



HAL
open science

Convolution intermédiaire et théorie de Hodge

Nicolas Martin

► **To cite this version:**

Nicolas Martin. Convolution intermédiaire et théorie de Hodge. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLX040 . tel-01892554

HAL Id: tel-01892554

<https://pastel.hal.science/tel-01892554v1>

Submitted on 10 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Convolution intermédiaire et théorie de Hodge

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École polytechnique

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)
Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 09/07/2018, par

NICOLAS MARTIN

Rapporteurs :

Michel GRANGER
Professeur émérite, Université d'Angers

Christian SEVENHECK
Professeur, Technische Universität Chemnitz

Composition du Jury :

Michael DETTWEILER
Professeur, Universität Bayreuth

Président du jury

Javier FRESÁN
Professeur associé, École polytechnique

Examineur

Michel GRANGER
Professeur émérite, Université d'Angers

Rapporteur

Claude SABBAH
Directeur de Recherche, École polytechnique

Directeur de thèse

Christian SEVENHECK
Professeur, Technische Universität Chemnitz

Rapporteur

Sommaire	Page
Introduction	7
Première partie : Classe de la droite affine dans l'anneau de Grothendieck	15
1 La classe de la droite affine est un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck	17
1.1 Définition de l'anneau de Grothendieck et premières propriétés	19
1.2 Fibrations triviales par morceaux	19
1.3 Une autre présentation du groupe	20
1.4 Géométrie stablement birationnelle	20
1.5 Intégrité et diviseurs de zéro	22
1.6 Classes des Grasmanniennes	23
1.7 Preuve du théorème 1.5.1	24
1.8 Développements ultérieurs à la publication du théorème 1.5.1	27
Deuxième partie : Convolution intermédiaire et théorie de Hodge	33
2 Généralités sur les \mathcal{D}-modules	35
2.1 Premières définitions	37
2.2 Quelques propriétés des \mathcal{D} -modules en dimension un	38
2.3 Régularité des \mathcal{D} -modules en dimension un	40
2.4 Foncteur image directe intermédiaire	42
2.5 Produits tensoriels externe et interne	42
2.6 Convolution des \mathcal{D} -modules	43
2.7 Transformée de Fourier d'un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module	44
2.8 Relation entre les convolutions additive et multiplicative	44
3 Algorithme de Katz	49
3.1 Lemme de Scott	51
3.2 Rigidité d'un système local	53
3.3 Opérations de l'algorithme de Katz	54
3.4 Algorithme de Katz	55
4 Données numériques locales et convolution intermédiaire	59
4.1 Données numériques locales	61
4.2 Comportement des données $\nu_{\infty,\lambda,\ell}$ par convolution intermédiaire additive	62
4.3 Comportement des données numériques locales par convolution intermédiaire multiplicative	77
5 Généralités en théorie de Hodge	81
5.1 Structures de Hodge	83
5.2 Variations de structure de Hodge	86
5.3 Existence d'une variation de structure de Hodge sous-jacente à un système local	87
6 Données numériques de Hodge et convolution intermédiaire	91
6.1 Données numériques locales de Hodge au voisinage d'un point singulier	93
6.2 Données numériques de Hodge sur la droite affine	95
6.3 Comportement des données $\nu_{\infty,\lambda,\ell}^p$ par convolution intermédiaire additive	96
6.4 Comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative	108

7 Modules hypergéométriques	115
7.1 Définition des modules hypergéométriques et premières propriétés	117
7.2 Transformation de Mellin	118
7.3 Modules hypergéométriques et convolution	119
7.4 Formules de Fedorov	119
7.5 Convolution multiplicative avec des modules hypergéométriques	126
Références	129

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement mon directeur de thèse, Claude Sabbah, pour ses grandes qualités humaines et pédagogiques. Sa disponibilité de chaque instant, son enthousiasme et sa patience ont été des facteurs déterminants dans la bonne préparation de cette thèse. C'est un immense plaisir et une grande chance d'avoir pu travailler à ses côtés ces dernières années.

Je souhaite également adresser toute ma gratitude à Michel Granger et Christian Sevenheck qui ont accepté de rapporter cette thèse, pour leur intérêt envers mes travaux et les discussions très enrichissantes que nous avons pu avoir, notamment au cours de très agréables séjours à Chemnitz, Angers et Leipzig entre mars et mai 2018. Je remercie aussi Michael Dettweiler et Javier Fresán de me faire l'honneur de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également aux membres du Centre de mathématiques que j'ai côtoyés durant ces quelques années, et qui ont rendu si agréable la vie au laboratoire. Ce fut un réel plaisir d'échanger au sujet de mathématiques, mais également de sport ou encore de politique, que ce soit lors des déjeuners, du café ou des traditionnels goûters du lundi après-midi. Je remercie tout particulièrement le secrétariat du Centre, Michèle pour mes premiers contacts, Carole J., Marine et Pascale pour l'aide apportée tout au long de la thèse, sans oublier Carole K. pour les derniers mois, ainsi que la cellule informatique, Danh, David, Jean-Luc et Sylvain, pour leur remarquable efficacité.

Je remercie les doctorants et post-doctorants du CMLS, encore là ou déjà partis vers d'autres cieux, et en tout premier lieu Matthieu, mon « frère jumeau de thèse » qui soutient également ce 9 juillet si bien que certains nous confondent encore, pour tous les moments que l'on a pu partager. En espérant n'oublier personne, je remercie aussi Aymeric, Bac, Benoit, Emiliano, Fabio, Giancarlo, Hsueh-Yung, Isabelle, Ivan, Jacek, Lorenzo, Ludovic, Matilde, Nicolas, René, Rita, Takahiro, Tatiana, Thomas K., Thomas M., Tien Vinh, Timofey, Valentin, Vincent, Xianglong et Zakarias.

Je remercie Andrea d'Agnolo, Alberto Castaño Domínguez, Christophe Dubussy, Thomas Gauthier, Marco Hien, Thomas Krämer, Luis Narváez Macarro, Etienne Mann, Teresa Montero Fernandes, Delphine Pol et Jean-Baptiste Teyssier pour les discussions toujours intéressantes que l'on a pu avoir lors de conférences et séminaires, notamment à Warwick, Stony Brook, Nice, Luminy, Amiens, Séville, Chemnitz, Angers, Leipzig et Bayreuth.

Je remercie Johannes Nicaise de m'avoir invité à Leuven lors de mon année pré-doctorale en 2014/2015, de m'avoir suggéré la lecture de l'article que venait tout juste d'écrire Lev Borisov et d'avoir été disponible et patient pour répondre à toutes mes questions. Cela a été déterminant dans l'obtention du résultat principal du chapitre 1, pour lequel je remercie aussi Antoine Chambert-Loir pour toutes ses remarques. Mes remerciements vont également à Nero Budur et Wim Veys pour les discussions lors des séminaires du mercredi après-midi.

Un grand merci à Pascale Harinck pour les nombreux échanges que nous avons pu avoir ces dernières années, pour sa gentillesse et son investissement, notamment aux Journées X-UPS et stages MathC2+ auxquels j'ai pu participer à ses côtés.

Je remercie tous mes camarades de promotion de l'ENS Cachan avec qui j'ai pu préparer l'agrégation en 2013/2014 dans une atmosphère détendue et conviviale, ainsi que les enseignants et en particulier Cyrille Hériveaux et Claudine Picaronny pour leur investissement remarquable.

Je remercie toute l'équipe mathématique du département informatique de l'IUT d'Orsay, avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à effectuer mon service d'enseignement durant ces trois années, et en particulier Hélène Rinkel et Elodie Leducq pour leur gentillesse et leur disponibilité.

J'ai également une pensée pour Jean Segarra, Vincent Bayle et Michel Gonnord, professeurs de mathématiques, qui m'ont transmis très tôt le goût pour les belles mathématiques. Tous les trois seront toujours pour moi des sources d'inspiration à essayer de suivre durant ma carrière d'enseignant.

Je remercie mes amis de toujours, notamment Vincent dont j'ai la chance de partager l'amitié depuis plus de vingt ans, Arnaud qui a partagé mon quotidien en classes préparatoires et après, ainsi que Loïc et Bjorn grâce à qui je garderai toujours d'excellents souvenirs de mon séjour niçois et qui m'ont désormais tous deux rejoint dans l'Essonne.

Je remercie toute ma famille dont le soutien constant a été prépondérant dans le bon déroulement de mes études et sur laquelle je peux compter en toutes circonstances. Les derniers mots iront à Tiffany, dont la présence à mes côtés me comble de bonheur chaque jour, et qui m'a soutenu tout au long de ce travail de longue haleine qui lui doit beaucoup.

Introduction

Cette thèse est constituée de deux parties complètement indépendantes. La première partie fait suite à des travaux commencés au printemps 2015 lors d'un séjour à la Katholieke Universiteit Leuven sous la direction de Johannes Nicaise, et poursuivis sous la direction de Claude Sabbah durant les trois premiers mois de thèse. La seconde partie est quant à elle dévolue à des travaux effectués pendant tout le reste de la thèse et constitue la partie principale de ce manuscrit.

Première partie : Classe de la droite affine dans l'anneau de Grothendieck

Cette première partie, qui pourrait être classifiée comme relevant de la géométrie birationnelle, s'intéresse particulièrement à l'anneau de Grothendieck des variétés algébriques complexes. C'est un outil fondamental qui est à la base d'une autre théorie importante, l'intégration motivique. Les résultats développés dans cette partie ne relèvent pas à proprement parler directement de l'intégration motivique, mais ont des conséquences importantes pour cette dernière.

La question qui nous intéresse concerne les diviseurs de zéro dans l'anneau de Grothendieck, et plus particulièrement le fait de savoir si la classe de la droite affine $\mathbb{L} = [\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1]$ est un diviseur de zéro ou non. C'est une question difficile car très peu de choses sont connues sur l'anneau de Grothendieck. On sait cependant depuis 2002 grâce à Poonen que ce n'est pas un anneau intègre [Poo02], grâce à une construction non triviale de diviseurs de zéro. Concernant la classe de la droite affine, un des objets finalement les plus simples, il était alors assez inattendu qu'il s'agisse d'un diviseur de zéro. Galkin et Shinder ont même effectué d'importants travaux [GS14] redémontrant notamment un résultat difficile de Clemens et Griffiths [CG72] affirmant que les hypersurfaces cubiques lisses de \mathbb{P}^4 sont rationnelles et allant même plus loin en donnant génériquement le même résultat pour les cubiques de \mathbb{P}^5 , à condition que \mathbb{L} ne soit pas un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck (pour les deux résultats).

C'est dans ce contexte que Borisov démontre l'inattendu en décembre 2014 : \mathbb{L} est un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck [Bor18]. Il est toutefois important de noter que ce résultat n'est pas seulement une amélioration de celui de Poonen : comprendre le noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ est une question cruciale en intégration motivique, dans la mesure où l'on considère des classes dans l'anneau localisé.

Précisons assez succinctement la construction. Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 7 et $W \subset \Lambda^2 V^\vee$ un sous-espace vectoriel générique de formes bilinéaires alternées sur V de dimension 7. On définit X_W la sous-variété de la Grassmannienne $G(2, V)$ qui est le lieu des $T \in G(2, V)$ tels que $\omega|_T = 0$ pour tout $\omega \in W$, et Y_W la sous-variété de $\mathbb{P}W$ des formes de rang strictement inférieur à 6. Le résultat de Borisov est alors le suivant :

$$([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) \cdot \mathbb{L}^7 = 0,$$

avec $([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) \neq 0$, ce qui donne bien que \mathbb{L} est un diviseur de zéro.

Nous montrons quant à nous le théorème suivant, qui a fait l'objet d'une publication d'une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences [Mar16, théorème 1.1] :

Théorème 1.5.1. $([X_W] - [Y_W]) \cdot \mathbb{L}^6 = 0$

Ce résultat est un raffinement de celui de Borisov $([X_W] \neq [Y_W])$, et un petit pas dans la compréhension du noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$. Notons en outre que ce théorème ainsi que celui de Borisov permettent de répondre négativement à une question posée par Larsen et Lunts [LL03, question 1.2] : est-il possible de décomposer deux variétés X et Y telles que $[X] = [Y]$ en une partition finie de sous-variétés localement fermées deux à deux isomorphes ?

Résumons le théorème 1.5.1 : les deux variétés X_W et Y_W , qui sont des variétés de Calabi-Yau de dimension 3 lisses non birationnelles, vérifient $([X_W] - [Y_W]) \cdot \mathbb{L}^6 = 0$. On sait que plus grâce à Borisov et Căldăraru [BC09, th 6.2] que $D_{\text{coh}}^b(X_W) \simeq D_{\text{coh}}^b(Y_W)$: on dit que X_W et Y_W sont D -équivalentes, ou encore que (X_W, Y_W) est une paire de Fourier-Mukai. Cela fournit un premier exemple intéressant de variétés X et Y D -équivalentes qui vérifient $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^r = 0$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$ et $[X] \neq [Y]$: on dit que les variétés X et Y sont L -équivalentes.

Suite à la publication du théorème 1.5.1, de nombreux autres exemples ont été explicités ([IMOU16a], [KS17], [IMOU16b], [BCP18], [Man17] et [Zak17] notamment). Nous les détaillons en sous-section 1.8.

Seconde partie : Convolution intermédiaire et théorie de Hodge

Dans une seconde partie, nous étudions le comportement d'invariants de théorie de Hodge par convolution intermédiaire, à la suite des travaux de Dettweiler et Sabbah [DS13]. L'intérêt initial pour cette question repose sur un algorithme de Katz [Kat96] qui permet de ramener un système local irréductible rigide sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ à un système local de rang un. Cet algorithme est une succession de produits tensoriels avec un système local de rang un et de convolutions intermédiaires additives avec un système local sur \mathbb{C}^* de rang un, et termine avec un système local de rang un.

Si les valeurs propres des monodromies locales du système local de départ sont de module un, alors c'est toujours le cas lorsque l'on déroule l'algorithme de Katz. En prenant l'algorithme dans l'autre sens, on déduit que le système local de départ est induit par une variation de structure de Hodge polarisable, ainsi qu'à chaque étape de l'algorithme. De plus, selon un résultat dû à Deligne [Del87, prop. 1.13(i)], il y a dans ce cas unicité d'une telle variation à décalage près de la filtration de Hodge.

L'idée de Dettweiler et Sabbah dans [DS13] est d'étudier le comportement d'invariants de Hodge à chaque étape de l'algorithme de Katz. Parmi ces invariants, certains sont de nature locale (nombres de Hodge de la variation, nombres de Hodge de cycles évanescents et de cycles proches) et d'autres de nature globale (degrés de fibrés de Hodge).

Il est important de noter que l'algorithme de Katz permet de raisonner sur des systèmes locaux dont la monodromie à l'infini est scalaire (il est facile de se ramener à ce cas), propriété qui est conservée tout au long de l'algorithme, ainsi Dettweiler et Sabbah se placent dans le cadre de cette hypothèse. Ils donnent le comportement des invariants de Hodge considérés, et n'ont pas à expliciter le comportement des invariants relatifs aux cycles proches à l'infini, trivial avec l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini. Dans cette seconde partie, nous ne supposons plus cette hypothèse.

En particulier, le résultat principal de cette seconde partie, et de loin le plus difficile, concerne le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini par convolution intermédiaire additive par un module de Kummer.

Pour démontrer ce résultat, la stratégie est la suivante : nous redémontrons tout d'abord la partie (2) de la proposition 1.3.5 de [DS13] sans filtration de Hodge. Le problème est que la preuve de Dettweiler et Sabbah utilise la transformée de Fourier, qui malheureusement ne se comporte pas bien vis-à-vis de la filtration de Hodge, ce qui ne permet pas de la généraliser lorsque l'on ajoute la filtration de Hodge. Nous allons donc proposer une autre démonstration de ce résultat avec le théorème 4.2.5, plus longue mais n'utilisant pas la transformée de Fourier. En considérant M un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -module holonome régulier vérifiant certaines hypothèses que nous ne détaillerons pas ici, le résultat est le suivant :

Théorème 4.2.5. [DS13, prop. 1.3.5 (2)] *On note \mathcal{M}^{\min} le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension minimale de M à l'infini. On a les données suivantes pour $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$:*

$$(1) \quad \nu_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \nu_{\infty, \lambda_0}(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1}(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}(M) + \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}. \end{cases}$$

$$(2) \quad \nu_{\infty, \lambda, \ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0, \ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1, \ell-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1 \\ \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell = 0. \end{cases}$$

Une fois le résultat de Dettweiler et Sabbah redémontré sans transformée de Fourier, nous ajoutons la filtration de Hodge et obtenons le résultat principal de cette seconde partie (objet de [Mar18a]) :

Théorème 6.3.1. *Soit $\gamma \in [0, 1[$ tel que $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$. On a les données suivantes pour $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$:*

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda \lambda_0, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1 \\ h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell = 0. \end{cases}$$

Nous complétons ensuite les résultats de Dettweiler et Sabbah en donnant également des formules pour les invariants locaux h^p et globaux δ^p sans faire l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini, qui découlent du théorème principal et généralisent le théorème 3.1.2 de [DS13].

Proposition 6.3.3. *Les invariants locaux $h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M).$$

Proposition 6.3.4. *Les invariants globaux $\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i, 1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{x_i, \lambda}^{p-1}(M) \right).$$

En sous-section 6.4, à l'aide d'une relation de Katz reliant les convolutions additives et multiplicatives (proposition 2.8.1), nous explicitons le comportement des invariants de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative d'un $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module M par un module de Kummer, opération notée MC'_{λ_0} , en exploitant les formules explicitées dans le cadre additif. Là encore, nous ne faisons pas l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini et obtenons des résultats tout à fait généraux. Cette partie est assez technique mais ne soulève aucune réelle difficulté supplémentaire par rapport au raisonnement effectué dans le cadre additif. Les résultats sont les suivants :

Proposition 6.4.1. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a les données suivantes :*

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[. \end{cases}$$

Proposition 6.4.2. *On a les données suivantes :*

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, 1, \ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1. \end{cases}$$

Proposition 6.4.3.

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}) - h^{p-1}(M) + h^p(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &- \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} (\nu_{0, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda}^p(M)) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} (\nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda}^p(M)). \end{aligned}$$

Proposition 6.4.4. *Les invariants locaux $h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = h^p(M) + h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) + \nu_{0,1,\text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda}^p(M)).$$

Proposition 6.4.5. *On a les données suivantes :*

$$\nu_{0,\lambda,\ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda,\ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \nu_{0,\lambda,\ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[\\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \nu_{0,1,\ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = 1, \ell \geq 1 \\ h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) & \text{si } \lambda = 1, \ell = 0. \end{cases}$$

Proposition 6.4.6. *Les invariants globaux $\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^p(M) - \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M)) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right).$$

Par ailleurs, les propositions 6.4.2 et 6.4.5 ont une application très intéressante en tant qu'elles permettent de redémontrer un résultat de Fedorov [Fed17, th. 3] sur les invariants de Hodge à l'infini et en 0 d'équations hypergéométriques, objet de [Mar18b]. Cette nouvelle approche de ce résultat est assez différente de l'approche originelle de Fedorov dans la mesure où elle utilise directement le comportement des données à l'infini et en 0, sans avoir à déplacer la singularité à l'infini. Nous explicitons également le comportement des données numériques locales cycles évanescents en 1, complétant ainsi le résultat de Fedorov. En notant $p(\alpha, \beta, \gamma) = \#\{k \mid \neg(\alpha_k \rightarrow \gamma \rightarrow \beta_k)\}$ et ℓ_m la multiplicité moins un, le théorème que nous démontrons est le suivant :

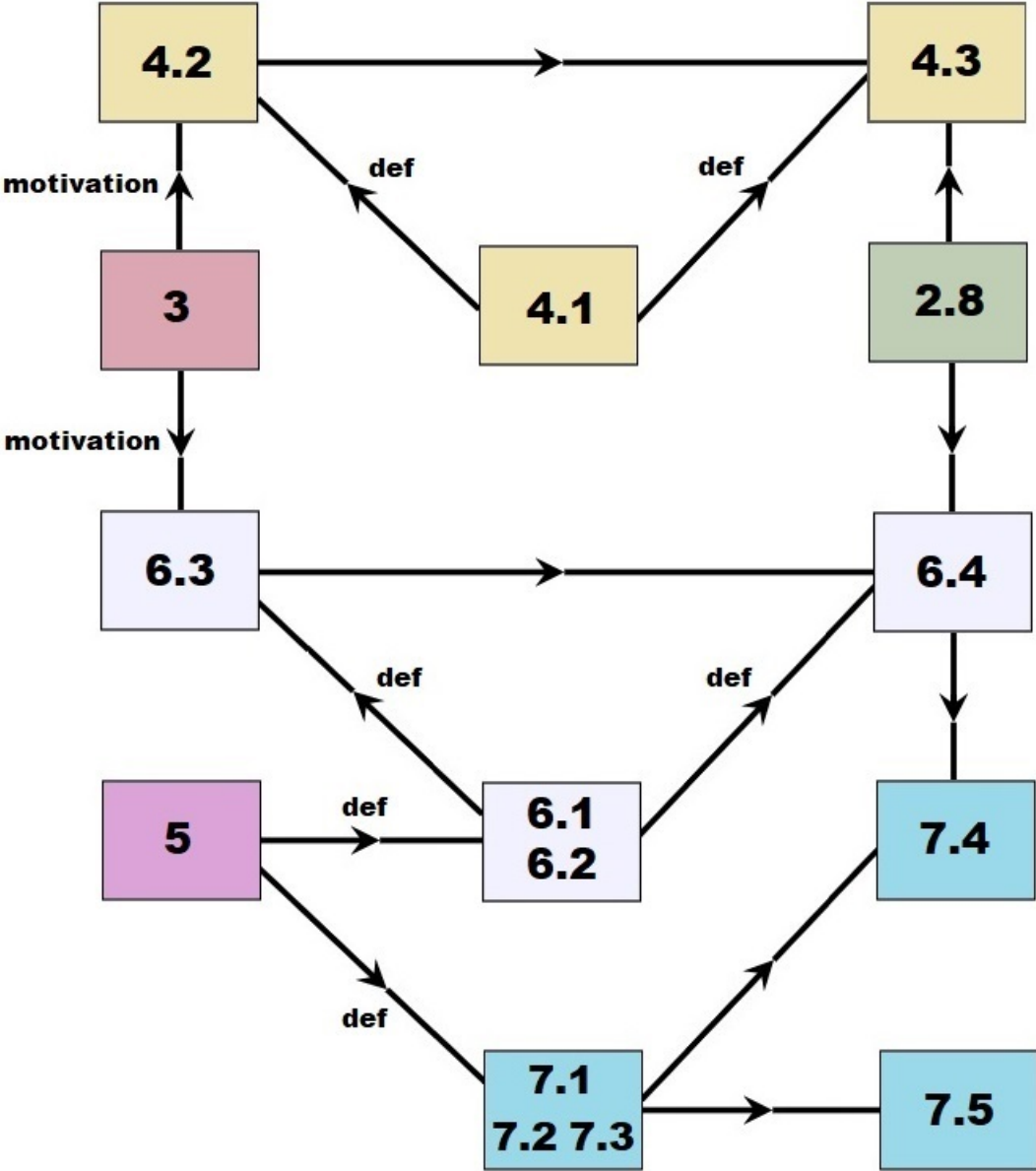
Théorème 7.4.3. *Étant donnée la décomposition $H_{\alpha,\beta} = H_{\alpha_1,\beta_1} * \cdots * H_{\alpha_n,\beta_n}$ en convolutions d'hypergéométriques de rang 1, le module hypergéométrique précédent est muni d'une pVHS naturelle $(V, F^\bullet V, \nabla)$ vérifiant les identités suivantes :*

$$(a) \quad \nu_{0,e^{-2i\pi\alpha_m},\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p(\alpha, \beta, \alpha_m) \text{ et } \ell = \ell_m(\alpha) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(b) \quad \nu_{\infty,e^{2i\pi\beta_m},\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p(\alpha, \beta, \beta_m) \text{ et } \ell = \ell_m(\beta) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(c) \quad \mu_{1,\lambda_s,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \# \left\{ i \mid \left\{ \sum_{k=1}^i (\beta_k - \alpha_k) \right\} < \gamma_s \right\} \text{ et } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Guide de lecture de la seconde partie



Première partie

Classe de la droite affine dans l'anneau de Grothendieck

Chapitre 1

**La classe de la droite affine est un diviseur de zéro dans
l'anneau de Grothendieck**

1.1 Définition de l'anneau de Grothendieck et premières propriétés

Le groupe de Grothendieck $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})$ des variétés algébriques complexes est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[X]$ de variétés algébriques complexes modulo les relations d'additivité $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$ pour toute sous-variété fermée Y de X . On le munit d'une structure d'anneau avec le produit $[X_1] \cdot [X_2] := [X_1 \times X_2]$.

Précisons quelques notations :

- On note $0 = [\emptyset]$ la classe de l'ensemble vide, neutre pour l'addition.
- On note $1 = [\text{pt}]$ la classe du point, neutre pour le produit.
- On note $\mathbb{L} = [\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1]$ la classe de la droite affine complexe.

On a immédiatement les relations $[\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n] = \mathbb{L}^n$ et $[\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{L}^k$. On remarque en outre que la classe d'une partie Zariski-constructible $C \subset X$ est bien définie : il existe une partition en sous-variétés localement fermées C_1, \dots, C_n de X , et on a

$$[C] = \sum_{k=1}^n [C_k]$$

Une propriété très importante de cet anneau est que toute fibration localement triviale est triviale en classe, i.e. si l'on note $f : Y \rightarrow X$ une fibration localement triviale de fibre F , on a alors l'égalité $[Y] = [X] \cdot [F]$.

1.2 Fibrations triviales par morceaux

Il est intéressant d'introduire la notion de fibrations triviales par morceaux. Pour cela, considérons Y , X et F trois variétés, A une partie constructible de Y et B une partie constructible de X .

Définition 1.2.1 Une application $f : A \rightarrow B$ est une fibration triviale par morceaux de fibre F s'il existe une partition finie de B en sous-variétés S localement fermées de X telle que :

- la restriction de f à $f^{-1}(S)$ soit induite par une application régulière de Y dans X
- la sous-variété $f^{-1}(S)$ localement fermée de Y , soit isomorphe à $S \times F$, f correspondant à la projection $S \times F \rightarrow S$.

L'intérêt des fibrations triviales par morceaux réside dans le fait qu'elles sont triviales en classe, tout comme les fibrations localement triviales, ce qui se révèle très utile dans la pratique. En outre, il est possible de généraliser cette définition au cas où Y , X et F sont des schémas sur \mathbb{C} . Un résultat important est la caractérisation schématique suivante des fibrations triviales par morceaux due à Sebag [Seb04, th. 4.2.3] :

Théorème 1.2.2 Soient $f : A \rightarrow B$ une application induite par un morphisme de schémas de Y dans X et F un schéma sur \mathbb{C} de type fini. L'application f est une fibration triviale par morceaux de fibre F si pour tout $x \in B$, la fibre $f^{-1}(x)$ est un $\kappa(x)$ -schéma isomorphe à $F \otimes \kappa(x)$.

1.3 Une autre présentation du groupe

Une des premières questions que l'on est amené à se poser avec l'anneau de Grothendieck est la suivante : peut-on supposer certaines propriétés sur les variétés ? Par exemple, les classes de variétés irréductibles (resp. lisses, resp. complètes) suffisent-elles à engendrer le groupe $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})$?

La question de l'irréductibilité est rapidement réglée puisque toute variété se partitionne en ses composantes irréductibles, localement fermées. Ensuite, afin de se limiter aux variétés lisses, on considère pour toute variété X le lieu de ses points singuliers X^{sing} , fermé dans X de codimension non nulle. On a l'égalité $[X] = [X^{\text{sing}}] + [X \setminus X^{\text{sing}}]$ et il suffit alors de faire une récurrence sur la dimension de X .

Pour la complétude, en utilisant le théorème de prolongement de Nagata, toute variété X peut-être plongée dans une variété complète \overline{X} , dans laquelle X est un ouvert dense. Là encore, une récurrence sur la dimension de X permet de conclure. Néanmoins, pour combiner les deux propriétés précédentes (lisse et complète), il faut un résultat plus puissant que le théorème de prolongement de Nagata : le théorème d'Hironaka. Notons qu'il est nécessaire de travailler en caractéristique zéro pour invoquer ce résultat (ici on travaille sur \mathbb{C}). Le théorème d'Hironaka implique notamment que toute variété lisse X est isomorphe à un ouvert dense d'une variété complète lisse, ce qui suffit pour conclure par récurrence.

On peut également se demander s'il n'existe pas une présentation plus simple de ce groupe, les relations d'additivité n'étant pas toujours pratiques lorsque l'on cherche à démontrer des résultats. On a le théorème suivant dû à Bittner [Bit04] :

Théorème 1.3.1 *Le groupe $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})$ est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes de variétés lisses complètes modulo les relations*

$$[\emptyset] = 0 \quad \text{et} \quad [\text{Bl}_Z(X)] - [E] = [X] - [Z]$$

où X est une variété lisse complète, Z une sous-variété fermée lisse de X , $\text{Bl}_Z(X)$ l'éclatement de X le long de Z et E le diviseur exceptionnel de cet éclatement.

1.4 Géométrie stablement birationnelle

La question de départ est la suivante : que peut-on dire de deux variétés X et Y vérifiant $[X] = [Y]$? On peut se demander s'il est possible de décomposer X et Y en une partition finie de sous-variétés localement fermées deux à deux isomorphes [LL03, question 1.2]. Des résultats positifs à cette question ont été obtenus par Liu et Sebag dans l'article [LS10]. Plus précisément, ils prouvent que la réponse à cette question est positive (en caractéristique zéro) dans l'un des cas suivants :

- (i) $\dim X \leq 1$
- (ii) X est une surface projective lisse connexe
- (iii) X contient seulement un nombre fini de courbes rationnelles.

La réponse générale est cependant négative. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème principal de la sous-section 1.5 comme nous le verrons plus tard. Notons qu'une toute autre approche de Karzhevanov a récemment explicité un contre-exemple en dimension 3 [Kar14].

Soient M le monoïde multiplicatif des classes d'isomorphismes de variétés irréductibles lisses complètes, G un monoïde multiplicatif commutatif quelconque et $\Psi : M \rightarrow G$ un morphisme de monoïdes vérifiant :

- (i) $\Psi([X]) = \Psi([Y])$ si X et Y sont deux variétés birationnelles
- (ii) $\Psi([\mathbb{P}^n]) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a le résultat suivant dû à Larsen et Lunts [LL03, th. 2.3] :

Théorème 1.4.1 *Il existe un unique morphisme d'anneaux $\Phi : K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ prolongeant Ψ .*

Ce résultat est loin d'être aisé à démontrer et est l'objet principal de l'article [LL03]. Néanmoins, ce théorème devient beaucoup plus accessible une fois connue la présentation alternative de Bittner du groupe de Grothendieck vue au théorème 1.3.1, démontrée peu de temps après la parution de l'article de Larsen et Lunts. Plus précisément, la difficulté originelle principale est de voir pourquoi on a les relations $\Phi([X]) = \Phi([Y]) + \Phi([X \setminus Y])$ pour Y une sous-variété fermée de X . Avec la présentation de Bittner, il suffit de voir pourquoi $\Phi([\text{Bl}_Z(X)]) - \Phi([E]) = \Phi([X]) - \Phi([Z])$ pour X une variété lisse complète, Z une sous-variété fermée lisse de X et E le diviseur exceptionnel de cet éclatement. D'une part, $\text{Bl}_Z(X)$ et X sont birationnels, donc $\Phi([\text{Bl}_Z(X)]) = \Phi([X])$, et d'autre part, E et $Z \times \mathbb{P}^k$ sont birationnels pour un certain $k \in \mathbb{N}$, donc $\Phi([E]) = \Phi([Z] \times [\mathbb{P}^k]) = \Phi([Z])$.

Définissons maintenant la notion de stable birationnalité :

Définition 1.4.2 On dit que deux variétés X et Y sont stablement birationnelles s'il existe deux entiers k et ℓ tels que les variétés $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^\ell$ soient birationnelles.

Posons alors $G = SB$ le monoïde des classes $[X]_{SB}$ de variétés à stable birationnalité près. Le morphisme de monoïdes $\Psi_{SB} : M \rightarrow SB$ qui à $[X]$ associe $[X]_{SB}$ vérifie bien (i) et (ii), on a donc par le théorème précédent un unique morphisme d'anneaux $\Phi_{SB} : K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{Z}[SB]$ qui prolonge Ψ .

Proposition 1.4.3 *Le noyau de Φ_{SB} est l'idéal engendré par \mathbb{L} .*

Preuve. Tout d'abord, on a bien $\Phi(\mathbb{L}) = \Phi([\mathbb{P}^1] - 1) = 0$. Pour l'autre sens, écrivons $a \in \ker(\Phi_{SB})$ sous la forme

$$a = [X_1] + \cdots + [X_k] - [Y_1] - \cdots - [Y_\ell]$$

où les X_i et les Y_j sont lisses et complètes. On a alors

$$\Phi_{SB}(a) = \sum_{i=1}^k \Psi_{SB}([X_i]) - \sum_{j=1}^{\ell} \Psi_{SB}([Y_j])$$

donc $k = \ell$ et, après renumérotation, X_i et Y_i sont stablement birationnels. Il suffit donc de prouver que deux variétés lisses complètes stablement birationnelles vérifient $[X] - [Y] \in (\mathbb{L})$. On peut même les supposer birationnelles dans la mesure où

$$[X \times \mathbb{P}^m] - [X] = [X] \cdot (\mathbb{L}^m + \cdots + \mathbb{L}) \in (\mathbb{L}).$$

En utilisant le théorème de factorisation des applications birationnelles, on peut supposer que X est l'éclatement de Y le long d'une variété lisse Z . En notant E le diviseur exceptionnel de cet éclatement, on a $[E] = [Z] \cdot [\mathbb{P}^n]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$[X] - [Y] = [E] - [Z] = [Z] \cdot (\mathbb{L}^n + \cdots + \mathbb{L}) \in (\mathbb{L}) \quad \square$$

On a la propriété importante suivante :

Proposition 1.4.4 *Soient X et Y des variétés de Calabi-Yau. Alors X et Y sont stablement birationnelles si et seulement si elles sont birationnelles.*

Preuve. On suppose X et Y stablement birationnelles, on note k et ℓ les entiers tels que $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^\ell$ soient birationnelles. Comme X et Y sont des variétés de Calabi-Yau, on sait que leurs fibrations MRC (voir [KMM92]) sont les morphismes identités. On en déduit que les fibrations MRC de $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^\ell$ sont données par les projections sur X et Y . Comme $X \times \mathbb{P}^k$ et $Y \times \mathbb{P}^\ell$ sont birationnelles, il en est donc de même pour X et Y . \square

Corollaire 1.4.5 *Soient X et Y des variétés de Calabi-Yau telles que $[X] = [Y]$ modulo \mathbb{L} . Alors X et Y sont birationnelles.*

Preuve. D'après la proposition 1.4.3, la propriété $[X] = [Y]$ modulo \mathbb{L} implique que X et Y sont stablement birationnelles, donc birationnelles d'après la proposition précédente. \square

1.5 Intégrité et diviseurs de zéro

Une autre question que l'on peut se poser sur l'anneau de Grothendieck est de savoir s'il s'agit d'un anneau intègre. Poonen a prouvé que ce n'était pas le cas [Poo02]. Borisov est allé encore plus loin en montrant que \mathbb{L} est un diviseur de zéro [Bor18], nous allons détailler son résultat dans cette sous-section. Il est toutefois important de noter que ce résultat n'est pas seulement une amélioration de celui de Poonen : comprendre le noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ est une question cruciale en intégration motivique, dans la mesure où l'on considère des classes dans l'anneau localisé.

Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 7 et $W \subset \Lambda^2 V^\vee$ un sous-espace vectoriel générique de formes bilinéaires alternées sur V de dimension 7. On définit X_W la sous-variété de la Grassmannienne $G(2, V)$ qui est le lieu des $T \in G(2, V)$ tels que $\omega|_T = 0$ pour tout $\omega \in W$, et Y_W la sous-variété de $\mathbb{P}W$ des formes de rang strictement inférieur à 6. De plus, toutes les formes de Y_W sont de rang 4 et toutes les formes de $\mathbb{P}W \setminus Y_W$ sont de rang 6.

Les variétés X_W et Y_W sont des variétés de Calabi-Yau de dimension 3, qui sont lisses et non birationnelles (voir [Rød00] et [BC09, §0.3 et §0.5]). D'après le corollaire 1.4.5, cela implique que $[X_W] \neq [Y_W]$ modulo \mathbb{L} .

Considérons maintenant la sous-variété H de $G(2, V) \times \mathbb{P}W$ des $(T, \mathbb{C}\omega)$ tels que $\omega|_T = 0$. Afin d'obtenir des équations explicites définissant H , posons $T_0 \in G(2, V)$ muni d'une base e_1, e_2 et H un supplémentaire muni d'une base e_3, \dots, e_7 . Le voisinage $U = \{T \in G(2, V) \mid T \oplus H = V\}$ de T_0 peut être identifié à $\mathcal{L}(T_0, H)$ en considérant l'application $f \in \mathcal{L}(T_0, H) \mapsto \{x + f(x) \mid x \in T_0\} \in U$. Si l'on pose $(f_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2\} \times \{3,\dots,7\}}$ la base de $\mathcal{L}(T_0, H)$ adaptée aux deux bases précédemment considérées, on peut identifier $T \in U$ avec $\{x + \sum \alpha_{i,j} f_{i,j}(x) \mid x \in T_0\}$.

Maintenant, pour $\omega = \sum_{i=1}^7 \beta_i \omega_i \in W$, la condition $\omega|_T = 0$ peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^7 \beta_i \cdot \omega_i \left(e_1 + \sum_{j=3}^7 \alpha_{1,j} e_j, e_2 + \sum_{j=3}^7 \alpha_{2,j} e_j \right) = 0.$$

L'idée de Borisov est de regarder les projections de H sur chacun des deux facteurs $G(2, V)$ et $\mathbb{P}W$, ce qui va donner deux moyens d'exprimer $[H]$. Après calculs, on arrive à l'expression suivante :

$$([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) \cdot \mathbb{L}^7 = 0.$$

Cela montre bien que \mathbb{L} est un diviseur de zéro car $([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) = ([X_W] - [Y_W]) \bmod \mathbb{L}$, quantité qu'on sait non nulle modulo \mathbb{L} , en particulier on a $([X_W] - [Y_W]) \cdot (\mathbb{L}^2 - 1) \cdot (\mathbb{L} - 1) \neq 0$.

L'objectif de la suite est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 $([X_W] - [Y_W]) \cdot \mathbb{L}^6 = 0$

Ce résultat est un raffinement de celui de Borisov, et un petit pas dans la compréhension du noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$. Dans la sous-section suivante, nous établirons une formule de récurrence pour obtenir les classes dans l'anneau de Grothendieck des Grasmanniennes $G(k, n)$, l'un des ingrédients de la preuve du théorème ci-dessus.

De plus, ce théorème permet de répondre négativement à la question posée précédemment : est-il possible de décomposer deux variétés X et Y telles que $[X] = [Y]$ en une partition finie de sous-variétés localement fermées deux à deux isomorphes ? En effet, le théorème montre que $X_W \times \mathbb{C}^6$ et $Y_W \times \mathbb{C}^6$ ont la même classe dans l'anneau de Grothendieck et s'il était effectivement possible de décomposer ces deux variétés de la sorte, elles seraient birationnelles. Cela impliquerait que X_W et Y_W soient stablement birationnelles, donc birationnelles, or on a déjà vu qu'elles ne l'étaient pas. Notons qu'il est possible de conclure négativement de la même façon avec l'égalité de Borisov, avec un facteur $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ supplémentaire dans le produit.

Notons enfin que le résultat de Borisov ainsi que le théorème ci-dessus sont encore vrais en caractéristique zéro, les preuves n'utilisant à aucun moment la spécificité du corps des nombres complexes.

1.6 Classes des Grasmanniennes

Proposition 1.6.1 *Pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$, on a la relation de récurrence suivante :*

$$[G(k, n)] = [G(k, n-1)] + \mathbb{L}^{n-k} \cdot [G(k-1, n-1)].$$

Preuve. Soient e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{C}^n , F l'hyperplan orthogonal à e_n , $U \subset G(k, n)$ l'ouvert défini par $\{T \in G(k, n) \mid \dim(T \cap F) = k-1\}$ et $\pi : U \rightarrow G(k-1, F)$ l'application régulière qui envoie T sur $T \cap F$. Pour $S \in G(k-1, F)$, la fibre $\pi^{-1}(S)$ peut être identifiée à

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^n/S) \setminus \mathbb{P}(F/S) \simeq \mathbb{A}^{n-k}.$$

Soient H un supplémentaire de S dans F et $V \subset G(k-1, F)$ l'ouvert $\{S' \in G(k-1, F) \mid S' \oplus H = F\}$. Pour tout $S' \in V$, on a l'identification $\mathbb{C}^n/S' \simeq H \oplus \mathbb{C}e_n$, donc π est une fibration triviale sur V . Par conséquent, π est une fibration localement triviale, d'où $[U] = \mathbb{L}^{n-k} \cdot [G(k-1, n-1)]$. On a $[G(k, n)] = [Z] + [U]$ avec

$$Z = G(k, n) \setminus U = \{T \in G(k, n) \mid T \subset F\} = G(k, F),$$

ce qui donne la formule annoncée. \square

Une simple récurrence donne les formules suivantes pour $n \geq 4$:

$$[G(2, n)] = \begin{cases} [\mathbb{P}^{n-2}] \cdot \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \mathbb{L}^{2k} & \text{si } n \text{ est pair} \\ [\mathbb{P}^{n-1}] \cdot \sum_{k=0}^{(n-3)/2} \mathbb{L}^{2k} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En particulier, on a $[G(2, 5)] = [\mathbb{P}^4] \cdot (\mathbb{L}^2 + 1)$ et $[G(2, 7)] = [\mathbb{P}^6] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1)$.

1.7 Preuve du théorème 1.5.1

Le théorème est une conséquence directe des deux propositions suivantes.

Proposition 1.7.1 $[H] = [\mathbb{P}^6] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) \cdot [\mathbb{P}^5] + [X_W] \cdot \mathbb{L}^6$

Preuve. En considérant la projection $p : H \rightarrow G(2, V)$ sur le premier facteur, qui est une fibration triviale en restriction à $p^{-1}(X_W)$ de fibre $\mathbb{P}W = \mathbb{P}^6$, et une fibration localement triviale en restriction à $G(2, V) \setminus p^{-1}(X_W)$ de fibre \mathbb{P}^5 , on obtient

$$[H] = [X_W] \cdot [\mathbb{P}^6] + ([G(2, 7)] - [X_W]) \cdot [\mathbb{P}^5] = [G(2, 7)] \cdot [\mathbb{P}^5] + [X_W] \cdot \mathbb{L}^6.$$

L'expression $[G(2, 7)] = [\mathbb{P}^6] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1)$ donne alors le résultat. \square

Proposition 1.7.2 $[H] = [Y_W] \cdot \mathbb{L}^6 + [\mathbb{P}^6] \cdot [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1)$

La preuve de cette proposition va être plus difficile. Nous allons démontrer trois lemmes afin d'y parvenir : le premier va préciser le comportement de la projection sur le second facteur, et les deux autres seront des lemmes techniques permettant de calculer explicitement les classes des fibres dans l'anneau de Grothendieck.

Lemme 1.7.3 Soit $\pi : H \rightarrow \mathbb{P}W$ la projection sur le second facteur. Ses restrictions à $\pi^{-1}(Y_W)$ et $\pi^{-1}(\mathbb{P}W \setminus Y_W)$ sont des fibrations triviales par morceaux.

Preuve. Le raisonnement est le même pour le rang 4 ($Y_4 = Y_W$) et le rang 6 ($Y_6 = \mathbb{P}W \setminus Y_W$). Pour $i \in \{4, 6\}$, posons

$$Z_i = \pi^{-1}(Y_i) = H \cap (G(2, V) \times Y_i).$$

Afin d'obtenir la trivialité par morceaux de π sur Z_i , il suffit de prouver d'après le théorème 1.2.2 qu'il existe une fibre uniforme F_i telle que pour tout $x \in Y_i$, on ait $Z_i \times_{Y_i} \{x\} \simeq F_i \times_{\mathbb{C}} \text{Spec}(\kappa(x))$.

Pour démontrer ce point, il suffit de voir qu'une forme bilinéaire alternée de rang 4 ou 6 à coefficients dans un corps $K \supset \mathbb{C}$ est congruente à la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ -I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec une matrice de changement de base à coefficients dans K , action qui se propage sur les fibres. \square

Lemme 1.7.4 Soit $\mathbb{C}\omega \in Y_W$ un point fermé. La classe de sa fibre est

$$[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] = [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) + \mathbb{L}^6.$$

Preuve. Comme $\text{rg}(\omega) = 4$, il existe une base e_1, \dots, e_7 de V de laquelle la matrice de ω est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $F = \text{Vect}\{e_3, \dots, e_7\}$ et $H = F \oplus \mathbb{C}e_2$. On a

$$[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] = [\{T \in G(2, V) \mid \omega|_T = 0\}] = [\{T \in G(2, H) \mid \omega|_T = 0\}] + [U]$$

où U est l'ouvert $\{T \in G(2, V) \mid \dim(T \cap H) = 1, \omega|_T = 0\}$, avec la fibration localement triviale $\pi : U \rightarrow \mathbb{P}H = \mathbb{P}^5$. Notons que $\ker(\omega) = \text{Vect}\{e_5, e_6, e_7\} \subset H$ et $\ker(\omega|_H) = \ker(\omega) \oplus \mathbb{C}e_3 \subset H$.

Soit $D = \mathbb{C}e \in \mathbb{P}H$. Il y a trois cas à considérer.

- Premier cas : $D \subset \ker(\omega)$. On a

$$\begin{aligned} [\pi^{-1}(D)] &= [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(V/D) \mid \omega(f, e) = 0\}] - [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(H/D) \mid \omega|_H(f, e) = 0\}] \\ &= [\mathbb{P}^5] - [\mathbb{P}^4] = \mathbb{L}^5. \end{aligned}$$

- Deuxième cas : $D \not\subset \ker(\omega)$ et $D \subset \ker(\omega|_H)$. Dans ce cas $\pi^{-1}(D) = \emptyset$, car

$$\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(V/D) \mid \omega(f, e) = 0\} = \{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(H/D) \mid \omega|_H(f, e) = 0\}.$$

- Troisième cas : $D \not\subset \ker(\omega|_H)$. On a

$$\begin{aligned} [\pi^{-1}(D)] &= [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(V/D) \mid \omega(f, e) = 0\}] - [\{\mathbb{C}f \in \mathbb{P}(H/D) \mid \omega|_H(f, e) = 0\}] \\ &= [\mathbb{P}^4] - [\mathbb{P}^3] = \mathbb{L}^4. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
[U] &= [\mathbb{P}\ker(\omega)] \cdot \mathbb{L}^5 + ([\mathbb{P}H] - [\mathbb{P}\ker(\omega|_H)]) \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [\mathbb{P}^2] \cdot \mathbb{L}^5 + ([\mathbb{P}^5] - [\mathbb{P}^3]) \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= ([\mathbb{P}^5] - 1) \cdot \mathbb{L}^4.
\end{aligned}$$

On peut répéter l'argument avec H . Comme $\omega|_F = 0$, on a

$$\begin{aligned}
[\{T \in G(2, H) \mid \omega|_T = 0\}] &= [\{T \in G(2, F) \mid \omega|_T = 0\}] + [\mathbb{P}\ker(\omega|_H)] \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [G(2, 5)] + [\mathbb{P}^3] \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [\mathbb{P}^4] \cdot (\mathbb{L}^2 + 1) + [\mathbb{P}^3] \cdot \mathbb{L}^4.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] &= ([\mathbb{P}^5] - 1) \cdot \mathbb{L}^4 + [\mathbb{P}^4] \cdot (\mathbb{L}^2 + 1) + [\mathbb{P}^3] \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= ([\mathbb{P}^5] - 1) \cdot \mathbb{L}^4 + ([\mathbb{P}^5] - \mathbb{L}^5) \cdot (\mathbb{L}^2 + 1) + (\mathbb{L}^3 + \mathbb{L}^2 + \mathbb{L} + 1) \cdot \mathbb{L}^4 \\
&= [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) + \mathbb{L}^6.
\end{aligned}$$

□

Un calcul en tous points similaire donne le résultat suivant :

Lemme 1.7.5 *Soit $\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}W \setminus Y_W$ un point fermé. La classe de sa fibre est*

$$[\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega)] = [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1).$$

Preuve de la proposition 1.7.2. On est donc maintenant en mesure de démontrer la proposition. Pour cela, considérons $\mathbb{C}\omega_1 \in Y_W$ et $\mathbb{C}\omega_2 \in \mathbb{P}W \setminus Y_W$ deux points fermés. Le lemme 1.7.3 implique que

$$\begin{cases} [\pi^{-1}(Y_W)] = [Y_W] \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_1)] \\ [\pi^{-1}(\mathbb{P}W \setminus Y_W)] = ([\mathbb{P}W] - [Y_W]) \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_2)], \end{cases}$$

et par conséquent

$$[H] = [Y_W] \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_1)] + ([\mathbb{P}W] - [Y_W]) \cdot [\pi^{-1}(\mathbb{C}\omega_2)].$$

En utilisant les lemmes 1.7.4 et 1.7.5, on a

$$\begin{aligned}
[H] &= [Y_W] \cdot ([\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) + \mathbb{L}^6) + ([\mathbb{P}^6] - [Y_W]) \cdot [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1) \\
&= [Y_W] \cdot \mathbb{L}^6 + [\mathbb{P}^6] \cdot [\mathbb{P}^5] \cdot (\mathbb{L}^4 + \mathbb{L}^2 + 1),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

1.8 Développements ultérieurs à la publication du théorème 1.5.1

Résumons le théorème 1.5.1 : on a explicité deux variétés de Calabi-Yau X et Y de dimension 3 lisses non birationnelles, telles que $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^6 = 0$. On sait que plus grâce à Borisov et Căldăraru [BC09, th 6.2] que $D_{\text{coh}}^b(X) \simeq D_{\text{coh}}^b(Y)$: on dit que X et Y sont D -équivalentes (ou que (X, Y) est une paire de Fourier-Mukai, ou encore que X et Y sont des partenaires de Fourier-Mukai). Cela fournit un premier exemple intéressant de variétés X et Y qui sont D -équivalentes et vérifient $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^r = 0$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$, avec $[X] \neq [Y]$. On reste dans toute la suite sur le corps des nombres complexes.

Suite à la publication du théorème 1.5.1 sur arXiv en avril 2016 puis dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences en septembre 2016 [Mar16], de nombreux autres exemples ont été explicités :

1. [IMOU16a, juin 2016] Ito, Miura, Okawa et Ueda montrent que des variétés de Calabi-Yau X' et Y' de dimension 3 lisses non birationnelles, obtenues par dégénérescence des variétés X et Y , vérifient $([X'] - [Y']) \cdot \mathbb{L} = 0$. De plus, ces variétés sont D -équivalentes.
2. [KS17, décembre 2016] Kuznetsov et Shinder donnent l'exemple d'une paire (X'', Y'') de surfaces K3 de degré 8 et 2, D -équivalentes et qui vérifient $([X''] - [Y'']) \cdot \mathbb{L} = 0$ et $[X''] \neq [Y'']$ (théorème 1.9).
3. [IMOU16b, décembre 2016] Ito, Miura, Okawa et Ueda montrent que toute surface K3 X''' de degré 12 admet un partenaire de Fourier-Mukai Y''' non isomorphe tel que $([X'''] - [Y''']) \cdot \mathbb{L}^3 = 0$ (théorème 1.3). Ce résultat a été amélioré par Hassett et Lai en $([X'''] - [Y''']) \cdot \mathbb{L} = 0$ dans [HL18] avec des considérations très différentes, utilisant des transformations de Cremona de \mathbb{P}^4 .
4. [BCP18, juillet 2017] Borisov, Căldăraru et Perry montrent que deux variétés X'''' et Y'''' dites GPK^3 doubles miroirs, variétés de Calabi-Yau de dimension 3, sont D -équivalentes (théorème 1.1), ne sont pas birationnelles (théorème 1.2) et vérifient $([X''''] - [Y'''']) \cdot \mathbb{L}^4 = 0$ (théorème 1.6). Notons qu'Ottem et Rennemo ont indépendamment obtenu la D -équivalence et la non birationalité dans [OR17].
5. [Man17, décembre 2017] On remplace dans la définition de X et Y la Grassmannienne $G(2, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ par la variété de spin $S \subset \mathbb{P}\Delta$ où Δ est une des deux représentations demi-spin de $Spin_{10}$ (voir [Man09] pour plus de détails sur la construction). On obtient deux variétés de Calabi-Yau X'''' et Y'''' de dimension 5 simultanément lisses (proposition 4.1), le cas échéant D -équivalentes (proposition 4.2), non birationnelles (proposition 4.4) et qui vérifient $([X''''] - [Y'''']) \cdot \mathbb{L}^7 = 0$ (proposition 4.5).

1.8.1 Paire dégénérée (X', Y') de Ito, Miura, Okawa et Ueda

Parmi les cinq exemples listés plus haut, l'exemple 1 de Ito, Miura, Okawa et Ueda est celui s'approchant le plus de notre travail, profitons-en pour en dire quelques mots.

Motivés par le résultat du théorème 1.5.1, Ito, Miura, Okawa et Ueda donnent dans le théorème 1.1 de [IMOU16a] l'exemple de deux variétés de Calabi-Yau X' et Y' de dimension 3 lisses non birationnelles, telles que $([X'] - [Y']) \cdot \mathbb{L} = 0$. Ces variétés, dont la construction est explicitée dans [IMOU16a, §2], sont une dégénérescence de la paire (X, Y) considérée précédemment (voir [IIM16] et [KK16, th. 7.1] pour plus de détails).

D'une certaine manière, l'identité $([X'] - [Y']) \cdot \mathbb{L} = 0$ peut être vue comme un raffinement du théorème 1.5.1 dans le cas dégénéré. En outre, Kuznetsov montre dans [Kuz16] que les variétés X' et Y' sont bien D -équivalentes.

1.8.2 D -équivalence et L -équivalence

A la suite des exemples issus du théorème 1.5.1 et de [IMOU16a], Kuznetsov et Shinder introduisent dans [KS17] la définition de L -équivalence : on dit que X et Y sont L -équivalentes s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^r = 0$. Dans le cas où $[X] = [Y]$, les deux variétés sont dites trivialement L -équivalentes. Ces deux derniers exemples sont les premiers exemples de variétés D -équivalentes qui sont L -équivalentes mais pas trivialement L -équivalentes.

Notons que si les variétés X et Y sont L -équivalentes alors elles ont les mêmes nombres de Hodge. En effet, en considérant le polynôme de Hodge $h : K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{Z}[u, v]$, l'identité $[X] \cdot \mathbb{L}^r = [Y] \cdot \mathbb{L}^r$ donne $h_X(u, v)(uv)^r = h_Y(u, v)(uv)^r$ et donc $h_X(u, v) = h_Y(u, v)$, ce qui donne l'égalité des nombres de Hodge.

Kuznetsov et Shinder émettent la conjecture suivante :

Conjecture. Dans le cas de variétés projectives lisses simplement connexes, la D -équivalence implique la L -équivalence.

Commençons dès maintenant par remarquer que la réciproque est fautive avec l'exemple des variétés $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et l'éclaté d'un point dans \mathbb{P}^2 . Ces deux variétés ont pour classe $(\mathbb{L}+1)^2$ et sont donc (trivialement) L -équivalentes, mais ne sont pas D -équivalentes d'après [BO01].

Suite à cette conjecture, initialement formulée sans l'hypothèse de simple connexité, Ito, Miura, Okawa et Ueda d'une part, et Efimov d'autre part, répondent négativement à la question en donnant des contre-exemples dans le contexte des variétés abéliennes (théorème 1.5 et exemple 7.8 de [IMOU16b], théorème 3.1 de [Efi17]). En ajoutant l'hypothèse de simple connexité, aucun contre-exemple n'a été à ce jour explicité (voir les articles récents [KR17], [KKM17] et [Oka18] qui discutent de la question).

Un autre aspect est celui d'expliciter des exemples de variétés D -équivalentes qui ne sont pas birationnelles, cette question est discutée dans les articles [ADM16] et [MMY18].

Une autre question que l'on peut se poser est celle d'une éventuelle signification géométrique pour deux variétés L -équivalentes X et Y du r minimal vérifiant $([X] - [Y]) \cdot \mathbb{L}^r = 0$. Dans cette direction, on ne sait par ailleurs pas si $r = 6$ est bien minimal dans le théorème 1.5.1.

1.8.3 Mise en défaut d'un résultat de Galkin et Shinder

Soit $Y \subset \mathbb{P}^{d+1}$ une hypersurface cubique lisse. On appelle variété de Fano $F(Y)$ la sous-variété fermée de $G(1, \mathbb{P}^{d+1}) = G(2, d+2)$ donnée par l'ensemble des droites $L \subset Y$. Par exemple, si $d = 2$ il est connu depuis 1849 grâce à une correspondance de Cayley et Salmon ([Cay49], [Sal49]) que $F(Y)$ est constituée de 27 points distincts.

Galkin et Shinder démontrent dans [GS14, th. 7.1] le théorème suivant, dans l'hypothèse où \mathbb{L} n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck :

Théorème 1.8.1 *Si Y est rationnelle (i.e. birationnelle à un espace projectif) et $d \geq 3$, alors $F(Y)$ est stablement birationnelle au schéma de Hilbert de deux points d'une surface K3 (voir [GS14, §3]).*

Corollaire 1.8.2 *Le théorème précédent a les deux conséquences suivantes (théorème 7.4 et 7.5) :*

- (1) *Cas $d = 3$. Toute hypersurface cubique lisse $Y \subset \mathbb{P}^4$ est irrationnelle.*
- (2) *Cas $d = 4$. Toute hypersurface cubique lisse $Y \subset \mathbb{P}^5$ est génériquement irrationnelle.*

Le résultat (1) est connu depuis les travaux de Clemens et Griffiths [CG72], le résultat (2) est lui inédit (on dispose de résultats partiels, voir [AV08] et [BRS15]). Malheureusement, le fait que \mathbb{L} soit un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck met en défaut la preuve de ces deux résultats. Galkin et Shinder précisent toutefois dans la remarque 7.2 qu'il est suffisant pour leurs résultats de supposer la conjecture suivante plutôt que le fait que \mathbb{L} ne soit pas un diviseur de zéro :

Conjecture 1.8.3 *Si α est une combinaison linéaire de classes de variétés de dimension inférieure ou égale à $2(d-2)$, alors*

$$\alpha \cdot \mathbb{L}^2 = 0 \implies \alpha \in (\mathbb{L}).$$

Le résultat de Ito, Miura, Okawa et Ueda [IMOU16a] donne un contre-exemple à cette conjecture pour $d \geq 4$ en prenant $\alpha = [X'] - [Y']$. Nous ne savons par contre pas si la conjecture est vraie ou non pour $d = 3$.

1.8.4 Un résultat de Zakharevich

Une description algébrique du noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$ est une question importante encore non résolue. Les différents exemples non triviaux de variétés L -équivalentes permettent une meilleure compréhension de ce noyau, mais ne restent malgré tout que des exemples. Zakharevich a récemment montré le résultat suivant [Zak17, th. D] :

Théorème 1.8.4 *Tout élément du noyau de la multiplication par \mathbb{L} est de la forme $[X] - [Y]$, où il n'est pas possible de décomposer $X \times \mathbb{A}^1$ et $Y \times \mathbb{A}^1$ en une partition finie de sous-variétés localement fermées deux à deux isomorphes.*

Une question naturelle posée par Kuznetsov et Shinder est alors la suivante [KS17, question 1.7] :

Question. Les différences $[X] - [Y]$ de variétés projectives lisses L -équivalentes engendrent-elles le noyau du morphisme de localisation $K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}}) \rightarrow K_0(\text{Var}_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$?

Cette question est à ce jour non résolue, et comme le remarquent Kuznetsov et Shinder, une réponse positive à cette question serait très utile dans certains problèmes de géométrie birationnelle, notamment pour fournir une preuve du théorème 1.8.1, sans utiliser la conjecture 1.8.3 pour $d = 3$, et plus généralement pour $d \geq 4$.

Deuxième partie

Convolution intermédiaire et théorie de Hodge

Chapitre 2

Généralités sur les \mathcal{D} -modules

L'objectif de cette section est d'introduire les notions de la théorie des \mathcal{D} -modules qui nous seront utiles dans la suite. Nous commencerons par rappeler certaines propriétés générales, avant de définir les opérations de convolutions.

2.1 Premières définitions

Soit X une variété algébrique complexe. Le faisceau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels sur X est défini comme la \mathcal{O}_X -algèbre engendrée par les champs de vecteurs sur X , vus comme des dérivations, compatible à la structure d'algèbre de Lie. Localement, en posant x_1, \dots, x_n des coordonnées sur X et $\partial_1, \dots, \partial_n$ la base de TX associée, les sections de \mathcal{D}_X s'écrivent $\sum f_{i_1, \dots, i_n} \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n}$ où $f_{i_1, \dots, i_n} \in \mathcal{O}_X$. Un \mathcal{D}_X -module à gauche (resp. à droite) est alors un \mathcal{O}_X -module avec une action à gauche (resp. à droite) de \mathcal{D}_X . On obtient deux catégories notées $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)$ (à gauche) et $\text{Mod}(\mathcal{D}_X^{\text{op}})$ (à droite).

Ces deux catégories sont équivalentes, et nous allons préciser cette équivalence (pour plus de détails, voir [Cas93, §1.1] et [Sab11, §1.2]). On note Θ_X le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur X et Ω_X^1 le faisceau des 1-formes holomorphes sur X , duaux l'un de l'autre. On pose $\Omega_X^k = \wedge^k \Omega_X^1$ le faisceau des k -formes holomorphes et $\omega_X = \Omega_X^{\dim X}$ le faisceau des formes holomorphes de degré maximal. On associe alors à un \mathcal{D}_X -module à gauche M^ℓ le \mathcal{D}_X -module à droite $M^r = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} M^\ell$ vérifiant pour toute fonction holomorphe f et tout champ de vecteur holomorphe ξ les règles suivantes :

$$(\omega \otimes m) \cdot f = f\omega \otimes m = \omega \otimes fm \quad \text{et} \quad (\omega \otimes m) \cdot \xi = \omega\xi \otimes m - \omega \otimes \xi m.$$

De même, on associe à un \mathcal{D}_X -module à droite M^r le \mathcal{D}_X -module à gauche $M^\ell = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, M^r)$.

Un autre point de vue sur la notion de \mathcal{D}_X -module est d'introduire la notion de connexion. Une connexion holomorphe ∇ sur un \mathcal{O}_X -module est une application \mathbb{C} -linéaire $\nabla : M \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ qui vérifie la règle de Leibniz : $\nabla(fm) = f\nabla m + df \otimes m$ pour toute fonction holomorphe f et toute section locale m de M définies sur le même ouvert de X . On dit qu'une connexion ∇ est intégrable (ou plate) si $\nabla^2 = 0$. Se donner un \mathcal{D}_X -module à gauche est alors équivalent à se donner un \mathcal{O}_X -module muni d'une connexion intégrable.

Définition 2.1.1 Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés lisses, on pose

$$\mathcal{D}_{X \rightarrow Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{D}_Y).$$

On appelle image inverse d'un \mathcal{D}_Y -module à gauche N le \mathcal{D}_X -module à gauche

$$f^*N = \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{D}_Y)} f^{-1}(N).$$

En tant que \mathcal{O}_X -module, ce n'est rien d'autre que $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(N)$. En outre, le foncteur f^* n'est exact qu'à droite, ce qui nous amène à définir le foncteur image inverse comme

$$\begin{aligned} f^+ : \text{Mod}(\mathcal{D}_Y) &\longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X) \\ N &\longmapsto \mathcal{D}_{X \rightarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}(\mathcal{D}_Y)} f^{-1}(N). \end{aligned}$$

Notons que dans le cas d'une inclusion ouverte, le foncteur f^* est exact et donc $f^+ = f^*$.

Définition 2.1.2 De même, on définit le foncteur image directe comme

$$\begin{aligned} f_+ : \text{Mod}(\mathcal{D}_X^{op}) &\longrightarrow D^b(\mathcal{D}_Y^{op}) \\ M &\longmapsto Rf_*(M \otimes_{\mathcal{D}_X}^L \mathcal{D}_{X \rightarrow Y}), \end{aligned}$$

où f_* est le foncteur image directe usuel.

Définition 2.1.3 On définit le foncteur image directe à support propre par dualité en posant

$$f_{\dagger} = Df_+D.$$

Remarque. Le foncteur image directe s'applique à des \mathcal{D}_X -modules à droite, mais d'après la correspondance gauche/droite vue précédemment il s'applique également à des \mathcal{D}_X -modules à gauche. Dans la suite, on ne considèrera plus que des \mathcal{D}_X -modules à gauche.

2.2 Quelques propriétés des \mathcal{D} -modules en dimension un

On se limite dans cette sous-section à la dimension 1, la seule situation qui nous sera utile par la suite. Pour un exposé plus complet en dimension supérieure, voir par exemple [MS02].

L'anneau $\mathcal{D} = \mathbb{C}[t]\langle \partial_t \rangle$ est muni de la filtration croissante $F_{\bullet}\mathcal{D}$ définie par

$$F_k\mathcal{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq -1 \\ \sum_{j=0}^k \mathbb{C}[t] \cdot \partial_t^j & \text{si } k \geq 0. \end{cases}$$

Cette filtration est compatible avec la structure d'anneau de \mathcal{D} (c'est-à-dire $F_k\mathcal{D} \cdot F_{\ell}\mathcal{D} \subset F_{k+\ell}\mathcal{D}$ pour tous $k, \ell \in \mathbb{Z}$) et l'anneau gradué $\text{gr}^F\mathcal{D} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{gr}_k^F\mathcal{D} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} F_k\mathcal{D}/F_{k-1}\mathcal{D}$ est isomorphe à l'anneau $(\mathbb{C}[t])[\tau] = \mathbb{C}[t, \tau]$ gradué avec le degré en τ .

Un \mathcal{D} -module M (à gauche) est dit irréductible s'il n'admet pas de sous-module non trivial. Il est holonome s'il est de type fini et que tout élément $m \in M$ est annulé par opérateur différentiel $P \in \mathcal{D}$ non nul. On note $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D})$ la catégorie des \mathcal{D} -modules holonomes. On peut montrer que tout \mathcal{D} -module holonome est de la forme \mathcal{D}/I où I est un idéal à gauche de \mathcal{D} non nul engendré par au plus deux éléments (voir [BM84] et [Sab93, §2.3]).

Soit M un \mathcal{D} -module holonome. On dit qu'une filtration croissante $F_{\bullet}M$ de sous- $\mathbb{C}[t]$ -modules de M est une F -filtration cohérente si :

- (i) $F_kM = 0$ pour k suffisamment petit
- (ii) F_kM est de type fini sur $\mathbb{C}[t]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
- (iii) $F_k\mathcal{D} \cdot F_{\ell}M \subset F_{k+\ell}M$ pour tous $k, \ell \in \mathbb{Z}$
- (iv) il existe $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $F_k\mathcal{D} \cdot F_{\ell}M = F_{k+\ell}M$ pour tout $k \geq 0$ et tout $\ell \geq \ell_0$.

Pour étudier le comportement d'un \mathcal{D} -module holonome au voisinage de l'origine, il est commode d'introduire une autre filtration sur \mathcal{D} , dite V -filtration (voir [Bud05] pour plus de détails). Tout d'abord, on définit le V -degré d'un monôme $t^{a_1} \partial_t^{b_1} \dots t^{a_n} \partial_t^{b_n}$ par $\sum b_i - \sum a_i$, qui ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit le monôme. On définit alors le V -ordre d'un opérateur différentiel $P \in \mathcal{D}$ comme le plus grand V -degré de ses monômes, et $V_k \mathcal{D}$ comme l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à k . Cette filtration est compatible avec la structure d'anneau de \mathcal{D} et il est possible, comme pour F , de définir la notion de V -filtration cohérente sur un \mathcal{D} -module holonome M .

En posant $V^k M = V_{-k} M$, on peut travailler avec des filtrations décroissantes. Considérons donc une V -filtration cohérente décroissante sur un \mathcal{D} -module holonome M . Les gradués $\text{gr}_V^k M$ sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels muni d'une action linéaire de $t\partial_t$. On a le résultat suivant :

Proposition 2.2.1 *Soit M un \mathcal{D} -module holonome. Il existe une unique V -filtration cohérente décroissante $V^\bullet M$, appelée filtration de Kashiwara-Malgrange de M , telle que les valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur les \mathbb{C} -espaces vectoriels $\text{gr}_V^k M$ soient de partie réelle dans $[k, k+1[$.*

On a la conséquence importante suivante :

Proposition 2.2.2 *Tout morphisme $\varphi : M \rightarrow M'$ entre deux \mathcal{D} -modules holonomes est strictement compatible à la V -filtration, c'est-à-dire vérifie $\varphi(V^k M) = \varphi(M) \cap V^k M'$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que les deux termes de l'égalité définissent une V -filtration cohérente de $\varphi(M)$ et d'invoquer l'unicité de la filtration de Kashiwara-Malgrange. \square

On suppose maintenant que les valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur $\text{gr}_V^k M$ sont réelles. Il est possible d'indexer la filtration sur \mathbb{R} en posant pour $V^a M$ l'image inverse par $V^{\lfloor a \rfloor} M \rightarrow \text{gr}_V^{\lfloor a \rfloor} M$ du sous-espace de $\text{gr}_V^{\lfloor a \rfloor} M$ correspondant aux valeurs propres supérieures ou égales à a , c'est-à-dire du sous-espace

$$\bigoplus_{\alpha \in [a, \lfloor a \rfloor + 1[} \left(\bigcup_{k_\alpha \geq 0} \ker(t\partial_t - \alpha)^{k_\alpha} \right).$$

Proposition 2.2.3 *La filtration de Kashiwara-Malgrange vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) *Pour $a > -1$, le morphisme $V^a M \rightarrow V^{a+1} M$ induit par la multiplication à gauche par t est un isomorphisme.*

(ii) *Pour $a < 0$, le morphisme $\text{gr}_V^a M \rightarrow \text{gr}_V^{a-1} M$ induit par ∂_t est un isomorphisme.*

En particulier, la connaissance de $\text{gr}_V^a M$ pour $a \in [-1, 0]$ implique celle pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Chaque $\text{gr}_V^a M$ est muni de l'endomorphisme nilpotent $N = -2i\pi(t\partial_t - a)$. On définit les morphismes $\text{can} : \text{gr}_V^0 M \rightarrow \text{gr}_V^{-1} M$ induit par $-\partial_t$ et $\text{var} : \text{gr}_V^{-1} M \rightarrow \text{gr}_V^0 M$ induit par $2i\pi t$. On a alors $\text{var} \circ \text{can} = N : \text{gr}_V^0 M \rightarrow \text{gr}_V^0 M$ et $\text{can} \circ \text{var} = N : \text{gr}_V^{-1} M \rightarrow \text{gr}_V^{-1} M$.

Proposition 2.2.4 *On a les propriétés suivantes :*

(i) *Le morphisme var est injectif si et seulement si M n'a pas de sous-module supporté en l'origine (c'est-à-dire tel que tout élément soit annulé par une puissance de t).*

(ii) *Le morphisme can est surjectif si et seulement si M n'admet pas de quotient supporté en l'origine (ce qui revient à dire qu'il n'existe pas de morphisme surjectif $M \rightarrow N$ tel que tous les éléments de N soient annulés par une puissance de t).*

(iii) *M est supporté en l'origine si et seulement si $\text{gr}_V^a M = 0$ pour tout $a > -1$.*

(iv) *$\text{gr}_V^{-1} M = \text{Im}(\text{can}) \oplus \text{ker}(\text{var})$ si et seulement si $M = M' \oplus M''$ avec M' qui n'admet ni sous-module ni quotient supporté en l'origine et M'' supporté en l'origine.*

Définition 2.2.5 Notons $M[t^{-1}] = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[t]} M$. On dit qu'un \mathcal{D} -module holonome M est extension minimale de $M[t^{-1}]$ à l'origine si var est injectif et can est surjectif, autrement dit si M n'admet ni sous-module ni quotient supporté en l'origine.

Proposition 2.2.6 *Soit M un \mathcal{D} -module holonome. Alors M est extension minimale de $M[t^{-1}]$ si et seulement si M est le sous- \mathcal{D} -module de $M[t^{-1}]$ engendré par $V^{>-1}M$.*

2.3 Régularité des \mathcal{D} -modules en dimension un

On s'intéresse dans cette section à la notion de régularité d'un \mathcal{D} -module holonome M , où $\mathcal{D} = \mathbb{C}\{t\}\langle \partial_t \rangle$. C'est une notion locale, ainsi on raisonne sur le germe $(\mathbb{C}, 0)$ et on s'intéresse au k -espace vectoriel à connexion (\mathcal{M}, ∇) où $k = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ est le corps des séries de Laurent convergentes, $\mathcal{M} = k \otimes_{\mathbb{C}[t]} M$ de dimension notée d et ∇ la connexion induite par M . On note $\Omega(t) = M(t)dt$ la matrice de la connexion, où $M(t) \in M_d(k)$.

Définition 2.3.1 La connexion ∇ est à singularité régulière en 0 s'il existe une base de k^d dans laquelle $M(t)$ est à pôle au plus simple en 0.

Remarque. Il n'est pas évident a priori de savoir si une connexion est à singularité régulière en 0 ou non à partir de sa matrice dans *une* base (on peut très bien avoir un pôle double, ou plus, et bien être à singularité régulière). Rappelons qu'un changement de base de matrice de passage $P \in GL_d(k)$ est donné par la formule

$$\Omega_2 = P^{-1}\Omega_1 P + P^{-1}dP$$

ce qui donne

$$M_2 = P^{-1}M_1 P + P^{-1}P'.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.3.2 *La connexion ∇ est à singularité régulière en 0 si et seulement s'il existe une base dans laquelle la matrice de la connexion est donnée par*

$$\Omega(t) = B_0 \frac{dt}{t}$$

où $B_0 \in M_d(\mathbb{C})$ est une matrice constante.

Preuve. Donnons les différentes étapes de la preuve (selon [Was65] et [Mal74], voir aussi [Sab02, th. 2.8], [Gan66] et [Sab93, §1.5.2]) :

1) On note $\Omega(t) = A(t)dt/t$ la matrice de la connexion avec $A(t)$ à coefficients holomorphes. On se ramène au cas où les valeurs propres de $A(0)$ ne diffèrent pas d'un entier non nul avec un changement de base de matrice de passage dans $GL_d(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$.

2) On construit une matrice $P \in GL_d(\mathbb{C}[[t]])$ à coefficients formels telle que $P^{-1}A(t)P + tP^{-1}P' = A(0)$.

3) On montre que la matrice P est à coefficients convergents par un raisonnement d'analyse. \square

Remarque. On sait qu'il existe toujours un vecteur cyclique pour la connexion (voir [Del70]), i.e. un vecteur $x \in k^d$ tel que $x, \nabla_{\partial_t} x, \dots, (\nabla_{\partial_t})^{d-1} x$ soit une base de k^d (pour tout $y \in k^d$, $\nabla y = dt \otimes \nabla_{\partial_t} y$). La matrice de la connexion dans cette base est $\Omega(t) = M(t)dt$ où :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$$

On a alors le résultat suivant, appelé condition de Fuchs (voir par exemple [Mal74]) :

Proposition 2.3.3 *La connexion ∇ est à singularité régulière en 0 si et seulement si, en notant $v(a_i)$ la valuation de a_i , on a l'inégalité $\max_{0 \leq i \leq d-1} (i - v(a_i)) \leq d$.*

On dispose également d'un critère d'irrégularité intéressant [Sab02, th. II.4.1] :

Proposition 2.3.4 *Soit $A(t) = B(t)/t^{r+1}$ avec $B(t)$ holomorphe, $B(0) \neq 0$ et $r \geq 1$. Si la matrice $B(0)$ n'est pas nilpotente, alors la connexion donnée par $\Omega(t) = A(t)dt$ est à singularité irrégulière en 0.*

Proposition 2.3.5 (Lien entre régularité et V -filtration)

Un \mathcal{D} -module holonome M est à singularité régulière en 0 si et ssi $V^0 M$ est de type fini sur $\mathbb{C}\{t\}$.

Définition 2.3.6 Pour M un \mathcal{D} -module holonome régulier et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$M_\alpha = \bigcup_{k \geq 0} \ker ((t\partial_t - \alpha)^k : M \rightarrow M).$$

C'est un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de M muni de l'endomorphisme nilpotent $N = -2i\pi(t\partial_t - \alpha)$. En notant A l'ensemble fini des valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur $\text{gr}_V^0 M$, on a $M_\alpha = 0$ si et seulement si $\alpha \notin A + \mathbb{Z}$. On montre que les M_α sont en somme directe et on pose $M^{\text{alg}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{R}} M_\alpha$, qui est un \mathcal{D} -module holonome régulier. De manière analogue à la proposition 2.2.3, $t : M_\alpha \rightarrow M_{\alpha+1}$ est un isomorphisme si $\alpha > -1$ et $\partial_t : M_\alpha \rightarrow M_{\alpha-1}$ est un isomorphisme si $\alpha < 0$. On a le résultat suivant [SS17, prop. 6.2.21] :

Proposition 2.3.7 *Le morphisme naturel $\mathbb{C}\{t\} \otimes_{\mathbb{C}[t]} M^{\text{alg}} \rightarrow M$ est un isomorphisme de \mathcal{D} -modules qui induit un isomorphisme sur les \mathbb{R} -gradués $M^{\text{alg}} \xrightarrow{\sim} \text{gr}_V M^{\text{alg}} \xrightarrow{\sim} \text{gr}_V M$.*

2.4 Foncteur image directe intermédiaire

Définition 2.4.1 Soient X une variété lisse, Y une sous-variété localement fermée de X et $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion. On définit le foncteur image directe intermédiaire $i_{\dagger+}$ de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_Y)$ dans $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_X)$ en posant pour $M \in \text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_Y)$

$$i_{\dagger+}(M) = \text{Image}(i_{\dagger}M \rightarrow i_+M).$$

Proposition 2.4.2 *Le foncteur $i_{\dagger+}$ préserve les injections et les surjections, mais n'est pas exact en général. Il commute avec la dualité.*

On a également la caractérisation suivante :

Proposition 2.4.3 *Soient $\Sigma \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble fini, $U = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$, $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ l'inclusion et M un \mathcal{O}_U -module libre de rang fini à connexion. L'image directe intermédiaire $j_{\dagger+}M$ est le plus petit $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module holonome \widetilde{M} tel que :*

(i) $j^+\widetilde{M} = M$

(ii) M n'admet ni sous-module ni quotient à support dans Σ .

Soient $s \in \Sigma$ et t une coordonnée au voisinage de s . En reprenant la définition (locale) d'extension minimale donnée à la définition 2.2.5, la proposition précédente revient exactement à dire que $j_{\dagger+}M$ est extension minimale de $M[t^{-1}]$ au voisinage de s . Cette proposition et cette remarque se généralisent si l'on remplace $\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ par un ouvert quelconque.

2.5 Produits tensoriels externe et interne

Définition 2.5.1 Soient X et Y deux variétés lisses, $M \in \text{Mod}(\mathcal{D}_X)$, $N \in \text{Mod}(\mathcal{D}_Y)$ et p_X, p_Y les projections respectives de $X \times Y$ sur X et Y . On note

$$M \boxtimes_{\mathbb{C}} N = p_X^{-1}M \otimes_{\mathbb{C}} p_Y^{-1}N,$$

et on définit le produit tensoriel externe de M et N comme le $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -module

$$M \boxtimes N = \mathcal{D}_{X \times Y} \otimes_{\mathcal{D}_X \boxtimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_Y} (M \boxtimes_{\mathbb{C}} N).$$

Notons que si M et N sont holonomes, alors le produit tensoriel externe $M \boxtimes N$ l'est aussi.

Définition 2.5.2 Soient M et M' deux \mathcal{D}_X -modules. En notant $\delta : X \hookrightarrow X \times X$ le plongement diagonal, on définit le produit tensoriel interne de M et M' comme

$$M \overset{L}{\otimes} M' = \delta^+(M \boxtimes M').$$

Notons que si M et M' sont holonomes, alors tous les \mathcal{D}_X -modules apparaissant dans le complexe précédent sont holonomes.

2.6 Convolution des \mathcal{D} -modules

Définition 2.6.1 Soient G un groupe algébrique, $\pi : G \times G \rightarrow G$ la multiplication dans G , et M, N deux \mathcal{D}_G -modules holonomes. On définit les convolutions $*_*$ et $*_!$ par

$$\begin{cases} M *_* N = \pi_+(M \boxtimes N) \\ M *_! N = \pi_{\dagger}(M \boxtimes N). \end{cases}$$

Proposition 2.6.2 *La dualité interchange les deux types de convolutions, à savoir :*

$$\begin{cases} D(M *_* N) = DM *_! DN \\ D(M *_! N) = DM *_* DN. \end{cases}$$

On note P la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_G)$ constituée des N tels que $M *_* N$ et $M *_! N$ sont des \mathcal{D}_G -modules holonomes pour tout \mathcal{D}_G -module holonome M . Pour $N \in P$, les foncteurs $*_*N$ et $*_!N$ de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_G)$ sont exacts. La dualité échangeant les deux types de convolutions, la sous-catégorie P est stable par dualité.

Définition 2.6.3 Pour M holonome et $N \in P$, on définit la convolution intermédiaire comme

$$M *_{\text{mid}} N = \text{Image}(M *_* N \rightarrow M *_! N) = \pi_{\dagger+}(M \boxtimes N).$$

Pour $N \in P$, le foncteur $*_{\text{mid}}N$ de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_G)$ préserve les injections et les surjections mais n'est pas exact en général. Notons également qu'en général on n'a pas $M *_{\text{mid}} N \in P$ pour $M, N \in P$. Néanmoins, Katz montre dans [Kat96] que cette propriété est vraie dans les deux cas qui nous intéresseront par la suite, à savoir $G = \mathbb{A}^1$ (cas de la convolution additive) ou $G = \mathbb{G}_m$ (cas de la convolution multiplicative).

Notations. (i) Pour $|\chi| = 1$ et $\chi \neq 1$, on note \mathcal{L}_χ le module de Kummer $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle/\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle \cdot (t\partial_t - \alpha) = (\mathbb{C}[t, t^{-1}], d + \alpha dt/t)$ où $\alpha \in]0, 1[$ vérifie $\exp(-2i\pi\alpha) = \chi$. Pour simplifier les expressions dans la suite, on notera de la même manière le module de Kummer qu'il soit vu comme un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -module ou comme un $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module.

(ii) Pour M un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module holonome, on note $\text{MC}_\chi(M) = M *_{\text{mid}} \mathcal{L}_\chi$. Notons que cette opération est bien définie, dans la mesure où $\mathcal{L}_\chi \in P$.

(iii) On dit qu'un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module est constant s'il est de la forme $(\mathbb{C}[t], d + a dt)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

(iv) On note C la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle)$ formée des $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -modules holonomes réguliers irréductibles non constants de support non réduit à un point.

On a le résultat suivant ([Kat96, §5.1.5] et [DS13, prop. 1.1.9]) :

Proposition 2.6.4 *Le foncteur $\text{MC}_\chi : \text{Mod}_{\text{hol}}(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle) \rightarrow \text{Mod}_{\text{hol}}(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle)$ vérifie pour $\chi\chi' \neq 1$ l'identité $\text{MC}_{\chi\chi'} \simeq \text{MC}_{\chi'} \circ \text{MC}_\chi$. Il préserve en outre la catégorie C , restreint à laquelle on a $\text{MC}_{\chi^{-1}} \circ \text{MC}_\chi = \text{Id}$.*

2.7 Transformée de Fourier d'un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module

Définition 2.7.1 La transformée de Fourier d'un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module M , notée ${}^F M$, est définie comme le \mathbb{C} -espace vectoriel M sur lequel on a l'action suivante de $\mathbb{C}[\tau]\langle\partial_\tau\rangle$: τ agit comme ∂_t , ∂_τ agit comme $-t$.

Tout comme en analyse où la transformée de Fourier transforme la convolution en produit, on a ici une propriété similaire essentielle :

Proposition 2.7.2 Soient M, N deux $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -modules holonomes. On a alors

$${}^F(M ** N) = {}^F M \otimes^L {}^F N$$

et par dualité

$${}^F(M *! N) = D(D {}^F M \otimes^L D {}^F N)$$

Dans le cas présent de la convolution additive, la sous-catégorie P n'est rien d'autre que la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle)$ constituée des N tels que ${}^F N$ et $D {}^F N$ (ou de manière équivalente ${}^F D N$) sont $\mathbb{C}[\tau]$ -plats. De manière équivalente, $N \in P$ si et seulement si ${}^F N$ n'a ni sous-module ni quotient de $\mathbb{C}[\tau]$ -torsion.

Exemples. (i) Si N est un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module constant, alors ${}^F N$ est de support un point et donc $N \notin P$. La définition équivalente énoncée ci-dessus permet de voir que tout $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module holonome irréductible non constant est dans P .

(ii) En notant $\delta_0 = \mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle / \mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle \cdot t = \mathbb{C}[\partial_t]$ le module de Dirac en 0, on a ${}^F \delta_0 = \mathbb{C}[\tau]$. Ainsi, $\delta_0 \in P$ est un élément neutre pour les trois types de convolutions.

2.8 Relation entre les convolutions additive et multiplicative

La convolution intermédiaire additive a beaucoup été étudiée (entre autres [DR03], [Det08], [Sim09], et [DS13]) et une relation entre les deux convolutions permettrait de transposer certains des résultats obtenus dans le cadre additif au cadre multiplicatif. Dans toute la suite, on note pour $|\chi| = 1$ et $\chi \neq 1$

$$\mathcal{L}'_\chi = \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m} / \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m} \cdot ((t-1)\partial_t - \alpha) = (\mathbb{C}[t, t^{-1}, (t-1)^{-1}], d + \alpha dt / (t-1))$$

où $\alpha \in]0, 1[$ vérifie $\exp(-2i\pi\alpha) = \chi$.

La proposition suivante est due à Katz [Kat96, lemme 2.13.1] et adaptée ici dans le cadre des \mathcal{D} -modules :

Proposition 2.8.1 *En notant $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion, on a les formules suivantes pour tout $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module holonome M :*

$$\begin{cases} M *_{! \times} \mathcal{L}'_{\chi} = j^+(j_{\dagger}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{!+} \mathcal{L}_{\chi}) \\ M *_{* \times} \mathcal{L}'_{\chi} = j^+(j_+(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{*+} \mathcal{L}_{\chi}) \\ M *_{\text{mid} \times} \mathcal{L}'_{\chi} = j^+(\text{MC}_{\chi}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}))). \end{cases}$$

Preuve. Soient M un $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module holonome et $\pi : \mathbb{G}_m^2 \rightarrow \mathbb{G}_m$ l'application $(x, t) \mapsto t$. En reprenant les notations de Katz, on a

$$\begin{aligned} M *_{! \times} \mathcal{L}'_{\chi} &= M *_{! \times} \mathcal{L}_{\chi(t-1)} \\ &= \pi_{\dagger}(M_x \otimes \mathcal{L}_{\chi(t/x-1)}) \\ &= \pi_{\dagger}((M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}})_x \otimes \mathcal{L}_{\chi(t-x)}) \\ &= j^+(j_{\dagger}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{!+} \mathcal{L}_{\chi}), \end{aligned}$$

ce qui démontre la première égalité. En regardant maintenant le dual de cette expression, on obtient

$$DM *_{* \times} \mathcal{L}'_{\bar{\chi}} = j^+(D(j_{\dagger}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}})) *_{*+} \mathcal{L}_{\bar{\chi}}).$$

Comme $j_+ = Dj_{\dagger}D$, on en déduit que $DM *_{* \times} \mathcal{L}'_{\bar{\chi}} = j^+(j_+(DM \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{*+} \mathcal{L}_{\bar{\chi}})$, ce qui donne la deuxième égalité (avec $M' = DM$ et $\mathcal{L}_{\chi'} = \mathcal{L}_{\bar{\chi}}$).

Par définition, $M *_{\text{mid} \times} \mathcal{L}'_{\chi}$ est l'image de $M *_{! \times} \mathcal{L}'_{\chi} \rightarrow M *_{* \times} \mathcal{L}'_{\chi}$, c'est-à-dire le tiré en arrière par j de l'image de $j_{\dagger}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{!+} \mathcal{L}_{\chi} \rightarrow j_+(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{*+} \mathcal{L}_{\chi}$. Cette application peut être décomposée comme la composée des quatre applications suivantes :

- (1) $j_{\dagger}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{!+} \mathcal{L}_{\chi} \rightarrow j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{!+} \mathcal{L}_{\chi}$
- (2) $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{!+} \mathcal{L}_{\chi} \rightarrow j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{\text{mid}+} \mathcal{L}_{\chi}$
- (3) $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{\text{mid}+} \mathcal{L}_{\chi} \rightarrow j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{*+} \mathcal{L}_{\chi}$
- (4) $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{*+} \mathcal{L}_{\chi} \rightarrow j_+(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{*+} \mathcal{L}_{\chi}$.

L'application (1) est surjective par exactitude du foncteur $*_{!+} \mathcal{L}_{\chi}$, les applications (2) et (3) respectivement surjective et injective par définition de la convolution intermédiaire, et l'application (4) injective par exactitude du foncteur $*_{*+} \mathcal{L}_{\chi}$. On en conclut que

$$M *_{\text{mid} \times} \mathcal{L}'_{\chi} = j^+(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) *_{\text{mid}+} \mathcal{L}_{\chi}) = j^+(\text{MC}_{\chi}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}))). \quad \square$$

Notons $\text{MC}'_{\chi} : \text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}) \rightarrow \text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m})$ le foncteur $*_{\text{mid} \times} \mathcal{L}'_{\chi}$. Contrairement au cadre de la convolution intermédiaire additive, on n'a malheureusement pas de relations similaires à celles de la proposition 2.6.4 dans le cadre de la convolution intermédiaire multiplicative.

Définition 2.8.2 *On note C'_{χ} la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m})$ formée des $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -modules holonomes réguliers irréductibles non isomorphes à \mathcal{L}_{χ} et de support non réduit à un point.*

On a la proposition suivante :

Proposition 2.8.3 *La catégorie C'_χ est stable par le foncteur MC'_χ .*

Preuve. Soit $M \in C'_\chi$. Le $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module $M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}$ est toujours holonome régulier irréductible, et comme M n'est pas isomorphe à \mathcal{L}_χ , on en déduit que le support de $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}})$ n'est pas réduit à un point. Cela implique donc que $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) \in C$. D'après la proposition 2.6.4, la catégorie C est stable par le foncteur MC_χ , par conséquent $MC_\chi(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}})) \in C$.

Il reste à voir pourquoi $MC'_\chi(M)$ n'est pas isomorphe à \mathcal{L}_χ . Supposons par l'absurde que ce soit le cas, on aurait donc $MC_\chi(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}})) \simeq \mathcal{L}_\chi$. En appliquant le foncteur $MC_{\chi^{-1}}$, on obtient $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\chi}}) \simeq \delta_0$ et donc $M \simeq \mathcal{L}_\chi$, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Chapitre 3

Algorithme de Katz

Dans cette section, nous présenterons un algorithme dû à Katz, un des principaux résultats de son livre *Rigid local systems* [Kat96], très important dans l'étude des systèmes locaux irréductibles rigides. Cet algorithme a beaucoup été étudié et a eu de nombreux développements (notamment [Rob99], [DR00], [Sim09] et [DS13]). Le plan de ce chapitre 3 sera le suivant :

1. Dans un premier temps, nous détaillerons un lemme dû à Scott [Sco77], qui sera utile pour la suite.
2. Dans un deuxième temps, nous définirons la notion de système local *rigide*. Cette notion est due à Katz, mais l'idée mathématique de rigidité est quant à elle bien plus ancienne : Riemann s'y était intéressé dès 1857 [Rie57], mais dans un vocabulaire très différent de celui d'aujourd'hui.
3. Dans un troisième temps, nous détaillerons les deux opérations qui interviennent dans l'algorithme de Katz ainsi que leurs propriétés.
4. Dans un quatrième et dernier temps, nous expliciterons l'algorithme de Katz et donnerons plusieurs conséquences importantes.

Dans toute cette section, on notera $\Sigma = \{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\} \subset \mathbb{P}^1$ avec $x_{r+1} = \infty$, $X = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ et $(U_s)_{s \in \Sigma}$ des petits disques ouverts époinés centrés en chacun des $s \in \Sigma$ qui ne s'intersectent pas deux à deux. Précisons que l'on entend par *petit disque ouvert centré en ∞* l'image d'un petit disque ouvert centré en 0 par l'application $z \mapsto 1/z$.

3.1 Lemme de Scott

Définition 3.1.1 Soit \mathcal{L} un système local sur X de rang n . On définit la monodromie T_i autour de $x_i \neq \infty$ comme l'action (linéaire) de la classe d'un lacet simple autour de x_i dans $\pi_1(X, a)$ sur $\mathcal{L}_a = \mathbb{C}^n$, avec $a \in X$ un point quelconque. On définit la monodromie autour de ∞ par $T_\infty = T_r \cdots T_1$.

Proposition 3.1.2 Soient \mathcal{L} un système local sur \mathbb{C}^* de rang n , $j : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$ l'inclusion et T la monodromie autour de 0. On a les propriétés suivantes :

- (i) $H^0(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \ker(T - \text{Id})$
- (ii) $H^1(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \text{coker}(T - \text{Id})$
- (iii) $H^m(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = 0$ pour $m \geq 2$
- (iv) $\chi(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = 0$
- (v) $\chi(\mathbb{C}, j_*\mathcal{L}) = \chi(0, j_*\mathcal{L}) = \dim \ker(T - \text{Id})$.

Preuve. Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont démontrées dans [EZS07, §1.3.2] (voir aussi [Dim04, ex. 2.5.7]). On a alors

$$\chi(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \dim \ker(T - \text{Id}) - \dim \text{coker}(T - \text{Id}) = 0.$$

Notons qu'on aurait pu le voir directement en remarquant que $\chi(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \chi(\mathbb{C}^*) \cdot \text{rg}(\mathcal{L}) = 0$. Maintenant, par additivité de la caractéristique d'Euler, on a

$$\chi(\mathbb{C}, j_*\mathcal{L}) = \chi(\mathbb{C}^*, j_*\mathcal{L}) + \chi(0, j_*\mathcal{L}),$$

et comme $(j_*\mathcal{L})|_{\mathbb{C}^*}$ est un système local, on a $\chi(\mathbb{C}^*, j_*\mathcal{L}) = \chi(\mathbb{C}^*) \cdot \text{rg}((j_*\mathcal{L})|_{\mathbb{C}^*}) = 0$ par le même argument que précédemment. On en déduit que

$$\chi(\mathbb{C}, j_*\mathcal{L}) = \chi(0, j_*\mathcal{L}) = \dim(j_*\mathcal{L})_0 = \dim \Gamma(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \dim H^0(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \dim \ker(T - \text{Id}).$$

□

Dans toute la suite de cette section, on notera $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ l'inclusion.

Proposition 3.1.3 *Soient \mathcal{L} un système local sur X de rang n . Alors :*

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 2n - \sum_{i=1}^{r+1} \text{rg}(T_i - \text{Id}).$$

Preuve. Par additivité de la caractéristique d'Euler, on a

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = \chi(X, j_*\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^{r+1} \chi(U_{x_i}, j_*\mathcal{L}) - \sum_{i=1}^{r+1} \underbrace{\chi(X \cap U_{x_i}, j_*\mathcal{L})}_{=0}.$$

On a $\chi(X, j_*\mathcal{L}) = \chi(X) \cdot \text{rg}((j_*\mathcal{L})|_X) = (1-r) \cdot \text{rg}(\mathcal{L}) = (1-r)n$. D'où :

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = (1-r)n + \sum_{i=1}^{r+1} \dim \ker(T_i - \text{Id}) = 2n - \sum_{i=1}^{r+1} \text{rg}(T_i - \text{Id}).$$

□

Proposition 3.1.4 *On reprend les notations de la proposition précédente. On suppose de plus que \mathcal{L} est irréductible et $T_\infty = \text{Id}$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^r \text{rg}(T_i - \text{Id}) = 2n + \dim H^1(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) \geq 2n.$$

Preuve. Avec $T_\infty = \text{Id}$, la proposition précédente donne

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 2n - \sum_{i=1}^r \text{rg}(T_i - \text{Id}).$$

On déduit du fait que \mathcal{L} est irréductible que

$$H^0(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = \Gamma(X, \mathcal{L}) = \bigcap_{i=1}^r \ker(T_i - \text{Id}) = 0.$$

Par dualité de Poincaré, on a $H^2(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 0$, ce qui donne bien l'égalité attendue :

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 2n - \sum_{i=1}^r \text{rg}(T_i - \text{Id}) = -\dim H^1(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}).$$

□

Ce dernier résultat est dû à Scott [Sco77], mais il est à noter qu'il existe une preuve très simple de l'inégalité seule n'utilisant que des outils d'algèbre linéaire élémentaire (voir [Beu08, th. 1.4.2] et [Sab12]).

3.2 Rigidité d'un système local

Définition 3.2.1 *Un système local \mathcal{L} sur X est dit rigide si pour tout système local \mathcal{F} sur X tel que $\mathcal{L}|_{U_s} \simeq \mathcal{F}|_{U_s}$ pour tout $s \in \Sigma$, on a $\mathcal{L} \simeq \mathcal{F}$.*

Remarque. Interprétons cette propriété de rigidité en terme de monodromie. Notons T_s les monodromies autour de $s \in \Sigma$: être rigide revient à dire que pour toute famille de matrices inversibles $(T'_s)_{s \in \Sigma}$ telle que T_s et T'_s soient conjuguées pour tout $s \in \Sigma$, alors il existe une matrice commune qui réalise la conjugaison. Autrement dit, on ne peut pas déformer les T_s dans leur classe de conjugaison, sauf à conjuguer par une matrice commune.

Définition 3.2.2 *Soit \mathcal{L} un système local sur X . On définit l'indice de rigidité comme $\text{rig}(\mathcal{L}) := \chi(\mathbb{P}^1, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L}))$.*

Remarque. En utilisant la proposition 3.1.2(v), on peut donner une expression explicite de l'indice de rigidité en terme de monodromie :

$$\begin{aligned} \text{rig}(\mathcal{L}) &= \chi(X, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L})) + \sum_{s \in \Sigma} \chi(s, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L})) \\ &= (2 - |\Sigma|) \cdot (\text{rg}(\mathcal{L}))^2 + \sum_{s \in \Sigma} \dim \ker(ad(T_s) - \text{Id}), \end{aligned}$$

où $ad : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C}))$, $T \mapsto (A \mapsto TAT^{-1})$. En notant $Z(T_s)$ est le centralisateur de T_s , on a

$$\text{rig}(\mathcal{L}) = (1 - r) \cdot (\text{rg}(\mathcal{L}))^2 + \sum_{s \in \Sigma} \dim Z(T_s).$$

Proposition 3.2.3 *Soit \mathcal{L} un système local sur X irréductible. On a :*

$$\text{rig}(\mathcal{L}) = 2 - \dim H^1(\mathbb{P}^1, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L})) \leq 2.$$

Preuve. On a $\text{rig}(\mathcal{L}) = 2 \cdot \dim H^0(\mathbb{P}^1, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L})) - \dim H^1(\mathbb{P}^1, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L}))$. De plus, on sait que

$$H^0(\mathbb{P}^1, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L})) = \Gamma(X, \underline{\text{End}}(\mathcal{L})) = \bigcap_{s \in \Sigma} Z(T_s).$$

Si une matrice M commute avec tous les T_s alors ses espaces propres sont stables par tous les T_s , et par irréductibilité de \mathcal{L} , ils sont triviaux : la matrice M est donc scalaire. Ainsi $\dim H^0(\mathbb{P}^1, j_* \underline{\text{End}}(\mathcal{L})) = 1$, ce qui donne bien l'expression attendue. \square

On a le critère suivant, dû à Katz [Kat96, th. 1.1.2] :

Théorème 3.2.4 *Soit \mathcal{L} un système local sur X irréductible. Alors \mathcal{L} est rigide si et seulement si $\text{rig}(\mathcal{L}) = 2$.*

3.3 Opérations de l'algorithme de Katz

Soit \mathcal{L} un système local sur X . Nous allons détailler ici les deux opérations qui interviendront dans l'algorithme de Katz ainsi que leurs propriétés. Ces deux opérations sont les suivantes :

1. la multiplication par un système local sur X de rang un
2. la convolution intermédiaire par un système local sur \mathbb{C}^* de rang un

Définition 3.3.1 *On appelle multiplication d'un système local \mathcal{L} sur X par un système local de rang un toute opération $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est un système local sur X de rang un.*

Remarques. (i) En terme de monodromie, un système local sur X de rang un est donné par une famille de complexes $(\lambda_s)_{s \in \Sigma}$ non nuls. Ainsi, la monodromie T_s de \mathcal{L} est transformée par multiplication en $\lambda_s T_s$. En particulier, l'opération de multiplication préserve le rang et est inversible.

(ii) La multiplication préserve l'irréductibilité d'une part, et la rigidité d'autre part dans la mesure où $\underline{End}(\mathcal{L}) \simeq \underline{End}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F})$ et donc $rig(\mathcal{L}) = rig(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F})$.

On a déjà vu l'opération de convolution intermédiaire dans la partie précédente. On note \mathcal{L}_λ le système local sur \mathbb{C}^* de rang un, dont la monodromie autour de 0 est donnée par $T = \lambda \neq 0$, et MC_λ le foncteur de convolution intermédiaire avec \mathcal{L}_λ dans la catégorie des systèmes locaux sur X . Contrairement à la partie précédente, on n'oblige *a priori* pas λ à être de module 1.

La proposition suivante est due à Katz (th. 2.9.8, th. 3.3.3 et §6.0.16 de [Kat96], voir aussi [DR00, cor. 3.6 et 4.4]) :

Proposition 3.3.2 *Soient \mathcal{L} un système local sur X irréductible et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a alors :*

- (i) $MC_\lambda(\mathcal{L})$ est irréductible
- (ii) $rig(MC_\lambda(\mathcal{L})) = rig(\mathcal{L})$.

L'opération MC_λ préserve donc les systèmes locaux irréductibles rigides. De plus, d'après le théorème 3.5 de [DR00], elle est inversible d'inverse l'opération $MC_{\lambda^{-1}}$.

Une question importante reste cependant en suspens : quel est le rang de $MC_\lambda(\mathcal{L})$? Pour cela, il est utile d'avoir une interprétation matricielle de l'opération de convolution intermédiaire sur les monodromies, faite par Dettweiler et Reiter dans [DR00]. En notant $T_1, \dots, T_r \in GL_n(\mathbb{C})$ les monodromies d'un système local \mathcal{L} irréductible de rang n et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$G_i^\lambda = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & 0 \\ & & I_{(i-1)n} & 0 & & & \\ \hline T_1 - I_n & \cdots & T_{i-1} - I_n & \lambda T_i & \lambda(T_{i+1} - I_n) & \cdots & \lambda(T_r - I_n) \\ \hline & & 0 & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & I_{(r-i)n} \end{array} \right) .$$

Les deux espaces

$$K = \{{}^t(x_1, \dots, x_r) \mid x_i \in \ker(T_i - I_n)\} \text{ et } L_\lambda = \bigcap_{i=1}^r \ker(G_i^\lambda - I_{rn})$$

sont stables par les G_i^λ , on note alors T_i^λ les classes des G_i^λ dans $GL(\mathbb{C}^{rn}/(K+L_\lambda))$. Les T_i^λ correspondent alors aux monodromies de $MC_\lambda(\mathcal{L})$.

D'après le lemme 2.7 de [DR00], $L_\lambda = \{{}^t(u, T_1 u, \dots, T_{r-1} \cdots T_1 u) \mid u \in \ker(\lambda T_\infty - I_n)\}$ et $K \cap L_\lambda = 0$, ce qui permet de donner l'expression du rang de $MC_\lambda(\mathcal{L})$:

$$\text{rg}(MC_\lambda(\mathcal{L})) = rn - \sum_{i=1}^r \dim \ker(T_i - I_n) - \dim \ker(\lambda T_\infty - I_n) = \sum_{i=1}^r \text{rg}(T_i - I_n) - \dim \ker(\lambda T_\infty - I_n).$$

Le corollaire 4.2 de [DR00] montre en outre que $\text{rg}(T_\infty^\lambda - \lambda \text{Id}) = \text{rg}(\lambda T_\infty - I_n)$.

3.4 Algorithme de Katz

Tous les ingrédients sont maintenant en place pour introduire l'algorithme de Katz :

Théorème 3.4.1 *Soit \mathcal{L} un système local sur X irréductible rigide de rang $n > 1$, de monodromies T_1, \dots, T_r . On suppose que T_∞ est scalaire. Il est alors possible d'aboutir en un nombre fini de multiplications et de convolutions intermédiaires à un système local de rang 1.*

Preuve. Comme \mathcal{L} est rigide et $T_\infty = \mu I_n$, on a

$$\text{rig}(\mathcal{L}) = (1-r)n^2 + \sum_{i=1}^r \dim Z(T_i) + \underbrace{Z(T_\infty)}_{=n^2} = 2.$$

Ainsi, en notant $r_{i,\lambda}$ le nombre de blocs de Jordan de T_i associé à la valeur propre λ et $t_{i,\lambda,k}$ la taille du k ème bloc de Jordan associé à cette même valeur propre, on a

$$(r-2)n^2 + 2 = \sum_{i=1}^r \dim Z(T_i) = \sum_{i=1}^r \sum_{\lambda \in Sp(T_i)} \sum_{1 \leq k, \ell \leq r_{i,\lambda}} \underbrace{\min(t_{i,\lambda,k}, t_{i,\lambda,\ell})}_{\leq t_{i,\lambda,k}},$$

ce qui donne

$$(r-2)n^2 + 2 \leq \sum_{i=1}^r \sum_{\lambda \in Sp(T_i)} r_{i,\lambda} \sum_{k=1}^{r_{i,\lambda}} t_{i,\lambda,k}.$$

Posons maintenant $n_i = \min\{\text{rg}(\lambda T_i - I_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Pour tout $\lambda \in Sp(T_i)$, on a alors $r_{i,\lambda} = \dim \ker(T_i - \lambda I_n) \leq n - n_i$ et donc

$$(r-2)n^2 + 2 \leq \sum_{i=1}^r n(n - n_i) = rn^2 - n \sum_{i=1}^r n_i.$$

Il en résulte que

$$\sum_{i=1}^r n_i \leq \frac{2n^2 - 2}{n} < 2n.$$

Choisissons alors des λ_i tels que $n_i = \text{rg}(\lambda_i T_i - I_n)$ (cela signifie en particulier que λ_i^{-1} est valeur propre de T_i) et effectuons l'opération de multiplication

$$(T_1, \dots, T_r) \mapsto (T'_1, \dots, T'_r) = (\lambda_1 T_1, \dots, \lambda_r T_r).$$

On a alors $T'_\infty = \mu \lambda_1 \cdots \lambda_r I_n$ et par le lemme de Scott (proposition 3.1.4), on a $\mu \lambda_1 \cdots \lambda_r \neq 1$. Posons $\lambda = (\mu \lambda_1 \cdots \lambda_r)^{-1} \neq 1$ et effectuons l'opération de convolution MC_λ :

$$(T'_1, \dots, T'_r) \mapsto (T_1^\lambda, \dots, T_r^\lambda).$$

On sait alors qu'après cette opération, le rang du système local sera

$$\sum_{i=1}^r \text{rg}(\lambda_i T_i - I_n) - \dim \ker(\lambda T'_\infty - I_n) = \sum_{i=1}^r \text{rg}(\lambda_i T_i - I_n) - n < 2n - n = n.$$

On a donc strictement diminué le rang. De plus, comme $\text{rg}(T_\infty^\lambda - \lambda \text{Id}) = \text{rg}(\lambda T'_\infty - I_n) = 0$, on a $T_\infty^\lambda = \lambda \text{Id}$, matrice scalaire. On peut ainsi poursuivre l'algorithme, qui, après un nombre fini d'étapes, produira un système local de rang un. \square

Plusieurs remarques importantes peuvent être faites sur cet algorithme de Katz :

1. L'algorithme de Katz se termine avec un système local de rang 1, il est donc possible de faire une dernière opération de multiplication pour amener ce dernier sur le système local de rang 1 de monodromies triviales $(1, \dots, 1)$.
2. Les deux opérations utilisées dans l'algorithme étant inversibles, il est possible en reprenant l'algorithme dans l'autre sens d'obtenir tout système local irréductible rigide à partir du système local de rang 1 de monodromies triviales $(1, \dots, 1)$.
3. Les λ_i et λ qui interviennent dans l'algorithme de Katz sont des monômes en les valeurs propres des T_i . Ainsi, à chaque étape de l'algorithme, le fait que les valeurs propres des monodromies soient de module 1 est une propriété conservée. Cette remarque aura des conséquences en théorie de Hodge, ce que nous verrons par la suite.
4. Cet algorithme peut être utilisé pour fabriquer des systèmes locaux irréductibles rigides intéressants. Par exemple, en appliquant au système local sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de rang 1 de monodromies triviales $(1, 1, 1, 1)$ une certaine suite de multiplications et de convolutions intermédiaires, Dettweiler et Reiter obtiennent dans [DR10] un système local irréductible rigide de rang 7, tel que l'adhérence de Zariski du groupe engendré par ses monodromies dans $GL_7(\mathbb{C})$ est le groupe G_2 .

Chapitre 4

Données numériques locales et convolution intermédiaire

Dans cette section, nous étudierons le comportement des données numériques locales d'un \mathcal{D} -module holonome régulier par l'opération de convolution intermédiaire développée dans le chapitre 2. Le plan de ce chapitre 4 sera le suivant :

1. Dans un premier temps, nous définirons les données numériques locales.
2. Dans un deuxième temps, nous établirons le comportement des données numériques locales par convolution intermédiaire additive. De nombreux résultats ont été obtenus dans cette direction par Dettweiler et Sabbah [DS13, §1.3]. Nous proposerons une autre démonstration du deuxième point de la proposition 1.3.5 de [DS13] sur le comportement des données numériques locales cycles proches à l'infini par convolution intermédiaire additive, par une toute autre approche que celle de Dettweiler et Sabbah. Cette nouvelle approche sera d'une grande aide lorsque l'on ajoutera la filtration de Hodge par la suite (au chapitre 6), ce qui nous permettra d'obtenir un résultat quant à lui nouveau.
3. Dans un troisième et dernier temps, nous expliciterons le comportement des données numériques locales par convolution intermédiaire multiplicative. Pour cela, nous utiliserons la formule obtenue à la proposition 2.8.1, ce qui nous permettra de transposer certains des résultats additifs de Dettweiler et Sabbah au cadre multiplicatif.

4.1 Données numériques locales

On considère M un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$ -module holonome régulier dont les points singuliers sont x_1, \dots, x_r ainsi que $x_{r+1} = \infty$. On note x une coordonnée locale au voisinage de x_i ($x = t - x_i$ si $i \in \{1, \dots, r\}$, $x = 1/t$ si $i = r + 1$) et

$$M_{x_i} = \begin{cases} \mathbb{C}\{x\} \otimes_{\mathbb{C}[t]} M & \text{si } i \in \{1, \dots, r\} \\ \mathbb{C}\{\{x\}\} \otimes_{\mathbb{C}[t]} M & \text{si } i = r + 1. \end{cases}$$

On sait que tout $\mathbb{C}\{\{x\}\}$ -espace vectoriel à connexion régulière (R, ∇) est muni d'une filtration décroissante V^a (respectivement $V^{>a}$) indexée par $a \in \mathbb{R}$, où V^a (respectivement $V^{>a}$) est le $\mathbb{C}\{x\}$ -module libre sur lequel le résidu de ∇ a ses valeurs propres de partie réelle dans $[a, a + 1[$ (respectivement $]a, a + 1[$). On suppose que les valeurs propres du résidu de ∇ sont réelles (ce qui sera le cas dans la situation qui nous intéressera au chapitre 6).

Les cycles proches $\psi_\lambda(M)$ sont définis pour $\lambda = e^{-2i\pi a}$ et $a \in]-1, 0]$ par $\psi_{x_i, \lambda}(M) = V^a/V^{>a}$ et sont munis de l'endomorphisme nilpotent $N = -2i\pi(t\partial_t - a)$. La donnée de (R, ∇) est alors équivalente à la donnée de la famille finie des $(\psi_\lambda(M), N)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

On en déduit que $M_{x_{r+1}}$ est complètement déterminé par la donnée des $(\psi_{x_{r+1}, \lambda}(M), N)$, mais ce n'est plus nécessairement vrai pour les M_{x_i} pour $i \in \{1, \dots, r\}$, car la donnée des $(\psi_{x_i, \lambda}(M), N)$ ne détermine que $\mathbb{C}\{\{x\}\} \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} M_{x_i}$. Néanmoins, ces données suffisent à déterminer M_{x_i} si l'on suppose en outre M irréductible, hypothèse que l'on fera dans la suite, car dans ce cas M est extension minimale en chacune de ses singularités à distance finie.

La filtration de monodromie induite par tout endomorphisme nilpotent N nous permet de définir les espaces $P_\ell \psi_{x_i, \lambda}(M)$ de vecteurs primitifs, dont la dimension est le nombre de blocs de Jordan de taille $\ell + 1$ pour N agissant sur $\psi_{x_i, \lambda}(M)$. Pour un exposé complet sur la filtration de monodromie et ses propriétés, on peut se référer à [SS17, §3.1.a].

Définition 4.1.1 On définit les données numériques locales cycles proches par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{x_i, \lambda, \ell}(M) = \dim P_\ell \psi_{x_i, \lambda}(M) \\ \nu_{x_i, \lambda, \text{prim}}(M) = \sum_{\ell \geq 0} \nu_{x_i, \lambda, \ell}(M) \\ \nu_{x_i, \lambda}(M) = \dim \psi_{x_i, \lambda}(M) = \sum_{\ell \geq 0} (\ell + 1) \nu_{x_i, \lambda, \ell}(M). \end{array} \right.$$

On note $h(M) = \dim(\mathbb{C}(t) \otimes_{\mathbb{C}[t]} M)$ le rang générique de M et $h_{x_i}(M) = \dim(\mathbb{C}(\{x\}) \otimes_{\mathbb{C}[t]} M)$. Cette dernière quantité est indépendante du point x_i , et on a $h(M) = h_{x_i}(M) = \sum_{\lambda} \nu_{x_i, \lambda}(M)$.

Définition 4.1.2 On définit les données numériques locales cycles évanescents en posant $\mu_{x_i, \lambda, \ell}(M) = \nu_{x_i, \lambda, \ell}(M)$ sauf pour $i \neq r + 1$ et $\lambda = 1$ où l'on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{x_i, 1, \ell}(M) = \nu_{x_i, 1, \ell+1}(M) \\ \mu_{x_i, 1, \text{prim}}(M) = \sum_{\ell \geq 0} \mu_{x_i, 1, \ell}(M) = \nu_{x_i, 1, \text{prim}}(M) - \nu_{x_i, 1, 0}(M) \\ \mu_{x_i, 1}(M) = \sum_{\ell \geq 0} (\ell + 1) \mu_{x_i, 1, \ell}(M) = \nu_{x_i, 1}(M) - \nu_{x_i, 1, \text{prim}}(M). \end{array} \right.$$

Définition 4.1.3 Les données numériques locales de M sont :

- (i) le rang générique $h(M)$
- (ii) les données numériques locales cycles proches $\nu_{\infty, \lambda, \ell}(M)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$)
- (iii) les données numériques locales cycles évanescents $\mu_{x_i, \lambda, \ell}(M)$ ($i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$).

Remarque. En posant $\mu_{x_i}(M) = \sum_{\lambda} \mu_{x_i, \lambda}(M)$, on obtient les $\nu_{x_i, 1, \ell}(M)$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ par

$$\nu_{x_i, 1, \ell}(M) = \begin{cases} \mu_{x_i, 1, \ell-1}(M) & \text{si } \ell \geq 1 \\ h(M) - \mu_{x_i}(M) - \mu_{x_i, 1, \text{prim}}(M) & \text{si } \ell = 0. \end{cases}$$

Remarque. On a des définitions similaires si l'on considère des $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -modules. Pour garder une cohérence dans les notations, on posera dans ce cas $x_0 = 0$. La seule chose qui change dans la définition des données numériques locales est l'ajout des données numériques locales cycles proches en 0, à savoir les $\nu_{0, \lambda, \ell}(M)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$.

4.2 Comportement des données $\nu_{\infty, \lambda, \ell}$ par convolution intermédiaire additive

Dettweiler et Sabbah décrivent dans [DS13] le comportement des données numériques locales d'un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -module holonome régulier irréductible par le foncteur MC_{λ_0} . En particulier, ils obtiennent une formule (proposition 1.3.5, deuxième point) permettant d'exprimer les données numériques locales cycles proches à l'infini de $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$ en fonction de celles de M et de données globales. La preuve utilise la transformée de Fourier, qui malheureusement ne se comporte pas bien vis-à-vis de la filtration de Hodge, ce qui ne permettra pas de la généraliser dans la partie suivante lorsque l'on ajoutera la filtration de Hodge. Nous allons donc proposer une autre démonstration de ce résultat avec le théorème 4.2.5, fortement inspirée par la géométrie du problème, plus longue mais n'utilisant pas la transformée de Fourier.

Plan de la preuve. Détaillons les arguments successifs qui interviennent dans la preuve.

1. Nous commençons par écrire $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$ comme image directe intermédiaire par l'application somme. En changeant de coordonnées, on se ramène à une projection qu'on rend propre en projectivant.
2. Nous utilisons une propriété de commutation entre cycles proches et image directe propre, issue de la théorie des modules de Hodge de M. Saito (en oubliant provisoirement la filtration, mais en gardant en tête que cet argument se comportera bien quand on ajoutera la filtration au chapitre 6), afin de se ramener à l'étude locale d'un faisceau de cycles proches.
3. Pour être dans une situation de croisement normal et appliquer les résultats locaux afférents de la théorie des modules de Hodge, nous réalisons un éclatement.
4. Nous explicitons complètement le faisceau de cycles proches précédemment mis en évidence (lemme 4.2.4), et faisons un calcul topologique global en utilisant l'additivité de la caractéristique d'Euler pour démontrer le résultat voulu (théorème 4.2.5).

Notations et rappels. Commençons par préciser certaines notations que l'on utilisera dans tout le paragraphe 4.2 et que l'on réemploiera au chapitre 6. Soient $M \in \mathcal{C}$, $\gamma_0 \in]0, 1[$ et $\lambda_0 = \exp(-2i\pi\gamma_0)$. On note ∇ la connexion induite par M , \mathcal{M} le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension méromorphe de M à l'infini et \mathcal{M}^{\min} le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension minimale de M à l'infini. Le localisé (algébrique) à l'infini est noté M_∞ et l'extension minimale M_∞^{\min} . On note x la coordonnée sur \mathbb{A}^1 , de sorte qu'au voisinage de l'infini, on se place en coordonnée $x' = 1/x$. On reprend les notations de la définition 2.3.6 : soit A le sous-ensemble fini de $] -1, 0]$ tel que $(M_\infty)_\alpha := \bigcup_{k \geq 0} \ker(x' \partial_{x'} - \alpha)^k = 0$ pour $\alpha \notin A + \mathbb{Z}$. D'une part, on sait que M_∞ est déterminé par la donnée des $(M_\infty)_\alpha$ pour $\alpha \in] -1, 0]$ et que, d'autre part, M_∞^{\min} est déterminé par la donnée des $(M_\infty)_\alpha$ pour $\alpha \in] -1, 0[$ et du carquois d'extension minimale

$$(M_\infty)_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{can}} \\ \xleftarrow{\text{var}} \end{array} (M_\infty)_{-1}$$

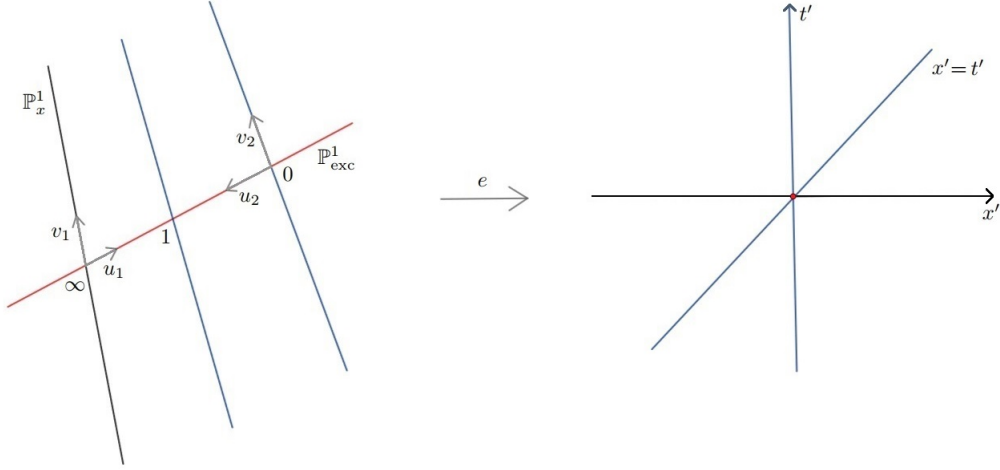
où $\text{can} = -\partial_{x'}$ et $\text{var} = 2i\pi x'$. Pour $\gamma \in] -1, 0]$ et $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$, on note $(M_\infty)^\lambda := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (M_\infty)_{\gamma+k}$.

Situation géométrique. Soit $s : \mathbb{A}_x^1 \times \mathbb{A}_y^1 \rightarrow \mathbb{A}_t^1$ l'application somme que l'on peut voir, quitte à changer de coordonnées, comme la projection $s : \mathbb{A}_x^1 \times \mathbb{A}_t^1 \rightarrow \mathbb{A}_t^1$ que l'on prolonge en $s : \mathbb{A}_x^1 \times \mathbb{P}_t^1 \rightarrow \mathbb{P}_t^1$. On peut rendre propre cette application en projectivant, en considérant $\tilde{s} : \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_t^1 \rightarrow \mathbb{P}_t^1$. Les inclusions $i : \mathbb{A}_t^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_t^1$ et $i' : \mathbb{A}_x^1 \times \mathbb{A}_t^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_t^1$ vérifient alors $\tilde{s} \circ i' = i \circ s$. En notant $M_{\lambda_0} = i'_+(M \boxtimes \mathcal{L}_{\lambda_0})$ et $\mathcal{M}_{\lambda_0} = (M_{\lambda_0})_{\min(\{\infty\} \times \mathbb{P}_t^1)}$, un raisonnement similaire à celui de la proposition 1.1.10 de [DS13] donne

$$\text{MC}_{\lambda_0}(M) = i'^+ \tilde{s}_+ \mathcal{M}_{\lambda_0}.$$

Précisons dès maintenant la situation géométrique qui nous intéressera dans la suite. On éclate le point (∞, ∞) dans $\mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_t^1$. On note e l'application d'éclatement, X l'éclaté, $j : \mathbb{A}_x^1 \times \mathbb{P}_t^1 \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle.

On munit X des deux cartes usuelles, l'une donnée par les coordonnées $(u_1, v_1) \mapsto (t' = u_1 v_1, x' = v_1)$ et l'autre par $(u_2, v_2) \mapsto (t' = v_2, x' = u_2 v_2)$. On note \mathbb{P}_x^1 le transformé strict par e de la droite $\{t' = 0\}$ et $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1 = e^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel. On note également $0 \in \mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ le point donné par $u_2 = 0$, $1 \in \mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ le point donné par $u_2 = 1$ et $\infty \in \mathbb{P}_x^1 \cap \mathbb{P}_{\text{exc}}^1$. La situation géométrique est représentée par le schéma suivant :



Explicitation de M_{λ_0} avec les coordonnées. En écrivant les coordonnées sur $\mathbb{A}_x^1 \times \mathbb{A}_t^1$, on a

$$M \boxtimes \mathcal{L}_{\lambda_0} = M[t] \otimes \left(\mathbb{C}[x, t, (t-x)^{-1}], d_{(x,t)} + \gamma_0 \frac{d(t-x)}{t-x} \right) = \left(M[t, (t-x)^{-1}], \nabla_{(x,t)} + \gamma_0 \frac{d(t-x)}{t-x} \right).$$

En écrivant les coordonnées sur $\mathbb{P}_x^1 \times \mathbb{P}_t^1$ au voisinage de (∞, ∞) en posant $x' = 1/x$ et $t' = 1/t$, on a

$$M_{\lambda_0} = M_{\infty}[t', t'^{-1}] \otimes \left(\mathbb{C}[x', x'^{-1}, t', t'^{-1}, (x'-t')^{-1}], d_{(x',t')} + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} - \frac{dt'}{t'} + \frac{d(x'-t')}{x'-t'} \right) \right),$$

ce qui donne

$$M_{\lambda_0} = \left(M_{\infty}[t', t'^{-1}, (x'-t')^{-1}], \nabla_{(x',t')} + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} - \frac{dt'}{t'} + \frac{d(x'-t')}{x'-t'} \right) \right).$$

Notations 4.2.1 Précisons les notations qu'on utilisera dans la suite. On rappelle que $M_{\lambda_0} = i'_+(M \boxtimes \mathcal{L}_{\lambda_0})$ et $\mathcal{M}_{\lambda_0} = (M_{\lambda_0})_{\min(\{\infty\} \times \mathbb{P}_t^1)}$. On note $N_{\lambda_0} = e^+ M_{\lambda_0}$, $\mathcal{N}_{\lambda_0} = (N_{\lambda_0})_{\min(x' \circ e=0)}$ et $T = \psi_{t' \circ e, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$.

Lemme 4.2.2 On a $\mathcal{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}] = e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$.

Par définition de l'extension minimale, \mathcal{N}_{λ_0} est l'image du morphisme $j_{\dagger} j^+ N_{\lambda_0} \rightarrow j_+ j^+ N_{\lambda_0}$. Pour $i \neq 0$, on sait que $H^i e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}$ est supporté en (∞, ∞) , d'où $H^i e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}] = 0$. Par conséquent, $e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ est concentré en degré 0. De même, le noyau de $H^0 e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0} \rightarrow M_{\lambda_0}$ est supporté en (∞, ∞) , d'où il vient que $e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ est un sous-module de M_{λ_0} .

On a $e_+ j_+ j^+ N_{\lambda_0} = (e \circ j)_+(e \circ j)^+ M_{\lambda_0}$ et, comme e est propre, on peut écrire que $e_+ j_{\dagger} j^+ N_{\lambda_0} = e_{\dagger} j_{\dagger} j^+ N_{\lambda_0} = (e \circ j)_{\dagger} (e \circ j)^+ M_{\lambda_0}$. Ainsi, $\mathcal{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ est l'image du morphisme

$$e_+ j_{\dagger} j^+ N_{\lambda_0}[t'^{-1}] \rightarrow e_+ j_+ j^+ N_{\lambda_0}[t'^{-1}].$$

En dehors de (∞, ∞) , $\mathcal{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ et $e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ sont des sous-modules de M_{λ_0} qui sont isomorphes. Maintenant on peut considérer l'intersection de ces deux sous-modules de M_{λ_0} , avec deux morphismes de l'intersection vers chacun d'entre eux. Le noyau et le conoyau de ces deux morphismes sont a priori supportés en (∞, ∞) , mais comme t' est inversible, ils sont nuls. On en déduit que $\mathcal{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ et $e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ sont isomorphes. \square

On fixe maintenant dans toute la suite $\gamma \in]-1, 0]$ et $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$. On s'intéresse aux cycles proches de $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$ au voisinage de ∞ . Comme \tilde{s} et e sont propres, le foncteur des cycles proches est compatible avec $(\tilde{s} \circ e)_+$ (proposition 3.3.17 de [Sai88]), et par conséquent on a l'identité suivante :

Proposition 4.2.3 $\psi_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \psi_{t', \lambda}(\tilde{s}_+ \mathcal{M}_{\lambda_0}) = \psi_{t', \lambda}(\tilde{s}_+ e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}) = \tilde{s}_+ e_+ T$.

Il est important pour la suite d'avoir une bonne compréhension de T et de son endomorphisme nilpotent. On a le lemme suivant :

Lemme 4.2.4 (1) Pour $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$, T est supporté sur $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et donné par

$$\left((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0} [(x' - 1)^{-1}], \nabla + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right)$$

dans la carte $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1 \setminus \{\infty\}$ (munie de la coordonnée x') et étendu méromorphiquement à l'infini. L'action de l'endomorphisme nilpotent est donné par l'action de la partie nilpotente de $x' \partial_{x'} - (\gamma + \gamma_0)$.

(2) Pour $\lambda = 1$, T est supporté sur $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et donné par

$$\left((M_{\infty})^{\lambda_0} [(x' - 1)^{-1}], \nabla + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right)_{\min(\{0\})}$$

dans la carte $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1 \setminus \{\infty\}$ et étendu méromorphiquement à l'infini. L'action de l'endomorphisme nilpotent est donné par l'action de la partie nilpotente de $x' \partial_{x'} - \gamma_0$.

(3) Pour $\lambda = \overline{\lambda_0}$, T est supporté sur $\mathbb{P}_x^1 \cup \mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et on a une suite exacte $0 \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow T_1 \rightarrow 0$ où

• T_0 est supporté sur $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et donné par

$$\left((M_{\infty})^1 [(x' - 1)^{-1}], \nabla + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right)$$

dans la carte $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1 \setminus \{\infty\}$ et étendu par zéro à l'infini. L'action de l'endomorphisme nilpotent est donné par l'action de la partie nilpotente de $x' \partial_{x'}$.

• $T_1 = \mathcal{M}$ est supporté par \mathbb{P}_x^1 . L'action de l'endomorphisme nilpotent est donné par 0.

Preuve. On raisonnera tour à tour :

- dans la carte (u_2, v_2) , que l'on appelle *carte 1*
- au voisinage de l'axe $u_1 = 0$ privé du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$, que l'on appelle *carte 2*
- au voisinage du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$, que l'on appelle *carte 3*.

Carte 1. Commençons par raisonner dans la carte (u_2, v_2) . On a la décomposition

$$e^+ M_{\infty} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{R}} (e^+ M_{\infty})_{\alpha},$$

où $(e^+ M_{\infty})_{\alpha} = \bigcup_{k \geq 0} \ker(v_2 \partial_{v_2} - \alpha)^k = 0$ est un $\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}] \langle \partial_{u_2} \rangle$ -module muni d'une action de $v_2 \partial_{v_2} - \alpha$.

Comme

$$\mathcal{L}_{\lambda_0} = \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, v_2, v_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} - \frac{dv_2}{v_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right),$$

on en déduit que la décomposition de N_{λ_0} est donnée par

$$(N_{\lambda_0})_{\gamma} = (e^+ M_{\infty})_{\gamma + \gamma_0} \otimes \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right).$$

En outre, l'action de $v_2 \partial_{v_2} - \gamma$ sur $(N_{\lambda_0})_{\gamma}$ s'identifie à l'action de $x' \partial_{x'} - (\gamma + \gamma_0)$ sur $(M_{\infty})_{\gamma + \gamma_0}$.

Dans la carte (u_2, v_2) , on a $\mathcal{N}_{\lambda_0} = (N_{\lambda_0})_{\min(\{u_2 v_2 = 0\})}$ et $T = \psi_{t' \circ e, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0} = \psi_{v_2, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$. En remarquant maintenant que $\psi_{v_2, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0} = \psi_{v_2, \lambda} ((N_{\lambda_0})_{\min(\{u_2 = 0\})})$, le problème se réduit à l'étude de $(N_{\lambda_0})_{\min(\{u_2 = 0\})}$. Le calcul ci-dessus montre que $((N_{\lambda_0})_{\min(\{u_2 = 0\})})_{\gamma}$ ne diffère de $(N_{\lambda_0})_{\gamma}$ que pour $\gamma \in \mathbb{Z}$ où intervient en plus un carquois d'extension minimale. On en conclut que

$$\psi_{v_2, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0} = \begin{cases} \left((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0} [(x' - 1)^{-1}], \nabla + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \left((M_{\infty})^{\lambda_0} [(x' - 1)^{-1}], \nabla + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right)_{\min(\{0\})} & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

Carte 2. Raisonnons maintenant dans la carte (u_1, v_1) au voisinage de l'axe $u_1 = 0$ privé du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$. Il est plus simple dans cette situation de raisonner dans la carte (x, t') . Comme $t - x = (1 - xt')/t'$, on a

$$M_{\lambda_0} = M[t', t'^{-1}] \otimes \left(\mathbb{C}[x, t', t'^{-1}, (1 - xt')^{-1}], d_{(x, t')} + \gamma_0 \left(\frac{d(1 - xt')}{1 - xt'} - \frac{dt'}{t'} \right) \right),$$

d'où

$$M_{\lambda_0} = \left(M[t', t'^{-1}, (1 - xt')^{-1}], \nabla_{(x, t')} + \gamma_0 \left(\frac{d(1 - xt')}{1 - xt'} - \frac{dt'}{t'} \right) \right).$$

Dans la carte (x, t') , il n'y a aucune extension minimale à considérer, i.e. $\mathcal{M}_{\lambda_0} = M_{\lambda_0}$. Notons maintenant $V^{\bullet} M_{\lambda_0}$ la V -filtration par rapport à t' , on a alors $\psi_{t', \lambda} \mathcal{M}_{\lambda_0} = \text{gr}_{V}^{\gamma} M_{\lambda_0}$. L'expression de la connexion obtenue ci-dessus montre que $\text{gr}_{V}^{\gamma} M_{\lambda_0}$ est nul sauf pour $\gamma = -\gamma_0$ pour lequel $\text{gr}_{V}^{\gamma} M_{\lambda_0} = M$.

En conclusion, on a

$$\psi_{t', \lambda} \mathcal{M}_{\lambda_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \bar{\lambda}_0 \\ M & \text{si } \lambda = \bar{\lambda}_0, \end{cases}$$

muni dans le cas $\lambda = \bar{\lambda}_0$ de l'action de la partie nilpotente de $x \partial_x + \gamma_0$.

Carte 3. Raisonnons enfin au voisinage du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$.

La connexion sur $M_{\infty}[t', t'^{-1}]$ étant donnée par $\nabla_{(x', t')} = d_{(x', t')} + B dx'/x'$ où la matrice B est constante, celle sur $e^+ M_{\infty}[t', t'^{-1}] = M_{\infty}[u_1, u_1^{-1}]$ est donc donnée par $\nabla_{(u_1, v_1)} = d_{(u_1, v_1)} + B dv_1/v_1$. On a alors

$$\begin{aligned} N_{\lambda_0} &= M_{\infty}[u_1, u_1^{-1}] \otimes \left(\mathbb{C}[u_1, u_1^{-1}, v_1, v_1^{-1}, (u_1 - 1)^{-1}], d_{(u_1, v_1)} + \gamma_0 \left(-\frac{du_1}{u_1} - \frac{dv_1}{v_1} + \frac{du_1}{u_1 - 1} \right) \right) \\ &= \left(M_{\infty}[u_1, u_1^{-1}, (u_1 - 1)^{-1}], d_{(u_1, v_1)} + \gamma_0 \left(-\frac{du_1}{u_1} + \frac{du_1}{u_1 - 1} \right) + (B - \gamma_0) \frac{dv_1}{v_1} \right). \end{aligned}$$

Pour R un $\mathbb{C}[u_1, v_1]\langle \partial_{u_1}, \partial_{v_1} \rangle$ -module et $\alpha \in \mathbb{R}^2$, on note, par analogie avec les notations de la définition 2.3.6, R_α le sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de R défini par

$$R_\alpha = \bigcup_{k_1 \geq 0} \ker(u_1 \partial_{u_1} - \alpha_1)^{k_1} \cap \bigcup_{k_2 \geq 0} \ker(v_1 \partial_{v_1} - \alpha_2)^{k_2}.$$

Pour $\alpha \in]-1, 0]^2$, on déduit de l'expression de N_{λ_0} que $(N_{\lambda_0})_\alpha \neq 0$ si et seulement si $\alpha = (-\gamma_0, \alpha - \gamma_0)$ avec $\alpha \in (A \bmod \mathbb{Z}) \cap]\gamma_0 - 1, \gamma_0]$. Précisément, $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, \alpha - \gamma_0}$ s'identifie à $(M_\infty)_\alpha$ avec actions de $u_1 \partial_{u_1} = -\gamma_0 \text{Id}$ et $v_1 \partial_{v_1} = x' \partial'_x - \gamma_0 \text{Id}$.

Dans la carte (u_1, v_1) où nous nous sommes placés, on a $\mathcal{N}_{\lambda_0} = (N_{\lambda_0})_{\min\{v_1=0\}}$ et $\psi_{t' \circ e, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0} = \psi_{g, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$ où $g = u_1 v_1$. La situation du calcul des cycles proches le long d'une application monomiale $g = u_1 v_1$ d'un $\mathbb{C}[u_1, v_1]\langle \partial_{u_1}, \partial_{v_1} \rangle$ -module cohérent à croisements normaux le long du diviseur $D = \{u_1 v_1 = 0\}$ est traitée dans le chapitre 11.3 de [SS17], détaillons-là dans le cas présent. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_g} & X \times \mathbb{C}_z \\ & \searrow g & \downarrow p_2 \\ & & \mathbb{C}_z \end{array}$$

et $(i_g)_+ \mathcal{N}_{\lambda_0} = \mathcal{N}_{\lambda_0}[\partial_z] = \bigoplus_{k \geq 0} (\mathcal{N}_{\lambda_0} \otimes \partial_z^k)$. C'est un $\mathbb{C}[u_1, v_1, z]\langle \partial_{u_1}, \partial_{v_1}, \partial_z \rangle$ -module à gauche muni des actions suivantes :

- (i) action de $\mathbb{C}[u_1, v_1]$: $f(u_1, v_1) \cdot (m \otimes \partial_z^k) = (f(u_1, v_1)m) \otimes \partial_z^k$.
- (ii) action de ∂_z : $\partial_z(m \otimes \partial_z^k) = m \otimes \partial_z^{k+1}$.
- (iii) action de ∂_{u_1} : $\partial_{u_1}(m \otimes \partial_z^k) = (\partial_{u_1} m) \otimes \partial_z^k - v_1 m \otimes \partial_z^{k+1}$.
- (iv) action de ∂_{v_1} : $\partial_{v_1}(m \otimes \partial_z^k) = (\partial_{v_1} m) \otimes \partial_z^k - u_1 m \otimes \partial_z^{k+1}$.
- (v) action de z : $z \cdot (m \otimes \partial_z^k) = gm \otimes \partial_z^k - km \otimes \partial_z^{k-1}$.

Pour distinguer l'action de $u_1 \partial_{u_1}$ (resp. $v_1 \partial_{v_1}$) trivialement induite par \mathcal{N}_{λ_0} et l'action de $u_1 \partial_{u_1}$ (resp. $v_1 \partial_{v_1}$) sur $\psi_{g, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$, on note S_u (resp. S_v) la première, à savoir $S_u(m \otimes \partial_z^k) = (u_1 \partial_{u_1} m) \otimes \partial_z^k$ (resp. $S_v(m \otimes \partial_z^k) = (v_1 \partial_{v_1} m) \otimes \partial_z^k$). En notant $E = z \partial_z$, on a

$$u_1 \partial_{u_1}(m \otimes \partial_z^k) = (S_u - E - (k+1))(m \otimes \partial_z^k)$$

et

$$v_1 \partial_{v_1}(m \otimes \partial_z^k) = (S_v - E - (k+1))(m \otimes \partial_z^k).$$

Notons maintenant $V^\bullet(\mathcal{N}_{\lambda_0}[\partial_z])$ la V -filtration par rapport à z , on a alors $T = \psi_{g, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0} = \text{gr}_V^\gamma(\mathcal{N}_{\lambda_0}[\partial_z])$. Si l'on regarde maintenant les décompositions $\mathcal{N}_{\lambda_0}^{\text{alg}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{R}^2} (\mathcal{N}_{\lambda_0})_\alpha$ et $T^{\text{alg}} = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{R}^2} T_\beta$, un raisonnement similaire à celui fait en 11.3.11 dans [SS17] (à gauche ici) montre que les seuls β qui interviennent sont ceux qui vérifient $\alpha = \beta + (\gamma + k + 1)(1, 1)$ pour un certain α apparaissant dans la décomposition de $\mathcal{N}_{\lambda_0}^{\text{alg}}$. Cette identité prouve en particulier qu'on a nécessairement $\alpha_2 > -1$ pour $\beta \geq (-1, -1)$, ce qui signifie que le fait d'avoir une extension minimale par rapport à $\{v_1 = 0\}$ ne joue ici aucun rôle. Autrement dit, on pourra identifier dans cette partie \mathcal{N}_{λ_0} et N_{λ_0} .

Le corollaire 11.3.16 de [SS17] donne les expressions suivantes de T_β pour $\beta \geq (-1, -1)$:

$$T_{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta_1 \neq -1 \text{ et } \beta_2 \neq -1 \\ \text{coker}(S_u - E \in \text{End}((N_{\lambda_0})_{\gamma, \beta_2 + \gamma + 1}[E])) & \text{si } \beta_1 = -1 \text{ et } \beta_2 \neq -1 \\ \text{coker}(S_v - E \in \text{End}((N_{\lambda_0})_{\beta_1 + \gamma + 1, \gamma}[E])) & \text{si } \beta_1 \neq -1 \text{ et } \beta_2 = -1 \\ \text{coker}((S_u - E)(S_v - E) \in \text{End}((N_{\lambda_0})_{\gamma, \gamma}[E])) & \text{si } \beta = (-1, -1). \end{cases}$$

Examinons les différents cas pour $\beta \in [-1, 0]^2$:

- (i) Pour $\beta_2 \neq -1$, on a $T_{(-1, \beta_2)} \neq 0$ si et seulement si $\gamma = -\gamma_0$ et $\beta_2 \in A$.
- (ii) Pour $\beta_1 \neq -1$, on a $T_{(\beta_1, -1)} \neq 0$ si et seulement si $\gamma = \alpha - \gamma_0$ avec $\alpha \in (A \bmod \mathbb{Z}) \cap]\gamma_0 - 1, \gamma_0]$ et $\beta_1 = -\alpha \bmod \mathbb{Z}$.
- (iii) $T_{(-1, -1)} \neq 0$ si et seulement si $\gamma = -\gamma_0$ et $0 \in A$.

On en déduit que :

(Cas 1) Si $\gamma \neq -\gamma_0$ alors T est supporté par $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et est déterminé par la seule donnée de

$$\text{coker}(S_v - E \in \text{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, \gamma}[E]))$$

muni des actions de $u_1 \partial_{u_1} + \gamma + \gamma_0$ et de $E - \gamma$, que l'on peut identifier à $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, \gamma}$ où l'action de E s'identifie à S_v . On en déduit que T est déterminé par la donnée de $(M_{\infty})_{\gamma + \gamma_0}$ où :

- (i) l'action de $u_1 \partial_{u_1} + \gamma + \gamma_0$ s'identifie à l'action de $-(x' \partial_{x'} - (\gamma + \gamma_0))$ car

$$u_1 \partial_{u_1} + \gamma + \gamma_0 = S_u - E + \gamma + \gamma_0 = \underbrace{(S_u + \gamma_0)}_{=0} - (S_v - \gamma) = -(x' \partial_{x'} - (\gamma + \gamma_0)).$$

- (ii) l'action de $E - \gamma$ s'identifie à l'action de $x' \partial_{x'} - (\gamma + \gamma_0)$.

On en conclut donc que $T = (M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}$, muni des actions ci-dessus.

(Cas 2) Si $\gamma = -\gamma_0$ alors T est déterminé :

- d'une part sur \mathbb{P}_x^1 par la donnée pour tout $\alpha \in A \cap]\gamma_0 - 1, \gamma_0] \setminus \{0\}$ de

$$\text{coker}(S_u - E \in \text{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, \alpha - \gamma_0}[E]))$$

muni des actions de $v_1 \partial_{v_1} - \alpha$ et de $E + \gamma_0$, que l'on peut identifier à $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, \alpha - \gamma_0}$ où l'action de E s'identifie à S_u . On identifie ce dernier à $(M_{\infty})_{\alpha}$ où :

- (i) l'action de $v_1 \partial_{v_1} - \alpha$ s'identifie à l'action de $x' \partial_{x'} - \alpha$ car

$$v_1 \partial_{v_1} - \alpha = S_v - E - \alpha = x' \partial_{x'} - \gamma_0 - \alpha + \gamma_0 = x' \partial_{x'} - \alpha.$$

- (ii) l'action de $E + \gamma_0$ s'identifie à l'action par 0.

- d'autre part par le bicarquois

$$\begin{array}{ccc} T_{(-1, -1)} & \xrightleftharpoons[\partial_{v_1}]{v_1} & T_{(-1, 0)} \\ \partial_{u_1} \uparrow & & \downarrow u_1 \\ & & T_{(0, -1)} \end{array}$$

Maintenant, on peut supposer, quitte à faire agir u_1^{-1} sur $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0+1, -\gamma_0}[E]$ et v_1^{-1} sur $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, -\gamma_0+1}$, que $T_{(-1, -1)}$, $T_{(0, -1)}$ et $T_{(-1, 0)}$ sont tous les trois des conoyaux d'applications de $\text{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, -\gamma_0}[E])$.

En notant $C_{uv} = \text{coker}(S_u - E)(S_v - E)$, $C_u = \text{coker}(S_u - E)$ et $C_v = \text{coker}(S_v - E)$, le bicarquois précédent s'identifie au bicarquois

$$\begin{array}{ccc} & C_{uv} & \xrightleftharpoons[\leftarrow]{\varphi_v} C_u \\ & \uparrow \varphi_u & \\ S_u - E & \downarrow & \\ & C_v & \end{array}$$

où $\varphi_u : C_{uv} \rightarrow C_v$ est induit par l'inclusion $\text{im}(S_u - E)(S_v - E) \subset \text{im}(S_v - E)$, de même pour φ_v .

Comme $S_u - E \in \text{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, -\gamma_0}[E])$ est injective (car S_u s'identifie sur $(M_\infty)_0$ à $-\gamma_0 \text{Id}$) et que

$$\text{im}(S_u - E : C_v \rightarrow C_{uv}) = \frac{\text{im}(S_u - E)}{\text{im}(S_u - E)(S_v - E)} = \ker \varphi_v,$$

il en résulte que l'on a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow C_v \rightarrow C_{uv} \rightarrow C_u \rightarrow 0.$$

De cette suite exacte, on déduit la suite exacte de bicarquois suivante :

$$0 \longrightarrow \begin{array}{ccc} C_v & \xrightleftharpoons[\leftarrow]{\text{Id}} & 0 \\ \text{Id} \uparrow & & \downarrow S_u - E \\ & C_v & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} C_{uv} & \xrightleftharpoons[\leftarrow]{\varphi_v} & C_u \\ S_u - E \uparrow & & \downarrow \varphi_u \\ & C_v & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} C_u & \xrightleftharpoons[\leftarrow]{\text{Id}} & C_u \\ \uparrow & & \downarrow \\ & 0 & \end{array} \longrightarrow 0$$

- Le bicarquois de gauche est un carquois d'extension par zéro supporté par $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et s'identifie à $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, -\gamma_0}$ où l'action de $u_1 \partial_{u_1}$ s'identifie à l'action de $S_u - S_v$, et l'action de $E + \gamma_0$ à $S_v + \gamma_0$.
- Le bicarquois de droite est quant à lui un carquois d'extension méromorphe supporté par \mathbb{P}_x^1 et s'identifie à $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0, -\gamma_0}$ où l'action de $v_1 \partial_{v_1}$ s'identifie à l'action de $S_v - S_u$, et l'action de $E + \gamma_0$ à 0.

Explicitons maintenant cette suite exacte de bicarquois en fonction de $(M_\infty)_0$. On a les identifications suivantes :

- (1) C_u s'identifie à $(M_\infty)_0$ avec action de $E + \gamma_0 = 0$.
- (2) C_v s'identifie à $(M_\infty)_0$ avec action de $E + \gamma_0 = x' \partial_{x'}$.
- (3) C_{uv} s'identifie à $((M_\infty)_0)^2$ avec action de

$$E + \gamma_0 = \left(\begin{array}{c|c} \gamma_0 \text{Id} & \gamma_0(x' \partial_{x'} - \gamma_0 \text{Id}) \\ \hline \text{Id} & x' \partial_{x'} - \gamma_0 \text{Id} \end{array} \right).$$

Ainsi le bicarquois précédent devient

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (M_\infty)_0 & \xrightleftharpoons{\quad} & 0 & \longrightarrow & ((M_\infty)_0)^2 & \xrightleftharpoons[p_v]{p_u} & (M_\infty)_0 & \longrightarrow & (M_\infty)_0 & \xrightleftharpoons[x'\partial_{x'}]{\text{Id}} & (M_\infty)_0 & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow \text{Id} \downarrow -x'\partial_{x'} & & & & \uparrow (-\gamma_0 \text{Id}, -\text{Id}) \downarrow p_u & & & & \uparrow & & \downarrow & & & \\
& & (M_\infty)_0 & & & & (M_\infty)_0 & & & & & & 0 & & &
\end{array}$$

où $p_u = p_1 + (x'\partial_{x'} - \gamma_0)p_2$ et $p_v = p_1 - \gamma_0 p_2$ avec p_1, p_2 les projections sur les première et seconde composantes.

Le carquois de gauche s'identifie à $(M_\infty)_0$ où l'action de $u_1\partial_{u_1}$ s'identifie à l'action de $-x'\partial_{x'}$, et l'action de $E + \gamma_0$ à $x'\partial_{x'}$. Le carquois de droite quant à lui s'identifie à $(M_\infty)_0$ où l'action de $v_1\partial_{v_1}$ s'identifie à l'action de $x'\partial_{x'}$, et l'action de $E + \gamma_0$ à 0.

On en conclut que, dans la carte 3, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow T_1 \rightarrow 0$$

avec $T_0 = (M_\infty)^1$ supporté par $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et $T_1 = M_\infty$ supporté par \mathbb{P}_x^1 , munis des actions précédemment décrites.

En reprenant les expressions obtenues pour les différentes valeurs de λ dans chacune des trois cartes, on obtient bien par recollement les résultats annoncés du lemme. \square

Maintenant que T est parfaitement explicité, ainsi que les actions de l'endomorphisme nilpotent, on est en mesure de démontrer le théorème qui nous intéresse :

Théorème 4.2.5 *On a les données suivantes pour $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$:*

$$(1) \quad \nu_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \bar{\lambda}_0 \\ \nu_{\infty, \lambda_0}(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1}(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}(M) + \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}) & \text{si } \lambda = \bar{\lambda}_0. \end{cases}$$

$$(2) \quad \nu_{\infty, \lambda, \ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0, \ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \bar{\lambda}_0 \\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1, \ell-1}(M) & \text{si } \lambda = \bar{\lambda}_0, \ell \geq 1 \\ \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}) & \text{si } \lambda = \bar{\lambda}_0, \ell = 0. \end{cases}$$

Preuve. Pour démontrer la partie (1) du théorème, nous allons faire un calcul topologique global en utilisant l'additivité de la caractéristique d'Euler. On note $\mathcal{F} = \text{DR}(T)$, complexe constructible sur $Y = \mathbb{P}_x^1 \cup \mathbb{P}_{\text{exc}}^1$. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut par définition

$$\chi(Y, \mathcal{F}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim \mathbf{H}^i(Y, \mathcal{F}) = \dim \mathbf{H}^0(Y, \mathcal{F}) - \dim \mathbf{H}^1(Y, \mathcal{F}) + \dim \mathbf{H}^2(Y, \mathcal{F}).$$

Comme $\mathcal{F} = j_* \mathcal{V}$ où \mathcal{V} est un système local irréductible non constant, on a $\mathbf{H}^m(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = H^m(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{V}) = 0$ pour $m \neq 1$. D'après la proposition 4.2.3, on a $\psi_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \tilde{s}_+ e_+ T$, on en déduit alors que

$$\nu_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \mathbf{H}^1(Y, \mathcal{F}) = -\chi(Y, \mathcal{F}).$$

Par la formule d'Euler-Poincaré, on a

$$\chi(Y, \mathcal{F}) = \chi(\mathbb{A}_x^1, \mathcal{F}) + \chi(U) \cdot \text{rg}(\mathcal{F}|_U) + \chi(0, \mathcal{F}) + \chi(1, \mathcal{F}) + \chi(\infty, \mathcal{F}).$$

Le lemme précédent montre que $\text{rg}(\mathcal{F}|_U) = \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}(M)$ quelle que soit la valeur de λ , il reste donc à regarder les termes restants en fonction de λ .

(Cas 1) Si $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$, on a $T = 0$ sur \mathbb{A}_x^1 donc $\chi(\mathbb{A}_x^1, \mathcal{F}) = 0$. De plus, on a une connexion méromorphe au voisinage des trois points 0, 1 et ∞ , ainsi en notant T la monodromie autour de l'un des trois points, on a $\dim \ker(T - \text{Id}) = \dim \text{coker}(T - \text{Id})$ ce qui donne $\chi(0, \mathcal{F}) = \chi(1, \mathcal{F}) = \chi(\infty, \mathcal{F}) = 0$ et par suite

$$\chi(Y, \mathcal{F}) = \chi(U) \cdot \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}(M) = -\nu_{\infty, \lambda \lambda_0}(M).$$

(Cas 2) Si $\lambda = 1$, on a comme précédemment $\chi(\mathbb{A}_x^1, \mathcal{F}) = 0$ et $\chi(1, \mathcal{F}) = \chi(\infty, \mathcal{F}) = 0$. Au voisinage de 0, on se trouve dans le cas d'une extension minimale. Comme on a déjà pu le voir en proposition 3.1.2, on a $\chi(0, \mathcal{F}) = \dim \ker(T^0 - \text{Id}) = \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}(M)$ en notant T^0 la monodromie en 0. Finalement, on a

$$\chi(Y, \mathcal{F}) = -\nu_{\infty, \lambda_0}(M) + \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}(M).$$

(Cas 3) Si $\lambda = \overline{\lambda_0}$, on reprend la suite exacte

$$0 \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow T_1 \rightarrow 0$$

et on obtient au niveau des caractéristiques d'Euler-Poincaré que

$$\chi(Y, \text{DR}(T)) = \chi(Y, \text{DR}(T_0)) + \chi(Y, \text{DR}(T_1)).$$

Le cas de T_0 se traite comme au cas 1, ce qui donne $\chi(Y, \text{DR}(T_0)) = -\nu_{\infty, 1}(M)$. Maintenant, comme $T_1 = M_{\infty}$ est supporté par \mathbb{P}_x^1 et que $\chi(\infty, \text{DR}(T_1)) = 0$, on a alors

$$\chi(Y, \text{DR}(T_1)) = \chi(\mathbb{A}_x^1, \text{DR}(T_1)).$$

Or, d'après le lemme 1.3.6 de [DS13] (plus précisément sa preuve), on sait que

$$\dim H^1(\mathbb{A}_x^1, \text{DR}(T_1)) = \dim H^1(\mathbb{A}_x^1, \text{DR}(M)) = \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}(M),$$

d'où

$$\chi(\mathbb{A}_x^1, \text{DR}(T_1)) = -\dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}) - \nu_{\infty, 1, \text{prim}}(M).$$

Finalement, on obtient

$$\chi(Y, \mathcal{F}) = -\nu_{\infty,1}(M) - \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) - \nu_{\infty,1,\text{prim}}(M).$$

En conclusion, on obtient bien la partie (1) du théorème :

$$\nu_{\infty,\lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = -\chi(Y, \mathcal{F}) = \begin{cases} \nu_{\infty,\lambda\lambda_0}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \nu_{\infty,\lambda_0}(M) - \nu_{\infty,\lambda_0,\text{prim}}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty,1}(M) + \nu_{\infty,1,\text{prim}}(M) + \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}. \end{cases}$$

Pour démontrer la partie (2) du théorème, il nous faut ajouter la filtration de monodromie. Pour cela, commençons par un lemme.

Lemme 4.2.6 *Soit (K^\bullet, M_\bullet) un complexe filtré borné de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie, où M est supposée exhaustive. La filtration M_\bullet sur K^\bullet induit une filtration W_\bullet sur la cohomologie de K^\bullet donnée par $W_p H^q(K^\bullet) := \text{Im}(H^q(M_p K^\bullet) \rightarrow H^q(K^\bullet))$. On a alors*

$$\chi(\text{gr}_p^M K^\bullet) = \chi(\text{gr}_p^W H^\bullet(K^\bullet)).$$

Preuve. On associe au complexe filtré la suite spectrale $(E_r)_{r \geq 0}$ définie par

$$E_0^{p,q} = \text{gr}_p^M K^{p+q} \quad \text{et} \quad E_{r+1}^{p,q} = H^*(E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r,q-r+1})$$

où les différentielles d_r sont induites par la différentielle d de K^\bullet . La suite spectrale converge vers

$$E_\infty^{p,q} = \text{gr}_p^W H^{p+q}(K^\bullet).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \chi(H^\bullet(K^\bullet)) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim H^i(K^\bullet) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i (\dim \ker(d^i) - \dim \text{Im}(d^{i-1})) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i (\dim \ker(d^i) + \dim \text{Im}(d^i)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim K^i = \chi(K^\bullet), \end{aligned}$$

dont on déduit l'égalité des caractéristiques d'Euler des différentes pages de la suite spectrale. Finalement, on a $\chi(\text{gr}_p^M K^\bullet) = \chi(\text{gr}_p^W H^\bullet(K^\bullet))$. \square

Dans le lemme 4.2.4, nous avons explicité les expressions de (T, N) où $T = \psi_{t'oe,\lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$ est muni de son endomorphisme nilpotent N . Pour rappel, on a

$$\psi_{\infty,\lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \psi_{t',\lambda}(\tilde{s}_+ e_+ \mathcal{N}_{\lambda_0}) = \tilde{s}_+ e_+ (\psi_{t'oe,\lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}) = \tilde{s}_+ e_+ T.$$

Posons $K^\bullet = \tilde{s}_+ e_+ T$ muni de la filtration de monodromie M_\bullet . D'après l'expression ci-dessus, le complexe K^\bullet n'a qu'un seul espace de cohomologie, propriété que l'on peut raffiner avec le lemme suivant :

Lemme 4.2.7 *On a $H^j(\text{gr}_\ell^M K^\bullet) = 0$ pour $j \neq 0$ et $\ell \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. (Cas 1) Si $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$, on sait que T est supporté par $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et localisé à l'infini. On peut alors voir T comme un $\mathbb{C}[x']\langle \partial_{x'} \rangle$ -module. On a alors

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}_{\text{exc}}^1, \text{DR}^{\text{an}}T) = (T \xrightarrow{\nabla_{\partial_{x'}}} T)$$

complexe dont seuls deux termes sont non nuls. On souhaite montrer que le complexe à deux termes

$$\text{gr}_{\ell}^M T \xrightarrow{\nabla_{\partial_{x'}}} \text{gr}_{\ell}^M T$$

a un noyau réduit à 0. Le lemme nous dit que

$$T = (M_{\infty})_{\gamma+\gamma_0}[x', x'^{-1}, (x'-1)^{-1}]$$

muni de la connexion

$$\nabla_{\partial_{x'}} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\gamma}{x'} \text{Id} + \frac{N}{x'} + \frac{\gamma_0}{x'-1} \text{Id}.$$

On en déduit que

$$\text{gr}_{\ell}^M T = (\text{gr}_{\ell}^M (M_{\infty})_{\gamma+\gamma_0})[x', x'^{-1}, (x'-1)^{-1}]$$

muni de la connexion

$$\nabla_{\partial_{x'}} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\gamma}{x'} \text{Id} + \frac{\gamma_0}{x'-1} \text{Id},$$

car N envoie le terme d'ordre ℓ dans le terme d'ordre $\ell - 2$.

Il suffit maintenant de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x'-1)^{-1}] &\longrightarrow \mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x'-1)^{-1}] \\ f &\longmapsto \nabla_{\partial_{x'}} f \end{aligned}$$

est injective. Pour cela, remarquons que sur tout domaine simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, les solutions de l'équation différentielle $\nabla_{\partial_{x'}} f = 0$ sont engendrées par la fonction (univaluée) $x'^{-\gamma}(x'-1)^{-\gamma_0}$. Comme γ et γ_0 ne sont pas entiers, ce n'est pas une fraction rationnelle à pôles en 0 et 1, ce qui conclut.

(Cas 2) Si $\lambda = 1$, la seule différence avec la situation précédente est l'extension minimale en 0. Notons

$$\tilde{T} = \left((M_{\infty})^{\lambda_0}, \tilde{\nabla}_{\partial_{x'}} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{N}{x'} \right)_{\min(\{0\})}$$

et

$$1_{\gamma_0} = \left(\mathbb{C}[x', (x'-1)^{-1}], \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\gamma_0}{x'-1} \text{Id} \right)$$

de sorte que $T = \tilde{T} \otimes 1_{\gamma_0}$ avec

$$\nabla_{\partial_{x'}}(m \otimes m') = \tilde{\nabla}_{\partial_{x'}}(m) \otimes m' + m \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\gamma_0}{x'-1} \text{Id} \right) m'.$$

Comme $\text{gr}_{\ell}^M T = \text{gr}_{\ell}^M \tilde{T} \otimes 1_{\gamma_0}$, on souhaite montrer que le complexe à deux termes

$$\text{gr}_{\ell}^M \tilde{T} \otimes 1_{\gamma_0} \xrightarrow{\nabla_{\partial_{x'}}} \text{gr}_{\ell}^M \tilde{T} \otimes 1_{\gamma_0}$$

a un noyau réduit à 0. Pour cela, remarquons que pour $m \in \text{gr}_{\ell}^M \tilde{T}$ et $m' = (x'-1)^{-k}$, on a

$$\nabla_{\partial_{x'}} \left(m \otimes \frac{1}{(x'-1)^k} \right) = \tilde{\nabla}_{\partial_{x'}}(m) \otimes \frac{1}{(x'-1)^k} - \frac{km}{(x'-1)^{k+1}} + \frac{\gamma_0 m}{(x'-1)^{k+1}}.$$

On déduit du fait que $\gamma_0 \notin \mathbb{Z}$ que $m \otimes m'$ a nécessairement un pôle en 1 d'ordre $k + 1$ si $m \neq 0$. Dès lors, un élément $m \otimes m'$ vérifiant $\nabla_{\partial_{x'}}(m \otimes m') = 0$ est tel que $m = 0$, ce qui conclut. Notons au passage que cette preuve n'utilise pas la propriété d'extension minimale en 0, elle redémontre donc de fait le cas 1.

(Cas 3) Si $\lambda = \overline{\lambda_0}$, on a une suite exacte $0 \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow T_1 \rightarrow 0$ où T_0 est supporté sur $\mathbb{P}_{\text{exc}}^1$ et T_1 est supporté par \mathbb{P}_x^1 . De manière équivalente, on peut raisonner sur les parties primitives plutôt que sur les gradués, ce que l'on va faire ici.

Le raisonnement fait dans le cas 1 s'applique de la même manière à $K_0^\bullet = \tilde{s}_+ e_+ T_0$, ce qui donne que les complexes $P_\ell K_0^\bullet$ sont concentrés en degré 0 pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Comme N est nul sur T_1 , on a $N(T) \subset T_0$. Montrons que l'on a en fait égalité. La difficulté se situant au voisinage de ∞ , reprenons la description en termes de bicarquois de T :

$$\begin{array}{ccc} ((M_\infty)_0)^2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{p_v} \\ \xleftarrow{(x'\partial_{x'} - \gamma_0 \text{Id}, -\text{Id})} \end{array} & (M_\infty)_0 \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ (-\gamma_0 \text{Id}, -\text{Id}) \\ \downarrow p_u \end{array} & & \\ (M_\infty)_0 & & \end{array}$$

Les deux termes extrémaux ne posant pas de problème, il s'agit de regarder l'action de $E + \gamma_0$ sur $((M_\infty)_0)^2$, donnée par la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} \gamma_0 \text{Id} & \gamma_0(x'\partial_{x'} - \gamma_0 \text{Id}) \\ \hline \text{Id} & x'\partial_{x'} - \gamma_0 \text{Id} \end{array} \right).$$

Le rang de cette matrice étant égal à la dimension de $(M_\infty)_0$, on en déduit que l'image de $((M_\infty)_0)^2$ est égale à $\{(\gamma_0 m, m) \in ((M_\infty)_0)^2 \mid m \in (M_\infty)_0\} \simeq (M_\infty)_0$. Un calcul montre maintenant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} ((M_\infty)_0)^2 & \xrightarrow{p_2 \circ (E + \gamma_0)} & (M_\infty)_0 \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ (-\gamma_0 \text{Id}, -\text{Id}) \\ \downarrow p_u \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Id} \\ \downarrow -x'\partial_{x'} \end{array} \\ (M_\infty)_0 & \xrightarrow{-x'\partial_{x'}} & (M_\infty)_0 \end{array}$$

commute, ainsi l'image par N du bicarquois représentant T donne bien le carquois représentant T_0 , autrement dit $N(T) = T_0$. On est alors dans la situation d'un carquois d'extension minimale

$$T_0 \begin{array}{c} \hookrightarrow \\ \xleftarrow{N} \end{array} T.$$

On déduit de la partie (f) du lemme 3.1.16 de [SS17] que $P_\ell T \simeq P_{\ell-1} T_0$ pour $\ell \geq 1$. Comme les complexes $P_\ell K_0^\bullet$ sont concentrés en degré 0 pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on en déduit que les complexes $P_\ell K^\bullet$ sont également concentrés en degré 0 pour tout $\ell \geq 1$. De plus, comme le complexe total K^\bullet est concentré en degré 0, le complexe $P_0 K^\bullet$ est également concentré en degré 0. Les gradués s'obtenant à partir des parties primitives, on a alors que les complexes $\text{gr}_\ell^M K^\bullet$ sont concentrés en degré 0. \square

Retour à la preuve du théorème. L'identité des caractéristiques d'Euler obtenues grâce au lemme 4.2.6 nous dit que les dimensions de $H^0(\mathrm{gr}_\ell^M K^\bullet)$ et de $\mathrm{gr}_\ell^W H^0(K^\bullet)$ sont égales pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrons que la filtration W_\bullet sur

$$H := H^0(K^\bullet) = \psi_{\infty, \lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))$$

coïncide avec la filtration de monodromie sur H : pour cela il suffit de vérifier que $N(W_\ell H) \subset W_{\ell-2} H$ et que N^j induit un isomorphisme de $\mathrm{gr}_j^W H$ dans $\mathrm{gr}_{-j}^W H$ pour tout $j \geq 1$ et d'utiliser le fait que ces deux propriétés caractérisent la filtration de monodromie.

Pour montrer ces deux propriétés, il suffit de revenir à la définition de la filtration W_\bullet :

$$W_\ell H = \mathrm{Im}(H^0(M_\ell K^\bullet) \rightarrow H).$$

Comme la filtration M_\bullet vérifie les deux propriétés ci-dessus, on en déduit qu'il en est de même pour la filtration W_\bullet .

Enfin comme la partie primitive d'ordre ℓ est donnée par le noyau de l'application induite par $N^{\ell+1}$ sur le gradué d'ordre ℓ à valeurs dans le gradué d'ordre $-\ell - 2$, on obtient des expressions aussi bien sur les gradués que sur les parties primitives. En particulier, tout ce qui précède montre que

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim P_\ell \psi_{\infty, \lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim H^0(P_\ell K^\bullet).$$

On en est donc amenés à calculer la dimension du conoyau de $P_\ell T \xrightarrow{\nabla_{\partial_{x'}}} P_\ell T$ dans chacun des trois cas. Pour cela, il est préférable de calculer la caractéristique d'Euler de $\mathcal{F}_\ell = \mathrm{DR}^{\mathrm{an}}(P_\ell T)$ sur $Y = \mathbb{P}_x^1 \cup \mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1$.

(Cas 1) Pour $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$, on sait que T est supporté sur $\mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1$ et est extension méromorphe en 0, 1 et ∞ . On en déduit que $P_\ell T$ vérifie également ces propriétés, d'où $\chi(0, \mathcal{F}_\ell) = \chi(1, \mathcal{F}_\ell) = \chi(\infty, \mathcal{F}_\ell) = 0$. On a alors

$$\chi(Y, \mathcal{F}_\ell) = \chi(\mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1, \mathcal{F}_\ell) = \chi(U) \cdot \nu_{\infty, \lambda \lambda_0, \ell}(M) = -\nu_{\infty, \lambda \lambda_0, \ell}(M).$$

(Cas 2) Pour $\lambda = 1$, on sait que T est supporté sur $\mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1$, mais à l'inverse du cas précédent est extension minimale en 0. On a toujours $\chi(1, \mathcal{F}_\ell) = \chi(\infty, \mathcal{F}_\ell) = 0$ et $\chi(U, \mathcal{F}_\ell) = -\nu_{\infty, \lambda_0, \ell}(M)$, il reste donc à calculer $\chi(0, \mathcal{F}_\ell)$. La donnée de \tilde{T} est équivalente à un carquois

$$(M_\infty)_{\gamma_0}[x'] \quad \rightleftarrows \quad N((M_\infty)_{\gamma_0})[\partial_{x'}].$$

où l'action de $\partial_{x'}$ sur le terme de gauche est donnée pour $m \in (M_\infty)_{\gamma_0}$ et $k \geq 1$ par

$$\partial_{x'}(mx'^k) = \partial_{x'} x'(mx'^{k-1}) = (N + \mathrm{Id})(mx'^{k-1}),$$

et de manière similaire pour l'action de x' sur le terme de droite.

En notant $H = (M_\infty)_{\gamma_0}$ et $G = N(H)$, on a $N : M_\ell H \rightarrow M_{\ell-1} G$ et on en déduit que $\mathrm{gr}_\ell^M \tilde{T}$ est donné par le carquois

$$(\mathrm{gr}_\ell^M H)[x'] \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \rightleftarrows \\ \xleftarrow{0} \end{array} \quad (\mathrm{gr}_\ell^M G)[\partial_{x'}].$$

En raisonnant de manière équivalente sur les parties primitives, on obtient

$$\chi(0, \mathcal{F}_\ell) = \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}(M).$$

Il en résulte que

$$\chi(Y, \mathcal{F}_\ell) = \chi(U, \mathcal{F}_\ell) + \chi(0, \mathcal{F}_\ell) = -\nu_{\infty, \lambda_0, \ell}(M) + \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}(M) = -\nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}(M).$$

(Cas 3) Pour $\lambda = \overline{\lambda_0}$, on a une suite exacte $0 \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow T_1 \rightarrow 0$ et on a précédemment démontré que pour $\ell \geq 1$, on a $P_\ell T \simeq P_{\ell-1} T_0$ ce qui donne

$$\chi(Y, \mathcal{F}_\ell) = \chi(Y, \text{DR}^{\text{an}}(P_{\ell-1} T^0)) = -\nu_{\infty, 1, \ell-1}(M).$$

Maintenant, on sait que

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = -\chi(Y, \mathcal{F}_0) + \sum_{\ell \geq 1} (\ell + 1) \nu_{\infty, 1, \ell-1}(M)$$

soit, en utilisant le résultat de la première partie du théorème,

$$\nu_{\infty, 1}(M) + \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}(M) = -\chi(Y, \mathcal{F}_0) + \sum_{\ell \geq 0} (\ell + 2) \nu_{\infty, 1, \ell}(M).$$

Or

$$\sum_{\ell \geq 0} (\ell + 2) \nu_{\infty, 1, \ell}(M) = \nu_{\infty, 1}(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}(M)$$

ce qui donne finalement

$$\chi(Y, \mathcal{F}_0) = -\dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}).$$

En résumant chacun des trois cas, on a bien l'expression (2) annoncée, à savoir

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0, \ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1, \ell-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1 \\ \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\text{min}}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell = 0. \end{cases}$$

□

Comme annoncé avant l'énoncé du théorème, cette nouvelle démonstration est bien plus longue que l'originale de Dettweiler et Sabbah. Mais nous avons pu grâce au lemme 4.2.4 complètement expliciter T et les différentes actions. Il sera alors plus facile de comprendre la situation lorsque l'on ajoutera la filtration de Hodge par la suite.

4.3 Comportement des données numériques locales par convolution intermédiaire multiplicative

Le but de cette partie va être de transposer les résultats additifs de Dettweiler et Sabbah dans le cadre de la convolution intermédiaire multiplicative, avec l'aide de la formule obtenue à la proposition 2.8.1. Pour cela, considérons $\gamma_0 \in]0, 1[$, $\lambda_0 = \exp(-2i\pi\gamma_0)$ et $M \in C'_{\lambda_0}$ (catégorie introduite à la définition 2.8.2). On note \mathcal{M}^{\min} le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension minimale de M en $x_0 = 0$ et à l'infini. L'objectif du théorème suivant est d'exprimer les données numériques locales de $\text{MC}'_{\lambda_0}(M) = M *_{\text{mid} \times} \mathcal{L}'_{\lambda_0}$ en fonction de celles de M .

Théorème 4.3.1 *On a les données suivantes pour $\text{MC}'_{\lambda_0}(M)$:*

$$(1) \mu_{x_i, \lambda, \ell}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}(M) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, r\}.$$

$$(2) \nu_{\infty, \lambda, \ell}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda, \ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \nu_{\infty, 1, \ell+1}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1. \end{cases}$$

$$(3) \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}(M) + \nu_{0, 1, \text{prim}}(M) - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}(M) - \nu_{0, \lambda_0, \text{prim}}(M).$$

$$(4) h(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = h(M) + \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{0, 1, \text{prim}}(M) - \nu_{0, \lambda_0, \text{prim}}(M).$$

$$(5) \nu_{0, \lambda, \ell}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{0, \lambda, \ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \lambda_0 \\ \nu_{0, \lambda_0, \ell+1}(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \nu_{0, 1, \ell-1}(M) & \text{si } \lambda = 1, \ell \geq 1 \\ \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) & \text{si } \lambda = 1, \ell = 0. \end{cases}$$

Preuve. Avec $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion, la formule obtenue à la proposition 2.8.1 nous donne

$$\text{MC}'_{\lambda_0}(M) = j^+(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}))).$$

Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $x_i \neq 0$ et

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \mu_{x_i, \lambda, \ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}))).$$

On déduit alors du premier point de la proposition 1.3.5 de [DS13] que

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) = \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}).$$

Comme le système local $\mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}$ n'a pas de monodromie autour de x_i , on a $\mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}(M)$, ce qui termine la preuve du point (1).

Pour le point (2), le deuxième point du théorème 4.2.5 combiné à la proposition 2.8.1 donne

$$\nu_{\infty,\lambda,\ell}(\mathrm{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty,\lambda\bar{\lambda}_0,\ell}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}) & \text{si } \lambda \neq 1, \bar{\lambda}_0 \\ \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty,1,\ell-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}) & \text{si } \lambda = \bar{\lambda}_0, \ell \geq 1 \\ \dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}^{\mathrm{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0})^{\mathrm{min}}) & \text{si } \lambda = \bar{\lambda}_0, \ell = 0. \end{cases}$$

Le système local $\mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}$ a pour monodromie λ_0 autour de l'infini, ce qui nous permet d'obtenir le point (2) en appliquant l'identité 1.3.2 de [DS13] :

$$\nu_{\infty,\lambda,\ell}(\mathrm{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty,\lambda,\ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \bar{\lambda}_0 \\ \nu_{\infty,1,\ell+1}(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,\ell-1}(M) & \text{si } \lambda = \bar{\lambda}_0, \ell \geq 1. \end{cases}$$

Par la formule d'Euler-Poincaré, on a

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\mathrm{min}}) &= \chi(\mathbb{P}^1 \setminus \{x_0, \dots, x_{r+1}\}) \cdot h(M) + \sum_{i=0}^{r+1} \chi(x_i, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\mathrm{min}}) \\ &= (2 - (r + 2)) \cdot h(M) + \sum_{i=0}^{r+1} \nu_{x_i,1,\mathrm{prim}}(M). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}^{\mathrm{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0})^{\mathrm{min}}) &= (2 - (r + 2)) \cdot h(M) + \sum_{i=0}^{r+1} \nu_{x_i,1,\mathrm{prim}}(M \otimes \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_0}) \\ &= (2 - (r + 2)) \cdot h(M) + \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,\mathrm{prim}}(M) + \nu_{0,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M) + \sum_{i=1}^r \nu_{x_i,1,\mathrm{prim}}(M) \\ &= \chi(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\mathrm{min}}) - \nu_{\infty,1,\mathrm{prim}}(M) - \nu_{0,1,\mathrm{prim}}(M) + \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,\mathrm{prim}}(M) + \nu_{0,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M), \end{aligned}$$

et donc

$$\nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,0}(\mathrm{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\mathrm{min}}) + \nu_{\infty,1,\mathrm{prim}}(M) + \nu_{0,1,\mathrm{prim}}(M) - \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,\mathrm{prim}}(M) - \nu_{0,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M).$$

Pour le point (4) du calcul du rang générique, on a

$$\begin{aligned} h(\mathrm{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\lambda} \nu_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}'_{\lambda_0}(M)) \\ &= \sum_{\lambda \neq 1, \bar{\lambda}_0} \nu_{\infty,\lambda}(M) + \underbrace{\sum_{\ell \geq 0} (\ell + 1) \nu_{\infty,1,\ell+1}(M)}_{= \nu_{\infty,1}(M) - \nu_{\infty,1,\mathrm{prim}}(M)} + \underbrace{\sum_{\ell \geq 1} (\ell + 1) \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,\ell-1}(M)}_{= \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0}(M) + \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,\mathrm{prim}}(M)} + \nu_{\infty,\bar{\lambda}_0,0}(\mathrm{MC}'_{\lambda_0}(M)) \\ &= h(M) + \dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\mathrm{min}}) + \nu_{0,1,\mathrm{prim}}(M) - \nu_{0,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M). \end{aligned}$$

Pour le point (5), on note \tilde{M} l'extension minimale de M sur \mathbb{A}^1 en 0. En appliquant la formule 1.3.3 de [DS13], on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_{0,\lambda,\ell}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) &= \mu_{0,\lambda,\ell}((\tilde{M} \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})_{\min(\{0\})}) = \begin{cases} \mu_{0,\lambda/\overline{\lambda_0},\ell}(\tilde{M}) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \mu_{0,1/\overline{\lambda_0},\ell+1}(\tilde{M}) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{0,1,\ell}(\tilde{M}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \nu_{0,\lambda\lambda_0,\ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}(M) & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant maintenant le premier point de la proposition 1.3.5 de [DS13], on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_{0,\lambda,\ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}))) &= \mu_{0,\lambda/\lambda_0,\ell}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) \\ &= \begin{cases} \nu_{0,\lambda,\ell}(M) & \text{si } \lambda \neq \lambda_0 \\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0. \end{cases} \end{aligned}$$

On déduit alors de la formule de la proposition 2.8.1 que :

$$\nu_{0,\lambda,\ell}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda,\ell}(M) & \text{si } \lambda \neq 1, \lambda_0 \\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \nu_{0,1,\ell-1}(M) & \text{si } \lambda = 1, \ell \geq 1. \end{cases}$$

Il ne reste alors plus qu'à calculer $\nu_{0,1,0}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \nu_{0,1,0}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= h(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - \sum_{\lambda \neq 1, \lambda_0} \nu_{0,\lambda}(M) - \sum_{\ell \geq 0} (\ell + 1) \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}(M) - \sum_{\ell \geq 1} (\ell + 1) \nu_{0,1,\ell-1}(M) \\ &= h(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - h(M) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}(M) - \nu_{0,1,\text{prim}}(M) \\ &= \dim H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

Chapitre 5

Généralités en théorie de Hodge

L'objectif de cette section est d'introduire les notions de théorie de Hodge qui nous seront utiles dans la suite, à savoir les notions de structures de Hodge et de variations de structure de Hodge. Nous verrons également à quelles conditions un système local sur la droite affine privée d'un nombre fini de points est induit par une variation de structure de Hodge polarisable.

5.1 Structures de Hodge

On raisonne dans toute la suite sur le corps des nombres complexes. La notion de structure de Hodge (polarisée) a été à l'origine introduite pour étudier les propriétés de la cohomologie de variétés complexes. De manière résumée :

- une structure de Hodge est un espace vectoriel de dimension finie gradué
- un morphisme de structures de Hodge est un morphisme compatible à la décomposition donnée par la graduation
- une polarisation est une forme hermitienne définie positive telle que la décomposition donnée par la graduation est orthogonale par rapport à la forme hermitienne

Néanmoins, cette description des structures de Hodge ne se comporte pas bien lorsque l'on considère des familles holomorphes. En particulier, la graduation ne se déforme pas holomorphiquement, mais seulement de manière C^∞ . Pour remédier à cela, on remplace la graduation par deux filtrations décroissantes, l'une variant holomorphiquement et l'autre anti-holomorphiquement. Posons alors les deux définitions suivantes :

Définition 5.1.1 Soient $w \in \mathbb{Z}$, $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ deux filtrations décroissantes d'un espace vectoriel H . On dit que les filtrations $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ sont w -opposées si pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$F'^p H \cap F''^{w-p+1} H = 0 \quad \text{et} \quad F'^p H + F''^{w-p+1} H = H.$$

Définition 5.1.2 (Structures de Hodge)

- Une structure de Hodge de poids $w \in \mathbb{Z}$ est un espace vectoriel H muni de deux filtrations décroissantes $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ w -opposées.
- Un morphisme de structures de Hodge est un morphisme compatible aux deux filtrations.

On voit que les deux définitions d'une structure de Hodge sont équivalentes en remarquant qu'étant données deux filtrations décroissantes $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ d'un espace vectoriel H , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) les filtrations $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ sont w -opposées.
- (ii) on a la décomposition $H = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^{p, w-p}$ avec $H^{p, w-p} = F'^p H \cap F''^{w-p} H$.

On en déduit en particulier qu'un morphisme de structures de Hodge donné par la définition est compatible à la décomposition. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 5.1.3 Soit $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ un morphisme de structures de Hodge avec H_1 et H_2 de poids respectifs w_1 et w_2 .

- (i) Si $w_1 = w_2 = w$, alors φ est strictement compatible aux deux filtrations et à la décomposition (i.e. $\varphi(F'^\bullet H_1) = \varphi(H_1) \cap F'^\bullet H_2$ pour $F = F'$ et $F = F''$, et $\varphi(H_1^{p, w-p}) = \varphi(H_1) \cap H_2^{p, w-p}$).
- (ii) Si $w_1 > w_2$, alors $\varphi = 0$.

Preuve. (i) Les inclusions \subset étant triviales, regardons les inclusions \supset .

• Commençons par montrer pour $p \in \mathbb{Z}$ que $\varphi(F'^p H_1) \supset \varphi(H_1) \cap F'^p H_2$, la preuve étant complètement identique pour la filtration F''^\bullet . Soit $y = \varphi(x) \in \varphi(H_1) \cap F'^p H_2$, on décompose alors x en $x = \sum_{q \in \mathbb{Z}} x_q$ où les $x_q \in H_1^{q, w-q}$ sont presque tous nuls. On a alors

$$y = \sum_{q \leq p-1} \varphi(x_q) + \sum_{q \geq p} \varphi(x_q) \in F'^p H_2.$$

On sait que $\sum_{q \geq p} \varphi(x_q) \in F'^p H_2$ par décroissance de la filtration F'^\bullet , et que $\sum_{q \leq p-1} \varphi(x_q) \in F''^{w-p+1} H_2$ par décroissance de la filtration F''^\bullet . Il en résulte que $\sum_{q \leq p-1} \varphi(x_q) \in F'^p H_2 \cap F''^{w-p+1} H_2 = 0$, ce qui donne finalement $y = \varphi(\sum_{q \geq p} x_q) \in \varphi(F'^p H_1)$.

• Montrons maintenant pour $p \in \mathbb{Z}$ que $\varphi(H_1^{p, w-p}) \supset \varphi(H_1) \cap H_2^{p, w-p}$. Soit $y = \varphi(x) \in \varphi(H_1) \cap H_2^{p, w-p}$, on décompose alors x en $x = \sum_{q \in \mathbb{Z}} x_q$ où $x_q \in H_1^{q, w-q}$. On a alors $y = \varphi(x) = \varphi(x_p) \in \varphi(H_1^{p, w-p})$.

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi(H_1^{p, w_1-p}) \subset F'^p H_2 \cap F''^{w_1-p} H_2 \subset F'^p H_2 \cap F''^{w_2-p+1} H_2 = 0$. \square

Exemples. 1) Considérons l'espace vectoriel \mathbb{C} muni des filtrations $F'^p \mathbb{C} = F''^p \mathbb{C} = \mathbb{C}$ pour $p \leq 0$ et $F'^p \mathbb{C} = F''^p \mathbb{C} = 0$ pour $p \geq 1$. Ces filtrations sont 0-opposées, ce qui permet de munir \mathbb{C} d'une structure de Hodge de poids 0.

2) Soit H une structure de Hodge de poids w . On définit $H(k, \ell)$ comme l'espace vectoriel H muni des filtrations $F'^\bullet H(k, \ell) = F'^{\bullet+k} H$ et $F''^\bullet H(k, \ell) = F''^{\bullet+\ell} H$. Ces filtrations sont $(w-k-\ell)$ -opposées, ce qui permet de munir $H(k, \ell)$ d'une structure de Hodge de poids $w-k-\ell$. Si $k = \ell$, on note $H(k, k) = H(k)$.

3) Soient H_1 et H_2 des structures de Hodge de poids respectifs w_1 et w_2 . On définit les filtrations F^p sur $H_1 \otimes H_2$ (avec $F = F'$ ou $F = F''$) par

$$F^p(H_1 \otimes H_2) = \sum_{p_1+p_2=p} F^{p_1} H_1 \otimes F^{p_2} H_2.$$

Un calcul permet de montrer que ces deux filtrations sont $(w_1 + w_2)$ -opposées, ce qui permet de munir $H_1 \otimes H_2$ d'une structure de Hodge de poids $w_1 + w_2$.

4) Soient H_1 et H_2 des structures de Hodge de poids respectifs w_1 et w_2 . On définit les filtrations F^p sur $\text{Hom}(H_1, H_2)$ (avec $F = F'$ ou $F = F''$) par

$$F^p \text{Hom}(H_1, H_2) = \{f \in \text{Hom}(H_1, H_2) \mid \forall k \in \mathbb{Z}, f(F^k H_1) \subset F^{k+p} H_2\}.$$

Un calcul permet de montrer que ces deux filtrations sont $(w_2 - w_1)$ -opposées, ce qui permet de munir $\text{Hom}(H_1, H_2)$ d'une structure de Hodge de poids $w_2 - w_1$.

5) Soit H une structure de Hodge de poids w . En combinant 1) et 4), on obtient que l'espace vectoriel dual H^\vee est alors muni d'une structure de Hodge de poids $-w$ avec les deux filtrations $(-w)$ -opposées $F'^p H^\vee = (F'^{-p+1} H)^\perp$ et $F''^p H^\vee = (F''^{-p+1} H)^\perp$.

6) Soit H une structure de Hodge de poids w . L'espace vectoriel conjugué \overline{H} est muni d'une structure de Hodge de poids w en posant $F'^p \overline{H} = \overline{F''^p H}$ et $F''^p \overline{H} = \overline{F'^p H}$. On a alors $\overline{H}^{p, w-p} = \overline{H}^{w-p, p}$.

7) Soit H une structure de Hodge de poids w . En combinant 5) et 6), on obtient que l'espace vectoriel adjoint $H^* = \overline{H}^\vee$ est muni d'une structure de Hodge de poids $-w$.

Définition-proposition 5.1.4 (Polarisations)

Soit $(H, F'^{\bullet}H, F''^{\bullet}H)$ une structure de Hodge de poids w . Les deux définitions suivantes sont équivalentes :

(i) Une polarisation est une forme hermitienne h sur H définie positive telle que la décomposition $H = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^{p, w-p}$ est h -orthogonale. En particulier, h induit une forme hermitienne définie positive sur chaque $H^{p, w-p}$.

(ii) Une polarisation est une forme sesquilinéaire Q sur H telle que :

(1) Q est $(-1)^w$ -hermitienne, i.e. $Q^*(x, \bar{y}) = \overline{Q(y, \bar{x})} = (-1)^w Q(x, \bar{y})$ pour tous $x, y \in H$.

(2) $Q(F^p H, \overline{F''^q H}) = 0$ et $Q(F''^p H, \overline{F'^q H}) = 0$ pour $p + q > w$.

(3) $h(x, \bar{y}) = Q(Cx, \bar{y})$ est (hermitienne) définie positive, où C est l'opérateur de Weil égal à la multiplication par i^{p-q} sur $H^{p, q}$.

Une structure de Hodge munie d'une polarisation est dite polarisée (ou polarisable si l'on ne souhaite pas faire un choix de polarisation).

Preuve. Montrons que ces deux définitions sont bien équivalentes. Une polarisation au sens de (ii) est une polarisation au sens de (i) car (2) implique que la décomposition $H = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^{p, w-p}$ est Q -orthogonale, et donc h -orthogonale d'après (3). Pour voir qu'une polarisation au sens de (i) est une polarisation au sens de (ii), il suffit de poser $Q(x, \bar{y}) = h(C^{-1}x, \bar{y})$. \square

Proposition 5.1.5 La condition (ii)(2) est équivalente à $Q \in \text{Hom}(H \otimes \overline{H}, \mathbb{C}(-w))$.

Preuve. Commençons par préciser que $H \otimes \overline{H}$ et $\mathbb{C}(-w)$ sont tous deux munis d'une structure de Hodge de poids $2w$, d'après les exemples 1), 2), 3) et 6) vus précédemment. On a alors la suite d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (ii)(2) &\iff \forall p_1, p_2 \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p_1 + p_2 > w, Q(F'^{p_1} H \otimes \overline{F''^{p_2} H}) = 0 \text{ et } Q(F''^{p_1} H \otimes \overline{F'^{p_2} H}) = 0 \\ &\iff \forall p > w, Q(F^p(H \otimes \overline{H})) = 0 \text{ pour } F \in \{F', F''\} \\ &\iff \forall p \in \mathbb{Z}, Q(F^p(H \otimes \overline{H})) \subset F^p \mathbb{C}(-w) \text{ pour } F \in \{F', F''\} \\ &\iff Q \in \text{Hom}(H \otimes \overline{H}, \mathbb{C}(-w)). \end{aligned}$$

\square

Remarque. Une autre façon de voir la proposition précédente est de dire que $Q \in \text{Hom}(H, H^*(-w))$. Le morphisme adjoint $Q^* \in \text{Hom}(H(w), H^*)$ peut être vu comme un morphisme de $\text{Hom}(H, H^*(-w))$ et la condition (ii)(1) est équivalente à dire que $Q^* = (-1)^w Q$. En outre, les conditions (ii) impliquent que la forme sesquilinéaire Q est non dégénérée, en particulier Q induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $H \rightarrow H^*$, qui vérifie donc $Q^* = (-1)^w Q$. On a alors $F''^p H = Q^{-1}(F'^{p-w} H^*) = (F'^{w-p+1} H)^\perp_Q$. En d'autres termes, il y a de la redondance dans la définition d'une structure de Hodge polarisée. Cela nous amène à donner la définition équivalente suivante :

Définition 5.1.6 Une structure de Hodge polarisée de poids w est la donnée de :

(i) Un espace vectoriel filtré $(H, F^p H)$.

(ii) Une forme sesquilinéaire Q sur H telle que :

- (1) Q est $(-1)^w$ -hermitienne non dégénérée, en particulier Q induit un isomorphisme $H \rightarrow H^*$.
- (2) $F^\bullet H$ et $Q^{-1}(F^\bullet H^*)$ sont 0-opposées.
- (3) $h(x, \bar{y}) = Q(Cx, \bar{y})$ est définie positive, où $Cx = (-1)^p i^{-w} x$ sur $H^{p, w-p} = F^p H \cap (F^{p+1} H)^\perp$.

5.2 Variations de structure de Hodge

La définition d'une variation de structure de Hodge est motivée par l'étude du comportement de la cohomologie d'une famille de variétés projectives lisses paramétrisée par une variété algébrique lisse. On suppose que X est une variété complexe connexe, commençons par donner la définition suivante :

Définition 5.2.1 Une variation de structure de Hodge de poids $w \in \mathbb{Z}$ consiste en la donnée d'un fibré \mathcal{C}^∞ à connexion plate (H, D) muni d'une décomposition $H = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^{p, w-p}$ par des sous-fibrés \mathcal{C}^∞ satisfaisant la transversalité de Griffiths :

$$D' H^{p, q} \subset \Omega_X^1 \otimes (H^{p, q} \oplus H^{p-1, q+1}) \quad \text{et} \quad D'' H^{p, q} \subset \overline{\Omega_X^1} \otimes (H^{p, q} \oplus H^{p+1, q-1}),$$

où $D = D' + D''$ est décomposée selon le type (holomorphe et anti-holomorphe).

Comme dans la partie précédente avec les structures de Hodge, faisons l'analogie entre décomposition et filtrations w -opposées. La filtration $F^p H = \bigoplus_{q \geq p} H^{q, w-q}$ vérifie par transversalité de Griffiths la propriété $D' F^p H \subset \Omega_X^1 \otimes F^{p-1} H$. Le fibré holomorphe $V' = \ker D''$ est muni d'une connexion holomorphe plate $\nabla' = D'_{|\ker D''}$ et d'une filtration $F^p V' = F^p H \cap V'$ en sous-fibrés holomorphes vérifiant la transversalité de Griffiths, ici $\nabla' F^p V' \subset \Omega_X^1 \otimes F^{p-1} V'$. On a des propriétés tout à fait analogues avec le pendant anti-holomorphe. Vient alors la définition-proposition suivante :

Définition-proposition 5.2.2 Une variation de structure de Hodge de poids $w \in \mathbb{Z}$ consiste en la donnée d'un fibré \mathcal{C}^∞ à connexion plate (H, D) , muni d'une filtration $F^\bullet H$ qui induit sur $(\ker D'', D'_{|\ker D''})$ une filtration en sous-fibrés holomorphes satisfaisant la transversalité de Griffiths, et d'une filtration $F''^\bullet H$ qui induit sur $(\ker D', D''_{|\ker D'})$ une filtration en sous-fibrés anti-holomorphes satisfaisant l'anti-transversalité de Griffiths, et telle que la restriction de ces données à $x \in X$ est une structure de Hodge de poids w .

Preuve. La seule chose qui reste à voir pour démontrer l'équivalence des deux définitions est que les données de la définition 5.2.2 sont suffisantes. On pose $H^{p, w-p} = F^p H \cap F''^{w-p} H$ qui satisfait bien la transversalité de Griffiths. En outre, il s'agit bien d'un sous-fibré car sa fibre en $x \in X$ est de dimension constante. \square

En reprenant l'analogie avec les structures de Hodge, on définit maintenant les morphismes de variations de structure de Hodge, ainsi que la notion de polarisation.

Définition 5.2.3 *Un morphisme $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ est un morphisme de fibrés \mathcal{C}^∞ horizontal par rapport aux connexions, et compatible à la décomposition, ou de manière équivalente compatible aux deux filtrations (holomorphe et anti-holomorphe).*

Définition 5.2.4 *Une polarisation sur une variation de structure de Hodge $(H, \oplus H^\bullet, D)$ de poids w est un morphisme D -horizontal $H \otimes \overline{H} \rightarrow \mathcal{C}_X^\infty(-w)$, dont la restriction à tout $x \in X$ est une polarisation de la structure de Hodge H_x . Une variation de structure de Hodge munie d'une polarisation est dite polarisée (ou polarisable si l'on ne souhaite pas faire un choix de polarisation).*

Remarque. Si $(H, \oplus H^\bullet, D, Q)$ est une variation de structure de Hodge de poids w alors $(H, \oplus H^\bullet, D, i^{-w}Q)$ est une variation de structure de Hodge de poids 0. On peut donc supposer sans perte de généralité que le poids est 0, d'autant plus lorsque l'on considère des variations de structure de Hodge polarisables, où le choix de la polarisation nous importe peu.

Considérons une variation de structure de Hodge polarisée $(H, \oplus H^\bullet, D, Q)$, que l'on suppose de poids 0 d'après la remarque précédente. En reprenant la constatation de la définition 5.1.6 comme quoi certaines données sont redondantes, il suffit de se donner $(V, F^\bullet V, \nabla, Q)$ pour caractériser la variation de structure de Hodge polarisée, où $V = \ker D''$, $F^p V = (\bigoplus_{q \geq p} H^{q, -q}) \cap V$ et $\nabla = D|_V$. Ainsi quand on considèrera dans la suite une variation de structure de Hodge polarisable, on la notera $(V, F^\bullet V, \nabla)$.

5.3 Existence d'une variation de structure de Hodge sous-jacente à un système local

On note $\mathbf{x} \subset \mathbb{A}^1$ un ensemble fini de points, $U = \mathbb{A}^1 \setminus \mathbf{x}$ et $j : U \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion. Une variation de structure de Hodge polarisable $(V, F^\bullet V, \nabla)$ sur U induit un \mathbb{C} -système local sur U défini par $\mathcal{V} = V^\nabla$. Réciproquement, si on se donne \mathcal{V} un \mathbb{C} -système local sur U , on cherche à savoir à quelles conditions \mathcal{V} est induit par une variation de structure de Hodge polarisable sur U .

Les deux conditions suivantes sont nécessaires :

- (i) Le système local \mathcal{V} est semi-simple, à savoir somme directe de systèmes locaux irréductibles.
- (ii) Les valeurs propres des monodromies autour des singularités sont de module 1.

On a le résultat suivant dû à Simpson (corollaire 8.1 de [Sim90]) :

Proposition 5.3.1 *Supposons que le système local \mathcal{V} est semi-simple et rigide. Alors \mathcal{V} est induit par une variation de structure de Hodge polarisable si et seulement si la condition (ii) est satisfaite.*

La notion de rigidité est bien comprise dans le cas irréductible (d'après le théorème 3.2.4), et la réduction au cas irréductible ne pose pas réellement de problème lorsque l'on considère des variations de structure de Hodge grâce au résultat suivant :

Proposition 5.3.2 *Soit $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge polarisable sur U . Le système local semi-simple induit \mathcal{V} , se décompose en $\mathcal{V} = \bigoplus_{\alpha \in A} (\mathcal{V}_\alpha)^{n_\alpha}$, où les systèmes locaux \mathcal{V}_α sont irréductibles et deux à deux non isomorphes. On a $(\mathcal{V}, \nabla) = \bigoplus_{\alpha \in A} (\mathcal{V}_\alpha, \nabla)^{n_\alpha}$, et la polarisation ∇ -horizontale se décompose selon les $\alpha \in A$.*

Pour cette raison, nous travaillerons dans le cas irréductible dans la suite. Notons en outre que dans ce cas, d'après un résultat dû à Deligne, il y a unicité d'une telle variation de structure de Hodge polarisable à renumérotation de la filtration $p \mapsto p + n$ près (partie (i) de la proposition 1.13 de [Del87]).

Lien avec l'algorithme de Katz. Il y a deux façons de voir les choses :

1) Considérons un système local irréductible rigide dont les valeurs propres des monodromies T_1, \dots, T_r sont de module 1. D'après la proposition 5.3.1, il est induit par une variation de structure de Hodge polarisable. On a vu dans la troisième remarque du bas de la sous-section 3.4 que le fait que les valeurs propres des monodromies soient de module 1 est une propriété conservée à chaque étape de l'algorithme de Katz. On peut donc appliquer la proposition 5.3.1 à chaque étape de l'algorithme de Katz, ce qui implique qu'à chaque étape le système local obtenu est induit par une variation de structure de Hodge polarisable, jusqu'à arriver au système local de rang 1 de monodromies triviales $(1, \dots, 1)$. On peut alors étudier le comportement d'invariants de théorie de Hodge à chaque étape de l'algorithme de Katz. Cela nous permet en outre d'appliquer le schéma suivant :

1. On explicite l'algorithme de Katz $(T_1, \dots, T_r) \rightsquigarrow (1, \dots, 1)$.
2. On munit $(1, \dots, 1)$ de la structure de Hodge triviale.
3. On calcule les invariants qui nous intéressent dans l'algorithme pris dans l'autre sens $(1, \dots, 1) \rightsquigarrow (T_1, \dots, T_r)$.
4. On obtient alors les invariants qui nous intéressent pour notre système local de départ (T_1, \dots, T_r) .

2) En prenant le schéma ci-dessus, on part du système local $(1, \dots, 1)$ muni de la structure de Hodge triviale. On sait qu'à chaque étape, on applique soit une multiplication $(T_1, \dots, T_r) \rightsquigarrow (\lambda_1 T_1, \dots, \lambda_r T_r)$ où les λ_i sont de module 1, soit une convolution intermédiaire avec \mathcal{L}_χ où χ est de module 1. On peut montrer que ces deux opérations explicites préservent les structures de Hodge polarisables (selon la théorie générale de M. Saito [Sai88]), ce qui permet d'éviter d'avoir à utiliser le théorème d'existence de Simpson.

Chapitre 6

Données numériques de Hodge et convolution intermédiaire

Dans cette section, nous étudierons le comportement des données numériques de Hodge d'un \mathcal{D} -module holonome régulier par l'opération de convolution intermédiaire. Le plan de ce chapitre 6 sera le suivant :

1. Dans un premier temps, nous raisonnerons localement au voisinage d'un point singulier et définirons les données numériques locales de Hodge.
2. Dans un deuxième temps, nous définirons les données numériques de Hodge sur la droite affine, qui seront les invariants qui nous intéresseront par la suite.
3. Dans un troisième temps, nous étudierons le comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire additive par un module de Kummer. Comme dans le chapitre 4 sans filtration de Hodge, de nombreux résultats ont été obtenus dans cette direction par Dettweiler et Sabbah [DS13, §3.1]. Seul le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini n'a pas été explicité par Dettweiler et Sabbah, dans la mesure où ces derniers font l'hypothèse d'une monodromie scalaire à l'infini, leur objectif étant d'appliquer l'algorithme de Katz qui fait cette hypothèse. Nous détaillerons ce résultat dans le théorème 6.3.1, en reprenant l'approche et les idées de la preuve du théorème 4.2.5. Nous compléterons ensuite les résultats de Dettweiler-Sabbah en donnant également des formules pour les invariants locaux h^p et globaux δ^p sans faire l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini, qui découlent du théorème 6.3.1 et généralisent le théorème 3.1.2 de [DS13].
4. Dans un quatrième et dernier temps, nous expliciterons le comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative par un module de Kummer. Pour cela, nous utiliserons là encore la formule obtenue à la proposition 2.8.1, ce qui nous permettra de transposer certains des résultats additifs au cadre multiplicatif.

6.1 Données numériques locales de Hodge au voisinage d'un point singulier

Soient Δ un petit disque centré en 0 de coordonnée t , $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge polarisable sur Δ^* et $j : \Delta^* \hookrightarrow \Delta$ l'inclusion. On note $V^{-\infty}$ l'extension méromorphe de Deligne : il s'agit du $\mathcal{O}_\Delta[t^{-1}]$ -module libre formé des sections locales de j_*V dont les coefficients dans une base (ou de manière équivalente dans toute base) de sections horizontales multivaluées sont à croissance modérée sur tout secteur angulaire borné.

On sait, grâce à un résultat dû à Borel (voir le lemme 4.5 de [Sch73]), que les valeurs propres du résidu de ∇ sont réelles. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note alors V^a (resp. $V^{>a}$) le \mathcal{O}_Δ -module libre sur lequel le résidu de ∇ a ses valeurs propres dans $[a, a+1[$ (resp. $]a, a+1]$, que l'on munit de la filtration $F^p V^a = j_* F^p V \cap V^a$ (resp. $F^p V^{>a} = j_* F^p V \cap V^{>a}$).

On note M l'extension minimale de $V^{-\infty}$, elle correspond au sous- \mathcal{O}_Δ -module de $V^{-\infty}$ qui est ∇_{∂_t} -engendré par $V^{>-1}$ d'après la proposition 2.2.6. Le \mathcal{D}_Δ -module M vérifie $\text{DR}M = j_* \mathcal{V}$, où $\mathcal{V} = V^\nabla$ est le système local des sections horizontales pour ∇ , et est muni de la filtration

$$F^p M = \sum_{k \geq 0} \nabla_{\partial_t}^k F^{p+k} V^{>-1}.$$

On rappelle que les cycles proches à l'origine $\psi_\lambda(M)$ sont définis pour $\lambda = e^{-2i\pi a}$ et $a \in]-1, 0]$ par $\psi_\lambda(M) = V^a / V^{>a}$ et sont munis de l'endomorphisme nilpotent $N = -2i\pi(t\partial_t - a)$. On les munit de la filtration $F^p \psi_\lambda(M) = F^p V^a / F^p V^{>a}$, qui vérifie $N F^p \psi_\lambda(M) \subset F^{p-1} \psi_\lambda(M)$.

On sait d'après [Sch73] que

$$\operatorname{rg} F^p V = \sum_{\lambda \in S^1} \operatorname{rg} F^p \psi_\lambda(M)$$

dont on déduit, en notant $h^p(V) = \operatorname{rg} \operatorname{gr}_F^p V$, l'égalité suivante :

$$h^p(V) = \sum_{\lambda \in S^1} h^p \psi_\lambda(M).$$

La filtration de monodromie induite par N nous permet de définir les espaces $P_\ell \psi_\lambda(M)$ de vecteurs primitifs, qui sont munis d'une structure de Hodge polarisable d'après [Sch73]. On définit alors les données numériques locales de Hodge cycles proches par

$$\nu_{\lambda,\ell}^p(M) := h^p(P_\ell \psi_\lambda(M)) = \dim \operatorname{gr}_F^p P_\ell \psi_\lambda(M).$$

En posant de manière similaire $\nu_\lambda^p(M) = h^p \psi_\lambda(M)$, on a

$$\nu_\lambda^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\lambda,\ell}^{p+k}(M)$$

On pose également

$$\nu^p(M) = \sum_{\lambda} \nu_\lambda^p(M), \quad \nu_{\lambda,\text{prim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \nu_{\lambda,\ell}^p(M) \quad \text{et} \quad \nu_{\lambda,\text{coprim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \nu_{\lambda,\ell}^{p+\ell}(M).$$

Les cycles évanescents à l'origine $\phi_\lambda(M)$ sont quant à eux définis par

$$\begin{cases} \phi_\lambda(M) = \psi_\lambda(M) \text{ pour } \lambda \neq 1 \\ \phi_1(M) = V^{-1}/V^{>-1}, \end{cases}$$

et sont munis dans le second cas, ainsi que ses parties primitives, des filtrations

$$F^p \phi_1(M) = \frac{F^{p-1} M \cap V^{-1}}{F^{p-1} M \cap V^{>-1}} \quad \text{et} \quad F^p P_\ell \phi_1(M) = N(F^p P_{\ell+1} \psi_1(M)).$$

De manière similaire aux cycles proches, on définit les données numériques locales de Hodge cycles évanescents par $\mu_{\lambda,\ell}^p(M) := h^p(P_\ell \phi_\lambda(M)) = \dim \operatorname{gr}_F^p P_\ell \phi_\lambda(M)$, ce qui donne

$$\begin{cases} \mu_{\lambda,\ell}^p(M) = \nu_{\lambda,\ell}^p(M) \text{ pour } \lambda \neq 1 \\ \mu_{1,\ell}^p(M) = \nu_{1,\ell+1}^p(M). \end{cases}$$

On pose alors

$$\mu_\lambda^p(M) := h^p \phi_\lambda(M) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \mu_{\lambda,\ell}^{p+k}(M)$$

ainsi que

$$\mu^p(M) = \sum_{\lambda} \mu_\lambda^p(M), \quad \mu_{\lambda,\text{prim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \mu_{\lambda,\ell}^p(M) \quad \text{et} \quad \mu_{\lambda,\text{coprim}}^p(M) = \sum_{\ell \geq 0} \mu_{\lambda,\ell}^{p+\ell}(M).$$

Définition 6.1.1 Les données numériques locales de Hodge de M sont :

- (i) les invariants locaux $h^p(V)$ ($p \in \mathbb{Z}$)
- (ii) les données numériques locales de Hodge cycles évanescents $\mu_{\lambda, \ell}^p(M)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$).

Remarque. On obtient les $\nu_{1, \ell}^p(M)$ avec la formule

$$\nu_{1, \ell}^p(M) = \begin{cases} \mu_{1, \ell-1}^p(M) & \text{si } \ell \geq 1 \\ h^p(V) - \mu^p(M) - \mu_{1, \text{coprim}}^{p+1}(M) & \text{si } \ell = 0. \end{cases}$$

6.2 Données numériques de Hodge sur la droite affine

Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble fini de points de \mathbb{A}^1 , $x_{r+1} = \infty \in \mathbb{P}^1$, $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge complexe polarisable sur $\mathbb{A}^1 \setminus \mathbf{x}$ et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -module extension minimale en chacun des points de \mathbf{x} .

On considère les fibrés holomorphes $\text{gr}_F^p V^0$, qui sont de rang $h^p(V)$. En plus des données numériques locales de Hodge, on définit l'invariant global suivant :

Définition 6.2.1 On définit les données numériques globales de Hodge de M par

$$\delta^p(M) = \deg \text{gr}_F^p V^0.$$

Définition 6.2.2 Les données numériques de Hodge de M sont :

- (i) les invariants locaux $h^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$)
- (ii) les données numériques locales de Hodge cycles proches $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iii) les données numériques locales de Hodge cycles évanescents $\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(M)$ ($i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iv) les données numériques globales de Hodge $\delta^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$).

Comme précédemment, on souhaite également définir les données numériques de Hodge dans le cas où l'on travaille sur \mathbb{G}_m . Dans ce cas, on considère $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de points de \mathbb{G}_m , $x_0 = 0$, $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge complexe polarisable sur $\mathbb{G}_m \setminus \mathbf{x}$ et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module extension minimale en chacun des points de \mathbf{x} .

Définition 6.2.3 Les données numériques de Hodge de M dans ce cas sont :

- (i) les invariants locaux $h^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$)
- (ii) les données numériques locales de Hodge cycles proches $\nu_{0, \lambda, \ell}^p(M)$, $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iii) les données numériques locales de Hodge cycles évanescents $\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(M)$ ($i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$)
- (iv) les données numériques globales de Hodge $\delta^p(M)$ ($p \in \mathbb{Z}$).

6.3 Comportement des données $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p$ par convolution intermédiaire additive

On souhaite maintenant expliciter le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini par convolution intermédiaire additive. Ce comportement n'est pas explicité par Dettweiler et Sabbah dans [DS13], dans la mesure où ces derniers font l'hypothèse d'une monodromie scalaire à l'infini, leur objectif étant d'appliquer l'algorithme de Katz qui fait cette hypothèse. Les principaux arguments de la preuve seront la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge et l'utilisation du théorème de Riemann-Roch.

Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de points de \mathbb{A}^1 , \mathcal{V} un \mathbb{C} -système local sur $U = \mathbb{A}^1 \setminus \mathbf{x}$ induit par une variation de structure de Hodge complexe polarisable $(V, F^\bullet V, \nabla)$ sur U et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -module extension minimale en les points de \mathbf{x} . On fixe $\gamma_0 \in]0, 1[$ et $\lambda_0 = \exp(-2i\pi\gamma_0)$ et on suppose que $M \in \mathcal{C}$. Nous reprenons l'approche et les idées de la preuve du théorème 4.2.5 avec l'ajout ici de la filtration de Hodge, et allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.3.1 *On note $\gamma \in [0, 1[$, $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$ et \mathcal{M}^{\min} le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension minimale de M à l'infini. On a les données suivantes pour $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$:*

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1 \\ h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}\mathcal{M}^{\min}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell = 0. \end{cases}$$

On reprend dans la preuve de ce théorème les notations et conventions de la sous-section 4.2.

Remarque préliminaire. Sans que cela ne soit utile dans la preuve mais néanmoins intéressant pour fixer les idées, nous allons expliciter la filtration $F^p T$ dans le cas générique $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$. En premier lieu, détaillons l'expression de la filtration sur M_∞ . Au $\mathbb{C}[x]$ -module filtré de départ $(M, F^p M)$, on associe naturellement le $\mathbb{C}[x', x'^{-1}]$ -module filtré $(M_\infty, \tilde{F}^p M_\infty)$. Le problème est que ce dernier terme n'est pas nécessairement $\mathbb{C}[x]$ -cohérent mais seulement $\mathbb{C}[x', x'^{-1}]$ -cohérent.

Pour remédier à cela, on utilise le fait que

$$M_\infty = \sum_{k \geq 0} \partial_{x'}^k V^{>-1} M_\infty$$

et que sur $V^{>-1} M_\infty$ la filtration est définie par $F^p V^{>-1} M_\infty = \tilde{F}^p M_\infty \cap V^{>-1} M_\infty$. On a alors

$$F^p M_\infty = \sum_{k \geq 0} \partial_{x'}^k F^{p+k} V^{>-1} M_\infty.$$

Notons par ailleurs qu'en définissant la filtration $F^p M_\infty$ de la sorte, on a pour tout $\beta \geq -1$ l'identité $F^p M_\infty \cap V^\beta M_\infty = \tilde{F}^p M_\infty \cap V^\beta M_\infty$, ce qui permet de faire de nombreux raisonnements indifféremment avec F^p ou \tilde{F}^p .

On est maintenant en mesure de définir les filtrations sur $(M_\infty)_\gamma$ et $(M_\infty)^\lambda$ par

$$F^p(M_\infty)_\gamma = (M_\infty)_\gamma \cap F^p M_\infty \quad \text{et} \quad F^p(M_\infty)^\lambda = (M_\infty)^\lambda \cap F^p M_\infty.$$

On a alors

$$\begin{aligned} F^p(M_\infty)^\lambda &= \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x'^k (M_\infty)_\gamma \right) \cap F^p M_\infty \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (x'^k (M_\infty)_\gamma) \cap F^p M_\infty \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x'^k ((M_\infty)_\gamma \cap F^p M_\infty) \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x'^k F^p(M_\infty)_\gamma, \end{aligned}$$

autrement dit $F^p(M_\infty)^\lambda = (F^p(M_\infty)_\gamma)[x', x'^{-1}]$. On reprend dans la suite les notations de 4.2.1.

(i) Commençons par raisonner dans la carte (u_2, v_2) . On sait que

$$N_{\lambda_0} = e^+ M_\infty \otimes \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, v_2, v_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} - \frac{dv_2}{v_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right),$$

et on en déduit la filtration de Hodge sur le produit tensoriel

$$F^p N_{\lambda_0} = \sum_{q \geq 0} F^{p+q}(e^+ M_\infty) \otimes F^{-q} \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, v_2, v_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} - \frac{dv_2}{v_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right).$$

Le terme de droite est donné par la filtration par l'ordre du pôle, à savoir

$$F^{-q}(\star) = (u_2 v_2 (u_2 - 1))^{-(q+1)} \mathbb{C}[u_2, v_2],$$

ce qui donne

$$F^p N_{\lambda_0} = \sum_{q \geq 0} (u_2 v_2 (u_2 - 1))^{-(q+1)} F^{p+q}(e^+ M_\infty).$$

Maintenant, on sait que

$$(N_{\lambda_0})_\gamma = (e^+ M_\infty)_{\gamma+\gamma_0} \otimes \left(\mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, (u_2 - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{du_2}{u_2} + \frac{du_2}{u_2 - 1} \right) \right),$$

ce dont on déduit que

$$F^p(N_{\lambda_0})_\gamma = F^p N_{\lambda_0} \cap (N_{\lambda_0})_\gamma = \left(\sum_{q \geq 0} (x'(x' - 1))^{-(q+1)} F^{p+q} M_\infty \right) \cap (M_\infty)_{\gamma+\gamma_0}[x', x'^{-1}, (x' - 1)^{-1}],$$

ce qui donne finalement

$$F^p(N_{\lambda_0})_\gamma = \sum_{q \geq 0} (x'(x' - 1))^{-(q+1)} F^{p+q}(M_\infty)^{\lambda \lambda_0}.$$

On en conclut que, pour $\lambda \neq 1$, les cycles proches $\psi_{v_2, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$ sont munis de la filtration

$$F^p(\psi_{v_2, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}) = \sum_{q \geq 0} (x'(x' - 1))^{-(q+1)} F^{p+q}(M_\infty)^{\lambda \lambda_0}.$$

(ii) Il n'y a aucun raisonnement à faire dans la carte (u_1, v_1) au voisinage de l'axe $u_1 = 0$ privé du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$, puisque $T = 0$ pour $\lambda \neq \overline{\lambda_0}$.

(iii) Raisonnons enfin au voisinage du point $(u_1, v_1) = (0, 0)$. On a précédemment explicité dans le lemme 4.2.4 la décomposition de $T = \psi_{u_1 v_1, \lambda} \mathcal{N}_{\lambda_0}$, mais en ajoutant la filtration de Hodge, il n'y a aucune raison a priori pour que $F^p T$ soit isomorphe à $\bigoplus_{\beta} F^p T_{\beta}$. Néanmoins, on a montré dans le cas $\lambda \neq \overline{\lambda_0}$ qu'un seul terme apparaissait dans la décomposition. En reprenant le raisonnement fait dans ce cas, on a alors $F^p T = F^p(M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}$.

Toutes ces considérations permettent d'expliciter $F^p T$ dans le cas générique $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$, en ce sens il s'agit d'un raffinement de la partie (i) du lemme 4.2.4. Néanmoins, comme précisé au début de la remarque, nous n'utiliserons pas cette expression explicite dans la preuve qui va suivre. Les raisons sont les suivantes : d'une part l'explicitation de $F^p T$ dans les cas $\lambda = 1$ et surtout $\lambda = \overline{\lambda_0}$ est loin d'être aisée, et d'autre part nous raisonnons sur des données numériques qui sont des dimensions et il n'est pas indispensable d'expliciter complètement les objets à cette fin.

Preuve du théorème 6.3.1. Nous allons traiter chacun des cas séparément. On reprend dans toute la suite les notations de la sous-section 4.2 et en particulier les notations introduites en 4.2.1.

(i) Cas $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$. Nous commençons par traiter la situation sans filtration de monodromie, et allons faire un raisonnement global. Comme T est irréductible, on sait que

$$\nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \text{gr}_F^p \psi_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DRT}) = -\chi(\text{gr}_F^p \mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{DRT})).$$

Par dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham en E_1 , on a

$$\chi(\text{gr}_F^p \mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{DRT})) = \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p \text{DRT})).$$

On sait maintenant d'après la proposition 3.10 (iib) de [Sab08] que l'inclusion du complexe filtré

$$F^{\bullet} V^0 \text{DRT} = \{0 \rightarrow F^{\bullet} V^0 T \xrightarrow{\nabla} \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes F^{\bullet-1} V^{-1} T \rightarrow 0\}$$

dans le complexe

$$F^{\bullet} \text{DRT} = \{0 \rightarrow F^{\bullet} T \xrightarrow{\nabla} \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes F^{\bullet-1} T \rightarrow 0\}$$

est un quasi-isomorphisme, ce qui donne

$$\chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p \text{DRT})) = \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p V^0 \text{DRT})).$$

Par \mathcal{O} -linéarité de la différentielle, on obtient que

$$\chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p V^0 \text{DRT})) = \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p V^0 T)) - \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes \text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T)).$$

Il résulte maintenant du théorème de Riemann-Roch que

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{H}^{\bullet}(\mathbb{P}^1, \text{gr}_F^p \text{DRT})) &= \deg(\text{gr}_F^p V^0 T) + h^p(T) - \deg(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1 \otimes \text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T) - h^{p-1}(T) \\ &= \deg(\text{gr}_F^p V^0 T) + h^p(T) - \deg(\text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T) + h^{p-1}(T) \\ &= \delta^p(T) + h^p(T) - \deg(\text{gr}_F^{p-1} V^{-1} T) + h^{p-1}(T). \end{aligned}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned}
\deg(\mathrm{gr}_F^{p-1}V^{-1}T) &= \delta^{p-1}(T) + \dim \mathrm{gr}_F^{p-1}(V^{-1}T/V^0T) \\
&= \delta^{p-1}(T) + \sum_{a \in [-1, 0[} \dim \mathrm{gr}_F^{p-1}(\mathrm{gr}_V^a T) \\
&= \delta^{p-1}(T) + \sum_{x \in \mathbf{x}} \sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(T) + \sum_{x \in \mathbf{x}} \mu_{x, 1}^p(T),
\end{aligned}$$

en notant $\mathbf{x} = \{0, 1, \infty\}$ l'ensemble des singularités de T .

Au final, on obtient que

$$(\star) \quad \nu_{\infty, \lambda}^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^{p-1}(T) - \delta^p(T) - h^p(T) - h^{p-1}(T) + \sum_{x \in \mathbf{x}} \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(T) + \mu_{x, 1}^p(T) \right).$$

Comme $\lambda\lambda_0 \neq 1$ par hypothèse, on a $\dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0})) = 0$. En faisant maintenant le même raisonnement que précédemment avec $(M_\infty)^{\lambda\lambda_0}$ au lieu de T , on obtient

$$(\star\star) \quad \delta^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) = 0.$$

On sait grâce au lemme 4.2.4 que

$$T = (M_\infty)^{\lambda\lambda_0} \otimes \left(\mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x' - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right).$$

On peut alors appliquer la proposition 2.3.2 de [DS13] :

$$\delta^p(T) = \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) + \sum_{\alpha \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, e^{-2i\pi\alpha}}^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) + \sum_{\alpha \in [1 - \gamma_0, 1[} \underbrace{\nu_{1, e^{-2i\pi\alpha}}^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0})}_{=0 \text{ car } \alpha \neq 0}.$$

Comme

$$\sum_{\alpha \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, e^{-2i\pi\alpha}}^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ 0 & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[, \end{cases}$$

on en déduit que

$$\delta^p(T) = \begin{cases} \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \delta^p((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[. \end{cases}$$

En outre, en utilisant la formule 2.2.13 de [DS13], on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbf{x}} \sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(T) &= \sum_{\mu \neq 1} \left(\nu_{\infty, \mu\lambda_0}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) + \nu_{1, \mu\lambda_0}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) \right) \\
&= \nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) + \nu_{1, 1}^{p-1}((M_\infty)^{\lambda\lambda_0}) \\
&= 2\nu_{\infty, \lambda\lambda_0}^{p-1}(M).
\end{aligned}$$

La formule 2.2.14 de [DS13] donne quant à elle

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu_{x,1}^p(T) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \left(\underbrace{\mu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^{p+k}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0})}_{=0} + \underbrace{\mu_{1, \lambda_0, \ell+1}^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0})}_{=0} \right) = 0.$$

On est maintenant en mesure d'appliquer la formule (\star) .

(i) Pour $\gamma \in]0, 1 - \gamma_0[$, on a :

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \underbrace{\delta^{p-1}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \delta^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + 2\nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M)}_{=0 \text{ d'après } (\star\star)} \\ &= \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

(ii) Pour $\gamma \in]1 - \gamma_0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \left(\delta^{p-1}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) \right) - \left(\delta^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) \right) - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) \\ &\quad - \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + 2\nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) \\ &= \delta^{p-1}((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) - \delta^p((M_{\infty})^{\lambda \lambda_0}) \\ &= \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M). \end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant les deux derniers points, on a

$$\nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[. \end{cases}$$

Ajoutons maintenant la filtration de monodromie. On a démontré dans la preuve du théorème 4.2.5 que

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim P_{\ell} \psi_{\infty, \lambda}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_{\ell}T)).$$

On fixe maintenant $\ell \geq 0$ et on ajoute la filtration de Hodge au complexe $P_{\ell}K^{\bullet}$. Comme la connexion envoie le filtré d'ordre p dans celui d'ordre $p-1$, on a $H^j(\text{gr}_F^p P_{\ell}K^{\bullet}) = 0$ pour $j \neq 0$ et $p \in \mathbb{Z}$ similairement au lemme 4.2.7. Comme précédemment, on applique le résultat de suite spectrale obtenu au lemme 4.2.6, ce qui donne

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim H^0(\text{gr}_F^p P_{\ell}K^{\bullet}) = \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_{\ell}T)).$$

Comme $\text{DR}(P_{\ell}T)$ est bien ici de la forme $j_* \mathcal{V}$, on peut lui appliquer le même raisonnement que celui qu'on a fait pour T , et obtenir un analogue de (\star) pour $P_{\ell}T$:

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^{p-1}(P_{\ell}T) - \delta^p(P_{\ell}T) - h^p(P_{\ell}T) - h^{p-1}(P_{\ell}T) + \sum_{x \in \mathfrak{X}} \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x, \mu}^{p-1}(P_{\ell}T) + \mu_{x,1}^p(P_{\ell}T) \right).$$

Maintenant, comme on a d'une part

$$P_\ell T = P_\ell(M_\infty)^{\lambda\lambda_0} \otimes \left(\mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x' - 1)^{-1}], d + \gamma_0 \left(-\frac{dx'}{x'} + \frac{dx'}{x' - 1} \right) \right),$$

et une identité semblable à (***) avec $P_\ell(M_\infty)^{\lambda\lambda_0}$ d'autre part, on peut exactement reproduire le calcul précédent et on obtient finalement

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[. \end{cases}$$

(ii) Cas $\lambda = 1$. La différence avec le cas précédent est locale : on a ici une extension minimale en 0. On a montré dans la preuve du théorème 4.2.5 que $P_\ell T$ est localement autour de 0 donné par le carquois

$$(P_\ell H)[x'] \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} (P_\ell G)[\partial_{x'}],$$

où $H = (M_\infty)_{\gamma_0}$ et $G = N(H)$.

On peut donc écrire que $P_\ell T$ est localement donné par la somme directe de $P_\ell^1 T$ défini par le carquois

$$(P_\ell H)[x'] \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} 0$$

et de $P_\ell^2 T$ défini par le carquois

$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} (P_\ell G)[\partial_{x'}].$$

On obtient en fait une décomposition globale en somme directe $P_\ell T = P_\ell^1 T \oplus P_\ell^2 T$, où $P_\ell^1 T$ est donné par le même terme que dans le cas $\lambda \notin \{1, \bar{\lambda}_0\}$, et $P_\ell^2 T$ est supporté en 0 et donné par $(P_\ell G)[\partial_{x'}]$.

On a alors

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, 1, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_\ell^1 T \oplus P_\ell^2 T)) \\ &= \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_\ell^1 T)) + \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}(P_\ell^2 T)), \end{aligned}$$

ce qui donne deux dimensions à calculer.

La première dimension s'obtient en raisonnant de manière similaire au cas précédent car $\text{DR}(P_\ell^1 T)$ est de la forme $j_* \mathcal{V}$. D'une part, comme

$$\sum_{\alpha \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, e^{-2i\pi\alpha}}^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) = \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^p(M),$$

on a alors

$$\delta^p(P_\ell^1 T) = \delta^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbf{x}} \sum_{\mu \neq 1} \nu_{x,\mu}^{p-1}(P_\ell^1 T) &= \sum_{\mu \neq 1} \left(\underbrace{\nu_{\infty,\mu\lambda_0}^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0})}_{=0 \text{ car } \mu \neq 1} + \nu_{1,\mu\lambda_0}^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) \right) \\ &= \nu_{1,1}^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) \\ &= \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^{p-1}(M), \end{aligned}$$

ainsi que

$$\sum_{x \in \mathbf{x}} \mu_{x,1}^p(P_\ell^1 T) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \left(\underbrace{\mu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^{p+k}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0})}_{=0} + \underbrace{\mu_{1,\lambda_0,\ell+1}^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0})}_{=0} \right) = 0.$$

En rassemblant le tout, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^1 T)) &= \delta^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \delta^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^{p-1}(M) \\ &= \delta^{p-1}(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \delta^p(P_\ell(M_\infty)^{\lambda_0}) - \nu_{\infty,\lambda_0,\ell}^p(M) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant à déterminer $\dim \operatorname{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T))$. On sait que $P_\ell^2 T$ est supporté en 0 et donné par $(P_\ell G)[\partial_{x'}]$. La filtration de Hodge est ici donnée par

$$F^p((P_\ell G)[\partial_{x'}]) = \sum_{k \geq 0} \partial_{x'}^k \cdot F^{p+1+k}(P_\ell G).$$

On a alors $\mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T))$ qui est donné par le conoyau de

$$(P_\ell G)[\partial_{x'}] \xrightarrow{\partial_{x'}} (P_\ell G)[\partial_{x'}]$$

qui s'identifie à $P_\ell G$ muni de la filtration

$$F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T)) = F^p(P_\ell G).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \operatorname{DR}(P_\ell^2 T)) &= \dim \operatorname{gr}_F^p(P_\ell G) \\ &= \dim \operatorname{gr}_F^p(P_{\ell+1} H) \\ &= \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^p(M). \end{aligned}$$

En sommant les deux dimensions, on obtient

$$\nu_{\infty,1,\ell}^p(\operatorname{MC}_{\lambda_0}(M)) = 0 + \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^p(M) = \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^p(M).$$

(iii) Si $\lambda = \overline{\lambda_0}$, on reprend la suite exacte

$$0 \rightarrow T_0 \rightarrow T \rightarrow T_1 \rightarrow 0.$$

D'après la proposition 5.1.3, les morphismes de cette suite exacte sont strictement compatibles à la filtration de Hodge. Il en résulte qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_F^p T_0 \rightarrow \mathrm{gr}_F^p T \rightarrow \mathrm{gr}_F^p T_1 \rightarrow 0,$$

ce qui donne

$$\nu_{\infty, \lambda_0}^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1, \mathrm{DR}(T_0)) + \dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_x^1, \mathrm{DR}(T_1)).$$

Le cas du terme de gauche se traite comme dans le cas $\gamma \in]1 - \gamma_0, 1[$ de la partie (i), ce qui donne $\dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\mathrm{exc}}^1, \mathrm{DR}(T_0)) = \nu_{\infty, 1}^p(M)$. Concernant le terme de droite, on a

$$\dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_x^1, \mathrm{DR}(T_1)) = \dim \mathrm{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}) = h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)).$$

On a le lemme suivant :

Lemme 6.3.2 $h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \mathrm{prim}}^{p-1}(M)$.

Preuve. D'après le lemme 2.2.8 et la remarque 2.3.5 de [DS13], on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M}^{\min} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0,$$

strictement compatible à la filtration de Hodge, où \mathcal{N} est supporté à l'infini, ainsi qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_F^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) \rightarrow \mathrm{gr}_F^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) \rightarrow \mathrm{gr}_F^p H^1(\mathrm{DR}\mathcal{N}) \rightarrow 0,$$

avec

$$h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \mathrm{prim}}^{p-1}(M).$$

□

En sommant, on obtient finalement

$$(\diamond) \nu_{\infty, \lambda_0}^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}(M)) = \nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\mathcal{M}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \mathrm{prim}}^{p-1}(M).$$

D'autre part, comme on l'a vu dans la preuve du lemme 4.2.7, on est dans la situation d'un carquois d'extension minimale

$$T_0 \begin{array}{c} \hookrightarrow \\ \xleftarrow{N} \end{array} T$$

avec $P_\ell T \simeq P_{\ell-1} T_0$ pour $\ell \geq 1$. Comme N est strictement compatible à la filtration de Hodge, avec un décalage $F^\bullet \rightarrow F^{\bullet-1}$, on a également pour $\ell \geq 1$

$$\mathrm{gr}_F^p P_\ell T \simeq \mathrm{gr}_F^{p-1} P_{\ell-1} T_0$$

et par suite

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\text{exc}}^1, \text{DR}(P_\ell T)) = \dim \text{gr}_F^{p-1} \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\text{exc}}^1, \text{DR}(P_{\ell-1} T_0)).$$

On peut alors maintenant refaire exactement le raisonnement effectué dans le cas (i), à savoir

$$\dim \text{gr}_F^p \mathbf{H}^1(\mathbb{P}_{\text{exc}}^1, \text{DR}(P_\ell T_0)) = \nu_{\infty, 1, \ell}^p(M),$$

ce qui donne finalement pour $\ell \geq 1$ l'expression

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1}(M).$$

Il reste à traiter le cas $\ell = 0$. Comme on a

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$$

on obtient, en utilisant la formule (\diamond) , que

$$\nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1+k}(M).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1+k}(M) &= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell}^{p-1+k}(M) + \sum_{\ell \geq 0} \nu_{\infty, 1, \ell}^{p+\ell}(M) \\ &= \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M) + \nu_{\infty, 1, \text{coprim}}^p(M), \end{aligned}$$

il en résulte donc que

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, 1, \text{coprim}}^p(M) + \nu_{\infty, 1}^p(M) - \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M).$$

En outre, un calcul général montre immédiatement que

$$\nu_{\infty, 1, \text{coprim}}^p(M) - \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, 1}^p(M) - \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M),$$

et par conséquent $\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min})$, ce qui termine la démonstration du théorème 6.3.1. \square

Remarque. Si l'on somme sur $p \in \mathbb{Z}$ les identités du théorème précédent, on retrouve bien les expressions de la partie (2) du théorème 4.2.5.

Pour complètement terminer l'étude du comportement des données numériques de Hodge par convolution additive, il reste à expliciter le comportement des données locales h^p et des données globales δ^p . Cela revient à généraliser les points (1) et (3) du théorème 3.1.2 de [DS13] sans l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini. C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 6.3.3 *Les invariants locaux $h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M).$$

Preuve. On sait que $h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\lambda \in S^1} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$, il suffit donc de sommer les expressions obtenues au théorème 6.3.1. En utilisant directement l'identité (\diamond) dans le cas $\lambda = \overline{\lambda_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^p(M) + \underbrace{\sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^{p+k}(M)}_{\nu_{\infty, \lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{coprim}}^p(M)} \\ &+ \nu_{\infty, 1}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{coprim}}^p(M) \\ &= \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

□

Remarque. D'une part, si l'on somme sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien en utilisant le lemme 6.3.2 la troisième formule de la proposition 1.3.5 de [DS13]. D'autre part, si l'on ajoute l'hypothèse de Dettweiler et Sabbah de monodromie scalaire à l'infini égale à $\lambda_0 \text{Id}$, on a $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) = 0$ sauf si $\lambda = \lambda_0$ et $\ell = 0$. Ainsi

$$\sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, \lambda_0}^{p-1}(M) = \nu_{\infty, \lambda_0, \text{prim}}^{p-1}(M) = h^{p-1}(M),$$

et donc $h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M))$, ce qui permet de retrouver le point (1) du théorème 3.1.2 de [DS13].

Proposition 6.3.4 *Les invariants globaux $\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i, 1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{x_i, \lambda}^{p-1}(M) \right).$$

Preuve. On note $\gamma^p = \delta^p - \delta^{p-1}$. D'après l'identité (2.3.5*) de [DS13], on a

$$h^p H^1(\mathbb{A}^1, \text{DR}(M)) = -\gamma^p(M) - h^p(M) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right).$$

On déduit donc de la proposition 6.3.3 (écrite avec *coprim* plutôt que *prim*) que

$$(1) \quad h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + h^p(M) = -\gamma^p(M) + \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0]} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda_0, \text{coprim}}^p(M) \\ + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right).$$

D'après la proposition 3.1.1 de [DS13], on a $h^p(\text{MC}_{\overline{\lambda_0}}(\text{MC}_{\lambda_0}(M))) = h^{p-1}(M)$, donc en écrivant la même formule que ci-dessus avec $\text{MC}_{\overline{\lambda_0}}(M)$ puis en l'appliquant en $\text{MC}_{\lambda_0}(M)$, cela donne

$$h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + h^{p-1}(M) = -\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\gamma \in [0, 1-\gamma_0]} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{coprim}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i, \mu}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \mu_{x_i, 1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \right).$$

D'après le théorème 6.3.1, on a

$$\sum_{\gamma \in [0, 1-\gamma_0]} \nu_{\infty, \lambda}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda \lambda_0}^{p-1}(M) + \nu_{\infty, 1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ = \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) + \nu_{\infty, 1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$$

et

$$\sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0[} \nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M).$$

De même, on a

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{coprim}}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\ell \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell}^{p+\ell}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \right) \\ = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell+1}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty, 1, \ell}^{p-1+k}(M) \\ = \nu_{\infty, 1}^{p-1}(M)$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\nu_{\infty,1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,1,\ell}^{p+k}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \\
&= \sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,\lambda_0,\ell+1}^{p+k}(M) \\
&= \nu_{\infty,\lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M).
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant le point (2) du théorème 3.1.2 de [DS13], on a

$$\sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \mu_{x_i,\mu}^{p-1}(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) + \mu_{x_i,1}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) \right) = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0,1]} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right).$$

Finalement, en regroupant le tout, cela donne

$$\begin{aligned}
h^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= -\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu_{\infty,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M) + \nu_{\infty,\lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0}^{p-1}(M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0,1]} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right).
\end{aligned}$$

En combinant maintenant cette dernière égalité avec l'identité (1), on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \gamma^p(M) + h^p(M) - \sum_{\gamma \in [0,\gamma_0]} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in]\gamma_0,1[} \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda_0}^{p-1}(M) \\
&\quad - \sum_{i=1}^r \left((\mu_{x_i,1}^p(M) - \mu_{x_i,1}^{p-1}(M)) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} (\mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) - \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M)) \right)
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement que la quantité $\gamma^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M))$ est égale à

$$\gamma^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0,1[} (\nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M)) - \sum_{i=1}^r \left((\mu_{x_i,1}^p(M) - \mu_{x_i,1}^{p-1}(M)) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} (\mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) - \mu_{x_i,\lambda}^{p-2}(M)) \right)$$

En sommant maintenant ces égalités pour $p' \leq p$, on en déduit que

$$\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0,1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0,1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right),$$

ce qui termine la preuve de la proposition. \square

Remarque. Si l'on ajoute l'hypothèse de Dettweiler et Sabbah de monodromie scalaire à l'infini égale à $\lambda_0 \text{Id}$, on a $\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) = 0$ sauf si $\lambda = \lambda_0$ et $\ell = 0$. Ainsi

$$\sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M) = \nu_{\infty, \lambda_0}^p(M) = h^p(M)$$

et donc

$$\delta^p(\text{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + h^p(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i, 1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1 - \gamma_0[} \mu_{x_i, \lambda}^{p-1}(M) \right),$$

ce qui permet de retrouver le point (3) du théorème 3.1.2 de [DS13].

6.4 Comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative

Soient $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de points de \mathbb{G}_m , $x_0 = 0$, \mathcal{V} un système local sur $U = \mathbb{G}_m \setminus \mathbf{x}$ induit par une variation de structure de Hodge complexe polarisable $(V, F^\bullet V, \nabla)$ sur U et M le $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ -module extension minimale en les points de \mathbf{x} . On note \mathcal{M}^{\min} le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$ -module extension minimale de M en 0 et à l'infini.

Soient $\gamma_0 \in]0, 1[$ et $\lambda_0 = \exp(-2i\pi\gamma_0)$. On suppose dans cette sous-section que $M \in C'_{\lambda_0}$ (catégorie introduite à la définition 2.8.2), et on va chercher à exprimer les données numériques de Hodge de $\text{MC}'_{\lambda_0}(M)$ en fonction de celles de M . Il s'agit donc de donner un analogue du théorème 4.3.1 avec filtration de Hodge.

La proposition suivante donne le comportement des données numériques locales de Hodge cycles évanescents par convolution intermédiaire multiplicative :

Proposition 6.4.1 *Soit $\lambda = e^{-2i\pi\gamma}$ avec $\gamma \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :*

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[. \end{cases}$$

Preuve. Avec $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion, la formule obtenue à la proposition 2.8.1 donne

$$\text{MC}'_{\lambda_0}(M) = j^+(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\lambda_0}^-))).$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $x_i \neq 0$ et

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\lambda_0}^-))).$$

On a vu lors de la preuve de la proposition 2.8.3 que si $M \in C'_{\lambda_0}$, alors $j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\lambda_0}^-) \in \mathcal{C}$. De plus, l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini faite dans le théorème 3.1.2 de [DS13] ne sert que pour les parties (1) et (3) du théorème, nous permettant bien d'appliquer (2) sans cette hypothèse.

On a alors

$$\mu_{x_i, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0] \\ \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1]. \end{cases}$$

Comme le système local $\mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}$ n'a pas de monodromie autour de x_i , on a $\mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \mu_{x_i, \lambda/\lambda_0, \ell}^p(M)$, ce qui termine la preuve de la proposition. \square

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (1) du théorème 4.3.1.

Les deux propositions suivantes donnent le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini par convolution intermédiaire multiplicative.

Proposition 6.4.2 *Soit $\lambda = e^{-2i\pi\gamma}$ avec $\gamma \in [0, 1[$. On a les données suivantes :*

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, 1, \ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant la proposition 2.8.1 et le théorème 6.3.1, on a

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda\lambda_0, \ell}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell+1}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, 1, \ell-1}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1. \end{cases}$$

Le système local $\mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}$ a pour monodromie λ_0 autour de l'infini, ainsi en appliquant l'identité 2.2.13 de [DS13], on a

$$\nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda, \ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]0, 1 - \gamma_0[\\ \nu_{\infty, \lambda, \ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]1 - \gamma_0, 1[\\ \nu_{\infty, 1, \ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \ell \geq 1, \end{cases}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. \square

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (2) du théorème 4.3.1.

Proposition 6.4.3

$$\begin{aligned} & \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) - h^{p-1}(M) + h^p(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ & - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda}^p(M)) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} (\nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda}^p(M)). \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant la proposition 2.8.1 et le théorème 6.3.1, on a

$$\nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, 0}(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}).$$

Rappelons la formule (*) démontrée pendant la preuve du théorème 6.3.1 (ou de manière équivalente l'identité (2.3.3*) de [DS13]) :

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) &= \delta^{p-1}(M) - \delta^p(M) + h^{p-1}(M) - h^p(M) - \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &+ \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right), \end{aligned}$$

et appliquons-la avec $(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}$:

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) &= \delta^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + h^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - h^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) \\ &- \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x_i, \mu}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \mu_{x_i, 1}^p((M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) \right), \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.2 de [DS13], on a

$$\delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \delta^p(M) - h^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0, \lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty, \lambda}^p(M).$$

En utilisant les identités 2.2.12 et 2.2.13 de [DS13], on a alors

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) &= \delta^{p-1}(M) - \delta^p(M) - \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &+ \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda}^p(M)) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} (\nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda}^p(M)) + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\mu \neq 1} \nu_{x_i, \mu}^{p-1}(M) + \mu_{x_i, 1}^p(M) \right), \end{aligned}$$

ce dont on déduit finalement que

$$\begin{aligned} h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DR}^{\text{an}}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})^{\min}) &= h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) - h^{p-1}(M) + h^p(M) + \nu_{\infty, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{0, 1, \text{prim}}^{p-1}(M) \\ &- \nu_{\infty, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0, \overline{\lambda_0}, \text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0, \lambda}^p(M)) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} (\nu_{\infty, \lambda}^{p-1}(M) - \nu_{\infty, \lambda}^p(M)). \end{aligned}$$

□

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (3) du théorème 4.3.1.

La proposition suivante donne le comportement des invariants locaux h^p par convolution intermédiaire multiplicative.

Proposition 6.4.4 *Les invariants locaux $h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = h^p(M) + h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) + \nu_{0,1,\text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda}^p(M)).$$

Preuve. On peut sommer de manière similaire à la proposition 6.3.3 :

$$\begin{aligned} h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) + \underbrace{\sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,1,\ell+1}^{p+k}(M)}_{\nu_{\infty,1}^p(M) - \nu_{\infty,1,\text{coprim}}^p(M)} + \underbrace{\sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{\infty,\lambda_0,\ell-1}^{p-1+k}(M)}_{\nu_{\infty,\lambda_0}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M)} \\ &\quad + \nu_{\infty,\lambda_0,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)), \end{aligned}$$

et se rappeler que pour tout $\lambda \in S^1$, on a $\nu_{\infty,\lambda,\text{coprim}}^p(M) = \nu_{\infty,\lambda,\text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda}^p(M) - \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M)$, d'où

$$h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty,\lambda}^{p-1}(M) + \sum_{\gamma \in]1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{\infty,1,\text{prim}}^{p-1}(M) + \nu_{\infty,\lambda_0,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)).$$

Il suffit alors d'injecter la formule de la proposition 6.4.3 pour conclure. \square

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (4) du théorème 4.3.1.

La proposition suivante donne le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches en 0 par convolution intermédiaire multiplicative.

Proposition 6.4.5 *Soit $\lambda = e^{-2i\pi\gamma}$ avec $\gamma \in [0, 1[$. On a les données suivantes :*

$$\nu_{0,\lambda,\ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda,\ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \nu_{0,\lambda,\ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[\\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \nu_{0,1,\ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = 1, \ell \geq 1 \\ h^p H^1(\mathbb{P}^1, \text{DRM}^{\min}) & \text{si } \lambda = 1, \ell = 0. \end{cases}$$

Preuve. On note \tilde{M} l'extension minimale de M sur \mathbb{A}^1 en 0. En appliquant l'identité 2.2.14 de [DS13], on obtient :

$$\mu_{0,\lambda,\ell}^p(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) = \mu_{0,\lambda,\ell}^p((\tilde{M} \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})_{\min(\{0\})}) = \begin{cases} \mu_{0,\lambda/\overline{\lambda_0},\ell}^p(\tilde{M}) & \text{si } \lambda \neq 1, \overline{\lambda_0} \\ \mu_{0,1/\overline{\lambda_0},\ell+1}^p(\tilde{M}) & \text{si } \lambda = 1 \\ \nu_{0,1,\ell}^p(\tilde{M}) & \text{si } \lambda = \overline{\lambda_0}, \end{cases}$$

d'où

$$\mu_{0,\lambda,\ell}^p(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda\lambda_0,\ell}^p(M) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

En utilisant maintenant le deuxième point du théorème 3.1.2 de [DS13], on obtient :

$$\mu_{0,\lambda,\ell}^p(\text{MC}_{\lambda_0}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}))) = \begin{cases} \mu_{0,\lambda/\lambda_0,\ell}^p(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0] \\ \mu_{0,\lambda/\lambda_0,\ell}^{p-1}(j_{\dagger+}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}})) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[\cup \{0\}. \end{cases}$$

Il résulte alors de la formule de la proposition 2.8.1 que :

$$\nu_{0,\lambda,\ell}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu_{0,\lambda,\ell}^p(M) & \text{si } \gamma \in]0, \gamma_0[\\ \nu_{0,\lambda,\ell}^{p-1}(M) & \text{si } \gamma \in]\gamma_0, 1[\\ \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^p(M) & \text{si } \lambda = \lambda_0 \\ \nu_{0,1,\ell-1}^{p-1}(M) & \text{si } \lambda = 1, \ell \geq 1. \end{cases}$$

On déduit la quantité $\nu_{0,1,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ par sommation, à savoir

$$\begin{aligned} \nu_{0,1,0}^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) &= h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0[} \nu_{0,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) - \underbrace{\sum_{\ell \geq 0} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{0,\lambda_0,\ell+1}^{p+k}(M)}_{\nu_{0,\lambda_0}^p(M) - \nu_{0,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M)} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell} \nu_{0,1,\ell-1}^{p-1+k}(M)}_{\nu_{0,1}^{p-1}(M) + \nu_{0,1,\text{coprim}}^p(M)} \\ &= h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - \sum_{\gamma \in]0, \gamma_0] } \nu_{0,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) + \nu_{0,\lambda_0,\text{coprim}}^p(M) - \nu_{0,1,\text{coprim}}^p(M) \\ &= h^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) - \sum_{\gamma \in [0, \gamma_0[} \nu_{0,\lambda}^p(M) - \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \nu_{0,1,\text{prim}}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'injecter la formule de la proposition 6.4.4 pour conclure. \square

Remarque. En sommant sur $p \in \mathbb{Z}$, on retrouve bien l'expression de la partie (5) du théorème 4.3.1.

Pour terminer l'étude du comportement des données numériques de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative, il reste à expliciter le comportement des données numériques globales de Hodge.

Proposition 6.4.6 *Les invariants globaux $\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M))$ sont donnés par :*

$$\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^p(M) - \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M)) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right).$$

Preuve. On utilise encore la formule de la proposition 2.8.1. D'après la proposition 6.3.4, on a

$$\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \sum_{i=0}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) \right).$$

On va expliciter chacun des termes. En appliquant la formule de la proposition 2.3.2 de [DS13], on obtient :

$$\delta^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \delta^p(M) - h^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^p(M) + \sum_{\gamma \in [1-\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M).$$

De plus, d'après l'identité 2.2.13 de [DS13], on a

$$\sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) = \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{\infty,\lambda\overline{\lambda_0}}^p(M) = \sum_{\gamma \in [0, 1-\gamma_0[} \nu_{\infty,\lambda}^p(M).$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mu_{0,1}^p(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{0,\lambda}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) &= \nu_{0,1}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) - \nu_{0,1,\text{prim}}^{p-1}(M \otimes \mathcal{L}_{\overline{\lambda_0}}) + \sum_{\gamma \in]\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) \\ &= \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M) - \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\delta^p(\text{MC}'_{\lambda_0}(M)) = \delta^p(M) + \sum_{\gamma \in [\gamma_0, 1[} (\nu_{0,\lambda}^p(M) - \nu_{0,\lambda}^{p-1}(M)) + \nu_{0,\lambda_0,\text{prim}}^{p-1}(M) - \sum_{i=1}^r \left(\mu_{x_i,1}^p(M) + \sum_{\gamma \in]0, 1-\gamma_0[} \mu_{x_i,\lambda}^{p-1}(M) \right),$$

ce qui termine la preuve de la proposition. \square

Chapitre 7

Modules hypergéométriques

7.1 Définition des modules hypergénométriques et premières propriétés

L'opérateur différentiel hypergénométrique $\text{Hyp}(P, Q)$ est défini pour $P, Q \in \mathbb{C}[t]$ par :

$$\text{Hyp}(P, Q) := P(t\partial_t) - tQ(t\partial_t)$$

On pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ dans toute la suite. On définit le \mathcal{D} -module hypergénométrique $H(P, Q)$ comme :

$$H(P, Q) := \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot \text{Hyp}(P, Q)$$

On va supposer ici que P et Q sont unitaires de même degré n . On note $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\beta_j)_{1 \leq j \leq n}$ les racines de P et Q comptées avec multiplicité. On note alors :

$$\text{Hyp}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)} := \text{Hyp}(P, Q) = \prod_{i=1}^n (t\partial_t - \alpha_i) - t \prod_{j=1}^n (t\partial_t - \beta_j)$$

On note $H_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)} := H(P, Q)$, notation que l'on simplifiera en $H_{\alpha, \beta}$ si P et Q sont de degré 1.

Ces modules hypergénométriques ont été beaucoup étudiés (voir [Lev61], [BH89] et [Kat90] notamment). Une première propriété importante est que ces \mathcal{D} -modules sont irréductibles si et seulement si $\alpha_i \neq \beta_j$ modulo \mathbb{Z} (corollaire 3.2.1 de [Kat90]). On suppose dans la suite que cette condition est satisfaite. On a en outre une propriété de stabilité par dualité : le dual $D(H(P, Q))$ d'un module hypergénométrique est isomorphe à un module hypergénométrique $H(P', Q')$.

Le terme dominant de l'équation différentielle étant $t^n(1-t)\partial_t^n$, on en déduit que l'opérateur différentiel hypergénométrique induit une connexion sur le fibré vectoriel holomorphe trivial de rang n sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, soit un système local de rang n sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Les trois singularités sont en outre régulières. Le théorème 3.5.4 de [Kat90] montre que le système local induit par l'équation hypergénométrique est rigide. Autrement dit, et Riemann avait déjà constaté ce fait dès 1857 dans [Rie57], l'équation hypergénométrique peut être reconstruite, à isomorphisme près, à partir de la connaissance de ses monodromies en 0, 1 et ∞ .

En notant A la matrice de taille n ayant comme blocs de Jordan les $J_{\alpha_i, \text{mult}(\alpha_i)}$ et B celle ayant comme blocs de Jordan les $J_{-\beta_i, \text{mult}(\beta_i)}$, on obtient une expression explicite des monodromies (définies à conjugaison près) en 0 et ∞ : $\exp(-2i\pi A)$ et $\exp(-2i\pi B)$ respectivement. La monodromie en 1 est quant à elle une pseudo-réflexion (somme de l'identité et d'une matrice de rang 1). Cela suffit à déterminer sa classe de conjugaison, déterminée par son déterminant, égal ici à $(\det(\exp(2i\pi(A+B))))$. En particulier pour $n = 1$, les monodromies de $H_{\alpha, \beta}$ sont : $\exp(-2i\pi\alpha)$ en 0, $\exp(2i\pi\beta)$ en ∞ et $\exp(2i\pi(\alpha - \beta))$ en 1.

On déduit de la proposition 5.3.1 qu'il existe une variation de structure de Hodge polarisable sous-jacente au système local induit par l'équation hypergénométrique, unique à décalage près (partie (i) de la proposition 1.13 de [Del87]).

Remarque (Lien avec \mathcal{L}_λ et \mathcal{L}'_λ définis en sous-sections 2.6 et 2.8). On fixe $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda = \exp(-2i\pi\alpha)$. Au niveau des systèmes locaux sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, on a $\mathcal{L}_\lambda \simeq H_{\alpha, \alpha}$ et $\mathcal{L}'_\lambda \simeq H_{0, \alpha}$. Un premier argument est de comparer les monodromies en 0, 1 et ∞ et d'utiliser la rigidité du cas hypergénométrique. On peut aussi comparer les équations : pour \mathcal{L}_λ , $t\partial_t - \alpha - t(t\partial_t - \alpha) = (1-t)(t\partial_t - \alpha)$ est équivalente à $t\partial_t - \alpha$ car $1-t$ est inversible ; pour \mathcal{L}'_λ , $t\partial_t - t(t\partial_t - \alpha) = -t((t-1)\partial_t - \alpha)$ est équivalente à $(t-1)\partial_t - \alpha$ car t est inversible.

7.2 Transformation de Mellin

On aimerait avoir sur \mathbb{G}_m une transformation avec des propriétés similaires à la transformée de Fourier sur \mathbb{A}^1 , à savoir transformer le produit de convolution en produit tensoriel. Là encore, l'analyse est un bon point de départ et l'on dispose de la transformée de Mellin qui à une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ (bornée en 0 et à décroissance rapide en $+\infty$) associe :

$$\widehat{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} t^s \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

Si l'on note τ l'opérateur de translation $s \mapsto s + 1$, on a $\widehat{t\varphi} = \tau\widehat{\varphi}$ et une intégration par partie permet de montrer que $t\widehat{\partial_t\varphi} = -s\widehat{\varphi}$. Ainsi, l'action d'un opérateur différentiel $P(t, t\partial_t) \in \mathcal{D}$ sur φ est changée en l'action d'un opérateur aux différences $P(\tau, -s)$ sur $\widehat{\varphi}$.

Il est alors naturel de définir la \mathbb{C} -algèbre (non commutative) $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ engendrée par s , τ et τ^{-1} avec la relation $\tau s = (s + 1)\tau$. On vient ni plus ni moins de voir que :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[t, t^{-1}]\langle t\partial_t \rangle &\rightarrow \mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle \\ t &\mapsto \tau \\ t\partial_t &\mapsto -s \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbre.

Définition 7.2.1 La transformée de Mellin d'un \mathcal{D} -module M , notée ${}^M M$, est définie comme le \mathbb{C} -espace vectoriel M sur lequel on a l'action suivante de $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$: τ agit comme t , s agit comme $-t\partial_t$.

Notons qu'on peut généraliser la construction faite ici sur \mathbb{G}_m et définir la transformée de Mellin sur le tore $(\mathbb{G}_m)^p$ (voir par exemple [Fab06]). Dans la situation qui nous intéresse ici, la transformée de Mellin de M n'est rien d'autre qu'un $\mathbb{C}[s]$ -module muni d'une action inversible de τ , qui n'est pas $\mathbb{C}[s]$ -linéaire mais qui vérifie la propriété $\tau(f \cdot m) = \tau f \cdot \tau m = f(s + 1) \cdot \tau m$ pour $f \in \mathbb{C}[s]$ et $m \in M$.

En reprenant les définitions de convolutions données en sous-section 2.6, on a, similairement à la proposition 2.7.2, pour M, N deux \mathcal{D} -modules holonomes la propriété

$${}^M(M ** N) = {}^M M \overset{L}{\otimes} {}^M N$$

et par dualité

$${}^M(M *_! N) = D(D^M M \overset{L}{\otimes} D^M N)$$

De manière parfaitement similaire à la transformée de Fourier sur \mathbb{A}^1 , la sous-catégorie \mathcal{P} n'est rien d'autre ici que la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D})$ constituée des N tels que ${}^M N$ et $D^M N$ (ou de manière équivalente ${}^M D N$) sont $\mathbb{C}[s]$ -plats. Une manière simple d'appréhender $D^M N$ dans la pratique est de considérer sur $\text{Hom}_{\mathbb{C}[s]}({}^M M, \mathbb{C}[s])$ l'action de τ définie par $(\tau\varphi)m = \tau^{-1}(\varphi(\tau m))$.

7.3 Modules hypergéométriques et convolution

Une propriété fondamentale des modules hypergéométriques est le théorème 5.3.1 de [Kat90] :

Théorème 7.3.1 *Pour $P, Q, R, S \in \mathbb{C}[t]$ avec PR et QS sans racine commune modulo \mathbb{Z} , on a*

$$H(PR, QS) \simeq H(P, Q) * H(R, S),$$

identité valable pour les trois types de convolutions.

On a également le résultat suivant :

Proposition 7.3.2 *Si P et Q sont sans racine commune mod \mathbb{Z} , alors $H(P, Q)$ est dans la catégorie \mathcal{P} .*

Preuve. Tout d'abord, comme $H(P, Q)$ est irréductible en tant que \mathcal{D} -module, il en est de même pour sa transformée de Mellin $M = {}^M H(P, Q)$ en tant que $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module. Soit T un sous- $\mathbb{C}[s]$ -module de M de $\mathbb{C}[s]$ -torsion, posons

$$T' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau^k T.$$

Il s'agit d'un sous- $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module de M de $\mathbb{C}[s]$ -torsion. Comme M n'est pas lui-même de $\mathbb{C}[s]$ -torsion, on en déduit, par irréductibilité de M en tant que $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ -module, que $T' = 0$. Il en résulte que $T = 0$, ainsi l'on en conclut que M est $\mathbb{C}[s]$ -plat.

Enfin, comme le dual $D(H(P, Q))$ est isomorphe à un module hypergéométrique $H(P', Q')$, on en déduit que sa transformée de Mellin ${}^M D(H(P, Q))$ est également $\mathbb{C}[s]$ -plate. \square

Remarque. En lien avec le résultat précédent, on peut montrer que tout \mathcal{D} -module holonome irréductible M tel que $\dim_{\mathbb{C}(s)}(\mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}[s]} {}^M M) = 1$ est isomorphe à un module hypergéométrique $H(P, Q)$ (avec P et Q sans racine commune modulo \mathbb{Z}), voir le théorème 3.7.1 de [Kat90] et le théorème 1 de [LS91].

7.4 Formules de Fedorov

Le théorème 6.3.1 et son corollaire multiplicatif la proposition 6.4.2 permettent de redémontrer avec une toute nouvelle approche un résultat récent de Fedorov sur l'expression de données numériques de Hodge des modules hypergéométriques. Nous nous intéresserons en particulier au théorème 3 de [Fed17] donnant l'expression des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini et en 0. L'intérêt des propositions 6.4.2 et 6.4.5 réside dans le fait qu'elles donnent explicitement le comportement au voisinage de ces deux points, évitant notamment d'avoir à déplacer la singularité à l'infini en un autre point comme le fait Fedorov.

On pose $(\alpha, \beta) = ((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n))$ un couple de n -uplets de $[0, 1[^n$ (non nécessairement ordonnés) vérifiant $\alpha_i \neq \beta_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On utilise la notation $\{\cdot\}$ pour désigner la partie fractionnaire. Commençons par faire un état des lieux de la situation au voisinage des trois singularités.

En ∞ : Pour $m \in \{1, \dots, n\}$, on note $\text{mult}(\beta_m) = \#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid \beta_j = \beta_m\}$, $\ell_m(\beta) = \text{mult}(\beta_m) - 1$ et $\lambda_m = \exp(2i\pi\beta_m)$. La matrice de la monodromie à l'infini de $H_{\alpha, \beta}$ est composée pour chacune des valeurs propres λ_m d'un unique bloc de Jordan de taille $\text{mult}(\beta_m)$. On en déduit que $\nu_{\infty, \lambda_m, \ell}(H_{\alpha, \beta}) = 0$ sauf pour $\ell = \ell_m(\beta)$ pour lequel cette quantité vaut 1. L'étude de $\nu_{\infty, \lambda_m, \ell}^p(H_{\alpha, \beta})$ se réduit donc à déterminer la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle cette quantité pour $\ell = \ell_m(\beta)$ est non nulle (et égale à 1).

En 0 : Pour $m \in \{1, \dots, n\}$, on note $\text{mult}(\alpha_m) = \#\{j \in \{1, \dots, n\} \mid \alpha_j = \alpha_m\}$, $\ell_m(\alpha) = \text{mult}(\alpha_m) - 1$ et $\mu_m = \exp(-2i\pi\alpha_m)$. La matrice de la monodromie en 0 de $H_{\alpha, \beta}$ est composée pour chacune des valeurs propres μ_m d'un unique bloc de Jordan de taille $\text{mult}(\alpha_m)$. On en déduit que $\nu_{0, \mu_m, \ell}(H_{\alpha, \beta}) = 0$ sauf pour $\ell = \ell_m(\alpha)$ pour lequel cette quantité vaut 1. L'étude de $\nu_{0, \mu_m, \ell}^p(H_{\alpha, \beta})$ se réduit donc à déterminer la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle cette quantité pour $\ell = \ell_m(\alpha)$ est non nulle (et égale à 1).

En 1 : Commençons par préciser certaines propriétés de la monodromie en 1. Il s'agit d'une pseudo-réflexion, à savoir la somme de l'identité et d'une matrice de rang 1. On sait par un résultat de Pochhammer qu'il y a $n - 1$ vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre 1 (voir [BH89, prop. 2.8] et [Beu08, th. 1.1]). En notant $\gamma_s = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k)$, on a que $\lambda_s = \exp(-2i\pi\gamma_s)$ est également valeur propre de la monodromie, appelée *valeur propre spéciale*. Par convention, on prendra $\gamma_s \in]0, 1]$. Il y a alors deux possibilités : soit $\lambda_s \neq 1$ et alors la matrice de la monodromie est diagonalisable, soit $\lambda_s = 1$ et auquel cas la monodromie est une transvection. Notons que dans le cas $n = 1$, comme $\alpha_1 \neq \beta_1$, il n'y a qu'une valeur propre, la valeur propre spéciale, et elle est différente de 1.

- Si $\lambda_s \neq 1$, alors d'une part $\mu_{1, \lambda_s}(H_{\alpha, \beta}) = \nu_{1, \lambda_s}(H_{\alpha, \beta}) = 1$ et d'autre part $\nu_{1, 1}(H_{\alpha, \beta}) = n - 1$ et $\mu_{1, 1}(H_{\alpha, \beta}) = 0$. La seule chose qui reste à déterminer est la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle $\mu_{1, \lambda_s, 0}^p(H_{\alpha, \beta})$ est non nul (et égale à 1).

- Si $\lambda_s = 1$, alors $\nu_{1, 1}(H_{\alpha, \beta}) = n$ et $\mu_{1, 1}(H_{\alpha, \beta}) = 1$. Plus précisément, $\mu_{1, 1, \ell}(H_{\alpha, \beta}) = 0$ sauf pour $\ell = 0$ où cette quantité vaut 1. La seule chose qui reste à déterminer est la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle $\mu_{1, 1, 0}^p(H_{\alpha, \beta})$ est non nul (et égale à 1).

Commençons par donner deux définitions qui seront utiles dans la suite :

Définition 7.4.1 Soit $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1[$. On dit que (α, β) est séparé par γ si $\exp(2i\pi\gamma)$ se trouve dans l'intervalle ouvert du cercle orienté $]\exp(2i\pi\alpha), \exp(2i\pi\beta)[$, ce que l'on note $\alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$. Cela signifie que $0 \leq \alpha < \gamma < \beta < 1$ ou bien $0 \leq \gamma < \beta < \alpha < 1$ ou bien $0 \leq \beta < \alpha < \gamma < 1$.

Remarque. C'est la même notation que celle du début du chapitre 4 de [Fed17], à la différence que α, β et γ ne sont pas nécessairement distincts (mais dans ce cas, la propriété $\alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$ n'est pas satisfaite).

Définition 7.4.2 On définit $p(\alpha, \beta, \gamma) = \#\{k \mid \neg(\alpha_k \rightarrow \gamma \rightarrow \beta_k)\} = \#\{k \mid \alpha_k \rightarrow \gamma \rightarrow \beta_k\}^c$. Notons que cette quantité est invariante par renumérotation du n -uplet de couples $((\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.4.3 *Étant donnée la décomposition $H_{\alpha,\beta} = H_{\alpha_1,\beta_1} * \cdots * H_{\alpha_n,\beta_n}$ en convolutions d'hypergéométriques de rang 1, le module hypergéométrique précédent est muni d'une pVHS naturelle $(V, F^\bullet V, \nabla)$ vérifiant les identités suivantes :*

$$(a) \quad \nu_{0,\mu_m,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p(\alpha, \beta, \alpha_m) \text{ et } \ell = \ell_m(\alpha) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(b) \quad \nu_{\infty,\lambda_m,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p(\alpha, \beta, \beta_m) \text{ et } \ell = \ell_m(\beta) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(c) \quad \mu_{1,\lambda_s,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \# \left\{ i \mid \left\{ \sum_{k=1}^i (\beta_k - \alpha_k) \right\} < \gamma_s \right\} \text{ et } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques préliminaires. 1) L'ordre dans lequel sont effectuées les convolutions n'importe pas, car $H_{\alpha,\beta}$ est obtenu comme $\pi_+(H_{\alpha_1,\beta_1} \boxtimes \cdots \boxtimes H_{\alpha_n,\beta_n})$, où $\pi : (\mathbb{G}_m)^n \rightarrow \mathbb{G}_m$ désigne la multiplication.

2) Étant donnée une décomposition en convolutions d'hypergéométriques de rang 1, il existe une unique filtration de Hodge associée, si on est parti de la filtration de Hodge triviale en rang 1. Autrement dit, la filtration n'est naturelle que si on se donne une telle décomposition. Par unicité de la filtration de Hodge à décalage près, on en déduit que changer de décomposition induit un décalage dans la filtration.

Preuve. Nous allons démontrer ces trois formules par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, longueur des uplets α et β . Le résultat est vérifié pour $n = 1$. Soient $n \geq 1$, $(\alpha, \beta) = ((\alpha_0, \dots, \alpha_n), (\beta_0, \dots, \beta_n))$ deux $(n+1)$ -uplets quelconques vérifiant $\alpha_i \neq \beta_j$ pour tous $i, j \in \{0, \dots, n\}$, et $m \in \{0, \dots, n\}$.

Formule (b). Supposons que la formule (b) est vérifiée pour tous les couples d'uplets de longueur n .

(Cas 1) Supposons $\beta_m \neq \beta_0$. D'après l'identité 2.2.13 de [DS13], on a

$$\nu_{\infty,\lambda_m,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \nu_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}^p(H_{\{\alpha-\alpha_0\},\{\beta-\alpha_0\}}).$$

Or on sait que

$$H_{\{\alpha-\alpha_0\},\{\beta-\alpha_0\}} = H_{\{\widehat{\alpha}_0-\alpha_0\},\{\widehat{\beta}_0-\alpha_0\}} * H_{0,\{\beta_0-\alpha_0\}} = \text{MC}'_{\exp(-2i\pi\{\beta_0-\alpha_0\})} \left(H_{\{\widehat{\alpha}_0-\alpha_0\},\{\widehat{\beta}_0-\alpha_0\}} \right),$$

où $\widehat{\alpha}_0$ désigne le uplet α où l'on a retiré α_0 , de même pour $\widehat{\beta}_0$. En appliquant maintenant la proposition 6.4.2, on obtient

$$\nu_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}^p(H_{\{\alpha-\alpha_0\},\{\beta-\alpha_0\}}) = \begin{cases} \nu_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}^{p-1} \left(H_{\{\widehat{\alpha}_0-\alpha_0\},\{\widehat{\beta}_0-\alpha_0\}} \right) & \text{si } \{\beta_m - \alpha_0\} > \{\beta_0 - \alpha_0\} \\ \nu_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}^p \left(H_{\{\widehat{\alpha}_0-\alpha_0\},\{\widehat{\beta}_0-\alpha_0\}} \right) & \text{si } \{\beta_m - \alpha_0\} < \{\beta_0 - \alpha_0\}. \end{cases}$$

En réappliquant l'identité 2.2.13 de [DS13], on obtient finalement

$$\nu_{\infty, \lambda_m, \ell}^p(H_{\alpha, \beta}) = \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda_m, \ell}^p \left(H_{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0} \right) & \text{si } \alpha_0 \rightarrow \beta_m \rightarrow \beta_0 \\ \nu_{\infty, \lambda_m, \ell}^{p-1} \left(H_{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\alpha, \beta, \beta_m)$ et $\ell = \ell_m(\beta) = \ell_m(\widehat{\beta}_0)$.

(Cas 2) Supposons $\beta_m = \beta_0$ et $\ell_0(\beta) \geq 1$. En appliquant le même raisonnement que précédemment et en utilisant la proposition 6.4.2 (cas $\lambda = \overline{\lambda}_0$, $\ell \geq 1$ du théorème), on obtient

$$\nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^p(H_{\alpha, \beta}) = \nu_{\infty, \lambda_0, \ell-1}^{p-1} \left(H_{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0} \right),$$

quantité non nulle si et seulement si $\ell = \ell_0(\beta) = \ell_0(\widehat{\beta}_0) + 1$. Dans ce cas, on a $p(\alpha, \beta, \beta_0) = p(\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0, \beta_0) + 1$ car on n'a pas $\alpha_0 \rightarrow \beta_0 \rightarrow \beta_0$.

(Cas 3) Supposons $\beta_m = \beta_0$ et $\ell_0(\beta) = 0$, on a donc $\beta_1 \neq \beta_0$. En appliquant le même raisonnement que dans le cas 1, on obtient

$$\begin{aligned} \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^p(H_{\alpha, \beta}) &= \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^p \left(H_{\widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1} \right) & \text{si } \{\beta_0 - \alpha_1\} < \{\beta_1 - \alpha_1\} \\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^{p-1} \left(H_{\widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1} \right) & \text{si } \{\beta_0 - \alpha_1\} > \{\beta_1 - \alpha_1\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^p \left(H_{\widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1} \right) & \text{si } \alpha_1 \rightarrow \beta_0 \rightarrow \beta_1 \\ \nu_{\infty, \lambda_0, \ell}^{p-1} \left(H_{\widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1} \right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, et comme l'ordre dans lequel sont effectuées les convolutions n'importe pas, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\alpha, \beta, \beta_0)$ et $\ell = \ell_0(\beta) = \ell_0(\widehat{\beta}_1) = 0$.

En conclusion, la formule (b) est bien vérifiée pour le couple (α, β) .

Formule (a). Supposons que la formule (a) est vérifiée pour tous les couples d'uplets de longueur n .

(Cas 1) Supposons $\alpha_m \neq \alpha_0$. D'après la proposition 6.4.5 et l'identité 2.2.13 de [DS13], et en raisonnant de manière similaire à la preuve du cas 1 de la formule (b), on a

$$\nu_{0, \mu_m, \ell}^p(H_{\alpha, \beta}) = \begin{cases} \nu_{0, \mu_m, \ell}^p \left(H_{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0} \right) & \text{si } \alpha_0 \rightarrow \alpha_m \rightarrow \beta_0 \\ \nu_{0, \mu_m, \ell}^{p-1} \left(H_{\widehat{\alpha}_0, \widehat{\beta}_0} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\alpha, \beta, \alpha_m)$ et $\ell = \ell_m(\alpha) = \ell_m(\widehat{\alpha}_0)$.

(Cas 2) Supposons $\alpha_m = \alpha_0$ et $\ell_0(\boldsymbol{\alpha}) \geq 1$. En appliquant le même raisonnement que précédemment et en utilisant la proposition 6.4.5 (cas $\lambda = 1$, $\ell \geq 1$ de la proposition), on obtient

$$\nu_{0,\mu_0,\ell}^p(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \nu_{0,\mu_0,\ell-1}^{p-1} \left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0} \right),$$

quantité non nulle si et seulement si $\ell = \ell_0(\boldsymbol{\alpha}) = \ell_0(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_0) + 1$. Dans ce cas, on a $p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \alpha_0) = p(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0, \alpha_0) + 1$ car on n'a pas $\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 \rightarrow \beta_0$.

(Cas 3) Supposons $\alpha_m = \alpha_0$ et $\ell_0(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, on a donc $\alpha_1 \neq \alpha_0$. En appliquant le même raisonnement que dans le cas 1, on obtient

$$\nu_{0,\mu_0,\ell}^p(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} \nu_{0,\mu_0,\ell}^p \left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1} \right) & \text{si } \alpha_1 \rightarrow \alpha_0 \rightarrow \beta_1 \\ \nu_{0,\mu_0,\ell}^{p-1} \left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, et comme l'ordre dans lequel sont effectuées les convolutions n'importe pas, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \alpha_0)$ et $\ell = \ell_0(\boldsymbol{\alpha}) = \ell_0(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_1) = 0$.

En conclusion, la formule (a) est bien vérifiée pour le couple $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Formule (c). Supposons que la formule (c) est vérifiée pour tous les couples d'uplets de longueur n . On note λ_s la valeur propre spéciale de $H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, λ'_s la valeur propre spéciale de $H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0}$ et $\gamma_0 = \{\beta_0 - \alpha_0\}$. Les réels γ_s et γ'_s de l'intervalle $]0, 1]$ vérifiant $\lambda_s = \exp(-2i\pi\gamma_s)$ et $\lambda'_s = \exp(-2i\pi\gamma'_s)$ sont liés par la relation $\gamma_s = \gamma'_s + \gamma_0 \bmod \mathbb{Z}$.

D'après la proposition 6.4.1 et l'identité 2.2.14 de [DS13], et en raisonnant de manière similaire à la preuve du cas 1 de la formule (b), on a

$$\mu_{1,\lambda_s,\ell}^p(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} \mu_{1,\lambda'_s,\ell}^p \left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0} \right) & \text{si } \gamma_s \in]0, \gamma_0] \\ \mu_{1,\lambda'_s,\ell}^{p-1} \left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0} \right) & \text{si } \gamma_s \in]\gamma_0, 1]. \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\mu_{1,\lambda'_s,\ell}^p \left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \# \left\{ i \geq 1 \mid \left\{ \sum_{k=1}^i (\beta_k - \alpha_k) \right\} < \gamma'_s \right\} \text{ et } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on remarque que

$$\# \left\{ i \geq 0 \mid \left\{ \sum_{k=0}^i (\beta_k - \alpha_k) \right\} < \gamma_s \right\} = \begin{cases} \# \left\{ i \geq 1 \mid \left\{ \sum_{k=1}^i (\beta_k - \alpha_k) \right\} < \gamma'_s \right\} & \text{si } \gamma_s \in]0, \gamma_0] \\ \# \left\{ i \geq 1 \mid \left\{ \sum_{k=1}^i (\beta_k - \alpha_k) \right\} < \gamma'_s \right\} + 1 & \text{si } \gamma_s \in]\gamma_0, 1]. \end{cases}$$

En conclusion, la formule (c) est bien vérifiée pour le couple $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. □

Remarque. Il est également possible pour la formule (b) d'appliquer directement le théorème 6.3.1 plutôt que sa variante multiplicative en remarquant qu'en notant $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion, en utilisant la proposition 1.1.8 de [DS13] et en écrivant les équations, on obtient la relation

$$\mathrm{MC}_{\exp(-2i\pi\gamma_0)}(j_+ H_{\alpha,\beta})(*0) = j_+ H_{(0,\{\alpha+\gamma_0\}),(\gamma_0,\{\beta+\gamma_0\})},$$

que l'on peut aussi utiliser pour montrer la propriété d'hérédité.

Lien entre le théorème 7.4.3 et les formules de Fedorov. Les parties (a) et (b) du théorème précédent correspondent aux parties (a) et (b) du théorème 3 de [Fed17]. Cela ne se voit cependant pas de manière complètement évidente dans la mesure où Fedorov considère dans son article l'espace des solutions de la connexion associée à l'équation hypergéométrique alors que l'on considère pour notre part l'espace des sections horizontales de la connexion. Commençons donc par transposer les formules de Fedorov dans la cadre des sections horizontales avec le lemme suivant. Notons que l'on ne suppose pas nécessairement que les n -uplets sont ordonnés.

Lemme 7.4.4 *Les parties (a) et (b) du théorème 3 de [Fed17] sont équivalentes à l'énoncé suivant : Le module hypergéométrique $H_{\alpha,\beta}$ est muni d'une p VHS $(V, F^\bullet V, \nabla)$ vérifiant, à décalage près, les identités suivantes :*

$$(a) \quad \nu_{0,\mu_m,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\} \text{ et } \ell = \ell_m(\alpha) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(b) \quad \nu_{\infty,\lambda_m,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\} \text{ et } \ell = \ell_m(\beta) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. On sait que l'espace des solutions de la connexion et l'espace des sections horizontales de la connexion sont duaux l'un de l'autre (voir par exemple le corollaire 7.1.1 de [Pha79]). Si l'on note $*$ le dual, on a la relation $(P_\ell H)^* \simeq N^\ell P_\ell(H^*)$ et donc

$$(\mathrm{gr}_F^p P_\ell H)^* \simeq \mathrm{gr}_F^{-p} (P_\ell H)^* \simeq \mathrm{gr}_F^{-p} N^\ell P_\ell(H^*) \simeq \mathrm{gr}_F^{-p+\ell} P_\ell(H^*).$$

Par conséquent, la dualité implique la transformation $(p, \ell) \mapsto (-p + \ell, \ell)$.

En appliquant la transformation ci-dessus, on en déduit que la partie (a) du théorème 3 de [Fed17] est équivalente à écrire que

$$\nu_{0,\mu_m,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = -(\#\{i \mid \alpha_i \leq \alpha_m\} - \#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\}) + \ell_m(\alpha) \text{ et } \ell = \ell_m(\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

autrement dit

$$\nu_{0,\mu_m,\ell}^p(H_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\} \text{ et } \ell = \ell_m(\alpha) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, la partie (b) du théorème 3 de [Fed17] est équivalente à écrire que

$$\nu_{\infty, \lambda_m, \ell}^p(H_{\alpha, \beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = -(\#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\} - \#\{j \mid \beta_j < \beta_m\}) + \ell_m(\beta) \text{ et } \ell = \ell_m(\beta) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

autrement dit

$$\nu_{\infty, \lambda_m, \ell}^p(H_{\alpha, \beta}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\} \text{ et } \ell = \ell_m(\beta) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Il reste maintenant à montrer que les formules du lemme précédent correspondent aux formules du théorème 7.4.3, à décalage près. Il s'agit d'une conséquence du lemme combinatoire suivant, dans la mesure où la quantité $\#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$ ne dépend que des n -uplets α et β .

Lemme 7.4.5 *On a les relations suivantes :*

$$(i) \ p(\alpha, \beta, \alpha_m) - (\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}) = \#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\};$$

$$(ii) \ p(\alpha, \beta, \beta_m) - (\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}) = \#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}.$$

Preuve. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$, résumons dans le tableau suivant les contributions de l'entier k dans les quantités $p(\alpha, \beta, \alpha_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}$ selon les positions relatives de α_k , β_k et α_m .

contribution de k dans		$p(\alpha, \beta, \alpha_m)$	$\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}$
$\alpha_k < \beta_k$	$0 \leq \alpha_m < \alpha_k < \beta_k < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k = \alpha_m < \beta_k < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k < \alpha_m < \beta_k < 1$	0	-1
	$0 \leq \alpha_k < \beta_k < \alpha_m < 1$	1	0
$\alpha_k > \beta_k$	$0 \leq \alpha_m < \beta_k < \alpha_k < 1$	0	0
	$0 \leq \beta_k < \alpha_m < \alpha_k < 1$	1	1
	$0 \leq \beta_k < \alpha_k = \alpha_m < 1$	1	1
	$0 \leq \beta_k < \alpha_k < \alpha_m < 1$	0	0

Ce tableau prouve que les quantités $p(\alpha, \beta, \alpha_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}$ diffèrent de $\#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$, ce qui démontre la formule (i).

Résumons maintenant les contributions de l'entier k dans les quantités $p(\alpha, \beta, \beta_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}$ selon les positions relatives de α_k, β_k et β_m .

contribution de k dans		$p(\alpha, \beta, \beta_m)$	$\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}$
$\alpha_k < \beta_k$	$0 \leq \beta_m < \alpha_k < \beta_k < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k < \beta_m < \beta_k < 1$	0	-1
	$0 \leq \alpha_k < \beta_k = \beta_m < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k < \beta_k < \beta_m < 1$	1	0
$\alpha_k > \beta_k$	$0 \leq \beta_m < \beta_k < \alpha_k < 1$	0	0
	$0 \leq \beta_k = \beta_m < \alpha_k < 1$	1	1
	$0 \leq \beta_k < \beta_m < \alpha_k < 1$	0	0
	$0 \leq \beta_k < \alpha_k < \beta_m < 1$	1	1

Ce tableau prouve que les quantités $p(\alpha, \beta, \beta_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}$ diffèrent de $\#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$, ce qui démontre la formule (ii). \square

7.5 Convolution multiplicative avec des modules hypergéométriques

Un des intérêts de la proposition 7.3.2 est que l'on peut considérer le foncteur $\text{MC}(P, Q)$ de $\text{Mod}_{\text{hol}}(\mathcal{D})$ qui à M associe $M *_{\text{mid}} H(P, Q)$. On utilisera aussi la notation $\text{MC}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)}$, ainsi que $\text{MC}_{\alpha, \beta}$ lorsque $n = 1$.

On a la proposition suivante :

Proposition 7.5.1 *On a $\text{MC}_{(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)} = \text{MC}_{\alpha_2, \beta_2} \circ \text{MC}_{\alpha_1, \beta_1}$ pour $\alpha_i \neq \beta_j$ modulo \mathbb{Z} .*

Preuve. Soit M un \mathcal{D} -module holonome. On a

$$\text{MC}_{(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)}(M) = M *_{\text{mid}} H_{(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)} = M *_{\text{mid}} (H_{\alpha_1, \beta_1} * H_{\alpha_2, \beta_2})$$

où la dernière convolution est n'importe laquelle des trois convolutions. Comme

$$\text{MC}_{\alpha_2, \beta_2} \circ \text{MC}_{\alpha_1, \beta_1}(M) = (M *_{\text{mid}} H_{\alpha_1, \beta_1}) *_{\text{mid}} H_{\alpha_2, \beta_2},$$

le problème est donc réduit à une question d'associativité.

Pour cela, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
M *! H_{\alpha_1, \beta_1} *! H_{\alpha_2, \beta_2} & \longrightarrow & (M *_{\text{mid}} H_{\alpha_1, \beta_1}) *! H_{\alpha_2, \beta_2} & \xhookrightarrow{\quad} & (M *_* H_{\alpha_1, \beta_1}) *! H_{\alpha_2, \beta_2} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(M *! H_{\alpha_1, \beta_1}) *_{\text{mid}} H_{\alpha_2, \beta_2} & \longrightarrow & (M *_{\text{mid}} H_{\alpha_1, \beta_1}) *_{\text{mid}} H_{\alpha_2, \beta_2} & \xhookrightarrow{\quad} & (M *_* H_{\alpha_1, \beta_1}) *_{\text{mid}} H_{\alpha_2, \beta_2} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(M *! H_{\alpha_1, \beta_1}) *_* H_{\alpha_2, \beta_2} & \longrightarrow & (M *_{\text{mid}} H_{\alpha_1, \beta_1}) *_* H_{\alpha_2, \beta_2} & \xhookrightarrow{\quad} & M *_* H_{\alpha_1, \beta_1} *_* H_{\alpha_2, \beta_2}
\end{array}$$

Les flèches verticales sont injectives/surjectives par définition de $*_{\text{mid}}$, les horizontales des première et troisième lignes car les foncteurs $*!H_{\alpha_2, \beta_2}$ et $*_*H_{\alpha_2, \beta_2}$ sont exacts (on rappelle que $H_{\alpha_2, \beta_2} \in P$), et les horizontales de la deuxième ligne car le foncteur $*_{\text{mid}}H_{\alpha_2, \beta_2}$ préserve les injections et les surjections.

On en déduit que $(M *_{\text{mid}} H_{\alpha_1, \beta_1}) *_{\text{mid}} H_{\alpha_2, \beta_2}$ s'identifie à l'image de

$$M *! H_{\alpha_1, \beta_1} *! H_{\alpha_2, \beta_2} \rightarrow M *_* H_{\alpha_1, \beta_1} *_* H_{\alpha_2, \beta_2}$$

à savoir $M *_{\text{mid}} (H_{\alpha_1, \beta_1} * H_{\alpha_2, \beta_2})$. Ce qui achève la preuve. \square

Cette proposition montre que l'étude du comportement des données numériques par $\text{MC}(P, Q)$ se ramène par récurrence à l'étude du rang 1, à savoir l'étude du comportement des données numériques par $\text{MC}_{\alpha, \beta}$.

Références

- [ADM16] N. Addington, W. Donovan, and C. Meachan, *Moduli spaces of torsion sheaves on K3 surfaces and derived equivalences*, J. Lond. Math. Soc. (2) **93** (2016), no. 3, 846–865.
- [AV08] E. Amerik and C. Voisin, *Potential density of rational points on the variety of lines of a cubic fourfold*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 379–408.
- [BC09] L. Borisov and A. Căldăraru, *The Pfaffian-Grassmannian derived equivalence*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), no. 2, 201–222.
- [BCP18] L. Borisov, A. Căldăraru, and A. Perry, *Intersections of two Grassmannians in \mathbb{P}^9* , J. Reine Angew. Math. (2018), <https://doi.org/10.1515/crelle-2018-0014>.
- [Beu08] F. Beukers, *Hypergeometric functions in one variable*, Notes. Available at <https://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/springschool199.pdf>, 2008.
- [BH89] F. Beukers and G. Heckman, *Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$* , Invent. Math. **95** (1989), 325–354.
- [Bit04] F. Bittner, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*, Compositio Math. **140** (2004), 1011–1032.
- [BM84] J. Briançon and P. Maisonobe, *Idéaux de germes d’opérateurs différentiels*, Enseign. Math. **30** (1984), 7–38.
- [BO01] A. Bondal and D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344.
- [Bor18] L. Borisov, *Class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), no. 2, 203–209.
- [BRS15] M. Bolognesi, F. Russo, and G. Staglianò, *Some loci of rational cubic fourfolds*, arXiv : 1504.05863 (2015), to appear on Math. Annalen.
- [Bud05] N. Budur, *On the V-filtration of D-modules*, Progress in Mathematics **235** (2005), Geometric methods in algebra and number theory.
- [Cas93] F. Castro, *Images directes et constructibilité*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours **46** (1993), 15–45, Exercices sur le complexe de de Rham et l’image directe des D-modules.
- [Cay49] A. Cayley, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, Cambridge and Dublin Math. J. **4** (1849), 118–138.
- [CG72] C. Clemens and P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Annals of Mathematics, Second Series **95** (1972), no. 2, 281–356.
- [Del70] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math. **163** (1970).
- [Del87] P. Deligne, *Un théorème de finitude pour la monodromie*, Progr. Math. **67** (1987), 1–19.
- [Det08] M. Dettweiler, *On the middle convolution of local systems. With an Appendix by M. Dettweiler and S. Reiter*, arXiv : 0810.3334 (2008).
- [Dim04] A. Dimca, *Sheaves in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [DR00] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), no. 6, 761–798.
- [DR03] M. Dettweiler and S. Reiter, *On the middle convolution*, arXiv : math/0305311 (2003).
- [DR10] M. Dettweiler and S. Reiter, *Rigid local systems and motives of type G_2* , Compositio Math. **146** (2010), no. 4, 929–963, With an appendix by Michael Dettweiler and Nicholas M. Katz.
- [DS13] M. Dettweiler and C. Sabbah, *Hodge theory of the middle convolution*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **49** (2013), no. 4, 761–800.
- [Efi17] A. Efimov, *Some remarks on L-equivalence of algebraic varieties*, Selecta Mathematica (2017), <https://doi.org/10.1007/s00029-017-0374-y>.

- [EZO7] F. El Zein and J. Snoussi, *Arrangements, Local Systems and Singularities*, CIMPA Summer School, Galatasaray University, Istanbul (2007), 111–153, *Local Systems and Constructible Sheaves*.
- [Fab06] H. Fabbro, *Transformation de Mellin faisceautique et D-modules*, Ph.D. thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2006.
- [Fed17] R. Fedorov, *Variations of Hodge structures for hypergeometric differential operators and parabolic Higgs bundles*, *International Mathematics Research Notices*, rnx044 (2017).
- [Gan66] F.R. Gantmacher, *Théorie des matrices*, Dunod, Paris, 1966, published in Russian in 1942.
- [GS14] S. Galkin and E. Shinder, *The Fano variety of lines and rationality problem for a cubic hypersurface*, arXiv : 1405.5154 (2014).
- [HL18] B. Hassett and K.W. Lai, *Cremona transformations and derived equivalences of K3 surfaces*, *Compositio Mathematica* **154** (2018), no. 7, 1508–1533.
- [IIM16] D. Inoue, A. Ito, and M. Miura, *Complete intersection Calabi-Yau manifolds with respect to homogeneous vector bundles on Grassmannians*, arXiv : 1607.07821 (2016).
- [IMOU16a] A. Ito, M. Miura, S. Okawa, and K. Ueda, *The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring : via G_2 -Grassmannians*, arXiv : 1606.04210 (2016).
- [IMOU16b] A. Ito, M. Miura, S. Okawa, and K. Ueda, *Derived equivalence and Grothendieck ring of varieties : the case of K3 surfaces of degree 12 and abelian varieties*, arXiv : 1612.08497 (2016).
- [Kar14] I. Karzhemanov, *On the cut-and-paste property of algebraic varieties*, arXiv : 1411.6084 (2014).
- [Kat90] N. Katz, *Exponential sums and differential equations*, *Annals of Mathematics Studies*, 124. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [Kat96] N. Katz, *Rigid local systems*, *Annals of Mathematics Studies* 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [KK16] G. Kapustka and M. Kapustka, *Calabi-Yau threefolds in \mathbb{P}^6* , *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **196** (2016), no. 2, 529–556.
- [KKM17] G. Kapustka, M. Kapustka, and R. Moschetti, *Equivalence of K3 surfaces from Verra threefolds*, arXiv : 1712.06958 (2017).
- [KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka, and S. Mori, *Rationally connected varieties*, *J. Algebraic Geom.* **1** (1992), no. 3, 429–448.
- [KR17] M. Kapustka and M. Rampazzo, *Torelli problem for Calabi-Yau threefolds with GLSM description*, arXiv : 1711.10231 (2017).
- [KS17] A. Kuznetsov and E. Shinder, *Grothendieck ring of varieties, D and L-equivalence, and families of quadrics*, *Selecta Mathematica* (2017), <https://doi.org/10.1007/s00029-017-0344-4>.
- [Kuz16] A. Kuznetsov, *Derived equivalence of Ito-Miura-Okawa-Ueda Calabi-Yau 3-folds*, arXiv : 1611.08386 (2016).
- [Lev61] A.H.M. Levelt, *Hypergeometric functions*, Ph.D. thesis, University of Amsterdam, 1961.
- [LL03] M. Larsen and V. Lunts, *Motivic measures and stable birational geometry*, *Moscow Mathematical Journal* **3** (2003), no. 1, 85–95.
- [LS91] F. Loeser and C. Sabbah, *Caractérisation des D-modules hypergéométriques irréductibles sur le tore*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* (1991), no. 312, 735–738.
- [LS10] Q. Liu and J. Sebag, *The Grothendieck ring of varieties and piecewise isomorphisms*, *Math. Z.* **265** (2010), no. 2, 321–342.
- [Mal74] B. Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, *Enseign. Math.* **20** (1974), 147–176.
- [Man09] L. Manivel, *On spinor varieties and their secants*, *SIGMA* **5** (2009), no. 78.
- [Man17] L. Manivel, *Double spinor Calabi-Yau varieties*, arXiv : 1709.07736 (2017).
- [Mar16] N. Martin, *The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring : an improvement*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **354** (2016), no. 9, 936–939.

- [Mar18a] N. Martin, *Behaviour of some Hodge invariants by middle convolution*, arXiv : 1808.08715 (2018).
- [Mar18b] N. Martin, *Middle multiplicative convolution and hypergeometric equations*, to be published, 2018.
- [MMY18] C. Meachan, G. Mongardi, and K. Yoshioka, *Derived equivalent Hilbert schemes of points on K3 surfaces which are not birational*, arXiv : 1802.00281 (2018).
- [MS02] P. Maisonobe and C. Sabbah, *Aspects of the theory of D-modules*, Lecture notes, Kaiserslautern, 2002.
- [Oka18] S. Okawa, *An example of birationally inequivalent projective symplectic varieties which are D-equivalent and L-equivalent*, arXiv : 1801.09385 (2018).
- [OR17] J.C. Ottem and J.V. Rennemo, *A counterexample to the birational Torelli problem for Calabi-Yau threefolds*, arXiv : 1706.09952 (2017).
- [Pha79] F. Pham, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, vol. 2, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1979, With contributions by Lo Kam Chan, Philippe Maisonobe and Jean-Etienne Rombaldi.
- [Poo02] B. Poonen, *The Grothendieck ring of varieties is not a domain*, Math. Res. Lett. **9** (2002), no. 4, 493–497.
- [Rød00] E. Rødland, *The Pfaffian Calabi-Yau, its mirror, and their link to the Grassmannian $G(2, 7)$* , Compositio Math. **122** (2000), no. 2, 135–149.
- [Rie57] B. Riemann, *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **7** (1857), 3–32.
- [Rob99] D. Roberts, *Rigid Jordan tuples*, Preprint available at <http://cda.morris.umn.edu/~roberts/>, 1999.
- [Sab93] C. Sabbah, *Éléments de la théorie des systèmes différentiels*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours **45** (1993), 1–80, Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations.
- [Sab02] C. Sabbah, *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, EDP Sciences/CNRS Éditions, 2002.
- [Sab08] C. Sabbah, *Fourier-Laplace transform of a variation of polarized complex Hodge structure*, J. Reine Angew. Math. **621** (2008), 121–158.
- [Sab11] C. Sabbah, *Introduction to the theory of D-modules*, Lecture Notes (Nankai), 2011.
- [Sab12] C. Sabbah, *Familles finies rigides de matrices inversibles*, Colloquium Caen, 15 novembre 2012.
- [Sai88] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), 849–995.
- [Sal49] G. Salmon, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, Cambridge and Dublin Math. J. **4** (1849), 252–260.
- [Sch73] W. Schmid, *Variation of Hodge structure : the singularities of the period mapping*, Invent. Math. **22** (1973), 211–319.
- [Sco77] L.L. Scott, *Matrices and cohomology*, Annals of Mathematics **105** (1977), 473–492.
- [Seb04] J. Sebag, *Intégration motivique sur les schémas formels*, Bull. Soc. Math. France **132** (2004), no. 1, 1–54.
- [Sim90] C. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 713–770.
- [Sim09] C. Simpson, *Katz's middle convolution algorithm*, Pure and Applied Mathematics Quarterly **5** (2009), no. 2, 781–852.
- [SS17] C. Sabbah and C. Schnell, *The MHM project*, book in progress. Available at <http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/sabbah/MHMProject/mhm.html>, 2017.
- [Was65] W. Wasow, *Asymptotic expansion for ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1965.
- [Zak17] I. Zakharevich, *The annihilator of the Lefschetz motive*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 11, 1989–2022.

Titre : Convolution intermédiaire et théorie de Hodge

Mots Clefs : D-modules, théorie de Hodge, algorithme de Katz, équation hypergéométrique, anneau de Grothendieck, géométrie birationnelle

Résumé : Cette thèse est constituée de deux parties complètement indépendantes.

Dans une première partie, nous montrons que la paire de Fourier-Mukai (X, Y) issue de la correspondance double miroir Pfaffienne-Grassmannienne vérifie l'identité $([X] - [Y])L^6 = 0$ dans l'anneau de Grothendieck, où L est la classe de la droite affine. Ce résultat est un raffinement d'un théorème de Borisov par la suppression d'un facteur, qui montre que la classe de la droite affine est un diviseur de zéro dans l'anneau de Grothendieck, et fournit par ailleurs un premier exemple intéressant de variétés D -équivalentes qui sont L -équivalentes. D'autres exemples ont par la suite été explicités par d'autres auteurs.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons au comportement d'invariants de théorie de Hodge par convolution intermédiaire, à la suite des travaux de Dettweiler et Sabbah. Le principal résultat concerne le comportement des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini par convolution intermédiaire additive par un module de Kummer. Nous donnons également des formules pour les invariants locaux h^p et globaux δ^p sans faire l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini. De plus, à l'aide d'une relation de Katz reliant les convolutions additives et multiplicatives, nous explicitons le comportement des invariants de Hodge par convolution intermédiaire multiplicative. Enfin, le théorème principal permet de redémontrer un résultat de Fedorov sur les invariants de Hodge d'équations hypergéométriques.

Title : Middle convolution and Hodge theory

Keys words : D-modules, Hodge theory, Katz algorithm, hypergeometric equation, Grothendieck ring, birational geometry

Abstract : This thesis consists of two independent parts.

In a first part, we show that the Fourier-Mukai pair (X, Y) constructed from Pfaffian-Grassmannian double-mirror correspondence verifies the formula $([X] - [Y])L^6 = 0$ in the Grothendieck ring, where L is the class of affine line. This result is an improvement of a theorem of Borisov by removing a factor, which shows that the class of affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring, and gives moreover a first interesting example of D -equivalent varieties which are L -equivalent. Other examples have later been made explicit by other authors.

In a second part, we are interested in the behaviour of invariants in Hodge theory by middle convolution, following research of Dettweiler and Sabbah. The main result concerns the behaviour of the nearby cycle local Hodge numerical data in infinity by middle additive convolution by a Kummer module. We also give expressions for local invariant h^p and global δ^p without making the hypothesis of scalar monodromy in infinity. Besides, with a relation due to Katz linking up additive and multiplicative convolutions, we explain the behaviour of Hodge invariants by middle multiplicative convolution. Finally, the main theorem gives a new proof of a result of Fedorov on Hodge invariants of hypergeometric equations.