Conception, modélisation et contrôle d'un tube anti-roulis multidirectionnel pour une barge offshore portant une éolienne

Christophe Coudurier

▶ **To cite this version:**

Christophe Coudurier. Conception, modélisation et contrôle d'un tube anti-roulis multidirectionnel pour une barge offshore portant une éolienne. Automatique / Robotique. Université Paris sciences et lettres, 2017. Français. NNT : 2017PSLEM054 . tel-01822625

HAL Id: tel-01822625
https://pastel.hal.science/tel-01822625

Submitted on 25 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Conception, modélisation et contrôle d'un tube antiroulis multidirectionnel pour une barge offshore portant une éolienne

Ecole doctorale n°432

Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Spécialité Mathématique et Automatique

COMPOSITION DU JURY :

M. Philippe CHEVREL
Institut Mines-Telecom Atlantique,
Président

M. Mondher FARZA
Université de Caen, Rapporteur

M. Jean-Yves DIEULOT
Université de Lille, Rapporteur

M. Olivier LEPREUX
IFP Energies nouvelles, Membre du jury

M. Nicolas PETIT
MINES ParisTech, Membre du jury

Mme Delphine BRESCH-PIETRI
MINES ParisTech, Membre du jury

Soutenue par Christophe **COUDURIER**
le 01 décembre 2017

Dirigée par **Nicolas PETIT**

Conception, modélisation et contrôle d'un tube antiroulis multidirectionnel pour une barge offshore portant une éolienne

Christophe Coudurier

Résumé

Suite à la mise en place de politiques publiques favorisant les énergies renouvelables, la construction de fermes éoliennes offshore est en plein essor aux quatre coins du monde. Or, la technique de l'éolienne *offshore posée*, qui est actuellement la seule utilisée, n'est pas viable économiquement dans des eaux trop profondes. Ceci représente un sérieux frein au développement de l'énergie éolienne. Pour cette raison, la communauté scientifique s'intéresse depuis plusieurs années aux éoliennes sur plates-formes flottantes. En eau profonde, cette technologie est intéressante. Mais le fait que l'éolienne ne soit pas encastrée au fond de la mer augmente très significativement les sollicitations mécaniques induites par les vagues.

Pour réduire ces sollicitations qui ont de nombreux effets néfastes, différentes approches sont possibles. Essayer de compenser les oscillations « avant-arrière » du mât de l'éolienne en pilotant la force de poussée exercée au niveau du rotor (en contrôlant l'angle des pales au cours de la rotation) a déjà été écarté dans la littérature. Nous nous sommes concentrés sur l'ajout d'un dispositif de stabilisation interne à la plate-forme, de type Tuned Liquid Column Damper (un tube en U contenant un liquide, TLCD, encore appelé tube anti-roulis), utilisé dans d'autres contextes. Le dispositif que nous proposons est un dispositif actif où les paramètres du TLCD sont ajustés en temps réel, au cours du mouvement induit par les vagues. La mise à jour des paramètres suit une stratégie reposant sur une analyse des interactions entre le TLCD et la plate-forme (appelée ici barge ou flotteur) sur laquelle est installée l'éolienne. Nous avons modélisé le mouvement du flotteur seul et son couplage avec le TLCD dans le plan grâce à une approche Lagrangienne. Nous avons étudié les effets des interactions du TLCD avec le flotteur dans le cas où le coefficient de perte de charge dans le tube était constant. Les limites de cette approche ont été détaillées en utilisant les résultats classiques de la littérature sur les oscillateurs mécaniques couplés. Nous nous sommes ensuite concentrés sur une approche active consistant à modifier les caractéristiques du système en temps réel [1]. Nous avons proposé des stratégies de

1. Une autre stratégie consistant à appliquer une force sur le liquide du tube, par exemple par l'intermédiaire d'une pompe, nécessiterait de mettre en jeu des énergies énormes puisque la masse du fluide du TLCD est de l'ordre de la centaine de tonnes.

mise à jour des caractéristiques du TLCD de type Linear Quadratic Regulator et de type Model Predictive Control agissant sur le coefficient de perte de charge. Ces approches permettent de limiter les oscillations du flotteur. Dans un deuxième temps, les simulations nous ont ensuite permis d'écarter la commande MPC dont le rapport performance / complexité n'est pas favorable par rapport à la commande LQR dans ce cas précis.

Une étude plus générale du système, en trois dimensions, nous a permis de vérifier que le TLCD classique dans sa version passive ou dans la version active que nous proposions n'est pas du tout robuste à l'incidence de la houle. Nous avons donc imaginé et modélisé des dispositifs inspirés du TLCD mais permettant d'amortir les oscillations de la houle de manière efficace, indépendamment de l'incidence de la houle. Nous avons nommé ces dispositifs TLMCD, pour Tuned Liquid Multiple Columns Damper.

Les dispositif que nous proposons sont des systèmes TLMCD actifs. Ils sont conçus d'après les modélisations 3D que nous avons développées et une étude des coûts. Pour ces dispositifs tri-dimensionnels, nous avons aussi détaillé les spécificités de la synthèse des stratégies LQR pour amortir les oscillations du flotteur indépendamment de l'incidence de la houle.

La performance de ces solutions d'amortissement a finalement été évaluée par simulation pour un large éventail de conditions de houle, couvrant les spécifications d'un "cahier des charges" que nous présentons. On observe une réduction des oscillations en roulis de la barge qui peut atteindre un facteur 4 par rapport à l'éolienne flottante sans TLCD. Ces résultats nous montrent que le dispositif TLMCD que nous proposons est un dispositif intéressant pour amortir de manière significative, robuste et économiquement abordable notre système.

Abstract

Thanks to the recent policies of subsidizing renewable energies, constructions of offshore wind farms are booming all over the world. Yet, fixed-bottom wind turbine technology, the only one currently deployed, are too costly for deep waters. This hinders the development of wind power. This is why the scientific community has an interest in floating wind turbines (FWT). The cost of these wind turbines does not depend much on water depth. But since the wind turbine is not fixed into the seabed, the mechanical stress caused by the waves significantly raises.

To reduce these detrimental loads, different approaches can be used. The literature already discarded the control of the wind thrust applied on the rotor to compensate the "fore-aft" oscillations of the tower. We focused on stabilizing floating wind turbine by means of an attached damping system placed inside the float, it is a Tuned Liquid Column Damper (a U-tube containing a liquid, TLCD, also known as anti-roll tank), used in other areas. The damper we propose is an active system where TLCD parameters are continuously modified. Parameters are updated according to a strategy defined thanks to an analysis of the interactions between TLCD and the float (referred to as barge) supporting the wind turbine. We modelled the coupled dynamics of the barge and the TLCD in the vertical plan using a Lagrangian approach. We studied the motions of the damped system for a constant head-loss coefficient in the TLCD. The limits of this approach were detailed thanks to the classic results in double oscillators literature. Then, we focused on an active approach involving a time varying of the head-loss coefficient. We proposed Linear Quadratic Regulator and Model Predictive Control strategies to determine the head-loss coefficient. At a later stage, simulations enabled us to discard the MPC strategy as its complexity/performance ratio is rather bad compared to the LQR strategy in this particular case.

A more general study of the system, in three dimensions, showed us that the TLCD is not robust against wave incidence. Therefore, we imagined and modelled new dampers inspired by the TLCD, which can damp the float effectively, regardless of the wave incidence. We named those dampers Tuned Liquid Multiple Column Damper (TLMCD).

The dampers we propose are active TLMCD. Their designs are based on their

dynamic properties and a cost study. We also detailed the specificities of LQR design to ensure the best possible robustness against wave incidence.

The performance of the proposed TLMCD dampers was assessed through numerical simulations for a wide range of sea conditions. We observe that barge roll can be reduced by a factor of four compared to the undamped FWT. These results show us that the TLMCD we propose is interesting to damp significantly, robustly and economically our FWT.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma reconnaissance à mes encadrants de thèse Nicolas Petit et Olivier Lepreux pour m'avoir suivi pendant ces années. Je tiens ensuite à remercier Mondher Farza et Jean-Yves Dieulot pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de mon mémoire. J'adresse de chaleureux remerciements aux autres membres du jury, Philippe Chevrel et Delphine Bresch-Pietri.

Je voulais aussi exprimer ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont épaulé pendant la préparation de cette thèse, et sans qui ce mémoire ne serait que l'ombre de ce qu'il est devenu. En premier lieu Nam, qui a suivi ma thèse presque d'aussi près que mes encadrants, et qui avait toujours des bonnes idées à me proposer pour me tirer des nombreuses embuches qui ont parsemé le chemin de la préparation de cette thèse. Je remercie aussi le département de Mécanique de l'IFPEN, Timothée, Pauline, Victor, Jean-Christophe, et les autres qui m'ont énormément appris sur l'hydrodynamique, les plateformes offshore et les éoliennes flottantes.

Je remercie également mes anciens compagnons de bureau pour leur sympathie : Johan, François, Thibault, Benjamin, Nam, Jean-Luc et Weijun. Un grand merci également aux nombreux membres du bureau d'études de l'IFPEN pour les dizaines de cafés et de croissants pris dans leurs locaux. Je remercie tout particulièrement Didier, Stéphane et Paul pour les kilomètres de nage parcourus et les bons moment partagés en leur compagnie.

Je dédie cette thèse à mon fiston Lucien

Table des matières

1 Introduction **12**

2 Motivations **15**
2.1 Description d'une éolienne flottante 15
2.2 Système considéré 16
2.3 Coûts d'une éolienne flottante 18
2.3.1 Coût du flotteur 18
2.3.2 Coût de l'éolienne 18
2.3.3 Coût des ancrages 20
2.3.4 Coûts d'installation 20
2.3.5 Autres coûts 20
2.3.6 Récapitulatif 20
2.4 Sollicitations 23
2.4.1 Sollicitations hydrodynamiques 23
2.4.2 Sollicitations aérodynamiques 24
2.5 Cahier des charges 25

3 État de l'art **26**
3.1 Contrôle d'oscillations 26
3.1.1 Génie maritime 26
3.1.2 Génie civil 27
3.1.3 Éolien 30
3.2 Choix : le TLCD 30
3.3 Bibliographie spécifique au TLCD 31
3.3.1 Amortissement des éoliennes offshores posées 31
3.3.2 Amortissement des plates-formes flottantes 31
3.3.3 Amortissement des éoliennes flottantes 32
3.3.4 Modélisation et Conception optimale 32
3.3.5 Stratégies de contrôle 33

4 Analyse planaire d'une barge portant une éolienne et munie d'un TLCD **34**
Liste des symboles 34
4.1 Modèle dynamique 36
4.1.1 Hypothèses de modélisation 36
4.1.2 Préliminaires géométriques 36
4.1.3 Modèle Hydrodynamique 40
4.1.4 Énergie mécanique du système 42
4.1.5 Forces généralisées 43
4.1.6 Équations de la dynamique 44
4.1.7 Validation des équations de la dynamique 46
4.2 Critère d'évaluation : la RAO 46
4.3 Analyse du système passif 47
4.3.1 Résultats 48
4.3.2 Modèle réduit 49
4.3.3 Paramètres optimaux 50
4.3.4 Commande Heuristique "Den Hartog" 51
4.4 Commande optimale en information complète 52
4.4.1 Formulation 52
4.4.2 Résolution numérique 53
4.4.3 Analyse mathématique d'un problème équivalent 54
4.5 Commande par feedback 62
4.5.1 LQR saturé : commande sans information de la houle 63
4.5.2 MPC avec prédiction de la houle 64
4.5.3 Comparaison des commandes appliquées au *modèle réduit* . . 67
4.5.4 Comparaison des commandes appliquées au *modèle complet* . 67
4.6 Tests de robustesse 67
4.6.1 Perte de charge minimale non nulle 71
4.6.2 Assiette moyenne 72
4.6.3 Mât flexible 74
4.6.4 Incidence de la houle 76

5 Systèmes 3D **80**
5.1 Conventions géométriques de la modélisation 3D 80
5.1.1 Orientation des repères les uns par rapport aux autres 80
5.1.2 Éléments relatifs au système d'amortissement 85
5.2 Modèles dynamiques 86
5.2.1 Forces généralisées 86
5.2.2 Système à N TLCD 87
5.2.3 TLMCD en étoile à N éléments 92

5.2.4 TLMCD en polygone à N éléments 95
5.3 Performances passives 98
5.3.1 Paramètres optimaux 99
5.3.2 Étude du modèle linéarisé 101
5.3.3 Préalables 105
5.3.4 RAO passives 106
5.4 Performances du contrôle semi-actif 106
5.4.1 Synthèse du contrôle LQR saturé 106
5.4.2 Robustesse à l'incidence de la houle 108
5.4.3 Résultats 110
5.5 Tests de robustesse 110

6 Résultats vis à vis du cahier des charges **112**

7 Conclusions et perspectives **122**
7.1 Conclusions 122
7.2 Perspectives 123
7.2.1 Changement du design du TLMCD 123
7.2.2 Ajout d'un actionneur supplémentaire 124

Bibliographie **126**

A Comparaison avec Holden et Fossen (2012) **133**
A.1 Équations du mouvement 133
A.2 Comparaison de k 135
A.3 Comparaison de C 135
A.4 Comparaison des forces généralisées 138
A.5 Bilan 138

B Symétrie des problèmes 3S et 3P **139**
B.1 Expression de P_{120} et P_F 139
B.1.1 Expression de P_F 139
B.1.2 Obtention de Θ_{120} 139
B.1.3 Expression de ω_{120} 141
B.1.4 Obtention de w_{120} et $\dot{w}_{120}$ 141
B.1.5 Expression de P_{120} 142
B.2 Pondération du LQR 142
B.3 Propriétés de la solution de l'équation de Riccati 144

C Résultats complémentaires sur les systèmes 3D **145**
C.1 Systèmes passifs : origine de la dépendance à l'incidence de la houle . 145
C.2 Robustesse du contrôle LQR non saturé par rapport à l'incidence de la houle 148
C.3 Comportement des systèmes 2U, 3S et 3P pour différentes incidences de houle polychromatique 148

D Tests de robustesse sur les systèmes 3D **151**
D.1 Perte de charge minimale non nulle 151
D.2 Assiette moyenne 152
D.3 Mât flexible 152

Chapitre 1

Introduction

Face au réchauffement climatique et à la raréfaction des ressources fossiles, la majorité des grandes puissances mondiales ont décidé d'introduire une part croissante d'énergies renouvelables dans leur politique énergétique. Il en résulte que l'énergie éolienne figure parmi les deux sources d'énergie connaissant la plus forte progression en termes de puissance installée annuellement (National Renewable Energy Laboratory, 2012).

Cependant, la réticence des riverains face aux nuisances visuelles provoquées par ces éoliennes ainsi que le vent de meilleure qualité disponible au large conduit nombre de pays à construire des fermes d'éoliennes loin des côtes, "offshore". En Europe, l'éolien offshore devrait atteindre 23.5 GW de puissance installée d'ici 2020, soit le triple de la capacité installée en 2015 (Ernst & Young, 2015). Cet intérêt porté aux installations offshore s'explique par la plus grande force et la plus grande régularité du vent en mer (au large), qui permettent un rendement théorique total supérieur, et, possiblement, un meilleur retour sur investissement. L'éolien offshore posé, c.-à-d. encastré dans le fond marin, représente la quasi-totalité des parcs éoliens offshore en projet actuellement. Dans ce contexte, le principal problème rencontré par des pays comme les États Unis, le Japon ou l'Espagne, dont les eaux territoriales sont profondes, est le fait que l'éolien offshore posé n'est pas économiquement viable dans des eaux dont la profondeur dépasse 60 m (Musial *et al.*, 2006), en raison du coût et de la complexité des moyens de génie civil nécessaires.

C'est majoritairement pour cette raison que la communauté scientifique ainsi que les industriels s'intéressent particulièrement aux éoliennes flottantes (FWT pour floating wind turbine), c.-à-d. fixées sur des flotteurs. Cette technologie présente un coût de construction et de mise en œuvre sensiblement identique, quelle que soit la profondeur de l'eau. Du point de vue du génie civil, les FWT sont moins sensibles aux conditions géotechniques [1] du fond marin que les éoliennes posées. De plus, leur main-

1. la géotechnique est l'étude des propriétés des sols et des roches en fonction des projets de

tenance est simplifiée car on peut aisément ramener une FWT au port. Cependant, cette technologie a pour inconvénient une plus grande sensibilité aux perturbations induites par les vagues. Ces perturbations augmentent les mouvements du flotteur et, in fine les sollicitations mécaniques sur plusieurs de ses éléments (Jonkman, 2007), notamment le mât, réduisant leur durabilité. On pourrait atténuer cette sensibilité à la houle en augmentant la taille et le poids du flotteur. Cependant, cette solution augmenterait le coût du kWh produit. On s'intéresse dans cette thèse à développer une autre solution.

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'atténuation des mouvements des éoliennes flottantes. Des travaux précédemment entrepris (Jonkman, 2007; Namik, 2012) ont essayé de compenser les oscillations « avant-arrière » du mât de l'éolienne en pilotant la force de poussée exercée au niveau du rotor, en contrôlant l'angle des pales de manière collective ou individuelle. Dans des calculs menés avec des ordres de grandeur réalistes, ces approches, que l'on pourrait qualifier de "logicielles" (car elles ne nécessitent l'ajout d'aucun matériel spécifique), montrent que les mouvements résiduels restent bien supérieurs à ceux observés sur la terre ferme. Le contrôle de l'angle des pales a usuellement pour objectif principal de maximiser la puissance produite par l'éolienne, or ici on a ajouté un objectif secondaire qui est de réduire les oscillations de l'éolienne flottante. Ces deux objectifs étant en concurrence, on récupère moins d'énergie. On constate aussi une augmentation de la fatigue à la base des pales. Pour réduire plus avant le roulis, il faut donc introduire un système d'amortissement spécifique. C'est le sujet de la thèse.

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

— Dans le Chapitre 2, nous présentons plusieurs types d'éoliennes flottantes, puis nous décrirons en détails celle que nous allons considérer durant toute cette thèse. Nous détaillons sa structure de coûts, et décrivons les sollicitations auxquelles est soumise l'éolienne. Enfin nous donnons le cahier des charges qui nous servira de base d'évaluation.

— Le Chapitre 3 passe en revue les différents systèmes d'amortissement des oscillations proposés en génie maritime et en génie civil. Ce panorama nous permet de choisir le système ayant le plus de potentiel pour les éoliennes flottantes : le Tuned Liquid Column Damper (TLCD).

— Nous modélisons la dynamique de l'éolienne flottante couplée avec le TLCD au début du Chapitre 4, puis nous étudions les performances passives de ce système. Dans le but d'améliorer les performances, nous proposons plusieurs contrôles de la restriction (perte de charge) du TLCD. En fin de chapitre nous constatons que les performances du TLCD dans sa forme classique sont bonnes mais, par construction, ne peuvent pas être robustes au changement de l'angle

construction.

de la houle.

— Plusieurs variantes tri-dimensionnelles du TLCD robustes à l'incidence de la houle sont proposées dans le Chapitre 5, nous écrivons ensuite les modèles de l'éolienne flottante couplée à ces systèmes, ainsi que le contrôle des restrictions et les conditions imposant la robustesse des performances de l'amortissement actif à l'orientation de la houle.

— Dans le Chapitre 6 nous étudions, sur un éventail de houles différentes, le respect du cahier des charges par l'éolienne flottante avec et sans système d'amortissement ainsi que les gains de performances dus au TLCD.

Chapitre 2

Motivations

Dans ce chapitre, nous allons d'abord décrire de manière très générale les différents types d'éoliennes flottantes, ainsi que les éléments les constituant. Dans un second temps, nous décrirons plus en détails l'éolienne flottante que nous étudierons tout au long de cette thèse. Dans un troisième temps, nous aborderons le coût de l'éolienne flottante choisie. Nous nous intéresserons ensuite aux sollicitations que subit l'éolienne en service. Pour terminer, nous fixerons un cahier des charges réaliste à respecter.

2.1 Description d'une éolienne flottante

L'éolienne flottante est constituée de plusieurs éléments. Tout en haut, il y a la nacelle dans laquelle se trouvent le réducteur de vitesse, la génératrice, le frein, l'anémomètre, et le moteur de lacet qui permet d'aligner le rotor avec le vent (voir Fig. 2.1). La nacelle soutient le rotor qui est composé le plus souvent de trois pales en matériaux composites. L'inclinaison de ces pales permet de contrôler le couple exercé sur l'arbre "basse vitesse". La nacelle et le rotor sont soutenus par le mât. Ces trois éléments constituent l'éolienne. Une éolienne flottante a besoin de flotter et de ne pas dériver, ces fonctions sont assurées respectivement par le flotteur et les ancrages.

Il existe trois grandes familles de flotteurs, elles sont illustrées en Fig. 2.2 . Ces flotteurs assurent leur stabilité grâce à différents principes physiques (Jonkman, 2007) :

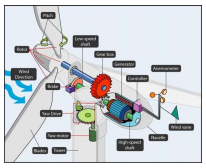


FIGURE 2.1 – Schéma d'une nacelle (Pao et Johnson, 2009)

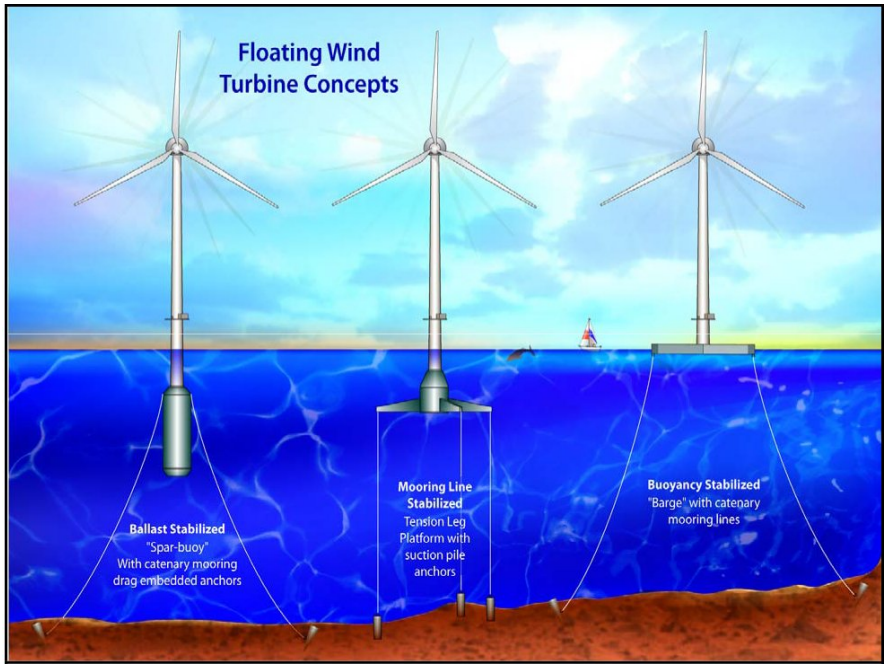


FIGURE 2.2 – concepts de plates-formes (Jonkman, 2007), le troisième type (barge) est l'objet de notre étude.

— Les flotteurs de type Spar sont stabilisés par leur grande inertie : leur fond est lesté, ce qui augmente considérablement leur masse et leurs moments d'inertie en roulis et en tangage.
— La TLP (tension leg platform) est une plate-forme tenue par des ancrages tendus, c'est la raideur induite par ces ancrages qui permet une grande stabilité.
— Le flotteur Barge est une plate-forme à fond plat, sa stabilité est assurée par la poussée d'Archimède.

2.2 Système considéré

Pour cette thèse, nous considérons la plate-forme MIT/NREL Shallow Drafted Barge (SDB). Nous avons choisi cette plate-forme car les barges sont les concepts de plate-forme les moins chers (Wayman, 2006), et que celle-ci est plus légère que l'autre barge présente dans la littérature (ITI Energy Barge) et moins chère. L'objectif que nous poursuivons ici est de prendre une plate-forme avec un coût bas et des performances modestes, puis d'améliorer son comportement grâce à un système de stabilisation additionnel.

C'est une barge cylindrique dont les dimensions et les caractéristiques sont données

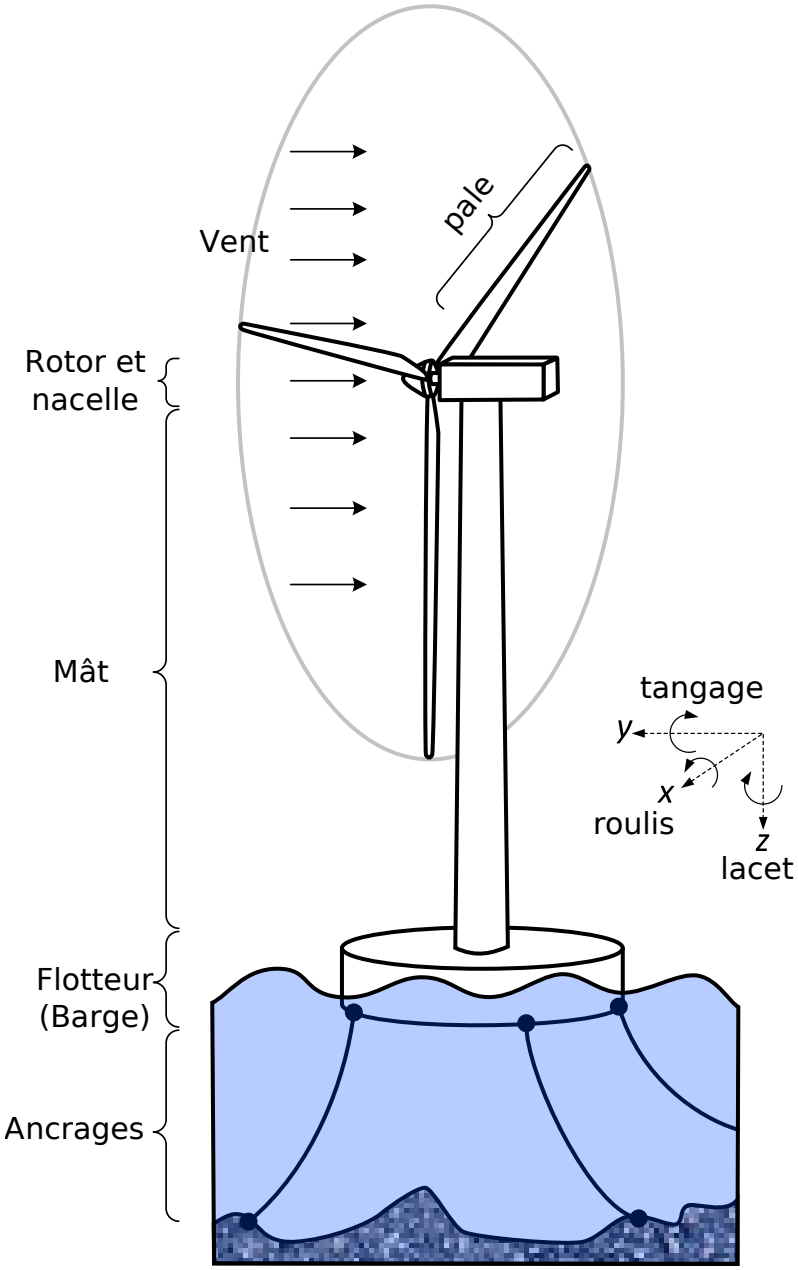


FIGURE 2.3 – Schéma de la barge avec l'éolienne et le TLCD, adapté de Li et Gao (2016). C'est l'objet d'étude de cette thèse.

Diamètre	36m
Hauteur	9m
Tirant d'eau	5m
Masse	4519T
Centre de masse (sous le niveau de la mer)	3.88m
Moment d'inertie en roulis	$3.90\ 10^8\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$
Moment d'inertie en tangage	$3.90\ 10^8\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$
Moment d'inertie en lacet	$7.51\ 10^8\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$
Masse de béton	4153T
Masse d'acier	366T

TABLE 2.1 – Caractéristiques de la Barge

en Table 2.1, elle est décrite plus en détails dans Wayman (2006).

Nous avons couplé cette barge avec l'éolienne NREL 5 MW dont les caractéristiques principales sont données en Table 2.2. Pour de plus amples informations au sujet de cette éolienne, le lecteur peut se reporter à Jonkman *et al.* (2009).

2.3 Coûts d'une éolienne flottante

Dans cette thèse nous aborderons l'impact économique de la solution d'amortissement que nous avons développé. Dans cette optique, nous devons avoir une idée du coût d'une éolienne flottante. On notera que dans cette estimation, les coûts amonts de recherche et développement n'ont pas été inclus.

2.3.1 Coût du flotteur

Pour estimer le coût du flotteur, nous multiplions la quantité de matière première par un prix donné par les hommes du métier de l'IFPEN [1]. Ces prix sont de 5 € / kg pour l'acier et de 1.5 € / L de béton, ils regroupent le prix de la matière première et le prix de la main d'œuvre. La masse d'acier est donnée en Table 2.1 et est de 366 T. Le volume de béton est de 1600 m^3 si l'on considère une densité du béton de 2,6 ce qui est classique pour les barges. Les résultats sont résumés en Table 2.3.

2.3.2 Coût de l'éolienne

Pour déterminer le prix de l'éolienne NREL 5 MW, nous appliquons à la lettre la méthode proposée dans Fingersh *et al.* (2006). Dans cet article, les prix des matériaux

1. Yann Poirette et Timothée Perdrizet, Direction Mécanique Appliquée

Puissance Nominale	5 MW
Type d'éolienne	horizontale, face au vent, 3 pales
Contrôle	vitesse variable, angle de pales commun
Transmission	haute vitesse, boîte à plusieurs rapports
diamètre du rotor	126 m
Hauteur de l'axe du rotor	90 m
Vitesse nominale du vent	11.4 m/s
Vitesse de rotation nominale	12.1 tours/min
vitesse nominale en bout de pale	80 m/s
Masse du rotor	110 T
Masse de la nacelle	240 T
Masse du mât	347 T
Centre de gravité de l'éolienne	$(-0.2\text{ m},\ 0.0\text{ m},\ 64\text{ m})$

TABLE 2.2 – Caractéristiques de l'éolienne NREL 5 MW

Matériau	quantité	Coût (k€)	% CAPEX Barge
acier	366 T	*1 830*	*43,26%*
béton	1600 m^3	*2 400*	*56,74%*
Total		*4 230*	*100,00%*

TABLE 2.3 – Coût de la barge MIT

Matériau	coût (€ / kg)
Fibre de verre	3
Adhésif dérivé du vinyle	0,14
métaux	1
Uréthane	5,42

TABLE 2.4 – Prix des matériaux (données internes IFPEN)

ne sont pas fournis, on a donc pris les valeurs données en Table 2.4. On obtient un prix d'environ 4.7 M€, le détail de ces coûts est présenté en Table 2.5.

2.3.3 Coût des ancrages

Nous détaillons en Table 2.6 le coût des ancrages définis dans Wayman (2006). Ces coûts sont actualisés grâce à l'indice PCCI (Power Capital Cost Index, hors nucléaire) fourni par *IHS Markit*[2].

2.3.4 Coûts d'installation

Nous estimons les coûts d'installation de la turbine sur la plate-forme et l'installation du tout en mer grâce aux valeurs proposées par Wayman (2006). Ces calculs ont été faits en supposant que le site d'installation de l'éolienne est à 80 km du chantier. Après actualisation des coûts grâce à l'indice PCCI, on obtient la Table 2.7 dont les totaux ont été arrondis. On supposera que les coûts de démantèlement, en fin de vie de l'éolienne, sont inchangés.

2.3.5 Autres coûts

Il est difficile de chiffrer précisément la connexion électrique de l'éolienne au continent. Ce coût dépend notamment du coût linéique du câble (lié à la puissance électrique qui transite), de la distance de la ferme éolienne au point d'accès au réseau, le tout divisé par le nombre d'éoliennes de la ferme. On l'a donc ignoré (en le fixant à zéro).

2.3.6 Récapitulatif

On arrive à un coût par éolienne flottante légèrement inférieur à 10 M€. Ces coûts sont récapitulés en Table 2.8. Grâce à ces informations, nous pourrons évaluer

2. `https://www.ihs.com/info/cera/ihsindexes/`

Blocs	Composant	Coût (k€)	% CAPEX turbine
Rotor		*1 398*	*29,78%*
	Pales	1 129	24,04%
	Moyeu	90	1,90%
	Système de rotation des pales	171	3,64%
	Spinner	9	0,20%
Nacelle		*1 934*	*41,21%*
	Axe faible vitesse	11	0,23%
	Roulements	88	1,89%
	Boite de vitesses 3 étages	638	13,60%
	Générateur asynchrone haute vitesse	303	6,45%
	Frein	9	0,20%
	Électronique Vitesse Variable	368	7,83%
	Roulements et moteur d'orientation	106	2,26%
	Cadre	112	2,38%
	Connections électriques	186	3,97%
	Hydraulique de refroidissement	56	1,19%
	Coque nacelle	57	1,22%
Contrôle, Système de sécurité, Monitoring		*51*	*1,09%*
Mât		*752*	*16,02%*
Traitement maritime		*558*	*11,89%*
Total turbine		*4 693*	*100,00%*

TABLE 2.5 – Coût de l'éolienne selon la méthodologie de Fingersh *et al.* (2006) à partir de la puissance nominale de la génératrice, de l'altitude de la nacelle et du diamètre du rotor donnés en Table 2.2

Lignes d'ancrage		
	Longueur de chaine	53.6 m/ligne
	Longueur de caténaire	148.4 m/ligne
	coût de la chaine	250 €/m
	coût de la caténaire	56 €/m
	nombre de lignes	8/FWT
	Total	*194 k€/FWT*
Ancres		
	Force nécessaire	1.91 MN
	Coût par Newton	14 €/N
	Nombre d'ancres	4/FWT
	Total	*106 k€/FWT*
Total		*300 k€/FWT*

TABLE 2.6 – Coûts des ancrages d'après Wayman (2006), actualisés.

Transport de l'éolienne sur site		
	Prix du km	120 €
	Distance à parcourir (a/r)	160 km/FWT
	Remorqueur	28 k€/j
	Main d'œuvre	11 k€/j
	Temps nécessaire	3 j/FWT
	Total	*135 k€/FWT*
Installation des Ancrages		
	Navire d'ancrage	60 k€/j
	Main d'œuvre	6.5 k€/j
	Pompes et pilotes	6.5 k€/j
	Ancres installés	7/j
	Ancres/turbine	4
	Total	*42 k€/FWT*
Total des Frais d'installation		*177 k€/FWT*

TABLE 2.7 – Coûts d'installation de l'éolienne flottante en mer

	coût (k€)	% CAPEX
Barge	4230	44,17%
Éolienne	4693	49,00%
ancrages	300	3,13%
installation	177	1,85%
démantèlement	177	1,85%
Total	*9577*	*100,00%*

TABLE 2.8 – Récapitulatif du chiffrage de l'éolienne flottante

l'impact économique de notre solution d'amortissement sur l'éolienne flottante.

2.4 Sollicitations

Dans cette section, nous détaillons les sollicitations mécaniques auxquelles l'éolienne flottante est soumise. Ces sollicitations ont deux origines distinctes ; i) les forces dues à l'interaction de la houle avec la barge c.-à-d. les forces hydrodynamiques, ii) les forces venant de l'interaction de l'air avec les pales c.-à-d. les forces aérodynamiques.

2.4.1 Sollicitations hydrodynamiques

Nous avons pris en compte l'action de la houle sur la barge de manière très classique. Comme dans Jonkman (2007), nous avons choisi de considérer les lois de l'hydrodynamique linéaire, auxquelles nous avons ajouté la force de traînée visqueuse de Morison (Morison *et al.*, 1950).

Afin de calculer la force exercée par ces différents phénomènes physiques, nous avons besoin de la hauteur de l'eau à l'origine de notre repère à chaque instant. Dans le cas d'une vague monochromatique, on a simplement $H(t) = \frac{Hc}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ avec Hc la hauteur crête-à-crête de la houle et T sa période. Pour la houle polychromatique la hauteur de l'eau à l'instant t s'écrit

$$H(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(Hs, Tp, \gamma)\cos(\omega_i t + \phi_i)$$

avec ω_i et ϕ_i la pulsation et le déphasage associé à chaque sinusoïde et a_i une valeur qui dépend du spectre de houle choisi. Hs et Tp sont définis ci-après. Pour déterminer a_i nous avons choisi le spectre JONSWAP (Hasselmann *et al.*, 1973). Cette densité spectrale de puissance est basée sur des données recueillies au large de la Mer du Nord, c'est un des spectres usuels en hydrodynamique (Molin, 2002, §2.1.5).

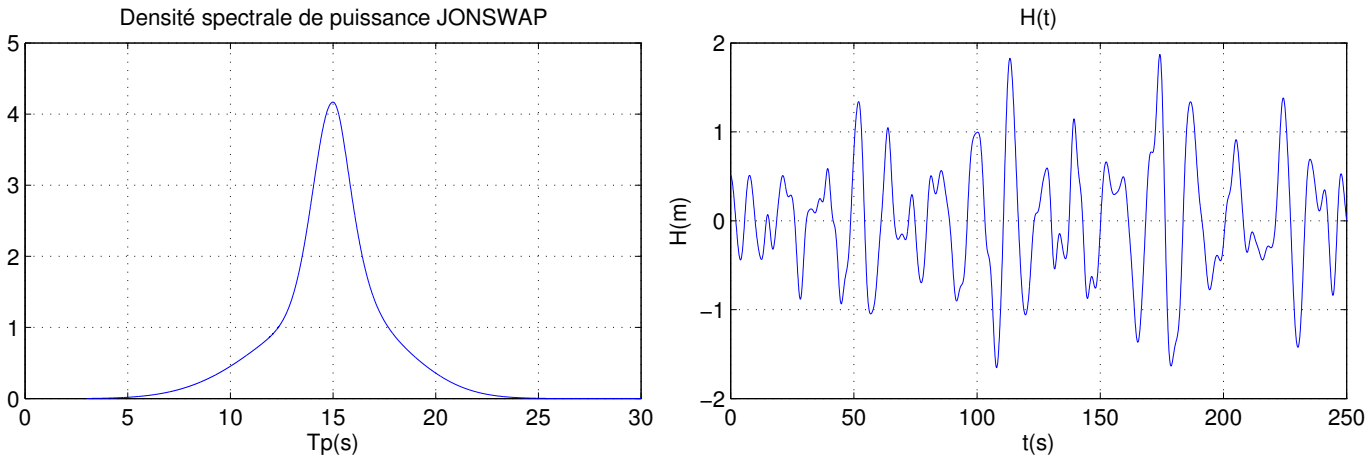


FIGURE 2.4 – Le spectre JONSWAP pour $Hs = 3m$ et $Tp = 15s$ ainsi que $H(t)$

Nous avons choisi de prendre $n = 200$ pour créer la houle irrégulière. Leurs périodes ($T_i \triangleq \frac{2\pi}{\omega_i}$) sont comprises entre 3 s et 120 s, le déphasage ϕ_i de chaque sinusoïde est choisi aléatoirement (uniformément sur $[0, 2\pi]$).

La densité spectrale de puissance dépend de trois paramètres principaux, Hs est la hauteur caractéristique de la houle, Tp la période pic de la houle, et γ le facteur de forme du spectre. Ces valeurs dépendent de l'état de mer. Pour chaque lieu, les Hs et Tp ont une certaine probabilité d'apparaître. Ces probabilités sont reportées dans un tableau que l'on appelle Scatter Diagram, valable uniquement pour un lieu donné. Malheureusement le Scatter Diagram ne fournit pas le coefficient γ, nous l'avons donc remplacé par une valeur arbitraire $\gamma = 3.3$, cette valeur nous a été donnée par les hommes du métier de l'IFPEN [3].

2.4.2 Sollicitations aérodynamiques

Nous n'avons pas ajouté de module aérodynamique à notre simulateur, ni couplé le système de stabilisation avec un logiciel de simulation multi-physique d'éolienne flottante tel que Deeplines Wind, par manque de temps notamment. Cela pourrait être fait dans des études ultérieures. L'University of Massachusetts Amherst a développé un module au programme FASTv8 qui simule le comportement d'une éolienne flottante couplée avec un ou deux systèmes masse-ressort (TMD) (La Cava et Lackner, 2015). C'est le seul outil à notre connaissance qui introduise un système de stabilisation dans un logiciel de simulation d'éolienne flottante. Dans cette thèse, nous ferons apparaître la force du vent comme une force moyenne qui modifie l'angle moyen de

3. J.-Ch. Gilloteaux, Direction Mécanique Appliquée, IFPEN

roulis (assiette) de l'éolienne flottante. C'est le modèle le plus simple (ordre zéro) des sollicitations aérodynamiques.

2.5 Cahier des charges

Nous reprenons le cahier des charges donnés dans Poirette *et al.* (2014), requérant que :

— l'accélération de la nacelle soit inférieure à 2.5 m/s^2
— les oscillations en roulis ne dépassent pas les 10° par rapport à la verticale
— l'angle de roulis moyen (assiette) ne dépasse pas les 5°.

Nous souhaitons aussi bien entendu avoir un système d'amortissement qui ait un coût le plus faible possible, tant au niveau de l'investissement nécessaire à sa construction, que de sa consommation énergétique, ou encore de son coût de maintenance.

Comme on le verra, c'est le critère du coût qui va le plus définir le choix du système de stabilisation, et le choix du type d'actionneur, qui se matérialisera en 3.2.

Chapitre 3

État de l'art

3.1 Contrôle d'oscillations

Une première étude bibliographique montre qu'il existe deux domaines principaux dans lesquels des systèmes de contrôle de vibrations peuvent être utilisés à des dimensions du même ordre de grandeur que celles de notre problème. Ces deux domaines sont le génie maritime et le génie civil. Nous allons présenter ces différents systèmes. Nous aborderons aussi les solutions technologiques déjà envisagées dans d'autres études de stabilisation des éoliennes. On utilise dans ce qui suit les définitions de roulis-tangage-lacet illustrées sur la Figure 2.3.

3.1.1 Génie maritime

Sur les navires, la faisabilité de dispositifs d'atténuation du roulis a été démontrée depuis plus d'un siècle avec l'invention de la quille de roulis (Perez et Blanke, 2012). Depuis les années 1970, aucun nouveau système d'amortissement du roulis n'a émergé (Perez et Blanke, 2012). Ces différentes solutions sont :

1. La *quille de roulis* (Fig. 3.1) qui est une excroissance sous la coque, dans le sens de la longueur entraînant en mouvement une masse d'eau importante et engendrant des frottements visqueux en cas de roulis. Ce type d'élément se retrouve assez régulièrement dans la conception de plates-formes offshores flottantes sous le nom de "heave plates" (Holmes *et al.*, 2001). Ce dispositif étant entièrement passif (ses paramètres ne peuvent pas être changés simplement en temps réel), il n'est pas candidat à être actionneur (ce qui n'exclut pas de l'utiliser en complément du système de stabilisation choisi).
2. Le *gyrostabiliseur* qui stabilise un navire grâce à l'effet gyroscopique créé par une ou plusieurs masses en rotation. Cependant, en raison de leur coût élevé,

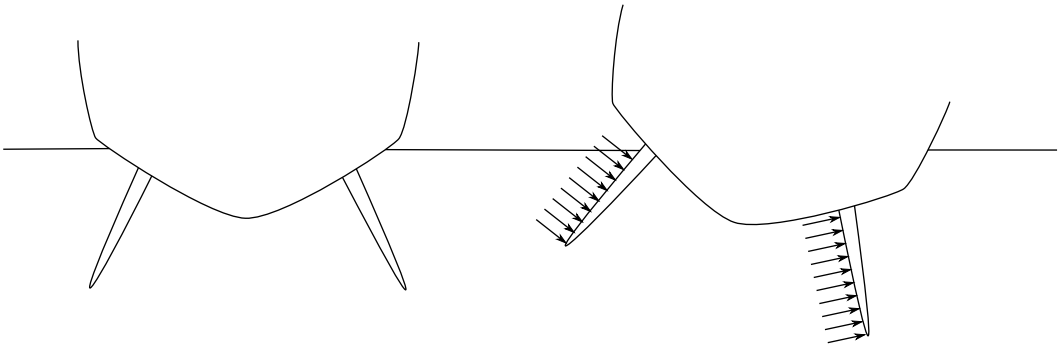


FIGURE 3.1 – fonctionnement d'une quille de roulis

de leur poids et des grandes contraintes mécaniques engendrées dans la coque, cette solution a été le plus souvent écartée par le passé. Récemment, l'industrie du ce dispositif a été remis au goût du jour pour les bateaux qui se retrouvent fréquemment à l'arrêt en mer (gardes-côtes, yachts, etc...) (Perez et Steinmann, 2009; Perez et Blanke, 2012; Townsend et Shenoi, 2011, 2013).

3. Les *ailerons stabilisateurs* (Fig. 3.2 [1]) ont un principe de fonctionnement proche de celui des ailes d'un avion, puisqu'ils se servent de la vitesse relative de l'eau pour créer une force de portance en contrôlant leur inclinaison. Ces ailerons, placés de part et d'autre de la coque, créent un couple qui peut servir à contrôler le roulis (Perez et Blanke, 2012).
4. Les *gouvernails* peuvent atténuer le roulis par le même principe. Néanmoins, leur rôle principal est de contrôler le cap (Perez et Blanke, 2012).
5. Le *tube en U* (Fig. 3.3), proposé par (Frahm, 1911), est un tube (en forme de U) partiellement rempli d'eau constituant un oscillateur dont la période propre est définie par sa longueur et ses changements de section. L'énergie y est dissipée par une restriction au centre de la partie horizontale qui contient de l'eau ou par l'éventuelle partie horizontale qui contient de l'air.

Avant de mesurer le pour et le contre de chaque dispositif, nous devons encore introduire les dispositifs proposés dans le domaine du génie civil.

3.1.2 Génie civil

Dans le domaine du génie civil, la construction de structures (bâtiments, ponts) de plus en plus grandes ou flexibles a conduit au développement et à l'installation de

1. `www.pinfabb.com/energy-saving`

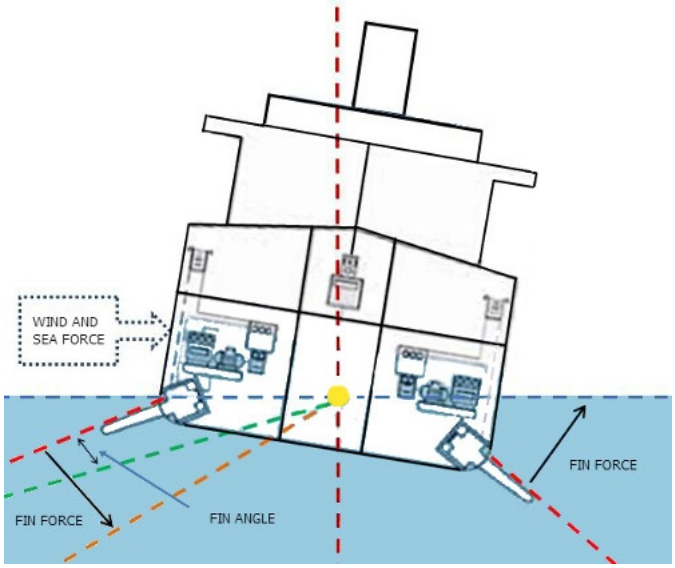


FIGURE 3.2 – Ailerons stabilisateurs

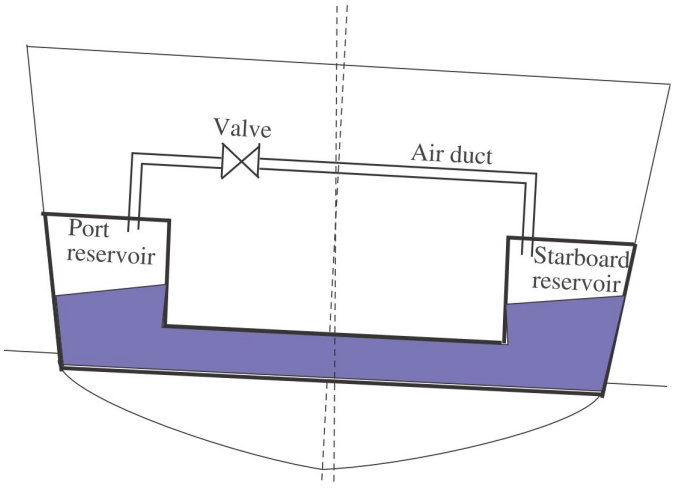


FIGURE 3.3 – Tube en U (Perez et Blanke, 2012)

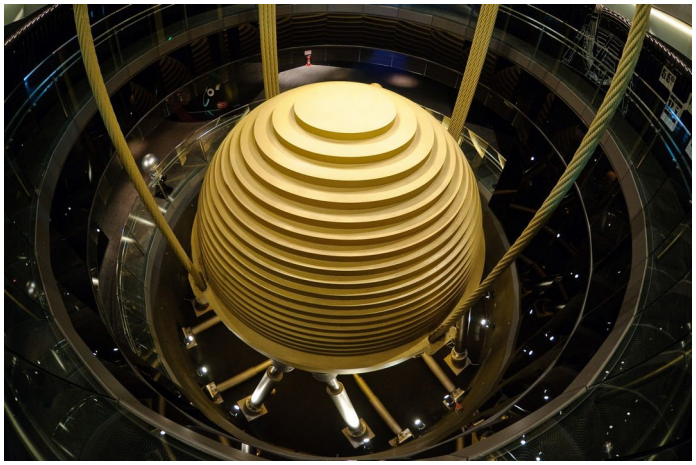


FIGURE 3.4 – Amortisseur pendule du gratte-ciel Taipei 101

dispositifs de stabilisation dans les gratte-ciels et les ponts afin d'amoindrir l'impact du vent et des tremblements de terre (Ikeda, 2009; Wu *et al.*, 2008).

1. Le *Tuned Mass Damper* (TMD) (Hrovat *et al.*, 1983) est un système masse ressort, souvent équipé d'un amortisseur visqueux, et dont la période de résonance est classiquement déterminée par le ratio de la masse sur la raideur. Généralement sa période de résonance est choisie comme étant la période de résonance de la structure.
2. Le *pendule* (Fig. 3.4 [2]) repose sur le même concept que le TMD : c'est une masse qui oscille. Sa raideur et sa période propre sont directement liées à la gravité et à la longueur du balancier (Wilmink et Hengeveld, 2006).
3. Le *Tuned Liquid Column Damper* (TLCD) est une copie du tube en U de Frahm (Frahm, 1911), évoqué plus haut dans le cadre des navires, seule la terminologie change dans le cadre du génie civil (Chang et Hsu, 1998).
4. Le *Tuned Sloshing Damper*, noté TSD, est un réservoir rempli d'eau (Fig. 3.5 [3]). Le gratte-ciel transmet son énergie cinétique à l'eau qui va donc osciller. L'énergie est dissipée de deux manières : premièrement, des dispositifs placés dans le réservoir perturbent le mouvement de l'eau et créent des turbulences. Deuxièmement, les vagues créées à la surface libre à l'intérieur du réservoir dissipent de l'énergie en se brisant. La longueur du réservoir définit la période propre dans la direction de l'oscillation (Kareem, 1990).

Nous avons introduit les principaux dispositifs d'amortissement proposés par la littérature du génie civil. Avant de confronter ces solutions, il nous faut encore voir les

2. commons.wikimedia.org/wiki/File:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper_2010.jpg
3. continuingeducation.construction.com/article_print.php?L=5&C=415

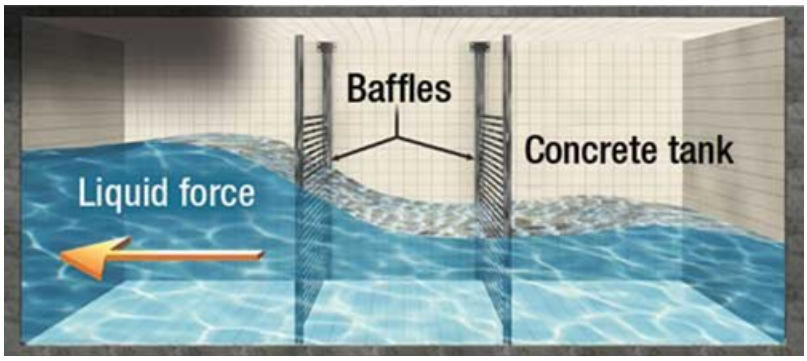


FIGURE 3.5 – Tuned Sloshing Damper

solutions proposées spécifiquement pour l'amortissement des éoliennes.

3.1.3 Éolien

Plusieurs études récentes se sont intéressées spécifiquement à la stabilisation des éoliennes, flottantes ou non, grâce à un actionneur supplémentaire. La plupart ont opté pour la solution TMD (Lackner et Rotea, 2011; Stewart et Lackner, 2013; Stewart, 2011; Si *et al.*, 2014) et certaines autres, pour le TLCD (Colwell et Basu, 2009; Luo *et al.*, 2011; Wilmink et Hengeveld, 2006).

3.2 Choix : le TLCD

Parmi toutes les solutions techniques évoquées précédemment, nous devons écarter les solutions navales utilisant la vitesse relative du navire par rapport à l'eau pour réduire le roulis car l'éolienne flottante est quasiment immobile. Il reste donc en lice le TLCD, le TSD, le TMD, le pendule et le gyrostabiliseur. Parmi ces solutions, deux critères permettent de réduire les choix possibles, i) le coût du dispositif, ii) son besoin en maintenance. Le critère du coût nous permet de mettre de côté le TMD, le pendule (celui en exemple a coûté plus de 4 M$ [4]) (Chang et Hsu, 1998) et le gyrostabiliseur [5]. Il nous faut donc départager entre le TLCD et le TSD. Nous éliminons finalement le TSD, car nous ne pouvons pas introduire facilement de moyen de contrôle du mouvement du fluide. Nous choisissons donc le TLCD.

4. `www2.taipei-101.com.tw/en/DB/damper.swf`

5. Une extrapolation des prix d'un constructeur de gyrostabiliseurs navals montre qu'il faudrait 10.8 M$ pour équiper notre éolienne flottante de 5216 T `https://www.seakeeper.com/seakeeper_products/seakeeper-35/`

3.3 Bibliographie spécifique au TLCD

3.3.1 Amortissement des éoliennes offshores posées

Dans la littérature, on peut voir que le TLCD a déjà été étudié pour amortir les oscillations avant-arrière de la nacelle d'une éolienne offshore posée. Wilmink et Hengeveld (2006) ont placé un TLCD passif dans la nacelle, ils arrivent à réduire l'oscillation du système d'environ 60% pour une excitation monochromatique. On verra en Fig. 4.3, qu'il existe un paramétrage du TLCD qui supprime pratiquement les oscillations pour une excitation monochromatique bien choisie. De plus les auteurs n'abordent pas du tout la question de la conception du TLCD. Il est donc compliqué de tirer des enseignements de cette publication.

Colwell et Basu (2009) ont étudié l'impact d'un TLCD passif sur une éolienne offshore posée sujette à des sollicitations hydrodynamiques et aérodynamiques moyennes ($Hs = 3.3$ m, $Tp = 7.2$ s) à fortes ($Hs = 5.2$ m, $Tp = 8.5$ s). Le TLCD utilisé a une masse de 1.6 tonnes soit 1% du poids de la structure, et sa période propre est réglée à 99.2% de celle de la structure. Cette étude conclut que le TLCD est efficace pour réduire les oscillations causées par des sollicitations polychromatiques sévères et peut diminuer les crêtes des oscillations jusqu'à 55% par rapport au système sans TLCD.

Dans les travaux sur les éoliennes offshore posées TLCD est placé dans la nacelle et il est soumis à un mouvement de translation horizontale alors que dans notre étude le TLCD est situé au niveau de l'eau et il est soumis à une rotation (le roulis). Les résultats obtenus pour les éoliennes offshore posées ne sont donc pas comparables avec ceux obtenus dans notre étude.

3.3.2 Amortissement des plates-formes flottantes

Dans Lee *et al.* (2006), une plate-forme flottante de type TLP est équipée d'un TLCD passif. Il est dit que le TLCD présenté peut réduire théoriquement l'amplitude des oscillations en houle monochromatique jusqu'à 70%, cependant les validations expérimentales qu'ils ont effectuées montrent que l'efficacité du TLCD est légèrement inférieure à la valeur théorique mais reste bonne. Les auteurs en concluent que le TLCD est une piste intéressante pour amortir les plates-formes flottantes.

Des travaux ultérieurs (Lee et Juang, 2012) proposent l'intégration physique d'un TLCD passif dans l'architecture de la plate-forme TLP. Là encore, la réduction de l'amplitude des oscillation en roulis pour différentes houles monochromatiques est intéressante puisqu'elle atteint 50% lors de la phase expérimentale.

3.3.3 Amortissement des éoliennes flottantes

Jaksic *et al.* (2015) ont intégré plusieurs TLCD passifs dans une plate-forme TLP pour éoliennes flottantes, ces TLCD sont réglés à différentes périodes afin d'amortir au mieux les oscillations en cavalement (déplacement horizontal) pour un large éventail de périodes de houle. Les auteurs essaient dans cette étude de déterminer quel est le bon nombre de TLCD ainsi que le réglage le plus adéquat pour amortir le cavalement. En soumettant leur plate-forme à une houle polychromatique, ils obtiennent une réduction du déplacement maximal comprise entre 10 et 16% selon le paramétrage des TLCD. Comme dans nos travaux, la force du vent est modélisée par une force moyenne appliquée en haut du mât.

Dans (Luo *et al.*, 2011) l'intégration d'un TLCD dont la perte de charge est modifiée en temps réel dans une éolienne flottante est traitée, mais les caractéristiques de la plate-forme ne sont pas présentées. Le seul résultat proposé par les auteurs est obtenu avec une seule simulation en houle monochromatique ce qui n'est pas pertinent.

3.3.4 Modélisation et Conception optimale

Depuis la formulation du TLCD en 1911, beaucoup de travail a été effectué pour modéliser son comportement et le couplage avec la structure qu'il amortit. La modélisation est soit faite par une approche énergétique (Lagrangienne (Chang et Hsu, 1998; Wu *et al.*, 2008) ou Hamiltonienne (Holden et Fossen, 2012)), comme nous le faisons aussi, soit à l'aide des équations de mécanique des fluides (Hochrainer et Ziegler, 2006) ou encore en appliquant directement le principe fondamental de la dynamique (Marzouk et Nayfeh, 2009). Une équipe de recherche (Di Matteo *et al.*, 2014) est actuellement en train d'améliorer ce modèle, pour le cas où l'hypothèse, utilisée par la littérature et par nous-même, consistant à négliger le diamètre des colonnes par rapport à leur longueur n'est plus valide, dans cette thèse nous négligerons le diamètre des colonnes devant leur longueur lors de la modélisation du système.

Un effort tout particulier a été mené pour connaître les paramètres de conception optimaux du TLCD passif. La littérature en génie civil est plutôt abondante à ce sujet (Gao *et al.*, 1997; Wu *et al.*, 2009; Yalla et Kareem, 2000). Yalla et Kareem (2000) souhaite minimiser la variance des oscillations pour une excitation donnée (bruit blanc). Wu *et al.* (2009) ainsi que Gao *et al.* (1997) cherchent les paramètres de conception minimisant le gain maximum de la fonction de transfert du système couplé, ils utilisent deux méthodes différentes. Nous utiliserons l'approche développée par Wu *et al.* (2009) pour paramétrer notre TLCD.

3.3.5 Stratégies de contrôle

Depuis les années 2000, plusieurs articles de génie civil ont proposé des stratégies de contrôle du comportement du liquide dans le TLCD, pour augmenter l'amortissement de la structure à laquelle il est attaché.

Il a été proposé, entre autres par Chen et Ko (2003), de placer une pompe dans le tube horizontal du TLCD. Cette pompe est utilisée suivant une stratégie de contrôle linéaire quadratique. Ses résultats montrent que le TLCD ainsi contrôlé amortit les oscillations jusqu'à trois fois mieux que les systèmes passifs traditionnels pour une excitation monochromatique. Il a aussi été proposé par Fu (2011) de contrôler le liquide du TLCD par l'ajout de gaz sous pression dans les parties des colonnes verticales contenant de l'air. Suivant une méthode de contrôle LQR, les résultats obtenus montrent des réductions des oscillations comprises entre 40% et 90% pour le tremblement de terre.

Dans ces travaux, les auteurs ne nous fournissent pas les puissances développées par leur système d'amortissement, dans le contexte de l'éolien flottant, on comprend bien que, si on injecte une part non négligeable de l'énergie produite dans la stabilisation de l'éolienne, on augmente le coût du kilowatt-heure. De plus, l'utilisation d'actionneurs actifs complexes multiplie la probabilité de panne.

En génie civil, cette problématique de fiabilité a bien été intégrée par les concepteurs, puisqu'il est critique d'éviter les pannes du système de stabilisation lors des tremblements de terre. C'est donc naturellement qu'on s'est tourné vers les systèmes de stabilisation semi-actifs. Leur concept est simple : au lieu de contrôler le système en injectant de l'énergie (e.g. mécanique ou pneumatique), on modifie en temps réel les caractéristiques de notre TLCD. Par exemple, certains papiers cherchent à contrôler la perte de charge induite par une restriction variable placée dans le tube horizontal (Yalla *et al.*, 2001; Li et Huo, 2003; Kim et Adeli, 2005; Luo *et al.*, 2011). D'autres viennent contrôler le débit d'air entre les deux colonnes verticales par l'ajout d'une vanne (Sorge *et al.*, 2012).

Le contrôle semi-actif est naturellement limité par le fait qu'il ne peut pas injecter d'énergie dans le système, les papiers dont on a parlé ci-dessus n'ont pas communiqué sur la performance d'amortissement qu'on pouvait espérer du TLCD. Ils n'ont pas non plus abordé les problèmes spécifiques au couplage du TLCD à une éolienne flottante. Ce sont ces points qui seront traités dans cette thèse.

Chapitre 4

Analyse planaire d'une barge portant une éolienne et munie d'un TLCD

Dans le chapitre précédent nous avons vu que le TLCD est le dispositif d'amortissement le plus prometteur. Dans ce chapitre nous étudierons une barge portant une éolienne et munie d'un TLCD, système pour lequel nous établissons un modèle dans le plan. Nous aborderons les performances passives du TLCD à la lumière de la littérature classique sur les oscillateurs mécaniques. Nous paramètrerons notre TLCD pour obtenir les meilleures performances passives possibles. Finalement, nous comparerons les performances de différentes stratégies de contrôle de la restriction du TLCD.

Liste des symboles

$\mathcal{R}_e$	repère lié à la terre
$\mathcal{R}_b$	repère lié à la barge
$R(\varphi)$	matrice de rotation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
CdG	centre de gravité du système barge, éolienne
$\mathbf{x}^e \triangleq [0, y, z]^\top$	position de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
$\Theta \triangleq [\varphi, 0, 0]^\top$	orientation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
$\mathbf{v}^b$	vitesse de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
ω^b	vitesse de rotation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
q_s	vecteur de positions généralisées du flotteur

v_s	vecteur de vitesses généralisées du flotteur
w	hauteur de liquide dans les colonnes verticales du TLCD
q	positions généralisées de la FWT et du TLCD
v	vitesses généralisées de la FWT et du TLCD
$\mathcal{P}$	matrice de passage telle que $v = \mathcal{P}\dot{q}$
$S(x)$	matrice associée au produit vectoriel par le vecteur x, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, $S(x)\, y = x \times y$ et $S^\top = -S$
A_h	section horizontale du TLCD
A_v	section verticale du TLCD
ν	rapport des sections du TLCD
σ	abscisse curviligne le long du TLCD
$\mathbf{r}^b(\sigma) \triangleq \left[x_t^b, y_t^b(\sigma), z_t^b(\sigma)\right]^\top$	géométrie du TLCD
L_h	longueur de la colonne horizontale du TLCD
L_v	longueur de la colonne verticale du TLCD
e	distance entre CdG et la colonne horizontale
$A_t(\sigma)$	section du TLCD
ς_p,ς_s	abscisse curviligne des surfaces libre du TLCD
ρ	masse volumique du liquide dans le TLCD
η	coefficient de perte de charge de la restriction située dans la colonne horizontale du TLCD
$v_t(\sigma)$	vitesse de l'eau dans le TLCD
M_s	matrice de masse de la barge
K_s	matrice de rappel hydrostatique et de raideur d'ancrage
$F(t)$	force de la houle
$F_{rad}(t, v_s, \dot{v}_s)$	force des radiations
$F_{visc}(t, v_s)$	traînée visqueuse de Morison

4.1 Modèle dynamique

Le modèle est développé dans un plan vertical prenant en compte seulement trois degrés de liberté : le roulis [1], l'embardée [2], et le pilonnement [3]. Souvent dans les études concernant les éoliennes flottantes, la houle arrive le long du vecteur x, nous avons choisi ici que la houle serait selon y pour faciliter la comparaison de notre modélisation avec celles présentées dans les travaux de génie naval.

Nous étudions le système dans le plan car il contient déjà deux effets intéressants et complexes. D'une part, les mouvements de pilonnement et de roulis sont couplés et, d'autre part, comme nous l'avons vu pour les applications de génie civil, le mouvement de translation horizontale a un impact non négligeable sur le mouvement du liquide du tube.

4.1.1 Hypothèses de modélisation

Pour modéliser dans le plan (y, z) le système éolienne flottante couplé au TLCD, nous nous appuierons sur les hypothèses suivantes.

1. Le système mécanique composé de la barge et de l'éolienne est rigide.
   En conséquence,
2. le centre de gravité, CdG, du système composé du flotteur et de l'éolienne est fixe dans le repère lié à l'éolienne,
3. le fluide dans le TLCD est incompressible,
4. les largeurs des colonnes du TLCD sont négligeables devant leurs longueurs,
5. le déplacement du fluide est uniforme dans chaque colonne,
6. les surfaces libres du fluide se situent à tout instant dans les colonnes verticales.

4.1.2 Préliminaires géométriques

Description et propriétés des repères

Dans ce chapitre nous allons utiliser deux repères : le repère lié à la barge sera noté $\mathcal{R}_b \triangleq (CdG, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$ et le repère galiléen lié à la terre sera noté $\mathcal{R}_e \triangleq (O, \mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e, \mathbf{z}_e)$. Tout vecteur $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ est noté $\mathbf{r}^b$ s'il est exprimé dans $\mathcal{R}_b$ et noté $\mathbf{r}^e$ s'il est exprimé dans $\mathcal{R}_e$. On note que CdG, l'origine de $\mathcal{R}_b$, est le centre de gravité du système {flotteur, éolienne}. On note aussi que $\mathbf{z}_b$ et $\mathbf{z}_e$ pointent vers le bas.

1. mouvement de rotation avant-arrière, autour de l'axe x
2. translation avant-arrière, selon y
3. translation de haut en bas, selon z

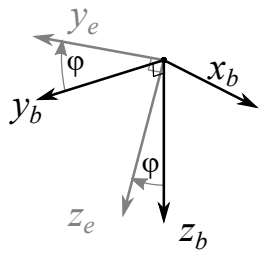


FIGURE 4.1 – Orientation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$ (un seul angle intervient, φ, défini dans le sens trigonométrique, il est ici représenté positif)

L'orientation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$ est définie par l'angle de roulis, noté φ, et la matrice de rotation autour de $\mathbf{x}_b$ associée

$$R(\varphi) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

On a donc

$$\dot{\mathbf{x}}^e = R(\varphi)\,\mathbf{v}^b$$

avec $\mathbf{x}^e \triangleq [0, y, z]^\top$ la position de CdG dans $\mathcal{R}_e$ et $\mathbf{v}^b \triangleq \left[\mathbf{v}_x^b, \mathbf{v}_y^b, \mathbf{v}_z^b\right]$ la vitesse de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$, exprimée dans $\mathcal{R}_b$.

En notant $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top \in \mathbb{R}^3$, la matrice du produit vectoriel $S(\mathbf{x})$,

$$S(\mathbf{x}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} = -S(\mathbf{x})^\top$$

on a par conséquent $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $S(\mathbf{x})\,\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$. On note ω^b la vitesse de rotation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$ exprimée dans $\mathcal{R}_b$, on a $\omega^b \triangleq [\dot{\varphi}, 0, 0]^\top$. La dérivée temporelle de R est donnée dans Landau et Lifshitz (1976) et vaut

$$\dot{R} = R(\varphi)\ S(\omega^b)$$

On pose $q_s \triangleq \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \end{bmatrix}$, les coordonnées généralisées du flotteur au sens de la mécanique Lagrangienne (Pommier et Berthaud, 2010), et $v_s \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_y^b \\ \mathbf{v}_z^b \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$, le vecteur des vitesses du flotteur exprimées dans $\mathcal{R}_b$.

Description de la géométrie du tube

Le TLCD est constitué de deux tubes verticaux, de section A_v et de longueur L_v, connectés entre eux par un tube horizontal de section A_h et de longueur L_h. Le liquide passe d'une colonne verticale à l'autre via le tube horizontal. L'amortissement est créé par une restriction placée au centre du tube horizontal. Puisque nous négligeons la largeur des colonnes devant leurs longueurs, le tube est considéré filiforme. Comme dans Holden et Fossen (2012), la géométrie du tube est décrite par la courbe paramétrique dont les coordonnées sont

$$\mathbf{r}^b(\sigma) \triangleq \left[x_t^b, y_t^b(\sigma), z_t^b(\sigma)\right]^\top$$

avec $x_t^b = 0$, et σ abscisse curviligne qui a pour origine le centre du tube horizontal ($\sigma = 0$), qui part suivant $-\mathbf{y}_b$ ($\sigma > 0$) et qui suit la ligne du TLCD jusqu'à la surface libre ($\sigma = \varsigma_p$) et, de l'autre sens, qui part suivant $\mathbf{y}_b$ ($\sigma < 0$) et qui suit la ligne du TLCD jusqu'à la surface libre ($\sigma = -\varsigma_s$), et

$$y_t^b(\sigma) \triangleq \begin{cases} \frac{L_h}{2} & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ -\sigma & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ -\frac{L_h}{2} & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases}, \qquad z_t^b(\sigma) \triangleq \begin{cases} e + \frac{L_h}{2} + \sigma & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ e & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ e + \frac{L_h}{2} - \sigma & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases}$$

avec e la distance verticale entre CdG et le tube horizontal. On définit le rapport des sections

$$\nu \triangleq \frac{A_v}{A_h}$$

On définit la section du TLCD, par la fonction (discontinue)

$$A_t(\sigma) \triangleq \begin{cases} A_v & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ A_h & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ A_v & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases}$$

Les surfaces libres du TLCD sont situées dans les colonnes verticales à $\sigma = \varsigma_p$ et $\sigma = -\varsigma_s$ définis comme

$$\varsigma_p(t) \triangleq \frac{L_h}{2} + L_v + w(t)$$
$$\varsigma_s(t) \triangleq \frac{L_h}{2} + L_v - w(t)$$

avec w la hauteur de liquide dans les colonnes verticales par rapport à l'équilibre, la convention de signe de w est comme montré sur la Fig. 4.2.

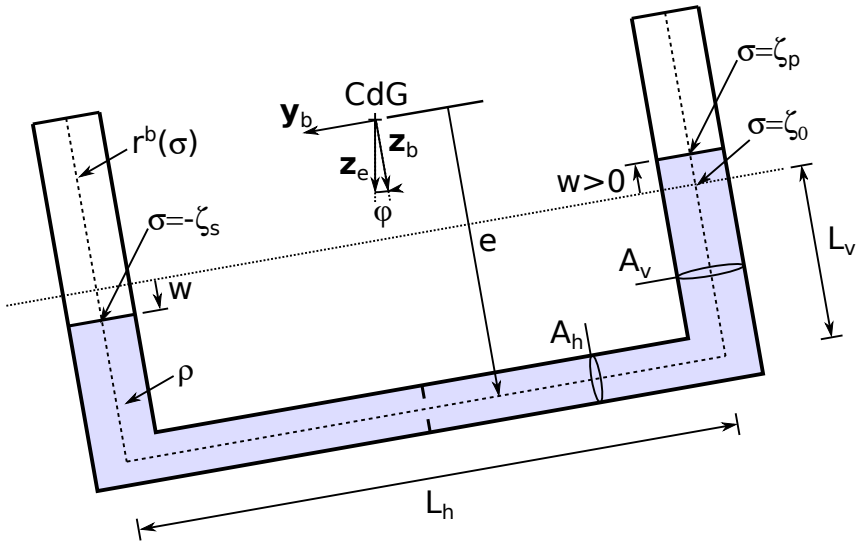


FIGURE 4.2 – Illustration du TLCD et notations pour l'étude de la dynamique

La vitesse du liquide dans le TLCD est définie comme

$$v_t(\sigma) \triangleq \dot{w}\frac{A_v}{A_t(\sigma)}$$

Finalement on note $q \triangleq \begin{bmatrix} y \\ z \\ \varphi \\ w \end{bmatrix}$, les coordonnées généralisées du système {flotteur, éolienne} et $v \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_y^b \\ \mathbf{v}_z^b \\ \dot{\varphi} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$. On a $v = \mathcal{P}(\varphi)\,\dot{q}$ avec

$$\mathcal{P}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0_{1\times 2} \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & 0_{2\times 1} & \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

Le TLCD est illustré en Fig. 4.2 avec la plupart des grandeurs données dans cette sous-section.

4.1.3 Modèle Hydrodynamique

Hydrodynamique linéaire

Le mouvement d'un flotteur soumis à de petites vagues peut être calculé en utilisant la théorie de l'hydrodynamique linéaire (Newman, 1977). Dans cette théorie, trois phénomènes se produisent simultanément de manière indépendante, et leurs effets se superposent (linéarité). Leur description succincte est comme suit. (i) Lorsque le flotteur est légèrement déplacé de sa position d'équilibre, dans une mer immobile, les forces d'Archimède restaurent l'équilibre, ce phénomène est l'*hydrostatique.* On notera que les lignes d'ancrage restaurent elles aussi l'équilibre. (ii) Quand le corps flottant oscille dans une mer immobile, il crée un champ de vagues, ce phénomène est appelé *radiation.* (iii) Un flotteur immobile subit les forces de pression d'un champ de vagues incident (modifié par la présence du corps flottant), appelés *efforts d'excitation.* En résumé, les équations du mouvement de la partie rigide du système, dans la théorie de l'hydrodynamique linéaire sont de la forme

$$M_s \dot{v}_s = F(t) + F_{rad}(t, v_s) + F_{hs}(q_s) + F_{anc}(q_s) \tag{4.1}$$

avec M_s une matrice 3×3 dans laquelle la matrice de masse de la barge et celle de l'éolienne, décrites dans (Jonkman, 2007), apparaissent. F est la force d'excitation de la vague décrite dans (Newman, 1977), F_{rad} est la force d'amortissement due aux effets de radiation, F_{hs} est la force de rappel due à la poussée d'Archimède, et F_{anc} est la force de rappel des ancrages. Les forces sont des vecteurs 3×1 exprimés dans $\mathcal{R}_b$.

D'après Newman (1977), en régime monochromatique établi, la force de radiation F_{rad} s'écrit

$$\tilde{F}_{rad}\, e^{i\omega t} = \tilde{v}_s\, e^{i\omega t} \left(i\omega A_s(\omega) - B_s(\omega)\right) \tag{4.2}$$

avec $A_s(\omega)$ la matrice de masse ajoutée et $B_s(\omega)$ la matrice de frottement linéaire, dépendant de ω la pulsation de la houle. Les amplitudes $\tilde{F}_{rad}$ et $\tilde{v}_s$ sont complexes. Pour la suite de l'étude, les matrices M_s, $A_s(\omega)$ et $B_s(\omega)$, ainsi que le lien entre la hauteur de la vague $H(t)$ et la force associée $F(t)$, sont calculées par le logiciel d'analyse hydrodynamique Diodore [4] pour de nombreuses périodes de houle (ici 27) allant de 3 s à 120 s.

En notant $p = i\omega$, l'équation (4.2) se réécrit dans le domaine de Laplace

$$\tilde{F}_{rad} = -\tilde{v}_s \left(pA_h(p) + B_h(p)\right) \triangleq -\tilde{v}_s\, G(p) \tag{4.3}$$

Dans cette équation, $G(p)$ est une matrice 3×3 de fonctions de transfert bipropres [5]

4. `http://www.principia.fr/expertise-fields-software-products-diodore-132.html`

5. Une fonction de transfert est dite bipropre si le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur

d'ordre 5 qui permet de reproduire au mieux les données fournies par Diodore dans le domaine fréquentiel.

Les forces de rappel dues aux ancrages $F_{anc}(q_s)$ et à la poussée d'Archimède $F_{anc}(q_s)$ sont modélisées comme une simple matrice de raideur K_s. Les coefficients [6] de K_s sont tirés des données fournies par Diodore (le second et le troisième coefficient). Le premier coefficient de K_s aurait pu être celui donné dans Wayman (2006, p 54), document où est décrit le système d'ancrages de la barge MIT. Cependant, le coefficient fourni est mal choisi puisqu'il crée une résonance en embardée à $T = 8$ s, une période de houle hautement probable. On a donc arbitrairement choisi une raideur d'ancrage faible visant à limiter la dérive de l'éolienne flottante tout en ne provoquant pas de résonance dans les états de mer considérés.

Traînée visqueuse de Morison

Les équations de l'hydrodynamique linéaire engendrent de grands déplacements pour la période de résonance, ce qui remet en cause l'hypothèse de linéarité. En effet, quand les oscillations du flotteur sont grandes, un phénomène que nous avons précédemment ignoré amortit le mouvement du flotteur bien plus que les forces de radiation. Cet amortissement supplémentaire est dû aux effets visqueux tels que le frottement entre l'eau et la surface de la barge, et la création de vortex. Pour prendre cet effet en compte, nous ajoutons le terme de traînée visqueuse de la théorie de Morison (Jonkman, 2007; Newman, 1977), ce terme dépend de manière quadratique de la vitesse de la plate-forme relativement à l'eau. L'équation (4.1) devient alors

$$M_s \dot{v}_s = F(t) + F_{rad}(t, v_s) + F_{hs}(q_s) + F_{anc}(q_s) + F_{visc}(t, v_s)$$

avec

$$F_{visc}(t, v_s) = \frac{1}{2}\rho d^2 (v_s - v_{eau}(t)) |v_s - v_{eau}(t)| C_D$$

qui est le vecteur des forces visqueuses exprimé dans $\mathcal{R}_b$ le repère du flotteur. Les coefficients d et C_D ont été fournis par les hommes du métier de l'IFPEN [7], et $v_{eau}(t)$ est directement fonction de $H(t)$ la hauteur de la vague (Molin, 2002). On notera

$$F_{hydro}(t, q_s, v_s) = F(t) + F_{rad}(t, v_s) + F_{hs}(q_s) + F_{anc}(q_s) + F_{visc}(t, v_s) \qquad (4.4)$$

dans la suite de ce document.

6. On a

$$K_s = \begin{bmatrix} 2.05\,10^4 \text{ N/m} & 0 & 0 \\ 0 & 10.18\,10^6 \text{ N/m} & 0 \\ 0 & 0 & 393.48\,10^6 \text{ N/rad} \end{bmatrix}$$

7. Victor Dupin, Direction Mécanique Appliquée

4.1.4 Énergie mécanique du système

En mécanique Lagrangienne (voir par ex. Peacock et Hadjiconstantinou, 2007, Leçon 14), les équations de la dynamique de notre système s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial q}=Q \tag{4.5}$$

avec T l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle de notre système mécanique, et Q le vecteur des forces généralisées appliquées au système.

L'énergie potentielle est

$$\begin{aligned}V&=\mathbf{z}^{\top}.\left(g\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)\left(R\left(\varphi\right)\,\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)+\mathbf{x}^e\right)\mathrm{d}\sigma\right)\\&=-gm_tz-g\rho\mathbf{z}^{\top}R\left(\varphi\right)\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{4.6}$$

avec g l'accélération de la gravité, $z=\mathbf{x}^e.\mathbf{z}$ l'altitude de CdG exprimée dans $\mathcal{R}_e$, ρ la densité du liquide dans le TLCD, et m_t la masse totale de liquide dans le TLCD.

L'énergie cinétique T est la somme de T_s l'énergie cinétique de l'éolienne flottante et de T_t celle du liquide dans le TLCD

$$T=T_s+T_t$$

avec

$$T_s=\frac{1}{2}v_s^{\top}M_s\,v_s$$

et en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne

$$\begin{aligned}T_s=&\frac{1}{2}v_s^{\top}M_s\,v_s\\T_t=&\frac{1}{2}\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)\left\|\mathbf{v}^b+\omega^b\times\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)}{\mathrm{d}\sigma}v_t\left(\sigma\right)\right\|^2\mathrm{d}\sigma\\=&+\frac{1}{2}\left(\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\right)\left\|v^b\right\|^2-\frac{1}{2}\omega^{b\top}\left(\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)S^2\left(\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)\right)\mathrm{d}\sigma\right)\omega^b\\&+\omega^{b\top}\left(\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)S\left(\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)\right)\mathrm{d}\sigma\right)v^b+v^{b\top}\left(\rho A_v\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\dot{w}\\&+\omega^{b\top}\left(\rho A_v\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}S\left(\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\sigma\right)\dot{w}+\frac{1}{2}\left(\rho A_v^2\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}\frac{1}{A_t\left(\sigma\right)}\mathrm{d}\sigma\right)\dot{w}^2\\T=&\frac{1}{2}\left[\mathbf{v}^{b\top},\omega^{b\top},\dot{w}\right]M_0\left(w\right)\left[\mathbf{v}^{b\top},\omega^{b\top},\dot{w}\right]^{\top}\\=&\frac{1}{2}\,v^{\top}M\left(w\right)\,v=\frac{1}{2}\,\dot{q}^{\top}\mathcal{P}\left(\varphi\right)^{\top}M\left(w\right)\mathcal{P}\left(\varphi\right)\,\dot{q}=\frac{1}{2}\,\dot{q}^{\top}\mathcal{M}\left(q\right)\,\dot{q}\end{aligned} \tag{4.7}$$

avec la matrice de masse

$$M = \begin{bmatrix} M_s & 0_{3\times 1} \\ 0_{1\times 3} & 0_1 \end{bmatrix} + M_{02D} = M^\top$$

et

$$\mathcal{M} \triangleq \mathcal{P}^\top M \mathcal{P} = \mathcal{M}^\top$$

et avec

$$M_0 \triangleq \begin{bmatrix} m_t \mathbb{I}_3 & M_{v\omega}(w) & M_{vq}(w) \\ M_{v\omega}^\top(w) & M_\omega(w) & M_{\omega q}(w) \\ M_{vq}^\top(w) & M_{\omega q}^\top(w) & M_q(w) \end{bmatrix}$$

et

$$M_{02D} \triangleq \begin{bmatrix} M_0[2,2] & M_0[2,3] & M_0[2,4] & M_0[2,7] \\ M_0[3,2] & M_0[3,3] & M_0[3,4] & M_0[3,7] \\ M_0[4,2] & M_0[4,3] & M_0[4,4] & M_0[4,7] \\ M_0[7,2] & M_0[7,3] & M_0[7,4] & M_0[7,7] \end{bmatrix}$$

$$m_t \triangleq \rho \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} A_t(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

$$M_{v\omega} \triangleq -\rho \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} A_t(\sigma)\, S\left(\mathbf{r}^b(\sigma)\right) \mathrm{d}\sigma = -M_{v\omega}^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{4.9}$$

$$M_\omega \triangleq -\rho \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} A_t(\sigma)\, S^2\left(\mathbf{r}^b(\sigma)\right) \mathrm{d}\sigma = M_\omega^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{4.10}$$

$$M_{vq} \triangleq \rho A_v \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}\sigma \in \mathbb{R}^{3\times 1} \tag{4.11}$$

$$M_{\omega q} \triangleq \rho A_v \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} S\left(\mathbf{r}^b(\sigma)\right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}\sigma \in \mathbb{R}^{3\times 1} \tag{4.12}$$

$$M_q \triangleq \rho A_v \left(L_h \nu + 2L_v\right) \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

4.1.5 Forces généralisées

Pour obtenir l'expression des forces généralisées Q dans (4.5), on cherche à écrire sous la forme $\dot{q}^\top Q$ la puissance développée par les forces s'exerçant sur notre système.

Ces forces sont $F_{hydro}(t, v_s)$, déjà détaillée en (4.4), et F_h, la force générée par la restriction. On note que le poids n'est pas pris en compte ici car celui du liquide dans le TLCD apparaît dans l'expression de V l'énergie potentielle, et celui de l'éolienne et du flotteur est déjà implicitement présent dans F_{hs} la force de rappel hydrostatique qui est inclue dans $F_{hydro}(t, v_s)$.

La puissance développée par $F_{hydro}(t, v_s)$ s'écrit

$$v^\top \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, v_s) \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top(\varphi) \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, v_s) \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{q}^\top Q_{hydro}$$

On écrit donc

$$Q_{hydro} = \mathcal{P}^\top(\varphi) \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, v_s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La force appliquée par la restriction située en $\sigma = 0$ sur le fluide du TLCD, notée $\mathbf{F}_h$, s'écrit, classiquement,

$$\mathbf{F}_h = -\frac{1}{2}\rho A_h \eta v_t(0)\,|v_t(0)\,|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b(0)}{\mathrm{d}\sigma} = -F_h(\dot{q})\,\mathbf{y}_b = \frac{1}{2}\rho A_h \eta(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|\mathbf{y}_b$$

avec

$$F_h(\dot{q}) = -\frac{1}{2}\rho A_h \eta v_t(0)\,|v_t(0)\,| = -\frac{1}{2}\rho A_h \eta(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}| \tag{4.14}$$

où η est le coefficient de perte de charge de la restriction. La puissance développée par $\mathbf{F}_h$ est

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b(0)}{\mathrm{d}\sigma}v_t(0)\right)^\top \mathbf{F}_h = (-\dot{w}\nu)\,\mathbf{y}_b^\top\,(-F_h(\dot{q}))\,\mathbf{y}_b = \dot{w}\nu F_h(\dot{q}) = \dot{q}^\top Q_h$$

On a donc

$$Q_h = \begin{bmatrix} 0_{6\times 1} \\ \nu F_h(\dot{q}) \end{bmatrix} = \mathcal{P}^\top(q) \begin{bmatrix} 0_{6\times 1} \\ \nu F_h(\dot{q}) \end{bmatrix}$$

On peut donc écrire les forces généralisées ainsi

$$Q(t, q, \dot{q}) = Q_{hydro} + Q_h = \mathcal{P}^\top(q) \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, \dot{q}) \\ \nu F_h(\dot{q}) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

4.1.6 Équations de la dynamique

Nous avons détaillé la géométrie, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, ainsi que les forces liées aux vagues. Nous pouvons maintenant nous atteler à l'établissement des équations de la dynamique du système.

On rappelle que la dynamique de notre système est (4.5). L'équation (4.6) nous donne directement

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0_{4\times 1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = -g \begin{bmatrix} 0 \\ m_t \\ \rho \mathbf{z}^\top \frac{\partial R}{\partial \varphi} \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} A_t(\sigma)\, \mathbf{r}^b(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\varphi) \left(\mathbf{r}^b(\varsigma_p) - \mathbf{r}^b(-\varsigma_s) \right) \end{bmatrix}$$

et d'après (4.7), et comme $\mathcal{M}$ est symétrique, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{P}(\varphi)^\top M(w)\, \mathcal{P}(\varphi)\, \dot{q} \right) = \mathcal{M}\, \ddot{q} + \left(\dot{\mathcal{P}}^\top M \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top \dot{w} \frac{\partial M}{\partial w} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top M \dot{\mathcal{P}} \right) \dot{q}$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}^\top \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi}^\top M\, \mathcal{P}\, \dot{q} \\ \frac{1}{2}\, \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M}{\partial w} \mathcal{P}\, \dot{q} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega} &= -\rho A_v S\left(\mathbf{r}^b(\varsigma_p) - \mathbf{r}^b(-\varsigma_s) \right) \\
\frac{\partial}{\partial w} M_{\omega} &= -\rho A_v \left(S\left(\mathbf{r}^b(\varsigma_p) \right)^2 - S\left(\mathbf{r}^b(-\varsigma_s) \right)^2 \right) \\
\frac{\partial}{\partial w} M_{vq} &= \rho A_v \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\varsigma_p) - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(-\varsigma_s) \right) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial w} M_{\omega q} &= \rho A_v \left(S\left(\mathbf{r}^b(\varsigma_p) \right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\varsigma_p) - S\left(\mathbf{r}^b(-\varsigma_s) \right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(-\varsigma_s) \right) \\
\frac{\partial}{\partial w} M_{q} &= 0
\end{aligned}$$

Les équations de la dynamique de notre système (4.5) prennent donc la forme suivante

$$\mathcal{M}(q)\, \ddot{q} + C(q, \dot{q})\, \dot{q} + k(q) = Q(t, q, \dot{q}) \tag{4.16}$$

avec

$$C(q, \dot{q}) \triangleq \dot{\mathcal{P}}^\top M \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top \dot{w} \frac{\partial M}{\partial w} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top M \dot{\mathcal{P}} - \begin{bmatrix} 0_{2\times 4} \\ \dot{q}^\top \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi}^\top M\, \mathcal{P} \\ \frac{1}{2}\, \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \frac{\partial M}{\partial w} \mathcal{P} \end{bmatrix}$$

$$k(q) \triangleq -g \begin{bmatrix} 0 \\ m_t \\ \rho \mathbf{z}^\top \frac{\partial R}{\partial \varphi} \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} A_t(\sigma)\, \mathbf{r}^b(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\ \rho A_v \mathbf{z}^\top R(\varphi) \left(\mathbf{r}^b(\varsigma_p) - \mathbf{r}^b(-\varsigma_s) \right) \end{bmatrix}$$

$$Q(t, q, \dot{q}) = \mathcal{P}^\top(\varphi) \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, v_s) \\ \nu F_h(\dot{w}) \end{bmatrix}$$

Dans la suite du manuscrit, nous désignons par *modèle complet* le modèle non-linéaire obtenu par la méthode de Lagrange (4.16), soumis à tous les phénomènes décrits aux §4.1.3 et 4.1.5. Nous introduirons en §4.3.2 le *modèle réduit*, qui est le modèle linéarisé tangent autour de $q = \dot{q} = 0_{4\times1}$ auquel on ajoute la force quadratique appliquée par la restriction sur le fluide du TLCD, tandis que la force de traînée visqueuse de Morison est négligée.

4.1.7 Validation des équations de la dynamique

Les calculs précédents ont été vérifiés avec le logiciel de calcul formel Maple. Nous avons vérifié l'équation (4.16) contre une autre approche. Holden et Fossen (2012) utilisent la mécanique Hamiltonienne pour modéliser un système un peu plus général que le notre : leur modèle est défini pour tout $\mathbf{r}^b(\sigma)$ continu, et le système est modélisé dans l'espace. Pour pouvoir mieux se comparer à ce modèle, nous ne le comparons pas à (4.16) mais à (5.15), sa généralisation dans l'espace. La comparaison du modèle de Holden et Fossen (2012), particularisé pour le $\mathbf{r}^b(\sigma)$ introduit en (4.1.2), et de notre modélisation dans l'espace (équation (5.15)) est détaillée en Annexe A. Ces deux modèles sont identiques.

4.2 Critère d'évaluation : la RAO

Afin de comparer les différents réglages et commandes du TLCD, nous proposons un outil d'évaluation de leurs performances. Cet outil sera la RAO (Response Amplitude Operator). C'est l'outil d'analyse fréquentielle le plus classique dans l'étude des systèmes flottants.

> "La RAO est le ratio entre l'amplitude du mouvement du système et l'amplitude de la vague qui l'a causé pour différentes périodes de houle monochromatique." [8]

Contrairement au diagramme de Bode, les échelles de représentation de la RAO sont linéaires, et en abscisse apparaissent les périodes de houles au lieu des fréquences.

Dans l'hypothèse où la vague $H(t) \triangleq \bar{H}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_H\right)$ est une sinusoïde parfaite et notre système est linéaire et asymptotiquement stable, le roulis est aussi sinusoïdal, $\varphi(t) \triangleq \bar{\varphi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_\varphi\right)$. La valeur que nous aurons en ordonnée de la RAO de roulis est

$$RAO \triangleq \frac{\bar{\varphi}}{\bar{H}}$$

et l'abscisse est T.

8. Source : ISO 13624-1 :2009, Petroleum and natural gas industries – Drilling and production equipment – Part 1 : Design and operation of marine drilling riser equipment

Dans le manuscrit, nous allons quantifier la performance de notre système d'amortissement grâce à la RAO. Comme nous venons de le voir, la RAO est définie exclusivement pour une houle monochromatique et un système linéaire asymptotiquement stable. Notre système n'étant pas linéaire, nous introduisons la "RAO généralisée", notée "RAOg", qui est le quotient de l'écart-type de l'état que l'on considère par l'écart-type de la hauteur de vague, i.e.

$$RAOg \triangleq \frac{std\left(\varphi\left(\cdot\right)\right)}{std\left(H\left(\cdot\right)\right)}$$

nous reportons cette amplitude en ordonnée, et en abscisse, nous avons T la période de la houle monochromatique, ou Tp la période pic de la houle polychromatique JONSWAP. Dans le cas d'un système linéaire soumis à une houle monochromatique, RAO et $RAOg$ coïncident.

4.3 Analyse du système passif

Le système, soumis à une houle monochromatique, est simulé jusqu'à ce qu'il ait atteint le régime stationnaire. Dans la suite de cette section, le coefficient de perte de charge de la restriction, η, est constant (ce qui définit le système passif) et le TLCD est accordé à la période propre de roulis de la structure. La pulsation propre du TLCD vaut $\omega_t = \sqrt{2g/\left(2L_v + \nu L_h\right)}$ et la pulsation propre en roulis de l'éolienne flottante vaut $\omega_s = \sqrt{K_{s_{4,4}}/M_{s_{4,4}}}$. On fixe $L_v = 5\ m$, $L_h = 33\ m$ et $e = 10\ m$ pour utiliser toute la place disponible dans la barge. Pour régler la période du TLCD, on a fixé ν à 4.3, ainsi on a $\omega_t = \omega_s$. Le rapport $\mu \triangleq {}^{m_t}/_{M_{s_{1,1}}}$ de m_t la masse du TLCD sur $M_{s_{1,1}}$ la masse du système {flotteur, éolienne} est réglé à $\mu = 2\%$. C'est une valeur couramment employée en génie naval et en génie civil (Gao *et al.*, 1997; Gawad *et al.*, 2001; Yalla et Kareem, 2000).

Pour simplifier l'analyse et faciliter la compréhension du système passif, nous avons, dans un premier temps, négligé la force de traînée visqueuse de Morison. On sait que plus la masse du TLCD est grande, plus le flotteur est amorti (Den Hartog, 1956, eq (3.31), p.100). Cependant, la masse ajoutée au flotteur peut détériorer des paramètres fondamentaux de ce dernier comme la position du centre de gravité ou le tirant d'eau (la hauteur de la partie immergée du flotteur), ce qui altère la stabilité intrinsèque du flotteur (Gawad *et al.*, 2001), nous nous tenons donc à une valeur standard (et faible) de μ. Si à l'avenir nous souhaitons augmenter μ il faudrait, à chaque étape, recalculer les propriétés hydrodynamiques du flotteur, et vérifier que leur changement est largement compensé (en termes de performances) par l'augmentation des performances du TLCD.

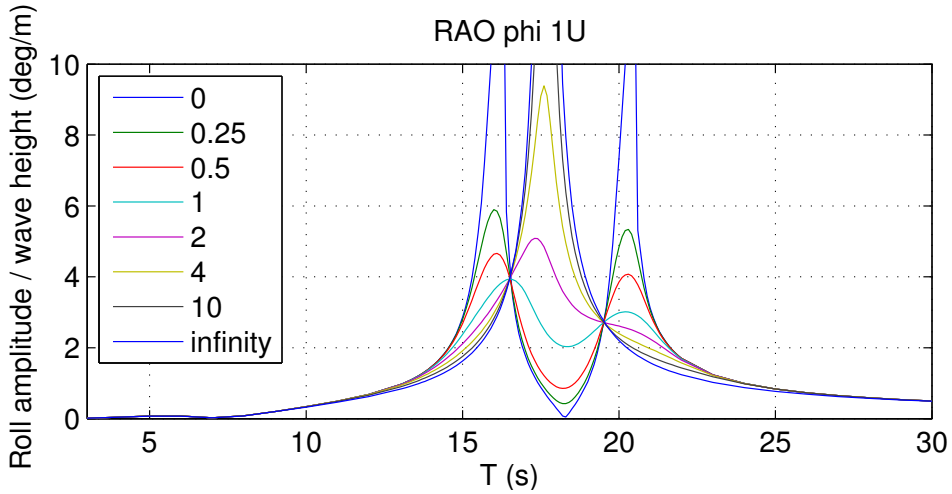


FIGURE 4.3 – RAO en roulis du système pour différentes valeurs de η allant de 0 à l'infini en houle monochromatique sur le *modèle complet* sans traînée visqueuse de Morison.

4.3.1 Résultats

Le système considéré est comparable à un double oscillateur mécanique décrit par Den Hartog (1956) et connu sous le nom de "Damped Vibration Absorber".

Nous traçons les RAO pour différentes valeurs de η (constant) allant de 0 à l'infini. Les résultats sont présentés en Fig. 4.3.

Le cas $\eta = 0$ correspond à un mouvement libre du liquide dans le TLCD. Dans cette configuration, deux pics de résonance sont visibles. Le cas $\eta = +\infty$ correspond à l'immobilité du liquide dans le tube ($w = 0$). Un pic unique, proche de la période propre de la structure peut être observé. Ce dernier cas est, de manière prévisible, très similaire à la réponse de la structure sans TLCD car l'inertie du tube est faible vis à vis de celle de la structure. Pour des valeurs intermédiaires de η on peut voir que les RAOs ont toutes deux points en commun, un de chaque côté de la période de résonance de la structure. Ces points sont qualifiés dans Den Hartog (1956) de points *quasi-fixes* car toutes les courbes pour $\eta \geq 0$ passent par ces points. On notera cependant que les positions de ces points dépendent de la période propre du TLCD notamment (Den Hartog, 1956). Changer la fréquence propre du TLCD permet de déplacer la courbe $\eta = 0$, ce qui déplace son intersection avec la courbe $\eta = \infty$ et donc les points *quasi-fixes*. En accordant différemment le TLCD, un point monte tandis que l'autre descend. Comme l'explique Den Hartog (1956), l'amplitude des oscillations en roulis la plus faible est obtenue lorsque ces deux points sont à la même hauteur. Par conséquent, pour un système donné, la performance optimale atteignable en contrôle

passif est déterminée par la position de ces points.

4.3.2 Modèle réduit

Afin de travailler plus facilement sur le modèle, on introduit un modèle simplifié du système qu'on appellera *modèle réduit* (déjà évoqué au §4.1.6) dans la suite de cette thèse. Pour ce faire, on pose x, y et z nuls, c.-à-d. que nous considérons uniquement la dynamique de roulis couplée à celle du liquide dans le TLCD. Pour obtenir les équations de ce modèle, nous négligeons la force visqueuse de Morison. On approxime la force de radiation définie en (4.2) par

$$\bar{F}_{rad}\left(t,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}\right) = -\bar{A}_{s_{44}}\ddot{\varphi} - \bar{B}_{s_{44}}\dot{\varphi}$$

où $\bar{A}_{s_{44}} \triangleq A_s\left(\omega_s\right)_{4,4}$ et $\bar{B}_{s_{44}} \triangleq B_s\left(\omega_s\right)_{4,4}$. On rappelle que $A_s\left(\omega\right)$ et $B_s\left(\omega\right)$ sont fournis par Diodore (voir §4.1.3) et que ω_s est la pulsation propre en roulis du système flotteur-éolienne. Nous linéarisons la partie gauche de (4.16) autour de $\varphi = \dot{\varphi} = w = \dot{w} = 0$, l'équation de la dynamique du *modèle réduit* est

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{C}\dot{q} + \bar{K}q = \begin{bmatrix} F\left(t\right) \\ \nu F_h\left(\dot{w},\eta\right) \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

avec

$$\begin{aligned}
\bar{M} =& \rho A_h \begin{bmatrix} \nu L_v\left(\frac{1}{2}L_h^2 + \frac{2}{3}L_v^2 - 2L_v e + 2e^2\right) + L_h\left(\frac{1}{12}L_h^2 + e^2\right) & \nu L_h\left(L_v + e\right) \\ \nu L_h\left(L_v + e\right) & \nu\left(L_h\nu + 2L_v\right) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} M_{s_{44}} + \bar{A}_{s_{44}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{K} =& g\rho A_h \begin{bmatrix} L_h e + L_v\nu\left(2e - L_v\right) & L_h\nu \\ L_h\nu & 2\,\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{s_{4,4}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\bar{C} =& 0_{4\times 1} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{s_{44}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On écrit le *modèle réduit* sous forme de système d'état

$$\dot{X} = \mathrm{A}X + \mathrm{B}F_h\left(\dot{w},\eta\right) + \mathrm{E}F \tag{4.18}$$

avec

$$X = \begin{bmatrix} \varphi \\ w \\ \dot{\varphi} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0_{2\times 2} & \mathbb{I}_2 \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{C} \end{bmatrix} \quad \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ \bar{M}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0_{2\times 1} \\ \bar{M}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \nu \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Paramètres optimaux

Pour concevoir le TLCD de manière optimale, il nous faut pouvoir tracer la RAO du roulis pour une excitation monochromatique. Dans notre cas cependant, le terme de perte de charge est quadratique en la vitesse du fluide, nous ne pouvons donc pas tracer directement le gain de la fonction de transfert du système. Dans la littérature, il existe des solutions approchées à ce problème. Elles définissent l'amplitude de la sortie du système en fonction de l'amplitude de l'entrée et de sa fréquence. Nous considérons ici celle développée par (Wu *et al.*, 2009).

En régime établi, on suppose qu'on peut écrire l'entrée et les deux sorties du système sous la forme

$$\begin{aligned} F(t) &= \bar{F} \exp i\omega t \\ \varphi &= \bar{\varphi} \exp i\omega t \\ w &= \bar{w} \exp i\omega t \end{aligned}$$

avec $\bar{w}$, $\bar{\varphi}$ et $\bar{F}$ des amplitudes complexes. Par conséquent l'énergie moyenne dissipée par $\nu F_h(\dot{w})$ sur une période vaut

$$E_h = -\frac{1}{T}\int_0^{\top} \Re\left(\nu F_h(\dot{w})\,\dot{w}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\rho A_h \eta \nu^3 \omega^3 |\bar{w}|^3 \int_0^{\top} |\sin(\omega t)|^3 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3\pi}\rho A_h \eta \nu^3 \omega^3 |\bar{w}|^3$$

D'autre part, l'énergie moyenne dissipée par une force de frottement linéaire $F_c(\dot{w}) = -c_{eq}\dot{w}$ est

$$E_c = -\frac{1}{T}\int_0^{\top} \Re\left(F_c(\dot{w})\,\dot{w}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{T} c_{eq}\omega^2 |\bar{w}|^2 \int_0^{\top} \sin(\omega t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} c_{eq}\omega^2 |\bar{w}|^2$$

Pour que ces deux énergies soient égales, il faut choisir

$$c_{eq}(|\bar{w}|) = \frac{4}{3\pi}\rho A_h \eta \nu^3 \omega |\bar{w}| \tag{4.19}$$

On écrit la dynamique de notre système équivalent

$$\begin{aligned} \bar{M}\ddot{q} + \bar{C}\dot{q} + \bar{K}q = \begin{bmatrix} F(t) \\ F_c(\dot{w}) \end{bmatrix} &\iff \bar{M}\ddot{q} + \bar{C}_{opti}\dot{q} + \bar{K}q = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \left(\bar{R} + I\omega\bar{C}_{opti}\right) \begin{bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\bar{R} \triangleq \bar{K} - \omega^2 \bar{M}$$
$$\bar{C}_{opti} \triangleq \bar{C} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{eq}\left(|\bar{w}|\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{s_{44}} & 0 \\ 0 & c_{eq}\left(|\bar{w}|\right) \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\bar{\varphi} = \frac{\left(I\omega c_{eq}\left(|\bar{w}|\right) + \bar{R}_{2,2}\right)\bar{F}}{I\omega\left(c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)\bar{R}_{1,1} + B_s\bar{R}_{2,2}\right) + \bar{R}_{2,2}\bar{R}_{1,1} - \bar{R}_{1,2}^2 - \omega^2 c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)\bar{B}_{s_{44}}} \tag{4.20}$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{R}_{1,2}\bar{F}}{I\omega\left(c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)\bar{R}_{1,1} + B_s\bar{R}_{2,2}\right) + \bar{R}_{2,2}\bar{R}_{1,1} - \bar{R}_{1,2}^2 - \omega^2 c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)\bar{B}_{s_{44}}} \tag{4.21}$$

pour obtenir $|w|$ on résout

$$|\bar{w}|^2 = \frac{\bar{R}_{1,2}^2\left|\bar{F}\right|^2}{\left(c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)\bar{R}_{1,1} + B_s\bar{R}_{2,2}\right)^2 + \left(\bar{R}_{2,2}\bar{R}_{1,1} - \bar{R}_{1,2}^2 - \omega^2 c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)\bar{B}_{s_{44}}\right)^2} \tag{4.22}$$

en substituant $c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)$ par son expression donnée en (4.19).

Comme détaillé dans Wu *et al.* (2009), cette équation possède une seule solution strictement positive pour notre cas particulier. Une fois obtenu $|\bar{w}|$, on a directement $c_{eq}\left(|\bar{w}|\right)$, on en déduit $\bar{w}$ avec (4.21) et $\bar{\varphi}$ avec (4.20).

On a donc une méthode de calcul qui nous donne $|\bar{\varphi}|$, l'amplitude des oscillations en fonction de η et de l'amplitude et la fréquence de l'entrée. On peut donc tracer rapidement la RAO de notre système passif et trouver son maximum.

Pour obtenir le meilleur système passif, nous utilisons la fonction d'optimisation `fmincon` de MATLAB, pour minimiser l'indice de performance suivant

$$P.I. = \max_{T\in[3;30]}\left(|\bar{\varphi}|\right)$$

avec $|\bar{\varphi}|$ l'amplitude en roulis du flotteur en régime harmonique établi pour chaque période. C'est donc un problème *min-max* où les variables de décision sont L_h, ν et η. Cette optimisation est faite sous contraintes pour respecter l'encombrement disponible dans la barge. Nous avons choisi L_v le plus grand possible i.e. $L_v = 5m$ pour que le liquide ait un maximum d'espace pour osciller. Les résultats sont obtenus pour une vague de 2m et sont présentés dans la Table 4.1.

4.3.4 Commande Heuristique "Den Hartog"

Lors de l'étude du système passif, on a vu que la réponse du système avec η constant était comprise entre la courbe obtenue pour $\eta = 0$ et celle obtenue avec

L_h	ν	η
32.81 m	4.11	1.88

TABLE 4.1 – Paramètres optimaux du TLCD

$\eta = \infty$. On peut créer une commande heuristique, qui choisit en fonction de la période de la houle une valeur de η constante. L'heuristique est la suivante :

— Si T est compris entre les points quasi-fixes, alors on choisit $\eta = \eta_{mini}$

— Sinon on choisit $\eta = \eta_{maxi}$

Cette commande servira de référence par rapport aux autres méthodes définies ci-après.

4.4 Commande optimale en information complète

Au vu des limitations en performance du TLCD dues aux points quasi-fixes présentés ci-dessus, on peut essayer de changer le coefficient de perte de charge η continuellement au cours du temps (et pas seulement lorsque la fréquence de la change) pour obtenir de meilleures performances. L'approche que nous adoptons, i.e. modifier les caractéristiques du système en temps réel plutôt que d'appliquer directement une force sur le liquide du TLCD, est appelé dans la littérature contrôle semi-actif (Ikeda, 2009). Nous la désignerons par "actif" par opposition à la commande "passive" et à la commande heuristique

Nous cherchons à connaître le meilleur rejet de perturbation sinusoïdale monochromatique que peut nous apporter le TLCD semi-actif en régime établi.

4.4.1 Formulation

Nous considérons le problème de commande optimale suivant, pour chaque période :

Problème 1. Contrôle optimal du *modèle réduit* en régime périodique établi

$$\min_{\eta(t),X_0} J = \int_0^T \bar{M}_{11}\dot{\varphi}\left(t\right)^2 + \bar{K}_{11}\varphi\left(t\right)^2 \mathrm{d}t$$

sujet à

$$\dot{X} = \mathrm{A}X - \frac{1}{2}\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|\mathrm{B}\eta + \mathrm{E}F \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$X_0 = 0_{4\times 1}$$

$$X_L \leq X\left(t\right) \leq X_U \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$\eta_L \leq \eta\left(t\right) \leq \eta_U \qquad \forall t \in [0,T]$$

avec T l'horizon du problème (ici très grand devant la période de la houle). On a toujours $X = [\varphi\ w\ \dot{\varphi}\ \dot{w}]^\top$. Les équations de la dynamique sont (4.18). La variable de commande est η, avec $\eta_L = 0$ pour respecter la physique du problème, et $\eta_U = 1000$ pour éviter les problèmes numériques. Afin de ne pas nous retrouver avec une colonne totalement vidée de son eau, nous devons vérifier à tout instant

$$\begin{cases} \varsigma_p\left(t\right) \geq \frac{L_h}{2} \\ \varsigma_s\left(t\right) \geq \frac{L_h}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} L_v \geq -w\left(t\right) \\ L_v \geq w\left(t\right) \end{cases}$$

ce qui nous donne $X_U(2) = -X_L(2) = L_v$, nous avons laissé les autres états libres. Classiquement on note $X_0 \triangleq X\left(t=0\right)$. Dans ce Problème 1, F la force exercée par la vague sur le flotteur est connue à l'avance par l'algorithme de contrôle.

4.4.2 Résolution numérique

Nous utilisons la toolbox MATLAB ICLOCS (pour Imperial College of London Optimal Control Software) (Falugi *et al.*, 2010). Cet outil permet de résoudre les problèmes de contrôle optimal par une approche directe [9]. On a restreint le signal de commande à être un signal discret à 5 Hz (échantillonnage très fin devant les constantes de temps de notre système).

On a tracé en Fig. 4.4 la commande dans le domaine temporel. On voit que la commande est bang-bang (elle commute entre les deux valeurs extrêmes admissibles) et a deux bangs par période de houle. On va chercher à comprendre ce résultat de manière analytique. L'Hamiltonien s'écrit

$$H = \lambda^\top(\mathrm{A}X - \frac{1}{2}\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|\mathrm{B}\eta\left(t\right) + \mathrm{E}F\left(t\right)) + \bar{M}_{11}\dot{\varphi}^2 + \bar{K}_{11}\varphi^2$$

avec λ l'état adjoint, on observe que l'Hamiltonien dépend linéairement de η, la commande est donc bang-bang.

9. discrétisation des équations de dynamique et du coût, puis résolution de ce problème d'optimisation (qui n'est pas une programmation quadratique) par un algorithme de type "point-intérieur"

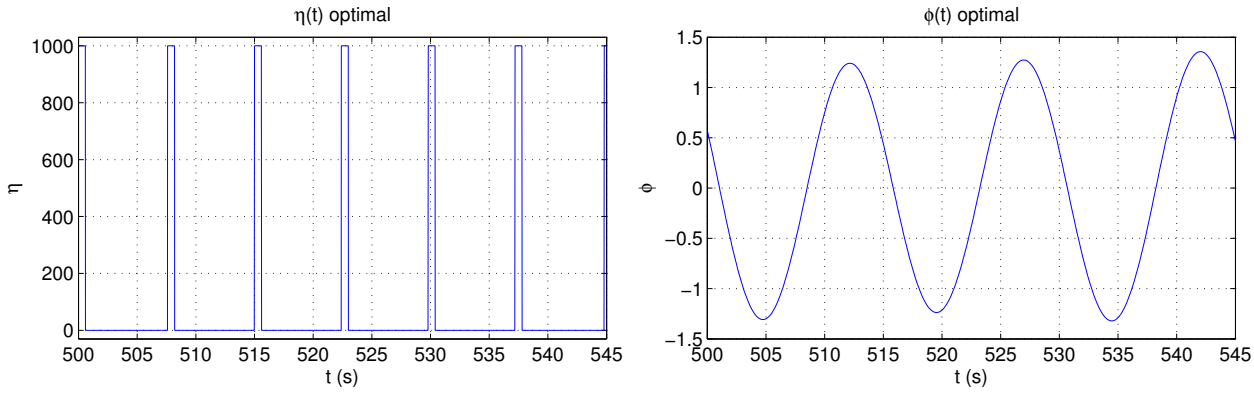


FIGURE 4.4 – Résolution numérique

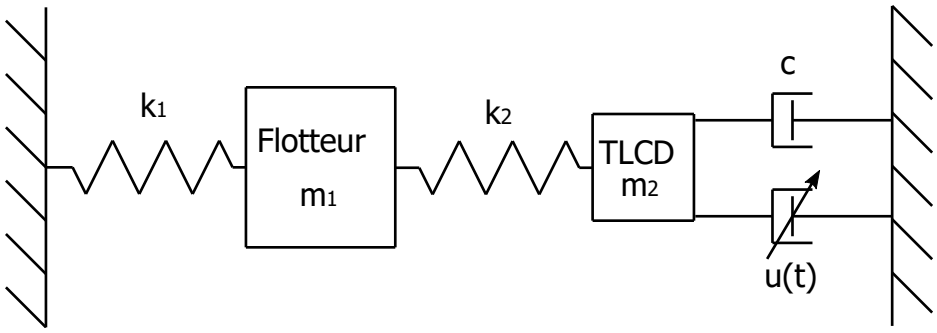


FIGURE 4.5 – Système masse ressort *"Toy Problem"*

4.4.3 Analyse mathématique d'un problème équivalent

Afin de faciliter l'étude mathématique de la nature périodique de la solution du Problème 1, nous allons introduire un système masse-ressort physiquement proche du *modèle réduit* mais dont les équations sont plus simples. Dans la suite de cette sous-section on considèrera uniquement ce système, qu'on appellera *Toy Problem*. Il est présenté en Fig. 4.5 et sa dynamique est définie par

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = B_1(x)u(t) + E_1F(t)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad B_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ c\dot{x}_2 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On pose

$$\begin{array}{lll} m_1 = 100 & k_1 = 100 & c = 0.5 \\ m_2 = 2 & k_2 = 3 & \end{array}$$

qu'on peut écrire sous forme de système d'état

$$\dot{X} = AX + B(X)u\left(t\right) + EF\left(t\right)$$

avec

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}E_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c}{m_2}X_4 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne

$$\dot{X}_1 = X_3 \tag{4.23}$$

$$\dot{X}_2 = X_4 \tag{4.24}$$

$$\dot{X}_3 = -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}X_1 + \frac{k_2}{m_1}X_2 + \frac{1}{m_1}F\left(t\right) \tag{4.25}$$

$$\dot{X}_4 = \frac{k_2}{m_2}X_1 - \frac{k_2}{m_2}X_2 - \frac{c\left(1 - u\left(t\right)\right)}{m_2}X_4 \tag{4.26}$$

Formulation du problème de contrôle optimal

Nous cherchons à résoudre le problème suivant

Problème 2. Contrôle optimal du *Toy Problem* en régime périodique établi

$$\min\nolimits_{u(t),X_0} J\left(X,u\right) = \int_0^T \frac{1}{2}X\left(t\right)^\top Q\, X\left(t\right)\, \mathrm{d}t$$

sujet à

$$|X_0 - X_f| \leq \epsilon$$

$$\dot{X} = AX + B(X)u\left(t\right) + EF\left(t\right) \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$-1 \leq u\left(t\right) \leq 1 \qquad \forall t \in [0,T]$$

on note $X_f \triangleq X\,(t=T)$. On a choisi $Q_{11}=1$ comme étant le seul coefficient non-nul de la matrice de coût Q. Avec X_0 libre, et F périodique de période T. On a choisi la contrainte $|X_0 - X_f| \leq \varepsilon$ pour éviter les problèmes numériques provoqués par la contrainte $|X_0 - X_f| = 0$. Cette condition est utile puisqu'elle permet de se restreindre à un problème d'optimisation en régime périodique établi. Dans ICLOCS, l'Hamiltonien de notre problème est écrit

$$H = -\frac{1}{2}X^\top Q\,X + \lambda^\top\left(AX + B(X)u\,(t) + EF\,(t)\right)$$

L'Hamiltonien dépend linéairement de u, la commande est donc bang-bang et vaut

$$u\,(\lambda, X) = sign\left(\lambda^\top B(X)\right) = sign\left(\lambda_4 B_4(X)\right) = sign\left(\lambda_4 X_4\right) \tag{4.27}$$

On a

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -A^\top\lambda + QX - \lambda^\top\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}X}u \tag{4.28}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^4$ et

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}X} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & \frac{c}{m_2} \end{bmatrix}$$

On opère un changement de variables $\lambda = P\mu$ tel que $\dot{\mu}_1 = \mu_3$ et $\dot{\mu}_2 = \mu_4$. On choisit

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_2}{m_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On réécrit donc (4.28) avec le changement de variables

$$\dot{\mu} = P^{-1}\left(-A^\top P\mu + QX - \mu^\top P^\top\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}X}u\right) \tag{4.29}$$

et

$$u\,(\mu, X) = sign\left(\mu^\top P^\top B(X)\right) = sign\left(\left(\frac{\mu_1}{m_1} + \frac{\mu_4}{m_2}\right)X_4\right) \tag{4.30}$$

On notera que le système dynamique (4.29) est instable puisque les paries réelles des valeurs propres de Asont négatives. L'équation (4.29) s'écrit sous sa forme développée

$$\dot{\mu}_1 = \mu_3 \tag{4.31}$$

$$\dot{\mu}_2 = \mu_4 \tag{4.32}$$

$$\dot{\mu}_3 = \frac{k_2}{m_2}\mu_4 - \frac{k_1}{m_1}\mu_1 - x_1 Q_{11} \tag{4.33}$$

$$\dot{\mu}_4 = \frac{c\,(1-u\,(\mu,X))}{m_1}\mu_4 + \frac{c\,(1-u\,(\mu,X))}{m_2}\mu_1 - \frac{k_2}{m_2}\mu_2 - \frac{m_2}{m_1}\mu_3 \tag{4.34}$$

Forme sinusoïdale

Pour analyser la nature des solutions optimales, on souhaite utiliser les méthodes de moyennisation (Arnold, 2013; Guckenheimer et Holmes, 1983). Sans perte de généralité, on considère $T = 2\pi$. On pose donc

$$F = \varepsilon \sin(t)$$

Nous cherchons nos solutions sous la forme

$$X_1 = \quad a_1 \cos(t + \phi_1) \qquad \mu_1 = \quad a_3 \cos(t + \phi_3) \tag{4.35}$$
$$X_2 = \quad a_2 \cos(t + \phi_2) \qquad \mu_2 = \quad a_4 \cos(t + \phi_4) \tag{4.36}$$
$$X_3 = -a_1 \sin(t + \phi_1) \qquad \mu_3 = -a_3 \sin(t + \phi_3) \tag{4.37}$$
$$X_4 = -a_2 \sin(t + \phi_2) \qquad \mu_4 = -a_4 \sin(t + \phi_4) \tag{4.38}$$

cette forme implique que X et u stabilisent le système instable (4.29). Afin de vérifier les égalités (4.23-4.24) et (4.31-4.32), pour $i = 1, ..4$ on doit vérifier

$$\dot{a}_i \cos(t + \phi_i) - a_i \dot{\phi}_i \sin(t + \phi_i) = 0 \tag{4.39}$$

Les égalités (4.25-4.26) et (4.33-4.34) nous donnent pour $i = 1, ..4$

$$-\dot{a}_i \sin(t + \phi_i) - a_i \dot{\phi}_i \cos(t + \phi_i) = a_i \cos(t + \phi_i) + f_i(a, \phi, t) \tag{4.40}$$

avec $f_i(a, \phi, t)$ défini en (4.46-4.49). En résolvant le système à 8 équations et 8 inconnues (4.39-4.40), on obtient

$$\dot{a}_i(a, \phi, t) = -\left(a_i \cos(t + \phi_i) + f_i(a, \phi, t)\right) \sin(t + \phi_i)$$
$$\dot{\phi}_i(a, \phi, t) = -\frac{1}{a_i}\left(a_i \cos(t + \phi_i) + f_i(a, \phi, t)\right) \cos(t + \phi_i)$$

Moyennisation

On approxime a et ϕ par

$$a_i = \bar{a}_i + \varepsilon v_i\left(\bar{a}, \bar{\phi}, t\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.41}$$
$$\phi_i = \bar{\phi}_i + \varepsilon w_i\left(\bar{a}, \bar{\phi}, t\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.42}$$

En choisissant

$$\dot{\bar{a}}_i = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{a}_i\left(\bar{a}, \bar{\phi}, t\right) \mathrm{d}t + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.43}$$
$$\dot{\bar{\phi}}_i = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{\phi}_i\left(\bar{a}, \bar{\phi}, t\right) \mathrm{d}t + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.44}$$

$\bar{a}_i$ représente la composante moyenne de a_i et $\varepsilon v_i\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)$ est la composante oscillante. On rappelle qu'on a

$$u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right) = -sign\left(\bar{a}_2\sin(t+\bar{\phi}_2)\left(m_2\bar{a}_3\cos(t+\bar{\phi}_3) - m_1\bar{a}_4\sin(t+\bar{\phi}_4)\right)\right) \tag{4.45}$$

$$f_1\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right) = -\frac{k_1+k_2}{m_1}\bar{a}_1\cos(t+\bar{\phi}_1) + \frac{k_2}{m_1}\bar{a}_2\cos(t+\bar{\phi}_2) + \frac{\varepsilon}{m_1}\sin(t) \tag{4.46}$$

$$f_2\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right) = -\frac{k_2}{m_2}\bar{a}_2\cos(t+\bar{\phi}_2) + \frac{k_2}{m_2}\bar{a}_1\cos(t+\bar{\phi}_1) + \frac{c\bar{a}_2}{m_2}\left(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\right)\sin(t+\bar{\phi}_2) \tag{4.47}$$

$$f_3\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right) = -\frac{k_1}{m_1}\bar{a}_3\cos(t+\bar{\phi}_3) - \frac{k_2}{m_2}\bar{a}_4\sin(t+\bar{\phi}_4) - \bar{a}_1 Q_{11}\cos(t+\bar{\phi}_1) \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} f_4\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right) = &-\bar{a}_4\frac{k_2}{m_2}\cos(t+\bar{\phi}_4) - \bar{a}_4\frac{c}{m_2}\left(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\right)\sin(t+\bar{\phi}_4) \\ &+ \frac{\bar{a}_3}{m_1}c\left(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\right)\cos(t+\bar{\phi}_3) + \bar{a}_3\frac{m_2}{m_1}\sin(t+\bar{\phi}_3) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Le terme $\lambda^\top B(X)$, qui apparaît dans (4.27), est un produit de deux sinusoïdes de période T, c'est donc un terme de période T/2, donc u est un terme de période T/2. Pour la même raison, $\dot{a}_i\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)$ et $\dot{\phi}_i\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)$ sont aussi de période T/2. Au vu de l'expression de u donnée en (4.27), la commande bang-bang est elle aussi périodique de période $\frac{T}{2}$. On peut donc réécrire (4.43) et (4.44) sous la forme

$$\dot{\bar{a}}_i = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\dot{a}_i\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\mathrm{d}t + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.50}$$

$$\dot{\bar{\phi}}_i = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\dot{\phi}_i\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\mathrm{d}t + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{4.51}$$

Pour la suite des calculs on considère les égalités suivantes

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(t+a)\sin(t+b)\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T \sin(2t+a+b)+\sin(b-a)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(b-a)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(t+a)\sin(t+b)\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T -\cos(2t+a+b)+\cos(a-b)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

D'après (4.27), u change de signe quand λ_4 ou X_4 vaut zéro. Sur l'intervalle $\left[0,\frac{T}{2}\right]$ on a

$$\lambda_4(t) = 0 \iff t = \arctan\left(\frac{m_1\bar{a}_4\sin(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)+m_2\bar{a}_3}{m_1\bar{a}_4\cos(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)}\right) - \bar{\phi}_3 + k_\lambda\pi \triangleq r_{\lambda_4}$$

$$X_4(t) = 0 \iff t = -\bar{\phi}_2 + k_B\pi \triangleq r_{B_4}$$

avec $k_\lambda, k_B \in \mathbb{Z}$. On pose $r_m = \min(r_{\lambda_4}, r_{B_4})$ et $r_M = \max(r_{\lambda_4}, r_{B_4})$.

On peut donc écrire (4.50)-(4.51) sous la forme détaillée

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{a}}_1\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= \frac{1}{T}\int_0^T -\left(\bar{a}_1\left(1-\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)\cos(t+\bar{\phi}_1)\right.\\
&\left.+\ \frac{k_2}{m_1}\bar{a}_2\cos(t+\bar{\phi}_2)+\frac{\varepsilon}{m_1}\sin(t)\right)\sin(t+\bar{\phi}_1)\mathrm{d}t+O\left(\varepsilon^2\right)\\
&= -\frac{k_2\bar{a}_2}{m_1T}\int_0^T\cos(t+\bar{\phi}_2)\sin(t+\bar{\phi}_1)\mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{m_1T}\int_0^T\sin(t)\sin(t+\bar{\phi}_1)\mathrm{d}t+O\left(\varepsilon^2\right)\\
&= -\frac{k_2\bar{a}_2}{2m_1}\sin\left(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_2\right)-\frac{\varepsilon}{2m_1}\cos(\bar{\phi}_1)+O\left(\varepsilon^2\right) \qquad (4.52)\\
\dot{\bar{a}}_2\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= \frac{1}{T}\int_0^T -\left(\bar{a}_2\left(1-\frac{k_2}{m_2}\right)\cos(t+\bar{\phi}_2)+\frac{k_2}{m_2}\bar{a}_1\cos(t+\bar{\phi}_1)\right.\\
&\left.+\ \frac{c\bar{a}_2}{m_2}\left(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\right)\sin(t+\bar{\phi}_2)\right)\sin(t+\bar{\phi}_2)\mathrm{d}t+O\left(\varepsilon^2\right)\\
&= u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{2c\bar{a}_2}{m_2T}\left(\int_0^{T/2}\sin^2(t+\bar{\phi}_2)\mathrm{d}t-2\int_{r_m}^{r_M}\sin^2(t+\bar{\phi}_2)\mathrm{d}t\right)\\
&+\ \frac{\bar{a}_1k_2}{2m_2}\sin(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_2)-\frac{\bar{a}_2c}{2m_2}+O\left(\varepsilon^2\right)\\
&= u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c\bar{a}_2}{m_2T}\left(\pi-2\left(r_M-r_m\right)-\sin(2r_m+2\bar{\phi}_2)+\sin(2r_M+2\bar{\phi}_2)\right)\\
&+\ \frac{\bar{a}_1k_2}{2m_2}\sin(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_2)-\frac{\bar{a}_2c}{2m_2}+O\left(\varepsilon^2\right) \qquad (4.53)\\
\dot{\bar{a}}_3\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= \frac{1}{T}\int_0^T -\left(\bar{a}_3\left(1-\frac{k_1}{m_1}\right)\cos(t+\bar{\phi}_3)-\frac{k_2}{m_2}\bar{a}_4\sin(t+\bar{\phi}_4)\right.\\
&\left.-\ \bar{a}_1Q_{11}\cos(t+\bar{\phi}_1)\right)\sin(t+\bar{\phi}_3)\mathrm{d}t+O\left(\varepsilon^2\right)\\
&= \frac{k_2}{2m_2}\bar{a}_4\cos(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)+\frac{\bar{a}_1Q_{11}}{2}\sin(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_1)+O\left(\varepsilon^2\right) \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{a}}_4\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= -\frac{1}{T}\frac{\bar{a}_4}{m_2}\int_0^T\Big((m_2-k_2)\cos(t+\bar{\phi}_4)-c\big(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\big)\sin(t+\bar{\phi}_4)\Big)\sin(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t\\
&-\frac{1}{T}\frac{\bar{a}_3}{m_1}\int_0^T\big(c\big(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\big)\cos(t+\bar{\phi}_3)+m_2\sin(t+\bar{\phi}_3)\big)\sin(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t+O\big(\varepsilon^2\big)\\
&=\frac{\bar{a}_3}{2m_1}\left(c\sin(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)-m_2\cos(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)\right)+\frac{\bar{a}_4 c}{2m_2}\\
&-2u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{T}\int_0^{T/2}\left(\frac{\bar{a}_4}{m_2}\sin(t+\bar{\phi}_4)-\frac{\bar{a}_3}{m_1}\cos(t+\bar{\phi}_3)\right)\sin(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t\\
&+4u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{T}\int_{r_m}^{r_M}\left(\frac{\bar{a}_4}{m_2}\sin(t+\bar{\phi}_4)-\frac{\bar{a}_3}{m_1}\cos(t+\bar{\phi}_3)\right)\sin(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t+O\big(\varepsilon^2\big)\\
&=\frac{\bar{a}_3}{2m_1}\left(c\sin(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)-m_2\cos(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)\right)+\frac{\bar{a}_4 c}{2m_2}\\
&+u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{T}\frac{\bar{a}_3}{m_1}\big(-\pi-2\left(r_M-r_m\right)-\cos(2r_m+\bar{\phi}_3+\bar{\phi}_4)+\cos(2r_M+\bar{\phi}_3+\bar{\phi}_4)\big)\\
&+u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{T}\frac{\bar{a}_4}{m_2}\big(-\pi-2\left(r_M-r_m\right)-\sin(2r_m+2\bar{\phi}_4)+\sin(2r_M+2\bar{\phi}_4)\big)+O\big(\varepsilon^2\big)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_1\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= -\frac{1}{\bar{a}_1 T}\int_0^T\left(\bar{a}_1\left(1-\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)\cos(t+\bar{\phi}_1)\right.\\
&\left.+\frac{k_2}{m_1}\bar{a}_2\cos(t+\bar{\phi}_2)+\frac{\varepsilon}{m_1}\sin(t)\right)\cos(t+\bar{\phi}_1)\mathrm{d}t+O\left(\varepsilon^2\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}-1\right)-\frac{\bar{a}_2 k_2}{2\bar{a}_1 m_1}\cos(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_2)+\frac{\varepsilon}{2\bar{a}_1 m_1}\sin\left(\bar{\phi}_1\right)+O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_2\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= -\frac{1}{\bar{a}_2 T}\int_0^T\left(\bar{a}_2\left(1-\frac{k_2}{m_2}\right)\cos(t+\bar{\phi}_2)+\frac{k_2}{m_2}\bar{a}_1\cos(t+\bar{\phi}_1)\right.\\
&\left.+\frac{c\bar{a}_2}{m_2}\left(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\right)\sin(t+\bar{\phi}_2)\right)\cos(t+\bar{\phi}_2)\mathrm{d}t+O\left(\varepsilon^2\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_2}-1\right)-\frac{\bar{a}_1 k_2}{2\bar{a}_2 m_2}\cos(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_2)-\frac{c}{m_2 T}\int_0^{T/2}u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\sin(2t+2\bar{\phi}_2)\mathrm{d}t+O\big(\varepsilon^2\big)\\
&=u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{m_2 T}\left(-\cos(2r_m+2\bar{\phi}_2)+\cos(2r_M+2\bar{\phi}_2)\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_2}-1\right)-\frac{\bar{a}_1 k_2}{2\bar{a}_2 m_2}\cos(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_2)+O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_3\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= -\frac{1}{\bar{a}_3 T}\int_0^T \left(\bar{a}_3\left(1-\frac{k_1}{m_1}\right)\cos(t+\bar{\phi}_3) - \frac{k_2}{m_2}\bar{a}_4\sin(t+\bar{\phi}_4)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \bar{a}_1 Q_{11}\cos(t+\bar{\phi}_1)\right)\cos(t+\bar{\phi}_3)\mathrm{d}t + O\left(\varepsilon^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{m_1}-1\right) + \frac{\bar{a}_1 Q_{11}}{2\bar{a}_3}\cos(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_3) - \frac{\bar{a}_4 k_2}{2\bar{a}_3 m_2}\sin(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4) + O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}_4\left(\bar{a},\bar{\phi}\right) &= -\frac{1}{m_2 T}\int_0^T \big((m_2-k_2)\cos(t+\bar{\phi}_4) - c\big(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\big)\sin(t+\bar{\phi}_4)\big)\cos(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t \\
&\quad -\frac{\bar{a}_3}{\bar{a}_4 m_1 T}\int_0^T \big(c\big(1-u\left(\bar{a},\bar{\phi},t\right)\big)\cos(t+\bar{\phi}_3) + m_2\sin(t+\bar{\phi}_3)\big)\cos(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t + O\big(\varepsilon^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_2}-1\right) - \frac{\bar{a}_3}{2\bar{a}_4 m_1}\left(m_2\sin(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4) + c\cos(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)\right) \\
&\quad -u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{T}\left(\frac{2}{m_2}\left(\int_0^{T/2}\sin(t+\bar{\phi}_4)\cos(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t - 2\int_{r_m}^{r_M}\sin(t+\bar{\phi}_4)\cos(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{2\bar{a}_3}{\bar{a}_4 m_1}\left(\int_0^{T/2}\cos(t+\bar{\phi}_3)\cos(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t - 2\int_{r_m}^{r_M}\cos(t+\bar{\phi}_3)\cos(t+\bar{\phi}_4)\mathrm{d}t\right)\right) + O\big(\varepsilon^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_2}-1\right) - \frac{\bar{a}_3}{2\bar{a}_4 m_1}\left(m_2\sin(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4) + c\cos(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)\right) \\
&\quad + u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{T}\left(\cos(2r_m+2\bar{\phi}_4) - \cos(2r_M+2\bar{\phi}_4) + \frac{\bar{a}_3}{\bar{a}_4 m_1}\right) \\
&\quad + u\left(\bar{a},\bar{\phi},0\right)\frac{c}{T}\frac{\bar{a}_3}{\bar{a}_4 m_1}\left(-\cos(\bar{\phi}_3-\bar{\phi}_4)\left(-\pi-2\left(r_M-r_m\right)\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sin(2r_m+\bar{\phi}_3+\bar{\phi}_4) - \sin(2r_M+\bar{\phi}_3+\bar{\phi}_4)\right) + O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Les équations (4.52-4.59) sont des équations différentielles possédant des points d'équilibre qui définissent un modèle moyen que nous allons utiliser. Nous allons maintenant déterminer les valeurs numériques de ces points d'équilibre.

Résolution numérique

Pour cette étude numérique, nous choisissons arbitrairement que la force sinusoïdale a pour amplitude$\varepsilon = 10^{-4}$N, cette valeur est extrêmement faible au regard des masses de notre oscillateur ($m_1 = 100\,\mathrm{kg}$ et $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$).

Nous cherchons le point d'équilibre le plus proche des valeurs relevées sur les données fournies par ICLOCS. Par conséquent, nous utilisons la fonction `fsolve` de

$\bar{a}_1$	$10,88\,\mu$m	$\bar{\phi}_1$	$2,159$
$\bar{a}_2$	$4,351\,\mu$m	ϕ_2	$1,691$
$\bar{a}_3$	$118,5\,10^{-6}$	ϕ_3	$1,592$
$\bar{a}_4$	$7,361\,10^{-6}$	ϕ_4	$0,581$

TABLE 4.2 – Amplitudes et phases de la solution trouvée par ICLOCS

$\bar{a}_1^{\text{avg}}$	$11.19\,\mu$m	$\bar{\phi}_1^{\text{avg}}$	2.137
$\bar{a}_2^{\text{avg}}$	$4.319\,\mu$m	$\bar{\phi}_2^{\text{avg}}$	1.710
$\bar{a}_3^{\text{avg}}$	$125.2\,10^{-6}$	$\bar{\phi}_3^{\text{avg}}$	$\pi/2$ ($\simeq 1.571$)
$\bar{a}_4^{\text{avg}}$	$7.459\,10^{-6}$	$\bar{\phi}_4^{\text{avg}}$	0.567

TABLE 4.3 – Amplitudes et phases données par la méthode de moyennisation

MATLAB pour trouver les vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{\phi}$ tels que $\dot{\bar{a}}$ et $\dot{\bar{\phi}}$ donnés dans les équations (4.52-4.59) sont nuls. Pour initialiser l'algorithme, nous utilisons les amplitudes et les phases relevées sur l'exemple numérique résolu par ICLOCS (sur une période) sont reportées en Table 4.2.

Cette solution est effectivement très proche d'un point d'équilibre de (4.52-4.59). On utilise `fsolve` pour trouver une solution encore plus proche de l'équilibre de (4.52-4.59). Pour obtenir le point d'équilibre réel, on utilise finalement `fminsearch`, les valeurs obtenues sont reportées en Table 4.3.

Le plus grand terme de $\left(\dot{\bar{a}}, \dot{\bar{\phi}}\right)$ avec les valeurs de la Table 4.3 obtenues avec `fminsearch` vaut environ 10^{-16}. Il existe donc une trajectoire [10] sous la forme définie par (4.35-4.38) et (4.41-4.42) proche de celle d'ICLOCS qui vérifie le Principe du maximum de Pontryagin. On a aussi vu que la commande optimale est bang bang et présente 2 bangs par période.

4.5 Commande par feedback

Nous avons étudié la commande optimale de notre *modèle réduit*, cependant dans la réalité la houle n'est pas monochromatique, et les interactions entre la houle et l'éolienne flottante est bien plus complexe que ce qui a été considéré au §4.4. De plus en pratique, la forme exacte de la houle n'est pas connue à l'avance. Pour pallier ces problèmes pratiques nous allons développer deux commandes par feedback (rétroaction).

10. En initialisant cette même méthode numérique avec des valeurs aléatoires, il y a deux cas de figure qui se présentent, soit la méthode numérique retombe sur les valeurs données en Table 4.3, soit elle ne converge pas. On peut donc raisonnablement penser que le point d'équilibre est unique.

4.5.1 LQR saturé : commande sans information de la houle

On considère ici le *modèle réduit* présenté au §4.3.2. On cherche la loi de commande à rétroaction proportionnelle qui minimise la fonction de coût quadratique suivante

$$J_{LQR} \triangleq \int_0^\infty X^\top \mathrm{Q}\, X + F_h^\top \mathrm{R}\, F_h \mathrm{d}t$$

où Q et R sont les matrices de pondération semi-définie positive et définie positive respectivement.

La force de contrôle minimisant la fonction de coût est

$$F_h = -K_{LQR} X$$

avec

$$K_{LQR} = \mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \mathrm{P}$$

où P est la solution de l'équation algébrique de Riccati suivante

$$\mathrm{PA} - \mathrm{PB}\left(\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \mathrm{P}\right) + \mathrm{A}^\top \mathrm{P} + \mathrm{Q} = 0$$

On veut éviter que l'une des colonnes verticales du TLCD soit vidée, et donc que l'hypothèse de modélisation 6 du §4.1.1 ne soit plus valable. Pour cela on implémente la commande suivante que nous désignerons "LQR saturé"

Algorithme 1.

Si $|w| > w_{limite}$ *et* $sign\,(\dot{w}) = sign\,(w)$, *alors*

$$F_h = -\frac{1}{2}\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|\eta_U$$

sinon

$$F_h = -\frac{1}{2}\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|\, sat_{[\eta_L,\eta_U]}\left(\frac{2K_{LQR}X}{\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|}\right)$$

avec $w_{limite} = 0.9\, L_v$.

On a cherché par essais successifs les meilleures matrices R et Q diagonales donnant K_{LQR} permettant de rejeter au mieux la perturbation pour le système dont la dynamique est

$$\begin{cases} \dot{X} = \mathrm{A}X - \frac{1}{2}\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|\mathrm{B}\eta_U + \mathrm{E}F & \text{si } |w| > w_{limite} \\ & \text{et } sign\,(\dot{w}) = sign\,(w) \\ \dot{X} = \mathrm{A}X - \frac{1}{2}\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|\mathrm{B}\, sat_{[\eta_L,\eta_U]}\left(\frac{2K_{LQR}X}{\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|}\right) + \mathrm{E}F & \text{sinon} \end{cases}$$

avec F la force monochromatique de la houle. On note que le LQR saturé ne connaît d'aucune façon la houle.

4.5.2 MPC avec prédiction de la houle

Nous développons une commande MPC (Model Predictive Control (Mayne *et al.*, 2000)) échantillonnée à 1 Hz dont le problème d'optimisation est

Problème 3. Model Predictive Control

$$\min_{\eta(\tau)} J = \int_t^{t+T_{hor}} \bar{M}_{11}\dot{\varphi}(\tau)^2 + \bar{K}_{11}\varphi(\tau)^2 \,\mathrm{d}\tau$$

sujet à

$$X_0 = X(t)$$

$$\dot{X}(\tau) = \mathrm{A}X(\tau) - \frac{1}{2}\rho A_h(\nu\dot{w}(\tau))|\nu\dot{w}(\tau)|\mathrm{B}\eta(\tau) + \mathrm{E}F_p(\tau) \qquad \forall\tau \in [t, t+T_{hor}]$$

$$X_L \leq X(\tau) \leq X_U \qquad \forall\tau \in [t, t+T_{hor}]$$

$$\eta_L \leq \eta(\tau) \leq \eta_U \qquad \forall\tau \in [t, t+T_{hor}]$$

Comme nous ne pouvons pas parfaitement connaître la houle future, nous remplaçons F la force de la houle par F_p la force prédite par un algorithme de prédiction de la houle. Nous avons choisi l'horizon de la commande $T_{hor} = 30$ s contenant une large partie du spectre des sollicitations.

Prévision de la houle

Pour prévoir la houle, on peut utiliser deux approches. D'une part on peut utiliser la prévision « spatiale » qui consiste à installer des instruments de mesure autour du point considéré, et avec les lois de propagation des vagues, déterminer la hauteur de vague au point d'intérêt. L'autre approche consiste à extrapoler les mesures passées pour obtenir le comportement de la houle dans le futur. La première méthode nécessite plusieurs points de mesure et peut être très complexe : il faut prendre en compte la présence de vagues venant de la diffraction, de la radiation ou d'autres phénomènes potentiellement non-linéaires (Molin, 2002; Fusco et Ringwood, 2010), on ne s'intéressera donc pas à la première méthode.

Fusco et Ringwood (2010) ont comparé plusieurs approches de prévision de la houle, et ont montré qu'un simple modèle linéaire autorégressif pouvait donner une bonne prédiction de la houle filtrée (passe-bas). On ne peut pas utiliser ce filtre en ligne pour deux raisons principales. D'une part, il faut mettre à jour les coefficients du modèle à chaque changement d'état de mer (toutes les 2 ou 3 heures) ce qui entraîne la résolution d'un problème de moindre carré non-linéaire. D'autre part, la méthode proposée par Fusco et Ringwood (2010) nécessite un filtrage passe-bas de la houle qui induit un retard.

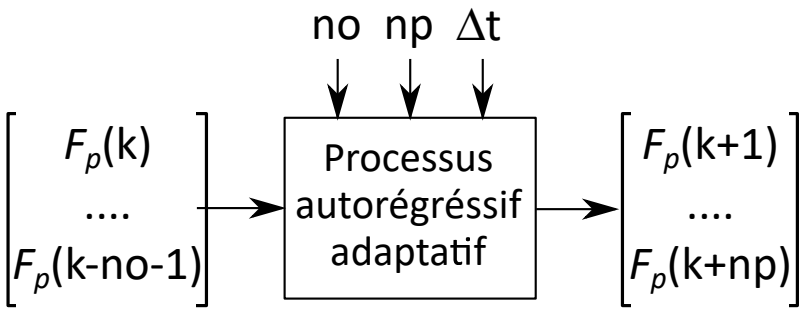


FIGURE 4.6 – Schéma du modèle de prévision de la houle

Le modèle de prévision développé à l'IFPEN est un modèle autorégressif adaptatif sans pré-filtrage des données Il est implémentable en ligne et présente des performances comparables à celles présentées par Fusco et Ringwood (2010). Un schéma-bloc de ce modèle de prévision est donné en Fig. 4.6.

Le temps d'échantillonnage du modèle est noté Δt. À partir des no dernières mesures de la houle, le modèle nous donne la force de la houle F_p pour les np prochains pas.

Comme l'horizon de notre MPC est de 30 s, on a choisi de prendre le nombre de pas $np = 30$, et le temps d'échantillonnage $\Delta t = 1$ s. Par essais successifs, on a déterminé que $no = 110$ était le réglage donnant la meilleure prédiction de la houle.

Le filtre de prévision de la houle tend vers une prédiction parfaite d'un signal sinusoïdal en régime établi, donc pour une houle monochromatique, on a $F_p = F$.

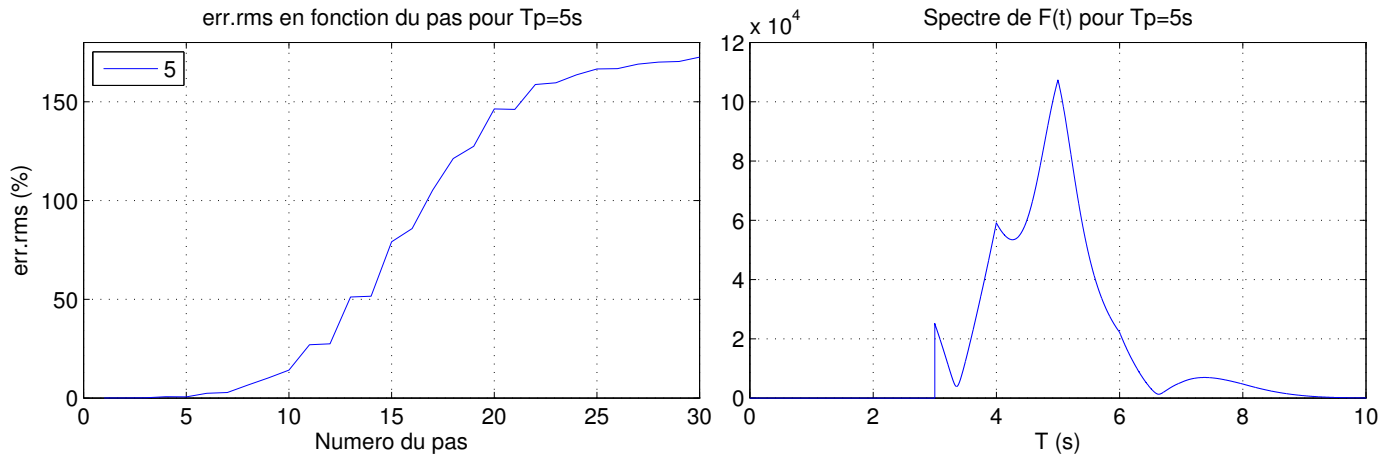
Pour quantifier la précision de l'algorithme de prévision pour une houle polychromatique, nous choisissons l'indice de performance suivant

$$\text{err. rms } \% = 100 \frac{std\,(F - F_p)}{std\,(F)}$$

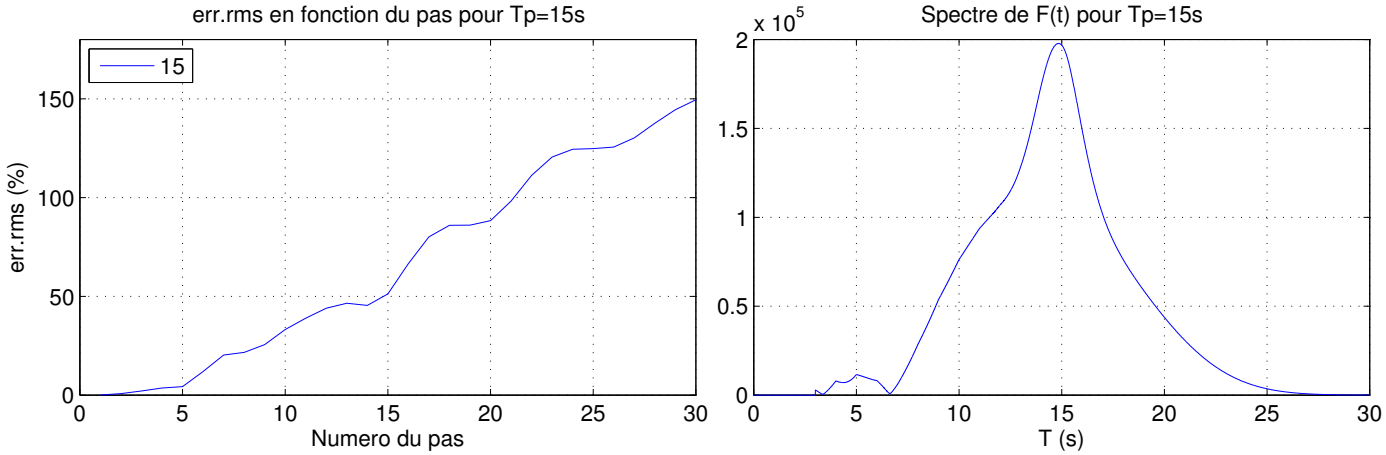
En Fig. 4.7 nous avons explicité ce critère pour trois houles différentes, caractérisées par leur période pic Tp, et pour plusieurs horizons de prévision allant de 1 s à 30 s. On précise que modèle de Fusco et Ringwood (2010) obtient une err. rms %, entre la houle prédite et la houle filtrée, pour une prévision à 20 s comprise entre 70% et 120%.

Les spectres des signaux à prédire ont aussi été tracés en Fig. 4.7, ils expliquent en partie l'écart de performances entre les différentes houles. Ces écarts peuvent aussi être attribués à l'échantillonnage de la dynamique à 1 s qui est un peu grand pour prédire la houle de période pic de 5 s. Nous n'avons pas fait apparaître l'erreur de moyenne qui est très petite devant l'amplitude de la houle.

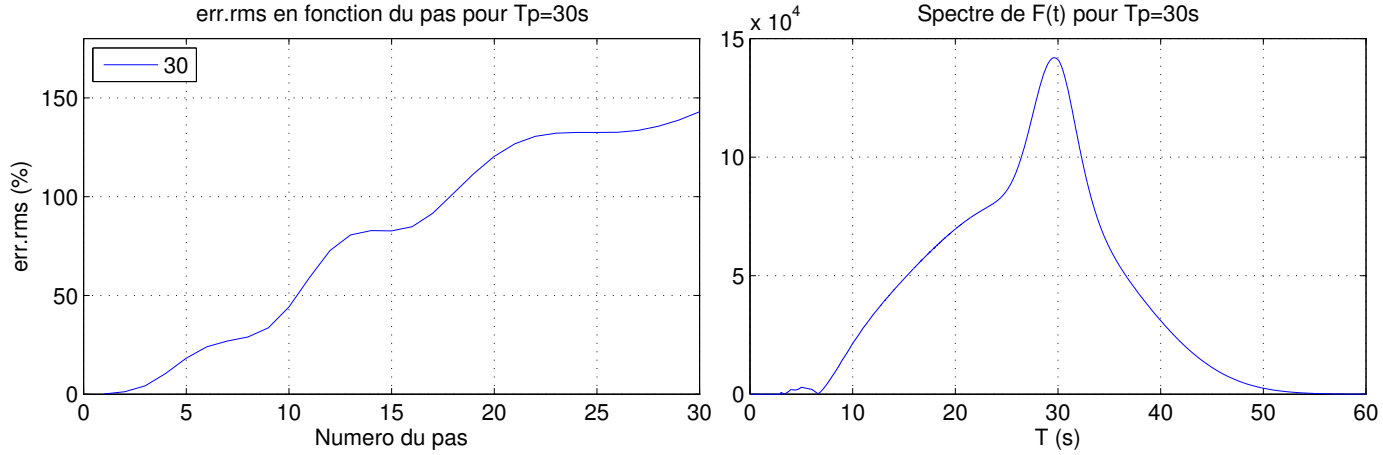
Nous pensons qu'une prévision avec une err. rms inférieure à 50% est bonne, nous pensons aussi qu'une err. rms entre 50% et 100% est encore acceptable, tant que



(a) Erreur de prévision et spectre d'une houle polychromatique pour $Tp = 5s$



(b) Erreur de prévision et spectre d'une houle polychromatique pour $Tp = 15s$



(c) Erreur de prévision et spectre d'une houle polychromatique pour $Tp = 30s$

FIGURE 4.7 – Erreurs de prévision et spectres de $F(t)$ associés à différents Tp

l'erreur en amplitude et en déphasage reste raisonnable (ce qui est le cas ici). Ces erreurs sont illustrées en Fig. 4.8 . Par conséquent, quelle que soit la vague à prédire de période pic entre 3 s et 30 s, la prévision sur les premières 10 s sera bonne, celle entre 10 s et 20 s sera convenable, et la prévision entre 20 s et 30 s sera plus discutable.

4.5.3 Comparaison des commandes appliquées au *modèle réduit*

On a tracé en Fig. 4.9 et 4.10 les RAO et RAO généralisées du *modèle réduit* de notre système contrôlé par les quatre méthodes de commandes proposées dans ce chapitre i) heuristique du §4.3.4, ii) LQR saturée du §4.5.1, iii) MPC du §4.5.2, iv) commande optimale du §4.4.1. On voit sur la Fig. 4.9 que la commande heuristique présente des maximums d'amplitude bien supérieurs aux autres commandes, on l'écarte donc pour la suite de notre étude.

Les Fig. 4.9 et 4.10 montrent, comme on pouvait s'y attendre, que la commande MPC avec prédiction de la houle est bien plus performante que le LQR saturé, et quasiment aussi performante que le contrôle optimal sur le *modèle réduit*. Ces bons résultats nous invitent donc à tester la commande MPC avec prédiction de la houle (désormais désignée par "M") et la commande LQR saturée (désormais désignée par "L") sur le *modèle complet*.

4.5.4 Comparaison des commandes appliquées au *modèle complet*

En appliquant les commandes L et M développées plus haut à notre *modèle complet* décrit par (4.16), on obtient la RAO en Fig. (4.11) et la RAOg en Fig. (4.12). La commande M montre de meilleures performances que la commande L en houle monochromatique, on rappelle que dans ce cas la prédiction de la houle est parfaite. En houle polychromatique, les performances de la commande M sont à peine meilleures que celles de la commande L.

La Fig. 4.12 est la plus représentative du besoin applicatif. La commande L est par définition beaucoup plus simple que la commande M, tandis que les performances de ces deux commandes sont très proches sur nos tests, on va donc conserver uniquement la commande L dans la suite de cette thèse.

4.6 Tests de robustesse

Nous avons négligé jusqu'ici un certain nombre de phénomènes pour simplifier l'étude. Dans cette partie, nous allons vérifier que ces suppositions n'impactent pas

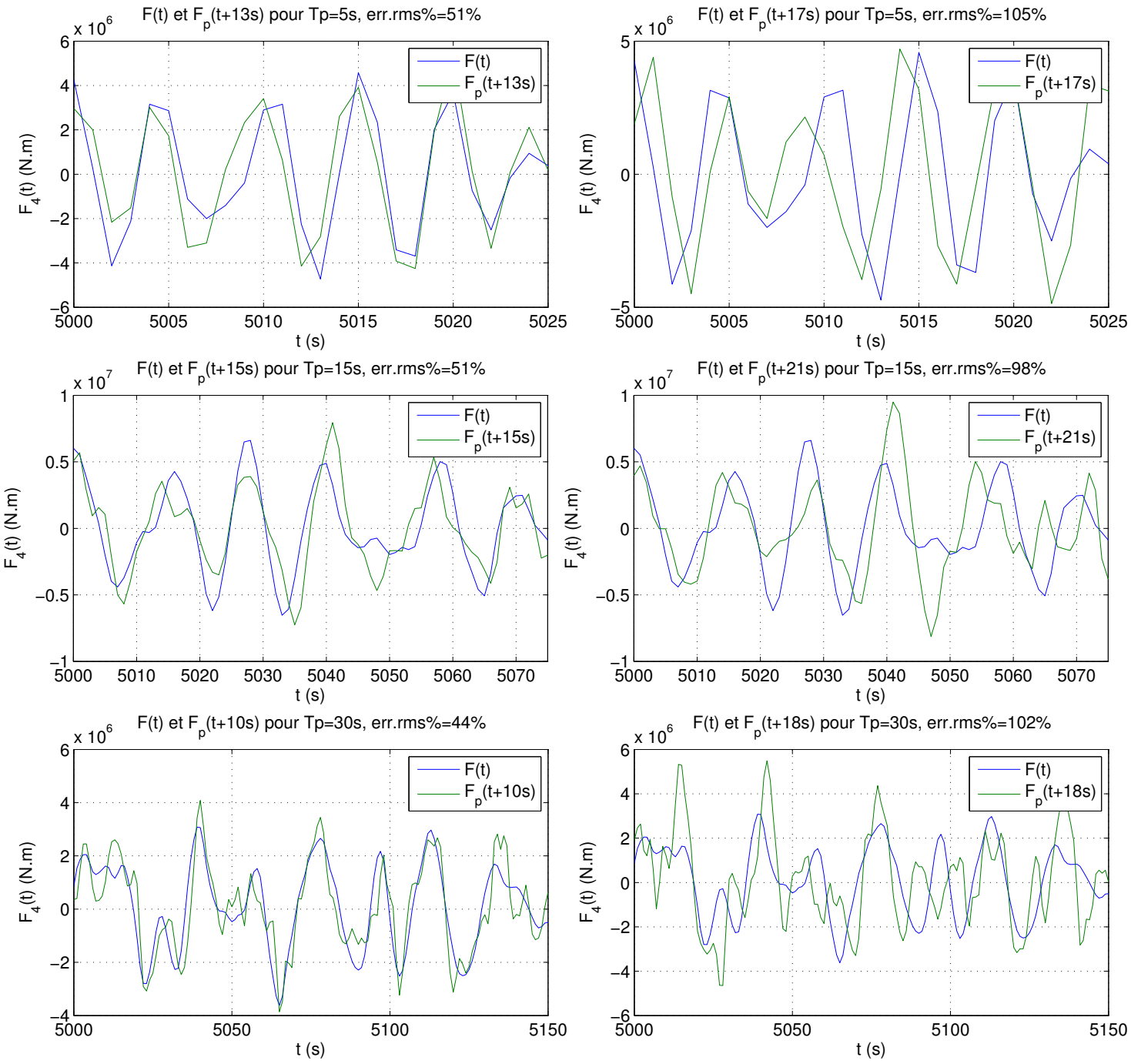


FIGURE 4.8 – Tracé de $F(t)$ et $F_p(t)$ pour différents Tp. On a err. rms $\% \approx 50\%$ pour la colonne de gauche et 100% pour celle de droite

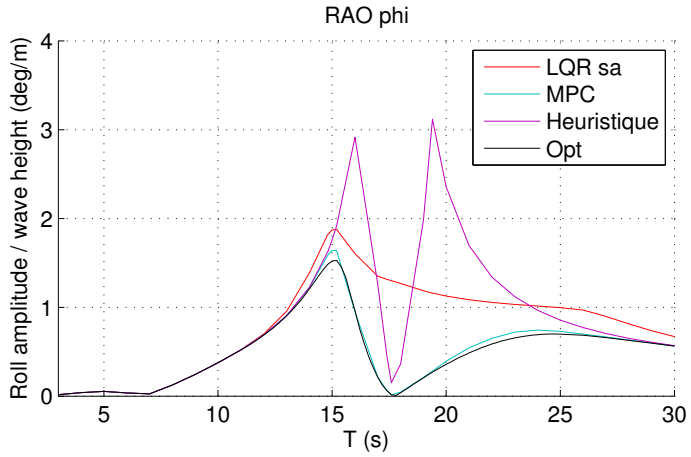


FIGURE 4.9 – RAO en roulis sur le *modèle réduit* MPC vs LQR saturé vs contrôle optimal pour une houle monochromatique

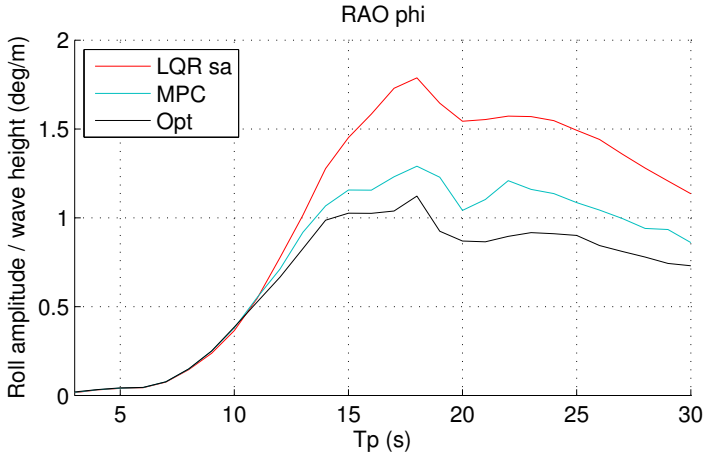


FIGURE 4.10 – RAO généralisée en roulis sur le *modèle réduit* MPC vs LQR saturé vs contrôle optimal pour une houle polychromatique

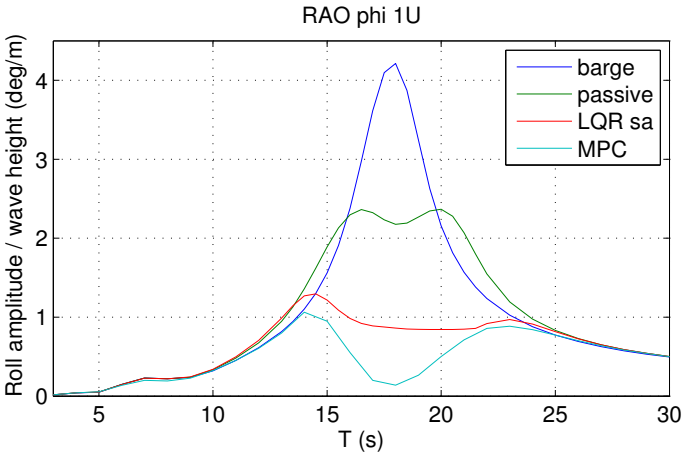


FIGURE 4.11 – RAO en roulis sur le *modèle complet* “sans TLCD” vs “TLCD passif” vs “LQR saturé” pour une houle monochromatique

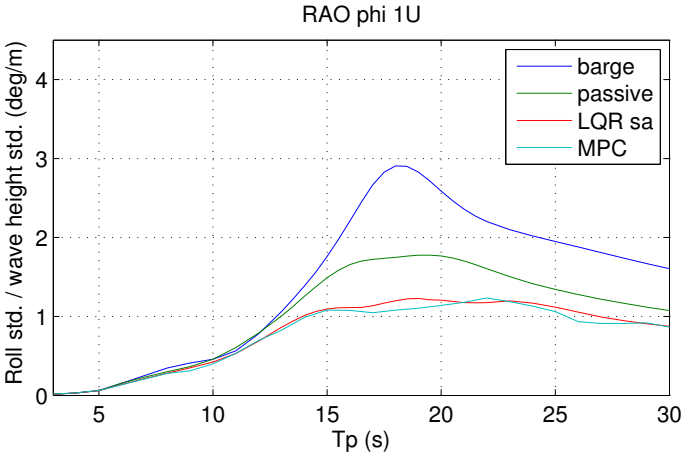


FIGURE 4.12 – RAO généralisée en roulis sur le *modèle complet* “sans TLCD” vs “TLCD passif” vs “LQR saturé” pour une houle polychromatique

dramatiquement les performances de notre système d'amortissement, en opérant des tests numériques de robustesse.

4.6.1 Perte de charge minimale non nulle

Nous avons négligé les pertes de charges dans le tube en U qui n'étaient pas causées par la restriction. Nous allons vérifier si cette hypothèse était pertinente en effectuant des simulations avec plusieurs $\eta_L > 0$ pertinents représentatifs de différents cas.

Lien entre la perte de charge singulière [11] et η

Nous allons relier le coefficient de perte de charge singulière à la valeur de η. Pour ce faire, nous comparerons les puissances dissipées par les forces qu'elles engendrent.

La force développée par une perte de charge singulière vaut

$$F_{ps} = A\Delta P_{ps} = -\frac{1}{2}K_{ps}\rho A v\,|v|$$

avec K_{ps} le module de perte de charge.

On considère le cas où la perte de charge singulière est située dans le tube horizontal. Pour que la puissance dissipée par F_{ps} soit la même que celle dissipée par F_h, il faut qu'on ait

$$-(\nu\dot{w})\frac{1}{2}K_{ps}\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}| = -(\nu\dot{w})\frac{1}{2}\eta\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|$$

c'est à dire

$$\eta = K_{ps} \tag{4.60}$$

On considère maintenant le cas où la perte de charge singulière est située dans la colonne verticale. Pour que la puissance dissipée par F_{ps} soit la même que celle dissipée par F_h, on doit vérifier

$$-\dot{w}\frac{1}{2}K_{ps}\rho A_v\dot{w}|\dot{w}| = -\dot{w}\frac{1}{2}K_{ps}\rho\nu A_h\dot{w}|\dot{w}| = -(\nu\dot{w})\frac{1}{2}\eta\rho A_h(\nu\dot{w})|\nu\dot{w}|$$

cette fois on a

$$\eta = \nu^{-2}K_{ps} \tag{4.61}$$

On se servira par la suite de ce résultat pour estimer la valeur minimale de la perte de charge.

11. Les pertes de charge de ce type sont dues à des accidents ou obstacles présents sur les tronçons (rétrécissements de section, coudes, etc...).

Estimation de η_L

Les pertes de charges que nous considérons sont situées aux liaisons entre les colonnes verticales et le tube horizontal.

Nous allons considérer trois cas, du raccord le plus brut au raccord le plus travaillé. Dans les deux premiers cas, les liaisons entre les colonnes seront assurées par des coudes à changement de section. Ces coudes seront soit brutes (cas 1) soit arrondis (cas 2). Dans le cas 3, le tube horizontal sera pourvu d'un élargissement conique (aussi appelé rectiligne) suivi d'un coude arrondi sans changement de section. Dans les trois cas, nous utilisons les valeurs données dans Idel'Cik (1969).

Pour le cas 1, les tables nous disent qu'on a $K_{ps} = 0.55$ dans le sens du rétrécissement et aussi qu'on a $K_{ps} = 1.5$ dans l'autre sens. On a donc

$$\eta_L = 0.55 + 1.5 = 2,05$$

Dans le cas 2, on a $K_{ps} = 0.85 \cdot 0.04$ pour le rétrécissement et $K_{ps} = 0.85 \cdot 0.67$ pour l'élargissement, soit

$$\eta_L = 0.85\,(0.04 + 0.67) \simeq 0.60$$

Pour le cas 3, nous avons pris un élargissement conique ayant un angle au sommet de 20° et donc une longueur de 3.86 m au bout du tube horizontal, suivi d'un coude dont le rayon de courbure vaut le diamètre de la colonne verticale. La perte de charge dans chaque coude vaut 0.24. La perte de charge dans le cône vaut 0.22 quand le liquide va du tube horizontal vers le tube vertical, et 0.09 dans l'autre sens. En utilisant (4.60-4.61) on obtient

$$\eta_L = 0.22 + 0.09 + 2\,(0.24)\,\nu^{-2} \simeq 0.34$$

Résultats

Nous avons donc effectué des simulations pour les trois valeurs de η_L qu'on vient d'obtenir. Les résultats sont présentés en Fig. 4.13, les performances du cas 1, le raccord le plus simple, sont assez mauvaises, les performances des cas 2 et 3 sont plus proches des résultats de référence. Il faudra par conséquent soigner particulièrement les raccords entre le tube horizontal et les colonnes verticales.

4.6.2 Assiette moyenne

On a négligé l'interaction entre l'éolienne et le vent. En réalité, la poussée du vent sur le rotor va créer au centre de gravité une force sur le cavalement ainsi qu'un moment sur le roulis. Cette force de poussée va en moyenne faire que l'angle de roulis n'oscillera pas autour de zéro mais autour d'une autre valeur. On a vu au §2.5 que le

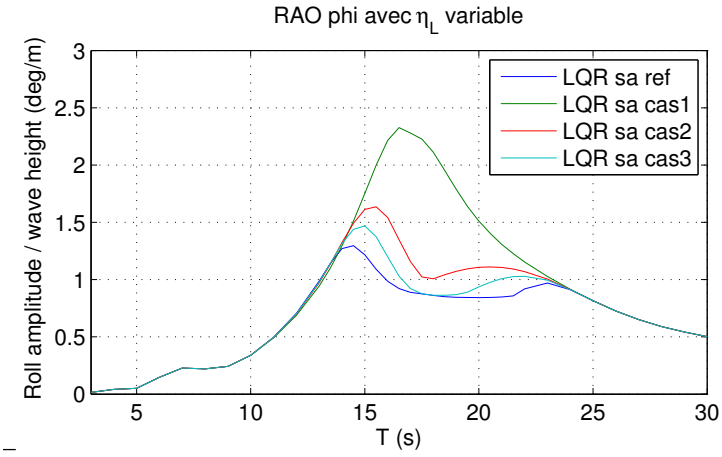


FIGURE 4.13 – RAO en roulis sur le *modèle complet* "LQR saturé" pour une houle monochromatique, pour différentes valeurs de η_L

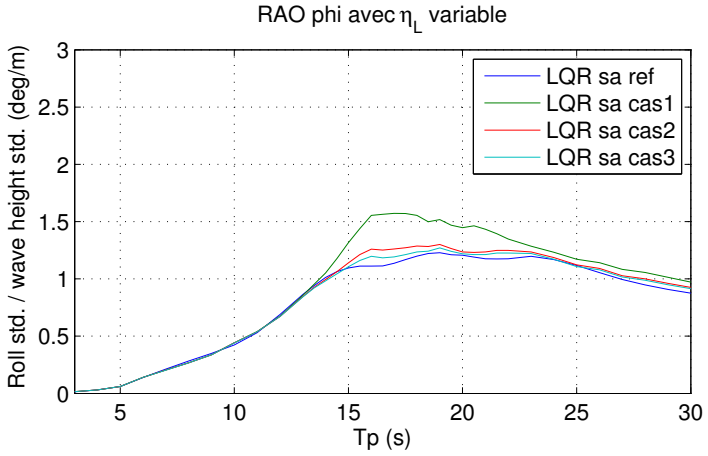


FIGURE 4.14 – RAO en roulis sur le *modèle complet* "LQR saturé" pour une houle polychromatique, pour différentes valeurs de η_L

roulis moyen devait être inférieur à 5 degrés pour une éolienne flottante industrielle. On va chercher à déterminer comment se comporte notre système d'amortissement au voisinage de cette limite, c'est-à-dire pour un angle de roulis moyen de 5 degrés.

Modification des simulations

Pour simuler ce cas de figure, on initialise le problème à $\varphi = 5°$ et on modifie la force développée par la houle de la manière suivante

$$F = F + 5\frac{\pi}{180}K_{s_{4,4}}$$

avec $K_{s_{4,4}}$ la raideur hydrostatique de l'éolienne flottante en roulis.

On va aussi modifier la loi de rétroaction afin qu'elle ne soit plus du type

$$F_h = sat\left(-K_{LQR}X\right)$$

mais

$$F_h = sat\left(-K_{LQR}\left(X - X_{moyen}\right)\right)$$

puisque le point d'équilibre a changé.

Résultats

Nous simulons le système avec les modifications indiquées. Les résultats sont tracés en Fig. 4.15, elles nous montrent que les performances, bien que dégradées par ce changement d'assiette, restent bonnes.

4.6.3 Mât flexible

Pour cette partie, on va coupler le système décrit en (4.16) avec un système masse-ressort supplémentaire qui viendra rendre compte de la déformation du mât.

Pour ce faire, il faut coupler le système (4.16) avec un système masse ressort situé au niveau de la nacelle. Nous introduisons donc dans le modèle de notre système une masse ponctuelle au niveau de la nacelle. Sa position et sa vitesse dans $\mathcal{R}_b$ sont définies par

$$\mathbf{r}_r^b \triangleq \left[0, y_r^b, z_r^b\right]^\top$$
$$\mathbf{v}_r^b \triangleq \left[0, \dot{y}_r^b, 0\right]^\top$$

L'énergie potentielle du système couplé s'écrit

$$V = \mathbf{z}^\top.gR\left(\varphi\right)\left(\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} A_t\left(\sigma\right)\left(\mathbf{r}^b\left(\sigma\right) + \mathbf{x}^b\right)\mathrm{d}\sigma + m_r\mathbf{r}_r^b - m_r z_r^b\mathbf{z}\right) + \frac{1}{2}k_r\,{y_r^b}^2$$

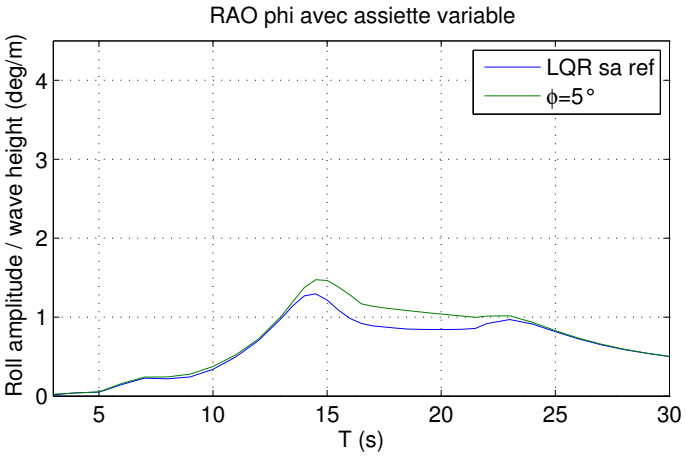


FIGURE 4.15 – RAO en roulis sur le *modèle complet* "LQR saturé" pour une houle monochromatique pour différentes assiettes

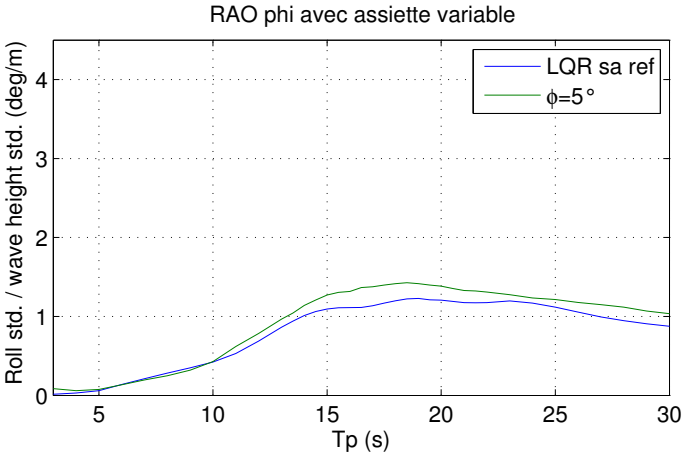


FIGURE 4.16 – RAO en roulis sur le *modèle complet* "LQR saturé" pour une houle polychromatique pour différentes assiettes

L'énergie cinétique du système couplé s'écrit $T = T_s + T_t + T_r - T_{zr}$ avec

$$T_r = \frac{1}{2} m_r \left\| \mathbf{v}^b + \omega^b \times \mathbf{r}_r^b + \mathbf{v}_r^b \right\|_2^2$$
$$T_{zr} = \frac{1}{2} m_r \left\| \mathbf{v}^b + \omega^b \times z_r^b \mathbf{z} \right\|_2^2$$

Une fois l'énergie du système écrite, on obtient les équations de la dynamique de la même façon que pour le modèle (4.16).

Nous avons déterminé la raideur en flexion du mât grâce à la théorie des poutres et aux données fournies dans Jonkman *et al.* (2009) soit $1.17\,10^6$ N/m. La masse m_r est celle du rotor et de la nacelle combinée soit 350 T.

Nous avons simulé le modèle modifié et tracé les résultats en Fig. 4.17 à 4.19. Sur la Fig. 4.17 on voit qu'en ajoutant la flexion du mât au problème, la période de résonance du système barge plus éolienne est légèrement décalée vers la droite. La Fig. 4.18 nous montre que ce décalage entraîne une légère diminution de l'amplitude des oscillations en roulis du système soumis à la commande LQR saturée, pour les houles monochromatiques dont la période est située entre 10 s et 16 s. Sur la Fig. 4.19 concernant l'accélération de la nacelle, on observe seulement un changement au niveau de la période de résonance du mat, où les performances sont dégradées. L'amplitude calculée de l'accélération de la nacelle à la résonance est grande car on a négligé l'interaction aérodynamique entre le rotor et le vent, par conséquent les oscillations de la nacelle ne sont pas amorties. En pratique on peut s'attendre à un résultat plus favorable, l'amplitude de ce pic se trouvant naturellement réduite par cet effet.

On voit qu'approximer l'ensemble flotteur-éolienne comme rigide est une hypothèse qui n'a qu'un faible impact sur les résultats en roulis.

4.6.4 Incidence de la houle

Jusqu'ici on a considéré que la houle et le TLCD étaient parfaitement alignés, en conditions réelles ce ne sera pas le cas. On introduit l'angle β qui va représenter ce désalignement. On abordera en détail l'intégration de β dans le modèle dynamique dans le Chapitre 5. On a tracé les RAO de notre système soumis à une houle monochromatique et amorti par un TLCD passif en Fig. 4.22 pour différentes valeurs de β de 0° à 90°. On observe que plus β augmente, plus on se rapproche du cas "sans TLCD".

On voit clairement que l'incidence de la houle est le point négligé jusqu'ici le plus critique, il faut donc trouver une parade à ce problème. C'est l'objet du Chapitre suivant qui étudie le système en trois dimensions.

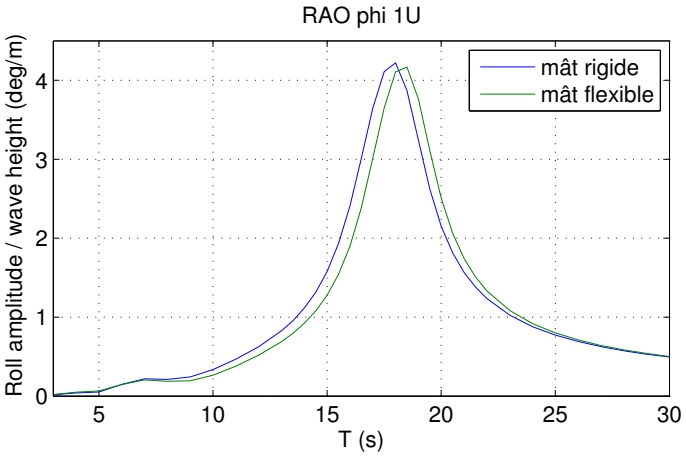


FIGURE 4.17 – RAO en roulis sur le *modèle complet* pour une houle monochromatique, pour un mât flexible, avec le liquide du TLCD immobile

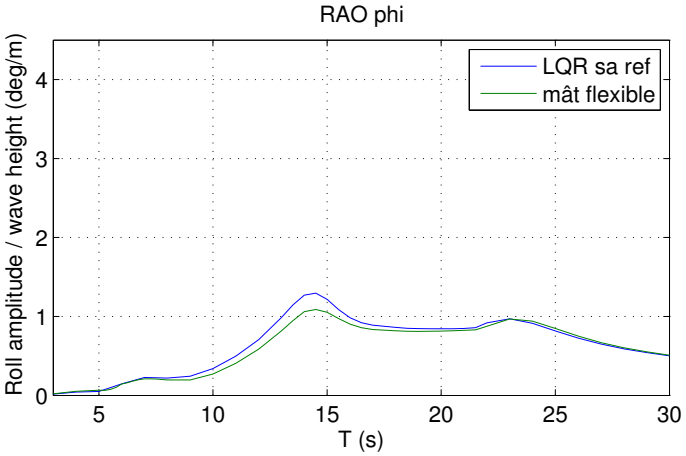


FIGURE 4.18 – RAO en roulis sur le *modèle complet* "LQR saturé" pour une houle monochromatique, pour un mât flexible

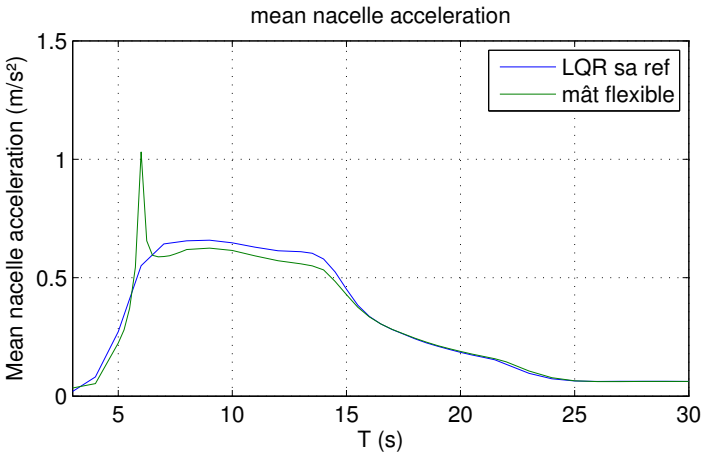


FIGURE 4.19 – Accélération moyenne de la nacelle sur le *modèle complet* pour le "LQR saturé" pour une houle monochromatique, pour un mât flexible

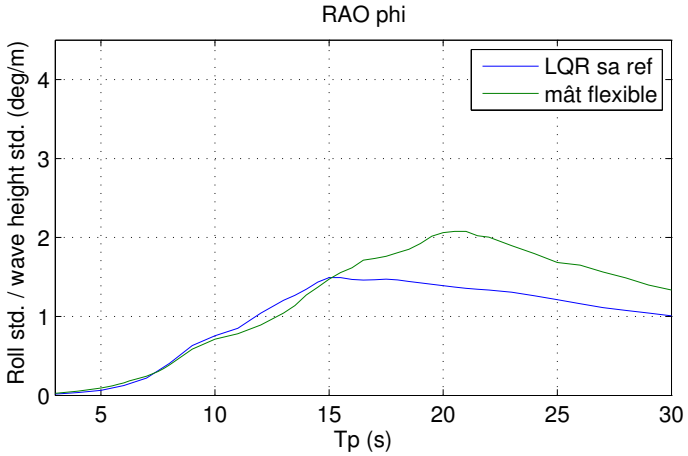


FIGURE 4.20 – RAO en roulis sur le *modèle complet* pour le "LQR saturé" soumis à une houle polychromatique, pour un mât flexible

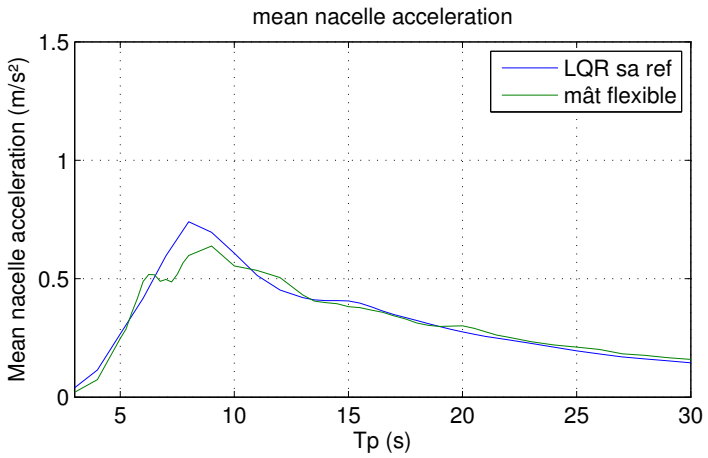


FIGURE 4.21 – Accélération moyenne de la nacelle sur le *modèle complet* pour le "LQR saturé" soumis à une houle polychromatique, pour un mât flexible

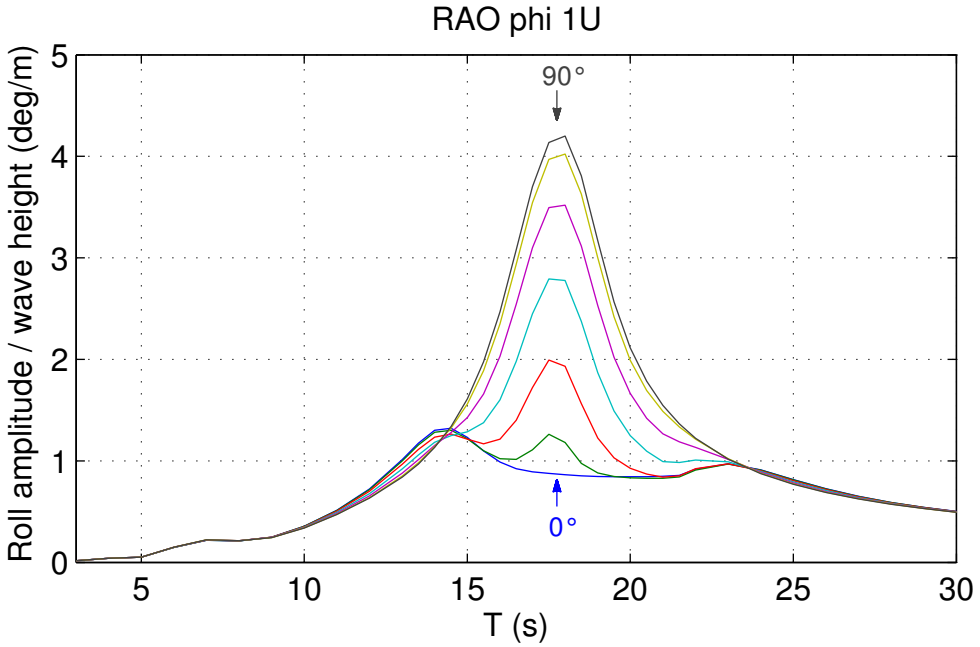


FIGURE 4.22 – RAO en roulis sur le *modèle complet* pour le "LQR saturé" soumis à une houle monochromatique pour β allant de 0 à 90° par incréments de 15°

Chapitre 5

Systèmes 3D

On a vu dans le chapitre précédent que le principal point faible de la stratégie d'amortissement actif par le TLCD se situait dans son alignement avec les vagues. Dans ce chapitre, nous allons proposer deux systèmes d'amortissement novateurs inspirés par le TLCD que nous avons baptisé TLMCD, pour Tuned Liquid Multiple Column Damper, et nous allons les étudier en 3D. Nous comparerons aussi les performances de ces TLMCD avec une approche plus classique qui consiste à agencer deux TLCD en croix.

5.1 Conventions géométriques de la modélisation 3D

5.1.1 Orientation des repères les uns par rapport aux autres

On conserve les repères introduits au §4.1.2, i.e. le repère lié à la barge est noté $\mathcal{R}_b \triangleq (CdG, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$ et le repère galiléen lié à la terre est noté $\mathcal{R}_e \triangleq (O, \mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e, \mathbf{z}_e)$. Cependant comme nous autorisons les repères à bouger selon tous les degrés de liberté, l'orientation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$ est définie par le triplet d'Euler "roulis-tangage-lacet", noté $\Theta = [\varphi, \theta, \psi]^\top$, et la matrice de rotation associée est

$$R(\Theta) \triangleq R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\varphi)$$

où

$$R_x(\varphi) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad R_z(\psi) \triangleq \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en notant $c_x = \cos(x)$ et $s_x = \sin(x)$. On vérifie toujours $\dot{\mathbf{x}}^e = R(\Theta)\,\mathbf{v}^b$. On a

$R(\Theta) \in \mathbb{R}^{3\times3}$	matrice de rotation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
$x^e = [x, y, z]^\top \in \mathbb{R}^3$	position de CdG dans $\mathcal{R}_e$
$\Theta = [\varphi, \theta, \psi]^\top \in \mathbb{R}^3$	triplet d'Euler associé à R
$\mathbf{v}^b \in \mathbb{R}^3 \omega^b$	vitesse de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
$\omega^b \in \mathbb{R}^3$	vitesse de rotation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$
nc	nombre minimal de variables nécessaires pour décrire la vitesse du fluide dans le TLCD/TLMCD
$w \in \mathbb{R}^{nc}$	positions généralisées du fluide
$q = \left[x^{n\top}, \Theta^\top, w^\top\right]^\top \in \mathbb{R}^{6+nc}$	positions généralisées du système
$v = \left[v^{b\top}, \omega^{b\top}, \dot{w}^\top\right]^\top \in \mathbb{R}^{6+nc}$	vitesses généralisées du système
$G(\Theta) \in \mathbb{R}^{3\times3}$	matrice reliant $\dot{\Theta}$ et ω^b telle que : $\omega^b = G\dot{\Theta}$
$\mathcal{P}(\Theta) \in \mathbb{R}^{6+nc\times6+nc}$	matrice reliant $\dot{q}$ et v telle que : $v = \mathcal{P}\dot{q}$
$r^b(\sigma) = \left[x_t^b, y_t^b(\sigma), z_t^b(\sigma)\right]^\top \in \mathbb{R}^3$	géométrie des éléments du TLCD/TLMCD

TABLE 5.1 – Nomenclature spécifique à la modélisation des systèmes 3D

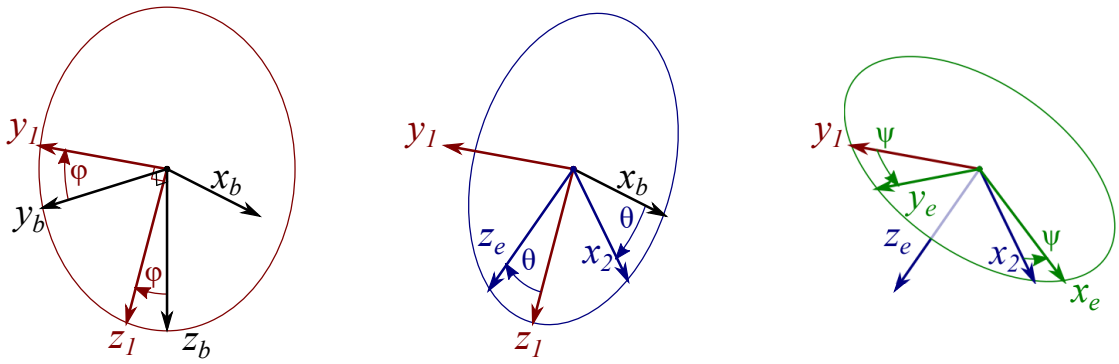


FIGURE 5.1 – Orientation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$

classiquement (Landau et Lifshitz, 1976)

$$\dot{R} = R(\Theta)\ S(\omega^b) \tag{5.1}$$

On définit

$$\begin{aligned} G(\Theta) &\triangleq \left[\mathbf{x}, R_x^\top(\varphi)\,\mathbf{y}, R_x^\top(\varphi)\,R_y^\top(\theta)\,\mathbf{z}\right] = \left[\mathbf{x}, R_x^\top(\varphi)\,\mathbf{y}, R(\Theta)^\top\,\mathbf{z}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi c_\theta \\ 0 & -s_\varphi & c_\varphi c_\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.2}$$

La vitesse de rotation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$ exprimé dans $\mathcal{R}_b$, notée ω^b, est relié à Θ par $\omega^b = G\dot{\Theta}$.

On note $q_s \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}^e \\ \Theta \end{bmatrix}$, $v_s \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}^b \\ \omega^b \end{bmatrix}$. On définit $q \triangleq \begin{bmatrix} q_s \\ w \end{bmatrix}$ et $v \triangleq \begin{bmatrix} v_s \\ \dot{w} \end{bmatrix}$, avec $w \in \mathbb{R}^{nc}$ et nc le nombre minimal de variables qui permettent de connaître la vitesse du liquide dans le TLCD (nc sera déterminé en §5.2 pour chaque variante), ces grandeurs sont reliées par $v = \mathcal{P}\dot{q}$ avec

$$\mathcal{P}(\Theta) = \begin{bmatrix} R(\Theta)^\top & 0_{3\times 3} & 0_{3\times nc} \\ 0_{3\times 3} & G(\Theta) & 0_{3\times nc} \\ 0_{nc\times 3} & 0_{nc\times 3} & \mathbb{I}_{nc} \end{bmatrix}$$

Pour la suite de nos calculs, nous aurons besoin des résultats calculatoires suivants.

On définit la dérivée d'un vecteur ligne $x^\top \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ par rapport à un vecteur colonne $y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ comme suit

$$\frac{\partial x^\top}{\partial y} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_m} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Proposition 1. *Pour tout vecteur $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire la dérivée de $\mathbf{r}^\top R$ par rapport au vecteur Θ sous la forme*

$$\frac{\partial \mathbf{r}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S\left(R^\top \mathbf{r}\right) \tag{5.4}$$

avec G définie en (5.2) et $S(\cdot)$ la matrice du produit vectoriel

Démonstration. On détaille le calcul pour les trois vecteurs de base $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. On a

$$R^\top \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -s_\theta \\ s_\varphi c_\theta \\ c_\varphi c_\theta \end{bmatrix}$$

donc

$$-G^\top S\left(R^\top \mathbf{z}\right) = \begin{bmatrix} 0 & c_\theta c_\varphi & -c_\theta s_\varphi \\ -c_\theta & -s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\top R}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & c_\theta c_\varphi & -c_\theta s_\varphi \\ -c_\theta & -s_\theta s_\varphi & -s_\theta c_\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on a donc

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S\left(R^\top \mathbf{z}\right)$$

On a aussi

$$R^\top \mathbf{y} = \begin{bmatrix} c_\theta s_\psi \\ c_\varphi c_\psi + s_\varphi s_\theta s_\psi \\ -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi \end{bmatrix}$$

donc

$$-G^\top S\left(R^\top \mathbf{y}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\theta s_\psi & c_\varphi c_\theta s_\psi \\ c_\theta c_\psi & -c_\varphi s_\psi + s_\varphi s_\theta c_\psi & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{y}^\top R}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\theta s_\psi & c_\varphi c_\theta s_\psi \\ c_\theta c_\psi & -c_\varphi s_\psi + s_\varphi s_\theta c_\psi & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

on a donc

$$\frac{\partial \mathbf{y}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S\left(R^\top \mathbf{y}\right)$$

Et finalement on a

$$R^\top \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi \\ -c_\varphi s_\psi + s_\varphi s_\theta c_\psi \\ s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

donc

$$-G^\top S\left(R^\top \mathbf{x}\right) = \begin{bmatrix} 0 & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi & c_\varphi s_\psi - s_\varphi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta c_\psi & s_\varphi c_\theta c_\psi & c_\varphi c_\theta c_\psi \\ -c_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\theta s_\psi \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top R}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & s_\varphi s_\psi + c_\varphi s_\theta c_\psi & c_\varphi s_\psi - s_\varphi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta c_\psi & s_\varphi c_\theta c_\psi & c_\varphi c_\theta c_\psi \\ -c_\theta s_\psi & -c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\theta s_\psi \end{bmatrix}$$

On a donc

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S\left(R^\top \mathbf{x}\right)$$

On peut réécrire $\mathbf{r} = r_1\mathbf{x} + r_2\mathbf{y} + r_3\mathbf{z}$, par linéarité de la dérivée on vérifie donc

$$\frac{\partial \mathbf{r}^\top R}{\partial \Theta} = -G^\top S\left(R^\top \mathbf{r}\right)$$

□

Proposition 2. *On peut écrire les dérivées de* $\mathbf{v}^{b\top}$ *et* $\omega^{b\top}$ *par rapport à* Θ *sous la forme*

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta} = -G^\top S\left(\mathbf{v}^b\right) \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} = \dot{G}^\top - G^\top S\left(\omega^b\right) \tag{5.6}$$

Démonstration. Pour démontrer 5.6, on écrit

$$\omega^b = G\left(\Theta\right)\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} + s_\theta \dot{\psi} \\ c_\theta s_\varphi \dot{\psi} + c_\varphi \dot{\theta} \\ c_\theta c_\varphi \dot{\psi} - s_\varphi \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

on a donc

$$\frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 & c_\theta c_\varphi \dot{\psi} - s_\varphi \dot{\theta} & -c_\theta s_\varphi \dot{\psi} - c_\varphi \dot{\theta} \\ -c_\theta \dot{\psi} & -s_\theta s_\varphi \dot{\psi} & -s_\theta c_\varphi \dot{\psi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On dérive la matrice G définie en (5.2) par rapport au temps, on obtient

$$\dot{G}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_\varphi \dot{\varphi} & -c_\varphi \dot{\varphi} \\ -c_\theta \dot{\theta} & c_\theta c_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta s_\varphi \dot{\theta} & -c_\theta s_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta c_\varphi \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

on écrit aussi

$$G^\top S\left(G\left(\Theta\right)\dot{\Theta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -c_\theta c_\varphi \dot{\psi} + s_\varphi \dot{\theta} & c_\theta s_\varphi \dot{\psi} + c_\varphi \dot{\theta} \\ c_\theta \dot{\psi} & s_\varphi\left(-\dot{\varphi} + s_\theta \dot{\psi}\right) & c_\varphi\left(-\dot{\varphi} + s_\theta \dot{\psi}\right) \\ -c_\theta \dot{\theta} & c_\theta c_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta s_\varphi \dot{\theta} & -c_\theta s_\varphi \dot{\varphi} - s_\theta c_\varphi \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

On vérifie donc bien l'équation

$$\frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} = \dot{G}^\top - G^\top S\left(\omega^b\right)$$

Pour démontrer (5.5), on rappelle qu'on peut écrire $\mathbf{v}^b$ sous la forme $R^\top \dot{\mathbf{x}}^e$, d'après la Proposition 1 on a donc

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta} = -G^\top S\left(\mathbf{v}^b\right)$$

□

5.1.2 Éléments relatifs au système d'amortissement

Dans tout le chapitre, et quel que soit le système considéré, nous modélisons la géométrie du tube de la même manière que pour la modélisation 2D i.e.

$$\mathbf{r}^b\left(\sigma\right) \triangleq \left[x_t^b, y_t^b\left(\sigma\right), z_t^b\left(\sigma\right)\right]^\top$$

avec

$$y_t^b\left(\sigma\right) \triangleq \begin{cases} \frac{L_h}{2} & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ -\sigma & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ -\frac{L_h}{2} & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases} \qquad z_t^b\left(\sigma\right) \triangleq \begin{cases} e + \frac{L_h}{2} + \sigma & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ e & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ e + \frac{L_h}{2} - \sigma & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases}$$

et où x_t^b est défini pour chaque système d'amortissement de manière à obtenir un problème symétrique.

La section du TLCD est comme précédemment définie par

$$A_t\left(\sigma\right) \triangleq \begin{cases} A_v & \sigma \leq -\frac{L_h}{2} \\ A_h & -\frac{L_h}{2} < \sigma \leq \frac{L_h}{2} \\ A_v & \frac{L_h}{2} < \sigma \end{cases}$$

Dans la suite, les systèmes d'amortissement considérés sont constitués de N éléments pivotés de manière régulière autour de $(CoG, \mathbf{z}_b)$. La géométrie de chacun de ces éléments est décrite par $R_z\left(\alpha_i\right) r^b\left(\sigma_i\right)$, exprimée dans $\mathcal{R}_b$, avec

$$R_z\left(\alpha_i\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\alpha_i\right) & -\sin\left(\alpha_i\right) & 0 \\ \sin\left(\alpha_i\right) & \cos\left(\alpha_i\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On introduit $v_i(\sigma_i)$ la vitesse algébrique dans l'élément i du système d'amortissement. Par convention, $v_i(\sigma_i)$ est positif si le fluide se déplace vers σ croissant. Le vecteur $\mathbf{v}_i^b(\sigma_i)$, de la vitesse du fluide dans l'élément i exprimée dans $\mathcal{R}_b$ vaut

$$\mathbf{v}_i^b(\sigma_i) = v_i(\sigma_i) R_z(\alpha_i) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i) \tag{5.7}$$

On introduit $\mathcal{V}_h$ le vecteur des vitesses algébriques dans la partie horizontale et $\mathcal{V}_v$ le vecteur des vitesses algébriques dans les parties verticales

$$\mathcal{V}_h \triangleq \begin{bmatrix} v_1(0) \\ \vdots \\ v_N(0) \end{bmatrix} \qquad \mathcal{V}_v \triangleq \begin{bmatrix} v_1\left(\sigma_i \notin \left[-\frac{L_h}{2}, \frac{L_h}{2}\right]\right) \\ \vdots \\ v_N\left(\sigma_i \notin \left[-\frac{L_h}{2}, \frac{L_h}{2}\right]\right) \end{bmatrix}$$

on a

$$\mathcal{V}_h = P_h \dot{w} \qquad \mathcal{V}_v = P_v \dot{w} \tag{5.8}$$

P_h et P_v sont déterminés pour chaque système d'amortissement au §5.2.

5.2 Modèles dynamiques

Maintenant que nous avons introduit toutes les notations géométriques, on peut procéder à l'établissement des modèles dynamiques.

5.2.1 Forces généralisées

On notera que le modèle hydrodynamique tel qu'il a été défini en 4.1.3, c'est à dire

$$M_s \dot{v}_s = F(t) + F_{rad}(t, v_s) + F_{hs}(q_s) + F_{anc}(q_s) + F_{visc}(t, v_s)$$

reste valable. On va juste rajouter l'angle d'incidence de la houle β, on notera donc

$$F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) = F(t, \beta) + F_{rad}(t, v_s) + F_{hs}(q_s) + F_{anc}(q_s) + F_{visc}(t, v_s) \tag{5.9}$$

La force généralisée engendrée par les restrictions dans le système dissipe la puissance suivante

$$\mathcal{V}_h^\top F_h$$

d'après (5.8) on a $\mathcal{V}_h^\top = \dot{w}^\top P_h^\top$, les forces généralisées Q s'écrivent donc

$$Q(t, q, \dot{q}, \beta) = \mathcal{P}(\Theta)^\top \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) \\ P_h^\top F_h(\dot{w}) \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

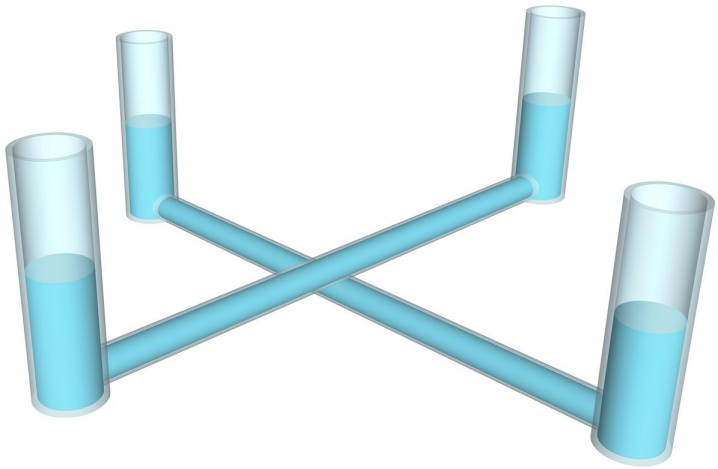


FIGURE 5.2 – Illustration du TLMCD 2U (ils n'ont pas de section commune)

avec

$$F_h = -\frac{1}{2}\rho A_h \eta \circ \mathcal{V}_h \circ |\mathcal{V}_h|$$

avec $\eta \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des coefficients de perte de charge et avec $\circ$ le produit matriciel de Hadamard (produit terme à terme).

5.2.2 Système à N TLCD

On choisit d'amortir le flotteur avec un nombre N de tubes en U régulièrement distribués en angle autour de $(CoG, \mathbf{z}_b)$. On appellera ce système NU. À titre d'exemple, le système 2U est illustré en Fig. 5.2. Pour ce système, chaque élément est un TLCD, par conséquent l'abscisse curviligne de chaque élément, notée σ_i, varie entre $-\varsigma_{si}$ et ς_{pi}. Pour ce système d'amortissement on a $\alpha_i \triangleq \pi \frac{i-1}{N}$.

Pour définir la vitesse du fluide à chaque endroit d'un tube, on a vu au §4.1.2 qu'une seule variable suffisait. On a donc le nombre minimal de variables qui permettent de connaître la vitesse du liquide dans le TLCD (voir §5.1) $nc = N$. Les surfaces libres de chaque TLCD sont toujours situées à $\sigma = \varsigma_{pi}$ et $\sigma = -\varsigma_{si}$ définis comme suit

$$\varsigma_{pi} \triangleq \frac{L_h}{2} + L_v + w_i$$
$$\varsigma_{si} \triangleq \frac{L_h}{2} + L_v - w_i$$

Pour le système NU on a pour $i = 1, \ldots, N$

$$v_i(\sigma_i) = \frac{A_v}{A_t(\sigma_i)} \dot{w}_i$$

on en déduit l'expression de $\mathbf{v}_i^b(\sigma_i)$ grâce à l'équation (5.7)

$$\mathbf{v}_i^b(\sigma_i) = \frac{A_v}{A_t(\sigma_i)} \dot{w}_i R_z(\alpha_i) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i)$$

Les matrices $P_{h_{NU}}$ et $P_{v_{NU}}$ utilisées en (5.8) s'écrivent

$$P_{h_{NU}} = \nu \mathbb{I}_{nc} \qquad\qquad P_{v_{NU}} = \mathbb{I}_{nc} \tag{5.11}$$

Énergie mécanique du système NU

L'énergie potentielle du liquide dans les N tubes en U s'écrit

$$\begin{aligned} V_{NU} &= \mathbf{z}^\top . \left(g\rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma) \left(R(\Theta)\ R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) + \mathbf{x}^e \right) \mathrm{d}\sigma \right) \\ &= -g m_t z - g\rho \mathbf{z}^\top R(\Theta) \left[\rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

avec m_t la masse totale de liquide dans les TLCDs.

On écrit l'énergie cinétique

$$
\begin{aligned}
T_{NU} =& T_s + T_{DNU} \\
T_s =& \frac{1}{2} v_s^\top M_s \, v_s \\
T_{DNU} =& \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i) \left\| \mathbf{v}^b + \omega^b \times R_z(\alpha_i) \, \mathbf{r}^b(\sigma_i) + \mathbf{v}_i^b(\sigma_i) \right\|^2 \mathrm{d}\sigma_i \\
=& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\rho \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i) \, \mathrm{d}\sigma_i \right) \left\| \mathbf{v}^b \right\|^2 - \frac{1}{2} \omega^{b\top} \left(\rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i) \, S^2\left(R_z(\alpha_i) \, \mathbf{r}^b(\sigma_i) \right) \mathrm{d}\sigma_i \right) \omega^b \\
&+ \omega^{b\top} \left(\rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i) \, S\left(R_z(\alpha_i) \, \mathbf{r}^b(\sigma_i) \right) \mathrm{d}\sigma_i \right) \mathbf{v}^b + \mathbf{v}^{b\top} \left(\rho A_v \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} R_z(\alpha_i) \, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i) \, \dot{w}_i \mathrm{d}\sigma_i \right) \\
&+ \omega^{b\top} \left(\rho A_v \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} S\left(R_z(\alpha_i) \, \mathbf{r}^b(\sigma_i) \right) R_z(\alpha_i) \, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i) \, \dot{w}_i \mathrm{d}\sigma_i \right) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\rho A_v^2 \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} \frac{\dot{w}_i^2}{A_t(\sigma_i)} \mathrm{d}\sigma_i \right) \\
T_{NU} =& \frac{1}{2} \, v^\top M_{NU}(w) \, v = \frac{1}{2} \, \dot{q}^\top \mathcal{P}(\Theta)^\top \, M_{NU}(w) \, \mathcal{P}(\Theta) \, \dot{q} = \frac{1}{2} \, \dot{q}^\top \mathcal{M}_{NU}(q) \, \dot{q} \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

avec $\mathcal{M}_{NU} \triangleq \mathcal{P}^\top M_{NU} \, \mathcal{P}$ et

$$
M_{NU}(w) \triangleq \begin{bmatrix} M_s & 0_{6\times nc} \\ 0_{nc\times 6} & 0_{nc\times nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_t \mathbb{I}_3 & M_{v\omega}(w) & M_{vq}(w) \\ M_{v\omega}^\top(w) & M_\omega(w) & M_{\omega q}(w) \\ M_{vq}^\top(w) & M_{\omega q}^\top(w) & M_q(w) \end{bmatrix} \qquad (5.14)
$$

Pour $i = 1, ..., N$ on a

$$
\begin{aligned}
m_t &\triangleq \rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i)\, \mathrm{d}\sigma_i \in \mathbb{R} \\
M_{v\omega} &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i)\, S\left(R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma_i)\right) \mathrm{d}\sigma_i = -M_{v\omega}^{\top}(w) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\
M_{\omega} &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^{N} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t(\sigma_i)\, S^2\left(R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma_i)\right) \mathrm{d}\sigma_i = M_{\omega}^{\top}(w) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\
M_{vq}[:, i] &\triangleq \rho A_v \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} R_z(\alpha_i)\, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i)\, \mathrm{d}\sigma_i \in \mathbb{R}^{3\times 1} \\
M_{\omega q}[:, i] &\triangleq \rho A_v \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} S\left(R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma_i)\right) R_z(\alpha_i)\, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i)\, \mathrm{d}\sigma \in \mathbb{R}^{3\times 1} \\
M_q &\triangleq \mathbb{I}_{nc} \rho A_v \left(L_h\, \nu\, + 2L_v\right) \in \mathbb{R}^{nc}
\end{aligned}
$$

avec $M_{vq} \in \mathbb{R}^{3\times nc}$, $M_{\omega q} \in \mathbb{R}^{3\times nc}$.

Établissement de la dynamique du système NU

L'approche Lagrangienne nous dit que la dynamique de notre système s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\left(T_{NU} - V_{NU}\right)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial\left(T_{NU} - V_{NU}\right)}{\partial q} = Q$$

En premier lieu on calcule $\frac{\partial T_{NU}}{\partial q}$. Dans l'équation (5.13), on voit que T est indépendant de $\mathbf{x}^e$ donc

$$\frac{\partial T_{NU}}{\partial \mathbf{x}^e} = 0_{3\times 1}$$

Comme M est symétrique et ne dépend pas de Θ, on a

$$\frac{\partial T_{NU}}{\partial \Theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial\left(\dot{q}^{\top} \mathcal{P}^{\top} M_{NU} \mathcal{P}\, \dot{q}\right)}{\partial \Theta} = \frac{\partial\left(\mathcal{P}\, \dot{q}\right)^{\top}}{\partial \Theta} M_{NU}\left(\mathcal{P}\, \dot{q}\right)$$

avec

$$\frac{\partial\left(\mathcal{P}\, \dot{q}\right)^{\top}}{\partial \Theta} = \frac{\partial v^{\top}}{\partial \Theta} = \left[\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta}, \frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta}, 0_{3\times 1}\right] = \begin{bmatrix} -G^{\top} S\left(\mathbf{v}^b\right) & \dot{G}^{\top} - G^{\top} S\left(\omega^b\right) & 0_{3\times 1} \end{bmatrix}$$

Le terme $\frac{\partial T}{\partial w_i}$ s'écrit

$$\frac{\partial T_{NU}}{\partial w_i} = \frac{1}{2}\, \dot{q}^{\top} \mathcal{P}^{\top} \frac{\partial M_{NU}}{\partial w_i} \mathcal{P}\, \dot{q}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial w_i} M_{v\omega} = -\rho A_v S \left(R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(\varsigma_{pi}\right) - R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(-\varsigma_{si}\right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} M_{\omega} = -\rho A_v \left(S\left(R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(\varsigma_{pi}\right) \right)^2 - S\left(R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(-\varsigma_{si}\right) \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} M_{vq}[:, i] = \rho A_v \left(R_z\left(\alpha_i\right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(\varsigma_{pi}\right) - R_z\left(\alpha_i\right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(-\varsigma_{si}\right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} M_{vq}[:, j \neq i] = 0_{3\times 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} M_{\omega q}[:, i] = \rho A_v \left(S\left(R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(\varsigma_{pi}\right) \right) R_z\left(\alpha_i\right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(\varsigma_{pi}\right) - S\left(R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(-\varsigma_{si}\right) \right) R_z\left(\alpha_i\right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(-\varsigma_{si}\right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} M_{\omega q}[:, j \neq i] = 0_{3\times 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_i} M_q = 0_{nc\times nc}$$

D'après l'équation (5.12) et (5.4), $\frac{\partial V_{NU}}{\partial q}$ s'écrit

$$\frac{\partial V_{NU}}{\partial x^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -gm_t \end{bmatrix} = -gm_t \mathbf{z}$$

$$\frac{\partial V_{NU}}{\partial \Theta} = -g\rho \frac{\partial \mathbf{z}^\top R}{\partial \Theta} \left(\sum_{i=1}^{nc} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t\left(\sigma\right) R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(\sigma\right) \mathrm{d}\sigma \right)$$

$$= g\rho G^\top S\left(R^\top \mathbf{z}\right) \left(\sum_{i=1}^{nc} \int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}} A_t\left(\sigma\right) R_z\left(\alpha_i\right) \mathbf{r}^b\left(\sigma\right) \mathrm{d}\sigma \right)$$

$$\frac{\partial V_{NU}}{\partial w_i} = -g\rho A_v \mathbf{z}^\top R\left(\Theta\right) R_z\left(\alpha_i\right) \left(\mathbf{r}^b\left(\varsigma_{pi}\right) - \mathbf{r}^b\left(-\varsigma_{si}\right) \right)$$

On voit dans (5.12) que V_{NU} ne dépend pas de $\dot{q}$, donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial V_{NU}}{\partial \dot{q}} = 0_{6+nc\times 1}$$

On a aussi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T_{NU}}{\partial \dot{q}} \right)^\top = \mathcal{M}_{NU}\, \ddot{q} + \left(\dot{\mathcal{P}}^\top M_{NU} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top \sum_{i=1}^{nc} \dot{w}_i \frac{\partial M_{NU}}{\partial w_i} \mathcal{P} + \mathcal{P}^\top M_{NU} \dot{\mathcal{P}} \right) \dot{q}$$

Dynamique du système NU

On écrit la dynamique du système

$$\mathcal{M}_{NU}(q)\,\ddot{q} + C_{NU}(q,\dot{q})\,\dot{q} + k_{NU}(q) = Q_{NU}(t,q,\dot{q},\beta) \tag{5.15}$$

avec

$$\mathcal{M}_{NU}(q) \triangleq \mathcal{P}(\Theta)^{\top} M_{NU}(w)\,\mathcal{P}(\Theta)$$

$$C_{NU} \triangleq \dot{\mathcal{P}}^{\top} M_{NU}\mathcal{P} + \mathcal{P}^{\top}\sum_{i=1}^{nc}\dot{w}_i\frac{\partial M_{NU}}{\partial w_i}\mathcal{P} + \mathcal{P}^{\top}M_{NU}\dot{\mathcal{P}} - \begin{bmatrix} 0_{3\times 6+nc} \\ \frac{\partial(\mathcal{P}\dot{q})^{\top}}{\partial\Theta}M_{NU}\mathcal{P} \\ \frac{1}{2}\dot{q}^{\top}\mathcal{P}^{\top}\frac{\partial M_{NU}}{\partial w_1}\mathcal{P} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\dot{q}^{\top}\mathcal{P}^{\top}\frac{\partial M_{NU}}{\partial w_{nc}}\mathcal{P} \end{bmatrix}$$

$$k_{NU} \triangleq -g\begin{bmatrix} m_t\mathbf{z} \\ -\rho G^{\top}S\left(R^{\top}\mathbf{z}\right)\sum_{i=1}^{nc}\int_{-\varsigma_{si}}^{\varsigma_{pi}}A_t(\sigma)\,R_z(\alpha_i)\,\mathbf{r}^b(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \\ \rho A_v\mathbf{z}^{\top}R(\Theta)\;R_z(\alpha_1)\left(\mathbf{r}^b(\varsigma_{p1}) - \mathbf{r}^b(-\varsigma_{s1})\right) \\ \vdots \\ \rho A_v\mathbf{z}^{\top}R(\Theta)\;R_z(\alpha_{nc})\left(\mathbf{r}^b(\varsigma_{pnc}) - \mathbf{r}^b(-\varsigma_{snc})\right) \end{bmatrix}$$

$$Q_{NU}(t,q,\dot{q},\beta) = \mathcal{P}(\Theta)^{\top}\begin{bmatrix} F_{hydro}(t,\beta,q_s,v_s) \\ P_{h_{NU}}^{\top}F_h(\dot{w}) \end{bmatrix}$$

5.2.3 TLMCD en étoile à N éléments

Ce système d'amortissement est constitué de N moitiés de tube en U reliées entre elles à la coordonnée $\mathbf{r}^b(\sigma = 0)$, ces éléments sont régulièrement distribués en angle autour de $(CoG, \mathbf{z}_b)$. On appellera ce système NS. À titre d'exemple, le système 3S est illustré en Fig. 5.3. Pour ce système chaque élément est un demi TLCD. L'abscisse curviligne de chaque élément, notée σ_i, varie donc entre 0 et ς_i. Comme précédemment on a $x_t^b = 0$. Pour ce système d'amortissement on a $\alpha_i \triangleq 2\pi\frac{i-1}{N}$.

Nous considérons toujours que la masse totale d'eau dans le TLMCD est constante. En notant ς_i la position de la surface libre de l'élément i, la conservation de la masse donne

$$m_t \triangleq \rho\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\varsigma_i}A_t(\sigma_i)\,\mathrm{d}\sigma_i = \textit{constante}$$

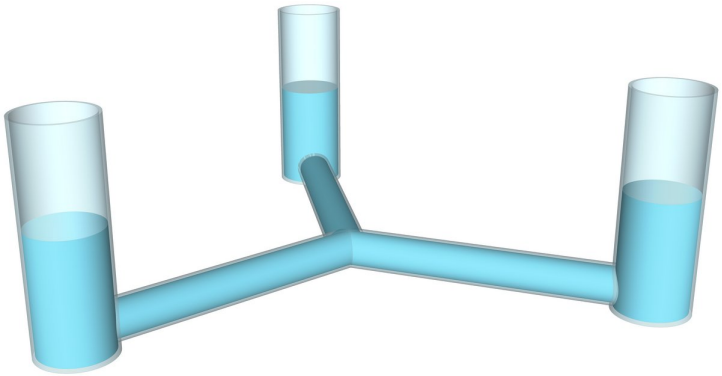


FIGURE 5.3 – Illustration du TLMCD 3S

Il en découle que si on connaît les positions des $N-1$ premières surfaces libres, on en déduit la $N^{ème}$, par conséquent $nc = N-1$. On note donc pour $i = 1, ..., nc$,

$$\varsigma_i = \frac{L_h}{2} + L_v + w_i \tag{5.16}$$

et

$$\varsigma_N = \frac{L_h}{2} + L_v - \sum_{i=1}^{N-1} w_i \tag{5.17}$$

Pour le système NS on a pour $i = 1, \ldots, N-1$

$$v_i(\sigma_i) = \frac{A_v}{A_t(\sigma_i)} \dot{w}_i$$

et

$$v_N(\sigma_N) = -\frac{A_v}{A_t(\sigma_N)} \sum_{i=1}^{N-1} \dot{w}_i$$

On écrit donc les matrices $P_{h_{NS}}$ et $P_{v_{NS}}$ utilisées en (5.8)

$$P_{h_{NS}} = \nu \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{nc} \\ -\mathbb{1}_{1\times nc} \end{bmatrix} \qquad P_{v_{NS}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{nc} \\ -\mathbb{1}_{1\times nc} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Énergie mécanique du système NS

En suivant la même démarche qu'au §5.2.2, on écrit l'énergie cinétique de notre système sous la forme $T_{NS} = \frac{1}{2}\dot{q}^\top \mathcal{P}(\Theta)^\top M_{NS}(w) \mathcal{P}(\Theta)\, \dot{q}$ avec

$$M_{NS}(w) \triangleq \begin{bmatrix} M_s & 0_{6\times nc} \\ 0_{nc\times 6} & 0_{nc\times nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_t\mathbb{I}_3 & M_{v\omega}(w) & M_{vq}(w) \\ M_{v\omega}^\top(w) & M_\omega(w) & M_{\omega q}(w) \\ M_{vq}^\top(w) & M_{\omega q}^\top(w) & M_q(w) \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Pour $i = 1, ..., N$ on a

$$
\begin{aligned}
m_t &\triangleq \rho \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i)\, \mathrm{d}\sigma_i \in \mathbb{R} \\
M_{v\omega} &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i)\, S\left(R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma_i)\right) \mathrm{d}\sigma_i = -M_{v\omega}^{\top}(w) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\
M_{\omega} &\triangleq -\rho \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma_i)\, S^2\left(R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma_i)\right) \mathrm{d}\sigma_i = M_{\omega}^{\top}(w) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\
M_{vq}[:, j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NS}}[:, j] \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} R_z(\alpha_i)\, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i)\, \mathrm{d}\sigma_i \in \mathbb{R}^{3\times 1} \\
M_{\omega q}[:, j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NS}}[:, j] \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} S\left(R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma_i)\right) R_z(\alpha_i)\, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma_i)\, \mathrm{d}\sigma \in \mathbb{R}^{3\times 1} \\
M_q &\triangleq \rho A_v \left(P_{h_{NS}}^{\top} \frac{L_h}{2\nu}(\nu - 1) + \nu^{-2} P_{h_{NS}}^{\top} \begin{bmatrix} \varsigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varsigma_N \end{bmatrix} P_{h_{NS}} \right) \in \mathbb{R}^{nc}
\end{aligned}
$$

avec $M_{vq} \in \mathbb{R}^{3\times nc}$, $M_{\omega q} \in \mathbb{R}^{3\times nc}$.

L'énergie potentielle du liquide dans la variante NS s'écrit

$$
\begin{aligned}
V_{NS} &= \mathbf{z}^{\top}. \left(g\rho \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma) \left(R(\Theta)\; R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma) + \mathbf{x}^e \right) \mathrm{d}\sigma \right) \\
&= -g m_t z - g\rho \mathbf{z}^{\top} R(\Theta) \left[\rho \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma)\, R_z(\alpha_i)\, \mathbf{r}^b(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \right] \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

avec m_t la masse totale de liquide dans les TLCDs.

Dynamique du système NS

En suivant la même démarche que pour le modèle NU, on observe que la dynamique du système est régie par

$$
\mathcal{M}_{NS}(q)\; \ddot{q} + C_{NS}(q, \dot{q})\, \dot{q} + k_{NS}(q) = Q_{NS}(t, q, \dot{q}, \beta) \qquad (5.21)
$$

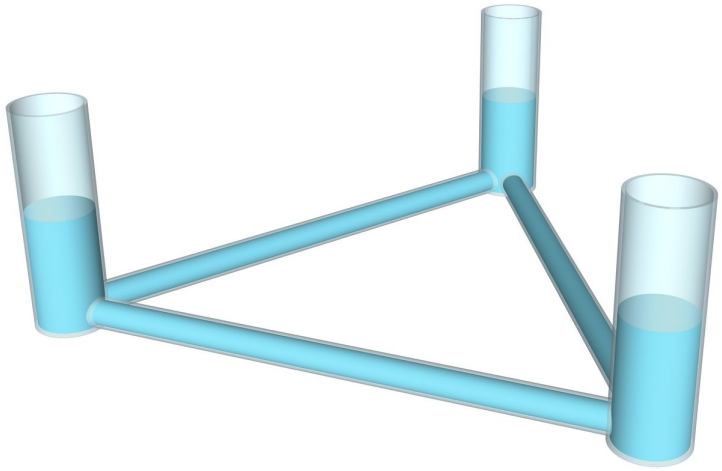


FIGURE 5.4 – Illustration du TLMCD 3P

avec

$$\mathcal{M}_{NS}(q) \triangleq \mathcal{P}(\Theta)^{\top} M_{NS}(w) \mathcal{P}(\Theta)$$

$$C_{NS} \triangleq \dot{\mathcal{P}}^{\top} M_{NS} \mathcal{P} + \mathcal{P}^{\top} \sum_{i=1}^{nc} \dot{w}_i \frac{\partial M_{NS}}{\partial w_i} \mathcal{P} + \mathcal{P}^{\top} M_{NS} \dot{\mathcal{P}} - \begin{bmatrix} 0_{3\times 6+nc} \\ \frac{\partial (\mathcal{P}\dot{q})^{\top}}{\partial \Theta} M_{NS} \mathcal{P} \\ \frac{1}{2} \dot{q}^{\top} \mathcal{P}^{\top} \frac{\partial M_{NS}}{\partial w_1} \mathcal{P} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \dot{q}^{\top} \mathcal{P}^{\top} \frac{\partial M_{NS}}{\partial w_{nc}} \mathcal{P} \end{bmatrix}$$

$$k_{NS} \triangleq -g \begin{bmatrix} m_t \mathbf{z} \\ -\rho G^{\top} S \left(R^{\top} \mathbf{z}\right) \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\varsigma_i} A_t(\sigma) R_z(\alpha_i) \mathbf{r}^b(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \\ \rho A_v \mathbf{z}^{\top} R(\Theta) \left(R_z(\alpha_1) \mathbf{r}^b(\varsigma_1) - R_z(\alpha_N) \mathbf{r}^b(\varsigma_N)\right) \\ \vdots \\ \rho A_v \mathbf{z}^{\top} R(\Theta) \left(R_z(\alpha_{nc}) \mathbf{r}^b(\varsigma_{nc}) - R_z(\alpha_N) \mathbf{r}^b(\varsigma_N)\right) \end{bmatrix}$$

$$Q_{NS}(t, q, \dot{q}, \beta) = \mathcal{P}(\Theta)^{\top} \begin{bmatrix} F_{hydro}(t, \beta, q_s, v_s) \\ P_{h_{NS}}^{\top}(0) F_h(\dot{w}) \end{bmatrix}$$

5.2.4 TLMCD en polygone à N éléments

Ce système d'amortissement est constitué de N tubes horizontaux, agencés de manière à former un polygone régulier convexe, et de N colonnes verticales positionnées à chaque sommet du polygone, on appellera ce système NP. À titre d'exemple, le système 3P est illustré en Fig. 5.4. Pour ce système, l'abscisse curviligne de chaque

élément, notée σ_i, varie entre $-\frac{L_h}{2}$ et ς_i. La géométrie de notre système nous donne $x_t^b = -\frac{L_h}{2\tan\frac{\pi}{N}}$. Pour ce système d'amortissement on a, comme pour le NS, $\alpha_i \triangleq 2\pi\frac{i-1}{N}$.

Nous avons $2N$ vitesses du liquide (une dans chaque colonne verticale et une dans chaque tube horizontal), on peut aussi écrire N relations de conservation des débits massiques (une à chaque sommet du polygone, comparable à la loi des nœuds en électricité). L'équation de conservation de la masse totale, notée $m_t \triangleq \rho\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, est une conséquence des N relations locales de conservation des débits. On a donc besoin de $nc = 2N - N = N$ variables indépendantes pour décrire chaque vitesse. Par conservation de la masse totale de fluide, on a $N-1$ surfaces libres indépendantes, il nous faut donc introduire une variable supplémentaire pour décrire complètement le système.

On choisit arbitrairement w_{nc} comme étant la "position" du fluide dans le tube horizontal d'indice N. On notera que les équations (5.16) et (5.17) sont valables aussi pour ce système.

Pour le système NP on a pour $i = 1,\ldots,N-1$ et $\sigma_i > \frac{L_h}{2}$ (dans les tubes verticaux)

$$\begin{aligned} v_i(\sigma_i) &= \dot{w}_i \\ v_N(\sigma_N) &= -\sum_{i=1}^{N-1}\dot{w}_i \end{aligned}$$

les équations de conservation des débits à chaque sommet nous donnent, pour $i = 1,\ldots,N$ et $\frac{L_h}{2} \geq \sigma_i \geq -\frac{L_h}{2}$ (dans les tubes horizontaux)

$$v_i(\sigma_i) = \nu\sum_{j=1}^{i}\dot{w}_j + \dot{w}_{nc}$$

comme on a $\sum_{i=1}^{N}\dot{w}_i = 0$ on réécrit plus simplement

$$v_N(\sigma_N) = \dot{w}_{nc}$$

On déduit des expressions de $v_i(\sigma_i)$ les matrices $P_{h_{NP}}$ et $P_{v_{NP}}$

$$P_{h_{NP}} = \begin{bmatrix} \nu & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \nu & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \nu & \cdots & \nu & \nu & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{v_{NP}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{nc-1} & 0_{nc-1\times 1} \\ -\mathbb{1}_{1\times nc-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Énergie mécanique du système NP

En suivant la même démarche qu'au §5.2.2, on écrit l'énergie cinétique de notre système sous la forme $T_{NP} = \frac{1}{2}\,\dot{q}^{\top}\mathcal{P}\left(\Theta\right)^{\top} M_{NP}\left(w\right)\mathcal{P}\left(\Theta\right)\,\dot{q}$ avec

$$M_{NP}\left(w\right) \triangleq \begin{bmatrix} M_s & 0_{6\times nc} \\ 0_{nc\times 6} & 0_{nc\times nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_t\mathbb{I}_3 & M_{v\omega}\left(w\right) & M_{vq}\left(w\right) \\ M_{v\omega}^{\top}\left(w\right) & M_{\omega}\left(w\right) & M_{\omega q}\left(w\right) \\ M_{vq}^{\top}\left(w\right) & M_{\omega q}^{\top}\left(w\right) & M_{q}\left(w\right) \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Pour $i = 1, ..., N$ on a

$$\begin{aligned}
m_t &\triangleq \rho\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t\left(\sigma_i\right)\mathrm{d}\sigma_i \in \mathbb{R} \\
M_{v\omega} &\triangleq -\rho\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t\left(\sigma_i\right) S\left(R_z\left(\alpha_i\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma_i\right)\right)\mathrm{d}\sigma_i = -M_{v\omega}^{\top}\left(w\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\
M_{\omega} &\triangleq -\rho\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t\left(\sigma_i\right) S^2\left(R_z\left(\alpha_i\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma_i\right)\right)\mathrm{d}\sigma_i = M_{\omega}^{\top}\left(w\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \\
M_{vq}[:,j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NP}}[:,j]\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\frac{L_h}{2}} R_z\left(\alpha_i\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(\sigma_i\right)\mathrm{d}\sigma_i \\
&\quad + \rho A_v P_{h2_{NP}}[:,j]\sum_{i=1}^{N}\int_{\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} R_z\left(\alpha_i\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(\sigma_i\right)\mathrm{d}\sigma_i \in \mathbb{R}^{3\times 1} \\
M_{\omega q}[:,j] &\triangleq \rho A_v P_{h_{NP}}[:,j]\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\frac{L_h}{2}} S\left(R_z\left(\alpha_i\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma_i\right)\right) R_z\left(\alpha_i\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(\sigma_i\right)\mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \rho A_v P_{h2_{NP}}[:,j]\sum_{i=1}^{N}\int_{\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} S\left(R_z\left(\alpha_i\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma_i\right)\right) R_z\left(\alpha_i\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}^b}{\mathrm{d}\sigma}\left(\sigma_i\right)\mathrm{d}\sigma \in \mathbb{R}^{3\times 1} \\
M_q &\triangleq \rho A_v\left(\frac{L_h}{\nu}P_{h_{NP}}^{\top}P_{h_{NP}} + \nu^{-2}P_{h2_{NP}}^{\top}\begin{bmatrix} \varsigma_1 - \frac{L_h}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varsigma_N - \frac{L_h}{2} \end{bmatrix} P_{h2_{NP}}\right) \in \mathbb{R}^{nc}
\end{aligned}$$

avec $M_{vq} \in \mathbb{R}^{3\times nc}$, $M_{\omega q} \in \mathbb{R}^{3\times nc}$.

L'énergie potentielle du liquide dans les N tubes en U s'écrit

$$V_{NP} = \mathbf{z}^{\top}.\left(g\rho\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma)\left(R(\Theta)\ R_z(\alpha_i)\,\mathbf{r}^b(\sigma)+\mathbf{x}^e\right)\mathrm{d}\sigma\right)$$
$$= -gm_t z - g\rho\mathbf{z}^{\top}R(\Theta)\left[\rho\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma)\,R_z(\alpha_i)\,\mathbf{r}^b(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right] \tag{5.24}$$

avec m_t la masse totale de liquide dans les TLCDs.

Dynamique du système NP

En suivant la même démarche que pour le modèle NU, on observe que la dynamique du système est régie par

$$\mathcal{M}_{NP}(q)\ \ddot{q} + C_{NP}(q,\dot{q})\,\dot{q} + k_{NP}(q) = Q(t,q,\dot{q},\beta) \tag{5.25}$$

avec

$$\mathcal{M}_{NP}(q) \triangleq \mathcal{P}(\Theta)^{\top} M_{NP}(w)\,\mathcal{P}(\Theta)$$

$$C_{NP} \triangleq \dot{\mathcal{P}}^{\top}M_{NP}\mathcal{P} + \mathcal{P}^{\top}\sum_{i=1}^{nc}\dot{w}_i\frac{\partial M_{NP}}{\partial w_i}\mathcal{P} + \mathcal{P}^{\top}M_{NP}\dot{\mathcal{P}} - \begin{bmatrix} 0_{3\times 6+nc} \\ \frac{\partial(\mathcal{P}\dot{q})^{\top}}{\partial\Theta}M_{NP}\mathcal{P} \\ \frac{1}{2}\dot{q}^{\top}\mathcal{P}^{\top}\frac{\partial M_{NP}}{\partial w_1}\mathcal{P} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\dot{q}^{\top}\mathcal{P}^{\top}\frac{\partial M_{NP}}{\partial w_{nc-1}}\mathcal{P} \\ 0_{1\times 6+nc} \end{bmatrix}$$

$$k_{NP} \triangleq -g\begin{bmatrix} m_t\mathbf{z} \\ -\rho G^{\top}S\left(R^{\top}\mathbf{z}\right)\sum_{i=1}^{N}\int_{-\frac{L_h}{2}}^{\varsigma_i} A_t(\sigma)\,R_z(\alpha_i)\,\mathbf{r}^b(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \\ \rho A_v\mathbf{z}^{\top}R(\Theta)\left(R_z(\alpha_1)\,\mathbf{r}^b(\varsigma_1) - R_z(\alpha_N)\,\mathbf{r}^b(\varsigma_N)\right) \\ \vdots \\ \rho A_v\mathbf{z}^{\top}R(\Theta)\left(R_z(\alpha_{N-1})\,\mathbf{r}^b(\varsigma_{N-1}) - R_z(\alpha_N)\,\mathbf{r}^b(\varsigma_N)\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{NP}(t,q,\dot{q},\beta) = \mathcal{P}(\Theta)^{\top}\begin{bmatrix} F_{hydro}(t,\beta,q_s,v_s) \\ P_{h_{NP}}^{\top}(0)\,F_h(\dot{w}) \end{bmatrix}$$

5.3 Performances passives

On étudie comment se comportent les solutions 2U, 3P et 3S pour différentes incidences. Premièrement nous allons regarder comment évolue la dynamique du système

linéarisé tangent quand on modifie l'orientation des vagues par rapport au TLMCD. Dans un deuxième temps, nous étudierons la réponse du système passif, avec la dynamique complète, aux angles d'incidence de la houle.

5.3.1 Paramètres optimaux

Pour pouvoir comparer les systèmes d'amortissement entre eux, nous devons déterminer leurs paramètres de conception. Pour concevoir le système 2U, nous choisissons arbitrairement de garder la même masse de liquide par tube en U que pour le cas 2D i.e. 2% de la masse du système à amortir. Nous avons décidé d'imposer que les comparaisons soient réalisées pour des systèmes de coût équivalent

On lit dans (Yalla, 2001), que le prix d'un TLCD dépend de trois facteurs, l'espace utilisé dans le flotteur, les coûts supplémentaires de construction, et le coût de l'acier du TLCD en lui-même. Le coût de l'espace utilisé est nul pour notre étude puisque l'espace à l'intérieur de la barge n'a pas de valeur marchande. Si nous avions considéré l'amortissement d'un immeuble, alors ce coût aurait été celui de la place occupée par le TLCD, qui ne peut donc plus être aménagée en appartement ou en bureau. Si les colonnes dépassent du flotteur, il faudrait probablement ajouter des éléments supplémentaires pour assurer la solidité des colonnes. C'est pour cela que la longueur des colonnes verticales est calculée pour ne pas dépasser de la barge, par conséquent ce coût aussi est nul. On voit donc que le prix du TLCD sera principalement décidé par la quantité d'acier requise pour sa construction. En supposant une épaisseur d'acier constante sur tout le TLCD, on constate que le coût du TLCD est proportionnel à la surface des colonnes.

La solution la plus compacte est la 3S, pour la même quantité d'acier, elle peut donc avoir une masse d'eau supérieure aux autres. Dans un cas réel de conception d'un flotteur équipé d'un TLMCD à partir d'une "feuille blanche", le calcul du coût du TLMCD devient beaucoup moins simple. De nouvelles possibilités seraient envisageables. Par exemple, on pourrait diminuer la quantité d'acier nécessaire en faisant passer l'eau du TLMCD dans des poutres qui étaient déjà nécessaires à la structure du flotteur.

Si chaque colonne est tubulaire, l'indice de prix i.e. la surface d'un TLCD est approximativement

$$S_{TLCD} = L_h \cdot 2\sqrt{\pi A_h} + 2 \cdot 2L_v \cdot 2\sqrt{\pi A_v}$$

	ν	η	L_h	A_v	μ	$P.I.$
1U (TLCD simple)	4.10	2.28	32.31 m	5.70 m^2	2%	2.38
2U	4.03	2.21	32.32 m	5.66 m^2	4.00%	2.43
3S	4.02	1.77	31.38 m	10.31 m^2	5.40%	2.29
3P	7.04	2.34	27.57 m	7.88 m^2	3.23%	2.43

TABLE 5.2 – Paramètres optimaux pour chaque solution

Pour les trois variantes retenues, on a

$$\begin{aligned} S_{NU} &= N S_{TLCD} \\ S_{NS} &= {}^{N}/_{2} S_{TLCD} \\ S_{NP} &= N\left(L_h \cdot 2\sqrt{\pi A_h} + 2L_v \cdot 2\sqrt{\pi A_v}\right) \end{aligned}$$

Pour que nos variantes soient comparables, on choisit A_v et A_h pour avoir $S_{NU} = S_{NS} = S_{NP}$. Lors de l'optimisation des paramètres du TLCD dans le plan, au §4.3.3, nous avons tracé l'amplitude des oscillations du flotteur grâce à une linéarisation de la force développée par la restriction, appliquer la même technique pour un système à N restrictions est mathématiquement très compliqué. Dans la partie traitant du TLCD "classique", on devait résoudre l'équation 4.22, ce qui équivaut à trouver la racine d'un polynôme de degré 4. Pour N restrictions, il faut donc résoudre un système de N polynômes de degré 4. On a donc choisi de trouver l'amplitude maximale de la RAO par simulation. Ces calculs étant numériquement lourds, on va essayer de limiter le nombre de variables d'optimisation.

Au §4.3.3, on a pu constater que l'algorithme d'optimisation choisissait de maximiser L_h afin d'utiliser tout l'espace disponible pour le système d'amortissement. On va donc fixer ici $L_h = L_{h_{maxi}}$, on passe donc de 3 à 2 variables à optimiser, ce qui nous permet de réduire significativement les temps de calcul.

Pour déterminer les meilleurs paramètres, on utilise la fonction `fminsearch` de Matlab. Le critère de performance à minimiser est le même qu'au §4.3.3

$$P.I. = \max_{T\in[3;30]} (|\varphi|) \tag{5.26}$$

Cet indice de performance fait que le TLMCD est réglé pour amortir la période propre en roulis de notre système. Pour une implantation du système sur un site donné, il faudrait probablement adapter l'indice de performance pour obtenir un réglage spécifique à ce site.

En Table 5.2 on a regroupé l'ensemble des paramètres optimaux pour chaque système.

Pour ces systèmes, on a $S = 608\ m^2$, en supposant qu'on ait une épaisseur d'acier de 15 mm [1], et en reprenant le coût de l'acier donné au §2.3.1, on obtient un coût approximatif du système d'amortissement de 365 k€ soit environ 4% du coût total de l'éolienne flottante ou 8% du coût de la barge.

On voit que la meilleure performance est obtenue par le système 3S. Ce résultat est assez intuitif puisque le 3S étant le système le plus compact (trois demi-TLCD) il est celui dans lequel on peut mettre la plus grande masse. Un autre résultat de ce tableau est intéressant à souligner, c'est le rapport des sections du 3P qui est bien plus grand que celui des autres solutions. Ce résultat indique que le 3P a naturellement une période de résonance bien plus petite que les autres. Cette particularité peut lui permettre d'être une solution mieux adaptée à des flotteurs qui ont une période de résonance plus basse que la barge que l'on considère ici.

5.3.2 Étude du modèle linéarisé

Comme la plate-forme est un solide de révolution, tourner la houle d'un angle β est mathématiquement équivalent à tourner le TLMCD dans la barge d'un angle $-\beta$. Pour cette sous-section uniquement, on modifie donc $R_z(\alpha_i)$ la matrice qui définit l'orientation des tubes par rapport à $\mathcal{R}_b$ pour la faire devenir

$$R_z(\alpha_i)(\beta) = R_z(-\beta) R_z(\alpha_i)$$

En suivant la même démarche qu'au §5.2, nous obtenons des modèles dépendant directement de β.

Nous linéarisons la dynamique du système 2U (qui dépend donc de β) autour de $q = \dot{q} = 0_{8\times1}$, les matrices de masse, de frottement et de raideur linéarisées sont notées respectivement $\tilde{M}(\beta)$, $\tilde{C}(\beta)$ et $\tilde{K}(\beta)$. Étant donné que l'approximation Linéaire Temps Invariant (LTI) supprime la force développée par la restriction, nous décidons de remplacer $F_{h_{NU}}$ par un coefficient de frottement linéaire c, qu'on inclut dans $\tilde{C}(\beta)$.

On va maintenant montrer mathématiquement que la dynamique de l'approximation LTI du système 2U est indépendante de β.

On a tracé le root-locus de chaque système d'amortissement en Fig. 5.5 pour β allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

On voit que les racines du système linéarisé tangent sont indépendantes de l'angle d'incidence de la houle, sauf pour le TLCD classique (1U).

La dynamique du système 2U linéarisé est

$$\tilde{M}(\beta)\ddot{q} + \tilde{C}(\beta)\dot{q} + \tilde{K}(\beta) q = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2\times1} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

1. Yann Poirette et Timothée Perdrizet, Direction Mécanique Appliquée

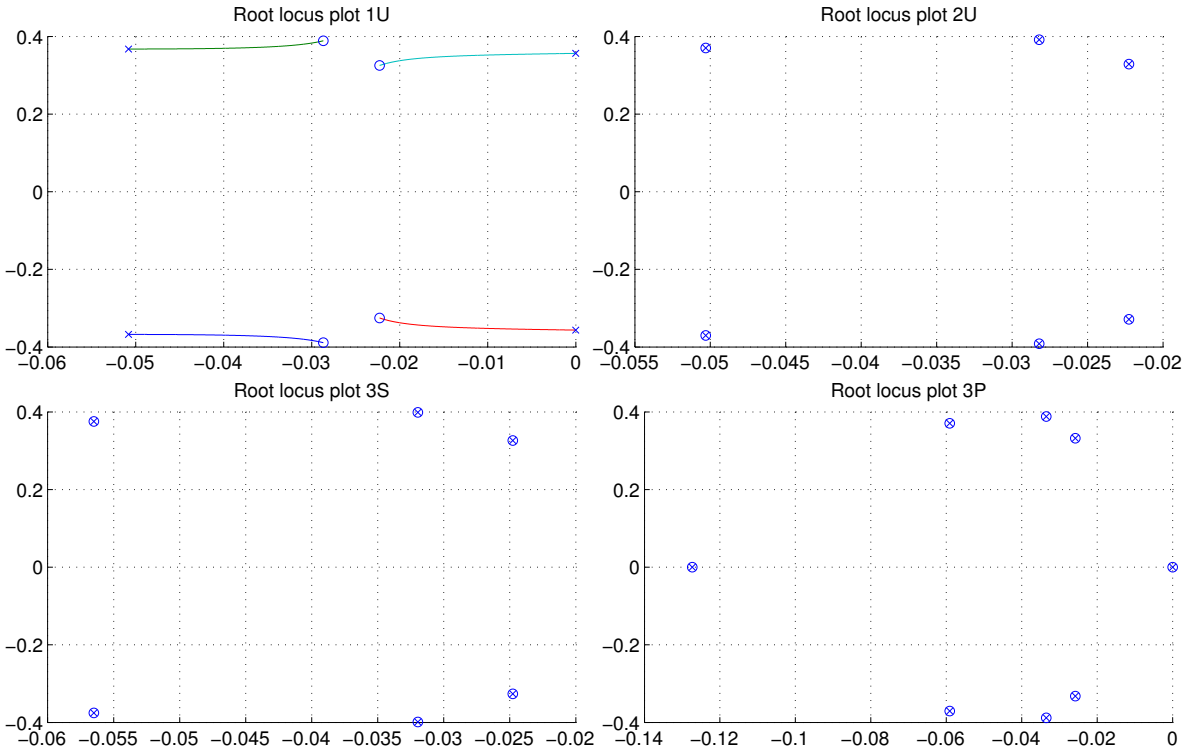


FIGURE 5.5 – Root-locus des systèmes 1U, 2U, 3S, et 3P pour des incidences de houle allant de 0° à 180°

où

$$\tilde{M}(\beta) = \begin{bmatrix} M_s & 0_{6\times 2} \\ 0_{2\times 6} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_D \mathbb{I}_3 & -M_{v\omega} & M_{vq}(\beta) \\ M_{v\omega} & M_\omega & M_{\omega q}(\beta) \\ M_{vq}^\top(\beta) & M_{\omega q}^\top(\beta) & M_q \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}(\beta) = \begin{bmatrix} 0_{6\times 6} & 0_{6\times 2} \\ 0_{2\times 6} & c\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}(\beta) = \begin{bmatrix} K_s & 0_{6\times 2} \\ 0_{2\times 6} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 2} \\ 0_{3\times 3} & K_\omega & K_{\omega q}(\beta) \\ 0_{2\times 3} & K_{\omega q}^\top(\beta) & K_q \end{bmatrix}$$

avec

$$M_{vq}(\beta) = \mu_h \nu L_h \begin{bmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\omega q}(\beta) = \mu_h \nu L_h (L_v + e) \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_q = \mathbb{I}_2 \rho A_v (L_h \nu + 2L_v)$$

$$K_{\omega q}(\beta) = \mu_h \nu g L_h \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_q = 2\mathbb{I}_2 \rho A_v g$$

Nous introduisons le changement de variable

$$q = \tilde{P}(\beta)\, y$$

avec

$$\tilde{P}(\beta) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_6 & 0_{6\times 1} & 0_{6\times 1} \\ 0_{1\times 6} & \cos\beta & \sin\beta \\ 0_{1\times 6} & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

qui vérifie $\tilde{P}^\top(\beta) = \tilde{P}^{-1}(\beta)$. En multipliant (5.27) à gauche par $\tilde{P}^\top(\beta)$ elle devient

$$\tilde{P}^\top(\beta)\,\tilde{M}(\beta)\,\tilde{P}(\beta)\,\ddot{y} + \tilde{P}^\top(\beta)\,\tilde{C}(\beta)\,\tilde{P}(\beta)\,\dot{y} + \tilde{P}^\top(\beta)\,\tilde{K}(\beta)\,\tilde{P}(\beta)\,y = \tilde{P}^\top(\beta) \begin{bmatrix} F(t) \\ 0_{2\times 1} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}^{\top}(\beta)\,\tilde{M}(\beta)\,\tilde{P}(\beta)\\
=&\begin{bmatrix}
m_D\mathbb{I}_3 & -M_{v\omega} & \mu_h\nu Lh\begin{bmatrix}\sin\beta & \cos\beta\\ -\cos\beta & \sin\beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\\
* & M_{\omega} & \mu_h\nu Lh(Lv+e)\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\\
* & * & \begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\rho A_v\left(L_h\,\nu\,+2L_v\right)\mathbb{I}_2\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}
\end{bmatrix}\\
=&\tilde{M}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}^{\top}(\beta)\,\tilde{K}(\beta)\,\tilde{P}(\beta)\\
=&\begin{bmatrix}
0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2}\\
* & K_{\omega} & \mu_h\nu gLh\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\\
* & * & 2\rho A_v g\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\mathbb{I}_2\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}
\end{bmatrix}\\
=&\tilde{K}(0)
\end{aligned}$$

$$\tilde{P}^{\top}(\beta)\,\tilde{C}(\beta)\,\tilde{P}(\beta)=\begin{bmatrix}0_{6\times6} & 0_{6\times2}\\ 0_{2\times6} & c\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\mathbb{I}_2\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\tilde{C}$$

$$\tilde{P}^{\top}(\beta)\begin{bmatrix}F(t)\\ 0_{2\times1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F(t)\\ 0_{2\times1}\end{bmatrix}$$

Pour résumer, le système 2U LTI dont la dynamique est

$$\tilde{M}(\beta)\,\ddot{q}+\tilde{C}(\beta)\,\dot{q}+\tilde{K}(\beta)\,q=\begin{bmatrix}F(t)\\ 0_{2\times1}\end{bmatrix}$$

est identique au système

$$\tilde{M}(0)\,\ddot{y}+\tilde{C}(0)\,\dot{y}+\tilde{K}(0)\,y=\begin{bmatrix}F(t)\\ 0_{2\times1}\end{bmatrix}$$

au sens où les solutions de ces 2 systèmes, pour des conditions initiales compatibles, satisfont

$$q=\tilde{P}(\beta)\,y$$

En utilisant une approche similaire, on obtient les mêmes résultats pour les systèmes 3P et 3S. Comme notre flotteur est un solide de révolution, on sait déjà que son comportement est le même, peu importe d'où vient la houle. Maintenant on sait que peu importe l'orientation de la houle par rapport aux TLMCD ou au flotteur, la dynamique de notre système (avec TLMCD) linéarisé temps invariant autour de $q = \dot{q} = 0_{6+nc}$ reste la même. Cependant nous verrons au §5.3.4 que la dynamique de nos systèmes passifs non-linéaires dépend de β.

On rappelle qu'à partir de maintenant seule F_{hydro} dépend de β.

5.3.3 Préalables

Verrouillage de la dynamique du lacet

Avant de présenter les RAO pour différents angles d'incidence de vagues, nous allons voir la dernière hypothèse que nous devons formuler pour que toutes ces RAO soient comparables.

Sans système d'ancrage, on observe une dérive en lacet bien qu'il n'y ait aucune force qui s'exerce sur ce degré de liberté. Pour comprendre ce phénomène, il faut s'intéresser à l'obtention de la dérivée de ψ. Cette dérivée découle de la formule $\dot{\Theta} = G^{-1}(\Theta)\,\omega^b$, i.e. même si l'on a $\psi = 0$ et $\omega^b = \left[\omega_1^b, \omega_2^b, 0\right]$, on peut parfaitement obtenir $\dot{\psi} \neq 0$. Dans la littérature cette propriété liée aux angles d'Euler est connue sous le nom de "coning" (Radix et de Cremiers, 1991; Titterton et Weston, 2004). Pour que les RAO soient comparables, nous ajoutons une très grande raideur à K_s pour littéralement bloquer le lacet. Dans toutes les simulations, les surfaces libres du TLMCD sont restées dans les colonnes verticales.

Définition des repères des résultats

Nous allons changer l'incidence de la houle, cela implique de changer les variables des résultats. On définit φ_r et θ_r, les oscillations de l'éolienne flottante dans le sens de la houle et perpendiculairement à la houle, respectivement. On cherche leur expression en fonction de φ, θ et ψ.

Nous devons donc introduire $\mathcal{R}_{er}$ et $\mathcal{R}_{br}$ les repères des résultats. Ils sont liés entre eux par $R(\Theta_r)$ telle que $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}^{er} = R(\Theta_r)\,\mathbf{r}^{br}$ et avec $\Theta_r \triangleq [\varphi_r, \theta_r, \psi_r]^\top$. Ces repères sont liés à $\mathcal{R}_e$ et $\mathcal{R}_b$ par une rotation d'angle β autour de $\mathbf{z}$, de manière à ce que $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}^e = R_z(\beta)\,\mathbf{r}^{er}$$

et

$$\mathbf{r}^b = R_z(\beta)\,\mathbf{r}^{br}$$

On obtient donc

$$\mathbf{r}^{er} = R_z^{\top}(\beta)\,\mathbf{r}^{e} = R_z^{\top}(\beta)\,R(\Theta)\,\mathbf{r}^{b} = R_z^{\top}(\beta)\,R(\Theta)\,R_z(\beta)\,\mathbf{r}^{br}$$

c'est-à-dire

$$R(\Theta_r) = R_z^{\top}(\beta)\,R(\Theta)\,R_z(\beta) \tag{5.28}$$

la résolution de cette équation nous permet d'exprimer Θ_r en fonction de Θ. Dans la suite de ce document, toutes les RAO en roulis (resp. en tangage) seront les RAO de φ_r (resp. de θ_r).

5.3.4 RAO passives

On présente ici les RAO du flotteur amorti par les systèmes 2U, 3S et 3P pour différents angles d'incidence.

On observe que les courbes extrêmes sont 0° et 45° pour le système 2U, et, 0° et 30° pour 3S et 3P, ceci est dû à la symétrie des systèmes.

En Fig. 5.6 on voit que la dynamique des systèmes d'amortissement n'est pas indépendante de l'orientation de la houle, contrairement à ce qu'on a vu en 5.3.2.

On observe que les systèmes 3S et 3P sont plus robustes au changement d'incidence que le 2U. On voit aussi que chaque système d'amortissement induit du tangage parasite, encore une fois le 2U en crée bien plus que les TLMCD.

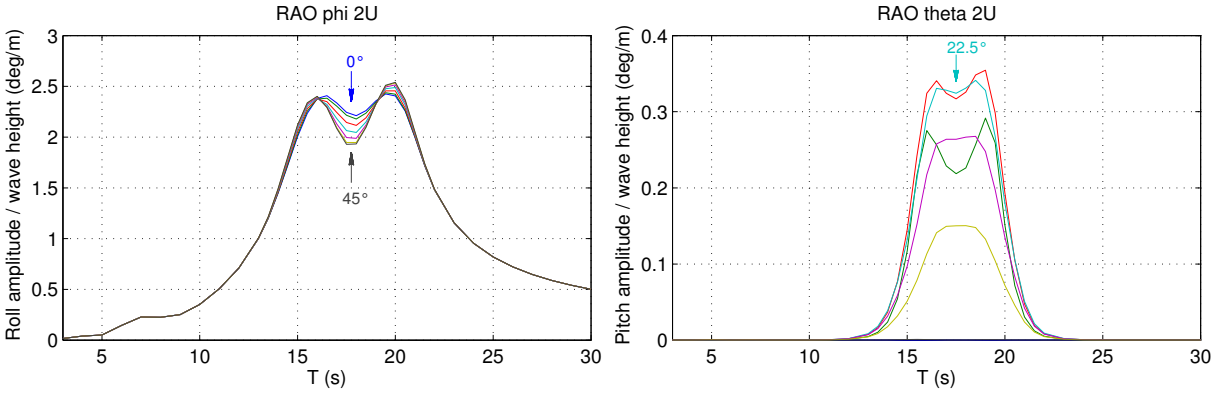
Bien que les écarts soient plutôt faibles, on voit que le système 3S est le plus robuste à l'angle d'incidence de la houle, il crée aussi moins de tangage parasite, et sa performance d'amortissement est meilleure pour un coût identique.

En Annexe C.1, on montre que si on remplace F_h par la version linéaire définie au §5.3.2, le système est beaucoup plus robuste à l'incidence de la houle. On en déduit que le manque de robustesse à l'incidence est liée de manière prépondérante à la non-linéarité de la force exercée par la restriction sur le liquide du TLMCD. La commande LQR saturée est non-linéaire par nature, il faudra donc être très attentifs à son comportement face au différentes incidences de la houle.

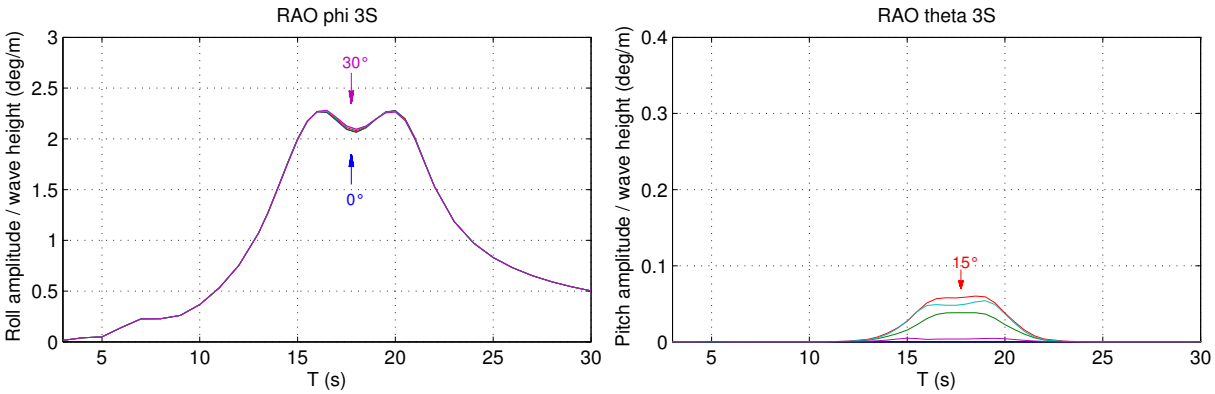
5.4 Performances du contrôle semi-actif

5.4.1 Synthèse du contrôle LQR saturé

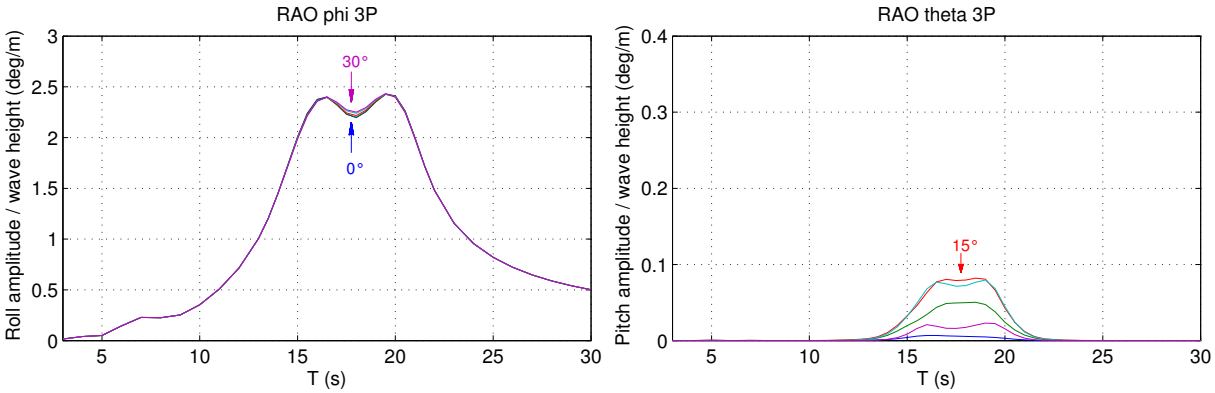
Pour les systèmes 2U, 3S, 3P, nous avons linéarisé les systèmes en suivant la même démarche qu'au §4.3.2. Nous avons bloqué toutes les translations ainsi que le lacet, la barge peut se mouvoir en roulis et en tangage, les colonnes d'eau sont elles aussi libres de leur mouvement. Le *modèle réduit* dépend de β l'angle d'incidence de la houle, au



(a) RAO du système 2U



(b) RAO du système 3S



(c) RAO du système 3P

FIGURE 5.6 – RAO des TLMCD passifs sur le *modèle complet* pour différents angles d'incidence en houle monochromatique d'amplitude 3 m

même titre que le *modèle complet*, c'est-à-dire uniquement par F la force d'excitation de la houle. Sa dynamique s'écrit

$$\dot{X} = \mathrm{A}X + \mathrm{B}F_h\left(\dot{w}, \eta\right) + \mathrm{E}F\left(\beta, t\right) \tag{5.29}$$

avec

$$X = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ w \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0_{2+nc} & \mathbb{I}_{2+nc} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0_{2+nc} \\ M^{-1}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 \\ 0_{nc\times 2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0_{2+nc} \\ M^{-1}\begin{bmatrix} 0_{2\times nc} \\ P_{h_N}^{\top} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le système 2U est facile à régler puisque les meilleures matrices de pondérations Q et R sont les mêmes que celles déterminées par essais successifs au §4.5.1. Nous aborderons la pondération des systèmes 3S et 3P plus précisément au §5.4.2.

5.4.2 Robustesse à l'incidence de la houle

Comme pour l'étude des TLMCD passifs, nous allons nous intéresser à la robustesse à l'incidence de la houle sur notre système en boucle fermée.

Prise en compte des symétries des systèmes 3S et 3P

Nos TLMCD 3S et 3P sont conçus pour être invariants par rotation de 120° autour de la droite définie par CdG et $\mathbf{z}_b$. Nous allons voir si cette propriété se vérifie sur le *modèle réduit* en boucle ouverte, puis bouclés par le LQR non-saturé.

Lorsqu'on tourne $\mathcal{R}_b$ et $\mathcal{R}_e$ de 120° les conséquences sur X sont les suivantes : il faut exprimer la matrice de rotation entre ces deux nouveaux repères en fonction de $\begin{bmatrix} \varphi & \theta \end{bmatrix}^{\top}$ et il faut faire une permutation circulaire des vitesses de l'eau dans les colonnes verticales et les tubes horizontaux. On appellera ce nouveau vecteur X_{120} et on définit P_{120} telle que $X_{120} = P_{120}X$. De la même manière, on fait permuter les composantes de F_h grâce à la matrice P_F. L'écriture de P_{120} et de P_F est détaillée en Annexe B.1. On vérifie (par exemple avec le logiciel de calcul formel Maple) la propriété suivante

Proposition 3. *Les matrices* A *et* B *du* modèle réduit *des systèmes 3S et 3P* (5.29) *vérifient*

$$\mathrm{A} = P_{120}^{-1}\mathrm{A}P_{120} \tag{5.30}$$
$$\mathrm{B} = P_{120}^{-1}\mathrm{B}P_F \tag{5.31}$$

Proposition 4. *Pour que les matrices* Q *et* R *de pondération du LQR vérifient*

$$\mathrm{Q} = P_{120}^{\top}\mathrm{Q}P_{120} \tag{5.32}$$
$$\mathrm{R} = P_F^{\top}\mathrm{R}P_F \tag{5.33}$$

on peut choisir

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1\mathbb{I}_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & \mathrm{q}_2 P_{h_{3S}}^{\top} P_{h_{3S}} & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & \mathrm{q}_3\mathbb{I}_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & \mathrm{q}_4 P_{h_{3S}}^{\top} P_{h_{3S}} \end{bmatrix}$$

pour le système 3S, et

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1\mathbb{I}_2 & 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & \mathrm{q}_2 P_{v_{3P}}^{\top} P_{v_{3P}} + \mathrm{q}_3 P_{h_{3P}}^{\top} P_{h_{3P}} & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & \mathrm{q}_4\mathbb{I}_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & \mathrm{q}_5 P_{v_{3P}}^{\top} P_{v_{3P}} + \mathrm{q}_6 P_{h_{3P}}^{\top} P_{h_{3P}} \end{bmatrix}$$

pour le système 3P, avec q_1 *à* q_6 *des constantes positives ou nulles et* $P_{v_{3P}}$ *et* $P_{h_{3P}}$ *définies en* (5.22).

On peut aussi choisir $\mathrm{R} = r_1\mathbb{I}_3$ *avec* $r_1 > 0$.

Démonstration. Voir Annexe B.2 □

On appellera "CARE" l'équation algébrique de Riccati en temps continu, elle s'écrit classiquement

$$\mathrm{A}^{\top}\chi + \chi\mathrm{A} - \chi\mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^{\top}\chi + Q = 0$$

avec $\chi = \chi^{\top}$ l'inconnue.

Proposition 5. *Si on vérifie (5.30-5.33) et que* χ *est l'unique solution stabilisante de CARE en temps continu, alors on a* $\mathrm{A} - \mathrm{B}K = P_{120}^{-1}\left(\mathrm{A} - \mathrm{B}K\right)P_{120}$*, avec* $K \triangleq \mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^{\top}\chi$*, c'est-à-dire que la dynamique du système bouclé est invariant par rotation de 120 degrés, comme c'est le cas pour le système en boucle ouverte.*

Démonstration. Voir Annexe B.3 □

Vérification par simulation

On a vérifié en Annexe C.2 que nos systèmes bouclés par un LQR non saturé et excités par une houle monochromatique de faible amplitude (0.1 m) sont complètement insensibles au changement d'incidence de la houle. On notera que ni les matrices A, B, Q, R ni le vecteur K ne dépendent de β.

5.4.3 Résultats

Nous avons tracé en Fig. (5.7) les performances que fournissent les systèmes 2U, 3S et 3P soumis à une houle monochromatique pour différentes incidences de houle.

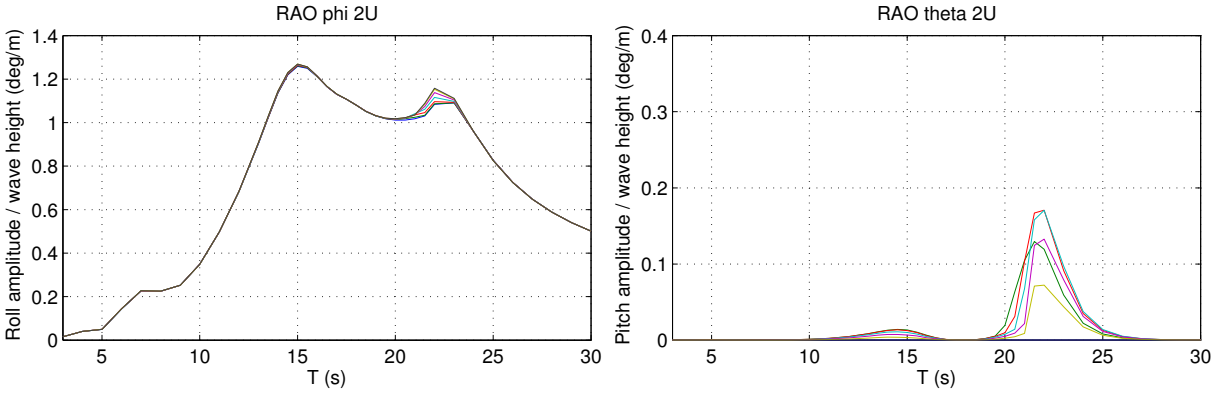
On constate que les TLMCD bouclés par le contrôle LQR saturé sont quasiment insensibles à l'incidence de la houle. En ce qui concerne les performances d'amortissement en roulis proposées par chaque système, les RAO sont de forme similaire et celle du 3S est plutôt meilleure que celles des systèmes 3P et 2U.

Les performances de ces systèmes soumis à des houles polychromatiques pour différentes incidences sont tracées en Annexe C.3 ces RAO généralisées confirment que les systèmes considérés sont très peu dépendants de l'incidence de la houle.

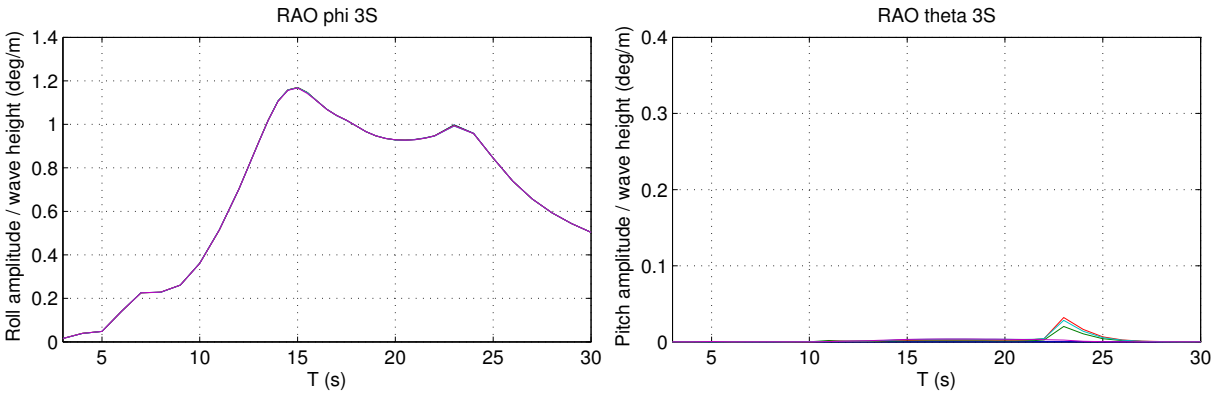
On considère donc le problème de l'incidence de la houle résolu par cette commande.

5.5 Tests de robustesse

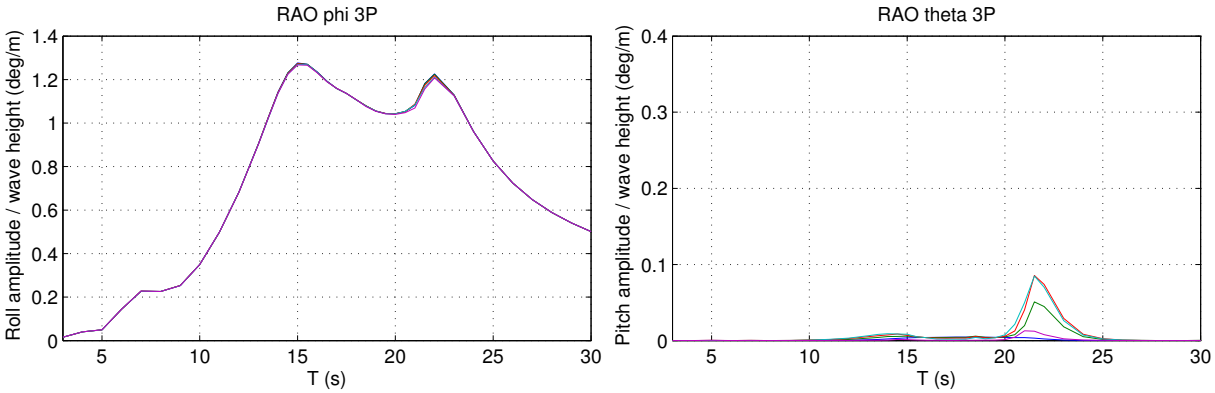
Comme dans le Chapitre 4 nous vérifions numériquement que certaines des hypothèses qu'on a faites pour simplifier notre problème n'impactent pas dramatiquement les performances de nos système d'amortissement. Le détail des méthodes utilisées ainsi que les résultats obtenus sont présentés en Annexe D. Les hypothèses traitées dans cette Annexe sont les suivantes : §D.1) la valeur minimale de la perte de charge est $\eta = 0$, §D.2) l'éolienne flottante oscille autour de l'axe vertical, §D.3) l'éolienne est rigide. Les simulations entreprises ici mènent à des résultats similaires à ceux obtenus en Section 4.6, il y a cependant un résultat notable : quand on rend le mât flexible, le système 3P est le seul en mesure d'empêcher la résonance de la nacelle au bout du mât de l'éolienne.



(a) RAO du système 2U



(b) RAO du système 3S



(c) RAO du système 3P

FIGURE 5.7 – RAO sur le *modèle complet* de nos TLMCD 2U, 3S et 3P en LQR saturé pour différents angles d'incidence pour une houle monochromatique d'amplitude 3 m

Chapitre 6

Résultats vis à vis du cahier des charges

Dans ce chapitre, nous avons tracé des cartographies ayant pour abscisse Hs, la hauteur de vague, et pour ordonnée Tp, la période pic (les deux principaux paramètres du spectre JONSWAP). Sur ces figures sont tracées les isolignes [1] d'amplitude d'accélération de la nacelle ou d'amplitude d'oscillation en roulis de la plate-forme. Elles sont obtenues à partir de simulations effectuées sur le modèle complet soumis à une houle polychromatique d'incidence 0°. On trace ces isolignes pour plusieurs configurations : l'éolienne flottante sans TLMCD et avec TLMCD contrôlé par le LQR saturé.

Les Fig. 6.1 et 6.2 sont des cartographies des oscillations du flotteur de l'éolienne, sur la Fig. 6.1 on s'intéresse à leur écart-type alors qu'en Fig. 6.2 on a la valeur maximale atteinte pendant la simulation. En Fig. 6.3 et 6.4, on a cartographié l'accélération de la nacelle, on a reporté l'écart-type sur la première et la valeur maximale sur la seconde.

Pour plus de clarté, on a tracé les performances du système contrôlé par le "LQR saturé" par rapport aux cas "barge" et "passif" en Fig. 6.5 à 6.10.

On voit clairement sur les figures comparant le LQR saturé à la barge (Figs. 6.5, 6.7 et 6.9) que le système 3S affiche de meilleures performances que les autres dans la plupart des cas. On voit, comme en Fig. 4.12, qu'en dessous de 13 s, les systèmes d'amortissement n'améliorent quasiment pas, ou dégradent très légèrement les performances (de l'ordre de quelques %). Au-delà de 13 s, les systèmes d'amortissement diminuent considérablement les oscillations jusqu'à un facteur 4 pour le roulis et un facteur 3 pour l'accélération de la nacelle.

1. L'isoligne est la ligne reliant les points d'égale valeur sur une carte, par exemple une courbe de niveau sur une carte géographique est une isoligne d'élévation.

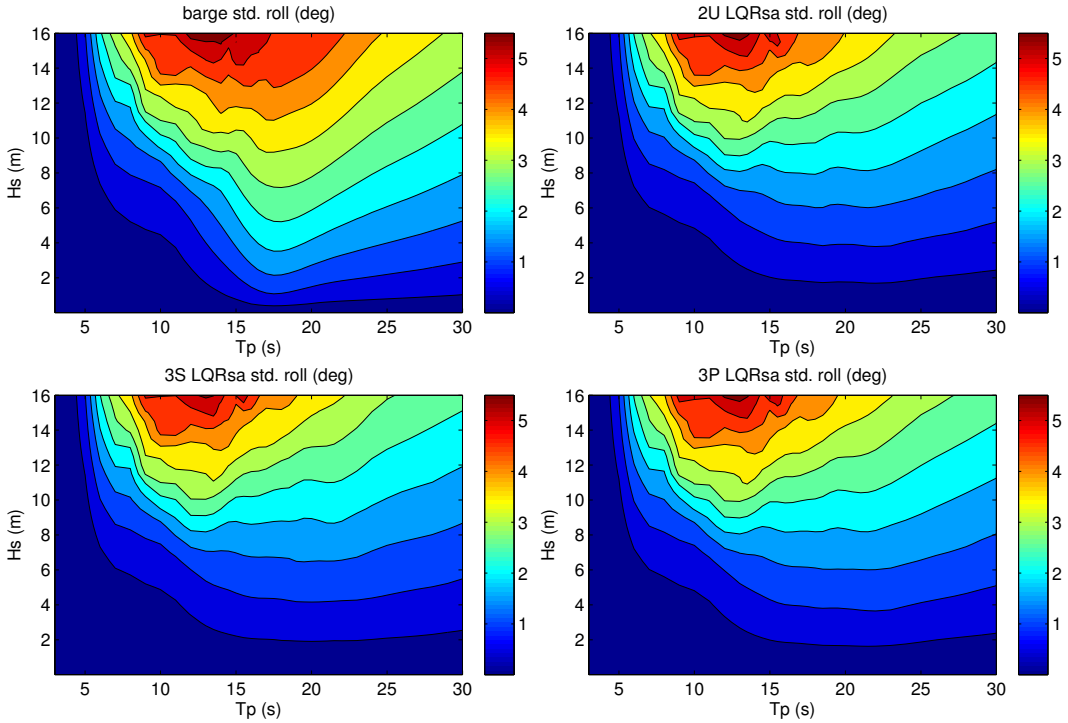


FIGURE 6.1 – Écart-type du roulis pour des houles polychromatiques et un contrôle LQR saturé

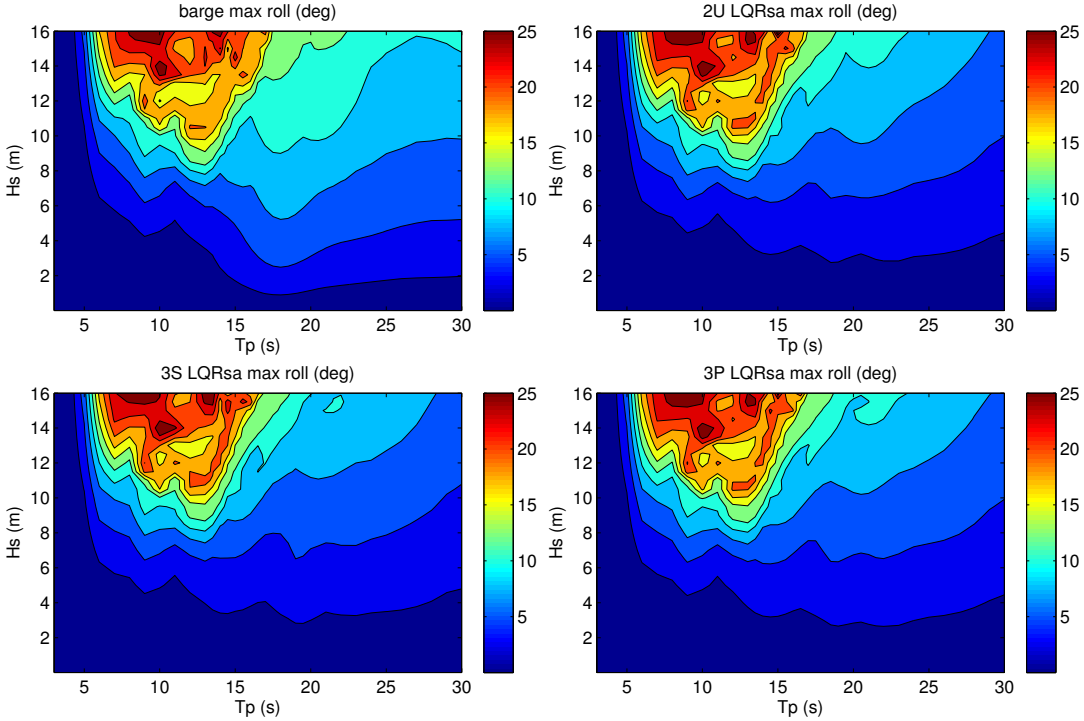


FIGURE 6.2 – Roulis maximal pour des houles polychromatiques et un contrôle LQR saturé

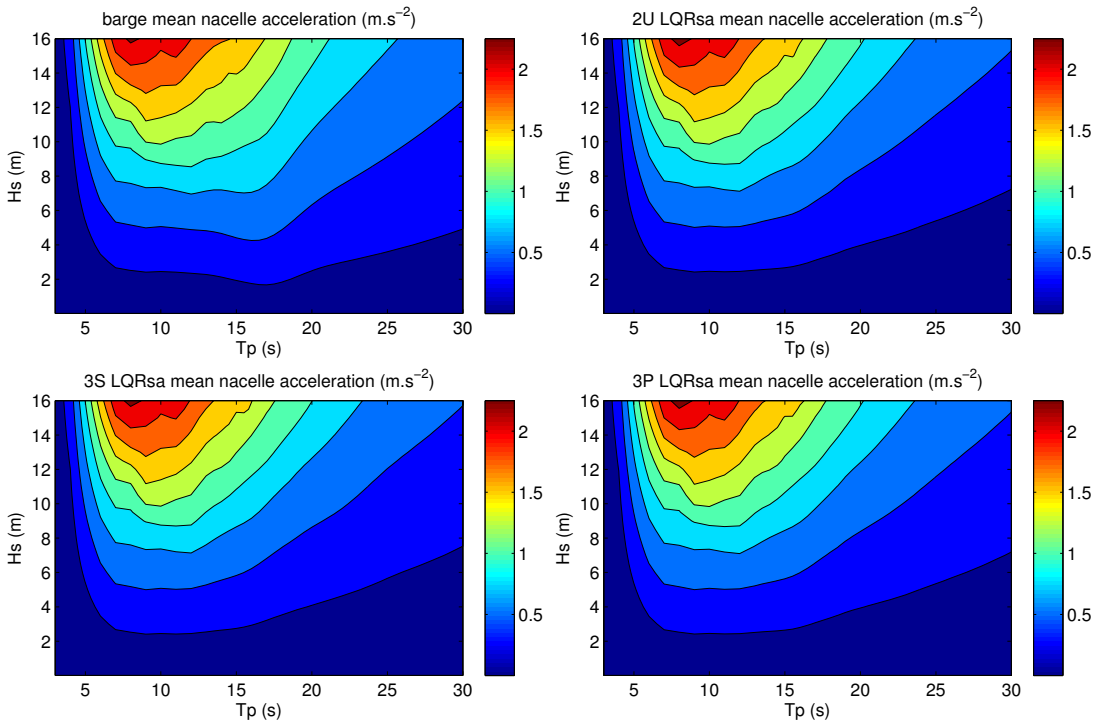


FIGURE 6.3 – Accélération moyenne de la nacelle pour des houles polychromatiques et un contrôle LQR saturé

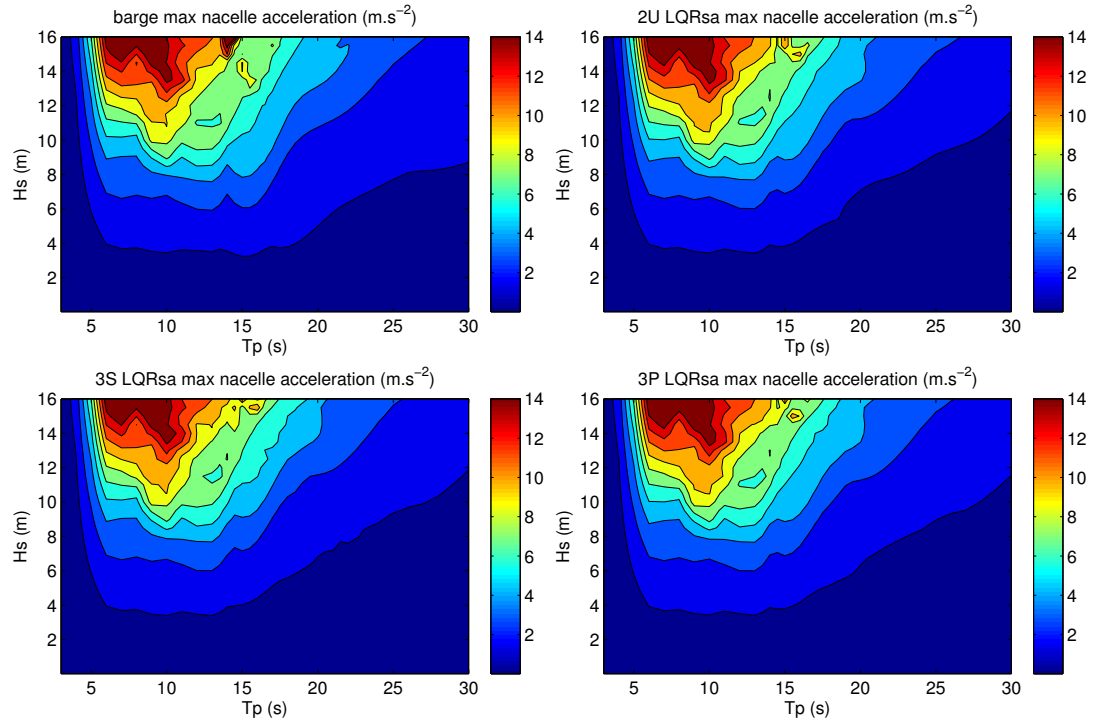


FIGURE 6.4 – Accélération de la nacelle maximale pour des houles polychromatiques et un contrôle LQR saturé

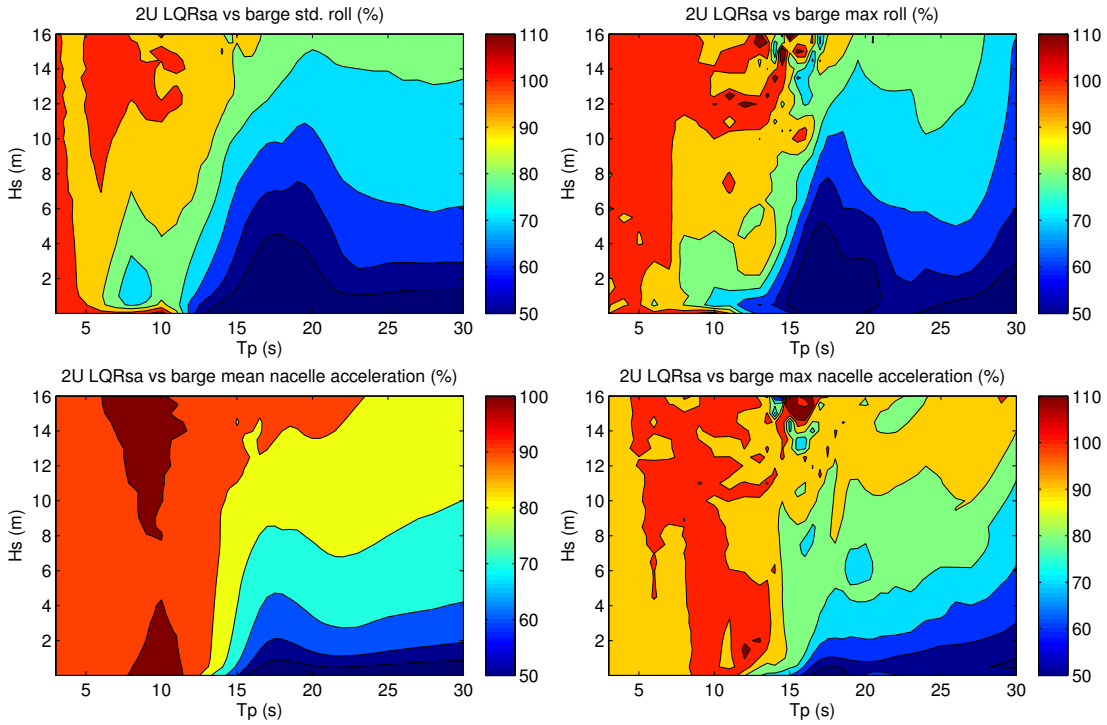


FIGURE 6.5 – Comparaison des performances du 2U LQR saturé par rapport à la barge

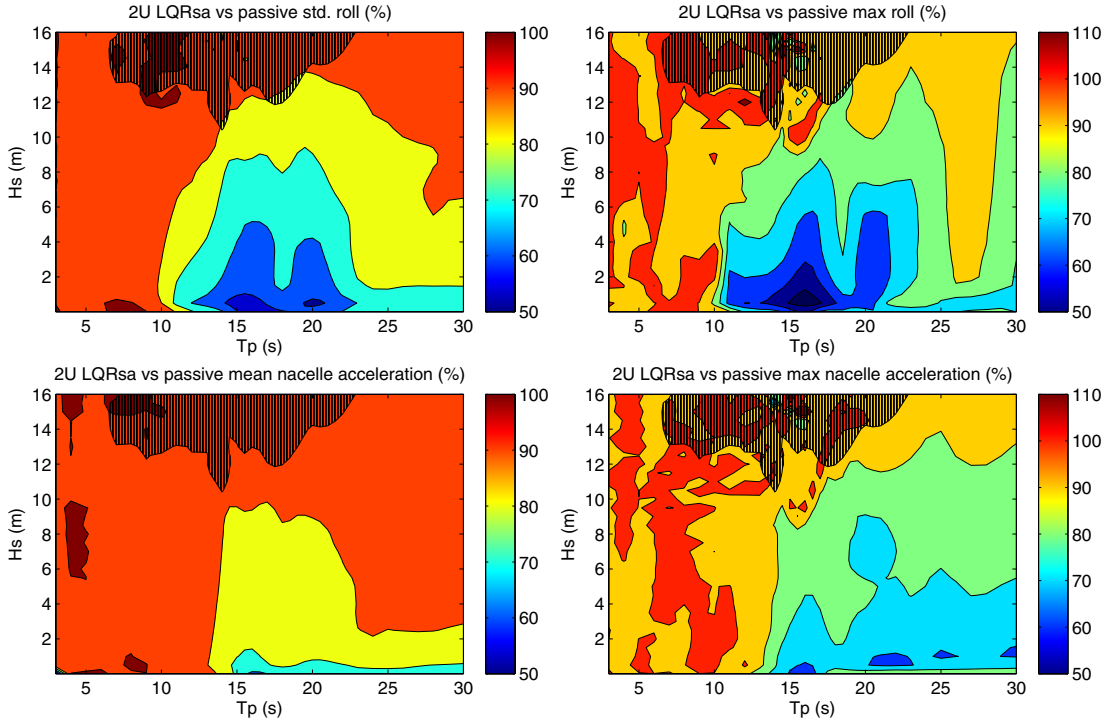


FIGURE 6.6 – Comparaison des performances du 2U LQR saturé par rapport au 2U passif

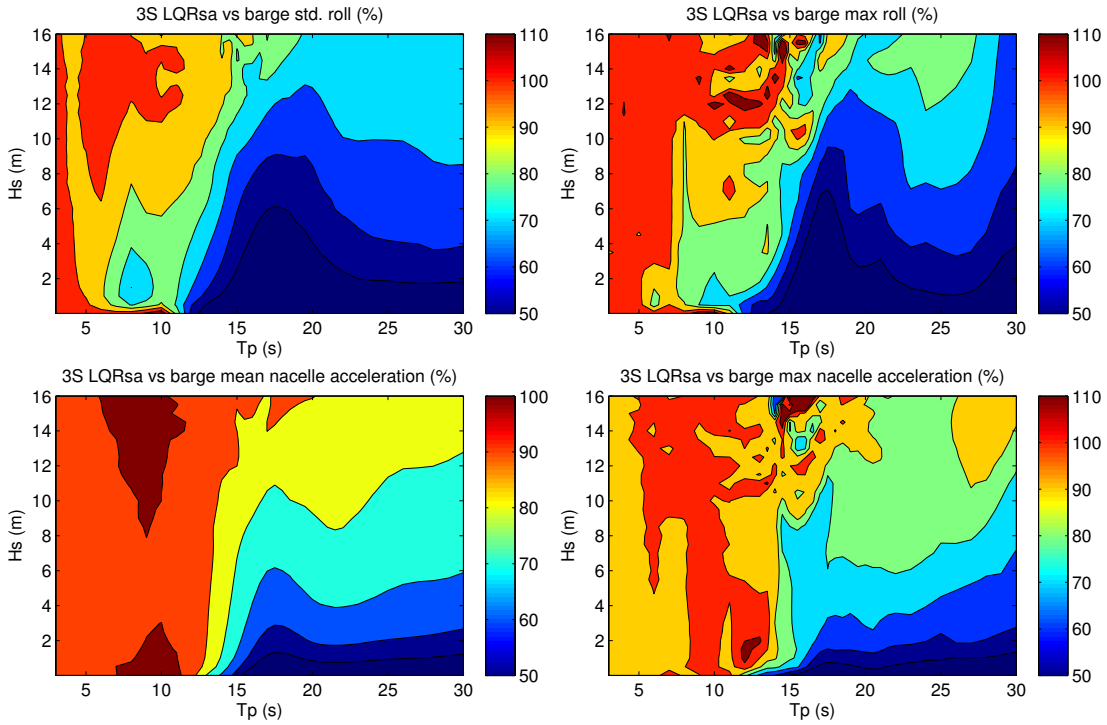


FIGURE 6.7 – Comparaison des performances du 3S LQR saturé par rapport à la barge

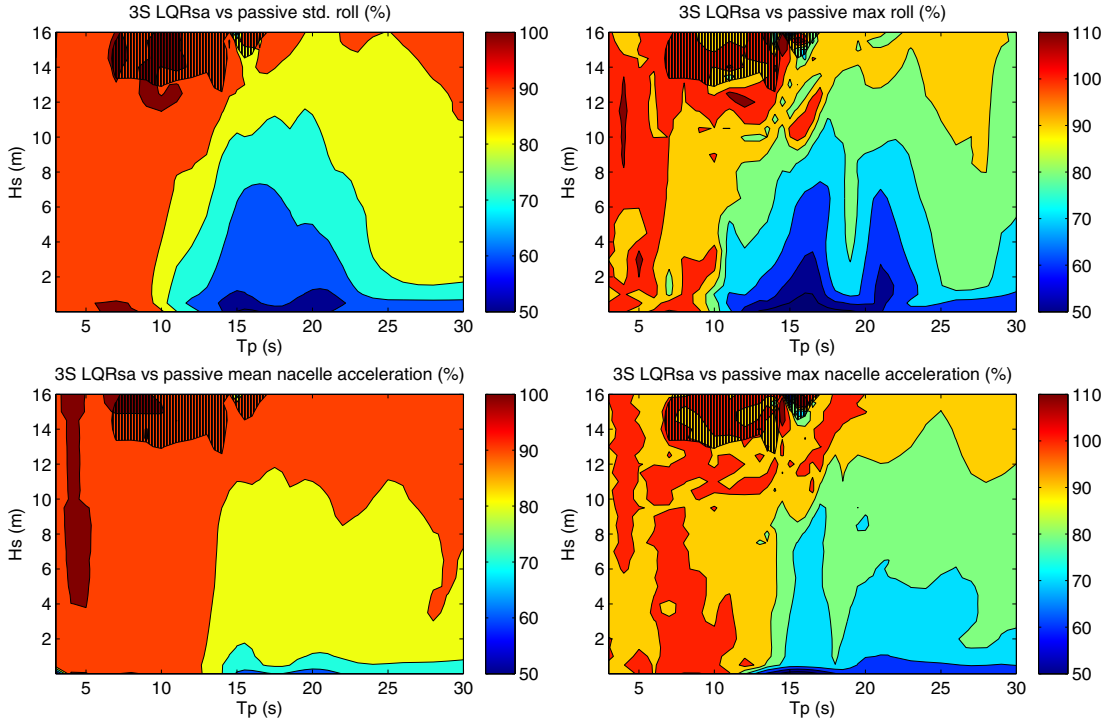


FIGURE 6.8 – Comparaison des performances du 3S LQR saturé par rapport au 3S passif

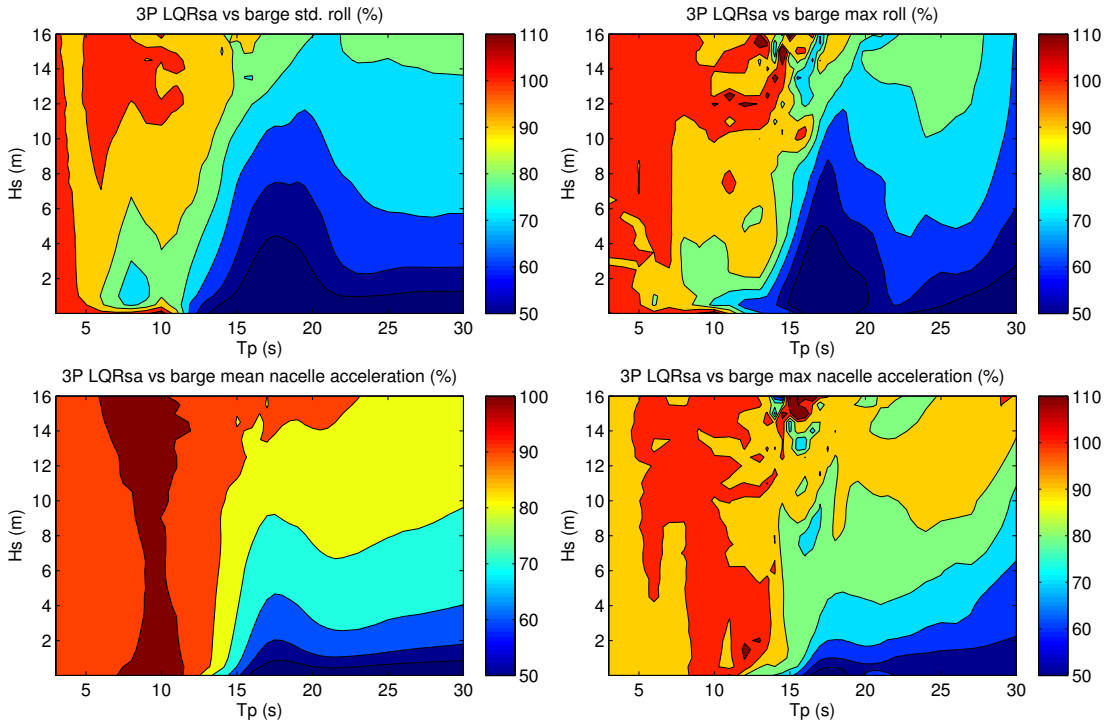


FIGURE 6.9 – Comparaison des performances du 3P LQR saturé par rapport à la barge

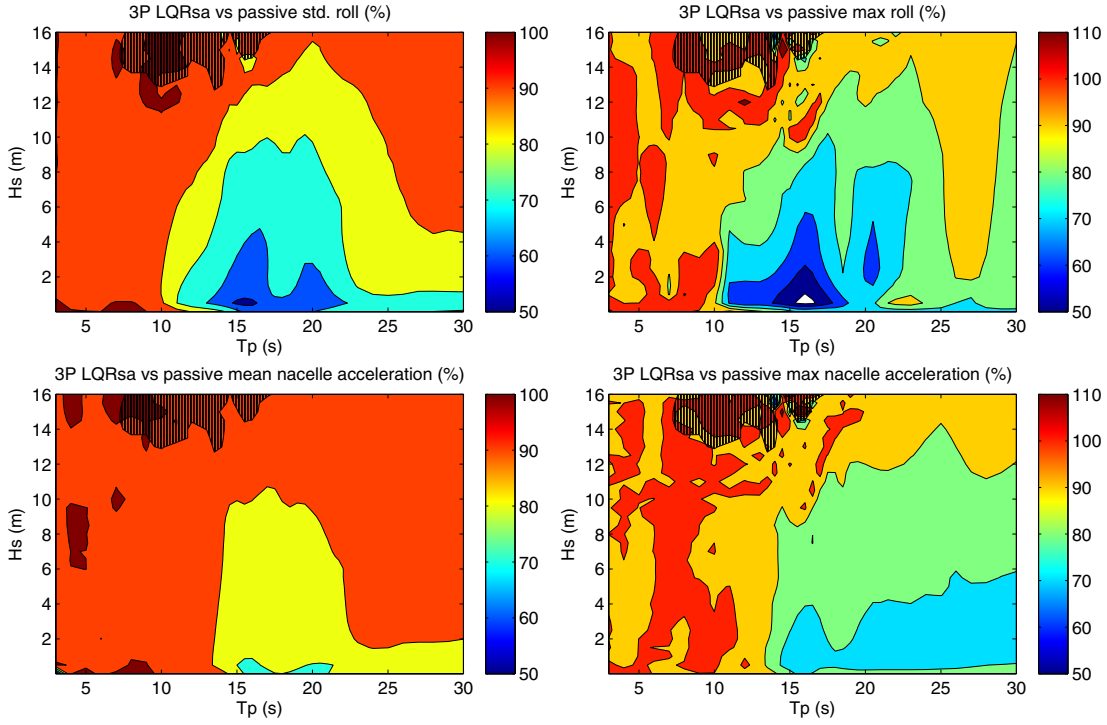


FIGURE 6.10 – Comparaison des performances du 3P LQR saturé par rapport au 3P passif

Hs(m)	Tp(Secondes)											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,5			28,77	121,01	121,98	91,74	37,56	40,26	24,6	3,04	0,5	0,24
1			3,17	61,11	96,06	40,41	38,22	11,88	1,25	0,12	0,01	
1,5				0,85	45,92	63,89	18,38	14,51	2,73	0,07	0,01	0,01
2					0,42	45,32	23	10,79	3,46	0,16		
2,5						0,96	18,81	11,05	3,46	0,31		
3						0,02	1,69	3,97	3,8	0,33	0	
3,5							0,05	0,62	1,97	0,37	0,02	
4								0,18	0,24	0,21	0,05	
4,5								0,02	0,17	0,02	0,07	
5									0,03	0,03	0,04	
5,5										0,04	0,02	

TABLE 6.1 – Scatter Diagram Méditerranée (en ‰)

On observe parfois sur les figures traitant des valeurs maximales de rapides changements de couleurs dans la zone $Hs \in [15, 16]$ et $Tp \in [15, 20]$. Ces irrégularités sont dues aux phasages entre l'excitation et la dynamique du système qui peut faire apparaitre ici et là des valeurs maximales radicalement plus hautes que la simulation voisine.

On voit sur les figures comparant le LQR saturé au passif (Figs. 6.6, 6.8 et 6.10) que dans une grande majorité des cas, le TLCD contrôlé est meilleur que le TLCD passif. On remarque aussi qu'en valeur absolue, le gain de performances du cas "LQR saturé" par rapport au cas "passif" est plus faible que par rapport au cas "barge". On notera que certaines des simulations "passif" sont hachurées car elles sortent du domaine de validité des équations : on a par moment vidé complètement les colonnes verticales de leur eau, ce qui enfreint l'hypothèse de modélisation 6 du §4.1.1.

Ces observations sont à mettre en perspective avec le Scatter Diagram, c.-à-d. les probabilités d'occurrence des couples (Hs, Tp), pour un site donné. En Table 6.1 à 6.3 ont été reportées les probabilités d'apparition de chaque couple (Hs, Tp) pour des sites en Mer Méditerranée, en Bretagne Sud et en Mer du Nord, respectivement. Ces probabilités sont exprimées en ‰ et sont issues des bases de données ANEMOC (Atlas Numérique d'États de Mer Océaniques et Côtiers) [2]. On peut déduire de ces Scatter Diagram et des cartographies de performances que sur notre exemple les améliorations apportées par le TLMCD avec contrôle LQR saturé n'ont aucun intérêt en Méditerranée, mais permettent d'améliorer le comportement de la structure face

2. `http://anemoc.cetmef.developpement-durable.gouv.fr/`

Hs(m)	Tp(Secondes)																	
0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,01	1,93	7,24	4,77	7,73	20,59	33,38	23,64	11,15	4,40	1,83	0,96	0,56	0,15	0,03	0,01		
2			8,91	23,30	20,22	27,61	49,01	74,03	69,34	51,97	33,11	13,49	4,68	1,23	0,32	0,05		
3			0,00	3,02	8,48	12,02	19,52	23,66	26,47	38,40	44,40	36,99	16,14	4,97	0,21	0,18	0,03	
4					0,24	2,23	6,18	12,97	13,38	15,67	20,51	23,05	20,58	12,44	2,14	0,36	0,03	
5						0,03	0,55	3,65	8,13	8,83	10,01	11,68	9,92	8,25	2,90	1,01	0,07	
6							0,01	0,40	2,49	5,93	7,70	7,33	5,76	4,23	1,84	0,42	0,11	
7								0,01	0,26	2,05	5,03	4,43	3,92	2,45	0,66	0,17	0,06	0,00
8								0,00	0,02	0,23	1,95	2,96	2,80	1,47	0,39	0,06	0,06	0,01
9									0,00	0,02	0,33	1,07	2,55	1,07	0,38	0,09	0,01	
10											0,02	0,37	1,21	0,73	0,28	0,08	0,02	0,04
11											0,00	0,05	0,34	0,40	0,26	0,10		
12												0,00	0,06	0,08	0,14	0,06	0,02	
13														0,06	0,06	0,05	0,02	0,01
14														0,01	0,02	0,01		
15														0,01		0,01		
16															0,01	0,01		

TABLE 6.2 – Scatter Diagram Bretagne (en ‰)

Hs(m)	Tp(Secondes)																			
0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1,97	23,77	83,16	63,11	51,07	35,91	20,09	10,17	4,31	4,56	4,42	3,31	4,59	3,12	1,99	1,07	0,68	0,27	0,06	0,02
2		0,85	28,77	131,54	96,56	45,32	25,77	19,38	14,42	8,06	4,24	1,21	0,91	1,07	0,72	0,80	0,49	0,31	0,10	0,02
3			0,05	3,94	69,35	62,87	12,35	4,73	3,01	2,56	2,5	2,18	0,93	0,42	0,16	0,08	0,00	0,04	0,03	0,00
4					1,16	44,79	23,83	5,54	2,04	1,05	0,53	0,56	0,26	0,35	0,10	0,00	0,02	0,02	0,01	
5					0,00	1,22	22,43	6,93	2,62	1,26	0,69	0,29	0,11	0,05	0,03					
6							2,14	6,64	1,98	1,23	0,89	0,51	0,24	0,04	0,00					
7								1,34	1,35	0,45	0,45	0,38	0,21	0,09	0,07	0,05				
8								0,03	0,65	0,32	0,12	0,11	0,20	0,17	0,04	0,05				
9									0,04	0,18	0,04	0,01	0,04	0,09	0,10	0,02	0,00			
10										0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,09	0,03	0,01			
11										0,00	0,01					0,00	0,02			

TABLE 6.3 – Scatter Diagram Mer du Nord (en ‰)

à des houles extrêmes en Mer du Nord ou en Bretagne.

On note surtout ici que les Tp les plus impactées par le TLCD sont les mêmes qu'en Fig. 4.12. Ceci est la conséquence directe du critère de coût (5.26) choisi pour dimensionner le TLCD qui privilégie l'amortissement des oscillations autour de la période propre du système {flotteur, éolienne}.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

7.1 Conclusions

Dans cette thèse, nous avons commencé par mener une étude bibliographique regroupant les solutions technologiques permettant de stabiliser des structures lourdes et peu amorties : les navires et les gratte-ciels. Nous avons ensuite choisi la technologie qui nous semblait la mieux adaptée à la réduction du roulis d'une éolienne flottante. Une bibliographie spécifique au TLCD a logiquement été entreprise pour connaître l'état de l'art.

Le comportement du flotteur en embardée, pilonnement et roulis a ensuite été modélisé dans le plan vertical, grâce à une approche énergétique. On a ensuite étudié le comportement de l'éolienne flottante couplée avec le TLCD et montré les limitations inhérentes à la stratégie passive (restriction constante).

Nous avons aussi montré par simulation qu'une commande active pouvait permettre des gains de performance importants. Nous avons ensuite vérifié la validité des hypothèses de modélisation que nous avions faites. Il a été mis en évidence que le TLCD "classique" que nous avions considéré ne peut pas amortir de manière satisfaisante la plate-forme si elle n'oscille pas dans le même plan. La dégradation observée en cas de désalignement est substantielle.

Par conséquent, nous avons proposé deux systèmes d'amortissement novateurs inspirés par le TLCD que nous avons baptisés TLMCD, pour Tuned Liquid Multiple Column Damper, et que nous avons étudiés en 3D. Nous avons modélisé le comportement de l'éolienne flottante couplée à ces TLMCD. De nouveau, ces systèmes ont été étudiés dans le cas passif et avec un contrôle actif type LQR saturé, on a mis en évidence qu'ils étaient robustes au désalignement avec la houle. Une des contributions de la thèse est la mise au point cet algorithme de contrôle.

Les résultats de l'Annexe D concernant la robustesse vis-à-vis des hypothèses de

modélisation montrent des performances similaires entre ces nouveaux systèmes. La performance de ces systèmes soumis à une multitude de houles polychromatiques a enfin été étudiée. Au Chapitre 6, les résultats obtenus en houle polychromatique pour diverses hauteurs et périodes pics, montrent que les performances du système 3S sont meilleures que celles des systèmes 2U et 3P pour le même prix. Nous recommandons par conséquent le système 3S LQR saturé pour l'amortissement des éoliennes flottantes.

Les résultats du Chapitre 6 montrent que les oscillations sont clairement réduites pour les périodes de houle supérieures à 13 s et des hauteurs significatives inférieures à 10 m. Les cas les plus extrêmes i.e. où Hs est supérieure à 8 m [1], ne sont pas amortis de manière satisfaisante par notre système vis-à-vis des critères fixés par le cahier des charges, c.-à-d. que l'accélération de la nacelle peut dépasser les 2.5 m/s^2 ou que les oscillations en roulis dépassent les 10° par rapport à la verticale. Cependant un effet favorable non pris en compte dans ces études est l'interaction aérodynamique entre le rotor et le vent. Il pourrait fournir un amortissement supplémentaire qui pourrait se révéler utile dans ces cas particuliers. La question à laquelle nous apportons une réponse est une amélioration des performances autour de la période de résonance de l'éolienne flottante pour des houles faibles à fortes. Cependant le système risque toujours d'être mis en danger par des sollicitations extrêmes, puisque la conception du TLMCD n'a pas été réalisée ici dans ce but particulier.

7.2 Perspectives

7.2.1 Changement du design du TLMCD

En 5.3.1, nous avons choisi de concevoir le TLCD de manière à minimiser l'amplitude maximale du roulis du système excité par une houle monochromatique. On a vu au Chapitre 6 que ce choix rendait le TLCD inefficace pour des houles polychromatiques inférieures à 12-13 s. On va montrer ici qu'en modifiant les paramètres du TLCD, on peut décaler la plage de fréquences sur laquelle il amortit le système. Nous nous intéresserons ici uniquement au cas du TLMCD 3S, puisque ces résultats sont transposables aux autres variantes.

La période propre du TLMCD s'écrit

$$T_{TLCD} = 2\pi\sqrt{\frac{2L_v + \nu L_h}{2g}}$$

1. ce qui représente pour nos sites : 1% des cas en Bretagne, moins de 0,5% des cas en mer du Nord et aucun des cas en Méditerranée

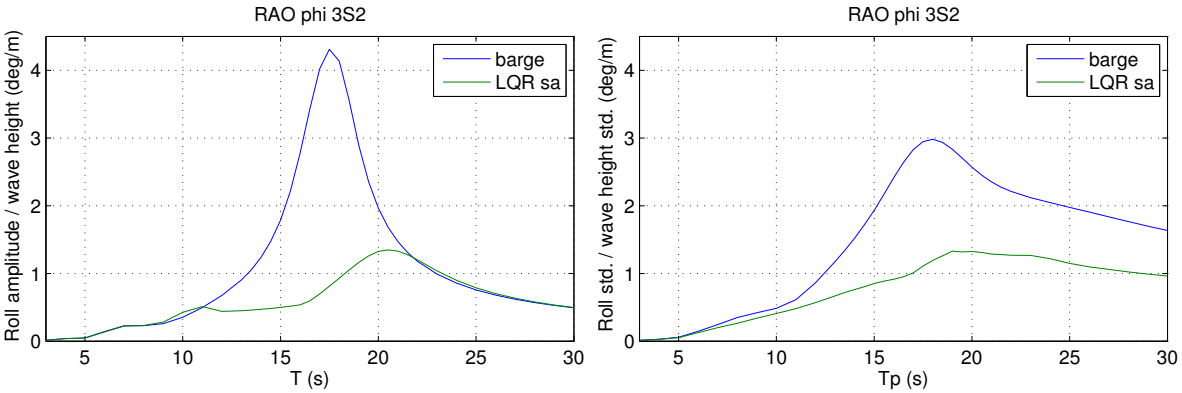


FIGURE 7.1 – RAO sur le *modèle complet* du système 3S2 contrôlé par le LQR saturé et soumis à une houle monochromatique (à gauche) et à une houle polychromatique (à droite)

on rappelle que jusqu'à maintenant, $\nu_{3S} = 4.02$ et $T_{3S} \approx 16.7s$. On note le nouveau système "3S2". On pose simplement $\nu_{3S2} = 2$, on obtient par conséquent $T_{3S2} \approx 11.6s$. On a tracé en Fig. 7.1 les résultats des simulations faites avec ce nouveau système. On a aussi tracé en 7.2 les résultats obtenus avec les paramètres précédents. On observe, comme attendu, une amélioration des performances d'amortissement entre 9 et 18 s ainsi qu'une détérioration de l'efficacité pour les périodes supérieures à 18 s.

On peut donc trouver un dimensionnement du TLCD qui permettrait d'amortir une plage de fréquence spécifique. On pourrait donc adapter parfaitement les paramètres du TLCD pour l'adapter à un site de production donné.

7.2.2 Ajout d'un actionneur supplémentaire

Dans la littérature, il existe aussi des solutions permettant de contrôler le comportement du TLCD "classique" en changeant la pression de l'air au-dessus des colonnes verticales (Spillane *et al.*, 2007; Sorge *et al.*, 2012; Hochrainer et Ziegler, 2006). Les sommets des deux colonnes verticales sont reliés par un tube horizontal au centre du quel est placée une vanne. Un tel système est illustré dans la Fig. 7.3. Ce système a une dynamique comparable à celle du système masse-ressort de la Fig. 7.4.

Pour schématiser, on peut dire que la vanne présente dans l'eau peut agir sur le système la moitié du temps (quand $\dot{w}$ est dans le bon sens), alors que celle présente dans les conduits d'air peut agir quand w est dans le bon sens. On peut donc dire que le système avec la vanne "air" et la vanne "eau" peut agir quand $\dot{w}$ ou w est dans le bon sens, soit les trois-quarts du temps. Bien que cette explication soit très partielle et préliminaire, on comprend facilement qu'on tient là une piste intéressante

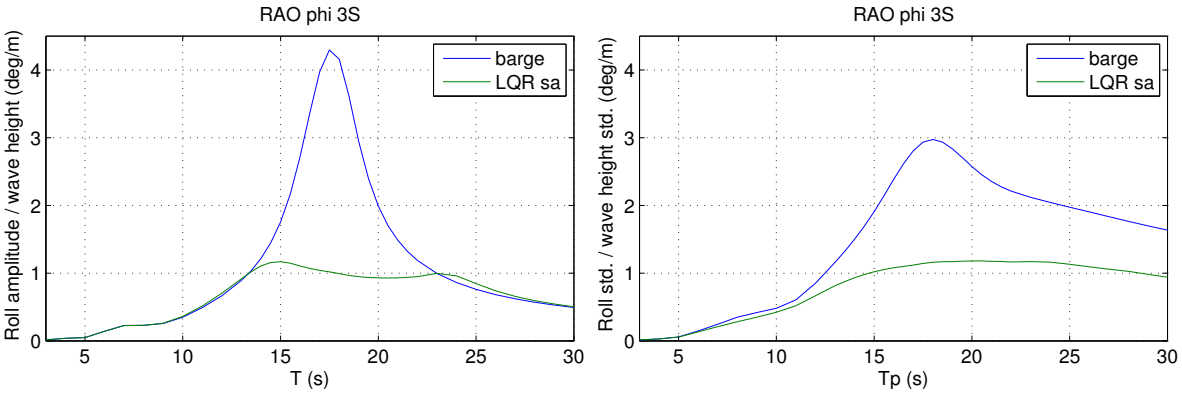


FIGURE 7.2 – RAO sur le *modèle complet* du système 3S contrôlé par le LQR saturé et soumis à une houle monochromatique (à gauche) et à une houle polychromatique (à droite)

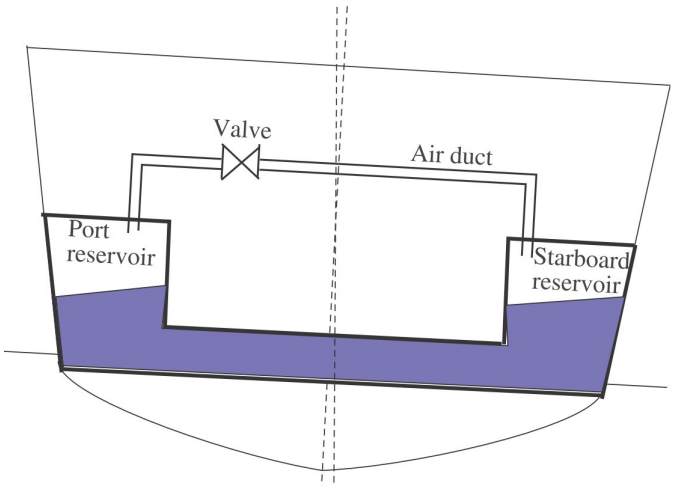


FIGURE 7.3 – Tube en U (Perez et Blanke, 2012)

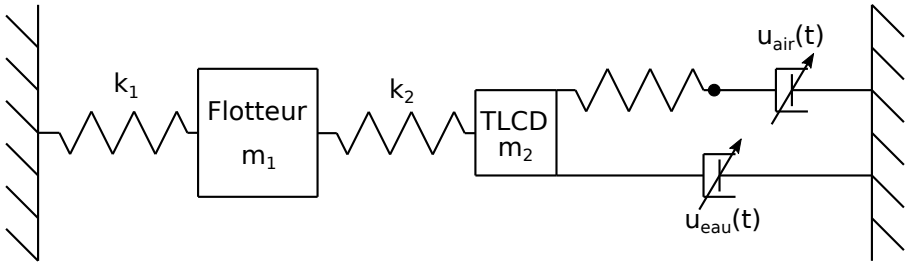


FIGURE 7.4 – système masse ressort *Toy Problem* avec deux actionneurs

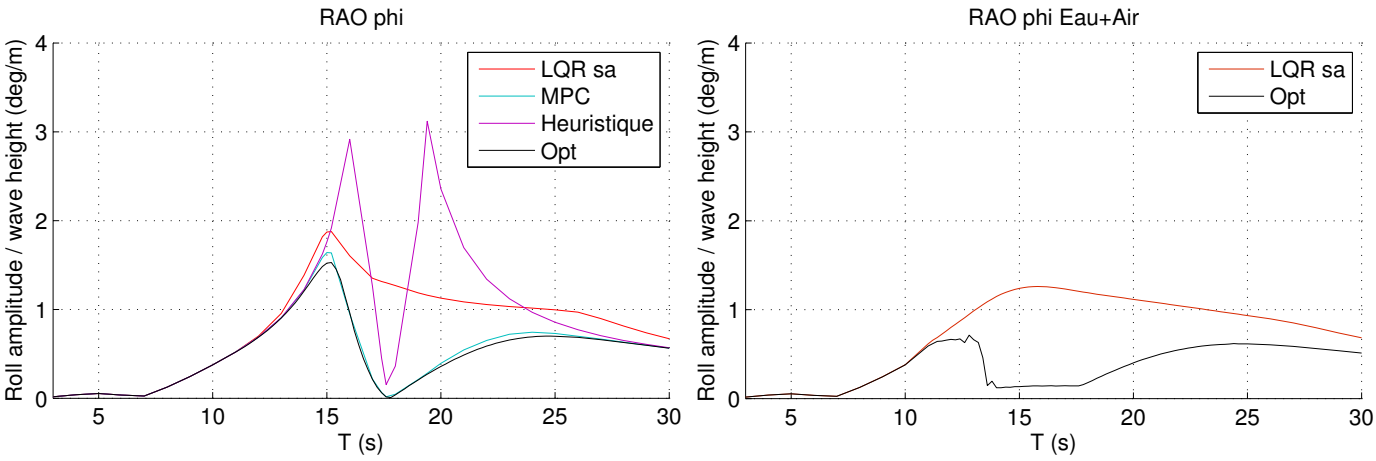


FIGURE 7.5 – RAO en roulis MPC vs LQR saturé vs contrôle optimal pour une houle monochromatique

pour améliorer les performances. De plus, le fait d'avoir deux actionneurs entraîne une meilleure résilience face aux éventuelles pannes.

À l'image de ce qui a été fait par Sorge *et al.* (2012), le comportement de l'air a été modélisé grâce au premier principe de la thermodynamique. Cette nouvelle dynamique a été couplée avec (4.16) puis le tout a été linéarisé pour obtenir le *modèle réduit Eau+Air*. Des résultats encore préliminaires obtenus sur le *modèle réduit Eau+Air* montrent en Fig. 7.5 que ce nouvel actionneur permet un gain de performances intéressant, surtout pour les périodes comprises entre 12 s et 15 s. Cette piste très prometteuse pourrait faire l'objet de travaux futurs.

Bibliographie

V. I. Arnold : *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.

C. C. Chang et C. T. Hsu : Control performance of liquid column vibration absorbers. *Engineering Structures*, 20(7):580–586, 1998.

Y. H. Chen et C. H. Ko : Active tuned liquid column damper with propellers. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 32(10):1627–1638, 2003.

S. Colwell et B. Basu : Tuned liquid column dampers in offshore wind turbines for structural control. *Engineering Structures*, 31(2):358–368, 2009.

J. P. Den Hartog : *Mechanical vibrations*. Courier Dover Publications, 1956.

A. Di Matteo, F. Lo Iacono, G. Navarra et A. Pirrotta : Direct evaluation of the equivalent linear damping for TLCD systems in random vibration for predesign purposes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 63:19 – 30, 2014. ISSN 0020-7462.

Ernst & Young : Offshore wind in europe : Walking the tightrope to success. Rap. tech., European Wind Energy Association, 2015.

P. Falugi, E. Kerrigan et E. Van Wyk : *Imperial College London Optimal Control Software user guide (ICLOCS)*. Department of Electrical and Electronic Engineering, Imperial College London, London, England, UK, 2010.

L. J. Fingersh, M. M. Hand et A. S. Laxson : Wind turbine design cost and scaling model, 2006.

H. Frahm : Results of trials of the anti-rolling tanks at sea. *Journal of the American Society for Naval Engineers*, 23(2):571–597, 1911.

C. Fu : Active TLCGD control of plane asymmetric buildings under earthquake excitation. *Acta Mechanica Sinica*, 27(5):817–822, 2011.

F. Fusco et J. V. Ringwood : Short-term wave forecasting for real-time control of wave energy converters. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 1(2):99–106, 2010.

H. Gao, K. Kwok et B. Samali : Optimization of tuned liquid column dampers. *Engineering Structures*, 19(6):476 – 486, 1997. ISSN 0141-0296.

A. F. A. Gawad, S. A. Ragab, A. H. Nayfeh et D. T. Mook : Roll stabilization by anti-roll passive tanks. *Ocean Engineering*, 28(5):457–469, 2001.

J. Guckenheimer et P. Holmes : *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, 1983.

K. Hasselmann, T. Barnett, E. Bouws, H. Carlson, D. Cartwright, K. Enke, J. Ewing, H. Gienapp, D. Hasselmann, P. Kruseman *et al.* : Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). 1973.

M. Hochrainer et F. Ziegler : Control of tall building vibrations by sealed tuned liquid column dampers. *Structural Control and Health Monitoring*, 13(6):980–1002, 2006.

C. Holden et T. I. Fossen : A nonlinear 7-dof model for U-tanks of arbitrary shape. *Ocean Engineering*, 45:22–37, 2012.

S. Holmes, S. Bhat, A. Sablok, I. Prislin et P. Beynet : Heave plate design with computational fluid dynamics. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 123(1):22–28, 2001.

D. Hrovat, P. Barak et M. Rabins : Semi-active versus passive or active tuned mass dampers for structural control. *Journal of Engineering Mechanics*, 109(3):691–705, 1983.

I. Idel'Cik : *Memento des pertes de charge*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricite de France, Paris : Eyrolles, 1969.

Y. Ikeda : Active and semi-active vibration control of buildings in Japan - Practical applications and verification. *Structural Control and Health Monitoring*, 16(7-8): 703–723, 2009.

V. Jaksic, C. Wright, J. Murphy, C. Afeef, S. Ali, D. Mandic et V. Pakrashi : Dynamic response mitigation of floating wind turbine platforms using tuned liquid column dampers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2035), 2015.

J. Jonkman, S. Butterfield, W. Musial et G. Scott : Definition of a 5-mw reference wind turbine for offshore system development. *National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO, Technical Report No. NREL/TP-500-38060*, 2009.

J. M. Jonkman : *Dynamics modeling and loads analysis of an offshore floating wind turbine*. Thèse de doctorat, National Renewable Energy Laboratory, 2007.

A. Kareem : Reduction of wind induced motion utilizing a tuned sloshing damper. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 36:725–737, 1990.

H. Kim et H. Adeli : Hybrid control of smart structures using a novel wavelet-based algorithm. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 20(1):7–22, 2005.

W. La Cava et M. A. Lackner : Theory manual for the tuned mass damper module in fast v8. 2015.

M. A. Lackner et M. A. Rotea : Structural control of floating wind turbines. *Mechatronics*, 21(4):704–719, 2011.

L. Landau et E. Lifshitz : *Mechanics*. Elsevier, third édn, 1976.

H. H. Lee, S. H. Wong et R. S. Lee : Response mitigation on the offshore floating platform system with tuned liquid column damper. *Ocean engineering*, 33(8):1118–1142, 2006.

H. H. Lee et H. Juang : Experimental study on the vibration mitigation of offshore tension leg platform system with uwtlcd. *Smart Structures and Systems*, 9(1):71–104, 2012.

H.-N. Li et L.-S. Huo : Control law for market-based semi-active tuned liquid column dampers. *IEEE Conference on Decision and Control*, 3:2234–2239, 2003.

X. Li et H. Gao : Load mitigation for a floating wind turbine via generalized structural control. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 63(1):332–342, 2016.

N. Luo, C. L. Bottasso, H. R. Karimi et M. Zapateiro : Semiactive control for floating offshore wind turbines subject to aero-hydro dynamic loads. *International Conference on Renewable Energies and Power Quality*, 2011.

O. A. Marzouk et A. H. Nayfeh : Control of ship roll using passive and active anti-roll tanks. *Ocean engineering*, 36(9):661–671, 2009.

D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao et P. O. Scokaert : Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.

D. S. Miller : *Internal flow systems*. BHRA (information Services) Cranfield, 1990.

B. Molin : *Hydrodynamique des structures offshore*. Editions Technip, 2002.

J. Morison, J. Johnson, S. Schaaf *et al.* : The force exerted by surface waves on piles. *Journal of Petroleum Technology*, 2(05):149–154, 1950.

W. Musial, S. Butterfield, B. Ram *et al.* : Energy from offshore wind. *In Offshore technology conference*, p. 1888–1898. Offshore Technology Conference, 2006.

H. Namik : *Individual blade pitch and disturbance accommodating control of floating offshore wind turbines*. Thèse de doctorat, ResearchSpace Auckland, 2012.

National Renewable Energy Laboratory : *Renewable Energy Data Book*. U.S. Department of Energy, 2012.

J. N. Newman : *Marine hydrodynamics*. MIT Press (Cambridge, Mass.), 1977.

L. Y. Pao et K. E. Johnson : A tutorial on the dynamics and control of wind turbines and wind farms. *American Control Conference, 2009. ACC'09.*, p. 2076–2089, 2009.

T. Peacock et N. Hadjiconstantinou : course materials for 2.003j/1.053j dynamics and control I. MIT OpenCourseWare (http ://ocw.mit.edu), 2007.

T. Perez et M. Blanke : Ship roll damping control. *Annual Reviews in Control*, 36(1):129–147, 2012.

T. Perez et P. D. Steinmann : Analysis of ship roll gyrostabiliser control. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(18):310–315, 2009.

Y. Poirette, T. Perdrizet, J. C. Gilloteaux, A. Pourtier et C. Mabile : A new ballasted floating support for offshore wind turbine. *In ASME 2014 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. American Society of Mechanical Engineers, ASME International, jun 2014.

S. Pommier et Y. Berthaud : *Mécanique générale : cours et exercices corrigés*. Dunod, 2010.

J. C. Radix et B. de Cremiers : *Systemes inertiels à composant liés "Strap-down"*. Cépaduès, 1991.

Y. Si, H. R. Karimi et H. Gao : Modelling and optimization of a passive structural control design for a spar-type floating wind turbine. *Engineering Structures*, 69 (0):168 – 182, 2014. ISSN 0141-0296.

F. Sorge, S. Beccari, M. Cammalleri, G. Genchi et E. Pipitone : Three-mode pneumatic management of marine U-tank systems. *Ocean Engineering*, 55(0):175 – 183, 2012. ISSN 0029-8018.

M. W. Spillane, O. R. Rijken, S. J. Leverette *et al.* : Vibration absorbers for deepwater tlps. *In The Seventeenth International Offshore and Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore and Polar Engineers, 2007.

G. Stewart et M. Lackner : Offshore wind turbine load reduction employing optimal passive tuned mass damping systems. *IEEE transactions on control systems technology*, 21(4):1090 – 1104, 2013.

G. M. Stewart : Load reduction of floating wind turbines using tuned mass dampers. Mémoire de D.E.A., University of Massachusetts Amherst, 2011.

D. Titterton et J. L. Weston : *Strapdown inertial navigation technology*, vol. 17. IET, 2004.

N. Townsend et R. Shenoi : Gyrostabilizer vehicular technology. *applied mechanics reviews*, 64:1 – 14, 2011.

N. C. Townsend et R. A. Shenoi : Control strategies for marine gyrostabilizers. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 39(2):243–255, apr 2013. URL `http://dx.doi.org/10.1109/joe.2013.2254591`.

E. N. Wayman : Coupled dynamics and economic analysis of floating wind turbine systems. Mémoire de D.E.A., Massachusetts Institute of Technology, 2006.

A. J. Wilmink et J. F. Hengeveld : Application of tuned liquid column dampers in wind turbines. *Proceedings of the European Wind Energy Conference*, 2006.

J.-C. Wu, C.-H. Chang et Y.-Y. Lin : Optimal designs for non-uniform tuned liquid column dampers in horizontal motion. *Journal of Sound and Vibration*, 326 (1-2):104 – 122, 2009. ISSN 0022-460X.

J.-C. Wu, Y.-P. Wang, C.-L. Lee, P.-H. Liao et Y.-H. Chen : Wind-induced interaction of a non-uniform tuned liquid column damper and a structure in pitching motion. *Engineering Structures*, 30(12):3555–3565, 2008.

S. Yalla et A. Kareem : Optimum absorber parameters for tuned liquid column dampers. *Journal of Structural Engineering*, 126(8):906–915, 2000.

S. K. Yalla, A. Kareem et J. C. Kantor : Semi-active tuned liquid column dampers for vibration control of structures. *Engineering Structures*, 23(11):1469–1479, 2001.

S. K. Yalla : *Liquid dampers for mitigation of structural response : theoretical development and experimental validation.* Thèse de doctorat, University of Notre Dame, 2001.

Annexe A

Comparaison avec Holden et Fossen (2012)

Nous comparons dans cette annexe les équations données par Holden et Fossen (2012) pour le cas 1U avec l'équation (5.15) que nous avons obtenue au §5.2.

A.1 Équations du mouvement

Nous cherchons à exprimer la dynamique du système trouvée par Holden et Fossen (2012) en fonction de nos notations.

Les équations de la dynamique sont données dans Holden et Fossen (2012, (41-42)), elles s'écrivent avec nos notations [1]

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \mathcal{P}\left(\Theta\right)^{-1} v \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Mv\right) &= \tau\left(t\right) - C_t\left(w, v\right) v - k_t\left(q\right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

avec τ le vecteur des forces généralisées, C_t défini dans Holden et Fossen (2012, Annexe E), $k_t\left(q\right)$ défini dans Holden et Fossen (2012, (43)). Comme dans notre modèle toutes les forces liées à la gravité apparaissent dans k, on réécrit (A.1)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \mathcal{P}\left(\Theta\right)^{-1} v \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Mv\right) &= \tau_H - C_t\left(w, v\right) v - k_H\left(q\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

1. $\mathcal{P}$ dans Holden et Fossen (2012) est défini comme $\dot{q} = \mathcal{P}v$, alors que dans ce manuscrit, on le définit comme $v = \mathcal{P}\dot{q}$, et dans Holden et Fossen (2012, (42-43)) on définit $p \triangleq M_t v$ avec $M_t = M_{1U}$. On note aussi qu'ici $q \in \mathbb{R}^7$ alors que dans Holden et Fossen (2012) $q \in \mathbb{R}^8$

avec $k_H(q,t) = k_t(q) - \tau_g$ et $\tau_H \triangleq \tau - \tau_g$. En définissant [2] $\tau_g \triangleq \begin{bmatrix} g\, m_t R(\Theta)^\top \mathbf{z} \\ 0_{4\times 1} \end{bmatrix}$ on obtient donc

$$k_H(q,t) = g \begin{bmatrix} -m_t R(\Theta)^\top \mathbf{z} \\ S\left(R(\Theta)^\top \mathbf{z}\right) \rho \int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p} A_t(\sigma)\, \mathbf{r}^b(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \\ -\rho A_v \mathbf{z}^\top R(\Theta) \left(\mathbf{r}^b(\varsigma_p) - \mathbf{r}^b(-\varsigma_s)\right) \end{bmatrix}$$

D'après Holden et Fossen (2012, Annexe E) on écrit

$$C_t(w,v) = \bar{C}_w - \dot{w}\bar{C}_m$$

$$\bar{C}_w = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & -S(p_l) & \frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}\omega^b \\ -S(p_l) & -S(p_r) & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_\omega \omega^b \\ -\omega^{b^\top} \frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}^\top & -\omega^{b^\top} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_\omega^\top & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_m = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & \frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega} & 0_{3\times 1} \\ 0_{3\times 3} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_\omega & 0_{3\times 1} \\ \frac{\partial}{\partial w} M_{vq}^\top & \frac{\partial}{\partial w} M_{\omega q}^\top & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_q \end{bmatrix}$$

avec p_l et p_r définis comme

$$p_l \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 1} \end{bmatrix} M v = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 1} \end{bmatrix} M \mathcal{P}(\Theta)\, \dot{q} \tag{A.3}$$

$$p_r \triangleq \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & \mathbb{I}_3 & 0_{3\times 1} \end{bmatrix} M v = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & \mathbb{I}_3 & 0_{3\times 1} \end{bmatrix} M \mathcal{P}(\Theta)\, \dot{q} \tag{A.4}$$

On peut réécrire (A.2) en fonction de q, $\dot{q}$ et $\ddot{q}$

$$M\mathcal{P}(\Theta)\, \ddot{q} + C_H \dot{q} + k_H(q) = \tau_H$$

avec

$$C_H(q,v) \triangleq C_t(w,v)\, \mathcal{P}(\Theta) + \dot{M}\mathcal{P}(\Theta) + M\dot{\mathcal{P}}(\Theta)$$

en multipliant chaque coté de l'équation par $\mathcal{P}(\Theta)^\top$ à gauche, on obtient

$$\mathcal{M}\ddot{q} + \mathcal{P}(\Theta)^\top C_H(q,v)\, \dot{q} + \mathcal{P}(\Theta)^\top k_H(q) = \mathcal{P}(\Theta)^\top \tau_H$$

On remarque que cette écriture est comparable à (5.15). Pour que ces deux équations soient identiques, on doit vérifier $C(q,\dot{q})\,\dot{q} = \left(\mathcal{P}(\Theta)^\top C_H(q,v)\right)\dot{q}$, $k(q) = \mathcal{P}(\Theta)^\top k_H(q)$ et $Q = \mathcal{P}(\Theta)^\top \tau_H$. Pour alléger les développements mathématiques qui suivent, les matrices $R(\Theta)$, $G(\Theta)$ et $\mathcal{P}(\Theta)$ seront notées respectivement R, G et $\mathcal{P}$.

2. Comme on l'a vu au §4.1.5 on ne prend pas en compte ici le poids du navire puisqu'il est déjà inclus dans les forces hydrodynamiques, donc dans τ_H.

A.2 Comparaison de k

On commence par développer

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\top}k_H\left(q\right) =& g\begin{bmatrix} -Rm_tR^{\top}\mathbf{z} \\ G^{\top}S\left(R^{\top}\mathbf{z}\right)\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma \\ -\rho A_v\mathbf{z}^{\top}R\left(\mathbf{r}^b\left(\varsigma_p\right)-\mathbf{r}^b\left(-\varsigma_s\right)\right)\end{bmatrix} \\ =& g\begin{bmatrix} -m_t\mathbf{z} \\ G^{\top}S\left(R^{\top}\mathbf{z}\right)\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma \\ -\rho A_v\mathbf{z}^{\top}R\left(\mathbf{r}^b\left(\varsigma_p\right)-\mathbf{r}^b\left(-\varsigma_s\right)\right)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Comme on l'a vu au §(5.15) $k\left(q\right)$ s'écrit pour $nc=1$

$$k\left(q\right)\triangleq -g\begin{bmatrix} m_t\mathbf{z} \\ -G^{\top}S\left(R^{\top}\mathbf{z}\right)\left(\rho\int_{-\varsigma_s}^{\varsigma_p}A_t\left(\sigma\right)\mathbf{r}^b\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma\right) \\ \rho A_v\mathbf{z}^{\top}R\left(\mathbf{r}^b\left(\varsigma_p\right)-\mathbf{r}^b\left(-\varsigma_s\right)\right)\end{bmatrix}$$

On a donc montré que $k\left(q\right)$ et $\mathcal{P}^{\top}k_H\left(q\right)$ sont identiques.

A.3 Comparaison de C

On a

$$\mathcal{P}^{\top}C_H\left(q,v\right)=\mathcal{P}^{\top}C_t\left(w,v\right)\mathcal{P}+\mathcal{P}^{\top}\dot{M}\mathcal{P}+\mathcal{P}^{\top}M\dot{\mathcal{P}}$$

et d'après (5.15) $C\left(q,\dot{q}\right)$ s'écrit pour $nc=1$

$$C\left(q,\dot{q}\right)=\dot{\mathcal{P}}^{\top}M\mathcal{P}+\mathcal{P}^{\top}\dot{M}\mathcal{P}+\mathcal{P}^{\top}M\dot{\mathcal{P}}-\begin{bmatrix} 0_{3\times 7} \\ \frac{\partial\left(\mathcal{P}\dot{q}\right)^{\top}}{\partial\Theta}M\mathcal{P} \\ \frac{1}{2}\dot{q}^{\top}\mathcal{P}^{\top}\frac{\partial M}{\partial w}\mathcal{P}\end{bmatrix}$$

Il nous reste donc à montrer qu'on vérifie

$$\begin{aligned} c_L\triangleq\dot{\mathcal{P}}^{\top}M\mathcal{P}\dot{q}-\begin{bmatrix} 0_{3\times 1} \\ \frac{\partial\left(\mathcal{P}\dot{q}\right)^{\top}}{\partial\Theta}M\mathcal{P}\dot{q} \\ \frac{1}{2}\dot{q}^{\top}\mathcal{P}^{\top}\frac{\partial M}{\partial w}\mathcal{P}\dot{q}\end{bmatrix}=\mathcal{P}^{\top}C_t\left(w,v\right)\mathcal{P}\dot{q}\triangleq c_H \\ \iff\dot{\mathcal{P}}^{\top}Mv-\begin{bmatrix} 0_{3\times 1} \\ \frac{\partial v^{\top}}{\partial\Theta}Mv \\ \frac{1}{2}v^{\top}\frac{\partial M}{\partial w}v\end{bmatrix}=\mathcal{P}^{\top}C_t\left(w,v\right)v\end{aligned}$$

Pour ce faire, on commence par développer ces expressions en utilisant (5.1, 5.5, 5.6)

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{P}}^\top M v &= \begin{bmatrix} m_t \dot{R}\mathbf{v}^b + \dot{R} M_{v\omega}\omega^b + \dot{R} M_{vq}\dot{w} \\ \dot{G}^\top M_{v\omega}^\top \mathbf{v}^b + \dot{G}^\top M_\omega \omega^b + \dot{G}^\top M_{\omega q}\dot{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_t RS\left(\omega^b\right)\mathbf{v}^b + RS\left(\omega^b\right) M_{v\omega}\omega^b + RS\left(\omega^b\right) M_{vq}\dot{w} \\ \dot{G}^\top M_{v\omega}^\top \mathbf{v}^b + \dot{G}^\top M_\omega \omega^b + \dot{G}^\top M_{\omega q}\dot{w} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial v^\top}{\partial \Theta} M v &= \left(m_t \frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} M_{v\omega}^\top \right) \mathbf{v}^b \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta} M_{v\omega} + \frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} M_\omega \right) \omega^b \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{b\top}}{\partial \Theta} M_{vq} + \frac{\partial \omega^{b\top}}{\partial \Theta} M_{\omega q} \right) \dot{w} \\
\frac{1}{2} v^\top \frac{\partial M}{\partial w} v =& \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{v}^{b\top} \left(0_{3\times 3}\right) + \omega^{b\top} \frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}^\top + \dot{w} \frac{\partial}{\partial w} M_{vq}^\top \right) \mathbf{v}^b \right. \\
&+ \left(\mathbf{v}^{b\top} \frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega} + \omega^{b\top} \frac{\partial}{\partial w} M_\omega + \dot{w} \frac{\partial}{\partial w} M_{\omega q}^\top \right) \omega^b \\
&+ \left. \left(\mathbf{v}^{b\top} \frac{\partial}{\partial w} M_{vq} + \omega^{b\top} \frac{\partial}{\partial w} M_{\omega q} + \dot{w} \frac{\partial}{\partial w} M_q \right) \dot{w} \right) \\
&= \left(\omega^{b\top} \frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}^\top + \dot{w} \frac{\partial}{\partial w} M_{vq}^\top \right) \mathbf{v}^b \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} \omega^{b\top} \frac{\partial}{\partial w} M_\omega + \dot{w} \frac{\partial}{\partial w} M_{\omega q}^\top \right) \omega^b + \frac{1}{2} \dot{w} \frac{\partial}{\partial w} M_q \dot{w}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& c_H = \mathcal{P}^\top C_t\left(w, v\right) v \\
=& \begin{bmatrix} R\left(-S\left(p_l\right) - \dot{w}\frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}\right)\omega^b + R\left(\frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}\omega^b\right)\dot{w} \\ G^\top\left(-S\left(p_l\right)\right)\mathbf{v}^b + G^\top\left(-S\left(p_r\right) - \dot{w}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_\omega\right)\omega^b + G^\top\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_\omega \omega^b\right)\dot{w} \\ \left(-\omega^{b^\top}\frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}^\top - \dot{w}\frac{\partial}{\partial w} M_{vq}^\top\right)\mathbf{v}^b + \left(-\omega^{b^\top}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_\omega^\top - \dot{w}\frac{\partial}{\partial w} M_{\omega q}^\top\right)\omega^b + \left(-\dot{w}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_q\right)\dot{w} \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} -RS\left(p_l\right)\omega^b \\ -G^\top S\left(p_l\right)\mathbf{v}^b - G^\top S\left(p_r\right)\omega^b \\ \left(-\omega^{b^\top}\frac{\partial}{\partial w} M_{v\omega}^\top - \dot{w}\frac{\partial}{\partial w} M_{vq}^\top\right)\mathbf{v}^b + \left(-\omega^{b^\top}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_\omega^\top - \dot{w}\frac{\partial}{\partial w} M_{\omega q}^\top\right)\omega^b + \left(-\dot{w}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w} M_q\right)\dot{w} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

On peut séparer la vérification en sous-problèmes : nous allons vérifier l'égalité pour chaque bloc de c_L et c_H, ensuite nous identifierons les termes. Commençons par

vérifier l'égalité sur les trois premières composante de c_L et c_H

$$\begin{aligned} c_L[1..3] &= m_t RS\left(\omega^b\right)\mathbf{v}^b + RS\left(\omega^b\right)M_{v\omega}\omega^b + RS\left(\omega^b\right)M_{vq}\dot{w} \\ &= RS\left(\omega^b\right)\left(m_t\mathbf{v}^b + M_{v\omega}\omega^b + M_{vq}\dot{w}\right) \\ c_H[1..3] &= -RS\left(p_l\right)\omega^b \\ &= RS\left(\omega^b\right)p_l \end{aligned}$$

on développe les expressions de p_l et p_r données en (A.3-A.4)

$$\begin{aligned} p_l =& m_t\mathbf{v}^b + M_{v\omega}\omega^b + \dot{w}M_{vq} \\ p_r =& M_{v\omega}^\top\mathbf{v}^b + M_\omega\omega^b + \dot{w}M_{\omega q} \end{aligned}$$

on a donc $c_L[1..3] = c_H[1..3]$.

Nous continuons avec les trois composantes suivantes de c_L et c_H

$$\begin{aligned} c_L[4..6] &= \left(\dot{\mathcal{P}}^\top Mv\right)[4..6] - \frac{\partial v}{\partial\Theta}Mv \\ &= \dot{G}^\top M_{v\omega}^\top\mathbf{v}^b + \dot{G}^\top M_\omega\omega^b + \dot{G}^\top M_{\omega q}\dot{w} - \left(m_t\frac{\partial\mathbf{v}^{b\top}}{\partial\Theta} + \frac{\partial\omega^{b\top}}{\partial\Theta}M_{v\omega}^\top\right)\mathbf{v}^b \\ &- \left(\frac{\partial\mathbf{v}^{b\top}}{\partial\Theta}M_{v\omega} + \frac{\partial\omega^{b\top}}{\partial\Theta}M_\omega\right)\omega^b - \left(\frac{\partial\mathbf{v}^{b\top}}{\partial\Theta}M_{vq} + \frac{\partial\omega^{b\top}}{\partial\Theta}M_{\omega q}\right)\dot{w} \\ &= -\frac{\partial\mathbf{v}^{b\top}}{\partial\Theta}\left(m_t\mathbf{v}^b + M_{v\omega}\omega^b + M_{vq}\dot{w}\right) + \left(\dot{G}^\top - \frac{\partial\omega^{b\top}}{\partial\Theta}\right)\left(M_{v\omega}^\top\mathbf{v}^b + M_\omega\omega^b + M_{\omega q}\dot{w}\right) \\ &= -\frac{\partial\mathbf{v}^{b\top}}{\partial\Theta}p_l + \left(\dot{G}^\top - \frac{\partial\omega^{b\top}}{\partial\Theta}\right)p_r \\ c_H[4..6] &= -G^\top S\left(p_l\right)\mathbf{v}^b - G^\top S\left(p_r\right)\omega^b \\ &= G^\top S\left(\mathbf{v}^b\right)p_l + G^\top S\left(\omega^b\right)p_r \end{aligned}$$

d'après (5.5-5.6) on a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\mathbf{v}^{b\top}}{\partial\Theta} &= G^\top S\left(\mathbf{v}^b\right) \\ \dot{G}^\top - \frac{\partial\omega^{b\top}}{\partial\Theta} &= G^\top S\left(\omega^b\right) \end{aligned}$$

et par conséquent on vérifie $c_L[4..6] = c_H[4..6]$.

Enfin, nous regardons la dernière composante de c_L et c_H

$$\begin{aligned}
c_L[7] = &- \left(\omega^{b\top}\frac{\partial}{\partial w}M_{v\omega}^{\top} + \dot{w}\frac{\partial}{\partial w}M_{vq}^{\top}\right)\mathbf{v}^b \\
&- \left(\frac{1}{2}\omega^{b\top}\frac{\partial}{\partial w}M_{\omega} + \dot{w}\frac{\partial}{\partial w}M_{\omega q}^{\top}\right)\omega^b - \frac{1}{2}\dot{w}\frac{\partial}{\partial w}M_q\dot{w} \\
c_H[7] = &\left(-\omega^{b^\top}\frac{\partial}{\partial w}M_{v\omega}^{\top} - \dot{w}\frac{\partial}{\partial w}M_{vq}^{\top}\right)\mathbf{v}^b \\
&+ \left(-\omega^{b^\top}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}M_{\omega}^{\top} - \dot{w}\frac{\partial}{\partial w}M_{\omega q}^{\top}\right)\omega^b + \left(-\dot{w}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}M_q\right)\dot{w}
\end{aligned}$$

comme M_ω est symétrique, ces deux termes sont égaux.

On a donc montré $c_L = c_H$, par conséquent on vérifie $C\left(q,\dot{q}\right) = \mathcal{P}^\top C_t\left(w,v\right)v$.

A.4 Comparaison des forces généralisées

Par définition, la puissance dissipée par le vecteur des forces généralisées, τ_H, vaut

$$v^\top \tau_H = \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \tau_H$$

or on peut aussi exprimer cette puissance en fonction de Q

$$v^\top \tau_H = \dot{q}^\top \mathcal{P}^\top \tau_H = \dot{q}^\top Q$$

On a donc $Q = \mathcal{P}^\top \tau_H$

A.5 Bilan

On a comparé terme à terme les équations que nous proposons avec celles proposées par Holden et Fossen (2012), il ressort de cette comparaison que ces équations sont identiques.

Annexe B

Symétrie des problèmes 3S et 3P

B.1 Expression de P_{120} et P_F

Dans cette annexe, nous allons noter $\Theta_0 \triangleq [\varphi, \theta]^\top$ et $\omega_0 \triangleq [\dot{\varphi}, \dot{\theta}]^\top = \dot{\Theta}_0$, on réécrit donc $X = \left[\Theta_0^\top, w^\top, \omega_0^\top, \dot{w}^\top\right]^\top$, on écrit aussi $X_{120} \triangleq \left[\Theta_{120}^\top, w_{120}^\top, \omega_{120}^\top, \dot{w}_{120}^\top\right]^\top$.

B.1.1 Expression de P_F

On écrit simplement P_F comme la matrice de permutation circulaire suivante

$$P_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B.1.2 Obtention de Θ_{120}

Nous rappelons que les valeurs de X sont petites et que ψ, l'angle du lacet, est nul. En Fig. 5.1 (recopiée ici en Fig. B.1), on voit que φ est définie comme la rotation autour de $\mathbf{x}_b$, et θ comme la rotation autour de $\mathbf{y}_e$ (puisqu'ici ψ est nul).

On introduit $\mathcal{R}_{e_{120}}$ et $\mathcal{R}_{b_{120}}$, ces repères sont tournés de 120° autour de leur axe $\mathbf{z}$ respectif par rapport à $\mathcal{R}_e$ et $\mathcal{R}_b$ respectivement. Les repères $\mathcal{R}_{e_{120}}$ et $\mathcal{R}_{b_{120}}$ sont reliés respectivement à $\mathcal{R}_e$ et $\mathcal{R}_b$ par $R_z\left(120^\circ\right)$, avec $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}^e = R_z\left(120^\circ\right)\mathbf{r}^{e_{120}}$$

et

$$\mathbf{r}^b = R_z\left(120^\circ\right)\mathbf{r}^{b_{120}}$$

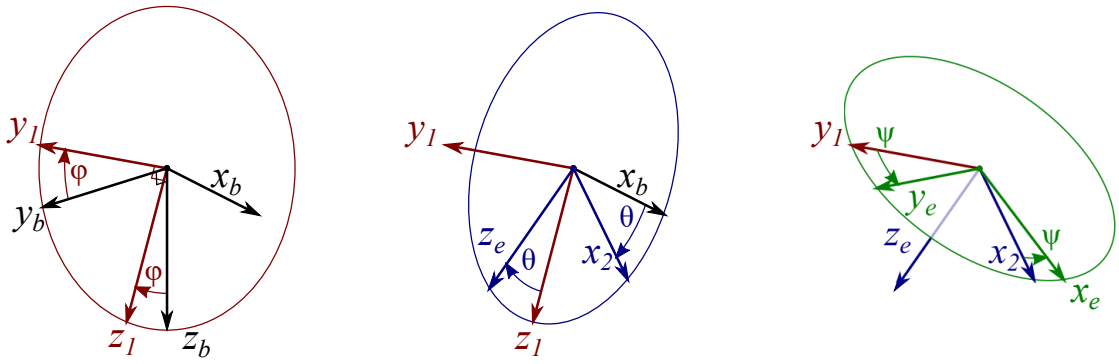


FIGURE B.1 – Orientation de $\mathcal{R}_b$ par rapport à $\mathcal{R}_e$

on cherche donc $\Theta_{120} \triangleq [\varphi_{120}, \theta_{120}]^\top$ les rotations autour de $\mathbf{x}_{b_{120}}$ et $\mathbf{y}_{e_{120}}$ qui décrivent l'orientation de $\mathcal{R}_{e_{120}}$ par rapport à $\mathcal{R}_{b_{120}}$. On note $R(\Theta_{120})$ la matrice liant $\mathcal{R}_{e_{120}}$ à $\mathcal{R}_{b_{120}}$ telle que $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}^{e_{120}} = R(\Theta_{120})\,\mathbf{r}^{b_{120}}$. Par définition on a

$$\mathbf{r}^{e_{120}} = R_z^\top(120°)\,\mathbf{r}^e = R_z^\top(120°)\,R(\Theta_0)\,\mathbf{r}^b = R_z^\top(120°)\,R(\Theta_0)\,R_z(120°)\,\mathbf{r}^{b_{120}}$$

et

$$\mathbf{r}^{e_{120}} = R(\Theta_{120})\,\mathbf{r}^{b_{120}}$$

c'est-à-dire

$$R(\Theta_{120}) = R_z^\top(120°)\,R(\Theta_0)\,R_z(120°) \tag{B.1}$$

on obtient donc une équation liant Θ_0 à Θ_{120}. Il nous faut maintenant réécrire $R(\Theta)$ dans le cas de φ et θ petits, et ψ nul. On rappelle que la matrice liant $\mathcal{R}_e$ à $\mathcal{R}_b$ telle que $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}^e = R(\Theta_0)\,\mathbf{r}^b$ s'écrit

$$R(\Theta_0) \triangleq R_z(0)\,R_y(\theta)\,R_x(\varphi)$$

avec

$$R_x(\varphi) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pour des petits angles, ces matrices deviennent

$$R_x(\varphi) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varphi \\ 0 & \varphi & 1 \end{bmatrix} \qquad R_y(\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_z(0) = \mathbb{I}_{3\times 3}$$

et avec le produit $\varphi\theta$ négligeable on réécrit

$$R(\Theta_0) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\varphi \\ -\theta & \varphi & 1 \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

et par conséquent

$$R(\Theta_{120}) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta_{120} \\ 0 & 1 & -\varphi_{120} \\ -\theta_{120} & \varphi_{120} & 1 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

Avec les équations (B.1,B.2,B.3), on peut donc exprimer Θ_{120} en fonction de Θ_0

$$\Theta_{120} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Theta_0$$

B.1.3 Expression de ω_{120}

Comme $\omega_{120} \triangleq [\dot{\varphi}_{120}, \dot{\theta}_{120}]^\top = \dot{\Theta}_{120}$, on obtient directement son expression en fonction de $\omega_0 = \dot{\Theta}_0$

$$\omega_{120} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \omega_0$$

B.1.4 Obtention de w_{120} et $\dot{w}_{120}$

Abordons maintenant le lien entre $\dot{w}$ et $\dot{w}_{120}$. Pour le 3S, on rappelle que $\dot{w}$ est le vecteur des vitesses de l'eau dans les colonnes verticales 1 et 2. Par conséquent, $\dot{w}_{120}$ est le vecteur des vitesses de l'eau dans les colonnes verticales 2 et 3. On a donc

$$\dot{w}_{120} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0_{2\times 1} \end{bmatrix} P_F P_{v_{3S}} \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \dot{w}$$

avec $P_{v_{3S}}$ défini en (5.18).

Pour le 3P, $\dot{w}$ est le vecteur des vitesses de l'eau dans les colonnes verticales 1 et 2 et de la vitesse de l'eau dans le tube horizontal 3. Donc w_{120} est le vecteur des vitesses de l'eau dans les colonnes verticales 2 et 3, et de la vitesse de l'eau dans le tube horizontal 1. On a donc

$$\dot{w}_{120} = \left(\begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0 \end{bmatrix} P_F P_{v_{3P}} + \begin{bmatrix} 0_2 & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix} P_F P_{h_{3P}} \right) \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{w}$$

avec $P_{v_{3P}}$ et $P_{v_{3P}}$ définies en (5.22).

B.1.5 Expression de P_{120}

Par conséquent P_{120} est diagonale par bloc, et elle vaut pour le système 3S

$$P_{120} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

et pour le système 3P

$$P_{120} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On écrit donc pour le 3S

$$X_{120} = P_{120}X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi - \frac{1}{2}\theta \\ w_2 \\ -w_1 - w_2 \\ -\frac{1}{2}\dot{\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{\theta} \\ \dot{w}_2 \\ -\dot{w}_1 - \dot{w}_2 \end{bmatrix}$$

et pour le 3P

$$X_{120} = P_{120}X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi - \frac{1}{2}\theta \\ w_2 \\ -w_1 - w_2 \\ \nu w_1 + w_3 \\ -\frac{1}{2}\dot{\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{\theta} \\ \dot{w}_2 \\ -\dot{w}_1 - \dot{w}_2 \\ \nu\dot{w}_1 + \dot{w}_3 \end{bmatrix}$$

B.2 Pondération du LQR

On sait que P_{120} et Q sont diagonales par blocs de même taille, on peut donc vérifier (5.32) pour chaque bloc indépendamment.

Pour le bloc $\mathrm{q}_1\mathbb{I}_2$, on a

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathrm{q}_1\mathbb{I}_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathrm{q}_1\mathbb{I}_2$$

puisque q_1 est un scalaire. On obtient le même résultat pour la matrice $\mathrm{q}_3\mathbb{I}_2$.

Le bloc $\mathrm{q}_2 P_{h_{3S}}^\top P_{h_{3S}}$ nous donne

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{q}_2 P_{h_{3S}}^\top P_{h_{3S}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_2\nu \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_2\nu \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_2 P_{h_{3S}}^\top P_{h_{3S}} \end{aligned}$$

Pour $\mathrm{q}_2 P_{v_{3P}}^\top P_{v_{3P}}$ on a

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & -1 & \nu \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{q}_2 P_{v_{3P}}^\top P_{v_{3P}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & \nu \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_2 P_{v_{3P}}^\top P_{v_{3P}} \end{aligned}$$

Le bloc $\mathrm{q}_3 P_{h_{3P}}^\top P_{h_{3P}}$ vérifie

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & -1 & \nu \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{q}_3 P_{h_{3P}}^\top P_{h_{3P}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & \nu \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\nu^2 & \nu^2 & 2\nu \\ \nu^2 & \nu^2 & \nu \\ 2\nu & \nu & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_3 \begin{bmatrix} 2\nu^2 & \nu^2 & 2\nu \\ \nu^2 & \nu^2 & \nu \\ 2\nu & \nu & 3 \end{bmatrix} \\ =&\mathrm{q}_3 P_{h_{3P}}^\top P_{h_{3P}} \end{aligned}$$

On a donc vérifié bloc par bloc (5.32).

La matrice de permutation P_F vérifie $P_F^\top = P_F^{-1}$, si on pose $\mathrm{R} = r_1 \mathbb{I}_3$, avec $r_1 > 0$ on a

$$P_F^\top \mathrm{R} P_F = r_1 P_F^\top P_F = r_1 \mathbb{I}_3 = \mathrm{R}$$

on vérifie donc (5.33).

B.3 Propriétés de la solution de l'équation de Riccati

On rappelle que dans cette section, les équations (5.30-5.33) sont vérifiées. Puisque $P_{120} P_{120}^{-1} = \mathbb{I}_{2(2+nc)}$ et $P_F P_F^\top = \mathbb{I}_3$, on réécrit CARE, l'équation algébrique de Riccati, comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^\top \chi + \chi \mathrm{A} - \chi P_{120} P_{120}^{-1} \mathrm{B} P_F P_F^\top \mathrm{R}^{-1} P_F P_F^\top \mathrm{B}^\top \left(P_{120}^{-1}\right)^\top P_{120}^\top \chi + Q = 0 \\
P_{120}^\top \left(\mathrm{A}^\top \left(P_{120}^{-1}\right)^\top P_{120}^\top \chi + \chi P_{120} P_{120}^{-1} \mathrm{A} - \chi P_{120} \mathrm{B} \mathrm{R}^{-1} \mathrm{B}^\top P_{120}^\top \chi + Q \right) P_{120} = 0 \\
\mathrm{A}^\top P_{120}^\top \chi P_{120} + P_{120}^\top \chi P_{120} \mathrm{A} - P_{120}^\top \chi P_{120} \mathrm{B} \mathrm{R}^{-1} \mathrm{B}^\top P_{120}^\top \chi P_{120} + Q = 0
\end{aligned}$$

On voit donc que si χ est solution de CARE, $P_{120}^\top \chi P_{120}$ l'est aussi.

On suppose que χ est l'unique solution stabilisante de CARE, i.e. la matrice $\mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \chi$ est Hurwitz. On peut écrire par similitude entre les deux matrices ci-dessous

$$\mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \chi \text{ est Hurwitz} \iff P_{120}^{-1} \left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \chi\right) P_{120} \text{ est Hurwitz}$$

car les valeurs propres sont invariantes par changement de base. Or on a

$$\begin{aligned}
P_{120}^{-1} \left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \chi\right) P_{120} =& \mathrm{A} - P_{120}^{-1} \mathrm{B} P_F P_F^\top \mathrm{R}^{-1} P_F P_F^\top \mathrm{B}^\top \left(P_{120}^{-1}\right)^\top P_{120}^\top \chi P_{120} \\
=& \mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top P_{120}^\top \chi P_{120}
\end{aligned}$$

Donc si χ est l'unique solution stabilisante de CARE alors $P_{120}^\top \chi P_{120}$ est est aussi stabilisante. Par unicité de χ, on déduit

$$\chi = P_{120}^\top \chi P_{120}$$

et par conséquent

$$\mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \chi = \mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top P_{120}^\top \chi P_{120} = P_{120}^{-1} \left(\mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \chi\right) P_{120}$$

donc le système bouclé par le LQR dont la dynamique est décrite par $\mathrm{A}_{BF} \triangleq \mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\top \chi$ vérifie aussi (5.30).

Annexe C

Résultats complémentaires sur les systèmes 3D

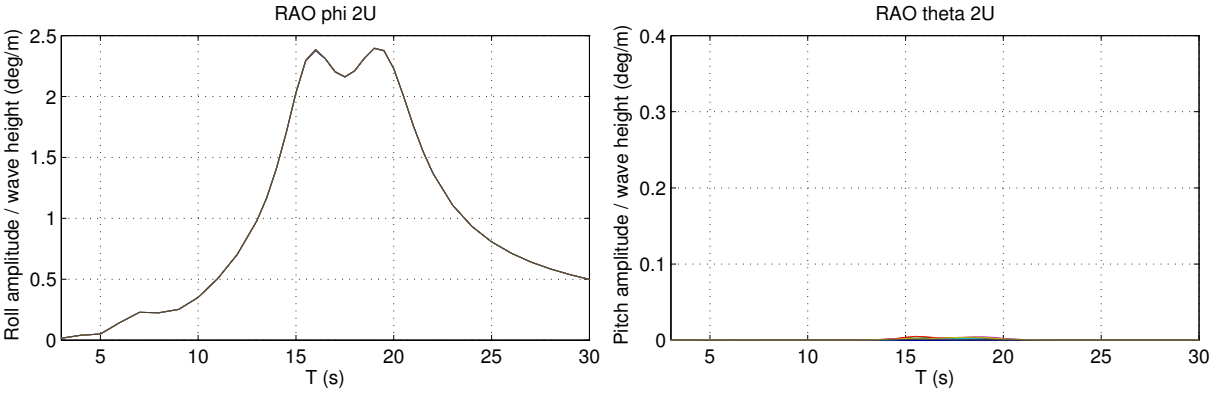
C.1 Systèmes passifs : origine de la dépendance à l'incidence de la houle

Nous émettons l'hypothèse suivante : la dépendance du système amorti à l'incidence de la houle est essentiellement due à la force quadratique développée par les restrictions dans les tubes horizontaux.

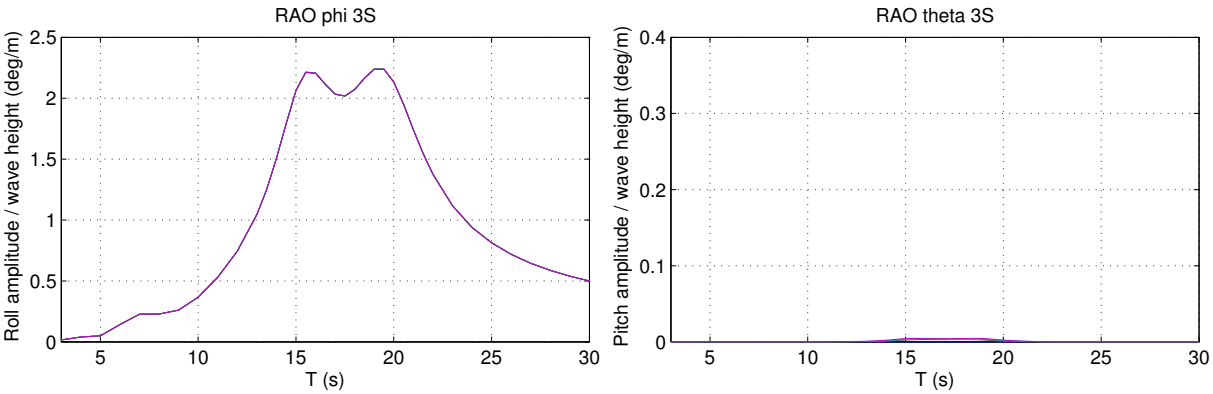
Pour vérifier cela, on simule les TLMCD en *modèle complet*, en remplaçant F_h par $F_h = -cP_{h_{NU}}\dot{w}$ (linéaire) comme défini au §5.3.2.

Les résultats sont tracés en Fig. C.1, on observe que la performance est maintenant indépendante de l'angle d'incidence. Ces résultats confirment l'hypothèse selon laquelle la sensibilité à l'incidence de la houle est essentiellement imputable à la non-linéarité de la force créée par la restriction. On a aussi tracé la réponse du système excité par une houle de très faible amplitude et différentes d'incidences de houle en Fig. C.2, on constate qu'on est alors complètement indépendants de la houle

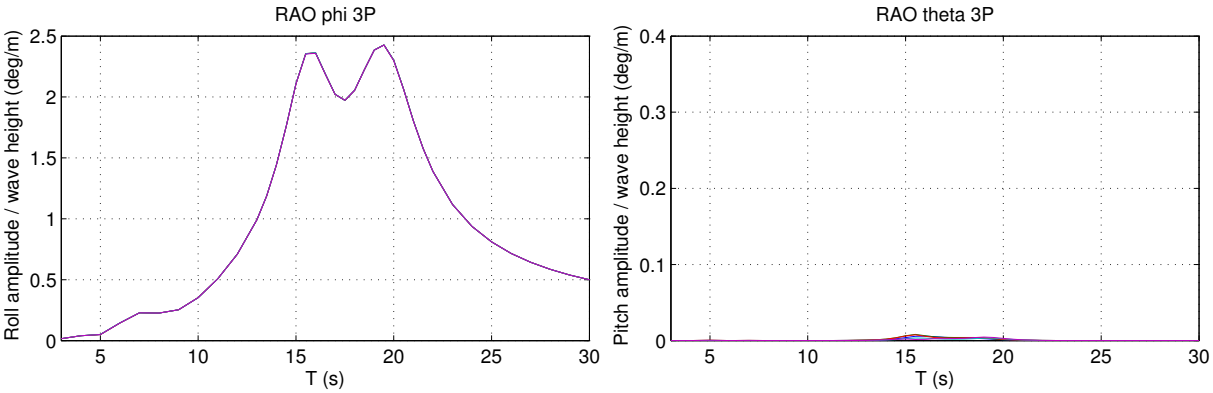
Les résultats tracés en Fig. C.1 nous apprennent donc que si l'on cherche à implémenter un contrôle semi-actif sur ces dispositifs d'amortissement, qui est une commande saturée et donc non-linéaire, il faudra qu'elle soit spécialement conçue pour rester robuste à l'incidence de la houle.



(a) RAO du système 2U

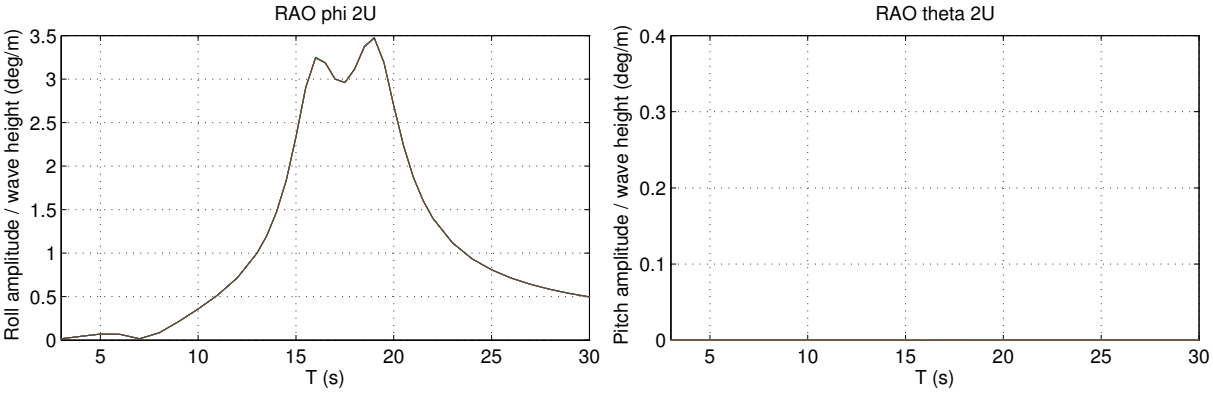


(b) RAO du système 3S

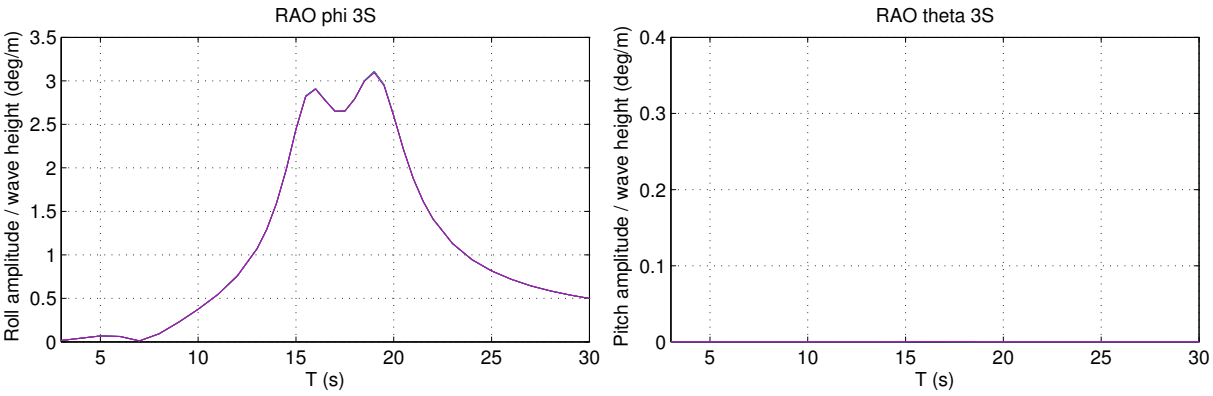


(c) RAO du système 3P

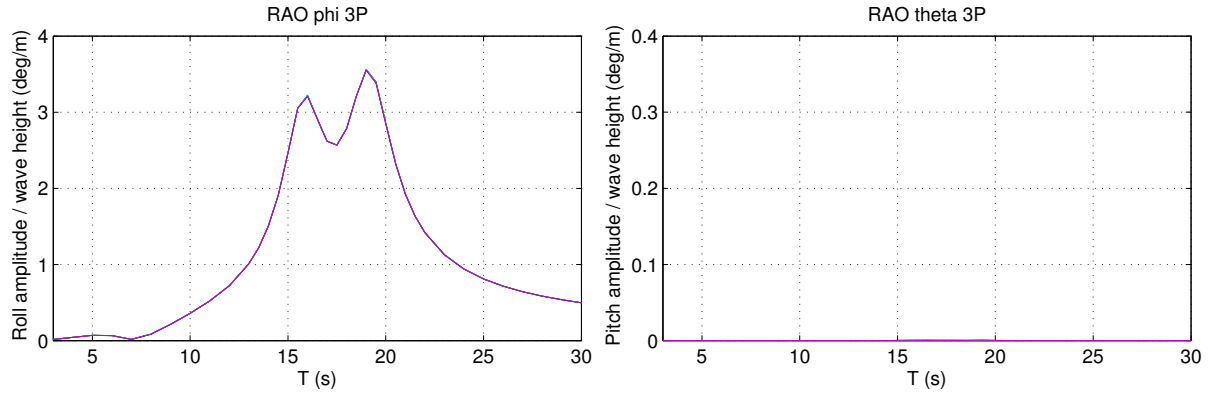
FIGURE C.1 – RAO des TLMCD sur le *modèle complet* avec F_h linéarisé pour différents angles d'incidence en houle monochromatique d'amplitude 3 m



(a) RAO du système 2U



(b) RAO du système 3S



(c) RAO du système 3P

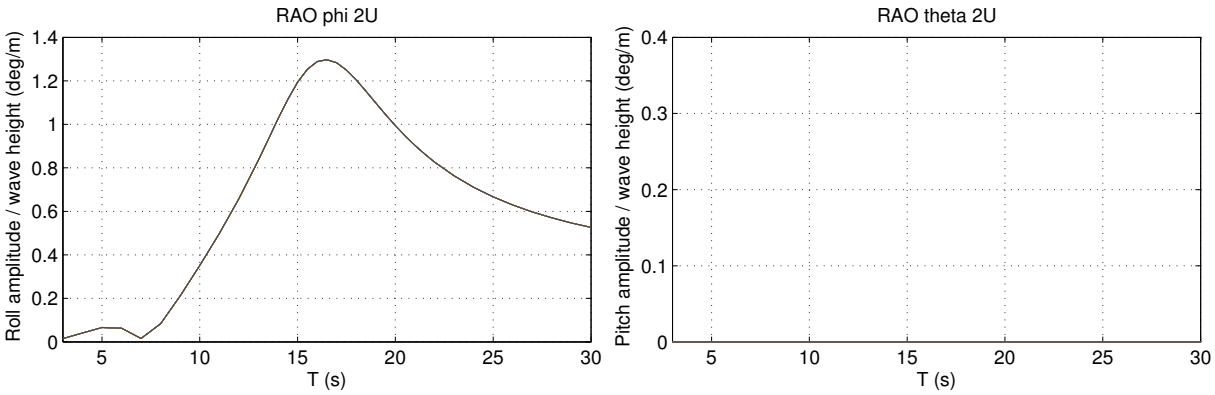
FIGURE C.2 – RAO des TLMCD sur le *modèle complet* avec F_h linéarisé pour différents angles d'incidence en houle monochromatique d'amplitude faible (0.1 m)

C.2 Robustesse du contrôle LQR non saturé par rapport à l'incidence de la houle

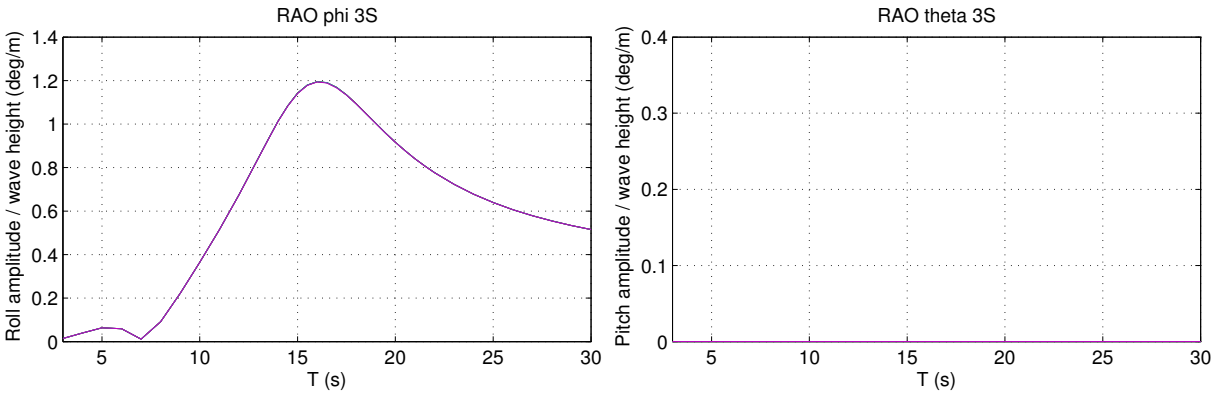
On a tracé en Fig. C.3 les RAO de notre système bouclé par un LQR non saturé et excité par une houle monochromatique de faible amplitude, pour différentes incidences. On observe que ce système bouclé est complètement insensible au changement d'incidence de la houle. On notera que ni les matrices A, B, Q, R ni le vecteur K ne dépendent de β.

C.3 Comportement des systèmes 2U, 3S et 3P pour différentes incidences de houle polychromatique

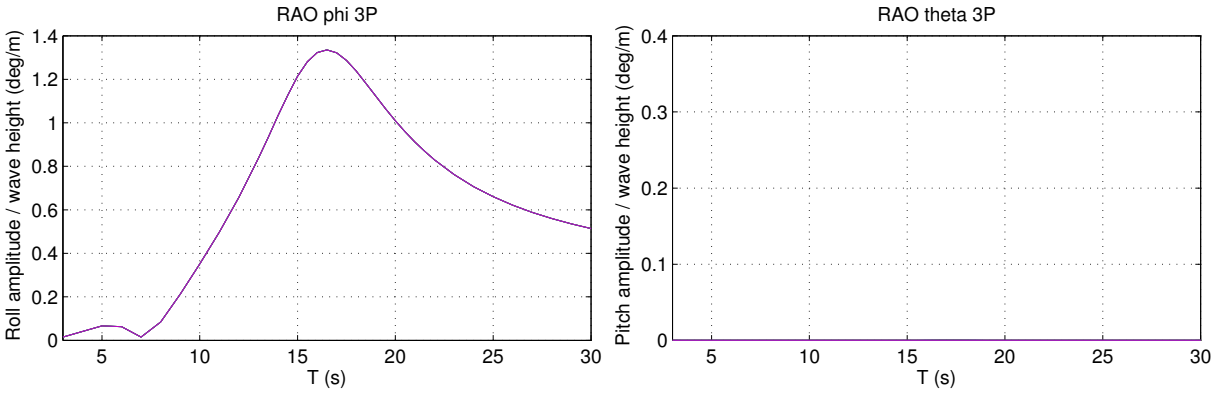
Nous avons tracé en Fig. (C.4) les performances que fournissent les systèmes 2U, 3S et 3P soumis à une houle polychromatique pour différentes incidences de houle. On observe la même chose que sur la Fig. (C.4) i.e. les RAO sont quasiment indépendantes de l'incidence et le 3S est légèrement meilleur que les autres pour amortir le roulis, ce qui s'explique notamment par le fait qu'il est plus massif.



(a) RAO du système 2U

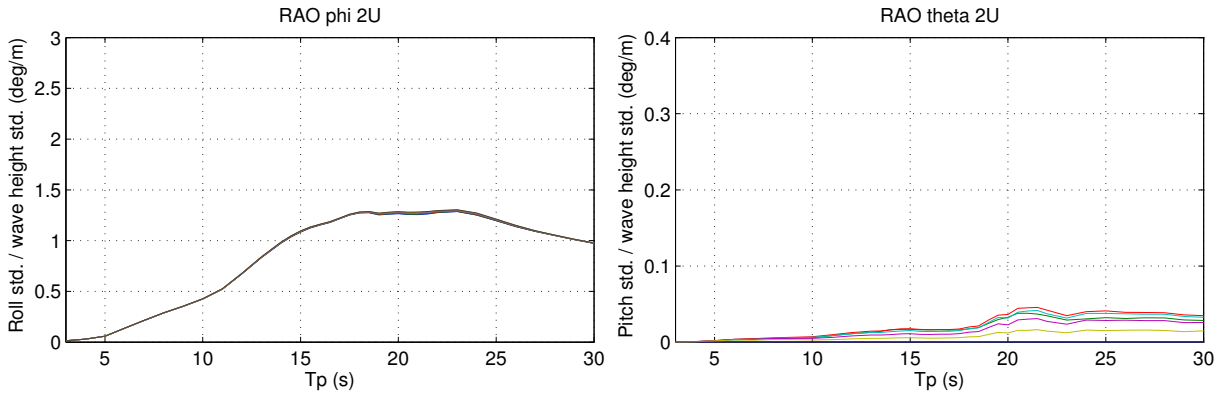


(b) RAO du système 3S

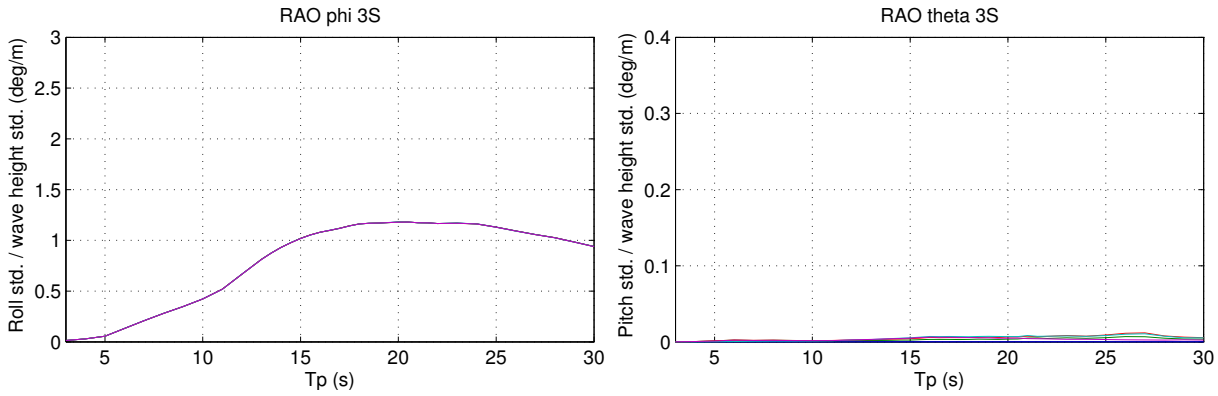


(c) RAO du système 3P

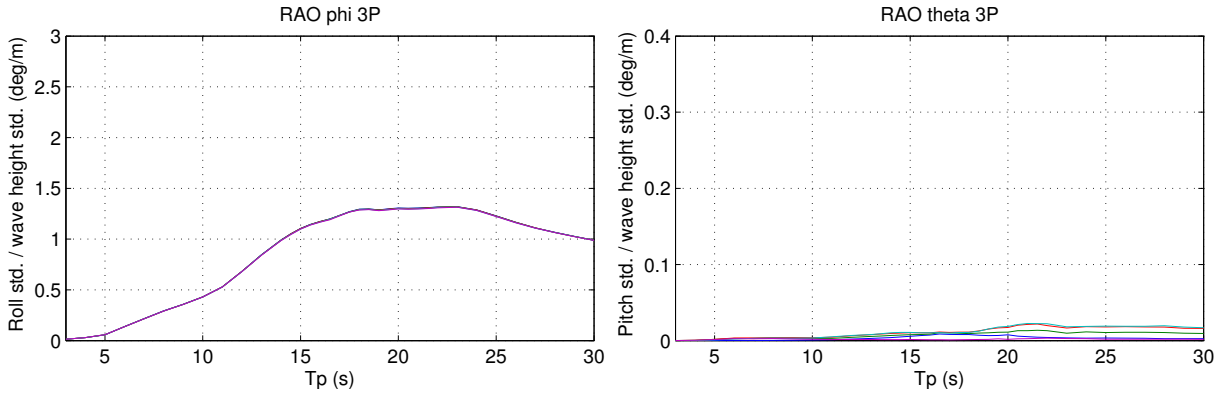
FIGURE C.3 – RAO sur le *modèle complet* de nos TLMCD 2U, 3S et 3P en LQR non-saturé pour différents angles d'incidence pour une houle monochromatique de faible amplitude (0.1 m)



(a) RAO du système 2U



(b) RAO du système 3S



(c) RAO du système 3P

FIGURE C.4 – RAO sur le *modèle complet* de nos TLMCD 2U, 3S et 3P en LQR saturé pour différents angles d'incidence pour une houle polychromatique d'amplitude 3 m

Annexe D

Tests de robustesse sur les systèmes 3D

D.1 Perte de charge minimale non nulle

Jusque là, on a considéré que les pertes de charges minimales dans les systèmes 2U, 3S, et 3P étaient nulles ($\eta_L = 0$). Dans cette sous-section on va évaluer le plus précisément possible les pertes de charges singulières de nos TLMCD et voir comment les performances d'amortissement sont impactées.

Pour le système 2U, on suit simplement la démarche explicitée au §4.6.1, nous aurons donc trois valeurs de η_L.

Pour le système 3S, on doit ajouter au modèle de simulation quatre forces supplémentaires : les trois pertes de charges dans les trois jonctions (coudes) entre les tubes horizontaux et les tubes verticaux, ainsi que la perte de charge à l'endroit où se rejoignent les tubes horizontaux. Les abaques de Idel'Cik (1969) ainsi que les relations entre η et K_{ps} développées au §4.6.1 nous donnent pour chaque coude

$$\eta_L = 0.2 + (0.24)\,\nu^{-2} \simeq 0.215$$

si le fluide monte dans la colonne verticale

$$\eta_L = 0.33 + (0.24)\,\nu^{-2} \simeq 0.345$$

dans le cas contraire. La perte de charge à la jonction des trois tubes horizontaux est définie à partir d'une interpolation des abaques de Miller (1990) concernant les jonctions en "Y".

Dans le cas du système 3P, il n'existe pas à notre connaissance d'abaques ou de formules permettant de connaître la perte de charge dans la jonction entre le tube vertical et les deux tubes horizontaux qui en sortent. Pour pallier à cet inconvénient, on

considère que le lien entre la colonne verticale et les tubes horizontaux est constituée d'un coude puis d'un cône puis d'une jonction en "Y". En suivant la même démarche que précédemment, on obtient les efforts développés par ces pertes de charge singulières à la base de chaque colonne verticale.

Nous avons donc tracé en Fig. D.1 les résultats de ces simulations. Pour le système 2U, les résultats sont quasiment identiques à ceux obtenus au § 4.6.1. Pour les systèmes 3S et 3P on voit sur le cas polychromatique, le plus réaliste, que la modification de η_L a un impact assez limité.

D.2 Assiette moyenne

Nous évaluons l'impact d'un roulis moyen de 5 degrés sur l'amortissement créé par les systèmes 2U et 3S. Nous simulons ces systèmes avec les mêmes modifications qu'au §4.6.2. Les résultats sont tracés en Fig. D.2. Comme au §4.6.2, on voit que l'impact du roulis moyen sur les performances est limité.

D.3 Mât flexible

Nous rendons au mât ses degrés de liberté en flexion selon $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, le modèle de simulation est obtenu de manière identique à ce qui est fait au §4.6.3. Nous avons tracé en Fig. D.3 et D.4 les résultats de ces simulations pour les systèmes 2U, 3S et 3P commandés par le LQR saturé. On observe, comme au §4.6.3, une résonance du mât en flexion aux alentours de Tp =6 s. On remarque surtout que le système 3P est le seul qui n'est pas sujet à cette résonance.

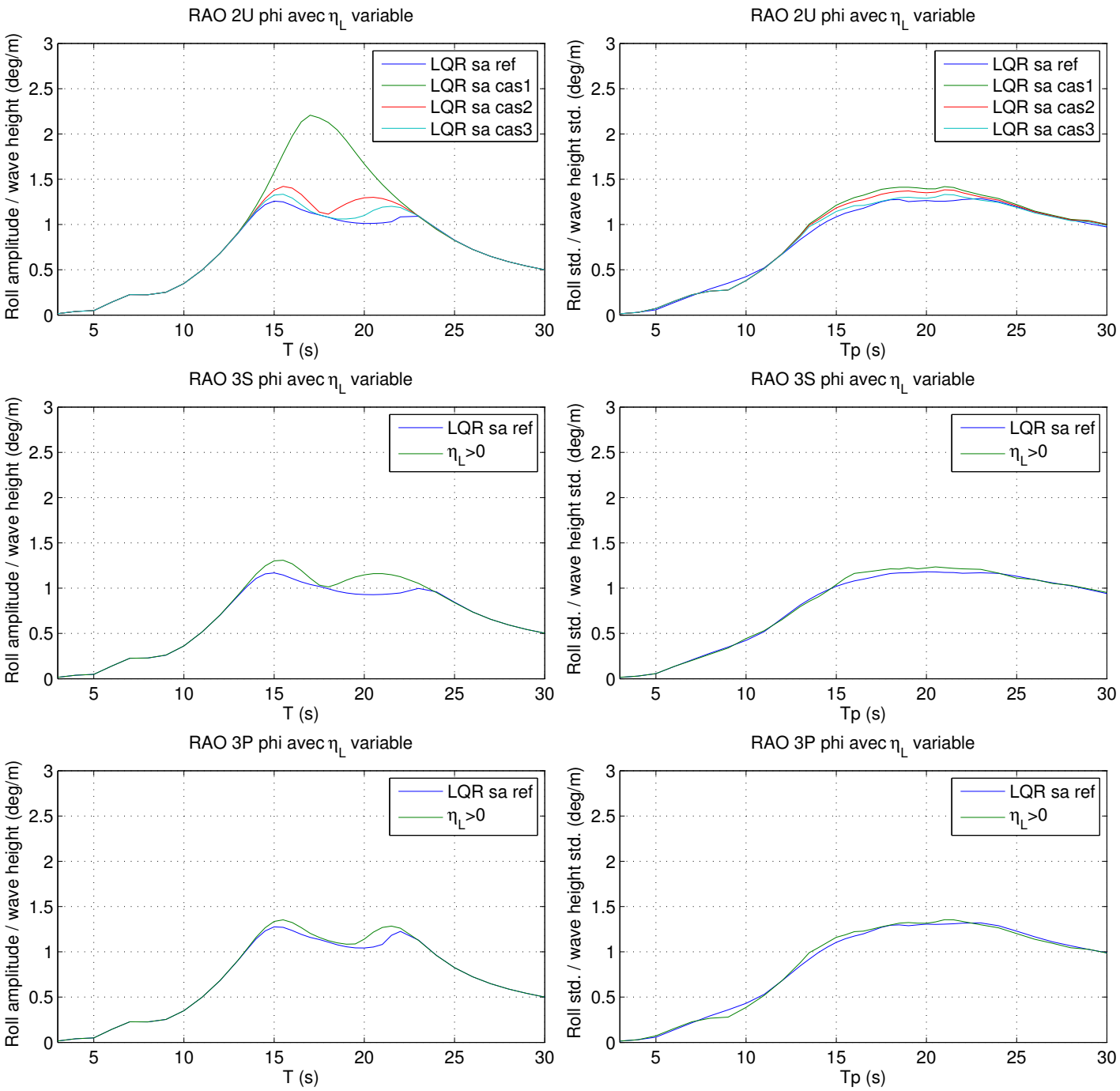


FIGURE D.1 – RAO en roulis sur le *modèle complet* en "LQR saturé" pour différentes assiettes pour une houle monochromatique (à gauche) et pour une houle polychromatique (à droite)

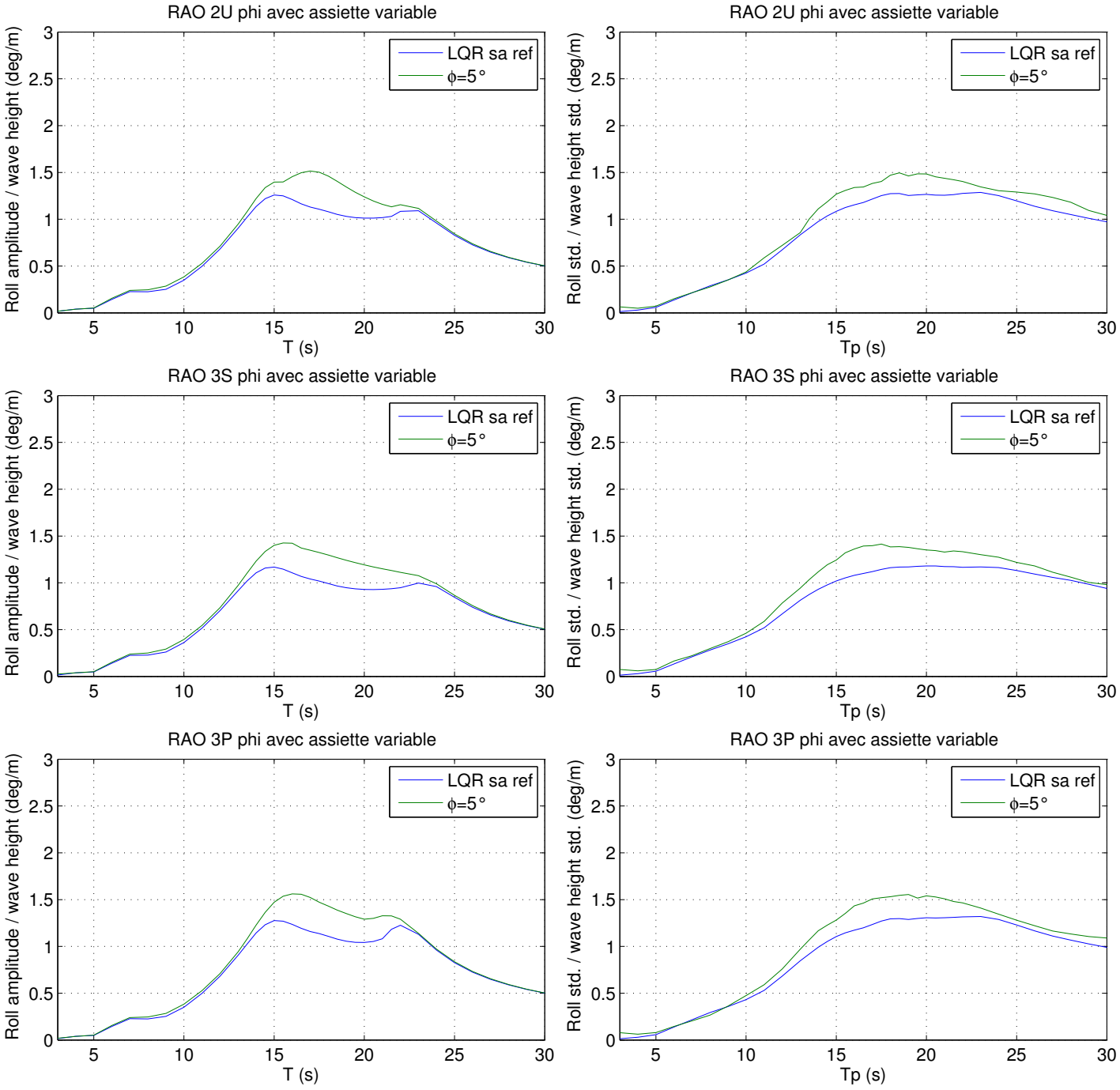


FIGURE D.2 – RAO en roulis sur le *modèle complet* en "LQR saturé" pour différentes assiettes et une houle est monochromatique (à gauche) et polychromatique (à droite)

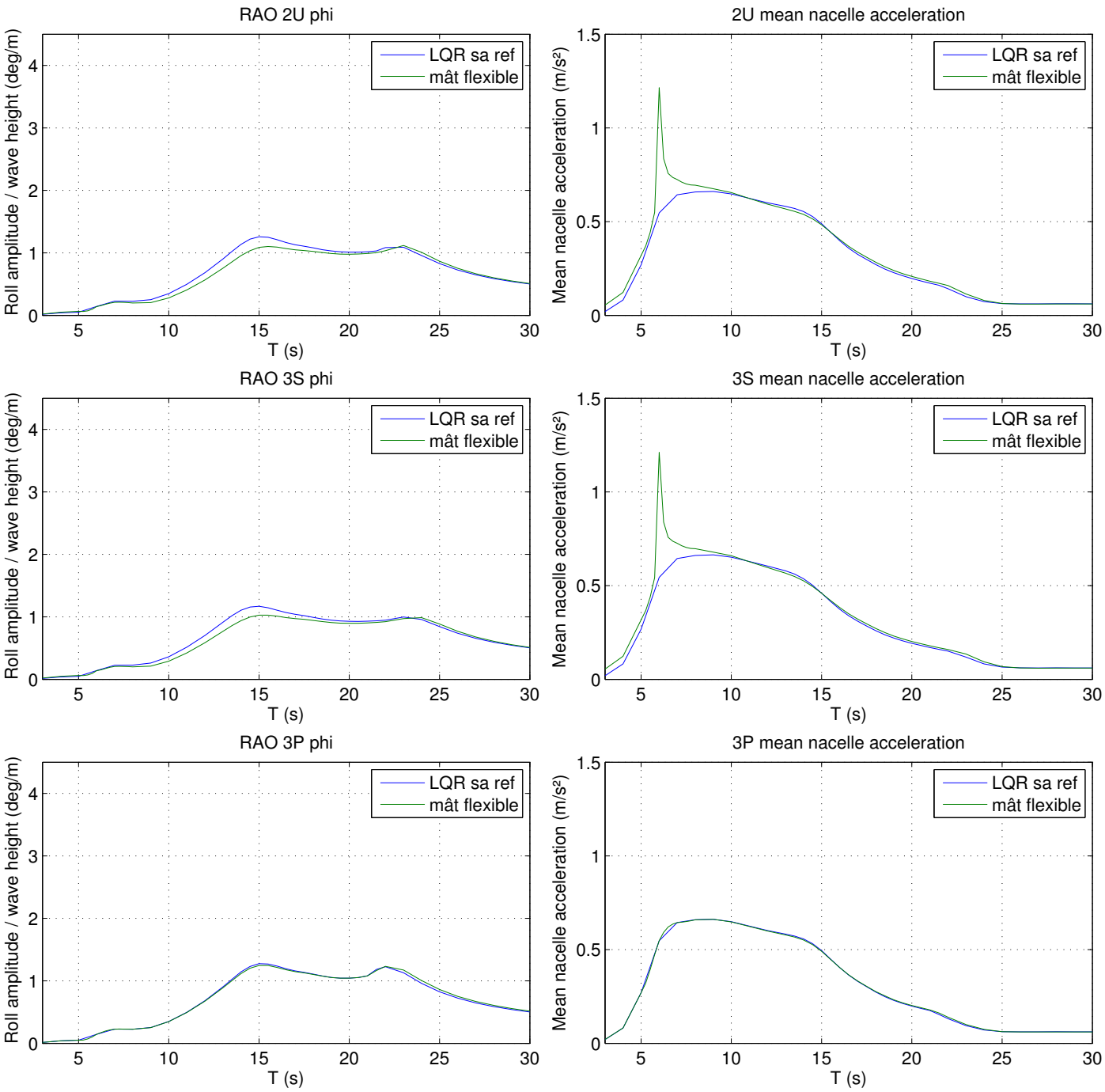


FIGURE D.3 – RAO en roulis, à gauche, accélération moyenne de la nacelle, à droite, sur le *modèle complet* en "LQR saturé" pour une houle monochromatique, pour un mât flexible

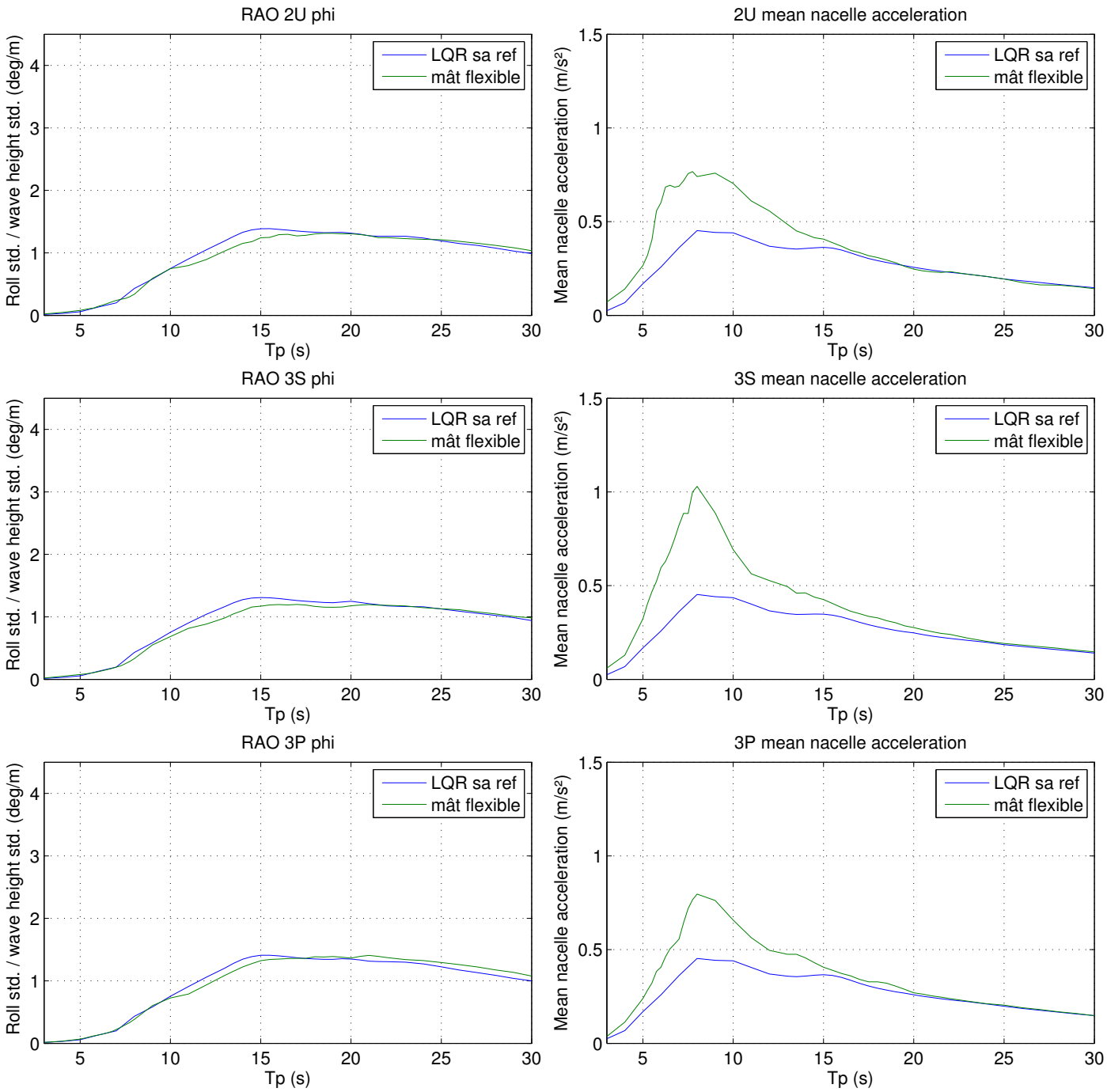


FIGURE D.4 – RAO en roulis, à gauche, accélération moyenne de la nacelle, à droite, sur le *modèle complet* en "LQR saturé" pour une houle polychromatique, pour un mât flexible

Résumé

L'éolien offshore posé, seule technologie déployée, est trop chère en eau profonde. Nous nous intéressons donc aux éoliennes flottantes (FWT). Comme les FWT ne sont pas encastrées au fond marin, les contraintes mécaniques dues aux vagues augmentent.

Pour réduire ces forces, nous utilisons un tube en U contenant un liquide (TLCD). Comme la performance du TLCD passif est limitée, on propose de modifier continuellement la perte de charge du TLCD. Comme le TLCD classique n'est pas robuste à l'incidence de la houle, nous avons imaginé et modélisé les TLMCD, basés sur le TLCD, plus robustes à l'incidence.

Nous proposons des TLMCD actifs qui suivent une stratégie LQR spécifique permettant d'amortir indépendamment de l'incidence.

Nous avons simulé notre système pour un large éventail de houles. Nous observons que le roulis peut être divisé par 4 comparé à la FWT non amortie. Le TLMCD que nous proposons amortit de manière robuste et économique la FWT.

Abstract

Fixed-bottom wind turbines technology, the only one currently deployed, are too costly for deep waters. This is why we studied floating wind turbines (FWT). But, since the FWT are not fixed into the seabed, the mechanical stress due to the waves raises.

To reduce these loads, we use a Tuned Liquid Column Damper (a U-tube containing a liquid, TLCD). As the passive TLCD performance is limited, we propose to change continuously the parameters of the TLCD. As the classic TLCD is not robust to wave incidence, we imagined and modeled new dampers named TLMCD, based on TLCD, more robust against incidence.

The dampers we propose are active TLMCD following a specific Linear Quadratic Regulator strategy designed to damp regardless of the wave incidence.

We simulated our damped system for a wide range of sea conditions. We observe that barge roll can be divided by 4 compared to the undamped FWT. Therefore, the TLMCD we propose damps significantly, robustly and economically our FWT.

Mots Clés

eolienne,flottante,stabilisation,controle,tube antiroulis,tube en U

Keywords

wind turbine,floating,stabilization,control,anti-roll tank,Tuned Liquid Column Damper