



# Stabilité de l'interaction onde de choc/ couche limite laminaire

Nicolas Bonne

## ► To cite this version:

Nicolas Bonne. Stabilité de l'interaction onde de choc/ couche limite laminaire. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. ⟨NNT : 2018SACLX025⟩. ⟨tel-01817018⟩

**HAL Id: tel-01817018**

**<https://pastel.hal.science/tel-01817018v1>**

Submitted on 16 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Stabilité de l'interaction onde de choc/ couche limite laminaire

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay  
préparée à l'Ecole Polytechnique

École doctorale n°579 : sciences mécaniques et énergétiques,  
matériaux et géosciences (SMEMAG)  
Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides

Thèse présentée et soutenue à Meudon, le 27/03/2018, par

**Nicolas Bonne**

Composition du Jury :

Marianna Braza	Président
Directrice de recherche, Université Toulouse III (– IMFT)	
Jean-Christophe Robinet	Rapporteur
Professeur, Arts et Métiers (– DynFluid)	
Christophe Corre	Rapporteur
Professeur, École Centrale de Lyon (– LMFA)	
Christian Tenaud	Examineur
Senior Researcher, Université Paris Sud (– LIMS)	
Lionel Larchevêque	Examineur
Maître de conférence, Université Aix-Marseille (– IUSTI)	
Philippe Meliga	Examineur
Directeur de recherche, Université Aix-Marseille (– M2P2)	
Laurent Jacquin	Directeur de thèse
Professeur, ONERA (– DSG)	
Denis Sipp	Co-Directeur de thèse
Directeur de recherche, ONERA (– DAAA)	
Vincent Brion	Encadrant de thèse
Ingénieur de recherche, ONERA (– DAAA)	
Jean Perraud	Invité
Ingénieur de recherche, ONERA (– DMPE)	



J'aimerais d'abord remercier les membres du jury pour s'être intéressé à mes travaux et pour les discussions productives lors de la soutenance.

Je remercie aussi la DGA pour avoir financé une partie de ces travaux.

J'aimerais aussi remercier mes directeurs de thèse Laurent et Denis pour m'avoir fait confiance sur ce sujet et pour avoir été disponibles malgré leurs emplois du temps chargés. Je remercie très vivement mon encadrant, Vincent, pour m'avoir soutenu et pour ses longues relectures de ce manuscrit.

J'aimerais aussi remercier Reynald, Pascal et Eric pour m'avoir laissé accès à leurs données expérimentales et de LES sans lesquelles cette thèse n'aurait pas eu la même substance. Plus généralement, je remercie aussi les différentes personnes de l'ONERA qui m'ont aidé. Julien, Ivan, Alexandre, Claire, Dominique... Leurs portes étaient toujours ouvertes...

Je remercie aussi les doctorants/ stagiaires de l'ONERA pour les différents moments de détente. Plus précisément je remercie Samir, Robin, Holly et Ye-Bonne pour m'avoir remis au sport. Et au groupe des 4 fantastiques pour les différents fous rires, décorations de portes et les pauses cafés. Cette bonne ambiance fait que c'était un plaisir de venir tous les matins.

D'un point de vue plus personnel, je remercie mes anciens colloques, Marie France et Damien, pour nos soirées bavardages autour d'une bière et d'un repas gastronomique ou non. Je ne sais pas comment Damien a pu me supporter à la fois dans l'appartement et dans le bureau. Je remercie aussi mes amis de toujours, le quintet et Aymeric qui m'ont aidé dans les moments difficiles.

Je remercie aussi mes parents et mon frère qui m'ont toujours soutenu dans mes choix, dans mes doutes et dans mes joies. Ils m'ont aussi donné le goût de l'aéronautique et de façon plus indirecte peut être, celui de la recherche.

Et enfin, je remercie vivement Juliette pour tout ce qu'elle a fait pour moi ces dernières années, tu me donnes le sourire, tu me fais rire, tu me calmes, tu me cultives et tu as supporté ces derniers mois de dur labeur sans te plaindre.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Etat de l'art sur le phénomène d'interaction onde choc/ couche limite</b>	<b>7</b>
2.1	Cas de la réflexion de choc . . . . .	7
2.1.1	Topologie de la réflexion de choc . . . . .	7
2.1.2	Instationnarités d'une interaction onde de choc/couche limite turbulente	10
2.1.3	Instationnarités d'une interaction onde de choc/couche limite transi- tionnelle . . . . .	16
2.2	Cas du choc droit sur un profil d'aile en régime transsonique . . . . .	20
2.2.1	Introduction . . . . .	20
2.2.2	La physique du buffet . . . . .	23
2.2.3	Travaux expérimentaux . . . . .	26
2.2.4	Etudes numériques sur le buffet . . . . .	28
2.2.5	Buffet laminaire . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Modèles de turbulence et de transition</b>	<b>35</b>
3.1	Equations de Navier Stokes . . . . .	35
3.2	Les équations RANS . . . . .	37
3.3	Fermetures des équations RANS . . . . .	38
3.3.1	Spalart Allmaras . . . . .	39
3.3.2	Modèles $k - \omega$ . . . . .	40
3.4	Critères de transition . . . . .	43
3.4.1	Critère AHD-GL . . . . .	44
3.4.2	Modèle de Langtry . . . . .	49
3.4.3	Équation de transport pour l'intermittence . . . . .	50
3.4.4	Équation de transport pour $\overline{R_{\theta_t}}$ . . . . .	52
3.4.5	Modélisation de la transition par bulbe de décollement . . . . .	53
3.4.6	Fonctions de corrélation utilisées dans le modèle $\gamma\text{-}\overline{R_{\theta_t}}$ . . . . .	54
3.4.7	Couplage avec $k - \omega$ . . . . .	56

<b>4</b>	<b>Analyse de stabilité globale, de résolvant et adjoint</b>	<b>59</b>
4.1	Equations des ondes organisées dans le cadre de la décomposition triple . . .	60
4.2	Analyse sur un champ moyen URANS . . . . .	64
4.3	Comparaison des équations . . . . .	68
4.4	Différentes analyses . . . . .	70
4.4.1	$\mu$ laminaire . . . . .	71
4.4.2	Approche $\mu_t$ figé . . . . .	71
4.4.3	Système complet . . . . .	72
4.4.4	$\gamma$ figé . . . . .	72
4.5	Analyse autour d'un champ de base . . . . .	73
4.6	Analyse de stabilité globale . . . . .	74
4.7	Problème adjoint . . . . .	75
4.8	Analyse du résolvant . . . . .	76
4.8.1	Présentation de l'analyse du résolvant . . . . .	76
4.8.2	Choix des produits scalaires . . . . .	77
4.9	Calcul de la Jacobienne . . . . .	79
4.10	Méthode pour trouver les valeurs et les vecteurs propres . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Cas de la réflexion d'un choc oblique sur une couche limite laminaire</b>	<b>83</b>
5.1	Introduction . . . . .	83
5.2	Description of the flow . . . . .	89
5.2.1	General setup . . . . .	89
5.2.2	Reference data . . . . .	90
5.2.3	RANS mean flow . . . . .	92
5.2.4	Flow features . . . . .	93
5.3	Resolvent analysis . . . . .	101
5.4	Results . . . . .	103
5.4.1	Identification of the low, medium and high frequency modes . . . . .	103
5.4.2	Linear mechanisms involved in the optimal forcings . . . . .	107
5.4.3	Analysis . . . . .	115
5.5	Conclusion . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Vers le système complet</b>	<b>119</b>
6.1	Modification des modèles de turbulence et de transition . . . . .	120
6.1.1	Modification des fonctions min et max . . . . .	121
6.1.2	Modification de la corrélation . . . . .	121
6.1.3	Effet sur les calculs du champ de base . . . . .	123
6.2	Champ de base . . . . .	124
6.2.1	Structures principales de l'écoulement . . . . .	125

6.2.2	Position de la transition . . . . .	126
6.2.3	Evolution de coefficient de friction le long de la plaque . . . . .	126
6.3	Stabilité globale . . . . .	127
6.4	Analyse du résolvant . . . . .	128
6.5	Analyses des modes obtenus par analyse de résolvant . . . . .	131
6.5.1	Comparaison aux transformées de Fourier de la LES . . . . .	132
6.5.2	Forçages optimaux . . . . .	132
6.5.3	Analyse des réponses . . . . .	133
6.6	Convergence en maillage et en paramètre de différentiation . . . . .	137
6.6.1	Convergence en maillage . . . . .	137
6.6.2	Convergence du paramètre $\sigma_d$ . . . . .	139
<b>7</b>	<b>Etude des instationnarités sur le profil OALT25</b>	<b>141</b>
7.1	Résultats expérimentaux . . . . .	141
7.1.1	Configuration expérimentale . . . . .	141
7.1.2	Résultats expérimentaux . . . . .	143
7.2	Calcul URANS . . . . .	151
7.2.1	Schémas numériques et modèles . . . . .	152
7.2.2	Etude du mouvement au pied choc . . . . .	154
7.2.3	Analyse en fréquence . . . . .	156
7.3	Champ de base . . . . .	157
7.3.1	Schéma numérique . . . . .	158
7.3.2	Principales caractéristiques de l'écoulement . . . . .	158
7.3.3	Position du choc en fonction du Mach . . . . .	159
7.3.4	Topologie du champ de base en fonction du Mach . . . . .	161
7.4	Stabilité globale . . . . .	164
7.4.1	Etude des différents niveaux de modélisation des tensions de Reynolds . . . . .	164
7.4.2	Etude des spectres en fonction du Mach . . . . .	166
7.4.3	Etude du résolvant . . . . .	168
7.4.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux . . . . .	169
7.5	Etude des modes instables . . . . .	171
7.5.1	Modes directs . . . . .	173
7.5.2	Modes adjoints . . . . .	184
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>187</b>
8.1	Résumé des travaux . . . . .	187
8.2	Perspectives . . . . .	191
8.2.1	Dans le cas de la réflexion de choc (relatif au projet TFAST) . . . . .	191
8.2.2	Cas de l'interaction sur profil d'aile (relatif au projet Buterfli) . . . . .	192



Annexe A	Equations de la décomposition triple en compressible	195
Annexe B	Linéarisation du critère d'Abu-Ghannam	199
Annexe C	Conditions pour que le mode et son adjoint ressemblent respectivement à la réponse optimale et au forçage optimal	203
Annexe D	Forçage et réponse optimaux	205
Annexe E	Global stability analysis	209
Bibliographie		211

# Chapitre 1

## Introduction

La technologie laminaire est une des techniques envisagées pour réduire significativement la consommation en carburant des avions de ligne. Aujourd'hui cette technologie, en dehors de quelques applications réelles, reste encore à l'état de projet dans les bureaux d'étude et les centres de recherche. A ce titre des essais grandeur nature ont eu lieu par le passé. On peut notamment citer l'expérience de Dassault Aviation dans le début des années 90 dans laquelle l'aile du Falcon 50 a été modifiée pour avoir un profil laminaire. Très récemment, le 26 septembre 2017, Airbus a fait un test de voilure laminaire sur un A340. Ici seul le bout de l'aile a été modifié pour introduire un profil laminaire. La photo de cet avion en figure 1.1 montre que la flèche de la partie laminaire est moins importante que celle de la partie non modifiée ( $20^\circ$  contre  $30^\circ$ ). Cette réduction de flèche a été faite dans le but de limiter la transition de la couche limite par les instabilités crossflow (pour plus de détails sur ces instabilités voir Bippes [15]). Charles Champion, directeur du bureau d'étude d'Airbus, a expliqué sur le site Futura sciences que le projet vise à une réduction de 50% des frottements de l'air sur la voilure ce qui correspond à une baisse de consommation de 4%. Cette technologie pose encore différentes questions. La première est la viabilité sur le long terme du profil laminaire. En effet l'aile va forcément se salir, des impuretés vont se déposer sur l'aile et favoriser la transition de la couche limite. Rien ne garantit donc que le profil restera laminaire tout au long du vol. La seconde est l'enveloppe de vol d'un tel avion, c'est à dire la gamme des [Mach, incidence] admissible.

Sur les avions actuels, qui ont une voilure turbulente, la vitesse de croisière est limitée par l'ICAO (International civil aviation organisation). Ces limitations de vitesse sont notamment liées à un phénomène d'instationnarité de l'onde de choc présente à l'extrados du profil d'aile en vol transsonique. Ce phénomène s'appelle le tremblement ou buffet en anglais. Le buffet peut provoquer des déformations voir la rupture de la structure de l'avion. Il peut aussi produire un inconfort pour les passagers et une perte importante de maniabilité de l'avion pour le pilote. Comme le buffet est un exemple d'interaction entre une onde de choc et une couche limite, le changement de nature de cette dernière peut avoir une influence sur les



FIGURE 1.1 Photo de l'A340 Blade

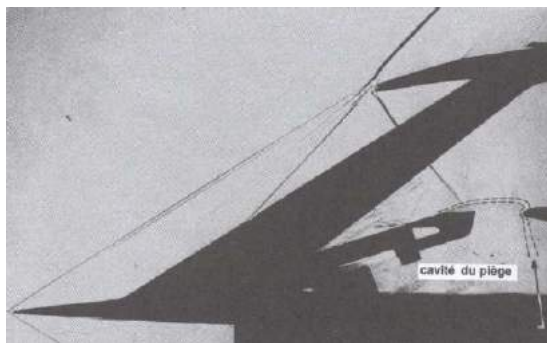
limites en Mach et en incidence d'entrée en régime de buffet ainsi que sur la fréquence de ce phénomène. Il est donc intéressant d'étudier ces influences afin de déterminer l'enveloppe de vol pour les avions disposant d'une voilure laminaire.

Au delà du phénomène de buffet, l'interaction entre un choc et une couche limite est un phénomène présent dans un grand nombre d'applications en aéronautique et plus généralement en aérospatial. On peut citer, par exemple, les prises d'air de turboréacteur des avions supersoniques ou des missiles (voir figure 1.2(a)), l'écoulement dans les étages de compresseur d'un turboréacteur (voir figure 1.2(b)), l'écoulement transsonique à l'extrados d'un profil d'aile (voir figure 1.2(c)) ou encore l'écoulement à l'intérieur d'une tuyère surdétendue (voir figure 1.2(d)).

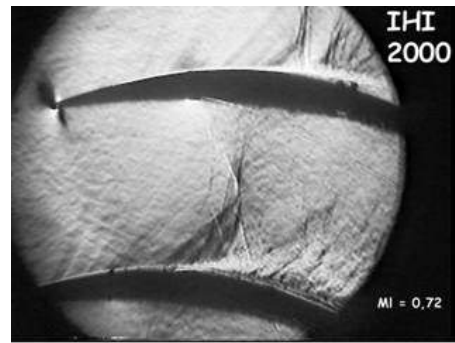
Ces interactions présentent des instationnarités basses fréquences qui ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières décennies. L'engouement pour ce sujet est lié aux nombreux effets néfastes de ces interactions. Nous avons déjà parlé du buffet sur un profil d'aile, mais les autres configurations présentent aussi un battement de choc potentiellement problématique. Par exemple un choc qui oscille dans la prise d'air va avoir une influence sur la pression dans la chambre de combustion et peut, dans certaines situations, provoquer l'extinction du réacteur. Dans une tuyère surdétendue, les interactions onde de choc/couche limite vont briser la symétrie de l'écoulement créant ainsi des efforts latéraux sur la tuyère qui peuvent fragiliser sa structure.

L'omniprésence de ce phénomène et les conséquences potentiellement dramatiques qu'il peut avoir sont une motivation pour l'étudier. Il s'agit de comprendre son origine et de proposer des moyens de le contrôler. La physique de cette interaction est encore mal comprise que ce soit dans le cas d'une couche limite turbulente ou dans le cas d'une couche limite laminaire.

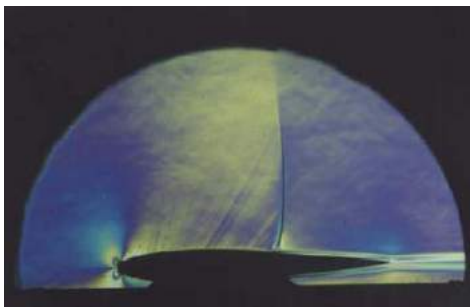
Le but des travaux décrits dans ce manuscrit est d'étudier ce phénomène d'interaction avec une couche limite laminaire, en regardant spécifiquement deux cas, **(1) une réflexion**



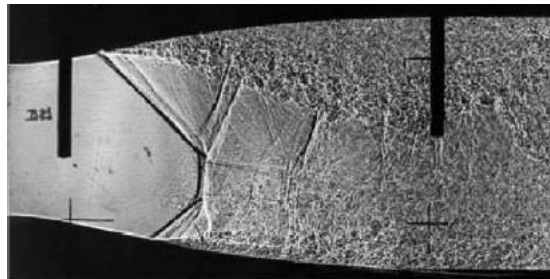
(a) Prise d'air du concorde (document ONERA)



(b) Grille d'aubes de turbomachine (document ONERA)



(c) Profil d'ail transsonique (document ONERA)



(d) Tuyère surdétendue (document ONERA)

FIGURE 1.2 Différentes configurations d'interaction onde de choc/couche limite

**de choc oblique sur une couche limite laminaire et (2) la dynamique du choc sur un profil d'aile laminaire en écoulement transsonique.** Ces travaux utilisent une approche RANS couplée avec des analyses de stabilité globale et de résolvant. Ces travaux numériques ont été réalisés à l'ONERA (centre de Meudon) où avait lieu concomitamment deux expériences en soufflerie, chacune reliée à une de ces deux problématiques. L'expérience portant sur la réflexion de choc sur une couche limite laminaire a été faite par l'ONERA dans le cadre du projet européen TFAST. De plus une LES a aussi été faite sur ce cas. La seconde expérience, qui étudie le buffet autour d'une aile laminaire, a été effectuée à l'ONERA dans le cadre du projet Butterfli (projet de coopération entre l'Europe et la Russie sur la réduction de la traînée des ailes d'avion).

La validité des approches RANS est justifiée par les fréquences mises en jeu par les dynamiques basses fréquences ( $f \sim 0.05 - 10kHz$ ). Ces fréquences sont très en dessous des fréquences caractéristiques des échelles fines de la turbulence. L'intérêt de cette méthode est un faible coût de calcul comparé à la LES ou à la DNS. Les approches RANS permettent donc de faire des études paramétriques là où les approches LES ou DNS seront limitées qu'à une ou deux valeurs d'un paramètre. Différentes études proposées par Sartor et al. [107], [106] et [105] ou encore Crouch et al. [30] et [31] ont montré la validité et le caractère prédictif de cette méthode dans le cas de l'interaction entre une onde de choc et une couche limite turbulente. Par exemple Sartor et al. [106] a étudié l'interaction entre un choc droit et une couche limite turbulente sur la bosse dite "de Déler" à l'aide d'une expérience et d'une simulation RANS couplée avec une analyse de résolvant. Sartor trouve un bon accord entre les résultats expérimentaux et les résultats de l'analyse de résolvant en terme de fréquence. Avec les modes de résolvant obtenus, il a pu également analyser finement la physique. Un autre exemple est la prédiction du buffet sur une aile en écoulement pleinement turbulent, réalisée par Crouch et al. [31]. Crouch a utilisé une analyse de stabilité globale faite sur un champ RANS. Un bon accord a là aussi été observé avec l'expérience. En rajoutant en plus une analyse de résolvant à ce cas du buffet turbulent Sartor et al. [107] prédisent aussi une instationnarité moyenne fréquence associée à un lâcher tourbillonnaire là encore en accord avec les résultats expérimentaux. Ceci montre l'efficacité de ces approches RANS couplées avec des analyses de résolvant et de stabilité globale. Un point important des études de Crouch et al. [31] et de Sartor et al. [107] est qu'elles se basent toutes deux sur une modélisation de la viscosité turbulente dans leurs analyses de stabilité et de résolvant. Cette modélisation est faite avec le modèle de Spalart-Allmaras. D'un point de vue théorique Beneddine et al. [13] ont montré que les analyses de résolvant sont représentatives des modes de Fourier de l'écoulement instationnaire (obtenus expérimentalement ou par LES) ou encore des résultats obtenus par analyse de stabilité locale. Ceci nous incite à penser qu'au delà de l'aspect prédictif de la méthode en terme de fréquence, ces approches permettent aussi de faire des analyses physiques de la dynamique de l'écoulement.

Toutefois il est clair comme le montre par exemple les études de Goncalves et al. ([51], [50]), que la prédiction du buffet par des approches URANS est fortement dépendante du modèle de turbulence utilisé. Il est donc fort probable que le choix du modèle de turbulence a aussi un impact important sur les résultats des études de stabilité globale ou de résolvant. Dans le cas d'une interaction onde de choc/couche limite transitionnelle, un modèle de transition est ajouté au modèle de turbulence. Le bon fonctionnement de cette modélisation pour les approches de stabilité globale n'a encore jamais été étudié.

Le but de ce manuscrit est, dans un premier temps, d'implanter la méthode de l'analyse de stabilité globale (ou de résolvant) sur un champ RANS en y intégrant l'utilisation du critère de transition. Dans un second temps, l'approche sera validée sur le cas d'une réflexion de choc sur une couche limite laminaire (TFAST). Ceci sera fait en comparant les résultats obtenues par une approche RANS à ceux obtenus par l'expérience et par la LES. Enfin, une fois la méthode validée, la physique de cette réflexion de choc sera analysée.

Nous nous intéresserons après au cas du buffet sur profil d'aile laminaire pour lequel nous appliquerons la même démarche.

Le présent manuscrit s'organise comme suit : Nous nous intéresserons dans un premier temps à l'état de l'art sur les interactions entre une onde de choc et une couche limite. Nous détaillerons d'abord les résultats pour la réflexion de choc sur une couche limite turbulente puis nous nous intéresserons au cas où la couche limite est laminaire. Puis nous nous intéresserons au cas du buffet sur un profil d'aile en turbulent. Comme nous le verrons le buffet sur une aile laminaire présentant une transition de la couche limite a été peu abordé dans la littérature. Nous étudierons les quelques articles disponibles.

Dans un second temps, nous détaillerons les modèles RANS et les critères de transition qui seront utilisés dans ce manuscrit.

Dans un troisième temps, nous détaillerons les analyses de stabilité globale et de résolvant. Comme nous l'avons dit précédemment, Crouch et al. [31] et Sartor et al. [107] utilisent la différenciation du système RANS au complet contrairement à l'approche dite quasi-laminaire (ou  $\mu$  laminaire) qui néglige l'influence de la tension de Reynolds turbulente sur les perturbations. Cette dernière approche est celle appliquée par Beneddine et al. [13]. L'utilisation d'une méthode par rapport à une autre fait encore débat. Nous tenterons donc de donner un sens à ces différentes analyses.

Dans un quatrième temps nous étudierons le cas de la réflexion de choc sur une couche limite laminaire (TFAST). Nous présenterons l'expérience et le calcul LES qui seront utilisés comme références pour étudier la qualité de prédiction de l'approche RANS couplée à une analyse de résolvant. Ici le modèle de turbulence utilisé sera celui de Spalart-Allmaras et celui de transition sera le critère AHD-GI. Les variations de la viscosité turbulente ne seront pas prises en compte. A la vue des résultats satisfaisant obtenus, nous donnerons une interprétation physique des modes observés.

Dans un cinquième temps nous tenterons d'aller plus loin en prenant en compte les fluctuations des variables turbulentes. Pour ce faire, nous changerons de modèle de turbulence et de transition et nous passerons au modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  de Langtry. Ce modèle sera modifié à la marge afin de pouvoir calculer la Jacobienne nécessaire aux analyses de stabilité et de résolvant. Ceci nous permettra de regarder l'influence du choix d'analyse (soit du système complet, soit d'une approche  $\mu$ -laminaire) sur les résultats de ces analyses. Nous vérifierons que ce modèle donne des résultats en accord avec l'approche AHD et qu'ainsi la dépendance au modèle de transition est relativement faible. Nous regarderons aussi l'influence du maillage.

Enfin, dans un dernier temps, nous nous intéresserons au buffet sur une aile laminaire. Les résultats précédents et la bibliographie sur le buffet turbulent nous inciteront à choisir le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  de Langtry pour cette étude. Nous détaillerons d'abord l'expérience en soufflerie menée par Brion et al. [20] qui nous servira de référence. Puis nous aborderons le buffet par des simulations URANS afin de voir l'efficacité de cette approche, qui fonctionne bien dans le cas turbulent, dans le cas transitionnel. Ensuite nous ferons des analyses de stabilité globale et de résolvant autour d'un champ RANS. Nous montrerons que la physique des modes est semblable à celle observée expérimentalement. Enfin nous ferons une analyse du mode adjoint afin de localiser les zones où un actionneur devrait être placé afin de contrôler l'instationnarité du choc.

## Chapitre 2

# Etat de l'art sur le phénomène d'interaction onde choc/ couche limite

Nous présentons dans ce chapitre l'état de l'art sur l'interaction onde de choc/couche limite. Nous nous intéressons dans un premier temps au cas de la réflexion d'un choc oblique. Dans un second temps, nous nous focalisons sur l'interaction d'un choc droit sur un profil d'aile. Dans chacun des deux cas, nous considérons d'abord le cas d'une couche limite turbulente puis le cas de la couche limite laminaire. Nous parlerons d'interaction turbulente (respectivement laminaire) quand la couche limite en amont de l'interaction est turbulente (respectivement laminaire).

### 2.1 Cas de la réflexion de choc

#### 2.1.1 Topologie de la réflexion de choc

Lorsqu'un écoulement stationnaire présente un choc oblique, les relations de Rankine Hugoniot montrent que le vecteur vitesse est dévié au passage du choc (choc incident). Proche d'une paroi, une seconde déviation est nécessaire afin de garantir que l'écoulement reste parallèle à la paroi. Cette seconde déviation se fait à travers un second choc (le choc réfléchi) qui provient du pied du choc incident. Ce phénomène est appelé la réflexion de choc.

La topologie de la réflexion de choc est différente selon l'intensité du choc, la nature de la couche limite (laminaire ou turbulente) et l'épaisseur de cette dernière.

#### Cas turbulent

Dans le cas où la couche limite est turbulente on peut observer deux situations : (1) la couche limite reste attachée au voisinage du pied de choc, (2) le choc incident est suffisamment



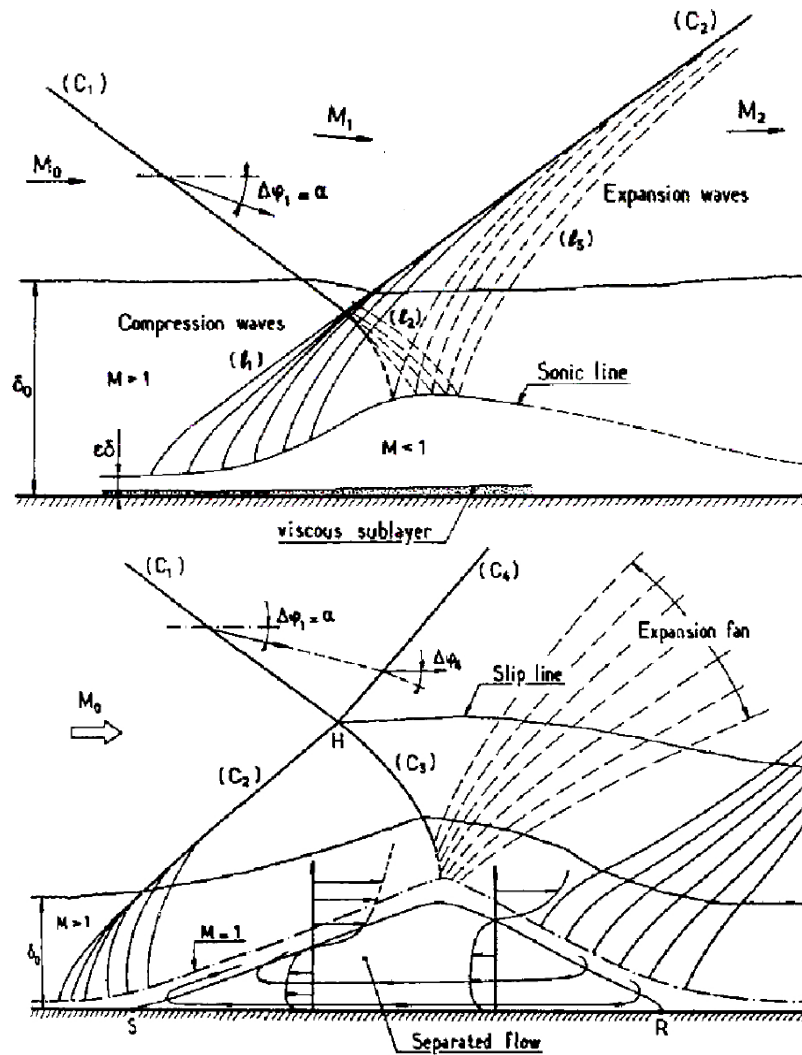


FIGURE 2.1 Deux configurations d'interaction onde de choc/couche limite turbulente. La première (haut) représente le cas où la couche limite reste attachée, la seconde (bas) représente le cas séparé. Les deux images sont issues de Détery et al. [35]

fort pour créer une séparation au pied de choc. Le premier cas est illustré sur la figure 2.1(a). Le choc incident  $C_1$  impacte la couche limite avec un angle  $\alpha$  faible. Le choc se courbe en pénétrant la couche limite et disparaît quand il atteint la zone subsonique. Des ondes de détente sont émises à la courbure du choc et se réfléchissent sur la zone sonique. La présence du choc dans la couche limite se traduit par un épaissement local de celle-ci dû au gradient de pression imposé. Au début de cet épaissement, des ondes de compressions se forment à la frontière entre la couche subsonique et la région supersonique. Ces ondes se rejoignent et forment un choc ( $C_2$ ) qui est le choc réfléchi. Ici, malgré le gradient de pression adverse, la couche limite reste attachée.

Si le gradient de pression imposé par le choc est suffisamment élevé, l'écoulement se sépare de la paroi et le schéma type de l'interaction (voir figure 2.1(b)) est modifié. Le choc incident  $C_1$  rencontre le choc réfléchi  $C_2$  à l'extérieur de la couche limite au niveau du point  $H$ . Le croisement des deux chocs amène à une déviation de  $C_1$  en  $C_3$  et de  $C_2$  en  $C_4$  avec une ligne de glissement issu du point  $H$ . Le choc  $C_3$  pénètre la couche limite, ce qui impose un gradient de pression important qui crée la séparation. Des ondes de détente sont émises lors de la rentrée de  $C_3$  dans la couche limite. Au niveau des points de séparation et de réattachement on observe l'émission d'ondes de compression. Celles issues du point de séparation créent le choc réfléchi  $C_2$ . Celles issues du réattachement peuvent aussi créer un choc (à la convergence des ondes) qui n'est pas montré sur cette image.

### Cas laminaire

Dans le cas où la couche limite est laminaire avant l'interaction, deux situations peuvent se produire. Si le nombre de Reynolds (basé sur l'épaisseur de couche limite) est très faible, la couche limite va rester laminaire après l'interaction. En revanche, s'il est élevé, le gradient de pression imposé par le choc va déclencher la transition. Dans les deux cas le gradient de pression nécessaire pour le décollement est beaucoup plus faible que dans le cas turbulent (environ d'un facteur 5 d'après Delery et al. [35]). Dans les applications aéronautiques usuelles, l'interaction est en générale du deuxième type (transitionnelle).

Nous allons donc nous intéresser ici seulement aux cas où la transition est déclenchée par l'interaction. De plus, compte tenu de la forte sensibilité de la couche limite laminaire au gradient de pression, on s'intéresse aux cas où la couche limite décolle dans l'interaction. Nous allons donc nous focaliser sur une interaction présentant à la fois une séparation et la transition au voisinage du pied de choc. Le schéma typique de cette interaction est montré sur la figure 2.2.

La situation ressemble au cas décollé de l'interaction avec une couche limite turbulente. La différence est que la bulle de recirculation au niveau du pied de choc est souvent dissymétrique : la distance entre l'impact et la séparation est plus longue que la distance entre le point d'interaction (défini comme l'intersection entre la paroi et la ligne continuant le choc) et

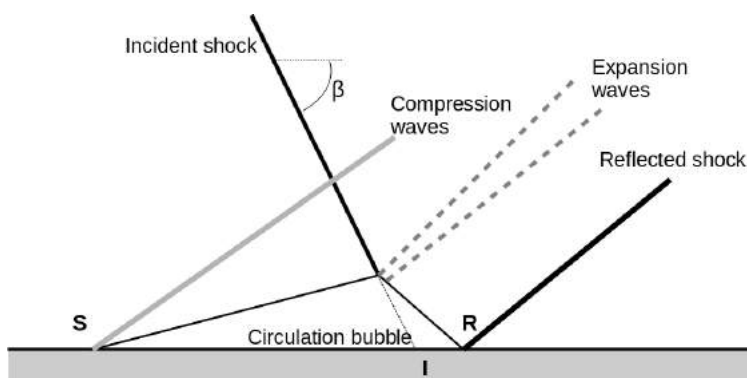


FIGURE 2.2 Configuration de l'interaction onde de choc/couche limite laminaire présentant une séparation. Le choc incident rencontre la couche limite de la plaque (en gris) en **I**. Le gradient de pression crée une bulle de recirculation. Des ondes de compressions se créent au niveau de la séparation **S** et des ondes de détente apparaissent quand le choc incident disparaît. Des ondes de compressions se forment au voisinage du point de réattachement **R** et se rejoignent pour créer le choc réfléchi.

le réattachement. Cette dissymétrie donne une géométrie effective équivalente à une rampe de compression présentant un angle très faible, suffisamment pour ne pas créer de choc au voisinage de la séparation. C'est pour cette raison que le choc réfléchi se crée au réattachement et non à la séparation. La transition, quant à elle, peut avoir lieu, soit un peu avant le choc incident, soit un peu après.

Comme nous le verrons par la suite, quel que soit leur type, ces interactions avec séparation présentent toutes des instationnarités du choc réfléchi. Nous effectuons ci-dessous une analyse bibliographique pour les cas turbulent puis laminaire.<sup>1</sup>

### 2.1.2 Instationnarités d'une interaction onde de choc/couche limite turbulente

Nous considérerons dans un premier temps les travaux réalisés au IUSTI, un des laboratoires ayant largement contribué à la compréhension du phénomène de réflexion de choc ces dernières décennies. Des mesures faites dans leur soufflerie ont notamment permis de mettre en évidence l'existence d'instationnarités basses fréquences dans la réflexion d'une onde de choc sur une couche limite turbulente. Les spectres de la figure 2.3(a), issus des travaux de

1. Le cas de la réflexion de choc est très proche du cas de la rampe de compression. Il n'y a évidemment pas de choc incident dans ce dernier cas, le gradient de pression étant imposé par la déformation de la paroi. Cela se traduit par le fait que l'évolution de l'interaction dans le cas de la rampe est la même que dans le cas de la réflexion. Pour des angles de rampe faibles la couche limite s'épaissit au niveau du coin. Pour des angles plus élevés, c'est à dire pour des gradients de pression plus grands, on assiste à un décollement de la couche limite. Cette interaction présente aussi des instationnarités avec des fréquences proches de celles obtenues dans le cas de la réflexion. C'est pour cette raison que dans ce qui suit nous incorporons également des éléments de bibliographie ayant trait à la rampe de compression.

Dupont et al. [39], caractérisent les fluctuations de vitesse et de pression dans la couche limite turbulente en amont de l'interaction. Ils montrent que la couche limite amont présente des fluctuations à des fréquences de l'ordre de  $10 - 100kHz$ . Piponniau et al [95] ont également fait des mesures de vitesse à travers le choc réfléchi à l'aide d'un fil chaud. Les spectres de la figure 2.3(b) montrent que pour des interactions assez fortes, des fréquences de l'ordre de  $100Hz$  sont présentes. Ces fréquences sont très faibles comparées à celles mises en évidence dans la couche limite amont. Si on adimensionne la fréquence par la taille de l'interaction et la vitesse extérieure, les mesures faites par Dupont et al. [39] montrent qu'il y a deux fréquences caractéristiques de ces instationnarités : les spectres rappelés en figure 2.3(c) et 2.3(d) donnent une basse fréquence à  $S_t = 0.03$  et une moyenne fréquence à  $S_t = 0.5$ .

L'origine de ces instationnarités basses fréquences fait encore débat aujourd'hui. Certains auteurs comme Dolling et al. [37] , Beresh et al. [14] ou encore Ganapathisubramani et al. [43] et [44] suggèrent que le mouvement basse fréquence est lié à des structures longitudinales de grande taille présentes dans la couche limite turbulente en amont de l'interaction. Ces structures ont été observées expérimentalement dans une couche limite turbulente par Ganapathisubramani et al. [43]. Leur longueur est environ de 30 épaisseurs de couche limite. De plus les auteurs de cet article montrent une forte corrélation entre ces fluctuations dans la couche limite amont et le mouvement du choc. Différentes études ont été menées afin de vérifier ce scénario, par exemple celles de Thomas et al. [118] ou de Dupont et al. [39]. Elles n'ont toutefois pas permis de confirmer cette hypothèse.

D'autres auteurs suggèrent un lien entre le mouvement du choc et les fluctuations de pression à la paroi dans la zone détachée. C'est notamment le cas de Dupont et al. [39] et de Debiève et al. [33]. Ces deux articles montrent expérimentalement que dans le cas d'une réflexion de choc, les fluctuations de pression à la paroi dans la seconde partie de l'interaction et celles au niveau du pied de choc sont fortement corrélées et en opposition de phase. Ceci est montré par les figures 2.4(a) et (b). La première figure montre la cohérence entre les signaux de pression enregistrés proches du choc réfléchi et ceux enregistrés proches du réattachement. On remarque que les deux signaux sont cohérents pour les basses fréquences et que la cohérence chute brutalement pour les fréquences supérieures à  $1kHz$ . La phase est tracée sur la seconde image. On observe un déphasage proche de  $\pi$ , soit une opposition de phase.

Cette remarque a aussi été faite dans différentes études numériques de type LES (Large Eddy Simulation) ou DNS (Direct Numerical Simulation). On peut notamment citer Pirozzoli et al. [96] ou encore Toubert et al. [120].

Pirozzoli et al.[96] ont réalisé une DNS d'une réflexion de choc à Mach 2.25. Ils trouvent un mode basse fréquence à  $S_t = 0.03$ . Ils suggèrent que cette basse fréquence est due à un mécanisme de résonance qui combine l'émission d'un vortex au voisinage de la séparation qui se propage pour impacter le bas du choc incident. Cela crée des ondes acoustiques qui remontent la bulle de recirculation et perturbent la séparation. Ce scénario implique qu'il y a

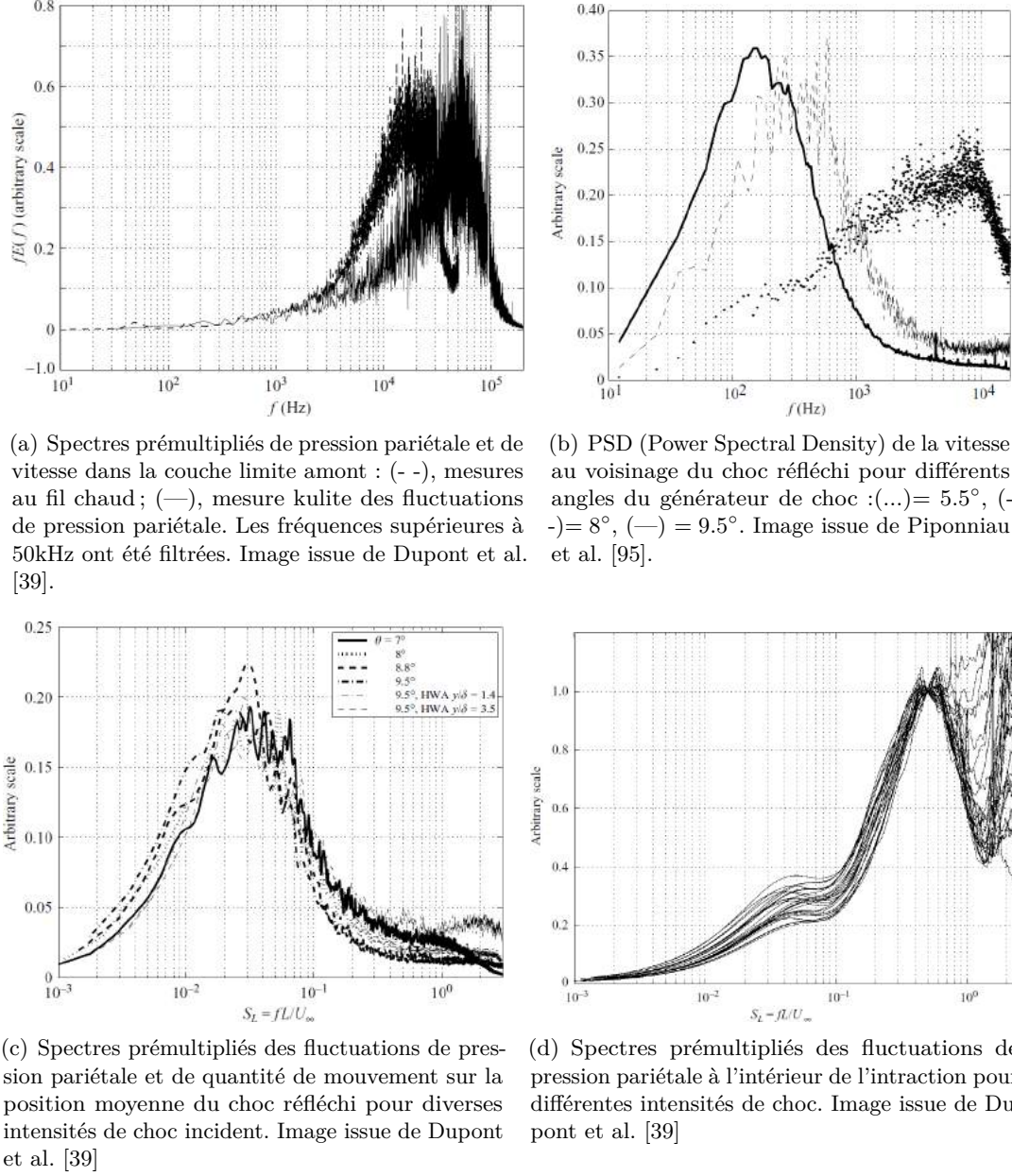
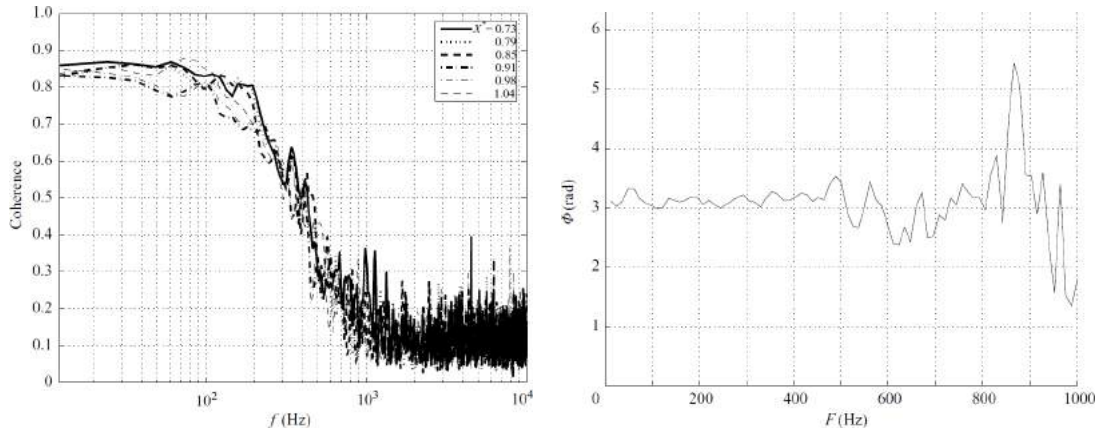


FIGURE 2.3 Différents spectres issus d'expériences pour le cas de la réflexion de choc sur une couche limite turbulente.



(a) Cohérence entre les signaux de pression enregistrés proche du choc réfléchi et ceux enregistrés proche du réattachement. Image issue de Dupont et al. [39].

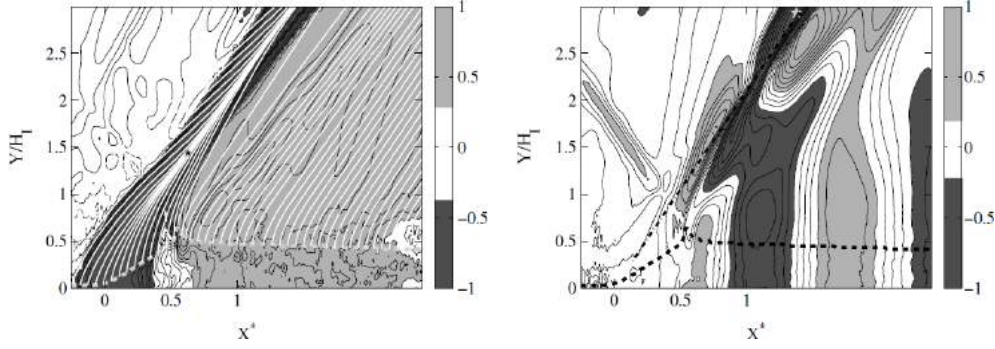
(b) Phase entre les signaux de pression enregistrés proche du choc réfléchi et ceux enregistrés proche du réattachement. Image issue de Dupont et al. [39].

FIGURE 2.4 Comparasion entre les signaux de pression pris proche du choc réfléchi et ceux pris proche du réattachement.

une corrélation entre le mouvement du choc réfléchi et les mouvements de la bulle. Ceci a été confirmé expérimentalement dans le cas de la rampe de compression par Thomas et al. [118].

Une étude fine des corrélations entre le mouvement du choc réfléchi et la bulle de recirculation a été faite dans le cas de la réflexion de choc par Agostini et al. [4] en utilisant une LES. Dans cette étude deux mouvements basses fréquences ont été identifiés. Le premier est présent à un Strouhal de  $S_t = 0.03$  et le second est présent à  $S_t = 0.5$ . Ces fréquences sont adimensionnées en utilisant pour grandeurs de référence la longueur de la séparation et la vitesse extérieure. Ils analysent ensuite la physique de ces modes en traçant la carte des corrélations croisées, un point du choc réfléchi étant pris comme référence. Ces champs tracés sur la figure 2.5 montrent que le mode basse fréquence et le mode moyenne fréquence ( $S_t = 0.5$ ) présentent des comportements très différents. Ils ont cependant le point commun de présenter une très faible corrélation avec l'écoulement en amont de l'interaction et avec le choc incident. En revanche le mode basse fréquence présente un comportement non propagatif alors que la moyenne fréquence propage des structures après le choc réfléchi à une vitesse de  $170\text{m/s}$ .

Dans le cas du mode basse fréquence, on remarque une très bonne corrélation entre la dynamique du choc réfléchi et la dynamique de la fin de la séparation. Ces deux zones sont en opposition de phase. On remarque aussi que les lignes de niveau de corrélation suivent les caractéristiques de l'écoulement. Il apparaît aussi une zone de corrélation nulle entre le début et la fin de l'interaction. La zone de corrélation positive et la zone de corrélation négative se rencontre en un point du choc réfléchi au voisinage de sa rencontre avec les ondes de détentes



(a) Corrélation croisée entre la pression et l'évolution en temps de la position du choc pour  $S_t < 0.1$ . Les lignes blanches représentent les caractéristiques du champ moyen. Image issue de Agostini et al. [4].

(b) Corrélation croisée entre la pression et l'évolution en temps de la position du choc pour  $0.3 < S_t < 0.8$ . Image issue de Agostini et al. [4].

FIGURE 2.5 Corrélation croisée entre la pression et l'évolution en temps de la position du choc pour deux fréquences différentes.

(point  $H_i$ ). Les auteurs en concluent que la source du mouvement du choc avant  $H_i$  est à chercher au début de la séparation  $0 < X^* < 0.5$  alors que celle qui impacte le choc après ce point est à chercher vers la fin de l'interaction ( $0.6 < X^* < 0.7$ ) où  $X^*$  est l'abscisse avec pour origine le point de séparation et adimensionnée par la longueur de l'interaction. Ils associent donc ce mouvement du choc à un mouvement basse fréquence de la séparation. La moyenne fréquence quant à elle est associée à des perturbations venant de l'interaction entre les tourbillons issus de la couche de mélange et le choc.

Une explication de la respiration de la bulle est proposée par Piponniau et al. [95]. Dans ce modèle la nature de la couche limite en amont de l'interaction n'est pas prise en compte. En revanche la géométrie de la séparation (hauteur et longueur) joue un rôle important. Ce modèle considère les structures tourbillonnaires qui se forment dans la couche de cisaillement au dessus de la bulle. Quand ces tourbillons sont lâchés, ils emportent avec eux une quantité de fluide. La bulle doit alors se remplir puisqu'elle est présente "en moyenne". Ce qui permet le remplissage est la diffusion de l'écoulement extérieur à travers la couche de cisaillement. Piponniau calcul le temps caractéristique du mouvement de la bulle en modélisant son temps de vidange (en supposant qu'elle n'est pas re-remplie). Le temps caractéristique adimensionné par la longueur de bulle et la vitesse extérieure est alors donné par

$$S_t = \Phi(M_c)g(r, s)\frac{L}{\delta_b} \quad (2.1)$$

où  $M_c = \frac{u_1 - u_2}{a_1 + a_2}$  est le mach convectif de la couche de mélange. Les indices 1 et 2 représentent respectivement le dessus et le dessous de la couche de mélange,  $a$  est la vitesse du son et  $u$  la

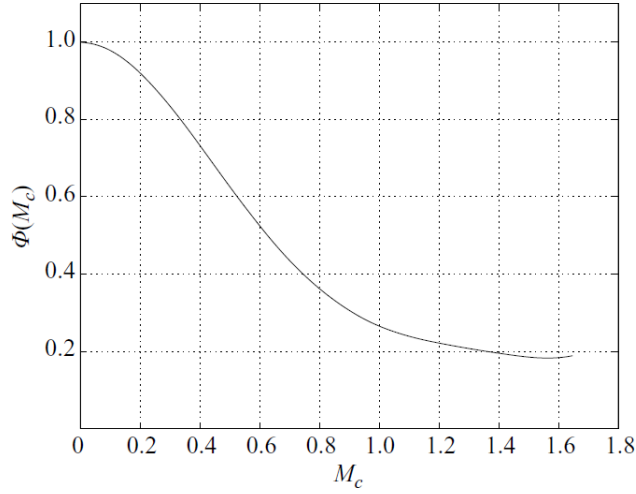


FIGURE 2.6 Taux d'évasement normalisé en fonction du nombre de Mach convectif. Image issue de Piponnier et al. [95].

vitesse.  $L$  est la longueur de bulle et  $\delta_b$  sa hauteur.  $r$  est le ratio de la vitesse à l'intérieur de la bulle sur la vitesse à l'extérieur.  $s$  est le ratio de la densité à l'intérieur de la bulle sur la densité à l'extérieur.  $\Phi$  est le taux d'évasement de la couche de cisaillement (tracé sur la figure 2.6). Enfin la fonction  $g$  est définie par

$$g(r, s) = \frac{\delta'_{ref}}{2} \frac{(1-r)(+\sqrt{s})}{(1+r\sqrt{s})} \left( (1-r)C + \frac{r}{2} \right) \quad (2.2)$$

où  $C \sim 0.14$  et  $\delta'_{ref} \sim 0.16$ .

En résumé toutes les études semblent montrer que la dynamique de la bulle et le mouvement du choc de décollement sont intimement liés. Il n'y a cependant pas de certitude quant à la source de ces instationnarités. Trois hypothèses ont été proposées précédemment :

- I Soit elles prennent leur origine dans les fluctuations basses fréquences de la couche limite amont,
- II Soit il y a une rétroaction (probablement acoustique) entre les mouvements du bulbe, la couche cisailée et le déplacement du choc,
- III Soit la dynamique basse fréquence prend son origine uniquement dans la respiration du bulbe qui induit le mouvement du choc.



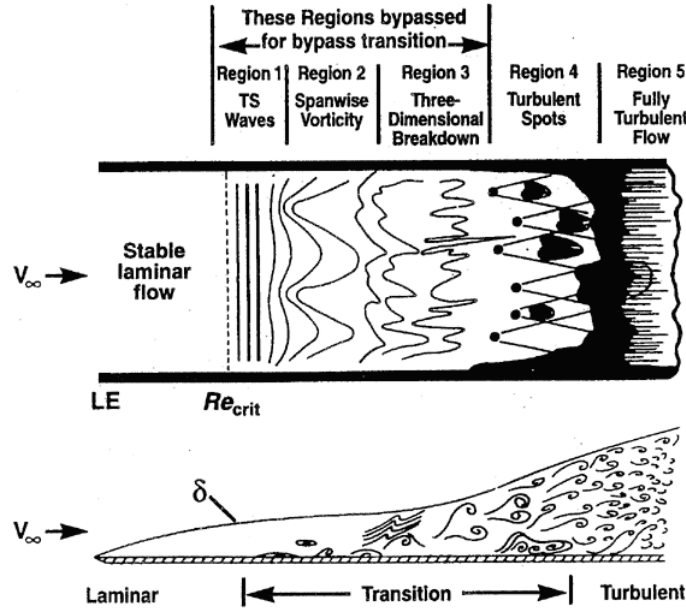


FIGURE 2.7 Observation de la région de transition.

### 2.1.3 Instationnarités d'une interaction onde de choc/couche limite transitionnelle

Le cas de l'interaction transitionnelle présente deux problématiques importantes. La première est le processus de transition. La seconde concerne l'instationnarité basse fréquence du choc réfléchi.

#### Transition d'une couche limite attachée

Le processus de transition sur une couche limite attachée dépend du taux de turbulence extérieur et de la géométrie. Dans le cas le plus simple, où l'écoulement est  $2D$  et à faible taux de turbulence extérieur ( $Tu < 1\%$ ) le processus de transition privilégié est la transition par ondes de Tollmien-Schlichting (TS) (voir Schlichting [108]). Le processus est résumé sur la figure 2.7. La couche limite initialement stable devient convectivement instable. Se forment alors des ondes bidimensionnelles (ondes de TS). Ces ondes deviennent ensuite tri-dimensionnelles et mènent à l'apparition de "spot" turbulents.

Les effets de compressibilité sur la stabilité de la couche limite sont importants. En régime transsonique, les effets de compressibilité stabilisent la couche limite (voir Arnal [8]). De ce fait lorsque le nombre de Mach augmente jusqu'à  $M \sim 2$ , la transition apparaît à des nombres de Reynolds plus importants que dans le cas d'écoulement incompressible. De même l'étendue de la région de transition augmente. Au delà de Mach 2 d'autres modes instables que celui

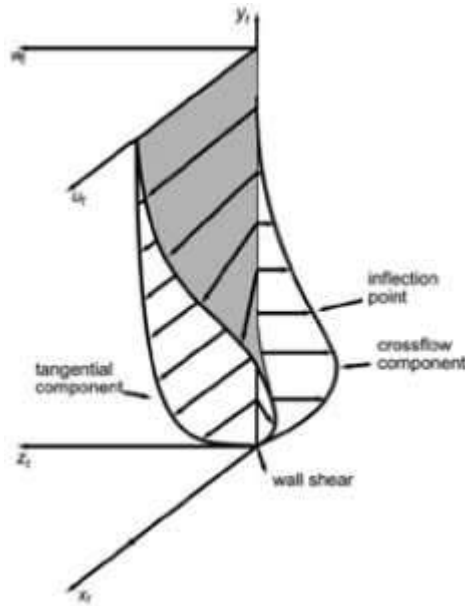


FIGURE 2.8 Profil de vitesse dans la couche limite dans le cas d'une géométrie tri-dimensionnelle.

de TS apparaissent dans la couche limite (voir Mack [73]). Le plus instable est appelé second mode. Dans le même temps la composante transverse des ondes TS n'est plus négligeable dès  $M \sim 1.3$  ce qui tend à déstabiliser les modes TS et stabilise le mode secondaire (voir Mack [73] pour plus de détails). Des analyses de stabilité locale faites par Arnal [9] montrent que la compressibilité a des effets déstabilisateurs entre  $M = 2$  et  $M = 4$  puis redevient stabilisateur en régime hypersonique.

Si le taux de turbulence est élevé, il apparaît directement des "spots" turbulents dus à la contamination de la couche limite par l'écoulement extérieur. Les ondes TS n'apparaissent plus avant la transition. Ce processus s'appelle la transition "by-pass" (Morkovin [86]).

Enfin, quand la géométrie n'est plus bi-dimensionnelle il apparaît une composante transverse dans le profil de vitesse de la couche limite (voir figure 2.8). La condition limite à la paroi et la frontière de la couche limite imposent que le profil de vitesse transverse présente un point d'inflexion. La couche limite présente donc une instabilité de Kelvin Helmholtz qui déclenche la transition. Ce type d'instabilité est qualifié de "cross-flow".

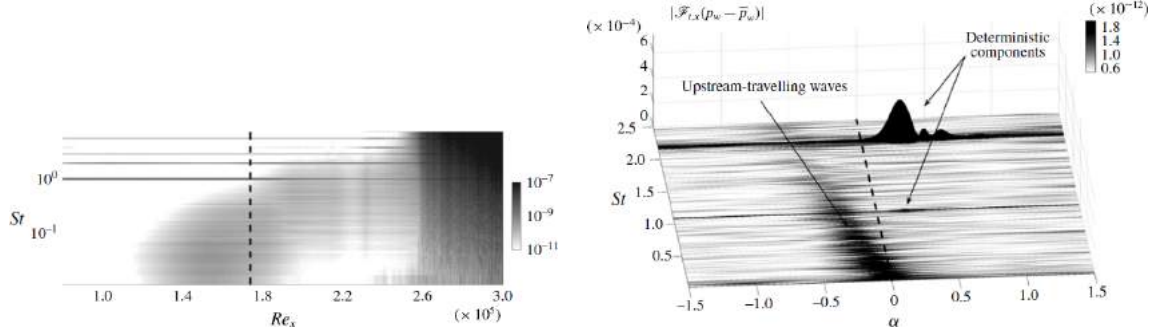
### Question de la transition par bulle de recirculation

Il semble que le processus de transition au sein d'une interaction entre une onde de choc et une couche limite laminaire s'effectue essentiellement grâce à la dynamique de la bulle présente au pied du choc. Sur la base de simulations numériques dans des conditions supersoniques Pagella et al. [90] montrent que la présence d'un point d'inflexion dans la

recirculation provoque, selon le critère classique de Rayleigh, une croissance importante des instabilités, ce qui joue le rôle d'amplificateur de bruit. Le point d'inflexion va donc amplifier des perturbations venant de l'amont de l'écoulement. Si ces perturbations sont suffisamment amplifiées, des effets non linéaires vont apparaître et déclencher la transition vers la turbulence. Ceci suggère a priori un scénario différent du cas de transition naturelle d'un écoulement attaché tel que la transition par amplification des ondes de Tollmien-Schlichting (TS) (voir Schlichting [108]) ou la transition by-pass (voir Morkovin [86]). Il semble cependant que les ondes TS peuvent contribuer à la croissance d'instabilité dans la couche de cisaillement (instabilité de Kelvin Helmholtz) et donc participer au processus de transition. Cette possibilité a été montrée expérimentalement et numériquement (à la fois par DNS et stabilité locale) par Marxen et al. ([76], [77]).

### Question de l'instationarité basse fréquence

Dans le but de vérifier si l'instationarité basse fréquence observée dans le cas turbulent est encore présente dans le cas laminaire, Sansica et al. [103] ont utilisé une simulation DNS sur une réflexion de choc à  $M = 1.5$ . Deux tailles de bulles différentes ont été testées ainsi que deux localisations de bruit blanc. L'écoulement est laminaire grâce à un très faible niveau des perturbations amonts. Un bruit blanc peut être imposé soit en amont de l'interaction, soit à l'intérieur de celle-ci. Un pic de gain a été remarqué dans les hautes fréquences ( $S_t \sim 5$ ) au niveau du réattachement pour les deux tailles de bulle et pour les deux localisations de bruit blanc. Au niveau de la séparation, cette fréquence est observée seulement quand le bruit blanc est imposé en amont de l'interaction. Ce pic a été associé à un lâché tourbillonnaire résultant de la croissance des perturbations dans la couche de cisaillement. Cette croissance est due à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Le niveau de perturbation dans les basses fréquences ( $S_t < 0.5$ ) est non nul et reste présent au niveau de la séparation même quand le bruit blanc est injecté au sein de la séparation. Ceci montre qu'une dynamique basse fréquence se développe même en l'absence de perturbations en amont de la zone d'interaction. Des tests de linéarité du processus ont été faits par les auteurs en comparant les gains pour différentes intensités du bruit blanc. Les différents gains sont identiques pour les hautes fréquences, mais le gain croît avec l'amplitude du bruit blanc dans les basses fréquences. Ceci montre l'existence d'un phénomène non-linéaire dans l'interaction. L'amplitude des perturbations étant faible, les effets non-linéaires ont plus de chance de se produire au niveau du réattachement, là où les perturbations ont des niveaux plus élevés grâce à l'amplification par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Ces non-linéarités ont été observées pour les deux tailles de séparation bien qu'elles semblent plus importantes dans le cas de la plus grande séparation. Poursuivant cette étude, Sansica et al. [104] simulent par DNS une réflexion de choc à  $M = 1.5$  mais cette fois en introduisant une perturbation à l'entrée de leur domaine de calcul. Cette perturbation est le mode le plus instable déclenchant la transition dans une couche limite attachée. Sa



(a) Contour du spectre pré-multiplié de la pression normalisée par le maximum en fréquence pour chaque position. La ligne pointillée représente la position de la séparation.

(b) Amplitude de la transformée de Fourier spatio-temporelle en fonction de la fréquence et du nombre d'onde.

FIGURE 2.9 Spectres des signaux de pression à la paroi. Images issues de Sanssica et al. [104]

fréquence est  $St = 1.09$ . Il s'agit d'une paire de modes obliques. Le calcul DNS montre alors une transition vers la turbulence au voisinage du réattachement de la bulle. Le spectre de la pression pariétale en fonction de la position et de la fréquence est montré sur la figure 2.9(a). On observe que le spectre est plein après le point de réattachement. Ceci est dû au caractère turbulent de la couche limite. On remarque aussi la présence d'une basse fréquence au niveau de la séparation ( $St \sim 0.04$ ) dont la fréquence est compatible avec celle trouvée par Pirozzoli et al [96] dans le cas turbulent. Il apparait aussi une moyenne fréquence au sein de la séparation vers  $St \sim 0.5$ . Les auteurs ont ensuite montré le caractère d'amplificateur de bruit de la séparation à l'aide d'analyse de stabilité locale et de LPSE (linear parabolized stability equations). Ils observent aussi à l'aide de la transformée de Fourier spatio-temporelle la présence d'une onde remontant l'écoulement dans la séparation (voir Figure 2.9(b)) à une vitesse de phase constante  $V_\phi \sim 0.6U_\infty$ . Ils en déduisent un scénario pour expliquer l'instationnarité basse fréquence :

- I Les perturbations venant de la couche limite en amont de l'interaction déclenchent la transition vers la turbulence au niveau du réattachement
- II La turbulence remplit le spectre des fluctuations de l'écoulement
- III Les effets non linéaires génèrent des ondes acoustiques (les auteurs ne précisent pas le mécanisme associé)
- IV Ces ondes acoustiques remontent la séparation, sont amplifiées par le comportement d'amplificateur de bruit de la bulle et vont perturber le point de séparation, ce qui ferme la boucle de rétroaction.

Ce scénario est assez proche de celui avancé par Pirozzoli et al. [96] dans le cas turbulent.

Les dynamiques basses et moyennes fréquences de l'interaction transitionnelle ont aussi été étudiées par Larchevêque [69] à l'aide d'une LES. Là encore la transition est favorisée par

l'introduction d'une perturbation à l'entrée du domaine de calcul. Des tests ont été faits sur l'amplitude de cette perturbation et sur la taille du maillage. Il s'avère que la taille de la séparation obtenue est fortement dépendante de ces deux paramètres. Des similarités avec la DNS de Sansica et al. [104] ont été trouvées notamment sur la position de la transition, sur les basses et moyennes fréquences observées, et sur la présence d'une onde remontant l'écoulement dans la zone subsonique (à une vitesse de  $-100m/s$ ). Une décomposition dynamique des modes (voir Schmid [110]) a été effectuée et a permis de montrer une forte ressemblance entre le mode moyenne fréquence et le mouvement basse fréquence d'une respiration de bulle. La conclusion de cet article est que l'origine du mode basse fréquence est à chercher au voisinage du point de réattachement.

### Remarque

Les différentes analyses citées précédemment relient la dynamique basse fréquence à la recirculation au pied de choc et incitent donc à regarder la littérature portant plus spécifiquement sur les bulles de séparation sans choc. Une DNS d'une bulle totalement laminaire a été faite dans Robinet et al. [100] conjointement à des analyses de stabilité globale. Cette étude montre qu'une bulle initialement purement 2D et stationnaire peut bifurquer vers un état 3D stationnaire. Au delà d'une certaine valeur de gradient de pression adverse, cette bulle peut encore bifurquer vers un état 3D instationnaire. Dans un cas incompressible, Alam et al. [6] et Rist [99] ont montré que cette transition peut être due au développement dans la couche limite amont ou dans la couche de cisaillement, de modes obliques ou de  $\Lambda$ -vortex. L'étude de Rist [99] montre aussi que cette transition dépend du rapport de la vitesse inverse dans la bulle sur la vitesse extérieure. Si ce ratio est inférieur à 15 – 20% la bulle reste stable. Au delà elle devient absolument instable.

## 2.2 Cas du choc droit sur un profil d'aile en régime transsonique

### 2.2.1 Introduction

En régime de vol transsonique, il existe une région de Mach et d'incidence pour laquelle l'interaction entre l'onde de choc et la couche limite de l'aile donne lieu à des oscillations du choc pouvant atteindre une amplitude de l'ordre de 0.1 corde. Ce phénomène est appelé tremblement (buffet en anglais). La fréquence de cette oscillation est de l'ordre de grandeur de la fréquence caractéristique de la structure de l'aile. Il peut alors se produire un couplage entre l'aérodynamique et la structure aboutissant à une perte de manoeuvrabilité de l'avion voir à une rupture de l'aile. Ce phénomène observé il y a près de 60 ans par Hilton et al. [58] donne encore lieu à controverse quant à son mécanisme.

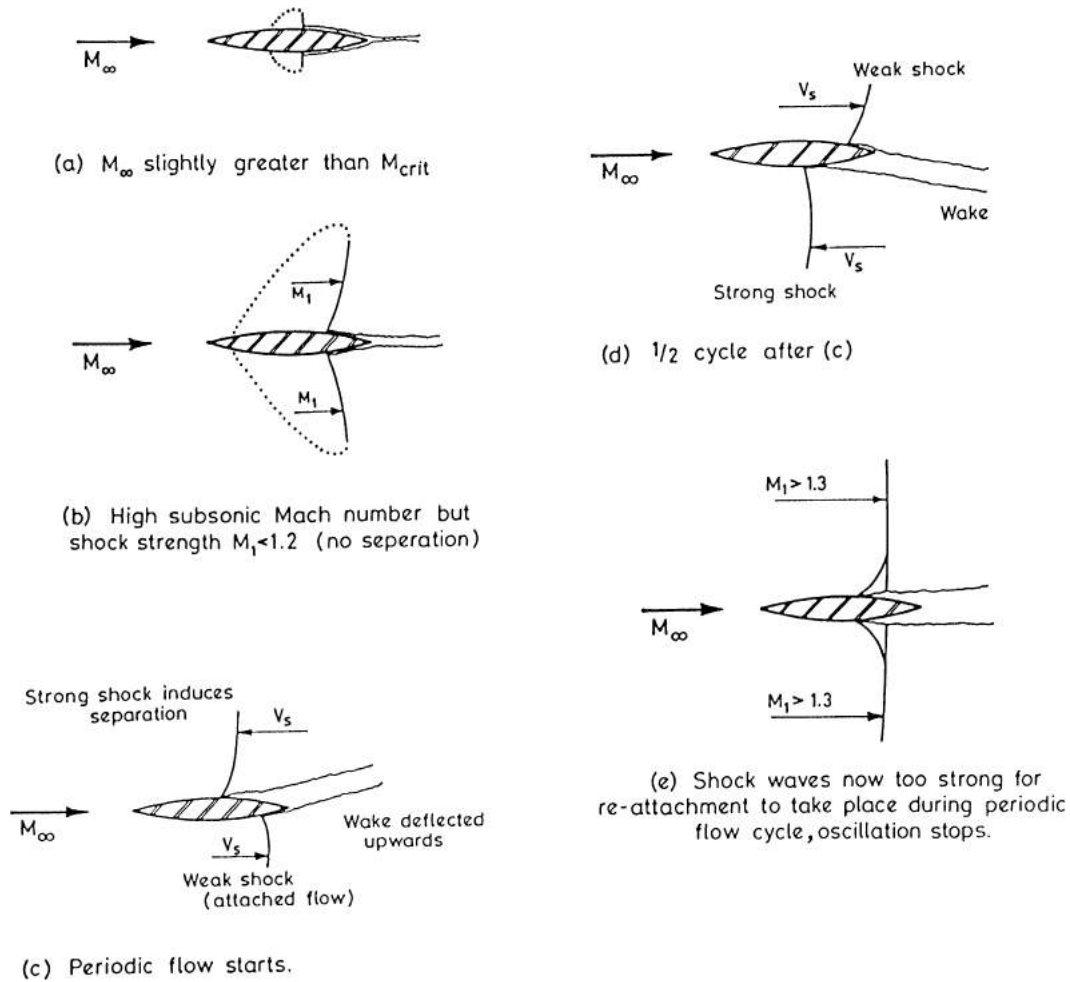


FIGURE 2.10 Evolution de l'onde de choc sur un profil symétrique à incidence nulle quand le Mach augmente (image issue de Gibb [48]).

Différentes études montrent qu'il existe deux types de buffet. Le type I se produit surtout sur des profils bi-convexes à une incidence nulle. Ce type de buffet implique le choc se situant à l'extrados aussi bien que celui se situant à l'intrados. A travers les études de Mabey [71] et de Gibb [48], un modèle de ce type de buffet a été proposé que nous décrirons ci-dessous et qui est illustré sur la figure 2.10.

D'abord, quand le choc sur l'extrados se déplace vers le bord d'attaque le gradient de pression à travers le choc est moins fort. Ceci permet à la couche limite qui était initialement décollée de réattacher. Le choc va alors se rediriger vers le bord de fuite du profil. Ce faisant, le gradient de pression augmente, recréant une séparation de l'écoulement. Le choc à l'intrados, quant à lui, suit le même type de mouvement, mais avec un déphasage de  $180^\circ$ . Comme on peut le constater dans ce scénario, l'intensité du choc est importante pour ce phénomène. Il faut qu'il soit assez fort pour créer une séparation. C'est pour cette raison que de nombreuses

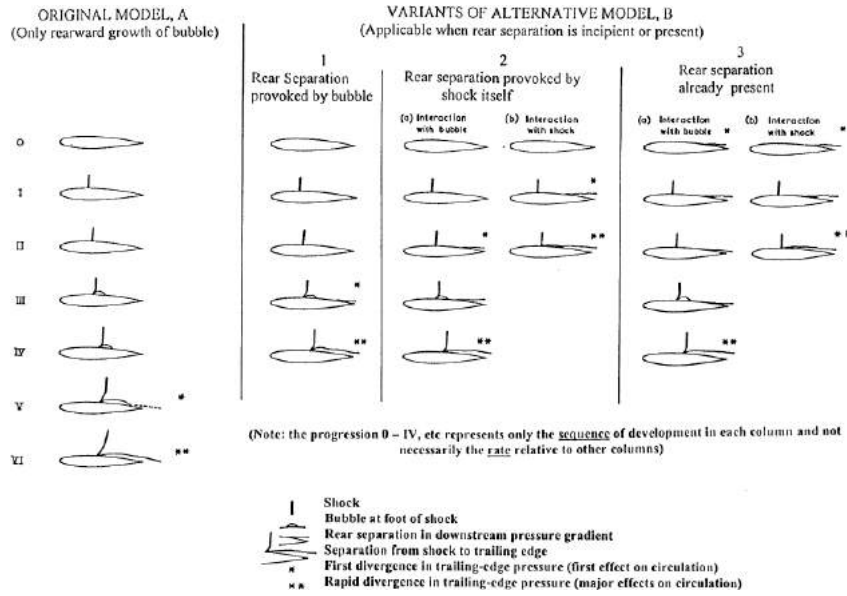


FIGURE 2.11 Modes A et B de la séparation de l'écoulement sur un profil selon Pearcey et al.[94]. Image issue de Pearcey et al. [94]

études (par exemple Mabey [71] et [72], ou Gibb [48]) proposent des prédictions de l'entrée en régime de buffet à partir du nombre de Mach immédiatement avant le choc.

Le deuxième type de buffet quant à lui est caractéristique des profils d'aile super-critiques modernes. Le buffet de Type II implique le choc présent à l'extrados du profil à des angles d'incidence positifs.

Les travaux expérimentaux de Pearcey et al. ([91], [92], [93] and [94]) ont permis de caractériser différents modes de séparation sur l'extrados. Le mode A consiste en une unique séparation due à l'interaction entre le choc et la couche limite. Le mode B est le cas où une séparation est présente au bord de fuite indépendamment de la présence ou non d'un décollement au pied de choc. Ce mode B se subdivise en trois familles. Le mode BI concerne le cas où la séparation au bord de fuite est produite par la séparation au pied de choc. Le mode BII concerne le cas où la séparation au bord de fuite apparaît quand le choc est présent mais qu'il ne mène pas à une séparation en son pied. Enfin, le mode BIII concerne le cas où la séparation au bord de fuite est présente avant même l'apparition du choc. Ces différents modes de buffet sont résumés sur la figure 2.11.

Les investigations de Pearcey ([91], [92], [93] and [94]) ont mené à un premier modèle pour la prédiction de l'entrée en régime de buffet de Type II. Elle se fait quand le nombre de Mach et l'incidence mènent à un écoulement présentant une bulle de séparation à l'intrados qui s'étend du pied de choc jusqu'au bord de fuite (bubble bursting en anglais). Alors que de nombreuses études semblaient confirmer ce modèle, des études récentes (Nitzsche [88] ou Crouch et al. [31]) semble le démentir.

D'autres formes de buffet ont par ailleurs été trouvées par Tijdeman [119]. Le Type IIA est un cas où le choc bouge de façon sinusoïdale le long de l'extrados sans jamais disparaître. Le Type IIB est comme le type A, sauf que l'intensité du choc varie suffisamment pour qu'à un moment dans son cycle, le choc disparaisse. Enfin, le Type IIC est un type de buffet où l'amplitude du mouvement du choc est suffisamment importante pour que celui-ci se propage jusqu'à sortir du profil.

Des modèles ont été proposés pour les buffets de Type IIA et IIB respectivement par Lee [70] et Raghunathan et al. [97]. Nous détaillerons en particulier celui de Lee plus tard.

Le modèle du buffet de type IIB est proposé par Raghunathan et al. [97]. Dans un premier temps, la bulle de recirculation due à l'interaction du choc avec la couche limite crée un mouvement du choc qui se traduit par une suite d'agrandissements et de rétrécissements de la bulle. Lors de cette respiration de bulle, la courbure effective du profil est profondément modifiée jusqu'à disparition du choc à un moment du cycle.

Ce bref rappel bibliographique montre que malgré le fait que le phénomène de buffet ait été découvert il y a plusieurs décennies et largement étudié, il reste encore à définir un scénario permettant de le comprendre. Dans la suite de ce chapitre, nous nous concentrerons sur le buffet de Type II et plus particulièrement sur le type IIA. Nous commencerons par décrire les différentes interprétations physiques du phénomène en revenant notamment sur le modèle de Lee que nous avons laissé de côté plus tôt. Nous présenterons dans la section suivante les résultats expérimentaux récents. Ensuite, nous nous intéresserons aux différentes études numériques qui ont été faites sur le buffet. Nous accentuerons le fait que les résultats sont fortement dépendants du modèle de turbulence utilisé. Toutes ces études ont été faites en condition de CL turbulente. Peu d'études ont été faites sur le cas des ailes laminaires. Nous aborderons ce sujet dans une dernière partie.

D'autres thématiques ont été abordées dans la littérature telle que le couplage entre le mouvement de l'aile et l'aérodynamique, le buffet sur une aile 3D présentant une flèche ou encore des tentatives de contrôle d'écoulement. Ces problématiques n'étant pas abordées dans cette étude, nous n'en parlerons pas ici. Le lecteur qui serait intéressé par ces sujets peut se référer à la récente étude bibliographique faite par Giannelis et al. [47].

### 2.2.2 La physique du buffet

Dans cette section, nous détaillerons d'abord le modèle proposé par Lee [70] et les critiques faites à ce modèle. Puis, nous parlerons des résultats récents apportés par Crouch [31] ainsi que des études qui ont suivi cet article.

#### Le modèle de Lee

Le modèle de Lee développé dans [70] permet de prédire la fréquence du buffet de Type IIA. Dans ce modèle, le déplacement du choc crée des perturbations se propageant du pied



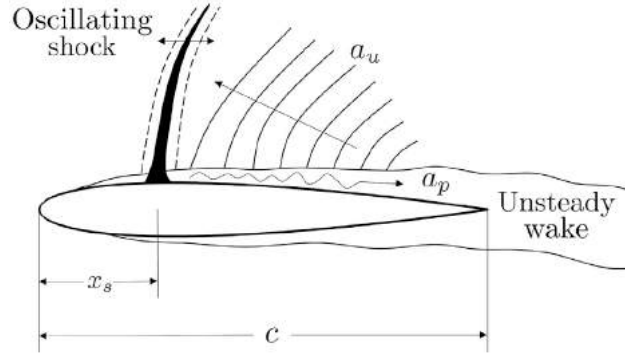


FIGURE 2.12 Schéma du modèle de buffet de type IIA proposé par Lee [70]. Image issue de Giannelis et al. [47]

de choc jusqu'au bord de fuite. Au bord de fuite, des ondes acoustiques se créent qui se propagent dans le sens inverse de l'écoulement au dessus de l'extrados, et assurent ainsi une rétroaction en perturbant le choc. Ce scénario est schématisé dans la figure 2.12.

Les perturbations parcourent donc le profil de  $x = x_s$  à  $x = c$  à une vitesse  $a_p$  et l'onde de pression parcourt le chemin de  $x = c$  à  $x = x_s$  à la vitesse  $a_u$ . Le temps de trajet est donc

$$\tau = \int_{x_s}^c \frac{1}{a_p} dx - \int_c^{x_s} \frac{1}{a_u} dx \quad (2.3)$$

On peut évaluer  $a_u$  en utilisant le fait que c'est une onde acoustique

$$a_u = (1 - M_c)a \quad (2.4)$$

où  $a$  est la vitesse du son locale et  $M_c$  est le nombre de Mach juste avant le choc, calculé avec la relation proposée par Tijdeman [119]

$$M_c = R(M_s - M) + M \quad (2.5)$$

où  $M_s$  est le nombre de Mach au niveau de l'extrados du profil et  $M$  est le Mach dans l'écoulement extérieur.  $R$  quant à lui joue le rôle d'un taux de relaxation qui a été calibré à 0.7. La vitesse  $a_p$  est souvent évaluée par la vitesse de phase des signaux de pression pris à la paroi. D'autres méthodes de calculs de  $a_u$  et  $a_p$  ont été proposées Mabey [71] et Mabey et al. [72].

Si, comme le montre Xiao et al. [124], ce modèle fonctionne bien sur le profil BGK  $n^\circ 1$  étudié par Lee, différentes études montrent des écarts entre la fréquence mesurée et la prédiction. Il s'agit notamment des études faites sur le profil OAT15A. Dans un premier temps, Deck [34] a fait une ZDES sur ce profil et trouve une différence de 5% entre la fréquence mesurée et ce modèle. Dans une étude plus récente de Garnier et al. [45] où une LES a été

faite, cet écart augmente à 60%. Jacquin et al. [62] trouvent par des moyens expérimentaux des écarts aussi importants entre les mesures et la prédiction. Ce même article propose une amélioration de modèle de Lee en prenant en compte le temps de trajet de l'onde acoustique qui remonte le profil par l'intrados. Ce scénario conduit à un écart plus faible du modèle avec la mesure, mais celui-ci reste de l'ordre de 40%.

### **Le buffet vu comme une instabilité globale**

Une interprétation du buffet comme résultant d'une instabilité globale a été proposée d'abord par Crouch et al. [31],[29] et [30] sur le profil naca12 puis sur l'OAT15A. Les résultats ont été confirmés sur ce dernier profil par Sartor et al. [107]. Une explication de l'analyse de stabilité globale sera faite dans le chapitre 4. Il est à noter qu'à la fois Crouch et al. [31] et Sartor et al. [107] ont eu besoin de prendre en considération les équations de fermeture RANS dans leur analyse pour trouver un mode instable (nous ferons plus tard référence à cette approche par le terme "approche complète"). Le spectre de stabilité globale obtenu par Crouch [29] pour le naca12 est montré dans la figure 2.13(a). On remarque la présence d'un mode initialement stable à une incidence de  $3^\circ$  qui devient instable à  $3.1^\circ$  et dont le taux d'amplification augmente pour  $3.2^\circ$ . On remarque que la fréquence du mode instable augmente avec l'incidence. L'amplitude du mode instable est montrée dans la figure 2.13(b). Ce mode est situé sur la couche de cisaillement après le choc, à l'intrados, et sur le choc. Ces résultats d'analyse de stabilité globale sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de McDevitt [79] jusqu'à  $M = 0.8$ . L'analyse de stabilité prédit des modes stables à  $M = 0.8$  alors que le buffet est toujours observé expérimentalement. Cette analyse est aussi valable pour des résultats URANS qui prédisent un champ stationnaire à ce nombre de Mach. Cet écart est probablement dû à des problèmes dans le calcul du champ de base, probablement du fait du modèle de turbulence. L'étude de Crouch et al. [31] montre aussi que le critère de Mabey [71] portant sur le nombre de Mach avant le choc ne semble pas être un critère valide. De même les visualisations des coefficients de friction des résultats RANS montrent une contradiction avec l'hypothèse de Pearse et al. [91] qui prédit l'entrée en régime de buffet par l'apparition d'une bulle de séparation s'étendant du pied de choc au bord de fuite.

Une différence est aussi observée par rapport au modèle de Lee bien que les ingrédients principaux de ce modèle soient confirmés. Crouch et al. [29] montre la présence d'une onde de pression issue du pied de choc qui remonte celui-ci jusqu'à l'extrémité supérieure du choc où elle se dissipe dans l'écoulement amont. La présence de cette onde a été confirmée sur un autre profil (OAT15A) par Crouch et al. [30] où la comparaison avec des mesures LDV expérimentales est excellente.

Une étude proposée par Sartor et al. [107] confirment les observations faites par Crouch et al. [30] sur l'OAT15A. Ils montrent en plus qu'en augmentant l'angle d'incidence la valeur propre la moins stable devient instable, ce qui traduit une bifurcation de Hopf. En continuant

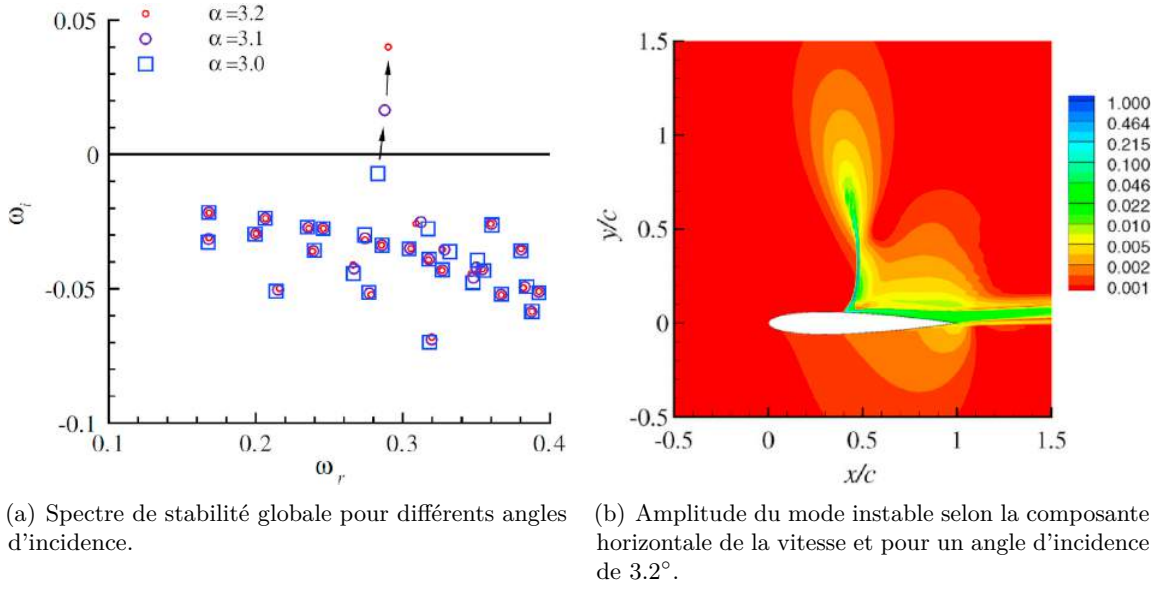
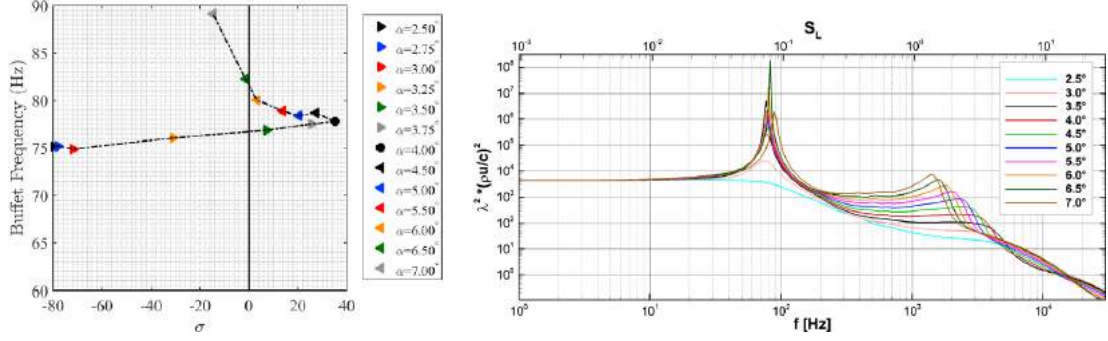


FIGURE 2.13 Résultats de la stabilité globale autour d'un naca0012 à Reynolds  $10^7$  et à Mach 0.76. Images issues de Crouch et al. [29]

à augmenter l'angle d'incidence, il existe une valeur à partir de laquelle la valeur propre se re-stabilise. Ce parcours de la valeur propre est visible sur la figure 2.14(a). En plus du mode basse fréquence du buffet, les auteurs observent par analyse de résolvant une seconde instationnarité de fréquence  $f \sim 2kHz$  visible sur les spectres de gain (figure 2.14(b)). Ils associent cette fréquence au lâché tourbillonnaire provoqué par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz présente dans la couche de cisaillement au dessus de la séparation à l'extrados. Ce résultat a été confirmé par Szubert et al. [116] à l'aide d'une organized eddy simulation (OES, voir Bourget et al.[18] pour plus de détails) sur le même profil. Cette dernière étude montre en plus l'influence réciproque entre le buffet et l'instabilité de Von Karman à l'aide d'une Proper Orthogonal Decomposition.

### 2.2.3 Travaux expérimentaux

Un grand nombre d'expériences ont été menées sur le buffet autour d'un profil d'aile turbulent. Une expérience faite à l'ONERA dans la soufflerie S3Ch par Jacquin et al. [62] a toutefois servi de benchmark à de nombreuses études numériques récentes. Cette étude a été faite sur le profil OAT15A. Les mesures faites sont : des mesures de pression (statiques et instationnaires) à la paroi du profil, des visualisations par Schlieren ainsi que des mesures LDV. Le Mach a été maintenu à 0.73 tout au long de l'étude et l'incidence a été variée entre  $3^\circ$  et  $3.5^\circ$  afin de déterminer l'angle critique d'entrée dans le régime de buffet. Le nombre de Reynolds basé sur la corde est d'environ  $3 \cdot 10^6$ .



(a) Spectre de stabilité globale pour différents angles d'incidence.

(b) Spectre de gain pour différents angles d'incidence.

FIGURE 2.14 Résultats de la stabilité globale (a) et de l'analyse de résolvant (b) autour d'un OAT15A à Mach 0.73. Images issues de Sartor et al. [107]

Un spectrogramme présenté sur la figure 2.15(a) montre que la fréquence ( $f \sim 75Hz$ ) est indépendante du temps. Ceci conforte l'hypothèse que le buffet est de nature modale. On observe aussi deux harmoniques. Le spectre en fonction de la fréquence et de la position sur le profil (voir figure 2.15(b)) montre que la quasi totalité du profil est dominée par cette fréquence. Ces résultats sont en accord avec les résultats numériques de Crouch et al. [29].

Cette étude expérimentale présente cependant des résultats qui peuvent sembler contradictoires. Si les analyses spectrales montrent des ondes de pression identiques le long de l'envergure du profil, des visualisations 'oil-flow' (non montrées ici) montrent la présence d'effets 3D dans la zone décollée derrière le choc. La vitesse des ondes de pression est cependant d'un ordre de grandeur supérieur à celle des effets 3D. L'hypothèse proposée par Jacquin et al. [62] est que le buffet est peut être la superposition d'une forte instabilité 2D et d'une faible instabilité 3D.

Les auteurs suivent le même raisonnement que Lee [70] présenté au dessus et proposent une alternative. Alors que dans le modèle de Lee le temps caractéristique est donné par la vitesse de l'onde acoustique issue du bord de fuite et remontant l'écoulement le long de l'extrados et d'ondes issues du pied de choc allant jusqu'au bord de fuite, Jacquin et al. [62] propose que l'onde acoustique remonte aussi l'écoulement par l'intrados jusqu'au bord d'attaque, du bord d'attaque au choc, on considère que l'information de la perturbation est transmise quasi-instantanément du fait de la zone supersonique à l'extrados. Le temps caractéristique du buffet est alors donné par  $\tau = \tau_c + \tau_{u,u} + \tau_{u,l}$  où  $\tau_{u,u}$  est le temps de trajet des ondes acoustiques à l'intrados,  $\tau_{u,l}$  le temps de trajet des ondes acoustiques à l'extrados et  $\tau_c$  est le temps de trajet des ondes émises au pied de choc et se dirigeant vers le bord de fuite. Ce nouveau modèle fournit une fréquence plus proche de celle observée expérimentalement que celle prédite par le modèle de Lee.

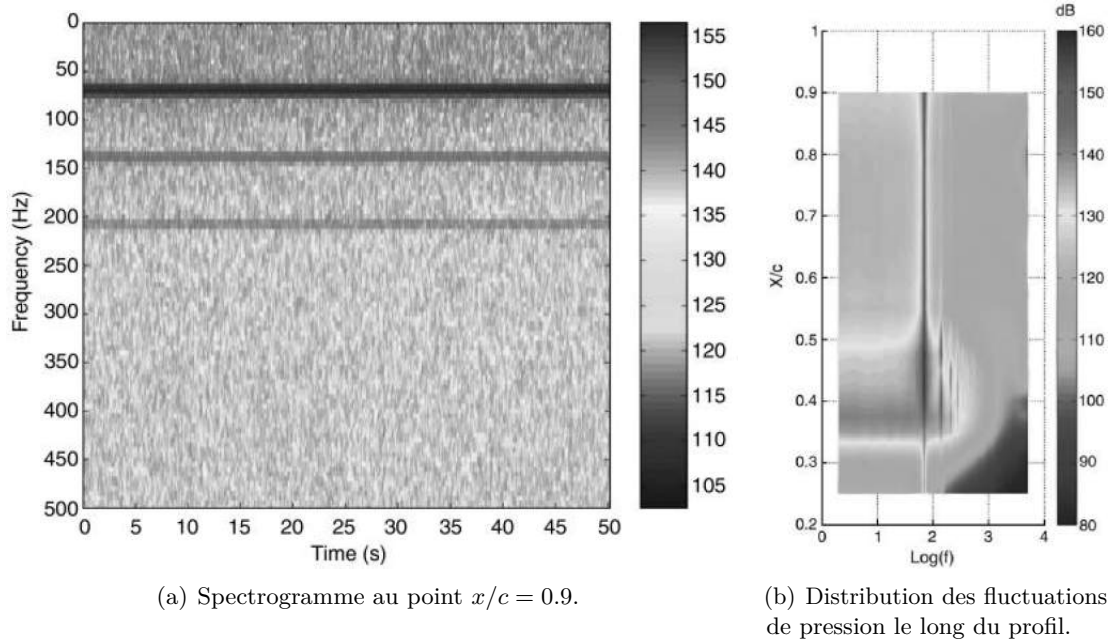


FIGURE 2.15 Fluctuations de la pression à la paroi sur le profil OAT15A à  $M = 0.73$  et  $3.5^\circ$  d'incidence.

Afin de valider la nature acoustique du buffet, Hartmann et al. [56] ajoute une source acoustique extérieure à une fréquence de  $248\text{Hz}$ . L'expérience a eu lieu sur le profil DRA 2303. En l'absence de source acoustique, le buffet observé sur ce profil est de type A à une fréquence de  $126\text{Hz}$ . Avec la source acoustique le buffet change de fréquence. Sa nouvelle fréquence est à  $248\text{Hz}$ , celle la source. De plus les visualisations du mouvement du choc montrent qu'il n'est plus du type A. Il est même inclassable dans la zoologie de Tijdeman [119]. Ceci montre que le phénomène de buffet est sensible à l'acoustique.

En poursuivant cette étude Hartmann et al. [55] proposent des spectres des corrélations croisées qui montrent l'émission de tourbillons qui interagissent avec le bord de fuite en émettant des ondes acoustiques de fréquences  $1030\text{Hz}$ . Les auteurs proposent un mécanisme pour expliquer le buffet qui est proche de celui de Lee. La source acoustique résulterait de la modulation d'intensité des tourbillons émis au pied de choc et qui perturbent le bord de fuite.

## 2.2.4 Etudes numériques sur le buffet

### Par approche URANS

La complexité du phénomène de buffet qui semble intriquer différents phénomènes (acoustique, tourbillons, interaction de ces derniers avec le bord de fuite...) peut laisser penser que des modélisations fines de la turbulence sont nécessaires pour retrouver l'instationnarité

du choc. Cependant de nombreuses études ont montrées que les approches URANS étaient capables de modéliser convenablement ce phénomène (par exemple Sartor et al. [107] et Iovnovich et al. [61]). Le fait que les approches URANS soient performantes dans le cas du buffet peut être expliqué par les fréquences très basses du phénomène ( $f \sim 100Hz$ ) en comparaison des fréquences caractéristiques de la turbulence. Cependant les résultats URANS sont sensibles à différents paramètres numériques, en particulier au modèle de turbulence, à la discrétisation spatiale (densité de point et schéma numérique) et à la discrétisation temporelle.

### Effet du modèle de turbulence

Différentes études ont été faites sur l'influence du modèle de turbulence sur la prédiction du buffet par les approches URANS. On peut notamment citer les deux études menées par Goncalves et al. [51] et [50]. Ces deux études regardent la prédiction du buffet sur le profil RA16SC1 à l'aide de différents modèles. Les modèles à deux équations qu'ils utilisent sont le  $k-l$  de Smith [112],  $k-\omega$  de Wilcox [122],  $k-\omega$  Menter SST [81],  $k-\omega$  de Kok [64], et la variante du  $k-\varepsilon$  de Jones-Launder [63]. Ils comparent les résultats à ceux du modèle à une équation de Spalart-Allmaras [115] et à des résultats expérimentaux. Les principaux résultats de cette étude sont résumés dans le tableau 2.16. On remarque que le modèle qui reproduit le mieux les résultats expérimentaux est le modèle  $k-\omega$  SST de Menter. Les modèles  $k-\varepsilon$  et  $k-l$  quant à eux prédisent assez mal les résultats expérimentaux en terme de niveau d'instationnarité. Il semble que corriger légèrement ces modèles ou leur intégrer la correction SST améliore grandement leur performance. Le modèle de Spalart prédit bien une instationnarité mais à des fréquences et des amplitudes plus basses que dans l'expérience. Le modèle  $k-\omega$  de Kok prévoit bien des écoulements instationnaires mais l'entrée en régime de buffet apparaît pour des incidences plus élevées. La correction SST n'apporte pas d'amélioration notable. Les modèles de Wilcox et de Menter ne prédisent pas d'oscillation du choc sans la correction SST. Différentes études (Xiao et al. [124], Hasan et al [57] ou encore Giannelis et al. [46]) aboutissent au résultat que le modèle  $k-\omega$  SST reproduit bien les résultats expérimentaux.

Thiery et al. [117] ont regardé l'influence des lois de paroi sur la prédiction du buffet. Les conclusions sont que les lois de paroi permettent de simuler le buffet. Toutefois, l'accord avec les résultats expérimentaux est moins bon que sans ces lois.

On peut encore citer l'étude de Kourta et al. [65] qui modifie le modèle  $k-\varepsilon$  en prenant le coefficient présent devant la viscosité turbulente, non plus comme une constante, mais comme une fonction du taux de déformation et de rotation et qui re-calibre le modèle sur un cas stationnaire et un cas instationnaire. Ce nouveau modèle arrive à prédire de façon satisfaisante le phénomène de buffet sur le profil OAT15A là où la version de Jones-Launder échoue.

Model	$\alpha = 3^\circ$		$\alpha = 4^\circ$		$\alpha = 5^\circ$	
	$f$ (Hz)	$\Delta C_L$	$f$ (Hz)	$\Delta C_L$	$f$ (Hz)	$\Delta C_L$
Experiment	88	0.11	100	0.308	Steady State	
SA	82	0.0146	92	0.325	100	0.55
$k-l$	–	–	Steady State		–	–
$k-l$ corrected	–	–	Steady State		–	–
$k-l$ SST	79.5	0.0084	97.6	0.296	101.8	0.53
$k-\varepsilon$	Steady State		95.6	0.17	97.6	0.43
$k-\varepsilon$ SST	Steady State		95.6	0.48	101.8	0.67
$k-\varepsilon$ Durbin	85.2	0.012	93.7	0.437	101.8	0.67
$k-\omega$ Wilcox	–	–	Steady State		–	–
$k-\omega$ Menter	–	–	Steady State		–	–
$k-\omega$ SST Menter	90	0.11	96.6	0.33	Steady State	
$k-\omega$ Kok	Steady State		94.6	0.26	95.6	0.48
$k-\omega$ SST Kok	Steady State		94.6	0.26	96.6	0.445
$k-\omega$ Kok Durbin	Steady State		94.6	0.26	96.6	0.45

FIGURE 2.16 Fréquences et amplitudes de la variation du coefficient de portance obtenues pour différents modèles de turbulence. Tableau issu de Goncalves et al. [50]

Model	$\alpha = 3^\circ$		$\alpha = 4^\circ$		$\alpha = 5^\circ$	
	$f$ (Hz)	$\Delta C_L$	$f$ (Hz)	$\Delta C_L$	$f$ (Hz)	$\Delta C_L$
Experiment	88	0.11	100	0.308	Steady State	
Jameson	90	0.11	96.6	0.33	Steady State	
Roe MUSCL	90	0.014	99.7	0.3	Steady State	
AUSM + MUSCL	90	0.018	98.6	0.307	Steady State	
Jameson corrected	91	0.097	97.6	0.327	99.7	0.46

FIGURE 2.17 Fréquences et amplitudes de la variation du coefficient de portance obtenus pour différents schéma de discrétisation. Tableau issu de Goncalves et al. [50]

### Effet du schéma de discrétisation spatiale

Goncalves et al. [50] étudient aussi l'influence du schéma de discrétisation spatial sur la prédiction du buffet. Leurs résultats sont présentés sur la figure 2.17. Il apparait que le schéma de Jameson est le plus performant pour prédire l'entrée dans le régime de buffet. Une étude de Soda et al. [114] étudie la différence des prédictions du schéma AUSM+ et Jameson sur le Naca 64A010. Ils montrent que AUSM+ prédit mieux la position du choc alors que Jameson est plus performant sur la prédiction des fluctuations de pression.

On voit cependant que l'influence du schéma est faible comparée à celle du choix du modèle de turbulence.

### Effet de la discrétisation spatiale et temporelle

L'étude de Rumsey et al. [101] explore l'influence du schéma de discrétisation temporelle et spatiale sur les caractéristiques du phénomène de buffet prédites par les approches URANS. En comparant la fréquence prédite par une méthode de 'dual time stepping' comprenant 170

itérations par période avec celle prédite avec un pas de temps 4 fois plus petit, les auteurs trouvent un écart de seulement 1%. En revanche ils trouvent un écart de 4.5% sur la fréquence quand ils doublent le nombre de points de calcul le long du profil.

Iovnovich et al. [61] montrent quant à eux un écart de 10% sur la fréquence du buffet quand la taille des mailles au voisinage du choc passe de 1% de corde à 0.3%.

### Approches de type LES

Les approches de types LES sont capables de donner plus d'information sur le phénomène de buffet, notamment elles peuvent évaluer l'effet du spectre large bande de la turbulence dû à l'écoulement séparé. Ainsi Deck [34] compare les résultats donnés par une simulation URANS fermée avec le modèle de Spalart à ceux donnés par une Detached Eddy Simulation (DES) et à ceux issus d'une Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) sur le profil OAT15A. La comparaison montre une supériorité de la ZDES comparé au URANS et à la DES en terme de reproduction des fluctuations de pression et plus généralement du caractère oscillant de l'écoulement. Une étude DES proposée par Grossi et al. [54] sur le même profil montre notamment que cette méthode prédit des fluctuations trop élevées au niveau du bord de fuite. Dans l'étude de Deck [34] l'angle d'incidence d'entrée en régime de buffet est prédit à  $3.5^\circ$  par la ZDES,  $4^\circ$  par la DES et  $4.5^\circ$  pour le URANS. L'angle obtenu expérimentalement par Jacquin et al. [62] est de  $3.5^\circ$ . La ZDES est donc plus efficace aussi de ce point de vue. Cependant elle prédit un choc légèrement trop en amont comparé aux résultats expérimentaux. Des différences sur le profil de vitesse en amont du choc ont aussi été observées dans la ZDES. Une étude suivante proposée par Garnier et Deck [45] qui améliore la résolution du profil de vitesse montre un résultat contradictoire avec la ZDES de Deck [34]. En effet, là où ce dernier article montre un très bon accord avec le modèle de Lee (voir section 2.2.2), cette nouvelle étude montre une meilleure comparaison avec le modèle de Jacquin et al. [62]. En revanche les deux calculs montrent un bon accord entre eux en terme des fréquences prédites.

#### 2.2.5 Buffet laminaire

Comme mentionné plus haut, peu d'études ont été faites en condition de couche limite laminaire. Nous pouvons tout de même mentionner l'étude de Grossi [53] qui étudie l'influence de la position de la transition sur le buffet. Dans cette étude la transition est déclenchée avant l'interaction avec le choc ce qui replace l'étude dans le domaine des interactions entre une onde de choc et une couche limite turbulente. En revanche elle répond à une des problématiques présentes d'un point de vue industriel sur les ailes laminaires. En effet, si l'état de surface de l'aile se détériore (ex : dépôt de givre, insecte) la transition sera déclenchée avant l'interaction avec le choc. Etudier l'influence de la position de transition sur le buffet revient donc à étudier comment les performances de l'aile sont impactées par la dégradation de l'état de surface.



$x_t/c$	Fully turb.	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$x_s/c$	0.523	0.532	0.541	0.552	0.564	0.574
$x_b/c$	0.533	0.541	0.547	0.556	0.566	0.575
$l_b$ (%)	1.1	2.4	4.7	6.8	8.5	9.4
$x_r/c$	0.911	0.925	0.946	0.965	0.981	—

FIGURE 2.18 Effet de la position de la transition sur la position du choc et la séparation. Tableau issu de Grossi [53]

$x_t/c$	Fully turb.	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
$C_L$	0.8873	0.9174	0.9556	0.9919	1.029	1.061
$C_{D_f} \times 10^2$	0.610	0.574	0.510	0.460	0.396	0.334
$C_D \times 10^2$	2.080	2.069	2.102	2.171	2.268	2.365
$L/D$	42.7	44.3	45.5	45.7	45.4	44.9
$C_m \times 10^2$	-7.277	-7.749	-8.445	-9.195	-10.04	-10.83

FIGURE 2.19 Effet de la transition sur les principaux coefficients aérodynamiques. Tableau issu de Grossi [53]

Grossi [53] se place d'abord avant l'entrée en régime de buffet. Il déclenche la transition à différentes positions ( $x_t$ ) le long du profil et regarde l'influence sur la position de la bulle ( $x_b$ ), sa longueur ( $l_b$ ) et la position de la séparation au bord de fuite ( $x_r$ ). Les résultats sont résumés dans le tableau 2.18. On remarque que le choc ( $x_s$ ) et les deux séparations reculent avec la position de la transition. La longueur de la séparation augmente pendant ce temps. Cette évolution est logique puisque la couche limite est moins développée et donc plus susceptible au gradient de pression. Le tableau 2.19 décrit l'effet de la position de la transition sur la portance ( $C_L$ ), la traînée ( $C_D$ ), la traînée due à la friction ( $C_{D_f}$ ), le ratio de la portance et la traînée ( $L/D$ ) et le moment de tangage ( $C_m$ ). On remarque que la portance augmente quand la position de la transition augmente. Naturellement, la friction due aux contraintes visqueuses diminue quand la transition est retardée. En revanche la traînée totale diminue entre le cas totalement turbulent et quand la transition est déclenchée à  $x_t/c = 0.1$  puis augmente. Le ratio  $L/D$  quant à lui augmente jusqu'à ce que la transition atteigne  $x_t/c = 0.30$  puis diminue.

La même étude a été faite dans des cas instationnaires. Il a été observé que l'amplitude du mouvement du choc augmente quand la transition est déclenchée tardivement. Il en est de même pour les variations de portance et de traînée.

Une autre étude, où cette fois la transition a été laissée libre, a été proposée par Hue et al. [59]. Cette étude compare des résultats expérimentaux à des calculs RANS utilisant le modèle de fermeture de Spalart-Allmaras couplé soit avec un calcul exact de la position de la

transition, soit avec le critère de transition AHD-Gl. La comparaison montre que l'approche RANS+AHD-Gl est capable de reproduire le coefficient de pression ainsi que la position de la transition assez fidèlement comparé à l'expérience et au cas où la position de la transition est calculée. Cependant la taille de la séparation à l'extrados est mal reproduite par ce modèle. Il a été montré aussi que l'aile laminaire permet de réduire le coefficient de trainé jusqu'à 40 – 50% comparé au cas où la transition est déclenchée à 5% de corde. Dans une étude suivante, Hue et al; [60] s'intéresse au cas d'une aile en 3D. Ils rajoutent en plus à leurs simulation un modèle de transition cross-flow et montre que s'il existe encore des différences avec les résultats expérimentaux, cette approche reste satisfaisante. Cette fois le gain en coefficient de trainée a été évalué à 10 – 15%. Ces deux études ne s'intéressent pas aux mouvements basse fréquence du choc.

Une étude expérimentale faite par Brion et al. [20] montre l'existence d'un mouvement basse fréquence du choc sur une aile laminaire. La comparaison avec un cas où la transition est déclenchée à 7% de corde montre une différence de comportement entre le buffet turbulent et le buffet laminaire. Il semble notamment que l'amplitude du mouvement du choc est beaucoup plus faible dans le cas laminaire que dans le cas turbulent. Dans le cas laminaire, il apparaît aussi une moyenne fréquence vers  $f \sim 1kHz$  ( $S_t \sim 1$ ) qui domine la basse fréquence du buffet. Plus de détails seront donnés sur cette expérience dans la première partie du chapitre 7.

Une autre étude publiée par Finke [42] écrite en allemand et résumée en anglais dans l'introduction du manuscrit de thèse de Soda [113] traite aussi du buffet autour d'une aile laminaire. Ils observent en plus de la fréquence du buffet autour d'une aile turbulente, une fréquence plus élevée de l'ordre de  $S_t = 0.2$ . Cette nouvelle fréquence est attribuée par les auteurs à une boucle de rétroaction localisée dans la zone d'interaction du choc à l'extrados du profil. Le schéma de la figure 2.20 montre la forme typique de l'interaction d'un choc droit avec une couche limite laminaire à l'extrados d'un profil. Des perturbations de pression sont émises au niveau du pied de choc en aval ("main shock" dans la figure 2.20) qui remontent l'écoulement par la région subsonique de la couche limite. Ce faisant, elle perturbe la séparation, et donc la position du pied de choc amont ("weak forward oblique shock" dans la figure 2.20) ce qui change le gradient de pression à travers ce choc. Des perturbations sont alors créés et se transmettent jusqu'au choc en aval par la zone supersonique de l'écoulement. Se met alors en place un scénario de perturbation auto-entretenu au sein de l'interaction. La taille caractéristique de la zone d'interaction est faible devant la corde, ce qui explique des fréquences plus élevées que celles obtenues sur une aile turbulente. Ce scénario n'est pas sans rappeler celui du mouvement basse fréquence du choc réfléchi vu dans la section 2.1.

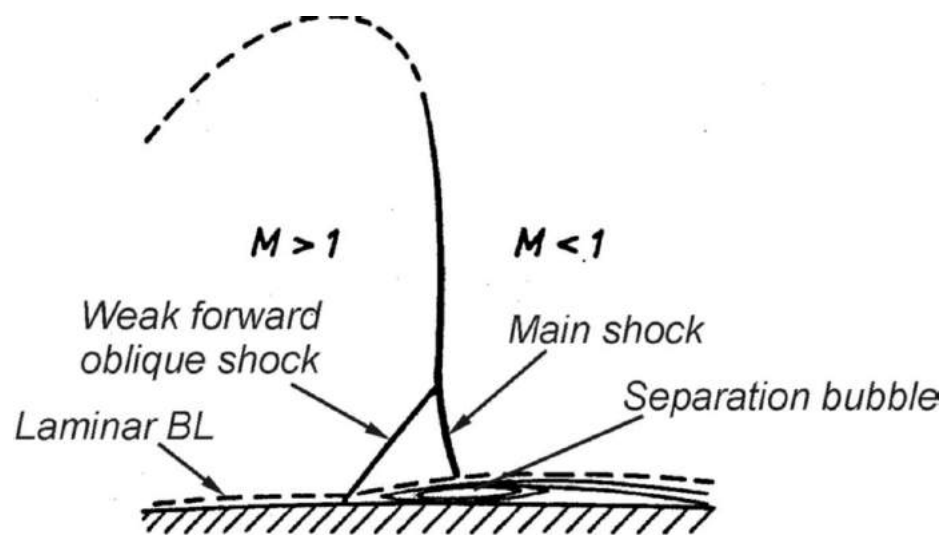


FIGURE 2.20 Schéma de l'interaction entre un choc droit et la couche limite laminaire à l'extrados du profil. (Image issues de Soda [113])

## Chapitre 3

# Modèles de turbulence et de transition

Dans les présents travaux nous utiliserons deux modèles RANS différents (le modèle de Spalart-Allmaras [115] et le modèle  $k - \omega$  de Menter [81]). Nous utiliserons aussi des critères de transition afin de prédire la transition de la couche limite. Nous utiliserons pour cela le critère AHD-G1 ([26], [10] et [27]) et le critère  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  de Langtry [66]. Ce chapitre présente ces différents modèles. Dans un premier temps nous aborderons les équations de Navier Stokes et les équations RANS. Puis, nous détaillerons les modèles de fermeture utilisés. Enfin nous présenterons les critères de transition AHD-G1 et  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ .

### 3.1 Equations de Navier Stokes

Cette partie décrit les équations de Navier Stokes. La masse volumique est notée  $\rho$ , la quantité de mouvement  $\rho\mathbf{U}$  et l'énergie totale par unité de volume,  $\rho E$ . Le style gras indique ici un vecteur. L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{U}) = 0, \quad (3.1)$$

celle de la conservation de la quantité de mouvement,

$$\frac{\partial \rho\mathbf{U}}{\partial t} + \text{div}[\rho\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}] = 0. \quad (3.2)$$

La conservation de l'énergie totale s'écrit,

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}[\rho E\mathbf{U} + p\mathbf{U} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{q}] = 0, \quad (3.3)$$

où  $p$  est la pression,  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes dues à la viscosité et  $\mathbf{q}$ , le vecteur du flux de chaleur dû à la conductivité thermique. Pour fermer ce problème, il faut définir ces dernières

quantités, et faire des hypothèses sur le fluide considéré. Ici, nous allons travailler dans l'air qui sera considéré à la fois comme un fluide newtonien et comme un gaz parfait. L'hypothèse de fluide newtonien donne le tenseur des contraintes visqueuses

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{U})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.4)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les deux coefficients de viscosité volumique et dynamique respectivement.  $\mathbf{D}$  est le tenseur du taux de déformation. Ce tenseur écrit dans un repère cartésien est

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.5)$$

La viscosité volumique  $\lambda$  est modélisée par l'hypothèse de Stokes

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (3.6)$$

La viscosité dynamique  $\mu$  est une fonction de la température supposée satisfaire à la loi de Sutherland

$$\mu = \mu_s \sqrt{\frac{T}{T_s}} \frac{1 + C_s/T_s}{1 + C_s/T} \quad (3.7)$$

où  $\mu_s = 1.716e^{-5} Pa.s$ ,  $T_s = 273.15K$  et  $C_s = 110.4K$ . Le vecteur de flux de chaleur est donné par la loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -K \operatorname{grad} T. \quad (3.8)$$

$K$  est le coefficient de conductivité thermique. Ce coefficient est proportionnel à la viscosité.  $K = c_p \frac{\mu}{Pr}$  avec  $c_p$  la capacité calorifique à pression constante et où  $Pr$  est le nombre de Prandtl qui sera supposé constant.  $Pr = 0.72$  en laminaire et  $Pr = 0.9$  en turbulent. Le gaz étant supposé thermiquement et calorifiquement parfait, la capacité calorifique à pression constante est  $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ , avec  $\gamma = 1.4$  pour l'air pris comme un gaz monoatomique.  $R = 287 m^2 K^{-1} s^{-2}$  est la constante des gaz parfaits. Le lien entre pression, densité et température est donné par l'équation d'état

$$p = \rho R T. \quad (3.9)$$

Enfin, le lien entre l'énergie totale et la température est donné par

$$E = c_v T + \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 \quad (3.10)$$

avec  $c_v$  la capacité calorifique à volume constant qui, dans le cadre des hypothèses précédentes, satisfait  $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ .

### 3.2 Les équations RANS

Dès lors que l'écoulement est turbulent, la résolution complète des équations de Navier Stokes est très couteuse en temps de calcul. Afin de réduire ces coûts, il a été proposé de modéliser les fluctuations turbulentes en décomposant les champs de densité, de vitesse et d'énergie comme étant la somme de leur moyenne d'ensemble et d'une quantité fluctuante,

$$q = \bar{q} + q' \quad (3.11)$$

avec

$$\bar{q} = \frac{1}{N} \sum_n q_n. \quad (3.12)$$

Avec l'hypothèse ergodique, cette moyenne revient à une moyenne temporelle

$$\bar{q} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt. \quad (3.13)$$

Cette moyenne est appelée moyenne de Reynolds. Par définition,  $\overline{q'} = 0$ .

Dans un contexte compressible, il est utile de prendre une autre moyenne pour la vitesse et l'énergie. On utilise alors la moyenne de Favre définie comme étant :

$$\tilde{q} = \frac{\bar{\rho q}}{\bar{\rho}}. \quad (3.14)$$

On décompose alors  $q = \tilde{q} + q''$ . Il est important de noter que  $\overline{q''} \neq 0$ .

Le but est alors de trouver les équations satisfaites par les quantités moyennes, et de ne plus calculer les fluctuations turbulentes. Le système d'équations satisfait par ces quantités moyennes est le système RANS.

Les équations deviennent

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \text{div} [\bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}} \otimes \tilde{\mathbf{U}} + \bar{p} \mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\tau}}] = -\text{div} (\overline{\rho \mathbf{U}'' \otimes \mathbf{U}''}) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}(\tilde{E} + \tilde{k})}{\partial t} + \text{div} [\bar{\rho}(\tilde{E} + \tilde{k}) \tilde{\mathbf{U}} + \bar{p} \tilde{\mathbf{U}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{q}}] = \\ -\text{div} \left[ \overline{\rho e'' \mathbf{U}''} + \overline{\rho \tilde{U}_i U_i'' \mathbf{U}''} + \frac{1}{2} \overline{\rho U_i'' U_i'' \mathbf{U}''} + \overline{p \cdot \mathbf{U}''} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les seconds membres de ces équations sont des corrélations des quantités fluctuantes et sont inconnues. Il faut les modéliser.

L'hypothèse de Boussinesq modélise ces termes par des termes de diffusion (  $\boldsymbol{\tau}_r$  pour la viscosité et  $\mathbf{q}_t$  pour la thermique). Ainsi, en oubliant les signes des moyennes pour alléger les

notations, les équations (3.15-3.17) deviennent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_r] = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \rho(E + k)}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho(E + k)\mathbf{U} + p\mathbf{U} - (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_r) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{q} + \mathbf{q}_t] \quad (3.20)$$

où

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{U})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3.21)$$

$$\boldsymbol{\tau}_r = -\frac{2}{3}(\rho k + \mu_t \operatorname{div}(\mathbf{U}))\mathbf{I} + 2\mu_t \mathbf{D} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{q} = -K \operatorname{grad} T \quad (3.23)$$

$$\mathbf{q}_t = -\frac{c_p \mu_t}{P_t} \operatorname{grad} T \quad (3.24)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.25)$$

De plus, l'hypothèse de Stokes (3.6) est appliquée. Il reste, pour fermer ces équations, à déterminer  $\mu_t$ . Les modèles de fermeture utilisés ici sont décrits ci-dessous.

### 3.3 Fermetures des équations RANS

Les modèles de turbulence pour fermer le système RANS sont nombreux et reposent souvent sur des équations de transport. Ces nouvelles équations sont en nombre variable selon les modèles. Par exemple, le modèle de Spalart-Allmaras propose une unique équation de transport pour la viscosité turbulente. Les modèles de type  $k - \varepsilon$ ,  $k - l$ , ou encore  $k - \omega$  proposent une première équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  et une seconde équation pour la dissipation  $\varepsilon = \mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$ , la dissipation spécifique  $\omega = \varepsilon/k$ , ou pour l'échelle de longueur des structures turbulente  $l$ . Il est à noter que l'équation sur  $k$  peut être exactement déterminée. Certains modèles proposent plus de deux équations. Ici, nous allons présenter les modèles à une équation de Spalart et Allmaras, et la famille des modèles  $k - \omega$ .

### 3.3.1 Spalart Allmaras

Ce modèle proposé par Spalart et Allmaras [115] est un modèle à une seule équation de transport. La viscosité turbulente satisfait l'équation

$$\begin{aligned} \frac{D\rho\tilde{\nu}}{Dt} &= C_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\rho\tilde{\nu} + \frac{C_{b2}}{\sigma}\mathbf{grad}\rho\tilde{\nu} \cdot \mathbf{grad}\tilde{\nu} \\ &- (C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{K^2}f_{t2})\rho\frac{\tilde{\nu}^2}{\eta^2} + \frac{1}{\sigma}\text{div}((\mu + \rho\tilde{\nu})\mathbf{grad}\tilde{\nu}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec

$$\mu_t = \rho\tilde{\nu}f_{v1} \quad (3.27)$$

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} \quad (3.28)$$

$$\tilde{S} = \tilde{\omega} + \frac{\tilde{\nu}}{K^2\eta^2}f_{v2} \quad (3.29)$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (3.30)$$

$$\chi = \frac{\rho\tilde{\nu}}{\mu} \quad (3.31)$$

$$f_w = g \left( \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad (3.32)$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r) \quad (3.33)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}K^2\eta^2} \quad (3.34)$$

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4}\chi^2) \quad (3.35)$$

$$\tilde{\omega} = |\text{rot}(U)| \quad (3.36)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}. \quad (3.37)$$

Les constantes sont les suivantes

- $C_{b1} = 0.1355$
- $C_{b2} = 0.622$
- $\sigma = 2/3$
- $K = 0.41$
- $C_{w1} = C_{b1}/K^2 + (1 + C_{b2})/\sigma$
- $C_{w2} = 0.3$
- $C_{w3} = 2$
- $C_{v1} = 7.1$
- $C_{t3} = 1.2$



-  $C_{t4} = 0.5$ .

Dans l'équation (3.26) le terme  $C_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\rho\tilde{\nu}$  décrit la production de  $\tilde{\nu}$ ,  $-(C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{K^{1/2}}f_{t2})\rho\frac{\tilde{\nu}^2}{\eta^2}$  décrit sa destruction et le terme  $\frac{1}{\sigma}\text{div}((\mu + \rho\tilde{\nu})\mathbf{grad}\tilde{\nu})$  décrit la diffusion conservative. Comme il n'y a pas de raison de conserver l'intégrale volumique de la viscosité turbulente, Spalart et Allmaras proposent de rajouter le terme  $\frac{C_{b2}}{\sigma}\mathbf{grad}\rho\tilde{\nu} \cdot \mathbf{grad}\tilde{\nu}$  qui est un terme de diffusion non conservative.

### 3.3.2 Modèles $k - \omega$

Différents modèles de  $k - \omega$  existent. Nous détaillerons ici le modèle de Wilcox puis les modifications qui lui ont été apportées par Menter en expliquant les raisons de ces modifications.

#### Modèle de Wilcox

Le modèle de turbulence  $k - \omega$  de Wilcox proposé dans [122] est un modèle de turbulence à deux équations. La première est l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et peut être déterminée explicitement. La seconde transporte la dissipation spécifique de la turbulence  $\omega$ .

La viscosité turbulente est définie par analyse dimensionnelle de ces deux quantités.

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}. \quad (3.38)$$

Les deux équations de transport proposées par Wilcox sont

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = P_k - D_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \omega}{\partial x_j} = \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right], \quad (3.40)$$

où  $P_k = \mu_t D_{ij} D_{ij}$  et  $D_k = \beta^* \rho k \omega$ ,  $D_{ij}$  est le tenseur de déformation et  $\beta^*$  est une constante (voir plus bas). La production  $P_k$  est parfois calculée sur la base de la vorticité et non de la déformation. Dans le cas d'un écoulement quasi parallèle, ces deux méthodes sont équivalentes puisque  $\frac{\partial v}{\partial x}$  est faible (par exemple dans la couche limite d'une plaque plane). Dans ces travaux, la formulation avec le tenseur des déformations a été privilégiée.

Il est intéressant de comparer ce modèle au modèle  $k - \varepsilon$ , qui compte tenu de la relation  $\varepsilon = k\omega$ , s'écrit

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = P_k - D_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \omega}{\partial x_j} &= \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ &\quad + 2 \underbrace{\frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

L'analyse comparative des deux modèles (3.39,3.40) et (3.41,3.42) montre que  $k - \omega$  de Wilcox modélise souvent mieux les cas avec un gradient de pression adverse dans la couche limite que le modèle  $k - \varepsilon$ . Malheureusement ce modèle  $k - \omega$  est sensible (contrairement à  $k - \varepsilon$ ) aux conditions de l'écoulement externe. Cette sensibilité est problématique car la valeur de  $\omega$  n'est pas évidente à déterminer expérimentalement.

Les constantes du modèle de Wilcox sont :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 0,5 \quad , \quad \sigma_\omega = 0,5 \quad , \quad \beta = 0,075 \\ \beta^* &= 0,09 \quad , \quad \gamma = \frac{5}{9} \end{aligned} \quad (3.43)$$

### Modèle BSL de Menter

Le modèle  $k - \omega$  BSL de Menter proposé dans [81] vise à garder la meilleure résolution des couches limites avec gradient de pression adverse obtenue par le modèle  $k - \omega$  de Wilcox, tout en éliminant la forte dépendance de ce modèle aux conditions extérieures. Comme le modèle  $k - \varepsilon$  est peu sensible aux conditions extérieures, Menter propose que  $\omega$  satisfasse l'équation de transport du modèle de Wilcox (3.39 et 3.40) dans la couche limite et l'équation équivalente à celle du modèle  $k - \varepsilon$  (3.41 et 3.42) en dehors de la couche limite. Pour ce faire, on pondère simplement le dernier terme de (3.42) de façon à ce qu'il soit nul dans la couche limite et totalement présent dans l'écoulement extérieur. On a alors le nouveau système d'équations

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j k}{\partial x_j} = P_k - D_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_j \omega}{\partial x_j} &= \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ &\quad + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

$F_1$  doit valoir 1 dans la couche limite et 0 dans le domaine extérieur. Cette variation doit être assez rapide. Menter propose

$$F_1 = th(arg_1^4) \quad (3.46)$$

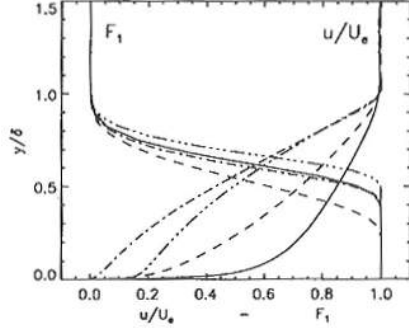


Figure 1. Blending function  $F_1$  versus  $y/\delta$  for different velocity profiles.

FIGURE 3.1 Forme de la fonction  $F_1$  pour différents profils de vitesses [81]

Extérieur de la couche limite	$\frac{4\sigma_2 k}{CD_{k\omega} y^2} \ll 1$
Région de défaut	$\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y} > \frac{500\nu}{\omega y^2}$
Région Log	$\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y} > \frac{500\nu}{\omega y^2}$
Sous-couche visqueuse	$\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y} < \frac{500\nu}{\omega y^2}$

FIGURE 3.2 Schéma montrant le rôle des termes de  $arg_1$

avec

$$arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500\nu}{\omega y^2} \right); \frac{4\sigma_2 k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \quad (3.47)$$

et où

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\sigma_2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}; 10^{-20} \right) \quad (3.48)$$

On voit dans la figure 3.1 la forme de la fonction  $F_1$  pour différents profils de vitesse à la paroi.

Le premier terme de  $arg_1$ ,  $\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y} = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon y}$ , compare la taille caractéristique des structures turbulentes avec la distance à la paroi. Dans la région log de la couche limite turbulente ce rapport est de l'ordre de 2.5. Le terme  $\frac{500\nu}{\omega y^2}$  compare le temps caractéristique de la turbulence ( $\frac{1}{\omega}$ ) à celui de la diffusion moléculaire,  $\frac{\nu}{y^2}$ . Enfin le terme  $\frac{4\sigma_2 k}{CD_{k\omega} y^2}$  compare le terme de diffusion de  $\omega$  au terme à ajouter dans le modèle de Wilcox pour retrouver  $k - \varepsilon$ . La figure 3.2 montre lequel de ces termes domine en fonction des régions de la couche limite turbulente. Dans la sous-couche visqueuse, comme  $k$  est presque nul, on a  $\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y} < \frac{500\nu}{\omega y^2}$ . Ceci s'inverse quand on arrive dans la région log et ce jusqu'à la fin de la couche limite. Dans la région extérieure, le terme de diffusion croisée domine la diffusion de  $\omega$  de telle sorte que  $\frac{4\sigma_2 k}{CD_{k\omega} y^2} \ll 1$  (on doit retrouver  $k - \varepsilon$ ). Ainsi, dans la sous couche visqueuse, dans la région log et dans la région déficitaire,  $arg_1$  n'est pas nul, et donc  $F_1$  est proche de 1. Puis quand  $\frac{4\sigma_2 k}{CD_{k\omega} y^2}$  diminue,  $F_1$  va à 0, ce qui active le terme.

Les constantes du modèle sont calculées de la façon suivante :

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (3.49)$$

où l'indice 1 est relatif aux valeurs des constantes du modèle de Wilcox (3.39, 3.40) et l'indice 2 à celles du modèle  $k-\varepsilon$  (3.41 et 3.42) recommandées par Menter :

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0,5 \quad , \quad \sigma_{\omega1} = 0,5 \quad , \quad \beta_1 = 0,075 \\ \sigma_{k2} &= 1,0 \quad , \quad \sigma_{\omega2} = 0,856 \quad , \quad \beta_2 = 0,0828 \\ \beta^* &= 0,09 \quad , \quad \kappa = 0,41 \quad , \quad \gamma_i = \frac{\beta_i}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega i} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

### Modèle de Menter avec correction SST

Afin d'améliorer le modèle BSL dans le cas des écoulements à fort gradient de pression adverse, Menter [81] s'inspire du modèle de turbulence de Johnson-King où la quantité  $\tau_r = -\overline{u'v'}$  est transportée. Dans ce modèle, l'hypothèse de Bradshaw est utilisée,  $\tau_r = \rho a_1 k$ , alors que dans le cas des modèles à deux équations on utilise l'hypothèse de Boussinesq,  $\tau_r = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$ . L'idée de la correction SST est de remplacer, dans le cas où la couche limite est soumise à un fort gradient de pression inverse, l'hypothèse de Boussinesq par celle de Bradshaw, qui fonctionne mieux.

Pour satisfaire l'hypothèse de Bradshaw, on devrait choisir  $\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\frac{\partial u}{\partial y}}$ . Le problème est que cette expression diverge quand il n'y a plus de cisaillement. Dans le cas d'une couche limite avec un fort gradient de pression, on produit plus de turbulence que l'on en dissipe, donc  $\frac{\partial u}{\partial y} > a_1 \omega$ . On modifie donc la viscosité turbulente selon la loi suivante

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\max(\omega; S F_2 / 0.31)} \quad (3.51)$$

avec  $F_2 = th(arg_2^2)$ ,  $arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2}\right)$  et  $S = \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Quand  $F_2$  est proche de 1 et que  $\frac{\partial u}{\partial y} > a_1 \omega$ , on retrouve l'hypothèse de Bradshaw, sinon on retrouve l'hypothèse de Boussinesq. On retrouve aussi cette dernière hypothèse quand le cisaillement est trop faible.

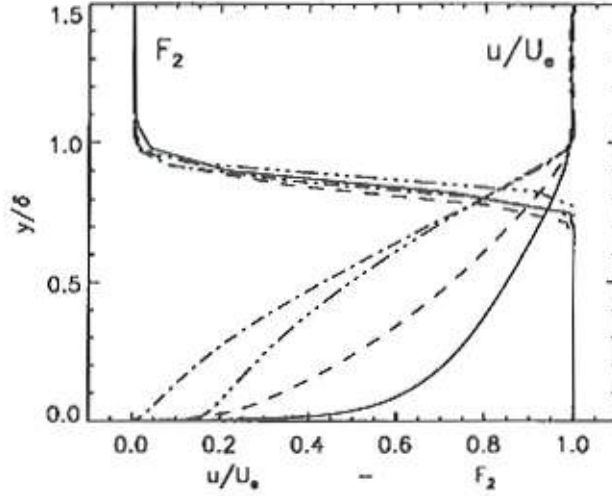
La fonction  $F_2$  est tracée dans la figure 3.3 pour différents profils de vitesse de couche limite. Elle passe rapidement de 1 proche de la paroi à 0 dans l'écoulement extérieur. Les termes de  $arg_2$  sont les mêmes que ceux de  $arg_1$ , on peut donc se référer à la partie précédente pour les comprendre.

Les constantes recommandées par Menter pour ce nouveau modèle  $k-\omega$  ne changent que légèrement par rapport aux précédentes (cf. (3.50)) :

$$\sigma_{k1} = 0,85 \quad , \quad \sigma_{\omega1} = 0,5 \quad , \quad \beta_1 = 0,075 \quad (3.52)$$

## 3.4 Critères de transition

Les modèles RANS ne calculent pas assez d'échelles de turbulence pour prédire la transition d'une couche limite laminaire vers une couche limite turbulente. Pour palier à ce problème,



**Figure 3. Blending function  $F_2$  versus  $y/\delta$  For different velocity profiles.**

FIGURE 3.3 Forme de la fonction  $F_2$  pour différents profils de vitesses [81]

des critères de transitions ont été développés. Principalement deux méthodologies ont été appliquées. La première détermine la position de la transition en se basant sur la théorie de la stabilité locale de la couche limite. On détermine donc à chaque itération du calcul la position de la transition en faisant une analyse de stabilité locale. En pratique, comme on le verra, on évite de faire ce calcul coûteux en se basant sur des corrélations expérimentales. La seconde est d'utiliser des équations de transport pour une quantité purement numérique qui décrit l'état de la couche limite qui sera de l'ordre de 0 là où la couche limite doit être laminaire, et de 1 quand celle-ci doit être turbulente puis de pondérer les termes de production de turbulence par cette quantité. Dans cette section, nous détaillerons le modèle AHD-GL ([7], [49], [38] [26] ,[10] et [27]) , qui est inspiré de la stabilité locale d'une couche limite, et le modèle par équation de transport  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  ([68], [66], [67] et [82]).

### 3.4.1 Critère AHD-GL

Ce critère a été dans un premier temps développé en incompressible. Il est basé sur l'analyse de stabilité d'une couche limite. Ainsi pour le présenter, nous rappelons d'abord les bases de l'analyse de stabilité locale.

#### La méthode du facteur n

Les équations de Navier Stokes incompressibles adimensionnées sont

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.53)$$

et

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.54)$$

Regardons comment se développe une petite perturbation  $(u'_i, p')$  des solutions stationnaires à ce système  $((U_i, P))$ . On note donc  $u_i = U_i + u'_i$  et  $p = P + p'$ . L'équation linéarisée satisfaite par les perturbations est

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.56)$$

L'hypothèse de la stabilité locale est alors de considérer un écoulement parallèle. En 2D, ceci implique de supposer  $V = 0$  et  $U(y)$ . Ainsi les équations deviennent

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v'}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.59)$$

Ce système d'équation est à coefficients indépendants de  $x$  et de  $t$ . La solution est donc de la forme  $c' = \hat{c}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}$ . Deux théories de stabilité sont possibles. La première est la théorie temporelle. Elle suppose que  $\alpha$  est réel et  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ .  $\omega_i$  est le coefficient d'amplification de la perturbation. S'il est positif, l'écoulement est instable, s'il est négatif, il est stable. La seconde théorie est la théorie spatiale. Cette fois,  $\omega$  est réel et  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ . Dans ce cas, l'onde est instable si  $\alpha_i < 0$  et stable si  $\alpha_i > 0$ . Dans une couche limite les instabilités se développent spatialement (instabilité convective). C'est donc cette seconde théorie qui est privilégiée.

Pour déterminer la position de transition, on peut regarder le maximum d'amplification à une position  $X$

$$\left( \frac{A}{A_0} \right) = \max_{\omega} \left( \exp \int_{X_0}^X -\alpha_i(x, \omega) dx \right) \quad (3.60)$$

où  $A$  est l'amplitude du mode en  $X$  et  $A_0$  l'amplitude en  $X_0$ . On dit alors que la transition est déclenchée quand ce rapport est supérieur ou égale à un seuil  $e^{n_T}$ . Mack [73] a déterminé expérimentalement sur la plaque plane le seuil  $n_T$  en fonction du taux de turbulence de l'écoulement et a élaboré la corrélation suivante entre  $n_T$  et  $T_u$ .

$$n_T = -8.43 - 2.4 \ln(T_u) \quad (3.61)$$

avec

$$T_u = \left[ \frac{\langle u'^2 \rangle_e + \langle v'^2 \rangle_e + \langle w'^2 \rangle_e}{3u_e^2} \right]^{1/2} \quad (3.62)$$

où l'indice  $e$  signifie que ces quantités sont évaluées à l'extérieur de la couche limite. Cette relation est valable jusqu'à  $M = 1.6$ . Elle est d'usage courant pour déterminer  $n_T$  connaissant  $T_u$ .

### Critère AHD

Pour éviter de faire une analyse de stabilité de la couche limite, Arnal et al. [7] proposent d'utiliser la solution de Falkner-Skan. Dans le cas d'un écoulement laminaire, incompressible, stationnaire et bidimensionnel, les équations de la couche limite sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.63)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.65)$$

avec  $u = 0$  et  $v = 0$  à la paroi et  $u = u_e(x)$  en  $x = x_0$  et  $u(x_0, y) = u_0(y)$  loin de la paroi. Avec  $u_e = kx^m$ , les équations se ramènent à une équation différentielle ordinaire. Cette forme d'écoulement extérieur est celle d'un dièdre d'angle  $\pi\beta = \pi \frac{2m}{m+1}$ . En cherchant une solution de la forme  $\frac{u}{u_e} = f'(\eta)$  avec  $\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{u_e}{\nu x}}$ . Les équations se ramènent à

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f^2) = 0 \quad (3.66)$$

avec  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  et  $f'(\infty) = 1$ . Pohlhausen propose de chercher la solution sous une forme polynômiale

$$\frac{u}{u_e} = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^5 \quad (3.67)$$

avec  $\zeta = \frac{y}{\delta}$ , où  $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite. On détermine les 5 constantes en rajoutant les contraintes en  $\zeta = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . En  $y = 0$ , on rajoutant  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u_e \frac{\partial u_e}{\partial x}$ , qui vient de l'équation de quantité de mouvement à la paroi. La solution est alors

$$\frac{u}{u_e} = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{\Lambda}{6}\zeta(1 - \zeta)^3 \quad (3.68)$$

avec  $\Lambda = \frac{-\delta^2}{\nu} \frac{\partial u_e}{\partial x}$  est appelé le paramètre de Pohlhausen. On voit ici que les solutions ne dépendent que de la position (valeur de  $u_e(x)$ ) et du paramètre de Pohlhausen. Ainsi, le facteur d'amplification peut être exprimé par

$$\left( \frac{A}{A_c} \right)_{\max} = e^{n(R_\theta - R_{\theta_c}, \Lambda_\theta)} \quad (3.69)$$

où  $R_\theta$  est le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  définie par

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy. \quad (3.70)$$

$\theta_c$  est l'épaisseur de quantité de mouvement à la première position où la couche limite devient instable. La transition a lieu lorsque  $n_T = n(R_{\theta_T} - R_{\theta_c}, \Lambda_{\theta_T})$  où l'indice 'T' indique la position  $x_T$  de la transition. Ainsi d'après la relation de Mack (3.61), le Reynolds à la position de la transition  $R_{\theta_T}$  est une fonction du taux de turbulence extérieur  $T_u$  et du paramètre de Pohlhausen

$$R_{\theta_T} - R_{\theta_c} = g(\Lambda_{\theta_T}, T_u). \quad (3.71)$$

Cette relation n'est valable que pour les écoulements auto-similaires. Elle peut être généralisée en prenant la moyenne des paramètres de Pohlhausen

$$\lambda_\theta = \frac{1}{s - s_c} \int_{s_c}^s \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial u_e}{\partial s} ds \quad (3.72)$$

avec l'abscisse curviligne  $s$ ,  $s_c$  étant l'abscisse curviligne correspondant à  $R_{\theta_c}$ . Les relations (3.61 et 3.69) permettent alors d'obtenir, d'après Arnal et al. [7]

$$R_{\theta_T} - R_{\theta_c} = -206 \exp(27.5 \lambda_{\theta_T}) [\ln(16.8 T_u) - 2.77 \lambda_{\theta_T}] \quad (3.73)$$

Arnal et al. [7] détermine  $R_{\theta_c}$  et  $s_c$  par un nombre de Reynolds fictif

$$R_{\theta_{c,f}} = \exp \left[ \frac{52}{H_i} - 14.8 \right] \quad (3.74)$$

avec

$$H_i = 4.02923 - \sqrt{-8838.4 \Lambda^4 + 1105.1 \Lambda^3 - 67.962 \Lambda^2 + 17.574 \Lambda + 2.0593} \quad (3.75)$$

le facteur de forme de la couche limite,  $H_i = \frac{\delta^*}{\theta}$  avec

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (3.76)$$

l'épaisseur de déplacement.

Ce modèle présenté comme ceci n'est valable que pour un écoulement incompressible et pour des taux de turbulence où la transition se produit par instabilité convective de la couche limite c'est à dire  $T_u \lesssim 1\%$ . Au delà de ce taux de turbulence, la transition se produit par contamination de la couche limite par la turbulence extérieure (transition by-pass). Ce modèle est aussi limité aux cas de gradient de pression modéré, sans décollement de la couche limite.



### Critère de Gleyzes

Dans le cas des forts gradients de pression, Gleyzes [49] propose un autre critère, basé aussi sur la solution de Falkner-Skan. Il propose un facteur  $n$  de la forme

$$n(s) = \int_{R_{\theta_c}}^{R_{\theta}} \frac{-2.4}{B(H_i)} dR_{\theta} \quad (3.77)$$

avec

$$B = \begin{cases} \frac{-162.11093}{H_i^{1.1}} & \text{si } 3.36 < H_i \\ -73 \exp[-1.56486(H_i - 3.02)] & \text{si } 2.8 < H_i < 3.36 \\ -103 \exp[-4.12633(H_i - 2.8)] & \text{si } H_i < 2.8 \end{cases} \quad (3.78)$$

Ce critère n'est valable que pour les forts gradients de pression. Dans ce cas,  $\alpha_i$  est peu dépendant de la fréquence, ce qui légitime l'expression (3.77).

### Combinaison des critères AHD et Gleyzes

Le critère AHD est adapté dans le cas des faibles gradients et celui de Gleyzes au cas des couches limites décollées. Afin de bénéficier des qualités des deux critères une combinaison de ceux-ci à été proposée par Cliquet [27]. L'idée est de regarder la valeur du facteur de forme  $H_i$ . Si cette fonction dépasse une valeur limite  $H_{rac}$  on passe du critère AHD au critère de Gleyzes. Si  $\theta_{rac}$  est l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite à l'abscisse où  $H_i = H_{rac}$ , on définit le facteur  $n$

$$n(s) = n_{rac} + \int_{R_{\theta_{rac}}}^{R_{\theta}} \frac{-2.4}{B(H_i)} dR_{\theta} \quad (3.79)$$

$n_{rac}$  est le facteur  $n$  déterminé en posant  $\theta_T = \theta_{rac}$  et  $T_u$  dans le critère AHD. Cette combinaison revient donc à considérer le modèle AHD le long de la couche limite attachée, puis quand le gradient de pression est trop élevé, à passer au critère de Gleyzes en prenant comme facteur  $n$  initial celui donné par le critère AHD au point de raccordement.

### Extension aux écoulements compressibles

Les critères explicités précédemment, ne sont valables que pour des écoulements incompressibles. Afin d'étendre ces modèles au régime compressible, Dumoulin [38] propose de considérer les constantes du modèle comme des fonctions du Mach. Ainsi, partant de (3.73)

$$R_{\theta_T} - R_{\theta_c} = A(M_e) \exp(B(M_e)\lambda_{\theta_T}) [\ln(C(M_e)T_u) - D(M_e)\lambda_{\theta_T}] \quad (3.80)$$

avec

$$R_{\theta_c} = \exp \left[ \frac{E(M_e)}{H_i} - F(M_e) \right] \quad (3.81)$$

et  $H_i = I_1(M_e)\lambda^3 + I_2(M_e)\lambda^2 + I_3(M_e)\lambda + I_4(M_e)$ , avec  $I_i$  des polynômes en fonction du Mach (voir Arnal et al. [10] pour l'expression de ces polynômes).

### Lien entre le modèle RANS et le critère de transition

Nous avons des modèles de turbulence et des critères de transition, la question est maintenant comment intégrer le déclenchement de la turbulence aux équations RANS. Dans le cas du modèle AHD, cette liaison est faite en remplaçant la viscosité  $\mu_t$  par  $\gamma\mu_t$ , où  $\mu_t$  est la viscosité turbulente toujours calculée par les équations de fermeture, et  $\gamma$  est une fonction d'intermittence numérique déterminée par le critère. Elle vaut 0 quand la couche limite est laminaire et 1 quand elle est totalement turbulente. Dans le code elsA de l'ONERA, la fonction  $\gamma(x)$  peut être soit une fonction parabolique, soit une marche montante, au choix de l'utilisateur. Pour une fonction parabolique continue, la position de fin de transition est déterminée à l'aide de la relation  $R_{\theta_{out}} = 2.667R_{\theta_T}$  proposée par Abu-Ghannam [2].

D'un point de vue de la résolution numérique, à chaque pas de temps où le calcul de la transition est demandé, on recalcule la position de la transition à l'aide de l'équation (3.81). La fonction  $\gamma$  introduite dans les équations RANS est alors modifiée.

Dans le cas du modèle de Spalart-Allmaras, le terme de production de l'équation de fermeture n'est pas nul dans la région laminaire. Afin d'éviter la production de viscosité turbulente dans la couche limite laminaire, le terme de production est aussi multiplié par l'intermittence, ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\nu_t}{Dt} &= \gamma C_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\rho\tilde{\nu} + \gamma \frac{C_{b2}}{\sigma} \mathbf{grad}\rho\tilde{\nu} \cdot \mathbf{grad}\tilde{\nu} \\ &- \gamma(C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{K^2}f_{t2})\rho\frac{\tilde{\nu}^2}{\eta^2} + \frac{1}{\sigma} \text{div}((\mu + \rho\tilde{\nu})\mathbf{grad}\tilde{\nu}). \end{aligned} \quad (3.82)$$

#### 3.4.2 Modèle de Langtry

Menter et Langtry ([66], [82], [68] et [67]) proposent un modèle de transition basé sur des équations de transport. Cette approche est efficace dans le sens où elle est adaptée aux méthodes de résolutions d'équations de transport RANS. Concrètement, il s'agit de faire un modèle RANS avec une fermeture à quatre équations, deux qui modélisent la turbulence, et deux qui déterminent la transition. Ce modèle particulier rajoutent deux équations au modèle  $k - \omega$  SST de Menter décrit plus tôt (partie 3.3.2). La première équation transporte une quantité qui est nommée intermittence (c'est là encore une intermittence numérique), qui vaut de l'ordre de 0 dans la couche limite laminaire et de l'ordre de 1 dans la couche limite turbulente. La deuxième variable quant à elle est là pour déterminer la position de la transition et est appelée le nombre de Reynolds de transition  $\overline{R_{\theta_t}}$ . Cette quantité est forcée par les équations de transport à avoir une certaine valeur à l'extérieur de la couche limite qui

est déterminée par une corrélation expérimentale. L'équation de transport permet ensuite l'advection-diffusion de cette information au sein de la couche limite. On dispose ainsi en chaque cellule de calcul du nombre de Reynolds de transition, que l'on vient opposer au nombre de Reynolds  $Re_\theta$  local. Quand le nombre de Reynolds local dépasse le nombre de Reynolds de transition, l'activation d'un terme de production d'intermittence est amorcée. L'intermittence ainsi produite se répand dans la couche limite par l'intermédiaire de la première équation de transport et vient activer en aval du point de transition les termes de production d'énergie turbulente du modèle de turbulence utilisé.

Nous détaillerons dans la suite le fonctionnement de ces différentes équations de transport ainsi que le couplage du modèle de transition avec le modèle  $k - \omega$  SST.

### 3.4.3 Équation de transport pour l'intermittence

La première équation de transport proposée par Menter et Langtry [68] concerne l'intermittence,  $\gamma$ . Son expression est la suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \gamma)}{\partial x_j}}_{(1)} = \underbrace{P_\gamma}_{(2)} - \underbrace{E_\gamma}_{(3)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right)}_{(4)}, \quad (3.83)$$

avec :  $U_j$  la vitesse moyenne dans la direction  $j$ ,  $\rho$  la masse volumique,  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\mu_t$  la viscosité dynamique turbulente.

Le terme (1) de l'équation (3.83) représente l'advection de l'intermittence par l'écoulement moyen. Le terme (4) représente sa diffusion par la viscosité. Ce sont ces deux termes qui permettent à l'intermittence de se répandre dans l'écoulement.

Le terme (2) est le terme de production d'intermittence. Il est défini de la façon suivante :

$$P_\gamma = F_{length} c_{a1} \rho S (\gamma F_{onset})^{0,5} (1 - c_{e1} \gamma), \quad (3.84)$$

où  $S$  est la norme du tenseur du taux de déformation. La fonction  $F_{onset}$  assure que ce terme soit nul dans la couche limite laminaire et actif ailleurs. Cette fonction est basée sur le rapport entre le nombre de Reynolds de vorticité  $R_\nu$  et un nombre de Reynolds critique  $R_{\theta_c}$  qui est

une fonction de  $\overline{R_{\theta_t}}$ , la deuxième variable du modèle. Plus précisément,

$$R_\nu = \frac{\rho y^2 |S|}{\mu} \quad (3.85)$$

$$F_{onset1} = \frac{R_\nu}{2,193 R_{\theta_c}} \quad (3.86)$$

$$F_{onset2} = \min \left( \max \left( F_{onset1}, F_{onset1}^4 \right), 2, 0 \right) \quad (3.87)$$

$$R_T = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (3.88)$$

$$F_{onset3} = \max \left( 1 - \left( \frac{R_T}{2,5} \right)^3, 0 \right) \quad (3.89)$$

$$F_{onset} = \max (F_{onset2} - F_{onset3}, 0) \quad (3.90)$$

$F_{onset}$  doit être nulle dans la région laminaire et augmenter quand cette position est atteinte. Son fonctionnement est le suivant,  $F_{onset1}$  compare le Reynolds de vorticité au Reynolds critique. Quand elle dépasse 1, ie. quand  $R_\nu > 2.193 \times R_{\theta_c}$ , la transition doit être déclenchée. La vitesse du déclenchement est contrôlée par  $F_{onset2}$  qui limite la valeur de  $F_{onset}$  grâce au min, et l'accélère quand  $F_{onset1} > 1$  avec  $\max(F_{onset1}, F_{onset1}^4)$ .  $F_{onset3}$  est le terme qui compare la viscosité turbulente (avant la correction SST) et la viscosité laminaire. Quand  $\mu_t > 2.5\mu$ , ce terme est nul.  $F_{onset3}$  permet donc de pénaliser  $F_{onset2}$  dans la couche limite laminaire.

La fonction  $F_{length}$  du terme de production de  $\gamma$  dans (3.84) permet de régler la longueur de la zone de transition. Tout comme  $R_{\theta_c}$ ,  $F_{length}$  est issue d'une corrélation du type :

$$F_{length} = f(\overline{R_{\theta_t}}).$$

C'est au travers de ces deux fonctions ( $R_{\theta_c}$  et  $F_{length}$ ) qu'interviennent les mécanismes physiques de la transition. En effet, les deux équations de transport pour  $\gamma$  et  $\overline{R_{\theta_t}}$  ne sont que des artifices numériques permettant au modèle RANS de modéliser la transition.

Le terme  $(1 - c_{e1} \gamma)$  dans l'expression du terme (3.84) de production de  $\gamma$  est simplement un terme de rappel pour majorer  $\gamma$  par 1, la constante  $c_{e1}$  étant fixée à 1. En effet, si  $\gamma > 1/c_{e1}$  ce terme devient un terme de destruction.

Enfin, le terme (3) de l'équation de transport de  $\gamma$  est un terme de destruction. Il permet de garder l'intermittence proche de zéro au sein de la couche limite laminaire et de la faire baisser lors d'une éventuelle relaminarisation de la couche limite turbulente. En voici l'expression :

$$E_\gamma = c_{a2} \rho \Omega \gamma F_{turb} (c_{e2} \gamma - 1), \quad (3.91)$$

avec  $\Omega$  la norme de la vorticité. La fonction  $F_{turb}$  inhibe la dissipation de  $\gamma$  à l'extérieur de la couche limite ainsi que dans la sous-couche visqueuse :

$$F_{turb} = e^{-(\frac{R_T}{4})^4}. \quad (3.92)$$

Afin d'éviter que les termes de production de turbulence mettent trop de temps à s'activer, on limite  $\gamma$  à un seuil non nul (0.02 en pratique). Ceci est réalisé via le terme  $(c_{e2}\gamma - 1)$  : si  $c_{e2}\gamma < 1$  alors  $E_\gamma$  est négatif, c'est-à-dire qu'il devient un terme de production de  $\gamma$ . Un seuil  $\gamma \geq 0.02$  correspond à  $c_{e2} = 50$ .

Les constantes pour l'équation de transport de l'intermittence sont :

$$c_{a1} = 2,0 ; \quad c_{a2} = 0,06 ; \quad c_{e1} = 1,0 ; \quad c_{e2} = 50 ; \quad \sigma_f = 1,0. \quad (3.93)$$

Lors d'un calcul, on utilisera les conditions aux limites suivantes :

- Amont : Condition de Dirichlet,  $\gamma = 1$  ;
- Aval : Condition de Neumann,  $\frac{\partial \gamma}{\partial n} = 0$  ;
- Parois : Condition de Neumann,  $\frac{\partial \gamma}{\partial n} = 0$  ;
- Infini : Condition de Dirichlet,  $\gamma = 1$ .

#### 3.4.4  quation de transport pour $\overline{R_{\theta_t}}$

Afin de prévoir la transition, le calcul du nombre de Reynolds de transition doit prendre en compte au moins le taux de turbulence et le gradient de pression à l'extérieur de la couche limite. Comme on a vu dans le critère basé sur la stabilité locale, AHD, ce sont les deux paramètres nécessaires à la détermination de la transition. Menter et Langtry [82] proposent de calculer le nombre de Reynolds de transition dans les cellules de calcul situées au niveau de la frontière de la couche limite et de propager sa valeur dans la couche limite par l'intermédiaire d'une équation de transport afin de limiter les temps de calcul.

On écrit ainsi une équation de transport pour la grandeur  $\overline{R_{\theta_t}}$  :

$$\underbrace{\frac{\partial (\rho \overline{R_{\theta_t}})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_j \overline{R_{\theta_t}})}{\partial x_j}}_{(1)} = \underbrace{P_{\theta_t}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta_t} (\mu + \mu_t) \frac{\partial \overline{R_{\theta_t}}}{\partial x_j} \right]}_{(3)}, \quad (3.94)$$

avec :

$$P_{\theta_t} = c_{\theta_t} \frac{\rho}{t_P} \left( R_{\theta_t} - \overline{R_{\theta_t}} \right) (1,0 - F_{\theta_t}) \quad (3.95)$$

où  $t_P$  est une échelle de temps, introduite à la suite d'une analyse dimensionnelle, et où  $c_{\theta_t}$  sert à pondérer l'amplitude du terme source :

$$\begin{aligned} t_P &= \frac{500 \mu}{\rho U^2} \\ c_{\theta_t} &= 0,03 \end{aligned}$$

Le terme (1) de l'équation (3.94) représente l'advection de  $\overline{R_{\theta_t}}$  par l'écoulement moyen. Le terme (3) représente la diffusion de  $\overline{R_{\theta_t}}$  par la viscosité. Grâce à ces deux termes, le nombre de Reynolds de transition est propagé au sein de la couche limite. Le terme de production (2) n'est actif qu'à l'extérieur de la couche limite (grâce à la fonction  $F_{\theta_t}$ ). Il permet de forcer  $\overline{R_{\theta_t}}$  à être égal à la valeur locale de  $R_{\theta_t}$  (le Reynolds de transition basé sur le taux de turbulence et de gradient du pression) à l'extérieur de la couche limite (la méthode pour déterminer  $R_{\theta_t}$  est décrite plus loin). C'est par le biais de cette égalité que l'on fait intervenir le « vrai » nombre de Reynolds de transition. La fonction  $F_{\theta_t}$  est écrite de sorte que sa valeur soit 1 dans la couche limite et 0 à l'extérieur :

$$F_{\theta_t} = \min \left[ \max \left( F_{wake} \exp \left[ - \left( \frac{y}{\delta} \right)^4 \right], 1.0 - \left( \frac{\gamma - 1/c_{e2}}{1 - 1/c_{e2}} \right)^2 \right), 1.0 \right] \quad (3.96)$$

$$\theta_{BL} = \frac{\overline{R_{\theta_t}} \mu}{\rho U}; \quad \delta_{BL} = \frac{15}{2} \theta_{BL}; \quad \delta = \frac{50 \Omega y}{U} \delta_{BL}$$

La fonction  $F_{wake}$  est introduite afin que la fonction  $F_{\theta_t}$  reste inactive dans les zones de sillage :

$$\begin{aligned} F_{wake} &= \exp \left[ - \left( \frac{R_\omega}{10^5} \right)^2 \right] \\ R_\omega &= \frac{\rho \omega y^2}{\mu} \end{aligned} \quad (3.97)$$

La constante  $\sigma_{\theta_t}$  du terme (3) de l'équation (3.94) permet de régler l'influence relative de la diffusion de  $\overline{R_{\theta_t}}$  depuis l'extérieur de la couche limite face à l'effet d'histoire de la couche limite. Deux valeurs sont usuellement employées :  $\sigma_{\theta_t} = 10$  (cf Menter [82]) et  $\sigma_{\theta_t} = 2$  (cf. Langtry [67]).

### 3.4.5 Modélisation de la transition par bulbe de décollement

Le modèle ainsi présenté est décevant dans les cas d'écoulement présentant un bulbe de décollement. Le défaut principal est que les bulbes sont prédits trop longs. Langtry associe cela à un niveau trop faible d'énergie cinétique turbulente au sein du bulbe, ce qui induit ainsi un recollement trop tardif. Comme on l'a vu précédemment, dans le cas du critère AHD il fallait accélérer la vitesse de transition dans la bulle de décollement en utilisant le critère de Gleyzes. Dans le cadre du modèle par équation de transport, Langtry et al. [67] propose une

correction portant directement sur les niveaux d'intermittence en lui permettant de dépasser 1 quand il y a un décollement :

$$\gamma_{sep} = \min \left( s_1 \max \left[ 0, \left( \frac{R_\nu}{3,235 R_{\theta_c}} \right) - 1 \right] F_{reattach}, 2 \right) F_{\theta_t} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} F_{reattach} &= e^{-\left(\frac{R_T}{20}\right)^4} \\ \gamma_{eff} &= \max(\gamma, \gamma_{sep}) \\ s_1 &= 2 \end{aligned} \quad (3.99)$$

où  $s_1$  est une constante qui contrôle la taille du bulbe. La fonction  $F_{reattach}$  permet de ne pas prendre en compte cette modification si la viscosité turbulente est assez importante pour contrôler le recollement. La fonction  $F_{\theta_t}$  est celle définie précédemment et permet d'inhiber la correction à l'extérieur de la couche limite. La constante 3.235 est issue de la relation entre  $R_\nu$  et  $R_{\theta_c}$  pour un facteur de forme ( $H$ ) de 3.5 (facteur de forme proche de celui du point de décollement - cf. Langtry[67]).

### 3.4.6 Fonctions de corrélation utilisées dans le modèle $\gamma$ - $\overline{R_{\theta_t}}$

Il reste à expliciter les corrélations  $F_{length}$  et  $R_{\theta_c}$  qui sont des fonctions de  $\overline{R_{\theta_t}}$  ainsi que d'expliquer comment on calcule le nombre de Reynolds de transition.

#### Calcul du nombre de Reynolds de transition

Pour calculer le nombre de Reynolds de transition, une corrélation empirique est utilisée, basée sur le taux de turbulence  $T_u$  et le paramètre de Pohlhausen (gradient de pression)  $\lambda_\theta$  à la frontière de la couche limite. La définition de ces deux paramètres est la suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_\theta &= \frac{\rho \theta^2}{\mu} \frac{d|U|}{ds} \\ T_u &= 100 \frac{\sqrt{2k/3}}{|U|} \end{aligned}$$

Le terme  $d|U|/ds$  est calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |U| &= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ \frac{d|U|}{dx} &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)^{-0.5} \left[ 2u \frac{du}{dx} + 2v \frac{dv}{dx} + 2w \frac{dw}{dx} \right] \\ \frac{d|U|}{dy} &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)^{-0.5} \left[ 2u \frac{du}{dy} + 2v \frac{dv}{dy} + 2w \frac{dw}{dy} \right] \\ \frac{d|U|}{dz} &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)^{-0.5} \left[ 2u \frac{du}{dz} + 2v \frac{dv}{dz} + 2w \frac{dw}{dz} \right] \\ \frac{d|U|}{ds} &= \left[ \left( \frac{u}{U} \right) \frac{dU}{dx} + \left( \frac{v}{U} \right) \frac{dU}{dy} + \left( \frac{w}{U} \right) \frac{dU}{dz} \right] \end{aligned} \quad (3.100)$$

Pour estimer  $R_{\theta_t}$ , on peut utiliser la corrélation d'Abu-Ghannam et Shaw [2] :

$$\begin{cases} R_{\theta_t} = 163 + \exp\left(F(\lambda_\theta) - \frac{T_u}{6,91} F(\lambda_\theta)\right) \\ F(\lambda_\theta) = 6,91 + 2,48\lambda_\theta - 12,27\lambda_\theta^2 \text{ si } \lambda_\theta \leq 0 \\ F(\lambda_\theta) = 6,91 + 12,75\lambda_\theta + 63,64\lambda_\theta^2 \text{ si } \lambda_\theta > 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

Langtry [66] propose une corrélation proche, avec de légères améliorations pour les faibles taux de turbulence :

$$\begin{cases} R_{\theta_t} = \left(1173,51 - 589,428 T_u + \frac{0,2196}{T_u^2}\right) F(\lambda_\theta) \text{ si } T_u \leq 1,3 \\ R_{\theta_t} = 331,5 (T_u - 0,5658)^{-0,671} F(\lambda_\theta) \text{ si } T_u > 1,3 \\ F(\lambda_\theta) = 1 - (-12,986\lambda_\theta - 123,66\lambda_\theta^2 - 405,689\lambda_\theta^3) \exp\left(-\left[\frac{T_u}{1,5}\right]^{1,5}\right) \text{ si } \lambda_\theta \leq 0 \\ F(\lambda_\theta) = 1 + 0,275 [1 - \exp(-35,0\lambda_\theta)] \exp\left(\frac{-T_u}{0,5}\right) \text{ si } \lambda_\theta > 0 \end{cases} \quad (3.102)$$

Cette corrélation doit être utilisée avec les limiteurs suivants pour des raisons de robustesse de calcul :

$$-0,1 \leq \lambda_\theta \leq 0,1$$

$$T_u \geq 0,027\%$$

$$R_{\theta_t} \geq 20$$

L'épaisseur de couche limite étant inconnue à la cellule de calcul, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} R_{\theta_t}(\lambda_{\theta_t}, T_u) = \frac{\rho U \theta_t}{\mu} \\ \lambda_{\theta_t} = \frac{\rho \theta_t^2}{\mu} \cdot \frac{dU}{ds} \end{cases} \quad (3.103)$$

Pour cela, Langtry [1] propose une méthode de tir et Content [28] une méthode explicite. La méthode de Content étant plus rapide sur des cas complexes, elle sera utilisée dans nos travaux.

**Second limiteur sur  $T_u$  :** En calcul RANS, on est parfois obligé d'imposer une valeur importante de  $\omega$  en frontière du domaine. Ceci donne lieu à des valeurs de  $Tu$  trop faibles en frontière de couche limite. Content propose ainsi trois limiteurs basés sur les grandeurs de



référence :

$$\begin{aligned}
 T_u &= \max \left( 100 \frac{\sqrt{2k/3}}{U}, T_{u_{lim}} \right) \\
 T_{u_{lim}} &= T_{u_{ref}} ; \text{ conservation de } T_u \\
 T_{u_{lim}} &= T_{u_{ref}} \frac{|U|_{ref}}{|U|} ; \text{ conservation de } T_u \cdot k \\
 T_{u_{lim}} &= T_{u_{ref}} \left( \frac{|U|_{ref}}{|U|} \right)^{\frac{3}{2}} ; \text{ conservation de } \sqrt{k \cdot U}
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

**Prise en compte de la compressibilité :** Le modèle ainsi présenté est surtout adapté aux calculs basse vitesse, le nombre de Mach n'excédant pas 1.06 dans les travaux de Langtry [66]. Hors les effets de compressibilité sur la transition sont importants au delà  $M = 1$ . Pour les calculs haute vitesse sur paroi athermane, Content [28] propose de pondérer le nombre de Reynolds de transition calculé avec la relation (3.102) de Langtry ( $R_{\theta_{tincp}}$ ) par un facteur correctif issu de l'analyse de solutions de similitude en compressible :

$$R_{\theta_t} = R_{\theta_{tincp}} \cdot \max \left[ 1, e^{(0.15+0.03N)} M^{(0.3+0.33N)} \right] \tag{3.105}$$

$N$  étant calculé par la relation de Mack, rappelée ci-dessous.

$$N = -8.43 - 2,4 \cdot \ln(Tu).$$

La relation de Mack est valable que pour des taux de turbulence inférieurs à 1% et des Mach inférieur à 1.6. Cette correction pourra être utilisée dans la suite.

### Expressions du couple de fonctions ( $F_{length}, R_{\theta_c}$ )

Il reste maintenant à exprimer les corrélations expérimentales déterminant la longueur de la zone de transition  $F_{length}$  et sa position  $R_{\theta_c}$  en fonction du nombre de Reynolds  $\overline{R_{\theta_t}}$ . Un grand nombre de ces fonctions sont disponibles dans la littérature. On se limitera ici à la fonction déterminée par Content [28] qui est celle utilisée avec  $\sigma_{\theta_t} = 10$ .

$$\begin{aligned}
 F_{length} &= \max[1 \cdot 10^{-4} ; \exp(-1,325 \cdot 10^{-8} \overline{R_{\theta_t}}^3 + 7,42 \cdot 10^{-6} \overline{R_{\theta_t}}^2 \\
 &\quad + 8,6 \cdot 10^{-3} \overline{R_{\theta_t}} + 2,5652)]
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$R_{\theta_c} = \min[1, 0 ; 1,623 \cdot 10^{-6} \overline{R_{\theta_t}}^2 - 1,228 \cdot 10^{-3} \overline{R_{\theta_t}} + 0,849] \overline{R_{\theta_t}} \tag{3.107}$$

#### 3.4.7 Couplage avec $k - \omega$

La position de la transition et sa longueur étant maintenant déterminées, il reste à transmettre l'information dans le modèle de turbulence afin qu'il produise de l'énergie cinétique turbulente au moment opportun. Pour ce faire, on remplace le terme de production

de  $k$  dans (3.44) par  $\tilde{P}_k = \gamma_{eff} P_k$  et le terme de destruction par

$$\tilde{D}_k = \min(\max(\gamma_{eff}, 0.1), 1.0) D_k \quad (3.108)$$

où  $\gamma_{eff}$  est défini a l'équation (3.99). On remplace aussi la fonction de raccord  $F_1$  du modèle BSL de Menter par

$$\tilde{F}_1 = \max(F_1, F_3) \quad (3.109)$$

avec

$$F_3 = \exp \left[ - \left( \frac{\rho y \sqrt{k}}{120 \mu} \right)^8 \right] \quad (3.110)$$

Cette correction permet de rendre  $\tilde{F}_1$  non nulle dans la couche limite laminaire. Pour que la correction SST ne soit présente que dans la couche limite turbulente, on remplace la viscosité turbulente par

$$\tilde{\mu}_t = \min \left( \frac{\rho k}{\omega}, \frac{0.31 \rho k}{S F_2 \min(\gamma_{eff}, 1.0)} \right) \quad (3.111)$$



## Chapitre 4

# Analyse de stabilité globale, de résolvant et adjoint

Dans ce chapitre nous allons détailler différents types d'analyse telles que l'analyse de stabilité globale, la recherche de l'adjoint et l'analyse du résolvant. Comme nous allons le voir par la suite, ces trois analyses sont basées sur la linéarisation des équations décrivant l'écoulement (RANS dans le cas présent). Différentes questions restent ouvertes concernant ces analyses dans le cadre d'un écoulement turbulent. Par exemple, si l'on regarde la littérature en incompressible sur le cas du cylindre en D dans des régimes turbulents, deux écoles s'affrontent. Dans un premier temps, Meliga et al. [80] fait une analyse de stabilité autour d'un champ moyen (moyenne temporelle d'une simulation 2D-URANS). L'analyse de stabilité globale a permis de prédire convenablement les fréquences instables. Une analyse de sensibilité lui a aussi permis de proposer des moyens de contrôle passif. Dans ces études, la variation de la viscosité turbulente a été prise en compte dans les équations des perturbations. Cependant une étude réalisée par Mettot et al. [85] a montré que faire ces mêmes analyses autour d'un champs 3D-URANS moyenné en temps et en la troisième dimension et ce sans prendre en compte la viscosité turbulente, abouti a des prédictions légèrement plus proches des résultats expérimentaux. La conclusion de l'article est que la prise en compte du modèle de turbulence a moins d'impact que la bonne prédiction du champ moyen sur les résultats de stabilité. Cependant, il apparaît que prendre en compte la viscosité turbulente et sa variation soit nécessaire à l'explication du phénomène de tremblement de choc comme instabilité globale (Crouch et al.[29]). La prise en compte de la tension de Reynolds turbulente dans les équations des perturbations est donc une des questions aujourd'hui encore non tranchée.

- Quand cette tension est négligée, nous parlerons d'analyse  $\mu$ -laminaire.
- Si elle est prise en compte, la question est de savoir si on peut la considérer comme constante (on parlera alors d'analyse  $\mu_t$ -figé)

- Si on la fait varier, dans ce cas la question est comment modéliser cette variation ? On parlera dans ce dernier cas de système complet.
- Dans le cadre d'un modèle RANS avec un critère de transition, on peut aussi être tenté de faire varier la viscosité turbulente sans changer la position de la transition (on parlera de  $\gamma$  figé). En effet, ces critères sont souvent non différentiables.

Enfin, une autre question posée est le champ porteur pour la linéarisation. Faut-il prendre une solution stationnaire des équations de Navier Stokes ou RANS (on parlera de champs de base), ou bien doit-on étudier le voisinage d'un champ instationnaire moyenné en temps ? On parlera dans ce dernier cas d'une analyse sur le champ moyen. Afin d'appréhender ces problématiques, Reynolds et al. [98] proposent de regarder, à l'aide d'une décomposition triple, des instationnarités, ou ondes organisées, de fréquences découplées de celles de la turbulence fine et ce autour d'un champ moyen des équations de Navier Stokes incompressibles. La première partie de ce chapitre reprend cette approche et y rajoute les équations pour l'énergie cinétique turbulente qui apparaît dans les équations RANS (voir le chapitre 3). La seconde partie s'intéressera à l'analyse autour d'un champ moyen obtenu avec une simulation URANS. On trouvera les équations satisfaites par ce champ moyen, et celles satisfaites par l'onde organisée. On pourra alors, dans un troisième temps, comparer les équations obtenues par les deux approches précédentes afin de comprendre quels termes de l'approche URANS modélisent quels termes des équations de l'onde organisée obtenues à partir des équations de Navier Stokes. Grâce à cette comparaison, nous donnerons, dans une quatrième partie, des interprétations et des limites aux différentes hypothèses faites sur la viscosité turbulente. Dans une cinquième partie, nous donnerons les équations satisfaites par une perturbation autour d'un champ de base. Nous les comparerons avec celles obtenues autour d'un champ moyen.

Finalement, nous présenterons l'analyse de stabilité globale, le problème adjoint ainsi que l'analyse du résolvant. Pour cette dernière analyse, Beneddine et al [13] proposent un lien entre la réponse optimale et la transformée de Fourier de l'écoulement instationnaire. Ce lien sera rappelé.

Afin d'être complet sur ces analyses, nous expliquerons comment elles sont réalisées d'un point de vue numérique. Nous expliquerons d'abord comment nous calculons les matrices nécessaires à ces analyses, puis comment nous trouvons les valeurs et les vecteurs propres de ces matrices.

## 4.1 Equations des ondes organisées dans le cadre de la décomposition triple

Reynolds et al. [98] proposent de regarder les instationnarités basses fréquences d'un écoulement turbulent. Pour ce faire, ils supposent que les fréquences des instationnarités

basses fréquences sont fortement découplées des fréquences de la turbulence. Cette hypothèse permet de décomposer les différentes quantités intervenant dans l'équation de Navier Stokes selon une décomposition triple,

$$f = \bar{f} + \tilde{f} + f', \quad (4.1)$$

où  $\bar{f}$  est la moyenne temporelle,  $\langle f \rangle = \bar{f} + \tilde{f}$  est la moyenne de phase et  $f'$  les fluctuations turbulentes. Ces moyennes vérifient les propriétés suivantes :

$$\langle f' \rangle = 0, \quad \tilde{\tilde{f}} = 0, \quad \overline{f'} = 0, \quad (4.2)$$

$$\overline{\tilde{f}g} = \tilde{f}\bar{g}, \quad \langle \tilde{f}g \rangle = \tilde{f}\langle g \rangle, \quad \langle \tilde{f} \rangle = \tilde{f}\langle g \rangle, \quad (4.3)$$

$$\overline{\langle f \rangle} = \bar{f}, \quad \langle \tilde{f} \rangle = \tilde{f}, \quad \overline{\tilde{f}g'} = \langle \tilde{f}g' \rangle = 0. \quad (4.4)$$

Afin de simplifier la présentation, nous allons ici nous concentrer sur le cas d'un écoulement incompressible. Les équations compressibles sont disponibles dans l'annexe A.

On rappelle que les équations de Navier Stokes deviennent alors,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.5)$$

et

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (4.6)$$

En prenant d'abord la moyenne de phase puis la moyenne temporelle de l'équation (4.5), on montre que

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.7)$$

En prenant la moyenne de phase de (4.6), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) \\ = -\left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

En prenant la moyenne temporelle de cette dernière équation, on montre que

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}). \quad (4.9)$$

On déduit l'équation sur  $\tilde{u}_i$  en soustrayant les deux dernières équations,

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j})}_{\tilde{u'_i u'_j}} \quad (4.10)$$

On en déduit l'équation sur la partie turbulente,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u'_i u'_j \rangle - \widetilde{u'_i u'_j}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

On remarque que (4.10) fait intervenir  $\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j} = \widetilde{u'_i u'_j}$  qui n'est pas connu et qui est l'effet de la turbulence sur l'onde organisée. Reynolds et al. [98] proposent de modéliser ce terme. Différentes approches ont été proposées à cet effet.

La première est l'analyse dite quasi-laminaire (ou  $\mu$ -laminaire). Cette approche consiste à ignorer ce terme. L'effet de la turbulence est alors pris en compte seulement via  $\bar{u}$  présent dans l'équation (4.10).

La seconde approche proposée, notamment par Mettrot et al. [85], consiste à modéliser ce terme par une viscosité turbulente :

$$\widetilde{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \tilde{k} \delta_{ij} - 2\tilde{\nu}_t \tilde{S}_{ij} - 2\tilde{\nu}_t \bar{S}_{ij}, \quad (4.12)$$

avec  $\tilde{k} = \frac{1}{2} \widetilde{u'_i u'_i}$ .  $\tilde{k}$  est la solution d'une équation qui peut être déterminée explicitement. On cherche alors l'équation satisfaite par  $k = \frac{1}{2} u'_i u'_i$ . Pour cela, on multiplie (4.11) par  $u'_i$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial u'_i p'}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j \partial x_j} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u'_i u'_j \rangle - \widetilde{u'_i u'_j}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

En prenant la moyenne de phase de cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial \langle u'_i p' \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \langle u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \rangle - \langle u'_i \frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En décomposant  $\langle k \rangle = \bar{k} + \tilde{k}$ , l'équation précédente se réécrit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \\ & \quad + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \frac{1}{Re} \widetilde{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} - \overline{u'_i \frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}} - \widetilde{u'_i \frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

On prend la moyenne temporelle de cette équation pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}} + \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} \\ = -\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \overline{u'_i \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j}} - \overline{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Finalement on trouve l'équation pour  $\tilde{k}$  en soustrayant ces deux dernières,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} - \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}} + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \\ + \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = -\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \overline{u'_i \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j}} - \overline{u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

On peut réécrire l'équation (4.16) pour regarder l'origine des différents termes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_P - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i}}_{\Pi} + \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j}}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\varepsilon} - \underbrace{\overline{u'_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}}}_{T} \\ - \underbrace{\overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}}}_{(2)} - \underbrace{\overline{\widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}}_{(3)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$P$  est le terme de production usuel des modèles de turbulence. (3) est une moyenne temporelle d'un terme qui ressemble beaucoup à  $P$  dans lequel on a changé la moyenne temporelle par la moyenne de phase. On remarque de plus que

$$(3) + P = -\overline{\langle u'_i u'_j \rangle} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (4.19)$$

(3) est donc un terme de production de turbulence dû à l'onde organisée. Le terme  $\varepsilon$  est le terme de dissipation de la turbulence habituel des modèles RANS de type  $k - \varepsilon$  ou  $k - \omega$ . (1) est le terme de diffusion visqueuse.  $\Pi + T$  est modélisé dans les approches RANS par un terme de diffusion turbulente que l'on notera ici  $\frac{1}{Re_t} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j \partial x_j}$ . Finalement le terme (2) est la moyenne d'un terme d'advection.

On peut réarranger de la même façon (4.17),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = \left( \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}} - \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) - \left( \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \left( \overline{\widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} - \widetilde{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \overline{u'_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{k}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.20)$$



On a ainsi explicité ici les équations satisfaites par les différentes parties de la décomposition triple. Nous avons en particulier aussi donné l'équation l'énergie cinétique turbulente en terme de moyenne de phase et de moyenne temporelle. Nous utiliserons par la suite ces différentes équations pour étudier les différents types d'analyses et de modélisations.

## 4.2 Analyse sur un champ moyen URANS

On cherchera dans cette section, comment les équations obtenues dans la section précédente peuvent être reliées à un modèle URANS, pour lequel on calcule l'évolution de  $\langle u \rangle$ ,  $\langle k \rangle$  et  $\langle \omega \rangle$  en modélisant la turbulence. Nous nous placerons dans le cas de  $k - \omega$  de Wilcox, en oubliant les constantes pour simplifier les notations.

Pour la vitesse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante,

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_t \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (4.21)$$

où  $\nu_t = \frac{\langle k \rangle}{\langle \omega \rangle}$ . En développant les moyennes de phase, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \\ - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Maintenant, étudions  $\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}}$ . Son développement en série entière donne

$$\frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} = \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right). \quad (4.23)$$

L'avant dernier terme de l'équation (4.22) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_1 \quad (4.24)$$

avec

$$N_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right]; \quad (4.25)$$

et le dernier terme s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_2 \quad (4.26)$$

avec

$$N_2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right]. \quad (4.27)$$

En prenant la moyenne temporelle de (4.22)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 \quad (4.28)$$

On trouve alors l'équation pour  $\tilde{u}$ , en insérant les derniers développements dans (4.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = \\ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_1 - \bar{N}_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_2 - \bar{N}_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

On s'intéresse maintenant aux équations de fermeture. Tout d'abord, celle de  $k$  donnée dans le chapitre 3,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} = 2 \frac{\langle k \rangle}{\langle \omega \rangle} \langle D_{ij} \rangle \langle D_{ij} \rangle - \langle k \rangle \langle \omega \rangle \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_t \frac{\partial \langle k \rangle}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

En développant  $\langle k \rangle = \bar{k} + \tilde{k}$  cette dernière équation se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} = \\ 2 \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} (\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \tilde{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + \tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}) \\ - \bar{k} \bar{\omega} - \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

On réécrit (4.31) sous la forme

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} = \\
& + 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + N_3 \\
& \quad - \bar{k} \bar{\omega} - \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

avec

$$\begin{aligned}
N_3 = & 2 \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + 2 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^2 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \\
& 4 \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^2 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

et

$$\begin{aligned}
N_4 = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right].
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$N_3$  et  $N_4$  sont des termes non-linéaires.

On a l'équation de  $\bar{k}$  en prenant la moyenne temporelle de cette équation,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}} = & 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + \bar{N}_3 - \bar{k} \bar{\omega} - \overline{\tilde{k} \tilde{\omega}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_4.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

On détermine l'équation sur  $\tilde{k}$  en soustrayant (4.35) à (4.31), ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} - \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}} = \\
& 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + N_3 - \bar{N}_3 \\
& \quad - \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} + \bar{k} \bar{\omega} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4 - \bar{N}_4.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

L'équation pour  $\langle \omega \rangle$  est

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle_j \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x_j} = 2 \langle D_{ij} \rangle \langle D_{ij} \rangle - \langle \omega \rangle^2 \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle k \rangle \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x_j} \right).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

En développant cette équation on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \\
& \quad = 2 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \tilde{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} \\
& \quad \quad - \bar{\omega}^2 - 2 \tilde{\omega} \bar{\omega} - \tilde{\omega}^2 \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

L'avant dernier terme de cette équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_5 \tag{4.39}$$

avec

$$N_5 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right] \tag{4.40}$$

et le dernier terme s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} + \tilde{k}}{\bar{\omega} + \tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_6, \quad (4.41)$$

avec

$$N_6 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} + \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}} \right)^n \right) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right]. \quad (4.42)$$

En prenant la moyenne temporelle de l'équation (4.38) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}} \\ &= 2\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + \overline{2\tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}} \\ & \quad - \bar{\omega}^2 - \overline{\tilde{\omega}^2} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_5 + \bar{N}_6. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Finalement, on trouve l'équation satisfaite par  $\tilde{\omega}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} - \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}} \\ &= 4\tilde{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2\tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} - \overline{2\tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij}} \\ & \quad - 2\tilde{\omega} \bar{\omega} - \tilde{\omega}^2 + \overline{\tilde{\omega}^2} \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_5 - \bar{N}_5 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_6 - \bar{N}_6. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En résumé, en partant des équations URANS, nous avons dérivé les équations satisfaites par la moyenne temporelle (équations (4.28), (4.35) et (4.43)) et l'onde organisée (équations (4.29), (4.36) et (4.44)). Dans la section suivante, nous allons comparer ces équations à celles obtenues par la décomposition triple appliquées aux équations de Navier Stokes.

### 4.3 Comparaison des équations

L'objet de cette section est de comparer les équations obtenues en utilisant la décomposition triple (section 4.1) et celles obtenues avec les équations URANS (section 4.2). Ceci a pour but d'essayer de comprendre quels termes de l'équation obtenue par le URANS modélisent quels termes de l'équation obtenue par la décomposition triple. **Dans cette partie on précise**

que les équations  $a = b$  signifient que le terme  $a$  issu de la décomposition triple sur les équations de Navier-Stokes est modélisé par le terme  $b$  issu des équations URANS.

On s'intéresse d'abord à l'équation de perturbation de l'énergie cinétique turbulente en utilisant la décomposition triple (4.20), et à celle obtenue avec l'équation URANS (4.36).

- Le terme  $\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}$  est un terme de production dû au cisaillement du champ moyen et aux fluctuations turbulentes, la comparaison donne donc

$$\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} = 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}. \quad (4.45)$$

- Le terme  $\overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}$  est un terme de production dû au cisaillement de l'onde organisée et de la moyenne temporelle des corrélations turbulentes, d'où

$$\overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = 4 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}. \quad (4.46)$$

- Le terme  $\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}} - \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}}$  est un terme de production dû aux effets non-linéaires que l'on peut comparer aux termes non-linéaires venant du terme de production de l'équation URANS.

$$\widetilde{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}} - \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j}} = N_3 - \bar{N}_3 \quad (4.47)$$

- La dissipation  $\frac{1}{Re} \widetilde{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$  peut être reliée à tout ce qui vient du terme de dissipation de l'équation issue du URANS,

$$\frac{1}{Re} \widetilde{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \bar{\omega} - \tilde{k} \bar{\omega} + \bar{k} \bar{\omega}. \quad (4.48)$$

- Enfin le terme de diffusion turbulente  $-\frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} - \widetilde{u'_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}}$  doit être relié à tout ce qui vient du terme de diffusion du URANS, ainsi

$$-\frac{\partial \widetilde{u'_i p'}}{\partial x_i} - \widetilde{u'_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4 - \bar{N}_4. \quad (4.49)$$

Comparons maintenant l'équation obtenue pour  $\bar{k}$  sans modélisation (4.18) avec celle du URANS (4.35) :

- Le terme de production  $-\overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}}$  est le terme de production usuel du système RANS. Il s'agit d'un terme de production dû à la moyenne temporelle des corrélations d'ordre

2 et du cisaillement du champ moyen, ce terme est donc modélisé par

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}. \quad (4.50)$$

- Le terme  $-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}$  est la moyenne du terme de production dû aux corrélations entre la moyenne de phase des corrélations turbulentes, et le cisaillement de l'onde organisée, on a donc

$$-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = \bar{N}_1. \quad (4.51)$$

- Le terme de dissipation  $\frac{1}{Re} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$  se regroupe avec les termes de dissipation du URANS donnant ainsi

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \bar{k} \bar{\omega} - \bar{\tilde{k}} \bar{\omega}. \quad (4.52)$$

- Enfin le terme de diffusion turbulente  $-\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \overline{u'_j} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}$  doit être relié à tout ce qui vient du terme de diffusion du URANS,

$$-\frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} - \overline{u'_j} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_2 \quad (4.53)$$

De même pour les équations sur les champs de vitesse, on compare (4.29) et (4.10). On constate que l'on modélise

$$-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{\tilde{k}}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) N_3 - \bar{N}_3 + N_4 - \bar{N}_4 \quad (4.54)$$

et de la comparaison entre (4.28) et (4.9) vient

$$-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \bar{N}_3 + \bar{N}_4. \quad (4.55)$$

## 4.4 Différentes analyses

Comme explicité dans l'introduction de ce chapitre, différents traitements du terme de diffusion turbulente dans les équations des perturbations ont été proposés ( $\mu$  laminaire [13], système complet [29], [98], [85]) . Le but de cette section est de montrer en quoi consistent les différentes approximations faites lors de ces analyses et d'en identifier les limites. Ceci sera fait en se basant sur les équations de la section précédente. Les critères de validité qui seront explicités ici, seront appliqués dans le cas du buffet à la fin du chapitre 7.

#### 4.4.1 $\mu$ laminaire

Faire une analyse  $\mu$  laminaire est équivalent à supposer que  $\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$  est nul, ou faible devant les autres termes dans l'équation (4.10) sur  $\tilde{u}_i$ , par exemple si  $\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \ll \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$ . Si on suppose que  $\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \sim \frac{\tilde{k}}{L}$  et  $\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \sim \frac{\tilde{u}_j \tilde{u}}{L}$  alors cette hypothèse est vérifiée si  $\frac{\tilde{k}}{\tilde{u}} \ll 1$ .

Dans le cadre de cette hypothèse, il n'est plus nécessaire de regarder les équations de  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\omega}$  pour trouver  $\tilde{u}$ . L'effet de la turbulence se fait sentir sur  $\tilde{u}_i$  uniquement par l'intermédiaire de  $\tilde{u}$ .

L'avantage de cette méthode est que le résultat dépend moins de la modélisation de la turbulence que dans le cas du système complet. En revanche, Sartor [105] et Crouch [31] montrent que dans le cas du buffet, l'analyse de stabilité globale est incapable de prédire cette instationnarité si les variations de la viscosité turbulente ne sont pas prises en compte.

Il est intéressant de plus de remarquer que si l'on regarde tout de même l'équation (4.20) sur  $\tilde{k}$ , supposer en plus que  $\widetilde{u'_i u'_j} = 0$  revient à ne garder qu'un terme de production sur les 4,  $\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$ , c'est à dire la production due aux corrélations en moyenne temporelle des fluctuations turbulentes et au cisaillement du à l'onde organisée.

Si on regarde l'équation (4.36) de  $\tilde{k}$  issue de l'approche URANS, on constate que l'on néglige tout le terme de production, ainsi que le terme de diffusion turbulente.

#### 4.4.2 Approche $\mu_t$ figé

Cette approche consiste à modéliser  $-\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$  de l'équation sur  $\tilde{u}_i$  (4.10) par le terme  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right)$  (cf. (4.54)). Ceci revient à négliger la perturbation due à l'onde organisée de la turbulence mais en gardant la viscosité turbulente moyenne. En comparant les différents termes de la diffusion turbulente dans (4.29), on constate que ceci revient à supposer que

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}} \ll \frac{\tilde{u}}{\tilde{\omega}} \quad (4.56)$$

et

$$\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} \ll \frac{\tilde{u}}{\tilde{\omega}}. \quad (4.57)$$

autrement dit que l'énergie cinétique et la dissipation spécifique associées à l'onde organisée sont faibles devant la vitesse de cette onde.

Même dans le cadre de l'analyse linéaire, rien ne garantit que ces deux hypothèses soient satisfaites.

De plus, en regardant l'équation (4.35), on constate que l'influence de  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\omega}$  est négligeable sur  $\tilde{k}$  si  $\frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}} \ll 1$ , si  $\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} \ll 1$  et si  $\tilde{u} \tilde{k} \gg \tilde{u} \tilde{k}$ . Dans le cas de faibles perturbations, comme dans le cas d'une analyse linéaire, ces hypothèses sont vérifiées. Toutefois, si un mode  $\tilde{u}$  est instable, cette hypothèse peut être mise en défaut du fait de la croissance du mode.



Comme dans le cas de l'approche  $\mu$  laminaire, il n'y a pas besoin de résoudre les équations sur  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\omega}$ . Cette approche dépend donc peu du modèle de turbulence. En revanche elle est incapable de prédire le phénomène de buffet.

#### 4.4.3 Système complet

Cette approche considère les équations de  $\tilde{k}$  et de  $\tilde{\omega}$ , elle revient donc à modéliser  $-\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$ .

$$-\frac{\partial \widetilde{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_3 - \bar{N}_3 + N_4 - \bar{N}_4 \quad (4.58)$$

Les termes non linéaires  $N_3$ ,  $\bar{N}_3$ ,  $N_4$  et  $\bar{N}_4$  peuvent être négligés dans le cadre de l'analyse linéaire. On doit alors trouver  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\omega}$ , ce qui est fait par le modèle de turbulence. On peut poser  $\tilde{\nu}_t = \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}} - \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega}$ . C'est la linéarisation de la viscosité turbulente.

Il a été montré que cette approche était capable de prédire le phénomène de buffet (voir Crouch et al. [29] et Sartor et al. [107]), en revanche elle dépend a priori du modèle de turbulence choisi. Un autre problème de cette approche est qu'elle nécessite que la viscosité turbulente soit différentiable (ce qui n'est pas le cas pour  $k - \omega$  SST par exemple).

#### 4.4.4 $\gamma$ figé

Dans le cadre d'une analyse RANS avec un critère de transition, on remplace la viscosité turbulente  $\nu_t$  par  $\gamma \nu_t$ .  $\gamma$  est une fonction des variables conservatives  $q$  et des variables turbulentes  $q_t$ . Dans le cadre du modèle de Langtry (voir section 3.4.2),  $\gamma$  est la solution d'une équation de transport. On peut appliquer les mêmes procédés que précédemment pour trouver l'équation vérifiée par  $\tilde{\gamma}$ . Ainsi la perturbation de la viscosité turbulente est

$$\tilde{\nu}_t = \tilde{\gamma} \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} + \bar{\gamma} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\omega}} - \bar{\gamma} \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \quad (4.59)$$

La fonction  $\gamma$  représente l'intermittence. Elle décrit la région où la transition se produit. Ainsi supposer que  $\tilde{\gamma} = 0$  signifie que la position de la transition n'est pas changée par l'onde organisée. Cela est justifié si  $\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\gamma}} \ll \frac{\tilde{k}}{\bar{k}}$  et  $\frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\gamma}} \ll \frac{\tilde{\omega}}{\bar{\omega}}$ . Il peut paraître étrange que l'onde organisée ne change pas la position de la transition. L'approche paraît raisonnable lorsque l'onde organisée agit loin de la transition mais est sinon discutable. Dans le cas de TFAST (voir chapitres 5 et 6) et de BUTERFLI (voir chapitre 7) cette approche semble peu satisfaisante puisque le phénomène instationnaire modélisé se situe à la même position que la transition. Elle a cependant l'avantage de ne plus nécessiter de différencier le modèle de transition, ce qui une étape difficile d'un point de vue pratique compte tenu du fait que les critères AHD et  $\gamma - \overline{R_{\theta_i}}$  ne sont pas différentiables dans leur définition standard.

## 4.5 Analyse autour d'un champ de base

Dans ce qui précède, l'analyse est faite autour du champ moyen. Nous allons maintenant comparer cette approche à celle consistant à étudier la stabilité autour du champ de base (ie. la solution stationnaire des équations RANS). Une analyse de stabilité autour de ce champ consiste à étudier l'évolution d'une petite perturbation autour de cette solution. Cela revient à chercher la solution  $\tilde{q}$  autour de  $\bar{q}$  avec  $\tilde{q} \ll \bar{q}$ , où  $q$  représente une variable du système. On peut trouver comme précédemment les équations satisfaites par  $\tilde{q}$  dans le cas du modèle k- $\omega$  de Wilcox,

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \\ - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + N_2, \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} = \\ 2 \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} - 2 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 4 \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \bar{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} + N_3 \\ - \tilde{k} \bar{\omega} - \bar{k} \tilde{\omega} - \tilde{k} \tilde{\omega} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}^2} \tilde{\omega} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) + N_4 \end{aligned} \quad (4.62)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \\ = 4 \tilde{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2 \tilde{D}_{ij} \tilde{D}_{ij} - 2 \tilde{\omega} \bar{\omega} - \tilde{\omega}^2 \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k} \tilde{\omega}}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_5 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{\omega}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} \right) + N_6. \end{aligned} \quad (4.63)$$

On remarque que la différence avec les équations obtenues dans les parties précédentes (4.1 et 4.2) est l'absence ici des moyennes des termes non-linéaires dans les équations. Faire une analyse du champ de base revient donc à négliger les transferts d'énergie venant de l'onde organisée vers le champ moyen. Par exemple pour l'équation sur  $\tilde{k}$  on néglige les termes  $\bar{N}_3$ ,  $\overline{\tilde{k}\tilde{\omega}}$ ,  $\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}$  et  $\bar{N}_4$ .

## 4.6 Analyse de stabilité globale

Dans cette section nous expliquerons le concept d'analyse de stabilité globale. Le but de cette analyse est de voir si une dynamique peut se développer au cours du temps autour du champ moyen ou du champ de base.

D'abord, remarquons que les systèmes d'équations pour les ondes organisées obtenues dans les sections précédentes peuvent toutes se réécrire sous la forme

$$P \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = L_{\tilde{q}}(\tilde{q}) + PN_{\tilde{q}}(\tilde{q}), \quad (4.64)$$

avec  $L_{\tilde{q}}$  les termes linéaires des équations et  $N_{\tilde{q}}$ , les termes non-linéaires. En incompressible laminaire, le terme non-linéaire dans l'équation de conservation de la masse est nul, ce qui incite à utiliser un opérateur  $P$  tel que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

avec  $q = (p, u, v, w)$ .

Dans le cas d'un écoulement compressible,  $q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$  pour les équations de Navier Stokes et  $q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E, \rho k, \rho \omega)$  dans le cas RANS. Les équations en annexe montrent que le terme non-linéaire est non-nul pour toutes les équations.  $P$  est donc l'identité. Cet opérateur n'est donc plus nécessaire dans ce cas.

L'analyse de stabilité globale consiste à se placer dans le cadre des petites perturbations, et donc à négliger le terme non linéaire. Ainsi on a

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = L_{\tilde{q}}(\tilde{q}) \quad (4.66)$$

De plus, si on prend une perturbation harmonique,  $\tilde{q} = \hat{q}(X)e^{(i\omega + \sigma)t}$ , cette équation se simplifie en

$$(i\omega + \sigma)\hat{q} = L_{\tilde{q}}(\hat{q}) \quad (4.67)$$

avec  $\omega$  et  $\sigma$  des réels.  $\omega$  est donc la fréquence et  $\sigma$  le taux de croissance. Il s'agit maintenant de trouver les valeurs et les vecteurs propres de  $L_{\bar{q}}$ . Si  $\sigma < 0$ , l'amplitude du mode va diminuer exponentiellement au cours du temps. On dit que le mode est globalement stable. Si  $\sigma = 0$ , l'amplitude du mode reste la même au cours du temps, on dit que le mode est marginalement stable. Si  $\sigma > 0$ , l'amplitude va croître exponentiellement jusqu'à ce que l'amplitude soit assez élevée pour donner lieu à des effets non-linéaires. Le mode est globalement instable.

### Remarque

Si on écrit les équations RANS sous la forme

$$R(\bar{q}) = 0 \quad (4.68)$$

L'évolution de petites perturbations vérifie

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = J\tilde{q} \quad (4.69)$$

où  $J$  est la Jacobienne de  $R$ .  $L_{\bar{q}}$  est donc la Jacobienne du résidu des équations RANS autour d'un champ de base.

## 4.7 Problème adjoint

### Définition

Si on considère un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ , on peut définir un opérateur adjoint à  $L_{\bar{q}}$ ,  $L_{\bar{q}}^\dagger$ , qui vérifie

$$\langle \hat{q}_2, L_{\bar{q}} \hat{q}_1 \rangle_Q = \langle L_{\bar{q}}^\dagger \hat{q}_2, \hat{q}_1 \rangle_Q \quad (4.70)$$

pour tous vecteurs  $\hat{q}_1$  et  $\hat{q}_2$ . On définit le problème adjoint comme la recherche des vecteurs propres et des valeurs propres de  $L_{\bar{q}}^\dagger$ . On peut montrer que les valeurs propres du problème direct et celles du problème adjoint sont complexes conjugués l'une de l'autre. On peut donc associer à chaque vecteur propre du problème direct un vecteur propre du problème adjoint (Sipp et al. [111]). Si on note  $\overset{\circ}{q}$  un vecteur propre du problème adjoint, il est intéressant de normaliser ce vecteur de telle sorte que

$$\langle \overset{\circ}{q}_i, \hat{q}_j \rangle_Q = \delta_{ij}. \quad (4.71)$$

De cette façon, tout vecteur  $q'$  peut être exprimé dans la base modale de façon simple :  $q' = \sum_{j \geq 1} \langle \overset{\circ}{q}_j, q' \rangle_Q \hat{q}_j$ .

### Interprétation et remarques

Comme il est montré dans Mettot et al. [84], le mode adjoint peut donner des informations sur la localisation où mettre un actionneur si l'on veut faire du contrôle. Il faut placer le système d'aspiration ou de soufflage là où le mode adjoint est maximal pour avoir un effet maximal sur l'écoulement.

Si les modes globaux sont non-normaux, Marquet et al. [75] montrent qu'alors le mode direct et le mode adjoint sont localisés à des endroits différents de l'écoulement.

Enfin, il est montré dans Chomaz [24] que les modes adjoints et les modes directs se propagent dans le sens opposé l'un de l'autre.

### Choix du produit scalaire

Dans le cadre du problème continu le produit scalaire usuellement utilisé est le produit scalaire canonique. Ici, comme nous le verrons plus tard, nous sommes dans le cas des équations RANS discrétisées. Dans ce cas, il a été proposé par Mettot [83] un produit scalaire qui prend en compte la taille des mailles de calcul. Si  $f$  et  $g$ , sont deux fonctions continues de  $\Omega$ , alors

$$\int_{\Omega} f^{\dagger} g d\Omega = \sum_i F_i^{\dagger} G_i \Omega_i = F^{\dagger} Q G = \langle F, G \rangle_Q . \quad (4.72)$$

où  $F_i$  (resp.  $G_i$ ) est le vecteur de la discrétisation de  $f$  (resp.  $g$ ) et  $\Omega_i$  le volume de la cellule  $i$ .  $Q$  est donc une matrice diagonale dont les valeurs propres sont les volumes des cellules de calcul.

## 4.8 Analyse du résolvant

Cette section a pour but de présenter l'analyse du résolvant et son interprétation selon Beneddine et al. [13].

### 4.8.1 Présentation de l'analyse du résolvant

Comme vu précédemment, les perturbations répondent à des équations qui peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = L_{\tilde{q}}(\tilde{q}) + N_{\tilde{q}}(\tilde{q}). \quad (4.73)$$

En prenant la transformée de Fourier de cette équation, on obtient

$$i\omega \hat{q} = L_{\tilde{q}}(\hat{q}) + \hat{f}. \quad (4.74)$$

où l'on a noté  $\hat{f} = \widehat{N_{\tilde{q}}(\tilde{q})}$ . On peut donc trouver une relation simple entre  $\hat{q}$  et  $\hat{f}$ ,

$$\hat{q} = (i\omega I - L_{\tilde{q}})^{-1} \hat{f} = A \hat{f} \quad (4.75)$$

On a alors un système entrée-sortie, où le terme  $\hat{f}$  apparaît comme un forçage et la dynamique  $\hat{q}$  comme une réponse. On peut alors définir une fonction de gain entrée/sortie pour ce système

$$G(\hat{f}) = \frac{\langle \hat{q}, \hat{q} \rangle_q}{\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_f}, \quad (4.76)$$

où l'on a introduit deux produits scalaires

$$\langle a, b \rangle_q = \int_{\Omega_q} a Q_q b d\omega \quad (4.77)$$

et

$$\langle a, b \rangle_f = \int_{\Omega_f} a Q_f b d\omega. \quad (4.78)$$

Le gain peut être réécrit

$$G(\hat{f}) = \frac{\langle A\hat{f}, A\hat{f} \rangle_q}{\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_f} = \frac{\langle A^\dagger A\hat{f}, \hat{f} \rangle_q}{\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_f} \quad (4.79)$$

On peut donc optimiser le gain en cherchant la plus grande valeur propre de  $A^\dagger A$ . On a donc un nouveau problème aux vecteurs et valeurs propres

$$A^\dagger A f_i = \lambda_i^2 f_i. \quad (4.80)$$

Compte tenue du caractère auto-adjoint de  $A^\dagger A$ , ses valeurs propres sont des réels positifs et l'ensemble des  $f_i$  forme une base orthonormale.

On définit la réponse optimale non pas comme étant  $q_i = A f_i$ , mais comme étant

$$q_i = \lambda_i^{-1} A f_i, \quad (4.81)$$

de cette façon l'ensemble des  $q_i$  forme une base orthonormale ( $\langle q_i, q_j \rangle_q = \delta_{i,j}$ ).

#### 4.8.2 Choix des produits scalaires

Les produits scalaires (4.77) et (4.78) sont à déterminer en considérant les équations de Navier-Stokes.

$\hat{f}$  est en effet relié aux termes non-linéaires des équations du mouvement des perturbations. Pour  $\Omega_f$ , on considère un ensemble correspondant à tout le domaine de calcul et prenant en compte toutes les équations où un terme non-linéaire est présent. En régime compressible, cela signifie prendre en compte toutes les équations, ce qui implique  $Q_f = \mathbf{I}$ .

Pour le choix de la matrice du produit scalaire de la réponse dans (4.77), Beneddine et al. [13] montrent que la réponse correspond à la transformée de Fourier de la vitesse (obtenue

avec des données instationnaires de l'écoulement) si

$$||\hat{u}||^2 = \int_{\Omega_q} \hat{q} Q_q \hat{q} d\omega \quad (4.82)$$

Pour une approche laminaire, compressible et 2D, la matrice  $Q_q$  doit ainsi avoir la forme locale suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}} & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

L'utilisation de ce produit scalaire revient à maximiser l'énergie cinétique des perturbations. A noter que nous avons également essayé de maximiser l'énergie totale, mais cela n'a pas changé de façon importante nos résultats. Les résultats associées ne sont pas abordés dans la suite. A noter aussi que l'on peut également optimiser sur différents  $\Omega_q$  car certains phénomènes peuvent être locaux.

#### Lien avec la transformée de Fourier proposé par Beneddine et al. [13]

Le lien avec la transformée de Fourier se fait en décomposant  $\hat{f}$  sur la base des forçages optimaux.  $\hat{f} = \sum_{j \geq 1} \langle f_j, \hat{f} \rangle_f f_j$ . On applique alors le résolvant à  $\hat{f}$ ,

$$\hat{u} = Q_q A \sum_{j \geq 1} \langle f_j, \hat{f} \rangle_f f_j. \quad (4.84)$$

Compte tenu de la relation entre les forçage optimaux et la réponse, cette équation se réécrit

$$\hat{u} = \sum_{j \geq 1} \langle f_j, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_j(\omega) u_j \quad (4.85)$$

Si on a en plus que  $\langle f_1, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_1(\omega) \gg \langle f_j, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_j(\omega)$  pour tout  $j > 1$ , alors la relation précédente se simplifie en

$$\hat{u} \simeq \langle f_1, \hat{f} \rangle_f (\omega) \lambda_1(\omega) u_1. \quad (4.86)$$

Comme le facteur  $\langle f_1, \hat{f} \rangle_f \lambda_1(\omega)$  ne dépend que de la pulsation, la transformée de Fourier et la réponse optimale ont la même forme.

La valeur de  $\hat{f}$  est inconnue. En supposant que les  $\langle f_j, \hat{f} \rangle$  ont tous le même ordre de grandeur, on peut simplifier l'hypothèse précédente en  $\lambda_1 \gg \lambda_j$  pour tout  $j > 1$ .

Un argument pour dire que tous les  $\langle f_j, \hat{f} \rangle$  sont proches peut être trouvé dans l'article de Farrell et al.[41]. Les auteurs ont montré que dans le cas d'une transition laminaire turbulent, un forçage continu complètement aléatoire peut reproduire la transition aussi bien

que le forçage optimal si le nombre de Reynolds est assez grand. Le forçage étant totalement aléatoire, on peut supposer que le forçage moyen est équi-réparti entre les différents vecteurs propres  $f_i$  et que, en moyenne,  $\langle f_j, \hat{f} \rangle = \langle f_i, \hat{f} \rangle$  pour tout  $(i, j)$ .

## 4.9 Calcul de la Jacobienne

Comme on peut le voir, ces trois analyses reposent sur la Jacobienne du résidu des équations RANS ou de Navier-Stokes selon le type d'analyse. Ici, la Jacobienne est calculée à l'aide des résidus déjà discrétisés.

On considère une grille de calcul en 2D de taille  $(n_i, n_j)$  et un nombre de variable  $n_v$ . Le résidu et  $\bar{q}$  sont donc donnés sous la forme de vecteurs de  $n_i n_j n_v$  composantes. La Jacobienne est donc une matrice de taille  $(n_i n_j n_v)^2$ . On calcule alors la Jacobienne par différence finie en perturbant chaque composante de  $\bar{q}$  individuellement et en regardant son influence sur le résidu. Ainsi, pour la ligne  $l$  de la Jacobienne, qui correspond à une perturbation de la  $l^{eme}$  composante de  $\bar{q}$ ,

$$J e_l = \frac{1}{\varepsilon} [R(\bar{q} + \varepsilon e_l) - R(\bar{q})] \quad (4.87)$$

où  $e_l$  est un vecteur de taille  $n_i n_j n_v$  dont la seule composante non nulle est la  $l^{eme}$ . On constate qu'un nombre  $n_i n_j n_v$  de calculs de résidu est a priori nécessaire pour déterminer la Jacobienne. En réalité, le résidu est calculé avec le code elsA qui discrétise les variations spatiales selon certains schémas numériques. Lors de cette discrétisation, seules certains points autour de celui considéré sont impactés par la perturbation, les points impactés par le stencil (voir Figure 4.1). On peut donc limiter le nombre de calculs de résidu en pavant intelligemment le domaine de calcul. Le pavage utilisé est celui proposé dans sa thèse par Beneddine [12] et qui peut être vu dans la figure 4.2.

Enfin le  $\varepsilon$  choisi pour la ligne  $l$  est défini comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (|\bar{q}_l| + 1) \quad (4.88)$$

si  $|\bar{q}_l| > 10 \cdot \varepsilon_0$ ,

$$\varepsilon = |\bar{q}_l| / 10 \quad (4.89)$$

sinon.

Ceci permet d'éviter les erreurs d'arrondi dans le cas où les valeurs considérées sont trop petites ou trop grandes.  $\varepsilon_0$  est fixé pour l'ensemble des calculs de résidus et vaudra ici  $10^{-7}$ . Ce choix est justifié par Mettot [83].



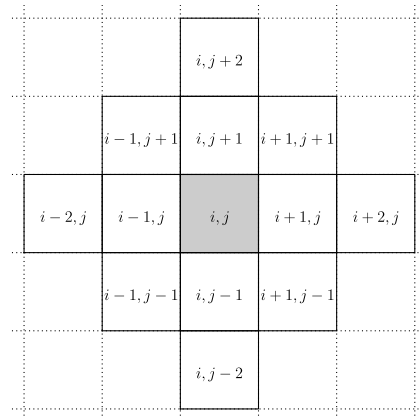


FIGURE 4.1 Forme du stencil utilisé dans elsA pour calculer la Jacobienne. (Image issue de Beneddine [12] )

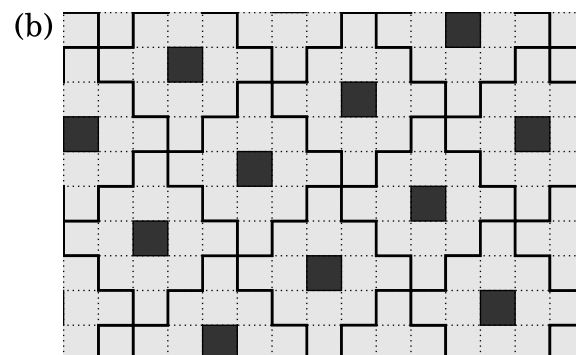


FIGURE 4.2 Stratégie d'utilisation du stencil utilisée pour calculer la Jacobienne. Les lignes noires délimitent le stencil pour un point d'application de la perturbation sur les carrés noirs. (Image issue de Beneddine [12] )

## 4.10 Méthode pour trouver les valeurs et les vecteurs propres

Les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices nécessaires pour effectuer les analyses de stabilité globale et le problème adjoint sont trouvés grâce à une méthode de Krylov avec une stratégie de "shift-and-invert". Ceci est effectué à l'aide du code open source ARPACK (Lehoucq et al., 1998). Pour mener à bien cette stratégie, il faut résoudre un système linéaire. On utilise une méthode direct LU avec le logiciel MUMPS (voir <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/>). Ce solveur est parallèle, ce qui rend la résolution du problème potentiellement rapide. En revanche, l'étape de factorisation LU nécessite beaucoup de mémoire. La conséquence est que pour des systèmes trop importants, les analyses ne peuvent pas être effectuées avec cette stratégie. C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser seulement à des cas 2D.



## Chapitre 5

# Cas de la réflexion d'un choc oblique sur une couche limite laminaire

Dans ce chapitre nous étudierons la dynamique d'une réflexion de choc sur une couche limite laminaire. L'ensemble de ces travaux a fait l'objet d'une soumission pour publication dans "Journal of Fluid Mechanics" le 12 décembre 2017. Nous utiliserons, pour présenter ces résultats, l'article tel qu'il a été soumis. Nous passerons donc pour ce chapitre à la langue anglaise. Il est à noter que les annexes de cet article ont été déplacées à la fin du manuscrit.

### 5.1 Introduction

Shock wave/ boundary layer interactions (hereafter referred as SWBLI) play an important role in high-speed aerodynamics. Above critical conditions the interacting flow generally separates, with potential unsteady and three-dimensional evolutions (Délery et al.[35]). In case of an incoming laminar wall flow, of particular interest here, the interaction generally causes the transition to turbulence, possibly in the region of a laminar separation bubble (Schlichting [109]). Such laminar configurations are typical of flows through air intakes, past laminar wings and turbine blades for which the low turbulence level of the incoming flow allows laminar flow to develop on the fore part of the body. From an engineering point of view, all these phenomena imply significant deterioration of the aerodynamic loads and heat transfers compared to the baseline that challenges current engineering computational tools (Babinsky et al.[11] among others). One of the difficulties relates to the unsteady content of the flow. In particular a low frequency unsteadiness of the shock in both turbulent and laminar SWBLIs has been repeatedly reported in the literature (for instance Dolling [36], Clemens et al.[25]) and fluctuations at well defined and higher frequencies are similarly observed, as

mentioned by Agostini [4, 3], Sansica [103], Pirozzoli [96] and Larchevêque [69]. All these are subject to intense research as the underlying physics remains to be fully understood.

The low frequency unsteadiness certainly represents the major concern as it may involve global flow oscillations in machines and thus deteriorate mechanical parts. In turbulent cases featuring flow separation at the shock foot, the low frequency component has first been analyzed as the response to fluctuations coming from the boundary layer upstream of the interaction. Ganapathisubramani et al.[43, 44] and Samimy et al. [102] related this low frequency unsteadiness to the long streamwise vortical structures peculiar of high Reynolds numbers turbulent boundary layers and in an experiment Unal and Dolling [121] found that Görtler vortices formed by the concavity of the nozzle present upstream of the interaction were involved. Other investigations associate this unsteadiness to a flapping of the bubble, see Dupont et al.[39], Pirozzoli et al.[96], Toubert and Sandham [120] and Grilli et al.[52]. Carrying out Direct Numerical Simulations (DNS) of an oblique shock wave interaction with mean separation at  $M = 2.25$ , Pirozzoli et al.[96] observed a characteristic frequency of  $S_t \simeq 0.03$  and suggested that this unsteadiness could be driven by a resonance mechanism involved by the combination of the propagation of large vortical structures created in the shear layer of the fore part of the bubble with a feedback caused by pressure disturbances traveling backward in the slow region inside the bubble. In this scenario the impact of the vortices upon the shock causes the oscillation of the reflected shock wave which is present to accommodate the orientation of the flow about the wall. This analysis implies that correlations between the low frequency motion of the reflected shock and the fluctuations of the bubble must be present and these were indeed observed by Thomas et al.[118] for the flow over a compression ramp between the reflected shock and the reattachment region.

The low frequency unsteadiness is also observed in transitional configurations, for which the flow upstream of the interaction is laminar and becomes turbulent downstream of the interaction. Sansica et al.[103], through a DNS analysis of a two-dimensional (2D) interaction at  $M = 1.5$  forced either upstream of the separation, inside the circulation bubble or both, found this low frequency unsteadiness to be particularly strong near the separation point and present even in the absence of an upstream forcing. This indicates that incoming perturbations are not necessary to promote the low frequency unsteadiness in this type of interactions. Sansica et al.[104] further analyzed this question by combining DNS simulations with local and parabolized stability analysis. The result is that the flow in the interaction is convectively unstable due to oblique mode growth (on this subject, see also the work of Chang et al [23]) and that the bubble acts like a filter-amplifier of low frequency disturbances at about  $S_t \sim 0.1$ . In addition the DNS simulation shows the existence of a broad band spectrum of low frequency fluctuations localized in the vicinity of the separation point. The broad band is centered around a Strouhal number of  $S_t = 0.04$ , a value similar to the turbulent case of Pirozzoli et al.[96] mentioned above. Disturbances traveling upstream are also found in the subsonic region of the bubble, the phase velocity of which is constant and compatible with an acoustic

wave. After combining these findings Sansica et al. [104] proposed a dynamical scenario in four steps consisting in (i) a transition through an oblique mode near the reattachment point, (ii) a deterministic turbulence filling the spectral space (deterministic turbulence is the chosen term for statistically reproducible turbulence, see Borodulin et al. [17]), (iii) non-linear effects generating an acoustic wave that travels upstream and finally (iv) a closure of the loop when these disturbances hit back the separation point. This scenario is close to the one proposed by Pirozzoli et al.[96] in the turbulent case, indicating, in addition to the good match in frequency, a strong similarity in the dynamics of the turbulent and laminar cases, certainly as a consequence of a mean separated zone present in both case. However while the source of pressure disturbances seems to be the interaction between the incident shock wave and vortices built up along the separation (see Pirozzoli et al.[96]) in the turbulent case, the way the breakdown of deterministic turbulence causes an upstream propagating wave appears unclear in the laminar case. This work is also to be related to the one of Larchevêque [69] who carried out Large Eddy Simulations (LES) of an oblique shock wave interaction at  $M = 1.63$  with upstream forcing to trigger transition. Like in previous works, significant perturbations at the separation point in a range of low frequencies ( $0.01 < S_t < 0.1$ ) are found and the low frequency unsteadiness also seems to result from the dynamics of the separation bubble itself and not from fluctuations coming from the incoming boundary layer. Using the evolution of the phase of the perturbations in the spectral space, the LES data allows to demonstrate that the source of the low-frequency unsteadiness is located near the reattachment point of the separation bubble and that the amplitude of the low-frequency unsteadiness strongly depends on the length of the interaction. The size of the bubble is additionally found to depend upon the upstream perturbation level and upon the mesh refinement, which numerically tend to play the same role.

In the transitional situation the question of the process through which the boundary layer becomes turbulent must also be taken into account. As pointed out above it appears to be related to the dynamics of the laminar separation bubble present under the shock foot. On the basis of numerical simulations of a hypersonic SWBLI, Pagella et al. [90, 89] analyzed that the inflectional point of the flow inside the recirculation bubble causes, according to the classical Rayleigh criterion, the growth of inviscid instabilities, giving the same role of filter-amplifier of upstream disturbances that was mentioned previously in the purely turbulent case. When perturbations grow large enough, nonlinear interactions also build up and finally trigger transition to turbulence. As a consequence of the separated flow, the transition process is very different from the natural transition, based on Tollmien-Schlichting (TS) waves or by-pass mechanisms, of an attached boundary layer. Still TS waves can contribute to the growth of the Kelvin-Helmholtz instability in the shear layer of the separation bubble, as was shown experimentally and numerically by Marxen et al. [76, 77].

These analysis clearly identify the important role of instabilities in the dynamics of SWBLI and this topic, along that of the global stability of the interaction, naturally received

more insightful investigations. In a fully laminar separation bubble interacting with a shock Robinet [100] used DNS and a global stability analysis to show the bifurcation of the initially two-dimensional (2D) steady flow to a three-dimensional (3D) asymptotic stationary state. Above a critical shock strength, the DNS analysis also proved the possible switch to a 3D unsteady state. The stability of incompressible laminar separation bubbles, which comparatively received a lot more attention, is also insightful for our present purpose. For instance the work of Alam and Sandham [6] and Rist [99] shows how transition may result from the development, inside the upstream boundary layer and in the shear layer of the fore part of the bubble, of oblique modes and  $\Lambda$ -vortex induced breakdown. The work of Rist [99] further specifies that the transition process in the bubble primarily depends upon the absolute or convective nature of the flow, and that this factor is controlled by the amplitude of the reversed flow in the bubble. Typically a reverse flow or more than 15 – 20% of the free stream is required for an absolute instability to occur.

The question of higher frequency unsteadiness has been tackled by Larchevêque [69], Agostini et al. ([4, 3] and Sansica et al. [104]. Larchevêque [69], based on the previously mentioned LES simulation of a transitional configuration, finds that the middle of the interaction features large fluctuations in an intermediate range of frequency ( $0.1 < S_t < 0.3$ ) and that the flow past the impingement point features energy at high frequencies ( $S_t > 1$ ). A medium frequency unsteadiness, with a Strouhal number  $S_t = 0.5$ , has similarly been reported by Agostini et al. [4, 3] in a turbulent  $M = 2.3$  oblique shock with mean flow separation. In this study the medium frequency dynamics is linked to the shedding of vortical structures at the end of the mixing layer. As discussed in Agostini et al. [3] low and medium frequency modes possibly interact with each other, in a way that yet remains to be clarified. Finally the high frequency dynamics  $S_t \approx 1 - 2$  is also observed by Sansica et al. [104] who relates it to the transition process close to the reattachment point.

All these studies have been made using either experiments or DNS/LES simulations whose cost is usually high. Naturally the idea of low cost RANS approaches to predict the flow dynamics has been developed and recently made significant progress thanks to the demonstration of the equivalence between the mean flow based optimal response of a flow to harmonic forcing and the averaged Fourier component of the unsteady flow demonstrated by Benedinne [13] in the case when, put simply, the main resolvent response dominates the others in the spectrum. Prior to this work, the capacity of the resolvent approach to describe the flow dynamics was qualitatively shown by Sartor et al. [106] in the case of the interaction between a turbulent boundary layer and a strong shock forming over the Delery bump. In this work a low frequency motion of the shock wave (50Hz) and two medium frequencies (1200 and 4000Hz) are found both in the experiment and the resolvent analysis, the flow being otherwise globally stable. Taking the resolvent response as a model of perturbation Sartor could relate the first medium frequency to an acoustic resonance phenomenon and the second to a vortex shedding mechanism generated by a Kelvin Helmholtz instability in

the shear layer. The low frequency motion seemingly related to the coupling between the dynamics of the separation bubble and that of the shock. RANS based stability approaches were also successful in explaining the buffet phenomenon on a turbulent transonic airfoil (see Crouch et al. [31] and Sartor [105]). Besides in the case of a transitional shock wave boundary layer interaction, Windte et al. [123] resolved the Kelvin-Helmholtz instability by using a RANS solution as the baseflow for a linear stability analysis.

In the present study, the RANS based stability and resolvent approach is attempted for a Mach 1.6 transitional boundary layer oblique shock wave interaction. The goal is to validate this low computational tool as a way to predict the dynamics of the flow and to explore its dynamics. As mentioned previously, three main dynamical components have been observed in this type of laminar interaction : a low frequency component in the range  $S_t = 0.01 - 0.1$ , a medium one in the range  $S_t = 0.3 - 0.5$  and a high one in the range  $S_t = 1 - 3$ . The low frequency component seems to relate to a pseudo resonance (Sansica [103] and Larcheveque [69]) that implies a pressure wave feedback promoted by noise coming from the turbulent part of the bubble. According to Larcheveque [69] the medium component relates to a breathing phenomenon. It was also observed in the fully turbulent situation for the lower frequency dynamic by Dussauge et al. [40] and modeled by Piponnier et al. [95] based on the competition between the fluid entrainment process in the separating mixing layer and the expulsion of fluid provided by the shedding of the Kelvin-Helmholtz eddies. The high frequency component is systematically associated to the transition to turbulence and certainly through an initial (in the upstream boundary layer) oblique wave growth mechanism as it is known (see Mack [74]) that oblique modes become dominant over plane TS waves when Mach number is beyond approximately 1.3. Consistently Sansica [104] considered an oblique mode to force his DNS and found a good match between the simulated growth of these 3D perturbations and that predicted by the parabolized stability method. The development of oblique waves is also mentioned by Larcheveque [69].

The flow in the present work is a wall bounded  $M = 1.6$  laminar stream undergoing an oblique shock wave interaction with a laminar boundary layer. Two datasets are considered to validate the resolvent method : wind tunnel experimental data and a companion LES numerical simulation. From these datasets the unsteadiness of the flow is found to be of low amplitude with, as expected, preferential modes of oscillations at a low, medium and high frequency components. The stability and resolvent analysis are developed using the RANS solution as a mean flow, with the Spalart-Allmaras model and a transition criterion. A perturbation analysis is then carried out, assuming a zero eddy viscosity. Upon showing that the flow is globally stable, the resolvent analysis of the flow, or response to harmonic forcing, is performed. The optimal response is validated against the LES data and is finally considered as a model of the flow to question the physics of the low, medium and high frequency components.



A pure two-dimensional (2D) setting is used here to carry out the analysis. As evidenced by Sansica [103] the low and medium frequency components are intimately 2D and the planar approach is valid in this case. This is not rigorously the case for the high frequency component which appears related to oblique waves. However this difference does not seem overly detrimental since instead of oblique waves, TS waves are still able to form. Furthermore these have the same order of magnitude of growth rate and their zone of instability almost overlap with that of the oblique modes (see Mack [74]) in the range of Mach of interest ( $M \simeq 1.6$ ). Also, the shear layer instability in the laminar separation bubble, well accounted for by this 2D approach, will tend to minimize this difference between oblique and 2D modes as it tends to dominate the overall perturbation growth. Owing to this the high frequency peak should also be obtained by the proposed method and the 2D approach is expected to give the right global behavior of the interaction.

In such a case of a transitional interaction and of a RANS model, the prediction of the transition of the boundary layer is a major concern. This is traditionally carried out by transition criteria or by transport equations based models, as recently proposed by Langtry [1] for the  $k - \omega$  turbulence model. Transition criteria range from purely empirical models to more refined, stability based techniques. Most of them employ the  $N$ -factor method along with an experimental correlation or look-up tables to save the cost and time of computing stability problem at each time step of the numerical solver. Such models are well suited for the transition of attached boundary layers with low turbulence levels, typically  $Tu < 1\%$ . Methods for 2D, TS dominated flows have been developed by Arnal et al.[7] and for 3D flow dominated by crossflow instabilities by Casalis et al.[22]. Some of these methods take into account the history of the boundary layer, as in Arnal et al. [7] while some neglect it, like the model of Abu-Ghannam and Shaw [2]. A particularly efficient method is the AHD model developed by Arnal et al. [7] which in its initial version modeled the growth of TS waves in the incompressible case and was subsequently improved into a compressible version by Dumoulin [38]. In the presence of a laminar separation, the AHD criterion must be complemented with the Gleyzes criterion (Gleyzes et al [49]) to account for the effect of the shear layer which accelerates the perturbation growth by the action of the KH instability. Computations in this work use a combination of the model of Arnal et al. [7] and of the corrections of Dumoulin [38] and Gleyzes et al. [49], like in the analysis of the separated compressible flow made by Cliquet [26].

The paper is organized as follows. The first part is dedicated to the description of the flow obtained in the reference experiment and LES. The RANS mean flow is then presented and compared in the light of this reference data. The second part deals with the description of the numerical approach for the stability and resolvent analysis. Comparisons against the averaged Fourier modes of the LES is then carried out to validate the capability of the resolvent optimal response to mimic the flow dynamics. In the third part a model of perturbation

based on this resolvent optimal mode is utilized in order to analyze the dynamics of the flow associated with the low and medium frequencies. Concluding remarks are given.

## 5.2 Description of the flow

The purpose of this first part is to introduce the experimental, LES and RANS setups. The main features of the mean flow will be presented as well as the unsteady results available from the experiment and LES.

### 5.2.1 General setup

We consider the  $M = 1.6$  flow past a flat plate undergoing the compression of an oblique shock wave as sketched in figure 5.1. Several general features of this flow are highlighted in this schematic. The flow comes from left. At the leading edge **LE** of the flat plate, it forms a Mach wave and downstream of **LE**, as no tripping is used, the boundary layer develops in a laminar state. At the upper wall an oblique shock at an angle  $\beta$  is generated by a wedge (**BTE**) with leading edge **B** and trailing edge **TE**. Then as the flow at the lower wall encounters the oblique shock wave the boundary layer separates, forms a closed recirculation bubble and turns turbulent. The flow deviation imposed at the separation causes the formation of a compression wave. That at the top of the bubble leads to the formation of an array of expansion waves. Finally a so called reflected shock wave is formed at the reattachment point as a consequence of the rather steep end of the bubble, typical of a turbulent reattachment.

To clarify the situation and for subsequent descriptions, additional notations are introduced. The separation and reattachment points are labeled **S** and **R**, respectively. They are defined as the points where longitudinal shear stress cancels in the vicinity of the wall. The locus of zero longitudinal velocity is used to delineate the backflow region of the laminar separation bubble. The point at the wall corresponding to the location in the flow where the incident shock wave impinges on the recirculation bubble is called the impingement point and is noted **I**. It is taken at the intersection between the continuation of the line of the incident shock wave and the lower wall. Eventually, the surface denoted by **FEDA** represents the numerical domain, to be used later on.

The separation point **S** is taken as the origin of coordinates, with (Ox) and (Oy) the horizontal and vertical directions.  $X_{LE,S,I,R,B,TE}$  are the axial coordinates of points **LE**, **S**, **I**, **R**, **B** and **TE** respectively. The length of the bubble is taken as  $L = X_R - X_S$ . The reference length is  $L$  and all other physical quantities are normalized based on free stream properties.

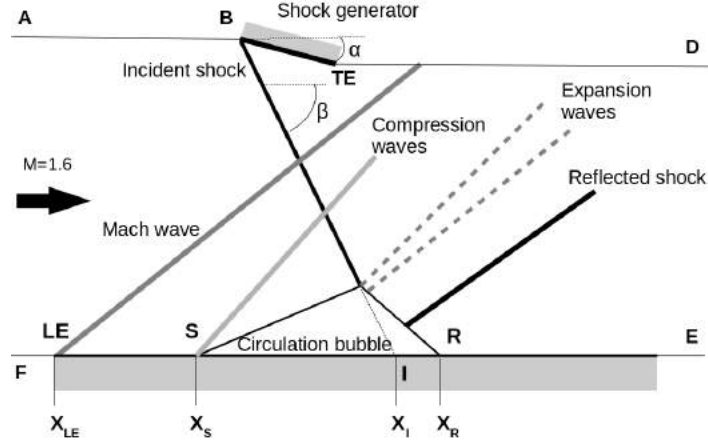


FIGURE 5.1 Schematic of the flow configuration featuring a Mach  $M = 1.6$  developing a laminar boundary layer interacting with an oblique shock wave at an angle  $\alpha = 5^\circ$ . Labels are described in the text.

### 5.2.2 Reference data

The validation of the method requires a reference meanflow and information about its dynamics. This is provided by an experimental database and data from an LES simulation, both described in Bur and Garnier [21].

### Wind tunnel experiment

The experimental setup is shown in figure 5.2. It is installed in the ONERA S8Ch supersonic wind tunnel which is a continuous facility that operates close to atmospheric conditions (stagnation pressure  $P_i \simeq 96000 Pa$  and stagnation temperature  $T_i \simeq 300 K$ ). The wind tunnel features a square  $120mm \times 120mm$  test section in which the flat plate sketched in figure 5.1 is placed, at a distance  $h = 40mm$  above the bottom wall of the test section. The plate is  $3mm$  thick. A Mach 1.6 nozzle is placed upstream to generate the freestream, which is further established with the help of a suction device implemented at the bottom wall, sucking a mass flow rate of  $160 \times 10^{-3} kg/s$  for the configuration of interest. The turbulence level of the inflow is low enough to allow the development of a laminar boundary layer along the flat plate. The shock generator is placed at (physical units are used for clarity)  $X_B - X_{LE} = 14.5mm$  and  $Y_B - Y_{LE} = 43mm$  and its angle is set at  $\alpha = 5^\circ$ . In this situation the reflection, at the top wall of the test section, of the Mach waves emanating from the leading edge (LE) of the plate hits the flat plate downstream of the interaction and does not disturb its dynamics. Finally the Reynolds number of the flow based on  $L$  is  $Re_L = 2.8 \times 10^6$ .

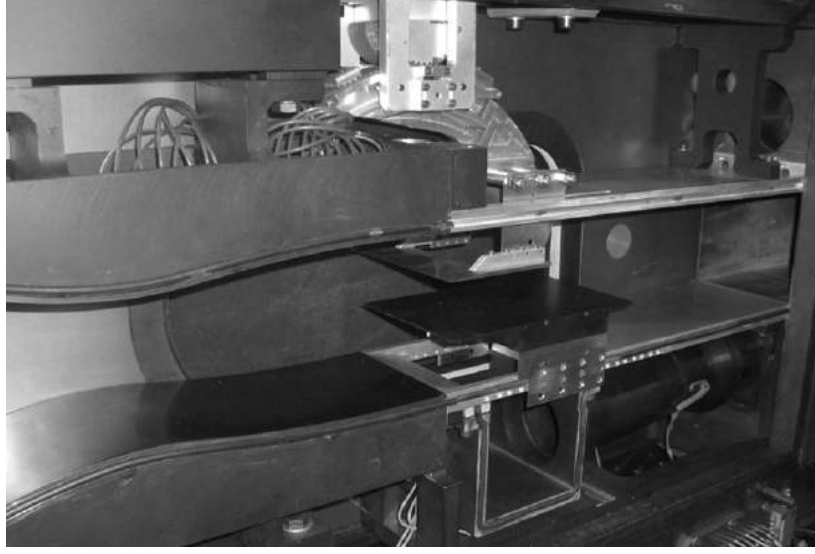


FIGURE 5.2 Picture showing a side view of the experimental setup installed in the test section of the S8Ch wind tunnel at the ONERA Meudon research center.

### Numerical LES experiment

The experimental data does not allow a sufficient characterization of the medium and high frequency components of the flow due to a limited sampling rate, as will be discussed later on. Therefore a numerical LES simulation is further used to complete the validation of the resolvent approach. The LES is achieved with the block-structured elsA solver developed at the ONERA. No subgrid scale model is used and one can consider the method as being part of the MILES approach (see Boris et al. [16]). The elsA code relies on a second order accurate finite volume formulation. The convective fluxes are computed thanks to an AUSM+(P) scheme (Mary et al. [78]) with a third order reconstruction of the fluxes. The wiggle detector proposed by Ducros is used to enforce the dissipation of the scheme where necessary (see Mary et al. [78]), and a Newton sub-iterative process ensures second order accuracy in time.

Following the sketch in figure 5.1 the computational domain is **FEDA**. The oblique shock wave is generated by deflecting the upper boundary following a similar geometry as that of the shock generator (**BTE**) used experimentally. The boundary condition at the entrance of the computational domain (**FA**) is a supersonic entrance with  $M = 1.6$ , a stagnation pressure  $P_i = 96000 Pa$  and a stagnation temperature  $T_i \simeq 300 K$ . No perturbation has been introduced in the incoming flow. The initial seed for transition is naturally provided by the very small perturbation provoked by the switch from a wall slip boundary condition (on **FLE**) to a no-slip adiabatic condition at the leading edge **LE** of the flat plate. A supersonic outflow condition is imposed at the boundary **ED**. All other frontiers are slip boundary conditions. The transverse width of the computational domain is 12 times the height of the bubble. The

grid comprises about 38.4 millions of points ( $1568 \times 147 \times 167$ ) with an LES-type resolution  $\Delta x^+ < 50$ ,  $\Delta y^+ < 1.5$  and  $\Delta z^+ < 20$ . The computation time is  $12.3ms$  representing 24 periods of the low frequency dynamics of the flow at  $S_t \simeq 0.09$  which is described later on.

### 5.2.3 RANS mean flow

The RANS simulation of the flow is carried out using the Spalart-Allmaras [115] model coupled with the AHD criterion [7], the Gleyzes [26] correction for separated flow and the Dumoulin correction [38] for compressible flows. The AHD transition criterion introduces a numerical intermittency function  $\gamma$  whose role is to modulate the production term in the equation for  $\tilde{\nu}$  and the eddy viscosity as  $\mu_t = \gamma \rho \tilde{\nu} f_{v1}$ . The intermittency function is chosen as a parabolic law going from zero in the laminar boundary layer to one in the turbulent part. In the AHD criterion the local growth rate of perturbations obtained from experimental correlations is integrated along the flow development at the wall. The AHD criterion switches to the Gleizes criterion when the flow enters the laminar separation, to account for the stronger amplification of disturbances promoted by the separated shear layer. When the accumulated growth rate of these perturbations exceeds the  $N$  factor  $N_{tr}$  associated with the free stream, the intermittency function  $\gamma$  is activated and turbulence consequently arises. The value of  $N_{tr}$  is determined from the Mack law  $N_{tr} = A + B \ln(T_u)$ , where  $T_u$  is the turbulence level of the free stream, here set to 0.5% and  $A, B = -8.43, -2.4$ . Since the value of  $T_u$  is not known experimentally, this value has been tuned to reproduce the size of the bubble obtained in the experiment. The computation is further determined by the value  $\nu_t = 0.001$  set at the upstream boundary.

To ease subsequent discussions the RANS equations are cast into the compact form

$$\frac{\partial q}{\partial t} = R(q) \quad (5.1)$$

where  $R(q)$  is the residual,  $q = (\rho, \rho U, \rho V, \rho E, \rho \tilde{\nu})$  the flow vector in conservative form, where  $\rho$  is the mass density,  $(U, V)$  is the velocity field,  $E$  is the total energy and  $\tilde{\nu}$  is the turbulent variable of the Spalart-Allmaras model.

The steady solution  $q_0$  (also called base flow what follows) such that  $R(q_0) = 0$  is obtained with the code elsA. A second-order accurate time scheme including a local time-stepping strategy is adopted. A second order AUSM+P [78] upwind scheme is used to compute the convective fluxes in order to correctly capture the shock wave. The viscous fluxes are calculated at the interfaces by averaging the cell-centered values of the flux densities defined at the cell centers. The source terms are discretized using estimates of gradients and variables at cell centers. Simulations are converged up to machine precision and a preliminary mesh convergence study has been carried out to validate the current mesh which features  $\Delta x = 0.022L$ . The mesh features  $y^+ < 0.5$  along the entire flat plate.

Similarly to the LES, the computational domain is **FEDA** (see sketch in figure 5.1). A supplementary nozzle designed for  $M = 1.6$  is plugged at the inflow frontier (**AF**), as the resolvent analysis only allows for a subsonic injection condition at the inlet. An adiabatic wall boundary condition is applied along the flat plate. A supersonic outflow condition is applied at the outlet (**ED**). All other borders are wall-slip condition.

### 5.2.4 Flow features

#### Mean flow

Figure 5.3 shows the Schlieren views of the flow obtained in the wind tunnel experiment, in the LES and in the RANS simulations. A Phantom V710 camera set at a frame rate of  $35kHz$  (corresponding to  $S_t = 1.8$ ) over a duration of approximately  $1s$  was used to record the Schlieren views, representing 40,000 snapshots. The sensor size is  $608 \times 304$  pixels which leads to a spatial sampling  $\Delta X, Y \simeq 6 \times 10^{-3}$  (normalized units). Figure 5.3(a) is an instantaneous of the Schlieren images and 5.3(b-c) are numerical Schlieren of the mean flow. The knives in the Schlieren setting are parallel to the (Oy) axis and highlight the streamwise derivative  $I_\rho = \partial\rho/\partial x$  of the density field. The general structure of the flow is as sketched in figure 5.1 for the three approaches (experimental, LES and RANS), with the Mach waves at the leading edge of the flat plate (I), the oblique shock wave (II), expansion waves (IV) and (VI), the laminar separation bubble (III), the compression wave that forms at the separation (VIII) and the reflected shock wave (V) that forms at the reattachment point.

A compression wave (VII) is further identified in the experiment only. A zoom in the region of the shock foot, shown in figure 5.4(a), gives a better view on the laminar separation bubble, and allows to relate this compression (VII) to some transverse variations of the incident shock wave. It is suggested that this is due to the interaction of the flow with the side walls. The corner flow at the side walls opposes the flow more than at the centerline, causing the observed deflection of the incident shock toward the flat plate and the consequent more upstream impingement. However these transverse effects appear much less intense than the main part of the oblique shock which can thus be considered as 2D in the middle of the test section.

Table 5.1 compares the positions of locations **S**, **I** and **R** with respect to the leading edge (**LE**) in physical units and the shock angle  $\beta$  for the three approaches. In the experimental case, these locations are determined from the Schlieren image and suffers from uncertainties, that are indicated in the table. The positions are consistent within a  $5mm$  interval and the scatter in bubble size is less than  $1mm$ . The main difference about the experiment is for the position of **S** and **R**. Concerning the shock angle  $\beta$  the difference is less than  $1^\circ$ . This overall validates the LES and RANS results against the experiment. The agreement on the bubble length is particularly satisfying considering its high sensitivity to the level of perturbations

TABLE 5.1 Values of the coordinates, about the leading edge **LE**, of the main points defining the flow, namely  $X_s - X_{LE}$ ,  $X_r - X_{LE}$  and  $X_I - X_{LE}$  and the angle of the incident shock wave  $\beta$ . Physical units are used for clarity.

	$X_S - X_{LE}$ (mm)	$X_I - X_{LE}$ (mm)	$X_R - X_{LE}$ (mm)	$\beta$
<b>Wind tunnel experiment</b>	$38 \pm 2$	$55 \pm 1$	$58.5 \pm 1$	$44.2 \pm 0.5$
<b>LES</b>	39.2	56.5	60	44.5
<b>RANS</b>	43.5	58	63.5	43.5

and, concerning simulation, to mesh refinement and numerical parameters (as reported by Larcheveque [69]).

Another interesting conclusion is to remark that the front part of the bubble from **S** to **I** is significantly longer than the rear part from **I** to **R**. This highlights the high sensitivity of the boundary layer to the pressure gradient imposed by the shock and the essential role played by turbulence behind the shock to rapidly reattach the flow.

### Laminar to turbulent transition

A first assessment of the boundary layer transition in the experiment can be made using the Schlieren view provided in figure 5.4(a). In this view of the flow, the development of turbulence at the wall in the shock impingement region can be qualitatively identified by contrast with the boundary layer upstream of the separation which appears free of small scale disturbances. A quantitative evaluation of the transition has subsequently been obtained using infrared (IR) thermography. The IR arrangement is made of a FLIR SC7000 camera of image size  $640 \times 512$  pixels, a lens of  $50mm$  and a frame rate equal to  $100Hz$ . Averaged temperature distributions along the flat plate obtained from IR, LES and RANS are shown in figure 5.5 for comparison. Trends match satisfyingly between the various methods. All indicate a progressive increase of the wall temperature downstream of a location slightly upstream of point **S** ( $X - X_S \simeq -0.5$ ) up to a location inside the bubble ( $X - X_S \simeq 0.75$ ), and quite significant fluctuations downstream. The maximum of temperature can be interpreted as an approximate location of the start of the turbulent section of the flow. The overall increase is about 2 degrees in the wind tunnel and about 6 degrees in the simulation. A conservative estimate based on the recovery temperature factor (Crocco's relation) yields  $\Delta T \approx 5K$ . The temperature jump in the wind tunnel experiment can however only be lower because of the action of heat conduction in the material of the flat plate that tends to make temperature homogeneous. In the simulations adiabatic walls are considered. It seems however that the nature of the thermal boundary condition at the wall is not decisive regarding the position of transition, which justifies the simulation approach. Figure 5.6 shows that the evolution of the friction coefficients at the wall of the RANS and the LES simulations also agree quite well. The establishment of a turbulent boundary layer after the reattachment point generates

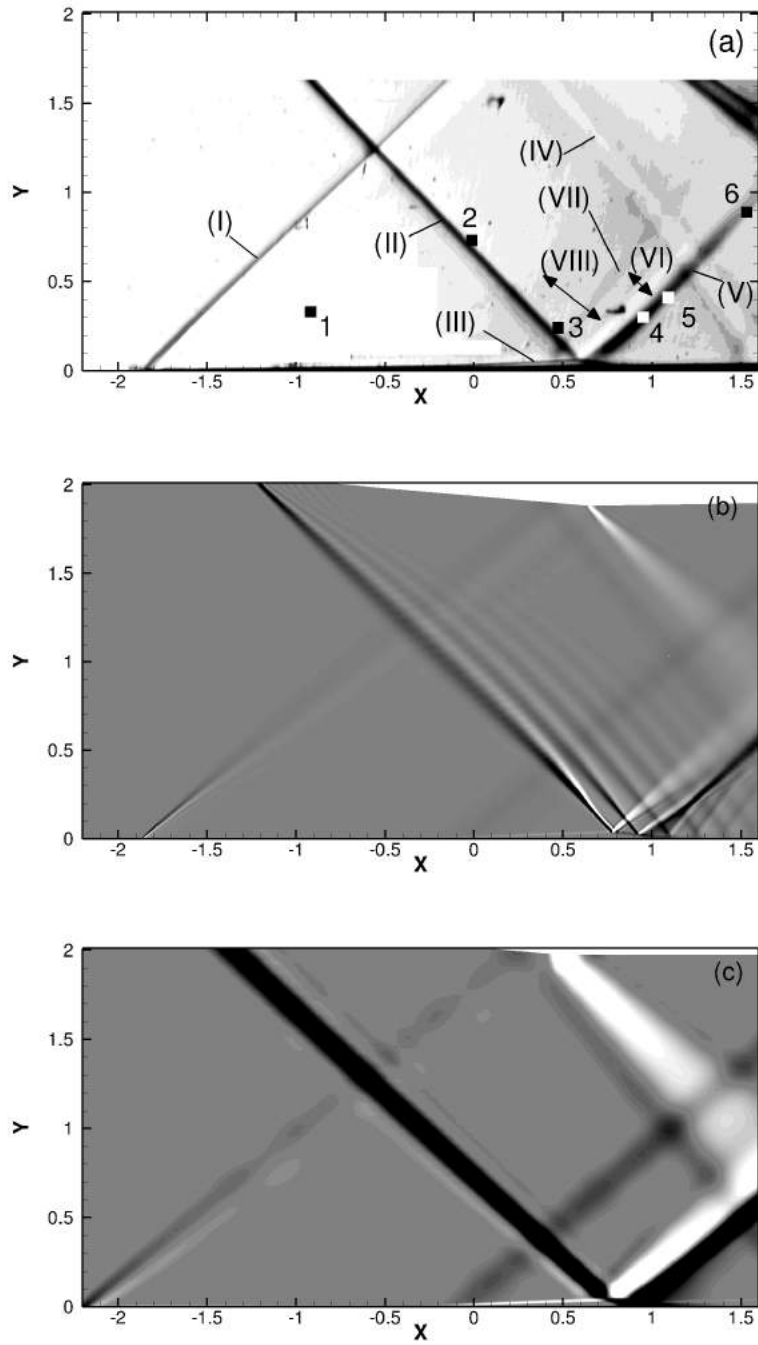


FIGURE 5.3 Time averaged Schlieren view of the shock-wave / boundary layer interaction obtained from (a) wind tunnel experiment (calculated using 40,000 snapshots), (b) LES simulation and (c) RANS simulation. In the LES the flow field is also averaged along the spanwise direction.



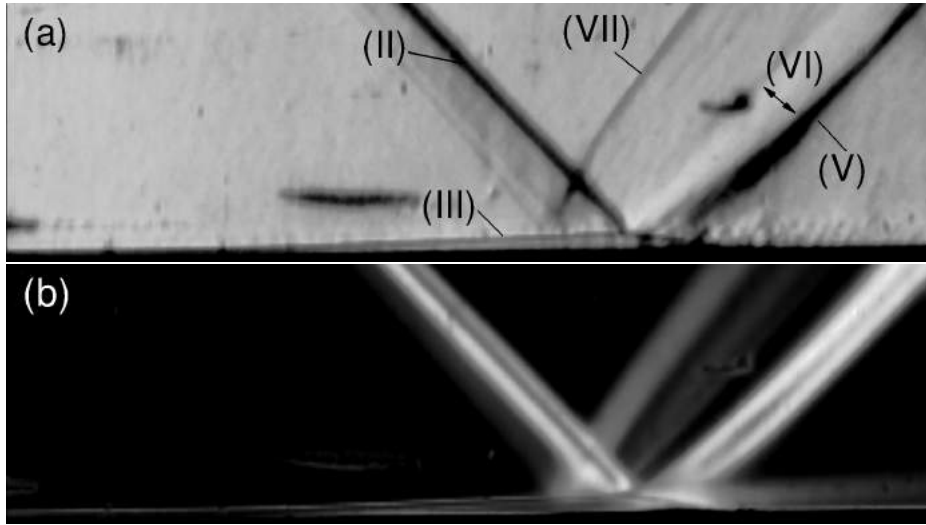


FIGURE 5.4 Schlieren visualization of the flow zoomed in the bubble region. (a) shows an instantaneous snapshot and (b) shows the standard deviation calculated using 40,000 snapshots.

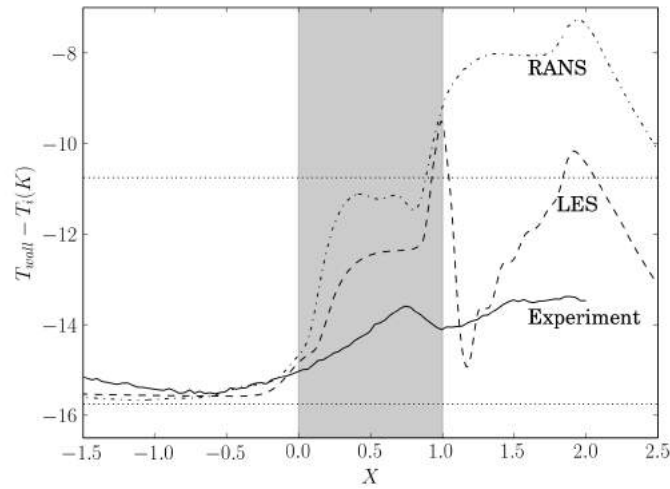


FIGURE 5.5 Evolution of the time averaged temperature at the wall minus the stagnation one ( $T_i$ ) in the experiment, LES and RANS. Horizontal lines represent the wall temperatures given by the Crocco's law. The lower one is the laminar case and the upper one is the turbulent case. The grey area is the extent of the separation bubble.

an increased friction compared to the laminar flow upstream. The friction coefficient is also found to be constant in the fore part of the bubble and to exhibit a minimum close to the shock impingement **I**, at a location that is noted **C** with coordinate  $X_C \simeq 0.9$  in the RANS case.

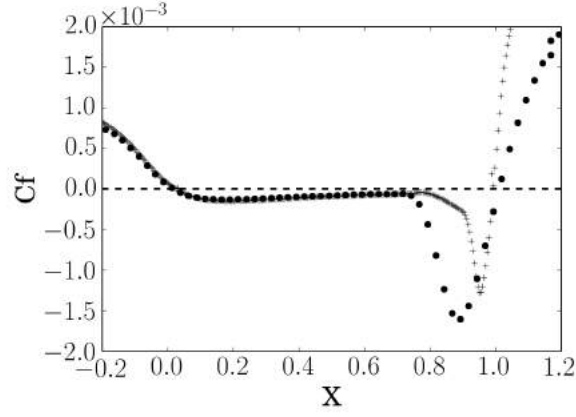


FIGURE 5.6 Comparison of the friction coefficient  $C_f$  between the RANS baseflow and the time and space (along the transverse direction) averaged LES flow field. Crosses indicate the LES data and points stand for the RANS data.

### Flow dynamics

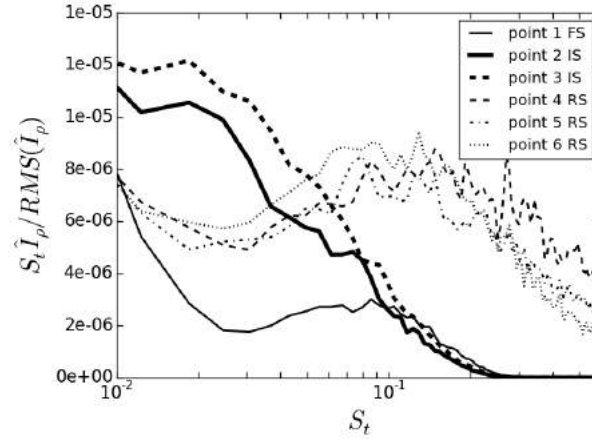


FIGURE 5.7 Pre-multiplied spectral amplitudes of the fluctuations of  $I_\rho$ , normalized by the local RMS value, obtained from the Schlieren visualizations at several locations, as indicated in the text and in figure 5.3. FS stands for Free Stream, IS for Incident Shock wave and RS for Reflected Shock wave.

Figure 5.4(b) shows the standard deviation of the Schlieren visualization in the region of the bubble. The incident and the reflected shock waves, and the bubble clearly exhibits some unsteady behavior. The unsteadiness of the structure earlier denoted (VII) is also apparent. In contrast, the expansion waves that form at the bubble top do not seem to fluctuate much.

The dynamics of the reflected shock wave is analyzed by carrying out a Fourier transform of the signal extracted from the series of 40,000 snapshots at several locations including one in the free stream  $P_1 = (X, Y) = (-0.95, 0.3)$ , two at the incident shock wave  $P_{2,3} = [(0., 0.7), (0.44, 0.21)]$  and three along the reflected shock wave at  $P_{4,5,6} = [(0.92, 0.27), (1.06, 0.38), (1.5, 0.86)]$ . These locations are indicated in figure 5.3(a). The analysis of the spectral content of the Schlieren signal is not performed in the region of the bubble since high frequency dynamics are present there due to the rise of turbulence. These high frequencies are not filtered in the Schlieren and irreparably generate aliased signals. In the selected regions no such high frequencies are present and the spectral analysis can be carried out.

A Welch averaged is applied with blocks of  $2^8$  samples and 50% overlap. Figure 5.7 shows the pre-multiplied spectra at these locations, normalized upon the RMS values of the individual signals. The values of these RMS normalized by the local mean are  $[0.01, 0.22, 0.35, 1.3, 0.5, 0.26]$  for  $P_1$  to  $P_6$ , respectively, showing that the strongest fluctuations occur at the reflected shock wave. Moreover the level of fluctuations decreases away from the interaction (both for the incident shock and the reflected shock) suggesting that the interaction acts as a source of fluctuations. Levels close to the interaction are higher at the reflected shock than at the incident shock (compare  $P_3$  and  $P_4$ ).

Spectra indicate that the free stream exhibits fluctuations in a wide range of frequencies around  $S_t = 0.08$ . This was found at all locations picked in the free stream upstream of the interaction. The incident shock wave has a dominant dynamics in the low frequency range, which is not present in the free stream. It is thought that this dynamics results from the viscous interaction of the incident shock with the wedge. The reflected wave shock exhibits a noticeable unsteadiness in a wide frequency range around  $S_t = 0.1$ . It is also apparent that close to the interaction the bump widens towards higher frequencies. The difference between the spectra of the free stream and that of the reflected shock wave suggests that the interaction develops an unsteadiness around  $S_t = 0.1$  which may further be promoted by the fluctuations already present in the free stream in this frequency range.

The LES data being sampled at a higher rate compared to the experiment it allows to extend the description of the flow fluctuations to higher frequencies. The PSD of the pressure at the wall is chosen to identify the dominant modes of the dynamics and figure 5.8 shows the spatial distribution of  $|\hat{p}(x, f)|/RMS(p)$  in the region of the laminar separation bubble, where  $|\hat{p}(x, f)|$  is the square root of the PSD of  $p(x, t)$  and where the normalization upon the RMS allows to better identify the locally prominent frequencies. The data exhibits three peaks, a low frequency one at  $S_t = 0.03 - 0.1$ , a medium one at  $S_t = 0.3 - 0.4$  and a high one at  $S_t = 2 - 3$ .

The longitudinal distribution of the pressure fluctuations at the wall shown in figure 5.8 indicates that the low frequency dynamics occurs mostly in the fore part of the bubble,

the medium frequency dynamics in the core of the bubble for  $S_t = 0.3 - 0.4$  and the high frequency peak at the end and downstream of the bubble.

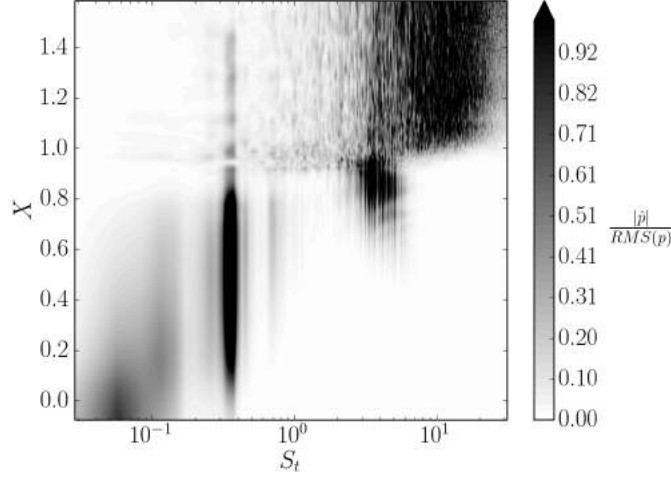


FIGURE 5.8 Amplitude of pressure fluctuations  $|\hat{p}(x, f)|/RMS(\hat{p})$  at the wall as a function of longitudinal distance  $(X - X_S)/L$  and normalized frequency  $S_t$ .

The flow structures associated with the low, medium and high frequency components of the LES are detailed in figure 5.9 using the field of kinetic energy in spectral space  $\frac{|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2}{2}$ . The second row in figure 5.9 displays the resolvent responses, which will be analyzed later on. The low frequency mode in LES is localized in the shear layer upstream and downstream of the oblique shock wave, and also distributes along the reflected shock and in the boundary layer downstream of the bubble. The medium frequency mode exhibits a similar distribution with however a stronger intensity at the reflected shock and in the region downstream of the interaction. The higher frequency mode is entirely localized downstream of the reattachment point and the reflected shock is not involved. In any of these modes obtained from the LES, it must be noted that the maximum amplitude of kinetic energy is always found at the reattachment point.

The comparison between the LES and the experimental results leads to several comments. First it appears that both method identify a low frequency mode, with a good agreement in frequency. Experimentally this low frequency peak is identified by analyzing the fluctuation of the reflected shock wave. This is consistent with the LES data that shows the implication of the reflected shock in this dynamics. The medium peak identified by the LES is not observed in the experiment although the LES data shows that it also affects the reflected shock wave and in spite of the capacity of the Schlieren sampling rate to capture this frequency range. It is suggested that in the experiment the medium peak may be hidden by the low frequency dynamics as the latter would be favored by the free stream, which has fluctuations

of approximately the same frequency, as shown in figure 5.7. Eventually the high frequency mode is not scrutinized by the experimental apparatus. However it is consistent with the development of the turbulence at the rear part of the bubble which is also observed in the Schlieren.

Overall this analysis from the LES and the experiment supports the existence of three distinct modes in the flow. The first one appears at a low frequency, and is observed both in the LES and in the experiment. The second is determined only from the LES and it remains unknown whether it is present in the experiment. The third one exhibits a high frequency and is seemingly associated with the turbulence that arises at the end of the bubble, as seen in the experiment. From the literature review it appears that these results are consistent with earlier findings. As mentioned in the introduction, Larchevêque [69] also found three such frequencies, the first one at  $S_t = 0.04$  in the vicinity of the separation, the second for  $0.1 < S_t < 0.3$  inside the interaction and the last one for  $S_t > 1$  near the impingement point. Also Sansica et al. [104] could identify a first frequency at  $S_t = 0.04$ , a second one for  $S_t \simeq 0.1$  and a third one for  $S_t = 1 - 2$ . In the rest of the text, these three modes will consistently be referred to as the low, medium and high frequency modes.

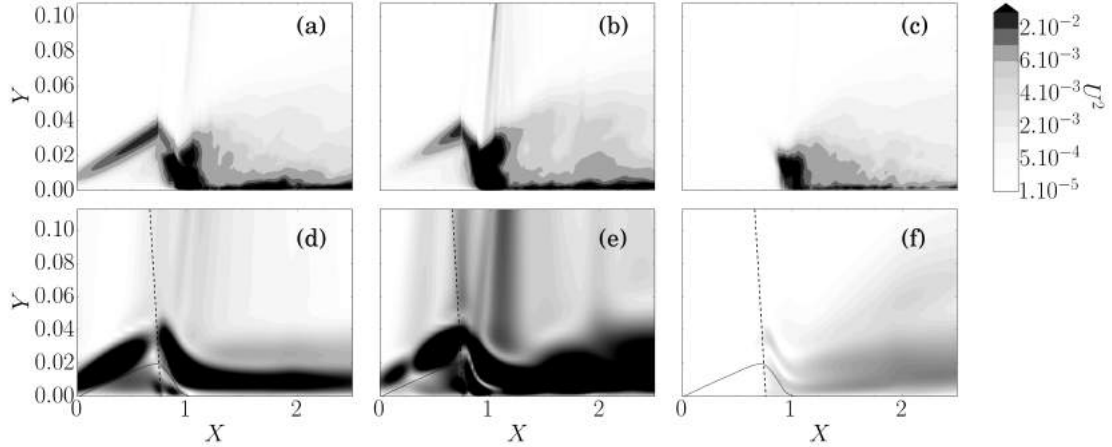


FIGURE 5.9 Spectral components of the kinetic energy at the three frequencies that dominate the SWBLI, obtained through a PSD analysis of the time evolution of the flow field. In (a,b,c) the data corresponds to the LES simulation and is preliminary subjected to a space (transverse) averaging. (d,e,f) show the optimal response of the resolvent analysis. From left to right the frequency is (a)  $S_t = 0.09$ , (b)  $S_t = 0.3$  and (c)  $S_t = 1$  for the LES data. For the resolvent analysis, the frequency is (d)  $S_t = 0.09$ , (e)  $S_t = 0.3$  and (f)  $S_t = 1$ . The color map only concerns the LES data. The scale for the optimal response is arbitrary. In (d,e,f) the solid line indicates the locus of zero horizontal velocity, and the dashed line represents the incident shock wave.

### 5.3 Resolvent analysis

The global stability of the flow has been investigated in a preliminary step in order to check whether these dynamics could correspond to some global instabilities. The results are that the flow is globally stable to 2D perturbations. The stability spectrum is presented in appendix E. In these conditions the flow may feature an amplifier behavior and thus is best analyzed using a resolvent approach. This is carried out as follows. The Navier-Stokes equations are first written as

$$\frac{\partial q}{\partial t} = R(q) \quad (5.2)$$

where the flow is decomposed as  $q = \bar{q} + q'$  with  $\bar{q}$  the mean flow and  $q'$  the fluctuations. The equations for the mean flow and the fluctuations are detailed in appendix A. Next the equation for  $q'$  are formally written as

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = L(q') + N(q') \quad (5.3)$$

where  $L(\bullet)$  is the linear Navier-Stokes operator based on molecular viscosity and  $N(\bullet)$  is a non linear operator. The response to harmonic forcing is then investigated by switching to the spectral space, through the application of a Fourier decomposition

$$i\omega \hat{q} = L(\hat{q}) + \widehat{N(q')}. \quad (5.4)$$

Then by associating the nonlinear term as the forcing term, i.e.

$$\widehat{N(q')} = \hat{f} \quad (5.5)$$

and introducing the operator

$$A = (i\omega I - L)^{-1} \quad (5.6)$$

one gets the following relation between the forcing  $\hat{f}$  and the response  $\hat{q}$

$$\hat{q} = A(\omega) \hat{f} \quad (5.7)$$

A gain function between the forcing and response amplitudes can then be defined

$$\lambda^2(\tilde{f}) = \frac{\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle_q}{\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_f}. \quad (5.8)$$

with the following scalar products

$$\langle a, b \rangle_q = a^\dagger Q_{\Omega_q} b \quad (5.9)$$

and

$$\langle a, b \rangle_f = a^\dagger Q_{\Omega_f} b \quad (5.10)$$

which are based on the matrices  $Q_{\Omega_{q,f}}$  which are introduced to shape the spatial restrictions  $\Omega_q$  and  $\Omega_f$  for the response and the forcing. The set of optimal forcing is then obtained by solving the eigenvalue problem

$$A^\dagger A f_i = \lambda_i^2 f_i \quad (5.11)$$

where  $^\dagger$  represents the trans-conjugate operator. The responses is then taken as

$$q_i = \lambda_i^{-1} A f_i. \quad (5.12)$$

and together form an orthonormal basis ( $A^\dagger A$  being self-adjoint).

The choice of the scalar product (5.10) and of the domain  $\Omega_f$  determines the forcing quantity to be optimized and its localization, which makes possible the selection of a particular region of space for the analysis. Following relation (5.5) the forcing represents the nonlinear terms in the equation for the perturbations. Developments given in appendix A show that the forcing plays in all the components of equation (5.2).

The scalar product (5.9) is chosen based on the analysis of Beneddine et al. [13] who shows that the optimal response of the resolvent analysis is identical to the spectral component of the unsteady flow field provided the scalar product is taken as the norm of the velocity, i.e.  $\langle q, q \rangle = \|u\|^2 = 2k$  where  $k$  is the kinetic energy of the perturbations. This result can be shown by projecting the velocity field on the set of responses of the resolvent operator

$$\hat{u}' = \lambda_1 u_1 \langle f_1, \hat{f} \rangle + \dots \quad (5.13)$$

where  $f_1$  is the optimal forcing and  $u_1$  the response. If  $\lambda_1 u_1 \langle f_1, \hat{f} \rangle$  dominates  $\lambda_j u_j \langle f_j, \hat{f} \rangle$ ,  $\forall j > 1$ , then the velocity fluctuation is well approximated by the optimal response with a coefficient which depends only on the frequency, i.e.

$$\hat{u}' \simeq \langle f_1, \hat{f} \rangle (\omega) \lambda_1(\omega) u_1 \quad (5.14)$$

In this case the shape of the optimal response is the same as that of the spectral mode obtained from a temporal evolution of the flow. Here the spectral components from the LES simulation, shown in figure 5.9, are considered. Although the forcing in the LES simulation is unknown, it is legitimate to suppose that all  $\langle f_j, \hat{f} \rangle$  have the same order of magnitude. An argument to support this claim can be found in Farrell et al. [41]. It is shown in this work that in the case of a laminar to turbulent transition, a totally random continuous forcing can reproduce the transition as well as the optimal response provided the Reynolds number is high enough. Here, supposing it is random, the forcing is thus expected to be uniformly distributed along the  $f_i$ , meaning that, on average,  $\langle f_1, \hat{f} \rangle \simeq \langle f_j, \hat{f} \rangle$  for all  $j$ . Under this

condition and providing that the largest eigenvalue of the resolvent is much larger than the second one then relation (5.14) fully applies.

## 5.4 Results

### 5.4.1 Identification of the low, medium and high frequency modes

#### Analysis of the resolvent gain

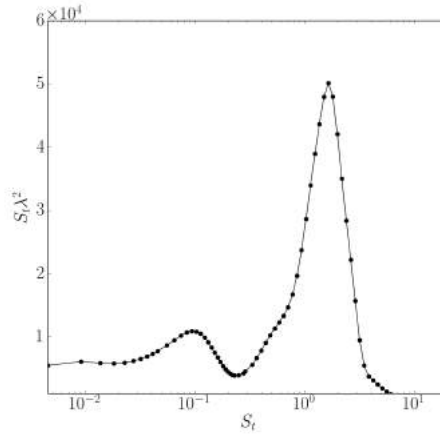


FIGURE 5.10 Amplification gain between the optimal forcing and response obtained with the resolvent analysis with the response restricted to the region  $\Omega_q = [X_{LE}, 0.3]$  using the pre-multiplied gain  $S_t \lambda^2$  as a function of  $\log(S_t)$ .

Figure 5.10 shows the evolution of the gain when the response is restricted to a domain  $\Omega_q = [X_{LE}, X_S + 0.3]$  which takes into account the part of the flow field up to an intermediate position in the bubble. The gain is expressed in a pre-multiplied format  $S_t \lambda^2$  to highlight the dominant frequencies, which are here  $S_t = 0.03 - 0.11$  (with a maximum at  $S_t = 0.09$ ) and  $S_t = 1 - 2$  (with a maximum at  $S_t = 1.8$ ). These frequencies are consistent with the low and high frequency modes obtained from the LES. The comparison of the resolvent optimal response with the LES Fourier modes, which should look alike provided that the first eigenvalue of the resolvent is dominant over the other, must also be achieved. Figure 5.11 shows that  $\lambda_1$  exceeds  $\lambda_2$  by a factor of approximately three for the low and high frequency modes, which validates the condition.

Figures 5.9(a,b,c) were described before and figures 5.9(d,e,f) are now introduced as they show the resolvent optimal response at the three distinct frequencies highlighted by the LES. For the low and high frequencies (which is here picked at the same frequency as the LES, i.e.  $S_t = 1$ ) a good agreement is observed between the two sets of data in terms of spatial distribution of the perturbation (figure 5.9(a) with (d) for the low frequency and figure 5.9(c)



with (f) for the high frequency). The low frequency mode appears all over the interaction while the high frequency mode localizes only at the rear of the bubble.

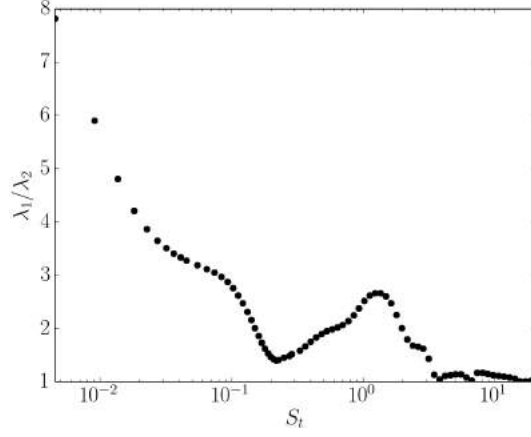


FIGURE 5.11 Comparison between the first and second eigenvalues ( $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ ) of the resolvent analysis for region  $\Omega_q$ , as a function of frequency.

Note that in the above analysis the choice of the  $\Omega_q$  region is important as it was noticed that the high frequency peak is overwhelming when the region also encompasses the reattachment region where, as identified from the LES spectral decomposition and further shown later on, the origin of this dynamics is to be found. On the other side, not taking into account the bubble does not allow to see the low frequency peak, which is intimately related to it.

### Bubble breathing

It has been suggested before that the medium frequency movement relates to a breathing behavior of the bubble, see for instance Dussauge et al. [40]. Therefore in this part the existence of a medium frequency mode is evaluated by looking at the bubble dynamics as a function of frequency, using the resolvent optimal response as a model of the flow unsteadiness, following (5.14). The fact that the medium frequency mode could not be witnessed in the plot of the gain in figure 5.10 may be attributed to the large peak associated with the high frequency mode, which could hide nearby dynamics. This implies that one has to look at a more specific aspect of the physics of the mode to identify it.

Here the bubble length is more particularly analyzed as it should react to a breathing type of movement, that is periodic expansion and reduction of the bubble size. This is done by investigating the motion of the separation and reattachment points  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{R}$ . The length of the bubble  $L = X_R - X_S$  is obtained by calculating the locations of the separation and

reattachment points  $X_S$  and  $X_R$  that result from the equation

$$f_{R,S}(u, X_{R,S}) = 0 \quad (5.15)$$

where

$$f_{R,S}(u, X) = \frac{\partial u}{\partial Y}(X) \quad (5.16)$$

When the flow is forced at a given frequency  $\omega$ , the positions of **S** and **R** will move following

$$\tilde{X}_{S,R} = X_{S,R} + X'_{S,R} \quad (5.17)$$

with

$$X'_{S,R} = A_{S,R}(\omega) \cos(\omega t + \phi_{S,R}(\omega)) \quad (5.18)$$

and where  $A_{S,R}(\omega)$  and  $\phi_{S,R}(\omega)$  are the amplitude and phase of the displacement of **S** and **R**. The instantaneous bubble length is then easily derived

$$\tilde{L} = \tilde{X}_R - \tilde{X}_S = L + L_M \cos(\omega t + \phi_L) \quad (5.19)$$

$X'_{S,R}$  can be retrieved by linearizing equation (5.15), that is solving an equation of the form

$$\frac{\partial f_{R,S}}{\partial X} X'_{R,S} + \frac{\partial f_{R,S}}{\partial u} u' = 0 \quad (5.20)$$

Furthermore upon introducing a model of perturbation based on the resolvent modes, it is possible to write

$$u' = \Re \left( \varepsilon \lambda_1(\omega) u_1(\omega) e^{i\omega t} \right) \quad (5.21)$$

where  $\varepsilon = \langle f_1, \hat{f} \rangle$  is the amplitude of the projection of the forcing on the optimal forcing component. The solution to the perturbation of  $X_{R,S}$  then yields

$$\hat{X}_{R,S} = A_{R,S} e^{i\phi_{R,S}} = \varepsilon \lambda_1(\omega) u_1(\omega) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} \right)^{-1} \quad (5.22)$$

The value of  $\varepsilon$  allows to scale the perturbation. In the present analysis it is supposed that incoming noise is uncolored, i.e. white noise, and so that  $\varepsilon$  can be taken constant over all frequencies. In practice the calculation of  $A_{R,S}$  and  $\phi_{R,S}$  is achieved by considering a small value of  $\varepsilon$  and solving (5.15) without linearizing. It was subsequently checked that  $A_{R,S}/\varepsilon$  and  $\Delta\phi = \phi_R - \phi_S$  were independent of the value of  $\varepsilon$  when  $\varepsilon$  is small enough (typically  $\varepsilon < 0.001$ ).

Figure 5.12 shows the evolution of  $L_M/\varepsilon$  and  $A_{R,S}/\varepsilon$  as a function of frequency and figure 5.13 shows the evolution of the phase difference  $\Delta\phi = \phi_R - \phi_S$  between **R** and **S**. The high and low frequency modes are easily identified in the two figures. The high (low)

frequency dynamics is the one that involves the largest (smallest) variation in bubble length. When looking at  $A_{R,S}$  one can also see that the separation point  $\mathbf{S}$  is more sensitive to the low frequency component than the reattachment point  $\mathbf{R}$ , which is mostly affected by the high frequency dynamics. This is in agreement with the LES results (see figure 5.8).

What is new is the existence of an intermediate peak at  $S_t \simeq 0.3$  that remarkably lies at the intersection of the curve of  $A_R$  and  $A_S$ . This means that for this particular frequency the perturbation to the flow induces an equal motion on  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{R}$ . Now looking at the variation of the phase difference  $\Delta\phi = \phi_R - \phi_S$  between  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{S}$  in figure 5.13(a), it is also found for this frequency that  $\Delta\phi \simeq 0.9\pi$ . This means that  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{S}$  are close to phase opposition. On physical grounds the combined motion of  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{R}$ , of equal amplitude and opposite in phase, can be related to a periodic expansion and reduction of the separation bubble. With this in mind, it is interesting to take a second look at figure 5.9 because the plot allows to identify a bump in the region  $S_t \simeq 0.3$  which agrees well with the distinct peak present at this same frequency in the plot of  $L_M/\varepsilon$  in figure 5.12(a). It thus appears that a breathing type of dynamics is also present in the current flow, that proceeds at a medium frequency. As an additional validation the resolvent response at  $S_t = 0.3$  is shown in figure 5.9(b) and compared to the LES result in frame (e). Compared to the low frequency mode, the medium frequency mode appears localized more downstream and to involve higher levels of fluctuations at the reflected shock wave and downstream of the reattachment point. These features are found both in the optimal response and in the LES data, suggesting a qualitative match between the resolvent and the LES.

The phase estimation provided by the resolvent analysis  $\Delta\phi$  in figure 5.13(a) is further compared to the LES result in figure 5.13(b). The low and medium peaks compare favorably : for the medium peak the phase shift is  $\Delta\phi = 2.6$  for the LES and  $\Delta\phi = 2.8$  for the resolvent result while for the low frequency,  $\Delta\phi = 4.9$  for the LES and  $\Delta\phi = 3.9$  for the resolvent. Yet the agreement for any other frequency is not as good, suggesting that the importance of the low and medium frequency modes in the overall dynamics could favor this good match. Lastly the fluctuations of the phase for the high frequency dynamics are also apparent in the LES.

Overall the values of the dominant frequencies found with the resolvent approach ( $S_t \in [0.03 - 0.11, 0.3, 1 - 2]$ ) are in close agreement with those found in the LES simulation ( $S_t \in [0.03 - 0.1, 0.3 - 0.4, 2 - 3]$ ) and already shown in figure 5.8. The low frequency peak was also found consistent with the experiment. Comparisons including literature data are given in table 5.2 as a summary. The different studies agree on the existence of these three distinct frequencies involved in SWBLIs. In the following we will investigate the dynamics of these modes based on the resolvent modes at  $S_t = 0.09, 0.3$  and  $1.8$ .

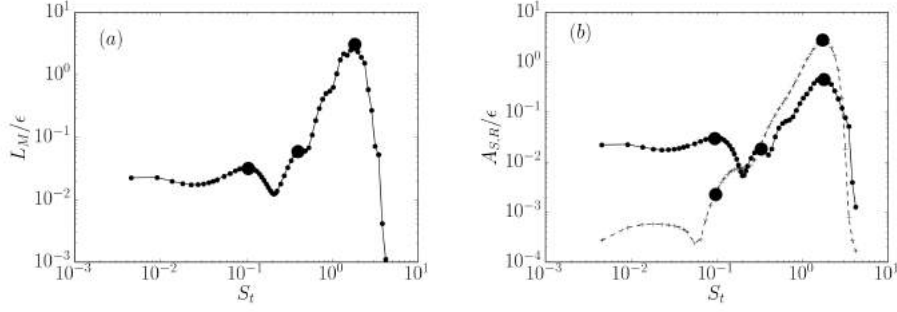


FIGURE 5.12 Behavior of the bubble as a function of frequency, when the flow is forced with white noise. (a) Evolution of the variations in bubble size  $L_M$  and (b) amplitude of displacement of  $\mathbf{S}$  (continuous line) and  $\mathbf{R}$  (dashed line). The points identify the location of the low, medium and high frequencies peaks, respectively. Note that  $L_M$  and  $A_{R,S}$  are divided by  $\epsilon$ .

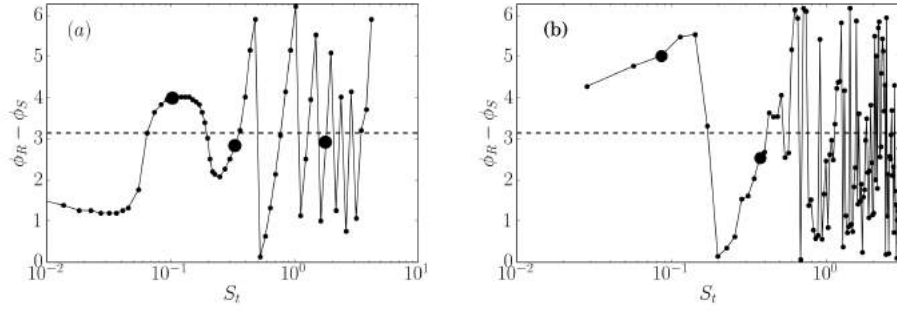


FIGURE 5.13 Phase difference between the movement of the reattachment point  $\mathbf{R}$  and the separation point  $\mathbf{S}$ , as a function of frequency. The low, medium and high frequency components are highlighted with the larger dots. (a) Resolvent analysis and (b) LES data.

#### 5.4.2 Linear mechanisms involved in the optimal forcings

The analysis of the optimal forcing is now undertaken in order to understand the mechanism of perturbation growth leading to the optimal response. Only the dominant resolvent modes, i.e. those at  $S_t = 0.09, 0.3$  and  $1.8$ , are considered. The corresponding optimal forcings are shown in figure 5.14, in terms of longitudinal momentum. It is observed that the modes all localize in the fore part of the laminar separation bubble and along the separation streamline of the separated area. Unlike the low frequency mode, the medium and high frequency modes also extend quite upstream of the separation  $\mathbf{S}$ . The modal structure is found to be similar between the modes, with inclined patches regularly spaced along the initial boundary layer and the separation line of the front part of the bubble. The size and number of these patches are seen to reduce and increase, respectively, as frequency increases. For the high frequency

TABLE 5.2 Main frequency peaks  $S_t$  identified in the transitional SWBLI, from the present LES and RANS analysis and those reported from literature. Lam : Laminar interaction, Turb : Turbulent interaction.

Study	SWBLI	Low	Medium	High
present <b>EXP</b>	Lam $M = 1.6$	$\simeq 0.1$		
present <b>LES</b>	Lam $M = 1.6$	0.03-0.1	0.3-0.4	2-3
present <b>RANS</b> +Resolvent	Lam $M = 1.6$	0.03-0.11	0.3	1-2
Sansica et al. [104] <b>DNS</b>	Lam $M = 1.5$	0.04	$\simeq 0.1$	1 – 2
Larcheveque et al. [69] <b>LES</b>	Lam $M = 1.63$	[0.01, 0.1]	[0.1, 0.3]	> 1
Agostini et al. [4] <b>LES</b>	Turb $M = 2.3$	< 0.1	0.5	nd
Pirozzoli et al. [96] <b>LES</b>	Turb $M = 2.25$	0.03	0.58	nd

mode there is also a variation of these structures between the upstream boundary layer and the separated area (structures widen and become smaller), suggesting that two different mechanisms are at play in these regions.

One can remark that for all the three modes, the optimal forcing presents local extrema on the maximum shear stress line. The structures in the separated shear layer, apparent for the three modes, are thus likely associated with the Kelvin-Helmholtz (KH) instability. The KH instability amplifies incoming perturbation for a wide range of frequencies and this naturally explains why it is similarly available for the low, medium and high frequency components.

The low frequency mode additionally involves some perturbation along the line of maximum shear stress at the top of the bubble and a second structure that links the top of the bubble and, approximately, the region around point **C** at the wall. This suggests that the perturbation to the top of the bubble transfers to the region around **C**, which could be related to the impact of the KH eddies upon the incident shock wave.

For the medium and high frequency modes, the distribution of longitudinal momentum in the boundary layer upstream of **S** appears similar to the one identified for the Tollmien-Schlichting (TS) waves by Brandt et al. [19] suggesting that the initial growth of perturbation occurs through a TS mechanism. The continuation of the perturbation to the boundary layer into the shear layer of the laminar separation bubble indicates that the TS mechanism likely transfers to the KH mechanism. The possibility of this transfer was demonstrated by Marxen [76].

In order to get further information on the stability of the present boundary layer, a one-dimensional local spatial stability analysis, concerned with two-dimensional waves only (zero transverse wavenumber), has been carried out with a dedicated code that solves the linearized Navier-Stokes equations using a finite difference scheme. The restriction to 2D perturbations is consistent with the rest of the work. The code has first been validated against Mack's results for  $M = 1.6$  (see Mack [74]), and then applied to the present SWBLI case,

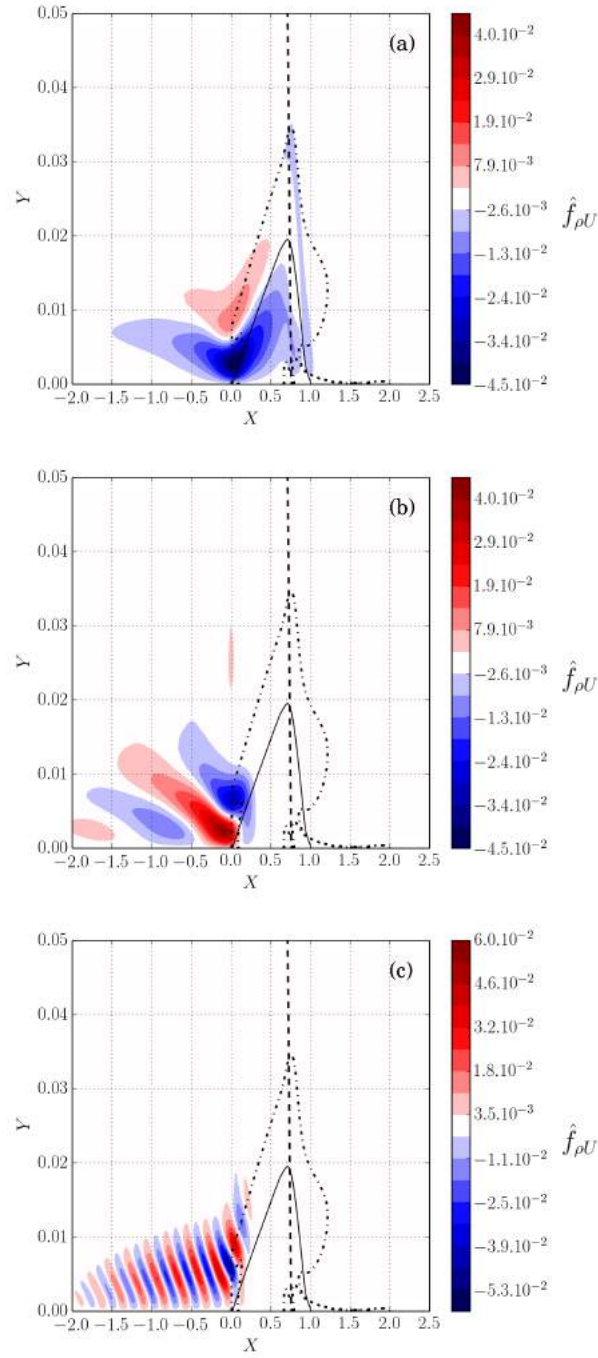


FIGURE 5.14 Maps of the real part of the optimal forcing in terms  $\rho U$  for (a)  $S_t = 0.09$ , (b)  $S_t = 0.3$  and (c)  $S_t = 1.8$ . The dashed line represents the incident shock. The continuous line delineates the back flow region inside the bubble. The vertical axis has been magnified compared to the horizontal axis to increase clarity. The dashed dotted line represents the locus of maximum shear stress.

starting from upstream and moving forward down to the end of the bubble. The parallel flow assumption is not rigorously matched in the bubble region but follows a similar and successful approach made, among others, by Rist [99]. The amplification factor of the most unstable mode is displayed in figure 5.15(a) for the low, medium and high frequency modes. These results indicate that the boundary layer upstream of  $\mathbf{S}$  is stable for the low and medium frequencies and unstable for the high frequency. Near the separation point, the low and medium frequency modes become unstable and the amplification factor of the high frequency mode increases significantly. This confirms the claim that the shear layer is less selective than the boundary layer to develop instabilities. Finally, the two lower frequency modes return to stability near  $X = X_c$ . The perturbation velocity profile at  $X = -0.5$  associated with the high frequency is plotted in figure 5.15(b) and confirms that the mechanism is TS. Figure 5.15(c) shows the perturbation profile at  $X = 0.25$  inside the bubble, from which the presence of a third lobe in the curve, associated with the developing shear layer, can be identified. This confirms that the optimal forcing are related to the KH instability.

The high frequency mode at  $S_t = 1.8$  appears dominant over the entire spectrum, as was shown in figure 5.10(a), and this questions the relevance of this frequency from a local stability point of view. As an answer figure 5.16 shows the evolution of the maximum spatial growth rate as a function of frequency, for  $X = -0.5$ , i.e. in the upstream laminar boundary layer. It clearly appears that  $S_t = 1.8$  is locally the most unstable frequency and suggests that it is the local stability of the flow upstream of the separation that dictates the dominant unsteady behavior of the flow.

### Density wave feedback

Sansica et al. [104] have shown the existence of a pressure wave feedback in this kind of interaction. Were it present the feedback should be apparent in the density field associated with the optimal responses. To investigate this point the density field is thus written as

$$\rho' = |\hat{\rho}|e^{i\phi_\rho} \quad (5.23)$$

where  $\phi_\rho$  and  $|\hat{\rho}|$  are the phase and amplitude given by the optimal responses. As a first step the spatial distributions  $\phi_\rho$  and  $|\hat{\rho}|$  for the low and medium peaks are analyzed, based on figure 5.17 which shows the contours of the phase in the range  $]-\pi, \pi]$ . The high frequency mode is not discussed in this part as it does not appear to play inside the bubble and therefore appears free of such feedback process.

For the low frequency, figure 5.17(a) shows that the phase in the bubble is almost constant to a value close to  $\pm\pi$  (black and white), meaning that the flow in this region evolves as one block, as was already pointed out by Agostini et al. [4] in a turbulent situation. It is also observed that outside this band, a longitudinal propagation away from the bubble is at play, which suggests that the bubble wholly acts as a source of perturbations that propagate

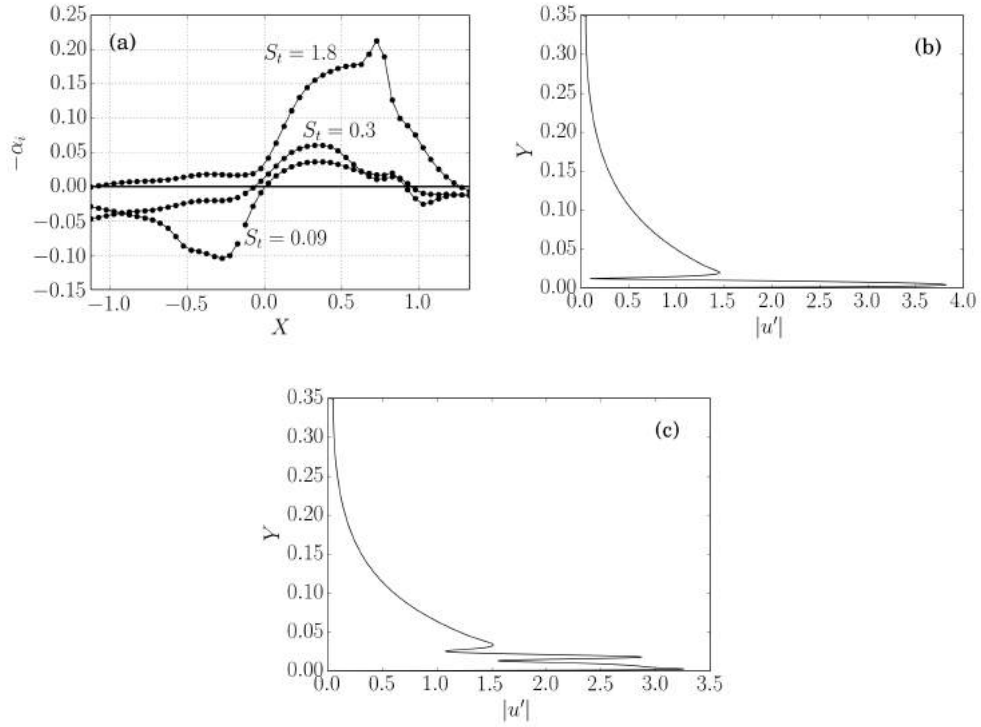


FIGURE 5.15 Results of the local spatial stability analysis. (a) Amplification rate along the flat plate for the low, medium and high frequency modes. (b) and (c) show the vertical profile of the most unstable mode in terms of axial velocity magnitude for the high frequency  $S_t = 1.8$  at  $X = -0.5$  and  $X = 0.25$ , respectively.

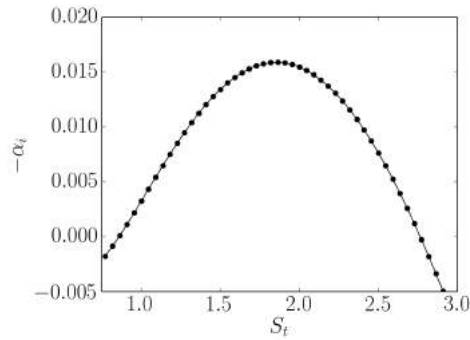


FIGURE 5.16 Amplification rate of the most unstable mode at  $X = -0.5$  as a function of normalized frequency.

outward, opposite to free stream to the left (down to  $X = -0.5$ ) and in the direction of the free stream to the right. The amplitude of perturbation density in figure 5.17(b) shows that inside the bubble the perturbation reaches a maximum at point **C**.



For the medium frequency, figure 5.17(c) shows that the density perturbation purely convects from left to right in the entire domain with only few modulations of the wave front in the bubble region. This propagation of the medium frequency mode is also found by Agostini et al [4]. The amplitude shown in figure 5.17(d) indicates that the region around point **C** also exhibits high values, but it is less prominent than in the low frequency case.

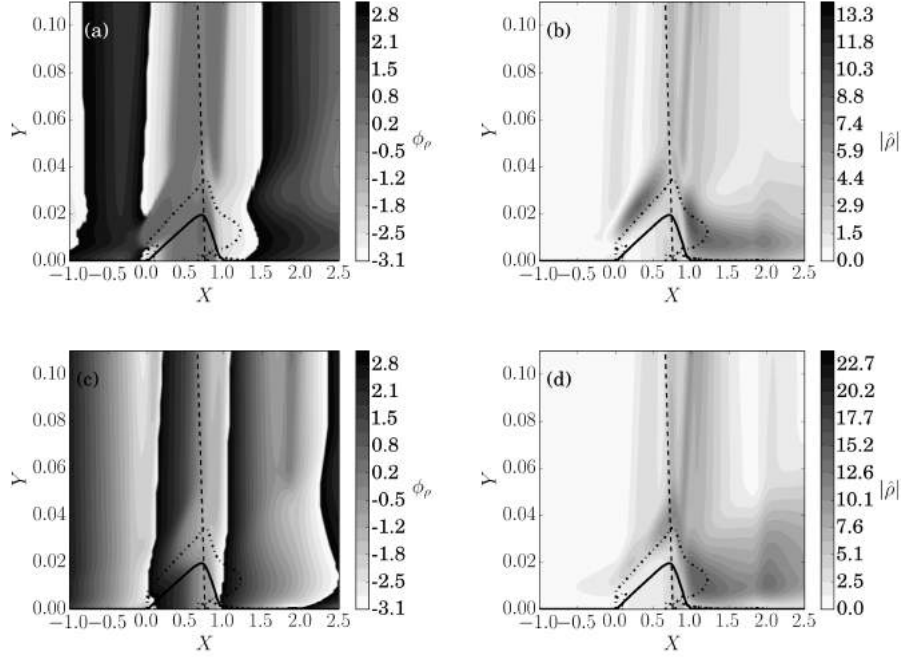


FIGURE 5.17 Phase  $\phi_\rho$  and amplitude  $|\hat{\rho}|$  of the density perturbation for the (a-b) low and (c-d) medium frequency modes. The dashed line represents the incident shock, the continuous line is the locus of zero streamwise velocity indicating the region of back flow, and the dashed-dotted line represents the locus of maximum stress in the shear layer, as an approximation for the separating streamline of the separation bubble.

The phase velocity at the wall is now more particularly analyzed, as it can give information on how information propagates, and at what speed. Data is also available in the LES and in the literature for comparison. The phase velocity is here deduced from the spatial variation of the phase as

$$V_\phi = -\frac{\omega}{\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x}} \quad (5.24)$$

Figure 5.18(a,c) show the inverse  $V_\phi^{-1}$  of the phase velocity for the low and medium frequency modes. The inverse is used to prevent infinite values when  $V_\phi$  goes to zero. This figure shows that, for the low frequency, the phase velocity is positive in the region  $X \in [-1.5, -0.3]$  and negative in  $X \in [-0.3, 0.5]$ . It exhibits very large values in  $X \in [0.5, 0.9]$  and becomes positive further downstream. Moreover the phase velocity suddenly reaches a value close

to zero at point **C**. This evolution shows that an upstream traveling phenomenon occurs in the region  $X \in [-0.3, 0.5]$ . Sansica et al. [104], Larchevêque [69] and Pirozzoli [96] also observed such an upstream traveling wave in this region. The phase velocity in the interval  $X \in [-0.3, 0.5]$  is equal, on average, to  $V_\phi = -0.1U_\infty$  offering a qualitative match with values from literature, since  $V_\phi = -0.27U_\infty$  is given by the DNS of the turbulent flow made by Larchevêque at the same Mach number [69] and in the turbulent flow at Mach 2.25 simulated by Pirozzoli [96]. However the analysis of Sansica et al. [104] yields  $V_\phi = -0.6U_\infty$ , a significantly higher absolute value. The cross correlation given by the LES results also shows waves going upstream inside the bubble with  $V_\phi = -0.22U_\infty$ . These velocities are significantly lower than the one of an acoustic wave that would go upstream inside the bubble (which would yield  $V_\phi \simeq -0.8U_\infty$ ).

Figure 5.18(b) displays the evolution of the perturbation density amplitude  $|\hat{\rho}|$  corresponding to the optimal response. The amplitude increases for  $X \in [-1.5, 0]$ , decreases in  $X \in [0, 0.3]$  and increases again in  $X \in [0.3, X_C = 0.9]$ . At point **C** the amplitude gets suddenly close to zero while a maximum is reached at the reattachment point **R**. The combination of negative phase velocity in the upstream part of the bubble ( $X \in [0, 0.3]$ ) and decrease of density amplitude shows that the perturbation is amplified as it propagates upstream. This denotes the amplifier behavior of the bubble that was also demonstrated by Sansica et al. [104].

The fact that the amplitude and phase velocity go to zero at  $X_C$  suggests that this location plays the role of a source of density fluctuations. This is also suggested by the result of Agostini et al. [4] who identified a source in the second part of the interaction ( $0.6 < X < 0.7$ ) in a similar yet turbulent configuration. This point is analyzed in the following section.

Figures 5.18(c-d) show the variation of the inverse of the phase velocity  $V_\phi^{-1}$  and of the amplitude  $|\hat{\rho}|$  at the wall for the medium frequency mode. It is observed that the phase velocity is everywhere positive except in the region slightly ahead of the separation point **S** (from  $X = -0.18$  to  $X = 0.0$ ) where it is negative and at  $X = 0.05$  and near **C** where it reaches a small value. The amplitude of the wave roughly grows in the interaction region and decreases downstream of it. In the region just upstream of **S**, considering its backward propagation, the wave is found to amplify. Furthermore the two locations where the phase velocity attain small values,  $X = 0.05$  and  $X = X_C$ , are local minimum of wave amplitude. This also questions their potential role of sources for the density perturbations.

In Agostini's turbulent case [4] the medium frequency mode is shown to be induced by a single non stationary source located at the end region of the interaction ( $X > 0.7$ ). The relevance of Agostini's result for the present case is supported by the fact that the phase velocity in the interaction region,  $V_\phi = 0.38U_\infty = 170m.s^{-1}$ , is found to be  $V_\phi = 0.34U_\infty = 150m.s^{-1}$  in the present work (in the region from  $X = 0$  to  $X = 1.5$ ). However a discrepancy is found with the LES that shows an upstream traveling wave with an intensity  $V_\phi = -0.37U_\infty$ .

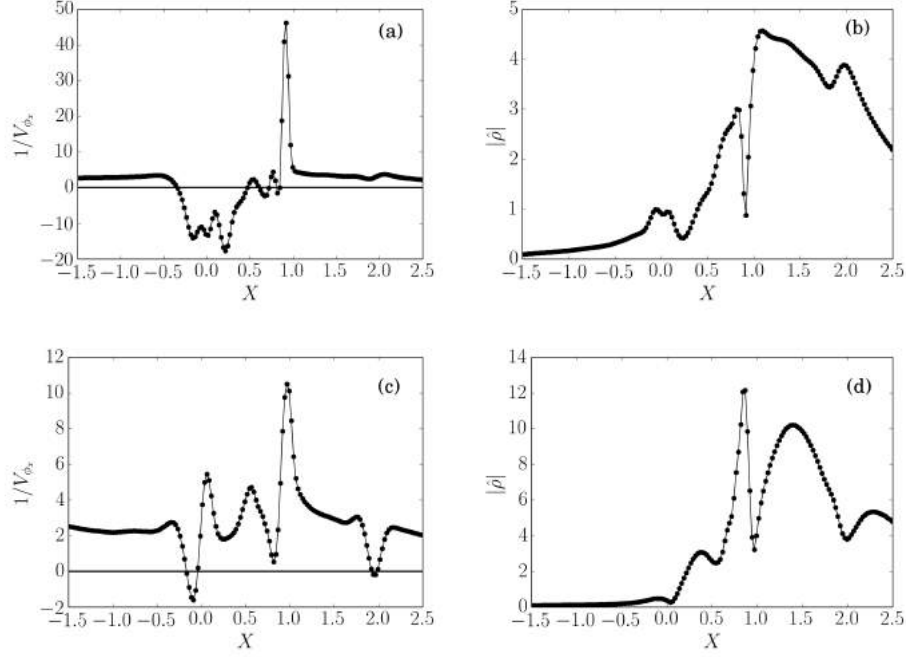


FIGURE 5.18 Evolution of the inverse of the phase velocity  $V_\phi^{-1}$  as a function of  $X$  in (a) and (c) and evolution of density amplitude  $|\hat{\rho}|$  in (b) and (d) for the (a,b) low and (c,d) medium frequency modes.

### Identification of the density fluctuations sources

The presence of sources of density fluctuations, which was suggested above, is specifically investigated here by looking at Lighthill's equation which transforms the compressible set of equations into a single equation for the propagation of density disturbances induced by a source term. The transformation requires a propagation speed of the waves which is here taken as  $V_\phi$ , defined previously

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - V_\phi^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5.25)$$

with

$$T_{ij} = \rho' v'_i v'_j - \sigma_{ij} + (p' - V_\phi^2 \rho') \delta_{ij} \quad (5.26)$$

where  $\sigma_{ij}$  is the traceless stress tensor. Equation (5.25) summarizes equation (A.24) given in appendix A, with the right hand side gathering all the density fluctuations source terms. The source terms are computed using the resolvent optimal response (5.14).

The intensity of this term for the low and medium frequency dynamics is shown in figure 5.19. In figure 5.19(a) corresponding to the low frequency mode, a high intensity of this term is found in the turbulent boundary layer downstream of the interaction and, inside the

bubble, in the vicinity of the minimum friction point **C**. This supports the earlier claim that **C** plays the role of a density fluctuations source. For the medium frequency the Lighthill's term shown in figure 5.19(b), the minimum friction point **C** appears much less intense than for the low frequency mode and the point  $X = 0.05$ , whose potential as density fluctuations source had been evoked earlier, does not appear to play this role. Therefore it does not seem that density fluctuations are involved in the medium frequency phenomenon.

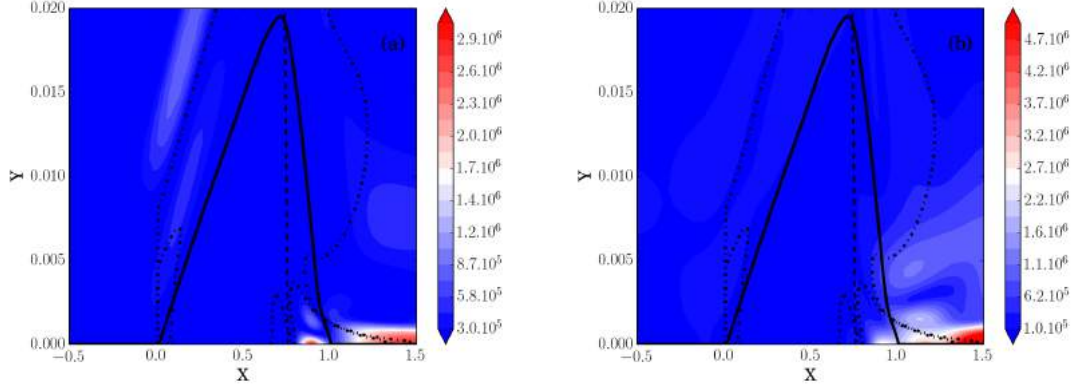


FIGURE 5.19 Amplitude  $|\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}|$  of the source term of the Lighthill's equation (5.25) for (a)  $S_t = 0.09$  and (b)  $S_t = 0.3$ . The dashed line represents the incident shock, the continuous line is the locus of zero streamwise velocity indicating the region of back flow, and the dashed-dotted line represents the locus of maximum stress in the shear layer, as an approximation for the separating streamline of the separation bubble.

### 5.4.3 Analysis

The findings obtained in the previous sections allow to share a wider view on the low, medium and high frequency peaks. Concerning the low frequency peak it has been shown to involve the growth of the KH instability in the upper part of the laminar separation bubble and the generation of a feedback at the point **C** of minimum friction. This feedback, identified from density perturbations, grows as it propagates upstream and hits the separation point which was shown to be a highly sensitive region (figure 5.14(a)). As a result the disturbance to the separation point sets the start for another loop of perturbation of the entire bubble and downstream flow, and this is the basis of the pseudo resonance observed in the map of optimal gain (figure 5.10). The role of source played by **C** is demonstrated from the analysis of the way information propagates in the domain and from the quantitative search for sources using the Lighthill's equation (5.25). The disturbance to point **C** could not be fully explained but it is suggested to be the consequence of the nonlinear growth of the KH instability and of the impact of the associated eddies upon the oblique shock, which together generate a strong perturbation to the bubble and affect more particularly the flow around **C**. Figure 5.14(a)

shows a link between the top of the bubble and **C** which could be the mark of this mechanism. Overall this feedback scenario agrees well with previous analysis [96, 103] and identifies the peculiar role played by the minimum friction point **C**.

The medium frequency peak has been shown to relate to an expansion/reduction behavior of the bubble, with the movement of **S** and **R** almost in phase opposition. From figure 5.12(b) it is seen that the medium frequency peak lies in the frequency range where the amplitude of movement of the reattachment point **R** starts to dominate that of the separation point **S**. The flow hence switches from an unsteady situation dominated by the movement of the separation point **S** associated with the density fluctuations feedback of the low frequency mode to an unsteadiness dominated by the turbulence in the reattachment region, associated with the high frequency peak. The mechanism through which this expansion/reduction of the bubble occurs remains yet unknown.

Lastly the high frequency peak has been related to the turbulent region behind the interaction, as is clearly observed in figure 5.9(f). The mechanism is related to the continuous growth of perturbation from upstream of the bubble, through the TS instability, and along the bubble through the KH instability, which generates large oscillations of the reattachment point **R**.

It is interesting to eventually mention that the application of the model of Piponnier [95], that empirically describes the periodic contraction and dilatation of the bubble, to the present case using the data from the RANS flow solution leads to a frequency of  $S_t = 0.14$ . This value lies in between the low and medium frequencies identified in the present work. Phenomenologically however the breathing described by this model resembles the dynamics of the bubble at the medium frequency, not that of the low frequency peak. Therefore it seems that the model fails to predict the correct frequency, albeit it is right as a rough estimate.

## 5.5 Conclusion

The unsteadiness of a SWBLI for an upstream laminar boundary layer has been studied with a combination of steady RANS computations and resolvent analysis, and compared to experimental data and results from a companion LES simulation. The experiment features a  $M = 1.6$  oblique shock wave interaction with a laminar boundary layer developing on a flat plate. The flow at the interaction forms a separation bubble where the transition to turbulence takes place. The flow downstream of the interaction is turbulent. The LES simulation highlights three main frequencies in the interaction, at normalized frequencies equal to  $S_t = 0.03 - 0.1$ ,  $S_t = 0.3 - 0.4$  and  $S_t = 2 - 3$ . Among these the low frequency peak is well evidenced by the experimental analysis. The RANS simulation, that contains a transition criterion for the transitional state of the interaction, allows to reproduce the main features of the mean flow seen in the experiment and the LES simulation, including the laminar separation bubble. The stability analysis of this mean flow shows that the flow is

globally stable. The main result shown in this study is that the resolvent analysis captures the main dynamical components observed in the LES simulation and in the experiment. The resolvent responses compare favorably with the LES Fourier modes, in agreement with theory. The frequencies highlighted by the resolvent are  $S_t = 0.03 - 0.11$ ,  $S_t = 0.3 - 0.6$  and  $S_t = 1 - 2$ . The role of source of density perturbation played by the point of minimum friction **C** has been demonstrated by analyzing the way information propagates in the region and by identifying the source terms of Lighthill's equation.

The analysis of the three main frequencies using the resolvent forcing and response reveals (i) the sensitivity of the separation point for the low frequency peak  $S_t = 0.03 - 0.11$ , and the significant unsteadiness of the reflected shock wave, (ii) the fact that the medium frequency peak at  $S_t = 0.3 - 0.6$  depends upon the entire bubble, with here also a significant impact on the reflected shock wave and (iii) the relation between the high frequency peak at  $S_t = 1 - 2$  and the dynamics of the reattachment point **R**.

A scenario close to the one from Sansica et al. [104] in a laminar interaction and to the one from Pirozzoli et al. [96] in a turbulent interaction has been suggested for the low frequency dynamics. The main difference is the way the feedback is created. Here it is proposed that density waves are forced at the minimum of friction point **C** from perturbation growing non linearly in the shear layer at the top of the bubble when they hit the oblique shock. The feedback acts through the high sensitivity of the separation point as it is disturbed by this density wave traveling and growing backward.

A similar analysis has been achieved for the medium frequency. The flow at this frequency is driven by a purely convection process which has an important amplitude in the shear layer and in the reflected shock wave. The separation and the reattachment points move with equal amplitudes, suggesting that this mode relates to a breathing of the bubble.

The high frequency mode at  $S_t = 2 - 3$  (LES) and  $S_t = 1 - 2$  (resolvent analysis) is related to the transition of the boundary layer. This has been appraised first by the distribution of the optimal forcing and its dual localization in the laminar boundary layer and in the shear layer before the interaction point **I** and second by the fact that the response is located downstream of the interaction in the turbulent boundary layer. The reattachment point is particularly involved in this dynamics.



## Chapitre 6

# Vers le système complet

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la dynamique de l'écoulement résultant de l'interaction d'un choc oblique avec une couche limite laminaire. Pour ce faire nous avons d'abord calculé un champ de base à l'aide du modèle de turbulence de Spalart-Allmaras et le critère de transition AHD-GI. Nous avons ensuite effectué une analyse de stabilité globale de ce champ comme expliqué dans le chapitre 4. Lors de cette analyse, nous avons suivi une approche  $\mu$  laminaire, ce qui revient à négliger les effets de la tension de Reynolds turbulente sur les instationnarités basses fréquences, comme montré précédemment dans le chapitre 4. Dans le cas de l'analyse du phénomène de buffet sur une aile avec une couche limite turbulente, Sartor [105] et Crouch [31] montrent que les approches  $\mu_t$  figé et  $\mu$  laminaire ne sont pas suffisantes pour prédire le phénomène de buffet. Il est à craindre que ces approches soient aussi incapables de prédire correctement la stabilité de l'écoulement avec transition. Afin d'en être sûr, il faudrait faire une analyse en prenant le système RANS au complet. Dans le cas présent cela demande de prendre en compte l'effet d'une variation du champ de base sur la position de transition. Or le critère AHD n'est pas facilement différentiable. Une stratégie pour pratiquer cette analyse avec ce critère de transition est proposée dans le cas du critère d'Abu-Ghannam [2] dans l'annexe B. Les résultats de cette annexe montrent que différencier ce critère est faisable, mais demanderait un temps de programmation important et n'a pas été entrepris dans le présent travail. Le critère de Menter-Langtry, qui est basé sur des équations de transport de  $\gamma$  et  $\overline{R_{\theta_t}}$ , est plus facilement différentiable. Ce modèle, tout comme le modèle de turbulence k- $\omega$  SST de Menter, ne peut toutefois pas être utilisé tel qu'il est défini à l'origine (et notamment dans le code elsA), car certaines fonctions ne sont pas continuellement dérivables (ce sont souvent des fonctions min et max). Afin de palier à ce problème, nous avons modifié ces fonctions dans le modèle. La description de ces modifications fait l'objet de la première partie. Il sera vérifié que cette modification de modèle de transition ne change pas le champ RANS obtenu. Nous présenterons ensuite le champ de base obtenu avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . Nous le comparerons aux résultats du calcul RANS avec la fermeture de Spalart +AHD-GI ainsi qu'à l'expérience du projet TFAST et à la LES. Afin d'étudier la stabilité



globale de l'écoulement, nous ferons des analyses de stabilité globale pour chacun des niveaux de modélisation de la tension de Reynolds turbulente ( $\mu$  laminaire,  $\mu_t$  figé,  $\gamma$  figé et système complet).

Toutes ces analyses montrent que le champ est globalement stable conformément aux résultats du chapitre précédent. Le comportement d'amplificateur de bruit est donc confirmé et nous ferons des analyses de résolvant sur ce nouveau champ. Là encore nous ferons différentes analyses selon le niveau de modélisation. Nous étudierons ensuite le forçage optimal et la réponse correspondante afin de vérifier que la physique mise en exergue dans le chapitre précédent est indépendante du modèle de turbulence.

Comme nous le verrons, nous avons introduit un nouveau paramètre lors de la différentiation des modèles de turbulence et de transition. Nous vérifierons enfin que les résultats de l'analyse de résolvant ne dépendent ni du maillage ni de ce paramètre.

## 6.1 Modification des modèles de turbulence et de transition

Quand on regarde les différentes équations présentes dans le modèle de turbulence  $k - \omega$  de Menter avec la correction SST ainsi que dans le critère de transition  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  de Menter Langtry, on se rend compte qu'il y a deux sources de non différentiabilité. La première est constituée des fonctions min et max présentes à de nombreux endroits (par exemple dans la relation (3.85)). La seconde est la corrélation proposée par Langtry donnant le Reynolds de transition en fonction du taux de turbulence et du gradient de pression extérieur (voir la relation (3.102)). Cette fonction est définie par morceaux et n'est pas continument dérivable au niveau des raccords.

Ces fonctions ont toutefois la particularité d'être dérivables partout sauf en un point. L'idée qui est proposée ici est de garder les fonctions initiales sur une grande partie du domaine de définition et de modifier la fonction uniquement proche du point de discontinuité de la dérivée. La taille de ce voisinage est un paramètre qui fait l'objet d'une étude particulière. On présentera d'abord comment on traite les fonctions min et max, puis nous montrerons comment nous modifions la corrélation.

D'un point de vue pratique, nous avons implémenté le changement des fonctions min, max et  $R_{\theta_t}$  dans le code elsA. Un mot clef

$$isDiff = Diff/unDiff \quad (6.1)$$

y a été ajouté permettant d'appeler la version différentiable du modèle de turbulence ou sa version originale. La version différentiable du modèle ne doit pas changer la physique du résultat obtenu. Nous vérifierons donc que les deux modèles fournissent les mêmes résultats.

### 6.1.1 Modification des fonctions min et max

Pour modifier les fonctions min et max , il faut d'abord remarquer que

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}|a - b| + \frac{a + b}{2} \quad (6.2)$$

et

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}|a - b| - \frac{a + b}{2}. \quad (6.3)$$

Il suffit alors de remplacer la fonction valeur absolue pour rendre la fonction différentiable. La solution qui a été choisie est de modifier les valeurs absolues au voisinage de 0 par un polynôme d'ordre 2. On remplace donc  $|x|$  par

$$\psi(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -\sigma_d \\ \frac{x^2 + \sigma_d^2}{2\sigma_d} & \text{si } -\sigma_d \leq x \leq \sigma_d \\ x & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.4)$$

Ce changement est en fait le même que celui de la correction d'Harten utilisé dans les schémas numériques.

L'allure de cette fonction est comparée à la valeur absolue sur la figure 6.1. On constate que l'erreur maximale est de  $\frac{\sigma_d}{2}$ .  $\sigma_d$  est un paramètre que l'on fera varier par la suite afin de vérifier qu'il a peu d'influence sur les résultats.

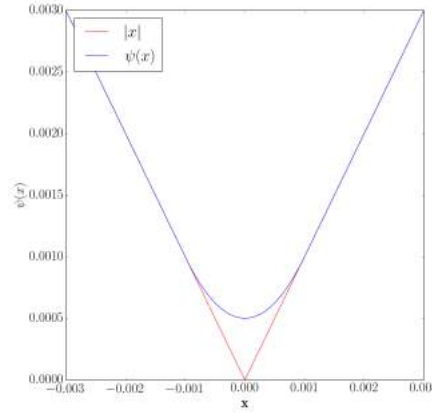


FIGURE 6.1 Tracés des fonctions valeur absolue et  $\psi$  entre  $-0.003$  et  $0.003$  pour  $\sigma_d = 0.001$ .

### 6.1.2 Modification de la corrélation

La fonction de corrélation (équation (3.102)) est rappelée ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\theta t} = \left( 1173,51 - 589,428 T_u + \frac{0,2196}{T_u^2} \right) F(\lambda_\theta) \quad \text{si } T_u \leq 1,3 \\ R_{\theta t} = 331,5 (T_u - 0,5658)^{-0,671} F(\lambda_\theta) \quad \text{si } T_u > 1,3 \\ F(\lambda_\theta) = 1 - (-12,986\lambda_\theta - 123,66\lambda_\theta^2 - 405,689\lambda_\theta^3) \exp\left(-\left[\frac{T_u}{1,5}\right]^{1,5}\right) \quad \text{si } \lambda_\theta \leq 0 \\ F(\lambda_\theta) = 1 + 0,275 [1 - \exp(-35,0\lambda_\theta)] \exp\left(\frac{-T_u}{0,5}\right) \quad \text{si } \lambda_\theta > 0 \end{array} \right. \quad (6.5)$$

On constate que  $R_{\theta t}$  est un produit de fonctions toutes deux définies par morceaux. De plus l'une d'entre elles est une fonction de deux variables. On peut la décomposer en

$$R_{\theta t} = G(T_u)F(\lambda_\theta, T_u). \quad (6.6)$$

Nous allons d'abord présenter la modification apportée à  $F$  puis nous passerons à  $G$ .

$F$  est non différentiable en  $\lambda_\theta = 0$ . Nous proposons de modifier la fonction par un polynôme d'ordre 3 en  $\lambda_\theta$  avec des coefficients qui sont des fonctions de  $T_u$ .  $F_0$ , la version modifiée de  $F$  autour de  $\lambda_\theta = 0$  est donc cherchée sous la forme

$$F_0 = a_F(T_u)\lambda^3 + b_F(T_u)\lambda^2 + c_F(T_u)\lambda + d_F(T_u). \quad (6.7)$$

Les fonctions  $a_F$ ,  $b_F$ ,  $c_F$  et  $d_F$  ont été trouvées en imposant la continuité des fonctions et des dérivées en  $\lambda_\theta = \sigma_d$  et en  $\lambda_\theta = -\sigma_d$ . La valeur de ces fonctions est donc

$$a_F(T_u) = \frac{1}{4\sigma_d^2} \left( \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda_\theta} \right|_{\sigma_d} (T_u) + \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda_\theta} \right|_{-\sigma_d} (T_u) \right) - \frac{1}{4\sigma_d^3} (F(T_u, \sigma_d) - F(T_u, -\sigma_d)), \quad (6.8)$$

$$b_F(T_u) = \frac{1}{4\sigma_d} \left( \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda_\theta} \right|_{\sigma_d} (T_u) - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda_\theta} \right|_{-\sigma_d} (T_u) \right), \quad (6.9)$$

$$c_F(T_u) = \frac{1}{2\sigma_d} (F(T_u, \sigma_d) - F(T_u, -\sigma_d)) - \sigma_d^2 a(T_u) \quad (6.10)$$

et

$$d_F(T_u) = \frac{1}{2} (F(T_u, \sigma_d) + F(T_u, -\sigma_d)) - \sigma_d^2 b(T_u) \quad (6.11)$$

De la même manière, la modification  $G_0$  de  $G$  va être choisie sur un voisinage de  $T_u = 1.3$  avec une forme polynomiale

$$G_0(T_u) = a_G(T_u - 1.3)^3 + b_G(T_u - 1.3)^2 + c_{T_u}(T_u - 1.3) + d_{T_u}, \quad (6.12)$$

où

$$c_G = \frac{1}{2(1.3 - 3)} \left( \left. \frac{\partial G}{\partial T_u} \right|_{1.3+\sigma_d} + \left. \frac{\partial G}{\partial T_u} \right|_{1.3-\sigma_d} - 3 \frac{G(1.3 + \sigma_d) - G(1.3 - \sigma_d)}{\sigma_d} \right), \quad (6.13)$$

$$a_G = \frac{1}{2\sigma_d^3} (G(1.3 + \sigma_d) - G(1.3 - \sigma_d)) - \frac{c_G}{\sigma_d^2}, \quad (6.14)$$

$$b_G = \frac{1}{4\sigma_d} \left( \left. \frac{\partial G}{\partial T_u} \right|_{1.3+\sigma_d} - \left. \frac{\partial G}{\partial T_u} \right|_{1.3-\sigma_d} - 2c_G\sigma_d \right), \quad (6.15)$$

et

$$d_G = \frac{1}{2} (G(1.3 + \sigma_d) + G(1.3 - \sigma_d)) - b_G\sigma_d^2. \quad (6.16)$$

L'erreur relative entre la corrélation proposée par Langtry et la corrélation modifiée est tracée sur la figure 6.2. On constate que l'erreur se situe bien au voisinage de  $\lambda_\theta = 0$  et de  $T_u = 1.3$ , et que l'écart relatif est de moins 0.2% pour  $\sigma_d = 0.001$ . Cet écart est faible. Il est cependant nécessaire de vérifier que les champs obtenus avec le modèle modifié et ceux obtenus avec le modèle original sont proches, c'est à dire que la physique du modèle n'a pas été modifiée par le nouveau modèle.

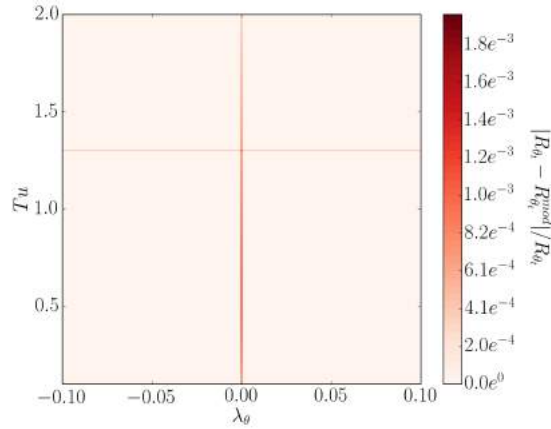


FIGURE 6.2 Ecart relatif entre  $R_{\theta_t}$  et sa modification pour  $\sigma_d = 0.001$

### 6.1.3 Effet sur les calculs du champ de base

Nous avons testé les deux versions de ce modèle sur la configuration du chapitre précédent. Les détails du calcul seront détaillés par la suite (Partie 6.2). La différence des deux champs de vitesse obtenus est tracée sur la figure 6.3. On constate un écart inférieur à 2% qui est concentré dans la couche de cisaillement de la bulle de recirculation, là où les effets visqueux sont importants. Les changements ayant été apportés essentiellement dans la correction SST

et dans le modèle de transition, les différences doivent être les plus importantes là où la transition se déclenche et là où la correction SST est activée. La transition comme on le verra par la suite s'effectue au sein de la bulle de recirculation qui est aussi l'endroit où la correction SST s'active. Il est donc logique que les différences se concentrent au niveau de cette séparation.

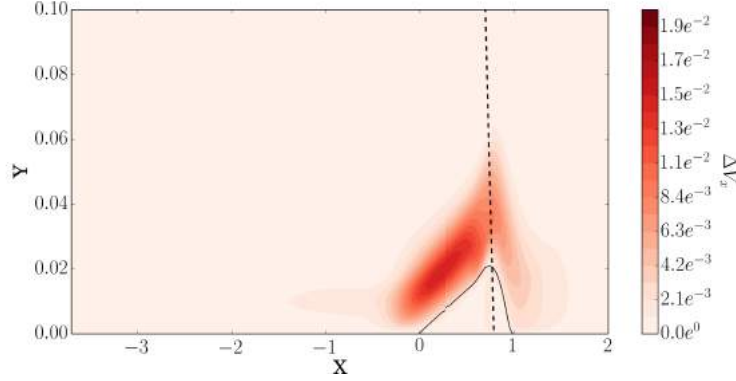


FIGURE 6.3 Ecart entre le champ de vitesse  $V_x$  obtenu par  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  de Langtry et celui obtenu avec la version modifiée pour  $\sigma_d = 0.001$

En résumé, nous avons modifié à la marge le modèle de turbulence et de transition  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  en le rendant différentiable sur l'ensemble de définition. La correction proposée a suffisamment peu d'écart avec le modèle original pour que les différences sur le champ de base soient minimales. La physique de ce modèle est donc conservée.

## 6.2 Champ de base

Nous allons présenter dans cette section le champ de base obtenu pour une interaction entre une onde de choc et une couche limite laminaire dans les mêmes conditions que dans le chapitre précédent. Le solveur elsA (v3.5.02), les schémas numériques et le maillage sont identiques à ceux du calcul RANS de cette précédente étude. Seules changent les modélisations de la turbulence et de la transition. Nous utiliserons ici le modèle de turbulence  $k - \omega$  SST de Menter [81] en ajoutant les modifications présentées dans la section 6.1 qui rendent le résidu des équations différentiables. Nous modélisons la transition par le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  de Langtry [66]. Ce dernier modèle a aussi été modifié comme expliqué dans la section 6.1. Ce modèle utilisant le taux de turbulence extérieur calculé, nous avons mis en condition limite  $T_u = 2\%$  et  $\mu_t/\mu = 5$  afin de garantir  $T_u \sim 0.5\%$  au voisinage de l'interaction. Les cutoff ont été mis à  $10^8$  afin qu'ils n'interviennent pas. Nous présenterons le résultat obtenu par comparaison aux résultats de l'expérience, de la LES et du RANS basé sur les modèles de Spalart-Allmaras et AHD-GI.

### 6.2.1 Structures principales de l'écoulement

Afin de comparer les champs de base obtenus avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  aux résultats RANS, LES et expérimentaux présentés dans le chapitre précédent, la dérivée de la densité selon  $X$  a été tracée sur la figure 6.4. On constate que la structure générale de l'écoulement est semblable aux différents résultats précédents (figure 5.3). On observe toujours une onde de Mach au niveau du bord d'attaque de la plaque, le choc incident et une détente au niveau du bord de fuite du générateur de choc. Si on s'intéresse à la zone d'interaction, on remarque une onde de compression au niveau du point de séparation, un détente au niveau du point d'interaction **I** suivi du choc réfléchi. On constate cependant qu'en unités adimensionnées par la longueur de bulle, la distance entre la séparation **S** et le bord d'attaque **LE** est plus importante dans le cas du calcul  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  que dans les autres analyses. Si on regarde les valeurs dimensionnées présentées dans le tableau 6.1, on constate que la séparation se fait  $5mm$  plus loin du bord d'attaque comparé au calcul avec Spalart+AHD, et  $10mm$  plus loin que dans l'expérience. En revanche, l'angle du choc incident est proche de ceux des autres analyses, de même pour la position du point d'interaction **I**. Si on regarde la taille de bulle, on constate qu'elle n'est que de  $13mm$  dans le cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  alors qu'elle est de l'ordre de  $20mm$  dans les autres cas. L'écart important des  $X_I - X_{LE}$  observé est donc dû à l'adimensionnement par la longueur d'interaction et non à la position du point **I**.

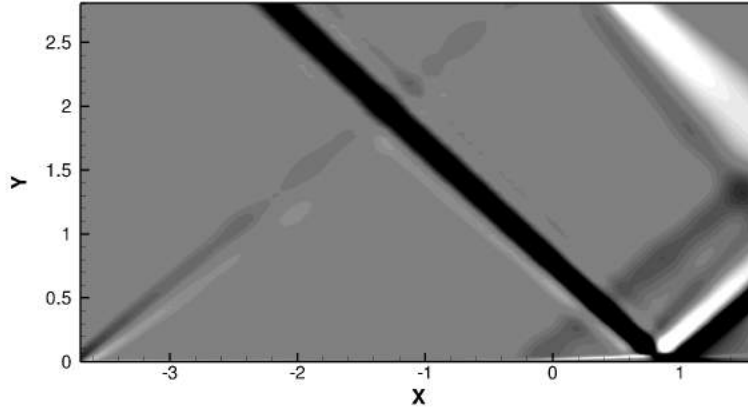


FIGURE 6.4 Dérivée de la densité selon  $X$  pour le calcul RANS avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$

On a donc un calcul RANS  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  qui reproduit qualitativement les différentes caractéristiques de l'écoulement, mais qui a du mal à reproduire de façon quantitative la taille de la séparation. Cette difficulté du modèle à reproduire fidèlement les tailles de bulles est notée par Langtry lui même [66] et est un des points d'amélioration possible du modèle.

TABLE 6.1 Valeur des distances entre le bord d'attaque **LE**, des principaux points définissant l'écoulement :  $X_s - X_{LE}$ ,  $X_r - X_{LE}$  and  $X_I - X_{LE}$  et de l'angle du choc incident  $\beta$ . Les unités physiques sont utilisées pour simplifier la comparaison.

	$X_S - X_{LE}$ (mm)	$X_I - X_{LE}$ (mm)	$X_R - X_{LE}$ (mm)	$\beta$
<b>Expérience</b>	$38 \pm 2.$	$55 \pm 1$	$58.5 \pm 1.$	$44.2 \pm 0.5$
<b>LES</b>	39.2	56.5	60	44.5
<b>Spalart+AHD</b>	43.5	58	63.5	43.5
$\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$	48.3	59.2	61.2	43.2

### 6.2.2 Position de la transition

Pour regarder la position de la transition nous avons tracé sur la figure 6.5 le champ d'énergie cinétique turbulente. On constate que la transition commence légèrement en amont du choc au niveau de la couche de cisaillement de la bulle et est complètement finie au niveau du point de réattachement. Par comparaison aux résultats du calcul utilisant les modèles Spalart et AHD (voir figure 5.6), on constate un accord qualitatif entre les deux positions de transition.

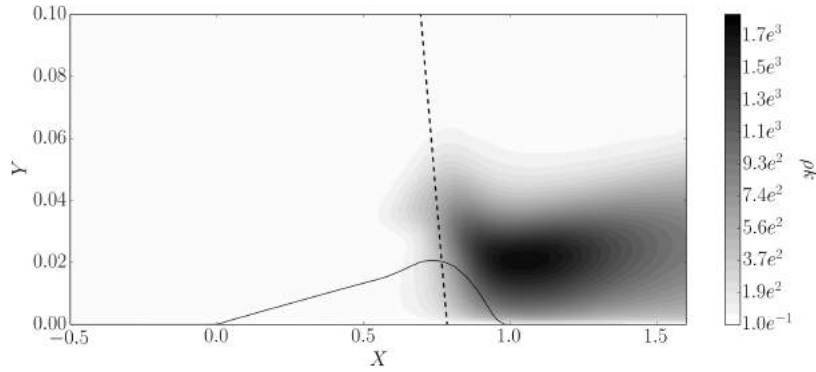


FIGURE 6.5 Champ de  $\rho k$  obtenu par le calcul  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . La ligne continue représente la bulle de recirculation, la ligne pointillée représente le choc incident et sa prolongation fictive dans la bulle.

### 6.2.3 Evolution de coefficient de friction le long de la plaque

Comme vu dans le chapitre précédent, le minimum de friction joue un grand rôle dans la dynamique du choc réfléchi. Afin de connaître sa position nous avons tracé sa dépendance en fonction de  $X$  sur la figure 6.6 ainsi que les résultats de la LES et du RANS Spalart+AHD. Nous constatons un écart entre la friction obtenue par  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  et la LES en  $X = -0.2$ ,

la baisse de friction commençant légèrement avant dans le cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . En revanche nous constatons un très bon accord sur la position relative dans la bulle du minimum de friction  $C$  entre les deux calculs RANS.

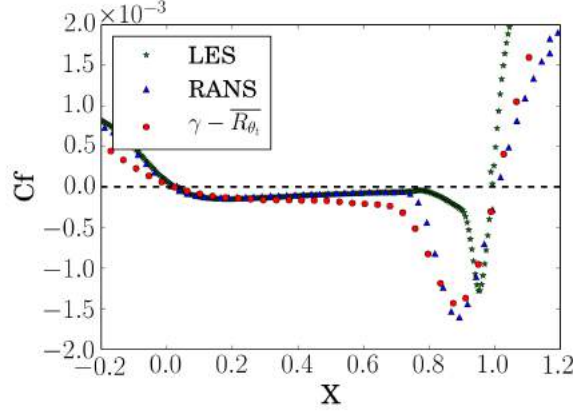


FIGURE 6.6 Comparaison des coefficients de friction entre la LES, RANS Spalart+AHD et  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$

En résumé, nous avons un accord qualitatif entre les différentes analyses sur les éléments principaux de l'écoulement. Nous n'avons pas un accord quantitatif sur les tailles de séparation. Nous avons par contre un accord quantitatif entre les deux calculs RANS sur la position relative des minimum de friction à la paroi.

Lors des comparaisons des résultats du chapitre précédent avec la littérature, nous avons fait la remarque que les fréquences adimensionnées par la taille de bulle varient peu en fonction des différentes analyses. On peut donc tenter d'étudier les instationnarités à partir de ce champ de base en regardant les résultats adimensionnés par la taille de bulle.

### 6.3 Stabilité globale

Afin d'analyser le comportement instationnaire de l'interaction, nous allons appliquer sur le champ RANS précédent une analyse de stabilité globale. Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, nous voulons vérifier que prendre en compte la viscosité turbulente dans cette analyse ne change pas les propriétés de stabilité globale de l'écoulement. Dans ce but, nous allons tracer différents spectres représentant les différentes analyses. D'abord non appliquerons l'analyse dite laminaire, qui consiste à négliger la viscosité turbulente des équations satisfaites par les perturbations. Cette analyse est celle qui a été appliquée sur le champ RANS Spalart+AHD. Puis nous regarderons l'évolution du spectre en fonction des différents degrés de modélisation de la viscosité turbulente (voir chapitre 4). Nous la supposerons d'abord constante, égale à celle du champ de base, puis nous la ferons varier



en supposant la position de la transition comme constante. Enfin nous ferons aussi varier la position de la transition. Les spectres obtenus pour ces quatre analyses sont montrés sur la figure 6.7. Le spectre obtenu dans la partie précédente avec le modèle de Spalart+AHD et une analyse laminaire est aussi indiqué.

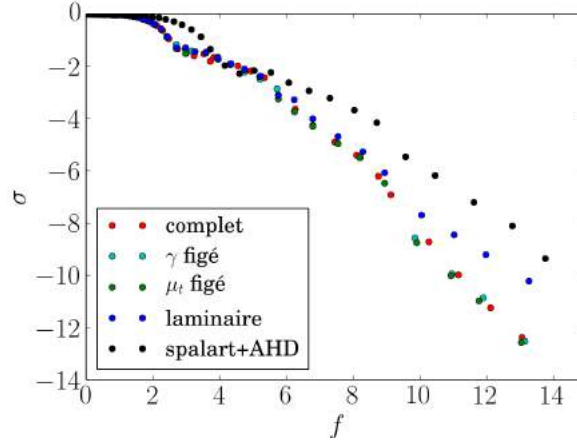


FIGURE 6.7 Comparaison des spectres de stabilité globale des calculs RANS Spalart+AHD et  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ .

Le premier constat est que contrairement au cas du buffet turbulent (voir Crouch [31]), l'écoulement reste globalement stable quelque soit l'approche utilisée pour l'analyse de stabilité. On a donc un accord de ce point de vu entre le calcul Spalart+AHD et le calcul  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . On remarque en comparant les courbes, que l'analyse laminaire prévoit des modes moins stables à haute fréquence que les analyses prenant en compte la viscosité turbulente. Le champ obtenu par Spalart+AHD est ainsi légèrement moins stable que dans le cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ .

Ces résultats confortent les conclusions du chapitre précédent dans lequel le modèle de Spalart+AHD était utilisé.

## 6.4 Analyse du résolvant

Comme l'écoulement est globalement stable et que nous observons à la fois expérimentalement et dans les LES une instationnarité du choc réfléchi, c'est que l'écoulement a un comportement d'amplificateur de bruit. Nous allons donc faire une analyse de résolvant sur le champ RANS- $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . L'avantage de ce modèle est que cette analyse peut être faite pour les quatre degrés de modélisation des tensions de Reynolds.

De plus, différentes fenêtres d'optimisation  $\Omega_q = \Omega_{1,2,3,4}$  ont été testées.  $\Omega = [X_{LE}, X_s - 0.4]$  optimise l'énergie cinétique dans une région située avant le point de séparation.  $\Omega_2 = [X_{LE}, X_s + 0.3]$  optimise cette même quantité mais sur une région allant du bord de fuite jusqu'à un point situé entre le point de séparation **S** et avant le point d'interaction **I**. La

région  $\Omega_3 = [X_{LE}, X_s + 0.8]$  optimise sur une région allant du bord d'attaque de la plaque plane jusqu'à un point situé entre le point d'interaction **I** et le réattachement **R**. Enfin la région  $\Omega_4 = [X_{LE}, X_s + 1.4]$  prend en compte toute l'interaction.

Les quatre spectres obtenus pour les quatre zones d'optimisations mentionnées ci-dessus sont tracés sur les figures 6.8 (a)-(d). (a) étant les courbes obtenues pour une analyse laminaire, (b) pour l'analyse  $\mu_t$  figé, (c) pour  $\gamma$  figé et (d) pour le système complet. On constate, pour toutes les analyses et toutes les zones d'optimisation, la présence d'un pic haute fréquence vers  $S_t = 1$ . Si on compare à la figure 6.9 représentant le gain prémultiplié pour le cas du calcul Spalart+AHD en analyse laminaire, on constate que ce mode est aussi présent pour toutes les zones d'optimisation mais pour une fréquence légèrement supérieure (ie  $S_t = 1.8$ ).

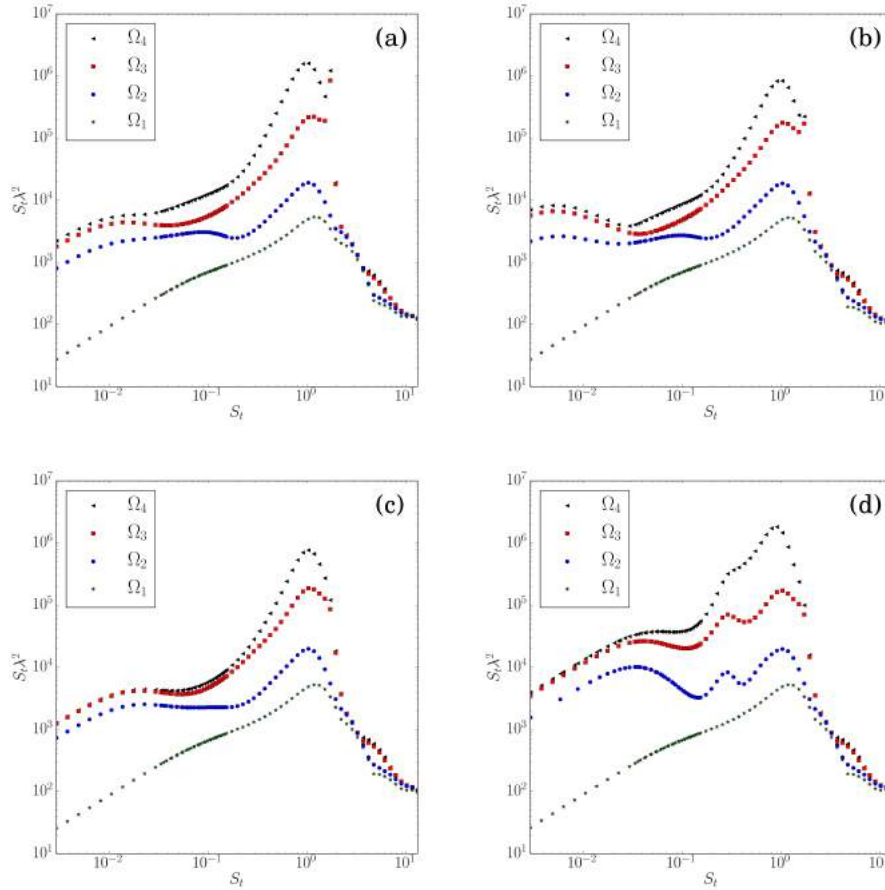


FIGURE 6.8 Gains prémultipliés pour quatre zones d'optimisation. (a) est pour l'analyse laminaire, (b) pour  $\mu_t$  figé, (c) pour  $\gamma$  figé et (d) pour le système complet.

Cet écart de Strouhal sur le mode haute fréquence peut être expliqué par le fait que l'on adimensionne par la taille de la bulle alors que le mode est, d'après la partie précédente, lié aux ondes de Tollmienn Schlichting dans la couche limite en amont de la séparation. Il

faut dans ce cas regarder les fréquences dimensionnées. Comme  $S_t = \frac{fL}{U}$  et que la vitesse de référence est identique dans les deux cas, on s'attend à ce que  $\frac{f_{sp}}{f_\gamma} = \frac{S_t^{sp} L_{sep}^\gamma}{S_t^\gamma L_{sep}^{sp}} \simeq 1$ , où l'indice "sp" indique une valeur obtenue à l'aide d'un modèle de Spalart-Allmaras+AHD et l'indice  $\gamma$  par  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . Or  $\frac{f_{sp}}{f_\gamma} = \frac{1.8 \cdot 0.013}{1 \cdot 0.02} = 1.17$ , ce qui rend les différents résultats cohérents.

Pour toutes les analyses il n'y a aucun pic basse fréquence pour le domaine  $\Omega_1$  qui ne prend pas en compte la zone d'interaction dans l'optimisation. Quand celui-ci commence à prendre en compte le début de l'interaction ( $\Omega_{2,3,4}$ ), on voit que des modes basse fréquence apparaissent et ce pour toutes les analyses. Le nombre de ces modes et les fréquences varient cependant avec l'analyse.

La figure 6.8 présente les spectres prémultipliés des gains optimaux pour les différentes analyses.

Dans le cas laminaire (figure 6.8(a)),  $\Omega_2$  présente deux basses fréquences dont les pics sont peu marqués, un vers  $S_t = 0.015$  et un vers  $S_t = 0.09$ . Quand la zone d'optimisation est élargie ( $\Omega_3$  et  $\Omega_4$ ) seul celui à  $S_t = 0.015$  demeure visible.

Dans le cas  $\mu_t$  figé (figure 6.8(b)), on observe le même phénomène mais avec  $S_t = 0.005$  et  $S_t = 0.1$ . Le pic à  $S_t = 0.1$  étant celui qui disparaît.

Le cas  $\gamma$  figé (figure 6.8(c)) est légèrement différent. On observe, pour les trois domaines prenant en compte l'interaction ( $\Omega_{2,3,4}$ ), une seule basse fréquence à  $S_t = 0.02$ .

Enfin, le cas du système complet (figure 6.8(d)) présente deux pics basse fréquence pour  $\Omega_{2,3,4}$ . Les fréquences sont de  $S_t = 0.04$  et de  $S_t = 0.3$ . Le pic à plus basse fréquence est assez large  $S_t = 0.04 - 0.09$  ayant des gains identiques pour le domaine  $\Omega_4$ .

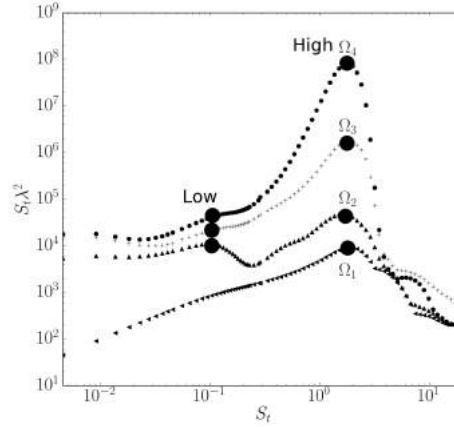


FIGURE 6.9 Gains prémultipliés obtenus par analyse de résolvant  $\mu$  laminaire sur un champ de base RANS calculé avec le modèle Spalart+AHD pour les quatre zones d'optimisation. Les gros points représentent les modes identifiés dans le chapitre 5.

L'ensemble des résultats obtenus est résumé dans le tableau 6.2. Nous constatons que les calculs  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  présentent de fortes disparités avec les résultats LES et expérimentaux sauf

TABLE 6.2 Résumé des fréquences obtenues par la LES, l'expérience et les analyses de résolvant sur les champs de base obtenus avec Spalart+AHD et  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  en utilisant différents degrés de modélisation de la tension de Reynolds et différentes zones d'optimisation. Les fréquences indiquées sont celles issues de l'analyse du gain.

Modèle	Analyse	Zone	Basse fréquence	Moyenne fréquence	Haute fréquence
$\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$	laminaire	$\Omega_1$			1
		$\Omega_2$	0.015	0.09	1
		$\Omega_3$	0.015		1
		$\Omega_4$	0.015		1
	$\mu_t$ figé	$\Omega_1$			1
		$\Omega_2$	0.005	0.1	1
		$\Omega_3$	0.015		1
		$\Omega_4$	0.015		1
	$\gamma$ figé	$\Omega_1$			1
		$\Omega_2$	0.02		1
		$\Omega_3$	0.02		1
		$\Omega_4$	0.02		1
	complet	$\Omega_1$			1
		$\Omega_2$	0.04	0.3	1
		$\Omega_3$	0.05	0.3	1
		$\Omega_4$	0.04 – 0.1	0.3	1
Spalart+AHD	laminaire	$\Omega_1$			1 – 2
		$\Omega_2$	0.08		1 – 2
		$\Omega_3$	0.09		1 – 2
		$\Omega_4$	0.09		1 – 2
LES			0.09	0.3	2-3
expérience			$\simeq 0.1$	$\simeq 0.3$	$\simeq > 0.76$

dans le cas où l'on considère la variation complète de la viscosité turbulente. Le résultat est aussi en meilleur accord quand on optimise le gain d'énergie sur l'ensemble de l'interaction ( $\Omega_4$ ). Ceci est différent du calcul Spalart+AHD pour lequel une analyse laminaire suffisait à mettre en exergue les différentes fréquences obtenues expérimentalement et dans la LES. Une explication possible de cette différence est la forte disparité en terme de taille de séparation entre le champ de base obtenu à l'aide de  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  et les autres analyses (Spalart+AHD, LES et expérience). Toutefois, nous sommes capables de prédire les bonnes fréquences dans le cas de l'analyse du système complet sur  $\Omega_4$ . Nous allons donc présenter les modes correspondants.

## 6.5 Analyses des modes obtenus par analyse de résolvant

Dans cette section, nous étudierons les forçages optimaux ainsi que leur réponse. Nous comparerons les résultats avec ceux du chapitre 5. Nous allons faire l'analyse uniquement

pour le cas du système complet sur le domaine  $\Omega_4$ . Les fréquences à choisir sont évidentes pour la haute et la moyenne fréquence. En revanche pour la basse fréquence nous avons observé un plateau entre  $S_t = 0.04$  et  $S_t = 0.09$ . Nous avons choisi de tracer  $S_t = 0.09$  puisque cela correspond à la fréquence trouvée avec le modèle Spalart+AHD ainsi que par la LES.

### 6.5.1 Comparaison aux transformées de Fourier de la LES

Les transformées de Fourier de la LES sur la vitesse sont montrées sur la Figure 5.9. On rappelle que si le gain du forçage optimal est très supérieur à celui du sous optimal, les transformées de Fourier peuvent se comparer aux réponses optimales. Nous montrons donc dans la figure 6.10 la réponse optimale selon la vitesse selon l'horizontale pour les trois fréquences sélectionnées. On constate que le mode basse fréquence est présent dans la couche de cisaillement de la bulle avant et après le point d'interaction **I** ainsi que sur une zone légèrement au-dessus du point de réattachement. On voit aussi que le choc réfléchi est impacté par la dynamique. Ceci correspond qualitativement aux transformées de Fourier du calcul LES et à la réponse optimale obtenue par le modèle spalart+AHD. Le même constat peut être fait pour la réponse sur la moyenne fréquence. On remarque que le nombre de structures dans la couche de cisaillement avant l'interaction **I** est identique quelque soit le modèle de turbulence utilisé. Finalement on constate que la haute fréquence impacte peu le choc et concerne essentiellement le cisaillement au niveau du réattachement de la bulle, là où la bulle se referme et la turbulence est déclenchée, conformément aux analyses précédentes.

### 6.5.2 Forçages optimaux

Les réponses optimales obtenues avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  sont en accord qualitatif avec les résultats précédents (chapitre 5). Nous allons maintenant nous intéresser aux forçages optimaux. Les trois forçages pour les trois fréquences caractéristiques du cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  sont présentés dans la figure 6.11. En comparant aux forçages obtenus dans le cas Spalart+AHD (Figure 5.14) on constate la présence de structures en dehors de la couche limite dans le cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  qui n'existent pas dans le cas Spalart+AHD. Une explication probable de l'existence de ces structures est que ces forçages sont liés à la transition. La position de transition est évaluée par  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  à partir du taux de turbulence extérieur, lui-même calculé à partir de la valeur de  $k$  à la frontière de la couche limite alors que la turbulence extérieure calculée par  $\nu_t$  dans le modèle de Spalart-Allmaras ou par  $k - \omega$  est totalement ignorée par le critère AHD. On peut donc avoir des structures venant de l'écoulement extérieur dans le cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  et pas dans celui de Spalart+AHD.

Si on rentre dans le détail des forçages, on constate que celui de la basse fréquence est assez différent entre le cas du calcul  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  et celui Spalart+AHD. Dans le premier cas, on observe des structures dans la couche limite avant la séparation et dans la couche de cisaillement avant l'interaction. Dans le second cas, le forçage se situe essentiellement dans

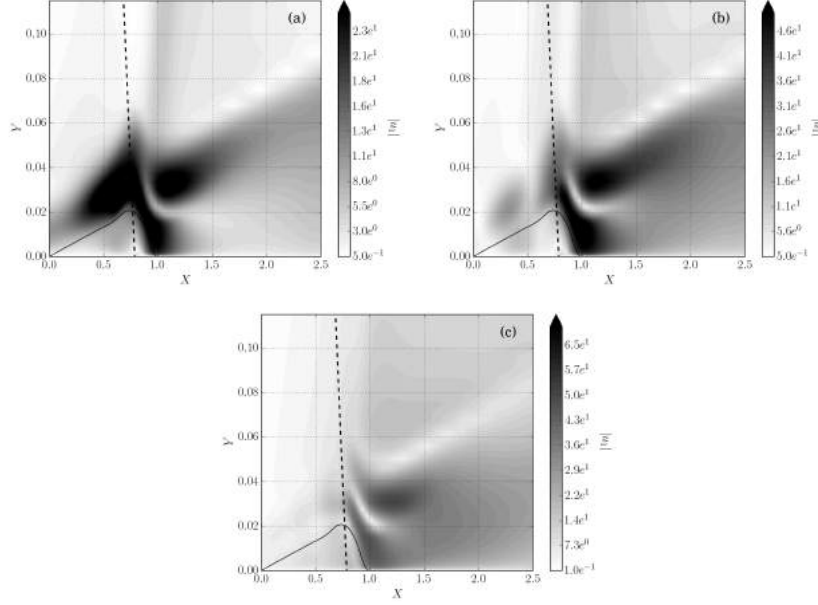


FIGURE 6.10 Energie cinétique de la réponse optimale pour  $S_t = 0.09$  (a),  $S_t = 0.3$  (b) et  $S_t = 1.8$  (c). La ligne pointillée représente le choc incident et la ligne continue représente la bulle de recirculation. Ces champs sont obtenus avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  et le domaine  $\Omega_4$ .

la couche de cisaillement avant et après le point interaction **I** ainsi que dans la bulle, sur la ligne suivant le choc pour atteindre le voisinage de **C**. Ceci peut s'expliquer en rappelant que  $L_{sep}^{sp}$ , la longueur de bulle calculée avec Spalart+AHD, est plus grande que  $L_{sep}^\gamma$  obtenue par  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  :  $L_{sep}^{sp} > L_{sep}^\gamma$ . Comme les fréquences adimensionnées par la vitesse extérieure et  $L_{sep}$  sont identiques on a  $f_\gamma > f_{sp}$ . Or les analyses de stabilité locale présentées dans le chapitre 5 montrent que la couche limite est instable à plus haute fréquence. Comme  $X_S^\gamma > X_S^{sp}$ , il apparaît que la couche limite au niveau de la séparation est moins stable dans le cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  que dans le cas Spalart+AHD.

Pour les forçages à moyenne et haute fréquence, on constate que la structure est très semblable entre les deux calculs. Ils sont localisés dans la couche limite avant la séparation et dans la couche de cisaillement avant l'interaction **I**.

### 6.5.3 Analyse des réponses

Nous avons étudié la physique de l'interaction en regardant la phase et l'amplitude de la réponse en terme de champ de densité. Afin de vérifier que la physique est indépendante du modèle de turbulence utilisé, nous allons faire la même analyse sur les réponses optimales obtenues avec le modèle de transition  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . Les modes basse et moyenne fréquences pour l'approche Spalart+AGD-GI sont montrés dans la figure 5.17.

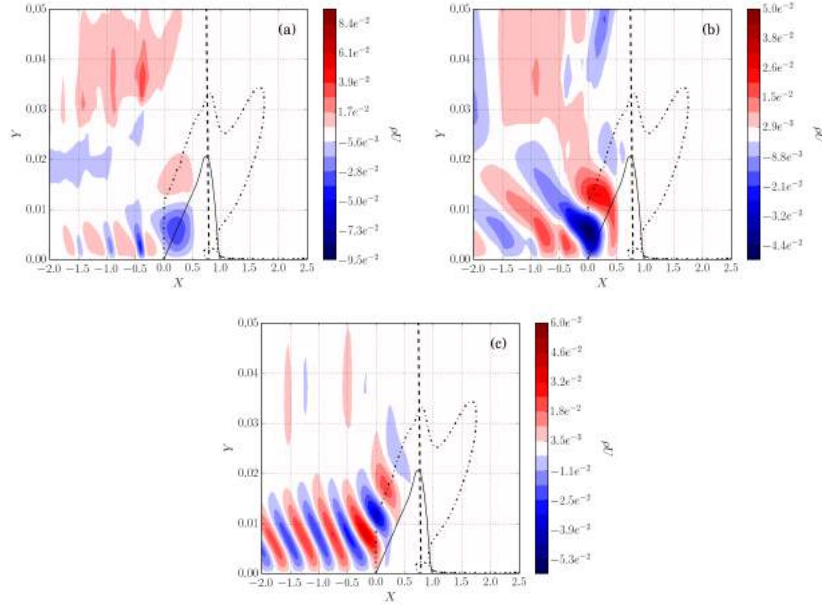


FIGURE 6.11 Forçages optimaux sur  $\rho U$  pour  $S_t = 0.09$  (a),  $S_t = 0.3$  (b) and  $S_t = 1$ . (c). La ligne pointillée représente le choc incident et la ligne continue représente la bulle de recirculation. L'échelle verticale a été dilatée pour clarifier la figure. Ces champs sont obtenus avec le modèle  $\gamma - \overline{R\theta}_t$  et le domaine  $\Omega_4$ .

La phase du mode basse fréquence est tracée sur la figure 6.12(a). On constate que contrairement au cas du calcul Spalart+AHD sur la figure 5.17(a) on n'a pas de région non propagative du mode. En revanche le choc réfléchi et le point **C** ( $X = 0.9$ ) sont en phase, ce qui est en meilleur accord avec les résultats de la LES (voir Figure 6.13). L'amplitude (Figure 6.12(b)) est en accord qualitatif avec le résultat du calcul précédent (Figure 5.17(b)). Elle est forte sur le choc réfléchi, dans la couche de cisaillement en amont du point d'interaction **I** ainsi qu'après ce point.

Le mode moyenne fréquence tracé dans la figure 6.12(c) et (d) est en accord qualitatif avec le mode moyenne fréquence obtenu dans la partie précédente (voir figure 5.17(c) et (d)). Les deux réponses présentent un aspect propagatif sur l'ensemble de l'interaction. La localisation de l'amplitude du mode est aussi en accord. Enfin, le mouvement du point **C** est aussi en phase avec celui du choc réfléchi.

Afin d'avoir des résultats plus quantitatifs nous allons regarder la vitesse de phase et l'amplitude du mode au niveau de la paroi de la plaque.

Pour le mode basse fréquence, l'inverse de la vitesse de phase est tracé dans la figure 6.14(a). On remarque que la vitesse de phase est initialement positive et devient négative à  $X = -0.27$ . Elle oscille un peu avant de baisser brutalement en  $X = 0.85$  puis redevient rapidement positive à  $X = 0.92$ . La vitesse de phase moyenne sur l'ensemble de ses valeurs

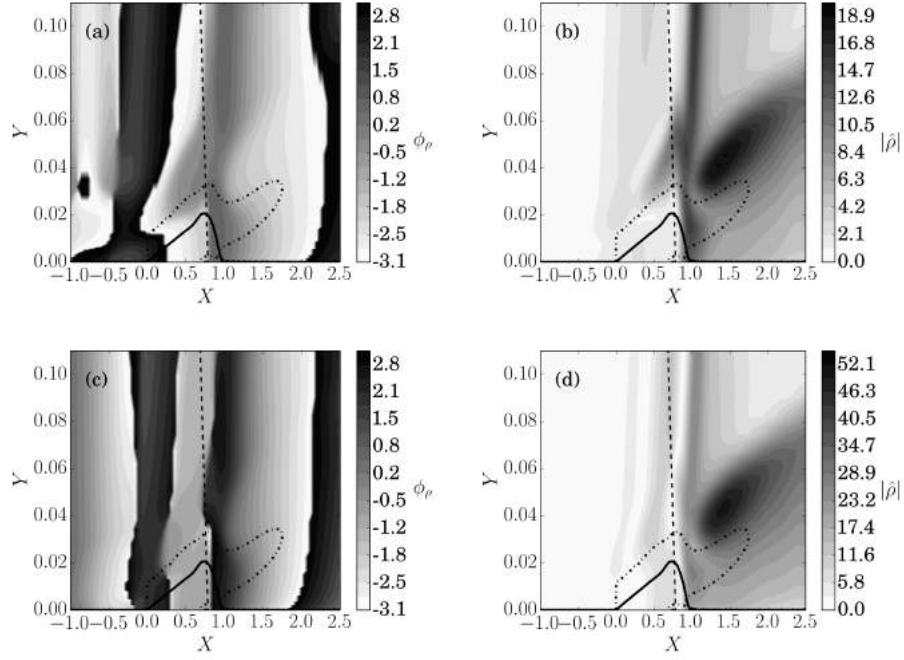


FIGURE 6.12 Phase  $\phi_\rho$  et l'amplitude  $\hat{\rho}$  de la perturbation en densité pour (a-b) la basse fréquence et (c-d) la moyenne fréquence. La ligne pointillée représente le choc incident, la ligne continue représente la bulle de recirculation, et la ligne en traits discontinus le maximum de cisaillement.

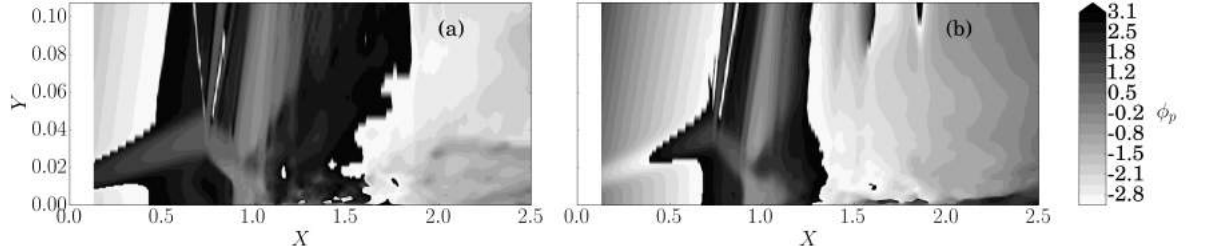


FIGURE 6.13 Phase obtenue par LES en faisant des spectres de corrélation entre un point de l'écoulement dans le domaine et le point du minimum de friction à la paroi,  $C X_C = 0.95$ . (a)  $S_t = 0.09$  et (b)  $S_t = 0.3$ .

négatives au niveau de l'interaction est de  $V_\phi = -0.25U_\infty$  ce qui est en accord avec les valeurs obtenues par la LES ainsi que celles trouvées dans la littérature. Elle est supérieure à celle trouvée avec le modèle de Spalart+AHD ( $V_\phi = 0.1$ ). On a donc là aussi une onde de densité parcourant la bulle en sens inverse de l'écoulement.



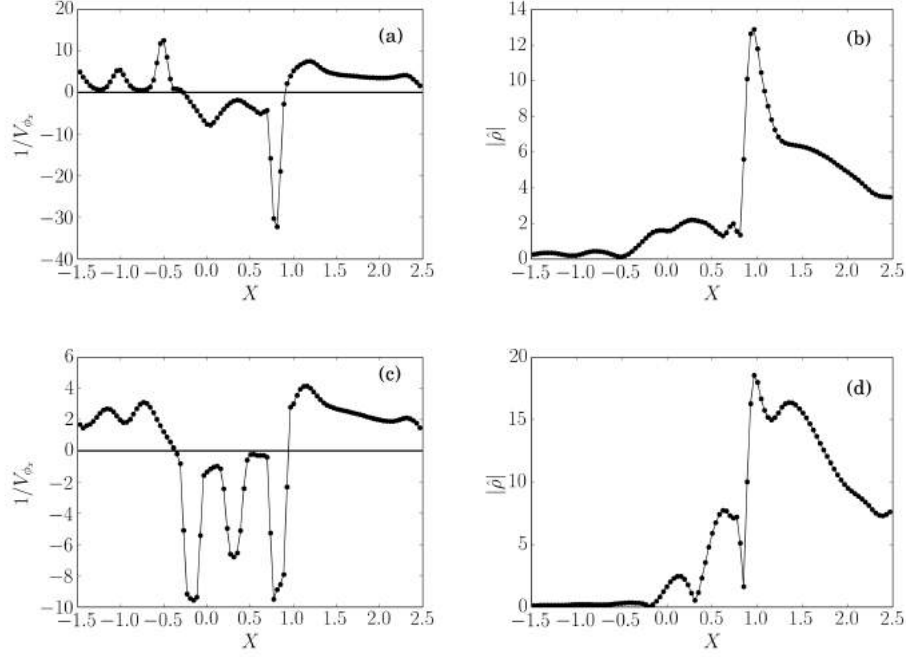


FIGURE 6.14 Vitesse de phase  $v_{\phi}$  et amplitude  $|\hat{\rho}|$  de la perturbation en densité prises à la paroi pour les modes (a-b) basse et (c-d) moyenne fréquences.

L'amplitude quant à elle est tracée sur la figure 6.14(b). On constate qu'elle augmente entre  $X = -0.5$  et  $X = 0.3$  puis diminue jusqu'à  $X = 0.82$ . Elle augmente brutalement entre  $X = 0.82$  et  $X = 0.97$  avant de diminuer à nouveau.

Ces analyses permettent de postuler une source des perturbations entre  $X = 0.85$  et  $0.92$  ce qui correspond au point de minimum de friction **C**. On a donc un accord sur la position de la source acoustique. De plus, l'onde en remontant l'écoulement dans la bulle voit son amplitude augmenter entre  $X = 0.82$  et  $X = 0.3$ , ce qui montre une amplification de l'onde. On tombe donc en accord quantitatif avec le scénario développé dans la partie précédente.

L'inverse de la vitesse de phase du mode moyenne fréquence est tracée sur la figure 6.14(c). Comparé au cas de Spalart+AHD, on observe des vitesses de phase négatives le long de la bulle. Ceci est plus en accord avec les résultats LES. La vitesse de phase est initialement positive et devient négative à  $X = -0.35$ . Elle fluctue ensuite, parfois assez rapidement. Il y a des pics vers  $X = -0.12$ ,  $X = 0.33$  et  $X = 0.76$ . La vitesse de phase redevient positive vers  $X = 0.95$ . L'amplitude quant à elle est tracée sur la figure 6.14(d). Elle est constituée de 4 bosses : en  $X = 0.13$ ,  $X = 0.6$ ,  $X = 1$  et  $X = 1.3$ . On observe des variations brutales vers  $X = 0.76$  et  $X = 1$ . En mettant en perspective ces résultats, on peut supposer une source entre  $X = 0.76$  et  $X = 0.95$ . La vitesse de phase moyenne est  $V_{\phi} = -0.31U_{\infty}$  ce qui est plus

proche de la valeur de LES,  $V_\phi = -0.37U_\infty$ . On gagne donc en représentativité sur le mode moyenne fréquence avec le calcul  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  par rapport au calcul Spalart+AHD.

Enfin le déphasage entre le point de séparation **S** et le réattachement **R** jouait un rôle important pour l'interprétation du mode moyenne fréquence en tant que mouvement de respiration de la bulle. Nous avons vérifié ce déphasage pour le cas  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  et nous avons trouvé  $\phi_r - \phi_s = 2.8$  ce qui est proche des résultats LES et Spalart+AHD (respectivement de 2.6 et 2.5).

Ces analyses confirment dans les grandes lignes les résultats développés dans la partie précédente confirmant ce faisant les scénarii physiques proposés et en suggérant leur faible dépendance aux modèles de turbulence et de transition.

## 6.6 Convergence en maillage et en paramètre de différentiation

Le but de cette section est de vérifier la robustesse des résultats obtenus dans les parties précédentes en fonction du changement du maillage, et du paramètre  $\sigma_d$  utilisé pour rendre le critère de transition différentiable. Pour des raisons d'historique de la thèse, cette étude a été faite dans un cas où l'angle du générateur  $\alpha$  est plus faible ( $\alpha = 3.5^\circ$ ) et avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . Nous nous sommes placé dans la cas  $\alpha = 5^\circ$  par la suite pour comparer les données à celles de la LES. Nous commencerons d'abord par la convergence en maillage, puis nous étudierons la convergence en  $\sigma_d$ .

### 6.6.1 Convergence en maillage

Lors de l'étude de convergence en maillage, la densité de maille a été changée à la fois en  $\Delta X$  et en  $\Delta Y$ . Le tableau 6.3 récapitule les caractéristiques des différents maillages utilisés.

maillage	G	M	M2	M3	M4	M5	M6	M7
$\Delta X$ (mm)	1	0.5	0.25	0.25	0.125	0.125	0.075	0.035
$n_Y$	125	125	125	175	125	175	125	125
$L_{sep}$	10.3	11.3	12.2	11.3	13.0	12.3	13.4	13.7

TABLE 6.3 Tableau récapitulatif des différents maillages testés.

La première question que l'on peut se poser est la question de la convergence du champ RANS en fonction du maillage. On peut choisir comme critère de convergence la taille de la séparation  $L_{sep}$ . Les tailles des séparations pour les différents maillages sont récapitulées dans le tableau 6.3. On remarque que la séparation augmente quand la taille des mailles  $\Delta X$  diminue. Les écarts relatifs pour une division par deux de  $\Delta X$  est d'environ 10% entre les maillages les plus grossiers et de 2% pour les deux maillages les plus fins. On constate donc une forte dépendance du champ RANS en fonction de  $\Delta X$ . De plus, la bulle rétrécit quand

on augmente la densité de point selon la direction  $Y$ . Les écarts sont là encore de l'ordre de 10%. On constate donc aussi une forte dépendance du champ RANS en fonction de la densité de point en  $Y$  (paramètre  $n_Y$ ). Une forte dépendance au maillage de l'interaction choc/ couche limite a aussi été constatée par Larchevêque [69] pour des simulations LES. Ses conclusions sont que la taille de la séparation dépend de la taille des perturbations à l'entrée du domaine et de la diffusion numérique due à la taille des mailles. Ce dernier paramètre apparaît aussi dans les approches RANS et il est donc peu étonnant de constater une dépendance de la séparation en fonction du maillage dans ce cadre.

S'il semble difficile d'atteindre la convergence en maillage pour le champ de base, on peut toutefois se demander si on n'atteint pas, pour des maillages assez fins, une convergence dans les dynamiques instationnaires. On a donc choisi de changer le critère de convergence en regardant si les fréquences caractéristiques, adimensionnées par la vitesse extérieure et la taille de la séparation et issues de l'analyse de résolvant, sont identiques.

La figure 6.15 (a) montre les différents spectres obtenus par l'analyse de résolvant  $\mu_t$  figé pour les différents maillages et le domaine  $\Omega_4$ . Dans le cadre de cette analyse, et comme vu précédemment, aucun mode basse fréquence n'a été trouvé. On se concentre donc seulement sur la haute fréquence ( $S_t \sim 1$ ). On constate qu'en terme de nombre de Strouhal, le maillage est convergé dès que  $\Delta X = 0.125mm$  et que  $n_Y$  a peu d'influence. On constate aussi l'apparition de pic à des fréquences plus hautes quand le maillage est plus fin. Ce domaine fréquentiel n'étant pas intéressant pour notre étude, on peut dire que le maillage est convergé dès que  $\Delta X = 0.125mm$ , du moins pour une analyse  $\mu_t$  figé.

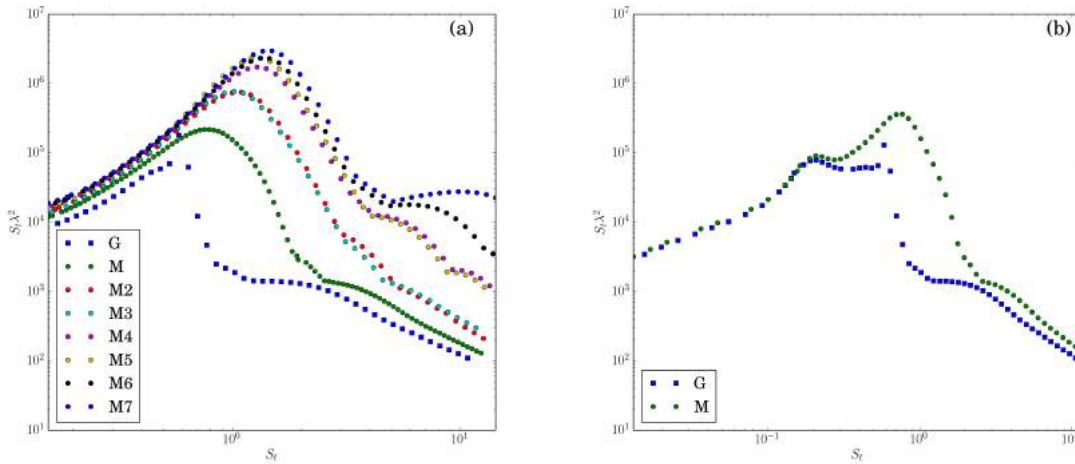


FIGURE 6.15 Spectres pré-multipliés obtenus par analyse de résolvant pour les différents maillages. (a) est dans le cadre de l'approximation  $\mu_t$  figé et (b) dans le cadre du système complet. Le modèle utilisé est  $\gamma - \overline{R\theta_t}$  et le domaine d'optimisation est  $\Omega_4$ .

Pour aller plus loin, on peut vérifier que ce résultat reste vrai quand l'analyse de résolvant est faite avec le système complet. Sur la figure 6.15 (b) sont tracés les spectres obtenus dans ce cas pour différents maillages. On constate qu'il n'y a que deux courbes. Il s'avère qu'au delà d'un certain nombre de mailles, l'inversion du système complet demandait trop de mémoire par processeur, et nous n'avons pas réussi à mener les analyses pour des maillages plus fins que le maillage  $M$ . On remarque aussi la présence d'un mode vers  $S_t = 0.2$ . Il ne semble pas y avoir de mode dans les plus basses fréquences. On constate que le Strouhal de la basse fréquence trouvé pour les deux maillages sont identiques ainsi que les taux d'amplification. Il y a donc convergence en maillage pour le mode à plus basse fréquence dès le maillage le plus grossier.

En résumé, il semble difficile de faire converger en maillage le champ RANS. Si on s'intéresse à la dynamique instationnaire, on peut choisir comme critère la convergence du spectre de l'analyse de résolvant. Pour être convergé pleinement pour le pic haute fréquence (ie.  $S_t \sim 1$ ) un maillage avec  $\Delta X = 0.125mm$  est nécessaire. Pour le pic moyenne fréquence (ie.  $S_t \sim 0.2$ ) un maillage avec  $\Delta X = 1mm$  est suffisant. Comme nous nous sommes intéressés aux hautes fréquences dans les parties précédentes, on aimerait utiliser le maillage  $M_4$ . Malheureusement, nous n'avons pas réussi à mener l'analyse du système complet pour ce maillage dû à un problème de mémoire par processeur lors de l'inversion du résolvant. Nous avons donc utilisé le maillage  $M$  qui est convergé pour les moyennes fréquences et dont la forme du pic haute fréquence est satisfaisante bien que décalé à  $S_t = 0.8$  au lieu de  $S_t = 1.3$ .

Il est à noter que cette étude a été faite pour un  $\sigma_d = 10^{-3}$ . Il reste à vérifier que ce paramètre n'influence pas les résultats de l'analyse de résolvant.

### 6.6.2 Convergence du paramètre $\sigma_d$

Nous avons introduit un paramètre  $\sigma_d$  afin de rendre les modèles de turbulence  $k - \omega$  et de transition  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  différentiables et de pouvoir calculer la Jacobienne du résidu du système RANS. Il est possible que ce paramètre influe sur les résultats. Nous avons donc mis en place une analyse de résolvant pour le système complet pour différentes valeurs de ce  $\sigma_d$  afin de trouver une valeur satisfaisante. Sur la figure 6.16 sont tracés les spectres obtenus par ces analyses. On constate que pour tous les  $\sigma_d$  les fréquences prédites sont identiques. En revanche, les taux d'amplification sont assez différents pour les basses fréquences pour  $\sigma_d = 10^{-2}$ . Il est difficile de distinguer les courbes dès que  $\sigma_d < 10^{-3}$ . On peut donc conclure que pour  $\sigma_d = 10^{-3}$  les spectres sont convergés en  $\sigma_d$ .

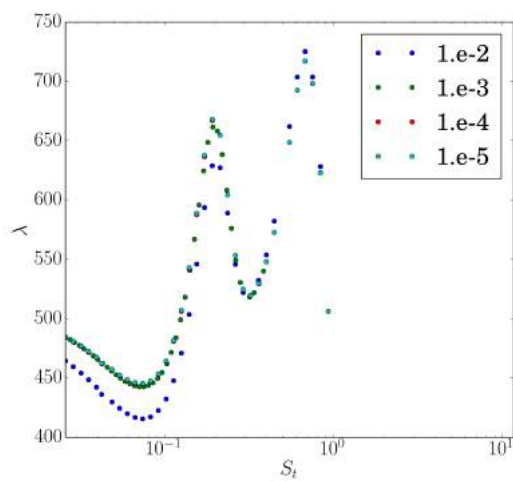


FIGURE 6.16 Spectres obtenus par analyse de résolvant pour les différentes valeurs de  $\sigma_d$

## Chapitre 7

# Etude des instationnarités sur le profil OALT25

Dans ce chapitre nous étudions le cas de l'instabilité de l'écoulement autour d'un profil en régime transsonique. Cet écoulement est caractérisé par l'interaction entre l'onde de choc à l'extrados du profil et une couche limite laminaire.

### 7.1 Résultats expérimentaux

L'objet de cette section est de résumer les résultats expérimentaux obtenus par Brion et al. [20] dans le cadre du projet BUTERFLI. Des résultats supplémentaires venant de la même expérience, non encore publiés, seront aussi présentés pour servir de support à l'étude de stabilité.

#### 7.1.1 Configuration expérimentale

Cette expérience a eu lieu dans la soufflerie S3Ch de l'ONERA de Meudon. Cette soufflerie peut atteindre des nombres de Mach allant de 0.1 à 1.2 permettant ainsi de faire des études d'écoulements transsoniques. Le Mach dans la veine de test est maintenu constant par un col sonique placé à l'aval de celle-ci permettant d'avoir  $\Delta M = 10^{-3}$ . La soufflerie opère à pression atmosphérique et à une température d'arrêt maintenue constante à  $T_i = 316K$ . Le nombre de Reynolds basé sur le corde de la maquette est alors de  $Re = 3.10^6$ .

La veine a une section rectangulaire avec une hauteur de  $0.763m$  et une largeur de  $0.804m$ . La longueur de la veine est de  $2.2m$ . Les parois du dessus et du dessous sont déformables dans le but de reproduire des conditions d'écoulements en condition non confinée, minimisant ainsi les nuisances dues à la présence des parois en garantissant un nombre de Mach et une incidence constants au niveau de la maquette.

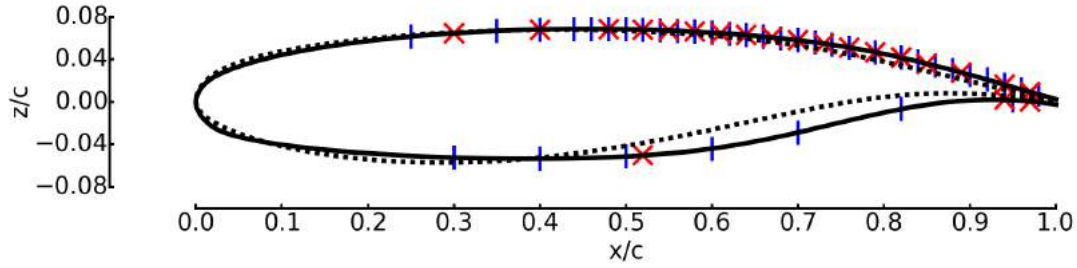


FIGURE 7.1 Section du profil OALT25 (ligne continue) comparée à celle du profil OAT15A (ligne pointillée) utilisé par Jacquin et al. [62]. Sur le profil OALT25 sont placés les capteurs de pression statique (en trait vertical bleu) et les capteurs de pression instationnaire (en croix rouge).

La maquette est le profil OALT25 (ONERA). Il s'agit d'un profil laminaire d'épaisseur relative 12.18% de corde avec un culot d'épaisseur 0.5% de corde. La corde est de 230mm. L'aile est fixée dans la veine par l'extérieur, il n'y a donc pas de support dans la zone de test. Les supports extérieurs permettent de changer l'incidence de l'aile par incrément de 0.5°. Lors des tests, l'angle d'incidence a été changé entre [0.5°, 4°]. A chaque angle d'incidence le nombre de Mach a été varié entre [0.69, 0.8].

Différentes prises de pression ont été placées sur la maquette entre  $x/c = 0.2$  et  $x/c = 1$ . Des capteurs de pression sont également implantés pour  $x/c \geq 0.3$ . La pression des capteurs kulite est mesurée à une fréquence de 10kHz pendant 40s et filtrée pour ne laisser que les fréquences inférieures à 4kHz. La Figure 7.1 montre la position des différents capteurs.

Une photo de la veine est montrée dans la figure 7.2. Elle montre que l'aile (notée (a) sur l'image) est fixée par les cotés. Elle montre aussi des hublots sur les cotés qui permettent les accès optiques (b). L'écoulement est suivi par des visualisations Schlieren acquises à 6000Hz. Afin de vérifier que la couche limite était bien laminaire avant l'interaction avec le choc, des caractérisations par thermographie infrarouge ont été faites grâce à la hublot IR (d) et en utilisant l'image de l'extrados par réflexion sur la paroi haute de la veine. Cette arrangement permet de voir environ un quart de la section du profil comme indiqué sur la figure 7.2 (e). La caméra infrarouge est le modèle SC5000 de FLIR. La résolution du capteur est de 640 par 512 pixels et de 20mK en température. Elle est sensible aux longueurs d'ondes comprises entre 2.5 et 5.1μm. Cette caméra filme à une fréquence de 100Hz avec un temps d'exposition de 1μs. Pour augmenter l'émissivité de la maquette celle-ci a été peinte en noire.

Enfin, des tests ont également été faits en déclenchant la turbulence avant l'interaction avec le choc à  $x/c = 0.07$  donnant deux configurations de couche limite différentes (laminaire ou turbulente). Les rubans de rugosités ont une épaisseur de 0.1mm.

Il est aussi à noter que la transition est déclenchée à l'intrados dès  $x/c = 0.07$  pour tous les tests.

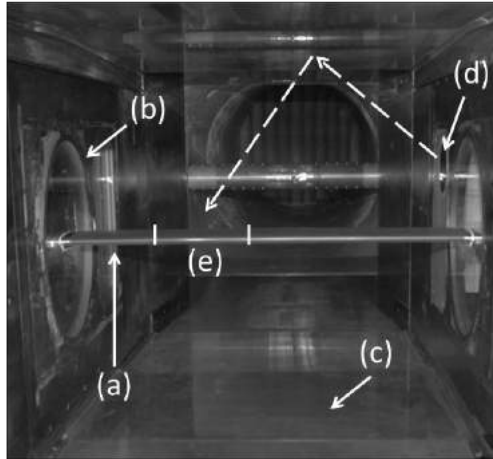


FIGURE 7.2 Photographie de la configuration expérimentale. (a) indique le profil, (b) la fenêtre utilisée pour les Schlieren, (c) la paroi inférieure, (d) la fenêtre infrarouge et (e) la section de l'aile étudiée par IR. Les flèches représentent le chemin optique utilisé pour les mesures IR. (Image issue de Brion et al. [20])

Au final, les essais sont caractérisés par le nombre de Mach, l'incidence et l'état de la couche limite.

### 7.1.2 Résultats expérimentaux

#### Position moyenne du choc

Les mesures de pression prises sur la maquette permettent d'estimer la position du choc grâce au saut de pression que celui-ci implique. La position du choc en fonction de Mach pour une incidence de  $4^\circ$  dans le cas où la transition se fait naturellement peut être vue sur la figure 7.3 (a) et dans le cas où la transition est déclenchée à  $x/c = 0.07$  sur la figure 7.3 (b). On remarque qu'à cette incidence le choc est présent dès  $M = 0.71$ . Dans le cas turbulent (c'est à dire quand la transition est déclenché à  $x/c = 7\%$ ), on observe d'abord un plateau de pression puis une baisse brutale de  $C_p$  représentative de la position du choc. Enfin, la pression augmente (la courbe baisse) continuellement jusqu'au bord de fuite. Dans le cas de la transition naturelle, on constate un plateau suivi d'une légère baisse avant une partie où  $C_p$  est presque constant. Il survient alors une chute brutale de la courbe représentant la position du choc. Cette forme du  $C_p$  est caractéristique d'une séparation laminaire. On remarque que dans le cas de faible Mach ( $M = 0.71$ ), le  $C_p$  remonte légèrement avant de redescendre jusqu'au bord de fuite.

Les différences principales entre le cas laminaire et turbulent sont :

- Le choc est beaucoup plus proche du bord d'attaque dans le cas turbulent ( $x_s \sim 0.4$ ) que dans le cas laminaire ( $x_s \sim 0.6$ ).



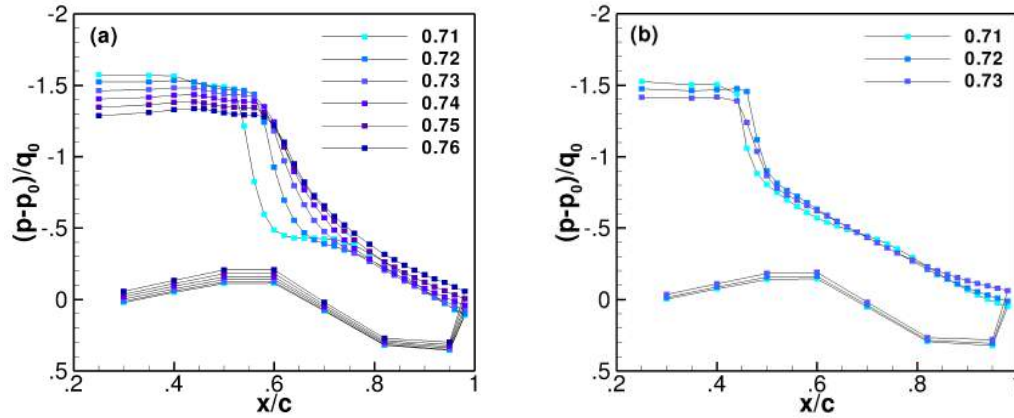


FIGURE 7.3 Pression moyenne autour du profil à incidence  $3.5^\circ$ . (a) dans le cas laminaire, (b) dans le cas où la transition est déclenchée à  $x/c = 0.07$ .

- Le plateau de pression avant le choc est plus élevé dans le cas laminaire que dans le cas turbulent. Ceci indique une plus forte accélération de l'écoulement à l'extrados dans le cas laminaire que dans le cas turbulent. Cela s'explique par la présence d'une couche limite plus fine.
- L'écoulement subit une petite compression en amont du choc dans le cas laminaire qui est inexistante dans le cas turbulent,
- L'écoulement est plus détaché au niveau du bord de fuite dans le cas turbulent que dans le cas laminaire comme l'indique la plus faible pression présente dans cette configuration.
- On remarque que dans le cas turbulent, la position du choc est presque constante en fonction du Mach. En revanche, dans le cas laminaire, le choc se déplace vers le bord de fuite quand le Mach augmente. Il apparaît qu'à partir de  $M = 0.74$  le choc ne bouge presque plus en fonction du Mach.

### Mouvement du choc

On s'intéresse maintenant au mouvement du choc en fonction du temps pour  $M = 0.735$  et à  $4^\circ$  d'incidence. La séquence d'environ  $15ms$  est montrée dans la figure 7.4 pour le cas turbulent. Ces images sont centrées sur la zone  $x/c \in [0.2, 1.1]$ .

Dans le cas turbulent, on constate que le choc se dirige vers le bord d'attaque entre les images 1 à 4. Sur la figure 4, on observe que le choc est à sa position la plus proche du bord de fuite et qu'il est à son maximum d'intensité. Sur les images 4 et 5 on remarque que l'écoulement se sépare avant le choc alors que dans les autres images la séparation se fait au pied du choc. Cette séparation massive a pour conséquence de réduire la portance de l'aile et

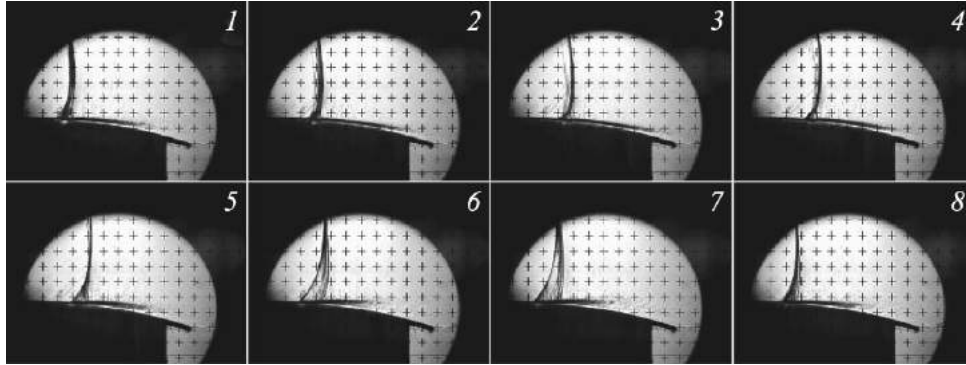


FIGURE 7.4 Séquence temporelle des Schlieren sur une période de  $15ms$  montrant la dynamique du choc dans le cas turbulent à  $M = 0.735$  et à incidence  $4^\circ$ . La taille de la grille est d'environ 8% de corde. L'image est issue de Brion et al. [20].

agit comme si on avait diminué l'incidence. C'est pourquoi le choc se déplace vers l'amont. La séparation restant importante (image 5 à 8). Aux images 7 et 8, le choc est revenu à sa position initiale. Il a perdu en intensité, le gradient de pression est donc plus faible, ce qui entraîne le ré-attachement de la couche limite. L'écoulement se caractérise à nouveau par la configuration de l'image 1 et part dans un cycle périodique avec une fréquence d'environ  $70Hz$ . On constate aussi que si la dynamique semble essentiellement 2D, il existe tout de même des petites variations transverses quand l'écoulement est massivement séparé. Ceci n'est pas surprenant puisqu'un écoulement massivement séparé est intrinsèquement 3D.

Par comparaison de la dynamique décrite ci-dessus avec la littérature présentée dans le chapitre 2, on constate que l'on est dans le cas d'un buffet de Type IIA (voir Tijdeman [119]) puisque le choc a un mouvement sinusoïdal, mais qu'il ne disparaît pas et ne sort pas du profil. De plus le fait que le choc avance en s'intensifiant jusqu'à provoquer une séparation massive, point où il commence à reculer en s'affaiblissant, est en accord avec les observations de Pearcy et al. [92]. La fréquence de  $70Hz$  est dans la gamme typique du buffet (voir, par exemple, Jacquin et al. [62])

Le cas laminaire est présenté Figure 7.5. On constate que contrairement aux observations faites dans le cas turbulent le choc ne bouge qu'avec une faible amplitude. Les in-stationnarités semblent localisées dans le pied de choc. La fréquence caractéristique du mouvement est d'un ordre de grandeur supérieur à celle observée dans le cas turbulent (ie. une période de  $1.5ms$  au lieu de  $15ms$ ). Il apparaît cependant que la séparation réagit au mouvement du choc. On observe que l'évolution de celle-ci est proche de celle du cas turbulent si l'on considère seulement le pied de choc.

Pour comparer les mouvements de choc entre ces deux configurations, on peut regarder pour chaque cas en chaque pixel le minimum d'intensité au fur et à mesure de la vidéo. La comparaison est faite sur l'image 7.6. On constate que l'amplitude du mouvement du choc

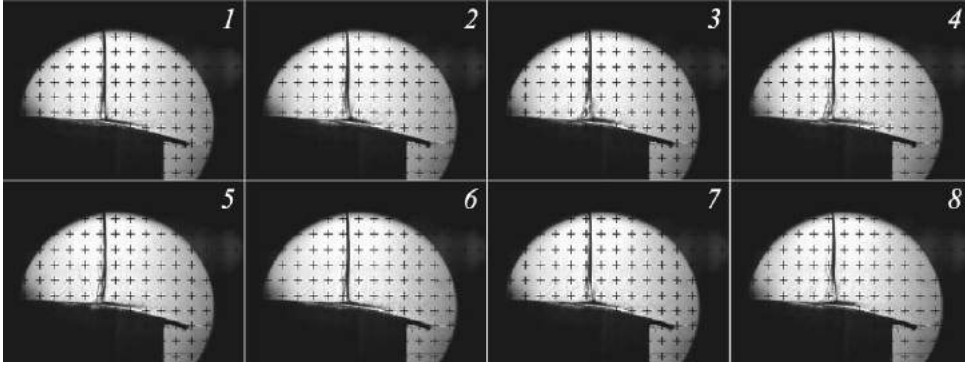


FIGURE 7.5 Séquence temporelle des Schlieren sur une période de  $1.5ms$  montrant la dynamique du choc dans le cas laminaire à  $M = 0.735$  et incidence  $4^\circ$ . La taille de grille est d'environ 8% de corde. (Image issue de Brion et al. [20])

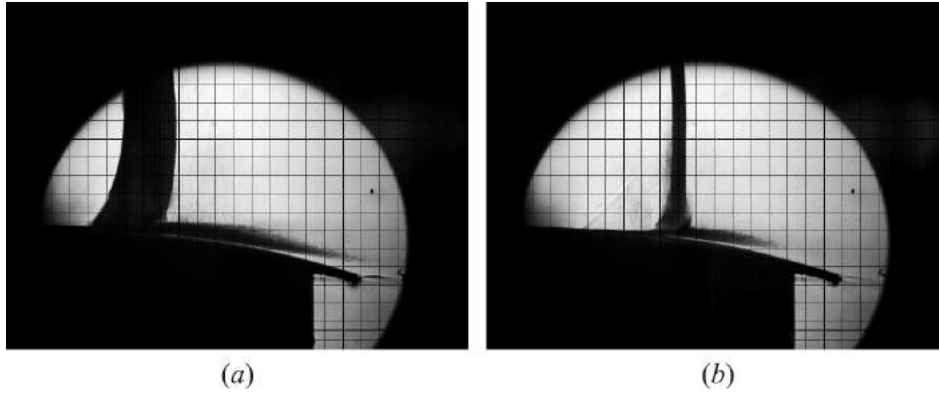


FIGURE 7.6 Projection du minimum d'intensité pris au cours des Schlieren pour le cas  $M = 0.735$  et incidence  $4^\circ$ . (a) est pour le cas turbulent et (b) pour le cas laminaire. (Image issue de Brion et al. [20])

est beaucoup plus grande dans le cas turbulent (a) que dans le cas laminaire (b). En effet elle est d'environ 20% de corde dans le cas turbulent et de 5% de corde dans le cas laminaire.

### Variation de pression à la paroi

Les mesures de pression étant résolues en temps, on peut déterminer le spectre des signaux le long du profil. Ceci est fait sur la figure 7.7. Le cas turbulent est représenté sur la figure 7.7 (a). On remarque un pic présent tout au long du profil à  $f = 75Hz$  qui correspond au buffet turbulent vu précédemment. Le Strouhal basé sur la corde est  $S_t = 0.067$ . On observe aussi plusieurs harmoniques de ce mode. Cette fréquence est très proche de celle trouvée expérimentalement sur le profil OAT15A par Jacquin et al. [62] dans la même soufflerie.

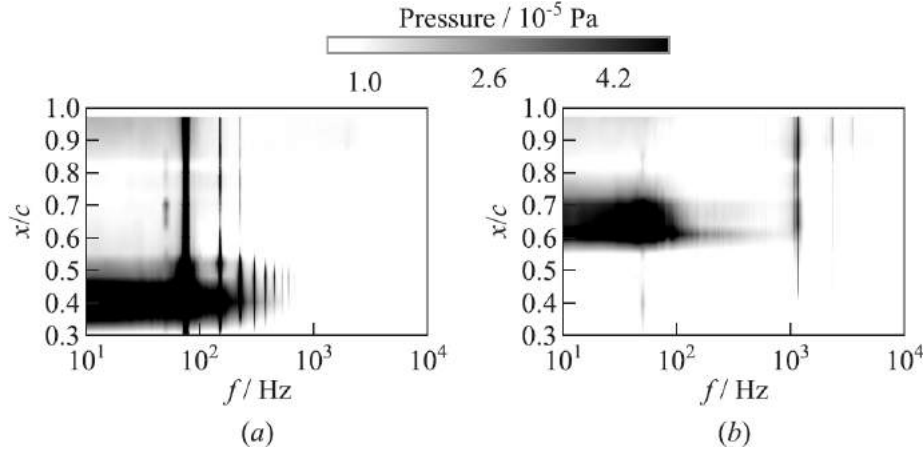
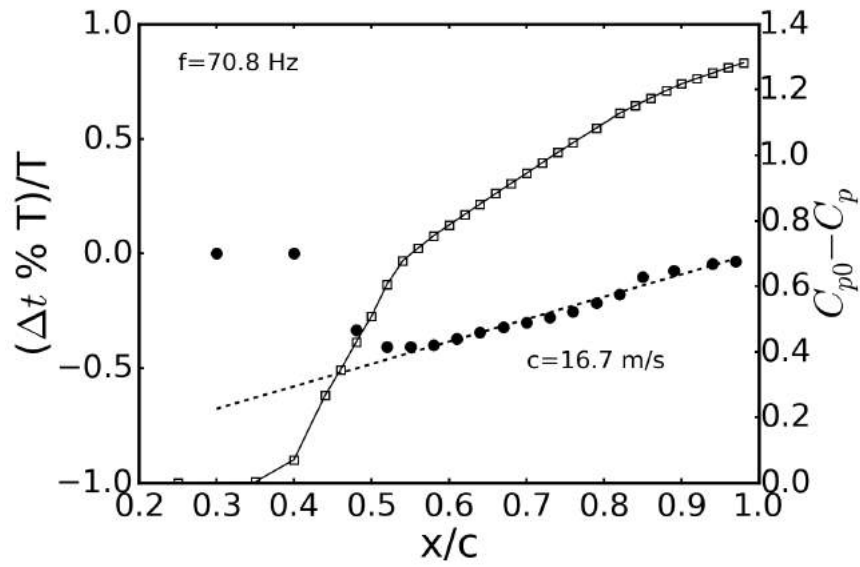


FIGURE 7.7 Transformée de Fourier des prises de pression sur la paroi à l'extrados du profil. (a) correspond au cas turbulent et (b) au cas laminaire. (Image issue de Brion et al. [20])

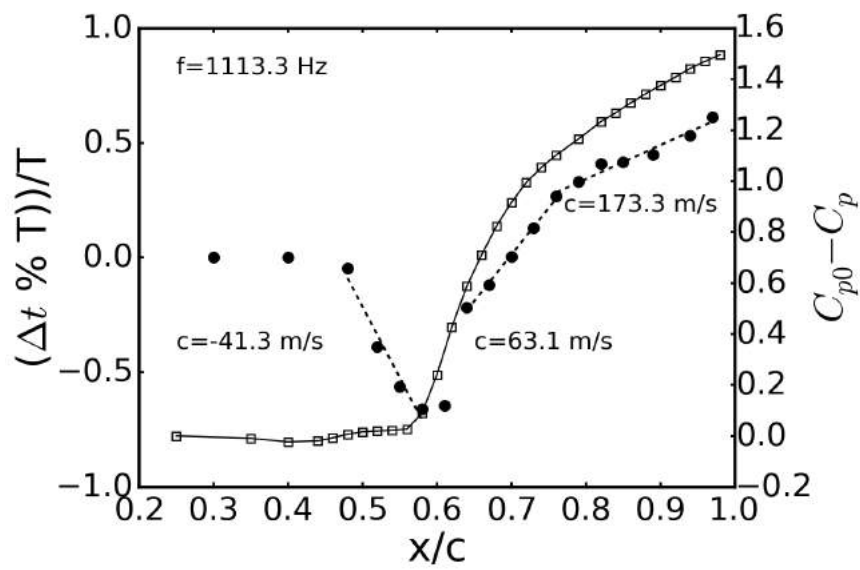
Dans le cas laminaire, montré dans la figure 7.7 (b), on constate qu'il y a un faible pic à  $f \sim 50\text{Hz}$ . Il apparaît aussi une nouvelle dynamique à  $f = 1130\text{Hz}$  et deux harmoniques. Ce pic aussi est présent sur la quasi totalité du profil. Cette fréquence correspond à un Strouhal de  $S_t = 1$ .

Sur les deux spectres, on remarque aussi deux structures supplémentaires à basse fréquence ( $f < 100\text{Hz}$ ). La première se situe au niveau du bord de fuite. Elle peut être due à la séparation de l'écoulement. La seconde a un plus grand niveau d'énergie. Elle se situe vers 40% de corde dans le cas turbulent et entre 60 et 70% de corde dans le cas laminaire. On la localise un peu avant le choc dans le cas turbulent et au pied du choc dans le cas laminaire. Cette dynamique n'est pas encore bien comprise. L'hypothèse formulée par Brion et al. [20] est que cette dynamique est due aux effets 3D présents dans la séparation quand le choc se dirige vers l'amont.

Les vitesses de phase des fluctuations de pression à la paroi peuvent être évaluées en regardant l'évolution de la pression en fonction du temps et de la position le long du profil. Cette évolution est tracée 7.8(a) pour la configuration turbulente et 7.8(b) pour la laminaire. Dans le cas turbulent nous remarquons une vitesse de phase constante le long du profil. Sa valeur est de  $16.7\text{m/s}$  ce qui est proche de la valeur trouvée numériquement par Garnier et al. [45] et expérimentalement par Jacquin et al. [62] sur le profil turbulent OAT15A. Dans le cas laminaire, la vitesse de phase est négative entre  $x/c \sim 0.45$  et  $x/c = 0.6$ . Sa valeur est de  $-41.3\text{m/s}$ . Elle devient positive après  $x/c = 0.6$  et est de  $63.1\text{m/s}$  et change de valeur vers  $x/c = 0.75$ . Après ce point la vitesse de phase est sensiblement plus élevée ( $173\text{m/s}$ ). La vitesse de phase de la pression à la paroi est donc très différente entre le cas laminaire et le cas turbulent.



(a)



(b)

FIGURE 7.8 Déphasage entre les mesures kulites en fonction de la position le long du profil. Le coefficient de pression est rappelé. (a) correspond au cas turbulent et (b) au cas laminaire.

### Evolution en fonction du Mach à incidence $4^\circ$

Une étude a été faite en laissant l'incidence à  $4^\circ$  et en faisant varier le Mach ( $M = 0.71, 0.72, 0.73, 0.74, 0.75$ ). La dynamique est regardée via le spectre du capteur de pression située à  $x/c = 0.85$ .

La figure 7.9(a) montre les transformées de Fourier des signaux pour les Mach testés dans le cas turbulent. On observe dans le cas des plus faibles nombres de Mach ( $M < 0.73$ ) l'absence de dynamique à basse fréquence. En revanche, on remarque un pic à  $S_t = 2$ . Pour les Mach les plus élevés ( $M \geq 0.73$ ) cette dynamique disparaît mais des pics apparaissent à basse fréquence ( $S_t \sim 0.07$ ). Cette fréquence augmente avec le Mach. On observe aussi des harmoniques de ce pic.

Le cas laminaire est présenté sur la figure 7.9(b). Aucune basse fréquence n'est visible à  $M = 0.71$  mais à partir de  $M = 0.72$  cette dynamique apparaît vers  $S_t = 0.05$ . Elle est cependant moins amplifiée et plus large bande que dans le cas turbulent. Une dynamique est aussi présente à  $S_t \sim 2$  pour les Mach les plus faibles ( $M < 0.73$ ). Elle disparaît ensuite pour être remplacée par les harmoniques des pics à  $S_t \sim 1$  qui apparaissent dès  $M = 0.72$ . Une dynamique très faiblement amplifiée est présente à  $S_t = 1.4$  pour  $M = 0.71$  et se maintient jusqu'aux Mach les plus hauts. Ce pic semble être constitué en réalité de 2 ou 3 pics très rapprochés.

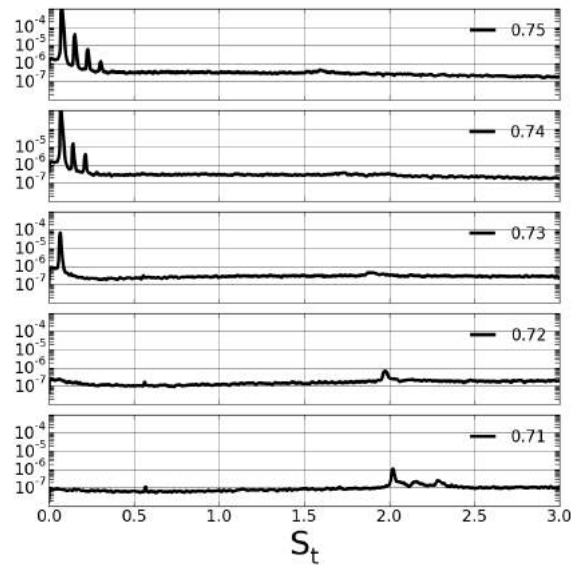
L'origine de la dynamique à  $S_t \simeq 2$  n'est pas claire, mais une fréquence de cette ordre de grandeur a été trouvée dans Sartor et al. [107] à l'aide d'une analyse de résolvant sur le profil OAT15A. Elle semble être associée à l'instabilité du sillage du profil. Une même dynamique a été trouvée par Grossi [53] sur le profil V2C à forte incidence.

Nous étudierons dans la suite les modes à  $S_t \sim 0.05$  et  $S_t \sim 1$ .

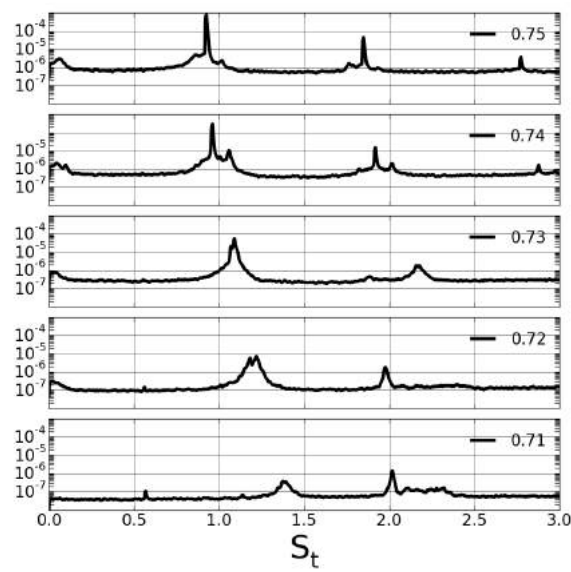
### Etude des dynamiques

Les transformées de Fourier des mesures de pressions nous ont donné des fréquences caractéristiques de l'écoulement. On a observé une basse fréquence dans le cas turbulent tandis que l'on constate une basse et une moyenne fréquence dans le cas laminaire. Nous allons observer les transformées de Fourier des Schlieren à ces fréquences. Nous nous concentrerons sur le Mach  $M = 0.735$ .

Le mode basse fréquence du cas turbulent est tracé sur la figure 7.10(a). Il marque bien les oscillations droite/gauche du choc en accentuant les extrémités de ce mouvement. On peut en déduire que le pic observé sur les transformées de Fourier des mesures de pression est bien associé au buffet. On peut aussi mesurer une amplitude d'oscillation du choc qui est de 11.5% à 15% de corde, selon la hauteur à laquelle celle-ci est mesurée. Cette valeur d'amplitude d'oscillation du choc est proche de celle obtenue à partir de l'image 7.6(a) (ie 20%).



(a)



(b)

FIGURE 7.9 Spectre des mesures de pression pour différents nombres de Mach à incidence  $4^\circ$  pour les cas turbulent (a) et laminaire (b).

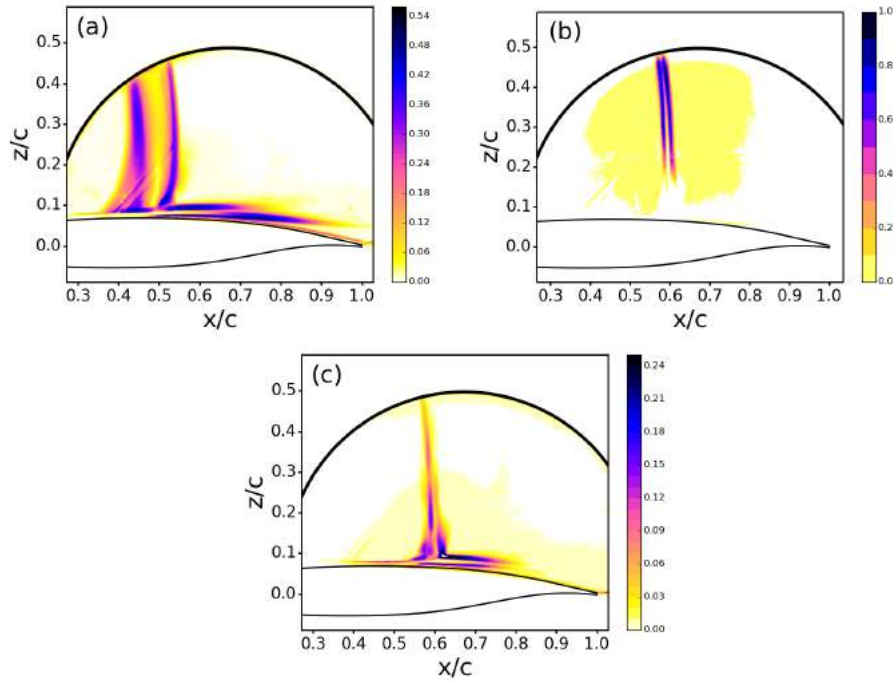


FIGURE 7.10 Amplitude des modes de Fourier des Schlieren. (a) dans le cas turbulent à  $St = 0.067$ , (b) dans le cas laminaire à  $St = 0.045$  et (c) dans le cas laminaire à  $St = 1$ .

Dans le cas laminaire, le mode de Fourier à  $St = 0.045$  est tracé sur la figure 7.10(b). Elle montre aussi une oscillation droite gauche du choc mais à une plus faible amplitude (ie 3% de corde). La moyenne fréquence quant à elle est montrée sur la figure 7.10(c). Elle concerne essentiellement le pied de choc. Elle est liée au mouvement d'une onde qui remonte le choc du bas vers le haut. Ceci est visible sur l'évolution en temps de ce mode montrée sur la figure 7.11. On y remarque aussi un lâcher de structures issues du pied du choc et se dirigeant vers le bord de fuite du profil. On y observe aussi le mouvement de la compression créée par le point de séparation montrant le mouvement de ce point.

## 7.2 Calcul URANS

Dans la section précédente nous avons présenté des résultats expérimentaux montrant que la dynamique du buffet sur une aile laminaire est différente de celle du buffet turbulent. Dans le cas turbulent, différentes études (voir chapitre 2) ont montré que des simulations URANS étaient capables de reproduire le phénomène de buffet au moins d'une façon qualitative. Aucune étude n'a été trouvée dans la littérature pour le cas laminaire. Le but de cette section est de voir si ces modèles sont aussi capables de reproduire la dynamique du buffet laminaire. La difficulté supplémentaire dans ce cas est la prise en compte de la position de la transition.



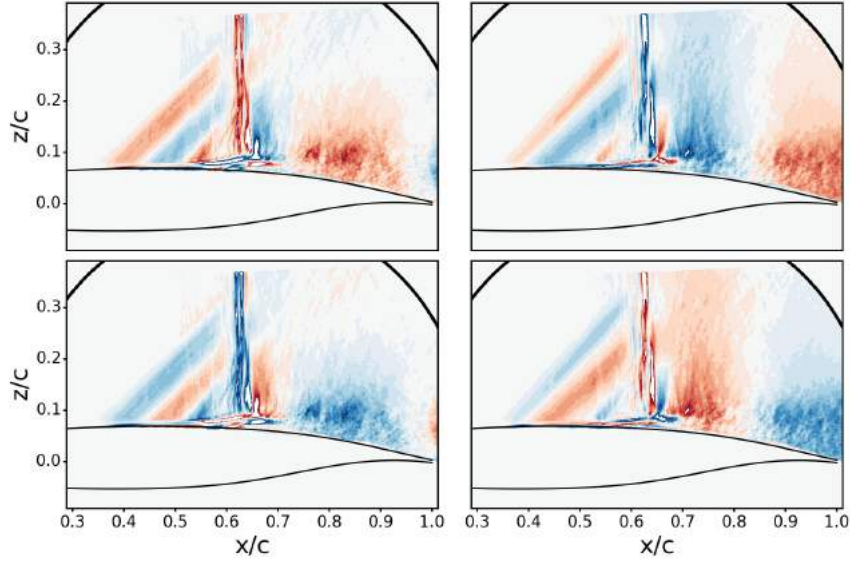


FIGURE 7.11 Evolution dans le temps du mode de Fourier des Schlieren dans le cas laminaire à  $St = 1$ . ( $M=0.735$  et incidence  $4^\circ$ )

Nous présenterons d'abord les schémas numériques et les modèles utilisés pour les différents calculs, puis nous regarderons le mouvement du choc au cours du temps et la dynamique la bulle de re-circulation. Enfin, nous étudierons les transformées de Fourier de la mesure de pression à la paroi afin d'identifier les fréquences importantes de l'écoulement.

### 7.2.1 Schémas numériques et modèles

#### Schémas numériques

Les équations URANS sont résolues à l'aide du logiciel elsA (v3.5.02) développé par l'ONERA. Nous avons choisi le schéma upwind du second ordre AUSM+(P) pour les flux convectifs des variables conservatives, et le schéma du premier ordre Roe avec la correction d'Harten pour les flux convectifs des variables turbulentes. Un schéma centré du second ordre est utilisé pour les flux diffusifs. La résolution en temps est faite par le schéma du second ordre de Gear avec un pas de temps fixé à  $5 \cdot 10^{-4}$  en adimensionnant par la corde et le Mach à l'infini. Le temps dimensionné est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-7} s$ . Un nombre de 120000 itérations a été fait en donnant un temps d'acquisition de 60 en adimensionné soit un temps d'acquisition dimensionné de l'ordre de  $60 ms$ . Ceci représente donc 4 périodes du buffet turbulent (si on se réfère aux données expérimentales de Brion et al. [20]) et 40 périodes du mode dominant dans le cas du buffet laminaire. Le calcul a été initialisé par les champs RANS qui seront montrés dans la partie suivante. Les schémas numériques ont été inspirés par ceux de Sartor [105] qui a calculé le buffet turbulent sur le profil OAT15A.

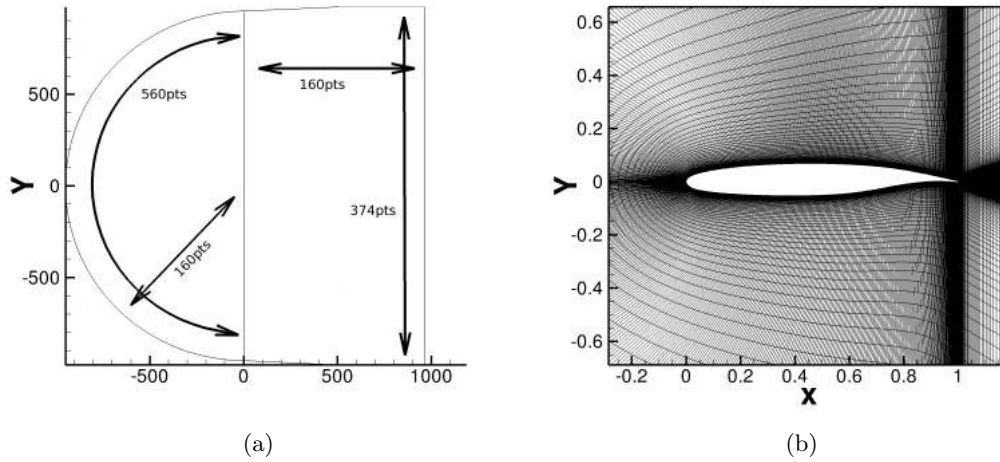


FIGURE 7.12 Maillage du profil OALT25. (a) représente le domaine de calcul avec le nombre de mailles dans chaque directions. (b) montre le maillage au voisinage du profil.

Dans le cas turbulent, une étude de l'influence du schéma numérique sur la prédiction du buffet a été faite par Goncalves et al. [50]. Leur conclusion est que la discrétisation spatiale a peu d'influence sur la prédiction du buffet. Le facteur dominant est le choix du modèle de turbulence. Nous supposons que ceci est encore vrai dans le cas du buffet laminaire, pour lequel s'ajoute en plus l'influence du critère de transition.

### Maillage du profil

Le maillage du profil de type C+H peut être vu dans les figures 7.12(a) et (b). Le tour du profil est fait avec 560 cellules. La distance entre la paroi du profil et le bord du calcul est parcourue en 160 cellules. Il y a aussi 160 cellules dans le sillage de l'aile. Les conditions limites à l'infini sont imposées à 1000 cordes du profil. Dans le voisinage du choc la taille des mailles satisfait  $0.003 < \Delta x/c < 0.004$ , ce qui est un ordre de grandeur en dessous de l'amplitude du mouvement du choc observé expérimentalement. C'est aussi l'ordre de grandeurs des mailles trouvées dans la littérature du buffet turbulent, par exemple dans Iovnovich [61] ou Sartor [105]. De plus, la taille de la première maille à la paroi satisfait  $y^+ < 1$ .

### Modélisation RANS et transition

Comme discuté dans la partie 2, l'influence de la modélisation RANS est importante sur les résultats liés au buffet, au moins dans le cas du buffet turbulent. L'ensemble des études sur le sujet (par exemple Thiery et al. [117]) montre que le modèle  $k - \omega$  SST de Menter

reproduit les résultats expérimentaux plus fidèlement que les autres modèles en terme de fréquence, de Mach et d'incidence limites. Nous avons donc utilisé ce modèle.

Comme la très grande majorité des études ont été faites en turbulent, nous n'avons pas trouvé de résultats comparables pour le modèle de transition. Dans la suite nous voudrions comparer les résultats obtenus par le URANS avec ceux obtenus par des analyses de stabilité autour des champs de base. Nous voulons dans ces analyses pouvoir prendre en compte les effets de la turbulence et de la transition. Nous allons donc utiliser le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  de Langtry dans sa version modifiée comme dans le chapitre 6.

### Conditions limites

Les conditions limites imposées à la paroi du profil sont des conditions de parois adiabatiques sans glissement. Les frontières du domaine de calcul ont des conditions de champ lointain. Les valeurs imposées sont celles de l'expérience, c'est à dire  $P_i = 101325 Pa$  et  $T_i = 310 K$ . L'incidence est fixée à  $4^\circ$  et trois conditions de Mach ont été calculées ( $M = 0.72, 0.74$  et  $0.75$ ). Afin de garantir un taux de turbulence de 0.25% proche du profil les conditions aux limites sur les variables turbulentes sont  $T_u = 5\%$  et  $\mu_t/\mu = 10$ . Les cutoff ont été mis à  $10^8$  afin qu'ils n'interviennent pas.

#### 7.2.2 Etude du mouvement au pied choc

Nous présenterons ici uniquement le résultat obtenu pour  $M = 0.74$ . Les données seront présentées ici et par la suite de façon adimensionnée par la corde et les valeurs prises loin du profil.

Nous nous intéressons d'abord à la position du choc  $x_s$  en fonction du temps. L'évolution de cette position au cours d'une période est montrée sur la figure 7.13. On observe un mouvement du choc de faible amplitude le long du profil au cours du temps. L'amplitude de ce mouvement est de 2% de corde. Cette amplitude était entre 3% et 5% dans les observations expérimentales. La période observée est de  $T = 12.5$  ce qui donne une fréquence de  $S_t = 0.08$  ce qui est proche de la fréquence observée expérimentalement ( $S_t = 0.05$ ). Le mouvement basse fréquence est donc qualitativement prédit par les analyses URANS. D'un point de vu quantitatif, on constate une sur-évaluation de la fréquence ainsi qu'une sous estimation de l'amplitude du mouvement.

Dans le cas du buffet turbulent, Goncalves & Houdeville [50] ont montré des écarts plus ou moins importants sur l'amplitude du choc selon le modèle de turbulence utilisé. Par exemple, le modèle de Spalart sous estime l'amplitude du mouvement d'un ordre de grandeur alors que la fréquence est sous estimée de 7%. Le modèle  $k - \omega$  SST de Menter estime correctement l'ordre de grandeur du mouvement avec une erreur de l'ordre de 10%. De même les fréquences sont relativement bien reproduites, mais des erreurs de l'ordre de 4% ont été observées par les auteurs. Ici, la fréquence est sur-estimée de 30% et l'amplitude du mouvement est sous

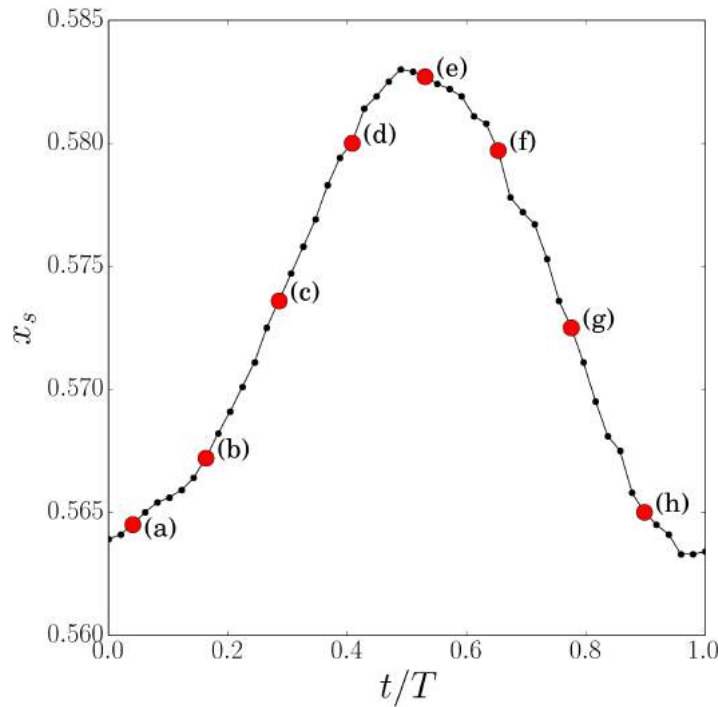


FIGURE 7.13 Position du choc au cours d'une période. Les points rouges marquent les extractions des champs de vitesses au cours de celle-ci et présentées sur la figure 7.14.

estimée de l'ordre de 50%. Les erreurs sont donc plus importantes dans le cas laminaire que dans le cas turbulent et ce malgré l'utilisation du même modèle de turbulence. Ici nous utilisons, en plus du modèle de turbulence, un modèle de transition qui peut apporter des erreurs supplémentaires. Il n'est donc pas surprenant de faire une telle remarque. Les écarts sont toutefois satisfaisant si on les compare aux erreurs en terme d'amplitude faites dans le cas turbulent par certains modèles.

Nous avons tracé sur la figure 7.14 la partie négative du champ de vitesse à l'extrados du profil. Ceci nous permet de visualiser l'évolution de la séparation de l'écoulement au cours du temps. Chaque image correspond à différents temps au cours de la période qui sont repérés sur la courbe de la position de choc (figure 7.13) par des points rouges. On constate que quand le choc est proche de sa position la plus amont entre (h) et (a), nous passons d'un état avec une unique recirculation allant du voisinage du pied de choc jusqu'au bord de fuite à un nouvel état où nous observons deux séparations, une au pied de choc et l'autre au bord de fuite. Quand le choc se déplace vers le bord de fuite, ces deux séparations s'éloignent (entre (a),(b) et (c)) puis se rapprochent à nouveau entre (c) et (d) pour reformer une unique séparation quand le choc est à sa position la plus proche du bord de fuite (e). La séparation grossit entre (e), (f) et (g) quand le choc se redirige vers le bord d'attaque pour s'affiner

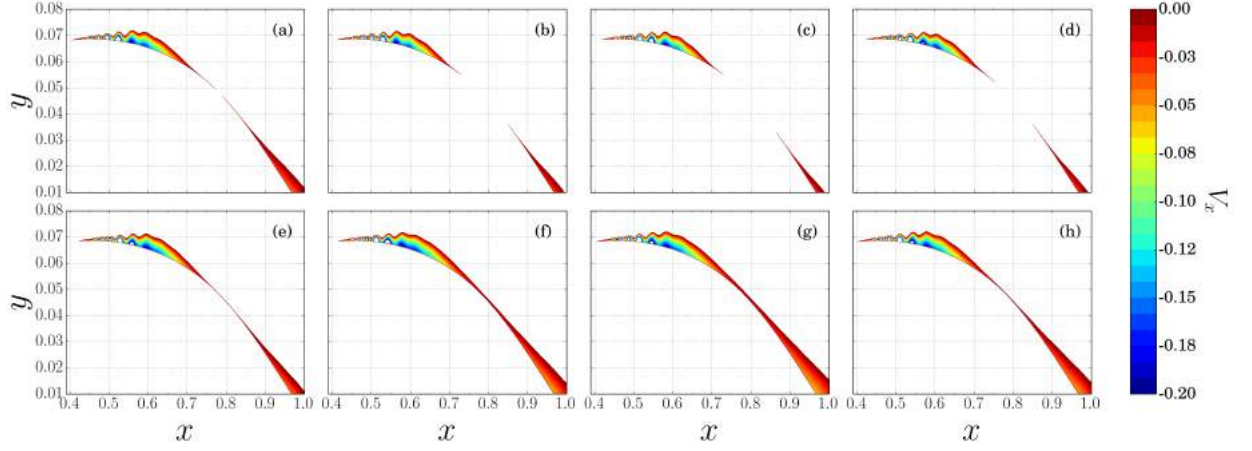


FIGURE 7.14 Champs de vitesse négative pour différents instants dans la période du mouvement du choc. Les points d'extractions sont repérés par les point rouges sur la figure 7.13.

entre (g) et (h) lorsque le choc se rapproche de sa position la plus proche du bord d'attaque. Une telle observation de l'épaississement de la séparation a été faite expérimentalement, notamment dans le cas turbulent où le phénomène est plus facilement visible mais aussi dans le cas laminaire (voir section 7.1.2). Le calcul URANS avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  est donc capable de reproduire, au moins qualitativement les instationnarités basse fréquence observées expérimentalement .

Ce phénomène a aussi été observée pour  $M = 0.72$  et  $M = 0.75$  mais avec la nuance qu'il n'y a qu'une unique séparation au pied de choc pour  $M = 0.72$  et une seule, allant du pied de choc au bord de fuite pour  $M = 0.75$ .

### 7.2.3 Analyse en fréquence

La pression le long du profil a été sauvegardée toutes les 50 itérations, c'est à dire toutes les  $2,5 \cdot 10^{-5} s$ , soit à une fréquence de  $40 kHz$ . La transformée de Fourier du signal est présentée dans la figure 7.15 pour les 3 nombres de Mach testés et en différentes positions.

On remarque la présence d'une basse fréquence que pour toutes les positions et pour les 3 nombres de Mach. Elle est de  $S_t = 0.066$  pour  $M = 0.72$ ,  $S_t = 0.08$  pour  $M = 0.74$  et de  $S_t = 0.088$  pour  $M = 0.75$ . Ces fréquences concordent parfaitement avec les fréquences observées en regardant le mouvement du choc. Elles sont donc à associer à son mouvement de droite à gauche le long du profil.

On remarque qu'une haute fréquence  $S_t = 15$  est présente pour tous les nombres de Mach et pour toutes les positions sauf  $x/c = 0.35$ . Une fréquence à  $S_t = 8.5$  est visible pour  $x/c = 0.52$ .

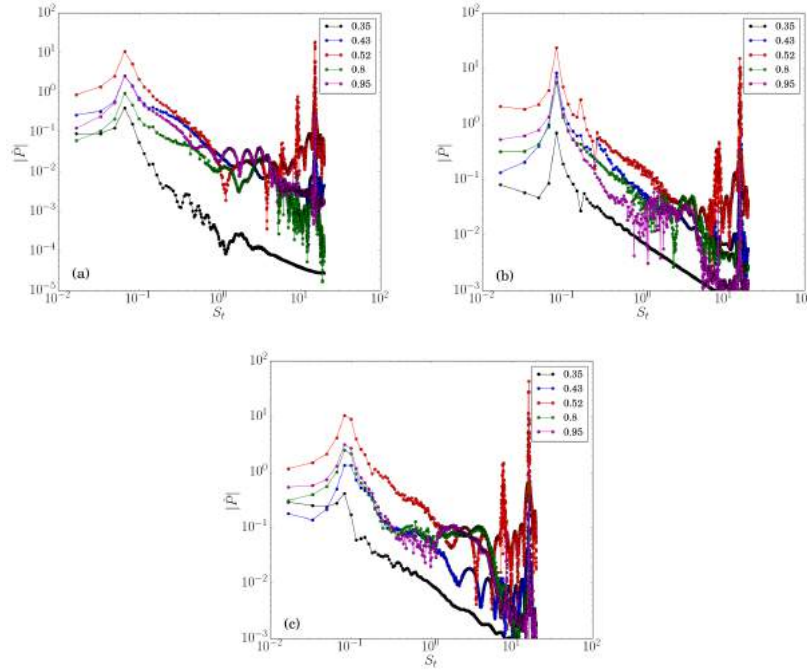


FIGURE 7.15 Spectres des mesures de pression pour différentes positions et pour  $M = 0.72$ (a),  $M = 0.74$ (b) et  $M = 0.75$ (c) avec une incidence de  $4^\circ$ .

Les positions les plus proches du bord de fuite ( $x/c = 0.8$  et  $x/c = 0.95$ ) marquent, pour les trois nombres de Mach, des fréquences proches de  $S_t = 1.3$ .  $S_t = 0.7$  est marquée pour  $x/c = 0.8$  dans le cas à  $M = 0.72$  seulement.

Des Strouhal de 2 et de 4 sont aussi présents notamment en  $x/c = 0.43, 0.52$  et  $0.8$  et ce pour tous les nombres de Mach.

Comparant ces résultats avec les résultats expérimentaux on remarque que la dynamique basse fréquence est plus marquée par le URANS que dans l'expérience. Par ailleurs le URANS donne des fréquences de  $S_t = 1.3$  ou  $S_t = 0.7$  mais rien à  $S_t = 1$  (valeur expérimentale). De plus ces dynamiques ne sont pas présentes sur tous les points du profil contrairement aux cas expérimentaux et sont faibles en énergie. On en conclut que le URANS utilisant le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  est capable de reproduire au moins qualitativement le mouvement droite gauche du choc, mais a des difficultés à reproduire le pic expérimental à  $S_t = 1$ .

### 7.3 Champ de base

Dans cette section nous allons présenter les champs RANS. Dans cette section ainsi que les suivantes les résultats seront donnés de façon adimensionnée par la corde et les quantités à l'infini. Après avoir présenté les schémas numériques et les modèles de turbulence et de

transition utilisés, nous étudierons les principales caractéristiques de l'écoulement. Nous regarderons ensuite la position du choc en fonction du Mach puis l'évolution de la séparation à l'extrados.

### 7.3.1 Schéma numérique

La discrétisation en espace (maillage et schéma numérique) est la même que pour le calcul URANS. La solution stationnaire est cherchée à l'aide du schéma du premier ordre backward-Euler avec un pas de temps local.

L'écoulement étant intrinsèquement instationnaire, les calculs ne convergent pas naturellement vers une solution stationnaire dès que l'on est en régime de buffet. Afin de trouver une solution stationnaire nous avons utilisé la technique de selective frequency damping (sfd) qui consiste à filtrer les fréquences instationnaires à l'aide d'un filtre passe bas. Cette méthode a été proposée par Akervik et al. [5]. On remplace le système RANS

$$\frac{\partial q}{\partial t} = R(q) \quad (7.1)$$

par un système plus grand

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= R(q) - \chi(q - \bar{q}) \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} &= 2\pi \frac{q - \bar{q}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

A convergence du système,  $q = \bar{q}$  et  $q$  est une solution stationnaire des équations RANS.  $\chi$  est un facteur à déterminer et  $\Delta$  est relié à la fréquence de coupure du filtre par

$$f_c = \frac{2\pi}{\Delta}. \quad (7.3)$$

Dans nos calculs  $\chi = 0.1$  et  $\Delta = 40$  soit  $f_c = 0.025$ , ce qui est un peu moins de la moitié de la fréquence du buffet obtenue par les calculs URANS. Malgré l'utilisation de la sfd, la convergence du calcul n'est pas totalement satisfaisante. Les résidus n'oscillent plus et restent constant à une valeur de  $10^{-3}$  sur la densité. Compte tenu qu'à la première itération le résidu est de l'ordre de  $10^4$ , on perd donc 7 ordres de grandeurs. Nous avons considéré ces champs comme convergés. Afin d'être sûr que les résultats des analyses de stabilité globale sont indépendants du nombre d'itérations faites, nous avons à chaque fois relancé le calcul du champ de base sur 10000 itérations puis relancé ces analyses. A chaque fois les résultats étaient indépendants de l'arrêt du calcul. Nous avons aussi vérifié que  $\int \frac{|q - \bar{q}|}{|q|} < 1$ . Cette quantité est inférieure à  $10^{-6}$  pour toutes les variables.

### 7.3.2 Principales caractéristiques de l'écoulement

Nous présenterons les principales caractéristiques de l'écoulement trouvé dans le cas où le nombre de Mach est de 0.74.

D'abord, le champ de densité est montré sur la figure 7.16(a). On remarque une hausse brutale de densité vers  $x/c = 0.56$  qui marque la présence d'un choc. Ce choc est légèrement en amont comparé à l'expérience ( $x/c \sim 0.6$ ). Si on regarde en plus la vitesse  $U$  tracée sur la figure 7.16(b), on constate la présence de valeurs négatives au niveau du pied de choc montrant la présence d'une bulle de recirculation créée par la présence du choc. On trouve aussi des valeurs négatives au niveau du bord de fuite montrant l'extension de la recirculation jusqu'au bout du profil. Afin de mieux comprendre la topologie des recirculations, on peut regarder le coefficient de frottement à la paroi visible sur la figure 7.18(b). On constate qu'il n'y a bien qu'une unique bulle de recirculation s'étendant de  $x/c = 0.4$  à  $x/c = 1$ . En comparant aux Schlieren expérimentales (figure 7.5), on constate un accord qualitatif sur la séparation à l'extrados du profil. On remarque aussi dans les résultats RANS une seconde séparation présente à l'intrados visible par un plateau de pression sur la figure 7.17 (a).

On s'intéresse aussi à la position de la transition afin de vérifier que l'on est bien dans le cadre des interactions onde de choc couche/limite laminaire. Pour ce faire, on regarde l'intermittence numérique, qui modélise la transition (visible Figure 7.16 (c)). On constate qu'à l'extrados la couche limite en amont de l'interaction est bien laminaire (ie.  $\gamma \sim 0$ ) et que la transition commence au moment de la séparation. A l'intrados la transition se fait tardivement, très différemment de l'expérience où celle-ci est déclenchée à  $x/c = 0.07$ . Il est à noter qu'il n'était pas possible de forcer la transition dans le calcul RANS avec le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ .

On a donc bien une modélisation RANS qui reproduit qualitativement les résultats expérimentaux, un accord quantitatif étant peu probable compte tenu des différences de couche limite à l'intrados. On peut maintenant se demander comment évolue ce champ de base en fonction du Mach.

### 7.3.3 Position du choc en fonction du Mach

Dans cette étude, l'incidence est fixée à  $4^\circ$ . Le nombre de Mach à l'infini prendra les valeurs suivantes : 0.71, 0.72, 0.73, 0.74, 0.745, 0.7475, 0.75, 0.76, 0.77.

La pression le long du profil obtenue pour ces différents nombres de Mach est présentée sur la figure 7.17(a) pour le calcul RANS et 7.17(b) pour les résultats expérimentaux. Les résultats numériques montrent une séparation qui se produit vers  $x/c = 0.37$  pour l'ensemble des nombres de Mach et la présence d'un choc vers  $x/c = 0.55$ . Sur les courbes expérimentales, on constate que la séparation se produit un peu plus loin du bord d'attaque vers  $x/c = 0.4$  et la position du choc varie entre 0.55 et 0.65. La séparation se fait donc plus tôt pour les solutions RANS que dans l'expérience. Le même diagnostic peut être fait sur la position du



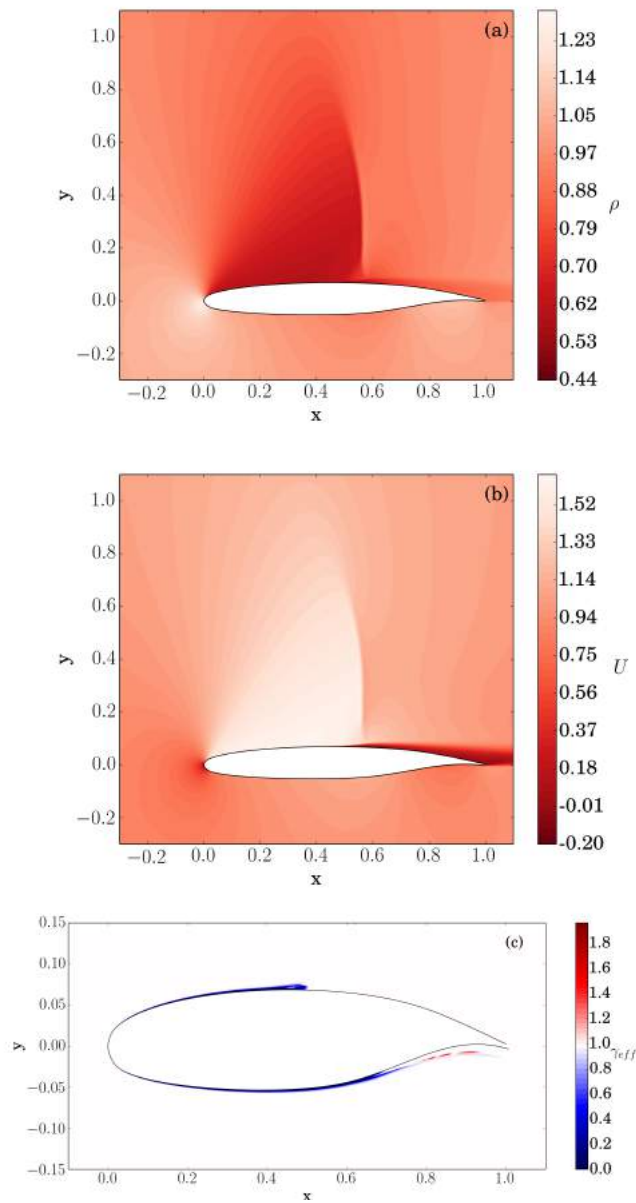


FIGURE 7.16 Champs de densité(a), vitesse(b) et de  $\gamma_{eff}$ (c) pour le champ de base à  $M = 0.74$  et à incidence  $4^\circ$ . Dans (c) l'échelle de couleur de manière à visualisé la couche limite laminaire (bleu), la couche limite turbulente et l'écoulement extérieur (blanc) et la zone d'activation de  $\gamma_{sep}$  (rouge).

choc. La distance entre la position de la séparation et le choc est d'environ 0.18 de corde pour le calcul RANS et entre 0.2 et 0.25 dans l'expérience. On a vu dans le cas de la plaque plane (chapitres 5 et 6) que la distance entre le point de séparation et le point d'interaction est plus grande dans l'expérience que pour le résultat RANS. Il apparaît que c'est encore le cas ici. Il est donc possible que cette différence de position de choc et de séparation soit un biais de la modélisation RANS. Une autre raison possible de la différence entre l'analyse numérique et l'expérience est que dans la simulation la transition est calculée à l'intrados alors qu'elle est déclenchée dans l'expérience. On assiste donc à une séparation de l'écoulement dans les résultats du calcul visible par un plateau de pression sur la figure 7.17(a) qui n'existe pas dans le cas expérimental. Ce changement de nature de la couche limite peut modifier la pression au bord de fuite. Si on a une pression plus faible au bord de fuite à l'intrados dans le calcul RANS que dans l'expérience et que l'on suit le raisonnement de Pearcey et al [92], la condition de continuité impose que la pression au niveau du bord de fuite à l'extrados est aussi plus faible. Ceci implique un choc moins fort qui se positionne plus en amont du profil. Ceci est cohérent avec les différences observées entre l'expérience et le numérique.

On constate cependant que le choc se rapproche du bord de fuite quand le Mach augmente que ce soit dans le calcul RANS ou dans l'expérience. De plus la pression au bord de fuite diminue quand le Mach augmente, ce qui implique un décollement croissant de l'écoulement à l'extrados au bord de fuite.

### 7.3.4 Topologie du champ de base en fonction du Mach

Nous avons vu dans la bibliographie (dans le chapitre 2) que certains scénarii du buffet turbulent s'appuient sur le nombre (et la taille) de bulles de séparation de l'écoulement à l'extrados. Il est donc intéressant de regarder la topologie des recirculations sur le profil pour évaluer l'importance de cette caractéristique dans le cas laminaire.

Sur la figure 7.18(a) est visible la ligne  $U = 0$  qui délimite la bulle de recirculation à l'extrados du profil. On constate que pour des nombres de Mach assez faibles ( $M = 0.71$  et  $M = 0.72$ ), il n'y a pas de séparation au niveau du bord de fuite. Cette séparation n'est visible qu'à partir de  $M = 0.73$ . Pour tous les nombres de Mach, on observe une séparation de l'écoulement vers  $x/c = 0.4$  soit environ 15% de corde en amont du choc. De plus pour  $M = 0.73$ , on observe deux séparations, une située au pied de choc, la seconde au bord de fuite. Si on reprend la classification proposée par Pearcey et al. [94], on est dans le mode BI. Enfin, pour  $M > 0.74$ , on observe une unique séparation allant de  $x/c \sim 0.4$  jusqu'au bord de fuite. La ligne  $U = 0$  ne permet pas de déterminer la présence d'une seule ou deux zones de séparation pour le cas  $M = 0.74$ . Afin de vérifier dans ce cas le nombre de séparations et aussi d'avoir des résultats plus quantitatifs sur la position des séparations, nous avons tracé sur la figure 7.18(b) la composante selon  $x$  des contraintes pariétales. Ces courbes permettent de confirmer les résultats précédents en ajoutant le fait qu'il y a bien une unique séparation dans

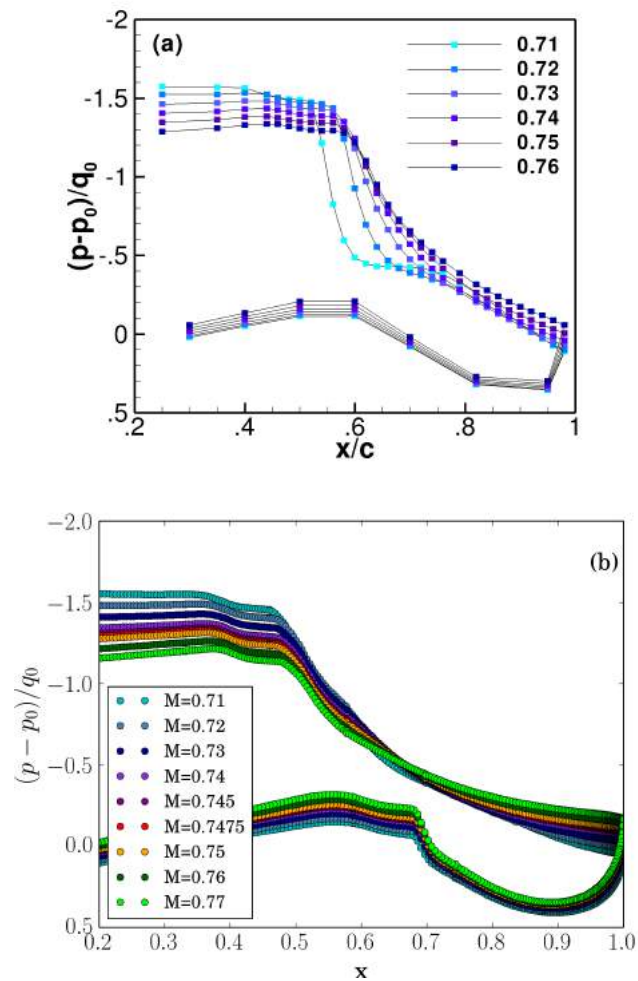


FIGURE 7.17 Evolution de la pression normalisée autour du profil pour différents nombres de Mach et à  $4^\circ$  d'incidence. (a) montre les résultats expérimentaux et (b) les résultats des calculs RANS.

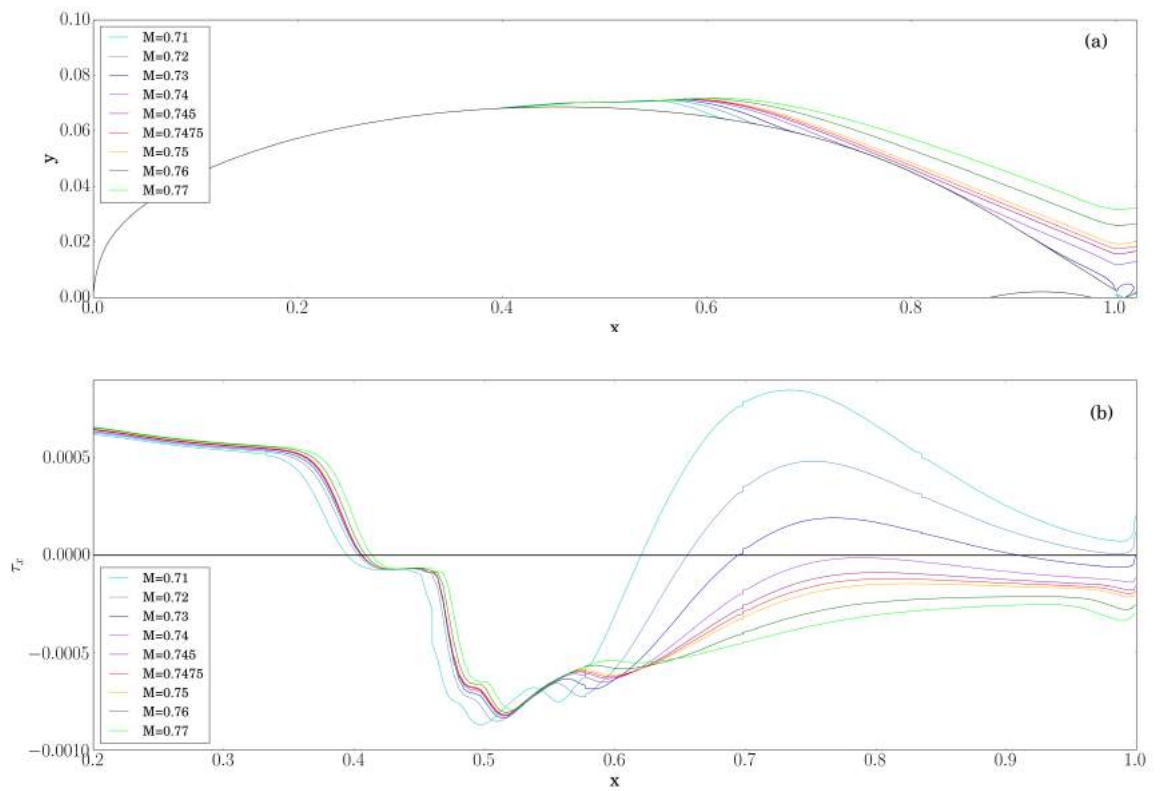


FIGURE 7.18 Représentations des séparations à l'extrados du profil pour différents Mach. (a) utilise les lignes  $U = 0$  pour délimiter la séparation et (b) utilise le frottement pariétale.

TABLE 7.1 Nombre de séparation pour différents Mach ainsi que les valeurs des abscisses de séparations ( $x_{si}$ ) et de réattachements ( $x_{ri}$ ).

M	nombre de séparations	$x_{s1}$	$x_{r1}$	$x_{s2}$
0.71	1	0.395	0.620	
0.72	1	0.403	0.656	
0.73	2	0.405	0.694	0.910
0.74	1	0.406	1	
0.745	1	0.406	1	
0.7475	1	0.406	1	
0.75	1	0.407	1	
0.76	1	0.409	1	
0.77	1	0.414	1	

le cas  $M = 0.74$  qui s'étend entre  $x/c = 0.41$  et le bord de fuite. Ces résultats sont résumées dans le tableau 7.1. On constate que l'abscisse de la séparation se produisant au pied de choc (noté  $x_{s1}$ ) augmente avec le Mach. Ceci est partiellement lié au déplacement du choc vers le bord de fuite quand le Mach augmente. On constate que la position du réattachement (noté  $x_{r1}$ ) suit un mouvement similaire mais plus amplifié. Enfin une seconde séparation se produit à  $x_{s2} = 0.91$  dans le cas  $M = 0.73$ .

## 7.4 Stabilité globale

Dans la section 7.3 nous avons décrit l'évolution du champ de base en fonction du nombre de Mach. Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique instationnaire de ces écoulements qui a été observée d'abord d'un point de vue expérimental (section 7.1) et d'un point de vue numérique à l'aide de calculs URANS (section 7.2). Nous avons vu dans le chapitre 2 que le buffet sur un profil turbulent est lié à un mode global instable. De plus Sartor et al. [107] ainsi que Crouch et al. [31] ont montré que ce mode global instable n'apparaît que si la variation de la viscosité turbulente dans l'analyse linéaire était prise en compte.

Dans cette partie la stabilité globale de l'écoulement va être étudiée en considérant les quatre approches possibles concernant la linéarisation viscosité turbulente ( $\mu$  laminaire,  $\mu_t$  figé,  $\gamma$  figé ou système complet). Nous allons dans un premier temps considérer le cas  $M = 0.73$  et sélectionner le type d'analyse pertinente. Puis nous ferons varier le Mach. Nous montrerons alors les modes instables et utiliserons les modes adjoints pour proposer des stratégies de contrôle.

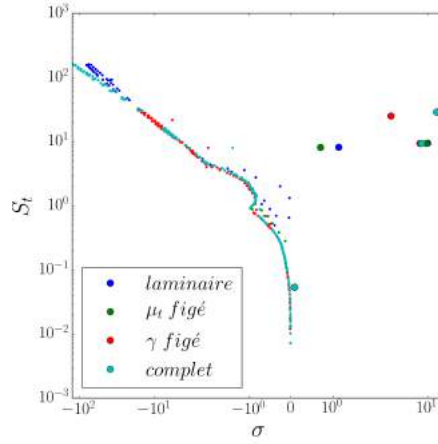


FIGURE 7.19 Spectre de stabilité globale du cas  $M = 0.73$  et à incidence  $4^\circ$  en utilisant les quatre niveaux de modélisation des tensions de Reynolds défini dans le chapitre 4. Les petits points sont les modes stables, les gros représentent les modes instables.

#### 7.4.1 Etude des différents niveaux de modélisation des tensions de Reynolds

Les résultats des analyses de stabilité globale en terme de taux d'amplification en fonction de la fréquence sont montrés dans la figure 7.19 dans le cas  $M = 0.73$ . Pour toutes les analyses on observe des modes instables à des fréquences de l'ordre de  $S_t = 9$  et de  $S_t = 29$ . Il apparaît aussi un mode instable à basse fréquence seulement dans le cas où le système complet est considéré. La fréquence de ce mode est  $S_t = 0.05$  ce qui est l'ordre de grandeur du buffet turbulent et du mode basse fréquence dans le cas laminaire. Enfin on ne trouve pas de modes instables quelque soit l'analyse pratiquée pour des fréquences de l'ordre de 1 correspondant à l'observation expérimentale. On constate cependant la présence de modes proches de l'instabilité vers  $S_t = 1$  dans le cas d'une analyse laminaire, c'est à dire quand on néglige les effets de la turbulence dans les équations de perturbations.

A contrario la dynamique à  $S_t = 0.05$  n'est visible que quand la viscosité turbulente est prise en compte ainsi que le changement de la position de la transition. Il faut se souvenir que dans le cas turbulent, une dynamique dans cette gamme de fréquence n'est trouvée que quand on prend en compte la variation de la viscosité turbulente. On interprète cette nécessité de modéliser la perturbation de la transition par la fonction  $\gamma$  par le fait que le mouvement du choc associé à cette dynamique basse fréquence induit de facto un déplacement de la transition.

Si on compare les dynamiques trouvées par l'analyse de stabilité globale et ceux des transformées de Fourier du calcul URANS, on constate que les deux analyses font ressortir une basse fréquence :  $S_t = 0.05$  pour la stabilité, et de l'ordre de  $S_t = 0.07$  pour le URANS.

TABLE 7.2 Résumé des fréquences trouvées par l'analyse de stabilité globale pour les différents types d'analyses.

$S_t$	laminaire	$\mu_t$ figé	$\gamma$ figé	complet	URANS
0.05	non	non	non	oui	oui à $S_t = 0.08$
1	non (proche de l'instabilité)	non	non	non	faiblement ( $S_t = 0.7$ ou $S_t = 1.3$ )
9-11	oui	oui	oui	oui	oui à $S_t = 15$
29	oui	oui	oui	oui	pas visible

De même, des hautes fréquences sont trouvées par ces deux analyses (11 pour la stabilité et 15 pour le URANS). La dynamique à  $S_t = 29$  n'est pas observable dans le cas du URANS les champs n'ayant pas été extraits assez régulièrement dans la simulation réalisée. Enfin, les deux calculs semblent faire ressortir, bien que faiblement, des fréquences proches de 1.

Ces résultats, résumés dans le tableau 7.2, nous incitent à privilégier deux types d'analyses différentes. Nous allons donc étudier la variation en fonction du Mach du spectre de stabilité globale pour l'analyse laminaire (pour le mode proche de  $S_t = 1$ ) et l'analyse du système complet (pour le mode basse fréquence).

#### 7.4.2 Etude des spectres en fonction du Mach

##### Laminaire

Les différents spectres obtenus pour différents Mach sont tracés sur la figure 7.20(a). On remarque la présence, pour tous les nombres de Mach, de fréquences proches de  $S_t = 29$ . Le taux d'amplification augmente avec le Mach alors que la fréquence diminue légèrement. De même, pour tous les nombres de Mach il y a trois modes instables situés entre  $S_t = 8$  et  $S_t = 11$ . Pour ces derniers, le taux de croissance et la fréquence augmentent avec le Mach.

Pour les basses fréquences, on observe que l'écoulement devient instable à  $M = 0.76$  avec un fort taux d'amplification alors qu'il est stable pour  $M = 0.75$ . Il reste instable pour  $M = 0.77$  et la fréquence augmente passant de  $S_t = 0.15$  pour  $M = 0.76$  à  $S_t = 0.22$  pour  $M = 0.77$ .

Enfin pour les moyennes fréquences, un zoom de la figure précédente est proposée dans la figure 7.20(b). L'écoulement présente deux fréquences instables et proches de  $S_t = 1$ . La première qui est de l'ordre de 0.8, devient instable à  $M = 0.74$ , redevient stable à  $M = 0.7475$  puis redevient instable à  $M = 0.75$ . On voit le taux de croissance initialement négatif qui augmente entre  $M = 0.72$  et  $M = 0.74$  puis qui diminue à  $M = 0.745$  pour devenir négatif à  $M = 0.7475$ . Il remonte ensuite et devient positif. La fréquence augmente tout au long de ce processus partant de  $S_t = 0.59$  à  $M = 0.72$  pour aller à  $S_t = 0.84$  à  $M = 0.77$ . La seconde fréquence instable se situe vers  $S_t = 1.3$ . Elle est instable de  $M = 0.74$  jusqu'à  $M = 0.77$ . Le taux de croissance augmente entre  $M = 0.72$  et  $M = 0.76$  et diminue entre  $M = 0.76$  et

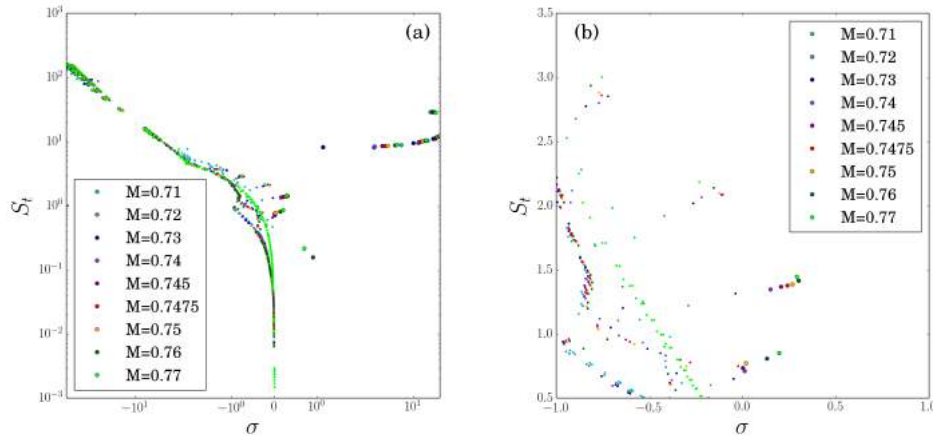


FIGURE 7.20 Spectre de stabilité globale pour différents Mach et incidence  $4^\circ$  en utilisant la modélisation laminaire. Les petits points sont les modes stables, les gros représentent les modes instables. (a) est le spectre complet alors que (b) est un zoom dans la région des fréquences proches de 1.

$M = 0.77$ . La fréquence augmente, passant de  $S_t = 1.2$  à  $1.43$ . Ces fréquences (de l'ordre de  $0.7$  et  $f = 1.3$ ) ont aussi été observées dans les simulations URANS et ce même pour  $M = 0.72$  où ces fréquences sont stables.

On remarque aussi des modes moins stables que les autres vers  $S_t = 2$  et  $S_t = 2.8$ .

### Système complet

Les spectres obtenus pour le système complet sont montrés dans la figure 7.21(a). Comme dans le cas de la modélisation laminaire, on observe des hautes fréquences vers  $S_t = 29$  et  $S_t = 11$ . L'évolution des fréquences et des taux d'amplifications est identique au cas précédent. En revanche il n'y a pas de modes instables pour des fréquences proches de 1 et ce pour tous les Mach testés. On observe quelques modes moins stables vers  $S_t = 0.8$ . En revanche le zoom sur les basses fréquences, en figure 7.21(b), montre que le mode basse fréquence  $S_t \sim 0.05$  devient instable dès  $M = 0.73$ ,  $M = 0.72$  étant marginalement stable. Le mode redevient stable entre  $M = 0.76$  et  $M = 0.77$ .

Contrairement au cas turbulent et à l'expérience, la fréquence des instabilités n'est pas monotone en fonction du Mach. En effet la fréquence instable est de  $S_t = 0.05$  pour  $M = 0.73$  et augmente à  $S_t = 0.07$  pour  $M = 0.74$  puis diminue à  $S_t = 0.056$  pour  $M = 0.745$ , la fréquence augmente ensuite jusqu'à la fin de la zone instable. On peut expliquer ce changement de comportement de la fréquence en remarquant que, comme montré sur la figure 7.18, pour  $M = 0.73$  il y a deux séparations à l'extrados du profil alors qu'il y a une unique séparation allant du pied de choc au bord de fuite pour  $M \geq 0.74$ . Si on rapproche les figures 7.18 et



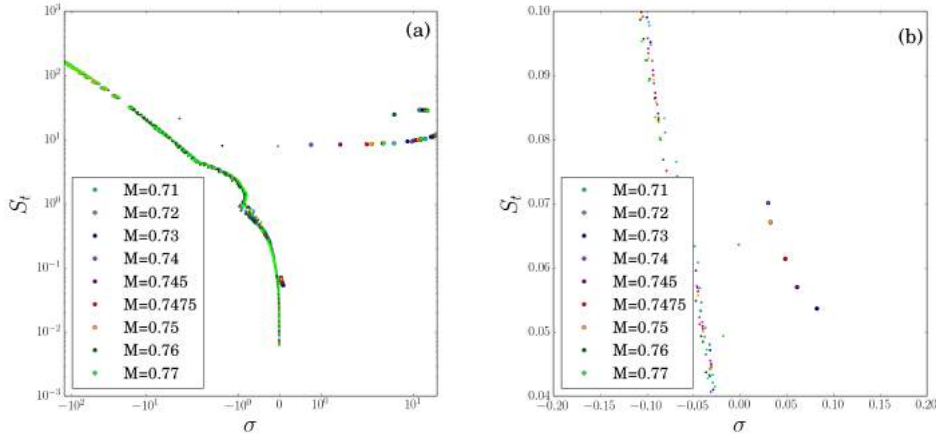


FIGURE 7.21 Spectre de stabilité globale pour différents Mach et incidence  $4^\circ$  en utilisant la modélisation complète. Les petits points sont les modes stables, les gros les modes instables. (a) est le spectre complet alors que (b) est un zoom dans la région des fréquences proches de 0.07.

7.21(b) on constate que  $M = 0.72$  est marginalement stable et que le coefficient de friction est presque nul au niveau du bord de fuite. Ceci laisse penser que si l'on augmente légèrement le Mach la séparation au bord de fuite va apparaître, ce qui semble déclencher l'instabilité basse fréquence de l'écoulement. On peut donc conjecturer un lien entre la stabilité de la basse fréquence et la topologie des recirculations à l'extrados.

Si on compare ces résultats avec ceux obtenus par le URANS, on constate que la stabilité globale du système complet prédit approximativement les pics donnés par les transformées de Fourier. Les fréquences prédites par le URANS sont légèrement différentes, par exemple à  $M=0.75$ , le URANS exhibe  $S_t = 0.088$  et la stabilité  $S_t = 0.066$ . Ces différences peuvent s'expliquer par le fait que la stabilité globale est une analyse linéaire, les termes non linéaires pouvant modifier légèrement la fréquence observée. Une autre explication peut-être liée à l'utilisation du champ de base et non du champ moyen, ce qui rajouterait l'effet des tensions de Reynolds de l'onde organisée dans l'analyse (voir chapitre 4).

Enfin, si les fréquences de l'ordre de 1 ne sont pas instables, le spectre montre des modes moins stables que les autres dans cette gamme de fréquence. On peut donc se demander si l'écoulement a un comportement d'amplificateur de bruit marqué à cette fréquence. Ceci serait cohérent avec les signaux observés localement par le URANS vers  $S_t = 1$ . Ce comportement peut être analysé à l'aide d'une étude de résolvant.

### 7.4.3 Etude du résolvant

#### Modélisation laminaire

Le spectre du gain optimal (ici pré-multiplié) obtenu dans le cas de la modélisation laminaire est tracé pour différents nombres de Mach dans la figure 7.22(a). On remarque qu'il n'y a pas de dynamique amplifiée à basse fréquence. Ceci est cohérent avec l'absence de modes instables. On observe un début d'amplification vers  $S_t = 0.2$  plus marqué pour  $M = 0.76$  et  $M = 0.77$  ce qui est cohérent avec les modes instables observés pour ces deux nombres de Mach. Dans les hautes fréquences on remarque des dynamiques fortement amplifiées entre  $S_t = 4$  et  $S_t = 10$  qui peuvent se rapprocher des modes instables trouvés vers  $S_t = 8$  et  $S_t = 11$ . On a aussi un pic à  $S_t = 22$  ce qui cohérent avec le mode haute fréquence à  $S_t = 29$ . Ces écarts de fréquences entre l'analyse de résolvant et la stabilité globale peuvent être associés à des croisements des deux valeurs singulières les plus fortes visibles dans la figure 7.23 qui montre le spectre du gain optimal et son sous-optimal. En effet, il apparaît que le croisements des deux courbes soient  $S_t = 11$  et  $S_t = 29$ , sont les fréquences des modes instables à haute fréquence. Les raisons pour laquelle ces croisements sont associées à des instabilités globales ne sont pas encore comprises.

La zone  $S_t \sim 1$  présente enfin de nombreux pics. Un zoom de cette partie du spectre est montré dans la figure 7.22(b). On observe des pics dans la région  $S_t \in [0.36, 0.87]$  pour chacun des nombres de Mach. Comme pour les modes instables, la fréquence de ces pics augmente avec le Mach. Le pic le plus marqué apparaît à  $M = 0.75$ , avec une fréquence de  $S_t = 0.77$ , ce qui est la fréquence du mode instable.

Les spectres présentent aussi des pics vers  $S_t = 1.3$  pour  $M \geq 0.72$ . La fréquence caractéristique augmente avec le Mach. La fréquence du pic à  $M = 0.75$  est de  $S_t = 1.38$  ce qui est la fréquence trouvée pour le mode instable correspondant.

Enfin on observe des pics vers  $S_t = 2$  à partir de  $M = 0.72$  jusqu'à  $M = 0.77$  qui correspondent aux modes les moins stables dans cette gamme de fréquences.

La figure 7.23 nous montre aussi, que pour les modes à  $S_t \sim 0.7$  et  $S_t \sim 1.3$ , le gain optimal est d'un ordre de grandeur supérieur à son sous-optimal. La comparaison entre la transformée de Fourier et la réponse optimale proposée par Beneddine et al. [13] est donc justifiée.

#### Modélisation complète

Les spectres obtenus par analyse de résolvant sont montrés sur la figure 7.24 pour différents nombres de Mach. On observe la présence de pics dans les hautes fréquences :  $S_t = 3$ ,  $S_t = 7$  et  $S_t = 10$ .

Des pics à basse fréquence sont présents pour tous les nombres de Mach vers  $S_t \sim 0.04-0.07$  ce qui est cohérent avec l'expérience, le URANS, ainsi qu'avec l'analyse de stabilité globale.

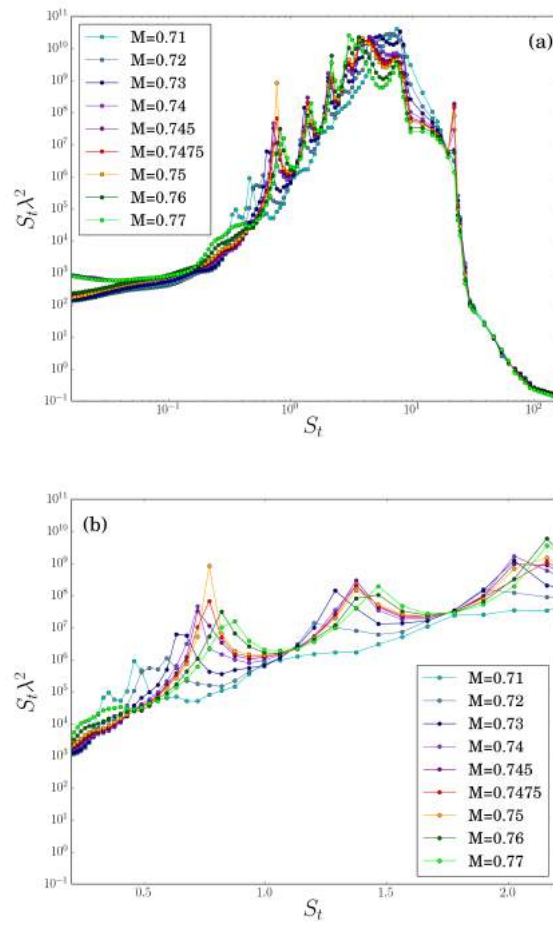


FIGURE 7.22 Spectre de l'analyse de résolvant pour différents Mach et incidence  $4^\circ$  en utilisant la modélisation laminaire. (a) est le spectre complet alors que (b) est un zoom dans la région des fréquences proches de 1.

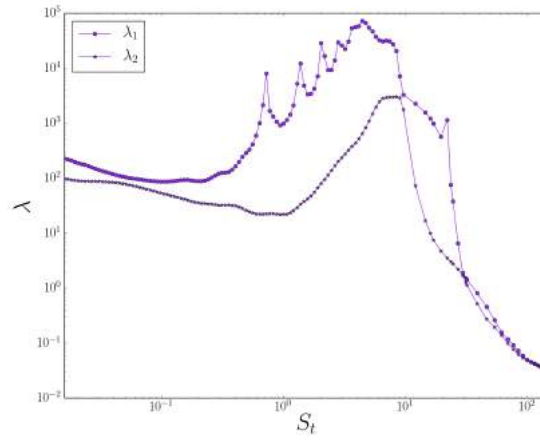


FIGURE 7.23 Spectre de l'analyse de résolvant pour  $M = 0.74$  et incidence  $4^\circ$  en utilisant la modélisation laminaire, pour les deux valeurs singulières les plus grandes.

Un zoom du spectre dans cette gamme de fréquence est présenté dans la figure 7.24(b). La fréquence, comme dans le cadre de la stabilité globale, n'est pas une fonction monotone du Mach. Les valeurs des fréquences sont identiques à celles obtenues par la stabilité globale quand les modes sont instables.

Il n'y a pas, comme c'était le cas avec l'analyse de stabilité globale, de pic vers  $S_t \sim 1$ . L'analyse du système complet semble donc incapable de prédire cette dynamique.

Comme dans le cas de l'analyse laminaire, il n'y a pas de pic à  $S_t = 9$  ou  $S_t = 29$ . En regardant le mode optimal et le sous optimal pour le cas  $M = 0.74$  (figure 7.25), on arrive à la même conclusion que précédemment, les fréquences instables correspondent à des croisements de branches de l'analyse de résolvant.

#### 7.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux ainsi que les divers études numériques présentés ci-dessus mettent en exergues différentes fréquences celles-ci sont résumées dans le tableau 7.3.

Nous constatons que les analyses numériques prenant en compte les tensions de Reynolds turbulentes (URANS, et système complet pour les analyses de stabilité et de résolvant) prédisent un mode basse fréquence vers  $S_t \sim 0.07$ . Cette fréquence est proche de celle observée expérimentalement à  $S_t = 0.05$  qui a été associée au mouvement droite/gauche du choc à l'extrados du profil. Cette dynamique ne semble pas être modélisée par les approches  $\mu$ -laminaire qui négligent cette tension de Reynolds.

A l'inverse, la dynamique vers  $S_t \sim 1$  observée expérimentalement n'est pas reproduite par les analyses de stabilité globale et de résolvant si les tensions de Reynolds sont prises en compte dans les équations des perturbations. Elle est cependant visible (bien que faible) dans

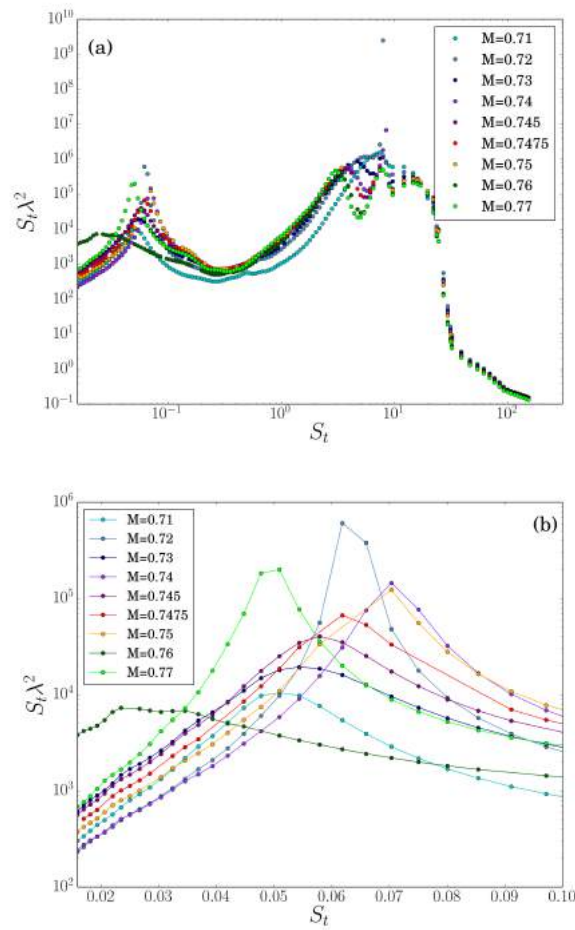


FIGURE 7.24 Spectre de l'analyse de résolvant pour différents Mach et incidence  $4^\circ$  en utilisant la modélisation complète. (a) est le spectre complet alors que (b) est un zoom dans la région des fréquences proches de 0.06.

TABLE 7.3 Résumé des fréquences trouvées par l'expérience, le URANS, et les analyses de stabilité globale et de résolvant pour les deux modélisations de tension de Reynolds sélectionnées ( $\mu$  laminaire et système complet).

Analyse	$S_t \sim 0.05$	$S_t \sim 1$	$S_t \sim 2$	$S_t > 8$
Expérience	0.05	1	1.8	non-mesurés
URANS	0.08	0.7 et 1.3	non	15
Stabilité $\mu$ laminaire	non	0.7 et 1.3	stable	11 et 29
Stabilité système complet	0.07	non	non	11 et 29
Résolvant $\mu$ laminaire	non	0.7 et 1.3	2	10 et 22
Résolvant système complet	0.07	non	non	10 et 22

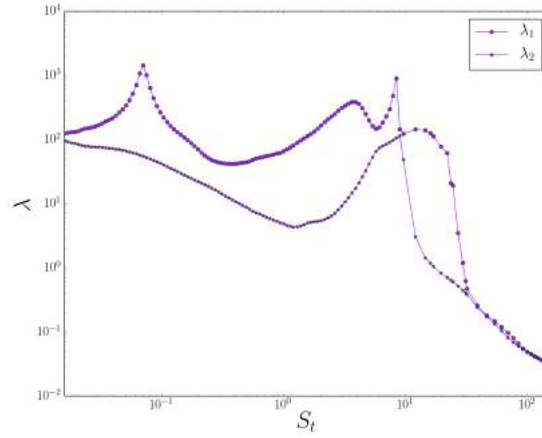


FIGURE 7.25 Spectre de l'analyse de résolvant pour  $M = 0.74$  et à  $4^\circ$  d'incidence en utilisant la modélisation complète, pour les deux valeurs singulières les plus grandes.

le calcul URANS. Là encore les fréquences prédites par les différentes approches numériques sont identiques. D'un point de vue expérimental, nous avons aussi deux fréquences proches de  $S_t = 1$  (voir figure 7.9(b)).

Il est à noter que les spectres expérimentaux présentent des signaux vers  $S_t = 2$  et que dans le cas turbulent, Sartor et al. [107] montre l'existence d'une dynamique donnée par l'analyse de résolvant mais globalement stable. Cette dynamique est retrouvée par l'analyse de résolvant dans le cas  $\mu$  laminaire seulement.

## 7.5 Etude des modes instables

Nous étudierons ici particulièrement le cas à  $M = 0.74$  puisqu'à ce nombre de Mach nous avons à la fois les basses fréquences et les moyennes fréquences. De plus ce nombre de Mach est très proche du Mach expérimental de Brion et al [20]. Ceci nous permet de comparer les résultats numériques aux transformées de Fourier issues des résultats expérimentaux. D'un point de vue théorique, cette comparaison a été justifiée pour la comparaison des réponses optimales issues de l'analyse de résolvant par Beneddine et al. [13]. La condition nécessaire pour faire cette comparaison est que le gain optimal et son sous optimal soient séparés d'au moins un ordre de grandeur. Les figures 7.23 et 7.25 montrent ces deux gains respectivement dans le cas de l'analyse  $\mu$  laminaire et du système complet. On constate que cette hypothèse est vérifiée pour les fréquences  $S_t \sim 0.05$  (dans le cas du système complet) et  $S_t \sim 1$  (dans le cas de l'approche  $\mu$  laminaire). De plus, le développement présenté dans l'annexe C montre que les modes marginalement stables sont proportionnels aux réponses optimales et les modes adjoints aux forçages optimaux. On en déduit que les modes instables, s'il sont les plus

TABLE 7.4 Tableau des modes tracés avec le Mach et l'analyse correspondante

M	analyse	$S_t$	indices
0.74	turbulent	0.067	a
0.76	laminaire	0.15	b
0.74	laminaire	0.7	c
0.74	laminaire	1.36	d
0.74	turbulent	11.4	e
0.74	turbulent	28.8	f

proches de la marginalité, ce qui est le cas pour les modes vers  $S_t \sim 0.05$  et  $S_t \sim 0.7 - 1.36$ , sont comparables aux transformées de Fourier issues des résultats expérimentaux. On en déduit aussi qu'il n'est pas nécessaire d'étudier les forçages optimaux ainsi que leur réponse, l'étude des modes suffit. Les forçages et les réponses optimaux sont tracés dans l'annexe D et sont en effet très proches des modes instables.

Enfin, nous regarderons aussi le mode à  $S_t = 0.2$  du cas  $M = 0.76$  pour comprendre son origine. Le tableau 7.4 résume les modes qui seront étudiés et le type d'analyse pour lesquels ils sont obtenus.

### 7.5.1 Modes directs

Nous analyserons ici les modes obtenus par la stabilité globale pour chacun des modes du tableau 7.4. La partie réelle de leur composante en densité est présentée sur la figure 7.26. Les modes hautes fréquences (ie  $S_t = 28.8$  (f) et  $S_t = 11.4$  (e)) sont localisés au niveau des séparations de l'écoulement.  $S_t = 11.4$  agit sur celle de l'intrados et  $S_t = 28.8$  agit sur celle de l'extrados. Les autres modes agissent sur le choc, la couche de cisaillement au dessus des séparations à l'extrados ainsi que le sillage (figure 7.26 (a,b,c,d)).

#### Mode à $S_t = 0.067$

**Description** Un zoom du mode à  $S_t = 0.067$  est tracé sur la figure 7.27(a). Il s'agit de la partie réelle de la composante selon la densité de ce mode. Il est obtenue avec l'analyse complète.

On voit qu'il concerne le pied du choc ainsi que le choc en lui même. Il concerne aussi la séparation au niveau de la couche de cisaillement. L'alternance de valeurs négatives et positives montre que ce mode représente une oscillation du choc entre la gauche et la droite. On constate une forte ressemblance de ce mode avec celui obtenu dans le cas turbulent par Sartor [105]. On observe cependant une structure en plus associée à la compression qui se produit au niveau de la séparation de l'écoulement en amont du choc.

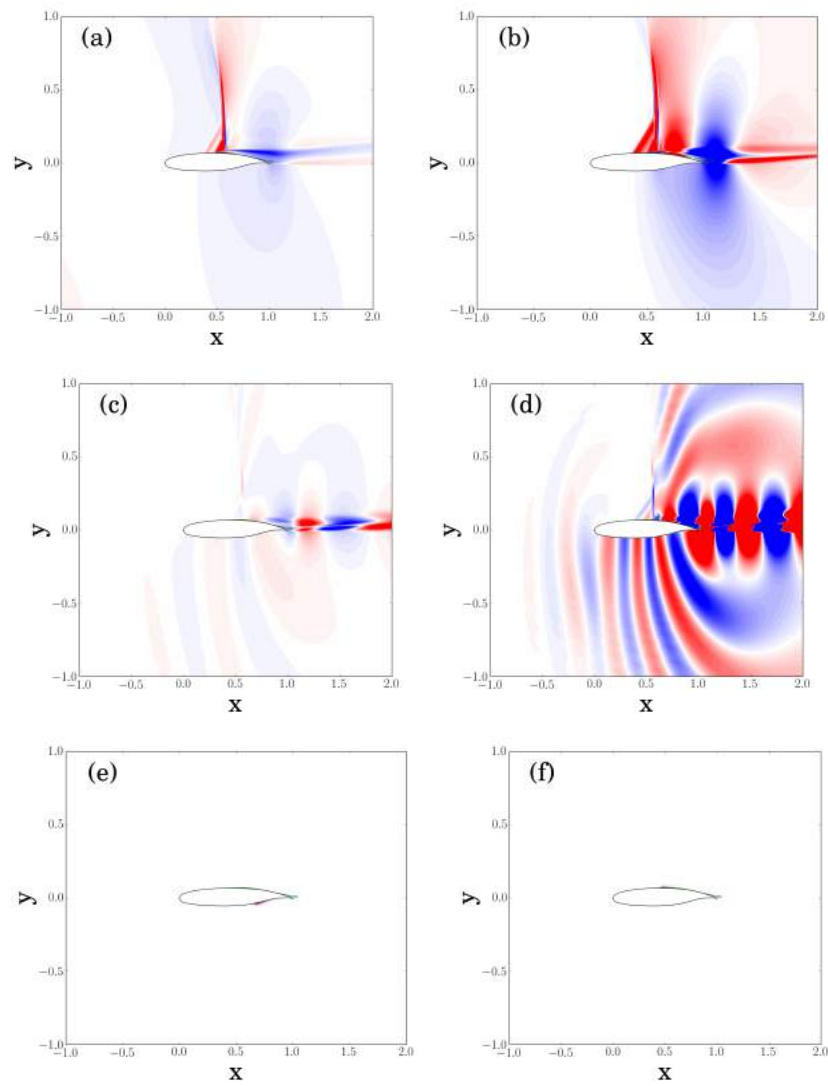


FIGURE 7.26 Composante en densité de la partie réelle des modes de stabilité globale correspondant au tableau 7.4.



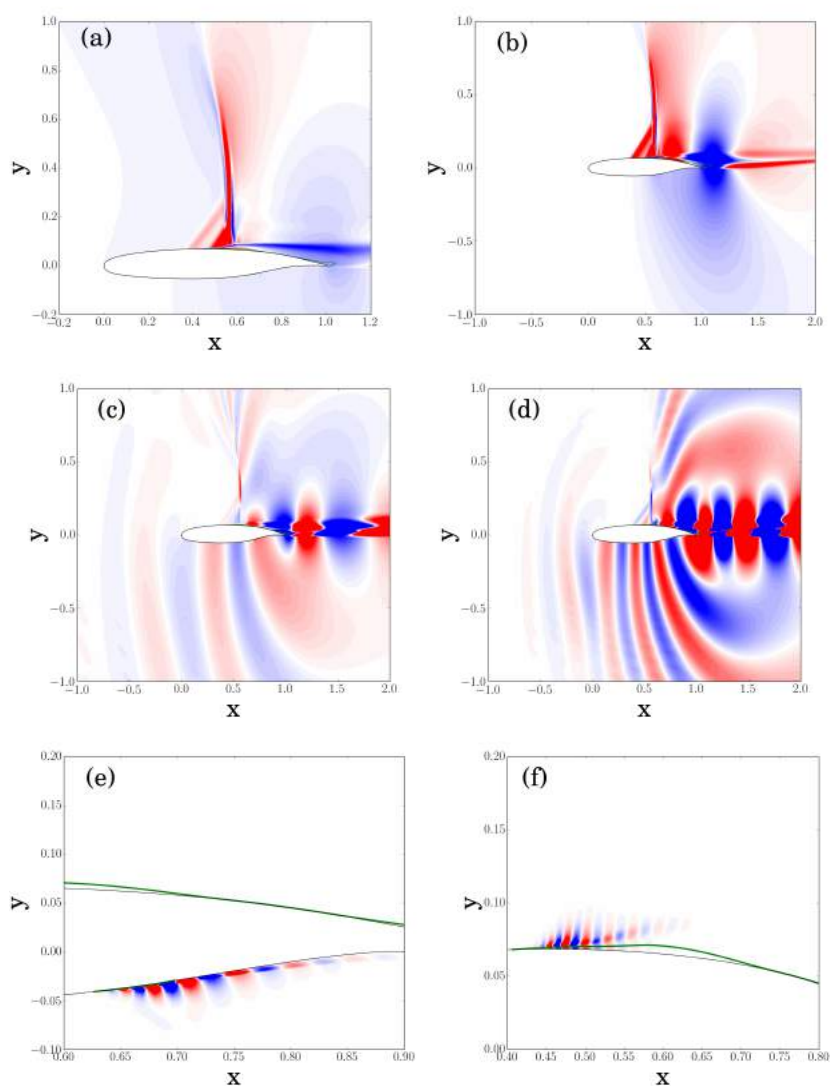


FIGURE 7.27 Zoom des composantes en densité de la partie réelle des modes de stabilité globale correspondant au tableau 7.4.

La comparaison de ce mode avec la transformée de Fourier expérimentale dans la figure 7.10(b) est satisfaisante, ce qui semble indiquer que le calcul de stabilité globale permet de retrouver ce mode.

**Analyse du mode** La phase du mode est tracée sur la figure 7.28. On observe que la phase augmente le long du profil à l'intrados indiquant une vitesse de phase négative puisque  $V_\phi = -\omega / \frac{\partial \phi}{\partial x}$ . Cette vitesse a été évaluée à  $V_\phi = -0.25U_\infty$ . Dans le cas du buffet turbulent, Garnier et al. [45] ont montré numériquement l'existence d'une onde probablement d'origine acoustique qui remonte l'écoulement à l'intrados du profil. La vitesse de cette onde était estimée à  $V_\phi = -0.31U_\infty$ . Le même article, en utilisant les résultats de l'expérience de Jacquin et al. [62], montre qu'expérimentalement cette onde existe aussi. Sa vitesse de phase est de  $V_\phi = -0.27U_\infty$ .

On observe aussi une onde se propageant du voisinage de la séparation jusqu'au bord de fuite. La phase diminue indiquant une vitesse de phase positive. Sa valeur est de  $V_\phi = 0.069U_\infty = 17m/s$  ce qui est très proche de la vitesse de phase observée numériquement par Garnier [45] et expérimentalement par Jacquin et al. [62] pour le buffet turbulent ( $V_\phi = 0.072U_\infty$ ). Elle est aussi très proche de la vitesse observée expérimentalement par Brion et al. [20] (voir figure 7.8(a)) dans le cas turbulent ( $16.7m/s$ ).

Il apparaît aussi une onde issue du pied de choc qui le remonte le long de son développement vertical. Sa vitesse de phase est de  $V_\phi = 0.062U_\infty$ . Une telle onde a aussi été observée dans le cas du buffet turbulent par Crouch et al. [30].

Il est à noter que rien ne se propage dans la zone supersonique à l'exception du voisinage du bord d'attaque où l'on remarque la présence d'une onde qui contourne le bord d'attaque pour rejoindre l'onde à l'intrados. Sa vitesse a été évaluée à  $V_\phi = 0.12U_\infty$ . L'onde part de  $x/c \sim 0.1$  à l'extrados et s'arrête de l'autre côté du profil vers  $x/c \sim 0.05$  à l'intrados.

Dans le cas du buffet turbulent Jacquin et al. [62] propose un scénario du buffet basé sur différents temps de propagation. Ce modèle est détaillé dans le chapitre 2. Il utilise notamment la propagation d'une onde acoustique se propageant du bord de fuite du profil jusqu'au choc par l'extrados en un temps  $\tau_{u,u}$ . Cette onde ne semble pas présente dans ce mode. Les deux autres propagations utilisées dans ce modèle sont présentes dans le monde instable du buffet transitionnel. Il s'agit de l'onde issue du bord de fuite et remontant le profil par l'intrados en un temps  $\tau_{u,l}$  et de celle issue de la séparation descendant le profil jusqu'au bord de fuite en un temps  $\tau_c$ . Le temps caractéristique du buffet est donc estimé à  $\tau = \tau_{u,l} + \tau_{u,u} + \tau_c$ . Comme ici l'onde associée au temps  $\tau_{u,u}$  n'est pas mise en évidence par l'analyse de stabilité, nous supposons ce temps nul. Nous tenterons donc de modéliser le buffet de l'aile laminaire seulement par  $\tau = \tau_{u,l} + \tau_c$ . Les vitesses de phase mesurées précédemment donnent  $\tau_c = 8.7$  et  $\tau_{u,l} = 4$ . On a donc  $\tau = 12.7$ , soit une fréquence  $S_t = 0.08$ . Ceci est la fréquence du mouvement droite/gauche du choc observée dans le URANS. Elle est supérieure de 16% à la fréquence du mode.

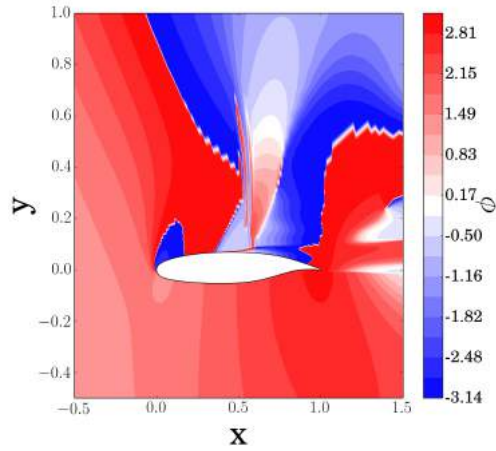


FIGURE 7.28 Phase de la composante selon  $\rho$  du mode instable à  $S_t = 0.067$ .

Le modèle de Jacquin néglige toute propagation dans la zone supersonique. Ici, il a été observée une onde qui voyage au bord d'attaque du profil. On peut intégrer ce nouveau temps  $\tau_{ba}$  dans le modèle. Evaluer la distance parcourue par cette onde est difficile compte tenu de la courbure du profil. On peut avoir une estimation haute en donnant l'épaisseur du profil qui est de 0.07 ans cette région. Cette distance est comprise entre 0.15 et 0.22, soit un temps de parcours  $\tau_{ba}$  compris entre 1.25 et 1.8. On a donc  $13.7 < T < 14.2$ , soit une fréquence  $0.07 < S_t < 0.072$  ce qui est une bonne approximation de la fréquence du mode, à 6% près.

Il semble donc que le scénario de cette fréquence soit très proche de celui proposé dans le cas turbulent par Jacquin et al. [62]. Il s'en rapproche encore plus si on considère la propagation de l'information au niveau du bord d'attaque.

#### Mode à $S_t = 0.15$

**Description** Le mode pour  $M = 0.76$  et  $S_t = 0.15$  est tracé sur la figure 7.27(b). Il n'apparaît que pour des Mach élevés et pour l'analyse laminaire. Ce mode se situe au niveau du choc, de la compression à la séparation laminaire et dans le sillage. Une différence avec le mode précédent est le nombre de structures à l'extrados après le choc. Dans le mode à  $S_t = 0.067$  on observe une unique grande structure alors qu'ici on observe deux structures, une négative et l'autre positive. Enfin, on observe un lien entre les structures de la couche de cisaillement et le choc (en haut de celui-ci).

**Analyse** Si l'on regarde la phase sur la figure 7.29, on retrouve aussi une onde émise au niveau du bord de fuite qui remonte l'écoulement à une vitesse de phase de  $V_\phi = -0.27U_\infty$ . On a aussi des ondes à l'extrados. Une qui suit l'écoulement à partir de  $x/c = 0.63$ , et une autre qui le remonte jusqu'à la séparation ( $x/c = 0.41$ ). Les vitesses de phase sont respectivement

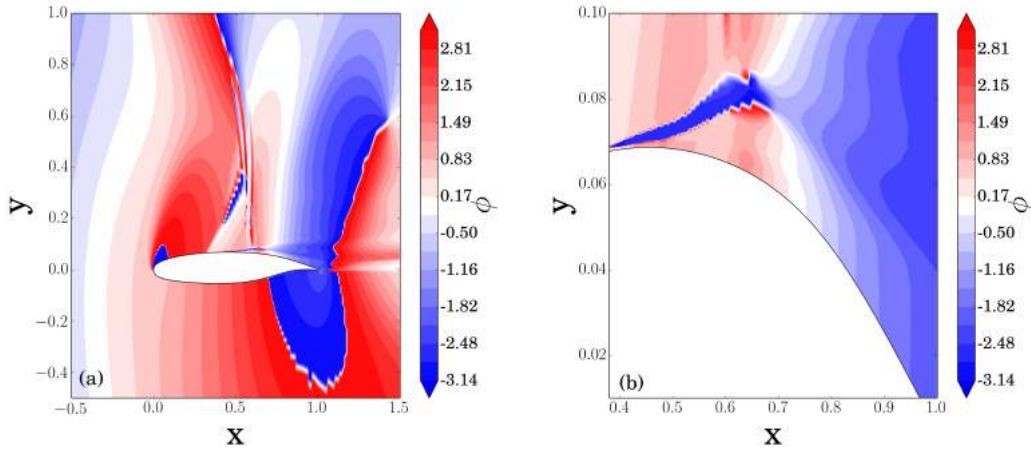


FIGURE 7.29 Phase de la composante selon  $\rho$  du mode instable à  $S_t = 0.15$ . (a) montre le voisinage de l'aile, (b) est un zoom à l'extrados entre  $x = 0.4$  et  $x = 1$ .

de  $V_\phi = 0.085U_\infty$  et  $V_\phi = -0.24U_\infty$ . La propagation au niveau du bord d'attaque semble très rapide, la phase ne change pas sur un large domaine. On peut donc négliger le temps de transport de l'onde du bord d'attaque jusqu'à la séparation.

On a tenté de modéliser ce mode par une onde se propageant de  $x/c = 0.63$  à l'extrados jusqu'au bord de fuite (en un temps  $\tau_c$ ) puis par la remontée de l'onde acoustique à l'intrados (en un temps  $\tau_{u,l}$ ). On néglige le temps de trajet de l'information du bord d'attaque jusqu'à la séparation  $x/c = 0.41$ . Le couplage se fait par la rencontre de cette onde avec celle issue de  $x/c = 0.63$  et remontant jusqu'à la séparation laminaire  $x/c = 0.41$  (en un temps  $\tau_a$ ). Le temps caractéristique de ce processus est donc  $T = \tau_{u,l} + \tau_c = n\tau_a = 8.1$  soit une fréquence de  $S_t = 0.12$ . Cette fréquence est 20% plus faible que celle du mode mais est du bon ordre de grandeur. Comme  $\tau_a = 0.9$ ,  $n = 9$ .

Une autre tentative d'explication peut être faite avec la dynamique de la séparation à l'extrados. Si on adimensionne non plus par la corde mais par la taille de la bulle, on trouve un nouveau Strouhal de  $0.15 \times 0.59 = 0.09$  ce qui est la basse fréquence trouvée dans le cas de la réflexion de choc (chapitre 5). Ce mode est stable pour la réflexion de choc. Cependant les bulles de recirculation peuvent devenir instables pour des ratios de vitesse inverse sur vitesse à l'extérieur important (15 – 20% en incompressible). Ici ce ratio est de l'ordre de 16% suggérant que la bulle serait instable. Pour le cas  $M = 0.75$  ce ratio est de 14.6%. Il passe donc au dessus de 15% entre  $M = 0.75$  et  $M = 0.76$ , ce qui peut expliquer la transition du mode stable à un mode instable.

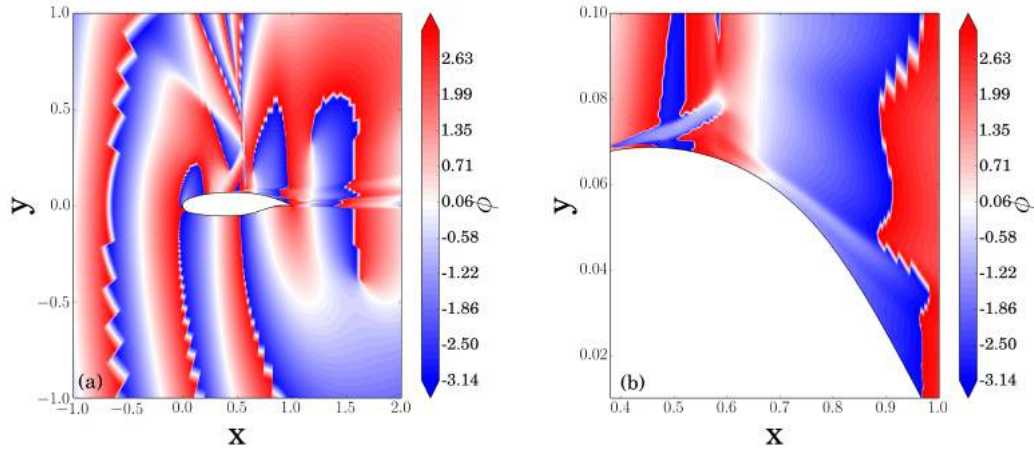


FIGURE 7.30 Phase de la composante selon  $\rho$  du mode instable à  $S_t = 0.7$ . (a) montre le voisinage de l'aile, (b) est un zoom à l'extrados entre  $x = 0.4$  et  $x = 1$

### Modes à $S_t = 0.7$

**Description** Le mode à  $S_t = 0.7$ , tracé dans la figure 7.26(c), est obtenu seulement quand la modélisation est laminaire. Il est localisé au niveau du choc et dans le sillage.

En saturant les niveaux (figure 7.27(c)), on observe aussi une onde voyageant à l'intrados ainsi que des ondes qui partent du sillage pour interagir avec le choc. On observe aussi un mouvement de la compression au niveau de la séparation laminaire. L'amplitude de ces structures est d'un ordre de grandeur plus faible que celle du sillage.

L'alternance de valeurs positives et négatives le long du choc laisse à penser qu'il y a une propagation d'onde le long de celui-ci. Ceci est en accord avec les observations faites sur la transformée de Fourier expérimentale à  $S_t = 1$  montrée dans la figure 7.10(c).

**Analyse** La phase de ce mode est tracée dans la figure 7.30. Une onde remontant l'intrados est encore visible ici. Sa vitesse de phase est  $V_\phi = -0.36U_\infty$ , ce qui est très proche de la vitesse d'une onde acoustique remontant un écoulement à  $M = 0.74$  (ie  $a_\infty - U_\infty = U_\infty(1 - M)/M = 0.35U_\infty$ ) On peut alors se demander si ce mode peut être d'origine acoustique comme le mode basse fréquence. Si cette onde rentre en compte dans un scénario tel que celui de Jacquin et al. [62], elle implique un temps caractéristique du mode au minimum de  $\tau_{u,l} = 1/0.35$ , soit une fréquence maximale de  $S_t = 0.35$ , ce qui est la moitié de celle du mode. Il semble donc peu probable que cette onde acoustique apparaisse dans le scénario de ce mode.

A l'extrados, on observe une onde allant du pied de choc jusqu'au bord de fuite. Sa vitesse de phase varie le long du profil. Elle est de  $V_\phi = 0.15U_\infty = 36m/s$  avant  $x/c = 0.79$  et de  $V_\phi = 0.44U_\infty = 106m/s$  après ce point. On observe aussi une onde qui remonte l'écoulement entre le pied de choc et la séparation laminaire à une vitesse de phase de

$V_\phi = -0.17U_\infty = -41m/s$ . Les vitesses extraites des mesures de pression expérimentales montrent la présence d'une onde remontant l'écoulement entre voisinage du pied de choc et la séparation laminaire de l'écoulement à une vitesse de  $-41.3m/s$ . Elles montrent aussi l'existence d'une onde issue du voisinage du pied de choc et allant jusqu'au bord de fuite avec une vitesse de phase qui augmente vers  $x/c = 0.75$ . Elle est de  $63.1m/s$  avant ce point et de  $173m/s$  au delà. L'analyse du mode présente donc un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux.

On peut se demander pourquoi la vitesse de phase est modifiée à  $x/c = 0.79$ . Si l'on regarde le coefficient de friction à la paroi (voir figure 7.18), on remarque que ce point correspond à un maximum local de friction et qu'en ce point la friction est presque nulle. On peut donc supposer qu'il s'agit du point de réattachement d'une bulle de recirculation allant de  $x/c = 0.41$  à  $x/c = 0.79$ , et le point de séparation de la bulle de recirculation au bord de fuite. La première séparation est donc de longueur  $L_1/c = 0.38$  et la seconde est de  $L_2/c = 0.21$ .

On peut se demander si ce mode ne serait pas lié à une dynamique de bulle. Pour cela on peut regarder le déphasage entre  $x/c = 0.41$  et  $x/c = 0.79$  et entre  $x/c = 0.79$  et  $x/c = 1$ . On mesure un déphasage de  $172^\circ$  pour le premier et de  $115^\circ$  pour le second. On a donc une opposition de phase entre la séparation et le réattachement de la première bulle alors que la seconde bulle ne présente pas de particularité en terme de déphasage. L'opposition de phase entre la séparation et le réattachement de la première bulle nous fait penser à un dynamique de respiration de la bulle comme trouvé dans le chapitre 6. Afin d'aller plus loin dans la défense de cette hypothèse, nous avons calculé le Strouhal de ce mode par rapport à la longueur de bulle  $L_1$  :  $S_{t,L} = 0.27$ , ce qui est proche du Strouhal correspondant à la respiration de la bulle dans le cas de la réflexion de choc,  $S_t = 0.3$ . Il est donc possible que la dynamique à  $S_t = 0.7$  soit une dynamique de respiration de la bulle au pied de choc.

Afin de conforter cette hypothèse, nous pouvons appliquer le modèle de prédiction de la fréquence de respiration de bulle proposé par Piponnier et al. [95] et rappelé dans le chapitre 2. La longueur de bulle est de 0.38, sa hauteur est d'environ 0.014. Les densités au dessus et à l'intérieur de la première bulle sont respectivement de 0.62 et 0.65. Les vitesses sont quant à elles respectivement de 1.6 et  $-0.16$  et les Mach correspondants sont de 1.3 et 0.11. En appliquant la formule (2.1) on trouve alors un Strouhal de  $S_{t,L} = 0.28$  ce qui est raisonnablement proche de la fréquence adimensionnée par la taille de bulle pour ce mode ( $S_{t,L} = 0.27$ ).

### Modes à $S_t = 1.36$

**Description** Le mode à fréquence  $S_t = 1.36$  est montré 7.27(d). Il ressemble fortement à celui de  $S_t = 0.7$  à part que les structures sont plus fines. Là encore l'amplitude du sillage est supérieure à celle des autres structures.

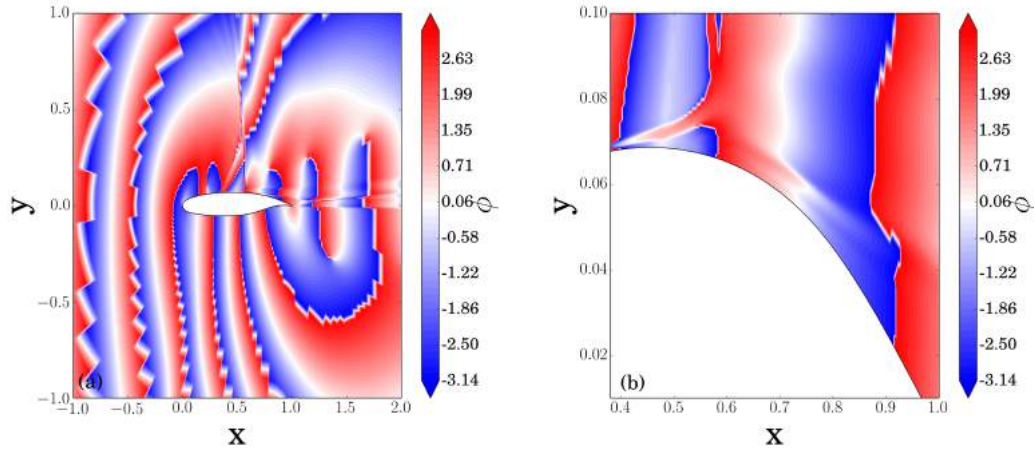


FIGURE 7.31 Phase de la composante selon  $\rho$  du mode instable à  $St = 1.36$ . (a) montre le voisinage de l'aile, (b) est un zoom à l'extrados entre  $x = 0.4$  et  $x = 1$

**Analyse du mode** La phase de ce mode est tracée sur la figure 7.31. L'onde à l'intrados a une vitesse de phase de  $0.37U_\infty$ . Elle est donc probablement d'origine acoustique. Comme dans le cas du mode  $St = 0.7$ , il est peu probable que cette onde apparaisse dans le scénario de ce mode car le temps caractéristique est trop long pour la fréquence considérée.

Les vitesses à la paroi à l'extrados sont de  $0.40U_\infty = 96m/s$  avant  $x/c = 0.79$  et de  $0.60U_\infty = 144m/s$  après ce point.

Si on revient aux courbes de gain (figure 7.24) et aux courbes de friction (figure 7.18) on constate que l'on a toujours une séparation au pied de choc et toujours un pic de gain vers  $St = 0.7$ . Le pic de gain vers  $St = 1.3$  quant à lui apparaît légèrement vers  $M = 0.72$  alors que la couche limite au bord de fuite est à la limite du détachement. Il est amplifié dès que la couche limite se détache vraiment en ce point. On peut donc se demander : si le mode à  $St = 0.7$  est lié à une dynamique de la bulle au pied de choc et celui à  $St = 1.3$  à la dynamique de la bulle au bord de fuite. Si l'on cherche le Strouhal basé sur la longueur de séparation, on trouve que  $1.36 \times L_2 = 0.29$ . Si on compare à la dynamique de la séparation de la réflexion de choc, on constate que  $St = 0.3$  correspond à la respiration de la bulle. On peut donc émettre l'hypothèse que ce mode est relié à la dynamique de respiration de la séparation au bord de fuite. On applique donc le modèle de Piponnier et al. [95] à cette seconde séparation. On trouve alors un Strouhal  $St_{t,L} = 0.32$  ce qui est proche de la fréquence du mode,  $St_{t,L} = 0.29$ .

### Modes à $S_t = 11.4$ et $S_t = 28.8$

Le mode à  $S_t = 11.4$  montré sur la figure 7.27(e) se situe au niveau de la séparation à l'extrados. La forme et la localisation de ce mode fait penser à des petites structures qui déforment la bulle au voisinage de la séparation à l'intrados.

Le mode à  $S_t = 28.8$  est tracé sur la figure 7.27(f). Il est localisé au niveau de la séparation de la bulle à l'extrados. Il ressemble au mode précédent et semble déformer l'écoulement au voisinage du point de séparation  $x/c = 0.41$ .

### Retour sur les critères de validité des différentes analyses de stabilité

Nous avons donné dans le chapitre 4 des critères de validité pour utiliser l'approche  $\mu$  laminaire et  $\mu_t$  figé. Sur la figure 7.32(a) est tracé le critère de validité de l'approche  $\mu$  laminaire  $\frac{\tilde{k}}{\tilde{u}\tilde{u}} \ll 1$  pour le mode basse fréquence ( $S_t = 0.07$ ). On constate qu'il y a des zones (bulle de recirculation et couche de cisaillement) où le critère n'est pas satisfait. Ceci justifie que cette approche n'est pas suffisante pour prédire cette dynamique. Ce même critère est tracé pour le mode haute fréquence ( $S_t = 28.8$ ) sur la figure 7.32(c). On constate que le critère est satisfait, ce qui explique pourquoi ce mode est prédit par cette analyse.

Sur la figure 7.32(b), est tracé le critère de validité de l'approche  $\mu_t$  figé ( $\frac{\tilde{k}\tilde{u}}{\tilde{u}\tilde{k}} \ll 1$ ), pour le mode basse fréquence ( $S_t = 0.07$ ). On constate que le critère n'est pas satisfait dans la couche de cisaillement. Ceci explique pourquoi l'approche  $\mu_t$  figé ne prédit pas cette dynamique.

### 7.5.2 Modes adjoints

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 4 le mode adjoint permet de déterminer la position à laquelle il faut placer un actionneur afin de contrôler une dynamique instable. Plus précisément, il indique la zone de plus grande sensibilité à un forçage harmonique. Nous allons donc faire cette analyse afin de regarder où agir si l'on veut contrôler les instabilités mises en exergue dans la partie précédente. L'ensemble des six modes adjoints correspondant aux six modes instables étudiés est tracé dans la figure 7.33. On constate la présence de structures en dehors de la couche limite pour les modes adjoints correspondants aux modes à  $S_t = 0.067$ , 0.15, 0.7 et 1.36. De telles structures ont été observées dans le cas du buffet turbulent par Sartor et al. [107]. Dans cet article, il a été montré que cette structure suit une des caractéristiques qui part du pied de choc. Nous avons donc tracé des caractéristiques sur les modes afin de vérifier si cette propriété du mode adjoint est toujours vraie pour les différentes dynamiques du buffet laminaire.

Pour le mode  $S_t = 0.067$ , figure 7.33(a), nous remarquons que le mode adjoint suit une caractéristique mais pas celle issue du pied de choc. Il s'agit d'une caractéristique venant de la position de la transition.

Pour le mode  $S_t = 0.15$ , figure 7.33(b), il y a trois structures en dehors de la couche limite. La plus proche du bord d'attaque semble suivre une caractéristique et est accentuée proche de



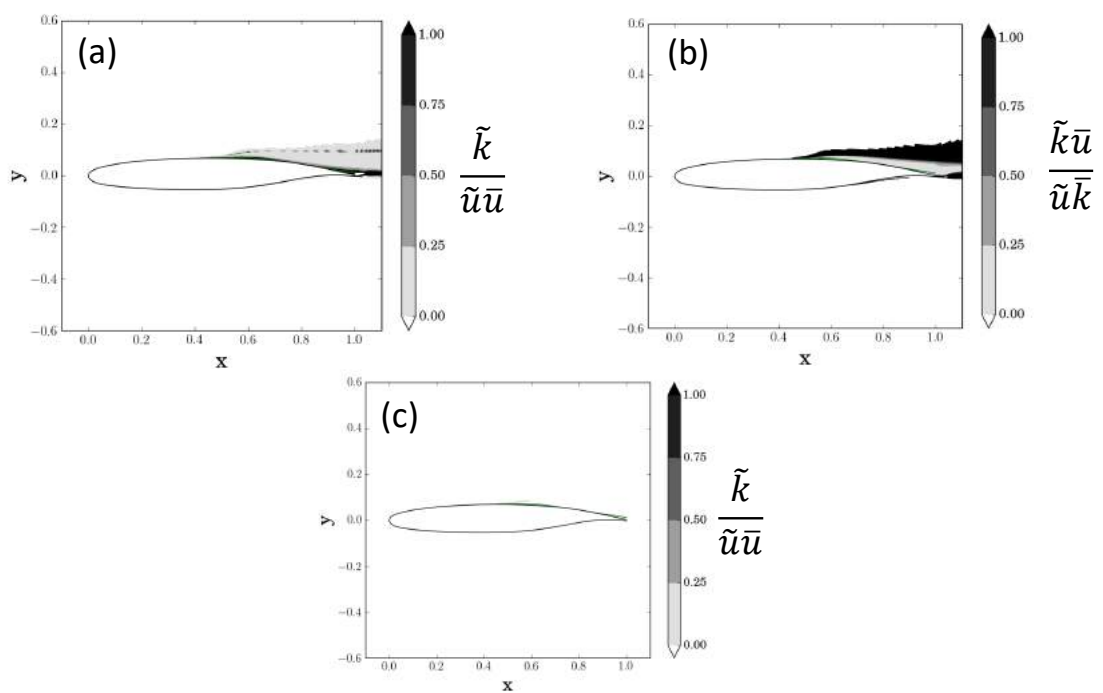


FIGURE 7.32 Critère de validité. (a) est pour le critère  $\mu$  laminaire appliqué au mode basse fréquence ( $S_t \sim 0.07$ ). (b) est pour le critère  $\mu_t$  figé appliqué pour ce mode. (c) est pour le critère  $\mu$  laminaire appliqué mode haute fréquence ( $S_t \sim 28$ )

la ligne  $M = 1$ . La seconde suit une caractéristique issue du point de séparation. La troisième, concentrée entre la séparation et le choc, suit la caractéristique proche de la position de la transition.

Le mode  $S_t = 0.7$  (figure 7.33(c)) possède aussi trois structures en dehors de la couche limite. Cette fois, un certain écart avec les caractéristiques est observée. Il semble en être de même pour le mode à  $S_t = 1.36$  (figure 7.33(d)).

Si on regarde les zooms de ces modes tracés dans la figure 7.34, on constate que les structures en dehors de la couche limites sont de relativement faible amplitude comparé aux niveaux présents dans la couche limite. Les quatre modes précédents ont en effet leur maxima d'amplitudes proches de la paroi.

Pour le mode  $S_t = 0.067$ , figure 7.34(a), l'adjoint s'arrête au niveau de la transition alors que pour  $S_t = 0.15$ ,  $S_t = 0.7$  et  $S_t = 1.36$ , tracés respectivement sur les figures 7.34(b), (c) et (d), des structures apparaissent aussi à l'intérieur de la bulle de recirculation.

Le fait que l'adjoint se situe à l'intérieur de la séparation est cohérent avec les observations faites dans la partie précédente d'après lesquelles ces modes correspondent à des dynamiques de la bulle.

Les modes à hautes fréquences,  $S_t = 11.4$  et  $S_t = 28.8$ , présentent des modes adjoints (tracés respectivement sur les figures 7.34(e) et (f)) proche des séparations. Il est à noter que pour le mode à  $S_t = 28.8$ , des structures apparaissent dans la couche limite en amont de la séparation. La forme de ces structures est proche de celle du forçage optimal du mode haute fréquence observé dans le cas de la réflexion de choc (chapitres 5). On peut alors se demander si ces modes ne sont pas liés à la transition de la couche limite. Les fréquences dimensionnées sont respectivement de 12kHz et de 30kHz ce qui est l'ordre de grandeur des fréquences associées aux ondes TS.

Cette précédente étude des modes adjoints permet de donner des indications sur la position d'un activateur afin de faire du contrôle actif. Comme on le voit dans la figure 7.34, il n'y a pas une unique zone possible. Il serait intéressant de poursuivre cette étude et de tester des stratégies de contrôle d'écoulement.

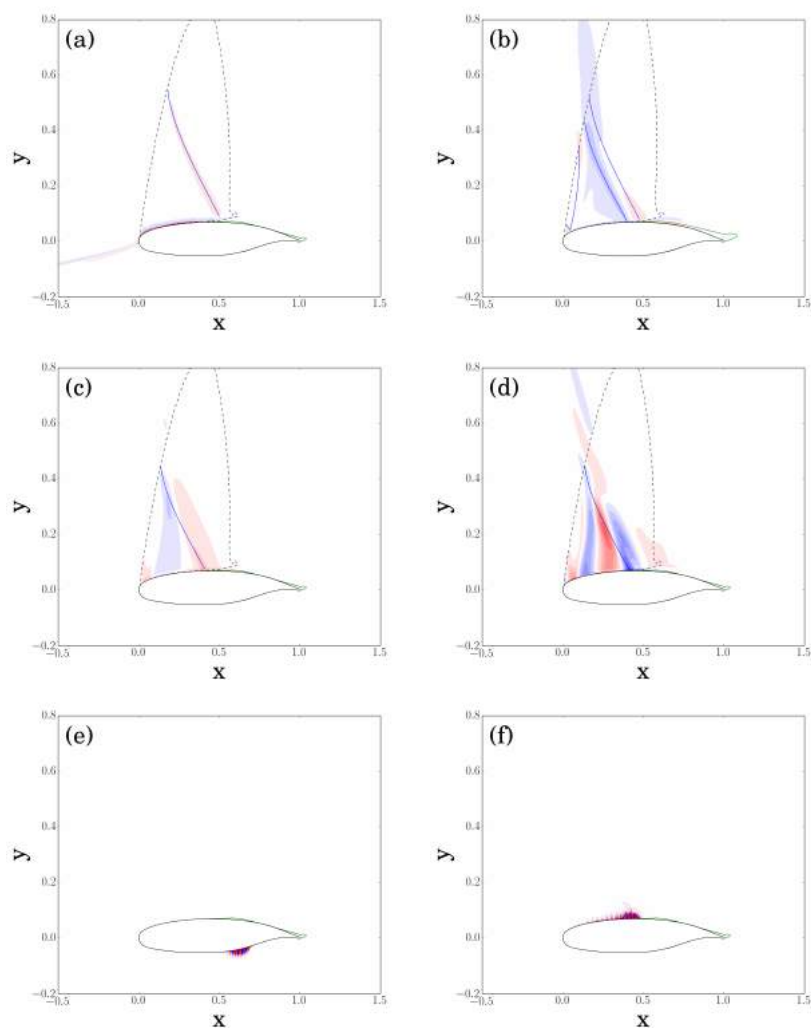


FIGURE 7.33 Composante en densité des modes adjoints correspondants au tableau 7.4.

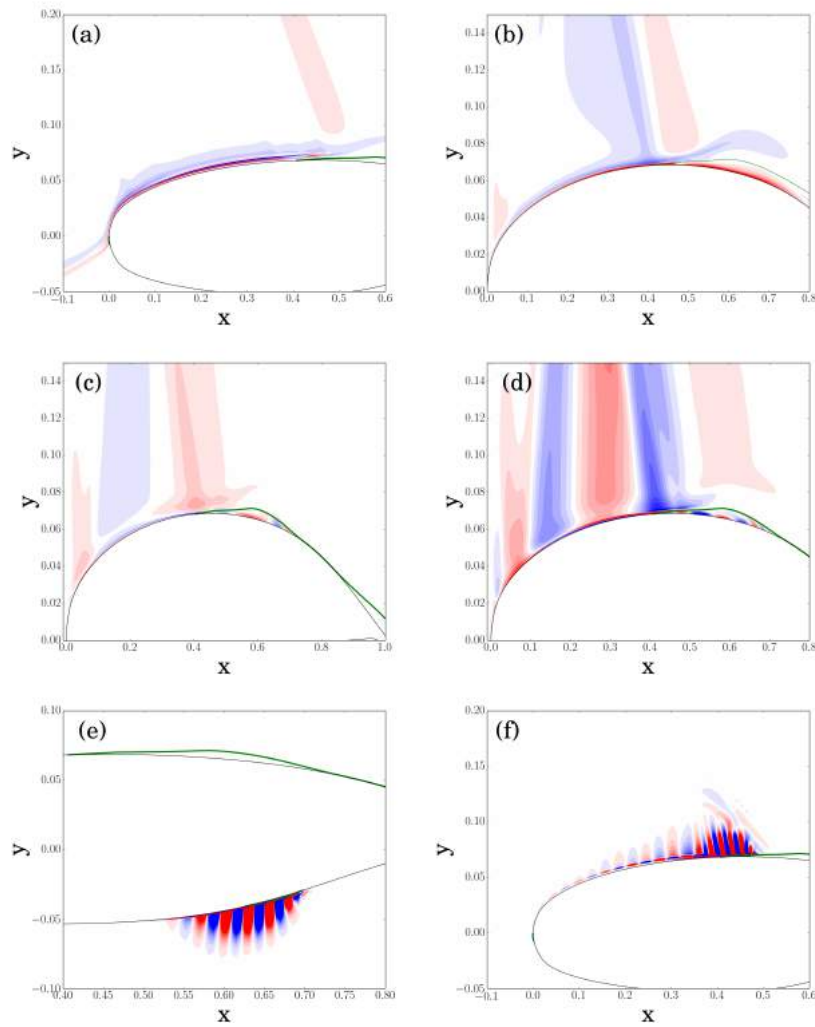


FIGURE 7.34 Zoom sur le profil des modes adjoints correspondants au tableau 7.4.



## Chapitre 8

# Conclusion

### 8.1 Résumé des travaux

Nous avons étudié ici deux situations distinctes d'interaction entre une onde de choc et une couche limite laminaire. La première est la réflexion d'un choc oblique et la seconde est le choc droit présent à l'extrados d'un profil d'aile en vol transsonique. Dans les deux cas cette interaction déclenche la transition de la couche limite vers un état turbulent. Pour chacune des configurations, des résultats expérimentaux étaient disponibles et ont montré que l'écoulement présentait des instationnarités basses fréquences. Le but de cette étude était de vérifier qu'une approche RANS, utilisant à la fois un modèle de turbulence et un modèle de transition, couplée à des analyses de stabilité globale ou de résolvant, était capable de prédire ces dynamiques.

Nous nous sommes d'abord focalisé sur le cas de la réflexion de choc sur une plaque plane à  $M = 1.6$ . Dans un premier temps nous avons simulé l'écoulement avec le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras et le critère de transition AHD-GI (chapitre 5). Nous avons comparé le champ stationnaire obtenu aux champs moyens expérimental et LES disponibles à l'ONERA. Il a été constaté un accord satisfaisant en terme de topologie de l'écoulement. La bulle de recirculation au niveau du pied de choc ainsi que la transition au sein de l'interaction semblent bien capturées. Nous avons ensuite effectué une analyse de stabilité globale sur ce champ RANS. Nous nous sommes restreint ici à une analyse  $\mu$ -laminaire comme définie dans le chapitre 4. Le champ s'est révélé globalement stable, ce qui indique un comportement de l'écoulement de type amplificateur de bruit. Nous avons donc effectué une analyse de résolvant sur ce champ afin d'étudier ce comportement. L'analyse du gain nous a permis d'exhiber deux fréquences caractéristiques de l'écoulement. La première est une fréquence de  $S_t = 0.09$  et la seconde  $S_t = 1.8$ . Ces deux fréquences sont proches de celles observées dans la LES. La LES met en évidence en plus de ces deux fréquences une moyenne fréquence à  $S_t = 0.3$  qui est difficilement visible sur la courbe de gain obtenue par l'analyse de résolvant. Nous avons ensuite reconstruit la dynamique de l'écoulement fréquence par fréquence en

utilisant la réponse optimale comme modèle de l'instationnarité. En analysant l'évolution en temps de la bulle de recirculation il est apparu que  $S_t = 0.09$  était principalement lié au mouvement du point de séparation alors que la fréquence  $S_t = 1.8$  est principalement lié au mouvement du point de réattachement. Il est aussi apparu que  $S_t = 0.3$  est une fréquence particulière pour la zone de recirculation puisqu'à cette fréquence les points de séparation et de réattachement sont autant impactés l'un que l'autre et sont en opposition de phase.

Nous avons donc étudié les forçages optimaux et les réponses optimales pour les trois fréquences identifiées ( $S_t = 0.09$ ,  $S_t = 0.3$  et  $S_t = 1.8$ ). Les forçages optimaux ainsi qu'une analyse de stabilité locale nous a permis de relier le mode  $S_t = 1.8$  à la transition laminaire/turbulente de la couche limite. L'analyse des phases et des amplitudes sur les réponses optimales nous a ensuite permis de proposer un scénario pour le mode basse fréquence. Ce scénario est basé sur le développement de perturbations dans la couche de cisaillement au-dessus de la recirculation par instabilité de Kelvin Helmholtz. L'information se transmet ensuite dans la bulle de recirculation grâce à des effets non-linéaires et vient solliciter le point de friction minimum à la paroi. Ce point agit comme une source de fluctuations de densité, d'après le second terme de l'équation de Lighthill. Ces fluctuations produites remontent l'écoulement par la recirculation et viennent perturber le point de séparation, ce qui crée une boucle de rétroaction qui semble expliquer l'amplification basse fréquence de l'écoulement.

Le mode à moyenne fréquence quant à lui a été interprété comme un mode de respiration de la bulle. En effet, il apparaît que le mode déplace le point de séparation et celui de réattachement en opposition de phase. L'origine de ce mouvement n'est toutefois pas expliquée.

Nous avons ensuite, dans la chapitre 6, vérifié que les résultats obtenus à partir du modèle de turbulence de Spalart-Allmaras et le critère de transition AHD-GI sont toujours valables si l'on change la modélisation de la turbulence et de la transition. Ceci a été fait à l'aide du modèle par équation de transport  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . Nous avons aussi fait varier la modélisation de la turbulence dans les équations des perturbations en faisant les quatre analyses présentées dans le chapitre 4. Il apparaît une forte disparité de la taille de séparation entre les deux calculs RANS, la taille de la séparation prédite par le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  étant sensiblement plus petite que celle du précédent calcul, des résultats LES et expérimentaux. Cependant, la physionomie de l'interaction est la même (présence d'une séparation, position de l'interaction et de la transition). Les analyses de stabilité globale pour les quatre modélisations de la tension de Reynolds turbulente ont montré que le champ était globalement stable ce qui confirme les résultats obtenus avec le modèle de Spalart-Allmaras. Les différentes analyses de résolvant (en terme de modélisation des tensions de Reynolds turbulentes) montrent de fortes disparités sur les fréquences prédites. En ce qui concerne l'analyse  $\mu$  laminaire, le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  permet de retrouver les dynamiques basse et haute fréquences, conformément aux résultats du chapitre 5 obtenus avec le critère AHD-GI. Il apparaît de plus que prendre en compte les fluctuations des tensions de Reynolds sur la perturbation permet de prédire le

mode moyenne fréquence  $S_t = 0.3$  grâce aux courbes de gain. Enfin, l'analyse physique des modes a permis de confirmer les interprétations physiques précédentes.

Il est à noter que pour faire les analyses en système complet, nous avons d'abord rendu le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  différentiable, introduisant ce faisant un paramètre libre de raccord ( $\sigma_d$ ) au voisinage des points de discontinuité de la dérivée du modèle. Nous avons alors vérifié l'indépendance des résultats à  $\sigma_d$  si  $\sigma_d \leq 10^{-3}$ . Nous avons également testé l'indépendance de nos résultats à la résolution du maillage. Il est apparu que les résultats sont totalement convergés pour les basses fréquences, mais incomplètement pour les hautes, notamment à  $S_t = 1.8$ . Ce point n'a toutefois pas pu être levé du fait des contraintes de mémoire (liées à l'étape d'inversion de la matrice).

Nous avons ensuite appliqué les mêmes outils au cas du tremblement de choc sur une aile laminaire en écoulement transsonique. L'étude bibliographique du chapitre 2 montre que dans le cas d'une aile turbulente la bonne prédiction du phénomène de buffet dépend du modèle de turbulence. Il apparaît dans cette étude que le modèle  $k - \omega$  de Menter avec la correction SST est celui qui donne les résultats les plus en accord avec les diverses études expérimentales sur le sujet. De plus, la littérature montre aussi que ce mouvement basse fréquence du choc dans le cas d'un profil turbulent n'est prédite par les analyses de stabilité globale que si la fluctuation de la viscosité turbulente est prise en compte. Nous avons donc utilisé le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  dans la version différentiable comme dans le chapitre 6. Nous avons d'abord effectué des simulations URANS qui ont montré l'existence d'un mouvement droite/gauche du choc à basse fréquence ( $S_t = 0.08$ ). Les résultats de l'expérience menée dans le cadre du projet BUTERFLI ont aussi mis en évidence une fréquence de l'ordre de  $S_t = 1$  qui ne ressort pas dans les transformées de Fourier de la pression à la paroi des calculs URANS. Il a cependant été décelé des dynamiques proches, vers  $S_t = 0.7$  et  $S_t = 1.3$ .

Nous avons ensuite fait des simulations RANS. Afin de faire converger les calculs, nous avons utilisé la technique de "selective frequency damping". Malgré l'utilisation de cette méthode, la convergence des calculs n'atteint pas la précision machine. Nous avons tout de même pratiqué des analyses de stabilité globale sur ces champs en vérifiant que les résultats ne dépendent pas de l'état de convergence adopté.

Une première étape a été de tester les quatre modélisations de la viscosité turbulente décrites dans le chapitre 4. Ce test a été fait sur le cas  $M = 0.73$ , incidence  $4^\circ$ . Il a été montré que seule l'analyse complète du système RANS permet de retrouver le mouvement basse fréquence du choc tandis que seule l'analyse  $\mu$ -laminaire permet de retrouver les deux dynamiques (à  $S_t = 0.7$  et  $S_t = 1.3$ ) proches de la dynamique  $S_t \sim 1$ , qui est observée expérimentalement. Nous avons ensuite étudié l'influence du nombre de Mach.

L'analyse  $\mu$  laminaire ne montre pas de mode instable à basse fréquence quel que soit le nombre de Mach. En revanche on constate qu'un mode à  $S_t = 0.7$  devient instable à  $M = 0.74$ . La fréquence de ce mode augmente avec le Mach. Un second mode instable



apparaît à  $S_t = 1.3$ , aussi à  $M = 0.74$ . La fréquence de ce mode augmente aussi avec le Mach. Il apparaît enfin un autre mode à  $S_t = 0.2$  pour  $M \geq 0.76$ .

L'analyse du système complet nous apporte des informations sur le mouvement du choc à basse fréquence  $S_t = 0.07$ , fréquence proche de celle du buffet turbulent et de la fréquence prédite expérimentalement pour le mouvement basse fréquence du choc sur une aile laminaire. Elle est aussi proche de celle issue des calculs URANS. Elle devient instable à  $M = 0.73$ ,  $M = 0.72$  étant marginalement stable. Ici la fréquence n'a pas une évolution monotone en fonction du Mach. On remarque cependant une tendance à l'accroissement avec le Mach, comme dans le cas turbulent et les résultats expérimentaux.

On s'est ensuite demandé si les modes qui n'apparaissent pas instables dans les différentes analyses correspondaient à des comportements d'amplificateur de bruit à ces fréquences. Nous avons donc fait des analyses de résolvant sur les champs RANS. Nous avons noté que les fréquences ressortant de ces analyses sont les mêmes que celles issues de l'analyse de stabilité globale quand les fréquences associées sont globalement instables. Nous n'avons toutefois pas mis à jour de comportement d'amplificateur de bruit pour la basse fréquence ( $S_t \sim 0.07$ ) en  $\mu$  laminaire et pour  $S_t \sim 1$  pour le système complet.

Il a aussi été noté que les modes instables et les réponses optimales sont semblables et une explication théorique de cette ressemblance a été donnée dans l'annexe C.

Afin de comprendre la physique des modes instables nous les avons donc étudiés pour le cas  $M = 0.74$ , incidence  $4^\circ$ . Le mode à  $S_t = 0.07$  a été comparé à la transformée de Fourier des visualisations Schlieren issues des expériences en soufflerie du projet BUTERFLI. Il apparaît une forte similitude entre ces deux dynamiques, montrant la pertinence de l'analyse RANS couplée à une analyse de stabilité globale pour appréhender le phénomène. Nous avons ensuite regardé la phase du mode afin de comparer la dynamique du mode aux scénarii de rétroaction acoustique qui servent classiquement à interpréter le buffet turbulent. L'analyse de cette phase n'a pas permis de mettre en évidence d'ondes acoustiques remontant l'écoulement à l'extrados, ce qui contredit le modèle de Lee [70]. En revanche une onde (probablement d'origine acoustique) remontant l'écoulement par l'intrados du profil a été observée. Nous avons constaté que le modèle de Jacquin [62] prédit la fréquence du mode instable (à 16% près). Cet accord relatif avec le modèle de Jacquin permet de supposer que l'origine du mode basse fréquence est identique dans le cas du buffet laminaire et turbulent.

Nous avons ensuite étudié les modes à  $S_t = 0.7$  et  $S_t = 1.3$  qui là aussi se comparent bien aux transformées de Fourier des visualisations Schlieren à  $S_t = 1$  obtenues expérimentalement. Malgré l'écart en fréquence, cette ressemblance suggère une dynamique similaire. Nous n'avons toutefois pas à ce jour d'explication pour cet écart entre l'analyse numérique et l'expérience. L'analyse des phases des modes suggère qu'ils sont reliés à une dynamique de respiration de bulle comme le mode à  $S_t = 0.3$  dans le cas de la réflexion de choc. La fréquence  $S_t = 0.7$  est liée à la bulle de recirculation au pied de choc alors que  $S_t = 1.3$  est liée à celle présente au bord de fuite.

Ces modes étant instables nous avons calculé les modes adjoints, ce qui permet de connaître les zones de l'écoulement les plus sensibles à un forçage harmonique. Il a été constaté que les modes adjoints instables étaient semblables aux forçages optimaux de l'analyse de résolvant ce qui a été justifié théoriquement dans l'annexe C. Les zones les plus sensibles sont pour tous les modes la couche limite en amont de l'interaction. Pour les modes  $S_t = 0.7$  et  $S_t = 1.3$ , il apparaît que l'écoulement est aussi sensible à l'intérieur des bulles de recirculation.

En résumé, nous avons montré dans ce manuscrit la validité d'une analyse de stabilité globale (ou de résolvant) basée sur la linéarisation des équations RANS avec critère de transition. Nos travaux n'ont pas permis de mieux déterminer, par rapport aux études existantes, le niveau d'approche nécessaire pour la modélisation des tensions de Reynolds. Dans le cas de la réflexion de choc, l'analyse  $\mu$ -laminaire ainsi que l'analyse du système complet sont capables de prédire les différentes dynamiques du choc réfléchi. Toutefois le mode moyenne fréquence ressort dès l'analyse du gain seulement dans le cas du système complet. Dans le cas du profil, les modes hautes fréquence ( $S_t \sim 1$ ) ne ressortent qu'avec l'analyse  $\mu$  laminaire et le mode basse fréquence qu'avec l'analyse du système complet. Dans ces deux cas d'étude, les analyses  $\mu_t$  figé et  $\gamma$ -figé ne semblent pas pertinentes. Une étude des mêmes phénomènes avec d'autres modèles de turbulence et de transition pourrait confirmer ces observations.

## 8.2 Perspectives

### 8.2.1 Dans le cas de la réflexion de choc (relatif au projet TFAST)

- **Données expérimentales :** Dans le cas de la réflexion de choc (projet TFAST), l'étude expérimentale dispose de peu de données instationnaires. Ce type de données a manqué lors de l'étape de validation de l'analyse de résolvant (chapitres 5 et 6). Il serait opportun à l'avenir de mettre en place des mesures permettant de mieux caractériser les fluctuations de l'écoulement. Il faut toutefois garder à l'esprit les difficultés d'une telle réalisation : plaque plane très fine rendant difficile l'intégration de capteurs de pression instationnaire (type kulite) et problèmes relatifs aux mesures optiques (LDV ou PIV) en conditions de couche limite laminaire (ensemencement déficient dans la zone laminaire). L'utilisation du fil chaud devrait être envisagée.
- **Influence des modèles de turbulence et de transition :** L'étude sur TFAST a été réalisée avec le modèles SA + AHD-GI et les modèles k- $\omega$ -SST +  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$ . Seul ce dernier a été linéarisé de manière à étudier l'approche système couplé. A l'avenir il est nécessaire de valider les résultats obtenus avec ce modèles en les comparant à d'autres modèles. D'une part il faudrait comparer le k- $\omega$ -SST à d'autres modèles de turbulences (ex. k- $\omega$  wilcox, k-kl, SA...). D'autres part, concernant le modèle

de transition, nous pensons qu'il faudrait étudier le modèle AHD par équation de transport qui a récemment été implanté dans le code elsA.

- **Variation paramétrique** : L'étude sur TFAST s'est concentrée sur un seul angle du choc incident  $\beta$ . L'étude mériterait d'être élargie à d'autres valeurs de ce paramètre, ce qui permettrait ainsi de regarder par exemple des situations de choc plus fort, ou au contraire des solutions de choc très faible pour lesquelles la bulle peut ou non se former (dans le premier cas la bulle serait notamment beaucoup plus longue que dans le cas étudié).
- **Effets tridimensionnels** : L'analyse faite dans ce manuscrit est 2D. La littérature sur les bulles de recirculation montre que certaines instabilités peuvent être 3D. Par ailleurs, comme discuté dans le chapitre 5, au-delà de Mach 1.3 les modes obliques deviennent dominant dans la couche limite laminaire. Il faudrait donc à l'avenir étendre la présente analyse au 3D. A ce jour, l'obstacle principal à lever pour y parvenir est le coût de calcul associé, qui est rédhibitoire. En effet la méthode choisie pour les inversions de matrice est une approche exacte, la factorisation LU qui demande beaucoup de mémoire. Pour passer au 3D il faut envisager des approches itératives moins coûteuses en mémoire et/ou l'utilisation de techniques de préconditionnement.

### 8.2.2 Cas de l'interaction sur profil d'aile (relatif au projet Buterfli)

- **Problème de la convergence des calculs** : Dans le cas du buffet en conditions de couche limite transitionnelle, les calculs RANS ne convergent pas jusqu'à la précision machine. Nous n'avons pas pu suffisamment élucider l'influence de cette situation sur nos résultats. A l'avenir des travaux devraient être entrepris afin de lever cette difficulté de convergence. Cela peut notamment passer par l'utilisation d'une méthode de Newton ou en changeant la phase implicite de la résolution du système RANS dans elsA. Cela implique également le modèle de transition. Concernant le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  une méthode de sous-relaxation proposée par Mosahebi [87] pourrait, semble-t-il, aider à une meilleure convergence. Enfin une autre solution pourrait être de faire des calculs URANS longs permettant ensuite de faire les analyses de stabilité sur le champ moyen et non plus sur un champ de base.
- **Transition forcée à l'intrados du profil d'aile** : Une différence notable entre l'expérience menée à l'ONERA dans le cadre du projet BUTERFLI et cette étude numérique est la transition imposée à l'intrados du profil dans l'expérience et qui est laissée libre dans le calcul RANS. Comme sur le mode basse fréquence nous avons observé que l'onde acoustique qui remonte l'écoulement par l'intrados est importante pour expliquer cette dynamique, on peut donc se poser la question de l'influence de cette position de transition sur la dynamique du choc à l'extrados. On s'attend cependant à ne pas observer de différences conséquentes étant donné que la vitesse de

phase de cette onde acoustique trouvée dans le cas de l'aile laminaire est très proche de celle observée dans le cas d'une aile turbulente. Il faudrait néanmoins valider cette hypothèse.

- **Sensibilité aux modèles de turbulence et de transition :** La littérature sur le buffet turbulent montre une forte variabilité des prévisions des modèles de turbulence. Il serait intéressant de mener une étude de l'influence des modèles de turbulence sur le buffet en laminaire. Cela impliquerait également l'étude de différents modèles de transition.
- **Etude paramétrique :** l'étude ici s'est focalisée essentiellement sur des variations en nombre de Mach. Il faudrait à l'avenir compléter les résultats avec l'analyse de l'effet de l'incidence. Cela permettrait d'avoir une cartographie des seuils d'instabilité dans le plan  $(M, \alpha)$ , ce qui est intéressant pour l'application.
- **Couplages aéroélastiques :** Le buffet est important essentiellement en rapport des possibilités d'excitation de la structure (buffeting). Le comportement de la laminarité dans le couplage aéroélastique est un point qui commence tout juste à être traité dans la communauté. Notamment, si l'aile bouge (du fait de vibration, ou de déformations), comment la transition se comporte t'elle, et est-ce que les modèles permettent de le prédire ? Les approches développées ici pourraient permettre d'avancer sur ces problèmes.
- **Contrôle de l'écoulement :** L'analyse du mode adjoint a fournit des indices sur ce que pourrait être la position optimale d'un actionneur fonctionnant de manière harmonique. Une solution plus facile à implémenter serait de faire du contrôle passif. Dans ce cas il faut mener une étude de sensibilité. La difficulté alors est de calculer la hessienne, soit la dérivée seconde des équations RANS. Par rapport à la linéarisation des critères de transition, il faudrait ainsi modifier le modèle  $\gamma - \overline{R_{\theta_t}}$  pour que les équations soient de classe  $\mathcal{C}^2$ .
- **Perturbations 3D :** Comme pour le cas TFAST, le développement d'un outil d'analyse de stabilité des perturbations 3D serait bénéfique.
- **Effets 3D, Géométries d'aile réalistes :** Une aile sur un avion commercial présente une flèche et une variation de la corde selon l'envergure. L'étude du buffet pourrait s'attaquer à une telle configuration. En turbulent les effets 3D mènent à une instationnarité toujours basse fréquence mais très large bande qui diffère fortement du cas 2D (Dandois [32]). La question du comportement en laminaire devra être abordée à l'avenir, en poursuivant le développement des outils développés dans cette thèse, afin de répondre aux problématiques applicatives. Un des points importants concerne la prise en compte de modèles de transition par instabilités cross-flow. De la même manière que pour le cas de l'interaction choc oblique (TFAST) des stratégies numériques permettant de traiter des écoulements 3D devront être mises en place.



## Annexe A

# Equations de la décomposition triple en compressible

L'objet de cette annexe est d'explicitier les équations de la décomposition triple dans le cadre compressible. Nous introduirons d'abord une moyenne de phase de type moyenne de Favre

$$[u] = \frac{\langle \rho u \rangle}{\langle \rho \rangle} \quad (\text{A.1})$$

ainsi que la moyenne temporelle de type Favre

$$\hat{u} = \frac{\overline{\langle \rho \rangle [u]}}{\overline{\langle \rho \rangle}} = \frac{\overline{\langle \rho u \rangle}}{\bar{\rho}} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} \quad (\text{A.2})$$

Nous décomposons alors  $u$  en

$$u = \hat{u} + \dot{\hat{u}} + u'', \quad (\text{A.3})$$

avec

$$[u] = \hat{u} + \dot{\hat{u}}. \quad (\text{A.4})$$

Nous avons  $\langle u'' \rangle \neq 0$  et  $\dot{\hat{u}} \neq 0$ . En revanche nous avons

$$\langle \rho u'' \rangle = 0 \quad (\text{A.5})$$

et

$$\overline{\langle \rho \dot{\hat{u}} \rangle} = \overline{\langle \rho \rangle \dot{\hat{u}}} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Nous chercherons les équations satisfaites par  $\bar{\rho}$ ,  $\hat{u}$ ,  $\hat{E}$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\dot{\hat{u}}$  et  $\dot{\hat{E}}$ .

### Equations sur la densité

La densité satisfait

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho U) = 0. \quad (\text{A.7})$$

En prenant la moyenne de phase de cette équation on a

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div}(\langle \rho U \rangle) = 0, \quad (\text{A.8})$$

qui se réécrit

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div}(\langle \rho \rangle [u]) = 0. \quad (\text{A.9})$$

En prenant la moyenne temporelle de cette dernière équation

$$\text{div}(\bar{\rho} \hat{u}) = 0. \quad (\text{A.10})$$

En utilisant la décomposition des moyennes de phase dans (A.9) et en soustrayant l'équation (A.10) on obtient

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\text{div}(\tilde{\rho} \hat{u} + \bar{\rho} \dot{\bar{u}}) - \text{div}(\tilde{\rho} \dot{\bar{u}}). \quad (\text{A.11})$$

L'équation sur la partie turbulente de la densité est donc

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho' [u] + \langle \rho \rangle u'') = -\text{div}(\rho' u'') \quad (\text{A.12})$$

On remarque que les termes non-linéaires sont

$$f_\rho = -\text{div}(\tilde{\rho} \dot{\bar{u}}) \quad (\text{A.13})$$

### Equations sur la quantité de mouvement

L'équation de la quantité de mouvement est

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \otimes u + pI - \tau) = 0 \quad (\text{A.14})$$

En prenant la moyenne de phase de cette équation, on obtient

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle [u]}{\partial t} + \text{div}(\langle \rho \rangle [u] \otimes [u] + \langle p \rangle I - \langle \tau \rangle) = -\text{div}(\langle \rho u'' \otimes u'' \rangle). \quad (\text{A.15})$$

En prenant la moyenne temporelle de cette équation on a

$$\text{div}(\bar{\rho} \hat{u} \otimes \hat{u} + \bar{p}I - \bar{\tau}) = -\text{div}\left(\overline{\langle \rho \rangle \dot{\bar{u}} \otimes \dot{\bar{u}}} + \overline{\rho u'' \otimes u''}\right) \quad (\text{A.16})$$

En soustrayant (A.16) à (A.15) on obtient l'équation sur  $\dot{\bar{u}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \dot{\bar{u}} = & -div \left( \bar{\rho} \hat{u} \otimes \hat{u} + \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \otimes \hat{u} + \bar{\rho} \hat{u} \otimes \dot{\bar{u}} + \bar{p} I - \bar{\tau} \right) + \hat{u} div \left( \bar{\rho} \hat{u} + \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \right) \\ & -div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \otimes \hat{u} + \bar{\rho} \hat{u} \otimes \dot{\bar{u}} + \langle \rho \rangle \dot{\bar{u}} \otimes \dot{\bar{u}} - \overline{\langle \rho \rangle \dot{\bar{u}} \otimes \dot{\bar{u}}} + \langle \rho u'' \otimes u'' \rangle - \overline{\rho u'' \otimes u''} \right) \\ & + \hat{u} div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \right) - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \dot{\bar{u}} \end{aligned} \quad (A.17)$$

Le forçage selon l'équation de quantité de mouvement est

$$f_{\rho u} = -div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \otimes \hat{u} + \bar{\rho} \hat{u} \otimes \dot{\bar{u}} + \langle \rho \rangle \dot{\bar{u}} \otimes \dot{\bar{u}} - \overline{\langle \rho \rangle \dot{\bar{u}} \otimes \dot{\bar{u}}} \right) + \hat{u} div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \right) - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \dot{\bar{u}} \quad (A.18)$$

### Equations sur l'énergie

L'équation sur l'énergie est

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + div (\rho E U + p U - \tau \cdot U + q) = 0 \quad (A.19)$$

En prenant la moyenne de phase de cette équation on obtient

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle [E]}{\partial t} + div (\langle \rho \rangle [E][U] + \langle \rho E'' U'' \rangle + \langle p \rangle [u] + \langle p u'' \rangle - \langle \tau \cdot u \rangle + \langle q \rangle) = 0. \quad (A.20)$$

En prenant la moyenne temporelle de cette équation on a

$$div \left( \bar{\rho} \hat{E} \hat{u} + \bar{p} \hat{u} + \bar{q} - \overline{\tau \cdot u} \right) = -div \left( \overline{\langle \rho \rangle \hat{E} \dot{\bar{u}}} + \overline{\langle p \rangle \dot{\bar{u}}} + \overline{p u''} + \overline{\rho E'' U''} \right) \quad (A.21)$$

En soustrayant (A.21) à (A.20) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \dot{\bar{E}} = & -\hat{E} div \left( \bar{\rho} \hat{u} + \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \right) \\ & -div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{E}} \hat{u} + \bar{\rho} \hat{u} \dot{\bar{E}} + \bar{\rho} \hat{E} \dot{\bar{u}} + \bar{p} \dot{\bar{u}} + \bar{p} \hat{u} - \overline{\bar{p} \dot{\bar{u}}} + \bar{q} - \overline{\tau \cdot u} \right) \\ & -\hat{E} div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \right) - div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{E}} \hat{u} + \bar{\rho} \hat{E} \dot{\bar{u}} + \bar{\rho} \dot{\bar{E}} \dot{\bar{u}} + \langle \rho E'' u'' \rangle - \overline{\rho E'' U''} + \bar{p} \dot{\bar{u}} - \overline{\bar{p} \dot{\bar{u}}} + \langle p u'' \rangle - \overline{p u''} \right) \end{aligned} \quad (A.22)$$

Le forçage selon l'énergie totale est donc

$$f_{\rho E} = -\hat{E} div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{u}} \right) - div \left( \bar{\rho} \dot{\bar{E}} \hat{u} + \bar{\rho} \hat{E} \dot{\bar{u}} + \bar{\rho} \dot{\bar{E}} \dot{\bar{u}} + \bar{p} \dot{\bar{u}} - \overline{\bar{p} \dot{\bar{u}}} \right) \quad (A.23)$$



L'équation de Lighthill pour les perturbations s'écrit en négligeant la turbulence pour simplifier,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial f_\rho}{\partial t} - \frac{\partial f_{\rho u_i}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \left( \bar{\rho} \dot{u}_i \hat{u}_j + \bar{\rho} \hat{u}_i \dot{u}_j + \tilde{\rho} \hat{u}_i \hat{u}_j + (\tilde{p} - c_0^2 \tilde{\rho}) \delta_{ij} + \bar{\tau}_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} \right) \quad (\text{A.24})$$

## Annexe B

# Linéarisation du critère d'Abu-Ghannam

Les equations RANS avec le modèle de transition peuvent se réécrire de la façon suivante

$$\frac{\partial q}{\partial t} = R(q, \gamma(q)) \quad (\text{B.1})$$

où  $R(q, \gamma)$  est une fonction linéaire de  $\gamma$ . La variation de  $R$  pour une légère variation de  $q$  et de  $\gamma$  considérées comme variables indépendantes donne

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q} dq + \frac{\partial R}{\partial \gamma} d\gamma \quad (\text{B.2})$$

On considère que  $\gamma(q)$  est une trajectoire dans l'espace  $(q, \gamma)$ . Dans le cas du critère d'Abu-Ghannam et Shaw,  $\gamma = \gamma(\zeta(R_\theta, R_{\theta_{in}}, R_{\theta_{out}}))$ . Comme  $R_{\theta_{out}} = 2.667R_{\theta_{in}}$ , on peut écrire plus simplement  $\gamma = \gamma(\zeta(R_\theta, R_{\theta_{in}}))$

On en déduit que

$$d\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial R_\theta} dR_\theta + \frac{\partial \zeta}{\partial R_{\theta_{in}}} dR_{\theta_{in}} \right) \quad (\text{B.3})$$

Explicitement, on a

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} = 15\zeta^2 e^{-5\zeta^3} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial R_\theta} = \frac{1}{1.35} \frac{1}{1.667R_{\theta_{in}}} \left( \frac{R_\theta - R_{\theta_{in}}}{1.667R_{\theta_{in}}} \right)^{-0.35/1.35} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial R_{\theta_{in}}} = \frac{1}{1.35} \frac{-R_\theta}{1.667R_{\theta_{in}}^2} \left( \frac{R_\theta - R_{\theta_{in}}}{1.667R_{\theta_{in}}} \right)^{-0.35/1.35} \quad (\text{B.6})$$

On a évidemment  $R_\theta(q)$ .  $R_{\theta_{in}} = G(\Lambda_{2T})$  où

$$G(\Lambda_{2T}) = 163 + \exp\left(F(\Lambda_{2T}) - \frac{F(\Lambda_{2T})Tu}{6.91}\right) \quad (B.7)$$

et  $\Lambda_2 = -\frac{\theta^2}{\mu_e \mathbf{U}_e} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall}$

$$dR_{\theta_{in}} = \frac{\partial G}{\partial \Lambda_2} d\Lambda_{2T} \quad (B.8)$$

$$\begin{aligned} d\Lambda_2 = & -\frac{2\theta}{\mu_e U_e} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall} d\theta - \frac{\theta^2}{\mu_e U_e} \frac{\partial dP}{\partial s} \Big|_{wall} \\ & + \frac{\theta^2}{\mu_e^2 U_e} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall} d\mu_e + \frac{\theta^2}{\mu_e U_e^2} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall} dU_e \end{aligned} \quad (B.9)$$

De plus

$$dR_\theta = \frac{U_e \rho_e}{\mu_e} d\theta + \frac{\theta \rho_e}{\mu_e} dU_e + \frac{\theta \mathbf{U}_e}{\mu_e} d\rho_e - \frac{\theta \mathbf{U}_e \rho_e}{\mu_e^2} d\mu_e \quad (B.10)$$

La position de la transition doit varier de

$$d\theta_T = \frac{\frac{\partial G}{\partial \Lambda_2} \left( -\frac{\theta^2}{\mu_e U_e} \frac{\partial dP}{\partial s} \Big|_{wall} + \frac{\theta^2}{\mu_e^2 U_e} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall} d\mu_e + \frac{\theta^2}{\mu_e U_e^2} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall} dU_e \right) - \frac{\theta \rho_e}{\mu_e} dU_e - \frac{\theta \mathbf{U}_e}{\mu_e} d\rho_e + \frac{\theta \mathbf{U}_e \rho_e}{\mu_e^2} d\mu_e}{\frac{U_e \rho_e}{\mu_e} + \frac{2\theta}{\mu_e U_e} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall}} \quad (B.11)$$

où le second membre est évalué à la position de la transition du champs de base. Finalement, on arrive à

$$dR_{\theta_{in}} = \frac{U_e \rho_e}{\mu_e} d\theta_T + \frac{\theta_T \rho_e}{\mu_e} dU_e + \frac{\theta_T \mathbf{U}_e}{\mu_e} d\rho_e - \frac{\theta_T \mathbf{U}_e \rho_e}{\mu_e^2} d\mu_e \quad (B.12)$$

Il reste donc à évaluer la variation de  $d\theta$  dans le cas d'un point autre que la transition. On rappelle que  $\theta = \int_0^\delta \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy$ . On a donc

$$d\theta = \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) d\delta + \int_0^\delta \frac{1}{U_e} \left(1 - \frac{2U}{U_e}\right) dU dy + \int_0^\delta \frac{U}{U_e^2} \left(1 - \frac{2U}{U_e}\right) dU_e dy \quad (B.13)$$

Pour une quantité extérieur  $q_e = q(x, \delta)$ ,

$$q_e(x, \delta) + dq_e = (q + dq)(x, \delta + d\delta) = q(x, \delta) + \frac{\partial q}{\partial y} d\delta + dq(x, \delta) + \text{ordre } 2, \quad (B.14)$$

donc

$$dq_e = \frac{\partial q}{\partial y} d\delta + dq(x, \delta) \quad (B.15)$$

La grandeur delta doit elle varier ? Cette longueur représente la distance à la parois à partir de laquelle le profil de vitesse ne change plus beaucoup. Si l'on perturbe en un point sur cette ligne, la distance à la paroi à partir de laquelle le profil de vitesse ne change plus beaucoup reste la même. On propose donc de la laisser telle quelle. De même, les quantités

extérieures sont là pour donner une idée de la vitesse dans l'écoulement extérieur à la couche limite. Si on perturbe en un point le profil de vitesse, cette vitesse extérieur ne doit pas bouger. Ceci se voit facilement dans le cas d'une couche limite de plaque plane où les quantités extérieures sont celles prises à l'infinie. Les quantités précédemment définies deviennent

$$d\gamma = \frac{d\gamma}{d\zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial R_{\theta_{in}}} dR_{\theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial R_{\theta_{in}}} dR_{\theta_{in}} \right), \quad (\text{B.16})$$

$$dR_{\theta} = \frac{U_e \rho_e}{\mu_e} d\theta, \quad (\text{B.17})$$

$$d\theta_T = \frac{\frac{\partial G}{\partial \Lambda_2} \left( -\frac{\theta^2}{\mu_e U_e} \frac{\partial dP}{\partial s} \Big|_{wall} \right)}{\frac{U_e \rho_e}{\mu_e} + \frac{2\theta}{\mu_e U_e} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall}}, \quad (\text{B.18})$$

et

$$d\theta = \int_0^\delta \frac{1}{U_e} \left( 1 - \frac{2U}{U_e} \right) dU dy. \quad (\text{B.19})$$

On arrive enfin à

$$\begin{aligned} d\gamma = \frac{d\gamma}{d\zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial R_{\theta_{in}}} \frac{U_e \rho_e}{\mu_e} \int_0^\delta \frac{1}{U_e} \left( 1 - \frac{2U}{U_e} \right) dU dy \right. \\ \left. + \frac{\partial \zeta}{\partial R_{\theta_{in}}} \frac{U_e \rho_e}{\mu_e} \frac{\frac{\partial G}{\partial \Lambda_2} \left( -\frac{\theta^2}{\mu_e U_e} \frac{\partial dP}{\partial s} \Big|_{wall} \right)}{\frac{U_e \rho_e}{\mu_e} + \frac{2\theta}{\mu_e U_e} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{wall}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Il est à noter que cette expression fait intervenir la corrélation  $F(\Lambda_2)$  qui n'est pas dérivable en 0, et donc  $G$  non plus. La corrélation doit donc être légèrement modifiée pour différencier le critère. On rappelle que

$$F(\Lambda_2) = 6.91 + 12.75\Lambda_2 + 63.64\Lambda_2^2 \quad \text{pour } \Lambda_2 < 0 \quad (\text{B.21})$$

$$F(\Lambda_2) = 6.91 + 2.48\Lambda_2 - 12.27\Lambda_2^2 \quad \text{pour } \Lambda_2 > 0 \quad (\text{B.22})$$

Pour lisser la fonction, on propose de remplacer la fonction sur un petit intervalle de longueur  $2\sigma$  autour de 0 par un polynôme de degré 3 qui aurait des raccords  $\mathcal{C}^1$  en  $-\sigma$  et en  $\sigma$  avec la fonction de corrélation originale.

Les contraintes minimales à imposer sur  $P$  sont

$$P(\sigma) = F_p(\sigma) = a \quad (\text{B.23})$$

$$P(-\sigma) = F_m(-\sigma) = b \quad (\text{B.24})$$

$$P'(\sigma) = F'_p(\sigma) = c \quad (\text{B.25})$$

$$P'(-\sigma) = F'_m(-\sigma) = d \quad (\text{B.26})$$

si  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , alors les constantes ont les valeurs suivantes

$$a_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{\sigma(c-d)}{4} \quad (\text{B.27})$$

$$a_1 = \frac{3(a-b)}{4\sigma} - \frac{c+d}{4} \quad (\text{B.28})$$

$$a_2 = \frac{c-d}{4\sigma} \quad (\text{B.29})$$

$$a_3 = \frac{c+d}{4\sigma^2} + \frac{b-a}{4\sigma^3} \quad (\text{B.30})$$

## Annexe C

# Conditions pour que le mode et son adjoint ressemblent respectivement à la réponse optimale et au forçage optimal

Nous tenterons ici de donner une justification au fait que les forçages optimaux et les modes adjoints se ressemblent pour les fréquences instables. Nous justifierons aussi qu'il en va de même pour la réponse optimale et le mode direct correspondant.

D'abord remarquons que le gain  $\lambda$  est solution de

$$\lambda^2 = \max_{\hat{f}} \left( \frac{\langle R\hat{f} | R\hat{f} \rangle}{\langle \hat{f} | \hat{f} \rangle} \right) \quad (\text{C.1})$$

où  $R$  est le résolvant.

Décomposons le forçage sur la base des vecteurs propres de  $L$ , c'est à dire sur la base des modes directs  $q_{d,i}$ .

$$\hat{f} = \sum_i \langle q_{d,i}, \hat{f} \rangle q_{d,i} \quad (\text{C.2})$$

on a donc

$$R\hat{f} = \sum_i \langle q_{d,i}, \hat{f} \rangle (i\omega I - L)^{-1} q_{d,i} \quad (\text{C.3})$$

$q_{d,i}$  est vecteur propre de  $L$  avec la valeur propre  $i\alpha_i + \beta_i$ . Il est donc vecteur propre de  $i\omega I - L$  avec la valeur propre  $i(\omega - \alpha_i) - \beta_i$ . Finalement  $q_{d,i}$  est vecteur propre de  $R$  avec la

valeur propre de  $[i(\omega - \alpha_i) - \beta_i]^{-1}$ . On peut donc réécrire

$$R\hat{f} = \sum_i \frac{\langle q_{a,i}, \hat{f} \rangle}{i(\omega - \alpha_i) - \beta_i} q_{d,i}. \quad (C.4)$$

Finalement,

$$\langle R\hat{f} | R\hat{f} \rangle = \sum_{i,j} \frac{\langle q_{a,i}, \hat{f} \rangle \overline{\langle q_{a,j}, \hat{f} \rangle} \langle q_{d,j} | q_{d,i} \rangle}{(i(\omega - \alpha_i) - \beta_i)(-i(\omega - \alpha_j) - \beta_j)}. \quad (C.5)$$

Il reste à trouver pour quel  $\hat{f}$  cette quantité est maximale.

S'il existe un mode neutre à la fréquence de l'analyse de résolvant (noté 1) alors  $(i(\omega - \alpha_1) - \beta_1)(-i(\omega - \alpha_1) - \beta_1) = 0$ . Le terme va dominer les autres dans le gain tant que  $\langle q_{a,1}, \hat{f} \rangle$  n'est pas nul (le gain sera infini). Ainsi à condition qu'à la fréquence du résolvant il existe un mode globalement neutre où beaucoup plus proche de la neutralité que les autres, le gain peut être approximé en

$$\langle R\hat{f} | R\hat{f} \rangle \sim \frac{|\langle q_{a,1}, \hat{f} \rangle|^2}{\beta_1^2}. \quad (C.6)$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz implique que

$$\langle R\hat{f} | R\hat{f} \rangle \leq \frac{\langle q_{a,1}, q_{a,1} \rangle \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle}{\beta_1^2} \quad (C.7)$$

et qu'il y a égalité quand  $q_{a,1}$  et  $\hat{f}$  sont colinéaires. Ainsi le forçage optimal et le mode adjoint du mode proche de la stabilité neutre sont proportionnels l'un à l'autre.

De même ce mode dominera la décomposition sur la base des vecteurs propres de  $R\hat{f}$ . Ceci suggère donc que s'il existe un unique mode très proche de la neutralité à la fréquence du résolvant, alors le forçage optimal est tel que

$$Rf_1 \sim -\frac{\langle q_{a,1}, f_1 \rangle}{\beta_1} q_{d,1} \quad (C.8)$$

Comme  $-\frac{\langle q_{a,1}, f_1 \rangle}{\beta_1}$  est indépendant des coordonnées spatiales, la réponse optimale et le mode proche de la stabilité neutre sont proportionnels.

## Annexe D

# Forçage et réponse optimaux

Dans cette section, nous allons étudier les forçages optimaux issus des analyses de résolvant. L'étude des gains a montré que les modes instables à hautes fréquences (ie  $S_t = 11.4$  et  $S_t = 28.8$ ) correspondent à des croisements de courbes de gain et non à des pics SVD. Pour cette raison nous ne montrerons ici que ceux correspondants aux quatre premiers modes du tableau 7.4 qui sont à la fois des modes instables et des pics de gain.

Les réponses optimales sont tracées dans la figure D.1. On constate qu'ils sont très semblables aux modes directes tracés sur la figure 7.27(a,b,c et d).

Les forçages optimaux (figure D.2) ressemblent fortement aux modes adjoints (figure 7.34). Un mode fait exception à cette règle, celui du mode à  $S_t = 0.15$ . En effet ce mode tracé Figure D.2(b) présente une structure beaucoup plus large et de niveau plus élevé au sein de la bulle de recirculation que le mode adjoint associé. Ceci montre la grande sensibilité de la bulle à cette fréquence.



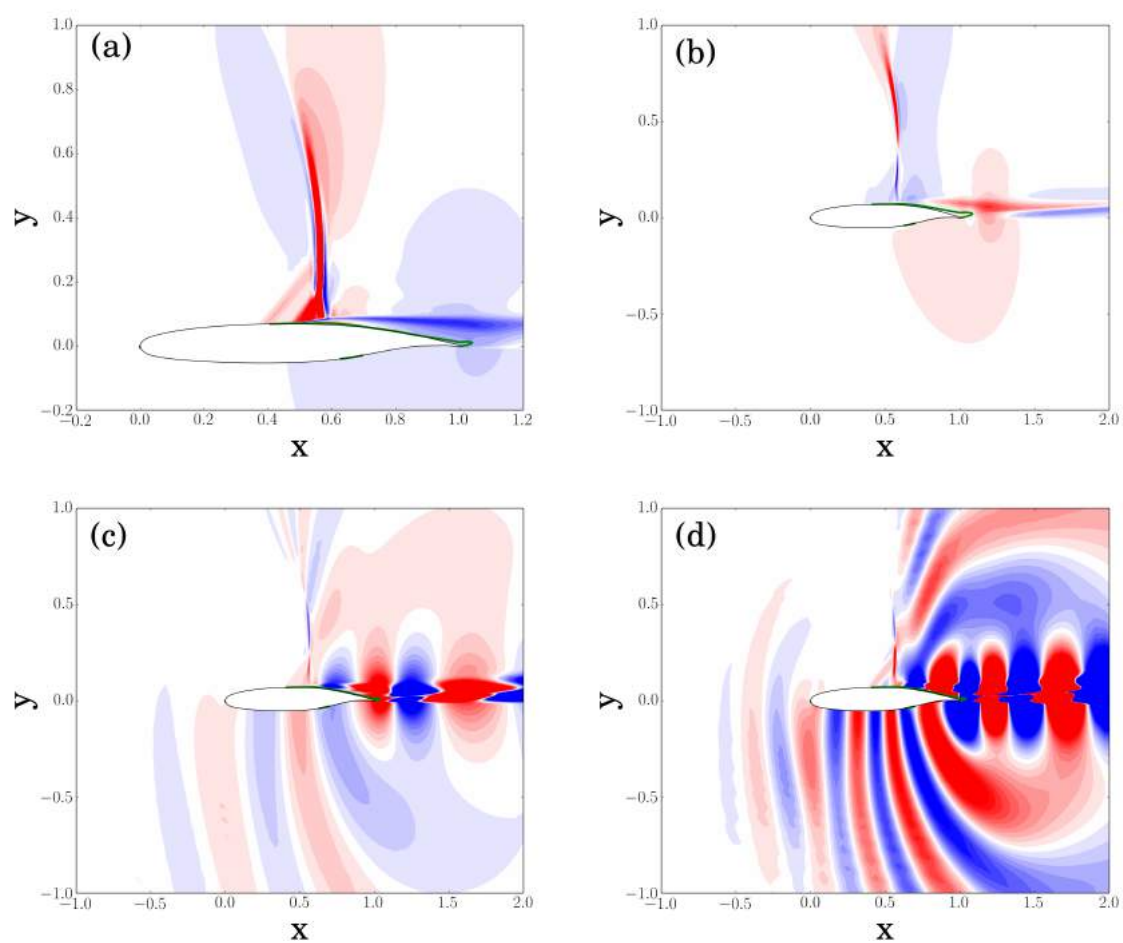


FIGURE D.1 Zoom sur le profil des réponses correspondants aux modes directs tracés sur l'image 7.27(a,b,c et d).

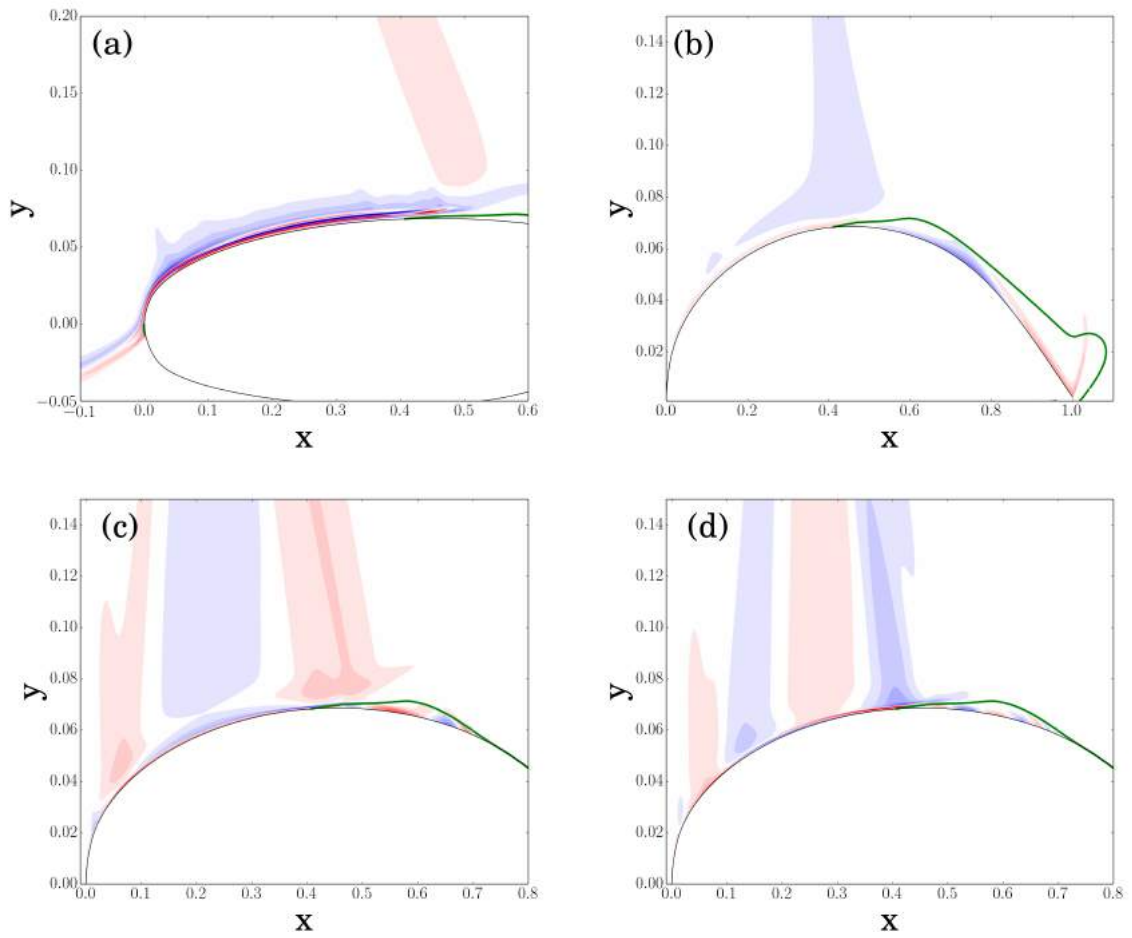


FIGURE D.2 Zoom sur le profil des forçages correspondants aux modes adjoints tracés sur l'image 7.34(a,b,c et d).



## Annexe E

# Global stability analysis

The method to analyze the flow unsteadiness is to look at the dynamics of small perturbation superimposed upon the base flow. The evolution of these perturbations follows the linearized equations of the set (5.1)

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = Jq' \quad (\text{E.1})$$

where  $J$  is the Jacobian of  $R$  and  $q'$  are the perturbations. Upon decomposing perturbations into normal mode  $q' = e^{i\beta t} q_s(x, y)$ , relation (E.1) yields the following form

$$i\beta q_s = Jq_s \quad (\text{E.2})$$

where  $\beta = \omega - i\sigma$  is the complex frequency and  $q_s(x, y)$  the global mode. The stability of the flow is dictated by the sign of  $\sigma$  (positive/negative for instability/stability, respectively). The Jacobian is obtained by a finite difference scheme applied to the elsA code with a very small time step. Details are available in Mettot [83].

In the present analysis, the RANS baseflow is considered as a Navier-Stokes mean flow, meaning that the eddy viscosity is not taken into account in the stability analysis and in the subsequent resolvent analysis. As explained by Beneddine et al. [13] this choice is justified for the resolvent analysis if one looks at comparing the responses to the forcing with the spectral modes of the flow. However in the stability analysis, this may hide important dynamical processes. For example, Sartor [105] and Crouch [31] show that not taking into account the eddy viscosity in the stability analysis of the flow past an airfoil at transonic speeds precludes the global mode associated to buffet. To take into account the eddy viscosity in the present procedure requires the differentiation of the transition criterion, a task that has been left aside owing to the complexity of dealing with the non-locality of the AHD-Gleyzes criterion. Nevertheless additional computations made with the model  $\gamma - R_{\theta_t}$  of Langtry [1] showed no particular effect of the eddy viscosity, suggesting the validity of the present approach.

A partial spectrum of the flow, composed of the least stable eigenvalues, is displayed in figure E.1, and shows that the flow is stable. This result must be contrasted with the role of the

recirculation bubble, which is potentially unstable as a consequence of the feedback promoted by the reverse flow. In the introduction it was discussed that absolute instability arises in separated boundary layers only for reverse flow magnitudes greater than 15 – 20% in the incompressible case [6, 99]. The effect of compressibility does not seem to have been described. Therefore the reverse flow magnitude being here about 14.8%, from an incompressible point of view, the flow is expected to be stable.

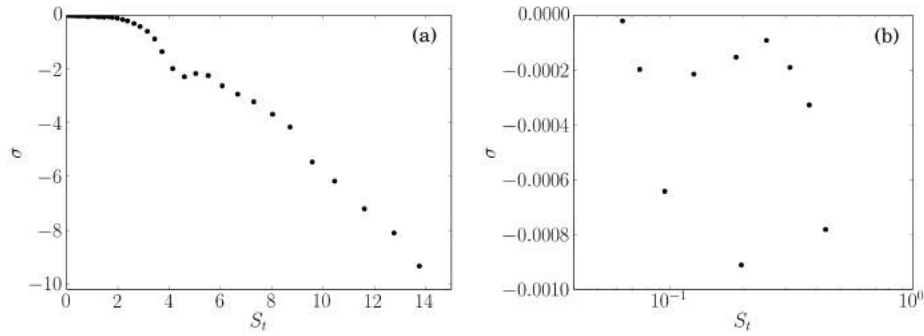


FIGURE E.1 Stability spectrum of the RANS baseflow showing the least stable eigenvalues. (a) Calculated spectrum, (b) zoom in the range  $S_t < 1$ .

# Bibliographie

- [1]
- [2] B.J. Abu-Ghannam and R. Shaw. Natural transition of boundary layers—the effects of turbulence, pressure gradient, and flow history. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 22(5) :213–228, 1980.
- [3] L. Agostini, L. Larchevêque, and P. Dupont. Mechanism of shock unsteadiness in separated shock/boundary-layer interactions. *Physics of Fluids*, 27(12) :126103, 2015.
- [4] L. Agostini, L. Larchevêque, P. Dupont, J-F. Debiève, and J-P. Dussauge. Zones of influence and shock motion in a shock/boundary-layer interaction. *AIAA journal*, 50(6) :1377–1387, 2012.
- [5] E. Åkervik, L. Brandt, D. S. Henningson, J. Höpfner, O. Marxen, and P. Schlatter. Steady solutions of the navier-stokes equations by selective frequency damping. *Physics of fluids*, 18(6) :068102, 2006.
- [6] M. Alam and N.D. Sandham. Direct numerical simulation of ‘short’laminar separation bubbles with turbulent reattachment. *Journal of Fluid Mechanics*, 403 :223–250, 2000.
- [7] D. Arnal. Special course on stability and transition of laminar flow. *AGARD Special Course at the von Karman Institute, AGARD Report No709*, pages 26–30, 1984.
- [8] D. Arnal. Transition prediction in transonic flow. In *Symposium Transsonicum III*, pages 253–262. Springer, 1989.
- [9] D. Arnal. Boundary layer transition : predictions based on linear theory. In *In AGARD, Special Course on Progress in Transition Modelling 63 p (SEE N94-33884 10-34)*, 1994.
- [10] D. Arnal, R. Houdeville, A. Séraudie, and O. Vermeersch. Overview of laminar-turbulent transition investigations at onera toulouse. In *41st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, page 3074, 2011.
- [11] H. Babinsky and J.K. Harvey. *Shock wave-boundary-layer interactions*, volume 32. Cambridge University Press, 2011.

- [12] S. Beneddine. *Characterization of unsteady flow behavior by linear stability analysis*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2017.
- [13] S. Beneddine, D. Sipp, A. Arnault, J. Dandois, and L. Lesshafft. Conditions for validity of mean flow stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 798 :485–504, 2016.
- [14] S.J. Beresh, N.T. Clemens, and D.S. Dolling. Relationship between upstream turbulent boundary-layer velocity fluctuations and separation shock unsteadiness. *AIAA journal*, 40(12) :2412–2422, 2002.
- [15] H. Bippes. Basic experiments on transition in three-dimensional boundary layers dominated by crossflow instability. *Progress in aerospace sciences*, 35(4) :363–412, 1999.
- [16] J.P. Boris, F.F. Grinstein, E.S. Oran, and R.L. Kolbe. New insights into large eddy simulation. *Fluid dynamics research*, 10(4-6) :199–228, 1992.
- [17] V.I. Borodulin, Y.S. Kachanov, and A.P. Roschekhtayev. Experimental detection of deterministic turbulence. *Journal of Turbulence*, (12) :N23, 2011.
- [18] R. Bourguet, M. Braza, G. Harran, and R. El Akoury. Anisotropic organised eddy simulation for the prediction of non-equilibrium turbulent flows around bodies. *Journal of Fluids and Structures*, 24(8) :1240–1251, 2008.
- [19] L. Brandt, D. Sipp, J.O. Pralits, and O. Marquet. Effect of base-flow variation in noise amplifiers : the flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 687 :503–528, 2011.
- [20] V. Brion, J. Dandois, J-C. Abart, and P. Paillart. Experimental analysis of the shock dynamics on a transonic laminar airfoil. In *Progress in Flight Physics–Volume 9*, volume 9, pages 365–386. EDP Sciences, 2017.
- [21] R. Bur and E. Garnier. Transition effect on a shock-wave / boundary layer interaction. In *The CAero2 Platform : Dissemination of Computational Case Studies in Aeronautics, ECCOMAS Congress 2016, Crete Island (Greece), June 5-10, 2016*, 2016.
- [22] G. Casalis and D. Arnal. Elfin ii subtask 2.3 : Database method–development and validation of the simplified method for pure crossflow instability at low speed. *ELFIN II-European Laminar Flow Investigation, Technical Report*, (145), 1996.
- [23] C-L. Chang and M.R. Malik. Oblique-mode breakdown and secondary instability in supersonic boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 273 :323–360, 1994.
- [24] J-M. Chomaz. Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :357–392, 2005.

- [25] N.T. Clemens and V. Narayanaswamy. Low-frequency unsteadiness of shock wave/turbulent boundary layer interactions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 46 :469–492, 2014.
- [26] J. Cliquet. *Calcul de la transition laminaire-turbulent dans les codes Navier-Stokes : application aux géométries complexes*. PhD thesis, Toulouse, ISAE, 2007.
- [27] J. Cliquet, R. Houdeville, and D. Arnal. Application of laminar-turbulent transition criteria in navier-stokes computations. *AIAA journal*, 46(5) :1182–1190, 2008.
- [28] C. Content. *Méthode innovante pour le calcul de la transition laminaire-turbulent dans les codes Navier-Stokes*. PhD thesis, Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace, 2011.
- [29] J.D. Crouch, A. Garbaruk, and D. Magidov. Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability. *Journal of Computational Physics*, 224(2) :924–940, 2007.
- [30] J.D. Crouch, A. Garbaruk, D. Magidov, and L. Jacquin. Global structure of buffeting flow on transonic airfoils. In *IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control*, pages 297–306. Springer, 2009.
- [31] J.D. Crouch, A. Garbaruk, D. Magidov, and A. Travin. Origin of transonic buffet on aerofoils. *Journal of fluid mechanics*, 628 :357–369, 2009.
- [32] J. Dandois. Experimental study of transonic buffet phenomenon on a 3d swept wing. *Physics of Fluids*, 28(1) :016101, 2016.
- [33] J-F. Debiève and P. Dupont. Dependence between the shock and the separation bubble in a shock wave boundary layer interaction. *Shock Waves*, 19(6) :499, 2009.
- [34] S. Deck. Numerical simulation of transonic buffet over a supercritical airfoil. *AIAA journal*, 43(7) :1556, 2005.
- [35] J. Délery, J.G. Marvin, and E. Reshotko. Shock-wave boundary layer interactions. Technical report, DTIC Document, 1986.
- [36] D.S. Dolling. Fifty years of shock-wave/boundary-layer interaction research : what next ? *AIAA journal*, 39(8) :1517–1531, 2001.
- [37] D.S. Dolling and L. Brusniak. Separation shock motion in fin, cylinder, and compression ramp-induced turbulent interactions. *AIAA journal*, 27(6) :734–742, 1989.
- [38] A. Dumoulin. Validation de modeles de transition dans le code navier-stokes elsA. *Rapport de stage ONERA*, 2004.



- [39] P. Dupont, C. Haddad, and J.F. Debiève. Space and time organization in a shock-induced separated boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 559 :255–277, 2006.
- [40] J-P. Dussauge, P. Dupont, and J-F. Debiève. Unsteadiness in shock wave boundary layer interactions with separation. *Aerospace Science and Technology*, 10(2) :85–91, 2006.
- [41] B.F. Farrell and P.J. Ioannou. Stochastic forcing of the linearized navier–stokes equations. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 5(11) :2600–2609, 1993.
- [42] K. Finke. *Stoßschwingungen in schallnahen Strömungen*. VDI-Verlag, 1977.
- [43] B. Ganapathisubramani, N.T. Clemens, and D.S. Dolling. Effects of upstream boundary layer on the unsteadiness of shock-induced separation. *Journal of fluid Mechanics*, 585 :369–394, 2007.
- [44] B. Ganapathisubramani, N.T. Clemens, and D.S. Dolling. Low-frequency dynamics of shock-induced separation in a compression ramp interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 636 :397–425, 2009.
- [45] E. Garnier and S. Deck. Large-eddy simulation of transonic buffet over a supercritical airfoil. *Turbulence and Interactions*, pages 135–141, 2010.
- [46] N. F. Giannelis and G. A. Vio. Aeroelastic interactions of a supercritical aerofoil in the presence of transonic shock buffet. In *Proceedings of the 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Paper*, volume 2028, 2016.
- [47] N.F. Giannelis, G.A. Vio, and O. Levinski. A review of recent developments in the understanding of transonic shock buffet. *Progress in Aerospace Sciences*, 92 :39–84, 2017.
- [48] J. Gibb. The cause and cure of periodic flows at transonic speeds. 1990.
- [49] C. Gleyzes, J. Cousteix, and J.L. Bonnet. Theoretical and experimental study of low reynolds number transitional separation bubbles. In *Conference on Low Reynolds Number Airfoil Aerodynamics, Notre Dame, IN*, pages 137–152, 1985.
- [50] E. Goncalves and R. Houdeville. Turbulence model and numerical scheme assessment for buffet computations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 46(11) :1127–1152, 2004.
- [51] E. Goncalves, J-C. Robinet, and R. Houdeville. Numerical simulation of transonic buffet over an airfoil. In *TSFP DIGITAL LIBRARY ONLINE*. Begel House Inc., 2003.

- [52] M. Grilli, P.J. Schmid, S. Hickel, and N.A. Adams. Analysis of unsteady behaviour in shockwave turbulent boundary layer interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 700 :16–28, 2012.
- [53] F. Grossi. *Physics and modeling of unsteady shock wave/boundary layer interactions over transonic airfoils by numerical simulation*. PhD thesis, 2014.
- [54] F. Grossi, M. Braza, and Y. Hoarau. Prediction of transonic buffet by delayed detached-eddy simulation. *AIAA Journal*, 52(10) :2300–2312, 2014.
- [55] A. Hartmann, A. Feldhusen, and W. Schröder. On the interaction of shock waves and sound waves in transonic buffet flow. *Physics of Fluids*, 25(2) :026101, 2013.
- [56] A. Hartmann, M. Klaas, and W. Schröder. Time-resolved stereo piv measurements of shock–boundary layer interaction on a supercritical airfoil. *Experiments in fluids*, 52(3) :591–604, 2012.
- [57] ABM T. Hasan and M. M. Alam. Rans computation of transonic buffet over a supercritical airfoil. *Procedia Engineering*, 56 :303–309, 2013.
- [58] W.F. HILTON and R.O. FOWLER. Photographs of shock wave. 1947.
- [59] D. Hue, O. Vermeersch, D. Bailly, V. Brunet, and M. Forte. Experimental and numerical methods for transition and drag predictions of laminar airfoils. *AIAA Journal*, 2015.
- [60] D. Hue, O. Vermeersch, J. Duchemin, O. Colin, and D. Tran. Wind-tunnel and cfd investigations focused on transition and performance predictions of laminar wings. *AIAA Journal*, pages 1–14, 2017.
- [61] M. Iovnovich and D.E. Raven. Reynolds-averaged navier-stokes study of the shock-buffet instability mechanism. *AIAA journal*, 50(4) :880–890, 2012.
- [62] L. Jacquin, P. Molton, S. Deck, B. Maury, and D. Soulevant. Experimental study of shock oscillation over a transonic supercritical profile. *AIAA journal*, 47(9) :1985–1994, 2009.
- [63] W.P. Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*, 15(2) :301–314, 1972.
- [64] J.C. Kok. Resolving the dependence on freestream values for the k-turbulence model. *AIAA J*, 38(7) :1292–1295, 2000.
- [65] A. Kourta, G. Petit, J.C. Courty, and J.P. Rosenblum. Buffeting in transonic flow prediction using time-dependent turbulence model. *International journal for numerical methods in fluids*, 49(2) :171–182, 2005.

- [66] R. B. Langtry. A correlation-based transition model using local variables for unstructured parallelized cfd codes. 2006.
- [67] R. B. Langtry and F. R. Menter. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. *AIAA journal*, 47(12) :2894–2906, 2009.
- [68] R. B. Langtry, F.R. Menter, S.R. Likki, Y.B. Suzen, P.G. Huang, and S. Völker. A correlation-based transition model using local variables—part ii : test cases and industrial applications. *Journal of Turbomachinery*, 128(3) :423–434, 2006.
- [69] L. Larchevêque. Low-and medium-frequency unsteadinesses in a transitional shock–boundary reflection with separation. In *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, page 1833, 2016.
- [70] B.H.K. Lee. Oscillatory shock motion caused by transonic shock boundary-layer interaction. *AIAA journal*, 28(5) :942–944, 1990.
- [71] D.G. Mabey. Oscillatory flows from shock induced separations on biconvex aerofoils of varying thickness in ventilated wind tunnels. *AGARD CP-296, Boundary layer effects on unsteady airloads*, 1981.
- [72] D.G. Mabey, B.L. Welsh, and B.E. Cripps. *Periodic flows on a rigid 14% thick biconvex wing at transonic speeds*. Royal Aircraft Establishment, 1981.
- [73] L.M. Mack. Transition and laminar instability. 1977.
- [74] L.M. Mack. Boundary-layer linear stability theory. Technical report, DTIC Document, 1984.
- [75] O. Marquet, M. Lombardi, J-M. Chomaz, D. Sipp, and L. Jacquin. Direct and adjoint global modes of a recirculation bubble : lift-up and convective non-normalities. *Journal of Fluid Mechanics*, 622 :1–21, 2009.
- [76] O. Marxen, M. Lang, U. Rist, and S. Wagner. A combined experimental/numerical study of unsteady phenomena in a laminar separation bubble. *Flow, Turbulence and Combustion*, 71(1-4) :133–146, 2003.
- [77] O. Marxen, U. Rist, and S. Wagner. Effect of spanwise-modulated disturbances on transition in a separated boundary layer. *AIAA journal*, 42(5) :937–944, 2004.
- [78] I. Mary, P. Sagaut, and M. Deville. An algorithm for unsteady viscous flows at all speeds. *International journal for numerical methods in fluids*, 34(5) :371–401, 2000.

- [79] J.B. McDevitt and A.F. Okuno. Static and dynamic pressure measurements on a naca 0012 airfoil in the ames high reynolds number facility. 1985.
- [80] Philippe Meliga, Gregory Pujals, and Éric Serre. Sensitivity of 2-d turbulent flow past a d-shaped cylinder using global stability. *Physics of Fluids*, 24(6) :061701, 2012.
- [81] F. R. Menter. Improved two-equation k-omega turbulence models for aerodynamic flows. 1992.
- [82] F.R. Menter, R.B. Langtry, S.R. Likki, Y.B. Suzen, P.G. Huang, and S. Völker. A correlation-based transition model using local variables—part i : model formulation. *Journal of turbomachinery*, 128(3) :413–422, 2006.
- [83] C. Mettot. *Stabilité linéaire, sensibilité et contrôle passif d’écoulements turbulents par différences finies*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2013.
- [84] C. Mettot, F. Renac, and D. Sipp. Computation of eigenvalue sensitivity to base flow modifications in a discrete framework : Application to open-loop control. *Journal of Computational Physics*, 269 :234–258, 2014.
- [85] C. Mettot, D. Sipp, and H. Bézard. Quasi-laminar stability and sensitivity analyses for turbulent flows : Prediction of low-frequency unsteadiness and passive control. *Physics of Fluids*, 26(4) :061701, 2014.
- [86] M.V. Morkovin. On the many faces of transition. In *Viscous drag reduction*, pages 1–31. Springer, 1969.
- [87] A. Mosahebi and E. Laurendeau. Convergence characteristics of fully and loosely coupled numerical approaches for transition models. *AIAA Journal*, 2015.
- [88] J. Nitzsche. A numerical study on aerodynamic resonance in transonic separated flow. 2009.
- [89] A. Pagella, A. Babucke, and U. Rist. Two-dimensional numerical investigations of small-amplitude disturbances in a boundary layer at  $ma=4.8$  : Compression corner versus impinging shock wave. *Physics of Fluids (1994-present)*, 16(7) :2272–2281, 2004.
- [90] A. Pagella, U. Rist, and S. Wagner. Numerical investigations of small-amplitude disturbances in a boundary layer with impinging shock wave at  $ma=4.8$ . *Physics of Fluids (1994-present)*, 14(7) :2088–2101, 2002.
- [91] H.H. Pearcey. A method for the prediction of the onset of buffeting and other separation effects from wind tunnel tests on rigid models. Technical report, ADVISORY GROUP FOR AERONAUTICAL RESEARCH AND DEVELOPMENT PARIS (FRANCE), 1958.

- [92] H.H. Pearcey. *Some effects of shock-induced separation of turbulent boundary layers in transonic flow past aerofoils*. HM Stationery Office, 1959.
- [93] H.H. Pearcey and D.W. Holder. Simple methods for the prediction of wing buffeting resulting from bubble type separation. *Aero Rep*, 1024, 1962.
- [94] H.H. Pearcey, J. Osborne, and A.B. Haines. The interaction between local effects at the shock and rear separation-a source of significant scale effects in wind-tunnel tests on aerofoils and wings. Technical report, NATIONAL PHYSICAL LAB TEDDINGTON (UNITED KINGDOM) AERODYNAMICS DIV, 1968.
- [95] S. Piponnier, J.P. Dussauge, J.F. Debieve, and P. Dupont. A simple model for low-frequency unsteadiness in shock-induced separation. *Journal of Fluid Mechanics*, 629 :87–108, 2009.
- [96] S. Pirozzoli and F. Grasso. Direct numerical simulation of impinging shock wave/turbulent boundary layer interaction at  $m=2.25$ . *Physics of Fluids (1994-present)*, 18(6) :065113, 2006.
- [97] S. Raghunathan, R.D. Mitchell, and M.A. Gillan. Transonic shock oscillations on naca0012 aerofoil. *Shock Waves*, 8(4) :191–202, 1998.
- [98] W.C. Reynolds and AKMF Hussain. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. part 3. theoretical models and comparisons with experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 54(02) :263–288, 1972.
- [99] U. Rist. Instability and transition mechanisms in laminar separation bubbles. *Low Reynolds Number Aerodynamics on Aircraft Including Applications in Emerging UAV Technology*, 2003.
- [100] J-Ch. Robinet. Bifurcations in shock-wave/laminar-boundary-layer interaction : global instability approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 579 :85–112, 2007.
- [101] C.L. Rumsey, M.D. Sanetrik, R.T. Biedron, N D. Melson, and E. B. Parlette. Efficiency and accuracy of time-accurate turbulent navier-stokes computations. *Computers & Fluids*, 25(2) :217–236, 1996.
- [102] M. Samimy, S.A ; Arnette, and G.S. Elliott. Streamwise structures in a turbulent supersonic boundary layer. *Physics of Fluids*, 6(3) :1081–1083, 1994.
- [103] A. Sansica, N.D. Sandham, and Z. Hu. Forced response of a laminar shock-induced separation bubble. *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(9) :093601, 2014.
- [104] A. Sansica, N.D. Sandham, and Z. Hu. Instability and low-frequency unsteadiness in a shock-induced laminar separation bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 798 :5–26, 2016.

- [105] F. Sartor. *Instationnarités dans les interactions choc/couche-limite en régime transsonique : étude expérimentale et analyse de stabilité*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 2014.
- [106] F. Sartor, C. Mettot, R. Bur, and D. Sipp. Unsteadiness in transonic shock-wave/boundary-layer interactions : experimental investigation and global stability analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 781 :550–577, 2015.
- [107] F. Sartor, C. Mettot, and D. Sipp. Stability, receptivity, and sensitivity analyses of buffeting transonic flow over a profile. *AIAA Journal*, 2014.
- [108] H. Schlichting. Boundary-layer theory. 1968.
- [109] H. Schlichting. Boundary-layer theory, 6th edn. translation by kestn j. chaps 14 and 20, 1979.
- [110] P.J. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of fluid mechanics*, 656 :5–28, 2010.
- [111] D. Sipp, O. Marquet, P. Meliga, and A. Barbagallo. Dynamics and control of global instabilities in open-flows : a linearized approach. *Applied Mechanics Reviews*, 63(3) :030801, 2010.
- [112] B. Smith. A near wall model for the k-l two equation turbulence model. In *Fluid Dynamics Conference*, page 2386, 1994.
- [113] A. Soda. *Numerical investigation of unsteady transonic shock/boundary-layer interaction for aeronautical applications*. PhD thesis, RWTH Aachen, 2007.
- [114] A. Soda and N. Verdon. Investigation of influence of different modelling parameters on calculation of transonic buffet phenomena. In *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics V*, pages 487–495. Springer, 2006.
- [115] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, page 439, 1992.
- [116] D. Szubert, F. Grossi, A.J. Garcia, Y. Hoarau, J. CR Hunt, and M. Braza. Shock-vortex shear-layer interaction in the transonic flow around a supercritical airfoil at high reynolds number in buffet conditions. *Journal of Fluids and Structures*, 55 :276–302, 2015.
- [117] M. Thiery and E. Coustols. Numerical prediction of shock induced oscillations over a 2d airfoil : Influence of turbulence modelling and test section walls. *International journal of heat and fluid flow*, 27(4) :661–670, 2006.

- [118] F.O. Thomas, C.M. Putnam, and H.C. Chu. On the mechanism of unsteady shock oscillation in shock wave/turbulent boundary layer interactions. *Experiments in Fluids*, 18(1-2) :69–81, 1994.
- [119] H. Tijdeman. Investigations of the transonic flow around oscillating airfoils. 1977.
- [120] E. Toubert and N.D. Sandham. Large-eddy simulation of low-frequency unsteadiness in a turbulent shock-induced separation bubble. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 23(2) :79–107, 2009.
- [121] O.H. Ünal and D.S. Dolling. Decay of wall pressure field and structure of a mach 5 adiabatic turbulent boundary layer. In *AIAA, Fluid Dynamics Conference, 25 th, Colorado Springs, CO*, 1994.
- [122] D. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA journal*, 26(11) :1299–1310, 1988.
- [123] J. Windt, U. Scholz, and R. Radespiel. Validation of the rans-simulation of laminar separation bubbles on airfoils. *Aerospace science and technology*, 10(6) :484–494, 2006.
- [124] Q. Xiao, H-M. Tsai, and F. Liu. Numerical study of transonic buffet on a supercritical airfoil. *AIAA journal*, 44(3) :620, 2006.

**Titre :** Stabilité de l'interaction onde de choc couche limite laminaire.

**Mots clés :** Choc, Couche Limite, Transition, Séparation, Stabilité Globale, Résolvent, RANS

**Résumé :** Le phénomène d'interaction onde de choc / couche limite (CL) est omniprésent en aérodynamique. De manière générale, il génère des oscillations basses fréquences qui peuvent être néfastes pour les machines. L'exemple typique est le tremblement de l'onde de choc sur profil d'aile en régime transsonique, dangereux car il peut exciter les modes de structure de l'aile et potentiellement la rompre. Ce type de phénoménologies a été largement étudié en condition de CL amont turbulente, ce qui a donné lieu à des scénarios physiques crédibles et des méthodologies d'étude efficaces, notamment les analyses de stabilité sur champs turbulents moyennés (RANS). Toutefois la technologie laminaire, c'est-à-dire l'utilisation de CL laminaires en vue de réduire la consommation des avions représente un nouveau challenge scientifique sur cette problématique. La physique est en effet fortement impactée par la nature laminaire de la CL, notamment du fait de la faible résilience de celle-ci aux gradients de pression adverses et à la transition turbulente.

Cette thèse a ainsi porté les méthodes d'analyse de stabilité sur champ RANS pour les situations de CL laminaire. L'originalité et l'apport de l'étude résident dans la prise en compte des modèles de transition dans l'approche linéarisée sur champ RANS. Les modèles utilisés (RANS et transition) ont donc été linéarisés afin de réaliser des études de stabilité en perturbant toutes les variables aérodynamiques. La validation de la méthode a été réalisée par comparaison avec des résultats expérimentaux et de simulation (LES) sur deux configurations d'application. La première configuration est

le cas de la réflexion d'un choc oblique sur une plaque plane. La deuxième est celle du choc droit à l'extrados d'un profil en condition transsonique. Ces deux cas sont en condition de CL laminaire à l'amont du choc.

Des analyses de stabilité et de résolvant ont été réalisées. Ces approches ont permis de caractériser le comportement d'oscillateur/amplificateur des écoulements en question et d'analyser la physique des instationnarités observées dans les expériences.

Le cas de la réflexion de choc est caractérisé par trois fréquences. L'analyse de stabilité montre que celles-ci ne correspondent pas à des modes globaux instables mais à une dynamique d'amplificateur de l'écoulement. L'analyse de résolvant identifie bien ces trois fréquences. L'analyse des réponses optimales, couplée à une analyse de stabilité locale, a ensuite permis de proposer des scénarios physiques de ces dynamiques.

Dans le cas du choc droit sur profil en régime transsonique, l'écoulement apparaît globalement instable. Deux modes d'instabilité sont identifiés. Le premier à basse fréquence correspond au phénomène de tremblement observé en conditions turbulentes. Le deuxième apparaît à plus haute fréquence, et correspond à un mode d'oscillation de la bulle de séparation présente sous le pied de choc.

Plus largement, la thèse permet de suggérer que certaines dynamiques dans ce type d'interaction procèdent de mécanismes similaires liés à la respiration de la bulle de séparation laminaire.

**Title :** Stability of the shock wave laminar boundary layer interaction

**Keywords :** Shock, Boundary Layer, Transition, Separation, Global Stability, Resolvent, RANS

**Abstract :** The shock wave boundary layer (BL) interaction phenomenon is ubiquitous in aerodynamic. In general this interaction generates some low frequency oscillations which can be disastrous for the machines. The typical example is the buffet phenomenon on an airfoil in transonic conditions. Buffet is dangerous since its low frequency can excite the structural modes of the airfoil and break it. The phenomenology has been widely studied when the incoming BL is turbulent. These studies have derived several credible scenarios and efficient methodologies to capture its dynamic, especially the stability analysis tools on an averaged turbulent flow (RANS). However laminar technologies, the use of laminar BL to reduce the fuel consumption of planes, represent a new scientific challenge on this problematic. In fact, the physic of the interaction is importantly impacted by the laminar nature of the BL especially because of its weak resilience to an adverse pressure gradient and of the transition to turbulence.

The thesis deals with the methodologies for the stability analysis on a RANS base flow in the case of a laminar BL. The originality and the contribution of this work have been to take into account a transition criteria in the linearised dynamic on a RANS base flow. The model used (RANS and transition) have then been linearized in order to make a stability analysis which take into account all the aerodynamic variables. The validation of this methodology has been

made by comparison to experiment and simulation (LES) on two configurations of application. The first one is a weak reflected shock wave on a flat plate. The second one is the strong shock around an airfoil in a transonic regime. In both cases the incoming BL is laminar.

Stability and resolvent analysis have been made. These approaches have been able to characterize the oscillator/noise amplifier behavior of the flow and to enable a physical analysis of the unsteadiness observed in the experiments.

The case of the reflected shock wave is characterized by three frequencies. The stability analysis shows that they don't correspond to globally unstable modes but to a noise amplifier behavior of the flow. The resolvent analysis identifies the three frequencies. The analysis of the optimal response, coupled with a local stability analysis, enables to propose physical scenarios of these dynamics.

In the case of the strong shock on an airfoil in transonic regime, the flow is globally unstable. Two unstable modes have been identified. The first one, at low frequency, corresponds to the buffet phenomenon also observed in the turbulent case. The second one appears at higher frequency and corresponds to the oscillation of the separation bubble formed at the feet of the shock.

More generally, this thesis suggests that some dynamics of these two interactions result from the same mechanism linked to the breathing motion of the laminar separation bubble.