* isotrope. Quelques informations à ce sujet sont consignées en annexe B.

L'expérience d'Urbana-Champaign (encart, courbe verte) montre un désaccord significatif avec les simulations. Ceci est très certainement imputable aussi bien à la surestimation de la fraction localisée après des temps de diffusion dans le désordre trop courts (de l'ordre de la dizaine de ms) qu'à l'hypothèse (5.27) qui ne permet pas d'estimer correctement la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ des atomes dans le désordre. L'expérience de Palaiseau (courbe rouge), bien que ne donnant qu'une estimation très indirecte du seuil de mobilité à partir d'une théorie auto-consistante de la localisation, semble être quantitativement compatible avec les simulations numériques. Ceci renforce l'idée qu'il est fondamental d'avoir recours à des temps d'expériences de diffusion dépassant la seconde afin de ne pas trop surestimer la fraction localisée. Enfin, l'expérience de Florence (courbe bleue) rencontre un accord qualitatif avec les simulations mais ne parvient pas encore à un accord quantitatif complètement satisfaisant, et ce, probablement à cause des hypothèses qui ont été faites sur la mesure de la fraction localisée, ou sur le calcul de la distribution en énergie.

5.2.5 Le besoin d'une méthode spectroscopique

Ce que l'on peut retenir de cet état de l'art des expériences sur la transition d'Anderson, c'est que le rapport entretenu entre mesures expérimentales (densité atomique) et résultat final (seuil de mobilité E_c) est généralement assez indirecte, ce qui rend les conclusions de ces études fortement dépendantes des hypothèses intermédiaires sur lesquelles elles sont fondées. Au-delà de la problématique du temps de propagation des atomes dans le désordre qui doit être assez long (de l'ordre de la seconde) pour pouvoir séparer les atomes occupant des états diffusifs proche de E_c de la fraction localisée, on notera que c'est la détermination de la distribution d'énergie, ou plus exactement, de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ qui concentre la plupart des hypothèses et calculs intermédiaires. En effet, aucune des expériences présentées précédemment ne propose de protocole qui permettrait de *mesurer directement* $A(\mathbf{k}, E)$.

Et quand bien même il est possible d'estimer indirectement de manière fiable cette fonction spectrale, le fait que la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$ qui lui soit associée s'étale jusqu'à des énergies $E > E_c$ (cf figures 5.7 c., 5.8 c., et 5.9 c.) rend impossible toute tentative d'étude du régime critique de la transition et de mesure des exposants critiques s et ν. Autrement dit, aucune des méthodes employées jusqu'à présent ne permet de *maîtriser le paramètre de contrôle* de la transition d'Anderson.

Cette constatation amène donc à la nécessité de construire une nouvelle méthode *résolue en énergie* qui permettrait d'adresser, spécifiquement et de manière choisie, un état propre de l'énergie donné $|E_\alpha\rangle$ *dans le désordre*, comme illustré en figure 5.12. Autrement dit, il faut parvenir à une *spectroscopie* de l'ensemble des états d'énergie $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ accessibles pour les atomes dans le désordre. C'est exactement dans cette logique que l'expérience de Florence a été conçue, et c'est incontestablement en cela que cette expérience marque une grande avancée dans l'étude de la transition d'Anderson par rapport aux travaux la précédant.

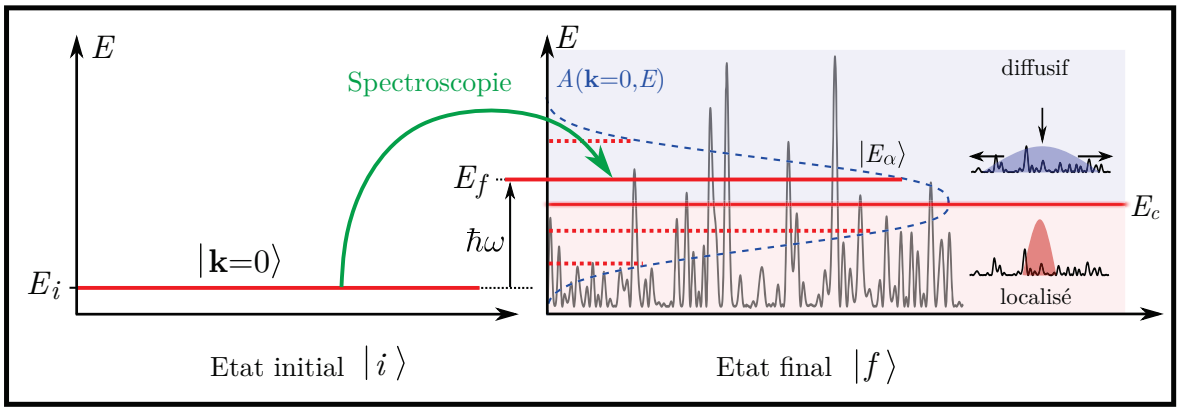

FIGURE 5.12 – **Illustration d'une spectroscopie des états d'énergie accessibles.** L'idée serait de préparer dans un premier temps les atomes dans un état de référence dont l'énergie E_i est bien définie, par exemple un condensat $|\mathbf{k}=0\rangle$. Ensuite, une spectroscopie réalisée à l'aide d'un rayonnement de fréquence ω viendrait transférer une quantité d'énergie $\hbar\omega$ contrôlée aux atomes, pour que ces derniers puissent aller peupler un état propre $|E_\alpha\rangle$ donné dans le potentiel désordonné. Une telle technique spectroscopique assurerait donc à la fois un contrôle de l'énergie peuplée, ainsi qu'une *résolution en énergie* (un seul état $|E_\alpha\rangle$ serait peuplé). Après cette étape de transfert, une expérience de transport pourrait révéler le caractère localisé ou diffusif de l'état $|E_\alpha\rangle$ interrogé par la spectroscopie.

Il existe de nombreuses techniques spectroscopiques appropriées aux atomes froids : spectroscopie de Bragg, spectroscopie Raman et spectroscopie radio-fréquence, etc. Toutes sont basées sur plus ou moins le même principe : un rayonnement électromagnétique est généré dans le but de transférer une certaine quantité d'énergie (et d'impulsion) *contrôlée* à un échantillon d'atomes. La réponse de l'échantillon selon l'énergie transférée décrit donc une *spectroscopie* et est directement révélateur de la population des états $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$, c'est à dire de la distribution en énergie $\mathfrak{D}_E(E)$.

Dans le chapitre suivant, on verra que la réponse d'un système à une excitation externe est précisément caractérisée par la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, et plus particulièrement, on verra que ces techniques spectroscopiques permettent de mesurer *directement* la quantité $A(\mathbf{k}, E)$.

Chapitre 6

Caractérisation des excitations d'un système : la fonction spectrale

Le chapitre précédent a permis de faire un bref état de l'art des expériences réalisées sur la transition d'Anderson par expansion d'atomes froids dans un potentiel *speckle*. Toutes avaient pour difficulté commune l'impossibilité de mesurer directement la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ des atomes placés dans le *speckle*, et étaient donc dans l'incapacité de produire une mesure directe du seuil de mobilité. Et jusqu'à présent, il n'a pas été non plus possible d'étudier le régime critique de la transition car les énergies occupées par les atomes dans le potentiel désordonné s'étalaient toujours jusqu'au seuil de mobilité et même au-delà. A partir de ce point, il s'est avéré nécessaire d'établir une spectroscopie permettant d'adresser les atomes spécifiquement à une énergie bien déterminée.

Dans ce chapitre, on s'attache à illustrer et définir d'une manière plus générale la notion de fonction spectrale, notamment en tant que *spectre des excitations* d'un système. L'exemple de l'oscillateur amorti classique servira d'illustration de la notion de *spectre d'excitation* et de son lien avec la fonction spectrale. Ces concepts seront ensuite généralisés aux systèmes quantiques, dont les systèmes à N-corps. Quelques exemples d'expériences de mesures *directes* de fonctions spectrales associés à ces systèmes par diverses méthodes de *spectroscopie* montrerons que la fonction spectrale est effectivement un bon outil pour caractériser la nature des états d'énergie d'un système. Enfin, on précisera les propriétés de la fonction spectrale pour le cas d'une particule se propageant dans un potentiel désordonné. On retrouvera notamment le fait que la fonction spectrale est caractéristique d'un grand nombre de paramètres microscopiques (temps de diffusion élastique τ_s, désordre quantique, désordre classique, etc).

6.1 Illustrations par un exemple simple : l'oscillateur amorti

Un exemple canonique de système classique est celui de l'oscillateur harmonique amorti. Il consiste en un point matériel soumis à un potentiel harmonique et une force de friction qui peut être, par exemple, due à la présence d'un milieu visqueux autour de l'oscillateur.

6.1.1 Spectre d'excitation et fonction spectrale

L'étude de la dynamique d'un tel système passe souvent par la caractérisation de sa *réponse à une excitation* extérieure.

L'équation différentielle d'intérêt prend la forme générale suivante :

$$\ddot{x}(t) + \eta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t)\,, \tag{6.1}$$

où $x(t)$ est la position de l'oscillateur, ω_0 la fréquence propre du potentiel harmonique, η le coefficient de friction dû au milieu visqueux, et $f(t)$ une force d'excitation externe.

Une manière très commune de penser un problème comme celui-ci est de considérer la dynamique $x(t)$ de l'oscillateur comme une *réponse* à l'excitation externe $f(t)$. Dans cette optique, il est avantageux de représenter l'équation (6.1) sous la forme d'une convolution :

$$\mathcal{S} \star x(t) = f(t)\,, \tag{6.2}$$

entre la réponse $x(t)$ du système et $\mathcal{S}$ une fonction[1] qui caractérise complètement la dynamique du système. A partir de (6.2), on voit que s'il on parvient à calculer l'inverse de convolution de $\mathcal{S}$, c'est à dire la fonction $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{G} \star \mathcal{S} = \delta$, il est possible d'exprimer la réponse $x(t)$ du système en fonction de l'excitation $f(t)$. En effet, par cette définition de la fonction $\mathcal{G}$, à partir de (6.2), on a :

$$\mathcal{G} \star f(t) = (\mathcal{G} \star \mathcal{S}) \star x(t) = \delta \star x(t) = x(t)\,. \tag{6.3}$$

Autrement dit, la solution $x(t)$ de l'équation différentielle (6.1) est directement déterminée par $\mathcal{G}$, en connaissance de $f(t)$. Cette fonction, appelée *fonction de Green*, détermine donc complètement la réponse d'un système par rapport à une excitation externe. Il est aussi courant d'appeler cette fonction la *réponse impulsionnelle* du système, dans la mesure où, *par définition*, $\mathcal{G}$ est la solution de l'équation (6.1) lorsque la force excitatrice est une impulsion temporelle $f(t) = \delta(t)$:

$$\ddot{\mathcal{G}}(t) + \eta\,\dot{\mathcal{G}}(t) + \omega_0^2\,\mathcal{G}(t) = \delta(t)\,. \tag{6.4}$$

Afin de trouver la solution de (6.4), il est souvent plus commode de passer par une transformation de Fourier :

$$\left((-\mathrm{i}\omega)^2 - \mathrm{i}\eta\omega + \omega_0^2\right)\,\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = 1 \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{G}}(\omega) = \int \mathrm{d}t\,\mathcal{G}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{6.5}$$

Dans un premier temps, on peut déterminer les racines du polynôme $-\omega^2 - \mathrm{i}\eta\omega + \omega_0^2$ dans le cas d'un oscillateur *faiblement amorti* :

$$\omega_\pm = \mathrm{i}\omega_0\zeta \pm \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{\eta}{2\omega_0} < 1\,, \tag{6.6}$$

où ζ est appelé *facteur d'amortissement*. On a donc :

$$\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + \mathrm{i}\,2\zeta\omega\omega_0} = -\frac{1}{(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)}\,, \tag{6.7}$$

soit, dans le domaine temporel [13] :

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{\omega_R}\sin(\omega_R t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0\zeta t}\,\Theta(t) \quad \text{avec} \quad \omega_R = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,, \tag{6.8}$$

où $\Theta(t)$ désigne une distribution de Heaviside. L'expression (6.8) montre donc que la partie réelle ω_R des pôles $\omega_\pm$ de la fonction de Green (6.7) donne un comportement oscillatoire à la solution (6.8), ω_R est donc appelée *fréquence de résonance* de l'oscillateur amorti.

1. En réalité, il s'agit d'une *distribution* [13].

La partie imaginaire $\omega_0\zeta$ est, quant à elle, responsable d'un amortissement de l'amplitude de la solution.[2]

La fonction de Green permet aussi d'évaluer l'énergie E_{abs} absorbée par l'oscillateur sous l'effet de l'excitation $f(t)$:

$$E_{\text{abs}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, f(t)\, \dot{x}(t) = \mathrm{TF}\left[f(t)\, \dot{x}(t)\right](\omega = 0)\,. \tag{6.9}$$

En utilisant la théorème de convolution pour la transformée de Fourier $\mathrm{TF}\left[f(t)\, \dot{x}(t)\right](\omega) = \tilde{f}(\omega) \star \tilde{\dot{x}}(\omega)$ et le fait que $\tilde{\dot{x}}(\omega) = -\mathrm{i}\omega\, \tilde{x}(\omega) = -\mathrm{i}\omega\, \tilde{f}(\omega)\, \tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ par (6.3), on obtient :

$$E_{\text{abs}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} \left|\tilde{f}(\omega')\right|^2 \mathrm{i}\omega'\, \tilde{\mathcal{G}}(\omega')\,. \tag{6.10}$$

De plus, $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ est la transformée de Fourier d'une fonction $\mathcal{G}(t)$ *à valeurs réelles*, on a donc $\tilde{\mathcal{G}}^*(\omega) = \tilde{\mathcal{G}}(-\omega)$. Ceci implique que la partie réelle $\mathrm{Re}\,\tilde{\mathcal{G}}$ est une fonction *paire* de ω, et la partie imaginaire $\mathrm{Im}\,\tilde{\mathcal{G}}$ une fonction *impaire*. En conséquence, on peut simplifier (6.10) en :

$$E_{\text{abs}} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} \left|\tilde{f}(\omega')\right|^2 \omega'\, \mathrm{Im}\,\tilde{\mathcal{G}}(\omega')\,. \tag{6.11}$$

Si $f(t)$ est une excitation quasi-monochromatique de fréquence ω_e, on a alors $\left|\tilde{f}(\omega')\right|^2 \sim \delta(\omega' - \omega_e)$, et l'énergie absorbée par l'oscillateur est directement donnée par :

$$E_{\text{abs}}(\omega_e) \sim \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,\tilde{\mathcal{G}}(\omega_e)\,. \tag{6.12}$$

L'énergie absorbée E_{abs} par l'oscillateur en fonction de la fréquence d'excitation ω_e est une manière de représenter le *spectre des excitations* possibles de l'oscillateur couplé au fluide. Et selon (6.12), ce spectre est déterminé par la fonction :

$$A(\omega_e) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,\tilde{\mathcal{G}}(\omega_e) = \frac{1}{\pi}\,\frac{2\zeta\omega_e\omega_0}{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + (2\zeta\omega_e\omega_0)^2}\,, \tag{6.13}$$

qui est précisément une *définition* de la *fonction spectrale*. Cette fonction, représentée en figure 6.1, présente plusieurs caractéristiques : elle est centrée autour de la fréquence de résonance $\omega_e = \omega_R$, qui renseigne sur la *relation de dispersion* $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ de l'oscillateur, et possède une largeur $\zeta\omega_0$ qui renseigne sur *le temps de vie* d'une oscillation $\tau = 1/\eta = 1/2\zeta\omega_0$.

Ces deux caractéristiques renseignent sur l'*interaction* entre l'oscillateur et le fluide responsable de l'amortissement. En effet, par conservation de l'énergie, l'énergie absorbée E_{abs} par l'oscillateur est aussi l'énergie *dissipée* dans le fluide. De fait, pour peu que l'on connaisse la fréquence propre ω_0 de l'oscillateur, la largeur $\zeta\omega_0$ de la fonction spectrale (6.13) donne le coefficient de friction $\eta = 2\zeta\omega_0$ et permet donc de caractériser le fluide.

2. De manière générale, on peut montrer à l'aide des outils de l'analyse complexe [13] qu'une fonction de Green possédant un pôle complexe en fréquence $a - \mathrm{i}b$ (où $b > 0$) tel que $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = 1/(\omega - (a - \mathrm{i}b))$ donne dans le domaine temporel :

$$\mathcal{G}(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\omega - (a - \mathrm{i}b)} = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at - bt}\,\Theta(t)\,.$$

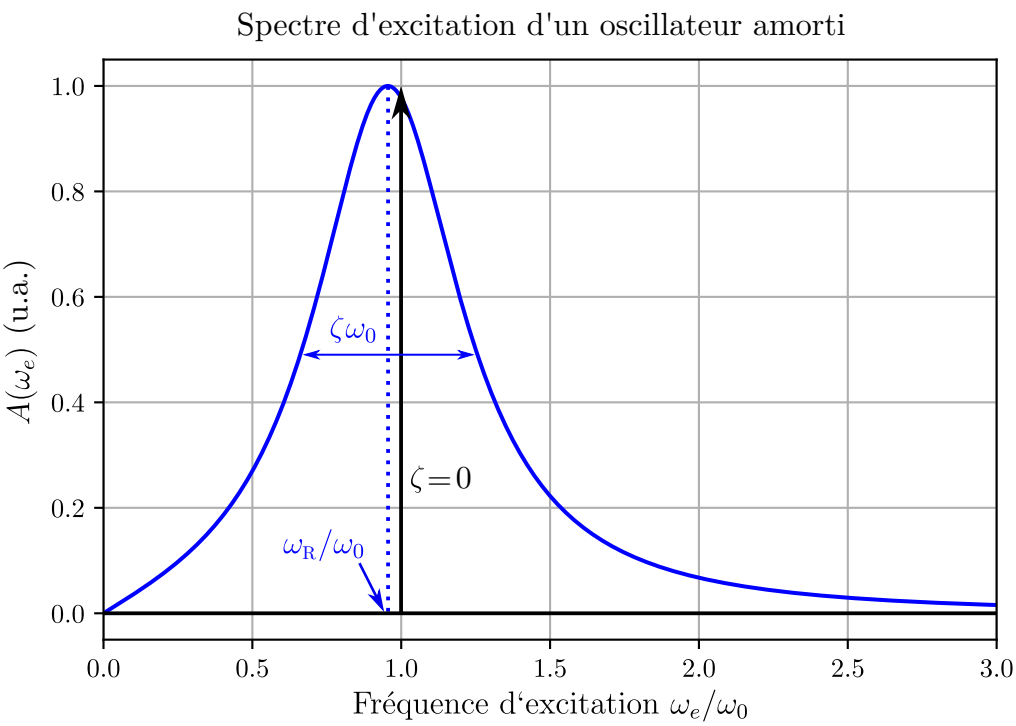

FIGURE 6.1 – **Fonction spectrale de l'oscillateur amorti**. La manière dont un oscillateur absorbe l'énergie développée par une force externe $f(t)$ de fréquence ω_e pour produire un mouvement $x(t)$ est repérée par la fonction spectrale (6.13). En l'absence de fluide visqueux $\zeta = 0$ (courbe noire), seule $\omega_e = \omega_0$ produit une excitation harmonique sur l'oscillateur. Pour toute autre fréquence ω_e, l'énergie de la force n'est pas absorbée : seule la force externe $f(t)$ travaille. On a donc $A_0(\omega_e) \sim \delta(\omega_e - \omega_0)$. Lorsque l'oscillateur est amorti $\zeta \neq 0$, la résonance acquiert une largeur $\zeta\omega_0$ finie et le maximum d'absorption a lieu pour une fréquence $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$.

6.1.2 Comparaison avec l'oscillateur non-amorti : la *self-energy*

Comme on vient de le voir, le spectre des excitations de l'oscillateur amorti est déterminé par les interactions (ici le frottement) avec le fluide visqueux. Il peut donc être intéressant de comparer les propriétés du spectre d'excitation avec et sans la présence du fluide. On note $\tilde{\mathcal{G}}_0(\omega)$ la fonction de Green de l'oscillateur harmonique "libre" sans la présence du fluide :

$$\tilde{\mathcal{G}}_0(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + \mathrm{i}0^+} \,. \tag{6.14}$$

où le terme infinitésimal imaginaire $\mathrm{i}0^+$ permet de garantir la causalité de la réponse de l'oscillateur à l'excitation externe [13]. En comparant les expressions (6.14) et (6.7), on en déduit la relation :

$$\tilde{\mathcal{G}}^{-1}(\omega) = \tilde{\mathcal{G}}_0^{-1}(\omega) - \Sigma(\omega) \quad \text{soit} \quad \tilde{\mathcal{G}}(\omega) = \tilde{\mathcal{G}}_0(\omega) + \tilde{\mathcal{G}}_0(\omega)\,\Sigma(\omega)\,\tilde{\mathcal{G}}(\omega)\,, \tag{6.15}$$

où l'on a définit la quantité $\Sigma(\omega) = \mathrm{i}\,2\zeta\omega_0\,\omega$. L'équation (6.15), communément appelée *équation de Dyson*, permet de déterminer directement $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ à partir de $\tilde{\mathcal{G}}_0(\omega)$ et $\Sigma(\omega)$. Autrement dit, toute l'information relative à l'interaction entre l'oscillateur et le fluide est contenue dans la quantité $\Sigma(\omega)$ qui est appelée *self-energy*. [3]

3. L'appellation "*self-energy*" n'est pas anodine, puisqu'on verra dans la suite que cette quantité, bien que pouvant avoir une partie imaginaire, est homogène à une énergie. Dans le cas de l'oscillateur amorti, elle a la même dimension que ω^2.

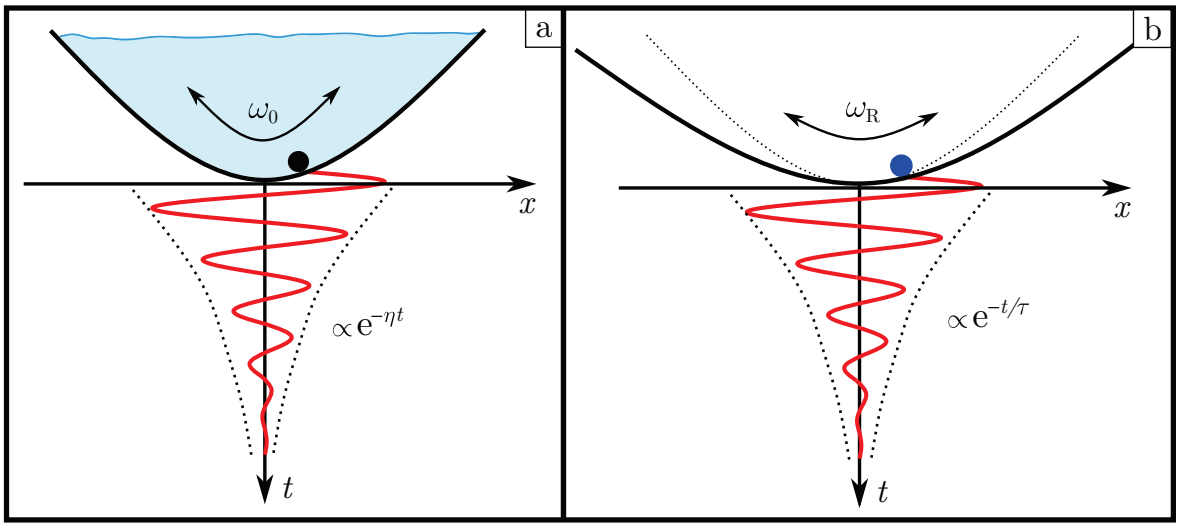

FIGURE 6.2 – **Interprétations de l'excitation d'un oscillateur amorti**. Le concept de *self-energy* offre la possibilité d'interpréter différemment un seul et même phénomène. **a.** L'interprétation classique consiste à dire que l'oscillateur harmonique de fréquence ω_0 dissipe son énergie dans le fluide en temps typique $1/\eta$. **b.** S'il on oublie volontairement la présence du fluide, *tout se passe comme si* l'oscillateur harmonique se voyait attribué une nouvelle fréquence de résonance ω_R et un temps de vie $\tau = 1/\eta$ fini. Ces nouvelles propriétés sont conférées à l'oscillateur via la *self-energy* $\Sigma(\omega)$, qui permet de différentier les réponses impulsionnelles $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ et $\tilde{\mathcal{G}}_0(\omega)$ de l'oscillateur respectivement avec et sans fluide.

Dans le cas de l'oscillateur amorti, $\Sigma(\omega)$ est donc imaginaire pure, et c'est précisément cette partie imaginaire qui est responsable du temps de vie fini des oscillations du système au contact du fluide visqueux. En effet, la décomposition [13] :

$$\frac{1}{x + \mathrm{i}0^+} = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - \mathrm{i}\pi\delta(x)\,, \tag{6.16}$$

où vp est la valeur principale de Cauchy, permet d'exprimer la fonction spectrale $A_0(\omega)$ de l'oscillateur harmonique en l'absence de fluide associée à (6.14) :

$$\begin{aligned} A_0(\omega) &= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\tilde{\mathcal{G}}_0(\omega) = \delta(\omega^2 - \omega_0^2) \\ &= \frac{1}{2\omega_0}\,\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right)\,, \end{aligned} \tag{6.17}$$

qui est donc une distribution de Dirac centrée sur la fréquence propre ω_0 de l'oscillateur. Le temps de vie des oscillations propres de l'oscillateur est alors infini (spectre de largeur $\zeta\omega_0$ nulle).

L'intérêt de la *self-energy* $\Sigma(\omega)$ est donc de pouvoir penser l'ensemble des excitations possibles d'un système complexe (ici l'ensemble {oscillateur+fluide}) comme l'excitation d'une particule seule (ici, l'oscillateur harmonique) sans fluide, à laquelle on aurait donné de nouvelles propriétés via la *self-energy* : un temps de vie τ *fini*, et une nouvelle fréquence de résonance ω_R. Même si ces deux manières de comprendre la dynamique d'un système, représentées en figure 6.2, peuvent sembler superficiellement et artificiellement équivalentes dans le cas de l'oscillateur amorti, on verra dans la suite que cette manière de procéder permet de garder une compréhension au moins approximative des excitations de systèmes beaucoup plus complexes, qui plus est, quantiques.

6.2 La fonction spectrale pour un système quantique

La section précédente a permis de montrer que le spectre des excitations d'un système (en l'occurrence celui d'un oscillateur plongé dans un fluide visqueux) était déterminer par sa fonction spectrale.

Bien sûr, toute l'approche développée précédemment à l'aide des fonctions de Green peut être également appliquée à la résolution de l'équation de Schrödinger pour un système décrit par une fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ et un hamiltonien $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V}$:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x}, t)\,, \tag{6.18}$$

où $\hat{\mathcal{H}}_0$ désigne un hamiltonien dont les états propres sont supposés connus, et $\hat{V}$ un potentiel d'interaction venant perturber $\hat{\mathcal{H}}_0$. De manière générique, $\hat{\mathcal{H}}_0$ s'identifiera très souvent à l'énergie cinétique de particules libres dont les états propres sont les états d'impulsion $\{|\mathbf{k}\rangle\}_{\mathbf{k}}$.

6.2.1 Définition de la fonction de Green pour un système quantique

D'une manière analogue à (6.3), la solution $\Psi(\mathbf{x}, t)$ de l'équation (6.18), dans le cas où l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$ est indépendant du temps, peut s'écrire sous la forme d'une convolution :

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{x}, t) &= \langle \mathbf{x}|\Psi(t)\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\,\hat{\mathcal{H}}/\hbar}|\Psi(t=0)\rangle \\
&= \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, \langle \mathbf{x}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\,\hat{\mathcal{H}}/\hbar}|\mathbf{x}'\rangle\langle \mathbf{x}'|\Psi(t=0)\rangle \\
&= \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, \mathcal{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)\, \Psi(\mathbf{x}', t=0)\,,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

entre la fonction d'onde initiale $\Psi(\mathbf{x}', t=0)$ et la *fonction de Green* $\mathcal{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\,\hat{\mathcal{H}}/\hbar}|\mathbf{x}'\rangle$. Cette dernière quantité peut aussi se lire comme *l'amplitude de transition* pour qu'une particule positionnée initialement en $|\mathbf{x}'\rangle$ soit détectée en $|\mathbf{x}\rangle$ après un temps d'évolution t sous l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$. En comparaison avec l'équation (6.3) de l'oscillateur amorti, on remarquera que l'état initial $\Psi(\mathbf{x}', t=0)$ joue le même rôle que la force externe excitatrice $f(t)$, et la solution $\Psi(\mathbf{x}, t)$ s'apparente à la réponse $x(t)$ du système.

De manière générale, on peut donc *définir* la fonction de Green à l'aide d'un opérateur $\hat{\mathcal{G}}$:

$$\hat{\mathcal{G}}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,\Theta(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{\mathcal{H}}/\hbar} \tag{6.20}$$

où Θ est une distribution de Heaviside qui assure la causalité de la réponse $\Psi(\mathbf{x}, t)$ par rapport à la condition initiale $\Psi(\mathbf{x}', t=0)$. Ici, $\mathcal{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$ n'est donc que la représentation spatiale (par projection sur les états de position $\{|\mathbf{x}\rangle\}_{\mathbf{x}}$) de l'opérateur $\hat{\mathcal{G}}(t)$.[4] De plus, la définition (6.20) permet de faire le lien entre la dynamique étudiée et les valeurs propres de l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$ en considérant sa transformée de Fourier :

$$\hat{\mathcal{G}}(E) = \int \mathrm{d}t\,\hat{\mathcal{G}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et/\hbar} = \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}} + \mathrm{i}0^+}\,. \tag{6.21}$$

4. L'intérêt de la définition (6.20) est qu'elle permet donc d'encoder toute la dynamique d'intérêt sans avoir besoin de choisir une base d'états (par exemple position, impulsion, etc) sur laquelle projeter.

Les étapes de calcul permettant d'aboutir à cette expression (6.21) pourra être retrouvé en annexe D.

A priori, la détermination complète de $\hat{\mathcal{G}}(E)$ nécessite de déterminer les valeurs propres de $\hat{\mathcal{H}}$, qui ne sont pas connues. En revanche, la fonction de Green "libre" $\hat{\mathcal{G}}_0(\epsilon)$ associée à la dynamique de l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}_0$ est, quant elle, complètement déterminée :

$$\hat{\mathcal{G}}_0(E) = \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}}_0 + \mathrm{i}0^+}\,, \tag{6.22}$$

puisque les valeurs propres de $\hat{\mathcal{H}}_0$ sont supposée connues. En effet, s'il on suppose que les états d'impulsion $\{|\mathbf{k}\rangle\}_{\mathbf{k}}$ sont les états propres de $\hat{\mathcal{H}}_0$, on peut exprimer dans cette base la fonction de Green "libre" :

$$\mathcal{G}_0(\mathbf{k}, E) = \langle \mathbf{k}|\hat{\mathcal{G}}_0(E)|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{E - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \mathrm{i}0^+}\,, \tag{6.23}$$

où $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}$ est la *relation de dispersion* d'une particule libre. Or, comme on l'a vu précédemment en section 6.1.2, il existe un lien entre $\hat{\mathcal{G}}_0(E)$ et $\hat{\mathcal{G}}(E)$ donné par *l'équation de Dyson* (6.15) :

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, E) = \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, E) + \mathcal{G}_0(\mathbf{k}, E)\,\Sigma(\mathbf{k}, E)\,\mathcal{G}(\mathbf{k}, E)\,, \tag{6.24}$$

dont la solution $\mathcal{G}(\mathbf{k}, E)$ est :

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, E) = \langle \mathbf{k}|\hat{\mathcal{G}}(E)|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{E - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \Sigma(\mathbf{k}, E)}\,, \tag{6.25}$$

où $\Sigma(\mathbf{k}, E)$ est la *self-energy* associée au système décrit par l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$.

Là où, pour l'oscillateur amorti, la *self-energy* pouvait être directement déterminée par identification dans (6.7), il n'existe *a priori* pas de méthode donnant directement la *self-energy* d'un système quantique. C'est la raison pour laquelle des méthodes perturbatives dites *diagrammatiques* sont très souvent utilisées afin d'évaluer cette quantité. D'une manière générale, selon ces méthodes, on peut montrer que la *self-energy* peut se développer sous la forme d'une série :

$$\Sigma(\mathbf{k}, E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \mathbf{k}|\hat{V}\left(\hat{\mathcal{G}}_0(E)\,\hat{V}\right)^n|\mathbf{k}\rangle\,. \tag{6.26}$$

Quelques éléments de calcul permettant de dériver ce développement pourront être retrouvé dans les références [4, 118, 99].

6.2.2 Définitions et propriétés de la fonction spectrale

Comme suggéré par la section précédente, la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ d'un système quantique est définie par [28] :

$$A(\mathbf{k}, E) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{G}(\mathbf{k}, E)\,. \tag{6.27}$$

Une telle définition est compatible avec la discussion élaborée en section 5.1.3, où la fonction spectrale a été introduite en tant que *recouvrement* $|\langle E|\mathbf{k}\rangle|^2$ entre un état d'impulsion $|\mathbf{k}\rangle$ et un état propre $|E\rangle$ de l'hamiltonien $\hat{H}$. En effet, en développant la définition (6.21) à l'aide de (6.16), on obtient :

$$A(\mathbf{k}, E) = -\frac{1}{\pi}\,\langle \mathbf{k}|\mathrm{Im}\,\hat{\mathcal{G}}(E)|\mathbf{k}\rangle = \langle \mathbf{k}|\delta(E - \hat{\mathcal{H}})|\mathbf{k}\rangle\,. \tag{6.28}$$

En insérant une relation de fermeture sur les états propres $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ de $\hat{\mathcal{H}}$ dans (6.28), on retombe sur l'expression (5.13) introduite précédemment :

$$A(\mathbf{k}, E) = \sum_\alpha \langle \mathbf{k}|\delta(E - \hat{H})|E_\alpha\rangle\langle E_\alpha|\mathbf{k}\rangle = \sum_\alpha \delta(E - E_\alpha)\,|\langle E_\alpha|\mathbf{k}\rangle|^2 \,. \tag{6.29}$$

Le fait que la fonction spectrale puisse aussi s'interpréter comme étant la *probabilité conditionnelle* pour une particule d'occuper un état d'énergie E sachant qu'elle possède une impulsion $\mathbf{k}$ implique une condition de normalisation sur $A(\mathbf{k}, E)$ telle que :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi}\, A(\mathbf{k}, E) &= \sum_\alpha \int \frac{\mathrm{d}E}{2\pi}\, \delta(E - E_\alpha)\,|\langle E_\alpha|\mathbf{k}\rangle|^2 \quad \text{d'après (6.29)},\\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_\alpha |\langle E_\alpha|\mathbf{k}\rangle|^2 \quad \text{où} \quad \int \mathrm{d}E\, \delta(E - E_\alpha) = 1\,,\\
&= \frac{1}{2\pi}\,.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

C'est donc la quantité $2\pi\, A(\mathbf{k}, E)$ qui est normalisée en tant que distribution de probabilité.

Enfin, la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ est directement reliée à la densité d'état $\nu(E)$ (par unité de volume) :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\, A(\mathbf{k}, E) &= \sum_\alpha \delta(E - E_\alpha) \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\, |\langle \mathbf{k}|E_\alpha\rangle|^2\\
&= \sum_\alpha \delta(E - E_\alpha)\\
&= \nu(E)\,.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

6.2.3 Interprétations

En séparant la *self-energy* selon ses parties réelle et imaginaire $\Sigma = \Sigma' - \mathrm{i}\Sigma''$, on obtient à partir des définitions (6.25) et (6.27) :

$$A(\mathbf{k}, E) = \frac{1}{\pi}\, \frac{\Sigma''(\mathbf{k}, E)}{(E - \varepsilon_\mathbf{k} - \Sigma'(\mathbf{k}, E))^2 + \Sigma''^2(\mathbf{k}, E)}\,, \tag{6.32}$$

dont une illustration est donnée en figure 6.3 a. La fonction (6.32) peut avoir une forme plus au moins complexe selon les propriétés de la *self-energy* $\Sigma(\mathbf{k}, E)$, mais dans le cas où $\Sigma(\mathbf{k}, E)$ est une fonction "molle" de l'énergie E, on constate que la partie réelle Σ' de la *self-energy décale le maximum* de la courbe alors que la partie imaginaire Σ'' définit sa *largeur*.

Dans le cas de l'oscillateur amorti excité par une force externe $f(t)$ de fréquence ω_e, on a vu en section 6.1.1 que la fonction spectrale $A(\omega_e)$ permettait de connaître la gamme des fréquences d'excitation ω_e permettant une absorption de l'énergie développée par la force externe. D'une manière analogue, à supposer que l'excitation soit une onde plane telle que $\Psi(\mathbf{x}, t = 0) = \langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle$, on dira que la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ d'un système quantique décrit par l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V}$ permet de connaître la gamme des états propres de $\hat{\mathcal{H}}$ d'énergie E ayant un *recouvrement* [5] avec l'excitation $|\mathbf{k}\rangle$ d'énergie $\varepsilon_\mathbf{k} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}$.

5. Si recouvrement il y a, alors la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ décrit donne le poids selon lequel l'énergie d'excitation $\varepsilon_\mathbf{k}$ est distribuée parmi les états propres de $\hat{\mathcal{H}}$.

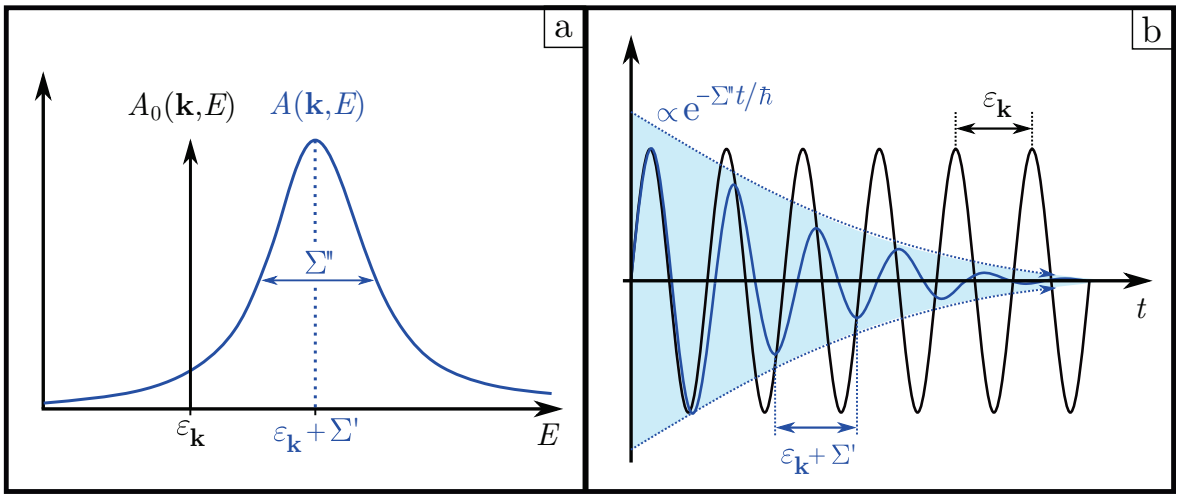

FIGURE 6.3 – **Fonction spectrale pour un système quantique**. **a.** En l'absence de potentiel $\hat{V}$, la *self-energy* est nulle $\Sigma = 0$ et la fonction spectrale (courbe noire) est $A_0(\mathbf{k}, E) \sim \delta(E - \varepsilon_{\mathbf{k}})$. Avec le potentiel $\hat{V}$ (courbe bleue), la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ voit son maximum décalé d'une quantité Σ', et acquiert une largeur Σ'' finie. **b.** En l'absence de potentiel $\hat{V}$ (courbe noire), la réponse impulsionnelle $\mathcal{G}(\mathbf{k}, t)$ est harmonique de fréquence $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ (avec un temps de vie infini), ce qui caractérise une particule libre. Avec interaction (courbe bleue), la fréquence d'oscillation est donnée par $\varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma'$ et la réponse acquiert un temps de vie fini $\hbar/\Sigma''$. On dira qu'une telle dynamique est caractéristique d'une *quasi-particule* libre.

Toujours en comparaison avec l'oscillateur amorti en section 6.1.2, on a vu que la *self-energy* permettait d'interpréter différemment la dynamique des excitations d'un système. En figure 6.2, on a vu que la dynamique d'un oscillateur harmonique de fréquence propre ω_0 amorti par un fluide visqueux peut être *interprétée* comme étant équivalente à celle d'un "*quasi-oscillateur*" harmonique de fréquence ω_R doté d'un temps de vie τ fini. D'une manière analogue, on peut considérer que la dynamique d'un système d'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$ excité par une onde plane $|\mathbf{k}\rangle$ de relation de dispersion $E = \varepsilon_{\mathbf{k}}$ peut être vue comme équivalente à celle d'une "*quasi-onde plane*" dont la relation de dispersion est donnée par le maximum $E \sim \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma'$ (à $\mathbf{k}$ fixé) de $A(\mathbf{k}, E)$, et le temps de vie fini par la largeur Σ'' de $A(\mathbf{k}, E)$. On peut visualiser cette notion de "*quasi-onde plane*" en remarquant que la transformée de Fourier inverse temporelle de la fonction de Green (6.25) donne :

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, t) \propto e^{-i(\varepsilon_{\mathbf{k}}+\Sigma')\, t/\hbar}\, e^{-\Sigma''\, t/\hbar}\ , \tag{6.33}$$

comme représenté en figure 6.3 b., où $(\varepsilon_{\mathbf{k}}+\Sigma')/\hbar$ est la fréquence d'oscillation de l'excitation, et $\hbar/\Sigma''$ le temps typique d'atténuation de l'excitation.

6.2.4 Fonction spectrale d'un système à N-corps

Cette notion de "*quasi-onde plane*" ou de *quasi-particule* est aussi adaptée aux systèmes à N-corps en interaction, comme représenté en figure 6.4 a. Pour cela, on considère une particule libre d'impulsion $|\mathbf{k}\rangle$ et d'énergie initiale $E = \varepsilon_{\mathbf{k}}$ soit introduite dans un système à N-corps. Sous l'effet des interactions avec les particules environnantes, la particule peut alors céder progressivement son énergie cinétique à ces voisines. Une fois que l'énergie cinétique initiale a été dispersée, l'ensemble constitué de la particule introduite et du système à N-corps forme alors un nouveau système à (N+1)-corps en interaction.

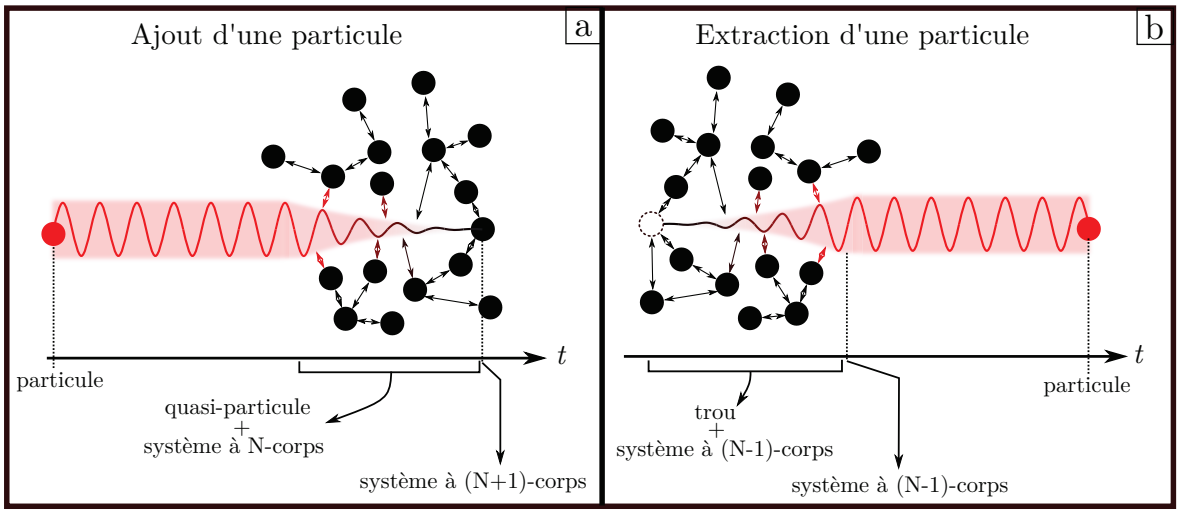

FIGURE 6.4 – **Excitation à une particule d'un système à N-corps en interaction**. **a.** Lorsqu'une particule d'énergie E et d'impulsion $\mathbf{k}$ est ajoutée à un système à N-corps, cette dernière acquiert une *self-energy* $\Sigma(\mathbf{k}, E)$ qui lui donne un temps de vie $\tau \sim \hbar/\Sigma''$ fini et une nouvelle relation de dispersion $E \sim \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma'$. Après un temps τ, l'excitation a relaxé et l'ensemble constitue un système "à (N+1)-corps". **b.** Inversement, on peut extraire une particule d'un système à N-corps en introduisant une quantité d'énergie E et d'impulsion $\mathbf{k}$. La particule retirée laisse derrière elle un "trou" qui possède une relation de dispersion $E \sim \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma'$ et un temps de vie $\tau \sim \hbar/\Sigma''$. Après un temps τ, on obtient donc un système "à (N-1)-corps" ainsi qu'une particule libre.

Cette dynamique d'excitation d'un système à N-corps par l'ajout d'une particule peut alors être vue comme étant équivalente à celle d'une quasi-particule libre (c'est à dire qui n'interagit pas avec les autres particules) possédant une relation de dispersion $E \sim \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma'$ et un temps de vie $\hbar/\Sigma''$ fini.

Bien sûr, le processus inverse, représenté en figure (6.4) b., est aussi possible : s'il on retire une particule d'énergie E et d'impulsion $\mathbf{k}$ d'un système à N-corps, la perturbation qui en résulte dans le nouveau système à (N-1)-corps va se propager par interaction de proche en proche des particules selon une relation de dispersion $E \sim \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma'$ et s'atténuer sur un temps typique $\hbar/\Sigma''$. Dans cette situation, il est très commun, notamment en matière condensée, de désigner ce type d'excitation comme étant un "*trou* de particule". Cette équivalence entre *trou* et *quasi-particule* renforce donc l'idée que la quasi-particule pour un système à N-corps est un phénomène *effectif* fondamentalement *collectif*.

Ainsi, dans le cadre de systèmes à N-corps, la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ décrit le spectre d'excitation *à une seule particule*.[6] Toute l'approche qui a été développée dans les sections 6.2.1 et 6.2.2 pour définir la fonction de Green et la fonction spectrale d'un système quantique peut se généraliser à un état quantique à N-corps. Pour cela, la fonction de Green *à une particule* d'un système à N-corps est définie de sorte à tenir compte des corrélations quantiques :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle \left[\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{x}', 0) \right]_{\pm} \right\rangle \Theta(t) \,, \tag{6.34}$$

6. Concernant les systèmes à N-corps, on notera que les excitations à une particule ne sont pas les seules excitations possibles. Par exemple, il existe des excitations à deux particules où un opérateur externe peut introduire une quantité E d'énergie et une quantité $\mathbf{k}$ d'impulsion sans pour autant extraire une particule au système. Dans ce cas, une telle excitation peut être caractérisée par la corrélation densité-densité (qui fait donc intervenir deux particules), ou plutôt par sa transformée de Fourier appelée *facteur de structure* $S(\mathbf{k}, E)$ [66, 65, 41].

où $\hat{\Psi}(\mathbf{x},t)$ et $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}',t)$ sont respectivement les opérateurs champ d'annihilation et de création de particules, $[\ \cdot\ ]_\pm$ désigne la commutation ou l'anti-commutation d'opérateurs suivant si l'on considère respectivement des bosons ou des fermions, et $\langle\ \cdot\ \rangle$ désigne une moyenne sur l'état à N-corps considéré.

Pour un système à température nulle, cette moyenne est effectuée sur un état pur à N particules $|\phi_i^{(N)}\rangle$ d'énergie $E_i^{(N)}$, qui est donc un état propre particulier de l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$ associé au système. Si l'on note $\left\{|\phi_\alpha^{(N)}\rangle\right\}_\alpha$ l'ensemble des états propres à N particules de $\hat{\mathcal{H}}$, et $\left\{E_\alpha^{(N)}\right\}_\alpha$ les énergies propres associées, on peut montrer que la transformée de Fourier $\mathcal{G}(\mathbf{k},E)$ de la fonction de Green (6.34) s'écrit en *représentation de Lehmann* [15, 28, 49] :

$$\mathcal{G}(\mathbf{k},E) = \sum_\alpha \frac{\left|\langle\phi_\alpha^{(N+1)}|\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{k})|\phi_i^{(N)}\rangle\right|^2}{E-\left(E_\alpha^{(N+1)}-E_i^{(N)}\right)+\mathrm{i}0^+} \mp \sum_\beta \frac{\left|\langle\phi_\alpha^{(N-1)}|\hat{\Psi}(\mathbf{k})|\phi_i^{(N)}\rangle\right|^2}{E+\left(E_\alpha^{(N-1)}-E_i^{(N)}\right)-\mathrm{i}0^+}\,, \tag{6.35}$$

où le signe $\mp$ est associé à la situation où les particules sont respectivement bosoniques et fermioniques. Le premier terme de (6.35) décrit à quel point l'ajout d'une particule d'impulsion $\mathbf{k}$ au système à N-corps permet d'exciter le système dans un état à (N+1)-corps. D'une manière équivalente, le second terme de (6.35) quantifie le recouvrement entre l'état d'un système à N-corps auquel on aurait retiré une particule d'impulsion $\mathbf{k}$ et un état à (N-1)-corps.

La fonction spectrale $A(\mathbf{k},E)$ est reliée à $\mathcal{G}(\mathbf{k},E)$ par la définition (6.27), de sorte que :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k},E) = &\sum_\alpha \left|\langle\phi_\alpha^{(N+1)}|\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{k})|\phi_i^{(N)}\rangle\right|^2 \delta\left(E-E_\alpha^{(N+1)}+E_i^{(N)}\right) \\ &+\sum_\beta \left|\langle\phi_\beta^{(N-1)}|\hat{\Psi}(\mathbf{k})|\phi_i^{(N)}\rangle\right|^2 \delta\left(E+E_\beta^{(N-1)}-E_i^{(N)}\right)\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Chaque type d'excitation à une particule contribue à la fonction spectrale : les quasi-particules via le premier terme de (6.36), et les trous de particules via le second.

En conclusion, la fonction spectrale $A(\mathbf{k},E)$ représente le spectre des excitations possibles *à une seule particule* lorsqu'un opérateur externe ajoute ou extrait *à énergie résolue* une particule couplée avec un réservoir d'états propres, que ce dernier soit associé à un potentiel $\hat{V}$ quelconque ou à un système à N-corps en interaction.

6.3 Expériences de mesures de fonctions spectrales

Comme on vient de le voir dans la section précédente, la fonction spectrale $A(\mathbf{k},E)$ et la *self-energy* $\Sigma(\mathbf{k},E)$ permettent de caractériser la nature des interactions s'établissant au sein d'un système composé d'un grand nombre de particules. Historiquement, le concept de *quasi-particule* est d'ailleurs attribué à Lev Landau, qui l'a introduit en temps qu'interprétation de la dynamique des liquides de Fermi [101]. [7]

C'est donc, en premier lieu, dans le domaine de la matière condensée que les méthodes expérimentales permettant une mesure directe de ces quantités ont été développées. Bien

7. Les liquides de Fermi sont des systèmes composés de fermions en interaction coulombienne les uns avec les autres. Ils se rencontrent naturellement en physique des basses températures avec l'hélium ^{3}He liquide [2] et en physique des solides pour décrire le comportement des électrons dans les métaux [28].

évidemment, l'optique atomique et les atomes froids ne sont pas en reste et ont su développer des méthodes de spectroscopie analogues.

Dans la suite, on verra qu'il existe plusieurs méthodes de spectroscopie, qui sont généralement toutes basées sur le même principe : un système à N-corps est dans un premier temps préparé, puis un couplage externe vient en *extraire* des particules. On verra que le fait que ces spectroscopies puissent extraire à *énergie résolue* des particules d'un système permet une mesure *directe* de la fonction spectrale.

Plus particulièrement, on s'intéressera à deux techniques différentes qui permettent la mesure directe de fonctions spectrales : la spectroscopie ARPES [49] (physique des solides), [8] et la spectroscopie RF [52, 51, 171] (atomes froids). [9]

6.3.1 En physique des solides : la méthode ARPES

La première tentative de mesure de temps de vie des quasi-particules de liquides de Fermi remontent à 1992 avec l'expérience de Claessen et al. [39] faisant usage d'une spectroscopie par photo-émission résolue en angle (*Angle Resolved Photo-Emission Spectroscopy*, ARPES en anglais) sur un échantillon de 1-T-$TiTe_2$ (semi-métal). L'ARPES est une technique de spectroscopie basée sur l'effet photo-électrique, où un rayonnement d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $\hbar\boldsymbol{\kappa}$ (typiquement dans l'UV) est éclairé sur un échantillon. Une illustration du procédé est représentée en figure 6.5 a.

En absorbant un photon du rayonnement incident, le matériau peut, en retour, *éjecter en dehors du matériau* un électron dont l'énergie cinétique E_{kin} et l'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$ est fixée par des lois de conservation illustrées en figure 6.5 b. :

$$E_{\text{kin}} = \hbar\omega - \varphi + E \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_{\text{kin}} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\kappa} \tag{6.37}$$

où φ le travail de sortie, [10] E l'énergie de l'électron *dans le matériau*, et $\mathbf{k}$ est l'impulsion de l'électron *dans le matériau*. Mesurer l'énergie E_{kin} et l'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$ de l'électron émis permet, à partir des lois de conservation (6.37), de remonter à l'énergie E et l'impulsion $\mathbf{k}$ de l'électron *dans* le matériau.

Cette extraction à énergie résolue des électrons du solide peut s'interpréter comme la *transition* d'un état initial à N-corps $|\phi_i^{(N)}\rangle$ d'énergie $E_i^{(N)}$ vers un continuum d'états finaux $\left\{\hat{\Psi}^\dagger_{\mathbf{k}_{\text{kin}}}|\phi_f^{(N-1)}\rangle\right\}_f$ associés à un système à (N-1)-corps et un électron éjecté dans le vide d'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$. Les énergies accessibles associées au continuum s'écrivent donc sous la forme $\left\{E_f^{(N-1)} + E_{\text{kin}} + \varphi\right\}_f$.

8. Par vœux de concision, certaines des techniques autres que l'ARPES et permettant une mesure directe de fonctions spectrales en physique des solides n'ont pas été abordées ici. Par exmeple, il faudrait mentionner la *spectroscopie par effet tunnel* : on pourra se référer à la revue [71] pour une présentation générale du sujet.

9. Là encore, un certain nombre de spectroscopies non-détaillées dans la suite auraient mérité une plus grande attention, comme la spectroscopie de Bragg [41, 65, 171] par exemple, qui permet aussi bien la mesure directe de la fonction spectrale que du facteur de structure. On verra aussi dans la suite que la spectroscopie Raman est une généralisation de la spectroscopie RF.

10. Le travail de sortie φ (aussi appelé "niveau du vide") est l'énergie nécessaire à fournir à un électron pour qu'il puisse traverser la surface du matériau et être extrait dans le vide.

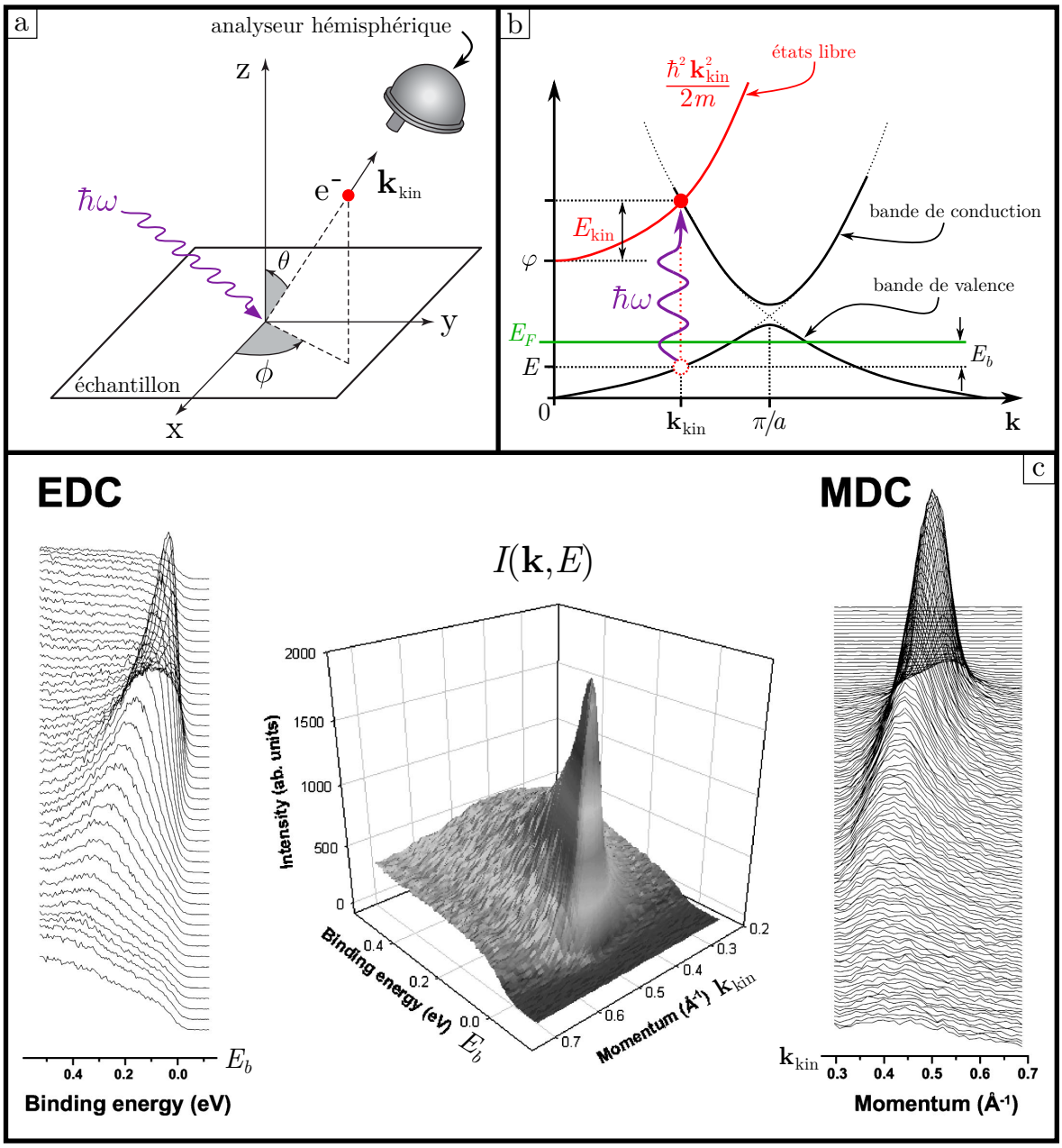

FIGURE 6.5 – **Principe de la spectroscopie par photo-émission résolue en angle (ARPES)**. **a.** Figure tirée de la référence [49]. Un rayonnement UV est envoyé sur l'échantillon à étudier. Par processus photo-électrique, un électron d'énergie cinétique E_{kin} et d'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$ est éjecté du matériau. Ce photo-électron est ensuite capté par un analyseur hémisphérique [128] qui permet de mesurer les angles d'émission (θ, ϕ) et E_{kin}. La connaissance des angles (θ, ϕ) permet alors de reconsituter l'impulsion totale $\mathbf{k}_{\text{kin}}$. **b.** Les lois de conservation (6.37) permettent de remonter à l'énergie de liaison E de l'électron, ainsi qu'à son impulsion $\mathbf{k}$ dans le matériau. On distingue donc trois étapes amenant l'électron a être éjecté du matériau : 1. le matériau absorbe un photon en faisant passer un électron de la bande de valence à la bande de conduction, 2. cet électron se propage alors jusqu'à la surface du matériau, puis 3. traverse la surface si son énergie est supérieure au travail de sortie φ. **c.** Exemple tiré de [25] de mesure de fonction spectrale sur un échantillon de Pb-BSCCO. En faisant varier l'énergie $\hbar\omega$ du rayonnement incident, l'analyseur hémisphérique permet de faire une mesure directe de la distribution en énergie (*Energy Distribution Curve*, EDC) et en impulsion (*Momentum Distribution Curve*, MDC) des photo-électrons captés, et donc de reconstituer le signal $I(\mathbf{k}, E) \propto A(\mathbf{k}, E)$. On notera que l'axe en énergie marque l'énergie de liaison $E_b = E_F - E$ qui repère l'énergie E des électrons *dans le solide* par rapport à l'énergie de Fermi E_F.

Dans la limite d'un *couplage faible* par le rayonnement UV incident, la règle d'or de Fermi permet d'exprimer le taux de couplage Γ entre l'état initial et le continuum final :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle \phi_f^{(N-1)} | \hat{\Psi}_{\mathbf{k}_{\text{kin}}} \hat{W}_0 | \phi_i^{(N)} \rangle|^2 \, \delta \left(E_f^{(N-1)} + E_{\text{kin}} + \varphi - E_i^{(N)} - \hbar\omega \right) , \tag{6.38}$$

où $\hat{W}_0$ est l'opérateur de couplage. En écriture de seconde quantification, ce dernier peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{W}_0 \propto \sum_{\mathbf{k}'} \hat{\Psi}^\dagger_{\mathbf{k}'+\boldsymbol{\kappa}} \hat{\Psi}_{\mathbf{k}'} , \tag{6.39}$$

et décrit donc l'ensemble des transferts possibles d'un électron d'impulsion $\mathbf{k}'$ vers une impulsion $\mathbf{k}' + \boldsymbol{\kappa}$.

Or, comme l'impulsion des photons incidents est généralement négligeable devant la largeur de la première zone de Brillouin (qui correspond à l'impulsion typique d'un électron dans un solide) $|\boldsymbol{\kappa}| \ll 2\pi/a$, où a est un paramètre de maille du matériau, on pourra considérer que les photons UV ne transfèrent quasiment pas d'impulsion à l'électron, et donc que $\boldsymbol{\kappa} \sim 0$.

Dans ce cas, l'opérateur de couplage $\hat{W}_0 \propto \sum_{\mathbf{k}'} \hat{\Psi}^\dagger_{\mathbf{k}'} \hat{\Psi}_{\mathbf{k}'}$ est un simple opérateur de comptage du nombre d'électrons, et l'expression (6.38) peut se simplifier en :

$$\Gamma \propto \sum_f |\langle \phi_f^{(N-1)} | \hat{\Psi}_{\mathbf{k}_{\text{kin}}} | \phi_i^{(N)} \rangle|^2 \, \delta \left(E_{\text{kin}} + \varphi - \hbar\omega + E_f^{(N-1)} - E_i^{(N)} \right) . \tag{6.40}$$

En comparant, les expressions (6.36) et (6.40), on constate que le taux de couplage Γ correspond directement à la contribution de la fonction spectrale liée à l'extraction d'une particule du système :

$$\Gamma(\mathbf{k}_{\text{kin}}, E_{\text{kin}}) \propto A(\mathbf{k}_{\text{kin}}, E_{\text{kin}} + \varphi - \hbar\omega) . \tag{6.41}$$

La méthode ARPES est donc résolue en énergie *et* en impulsion dans la mesure où les lois de conservation (6.37) assurent un lien directe entre l'énergie E et l'impulsion $\mathbf{k}$ de l'électron *dans* le matériau, et l'énergie cinétique E_{kin} et l'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$ de l'électron une fois extrait.

A titre non-exhaustif, on peut mentionner que la méthode ARPES a permis d'étudier les excitations électroniques de nombreux matériaux exotiques comme les supraconducteurs à haute T_c [50], les isolants topologiques [36], ainsi que des matériaux présentant des transitions métal-isolant [111].

6.3.2 En optique atomique : la spectroscopie RF

La spectroscopie RF se présentent comme une adaptation de la méthode ARPES pour les systèmes d'atomes ultra-froids. Son principe de fonctionnement est illustré en figure 6.6 a. On considère donc un nuage où les atomes sont initialement répartis dans deux états de spin $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Ces états peuvent interagir entre eux via une certaine longueur de diffusion a_{12} (cf section 3.1.2) qu'il est éventuellement possible de contrôler via une résonance de Feshbach. Un champ radio-fréquence est alors appliqué afin de transférer une fraction des atomes initialement dans l'état $|2\rangle$ vers un autre état $|3\rangle$. Cet état $|3\rangle$ a été spécifiquement choisi pour qu'il n'y ait pas d'interaction avec les atomes non-couplés, c'est à dire que les longueurs de diffusion vérifient $|a_{13}| \ll |a_{12}|$ et $|a_{23}| \ll |a_{12}|$.

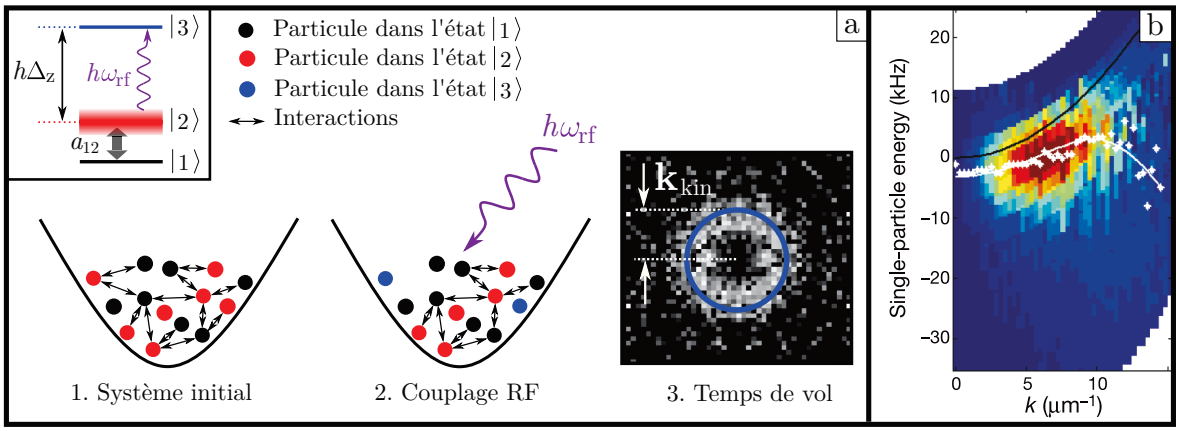

FIGURE 6.6 – **Principe de la spectroscopie radio-fréquence (RF)**. **a.** Un état à N-corps est préparé dans un piège dipolaire avec des atomes en interaction occupant deux états de spin $|1\rangle$ et $|2\rangle$. A l'aide d'un champ RF, une petite fraction de ces atomes est transférée vers un état $|3\rangle$ qui n'interagit plus avec le reste des atomes non-couplés. Juste après le transfert, le piège harmonique est éteint et une imagerie par temps de vol est réalisée sur les atomes dans l'état $|3\rangle$. La distribution en impulsion (cf encart, exemple tiré de [168]) permet alors de mesurer l'énergie cinétique E_{kin} et l'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$ des atomes extraits. **b.** Exemple de mesure de fonction spectrale pour pour un gaz de fermions en interaction forte attractive tiré du travail de Stewart et al. [168]. La courbe noire correspond à la relation de dispersion $E = \varepsilon_{\mathbf{k}}$ attendue pour un gaz parfait. Les points blancs marquent les maximas en énergie pour chaque impulsion $\mathbf{k}$. La courbe blanche est un ajustement de la relation de dispersion $E = \varepsilon_{\mathbf{k}} + \Sigma'$ donnée par la théorie BCS.

Autrement dit, s'il n'y a pas d'interaction entre les états initiaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$ et l'état final de la spectroscopie $|3\rangle$, on peut considérer que les atomes dans l'état $|2\rangle$ ont été *extraits* du système à N-corps.

D'une manière analogue à la méthode ARPES, mesurer l'énergie cinétique E_{kin} et l'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$ des particules extraites permet de remonter à l'énergie E et à l'impulsion $\mathbf{k}$ des particules *dans* le système à N-corps par les lois de conservation :

$$E_{\text{kin}} + h\Delta_z = h\omega_{\text{rf}} + E \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_{\text{kin}} = \mathbf{k} + \mathbf{k}_{\text{rf}}\,, \tag{6.42}$$

où ω_{rf} et $\mathbf{k}_{\text{rf}}$ sont les fréquences et les vecteurs d'onde du champ RF utilisé, et $h\Delta_z$ est l'écart en énergie séparant les deux $|2\rangle$ et $|3\rangle$ (qui bien souvent correspond à un décalage par effet Zeeman des niveaux), comme indiqué en figure 6.6 a.

Pour un système d'atomes froids, une manière de mesurer l'énergie cinétique E_{kin} des atomes extraits est de procéder à une imagerie par temps de vol. En effet, pour un système isotrope la distribution en impulsion des atomes est supposée être elle aussi isotrope (i.e. se répartissant sur un anneau pour $d = 2$, cf section 5.1.2, sur une coquille en $d = 3$) de rayon $|\mathbf{k}_{\text{kin}}| = \sqrt{2m\,E_{\text{kin}}/\hbar^2}$.

De plus, comme la fréquence ω_{rf} appartient au régime des radio-fréquences ou des micro-ondes, le rayonnement associé possède généralement une longueur d'onde de l'ordre du mètre ou du centimètre. Autrement dit, le champ RF $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\text{rf}} t - \mathbf{k}_{\text{rf}}\cdot\mathbf{x})}$ utilisé peut être considéré comme *homogène* sur tout le nuage. L'impulsion $\mathbf{k}_{\text{rf}}$ transportée par le couplage RF est alors négligeable devant toute autre échelle en impulsion intrinsèque aux atomes.

L'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$ d'un atome extrait correspond donc directement à l'impulsion $\mathbf{k}$ que ce dernier possédait *dans* le système à N-corps. [11]

D'une manière analogue à ce qui a été présenté dans le cadre de la méthode ARPES (cf section 6.3.1), on peut voir l'extraction d'un atome du système à N-corps comme le couplage entre un état initial à N-corps $\left\{|\phi_i^{(N)}\rangle\right\}$ vers un continuum d'états finaux $\left\{\hat{\Psi}^\dagger_{\mathbf{k}_{\text{kin}}}|\phi_f^{(N-1)}\rangle\right\}_f$ associé à un système à (N-1)-corps séparé d'un atome d'impulsion $\mathbf{k}_{\text{kin}}$.

Dans la limite d'un couplage faible des états $|2\rangle$ et $|3\rangle$ par le champ RF, on peut montrer [52, 51, 19, 171] que le taux de transfert Γ entre l'état initial et le continuum est de nouveau déterminé par une *règle d'or de Fermi*, de sorte que :

$$\Gamma(\mathbf{k}_{\text{kin}}, E_{\text{kin}}) \propto A(\mathbf{k}_{\text{kin}}, E_{\text{kin}} + h\Delta_z - h\omega_{\text{rf}}) \,. \tag{6.43}$$

D'une manière analogue à la méthode ARPES, la spectroscopie RF permet de mesurer directement la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ d'un système. A titre d'exemple, on notera qu'elle a été utilisée dans le cadre de systèmes fermioniques, plus particulièrement dans le but d'étudier le régime de transition entre condensat de Bose-Einstein de molécules et de paires de Cooper (décrit par la théorie BCS) pour des fermions en interaction attractive (cf figure 6.6 c.) [168, 72, 38, 131]. L'étude de ce *crossover* BEC-BCS vise à établir un diagramme de phase des systèmes de fermions en interaction attractive, et plus particulièrement à caractériser les propriétés de la phase intermédiaire séparant les phases BEC et BCS appelée "phase pseudo-gap". En effet, il a été suggéré [35] que cette phase pseudo-gap pourrait apporter un éclairage sur les propriétés des supra-conducteurs à haute T_c.

6.4 Fonction spectrale pour une particule dans un *speckle*

La section précédente a permis de présenter quelques méthodes expérimentales dont la résolution en énergie E (et en impulsion $\mathbf{k}$) permettait une mesure *directe* de la fonction spectrale. Autrement dit, être capable d'adresser *sélectivement* une énergie E donnée au sein d'un système revient à être capable de mesurer la fonction spectrale de ce même système. Ceci nous ramène donc directement à la problématique exposée en section 5.2.5 dans le cadre des expériences sur la transition d'Anderson avec des atomes froids : mettre en place une méthode spectroscopique permettant de coupler *à énergie contrôlée et résolue* des atomes vers un potentiel désordonné passera par une méthode capable de mesurer *directement* la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ d'une particule dans un désordre.

Le but de cette section est donc double. Dans un premier temps, on s'attachera à donner quelques propriétés de la fonction spectrale d'un système désordonné. Plus particulièrement, on verra que la fonction spectrale est caractéristique de nombreux traits microscopiques des états accessibles pour une particule dans un désordre, notamment pour ce qui est de la distinction entre régimes de désordre classique et désordre perturbatif. Dans un second temps, on essaiera de construire un protocole de spectroscopie des états d'énergie d'une particule dans un désordre. Si un tel protocole permet effectivement de mesurer une fonction spectrale, alors ceci constituerait une *preuve de principe* qu'une telle méthode permet un contrôle complet de l'énergie d'atomes placés dans un potentiel désordonné.

11. On notera que, sur ce point, la spectroscopie Raman est une généralisation de la spectroscopie RF, dans la mesure où elle permet de contrôler aussi bien l'énergie d'extraction E que l'impulsion $\mathbf{k}$ des atomes. Pour ce faire, le rayonnement de couplage utilisé est composé de deux champs laser dont les différences en fréquence $\omega_1 - \omega_2 = E/\hbar$ et en vecteur d'onde $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ fixe l'énergie et l'impulsion adressées [52, 51, 171].

Ceci ouvrirait alors de large perspectives en vue d'une étude résolue en énergie de la transition d'Anderson avec des atomes froids.

6.4.1 Désordre perturbatif et approximation de Born

En section 5.1.2, on a vu qu'en couplant un état d'impulsion $|\mathbf{k}_i\rangle$ avec un potentiel désordonné il existe un temps typique de déplétion τ_s de l'état $|\mathbf{k}_i\rangle$ vers les autres états d'impulsions $\{|\mathbf{k}\rangle\}_{\mathbf{k}}$. On avait pu déterminer une expression (5.9) de ce temps τ_s dans le cadre de l'*approximation de Born*, c'est à dire, dans la limite où le potentiel désordonné peut être traité perturbativement par rapport à l'énergie cinétique de la particule.

Puis, on a vu en section 5.1.3 que ce temps de déplétion τ_s définissait aussi une échelle d'énergie $\Delta E \sim \hbar/\tau_s$ qui, par le biais de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, se répercutait sur la distribution en énergie des atomes dans le désordre sous la forme d'un élargissement (cf expression (5.14)).

Tout ce qui a été explicité dans ces sections est donc compatible avec l'idée qu'une particule se propageant dans un potentiel désordonné exhibe une dynamique analogue à celle d'une "*quasi-particule*" *libre* (c'est à dire, sans la présence d'un désordre) possédant une relation de dispersion $E \sim \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + \Sigma'$ et un temps de vie $\hbar/\Sigma''$ fini, comme cela a été présenté en section 6.2.3.

Même si *a priori* cette compatibilité va au-delà du simple régime perturbatif, on montre dans ce qui suit que, dans le cadre de l'approximation de Born, la partie imaginaire de la *self-energy* Σ'' et l'élargissement ΔE ne sont qu'une seule et même quantité.

Pour ce faire, on peut reprendre l'expression générale (6.26) de la *self-energy* d'un système quantique :

$$\Sigma(\mathbf{k}, E) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\langle\mathbf{k}|\hat{V}\left(\hat{\mathcal{G}}_0(E)\,\hat{V}\right)^n|\mathbf{k}\rangle} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Sigma_n(\mathbf{k}, E)\,, \tag{6.44}$$

calculée ici en moyenne $\overline{\cdot}$ sur les réalisations du désordre.

Dans le cas d'un potentiel de type *speckle*, on peut montrer [99] que le ratio Σ_{n+1}/Σ_n entre deux terme consécutifs de la série (6.44) est proportionnel à $V_0^2/\varepsilon_{\mathbf{k}}E_\sigma$, où $V_0 = \sigma_V$ est l'amplitude du désordre, et E_σ l'énergie de corrélation associée à la longueur de corrélation σ du *speckle*. Se placer dans un régime de désordre perturbatif (5.17) permet donc de tronquer et d'approximer la série (6.44) par ses premiers termes non-nuls :

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathbf{k}, E) &\sim \langle\mathbf{k}|\overline{\hat{V}}|\mathbf{k}\rangle + \overline{\langle\mathbf{k}|\hat{V}\hat{\mathcal{G}}_0(E)\hat{V}|\mathbf{k}\rangle} \\ &\sim \overline{V} + \Sigma_1(\mathbf{k}, E)\,.\end{aligned} \tag{6.45}$$

C'est précisément l'approximation (6.45) qui porte le nom d'*approximation de Born*. Le premier terme Σ_0 d'ordre zéro est donc constant, réel, et égal à la moyenne $\overline{V}$ du potentiel. Ceci indique qu'une particule placée dans un potentiel aléatoire acquiert toujours une énergie moyenne $\overline{V}$ supplémentaire, *a priori* sans conséquence sur la dynamique. Le terme d'ordre $n = 1$ est, quant à lui, *a priori* complexe de sorte que $\Sigma_1 = \Sigma_1' - \mathrm{i}\Sigma_1''$.

Il reste donc à vérifier que l'expression (6.45) de la partie imaginaire Σ_1'' de la *self-energy* est compatible avec la définition du temps de vie $1/\tau_s$ donnée par la règle d'or de Fermi (5.7).

On peut donc calculer :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1''(\mathbf{k},E) &= -\mathrm{Im}\,\overline{\langle\mathbf{k}|\hat{V}\hat{\mathcal{G}}_0(E)\hat{V}|\mathbf{k}\rangle} \\
&= -\mathrm{Im}\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}'}{(2\pi)^d}\,\overline{\langle\mathbf{k}|\hat{V}\hat{\mathcal{G}}_0(E)|\mathbf{k}'\rangle\langle\mathbf{k}'|\hat{V}|\mathbf{k}\rangle} \\
&= -\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}'}{(2\pi)^d}\,\overline{|\langle\mathbf{k}|\hat{V}|\mathbf{k}'\rangle|^2}\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{E-\varepsilon_{\mathbf{k}'}+\mathrm{i}0^+}\right] \\
&= \pi\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{k}'}{(2\pi)^d}\,\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta(E-\varepsilon_{\mathbf{k}'})\;. \qquad (6.46)
\end{aligned}$$

En identifiant avec (5.7), on a donc :

$$\Sigma_1''(\mathbf{k},E=\varepsilon_{\mathbf{k}}) = \frac{\hbar}{2\tau_s(\mathbf{k})}\;, \qquad (6.47)$$

ce qui confirme que l'élargissement en énergie $\hbar/\tau_s$ et partie imaginaire de la *self-energy* sont une seule et même quantité. En combinant (6.47) et (6.32), on obtient une expression de la fonction spectrale pour une particule dans un désordre dans le cadre de l'approximation de Born :

$$A(\mathbf{k},E) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\hbar/2\tau_s(\mathbf{k})}{(E-\varepsilon_{\mathbf{k}}-\overline{V}-\Sigma_1'(\mathbf{k},E))^2+(\hbar/2\tau_s(\mathbf{k}))^2}\;, \qquad (6.48)$$

représentée en figure 6.7 a. A $\mathbf{k}$ fixé, elle s'apparente donc à une lorentzienne en E centrée sur l'énergie moyenne $\varepsilon_{\mathbf{k}}+\overline{V}+\Sigma_1'(\mathbf{k},E)$ de la particule dans le potentiel, et dont la largeur est définie par le temps de diffusion élastique $\hbar/\tau_s \sim V_0^2/E_\sigma$. [12]

Il est à noter que l'expression (6.48) ne permet pas de différencier une excitation d'un désordre *speckle* répulsif ou attractif. En effet, après une renormalisation des énergies par la moyenne $\overline{V}$ du désordre, la courbe $A(\mathbf{k},E)$ est *identique* dans le cas d'un désordre attractif ou répulsif, pour peu que $\Sigma_1'(\mathbf{k},E)$ dépende peu de E. En effet, l'expression (5.7) de $\tau_s(\mathbf{k})$ ne dépend pas du signe du potentiel *speckle*.

Ceci peut se comprendre dans la mesure où l'approximation de Born n'est valable que lorsque l'énergie cinétique de la particule $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ est très grande devant V_0^2/E_σ. Dans cette situation, les états du *speckle* sondés par la particule lors de la propagation possèdent une énergie très supérieure aux fluctuations de potentiel, comme représenté en figure 6.7 b_1 et b_2. De fait, la fonction spectrale est relativement insensible aux détails du potentiel désordonné, notamment à la distribution en potentiel $p(V)$.

6.4.2 Désordre classique

Inversement, dans un régime de *désordre classique*, on va montrer que la fonction spectrale donne directement la distribution $p(V)$ en potentiel associé à la figure de *speckle*. Pour ce faire, on peut utiliser l'*approximation semi-classique* $V_0/E_\sigma \to +\infty$, limite selon laquelle la longueur d'onde de de Broglie de la particule tend vers zéro, et est nécessairement négligeable devant la taille de n'importe quelle fluctuation du potentiel.

12. Cette forme lorentzienne (6.48) est complètement compatible avec l'expression (5.11) que l'on avait présenté d'une manière heuristique précédemment.

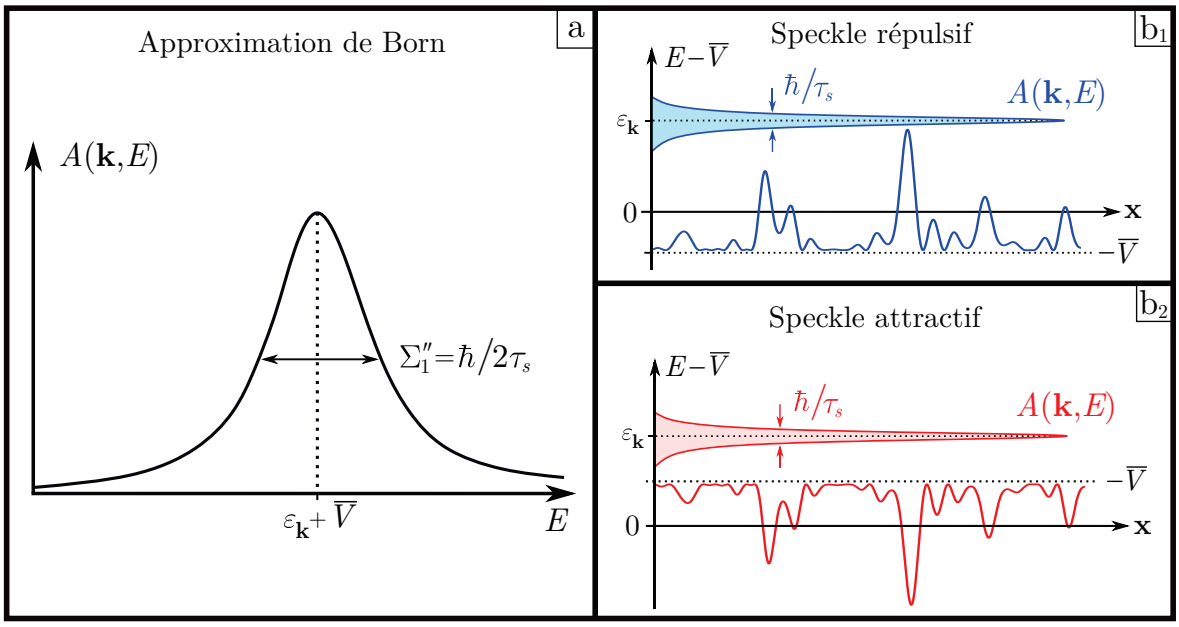

FIGURE 6.7 – **Fonction spectrale pour une particule dans un *speckle*. a.** Dans le cadre de l'approximation de Born (6.48), $A(\mathbf{k}, E)$ est lorentzienne centrée sur l'énergie moyenne $\varepsilon_\mathbf{k} + \overline{V}$, avec une largeur déterminée par le temps de diffusion élastique $\hbar/2\tau_s(\mathbf{k})$. Au-delà de la moyenne $\overline{V}$ du désordre, la fonction spectrale dans le régime de Born ne permet pas de différentier un *speckle* répulsif ($\mathbf{b}_1$.) d'un *speckle* attractif ($\mathbf{b}_2$.). En effet, pour un désordre perturbatif $\varepsilon_\mathbf{k} \gg \hbar/\tau_s$, l'élargissement en énergie est si faible que seule une fraction réduite des valeurs de potentiel $V(\mathbf{x})$ est sondée par la particule.

Autrement dit, la particule peut être considérée comme étant *ponctuelle* avec une position $\mathbf{x}$ et une impulsion $\hbar\mathbf{k}$ bien définies simultanément. [13] Dans ce cas, d'après la définition (6.28) de la fonction spectrale, on a [173, 139, 138] :

$$A(\mathbf{k}, E) = \overline{\langle \mathbf{k}|\delta(E - \hat{\mathcal{H}})|\mathbf{k}\rangle} \underset{V_0/E_\sigma \to +\infty}{\longrightarrow} \overline{\delta(E - \varepsilon_\mathbf{k} - V)}\,, \tag{6.49}$$

où $\varepsilon_\mathbf{k} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}$ est l'énergie cinétique de la particule, et V le potentiel *speckle*. Par définition de la moyenne $\overline{\cdot}$ sur les réalisations du désordre, on a donc :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}, E) &= \overline{\delta(E - \varepsilon_\mathbf{k} - V)} \\ &= \int \mathrm{d}V\, p(V)\, \delta(E - \varepsilon_\mathbf{k} - V) \\ &= p(E - \varepsilon_\mathbf{k})\,. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Cette dernière expression est complètement compatible avec l'intuition classique que l'on pourrait avoir de la fonction spectrale : $A(\mathbf{k}, E)$ est la probabilité conditionnelle qu'une particule d'impulsion $\mathbf{k}$ possède une énergie E, or comme l'énergie totale E de la particule est contrainte par la condition $E = \varepsilon_\mathbf{k} + V$, cette probabilité est directement donnée par $p(V = E - \varepsilon_\mathbf{k})$.

Autrement dit, dans un régime de *désordre classique* $V_0/E_\sigma \to +\infty$, la fonction spectrale donne directement la distribution $p(V)$ du potentiel désordonné.

13. Par ailleurs, il est commun d'étudier un système sous le jour d'une approximation semi-classique en considérant la limite $\hbar \to 0$. De fait, on a alors $[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] \to 0$ qui permet la commutation de la position $\hat{\mathbf{x}}$ avec l'impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ de la particule [173].

6.4.3 Vers une spectroscopie des états d'énergie dans un *speckle*

Comme on vient de le voir, la fonction spectrale est un outil fondamental permettant de décrire la nature des états d'énergie sondés par une particule dans un potentiel désordonné. Ceci fait donc de la fonction spectrale un objet d'étude pertinent en soi, et qu'il est possible de mesurer expérimentalement avec des systèmes d'atomes froids, comme cela a été présenté en section 6.3.2. Mais au-delà de l'intérêt singulier que cette quantité présente, on avait vu qu'une expérience capable de la mesure de $A(\mathbf{k}, E)$ était aussi une expérience de spectroscopie *résolue en énergie*.

Mettre au point une telle spectroscopie résolue en énergie dans le cadre d'atomes se propageant dans un potentiel désordonné permettrait de résoudre la principale limitation des expériences sur la transition d'Anderson présentées en section 5.2 : l'absence de contrôle de l'énergie occupée par les atomes *dans* le désordre.

Parmi toutes les méthodes de spectroscopie adaptées aux atomes froids, celle qui a été retenue dans le cadre des travaux de cette thèse est la spectroscopie RF, et ce pour des raisons de simplicité de mise en place avec le matériel déjà disponible sur le montage expérimental (peu d'ajout de matériel a été nécessaire). Comme on l'a vu en section 6.3.2, un pré-requis majeur de cette méthode est de pouvoir utiliser un état "libre" de référence qui n'est pas soumis à l'interaction sondée. Dans le cadre des systèmes en interaction présentés précédemment, ceci était réalisé par le choix de deux états internes $|1\rangle$ et $|2\rangle$ entre lesquels il n'y avait pas d'interaction atomique, si bien que les atomes transférés dans l'état $|2\rangle$ pouvaient être considérés comme libres et occupant des états d'impulsion $|\mathbf{k}\rangle$ bien déterminés.

Si l'on transpose cette condition au cas d'atomes dans un potentiel *speckle*, cela revient à choisir deux états internes $|1\rangle$ et $|2\rangle$ pour lesquels le désordre est *sélectif*. L'idée serait donc de préparer les atomes dans un état d'impulsion bien déterminé, ici le condensat $|\mathbf{k} = 0\rangle$, pour lequel les atomes occupent tous le même état interne $|1\rangle$ *insensible* au désordre.

Puis, à l'aide d'un couplage RF $\hat{W}(t) = \hat{W}_0 \cos(\omega_{\mathrm{rf}} t)$, on produit une transition vers un état interne $|2\rangle$ qui, lui, est sensible au potentiel désordonné. Autrement dit, on s'intéresse au transfert d'atomes d'un état initial $|i\rangle = |1\rangle \otimes |\mathbf{k} = 0\rangle$ vers un continuum d'états $\{|f\rangle\}_f = \{|2\rangle \otimes |E_\alpha\rangle\}_\alpha$, où $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ désigne l'ensemble des états propres de l'énergie accessibles par un atome dans le potentiel désordonné. Un schéma de principe de cette expérience est donné en figure 6.8.

Dans la limite d'un couplage faible, le taux de transfert moyen Γ entre l'état initial $|i\rangle$ et le continuum $\{|f\rangle\}_f$ est, encore une fois, déterminé par une *règle d'or de Fermi* :

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{2\pi}{\hbar}\overline{\sum_f |\langle f|\hat{W}_0|i\rangle|^2\, \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar}|\langle 2|\hat{W}_0|1\rangle|^2 \overline{\sum_\alpha |\langle E_\alpha|\mathbf{k}=0\rangle|^2\ \delta(E_\alpha - E_i - \hbar\omega_{\mathrm{rf}})}\,. \end{aligned} \tag{6.51}$$

En fixant l'énergie initiale E_i du condensat comme origine de l'échelle des énergies $E_i = 0$, on reconnaît de nouveau la définition (6.29) de la fonction spectrale, de sorte que :

$$\Gamma(\omega_{\mathrm{rf}}) \propto A(\mathbf{k} = 0, E = \hbar\omega_{\mathrm{rf}})\,. \tag{6.52}$$

A l'issue du transfert RF, tous les atomes chargés dans le désordre par cette méthode le sont à une énergie $E = \hbar\omega_{\mathrm{rf}}$ fixée par la fréquence du champ RF.

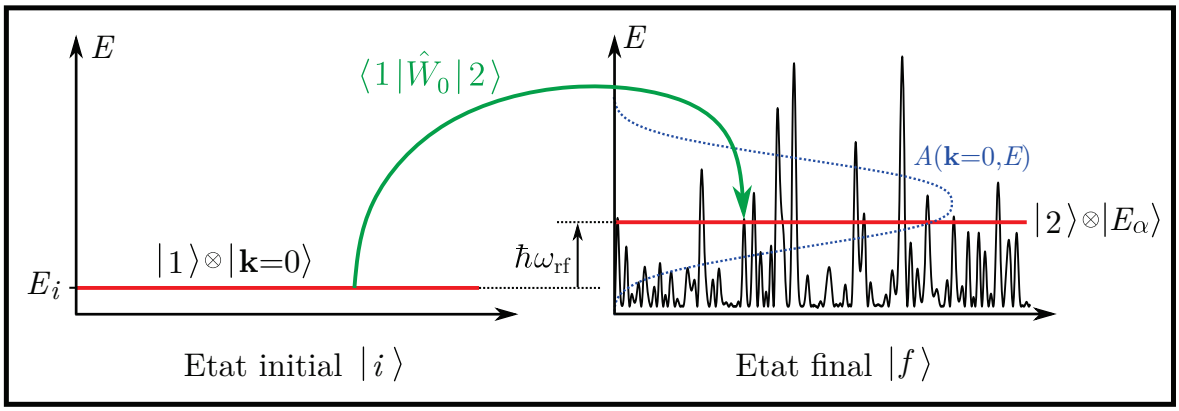

FIGURE 6.8 – **Illustration d'un couplage spectroscopique à énergie résolue**. Le système est initialement préparé dans un état $|1\rangle$ d'énergie E_i bien défini (par exemple un condensat $|\mathbf{k}=0\rangle$) insensible au potentiel désordonné. Puis, un couplage $\hat{W}_0$ oscillant à une fréquence ω permet de coupler le système vers une état $|2\rangle$ qui est, lui, sensible au désordre et à une énergie E_α fixée. Cette énergie est déterminée par une loi de conservation $E_\alpha = E_i + \hbar\omega$. Dans la limite d'un couplage $\hat{W}_0$ perturbatif, le taux de couplage entre l'état initial et l'état final est donné par la fonction spectrale $A(\mathbf{k}=0,E)$ selon une règle d'or de Fermi.

Dans le chapitre suivant, on s'attache à décrire la méthode expérimentale qui a permis de réaliser le schéma de spectroscopie représenté en figure 6.8. Notamment, on précisera la manière dont il est possible de générer un potentiel *speckle* sélectif en état interne et quelle est la *résolution en énergie* que peut offrir une telle méthode.

Chapitre 7

Mesure de fonctions spectrales dans un désordre de type *speckle*

Ce chapitre s'attache à expliciter la démarche expérimentale permettant la réalisation d'une spectroscopie RF, dont le principe est présenté dans les sections 6.3.2 et 6.4.3. Comme explicité en section 6.4.3, implémenter une telle spectroscopie implique de réaliser un désordre sélectif selon deux états atomiques internes $|1\rangle$ et $|2\rangle$. On verra, dans un premier temps, comment cette problématique a été abordée à l'aide d'un potentiel *speckle quasi-résonant*. Dans un second temps, on présentera le dispositif de génération de fréquences permettant de réaliser un couplage entre deux états atomiques internes $|1\rangle$ et $|2\rangle$. On prendra soin de justifier le choix de ces deux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ en question vis à vis de la configuration magnétique de l'expérience, ainsi que de la résolution en énergie de la spectroscopie. Enfin, les résultats de la spectroscopie seront alors présentées et interprétées pour différentes configurations de désordre.

Les travaux présentés dans ce chapitre sont le fruit d'une collaboration entre notre équipe et une équipe du Laboratoire Kastler Brossel (Jussieu, FRANCE) formée de D.Delande et M.Pasek, qui ont réalisé des calculs numériques reproduisant notre configuration expérimentale, qu'il s'agisse aussi bien du potentiel *speckle* utilisé expérimentalement (cf section 4.2.2) que des résultats de la spectroscopie (cf section 7.6.3). Comme on le verra dans la suite, le très bon accord entre les mesures et les simulations permettra de valider les hypothèses selon lesquelles la spectroscopie RF permet un couplage à énergie résolue des atomes avec le désordre, ainsi que la mesure directe de fonctions spectrales.

7.1 Réalisation d'un désordre sélectif en état de spin

Comme cela a été illustré en figure 6.8, réaliser une spectroscopie RF des états d'énergie d'atomes dans un *speckle* implique de pouvoir produire un condensat dans un certain état interne $|1\rangle$ *insensible au speckle* et de coupler les atomes du condensat vers un état $|2\rangle$ qui, lui, est exclusivement sensible au désordre. Pour ce faire, la solution qui a été retenue est de mettre à profit l'écart en fréquence Δ_{hf} de $6.8\,\mathrm{GHz}$ qu'il y a entre les états $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ du ^{87}Rb. [1]

1. Il est courant de réaliser des potentiels optiques dépendant de l'état interne des atomes en utilisant des "*longueurs d'onde magiques*". Malheureusement, les états nécessaires à la lévitation des atomes dans le cadre de notre expérience ne permettent pas d'utiliser ce type particulier de potentiels. Quelques éléments de compréhension à ce sujet sont développés en annexe B.3.

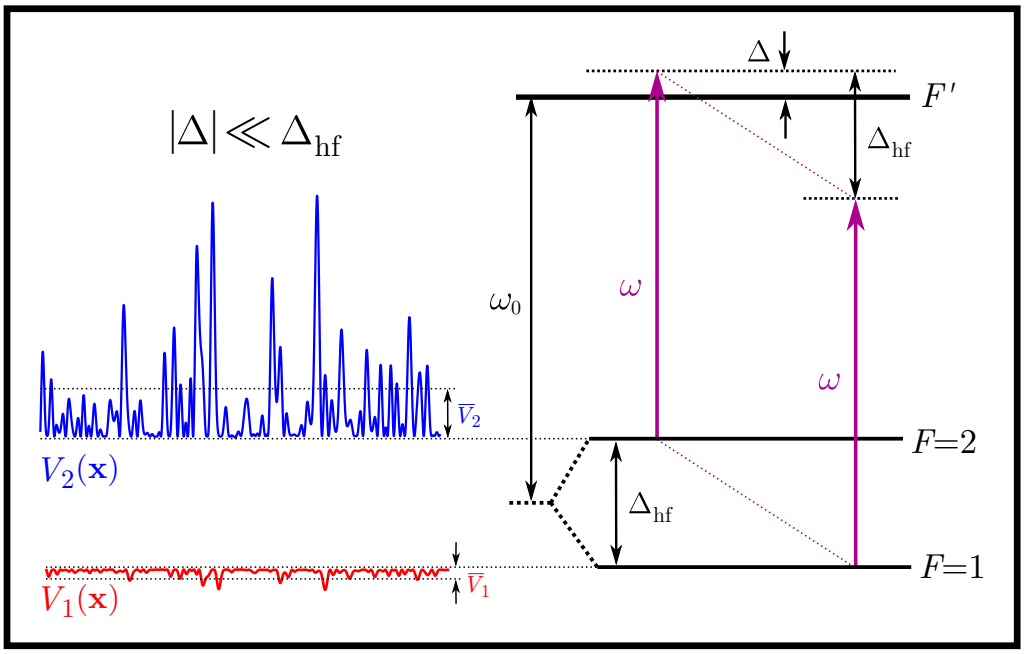

FIGURE 7.1 – **Principe du désordre sélectif en état interne**. En choisissant un désaccord $|\Delta| \ll \Delta_{\rm hf}$ pour le laser du *speckle* par rapport à la raie D_2, pour une seule et même figure de *speckle* d'intensité $I(\mathbf{x})$ on peut générer un potentiel dipolaire sur l'état $|F=2\rangle$ plus intense que sur l'état $|F=1\rangle$. Dans cette limite, l'état $|F=1\rangle$ est quasiment insensible au *speckle*.

En effet, comme cela a été vu en section 4.3, le potentiel dipolaire $V(\mathbf{x})$ exercé sur un atome via une transition de fréquence ω_0, et associé à une figure de *speckle* d'intensité $I(\mathbf{x})$, est donné par $V(\mathbf{x}) \propto I(\mathbf{x})/\Delta$, où $\Delta = (\omega - \omega_0)/2\pi$ est le désaccord entre la fréquence ω du laser du *speckle* et la fréquence de résonance ω_0. De fait, si on choisit un désaccord Δ par rapport à la transition $|F=2\rangle \to |F'\rangle$ tel que $|\Delta| \ll \Delta_{\rm hf}$ comme représenté en figure 7.1, les moyennes $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ des désordres exercés respectivement sur les états $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$ vérifient :

$$|\overline{V}_1| \ll |\overline{V}_2| \quad \text{où} \quad \overline{V}_2 \propto \frac{\bar{I}}{\Delta} \quad \text{et} \quad \overline{V}_1 \propto \frac{\bar{I}}{\Delta + \Delta_{\rm hf}} \,. \tag{7.1}$$

Autrement dit, il est possible de se placer dans une situation où le désordre exercé sur l'état $|F=1\rangle$ est négligeable devant celui exercé sur l'état $|F=2\rangle$, et donc de réaliser un désordre *sélectif en état de spin*. Néanmoins, il y a deux précautions à prendre :

- ⋆ Les atomes (aussi bien ceux du condensat, que ceux transférés dans le *speckle*) doivent être lévités contre la gravité (cf section 3.3.5). Il faudra donc choisir, parmi un ensemble de sous-états Zeeman $|F, m_F\rangle$, deux états différents qui pourront être lévités simultanément de la même manière, *à configuration de champ magnétique égale*. Le choix de ces états devra être aussi conditionné par leur sensibilité aux fluctuations de champ magnétique, ce qui sera déterminant du point de vue de la *résolution en énergie* de la spectroscopie.

- ⋆ Une fois les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ de la spectroscopie choisis en accord avec la lévitation, il sera nécessaire de quantifier correctement l'amplitude du désordre exercée sur chacun de ces niveaux en fonction du désaccord Δ. Plus particulièrement, pour $|\Delta| \ll \Delta_{\rm hf}$, il faudra prendre en compte la contribution de chaque sous-états $|F'\rangle$ de la structure hyperfine de la raie D_2. On généralisera alors l'expression (3.37) du potentiel dipolaire au cas d'un atome possédant plusieurs transitions.

7.2 Choix de la transition hyperfine et lévitation

Comme on l'a vu en section 3.3.5, il est nécessaire de faire léviter les atomes s'il on veut pouvoir les refroidir dans un piège dipolaire très décomprimé, et s'il on veut pouvoir réaliser des expériences avec des temps d'expansion dans le désordre de l'ordre de la seconde. Pour cela, on utilise trois paires de bobines permettant de produire un potentiel magnétique $U_{\text{mag}}(\mathbf{x})$ de la forme :

$$U_{\text{mag}}(\mathbf{x}) \sim g_F m_F \mu_B \left(B_0 + b'y + b''y^2 + \left(\frac{b'^2}{8B_0} - \frac{b''}{2} \right) \rho^2 \right) \quad \text{avec} \quad b' = \frac{mg}{g_F m_F \mu_B} \,. \tag{7.2}$$

On constate donc qu'une première condition pour léviter simultanément deux états $|F, m_F\rangle$ différents impose qu'ils possèdent un même produit $g_F m_F$ (et donc un même gradient magnétique b' selon (7.2)).

Néanmoins, du point de vue de la spectroscopie, cette condition n'est pas suffisante. En effet, la résolution en énergie de la spectroscopie dépendra en partie de la précision avec laquelle l'énergie E_{F,m_F} de chaque états de spin pourra être adressée. Les fluctuations de l'amplitude B du champ magnétique sont donc *a priori* une source de fluctuations de l'énergie E_{F,m_F} des niveaux $|F, m_F\rangle$ qui pourraient fixer une limite de résolution à la spectroscopie. Comme cela a été vu en section 5.2.2, les désordres utilisés en expérience ont une amplitude V_0 allant typiquement de la centaine de Hz au kHz. Pour que la spectroscopie puisse résoudre les états soutenus par ces potentiels, il faut donc une précision sur l'énergie magnétique des niveaux $\delta E \ll V_0$.

Afin de limiter l'effet des fluctuations sur la résolution de la spectroscopie, il faut donc s'intéresser aux états $|F, m_F\rangle$ possédant une même *susceptibilité magnétique* $\chi_B = \partial_B E_{F,m_F}$, c'est à dire aux états dont l'énergie varie de la même manière en fonction du champ magnétique.

Comme cela avait été présenté en section 3.2.3, la formule de Breit-Rabi donne le déplacement par effet Zeeman de l'énergie E_{F,m_F} de chaque état de spin $|F, m_F\rangle$ en fonction du biais magnétique B_0. *A priori*, même à champ faible, le déplacement Zeeman des niveaux n'est pas tout à fait linéaire, comme représenté en figure 7.2 a. La susceptibilité magnétique χ_B de chaque niveau est alors donnée par la pente locale de chaque courbe $E_{F,m_F}(B_0)$, comme représenté en figure 7.2 b. Une inspection soigneuse à très bas champ révèle que les états $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 2, m_F = 1\rangle$ ont une même susceptibilité à un champ magnétique $B_0 = 3.23\,\text{G}$.

Ceci peut être quantifié plus précisément à l'aide de la formule de Breit-Rabi (3.40), que l'on peut développer à l'ordre 2 en $\beta \ll 1$ pour des champs faibles :

$$\begin{aligned} E_{F=2,m_F=1} &\underset{\beta \ll 1}{\sim} \frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2} + g_{F=2}\,\mu_B B + \frac{3(g_J - g_I)^2 \mu_B^2}{16\,h\Delta_{\text{hf}}}\,B^2 \\ E_{F=1,m_F=-1} &\underset{\beta \ll 1}{\sim} -\left(\frac{h\Delta_{\text{hf}}}{2} + g_{F=1}\,\mu_B B + \frac{3(g_J - g_I)^2 \mu_B^2}{16\,h\Delta_{\text{hf}}}\,B^2 \right) , \end{aligned} \tag{7.3}$$

avec les facteurs de Landé $g_{F=2} = (g_J + 3g_I)/4$ et $g_{F=1} = (-g_J + 5g_I)/4$.

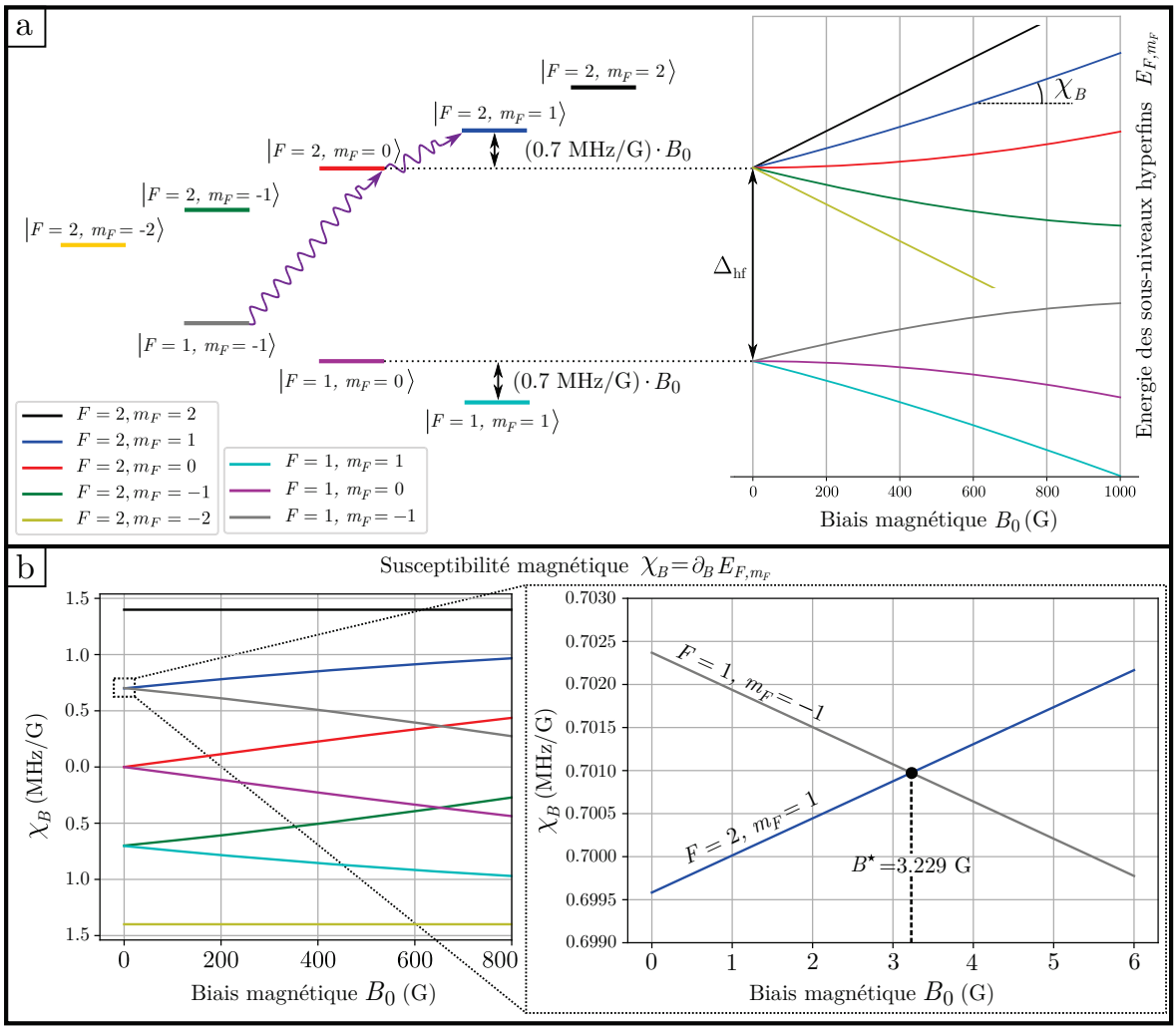

FIGURE 7.2 – **Sensibilité des états atomiques au champ magnétique. a.** La formule de Breit-Rabi (3.40) donne la dépendance en biais magnétique B_0 des états hyperfins $|F, m_F\rangle$. Cette dépendance n'est pas linéaire *a priori*, même à bas champ. La pente locale de chaque courbe E_{F,m_F} donne la susceptibilité magnétique $\chi_B = \partial_B E_{F,m_F}$ de chaque niveau. **b.** Il se trouve que les états $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$ ont la même susceptibilité χ_B au biais $B_0 = 3.23\,\mathrm{G}$.

L'écart en énergie $\Delta E_{1,2} = E_{F=2,m_F=1} - E_{F=1,m_F=-1}$ en fonction du champ magnétique B s'écrit dans cette limite :

$$\begin{aligned}\Delta E_{1,2} &= h\Delta_{\mathrm{hf}} + 2g_I\mu_B B + \frac{3(g_J-g_I)^2\mu_B^2}{8\,h\Delta_{\mathrm{hf}}}\,B^2 \\ &= \mathrm{a}\left(B+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}\right)^2 - \frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}} + h\Delta_{\mathrm{hf}}\,,\end{aligned} \tag{7.4}$$

en posant $\mathrm{a} = 3(g_J-g_I)^2\mu_B^2/8\,h\Delta_{\mathrm{hf}}$ et $\mathrm{b} = 2g_I\mu_B$.

D'après (7.4), il existe donc un champ magnétique $B^\star$ autour duquel l'écart $\Delta E_{1,2}$ ne varie pas en fonction du champ magnétique :

$$B^\star = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} = -\frac{8\,g_I\,h\Delta_{\mathrm{hf}}}{3(g_J-g_I)^2\mu_B} \simeq 3.228917\,\mathrm{G} \quad \text{tel que} \quad \partial_B\,\Delta E_{1,2}(B=B^\star) = 0\,. \tag{7.5}$$

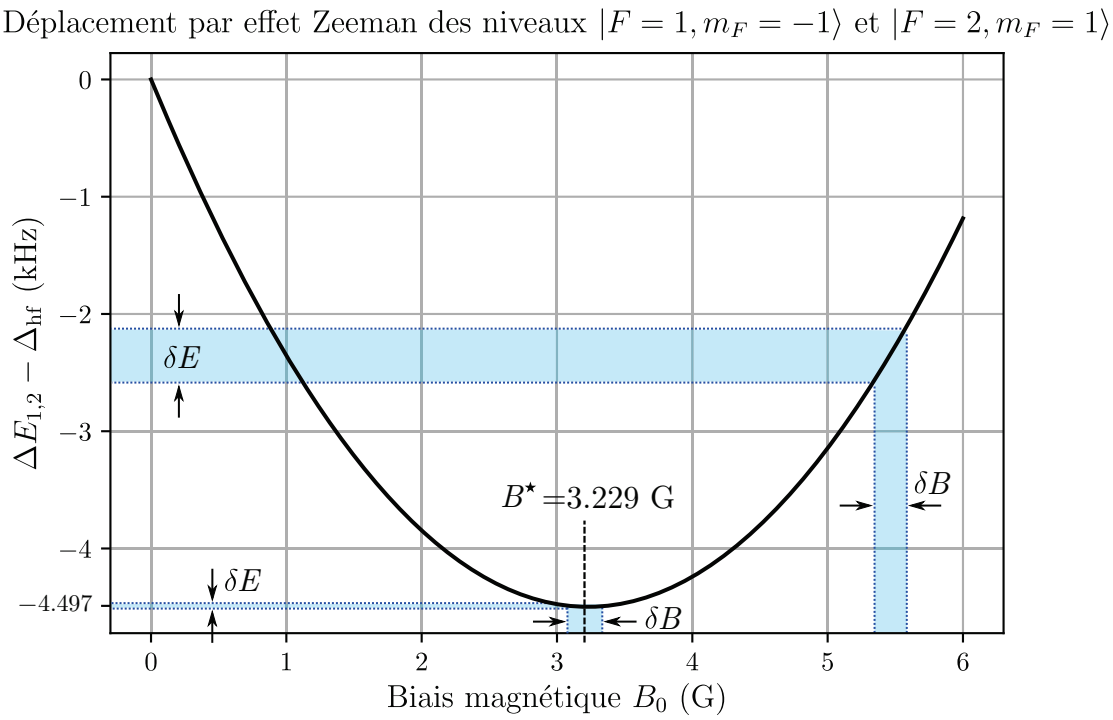

FIGURE 7.3 – **Effet Zeeman sur la transition hyperfine** $|F=1, m_F=-1\rangle \to |F=2, m_F=1\rangle$. La formule de Breit-Rabi (7.4) prédit l'existence d'un champ magnétique $B^\star \simeq 3.229\,\mathrm{G}$ autour duquel l'écart $\Delta E_{1,2}$ des niveaux $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$ est minimal. A fluctuations de champ magnétiques δB données, le biais $B^\star$ est celui qui minimise l'amplitude des fluctuations δE de l'énergie de la transition $|F=1, m_F=-1\rangle \to |F=2, m_F=1\rangle$.

Autrement dit, avec un biais à $B_0 = B^\star \sim 3.23\,\mathrm{G}$, l'énergie $\Delta E_{1,2}$ de la transition hyperfine $|F=1, m_F=-1\rangle \to |F=2, m_F=1\rangle$ est quasiment insensible au variation de champ magnétique, comme représenté en figure 7.3.. En effet, pour une précision expérimentale typique $\delta B \sim 1\,\mathrm{mG}$ sur le champ magnétique, la précision δE associée sur l'énergie des états hyperfins pour $B_0 = B^\star$ est donnée par $\delta E/h \sim \mathrm{a}\,(\delta B)^2/h \sim 10^{-3}$ Hz est très inférieure au Hz. Par ce choix judicieux de biais magnétique et des états de spin $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$, on s'affranchit de l'effet des fluctuations de champ magnétique sur la spectroscopie. [2]

7.3 Couplage entre états de spin hyperfins

La section précédente a montré que le choix des états internes $|1\rangle = |F=1, m_F=-1\rangle$ et $|2\rangle = |F=2, m_F=1\rangle$ de la spectroscopie était contraint par la configuration magnétique nécessaire à la lévitation des atomes et à la résolution en énergie de la spectroscopie.

Dans la mesure où l'écart en spin entre ces états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ est $\Delta m_F = 2$, réaliser un couplage radio-fréquence entre ces deux états nécessite donc d'utiliser une *transition à deux photons*. Dans ce qui suit, on s'attache dans un premier temps à préciser les conditions d'implémentation d'une telle transition.

2. Par ailleurs, ce champ magnétique "magique" de 3.23 G est couramment utilisé dans le cadre d'horloges atomiques au ^{87}Rb, qui utilisent la transition hyperfine $|F=1, m_F=-1\rangle \to |F=2, m_F=1\rangle$ comme transition d'horloge pour augmenter la précision de l'horloge [150].

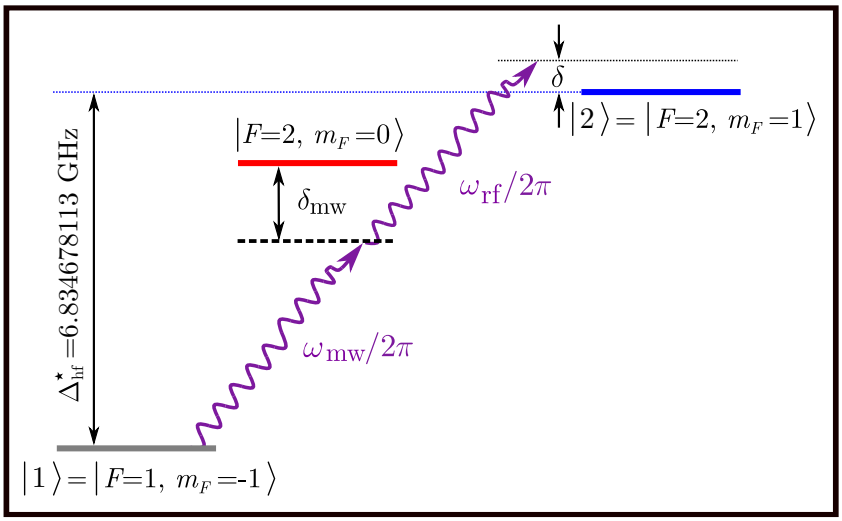

FIGURE 7.4 – **Transition hyperfine à deux photons.** En utilisant un désaccord micro-onde $\delta_{\rm mw}$ respectant la condition (7.6), il est possible de réaliser une transition à deux photons de l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$ vers l'état $|F=2, m_F=1\rangle$ sans jamais que l'état intermédiaire $|F=2, m_F=0\rangle$ ne soit sensiblement peuplé.

Dans un second temps, le dispositif expérimental utilisé pour réaliser ce transfert sera présenté. Puis, les performances de la spectroscopie selon sa résolution *spectrale* (i.e. en fréquence ou en énergie) seront présentées pour différents paramètres de transfert.

7.3.1 Transition à deux photons

Coupler les états $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$ nécessite donc un transfert à *deux photons* faisant intervenir un champ micro-onde (*microwave* en anglais, MW) d'une fréquence $\omega_{\rm mw} \sim 2\pi \times 6.8\,$GHz pour coupler les états $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=0\rangle$, ainsi qu'un champ radio-fréquence (RF) d'une fréquence de l'ordre de $\omega_{\rm rf} \sim 2\pi \times 2\,$MHz pour finalement coupler les états $|F=2, m_F=0\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$.

Cette situation est représentée en figure 7.4. On note $\delta_{\rm mw}$ le désaccord par rapport à la transition micro-onde *à un photon* entre l'état $|F=2, m_F=0\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$. On appelle $\delta = (\omega_{\rm mw} + \omega_{\rm rf})/2\pi - \Delta^\star_{\rm hf}$ le désaccord *à deux photons* par rapport à la transition à deux photons $|F=1, m_F=-1\rangle \to |F=2, m_F=1\rangle$, où $h\Delta^\star_{\rm hf} = h\Delta_{\rm hf} - {\rm b}^2/4a$ (cf expression (7.4)) est l'écart hyperfin au biais magnétique "magique" $B_0 \sim 3.23\,$G. On appellera $\Omega_{\rm mw}$ et $\Omega_{\rm rf}$ les fréquences de Rabi respectives associées à chaque fréquence de couplage.

Même si la dynamique $|\psi(t)\rangle$ d'un atome à trois niveaux est *a priori* beaucoup plus riche que celle d'un système à deux niveaux (comme présentée en section 3.2.4), il est possible de trouver une gamme de paramètre pour laquelle le système se comporte comme un système *effectif* à deux niveaux. En effet, dans la limite où :

$$|\delta_{\rm mw}| \gg \Omega_{\rm mw}, \Omega_{\rm rf}, |\delta|\,, \tag{7.6}$$

la probabilité $|\langle\psi(t)|F=2, m_F=0\rangle|^2$ pour l'atome d'occuper l'état intermédiaire $|F=2, m_F=0\rangle$ produit des oscillations de Rabi d'une fréquence $\sqrt{\Omega^2_{\rm mw} + \delta^2_{\rm mw}} \sim |\delta_{\rm mw}|$ et d'amplitude $(\Omega_{\rm mw}/\delta_{\rm mw})^2 \ll 1$ selon l'expression (3.48).

La fréquence d'oscillation de cette probabilité étant plus grande n'importe quelle autre fréquence du problème, elle pourra être considérée comme *constante* (et égale à sa moyenne temporelle) vis à vis des variations des autres quantités. Autrement dit, dans ces conditions, la population $|\langle F=2, m_F=0|\psi(t)\rangle|^2$ de l'état $|F=2, m_F=0\rangle$ est constante au cours du temps t de couplage et négligeable devant les populations des deux autres états. On peut alors montrer [11] que tout se passe comme si le système à trois niveaux se comporte comme un système à deux niveaux $|F=1, m_F=-1\rangle$ et $|F=2, m_F=1\rangle$ soumis à une excitation effective d'une fréquence Rabi *à deux photons* Ω_{eff} :

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{\Omega_{\text{mw}}\Omega_{\text{rf}}}{2\delta_{\text{mw}}}\,, \tag{7.7}$$

et d'un désaccord effectif $\delta_{\text{eff}} = \delta$ par rapport à la transition à deux photons $|F=1, m_F=-1\rangle \rightarrow |F=2, m_F=1\rangle$. Dans cette situation, on parle de *supression adiabatique* de l'état intermédiaire. La dynamique du système décrit alors des oscillations de Rabi *à deux photons* de fréquence Rabi généralisée $\Omega_{R,\text{eff}} = \sqrt{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta^2}$.

7.3.2 Dispositif de génération de fréquences

Le circuit électronique utilisé pour réaliser cette transition à deux photons est illustré en figure 7.5 a. Un synthétiseur de fréquence (*Direct Digital Synthesizer*, DDS) à double voie, programmable, permet de générer deux radio-fréquences $f_{1,2}$, chacune *ajustable à* ± 0.5 Hz *près* sur une plage allant de 0 à 100 MHz. Un signal de fréquence micro-onde $f_s = 6.910$ GHz *fixe* est généré par un synthétiseur (*BHE-BSVC14D*), puis mélangé avec le signal de fréquence f_1 pour former un signal de fréquences $f_1 \pm f_s$. Un filtre permet de s'affranchir de la composante $f_1 + f_s$ haute fréquence du signal. Le signal restant, de fréquence $\omega_{\text{mw}}/2\pi = f_s - f_1$ est alors amplifié, puis rayonné sur les atomes via une antenne dipolaire.

La deuxième voie du DDS, quant à elle, produit directement le signal RF de fréquence $\omega_{\text{rf}}/2\pi = f_2$ nécessaire à la transition à deux photons. Après amplification, le signal est envoyé dans un circuit d'adaptation d'impédance permettant d'augmenter le facteur de qualité l'élément rayonnant (ici, une bobine).

Les fréquences $f_1 \sim 78.1$ MHz et $f_2 \sim 2.8$ MHz délivrées par le DDS sont ajustées de sorte à satisfaire à la condition de résonance à deux photons $\delta = 0$:

$$f_s - f_1 + f_2 = \Delta_{\text{hf}}^{\star}\,, \tag{7.8}$$

avec un désaccord à un photon $|\delta_{\text{mw}}| \sim 500$ kHz, comme représenté en figure 7.5 b. Pour réaliser une spectroscopie, la fréquence f_1 est variée d'une quantité $\pm\delta$ correspondant au désaccord à deux photons.

7.3.3 Caractéristiques de la spectroscopie

On s'intéresse dans un premier temps aux propriétés du transfert en l'absence de *speckle*. Le transfert à deux photons a lieu après l'obtention du condensat par évaporation tout optique (cf section 3.3.5).

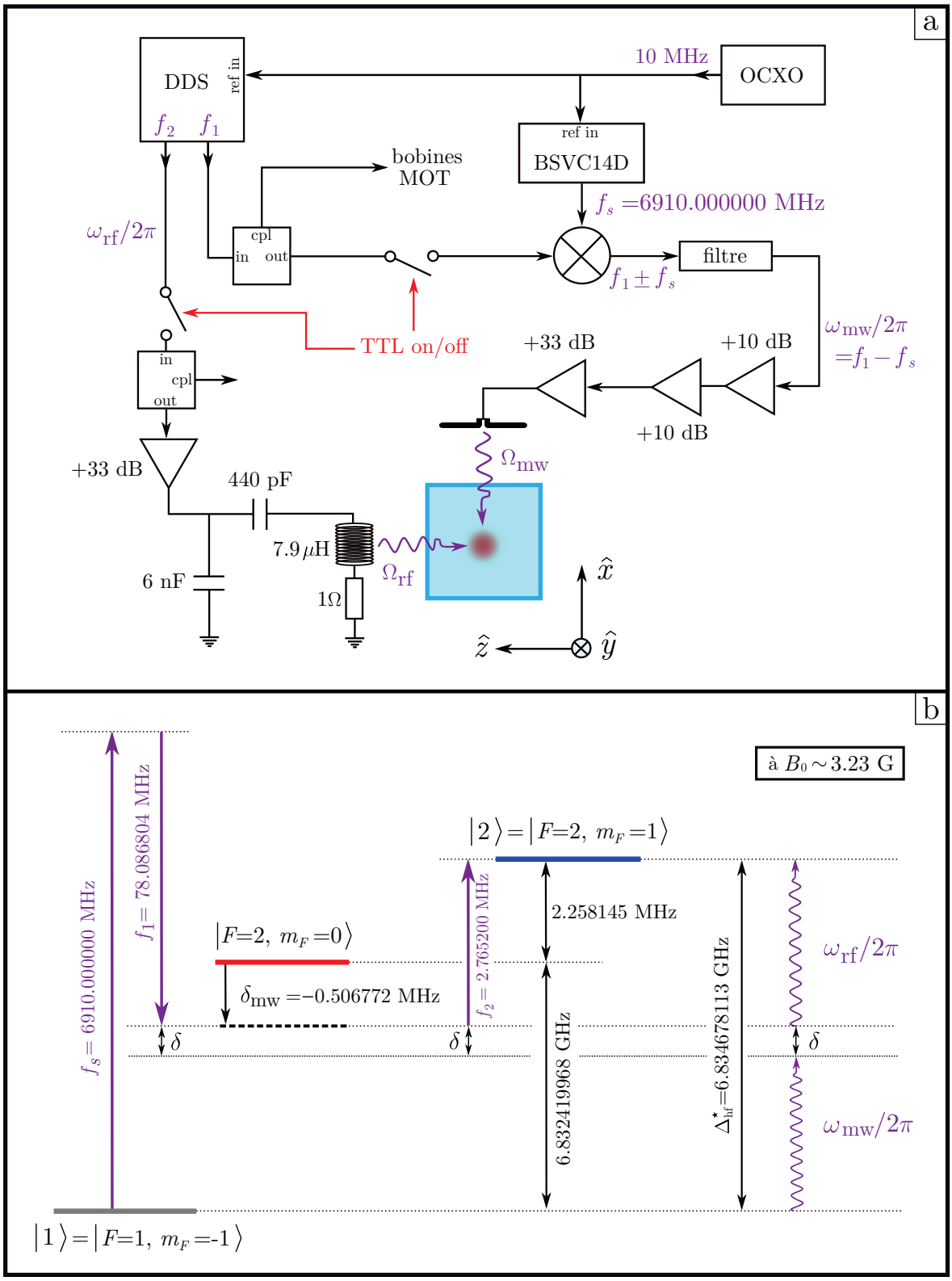

FIGURE 7.5 – **Dispositif de génération de fréquences. a.** Le DDS permet de générer des signaux de fréquence f_1 et f_2 d'amplitude variable. Une partie du signal issu de la ligne f_1 est prélevée à l'aide d'un coupleur pour l'évaporation RF au niveau de la première cellule. Un synthétiseur (BSVC14D) permet de générer la fréquence micro-onde f_s ajustable au Hz près. La stabilité en fréquence de ces sources est assurée par leur cadencement avec un oscillateur à quartz (*Oven Controlled X-tal (Crystal) Oscillator*, OCXO) faisant office de référence stabilisée. **b.** Après avoir ajusté les fréquences générées selon la condition de résonance à deux photons (7.8), une spectroscopie peut être réalisée en variant la fréquence $f_1 \pm \delta$ selon le désaccord à deux photons δ.

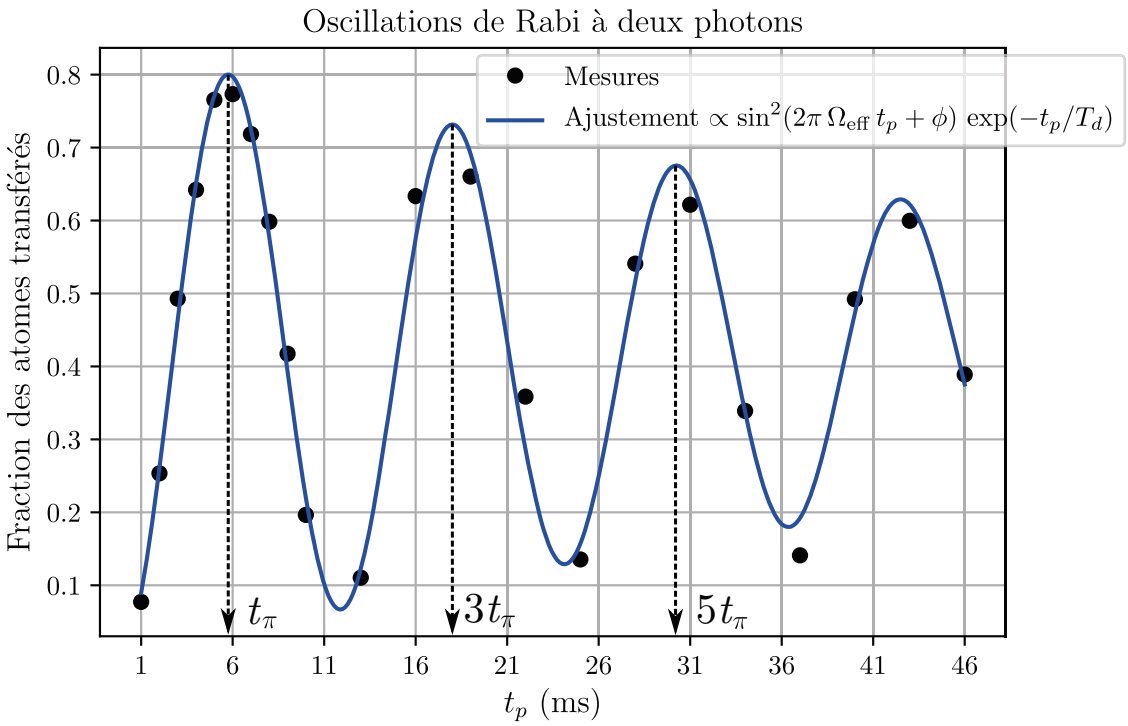

FIGURE 7.6 – **Couplage et oscillations de Rabi à deux photons.** En fonction du temps t_p d'application du *pulse* RF/MW, la fraction des atomes transférés dans l'état $|2\rangle$ (points noirs) produit des oscillations de Rabi selon (7.9) à une fréquence $\Omega_{R,\text{eff}} = \Omega_{\text{eff}}$ à résonance $\delta = 0$. Un ajustement permet d'estimer la fréquence de Rabi à $\Omega_{\text{eff}} = 40\,\text{Hz}$ et un temps de découplage à $T_d = 62\,\text{ms}$. La fraction d'atomes transférés est maximale pour un temps $t_\pi = 1/2\Omega_{\text{eff}} \sim 5\,\text{ms}$.

On rappelle qu'à l'issue de cette étape, un nuage condensé lévité de $\sim 2 \times 10^5$ atomes dans l'état $|1\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ est obtenu à la température de 5 nK. Les atomes sont maintenus dans le piège dipolaire pendant le transfert afin de garantir un couplage *homogène* du condensat. [3]

A l'issue du couplage RF-MW qui a lieu pendant une durée t_p, le nombre d'atomes (ou bien la fraction d'atomes) transférés dans l'état $|2\rangle = |F = 2, m_F = 1\rangle$ est mesurée. [4] La fraction attendue est alors donnée par l'expression (3.48) :

$$|\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta^2} \sin^2\left(\pi\sqrt{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta^2}\,t_p\right) = \pi^2\,\Omega_{\text{eff}}^2\,t_p^2\,\text{sinc}^2\left(\pi\sqrt{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta^2}\,t_p\right), \quad (7.9)$$

Oscillations de Rabi à deux photons

En fixant le désaccord δ et en faisant varier la durée t_p du *pulse* de champ RF/MW, on peut produire des oscillations de Rabi *à deux photons* de la population d'atomes dans l'état $|2\rangle$, dont un exemple est représenté en figure 7.6.

3. En effet, sans le piège croisé, les atomes s'étalent dans le potentiel magnétique de lévitation (7.2). Le gradient magnétique b' a alors pour effet de faire varier spatialement le désaccord à un photon δ_{mw} autour de la position du condensat, et donc la fréquence de Rabi à deux photons $\Omega_{\text{eff}} = \Omega_{\text{mw}}\Omega_{\text{rf}}/2\delta_{\text{mw}}$. Cela se traduit par une densité d'atomes transférés inhomogène spatialement montrant des franges claires et sombres.

4. En l'absence de faisceau "repompeur" pour l'imagerie par fluorescence, les atomes dans l'état $|2\rangle$ peuvent être sélectivement imagés par rapport à ceux restés dans l'état $|1\rangle$.

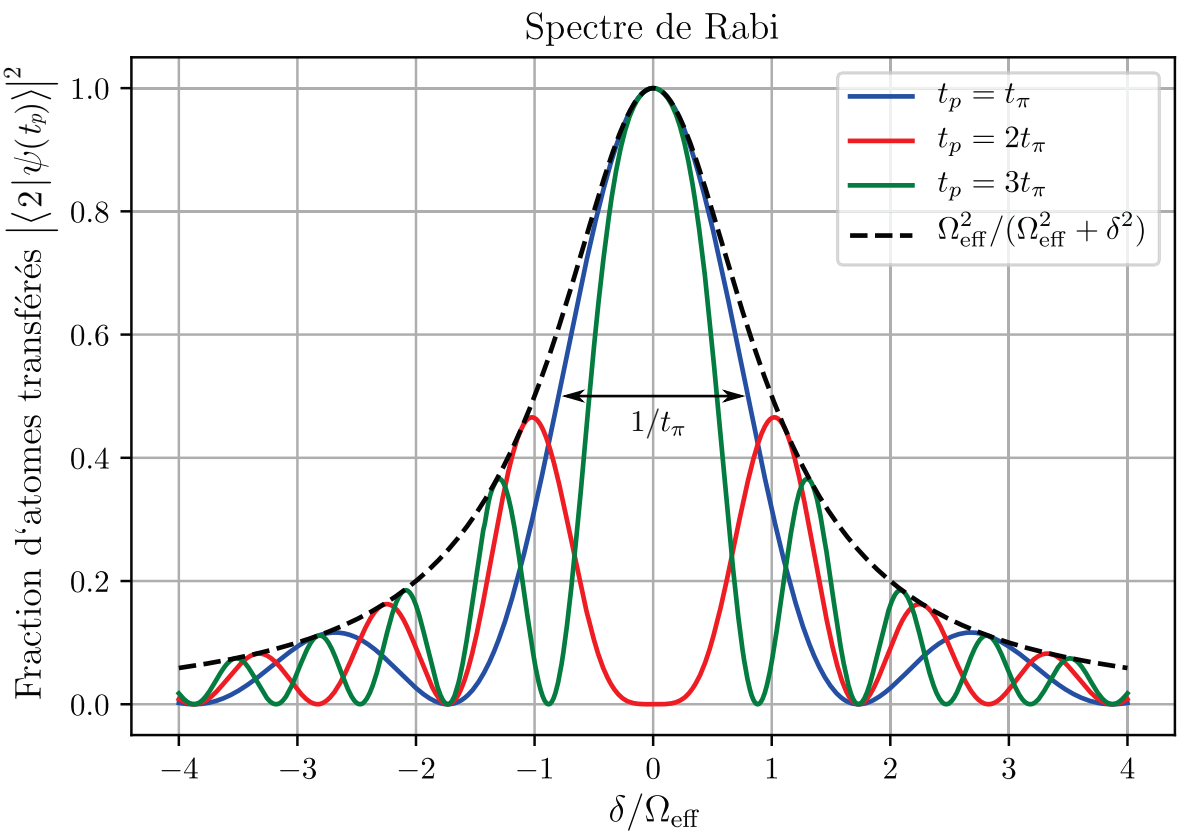

FIGURE 7.7 – **Spectre d'excitation de Rabi.** Représentation de l'expression (7.9) pour différentes durées t_p de couplage. La hauteur des *maxima* de couplage délimite un lorentzienne de largeur $2\Omega_{\text{eff}}$ (courbe noire pointillée). Un maximum *global* de couplage n'est atteint en $\delta = 0$ que pour des temps t_p respectant la condition (7.10) (courbes bleue et verte). Lorsque les lobes latéraux sont peu peuplés (courbe bleue), la largeur spectrale du transfert est fixée par la largeur du lobe central en $1/t_p$.

Cet exemple représente la situation où le DDS délivre le maximum de puissance possible pour les signaux de fréquence $f_1 \sim 78.1\,\text{MHz}$ et $f_2 \sim 2.8\,\text{MHz}$ ajustés selon la résonance à deux photons (7.8). La fréquence de Rabi maximale applicable aux atomes avec le montage décrit en figure 7.5 est donc de $\Omega_{\text{eff}} = 40\,\text{Hz}$ (cf courbe bleue).

Spectre de Rabi

On peut aussi caractériser la spectroscopie obtenue en faisant varier le désaccord δ à t_p *fixé*. La forme du spectre attendue est toujours donnée par l'expression (7.9), qui est représentée en figure 7.7. *A priori*, la largeur en fréquence $\delta E/h$ du spectre semble être fixée par la largeur $2\Omega_{\text{eff}}$ du terme lorentzien dans l'expression (7.9) (cf courbe pointillée). Néanmoins, on constate que la fraction d'atomes transférés n'est maximale en $\delta = 0$ que pour des durées t_p telles que [11] :

$$t_p = (2n-1)\,t_\pi \quad \text{avec} \quad t_\pi = 1/2\Omega_{\text{eff}},\ \forall n \in \mathbb{N}^* . \tag{7.10}$$

D'un point de vue spectroscopique, il est donc préférable de choisir $t_p \sim t_\pi$ (courbe bleue, figure 7.7). Dans cette situation, les lobes latéraux du sinus cardinal restent peu peuplés tout en conservant un maximum de couplage en $\delta = 0$. La largeur en fréquence $\delta E/h$ du spectre est alors limitée par la largeur du lobe principal proportionnelle à $1/t_p$.

En conclusion, la durée t_p de couplage (avec une fréquence de Rabi Ω_{eff} adaptée selon (7.10)) permet de définir la *résolution en énergie* δE avec laquelle les atomes sont couplés vers l'état

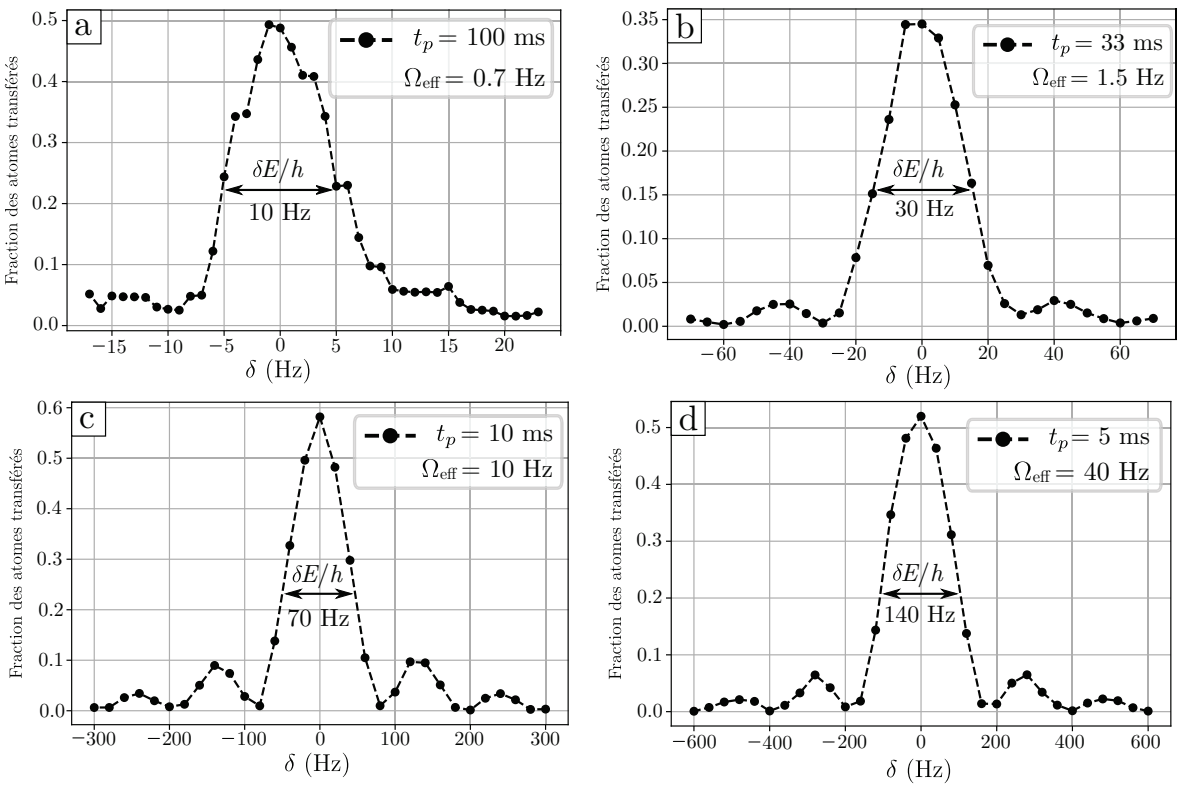

FIGURE 7.8 – **Spectroscopies en l'absence de désordre.** Spectres de Rabi expérimentaux pour différents couples $(\Omega_{\text{eff}}, t_p)$. La largeur en $1/t_p$ du lobe central de chaque courbe définit la *résolution* $\delta E \sim h/t_p$ de la spectroscopie. Dans la suite, quatre résolutions en fréquence différentes pourront être utilisées : **a.** 10 Hz, **b.** 30 Hz, **c.** 70 Hz et **d.** 140 Hz.

final $|2\rangle$. En figure 7.8 sont représentés quelques exemples de spectre de Rabi mesurés expérimentalement en faisant varier le désaccord δ, pour différents couples $(\Omega_{\text{eff}}, t_p)$ adaptés à la condition (7.10). Les résolutions en fréquence associées $\delta E/h \sim 1/t_p$ peuvent être variées de 10 Hz à 140 Hz, tout en garantissant un maximum d'atomes transférés pour $\delta = 0$, et donc, un rapport signal sur bruit plus grand pour la mesure de la fraction d'atomes transférés.

7.3.4 Ajustement du biais magnétique "magique" $B_0 \sim 3.23$ G

Le fait que la résolution de la spectroscopie soit limitée par le temps de transfert t_p est rendu possible par l'insensibilité du transfert aux fluctuations de champ magnétique (section 7.2). Pour ce faire, la transition à deux photons doit être effectuée à un biais magnétique précis $B_0 = B^\star \sim 3.23$ G.

La particularité de ce biais B_0 "magique" est que la fréquence de transition à deux photons $(\omega_{\text{mw}} + \omega_{\text{rf}})/2\pi = \Delta E_{1,2}/h$ entre les deux états couplés $|1\rangle$ et $|2\rangle$ y est *minimale*, comme représenté en figure 7.3. Si la condition (7.10) est respectée, cette fréquence de transition est repérée par le centre du spectre de Rabi (7.9), là où la fraction d'atomes couplés est maximale.

Expérimentalement, le biais magnétique au niveau des atomes peut être ajusté en changeant le courant I_A dans une des bobines de biais (cf figure 3.15). Une manière d'ajuster un biais $B_0 = B^\star$ au niveau des atomes est donc de mesurer la fréquence correspondant au maximum du spectre de Rabi en fonction du courant I_A.

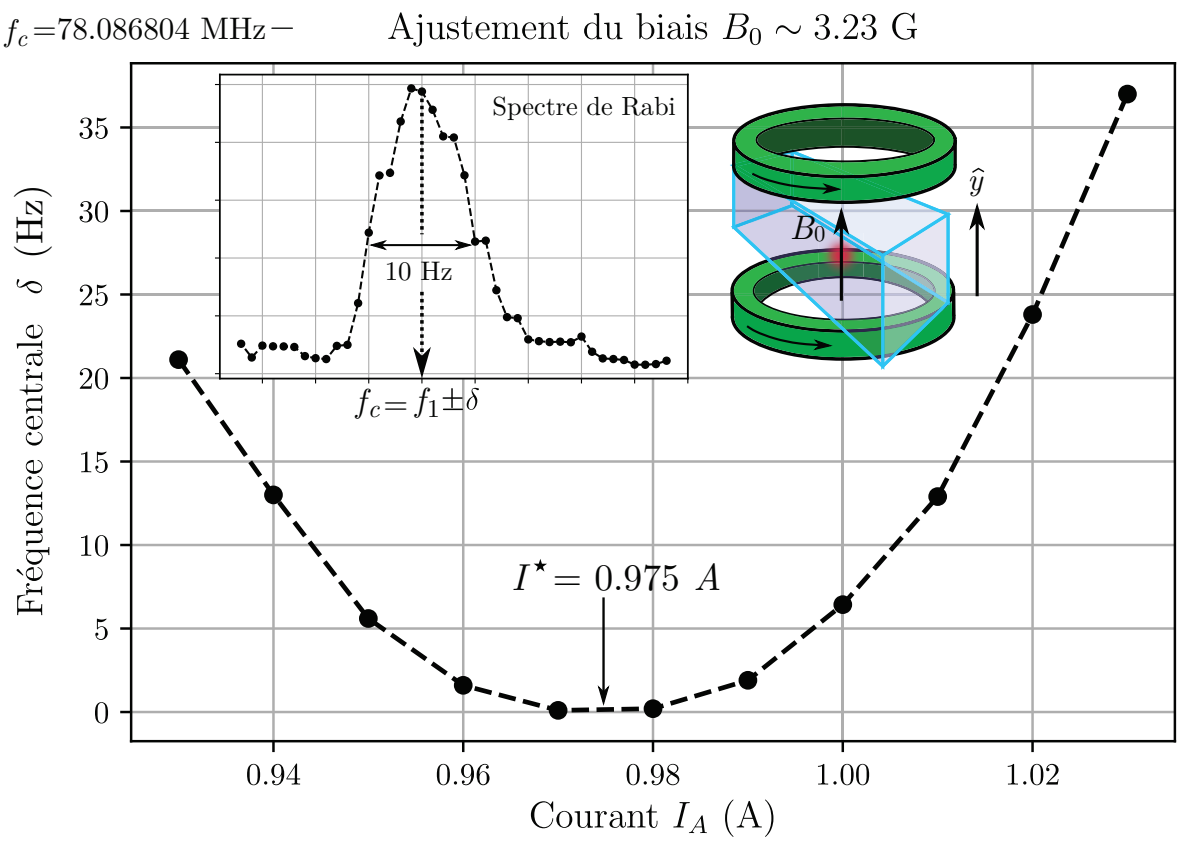

FIGURE 7.9 – **Ajustement du biais magnétique "magique" $B^\star$ au niveau des atomes.** Une spectroscopie de Rabi à 10 Hz de résolution est réalisée pour différents courants parcourant une des bobines de biais utilisées pour la lévitation. Un biais "magique" $B^\star$ est obtenu au courant $I^\star = 0.975\,A$ qui minimise la fréquence centrale f_c de la spectroscopie à deux photons (cf encart). Ceci permet d'ajuster la fréquence f_1 à la résonance à deux photons $f_1 = 78.086804$ MHz.

Le champ "magique" $B^\star$ est alors atteint au courant $I_A = I^\star$ correspondant au minimum de la fréquence de transition à deux photons, comme représenté en figure 7.9. [5]

7.3.5 Effet des interactions inter-atomiques

Jusqu'à présent, la spectroscopie n'a été présentée que sous la forme d'un couplage entre deux niveaux d'atomes *indépendants*. Or, en pratique, les atomes interagissent les uns avec les autres au sein du condensat, comme cela a été présenté en section 3.1.2. Une question serait donc de savoir dans quelle mesure ces interactions vont influer sur la spectroscopie.

Dans le régime de Thomas-Fermi (section 3.1.3), on avait vu que le potentiel de champ moyen $g\,n(\mathbf{x})$ associé aux interactions entre les particules écrantait le potentiel externe $V(\mathbf{x})$, en l'occurrence ici, le potentiel associé au piège dipolaire. On pouvait ainsi commodément considérer chaque particule individuelle comme étant soumise à un potentiel homogène égal au potentiel chimique μ.

Par ailleurs, on avait vu en section 3.1.2 que le paramètre d'interaction g était déterminé par la longueur de diffusion a_s inter-atomique, tel que $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$.

5. Dans ces conditions d'expériences, la lévitation des atomes est réalisée pour des courants $I_G = 44.38$ A et $I_B = 0$.

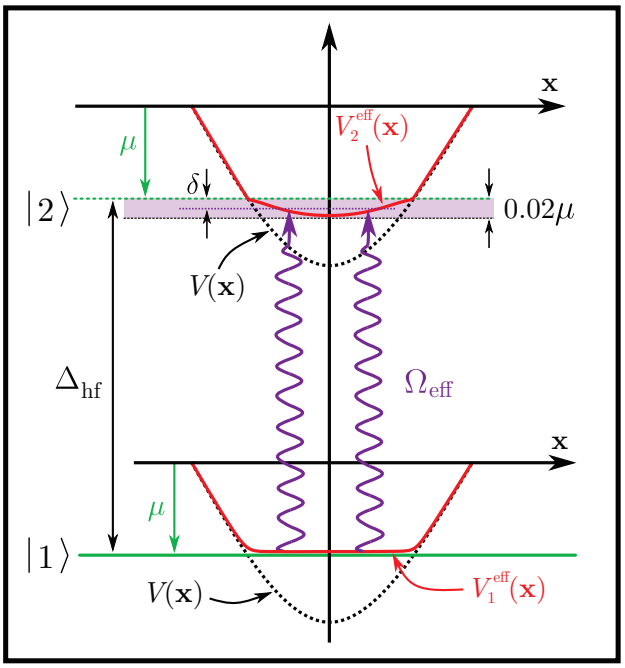

FIGURE 7.10 – **Effet des interactions inter-atomiques sur la spectroscopie.** Alors que le potentiel (7.11) soumis aux atomes du condensat dans l'état $|1\rangle$ est parfaitement homogène par écrantage de Thomas-Fermi, celui soumis aux atomes transférés dans l'état $|2\rangle$ est légèrement harmonique du fait de la différence de champ moyen $(g_{12} - g_{11})\, n_1$ entre les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Ce potentiel $V_2^{\text{eff}}(\mathbf{x})$ résiduel est à l'origine d'un élargissement de la spectroscopie de l'ordre de $(1 - g_{12}/g_{11})\, \mu \sim 0.02\, \mu$.

Cette longueur de diffusion *dépend de l'état interne* $|F, m_F\rangle$, autrement dit, pour tout couple (i, j) d'états internes $|F, m_F\rangle$ il existe une longueur de diffusion a_{ij} et un paramètre d'interaction g_{ij} différents associés.

Les atomes dans l'état $|1\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ appartenant au condensat sont affectés par un potentiel de champ moyen $g_{11}\, n_1$, où n_1 est la densité du condensat. Le potentiel effectif V_1^{eff} soumis aux atomes dans l'état $|1\rangle$ s'écrit donc :

$$V_1^{\text{eff}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + g_{11}\, n_1(\mathbf{x}) = \mu \quad \text{i.e.} \quad n_1(\mathbf{x}) = (\mu - V(\mathbf{x}))/g_{11}\,. \tag{7.11}$$

Une fois les atomes transférés dans l'état $|2\rangle = |F = 2, m_F = 1\rangle$, deux nouvelles interactions sont à prendre en compte :

- ⋆ Le terme $g_{22}\, n_2$ qui correspond au champ moyen de la fraction d'atomes transférés vers l'état $|2\rangle$, d'une densité n_2.

- ⋆ Le terme $g_{12}\, n_1$ qui correspond au champ moyen vu par la fraction d'atomes transférés vers l'état $|2\rangle$, qui est toujours en interaction avec les atomes du condensat restés dans l'état $|1\rangle$.

S'il on suppose que le nombre d'atomes transférés dans l'état $|2\rangle$ (ainsi que la densité n_2 associée) reste "faible", on pourra considérer que la spectroscopie ne change quasiment pas la densité n_1 du condensat. Dans le même temps, le premier terme $g_{22}\, n_2$ d'interaction sera supposé négligeable devant les autres échelles d'énergie. Alors, le potentiel effectif V_2^{eff} associé aux atomes dans l'état $|2\rangle$ s'écrit :

$$V_2^{\text{eff}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + g_{12}\, n_1(\mathbf{x}) = \frac{g_{12}}{g_{11}}\, \mu + (1 - g_{12}/g_{11})\; V(\mathbf{x})\,, \tag{7.12}$$

le potentiel $V(\mathbf{x})$ associé au piège croisé étant essentiellement le même pour les deux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Lors du transfert, les atomes sont donc individuellement couplés depuis le niveau homogène du condensat vers les états harmoniques supportés par le potentiel résiduel $V_2^{\text{eff}}(\mathbf{x})$, comme représenté en figure 7.10. Ces états ne pouvant être résolus dans le régime de Thomas-Fermi (cf condition (3.24)), à chaque point du potentiel $V_2^{\text{eff}}(\mathbf{x})$ est associé une condition de résonance. Il y a donc couplage entre les deux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sur une largeur en énergie $\delta E \sim (1 - g_{12}/g_{11})\,\mu$. Autrement dit, le couplage à ce potentiel $V_2^{\text{eff}}(\mathbf{x})$ résiduel se traduit par un *élargissement du spectre* à deux photons.

Par chance, pour le ^{87}Rb, les longueurs de diffusion a_{11} et a_{12} sont très similaires : $a_{11} = 100\,a_0$ et $a_{12} = 98\,a_0$, où a_0 est le rayon de Bohr, soit $g_{12}/g_{11} \sim 0.98$. De fait, l'élargissement δE de la résonance dû aux interactions reste faible devant les autres sources d'élargissement : en effet, $\delta E/h \sim (1 - g_{12}/g_{11})\,\mu/h \sim 2\,\text{Hz}$. Dans la suite, on pourra donc négliger l'influence du potentiel $V_2^{\text{eff}}(\mathbf{x})$ et considérer que le transfert de l'état $|1\rangle$ vers l'état $|2\rangle$ à lieu entre deux niveaux spatialement homogènes.

7.4 Calibration photométrique de l'amplitude du désordre

Implémenter une spectroscopie pouvant résoudre des différences d'énergie de l'ordre du Hz a imposé de choisir les états $|1\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|2\rangle = |F = 2, m_F = 1\rangle$ pour réaliser le couplage RF. Comme explicité en section 7.1, la méthode retenue dans le cadre de ces travaux pour produire un potentiel désordonné sélectif en spin est celle du *speckle quasi-résonant*. Évaluer le potentiel dipolaire $V_{1,2}(\mathbf{x})$ généré sur chacun de ces états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ nécessite donc de tenir compte du détail de la structure hyperfine de l'état excité $5^2P_{3/2}$ (cf figure 3.5).

Cette section a pour but de calibrer l'amplitude du désordre appliqué aux atomes uniquement sur la base de données optiques (désaccords, intensité du laser). On donnera, d'abord, une expression généralisée du potentiel dipolaire (3.37) prenant en compte l'influence de plusieurs transitions. Ensuite, on verra comment la spectroscopie RF mise en place précédemment permettra d'ajuster les désaccords laser du *speckle* par rapport aux transitions atomiques. Enfin, une calibration de l'amplitude du désordre associé à la figure de *speckle* sera donnée sur la base de mesures de puissances optiques.

7.4.1 Potentiel dipolaire pour un atome à plusieurs transitions

S'il on considère l'ensemble des transitions optiques $|F, m_F\rangle \to |F', m_{F'}\rangle$ de la raie D_2 du ^{87}Rb, le potentiel dipolaire créé sur un état fondamental $|F, m_F\rangle$ est donné par la somme des contributions de chaque transition vers un état excité. Comme cela avait été explicité en section 4.2.1, le montage de mise en forme du faisceau du *speckle* permet un filtrage de la polarisation de sorte que celle-ci soit *linéaire* selon l'axe de $\hat{y}$ de polarisation magnétique des atomes. En ne considérant que des transitions optiques π (i.e. telles que $m_{F'} = m_F$) le potentiel dipolaire total associé à chaque état $|1\rangle$ et $|2\rangle$ est donné par :

$$V_2 = \frac{3c^2\Gamma\, I}{2\omega_0^3}\left(\frac{1}{40\,\Delta_{2,1}} + \frac{1}{24\,\Delta_{2,2}} + \frac{4}{15\,\Delta_{2,3}}\right), \tag{7.13}$$

et :

$$V_1 = \frac{3c^2\Gamma\, I}{2\omega_0^3}\left(\frac{5}{24\,\Delta_{1,1}} + \frac{1}{8\,\Delta_{1,2}}\right), \tag{7.14}$$

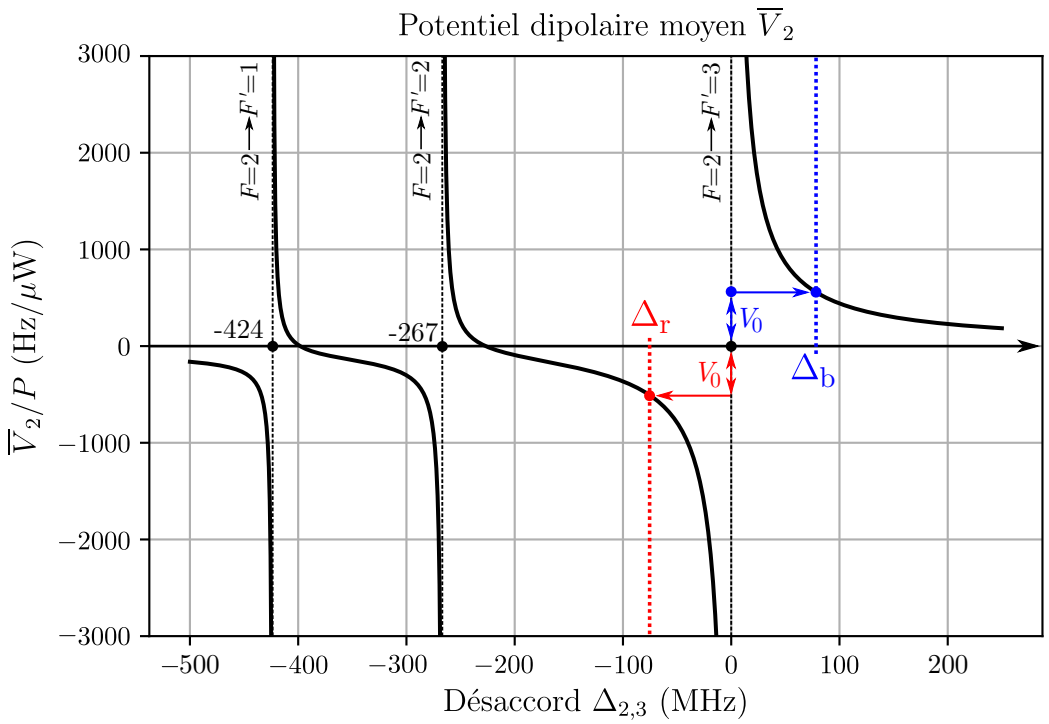

FIGURE 7.11 – **Moyenne du potentiel désordonné en fonction du désaccord selon l'expression (7.13).** Comme indiqué en section, l'intensité moyenne $\bar{I}$ est estimée pour une puissance de référence $P = 1\,\mu$W telle que $\bar{I} = 2P/\pi\sigma_{\text{ex}}^2$. Le potentiel dipolaire diverge lorsque le laser utilisé est à résonance avec l'atome, chaque transition atomique étant donc clairement identifiable. Le choix d'un désaccord négatif $\Delta_r < 0$ ou positif $\Delta_b > 0$ permet de générer respectivement un désordre attractif ($\overline{V}_2 = -V_0 < 0$) ou répulsif ($\overline{V}_2 = V_0 > 0$).

où les $\Delta_{F,F'}$ désignent les désaccords (en Hz), associés à chaque transition $|F, m_F\rangle \to |F', m_{F'}\rangle$. Quelques éléments de détails de calculs permettant d'obtenir les expressions (7.13) et (7.14) pourront être trouvés en annexe B.

Le désordre généré sur les atomes est bien sélectif en état de spin $|F, m_F\rangle$ dans le cas où $|\Delta_{F,F'}| \ll \Delta_{\text{hf}}$ puisqu'on a alors :

$$\left|\overline{V}_1\right| \ll \left|\overline{V}_2\right| \quad \text{avec} \quad \overline{V}_1 \sim \frac{1}{\Delta_{\text{hf}}} \quad \text{et} \quad \overline{V}_2 \sim \frac{1}{\Delta_{2,F'}}\,. \tag{7.15}$$

Si l'on choisit le désaccord $\Delta_{2,3}$ comme référence,[6] on peut représenter la dépendance de la moyenne du désordre $\overline{V}_2$ sur l'état $|2\rangle = |F = 2, m_F = 1\rangle$ selon la figure 7.11. Pour un désaccord $\Delta_{2,3}$ allant jusqu'à environ ± 200 Hz autour de la transition $|F = 2, m_F = 1\rangle \to |F' = 3, m_F = 1\rangle$, on voit que l'on peut soumettre l'état $|2\rangle$ à un désordre attractif ($\Delta_{2,3} = \Delta_r < 0$) ou répulsif ($\Delta_{2,3} = \Delta_b > 0$).

7.4.2 Calibration des désaccords laser symétriques en amplitude de désordre

Travailler proche d'une résonance nécessite un contrôle sur la fréquence du laser d'une précision meilleure que la largeur naturelle Γ de la transition, ici $\Gamma \sim 2\pi \times 6$ MHz.

6. Les autres $\Delta_{F,F'}$ s'en déduisent via la structure hyperfine de l'état excité $|F'\rangle$, comme indiqué en figure 3.5.

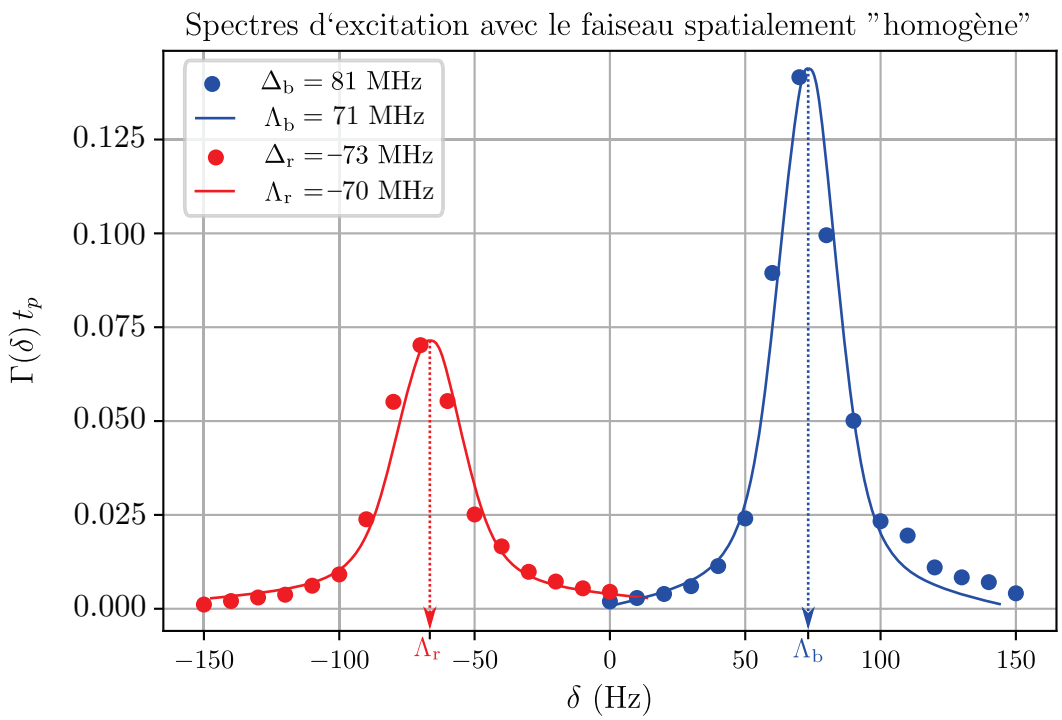

FIGURE 7.12 – **Déplacements lumineux du spectre d'excitation avec un faisceau "homogène".** Les spectres sont obtenus avec le couplage de 10 Hz de résolution ($\Omega_{\text{eff}} = 0.7$ Hz, $t_p = 100$ ms) du condensat vers l'état $|2\rangle$ soumis à un potentiel dipolaire V_2 quasiment homogène spatialement. Leur *maxima* (ajustés par une courbe lorentzienne) donne la valeur du déplacement lumineux $\Lambda = V_2/h$ associé. A une unique puissance $P \sim 200$ nW fixée, les désaccords laser $\Delta_r = -73$ MHz et $\Delta_b = 81$ MHz produisent respectivement les déplacements lumineux $\Lambda_r = -70$ MHz et $\Lambda_b = 71$ MHz symétriques.

Expérimentalement, ceci est garanti par l'asservissement par battement du laser Toptica utilisé pour produire la figure de *speckle* avec le laser L2, laser dont la fréquence est elle même stabilisée sur une absorption saturée, comme représenté en figure 3.8.

Dans un premier temps, il faut choisir un couple de désaccords $\Delta_{2,3} = \Delta_r < 0$ et $\Delta_{2,3} = \Delta_b > 0$ permettant de produire des désordres respectivement attractif et répulsif de même amplitude, c'est à dire tels que $\overline{V}_2(\Delta_r) = -\overline{V}_2(\Delta_b)$ pour une seule et même puissance P de laser. De fait, on s'assurera dans la suite qu'il n'y a qu'une seule et même calibration en fonction de l'intensité $\bar{I}$ de la figure de *speckle*, que le désordre associé soit attractif ou répulsif.

Pour ce faire, on réalise une spectroscopie RF en allumant un faisceau spatialement "homogène".[7] Ce faisceau est obtenu à partir de la même source laser que celle utilisé pour générer la figure de *speckle*, mais ne traverse pas le diffuseur, comme indiqué en figure 4.5. Ce faisceau "homogène" confère une énergie potentielle dipolaire $V_2 = h\Lambda$ aux atomes dans l'état $|2\rangle$, ce qui se manifeste sous la forme d'un *déplacement lumineux* d'une quantité Λ du spectre d'excitation à deux photons.

Les taux de couplage d'une spectroscopie à 10 Hz de résolution (cf figure 7.8 a.) avec le faisceau "homogène" sont représentés en figure 7.12. La courbe rouge représente le spectre d'excitation obtenu avec un désaccord laser $\Delta_r = -73$ MHz, et la courbe bleue avec un désaccord $\Delta_b = 81$ MHz.

7. Du point de vue de la séquence expérimentale, le faisceau "homogène" est allumé en même temps que le champ RF-MW permettant de coupler les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$.

Dans les deux cas, une seule et même puissance $P \sim 200\,\mathrm{nW}$ de faisceau "homogène" a été utilisée. Le déplacement lumineux Λ associé à chaque courbe est repéré par son maximum. Un ajustement lorentzien de chaque courbe donne des déplacements lumineux $\Lambda_\mathrm{r} = -70\,\mathrm{MHz}$ et $\Lambda_\mathrm{b} = 71\,\mathrm{MHz}$ compatibles avec la condition de symétrie $\Lambda_\mathrm{b} = -\Lambda_\mathrm{r}$.

A partir des expressions (7.13) et (7.14), on peut estimer l'amplitude du désordre exercé sur chaque état de spin $|1\rangle$ et $|2\rangle$, et s'assurer de la sélectivité du désordre. Pour les désaccords $\Delta_\mathrm{r} = -73\,\mathrm{MHz}$ et $\Delta_\mathrm{b} = 81\,\mathrm{MHz}$ précédemment choisis, on obtient :

$$\left|\overline{V}_2\right| / \left|\overline{V}_1\right| \sim 70\,, \tag{7.16}$$

ce qui est satisfaisant.

7.4.3 Calibration photométrique de l'amplitude du désordre

Maintenant que les désaccords laser appropriés ont été fixés, la détermination de l'amplitude du désordre passe par l'évaluation de l'intensité moyenne $\overline{I}$ du *speckle au niveaux des atomes*. Comme il n'est pas possible de mesurer la puissance P de faisceau *speckle* au niveau des atomes, on se contentera dans un premier temps de mesurer la puissance P_mes *avant* le diffuseur. Comme indiqué en figure 4.5, la puissance P_mes du faisceau peut être correctement stabilisée à l'aide de la rétro-action sur l'AOM pour des valeurs allant de $30\,\mathrm{nW}$ à $50\,\mu\mathrm{W}$ (valeurs stables au % près environ).

On peut néanmoins tenter d'estimer la puissance P au niveau des atomes à partir de P_mes en prenant en compte les éventuelles sources de pertes de puissance lorsque le faisceau traverse les différents éléments optiques. On définit alors un coefficient de transmission optique τ_o tel que :

$$P = \tau_o\, P_\mathrm{mes} \quad \text{où} \quad \tau_o \sim 0.61 \tag{7.17}$$

qui tient compte de la transmission des différents éléments optiques (qui sont tous sensés être traités "anti-reflet" à $780\,\mathrm{nm}$), et du fait qu'une partie du faisceau est coupée par la monture du diffuseur (cf figure 4.6). [8]

On peut donc réaliser une calibration préliminaire "photométrique", c'est à dire uniquement basée sur les mesures de P_mes et l'estimation de P qui en découle par (7.17). En figure 7.13 est représentée la moyenne du potentiel dipolaire $\overline{V}_2$ déterminée selon (7.13) en fonction de la puissance mesurée P_mes pour les désaccords $\Delta_\mathrm{r} = -73\,\mathrm{MHz}$ (courbe rouge) et $\Delta_\mathrm{b} = 81\,\mathrm{MHz}$ (courbe bleue). Les calibrations associées donnent la moyenne (en Hz) du désordre soumis aux atomes pour chaque μW de puissance P_mes mesurée.

Cette calibration est assez indirecte car reposant sur une estimation *a priori* du coefficient τ_o. Mais on verra dans la suite comment les mesures de fonctions de spectrales comparées avec des simulations numériques permettront de quantifier l'erreur qui a été faite sur l'estimation (8) de τ_o et donc d'affiner la calibration photométrique.

8. La transmission d'un faisceau gaussien de waist $\mathrm{w} = 14.6\,\mathrm{mm}$ au travers d'une ouverture circulaire de rayon $r = 11.5\,\mathrm{mm}$ est donnée par $1 - \mathrm{e}^{-2r^2/\mathrm{w}^2}$. La transmission du diffuseur a, quant à elle, été estimée à 92.5%. En estimant à 99% la transmission de chaque élément optique (miroirs et lentilles) traversé par le faisceau entre le point de mesure de P_mes et la chambre à vide (chaque interface de la cellule en verre), on obtient une transmission totale :

$$\tau_o \sim 0.99^{10} \times 0.925 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-2r^2/\mathrm{w}^2}\right) = 0.61\,.$$

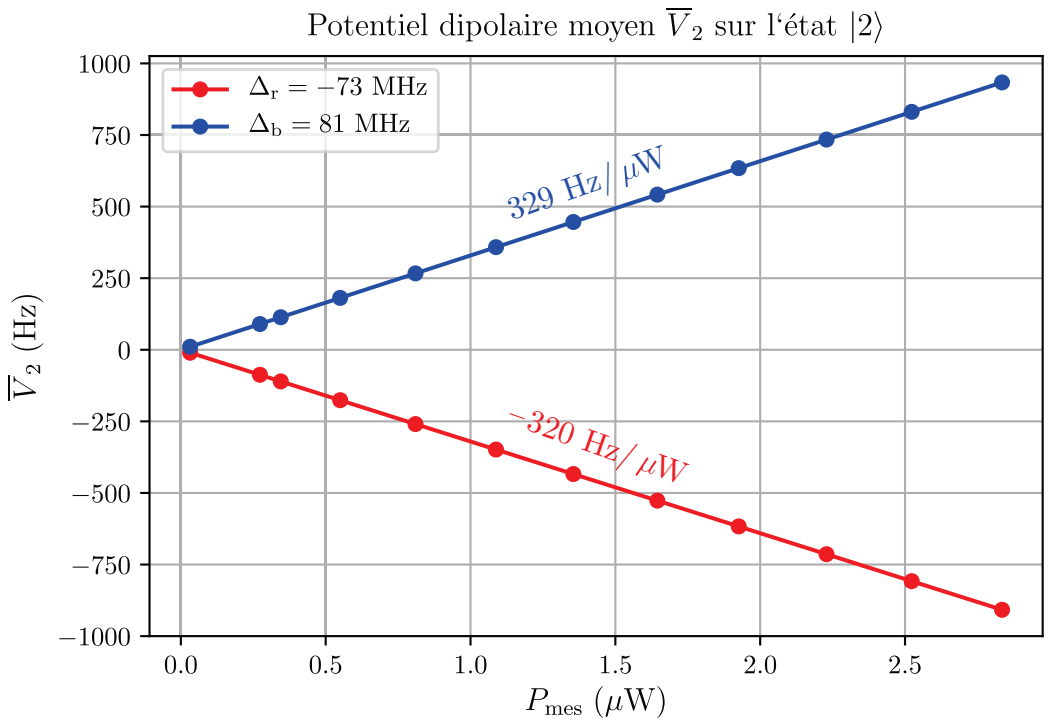

FIGURE 7.13 – **Calibration photométrique de l'amplitude du désordre.** Le potentiel dipolaire moyen $\overline{V}_2$ est calculé à partir de l'expression (7.13) pour un désordre attractif ($\Delta_r = -73$ MHz, courbe rouge) et répulsif ($\Delta_b = 81$ MHz, courbe bleue). L'intensité moyenne a été ici évaluée selon $\bar{I} = 2\tau_o P_{mes}/\pi\sigma_{ex}^2$. Une régression linéaire permet d'ajuster les calibrations -320 Hz/μW pour un désordre attractif, et 329 Hz/μW pour un désordre répulsif.

7.5 Modélisation du couplage entre le condensat et le potentiel désordonné

Comme on l'a vu dans la section précédente, un choix judicieux du désaccord du laser utilisé pour générer la figure de *speckle* permet d'appliquer un désordre sélectif en état atomique interne $|\overline{V}_2| \gg |\overline{V}_1|$, comme représenté en figure 7.1. En l'absence de désordre, on avait vu en section 7.3.3 que la dynamique de couplage par le champ RF-MW des états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ était très bien décrite par la dynamique d'un système à deux niveaux produisant des oscillations de Rabi (cf figure 7.6). En revanche, la présence du désordre $V_2(\mathbf{x})$ appliqué sur l'état $|2\rangle$ va, quant à elle, générer un *continuum* de nouveaux états d'énergie $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ accessibles via la spectroscopie.

Dans un premier temps, le but de cette section sera de préciser sous quelles conditions le taux de couplage de la spectroscopie est effectivement directement relié à la fonction spectrale d'un atome dans un potentiel *speckle*. Dans un second temps, on abordera succinctement les méthodes numériques développées par D.Delande et M.Pasek qui seront utilisées pour reproduire les résultats expérimentaux.

7.5.1 L'outil de base : la règle d'or de Fermi

Si l'on suppose dans un premier temps que les éventuels effets dûs au désordre résiduel $V_1(\mathbf{x})$ appliqué sur l'état $|1\rangle$ du condensat sont négligeables (cf section 7.6.6), la situation qu'il faut considérer est celle d'un couplage par le champ RF-MW d'atomes dans un état discret initial $|i\rangle = |1\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle$ vers un continuum d'états $|f\rangle = |2\rangle \otimes |E_\alpha\rangle$, où $|\mathbf{0}\rangle$ désigne l'état fondamental dans lequel sont condensés les atomes (cf section 3.1).

Lorsque le couplage RF-MW, représenté par l'opérateur $\hat{W}(t) = \hat{W}_0 \cos((\omega_{\text{rf}} + \omega_{\text{mw}})t)$, peut être traité perturbativement par rapport aux autres échelles d'énergies intrinsèques au système, on peut montrer [82] que la dynamique attendue de la probabilité d'occupation de l'état $|2\rangle$ au cours du temps ne correspond plus aux oscillations de Rabi mais à une saturation exponentielle :

$$|\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 \propto 1 - \mathrm{e}^{-\Gamma t}\,. \tag{7.18}$$

où Γ est le *taux de couplage* au continuum. Si l'on se limite à des durées t_p de couplage RF-MW suffisamment courtes telles que $t_p \ll 1/\Gamma$, la population de l'état $|2\rangle$ (7.18) ne sature pas et est alors bien décrite par un développement à l'ordre 1 de (7.18), tel que :

$$|\langle 2|\psi(t_p)\rangle|^2 \underset{\Gamma\, t_p \ll 1}{\sim} \Gamma\, t_p\,. \tag{7.19}$$

Autrement dit, à temps de *pulse* t_p *fixe* dans ce régime, la population $|\langle 2|\psi(t_p)\rangle|^2$ de l'état $|2\rangle$ est directement proportionnelle à Γ.

Toujours dans la situation où le couplage RF-MW peut être traité perturbativement, on peut montrer que le taux de couplage Γ, pour une durée t_p de pulse RF-MW fixée, est donné par la *règle d'or de Fermi* [82] :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f|\hat{W}_0|i\rangle|^2\, \delta_{t_p}(E_f - E_i - \hbar(\omega_{\text{rf}} + \omega_{\text{mw}})) \tag{7.20}$$

où $\delta_{t_p}(E) = t_p\, \mathrm{sinc}^2(E\, t_p/2\hbar)/2\pi\hbar$, E_i et E_f sont les énergies respectives de l'état initial $|i\rangle$ et de l'état final $|f\rangle$ adressé.

La fonction $\delta_{t_p}(E)$ possède une largeur en énergie qui limite la résolution de la spectroscopie par la durée du couplage $\delta E \sim h/t_p$. Dans la limite des temps de couplage longs $t_p \to +\infty$, le maximum $t_p/2\pi\hbar$ en $E = 0$ et la largeur en énergie $2\pi\hbar/t_p$ du lobe principal de la fonction $\delta_{t_p}(E)$ tendent respectivement vers $+\infty$ et 0. De plus, pour tout temps t_p, la fonction $\delta_{t_p}(E)$ reste normée telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E\, \delta_{t_p}(E) = 1\,. \tag{7.21}$$

De fait, pour des temps de *pulse* t_p suffisamment longs, la fonction $\delta_{t_p}(E)$ est assimilable à une distribution de Dirac $\delta_{t_p}(E) \underset{t_p \to +\infty}{\longrightarrow} \delta(E)$.

L'élément de couplage $\langle f|\hat{W}_0|i\rangle$ peut être exprimé en fonction de la fréquence de Rabi à deux photons Ω_{eff} :

$$\langle f|\hat{W}_0|i\rangle = \langle 2|\hat{W}_0|1\rangle\, \langle E_\alpha|\mathbf{0}\rangle = h\Omega_{\text{eff}}\, \langle E_\alpha|\mathbf{0}\rangle\,. \tag{7.22}$$

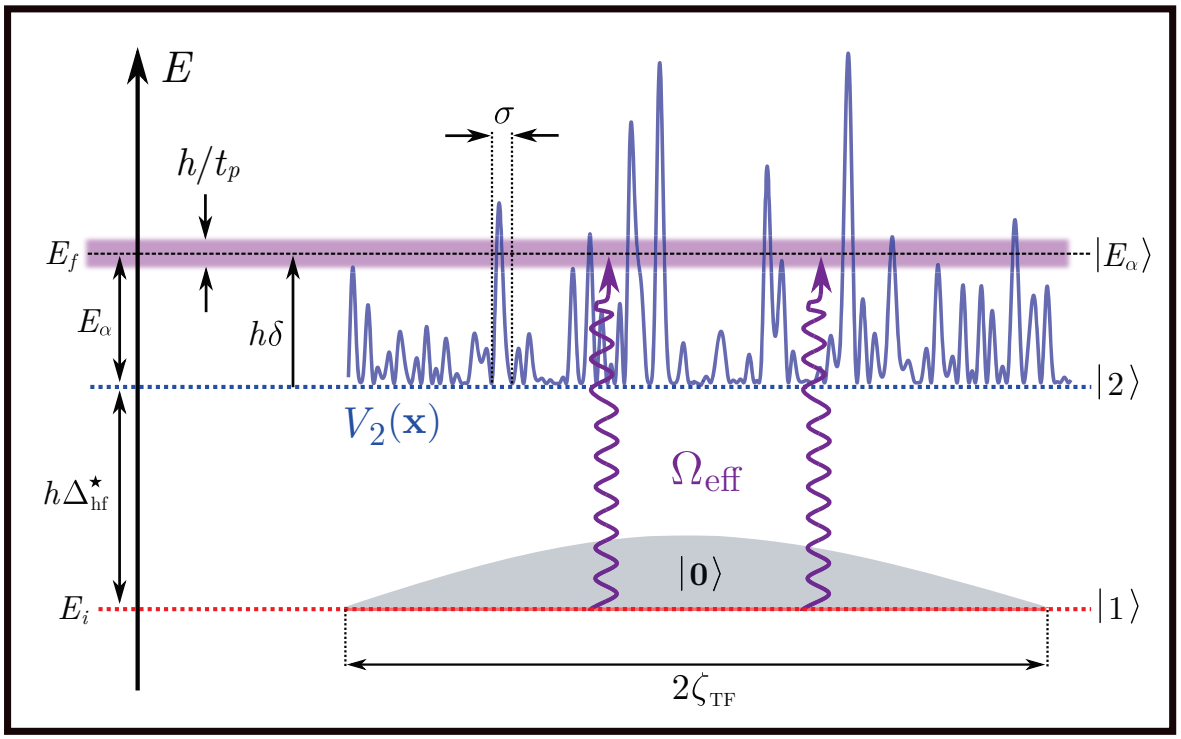

FIGURE 7.14 – **Spectroscopie en présence de la figure de *speckle* sélective en spin.** En présence du désordre, le couplage RF-MW permet de transférer les atomes du condensat de l'état initial $|1\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle$ vers un continuum d'états d'énergie $\{|2\rangle \otimes |E_\alpha\rangle\}_\alpha$. Le désaccord δ par rapport à la transition à deux photons permet de sélectionner l'état d'énergie $|E_\alpha\rangle$ vers lequel a lieu le transfert. La précision en énergie δE avec laquelle l'énergie sélectionnée est couplée est limitée par la durée du couplage $\delta E \sim h/t_p$. Dans la limite où la taille du condensat ζ_{TF} est très grande la longueur de corrélation σ des fluctuations du désordre, l'état condensé $|\mathbf{0}\rangle$ peut être assimilé à une onde plane $|\mathbf{k} = 0\rangle$ du point de vue du désordre.

L'énergie E_f de l'état final $|f\rangle$ est reliée à celle de l'état initial $|i\rangle$ via une relation de conservation de l'énergie :

$$E_f = E_i + h\Delta^\star_{\text{hf}} + E_\alpha \,, \tag{7.23}$$

où E_α est l'énergie de l'état du désordre adressé par la spectroscopie, comme représenté en figure 7.14. Par définition du désaccord à deux photons $h\delta = \hbar(\omega_{\text{rf}} + \omega_{\text{mw}}) - h\Delta^\star_{\text{hf}}$, en combinant les expressions (7.20), (7.22) et (7.23), on obtient alors :

$$\Gamma(\delta) = 4\pi^2\, h\Omega^2_{\text{eff}} \sum_\alpha |\langle E_\alpha|\mathbf{0}\rangle|^2\, \delta_{t_p}(E_\alpha - h\delta)\,. \tag{7.24}$$

Cette dernière expression fait donc clairement apparaître le fait que le transfert permet de peupler *sélectivement* un état d'énergie $|E_\alpha\rangle$ dans le désordre, et que l'énergie de cet état est directement déterminé par le désaccord à deux photons δ par rapport à la transition.

Généralement, le continuum $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ peut être caractérisé par sa densité d'état $\nu(E)$. On peut donc remplacer la sommation $\sum_\alpha$ de l'expression (7.24) par une intégration :

$$\Gamma(\delta) = 4\pi^2\, h\Omega^2_{\text{eff}} \int \mathrm{d}E_\alpha\, \nu(E_\alpha)\, |\langle E_\alpha|\mathbf{0}\rangle|^2\, \delta_{t_p}(E_\alpha - h\delta)\,. \tag{7.25}$$

Même si les quantités $\nu(E)$ et $|\langle E|\mathbf{0}\rangle|^2$ sont susceptibles de fortement fluctuer selon l'énergie E considérée pour une unique réalisation du désordre, l'expression (7.25) montre que le taux de couplage Γ est déterminé par la *moyenne* de ces quantités sur un intervalle en énergie délimité par la résolution du couplage, c'est à dire centré sur l'énergie $h\delta$ et s'étalant selon la largeur $\delta E \sim h/t_p$ de la fonction de résolution $\delta_{t_p}(E - h\delta)$.

Dans ce qui suit, on note $\langle\ \cdot\ \rangle_{\delta E}$ la moyenne sur les états $|E_\alpha\rangle$ contenus dans l'intervalle d'énergie δE.[9] Dans la mesure où les quantités $\nu(E)$ et $|\langle E|\mathbf{0}\rangle|^2$ varient beaucoup plus lentement selon E que la fonction de résolution $\delta_{t_p}(E - h\delta)$, on obtient à partir de (7.25) :

$$\Gamma(\delta) \sim 4\pi^2\, h\Omega_{\text{eff}}^2\, \langle\nu(h\delta)\rangle_{\delta E}\ \langle|\langle h\delta|\mathbf{0}\rangle|^2\rangle_{\delta E}\,. \tag{7.26}$$

7.5.2 Lien avec la fonction spectrale : les effets de moyennage

Comme cela à été montré en section 6.2.2, la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ d'une particule couplée à un potentiel désordonné est définie *en moyenne sur les réalisations du désordre* par :

$$A(\mathbf{k}, E) = \overline{\sum_\alpha \delta(E - E_\alpha)\, |\langle E_\alpha|\mathbf{k}\rangle|^2}\,. \tag{7.27}$$

Sur une seule réalisation du désordre, le recouvrement $|\langle E_\alpha|\mathbf{k}\rangle|^2$ peut largement fluctuer selon l'énergie E_α considérée. Mais après moyennage selon différentes réalisations du désordre, les fluctuations sont supprimées et cette quantité peut être assimilée à sa moyenne $\overline{|\langle E|\mathbf{k}\rangle|^2}$ à l'énergie E à laquelle la fonction spectrale (7.27) est calculée. Après factorisation de ce terme en dehors de la somme (7.27), on obtient :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}, E) &\sim \overline{|\langle E|\mathbf{k}\rangle|^2}\ \overline{\sum_\alpha \delta(E - E_\alpha)} \\ &\sim \overline{|\langle E|\mathbf{k}\rangle|^2}\ \overline{\nu}(E) \quad \text{selon (6.31)}\,, \end{aligned} \tag{7.28}$$

où $\overline{\nu}(E)$ est la densité d'état moyennée sur les réalisations du désordre.

En pratique, une seule et unique réalisation de figure de *speckle* est utilisée expérimentalement pour produire le potentiel désordonné au niveau des atomes : il n'y a aucun moyennage actif des réalisations du désordre.[10]

Néanmoins, on remarque qu'il existe de fortes similitudes entre les expressions (7.26) et (7.28). Sous réserve des hypothèses suivantes :

- ⋆ L'état fondamental condensé est suffisamment spatialement homogène du point de vue des états $|E_\alpha\rangle$ soutenus par le désordre pour pouvoir être assimilé à une onde plane $|\mathbf{0}\rangle \sim |\mathbf{k} = 0\rangle$.

9. Dans l'expression (7.25), la fonction $\delta_{t_p}(E - h\delta)$ semble jouer le rôle d'une distribution de probabilité sur la largeur en énergie δE. On peut alors définir une moyenne pour toute quantité $\mathrm{X}(E)$ selon cette statistique, telle que :

$$\langle \mathrm{X}\rangle_{\delta E} = \int \mathrm{d}E\ \mathrm{X}(E)\ \delta_{t_p}(E - h\delta)\,.$$

10. D'une manière analogue à certaines expériences [100, 154], on aurait pu imaginer une implémentation d'un tel moyennage actif en installant le diffuseur utilisé pour produire le *speckle* sur une monture tournante. Changer l'angle du diffuseur d'une séquence expérimentale à l'autre aurait alors permis d'effectuer un moyennage sur les réalisations du désordre.

Si on admet que la longueur typique de variation spatiale d'un état $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ est donnée par la longueur de corrélation σ du désordre,[11] cette hypothèse d'homogénéité fait sens lorsque :

$$\sigma \ll \zeta_{\text{TF}}\,, \tag{7.29}$$

où ζ_{TF} est le rayon de Thomas-Fermi du condensat (cf section 3.1.3).

⋆ Le moyennage selon la résolution δE en énergie est équivalent au moyennage selon les réalisations du désordre (hypothèse d'ergodicité) :

$$\overline{\cdot} \equiv \langle\ \cdot\ \rangle_{\delta E}\,. \tag{7.30}$$

en identifiant (7.26) et (7.28), on a :

$$\Gamma(\delta) \sim 4\pi^2\, h\Omega_{\text{eff}}^2\, A(\mathbf{k}=0, E=h\delta)\,. \tag{7.31}$$

L'équivalence entre le taux de transfert Γ et la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ est donc majoritairement fondée sur une hypothèse d'ergodicité, qui voudrait que le moyennage issu de la résolution finie δE de la spectroscopie supprime les fluctuations de la même manière qu'un moyennage sur les réalisations du désordre. On verra que cette approche pourra être validée par la suite en comparant les résultats expérimentaux avec des simulations numériques adaptées à la configuration d'expérience.

7.5.3 Méthodes numériques

Quelques éléments de compréhension et les spécificités des méthodes numériques qui ont été employées dans le cadre de ces travaux pourront être retrouvés en référence [173]. Sans rentrer dans les détails, on peut rappeler que la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ est définie selon l'expression (6.27) :

$$A(\mathbf{k}, E) = -\frac{1}{\pi}\,\overline{\langle\mathbf{k}|\text{Im}\,\hat{\mathcal{G}}(E)|\mathbf{k}\rangle} \tag{7.32}$$

où $\hat{\mathcal{G}}(E)$ est la transformée de Fourier de la fonction de Green $\hat{\mathcal{G}}(t)$ (6.20) :

$$\hat{\mathcal{G}}(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\,\hat{\mathcal{G}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et/\hbar} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\,\Theta(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\hat{\mathcal{H}}-E)t/\hbar}\,. \tag{7.33}$$

En combinant les expressions (7.32) et (7.33), on obtient :

$$A(\mathbf{k}, E) = \frac{1}{\pi\hbar}\,\text{Re}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\,\overline{\langle\mathbf{k}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}|\mathbf{k}\rangle}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et/\hbar}\,. \tag{7.34}$$

C'est selon l'expression (7.34) que la fonction spectrale sera calculée numériquement. Tout d'abord, un état d'onde plane $|\mathbf{k}\rangle$ est généré numériquement, et sa propagation dans le désordre est calculée en le multipliant par l'opérateur d'évolution $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}$ (où $\hat{\mathcal{H}}$ est l'opérateur d'évolution associé à une unique réalisation d'un désordre *speckle*). Le recouvrement $\langle\mathbf{k}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}|\mathbf{k}\rangle$ entre l'onde plane initiale et l'état évolué est alors évalué, puis moyenné sur différentes réalisations du désordre (typiquement 3000 réalisations). La fonction spectrale est alors obtenue en calculant la transformée de Fourier de ce recouvrement moyenné.

11. Ceci est certainement vrai dans le cas d'un désordre classique, mais discutable pour un désordre quantique du fait des effets de lissage du potentiel désordonné par la fonction d'onde (cf section 5.1.4).

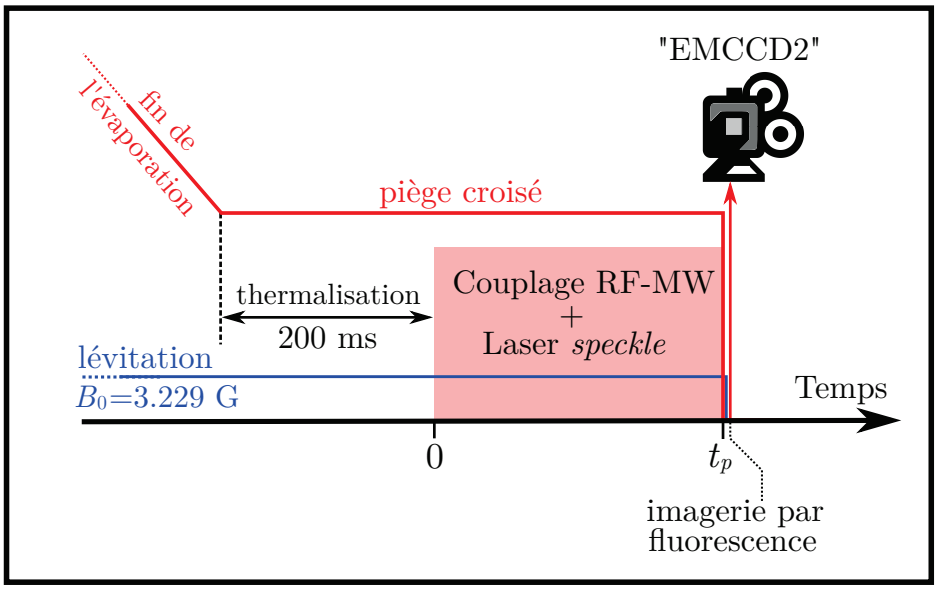

FIGURE 7.15 – **Séquence expérimentale de la spectroscopie.** A la fin de l'évaporation tout optique, les atomes sont maintenus dans le piège croisé et lévité contre l'action de la gravité. Après un temps de thermalisation, les atomes sont alors exposés à la radiation RF-MW ainsi qu'à la figure de *speckle* qui sont allumés simultanément pendant une durée t_p. A l'issue du transfert, tous les champs électromagnétiques sont éteints et le nombre d'atomes transférés dans l'état $|2\rangle$ est mesuré par fluorescence.

Le désordre *speckle* utilisé pour calculer l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}$ du système a été généré selon la méthode explicitée en section 4.2.2, et reproduit donc assez bien les propriétés statistiques de la figure de *speckle* utilisée expérimentalement.

7.6 Mesures de fonctions spectrales

Les sections précédentes ont permis de présenter tous les éléments nécessaires à la mise en place d'une spectroscopie RF d'atomes dans un désordre *speckle*. Il est notamment apparu qu'en l'absence d'effets dûs aux fluctuations de champ magnétique et aux interactions inter-atomiques, la résolution en énergie δE de la spectroscopie était limitée par le temps de couplage RF-MW $t_p \sim h/\delta E$ (cf sections 7.3.3 et 7.5.1), une telle résolution pouvant atteindre 10 Hz pour des temps de *pulse* RF-MW de 100 ms (cf figure 7.8 a.).

La section qui suit a pour but principal de présenter et interpréter les résultats obtenus à l'aide de la spectroscopie à deux photons *en présence d'un désordre* de type *speckle*. Dans un premier temps, on vérifiera quelle mesure la gamme de paramètres expérimentaux accessibles permet de se placer dans un régime pour lequel le taux de couplage Γ de la spectroscopie est effectivement bien donné par une règle d'or de Fermi (7.26). On verra ensuite comment la comparaison entre les spectres mesurés expérimentalement et des simulations numériques permettent une calibration précise de l'amplitude du désordre exercé sur les atomes. Enfin, les résultats obtenus pour une large gamme d'amplitude de désordres, aussi bien attractif que répulsif, seront commentés. On verra notamment que les désordres répulsif et attractif étudiés dans un régime quasi-classique exhibent des comportements foncièrement différents.

Dans toutes les sections qui vont suivre, le même schéma de séquence expérimentale, représenté en figure 7.15 sera utilisé.

7.6.1 Condition de couplage faible

Selon l'expression (7.31), la dépendance en fonction du désaccord δ du taux de couplage $\Gamma(\delta)$ est entièrement déterminée par les variations de la fonction spectrale. Notamment, la largeur typique en énergie $h\Delta_w$ de la courbe $\Gamma(\delta)$, que l'on appellera dans la suite "*largeur du continuum*" $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$, peut être identifiée à la largeur en énergie E de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ à $\mathbf{k}$ fixé. [12]

Comme cela a été rappelé dans la section précédente, la règle d'or de Fermi (7.20) n'est applicable que dans un régime de *couplage faible* (perturbatif). Cette condition de "couplage faible" entre les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ par le champ RF-MW est respectée lorsque :

$$\Omega_{\text{eff}} \ll \Delta_w \,, \tag{7.35}$$

autrement dit, lorsque l'élargissement en énergie $h\Omega_{\text{eff}}$ induit par le couplage [13] sur la transition reste faible devant la largeur $h\Delta_w$ du continuum à sonder.

En effet, dans le cas contraire $\Omega_{\text{eff}} \gtrsim \Delta_w$, le continuum $\{|E_\alpha\rangle\}_\alpha$ n'est pas résolu par la spectroscopie, et on peut montrer [82] que la dynamique temporelle attendue effectivement est celle d'un système à deux niveaux produisant des oscillations de Rabi (cf section 3.2.4).

Une manière de vérifier expérimentalement la validité de la condition (7.35) est d'augmenter la puissance Ω_{eff}^2 du signal RF-MW, comme représenté en figure 7.16 a. Si cette condition est bien respectée, l'allure générale du spectre $\Gamma(\delta)$ ne doit pas être modifiée par l'augmentation de la fréquence de Rabi Ω_{eff}, comme c'est le cas dans l'exemple figure 7.16 b.

7.6.2 Calibration fine de l'amplitude du désordre

Comme on l'avait indiqué en section 7.4.3, une calibration uniquement "photométrique" de l'amplitude du désordre ne peut être qu'indirecte. En effet, on ne peut pas mesurer *in-situ* la puissance P éclairée sur les atomes du fait de la présence de la chambre à vide. La seule puissance accessible est celle du faisceau *en amont* de la chambre à vide. De même, même si le comportement de l'extension spatiale de la figure de *speckle* le long de l'axe optique est, en pratique, bien connu [141], il est difficile de connaître la position précise du nuage par rapport au foyer de la lentille utilisée pour éclairer la figure de *speckle* sur les atomes. De ces deux limitations découle le fait que l'intensité moyenne $\bar{I}$ de la figure de *speckle* au niveau des atomes ne peut pas être estimée avec une précision relative généralement meilleure que 10%, comme c'est le cas pour l'expérience de Florence [154] par exemple.

Néanmoins, on a vu en section 6.4 que la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ est *caractéristique* du potentiel désordonné, et plus particulièrement que sa forme est fortement dépendante de l'amplitude V_0 du désordre. De fait, être capable de calculer exactement la fonction spectrale d'une particule plongée dans un potentiel *speckle* rend possible une *calibration* de la valeur expérimentale de l'amplitude du désordre en ajustant les données obtenues par l'expérience sur des courbes théoriques. [14]

12. Comme cela a été montré dans les sections 6.4.1 et 6.4.2, $h\Delta_w \sim V_0^2/E_\sigma$ dans le régime de désordre perturbatif, et $h\Delta_w \sim V_0$ dans le régime de désordre classique.

13. Cet élargissement du spectre est visible en figure 7.7, et correspond à la largeur du terme lorentzien (courbe noire pointillée).

14. Une telle idée n'est pas nouvelle puisqu'elle a déjà été explorée par D. Clément et al. [40], qui ont pu calibrer la puissance optique P au niveau des atomes en mesurant l'effet des déplacements lumineux associés à une figure de *speckle* pour des atomes soumis à une spectroscopie RF.

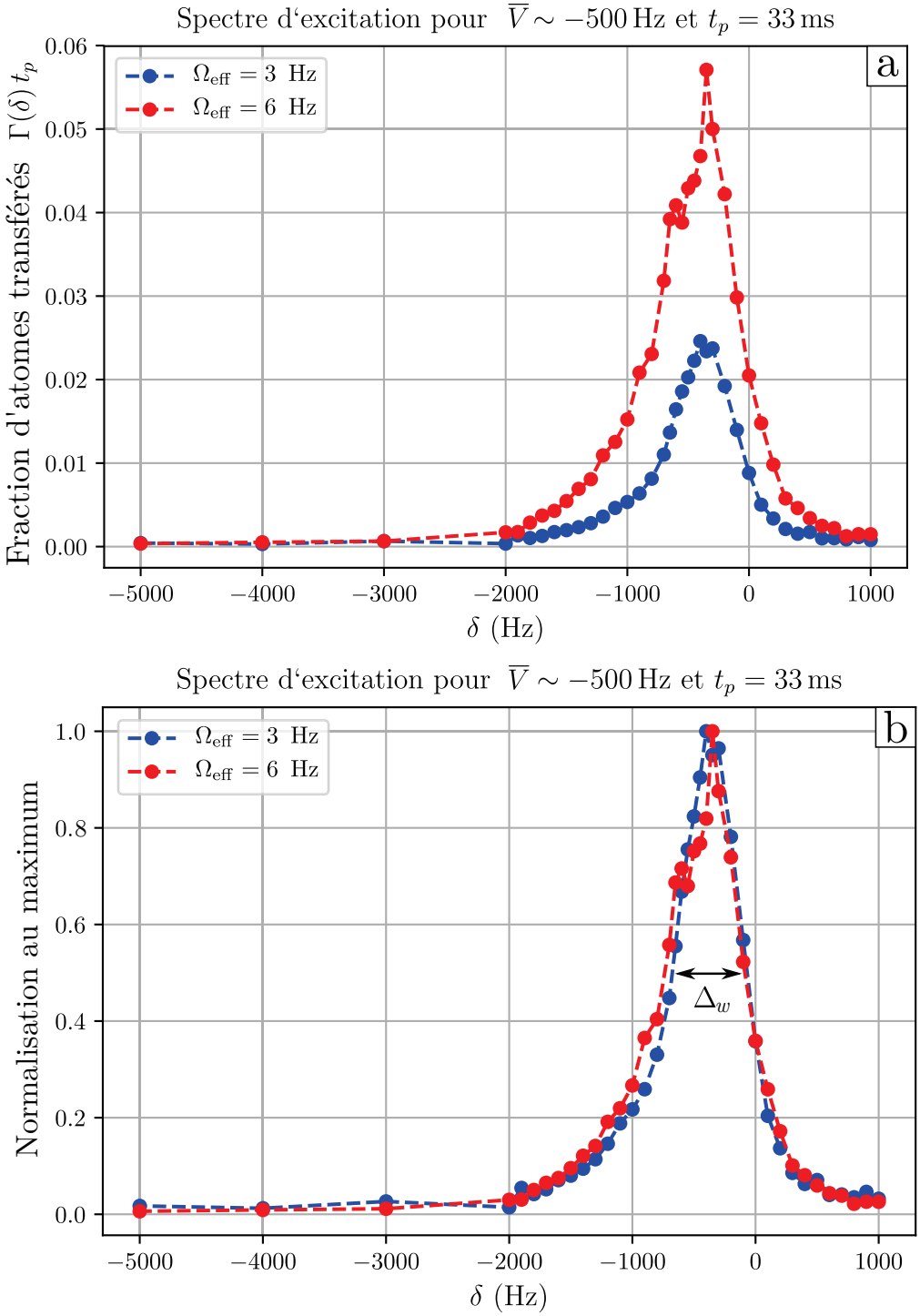

FIGURE 7.16 – **Régime de couplage faible au continuum.** Exemple de spectroscopie en présence d'un désordre attractif de 500 Hz d'amplitude. **a.** On peut augmenter la fraction d'atomes $\Gamma(\delta)\, t_p$ transférés vers l'état $|2\rangle$ en augmentant la fréquence de Rabi Ω_{eff} du couplage de 3 Hz (courbe bleue) à 6 Hz (courbe rouge). **b.** Les normalisations de ces spectres par leurs *maxima* respectifs se superposent selon une seule et même courbe, ce qui montrent : 1. qu'il est possible d'augmenter le nombre d'atomes transférés, la transition n'est donc pas saturée et la condition $\Gamma\, t_p \ll 1$ est bien respectée. ; 2. que l'élargissement en fréquence Ω_{eff} induit par le couplage est, dans chaque cas, négligeable devant la largeur Δ_w du continuum.

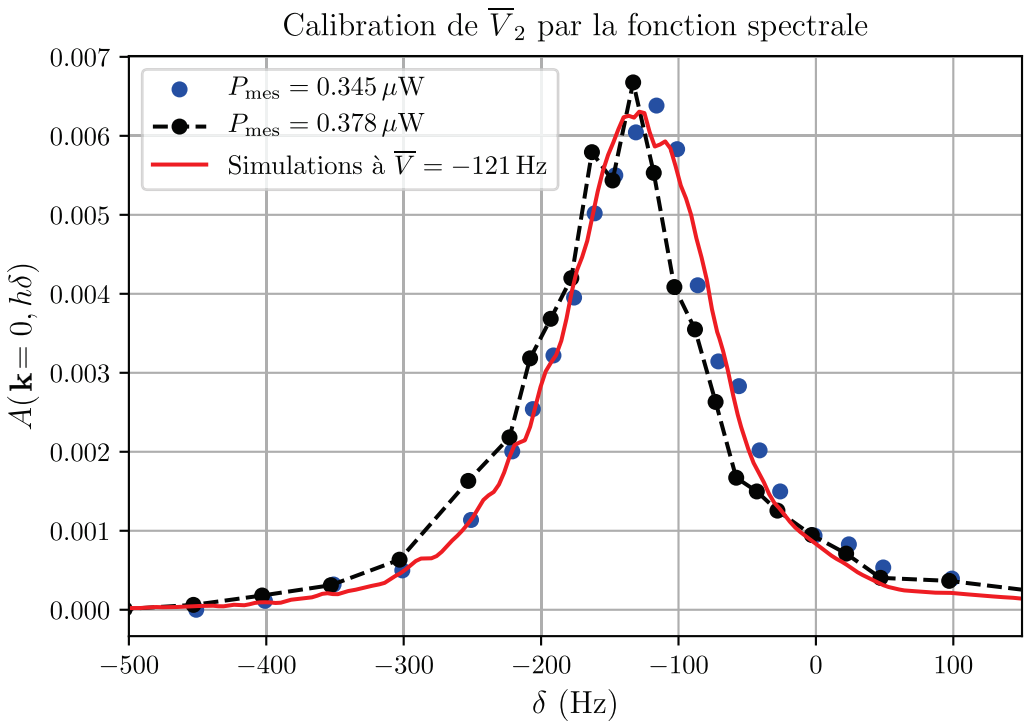

FIGURE 7.17 – **Calibration affinée de l'amplitude du désordre.** La calibration photométrique (figure 7.13) prévoit un désordre attractif de 121 Hz d'amplitude pour une puissance mesurée $P_{\text{mes}} = 0.345\,\mu$W (et un désaccord laser $\Delta_{\text{r}} = -73$ MHz). L'accord entre la fonction spectrale mesurée associée (points noirs) et les simulations (courbe rouge) n'est pas tout à fait optimal. En revanche, la fonction spectrale mesurée pour une puissance $P_{\text{mes}} = 0.378\,\mu$W est en très bon accord avec les calculs numériques. Ce désaccord entre simulations et expériences s'explique par une erreur systématique dans l'évaluation de l'intensité $\bar{I}$ de la figure de *speckle* par la calibration photométrique, une erreur majoritairement dû à une méconnaissance de l'extension spatiale σ_{ex} du *speckle* au niveau des atomes.

On choisit donc une simulation (calculée selon la méthode résumée en section 7.5.3) de $A(\mathbf{k} = 0, E)$ pour un désordre attractif de moyenne $\overline{V} = -121$ Hz comme référence,[15] représentée en figure 7.17 (courbe rouge).

Selon la calibration photométrique (figure 7.13), un désordre de moyenne $\overline{V} = -121$ Hz est obtenu pour une puissance optique $P_{\text{mes}} = 0.378\,\mu$W. Le spectre expérimental associé est représenté par les points noirs, figure 7.17. On peut constater que l'accord avec la simulation n'est pas complètement satisfaisant. En revanche, le spectre obtenu pour une puissance $P_{\text{mes}} = 0.345\,\mu$W, représenté par les points bleus, semble en bien meilleur accord.

Autrement dit, on peut faire correspondre la calibration photométrique figure 7.13 aux simulations en lui appliquant un facteur correctif $\gamma_{\text{corr}} = 0.378/0.345 = 1.09$ tel que :

$$\overline{V}_2(\Delta_{\text{r}}) = \gamma_{\text{corr}} \times (-320\,\text{Hz}/\mu\text{W}) = -349\,\text{Hz}/\mu\text{W}\,, \tag{7.36}$$

qui corrige donc une erreur d'environ 10% sur l'évaluation photométrique de l'intensité par $\bar{I} = 2\tau_o P_{\text{mes}}/\pi\sigma_{\text{ex}}^2$.

15. Comme on le verra dans la suite, les désordres implémentés expérimentalement et numériquement ont une amplitude variant de 60 Hz à 4 kHz. Le choix de la courbe de référence s'est donc porté vers les désordres faibles afin de minimiser l'effet du potentiel résiduel sur l'état $|1\rangle$ (cf section **??**) sur la calibration. Pour les spectres expérimentaux obtenus à l'amplitude de désordre la plus faible (ici 60 Hz), la condition de résolution en énergie de la spectroscopie n'est que faiblement respectée puisqu'on a $\Delta_w/\delta E \sim 6$, contre $\Delta_w/\delta E \sim 12$ pour la courbe à 121 Hz de désordre.

Ce même facteur correctif γ_{corr} est appliqué à la calibration photométrique du potentiel répulsif, de sorte que :

$$\overline{V}_2(\Delta_{\text{b}}) = \gamma_{\text{corr}} \times (329\,\text{Hz}/\mu\text{W}) = 358\,\text{Hz}/\mu\text{W}\,. \tag{7.37}$$

Dans ce qui suit, chaque amplitude de désordre (attractif ou répulsif) sera déterminée selon les calibrations (7.36) et (7.37).

7.6.3 Vue d'ensemble des mesures

Tous les éléments permettant de comprendre dans quelle mesure une spectroscopie RF basée sur l'implémentation d'un désordre sélectif en état de spin permettait une mesure *directe* de la fonction spectrale d'un système désordonné. Plus particulièrement , on a vu qu'il était nécessaire de satisfaire à un certain nombre de conditions pour que le taux de couplage $\Gamma(\delta)$ de la spectroscopie soit directement proportionnel à la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$: non-saturation de la transition, couplage faible, homogénéité du condensat, etc.

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des valeurs des différents paramètres expérimentaux qui permettrait d'atteindre un régime où l'expression (7.31) est effectivement valable.

Condition	**Critère**	**Paramètres d'expériences**
Sélectivité du désordre en état de spin	$\left\lvert\overline{V}_2\right\rvert / \left\lvert\overline{V}_1\right\rvert \gg 1$	$\left\lvert\overline{V}_2\right\rvert / \left\lvert\overline{V}_1\right\rvert \sim 70$
Non-saturation de la transition	$\Gamma\, t_p \ll 1$	$\Gamma\, t_p \lesssim 0.1$
Homogénéité du condensat	$\zeta_{\text{TF}}/\sigma \gg 1$	$\zeta_{\text{TF}}/\sigma \sim 30$
Couplage faible au continuum	$\Delta_w/\Omega_{\text{eff}} \gg 1$	$\Delta_w/\Omega_{\text{eff}} \sim 100$
Résolution en énergie du transfert	$\Delta_w/\delta E \gg 1$	$\Delta_w/\delta E \sim 6 - 30$

Les figures 7.18 et 7.19 résument l'ensemble des données expérimentales et numériques associées à différentes amplitudes de désordres respectivement attractif et répulsif.

Les calculs numériques (courbes rouges) de la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$ ont été réalisés pour des désordres attractif et répulsif, pour une amplitude $\left\lvert\overline{V}_2\right\rvert = \left\lvert\overline{V}\right\rvert = V_0$ variant de $60\,\text{Hz}$ à $4008\,\text{Hz}$. Ces calculs sont comparés aux spectres expérimentaux associées (points bleus) obtenus à désaccords laser fixés ($\Delta_{\text{r}} = -73\,\text{MHz}$ pour un désordre attractif, $\Delta_{\text{r}} = 81\,\text{MHz}$ pour un désordre répulsif). Dans chaque cas, la puissance optique P_{mes} adaptée pour reproduire l'amplitude de désordre de la simulation a été déterminée selon les calibrations fines (7.36) et (7.37). La résolution en fréquence $\delta E/h$ de la spectroscopie a été elle aussi adaptée pour respecter au mieux le critère de résolution $\Delta_w \gg \delta E$, tout en s'assurant d'un taux de transfert optimisant le rapport signal/bruit. [16] Enfin, afin de correspondre aux simulations numériques, les taux de couplage $\Gamma(\delta)\, t_p$ ont été normalisés de sorte à ce qu'ils satisfassent à la normalisation (6.30) de la fonction spectrale.

16. Par ailleurs, la résolution finie δE de l'expérience a été prise en compte au niveau des données numériques en convoluant le résultat des simulations (obtenus via l'expression (7.34)) avec une fonction de résolution $\delta_{t_p}(E)$.

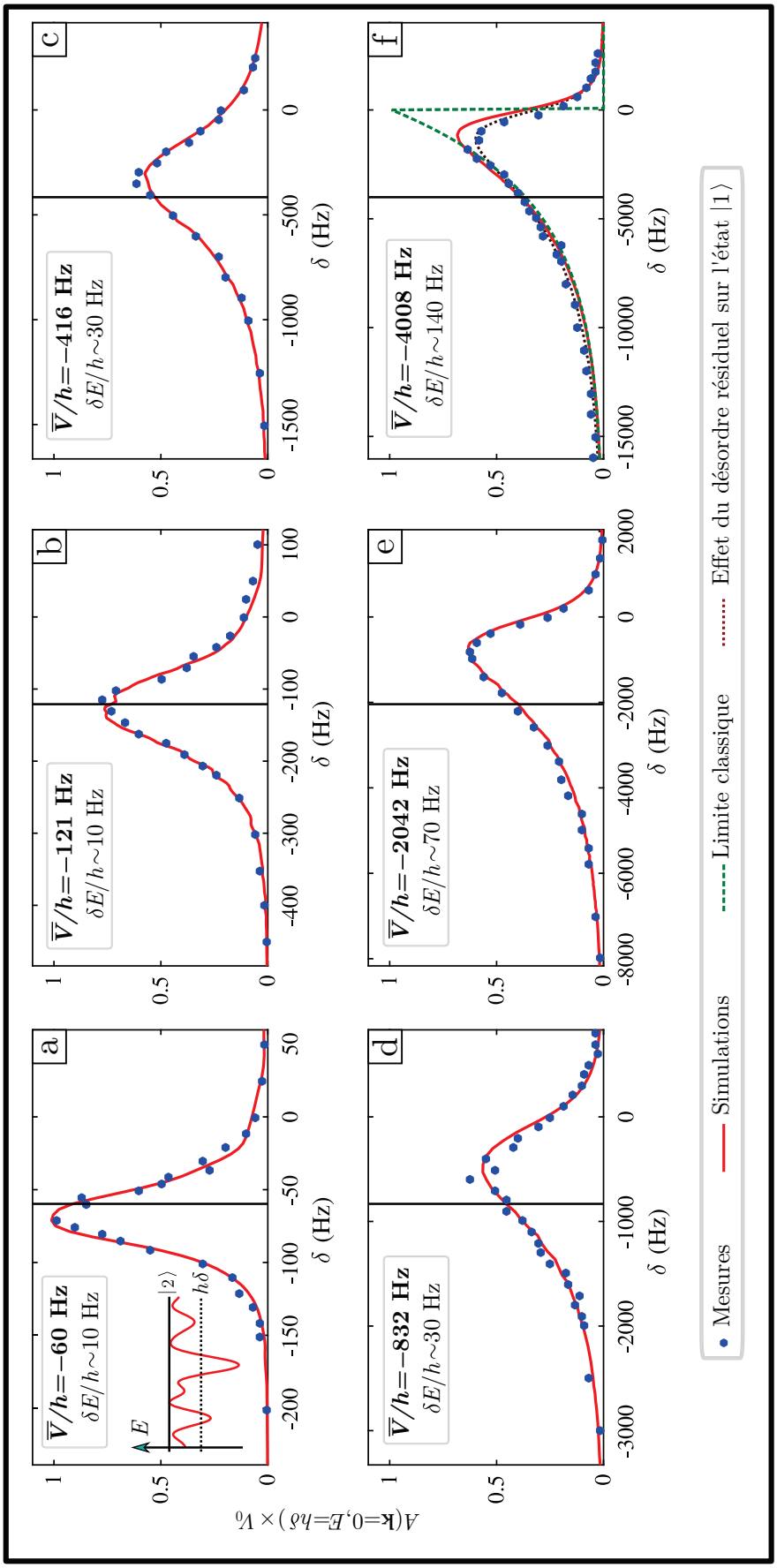

FIGURE 7.18 – **Fonction spectrale $A(\mathbf{k}=0, E)$ d'une particule excitée par un désordre *speckle* attractif [174].** Pour chaque amplitude de désordre : 60 Hz (**a.**), 121 Hz (**b.**), 416 Hz (**c.**), 832 Hz (**d.**), 2042 Hz (**e.**) et 4008 Hz (**f.**), la résolution en énergie δE de la spectroscopie a été adaptée selon le critère de résolution $\Delta_w \gg \delta E$. Sur l'ensemble des données, les mesures (points bleus) sont en bon accord avec les simulations (courbes rouge). En **f.**, la courbe pointillée verte désigne la limite classique (6.50) de $A(\mathbf{k}=0, E)$, à savoir la distribution $p(V)$ en potentiel du *speckle* (cf section 4.3). La courbe pointillée marron, quant elle, représente le résultat des simulations numériques prenant en compte l'effet du désordre résiduel appliqué sur l'état $|1\rangle$. Pour chaque graphe, le trait noir vertical marque la moyenne $\overline{V}$ du potentiel désordonné (qui est aussi le barycentre de chaque courbe).

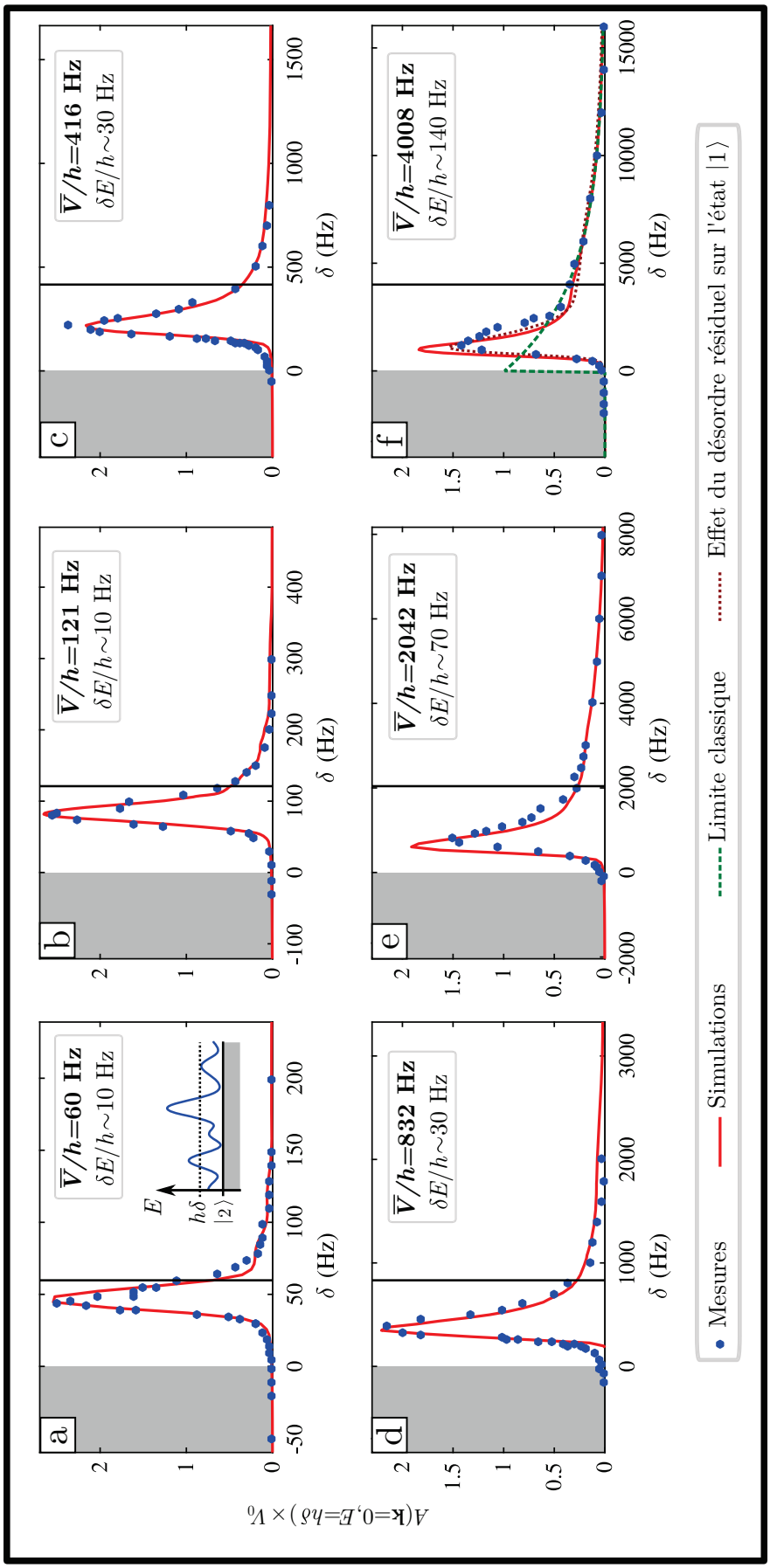

FIGURE 7.19 – **Fonction spectrale $A(\mathbf{k}=0, E)$ d'une particule excitée par un désordre *speckle* répulsif [174].** Pour chaque amplitude de désordre : 60 Hz (**a.**), 121 Hz (**b.**), 416 Hz (**c.**), 832 Hz (**d.**), 2042 Hz (**e.**) et 4008 Hz (**f.**), la résolution finie en énergie δE de la spectroscopie a été adaptée selon le critère de résolution $\Delta_w \gg \delta E$. La zone représentée en gris désigne la gamme d'énergie pour laquelle aucun état n'est supporté par le potentiel désordonné. Sur l'ensemble des données, les mesures (points bleus) sont, là encore, en très bon accord avec les simulations (courbes rouge). En **f.**, la courbe pointillée verte désigne la limite classique (6.50) de $A(\mathbf{k}=0, E)$, à savoir la distribution $p(V)$ en potentiel du *speckle* (cf section 4.3). La courbe pointillée marron, quant elle, représente le résultat des simulations numériques prenant en compte l'effet du désordre résiduel appliqué sur l'état $|1\rangle$. Pour chaque graphe, le trait noir vertical marque la moyenne $\overline{V}$ du potentiel désordonné (qui est aussi le barycentre de chaque courbe).

Dans l'ensemble, l'accord des expériences aux simulations est très bon. Ceci est tout à fait remarquable quand on sait qu'aucune statistique n'a été réalisée sur les mesures expérimentales : chaque point bleu correspond au résultat d'un unique cycle expérimental. Ceci renforce l'idée que l'hypothèse ergodique (7.30) est bien respectée dans le cadre des expériences.

Dans ce qui suit, on va voir que l'on peut distinguer deux régimes que l'on avait déjà présentés en section 5.1.4, et pour lesquels la fonction spectrale possède des propriétés bien caractéristiques : le désordre quantique $V_0 \ll E_\sigma$, et le désordre classique $V_0 \gg E_\sigma$. A titre de référence, on peut estimer $E_\sigma/h \sim 441\,\mathrm{Hz}$ (selon les définitions de l'annexe C) pour la figure de *speckle* utilisée expérimentalement.

7.6.4 Régime de désordre quantique

Les spectres obtenus dans la limite $V_0 \ll E_\sigma$ correspondent aux courbes obtenues pour un désordre de $V_0 = h \times 60\,\mathrm{Hz} \sim 0.14\,E_\sigma$, reportées en figure 7.20. Naïvement, la forme de courbe "en cloche" des fonctions spectrales $A(\mathbf{k} = 0, E)$ pourrait faire penser à une lorentzienne, tel que c'est le cas dans le cadre d'un désordre perturbatif (cf expression (6.48) et figure 6.7). Néanmoins, la condition de désordre perturbatif $\varepsilon_\mathbf{k} \gg V_0^2/E_\sigma$ n'est pas satisfaite ici, dans la mesure où l'énergie cinétique des atomes est *nulle* $\varepsilon_\mathbf{k} \sim 0$ (dans l'hypothèse $|\mathbf{0}\rangle \sim |\mathbf{k} = 0\rangle$ où le condensat est effectivement homogène). Au contraire, $\varepsilon_\mathbf{k} \sim 0$ implique que l'on se trouve dans un régime très hautement non-perturbatif $V_0^2/E_\sigma\,\varepsilon_\mathbf{k} \gg 1$.

On peut aussi remarquer que les fonctions spectrales ne sont pas symétriques l'une de l'autre par changement $\overline{V} \leftrightarrow -\overline{V}$ de signe de potentiel. Cette asymétrie est imputable au comportement de la partie réelle $\Sigma_1'(\mathbf{k} = 0, E)$ de la *self-energy* dans le cas d'un désordre *speckle* [130].

Mais au-delà de ces différences, on pourrait tout de même noter que les allures des fonctions spectrales représentées en figure 7.20 sont tout de même assez similaires, quand bien même la distribution en potentiel du *speckle* serait très différente selon si le désordre est attractif ou répulsif (cf figure 4.9). Ceci peut s'expliquer par le fait que les atomes sont couplés au désordre depuis un état d'impulsion quasi-nul $|\mathbf{0}\rangle \sim |\mathbf{k} = 0\rangle$, c'est à dire dans des états pour lesquels la fonction d'onde possède une grande extension spatiale.

Par des arguments strictement analogues à ceux présentés en section 5.1.4, on peut considérer que la fonction d'onde opère à un lissage du désordre *speckle* $V(\mathbf{x})$ d'amplitude V_0 sur un nombre n de fluctuations de potentiel. Le potentiel effectif $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ qui en résulte possède alors une amplitude $\mathcal{V}_0 = V_0/\sqrt{n} \sim V_0^2/E_\sigma$ dans le cas d'un *speckle*. Pour un nombre n suffisamment grand de grains (supposés indépendants), le théorème central limite indique que la distribution en potentiel effectif tend vers une gaussienne $p(\mathcal{V}) \sim \mathrm{e}^{-(\mathcal{V}/\mathcal{V}_0)^2}$ qui ne dépend pas du fait que le désordre soit attractif ou répulsif. Ce type d'effets est caractéristique du régime de désordre quantique.

7.6.5 Régime de désordre classique

A l'inverse, les spectres obtenus dans le régime de désordre classique $V_0 \gg E_\sigma$, présentent des particularités distinctes suivant si le potentiel *speckle* est attractif ou répulsif. En figure 7.21 et 7.22 a. sont reportées les courbes obtenues pour un désordre d'amplitude $V_0 = h \times 4\,\mathrm{kHz} \sim 10\,E_\sigma$.

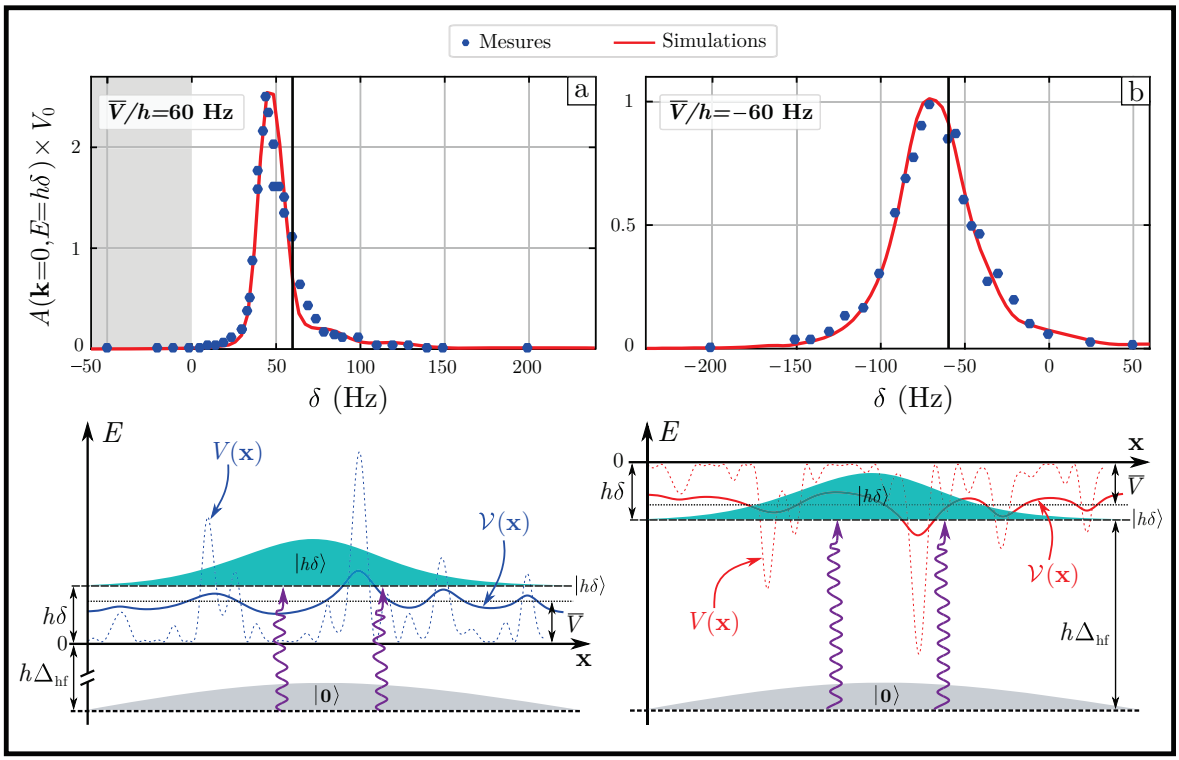

FIGURE 7.20 – **Fonctions spectrales en régime de désordre quantique.** L'énergie cinétique $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ des atomes issus du condensat est nulle, et le maximum des courbes n'est pas marqué par la moyenne $\overline{V}$ du désordre, ceci à cause de la partie réelle Σ_1' de la *self-energy*. Ceci montre que le régime de diffusion exploré ici est très hautement non-perturbatif. Néanmoins, l'allure des spectres ne semble que très peu dépendre de la distribution en potentiel désordonné, qu'il soit répulsif (**a.**) ou attractif (**b.**). Ceci provient du lissage du potentiel désordonné $V(\mathbf{x})$ par la fonction d'onde de l'état $|h\delta\rangle$ couplé. Ce lissage tend à rendre la distribution en potentiel effectif $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ gaussienne, qui alors indépendante du caractère répulsif ou attractif du désordre.

Comme cela est attendu, dans la limite classique $V_0/E_\sigma \to +\infty$, les fonctions spectrales mesurées s'approchent de la distribution en potentiel $p(V)$ du désordre (cf expression (6.50)), du moins pour des énergies $|E| \gtrsim |V_0|$. En effet, dans cette gamme d'énergie, les états interrogés par la spectroscopie sont piégés autour des minima de potentiel sur une taille σ, qui est la même pour un désordre attractif que répulsif, comme représenté en figure 7.21 b. et 7.22 c. L'extension spatiale de ces états est donc beaucoup plus petite que celle l'état initial $|\mathbf{0}\rangle$ du condensat. Le recouvrement des fonctions d'ondes couplées par la spectroscopie est donc dans l'ensemble mauvais, sauf aux points de rebroussement classique autour desquels la fonction d'onde des états $|h\delta\rangle$ s'amortit. Autrement dit, la spectroscopie sonde les points $\mathbf{x}$ tels que $V(\mathbf{x}) = h\delta$, ce qui revient à mesurer la distribution en potentiel $p(V)$.[17]

En revanche, les spectres 7.21 et 7.22 a. révèlent que la nature des états à basse énergie $E \sim 0$ est différente suivant si le désordre est attractif ou répulsif :

Pour un désordre attractif, le potentiel soumis aux atomes peut être considéré comme un ensemble de paraboles inversées (potentiels harmoniques expulsant) disposées d'une manière aléatoire spatialement. Les états situés autour des maxima $V \sim 0$ forment un continuum d'états quasiment libres dont la densité d'état atteint son maximum en $V = 0$ [139, 138].

17. Cet effet est parfois appelé "*principe de Franck-Condon*" en spectroscopie rotation-vibration des gaz.

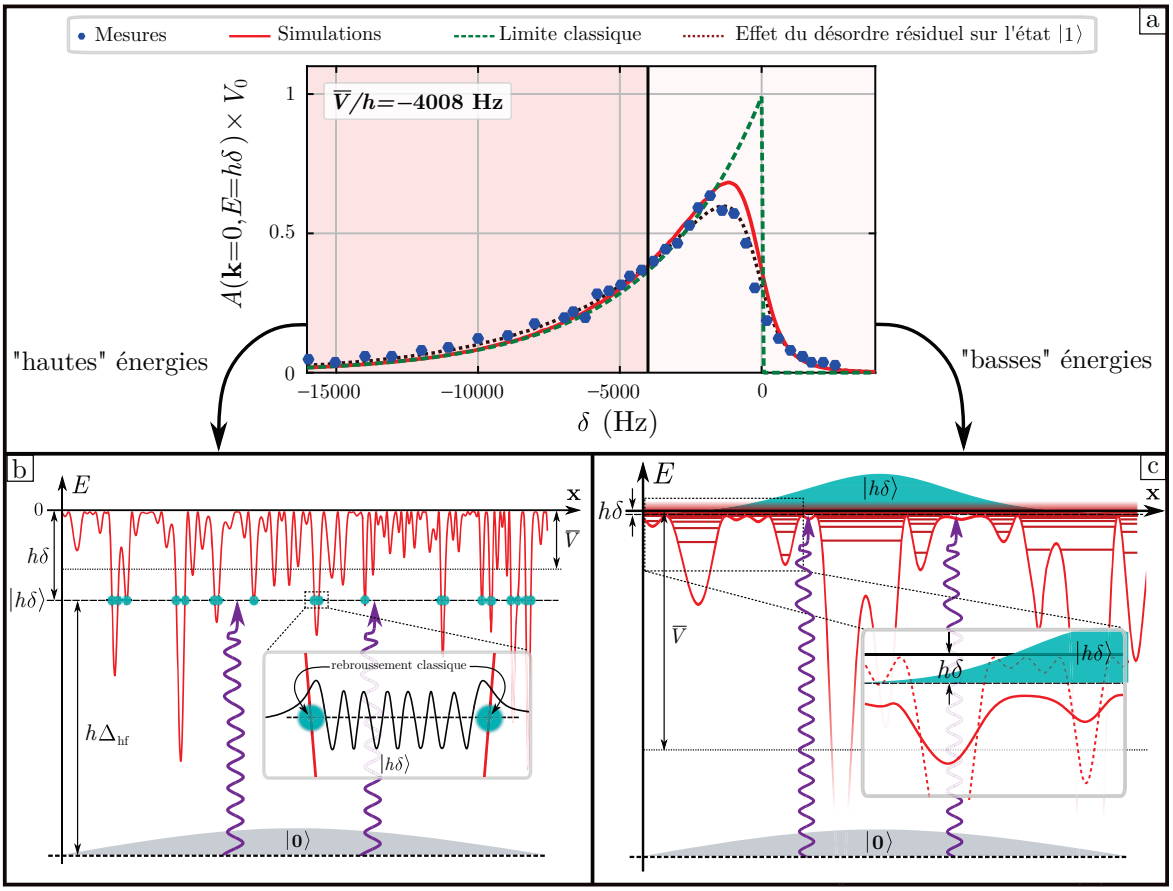

FIGURE 7.21 – **Fonctions spectrales en régime de désordre classique attractif.** La fonction spectrale **a.** permet de distinguer deux régimes. **b.** A "hautes énergies" $|E| \gtrsim V_0$, la spectroscopie permet de sonder les points de rebroussement classique des atomes piégés dans les états soutenus par les minima de potentiel. Ces points $\mathbf{x}$ respectent la condition de résonance $\hbar\delta = V(\mathbf{x})$ tels que la fonction spectrale $A(\mathbf{k} = 0, E)$ donne directement la distribution en potentiel $p(V)$. **c.** A "basses énergies" $|E| \sim 0$, les états accessibles forment une continuum dense pour lesquels la fonction d'onde s'étend sur plusieurs fluctuations. Par des effets de potentiel effectif, les basses valeurs de potentiel $V \sim 0$ sont lissées, ce qui lisse aussi la discontinuité de la distribution de potentiel en $V = 0$.

De fait, l'extension de la fonction d'onde de l'état $|h\delta\rangle$ couplé est beaucoup plus grande que σ, et les très faibles valeurs de potentiel $V \lesssim 0$ sont alors lissées par la fonction d'onde, comme représenté en figure 7.21 c. La discontinuité de $p(V)$ en $V = 0$ est alors lissée vers des énergies $E > 0$.

Pour un désordre répulsif, en revanche, il n'existe aucun état à des énergies $E < 0$.[18] Le comportement à basse énergie de la fonction spectrale est donc majoritairement déterminé par la statistique des très faibles valeurs de potentiel $V \gtrsim 0$. Autour de chaque minimum de potentiel, on peut développer le potentiel désordonné au second ordre selon $V(\mathbf{x}) \sim \kappa_{\rm V}\mathbf{x}^2$, où $\kappa_{\rm V}$ fait office de constante de raideur du potentiel harmonique associé. On peut donc décrire le désordre à petit potentiel comme un ensemble de puits harmoniques d'une profondeur moyenne V_0 et d'une taille moyenne σ disposés d'une manière aléatoire spatialement.

18. Ceci explique pourquoi la fonction spectrale chute fortement pour des énergies proche de $E = 0$, avant de complètement s'annuler pour des énergies E négatives. On peut montrer [155] que ce comportement spécifique est associé à une décroissance exponentielle de la densité d'état $\nu(E)$ à très basses énergies $E \gtrsim 0$ appelé "queue de Lifshitz" (*Lifshitz tail* en anglais).

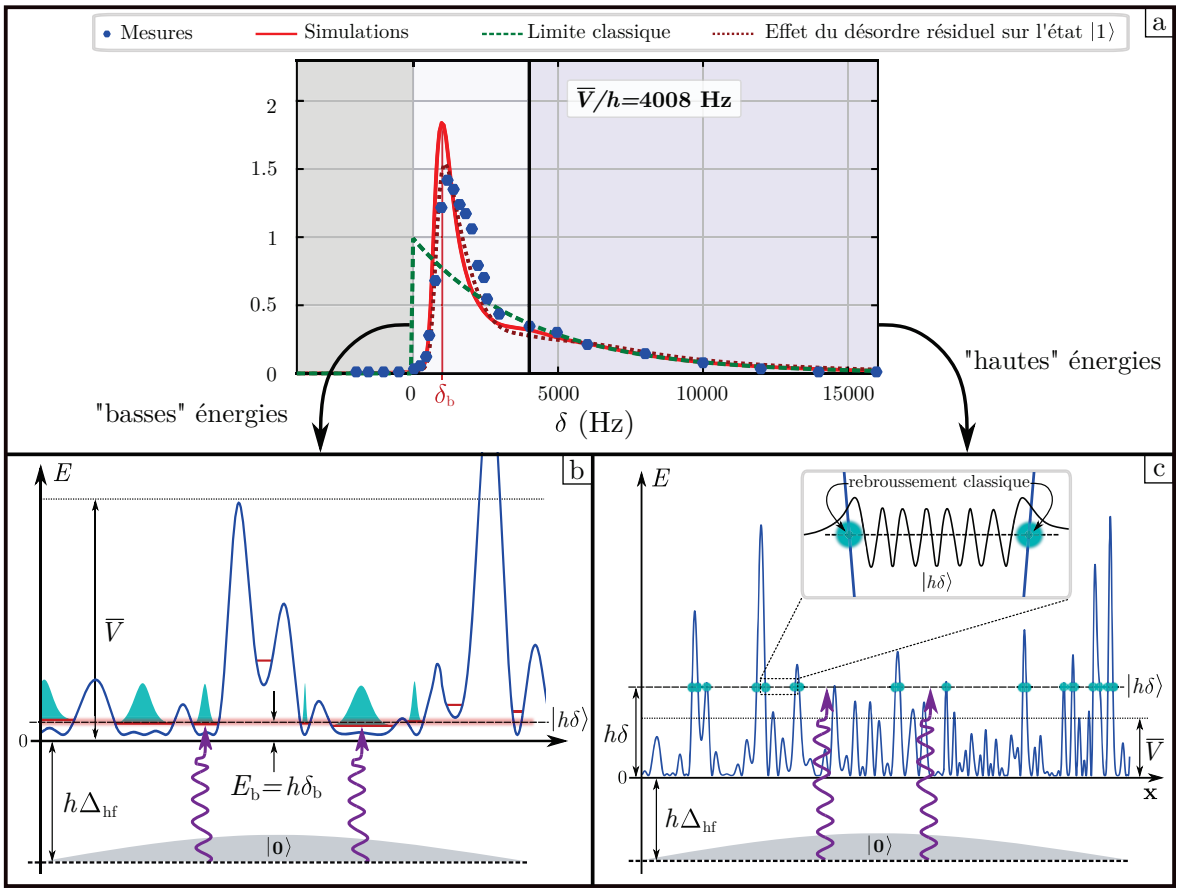

FIGURE 7.22 – **Fonctions spectrales en régime de désordre classique répulsif.** Là encore, la fonction spectrale **a.** montre deux régimes. **b.** A "hautes énergies" $E \gtrsim V_0$, la fonction spectrale sonde directement en potentiel $p(V)$. **c.** En revanche, il n'y a aucun état accessible pour des énergies négatives, d'où une fonction spectrale nulle pour $E < 0$. A "basses énergies", il y a donc une accumulation d'états liés aux fonds des minima de potentiels autour d'une même énergie E_b. Ce cumul d'états produit une résonance à la fréquence $\delta_b = E_b/h$ sur le spectre mesuré en **a.**.

La hauteur et la taille finie des puits fixe la raideur moyenne $\overline{\kappa}_v$ du désordre telle que $V(\sigma) \sim \overline{\kappa}_v\, \sigma^2 \sim V_0$. Cette raideur est alors associée à une fréquence typique d'oscillation :

$$\overline{\omega} = \sqrt{\frac{\overline{\kappa}_v}{m}} = \sqrt{\frac{V_0}{m\sigma^2}}\,, \tag{7.38}$$

qui fixe l'énergie moyenne de l'état fondamental de chaque puits à :

$$E_b \sim \hbar\overline{\omega} = \sqrt{V_0\, E_\sigma}\,. \tag{7.39}$$

Cela n'est *a priori* pas évident, mais on peut montrer [139, 138] que pour un désordre de type *speckle* il existe une accumulation de minima de potentiel en $V = 0$, comme représenté en figure 7.22 b. Autrement dit, sur l'ensemble des minima de potentiel qui peuvent être décomptés sur une réalisation d'un désordre *speckle*, une grande majorité est située autour des points où le potentiel est nul. [19] L'ensemble des états fondamentaux soutenus autour des minima en $V = 0$ s'accumulent donc autour d'une même énergie typique E_b.

19. Il faut noter que ceci se comprend bien pour un désordre *speckle* en dimension $d = 1$ et $d = 2$, configurations pour lesquelles les lieux où $V = 0$ forment un ensemble de points distincts. En revanche, la situation en dimension $d = 3$ est plus délicate puisque les zones où $V = 0$ forment des courbes [138].

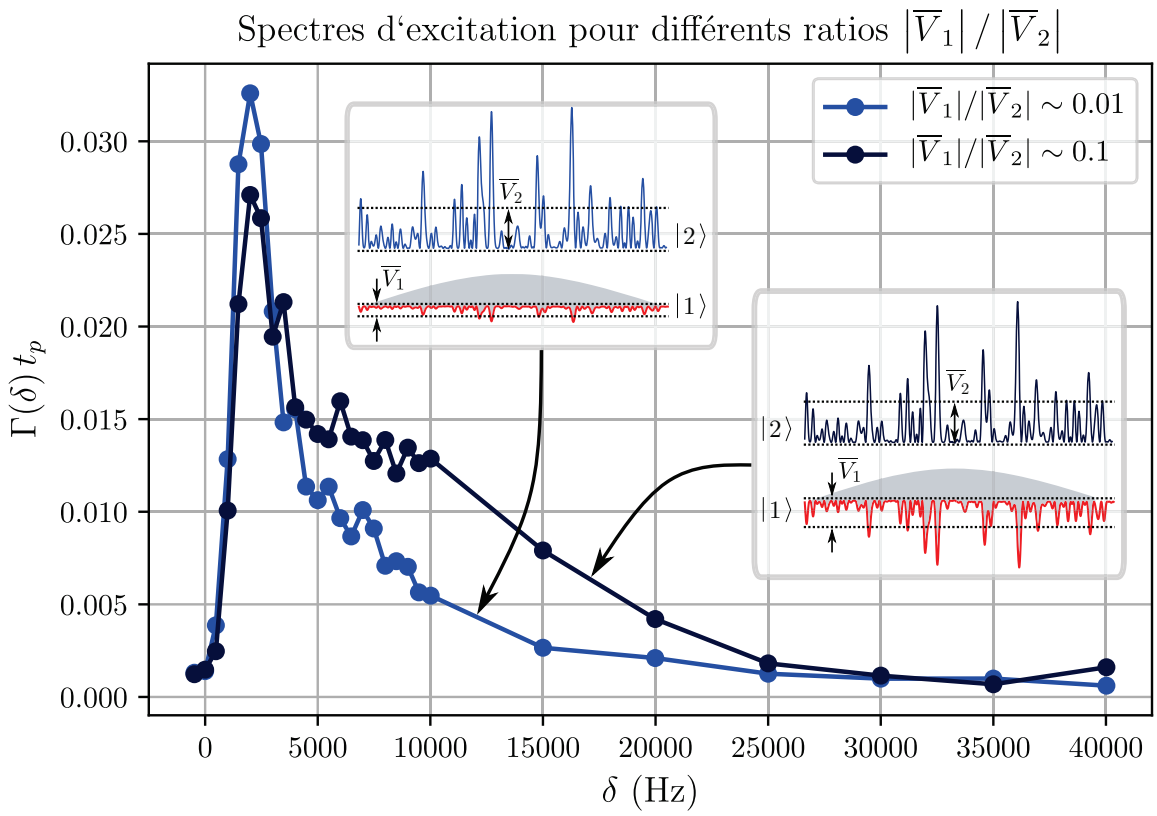

FIGURE 7.23 – **Effet du désordre résiduel sur l'état $|1\rangle$ du condensat.** Ces spectres ont été réalisés pour une même amplitude de désordre $|\overline{V}_2| \sim 5\,\text{kHz}$, et pour différents ratios $|\overline{V}_1| / |\overline{V}_2|$. Le spectre représenté par la courbe bleue a été mesuré avec un ratio $|\overline{V}_1| / |\overline{V}_2| \sim 0.01$ spécifié par (7.16). Le spectre représenté par la courbe bleue foncée a été mesuré avec un ratio $|\overline{V}_1| / |\overline{V}_2| \sim 0.1$. Ce spectre est sensiblement déformé et élargi comparé au spectre bleu minimisant le potentiel V_1. En augmentant l'amplitude du désordre résiduel sur l'état $|1\rangle$, on perturbe le condensat de sorte que la distribution en énergie initiale des atomes dans l'état $|1\rangle$ est moins bien définie, ce qui se traduit par un élargissement du spectre.

C'est ce cumul d'états autour d'une même énergie qui est responsable de la résonance visible en figure 7.22 a. à la fréquence $\delta_\text{b} = E_\text{b}/h$.[20]

7.6.6 Influence du désordre résiduel sur l'état du condensat

Pour tout ce qui a été présenté jusqu'ici, l'effet du désordre résiduel V_1 appliqué à l'état du condensat n'a jamais été pris en compte. Et pour cause, les figures 7.18 et 7.19 montrent que l'accord entre les simulations numériques et l'expérience est dans l'ensemble très bon sans avoir à inclure un quelconque effet de V_1, à l'exception des spectres réalisés à $4\,\text{kHz}$.

On rappelle que pour une seule et même puissance optique, la figure de *speckle* génère un potentiel d'amplitude $|\overline{V}_2|$ sur l'état $|2\rangle$, et un potentiel résiduel d'amplitude $|\overline{V}_1| \sim 0.01\,|\overline{V}_2|$ sur l'état $|1\rangle$ des atomes du condensat (cf section 7.4.3).

20. On notera que dans le régime $V_0 \gg E_\sigma$, on a :

$$V_0 \gg E_\text{b} \gg E_\sigma\,.$$

Tant que l'amplitude de ce potentiel résiduel reste faible devant le potentiel chimique $\mu \sim 40\,\text{Hz}$ du condensat, les effets d'interaction propres au régime de Thomas-Fermi (cf section 3.1.3) permettent d'écranter ce désordre résiduel, de sorte que le potentiel effectif de champ moyen ressentit par chaque atome du condensat reste homogène.

Mais pour les spectres réalisés à $\left|\overline{V}_2\right| = 4\,\text{kHz}$ d'amplitude, le désordre résiduel généré sur l'état du condensat possède une amplitude $\left|\overline{V}_1\right|$ de l'ordre de $40\,\text{Hz}$, ce qui est de l'ordre de μ. Dans ce régime, il se peut donc que, part endroit, le désordre résiduel ne soit plus totalement écranté et perturbe le condensat. Le potentiel effectif V_1^{eff} associé à l'état $|1\rangle$ n'est donc plus homogène (comme indiqué par l'expression (7.11)), mais possède quelques fluctuations. Ces fluctuations de potentiel soutiennent de nouveaux états qui peuvent être occupés par les particules du condensat, ce qui aura tendance à élargir le spectre $\Gamma(\delta)$ mesuré expérimentalement, comme représenté en figure 7.23. [21]

M.Pasek et D.Delande ont pu mettre au point une méthode permettant de tenir compte approximativement de cette perturbation du condensat par le désordre résiduel V_1 au niveau des simulations en calculant la dynamique de propagation dans le désordre en deux étapes :

- ⋆ Un état initial d'onde plane $|\mathbf{k}\rangle$ est généré, puis est propagé en le multipliant par l'opérateur d'évolution $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}_1 t/\hbar}$, où $\hat{\mathcal{H}}_1 = -\hbar^2\Delta/2m + V_1$ est l'hamiltonien associé à la dynamique d'une particule soumise au désordre résiduel $V_1(\mathbf{x})$ associé à la figure de *speckle*. Cette étape de propagation de l'onde dans le désordre $V_1(\mathbf{x})$ est limitée à une durée de $\Delta t = 2\,\text{ms}$, soit environ la moitié du temps de transfert $t_p = 5\,\text{ms}$.

- ⋆ Ce nouvel état propagé $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}_1\,\Delta t/\hbar}|\mathbf{k}\rangle$ est alors utilisé comme état initial pour la propagation selon l'hamiltonien $\hat{\mathcal{H}}_2 = -\hbar^2\Delta/2m + V_2$ associé au désordre dans l'état $|2\rangle$. La fonction spectrale est ensuite calculée selon l'expression (7.34) par la même méthode que celle explicitée en section.

Les fonctions spectrales numériques obtenues selon cette méthode sont représentées en figures 7.18 et 7.19 avec une courbe pointillée marron, et permettent un très bon accord entre résultats numériques et expériences.

21. Plus concrètement, les atomes occupant le condensat dont le champ moyen écrante tout potentiel externe peuvent être considérés comme des ondes planes $|\mathbf{k} = 0\rangle$ avec une énergie E bien résolue (celle de l'état $|1\rangle$). Autrement dit, la fonction spectrale $A_1(\mathbf{k} = 0, E)$ associée à ces états est très piquée autour de l'énergie du condensat $A_1(\mathbf{k} = 0, E) \sim \delta(E)$. En présence d'un désordre résiduel non-écranté, la fonction spectrale $A_1(\mathbf{k} = 0, E)$ s'élargit de sorte que la spectroscopie ne mesure plus uniquement la fonction spectrale $A_2(\mathbf{k} = 0, E)$ associée à l'état $|2\rangle$ mais la *convolution* des deux fonctions spectrales [19] :

$$\Gamma(\delta) \sim A_1 \star A_2(E = h\delta)\,.$$

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Le chapitre précédent résume le protocole expérimental de spectroscopie RF qui a permis de mesurer avec succès la fonction spectrale d'atomes placés dans un désordre *speckle*. L'intérêt d'une telle spectroscopie a été double : caractériser complètement le potentiel désordonné sondé (calibration de l'amplitude du désordre, désordre quantique, désordre classique), et fournir une *preuve de principe* qu'il est possible de coupler *à énergie résolue et contrôlée* des atomes avec un potentiel désordonné.

Ce dernier point pourrait ouvrir de larges perspectives quant à la possibilité d'une étude résolue de la transition d'Anderson. En effet, on avait vu en section 5.2 que les expériences de mesures de seuil de mobilité E_c de la transition d'Anderson étaient toutes limitées par leur manque de résolution en énergie. En effet, lors du couplage des atomes avec le désordre, on avait vu en section 5.1.3 que la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$ acquérait une largeur en énergie sur laquelle s'étalait les états propres de l'énergie occupés dans le désordre.

Cette largeur définissait alors la *résolution en énergie* δE des expériences. En ordre de grandeur, cette largeur est estimée par V_0^2/E_σ en régime de désordre quantique (cf section 7.6.4), et par V_0 en désordre classique (cf sections 6.4.2 et 7.6.5). Dans chacune de ces configurations, la résolution en énergie était donc soit du même ordre de grandeur, soit plus grande que le seuil de mobilité E_c : en régime de désordre quantique V_0^2/E_σ correspond à l'énergie de Larkin des états localisés et est donc du même ordre de grandeur que E_c (cf section 5.1.4) ; en régime de désordre classique le seuil de mobilité E_c est toujours inférieur à l'amplitude V_0 du désordre (cf figure 5.11).

Ce régime d'expérience pour lequel $\delta E \gtrsim E_c$ limitait les possibilités des expériences par deux aspects : une estimation de E_c n'était possible qu'avec la connaissance de la fonction spectrale $A(\mathbf{k}, E)$, et le paramètre d'ordre de la transition n'est pas contrôlé dans la mesure où tous les états autour du seuil de mobilité sont occupés de manière indifférenciée.

8.1 Vers une spectroscopie de la transition d'Anderson ?

Le principal atout de la spectroscopie RF telle que présentée dans le chapitre 7 est donc que la résolution en énergie δE de l'expérience n'est plus limitée à la largeur de la fonction spectrale, mais par le temps de couplage RF de la spectroscopie, de sorte que $\delta E \sim h/t_p$. Ceci pourrait donc offrir la possibilité de réaliser une expérimentation sur la transition d'Anderson pour laquelle $\delta E \ll E_c$, c'est à dire, dans un régime où les états proches de E_c sont sélectivement accessibles.

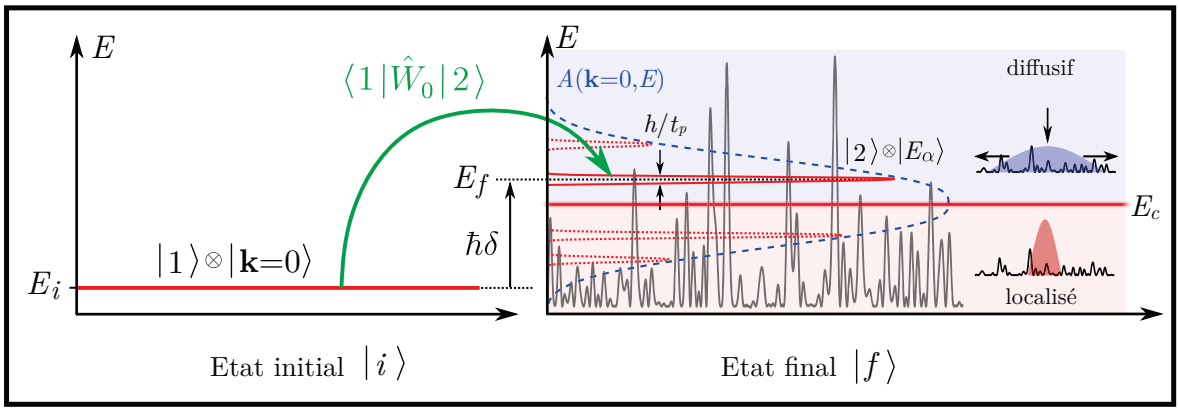

FIGURE 8.1 – **Schéma d'étude spectroscopique de la transition d'Anderson.** Les atomes sont couplés à des états du potentiel désordonné dont l'énergie est fixée par la fréquence $h\delta$, et avec un résolution fixée par le temps de couplage t_p. Après transfert, on réalise une expérience de propagation dans le désordre à l'issue de laquelle la densité atomique est mesurée. L'arrêt de l'expansion du nuage, ou la saturation de la densité centrale, pourrait caractériser la localisation. En variant l'énergie $h\delta$, il serait envisageable de mesurer le seuil de mobilité E_c ainsi que les exposants critiques de la transition.

Une expérience "type" sur la transition d'Anderson à l'aide d'une spectroscopie RF comporterait deux étapes, comme représenté en figure 8.1 :

- ⋆ Une première étape de "chargement" des atomes dans le *speckle* par transfert RF. L'énergie des états vers lesquels sont couplés les atomes est fixée par le désaccord $h\delta$ par rapport à la transition à deux photons, et la sélectivité du transfert est assurée par une résolution en énergie δE adaptée.

- ⋆ Une seconde étape d'expérience de transport dans le *speckle* où l'on mesure l'évolution de la densité atomique $n(\mathbf{x}, t)$ en fonction du temps de propagation t dans le désordre. Pour des temps t suffisamment longs, i.e. dépassant la seconde, la localisation pourrait être caractérisée par un arrêt de l'expansion du nuage, ou bien par une saturation de la densité centrale.

Répéter cette expérience pour différentes énergies $h\delta$ de couplage pourrait permettre de mesurer directement le seuil de mobilité E_c et d'étudier sélectivement les propriétés de localisation des états proches de E_c, ce qui pourrait mener à une mesure des exposants critiques s et ν de la transition. Pour l'heure, il subsiste deux limitations au protocole de spectroscopie présenté dans le chapitre précédent qui empêchent de tester ce schéma d'expériences.

8.1.1 Limitations du montage actuel

Temps de vie des atomes dans le désordre

La première limitation de la méthode spectroscopique telle que présentée dans le chapitre précédent concerne le temps de vie très limité des atomes dans le potentiel *speckle*. En effet, comme cela a déjà été souligné plusieurs fois lors des chapitres 2 et 5, la localisation est un phénomène ne se manifestant qu'aux temps de longs de propagation dans le désordre. Pour des expériences d'atomes froids, on a vu que ces temps dépassaient typiquement la seconde.

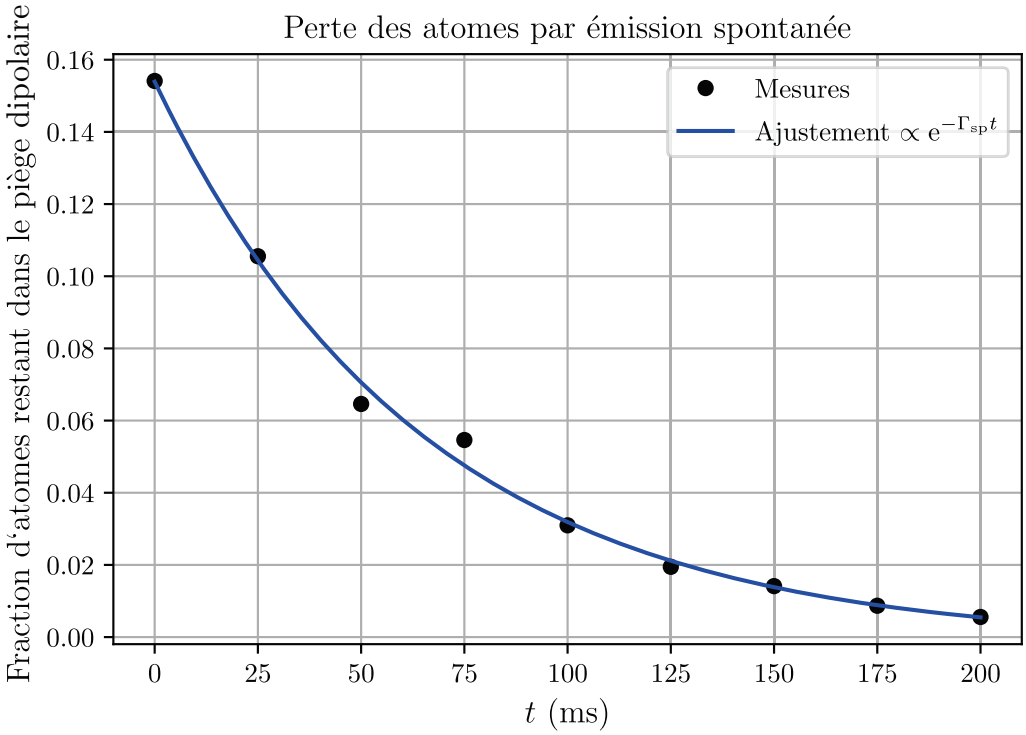

FIGURE 8.2 – **Temps de vie des atomes en contact avec le *speckle* quasi-résonant.** Après transfert dans l'état $|2\rangle$, les atomes sont maintenus dans le piège dipolaire en contact avec le potentiel *speckle* V_2 quasi-résonant pendant une durée t. Sous l'effet des processus d'émission spontanée, le nombre d'atomes restant dans le piège dipolaire diminue en un temps typique $1/\Gamma_{sp}$. Les mesures (points noirs) ont été réalisées pour un désordre répulsif de 60 Hz d'amplitude, un ajustement (courbe bleue) de la décroissance permet d'estimer un temps de vie $1/\Gamma_{sp} \sim 60$ ms des atomes dans le désordre.

Cette nécessité de temps d'expérience longs dans le désordre n'est pas compatible avec le fait d'utiliser une figure de *speckle* quasi-résonante. En effet, avec un laser désaccordé d'à peine une centaine de MHz de la transition atomique, les temps de vie $1/\Gamma_{sp,2}$ des atomes dans l'état $|2\rangle$ en contact avec la figure de *speckle* ne dépassent pas la centaine de ms, [1] comme représenté en figure 8.2. Il est donc nécessaire d'implémenter différemment le désordre sélectif en état interne en limitant les effets d'émission spontanée.

Homogénéité du transport et lévitation

La seconde limitation est l'inhomogénéité de la lévitation magnétique. Comme cela a été souligné dans la section 3.3.5, une lévitation à l'aide de potentiels magnétiques n'est homogène (c'est à dire sans courbure de potentiel) que dans la limite des forts biais magnétiques B_0, ce qui n'est donc pas compatible avec le fait de travailler autour du bais "magique" à $B_0 \sim 3.23$ G (qui garantit une spectroscopie résolue en énergie).

1. En un cycle d'absorption/émission spontanée, on avait vu en section 3.2.2 qu'un atome se voyait communiquer une vitesse de recul $v_r = 5.9$ mm.s^{-1}. Avec une zone d'imagerie de 2.7 mm de large (cf section 3.3.6), un atome ayant absorbé un photon de la figure de *speckle* résonante est complètement éjecté de la zone d'imagerie en 450 ms. Les phénomènes de chauffage par émission spontanée sont donc responsables d'une perte d'atomes pour des temps d'expériences de l'ordre de la dizaine ou centaine de ms.

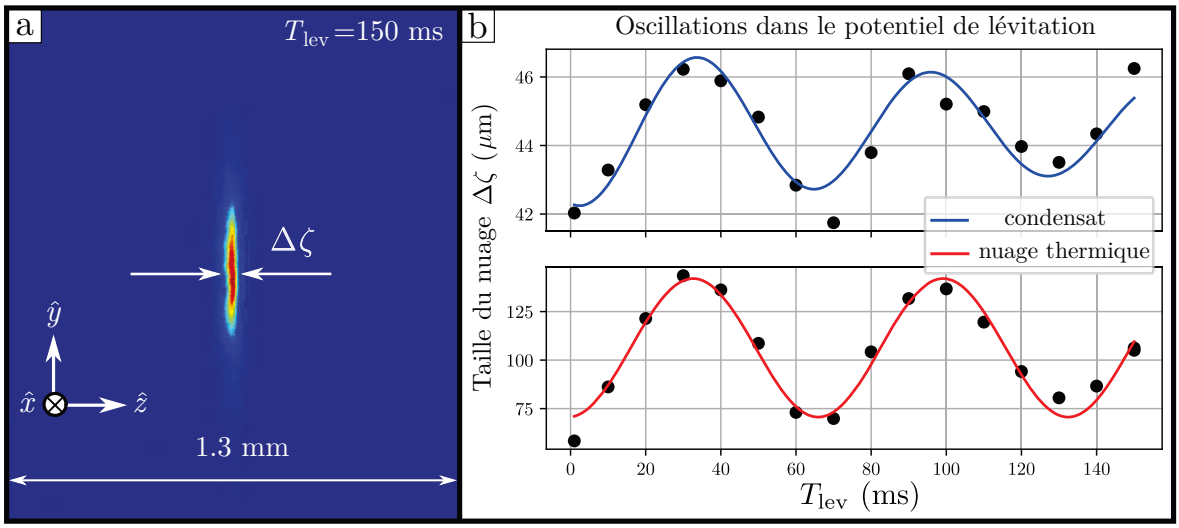

FIGURE 8.3 – **Oscillations du nuage dans le potentiel magnétique de lévitation. a.** En libérant le nuage du piège dipolaire, les atomes se propagent dans le potentiel (3.55) de lévitation. A $B_0 \sim 3.23\,\text{G}$, la courbure radiale de ce dernier est très importante, de sorte que les atomes se propageant dans le plan $\{\hat{x}, \hat{z}\}$ ressentent un piégeage magnétique harmonique de fréquence w_ρ (cf expression (3.56)). Le potentiel magnétique selon l'axe $\hat{z}$ est, quant à lui, quasiment homogène. **b.** La taille $\Delta\zeta$ du nuage piégé évolue alors selon des modes de *respiration*, dont la fréquence ω_ρ est égale au double de la fréquence de piège w_ρ, et ce, aussi bien pour un nuage condensé [32, 37], qu'un nuage thermique [83]. Un ajustement des oscillations permet d'estimer $w_\rho = \omega_\rho/2 \sim 2\pi \times 8\,\text{Hz}$.

Pour l'heure, il existe donc un fort confinement radial du nuage par le potentiel de lévitation magnétique, comme représenté en figure 8.3.

8.1.2 Dépasser ces limitations : un *speckle* bichromatique ?

Quelques pistes pourraient être envisagées pour essayer de surmonter les difficultés soulevées précédemment.

En ce qui concerne le temps de vie limité des atomes dans le désordre, il faudrait être capable d'éloigner le laser du *speckle* de la résonance, tout en conservant une sélectivité appréciable du potentiel sur les états internes $|1\rangle$ et $|2\rangle$ de la spectroscopie. Dans l'état actuel de l'expérience, éloigner le laser du *speckle* de la transition pourrait certes limiter l'émission spontanée des atomes transférés dans l'état $|2\rangle$ du désordre. Mais en contre-partie, les atomes restés dans l'état $|1\rangle$ du condensat serait exposé à un désordre V_1 d'une plus grande amplitude, ce qui limiterait alors la résolution en énergie de la spectroscopie (cf section 7.6.6).

Néanmoins, on pourrait imaginer compenser ce désordre V_1 en réalisant une figure de *speckle bichromatique* générée avec un faisceau laser incorporant une deuxième fréquence optique.

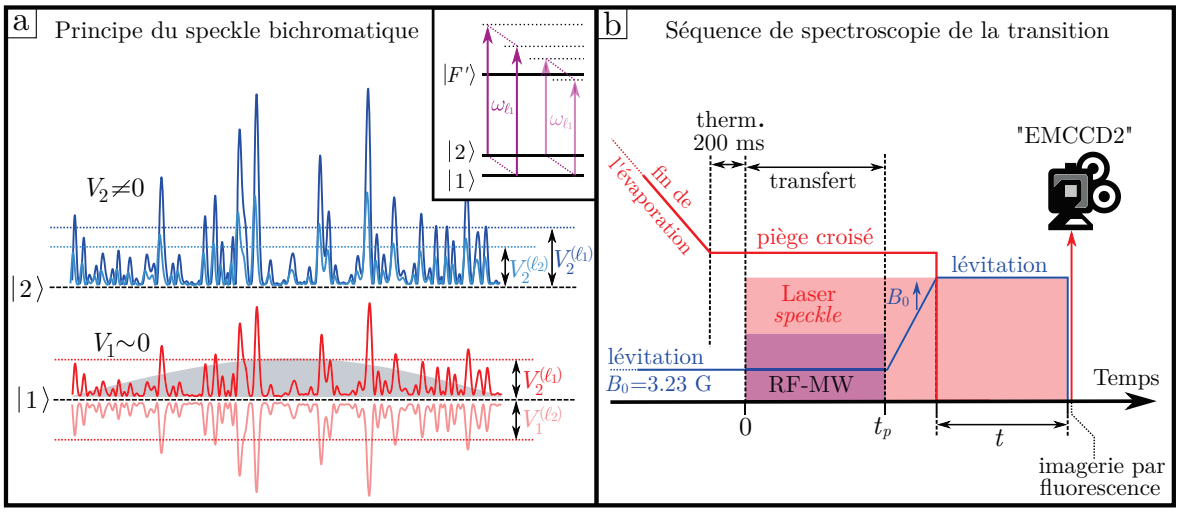

FIGURE 8.4 – **Améliorations possible de l'expérience. a.** Un *speckle* généré à l'aide d'une lumière de fréquence ω_{ℓ_1} hors résonance génère à peu près le même potentiel $V_2^{(\ell_1)} \sim V_1^{(\ell_1)}$ sur les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Mais il serait possible de venir compenser le potentiel $V_1^{(\ell_1)}$ en ajoutant une autre fréquence ω_{ℓ_2} de sorte que le potentiel total sur l'état $|1\rangle$ soit nul, i.e. $V_1^{(\ell_2)} = -V_1^{(\ell_1)}$. **b.** Après le transfert des atomes dans le désordre, le biais magnétique B_0 au niveau des atomes pourrait être progressivement augmenté, tout en préservant un gradient suffisant pour léviter le nuage. Après un temps t de propagation dans le désordre, la densité atomique pourra alors être mesurée et caractérisée en terme de localisation ou non.

Le potentiel dipolaire généré par un faisceau *speckle* à deux fréquences laser ω_{ℓ_1} et ω_{ℓ_2} sur chacun des états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ serait alors donné par la somme des potentiels dipolaires générés par chaque fréquence,[2] de sorte que :

$$\overline{V}_2 \sim \frac{\bar{I}_{\ell_1}}{\omega_{\ell_1} - \omega_{2,F'}} + \frac{\bar{I}_{\ell_2}}{\omega_{\ell_2} - \omega_{2,F'}} \quad \text{et} \quad \overline{V}_1 \sim \frac{\bar{I}_{\ell_1}}{\omega_{\ell_1} - \omega_{1,F'}} + \frac{\bar{I}_{\ell_2}}{\omega_{\ell_2} - \omega_{1,F'}}, \tag{8.1}$$

où $\bar{I}_{\ell_i}$ sont les intensités respectives associées à chaque fréquence laser, et $\omega_{F,F'}$ sont les fréquences associées aux transitions hyperfines $|F\rangle \to |F'\rangle$.

En jouant sur les intensités $\bar{I}_{\ell_i}$ et les désaccords laser $\omega_{\ell_i} - \omega_{F,F'}$, il serait alors possible de produire une situation où $\overline{V}_2 \neq 0$ tout en ayant $\overline{V}_1 \sim 0$, comme illustré en figure 8.4 a. Il faudra être néanmoins vigilant, dans la mesure où les taux d'émission spontanée associé à chaque fréquence laser ne pourront que se sommer, c'est à dire :

$$\Gamma_{\text{sp},2} \sim \frac{\bar{I}_{\ell_1}}{(\omega_{\ell_1} - \omega_{2,F'})^2} + \frac{\bar{I}_{\ell_2}}{(\omega_{\ell_2} - \omega_{2,F'})^2} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\text{sp},1} \sim \frac{\bar{I}_{\ell_1}}{(\omega_{\ell_1} - \omega_{1,F'})^2} + \frac{\bar{I}_{\ell_2}}{(\omega_{\ell_2} - \omega_{1,F'})^2}. \tag{8.2}$$

Enfin, en ce qui concerne l'inhomogénéité du potentiel de lévitation, il serait possible de contrôler les courants débités au niveau de chaque bobine utilisée pour la lévitation (cf figure 3.15 a.) de sorte à augmenter progressivement le biais magnétique B_0 après le transfert des atomes dans l'état $|2\rangle$ désordonné, tout en maintenant un gradient b' constant au niveau des atomes pour conserver une lévitation. On pourrait ainsi ouvrir "adiabatiquement" le piège magnétique résiduel observé en figure 8.3 a. pour un potentiel de lévitation plus homogène.

2. Ce qui n'est vrai que si la différence en fréquence $\omega_{\ell_1} - \omega_{\ell_2}$ des deux sources laser qui composent le faisceau est grande devant la largeur spectrale de chaque laser (typiquement la dizaine de kHz).

8.2 Explorer d'autres signatures de la localisation d'Anderson

Une fois ces difficultés surmontées, un large champ d'investigations expérimentales s'ouvre. On se contentera ici de ne donner que quelques perspectives d'études en lien directe avec la transition d'Anderson.

8.2.1 Multi-fractalité de la fonction d'onde dans le régime critique

Comme cela a été évoqué en section 2.2.3, le régime critique de la transition d'Anderson est caractérisé par la *divergence* de la longueur de localisation $\xi_{\text{loc}} \propto |E - E_c|^{-\nu}$ à l'approche du seuil de mobilité E_c. Cette divergence de ξ_{loc} se manifeste alors par une *invariance d'échelle* des propriétés du système proche du point critique.

Pour la transition d'Anderson, cette *auto-similarité* se caractérise par une structure *multi-fractale* des fonctions d'onde $\Psi(\mathbf{x})$ critiques, pour lesquelles la densité de probabilité de présence de la particule $|\Psi(\mathbf{x})|^2$ présente de très larges fluctuations, comme représenté en figure 8.5 b. Afin de comprendre de quoi il s'agit, on rappelle ici quelques notions élémentaires sur les fractales, sans aucune prétention d'exactitude mathématique.

Irrégularité et fractales

D'une manière générale, les notions de *fractale* et de *dimension fractale* permettent de quantifier la *rugosité* d'un ensemble, c'est à dire la manière dont celui-ci occupe l'espace. A titre d'exemple, on considère tout d'abord un cercle de rayon r, caractérisé par son périmètre $2\pi r$. Il paraît assez intuitif de dire qu'un cercle est un objet de dimension 1 : en effet, en augmentant d'un facteur d'échelle s son rayon r, on augmente du même facteur son périmètre $2\pi\, sr$. Pour un disque de rayon r, l'augmentation d'un facteur s du rayon conduit à une augmentation d'un facteur s^2 de son aire. Pour une sphère de rayon r, appliquer un facteur s au rayon revient à multiplier par s^3 son volume, etc.

Ainsi, la dimension d d'un objet peut se caractériser par la manière dont la *mesure* de celui-ci change lorsqu'un facteur d'échelle lui est appliqué. Plus particulièrement, un objet de dimension d peut se *définir* comme un objet dont la mesure (longueur, surface, volume, etc) varie comme s^d lorsqu'on lui applique un facteur d'échelle s.

On peut numériquement quantifier cette "mesure" d'un objet en repérant l'objet que l'on veut étudier sur une grille composée de cellules de taille ℓ de côté, puis en comptant le nombre $N(\ell)$ de cellules qui permettent de recouvrir l'objet. La dimension de l'objet en question correspond à l'exposant d qui détermine l'augmentation du nombre $N(\ell)$ de cellules nécessaires pour recouvrir l'objet lorsque l'on diminue la taille ℓ de ces cellules, tel que :

$$N(\ell) \underset{\ell\to 0}{\sim} \ell^{-d} \quad \text{soit} \quad d = \lim_{\ell\to 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}\,. \tag{8.3}$$

Selon cette définition (8.3) de la dimension, les formes *régulières* comme un cercle, un disque, une sphère, un cube, etc, ont une dimension d *entière*. Mais il existe des objets, appelés *fractales*, dont la dimension au sens de (8.3) n'est pas entière.

C'est, par exemple, le cas de la côte de la Grande-Bretagne, une courbe pour laquelle le comptage de la dimension selon (8.3) donne $d = 1.21$, comme illustré en figure 8.5 a_1.

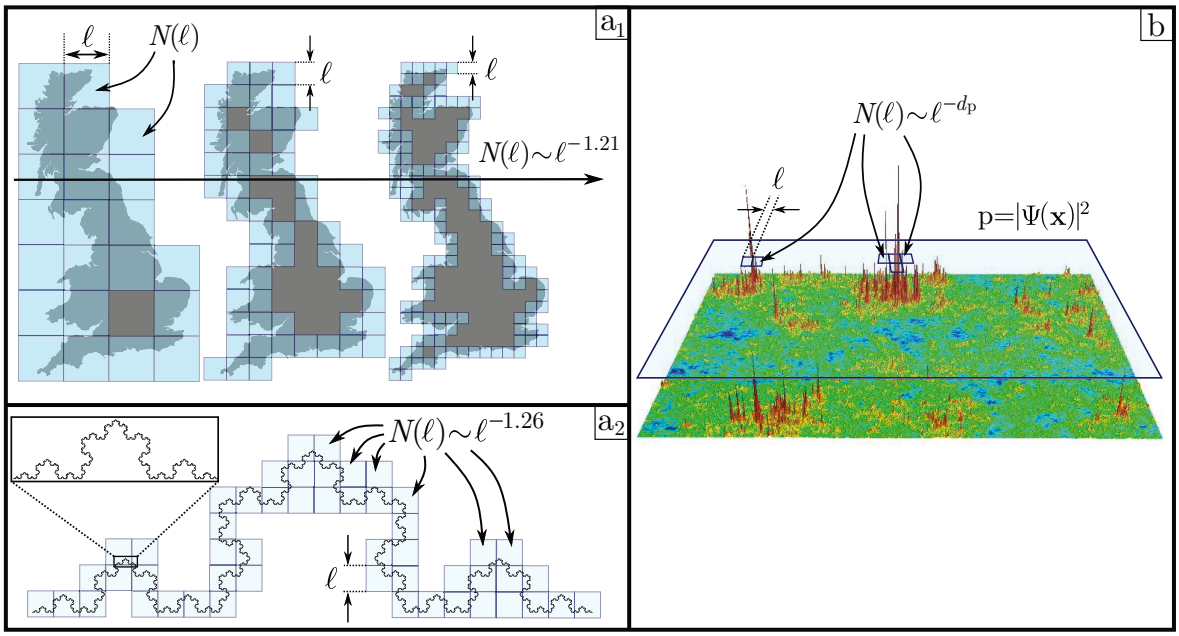

FIGURE 8.5 – **Fractales et multi-fractalité. a**$_1$ La côte de Grande-Bretagne est une exemple de courbe fractale présentant des irrégularités *à toutes les échelles*. Par la méthode "*box counting*" (8.3), on peut montrer que sa dimension $d \simeq 1.21$ est fractale. Figures tirée de [182]. **a**$_2$ La courbe de von Koch est un cas particulier de fractale *auto-similaire*, c'est à dire, qui est composée d'un même motif qui se répète à chaque échelle. Cette courbe est donc rugueuse à toutes les échelles, au même titre que la côte de Grande-Bretagne. **b.** Les fonctions d'ondes d'états proches de E_c présentent des fluctuations avec une structure multi-fractale : chaque courbe d'iso-valeur $\mathrm{p} = |\Psi(\mathbf{x})|^2$ de densité de probabilité possède une dimension fractale d_p différente. Les propriétés statistiques des fluctuations sont donc décrites par un ensemble continu de dimensions fractales appelées *spectre multi-fractal*. Figure tirée de [63].

Intuitivement, une côte se dessine avec une ligne, il paraîtrait donc intuitif que sa dimension soit $d = 1$[3]. Mais le fait que cette courbe soit irrégulière, et ce peu importe l'échelle à laquelle on la regarde, implique qu'elle "remplisse un peu mieux l'espace" qu'une ligne de dimension $d = 1$, ce qui se traduit par une dimension fractale $d \simeq 1.21 > 1$.

Une courbe *auto-similaire* comme la courbe de von Koch, représentée en figure 8.5 a$_2$, est aussi un exemple de courbe irrégulière à toutes les échelles dont la dimension $d \simeq 1.26$ est aussi fractale.

Multi-fractalité à la transition d'Anderson

Une question que l'on pourrait se poser serait de savoir quelle est la dimension (fractale ?) au sens de la définition (8.3) d'une fonction d'onde critique dont l'énergie est proche du seuil de mobilité. Pour cela, on pourrait procéder par comptage de cellules, comme évoqué précédemment.

On pourrait alors cartographier chaque iso-valeurs de la probabilité de présence $\mathrm{p} = |\Psi(\mathbf{x})|^2$ de la particule, et pour chaque iso-valeur p compter le nombre de cellules de taille ℓ nécessaire pour recouvrir l'ensemble de points. Si la fonction d'onde $|\Psi(\mathbf{x})|^2$ avait été simplement fractale, la dimension d calculée selon (8.3) aurait été la même pour chaque iso-valeur.

3. En dessous d'une certaine échelle, une courbe régulière (c'est à dire différentiable) apparaîtra toujours comme linéaire (i.e. semblable à une droite). Sa dimension sera donc toujours égale à 1.

En revanche, de nombreuses études théoriques [64, 114, 12, 145] ont montré que les fonctions d'onde critiques de la transition d'Anderson présentent un caractère *multi-fractal*, au sens où l'exposant d calculé selon (8.3) dépend *continument* de l'iso-valeur p considérée.

L'irrégularité des fonctions d'onde critiques ne peut donc pas être décrite à l'aide d'une unique dimension fractale, il faut en réalité déterminer un ensemble continu de dimension appelé *spectre multi-fractal* (*multifractality spectrum* en anglais) pour décrire l'ensemble des caractéristiques statistiques des fluctuations. Prendre en compte cette multi-fractalité des états critiques pourrait permettre de mieux décrire théoriquement les propriétés de la transition d'Anderson, notamment en terme d'exposants critiques [89].

La multi-fractalité des fonctions d'onde critiques a déjà été étudiée expérimentalement dans des systèmes de matière condensée (semi-conducteur dopés [142], effet Hall quantique [116]) ainsi qu'avec des expériences d'ultrasons [67]. Au delà du problème des interactions entre particule auquel sont confrontés les expériences avec des systèmes électroniques (cf section 2.4.1), la plupart de ces expériences n'ont pas pu mesurer le spectre multi-fractal par leur manque de résolution en énergie [180]. En effet, résoudre les propriétés multi-fractales des fonctions d'onde nécessite d'adresser précisément un nombre très restreint, voire un unique état, sans quoi la mesure de la fonction d'onde résulte d'une moyenne sur la résolution en énergie et fait donc disparaître les fluctuations (cf section 7.5.2).

Les méthodes spectroscopiques telles que celle présentée dans le cadre des travaux de cette thèse pourraient donc constituer de vrais atouts pour l'étude de la multi-fractalité, de part leur très bonne résolution en énergie. Une proposition théorique récente de Werner et al. [180] va d'ailleurs dans ce sens, et montre que la technique de spectroscopie RF permettrait en effet de mesurer le spectre multi-fractal. On notera cependant qu'il est nécessaire d'implémenter une imagerie 3D des fonctions d'onde critiques afin de ne pas intégrer les fonctions d'onde mesurées selon l'axe de l'imagerie (et donc détruire une partie de l'information). Pour ce faire, il existe différentes techniques d'imagerie par *tomographie* [26, 95] permettant d'imager un nuage d'atomes selon un plan choisi.

8.2.2 Signatures dans l'espace des impulsions

Jusqu'à présent, la localisation d'Anderson n'a été abordée qu'en terme de signatures dans *l'espace réel*, comme par exemple, l'arrêt de l'expansion d'un paquet d'onde. D'un point de vue expérimental, ces signatures sont difficiles à observer, surtout lorsque le manque de résolution finie en énergie des expériences implique d'attendre un temps théoriquement infini afin de pouvoir faire complètement la différence entre états localisés et diffusifs [119] (cf section 5.2). Pire encore, la décroissance exponentielle d'un profil en densité selon $\propto \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|/\xi_{\mathrm{loc}}}$, que l'on pourrait considérer comme *marqueur* de la localisation, n'est plus observable du moment que le profil mesuré est issu de la combinaison d'état localisés et diffusifs. En effet, dans ces conditions, le profil attendu diminue spatialement d'une manière *algébrique* [155, 20, 149]. Inversement, un nuage d'atomes occupant plusieurs états diffusifs d'énergies $E > E_c$, peut aussi présenter un profil en densité non-gaussien sous certaines conditions [147]. Il paraît donc nécessaire d'étudier d'autres signatures de la localisation, comme par exemple dans l'*espace des impulsions*, afin de disposer de nouveaux outils permettant de différencier la localisation de ce qui ne l'est pas.

Localisation faible dans l'espace des impulsions : rétro-diffusion cohérente

Comme on l'avait vu en section 2.2.2, la localisation faible se caractérise par une diminution du coefficient de diffusion d'une particule se propageant dans un désordre. Cette diminution provient de processus formant des boucles de rétro-diffusion, responsables d'un doublement de la probabilité de la particule de retourner à son point de départ (cf expression (2.24) et figure 2.4). Cette augmentation de la probabilité de retour à l'origine est donc une manifestation dans l'*espace réel* de la localisation faible.

Techniquement, ce retour de la particule à son origine est difficile à mesurer, car cela nécessite de pouvoir mesurer localement la fonction d'onde au point d'origine.

Mais la localisation faible se manifeste aussi dans l'*espace des impulsions* sous la forme d'une *rétro-diffusion cohérente* (*coherent backscattering*, CBS, en anglais), qui se caractérise par un doublement de la probabilité pour une particule initialement dans un état d'impulsion $|\mathbf{k}\rangle$ d'être diffusée par le désordre dans un état d'impulsion $|-\mathbf{k}\rangle$. Cet effet, illustré en figure 8.6 a_1, repose aussi sur l'interférence systématiquement constructive de paires de chemin de propagation à diffusions multiples, symétriques par renversement du temps l'un de l'autre.

L'effet CBS a été très extensivement étudié en optique [183], en physique des solides [172, 148] et aussi avec des atomes froids [91, 122, 85]. Comme on l'avait vu en section, il est possible, à l'aide d'une imagerie par temps de vol, de mesurer la distribution en impulsion d'un nuage d'atomes ayant diffusé dans un désordre. Pour des collisions élastiques, les états d'impulsions peuplés se répartissent sur un anneau (pour une diffusion 2D) de rayon $k_i = |\mathbf{k}_i|$, où $\mathbf{k}_i$ est l'impulsion initiale du nuage. L'effet CBS peut alors se manifester par l'apparition d'un maximum dans la distribution en impulsion en $-\mathbf{k}_i$, comme représenté en figure 8.6 a_2. L'apparition de ce pic de signal CBS en $-\mathbf{k}_i$ n'est *a priori* visible qu'après un temps $t \sim \tau^*$ de diffusion dans le désordre, le temps de transport τ^* correspondant à la durée typique de propagation avant que la particule ne perde la mémoire de son état d'impulsion initiale (cf section 2.2.1).

Localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions : diffusion cohérente vers l'avant

Comme on l'a vu en section 5.1.4, un état localisé peut s'interpréter comme étant un *état lié* (au sens de "*bound state*") au potentiel désordonné. D'une manière générale, on appelle "état lié" un état $|\Psi_\mathrm{b}\rangle$ dans lequel une particule ne peut pas s'échapper d'une certaine région finie de l'espace. Plus particulièrement, ceci implique que l'impulsion moyenne $\langle\Psi_\mathrm{b}|\hat{p}|\Psi_\mathrm{b}\rangle$ d'une particule occupant cet état soit nulle, sans quoi la particule pourrait s'échapper de la région en question.

On peut relier cette moyenne en impulsion à la distribution en impulsion $|\Psi_\mathrm{b}(p)|^2$ de l'état $|\Psi_\mathrm{b}\rangle$, de sorte que :

$$\langle\Psi_\mathrm{b}|\hat{p}|\Psi_\mathrm{b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, p\, |\Psi_\mathrm{b}(p)|^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}p\, p\, \left(|\Psi_\mathrm{b}(p)|^2 - |\Psi_\mathrm{b}(-p)|^2\right) = 0\,, \tag{8.4}$$

ce qui se traduit par la symétrie en impulsion :

$$|\Psi_\mathrm{b}(p)|^2 = |\Psi_\mathrm{b}(-p)|^2\,. \tag{8.5}$$

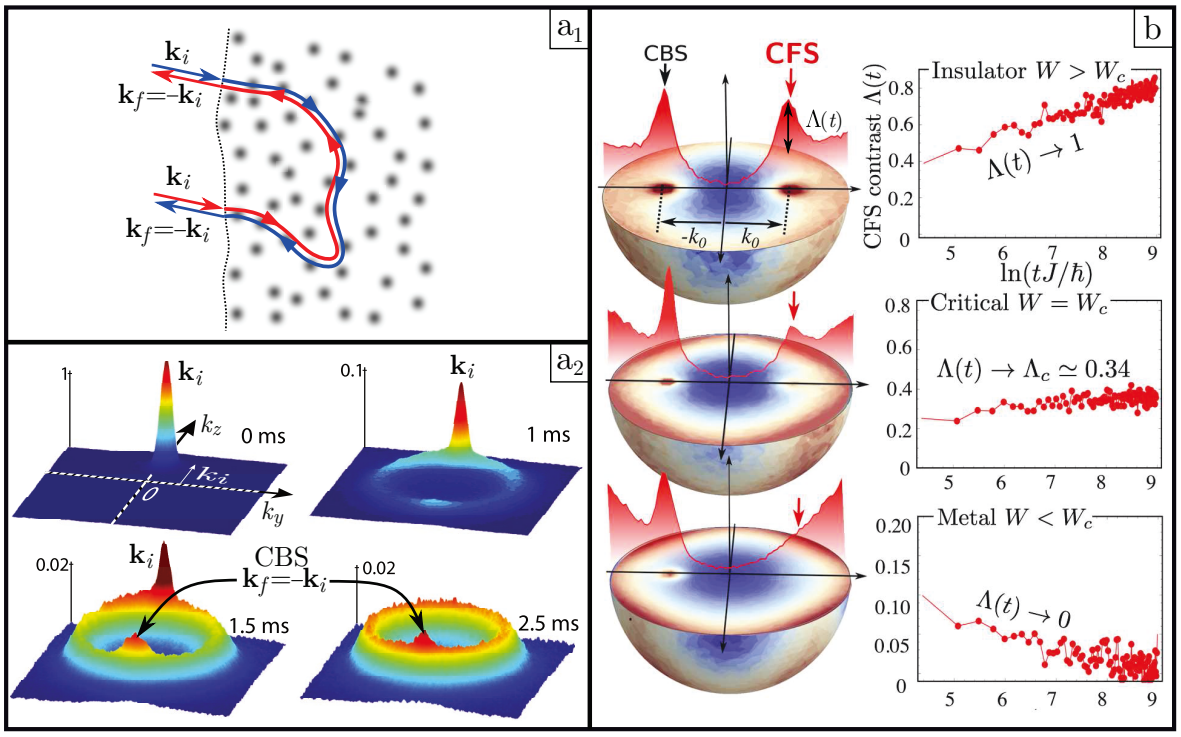

FIGURE 8.6 – **Signatures des phénomènes de localisation dans l'espace des impulsions. a**$_1$ La rétro-diffusion cohérente (CBS) provient de l'interférence constructive entre paire de chemins symétrique par renversement du temps l'un de l'autre. **a**$_2$ Observation expérimentale de l'effet CBS avec des atomes ultra-froids dans un *speckle*. Une impulsion initiale $\mathbf{k}_i$ est communiquée au nuage, puis la distribution en impulsion est mesurée pour différent temps de durée de propagation des atomes dans le désordre. La hauteur du pic initiale diminue jusqu'à éventuellement disparaître. L'effet CBS se caractérise par un maximum de signal à l'impulsion $-\mathbf{k}_i$. Figures tirées de [91]. **b.** Vue en coupe d'une distribution en impulsion 3D associée à la simulation d'atomes diffusant dans un désordre. L'effet CBS est observé en $-\mathbf{k}_0$, où $\mathbf{k}_0$ est l'impulsion initiale des atomes. Pour des états localisés d'énergie $E < E_c$, l'effet CFS apparaît comme un maximum de signal en $\mathbf{k}_0$, et son amplitude $\Lambda(t)$ augmente au cours du temps. Au point critique de la transition $E = E_c$, l'amplitude du pic CFS est constante. Pour des états diffusifs à $E > E_c$, son amplitude est nulle au temps longs. L'amplitude $\Lambda(t)$ peut être utilisé comme paramètre d'ordre pour étudier la transition d'Anderson. Figures tirées de [76].

On pourrait donc s'attendre à ce qu'un état localisé soit symétrique selon $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ dans l'espace des impulsions, et c'est ce qui a été découvert par Karpiuk et al. [94] à l'aide de simulations numériques, en 2012. Les auteurs de ces travaux se sont intéressés à l'évolution de la distribution en impulsion d'un nuage se propageant dans un désordre en fonction du temps. Ils ont pu distinguer trois régimes dynamiques :

- ⋆ A temps de propagation t courts, l'état d'impulsion initial $|\mathbf{k}_i\rangle$ du nuage est déplété selon d'autres états d'impulsion $\{|\mathbf{k}_f\rangle\}_f$ en un temps typique $t \sim \tau_s$ qui correspond au temps de diffusion élastique (cf section 5.1.2).

- ⋆ Après un temps typique $t \sim \tau^*$, la particule a perdu la mémoire de son impulsion initiale $|\mathbf{k}_i\rangle$: le pic initial en $|\mathbf{k}_i\rangle$ a disparu et l'effet CBS peut être observé comme un maximum de signal à l'impulsion $|\mathbf{k}_f\rangle = |-\mathbf{k}_i\rangle$ (cf figure 8.6 a$_2$).

- ⋆ Dans la limite des temps longs de propagation où la localisation d'Anderson est observable, un pic dans la distribution en impulsion est observable à l'impulsion initiale $|\mathbf{k}_f\rangle = |\mathbf{k}_i\rangle$, comme représenté en figure 8.6 b. Dans la limite des temps très longs, ce pic devient de la même amplitude que le pic CBS. Pour cette raison, cet effet a été baptisé *diffusion cohérente vers l'avant* (*coherent forward scattering*, CFS, en anglais).

L'effet CFS apparaît donc comme une signature de la localisation d'Anderson dans l'espace des impulsions. Ce lien direct entre CFS et localisation d'Anderson a été d'abord étudié pour des systèmes 1D [103, 113], 2D [77], puis 3D par Ghosh et al. [76] qui ont pu montrer que l'amplitude du pic CFS pouvait être utilisé comme *paramètre d'ordre* pour la transition d'Anderson.

Cet effet CFS a pu être observé récemment dans le cadre d'expériences de localisation dynamique de *kicked rotor* atomiques [85], une preuve que les systèmes d'atomes froids sont de bons candidats pour une étude contrôlée des phénomènes de localisation. En ce qui concerne le montage expérimental utilisé dans le cadre des travaux présentés ici, l'étude du CFS est tout à fait envisageable. Une première tentative d'expérience du CFS pourrait être envisagée pour un système unidimensionnel, en confinant la propagation du nuage dans une pince optique superposée au potentiel *speckle*, et en mesurant la distribution en impulsion du nuage par imagerie par temps de vol. Dans un second temps, l'observation du CFS pourrait s'effectuer par une imagerie 3D de la distribution en impulsion [4] pour un système tridimensionnel, et tester expérimentalement ce signal comme paramètre d'ordre de la transition d'Anderson.

4. Là encore, une imagerie tomographique serait nécessaire pour outrepasser les difficultés lié à l'intégration des mesures selon les axes d'imagerie.

Annexe A

Étude du point fixe de la théorie d'échelle de la localisation d'Anderson

L'existence d'un point fixe $g = g_c$ est la marque d'une transition de phase entre états localisés et diffusifs. La situation est représentée en figure A.1. Ce point fixe est dit *instable* dans la mesure où considérer un échantillon tel que g soit supérieur ou inférieur à g_c implique un flot éloignant systématiquement le système du point fixe (comme l'indique la direction des flèches sur la figure A.1). En effet :

- ⋆ Pour $g > g_c$, $\beta(g) > 0$, la conductance augmente donc avec la taille L, ce qui amène l'échantillon dans le régime de la loi d'Ohm (2.59) où $g \sim L$ dans la limite des grands échantillons.

- ⋆ Pour $g < g_c$, $\beta(g) < 0$, la conductance diminue avec la taille L, ce qui amène l'échantillon dans le régime de localisation (2.63) dans la limite des grands échantillons.

On peut étudier le régime critique proche du point fixe $g = g_c$ en linéarisant la fonction β autour de ce point :

$$\beta(g) \sim \alpha \ln(g/g_c) \sim \alpha \left(\frac{g - g_c}{g_c} \right) \quad \text{lorsque} \quad g \sim g_c \tag{A.1}$$

où $\alpha > 0$ est la pente tangente à la fonction β au point fixe $g = g_c$. D'après (2.58), on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta g}{\mathrm{d}\ln L} \sim \alpha\,\delta g \quad \text{avec} \quad \delta g = \frac{g - g_c}{g_c} \tag{A.2}$$

Pour un échantillon initial de taille L_0 et de conductance g_0, la manière dont la conductance change de g_0 pour $g(L)$ en augmentant sa taille $L > L_0$ est donnée par séparation des variables puis intégration de (A.2) de L_0 Ã L :

$$\ln \left(\frac{\delta g(L)}{\delta g_0} \right) \sim \alpha \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) \tag{A.3}$$

où on a définit $\delta g_0 = (g_0 - g_c)/g_c$. On peut donc ré-écrire (A.3) tel que :

$$\delta g(L) \sim \delta g_0 \left(\frac{L}{L_0} \right)^{\alpha} \tag{A.4}$$

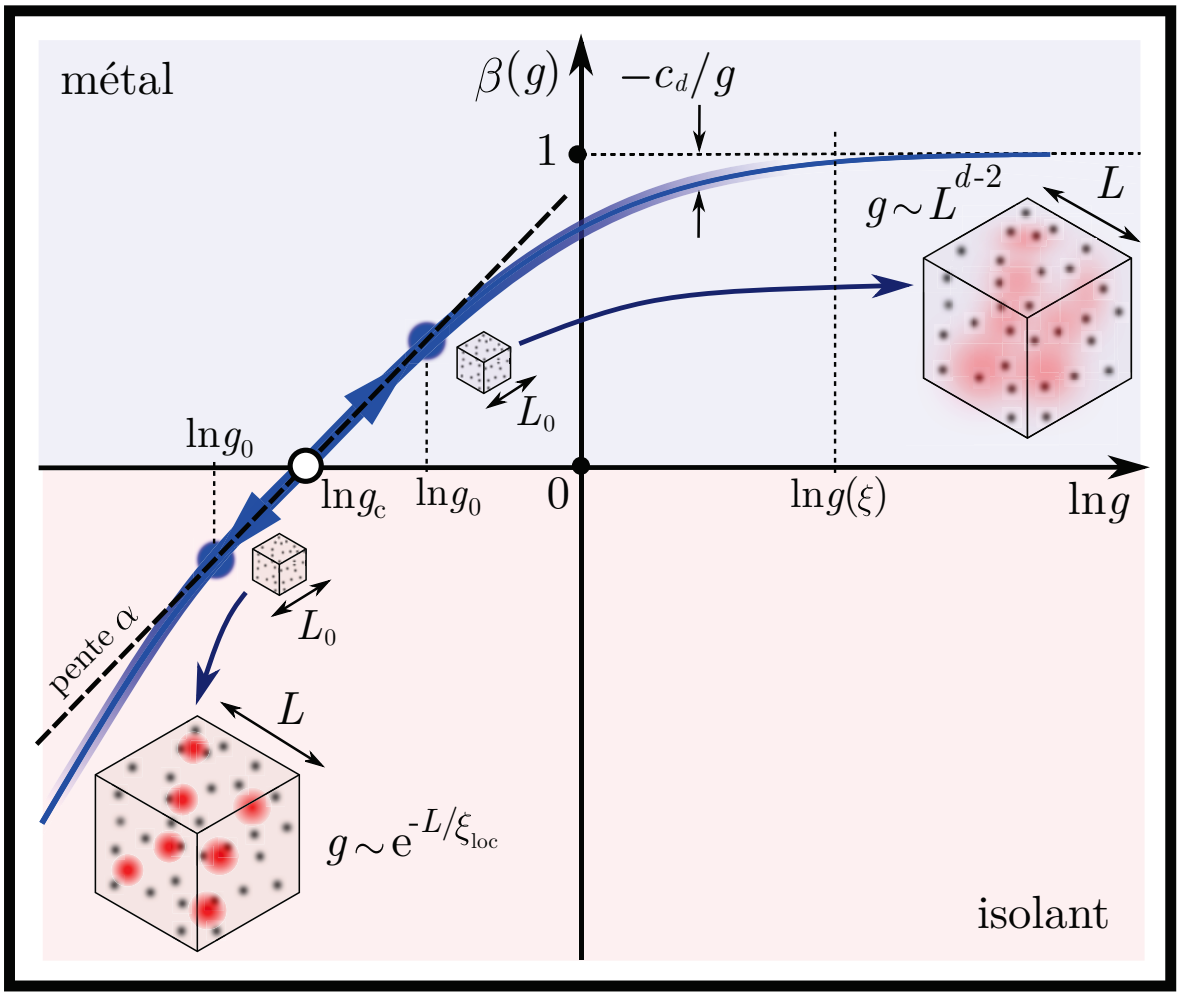

FIGURE A.1 – **Flot de la transition proche du point fixe $\beta = 0$.** Le point fixe est dit *instable* puisqu'en augmentant la taille de l'échantillon de L_0 à L, le flot dirige le systéme soit vers le régime localisé (2.63) pour $g_0 < g_c$, soit vers le régime diffusif (2.59) pour $g_0 > g_c$. La linéarisation du flot de pente α autour du point fixe permet de déterminer l'existence d'exposants critiques associés Ã la transition.

Proche du point critique, on a $\delta g(L) \ll 1$. Dans ce régime, il est difficile de faire la différence entre la phase isolante et métallique, notamment à cause des très larges fluctuations responsables de l'invariance d'échelle. Mais c'est en s'éloignant de ce point de transition en suivant le flot que l'on peut différencier les deux phases. On peut notamment définir une échelle de longueur ξ sur laquelle la loi d'échelle (A.4) est observable. Pour $L \gtrsim \xi$, on sortirait donc du régime critique tel que :

$$\delta g(L = \xi) \sim 1 \quad \text{soit} \quad \frac{\xi}{L_0} \sim |\delta g_0|^{-1/\alpha} \tag{A.5}$$

Si l'on se place initialement en phase localisée tel que $g_0 < g_c$, ξ s'identifie comme la longueur de localisation $\xi = \xi_{\text{loc}}$. En effet, il faut augmenter la taille de l'échantillon *a mimima* jusqu'à $L \gtrsim \xi_{\text{loc}}$ pour pouvoir différencier un état localisé d'un état diffusif. D'après (A.5), on constate que ξ_{loc} diverge lorsque l'on se rapproche du point fixe $g_0 = g_c$ selon la loi de puissance :

$$\xi = \xi_{\text{loc}} \sim \frac{1}{|g_0 - g_c|^{\nu}} \quad \text{avec} \quad \nu = 1/\alpha \tag{A.6}$$

S'il on se place en phase diffusive tel que $g_0 > g_c$, ξ s'identifie comme la taille à partir de laquelle les corrections quantiques au transport sont négligeables (ce qui revient à négliger le terme $-c_d/g$ dans (2.62)), comme représenté en figure A.1. La conductance $g(L)$ de l'échantillon est alors donnée par la loi d'Ohm (2.52) :

$$g(\xi) \sim D\,\xi^{d-2} \sim g_c \quad \text{soit} \quad D \sim \frac{g_c}{\xi^{d-2}} \sim \frac{1}{\xi^{d-2}} \tag{A.7}$$

La loi d'échelle (A.6) sur ξ, combinée avec (A.7), permet de retrouver la loi d'échelle du coefficient de diffusion D au fur et à mesure que l'on s'éloigne du point critique :

$$D \sim |g_0 - g_c|^{\nu(d-2)} \sim |g_0 - g_c|^{s} \quad \text{avec} \quad s = \nu(d-2) \tag{A.8}$$

On trouve donc que les exposants critiques ne sont pas indépendants, et plus particulièrement que $s = \nu$ en dimension $d = 3$.

Annexe B

Calcul du potentiel dipolaire pour le ^{87}Rb

Dans cette section, on donne quelques éléments de compréhension permettant de dériver les expressions (7.13) et (7.14) du potentiel dipolaire exercé sur un atome de ^{87}Rb de fréquence de résonance ω_0, par un laser de fréquence ω et d'intensité I. Ce qui suit ne résume que les étapes principales de calculs, les détails pouvant être retrouvés dans les références [167, 42].

B.1 Polarisabilité et potentiel dipolaire pour un atome à plusieurs transitions

Dans ce qui suit, on notera $\Delta_{F,F'} = (\omega - \omega_{F,F'})/2\pi$ l'ensemble des désaccords entre la fréquence du laser et chaque transition de la raie D_2 du ^{87}Rb. On supposera que ces désaccords sont très petits devant l'écart fin $\omega_0 - \omega_{D_1}$ entre les raies D_1 et D_2 (cf figure 3.5), si bien que l'influence de la raie D_1 pourra être négligée.

Lorsqu'il y a plusieurs transitions, la polarisabilité $\alpha(\omega)$ résulte de la somme des éléments de matrice du moment dipolaire associés à chaque transition. En effet, on peut montrer [167] que la partie réelle de la polarisabilité (responsable de la force dipolaire, cf section 3.2.2) d'un atome dans son état fondamental $|F, m_F\rangle$:

$$\mathrm{Re}\,\alpha_{F,m_F}(\omega) = -\frac{1}{2\pi\hbar}\sum_{F',m_{F'}} \left|\langle F, m_F|e\mathbf{r}|F', m_{F'}\rangle\right|^2 \frac{1}{\Delta_{F,F'}}\,, \tag{B.1}$$

où l'élément de matrice $\langle F, m_F|e\mathbf{r}|F', m_{F'}\rangle$ peut se décomposer selon les coefficients de Clebsch-Gordan $\mathcal{C}_{F,m_F,F',m_{F'}}$ associés à chaque transition à l'aide du théorème de Wigner-Eckart [167] :

$$\langle F, m_F|e\mathbf{r}|F', m_{F'}\rangle = \mathcal{C}_{F,m_F,F',m_{F'}}\,\langle F\,\|e\mathbf{r}\|\,F'\rangle\,, \tag{B.2}$$

où $\langle F\,\|e\mathbf{r}\|\,F'\rangle$ est l'élément de dipôle réduit. Ce dipôle réduit peut alors s'exprimer en fonction du dipôle réduit $\langle J\,\|e\mathbf{r}\|\,J'\rangle$ associé au nombre J [167] :

$$\langle F\,\|e\mathbf{r}\|\,F'\rangle = \langle J\,\|e\mathbf{r}\|\,J'\rangle\,(-1)^{F'+J+1+I}\sqrt{(2F'+1)(2J+1)}\begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ F & F' & I \end{Bmatrix}. \tag{B.3}$$

En combinant les expressions (B.1), (B.2) et (B.3), on obtient alors :

$$\mathrm{Re}\,\alpha_{F,m_F}(\omega) = -\frac{|\langle J\,\|e\mathbf{r}\|\,J'\rangle|^2}{2\pi\hbar}\sum_{F',m_{F'}} S_{F,F'}\,\mathcal{C}^2_{F,m_F,F',m_{F'}}\,\frac{1}{\Delta_{F,F'}}\,, \tag{B.4}$$

où les coefficient $S_{F,F'}$ correspondent aux facteurs d'intensité des transitions :

$$S_{F,F'} = (2F'+1)(2J+1)\begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ F & F' & I \end{Bmatrix}^2 . \tag{B.5}$$

Le potentiel dipolaire associé à la force dipolaire (3.35) pour un état $|F, m_F\rangle$ est alors donné par :

$$V_{F,m_F} = -\frac{I}{2\varepsilon_0 c}\,\mathrm{Re}\,\alpha(\omega) = \frac{|\langle J\,\|e\mathbf{r}\|\,J'\rangle|^2\,I}{4\pi\varepsilon_0\,\hbar c\,\omega_0^3}\sum_{F',m_{F'}}\frac{\mathrm{d}^2_{F,m_F,F',m_{F'}}}{\Delta_{F,F'}}\,, \tag{B.6}$$

où $\mathrm{d}^2_{F,m_F,F',m_{F'}} = S_{F,F'}\,\mathcal{C}^2_{F,m_F,F',m_{F'}}$ sont les éléments de matrice de dipôle exprimés en unité de dipôle réduit $|\langle J\,\|e\mathbf{r}\|\,J'\rangle|^2$. D'une manière générale, l'élément de dipôle réduit $\langle J\,\|e\mathbf{r}\|\,J'\rangle$ est relié à la largeur naturelle Γ de la transition, de sorte que [167] :

$$\left|\langle J\,\|e\mathbf{r}\|\,J'\rangle\right|^2 = \frac{3\pi\hbar c^3\varepsilon_0\Gamma}{\omega_0^3}\left(\frac{2J'+1}{2J+1}\right). \tag{B.7}$$

Dans le cas particulier du ^{87}Rb, la transition D_2 est associée aux nombres $J = 1/2$ et $J' = 3/2$. En combinant les expressions (B.6) et (B.7), on obtient alors :

$$V_{F,m_F} = \frac{3c^2\Gamma I}{2\omega_0^3}\sum_{F',m_{F'}}\frac{\mathrm{d}^2_{F,m_F,F',m_{F'}}}{\Delta_{F,F'}}\,. \tag{B.8}$$

Le tableau suivant, dont les valeurs sont tirées de la référence [167], résument les valeurs des éléments de matrice de dipôle $\mathrm{d}^2_{F,m_F,F',m_{F'}}$ pour la raie D_2 du ^{87}Rb :

	$\mathrm{d}^2_{F=1,m_F=-1,F',m_{F'}=-1}$	$\mathrm{d}^2_{F=2,m_F=1,F',m_{F'}=1}$
$F' = 1$	5/24	1/40
$F' = 2$	1/8	1/24
$F' = 3$		4/15

En reportant les valeurs du tableau dans l'expression (B.8), on obtient les expressions (7.13) et (7.14) des potentiels dipolaires associés respectivement aux états $|1\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|2\rangle = |F = 2, m_F = 1\rangle$.

B.2 Limite des grands désaccords

Dans la limite des désaccords $\Delta_{F,F'}$ très grands devant la structure hyperfine de l'état excité $5^2P_{3/2}$, tous les désaccords peuvent être considérés comme égaux à $\Delta_0 = (\omega - \omega_0)/2\pi$. L'expression (B.8) se simplifie alors sous la forme :

$$V_{F,m_F} = \frac{3c^2\Gamma I}{2\omega_0^3\,\Delta_0} \sum_{F',m_{F'}} \mathrm{d}^2_{F,m_F,F',m_{F'}}\,. \tag{B.9}$$

Pour les transitions π, on peut montrer [167] que le terme de somme de l'expression (B.9) est indépendant de l'état $|F, m_F\rangle$ considéré, de sorte que :

$$\sum_{F',m_{F'}} \mathrm{d}^2_{F,m_F,F',m_{F'}} = \frac{1}{3}\,, \tag{B.10}$$

soit :

$$V_{F,m_F} = \frac{c^2\Gamma I}{2\omega_0^3\,\Delta_0}\,. \tag{B.11}$$

Bien sûr, l'expression (B.11) du potentiel dipolaire n'est pas complète au sens où elle omet la contribution de la raie D_1 qui n'est plus négligeable pour des lasers accordés loin de la résonance de la transition D_2.

En s'intéressant à tout type de transition (π, $\sigma^\pm$), et en prenant en compte la contribution de la raie D_1, on peut montrer [81] que l'expression (B.11) se généralise sous la forme :

$$V_{F,m_F} = \frac{c^2\Gamma I}{4\omega_0^3}\left(\frac{2+\mathcal{P}\,g_F m_F}{\Delta_0} + \frac{1-\mathcal{P}\,g_F m_F}{\Delta_{\mathrm{D}_1}}\right)\,, \tag{B.12}$$

où $\Delta_{\mathrm{D}_1} = (\omega - \omega_{\mathrm{D}_1})/2\pi$ est le désaccord par rapport à la transition D_1, et où $\mathcal{P} = \{0, \pm 1\}$ est l'indice de polarisation linéaire π ou circulaire $\sigma^\pm$ du faisceau laser. L'expression (B.11) correspond donc au premier terme de l'expression (B.12) pour une polarisation $\mathcal{P} = 0$ linéaire.

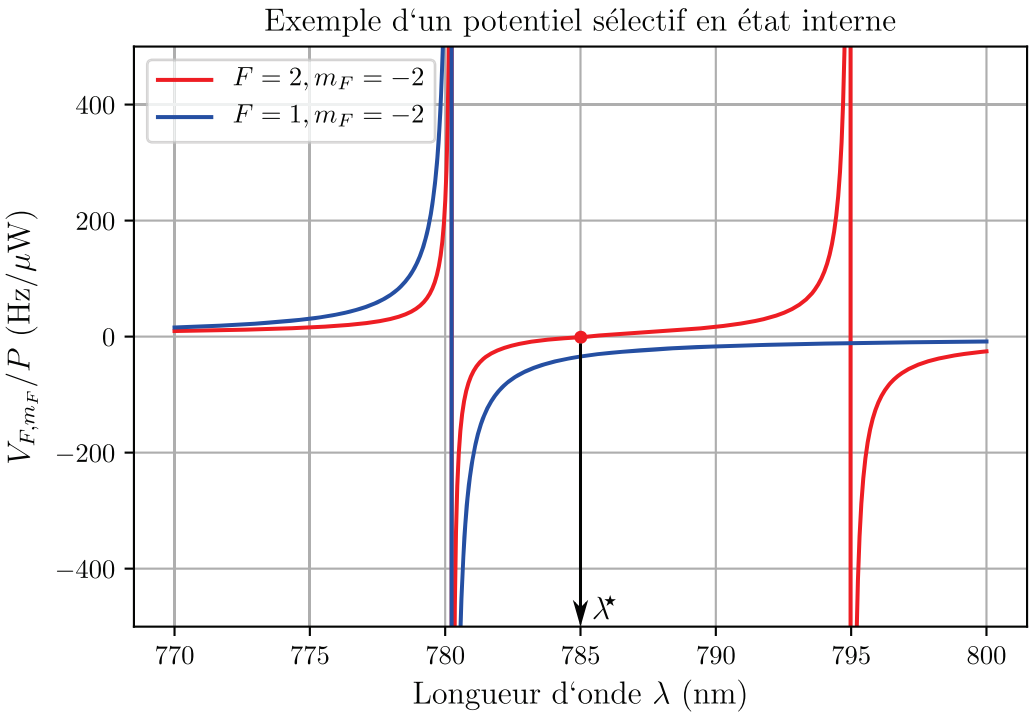

FIGURE B.1 – **Principe du potentiel sélectif en spin avec une longueur d'onde magique.** Potentiel dipolaire (B.12) généré sur les états $F = 1, m_F = -2$ et $F = 2, m_F = -2$ par unité de puissance P du laser (pour une intensité $I = 2P/\pi\sigma_{\text{ex}}^2$) en fonction de la longueur d'onde λ du laser, pour une polarisation $\mathcal{P} = 1$. On voit qu'il existe une longueur d'onde "magique" $\lambda^\star = 785$ nm pour le laser telle que $V_{F=2,m_F=-2} = 0$ alors que $V_{F=1,m_F=-1} \neq 0$.

B.3 Longueur d'onde magique et potentiel sélectif en état interne

Enfin, on notera que l'expression (B.12) donne la possibilité de réaliser des potentiels dépendant du spin. En effet, il est possible de choisir deux états hyperfins $|F, m_F\rangle$ et $|F, m_F\rangle$, de sorte que le potentiel dipolaire soit nul sur l'un des deux niveaux pour une longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega$ de laser bien précise appelée "*longueur d'onde magique*". Un exemple de cette situation est illustré en figure B.1.

L'existence d'une longueur d'onde magique provient de l'annulation de l'un des deux termes de l'expression (B.12) lorsque la valeur du produit $\mathcal{P}\, g_F m_F$ vaut -2 ou 1. Si l'on veut que cette compensation ait lieu sélectivement sur un état plutôt qu'un autre, il faut donc que les états choisis *n'est pas le même facteur* $g_F m_F$.

On comprend donc pourquoi la réalisation d'un *speckle* dépendant d'un état de spin n'est pas envisageable á l'aide d'une longueur d'onde magique du point de vue de l'expérience : en effet, si les deux états choisis n'ont pas le même facteur $g_F m_F$, alors ils ne peuvent pas être lévités simultanément (cf section 7.2). Il serait donc *a priori* impossible de réaliser une spectroscopie dans cette configuration.

Annexe C

Définition de l'énergie de corrélation anisotrope

Les simulations numériques de la figure 5.11, tirées de la référence [129], ont été effectuées dans le cas d'une particule se propageant dans un *speckle* isotrope. Une telle figure de *speckle* est générée en simulant la transmission d'une onde monochromatique sphérique traversant un diffuseur sphérique. Le potentiel désordonné associé à la figure de *speckle* qui en résulte posséde une corrélation *isotrope*, telle que :

$$\overline{V(\mathbf{x})V(\mathbf{x}')} = V_0^2\,\mathcal{C}_{\text{iso}}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) = V_0^2\,\frac{\sin^2\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/\sigma_{\text{iso}}\right)}{\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/\sigma_{\text{iso}}\right)^2}\,, \tag{C.1}$$

où σ_{iso} est la longueur de corrélation.

Dans ce cas, l'énergie de corrélation est définie sans équivoque par :

$$E_{\sigma_{\text{iso}}} = \frac{\hbar^2}{m\sigma_{\text{iso}}^2} \tag{C.2}$$

Les simulations de la localisation pour ce type de corrélation isotrope doivent pouvoir être quantitativement comparées avec les expériences pour lesquelles la longueur de corrélation dans chaque direction de l'espace $\left\{\sigma_{\text{exp}}^{(i)}\right\}_{i=x,y,z}$ a été définie comme *largeur à mi-hauteur* (cf section) de la fonction de corrélation expérimentale $\mathcal{C}_{\text{exp}}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$:

$$\mathcal{C}_{\text{exp}}\left(\sigma_{\text{exp}}^{(i)}\right) = \frac{1}{2}\,. \tag{C.3}$$

Pour que la définition (C.3) des longueurs de corrélation expérimentales soit compatible avec la définition (C.1) de σ_{iso}, les auteurs Pasek et al. de la référence [129] ont proposé une définition pragmatique des longueurs de corrélation, telle que :

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{\text{exp}}^{(i)}}{\gamma} \quad \text{où} \quad \frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} = \frac{1}{2}\,, \tag{C.4}$$

soit $\gamma \simeq 1.39156$.

En effet, avec cette définition, on peut associer aux expériences une corrélation isotrope effective $\mathcal{C}_{\text{eff}}^{(i)}$ selon chaque direction de l'espace, qui est compatible avec une largeur à mi-hauteur (C.3), de sorte que :

$$\mathcal{C}_{\text{eff}}^{(i)}\left(\sigma_{\text{exp}}^{(i)}\right) = \frac{\sin^2\left(\sigma_{\text{exp}}^{(i)}/\sigma_i\right)}{\left(\sigma_{\text{exp}}^{(i)}/\sigma_i\right)^2} = \frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} = \frac{1}{2}\,, \tag{C.5}$$

par la définition (C.4).

L'énergie de corrélation associée aux longueurs de corrélation (C.4) s'exprime alors selon :

$$E_{\bar{\sigma}} = \frac{\hbar^2}{m\bar{\sigma}^2} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = (\sigma_x\sigma_y\sigma_z)^{1/3} \tag{C.6}$$

Dans le cadre de l'expérience présentée ici, les longueurs de corrélation de la figure de *speckle* expérimentale avaient été déterminées (cf section 4.2.2) de sorte que :

$$\sigma_\perp = 0.42\,\mu\text{m} \quad \text{et} \quad \sigma_\parallel = 2.02\,\mu\text{m}\,. \tag{C.7}$$

En appliquant la défintion *ad-hoc* (C.4), on obtient alors les longueurs de corrélation :

$$\sigma_y = \sigma_z = 0.306\,\mu\text{m} \quad \text{et} \quad \sigma_x = 1.45\,\mu\text{m}\,, \tag{C.8}$$

soit une énergie de corrélation (C.6) :

$$E_{\bar{\sigma}} \simeq h \times 441\,\text{Hz}\,. \tag{C.9}$$

Annexe D

Calcul de la transformée de Fourier de la fonction de Green

On détaille ici les quelques étapes de calcul nécessaire à la démonstration de l'expression (6.21). A partir de la défintion (6.20) de la fonction de Green, on peut évaluer sa transformée de Fourier temporelle :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}(E) &= \int \mathrm{d}t\, \hat{\mathcal{G}}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Et/\hbar} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int \mathrm{d}t\, \Theta(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(E-\hat{\mathcal{H}})/\hbar}.\end{aligned} \tag{D.1}$$

On peut simplifier cette dernière expression en écrivant la distribution d'Heaviside Θ en fonction de sa transformée de Fourier inverse [13] :

$$\Theta(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - \mathrm{i}0^+}\,, \tag{D.2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}(E) &= -\frac{1}{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}\omega\, \frac{1}{\omega - \mathrm{i}0^+} \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(E+\hbar\omega-\hat{\mathcal{H}})/\hbar} \\ &= -\frac{1}{\hbar} \int \mathrm{d}\omega\, \frac{1}{\omega - \mathrm{i}0^+}\, \delta\left(\omega - (\hat{\mathcal{H}} - E)/\hbar\right)\end{aligned} \tag{D.3}$$

en utilisant la définition de la distribution de Dirac par sa transformée de Fourier :

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{D.4}$$

On obtient alors l'expression de la fonction Green (ou plutôt de sa transformée de Fourier) telle qu'elle est très souvent utilisée pour étudier les systÃ¨mes quantiques (notamment les systèmes à N-corps) :

$$\hat{\mathcal{G}}(E) = \frac{1}{E - \hat{\mathcal{H}} + \mathrm{i}0^+}. \tag{D.5}$$

Annexe E

Constantes fondamentales

Quantité	Symbole	Valeur
Célérité de la lumière	c	$299\,792\,458$ m.s^{-1}
Charge élémentaire	e	$1.602\,176\,620 \times 10^{-19}$ A.s
Constante de Planck	h	$6.626\,070\,040 \times 10^{-34}$ kg.m^2.s^{-1}
Constante de Planck réduite	$\hbar = h/2\pi$	$1.054\,571\,800 \times 10^{-34}$ kg.m^2.s^{-1}
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380\,648\,528 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}
Magnéton de Bohr	μ_B	$9.274\,009\,994 \times 10^{-24}$ A.m^2
Permittivité électrique du vide	ε_0	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}$ A^2.s^4.kg^{-1}.m^{-3}

Index

élargissement en énergie, 103, 110, 138
énergie de corrélation, 104, 107, 118, 172, 200
self-energy, 124, 127, 172

ARPES, 132

Born (approximation), 100, 101, 137
Breit-Rabi (formule), 59, 145

champ magnétique dipolaire, 68, 73
champ magnétique magique, 146, 153
champ magnétique quadrupolaire, 66, 67, 72
condensation de Bose-Einstein, 45, 77
conductance adimensionnée, 30
couplage radio-fréquence, 60, 69, 134, 147
croisement quantique, 21

dépompage, 67
désordre classique, 106, 138, 172
désordre perturbatif, 137
désordre perturbatif (condition), 104, 172
désordre quantique, 107, 172
densité d'état, 29, 34, 128, 162, 163
densité dans l'espace des phases, 47, 66, 69, 72, 78
diffuseur (longueur de corrélation), 94
diffuseur (transmission), 81
diffusion (coefficient), 19, 21, 72
diffusion cohérente vers l'avant (CFS), 189
distribution en énergie, 109, 116, 119
Drude (modèle), 12
Dyson (équation), 124, 127

Einstein (relation), 30
ergodicité (hypothèse), 164, 172
exposant critique, 27, 34, 35, 39, 193

faisceau gaussien, 70
fonction β, 31
fonction de Green, 122, 126, 130, 201
fonction spectrale, 104, 110, 123, 163, 164
fonction spectrale (définition), 127
fonction spectrale (N-corps), 131
fonction spectrale (speckle), 136, 169
force de pression de radiation, 55, 58
fraction localisée, 109, 111
Fraunhofer (diffraction), 84
Fresnel (diffraction), 87

Gross-Pitaevskii (équation), 49

imagerie par absorption, 75
imagerie par fluorescence, 76, 77
imagerie par temps de vol, 101, 114, 187
indiscernabilité, 44, 46
interférence, 15, 20, 83
invariance d'échelle, 27, 33
Ioffe-Regel (critère), 27, 72, 105

kicked rotor, 38, 189

lévitation magnétique, 72, 145
Landauer (formule), 13, 15
Larkin (énergie), 107, 113
libre parcours moyen, 12, 17, 97, 105
lissage de potentiel, 106, 172
localisation d'Anderson (définition), 16, 25
localisation d'Anderson (expériences), 36, 108
localisation faible, 21, 26, 187
longueur d'onde de de Broglie, 22, 47, 66, 69, 72, 78
longueur d'onde magique, 143, 198
longueur de cicatrisation, 53
longueur de cohérence, 12
longueur de diffusion, 40, 47, 134, 154
longueur de localisation, 16, 26, 27, 192
longueur de transport, 17, 97

mélasse optique, 66
mélasse transverse, 64
mésoscopique, 12, 13
méthodes numériques, 92, 164, 177
moment dipolaire, 57, 196
multi-fractalité, 184

Ohm (loi), 30
oscillateur amorti, 121
ouverture adiabatique, 74

paramètre de saturation, 58
paraxiale (approximation), 92
piège magnéto-optique (MOT), 66
piège optique croisé, 71, 77
pince optique, 70

potentiel chimique, 45, 50, 52, 77, 154, 177
potentiel dipolaire, 57, 70, 94, 156, 196
potentiel magnétique, 60, 73, 145

quasi-particule, 129

rétro-diffusion cohérente (CBS), 187
règle d'or de Fermi, 100, 134, 136, 140, 161
Rabi (oscillations), 61, 149, 151
Rabi (spectre), 152, 153
refroidissement Doppler, 55, 64–66
refroidissement par évaporation, 69, 74
renversement du temps (symétrie), 13, 188
repompage, 55

Schrödinger (équation), 126
seuil de mobilité, 34, 109, 112, 117, 118
sous-diffusion, 38, 41
speckle (désordre), 94, 108, 111, 114, 143, 182
speckle (distribution en intensité), 83
speckle (intensité moyenne), 83, 168
speckle (longueur de corrélation), 85, 93, 99, 199
spectroscopie (génération de fréquences), 149
spectroscopie (résolution), 152, 161, 169
spectroscopie (taux de couplage), 161, 164, 169
spectroscopie RF, 134, 147

taille de l'oscillateur harmonique, 51, 104
taux d'émission spontanée, 58
temps de diffusion élastique, 98, 101, 102, 138
temps de transport, 19, 98, 102
temps de vie, 181
théorème central limite, 19, 83, 172
théorie auto-consistante, 24, 50, 113
théorie d'échelle, 31
Thomas-Fermi (approximation), 51, 154, 177
Thouless (critère), 29
transition d'Anderson, 27, 108, 189, 191
transition de phase, 27, 28, 46

vitesse de recul, 55, 77, 181

Wick (théorème), 85

Zeeman (effet), 60, 65
Zeeman (ralentisseur), 65

Bibliographie

[1] E. ABRAHAMS et al. « Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions ». In : *Phys. Rev. Lett.* 42 (10 1979), p. 673–676. DOI : 10.1103/PhysRevLett.42.673. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.673 (voir p. 33).

[2] A. A. ABRIKOSOV et I. M. KHALATNIKOV. « Theory of Fermi Fluid : The Properties of Liquid He^3 at Low Temperatures ». In : *Soviet Physics Uspekhi* 1.1 (1958), p. 68. URL : http://stacks.iop.org/0038-5670/1/i=1/a=R07 (voir p. 133).

[3] C. M. AEGERTER, M. STÖRZER et G. MARET. « Experimental determination of critical exponents in Anderson localisation of light ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 75.4 (2006), p. 562. URL : http://stacks.iop.org/0295-5075/75/i=4/a=562 (voir p. 39).

[4] E. AKKERMANS et G. MONTAMBAUX. *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, 2007. DOI : 10.1017/CBO9780511618833 (cf. p. 23, 25, 26, 129).

[5] M. N. ALEXANDER et D. F. HOLCOMB. « Semiconductor-to-Metal Transition in n-Type Group IV Semiconductors ». In : *Rev. Mod. Phys.* 40 (4 1968), p. 815–829. DOI : 10.1103/RevModPhys.40.815. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.40.815 (voir p. 38).

[6] A. ALTLAND et B. SIMONS. *Condensed Matter Field Theory*. 2e éd. 2010, p. 108,487–490 (cf. p. 24, 37, 50).

[7] B. L. ALTSHULER, A. G. ARONOV et D. E. KHMELNITSKY. « Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 15.36 (1982), p. 7367. URL : http://stacks.iop.org/0022-3719/15/i=36/a=018 (voir p. 38).

[8] H. AMMANN et al. « Quantum Delta-Kicked Rotor : Experimental Observation of Decoherence ». In : *Phys. Rev. Lett.* 80 (19 1998), p. 4111–4115. DOI : 10.1103/PhysRevLett.80.4111. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.4111 (voir p. 41).

[9] M. H. ANDERSON et al. « Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor ». In : *Science* 269.5221 (1995), p. 198–201. ISSN : 0036-8075. DOI : 10.1126/science.269.5221.198. eprint : http://science.sciencemag.org/content/269/5221/198.full.pdf. URL : http://science.sciencemag.org/content/269/5221/198 (voir p. 10).

[10] P. W. ANDERSON. « Absence of Diffusion in Certain Random Lattices ». In : *Phys. Rev.* 109 (5 1958), p. 1492–1505. DOI : 10.1103/PhysRev.109.1492. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492 (voir p. 10).

[11] R. ANDERSON. « Non-equilibrium dynamics and relative phase evolution of two-component Bose-Einstein condensates ». Thèse de doct. Swinburne University, 2010. URL : http://bec.physics.monash.edu.au/docs/RPA_Thesis_Digital.pdf (cf. p. 63, 151, 154).

[12] H. AOKI. « Critical behaviour of extended states in disordered systems ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 16.6 (1983), p. L205. URL : http://stacks.iop.org/0022-3719/16/i=6/a=007 (voir p. 188).

[13] W. APPEL. *Mathématiques pour la physique et les physiciens !* H&K, 2008 (cf. p. 83, 124–127, 203).

[14] A. ASPECT. *Optique Quantique 1 : Lasers - Cours de l'École Polytechnique*. 2015. URL : https://moodle.polytechnique.fr/pluginfile.php/33676/mod_resource/content/1/AspectT1.pdf (cf. p. 57, 58, 63).

[15] C. BARBIERI. *Notes on Green Functions Theory for Quantum Many-Body Systems*. 2009. URL : http://ribf.riken.jp/~barbieri/mbgf_files/mbgf_notes.pdf (voir p. 133).

[16] G. BAYER et T. NIEDERDRÄNK. « Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media ». In : *Phys. Rev. Lett.* 70 (25 1993), p. 3884–3887. DOI : 10.1103/PhysRevLett.70.3884. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.3884 (voir p. 23).

[17] A. BERNARD. « Transport quantique d'ondes atomiques ultrafroides ». Thèse de doct. Université Paris Sud - Paris XI, 2010. URL : http://www.theses.fr/2010PA066365 (cf. p. 64, 72, 75, 77–79, 91, 102).

[18] M. V. BERRY et S. KLEIN. « Transparent mirrors : rays, waves and localization ». In : *European Journal of Physics* 18.3 (1997), p. 222. DOI : https://doi.org/10.1088/0143-0807/18/3/017. URL : http://stacks.iop.org/0143-0807/18/i=3/a=017 (voir p. 18).

[19] C. BERTHOD, M. KÖHL et T. GIAMARCHI. « Second-order response theory of radio-frequency spectroscopy for cold atoms ». In : *Phys. Rev. A* 92 (1 2015), p. 013626. DOI : 10.1103/PhysRevA.92.013626. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.013626 (cf. p. 138, 179).

[20] J. BILLY et al. « Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder ». In : *Nature* 453.7197 (2008), p. 895–898 (cf. p. 10, 42, 188).

[21] M. BITTER et V. MILNER. « Experimental Observation of Dynamical Localization in Laser-Kicked Molecular Rotors ». In : *Phys. Rev. Lett.* 117 (14 2016), p. 144104. DOI : 10.1103/PhysRevLett.117.144104. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.144104 (voir p. 41).

[22] I. BLOCH, J. DALIBARD et S. NASCIMBENE. « Quantum simulations with ultracold quantum gases ». In : *Nature Physics* 8.4 (2012), p. 267 (cf. p. 10, 40).

[23] M. BOGUSLAWSKI et al. « Analysis of transverse Anderson localization in refractive index structures with customized random potential ». In : *Opt. Express* 21.26 (2013), p. 31713–31724. DOI : 10.1364/OE.21.031713. URL : http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-21-26-31713 (voir p. 39).

[24] J. BOIS. *Rudiments of Polymer Physics*. 2002. URL : http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.583.762 (voir p. 19).

[25] S. V. BORISENKO et al. « Estimation of matrix-element effects and determination of the Fermi surface in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ systems using angle-scanned photoemission spectroscopy ». In : *Phys. Rev. B* 64 (9 2001), p. 094513. DOI : 10.1103/PhysRevB.64.094513. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.64.094513 (voir p. 135).

[26] J. P. BRANTUT et al. « Light-shift tomography in an optical-dipole trap for neutral atoms ». In : *Phys. Rev. A* 78 (3 2008), p. 031401. DOI : 10.1103/PhysRevA.78.031401. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.031401 (voir p. 188).

[27] N. BRENNER et S. FISHMAN. « Pseudo-randomness and localization ». In : *Nonlinearity* 5.1 (1992), p. 211. URL : http://stacks.iop.org/0951-7715/5/i=1/a=009 (voir p. 40).

[28] H. BRUUS et K. FLENSBERG. *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics : An Introduction*. Oxford University Press, 2004. URL : http://www.phys.lsu.edu/~jarrell/COURSES/ADV_SOLID_HTML/Other_online_texts/Many-body%20quantum%20theory%20in%0Acondensed%20matter%20physics%0AHenrik%20Bruus%20and%20Karsten%20Flensberg.pdf (cf. p. 129, 133).

[29] G. CASATI, I. GUARNERI et D. L. SHEPELYANSKY. « Anderson Transition in a One-Dimensional System with Three Incommensurate Frequencies ». In : *Phys. Rev. Lett.* 62 (4 1989), p. 345–348. DOI : 10.1103/PhysRevLett.62.345. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.345 (voir p. 41).

[30] C. CASTELLANI, C. DI CASTRO et L. PELITI. « On the upper critical dimension in Anderson localisation ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 19.17 (1986), p. L1099. URL : http://stacks.iop.org/0305-4470/19/i=17/a=009 (voir p. 37).

[31] Y. CASTIN. *Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results*. 2000. URL : https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0105058.pdf (cf. p. 50, 52).

[32] Y. CASTIN et R. DUM. « Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps ». In : *Phys. Rev. Lett.* 77 (27 1996), p. 5315–5319. DOI : 10.1103/PhysRevLett.77.5315. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.5315 (voir p. 184).

[33] J. CHABÉ et al. « Experimental Observation of the Anderson Metal-Insulator Transition with Atomic Matter Waves ». In : *Phys. Rev. Lett.* 101 (25 2008), p. 255702. DOI : 10.1103/PhysRevLett.101.255702. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.255702 (voir p. 41).

[34] R. CHANG et al. « Momentum-Resolved Observation of Thermal and Quantum Depletion in a Bose Gas ». In : *Phys. Rev. Lett.* 117 (23 2016), p. 235303. DOI : 10.1103/PhysRevLett.117.235303. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.235303 (voir p. 49).

[35] Q. CHEN et al. « Theory of radio frequency spectroscopy experiments in ultracold Fermi gases and their relation to photoemission in the cuprates ». In : *Reports on Progress in Physics* 72.12 (2009), p. 122501. URL : http://stacks.iop.org/0034-4885/72/i=12/a=122501 (voir p. 138).

[36] Y. L. CHEN et al. « Experimental Realization of a Three-Dimensional Topological Insulator, Bi_2Te_3 ». In : *Science* 325.5937 (2009), p. 178–181. ISSN : 0036-8075. DOI : 10.1126/science.1173034. eprint : http://science.sciencemag.org/content/325/5937/178.full.pdf. URL : http://science.sciencemag.org/content/325/5937/178 (voir p. 136).

[37] F. CHEVY et al. « Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate ». In : *Phys. Rev. Lett.* 88 (25 2002), p. 250402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.88.250402. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.250402 (voir p. 184).

[38] C. CHIN et al. « Observation of the Pairing Gap in a Strongly Interacting Fermi Gas ». In : *Science* 305.5687 (2004), p. 1128–1130. ISSN : 0036-8075. DOI : 10.1126/science.1100818. URL : http://science.sciencemag.org/content/305/5687/1128 (voir p. 138).

[39] R. CLAESSEN et al. « Fermi-liquid line shapes measured by angle-resolved photoemission spectroscopy on 1-T-$TiTe_2$ ». In : *Phys. Rev. Lett.* 69 (5 1992), p. 808–811. DOI : 10.1103/PhysRevLett.69.808. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.808 (voir p. 134).

[40] D. CLÉMENT. « Propriétés statiques et dynamiques d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie, 2007. URL : https://pastel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/276456/filename/These.pdf (voir p. 168).

[41] D. CLÉMENT et al. « Bragg Spectroscopy of Strongly Correlated Bosons in Optical Lattices ». In : *J. Low. Temp. Phys.* 158 (5 2010). DOI : https://doi.org/10.1007/s10909-009-0040-7 (cf. p. 132, 134).

[42] L. COGNET. « Mirroirs atomiques : diffraction en incidence rasante et rugosité d'un miroir magnétique ». Thèse de doct. Université Paris Sud - Paris XI, 1999. URL : https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00010099 (voir p. 197).

[43] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. EDP Sciences (Édition du CNRS), 2000 (cf. p. 57–59).

[44] F. DALFOVO et al. « Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases ». In : *Rev. Mod. Phys.* 71 (3 1999), p. 463–512. DOI : 10.1103/RevModPhys.71.463. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.71.463 (voir p. 52).

[45] J. DALIBARD. *Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques*. Cours au Collège de France, Chaire *Atomes et Rayonnement*. 2016. URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL378823497387772639_cours_2016.pdf (voir p. 47).

[46] J. DALIBARD. *Des cages de lumière pour les atomes : la physique des pièges et des réseaux optiques*. Cours au Collège de France. 2013. URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL4448615917413485875_Resume_cours1_6.pdf (cf. p. 10, 59, 60).

[47] J. DALIBARD. *Le magnétisme artificiel pour les atomes froids*. Cours au Collège de France. 2014. URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL7297697706384107935_Dalibard_notes3_20140528.pdf (voir p. 116).

[48] J. DALIBARD. *Une brève histoire des atomes froids*. Cours au Collège de France, Chaire *Atomes et Rayonnement*. 2015. URL : http://www.college-de-france.fr/media/jean-dalibard/UPL4166175564809189522_cours_2015.pdf (cf. p. 55, 68).

[49] A. DAMASCELLI. « Probing the Electronic Structure of Complex Systems by ARPES ». In : *Physica Scripta* 2004.T109 (2004), p. 61. URL : http://stacks.iop.org/1402-4896/2004/i=T109/a=005 (cf. p. 133–135).

[50] A. DAMASCELLI, Z. HUSSAIN et Z.-X. SHEN. « Angle-resolved photoemission studies of the cuprate superconductors ». In : *Rev. Mod. Phys.* 75 (2 2003), p. 473–541. DOI : 10.1103/RevModPhys.75.473. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.473 (voir p. 136).

[51] T.-L. DAO, I. CARUSOTTO et A. GEORGES. « Probing quasiparticle states in strongly interacting atomic gases by momentum-resolved Raman photoemission spectroscopy ». In : *Phys. Rev. A* 80 (2 2009), p. 023627. DOI : 10.1103/PhysRevA.80.023627. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.023627 (cf. p. 134, 138).

[52] T.-L. DAO et al. « Measuring the One-Particle Excitations of Ultracold Fermionic Atoms by Stimulated Raman Spectroscopy ». In : *Phys. Rev. Lett.* 98 (24 2007), p. 240402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.98.240402. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.240402 (cf. p. 134, 138).

[53] S. DAS SARMA, Song HE et X. C. XIE. « Mobility Edge in a Model One-Dimensional Potential ». In : *Phys. Rev. Lett.* 61 (18 1988), p. 2144–2147. DOI : 10.1103/PhysRevLett.61.2144. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.2144 (voir p. 42).

[54] S. DATTA. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge university press, 1997 (voir p. 15).

[55] B. DEMARCO et al. « Measurement of p-Wave Threshold Law Using Evaporatively Cooled Fermionic Atoms ». In : *Phys. Rev. Lett.* 82 (21 1999), p. 4208–4211. DOI : 10.1103/PhysRevLett.82.4208. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4208 (voir p. 110).

[56] B. DIU, D. LEDERER et B. ROULET. *Physique Statistique*. Hermann (cf. p. 46, 47, 49, 53).

[57] S. DONSA et al. « Long-time expansion of a Bose-Einstein condensate : Observability of Anderson localization ». In : *Phys. Rev. A* 96 (4 2017), p. 043630. DOI : 10.1103/PhysRevA.96.043630. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.043630 (voir p. 43).

[58] E. N. ECONOMOU et C. M. SOUKOULIS. « Connection of localization with the problem of the bound state in a potential well ». In : *Phys. Rev. B* 28 (2 1983), p. 1093–1094. DOI : 10.1103/PhysRevB.28.1093. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.28.1093 (voir p. 31).

[59] E. N. ECONOMOU, C. M. SOUKOULIS et A. D. ZDETSIS. « Localized states in disordered systems as bound states in potential wells ». In : *Phys. Rev. B* 30 (4 1984), p. 1686–1694. DOI : 10.1103/PhysRevB.30.1686. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.30.1686 (voir p. 31).

[60] J. T. EDWARDS et D. J. THOULESS. « Numerical studies of localization in disordered systems ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 5.8 (1972), p. 807. URL : http://stacks.iop.org/0022-3719/5/i=8/a=007 (voir p. 31).

[61] A. L. EFROS et M. POLLAK. *Electron-Electron Interactions in Disordered Systems*. T. 10. Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Elisevier, 1985 (voir p. 38).

[62] M. EGOROV et al. « Measurement of s-wave scattering lengths in a two-component Bose-Einstein condensate ». In : *Phys. Rev. A* 87 (5 2013), p. 053614. DOI : 10.1103/PhysRevA.87.053614. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.053614 (voir p. 79).

[63] F. EVERS. URL : https://www.tkm.kit.edu/english/research/group-evers/index.php (voir p. 187).

[64] F. EVERS et A. D. MIRLIN. « Anderson transitions ». In : *Rev. Mod. Phys.* 80 (4 2008), p. 1355–1417. DOI : 10.1103/RevModPhys.80.1355. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1355 (voir p. 188).

[65] N. FABBRI. « Bragg spectroscopy of quantum gases : Exploring physics in one dimension ». Thèse de doct. University of Firenze, 2010. URL : http://quantumgases.lens.unifi.it/theses/thesis_fabbri_phd.pdf (cf. p. 132, 134).

[66] N. FABBRI et al. « Quasiparticle Dynamics in a Bose Insulator Probed by Interband Bragg Spectroscopy ». In : *Phys. Rev. Lett.* 109 (5 2012), p. 055301. DOI : 10.1103/PhysRevLett.109.055301. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.055301 (voir p. 132).

[67] Sanli FAEZ et al. « Observation of Multifractality in Anderson Localization of Ultrasound ». In : *Phys. Rev. Lett.* 103 (15 2009), p. 155703. DOI : 10.1103/PhysRevLett.103.155703. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.155703 (voir p. 188).

[68] G. M. FALCO, T. NATTERMANN et V. L. POKROVSKY. « Localized states and interaction-induced delocalization in Bose gases with quenched disorder ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 85.3 (2009), p. 30002. URL : http://stacks.iop.org/0295-5075/85/i=3/a=30002 (voir p. 109).

[69] M. FAUQUEMBERGUE. « Réalisation d'un dispositif de condensation de Bose-Einstein et de transport d'un échantillon cohérent d'atomes ». Université Paris Sud - Paris XI. Thèse de doct. 2004. URL : http://www.theses.fr/2004PA112201 (cf. p. 64, 69, 70, 75).

[70] M. FILOCHE et S. MAYBORODA. « Universal mechanism for Anderson and weak localization ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 109.37 (2012), p. 14761–14766. ISSN : 0027-8424. DOI : 10.1073/pnas.1120432109. eprint : http://www.pnas.org/content/109/37/14761.full.pdf. URL : http://www.pnas.org/content/109/37/14761 (voir p. 31).

[71] Ø. FISCHER et al. « Scanning tunneling spectroscopy of high-temperature superconductors ». In : *Rev. Mod. Phys.* 79 (1 2007), p. 353–419. DOI : 10.1103/RevModPhys.79.353. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.353 (voir p. 134).

[72] J. P. GAEBLER et al. « Observation of pseudogap behaviour in a strongly interacting Fermi gas ». In : *Nature Physics* 6.569 (2010). DOI : http://dx.doi.org/10.1038/nphys1709 (voir p. 138).

[73] A. M. GARCÍA-GARCÍA. « Semiclassical Theory of the Anderson Transition ». In : *Phys. Rev. Lett.* 100 (7 2008), p. 076404. DOI : 10.1103/PhysRevLett.100.076404. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.076404 (voir p. 37).

[74] A. GAYMANN, H. P. GESERICH et H. v. LÖHNEYSEN. « Temperature dependence of the far-infrared reflectance spectra of Si :P near the metal-insulator transition ». In : *Phys. Rev. B* 52 (23 1995), p. 16486–16493. DOI : 10.1103/PhysRevB.52.16486. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.52.16486 (voir p. 38).

[75] A. Z. GENACK et N. GARCIA. « Observation of photon localization in a three-dimensional disordered system ». In : *Phys. Rev. Lett.* 66 (16 1991), p. 2064–2067. DOI : 10.1103/PhysRevLett.66.2064. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2064 (voir p. 38).

[76] S. GHOSH et al. « Coherent forward scattering as a signature of Anderson metal-insulator transitions ». In : *Phys. Rev. A* 95 (4 2017), p. 041602. DOI : 10.1103/PhysRevA.95.041602. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.041602 (cf. p. 190, 191).

[77] S. GHOSH et al. « Coherent forward scattering in two-dimensional disordered systems ». In : *Phys. Rev. A* 90 (6 2014), p. 063602. DOI : 10.1103/PhysRevA.90.063602. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.063602 (voir p. 191).

[78] N. GOLDENFELD. *Lectures on Phase Transitions and Renormalization Group*. Frontiers in Physics, Westview press, 1992 (cf. p. 29, 37).

[79] J. W. GOODMAN. *Speckle Phenomena in Optics*. Roberts et Company Publishers, 2007 (cf. p. 81, 85, 90).

[80] A. GRIFFIN, D. W. SNOKE et S. STRINGARI. *Bose-Einstein Condensation*. Cambridge University Press, 1995 (voir p. 49).

[81] R. GRIMM, M. WEIDEMÜLLER et Y. B. OVCHINNIKOV. « Optical dipole traps for neutral atoms ». In : *Advances in atomic, molecular, and optical physics* 42 (2000), p. 95–170 (cf. p. 58–60, 199).

[82] G. GRYNBERG et C. ASPECT A. Fabre. *Introduction to Quantum Optics : From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Cambridge University Press, 2010 (cf. p. 102, 163, 168).

[83] D. GUÉRY-ODELIN et al. « Collective oscillations of a classical gas confined in harmonic traps ». In : *Phys. Rev. A* 60 (6 1999), p. 4851–4856. DOI : 10.1103/PhysRevA.60.4851. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.4851 (voir p. 184).

[84] K. J. GÜNTER. *Design and implementation of a Zeeman slower for Rb87*. 2004. URL : https://www.researchgate.net/profile/Kenneth_Guenter/publication/267819756_Design_and_implementation_of_a_Zeeman_slower_for_87_Rb/links/546b22f60cf2f5eb18082565.pdf (voir p. 67).

[85] C. HAINAUT et al. « Controlling symmetry and localization with artificial gauge field in a disordered quantum system ». In : (). URL : https://arxiv.org/abs/1709.08993 (cf. p. 189, 191).

[86] H. HU et al. « Localization of ultrasound in a three dimensional elastic network ». In : *Nature Physics* 4 (2008), p. 945–948. DOI : doi:10.1038/nphys1101 (voir p. 39).

[87] S. INOUYE et al. « Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate ». In : *Nature* 392.6672 (1998), p. 151 (voir p. 40).

[88] A. F. IOFFE et A. R. REGEL. « Non-crystalline, amorphous, and liquid electronic semiconductors ». In : *Prog. Semicond.* 4 (1960), p. 237–291 (voir p. 29).

[89] M. JANSSEN. « Multifractal analysis of broadly-distributed observables at criticality ». In : *Int. J. Mod. Phys. B* 08 (943 1994). URL : https://arxiv.org/abs/cond-mat/9404015 (voir p. 188).

[90] F. JENDRZEJEWSKI. « Quantum transport of ultracold atoms in disordered potentials ». Thèse de doct. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. URL : http://www.theses.fr/2012PA112276/document (cf. p. 64, 72, 79, 91, 113, 114).

[91] F. JENDRZEJEWSKI et al. « Coherent Backscattering of Ultracold Atoms ». In : *Phys. Rev. Lett.* 109 (19 2012), p. 195302. DOI : 10.1103/PhysRevLett.109.195302. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.195302 (cf. p. 23, 189, 190).

[92] F. JENDRZEJEWSKI et al. « Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential ». In : *Nature Physics* 8 (398 2012). DOI : http://dx.doi.org/10.1038/nphys2256 (cf. p. 10, 113, 114, 120).

[93] V. JOSSE. *Habilitation à diriger des recherches, Propagation cohérente d'atomes ultra-froids : Laser á atomes guidé et localisation d'Anderson*. 2015 (voir p. 38).

[94] T. KARPIUK et al. « Coherent Forward Scattering Peak Induced by Anderson Localization ». In : *Phys. Rev. Lett.* 109 (19 2012), p. 190601. DOI : 10.1103/PhysRevLett.109.190601. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.190601 (voir p. 190).

[95] M. KÖHL, T. W. HÄNSCH et T. ESSLINGER. « Measuring the Temporal Coherence of an Atom Laser Beam ». In : *Phys. Rev. Lett.* 87 (16 2001), p. 160404. DOI : 10.1103/PhysRevLett.87.160404. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.160404 (voir p. 188).

[96] S. S. KONDOV. « Ultracold Fermionic Atoms in Disordered Potentials ». Thèse de doct. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2013. URL : https://www.ideals.illinois.edu/handle/2142/46688 (cf. p. 111, 112).

[97] S. S. KONDOV et al. « Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter ». In : *Science* 334.6052 (2011), p. 66–68. ISSN : 0036-8075. DOI : 10.1126/science.1209019. URL : http://science.sciencemag.org/content/334/6052/66 (cf. p. 110–112, 120).

[98] B. KRAMER et A. MACKINNON. « Localization : theory and experiment ». In : *Reports on Progress in Physics* 56.12 (1993), p. 1469. URL : http://stacks.iop.org/0034-4885/56/i=12/a=001 (voir p. 23).

[99] R. C. KUHN et al. « Coherent matter wave transport in speckle potentials ». In : *New Journal of Physics* 9.6 (2007), p. 161. DOI : https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/6/161. URL : http://stacks.iop.org/1367-2630/9/i=6/a=161 (cf. p. 103, 107, 129, 139).

[100] G. LABEYRIE et al. « Enhanced backscattering of a dilute Bose-Einstein condensate ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 100.6 (2012), p. 66001. DOI : https://doi.org/10.1209/0295-5075/100/66001 (voir p. 165).

[101] L. D. LANDAU. « The Theory of a Fermi liquid ». In : *Soviet Phys. JETP.* 30.3 :920 (1957), p. 1058–1064. URL : http://www.jetp.ac.ru/files/Landau1en.pdf (voir p. 133).

[102] R. LANDAUER et J. C. HELLAND. « Electronic Structure of Disordered One-Dimensional Chains ». In : *Journal of Chemical Physics* 22 (10 1954), p. 1655–1665. DOI : http://dx.doi.org/10.1063/1.1739868 (voir p. 15).

[103] K. L. LEE, B. GRÉMAUD et C. MINIATURA. « Dynamics of localized waves in one-dimensional random potentials : Statistical theory of the coherent forward scattering peak ». In : *Phys. Rev. A* 90 (4 2014), p. 043605. DOI : 10.1103/PhysRevA.90.043605. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.043605 (voir p. 191).

[104] P. A. LEE et T. V. RAMAKRISHNAN. « Disordered electronic systems ». In : *Rev. Mod. Phys.* 57 (2 1985), p. 287–337. DOI : 10.1103/RevModPhys.57.287. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.57.287 (voir p. 31).

[105] G. LEMARIÉ. « The Anderson transition with atomic matter waves ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, sept. 2009. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00424399 (voir p. 41).

[106] G. LEMARIÉ, B. GRÉMAUD et D. DELANDE. « Universality of the Anderson transition with the quasiperiodic kicked rotor ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 87.3 (2009), p. 37007. URL : http://stacks.iop.org/0295-5075/87/i=3/a=37007 (voir p. 41).

[107] G. LEMARIÉ et al. « Observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment ». In : *Phys. Rev. A* 80 (4 2009), p. 043626. DOI : 10.1103/PhysRevA.80.043626. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.043626 (voir p. 41).

[108] M. LOPEZ et al. « Experimental Test of Universality of the Anderson Transition ». In : *Phys. Rev. Lett.* 108 (9 2012), p. 095701. DOI : 10.1103/PhysRevLett.108.095701. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.095701 (voir p. 41).

[109] E. LUCIONI et al. « Observation of Subdiffusion in a Disordered Interacting System ». In : *Phys. Rev. Lett.* 106 (23 2011), p. 230403. DOI : 10.1103/PhysRevLett.106.230403. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.230403 (voir p. 40).

[110] A. MARTE et al. « Feshbach Resonances in Rubidium 87 : Precision Measurement and Analysis ». In : *Phys. Rev. Lett.* 89 (28 2002), p. 283202. DOI : 10.1103/PhysRevLett.89.283202. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.283202 (voir p. 43).

[111] A. Y. MATSUURA et al. « Metal-insulator transition in $NiS_{2-x}Se_x$ and the local impurity self-consistent approximation model ». In : *Phys. Rev. B* 58 (7 1998), p. 3690–3696. DOI : 10.1103/PhysRevB.58.3690. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.58.3690 (voir p. 136).

[112] W. R. MCGEHEE et al. « McGehee et al. Reply ». In : *Phys. Rev. Lett.* 113 (9 2014). DOI : https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.099602. URL : https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.113.099602 (voir p. 112).

[113] T. MICKLITZ, C. A. MÜLLER et A. ALTLAND. « Strong Anderson Localization in Cold Atom Quantum Quenches ». In : *Phys. Rev. Lett.* 112 (11 2014), p. 110602. DOI : 10.1103/PhysRevLett.112.110602. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.110602 (voir p. 191).

[114] A. D. MIRLIN et F. EVERS. « Multifractality and critical fluctuations at the Anderson transition ». In : *Phys. Rev. B* 62 (12 2000), p. 7920–7933. DOI : 10.1103/PhysRevB.62.7920. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.62.7920 (voir p. 188).

[115] F. L. MOORE et al. « Atom Optics Realization of the Quantum δ-Kicked Rotor ». In : *Phys. Rev. Lett.* 75 (25 1995), p. 4598–4601. DOI : 10.1103/PhysRevLett.75.4598. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4598 (voir p. 41).

[116] M. MORGENSTERN et al. « Real-Space Observation of Drift States in a Two-Dimensional Electron System at High Magnetic Fields ». In : *Phys. Rev. Lett.* 90 (5 2003), p. 056804. DOI : 10.1103/PhysRevLett.90.056804. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.056804 (voir p. 188).

[117] N. F. MOTT. « Conduction in non-crystalline materials ». In : *Philosophical Magazine* 19.160 (1969), p. 835–852. DOI : 10.1080/14786436908216338. URL : http://dx.doi.org/10.1080/14786436908216338 (voir p. 38).

[118] C. A. MÜLLER et D. DELANDE. « Disorder and interference : localization phenomena ». In : *Lecture Notes of the Les Houches Summer School in Singapore* 91 (2009). URL : https://arxiv.org/abs/1005.0915 (cf. p. 18, 26, 27, 129).

[119] C. A. MÜLLER, D. DELANDE et B. SHAPIRO. « Critical dynamics at the Anderson localization mobility edge ». In : *Phys. Rev. A* 94 (3 2016), p. 033615. DOI : 10.1103/PhysRevA.94.033615. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.033615 (cf. p. 106, 188).

[120] C. A. MÜLLER et B. SHAPIRO. « Comment on Three-Dimensional Anderson Localization in Variable Scale Disorder ». In : *Phys. Rev. Lett.* 113 (9 2014). DOI : https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.099601. URL : https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.113.099601 (voir p. 112).

[121] K. MÜLLER. « Coherent transport of ultracold atoms in disordered potentials : Manipulation of time-reversal symmetry in weak localization experiments ». Thèse de doct. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. URL : http://www.theses.fr/2014IOTA0013/document (cf. p. 11, 64, 65, 74, 80, 89, 91).

[122] K. MÜLLER et al. « Suppression and Revival of Weak Localization through Control of Time-Reversal Symmetry ». In : *Phys. Rev. Lett.* 114 (20 2015), p. 205301. DOI : 10.1103/PhysRevLett.114.205301. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.205301 (cf. p. 11, 23, 189).

[123] C. J. MYATT et al. « Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling ». In : *Phys. Rev. Lett.* 78 (4 1997), p. 586–589. DOI : 10.1103/PhysRevLett.78.586. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.586 (voir p. 70).

[124] C. NGÔ et H. NGÔ. *Physique Quantique, Introduction*. Dunod (voir p. 46).

[125] Th. M. NIEUWENHUIZEN et M. C. W. van ROSSUM. « Intensity Distributions of Waves Transmitted through a Multiple Scattering Medium ». In : *Phys. Rev. Lett.* 74 (14 1995), p. 2674–2677. DOI : 10.1103/PhysRevLett.74.2674. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2674 (voir p. 39).

[126] H. OTT. « Single atom detection in ultracold quantum gases : a review of current progress ». In : *Reports on Progress in Physics* 79.5 (2016), p. 054401. URL : http://stacks.iop.org/0034-4885/79/i=5/a=054401 (cf. p. 10, 40).

[127] M. A. PAALANEN et al. « Critical Scaling of the Conductance in a Disordered Insulator ». In : *Phys. Rev. Lett.* 51 (20 1983), p. 1896–1899. DOI : 10.1103/PhysRevLett.51.1896. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1896 (voir p. 38).

[128] A. D. PALCZEWSKI. *Angle-Resolved Photo-Emission Spectroscopy (ARPES) studies of cuprate superconductors*. Graduate Thesis and Dissertations. 2010. URL : http://lib.dr.iastate.edu/etd/11641/ (voir p. 135).

[129] M. PASEK, G. ORSO et D. DELANDE. « Anderson Localization of Ultracold Atoms : Where is the Mobility Edge ? » In : *Phys. Rev. Lett.* 118 (17 2017), p. 170403. DOI : 10.1103/PhysRevLett.118.170403. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.170403 (cf. p. 113, 120, 201).

[130] M. PASEK et al. « Phase diagram of the three-dimensional Anderson model for short-range speckle potentials ». In : *Phys. Rev. A* 92 (5 2015), p. 053618. DOI : 10.1103/PhysRevA.92.053618. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.053618 (voir p. 174).

[131] A. PERALI et al. « Evolution of the Normal State of a Strongly Interacting Fermi Gas from a Pseudogap Phase to a Molecular Bose Gas ». In : *Phys. Rev. Lett.* 106 (6 2011), p. 060402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.106.060402. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.060402 (voir p. 138).

[132] J.P. PÉREZ. *Optique, Fondements et Applications*. Dunod, 2004 (cf. p. 86, 89).

[133] C. J. PETHICK et H. SMITH. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, 2002 (cf. p. 48, 51, 52, 54, 61).

[134] A. S. PIKOVSKY et D. L. SHEPELYANSKY. « Destruction of Anderson Localization by a Weak Nonlinearity ». In : *Phys. Rev. Lett.* 100 (9 2008), p. 094101. DOI : 10.1103/PhysRevLett.100.094101. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.094101 (voir p. 40).

[135] M. PIRAUD. « Anderson localization of matter waves in correlated disorder : from 1D to 3D ». Thèse de doct. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. URL : https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00796777 (cf. p. 37, 109, 114–116).

[136] M. PIRAUD, L. PEZZÉ et L. SANCHEZ-PALENCIA. « Matter wave transport and Anderson localization in anisotropic three-dimensional disorder ». In : *EPL (Europhysics Letters)* 99.5 (2012), p. 50003. DOI : https://doi.org/10.1209/0295-5075/99/50003. URL : http://stacks.iop.org/0295-5075/99/i=5/a=50003 (cf. p. 37, 115).

[137] T. PLISSON, T. BOURDEL et C. A. MÜLLER. « Momentum Isotropisation in Random Potentials ». In : *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 217 (79 2013). DOI : https://doi.org/10.1140/epjst/e2013-01756-8 (voir p. 104).

[138] T. PRAT. « Localisation d'Anderson avec des atomes froids : dynamique dans le désordre et perspectives avec des modèles chaotiques ». Thèse de doct. Laboratoire Kastler Brossel - Université Pierre et Marie Curie, 2017. URL : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01687032/document (cf. p. 141, 175, 177).

[139] T. PRAT, N. CHERRORET et D. DELANDE. « Semiclassical spectral function and density of states in speckle potentials ». In : *Phys. Rev. A* 94 (2 2016), p. 022114. DOI : 10.1103/PhysRevA.94.022114. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.022114 (cf. p. 141, 175, 177).

[140] J. RAMMER. *Quantum Transport Theory*. Frontiers in Physics, Westview press, 2004 (voir p. 32).

[141] J. RICHARD. « Propagation d'atomes ultra-froids en milieu désordonné - Étude dans l'espace des impulsions de phénomènes de diffusion et de localisation ». Thèse de doct. Université Paris Saclay, 2015. URL : https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01246561/document (cf. p. 11, 90, 91, 93, 103, 104, 168).

[142] A. RICHARDELLA et al. « Visualizing Critical Correlations Near the Metal-Insulator Transition in Ga1-xMnxAs ». In : *Science* 327.5966 (2010), p. 665–669. ISSN : 0036-8075. DOI : 10.1126/science.1183640. eprint : http://science.sciencemag.org/content/327/5966/665.full.pdf. URL : http://science.sciencemag.org/content/327/5966/665 (voir p. 188).

[143] J.F. RIOU. « Etude des propriétés de propagation d'un laser à atomes ». Thèse de doct. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. URL : http://www.theses.fr/2006PA112227 (cf. p. 64, 72).

[144] G. ROATI et al. « Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate ». In : *Nature* 453.7197 (2008), p. 895–898 (voir p. 42).

[145] A. RODRIGUEZ et al. « Multifractal finite-size scaling and universality at the Anderson transition ». In : *Phys. Rev. B* 84 (13 2011), p. 134209. DOI : 10.1103/PhysRevB.84.134209. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.134209 (voir p. 188).

[146] T. F. ROSENBAUM et al. « Metal-insulator transition in a doped semiconductor ». In : *Phys. Rev. B* 27 (12 1983), p. 7509–7523. DOI : 10.1103/PhysRevB.27.7509. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.27.7509 (voir p. 38).

[147] M. Robert-de SAINT-VINCENT et al. « Anisotropic 2D Diffusive Expansion of Ultracold Atoms in a Disordered Potential ». In : *Phys. Rev. Lett.* 104 (22 2010), p. 220602. DOI : 10.1103/PhysRevLett.104.220602. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.220602 (voir p. 188).

[148] K. SAKAI, K. YAMAMOTO et K. TAKAGI. « Observation of acoustic coherent backscattering ». In : *Phys. Rev. B* 56 (17 1997), p. 10930–10933. DOI : 10.1103/PhysRevB.56.10930. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.56.10930 (voir p. 189).

[149] L. SANCHEZ-PALENCIA et al. « Anderson Localization of Expanding Bose-Einstein Condensates in Random Potentials ». In : *Phys. Rev. Lett.* 98 (21 2007), p. 210401. DOI : 10.1103/PhysRevLett.98.210401. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.210401 (voir p. 188).

[150] L. SÁRKÁNY et al. « Controlling the magnetic-field sensitivity of atomic-clock states by microwave dressing ». In : *Phys. Rev. A* 90 (5 2014), p. 053416. DOI : 10.1103/PhysRevA.90.053416. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.053416 (voir p. 149).

[151] F. SCHEFFOLD et al. « Localization or classical diffusion of light ». In : *Nature* 398.6724 (1999), p. 206 (voir p. 38).

[152] T. SCHWARTZ et al. « Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices ». In : *Nature* 446.7131 (2007), p. 52 (voir p. 39).

[153] G. SEMEGHINI. « Ultracold atoms in three-dimensional disorder : Measurement of the mobility edge and effect of weak interactions ». Thèse de doct. University of Firenze, 2015. URL : http://quantumgases.lens.unifi.it/theses/thesis_semeghini_phd.pdf (cf. p. 113, 118).

[154] G. SEMEGHINI et al. « Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization ». In : *Nature Physics* 11 (554 2015). DOI : http://dx.doi.org/10.1038/nphys3339 (cf. p. 116, 118–120, 165, 168).

[155] B. SHAPIRO. « Cold atoms in the presence of disorder ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 45.14 (2012), p. 143001. DOI : https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/14/143001. URL : http://stacks.iop.org/1751-8121/45/i=14/a=143001 (cf. p. 103, 109, 176, 188).

[156] D. Yu. SHARVIN et Yu. V. SHARVIN. « Magnetic flux quantization in a cylindrical film of a normal metal ». In : *JETP Lett.* 34 (5 1981), p. 272–274. URL : http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1518/article_23205.pdf (voir p. 14).

[157] B.I. SHKLOVSKII. « Superfluid-insulator transition in "Dirty" ultracold Fermi gas ». In : *Electronic and Optical Properties of Semiconductors* 42 (909 2008). DOI : https://doi.org/10.1134/S1063782608080058 (voir p. 108).

[158] I. SHLIMAK et al. « Determination of the Critical Conductivity Exponent for the Metal-Insulator Transition at Nonzero Temperatures : Universality of the Transition ». In : *Phys. Rev. Lett.* 77 (6 1996), p. 1103–1106. DOI : 10.1103/PhysRevLett.77.1103. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1103 (voir p. 38).

[159] T. SIEGRIST et al. « Disorder-induced localization in crystalline phase-change materials ». In : *Nature materials* 10.3 (2011), p. 202 (cf. p. 38, 39).

[160] M. SIGRIST. *Solid State Theory, Lecture Notes*. 2013. URL : http://edu.itp.phys.ethz.ch/fs13/sst/Lecture-Notes.pdf (cf. p. 15, 54).

[161] S. E. SKIPETROV et J. H. PAGE. « Red light for Anderson localization ». In : *New Journal of Physics* 18.2 (2016), p. 021001. URL : http://stacks.iop.org/1367-2630/18/i=2/a=021001 (voir p. 39).

[162] S. E. SKIPETROV et I. M. SOKOLOV. « Absence of Anderson Localization of Light in a Random Ensemble of Point Scatterers ». In : *Phys. Rev. Lett.* 112 (2 2014), p. 023905. DOI : 10.1103/PhysRevLett.112.023905. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.023905 (voir p. 39).

[163] K. SLEVIN et T. OHTSUKI. « Corrections to Scaling at the Anderson Transition ». In : *Phys. Rev. Lett.* 82 (2 1999), p. 382–385. DOI : 10.1103/PhysRevLett.82.382. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.382 (voir p. 37).

[164] K. SLEVIN et T. OHTSUKI. « Critical exponent for the Anderson transition in the three-dimensional orthogonal universality class ». In : *New Journal of Physics* 16.1 (2014), p. 015012. URL : http://stacks.iop.org/1367-2630/16/i=1/a=015012 (voir p. 37).

[165] T. SPERLING et al. « Can 3D light localization be reached in white paint ? » In : *New Journal of Physics* 18.1 (2016), p. 013039. URL : http://stacks.iop.org/1367-2630/18/i=1/a=013039 (voir p. 39).

[166] T. SPERLING et al. « Direct determination of the transition to localization of light in three dimensions ». In : *Nature Photonics* 7.1 (2013), p. 48–52 (voir p. 39).

[167] D. A. STECK. *Rubidium 87 D Line Data*. 2001. URL : http://steck.us/alkalidata/rubidium87numbers.pdf (cf. p. 55, 61, 197–199).

[168] J. T. STEWART, J. P. GAEBLER et D. S. JIN. « Using photoemission spectroscopy to probe a strongly interacting Fermi gas ». In : *Nature* 454.744 (2008). DOI : http://dx.doi.org/10.1038/nature07172 (cf. p. 137, 138).

[169] M. STÖRZER et al. « Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light ». In : *Phys. Rev. Lett.* 96 (6 2006), p. 063904. DOI : 10.1103/PhysRevLett.96.063904. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.063904 (voir p. 39).

[170] D. J. THOULESS. « Electrons in disordered systems and the theory of localization ». In : *Physics Reports* 13.3 (1974), p. 93–142. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(74)90029-5. URL : http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157374900295 (voir p. 33).

[171] P. TÖRMA. *Quantum Gas Experiments : Exploring Many-Body States, Chapter 10 : Spectroscopies-Theory*. World Scientific, 2014. DOI : https://doi.org/10.1142/9781783264766_0010 (cf. p. 134, 138).

[172] A. TOURIN et al. « Time-Dependent Coherent Backscattering of Acoustic Waves ». In : *Phys. Rev. Lett.* 79 (19 1997), p. 3637–3639. DOI : 10.1103/PhysRevLett.79.3637. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.3637 (voir p. 189).

[173] M. TRAPPE, D. DELANDE et C. A. MÜLLER. « Semiclassical spectral function for matter waves in random potentials ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 48.24 (2015), p. 245102. URL : http://stacks.iop.org/1751-8121/48/i=24/a=245102 (cf. p. 141, 166).

[174] V. V. VOLCHKOV et al. « Measurement of Spectral Functions of Ultracold Atoms in Disordered Potentials ». In : *Phys. Rev. Lett.* 120 (6 2018), p. 060404. DOI : 10.1103/PhysRevLett.120.060404. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.060404 (cf. p. 11, 95, 172, 173).

[175] D. VOLLHARDT et P. WÖLFLE. « Self-consistent theory of Anderson localization ». In : *Electronic phase transitions* 1 (1992) (cf. p. 24, 26, 27, 34).

[176] J. T. M. WALVAREN. *Quantum Gases - Collisions and Statistics, Lecture course*. 2013. URL : https://staff.fnwi.uva.nl/j.t.m.walraven/walraven/Publications_files/2013-Quantum-Gases.pdf (cf. p. 10, 49, 50, 110).

[177] R. L. WEAVER. « Anderson localization of ultrasound ». In : *Wave motion* 12.2 (1990), p. 129–142 (voir p. 38).

[178] R. L. WEAVER. « Anomalous diffusivity and localization of classical waves in disordered media : The effect of dissipation ». In : *Phys. Rev. B* 47 (2 1993), p. 1077–1080. DOI : 10.1103/PhysRevB.47.1077. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.47.1077 (voir p. 39).

[179] R. A. WEBB et al. « Observation of h/e Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings ». In : *Phys. Rev. Lett.* 54 (25 1985), p. 2696–2699. DOI : 10.1103/PhysRevLett.54.2696. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.2696 (voir p. 14).

[180] M. A. WERNER et al. « Selective final state spectroscopy and multifractality in two-component ultracold Bose-Einstein condensates : a numerical study ». In : (). URL : https://arxiv.org/abs/1709.08993 (voir p. 188).

[181] D. S. WIERSMA et al. « Localization of light in a disordered medium ». In : *Nature* 390.6661 (1997), p. 671 (voir p. 38).

[182] WIKIPEDIA. *Minkowski-Bouligand dimension*. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski\%E2\%80\%93Bouligand_dimension (voir p. 187).

[183] P. WOLF et G. MARET. « Weak Localization and Coherent Backscattering of Photons in Disordered Media ». In : *Phys. Rev. Lett.* 55 (24 1985), p. 2696–2699. DOI : 10.1103/PhysRevLett.55.2696. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.2696 (cf. p. 23, 189).

[184] S. WÜSTER. « Classical and Quantum Field Theory of Bose-Einstein Condensates ». Thèse de doct. Australian National University, jan. 2007. URL : https://openresearch-repository.anu.edu.au/bitstream/1885/49265/4/02whole.pdf (voir p. 51).

[185] K. XU et al. « Observation of Strong Quantum Depletion in a Gaseous Bose-Einstein Condensate ». In : *Phys. Rev. Lett.* 96 (18 2006), p. 180405. DOI : 10.1103/PhysRevLett.96.180405. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.180405 (voir p. 49).

[186] L. YE et al. « Observation of bending wave localization and quasi mobility edge in two dimensions ». In : *Phys. Rev. Lett.* 69 (21 1992), p. 3080–3083. DOI : 10.1103/PhysRevLett.69.3080. URL : https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.3080 (voir p. 38).

[187] A. YEDJOUR et B. A. van TIGGELEN. « Diffusion and localization of cold atoms in 3D optical speckle ». In : *Eur. Phys. J. D* 59 (2 2010), p. 249–255. DOI : https://doi.org/10.1140/epjd/e2010-00141-5. URL : https://link.springer.com/article/10.1140%2Fepjd%2Fe2010-00141-5 (voir p. 115).

[188] T. YING et al. « Anderson localization of electrons in single crystals : $Li_xFe_7Se_8$ ». In : *Science advances* 2.2 (2016) (voir p. 38).

[189] W. ZUREK. *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical - Revisited*. 2002. URL : https://arxiv.org/ftp/quant-ph/papers/0306/0306072.pdf (voir p. 14).

ÉCOLE DOCTORALE
Ondes et Matière
(EDOM)

Titre : Vers une étude spectroscopique de la transition d'Anderson avec des atomes froids : mesures de fonctions spectrales

Mots clés : atomes froids - désordre - localisation - transition de phase - fonction spectrale

Résumé : Ce mémoire résume les travaux d'une thèse portant sur le transport et la localisation d'Anderson d'ondes de matière ultra-froide en milieu désordonné. C'est un travail expérimental visant à l'étude de la transition d'Anderson séparant les états d'énergie d'une particule quantique placée dans un potentiel désordonné selon deux phases : des états localisés, et des états diffusifs. Dans un premier temps, on rappellera les concepts fondamentaux permettant de comprendre les effets de localisation des ondes, et notamment leur interprétation en terme d'interférences. Ensuite, on donnera une description globale du dispositif expérimental permettant de préparer les nuages d'atomes ultra-froids servant de source d'ondes quantiques de matière, et de générer la figure de tavelures optique (*speckle* en anglais) jouant le rôle de potentiel désordonné pour les atomes. A l'issue de ce travail introductif, les notions de localisation introduites précédemment seront appliquées au transport d'atomes froids dans un speckle. Un bref état de l'art des expériences d'atomes froids portant sur la transition d'Anderson permettra de dessiner les limites en terme de contrôle de l'énergie des états peuplés par les atomes. Ces limitations permettront alors de motiver la mise en place d'une nouvelle méthode expérimentale dite "spectroscopique" permettant un contrôle complet par un opérateur extérieur de l'énergie des atomes placés le désordre. Le concept de fonction spectrale sera alors présenté comme outil fondamental permettant de caractériser les états d'énergie et de calibrer la fiabilité en énergie de la méthode spectroscopique. Enfin, des résultats expérimentaux portant sur la mesure de fonctions spectrales par cette nouvelle méthode spectroscopique viendront attester qu'il serait effectivement possible d'étudier la transition d'Anderson avec une résolution en énergie bien supérieure aux expériences précédentes.

Title : Towards a spectroscopic study of Anderson transition with ultra-cold atoms : measurements of spectral functions

Keywords : ultracold atoms - disorder - localization - phase transition - spectral function

Abstract : Abstract : This manuscript summarizes the work of a thesis on Anderson's localization and transport of ultra-cold matter waves in disordered media. This is an experimental work aiming to study the Anderson transition separating the energy states of a quantum particle placed in a disordered potential into two phases: localized states and diffusive states. First, we will recall some fundamental concepts about wave localization and how such phenomenon is linked with some interference effects. Then, we will give a global description of the experimental set-up allowing to prepare the ultra-cold atomic samples used as a source of quantum matter waves, and to generate the speckle field used as disordered potential for the atoms. At the end of this introductory work, the concepts of localization introduced previously will be applied to the transport of cold atoms in a speckle field. A brief state of the art of cold-atom experiments dealing with the Anderson transition will allow us to set the limits of these works in terms of energy control on the atomic states. These limitations will then motivate the implementation of a new experimental "spectroscopic" method allowing a complete control of the energy of the atoms placed in disorder. The concept of spectral function will then be presented as a fundamental tool for characterizing energy states and for calibrating the energy reliability of the spectroscopic method. Finally, the experimental results on the measurement of spectral functions by this new spectroscopic method will show that it would be indeed possible to study the Anderson transition with a much higher energy resolution than the previous experiments.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France