



HAL
open science

Calcul et optimisation d'absorbeurs pendulaires dans une chaîne de traction automobile

Alexandre Renault

► **To cite this version:**

Alexandre Renault. Calcul et optimisation d'absorbeurs pendulaires dans une chaîne de traction automobile. Génie mécanique [physics.class-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2018. Français. NNT : 2018ENAM0022 . tel-01997628v1

HAL Id: tel-01997628

<https://pastel.hal.science/tel-01997628v1>

Submitted on 29 Jan 2019 (v1), last revised 30 Jan 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Science des Métiers de l'ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Génie Mécanique "

présentée et soutenue publiquement par

Alexandre RENAULT

le 12 Juillet 2018

Calcul et optimisation d'absorbeurs pendulaires dans une chaîne de traction automobile

Directeur de thèse : **Olivier THOMAS**
Co-encadrement de la thèse : **Hervé MAHÉ**

Jury

M. Thierry TISON, Professeur, LAMIH, Université de Valenciennes
M. Gaëtan KERSCHEN, Professeur, LTAS, Université de Liège
M. Bruno COCHELIN, Professeur, LMA, École Centrale de Marseille
M. Yannick DESPLANQUES, Professeur, LML / LaMcube, École Centrale de Lille
M. Olivier THOMAS, Professeur, LSIS, École Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Lille
M. Hervé MAHÉ, Docteur / Expert senior, Centre d'Étude des Produits Nouveaux, Valeo, Amiens
M. Marc THEOBALT, Directeur R&D, Centre d'Étude des Produits Nouveaux, Valeo, Amiens

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Invité

**T
H
È
S
E**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à témoigner toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur Olivier Thomas, du laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes, pour son soutien, la confiance qu'il m'a accordée et pour avoir été toujours présent durant l'accomplissement de ce travail.

Je fais part de ma gratitude à Monsieur le Professeur Thierry Tison qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur le Professeur Bruno Cochelin et Monsieur le Professeur Gaëtan Kerschen d'avoir bien voulu être les rapporteurs de mon travail.

Je remercie également le partenaire industriel Valeo, de m'avoir permis de réaliser cette thèse de doctorat. Je suis sincèrement reconnaissant envers Monsieur Hervé Mahé, son expertise allié à son implication constante dans mes travaux ont permis une collaboration riche d'enseignement.

Je n'oublierai pas l'excellent accueil de l'équipe simulation de Valeo. En particulier, j'adresse mes meilleurs sentiments à Madame Pascale Brassart avec qui j'ai eu le plaisir de mener de fructueuses collaborations. Je remercie également Monsieur Yannick Lefebvre et Monsieur Benjamin Drouet pour leur expertises éclairées ainsi que leur bonne humeur communicative.

J'adresse toute ma reconnaissance aux membres de l'équipe essais qui ont permis de valider expérimentalement ce travail dans les meilleures conditions. À ce titre, j'adresse une pensée particulière à Madame Élodie Vitry, Monsieur Thibault Laforge et Monsieur Rudy Duhamel.

Enfin, je remercie les collègues du laboratoire pour leur bonne humeur ainsi que leur support technique et scientifique.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Description de l'absorbeur pendulaire centrifuge automobile	10
1.1.1	Sa fonction	10
1.1.2	Son histoire	10
1.1.3	La première génération	12
1.1.4	La nouvelle génération	14
1.2	État de l'art	14
1.3	Contributions de la thèse	16
1.4	Organisation	17
2	Généralités sur la chaîne cinématique et modèles de pendules	19
2.1	Le groupe moto-propulseur	20
2.1.1	Le moteur thermique	21
2.1.1.1	Généralités	21
2.1.1.2	Notion d'ordre moteur	22
2.1.2	La chaîne cinématique	26
2.1.2.1	Le volant moteur	26
2.1.2.2	Le double volant amortisseur	27
2.1.2.3	L'embrayage	29
2.1.2.4	La boîte de vitesses	31
2.1.2.5	Les liaisons à la route	33
2.1.3	Vibrations de la chaîne cinématique	33
2.1.4	Bilan de la description du groupe moto-propulseur	34
2.2	Les absorbeurs de vibration	35
2.2.1	L'absorbeur linéaire	35
2.2.2	L'absorbeur essentiellement non linéaire	37
2.2.3	L'absorbeur non linéaire accordé	39
2.2.4	Bilan sur les absorbeurs de la littérature	41
2.3	Les oscillateurs pendulaires	41
2.3.1	Le pendule simple	42
2.3.2	Le pendule tautochrone	44
2.3.2.1	Du pendule simple au pendule tautochrone	44
2.3.2.2	Trajectoires	49
2.3.2.3	Du pendule à l'oscillateur de Duffing	52
2.3.2.4	Régime forcé	53
2.3.3	Bilan sur les oscillateur pendulaires	57
2.4	L'absorbeur pendulaire centrifuge translaté	58

2.4.1	Modélisation	58
2.4.2	Étude linéaire	63
2.4.3	Réponse non linéaire et validation du modèle.	64
2.4.3.1	Présentation des logiciels commerciaux	65
2.4.3.2	Comportement non linéaire	67
2.4.4	Bilan de l'étude de l'absorbeur pendulaire translaté	71
3	L'absorbeur pendulaire de nouvelle génération	73
3.1	Définition du système	74
3.2	Modélisation	75
3.3	Étude linéaire.	77
3.3.1	Accord linéaire.	79
3.3.2	Performances	80
3.3.3	Bilan de l'étude linéaire	84
3.4	Correction analytique de l'antirésonance	86
3.4.1	Application à un système de duffing	86
3.4.2	Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge	91
3.4.3	Performances	95
3.4.3.1	Performance à l'antirésonance	96
3.4.3.2	Performance à la fréquence de fonctionnement	99
3.4.3.3	Bilan de l'étude de performance.	102
3.5	Étude expérimentale	103
3.5.1	Description du banc d'essai	103
3.5.2	Protocoles expérimentaux	104
3.5.3	Modélisation de l'essai sur banc	106
3.5.4	Description des cas d'études	106
3.5.5	Résultats.	107
3.5.5.1	L'application légère	107
3.5.5.2	L'application conventionnelle	108
3.5.6	Bilan de l'étude expérimentale.	112
4	Méthodes numériques	114
4.1	Calcul des solutions périodiques.	115
4.2	Continuation numérique.	117
4.2.1	Méthodes de prédiction correction.	118
4.2.1.1	Continuation séquentielle.	118
4.2.1.2	Continuation par pseudo longueur d'arc.	120
4.2.2	La méthode asymptotique numérique.	122
4.2.3	Le cadre quadratique de la MAN	123
4.2.4	Bilan des méthodes de continuation numérique	124
4.3	DiaManlab	126
4.4	Implémentation des équations du mouvement dans DiaManlab	127
4.4.1	Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge seul	127
4.4.1.1	Système algébro-différentiel	130
4.4.1.2	Système algébrique	133
4.4.2	Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge dans la chaîne cinématique	135
4.4.3	Bilan de la procédure d'implémentation	138

5	Continuation numérique d'antirésonance	140
5.1	Introduction	141
5.2	General framework and antiresonance concept	143
5.2.1	Antiresonance : the linear point of view	143
5.2.2	Antiresonance : the non linear point of view	146
5.3	Numerical continuation	152
5.3.1	Problem statement	152
5.3.2	Limit point continuation	153
5.3.3	Antiresonance continuation	154
5.4	Numerical solving	155
5.5	Application to the Euler's pendulum	156
5.5.1	Free linear vibrations of the uncoupled pendulum	157
5.5.2	Influence of the path shape	158
5.5.3	Results on the full system.	160
5.6	Conclusion	163
5.7	Appendix	164
5.7.1	Governing equations of the Euler's pendulum	164
5.7.2	Epicycloid path	164
5.7.3	Algebraic-differential system of the Euler's pendulum.	167
6	Couplage de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique	168
6.1	Étude linéaire	169
6.1.1	Interactions de l'absorbeur pendulaire avec une structure primaire	169
6.1.2	Interactions de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique	174
6.1.2.1	Les modes de la chaîne cinématique	177
6.1.2.2	Couplage de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique	179
6.1.3	Bilan de l'étude linéaire.	183
6.2	Étude non linéaire	183
6.2.1	Cas d'études	185
6.2.2	Résultats numériques	188
6.2.3	Corrélation calculs-essais	191
6.2.4	Bilan de l'étude non linéaire.	193
7	Conception de l'absorbeur pendulaire	195
7.1	Expression du besoin	196
7.2	Modélisation	198
7.3	Équations vectorielles	200
7.4	Équations scalaires	202
7.5	Résultats	204
7.6	Bilan	205
	Conclusions et perspectives	207
	Annexes	219
A	Étude de l'épicycloïde	219
B	Étude de la cycloïde	222

C	Subtilité de la condition libre-libre dans DiaManlab	224
D	Matrices de l'absorbeur pendulaire centrifuge dans la chaîne cinématique	227
E	Système d'équations pour le calcul des géométries fonctionnelles de l'absorbeur pendulaire	230

Chapitre 1

Introduction

Le travail de thèse présenté dans ce document résulte d'un partenariat entre le campus Arts et Métiers ParisTech de Lille et le groupe Valeo. Le projet s'inscrit dans le cadre d'une convention CIFRE et est le fruit d'une collaboration entre le Centre d'Étude des Produits Nouveaux (CEPN) qui est le centre R&D de l'activité Systèmes de Transmission de Valeo (basé à Amiens) et le Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS) de Lille.

Dans le cadre de normes environnementales toujours plus drastiques à l'encontre des émissions polluantes et de la consommation des véhicules à moteur thermique, les constructeurs automobiles travaillent à diminuer la cylindrée et les régimes de fonctionnement des moteurs. Parallèlement à ces évolutions, les exigences de l'automobiliste vont grandissantes et bien qu'il soit sensible à l'argument écologique, il ne semble cependant pas prêt à concéder une baisse des performances de son véhicule. Afin de garantir une conduite dynamique et ainsi maintenir une attractivité de leurs produits, les motoristes se voient dans l'obligation d'augmenter les pressions de fonctionnement à l'intérieur des cylindres. Cela conduit du fait du principe même du moteur à explosion, à une majoration significative des irrégularités du couple qu'il délivre. Ces irrégularités, communément appelées acyclismes, soumettent les organes de transmission de puissance du véhicule à des niveaux vibratoires jusque-là inégalés. Elles impliquent de nouvelles préoccupations quant à l'usure et aux nuisances sonores au sein de la chaîne cinématique (ou chaîne de transmission), qui désigne l'ensemble des éléments de transmission de puissance entre le moteur et les roues du véhicule. C'est aux équipementiers automobiles qu'il revient de proposer des moyens d'atténuation des vibrations de torsion intégrés directement sur le groupe moto-propulseur (assemblage du moteur et de la chaîne cinématique). Dans cet environnement très encombré, le périmètre d'intervention de Valeo Transmission se situe entre le moteur et la boîte de vitesse (*cf.* figure 1.1).

Les nouvelles contraintes de performance et de sobriété des véhicules posent de nouveaux défis aux ingénieurs de l'automobile qui se doivent d'assurer un niveau de confort et de fiabilité optimal au consommateur quelle que soit l'utilisation qu'il fait de son véhicule. Les constructeurs automobiles demandent alors à leurs fournisseurs de proposer des solutions toujours plus performantes pour atténuer les vibrations de torsion de la chaîne cinématique. Il y a donc une nécessité, pour un équipementier tel que Valeo transmission, de maintenir une innovation constante de ses produits afin de répondre à la demande de ses clients. Valeo propose différentes solutions pour filtrer les vibrations de torsion, dont l'absorbeur pendulaire. C'est ce qui a motivé le démarrage de cette thèse dont le but principal est d'étudier différentes pistes d'amélioration et d'évolution

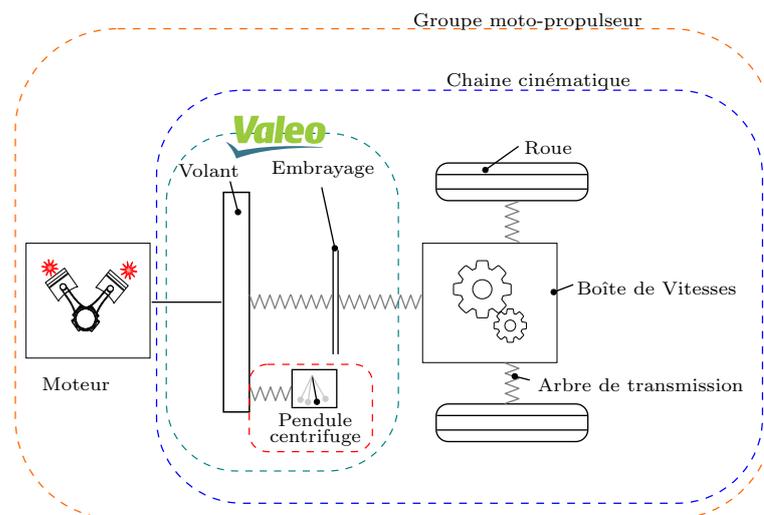


FIGURE 1.1 – Illustration du périmètre d'intervention de Valeo.

du système de pendule centrifuge que l'on propose de présenter en section suivante.

1.1 Description de l'absorbeur pendulaire centrifuge automobile

1.1.1 Sa fonction

L'absorbeur pendulaire centrifuge (APC) est apparu dans les chaînes cinématiques automobiles en réponse à une problématique inhérente à la technologie du moteur à explosion, à savoir la dépendance linéaire de la fréquence fondamentale du couple qu'il délivre à son régime de fonctionnement (*cf.* section 2.1.1). Lors d'une phase d'accélération, l'automobiliste se retrouve alors dans une situation où les modes de la chaîne cinématique sont successivement excités par les harmoniques du couple moteur (*cf.* Figure 1.2), ce qui compromet la fiabilité et le niveau de confort du véhicule. Face à ce problème, les industriels du secteur ont proposé au début des années 1990 l'APC, qui est issu de l'industrie aéronautique. Il s'agit d'un dispositif passif, composé de plusieurs masses pendulaires articulées, qui évolue dans un champ d'accélération centrifuge, ce qui confère aux masses pendulaires la capacité très avantageuse d'adapter leurs fréquences d'oscillation au régime moteur (*cf.* section 2.3). L'APC agit alors à la manière d'un absorbeur à masse accordé classique, à ceci près qu'il est accordé sur la fréquence fondamentale du couple moteur et non sur un mode de la chaîne cinématique, permettant ainsi une réduction des vibrations de torsion quel que soit le régime du moteur. Cela est garanti par le choix d'une trajectoire bien précise pour les oscillations du centre de masse des pendules (généralement circulaire ou épicycloïdale). Un autre avantage de ce système est sa taille relativement modeste, particulièrement adaptée au faible espace disponible qu'offre le compartiment moteur.

1.1.2 Son histoire

L'industrie aéronautique fut la première à se soucier des effets néfastes et potentiellement désastreux des vibrations de torsion. Un exemple connu est le moteur radial Dragonfly conçu au

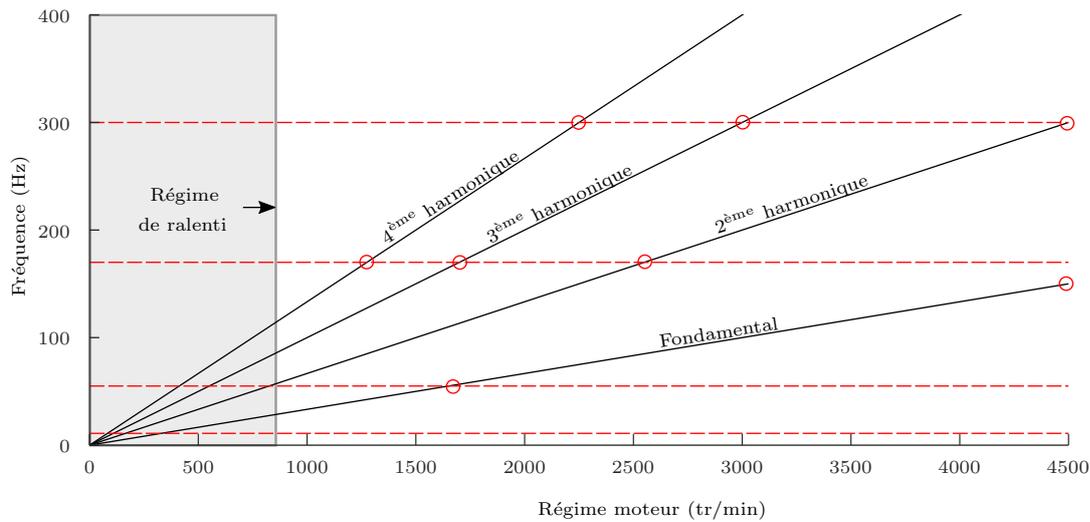


FIGURE 1.2 – Illustration de la dynamique du groupe moto-propulseur. Les harmoniques des couples moteur (traits noirs) excitent les modes de la chaîne cinématique (traits rouges).

Royaume-Uni par Granville Bradshaw (ABS Motors) en 1917. Malheureusement pour Bradshaw, la fréquence d'excitation de son moteur au régime nominal de vol coïncidait avec la fréquence du mode de torsion du vilebrequin. En conséquence, sa durée de vie n'excédait pas une à deux heures de fonctionnement [1]. C'est pour pallier ce genre de catastrophe que les absorbeurs pendulaires centrifuges ont été pensés.

Ils peuvent être classés en deux catégories. La première est celle des systèmes dit mono-filaires. On les appelle ainsi car la masse pendulaire, ou plus simplement pendule, n'a qu'un point de suspension. À notre connaissance, c'est Carter (Royal Aircraft Establishment) qui fut le premier à proposer une solution de ce type [2]. Elle est illustrée en figure 1.3 (à gauche) et consiste à intégrer une masse roulante dans une cavité usinée directement dans le vilebrequin.

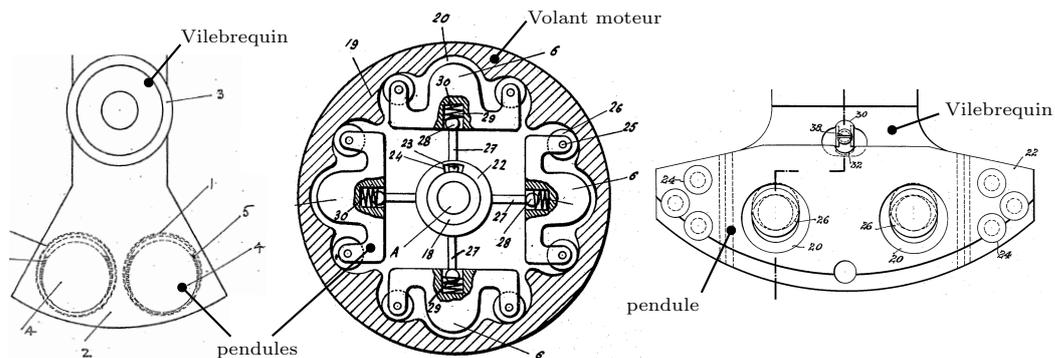


FIGURE 1.3 – Illustrations tirées des brevets de Carter (à gauche), Sarazin (au milieu) et Chilton (à droite).

La deuxième catégorie est celle des absorbeurs bi-filaires, le pendule est alors suspendu en deux points à l'image d'un parallélogramme déformable. C'est l'ingénieur Français R.R.R. Sa-

razin (Hispano-Suiza) qui, en 1930, brevète ce concept [3] dédié là encore aux applications aéronautiques. Il propose d'intégrer son système directement dans le volant moteur (*cf.* figure 1.3, au centre). L'absorbeur bi-filaire moderne, qui inspirera la technologie adoptée plus tard par l'industrie automobile, est le système breveté en 1935 par Chilton [4] (Pratt & Whitney). Il propose, comme Carter, un pendule monté sur le vilebrequin, mais cette fois guidé par des rouleaux (cette architecture sera présentée en détail en section suivante). Dès lors, le concept proposé par Chilton ne subira que des évolutions mineures et sera adapté à partir des années 70 aux rotors d'hélicoptères [5, 6]. Ce n'est finalement qu'au début des années 90, avec les travaux de Denmann [7], que ces systèmes font leur apparition dans les chaînes de transmission automobiles, implantés en parallèle de la chaîne cinématique, généralement sur le volant d'inertie (*cf.* figure 1.1).

1.1.3 La première génération

L'APC automobile est un système relativement simple en apparence qui se compose de plusieurs pendules disposés sur la circonférence d'un voile support comme illustré en figure 1.4. C'est ce voile qui assure la liaison mécanique avec le volant d'inertie du véhicule. Un pendule est composé de deux tôles épaisses disposées de part et d'autre du voile et encadrées sur deux entretoises traversantes. Son mouvement est guidé par deux rouleaux roulant sur des pistes de roulement usinées dans le voile et dans les entretoises, comme illustré en figure 1.5. La trajectoire du centre de masse d'un pendule n'est donc pas imposée directement mais est la résultante de la forme particulière donnée aux pistes de roulement. Celles-ci sont telles que le repère $\mathcal{R}_{p_i}(P, \mathbf{x}_{p_i}, \mathbf{y}_{p_i}, \mathbf{z}_{p_i})$, attaché au $i^{\text{ème}}$ pendule au point P , reste parallèle au repère $\mathcal{R}_c(B, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$ attaché au voile au point B , c'est donc un mouvement de translation pure. En choisissant judicieusement la forme des pistes de roulement du voile et des entretoises, on amène le centre de masse des pendules à suivre une trajectoire a priori quelconque. En pratique, cette trajectoire est soit un cercle soit une épicycloïde. Typiquement, l'amplitude du déplacement du centre de masse du pendule sur sa trajectoire est de 12 ou 13 mm au maximum.

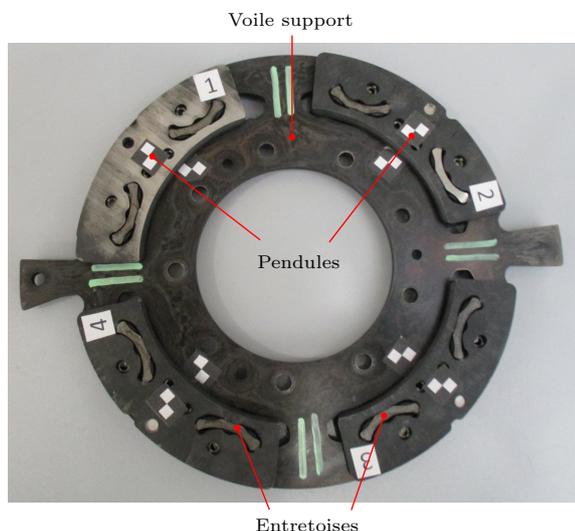


FIGURE 1.4 – Photographie d'un APC Valeo.

Le nombre de pendules de l'APC est variable d'une application à l'autre et dépend notamment de la performance recherchée et de l'encombrement disponible. La masse cumulée des pendules

1.1. DESCRIPTION DE L'ABSORBEUR PENDULAIRE CENTRIFUGE AUTOMOBILE

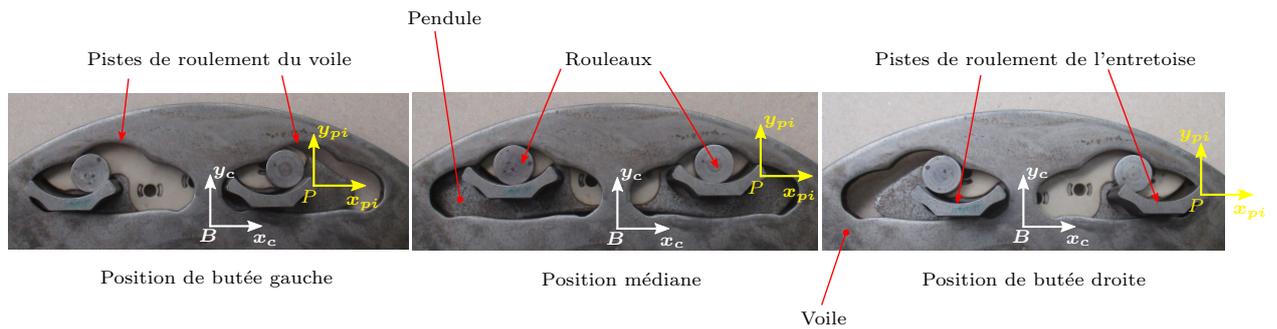


FIGURE 1.5 – Photographie du guidage du $i^{\text{ème}}$ pendule sur le voile support lors de son mouvement de translation. Une des deux tôles constituant le pendule est ici absente.

est alors plus ou moins grande en fonction de l'application. La figure 1.6 donne un aperçu de la gamme de produits Valeo qui comporte trois catégories :

- Les APC lourds (plusieurs kg au total) sont dédiés aux véhicules utilitaires et aux camions.
- Les APC conventionnels (≈ 1 kg au total) sont destinés aux voitures de tourisme.
- Les APC légers (< 0.5 kg au total) sont eux destinés à des applications peu sévères et généralement fixés sur le disque d'embrayage.



FIGURE 1.6 – Photographie de la gamme de pendules Valeo. Pendules pour applications lourdes (à gauche), conventionnels (au centre) et légères (à droite)

Cette technologie équipe à l'heure actuelle certains véhicules mais, pour les raisons environnementales et économiques décrites plus tôt, un nouveau concept est à l'étude et fait, depuis quelques temps, l'objet d'une attention particulière de la part des industriels automobiles. Il est présenté dans ce qui suit.

1.1.4 La nouvelle génération

Avec l'apparition sur le marché de moteurs toujours plus puissants, il est nécessaire d'accroître la performance de l'APC. Un moyen simple et peu coûteux d'y arriver consiste à augmenter la masse des pendules. Cette solution était encore d'usage il y a quelques temps mais il semble que la limite ait été atteinte compte tenu des contraintes d'encombrement et de masse embarquée dans le véhicule. Depuis quelques années, le concept déposé par Stone [8] en 1945 attire l'attention des équipementiers automobiles. Il consiste à autoriser une mobilité de rotation des pendules (*cf.* figure 1.7) autour de leur centre de masse afin de tirer parti de leur inertie de rotation (*cf.* section 3) jusque-là inexploitée par le mouvement de translation pure de l'APC de première génération. Là encore, cette mobilité est rendue possible en choisissant judicieusement la forme des pistes de roulement des rouleaux de guidage des pendules. Ce mouvement de rotation dépend donc directement du déplacement du pendule par rapport au voile. Cette évolution présente l'avantage d'être très peu coûteuse car elle n'implique pas de modifications majeures des outillages de fabrication mais elle rend en revanche la tâche plus ardue aux concepteurs. De plus, le choix de la loi rotation-déplacement du pendule reste encore une question ouverte, d'autant plus que ce système est absent de la littérature scientifique.

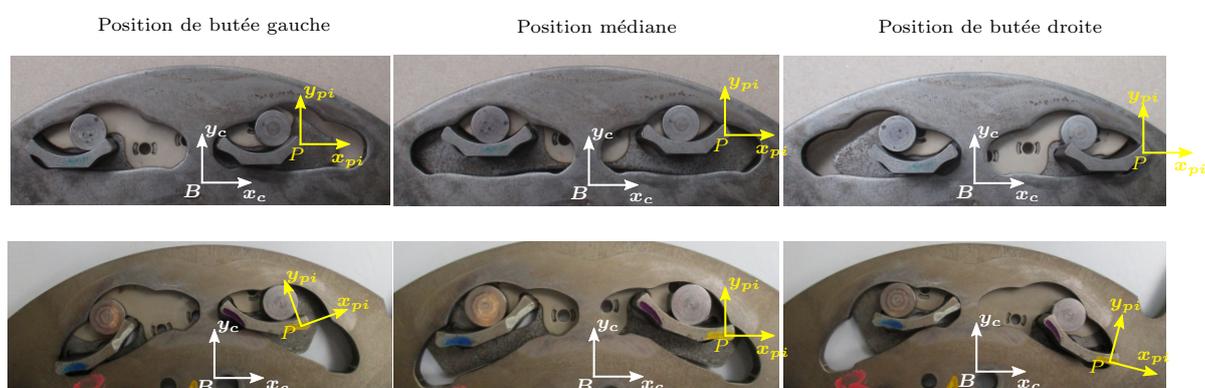


FIGURE 1.7 – Comparaison des mobilités d'un APC à translation classique (en haut) et d'un APC nouvelle génération (en bas). L'une des deux tôles constituant le pendule est ici absente.

1.2 État de l'art

La présente étude s'inscrit dans un cadre de recherche active depuis une vingtaine d'années sur les absorbeurs pendulaires. Voici un état de l'art du domaine :

Les secteurs d'application : Les pendules ont été utilisés comme absorbeurs de vibrations, d'abord pour des applications aéronautiques. Les premières traces remontent à la seconde guerre mondiale, pour l'atténuation des vibrations de torsion des vilebrequins d'aéronefs légers [9, 10]. Plus tard, Au début des années 1980, des pendules ont été introduits dans les rotors d'hélicoptères. Ils sont utilisés pour atténuer les vibrations de torsion engendrées par les turbines [11], mais on en trouve également sur la voilure, où ils sont accordés sur les modes de battement des pales [12]. Ce n'est qu'à partir des années 1990 que les absorbeurs pendulaires centrifuges (APC) font leur apparition dans le secteur automobile, avec de premières applications

expérimentales [13].

Les trajectoires des pendules : C'est un sujet encore d'actualité de nos jours (voir par exemple chapitre 3) mais ce sont les travaux de Newland qui en ont posé les bases bien plus tôt, en 1964. À l'époque, les APC appartiennent encore au secteur aéronautique et Newland étudie l'APC à trajectoire circulaire. Il montre la principale limitation de cette trajectoire qui a la fâcheuse tendance de soumettre la réponse du système au phénomène de saut, ce qui engendre des pertes de performance catastrophiques [10]. Ce n'est qu'en 1980 que l'on voit apparaître une trajectoire autre que le cercle, la cycloïde. C'est Madden qui brevète ce type d'APC [14] en se basant sur le célèbre pendule de Huygens [15] qui est un pendule tautochrone (du grec *tautós* : même et *khronos* : temps) dans le champ de pesanteur (*cf.* section 2.3.2). C'est-à-dire que sa fréquence d'oscillation libre est indépendante de l'amplitude de son mouvement. Au début des années 1990, sous l'impulsion de constructeurs automobiles américains, Denman [7] préconise quant à lui l'utilisation d'une épicycloïde qui a la particularité d'être la trajectoire tautochrone, cette fois dans un champ d'accélération centrifuge uniforme (*cf.* section 2.3.2).

L'unisson des pendules : L'APC étant un système à symétrie cyclique, il est sujet à des phénomènes de désynchronisation et de localisation de la réponse sur les pendules en régime permanent. Ce phénomène peut apparaître dans le cas de structures parfaitement linéaires présentant une dissymétrie généralement due à un faible désaccord des oscillateurs. Dans ce cas, la localisation de la réponse sur un ou plusieurs pendules a lieu quelle que soit l'amplitude du mouvement [16]. C'est un phénomène bien connu des roues aubagées [17]. En ce qui concerne les structures parfaitement symétriques, c'est-à-dire sans imperfection, la localisation de la réponse est un phénomène non linéaire [18, 19, 20]. Dans ce cas, la réponse forcée des pendules à l'unisson perd sa stabilité via une bifurcation au profit du non-unisson. Il semblerait que l'amortissement visqueux des pendules soit un paramètre très influent sur l'apparition de ce phénomène [21, 22] mais c'est un paramètre que l'on maîtrise difficilement en général. L'étude d'Alsuwaiyan [23] donne des pistes afin de d'éviter ou de limiter la désynchronisation des d'APC circulaires et épicycloïdaux et le fait de sur-accorder légèrement les pendules par rapport à la fréquence d'excitation est bénéfique dans tous les cas. Il précise également que cette désynchronisation des pendules n'engendre pas de pertes de performances excessives (*cf.* section 3.5.5.2).

Les méthodes d'analyses : La littérature montre que les études sont presque exclusivement basées sur des intégrations temporelles des équations du mouvement et sur des méthodes de perturbation analytique, notamment la méthode de la moyenne (*averaging method*) [24]. Elles offrent l'avantage de permettre des études paramétriques poussées mais sont limitées lorsque les amplitudes d'oscillation deviennent trop importantes. Très récemment, Acar a utilisé dans le cadre de sa thèse la méthode asymptotique numérique [25] couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique [26]. Cette procédure sera notamment présentée au chapitre 4.

Les campagnes d'essais : Lee étudie plusieurs configurations et propose notamment d'accorder des pendules sur des harmoniques différents du couple moteur [27]. D'autres études proposent des comparaisons expérimentales sur banc d'essai entre des APC utilisant différentes trajectoires, et c'est effectivement l'épicycloïde qui fournit les meilleurs résultats [28, 29]. Cependant la technologie mise en œuvre dans ces essais est différente de celle présentée en section 1.1.3 (*cf.* figure 1.5) et restreint l'étude à des amplitudes d'oscillation modérées. La plupart des campagnes expérimentales s'intéressent au régime permanent de l'APC mais quelques auteurs ont regardé la réponse transitoire du système [30]. Ce régime n'est étudié que depuis récemment, en réponse à une nouvelle technologie (quelques années déjà) du moteur à explosion qui consiste à désactiver

un ou plusieurs cylindres au régime de croisière du véhicule, ce qui provoque un changement brutal de la fréquence fondamentale du couple moteur [31, 32].

Les équipes de recherche : C'est l'industrie automobile qui est le moteur de l'activité de recherche menée sur l'absorbeur pendulaire centrifuge. Au début des années 1990, Ford collabore avec une équipe de chercheurs américains, principalement Shaw, Borowski, Cronin et Denman. Ils s'intéressent en particulier à un type de pendule centrifuge monté directement sur le vilebrequin. Ils sont très vite rejoints par d'autres constructeurs comme Chrysler ou Honda. Il y a également une forte activité en Allemagne, sous l'impulsion cette fois de l'équipementier Luk (groupe Scheaffler) ou encore du constructeur BMW. Ce sont ces deux groupes de recherches qui concentrent la majorité des études. Cependant, les études académiques sont majoritairement publiées par Shaw et son équipe, alors que les équipementiers comme Luk maintiennent un fort secret sur leurs développements et ne publient globalement que des brevets.

1.3 Contributions de la thèse

En regardant la littérature, on constate que, depuis la contribution de Denman, la question des trajectoires n'est presque plus abordée et que c'est l'épicycloïde qui est retenue quasi systématiquement pour sa propriété tautochrone. Cependant, dans le cas de l'APC, la tautochronicité de cette trajectoire ne semble pas absolument vraie mais cela n'est pas énoncé clairement. Denman donne cependant une piste en mentionnant que "l'épicycloïde n'est qu'une approximation au mieux de la tautochrone" [7]. Du côté industriel également, la norme consiste à utiliser une épicycloïde quelle que soit l'application. Le développement des APC se fait donc en dimensionnant d'autres paramètres, comme par exemple la masse ou encore la position radiale des pendules sur le voile. De plus, comme les APC actuels sont quasiment tous basés sur la technologie du système à translation (*cf.* figure 1.5), la marge de manœuvre en développement est très limitée.

C'est donc dans ce cadre que s'inscrit le premier objectif de la thèse, à savoir améliorer les performances de filtration de l'APC translaté épicycloïdal. Pour cela, deux axes d'étude sont établis. Dans un premier temps, on remet en cause la trajectoire épicycloïdale et on propose de nouvelles formes compatibles avec les contraintes de conception. Dans un second temps, on exploite la capacité de rotation des pendules de l'APC nouvelle génération (*cf.* figure 1.7) afin de tirer parti de leur inertie de rotation. Ces voies d'investigation ont mené à une amélioration significative des performances de filtration du système ainsi qu'à l'établissement de règles de conception à l'intention du bureau d'étude (*cf.* chapitre 3).

Le deuxième objectif du projet est de développer une stratégie de simulation du comportement vibratoire non linéaire de l'APC intégré dans la chaîne cinématique. La pratique actuelle est fondée sur l'utilisation de méthodes de simulations temporelles de codes commerciaux. L'outil numérique développé est dédié à l'étude des oscillations non linéaires dans le domaine fréquentiel, à partir d'une méthode de continuation numérique : la méthode asymptotique numérique couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique (*cf.* chapitre 4). En complément de cet outil, une méthode originale de continuation d'antirésonance a été développée et constitue une contribution majeure de cette thèse (*cf.* chapitre 5). Cette méthode permet plus généralement la continuation d'un extremum d'une courbe de réponse et apporte un réel bénéfice en phase de développement des absorbeurs dynamiques. L'implémentation de cette procédure dans l'outil DiaManlab représente pour Valeo Transmission un avantage concurrentiel certain.

Le troisième objectif du projet est de démontrer la pertinence des développements issus de l'objectif précédent en phase d'étude sur une application véhicule et de concevoir un pendule en interaction avec la chaîne cinématique (*cf.* chapitre 6). Une validation calcul essai démontre en effet la complémentarité entre les simulations temporelles et l'approche fréquentielle ainsi que le bien-fondé des développements réalisés dans cette thèse.

Le quatrième objectif consiste à fournir un moyen d'aide à la conception au partenaire industriel. En effet, la réalisation d'une maquette numérique avec les outils de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) est longue (de l'ordre de la semaine) car les dessinateurs déterminent la forme des pistes de roulement des entretoises et du voile "à la main" (*cf.* chapitre 7), ce qui affecte fortement la capacité de réactivité en phase d'étude produit. De plus, les architectures originales issues du premier objectif constituent une difficulté supplémentaire pour les concepteurs. Une contribution de cette thèse est donc le développement d'un outil numérique de calcul des pistes de roulement (*cf.* figure 1.5), de sorte que la trajectoire du centre de masse tout comme le mouvement de rotation des pendules soient exactement respectés. Cet outil permet ainsi un gain de productivité très appréciable, réduisant le temps de conception à quelques minutes.

1.4 Organisation

Ce document comporte sept chapitres.

Le premier et présent chapitre a permis d'introduire le cadre général de l'étude ainsi que le l'objet de ces travaux : l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC).

Dans le chapitre 2, on s'intéresse, en premier lieu, au groupe moto-propulseur et plus particulièrement aux éléments qui le composent au travers d'une description de leurs fonctions et de leurs caractéristiques. Ensuite, on présente certains absorbeurs de vibration de la littérature puis, dans un troisième temps on se focalise plus en détails sur les systèmes à pendules. On s'intéresse d'abord aux oscillateurs pendulaires et plus particulièrement à l'effet de leurs trajectoires sur leur comportement dans le champ de pesanteur et dans un champ d'accélération centrifuge uniforme. Cela nous amènera à l'étude de l'APC (*cf.* figure 1.4) et à la mise en lumière de certaines faiblesses du système.

Le chapitre 3 s'attache à proposer des améliorations de l'APC. Dans un premier temps, le mouvement de rotation des pendules est étudié afin d'en apprécier le bénéfice sur le comportement du système. Dans un second temps, des règles de conceptions issues de développements analytiques sont établies afin d'exploiter au mieux les non-linéarités de l'absorbeur et ainsi, améliorer les performances du système. Une étude expérimentale réalisée sur banc d'essai est proposée en dernière partie du chapitre.

Le chapitre 4 traite d'un premier aspect numérique des travaux de thèse. On s'intéressera à différentes stratégies de simulation avant de présenter la méthode asymptotique numérique puis on détaillera l'implémentation des équations du mouvement de l'APC en interaction avec la chaîne cinématique dans DiaManlab.

Le chapitre 5 est dédié à la présentation d'une méthode originale de continuation d'antirésonance qui fournit une aide précieuse pour le développement des absorbeurs dynamiques.

Cette procédure est implémentée dans le logiciel DiaManlab.

Le chapitre 6 propose un développement d'APC en condition véhicule basé sur les méthodes présentées aux chapitres 4 et 5. Ce développement est issu d'une collaboration étroite avec les équipes du partenaire industriel. Le bon déroulement du projet ainsi que les mesures réalisées sur le véhicule confirment toute la pertinence de la méthode numérique utilisée.

Le chapitre 7 présente l'outil numérique d'aide à la conception de l'APC à l'intention des dessinateurs. Le besoin et la problématique initiale sont d'abord exposés puis la formalisation du problème est présentée.

Publications. Les travaux présentés dans ce document ont mené à la soumission d'un article dans *Mechanical Systems and Signal Processing* ainsi qu'à la publication de deux brevets [33], [34] et à la soumission d'un troisième auprès de l'INPI. De plus, deux communications orales ont été réalisées, la première à l'occasion du congrès français CSMA 2017 [35], la deuxième lors du congrès international ICTAM 2016 [36]. Une troisième communication a fait l'objet d'une présentation orale pendant le congrès international ENOC 2017 [37]. Enfin, les travaux de thèse ont permis deux collaborations à l'origine d'une part, d'une communication orale lors du congrès international ISROMAC 2017 [19] et d'autre part, à un article publié dans la revue *Mechanical Systems and Signal Processing* [38].

Chapitre 2

Généralités sur la chaîne cinématique et modèles de pendules

Ce premier chapitre permet une lecture à plusieurs échelles de l'environnement du projet de thèse et est organisé suivant l'architecture présentée en figure 2.1. Certaines notions importantes y sont introduites et seront réutilisées dans la suite du document. En premier lieu, on décrit les fonctions et caractéristiques des éléments constitutifs du groupe moto-propulseur afin de bien saisir les enjeux de la dynamique d'un tel ensemble en l'absence d'absorbeur de vibration (*cf.* section 2.1.3). On s'intéresse ensuite, en section 2.2, à trois types d'absorbeurs de la littérature, que l'on regarde dans le contexte automobile afin d'en établir les limites dans notre domaine d'étude. Cela nous amène ensuite à considérer les systèmes à pendules. Les oscillateurs pendulaires sont abordés en section 2.3 et on s'intéresse plus particulièrement à leurs comportements, dans le champ de pesanteur et dans un champ d'accélération centrifuge uniforme, vis-à-vis de trajectoires particulières. Enfin, la section 2.4 se concentre sur l'absorbeur pendulaire centrifuge (*cf.* figure 1.4). Les équations du mouvement sont établies et l'étude du comportement non linéaire permet de mettre en évidence certaines de ses faiblesses.

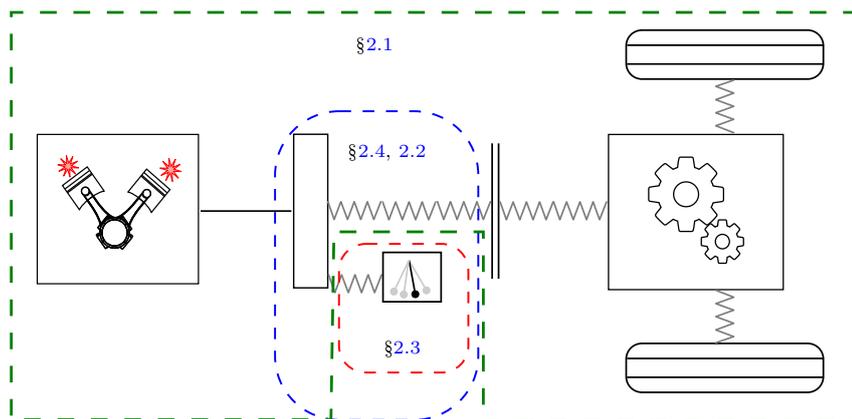


FIGURE 2.1 – Organisation du chapitre 2.

Sommaire

2.1 Le groupe moto-propulseur	20
2.1.1 Le moteur thermique	21
2.1.1.1 Généralités	21
2.1.1.2 Notion d'ordre moteur	22
2.1.2 La chaîne cinématique	26
2.1.2.1 Le volant moteur	26
2.1.2.2 Le double volant amortisseur	27
2.1.2.3 L'embrayage	29
2.1.2.4 La boîte de vitesses	31
2.1.2.5 Les liaisons à la route	33
2.1.3 Vibrations de la chaîne cinématique	33
2.1.4 Bilan de la description du groupe moto-propulseur	34
2.2 Les absorbeurs de vibration	35
2.2.1 L'absorbeur linéaire	35
2.2.2 L'absorbeur essentiellement non linéaire	37
2.2.3 L'absorbeur non linéaire accordé	39
2.2.4 Bilan sur les absorbeurs de la littérature	41
2.3 Les oscillateurs pendulaires	41
2.3.1 Le pendule simple	42
2.3.2 Le pendule tautochrone	44
2.3.2.1 Du pendule simple au pendule tautochrone	44
2.3.2.2 Trajectoires	49
2.3.2.3 Du pendule à l'oscillateur de Duffing	52
2.3.2.4 Régime forcé	53
2.3.3 Bilan sur les oscillateur pendulaires	57
2.4 L'absorbeur pendulaire centrifuge translaté	58
2.4.1 Modélisation	58
2.4.2 Étude linéaire	63
2.4.3 Réponse non linéaire et validation du modèle	64
2.4.3.1 Présentation des logiciels commerciaux	65
2.4.3.2 Comportement non linéaire	67
2.4.4 Bilan de l'étude de l'absorbeur pendulaire translaté	71

2.1 Le groupe moto-propulseur

Le groupe moto-propulseur (GMP) d'une automobile regroupe l'ensemble des organes mécaniques entre le moteur (inclus) jusqu'aux liaisons motrices à la route. Les éléments qui le composent sont : le moteur, le volant d'inertie, l'embrayage, la boîte de vitesses, le différentiel, les arbres de transmission et les pneumatiques. En omettant le moteur, l'ensemble des éléments cités composent la chaîne de cinématique. Sa fonction est de transmettre la puissance délivrée par le moteur aux roues, puis à la route, afin de mettre en mouvement le véhicule. Différentes architectures de GMP existent mais la fonction reste la même. Elles sont notamment abordées dans [39, 40].

2.1.1 Le moteur thermique

2.1.1.1 Généralités

Dans le contexte automobile, le moteur confère au véhicule l'énergie nécessaire pour se mouvoir. Le moteur thermique transforme une énergie potentielle chimique, contenue dans le carburant, en énergie mécanique via une phase de combustion. On le dénomme également moteur à combustion interne. Afin de bien en percevoir les enjeux, il semble judicieux de décrire brièvement le principe de fonctionnement d'un moteur à pistons automobile.

Son cycle de fonctionnement s'étale sur deux tours de vilebrequin et est composé de quatre phases distinctes ; on parle alors de moteur à quatre temps. Soit θ l'angle du vilebrequin en degré. Pour un moteur essence, le cycle de fonctionnement d'un cylindre se décompose ainsi :

- la phase d'admission $0^\circ < \theta < 180^\circ$
Le piston est au point mort haut pour $\theta = 0^\circ$. Un mélange gazeux à base d'air et de carburant est injecté dans la chambre de combustion lors de la descente du piston dans le cylindre.
- la phase de compression $180^\circ < \theta < 360^\circ$
Le piston atteint le point mort bas pour $\theta = 180^\circ$ et remonte dans le cylindre par effet d'inertie, ce qui comprime les gaz dans la chambre de combustion.
- la phase de détente $360^\circ < \theta < 540^\circ$
Juste après le point mort haut, la combustion du mélange gazeux comprimé est initiée par une bougie d'allumage, c'est l'explosion. L'énergie thermique ainsi libérée dilate le volume gazeux, ce qui repousse le piston.
- la phase d'échappement $540^\circ < \theta < 720^\circ$
Les gaz issus de la combustion sont expulsés du cylindre lors de la remontée du piston.

Ce descriptif est très schématique, de plus amples informations concernant la chimie des moteurs à combustion interne peuvent être trouvées dans [41]. Il existe aussi des moteurs dits à deux temps, le cycle complet n'est alors composé que d'un tour de vilebrequin. La première moitié du cycle (un demi tour de vilebrequin) regroupe les phases d'échappement, d'admission et de compression. Le reste du cycle est dédié à la combustion et la détente des gaz. Dans le domaine du transport ce type de moteur n'est pas utilisé pour des applications automobiles mais plutôt pour des véhicules légers à deux roues.

L'explosion dans la chambre de combustion génère des chocs à l'origine d'irrégularités de rotation du vilebrequin en termes de position, vitesse et accélération. En régime permanent, la vitesse de rotation du vilebrequin $\dot{\theta}$ s'écrit

$$\dot{\theta}(t) = \Omega + \dot{\tilde{\theta}}(t), \quad (2.1)$$

où t représente le temps, $(\dot{-})$ est la dérivée de $(-)$ par rapport à t , $\tilde{\theta}(t)$ est la partie fluctuante de $\theta(t)$ et Ω est la vitesse de rotation moyenne du vilebrequin. $\dot{\theta}$ représente le régime moteur instantané, cependant, la grandeur affichée sur le compte-tour du tableau de bord du véhicule est bien Ω . Ces irrégularités de rotation seront donc transmises à l'ensemble des éléments de la chaîne cinématique, provoquant principalement, usure, bruit et inconfort.

Le couple total T généré par le moteur présente lui aussi de fortes fluctuations et est fonction de θ . Il est de la même forme que (2.1) et s'écrit

$$T(\theta) = T_0 + \tilde{T}(\theta), \quad (2.2)$$

où T_0 est le couple moyen qui participe à la motricité du véhicule et $\tilde{T}(\theta)$ est le couple fluctuant

de $T(\theta)$, communément appelé *couple acyclique*.

Un moteur automobile est composé de plusieurs cylindres. Trois ou quatre pour les véhicules conventionnels, six ou huit pour les véhicules haut de gamme et même plus pour les poids lourds. Quel que soit leur nombre, les cycles de fonctionnement de chaque cylindre se recouvrent, de sorte que les explosions soient uniformément réparties sur deux tours de vilebrequin. La figure 2.2 illustre l'allure caractéristique du couple généré par un moteur essence à quatre cylindres sur un cycle de fonctionnement. On remarque que le couple moyen T_0 est d'amplitude relativement

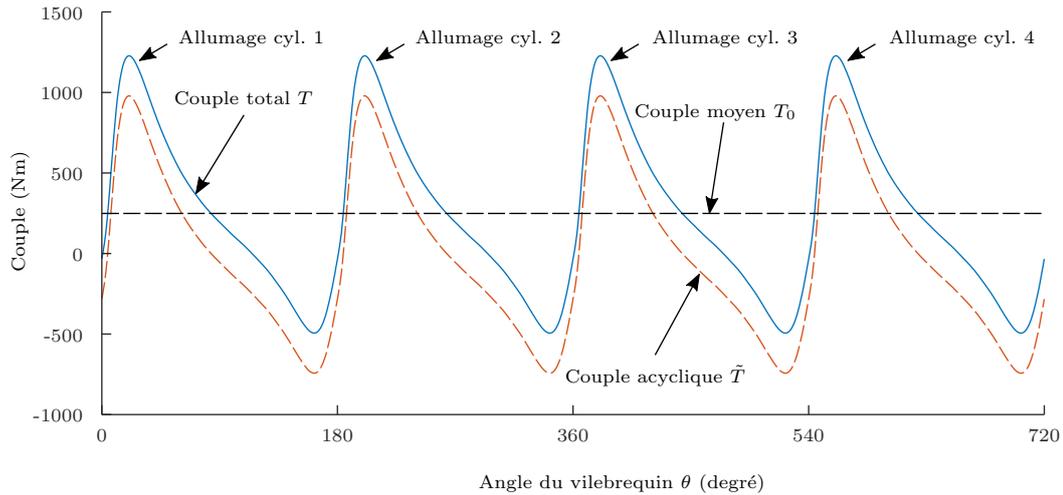


FIGURE 2.2 – Allure caractéristique du couple d'un moteur essence à quatre cylindres à $\Omega = 1000$ tr/min sur un cycle de fonctionnement.

modeste par rapport à l'amplitude du couple total. Le couple acyclique, quant à lui, représente une part très importante du couple total et passe même en négatif entre deux explosions. C'est une conséquence de l'alternance des phases de compression et de détente du cycle de fonctionnement décrit plus haut. La figure 2.3 montre l'évolution du couple pour différentes valeurs de Ω . On constate que la périodicité du couple moteur est indépendante de Ω , ce qui n'est pas surprenant étant donné que le même cycle se répète chaque deux tours de vilebrequin.

2.1.1.2 Notion d'ordre moteur

Pour un moteur donné, il y a autant d'explosions que de cylindres sur un cycle de fonctionnement. Par exemple :

- Pour un moteur 4 cylindres à 4 temps, il y a 4 explosions sur 2 tours de vilebrequin.
- Pour un moteur 3 cylindres à 4 temps, il y a 3 explosions sur 2 tours de vilebrequin.
- Pour un moteur 1 cylindre à 2 temps, il y a 1 explosion sur 1 tour de vilebrequin.
- ...

Comme les explosions sont réparties uniformément sur la durée (en tour de vilebrequin) du cycle de fonctionnement, on peut donc caractériser un moteur avec une grandeur sans dimension correspondant au nombre d'explosions par tour de vilebrequin. C'est ce qu'on appelle *l'ordre moteur* (*firing order* en anglais), généralement noté n_e et qui dépend du nombre de cylindres et

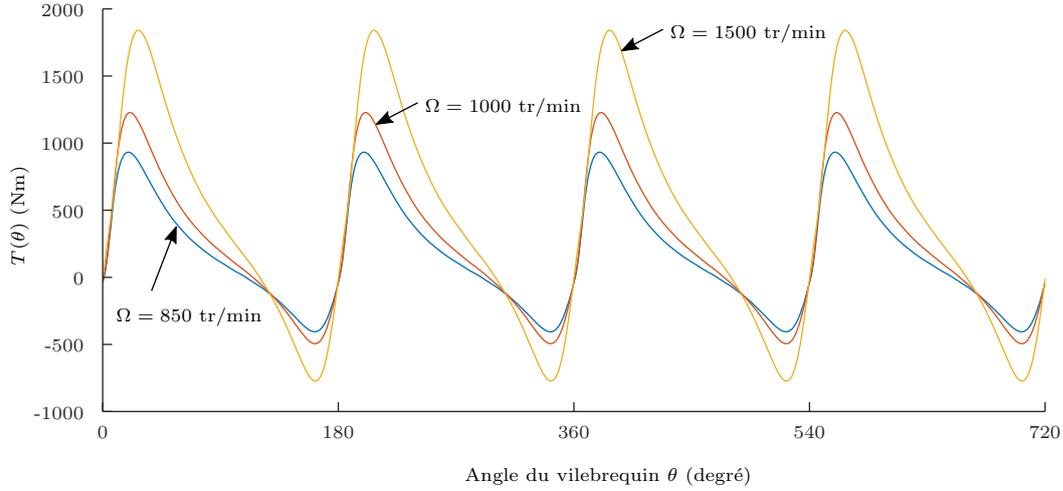


FIGURE 2.3 – Évolution caractéristique du couple d'un moteur essence à quatre cylindres sur un cycle de fonctionnement pour différentes valeurs de Ω .

du nombre de temps par cycle tel que

$$n_e = 2 \frac{\text{Nombre de cylindres}}{\text{Nombre de temps}}. \quad (2.3)$$

Le tableau 2.1 donne les valeurs d'ordre moteur pour différents types de moteur. L'expression du

	1 cyl.	2 cyl.	3 cyl.	4 cyl.	5 cyl.	6 cyl.
2 temps	1	2	3	4	5	6
4 temps	0.5	1	1.5	2	2.5	3

TABLE 2.1 – Valeurs de n_e pour différents types de moteur.

couple moteur donnée par l'équation (2.2) peut se réécrire sous la forme d'une série de Fourier $n_e\theta$ périodique

$$T(\theta) = T_0 + \sum_{i=1}^{\infty} T^{ci} \cos in_e\theta + T^{si} \sin in_e\theta, \quad (2.4)$$

ou encore, en fonction du temps tel que :

$$T(t) = T_0 + \sum_{i=1}^{\infty} T^{ci} \cos i\omega_e t + T^{si} \sin i\omega_e t, \quad (2.5)$$

où T^{ci} et T^{si} sont les coefficients de Fourier et la fréquence fondamentale ω_e est donnée par

$$\omega_e = n_e \dot{\theta} = n_e (\Omega + \dot{\theta}). \quad (2.6)$$

Cette notion d'ordre moteur est très importante car elle illustre la dépendance linéaire de la fréquence du couple moteur ω_e au régime moteur $\dot{\theta}$, via le coefficient n_e .

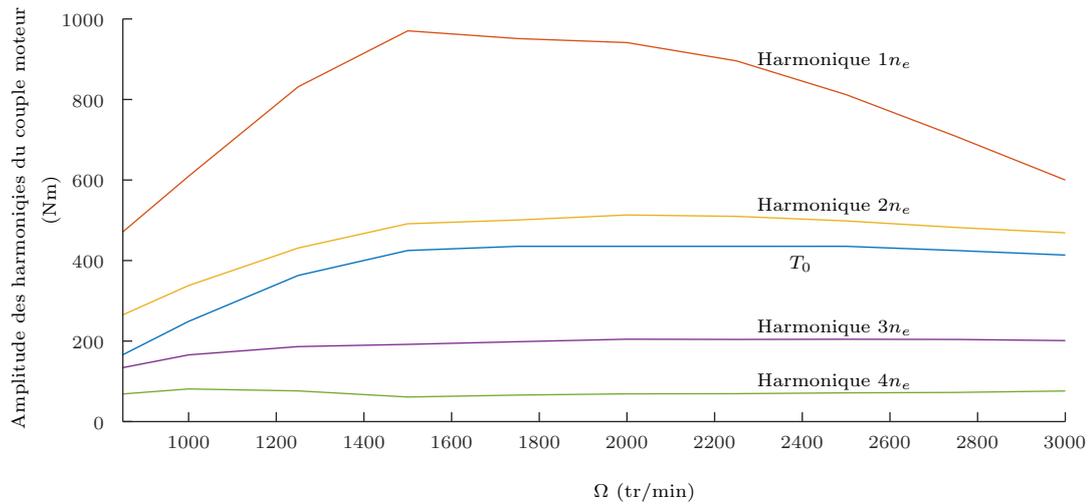


FIGURE 2.4 – Évolution caractéristique des amplitudes du couple moyen T_0 et des quatre premiers harmoniques du couple moteur en fonction de Ω .

La figure 2.4 montre l’allure caractéristique de spectre fréquentiel du couple moteur (2.5), en fonction du régime moyen Ω . On constate que l’essentiel de l’énergie du couple total est contenue dans ses deux premiers harmoniques avec un maximum de contribution pour le premier aux alentours de 1500 tr/min. Bien que le moteur correspondant à la figure 2.4 soit destiné à des applications plutôt haut de gamme, il est très représentatif des défis à venir. Pour des raisons écologiques et économiques, les cylindrées et les régimes de fonctionnement sont en constante diminution. Afin de garantir un niveau de performance au moins équivalent, les motoristes augmentent donc les taux de compression à l’intérieur des cylindres, ce qui a pour effet de majorer l’amplitude du couple acyclique. On imagine bien qu’en l’état, la chaîne cinématique sera soumise à rude épreuve, typiquement entre 800 et 2000 tr/min. Il s’agit ici d’un moteur à essence. À couple moyen équivalent, un moteur diesel présentera une amplitude de couple acyclique encore plus élevée car sa technologie est basée sur la propriété d’auto-inflammation du carburant dans des conditions de pression élevées. Malgré le futur incertain des moteurs diesel, ils sont encore bien présents dans l’industrie automobile.

Du point de vue de Valeo Transmission, les caractéristiques du couple moteur sont des données fournies par le client. En pratique, on ne dispose que rarement de l’information du couple en fonction de θ (cf. figure 2.3). Le plus souvent, nous n’avons à notre disposition que les amplitudes du spectre en fonction du régime moyen telles que représentées en figure 2.4. En étude produit, on fait donc l’hypothèse que $\dot{\theta} \ll \Omega$ et l’équation (2.6) est réécrite sous la forme

$$\omega_e = n_e \Omega. \quad (2.7)$$

On précise que, dans la littérature, cette hypothèse n’est que rarement faite et c’est généralement l’expression (2.6) qui est considérée. Se pose alors la question de la validité de cette hypothèse. La figure 2.5 montre l’allure caractéristique du spectrogramme de la mesure de l’accélération angulaire en sortie de vilebrequin, en fonction du régime moyen, dans le cas d’un moteur à 4 cylindres ($n_e = 2$). Le même spectrogramme, mais cette fois-ci représenté en ordre, est montré en figure 2.6 et le passage de la fréquence à l’ordre se fait via la relation (2.7). L’harmonique fondamental à l’ordre 2 ainsi que les deux harmoniques suivants aux ordres 4 et 6 sont clairement

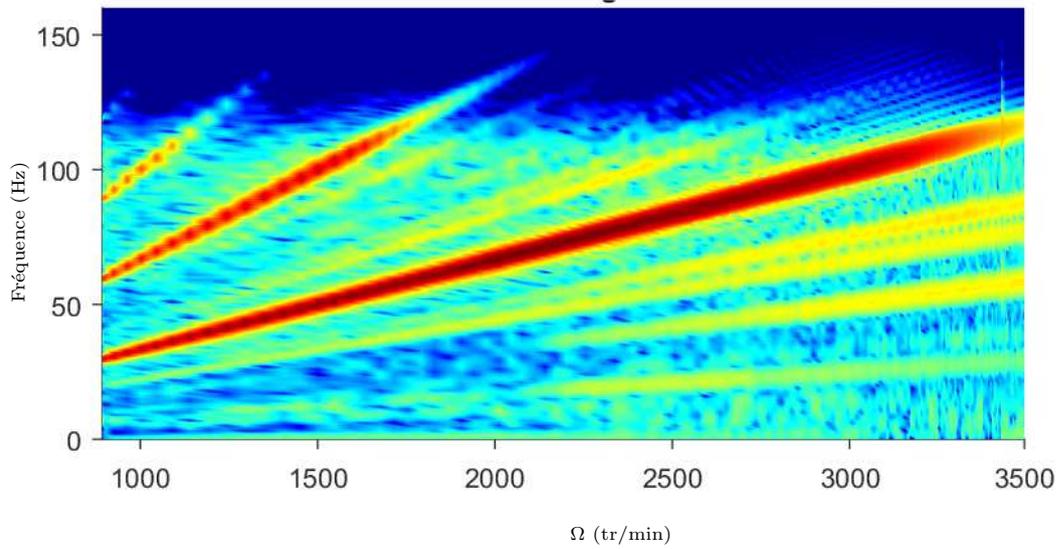


FIGURE 2.5 – Spectrogramme de l'accélération angulaire mesurée en sortie de vilebrequin d'un moteur 4 cylindres, en fonction de la vitesse de rotation moyenne de celui-ci, lors d'une phase de montée en régime. Représentation fréquence - régime moyen.

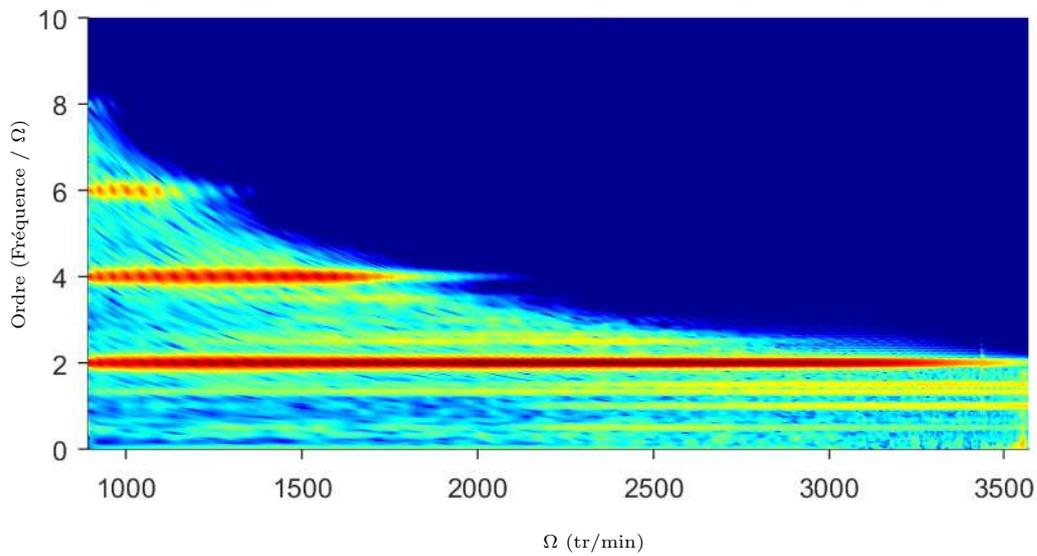


FIGURE 2.6 – Spectrogramme de l'accélération angulaire mesurée en sortie de vilebrequin d'un moteur 4 cylindres, en fonction de la vitesse de rotation moyenne de celui-ci, lors d'une phase de montée en régime. Représentation ordre - régime moyen.

identifiables. On constate que la fréquence est bien proportionnelle à Ω et que la contribution

oscillante $\dot{\theta}$ dans l'expression (2.6) est négligeable. Les spectrogrammes présentés ici sont réalisés avec une procédure interne Valeo de FFT glissante sur les signaux temporels mesurés. On observe la présence d'une raie à l'ordre 1, ce qui est surprenant étant donné que le moteur comporte 4 cylindres. En réalité, cette composante est générée par un effet de balourd causé par l'alternance du mouvement de l'embellage du moteur dans les cylindres. Dans ce cas, ce balourd génère une impulsion par tour, donc à l'ordre 1. Cet effet de balourd est source d'excitation supplémentaire de la chaîne cinématique. Cependant, celle-ci est de faible intensité devant l'amplitude du couple acyclique et est donc généralement négligée.

2.1.2 La chaîne cinématique

2.1.2.1 Le volant moteur

Le volant moteur, aussi appelé volant d'inertie, est situé en sortie du vilebrequin. Il assure la liaison mécanique entre le moteur et l'embrayage. Une illustration est donnée en figure 2.7. Historiquement, cet élément est simplement un solide de révolution et son fonctionnement est

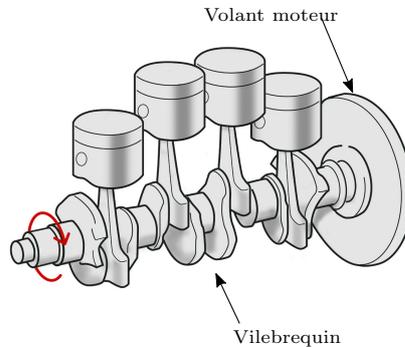


FIGURE 2.7 – Illustration d'un volant moteur monté sur un vilebrequin de moteur à quatre cylindres.

basé sur un principe simple. Pour le comprendre, on isole le volant moteur, comme illustré en figure 2.8, et on écrit le bilan des actions mécaniques extérieures :

$$T(t) - T_c(t) = I_{VM} \ddot{\alpha}(t), \quad (2.8)$$

où $T_c(t)$ est le couple exercé par le reste de la chaîne de transmission sur le volant moteur, I_{VM} comprend l'inertie du volant moteur et du vilebrequin et $\alpha(t)$ mesure le déplacement angulaire du volant moteur.

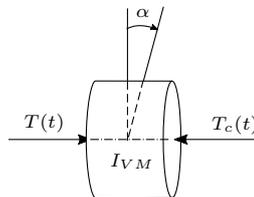


FIGURE 2.8 – Bilan des actions mécaniques sur le volant moteur.

On voit directement que, plus l'inertie du volant moteur est grande, plus la variation de vitesse de ce dernier est faible afin de préserver l'équilibre (2.8). De par son inertie relativement importante,

entre 150 et 250 gm^2 , il constitue en quelque sorte un premier étage de filtration des acyclismes moteur. Il y a cependant un prix à payer pour un volant moteur lourd, à savoir une perte de performance du véhicule en termes de consommation et de réactivité. C'est pourquoi, à l'heure actuelle, on essaye plutôt de réduire l'inertie de rotation du volant moteur.

2.1.2.2 Le double volant amortisseur

L'augmentation des couples acycliques des moteurs modernes pousse les équipementiers à développer de nouveaux concepts, comme par exemple le double volant amortisseur (DVA) dont une illustration est donnée en figure 2.9 ainsi qu'un schéma de principe en figure 2.10. Le principe

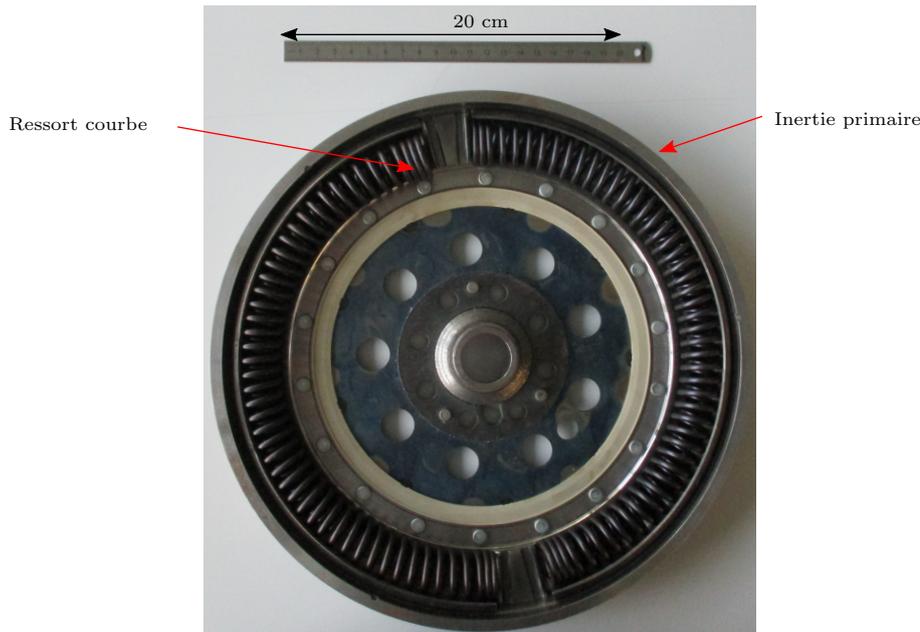


FIGURE 2.9 – Photographie de l'intérieur d'un double volant amortisseur Valeo.

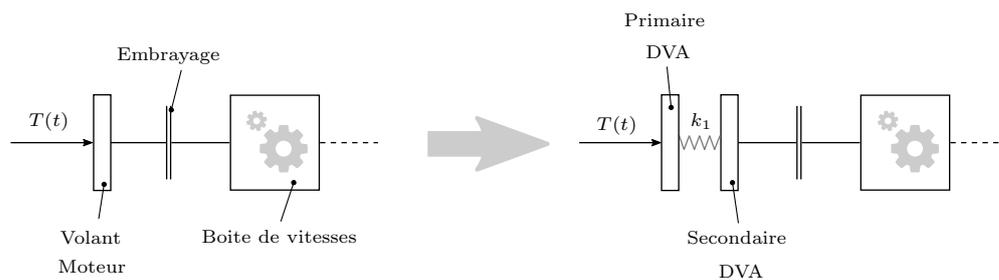


FIGURE 2.10 – Illustration de la chaîne de transmission équipée d'un volant moteur conventionnel (à gauche) et d'un DVA (à droite)

consiste à scinder le volant moteur conventionnel en deux inerties distinctes, une primaire et une secondaire, liées entre elles par un étage de ressorts courbes de raideurs k_1 . L'inertie primaire est fixée au vilebrequin et l'inertie secondaire assure la liaison avec l'embrayage. Une fonction du

DVA est d'assurer une première filtration des acyclismes moteur en vue de protéger la boîte de vitesses. Il agit comme un filtre passe bas dont la fréquence de coupure est choisie inférieure à la fréquence du régime de ralenti, comme illustré en figure 2.11. La raideur k_1 est donc choisie la plus faible possible de sorte que le mode de DVA soit le plus bas possible en fréquence (de l'ordre de la dizaine de Hertz), dans le but d'isoler au mieux la chaîne de transmission. Il y a cependant

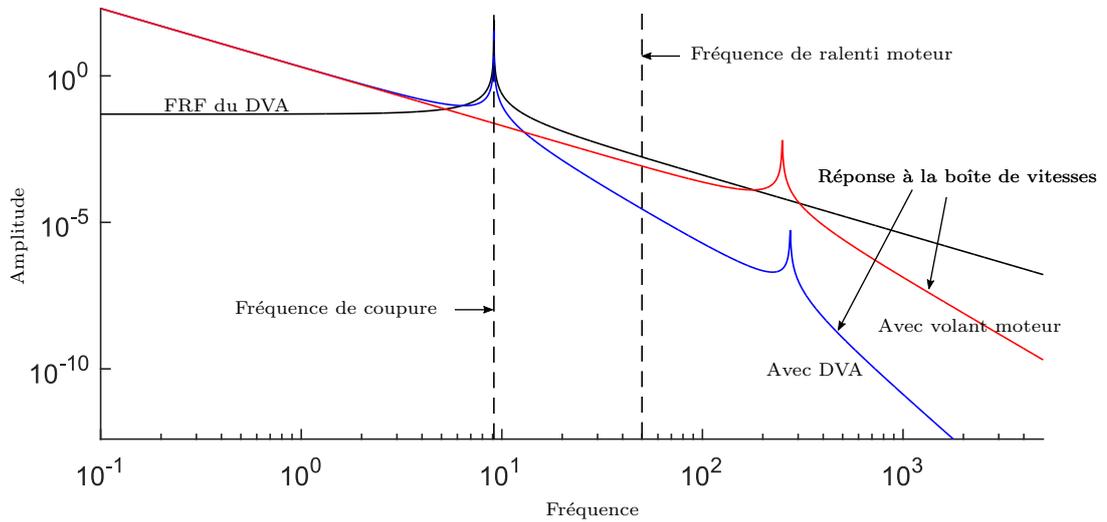


FIGURE 2.11 – Illustration de la fonction de filtre passe bas du DVA.

un compromis à trouver car une raideur trop faible ne permet pas d'assurer la fonction première qui est la transmission du couple moteur. Pour des applications très sévères on envisage alors un DVA bi-pente, schématisé en figure 2.12, qui comporte un deuxième étage de raideur k_2 sollicité après la fermeture d'un jeu δ .

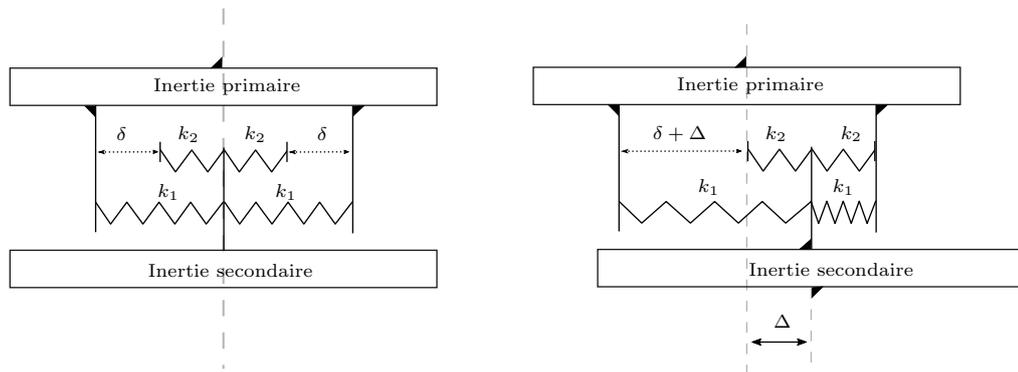


FIGURE 2.12 – Schéma de principe d'un DVA bi-pente. Position de repos à gauche. Position en fonctionnement à droite.

2.1.2.3 L'embrayage

Le système d'embrayage permet de coupler (position embrayée) ou non (position débrayée) le moteur à la boîte de vitesse et donc d'interrompre momentanément le passage de couple. Dans le cas d'une transmission manuelle, il est piloté par l'automobiliste via une action sur la pédale d'embrayage. Il se compose d'un disque, muni d'une raideur de torsion, et d'un mécanisme d'embrayage (ou d'actionnement).

La figure 2.13 illustre un embrayage conventionnel Valeo. Le disque d'embrayage accueille

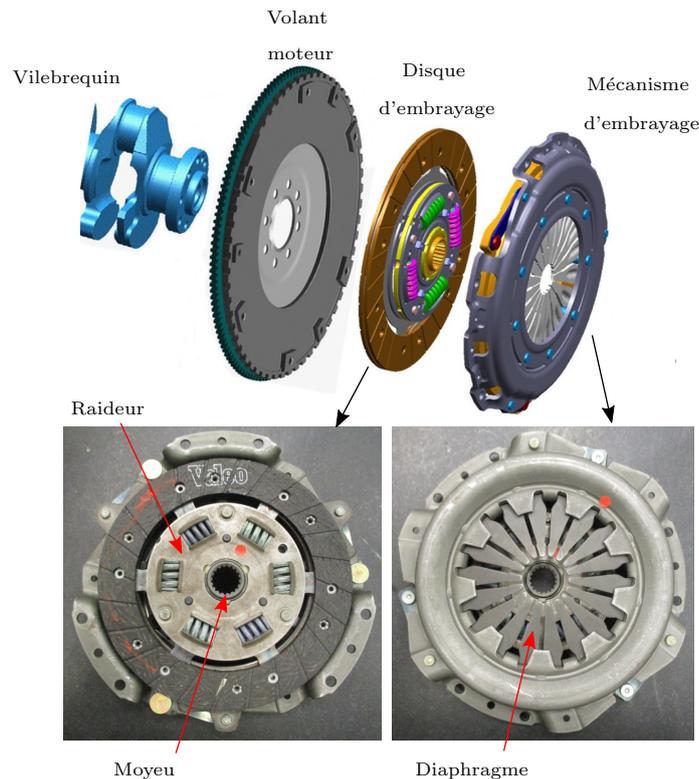


FIGURE 2.13 – Vue CAO éclatée de l'ensemble vilebrequin, volant moteur, disque et mécanisme d'embrayage (en haut). Photographies d'un disque (en bas à gauche) et d'un mécanisme d'embrayage sec Valeo (en bas à droite).

de part et d'autre deux garnitures de frottement en matériau organique rivetées ou collées. Le mécanisme d'actionnement, solidaire du volant moteur, comporte un diaphragme déformable qui permet d'assurer les fonctions d'embrayage et de débrayage du système. En position embrayée, le diaphragme maintient une pression constante sur le disque d'embrayage qui est pincé entre le volant moteur et le mécanisme d'actionnement. La transmission du couple vers la boîte de vitesse est alors assurée par les garnitures de frottement du disque d'embrayage. En position débrayée, le diaphragme se déforme pour désolidariser le disque d'embrayage (et donc la boîte de vitesses) du volant moteur et du mécanisme. Le diaphragme permet également une transition progressive entre les positions embrayée et débrayée ; c'est la phase de patinage qui a pour but de synchroniser la vitesse de rotation du volant moteur à celle de l'arbre d'entrée de boîte de vitesses.

La raideur d’embrayage se compose de plusieurs éléments élastiques dont la raideur totale est de l’ordre de la quinzaine de $\text{Nm}/^\circ$. Son rôle est, à l’instar du DVA, d’assurer une fonction de filtration des acyclismes moteur, là aussi à l’image d’un filtre passe bas. Sa course étant limitée, il se peut que le système arrive en butée sous l’action de sollicitations imprévues (au calage du véhicule par exemple), ce qui génère des chocs importants dans la chaîne de transmission. Le système est bien sûr dimensionné, jusqu’à un certain point, pour éviter ce genre de scénario. La raideur d’embrayage comporte également des éléments d’amortissement illustrés en figure 2.14. Ce sont des rondelles de type belleville dont la forme est calculée afin de maintenir une certaine charge axiale au sein de l’embrayage et ainsi induire une dissipation par frottement sec.

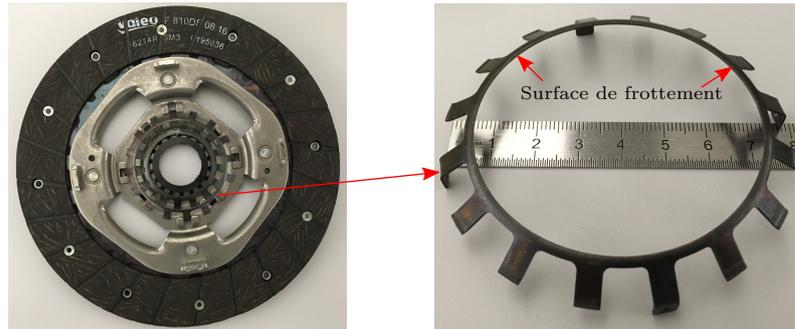


FIGURE 2.14 – Photographie d’un amortissement d’embrayage.

Le moteur n’est pas la seule source de bruit et de vibrations dans un véhicule. Le système d’embrayage est sujet à des phénomènes vibro-acoustiques complexes. On peut classiquement les regrouper en trois catégories : très basse fréquence, basse fréquence et haute fréquence.

Le bourdonnement (*booming*) d’embrayage appartient à la première catégorie. Ce phénomène est compris entre 5 et 20Hz [42] et est initié par un embrayage lent au décollage du véhicule lors de la phase patinage. Il apparaît donc pour des régimes moteur proches du régime de ralenti. Il est induit par un phénomène de “collé-glissé” (*stick-slip*) de l’embrayage qui vient exciter le premier mode de torsion de la chaîne de transmission [43]. Les occupants du véhicule ont alors une impression désagréable de balancement d’avant en arrière.

Le phénomène de libération d’embrayage (*clutch release*) apparaît en dessous de 200 Hz [44] et trouve sa source dans les vibrations axiales de la chaîne de transmission induites par la déformation en flexion du vilebrequin. Il en résulte un contact résiduel des garnitures frottantes du disque d’embrayage avec le mécanisme d’actionnement ou le volant moteur en position débrayée. L’automobiliste doit alors fournir un effort anormalement élevé pour changer de rapport, ce qui malmène la boîte de vitesses.

Le bruit de pédale (*whoop noise*) est un phénomène transitoire basse fréquence, typiquement entre 250 et 300 Hz [45], apparaissant pendant la phase d’embrayage ou de débrayage. Le système de commande transmet une partie des vibrations de la chaîne de transmission à la pédale d’embrayage, ce qui engendre un bruit et une sensation au pied désagréable.

Pour finir, on citera le crissement d’embrayage (*clutch squeal*) qui est, lui, un phénomène acoustique de haute fréquence, entre 250 et 1000 Hz [46]. Il trouve sa source lors d’une phase de patinage prolongée (démarrage en côte par exemple). Ce phénomène, quand il apparaît, peut être extrêmement bruyant et atteindre 110 dB.

2.1.2.4 La boîte de vitesses

La boîte de vitesses a pour fonction d'adapter le couple à transmettre aux roues en fonction de l'état de charge du moteur. Elle est constituée de différents étages de réduction, ce qui a pour effet de démultiplier le couple moteur en sortie de boîte. La figure 2.15 montre l'intérieur d'une boîte de vitesses de transmission manuelle à quatre rapports. Malgré une architecture complexe,

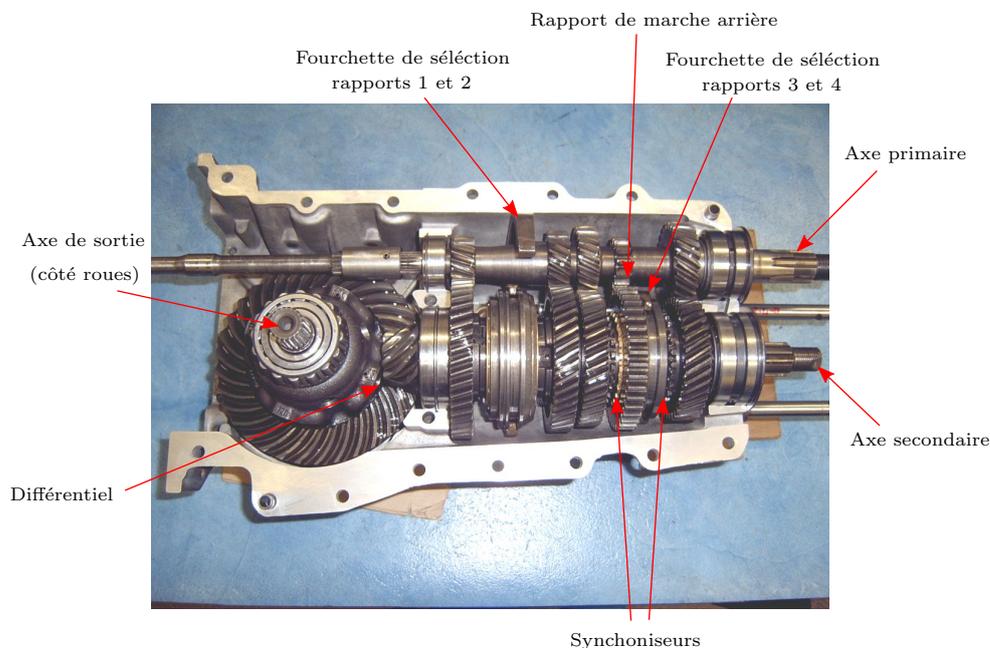


FIGURE 2.15 – Photographie d'une boîte de vitesses manuelle à quatre rapports.

on tente d'expliquer le fonctionnement de base de cet élément de façon simple.

Lors de la phase de débrayage, l'action de l'automobiliste sur le levier de vitesse déplace la fourchette pour sélectionner le rapport de réduction désiré. Après la phase d'embrayage, l'axe primaire est soumis au couple moteur et tourne alors à la vitesse de rotation du vilebrequin. Via le rapport de réduction du rapport sélectionné, le couple est démultiplié et entraîne l'arbre secondaire de boîte qui tourne, lui, à une vitesse de rotation inférieure. Les pignons menant de l'arbre primaire sont fixes alors que les pignons menés de l'arbre secondaire sont eux "débrayables". Pour un rapport engagé, il n'y a donc qu'un seul pignon mené solidaire de l'arbre secondaire, les autres étant totalement libres.

Lors du passage de vitesse du rapport A au rapport B, les synchroniseurs ont pour fonction de solidariser le pignon mené du rapport B et de désolidariser celui du rapport A à l'arbre secondaire de façon progressive, afin de préserver les dentures des engrenages. Les synchroniseurs eux-mêmes étant des éléments fragiles, ils sont particulièrement sensibles aux acyclismes du couple moteur.

Le couple est ensuite transmis au différentiel dont une première fonction est d'assurer la liaison entre les arbres de transmission et l'arbre secondaire de boîte. Une deuxième fonction, et non des moindres, est de permettre aux roues de tourner à des vitesses différentes afin de garantir une liaison optimale à la route en virage. Le différentiel constitue un étage supplémentaire de réduction de vitesse, les arbres de transmission tournent donc moins vite que l'arbre secondaire de boîte.

La différence de vitesse de rotation entre les arbres primaire, secondaire et de sortie de boîte de vitesses dépend évidemment des rapports de réduction de la vitesse engagée et du différentiel. En pratique, on ne modélise pas les engrenages, on pondère les inerties et raideurs en aval de chaque étage de réduction de façon à considérer une grandeur équivalente du point de vue de l'arbre d'entrée de boîte de vitesses. Pour illustrer le propos, un étage de réduction est schématisé en figure 2.16. L'arbre primaire, considéré rigide, tourne à une vitesse $\dot{\theta}$ et l'arbre secondaire est modélisé par une inertie I et une raideur k .

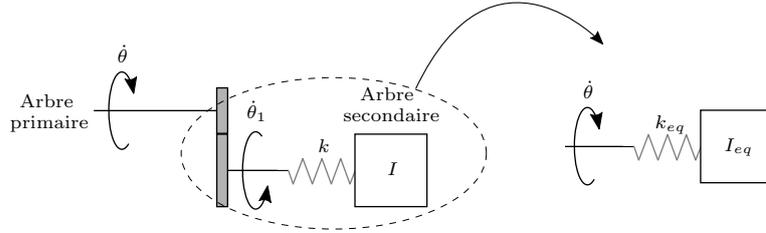


FIGURE 2.16 – Schématisation d'un étage de réduction (à gauche) et sa représentation énergétiquement équivalente (à droite).

L'idée est de représenter l'arbre secondaire, tournant à une vitesse $\dot{\theta}_1$, par une modélisation énergétiquement équivalente tournant à la vitesse $\dot{\theta}$. Sous l'hypothèse que le rendement de la boîte de vitesses soit égal à 1, on égalise les énergies potentielle et cinétique des deux modèles telles que

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2}I_{eq}\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}k\theta_1^2 = \frac{1}{2}k_{eq}\theta^2. \quad (2.9)$$

On en déduit

$$I_{eq} = \frac{I}{r^2} \quad \text{et} \quad k_{eq} = \frac{k}{r^2}, \quad (2.10)$$

avec $r = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_1}$, le rapport de réduction de l'étage d'engrenage. En suivant la même logique, les raideurs et inerties des éléments en aval de la boîte de vitesses seront, en plus, pondérés du rapport de réduction du différentiel. Les caractéristiques de masse et de raideur de la chaîne de transmission dépendent donc du rapport de boîte de vitesses engagé.

A l'instar du système d'embrayage, la boîte de vitesse est également le lieu de phénomènes vibro-acoustiques indésirables.

Le grailonnement (*rattle*) est un bruit engendré par les chocs entre les dentures des pignons menants et celle des pignons menés (laissés libres) des rapports non engagés. Il est notamment perceptible lors des régimes de ralenti et en condition de point mort. La pignonnerie de la boîte de vitesse baignant dans l'huile, les pignons libres sont soumis à un couple résistant dû à la traînée du fluide de transmission. Ce couple de traînée, allié aux acyclismes moteur et aux jeux fonctionnels des engrenages, engendre un bruit large bande sans tonalité particulière mais perceptible [47].

Le phénomène de sirènement (*whine noise*) est un bruit tonal caractéristique des systèmes à engrenages. Dans la transmission automobile il est dépendant de la vitesse de rotation des pignons et donc de la fréquence d'engrènement du rapport engagé [48]. Ce bruit apparaît entre 400 et 800 Hz et est particulièrement perceptible sur le rapport de marche arrière en raison de son engrenage à dentures droites.

2.1.2.5 Les liaisons à la route

La description des éléments du GMP s'achève avec la présentation des arbres de transmission et des roues. La figure 2.17 illustre un arbre de transmission de train avant gauche d'une automobile. Ils accueillent à leurs extrémités deux joints articulés (tripodes) permettant à la suspension de débattre et aux roues de tourner. Un dimensionnement approprié à la sollicitation de torsion leur permet de transmettre la puissance du moteur aux roues. Ces dernières accueillent

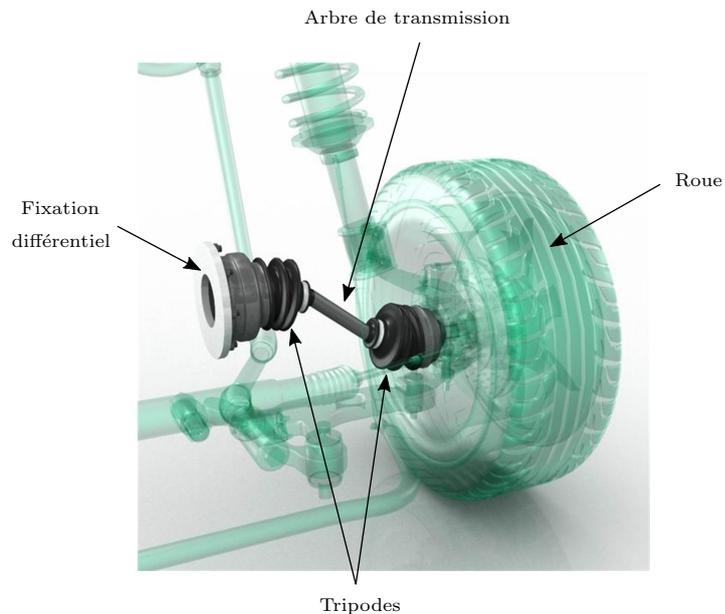


FIGURE 2.17 – Illustration d'un ensemble arbre de transmission et roue

les pneumatiques, en contact direct avec la route. De par leur diamètre, les roues constituent un dernier étage de réduction s'ajoutant à ceux de la boîte de vitesses et du différentiel.

2.1.3 Vibrations de la chaîne cinématique

Les sections précédentes ont donné une vue globale des principaux organes de transmission de puissance du groupe moto-propulseur (GMP), chacun d'entre eux étant un assemblage complexe de pièces mobiles avec des jeux de fonctionnement, des frottements, des fluides et des chocs entre bien d'autres choses. Le GMP présente donc une dynamique riche qui, en plus de dépendre de son architecture, dépend de ses nombreuses conditions de fonctionnement : point mort, démarrage / arrêt moteur, accélération, calage du véhicule... Chacune de ces situations doit répondre à un cahier des charges précis imposé par les constructeurs automobiles. Dans le cadre de la thèse, nous nous intéressons particulièrement à la montée en régime du GMP ; l'embrayage est donc fermé afin de permettre le passage du couple. Cependant, cette montée en régime ne peut se faire que lorsqu'une vitesse est engagée et, comme les caractéristiques de masse et raideur de la chaîne cinématique dépendent du rapport de boîte (*cf.* section 2.1.2.4), les fréquences propres de cette dernière en dépendent également. La figure 2.18 illustre la situation où les modes de la chaîne cinématique sont excités à des fréquences différentes selon le rapport de boîte engagé.

Les fréquences des harmoniques du couple moteur sont représentées par les lignes noires et les lignes en traits pointillés représentent les fréquences propres de la chaîne de transmission pour

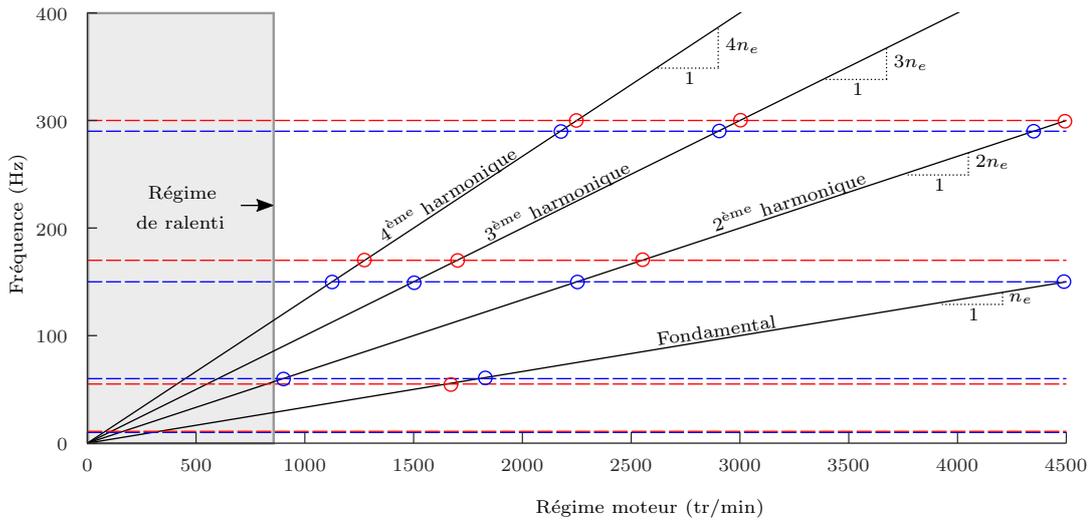


FIGURE 2.18 – Illustration des harmoniques du couple moteur (traits noirs) excitant les modes de la chaîne cinématique (traits pointillés) à des fréquences différentes selon le rapport de boîte engagé A (rouge) ou B (bleue).

un rapport A (pointillés rouges) et un rapport B (pointillés bleus). Ceci est problématique car la conduite d'une automobile implique généralement des changements de rapport fréquents. On voit que le paysage est encombré et qu'il existe un nombre important de points où les fréquences des harmoniques du couple moteur croisent celles des modes de la chaîne de transmission (cercles rouges). De plus, il est important de remarquer qu'un même mode est excité autant de fois que le couple moteur compte d'harmoniques mais à des régimes différents. C'est donc à une multitude de couples fréquence-régime moteur, que l'on doit apporter une solution de filtration. Cependant, les constructeurs ne s'arrêtent pas à demander une réduction des résonances de la chaîne de transmission mais imposent une filtration sur toute la plage de régime balayée par le moteur. Ceci est en pratique réalisé à l'aide d'un absorbeur pendulaire centrifuge, que l'on a présenté en section 1.1.

2.1.4 Bilan de la description du groupe moto-propulseur

A travers les différents aspects présentés jusque-là, nous pouvons constater toute la richesse de la dynamique du groupe moto-propulseur et l'ampleur de la tâche demandée à l'absorbeur pendulaire centrifuge. On résume ici les points essentiels qui nous accompagneront tout au long du document.

La fréquence du couple moteur est proportionnelle au régime (cf. section 2.1.1, 2.1.3)

- Du fait de la répartition uniforme des explosions du moteur sur un cycle de fonctionnement, la fréquence fondamentale du couple moteur ω_e est liée au régime moteur instantané $\dot{\theta}$ par le coefficient de proportionnalité n_e (cf. équation 2.6).
- En pratique, on fait l'hypothèse que la fréquence fondamentale ω_e est liée au régime moteur moyen Ω par ce même coefficient de proportionnalité n_e (cf. équation 2.7).

Les fréquences propres de la chaîne cinématique dépendent du rapport de boîte engagé (cf. sections 2.1.2.4, 2.1.3)

- Les inerties et raideurs en aval d'un étage de réduction de vitesse sont pondérées par le rapport de réduction (*cf.* equation 2.10) du rapport engagé, ce qui implique des caractéristiques de masse et de raideur de la chaîne cinématique différentes pour chaque rapport de boîte.

Une performance de filtration est attendue sur toute la plage de régime moteur

- Les constructeurs automobiles imposent des critères de filtration, notamment à la boîte de vitesses du régime de ralenti ≈ 850 tr/min jusqu'à environ 3500 tr/min, principalement pour les rapports de boîte élevés.

2.2 Les absorbeurs de vibration

Vu l'état des lieux établi en section 2.1.3, il est temps de s'intéresser aux solutions d'absorption des vibrations. Le sujet de cette thèse est évidemment l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC) mais on propose dans cette section une brève revue de différents concepts de la littérature que sont l'absorbeur à masse accordée classique (*cf.* section 2.2.1), dont le principe de fonctionnement est similaire à celui de l'APC, l'absorbeur essentiellement non linéaire (*cf.* section 2.2.2) et l'absorbeur non linéaire accordé (*cf.* section 2.2.3). Cela nous permettra de dresser un bilan en section 2.2.4 afin de mettre en perspective leurs propriétés et capacités, en section 2.2.4, vis-à-vis du contexte présenté précédemment.

2.2.1 L'absorbeur linéaire

L'absorbeur linéaire est certainement la première solution venant à l'esprit de l'ingénieur en matière d'absorption passive des vibrations. Ce type d'absorbeur est désigné dans la littérature par l'acronyme TMD pour *tuned mass damper* ou encore LTVA pour *linear tuned vibration absorber*. Le TMD est généralement employé pour atténuer une résonance d'une structure primaire linéaire soumise à une excitation extérieure.

Pour l'exemple, on modélise un mode particulier d'une structure primaire par un oscillateur linéaire illustré en figure 2.19, à gauche. L'équation du mouvement de l'oscillateur soumis à une

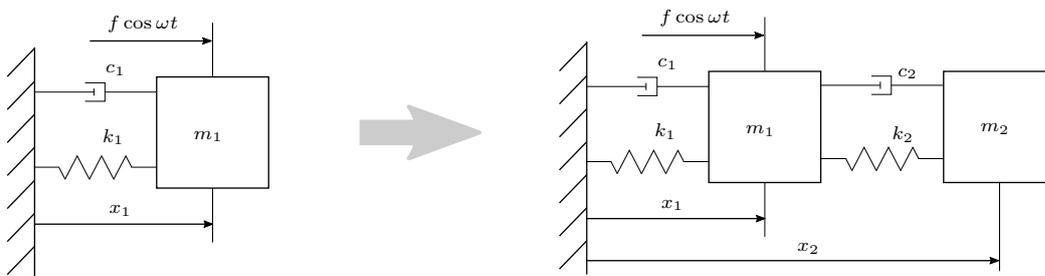


FIGURE 2.19 – Illustration d'un oscillateur linéaire (à gauche) et le même oscillateur couplé au TMD (à droite).

excitation harmonique $f \cos \omega t$ est

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = f \cos \omega t, \tag{2.11}$$

avec m_1 , k_1 et c_1 , respectivement les caractéristiques de masse, raideur et amortissement et x_1

mesurant le déplacement de l'oscillateur. La fréquence propre est donnée par

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}. \quad (2.12)$$

Les fonctions de réponses en fréquence (FRF) de l'oscillateur (2.11) sont illustrées en figure 2.20 par les courbes magenta. La courbe en trait plein représente le cas dissipatif ($c_1 \neq 0$), la courbe en pointillés représente le cas conservatif ($c_1 = 0$). Les FRF comportent une résonance au voisinage de ω_{01} . La résonance du système conservatif se produit exactement à ω_{01} , dans ce cas l'amplitude des oscillations est infinie. Dans le cas dissipatif, la résonance du système a lieu à la fréquence de résonance qui est proche mais différente (en fonction de l'amortissement) de la fréquence propre. Dans ce cas, l'amplitude des oscillations est finie et la fréquence de résonance correspond au maximum de la réponse.

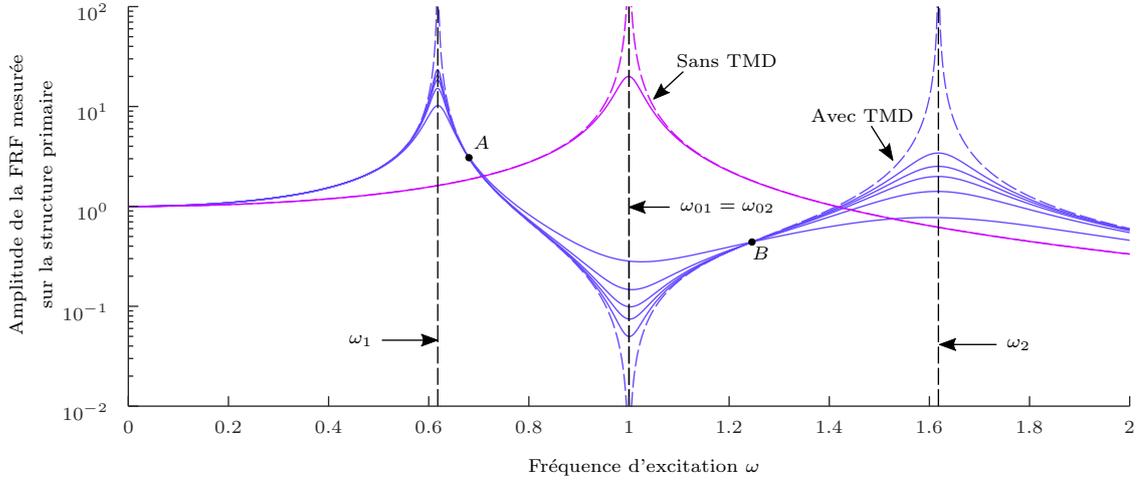


FIGURE 2.20 – FRFs calculées sur l'oscillateur primaire de la figure 2.19. Oscillateur primaire seul : $c_1 = 0$ courbes magenta pointillés, $c_1 = 0.05$ courbes magenta traits pleins. Oscillateur primaire conservatif ($c_1 = 0$) couplé au TMD dont on a fait varier l'amortissement $c_2 = [0, 0.05, 0.075, 0.1, 0.15, 0.3]$: courbes bleues. A et B désignent les points invariants de la FRF du système couplé. Paramètres : $m_1 = m_2 = k_1 = k_2 = 1$.

Afin de contrôler l'amplitude des vibrations de l'oscillateur primaire, on lui couple un TMD selon la configuration de la figure 2.19, à droite. Les équations du mouvement du système couplé s'écrivent :

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = f \cos \omega t, \quad (2.13a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = 0, \quad (2.13b)$$

avec m_2 , k_2 et c_2 , respectivement les caractéristiques de masse, raideur et amortissement du TMD. La fréquence propre du TMD s'écrit :

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad (2.14)$$

et en choisissant ω_{02} de sorte que

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \omega_{01}, \quad (2.15)$$

la résonance de l'oscillateur primaire nu est remplacée par une antirésonance (*cf.* figure 2.20 courbes bleues). Le TMD est alors accordé sur le mode de l'oscillateur primaire. Le système couplé résultant comporte alors deux modes de fréquences propres ω_1 et ω_2 , de part et d'autre de l'antirésonance. Le premier correspond au mouvement en phase des deux oscillateurs et le second au mouvement en opposition de phase.

En l'absence d'amortissement, l'antirésonance se produit exactement à la fréquence propre du TMD. Les oscillations de ce dernier sont en opposition de phase avec l'excitation, de sorte que l'amplitude de réponse du système primaire est nulle. En présence d'amortissement, la fréquence d'antirésonance est proche mais différente de ω_0 et l'amplitude des vibrations de la structure primaire n'est plus nulle mais minimale.

C'est Frahm qui propose ce concept en 1911 [49] pour le cas conservatif ($c_1 = c_2 = 0$). La performance est parfaite, cependant, le TMD doit être très bien maîtrisé sans quoi un léger désaccord engendre une perte de performances potentiellement importante en raison de la proximité des modes au voisinage de l'antirésonance. Pour palier ce problème, Ormondroyd et Den Hartog ont proposé dans [50] d'ajouter une dissipation au TMD ($c_2 \neq 0$), mais toujours pour une structure primaire conservative ($c_1 = 0$). Ainsi la robustesse en fréquence est accrue mais le prix à payer est une perte d'efficacité car l'amplitude des vibrations à l'antirésonance n'est plus nulle. Den Hartog a proposé une méthodologie d'optimisation du TMD vis-à-vis de deux points invariants de la courbe de réponse, la méthode des points fixes. Ces points sont identifiés *A* et *B* sur la figure 2.20. Den Hartog démontre qu'il existe une fréquence d'accord optimale du TMD telles que les amplitudes aux points *A* et *B* soient égales [51]. Par la suite, Brock impose comme condition supplémentaire que les amplitudes aux points invariants soient maximales et donne une approximation du taux d'amortissement optimal du TMD dans [52]. La solution exacte du problème posé par Brock peut être trouvée dans [53].

Lorsque de l'amortissement est introduit dans l'oscillateur primaire ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$), la notion de points invariants n'existe plus, l'approche initiée par Den Hartog est donc à reconsidérer. Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation et la thèse de Viguié [54] en donne un récapitulatif très complet.

2.2.2 L'absorbeur essentiellement non linéaire

Cette classe d'absorbeurs est désignée dans la littérature par l'acronyme NES pour *nonlinear energy sink*. C'est un absorbeur essentiellement non linéaire. La raideur n'a pas de composante linéaire, comme illustré en figure 2.21, elle est donc nulle au repos. Ces systèmes sont utilisés dans

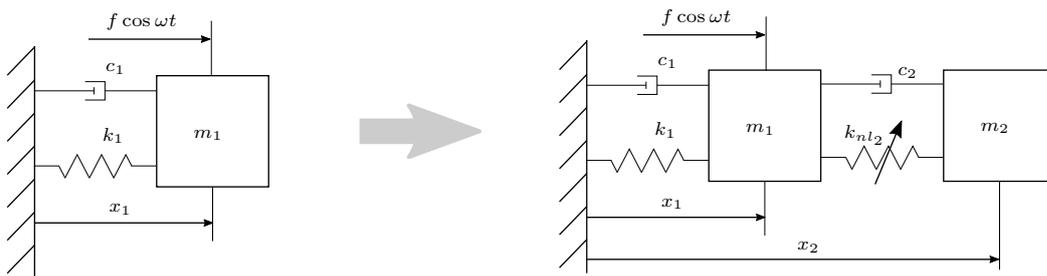


FIGURE 2.21 – Illustration d'un oscillateur linéaire (à gauche) et le même oscillateur couplé au NES (à droite).

le cadre du pompage énergétique. Cela consiste à transférer de manière irréversible l'énergie d'un

système primaire vers un système auxiliaire : le NES. Il en existe de plusieurs types ; citons par exemple les NES à non-linéarité cubique [55], les NES à vibro-impact [56] (VI-NES) ou encore les NES utilisant des raideurs linéaires par morceaux [57].

Pour un NES à non-linéarité cubique, les équations du mouvement du système couplé de la figure 2.21 sont :

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_{nl_2} (x_1 - x_2)^3 = f \cos \omega t \quad (2.16a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl_2} (x_2 - x_1)^3 = 0, \quad (2.16b)$$

avec k_{nl_2} le coefficient de la raideur non linéaire du NES.

La figure 2.22, issue de [58], montre une comparaison de la réponse de l'oscillateur primaire couplé soit à un TMD classique soit à un NES à non-linéarité cubique. On constate que la per-

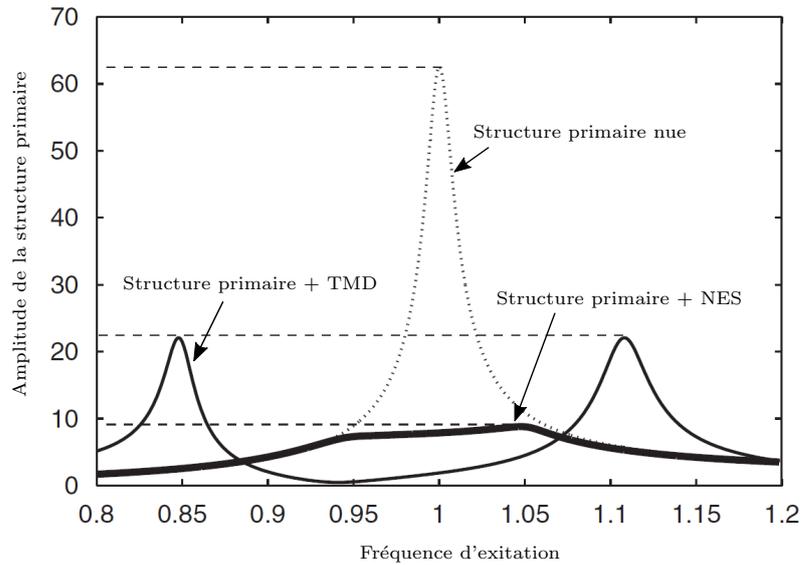


FIGURE 2.22 – Comparaison de la réponse d'une structure primaire linéaire couplée à un TMD (cf. figure 2.19) et à un NES à non-linéarité cubique (cf. figure 2.21). Courbes issues de [58].

formance du NES est un peu moins bonne que celle du TMD. En revanche, le couplage de NES à la structure primaire n'induit pas de résonances supplémentaires de part et d'autres de l'antirésonance. C'est une conséquence de la caractéristique essentiellement non linéaire du NES.

Une deuxième comparaison intéressante, issue de [59], est illustrée en Figure 2.23. Elle montre la performance, sous forme de graphes 3D, d'un TMD classique et d'un NES à non-linéarité cubique couplés à un oscillateur primaire linéaire, cf. figures 2.19 et 2.21 respectivement. Cette fois, l'oscillateur primaire n'est plus soumis à une excitation harmonique ($f = 0$) mais à une impulsion sous la forme d'une vitesse initiale non nulle X . La procédure consiste alors à intégrer dans le temps les équations du mouvement (2.13) et (2.16) pour les conditions initiales $\dot{x}_1(0) = X$, $x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. L'énergie totale dissipée par l'absorbeur est ensuite collectée vis-à-vis d'une variation de la fréquence propre de l'oscillateur primaire et de la condition initiale en vitesse X .

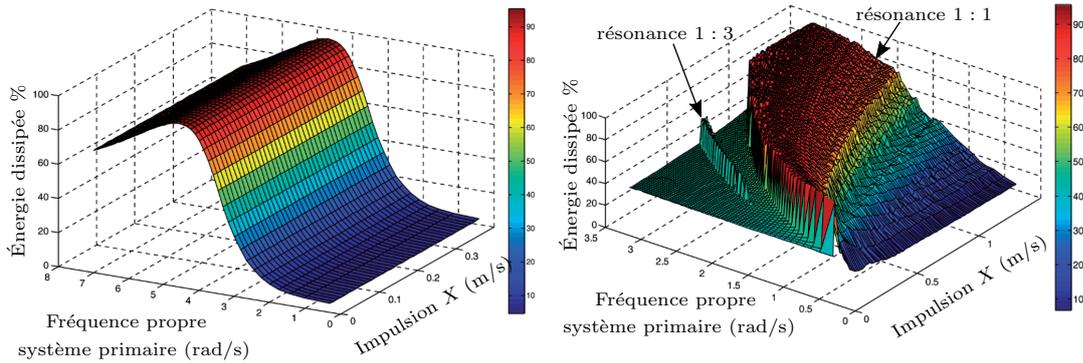


FIGURE 2.23 – Performance du TMD (à gauche) comparée à celle du NES (à droite). Illustrations tirées de [59].

On voit que la performance du TMD ne dépend pas de la quantité d'énergie injectée dans le système, via l'impulsion X , mais elle est en revanche sensible à une variation de la fréquence naturelle de la structure primaire. Cela rejoint ce qui a été évoqué plus haut concernant la nécessité d'accorder précisément le TMD sur le mode d'intérêt.

Dans le cas du NES, le système est non linéaire et la réponse comporte des harmoniques. On voit alors apparaître des transferts d'énergie localisés entre ces harmoniques via des phénomènes de résonance 1 : 1 (L'oscillateur primaire oscille à la même fréquence que le NES) et 1 : 3 (L'oscillateur primaire oscille à 3 fois la fréquence du NES). Cela montre que le NES a la capacité de dissiper de l'énergie sur une plage de fréquence contrairement au TMD.

On constate également que son efficacité dépend directement du niveau d'énergie injectée et sa performance est même moins bonne que celle du TMD en dessous d'un certain seuil. Cela s'explique par la caractéristique essentiellement non linéaire du NES : la non-linéarité n'est pas activée pour de faibles niveaux d'énergie et le système est inopérant.

En revanche, l'avantage d'un système purement non linéaire est qu'il ne possède pas de fréquence de résonance particulière. On observe alors une grande robustesse de NES vis-à-vis d'une variation de la fréquence propre de l'oscillateur primaire.

2.2.3 L'absorbeur non linéaire accordé

Cette classe d'absorbeurs est désignée dans la littérature par l'acronyme NLTVA pour *nonlinear tuned vibration absorber*. Ils ont été développés en réponse à la problématique de l'absorption des vibrations d'une structure primaire non linéaire dont les fréquences propres dépendent de la quantité d'énergie injectée dans le système. Le concept du NLTVA étend la notion linéaire d'accord, propre au TMD, au cadre non linéaire, avec l'idée que la dépendance énergie-fréquence de l'absorbeur doit être identique à celle du mode d'intérêt d'une structure primaire [60]. Autrement dit, le NLTVA doit être accordé sur un mode non linéaire quelle que soit l'amplitude d'excitation du système. Ceci implique une conception dédiée de l'absorbeur et plus particulièrement de sa non-linéarité en fonction d'une application particulière. Le principe consiste à représenter la non-linéarité du NLTVA par une fonction générique g et de ne pas postuler de sa forme a priori, comme illustré en figure 2.24.

Une méthodologie de conception basée sur l'extension de la méthode des points fixes de Den

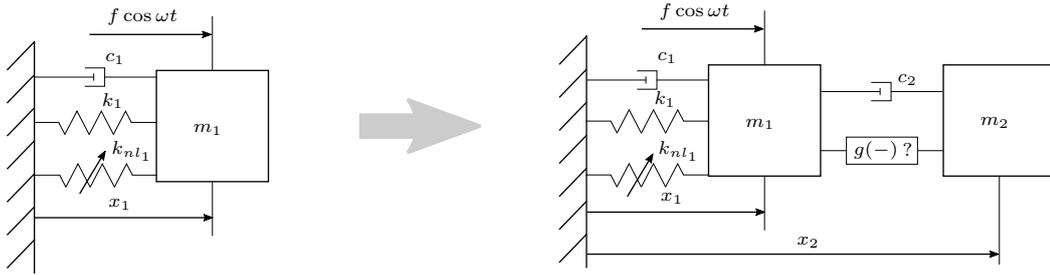


FIGURE 2.24 – Illustration d’un oscillateur non linéaire (à gauche) et le même oscillateur couplé au NLTVA (à droite).

Hartog au cadre non linéaire a été proposée dans [61]. La figure 2.25 est justement issue de cette étude et compare les performances du NLTVA et du TMD lorsqu’ils sont couplés à un oscillateur primaire à non-linéarité cubique. On voit que l’efficacité du NLTVA est très bonne et robuste vis-à-vis de l’amplitude de forçage. De plus, les auteurs de l’étude pointent la relation *presque linéaire* entre l’amplitude de réponse et l’amplitude d’excitation, ce qui est une caractéristique peu commune pour un absorbeur non linéaire. Le TMD, quant à lui, montre son incapacité à rester accordé avec une dégradation significative de la performance pour des régimes fortement non linéaires.

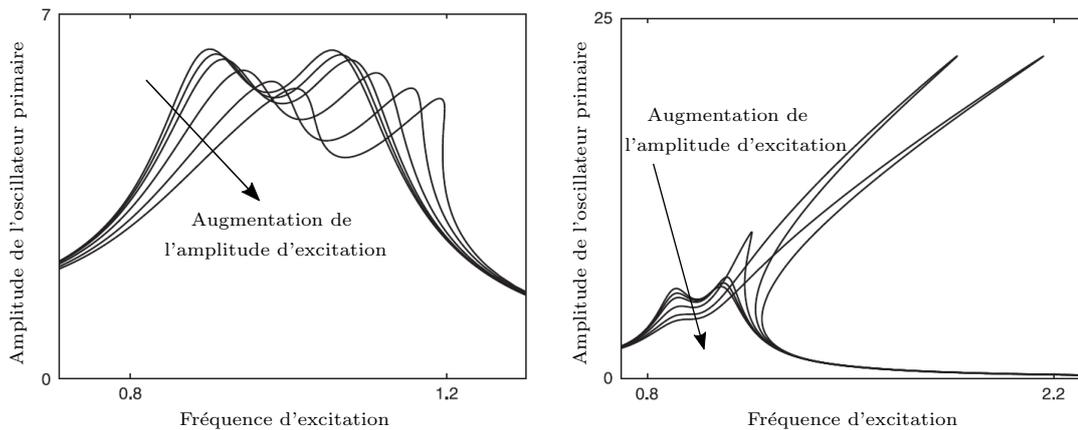


FIGURE 2.25 – Évolution de la réponse de l’oscillateur primaire à mesure que l’amplitude d’excitation augmente. NLTVA (à gauche), TMD (à droite). Figure issue de [61].

Des travaux ultérieurs ont permis d’établir des règles de conception comme le *principe de similarité* [62] qui stipule que, quelles que soient les non-linéarités polynomiales du système primaire, le NLTVA doit posséder les mêmes. Ou encore la présence systématique d’une raideur linéaire pour garantir l’efficacité à faible amplitude de forçage. L’étude de sensibilité réalisée dans [63] montre cependant que le NLTVA peut présenter une dynamique complexe pour des régimes fortement non linéaires, avec par exemple des isolats de solutions pouvant mener à une augmentation brutale de l’amplitude de réponse.

2.2.4 Bilan sur les absorbeurs de la littérature

Les trois types d'absorbeurs abordés dans les sections précédentes présentent chacun des avantages et des inconvénients. Le TMD est le plus connu d'entre eux et a l'avantage de pouvoir être réalisé facilement, néanmoins sa faible robustesse vis-à-vis d'un désaccord du système est un inconvénient non négligeable. Le NES est, lui, plus dédié aux échanges d'énergie entre les modes de la structure primaire mais sa performance est conditionnée justement à un niveau d'énergie minimal. La philosophie du NLTVA est intéressante car l'idée est de tirer parti au mieux des non-linéarités que présente l'absorbeur.

Les trois concepts abordés dans les sections précédentes ont tous en commun, à l'exception du NES, d'être accordés sur un mode donné d'une structure primaire. Dans le contexte qui nous intéresse ici, c'est-à-dire l'environnement du groupe moto-propulseur, nous considérons un autre type d'absorbeur : l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC). C'est un absorbeur de vibrations de torsion, implanté sur un organe de transmission de puissance de la chaîne cinématique (*cf.* chapitre 6). La philosophie consiste à accorder l'APC sur la source d'excitation et non sur un mode particulier de la structure primaire. En d'autres termes, l'APC est accordé sur la fréquence, généralement fondamentale (ω_e), du couple moteur qui elle-même varie continuellement avec le régime (*cf.* sections 2.1.1 et 2.1.3). Il s'agit donc d'un concept radicalement différent de celui des absorbeurs "classiques". Ce qui lui confère cette capacité d'adaptation au régime moteur c'est le champ d'accélération centrifuge dans lequel il évolue. L'APC peut être vu comme un absorbeur à masse accordée dont la raideur est variable. En l'occurrence, cette raideur est proportionnelle au régime moteur du véhicule. Ce dernier point est notamment traité dans la section 2.3.1 où l'on introduit le principe de fonctionnement de l'APC.

Un autre avantage majeur de l'APC est qu'il est indifférent au rapport de boîte engagé et reste opérant quelle que soit la vitesse de rotation de la chaîne cinématique du véhicule. Si on utilisait des absorbeurs classiques, tels que ceux présentés en section 2.2, on serait dans l'obligation de multiplier les absorbeurs dynamiques, pour chaque rapport, pour chaque mode présent dans la plage de fréquence balayée par le moteur, pour chaque architecture de chaîne cinématique... (*cf.* figure 2.18, section 2.1.3). Ceci est impensable pour des raisons évidentes de coût et d'encombrement.

La propriété d'adaptation de l'APC au régime moteur est directement liée à la trajectoire que l'on impose aux pendules. Cette trajectoire régit le comportement à grande amplitude d'oscillation. Comme les pendules sont des oscillateurs non linéaires, cela implique des phénomènes de désaccord par rapport à la fréquence souhaitée (*cf.* section 2.4), l'APC n'est donc pas parfait. Cependant, il y a une grande flexibilité dans le choix de la trajectoire et on peut a priori lui donner n'importe quelle forme, dans la limite bien sûr de ce que la technologie autorise (*cf.* figure 1.5). Ces considérations sur la forme de la trajectoire seront abordées au chapitre 3 dans le cadre d'une étude plus approfondie sur l'APC.

2.3 Les oscillateurs pendulaires

L'objectif de cette section est d'introduire le principe de l'influence du champ d'accélération centrifuge et du champ de pesanteur sur les oscillations d'un oscillateur pendulaire. Ce principe est d'abord introduit pour les petites oscillations libres d'un pendule circulaire en section 2.3.1. On s'intéressera aussi à l'impact de la forme de la trajectoire en section 2.3.2, mais cette fois pour des amplitudes d'oscillation plus importantes.

2.3.1 Le pendule simple

On illustre le principe fondamentale à l'origine de l'absorbeur pendulaire centrifuge avec le système présenté en figure 2.26. Il s'agit d'un pendule circulaire de longueur ρ_0 et modélisé par un point matériel de masse m_p concentrée au point G . Ce pendule est articulé dans le repère $\mathcal{R}_\Omega(O, \mathbf{x}_\Omega, \mathbf{y}_\Omega, \mathbf{z}_\Omega)$ au point A excentré d'une distance R_0 par rapport à l'origine O . Le repère \mathcal{R}_Ω tourne à vitesse constante Ω autour de \mathbf{z}_Ω par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$. La position angulaire du pendule, par rapport à \mathcal{R}_Ω , est mesurée par le paramètre φ . L'ensemble évolue dans le champ de pesanteur $g\mathbf{x}_0$.

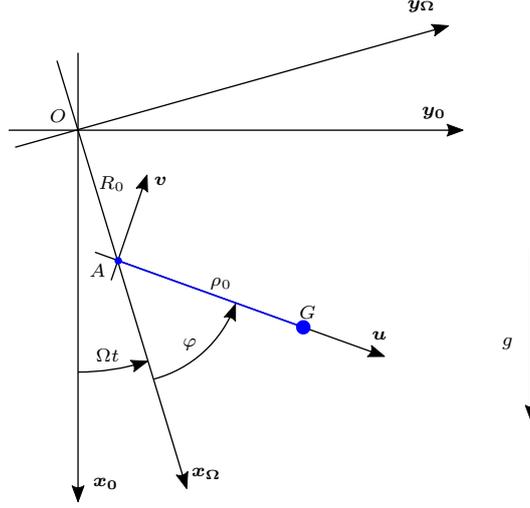


FIGURE 2.26 – Représentation d'un pendule circulaire tournant à vitesse constante Ω dans le champ de pesanteur.

Écrivons l'équation du mouvement. La position du centre de masse du pendule par rapport à l'origine O s'exprime

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OA} + \mathbf{AG} = R_0\mathbf{x}_\Omega + \rho_0\mathbf{u}, \quad (2.17)$$

où \mathbf{u} est le vecteur unitaire porté par l'axe du pendule, plus précisément orienté selon \mathbf{AG} . On déduit de (2.17) la vitesse du point G par rapport à \mathcal{R}_0

$$\mathbf{V}_G = R_0\Omega\mathbf{y}_\Omega + \rho_0(\Omega + \dot{\varphi})\mathbf{v}. \quad (2.18)$$

où \mathbf{v} est le vecteur orthogonal à \mathbf{u} au point A . L'énergie cinétique du pendule est donc

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m_p(\rho_0^2(\Omega + \dot{\varphi})^2 + R_0^2\Omega^2 + 2\rho_0R_0\Omega(\Omega + \dot{\varphi})\cos\varphi). \quad (2.19)$$

L'énergie potentielle est non nulle et s'écrit

$$\mathcal{U} = m_pg\left(R_0(1 - \cos\Omega t) + \rho_0(1 - \cos(\varphi + \Omega t))\right). \quad (2.20)$$

En appliquant ensuite l'équation de Lagrange au système

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_j} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q_j} = Q_j, \quad (2.21)$$

avec $q_j = \varphi$ et $Q_j = 0$ (oscillations libres) on détermine finalement l'équation du mouvement d'un pendule circulaire tournant à vitesse constante dans le champ de pesanteur :

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{R_0}{\rho_0} \Omega^2 \sin \varphi}_{\text{Accélération centrifuge}} + \underbrace{\frac{g}{\rho_0} \sin(\varphi + \Omega t)}_{\text{Pesanteur}} = 0. \quad (2.22)$$

On voit alors apparaître deux termes non linéaires, le premier dû à l'accélération centrifuge du système, le deuxième dû à l'action de la pesanteur. On propose de considérer deux cas indépendants, dans un premier temps, on annule Ω , le pendule ne tourne pas et est soumis à la seule action du champ de pesanteur. Dans un deuxième temps, on négligera la gravité et le pendule sera soumis au seul champ d'accélération centrifuge.

• **Petites oscillations libres dans le champ de pesanteur** : $\Omega = 0$ et $g \neq 0$

L'équation (2.22) devient celle du pendule simple classique dans le champ de pesanteur et s'écrit

$$\ddot{\varphi} + \omega_{0_g}^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.23)$$

avec

$$\omega_{0_g} = \sqrt{\frac{g}{\rho_0}}, \quad (2.24)$$

la fréquence des petites oscillations libres du pendule. Sous l'hypothèse des petites oscillations, l'équation (2.23) devient

$$\ddot{\varphi} + \omega_{0_g}^2 \varphi = 0. \quad (2.25)$$

On observe que l'excentricité du pendule, c'est-à-dire la longueur R_0 , n'a absolument aucun impact sur la dynamique du pendule. Ceci est logique car dans ce cas $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_\Omega$ et donc $R_0 \mathbf{x}_\Omega$ est dirigé suivant la direction du champ de pesanteur. Le paramètre géométrique ρ_0 , quant à lui, régit la fréquence d'oscillation libre des petites oscillations du pendule ω_{0_g} . Ces commentaires peuvent paraître simplistes mais auront leur importance dans les développements futurs.

Intéressons-nous maintenant au cas où le champ de pesanteur est négligé. On peut considérer par exemple que le pendule tourne à plusieurs milliers de tours par minute, comme cela est le cas dans une chaîne de transmission automobile et que $R_0 \Omega^2 \gg g$ dans l'équation (2.22).

• **Petites oscillations libres dans le champ d'accélération centrifuge** : $\Omega = \text{cte}$ et $g = 0$

L'équation (2.22) devient

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (2.26)$$

avec

$$\omega_0 = \Omega \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}}, \quad (2.27)$$

la fréquence des petites oscillations libres du pendule. Sous l'hypothèse des petites oscillations, l'équation (2.26) devient

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (2.28)$$

L'équation (2.28) a exactement la même forme que l'équation (2.25) qui a été établie lorsque l'on a fixé Ω à 0. Cela signifie que les solutions oscillantes du pendule circulaire existent aussi bien dans le champ d'accélération centrifuge que dans le champ de pesanteur. Si les équations (2.25)

et (2.28) ont la même forme, la fréquence des petites oscillations libres (2.27) du pendule s'écrit, cette fois, différemment et on voit qu'il existe une proportionnalité entre ω_0 et Ω . Le coefficient de proportionnalité $\sqrt{R_0/\rho_0}$ dépend du rapport des longueurs R_0 et ρ_0 . On observe que l'existence des oscillations du pendule circulaire dans le champ d'accélération centrifuge est conditionnée au fait que $R_0 \neq 0$. En effet, si $R_0 = 0$ le pendule est articulé au point O et $\omega_0 = 0$. Ceci s'explique par la direction du champ d'accélération centrifuge qui devient colinéaire avec \mathbf{u} , l'axe du pendule.

La relation de proportionnalité (2.27) entre la fréquence des petites oscillations libres du pendule ω_0 et la vitesse de rotation constante Ω est le principe fondamental de l'absorbeur pendulaire centrifuge utilisé dans les chaînes de transmission à moteur thermique. La fréquence fondamentale du couple moteur ω_e dépend elle aussi linéairement de Ω via le coefficient n_e (cf. équation (2.7), section 2.1.1). Cela signifie qu'en choisissant les paramètres géométriques R_0 et ρ_0 tels que

$$\omega_0 = \omega_e \quad \Rightarrow \quad \Omega \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}} = \Omega n_e \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}} = n_e, \quad (2.29)$$

alors la fréquence des petites oscillations libres du pendule ω_0 est égale à la fréquence fondamentale du couple moteur ω_e quelle que soit la vitesse de rotation, ici constante Ω (cf. figure 2.18, section 2.1.3). C'est ce principe que l'on exploitera dans la suite du document.

Cependant, lorsque l'amplitude des oscillations ne peut plus être considérée comme petite, la non-linéarité $\sin \varphi$ de l'équation (2.26) n'est plus négligeable. C'est une non-linéarité géométrique induite par la trajectoire circulaire du centre de masse pendule. La proportionnalité entre la fréquence libre du pendule à grande amplitude et la vitesse de rotation Ω est donc remise en question. Il est donc intéressant de se demander quelle est l'influence de la trajectoire du pendule sur son comportement. Plus particulièrement, existe-t-il des trajectoires telles que les fréquences des oscillations libres des oscillateurs (2.26) et (2.23) soient indépendantes de l'amplitude de leurs oscillations? La réponse est donnée dans la prochaine section.

2.3.2 Le pendule tautochrone

Un oscillateur tautochrone est caractérisé par l'invariance de sa fréquence d'oscillation libre à l'amplitude du mouvement [64]. Ce terme ne se restreint pas aux oscillateurs linéaires, qui sont eux tautochrones par nature. Les oscillateurs non linéaires peuvent être rendus tautochrones de manière active via des techniques de contrôle [65], ou bien de manière passive en ajoutant des non-linéarités supplémentaires au système [66, 67].

C'est plutôt cette deuxième approche qui nous intéresse. Dans ce qui suit, on s'intéresse à un système plus général que le pendule circulaire vu en section précédente et on regarde l'effet de la trajectoire sur le comportement de l'oscillateur. On tente plus particulièrement de déterminer des trajectoires qui rendent la fréquence des oscillations libres du pendule indépendante de l'amplitude de son mouvement. On regardera également le comportement du pendule dans le champ de pesanteur et dans le champ d'accélération centrifuge uniforme.

2.3.2.1 Du pendule simple au pendule tautochrone

On remplace maintenant la trajectoire circulaire du pendule de la section 2.3.1 par une trajectoire de forme quelconque. Le système est présenté en figure 2.27. Le pendule est symbolisé par un point matériel de masse m_p concentrée au point G . Il oscille sur une trajectoire de forme quelconque \mathcal{C} fixe dans le repère tournant $\mathcal{R}_\Omega(O, \mathbf{x}_\Omega, \mathbf{y}_\Omega, \mathbf{z}_\Omega)$. Comme \mathcal{C} n'a pas de forme particulière, il est plus commode de paramétrer le déplacement du point G le long de

\mathcal{C} par l'abscisse curviligne S , dont l'origine est prise en point quelconque V appartenant à la trajectoire. Le centre de courbure de \mathcal{C} au point V , c'est-à-dire là où $S = 0$, est noté A . Le rayon de courbure ρ_0 de \mathcal{C} en V est quant à lui désigné par la distance AV . La trajectoire $\mathcal{C} : \{G, \mathbf{OG} = \delta(S)\mathbf{y}_\Omega - h(S)\mathbf{x}_\Omega\}$ est paramétrée en coordonnées cartésiennes dans \mathcal{R}_Ω par les fonctions $\delta(S)$ et $h(S)$. Par exemple, pour le pendule circulaire de la figure 2.26 (cf. section 2.3.1), elles s'écrivent

$$\delta(S) = \rho_0 \sin \frac{S}{\rho_0} = \rho_0 \sin \varphi \quad \text{et} \quad h(S) = \rho_0 \left(1 - \cos \frac{S}{\rho_0}\right) = \rho_0 (1 - \cos \varphi), \quad (2.30)$$

où φ est défini sur la figure 2.26. Comme pour la section précédente, le repère \mathcal{R}_Ω tourne à vitesse constante Ω par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ et le système tout entier évolue dans le champ de pesanteur $g\mathbf{x}_0$.

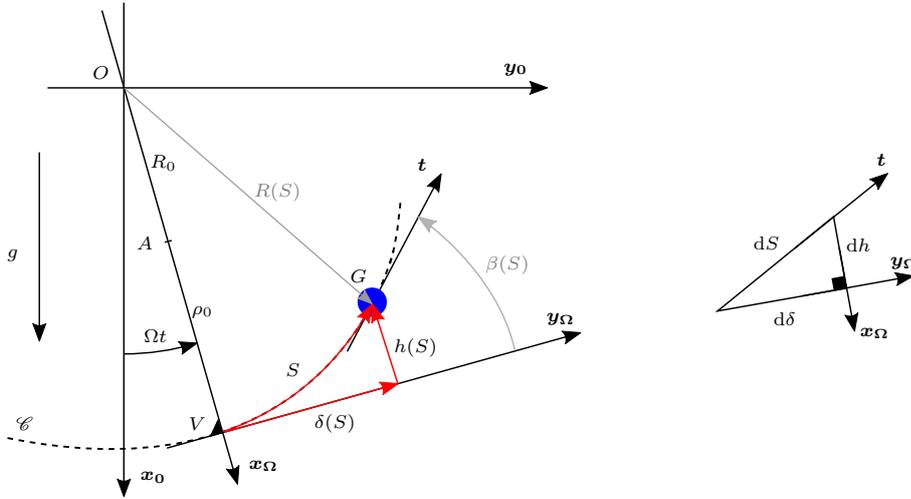


FIGURE 2.27 – Représentation d'un pendule quelconque tournant à vitesse constante Ω dans le champ de pesanteur (à gauche). Zoom sur la trajectoire, au voisinage du point G (à droite).

On détermine d'abord l'équation du mouvement du système. La position du centre de masse du pendule par rapport à l'origine O s'exprime

$$\mathbf{OG} = (R_0 + \rho_0 - h)\mathbf{x}_\Omega + \delta\mathbf{y}_\Omega. \quad (2.31)$$

En utilisant le fait que :

$$\frac{d\cdot}{dt} = \frac{d\cdot}{dS} \frac{dS}{dt}, \quad (2.32)$$

la vitesse du point G par rapport à \mathcal{R}_0 s'écrit

$$\mathbf{V}_G = - \left(\frac{dh}{dS} \dot{S} + \Omega \delta \right) \mathbf{x}_\Omega + \left(\frac{d\delta}{dS} \dot{S} + \Omega (R_0 + \rho_0 - h) \right) \mathbf{y}_\Omega. \quad (2.33)$$

L'énergie cinétique cinétique du pendule est donc

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_p \left((\delta^2 + (R_0 + \rho_0 - h)^2) \Omega^2 + \left(\frac{dh}{dS}^2 + \frac{d\delta}{dS}^2 \right) \dot{S}^2 + 2\dot{S}\Omega \left(\frac{dh}{dS} \delta + \frac{d\delta}{dS} (R_0 + \rho_0 - h) \right) \right), \quad (2.34)$$

et l'énergie potentielle est donnée par

$$\mathcal{U} = m_p g \left((R_0 + \rho_0) (1 - \cos \Omega t) + h \cos \Omega t + \delta \sin \Omega t \right). \quad (2.35)$$

L'équation du mouvement se détermine classiquement via l'équation de Lagrange (2.21), avec $q = S$, et s'écrit

$$\ddot{S} + \underbrace{\left(\frac{dh}{dS} (R_0 + \rho_0 - h) - \delta \frac{d\delta}{dS} \right)}_{\text{Accélération centrifuge}} \Omega^2 + g \underbrace{\left(\frac{dh}{dS} \cos \Omega t + \frac{d\delta}{dS} \sin \Omega t \right)}_{\text{Pesanteur}} = 0. \quad (2.36)$$

Remarquez que la structure de (2.36) est identique à celle de l'équation (2.22), avec un premier terme non linéaire dû à l'accélération centrifuge et un deuxième dû à l'action de la pesanteur. On constate également que l'équation du mouvement dépend fortement de la trajectoire que l'on impose au pendule et plus particulièrement de la variation des fonctions δ et h par rapport au déplacement S . Dans ce qui suit, nous cherchons la trajectoire, c'est-à-dire les fonctions h et δ , de sorte que le pendule soit tautochrone dans deux configurations distinctes. La première, où le pendule ne tourne pas, c'est-à-dire $\Omega = 0$ et le système est soumis à la seule action du champ de pesanteur. Dans un deuxième temps, on considérera que le pendule tourne à vitesse telle que l'intensité du champ gravitationnel est négligeable devant celle du champ d'accélération centrifuge.

• **Oscillations libres dans le champ de pesanteur** : $\Omega = 0$ et $g \neq 0$

Dans ces conditions, l'équation (2.36) se réécrit

$$\ddot{S} + g \frac{dh}{dS} = 0. \quad (2.37)$$

On observe que seule la fonction h gouverne le comportement de l'oscillateur et plus particulièrement sa variation par rapport à S . En regardant cette équation on remarque que, si h est constant, alors la trajectoire est une simple ligne droite parallèle à \mathbf{y}_Ω . Dans ce cas, ce pendule n'est pas un oscillateur mais un simple point inerte car il n'existe aucun couplage avec la pesanteur. N'oublions pas notre objectif qui est ici de déterminer la trajectoire tautochrone du pendule dans le champ de pesanteur. Cela revient à déterminer h tel que l'équation (2.37) soit linéaire, puis δ afin de remonter à l'allure de la trajectoire.

Il est désormais utile d'introduire la fonction $\beta(S)$ qui mesure l'angle entre la tangente à la trajectoire \mathcal{C} au point courant G et l'axe \mathbf{y}_Ω (cf. figure 2.27). En regardant de dessin de droite de la figure 2.27, on peut alors exprimer h et δ en fonction de β et écrire

$$\frac{d\delta}{dS} = \cos \beta \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dS} = \sin \beta. \quad (2.38)$$

En imposant à (2.37) d'être linéaire, on trouve, en utilisant (2.38)

$$\frac{dh}{dS} = kS \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = kS, \quad (2.39)$$

où k est une constante. C'est cette condition, et plus particulièrement β , qui vont nous permettre de remonter jusqu'à l'expression de la trajectoire tautochrone dans le champ de pesanteur. On détermine k en linéarisant (2.39) tel que

$$\left. \frac{d\beta}{dS} \right|_{S=0} S = kS. \quad (2.40)$$

On se sert maintenant du fait que β soit lié à la courbure κ de \mathcal{C} en G [68] pour écrire

$$\frac{d\beta}{dS} = \kappa = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\beta}{dS} \right|_{S=0} = \kappa|_{S=0} = \frac{1}{\rho_0}, \quad (2.41)$$

où ρ le rayon de courbure de \mathcal{C} au point G . On déduit la constante k telle que

$$k = \frac{1}{\rho_0}. \quad (2.42)$$

Nous pouvons désormais déterminer les fonctions δ et h en substituant (2.42) dans (2.39), en différentiant le résultat par rapport à S et en injectant le résultat dans (2.38). On trouve que

$$\delta = \int_0^\beta \frac{\rho_0}{2} (1 + \cos 2\beta) d\beta \quad \text{et} \quad h = \int_0^\beta \frac{\rho_0}{2} \sin 2\beta d\beta, \quad (2.43)$$

et enfin

$$\delta = r(\phi + \sin \phi) \quad \text{et} \quad h = r(1 - \cos \phi), \quad (2.44)$$

avec $r = \frac{\rho_0}{4}$, $\phi = 2\beta$. Ce sont les équations paramétriques d'une cycloïde qui correspond à la trajectoire décrite par un point appartenant à un cercle générateur de rayon r roulant sans glisser sur un plan. La cycloïde est donc la courbe tautochrone dans le champ de pesanteur. Ce résultat n'est pas nouveau, il date en fait du XVII^e siècle et fut démontré par Christian Huygens [15]. Le pendule cycloïdale est d'ailleurs connu comme le pendule de Huygens. Nous avons donc ce premier résultat dans le champ de pesanteur, cependant l'absorbeur pendulaire centrifuge, duquel nous nous sommes quelque peu éloigné, évolue dans un champ d'accélération centrifuge. Cela nous amène au deuxième cas d'étude de cette section, où l'on considère que le pendule tourne à une vitesse telle que le champ de pesanteur est négligeable.

• **Oscillations libres dans le champ d'accélération centrifuge** : $\Omega = \text{cte}$ et $g = 0$

L'équation du mouvement (2.36) s'écrit maintenant

$$\ddot{S} + \left(\frac{dh}{dS} (R_0 + \rho_0 - h) - \delta \frac{d\delta}{dS} \right) \Omega^2 = 0. \quad (2.45)$$

En suivant la même logique que ce qui a été fait précédemment, on impose à (2.45) d'être une équation linéaire ce qui implique

$$\frac{dh}{dS} (R_0 + \rho_0 - h) - \delta \frac{d\delta}{dS} = kS, \quad (2.46)$$

avec k une constante. Là encore on obtient une condition qui nous permet de remonter jusqu'à la trajectoire tautochrone d'un pendule mais cette fois dans le champ d'accélération centrifuge. Cependant, cette expression est plus compliquée que celle que l'on a établie dans le cas précédent (*cf.* équation 2.39) et la détermination des fonctions δ et h est plus délicate. On propose d'introduire la fonction R qui mesure la distance courante $\|\mathbf{OG}\|$ entre le centre de rotation du système O et le centre de gravité du pendule G . On remarque que le membre de gauche de l'équation (2.46) peut s'exprimer en fonction de R tel que

$$-\frac{1}{2} \frac{dX}{dS} = \frac{dh}{dS} (R_0 + \rho_0 - h) - \delta \frac{d\delta}{dS}, \quad (2.47)$$

avec

$$X = R^2. \quad (2.48)$$

La fonction X nous suivra tout au long de ce document. Elle sera très utile pour établir les expressions de certaines trajectoires comme on le verra en section 2.3.2.2. L'équation (2.47) est très intéressante car elle permet de réécrire l'équation générale du mouvement dans le champ d'accélération centrifuge (cf. (2.45)) sous la forme condensée :

$$\ddot{S} - \frac{1}{2} \frac{dX}{dS} \Omega^2 = 0. \quad (2.49)$$

On constate que sous cette forme, l'équation du mouvement ne dépend plus que de l'unique inconnue X qui est maintenant la fonction que l'on recherche. Notez également la similarité de cette équation avec celle que l'on a établie dans le champ de pesanteur (2.37). Cela montre que le paramétrage de la trajectoire est plus ou moins judicieux selon que l'on se trouve dans le champ de pesanteur ou non. Comme ce document est destiné à l'étude l'absorbeur pendulaire centrifuge, c'est cette paramétrisation de la trajectoire (en fonction de X) qui sera adoptée. L'équation du mouvement (2.49) est donc extrêmement importante, d'autant plus qu'elle est vraie quelle que soit l'allure de la trajectoire. Nous aurons l'occasion de la retrouver dans d'autres circonstances, notamment avec l'étude de l'absorbeur pendulaire centrifuge proposée en section 2.4.1. Il nous faut avant cela déterminer la constante k de l'équation (2.46). On substitue (2.38) dans (2.46), puis en linéarisant le résultat autour de $S = 0$, on trouve :

$$\left((R_0 + \rho_0) \left. \frac{d\beta}{dS} \right|_{S=0} - 1 \right) S = kS. \quad (2.50)$$

En substituant (2.41) dans (2.50) on en déduit enfin que

$$k = \frac{R_0}{\rho_0}. \quad (2.51)$$

On s'aperçoit que cette quantité est connue, nous l'avons rencontrée à l'équation (2.27) en section 2.3.1. Le rapport R_0/ρ_0 régit la fréquence des petites oscillations libres ω_0 du pendule dans le champ d'accélération centrifuge. En combinant les équations (2.47) et (2.51), on peut réécrire la condition de tautochronicité (2.46) en fonction de X et de S sous la forme

$$-\frac{1}{2} \frac{dX}{dS} = \frac{R_0}{\rho_0} S. \quad (2.52)$$

On détermine alors la fonction X en intégrant (2.52) par rapport à S , ce qui mène à

$$X = (R_0 + \rho_0)^2 - \frac{R_0}{\rho_0} S^2. \quad (2.53)$$

On peut vérifier que, si on substitue cette expression dans l'équation du mouvement (2.49), cette dernière est bien linéaire et s'écrit

$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0, \quad (2.54)$$

avec

$$\omega_0 = n_p \Omega \quad (2.55)$$

la fréquence des oscillations libres et

$$n_p = \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}}, \quad (2.56)$$

que l'on appelle *ordre d'accord* du pendule. Remarquez que (2.55) correspond exactement à la fréquence des petites oscillations libres du pendule circulaire (2.27) de la section 2.3.1. Nous avons donc bien trouvé la trajectoire tautochrone, via la fonction X , d'un pendule tournant à vitesse constante Ω . Cela signifie qu'un tel pendule voit sa fréquence des oscillations libres ω_0 dépendre linéairement de la vitesse de rotation Ω , indépendamment de l'amplitude de son mouvement. C'est l'ordre d'accord n_p qui régit cette dépendance linéaire. Cela a déjà été dit en section 2.3.1 mais ce principe est extrêmement important car la fréquence des oscillations libres ω_0 de cet oscillateur se comporte exactement comme la fréquence fondamentale ω_e du couple moteur (cf. section 2.1.1) qui, elle, dépend de Ω par l'intermédiaire du coefficient n_e .

Nous n'avons toujours pas nommé la trajectoire que représente la fonction X , calculée en (2.53). C'est une épicycloïde. Le carré de son rayon vecteur est exactement un polynôme d'ordre 2 en S . La preuve est donnée en annexe A et peut être retrouvée dans [7]. C'est donc le pendule épicycloïdal qui est particulièrement prisé par les constructeurs et équipementiers automobiles depuis le début des années 1990 pour les raisons évoquées plus haut. Cependant, on rappelle que l'étude menée ici est réalisée pour $\Omega = \text{cte}$. Nous verrons avec l'étude de l'absorbeur pendulaire centrifuge (cf. section 2.4.1) certains effets indésirables d'un champ d'accélération centrifuge non uniforme, entre autres sur le pendule épicycloïdal.

2.3.2.2 Trajectoires

Les trajectoires mentionnées précédemment, à savoir le cercle, l'épicycloïde et la cycloïde (cf. figure 2.28), sont ici abordées plus en détail. Nous avons vu dans la section précédente que la paramétrisation de la trajectoire \mathcal{C} à l'aide de la fonction X , le carré de son rayon vecteur (cf. équation 2.48), est la plus adaptée dans le cas d'un pendule évoluant dans un champ d'accélération centrifuge (dans le champ de pesanteur il est judicieux d'utiliser β , cf. annexes A et B). On donne ci-dessous l'expression des fonctions X pour les trois trajectoires citées.

Trajectoire circulaire :

$$X = R_0^2 + \rho_0^2 + 2\rho_0 R_0 \cos \frac{S}{\rho_0}, \quad (2.57a)$$

Trajectoire épicycloïdale :

$$X = (R_0 + \rho_0)^2 - \frac{R_0}{\rho_0} S^2, \quad (2.57b)$$

Trajectoire cycloïdale :

$$X = (R_0 + \rho_0)^2 - \left(\frac{R_0}{\rho_0} + \frac{3}{4} \right) S^2 + \frac{\rho_0^2}{4} \operatorname{asin} \frac{S}{\rho_0} \left(\operatorname{asin} \frac{S}{\rho_0} + 2 \frac{S}{\rho_0} \sqrt{1 - \frac{S^2}{\rho_0^2}} \right). \quad (2.57c)$$

L'équation (2.57a) de la trajectoire circulaire est issue d'une simple fermeture géométrique sur le triangle OAG (cf. figure 2.26). La démonstration de l'équation (2.57c) de la cycloïde est donnée en annexe B et l'expression (2.57b) de l'épicycloïde provient, quant à elle, de la section 2.3.2.1. Il est important de remarquer que les équations de l'épicycloïde et de la cycloïde ne sont pas définies pour tout S . Pour l'épicycloïde, X ne peut pas être négatif car il représente le carré d'une distance ($X = R^2$). Cela signifie qu'en fonction des valeurs des paramètres géométriques R_0 et ρ_0 , l'arche de l'épicycloïde sera plus ou moins grande et donc le déplacement maximal du pendule également. Il en est de même pour l'expression de la cycloïde (2.59c), car la fonction

$\text{asin}(a)$ n'est définie que pour $a \in [-1, 1]$. Les expressions des longueurs des arches d'épicycloïde et de cycloïde, en fonction des paramètres géométriques du pendule, sont données respectivement en annexes A (cf. équation (A.18)) et B (cf. équation (B.11)). Ces trajectoires comportent donc des points de rebroussement à leurs extrémités (cf. figure 2.28), ce qui constitue une limitation mathématique du déplacement du pendule. En pratique, avec la technologie du système montré en figure 1.5 (cf. section 1.1.3), il n'est généralement pas possible de réaliser ces trajectoires jusqu'aux points de rebroussement pour des raisons d'encombrement. Dans la majorité des applications, le débattement maximal S_{max} du pendule en contact avec sa butée mécanique est de 10 à 13 mm dans le meilleur des cas, ce qui engendre des problématiques de choc entre les pendules et le voile pour de forts couples d'excitation.

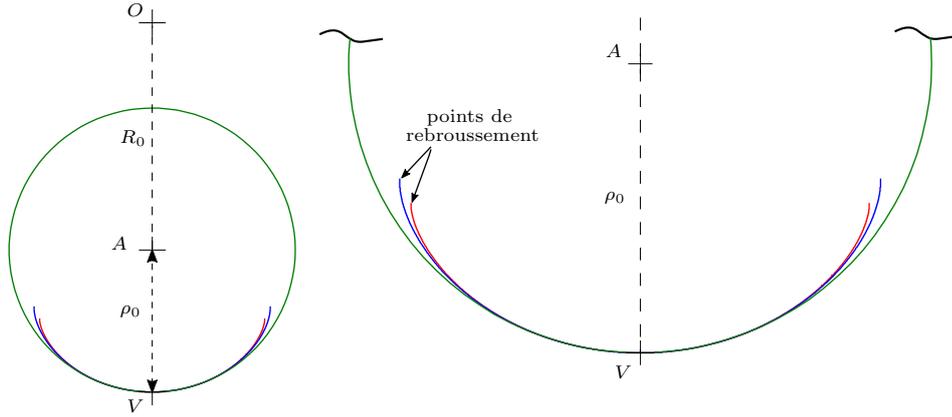


FIGURE 2.28 – Représentation d'un cercle (vert), d'une épicycloïde (bleu) et d'une cycloïde (rouge) pour un même accord n_p .

On propose d'introduire deux grandeurs sans dimension que l'on utilisera dans la suite de ce document. On définit x et s tels que

$$x = \frac{X}{(R_0 + \rho_0)^2} \quad \text{et} \quad s = \frac{S}{(R_0 + \rho_0)}. \quad (2.58)$$

x représente la fonction de forme X de la trajectoire normée par rapport au carré de la longueur $(R_0 + \rho_0)$ et s est le déplacement du pendule normé par rapport à la distance $(R_0 + \rho_0)$. En faisant cela, on peut réécrire les expressions de (2.57) en fonction d'un autre paramètre sans dimension : l'ordre d'accord du pendule n_p défini en (2.56) (cf. section 2.3.2.1). On obtient

Trajectoire circulaire :

$$x = \frac{1}{(1 + n_p^2)^2} \left(1 + n_p^4 + 2n_p^2 \cos(1 + n_p^2) s \right), \quad (2.59a)$$

Trajectoire épicycloïdale :

$$x = 1 - n_p^2 s^2, \quad (2.59b)$$

Trajectoire cycloïdale :

$$x = 1 - \left(n_p^2 + \frac{3}{4} \right) s^2 + \frac{\text{asin}(1 + n_p^2) s}{4(1 + n_p^2)^2} \left(\text{asin}(1 + n_p^2) s + 2(1 + n_p^2) s \sqrt{1 - (1 + n_p^2)^2 s^2} \right). \quad (2.59c)$$

Ces expressions ne dépendent que du seul paramètre n_p . Pour rappel, ce paramètre régit la dépendance linéaire de la fréquence des petites oscillations libres ω_0 d'un pendule quelconque à la vitesse de rotation Ω (cf. équation (2.55)). On constate également qu'il conditionne les longueurs des épicycloïdes et des cycloïdes. Plus particulièrement, ces trajectoires sont d'autant plus petites que n_p est grand. On propose maintenant une troisième opération qui consiste à effectuer le développement de Taylor au voisinage de $s = 0$ du cercle et de la cycloïde ((2.59b) est déjà sous une forme polynomiale), ce qui mène à :

Trajectoire circulaire :

$$x = 1 - n_p^2 s^2 + \frac{n_p^2 (1 + n_p^2)^2}{12} s^4 + \mathcal{O}(s^6), \quad (2.60a)$$

Trajectoire cycloïdale :

$$x = 1 - n_p^2 s^2 - \frac{(1 + n_p^2)^2}{12} s^4 + \mathcal{O}(s^6). \quad (2.60b)$$

On constate que, si on néglige les termes en s^4 , on trouve exactement l'expression de l'épicycloïde (2.59b). Le cercle et la cycloïde sont donc des épicycloïdes perturbées. Cela est intéressant car un objectif de la thèse consiste justement à proposer des trajectoires originales autres que l'épicycloïde. On peut donc envisager d'enrichir son expression polynomiale d'ordre 2 (2.59b) afin de la perturber et ainsi construire des trajectoires de diverses formes. En pratique, c'est ce qui est fait car on adopte une représentation polynomiale de la forme

$$x = 1 - n_p^2 s^2 + \sum_{i=3}^{N_x} x_i s^i. \quad (2.61)$$

Les trajectoires circulaires et cycloïdales sont également représentées sous cette forme. On donne également la relation permettant de redimensionner les coefficients x_i . La fonction X est de la même forme que (2.61) et s'écrit

$$X = (R_0 + \rho_0)^2 - n_p^2 S^2 + \sum_{i=3}^{N_x} X_i S^i \quad (2.62)$$

Le passage des coefficients sans dimension x_i aux grandeurs dimensionnelles X_i s'effectue en utilisant l'équation (2.58) et s'écrit

$$X_i = \frac{(R_0 + \rho_0)^2}{(R_0 + \rho_0)^i} x_i. \quad (2.63)$$

L'utilisation d'une telle forme polynomiale rend quelque peu compliquée l'interprétation physique que l'on peut donner à ces coefficients. Cependant, on en propose une en remarquant que la fonction X , ou plus précisément sa variation par rapport à S , intervient dans le terme de raideur de l'équation générale du mouvement (2.49). L'ordre d'accord n_p , en plus de gouverner la fréquence des oscillations libres ω_0 (cf. équation 2.55), peut également être vu comme un coefficient de raideur linéaire (cf. équation (2.54)). Il en est de même pour x_i et X_i qui sont, eux, assimilables aux coefficients d'une loi de raideur non linéaire.

2.3.2.3 Du pendule à l'oscillateur de Duffing

Jusqu'à présent nous avons établi, d'une part, l'équation générale du mouvement d'un pendule quelconque dans le champ d'accélération centrifuge (*cf.* équation (2.49), section 2.3.2.1). D'autre part, nous disposons des expressions de trois trajectoires particulières, le cercle, l'épicycloïde et la cycloïde, présentées en section (2.3.2.2). On fait maintenant le lien entre ces trajectoires et le comportement de l'oscillateur pendulaire. L'objectif de cette section est d'établir un modèle pour ces trois cas particuliers afin d'identifier les contributions des différentes trajectoires, dans l'équation du mouvement. On s'intéressera ensuite au régime forcé des oscillateurs pendulaires en section 2.3.2.4.

L'équation générale du mouvement pour une trajectoire quelconque (2.49) est réécrite sous la forme

$$m_p \ddot{S} + C_p \dot{S} - m_p \frac{1}{2} \frac{dX}{dS} \Omega^2 = F \cos \omega_n t. \quad (2.64)$$

Un terme de dissipation $C_p \dot{S}$, de coefficient C_p , a été introduit et représente l'amortissement visqueux du pendule le long de \mathcal{C} . On considère également que le pendule est soumis à un effort extérieur harmonique d'amplitude F et de fréquence ω_n . L'effort d'excitation est dirigé suivant la tangente à la trajectoire du pendule. Il a été montré en section 2.1.1 que la fréquence d'excitation du moteur est de la forme $\omega_e = n_e \Omega$ (*cf.* équation (2.7)) avec n_e une constante qui dépend de l'architecture du moteur (*cf.* section 2.1.1.2). Afin de ne pas se restreindre à une valeur donnée de n_e , on choisit la fréquence d'excitation telle que

$$\omega_n = n\Omega, \quad (2.65)$$

où n est l'ordre d'excitation que l'on a la liberté de faire varier, même si en pratique $n = n_e$.

On introduit également dès maintenant un changement de variable indépendante qui sera réutilisé plus tard. Le temps sans dimension τ est défini tel que :

$$t = \omega_e \tau. \quad (2.66)$$

En substituant les transformations (2.58) et (2.66) dans l'équation de mouvement, (2.64) se réécrit sous la forme

$$s'' + 2\xi_p s' - \frac{1}{2n_e^2} \frac{dx}{ds} = f \cos \bar{\omega} \tau, \quad (2.67)$$

avec

$$(-)' = \frac{d(-)}{d\tau}, \quad \xi_p = \frac{C_p}{2m_p \omega_e}, \quad f = \frac{F}{m_p (R_0 + \rho_0) \omega_e^2} \quad (2.68)$$

et

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_e} = \frac{n}{n_e}. \quad (2.69)$$

Ainsi, le changement de variable (2.66) permet d'exprimer la fréquence d'excitation ω_n en fonction de la fréquence fondamentale du moteur ω_e , ce qui sera utile par la suite.

On utilise maintenant les équations définies en section 2.3.2.2, à savoir l'expression exacte de l'épicycloïde (2.59b) ainsi que les formes approchées du cercle (2.60a) et de la cycloïde (2.60b). On réécrit finalement (2.67) sous la forme :

$$s'' + \bar{\omega}_0^2 s + \bar{\omega}_0^2 \gamma s^3 + 2\xi_p s' = f \cos \bar{\omega} \tau, \quad (2.70)$$

avec $\bar{\omega}_0$, la fréquence réduite des petites oscillations libre, définie par

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{n_p}{n_e}, \quad (2.71)$$

et γ , le coefficient non linéaire dépendant de l'allure de la trajectoire tel que

$$\text{cercle : } \gamma = -\frac{(1+n_p^2)^2}{6}, \quad \text{épicycloïde : } \gamma = 0, \quad \text{et} \quad \text{cycloïde : } \gamma = \frac{(1+n_p^2)^2}{6n_p^2}. \quad (2.72)$$

On constate que n'importe quel pendule peut être représenté par un oscillateur de Duffing [69, 70] et on voit d'ores et déjà que la trajectoire du pendule joue un rôle dans l'expression du terme non linéaire et plus particulièrement du coefficient γ . On retrouve également le résultat connu selon lequel le pendule épicycloïdale est, dans le champ d'accélération centrifuge, un oscillateur parfaitement linéaire (*cf.* section 2.3.2.1) car $\gamma = 0$. Ce n'est pas le cas pour le cercle ou la cycloïde. On s'intéresse dans ce qui suit à la réponse forcée de ces différents pendules.

2.3.2.4 Régime forcé

On détermine ici une solution analytique approchée de l'équation (2.70) à l'aide d'une méthode de perturbation. L'idée est de considérer le terme non linéaire, le terme de forçage extérieur ainsi que l'amortissement comme de petites perturbations du système linéaire conservatif associé. On réécrit alors l'équation (2.70) sous la forme

$$s'' + \bar{\omega}_0^2 s = \epsilon (f \cos \bar{\omega} \tau - \bar{\omega}_0^2 \gamma s^3 - 2\xi_p s'), \quad (2.73)$$

où l'on a introduit le paramètre ϵ tel que $\epsilon \ll 1$. Ce paramètre n'a pas de signification particulière, il nous sert seulement à "étiqueter" les termes considérés comme petits. On utilise ici la méthode des échelles multiples [24, 71] qui consiste à introduire plusieurs échelles de temps telles que

$$T_n = \epsilon^n \tau, \quad (2.74)$$

et à effectuer un développement asymptotique de la solution recherchée de la forme :

$$s(t) = s_0(T_0, T_1, \dots) + \epsilon s_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 s_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (2.75)$$

Comme des échelles de temps différentes ont été introduites, les dérivées temporelles deviennent

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dT_0}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{d\tau} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots \quad (2.76)$$

et

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \quad (2.77)$$

L'étude sera menée au voisinage de la fréquence de résonance, on introduit donc σ , représentant une petite variation de $\bar{\omega}$ autour de $\bar{\omega}_0$. On a donc :

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \epsilon \sigma. \quad (2.78)$$

En substituant ensuite les équations (2.75 2.76 2.77 2.78) dans l'équation (2.73) puis en ordonnant les termes suivant les puissances de ϵ , on obtient, en se limitant à l'ordre ϵ :

ordre 1 :

$$D_0^2 s_0 + \bar{\omega}_0^2 s_0 = 0 \quad (2.79a)$$

ordre ϵ :

$$D_0^2 s_1 + \bar{\omega}_0^2 s_1 = f \cos(\bar{\omega}_0 T_0 + \sigma T_1) - \bar{\omega}_0^2 \gamma s_0^3 - 2\xi_p D_0 s_0 - 2D_0 D_1 s_0. \quad (2.79b)$$

Nous avons donc deux équations différentielles linéaires où la solution de la première est injectée dans le second membre de la deuxième. C'est le principe des méthodes de perturbation.

La solution de (2.79a) est de la forme

$$s_0 = A(T_1) e^{j\bar{\omega}_0 T_0} + cc \quad (2.80)$$

où cc désigne la partie complexe conjuguée de tout ce qui précède et $A(T_1)$ s'écrit

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{j\varphi(T_1)}. \quad (2.81)$$

où a et φ sont les inconnues du problème. En injectant (2.80) dans (2.79b), on obtient

$$D_0^2 s_1 + \bar{\omega}_0^2 s_1 = \left(\frac{1}{2} f e^{j\sigma T_1} - 3\bar{\omega}_0^2 \gamma A^2 A^* - 2j\bar{\omega}_0 \left(\xi_p A + \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) \right) e^{j\bar{\omega}_0 T_0} \quad (2.82)$$

$$- \bar{\omega}_0^2 \gamma A^3 e^{3j\bar{\omega}_0 T_0} + cc, \quad (2.83)$$

avec A^* désignant le complexe conjugué de A . On constate que le terme facteur de $e^{j\bar{\omega}_0 T_0}$, dans le second membre de (2.82) est un terme résonant, ou séculaire, car il correspond à un forçage de l'oscillateur à sa fréquence de résonance $\bar{\omega}_0$. Dans ces conditions, la solution recherchée (2.75) est non bornée à cause de $s_1(t)$. Comme on s'intéresse au permanent, il faut donc s'assurer que cette solution soit bornée quel que soit τ . Ceci est réalisé en annulant le terme résonant, ce qui conduit à une équation appelée *condition de solvabilité* [24, 71] et s'écrit :

$$\frac{1}{2} f e^{j\sigma T_1} - 3\bar{\omega}_0^2 \gamma A^2 A^* - 2j\bar{\omega}_0 \left(\xi_p A + \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) = 0. \quad (2.84)$$

On substitue ensuite l'expression (2.81) dans la condition de solvabilité. En multipliant par $e^{-j\varphi}$ et en utilisant le fait que

$$f e^{j(\sigma T_1 - \varphi)} = f \cos(\sigma T_1 - \varphi) + j f \sin(\sigma T_1 - \varphi), \quad (2.85)$$

on aboutit à un système différentiel du premier ordre :

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = \frac{3}{8} \gamma \bar{\omega}_0 a^3 - \frac{1}{2} \frac{f}{\bar{\omega}_0} \cos(\sigma T_1 - \varphi) \quad (2.86a)$$

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = -\xi_p a + \frac{1}{2} \frac{f}{\bar{\omega}_0} \sin(\sigma T_1 - \varphi) \quad (2.86b)$$

L'étude du régime permanent implique que $\frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = \frac{\partial a}{\partial T_1} = 0$, ce qui permet d'écrire

$$\xi_p a = \frac{1}{2} \frac{f}{\bar{\omega}_0} \sin \eta \quad (2.87a)$$

$$a\sigma - \frac{3}{8} \gamma \bar{\omega}_0 a^3 = -\frac{1}{2} \frac{f}{\bar{\omega}_0} \cos \eta \quad (2.87b)$$

2.3. LES OSCILLATEURS PENDULAIRES

où $\eta = \sigma T_1 - \varphi$. La sommation des carrés des expressions (2.87b) et (2.87a) mène donc à l'expression implicite de a , l'amplitude de la solution recherchée à l'ordre 1, en fonction de σ telle que

$$\frac{f^2}{4\bar{\omega}_0^2} = a^2 \left(\xi_p^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}\gamma\bar{\omega}_0 a^2 \right)^2 \right). \quad (2.88)$$

L'équation de σ en fonction de a se détermine à partir de (2.88) et est solution d'une équation du second ordre, on obtient

$$\sigma = \frac{3}{8}\gamma\bar{\omega}_0 a^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4a^2\bar{\omega}_0^2} - \xi_p^2}. \quad (2.89)$$

Les évolutions de l'amplitude a et de la phase η du régime permanent en fonction du désaccord σ sont illustrées en figure 2.29. Dans le cas du pendule circulaire ($\gamma < 0$) le comportement est

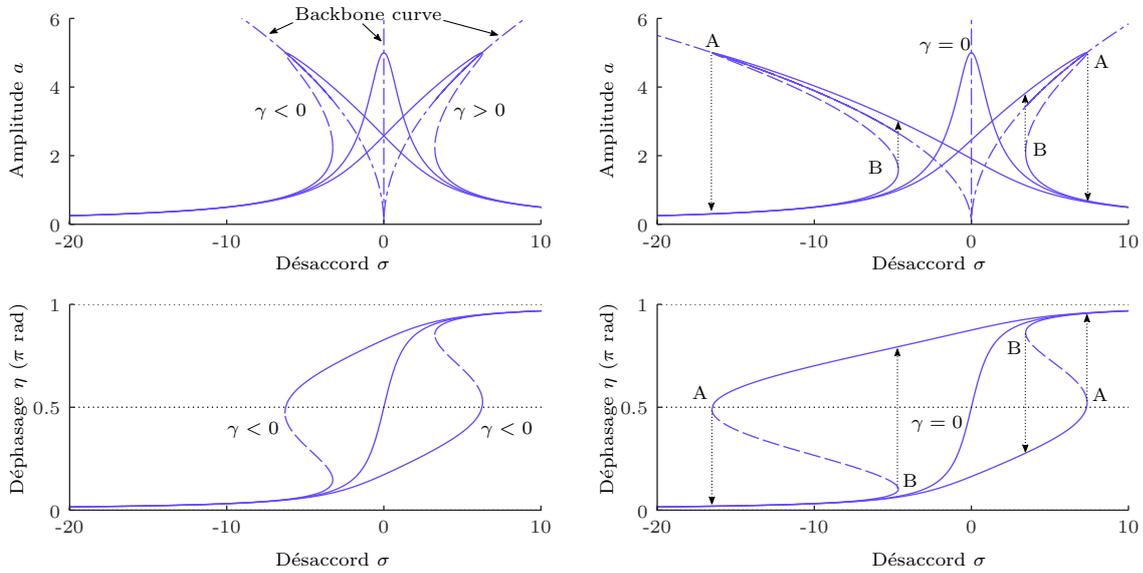


FIGURE 2.29 – Amplitude et phase en fonction du désaccord σ , en régime permanent, de l'oscillateur de Duffing forcé équivalent à un pendule circulaire ($\gamma < 0$), épicycloïdale ($\gamma = 0$) et cycloïdale ($\gamma > 0$). $n_p = 1$ (à gauche), $n_p = 1.5$ (à droite). Autres paramètres : $\bar{\omega}_0 = 1$, $f = 10$, $\xi_p = 1$.

assouplissant : la fréquence des oscillations libres, représentée par la *backbone curve*, décroît à mesure que l'amplitude du mouvement augmente. Au contraire, le pendule cycloïdale est, lui, raidissant ($\gamma > 0$) : la fréquence des oscillations libres croît à mesure que l'amplitude du mouvement augmente.

Comme la *backbone curve* correspond à la fréquence des oscillations libres du système conservatif sous-jacent, il suffit d'évaluer l'équation (2.89) pour $f = \xi_p = 0$, ce qui mène à l'équation de cette courbe (au premier ordre de perturbation) :

$$a = \sqrt{\frac{8}{3\gamma\bar{\omega}_0}}\sigma. \quad (2.90)$$

La *backbone curve* représente en fait le “squelette” de la réponse forcée.

On remarque que, pour une valeur de σ , trois valeurs de a et de η sont possibles. Si tel est le cas, seules deux sont stables et la stabilisation du système sur une solution plutôt qu'une autre, en régime permanent, dépend des conditions initiales. Les solutions stables sont représentées en traits continus et les solutions instables sont représentées en traits pointillés. L'étude de stabilité permet de discriminer les solutions calculées par la méthode de perturbation et consiste à examiner le signe des valeurs propres de la matrice jacobienne du système dynamique (2.86) [24]. Les solutions stables et instables sont connectées, aux points A et B , par des bifurcations *nœud-col* [72] qui sont à l'origine des phénomènes de sauts illustrés par les flèches en figure 2.29. Le pendule circulaire, par exemple, voit donc son amplitude d'oscillation augmenter brusquement au point B lors d'un balayage en fréquence croissant et diminuer tout aussi soudainement au point A lors d'un balayage en fréquence décroissant. Il se produit exactement l'inverse pour le pendule cycloïdal. L'apparition des bifurcations *nœud-col*, et donc du phénomène de saut, est conditionnée par la non-unicité de la solution pour une valeur donnée de σ . Ce qui est le cas à partir d'une amplitude d'oscillation suffisamment grande, comme illustré en figure 2.30, où l'amplitude du forçage est augmentée successivement. Pour de petites amplitudes d'oscillation, les

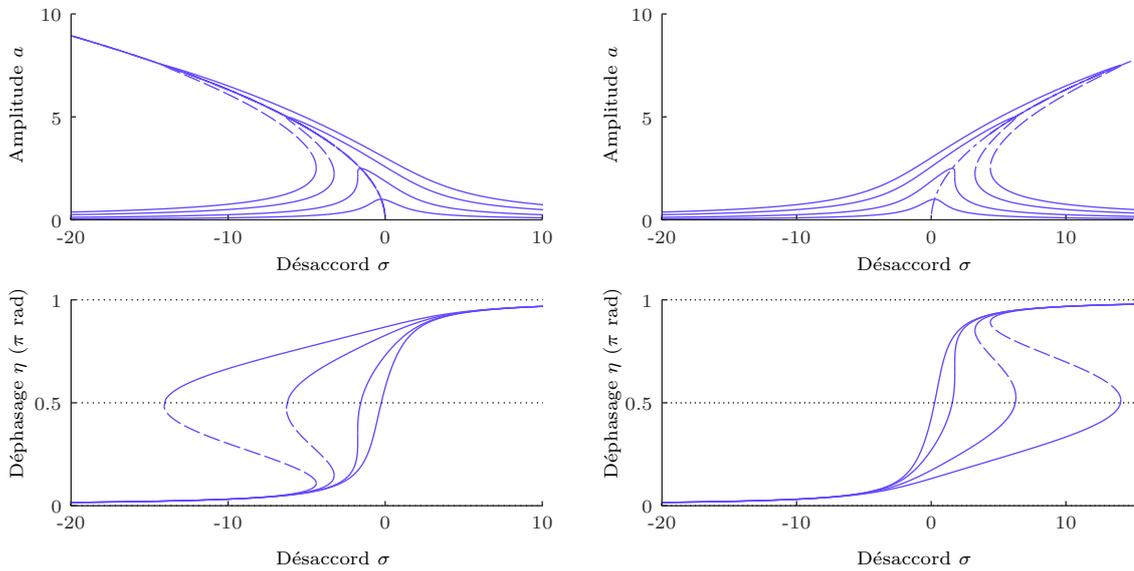


FIGURE 2.30 – Amplitude et phase en fonction du désaccord σ , en régime permanent, de l'oscillateur de Duffing forcé équivalent à un pendule circulaire (à gauche) et cycloïdale (à droite) pour plusieurs amplitude d'excitation : $f = [2 \ 5 \ 10 \ 15]$. Autres paramètres : $\bar{\omega}_0 = 1$, $n_p = 1$, $\xi_p = 1$.

non-linéarités géométriques du cercle et de la cycloïde sont négligeables et le comportement du système est proche de celui du pendule épicycloïdal. Ceci est parfaitement logique car nous avons vu en section 2.3.2.2 qu'à de très petites amplitudes, toutes les courbes peuvent être assimilées à une unique épicycloïde. En revanche, à mesure que l'amplitude augmente, le comportement non linéaire devient prépondérant, causant l'apparition de phénomènes plus complexes, comme par exemple la distorsion harmonique, des résonances super-harmoniques ou encore des régimes non périodiques [70].

Cette étude montre que le choix de la trajectoire d'un oscillateur pendulaire est déterminant quant à son comportement à grande amplitude d'oscillation. Remarquez que, d'un point de vue

purement géométrique, le cercle consiste à “ouvrir” l’épicycloïde (*cf.* figure 2.28) alors que la cycloïde consiste à la “refermer” (*cf.* figure 2.28), ce qui est directement lié au comportement raidissant ou assouplissant de l’oscillateur. Ceci est très intéressant au regard du premier objectif de la thèse, qui consiste à proposer de nouvelles formes de trajectoire, car on voit clairement qu’il est possible d’influencer le comportement dynamique du pendule en enrichissant l’expression polynomiale d’ordre 2 (*cf.* équation (2.59b)) d’une épicycloïde de référence. Ici, comme l’épicycloïde est la courbe tautochrone dans le champ d’accélération centrifuge uniforme (*cf.* section 2.3.2.1), il n’y a aucun intérêt à remettre en cause cette trajectoire mais Nous verrons dans la suite de ce chapitre, avec l’étude de l’absorbeur pendulaire centrifuge, que l’épicycloïde n’est pas la trajectoire optimale.

2.3.3 Bilan sur les oscillateur pendulaires

La section 2.3 s’est concentrée sur l’étude des oscillateurs pendulaires et plus particulièrement sur l’influence de la trajectoire sur le comportement du pendule. Les propriétés intéressantes des trajectoires que sont l’épicycloïde et la cycloïde ont été mis en évidence et on propose de résumer ci-dessous les différent points essentiels à l’issu de cette étude.

Le principe fondamentale du pendule centrifuge (*cf.* section 2.3.1, 2.3.2.1)

- Lorsqu’il évolue dans un champ d’accélération centrifuge uniforme, un pendule voit sa fréquence des petites oscillations libres ω_0 dépendre linéairement de la vitesse de rotation $\Omega = \text{cte}$ à laquelle il tourne.
- La relation linéaire entre ω_0 et Ω s’écrit :

$$\omega_0 = n_p \Omega, \quad \text{avec} \quad n_p = \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}}, \quad (2.91)$$

avec n_p , l’ordre d’accord du pendule.

Les trajectoires tautochrones (*cf.* section 2.3.2.1)

- La trajectoire tautochrone dans le champ de pesanteur est une cycloïde (*cf.* équation (2.43)).
- La trajectoire tautochrone dans le champ d’accélération centrifuge uniforme ($\Omega = \text{cte}$) est une épicycloïde (*cf.* équation (2.53)) et la relation (2.91) est vraie quelque soit l’amplitude du mouvement.

Les trajectoires en général (*cf.* section 2.3.2.2)

- Le déplacement du pendule est paramétré par l’abscisse curviligne S le long de la trajectoire.
- Dans le champ d’accélération centrifuge, on préfère paramétrer la forme de la trajectoire par le carré de son rayon vecteur X (*cf.* équations (2.57a), (2.57b), (2.57c)).
- Pour une épicycloïde, X est exactement un polynôme du second ordre en S .
- Au voisinage de $S = 0$, toutes les trajectoires sont assimilables à une unique épicycloïde (*cf.* équations (2.60a) et (2.60b)).
- Pour de grandes amplitudes, toutes les trajectoires peuvent être représentées par une unique épicycloïde perturbée (*cf.* équations (2.60a) et (2.60b))

2.4 L'absorbeur pendulaire centrifuge translaté

Dans les sections précédentes, n'ont été considérés que des oscillateurs pendulaires (*cf.* section 2.3). Des expressions de trajectoires particulières ont été établies et ont permis l'étude du comportement des pendules dans le cadre des oscillations libres (*cf.* sections 2.3.1, 2.3.2.1) et forcées (*cf.* section 2.3.2.4). Ces oscillateurs évoluaient jusqu'à présent dans un champ d'accélération centrifuge uniforme. Cela est donc équivalent à articuler un pendule sur une inertie primaire dont on impose une vitesse de rotation constante. Dans cette section, la configuration est différente car maintenant les pendules interagissent avec l'inertie primaire et donc modifient sa vitesse de rotation. Ce point est important car les conclusions énoncées précédemment sur l'influence des trajectoires sont remises en question.

Ceci nous amène à considérer un nouveau système, à savoir l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC), présenté en figure 2.31. Il est constitué d'un voile sur lequel N pendules sont articulés. Le

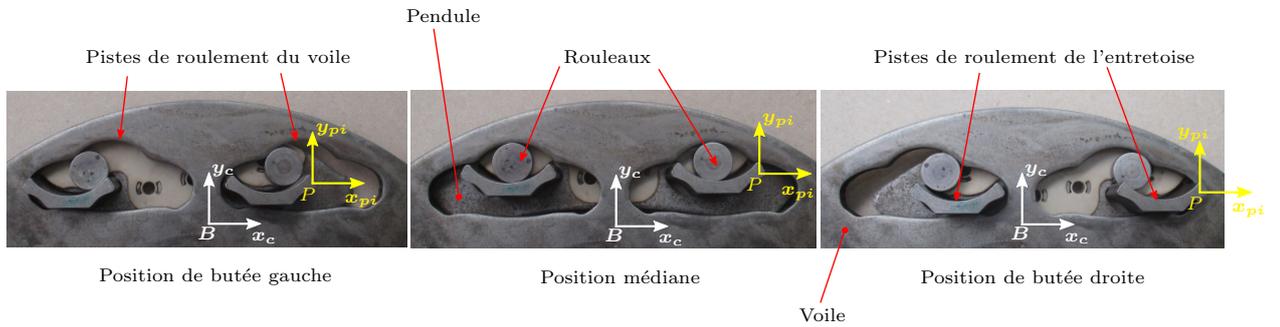


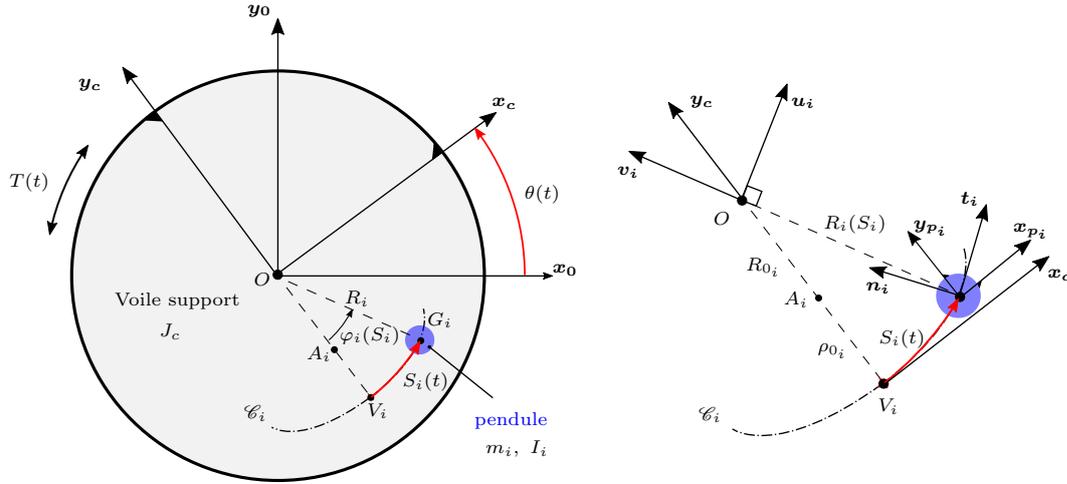
FIGURE 2.31 – Technologie de l'absorbeur pendulaire centrifuge translaté. Une des deux tôles constituant le pendule est ici absente.

centre de gravité des pendules décrit une trajectoire bien précise, généralement une épicycloïde. Cette trajectoire résulte du roulement de deux rouleaux sur des pistes de forme particulière, usinées dans le voile et dans des entretoises, qui appartiennent au pendule. La forme des pistes de roulement des rouleaux est telle que le pendule effectue une translation pure lors de leur déplacement par rapport au voile. Plus précisément si on définit le repère $\mathcal{R}_{p_i}(P, \mathbf{x}_{p_i}, \mathbf{y}_{p_i}, \mathbf{z}_{p_i})$ attaché au $i^{\text{ème}}$ pendule au point P et le repère $\mathcal{R}_c(B, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$ attaché au voile au point B , alors \mathcal{R}_{p_i} et \mathcal{R}_c restent parallèles quel que soit le déplacement du pendule. Ce système est désigné par l'appellation : absorbeur pendulaire centrifuge translaté.

2.4.1 Modélisation

Le mécanisme présenté sur la figure 2.31 est modélisé par un ensemble de solides rigides articulés. On ne modélisera pas les rouleaux et donc les pistes de roulement pour des raisons de facilité d'écriture des équations. Le mouvement des pendules sera donc géré en imposant la trajectoire de leur centre de masse à l'image de ce qui a été fait en section 2.3. On néglige également l'action de la gravité en considérant que le voile tourne à une vitesse telle que l'intensité du champ d'accélération centrifuge est grande devant celle du champ de pesanteur. Le modèle qui a été choisi est représenté en figure 2.32.

La variable θ mesure le déplacement du repère $\mathcal{R}_c(O, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$, attaché au voile, par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$. La variable S_i mesure le déplacement du repère


 FIGURE 2.32 – Paramétrage du $i^{\text{ème}}$ pendule centrifuge

$\mathcal{R}_{p_i}(G_i, \mathbf{x}_{p_i}, \mathbf{y}_{p_i}, \mathbf{z}_{p_i})$, attaché au centre de masse G_i du $i^{\text{ème}}$ pendule, par rapport au voile le long d'une trajectoire quelconque \mathcal{C}_i . Étant donné les démonstrations de la section 2.3.2.1, on choisit de paramétrer la forme de la trajectoire par la fonction $R_i(S_i)$ telle que $\mathcal{C}_i : \{G_i, \mathbf{O}G_i = -R_i(S_i)\mathbf{v}_i\}$. L'origine de S_i est prise au point V_i de \mathcal{C}_i tel que $R_i(S_i = 0) = R_{0_i} + \rho_{0_i}$, où ρ_{0_i} est le rayon de courbure de \mathcal{C}_i au point V_i . Le voile et les pendules sont affectés des inerties de rotation, autour de \mathbf{z}_0 , J_c et I_i respectivement. De plus, on suppose que la masse m_i du $i^{\text{ème}}$ pendule est concentrée en G_i . Le mouvement de translation des pendules est assuré en imposant au repère \mathcal{R}_{p_i} d'être parallèle à \mathcal{R}_c pour tout S_i . Enfin, le couple extérieur $T(t)$ appliqué au voile est supposé de la forme :

$$T(t) = T_0 + \tilde{T} \cos \omega_n t, \quad (2.92)$$

où T_0 est la composante moyenne, \tilde{T} l'amplitude du couple acyclique et ω_n la fréquence d'excitation déjà définie par l'équation (2.65).

On écrit maintenant les équations du mouvement du système. Pour cela, on adopte une démarche similaire à ce qui a été fait en section 2.3.2.1.

La position du centre de masse du pendule par rapport à l'origine O s'écrit :

$$\mathbf{O}G_i = -R_i \mathbf{v}_i. \quad (2.93)$$

En utilisant la règle de dérivation en chaîne, la vitesse du point G_i par rapport à \mathcal{R}_0 s'écrit :

$$\mathbf{V}_{G_i} = R_i \left(\frac{d\varphi_i}{dS_i} \dot{S}_i + \dot{\theta} \right) \mathbf{u}_i - \frac{dR_i}{dS_i} \dot{S}_i \mathbf{v}_i, \quad (2.94)$$

où $\varphi_i(S_i)$ mesure l'angle entre les vecteurs \mathbf{y}_c et \mathbf{v}_i (cf. figure 2.32). Au voisinage de G_i , une variation infinitésimale dS_i sur \mathcal{C}_i , comme illustré en figure 2.33, nous permet d'écrire :

$$\frac{d\varphi_i}{dS_i} = \frac{1}{R_i} \sqrt{1 - \left(\frac{dR_i}{dS_i} \right)^2}. \quad (2.95)$$

La substitution de (2.95) dans l'équation (2.94) permet de calculer l'énergie cinétique totale et

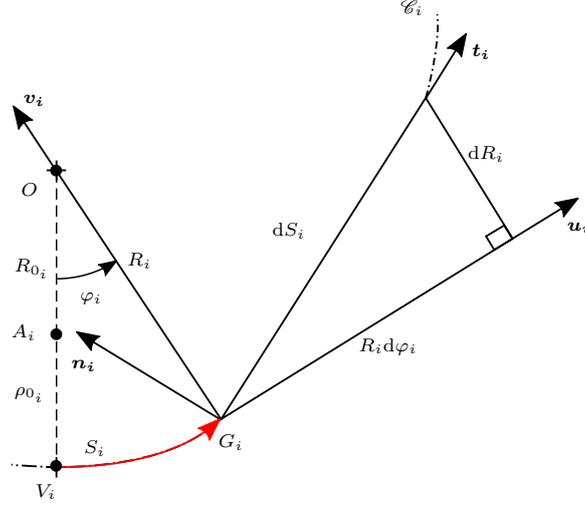


FIGURE 2.33 – Zoom sur la trajectoire \mathcal{C}_i au voisinage de G_i .

s'écrit :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{S}_i^2 + R_i^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{S}_i \dot{\theta} R_i \sqrt{1 - \left(\frac{dR_i}{dS_i} \right)^2} \right) + \left(J_c + \sum_{i=1}^N I_i \right) \dot{\theta}^2 \right). \quad (2.96)$$

L'expression (2.96) fait intervenir la fonction R_i . Or, d'après la section 2.3.2.1, on sait qu'il est préférable de travailler avec le carré de cette fonction, c'est-à-dire $X = R^2$ (cf. équation (2.48)). On utilise le fait que

$$R_i \frac{dR_i}{dS_i} = \frac{1}{2} \frac{dX_i}{dS_i}, \quad (2.97)$$

pour réécrire l'énergie cinétique sous la forme

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{S}_i^2 + X_i \dot{\theta}^2 + 2\dot{S}_i \dot{\theta} Z_i \right) + \left(J_c + \sum_{i=1}^N I_i \right) \dot{\theta}^2 \right), \quad (2.98)$$

où l'on a posé

$$Z_i = \sqrt{X_i - \frac{1}{4} \left(\frac{dX_i}{dS_i} \right)^2}. \quad (2.99)$$

La fonction Z_i représente en fait la projection de R_i sur \mathbf{n}_i .

Comme la gravité a été négligée, l'énergie potentielle totale est nulle. On applique donc les équations de Lagrange (2.21) à l'énergie cinétique avec $q_j = [\theta, S_1 \dots S_i \dots, S_N]$ et

$Q_j = [T(t) \ 0 \ \dots \ 0]$, ce qui conduit aux équations du mouvement du système

$$\left(J_c + \sum_{i=1}^N (I_i + m_i X_i) \right) \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N m_i \left(Z_i \ddot{S}_i + \frac{dX_i}{dS_i} \dot{S}_i \dot{\theta} + \frac{dZ_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + C_c \dot{\theta} = T_0 + \tilde{T} \cos \omega_n t, \quad (2.100a)$$

$$\underbrace{m_i Z_i \ddot{\theta} + m_i \ddot{S}_i - \frac{1}{2} m_i \frac{dX_i}{dS_i} \dot{\theta}^2 + C_{p_i} \dot{S}_i}_{\text{cf. équation (2.64)}} = 0, \quad i = 1 : N \quad (2.100b)$$

L'équation (2.100a) représente la dynamique du voile. Comme ce dernier supporte tous les pendules, l'inertie équivalente de chacun autour de \mathbf{z}_0 *i.e.* $I_i + m_i X_i$, s'ajoute à son inertie propre J_c dans le premier terme de (2.100a). Le voile est également soumis aux contributions non linéaires inertielles des pendules, incluent dans la deuxième sommation de l'équation (2.100a). Le terme $m_i dX_i/dS_i \dot{S}_i \dot{\theta}$ correspond au couple engendré par les forces de Coriolis et le terme $m_i (Z_i \ddot{S}_i + dZ_i/dS_i \dot{S}_i^2)$ au couple dû aux forces d'inerties des pendules sur le voile. Comme cela a déjà été évoqué en section 2.3.1, on constate que, si la trajectoire \mathcal{C}_i est un cercle dont le centre coïncide avec O , alors $dX_i/dS_i = dZ_i/dS_i = 0$ et seule subsiste la contribution linéaire de l'inertie équivalente des pendules.

La dynamique du pendule i est régie par l'équation (2.100b). On constate que les N pendules ne sont couplés entre eux que par l'intermédiaire du voile, c'est-à-dire l'équation (2.100a). C'est une conséquence de l'architecture parallèle du système. Il est rassurant de retrouver l'équation de la dynamique (2.64) de l'oscillateur pendulaire (*cf.* section 2.3.2.3) dans l'équation (2.100b) (termes soulignés) mais cette fois en interaction avec le voile.

Le terme $m_i Z_i \ddot{\theta}$ correspond à la force d'inertie du voile sur le pendule et le terme $m_i dX_i/dS_i \dot{\theta}^2$ résulte, quant à lui, de l'action du champ d'accélération centrifuge sur le pendule. C'est l'effort qui s'oppose à son déplacement et tend à le ramener à sa position de repos. Là encore, ce terme disparaît si \mathcal{C}_i est un cercle de centre O (à ne pas confondre avec la trajectoire circulaire classique où $R_0 \neq 0$).

Des termes de dissipation ont été introduits dans les équations de la dynamique. C_{p_i} est le coefficient de l'amortissement visqueux entre le voile et le pendule i le long de \mathcal{C}_i . C_c est le coefficient de l'amortissement visqueux de l'articulation du voile par rapport à \mathcal{R}_0 . Cet amortissement est nécessaire pour l'étude du régime permanent du système. Comme la pesanteur a été négligée, l'existence de solutions périodiques est conditionnée au fait que $\dot{\theta} \neq 0$ (sinon le terme de raideur $m_i dX_i/dS_i \dot{\theta}^2$ de l'équation 2.100b disparaît). En supposant $\dot{\theta}(t)$ de la forme

$$\dot{\theta}(t) = \Omega + \dot{\tilde{\theta}}(t) \quad (2.101)$$

et en négligeant le couple oscillant \tilde{T} , l'équation d'équilibre du système sous l'unique action du couple moyen T_0 est :

$$C_c \dot{\theta}_0 = T_0. \quad (2.102)$$

On voit que en choisissant

$$C_c = \frac{T_0}{\Omega}, \quad (2.103)$$

le couple visqueux $C_c \Omega$ s'oppose exactement au couple extérieur T_0 de sorte que le système soit maintenu dans son régime permanent.

Il serait judicieux d'exprimer les équations (2.100a) et (2.100b) en fonction de grandeurs sans dimension afin d'identifier les paramètres indépendants. On propose de réutiliser le changement de variable indépendante $t = \omega_e \tau$ de l'équation (2.66) et de définir les paramètres suivants

$$\mu_i = \frac{m_i (R_{0_i} + \rho_{0_i})^2}{J}, \quad \xi_c = \frac{Cc}{2J\omega_e}, \quad \xi_{p_i} = \frac{C_{p_i}}{2m_i\omega_e}, \quad T_a = \frac{\tilde{T}}{J\omega_e^2}, \quad (2.104)$$

où J est l'inertie de rotation totale autour de \mathbf{z}_0 et comprend l'inertie du voile ainsi que la somme des inerties de rotation de tous les pendules telle que $J = J_c + \sum_{i=1}^N I_i$. La fréquence excitation adimensionnée $\bar{\omega}$ est définie par (2.69). Le point de fonctionnement réel en condition véhicule, c'est à dire à la fréquence ω_e , correspond donc à $\bar{\omega} = 1$. μ_i représente le rapport de l'inertie équivalente du $i^{\text{ème}}$ pendule, ramenée au centre de rotation O , sur l'inertie totale J . ξ_c et ξ_{p_i} désignent les taux d'amortissement relatifs aux amortissements visqueux C_c et C_{p_i} respectivement. Le couple oscillant sans dimension est désigné par T_a . Finalement, la fonction de forme de la trajectoire \mathcal{C}_i ainsi que la variable S_i sont adimensionnées par la distance R_i ($S_i = 0$) telles que

$$x_i = \frac{X_i}{(R_{0_i} + \rho_{0_i})^2} \quad \text{et} \quad s_i = \frac{S_i}{(R_{0_i} + \rho_{0_i})}. \quad (2.105)$$

En substituant les expressions (2.66) (2.69) (2.101) (2.104) et (2.105) dans les équations (2.100a) et (2.100b), les équations du mouvement deviennent :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^N \mu_i x_i\right) \tilde{\theta}'' + \sum_{i=1}^N \mu_i \left(z_i s_i'' + \frac{dx_i}{ds_i} s_i' \left(\frac{1}{ne} + \tilde{\theta}' \right) + \frac{dz_i}{ds_i} s_i'^2 \right) + 2\xi_c \tilde{\theta}' = T_a \cos \bar{\omega} \tau, \quad (2.106a)$$

$$z_i \tilde{\theta}'' + s_i'' - \frac{1}{2} \frac{dx_i}{ds_i} \left(\frac{1}{ne} + \tilde{\theta}' \right)^2 + 2\xi_{p_i} s_i' = 0, \quad i = 1 : N \quad (2.106b)$$

avec $z_i = \sqrt{x_i - \frac{1}{4} \left(\frac{dx_i}{ds_i} \right)^2}$. Il est intéressant de constater que Ω n'est pas un paramètre indépendant mais intervient cependant implicitement dans les expressions des paramètres définis en (2.104). On observe également que les rapports des inerties μ_i gouvernent les couplages entre les N pendules et le voile. Ceci est parfaitement logique car si $\mu_i = 0$ cela signifie que l'inertie du voile est infiniment plus grande que celle des pendules, ce qui revient à "détacher" les pendules du voile.

En pratique, les pendules sont conçus de telle sorte qu'ils soient a priori tous identiques et oscillent à l'unisson *i.e.* $s_i = s \forall i$. On propose donc d'omettre l'indice i et de réécrire les équations pour ramener le système à deux degrés de liberté, à savoir le voile et un seul pendule équivalent. Les équations (2.106a) et (2.106b) deviennent

$$(1 + \mu x) \tilde{\theta}'' + \mu z s'' + \mu \left(\frac{dx}{ds} s' \left(\frac{1}{ne} + \tilde{\theta}' \right) + \frac{dz}{ds} s'^2 \right) + 2\xi_c \tilde{\theta}' = T_a \cos \bar{\omega} \tau, \quad (2.107a)$$

$$z \tilde{\theta}'' + s'' - \frac{1}{2} \frac{dx}{ds} \left(\frac{1}{ne} + \tilde{\theta}' \right)^2 + 2\xi_p s' = 0, \quad (2.107b)$$

avec

$$\mu = \frac{Nm_i (R_{0_i} + \rho_{0_i})^2}{J_c + NI_i}, \quad \text{et} \quad \xi_p = \frac{NC_{p_i}}{2Nm_i\omega_e} = \frac{C_{p_i}}{2m_i\omega_e}. \quad (2.108)$$

2.4.2 Étude linéaire

On s'intéresse maintenant à l'étude dynamique linéaire. Avant de pouvoir linéariser les équations du mouvement (2.107a) et (2.107b), nous devons choisir une trajectoire, c'est-à-dire la fonction x . En pratique cela n'a pas d'importance car il a été montré en section 2.3.2.2 que toutes les trajectoires, en particulier le cercle et la cycloïde, ne sont qu'une unique épicycloïde perturbée. On utilise donc l'expression de cette dernière, c'est-à-dire l'équation (2.59b), que l'on réécrit ci-dessous

$$x = 1 - n_p^2 s^2. \quad (2.109)$$

Ainsi, en substituant (2.109) dans (2.107a) et (2.107b), les équations linéaires s'écrivent :

$$(1 + \mu) \tilde{\theta}'' + \mu s'' + 2\xi_c \tilde{\theta}' = T_a \cos \bar{\omega} \tau, \quad (2.110)$$

$$\tilde{\theta}'' + s'' + \bar{\omega}_0^2 s + 2\xi_p s' = 0. \quad (2.111)$$

Sous cette forme, on fait apparaître $\bar{\omega}_0$ qui, on le rappelle, est la fréquence sans dimension des petites oscillations libres d'un pendule quelconque dans le champ d'accélération centrifuge. On redonne son expression ci-dessous

$$\omega_0 = n_p \Omega, \quad \omega_e = n_e \Omega \quad \rightarrow \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{n_p}{n_e}. \quad (2.112)$$

On recherche des solutions périodiques de la forme :

$$\tilde{\theta} = \text{Re} \left\{ \hat{\theta} e^{j\bar{\omega}t} \right\} \quad \text{and} \quad s = \text{Re} \left\{ \hat{s} e^{j\bar{\omega}t} \right\}, \quad (2.113)$$

où $(\hat{-})$ représente l'amplitude complexe de $(-)$ et j est l'unité imaginaire. En substituant ces expressions dans les équations linéarisées, on détermine l'expression des fonctions de réponse en fréquence (FRF) suivantes

$$H_\theta(\bar{\omega}) = \frac{\hat{\theta}}{T_a} = \frac{\bar{\omega}_0^2 - \bar{\omega}^2 + 2j\xi_p \bar{\omega}}{D(\bar{\omega})}, \quad (2.114)$$

$$H_s(\bar{\omega}) = \frac{\hat{s}}{T_a} = \frac{\bar{\omega}^2}{D(\bar{\omega})}, \quad (2.115)$$

avec

$$D(\bar{\omega}) = \bar{\omega}^4 - \bar{\omega}^2 \left((1 + \mu) \bar{\omega}_0^2 + 4\xi_p \xi_c \right) + 2j\bar{\omega} \left(\xi_c (\bar{\omega}_0^2 - \bar{\omega}^2) - \xi_p (1 + \mu) \bar{\omega}^2 \right). \quad (2.116)$$

La figure 2.34 montre l'évolution, en fonction de $\bar{\omega}$, des FRF du système.

On observe que l'absorbeur pendulaire est en réalité un absorbeur à masse accordée et la fréquence d'antirésonance $\bar{\omega}_{AR}$ du voile correspond, aux amortissements près, à la fréquence propre $\bar{\omega}_0$ (cf. numérateur de (2.114)). Dans le contexte automobile qui nous intéresse ici, on rappelle que la philosophie (cf. section 2.2.4) est d'accorder le pendule sur la fréquence fondamentale du couple moteur ω_e , c'est-à-dire $\bar{\omega} = 1$. En pratique, cela est assuré en choisissant les paramètres géométriques du pendule, R_0 et ρ_0 tels que

$$\bar{\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \omega_e \quad \Rightarrow \quad n_p = n_e \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}} = n_e. \quad (2.117)$$

Ainsi, le pendule est accordé sur la fréquence du moteur quelle que soit la vitesse de rotation Ω (cf. figure 2.35)

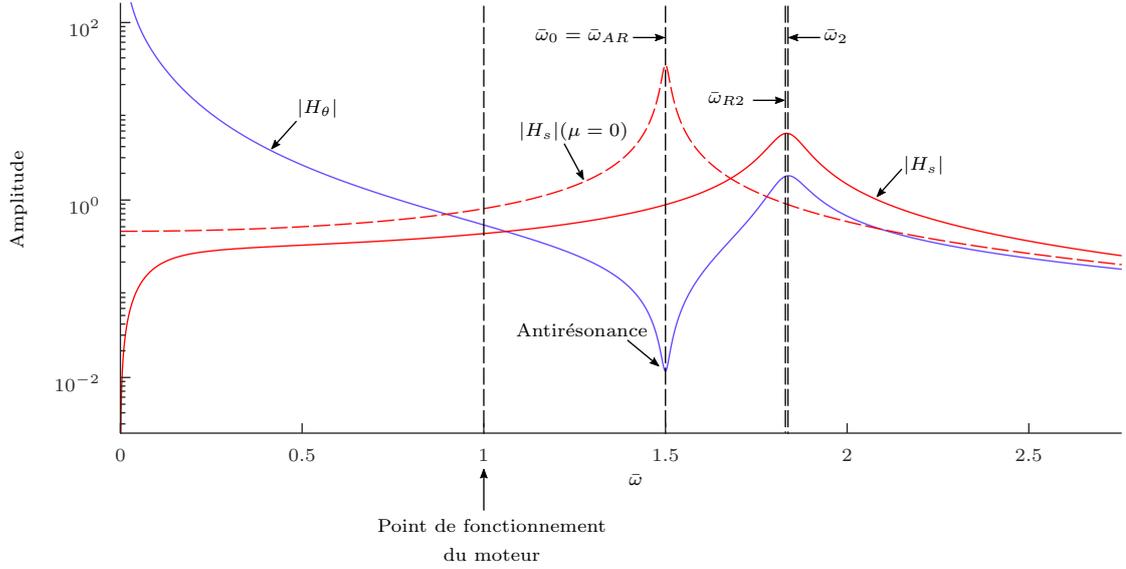


FIGURE 2.34 – Amplitude des FRF H_θ et H_s . $\mu = 0.5$, $\bar{\omega}_0 = 1.5$, $\xi_p = 0.01$ et $\xi_c = 0.1$.

On donne également l'expression des fréquences et vecteurs propres des deux modes linéaires du système :

$$\bar{\omega}_1 = 0, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_0 \sqrt{1 + \mu} \quad (2.118)$$

et les vecteurs propres associés :

$$\Phi_1 = [1 \quad 0]^\top, \quad \Phi_2 = \left[1 \quad -\frac{1 + \mu}{\mu} \right]^\top. \quad (2.119)$$

Le premier mode $(\Phi_1, \bar{\omega}_1)$ correspond à un mode de solide rigide où le pendule est immobile sur sa trajectoire à $s = 0$. Le deuxième mode $(\Phi_2, \bar{\omega}_2)$ est le mouvement en opposition de phase entre le pendule et le voile. Remarquez que le rapport des inerties μ , entre le pendule et le voile gouverne la proximité de la fréquence propre $\bar{\omega}_2$ à la fréquence d'antirésonance $\bar{\omega}_0$. Cela pose des problèmes par exemple pour les campagnes expérimentales sur banc d'essais (*cf.* chapitre 3). En effet, lors de ces essais, le voile est vissé, sur le banc ce qui mène à un rapport des inerties pouvant parfois être inférieur à 0.1 pour certaines applications. Dans ce cas très défavorable, la mesure de l'ordre d'accord n_p est rendue très difficile par la très forte proximité de la résonance.

2.4.3 Réponse non linéaire et validation du modèle.

Cette section compte deux objectifs. Le premier est de confronter le modèle dynamique de l'APC translaté (2.107) à d'autres modélisations utilisées par le partenaire industriel et implémentées dans des logiciels commerciaux d'intégration temporelle. Ces moyens logiciels sont présentés en section (2.4.3.1). On propose ensuite une comparaison, qui a été effectuée au début du projet, entre les solutions calculées par ces logiciels commerciaux et celles issues d'une procédure de continuation numérique présentée au chapitre 4. Cela permet, d'une part, d'apprécier la complémentarité des différentes approches et, d'autre part, de s'assurer que la modélisation adoptée en section 2.4.1 est cohérente avec les standards VALEO.

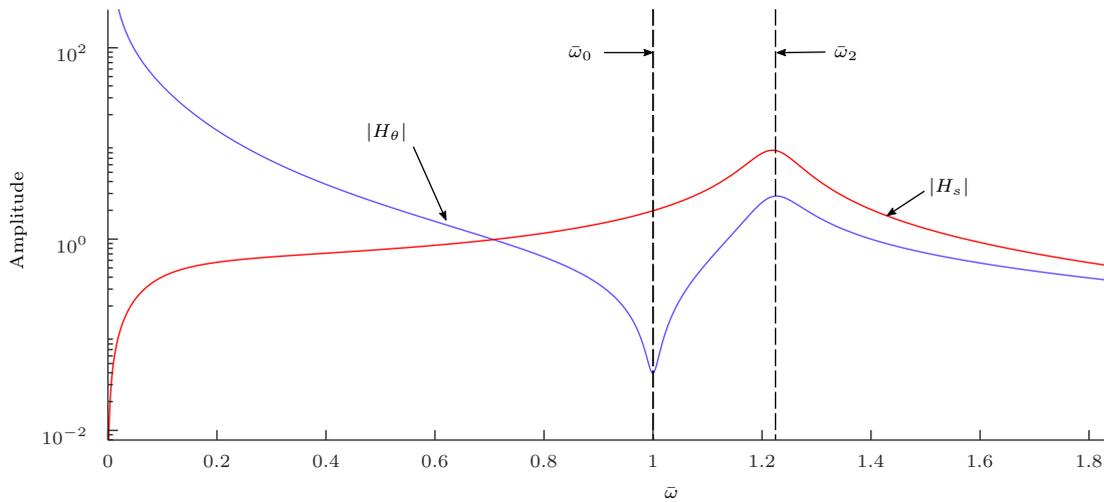


FIGURE 2.35 – Amplitude des FRF H_θ et H_s lorsque le pendule est accordé sur la fréquence d'excitation du moteur. $\mu = 0.5$, $\bar{\omega}_0 = 1$, $\xi_p = 0.01$ et $\xi_c = 0.1$.

Le deuxième objectif est de mettre en lumière le comportement non linéaire de l'APC translaté, plus particulièrement dans le cas de la trajectoire épicycloïdale. Cela permet de faire un bilan autour de ce système qui constitue le point de départ de la présente étude.

2.4.3.1 Présentation des logiciels commerciaux

LMS Amesim

La première solution logicielle du partenaire industriel est le logiciel *LMS Amesim* édité par Siemens. Il est largement utilisé dans l'industrie automobile et permet la modélisation de systèmes variés : hydraulique, pneumatique, électrique ou encore mécanique. C'est un logiciel de simulation 0D, dans le domaine temporel, permettant la modélisation d'un système complexe comme un ensemble de sous systèmes élémentaires couplés. Il offre donc une capacité d'évolution rapide du modèle très appréciable dans le contexte automobile où les architectures sont différentes d'une application à une autre. Il est en pratique utilisé pour la simulation de chaînes de transmission complètes dans des conditions variées telles que démarrage / arrêt moteur, accélération véhicule, calage moteur etc. La construction du modèle se fait via une interface utilisateur, illustrée en figure 2.36. Les éléments du modèle sont connectés entre eux selon la philosophie des graphes de liaisons [73] (*bond graphs* en anglais). Cela permet une représentation graphique causale des transferts d'énergie entre les systèmes élémentaires.

LMS Motion

Le deuxième moyen de simulation est le logiciel *LMS Motion*, lui aussi proposé par Siemens. C'est un logiciel de modélisation et simulation dans le domaine temporel de systèmes articulés, rigides ou non. Dans le contexte Valeo, il est surtout dédié à la simulation du pendule. Motion est interfacé avec le logiciel Catia ce qui permet l'importation d'une géométrie 3D visible en figure 2.37. Il est donc plus lourd d'utilisation que Amesim car il nécessite une étape de CAO. Une telle procédure n'est généralement mise en place qu'en fin de projet dans le cadre d'une validation finale. Il est également utilisé pour l'étude de phénomènes transitoires, par exemple les chocs des

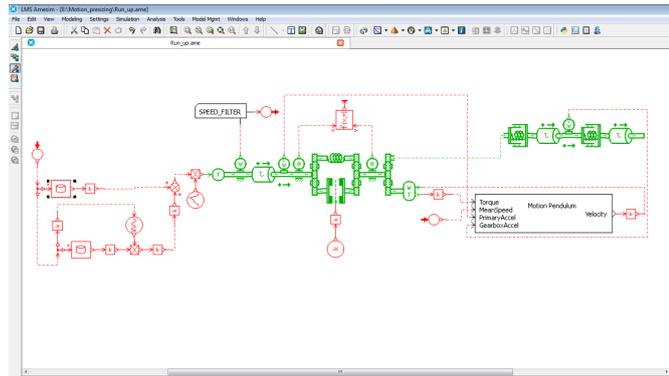


FIGURE 2.36 – Capture d'écran du logiciel LMS Amesim. Modèle de chaîne de transmission automobile.

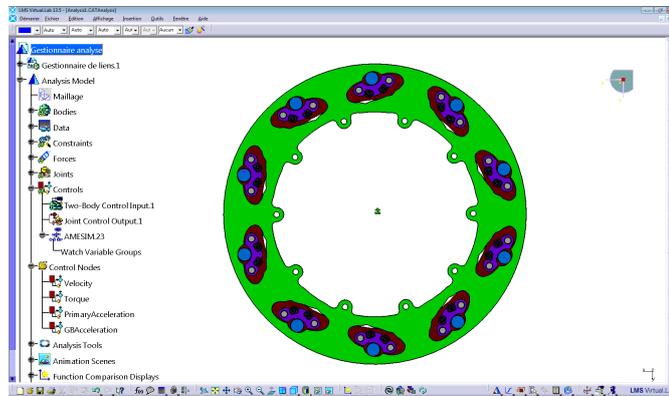


FIGURE 2.37 – Capture d'écran du logiciel LMS Motion. Modèle 3D d'un absorbeur pendulaire centrifuge à 5 pendules.

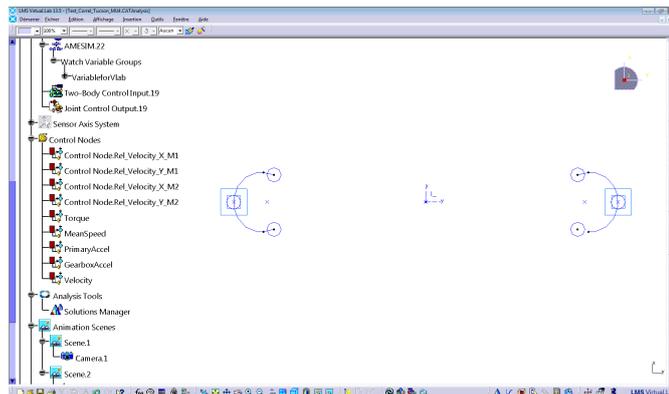


FIGURE 2.38 – Capture d'écran du logiciel LMS Motion. Modèle ponctuel d'un absorbeur pendulaire centrifuge à 2 pendules.

pendules sur le voile, ce qui est relativement coûteux en temps de calcul. Une procédure récente au sein de Valeo consiste à coupler les deux logiciels si bien que la chaîne de transmission peut être modélisée dans Amesim et le modèle de pendule dans Motion.

Une modélisation plus simple a été développée pour l'étude du régime permanent. Elle est illustrée en figure 2.38 et consiste à considérer le pendule comme un point matériel oscillant le long d'une trajectoire donnée. On est donc très proche de la modélisation adoptée en section 2.4.1, à ceci près que Motion permet la prise en compte d'effet compliquant comme l'action de la pesanteur ou encore la prise en compte de butées mécaniques dans le but de limiter la course du pendule.

2.4.3.2 Comportement non linéaire

La comparaison présentée ici se base sur deux modèles de références du partenaire industriel. Le premier est un modèle analytique issu de la littérature et proposé par Denman [7]. Il est très similaire au système établi en section 2.4.1 (*cf.* équation (2.107)) mis à part que Denman adopte une représentation de la trajectoire par son rayon de courbure. Ce modèle est implémenté dans le logiciel Amesim et constitue la base historique du développement des pendules Valeo. Le deuxième est un modèle de solides rigides articulés, type CAO comme celui de la figure 2.38, implémenté dans le logiciel Motion pendant la première année du projet, à l'occasion d'un stage ingénieur. À l'époque, la comparaison présentée ici a également servi à valider cette nouvelle modélisation. Nous avons donc à notre disposition deux moyens commerciaux de simulation dans le domaine temporel auxquels nous pouvons confronter notre modèle dynamique.

Nous avons opté pour deux méthodes de résolutions du système (2.107). La première est, comme précédemment, temporelle. Les équations dynamiques ont été codées dans le logiciel Matlab et résolues numériquement par la méthode de Runge-Kutta (*c'est* la routine `ode45` qui a été utilisée). La deuxième méthode est une technique de continuation numérique par pseudo longueur d'arc, la méthode asymptotique numérique (MAN) [25], couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique (EH) [24] (*harmonic balance method* en anglais). Cette méthode est présentée au chapitre 4. Le principe consiste à représenter la réponse du système sous la forme d'une série de Fourier tronquée. Cela suppose alors de postuler a priori de la forme de la solution et donc du nombre d'harmoniques H retenus dans l'approximation de la solution, qui est de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \sum_{j=1}^H \mathbf{x}^{cj} \cos j\bar{\omega}t + \mathbf{x}^{sj} \sin j\bar{\omega}t, \quad (2.120)$$

où l'indice j représente le $j^{\text{ème}}$ harmonique et avec $\mathbf{x}(t) = [\tilde{\theta}(t) \ s(t)]^T$, $\mathbf{x}^0 = [\tilde{\theta}^0 \ s^0]^T$, $\mathbf{x}^{cj} = [\tilde{\theta}^{cj} \ s^{cj}]^T$ et $\mathbf{x}^{sj} = [\tilde{\theta}^{sj} \ s^{sj}]^T$.

On se limite donc au calcul des solutions périodiques. En pratique on a utilisé le logiciel Manlab2.0 [74] qui est une application graphique interactive programmée en langage Matlab. Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur ces derniers points dans le chapitre 4.

Les simulations réalisées sont résumées dans le tableau 2.2. Il n'a pas été possible de réaliser le plan d'expérience complet avec, à chaque fois, les trois trajectoires simulées. Par exemple, la mise en donnée dans le logiciel Motion est longue et, à l'époque où a été réalisé cette validation (au début du projet), le modèle était encore en phase de développement.

On introduit la notation de l'amplitude du $j^{\text{ème}}$ harmonique de la série (2.120) que l'on gardera tout au long du manuscrit :

$$|x_k|^{H_j} = \sqrt{x_k^{cj^2} + x_k^{sj^2}}, \quad (2.121)$$

		Méthodes de résolution	
		intégration temporelle	MAN + EH
Modèles	Analytique	Modèle de la littérature [7] résolu avec Amesim (Trajs. circulaire et épicycloïdale) Système (2.107) résolu avec ode45 de Matlab (Trajs. circulaire et épicycloïdale)	Système (2.107) implémenté dans Manlab2.0 (Trajs. circulaire, épicycloïdale et cycloïdale)
	CAO	Modèle CAO Motion comme illustré en figure 2.38 (Traj. cycloïdale)	

TABLE 2.2 – Récapitulatif des simulations réalisées en vue d’une validation du modèle analytique de pendule (2.107).

avec x_k la $k^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{x} . Les simulations temporelles ont été menées jusqu’à l’obtention du régime permanent puis une décomposition en série de Fourier a été appliquée à la dernière période du signal. De plus, les solutions finales de la simulation $n - 1$ ont été réinjectées comme conditions initiales de la simulation n afin d’acquérir au mieux la courbe de réponse.

Les résultats sont présentés en figure 2.39 pour les 5 premiers harmoniques. On constate que la réponse est riche et qu’il existe un très bon accord entre les solutions des différents moyens de simulation employés. De petites divergences apparaissent à partir de l’harmonique 4, certainement dues à un régime permanent pas parfaitement établi. Comme les simulations temporelles sont exécutées à chaque fois pour une fréquence d’excitation donnée, on obtient une représentation discrète de la solution sous la forme d’un nuage de points dont le nombre égale celui des simulations réalisées. Pour se rapprocher d’une représentation continue il faudrait alors réaliser un nombre extrêmement important d’intégrations temporelles, ce qui est coûteux en temps de calcul. Quand bien même ce nombre tendrait vers l’infini, les solutions instables seraient toujours inaccessibles, comme on peut le voir au voisinage de la résonance primaire (RP).

On voit que le système est assouplissant et ce, indépendamment de l’allure de la trajectoire. Il est malgré tout intéressant de constater une hiérarchie dans le comportement de la résonance primaire. Le cercle est donc plus assouplissant que l’épicycloïde elle même plus assouplissante que la cycloïde. Cette hiérarchie montre que le comportement intrinsèque du pendule, identifié en section 2.3.2.4 dans le champ d’accélération centrifuge uniforme, est évidemment toujours présent mais perturbé par un autre phénomène. Outre les non-linéarités géométriques induites par les trajectoires, il existe de forts couplages inertiels non linéaires entre le pendule et son support (*cf.* équation (2.107)). Cela tend à montrer que se sont leurs effets qui prévalent sur ceux des non-linéarités géométriques (*cf.* section 3.4.2). De plus, l’intensité du champ d’accélération centrifuge n’est plus constante ($\theta \neq 0$), la tautochronicité du pendule épicycloïdal, identifiée en section 2.3.2.1, n’est donc plus vraie.

2.4. L'ABSORBEUR PENDULAIRE CENTRIFUGE TRANSLATÉ

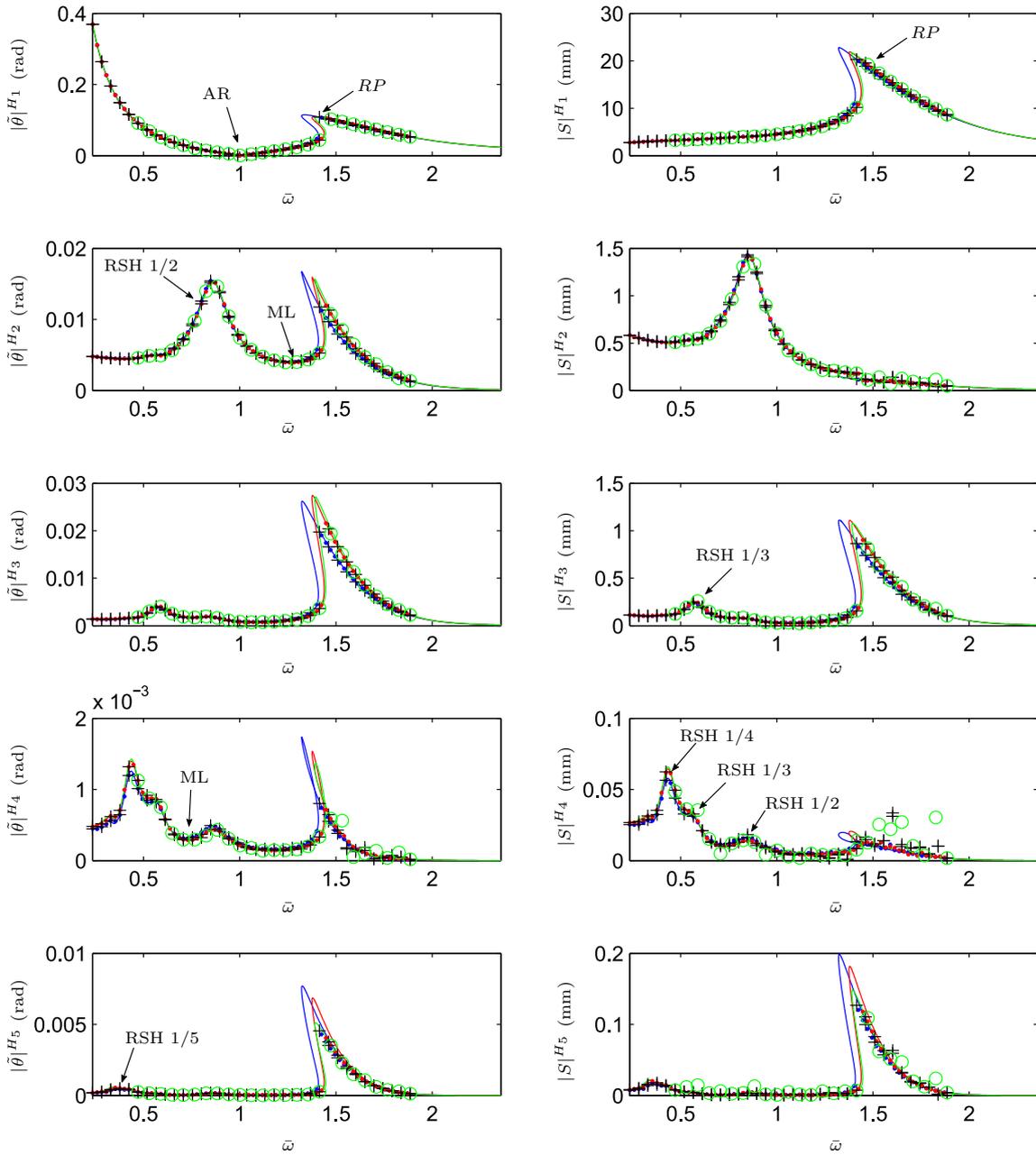


FIGURE 2.39 – Amplitudes des 5 premiers harmoniques de $\tilde{\theta}$ et s . Traits pleins : continuation numérique ($H = 5$), + : Amesim, \circ : Motion et \bullet : Matlab (ode45). Trajectoires : **circulaire**, **épicycloïdale** et **cycloïdale**. Paramètres : $n_p = n_e = \sqrt{4.5} \Rightarrow \bar{\omega}_0 = 1$, $\mu = 2.09$, $\xi_c = 0.25$, $\xi_p = 0.001$ et $T_a = 0.0875$. RP : résonance primaire, RSH : résonance super harmonique et ML : minimum local.

Les non-linéarités du système provoquent une distorsion harmonique de la réponse. Bien que l'excitation soit monochromatique, on voit que la réponse totale est une composition d'harmoniques de la forme de (2.120). Les non-linéarités inertielles évoquées plus haut sont quadratiques, ce qui implique des harmoniques paires alors que les harmoniques impaires sont principalement dues aux non-linéarités induites par la trajectoire du pendule. La solution périodique de l'oscillateur de Duffing, par exemple, n'est composée que d'harmoniques impaires car la non-linéarité est cubique. On voit apparaître des résonances *super-harmoniques* (RSH) principalement visibles sur les harmoniques supérieurs de la réponse. Comme le $j^{\text{ème}}$ harmonique oscille j fois plus vite que $\bar{\omega}$, alors la résonance primaire sera excitée j fois plus tôt par l'harmonique j que par l'excitation du système. Les RSH ne sont donc en réalité que la résonance primaire qui répond à des sous multiples de sa propre fréquence.

On retrouve l'antirésonance (AR) à $\bar{\omega} = 1$ sur $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ et non sur $|s|^{H_1}$, comme vu lors de l'étude linéaire en section 2.4.2. Il est intéressant de remarquer que les harmoniques supérieurs $|\tilde{\theta}|^{H_{n>1}}$ n'en comportent pas. On identifie bien des minimum locaux (ML) mais ce ne sont pas des antirésonances. Une antirésonance apparaît lorsque qu'une partie du système, en l'occurrence ici le pendule, oscille de façon à contrebalancer l'effort extérieur, si bien que le bilan des forces sur un degré de liberté (le voile) est, dans le cas conservatif, nul [75]. Comme le couple appliqué au voile est de la forme $\tilde{T} \cos \bar{\omega} \tau$, un tel équilibre sur les harmoniques supérieurs n'est pas possible. En plus de dépendre du point d'excitation et du point d'observation, l'antirésonance dépend également de l'harmonique sur lequel l'effort extérieur est appliqué.

La figure 2.40 montre une vue 3D plus explicite du paysage dynamique de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ dans le cas des trajectoires circulaires et épicycloïdales. Le cas de la cycloïde n'apparaît pas car il est quali-

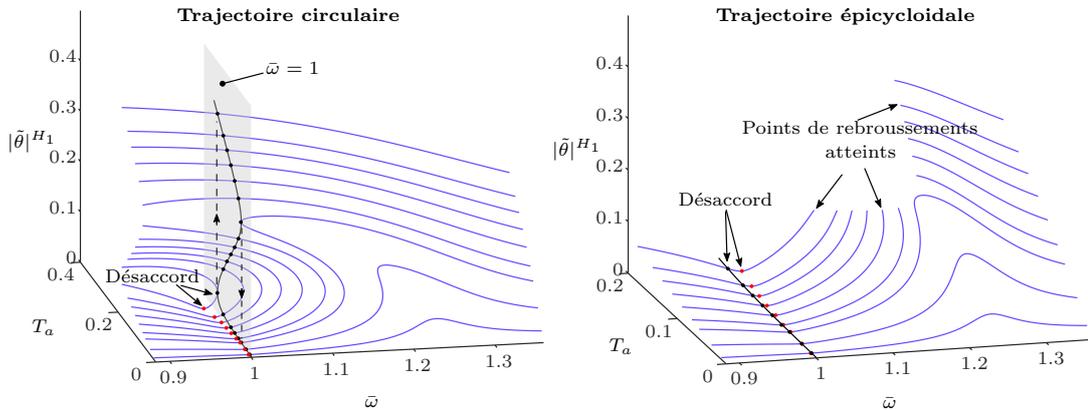


FIGURE 2.40 – Évolution de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ à mesure que l'amplitude d'excitation T_a augmente. Trajectoire circulaire (à gauche). Trajectoire épicycloïdale (à droite). Les courbes bleues sont des continuations à T_a fixé et $\bar{\omega}$ libre. Les courbes noires sont des continuations à $\bar{\omega} = 1$ et T_a libre. Les points rouges représentent les lieux des antirésonances : $\min(|\tilde{\theta}|^{H_1})$. Paramètres : $H = 5$, $n_p = n_e = 2 \Rightarrow \bar{\omega}_0 = 1$, $\mu = 0.525$, $\xi_c = 0.05$ et $\xi_p = 0.009$

tativement le même que celui de l'épicycloïde. Plusieurs réponses en fréquence ont été réalisées (courbes bleues) pour différentes amplitudes d'excitation du système et agencées les unes derrière les autres. Intéressons-nous d'abord au pendule circulaire. Le plan grisé correspond à $\bar{\omega} = 1$; c'est dans ce plan qu'évolue la réponse forcée en condition véhicule (courbe noire). On voit clairement

la résonance assouplissante grandir à mesure que l'amplitude d'excitation croît. À tel point que la résonance croise le point de fonctionnement du système ($\bar{\omega} = 1$) et la réponse à la fréquence moteur est alors sujette au phénomène de saut à partir d'une valeur critique du couple d'excitation (*cf.* section 3.5.1). On remarque que les courbes de la figure de droite sont comme "coupées" ; c'est une conséquence de la présence des points de rebroussement (*cf.* section 2.3.2.2) aux extrémités de l'épicycloïde (et de la cycloïde). Comme la trajectoire au-delà de ces points n'est pas définie, le calcul de la réponse forcée en est impossible.

Les points rouges visibles en figure 2.40 représentent le lieu de l'antirésonance de chaque FRF : $\min(|\tilde{\theta}|^{H_1})$. C'est donc le point de fonctionnement théorique du système, en tout cas celui espéré. Le pendule a été accordé selon la théorie linéaire, via la relation 2.117, de sorte que la fréquence d'antirésonance coïncide (dans le cas conservatif) avec la fréquence d'excitation du moteur. On voit que c'est bien le cas (à l'amortissement près) pour une amplitude d'excitation faible mais, à mesure que T_a augmente, le pendule se désaccorde. On constate que l'évolution dépend de la trajectoire : pour le cercle la fréquence d'antirésonance diminue et augmente dans le cas de l'épicycloïde.

Afin d'avoir une vision clair de la situation, on montre, en figure 2.41, l'évolution de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ au voisinage de l'antirésonance pour les trois trajectoires considérées précédemment et en fonction du nombre d'harmoniques H retenus dans (2.120). On constate que, lorsque la solution est approchée par une série de Fourier tronquée à un harmonique, il existe une similarité qualitative entre les antirésonances des systèmes couplés d'une part et les résonances des pendules découplés (*cf.* section 2.3.2.4) d'autre part. On imagine bien que le comportement illustré à la première ligne de la figure 2.41 n'est pas représentatif de la réalité car nous avons montré en section précédente que la réponse du système est beaucoup plus riche. En ne considérant qu'un seul harmonique dans l'approximation de la solution, on néglige de ce fait les harmoniques supérieurs, eux mêmes engendrés par les non-linéarités du système. Finalement, l'approximation à un harmonique revient à négliger les non-linéarités inertielles (quadratiques) qui n'engendrent que des harmoniques paires.

En enrichissant l'approximation jusqu'à 5 harmoniques, on observe une évolution quantitative et qualitative de la réponse pour les trois trajectoires considérées. Il est intéressant de constater que le comportement de l'antirésonance n'est pas nécessairement le même que celui de la résonance primaire qui est, elle, assouplissante. Pour la trajectoire circulaire, l'antirésonance présente le même comportement mais, pour les trajectoires épicycloïdale et cycloïdale, l'antirésonance est raidissante. Dans l'absolu, la trajectoire épicycloïdale est donc un meilleur compromis car le désaccord du système pour une amplitude d'excitation donnée est moindre que dans le cas du cercle ou de la cycloïde.

2.4.4 Bilan de l'étude de l'absorbeur pendulaire translaté

Cette section a permis de mettre en évidence l'influence de la trajectoire du centre de masse du pendule sur le comportement de l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC) translaté. Plus particulièrement, sur le comportement de l'antirésonance. La première conclusion évidente est que l'épicycloïde n'est pas la trajectoire tautochrone du système, contrairement à ce qui a été affirmé en section 2.3. La différence majeure avec les oscillateurs pendulaires de la section 2.3 est que, dans le cas de l'APC, le champ d'accélération centrifuge n'est pas uniforme du fait des interactions non linéaires entre le pendule et le voile. Cela engendre une dépendance des fréquences d'antirésonances et de résonances à mesure que l'amplitude des oscillations grandit. Il y a donc là une perte de performance évidente car la fréquence de fonctionnement en condition

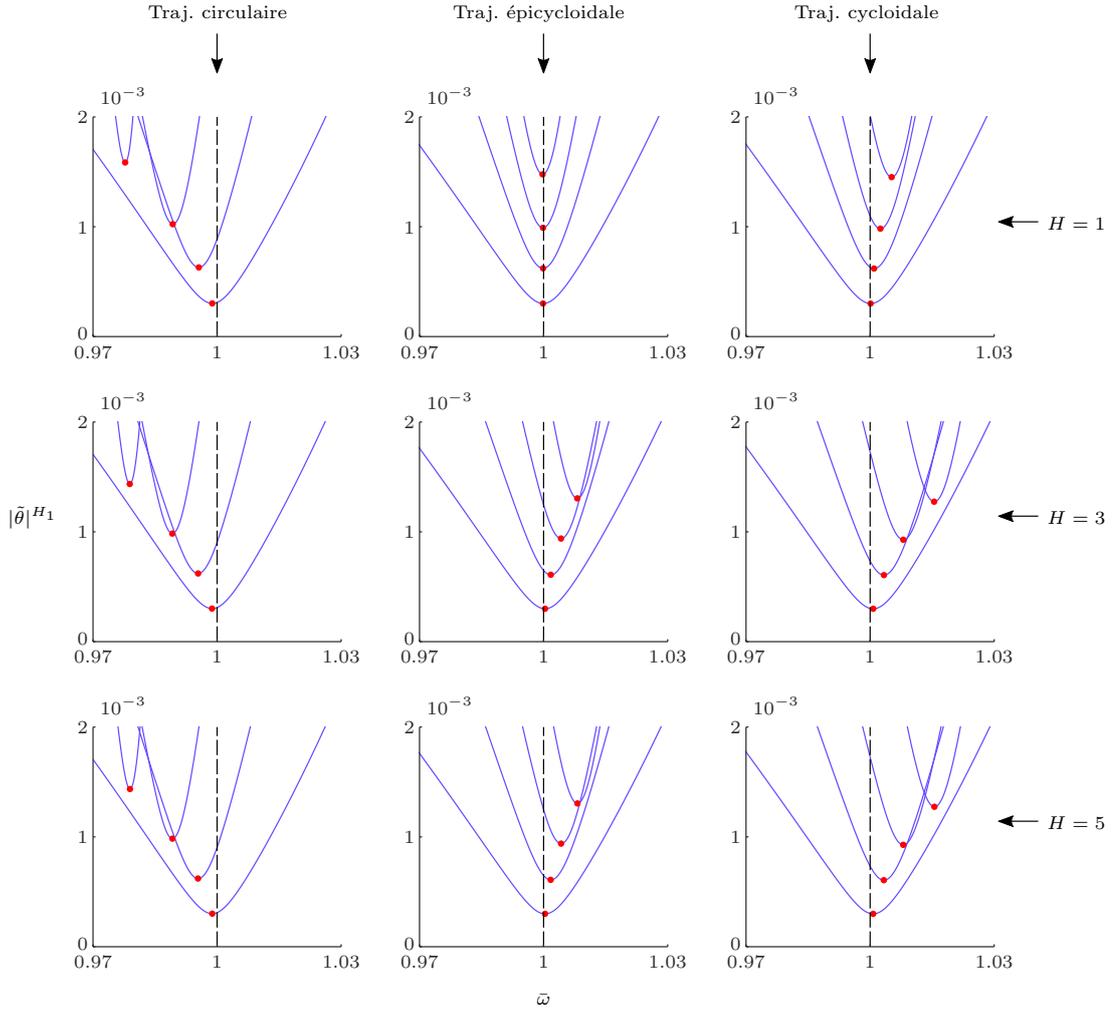


FIGURE 2.41 – Amplitude de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ au voisinage de l'antirésonance pour différentes valeurs d'amplitude d'excitation : $T_a = [0.0125, 0.025, 0.0375, 0.05]$. Les points rouges représentent les lieux des antirésonances : $\min(|\tilde{\theta}|^{H_1})$. Calculs issus d'une continuation numérique en fonction de l'évolution du nombre d'harmoniques H retenues dans l'approximation (2.120). Paramètres : $n_p = n_e = 2 \Rightarrow \bar{\omega}_0 = 1$, $\mu = 0.525$, $\xi_c = 0.05$ et $\xi_p = 0.009$

véhicule ($\bar{\omega} = 1$) ne correspond pas à la fréquence optimale ; la fréquence d'antirésonance. Dans la suite du document, particulièrement au chapitre 3, on s'attachera à proposer des solutions dans l'objectif d'améliorer l'absorbeur pendulaire centrifuge.

Chapitre 3

L'absorbeur pendulaire de nouvelle génération

Ce chapitre est dédié à l'amélioration de l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC) translaté, abordé au chapitre 2. La technologie traditionnelle de cet absorbeur consiste à imposer un mouvement de translation aux pendules et une trajectoire épicycloïdale à leurs centres de gravité. L'étude menée ici se place dans le cadre plus général d'une nouvelle génération d'APC et s'articule autour de deux axes centraux. Le premier consiste en une optimisation linéaire des performances en exploitant l'inertie de rotation des pendules, ce que ne permet pas la technologie actuelle. Le deuxième axe proposé est la correction de la dépendance en fréquence de l'antirésonance du système, mise en évidence en section 2.4.3. Pour cela, l'épicycloïde est remise en question et des trajectoires originales sont proposées.

Dans un premier temps, les équations du mouvement de l'APC nouvelle génération sont établies en section 3.2, et des premiers critères de dimensionnement basés sur l'étude linéaire des performances de la section 3.3 sont déterminés. Ils sont résumés en section 3.3.3. Dans un second temps, une méthode analytique de perturbation couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique est utilisée afin d'établir des recommandations de dimensionnement des nouvelles trajectoires. La procédure est d'abord présentée sur un système à deux ddl à non-linéarité cubique en section 3.4.1 puis appliquée à l'APC en section 3.4.2. L'étude non linéaire des performances de la section 3.4.3 permettra d'apprécier le bénéfice des critères proposés sur le comportement de l'APC. Enfin, une étude expérimentale de l'APC nouvelle génération menée sur banc d'essai est proposée en section 3.5.1.

Sommaire

3.1	Définition du système	74
3.2	Modélisation	75
3.3	Étude linéaire.	77
3.3.1	Accord linéaire.	79
3.3.2	Performances	80
3.3.3	Bilan de l'étude linéaire	84
3.4	Correction analytique de l'antirésonance	86
3.4.1	Application à un système de duffing	86
3.4.2	Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge	91
3.4.3	Performances	95
3.4.3.1	Performance à l'antirésonance	96
3.4.3.2	Performance à la fréquence de fonctionnement	99
3.4.3.3	Bilan de l'étude de performance.	102
3.5	Étude expérimentale	103
3.5.1	Description du banc d'essai	103
3.5.2	Protocoles expérimentaux	104
3.5.3	Modélisation de l'essai sur banc	106
3.5.4	Description des cas d'études	106
3.5.5	Résultats.	107
3.5.5.1	L'application légère	107
3.5.5.2	L'application conventionnelle	108
3.5.6	Bilan de l'étude expérimentale.	112

3.1 Définition du système

On considère, dans ce chapitre, un APC de nouvelle génération illustré en figure 3.1. À l'instar

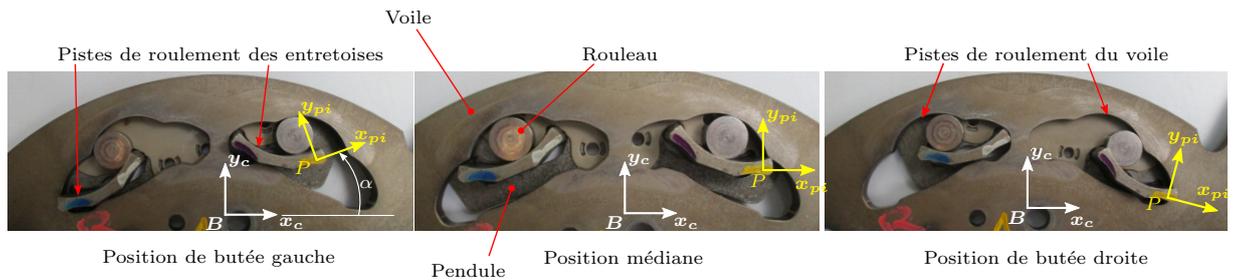


FIGURE 3.1 – Absorbeur pendulaire centrifuge de nouvelle génération.

de l'APC classique translaté (cf. section 2.4.1), il est constitué d'un voile sur lequel N pendules sont articulés. Le centre de gravité des pendules décrit une trajectoire bien précise. Cette trajectoire résulte du roulement de deux rouleaux sur des pistes de forme particulière, usinées dans le voile et dans des entretoises qui appartiennent au pendule. L'originalité de l'APC de nouvelle génération réside dans le mouvement des pendules. En effet, ces derniers tournent autour de leur

centre de gravité lors de leur déplacement par rapport au voile. Là encore, ce mouvement de rotation résulte de la forme particulière donnée aux pistes de roulement des rouleaux de guidage. Plus précisément, si on définit le repère $\mathcal{R}_{p_i}(P, \mathbf{x}_{p_i}, \mathbf{y}_{p_i}, \mathbf{z}_{p_i})$ attaché au $i^{\text{ème}}$ pendule au point P et le repère $\mathcal{R}_c(B, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$ attaché au voile au point B , alors \mathcal{R}_{p_i} s'oriente par rapport à \mathcal{R}_c d'un angle α qui évolue à mesure que le pendule se déplace par rapport au voile.

3.2 Modélisation

L'APC de nouvelle génération présenté sur la figure 3.1 est modélisé par un ensemble de solides rigides articulés. On ne modélisera pas les rouleaux et donc les pistes de roulement pour des raisons de facilité d'écriture des équations. Le mouvement des pendules sera donc géré en imposant la trajectoire de leur centre de masse, comme ce qui a été fait pour l'APC translaté. On néglige également l'action de la gravité en considérant que le voile tourne à une vitesse telle que l'intensité du champ d'accélération centrifuge est grande devant celle du champ de pesanteur. Le modèle qui a été choisi est représenté en figure 3.2. C'est essentiellement le même que celui de l'APC translaté si ce n'est que les pendules sont maintenant autorisés à tourner autour de leur centre de masse. Plus précisément, le repère \mathcal{R}_{p_i} attaché au $i^{\text{ème}}$ pendule en G_i tourne autour de \mathbf{z}_{p_i} d'un angle $\alpha_i(S_i)$ par rapport au repère \mathcal{R}_c attaché au voile (*cf.* figure 3.2). L'angle $\alpha_i(S_i)$ n'est pas un ddl supplémentaire mais est fonction du déplacement du pendule S_i le long de la trajectoire \mathcal{C}_i .

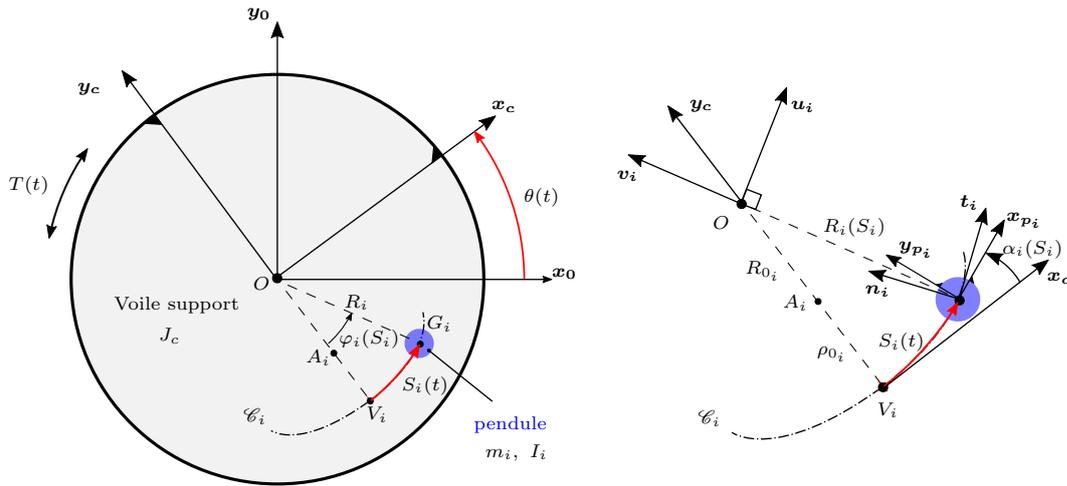


FIGURE 3.2 – Ajout d'une mobilité de rotation $\alpha_i(S_i)$ au $i^{\text{ème}}$ pendule centrifuge (à droite).

L'énergie cinétique totale (2.98) s'écrit désormais

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{S}_i^2 + X_i \dot{\theta}^2 + 2\dot{S}_i \dot{\theta} Z_i \right) + \sum_{i=1}^N I_i \left(\dot{\alpha}_i(S_i) + \dot{\theta} \right)^2 + J_c \dot{\theta}^2 \right), \quad (3.1)$$

que l'on peut réécrire en utilisant la règle de dérivation en chaîne, sous la forme

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{S}_i^2 + X_i \dot{\theta}^2 + 2\dot{S}_i \dot{\theta} Z_i \right) + \sum_{i=1}^N I_i \left(\Gamma_i \dot{S}_i + \dot{\theta} \right)^2 + J_c \dot{\theta}^2 \right), \quad (3.2)$$

où l'on a posé $\Gamma_i = \frac{d\alpha_i(S_i)}{dS_i}$. On voit que cette mobilité de rotation des pendules ajoute une contribution dans l'énergie cinétique totale d'autant plus importante que les inerties de rotation des pendules I_i sont grandes, chose que ne permet pas le système à translation pure. On remarque également que ce n'est pas α_i qui intervient mais sa variation par rapport à S_i . La position angulaire initiale des pendules n'altère en rien le comportement du système.

En appliquant la méthode de Lagrange à l'énergie 3.2, de la même manière que cela a été fait en section 2.4.1, on détermine les équations du mouvement suivantes :

$$\left(J_c + \sum_{i=1}^N (I_i + m_i X_i) \right) \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N (m_i Z_i + I_i \Gamma_i) \ddot{S}_i + \sum_{i=1}^N \left(m_i \left(\frac{dX_i}{dS_i} \dot{S}_i \dot{\theta} + \frac{dZ_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + I_i \frac{d\Gamma_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + C_c \dot{\theta} = T_0 + \tilde{T} \cos \omega_n t, \quad (3.3a)$$

$$(m_i Z_i + I_i \Gamma_i) \ddot{\theta} + (m_i + I_i \Gamma_i^2) \ddot{S}_i - \frac{1}{2} \left(m_i \frac{dX_i}{dS_i} \dot{\theta}^2 - I_i \frac{d\Gamma_i^2}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + C_{p_i} \dot{S}_i = 0, \quad i = 1 : N. \quad (3.3b)$$

On observe que la rotation du pendule induit de nouvelles forces internes entre les pendules et le voile, par rapport au système de la section 2.4 (cf. équation (2.100)). Le terme $I_i d\Gamma_i/dS_i \dot{S}_i^2$ dans l'équation (3.3a) correspond au couple exercé par un pendule sur le voile lors de sa rotation accélérée autour de son centre de masse. En effet, si l'angle α_i évolue linéairement par rapport à S_i , la rotation est uniforme et $d\Gamma_i/dS_i$ est nul. Il en est de même pour le terme non linéaire $I_i d\Gamma_i^2/dS_i \dot{S}_i^2$ de l'équation 3.3b qui, lui, correspond à un effort non linéaire le long de la trajectoire.

Les couplages inertiels des deux équations dynamiques, $m_i + I_i \Gamma_i$, sont également impactés par cet effet de rotation via le terme $I_i \Gamma_i$. Une chose intéressante est que Γ_i peut éventuellement être négatif (selon que le pendule i tourne dans un sens ou dans l'autre), Z_i est, lui, toujours positif (éventuellement nul) ; le couplage inertiel entre les pendules et voile sera donc plus ou moins intense selon le signe de Γ_i .

Enfin, la chose essentielle à remarquer est le deuxième terme de l'équation (3.3b) qui correspond à la masse du $i^{\text{ème}}$ pendule. Comme Γ_i y apparaît au carré et que l'inertie de rotation I_i est toujours positive alors la masse apparente $m_i + I_i \Gamma_i$ est supérieure à la masse réelle m_i . La rotation du pendule est donc un bon moyen pour alourdir "virtuellement" les pendules. En d'autres termes, le système étudié en section 2.4 (cf. figure 2.32) et celui considéré ici (cf. figure 3.2) auront le même poids sur la balance (toutes choses égales par ailleurs) mais la masse dynamique du deuxième sera plus importante.

Là encore, on propose d'exprimer les équations de la dynamique sous une forme adimensionnée. On définit pour cela un nouveau paramètre

$$\eta_i = \frac{I_i}{m_i (R_{0_i} + \rho_{0_i})^2}, \quad (3.4)$$

qui représente le rapport entre l'inertie de rotation d'un pendule sur son inertie équivalente exprimée au point O . En substituant les expressions (2.66), (2.69), (2.101), (2.104), (2.105) et (3.4)

dans les équations (3.3a) et (3.3b), les équations du mouvement s'écrivent :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^N \mu_i x_i\right) \tilde{\theta}'' + \sum_{i=1}^N \mu_i (z_i + \eta_i \gamma_i) s_i'' + \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{dx_i}{ds_i} \left(\frac{1}{n_e} + \tilde{\theta}' \right) s_i' + \left(\frac{dz_i}{ds_i} + \eta_i \frac{d\gamma_i}{ds_i} \right) s_i'^2 \right) + 2\xi_c \tilde{\theta}' = T_a \cos \bar{\omega} \tau, \quad (3.5a)$$

$$(z_i + \eta_i \gamma_i) \tilde{\theta}'' + (1 + \eta_i \gamma_i^2) s_i'' - \frac{1}{2} \left(\frac{dx_i}{ds_i} \left(\frac{1}{n_e} + \tilde{\theta}' \right)^2 - \eta_i \frac{d\gamma_i^2}{ds_i} \dot{s}_i^2 \right) + 2\xi_{p_i} s_i' = 0, \quad (3.5b)$$

$i = 1 : N,$

avec $\gamma_i = (R_{0_i} + \rho_{0_i}) \Gamma_i$. En supposant que les pendules soient tous strictement identiques et oscillent à l'unisson *i.e.* $s_i = s \forall i$, on peut les représenter par un unique pendule équivalent. On arrive finalement à

$$(1 + \mu x) \tilde{\theta}'' + \mu (z + \eta \gamma) s'' + \mu \left(\frac{dx}{ds} \left(\frac{1}{n_e} + \tilde{\theta}' \right) s' + \left(\frac{dz}{ds} + \eta \frac{d\gamma}{ds} \right) s'^2 \right) + 2\xi_c \tilde{\theta}' = T_a \cos \bar{\omega} \tau, \quad (3.6a)$$

$$(z + \eta \gamma) \tilde{\theta}'' + (1 + \eta \gamma^2) s'' - \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{ds} \left(\frac{1}{n_e} + \tilde{\theta}' \right)^2 - \eta \frac{d\gamma^2}{ds} \dot{s}^2 \right) + 2\xi_p s' = 0, \quad (3.6b)$$

avec

$$\eta = \frac{N I_i}{N m_i (R_{0_i} + \rho_{0_i})^2} = \frac{I_i}{m_i (R_{0_i} + \rho_{0_i})^2}. \quad (3.7)$$

3.3 Étude linéaire.

On s'intéresse maintenant à l'effet de la rotation du pendule sur le comportement linéaire du système. La section 3.3.1 permettra de voir si la préconisation de l'accord du système à translation (équation (2.117), section 2.4.2) est toujours d'actualité ou non. La section 3.3.2, quant à elle, permettra d'évaluer la pertinence du mouvement de rotation sur la performance du système.

On propose d'adopter une représentation polynomiale de l'angle de rotation α , comme cela est fait pour l'expression de la forme de la trajectoire, x (*cf.* équation 2.61, section 2.3.2.2). On écrit donc α sous la forme :

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N_\alpha} \alpha_i s^i. \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) est exprimée en fonction du déplacement sans dimension s (*cf.* équation (2.58), section 2.3.2.2). Les coefficients α_i , $i = 1 \dots k$ sont donc également sans dimension. On donne ci-dessous la relation permettant de redimensionner ces coefficients. Plus particulièrement, si l'angle de rotation α , en radian, s'écrit en fonction de l'abscisse curviligne S , en mètre, sous la forme

$$\alpha(S) = a_0 + \sum_{i=1}^{N_\alpha} a_i S^i, \quad (3.9)$$

alors les coefficients a_i s'expriment en fonction des α_i tels que

$$a_i = \frac{\alpha_i}{(R_0 + \rho_0)^i}. \quad (3.10)$$

Le coefficient a_1 s'exprime donc en radian par mètre. C'est le taux de rotation physique du pendule lorsqu'il se déplace le long de sa trajectoire.

Pour le choix de la fonction x , on utilise celle de l'épicycloïde car, au voisinage de $s = 0$, le cercle comme la cycloïde ne représentent qu'une unique épicycloïde (cf. section 2.3.2.2). On réécrit son expression ci-dessous :

$$x = 1 - n_p^2 s^2. \quad (3.11)$$

Pour rappel, le passage des coefficients sans dimension de la fonction x à ceux de l'expression dimensionnée X , en mètre carré, s'effectue via la relation (2.63) (cf. section 2.3.2.2). On substitue donc (3.11) dans les équations (3.6a) et (3.6b), puis en linéarisant le résultat, on trouve

$$(1 + \mu) \tilde{\theta}'' + \mu(1 + \eta\alpha_1) s'' + 2\xi_c \tilde{\theta}' = T_a \cos \bar{\omega}\tau, \quad (3.12a)$$

$$(1 + \eta\alpha_1) \tilde{\theta}'' + (1 + \eta\alpha_1^2) s'' + \bar{\omega}_0^2 s + 2\xi_p s' = 0. \quad (3.12b)$$

Comme cela a été évoqué brièvement dans la section précédente, le taux de rotation du pendule, désigné ici par α_1 , joue un rôle particulier dans le couplage inertiel du système. On remarque que le terme $1 + \eta\alpha_1$ des équations (3.12a) et (3.12b) disparaît lorsque $\alpha_1 = -\frac{1}{\eta}$. Physiquement, cela traduit que la somme des moments exercés par le pendule sur le voile est nulle et que, par conséquent, le pendule reste immobile sur sa trajectoire en $s = 0$ quelle que soit l'amplitude d'excitation. Notez également qu'une valeur de α_1 négative correspond à un pendule dont la rotation s'effectue "dans le sens inverse" à son déplacement, comme illustré en figure 3.3.

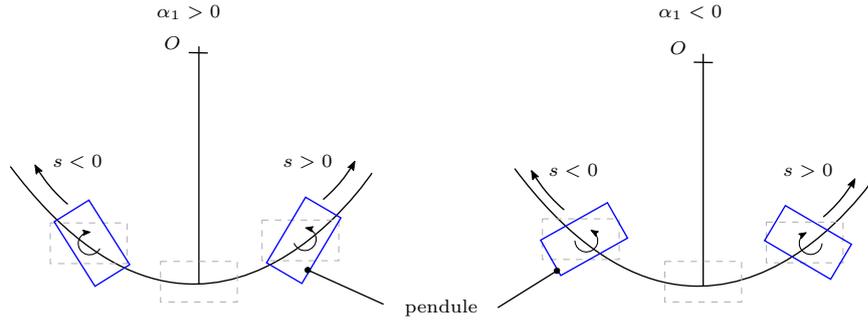


FIGURE 3.3 – Illustration du mouvement de rotation du pendule en fonction du signe de α_1 .

Le système comporte deux modes linéaires dont les fréquences sont :

$$\bar{\omega}_1 = 0 \quad , \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_0 \left(\frac{1 + \mu}{1 + \eta\alpha_1 (\alpha_1 (1 + \mu) - \mu (2 + \eta\alpha_1))} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.13)$$

et les vecteurs propres associés sont :

$$\Phi_1 = [1 \quad 0]^T \quad , \quad \Phi_2 = \left[1 \quad -\frac{1 + \mu}{\mu (1 + \eta\alpha_1)} \right]^T. \quad (3.14)$$

Le premier mode est le mode de solide rigide où le pendule est immobile sur sa trajectoire au point V , le deuxième est le mode en opposition de phase. Là encore, si $\alpha_1 = -\frac{1}{\eta}$ alors la forme

3.3. ÉTUDE LINÉAIRE.

de Φ_2 est celle d'un mode de solide rigide *i.e.* $\Phi_2 = [0 \ 1]^\top$, mais $\bar{\omega}_2$ est non nulle, ce qui traduit bien un découplage des oscillateurs.

En cherchant des solutions de la forme de (2.113), les fonctions de réponse en fréquence du système s'écrivent :

$$H_\theta(\bar{\omega}) = \frac{\hat{\theta}}{T_a} = \frac{\bar{\omega}_0^2 - (1 + \eta\alpha_1^2)\bar{\omega}^2 + 2j\xi_p\bar{\omega}}{D(\bar{\omega})}, \quad (3.15a)$$

$$H_s(\bar{\omega}) = \frac{\hat{s}}{T_a} = \frac{(1 + \eta\alpha_1)\bar{\omega}^2}{D(\bar{\omega})}, \quad (3.15b)$$

avec

$$\begin{aligned} D(\bar{\omega}) = & \bar{\omega}^4 \left(1 + \eta\alpha_1 \left(\alpha_1 (1 + \mu) - \mu (2 + \eta\alpha_1) \right) \right) - \bar{\omega}^2 \left((1 + \mu)\bar{\omega}_0^2 + 4\xi_p\xi_c \right) \\ & + 2j\bar{\omega} \left(\xi_c (\bar{\omega}_0^2 - (1 + \eta\alpha_1^2)\bar{\omega}^2) - \xi_p (1 + \mu)\bar{\omega}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3.1 Accord linéaire.

Lorsque l'on néglige les amortissements, la fréquence d'antirésonance $\bar{\omega}_{AR}$ correspond à la racine du numérateur de H_θ , ce qui mène à :

$$\bar{\omega}_{AR} = \frac{\bar{\omega}_0}{\sqrt{1 + \eta a_1^2}}. \quad (3.17)$$

Afin que la fréquence d'antirésonance coïncide avec la fréquence fondamentale du couple moteur *i.e.* $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR} = 1$, on constate que le pendule doit être accordé à une fréquence supérieure à ω_e telle que

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\omega_e} = \sqrt{1 + \eta a_1^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \omega_e \sqrt{1 + \eta a_1^2}. \quad (3.18)$$

La recommandation sur l'accord du système à translation pure, d'être accordé exactement à la fréquence fondamentale du couple moteur (équation (2.117), section 2.4.2), n'est donc plus valable lorsque le pendule tourne autour de son centre de gravité. Cela s'explique par le fait que la masse apparente du pendule est plus grande que la masse réelle de par le mouvement de rotation. Il est donc nécessaire de compenser cela par une augmentation de la raideur du pendule, donc ω_0 , de sorte que ce dernier soit correctement accordé sur la fréquence désirée : la fréquence fondamentale du couple moteur. La figure 3.4 illustre ce propos et montre que la fréquence des petites oscillations libres du pendule, ω_0 , doit être choisie supérieure à ω_e (*cf.* équation 3.18). Ainsi, la fréquence d'antirésonance $\bar{\omega}_{AR}$ coïncide avec la fréquence fondamentale du couple moteur, c'est-à-dire $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR} = 1$.

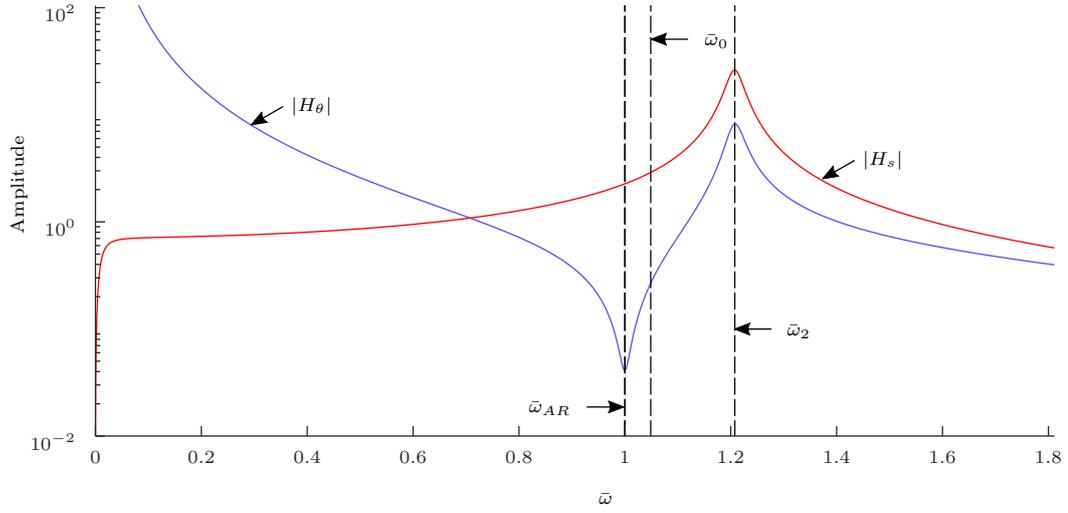


FIGURE 3.4 – Amplitude des FRF H_θ et H_s . Paramètres : $\mu = 0.4$, $\eta = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $\xi_c = 0$, $\xi_p = 0.005$ et $T_a = 0.05$.

Notez que l'équation (3.18) est également valable pour le pendule translaté car si $\alpha_1 = 0$ on retrouve bien (2.117). En pratique, ω_0 s'écrit :

$$\omega_0 = n_p \Omega, \quad (3.19)$$

avec n_p , l'ordre d'accord du pendule qui s'écrit :

$$n_p = \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}}. \quad (3.20)$$

En suivant la recommandation de l'équation (3.18), les paramètres géométriques du pendule, R_0 et ρ_0 , doivent donc être choisis tels que

$$\omega_0 = \omega_e \sqrt{1 + \eta a_1^2} \Rightarrow n_p = n_e \sqrt{1 + \eta a_1^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{R_0}{\rho_0}} = n_e \sqrt{1 + \eta a_1^2}. \quad (3.21)$$

La dépendance de l'ordre d'accord n_p à α_1 , dans l'équation (3.21) est gênante car la longueur d'une arche d'épicycloïde (ou de cycloïde d'ailleurs) dépend de la valeur de l'ordre d'accord et cette dernière est d'autant plus réduite que n_p est grand (cf. section 2.3.2.2). Cela signifie que, pour une même forme de trajectoire (épicycloïde ou cycloïde), le mouvement de rotation du pendule ($\alpha_1 \neq 0$) engendrera nécessairement une réduction de sa course maximale par rapport à l'APC à translation pure. On rappelle que les expressions des longueurs des arches d'épicycloïde et de cycloïde, en fonction des paramètres géométriques du pendule, sont données en annexes A (cf. équation (A.18)) et B (cf. équation (B.11)) respectivement. Après avoir identifié cet inconvénient dû au mouvement de rotation, nous allons maintenant nous attacher, dans la section suivante, à évaluer son influence sur la performance du système.

3.3.2 Performances

On s'intéresse ici à l'influence du taux de rotation α_1 sur la performance du système. L'idée est, premièrement, de statuer sur la pertinence d'un tel mouvement et deuxièmement, de tenter

3.3. ÉTUDE LINÉAIRE.

d'établir un critère de décision sur la valeur de ce paramètre. Pour cela, on considère que le pendule est accordé suivant l'équation (3.18) et on regarde les FRF (3.15a, 3.15b) à la fréquence de fonctionnement $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR} = 1$. Elles s'écrivent

$$H_{\theta}^{AR} = -\frac{2j\xi_p}{\mu(1+\eta\alpha_1)^2 + 4\xi_p\xi_c + 2j\xi_p(1+\mu)} \quad (3.22a)$$

$$H_s^{AR} = -\frac{1+\eta\alpha_1}{\mu(1+\eta\alpha_1)^2 + 4\xi_p\xi_c + 2j\xi_p(1+\mu)}, \quad (3.22b)$$

Sous réserve que les amortissements soient petits *i.e.* $\xi_p \ll 1$ et $\xi_p \ll 1$, on propose de négliger les termes $\xi_c\xi_p$ et de définir deux indicateurs de performances tels que

$$G_{\theta} = \left| \frac{H_{\theta}^{AR}|_{\alpha_1 \neq 0}}{H_{\theta}^{AR}|_{\alpha_1 = 0}} \right| = \left| \frac{\mu + 2j\xi_p(1+\mu)}{\mu(1+\eta\alpha_1)^2 + 2j\xi_p(1+\mu)} \right| \quad (3.23a)$$

$$G_s = \left| \frac{H_s^{AR}|_{\alpha_1 \neq 0}}{H_s^{AR}|_{\alpha_1 = 0}} \right| = \left| \frac{(1+\eta\alpha_1)(\mu + 2j\xi_p(1+\mu))}{\mu(1+\eta\alpha_1)^2 + 2j\xi_p(1+\mu)} \right|. \quad (3.23b)$$

Une valeur de ces indicateurs inférieure à 1 illustre un bénéfice apporté par la rotation du pendule, c'est-à-dire une diminution de l'amplitude de réponse par rapport au cas de référence $\alpha_1 = 0$. Une valeur supérieure à 1 représente alors une dégradation des performances, correspondant à une augmentation de l'amplitude de réponse par rapport au cas de référence. Les résultats pour μ et η donnés sont représentés en figure 3.5.

On retrouve tout d'abord la valeur particulière $\alpha_1 = -1/\eta$ où le pendule et le voile sont totalement découplés. G_s est alors nul dans le cas dissipatif car l'amplitude d'oscillation du pendule l'est également (découplage pendule / voile) et n'est pas défini dans le cas conservatif. On constate que pour $\alpha_1 \in]-2/\eta, 0[$ l'indicateur G_{θ} est toujours supérieur à 1, cet intervalle est donc à proscrire car la rotation du pendule dégrade la performance. Il nous reste alors deux choix possibles, à savoir $\alpha_1 \in]-\infty, -2/\eta]$ ou $\alpha_1 \in [0, \infty[$. En pratique, il est difficile, à cause de la technologie du système (*cf.* figure 1.7), de réaliser un pendule avec un taux de rotation négatif (*cf.* figure 3.3). Ce serait possible pour de faibles valeurs mais compliqué (*cf.* figure 3.3). On écarte donc d'office l'intervalle $\alpha_1 \in]-\infty, -2/\eta]$, car η est généralement petit et cela impliquerait que le pendule fasse plusieurs tours sur lui-même, ce que la technologie employée ne permet pas (*cf.* chapitre 7). On arrive à la conclusion que α_1 doit être supérieur ou égal à zéro.

On constate que dans l'intervalle $\alpha_1 \in [0, \infty[$, $G_{\theta} \leq 1 \forall \xi_p$. En revanche, G_s dépend fortement de l'amortissement du pendule. Plus particulièrement, si $\alpha_1 > 0$, il existe une valeur ξ_{pMAX} au-delà de laquelle l'amortissement ξ_p provoque une amplification de l'amplitude d'oscillation du pendule, ce qui est problématique car son débattement maximal est limité. Avant de conclure sur la valeur optimale du taux de rotation, il serait judicieux de préconiser une valeur d'amortissement du pendule à ne pas dépasser. Pour cela, on impose que G_s soit maximal pour $\alpha_1 = 0$. Cela se traduit par :

$$\left. \frac{\partial (G_s^2)}{\partial \alpha_1} \right|_{\substack{\alpha_1 = 0 \\ \xi_p = \xi_{pMAX}}} = 2\eta \frac{4\xi_{pMAX}^2(1+\mu)^2 - \mu^2}{\mu^2 + 4\xi_{pMAX}^2(1+\mu)^2} = 0. \quad (3.24)$$

En utilisant le fait que $\xi_{pMAX} \geq 0$, on déduit que

$$\xi_{pMAX} = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu + 1}. \quad (3.25)$$

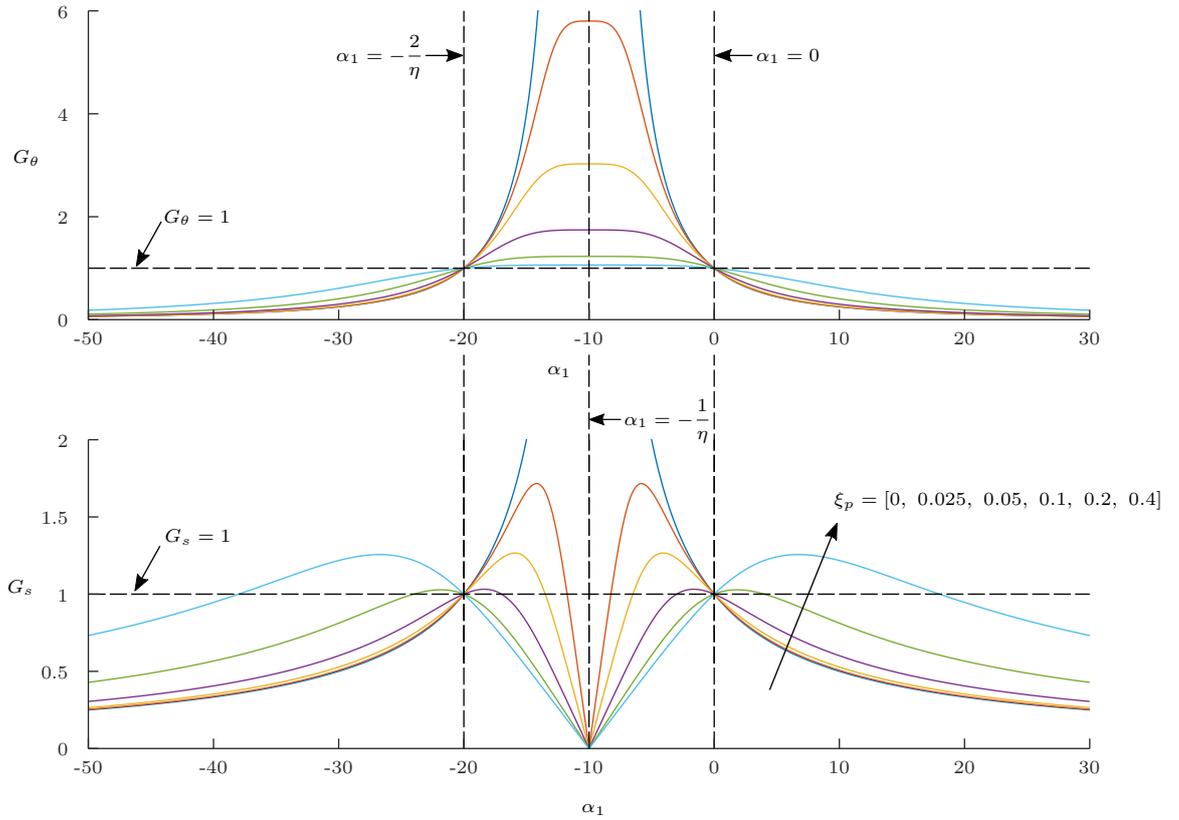


FIGURE 3.5 – Évolution des indicateurs de performance G_θ et G_s en fonction du taux de rotation α_1 . Paramètres : $\mu = 0.4$, $\eta = 0.1$.

La figure 3.6 montre l'évolution des indicateurs de performance pour $\xi_p = \xi_{p_{MAX}}$. Désormais, tant que $\xi_p \in [0, \xi_{p_{MAX}}]$ alors G_s sera inférieur à 1 pour toutes valeurs de α_1 supérieures ou égales à zéro. Autrement dit, tant que $\xi_p \leq \xi_{p_{MAX}}$ la rotation du pendule engendre une diminution de son amplitude d'oscillation par rapport au cas de référence $\alpha_1 = 0$.

À ce stade de l'étude, nous ne sommes pas en mesure de préconiser une valeur de α_1 au bureau d'étude. Cependant nous pouvons dire que l'effet de la rotation du pendule contribue à réduire le niveau de réponse du système à la fréquence de fonctionnement $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR} = 1$ à condition que :

- Le pendule soit accordé selon l'équation (3.18),
- le taux de rotation du pendule soit tel que $\alpha_1 > 0$,
- Le taux d'amortissement du pendule soit tel que $\xi_p \in \left[0, \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu + 1} \right]$.

Afin d'établir un critère de décision, on propose de se tourner vers l'expression de la valeur propre $\bar{\omega}_2$ définie à l'équation (3.13). En effet, dans le cas du pendule à translation pure, $\bar{\omega}_2$ ne dépend que du ratio des inerties μ (cf. équation 2.118, section 2.4.2). Ici, la rotation du pendule

3.3. ÉTUDE LINÉAIRE.

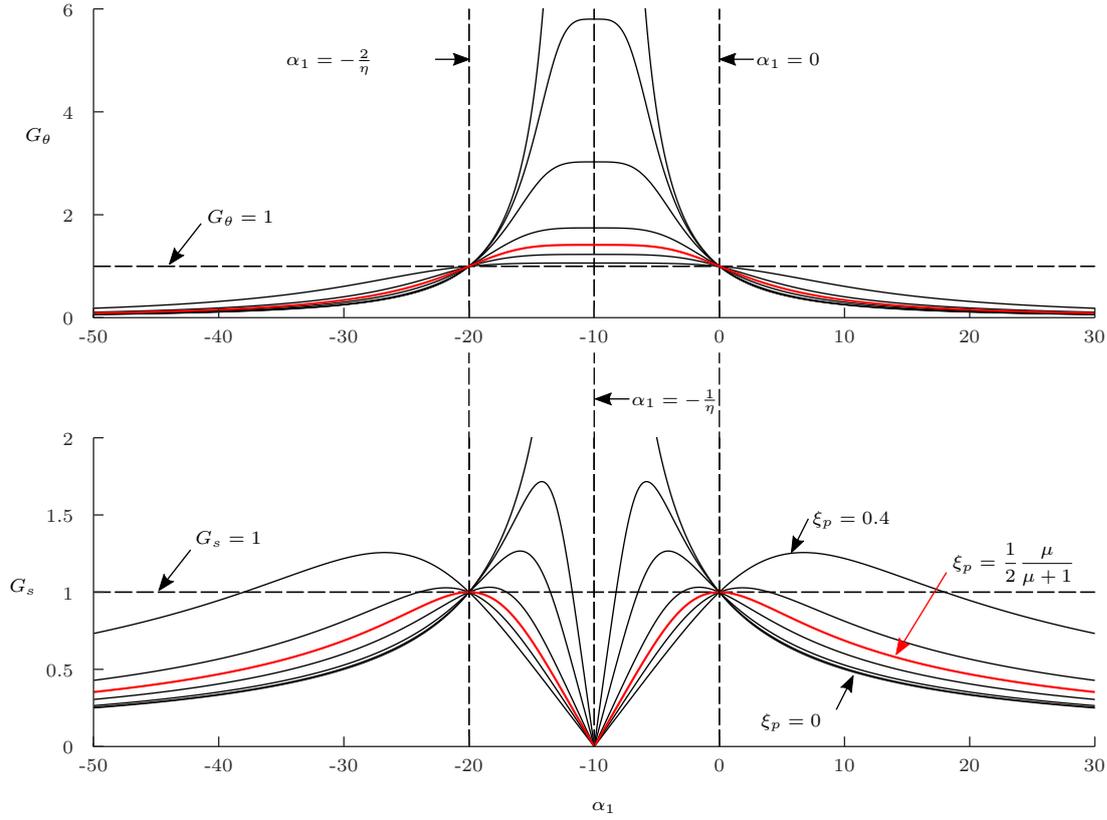


FIGURE 3.6 – Évolution des critères de performances G_θ et G_s en fonction de α_1 , pour $\xi_p = \xi_{pMAX}$ (courbe rouge). Paramètres : $\mu = 0.4$, $\eta = 0.1$.

offre une liberté supplémentaire par l'intermédiaire du paramètre α_1 . On suppose que le pendule est toujours accordé suivant l'équation (3.18) et on regarde l'évolution de $\bar{\omega}_2$ en fonction de α_1 . En substituant (3.18) dans (3.13), $\bar{\omega}_2$ se réécrit :

$$\bar{\omega}_2 = \left(\frac{(1 + \eta\alpha_1^2)(1 + \mu)}{1 + \eta\alpha_1(\alpha_1(1 + \mu) - \mu(2 + \eta\alpha_1))} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.26)$$

Comme le pendule est accordé selon (3.18), on sait que la fréquence d'antirésonance est forcément telle que $\bar{\omega}_{AR} = 1$ (cf. équation (3.17)). On propose alors de déterminer α_1 de sorte que $\bar{\omega}_2$ soit maximale et donc le plus loin possible de la fréquence d'antirésonance. Cela se traduit par

$$\frac{\partial (\bar{\omega}_2^2)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad (3.27)$$

et mène à

$$\alpha_1 = -\frac{1 - \eta \pm (1 + \eta)}{2\eta} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{\eta} \text{ ou } \alpha_1 = 1. \quad (3.28)$$

La première racine est une valeur connue faisant partie d'un intervalle que l'on a éliminé plus tôt, la deuxième en revanche est intéressante car elle ne dépend pas des paramètres du système,

de plus elle appartient à l'intervalle qui nous intéresse. En évaluant $\bar{\omega}_2$ pour $\alpha_1 = 1$ on trouve

$$\bar{\omega}_2(\alpha_1 = 1) = \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu\eta}}. \quad (3.29)$$

On remarque que $\bar{\omega}_2(\alpha_1 = 1)$ est infini pour $\mu = 1/\eta$. En reprenant les expressions de μ et η (cf. équations (2.108) et (3.7)), ceci implique

$$\mu = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \frac{Nm_i(R_{0_i} + \rho_{0_i})^2}{J_c + NI_i} = \frac{Nm_i(R_{0_i} + \rho_{0_i})^2}{NI_i} \Rightarrow J_c = 0, \quad (3.30)$$

ce qui est bien sur impossible, l'inertie du voile est forcément non nulle et par conséquent η ne peut être supérieur ou égal à $1/\mu$.

La figure 3.7 montre l'évolution de $\bar{\omega}_2$ en fonction de α_1 , à μ et η donnés. On voit que des

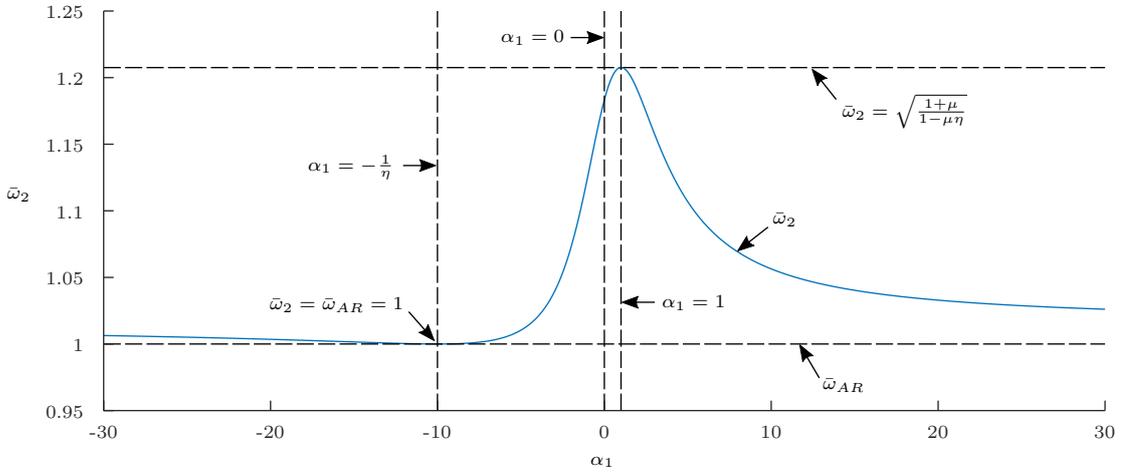


FIGURE 3.7 – Évolution de la valeur propre $\bar{\omega}_2$ en fonction de α_1 . Paramètres : $\mu = 0.4$, $\eta = 0.1$.

deux racines calculées à l'équation (3.28), la première correspond à un minimum ($\alpha_1 = -1/\eta$), la deuxième à un maximum ($\alpha_1 = 1$). Une vision en trois dimensions de l'évolution de $\bar{\omega}_2$ en fonction de η et α_1 est donnée en figure 3.8. La surface 3D en couleur correspond aux valeurs de $\bar{\omega}_2$ pour chaque couple (η, α_1) et le plan gris représente la fréquence d'antirésonance qui est égale à 1 puisque le pendule est accordé selon l'équation (3.18). On constate que $\bar{\omega}_2$ est bien maximal pour une unique valeur du taux de rotation du pendule. C'est le critère dimensionnant que l'on cherchait : afin de maximiser la distance entre la fréquence d'antirésonance et la fréquence propre (non nulle) du système, α_1 doit être tel que

$$\alpha_1 = 1. \quad (3.31)$$

L'équation (3.31) est connue des industriels automobiles car c'est l'équipementier Luk qui en a déposé le brevet [76].

3.3.3 Bilan de l'étude linéaire

Plusieurs recommandations ont d'ores et déjà été établies pour l'APC nouvelle génération en section 3.3. D'une part, concernant l'accord du pendule. D'autre part, concernant les performances du système au point de fonctionnement, c'est-à-dire à la fréquence $\bar{\omega} = 1$ et sous réserve

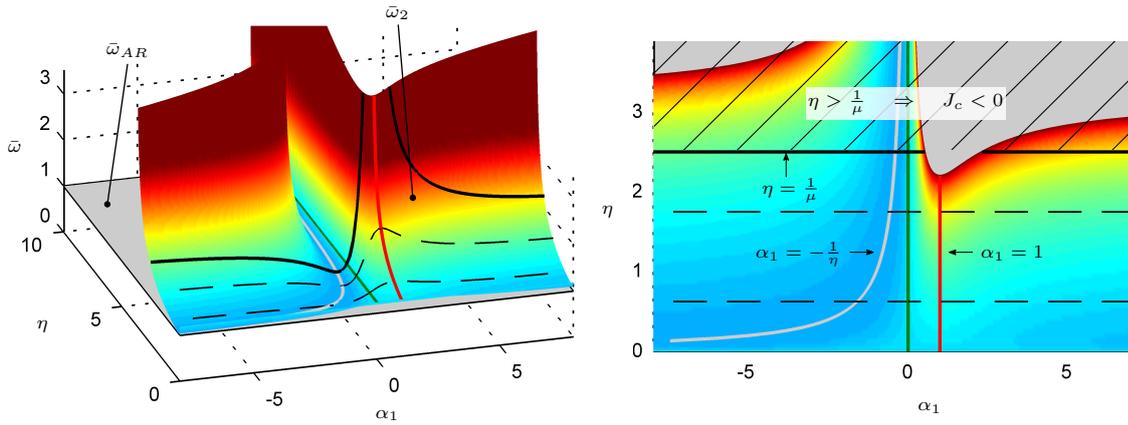


FIGURE 3.8 – Évolution en trois dimensions de la valeur propre $\bar{\omega}_2$ en fonction de α_1 et de η . Le plan gris correspond à $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR} = 1$. Paramètre : $\mu = 0.4$.

que le pendule soit accordé selon l'équation (3.18) de sorte que $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR} = 1$. Ces règles de conception sont résumées ci-après :

L'APC nouvelle génération doit être accordé à une fréquence supérieur à la fréquence de fonctionnement (cf. section 3.3.1)

- Le mouvement de rotation du pendule augmente la masse apparente de ce dernier ce qui implique, pour compenser, d'augmenter la raideur de l'oscillateur. Le pendule doit donc être sur-accordé par rapport à la fréquence de fonctionnement (cf. équation (3.18)) afin que la fréquence d'antirésonance coïncide avec la fréquence fondamentale du couple moteur ω_e .
- Le sur-accord du pendule implique nécessairement une réduction de la course maximale le long des trajectoires épicycloïdale et cycloïdale (cf. section 2.3.2.2 et équations (A.18) et (B.11)).

La rotation du pendule permet d'augmenter la performance du système (cf. section 3.3.2)

- Pour des raisons de fabrication, le taux de rotation α_1 doit être choisi supérieur ou égal à 1.
- Dans cet intervalle, la rotation du pendule permet toujours de diminuer l'amplitude de la réponse mesurée sur le voile (cf. figure 3.5).
- Dans cet intervalle, la rotation du pendule permet de diminuer l'amplitude d'oscillation du pendule à condition que le taux d'amortissement ξ_p soit tel que $\xi_p \leq \mu / (2\mu + 2)$ (cf. équation (3.25)).
- En choisissant le taux de rotation α_1 égal à 1, on s'assure que la fréquence de résonance soit la plus éloignée possible de la fréquence d'antirésonance (cf. figures 3.7 et 3.8).

La tableau 3.1 donne des estimations linéaires, pour deux applications caractéristiques, de la performance des règles énoncées ci-dessus par rapport au cas de référence $\alpha_1 = 0$. La deuxième ligne représente une application légère à deux pendules (cf. figure 1.6). Dans ce cas, l'inertie équivalente totale des pendules est petite devant l'inertie de voile ce qui explique la faible valeur

μ	η	Performance sur $ H_\theta^{AR} $ $100(G_\theta - 1)$	Performance sur $ H_s^{AR} $ $100(G_s - 1)$	Performance sur $\bar{\omega}_2$ $100\left(\frac{\bar{\omega}_{(\alpha_1=1)}}{\bar{\omega}_{(\alpha_1=0)}} - 1\right)$
0.065	0.34	-43%	-25%	1.13%
0.31	0.15	-24.4%	-13%	2.4%

TABLE 3.1 – Estimation des performances pour deux applications caractéristiques. Paramètres : $\alpha_1 = 1$, $\xi_p = 0.005$, $\xi_c = 0$.

de μ . En revanche, pour de telles applications, les concepteurs travaillent à augmenter autant que possible les inerties de rotation, d'où une valeur relativement élevée de η .

La troisième ligne représente quant à elle une application conventionnelle à quatre pendules (cf. figure 1.6) où, cette fois, c'est l'inertie équivalente des pendules qui est priorisée devant leur inertie de rotation. On précise que les valeurs du paramètre μ du tableau 3.1 prennent en compte une inertie sur laquelle est implanté le voile comme cela est le cas en condition véhicule ou sur banc d'essai.

La troisième colonne représente la diminution de l'amplitude de la réponse mesurée sur le voile, la quatrième colonne représente la diminution de l'amplitude d'oscillation du pendule et la cinquième colonne donne l'augmentation de la fréquence de résonance. On voit que la rotation du pendule est très pertinente avec une diminution de l'amplitude d'oscillation du voile d'au moins 20% et une diminution de l'amplitude d'oscillation du pendule d'au moins 10%. Il est donc clair que le pendule nouvelle génération offre des performances améliorées. Cependant, cette affirmation se base sur une étude linéaire, la performance du système à grande amplitude d'oscillation sera notamment abordée en section 3.4.3.

Nous allons maintenant nous concentrer, en section suivante, sur la correction du désaccord du système vis-à-vis de l'amplitude d'excitation et ainsi tenter d'établir de nouvelles recommandations de conception.

3.4 Correction analytique de l'antirésonance

On s'intéresse maintenant à la correction du désaccord de l'absorbeur pendulaire centrifuge. Pour cela, on propose de mettre en œuvre une méthode analytique de perturbation couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique. L'objectif est d'établir un modèle de la réponse d'un harmonique j d'un ddl i en régime permanent. Cela permettra de déterminer l'expression de la fréquence d'antirésonance en fonction de l'amplitude d'excitation du système, comme illustré en figure 3.9. La méthode sera d'abord présentée sur un système à deux degrés de liberté couplés par une non-linéarité cubique en section 3.4.1. Nous nous intéresserons ensuite à l'APC et plus particulièrement à l'influence de la trajectoire et de la rotation du pendule sur le comportement de l'antirésonance en section 3.4.2. On proposera alors certaines règles de conception afin de corriger le désaccord du système.

3.4.1 Application à un système de duffing

L'objectif est ici d'introduire la méthode et la philosophie employées sur un système simple afin de corriger son désaccord, tout comme cela sera fait en section 3.4.2 pour l'absorbeur pendulaire centrifuge. On considère donc le système à deux degrés de liberté illustré en figure 3.10. Il se compose d'une masse m_1 , libre dans l'espace et soumise un effort extérieur $F \cos \omega$, couplée à un

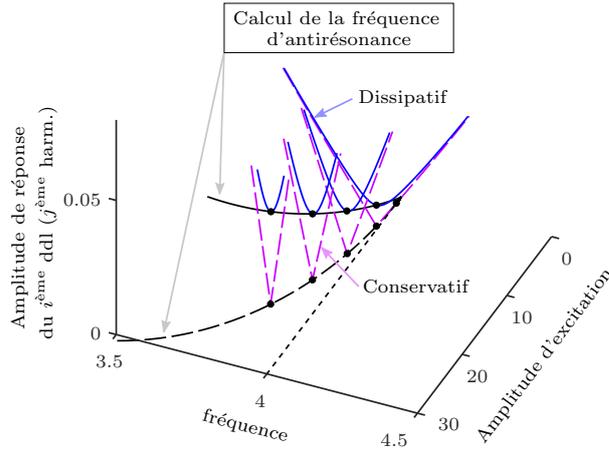


FIGURE 3.9 – Illustration d'une antirésonance dans le cas d'un système conservatif et dissipatif.

oscillateur de Duffing dont les caractéristiques de masse, raideur et amortissement sont respectivement notées m_2 , k_2 , c_2 ; k_{nl} désigne le coefficient de la non-linéarité cubique. Le déplacement de m_1 est mesuré par x_1 et celui de m_2 par rapport à m_1 est mesuré par x_2 .

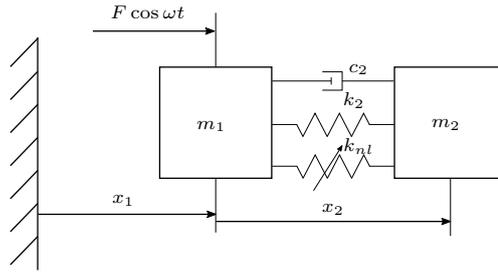


FIGURE 3.10 – Système à deux degrés de liberté.

Les équations du mouvement s'écrivent

$$(1 + \mu) \ddot{x}_1 + \mu \ddot{x}_2 = f \cos \omega t, \quad (3.32a)$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\xi\omega_0\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \Gamma x_2^3 = 0, \quad (3.32b)$$

avec

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad f = \frac{F}{m_1} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \xi = \frac{c_2}{2\sqrt{k_2 m_2}} \quad \Gamma = \frac{k_{nl}}{m_2}. \quad (3.33)$$

Ici le paramètre régissant le caractère non linéaire des équations dynamiques est clairement identifié, c'est Γ . Cependant, ce premier système simple nous permet d'éprouver la méthode utilisée et aussi de constater l'influence de l'ordre de perturbation sur la qualité des résultats.

Le principe consiste à effectuer une perturbation directe des inconnues en fonction d'un petit paramètre ϵ qui a déjà été utilisé avec la méthode des échelles multiples (*cf.* section 2.3.2.4). On écrit x_1 et x_2 sous la forme :

$$x_1 = x_{10} + \epsilon x_{11} + \epsilon^2 x_{12} + \epsilon^3 x_{13} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (3.34a)$$

$$x_2 = x_{20} + \epsilon x_{21} + \epsilon^2 x_{22} + \epsilon^3 x_{23} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.34b)$$

On considère également que le terme non linéaire de l'équation (3.32b) n'apporte qu'une petite perturbation au système linéaire sous-jacent, et donc que le coefficient Γ est petit tel que

$$\Gamma = \epsilon\gamma. \quad (3.35)$$

En substituant les expressions (3.34) et (3.35) dans les équations (3.32) puis on ordonnant chaque terme suivant les puissances de ϵ on construit une succession de systèmes linéaires à chaque ordre de perturbation :

ordre 0 :

$$\beta\ddot{x}_{10} + \mu\ddot{x}_{20} = f \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\}, \quad (3.36a)$$

$$\ddot{x}_{10} + \ddot{x}_{20} + 2\xi\dot{x}_{20} + x_{20} = 0, \quad (3.36b)$$

ordre ϵ :

$$\beta\ddot{x}_{11} + \mu\ddot{x}_{21} = 0, \quad (3.36c)$$

$$\ddot{x}_{11} + \ddot{x}_{21} + 2\xi\dot{x}_{21} + x_{21} = -\gamma x_{20}^3, \quad (3.36d)$$

ordre ϵ^2 :

$$\beta\ddot{x}_{12} + \mu\ddot{x}_{22} = 0, \quad (3.36e)$$

$$\ddot{x}_{12} + \ddot{x}_{22} + 2\xi\dot{x}_{22} + x_{22} = -3\gamma x_{21}x_{20}^2, \quad (3.36f)$$

ordre ϵ^3 :

$$\beta\ddot{x}_{13} + \mu\ddot{x}_{23} = 0, \quad (3.36g)$$

$$\ddot{x}_{13} + \ddot{x}_{23} + 2\xi\dot{x}_{23} + x_{23} = -\gamma(3x_{20}x_{21}^2 + 2x_{22}x_{20}^2), \quad (3.36h)$$

où l'on a posé $\beta = (1 + \mu)$ et $\omega_0 = 1$. Les solutions à l'ordre 0 sont celles du système linéaire qui sont perturbées successivement par les solutions aux ordres supérieurs. Ainsi, en sommant les solutions calculées à chaque ordre de perturbation, on reconstruit une approximation de la réponse totale de la forme de (3.34). Nous nous intéressons ici au régime permanent et plus particulièrement à l'amplitude de l'harmonique du même rang que l'excitation $f \cos \omega t$. Les solutions x_1 et x_2 sont donc supposées de la forme

$$x_1 = \operatorname{Re}\{\hat{x}_1 e^{j\omega t}\} \quad \text{et} \quad x_2 = \operatorname{Re}\{\hat{x}_2 e^{j\omega t}\}. \quad (3.37)$$

Ceci implique que les solutions à l'ordre de perturbation ϵ^i sont également recherchées sous la forme :

$$x_{1i} = \operatorname{Re}\{\hat{x}_{1i} e^{j\omega t}\} \quad \text{et} \quad x_{2i} = \operatorname{Re}\{\hat{x}_{2i} e^{j\omega t}\}, \quad (3.38)$$

et on négligera les harmoniques supérieures générées par les seconds membres des équations (3.36d) et (3.36f).

À l'ordre 0 on trouve les solutions :

$$\hat{x}_{10} = f \frac{1 - \omega^2 + 2j\xi\omega}{\omega^4 - \beta\omega^2 - 2j\xi\beta\omega^3}, \quad (3.39a)$$

$$\hat{x}_{20} = f \frac{\omega^2}{\omega^4 - \beta\omega^2 - 2j\xi\beta\omega^3}. \quad (3.39b)$$

3.4. CORRECTION ANALYTIQUE DE L'ANTIRÉSONANCE

Ces solutions sont injectées comme termes de forçage des équations à l'ordre ϵ . Le terme x_{20}^3 du second membre de l'équation (3.36d) s'écrit :

$$x_{20}^3 = \frac{1}{4} |\hat{x}_{20}|^3 \operatorname{Re} \left\{ 3e^{j(\arg(\hat{x}_{20})+\omega t)} + \cancel{e^{3j(\arg(\hat{x}_{20})+\omega t)}} \right\}, \quad (3.40)$$

où l'on néglige le terme en $3\omega t$ puisqu'il n'appartient pas à l'approximation initiale (3.38). Les solutions à l'ordre ϵ sont :

$$\hat{x}_{11} = \frac{3\mu\gamma f^3}{4} \frac{4\beta^2\omega^2\xi^2 - (\beta - \omega^2)^2 - 4j\beta\xi\omega(\omega^2 - \beta)}{\left((\beta - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\xi^2\right)^3} \quad (3.41a)$$

$$\hat{x}_{21} = -\frac{3\beta\gamma f^3}{4} \frac{4\beta^2\omega^2\xi^2 - (\beta - \omega^2)^2 - 4j\beta\xi\omega(\omega^2 - \beta)}{\left((\beta - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\xi^2\right)^3}. \quad (3.41b)$$

Le terme $x_{21}x_{20}^2$ du second membre de l'équation (3.36f) s'écrit :

$$x_{21}x_{20}^2 = \frac{1}{2} |\hat{x}_{21}| |\hat{x}_{20}|^2 \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\arg(\hat{x}_{21})+\omega t)} + \frac{1}{2} \left(e^{j(2\arg(\hat{x}_{20})-\arg(\hat{x}_{21})+\omega t)} + \cancel{e^{j(2\arg(\hat{x}_{20})+\arg(\hat{x}_{21})+3\omega t)}} \right) \right\}. \quad (3.42)$$

Là encore, on néglige les termes en $3\omega t$ et les solutions à l'ordre ϵ^2 s'écrivent :

$$\hat{x}_{12} = \frac{9\beta\mu\gamma^2 f^5}{8 \left((\omega^2 - \beta)^2 + 4\beta^2\omega^2\xi^2\right)^5} \left(\frac{3}{2} (\beta - \omega^2)^3 + 10\beta^2\omega^2\xi^2 (\omega^2 - \beta) + j \left(4\beta^3\omega^3\xi^3 - 7\beta\omega\xi (\omega^2 - \beta)^2 \right) \right), \quad (3.43a)$$

$$\hat{x}_{22} = -\frac{9\beta^2\gamma^2 f^5}{8 \left((\omega^2 - \beta)^2 + 4\beta^2\omega^2\xi^2\right)^5} \left(\frac{3}{2} (\beta - \omega^2)^3 + 10\beta^2\omega^2\xi^2 (\omega^2 - \beta) + j \left(4\beta^3\omega^3\xi^3 - 7\beta\omega\xi (\omega^2 - \beta)^2 \right) \right). \quad (3.43b)$$

En se limitant à l'ordre ϵ^2 , on substitue les expressions (3.39a), (3.41a) et (3.43) dans (3.34) afin de reconstruire les approximations de x_1 et x_2 . Ici, comme les expressions sont assez lourdes, on ne donne que les expressions du cas conservatif :

$$|x_1| \approx f \left(\frac{1 - \omega^2}{\omega^2 (\omega^2 - \beta)} - \frac{3}{4} \frac{\mu\gamma f^2}{(\omega^2 - \beta)^4} - \frac{27}{16} \frac{\beta\mu\gamma^2 f^4}{(\omega^2 - \beta)^7} \right) \quad (3.44a)$$

$$|x_2| \approx f \left(\underbrace{\frac{\omega^2}{\omega^2 (\omega^2 - \beta)}}_{\text{Solution linéaire}} + \underbrace{\frac{3}{4} \frac{\beta\gamma f^2}{(\omega^2 - \beta)^4} + \frac{27}{16} \frac{\beta^2\gamma^2 f^4}{(\omega^2 - \beta)^7}}_{\text{Termes correctifs}} \right). \quad (3.44b)$$

Les expressions (3.44a) et (3.44b) donnent une approximation de la réponse au deuxième ordre de perturbation. On en déduit la fréquence d'antirésonance du cas conservatif $\omega = \omega_{AR}$ en utilisant le fait $|x_{1(\omega=\omega_{AR})}| = 0$. On obtient ainsi l'expression implicite, valable à l'ordre ϵ^2 , donnant l'amplitude de la force f en fonction de ω_{AR} :

$$f^2 = \frac{2}{9} \frac{(\beta - \omega_{AR}^2)^3}{\beta\gamma} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{12\beta(1 - \omega_{AR}^2)}{\mu\omega_{AR}^2}} \right). \quad (3.45)$$

Maintenant, si on ajoute de l'amortissement dans le système, alors les expressions (3.44a) et (3.44b) ne sont plus réelles mais complexes et l'expression reliant f à ω_{AR} peut être obtenue, par exemple, en résolvant

$$\frac{\partial |\hat{x}_1|}{\partial f} = 0. \quad (3.46)$$

La figure 3.11 illustre l'évolution de l'antirésonance en fonction de f aux différents ordres de perturbation et pour trois valeurs du coefficient γ . Ici, les calculs ont été réalisés numériquement

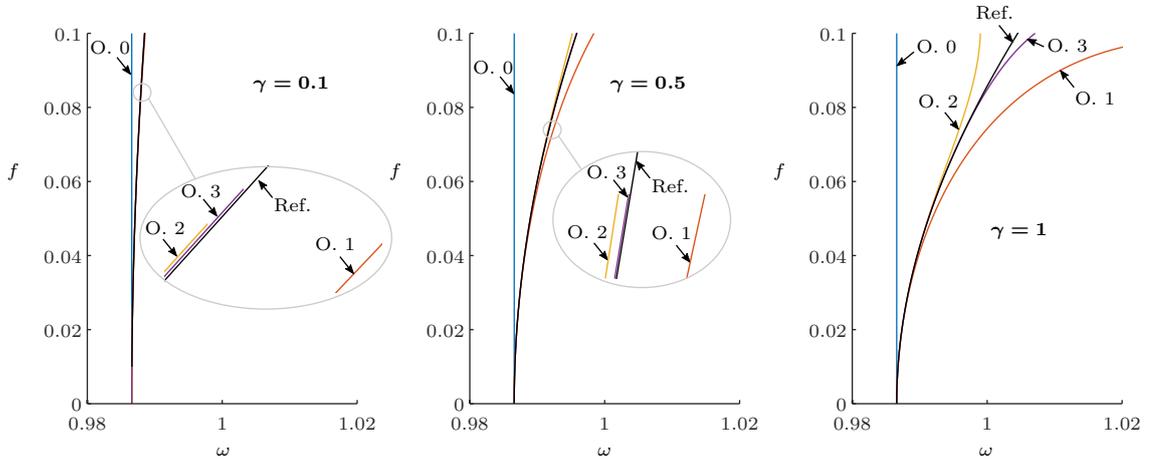


FIGURE 3.11 – Évolution de la fréquence d'antirésonance en fonction de l'amplitude d'excitation, pour plusieurs valeurs de γ . Comparaison du calcul analytique aux ordres (O.) de perturbation 1, 2 et 3 avec la courbe de référence (Ref.). Paramètres : $\mu = 0.4$, $\xi = 0.05$.

jusqu'à l'ordre 3, avec de l'amortissement. En pratique, nous n'avons pas résolu (3.46) mais simplement évalué la solution $|x_1|$ (cf. équation 3.34a) pour différentes valeurs de ω puis on a cherché la valeur de f correspondant au minimum de $|x_1|$. Les résultats sont comparés à la solution de référence (la courbe noire désignée par "Ref.") qui a été obtenue avec la procédure de continuation numérique d'antirésonance présentée dans l'article du chapitre 5. À l'ordre 0 la fréquence d'antirésonance ne dépend pas de l'amplitude d'excitation, c'est ce que l'on recherche, mais cette solution est celle du système linéaire. On voit que lorsque la non-linéarité est petite ($\gamma = 0.1$) la solution aux ordres 1 ou 2 deux suffit à représenter fidèlement le comportement de l'antirésonance. Cependant, à mesure que γ grandit, il est nécessaire d'enrichir la solution (on a considéré via l'équation (3.35) que la non-linéarité est petite devant 1).

Si l'on veut corriger le désaccord observé, c'est-à-dire que la fréquence d'antirésonance soit

indépendante de l'amplitude d'excitation, alors on doit imposer que

$$\frac{\partial \omega_{AR}}{\partial f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \omega_{AR}} = \infty. \quad (3.47)$$

Par exemple, si on considère l'approximation à l'ordre 2 du système conservatif, alors le dénominateur du second membre de l'équation (3.45) doit être nul et on arrive à la conclusion fracassante que $\gamma = 0$, de sorte que la fréquence d'antirésonance ne dépend pas de l'amplitude d'excitation. Ceci est parfaitement logique car le coefficient γ gouverne la seule source de non-linéarité du système. En l'imposant à zéro, la fréquence d'antirésonance est celle du système linéaire, totalement indépendante de l'amplitude d'excitation.

3.4.2 Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge

On adopte ici la même philosophie que dans la section précédente mais, cette fois, on considère l'APC que l'on a rencontré plus tôt (*cf.* section 3.2, figure 3.2). Les inconnues $\tilde{\theta}$ et s sont développées en fonction du petit paramètre ϵ tel que

$$\tilde{\theta} = \epsilon \theta_0 + \epsilon^2 \theta_1 + \epsilon^3 \theta_2 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (3.48a)$$

$$s = \epsilon s_0 + \epsilon^2 s_1 + \epsilon^3 s_2 + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.48b)$$

De plus, on considère la fonction de la trajectoire $x(s)$ ainsi que l'angle de rotation $\alpha(s)$ sous la forme

$$x(s) = 1 - n_p^2 s^2 + x_4 s^4, \quad (3.49a)$$

$$\alpha(s) = \alpha_1 s + \alpha_3 s^3. \quad (3.49b)$$

L'équation (3.49a) est en réalité celle de la trajectoire épicycloïdale (*cf.* équation (2.59b), section 2.3.2.2) que l'on a perturbée avec le terme $x_4 s^4$ (pas forcément petit). Le terme perturbatif a été choisi pair afin de conserver la symétrie de la trajectoire *i.e.* $x(s) = x(-s)$ et ceci pour des raisons de facilité de réalisation. L'équation (3.49a) représente l'angle de rotation de pendule et on reconnaît le terme α_1 dont on a déterminé une valeur optimale en section 3.3.2 (*cf.* équation (3.31)). Le terme $\alpha_3 s^3$ est également un terme perturbatif que l'on a choisi impair afin de garantir la symétrie des pistes de roulement (l'une par rapport à l'autre) usinées dans le voile et dans les entretoises (*cf.* figures 1.7 et 1.5), toujours pour des raisons pratiques de réalisation. La finalité de la procédure déroulée ici est donc de déterminer les coefficients x_4 et/ou α_3 de sorte que le désaccord du système soit nul.

De la même manière que cela a été fait en section 3.3.2, le pendule est accordé selon (3.18) ce qui implique que le paramètre n_p de l'équation (3.49a) est choisi selon la spécification (3.21) de sorte que $\bar{\omega}_{AR} = 1$. On choisit également de réaliser l'étude sans amortissement pour des raisons de facilité. Cependant, on prendra soin un peu plus loin de vérifier la qualité des résultats obtenus dans le cas dissipatif. En résumé, en substituant (3.21) dans (3.49a) puis (3.49a) et (3.49b) dans les équations du mouvement (3.6a) et (3.6b) (*cf.* section 3.2), et enfin en ordonnant chaque terme suivant les puissances de ϵ , on construit, comme dans la section précédente, une succession de systèmes linéaires à chaque ordre de perturbation dépendants les uns des autres :

ordre 1 :

$$\beta \theta_0'' + \mu \delta s_0'' = T_a \operatorname{Re}\{e^{j\bar{\omega}\tau}\}, \quad (3.50a)$$

$$\delta \theta_0'' + \lambda s_0'' + \lambda s_0 = 0, \quad (3.50b)$$

ordre 2 :

$$\beta\theta_1'' + \mu\delta s_1'' = 2\mu n_e \lambda s_0' s_0, \quad (3.50c)$$

$$\delta\theta_1'' + \lambda s_1'' + \lambda s_1 = -2n_e \lambda \theta_0' s_0, \quad (3.50d)$$

ordre 3 :

$$\beta\theta_2'' + \mu\delta s_2'' = f_{nl_1}, \quad (3.50e)$$

$$\delta\theta_2'' + \lambda s_2'' + \lambda s_2 = f_{nl_2}, \quad (3.50f)$$

où l'on a posé,

$$\beta = 1 + \mu, \quad \delta = 1 + \eta\alpha_1, \quad \lambda = 1 + \eta\alpha_1^2, \quad (3.51)$$

et

$$f_{nl_1} = \mu n_e^2 \lambda \theta_0'' s_0^2 + \left(\frac{1}{2} \mu n_e^2 \lambda (1 + n_e^2 \lambda) - 3\mu\eta\alpha_3 \right) s_0'' s_0^2 \quad (3.52a)$$

$$+ 2\mu n_e \lambda \left(s_0' s_1 + s_1' s_0 + n_e s_0' \theta_0' s_0 \right) + \left(\mu n_e^2 \lambda (1 + n_e^2 \lambda) - 6\mu\eta\alpha_3 \right) s_0'^2 s_0,$$

$$f_{nl_2} = \left(\frac{1}{2} n_e^2 \lambda (1 + n_e^2 \lambda) - 3\eta\alpha_3 \right) \theta_0'' s_0^2 + \frac{2}{n_e^2} x_4 s_0^3 - n_e \lambda \left(2\theta_1' s_0 + n_e \theta_0'^2 s_0 + 2\theta_0' s_1 \right) \quad (3.52b)$$

$$- 6\eta\alpha_1\alpha_3 \left(s_0 s_0'^2 + s_0'' s_0^2 \right).$$

On précise que l'on a effectué un développement en série de Taylor de la fonction z qui fait intervenir une racine carré (*cf.* equation (2.99), section 2.4.1).

Les solutions $\tilde{\theta}$ et s sont recherchées sous la forme

$$\tilde{\theta} = \text{Re}\left\{ \hat{\theta} e^{j\omega\tau} \right\} \quad \text{et} \quad s = \text{Re}\left\{ \hat{s} e^{j\omega\tau} \right\}. \quad (3.53)$$

Les solutions à l'ordre 1 s'écrivent

$$\hat{\theta}_0 = T_a \frac{\lambda(1 - \bar{\omega}^2)}{\bar{\omega}^2 \beta \lambda (\bar{\omega}^2 - 1) - \mu \delta^2 \bar{\omega}^4}, \quad (3.54a)$$

$$\hat{s}_0 = T_a \frac{\delta \bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2 \beta \lambda (\bar{\omega}^2 - 1) - \mu \delta^2 \bar{\omega}^4}. \quad (3.54b)$$

À l'ordre 2, les seconds membres des équations (3.50c) et (3.50d) dépendent des solutions calculées à l'ordre 1 tels que

$$s_0' s_0 = \frac{1}{2} \bar{\omega} |s_0|^2 \text{Re}\left\{ j e^{2j(\arg(\hat{s}_0) + \bar{\omega}\tau)} \right\}, \quad (3.55a)$$

$$\theta_0' s_0 = \frac{1}{2} \bar{\omega} |\theta_0| |s_0| \text{Re}\left\{ j e^{j(\arg(\hat{s}_0) + \arg(\hat{\theta}_0) + 2\bar{\omega}\tau)} - j e^{j(\arg(\hat{s}_0) - \arg(\hat{\theta}_0))} \right\}. \quad (3.55b)$$

On constate que ces expressions ne font pas intervenir de termes en $\bar{\omega}\tau$, ce qui implique que les solutions θ_1 et s_1 non plus. Cependant, on choisit de ne pas les négliger car θ_1 et s_1 seront combinés aux solutions de l'ordre 1 (équations (3.54a) et (3.54b)) dans les seconds membres des équations (3.50e) et (3.50f) à l'ordre 3, ce qui fera apparaître des solutions de la forme recherchée

(cf. (3.53)). Étant donné l'allure des expressions (3.55a) et (3.55b), on cherche θ_1 et s_1 de la forme

$$\theta_1 = \operatorname{Re}\left\{\hat{\theta}_1 e^{2j\omega\tau}\right\} \quad \text{et} \quad s_1 = s_{1_0} + \operatorname{Re}\left\{\hat{s}_1 e^{2j\omega\tau}\right\}. \quad (3.56)$$

En injectant ces expressions dans les équations (3.50c) et (3.50d) on trouve

$$\hat{\theta}_1 = j\mu n_e \lambda \bar{\omega} \left| \hat{s}_0 \right| \left(\frac{\lambda \left| \hat{s}_0 \right| (1 - 4\bar{\omega}^2) - 4\delta\bar{\omega}^2 \left| \hat{\theta}_0 \right|}{4\beta\lambda\bar{\omega}^2 (4\bar{\omega}^2 - 1) - 16\mu\delta^2\bar{\omega}^4} \right), \quad (3.57a)$$

$$s_{1_0} = \bar{\omega} \left| \hat{\theta}_0 \right| \left| \hat{s}_0 \right|, \quad (3.57b)$$

$$\hat{s}_1 = \frac{4\delta\bar{\omega}^2 \hat{\theta}_1 - j n_e \lambda \bar{\omega} \left| \hat{\theta}_0 \right| \left| \hat{s}_0 \right|}{\lambda (1 - 4\bar{\omega}^2)}. \quad (3.57c)$$

Il est intéressant de remarquer que le pendule n'oscille pas nécessairement autour d'une position moyenne nulle (cf. équation (3.57b)). C'est une conséquence de la présence de non-linéarités quadratiques qui génèrent des harmoniques pairs. Par exemple, le système que l'on a traité en section précédente ne comporte qu'une non-linéarité cubique (cf. équation (3.32)) et la réponse n'est alors composée que d'harmoniques impairs.

Il nous reste maintenant à déterminer les solutions θ_2 et s_2 de l'ordre 3. En supposant les seconds membres f_{nl_1} et f_{nl_2} des équations (3.50e) et (3.50f) de la forme

$$f_{nl_1} = \operatorname{Re}\left\{\hat{f}_{nl_1} e^{j\omega\tau}\right\} \quad \text{et} \quad f_{nl_2} = \operatorname{Re}\left\{\hat{f}_{nl_2} e^{j\omega\tau}\right\}, \quad (3.58)$$

on peut écrire

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\lambda (1 - \bar{\omega}^2) \hat{f}_{nl_1} + \mu\delta\bar{\omega}^2 \hat{f}_{nl_2}}{\beta\bar{\omega}^2\lambda (\bar{\omega}^2 - 1) - \mu\delta^2\bar{\omega}^4}. \quad (3.59)$$

Afin de simplifier grandement les calculs, on propose de faire l'hypothèse que $\bar{\omega} \approx 1$. Cela est justifiable car nous nous intéressons à la réponse du système au voisinage de l'antirésonance et comme on a pris soin d'accorder le pendule selon (3.18) l'antirésonance est justement proche de $\bar{\omega} = 1$ (au désaccord près). De plus, comme on a considéré l'épicycloïde comme trajectoire de base (cf. (3.49a)), le désaccord du système est moindre que pour le cercle ou la cycloïde (cf. figure 2.41, section 2.4). De ce fait, nous négligeons f_{nl_1} ainsi les termes facteurs de $(\bar{\omega}^2 - 1)$. Le système à l'ordre 3 se réécrit :

ordre 3 :

$$\beta\theta_2'' + \mu\delta s_2'' = 0, \quad (3.60a)$$

$$\delta\theta_2'' + \lambda s_2'' + \lambda s_2 = \boxed{-2n_e\lambda\theta_1' s_0} + \frac{2}{n_e^2} x_4 s_0^3 - 6\eta\alpha_1\alpha_3 \left(s_0 s_0'^2 + s_0'' s_0^2 \right). \quad (3.60b)$$

On constate que, si on pose (l'espace d'un instant) $x_4 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, alors on se retrouve dans les conditions de l'APC à translation pure abordé en section 2.4.1 et on remarque que subsiste le terme encadré dans le second membre de l'équation (3.60b), à savoir $-2n_e\lambda\theta_1' s_0$. C'est là la source (au moins la première jusqu'au troisième ordre de perturbation) du désaccord du système. En remontant le fil des événements, on retrouve son origine dans les équations du

mouvement (2.106a) et (2.106b) (cf. section 2.4.1) que l'on propose de réécrire ci-dessous :

$$(1 + \mu x) \tilde{\theta}'' + \mu z s'' + \mu \left(\frac{dx}{ds} s' \left(\frac{1}{ne} + \tilde{\theta}' \right) + \frac{dz}{ds} s'^2 \right) + 2\xi_c \tilde{\theta}' = T_a \cos \bar{\omega} \tau, \quad (3.61a)$$

$$z \tilde{\theta}'' + s'' - \boxed{\frac{1}{2} \frac{dx}{ds} \left(\frac{1}{ne} + \tilde{\theta}' \right)^2} + 2\xi_p s' = 0. \quad (3.61b)$$

Le désaccord du système est donc dû à une interaction entre le voile (via $\tilde{\theta}$) et le pendule (via $x(s)$). Ainsi, en enrichissant l'expression de l'épicycloïde (cf. équation (3.49a)) avec le terme $x_4 s^4$, on voit dans (3.60b) qu'il est possible de contrer cette interaction même si $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Inversement, si pour une raison ou une autre on tient à conserver une trajectoire épicycloïdale ($x_4 = 0$), alors on peut tirer parti de la rotation du pendule (dernier terme de second membre de (3.60b)).

Comme la solution à l'ordre 1 est la solution du système linéaire et comme la solution à l'ordre 2 ne contient pas de termes en $\bar{\omega} \tau$, pour corriger le désaccord, il n'est même pas nécessaire de résoudre le système (3.61) et de reconstruire θ via l'équation (3.48a). Il suffit d'annuler le second membre de (3.61b) évalué à $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR} = 1$. En utilisant les équations (3.54b) et (3.57b) on trouve la condition suivante :

$$2n_e \lambda \bar{\omega} \left| \theta_1 \right| \left| s_0 \right| + \frac{3}{2n_e^2} x_4 \left| s_0^3 \right| + 3\eta \alpha_1 \alpha_3 \bar{\omega}^2 \left| s_0^3 \right| = 0, \quad (3.62)$$

ce qui se réécrit

$$\frac{4n_e^4 \mu \lambda^3 + (16\mu\delta^2 - 12\beta\lambda) (x_4 + 2\eta n_e^2 \alpha_1 \alpha_3)}{4\mu\delta^2 - 3\beta\lambda} = 0. \quad (3.63)$$

On peut donc en déduire trois critères listés ci-dessous :

- Le premier, destiné à la correction de la trajectoire épicycloïdale, s'obtient en posant $\alpha_3 = 0$ et en résolvant (3.63) pour x_4 . En utilisant les définitions (3.51), ce premier critère s'écrit :

$$x_4 = \frac{\mu \lambda^3 n_e^4}{3\lambda\beta - 4\delta^2\mu} = \frac{\mu n_e^4 (1 + \eta \alpha_1^2)^3}{3(1 + \mu) (1 + \eta \alpha_1^2) - 4\mu (1 + \eta \alpha_1)^2}. \quad (3.64)$$

- Le deuxième est destiné à la correction du désaccord des systèmes à trajectoire épicycloïdale par le mouvement de rotation. Il s'obtient en posant $x_4 = 0$ et en résolvant (3.63) pour α_3 . En utilisant les définitions (3.51), ce second critère s'écrit :

$$\alpha_3 = \frac{\mu \lambda^3 n_e^2}{2\alpha_1 \eta (3\lambda\beta - 4\delta^2\mu)} = \frac{\mu n_e^2 (1 + \eta \alpha_1^2)^3}{2\eta \alpha_1 \left(3(1 + \mu) (1 + \eta \alpha_1^2) - 4\mu (1 + \eta \alpha_1)^2 \right)}. \quad (3.65)$$

- Le troisième critère concerne une nouvelle fois α_1 et s'obtient en posant $x_4 = 0$ et $\alpha_3 = 0$ dans (3.63). En utilisant les définitions (3.51), il s'écrit :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{-\eta}}. \quad (3.66)$$

Ce qui est impossible, η est forcément positif et α_1 est nécessairement une quantité réelle. Cependant, ce résultat est malgré tout très intéressant car il montre que la correction

du désaccord avec le seul paramètre α_1 n'est pas possible (il améliore en revanche les performances du système, *cf.* sections 3.3.2 et 3.3.3).

Au final, seuls les critères (3.64) et (3.65) sont dimensionnants et on remarque qu'ils font intervenir α_1 . Ce dernier peut, par exemple, être choisi selon la recommandation de la section 3.3.2, équation (3.31) au début de ce chapitre (c'est ce qui sera fait en section 3.4.3). Notez également que si $\alpha_1 = 0$ alors la recommandation (3.65) donne $\alpha_3 = \infty$. Cela implique que le paramètre α_3 seul (comme α_1 d'ailleurs) ne peut pas venir à bout du désaccord de l'APC. Les recommandations (3.64) et (3.65) ont fait l'objet de deux publications auprès de l'INPI [33] et [34].

À titre d'illustration, la figure 3.12 montre l'allure de la trajectoire épicycloïdale perturbée selon la recommandation (3.64). On voit qu'il est nécessaire "d'ouvrir" l'épicycloïde de référence pour corriger le désaccord.

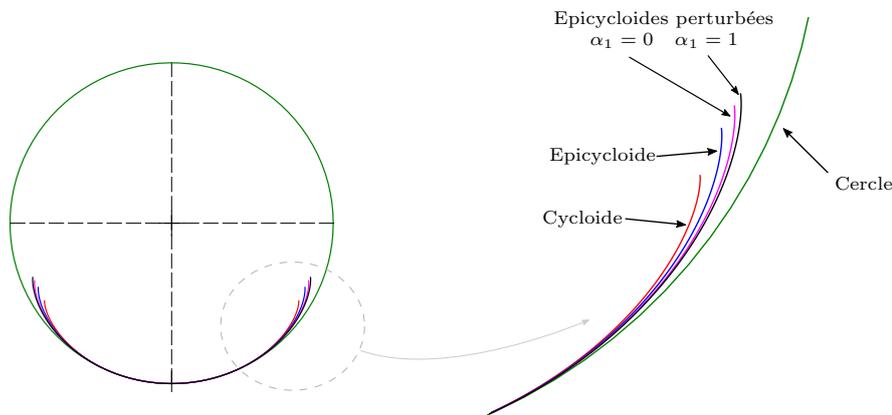


FIGURE 3.12 – Allure des trajectoires circulaire, épicycloïdale, cycloïdale et les épicycloïdes corrigées selon la recommandation (3.64). Paramètres : $\mu = 0.31$, $\eta = 0.15$, $n_e = 2$.

Afin d'évaluer pleinement la pertinence des différentes recommandations établies ici, on propose d'en constater le bénéfice sur la performance du système en section suivante.

3.4.3 Performances

Afin de discriminer les différentes solutions proposées pour combattre le désaccord du système, on s'intéresse aux situations résumées dans le tableau 3.2. On propose 5 cas basés sur une ap-

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
x_4	0	0	1.844	2.62	0
α_1	0	1	0	1	1
α_3	0	0	0	0	2.183

TABLE 3.2 – Tableau récapitulatif des 5 cas étudiés. Paramètres : $n_e = 2$, $\mu = 0.31$, $\eta = 0.15$, $\xi_p = 0.005$ et $\xi_c = 0$.

plication brièvement abordée lors du bilan de l'étude linéaire en section 3.3.3. On considère une application conventionnelle à 4 pendules (qui sont ici représentés par un unique pendule

équivalent) dont les paramètres sont $\mu = 0.31$ et $\eta = 0.15$ (cf. 2^{ème} ligne du tableau 3.1). Comme on s'intéresse à une antirésonance, on introduit un peu d'amortissement dans le système ($\xi_p = 0.005$ et $\xi_c = 0$) afin que l'amplitude du premier harmonique de la réponse mesurée sur le voile $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ à ce point particulier soit non nulle. Les cinq cas d'étude sont décrits ci-dessous :

Cas 1

Il s'agit de l'APC traditionnel à translation (cf. section 2.4.1) et à trajectoire épicycloïdale ($x_4 = \alpha_1 = \alpha_3 = 0$). C'est notre base de référence pour estimer la pertinence des critères de conception établis en section 3.4.2. Les performances des cas décrits ci-dessous seront donc comparées à ce cas de référence.

Cas 2

Il s'agit de l'APC à trajectoire épicycloïdale ($x_4 = 0$) pour lequel l'angle de rotation du pendule équivalent est une fonction linéaire de l'abscisse curviligne s . C'est-à-dire : $\alpha(s) = \alpha_1 s$. C'est celui que nous avons rencontré en section 3.3 lors de l'étude linéaire des performances qui nous a servie à établir certains critères de dimensionnement.

Cas 3

Il s'agit de l'APC à mouvement de translation pure ($\alpha_1 = \alpha_3 = 0$) dont la trajectoire est une épicycloïde perturbée selon la recommandation de l'équation (3.64). Cette trajectoire est visible en figure 3.12 (courbe magenta).

Cas 4

Cet APC est ressemblant à celui décrit au cas 3, à ceci près que l'épicycloïde est perturbée selon l'équation (3.64) évaluée pour $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_3 = 0$. L'allure de cette trajectoire est représentée par la courbe noire de la figure 3.12.

Cas 5

Il s'agit, comme pour les cas 1 et 2, d'un APC à trajectoire épicycloïdale ($x_4 = 0$) mais cette fois l'angle de rotation du pendule est régi par $\alpha(s) = \alpha_1 s + \alpha_3 s^3$ où α_3 est issu de l'équation (3.65) évaluée pour $\alpha_1 = 1$.

3.4.3.1 Performance à l'antirésonance

On s'intéresse ici à l'amplitude du premier harmonique de la réponse forcée mesurée sur le voile à l'antirésonance, c'est-à-dire à la fréquence où $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ est minimum (non nul car $\xi_p = 0.005$). On précise que, pour chacune des courbes présentées ci-dessous, le couple d'excitation T_a est augmenté jusqu'à ce que l'amplitude d'oscillation totale pendule $\max s(\tau)$ atteigne son maximum, autrement dit le point de rebroussement de la trajectoire (cf. section 2.3.2.2 et équations (A.18) et (B.11)).

La figure (3.13) montre la réponse forcée, pour les cinq cas décrits avant (cf. tableau 3.2), dans le plan amplitude d'excitation / fréquence. Les courbes de cette figure ont été obtenues par une méthode de continuation numérique d'antirésonance couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique (avec 15 harmoniques) qui sera présentée au chapitre 5. On constate que le désaccord du cas de référence (cas 1) est du même ordre de grandeur que celui du cas 2 où seul α_1 est non nul. Cela confirme que le désaccord du système ne peut pas être combattu avec le seul paramètre

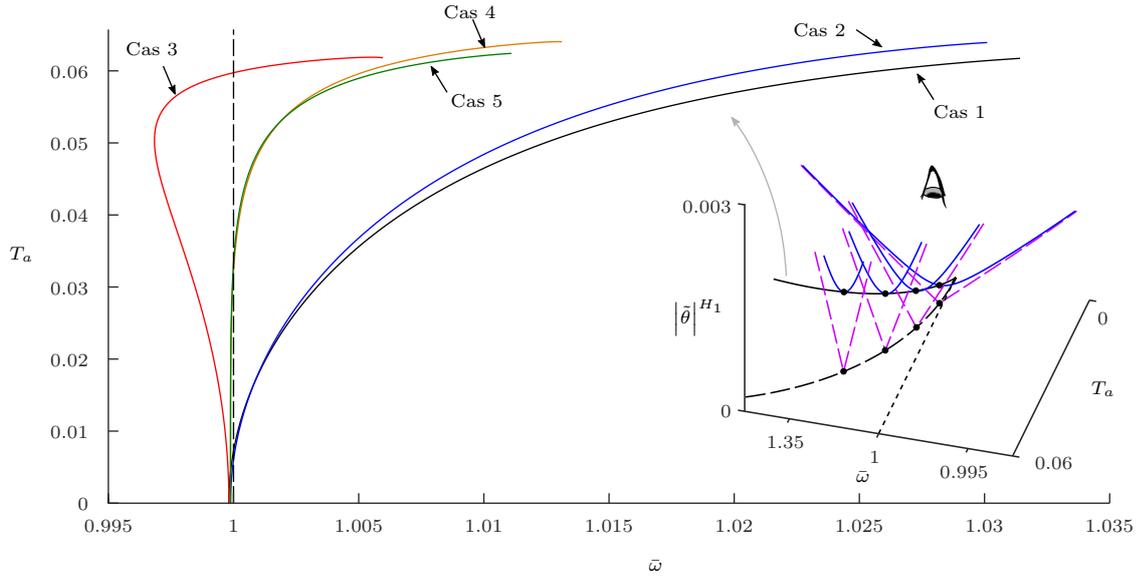


FIGURE 3.13 – Lieu de l'antirésonance $\min(|\theta|^{H_1})$ dans le plan (fréquence-amplitude d'excitation) pour les cas d'étude du tableau 3.2.

α_1 (cf. équation (3.66)). Cependant, on note quand même une légère diminution du désaccord pour une valeur de T_a donnée.

Les configurations restantes (3, 4 et 5) ont, quant à elles, une nette influence sur le comportement de l'antirésonance et illustrent la performance des règles de conception établies par les équations (3.65) et (3.64). On voit que ces critères ne sont pas parfaits et qu'aucun d'entre eux ne permet d'annuler totalement le désaccord quelle que soit l'amplitude du couple d'excitation. Cependant, on observe malgré tout une amélioration par rapport au cas de référence. Le désaccord constaté sur les cas 4 et 5 est bien maîtrisé jusqu'à une amplitude du couple d'excitation $T_a \approx 0.045$ puis diverge au-delà de cette valeur. C'est la limite de l'approche analytique de la section précédente. Il aurait fallu mener l'étude à des ordres de perturbation plus élevés afin d'accroître la précision des recommandations (3.64) et (3.65).

Les configurations 4 et 5 ont en commun d'impliquer un mouvement de rotation du pendule ($\alpha(s) \neq 0$), contrairement au cas 3 qui n'est qu'une simple translation. Cela tend à montrer, en complément du bilan de l'étude linéaire réalisé en section 3.3.3, que la rotation du pendule apporte un réel bénéfice, même à grande amplitude, sur le contrôle du désaccord de l'APC. En se focalisant sur ce seul objectif c'est donc les cas 4 et 5 qui se démarquent.

La figure 3.14 montre l'amplitude de $|\theta|^{H_1}$ (toujours à l'antirésonance) en fonction du couple d'excitation. Les courbes de cette figure sont les mêmes que celles de la figure 3.13 mais vues sous un angle différent. Il est très intéressant de remarquer que, sous cet angle, c'est le cas 3 qui est très similaire au cas de référence et non plus le cas 2, comme cela a été dit au paragraphe précédent. Les cas 2, 4 et 5 montrent une évidente diminution (au moins à l'antirésonance) de $|\theta|^{H_1}$ et ont en commun d'impliquer une rotation du pendule contrairement aux cas 1 et 3 qui n'impliquent, quant à eux, qu'une simple translation du pendule.

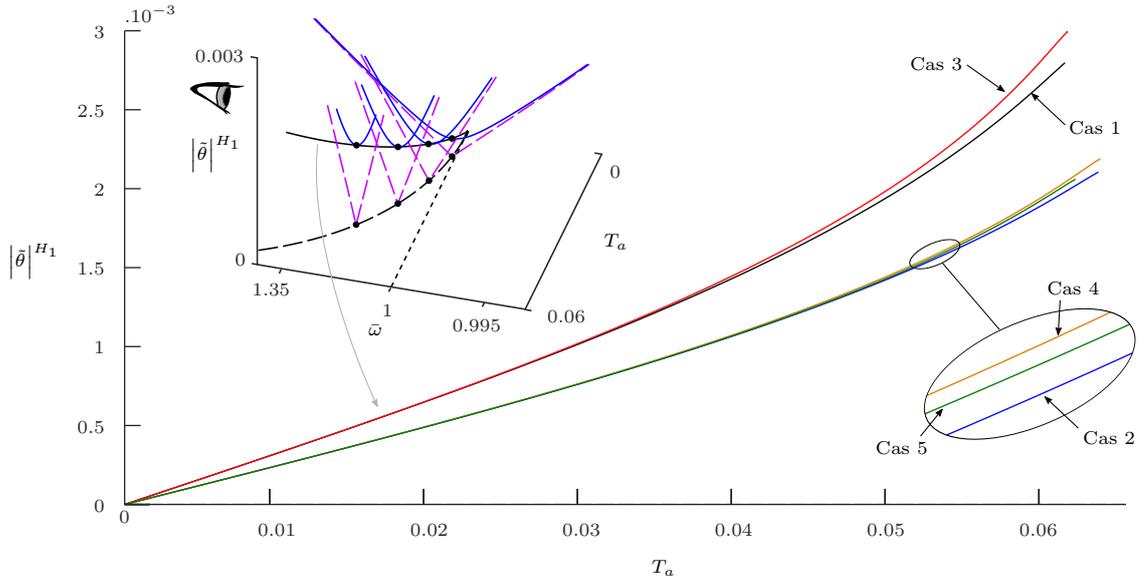


FIGURE 3.14 – Amplitude de l'harmonique fondamentale des oscillations du voile support à l'antirésonance pour les cas d'étude du tableau 3.2. Représentation dans le plan $(|\theta|^{H_1}$ - amplitude d'excitation).

On peut d'ores et déjà classer les différents cas d'étude en deux catégories, selon qu'ils admettent un mouvement de rotation du pendule ou non. Cette classification est schématisée en figure 3.15 et commentée ci dessous.

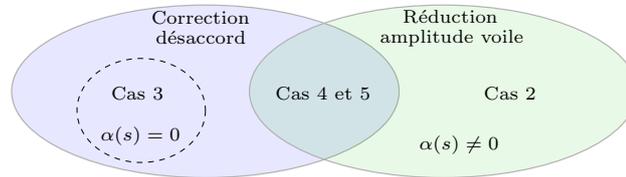


FIGURE 3.15 – Catégorisation des différents cas d'études selon leur capacité à combattre le désaccord et à réduire l'amplitude de l'harmonique fondamentale de la réponse du voile à la fréquence d'antirésonance $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{AR}$.

Mouvement de translation pure $\alpha(s) = 0$

- La perturbation de l'épicycloïde selon (3.64) influence le désaccord du système mais la correction est limitée (cas 3).
- La perturbation de l'épicycloïde selon (3.64) ne contribue pas à réduire l'amplitude de l'harmonique fondamentale de la réponse du voile à l'antirésonance (cas 3).

Mouvement de rotation des pendules $\alpha(s) \neq 0$

- Les règles de conception (3.64) ou (3.65) évaluées pour $\alpha_1 = 1$ permettent de combattre efficacement le désaccord du système (cas 4 et 5).
- Le mouvement de rotation du pendule contribue toujours à réduire l'amplitude de l'har-

monique fondamental de la réponse du voile à l'antirésonance, à condition que $\alpha_1 > 0$ (cas 2, 4 et 5).

3.4.3.2 Performance à la fréquence de fonctionnement

On s'intéresse maintenant à la performance du système à la fréquence de fonctionnement. On regarde toujours, dans un premier temps, l'amplitude de l'harmonique fondamental de la réponse forcée en fonction du couple d'excitation T_a mais cette fois à la fréquence $\bar{\omega} = 1$, comme illustré en figure 3.16.

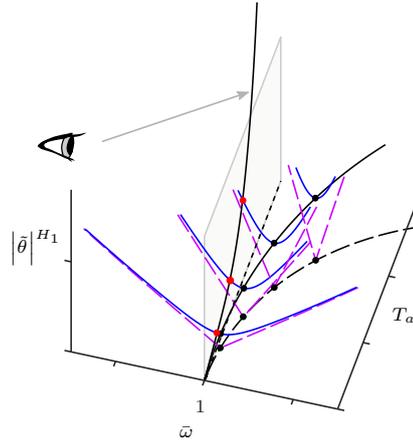


FIGURE 3.16 – Illustration de la réponse forcée à la fréquence de fonctionnement $\bar{\omega} = 1$.

Les résultats sont présentés en figure 3.17 pour les amplitudes mesurées sur le voile (à gauche) et sur le pendule (à droite). Ici encore, comme les trajectoires ne sont pas toutes de la même longueur (à cause des points de rebroussement), il n'est pas possible d'effectuer une comparaison sur une même plage de variation du couple d'excitation. Cependant, on constate une diminution de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ pour tous les cas proposés par rapport au cas de référence 1. En revanche, cela n'est pas vrai pour la réponse du pendule $|s|^{H_1}$ qui est amplifiée par la configuration numéro 3.

La quantification des performances de chaque solution par rapport au cas de référence est montrée en figure 3.18. Dans un premier temps, il est rassurant de voir que les performances des configurations 2, 4 et 5, qui impliquent toutes une contribution du paramètre α_1 dans la rotation du pendule, sont cohérentes à petite amplitude ($T_a \approx 0$) avec ce qui a été annoncé lors de l'étude linéaire (cf. 2^{ème} ligne du tableau 3.1, section 3.3.3).

Lorsque l'amplitude d'excitation augmente, les cas 4 et 5 illustrent le bénéfice du paramètre α_3 sur $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ (à gauche, figure 3.18) par rapport au cas 2 qui lui n'implique que α_1 . Cela montre que les efforts fournis en section 3.4.2 pour établir les critères (3.64) et (3.65) sont payants avec une diminution de l'amplitude de la réponse du voile allant localement jusqu'à environ 70% et de manière globale, supérieure à 20% pour les cas 4 et 5.

La bilan concernant l'amplitude d'oscillation du pendule (à droite, figure 3.18) est, lui, plus mitigé. La performance de la configuration 3 sur $|s|^{H_1}$ est mauvaise, avec une amplification de l'amplitude allant jusqu'à 30%. Les trois autres configurations offrent heureusement de meilleurs résultats. La performance des cas 4 et 5 est plutôt bonne mais se détériore à mesure que l'amplitude de T_a augmente et cette dégradation est particulièrement rapide. Au contraire, la perfor-

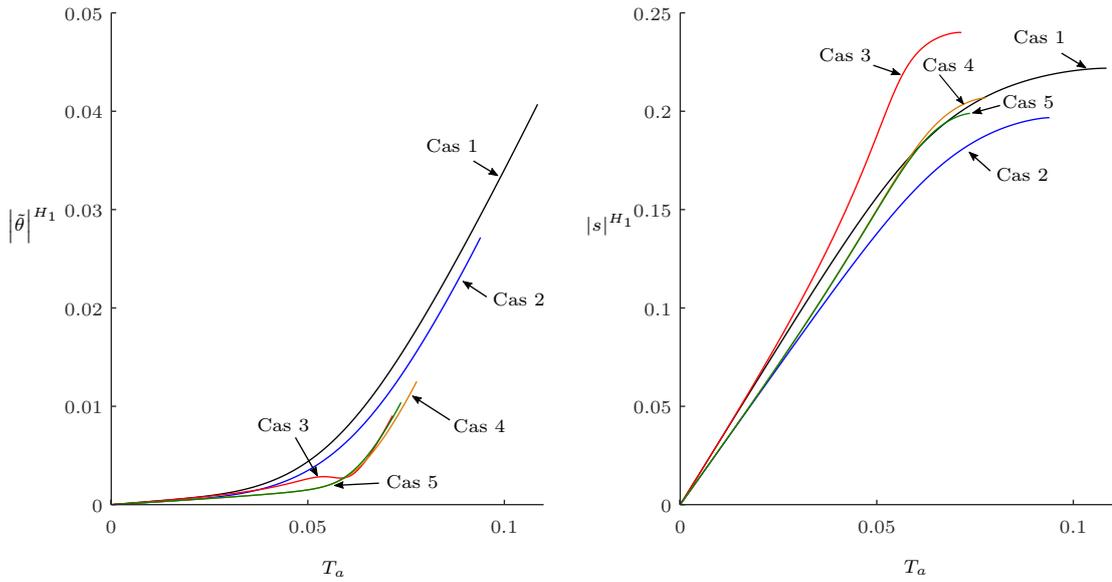


FIGURE 3.17 – Amplitude du premier harmonique de la réponse mesurée sur le voile (à gauche) et sur le pendule (à droite) à la fréquence $\bar{\omega} = 1$ pour les cas d'étude du tableau 3.2.

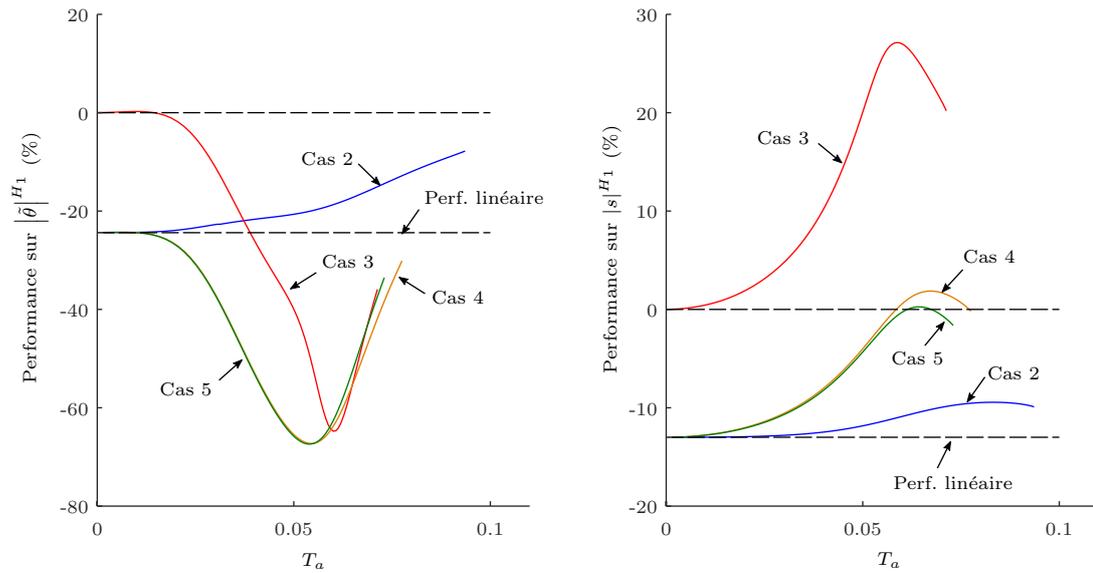


FIGURE 3.18 – Illustration de la performance (en %) des différentes configurations 2, 3, 4 et 5 par rapport au cas de référence 1. Performance constatée sur $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ (à gauche) et sur $|s|^{H_1}$ (à droite)

mance de la configuration numéro 2 sur $|s|^{H_1}$ est plutôt stable, aux alentours de -10%. Ceci est intéressant car, en se focalisant uniquement sur la performance mesurée sur le voile (à gauche, figure 3.18) les APC des cas 4 et 5 sont évidemment de très bon candidats. En revanche, la performance de ces mêmes APC sur le niveau de réponse du pendule est relativement moyenne.

3.4. CORRECTION ANALYTIQUE DE L'ANTIRÉSONANCE

Avec du recul, on s'aperçoit que l'APC de la configuration 2 offre des performances honorables, environ 10% d'amélioration tant sur l'amplitude de réponse du voile que sur le débattement du pendule.

On propose maintenant de s'intéresser à la performance aux harmoniques 1, 2, 3 et 4 de la réponse. On ne considère pas la configuration numéro 3 car ses performances sur $|s|^{H_1}$ sont mauvaises. On ne considère pas non plus la configuration 4 dont le comportement est très similaire au cas 5. La figure 3.19 montre donc une comparaison des configurations 2 et 5 au cas de référence 1, où l'on a zoomé sur les harmoniques supérieurs (en haut). Les signaux temporels de cette figure (en bas) représentent l'évolution de $\tilde{\theta}(\tau)$ et $s(\tau)$ à $T_a = 0.04$; ce point a été choisi car l'amplitude d'oscillation maximale du pendule atteint l'ordre de grandeur du débattement maximal possible, pour des raisons d'encombrement, sur pièce réelle.

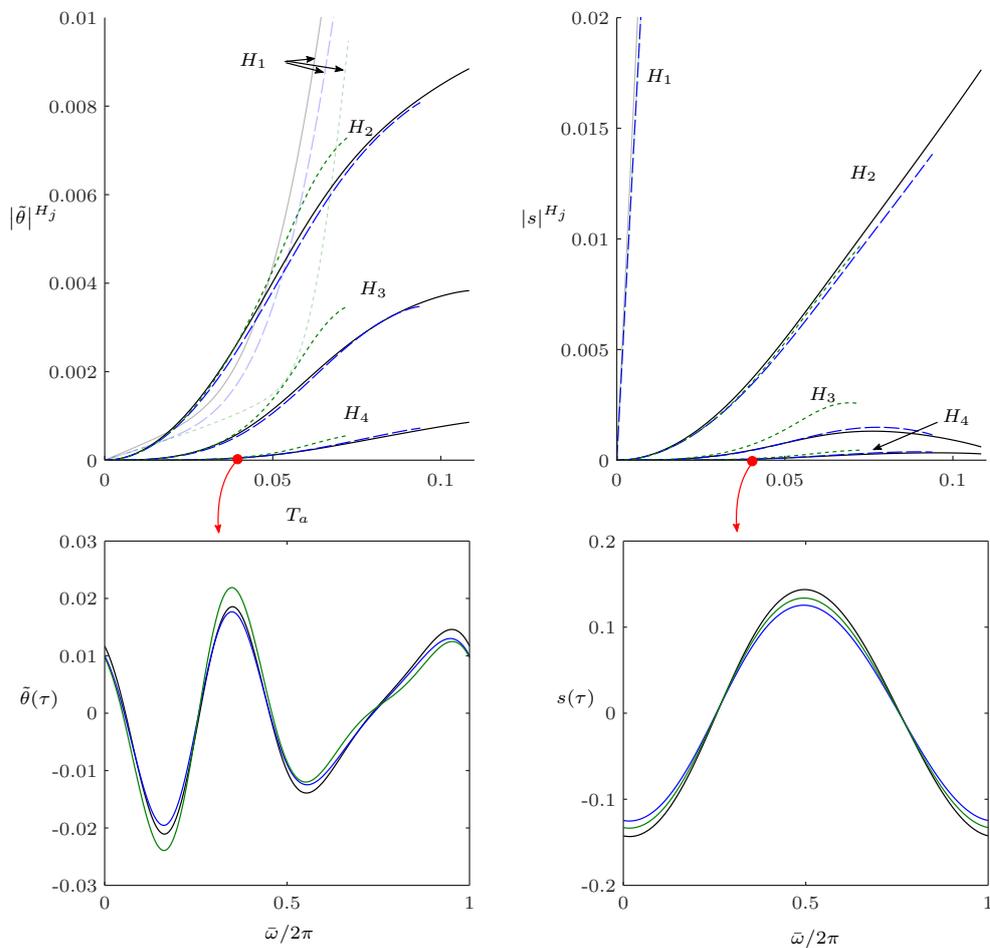


FIGURE 3.19 – Évolution des amplitudes des harmoniques 2, 3 et 4 de la réponse du voile (en haut à gauche) et du pendule (en haut à droite) à la fréquence de fonctionnement $\bar{\omega} = 1$. Signaux temporels de la réponse du voile $\tilde{\theta}(\tau)$ (en bas à gauche) et du pendule $s(\tau)$ (en bas à droite) à $T_a = 0.04$. Légende : Cas 1 :courbes noires, cas 2 :courbes bleues traitillé, cas 5 :courbes vertes pointillé.

On observe globalement une modification de l'amplitude du spectre fréquentiel des réponses. La configuration numéro 2 engendre une diminution des amplitudes de $\tilde{\theta}(\tau)$ et $s(\tau)$ comme on peut le voir sur les signaux temporels reconstruits, ce qui est plutôt une bonne chose. Il en est de même pour la configuration 5 en ce qui concerne la réponse du pendule $s(\tau)$ dont l'amplitude est réduite par rapport au cas de référence. En revanche, l'amplitude du spectre fréquentiel du voile s'en trouve fortement perturbée (pour le cas 5), avec une augmentation significative des harmoniques 2, 3 et 4, ce qui a pour effet de majorer l'amplitude maximale de $\tilde{\theta}(\tau)$. Ceci est problématique car l'APC numéro 5 a justement été conçu afin de diminuer au maximum l'amplitude de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$, ce qui est plutôt une réussite (cf. figure 3.18), mais, l'augmentation du niveau des harmoniques supérieurs est alors d'autant plus visible sur la réponse totale. Par exemple, on voit que l'harmonique $|s|^{H_1}$ contribue, pour une part très importante, à la réponse du pendule. Une petite modification de l'amplitude de son spectre n'a donc que peu d'influence sur la réponse totale. Mais ce n'est pas le cas pour $|\tilde{\theta}|^{H_1}$. On peut légitimement se poser la question de la pertinence de vouloir à tout prix corriger le désaccord de l'APC si cela engendre une dégradation (légère) de la réponse totale. En d'autres termes, n'a-t-on pas déplacé un problème de la première harmonique vers les autres ? Au regard des niveaux d'amélioration présentés plus tôt (cf. figure 3.18), le bilan est quand même positif et la dégradation de la réponse totale reste malgré tout assez faible. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que les nouvelles trajectoires et les nouveaux mouvements de rotation proposés rendent l'APC moins non linéaire en dépendance de fréquence mais plus non linéaire en dépendance d'amplitude.

3.4.3.3 Bilan de l'étude de performance.

L'étude des performances menée en section précédente complète celle réalisée dans le cadre linéaire (cf. 3.3.3) et de nouvelles recommandations de conception de l'APC ont été établies dans l'optique de corriger le désaccord de l'absorbeur et ainsi accroître la performance de filtration du système. Ces recommandations permettent, en particulier, l'élaboration de trajectoires et des lois de rotation du pendule améliorées. Elles sont résumées ci dessous :

Perturbation de l'épicycloïde

- La perturbation de l'épicycloïde par l'ajout d'une non-linéarité quartique $x_4 s^4$ dans son expression (cf. équation 3.49a) permet de maîtriser le désaccord du système (cf. cas 3 et 4, figure 3.13) et le coefficient x_4 est donné par l'équation 3.64.
- La perturbation de l'épicycloïde, dans le cas de l'APC à mouvement de translation ($\alpha(s) = 0$), est déconseillée car cela engendre une majoration de l'harmonique fondamental du pendule (cf. cas 3 figure 3.18).
- La perturbation de l'épicycloïde, combinée à une rotation linéaire du pendule ($\alpha(s) = s$), entraîne une diminution de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ supérieure à 20% et de $|s|^{H_1}$ d'environ 10% au maximum (cf. cas 4 figure 3.18).

Bénéfice de la rotation du pendule combinée à la trajectoire épicycloïdale

- L'utilisation de la loi cubique $\alpha(s) = s + \alpha_3 s^3$ permet de maîtriser le désaccord du système (cf. cas 5, figure 3.13) et le coefficient α_3 est donné par l'équation 3.65. Cela entraîne une diminution de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ supérieure à 20% et de $|s|^{H_1}$ d'environ 10% au maximum (cf. cas 5 figure 3.18) mais également une amplification des harmoniques de la réponse (cf. cas 5 figure 3.19)
- L'utilisation de la loi linéaire $\alpha(s) = s$ ne permet pas de maîtriser le désaccord du système (cf. cas 2, figure 3.13) mais entraîne une diminution d'environ 10 % de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ et

$|s|^{H_1}$ (cf. cas 2 figure 3.18) et contribue à diminuer les amplitudes maximales des réponses $\theta(\tau)$ et $s(\tau)$ (cf. cas 2 figure 3.19).

3.5 Étude expérimentale

On présente dans cette section des résultats de mesures réalisées sur l'APC nouvelle génération lors d'une procédure expérimentale sur banc d'essai. Il n'a malheureusement pas été possible de réaliser une maquette physique conçue selon les recommandations de conception établies en section 3.4.2. Cependant, on montre les résultats des mesures réalisées sur deux applications différentes. Le premier cas est un APC léger issu d'un développement industriel présenté au chapitre 6. Le deuxième est une maquette existante d'APC conventionnel issu d'un développement extérieur à la thèse qui a été considéré afin de diversifier l'étude.

Cette campagne d'essai permet, premièrement, de valider le modèle dynamique de l'APC nouvelle génération établi en section 3.2 et, deuxièmement, de constater expérimentalement certains phénomènes.

On présente en premier lieu le banc d'essai et ses équipements (cf. section 3.5.1) puis les différents protocoles expérimentaux en section 3.5.2. Les deux prototypes et leurs caractéristiques seront présentés en section 3.5.4. La section 3.5.5 est dédiée à la présentation des résultats ainsi qu'à la corrélation calculs/essais. Pour finir, un bilan est dressé à la fin de l'étude en section 3.5.6

3.5.1 Description du banc d'essai

La banc d'essai présenté ici a été conçu par la société BIA et est implanté au sein du département mesures expérimentales de Valeo Transmission. Il n'a pas vocation à reproduire les conditions de vie en environnement véhicule mais est utilisé pour mener des investigations sur l'APC pendant la phase de développement ou pour des essais de validation du produit. Ce banc de mesure est constitué des principaux éléments suivants (cf. figure 3.20) :

Un actionneur

Il s'agit d'un moteur hydraulique contrôlé par une centrale de commande. Sa première utilité est de mettre en rotation l'APC jusqu'à atteindre une vitesse de rotation Ω , imposée par l'utilisateur, afin de soumettre le système au champ d'accélération centrifuge. Sa deuxième fonction est de délivrer un couple harmonique de la forme

$$T(t) = \tilde{T} \cos \omega_n t. \quad (3.67)$$

L'amplitude \tilde{T} et la fréquence d'excitation ω_n sont également imposées par l'utilisateur. L'actionneur peut être piloté selon deux configurations : la première consiste à effectuer un balayage de la fréquence ω_n (ω_n lie l'ordre d'excitation n à Ω , cf. équation (2.65)) pour Ω et \tilde{T} constants. La deuxième consiste à balayer \tilde{T} pour ω_n et Ω constants.

Un capteur de couple

Ce composant mesure le couple transmis par l'actionneur afin d'asservir ce dernier pour garantir que la consigne de couple définie par l'utilisateur soit respectée. Le capteur peut mesurer des couples jusqu'à 1000Nm d'amplitude avec une précision de $\pm 1\text{Nm}$.

Un capteur de vitesse

Ce composant mesure la réponse, sous la forme d'une vitesse de rotation, de l'interface de fixation sur lequel est fixé le voile de l'APC. Cette mesure est alors renvoyée vers le

pupitre de commande du banc et traitée par un logiciel afin d'en extraire les amplitudes du spectre fréquentiel.

Une interface de fixation

C'est sur cet élément que le voile de l'APC est fixé à l'aide de vis de serrage (*cf.* figure 3.21).

Une caméra rapide

Il s'agit d'une caméra pouvant filmer jusqu'à deux mille images par seconde (*cf.* figure 3.21). Elle est utilisée pour mesurer l'amplitude du déplacement des pendules car ces derniers ne peuvent être instrumentés directement du fait de la rotation du système. Des marqueurs visuels sont alors collés sur le voile et sur les pendules, le plus précisément possible sur leurs centres de gravité. Les données enregistrées sont ensuite traitées par un logiciel de traitement d'image. Les marqueurs collés sur le voile servent à positionner son repère dans le repère galiléen ce qui permet de suivre les marqueurs des pendules dans le repère tournant et ainsi de reconstruire la trajectoire de leurs centres de masse.

Des moyens d'éclairage

Il s'agit de deux projecteurs d'une puissance de 1000W, chacun destinés à fournir la luminosité nécessaire à la caméra rapide pour filmer la scène dans de bonnes conditions.

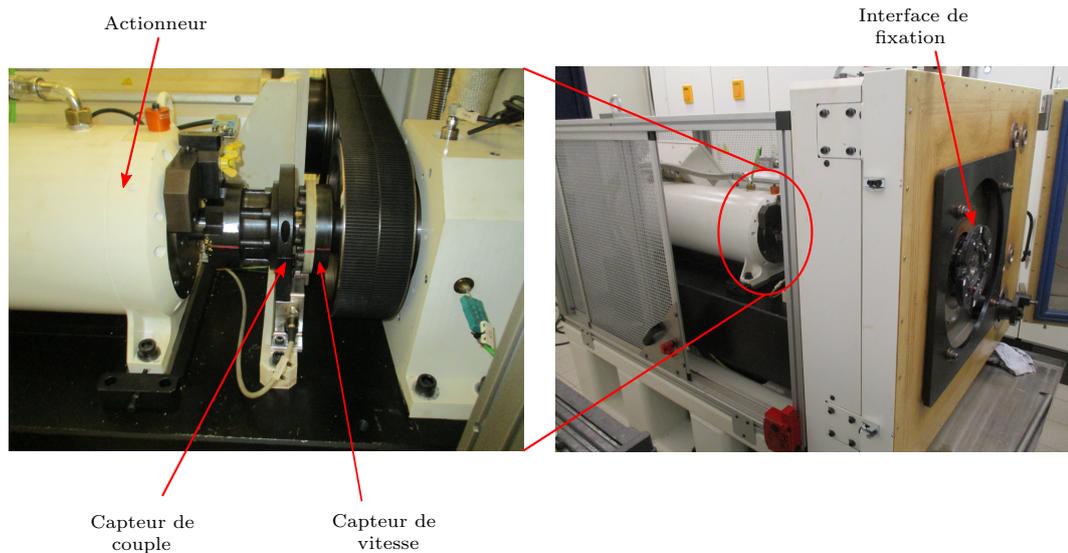


FIGURE 3.20 – Photographie du banc de mesure. Vue globale, à droite. Zoom sur le système d'actionnement, à gauche

3.5.2 Protocoles expérimentaux

Ce banc est utilisé pour diverses investigations, comme par exemple l'essai d'endurance destiné à éprouver l'APC pendant une durée pouvant aller jusqu'à 72 heures. L'objectif de cette procédure est de constater, d'une part, l'intégrité du système à la fin de l'essai et d'autre part,

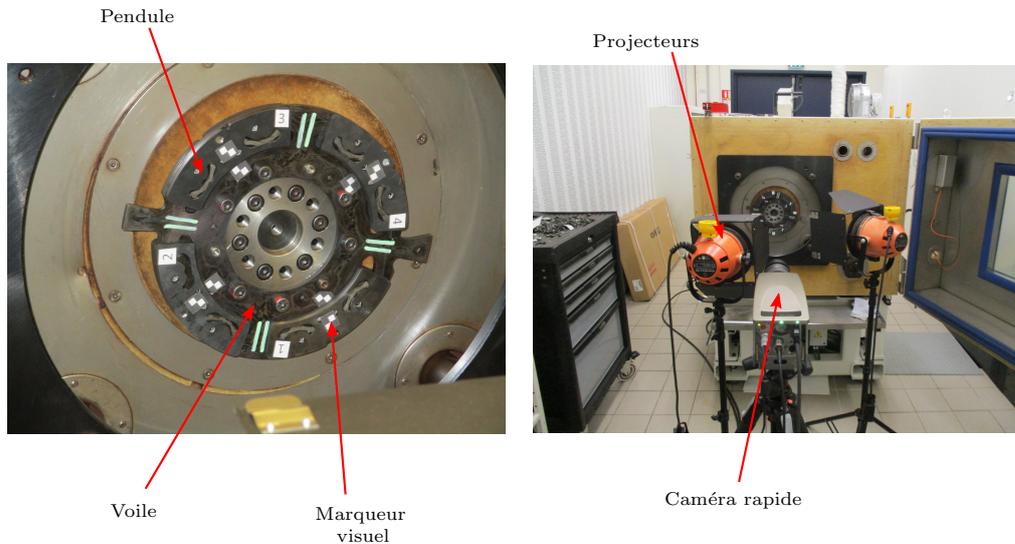


FIGURE 3.21 – Photographie du banc de mesure. Vue sur l’APC monté sur l’interface de fixation, à gauche. Vue sur les équipements du banc, à droite.

l’usure des pistes de roulement. Il y a également l’essai dit de centrifugation (sans couple oscillant) qui consiste à effectuer des cycles de montée en vitesse jusqu’à 5000 tr/min. Cette procédure sert notamment à vérifier le dimensionnement structurel du voile et ainsi garantir qu’aucune masse pendulaire ne puisse être éjectée, ce qui s’est déjà produit et c’est d’ailleurs pour cela que la banc est dans une enceinte close. Enfin, il y a les procédures dites de caractérisation, celles qui nous intéressent ici, à savoir :

Le balayage en fréquence

C’est l’essai classique de mesure de réponse en fréquence (*cf.* figure 3.23). La procédure standard consiste à balayer la fréquence d’excitation, pour une vitesse de rotation et une amplitude de couple données, autour de l’antirésonance de l’harmonique fondamental de la réponse du voile. Cette procédure sert d’une part, à valider que l’APC est correctement accordé à la fréquence escomptée et d’autre part, à l’estimation de sa capacité de filtration dans l’environnement du banc. Les modèles numériques sont ensuite corrélés sur les mesures expérimentales en vue du recalage des paramètres du système.

Le balayage en couple

Cet essai consiste à balayer l’amplitude du couple d’excitation pour une vitesse de rotation et une fréquence données (généralement la fréquence fondamentale du couple moteur ω_e) (*cf.* figure 3.24). L’objectif de cet essai est de quantifier le couple d’excitation nécessaire à la saturation des pendules. Le terme saturation est employé pour désigner un choc d’un ou plusieurs pendules lorsqu’ils atteignent la butée mécanique sur le voile. La procédure standard consiste à augmenter progressivement l’amplitude du couple d’excitation jusqu’à la détection de la saturation. Pendant l’essai, cette détection se fait généralement “à l’oreille” car le choc des pendules sur le voile engendre un bruit intense.

3.5.3 Modélisation de l'essai sur banc

La modélisation équivalente de l'essai est en réalité très simple. Comme le voile est encastré sur l'inertie de rotation du banc $J_b = 17.6 \text{ gm}^2$, alors cela s'apparente à suspendre les pendules sur un voile d'inertie équivalente $J_b + J_c$, où J_c est l'inertie de rotation du voile de l'APC. Le modèle dynamique utilisé est donc exactement le même que celui présenté en section 3.2, équations (3.3a) et (3.3b).

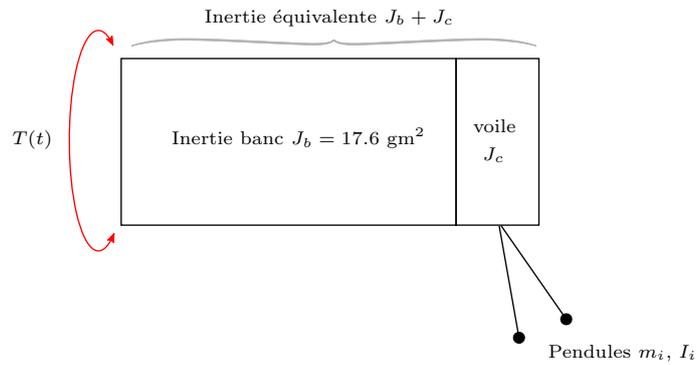


FIGURE 3.22 – Schéma de la configuration de l'essai sur banc.

3.5.4 Description des cas d'études

On présente ici deux cas d'études qui sont en fait des applications que l'on a déjà rencontrées précédemment. Il s'agit, d'une part, de l'APC léger (*cf.* figure 1.6) abordé lors du bilan de l'étude linéaire des performances en section 3.3.3 et, d'autre part, de l'APC conventionnel (monté sur le banc en figure 3.21) qui nous a servi de support pour l'étude de correction du désaccord en section 3.4.3. Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 3.3

	Inertie voile J_c gm^2	ordre d'accord n_p	masse m_i kg	Inertie de rotation I_i gm^2	$R_{0_i} + \rho_{0_i}$ mm	amortissement pendule C_{p_i} kg/s
APC léger (2 pendules)	0.46	2.186	0.21	0.206	53.5	0.84
APC conventionnel (4 pendules)	13	2.17	0.311	0.368	89.52	0.7

TABLE 3.3 – Caractéristiques des APC étudiés.

En ce qui concerne l'APC léger, avec de telles caractéristiques, le ratio d'inertie μ (*cf.* équation 2.108) est de 0.065, compte tenu de l'inertie du banc. Cela signifie que l'inertie équivalente des pendules est environ 15 fois plus faible que l'inertie du système sur lequel ils sont suspendus. En se référant à l'étude linéaire de la section 3.3 (*cf.* équation 3.13) la résonance du système est donc extrêmement proche de la fréquence d'antirésonance, ce qui rend la mesure de la réponse au voisinage de ce point très difficile. De ce fait, les essais réalisés sur cette application (voir

les résultats en section 3.5.5.1) se sont concentrés sur une plus large plage de fréquence afin de mesurer la réponse dynamique, notamment autour de la résonance.

La deuxième application (APC conventionnel) est quant à elle “plus favorable” avec un ratio d’inertie $\mu = 0.31$. L’inertie équivalente des pendules est donc seulement 3 fois plus faible que l’inertie primaire, ce qui a permis de focaliser l’étude au voisinage de l’antirésonance sans être trop perturbé par la résonance (voir les résultats en section 3.5.5.2). On précise quand même que la mesure autour de la résonance a malgré tout été tentée mais a été mise en échec par la très forte saturation des pendules générant des chocs importants, au point d’activer la sécurité du banc.

Le tableau 3.4 donne les coefficients, sans dimensions et dimensionnés, des expressions des trajectoires et des angles de rotation des pendules, après un léger recalage des modèles. Le passage des valeurs sans dimensions aux valeurs dimensionnées s’effectue via les équations (2.63) et (3.10).

	Coefficients sans dimension			Coefficients dimensionnés		
	trajectoire	rotation		trajectoire	rotation	
	x_4	α_1	α_3	X_4 (m^{-2})	a_1 (rad/m)	a_3 (rad/ m^3)
APC léger	0	0.7	2.64	0	13.08	17240.2
APC conventionnel	-1	1.12	-1	-124.8	12.5	-1393.9

TABLE 3.4 – Coefficients des trajectoires et de l’angle de rotation des APC étudiés.

La trajectoire de l’APC léger est donc une épicycloïde ($x_4 = 0$). Les coefficients de la rotation, α_1 et α_3 , n’ont pas été choisis au hasard et résultent d’une autre étude, mais cette fois en condition véhicule, qui sera abordée au chapitre 6. Cependant, on peut d’ores et déjà dire que ce choix a été fait afin de contrôler une antirésonance du système dans le même esprit que l’étude de la section 3.4, mais cette fois à l’aide de l’outil numérique.

En ce qui concerne l’APC conventionnel, la trajectoire est théoriquement une épicycloïde également et le terme x_4 devrait donc être nul. C’est un recalage fin du modèle qui nous amené à la conclusion que l’épicycloïde n’était pas parfaite, certainement du fait des incertitudes de fabrication, et que l’introduction de cette légère perturbation améliorerait la corrélation calcul / essai (cf. figure 3.23). Il en est de même pour le coefficient α_3 qui est théoriquement nul sur le plan de définition du produit. Le chapitre 7 propose une étude sur la conception de l’absorbeur pendulaire dans le cas de telles préconisations de trajectoire et de rotation du pendule.

3.5.5 Résultats.

Pour des raisons de lisibilité des résultats, les courbes de mesures des sections 3.5.5.1 et 3.5.5.2 ne sont pas présentées en fonction de la fréquence ω_n mais en fonction de l’ordre d’excitation n et le passage entre les deux s’effectue par la relation $\omega_n = n\Omega$.

3.5.5.1 L’application légère

On s’intéresse d’abord à la mesure de réponse en fréquence du voile. Les essais ont été réalisés en effectuant un balayage croissant de $n = 1.7$ à $n = 2.63$ en 60 secondes puis un balayage décroissant sur la même plage d’ordre, là aussi en 60 secondes (le système d’acquisition du banc

ne permet d'enregistrer les mesures des capteurs que pendant 120 secondes consécutives). Nous avons également considéré différentes vitesses de rotation Ω : 800, 1000, et 1200 tr/min ainsi que deux amplitudes du couple d'excitation \tilde{T} : 3 et 4 Nm. Ces amplitudes sont faibles afin d'obtenir une mesure exploitable. En effet, des amplitudes plus élevées provoquent une saturation trop importante des pendules ce qui perturbe fortement la mesure. Au contraire, avec des niveaux plus faibles, on s'approche excessivement de la précision du capteur de force (± 1 Nm) ce qui engendre des problèmes de régulation de l'actionneur notamment au voisinage de la résonance. Les mesures de $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ comparées aux résultats de calculs sont présentées en figure 3.23. On constate que les problèmes de régulation du couple se voient sur les mesures (courbes noires), par exemple dans la zone entourée de pointillés rouges où les courbes aller et retour de la réponse ne passent pas par le même chemin. Malgré tout, les résultats de simulations (courbes bleues) sont très cohérents avec les mesures et retranscrivent bien le comportement très non linéaire assouplissant du système.

On remarque que, pour une même amplitude de couple d'excitation, l'amplitude de réponse diminue à mesure que la vitesse de rotation augmente, ce qui est logique car en reprenant l'expression du couple adimensionnée T_a (cf. équation (2.104)) le carré de la vitesse de rotation Ω y apparaît au dénominateur. Toutes choses égales par ailleurs, doubler la vitesse de rotation est alors équivalent à diviser l'amplitude du couple par 4. La situation la plus critique, en terme de saturation des pendules, correspond donc à des vitesses de rotation faibles et des couples d'excitation élevés. C'est pour cela que les courbes (bleues) issues des calculs numériques, des simulations à 800 tr/min par exemple, ne sont pas "fermées" car les points de rebroussement de la trajectoire sont atteints.

On observe également la forte proximité entre l'antirésonance et la résonance. Cette proximité, alliée au comportement assouplissant du système, provoque un saut de l'amplitude de réponse juste après l'antirésonance, ce qui rend la mesure précise de l'ordre d'accord de ce genre d'applications légères très délicate. Ce saut est également visible sur les courbes de la figure 3.24 où cette fois c'est l'amplitude de couple qui est balayée à vitesse de rotation constante, en l'occurrence ici $\Omega = 1000$ tr/min et pour un ordre fixé à $n = 2$. Nous avons réalisé un balayage croissant de 0 Nm jusqu'au couple de saturation des pendules (≈ 8 Nm) en 60 secondes puis un balayage décroissant également en 60 secondes. Là encore, on constate une bonne correspondance entre le calcul numérique et la mesure avec cependant de petits écarts à proximité des sauts de la réponse. Remarquez que des points de mesures sont présents sur la branche instable de la réponse. Non, notre banc ne permet pas les mesures des branches instables. C'est une bonne illustration des problèmes de régulation mentionnés plus haut. En effet, lorsque le saut de la réponse a lieu, vers 5.5 Nm en balayage croissant, le banc diminue brusquement l'amplitude du couple d'excitation jusqu'à environ 1Nm, puis l'augmente brusquement jusqu'à 6 Nm, avant de se stabiliser à 5.5 Nm sur la branche supérieure. Lorsque le saut a lieu et que le banc diminue l'amplitude du couple de 5.5 à 1 Nm, l'acquisition de la mesure continue de se faire. C'est donc le fruit du hasard, si des points de mesures coïncident avec la prédiction numérique.

3.5.5.2 L'application conventionnelle

On s'intéresse maintenant à la deuxième application et toujours à l'amplitude de l'harmonique fondamental de la réponse mesurée sur le voile, mais cette fois au voisinage de l'antirésonance. La plage de fréquence étudiée est donc plus restreinte et permet un balayage beaucoup plus lent, toujours en 120 secondes, de $n = 1.8$ à $n = 2.1$. Les essais ont été réalisés, comme dans la section précédente pour les vitesses de rotation Ω : 800, 1000, 1200 tr/min mais avec des couples plus importants, 10, 20 et 30 Nm, autorisés par le rapport des inerties plus favorable de cet APC.

3.5. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

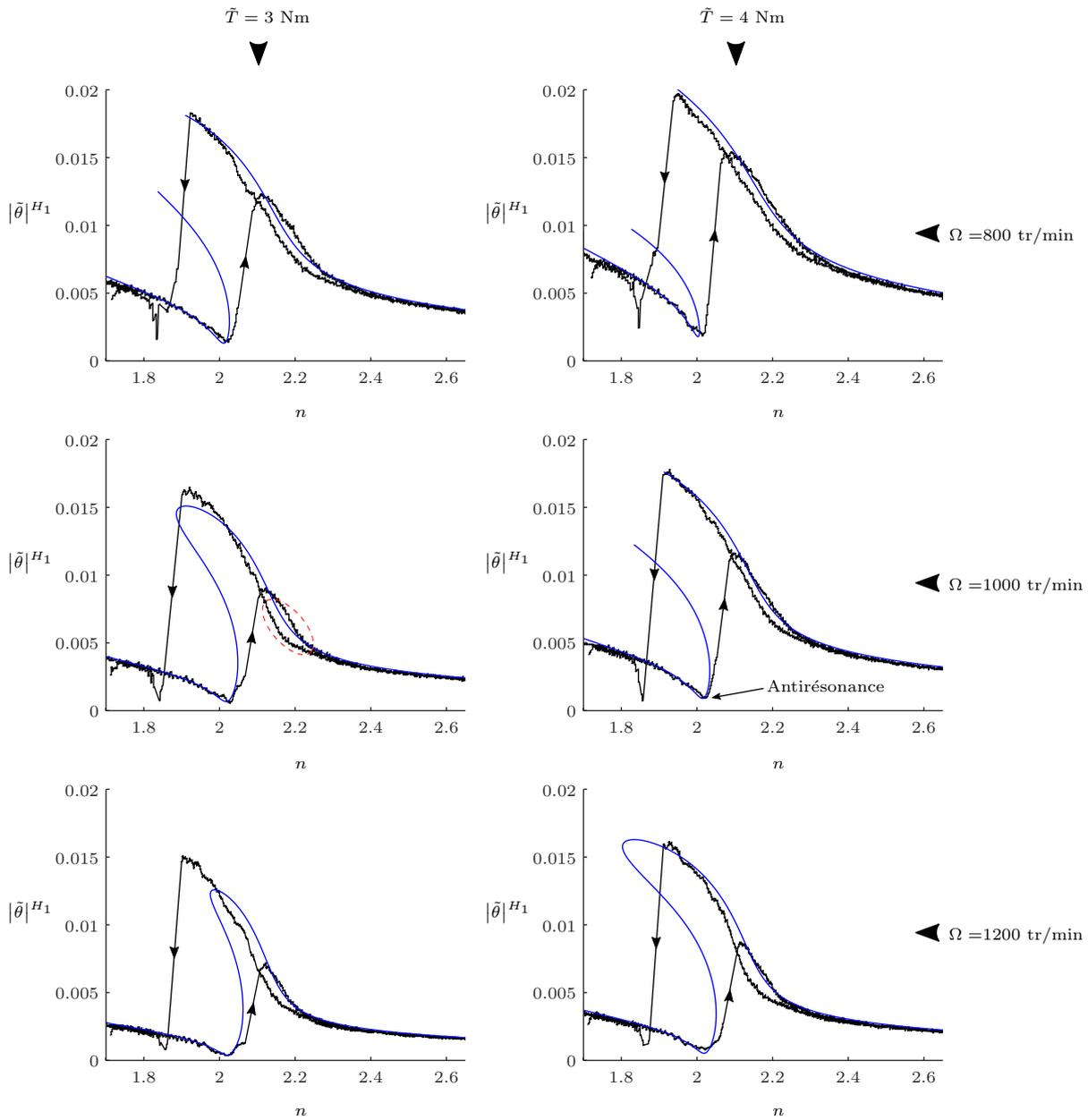


FIGURE 3.23 – Comparaison calculs (courbes bleues) / essais (courbes noires) de l’amplitude $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ lors d’un balayage en fréquence à différentes vitesses de rotation Ω et pour différentes amplitude d’excitation \tilde{T} .

Les résultats de la comparaison calculs/essais sont donnés en figure 3.25. La corrélation a été effectuée cette fois sur la mesure de la vitesse du voile. On observe une très bonne concordance des résultats numériques et expérimentaux mais surtout une très faible dispersion des points de mesures, grâce à un balayage très lent ($\approx 0.042 \text{ Hz/s}$ à 1000 tr/min), ce qui permet une acqui-

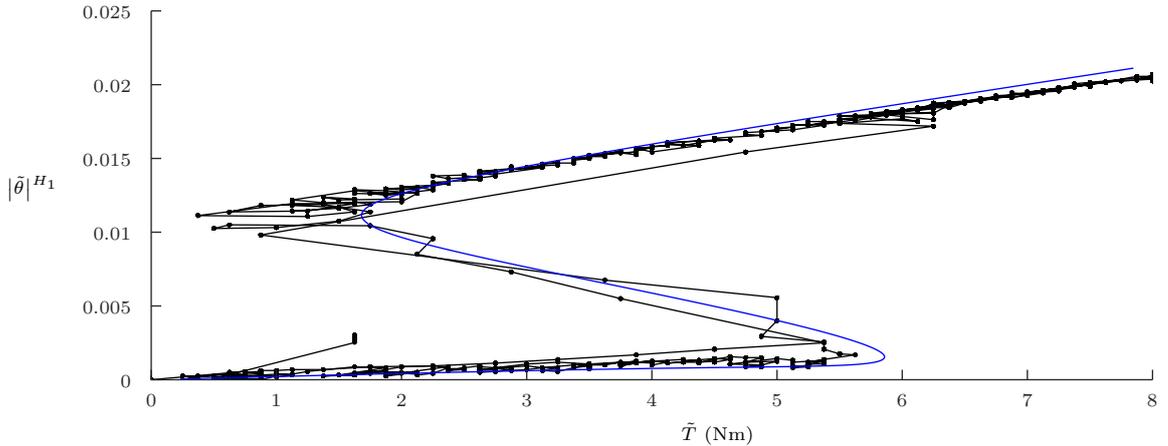


FIGURE 3.24 – Comparaison calcul (courbes bleue) / essai (courbes noire) de l'amplitude $|\tilde{\theta}|^{H_1}$ lors d'un balayage en couple à $\Omega = 1000$ tr/min et $n = 2$.

sition de très bonne qualité et donc un recalage assez fin du modèle. Ici c'est principalement le coefficient d'amortissement visqueux C_{p_i} (cf. tableau 3.3) et les coefficients x_4 et α_3 (cf. tableau 3.4) qui ont été recalés afin d'obtenir une bonne correspondance sur les différentes configurations de l'essai.

Au delà de l'aspect corrélation, cette application en particulier nous a amené à constater un phénomène intéressant lors d'une procédure de balayage en couple à $\Omega = 1000$ tr/min et $n = 2$. On effectue donc un balayage croissant sur 60 secondes du couple d'excitation de 0 Nm jusqu'au couple de saturation des pendules (même un peu au-delà) puis un balayage décroissant jusque 0, là encore en 60 secondes. Les résultats sont montrés en figure 3.26. Le graphe du dessus montre l'amplitude de $|\dot{\theta}|^{H_1}$ mesurée (courbe noire) et calculée numériquement (courbe bleue). On voit que la prédiction numérique du saut de la réponse, c'est-à-dire le point limite de la courbe bleue, correspond bien au début de la zone de saturation des pendules. Un enregistrement vidéo par caméra rapide réalisé pour certaines valeurs du couple d'excitation (20, 30 et 40 Nm) a permis de mesurer les oscillations des pendules sur leurs trajectoires en fonction du temps. Les signaux reconstruits après une phase de traitement d'image sont montrés, pour deux périodes d'oscillation, sur les 3 graphes a, b et c de la figure 3.26. Les couleurs verte, bleue, rouge et noire de ces graphes représentent respectivement les amplitudes d'oscillation des pendules 1, 2, 3 et 4. On observe qu'à 20 Nm (graphe a), il y a une localisation en amplitude sur le pendule 1 et que ce dernier est désynchronisé par rapport aux trois autres. À 30 Nm (graphe b), l'amplitude d'oscillation de pendule 3 est inchangée alors que celle des pendules 2 et 4 augmente. De plus, le déphasage s'intensifie. À 40 Nm (graphe c) c'est maintenant l'amplitude du pendule 4 qui est insensible à l'augmentation du couple et les pendules sont totalement désynchronisés. Il y a donc une dissymétrie à la fois en amplitude et en phase. Ce genre de localisation forcée se produit par exemple sur des systèmes à symétrie cycliques comportant plusieurs oscillateurs désaccordés. Dans le cas de l'APC, une cause possible à l'origine de ce phénomène est le désaccord des pendules entre eux [16], c'est alors un phénomène linéaire. Il a également été montré qu'une telle localisation pouvait se produire même dans le cas de pendules parfaitement accordés [77, 19]. Dans ce cas, c'est un phénomène non linéaire causé par les interactions entre les modes des pendules à grandes amplitudes d'oscillations. Ici, l'hypothèse d'une disparité entre les pendules,

3.5. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

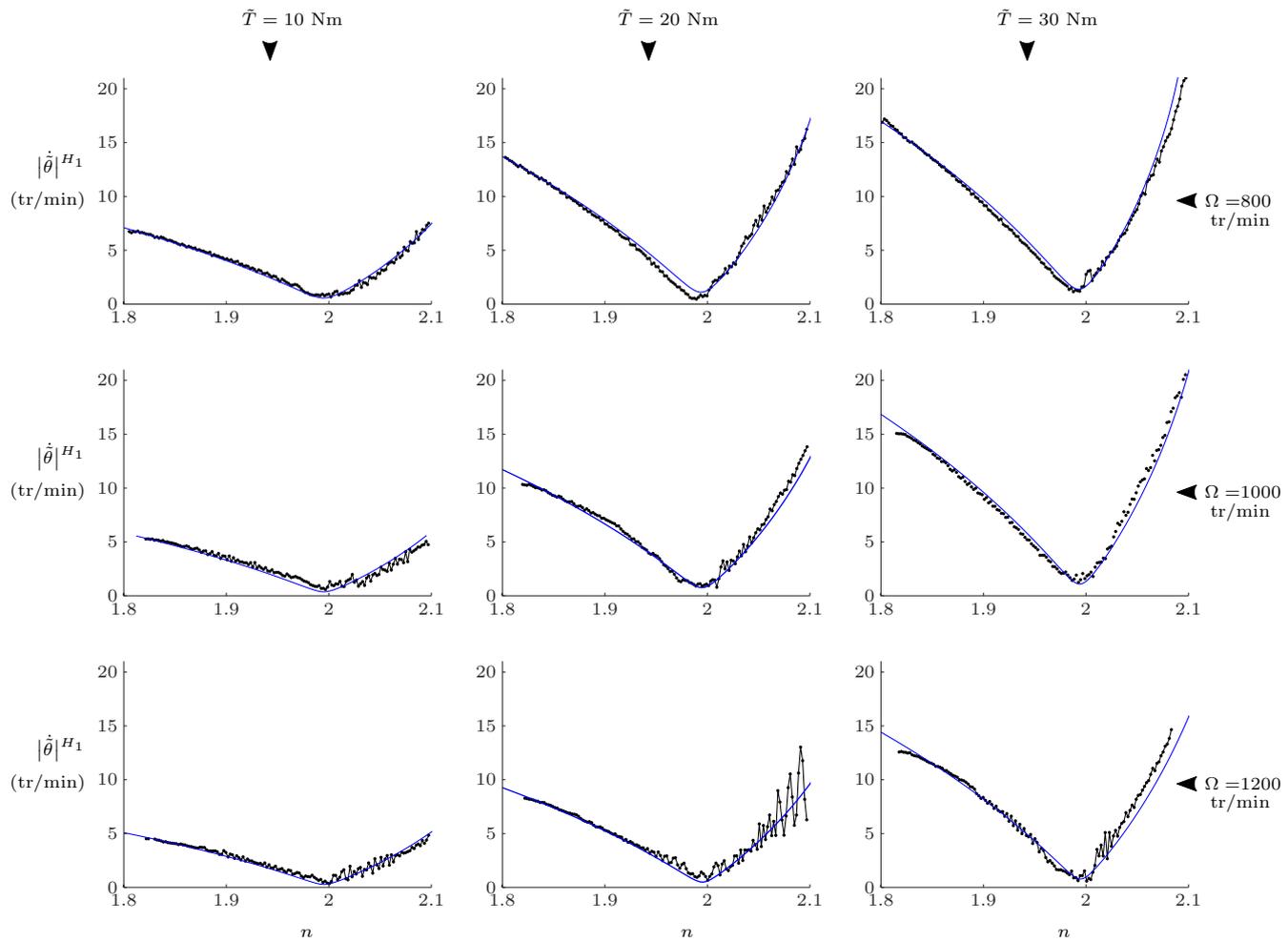


FIGURE 3.25 – Comparaison des calculs (courbes bleues) / essais (courbes noires) de l'amplitude $|\dot{\theta}|^{H_1}$ lors d'un balayage en fréquence au voisinage de l'antirésonance à différentes vitesses de rotation Ω et pour différentes amplitude d'excitation \tilde{T} .

due par exemple aux incertitudes de fabrication, est privilégiée car le phénomène est observé pour des amplitudes modérées du couple d'excitation. Cette hypothèse semble être confortée par la figure 3.27 qui montre que la réponse en fréquence mesurée sur le voile à $\Omega = 1000$ tr/min et pour une très faible amplitude d'excitation (5Nm) comporte un pic (pointillés rouges) au voisinage très proche de l'ordre d'accord théorique des pendules, ce qui s'apparente à un mode linéaire excité. De plus, les sources potentielles de dissemblance entre les pendules sont nombreuses, par exemple :

- Les tolérances géométriques des profils de roulement du voile et des entretoises (*cf.* figure 1.7, section 1.1.4).
- Les déformations des pistes de roulement des entretoises provoquées par l'assemblage sous presse.
- Un glissement des rouleaux de guidage lors du mouvement des pendules.
- Une usure des pistes de roulement non uniforme.

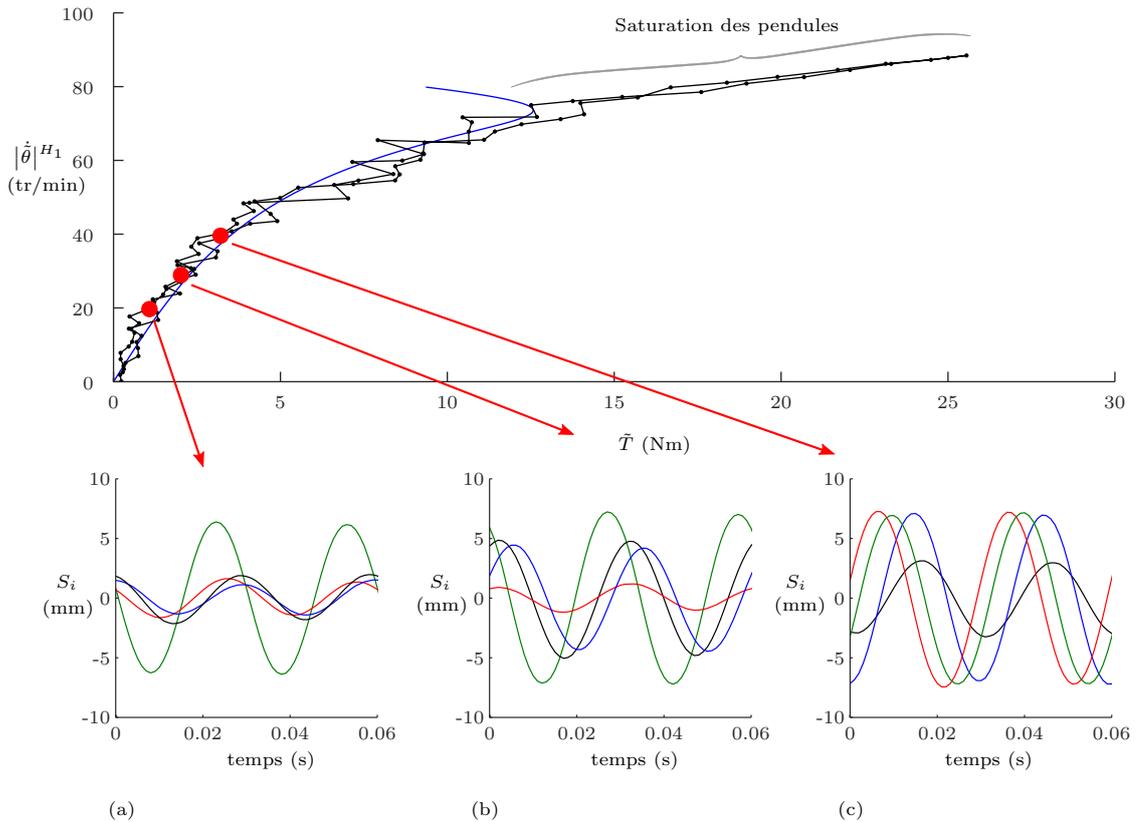


FIGURE 3.26 – Comparaison des calculs numériques (courbes bleues) et des mesures (courbes noires) du balayage en couple à $\Omega = 1000$ tr/min et $n = 2$, en haut. Les trois graphes du dessous représentent les mesures temporelles sur 2 périodes du déplacement des 4 pendules S_i le long de leur trajectoire.

Cependant, bien que le désaccord entre les pendules soit très probable pour les raisons citées ci-avant, cela n'exclut évidemment pas des phénomènes plus complexes d'interactions non linéaires. Cette campagne d'essais ayant été réalisée vers la toute fin du projet, il n'a pas été possible d'investiguer plus en profondeur cette question. Néanmoins, on peut tirer la conclusion intéressante que ce phénomène n'impacte pas significativement la performance de l'APC. En effet, les essais de cette campagne expérimentale ont été corrélés avec un modèle ne considérant qu'un unique pendule équivalent (*cf.* figure 3.25). Cela tend à montrer que, même si les pendules sont désynchronisés, la somme des contributions de chacun reste constante. Mais ce point nécessite malgré tout des investigations supplémentaires ne serait ce qu'en raison du problème de saturation. En effet, du fait des amplitudes d'oscillation différentes, les pendules saturent chacun leur tour pour des couples d'excitation eux aussi différents.

3.5.6 Bilan de l'étude expérimentale.

Les expériences menées sur banc d'essai pour deux applications différentes ont permis d'une part, de valider le modèle dynamique de l'APC nouvelle génération (*cf.* section 3.2) et d'autre

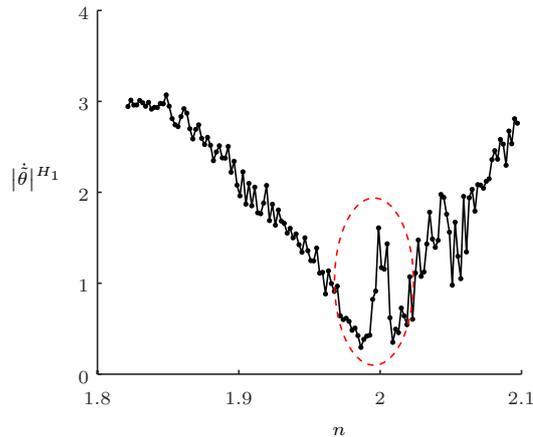


FIGURE 3.27 – Réponse en fréquence mesurée sur le voile. $\Omega = 1000$ tr/min et $\tilde{T} = 5$ Nm.

part, de mettre en évidence certains points exposés ci dessous :

Un banc d'essai peu adapté aux application légères

- Un rapport des inerties μ trop faible engendre une très forte proximité entre la résonance et l'antirésonance (*cf.* figure 3.23) ce qui rend difficile la caractérisation de l'ordre d'accord du système.
- Cette proximité importante, alliée au comportement fortement assouplissant du système, engendre des sauts de la réponse notamment lors de la procédure de balayage en couple (*cf.* figure 3.24. Cela rend difficile l'estimation du couple de saturation des pendules.

Les pendules se désynchronisent

- L'enregistrement vidéo par caméra rapide permet d'identifier clairement la désynchronisation des pendules ainsi que la localisation de la réponse sur certains d'entre eux (*cf.* figure 3.26).
- L'origine présumée du phénomène de localisation est une dissemblance entre les pendules.
- Un balayage lent en fréquence et à faible couple d'excitation semble confirmer que les modes linéaires des pendules sont excités (*cf.* figure 3.27).

La désynchronisation des pendules n'engendre pas de pertes de performances

- La désynchronisation des pendules n'altère pas la capacité de filtration globale.
- Les résultats issus d'un modèle numérique à un seul pendule équivalent sont représentatifs des mesures réalisées sur le voile en conditions réelles (*cf.* figures 3.24, 3.23, 3.25 et 3.26).

Chapitre 4

Méthodes numériques

De nombreux résultats numériques ont été exposés dans les chapitres 2 et 3. Ceux-ci ont été obtenus à l'aide d'un outil de simulation numérique développé pendant la thèse. Cet outil est dédié à l'étude du comportement de l'APC dans des conditions diverses, que ce soit sur banc d'essai (*cf.* section 3.5.1) ou en environnement véhicule (*cf.* chapitre 6). Ce chapitre a pour objectif de présenter la stratégie de simulation choisie : la méthode asymptotique numérique, couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique.

Différentes stratégies de calculs de solutions périodiques sont d'abord abordées en section 4.1 puis on s'intéresse aux méthodes de continuation numérique en section 4.2. On présente ensuite la méthode asymptotique numérique dans l'environnement de simulation Diamanlab en section 4.3. Enfin, l'implémentation du système dynamique est décrite section 4.4.2 et on s'intéresse notamment à certaines spécificités qu'implique la simulation de l'absorbeur pendulaire centrifuge dans l'environnement de la chaîne cinématique.

Sommaire

4.1	Calcul des solutions périodiques.	115
4.2	Continuation numérique.	117
4.2.1	Méthodes de prédiction correction.	118
4.2.1.1	Continuation séquentielle.	118
4.2.1.2	Continuation par pseudo longueur d'arc.	120
4.2.2	La méthode asymptotique numérique.	122
4.2.3	Le cadre quadratique de la MAN	123
4.2.4	Bilan des méthodes de continuation numérique	124
4.3	DiaManlab	126
4.4	Implémentation des équations du mouvement dans DiaManlab	127
4.4.1	Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge seul	127
4.4.1.1	Système algébro-différentiel	130
4.4.1.2	Système algébrique	133
4.4.2	Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge dans la chaîne cinématique	135
4.4.3	Bilan de la procédure d'implémentation	138

4.1 Calcul des solutions périodiques.

Les systèmes qui ont été abordés jusqu'à présent, que ce soit l'APC de l'ancienne génération ou de la nouvelle, ont en commun d'être régis par des systèmes d'équations dynamiques non linéaires pouvant s'écrire au premier ordre sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

où \mathbf{f} est le vecteur non linéaire des forces internes et externes, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_{eq}}$ est le vecteur des inconnues et $N_{eq} = \dim \mathbf{x}$. Lorsque l'on s'intéresse aux solutions périodiques de (4.1), en admettant qu'elles existent, alors ces dernières possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t + T), \end{cases} \quad (4.2)$$

avec T la période de la solution. Il existe alors plusieurs stratégies pour les calculer :

Intégration temporelle

C'est peut être la méthode la plus simple de mise en œuvre et elle est présente dans beaucoup de logiciels commerciaux comme par exemple LMS Amesim (cf. section 2.4.3.1). De plus elle est bien adaptée aux problèmes de grande taille. Le système dynamique 4.1 est alors intégré dans le temps à partir de la condition initiale \mathbf{x}_0 puis on attend que le régime permanent soit bien établi. C'est comme cela que les résultats de la figure 2.39 (cf. section 2.4.3.2) ont été obtenus. Cependant dans le cas de systèmes très peu amortis, le régime permanent peut mettre longtemps à s'établir.

Méthode de tir (*shooting* en anglais)

C'est également une méthode temporelle qui nécessite une étape préalable de correction de la condition initiale, par une méthode de Newton-Raphson [78], de sorte que \mathbf{x}_0 appartienne au bassin d'attraction de la solution périodique. Cela se traduit par :

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t = T) - \mathbf{x}_0 = 0. \quad (4.3)$$

En pratique, on réalise une intégration temporelle de \mathbf{x}_0 sur une période, suivie d'une correction de Newton-Raphson (cf. section 4.2) de la condition initiale. La procédure est alors répétée tant que la condition (4.3) n'est pas respectée (à une tolérance près). L'avantage majeur de cette méthode est que, contrairement à l'intégration temporelle classique, le régime permanent est obtenu très rapidement.

Collocation orthogonale

Il s'agit là encore d'une méthode temporelle qui consiste à discrétiser la période de la solution recherchée en sous intervalles représentés par des fonctions polynomiales par morceaux. Elle est implémentée par exemple dans le logiciel de continuation numérique AUTO [79].

Équilibrage harmonique (*harmonic balance method* en anglais)

Contrairement aux trois méthodes précédentes, celle-ci est fréquentielle. Le principe consiste à représenter la solution recherchée sous la forme d'une série de Fourier tronquée de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \sum_{j=1}^H \mathbf{x}^{cj} \cos j\omega t + \mathbf{x}^{sj} \sin j\omega t, \quad (4.4)$$

où l'indice j représente le $j^{\text{ème}}$ harmonique, $\omega = 2\pi/T$ est la fréquence de la solution, H est le nombre d'harmoniques retenus et \mathbf{x}^0 , \mathbf{x}^{cj} et \mathbf{x}^{sj} sont les coefficients (inconnus) de la série. On impose donc automatiquement la recherche des solutions périodiques et l'étude des autres régimes de (4.1) (quasi-périodiques, chaotiques ...) est alors impossible. On constate également que cette méthode nécessite de choisir a priori le nombre d'harmoniques retenus dans l'approximation. On imagine bien que pour un système non linéaire, la précision de la solution dépendra de H (cf. figure 2.41 par exemple). On substitue ensuite (4.4) dans les équations du mouvement (4.1) et on néglige les harmoniques supérieurs à H (puisque'ils ne sont pas pris en compte dans (4.4)). Finalement, comme les inconnues \mathbf{x}^0 , \mathbf{x}^{cj} et \mathbf{x}^{sj} sont indépendantes du temps, on égalise les coefficients de chaque harmonique à zéro ce qui produit un système purement algébrique de $N_{eq}(2H + 1)$ équations et $N_{eq}(2H + 1)$ inconnues de la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega) = 0, \quad (4.5)$$

avec $\mathbf{U} = [\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^{c1}, \mathbf{x}^{s1}, \dots, \mathbf{x}^{cj}, \mathbf{x}^{sj}, \dots, \mathbf{x}^{cH}, \mathbf{x}^{sH}]^T$ et $\dim \mathbf{U} = N_{eq}(2H + 1)$. Le système (4.5) peut se résoudre avec un algorithme de Newton-Raphson par exemple.

Afin de clarifier les idées, on propose d'illustrer la méthode de l'équilibrage harmonique (EH) sur un exemple concret, l'équation classique de l'oscillateur de Duffing forcé par exemple :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x + \gamma x^3 = f \cos \omega t, \quad (4.6)$$

avec le facteur d'amortissement ξ et l'amplitude de forçage f . Approximons la solution périodique de cette équation à un harmonique ($H = 1$) telle que

$$x(t) = x^c \cos \omega t + x^s \sin \omega t, \quad (4.7)$$

où on a choisi de négliger le terme constant. On substitue maintenant (4.7) dans (4.6) et en ordonnant les termes en cos et en sin il vient :

$$\begin{aligned}
 & \left[(1 - \omega^2)x^c + 2\xi\omega x^s + \frac{3}{4}\gamma(x^{c^3} + x^c x^{s^2}) - f \right] \cos \omega t \\
 + & \left[(1 - \omega^2)x^s - 2\xi\omega x^c + \frac{3}{4}\gamma(x^{s^3} + x^s x^{c^2}) \right] \sin \omega t \\
 + & \left[\dots \dots \dots \right] \cos 3\omega t \\
 + & \left[\dots \dots \dots \right] \sin 3\omega t = 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

On voit que le terme cubique de l'équation (4.6) fait apparaître des harmoniques d'ordre 3. Or nous ne les avons pas pris en compte dans l'approximation initiale, il faut donc les négliger ou alors enrichir la série (4.7) avec des harmoniques supplémentaires. Comme les inconnues x^c et x^s sont indépendantes du temps, l'équation (4.8) implique nécessairement que les coefficients de chaque harmonique soient nuls. On en déduit alors un système algébrique de la forme de (4.5) et s'écrivant dans notre cas :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega) = \begin{cases} (1 - \omega^2)x^c + 2\xi\omega x^s + \frac{3}{4}\gamma(x^{c^3} + x^c x^{s^2}) - f = 0, \\ (1 - \omega^2)x^s - 2\xi\omega x^c + \frac{3}{4}\gamma(x^{s^3} + x^s x^{c^2}) = 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

avec $\mathbf{U} = [x^c, x^s]^T$. Ce système étant non linéaire, il est nécessaire de mettre en place une stratégie de résolution. Certaines d'entre elles sont présentées dans la section suivante. Parmi les méthodes présentées précédemment, on choisit dans cette thèse d'utiliser la méthode de l'équilibrage harmonique.

4.2 Continuation numérique.

On s'intéresse ici à la résolution numérique d'un système d'équations algébriques. Il s'agit alors de calculer la ou les solutions du système en fonction d'une valeur donnée d'un paramètre donné. Dans le cas d'un système non linéaire de la forme de (4.5), résultant par exemple d'une procédure d'équilibrage harmonique, la résolution directe est impossible car les méthodes numériques ne permettent que la résolution de manière exacte de systèmes linéaires. Le principe consiste alors à décomposer la résolution du système non linéaire en une succession d'étapes de résolution de systèmes linéaires. C'est donc une procédure itérative, la plus connue étant la méthode de Newton-Raphson.

La continuation numérique intervient lorsque l'on s'intéresse à l'évolution de la solution en fonction de l'évolution du paramètre d'intérêt. Par exemple, l'étude dynamique d'une structure consiste souvent à étudier son comportement en fonction vis-à-vis d'une variation de la fréquence d'excitation. Dans le cadre de la thèse, on s'intéressera plutôt à l'étude du comportement de l'APC en fonction du régime moteur (*cf.* chapitre 6). La continuation numérique implique donc une succession de résolutions. Dans ce qui suit, seront présentées deux grandes familles de continuation numérique, à savoir les méthodes dites de prédiction correction (MPC) et la méthode asymptotique numérique (MAN). Les MPC sont des méthodes très connues et comme leur nom

l'indique, consistent à effectuer une étape de prédiction de la solution suivie d'une succession de corrections (avec la méthode de Newton-Raphson). La philosophie de la MAN, comme on le verra, est basée sur une prédiction d'ordre élevé ce qui présente l'avantage de pouvoir s'affranchir de l'étape de correction des MPC.

On propose de baser les présentations qui vont suivre sur le système (4.9) résultant de l'EH à un harmonique de l'équation de Duffing.

4.2.1 Méthodes de prédiction correction.

4.2.1.1 Continuation séquentielle.

Il apparaît tout à fait naturel, dans un premier temps, de paramétrer la branche de solution de (4.9) par le paramètre ω tel que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}(\omega), \omega) = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

On suppose maintenant que le point de solution initial $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})$ de la branche $(\mathbf{U}(\omega), \omega)$ est connu. En incrémentant la fréquence d'une quantité $\Delta\omega$ (choisie par l'utilisateur) le nouveau point de solution $(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\omega})$ sur la branche d'équilibre s'écrit

$$\begin{cases} \underline{\omega} = \omega^{(0)} + \Delta\omega, \\ \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\underline{\omega}) \approx \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(0)}, \end{cases} \quad (4.11)$$

où le développement de Taylor au premier ordre de $\underline{\mathbf{U}}$ est noté \mathbf{U}^* et l'incrément de prédiction $\Delta\mathbf{U}^{(0)}$ s'écrit :

$$\Delta\mathbf{U}^{(0)} = \Delta\omega \left. \frac{d\mathbf{U}}{d\omega} \right|_{\omega^{(0)}}. \quad (4.12)$$

\mathbf{U}^* représente la projection de $\underline{\mathbf{U}}$ sur la tangente en $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})$ de la branche de solution. C'est ce que l'on appelle la prédiction tangente du point de solution et constitue la première étape de la MPC. Afin de connaître exactement \mathbf{U}^* , nous devons connaître l'incrément de prédiction qui s'obtient en effectuant un développement de Taylor au premier ordre de (4.10) au point $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})$ tel que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)} + \Delta\omega) \approx \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)}) + \mathbf{J} \Big|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \Delta\mathbf{U}^{(0)} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \Delta\omega = \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

avec

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}, \quad (4.14)$$

la matrice jacobienne de (4.10) que l'on suppose inversible. En remarquant que $\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)}) = \mathbf{0}$ (puisque l'on est parti d'une solution exacte), on en déduit de (4.13) que :

$$\Delta\mathbf{U}^{(0)} = -\mathbf{J}^{-1} \Big|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \Delta\omega. \quad (4.15)$$

Maintenant que la prédiction tangente \mathbf{U}^* est parfaitement connue il nous faut la corriger (c'est la deuxième étape de la MPC) afin de déterminer la solution $\underline{\mathbf{U}}$. Dans le cadre de la

continuation séquentielle, l'étape de correction s'effectue à $\Delta\omega$ constant. Le point de solution définit en (4.11), se réécrit alors :

$$\begin{cases} \underline{\omega} = \omega^{(0)} + \Delta\omega, \\ \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\underline{\omega}) = \mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(1)} + \Delta\mathbf{U}^{(2)} + \dots, \end{cases} \quad (4.16)$$

où $\Delta\mathbf{U}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}^*$ représente la $j^{\text{ème}}$ correction de \mathbf{U}^* . C'est le principe de la méthode de Newton-Raphson, la prédiction tangente est corrigée de manière récursive jusqu'à l'itération j^* tel que (4.10) satisfasse la condition

$$\left\| \mathbf{R}(\underline{\mathbf{U}}^{(j^*)}, \underline{\omega}) \right\| < \epsilon, \quad (4.17)$$

avec ϵ une petite tolérance car le résidu n'est jamais strictement nul de par l'utilisation de la méthode numérique.

En pratique, le terme correctif $\Delta\mathbf{U}^{(j)}$ s'obtient en effectuant le développement de Taylor au premier ordre de (4.10) à l'itération j tel que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(j-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(j)}, \underline{\omega}) \approx \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(j-1)}, \underline{\omega}) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{(\mathbf{U}^{(j-1)}, \underline{\omega})} \Delta\mathbf{U}^{(j)} = \mathbf{0}, \quad (4.18)$$

on en déduit

$$\Delta\mathbf{U}^{(j)} = -\mathbf{J}^{-1} \Big|_{(\mathbf{U}^{(j-1)}, \underline{\omega})} \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(j-1)}, \underline{\omega}). \quad (4.19)$$

Une fois l'étape de correction terminée, le point de solution $(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\omega})$ est pris comme nouvelle solution initiale et la procédure est répétée à partir de l'équation (4.11).

La figure 4.1 montre l'amplitude d'oscillation de l'oscillateur de Duffing approchée à un harmonique, solution du système (4.9). On constate qu'il nous manque une information lorsque

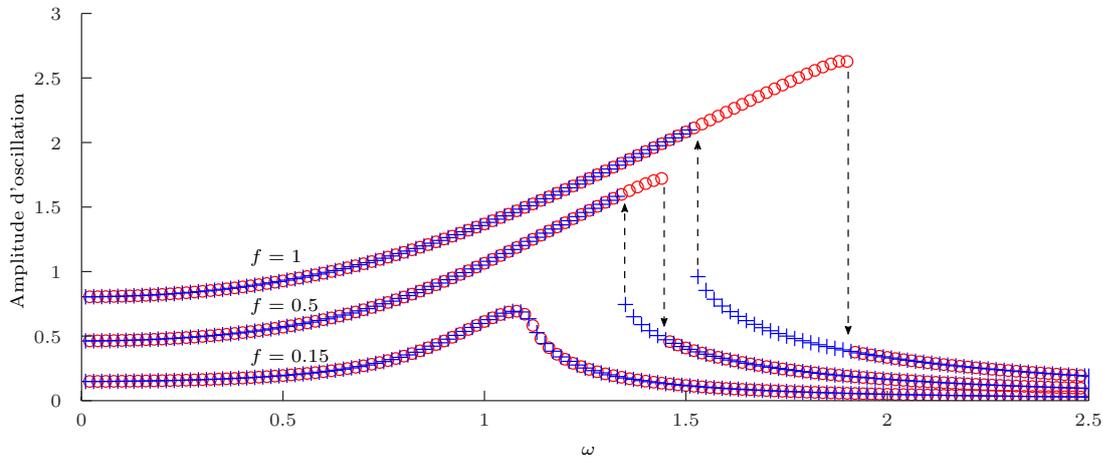


FIGURE 4.1 – Réponse de l'oscillateur de Duffing solution du système algébrique non linéaire (4.9) résultant d'un EH à un harmonique de l'équation (4.6). Résolution par la méthode de continuation séquentielle. ω croissant : \circ , ω décroissant : $+$. Paramètres : $\xi = 0.1$, $\gamma = 0.5$, $\Delta\omega = 0.01$.

plusieurs solutions deviennent possibles, comme ce que l'on mesure expérimentalement (cf. figure

3.23, section 3.5.5.1). C'est une conséquence de la paramétrisation de la branche de solution qui implique que l'étape de correction de la MPC séquentielle se fasse à ω constant. De plus, comme ω est incrémenté à chaque pas de la quantité $\pm\Delta\omega$ (en fonction d'un balayage croissant ou décroissant), l'algorithme n'a d'autres choix que de converger sur l'autre branche une fois les points limites passés. On précise également que si par malchance la solution initiale $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})$ est un point limite, alors la prédiction tangente \mathbf{U}^* est infinie car la tangente à la courbe de solution est verticale en ce point particulier et l'algorithme diverge.

4.2.1.2 Continuation par pseudo longueur d'arc.

Nous avons vu que la paramétrisation naturelle de la branche de solution n'est pas adaptée à la résolution de problèmes algébriques fortement non linéaires. On introduit alors le paramètre a qui sera défini plus tard et que l'on considère comme le paramètre de la branche de solution, de sorte que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}(a), \omega(a), a) = \mathbf{0} \quad a \in \mathbb{R}^+. \quad (4.20)$$

Le principe de la méthode par pseudo longueur d'arc consiste à considérer ω comme une inconnue du problème en plus du vecteur \mathbf{U} . Le système (4.20) est donc, pour l'instant, sous déterminé et le paramètre a est désormais le paramètre de contrôle.

Comme pour la continuation séquentielle, on part d'une solution initiale connue $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)}, a^{(0)})$ où l'on considère que $a^{(0)} = 0$. En incrémentant le paramètre de contrôle d'une quantité Δa (choisie par l'utilisateur) le nouveau point de solution $(\underline{\mathbf{U}}, \underline{\omega}, \underline{a})$ sur la branche d'équilibre s'écrit

$$\begin{cases} \underline{a} = \Delta a, \\ \underline{\omega} = \omega(\underline{a}) \approx \omega^{(0)} + \Delta\omega^{(0)}, \\ \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\underline{\omega}) \approx \mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(0)}, \end{cases} \quad (4.21)$$

où les incréments de prédiction $\Delta\omega^{(0)}, \Delta\mathbf{U}^{(0)}$, s'écrivent

$$\Delta\omega^{(0)} = \Delta a \left. \frac{d\omega}{da} \right|_{a=0} \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{U}^{(0)} = \Delta a \left. \frac{d\mathbf{U}}{da} \right|_{a=0}. \quad (4.22)$$

La philosophie est alors la même que pour la continuation séquentielle, on effectue un développement de Taylor au premier ordre de (4.20) tel que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)} + \Delta\omega^{(0)}) \approx \mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)}) + \mathbf{J} \Big|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \Delta\mathbf{U}^{(0)} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \right|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \Delta\omega^{(0)} = \mathbf{0}. \quad (4.23)$$

Ce système est sous déterminé, il nous manque une information. La définition du paramètre a nous permet d'établir une équation supplémentaire régissant la longueur de l'incrément de prédiction :

$$\Delta a^2 = \Delta\omega^{(0)2} + \Delta\mathbf{U}^{(0)} \cdot \Delta\mathbf{U}^{(0)}. \quad (4.24)$$

Où \cdot désigne un produit scalaire. En remarquant que $\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)}) = 0$ dans l'équation (4.23), l'incrément de prédiction $(\Delta\omega^{(0)}, \Delta\mathbf{U}^{(0)})$ est donc solution du système d'équations ((4.23), (4.24)).

L'étape de correction s'effectue maintenant à Δa constant et le point de solution (4.21) se réécrit

$$\begin{cases} \underline{a} = \Delta a, \\ \underline{\omega} = \omega(\underline{a}) = \omega^{(0)} + \Delta\omega^{(0)} + \Delta\omega^{(1)} + \Delta\omega^{(2)} + \dots, \\ \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\underline{\omega}) = \mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(1)} + \Delta\mathbf{U}^{(2)} + \dots, \end{cases} \quad (4.25)$$

En pratique, la correction $(\Delta \mathbf{U}^{(j)}, \Delta \omega^{(j)})$ s'obtient, comme précédemment, en effectuant le développement de Taylor au premier ordre de (4.20) à l'itération j tel que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^{(j-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(j)}, \omega^{(j-1)} + \Delta \omega^{(j)}, \Delta a) \approx \mathbf{R}^{(j-1)} + \mathbf{J}^{(j-1)} \Delta \mathbf{U}^{(j)} + \frac{\partial \mathbf{R}^{(j-1)}}{\partial \omega} \Delta \omega^{(j)} = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

Là encore ce système est sous déterminé, l'information supplémentaire est donnée en imposant la direction de la correction. Il est généralement d'usage d'utiliser une équation du type de (4.24) qui, en dimension 1, est celle d'un cercle de rayon Δa et de cercle de centre $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})$. La méthode dite de *continuation par longueur d'arc* impose alors que les corrections successives s'effectuent sur un arc appartenant à ce cercle. Dans le cas de la continuation par pseudo longueur d'arc, on impose que la direction des corrections soit orthogonale au pas de prédiction, ce qui implique que le produit scalaire entre la direction de la prédiction tangente et celle de la correction j soit nul et cela s'écrit :

$$\Delta \omega^{(0)} \Delta \omega^{(j)} + \Delta \mathbf{U}^{(0)} \cdot \Delta \mathbf{U}^{(j)} = 0. \quad (4.27)$$

L'incrément de correction $(\Delta \mathbf{U}^{(j)}, \Delta \omega^{(j)})$ est donc solution du système (4.26-4.27). Une fois l'étape de correction terminée via un critère d'arrêt du type de (4.17), le point de solution (\mathbf{U}, ω) devient le point initiale de la prochaine étape de calcul et la procédure est répétée depuis l'équation (4.21).

La figure 4.2 montre l'amplitude d'oscillation de l'oscillateur de Duffing approchée à un harmonique, solution du système (4.9). On constate que contrairement à la continuation séquentielle,

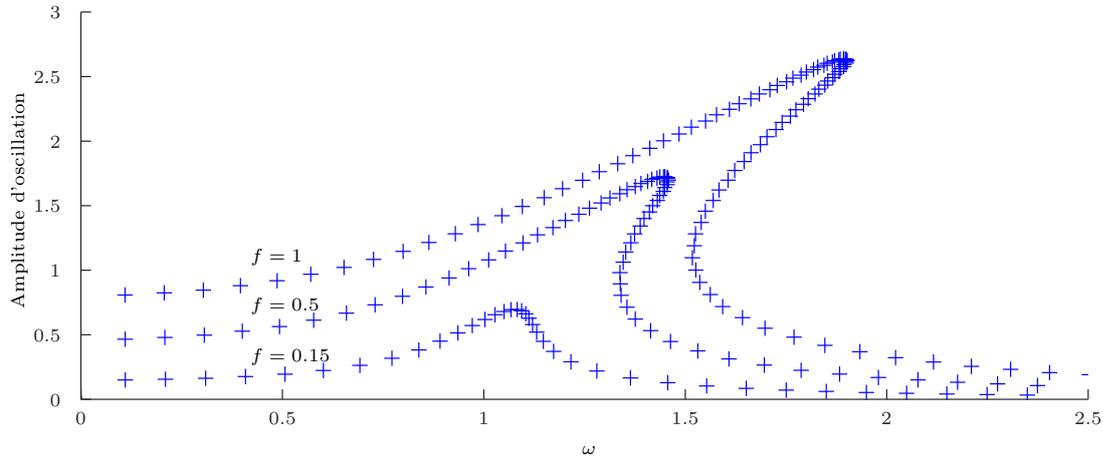


FIGURE 4.2 – Réponse de l'oscillateur de Duffing solution du système algébrique non linéaire (4.9) résultant d'un EH à un harmonique de l'équation (4.6). Résolution par la méthode de continuation par pseudo longueur d'arc. Paramètres : $\xi = 0.1$, $\gamma = 0.5$, $\Delta a = 0.05$.

la méthode par pseudo longueur d'arc (ou même par longueur d'arc) permet de passer les points limites de la courbe de réponse grâce à une direction de correction appropriée. Le paramètre important ici est donc le choix de la longueur du pas tangent, Δa qui peut s'avérer difficile à estimer a priori. Un pas trop petit engendrera un nombre de calculs élevés et donc un nombre de points superflu pour décrire la courbe de réponse mais constitue une relative garanti de convergence de l'algorithme. À l'inverse, la solution sera mal décrite avec un pas trop grand avec en plus un risque de divergence de la procédure. Il existe des stratégies d'adaptation du pas tangent

consistant par exemple à l'élargir dans les portions faiblement non linéaires de la branche de solution et à le rétrécir dans les zones fortement non linéaires.

4.2.2 La méthode asymptotique numérique.

Contrairement aux MPC, la philosophie de la méthode asymptotique numérique (MAN) [25] est basée sur une méthode de perturbation, dans le même esprit que la méthode employée au chapitre 3 (sections 3.4.1 et 3.4.2). Le principe consiste à effectuer un développement asymptotique des inconnues du système non linéaire (4.9) par rapport au paramètre a , autour d'une solution initiale connue $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})$ tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(a) = \mathbf{U}^{(0)} + \sum_{j=1}^p a^j \mathbf{U}^{(j)}, \\ \omega(a) = \omega^{(0)} + \sum_{j=1}^p a^j \omega^{(j)}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Notez que si $p = 1$ alors on se retrouve dans le cas d'une prédiction tangente (cf. section précédente), la MAN utilise donc, contrairement aux MPC, une prédiction d'ordre élevée, en l'occurrence à l'ordre p . De ce fait on a une expression analytique de la branche de solution et dès l'instant où l'on connaît $\mathbf{U}^{(j)}$ et $\omega^{(j)}$ on est capable de calculer $(\mathbf{U}(a), \omega(a))$ pour toute valeur de a . C'est donc un avantage par rapport aux MPC car en recherchant les solutions sous cette forme on obtient une représentation continue et non plus discrète de la branche de solution. Reste maintenant à déterminer les inconnues, c'est-à-dire les couples $(\mathbf{U}^{(j)}, \omega^{(j)})$. Pour cela, on met en œuvre la méthode de perturbation en substituant les expressions (4.28) dans l'équation (4.9) puis en effectuant un développement de Taylor autour de $(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})$, on construit une succession de systèmes en ordonnant les termes suivant les puissances de a :

ordre a :

$$\mathbf{J} \Big|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \mathbf{U}^{(1)} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \Big|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \omega^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (4.29a)$$

ordre a^j , $1 < j < p$:

$$\mathbf{J} \Big|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \mathbf{U}^{(j)} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \Big|_{(\mathbf{U}^{(0)}, \omega^{(0)})} \omega^{(j)} = \mathbf{F}_{nl}^{(j)} \left(\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(j-1)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(j-1)} \right). \quad (4.29b)$$

Ces systèmes sont linéaires car les seconds membres $\mathbf{F}_{nl}^{(j)}$ ne dépendent que des solutions aux ordres précédents. Il manque cependant une équation à chaque ordre, on ajoute alors la définition de la pseudo longueur d'arc qui s'écrit :

$$a = \left(\bar{\mathbf{U}}(a) - \bar{\mathbf{U}}^{(0)} \right)^\top \bar{\mathbf{U}}^{(1)}, \quad (4.30)$$

avec $\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}, \omega]^\top$ qui regroupe les inconnues initiales du système algébrique \mathbf{U} et le paramètre de contrôle ω . L'équation supplémentaire à l'ordre 1 est donc :

$$\bar{\mathbf{U}}^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{U}}^{(1)} = 1, \quad (4.31)$$

et à l'ordre j :

$$\bar{\mathbf{U}}^{(j)} \cdot \bar{\mathbf{U}}^{(1)} = 0. \quad (4.32)$$

La calcul de $(\mathbf{U}(a), \omega(a))$ est maintenant rendu possible en résolvant successivement les systèmes (4.29a) et (4.29b).

Cependant, nous devons maintenant établir la valeur maximale a_{max} au delà de laquelle les séries (4.28) ne sont plus valides. Comme ces dernières sont tronquées à l'ordre p , on peut légitimement penser que l'erreur de troncature (donc le résidu) est gouvernée en majorité par les solutions négligées de l'ordre $p + 1$. Une approximation de la longueur maximale du pas est obtenue [25] en utilisant le second membre $\mathbf{F}_{nl}^{(p+1)}$ du système linéaire à l'ordre $p + 1$ et s'écrit :

$$a_{max} \approx \left(\frac{\epsilon}{\left\| \mathbf{F}_{nl}^{(p+1)} \right\|} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (4.33)$$

Ce critère permet une adaptation automatique de la longueur du pas que l'utilisateur n'a donc pas à gérer contrairement aux MPC. De plus, comme $\mathbf{R}(\mathbf{U}(a), \omega(a)) < \epsilon, \forall a \in [0, a_{max}]$, la MAN ne requiert aucune procédure de correction. Finalement, la solution $(\mathbf{U}(a_{max}), \omega(a_{max}))$ est utilisée comme nouveau point de départ et la procédure est répétée depuis l'équation (4.28) pour le calcul du tronçon de la branche de solution.

4.2.3 Le cadre quadratique de la MAN

Une difficulté de la MAN réside dans le calcul des seconds membres à chaque ordre de perturbation qui peut s'avérer compliqué selon la nature des non-linéarités. C'est pour cela qu'un cadre quadratique a été pensé [80, 81] dans le but de faciliter le calcul de ces seconds membres. Ceci implique de réécrire le système algébrique de sorte que les non-linéarités soient quadratiques au maximum ce qui nécessite l'introduction de nouvelles inconnues et donc de nouvelles équations. En pratique, la forme générale imposée par ce formalisme est :

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}}), \quad (4.34)$$

où $\bar{\mathbf{U}}$ est ici le vecteur contenant les inconnues du système algébrique initial y compris de nouvelles variables nécessaires à la réécriture quadratique ainsi que le paramètre de contrôle (cf. équation (4.36)). \mathbf{C}_0 est un vecteur constant, $\mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}})$ est l'opérateur linéaire par rapport $\bar{\mathbf{U}}$ et $\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}})$ est l'opérateur bilinéaire par rapport à $\bar{\mathbf{U}}$. Par exemple, le système (4.9) qui comporte des termes cubiques peut se réécrire facilement sous cette forme et devient

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}) = \begin{cases} -f & + & x^c & + & 2\xi\omega x^s - \omega_2 x^c + \frac{3}{4}\gamma(x^c x_2^c + x^c x_2^s) & = & 0, \\ & + & x^s & + & \frac{3}{4}\gamma(x^s x_2^s + x^s x_2^c) - 2\xi\omega x^c - \omega_2 x^s & = & 0, \\ & + & x_2^c & - & x^{c^2} & = & 0, \\ & + & x_2^s & - & x^{s^2} & = & 0, \\ & + & \omega_2 & - & \omega^2 & = & 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{C}_0} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{L}(\bar{\mathbf{U}})} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}})}$

avec :

$$\bar{\mathbf{U}} = \left[\underbrace{x^c, x^s}_{\substack{\text{Inconnues} \\ \text{initiales} \\ \text{système} \\ (4.9)}} \underbrace{x_2^c, x_2^s, \omega_2}_{\substack{\text{variables} \\ \text{additionnelles}}} \underbrace{\omega}_{\substack{\text{paramètre} \\ \text{de contrôle}}} \right]^T. \quad (4.36)$$

L'introduction des variables additionnelles x_2^s , x_2^s et ω_2 implique évidemment l'introduction de nouvelles équations, en l'occurrence les trois dernières du système quadratique (4.35).

Finalement, on peut réécrire les systèmes (4.29) à chaque ordre de perturbation tels que

ordre a :

$$\mathbf{K}_T \bar{\mathbf{U}}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (4.37a)$$

$$\bar{\mathbf{U}}^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{U}}^{(1)} - 1 = 0, \quad (4.37b)$$

ordre a^j , $1 < j < p$:

$$\mathbf{K}_T \bar{\mathbf{U}}^{(j)} + \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{Q} \left(\bar{\mathbf{U}}^{(k)}, \bar{\mathbf{U}}^{(j-k)} \right) = \mathbf{0}, \quad (4.37c)$$

$$\bar{\mathbf{U}}^{(j)} \cdot \bar{\mathbf{U}}^{(1)} = 0, \quad (4.37d)$$

où \mathbf{K}_T désigne la matrice tangente de la MAN. Elle s'écrit en fonction des opérateurs \mathbf{L}_0 et \mathbf{Q} :

$$\mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \bar{\mathbf{U}}} \right|_{\bar{\mathbf{U}}^{(0)}} = \mathbf{L}_0(\mathbf{e}_j) + \mathbf{Q}(\mathbf{e}_j, \bar{\mathbf{U}}^{(0)}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}^{(0)}, \mathbf{e}_j), \quad (4.38)$$

avec \mathbf{e}_j le vecteur canonique de dimension $\dim \bar{\mathbf{U}}$ dont seule la $j^{\text{ème}}$ composante est nulle. Ainsi la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{K}_T est construite en prenant \mathbf{e}_j égal à $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité par exemple. Remarquez que \mathbf{K}_T intervient à tous les ordres de perturbation ce qui signifie que la procédure complète de calcul d'un morceau de la branche de solution ne nécessite qu'une seule inversion de matrice contrairement aux MPC où une inversion est réalisée à chaque pas de correction.

La figure 4.3 montre l'amplitude d'oscillation de l'oscillateur de Duffing, solution du système (4.9). On constate que la MAN calcule des tronçons de la branche de solution plutôt que des points comme cela est le cas pour les procédures de prédiction correction. Sur la figure 4.3 ces tronçons, délimités par les points visibles sur les courbes, résultent de l'évaluation des séries (4.28) en 20 points répartis uniformément dans l'intervalle $a \in [0, a_{max}]$. On observe également la longueur des tronçons qui varie automatiquement en fonction de la sévérité de la courbure de la branche sans qu'aucun paramètre de longueur du pas ne soit imposé ce qui en fait une méthode particulièrement robuste.

4.2.4 Bilan des méthodes de continuation numérique

Trois techniques de continuation numérique ont été présentées en section précédente et présentent chacune des forces et faiblesses. On les résume dans ce qui suit.

La continuation séquentielle (cf. section 4.2.1.1)

- La paramétrisation naturelle de la branche de solution par rapport au paramètre de contrôle (cf. équation (4.10)) permet une implémentation quasi immédiate de la procédure dans un environnement de simulation numérique.
- Cette méthode est très bien adaptée aux systèmes faiblement non linéaires.
- Son incapacité à passer les points limites de la branche de solution (cf. figure 4.1) est un inconvénient majeur ce qui de surcroît rend l'algorithme très sujet aux problèmes de divergence.

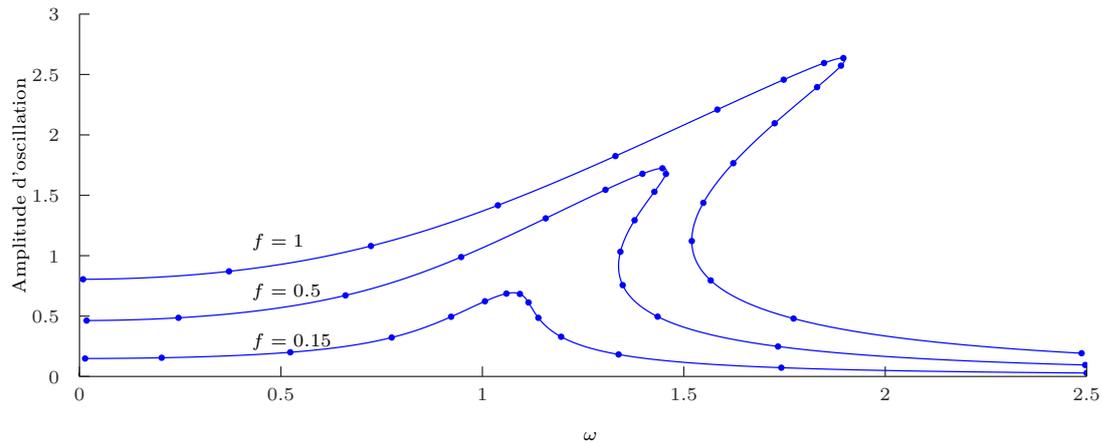


FIGURE 4.3 – Réponse de l'oscillateur de Duffing solution du système algébrique non linéaire (4.9) résultant d'un EH à un harmonique de l'équation (4.6). Résolution par la méthode asymptotique numérique. Paramètres : $\xi = 0.1$, $\gamma = 0.5$.

La MPC couplée à la pseudo longueur d'arc (cf. section 4.2.1.2)

- La paramétrisation implicite de la branche de solution par rapport à un paramètre de chemin (cf. équation (4.20)) offre l'avantage incontestable de passer les points limites et ainsi donner les informations que la continuation séquentielle ne peut calculer.
- La procédure demande en revanche un peu plus d'efforts d'implémentation numérique.
- La force de la MPC réside dans sa capacité à pouvoir traiter une multitude de non linéarités de formes diverses.
- La nécessité de gérer la longueur du pas de prédiction ainsi que la représentation discrète de la branche de solution (cf. figure 4.2) sont ses principaux inconvénients.

La méthode asymptotique numérique (cf. section 4.2.2)

- La représentation en série entière de la solution (cf. (4.28)) permet d'obtenir une représentation continue par morceaux de la branche calculée (cf. figure 4.3) ce qui représente un avantage par rapport aux MPC.
- L'absence de correction de la prédiction ainsi que sa capacité d'adaptation du pas de calcul en font une méthode particulièrement robuste.
- La MAN est performante lorsque le système algébrique est sous forme quadratique (cf. section 4.2.3) cependant cela constitue également sa faiblesse car un effort de réécriture du système est nécessaire (cf. équation (4.35)).
- Une autre faiblesse réside dans son incapacité, a priori, à traiter des non linéarités non polynomiales. Cependant des stratégies existent [82] afin de surmonter cet inconvénient moyennant là encore une écriture particulière du problème.

Des différentes approches proposées ici, il a été décidé de se tourner vers la méthode asymptotique numérique notamment en raison de sa robustesse mais aussi en considérant le caractère majoritairement polynomial des équations de l'absorbeur pendulaire centrifuge. De plus, en vue d'un déploiement en milieu industriel, nous avons profité de l'environnement DiaManlab proposé par B. Cochelin et son équipe, qui est une application graphique interactive offrant une implémentation originale de la MAN. On propose dans la suite de ce chapitre de

s'intéresser d'abord à cet environnement de simulation (*cf.* section 4.3) puis dans un second temps à l'établissement et l'implémentation des équations de la dynamique de l'APC couplé à un modèle de chaîne cinématique automobile dans l'outil DiaManlab en section 4.4.2.

4.3 DiaManlab

Le logiciel DiaManlab [83] est le fruit de l'évolution d'une première version originelle, Manlab 1.0, développée par Arquier pendant sa thèse [84], puis de Manlab 2.0 [74], développé par Karkar. C'est une application graphique interactive libre de droits (<http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>) codée en langage Matlab. DiaManlab propose une implémentation originale de la méthode asymptotique numérique (MAN) permettant de piloter la continuation du système algébrique quadratique

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}}), \quad (4.39)$$

où $\bar{\mathbf{U}}$ est le vecteur des inconnues et \mathbf{C}_0 , \mathbf{L}_0 et \mathbf{Q} sont les opérateurs constant, linéaire et quadratique par rapport à $\bar{\mathbf{U}}$ respectivement (*cf.* section 4.2.3).

Dans l'environnement Diamanlab, la MAN est couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique ce qui rend l'outil particulièrement attractif car il n'est pas nécessaire de fournir les opérateurs du système algébrique \mathbf{C}_0 , \mathbf{L}_0 et \mathbf{Q} . Le système dynamique est implémenté directement. Pour l'exemple on considère un système dynamique de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(t), \quad (4.40)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont les matrices de masse, raideur et amortissement respectivement. $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ est le vecteur des efforts internes non linéaires, $\mathbf{F}(t)$ est le vecteur des efforts extérieurs et dépend du temps et \mathbf{x} est le vecteur des inconnues. La mise en donnée dans Diamanlab du système (4.40) nécessite une réécriture au premier ordre telle que

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \end{cases} \quad (4.41)$$

où l'on a introduit $\dim \mathbf{u}$ nouvelles variables contenues dans le vecteur \mathbf{v} . Ne reste maintenant qu'à appliquer la méthode de l'équilibrage harmonique et à construire un système algébrique de la forme de (4.39). Cependant dans l'objectif d'une automatisation numérique de la procédure cela ne peut être réalisé directement du fait de la potentielle diversité des non-linéarités de $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. La cadre quadratique que l'on a défini en section 4.2.3 s'applique donc également au système dynamique 4.41 qui doit être de la forme :

$$\mathbf{m}(\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{c} + \mathbf{l}(\mathbf{u}) + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (4.42)$$

avec $\mathbf{u} = [\mathbf{x} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]$ et $\dim \mathbf{u} = N_{eq}$. Le vecteur \mathbf{u} contient donc les inconnues originelles \mathbf{x} , le vecteur des variables additionnelles \mathbf{v} provenant de la mise au premier ordre du système (4.40) et le vecteur des variables additionnelles \mathbf{w} provenant de la refonte quadratique du système (4.41). \mathbf{m} est l'opérateur différentiel, \mathbf{c} , \mathbf{l} et \mathbf{q} sont des vecteurs constant, linéaire et quadratique par rapport à \mathbf{u} respectivement. L'introduction des variables additionnelles \mathbf{w} font donc de (4.42) un système algèbro-différentiel et on précise que la transformation de (4.41) en (4.42) se fait suivant la même philosophie que la refonte quadratique du système algébrique présentée en section 4.2.3. Maintenant que les non-linéarités du système dynamique sont quadratiques, l'automatisation de la procédure d'équilibrage harmonique (*cf.* section 4.1) est rendue possible et est notamment

décrite dans [81]. Le système (4.42) se réécrit après cette procédure sous la forme augmentée suivante :

$$\omega \mathbf{M}(\mathbf{U}) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}). \quad (4.43)$$

Où les grand opérateurs \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{L} et \mathbf{Q} ne dépendent que des petits opérateurs \mathbf{m} , \mathbf{c} , \mathbf{l} et \mathbf{q} respectivement et du nombre d'harmoniques H contenus dans l'approximation en série de Fourier de la solution (cf. équation (4.4)). Le vecteur augmenté \mathbf{U} contient tous les coefficients de Fourier de \mathbf{u} tel que $\dim \mathbf{U} = N_{eq}(2H + 1)$. Le système final 4.43 comporte donc $N_{eq}(2H + 1) + 1$ inconnues : $N_{eq}(2H + 1)$ inconnues résultants de l'équilibrage harmonique plus le paramètre de contrôle ω . Finalement, en posant $\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{U} \ \omega]^\top$, les opérateurs du système (4.39) s'écrivent en fonction de ceux de (4.43) tels que :

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}, \quad \mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{L}(\mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \omega \mathbf{M}(\mathbf{U}). \quad (4.44)$$

Finalement, la procédure décrite en section 4.2.3 permet de résoudre le système quadratique algébrique non linéaire (4.39) ainsi construit.

En suivant le principe exposé ici, on présente en section suivante l'écriture du système algébro-différentiel (4.42), d'abord dans le cas de l'absorbeur pendulaire centrifuge seul, ensuite lorsqu'il est couplé à une chaîne cinématique automobile.

4.4 Implémentation des équations du mouvement dans DiaManlab

4.4.1 Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge seul

Avant de s'intéresser à l'environnement véhicule on explique la philosophie de l'implémentation dans DiaManlab des équations du mouvement de l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC) de nouvelle génération. On propose ici de ne plus adimensionner les équations du mouvement. Cela était utile pour les études paramétriques menées au chapitre 3 par exemple, mais ici cela n'est plus nécessaire car l'objectif est l'implémentation numérique. On explique donc l'implémentation du système dynamique (3.3) (cf. chapitre 3.2) que l'on réécrit ci dessous :

$$\begin{aligned} \left(J_c + \sum_{i=1}^N (I_i + m_i X_i) \right) \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N (m_i Z_i + I_i \Gamma_i) \ddot{S}_i \\ + \sum_{i=1}^N \left(m_i \left(\frac{dX_i}{dS_i} \dot{S}_i \dot{\theta} + \frac{dZ_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + I_i \frac{d\Gamma_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + C_c \dot{\theta} = T(t), \end{aligned} \quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned} (m_i Z_i + I_i \Gamma_i) \ddot{\theta} + (m_i + I_i \Gamma_i^2) \ddot{S}_i - \frac{1}{2} \left(m_i \frac{dX_i}{dS_i} \dot{\theta}^2 - I_i \frac{d\Gamma_i^2}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + C_{p_i} \dot{S}_i = 0, \\ i = 1 : N \end{aligned} \quad (4.45b)$$

où $T(t)$ s'écrit :

$$T(t) = T_0 + \tilde{T}(t) = T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T^{ck} \cos k\omega_n t + T^{sk} \sin k\omega_n t, \quad (4.46)$$

et la fréquence fondamentale ω_n est

$$\omega_n = n\Omega. \quad (4.47)$$

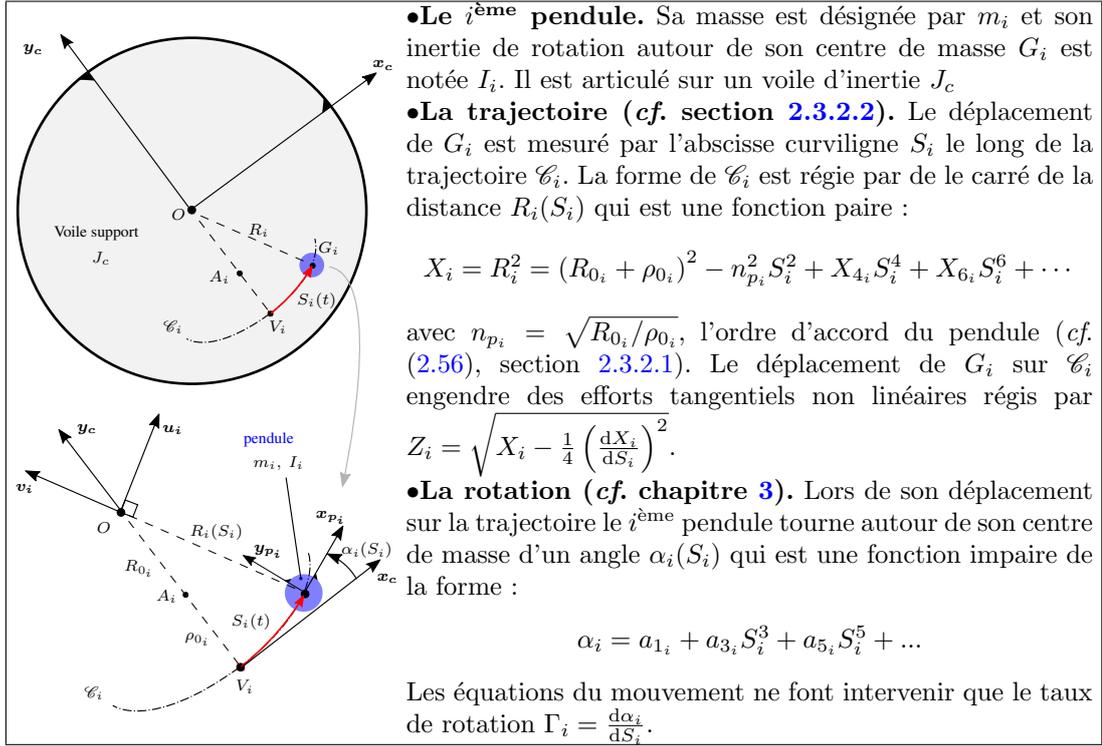


TABLE 4.1 – Récapitulatif des principales caractéristiques de l'APC nouvelle génération.

On rappelle que la fréquence fondamentale du couple moteur est en réalité $\omega_e = n_e \Omega$ et n_e est une constante unique pour chaque type de moteur (cf. section 2.1.1). Pour plus de généralité, on préfère choisir ici l'expression (4.47) et considérer n comme l'ordre d'excitation du moteur afin d'avoir la liberté de le faire varier. On propose également dans le tableau 4.1 un bref récapitulatif des principales grandeurs des équations (4.45) afin de se remémorer les différentes notations.

Comme on s'intéresse au régime permanent, c'est-à-dire que le voile support tourne à une vitesse de rotation moyenne Ω constante, on cherche $\dot{\theta}$ sous la forme

$$\dot{\theta} = \Omega + \dot{\hat{\theta}}. \quad (4.48)$$

De cette façon, en choisissant le coefficient d'amortissement de l'amortisseur visqueux présent entre le voile et le repère galiléen tel que

$$C_c = \frac{T_0}{\Omega}, \quad (4.49)$$

on observe, en substituant (4.49) dans (4.45a), que le couple visqueux $C_c \Omega$ s'oppose totalement au couple moteur constant T_0 ce qui traduit l'équilibre du régime permanent. En substituant

(4.49) et (4.48) dans (4.45), on réécrit les équations de la dynamique ainsi

$$\begin{aligned} & \left(J_c + \sum_{i=1}^N (I_i + m_i X_i) \right) \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N (m_i Z_i + I_i \Gamma_i) \ddot{S}_i \\ & + \sum_{i=1}^N \left(m_i \left(\frac{dX_i}{dS_i} \dot{S}_i (\Omega + \dot{\theta}) + \frac{dZ_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + I_i \frac{d\Gamma_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + C_c \dot{\theta} \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} T^{ck} \cos k\omega_n t + T^{sk} \sin k\omega_n t, \end{aligned} \quad (4.50a)$$

$$\begin{aligned} & (m_i Z_i + I_i \Gamma_i) \ddot{\theta} + (m_i + I_i \Gamma_i^2) \ddot{S}_i - \frac{1}{2} \left(m_i \frac{dX_i}{dS_i} (\Omega + \dot{\theta})^2 - I_i \frac{d\Gamma_i^2}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + \\ & C_{p_i} \dot{S}_i = 0, \quad i = 1 : N \end{aligned} \quad (4.50b)$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme générale

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{T}} \quad (4.51)$$

Avec $\mathbf{x} = [\tilde{\theta}, \mathbf{S}]^\top$ le vecteur des inconnues qui regroupe le degré de liberté du voile support ainsi que les N degrés de liberté des pendules $\mathbf{S} = [S_1, S_2, \dots, S_N]^\top$. \mathbf{M} est la matrice de masse et dépend des inconnues de \mathbf{x} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont les matrices constantes de masse et raideur respectivement, $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ est le vecteur des forces internes non linéaires et dépend de \mathbf{x} et $\dot{\mathbf{x}}$, enfin, $\tilde{\mathbf{T}}$ est le vecteur des couples extérieurs dont seule la première composante est non nulle et contient le second membre de l'équation (4.50a).

Les matrices de masse, raideur, amortissement ainsi que le vecteur des efforts non linéaires peuvent être partitionnées comme cela est écrit dans les équations (4.52), (4.53).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_c + \sum_{i=1}^N (I_i + m_i X_i) & \mathbf{M}_{pcnl} \\ \mathbf{M}_{pcnl}^\top & \mathbf{M}_{pl} + \mathbf{M}_{pnl} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{0}]_{(N+1) \times (N+1)}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_p \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \mathbf{f}_{nl} = \begin{bmatrix} f_{nl_{p1}} \\ \mathbf{f}_{nl_{p2}} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1} \quad (4.53)$$

La première ligne de ces matrices correspond aux différents termes de l'équation (4.50a) alors que les N dernières contiennent les termes des N équations des pendules.

Intéressons nous d'abord aux termes diagonaux de la matrice de masse \mathbf{M} . A l'intersection de la première ligne et de la première colonne on retrouve l'inertie de voile support J_c à laquelle s'ajoute les inerties équivalentes des N pendules. La matrice \mathbf{M}_{pl} est une matrice constante de taille $N \times N$ qui contient sur sa diagonale la masse de chacun des pendules (cf. équation (4.54)). La matrice \mathbf{M}_{pnl} est également diagonale et de taille $N \times N$ mais dépend de \mathbf{S} car elle contient des termes non linéaires engendrés par leur mouvement de rotation (cf. équation (4.54)).

$$\mathbf{M}_{pl} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{M}_{pnl} = \begin{bmatrix} I_1 \Gamma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & I_N \Gamma_N^2 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.54)$$

Les termes extra diagonaux de la matrice \mathbf{M} sont contenus dans \mathbf{M}_{cpnl} qui est un vecteur de dimension N et représente les couplages inertiels non linéaires entre les pendules et le voile

de l'APC, il est défini en (4.55). \mathbf{M}_{pcnl} dépend de \mathbf{S} et fait notamment intervenir les effets tangentiels Z_i , engendrés par le déplacement des pendules sur leur trajectoire, ainsi que les effets de la rotation des pendules Γ_i .

$$\mathbf{M}_{pcnl} = [m_1 Z_1 + I_1 \Gamma_1 \quad \cdots \quad m_N Z_N + I_N \Gamma_N]_{1 \times N} \quad (4.55)$$

On remarque que la matrice \mathbf{K} est nulle, d'une part parce que le système est libre dans le repère galiléen et d'autre part car les termes de raideur des N pendules sont contenus dans \mathbf{f}_{nl} .

La matrice d'amortissement \mathbf{C} est elle aussi diagonale et contient le coefficient d'amortissement C_c (cf. équation (4.49)) ainsi que les coefficients d'amortissement visqueux des N pendules contenus dans \mathbf{C}_p .

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} c_{p1} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{pN} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.56)$$

Pour finir le vecteur des efforts internes non linéaires \mathbf{f}_{nl} comporte sur sa première ligne les efforts non linéaires des pendules contenus dans $f_{nl_{p1}}$ (4.57) et sur ses N dernières lignes, les termes des raideurs non linéaires des pendules contenus dans $\mathbf{f}_{nl_{p2}}$ (4.58).

$$f_{nl_{p1}} = \sum_{i=1}^N \left(m_i \left(\frac{dX_i}{dS_i} \dot{S}_i (\Omega + \dot{\theta}) + \frac{dZ_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + I_i \frac{d\Gamma_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) \quad (4.57)$$

$$\mathbf{f}_{nl_{p2}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left(m_1 \frac{dX_1}{dS_1} (\Omega + \dot{\theta})^2 - I_1 \frac{d\Gamma_1^2}{dS_1} \dot{S}_1^2 \right) \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} \left(m_N \frac{dX_N}{dS_N} (\Omega + \dot{\theta})^2 - I_N \frac{d\Gamma_N^2}{dS_N} \dot{S}_N^2 \right) \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (4.58)$$

4.4.1.1 Système algébro-différentiel

La première action à effectuer avant l'implémentation dans DiaManlab est la mise au premier ordre de (4.51). La matrice de masse \mathbf{M} dépend des inconnues, en l'occurrence, de \mathbf{S} . Le produit $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}$ de l'équation (4.51) implique, entre autres, des termes quadratiques que l'opérateur \mathbf{m} n'accepte pas (cf. équation (4.42), section 4.3). Le choix a été fait de déclarer explicitement les accélérations comme inconnues afin de respecter le formalisme de Diamanlab. On construit donc le système suivant :

$$\begin{array}{rcl} \ddot{\theta} & - & A_{\tilde{\theta}} = 0 \\ \dot{\mathbf{S}} & - & \mathbf{V}_S = 0 \\ \dot{\mathbf{V}}_S & - & \mathbf{A}_S = 0 \\ & & \left(J_c + \sum_{i=1}^N I_i \right) A_{\tilde{\theta}} + C_c \dot{\theta} + A_{\tilde{\theta}} \sum_{i=1}^N m_i X_i + \mathbf{M}_{pcnl} \mathbf{S} + f_{nl_{p1}} = 0 \\ & & \underbrace{\mathbf{M}_{pl} \mathbf{A}_S + \mathbf{C}_p \mathbf{V}_S}_{l(\mathbf{u})} + \underbrace{\mathbf{M}_{pcnl} A_{\tilde{\theta}}}_{q(\mathbf{u}, \mathbf{u})} + \underbrace{\mathbf{M}_{pnl} \mathbf{A}_S + f_{nl_{p2}}}_{q(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = 0 \end{array} \quad (4.59)$$

Notez que c'est $\ddot{\theta}$ qui apparaît à la première ligne de l'opérateur \mathbf{m} . En effet, comme $\tilde{\theta}$ n'apparaît pas explicitement dans les équations de la dynamique, ces dernières sont donc déjà au premier ordre par rapport à $\tilde{\theta}$. Remarquez aussi que l'on a pas fait apparaître l'expression du couple

moteur. En effet, comme l'amplitude de ses harmoniques dépend de Ω nous nous en occuperons après la procédure d'équilibrage harmonique une fois le système non linéaire algébrique construit. La majorité des termes respecte le formalisme quadratique. Seuls les termes apparaissant dans l'opérateur $\mathbf{q}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ nécessitent une réécriture, c'est-à-dire $\mathbf{M}_{p_{nl}}$, $f_{nl_{p1}}$ et $\mathbf{f}_{nl_{p2}}$. Pour $\mathbf{M}_{p_{nl}}$ cela s'effectue facilement en définissant le vecteur $\mathbf{\Gamma}$ qui contient toutes les fonctions Γ_i des N pendules et le vecteur $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ qui contient les fonctions $\bar{\Gamma}_i$: les carrés des fonctions Γ_i . On écrit donc

$$\mathbf{\Gamma} = [\Gamma_1 \cdots \Gamma_N]^\top \quad \text{et} \quad \underbrace{\bar{\mathbf{\Gamma}}}_{\mathbf{l}(\mathbf{u})} = \underbrace{\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = [\Gamma_1^2 \cdots \Gamma_N^2]^\top = [\bar{\Gamma}_1 \cdots \bar{\Gamma}_N]^\top \quad (4.60)$$

Ainsi la matrice $\mathbf{M}_{p_{nl}}$ se réécrit en fonction de $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ telle que

$$\mathbf{M}_{p_{nl}} = \begin{bmatrix} I_1 \Gamma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & I_N \Gamma_N^2 \end{bmatrix}_{N \times N} = \begin{bmatrix} I_1 \bar{\Gamma}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & I_N \bar{\Gamma}_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (4.61)$$

et le produit $\mathbf{M}_{p_{nl}} \mathbf{A}_S$ est maintenant quadratique.

En ce qui concerne les vecteurs $f_{nl_{p1}}$ et $\mathbf{f}_{nl_{p2}}$ la démarche est un peu différente. Premièrement, selon la même philosophie on définit les variables $\tilde{\Omega}$ et $\bar{\Omega}$ telles que

$$\underbrace{\tilde{\Omega}}_{\mathbf{l}(\mathbf{u})} = \underbrace{\Omega + \dot{\theta}}_{\mathbf{l}(\mathbf{u})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\bar{\Omega}}_{\mathbf{l}(\mathbf{u})} = \underbrace{\tilde{\Omega}^2}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \quad (4.62)$$

Ensuite, on définit le vecteur \mathbf{X} qui contient toutes les fonctions X_i des N pendules et le vecteur \mathbf{Z} qui contient toutes les fonctions Z_i des N pendules. On utilise alors le fait que

$$\frac{d(-)}{dS_i} \dot{S}_i = (\dot{-}), \quad (4.63)$$

pour réécrire $f_{nl_{p1}}$ en fonction de \mathbf{X} , \mathbf{Z} , $\mathbf{\Gamma}$ et $\tilde{\Omega}$ sous la forme

$$f_{nl_{p1}} = \sum_{i=1}^N \left(m_i \left(\dot{X}_i \tilde{\Omega} + \dot{Z}_i \dot{S}_i \right) + I_i \dot{\Gamma}_i \dot{S}_i \right). \quad (4.64)$$

$f_{nl_{p1}}$ peut alors s'exprimer sous une forme purement algébrique en définissant de nouvelles équations différentielles et donc de nouvelles variables \mathbf{V}_X contenant les fonctions V_{X_i} , \mathbf{V}_Z contenant les fonctions V_{Z_i} et \mathbf{V}_Γ contenant les fonctions V_{Γ_i} . On écrit donc

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{V}_X = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{V}_Z = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{\Gamma}} - \mathbf{V}_\Gamma = \mathbf{0} \end{array} \rightarrow f_{nl_{p1}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \left(m_i \left(V_{X_i} \tilde{\Omega} + V_{Z_i} V_{S_i} \right) + I_i V_{\Gamma_i} V_{S_i} \right)}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \quad (4.65)$$

En suivant exactement la même logique que pour $f_{nl_{p1}}$, on définit le vecteur \mathbf{d}_X qui contient toutes les fonctions $d_{X_i} = \frac{dX_i}{dS_i}$ et on réécrit $\mathbf{f}_{nl_{p2}}$ en fonction de \mathbf{d}_X , $\bar{\Omega}$ et $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ là encore en introduisant deux nouvelles équations différentielles et donc deux nouvelles variables \mathbf{V}_{d_X} contenant

les fonctions $V_{d_{X_i}}$ et $V_{\bar{\Gamma}}$ contenant les fonctions $V_{\bar{\Gamma}_i}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{d}_X \\ \dot{\bar{\Gamma}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{m}(\dot{\mathbf{u}})} - \underbrace{\begin{pmatrix} V_{d_X} \\ V_{\bar{\Gamma}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{l}(\mathbf{u})} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{f}_{nl_{p2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (m_1 d_{X_1} \bar{\Omega} - I_1 V_{\bar{\Gamma}_1} V_{S_1}) \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} (m_N d_{X_N} \bar{\Omega} - I_N V_{\bar{\Gamma}_N} V_{S_N}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}_{N \times 1} \quad (4.66)$$

Finalement, le système algébro-différentiel quadratique s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \ddot{\theta} & - & A_{\bar{\theta}} = 0 \\ \dot{S} & - & V_S = 0 \\ \dot{V}_S & - & A_S = 0 \\ \dot{X} & - & V_X = 0 \\ \dot{Z} & - & V_Z = 0 \\ \dot{\Gamma} & - & V_{\Gamma} = 0 \\ \dot{d}_X & - & V_{d_X} = 0 \\ \dot{\bar{\Gamma}} & - & V_{\bar{\Gamma}} = 0 \\ & & \left(J_c + \sum_{i=1}^N I_i \right) A_{\bar{\theta}} + C_c \dot{\theta} + A_{\bar{\theta}} \sum_{i=1}^N m_i X_i + M_{pc_{nl}} S + f_{nl_{p1}} = 0 \\ & & M_{p_i} A_S + C_p V_S + M_{pc_{nl}}^T A_{\bar{\theta}} + M_{p_{nl}} A_S + f_{nl_{p2}} = 0 \\ & & \bar{\Gamma} - \Gamma \cdot \Gamma = 0 \\ & & X + \frac{1}{4} d_X \cdot d_X - Z \cdot Z = 0 \\ & & \bar{\Omega} - \Omega = 0 \\ & & \bar{\Omega} - \Omega - \dot{\theta} = 0 \\ R_{g_0} \cdot R_{g_0} - & X & + -(n_p \cdot n_p) \cdot (S \cdot S) + f(S) = 0 \\ & -d_X - 2n_p \cdot S & + g(S) = 0 \\ \underbrace{\mathbf{m}(\dot{\mathbf{u}})}_{\mathbf{c}} - \underbrace{\mathbf{a}_1}_{\mathbf{c}} - \underbrace{\mathbf{l}(\mathbf{u})}_{\mathbf{l}(\mathbf{u})} + \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = 0 \end{array} \quad (4.67)$$

où R_{g_0} est le vecteur contenant toutes les quantités $R_{0_i} + \rho_{0_i}$ des N pendules, n_p est le vecteur contenant tous les ordres d'accord n_{p_i} des N pendules, \mathbf{a}_1 est le vecteur contenant tous les coefficients a_{1_i} de la rotation des N pendules (cf. tableau 4.1) et le vecteur des inconnues s'écrit :

$$\mathbf{u} = [\dot{\theta}, S, V_S, X, Z, \Gamma, d_X, \bar{\Gamma}, A_{\bar{\theta}}, A_S, V_X, V_Z, V_{\Gamma}, V_{d_X}, V_{\bar{\Gamma}}, \bar{\Omega}, \Omega]^T. \quad (4.68)$$

On attire l'attention sur le paramètre Ω (en rouge) qui apparaît à la quatorzième équation de (4.67). Comme ce n'est pas un paramètre dépendant du temps, il n'est pas étendu en série de Fourier contrairement aux inconnues de \mathbf{u} . On précise également que le coefficient C_c qui apparaît dans l'opérateur L_0 est en pratique considéré constant et non régi par (4.49) (voir la remarque importante 1, à la fin de cette section). Les fonctions f , g et h qui apparaissent aux trois dernières lignes de (4.67) contiennent les expressions polynomiales de X , d_X et Γ respectivement. Par exemple, si X_i , la $i^{\text{ème}}$ composante de X est de la forme

$$X_i = (R_{0_i} + \rho_{0_i})^2 - n_{p_i}^2 S_i^2 + X_{4_i} S_i^4 + X_{6_i} S_i^6 + X_{8_i} S_i^8 + \dots \quad (4.69)$$

alors cette expression s'implémente en ajoutant de nouvelles variables dans le système et s'écrit facilement en fonction des petits opérateurs \mathbf{c} , \mathbf{l} et \mathbf{q} sous la forme

$$X_i = \underbrace{(R_{0_i} + \rho_{0_i})^2}_{\mathbf{c}} - \underbrace{n_{p_i}^2 u}_{\mathbf{l}(\mathbf{u})} + \underbrace{X_{4_i} u^2 + X_{6_i} u u_2 + X_{8_i} u_2 u_2 + \dots}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (4.70)$$

où l'on a posé

$$\begin{array}{rcl} u & - & S_i S_i = 0, \\ \underbrace{u_2}_{l(\mathbf{u})} & - & \underbrace{uu}_{q(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = 0. \end{array} \quad (4.71)$$

C'est ce qui a été fait par exemple pour les simulations de la figure 2.39 en section 2.4.3.2 où l'on a réalisé un développement de Taylor en gardant une dizaine de termes non linéaires des expressions des trajectoires circulaires et cycloïdales (cf. équations (2.57a) et (2.57c), section 2.3.2.2). Ceci présente l'avantage d'être facile de mise en œuvre et relativement peu coûteux en termes de variables supplémentaires. Les fonctions d_{X_i} et Γ_i qui sont également des polynômes fonction de S_i sont implémentés exactement de la même façon. Par exemple, si $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$, alors le système (4.67) est celui d'un APC dont les trajectoires des N pendules sont épicycloïdales et le mouvement de rotation est une fonction linéaire de \mathbf{S} . Dans ce cas on dénombre $13N + 4$ équations pour $13N + 4$ inconnues plus Ω qui on le rappelle, n'est pas étendu en série de Fourier.

Le système algébro-différentiel maintenant construit, la procédure d'équilibrage harmonique peut être appliquée afin de bâtir un système purement algébrique cette fois, que l'on aborde en section suivante.

Remarque 1 (Subtilité de la condition libre-libre). L'absence de conditions aux limites implique quelques subtilités d'implémentation. Le système (4.67) est sous une forme appropriée tant que le coefficient C_c est non nul, ce qui rend impossible l'étude du système conservatif pour les raisons décrites à l'annexe C. On réfère le lecteur à cette annexe où la procédure d'implémentation de l'absorbeur pendulaire centrifuge purement conservatif est décrite. Les résultats des simulations présentés dans ce document ont été obtenus en suivant la procédure de l'annexe C.

4.4.1.2 Système algébrique

Le système non linéaire algébrique résultant de l'équilibrage harmonique (cf. section 4.1) s'écrit :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega_n, \Omega) = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}, \quad (4.72)$$

avec $\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}, \omega_n, \Omega]^\top$. En supposant que $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$. Le système algébrique est composé de $N_{eq} = (13N + 4)(2H + 1)$ équations pour $(13N + 4)(2H + 1) + 2$ inconnues. Les deux inconnues supplémentaires sont ω_n et Ω . Le vecteur des inconnues \mathbf{U} contient tous les coefficients de Fourier des inconnues \mathbf{u} (4.68) du système algébro-différentiel et $\dim \mathbf{U} = N_{eq} = (13N + 4)(2H + 1)$.

À ce stade nous pouvons ajouter l'équation (4.47), qui lie ω_n à Ω , au système (4.72) tel que

$$\underbrace{\omega_n}_{L_0(\bar{\mathbf{U}})} - \underbrace{n\Omega}_{Q(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}})} = 0 \quad (4.73)$$

Le système (4.72) s'écrit maintenant

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega_n, \Omega, n) = \mathbf{0} \quad (4.74)$$

et compte désormais $N_{eq} = (13N + 4)(2H + 1) + 1$ équations pour $(13N + 4)(2H + 1) + 3$ inconnues. Il ne nous reste maintenant qu'à implémenter le couple moteur \tilde{T} (cf. équation (4.46))

de la forme :

$$\tilde{T}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{ck} \cos k\omega_n t + T^{sk} \sin k\omega_n t, \quad (4.75)$$

Les coefficients T^{ci} et T^{si} doivent donc être distribués sur les équations du système algébrique. Cependant l'amplitude des harmoniques du couple dépend du régime moteur, par exemple selon l'allure de la figure 2.4 que l'on redonne en 4.4. En pratique on ne dispose pas de la phase de ces

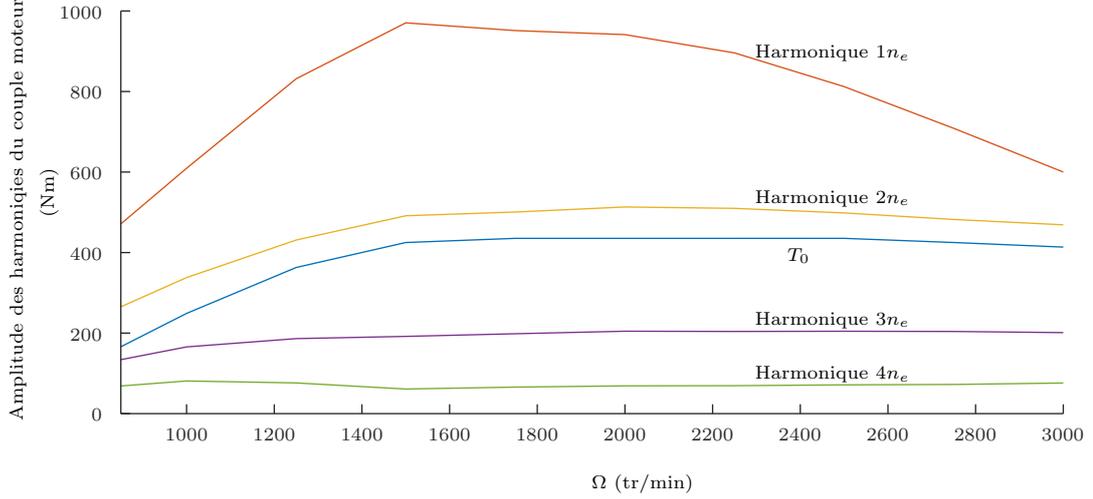


FIGURE 4.4 – Évolution caractéristique des amplitudes du couple moyen T_0 et des quatre premiers harmoniques du couple moteur en fonction de Ω .

harmoniques ou alors moyennant une instrumentation lourde du véhicule. On néglige souvent les T^{si} en faisant l'hypothèse que les harmoniques sont en phase et on représente les T^{ci} par des polynômes en fonction de Ω tels que

$$T^{ci} = T_0^{ci} + T_1^{ci}\Omega + T_2^{ci}\Omega^2 + T_3^{ci}\Omega^3 + T_4^{ci}\Omega^4 + T_5^{ci}\Omega^5 + \dots \quad (4.76)$$

Il est donc nécessaire d'introduire de nouvelles variables dans (4.74) à l'image de ce qui a été fait aux équations (4.70) et (4.70) pour implémenter les expressions des trajectoires X_i . On écrit plus précisément :

$$\underbrace{T_0^{ci}}_{\mathbf{C}_0} - \underbrace{T^{ci} + T_1^{ci}\Omega + T_2^{ci}\Omega_2}_{\mathbf{L}_0(\bar{U})} + \underbrace{+T_3^{ci}\Omega\Omega_2 + T_4^{ci}\Omega_2\Omega_2 + T_5^{ci}\Omega_2\Omega_3 \dots}_{\mathbf{Q}(\bar{U}, \bar{U})} = 0 \quad (4.77)$$

$$\begin{array}{rcl} \Omega_2 & - & \Omega^2 = 0 \\ \Omega_3 & - & \Omega\Omega_2 = 0 \\ \vdots & - & \vdots = 0 \end{array}$$

puis on ajoute T^{ci} sur la ligne correspondant au $i^{\text{ème}}$ harmonique de l'équation dynamique du voile support, c'est-à-dire à la ligne $(7N+1)(2H+1)+1+i$ du vecteur \mathbf{L}_0 . Dans le cas où T^{si} devrait être implémenté également il serait quant à lui ajouté à la ligne $(7N+1)(2H+1)+1+H+i$. À ce stade, en admettant que le couple moteur $T(t)$ ne comporte qu'un harmonique d'amplitude constante T^{c1} , le nombre d'équations est désormais $N_{eq} = (13N+4)(2H+1)+2$ équations pour $(13N+4)(2H+1)+4$ inconnues. Il nous manque une équation pour fermer le système et cette dernière consiste à imposer soit ω_n soit n ou Ω à une valeur constante selon le type de simulation que l'on souhaite réaliser. Ces dernières sont résumées en section 4.4.3.

4.4.2 Application à l'absorbeur pendulaire centrifuge dans la chaîne cinématique

Il est temps maintenant de considérer l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC) en interaction avec la chaîne cinématique et cette section a pour objectif principal d'expliquer la mise en donnée du système algébro-différentiel (4.42) (cf. section 4.3) qui est en réalité très similaire à ce qui a été fait en section précédente dans le cas de l'APC seul.

On propose de considérer le modèle illustré en figure 4.5. La chaîne de transmission est

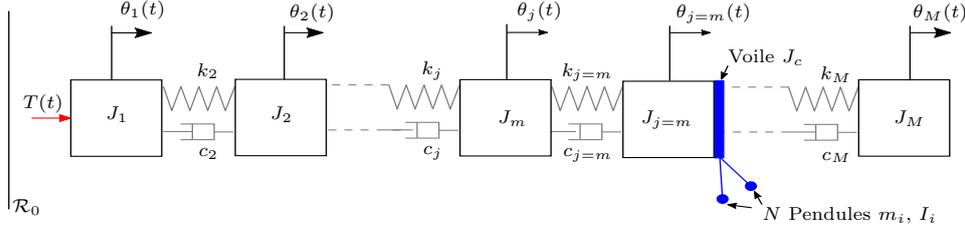


FIGURE 4.5 – L'APC couplé à un modèle de chaîne cinématique automobile.

représentée par une succession de M oscillateurs linéaires d'inertie $J_j, j = 1 : M$ et disposés en série. Le système est libre par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 et le couple moteur $T(t)$ est appliqué sur la première inertie J_1 représentatif du volant moteur (cf. section 2.1.2) par exemple. Ces inerties sont couplées entre elles par une raideur linéaire k_j et un amortisseur de coefficient visqueux c_j . La rotation de l'inertie J_j est mesurée par le degré de liberté θ_j par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 . Quelque part au sein de la chaîne cinématique on trouve un APC de nouvelle génération à N pendules (en bleu sur la figure 4.5) dont le voile est fixé solidement sur la $m^{\text{ème}}$ inertie $J_{j=m}$. On dénombre donc un total de $M + N$ degrés de liberté. Remarquez que si la chaîne cinématique n'est composée que de l'inertie J_1 , c'est-à-dire $M = 1$ et que l'APC est fixé sur cette même inertie ($m = 1$), alors cette configuration est parfaitement identique à ce qui a été vu en section précédente.

Dans l'environnement de la chaîne cinématique représenté en figure 4.5, l'énergie cinétique totale du système s'écrit :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{S}_i^2 + X_i \dot{\theta}_m^2 + 2\dot{S}_i \dot{\theta}_m Z_i \right) + \sum_{i=1}^N I_i \left(\Gamma_i \dot{S}_i + \dot{\theta}_m \right)^2 + J_c \dot{\theta}_m^2 + \sum_{j=1}^M J_j \dot{\theta}_j \right), \quad (4.78)$$

Le dernier terme de (4.78) représente l'énergie cinétique de la chaîne de transmission sans pendule. On observe que mis à part ce terme, cette expression est la même que celle de l'énergie cinétique de l'APC seul (cf. équation (3.2), section 3).

Bien que l'action de la pesanteur soit négligée, l'énergie potentielle totale est ici non nulle du fait des éléments de raideur du modèle de chaîne de transmission. Elle s'écrit :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^M k_j (\theta_j - \theta_{j-1})^2 \quad (4.79)$$

Comme cela a été fait en section 4.4.1, l'étude du régime permanent implique de rechercher des solutions sous la forme

$$\theta_j = \Omega t + \tilde{\theta}_j. \quad (4.80)$$

En substituant alors cette expression dans (4.79) et (4.79), les énergies cinétiques et potentielles se réécrivent respectivement

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{S}_i^2 + X_i \left(\Omega + \dot{\theta}_m \right)^2 + 2\dot{S}_i \left(\Omega + \dot{\theta}_m \right) Z_i \right) + \sum_{i=1}^N I_i \left(\Gamma_i \dot{S}_i + \Omega + \dot{\theta}_m \right)^2 \right. \\ \left. + J_c \left(\Omega + \dot{\theta}_m \right)^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^M J_j \left(\Omega + \dot{\theta}_j \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.81)$$

et

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^M k_j \left(\tilde{\theta}_j - \tilde{\theta}_{j-1} \right)^2 \quad (4.82)$$

En appliquant ensuite la méthode de Lagrange aux énergies cinétique et potentielle on détermine les équations du mouvement qui s'écrivent sous la forme générale :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{T}} \quad (4.83)$$

Avec $\mathbf{x} = [\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{S}]^\top$ le vecteur des inconnues qui regroupe les M degrés de liberté de la chaîne cinématique $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_M]^\top$ ainsi que les N degrés de liberté des pendules $\mathbf{S} = [S_1, S_2, \dots, S_N]^\top$. \mathbf{M} est la matrice de masse et dépend des inconnues de \mathbf{x} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont les matrices constantes de masse et raideur respectivement, $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ est le vecteur des forces internes non linéaires et dépend de \mathbf{x} et $\dot{\mathbf{x}}$, enfin, $\tilde{\mathbf{T}}$ est le vecteur des couples extérieur donc seule la première composante est non nulle car le couple moteur s'applique sur la première inertie J_1 . Il s'écrit $\tilde{\mathbf{T}} = [\tilde{T}(t), 0, \dots, 0]^\top$ avec $\tilde{T}(t)$ le couple acyclique délivré par le moteur (*cf.* équation (4.75)).

Les matrices de masse, raideur, amortissement ainsi que le vecteur des efforts non linéaires peuvent être partitionnées comme cela est écrit dans les équations (4.84), (4.85).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_v + \mathbf{M}_{vp_i} + \mathbf{M}_{vp_{nl}} & \mathbf{M}_{pv_{nl}} \\ \mathbf{M}_{pv_{nl}}^\top & \mathbf{M}_{p_i} + \mathbf{M}_{p_{nl}} \end{bmatrix}_{(M+N) \times (M+N)} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(M+N) \times (M+N)}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_p \end{bmatrix}_{(M+N) \times (M+N)}, \quad \mathbf{f}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl_1} \\ \mathbf{f}_{nl_{p2}} \end{bmatrix}_{(M+N) \times 1} \quad (4.85)$$

Les M premières lignes de ces matrices correspondent aux différents termes des M équations dynamiques de la chaîne de transmission alors que les N dernières contiennent les termes des N équations des pendules. Les expressions des sous matrices de \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} et \mathbf{f}_{nl} sont données à l'annexe D et une brève description est donnée ci-dessous.

Intéressons nous d'abord aux termes diagonaux de la matrice de masse. \mathbf{M}_v est la matrice de masse de la chaîne cinématique nue, c'est-à-dire sans pendule. C'est une matrice constante diagonale de taille $M \times M$ et son expression est donnée en (D.3). \mathbf{M}_{vp_i} est également une matrice constante de taille $M \times M$ dont seul le terme à l'intersection des $m^{\text{ème}}$ ligne et colonne est non nul (*cf.* équation (D.4)). Elle contient les contributions linéaires des inerties de rotation des pendules I_i ainsi que celle du voile de l'APC J_c . La matrice $\mathbf{M}_{pv_{nl}}$ de taille $M \times M$ est de la même forme

que M_{vp_i} et contient les contributions non linéaires des inerties équivalentes des pendules. Elle dépend de S et contient notamment les expressions des trajectoires X_i , elle est définie en (D.5). Les matrices M_{p_i} et $M_{p_{nl}}$ sont exactement les mêmes que celles définies en section précédente (cf. équation (4.54)).

Les termes extra diagonaux de la matrice M sont contenus dans $M_{pv_{nl}}$ qui est une matrice de taille $M \times N$ dont seule la $m^{\text{ème}}$ ligne est non nulle et contient le vecteur $M_{pc_{nl}}$ déjà défini à l'équation (4.55) (cf. section 4.4.1).

Les matrices K_v et C_v sont les matrices constantes $M \times M$ de raideur et amortissement de la chaîne cinématique, elles sont données en (D.7) et (D.8) respectivement. La matrice d'amortissement des N pendules C_p est définie à l'équation (4.56) (cf. section 4.4.1).

Pour finir le vecteur des efforts internes non linéaires f_{nl} comporte sur ses m premières lignes les efforts non linéaires du pendule sur la chaîne cinématique contenus dans f_{nl_1} et sur ses N dernières lignes, les termes des raideurs non linéaires des pendules contenus dans $f_{nl_{p_2}}$. Le vecteur f_{nl_1} contient sur sa $m^{\text{ème}}$ ligne le terme $f_{nl_{p_1}}$ (cf. équation (4.57), section 4.4.1) et le vecteur $f_{nl_{p_2}}$ est déjà défini à l'équation (4.58) (cf. section 4.4.1).

Finalement, les termes nécessitant une réécriture quadratique sont : la matrice $M_{p_{nl}}$ et les vecteurs f_{nl_1} et $f_{nl_{p_2}}$ qui ne dépendent que de termes que nous avons déjà traités précédemment en section 4.4.1. Plus particulièrement, $M_{p_{nl}}$ se réécrit exactement suivant ce a été fait en (4.60) et (4.61), le terme non nul de f_{nl_1} se réécrit comme (4.65) et $f_{nl_{p_2}}$ se réécrit comme (4.66). La procédure de réécriture est donc la même que celle décrite en section 4.4.1.1. Cependant, l'équation (4.62) se réécrit cette fois

$$\underbrace{\tilde{\Omega}}_{l(u)} = \underbrace{\Omega + \dot{\theta}_m}_{l(u)} \quad \text{et} \quad \underbrace{\tilde{\Omega}}_{l(u)} = \underbrace{\tilde{\Omega}^2}_{q(u, u)}. \quad (4.86)$$

Où $\Omega + \dot{\theta}_m$ est la vitesse de rotation de l'inertie sur laquelle est fixé le voile support de l'APC par rapport au repère galiléen. Finalement, le système algèbro-différentiel quadratique s'écrit :

$$\begin{array}{rcll} \dot{\theta} & - & V_{\tilde{\theta}} & = 0 \\ \dot{V}_{\tilde{\theta}} & - & A_{\tilde{\theta}} & = 0 \\ \dot{S} & - & V_S & = 0 \\ \dot{V}_S & - & A_S & = 0 \\ \dot{X} & - & V_X & = 0 \\ \dot{Z} & - & V_Z & = 0 \\ \dot{\Gamma} & - & V_{\Gamma} & = 0 \\ \dot{d}_X & - & V_{d_X} & = 0 \\ \dot{\Gamma} & - & V_{\tilde{\Gamma}} & = 0 \\ & & (M_v + M_{vpl}) A_{\tilde{\theta}} + C_v V_{\tilde{\theta}} + K_v \tilde{\theta} + M_{pv_{nl}} A_{\tilde{\theta}} + M_{pc_{nl}} S + f_{nl_1} & = 0 \\ & & M_{p_l} A_S + C_p V_S + M_{pc_{nl}}^T A_{\tilde{\theta}} + M_{p_{nl}} A_S + f_{nl_{p_2}} & = 0 \\ & & \tilde{\Gamma} & - \Gamma \cdot \Gamma = 0 \\ & & X & + \frac{1}{4} d_X \cdot d_X - Z \cdot Z = 0 \\ & & \tilde{\Omega} & - \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} = 0 \\ & & \tilde{\Omega} - \Omega - \dot{\theta}_m & = 0 \\ Rg_0 \cdot Rg_0 & - & X & + -(n_p \cdot n_p) \cdot (S \cdot S) + f(S) = 0 \\ & & -d_X - 2n_p \cdot S & + g(S) = 0 \\ \underbrace{m(\dot{u})}_{c} & - & \underbrace{\Gamma}_{l(u)} & + \underbrace{h(S)}_{q(u, u)} = 0 \end{array} \quad (4.87)$$

En considérant que $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$, alors le système (4.87) est celui d'une chaîne cinématique à M degrés de liberté munie d'un APC dont les trajectoires des N pendules sont épicycloïdales et le mouvement de rotation est une fonction linéaire de \mathbf{S} . Dans ce cas on dénombre $13N + 3M + 2$ équations pour $13N + 3M + 2$ inconnues plus Ω qui on le rappelle, n'est pas étendu en série de Fourier. Le vecteur des inconnues \mathbf{u} s'écrit :

$$\mathbf{u} = [\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{V}_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{S}, \mathbf{V}_{\mathbf{S}}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \Gamma, \mathbf{d}_{\mathbf{X}}, \bar{\Gamma}, \mathbf{A}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}, \mathbf{A}_{\mathbf{S}}, \mathbf{V}_{\mathbf{X}}, \mathbf{V}_{\mathbf{Z}}, \mathbf{V}_{\Gamma}, \mathbf{V}_{\mathbf{d}_{\mathbf{X}}}, \mathbf{V}_{\bar{\Gamma}}, \tilde{\Omega}, \bar{\Omega}]^{\top}. \quad (4.88)$$

Une fois la procédure d'équilibrage harmonique réalisée, le système algébrique est augmenté des équations (4.73) et (4.77) comme expliqué en section 4.4.1.2.

4.4.3 Bilan de la procédure d'implémentation

Il est important de rappeler que, en pratique, le système algébrique non linéaire issue de l'équilibrage harmonique est retravaillé, ne serait-ce que pour l'implémentation du couple en fonction de Ω . Mais surtout, à l'issue de la procédure, il manque une équation. En effet le système algébrique est de la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega_n, \Omega, n) = \mathbf{0} \quad (4.89)$$

On remarque que trois paramètres de contrôle sont présents, d'où l'équation manquante. On rappelle que ces trois paramètres, ω_n , Ω et n sont liés entre eux par l'équation (4.47) que l'on réécrit ci dessous :

$$\omega_n = n\Omega. \quad (4.90)$$

L'équation manquante sert donc à imposer un de ces trois paramètres en fonction du type de simulation que l'on veut réaliser. Trois choix sont alors possibles et ils sont résumés en (4.91).

$$\underbrace{\text{cte}}_{\mathbf{C}_0} - \underbrace{\omega_n}_{\mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}})} = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{cte}}_{\mathbf{C}_0} - \underbrace{\Omega}_{\mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}})} = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\text{cte}}_{\mathbf{C}_0} - \underbrace{n}_{\mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}})} = 0 \quad (4.91)$$

Selon que l'on impose ω_n , Ω ou n , on balaye le plan (ω_n, Ω) suivant des directions différentes comme illustré en figure 4.6. Cela permet une exploration complète du paysage dynamique. Les courbes bleues ont été obtenues en imposant $\Omega = \text{cte}$, les courbes vertes s'obtiennent en imposant $n = \text{cte}$ et enfin les courbes noires sont des simulations à $\omega_n = \text{cte}$. Remarquez également qu'une autre procédure de continuation apparaît en figure 4.6, à savoir la continuation de maximum et de minimum. Cette procédure est introduite dans le chapitre suivant.

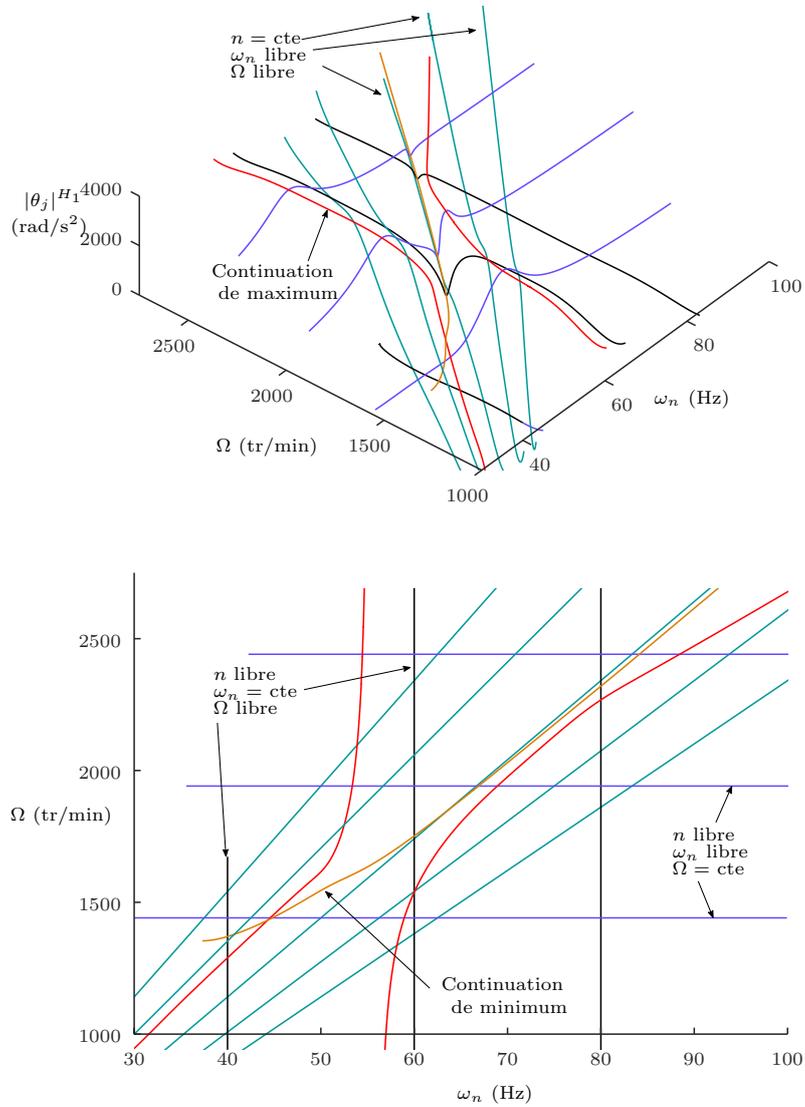


FIGURE 4.6 – Illustration des différentes procédures de simulations en réponses forcées (cf. équation 4.91)

Chapitre 5

Continuation numérique d'antirésonance

Dans ce chapitre est présenté une méthode originale de continuation numérique d'antirésonance et de manière plus générale, d'extremum. La continuation d'antirésonance s'inspire de la méthode de suivi des points limites proposée par Baguet dans sa thèse [85]. Le principe consiste à réécrire la matrice jacobienne du système (4.89) sous une forme donnée et d'imposer sa singularité. Cette procédure permet par exemple de suivre le minimum de l'amplitude de réponse d'un harmonique donné d'un système linéaire, comme illustré sur la figure 4.6 (section 4.4.3). La méthode a été pensée en réponse à la faible robustesse de la méthode de perturbation, employée en section 3.4, à prédire efficacement le lieu d'une antirésonance à grande amplitude. Dans le contexte industriel Valeo, la prédiction numérique de l'antirésonance pour des configurations diverses de trajectoires des pendules de l'absorbeur permet une grande réactivité en phase de conception dans le but de proposer la meilleure spécification possible dédiée à une application particulière. Cette procédure est notamment mise en œuvre dans le cas d'un développement industriel au chapitre 6.

Le corps de ce chapitre est constitué d'un article soumis à la revue *Mechanical Systems and Signal Processing*. L'article propose en section 5.1 une introduction sur les différents principes d'absorption de vibration de la littérature ainsi que les procédures numériques classiques utilisées pour l'étude des système dynamique. En section 5.2 le concept linéaire d'antirésonance est étendu au cadre non linéaire. La formalisation de la procédure de continuation d'antirésonance est décrite en section 5.3 et un rappel sur la méthode asymptotique numérique (*cf.* section 4.2.2) est donné en section 5.4. La procédure est ensuite mise en œuvre en section 5.5 sur un cas pratique : le pendule d'Euler, sujet à des non-linéarités de différentes natures, inertielles et géométriques.

Sommaire

5.1	Introduction	141
5.2	General framework and antiresonance concept	143
5.2.1	Antiresonance : the linear point of view	143
5.2.2	Antiresonance : the non linear point of view	146
5.3	Numerical continuation	152
5.3.1	Problem statement	152
5.3.2	Limit point continuation	153
5.3.3	Antiresonance continuation	154
5.4	Numerical solving	155
5.5	Application to the Euler's pendulum	156
5.5.1	Free linear vibrations of the uncoupled pendulum	157
5.5.2	Influence of the path shape	158
5.5.3	Results on the full system.	160
5.6	Conclusion	163
5.7	Appendix	164
5.7.1	Governing equations of the Euler's pendulum	164
5.7.2	Epicycloid path	164
5.7.3	Algebraic-differential system of the Euler's pendulum.	167

5.1 Introduction

In the widely investigated domain of attenuation of vibrations [86], passive tuned vibration absorbers are usually a suitable choice. To enhance the low robustness of linear absorbers, based on the Frahm's damper concept [49], nonlinear ones have been proposed. We can gather them into two families. The first one is the class of non linear tuned vibration absorbers (NLTVA). Those devices are based on the concept, introduced in [60], that the nonlinear absorber should possess a frequency-energy dependence identical to that of the nonlinear host system. Among other studies on the subject, [61] proposes a generalization of DenHartog's equal-peak method to non linear systems and gives a methodology to tune the whole nonlinear restoring force of the NLTVA on that of the primary structure of interest. The second class of absorbers is the one of so-called nonlinear energy sinks (NES)[59, 58]. They exploit a secondary oscillator designed with strong non-linearities. Several ideas have been proposed. Among others, one can cite essential cubic stiffness [55], non-polynomial non-linearities [57], vibro-impact devices [56].

For some applications, the nonlinear nature of the absorber is a constraint imposed by the design itself. For example, the so-called centrifugal pendulum vibration absorber (CPVA) used by the automotive industry to counteract irregularities of rotation of powertrains is intrinsically nonlinear. This passive device evolves in a centrifugal acceleration field and consists of a set of pendular oscillators (the CPVAs) acting as dynamic absorbers on a rotating primary structure [87, 10, 88]. Behavior of pendular oscillators is known to be sensitive to the path shape followed by their center of mass which involves geometric non-linearities at large amplitude of motion. Circular path causes a softening behavior while the so-called tautochronic path (from Greek : *tauto*, same, and *chrono*, time) keeps frequency independent of the motion amplitude [89]. For example, tautochrone curves in gravitational and centrifugal acceleration fields are respectively the cycloid [15] and the epicycloid [7]. When CPVAs are coupled to the primary structure, the

system is subject to strong nonlinear inertial coupling between host structure and absorbers. This additional source of non-linearities re-activates the frequency-energy dependence even if the oscillator has been designed to be tautochronous. The result is the detuning of the CPVA and the shifting of the optimal operating frequency (an antiresonance of the whole system) from the targeted tuning frequency. For such applications, the knowledge of the antiresonance behavior is essential.

The study of the response of a nonlinear dynamic system can be dealt with through analytical or numerical approaches. The first category is particularly suitable for a parametric study of systems having few degrees of freedom. One can cite the Lindstedt-Poincaré method or multiple time scales method [24] for example. Although those methods give an analytical approximation of the solution, they assume that the effect of the non-linearity is small, which becomes invalid for a large amplitude of motion. From a numerical point of view, there is a large variety of methods. Best known are direct time integration procedures of the governing equations. They are usually easy to implement and deployed in many commercial softwares. However, they may require extensive computation time to reach the steady state in case of long transient and don't give informations on the unstable solutions. An other class of numerical methods is the periodic steady-state analysis. One can cite the shooting method [90] that allows to directly reach a periodic steady-state through an iterative correction of the initial conditions up to the basin of attraction of periodic solutions. Some other methods are based on a discretization of the periodic solution through an expansion as a linear combination of known functions. For instance, the orthogonal collocation method adopts a piecewise polynomial representation of the solution [91]. In the frequency domain, the so-called harmonic balance method, used in this paper, is very popular and consists in discretizing the unknown solution by means of a truncated Fourier series [24].

In practice, it is often convenient to compute branches of steady-state periodic solutions as a function of a given parameter (amplitude, frequency, ...), leading to numerical continuation methods. Most common procedures are surely those based on a predictor corrector method with arc length parametrization, implemented for example in AUTO [79] or MATCONT [92] softwares. Another approach, the so-called asymptotic numerical method (ANM), addressed in the following of this paper, is based on a high order predictor method without correction and adopts an analytical representation of the branch of solution [80].

The main contribution of this paper is to propose a general method to follow periodic solutions at a particular point of a dynamic response, namely an extremum (minimum as well as maximum) of a particular nonlinear frequency response of the system. Since an antiresonance can be defined as a particular minimum, our procedure is able to track antiresonances. It is also able to track resonance points, defined as a maximum of a frequency response. Our contribution provides an additional tool for the development of dynamic absorbers, in addition to particular procedures such as bifurcation tracking methods [93, 94]. This paper is organized as follows : section 5.2 introduces the framework of the study and the concept of antiresonance is extended from linear to nonlinear scope. The formulation of the antiresonance continuation is addressed in section 5.3 and its numerical solving with the asymptotic numerical method in section 5.4. Then, the methodology is applied on the so-called Euler's pendulum which exhibits non-linearities of various nature. Finally, the conclusion is outlined in the last section.

5.2 General framework and antiresonance concept

In this section, we establish the framework of the study through the highlighting of some fundamental concepts faced by dynamical systems of N_{eq} equations governed by :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F} \cos \omega t, \quad (5.1)$$

where $(\dot{})$ stands for the derivative of $(-)$ w.r.t. the time t , \mathbf{x} is the vector of unknowns, \mathbf{M} is the mass matrix, \mathbf{D} is the damping matrix, \mathbf{K} is the stiffness matrix, $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ is the vector of nonlinear forces that depends on \mathbf{x} and $\dot{\mathbf{x}}$ and \mathbf{F} is the vector of external forces.

In order to illustrate the concepts introduced in this section, we consider the two degrees of freedom Duffing-like system depicted on Figure 5.1. It is composed of two oscillators. The first one of mass m_1 , subjected to an external force $f \cos \omega t$, is linked to the Galilean frame through a linear stiffness k_1 and a linear viscous damping c_1 . Amplitude of oscillations of m_1 is measured by the degree of freedom x_1 . The second oscillator, of mass m_2 , is coupled to the primary one through a linear stiffness k_2 and a viscous damping c_2 . In addition, both oscillators are coupled through a cubic non linear stiffness whose magnitude is governed by the coefficient γ . Amplitude of oscillations of m_2 is monitored by the degree of freedom x_2 . The equations of motion are :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + \gamma (x_1 - x_2)^3 = f \cos \omega t, & (5.2) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) + \gamma (x_2 - x_1)^3 = 0. & (5.3) \end{cases}$$

These equations are obviously of the form of the general model (5.1).

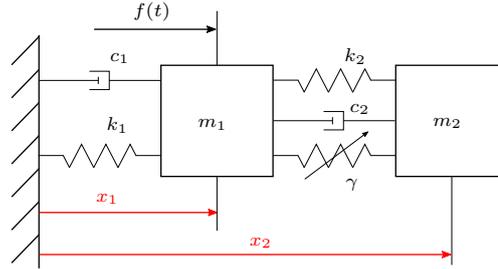


FIGURE 5.1 – Duffing-like system

5.2.1 Antiresonance : the linear point of view, $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0$

We address the underlying linear system described by equation (5.1), *i.e.* with $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0$.

$$x_i(t) = \text{Re}\{\hat{x}_i e^{j\omega t}\}, \quad (5.4)$$

where the subscript i stands for the i^{th} degree of freedom and j is the imaginary unit. Moreover, we consider the vector of external forces of the form $\mathbf{F} = [0 \cdots f_k \cdots 0]^T$, where f_k is the amplitude of excitation of the k^{th} degree of freedom. The frequency response functions (FRF) $H_{ik}(\omega)$ are given by

$$H_{ik}(\omega) = \left| \frac{\hat{x}_i(\omega)}{f_k} \right|. \quad (5.5)$$

Several particular frequencies can be classically defined as follows :

The eigenfrequencies ω_n . Eigenfrequencies are global features of the undamped and unforced system ($\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{F} = 0$) and correspond to free oscillations frequencies. They are solutions of the following eigenproblem :

$$[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \Phi_n = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

where the subscript n stands for the n^{th} mode so Φ_n is the n^{th} eigenvector. In forced vibrations ($\mathbf{F} \neq 0$), those eigenfrequencies ω_n are exactly obtained when the response $\mathbf{x}(t)$ oscillates synchronously, in phase quadrature with the harmonic excitation \mathbf{F} (phase resonance) [95]. If there is no damping ($\mathbf{D} = 0$), the phase resonance coincides with the amplitude resonance, which is in this case infinite and the eigenfrequencies correspond to the poles of the FRFs (the zeros of their denominator).

The resonance frequencies ω_{Rn} . For a conservative system ($\mathbf{D} = 0$), as recalled above, there exist amplitude resonances for each eigenfrequency ω_n , for which the amplitude of all the FRFs H_{ik} , $\forall i, k$ (except if i or k correspond to a node of the corresponding mode shape) is infinite. The amplitude resonances are thus a global features of the forced system ($\mathbf{F} \neq 0$). If the damping is small (undercritical), the amplitude resonances correspond to maximums of the FRFs, that occur for frequencies ω_{Rn} slightly different from ω_n , but very close. They are also slightly different from one FRF to the other.

The antiresonance frequencies ω_{ARp} . For a conservative system ($\mathbf{D} = 0$), there exist particular frequencies ω_{ARp} , $p \in \mathbb{N}^*$, called antiresonances, for which the frequency response are zero : $H_{ik}(\omega_{ARp}) = 0$. They are local features of the forced system ($\mathbf{F} \neq 0$) and depend on given driving point k and measurement point i . In particular, the driving point frequency responses $H_{ii}(\omega)$ shows an antiresonance between each successive resonance [95]. They correspond to the zeros of the FRFs (zeros of their numerator). Physically, if an antiresonance occurs for the frequency response of a particular degree of freedom d , namely $H_{dk}(\omega_{AR}) = 0$, it means that the system oscillates in order to exactly cancel the forces applied to the degree of freedom d . It can also be shown that the antiresonance frequencies ω_{ARp} associated to a given FRF H_{ij} correspond to the eigenfrequencies of a dual system, obtained by imposing $x_i \equiv 0$ or $x_j \equiv 0$ [96, 97].

In damped vibrations, strict antiresonances does not exist since there is no frequencies for which the FRFs vanish. However, increasing the damping from zero, one can show that the above defined antiresonance of the undamped system (zeros of the FRFs) become minimums of the FRFs. However, the FRFs shows other minimums which are not antiresonances, since they don't correspond to zeros of the undamped FRFs. Consequently, any minimum of a given FRF is not necessarily an antiresonance.

To illustrate the concept underlined above, we consider the underlying linear system described by equations (5.2 5.3). Viscous damping coefficients c_1 and c_2 are assumed to be equal *i.e.* $c_1 = c_2 = c$ and solutions in term of x_1 and x_2 are assumed of the form of (5.4). Frequency response functions of the system, depicted on Figure 5.2, are given by

$$H_{11}(\omega) = \frac{\hat{x}_1}{f_1} = \frac{k_2 - m_2\omega^2 + jc\omega}{D(\omega)} \quad \text{and} \quad H_{21}(\omega) = \frac{\hat{x}_2}{f_1} = \frac{k_2 + jc\omega}{D(\omega)}, \quad (5.7)$$

where

$$D(\omega) = m_1 m_2^2 \omega^4 - jc(m_1 + 2m_2)\omega^3 - (m_1 k_2 + m_2(k_1 + k_2) + c^2)\omega^2 + jc(k_2 + k_1)\omega + k_1 k_2. \quad (5.8)$$

According to equation (5.6), eigenfrequencies and eigenvectors can be written

$$\omega_1 = \frac{k_1 + 2k_2 - \sqrt{k_1^2 + 4k_2}}{2m} \quad \text{and} \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{k_1^2 + 4k_2} - k_1}{2k_2} \\ 1 \end{bmatrix}^\top, \quad (5.9)$$

where $m_1 = m_2 = m$, for the first in phase motion mode and

$$\omega_2 = \frac{k_1 + 2k_2 + \sqrt{k_1^2 + 4k_2}}{2m} \quad \text{and} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{k_1^2 + 4k_2} + k_1}{2k_2} \\ 1 \end{bmatrix}^\top, \quad (5.10)$$

for the second phase opposition motion mode.

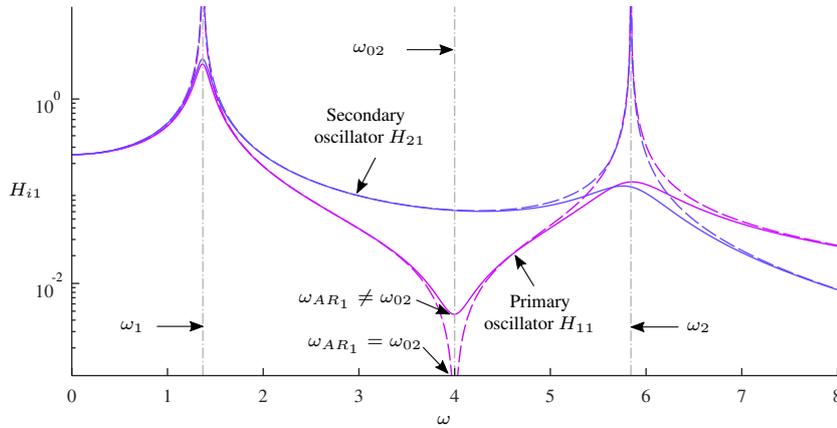


FIGURE 5.2 – Frequency response functions of the underlying linear system. Solid lines denote damped response *i.e.* $c \neq 0$, dashed lines stand for the undamped response *i.e.* $c = 0$ and dashed-dotted lines represent the locus of eigenfrequencies. Parameter values : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 16$, $c = 0.3$.

As theoretically explained above, both FRFs of equation (5.7) share the same denominator $D(\omega)$ that vanishes, for the conservative system ($c = 0$), at eigenfrequencies ω_1 and ω_2 so $H_{i1}(\omega_i)$, $i = 1, 2$ is infinite (global features). For the damped system, H_{i1} is maximal but finite for the two resonance frequencies ω_{R1} and ω_{R2} , close to ω_1 and ω_2 .

Antiresonance frequencies of the conservative system are roots of numerators of H_{i1} with $c = 0$. Here, only H_{11} vanishes at a particular frequency :

$$\omega_{AR} = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}. \quad (5.11)$$

It is a local feature of $H_{ii}(\omega)$ and it correspond to the eigenfrequency ω_{02} of the dual system, obtained by keeping the first degree of freedom immovable ($x_1(t) \equiv 0$). It correspond to the secondary oscillator, that acts then as a vibration damper on the primary one. In the presence of damping, H_{11} is minimal but non zero, $\omega_{AR1} \neq \omega_{02}$. Also, the local minimum shown on H_{21} is not an antiresonance.

5.2.2 Antiresonance : the non linear point of view : $f_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \neq 0$

This section aims to see how linear concepts recalled in section 5.2.1 about antiresonances can be extended to the nonlinear case. To deal with the nonlinear behavior of the system conveniently, we need to enhance the representation of the solution assumed before through equation (5.4). For this, the solution is still assumed periodic but approximated by a truncated Fourier series :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \sum_{j=1}^H \mathbf{x}^{cj} \cos j\omega t + \mathbf{x}^{sj} \sin j\omega t, \quad (5.12)$$

where H is the number of harmonics retained in the solution and the subscript j stands for the j^{th} harmonic. For instance, in the case of the system depicted in figure 5.1, one can write $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^\top$, $\mathbf{x}^0 = [x_1^0 \ x_2^0]^\top$, $\mathbf{x}^{cj} = [x_1^{cj} \ x_2^{cj}]^\top$ and $\mathbf{x}^{sj} = [x_1^{sj} \ x_2^{sj}]^\top$. Following the harmonic balance method [24], the periodic approximation is substituted into the equations of motion and harmonic terms higher than H , arising from non-linearities, are neglected since they are not taken into account in (5.12). We are interested by periodic solutions in the steady state, coefficients of each harmonic are then equated to zero. A non linear algebraic system is obtained, of the form :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega, f) = \mathbf{0}, \quad (5.13)$$

where the vector of $N_{eq}(2H + 1)$ unknowns is $\mathbf{U} = [\mathbf{x}^0 \ \mathbf{x}^{c1} \ \mathbf{x}^{s1} \ \dots \ \mathbf{x}^{cH} \ \mathbf{x}^{sH}]^\top$. In the following, the modulus of the j^{th} harmonic of the response measured at the i^{th} degree of freedom will be denoted by

$$|x_i|^{Hj} = \sqrt{x_i^{cj^2} + x_i^{sj^2}} \quad (5.14)$$

Dual system. We first focus on the forced response of the dual system (the secondary oscillator), obtained by imposing $x_1 \equiv 0$ in Eqs. (5.2,5.3). The governing equation can be written :

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + \gamma x_2^3 = f \cos \omega t. \quad (5.15)$$

This equation is a Duffing oscillator [69] whose non linear nature arises from the nonlinear part of the stiffness γx_2^3 . This section recalls some basic features of the Duffing oscillator that will be useful in the following. All curves of upcoming Figures 5.3, 5.4 and 5.5 were obtained by continuation methods addressed in section 5.3. According to the sign of γ , the oscillator stiffness decreases ($\gamma < 0$) or increases ($\gamma > 0$) as the amplitude of oscillation grows. Both cases are illustrated on Figure 5.3. Frequency denoted ω_{02NL} describes the backbone curve, the skeleton of the forced response, and represents the free oscillation frequency of the underlying unforced ($f = 0$) and undamped ($c_2 = 0$) system. Because of the curvature of the backbone, multivalued regimes appear with unstable solutions. Stable and unstable solutions are connected by a fold (saddle node) bifurcation, characterized by a limit w.r.t. ω (vertical tangency).

Figure 5.4 shows the evolution of the hardening response as the amplitude of the external force increases. One can see that the fold bifurcation appears beyond a given amplitude of motion and its tracking (see [93, 94] and §5.3.2), depicted by the dashed line, is useful to predict for instance the critical value of the force amplitude from which the jump phenomenon occurs.

An other basic feature of non linear systems is the harmonic distortion. Although the oscillator is subjected to a mono-harmonic excitation, its response is a superposition of harmonic components of the form of (5.12). Figure 5.5 depicts the evolution of the third harmonic of the response as the amplitude of driving force increases. In the case of the Duffing oscillator, the non-linearity is an odd function so the even harmonic components are null, except if symmetry

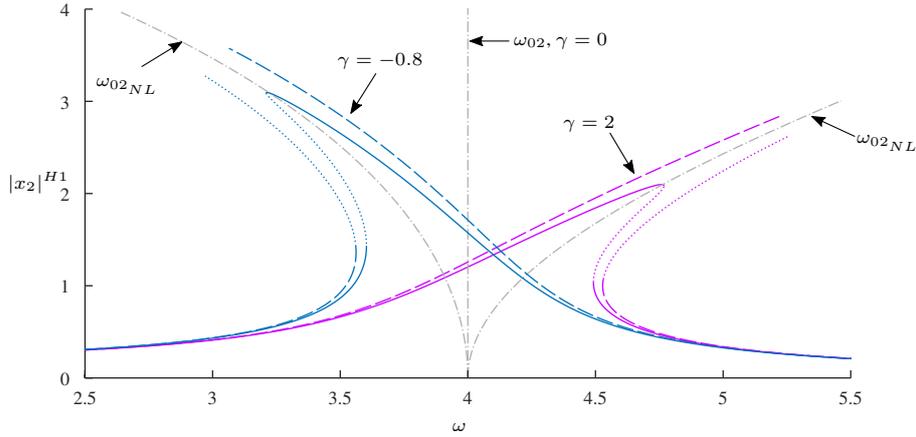


FIGURE 5.3 – Forced response of the secondary oscillator for two values of γ . Solid lines denote damped response *i.e.* $c_2 \neq 0$, dashed lines stand for the undamped response *i.e.* $c_2 = 0$, dotted lines show the unstable solutions and backbone curves are dashed-dotted lines. Parameter values : $m_2 = 1$, $k_2 = 16$, $c_2 = 0.3$, $f = 3$, $H = 10$.

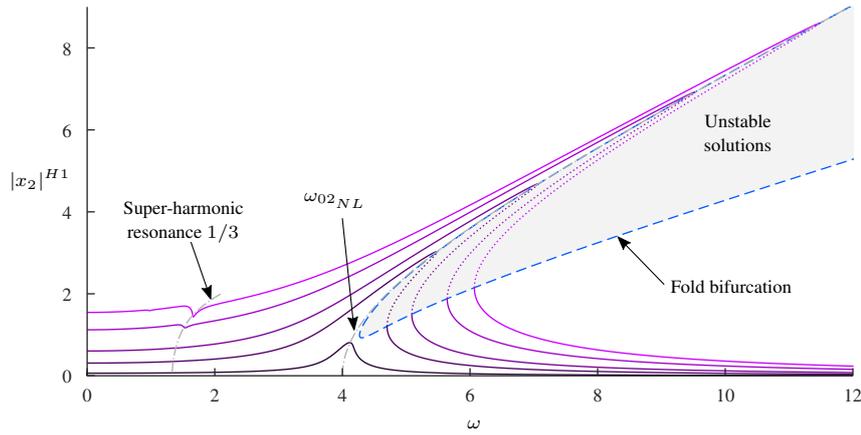


FIGURE 5.4 – Forced response of the secondary oscillator ($\gamma = 2$) as the driving force increases. Dashed line stands for the the locus of the fold bifurcation, dotted lines show the unstable solutions and backbone curves are dashed-dotted lines. Parameter values : $m_2 = 1$, $k_2 = 16$, $c_2 = 0.3$, $f = [1 \ 5 \ 10 \ 20 \ 30]$, $H = 10$.

breaking bifurcations occurs [98]. A relevant feature can be observed on Figures 5.4 and 5.5 and denoted as *super-harmonic* resonance. Since the third harmonic oscillates at frequency three times higher than the driving force, it will excites the primary resonance at a frequency three time lower than the driving frequency. It is a super-harmonic resonance of order 3 and it is worth noting that its backbone is that of the primary resonance whose the frequency has been divided by 3. Following the same logic, one sees the super-harmonic resonance of order 5 growing up on Figure 5.5. It is important to point out that, for responses shown here, approximation of the solution has been truncated to an order $H = 10$. If we chose an harmonic representation of the solution *i.e.* $H = 1$, higher harmonic components would have been neglected in the total

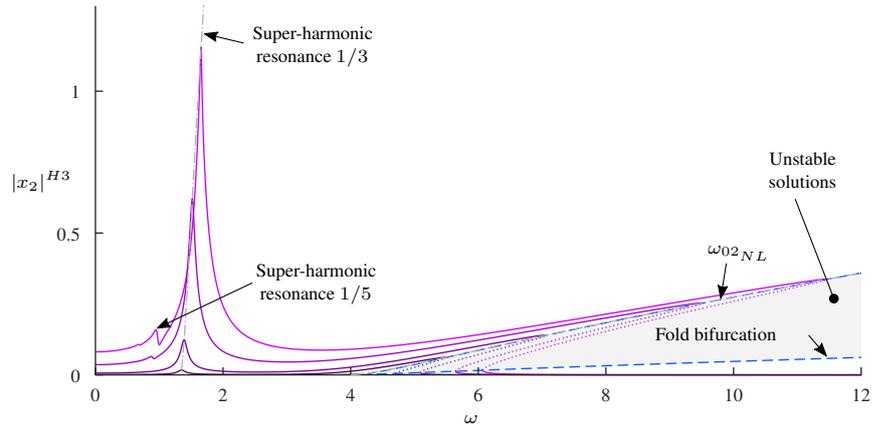


FIGURE 5.5 – Forced response of the secondary oscillator ($\gamma = 2$) as the driving force increases. Dashed line stands for the the locus of the fold bifurcation, dotted lines show the unstable solutions and backbone curves are dashed-dotted lines. Parameter values : $m_2 = 1$, $k_2 = 16$, $c_2 = 0.3$, $f = [1 \ 5 \ 10 \ 20 \ 30]$, $H = 10$.

response. Accuracy of the harmonic balance method is conditioned to the fact that the Fourier series is rich enough and therefore depends on the number of harmonics retained in (5.12).

Coupled system. The full non linear system described by equations (5.2 5.3) is now addressed. Figure 5.6 depicts the first and the third harmonic of the forced response in the case of the softening system, whereas the hardening case is shown on Figure 5.10.

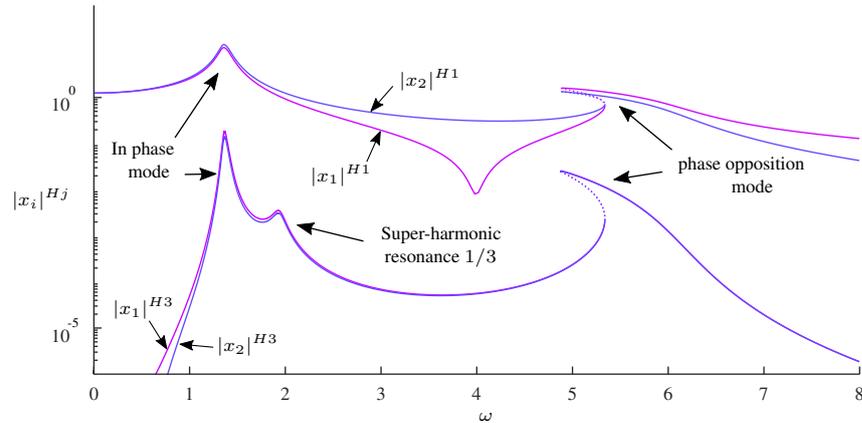


FIGURE 5.6 – Forced responses $|x_i|^{Hj}$ of the softening system. Solid lines denote stable solutions and dotted lines show the unstable solutions. Parameter values : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 16$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\gamma = -0.8$, $f = 5$, $H = 10$.

This system has two nonlinear modes, corresponding to the in phase and out of phase motion at small (linear) amplitude, since the mode shapes of nonlinear systems depend on the amplitude of oscillation [90]. Note the qualitative difference of behavior of the in phase and phase opposition modes. For the first one, the contribution of the non linear term γx_2^3 is very weak due to the in

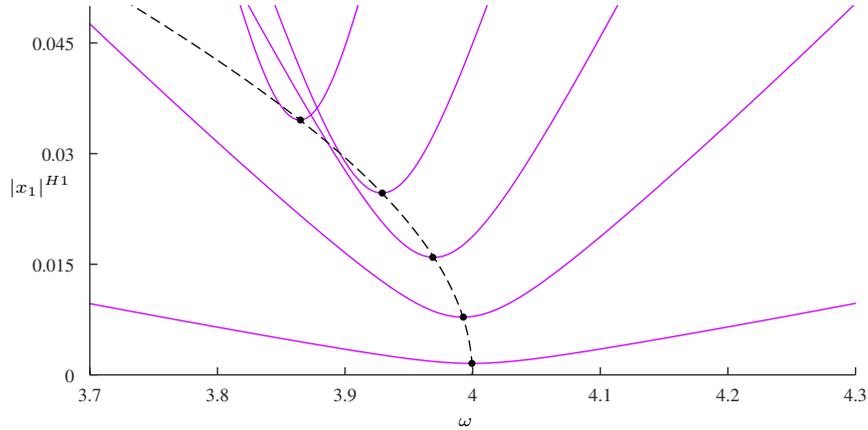


FIGURE 5.7 – Forced response $|x_1|^{H1}$ at the vicinity of the antiresonance of the softening system, dashed line is the locus of the antiresonance. Each curve corresponds to a given value of the forcing amplitude f ($f = [1 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20]$). Parameter values : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 16$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\gamma = -0.8$, $H = 10$.

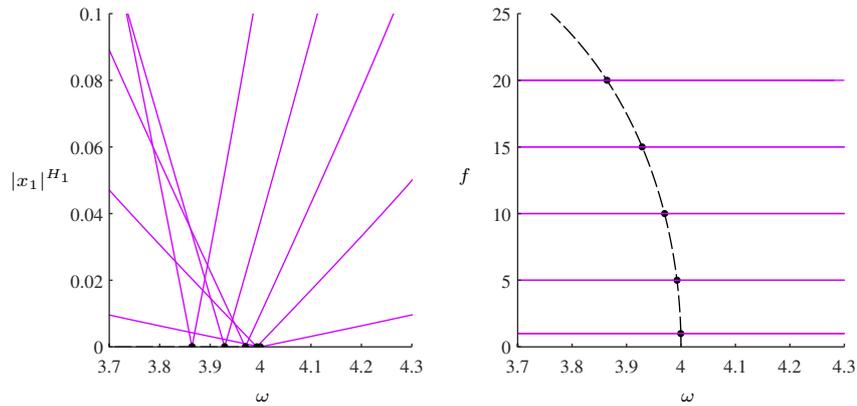


FIGURE 5.8 – Forced response $|x_1|^{H1}$ at the vicinity of the antiresonance of the conservative softening system, dashed line is the locus of the antiresonance. Representation in frequency - response amplitude plane; each curve corresponds to a given value of the forcing amplitude f ($f = [1 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20]$) (left). Representation in frequency - excitation amplitude plane (right). Parameter values : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 16$, $c_1 = c_2 = 0$, $\gamma = -0.8$, $H = 10$.

phase motion. For the second mode, the out of phase motion, the non linear stiffness is involved so this mode captures the softening / hardening behavior of the secondary oscillator.

As stated in section 5.2.1, the antiresonance is visible on the response of the primary oscillator, but, because of the nonlinearities, only on $|x_1|^{H1}$. Indeed, at the antiresonance frequency, the first harmonic component of the net acting force on the primary mass is minimal (depending on the damping) since the restoring force of the secondary oscillator balances the driving force. This is not the case for higher harmonics because the driving force is of the form $f \cos \omega t$. The local minimum shown on the third harmonic is then not an antiresonance.

A focus at the vicinity of the antiresonance is given for damped softening and hardening sys-

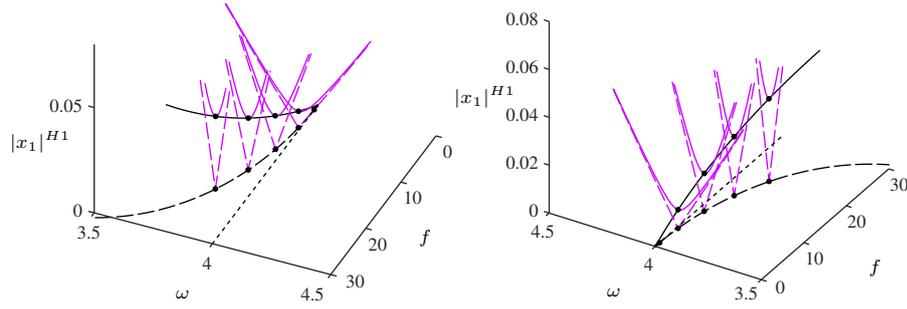


FIGURE 5.9 – 3D representation of the forced response $|x_1|^{H1}$ at the vicinity of the antiresonance of the softening system. dashed lines correspond to conservative system ($c_1 = c_2 = 0$) and solid lines stand for the damped system ($c_1 = 0.3, c_2 = 0.1$). Each curve corresponds to a given value of the forcing amplitude f ($f = [5 \ 10 \ 15 \ 20]$). Parameter values : $m_1 = m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 16, \gamma = -0.8, H = 10$.

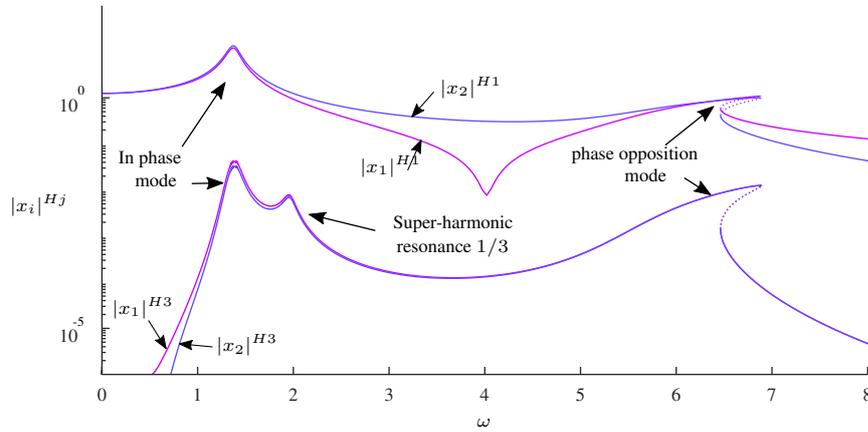


FIGURE 5.10 – Forced responses $|x_i|^{Hj}$ of the hardening system. Solid lines denote stable solutions and dotted lines show the unstable solutions. Parameter values : $m_1 = m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 16, c_1 = 0.3, c_2 = 0.1, \gamma = 2, f = 5, H = 10$.

tems on Figures 5.7 and 5.11 respectively. Conservative cases are depicted in Figures 5.8 and 5.12 and corresponding 3D representations are given in Figure 5.9. One observes that antiresonance frequency is clearly impacted by non-linearities, since it depends on the amplitude of forcing. For conservative systems, antiresonance remains in the (ω, f) frequency-excitation amplitude plane since $|x_1|^{H1}$ is strictly zero at this point. In the damped case, the antiresonance point moves out of the (ω, f) frequency-excitation amplitude plane as the driving force increases : the amplitude $|x_1|^{H1}$ is a minimum, but not a zero. In addition, it is worth noting that the topology of the branch of solution at the antiresonance point is inherently different between both cases. Without damping, the branch of solution of $|x_1|^{H1}$ is an angular point with an undefined tangency. For the damped case, the antiresonance is a minimum of $|x_1|^{H1}$ with an horizontal tangency in the $(\omega, |x_1|^{H1})$ frequency amplitude plane.

This amplitude-dependent behavior of the antiresonance frequency can be damaging. Let us imagine that the secondary oscillator has been designed, from the linear point of view, so that

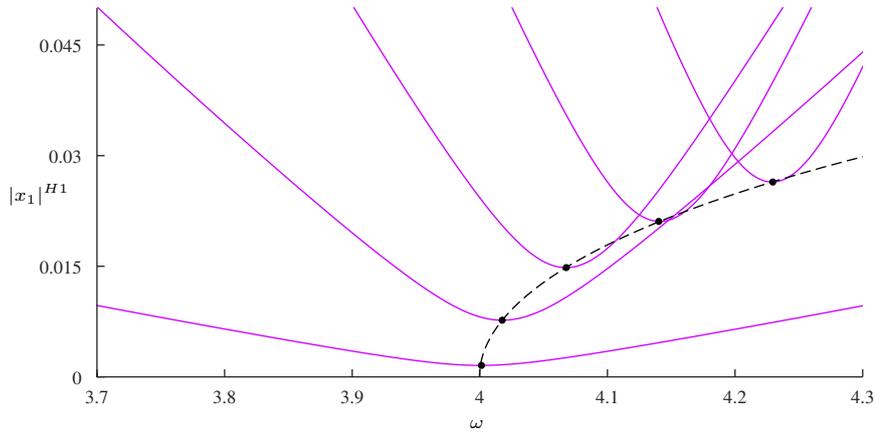


FIGURE 5.11 – Forced responses $|x_1|^{H1}$ at the vicinity of the antiresonance of the hardening system, dashed line is the locus of the antiresonance. Each curve corresponds to a given value of the forcing amplitude f ($f = [1 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20]$). Parameter values : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 16$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1$, $\gamma = 2$, $H = 10$.

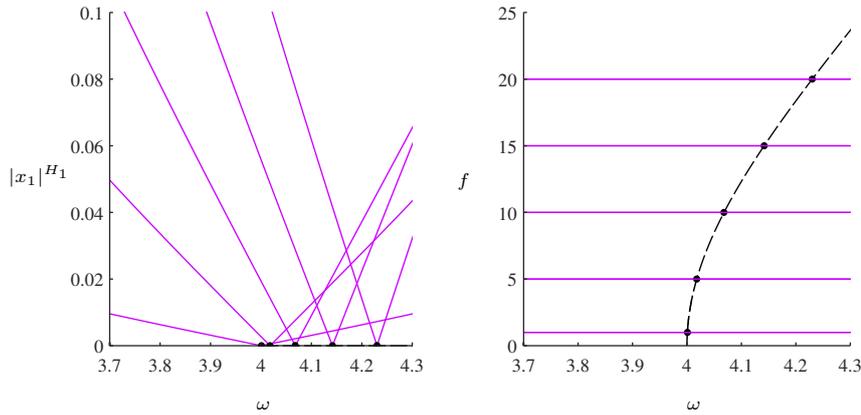


FIGURE 5.12 – Forced response $|x_1|^{H1}$ at the vicinity of the antiresonance of the conservative hardening system, dashed line is the locus of the antiresonance. Representation in frequency - response amplitude plane; each curve corresponds to a given value of the forcing amplitude f ($f = [1 \ 5 \ 10 \ 15 \ 20]$). (left). Representation in frequency - excitation amplitude plane (right). Parameter values : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 4$, $k_2 = 16$, $c_1 = c_2 = 0$, $\gamma = -0.8$, $H = 10$.

the antiresonance occurs at a given operating frequency. This is valid for small oscillations but when amplitude of motion grows the expected optimal operating frequency (antiresonance frequency) is not the effective operating frequency. Prediction of the antiresonance frequency as a function of amplitude of motion can then only be done on the couple system. In addition, because of amplitude-frequency dependence of the backbone curve, a comparison between the antiresonance frequency and the eigenfrequency of the dual system is impossible. To avoid redundant forced response simulations we propose to compute the locus of the antiresonance directly through a numerical continuation procedure, described in the following, as depicted by dashed lines on Figures 5.7 and 5.11.

Antiresonance and nonlinear systems. Based on the previous results, we are able to extend the linear concepts of antiresonance, stated in section 5.2.1, to the nonlinear case, as follows :

- In the case of a conservative system, a nonlinear antiresonance can be defined by the zero of a particular harmonics of a particular nonlinear frequency response of the system. In the case of a damped systems, it is defined as a minimum instead of a zero. This definition is analogous to the one for a linear system, except that it is now related to a given harmonics of the periodic response, and not on the whole response.
- As in the case of a linear system, a nonlinear antiresonance is a local feature of the system, that depends on the driving point, the measurement point and also on the harmonics on which the external force is applied.
- As in the case of a linear system, a minimum of a given harmonics of a given nonlinear frequency response is not necessarily an antiresonance.
- Contrary to the linear case, nonlinear antiresonance cannot be identified to the backbone curve of a dual system, because of the amplitude-frequency dependence. As a consequence, one cannot use traditional backbone (nonlinear mode) numerical continuation to compute it.

5.3 Numerical continuation

5.3.1 Problem statement

As stated above, we propose here to define an antiresonance by a zero (conservative system) or, more generally, a minimum (damped system) of a given harmonics amplitude of a given nonlinear frequency response. Antiresonance continuation is thus equivalent to the continuation of a minimum of a frequency response.

The procedure requires an analytical definition of the response amplitude of the j^{th} harmonic measured on the i^{th} degree of freedom and depending on the unknowns of the system (5.13). A scalar function z is then defined as follows :

$$z = g(\mathbf{U}) = \sqrt{x_i^{c_j^2} + x_i^{s_j^2}}. \quad (5.16)$$

The general framework of the study consists in adding equation (5.16) to the initial system (5.13) in order to build a new non linear algebraic system :

$$\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{U}}, \omega, f) = \begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega, f) = \mathbf{0} & (5.17a) \\ z - g(\mathbf{U}) = 0, & (5.17b) \end{cases}$$

where $\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{U} \ z]^T$.

The system (5.17) is in a convenient form for a wide range of continuation procedures :

- Classical forced response continuation consists in computing a branch of steady-state solutions [81] by imposing f when ω varies, as shown on figure 5.10.
- Backbone curve continuation can be achieved enforcing f and \mathbf{D} to zeros while ω is left free. However, the procedure can require to add a phase equation to (5.17), as explained in [91], since the driving force is zero.
- More specific methods, like bifurcation tracking, consist in following the branch of solution at a given particular point [94] (saddle node, branch point bifurcation ...). For instance,

limit point continuation of the figure 5.4 is achieved letting f and ω free and enforcing a constraint, in this case $\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$, as illustrated on figure 5.13.

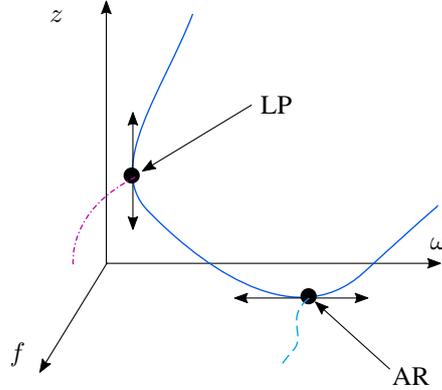


FIGURE 5.13 – Branch of solution for constant f (solid line). Limit point continuation (dash-dotted line). Antiresonance continuation (dashed line).

- The original method that we propose in this paper, namely antiresonance continuation and shown on figures 5.11 and 5.7, consists in letting free f and ω and enforcing the constraint $\frac{\partial z}{\partial \omega} = 0$, in the case of a damped system. For a conservative system, the constraint is simply $z = 0$.

As it will be seen, this procedure shares similarities with limit point tracking, thus start to recall its strategy before introduce the antiresonance continuation.

5.3.2 Limit point continuation

As stated before, a limit point is characterized by a vertical tangency of the branch of solution w.r.t. ω at constant f , which leads to

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (5.18)$$

Differentiating equation (5.17) w.r.t. ω at constant f yields

$$\frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{d\omega} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}} \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\omega} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \omega} = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Since z is a component of $\tilde{\mathbf{U}}$, according to equation (5.18), $\frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\omega}$ is then undefined ($\partial z / \partial \omega$ is infinite). Moreover, $\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \omega}$ is finite since $\tilde{\mathbf{R}}$ depends explicitly on ω (it is in fact non zero because of the time derivatives of the dynamical system (5.1) that lead, with the HBM, to differentiate the Fourier series and to make ω appear in $\tilde{\mathbf{R}}$). Consequently, those two points necessarily imply the singularity of the Jacobian matrix $\tilde{\mathbf{J}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}}$. The required constraint to carry out the limit point continuation can then be written :

$$\det(\tilde{\mathbf{J}}) = 0. \quad (5.20)$$

Without an analytical expression of $\tilde{\mathbf{J}}$, the computation of its determinant may become a numerically cumbersome procedure. For large systems, this can be achieved using the so-called bordering technique where the singularity of $\tilde{\mathbf{J}}$ is monitored through the evaluation of a scalar test function [72, 99, 93]. For smaller systems, an alternative is to use the eigenvector $\tilde{\Phi}_0$ associated to a null eigenvalue $\tilde{\lambda}_0 = 0$ of $\tilde{\mathbf{J}}$ [100], such as :

$$\det(\tilde{\mathbf{J}}) = 0 \iff \exists \tilde{\Phi}_0 \neq 0; \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\Phi}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.21)$$

The final nonlinear algebraic system to solve can be written :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega, f) = \mathbf{0} \\ z - g(\mathbf{U}) = 0 \\ \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\Phi}_0 = \mathbf{0} \\ \|\tilde{\Phi}_0\| - 1 = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

It is worth noting that the vector $\tilde{\Phi}_0$ is unknown and is normalized by the third equation so that $\tilde{\Phi}_0 \neq 0$.

At this point, we can summarize the number of unknowns and equations of (5.22). We have :

$$\dim \mathbf{U} = N_{eq}(2H + 1), \quad \dim z = 1, \quad \dim \tilde{\Phi}_0 = \dim \mathbf{U} + \dim z, \quad (5.23)$$

thus a total of $2N_{eq}(2H + 1) + 4$ unknowns, since ω and f are left free. As usual for continuation procedures, there is a lack of one equation with a total number of $2N_{eq}(2H + 1) + 3$. Implicit function theorem states that there exists, on a given interval, an implicit parametrization of branches of solutions of (5.22) as a function of a parameter a [72]. The missing information is thus given by the definition of a and will be provided in section 5.4.

5.3.3 Antiresonance continuation

An antiresonance is characterized by a horizontal tangency of the branch of solution w.r.t. ω at constant f . The basic idea is then to exchange the role of ω and z leading to

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = 0. \quad (5.24)$$

Based on the limit point continuation procedure, the idea is to define formally a new algebraic system \mathbf{R}^* from (5.17) where z becomes the control parameter and ω an unknown

$$\mathbf{R}^*(\mathbf{U}^*, z, f) = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{U}}, \omega, f) = \mathbf{0}, \quad (5.25)$$

where $\mathbf{U}^* = [\mathbf{U} \ \omega]^\top$. Since then, differentiating \mathbf{R}^* w.r.t. z yields

$$\frac{d\mathbf{R}^*}{dz} = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{U}^*} \frac{d\mathbf{U}^*}{dz} + \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial z} = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Since ω is now a component of \mathbf{U}^* , according to equation (5.24), $\frac{d\mathbf{U}^*}{dz}$ is then undefined (because of the change of role between ω and z). Moreover, since $\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial z}$ is non zero (because of Eq. (5.17b)), \mathbf{U}^* depends explicitly on z , this necessarily implies the singularity of the Jacobian matrix $\mathbf{J}^* = \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{U}^*}$. The required constraint to carry out the limit point continuation can be written :

$$\det(\mathbf{J}^*) = \mathbf{0}. \quad (5.27)$$

Again, it is convenient to replace (5.27) to obtain :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega, f) = \mathbf{0} \\ z - g(\mathbf{U}) = 0 \\ \mathbf{J}^* \Phi_0^* = \mathbf{0} \\ \|\Phi_0^*\| - 1 = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

where Φ_0^* is the unknown eigenvector associates to the null eigenvalue $\lambda_0^* = 0$ of \mathbf{J}^* .

In the particular case of a conservative system, (5.28) is simply rewritten :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega, f) = \mathbf{0} \\ z - g(\mathbf{U}) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

It is also important to point out that equation (5.24) is also true for a maximum of the function z . The procedure describe here is then also suitable for the continuation of a maximum point, like a resonance.

Here again, system (5.28) comprises $2N_{eq}(2H + 1) + 4$ unknowns and only $2N_{eq}(2H + 1) + 3$ equations. It is worth noting that system (5.25) is just use to build the Jacobian. In practice, $\tilde{\mathbf{R}}$ and \mathbf{R}^* are identical and Jacobians $\tilde{\mathbf{J}}$ and \mathbf{J}^* are quite similar, they are given by

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{U}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} \\ -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{U}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

One observes that only last columns are different so moving from limit point continuation to antiresonance continuation is almost immediate.

5.4 Numerical solving

In this section, the numerical solving with the Asymptotic Numerical Method (ANM) is presented. System (5.13) is used as example. ANM is based on a high order perturbation method from an initial solution $(\mathbf{U}_0, \omega_0, f_0)$ [80, 81]. The unknowns of (5.13) are expanded in a power series as a function of a path parameter a . For instance, a forced steady state computation for fixed f leads to :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a\mathbf{U}_1 + a^2\mathbf{U}_2 + \dots + a^N\mathbf{U}_N \\ \omega(a) = \omega_0 + a\omega_1 + a^2\omega_2 + \dots + a^N\omega_N \\ f = f_0 \end{cases} \quad (5.31)$$

where f_0 is a constant. The path parameter is defined as the pseudo arc length along the branch of solution [81] and it is defined by :

$$a = (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)^\top \cdot \mathbf{U}_1. \quad (5.32)$$

Substituting the power series expansions and the path parameter definition into (5.13) and equating like powers of a , the coefficients of the series (5.31) are obtain by solving a succession of

linear systems involving a unique tangent matrix. Unlike to predictor-corrector algorithms, where the solution is computed point by point, ANM gives a piecewise continuous representation of the branch of solution parametrized by a . Finally the range of validity of the polynomial approximation is determined *a posteriori* by analysing the residue of (5.13).

In practice, the periodic solutions of 5.1 are computed via the tool Manlab 2.0 [74]. The use of this software require to rewrite the governing equations in a set of first-order differential equations such as :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} & = \mathbf{v} \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{D}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) & = \mathbf{F} \cos \omega t. \end{cases} \quad (5.33)$$

The ANM becomes very powerful when system (5.33) is recasted under the flowing quadratic form :

$$m(\dot{\mathbf{Z}}) = c + l(\mathbf{Z}) + q(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}), \quad (5.34)$$

where $m(-)$ is the differential operator, c is a constant vector, $l(-)$ is the linear operator and $q(-, -)$ is the quadratic operator. $\mathbf{Z} = [\mathbf{x} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u}]^\top$ is the vector of unknowns and contains the original unknown vector \mathbf{x} , the unknown vector \mathbf{v} resulting to the transformation from (5.1) to (5.33) and the unknown vector \mathbf{u} resulting to the transformation from (5.33) to (5.34).

Finally, the HBM procedure transform (5.34) into the pure algebraic system (5.13) of the form

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{C} + \mathbf{L}(\bar{\mathbf{U}}) + \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}, \quad (5.35)$$

where $\bar{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}, \omega, f]$ and $\mathbf{C}, \mathbf{L}(-)$ and $\mathbf{Q}(-, -)$ are constant, linear and quadratic operators respectively.

On notices that this quadratic framework is particularly suitable for implementation of limit point and antiresonance tracking. If $\tilde{\mathbf{R}}$ and \mathbf{R}^* are of the form of (5.35), their jacobians $\tilde{\mathbf{J}}$ and \mathbf{J}^* are thus linear w.r.t. $\tilde{\mathbf{U}}$ and \mathbf{U}^* respectively. They can be determined column-wise such as :

$$\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{e}_j = \mathbf{L}(\mathbf{e}_j) + \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{e}_j) + \mathbf{Q}(\mathbf{e}_j, \tilde{\mathbf{U}}) \quad (5.36)$$

and

$$\mathbf{J}^*\mathbf{e}_j = \mathbf{L}(\mathbf{e}_j) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}^*, \mathbf{e}_j) + \mathbf{Q}(\mathbf{e}_j, \mathbf{U}^*) \quad (5.37)$$

where $\mathbf{e}_j = [0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^\top$ is a canonical vector where only the j^{th} component equals the unity.

Since then, equations

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\Phi}_0 = \mathbf{0} \\ \|\tilde{\Phi}_0\| - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \mathbf{J}^*\Phi_0^* = \mathbf{0} \\ \|\Phi_0^*\| - 1 = 0 \end{cases}$$

of systems (5.22,5.28) involve only quadratic operations so procedures described in sections 5.3.2 and 5.3.3 can be easily implemented in the MANLAB 2.0 package.

5.5 Application to the Euler's pendulum

We now apply concepts presented above to the Euler's pendulum which have the particularity to exhibit both geometric non-linearities and non linear inertial coupling. The system under investigation is then composed of a pendulum whose the center of mass G is subjected to move along a prescribed path \mathcal{C} belonging to a mobile carriage of mass m_c as shown in Figure 5.14. The pendulum is considered as a point mass of mass m_p and concentrated at G . The variable X

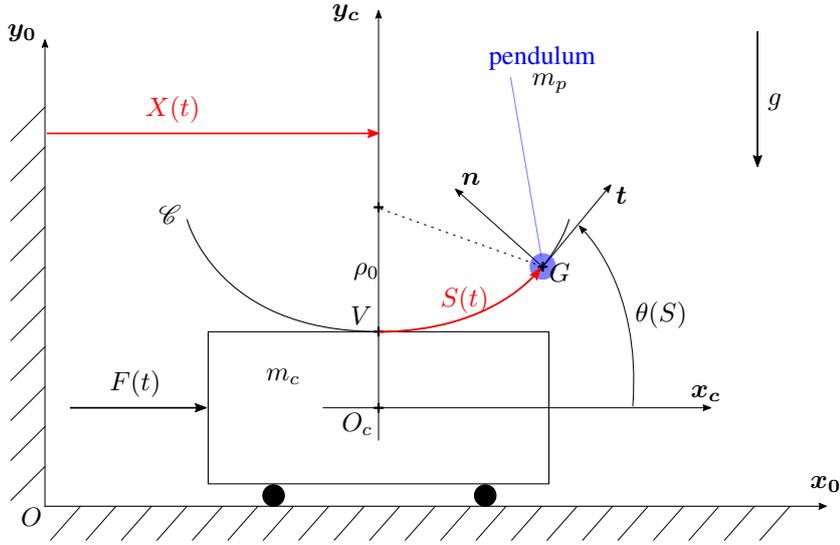


FIGURE 5.14 – Investigated Euler's pendulum.

measures the translational displacement of the co-ordinate system $\mathcal{R}_c(O_c, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$, attached to the carriage, with respect to the Galilean frame $\mathcal{R}_0(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$. For the sake of generality, the shape of the trajectory \mathcal{C} is let free with the only condition that it is symmetric along \mathbf{y}_c . It is therefore convenient to parametrize the displacement of G along \mathcal{C} with the curvilinear abscissa S whose the origin is at the vertex V . The general path shape of $\mathcal{C} : \{G; \theta(S)\}$ is governed by the function $\theta(S)$ which measures the rotation of the Frenet trihedron $\mathcal{R}_F(G, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{z}_0)$ w.r.t. \mathcal{R}_c . The whole system evolves in the gravitational acceleration field $-g\mathbf{y}_0$ and the carriage is subjected to an external time-dependent force

$$F(t) = f_0 \cos \omega t, \quad (5.38)$$

where τ denotes the time. The governing equations can be written

$$(m_c + m_p) \ddot{X} + m_p \ddot{S} \cos \theta - m_p \frac{d\theta}{dS} \dot{S}^2 \sin \theta = f_0 \cos \omega t \quad (5.39)$$

$$m_p \cos \theta \ddot{X} + m_p \ddot{S} + m_p g \sin \theta + c_p \dot{S} = 0 \quad (5.40)$$

The proof is given in appendix 5.7.1. Equations (5.39) and (5.40) stand for the carriage and pendulum dynamics respectively. A viscous damping, of coefficient c_p , has been introduced in equation (5.40). It represents a damping between the pendulum and the carriage along \mathcal{C} . One notices the presence of non linear coupling in the mass matrix through the term $\cos \theta$. The nonlinear nature of this inertial coupling vanishes for the particular case where the path \mathcal{C} followed by the center of mass of the pendulum is an horizontal line *i.e.* $\theta(S) = 0$. In this case, the direction of the gravitational field becomes orthogonal with the pendulum displacement which also causes the vanishing of the stiffness term $m_p g \sin \theta$ of the pendulum in equation (5.40). Obviously, this case has no interest here.

5.5.1 Free linear vibrations of the uncoupled pendulum

We define here some basic concepts in order to understand how the trajectory \mathcal{C} governs the linear behavior of the pendulum. The carriage of Figure 5.14 is assumed fixed w.r.t. \mathcal{R}_0 *i.e.* $X(t)$

is constant. Governing equation of the pendulum is then extracted from equation (5.40) and is given by

$$\ddot{S} + g \sin \theta(S) = 0. \quad (5.41)$$

The aforementioned symmetry condition about \mathcal{C} implies that $\theta(S) = -\theta(-S)$, so expanding $\sin \theta(S)$ in Taylor's series around $S = 0$ yields

$$\sin \theta(S) = \left. \frac{d\theta(S)}{dS} \right|_{S=0} S + \mathcal{O}(S^3). \quad (5.42)$$

For a planar curve parametrized as \mathcal{C} , $\theta(S)$ is linked to the curvature $\kappa(S)$ of \mathcal{C} [68] by

$$\frac{d\theta(S)}{dS} = \kappa(S) = \frac{1}{\rho(S)}, \quad (5.43)$$

where $\rho(S)$ is the local radius of curvature of \mathcal{C} . When evaluated at $(S = 0)$, equation (5.43) becomes

$$\left. \frac{d\theta(S)}{dS} \right|_{S=0} = \kappa_0 = \frac{1}{\rho_0}. \quad (5.44)$$

where ρ_0 is the radius of curvature of \mathcal{C} at V . From equation (5.44), one sees that the signed curvature κ_0 of \mathcal{C} at the vertex V must be positive *i.e.* $\left. \frac{d\theta(S)}{dS} \right|_{S=0} > 0$ so that equation (5.41) is stable. Therefore in the following, only concave-shaped paths will be considered. Substituting equation (5.44) into (5.42) and the result into equation (5.41), the linear equation of motion is

$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0 \quad (5.45)$$

where $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\rho_0}}$. One observes that geometric parameter ρ_0 governs the free linear oscillation frequency of the pendulum whatever the shape of the trajectory \mathcal{C} , which has not been yet defined.

5.5.2 Influence of the path shape

We now give a particular shape to the trajectory \mathcal{C} . The carriage is still assumed fixed w.r.t. \mathcal{R}_0 . We address a family of curves, proposed by Denman in [7], whose the intrinsic equation is of the form

$$\rho^2(S) = \rho_0^2 - \lambda^2 S^2 \quad (5.46)$$

where λ is a parameter governing the path shape. A circle is denoted by $\lambda = 0$ and a cycloid by $\lambda = 1$. Any value in the range $0 < \lambda < 1$ gives an epicycloid, the proof is given in appendix 5.7.2. Those paths are depicted on Figure 5.15 and their corresponding functions $\theta(S)$ are obtained by substituting equation (5.46) into (5.43), it reads

Circle :

$$\theta(S) = \frac{S}{\rho_0}, \quad (5.47)$$

Epicycloid :

$$\theta(S) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{asin} \frac{\lambda S}{\rho_0}, \quad (5.48)$$

Cycloid :

$$\theta(S) = \operatorname{asin} \frac{S}{\rho_0}. \quad (5.49)$$

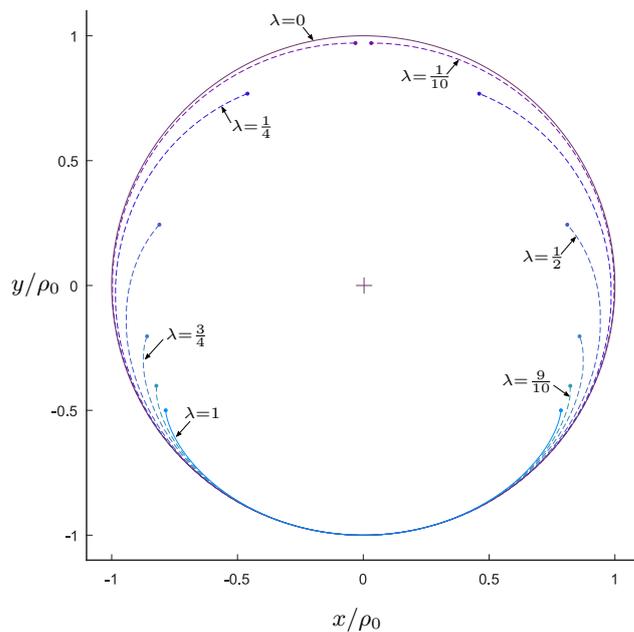


FIGURE 5.15 – Evolution of the path shape at a given ρ_0 . Circle (solid line, $\lambda = 0$). Epicycloid (dashed lines, $0 < \lambda < 1$). Cycloid (solid line, $\lambda = 1$). \bullet denote cusp points.

Note that the amplitude of the pendulum is bounded by cusp points of epicycloid and cycloid since $\text{asin } x$ is defined for $-1 \leq x \leq 1$.

It is worth noting that substitution of equation (5.49) into (5.41) gives the linear equation of motion (5.45). The cycloidal pendulum is known as the Huygens' pendulum [15] for which the free oscillation frequency doesn't depend on the amplitude of oscillations [101]. The cycloid is thus the tautochronic path in the gravitational acceleration field. In the case of the circle and epicycloid, it is of interest to expand the nonlinear term $\sin \theta(S)$ of equation (5.41) in Taylor's series around $S = 0$

Circle :

$$\sin \theta(S) = \frac{1}{\rho_0} S - \frac{1}{6\rho_0^3} S^3 + \mathcal{O}(S^5). \quad (5.50)$$

Epicycloid :

$$\sin \theta(S) = \frac{1}{\rho_0} S - \frac{1}{6\rho_0^3} (1 - \lambda^2) S^3 + \mathcal{O}(S^5). \quad (5.51)$$

At third expansion order, we recognize the cubic geometric non-linearity of the Duffing's oscillator addressed in section 5.2.2. Coefficient γ governing the magnitude of the geometric non-linearity is given by

Circle :

$$\gamma = -\frac{1}{6\rho_0^3}, \quad (5.52)$$

Epicycloid :

$$\gamma = -\frac{1}{6\rho_0^3} (1 - \lambda^2), \quad (5.53)$$

Cycloid :

$$\gamma = 0. \quad (5.54)$$

Since $\gamma < 0$ in the case of circular and epicycloidal pendulums, both exhibit a softening behavior *i.e.* the free oscillation frequency decreases as the amplitude of oscillation increases. Note also that γ is a function of the parameter λ in equation (5.53). According to the value of λ , the behavior of the epicycloidal pendulum is then more or less soft.

5.5.3 Results on the full system.

We now address the coupled system as described by equations (5.39 5.40). Different path shapes mentioned before, circle, epicycloid and cycloid, are considered. It is convenient to rewrite the governing equations under the following dimensionless form

$$(1 + \mu) x'' + \mu s'' \cos \theta - \mu \frac{d\theta}{ds} s'^2 \sin \theta = f \cos \bar{\omega} \tau \quad (5.55)$$

$$\cos \theta x'' + s'' + \sin \theta + 2\xi_p s' = 0 \quad (5.56)$$

where

$$\begin{aligned} \tau = \omega_0 t, \quad (-)' = \frac{d(-)}{d\tau}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad s = \frac{S}{\rho_0}, \quad x = \frac{X}{\rho_0}, \\ \mu = \frac{m_p}{m_c}, \quad \xi_p = \frac{c_p}{2m_p \omega_0}, \quad f = \frac{f_0}{gm_c}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Equations (5.55) and (5.56) involve the mass ratio μ between the pendulum and the carriage. ξ_p is the damping rate related to the degree of freedom s and involving c_p . The dimensionless amplitude of the external excitation is denoted by f . Implementation of equations (5.55) and (5.56) in the form of the quadratic algebraic-differential system (5.34) is given in appendix 5.7.3.

The system comprises two linear modes. A first rigid body mode of shape $\Phi_1 = [1 \ 0]^\top$ and associated eigenfrequency $\bar{\omega}_1 = 0$, where the pendulum is locked at $s = 0$, and an oscillating mode $\Phi_2 = [\mu \ -(1 + \mu)]^\top$ of associated eigenfrequency $\bar{\omega}_2 = \sqrt{1 + \mu}$ which stands for a phase opposition motion between the pendulum and the carriage. In addition, an antiresonance occurs on the carriage response at the free oscillation frequency of the pendulum, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 = 1$. Figure 5.16 depicts the forced response of the system in the case of the circle, epicycloid and cycloid. One observes an amplitude-dependent frequency even in the case of the cycloid : it is thus not the tautochronic path of the coupled system. This is an effect of nonlinear terms on the mass matrix of the system whose the significance is governed by the mass ratio μ . From equations (5.55) and (5.56), μ can be viewed as a coupling factor between the pendulum and the carriage.

Figure 5.17 shows the forced response as a function of the normalized frequency $\bar{\omega}/\bar{\omega}_2$ at the vicinity of the resonance in the case of a strong coupling *i.e.* $\mu = 0.5$, a weak coupling *i.e.* $\mu = 0.25$ and the decoupled pendulum *i.e.* $\mu = 0$. One sees that the resonance is more and more soft as the parameter μ increases. In the case of a strong coupling, non linear inertial effect overrides geometric non-linearities and exacerbates the softening behavior. In the case of a weak coupling, the inertial coupling becomes negligible and the cycloidal path tends to make the whole system tautochronic.

Figure 5.18 shows the convergence of the antiresonance behavior of the system as the number of harmonics H retained in (5.12) increases. Curves shown in Figure 5.18 are the same as those of Figure 5.16 but for several amplitudes of excitation. An appropriate number of harmonics must be retained in the solution since the contributions of harmonics higher than H will be neglected through the harmonic balance procedure. When $H = 1$, the solution is not converged

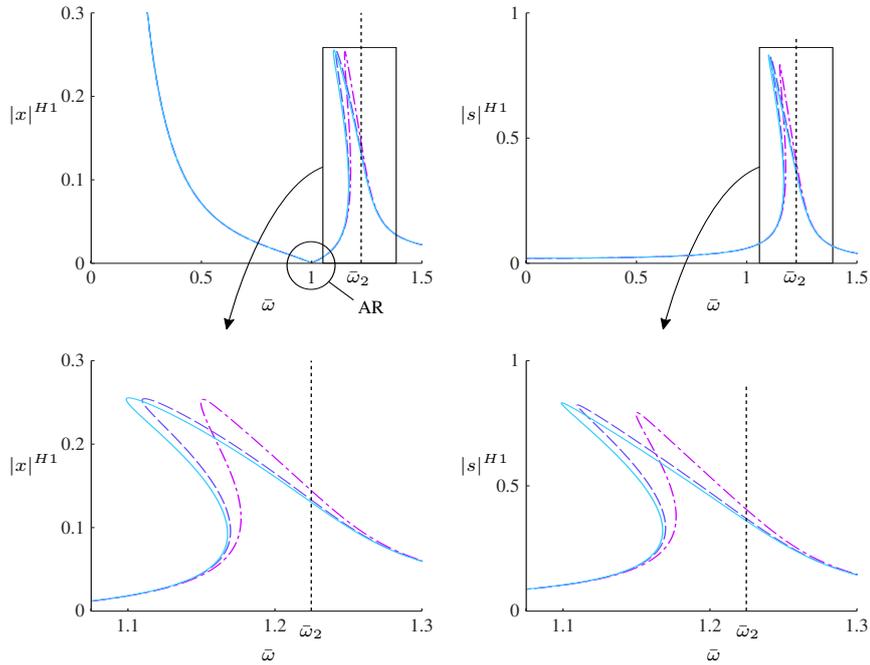


FIGURE 5.16 – Evolution of the first harmonic of the carriage response (left) and pendulum displacement (right), in the case of circular (solid line), epicycloidal ($\lambda = 1/2$, dashed line) and cycloidal (dash-dotted line) path. $\mu = 0.5$, $\xi_p = 0.01$, $f = 0.03$, $H = 20$

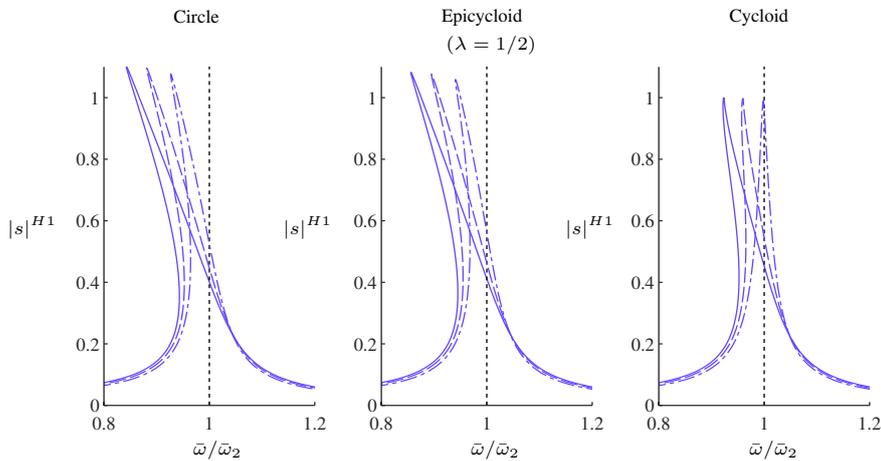


FIGURE 5.17 – Evolution of the primary resonance seen on the first harmonic of the pendulum displacement. $f = 0.04$ and $\mu = 0.5$ (solid lines). $f = 0.0315$ and $\mu = 0.25$ (dashed lines). $f = 0.0235$ and $\mu = 0$ (dash-dotted lines). $\xi_p = 0.01$ and $H = 20$.

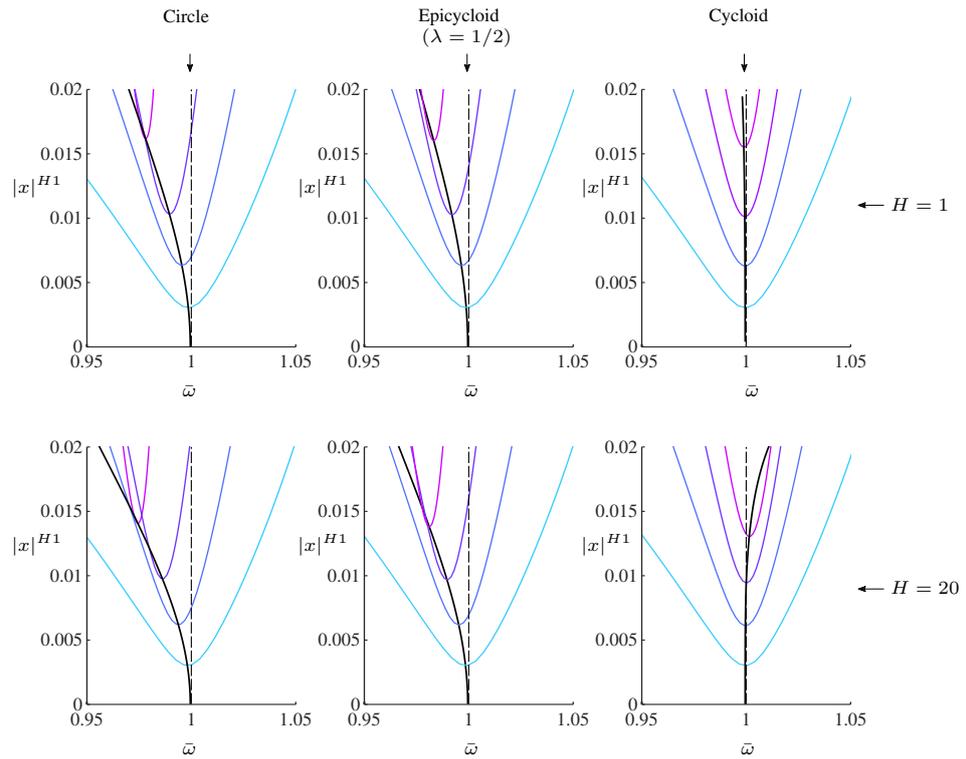


FIGURE 5.18 – Evolution of the antiresonance frequency, seen on the first harmonic of the carriage response for several amplitudes of excitation, $f = [0.075; 0.15; 0.225; 0.3]$, $\mu = 0.5$, $\xi_p = 0.01$. Antiresonance continuation is denoted by black solid lines.

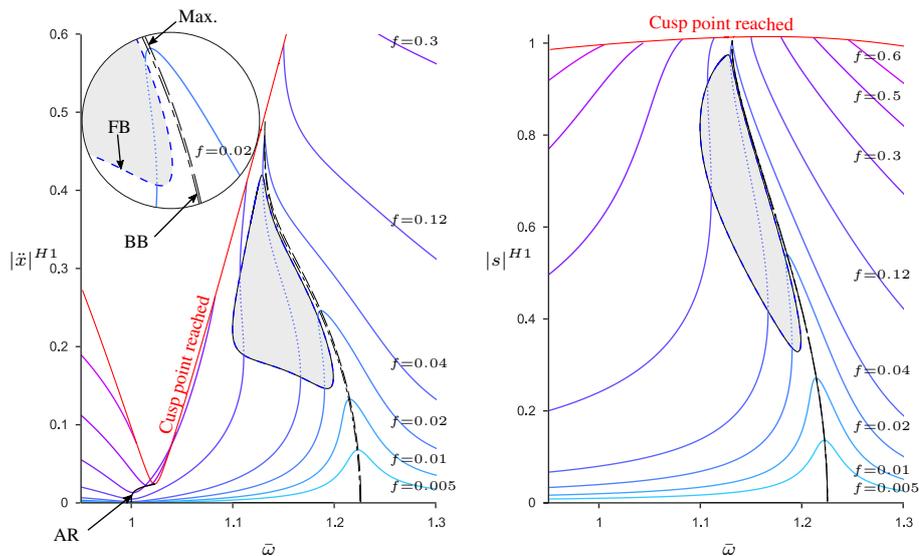


FIGURE 5.19 – Evolution of the first harmonic of the carriage response (left) and pendulum displacement (right) in a case of the cycloid. Dashed lines represent unstable solutions. "BB" denotes backbone curve. "FB" stands for fold bifurcation. Maximum response amplitude continuation is denoted "Max" and antiresonance continuation "AR". Parameters values $\mu = 0.5$, $\xi_p = 0.01$ and $H = 20$.

and the amplitude-frequency dependence of the antiresonance, in the case of the cycloid, is very weak. By increasing the number of harmonics in the approximation of the solution, one observes a quantitative change for the circle and the epicycloid and a qualitative, from soft to hard, for the cycloid. The trend of antiresonance is not the same as that of backbone curve, see Figure 5.17 where the cycloid is softening. Here again, nonlinear inertial interactions are involved so the cycloid does not guarantee an amplitude-independent antiresonance curve.

Figure 5.19 depicts the forced response, for the cycloidal case, as f increases. For convenience, we chose to represent the response of the carriage in terms of acceleration. One observes the softening behavior of the resonance while the antiresonance exhibits an hardening behavior. At large amplitude of motion, the resonance tends to go stiff leading to bound the location of unstable solutions, represented by the grey area and whose the border is the fold bifurcation continuation. Maximum response amplitude continuation represents the locus of the frequency resonance and one sees that it doesn't correspond to the eigenfrequency represented by the backbone curve as stated in previous sections. Finally, the maximum amplitude displacement at cusp points *i.e.* $s(\tau) = 1$ has been computed solving the system (5.22) since the jacobian \mathbf{J}^* is also singular at this particular point.

5.6 Conclusion

Nonlinear systems are subjected to complex phenomena of various nature and numerical methods such bifurcation tracking procedures usually assists their design. Realizing that the evolution of the antiresonance frequency of a nonlinear system strongly depends on the nature of non-linearities, its direct prediction gives a particular convenience, in term of computation time. In this paper, the concept of antiresonance is extended to the nonlinear range and an

antiresonance continuation method is proposed with the aim to enhance the robustness of the development of nonlinear dynamic absorbers. The proposed methodology allows to save up redundant forced steady-state simulations by directly computing the locus of the minimum as well as maximum response amplitude of a given harmonic. Application of the procedure coupled to the harmonic balance method on systems subjected to geometric and/or inertial non-linearities shows the efficiency of the proposed method.

An interesting result is the difference of trend between antiresonance and resonance of nonlinear normal mode for systems exhibiting nonlinear inertial coupling.

5.7 Appendix

5.7.1 Governing equations of the Euler's pendulum

We give the methodology to establish governing equations of the Euler's pendulum of the figure 5.14, in the case of a general path \mathcal{C} .

The velocity of point G w.r.t. \mathcal{R}_0 can be written

$$\mathbf{V}_G = \left(\dot{X} \cos \theta(S) + \dot{S} \right) \mathbf{t} - \dot{X} \sin \theta(S) \mathbf{n}. \quad (5.58)$$

Total kinetic energy can thus be written

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left((m_p + m) \dot{X}^2 + m_p \dot{S}^2 + 2m_p \dot{X} \dot{S} \cos \theta(S) \right), \quad (5.59)$$

and the potential energy is given by

$$\mathcal{U} = m_p g \int_0^S \sin \theta(S) dS. \quad (5.60)$$

Governing equations (5.39) and (5.40) are finally obtained applying the Lagrange's equation to kinetic and potential energies such that

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = 0, \quad (5.61)$$

where $q = [X, S]^T$.

5.7.2 Epicycloid path

Epicycloid \mathcal{C} results from the trajectory of a point G belonging to a generating circle of radius b , rolling without slipping on a base circle of radius a as shown in Figure 5.20. Parametric equations of \mathcal{C} are given by

$$\mathbf{OG} = \begin{cases} (a + b) \sin \varphi + b \sin (\varphi + \alpha) \\ -(a + b) \cos \varphi - b \cos (\varphi + \alpha) \end{cases} \quad (5.62)$$

$$(5.63)$$

The rolling without slipping condition leads to

$$\alpha = q\varphi, \quad (5.64)$$

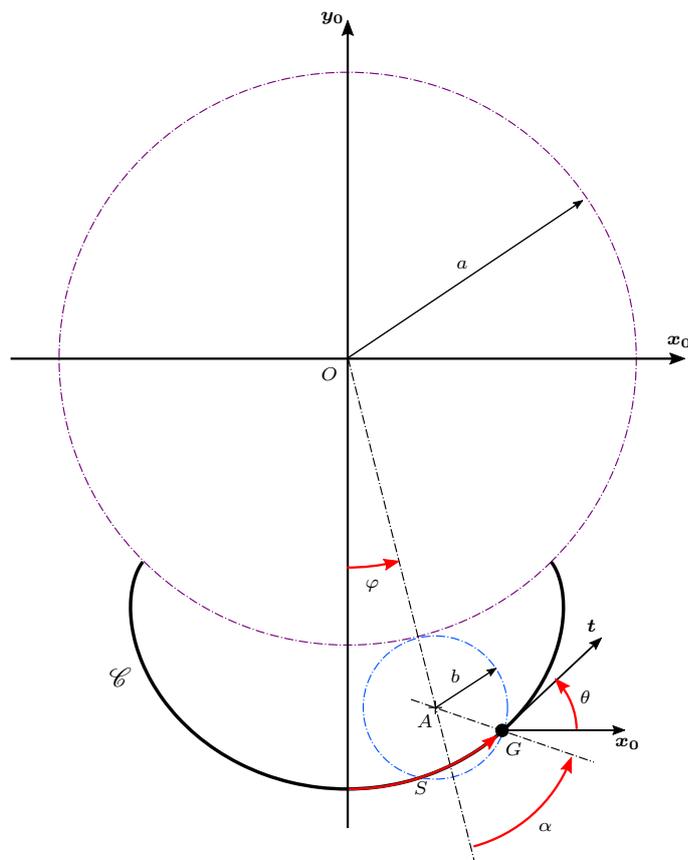


FIGURE 5.20 – Epicycloid generation.

where $q = \frac{a}{b}$. Parametric equations (5.62) and (5.63) can thus be written

$$\begin{cases} x_G = b((q+1)\sin\varphi + \sin(q+1)\varphi) & (5.65) \\ y_G = -b((q+1)\cos\varphi + \cos(q+1)\varphi) & (5.66) \end{cases}$$

Transformation from φ to S is done using the fact that

$$dS^2 = dx_G^2 + dy_G^2, \quad (5.67)$$

By differentiating equations (5.65,5.66) w.r.t. φ and substituting the result in (5.67), one can write

$$S(\varphi) = \int_0^\varphi 2b(q+1)\cos\frac{q}{2}\varphi d\varphi = 4b\frac{q+1}{q}\sin\frac{q}{2}\varphi. \quad (5.68)$$

The signed curvature of \mathcal{C} , parametrized in Cartesian coordinates, is given by [68]

$$\kappa(\varphi) = \frac{x'_G y''_G - x''_G y'_G}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.69)$$

where $(-)'$ stands for the derivative of $(-)$ w.r.t. φ . One obtains

$$\kappa(\varphi) = \frac{q+2}{4b(q+1)\cos\frac{q}{2}\varphi}. \quad (5.70)$$

Substituting (5.68) into (5.70) yields

$$\kappa(S) = \frac{q+2}{4b(q+1)\sqrt{1-\frac{q^2}{16b^2(q+1)^2}S^2}}. \quad (5.71)$$

The radius of curvature ρ_0 of \mathcal{C} at $S=0$ is given by

$$\rho_0 = \frac{1}{\kappa(S=0)} = \frac{4b(q+1)}{q+2}. \quad (5.72)$$

Equation (5.71) can thus be rewritten

$$\kappa(S) = \frac{1}{\rho(S)} = \frac{1}{\rho_0\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\rho_0^2}S^2}} \quad (5.73)$$

where $\lambda = \frac{q}{q+2}$. Finally, using the fact that [68]

$$\theta(S) = \int_0^S k(S) dS \quad (5.74)$$

the tangent angle θ can be written

$$\theta(S) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{asin} \frac{\lambda S}{\rho_0}. \quad (5.75)$$

Since the function $\sin^{-1} x$ is defined in the interval $-1 \leq x \leq 1$, we can deduce from (5.75) the maximal value S_{max} of S as

$$S_{max} = \frac{\rho_0}{\lambda}. \quad (5.76)$$

In addition, the rewrite of equation (5.75) w.r.t. the normalised displacement \bar{S} yields

$$\theta(\bar{S}) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{asin} \lambda \bar{S}. \quad (5.77)$$

where $\bar{S} = S/\rho_0$. This shows that the parameter λ governs the general shape of the epicycloid at a given ρ_0 . On the other hand, at given lambda, a scaling factor applied to ρ_0 causes the translation of the curve along \mathbf{y}_0 .

5.7.3 Algebraic-differential system of the Euler's pendulum.

The quadratic differential-algebraic system of the Euler's Pendulum implemented in the MANLAB package can be written :

$$\begin{array}{cccccc}
\ddot{x} & + & 0 & - & A_x & + & 0 \\
\dot{s} & + & 0 & - & V_s & + & 0 \\
\dot{V}_s & + & 0 & - & A_s & + & 0 \\
0 & - & f & + & (1 + \mu) A_x & + & \mu (A_s C_\theta - \alpha \beta) \\
0 & + & 0 & + & A_s + 2\xi_p V_s & + & A_x C_\theta \\
0 & + & 0 & + & \alpha & - & \delta V_s \\
0 & + & 0 & + & \beta & - & S_\theta V_s \\
0 & - & 1 & + & 0 & + & \rho \delta \\
0 & - & 1 & + & \rho & + & \lambda^2 s^2 \\
0 & + & 0 & - & \rho & + & \eta^2 \\
0 & + & 0 & + & C_\theta - g_c(s) & + & 0 \\
0 & + & 0 & + & S_\theta - g_s(s) & + & 0
\end{array} = \mathbf{0}, \quad (5.78)$$

$$\begin{array}{cccc}
\underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} & \underbrace{\hspace{2cm}} \\
m(\dot{\mathbf{Z}}) & c_0 & l(\mathbf{Z}) & q(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})
\end{array}$$

where $\mathbf{Z} = [\mathbf{x} \ \mathbf{v} \ \mathbf{u}]^\top$. $\mathbf{x} = [\dot{x} \ s]^\top$ is the original vector of unknowns of governing equations (5.55) and (5.56). $\mathbf{v} = [V_s \ A_x \ A_s]^\top$ is the vector of additional variables resulting from the transformation of governing equations in a set of first-order differential equations. $\mathbf{u} = [\alpha \ \beta \ \delta \ \rho \ \eta \ C_\theta \ S_\theta]^\top$ is the vector of additional variables resulting from the quadratic recasting of first-order differential equations. One notices that system (5.78) involves, in the two last equations, functions $g_c(s)$ and $g_s(s)$ which respectively stand for $\cos \theta(s)$ and $\sin \theta(s)$. Using path functions give by equations (5.47), (5.48) and (5.49), $g_c(s)$ and $g_s(s)$ can be written :

Circular path ($\lambda = 0$) :

$$g_c(s) = \cos s \quad , \quad g_s(s) = \sin s. \quad (5.79)$$

Epicycloidal path $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$:

$$g_c(s) = 1 - \lambda s^2 \quad , \quad g_s(s) = s\sqrt{1 - \lambda^2 s^2} = s\eta. \quad (5.80)$$

Cycloidal path ($\lambda = 1$) :

$$g_c(s) = \sqrt{1 - \lambda^2 s^2} = \eta \quad , \quad g_s(s) = s. \quad (5.81)$$

Where $\eta = \sqrt{\rho(s)}$. Note that (5.80) and (5.81) are quadratic equations and can therefore be directly implemented in (5.78). For the circular path, $g_c(s)$ and $g_s(s)$ are non-polynomial nonlinear functions which is non suitable for the MANLAB formalism. However, Karkar has proposed a quadratic frame to deal with non-polynomial non-linearities of various nature [82]. In this paper, trigonometric functions $\cos s$ and $\sin s$ of the circular pendulum were expanded in Taylor series up to $\mathcal{O}(s^{10})$ and $\mathcal{O}(s^{11})$ respectively which consequently implies the introduction of new additional variables in (5.78).

Chapitre 6

Couplage de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique

Dans l'environnement véhicule, la chaîne cinématique automobile voit ses fréquences de résonances coïncider avec les fréquences des harmoniques du couple moteur pour des vitesses de rotations particulières (*cf.* section 2.1.3). Les modes de la chaîne cinématique sont alors excités ce qui engendre de fortes sollicitations au point de compromettre l'intégrité des organes de transmission. Cette situation doit absolument être évitée et l'on propose une solution de filtration de vibration originale : l'absorbeur pendulaire centrifuge (APC). Ce système a fait l'objet d'une amélioration significative de ses performances intrinsèques au chapitre 3. On propose maintenant de l'intégrer sur un organe de transmission de puissance, au sein d'une chaîne cinématique automobile.

Ce chapitre vise à étudier le comportement de la chaîne cinématique couplée à l'APC. Dans un premier temps, on propose une étude linéaire en section 6.1. D'abord en considérant une structure primaire simple, ensuite dans le cas d'une chaîne cinématique. Cela permet de mettre en évidence les principales interactions entre l'absorbeur pendulaire et une chaîne cinématique automobile typique. Dans un deuxième temps, une étude non linéaire est menée en section 6.2, à l'aide de l'outil numérique. L'influence de la trajectoire du pendule et de son mouvement de rotation sur les performances de l'absorbeur sont étudiés sur un cas industriel. Enfin, une comparaison calculs-essais permet de statuer sur la validité des spécifications issues de l'étude de performance.

Sommaire

6.1 Étude linéaire	169
6.1.1 Interactions de l'absorbeur pendulaire avec une structure primaire . . .	169
6.1.2 Interactions de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique . . .	174
6.1.2.1 Les modes de la chaîne cinématique	177
6.1.2.2 Couplage de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique	179
6.1.3 Bilan de l'étude linéaire.	183
6.2 Étude non linéaire	183
6.2.1 Cas d'études	185
6.2.2 Résultats numériques	188
6.2.3 Corrélation calculs-essais	191
6.2.4 Bilan de l'étude non linéaire.	193

6.1 Étude linéaire

6.1.1 Interactions de l'absorbeur pendulaire avec une structure primaire

On s'intéresse d'abord à un premier exemple afin d'illustrer le comportement d'une structure primaire simple couplée à l'absorbeur pendulaire centrifuge. Ce premier cas d'étude a été proposé par Acar dans [102] et constitue une bonne introduction pour ce qui nous intéresse ici. On considère le système présenté en figure 6.1. Il s'agit d'une structure primaire linéaire composée

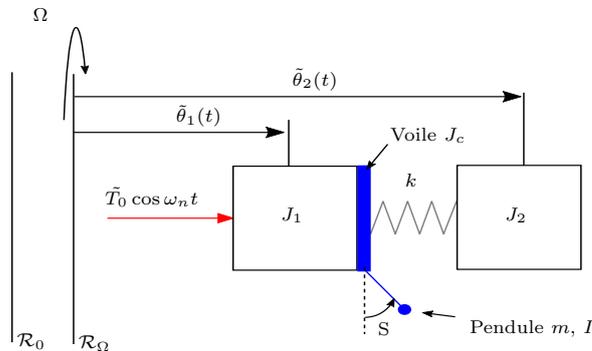


FIGURE 6.1 – Modélisation d'un APC couplé à une structure primaire.

de deux inerties, J_1 et J_2 , couplées par un ressort de raideur k . Cette structure primaire est représentative, par exemple, d'un double volant amortisseur automobile (cf. section 2.1.2.1). La structure est libre dans le repère \mathcal{R}_Ω qui tourne à une vitesse constante Ω par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 . Les rotations des inerties J_1 et J_2 sont mesurées, par rapport à \mathcal{R}_Ω , respectivement par $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$. La structure primaire accueille un absorbeur pendulaire centrifuge (APC). Cet APC ne comporte qu'un seul pendule translaté (cf. section 2.4), de masse m et d'inertie de rotation I . Le voile de l'APC, d'inertie J_c , est fixé solidement sur l'inertie J_1 . Le déplacement du pendule sur sa trajectoire est mesuré par l'abscisse curviligne S (cf. section 2.3.2.1). Pour finir, un couple oscillant $\tilde{T}_0 \cos \omega_n t$ est appliqué sur l'inertie J_1 et la fréquence d'excitation ω_n dépend

linéairement de la vitesse de rotation Ω telle que

$$\omega_n = n\Omega. \quad (6.1)$$

Où l'ordre d'excitation n est laissé variable pour les besoins de l'étude. Les équations du mouvement du système sont données sous une forme générale pour un APC à N pendules couplé à une structure primaire à M degrés de liberté, en section 4.4.2. Nous ne donnons ici que les équations du système linéaire conservatif, qui s'écrivent

$$((J_1 + J_c + m(R_0 + \rho_0)^2) \ddot{\tilde{\theta}}_1 + m(R_0 + \rho_0) \ddot{S} + k(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2) = \tilde{T}_0 \cos \omega_n t, \quad (6.2)$$

$$J_2 \ddot{\tilde{\theta}}_2 + k(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) = 0, \quad (6.3)$$

$$(R_0 + \rho_0) \ddot{\tilde{\theta}}_1 + \ddot{S} + \omega_0^2 S = 0. \quad (6.4)$$

La première équation (6.2) représente la dynamique de l'inertie J_1 qui est couplée à celle du pendule, c'est-à-dire l'équation (6.4). La deuxième équation (6.3) représente quant à elle la dynamique de l'inertie J_2 qui est, elle, couplée à la première par la raideur k . On rappelle que ω_0 est la fréquence des petites oscillations libres du pendule (cf. section 2.3.2.1) dans le champ d'accélération centrifuge, elle s'écrit

$$\omega_0 = n_p \Omega, \quad (6.5)$$

où n_p est l'ordre d'accord du pendule et dépend des paramètres géométriques R_0 et ρ_0 (cf. équation (2.56), section 2.3.2.1). Pour plus d'informations sur les caractéristiques de l'APC, le lecteur est renvoyé vers les chapitres 2 et 3.

On constate que la masse m du pendule intervient dans le couplage avec la structure primaire. En particulier si $m = 0$, alors l'équation du pendule (6.4) est totalement découplée de son inertie hôte, J_1 (cf. équation (6.2)). En section 2.4.1 (cf. chapitre 2), il a été montré que le facteur de couplage entre le pendule et l'inertie sur laquelle il est articulé est le paramètre μ qui s'écrit dans notre cas

$$\mu = \frac{m(R_0 + \rho_0)^2}{J_i + J_c + I}. \quad (6.6)$$

Ici, comme l'APC est fixé sur l'inertie J_1 , alors $J_i = J_1$. Ce paramètre représente l'inertie équivalente du pendule au centre de rotation du système *i.e.* $m(R_0 + \rho_0)^2$, sur l'inertie totale en rotation.

Quand $\mu = 0$ alors le pendule est découplé de la structure primaire. Cette dernière comporte deux modes : un mode de solide rigide de fréquence $\omega_1 = 0$, où J_1 et J_2 sont en phase, et un mode de fréquence ω_2 , où J_1 et J_2 sont en opposition de phase. Les fréquences ω_1 et ω_2 sont totalement indépendantes de la vitesse de rotation de la structure. La fréquence d'excitation ω_n dépend quant à elle de Ω (cf. équation 6.1). On imagine donc la situation où ω_n coïncide avec une des fréquences propres de la structure primaire. Ceci est illustré en figure 6.2. On voit que le deuxième mode de la structure est excité à environ 3000 tr/min par la fréquence d'excitation. Ici, cet exemple est juste illustratif mais dans le contexte automobile une telle situation avec la chaîne cinématique du véhicule compromet l'intégrité des organes de transmission de puissance (cf. section 2.1). Cette question est notamment abordée dans la suite de ce chapitre, en section 6.1.2. Afin d'éviter la situation potentiellement catastrophique de la figure 6.2, on propose d'utiliser un absorbeur pendulaire centrifuge qui présente des caractéristiques très intéressantes que l'on expose dans ce qui suit.

L'évolution des fréquences propres des systèmes découplés (pendule et structure primaire), en fonction de Ω , est montrée en figure 6.3, à gauche. On constate que ω_0 évolue suivant une

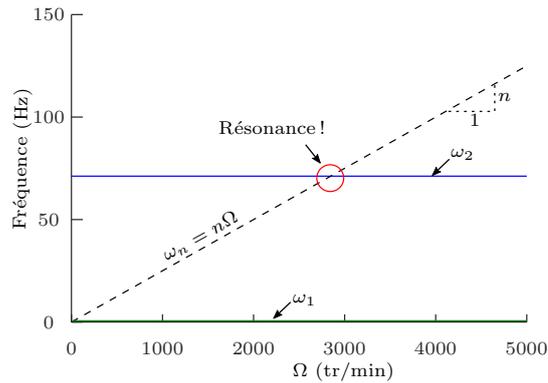


FIGURE 6.2 – Illustration d’un mode de la structure primaire excité par la fréquence du couple d’excitation. Paramètres : $J_1 = J_2 = 0.1\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, $k = 10^4\text{Nm/rad}$

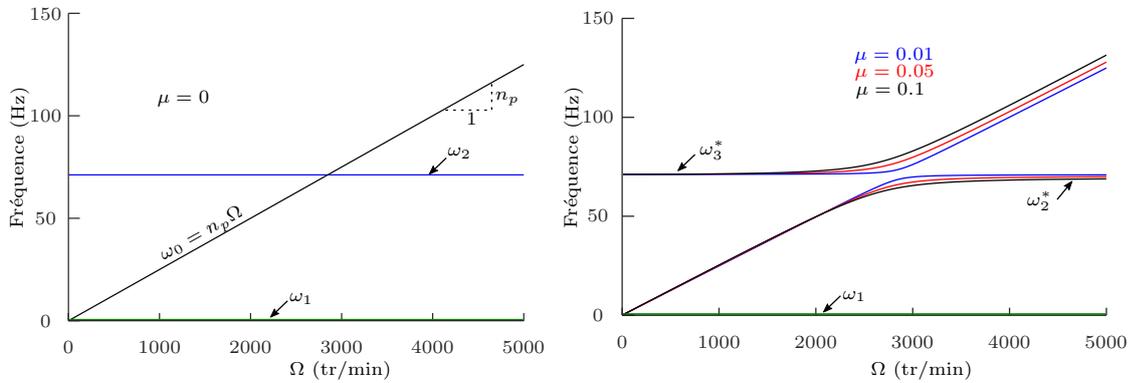


FIGURE 6.3 – Évolution des fréquences propres en fonction de Ω . À gauche : la structure primaire est découplée de l’APC. À droite : la structure primaire est couplée à l’APC. Paramètres : $J_1 = J_2 = 0.1\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, $k = 10^4\text{Nm/rad}$, et $n_p = 1.5$

droite de pente n_p (cf. équation 6.5). Lorsque $\mu \neq 0$ le pendule est couplé à la structure primaire, on dénombre trois modes : le mode de solide rigide à $\omega_1 = 0$ et deux autres modes dont les fréquences ω_2^* et ω_3^* dépendent toutes les deux de la vitesse de rotation Ω . Cela est illustré en figure 6.3, à droite, où l’on a fait varier le paramètre μ . On voit apparaître un phénomène de répulsion des fréquences ω_2^* et ω_3^* (*modes veering* en anglais) [103, 104] qui résulte de l’évolution de la matrice de raideur, dépendante de Ω par l’intermédiaire de ω_0 . On observe également que les modes se repoussent d’autant plus qu’ils sont couplés, ce qui dépend directement de la valeur du paramètre μ . Remarquons enfin que, pour Ω constant, les deux modes de la figure 6.3 (à droite) sont assimilables à ceux de la figure 2.20, introduite lors de l’étude de l’absorbeur à masse accordée en section 2.2.1. D’un point de vue linéaire, l’absorbeur pendulaire est donc bien un TMD, mais sa raideur varie avec la vitesse de rotation Ω .

Une illustration en 3 dimensions des amplitudes d’oscillation de $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ est donnée en figure 6.4. Les graphes du haut illustrent la réponse de la structure primaire nue ($\mu = 0$). On constate bien l’invariance de la fréquence de résonance ω_2 à la vitesse de rotation Ω (le mode de corps

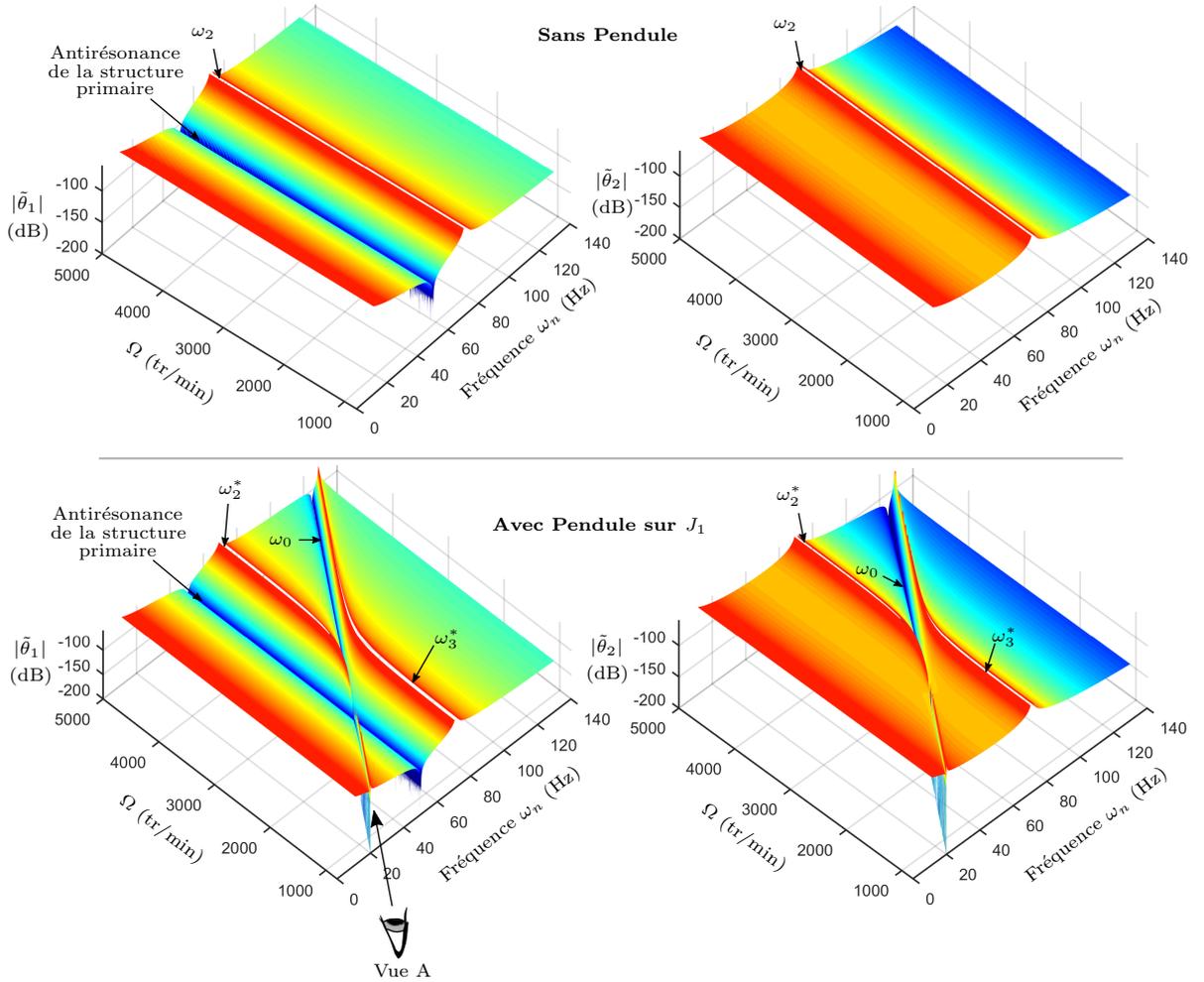


FIGURE 6.4 – Illustration en 3D des amplitudes des réponses $|\tilde{\theta}_1|$ (à gauche) et $|\tilde{\theta}_2|$ (à droite), sans pendule (en haut) et avec un absorbeur pendulaire centrifuge fixé sur l’inertie J_1 (en bas). Paramètre : $J_1 = J_2 = 0.1\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, $k = 10^4\text{Nm/rad}$, $\mu = 0.05$, $\tilde{T}_0 = 1$ et $n_p = 1.5$.

libre n’est pas visible). On observe également une antirésonance sur $|\tilde{\theta}_1|$, l’inertie J_2 jouant le rôle d’un absorbeur à masse accordée classique (*cf.* section 2.2.1). Les deux graphes du bas montrent quant à eux la réponse de la structure primaire avec un APC fixé sur J_1 où $\mu = 0.05$ et $n_p = 1.5$. Il est intéressant de voir que l’antirésonance de la structure primaire n’est en rien affectée par la présence d’un pendule sur l’inertie J_1 . On observe également que les résonances aux fréquences ω_2^* et ω_3^* (le système est conservatif) sont séparées par une antirésonance dont la fréquence correspond à celle des oscillations libres du pendule, ω_0 .

La figure 6.5, correspond à la vue A de la figure 6.4 et montre la réponse des deux inerties J_1 et J_2 , pour une multitude de valeurs de Ω allant de 500 à 5000 tr/min, au voisinage de la fréquence d’excitation $\omega_n = \omega_0$. Comme la fréquence varie avec Ω , les abscisses sont représentées en ordre d’excitation n et le passage de la fréquence à l’ordre se fait via l’équation (6.1). On remarque que lorsque l’APC est fixé sur J_1 , c’est-à-dire à l’endroit où la structure primaire est excitée,

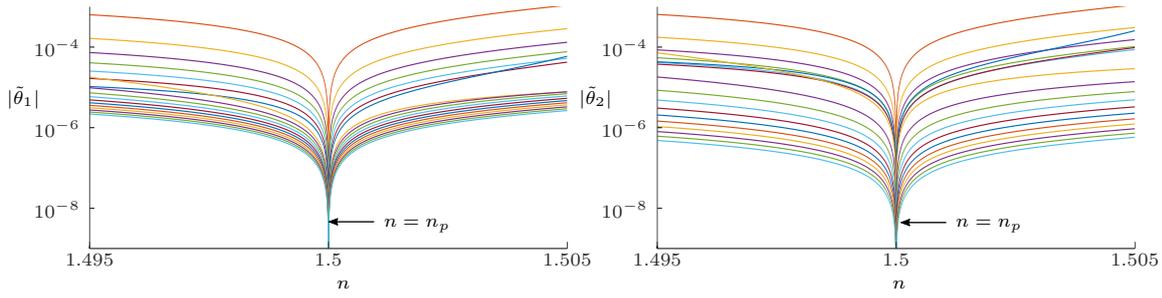


FIGURE 6.5 – Amplitudes des réponses $|\tilde{\theta}_1|$ (à gauche) et $|\tilde{\theta}_2|$ (à droite) au voisinage de ω_0 pour différentes valeurs de Ω de 500 à 5000 tr/min. L’absorbeur pendulaire centrifuge fixé sur l’inertie J_1 . Représentation en ordre d’excitation ($\omega_n = n\Omega$). Paramètre : $J_1 = J_2 = 0.1\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, $k = 10^4\text{Nm/rad}$, $\mu = 0.05$, $\tilde{T}_0 = 1$ et $n_p = 1.5$.

l’antirésonance due à l’apport du pendule dans le système, c’est-à-dire à ω_0 , est commune aux deux degrés de liberté. Ceci est parfaitement logique car les oscillations du pendule compensent exactement le couple d’excitation, l’inertie J_2 ne reçoit donc aucune énergie à cette fréquence. Ceci est très intéressant car en environnement véhicule, la fréquence d’excitation du moteur ω_e dépend linéairement de Ω , comme ω_0 . Elle s’écrit :

$$\omega_e = n_e\Omega, \quad (6.7)$$

où l’ordre d’excitation n_e est une constante qui ne dépend que de l’architecture du moteur (cf. section 2.1.1). Cela signifie qu’en choisissant d’accorder le pendule (ici translaté) tel que $\omega_0 = \omega_e$ (cf. section 2.4.1), on s’assure (d’un point de vue linéaire) que la réponse forcée à la fréquence ω_e correspond à une antirésonance commune à tous les degrés de liberté du système. Plus précisément on choisit l’ordre d’accord n_p du pendule tel que

$$\omega_0 = \omega_e \quad \Rightarrow \quad n_p\Omega = n_e\Omega \quad \Rightarrow \quad n_p = n_e. \quad (6.8)$$

La figure 6.6 montre l’influence d’un désaccord du pendule sur la réponse à la fréquence d’excitation du moteur ω_e . Le graphique de droite montre l’évolution des fréquences de résonances ω_2^* et ω_3^* en fonction de n_p , que l’on a fait varier autour de l’ordre d’excitation $n_e = 1.5$. C’est ainsi que le désaccord est introduit. La ligne pointillée noire correspond à la fréquence d’excitation du moteur, c’est-à-dire à $\omega_n = \omega_e$. Le graphique de gauche montre les amplitudes $|\tilde{\theta}_1|$ et $|\tilde{\theta}_2|$ le long de cette ligne pointillée noire en fonction de Ω et pour différentes valeurs de n_p . On précise que le cas $n_p = n_e = 1.5$ n’est pas représenté car on sait que la réponse est nulle vu que l’antirésonance est commune aux deux degrés de liberté (cf. figure 6.5). On constate premièrement que le paramètre n_p permet “d’articuler” les fréquences de résonances autour de ω_e . C’est logique car il régit la fréquence ω_0 (cf. équation (6.5)). On constate également que, en fonction de la valeur de n_p , on amène potentiellement une fréquence de résonance sur “le chemin” de l’excitation du moteur, par exemple aux régimes $\Omega_{RES}^{(2)}$ et $\Omega_{RES}^{(3)}$, où les valeurs $n_p = 1.57$ et $n_p = 1.43$ ont été choisies volontairement éloignées de $n_e = 1.5$ pour des raisons de visibilité. Remarquez que pour des désaccords même très faibles, en l’occurrence $n_p = 1.499$ et $n_p = 1.501$, la réponse présente inmanquablement des résonances. Ici, le système étant conservatif, la moindre perturbation de n_p autour de n_e engendre une résonance mais cela illustre bien la sensibilité du système

à ce paramètre. Une approche très intéressante consiste à exploiter d'une part, le phénomène de répulsion des fréquences ω_2^* et ω_3^* et d'autre part, la dépendance de ces dernières à ω_0 et donc à n_p . On observe qu'en choisissant $n_p < n_e$ tel que $n_p = 1.48$ la réponse est totalement monotone (courbe rouge) et la fréquence d'excitation ω_e ne coïncide à aucun moment avec les fréquences ω_2^* et ω_3^* . Une telle utilisation du phénomène de "veering" a notamment été proposée par Gozen pour des structures très similaires à l'absorbeur pendulaire centrifuge [104]. Enfin, remarquez que l'antirésonance (AR S.P.) visible sur $|\tilde{\theta}_1|$ correspond en réalité à l'antirésonance de la structure primaire visible également sur les représentations 3D de la figure 6.4.

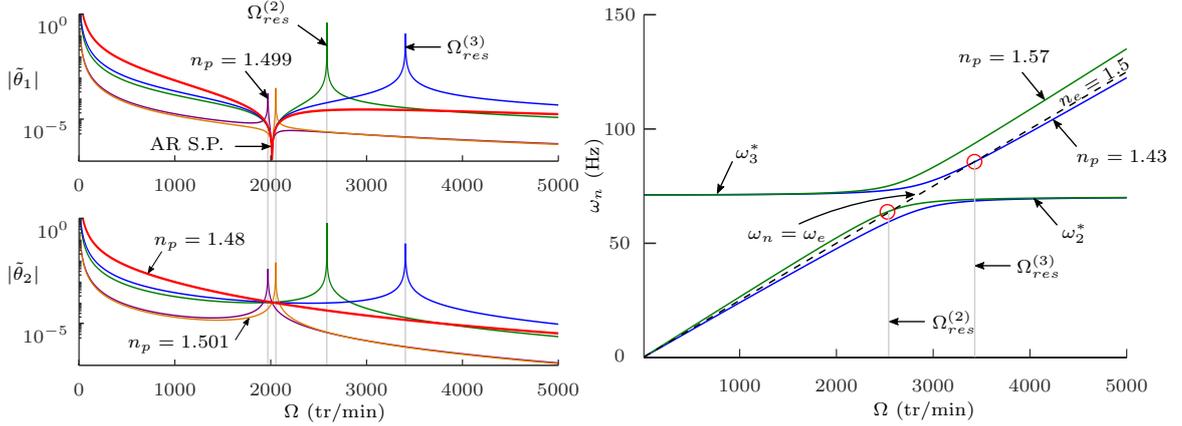


FIGURE 6.6 – Amplitudes des réponses $|\tilde{\theta}_1|$ et $|\tilde{\theta}_2|$ (à gauche) à la fréquence ω_e pour plusieurs valeurs de n_p autour de n_e . Le graphe de droite montre l'évolution des fréquences de résonances ω_2^* et ω_3^* en fonction de n_p . Paramètre : $J_1 = J_2 = 0.1\text{Kg}\cdot\text{m}^2$, $k = 10^4\text{Nm/rad}$, $\mu = 0.05$, $\tilde{T}_0 = 1$ et $n_e = 1.5$.

L'absorbeur pendulaire centrifuge, lorsqu'il est couplé, en l'occurrence ici, à une structure primaire simple, permet des perspectives de performances très intéressantes, que ce soit en exploitant la répulsion des fréquences du système ou en accordant le pendule sur la fréquence d'intérêt d'excitation. Par la suite, on propose d'étendre le cadre de l'étude à l'environnement véhicule et donc de considérer une chaîne cinématique automobile en guise de structure primaire.

6.1.2 Interactions de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique

On considère maintenant la modélisation d'une chaîne cinématique automobile, représentée en figure 6.7. Ce modèle a servi de base de travail pour un développement d'absorbeur pendulaire centrifuge, pendant le projet de thèse, et sera présenté dans la suite de ce chapitre. Nous avons vu au chapitre 2 que la chaîne cinématique d'un véhicule automobile est un assemblage complexe d'éléments mécaniques tout aussi complexes. On propose cependant de la modéliser par une succession d'oscillateurs linéaires couplés. Cela est une hypothèse forte car on ne prend pas en compte les jeux, les frottements, les chocs, etc. Comme cela a été fait précédemment, on modélise la chaîne cinématique libre dans le repère \mathcal{R}_Ω qui tourne à une vitesse constante Ω par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_0 . Les éléments constitutifs du modèle sont énumérés ci-dessous.

Un volant moteur

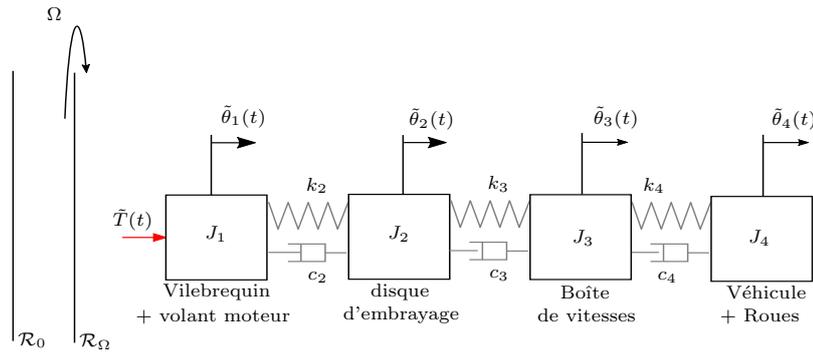


FIGURE 6.7 – Modélisation d’une chaîne cinématique automobile.

Le premier élément de transmission de puissance est le volant moteur (*cf.* section 2.1.2.1). Il s’agit d’un volant composé d’une seule inertie et non d’un double volant amortisseur. Il est fixé par une liaison rigide au vilebrequin du moteur, ces deux éléments ne formant qu’un seul ensemble dont l’inertie totale est représentée par J_1 . La rotation de cette inertie est mesurée dans le repère tournant \mathcal{R}_Ω par $\tilde{\theta}_1$. Le couple oscillant $\tilde{T}(t)$ délivré par le moteur est directement appliqué sur cet ensemble et est de la forme de (4.75). On le réécrit ci-dessous

$$\tilde{T}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T^{ck} \cos k\omega_n t + T^{sk} \sin k\omega_n t. \quad (6.9)$$

À l’instar de ce qui a été fait en section précédente, on considère ω_n comme la fréquence d’excitation du moteur afin d’avoir la liberté de faire varier l’ordre d’excitation n (*cf.* équation (6.1)). On rappelle que, en condition véhicule, la fréquence d’excitation est $\omega_n = \omega_e$ (6.7) et l’ordre d’excitation n_e est une constante dépendant de l’architecture du moteur. Il s’agit ici d’un moteur à quatre cylindres, n_e est donc égal à 2 (*cf.* tableau 2.1, section 2.1.1).

Un disque d’embrayage

Le deuxième élément constitutif est le disque d’embrayage. Comme on s’intéresse particulièrement à la montée en régime du véhicule, l’embrayage est fermé. Le disque est donc en prise d’une part, avec le volant moteur et d’autre part, avec le mécanisme d’embrayage relié à la boîte de vitesses (*cf.* section 2.1.2.3). Le disque d’embrayage est modélisé par une raideur k_2 , qui représente sa raideur en torsion (*cf.* figure 2.13), et une inertie de rotation J_2 . Le système d’embrayage comporte des amortissements, en l’occurrence des frottements secs (*cf.* figure 2.14). On choisit de les modéliser par un amortissement visqueux équivalent de coefficient c_2 . La rotation de J_2 est mesurée par rapport à \mathcal{R}_Ω par $\tilde{\theta}_2$.

Une boîte de vitesse

Juste après le mécanisme d’embrayage on trouve la boîte de vitesses (*cf.* section 2.1.2.4) qui comporte les engrenages nécessaires au passage des rapports. Les raideurs en torsion des engrenages, de l’arbre entrée de boîte jusqu’à l’arbre de sortie (*cf.* figure 2.15), sont modélisées par une unique raideur équivalente k_3 . Il en est de même pour leurs inerties de rotation, modélisées par une unique inertie équivalente J_3 . On considère également un amortissement visqueux de coefficient c_3 en parallèle de la raideur k_3 . Comme les différents étages d’engrenage de la boîte de vitesse ont des raideurs et des inerties différentes, k_3 et

J_3 dépend du rapport de boîte engagé. De plus, comme l'arbre d'entrée de la boîte de vitesses et l'arbre de sortie tournent à des vitesses de rotation différentes, on pondère les grandeurs J_3 , k_3 par l'inverse du carré du rapport de boîte (cf. tableau 6.2) afin d'obtenir une modélisation énergétiquement équivalente, où l'entrée et la sortie de la boîte tournent à la même vitesse de rotation Ω (cf. figure 2.16). Enfin, θ_3 mesure la rotation de J_3 par rapport à \mathcal{R}_Ω . Pour l'étude, on considère les coefficients d'amortissement visqueux du modèle indépendants du rapport engagé. En effet, l'environnement de la chaîne cinématique implique de nombreuses sources de dissipation comme des frottements ou des chocs, que l'on ne modélise pas. C'est pourquoi on s'autorise un recalage des coefficients d'amortissements afin d'affiner les corrélations calculs-essais.

Le véhicule et les roues

Le dernier élément du modèle est une inertie J_4 qui représente l'inertie du véhicule ainsi que celles des roues motrices. On précise que l'inertie de translation du véhicule est transformée en une inertie de rotation équivalente en effectuant le produit de la masse du véhicule par le carré des rayons des roues. La raideur k_4 représente la raideur des arbres de transmissions qui effectuent la liaison entre la boîte de vitesses et les roues (cf. section 2.1.2.5). En parallèle de cette raideur, on introduit un amortisseur visqueux de coefficient c_4 . Là encore, comme cette inertie se trouve en aval de la boîte de vitesse, les grandeurs J_4 et k_4 sont pondérées, mais cette fois par l'inverse du carré du rapport de boîte et du différentiel (cf. section 2.1.2.4). La rotation de J_4 est, quant à elle, mesurée par θ_4 , toujours par rapport au repère \mathcal{R}_Ω .

Les caractéristiques du modèle sont regroupées dans le tableau 6.1. Certaines de ces valeurs

	J_1	J_2	k_2	c_2	J_3	k_3	c_3	J_4	k_4	c_4
Rapport 5	0.237	0.0014	1283	0.5	0.0086	2205	0.25	243	13562	0.25
Rapport 6	=	=	=	=	0.008	1248	=	=	=	=

TABLE 6.1 – Valeurs des caractéristiques du modèle de la figure 6.7. Unités : J_i kgm², k_i Nm/rad, c_i Nms/rad

ont fait l'objet d'un recalage sur la base de mesures de la réponse à la boîte de vitesses, en l'absence de l'APC. Les comparaisons calculs-essais de la chaîne cinématique nue sont présentées en section 6.2. Les principales grandeurs recalées sont les coefficients d'amortissement, dont il est toujours difficile d'obtenir une valeur fiable a priori (en particulier le coefficient c_2 car c'est cet amortissement que l'on a supposé représentatif des frottements secs du système d'embrayage). Les autres grandeurs sont des données fournies par le client.

Dans le cadre de l'étude présentée dans ce chapitre, nous ne nous sommes intéressés qu'aux rapports de boîte 5 et 6. La raison en est que les critères de performances imposés par les constructeurs automobiles, ne concernent que les rapports élevés. Cela s'explique premièrement par les rapports de la boîte de vitesse qui sont inférieurs à 1 pour les hauts rapports (cf. tableau 6.2). Les inerties équivalentes des éléments en aval de la boîte de vitesses en sont donc d'autant plus majorées, ce qui augmente la masse apparente et donc les sollicitations de torsion aux résonances de la chaîne cinématique. La deuxième raison est que l'accélération du véhicule est plus lente en rapports élevés. Cela signifie que les modes de la chaîne cinématique seront excités plus longtemps contrairement aux rapports faibles où le régime moteur évolue très vite. Les valeurs des rapports de réduction 5 et 6 de la boîte de vitesses et du différentiel sont regroupées dans le tableau 6.2. Remarquez que les rapports du différentiel sont constants. Bien que cet organe soit

	Rapport 5	Rapport 6
Rapport de réduction boîte de vitesses	0.743	0.579
Rapport de réduction différentiel	4.188	4.188

TABLE 6.2 – Valeurs des rapports de réduction de la boîte de vitesse et du différentiel.

généralement intégré à la boîte de vitesse, sa fonction est uniquement de permettre aux roues de tourner à des vitesses différentes pour garantir la tenue de route en virage (*cf.* section 2.1.2.4).

On propose en section suivante de s'intéresser de plus près aux modes de la chaîne cinématique.

6.1.2.1 Les modes de la chaîne cinématique

Les fréquences propres d'une chaîne cinématique automobile sont, comme la structure primaire du premier exemple traité dans ce chapitre (*cf.* section 6.1.1), indépendantes du régime moteur Ω . Or, la fréquence d'excitation du moteur ω_e est linéairement dépendante de Ω (*cf.* équation (6.7)). En l'absence d'une solution de filtration de vibrations, les modes de la chaîne cinématiques sont donc excités tour à tour par les harmoniques du couple moteur (6.9), comme illustré en figure 6.8 à gauche. On se place dans la configuration du rapport 5 (*cf.* tableaux 6.1 et 6.2). Le modèle considéré ici comporte 4 modes de fréquences ω_1 , ω_2 , ω_3 et ω_4 . Les déformées modales de chacun de ces modes sont présentées en figure 6.8, à droite.

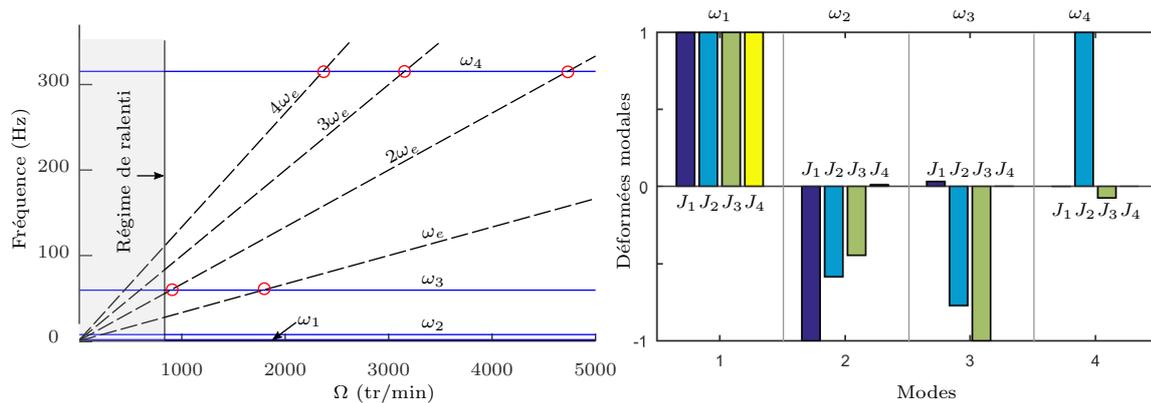


FIGURE 6.8 – Illustration des modes de la chaîne cinématique excités par les harmoniques du couple moteur en rapport 5 (à gauche). Déformées modales associées (à droite).

Les modes présentés ici sont très représentatifs de la plupart des applications automobiles.

Le premier mode de fréquence $\omega_1 = 0$ est le mode de solide rigide, où tous les éléments de la chaîne cinématique sont en phase.

Le deuxième est très caractéristique et quiconque possède une automobile en a déjà ressenti les effets. Il s'agit d'un mode de très basse fréquence, en dessous de 10 Hz, qui correspond à un mouvement d'ensemble des organes de transmission en amont des roues du véhicule. Ce mode est généralement excité lorsque le véhicule commence à rouler et plus particulièrement lors d'une accélération faible et d'un embrayage brutal. Le conducteur ressent alors une sensation de

“balancement” d’avant en arrière. C’est ce mode qui est excité.

Le troisième mode est quasi systématiquement le plus gênant pour les équipementiers et constructeurs automobiles. Sa fréquence propre coïncide avec la fréquence fondamentale du couple moteur en pleine plage utile de régime moteur. Typiquement, entre le régime de ralenti $\Omega \approx 850$ tr/min et $\Omega \approx 2000$ tr/min, là où le couple acyclique est généralement le plus élevé (cf. figure 2.4, section 2.1.1). Ce mode fait travailler les deux raideurs aux extrémités de la chaîne cinématique et se sont l’embrayage et principalement la boîte de vitesse qui répondent. On le dénomme souvent le “mode de boîte”.

Le quatrième et dernier mode de notre modèle est à une fréquence plus élevée, au-delà de 300Hz. Les modes au-delà de cette fréquence impliquent généralement des mouvements très localisés des inerties, comme dans le cas présent où c’est le disque d’embrayage qui répond principalement. On remarque que ce mode est excité lui aussi aux alentours de 2000 tr/min mais par le quatrième harmonique du couple acyclique qui est en général de très faible amplitude (cf. figure 2.4, section 2.1.1).

Pour cette application c’est le mode 3 qui est particulièrement problématique, comme le montre le spectrogramme 6.9 issu d’une mesure expérimentale à la boîte de vitesse. La représentation en ordre plutôt qu’en fréquence est donnée en figure 6.10. C’est le mode 3, le mode de boîte, qui est excité successivement (zones pointillés bleus) par les harmoniques du couple moteur. À l’ordre 4 d’abord, c’est-à-dire par le deuxième harmonique puisque $n_e = 2$, aux alentours de 1000 tr/min, puis à l’ordre 2, c’est-à-dire par le deuxième harmonique vers 1900 tr/min, et enfin à l’ordre 1, au-delà de 3500 tr/min. On rappelle que la composante à l’ordre 1 n’est pas une composante du couple acyclique mais est générée par le balourd dû au mouvement alternatif de l’embielage du moteur dans les cylindres (cf. section 2.1.1). Ceci génère une impulsion par tour, donc à l’ordre 1. On précise que cet essai sur le véhicule a été réalisé en l’absence de l’absorbeur pendulaire

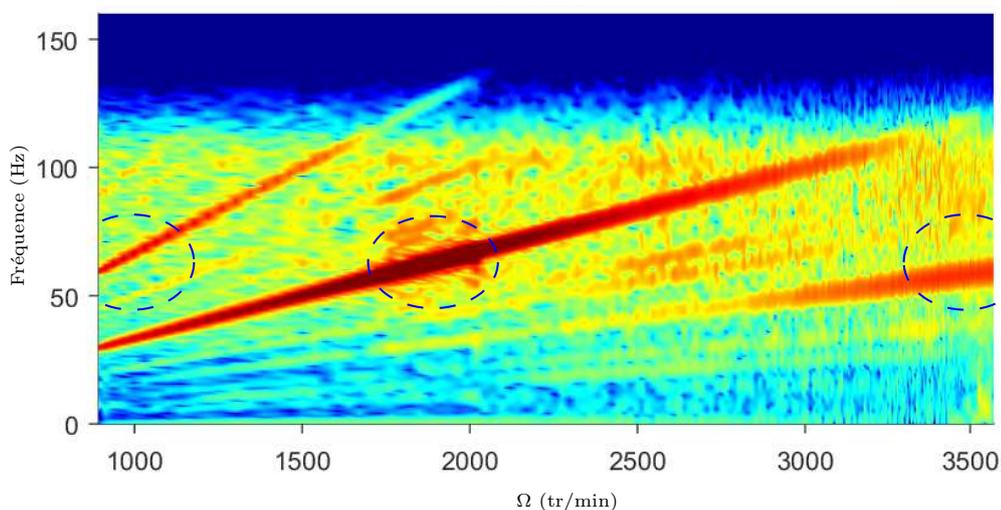


FIGURE 6.9 – Spectrogramme de l’accélération angulaire mesurée sur l’arbre primaire de la boîte de vitesses lors d’une phase de montée en régime en rapport 5. Représentation fréquence - Ω .

centrifuge et selon les spécifications du client : pour un rapport de boîte engagé, l’ingénieur essai “écrase” la pédale des gaz et laisse le véhicule monter en régime. La phase de décélération de

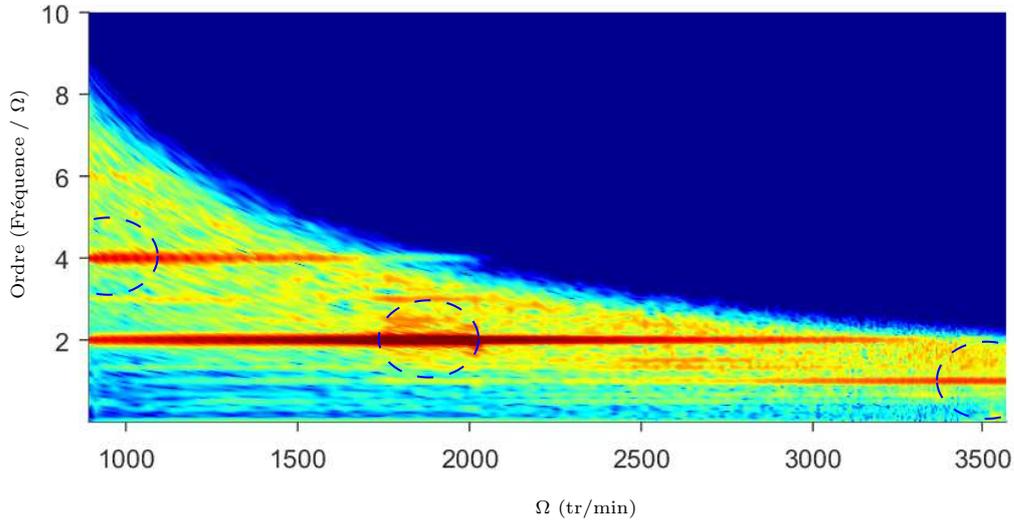


FIGURE 6.10 – Spectrogramme de l'accélération angulaire mesurée sur l'arbre primaire de la boîte de vitesses lors d'une phase de montée en régime en rapport 5. Représentation ordre - Ω .

la chaîne cinématique a peu d'intérêt pour notre étude car le moteur n'est pas en charge et ne délivre donc pas de couple (ou très peu).

Les amplitudes mesurées à la boîte de vitesses aux ordres 1, 2 et 4, notés "O.", pour les rapports 5 et 6, notés "R.", sont données en figure 6.11. Les courbes noires de cette figure représentent l'amplitude des raies aux ordres 1, 2 et 4 des spectrogrammes 6.9 et 6.10. On observe que c'est à la fréquence fondamentale du couple moteur que la réponse à la boîte de vitesse est, de loin, la plus forte. En effet, cette harmonique représente à elle seule une grande majorité des acyclismes moteur. C'est d'ailleurs pour cela que les constructeurs automobiles n'imposent généralement qu'un critère de performance à l'ordre moteur n_e , c'est-à-dire à la fréquence fondamentale ω_e , les amplitudes de réponse à l'ordre double ou moitié étant faibles.

On propose en section suivante d'intégrer un absorbeur pendulaire dans notre modèle de chaîne cinématique afin de proposer une solution de filtration pour palier la situation présentée ci-avant, et ainsi, préserver la boîte de vitesses.

6.1.2.2 Couplage de l'absorbeur pendulaire avec la chaîne cinématique

La chaîne cinématique est maintenant munie d'un absorbeur pendulaire. On rappelle que l'on présente ici un développement réel réalisé dans un contexte industriel et l'étude a dû s'articuler autour de certaines contraintes. La première d'entre elles étant la localisation de l'APC dans la chaîne cinématique. Le seul emplacement disponible est le disque d'embrayage, c'est-à-

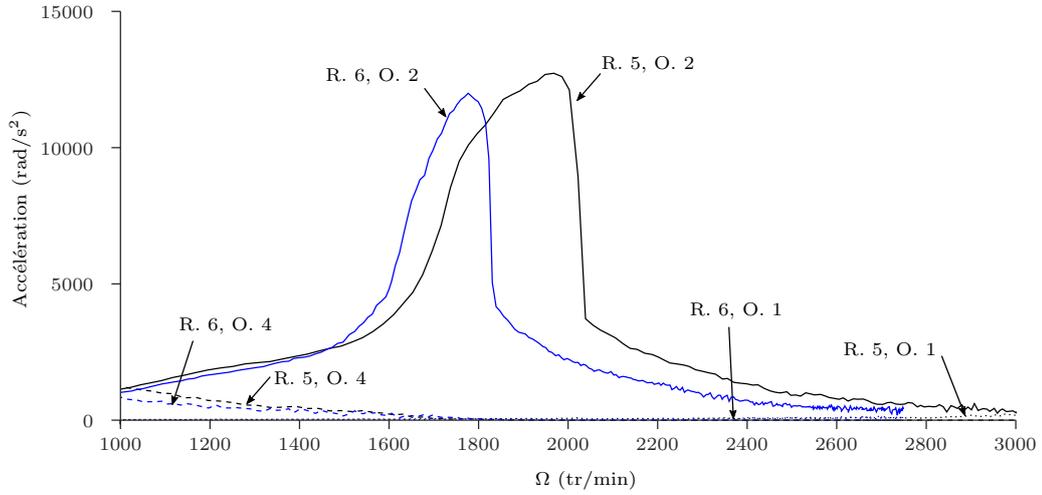


FIGURE 6.11 – Amplitude de l'accélération angulaire mesurée sur l'arbre primaire de la boîte de vitesses aux ordres 1, 2, 4 pour les rapports 5 et 6.

dire l'inertie J_2 du modèle illustré en figure 6.12. De par le faible espace alloué par le système

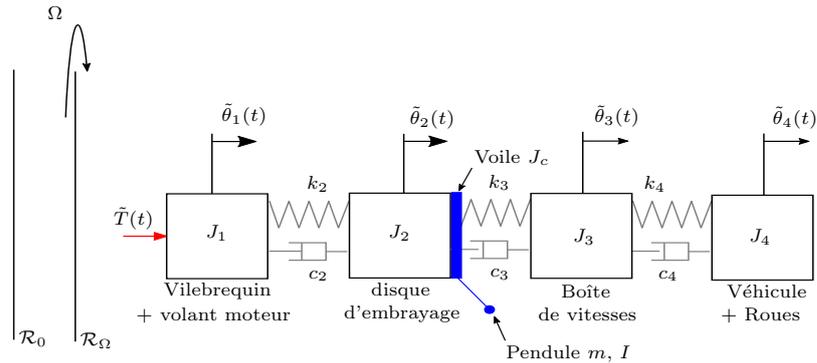


FIGURE 6.12 – Modélisation d'une chaîne cinématique automobile couplée avec un absorbeur pendulaire centrifuge.

d'embrayage, seuls deux pendules sont autorisés avec encore des contraintes supplémentaires de masse et d'inertie. Dans cette étude, on ne considère qu'un seul pendule équivalent dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 6.3. On constate que l'APC est très léger, la masse totale des pendules n'excédant pas 500g. Nous avons déjà rencontré cet absorbeur lors de la corrélation calculs-essais présentée en section 3.5.1. C'est donc sur ces bases posées par le bureau d'étude qu'il nous est demandé, entre autres, d'apporter une solution au mode de la chaîne cinématique excité en figures 6.9, 6.10 et 6.11. Toute la liberté nous est laissée, dans le mesure du réalisable, quant au choix de la trajectoire du centre de masse du pendule et de son mouvement de rotation (*cf.* chapitre 3). Ces points particuliers seront traités en section 6.2, lors de l'étude non linéaire du système. Avant cela, on propose de s'intéresser au comportement linéaire de la chaîne cinématique en présence de l'APC. On considère le système historique de référence, à

	Inertie Voile J_c gm ²	masse kg	Inertie de rotation gm ²	$R_0 + \rho_0$ mm
Valeurs imposées	0.46	0.42	0.412	53.5

TABLE 6.3 – Caractéristiques imposées par le bureau d’étude. Les valeurs de masse et inertie de rotation représentent le total pour 2 pendules.

savoir le pendule translaté épicycloïdal (*cf.* section 2.4.1). On choisit l’épicycloïde car l’étude de différentes trajectoires en section 2.3.2.2 a montré que n’importe quelle courbe est assimilable à une épicycloïde sous l’hypothèse des petits déplacements.

La figure 6.13 (à gauche) montre l’évolution, en fonction de Ω , des fréquences propres de la chaîne cinématique (rapport 5) découplée de l’APC ainsi que la fréquence des petites oscillations libres ω_0 du pendule où l’ordre d’accord n_p a été choisi égal à 2. Lorsque le pendule est couplé à la chaîne cinématique selon la configuration de la figure 6.12, le système comporte 5 modes. Le premier est le mode de corps libre du système à la fréquence ω_1 qui n’est pas affecté par la présence du pendule. En revanche, les fréquences propres des quatre autres modes, ω_2^* , ω_3^* , ω_4^* et ω_5^* dépendent de la vitesse de rotation Ω , comme illustré en figure 6.12, à droite. On voit alors

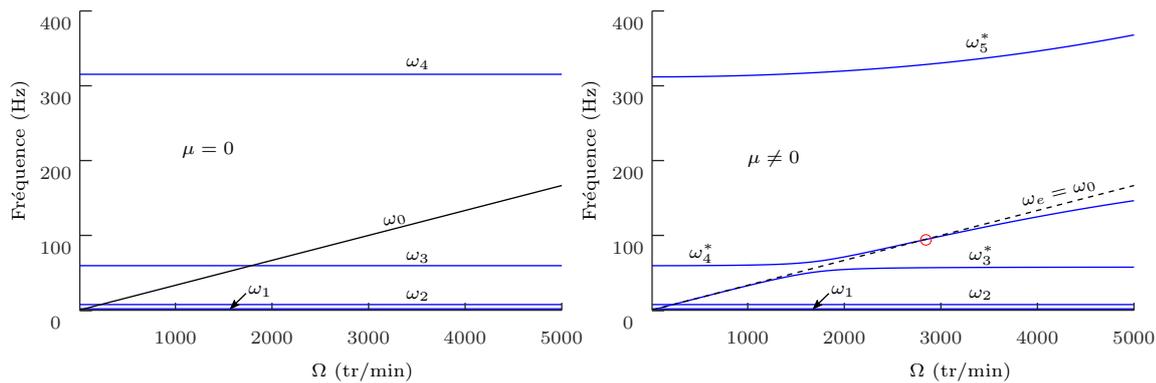


FIGURE 6.13 – Évolution des fréquences propres en fonction de Ω . À gauche : la chaîne cinématique est découplée de l’APC. À droite : la chaîne cinématique accueille un APC sur l’inertie J_2 (disque d’embrayage). Paramètres : $n_p = 2$

apparaître le phénomène de répulsion des fréquences propres du système comme cela a été montré en section 6.1.1, sur l’exemple introductif. On constate quand même une différence essentielle, le mode à la fréquence ω_4^* est repoussé par le mode de fréquence ω_5^* , ce qui en gendre une coïncidence de la fréquence propre ω_4^* et de la fréquence d’excitation du moteur aux alentours de 3000 tr/min (*cf.* cercle rouge, figure 6.13 à droite). La philosophie qui consiste à exploiter le phénomène “veering”, comme cela est présenté en figure 6.6, de sorte que la fréquence moteur ω_e ne coïncide pas avec une résonance du système est donc ici impossible puisque toutes les fréquences se repoussent. Dans ce cas, La meilleure option semble d’accorder le pendule très précisément sur la fréquence d’excitation du moteur afin de travailler au plus près de l’antirésonance du système.

Nous avons vu dans la section précédente que lorsque le pendule est situé à l’endroit où

est appliqué le couple d'excitation alors une antirésonance est commune à tous les degrés de liberté du système et sa fréquence correspond justement à la fréquence des oscillations libres du pendule (*cf.* figure 6.5). Or, dans le cas que l'on considère ici, l'absorbeur pendulaire centrifuge est placé sur la seconde inertie. La figure 6.14 montre, pour différents régimes moteur de 500 à 3000 tr/min, les amplitudes des réponses de tous les degrés de liberté de la chaîne cinématique conservative (suivant les lignes), au voisinage de la fréquence d'accord du pendule. L'abscisse des ces courbes correspond à l'ordre d'excitation n et non à la fréquence car cette dernière dépend de Ω . Les Colonnes de cette figure correspondent à l'inertie de la chaîne cinématique sur laquelle est implanté l'absorbeur. La diagonale correspond à la réponse de l'inertie d'accueil de l'APC et on

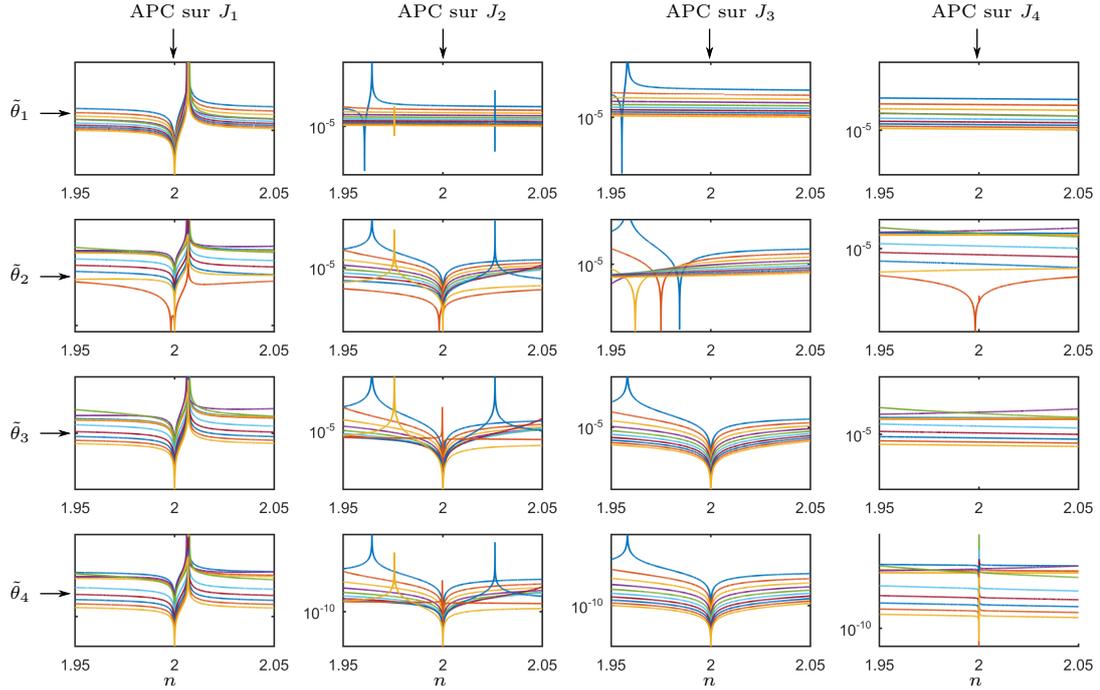


FIGURE 6.14 – Amplitudes des réponses des degrés de liberté de la chaîne cinématique au voisinage de l'ordre d'accord du pendule $n_p = 2$ pour différentes valeurs de Ω de 500 à 5000 tr/min. L'absorbeur pendulaire centrifuge est fixé successivement sur toutes les inerties du modèle. Représentation en ordre d'excitation.

constate bien une antirésonance à l'ordre d'accord du pendule $n_p = 2$. On constate également, bien que nous n'en apportons pas la preuve mathématique, que tous les graphes en dessous de cette diagonale montrent cette même antirésonance et non les graphes du dessus. Cela est intéressant car, comme l'APC est placé sur le disque d'embrayage (inertie J_2), on garantit que la boîte de vitesse (inertie J_3) travaillera sur une antirésonance, d'un point de vue linéaire bien sûr et à condition que le pendule soit correctement accordé sur la fréquence d'excitation (*cf.* équation (6.8)). La caractéristique locale bien connue de l'antirésonance et rappelée au chapitre 5 est bien sûr toujours vraie, mais le système considéré ici est particulier en cela que l'absorbeur est monté en parallèle de la structure primaire et non en série comme c'est le cas habituellement. Dans notre cas, l'antirésonance serait plutôt une caractéristique "pseudo-locale" car elle est commune à tous les degrés de liberté situés en aval de l'absorbeur.

6.1.3 Bilan de l'étude linéaire.

L'étude linéaire a permis de mettre en évidence les principales caractéristiques d'une structure primaire couplée à l'absorbeur pendulaire centrifuge. Sa capacité d'adaptation à la vitesse de rotation de la structure hôte en fait un absorbeur dynamique particulièrement adapté aux applications automobiles, dans l'environnement d'une chaîne cinématique. L'étude du comportement dans diverses configurations a permis de mettre en lumière différents usages possibles de l'absorbeur. On les résume ci dessous.

Suppression d'une résonance par repoussement des modes.

- En présence d'un mode indésirable de la structure primaire dans la plage de fréquence d'intérêt, la fréquence propre ω_0 du mode de pendule peut être choisie volontairement différente de la fréquence d'excitation du moteur ω_e afin d'influencer les fréquences propres de la structure primaire.
- Si la structure primaire ne comporte qu'un seul mode autre que le mode de corps libre, il est alors possible d'éliminer totalement les résonances à la fréquence ω_e (cf. courbe rouge, figure 6.6 à gauche).
- Lorsque la structure primaire comporte plusieurs modes autres que le mode de corps libre, il n'est pas possible d'éliminer totalement les résonances à la fréquence ω_e (cf. figure 6.13, à droite).

Accord du pendule sur la fréquence d'excitation.

- Lorsque le pendule est accordé très précisément sur la fréquence d'excitation ($\omega_0 = \omega_e$) alors la réponse mesurée sur son inertie d'accueil est strictement nulle, dans le cas conservatif (cf. figure 6.5).
- Un faible désaccord du système engendrera une résonance sur la réponse à la fréquence ω_e (cf. figure 6.6 à gauche).

Emplacement de l'absorbeur pendulaire sur la structure primaire.

- Tous les degrés de liberté de la structure primaire partagent une antirésonance commune à la fréquence d'accord du pendule ω_0 lorsque l'absorbeur pendulaire centrifuge est implanté au point d'excitation du système (cf. figure 6.5).
- Lorsque le point d'excitation est situé sur le premier degré de liberté, alors toutes les réponses mesurées en aval de l'absorbeur pendulaire partagent une antirésonance commune à la fréquence d'accord du pendule ω_0 (cf. figure 6.14).

6.2 Étude non linéaire

On s'intéresse maintenant à la réponse à grande amplitude d'oscillation de la chaîne cinématique couplée à l'APC. L'objectif est de proposer une spécification du pendule afin de palier la réponse démesurée de la boîte de vitesse, identifiée en figure 6.11. L'étude se base sur des simulations effectuées à l'aide de la méthode asymptotique numérique couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique (cf. chapitre 4). Les simulations ont été réalisées avec le logiciel DiaManlab (cf. section 4.3). On considère le modèle présenté en section 6.1.2.2 et on évalue l'influence de la trajectoire du pendule ainsi que celle du mouvement de rotation sur la réponse du système. Le couple moteur utilisé pour les simulations est une donnée fournie par le client, et nous ne disposons malheureusement que de l'amplitude de l'harmonique fondamental montrée en figure 6.15. L'expression du couple $\bar{T}(t)$ (cf. équation (6.9)) est donc harmonique et se réécrit :

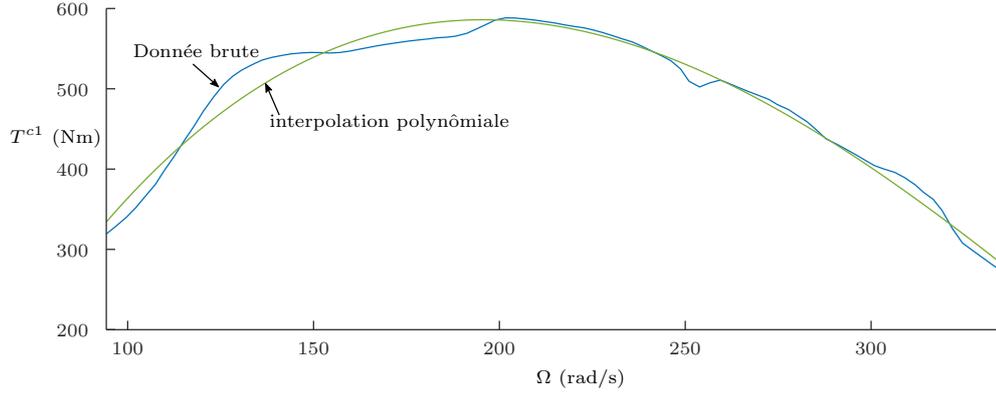


FIGURE 6.15 – Amplitude du couple acyclique moteur en fonction du régime Ω .

$$\tilde{T}(t) = T^{c1} \cos \omega_n t. \quad (6.10)$$

Comme l'amplitude T^{c1} dépend du régime moteur Ω , on propose de l'interpoler, au sens des moindres carrés, par un polynôme que l'on a choisi cubique de la forme :

$$T^{c1} = T_0^{c1} + T_1^{c1} \Omega + T_2^{c1} \Omega^2 + T_3^{c1} \Omega^3. \quad (6.11)$$

Les valeurs des coefficients de (6.11) sont rassemblées dans le tableau 6.4 et la procédure d'implémentation de l'expression (6.11) dans DiaManlab est décrite en section 4.4.1.

	T_0^c	T_1^c	T_2^c	T_3^c
$\Omega \in [94.2 \ 335.1] \text{ rad/s}$ ($\Omega \in [900 \ 3200] \text{ tr/min}$)	-4.85×10^2	12.36	-42.42×10^{-3}	3.69×10^{-5}

TABLE 6.4 – Coefficients du polynôme d'interpolation de l'amplitude du couple moteur

Avant de présenter les différents cas d'étude, on montre en figure 6.16 la corrélation des mesures expérimentales de l'accélération à la boîte de vitesse avec les calculs numériques. Les essais, ainsi que les simulations, sont réalisés sans pendule et pour les rapports 5 et 6. Les courbes de la figure 6.16 représentent l'amplitude de l'accélération à la fréquence fondamentale du moteur $\omega_n = \omega_e$. On rappelle que le moteur du véhicule comporte 4 cylindres, l'ordre d'excitation est donc $n = n_e = 2$. Les caractéristiques du modèle sont celles qui ont été présentées en section précédente, dans le tableau 6.1, et les mesures expérimentales sont celles qui ont été présentées précédemment en figure 6.11. On constate une différence majeure entre la modélisation linéaire adoptée et la structure réelle qui, de toute évidence, est non linéaire. On rappelle que ces mesures illustrent la réponse du troisième mode (*cf.* figure 6.8) de la chaîne cinématique et on constate que sa fréquence dépend de l'amplitude d'oscillation. Les potentielles sources de non linéarités sont nombreuses, cependant, le caractère raidissant que l'on identifie pourrait s'expliquer par des chocs dus à la mise en butée du moyeux du disque d'embrayage qui comporte des éléments de raideur (*cf.* figure 2.13, section 2.1.2.3). Ceci n'est qu'une hypothèse mais qui, selon l'expérience du partenaire industriel, s'est déjà vérifiée par le passé. Les coefficients des amortissements visqueux du modèle numérique ont été recalés de manière à ce que la réponse soit correctement représentée en dessous de 1500 tr/min et au dessus de 2000 tr/min. La corrélation a abouti aux valeurs du tableau 6.1. Pour le rapport 6, la corrélation est discutable en dessous de 1500 tr/min mais il a fallu trouver un compromis pour représenter au mieux les configurations des deux rapports. C'est

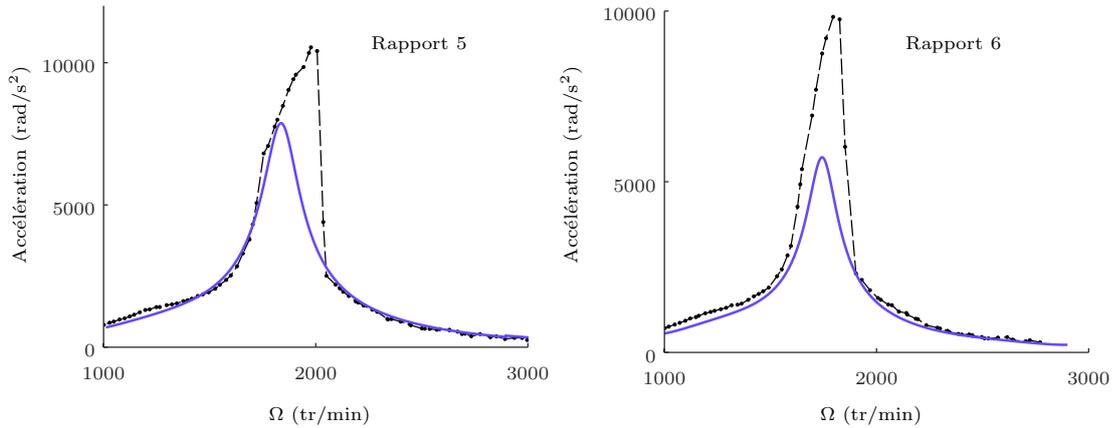


FIGURE 6.16 – Corrélation calculs-essais de la réponse de la boîte de vitesse aux rapports 5 et 6, sans APC. Essais en traits noirs, simulation en traits bleus.

autour de cette base que s’articule l’étude présentée ici. Les différents cas d’étude sont détaillés en section suivante.

6.2.1 Cas d’études

On intéresse en premier lieu au système classique, c’est-à-dire au pendule épicycloïdal translaté qui constitue le système de référence dont nous devons améliorer les performances. On rappelle que l’absorbeur pendulaire est situé sur le disque d’embrayage, c’est-à-dire sur l’inertie J_2 du modèle (cf. figure 6.12). Les spécifications de masse et d’inertie du pendule, imposée par le bureau d’étude, sont répertoriées dans le tableau 6.3. L’étude concerne un absorbeur pendulaire léger et nous disposons justement, au chapitre 3, d’une corrélation calculs-essais de ce type d’APC. On propose d’utiliser la valeur du coefficient d’amortissement visqueux recalée à cette occasion (cf. tableau 3.3). Cette dissipation représente un amortissement entre le pendule et son voile support (cf. section 2.4.1) le long de la trajectoire ; le coefficient d’amortissement visqueux est $C_p = 1.68$ Ns/m.

La figure 6.17 montre l’amplitude de la réponse à la fréquence d’excitation $\omega_n = \omega_e$. On constate qu’entre 1000 tr/min et environ 1500 tr/min, le pendule oscille au-delà des points de rebroussement de l’épicycloïde, ce qui est impossible car elle n’est plus définie (cf. section 2.3.2.2). D’un point de vue numérique, le calcul des solutions dans cette plage de régime n’est pas possible et les pas de la méthode asymptotique numérique sont de plus en plus petits à mesure que l’on s’approche des points extrêmes des trajectoires. D’un point de vue physique, la technologie du système ne permet pas un débattement du pendule jusqu’aux points de rebroussement. Elle est limitée par des butées mécaniques présentes sur le voile support. On parle alors de saturation lorsque le pendule impact ces butées mécaniques. Ceci engendre du bruit dans le compartiment moteur et une usure prématurée de l’absorbeur pendulaire. La saturation du pendule, illustrée en figure 6.17, est très représentative des problèmes rencontrés en phase de développement d’un absorbeur pendulaire et c’est parfois la première préoccupation de conception devant la performance de filtration. Dans notre étude, nous prenons en compte cet aspect et les préconisations finales quant à la trajectoire et à la rotation du pendule, devront garantir une performance de filtration ainsi que la non saturation.

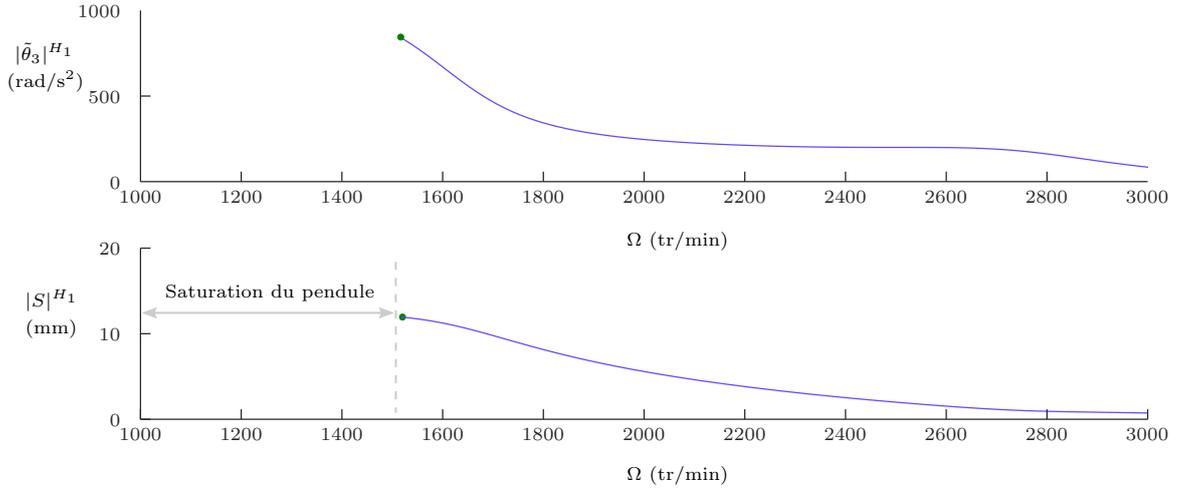


FIGURE 6.17 – Amplitude du premier harmonique des oscillations de $\tilde{\theta}_3$ (en haut) et de S (en bas) à la fréquence d'excitation du moteur ω_e . Pendule épicycloïdal translaté.

Afin d'améliorer la performance du système de référence, on considère que la trajectoire est de forme quelconque. De plus, on autorise une mobilité de rotation du pendule autour de son centre de masse, d'un angle α . C'est donc un APC de nouvelle génération, dont l'étude est présentée au chapitre 3. On considère les expressions de la trajectoire x (cf. section 2.3.2.2) et de l'angle de rotation du pendule sous une forme polynomiale. On propose de travailler avec des expressions adimensionnées, pour des raisons de facilité d'écriture. L'expression de la trajectoire en fonction du déplacement sans dimension s , s'écrit sous la forme suivante :

$$x(s) = 1 - n_p^2 s^2 + x_4 s^4. \quad (6.12)$$

Où x_4 est une constante et s le déplacement sans dimension du pendule, tel que :

$$s = \frac{S}{R_0 + \rho_0}. \quad (6.13)$$

L'expression de la trajectoire épicycloïdale correspond à l'équation (6.12) évaluée pour $x_4 = 0$. On considère donc, dans cette étude, que la trajectoire est une épicycloïde perturbée (cf. section 2.3.2.2) par le terme $x_4 s^4$. De plus, la fonction $x(s)$ est une expression paire afin de préserver la symétrie de la trajectoire, ce qui facilite la réalisation d'une maquette physique. L'angle de rotation du pendule $\alpha(s)$ s'écrit quant à lui,

$$\alpha(s) = \alpha_1 + \alpha_3 s^3. \quad (6.14)$$

Il est représenté par une fonction impaire, cette fois afin de préserver la symétrie des pistes de roulement des rouleaux de guidage du pendule (cf. chapitre 7).

Pour l'étude menée ici, on propose de réutiliser les critères de dimensionnements établis au chapitre 3 (cf. section 3.4.2). Ces critères donnent des préconisations sur les valeurs x_4 , α_1 et α_3 . Ils permettent une amélioration significative des performances de l'APC, lorsqu'il est découplé d'une structure primaire (cf. section 3.4.3). C'est donc l'occasion d'apprécier leur pertinence sur la

performance de l'APC en interaction avec la chaîne cinématique. Les critères de dimensionnement sont réécrits ci-dessous :

$$x_4 = \frac{\mu n_e^4 (1 + \eta \alpha_1^2)^3}{3(1 + \mu)(1 + \eta \alpha_1^2) - 4\mu(1 + \eta \alpha_1)^2}, \quad (6.15)$$

$$\alpha_1 = 1, \quad (6.16)$$

et

$$\alpha_3 = \frac{\mu n_e^2 (1 + \eta \alpha_1^2)^3}{2\eta \alpha_1 (3(1 + \mu)(1 + \eta \alpha_1^2) - 4\mu(1 + \eta \alpha_1)^2)}. \quad (6.17)$$

Les paramètres μ et η s'écrivent :

$$\mu = \frac{m(R_0 + \rho_0)^2}{J_2 + J_c + I} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{I_p}{m(R_0 + \rho_0)^2}. \quad (6.18)$$

Dès lors, plusieurs configurations sont possibles. On peut choisir de ne pas perturber l'épicycloïde *i.e.* $x_4 = 0$ et adopter un taux de rotation du pendule constant *i.e.* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$ ou non *i.e.* $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$. On peut également perturber l'épicycloïde *i.e.* $x_4 \neq 0$ et imposer au pendule le mouvement de rotation souhaité *i.e.* $\alpha(s) \neq 0$. Où encore, conserver le mouvement translaté de l'APC traditionnel *i.e.* $\alpha(s) = 0$, tout en perturbant l'épicycloïde. Il a été montré lors de l'étude des performances, en section 3.4.3, que cette dernière configuration engendre une amplification importante de l'oscillation du pendule (*cf.* figure 3.18). Comme le système de référence montre déjà des problèmes de saturation, on ne considérera pas cette dernière possibilité. On s'intéresse aux trois cas suivants :

Cas 1

Il s'agit de l'APC à trajectoire épicycloïdale ($x_4 = 0$) pour lequel l'angle de rotation du pendule équivalent est une fonction linéaire de l'abscisse curviligne s . C'est-à-dire : $\alpha(s) = \alpha_1 s$. On considérera α_1 régi par l'équation (6.16).

Cas 2

C'est encore un APC à trajectoire épicycloïdale ($x_4 = 0$) mais cette fois l'angle de rotation du pendule est régi par $\alpha(s) = \alpha_1 s + \alpha_3 s^3$ où α_3 est issu de l'équation (6.17) évaluée pour $\alpha_1 = 1$.

Cas 3

Ce dernier cas est un APC où l'épicycloïde est perturbée selon l'équation (6.15) évaluée pour $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_3 = 0$.

Les performances des différents cas présentés ci-dessus seront comparées au système de référence, à savoir l'APC épicycloïdal translaté (*cf.* figure 6.17). Les valeurs des différents paramètres sont regroupées dans le tableau 6.5.

Pour finir, on considère que l'ordre d'accord du pend n_p est régi par

$$n_p = n_e \sqrt{1 + \eta \alpha_1^2}. \quad (6.19)$$

De cette façon, on s'assure que la fréquence d'antirésonance du système linéaire conservatif coïncide exactement avec la fréquence d'excitation du moteur, quel que soit α_1 (*cf.* section 3.3.1, chapitre 3).

	Référence	Cas 1	Cas 2	Cas 3
x_4	0	0	0	7.23
α_1	0	1	1	1
α_3	0	0	2.635	0

TABLE 6.5 – Tableau récapitulatif des 3 cas étudiés, plus le cas de référence. Paramètres : $n_e = 2$, $\mu = 0.529$, $\eta = 0.343$.

6.2.2 Résultats numériques

On présente maintenant les résultats des simulations réalisées en rapport 5, pour les différents cas résumés dans le tableau 6.5. La figure 6.18 montre les amplitudes $|\tilde{\theta}_3|^{H1}$ et $|S|^{H1}$ en fonction de Ω , sur la colonne de gauche, et les performances associées par rapport au cas de référence, en colonne de droite. Toutes les courbes de la colonne de gauche sont tracées jusqu'à la satu-

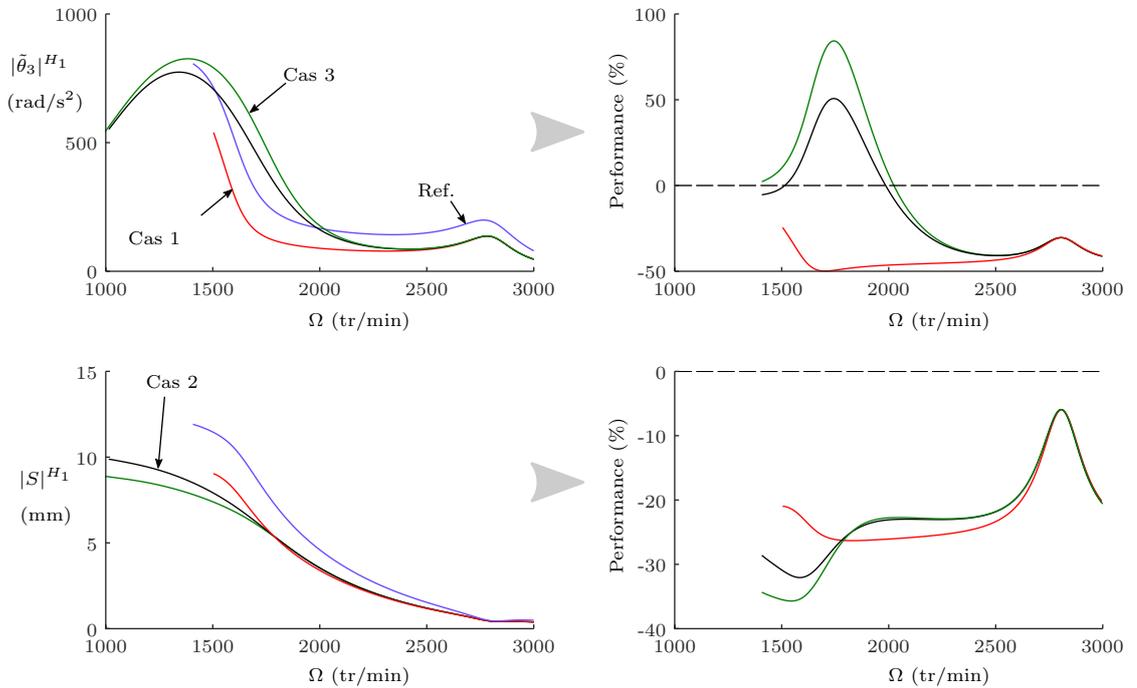


FIGURE 6.18 – En haut : Amplitude $|\tilde{\theta}_3|^{H1}$ en fonction de Ω (à gauche) pour les 4 cas du tableau 6.5, Performance des cas 1, 2 et 3 par rapport au cas de référence (à droite). En bas : Amplitude $|S|^{H1}$ en fonction de Ω (à gauche) pour les 4 cas du tableau 6.5, Performance des cas 1, 2 et 3 par rapport au cas de référence (à droite). Simulation réalisée avec 15 harmoniques retenues dans la solution.

ration du pendule. On constate que le cas 1, qui n'implique qu'une simple rotation linéaire du pendule, est de loin le plus performant sur les oscillations de la réponse de la boîte de vitesse. En réalité, plusieurs lectures sont possibles. Certes, cette configuration engendre une diminution de l'amplitude $|\tilde{\theta}_3|^{H1}$ de près de 50%, et d'environ 20% sur $|S|^{H1}$, mais la saturation se produit au-delà de 1500 tr/min. Cela est pire que le cas de référence et remet en perspective le niveau

de performance affiché. On remarque que pour des régimes de fonctionnements d'environ 3000 tr/min, les performances des cas 1, 2 et 3 sont identiques. En effet, pour de telles vitesses de rotation, le couple acyclique est relativement bas (*cf.* figure 6.10). De plus, le pendule est fortement centrifugé et son amplitude d'oscillation est faible. Dans ces conditions, les coefficients non linéaires x_4 et α_3 sont négligeables. La performance lue à 3000 tr/min est en réalité celle de l'unique contribution du paramètre α_1 . Cela corrobore les observations réalisées au chapitre 3, quant au bénéfice d'exploiter l'inertie de rotation du pendule, via son mouvement de rotation.

Les cas 2 et 3 sont plus élaborés que le premier. Ils permettent tous les deux d'éviter la saturation du pendule et offrent une diminution appréciable de son amplitude d'oscillation. Cependant, l'amplitude des oscillations à la boîte de vitesse est fortement majorée, et les performances sont très inégales en fonction de Ω . Là encore, cela est à relativiser car $|\tilde{\theta}_3|^{H_1}$ ne dépasse pas les 1000 rad/s². La prédiction du modèle sans pendule dépasse quant à elle les 7000 rad/s² (*cf.* figure 6.16). Il semble que ces premiers résultats montrent que le cas numéro 2 est le meilleur compromis pour cette application. L'amplitude d'oscillations du pendule reste inférieure à 10mm, ce qui est tout à fait compatible avec la réalisation d'une maquette physique. De plus, l'amplitude $|\tilde{\theta}_3|^{H_1}$, à son maximum, c'est-à-dire vers 1300 tr/min, reste inférieure à celle du cas de référence.

Il a été montré au chapitre 3 que les critères de dimensionnement (6.15), (6.16) et (6.17) permettent une réduction du désaccord intrinsèque de l'APC. On propose de regarder, dans le cas présent, l'évolution du minimum de la réponse de la boîte de vitesses. La figure (6.19) montre donc l'ordre d'accord effectif, vue de la boîte de vitesse, c'est-à-dire l'ordre auquel $|\tilde{\theta}_3|^{H_1}$ est minimum en fonction de Ω . Ces courbes sont obtenues par la méthode de continuation numérique d'an-

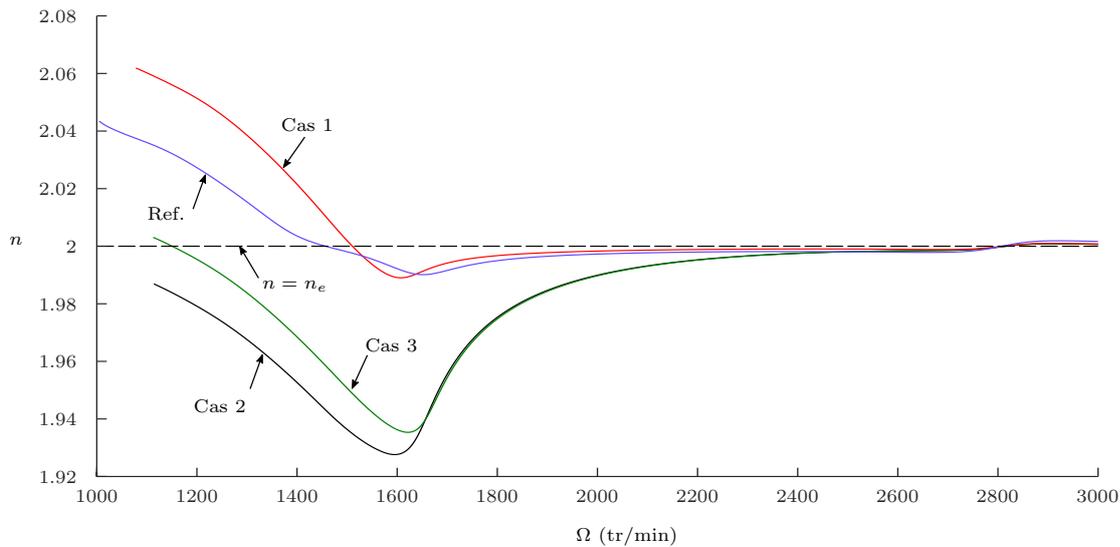


FIGURE 6.19 – Lieu du minimum de $|\tilde{\theta}_3|^{H_1}$ en fonction de Ω pour les 4 cas du tableau 6.5. Simulation réalisée avec 15 harmoniques retenues dans la solution.

tirésouance présentée au chapitre 5. On constate que c'est le cas de référence, l'APC épicycloïdal translaté, qui est le mieux accordé par rapport à l'ordre d'excitation moteur $n_e = 2$. Cela montre que les critères utilisés ne sont pas vraiment transposables dans le cas où l'APC est couplé à une structure primaire, bien qu'ils permettent une diminution de l'amplitude réponse. En réalité, la comparaison avec l'étude menée au chapitre 3 est même impossible car, ici, l'amplitude du couple d'excitation varie avec la vitesse de rotation (*cf.* figure 6.15). Cela illustre une autre difficulté du

développement de l'absorbeur pendulaire en condition véhicule car, d'une application à l'autre, l'évolution du couple moteur en fonction de Ω est différente, ce qui complique l'établissement de règles générales de conception.

On remarque que les cas 2 et 3 provoquent un sous accord du système sur quasiment toute la plage de régime, et ce sont précisément ceux qui permettent d'éviter la saturation du pendule. On observe également que le cas de référence et le cas 1 sont accordés sur l'ordre d'excitation moteur aux alentours de 1500 tr/min, ce qui correspond également au régime moteur pour lequel la saturation du pendule se produit (cf. figure 6.18). L'évolution du minimum de $|\tilde{\theta}_3|^{H1}$ est donc directement liée aux performances des différents cas d'étude. Ceci paraît logique car l'étude linéaire montre que la répulsion des modes 3 et 4 se situe justement dans cette plage de régime, vers 1500 tr/min (cf. figure 6.13). La variation de la fréquence d'antirésonance influe donc directement sur la proximité des résonances du système à la fréquence d'excitation $\omega_n = \omega_e$.

La figure 6.20 montre une visualisation de la topographie de la réponse au voisinage de l'ordre d'excitation $n = n_e$, pour le cas 2. Les deux graphes du haut montrent une vue en 3 dimensions de l'amplitude $|\tilde{\theta}_3|^{H1}$, à gauche, et $|S|^{H1}$, à droite. Le graphe du bas montre une vue de la réponse projetée dans le plan $|S|^{H1} = 0$. Ces graphes ont été construits en balayant le régime

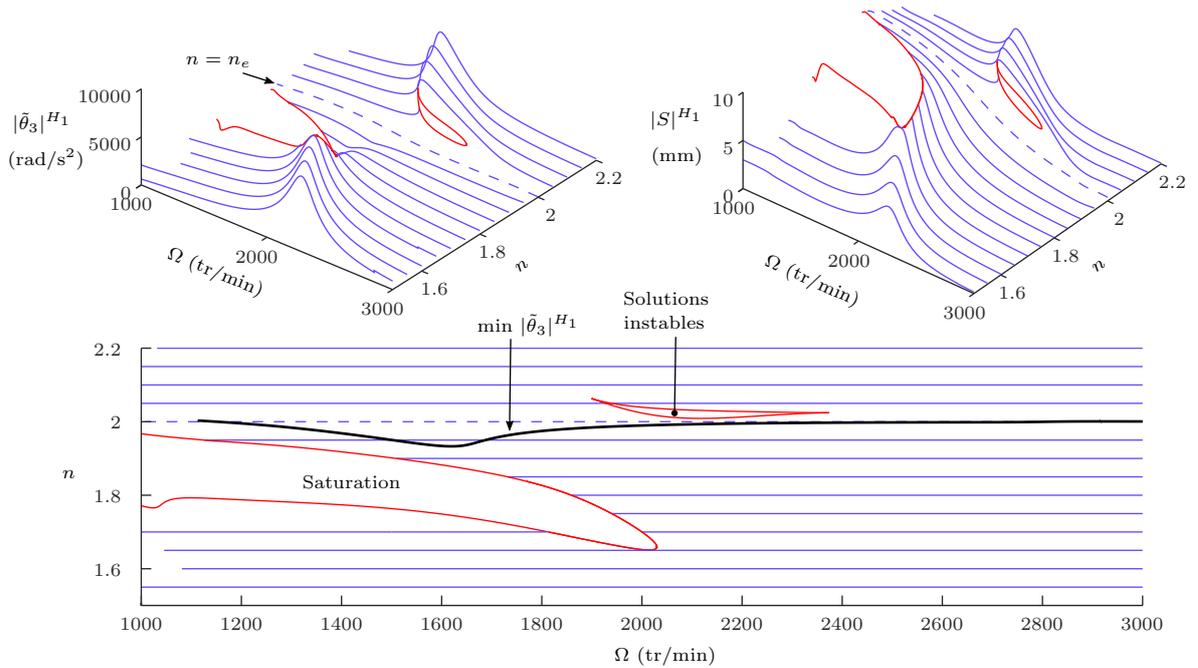


FIGURE 6.20 – Topographie au voisinage de $n = n_e$ pour le cas 2 du tableau 6.5. Simulation réalisée avec 15 harmoniques retenues dans la solution.

moteur pour différents ordres $n \neq n_e$, et nous avons considéré l'amplitude du couple acyclique, montré en figure 6.15, pour chacune de ces simulations. On identifie clairement deux modes de part et d'autre de la réponse à l'ordre d'excitation $n_e = 2$, qui est représentée par une courbe pointillée. On observe deux zones particulières. La première est un isola de solutions instables

résultant d'un mode non linéaire entre 2000 et 2300 tr/min. On précise que la stabilité de ces solutions n'a pas été calculée, seule la continuation de la bifurcation nœud-col a été effectuée par la méthode de suivi des points limites présentée au chapitre 5. On constate que cet isola de solutions instables est particulièrement proche de la réponse à l'ordre d'excitation $n = n_e$. Cela montre qu'un désaccord non maîtrisé, plus particulièrement un sous-accord dû aux imperfections de fabrication par exemple, peut potentiellement être très dommageable sur la réponse à l'ordre moteur. Pour palier cela, on peut envisager de sur-accorder volontairement l'absorbeur, par exemple en augmentant l'ordre d'accord linéaire n_p . Cependant, on observe qu'un deuxième isola est présent pour des régimes inférieurs à 2000 tr/min et pour des ordres d'excitation inférieurs à n_e . La frontière de cet isola représente le lieu de la saturation du pendule. Il a été remarqué que, lorsque l'amplitude d'oscillation du pendule atteint le point de rebroussement de la trajectoire, la tangente à la branche de solution, calculée par la méthode asymptotique numérique, change de signe. Cela produit un point limite au voisinage de la saturation du pendule. C'est donc avec la méthode de suivi des points limites que la limite de saturation du pendule a été calculée. Il apparaît qu'entre 1200 et 1600 tr/min, la limite de saturation du pendule semble repoussée par la courbe noire, qui est le calcul du minimum de $|\tilde{\theta}_3|^{H_1}$ (cas 2). Le sous-accord du système, en dessous des 2000 tr/min, est donc bénéfique car il permet au pendule de ne pas saturer. Ceci montre qu'il est parfois plus judicieux d'exploiter le désaccord de l'APC plutôt que de le combattre, comme cela a été fait au chapitre 3. Dans le cas présenté en figure 6.20, il serait préférable de sous-accorder l'absorbeur à bas régime et de le sur-accorder à partir de 2000 tr/min par exemple. C'est cette philosophie qui est mise en pratique pour le développement de l'absorbeur. En exploitant les paramètres x_4 , α_1 et α_3 , il est possible d'influencer l'antirésonance du système autour de la fréquence d'excitation du moteur. Cela est facilité d'une part, par l'utilisation de la continuation numérique qui permet un calcul du paysage dynamique, d'autre part, par la méthode de suivi de minimum qui est une aide précieuse pour prédire rapidement l'évolution de la fréquence d'antirésonance en fonction du régime Ω .

6.2.3 Corrélation calculs-essais

Pour l'application que l'on considère ici, c'est la configuration numéro 2 qui a été choisie (cf. tableau 6.5). Cependant, nous avons été confronté à un problème qui n'a pas été anticipé et qui résulte directement des contraintes d'encombrement de la chaîne cinématique. On rappelle que l'APC est fixé sur le disque d'embrayage. La rotation du pendule, c'est-à-dire l'angle α , est trop importante et engendre une collision avec le carter du système d'embrayage. Cela est illustré en figure 6.21. Dans cette situation, il est nécessaire de réduire la taille du pendule, ce qui modifie

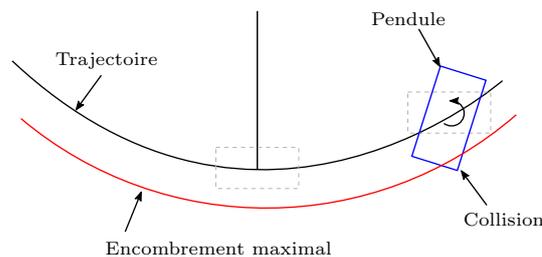


FIGURE 6.21 – Illustration de la problématique engendrée par la rotation du pendule.

sa masse, son inertie de rotation, la position du centre de gravité, etc. Cet effet est vicieux car en réduisant l'inertie de rotation du pendule, le mouvement de rotation doit être amplifié, pour une performance égale, ce qui engendre à nouveau des problèmes de collision. Nous avons donc choisi

de diminuer la valeur du paramètre α_1 à 0.7, au lieu de 1, et le paramètre α_3 a été conservé à 2.635. C'est cet APC qui a été présenté lors de l'étude expérimentale sur banc d'essais, en section 3.5.1.

La figure 6.22 montre une première comparaison entre les mesures réalisées sur le véhicule, en rapports 5 et 6, et la prédiction numérique. On constate que, qualitativement parlant, l'allure

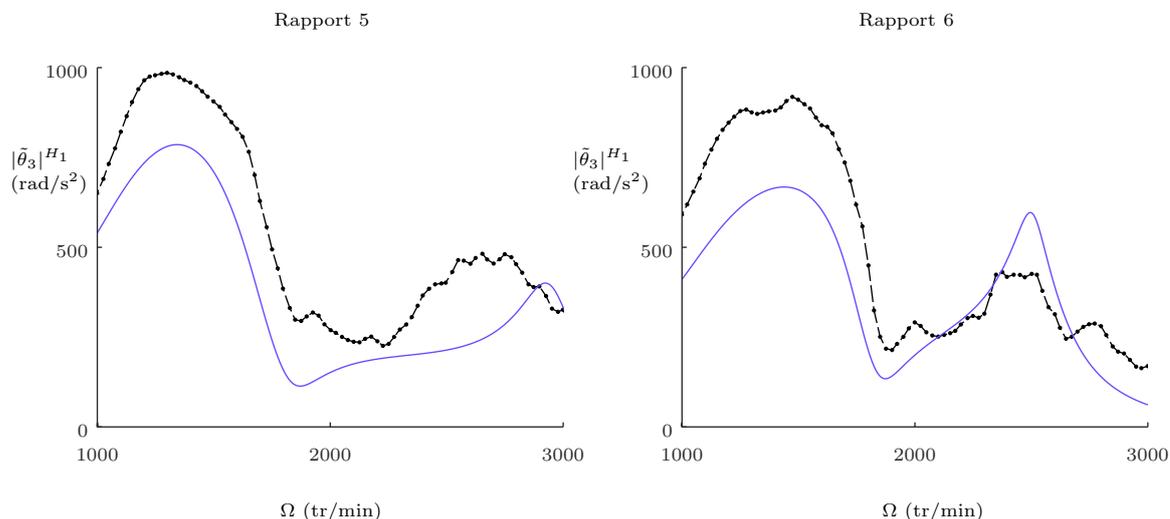


FIGURE 6.22 – Corrélations calculs-essais sur la réponse à la boîte de vitesse en rapport 5 (à gauche) et 6 (à droite). Coefficients d'amortissement visqueux initiaux.

de la réponse simulée est plutôt cohérente avec la mesure. D'un point de vue quantitatif, cela est moins convaincant. Intéressons nous d'abord au rapport 5. On observe que l'amplitude de la réponse simulée est sous estimée par rapport à la mesure. De plus, le mode de chaîne cinématique identifié sur la courbe de mesure aux alentours de 2600 tr/min est prédit par la simulation pour un régime moteur proche de 3000 tr/min . Cela est surprenant car la corrélation de la chaîne cinématique nue (sans APC) est plutôt bonne (*cf.* figure 6.16), mis à part les effets non linéaires bien sûr. L'hypothèse d'un biais dans les caractéristiques de la chaîne cinématique (*cf.* tableaux 6.1 et 6.2) fournies par le client est peu probable. De plus, l'absorbeur pendulaire a été validé lors d'une corrélation calcul-essais au chapitre 3. Dans le cas du rapport 6, en revanche, on identifie bien un mode à 2500 tr/min , que ce soit sur la réponse simulée ou calculée. L'hypothèse avancée, pour expliquer la différence constatée en rapport 5, concerne les pneumatiques du véhicule. En effet, pour un régime moteur donné, les roues motrices tournent moins vite en rapport 5 qu'en rapport 6. On peut donc penser que, sous l'effet centrifuge, la raideur équivalente en torsion des pneumatiques augmente avec la vitesse de rotation des roues, ce qui affecte les fréquences propres de la chaîne cinématique. Dans notre modèle, les roues du véhicule sont considérées rigides.

Afin d'améliorer la corrélation, les coefficients d'amortissement du modèle ont été recalés. Plus particulièrement les coefficients c_2 et c_3 , qui sont respectivement les coefficients d'amortissement visqueux équivalents du système d'embrayage et de la boîte de vitesse. Ils sont regroupés dans le tableau 6.6.

Les résultats de corrélation avec ces nouvelles valeurs sont montrés en figure 6.23. On voit que les amplitudes des réponses simulées sont plus cohérentes avec les mesures. Pour le rapport 5, la prédiction numérique est toujours discutable. Pour le rapport 6, en revanche, la prédiction

	c_2	c_3
Valeurs initiales	0.5	0.25
Valeurs recalées Rapport 5	3.5	0.5
Valeurs recalées Rapport 6	3.5	2.5

TABLE 6.6 – Coefficients d’amortissement visqueux recalés.

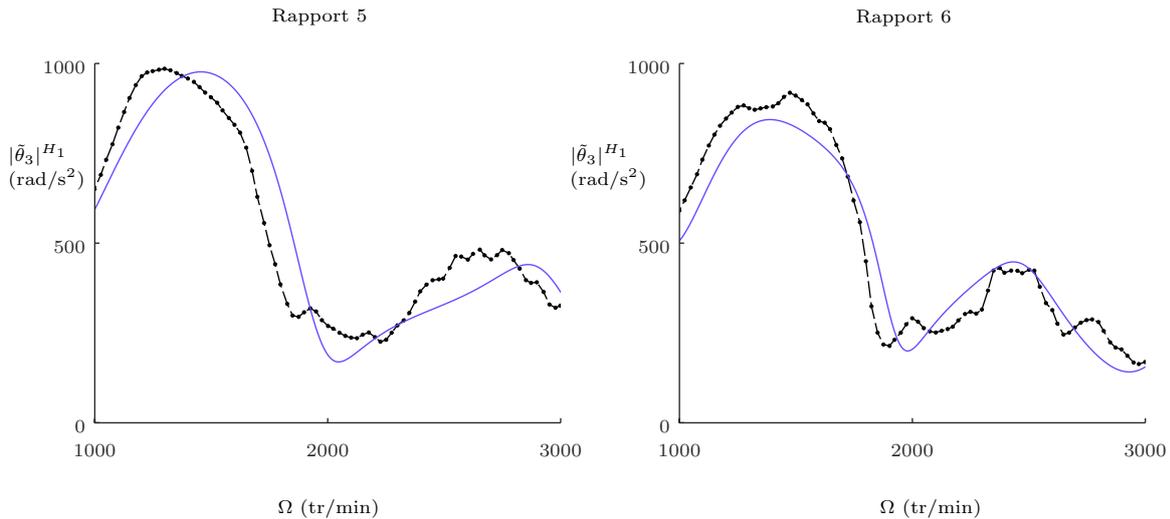


FIGURE 6.23 – Correlations calculs-essais sur la réponse à la boîte de vitesse en rapport 5 (à gauche) et 6 (à droite). Coefficients d’amortissement visqueux recalés.

est plutôt bonne. Cependant, les coefficients d’amortissement c_2 et c_3 ont dû être augmentés, plus particulièrement c_2 , qui a été multiplié par 7 par rapport à l’estimation initiale. Avec un peu de recul, les résultats obtenus sont plutôt satisfaisants au regard de la modélisation adoptée. Le couple d’excitation est interpolé par un polynôme qui ne restitue pas fidèlement l’amplitude des acyclismes en dessous de 2000 tr/min (*cf.* figure 6.10). Le modèle de chaîne cinématique n’est composé que de quatre oscillateurs linéaires, ce qui est un pari risqué. De plus, les mesures sont réalisées lors d’une accélération du véhicule, avec tous les phénomènes transitoires que cela implique. Or, la méthode de l’équilibrage harmonique ne permet que l’étude du régime permanent. Cela montre que l’approche numérique utilisée constitue un bon support des méthodes de simulation temporelle du partenaire industriel, et est tout à fait intégrable au sein d’une phase de développement produit.

6.2.4 Bilan de l’étude non linéaire.

L’étude non linéaire a montré toute la pertinence de la mobilité de rotation du pendule sur les capacités de l’absorbeur dans la chaîne cinématique. Cela permet une diminution de l’amplitude d’oscillation du pendule. Cependant, la performance de filtration peut être dégradée localement (*cf.* figure 6.18). En configuration véhicule, il est judicieux d’exploiter le désaccord du pendule plutôt que de le combattre. Plus particulièrement, un sous-accord à grande amplitude d’oscil-

lation, pour des régimes inférieurs à 2000 tr/min, permet d'éviter le phénomène de saturation. Cela peut être réalisé en enrichissant l'expression $x(s)$ de la trajectoire épicycloïdale (*cf.* équation (6.12)), ou bien en adoptant une représentation non linéaire de l'angle de rotation du pendule $\alpha(s)$ (*cf.* équation (6.14)).

L'utilisation d'une méthode de continuation numérique, constitue une aide précieuse pour les développements du partenaire industriel. Cela permet un calcul rapide des solutions et une plus grande réactivité pendant la phase d'étude. La méthode de continuation d'antirésonance permet une prédiction directe de l'accord de l'absorbeur à grande amplitude d'oscillation et permet d'évaluer rapidement l'impact des coefficients non linéaires x_4 , α_1 et α_3 . En pratique, la détermination de ces coefficients se fait de manière itérative, dans l'objectif de contrôler l'accord effectif du pendule et ainsi diminuer l'amplitude de réponse de la chaîne cinématique. Un aspect important n'a pas été considéré dans cette étude, à savoir la stabilité de la solution. Il a été montré qu'au voisinage de l'antirésonance, la réponse de l'APC translaté faiblement amorti peut devenir instable [105], justement en perturbant l'épicycloïde comme cela a été fait. En pratique, les développements réalisés pendant la thèse, par exemple celui présenté en section précédente, font systématiquement l'objet d'une validation à l'aide d'une simulation temporelle.

Enfin, les corrélations des mesures effectuées sur le véhicule avec une modélisation linéaire de la chaîne cinématique, tendent à montrer que les non linéarités de la structure réelle ne sont peut-être pas si importantes, au moins lors de la phase d'accélération du véhicule. Par exemple, les jeux de fonctionnement sont tous fermés afin de permettre la transmission du couple. L'embrayage est également fermé pour la même raison. Cette condition est donc très favorable.

Chapitre 7

Conception de l'absorbeur pendulaire

Les nouvelles géométries proposées dans les chapitres 3 et 6 nécessitent une remise en question de l'étape de conception de l'absorbeur pendulaire. Plus particulièrement, du dessin des pistes de roulement des rouleaux, qui imposent la trajectoire du pendule par rapport au voile support. En effet, la procédure actuelle consiste à itérer manuellement sur les géométries fonctionnelles du système, à l'aide d'un outil de conception assisté par ordinateur. Cette méthode présente l'inconvénient majeur d'introduire un biais dès la phase de création des plans de définitions du produit. S'ajoute à cela la lenteur de la procédure ainsi que l'impossibilité à dessiner des architectures originales.

Ce chapitre vise à proposer une approche numérique pour palier la faible robustesse de la phase de conception. Dans un premier temps, les lacunes identifiées sont exposées. Dans un deuxième temps, une étude cinématique est menée et permet la mise en équation du problème. La résolution numérique du système d'équations non linéaires permet un calcul précis et rapide des géométries fonctionnelles quelle que soit l'architecture du système. L'étape de conception de l'absorbeur pendulaire s'en trouve optimisée et permet une grande réactivité pendant la phase de développement.

Sommaire

7.1	Expression du besoin	196
7.2	Modélisation	198
7.3	Équations vectorielles	200
7.4	Équations scalaires	202
7.5	Résultats	204
7.6	Bilan	205

7.1 Expression du besoin

L'absorbeur pendulaire est composé d'un voile support et de plusieurs pendules. Le mouvement d'un pendule est guidé par deux rouleaux roulant sur des pistes de roulement usinées dans le voile, \mathcal{C}_{01} et \mathcal{C}_{02} , et dans les entretoises, \mathcal{C}_{P1} et \mathcal{C}_{P2} , qui appartiennent au pendule. La figure 7.1 montre une photographie de la technologie historique du système. La trajectoire du pendule par rapport au voile est donc une résultante de la forme particulière donnée aux pistes de roulement. Un schéma de principe du système est donné en figure 7.2. La technologie historique

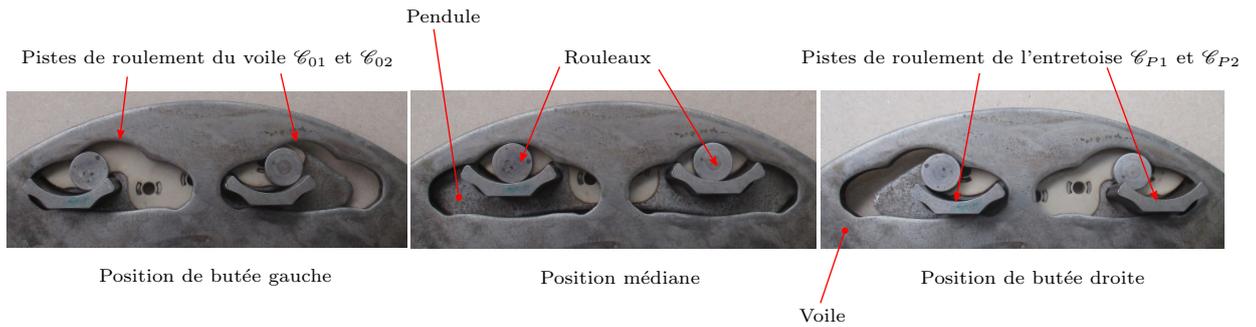


FIGURE 7.1 – Technologie historique de l'absorbeur pendulaire.

consiste à imposer un mouvement de translation pure au pendule par rapport au voile. En effet, si on attache le repère $\mathcal{R}_P(G, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$ au centre de masse G du pendule et au voile, le repère $\mathcal{R}_c(O, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$ en son centre de rotation O . Alors \mathcal{R}_P et \mathcal{R}_c restent parallèles tout au long du déplacement du pendule. De plus, ce mouvement de translation est tel que G décrit dans \mathcal{R}_c , une trajectoire \mathcal{C} de forme précise. La forme de la trajectoire est régie par $R(S)$, la distance courante $\|\mathbf{OG}\|$. C'est une fonction de S , le déplacement de G le long de \mathcal{C} . L'origine de S est prise au point V , appartenant à la trajectoire, tel que $R(S = 0) = \mathbf{OV}$. En pratique, la trajectoire \mathcal{C} est symétrique par rapport à \mathbf{y}_c , cela pour des raisons d'industrialisation et également de conception, comme on le verra dans la suite. Cependant, une trajectoire non symétrique pourrait très bien être envisagée, la technologie le permet. Dès lors, il est également possible d'imposer des mouvements autres qu'une translation pure. C'est le cas de l'absorbeur pendulaire de nouvelle génération, illustré en figure 7.3. Ce système consiste à imposer une rotation du pendule $\alpha(S)$ autour de son centre de masse, à mesure qu'il se déplace le long de la trajectoire \mathcal{C} . Plus précisément, le repère \mathcal{R}_P s'oriente d'un angle $\alpha(S)$ par rapport à \mathcal{R}_c .

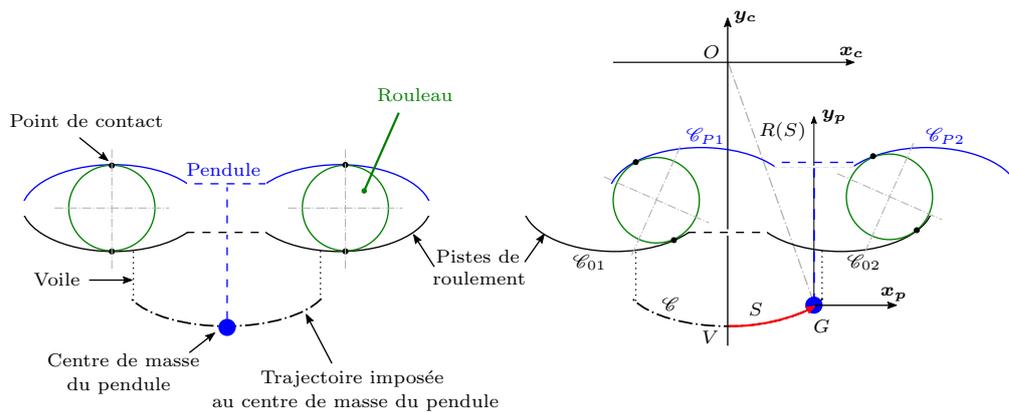


FIGURE 7.2 – Système à pendule translaté.

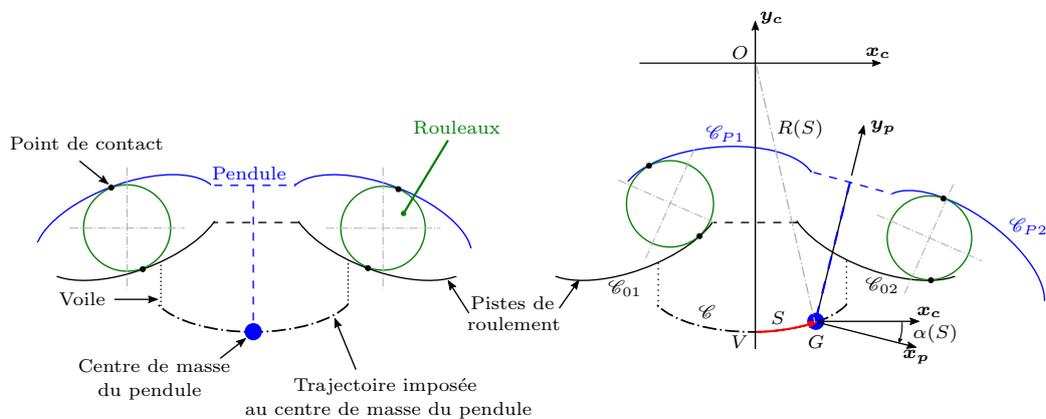


FIGURE 7.3 – Système à pendule tournant.

Lors d'un développement industriel, les spécifications de trajectoire et de rotation du pendule, $R(S)$ et $\alpha(S)$, sont établies à l'aide de simulations numériques, lors de l'étude du comportement dynamique en condition véhicule (cf. chapitre 6). Ces spécifications sont ensuite transmises aux concepteurs qui ont pour mission de concevoir les formes des pistes de roulement appropriées. Dans le cadre de la thèse, des formes diverses de trajectoire ainsi que des mouvements de rotation de pendule élaborés ont été proposés (cf. chapitre 3). Les concepteurs ont très vite exprimé des difficultés à concevoir ces systèmes originaux.

Nous nous sommes aperçus que leurs difficultés n'était pas dues à une limitation de la technologique, mais à un manque évident de moyens mis à la disposition des dessinateurs. Pour s'en convaincre, la figure 7.4 illustre la méthode de conception d'une piste de roulement. Le principe consiste à discrétiser chacune des pistes du voile et du pendule en trois arcs de cercle tangents. Charge aux dessinateurs de déterminer les rayons de ces cercles ainsi que les positions de leurs centres dans le repère \mathcal{R}_c , cela de façon manuelle. Dès qu'une solution est retenue, une simulation cinématique est réalisée à l'aide du logiciel de CAO Catia, sous la condition de roulement sans glissement des rouleaux. La solution finale doit garantir que la trajectoire du centre de masse du pendule soit comprise entièrement dans une enveloppe de 20 μm autour de la trajectoire théorique. Il en est de même pour l'angle de rotation $\alpha(S)$ qui doit, lui aussi, respecter une

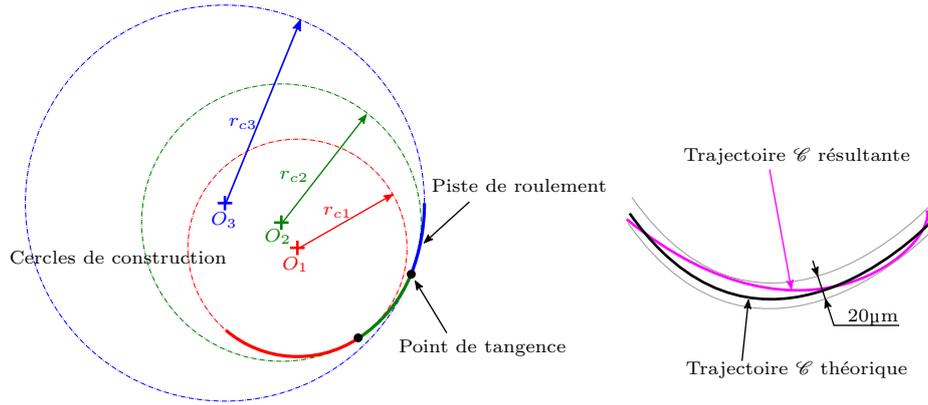


FIGURE 7.4 – Illustration de la méthode de conception des pistes de roulement.

certaine tolérance. On ne parle pas d'une tolérance de fabrication, mais d'une tolérance de dessin. Cela illustre bien le talent des dessinateurs pour arriver à de telles prouesses. Cependant, cette procédure est excessivement longue (plusieurs jours) et implique des disparités dans les plans de définition, d'un dessinateur à l'autre. De plus, cette méthode garantit une continuité de la tangente mais pas de la courbure des géométries. On imagine bien qu'avec des allures non conventionnelles de trajectoires, cette méthode n'est pas viable. Il est donc nécessaire d'apporter une solution robuste et rapide pour calculer numériquement la forme des pistes de roulement, quelle que soit la forme $R(S)$ et de $\alpha(S)$.

7.2 Modélisation

Pour palier la faible robustesse de la méthode de conception actuelle, une étude cinématique dans le plan est mise en place. La modélisation ainsi que le paramétrage du problème sont présentés en figure 7.5. On précise que les inconnues sont notées en vert. On compte 4 solides : le pendule (solide P , en bleu), le voile (solide 0, en magenta), un premier rouleau de rayon r_1 (solide 1, en gris) et un deuxième rouleau de rayon r_2 (solide 2, en gris). On cherche à déterminer les profils \mathcal{C}_{P1} , \mathcal{C}_{P2} , \mathcal{C}_{01} et \mathcal{C}_{02} tels que :

- Le point G se situe sur la trajectoire \mathcal{C} quel que soit l'abscisse curviligne S .
- L'inclinaison entre \mathbf{x}_p et \mathbf{x}_c , pour S donné, soit égal à l'angle $\alpha(S)$.
- À tout moment, le solide 1 roule sans glisser sur \mathcal{C}_{P1} et \mathcal{C}_{01} .
- À tout moment, le solide 2 roule sans glisser sur \mathcal{C}_{P2} et \mathcal{C}_{02} .

On rappelle que $\mathcal{R}_P(G, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$ est le repère attaché au centre de masse G du pendule et le repère $\mathcal{R}_c(O, \mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c)$ est le repère attaché au centre de rotation O du voile.

En plus du repère \mathcal{R}_P , on attache au pendule le repère de Frenet $\mathcal{R}_F(G, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{z}_0)$ dont l'inclinaison par rapport à \mathcal{R}_c est mesurée par β . On attache également au pendule le repère $\mathcal{R}_R(G, \mathbf{x}_R, \mathbf{y}_R, \mathbf{z}_0)$ dont l'inclinaison est telle que $\mathbf{OG} = -R\mathbf{y}_R$. L'angle entre \mathbf{y}_c et \mathbf{y}_R est mesuré par φ .

On définit maintenant le paramétrage des solides 1 et 2. À l'instant initial, $S = 0$ et le centre A du solide 1 coïncide avec le point A_0 tel que $\mathbf{OA}_0 = -X_{10}\mathbf{x}_c - Y_{10}\mathbf{y}_c$. Au cours du déplacement de G le long de \mathcal{C} ($S \neq 0$), la distance $\mathbf{A}_0\mathbf{A}$ évolue de sorte que $\mathbf{A}_0\mathbf{A} = X_1\mathbf{x}_c + Y_1\mathbf{y}_c$. Le solide 1 est en contact avec \mathcal{C}_{P1} au point I_{P1} et avec \mathcal{C}_{01} au point I_{01} . On attache au solide 1, le repère $\mathcal{R}_{\varphi 1}(A, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0)$ ainsi que le repère $\mathcal{R}_{\beta 1}(A, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{z}_0)$. L'angle entre \mathbf{y}_1 et \mathbf{y}_c est mesuré par

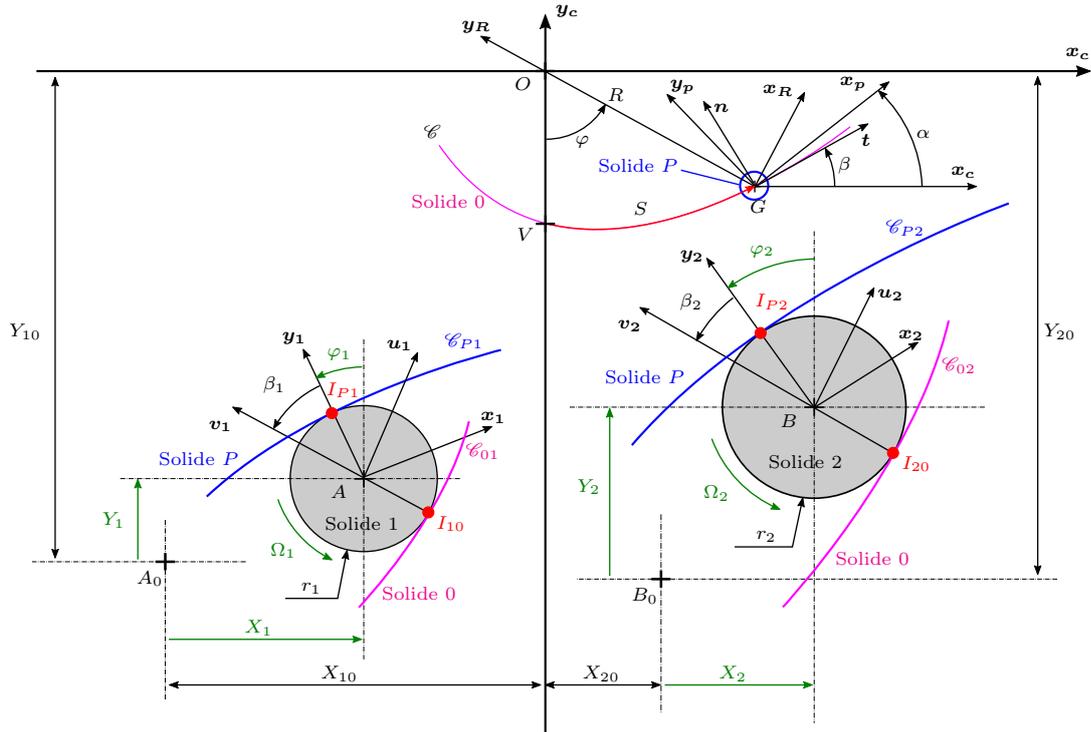


FIGURE 7.5 – Paramétrage du problème.

φ_1 et l'angle entre \mathbf{v}_1 et \mathbf{y}_1 est imposé par la constante β_1 . Les positions de I_{P1} et I_{10} , sur la circonférence du solide 1, sont telles que $\mathbf{A}I_{P1} = r_1\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{A}I_{10} = -r_1\mathbf{v}_1$. On note Ω_1 la vitesse angulaire du solide 1, telle que $\Omega_{1/0} = \Omega_1\mathbf{z}_0$.

Pour le solide 2, cela est très similaire. À l'instant initial, le centre B du solide 2 coïncide avec le point B_0 tel que $\mathbf{O}B_0 = X_{20}\mathbf{x}_c - Y_{20}\mathbf{y}_c$. Au cours du déplacement de G le long de \mathcal{C} , la distance \mathbf{B}_0B évolue de sorte que $\mathbf{B}_0B = X_2\mathbf{x}_c + Y_2\mathbf{y}_c$. Le solide 2 est en contact avec \mathcal{C}_{P2} au point I_{P2} et avec \mathcal{C}_{02} au point I_{02} . On attache au solide 2, le repère $\mathcal{R}_{\varphi_2}(B, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_0)$ ainsi que le repère $\mathcal{R}_{\beta_2}(B, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{z}_0)$. L'angle entre \mathbf{y}_2 et \mathbf{y}_c est mesuré par φ_2 et l'angle entre \mathbf{v}_2 et \mathbf{y}_2 est imposé par la constante β_2 . Les positions de I_{P2} et I_{20} , sur la circonférence du solide 2, sont telles que $\mathbf{B}I_{P2} = r_2\mathbf{y}_2$ et $\mathbf{B}I_{20} = -r_2\mathbf{v}_2$. Enfin, on note Ω_2 la vitesse angulaire du solide 2, telle que $\Omega_{2/0} = \Omega_2\mathbf{z}_0$.

Remarquez que les positions relatives des points de contact sur les circonférences des rouleaux sont régies par les constantes β_1 et β_2 . En pratique ces grandeurs sont fixées à zéro de sorte que les efforts normaux aux contacts soient colinéaires. Cependant, nous avons choisi de les considérer comme des paramètres définis pas l'utilisateur. On précise également que les fonctions φ et β sont connues car elles dépendent directement de R . Plus précisément, φ s'obtient à partir de la relation (2.95) (cf. chapitre 2) et s'écrit :

$$\varphi = \int_0^S \frac{1}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{dR}{dS}\right)^2}. \quad (7.1)$$

La fonction β s'exprime en fonction de R et φ . En considérant un triangle rectangle d'hypoténuse dS et de côtés dX_G et dY_G , on trouve

$$\beta = \operatorname{atan} \frac{dY_G}{dX_G}, \quad (7.2)$$

avec

$$X_G = R \sin \varphi \quad \text{et} \quad Y_G = R \cos \varphi. \quad (7.3)$$

Les pistes \mathcal{C}_{P1} , \mathcal{C}_{01} , \mathcal{C}_{P2} et \mathcal{C}_{02} , que l'on cherche, sont respectivement les trajectoires des points I_{P1} , I_{10} , I_{P2} et I_{20} , dans \mathcal{R}_c . Comme l'on se place dans une configuration de roulement sans glissement, les vitesses relatives en ces points sont nulles. Ce qui fait des points de contact, par définition, des centres instantanés de rotation des mouvements des solides 1 et 2 soit par rapport à 0, soit par rapport à P . C'est donc les *bases* de ces mouvements que l'on cherche. Plus précisément, \mathcal{C}_{P1} est la base associée à I_{P1} du mouvement de 1/P, \mathcal{C}_{P2} est la base associée à I_{P2} du mouvement de 2/P, \mathcal{C}_{10} est la base associée à I_{10} du mouvement de 1/0 et \mathcal{C}_{20} est la base associée à I_{20} du mouvement de 2/P. Enfin, les cercles que représentent les circonférences des solides 1 et 2 sont les *roulantes* de ces mouvements. Le calcul des bases des différents mouvements est détaillé dans la suite de ce chapitre.

7.3 Équations vectorielles

On écrit ci dessous les équations vectorielles du roulement sans glissement (RSG) aux points I_{P1} , I_{10} , I_{P2} et I_{20} .

Roulement sans glissement au point I_{P1}

Le RSG au point I_{P1} impose que la vitesse du solide P par rapport au solide 1, notée $\mathbf{V}_{I_{P1} \in P/1}$, soit nulle. La loi de composition des vitesses permet d'exprimer $\mathbf{V}_{I_{P1} \in P/1}$ comme la somme des vitesses, en I_{P1} , de $P/0$ et $0/1$. On écrit :

$$\mathbf{V}_{I_{P1} \in P/1} = \mathbf{V}_{I_{P1} \in P/0} - \mathbf{V}_{I_{P1} \in 1/0} = \mathbf{0}. \quad (7.4)$$

Déterminons d'abord $\mathbf{V}_{I_{P1} \in P/0}$. Connaissant d'une part, la vitesse angulaire du solide P , c'est-à-dire $\dot{\alpha} \mathbf{z}_0$. Connaissant d'autre part la vitesse translationnelle en un point du solide P , par exemple le point G , ainsi que la distance entre I_{P1} et G , on en déduit la vitesse du solide P en I_{P1} . Le calcul du moment du torseur cinématique de $P/0$ donne :

$$\mathbf{V}_{I_{P1} \in P/0} = \mathbf{V}_{G \in P/0} + \mathbf{I}_{P1} \mathbf{G} \wedge \boldsymbol{\Omega}_{P/0}. \quad (7.5)$$

Cela s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{I_{P1} \in P/0} &= \dot{\mathbf{S}} \mathbf{t} + [(Y_{10} - Y_1) \mathbf{y}_c + (X_{10} - X_1) \mathbf{x}_c - r_1 \mathbf{y}_1 - R \mathbf{y}_R] \wedge \dot{\alpha} \mathbf{z}_c, \\ &= \dot{\mathbf{S}} \mathbf{t} + \dot{\alpha} [(Y_{10} - Y_1) \mathbf{x}_c + (X_1 - X_{10}) \mathbf{y}_c - r_1 \mathbf{x}_1 - R \mathbf{x}_R]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Où $\dot{\bullet}$ représente la dérivée de \bullet par rapport au temps t . On applique la même procédure pour le calcul de $\mathbf{V}_{I_{P1} \in 1/0}$. En remarquant que la vitesse de 1 par rapport à 0 en I_{10} est nulle (on a imposé le RSG), le calcul du moment du torseur cinématique de 1/0 est simplifié et s'écrit :

$$\mathbf{V}_{I_{P1} \in 1/0} = \cancel{\mathbf{V}_{I_{10} \in 1/0}} + \mathbf{I}_{P1} \mathbf{I}_{10} \wedge \boldsymbol{\Omega}_{1/0}. \quad (7.7)$$

On arrive à

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{I_{P_1} \in 1/0} &= -r_1 (\mathbf{y}_1 + \mathbf{v}_1) \wedge \Omega_1 \mathbf{z}_c, \\ &= -r_1 \Omega_1 (\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1).\end{aligned}\quad (7.8)$$

En substituant (7.6) et (7.8) dans l'équation (7.4) on obtient une première équation vectorielle de RSG telle que :

$$\dot{\mathbf{S}}\mathbf{t} + \dot{\alpha} [(Y_{10} - Y_1) \mathbf{x}_c + (X_1 - X_{10}) \mathbf{y}_c - r_1 \mathbf{x}_1 - R\mathbf{x}_R] + r_1 \Omega_1 (\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}. \quad (7.9)$$

Roulement sans glissement au point I_{P_2}

la procédure est ici exactement la même que ce qui a été fait pour le RSG en I_{P_1} . On exprime $\mathbf{V}_{I_{P_2} \in P/2}$ comme la somme des vitesses, en I_{P_2} , de $P/0$ et de $0/2$. Cela mène à :

$$\mathbf{V}_{I_{P_2} \in P/2} = \mathbf{V}_{I_{P_2} \in P/0} - \mathbf{V}_{I_{P_2} \in 2/0} = \mathbf{0}. \quad (7.10)$$

La vitesse $\mathbf{V}_{I_{P_2} \in P/0}$ se détermine en utilisant la vitesse de translation du point G et la vitesse de rotation du solide P . On obtient :

$$\mathbf{V}_{I_{P_2} \in P/0} = \mathbf{V}_{G \in P/0} + \mathbf{I}_{P_2} \mathbf{G} \wedge \Omega_{P/0}. \quad (7.11)$$

L'équation (7.11) se réécrit

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{I_{P_2} \in P/0} &= \dot{\mathbf{S}}\mathbf{t} + [(Y_{20} - Y_2) \mathbf{y}_c - (X_{20} + X_2) \mathbf{x}_c - r_2 \mathbf{y}_2 - R\mathbf{y}_R] \wedge \dot{\alpha} \mathbf{z}_c, \\ &= \dot{\mathbf{S}}\mathbf{t} + \dot{\alpha} [(Y_{20} - Y_2) \mathbf{x}_c + (X_2 + X_{20}) \mathbf{y}_c - r_2 \mathbf{x}_2 - R\mathbf{x}_R].\end{aligned}\quad (7.12)$$

Pour le calcul de $\mathbf{V}_{I_{P_2} \in 2/0}$, il est judicieux de calculer le moment du torseur cinématique de $2/0$ en utilisant la condition de RSG en I_{20} . En effet, la vitesse de $2/0$ en ce point est nulle et la vitesse $\mathbf{V}_{I_{P_2} \in 2/0}$ s'écrit simplement :

$$\mathbf{V}_{I_{P_2} \in 2/0} = \cancel{\mathbf{V}_{I_{20} \in 2/0}} + \mathbf{I}_{P_2} \mathbf{I}_{20} \wedge \Omega_{2/0}. \quad (7.13)$$

Ce qui mène à

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{I_{P_2} \in 2/0} &= -r_2 (\mathbf{y}_2 + \mathbf{v}_2) \wedge \Omega_2 \mathbf{z}_c, \\ &= -r_2 \Omega_2 (\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2).\end{aligned}\quad (7.14)$$

En substituant (7.12) et (7.14) dans l'équation (7.10) on obtient une deuxième équation vectorielle :

$$\dot{\mathbf{S}}\mathbf{t} + \dot{\alpha} [(Y_{20} - Y_2) \mathbf{x}_c + (X_2 + X_{20}) \mathbf{y}_c - r_2 \mathbf{x}_2 - R\mathbf{x}_R] + r_2 \Omega_2 (\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{0}. \quad (7.15)$$

Roulement sans glissement au point I_{10}

On utilise ici la vitesse du solide 1 au point A pour écrire,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{I_{10} \in 1/0} &= \mathbf{V}_{A \in 1/0} + \mathbf{I}_{10} \mathbf{A} \wedge \Omega_{1/0} = \mathbf{0}, \\ &= \dot{X}_1 \mathbf{x}_c + \dot{Y}_1 \mathbf{y}_c + r_1 \mathbf{v}_1 \wedge \Omega_1 \mathbf{z}_c = \mathbf{0}, \\ &= \dot{X}_1 \mathbf{x}_c + \dot{Y}_1 \mathbf{y}_c + r_1 \Omega_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (7.16)$$

Cela fournit une troisième équation vectorielle de RSG.

Roulement sans glissement au point I_{20}

Il ne reste plus qu'à exprimer le RSG en I_{20} . Pour cela, on utilise la vitesse du solide 2 au point B . On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{I_{20} \in 2/0} &= \mathbf{V}_{B \in 2/0} + \mathbf{I}_{20} \mathbf{B} \wedge \boldsymbol{\Omega}_{2/0} = \mathbf{0}, \\ &= \dot{X}_2 \mathbf{x}_c + \dot{Y}_2 \mathbf{y}_c + r_1 \mathbf{v}_2 \wedge \Omega_2 \mathbf{z}_c = \mathbf{0}, \\ &= \dot{X}_2 \mathbf{x}_c + \dot{Y}_2 \mathbf{y}_c + r_2 \Omega_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

L'équation (7.17) est donc la quatrième et dernière équation de roulement sans glissement. Reste maintenant à projeter les équations obtenues dans une base appropriée. Cela est réalisé en section suivante.

7.4 Équations scalaires

Nous avons maintenant toutes les informations à notre disposition. On compte 8 inconnues, à savoir $X_1, Y_1, \varphi_1, \Omega_1, X_2, Y_2, \varphi_2$ et Ω_2 . Ainsi que les 4 équations vectorielles (7.9), (7.15), (7.16) et (7.17) qui, par projection, fournissent 8 équations scalaires.

Par projection de (7.9) dans \mathcal{R}_c , on obtient :

$$\begin{aligned} / \mathbf{x}_c : \quad & \dot{S} \cos \beta + \dot{\alpha} (Y_{10} - Y_1 - r_1 \cos \varphi_1 - R \cos \varphi) + r_1 \Omega_1 (\cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \beta_1)) = 0, \\ / \mathbf{y}_c : \quad & \dot{S} \sin \beta + \dot{\alpha} (X_1 - X_{10} - r_1 \sin \varphi_1 - R \sin \varphi) + r_1 \Omega_1 (\sin \varphi_1 + \sin (\varphi_1 + \beta_1)) = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

La projection de l'équation (7.15) dans \mathcal{R}_c mène à :

$$\begin{aligned} / \mathbf{x}_c : \quad & \dot{S} \cos \beta + \dot{\alpha} (Y_{20} - Y_2 - r_2 \cos \varphi_2 - R \cos \varphi) + r_2 \Omega_2 (\cos \varphi_2 + \cos (\varphi_2 + \beta_2)) = 0, \\ / \mathbf{y}_c : \quad & \dot{S} \sin \beta + \dot{\alpha} (X_{20} + X_2 - r_2 \sin \varphi_2 - R \sin \varphi) + r_2 \Omega_2 (\sin \varphi_2 + \sin (\varphi_2 + \beta_2)) = 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

La projection de l'équation (7.16) dans \mathcal{R}_c fournit les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} / \mathbf{x}_c : \quad & \dot{X}_1 + r_1 \Omega_1 \cos (\varphi_1 + \beta_1) = 0, \\ / \mathbf{y}_c : \quad & \dot{Y}_1 + r_1 \Omega_1 \sin (\varphi_1 + \beta_1) = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Enfin, les deux dernières équations sont obtenues, toujours par projection dans \mathcal{R}_c , mais cette fois de l'équation (7.17). On obtient :

$$\begin{aligned} / \mathbf{x}_c : \quad & \dot{X}_2 + r_2 \Omega_2 \cos (\varphi_2 + \beta_2) = 0, \\ / \mathbf{y}_c : \quad & \dot{Y}_2 + r_2 \Omega_2 \sin (\varphi_2 + \beta_2) = 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Le système formé par les équations (7.18), (7.19), (7.20) et (7.21) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{F}(\dot{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0}, \quad (7.22)$$

où le vecteur des inconnues $\bar{\mathbf{x}}$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{x}} = [X_1, Y_1, \varphi_1, \Omega_1, X_2, Y_2, \varphi_2, \Omega_2]^T. \quad (7.23)$$

Le système (7.22) est un système algébro-différentiel car il ne fait intervenir que les dérivées premières des inconnues X_1, Y_1, X_2 et Y_2 (cf. équations (7.20) et (7.21)). Il est intéressant que remarquer que si le mouvement du pendule est une translation ($\alpha = 0$) cela simplifie les équations (7.18) et (7.19). Dans ce cas les positions X_1, Y_1, X_2 et Y_2 n'interviennent plus dans les équations et le système à résoudre est purement algébrique. Cela montre que lorsque le pendule est sujet au mouvement de rotation ($\alpha \neq 0$), les solutions de (7.22) et par conséquent l'allure des pistes de roulement, dépendent des positions initiales des rouleaux (cf. points A_0 et B_0 en figure 7.5).

On propose d'effectuer quelques transformations sur le système (7.22). Les solutions (7.23) sont dépendantes du temps, or nous sommes plutôt intéressé par l'évolution des inconnues en fonction de S . De plus, les fonctions R, α, φ et β sont exprimées en fonction de S . Il serait donc judicieux d'effectuer le changement de variable suivant :

$$t \longleftrightarrow S. \quad (7.24)$$

Ainsi, la variable indépendante est S et on peut écrire

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{d\bullet}{dS} \dot{S} \Rightarrow \dot{\bullet} = \bullet' \dot{S}, \quad (7.25)$$

où \bullet' est la dérivée de \bullet par rapport à S . De cette façon, la vitesse de déplacement du pendule \dot{S} se simplifie dans les équations (7.18), (7.19), (7.20) et (7.21). En effet, on rappelle que Ω_1 et Ω_2 représentent respectivement les vitesses de rotation des rouleaux 1 et 2. Le système (7.22) se réécrit donc :

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}, S) = \mathbf{0}. \quad (7.26)$$

Le système (7.26) est un système algébro-différentiel d'index 1. Cela signifie qu'en le dérivant 1 fois, on abouti à un système purement différentiel. C'est ce qui a été fait en pratique. Cependant, la différentiation de (7.26) par rapport à S engendre une système différentiel d'ordre 2. Des variables additionnelles et donc de nouvelles équations ont été introduites afin de construire un système différentiel d'ordre 1, à l'image de ce qui est fait en section 4.3. Les variables additionnelles sont $V_{X_1}, V_{X_2}, V_{Y_1}$ et V_{Y_2} . Elles sont telles que :

$$\begin{aligned} X_1' - V_{X_1} &= 0, \\ X_2' - V_{X_2} &= 0, \\ Y_1' - V_{Y_1} &= 0, \\ Y_2' - V_{Y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Finalement, le système à résoudre comporte 12 inconnues pour 12 équations et s'écrit

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (7.28)$$

où le vecteur des inconnues \mathbf{x} est :

$$\mathbf{x} = [X_1, V_{X_1}, X_2, V_{X_2}, Y_1, V_{Y_1}, Y_2, V_{Y_2}, \varphi_1, \varphi_2, \Omega_1, \Omega_2]^T. \quad (7.29)$$

Les expressions de $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sont données en annexe E. Le système (7.28) est donc intégré par rapport à S , à partir de la condition initiale :

$$\mathbf{x}^{(0)} = [X_1^{(0)}, V_{X_1}^{(0)}, X_2^{(0)}, V_{X_2}^{(0)}, Y_1^{(0)}, V_{Y_1}^{(0)}, Y_2^{(0)}, V_{Y_2}^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \Omega_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}]^T, \quad (7.30)$$

où $\bullet^{(0)}$ correspond à \bullet évalué pour $S = 0$.

Quelques précisions sont apportées quant au calcul de $\mathbf{x}^{(0)}$. Au premier instant, le déplacement du pendule est nul ($S = 0$) et les centres des rouleaux A et B coïncident respectivement avec les

points A_0 et B_0 . Les grandeurs $X_1^{(0)}$, $Y_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$ et $Y_2^{(0)}$ sont donc égales à zéro (*cf.* figure 7.5). Les inconnues restantes de $\mathbf{x}^{(0)}$ sont quant à elles solutions d'un système algébrique qui se détermine en substituant (7.27), (7.25), (7.24) dans les équations (7.18), (7.19), (7.20) et (7.21). Au final, les inconnues $V_{X_1}^{(0)}$, $V_{X_2}^{(0)}$, $V_{Y_1}^{(0)}$, $V_{Y_2}^{(0)}$, $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$, $\Omega_1^{(0)}$ et $\Omega_2^{(0)}$ sont solutions de :

$$\begin{cases} \cos \beta^{(0)} + \alpha'^{(0)} \left(Y_{10} - r_1 \cos \varphi_1^{(0)} - R^{(0)} \cos \varphi^{(0)} \right) + r_1 \Omega_1^{(0)} \left(\cos \varphi_1^{(0)} + \cos \left(\varphi_1^{(0)} + \beta_1 \right) \right) = 0, \\ \sin \beta^{(0)} - \alpha'^{(0)} \left(X_{10} + r_1 \sin \varphi_1^{(0)} + R^{(0)} \sin \varphi^{(0)} \right) + r_1 \Omega_1^{(0)} \left(\sin \varphi_1^{(0)} + \sin \left(\varphi_1^{(0)} + \beta_1 \right) \right) = 0, \\ \cos \beta^{(0)} + \alpha'^{(0)} \left(Y_{20} - r_2 \cos \varphi_2^{(0)} - R^{(0)} \cos \varphi^{(0)} \right) + r_2 \Omega_2^{(0)} \left(\cos \varphi_2^{(0)} + \cos \left(\varphi_2^{(0)} + \beta_2 \right) \right) = 0, \\ \sin \beta^{(0)} + \alpha'^{(0)} \left(X_{20} - r_2 \sin \varphi_2^{(0)} - R^{(0)} \sin \varphi^{(0)} \right) + r_2 \Omega_2^{(0)} \left(\sin \varphi_2^{(0)} + \sin \left(\varphi_2^{(0)} + \beta_2 \right) \right) = 0, \\ V_{X_1}^{(0)} + r_1 \Omega_1^{(0)} \cos \left(\varphi_1^{(0)} + \beta_1 \right) = 0, \\ V_{Y_1}^{(0)} + r_1 \Omega_1^{(0)} \sin \left(\varphi_1^{(0)} + \beta_1 \right) = 0, \\ V_{X_2}^{(0)} + r_2 \Omega_2^{(0)} \cos \left(\varphi_2^{(0)} + \beta_2 \right) = 0, \\ V_{Y_2}^{(0)} + r_2 \Omega_2^{(0)} \sin \left(\varphi_2^{(0)} + \beta_2 \right) = 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

Comme le système (7.31) est non linéaire, il est en pratique résolu par la méthode de Newton-Raphson (*cf.* section 4.2, chapitre 4). Dès lors que $\mathbf{x}^{(0)}$ est parfaitement connu, (7.28) est intégré par rapport à S , avec la routine ode45 de Matlab par exemple. Les pistes de roulement \mathcal{C}_{P1} , \mathcal{C}_{01} , \mathcal{C}_{P2} et \mathcal{C}_{02} sont ensuite calculées à partir de la solution (7.29). Plus précisément, les équations paramétriques de \mathcal{C}_{P1} dans \mathcal{R}_c s'obtiennent par

$$\begin{aligned} \mathbf{O}I_{P1} &= \mathbf{O}A_0 + A_0A + \mathbf{A}I_{P1}, \\ &= (X_1 - X_{10} - r_1 \sin \varphi_1) \mathbf{x}_c + (Y_1 - Y_{10} + r_1 \cos \varphi_1) \mathbf{y}_c. \end{aligned} \quad (7.32)$$

La piste \mathcal{C}_{10} dans \mathcal{R}_c s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}I_{10} &= \mathbf{O}A_0 + A_0A + \mathbf{A}I_{10}, \\ &= (X_1 - X_{10} + r_1 \sin (\varphi_1 + \beta_1)) \mathbf{x}_c + (Y_1 - Y_{10} - r_1 \cos (\varphi_1 + \beta_1)) \mathbf{y}_c. \end{aligned} \quad (7.33)$$

La forme de \mathcal{C}_{P2} dans \mathcal{R}_c est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}I_{P2} &= \mathbf{O}B_0 + B_0B + \mathbf{B}I_{P2}, \\ &= (X_2 + X_{20} - r_2 \sin \varphi_2) \mathbf{x}_c + (Y_2 - Y_{20} + r_2 \cos \varphi_2) \mathbf{y}_c. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Enfin, les équations de \mathcal{C}_{20} dans \mathcal{R}_c s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}I_{20} &= \mathbf{O}B_0 + B_0B + \mathbf{B}I_{20}, \\ &= (X_2 + X_{20} + r_2 \sin (\varphi_2 + \beta_2)) \mathbf{x}_c + (Y_2 - Y_{20} - r_2 \cos (\varphi_2 + \beta_2)) \mathbf{y}_c. \end{aligned} \quad (7.35)$$

7.5 Résultats

La procédure présentée en section précédente autorise la conception d'absorbeur pendulaires originaux. En pratique, les concepteurs choisissent les rayons des rouleaux (r_1 et r_2) ainsi que les positions initiales de leurs centres, c'est-à-dire les grandeurs X_{10} , Y_{10} , X_{20} , Y_{20} . Ils reçoivent ensuite une spécification de la trajectoire du pendule, issue d'une étude dynamique. Il est d'usage

de travailler avec le carré de la fonction R , qui est noté X . Cette spécification est généralement fournie sous une forme polynomiale telle que :

$$X = R^2 = (R_0 + \rho_0)^2 - n_p^2 S^2 \sum_{i=3}^{N_x} X_i S^i, \quad (7.36)$$

où ρ_0 est le rayon de courbure de \mathcal{C} à $S = 0$ et R_0 est la distance entre le centre O du voile et le centre de courbure de \mathcal{C} à $S = 0$. Le paramètre n_p est quant à lui, l'ordre d'accord du pendule. Ces notions sont abordées dans la section 2.3 du chapitre 2. L'angle de rotation du pendule α est lui aussi spécifié sous une forme polynomiale (*cf.* chapitre 3) telle que :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{N_\alpha} a_i S^i. \quad (7.37)$$

Pour l'exemple, on propose de considérer l'absorbeur pendulaire ayant fait l'objet d'une étude expérimentale sur banc d'essai, au chapitre 3, et d'une validation sur le véhicule au chapitre 6. Ses caractéristiques sont regroupées dans le tableau 7.1. Les allures des pistes de roulement (à l'échelle), dans le repère \mathcal{R}_c , sont montrées sur la figure 7.6. Cette conception est symétrique par rapport à \mathbf{y}_c . Cependant, on peut très bien imaginer des architectures totalement différentes, avec des trajectoires non symétriques, des rouleaux de rayon différents, des angles entre les efforts de contacts différents de zéro, etc. Une telle conception est illustrée en figure 7.7. En revanche, la réalisation d'une telle maquette physique est probablement très difficile.

Caractéristiques des rouleaux				Positions initiales des rouleaux				Trajectoire du pendule		Rotation du pendule	
r_1 (mm)	r_2 (mm)	β_1 (rad)	β_2 (rad)	X_{10} (mm)	X_{20} (mm)	Y_{10} (mm)	Y_{20} (mm)	$R_0 + \rho_0$ (mm)	n_p (-)	α_1 (rad/m)	α_3 (rad/m ³)
6.5	6.5	0	0	32.935	32.935	52.706	52.706	53.5	2.186	13.08	17240.2

TABLE 7.1 – Caractéristiques de l'absorbeur pendulaire.

7.6 Bilan

En réponse à la faible robustesse de la phase de conception, une méthode numérique a été proposée et permet le calcul des géométries fonctionnelles de l'absorbeur pendulaire, quel que soit le mouvement de translation ou de rotation du pendule. L'étude cinématique menée sous la condition du roulement sans glissement a permis d'établir le système équations non linéaires (*cf.* section 7.3). Il apparaît que le système résultant l'absorbeur à translation pure est algébrique. En revanche, la prise en compte du mouvement de rotation du pendule mène à un système algèbro-différentiel (*cf.* équation (7.26)). Ce système a été ramené à un système purement différentiel et résolu par une méthode classique d'intégration temporelle (*cf.* équation (7.28)). La détermination des conditions initiales du problème nécessite quant à elle, la résolution d'un système algébrique non linéaire (*cf.* équation (7.31)).

Cette procédure a été implémentée dans une application graphique interactive, développée pendant la thèse, à l'intention du bureau d'étude. Il en résulte un gain de temps et de précision très appréciable en phase de conception du produit. Cela fournit également une certaine aisance aux dessinateurs en cas d'éventuelles modifications des spécifications issues de l'étude dynamique.

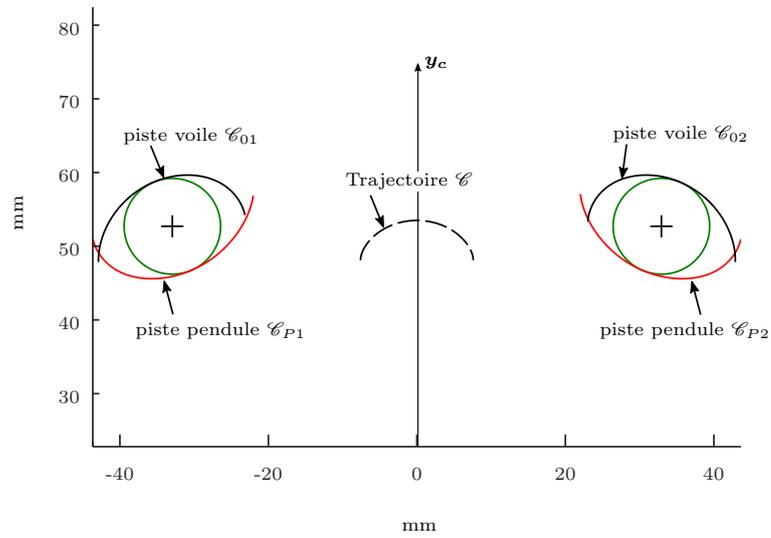


FIGURE 7.6 – Allure des pistes de roulement issues du calcul numérique. Les paramètres sont résumés dans le tableau 7.1.

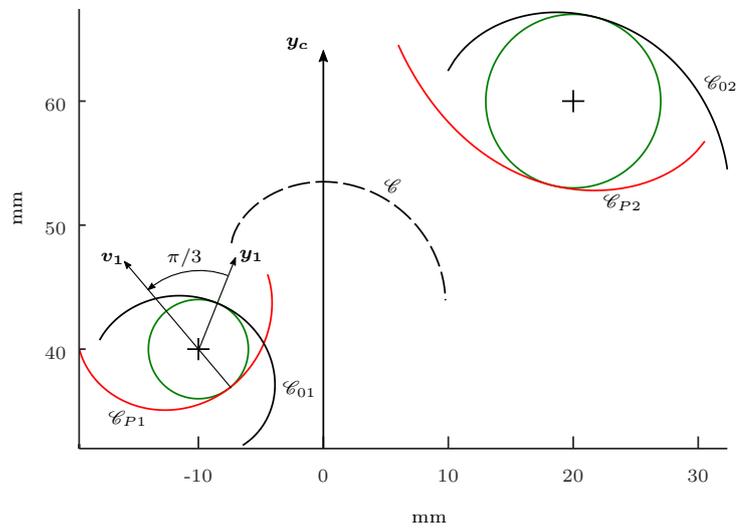


FIGURE 7.7 – Allure des pistes de roulement issues du calcul numérique. Paramètres : $(R_0 + \rho_0) = 53.5$, $X_{10} = 10$, $X_{20} = 20$, $Y_{10} = 40$, $Y_{20} = 60$, $r_1 = 4$, $r_2 = 7$, $\beta_1 = \pi/3$, $\beta_2 = 0$.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Dans l'objectif de proposer la meilleure prestation possible à l'automobiliste, les problématiques de nuisances sonores, confort, consommation et fiabilité du véhicule sont, à l'heure actuelle, les préoccupations majeures des industriels de l'automobile. Le moteur thermique, en particulier, contribue pour une part importante à ces problématiques et engendre des vibrations de torsion transmises aux divers éléments du véhicule. Les organes de transmission de puissance n'en sont pas exempts et voient leur intégrité structurelle compromise par d'importantes sollicitations de torsion. En réponse à ces problématiques, des solutions innovantes de filtration des vibrations de la chaîne cinématique ont été développées par le passé afin de garantir au consommateur une fiabilité optimale de son véhicule. C'est le cas par exemple de l'absorbeur pendulaire centrifuge, dont l'originalité réside dans sa capacité à s'adapter à la vitesse de rotation du moteur. Comme son nom l'indique, la fonction de filtration du système est assurée par des pendules agissant à la manière d'un batteur, accordés sur la fréquence fondamentale du couple moteur. Cela est garanti par le choix d'une trajectoire bien précise pour les oscillations des centres de masses des pendules. Cependant, le durcissement des normes environnementales et l'arrivée récente sur le marché de moteurs plus puissants sont à l'origine d'une part, d'une majoration des sollicitations de torsion de la chaîne cinématique et d'autre part, d'exigences plus sévères en termes de réduction de vibrations. Ces nouvelles contraintes impliquent une évolution de la technologie existante et c'est dans ce cadre que s'inscrivent les travaux réalisés dans cette thèse. Deux axes principaux d'étude ont été privilégiés :

- L'amélioration des performances de l'absorbeur pendulaire centrifuge, en cohérence avec les contraintes de réalisation et de conception du partenaire industriel ;
- Le développement d'une stratégie de simulation du comportement vibratoire non linéaire des pendules intégrés dans la chaîne cinématique, conduisant à une amélioration notable des techniques de simulation du partenaire industriel.

Les résultats de ces deux axes sont synthétisés ci-après.

Amélioration des performances de l'absorbeur pendulaire

Les travaux réalisés dans cette thèse ont comme point de départ la technologie historique de l'absorbeur pendulaire. Elle consiste à imposer à chaque pendule un mouvement de translation pure le long d'une trajectoire de forme épicycloïdale, par rapport à un voile support. Dans ce manuscrit, les pendules sont modélisés par un unique pendule équivalent. Il a été montré au chapitre 2 (*cf.* section 2.4) que les interactions non linéaires entre le pendule et son voile support engendrent un désaccord de l'absorbeur historique par rapport à la fréquence d'accord ciblée, à mesure que l'amplitude des oscillations augmente. Ceci engendre donc une perte de performances car le point de fonctionnement du système ne correspond pas à une antirésonance. Dès lors, deux

voies d'amélioration ont été envisagées :

- L'ajout d'une mobilité de rotation des pendules autour de leurs centres de masses. L'idée est de tirer parti des inerties de rotation des pendules, jusque-là inexploitées par le mouvement de translation pure ;
- L'utilisation de trajectoires autres que la traditionnelle épicycloïde.

D'un point de vue industriel, les deux pistes proposées présentent l'avantage majeur de n'impliquer qu'une modification de certaines géométries fonctionnelles du système. Les éléments constitutifs de l'absorbeur sont préservés et il n'est nullement nécessaire de recourir à de nouvelles pièces mécaniques. Cela est un argument de poids car ces modifications sont totalement transparentes en termes de coûts de production.

D'un point de vue scientifique, l'étude linéaire menée en section 3.3 (*cf.* chapitre 3) montre que la rotation du pendule, alliée à son inertie de rotation, engendre une augmentation de sa masse effective. Cela permet une augmentation des performances de filtration d'au moins 20% et une réduction de l'amplitude d'oscillation du pendule d'au moins 10%.

L'étude non linéaire de la section 3.4.2 (*cf.* chapitre 3) s'est orientée vers la correction du désaccord de l'absorbeur pendulaire en exploitant les nouvelles sources de non-linéarités induites par la rotation du pendule et par de nouvelles formes de trajectoires. Pour cela, l'angle de rotation du pendule et la trajectoire sont exprimés sous une forme polynomiale et des développements analytiques ont permis d'établir des critères de dimensionnement des coefficients de ces polynômes. Cette étude confirme le bénéfice apporté par le mouvement de rotation du pendule, qui engendre systématiquement une augmentation des performances de filtration sur l'harmonique fondamental. De plus, en combinant ce mouvement de rotation avec une allure de trajectoire appropriée, le gain de performances est globalement supérieur à 20% et avoisine localement les 70%. Cependant, une légère augmentation de l'amplitude des harmoniques supérieurs est constatée. Enfin, l'utilisation d'une trajectoire autre que l'épicycloïde, sans mobilité de rotation du pendule, est vivement déconseillée car il en résulte une amplification des oscillations du pendule.

Développement d'une stratégie de simulation

Cette thèse a également permis le développement d'une stratégie de simulation vibratoire non linéaire, dédiée à l'étude du régime permanent de l'absorbeur pendulaire, seul ou couplé à une chaîne cinématique automobile. Le modèle dynamique est implémenté dans l'environnement de simulation DiaManlab dont le moteur de calcul est basé sur la méthode asymptotique numérique (MAN) couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique. La MAN est un moteur de résolution bien adapté aux systèmes d'équations quadratiques et présente certains avantages par rapport aux méthodes de prédiction-corrrection classiques. En particulier, l'adaptation automatique de la longueur du pas de calcul, la représentation semi-analytique de la branche de solution et la paramétrisation par pseudo longueur d'arc, font de cette stratégie de simulation une méthode efficace et robuste (*cf.* chapitre 4). Néanmoins, la pertinence de cette approche dans le cadre d'un usage industriel a dû être démontrée.

Dans un premier temps, la modélisation de l'absorbeur pendulaire seul a été validée lors d'une campagne expérimentale menée sur banc d'essai (*cf.* section 3.5.1, chapitre 3). Les corrélations entre calculs et essais démontrent une très bonne correspondance entre la prédiction numérique et la mesure. Toutefois, les essais réalisés sur deux maquettes physiques ont montré la difficulté de caractérisation des absorbeurs pendulaires légers, en raison de la grande inertie de rotation du banc utilisé. Un phénomène de localisation et de désynchronisation des pendules a également été observé expérimentalement. La corrélation des résultats de mesure avec une modélisation à un pendule équivalent tend à montrer que ce phénomène n'engendre pas de dégradation de la

fonction de filtration.

Dans un second temps, le moteur de simulation numérique a été intégré au sein du processus de développement produit Valeo. L'objectif était de prouver la complémentarité entre la méthode de continuation numérique utilisée pendant la thèse et les environnements commerciaux de simulation temporelle du partenaire industriel. En ce sens, une méthode originale de continuation numérique d'antirésonance a été développée et implémentée dans l'environnement DiaManlab. Cette méthode est présentée au chapitre 5 et s'inspire de la procédure de suivi de points limites. Elle permet, de manière générale, la continuation d'un extremum de l'amplitude de réponse d'un harmonique donné d'un quelconque système structurel. En pratique, cette procédure est utilisée en phase de développement de l'absorbeur pendulaire. La stratégie actuelle consiste à itérer manuellement sur les coefficients des polynômes de la trajectoire et de la rotation du pendule afin d'influencer une antirésonance du système. L'objectif est de minimiser d'une part, l'amplitude des oscillations de la chaîne cinématique et d'autre part, l'amplitude d'oscillation du pendule.

Cette méthodologie a été mise en œuvre lors d'un développement industriel, au chapitre 6. L'objectif était d'établir une spécification du pendule en interaction de la chaîne cinématique et en phase d'accélération du véhicule. Les attentes étaient nombreuses car la chaîne cinématique est un ensemble complexe et la modélisation adoptée est linéaire. De plus, la méthode d'équilibrage harmonique n'autorise que le calcul du régime permanent, ce qui n'est, a priori, pas représentatif de la phase d'accélération. Cependant, la corrélation de la prédiction numérique avec la mesure montre une réelle correspondance, notamment en rapport de boîte élevé, où l'accélération du véhicule est faible. Cela montre d'une part, qu'une modélisation linéaire de la chaîne cinématique fournit de bons résultats et d'autre part, que la phase d'accélération, en rapport élevé, peut être assimilée au régime permanent.

Cette étude a également montré que les critères de dimensionnement établis au chapitre 3, sur un modèle à deux degrés de liberté, n'étaient pas directement applicables lorsque l'absorbeur pendulaire est couplé avec la chaîne cinématique. Cela montre que les modes de cette dernière ont une influence non négligeable sur le comportement de l'absorbeur, d'où l'intérêt de la procédure de continuation d'antirésonance en phase de développement.

Enfin, la thèse a répondu, au chapitre 7, à un besoin exprimé par les équipes de dessinateurs. En effet, la procédure de dessin des pistes de roulement de l'absorbeur pendulaire était purement manuelle et extrêmement fastidieuse. Cela rendait alors impossible la réalisation d'architectures variées, comme celles proposées pendant le projet. Une étude cinématique a permis de mettre en équation le problème et la résolution numérique du système d'équations non linéaires permet un calcul immédiat des géométries fonctionnelles, quelle que soit l'architecture du système. La méthode a été implémentée dans une application graphique interactive et diffusée au sein du service conception. À l'issue du projet, c'est finalement tout le processus de développement de l'absorbeur pendulaire Valeo qui a été enrichi, de la phase d'étude jusqu'à la phase de conception.

En résumé, ces travaux de thèse ont permis :

- L'amélioration et la maîtrise des performances de l'absorbeur pendulaire en utilisant une combinaison des mouvements de translation et de rotation ;
- La proposition de critères de dimensionnement quant à l'allure de la trajectoire et du mouvement de rotation du pendule ;
- La proposition d'une méthode de continuation numérique d'extremums d'une branche d'équilibre ;
- L'étude de l'absorbeur pendulaire couplé et la mise en évidence de l'influence des modes de la chaîne cinématique ;

- L'intégration des outils développés pendant la thèse au sein du processus de développement de Valeo, puis leur validation lors d'une étude industrielle ;
- Le développement d'un outil de calcul automatique des géométries fonctionnelles de l'absorbeur pendulaire, à l'intention des dessinateurs industriels.

Perspectives

Les points principaux non couverts par ces travaux mais qui semblent néanmoins nécessaires sont listés ci-dessous :

- Actuellement, la méthodologie de spécification consiste à itérer manuellement sur les coefficients des polynômes de la trajectoire et de la rotation du pendule. La méthode de continuation numérique d'antirésonance est une aide précieuse et permet une convergence relativement rapide vers une solution. Cependant, la mise en place d'une procédure d'optimisation pour le calcul des coefficients des polynômes permettrait de rendre le processus de développement plus robuste.
- Dans ces travaux, la stabilité de la solution périodique n'a pas été considérée. Cependant des études ont montré que la réponse au voisinage de l'antirésonance peut devenir instable, justement en perturbant la traditionnelle épicycloïde [105] comme cela a été fait dans ce document. À l'heure actuelle, les spécifications issues de la méthode de continuation numérique font systématiquement l'objet d'une simulation temporelle. Néanmoins, il est nécessaire de prendre en compte cet aspect dès le commencement de l'étude.
- L'étude expérimentale sur banc d'essai a permis de mettre en évidence un phénomène de localisation et de désynchronisation des pendules. Bien que cela ne semble pas impacter la capacité de filtration de l'absorbeur, ce phénomène pose des problèmes de chocs entre les pendules et le voile support. La piste privilégiée, à l'origine de ce phénomène, est une disparité géométrique entre les pendules. Une investigation est nécessaire afin d'en apporter la preuve ainsi qu'une solution adaptée.
- Une piste intéressante consiste à utiliser des pendules accordés à des ordres différents, permettant ainsi la filtration des vibrations de plusieurs harmoniques du couple moteur. Cependant, un tel système est sujet à des phénomènes de résonances internes entre les pendules accordés à des ordres doubles ou moitiés [106, 107]. L'industrialisation d'un tel absorbeur reste encore à prouver. Néanmoins, cette perspective est d'importance et nécessite une investigation. En effet, la technologie de désactivation de cylindre est de plus en plus présente dans les véhicules modernes. Elle consiste à désactiver un ou plusieurs cylindres du moteur lorsque le véhicule roule à sa vitesse de croisière, ce qui engendre un changement brutal de la fréquence fondamentale du couple moteur, d'où la nécessité de filtrer les acyclismes à des ordres différents.
- Des absorbeurs sous harmoniques, c'est-à-dire accordés à un ordre donné pour permettre une filtration aux ordres supérieurs, ont été étudiés par le passé [106]. Il serait intéressant d'étendre ce concept à l'absorbeur pendulaire de nouvelle génération.
- Dans cette thèse, la chaîne cinématique est supposée linéaire. Or, il est évident que cela est loin d'être le cas. Dans l'objectif d'améliorer la représentativité du modèle, il est nécessaire d'une part, d'évaluer l'influence des frottements secs du système d'embrayage et d'autre part, d'établir une modélisation réaliste des roues et plus particulièrement des pneumatiques du véhicule.

-
- Il a été montré que des solutions périodiques peuvent être entretenues dans le cas de systèmes mécaniques à chocs [108]. Ce phénomène pourrait être exploité, en ce qui concerne l'absorbeur pendulaire, pour maintenir la fonction de filtration lors de la saturation des pendules (chocs des pendules sur le voile support).

Bibliographie

- [1] Bill Gunston. *World encyclopedia of aero engines*. Sutton publishing, 2006.
- [2] B. C. Carter. Improvement in or relating to damping or oscillation checking devices. *U. K. Patent 337 466*, 1929.
- [3] R. R. R. Sarazin. Means adapted to reduce the torsional oscillations of crankshafts. *U. S. Patent 2 079 226*, 1930.
- [4] R. Chilton. Pendulum counterweight. *U. S. Patent 2 112 884*, 1935.
- [5] M.A. Wachs. The main rotor bifilar absorber and its effect on helicopter reliability/maintainability. Technical report, SAE Technical Paper, 1973.
- [6] M.H. Hamouda and G.A. Pierce. Helicopter vibration suppression using simple pendulum absorbers on the rotor blade. *Journal of the American helicopter society*, 29(3) :19–29, 1984.
- [7] H.H. Denman. Tautochronic bifilar pendulum torsion absorbers for reciprocating engines. *Journal of Sound and Vibration*, 159 :251 – 277, 1992.
- [8] L. J. Stone. Improvements in or relating to vibration-damping devices. *U. K. Patent 598 811*, 1945.
- [9] Hispano Suiza. *Revue technique numéro 3*, 1939.
- [10] D.E. Newland. Nonlinear aspects of the performance of centrifugal pendulum vibration absorbers. *Journal of Engineering for Industry*, 86(3) :257–263, 1964.
- [11] ARS Bromwell. Helicopter dynamics. *Edward Arnold, London*, 1976.
- [12] Tomasz Kryszynski and François Malburet. *Mechanical vibrations : Active and passive control*, volume 103. John Wiley & Sons, 2010.
- [13] Mike Albright, Tim Crawford, and Frank Speckhart. Dynamic testing and evaluation of the torsional vibration absorber. Technical report, SAE Technical Paper, 1994.
- [14] J. F. Madden. Constant frequency bifilar absorber. *U. S. Patent 4 218 187*, 1980.
- [15] C. Huygens. *Horologium oscillatorium sive de motu pendularium*. Paris, 1673.
- [16] AS Alsuwaiyan and SW Shaw. Localization of free vibration modes in systems of nearly identical vibration absorbers, 1999.
- [17] Vladislav Ganine, Mathias Legrand, Christophe Pierre, and Hannah Michalska. A reduction technique for mistuned bladed disks with superposition of large geometric mistuning and small model uncertainties. In *12th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, 2008.
- [18] Chang-Po Chao, SW Shaw, and Cheng-Tang Lee. Stability of the unison response for a rotating system with multiple tautochronic pendulum vibration absorbers. *Journal of Applied Mechanics*, 64(1) :149–156, 1997.

- [19] A. Grolet, A. Renault, and O. Thomas. Energy localisation in periodic structures : Application to centrifugal pendulum vibration absorber. *Proceedings of the 17th IMAC, International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, 2017.
- [20] J.S. Issa and S.W. Shaw. Synchronous and non-synchronous responses of systems with multiple identical nonlinear vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 348 :105–125, 2015.
- [21] A.S. Alsuwaiyan and S.W. Shaw. Steady-state responses in systems of nearly-identical torsional vibration absorbers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 125(1) :80–87, 2003.
- [22] C-P Chao, C-T Lee, and SW Shaw. Non-unison dynamics of multiple centrifugal pendulum vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 204(5) :769–794, 1997.
- [23] A.S. Alsuwaiyan and S.W. Shaw. Performance and dynamic stability of general-path centrifugal pendulum vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 252(5) :791–815, 2002.
- [24] Ali H Nayfeh and Dean T Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [25] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Collection Méthodes numériques. Hermès Science publications, 2007.
- [26] Mustafa A Acar and Steven W Shaw. Application of the harmonic balance method to centrifugal pendulum vibration absorbers. In *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, pages 243–252. 2016.
- [27] Cheng-Tang Lee and Steven W Shaw. Torsional vibration reduction in internal combustion engines using centrifugal pendulums. In *in : Proceedings of the Design Engineering Technical Conference*, 1995.
- [28] A.G. Haddow and S.W. Shaw. Centrifugal pendulum vibration absorbers : an experimental and theoretical investigation. *Nonlinear Dynamics*, 34(3-4) :293–307, 2003.
- [29] Tyler M Nester, Alan G Haddow, and Steven W Shaw. Experimental investigation of a system with multiple nearly identical centrifugal pendulum vibration absorbers. In *ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 913–921. American Society of Mechanical Engineers, 2003.
- [30] J Mayet, D Rixen, and H Ulbrich. Experimental investigation of centrifugal pendulum vibration absorbers. In *11th International Conference on Vibration Problems, Lisbon, Portugal*, 2013.
- [31] R.J. Monroe and S.W. Shaw. Nonlinear transient dynamics of pendulum torsional vibration absorbers—part i : theory. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(1) :011017, 2013.
- [32] R.J. Monroe and S.W. Shaw. Nonlinear transient dynamics of pendulum torsional vibration absorbers—part ii : Experimental results. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(1) :011018, 2013.
- [33] H. Mahé, A. Renault, and O. Thomas. Dispositif d’amortissement pendulaire. *FR 3 055 037*, 2016.
- [34] H. Mahé, A. Renault, and O. Thomas. Dispositif d’amortissement pendulaire. *FR 3 055 038*, 2016.
- [35] A. Renault, O. Thomas, and H. Mahé. Continuation d’antirésonance d’absorbeurs dynamiques non linéaires. *CSMA*, 2017.

- [36] A. Renault, O. Thomas, H. Mahé, and Y. Lefebvre. Hardening softening behavior of antiresonance for non linear torsional vibration absorbers. *ICTAM*, 2016.
- [37] O. Thomas, A. Renault, and H. Mahé. Direct antiresonance continuation for non linear dynamic absorbers. *ENOC*, 2017.
- [38] V. Denis, M. Jossic, C. Giraud-Audine, B. Chomette, A. Renault, and O. Thomas. Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation and normal form. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 106 :430 – 452, 2018.
- [39] W.H. Crouse and D.L. Anglin. *Automotive transmissions and power trains : construction, operation, and maintenance*. McGraw-Hill automotive technology series. McGraw-Hill, 1976.
- [40] J. Fenton. *Handbook of automotive powertrains and chassis design*. Professional Engineering, 1998.
- [41] W.W. Pulkrabek. *Engineering Fundamentals of the Internal Combustion Engine : Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited, 2013.
- [42] D. Centea, H. Rahnejat, and M.T. Menday. Non-linear multi-body dynamic analysis for the study of clutch torsional vibrations (judder). *Applied Mathematical Modelling*, 25(3) :177 – 192, 2001.
- [43] M. Menday and H. Rahnejat. Friction lining characteristics and the clutch take-up judder phenomenon with manual transmission. In Homer Rahnejat, editor, *Tribology and Dynamics of Engine and Powertrain*, pages 680 – 702. Woodhead Publishing, 2010.
- [44] Arseny Tikhomolov and Alexander Fidlin. Nonlinear dynamic effects in automotive clutches. *PAMM*, 11(1) :339–340, 2011.
- [45] M Kushwaha, S Gupta, P Kelly, and H Rahnejat. Elasto-multi-body dynamics of a multicylinder internal combustion engine. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K : Journal of Multi-body Dynamics*, 216(4) :281–293, 2002.
- [46] B. Hervé. Modélisation des vibrations axiales d’embrayage automobile et validation expérimentale. *Thèse de doctorat, Université Lille 1*, 2015.
- [47] S.N. Doğan. Rattle and clatter noise in powertrains – automotive transmissions. In Homer Rahnejat, editor, *Tribology and Dynamics of Engine and Powertrain*, pages 793 – 838. Woodhead Publishing, 2010.
- [48] M. Menday. An introduction to noise and vibration issues in the automotive drivetrain and the role of tribology. In Homer Rahnejat, editor, *Tribology and Dynamics of Engine and Powertrain*, pages 663 – 679. Woodhead Publishing, 2010.
- [49] Hermann Frahm. Device for damping vibrations of bodies. *U.S. Patent 989,958*, 1911.
- [50] J Ormondroyd. The theory of the dynamic vibration absorber, trans. asme. *Journal of Applied Mechanics*, 50(7), 1928.
- [51] J.P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. Dover Publications, 1985.
- [52] John E Brock. A note on the damped vibration absorber. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 13(4) :A–284, 1946.
- [53] O Nishihara and H Matsuhisa. Design and tuning of vibration control devices via stability criterion. *Japanese Society of Mechanical Engineering*, 10(1) :165–168, 1997.
- [54] R. Viguié. Tuning methodology of nonlinear vibration absorbers coupled to nonlinear mechanical systems. *PhD Thesis, University of Liège*, 2010.

- [55] B. Vaurigaud, L.I. Manevitch, and C.-H. Lamarque. Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to coupled flutter using targeted energy transfer. *Journal of Sound and Vibration*, 330(11) :2580 – 2595, 2011.
- [56] E. Gourc, G. Michon, S. Seguy, and A. Berlioz. Targeted energy transfer under harmonic forcing with a vibro-impact nonlinear energy sink : Analytical and experimental developments. *Journal of Vibration and Acoustics*, 137, 2015.
- [57] Oleg V. Gendelman. Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :732 – 745, 2008.
- [58] E. Gourdon, N.A. Alexander, C.A. Taylor, C.H. Lamarque, and S. Pernot. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3) :522 – 551, 2007.
- [59] A. F. Vakakis, O. V. Gendelman, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, and Y. S. Lee. *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*, volume 156. Springer Science, 2008.
- [60] R. Vigié and G. Kerschen. Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system : A tuning methodology. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3) :780 – 793, 2009.
- [61] G. Habib, T. Detroux, R. Vigié, and G. Kerschen. Nonlinear generalization of den hartog’s equal-peak method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 52-53 :17 – 28, 2015.
- [62] G. Habib and G. Kerschen. A principle of similarity for nonlinear vibration absorbers. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 332 :1 – 8, 2016.
- [63] T. Detroux, G. Habib, L. Masset, and G. Kerschen. Performance, robustness and sensitivity analysis of the nonlinear tuned vibration absorber. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60 :799–809, 2015.
- [64] Francesco Calogero. *Isochronous Systems*. Oxford University Press, USA, 2008.
- [65] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. On dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 13(2) :143 – 151, 1989.
- [66] G. Habib, C. Grappasonni, and G. Kerschen. Enforcing linear dynamics through the addition of nonlinearity. *Proceedings of the 34th IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*, 2016.
- [67] G. Habib, C. Grappasonni, and G. Kerschen. Passive linearization of nonlinear resonances. *Journal of Applied Physics*, 120(4), 2016.
- [68] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [69] Georg Duffing. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*. Number 41-42. R, Vieweg & Sohn, 1918.
- [70] I. Kovacic and M.J. Brennan. *The Duffing Equation : Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Wiley, 2011.
- [71] A.H. Nayfeh. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2000.
- [72] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis. 3rd. Edition*. Interdisciplinary Applied Mathematics. 5. Springer, 2010.
- [73] H.M. Paynter. *Analysis and Design of Engineering Systems : Class Notes for M.I.T. Course 2,751*. M.I.T. Press, 1961.
- [74] R. Arquier, S. Karkar, A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez, and B. Cochelin. Manlab 2.0 : an interactive path-following and bifurcation analysis software. *Technical report*,, 2005-2011.

- [75] S. Braun, D. Ewins, and S.S. Rao. *Encyclopedia of vibration : R-Z*. Number vol. 3. Academic Press, 2002.
- [76] E. Kremer and P. Movlazada. Centrifugal force pendulum device. *U. S. Patent 13 722 256*, 2013.
- [77] C.-P. Chao, C.-T. Lee, and S.W. Shaw. Non-unison dynamics of multiple centrifugal pendulum vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*, 204(5) :769 – 794, 1997.
- [78] William H Press. *Numerical recipes 3rd edition : The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007.
- [79] E.J. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede, and X. Wang. Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with homcont). *AUTO97, Concordia University, Canada*, 1997.
- [80] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & Structures*, 53(5) :1181 – 1192, 1994.
- [81] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324(12) :243 – 262, 2009.
- [82] Sami Karkar, Bruno Cochelin, and Christophe Vergez. A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4) :968 – 977, 2013.
- [83] I. Charpentier, B. Cochelin, and K. Lampoh. Diamanlab-an interactive taylor-based continuation tool in matlab. 2013.
- [84] R. Arquier. Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires des structures. *Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II)*., 2007.
- [85] S. Baguet. *Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique numérique*. PhD. Université Aix-Marseille II, 2001.
- [86] R.A. Ibrahim. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*, 314(3) :371 – 452, 2008.
- [87] J. P. Den Hartog. *Stephen Timoshenko 60th Anniversary*. New York : Macmillan, 1938.
- [88] M. Sharif-Bakhtiar and S. W. Shaw. Effects of nonlinearities and damping on the dynamic response of a centrifugal pendulum absorber. *ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 114 :305 – 311, 1992.
- [89] E. Rodgers. Brachistochrone and tautochrone curves for rolling bodies. *American Journal of Physics*, 14 :249–252, 1946.
- [90] Gaetan Kerschen. *Computation of Nonlinear Normal Modes through Shooting and Pseudo-Arclength Computation*, pages 215–250. Springer Vienna, Vienna, 2014.
- [91] Sami Karkar, Bruno Cochelin, and Christophe Vergez. A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12) :2554 – 2567, 2014.
- [92] A. Dhooge, W. Govaerts, and Yu. A. Kuznetsov. Matcont : A matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM Trans. Math. Softw.*, 29(2) :141–164, June 2003.
- [93] T. Detroux, L. Renson, L. Masset, and G. Kerschen. The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 296(Supplement C) :18 – 38, 2015.

- [94] L. Xie, S. Baguet, B. Prabel, and R. Dufour. Bifurcation tracking by harmonic balance method for performance tuning of nonlinear dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 88(Supplement C) :445 – 461, 2017.
- [95] M. Géradin and D. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Applications to Structural Dynamics*. J. Wiley & Sons, 1997.
- [96] W. Feng-Quan, H. Xiao-Ling, and G. Ying-Zheng. Analysis of the characteristics of pseudo-resonance and anti-resonance. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118(4) :663–667, 1996.
- [97] F. Wahl, G. Schmidt, and L. Forrai. On the significance of antiresonance frequencies in experimental structural analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 219(3) :379–394, 1999.
- [98] Arnaud Lazarus and Olivier Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9) :510 – 517, 2010.
- [99] Willy J. F. Govaerts. *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [100] S. Baguet and B. Cochelin. Determination of branches of limit points by an asymptotic numerical method. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2000.
- [101] G.L. Baker and J.A. Blackburn. *The Pendulum : A Case Study in Physics*. Oxford University Press, 2009.
- [102] S. W. Shaw, M. A. Acar, B. F. Feeny, and B. K. Geist. Modal properties of rotating shafts with order-tuned absorbers. In *Topics in Modal Analysis I, Volume 7*, pages 181–189. Springer, 2014.
- [103] Christophe Pierre. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3) :485–502, 1988.
- [104] S. Gozen, B. J Olson, S. W. Shaw, and C. Pierre. Resonance suppression in multi-degree-of-freedom rotating flexible structures using order-tuned absorbers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(6) :061016, 2012.
- [105] Mustafa A Acar, Steven W Shaw, and Brian F Feeny. Nonlinear dynamics of flexible rotating shafts with centrifugal pendulum vibration absorbers. In *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2015.
- [106] SW Shaw and VT Coppola. A subharmonic vibration absorber for rotating machinery. *Ann Arbor*, 1050 :48109, 1997.
- [107] Brendan J Vidmar, Steven W Shaw, Brian F Feeny, and Bruce K Geist. Analysis and design of multiple order centrifugal pendulum vibration absorbers. In *ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 165–173. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [108] E.H. Moussi, S. Bellizzi, B. Cochelin, and I. Nistor. Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 64-65 :266 – 281, 2015.

Annexes

Annexe A

Étude de l'épicycloïde

L'épicycloïde résulte de la trajectoire d'un point G appartenant à un cercle générateur de rayon b roulant sans glisser sur un cercle de base de rayon a . Par souci de cohérence avec la section 2.3.2.1, les notations de la figure 2.27 sont reportées sur la génération de la courbe illustrée en figure A.1. La position du centre O_1 du cercle générateur est mesurée par l'angle ϕ et α mesure la rotation du cercle générateur lors de son roulement sur le cercle de base.

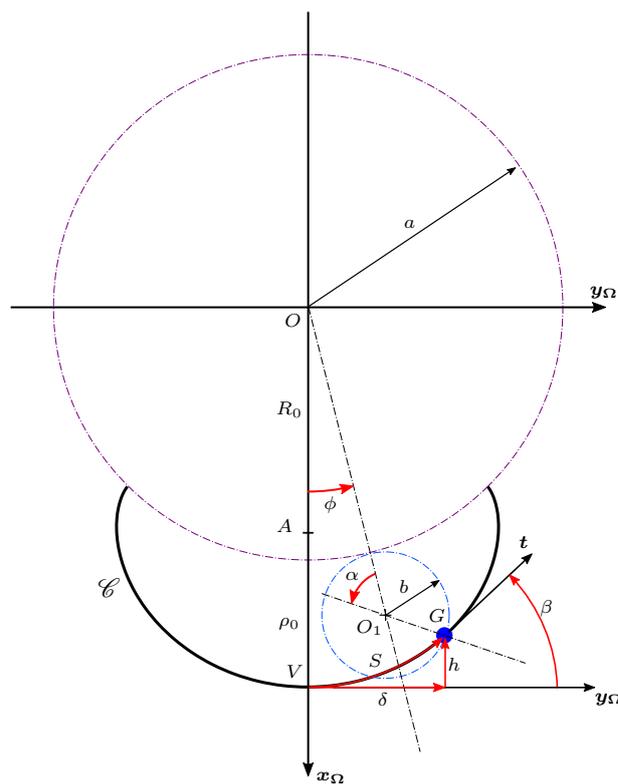


FIGURE A.1 – Génération d'une épicycloïde.

La position du point G dans \mathcal{R}_Ω s'écrit

$$\mathbf{OG} = ((a+b)\cos\phi + b\cos(\phi+\alpha))\mathbf{x}_\Omega + ((a+b)\sin\phi + b\sin(\phi+\alpha))\mathbf{y}_\Omega. \quad (\text{A.1})$$

La condition de roulement sans glissement implique que $a\phi = b\alpha$, l'équation A.1 devient

$$\mathbf{OG} = x_G\mathbf{x}_\Omega + y_G\mathbf{y}_\Omega, \quad (\text{A.2})$$

avec

$$x_G = (a+b)\cos\phi + b\cos\frac{a+b}{b}\phi \quad \text{et} \quad y_G = (a+b)\sin\phi + b\sin\frac{a+b}{b}\phi. \quad (\text{A.3})$$

Nous pouvons d'ores et déjà déterminer R^2 en fonction de ϕ tel que

$$R^2 = \|\mathbf{OG}\|^2 = (a+b)^2 + b^2 + 2b(a+b)\cos\frac{a}{b}\phi. \quad (\text{A.4})$$

En utilisant la propriété trigonométrique

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad (\text{A.5})$$

l'équation A.4 est réécrite sous la forme

$$R^2 = a^2 + 4b(a+b)\cos^2\frac{a}{2b}\phi. \quad (\text{A.6})$$

Déterminons maintenant l'expression de S en fonction de ϕ . Pour cela on utilise le fait que

$$dS^2 = dx_G^2 + dy_G^2, \quad (\text{A.7})$$

puis en substituant (A.3) dans (A.7) et en utilisant la propriété (A.5), on trouve

$$S = \int_0^\phi 2(a+b)\cos\frac{a}{2b}\phi d\phi = 4b\frac{a+b}{a}\sin\frac{a}{2b}\phi. \quad (\text{A.8})$$

Il est désormais possible d'exprimer R^2 en fonction de S en utilisant les équations (A.8), (A.6) et la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On trouve finalement

$$R^2 = 4\left(b + \frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{a^2}{4b(a+b)}S^2, \quad (\text{A.9})$$

qui est bien de la même forme que (2.53).

Il serait maintenant intéressant d'exprimer les paramètres a et b en fonction des grandeurs caractéristiques du pendule, à savoir R_0 et ρ_0 . Nous pouvons déjà établir une première relation en évaluant l'équation (A.9) pour $S = 0$ et écrire

$$R_0 + \rho_0 = 2b + a, \quad (\text{A.10})$$

L'information manquante est donnée par l'expression de la courbure κ . On utilise la formule [68] dans le cas d'une courbe plane paramétrée en coordonnées cartésiennes $(x(u), y(u))$

$$\kappa(u) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{A.11})$$

où $(-)'$ désigne la dérivée par rapport au paramètre u . En substituant alors (A.3) dans (A.11) on obtient $\kappa(\phi)$, puis en utilisant (A.8) on détermine la courbure en fonction de S telle que

$$\kappa(S) = \frac{a + 2b}{4b(a + b) \sqrt{1 - \frac{a^2}{16b^2(a + b)^2} S^2}}, \quad (\text{A.12})$$

L'équation supplémentaire est donc déduite en évaluant (A.12) pour $S = 0$. On obtient ainsi l'expression du rayon de courbure au point V

$$\rho_0 = \frac{1}{\kappa(S)} \Big|_{S=0} = \frac{4b(a + b)}{a + 2b}. \quad (\text{A.13})$$

En substituant (A.10) dans (A.13) on obtient l'équation du second degré suivante

$$b^2 - b(R_0 + \rho_0) + \frac{\rho_0}{4}(R_0 + \rho_0) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Les solutions de (A.14) sont ensuite injectées dans (A.10) et en utilisant le fait que $a > 0$ et $b > 0$ on trouve

$$a = \sqrt{R_0(R_0 + \rho_0)} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2} \left(R_0 + \rho_0 - \sqrt{R_0(R_0 + \rho_0)} \right). \quad (\text{A.15})$$

Finalement, en substituant (A.15) dans (A.9) on trouve

$$R^2 = (R_0 + \rho_0)^2 - \frac{R_0}{\rho_0} S^2, \quad (\text{A.16})$$

ce qui correspond bien à l'équation 2.53 établie en section 2.3.2.1.

On donne également l'expression de la fonction β qui s'obtient en substituant (A.12) dans (2.41) et s'écrit

$$\beta = \int_0^S \kappa(S) dS = \sqrt{\frac{R_0 + \rho_0}{R_0}} \operatorname{asin} \frac{1}{\rho_0} \sqrt{\frac{R_0}{R_0 + \rho_0}} S. \quad (\text{A.17})$$

On peut alors profiter du fait que $\operatorname{asin} x$ est défini pour $x \in [-1, 1]$ pour donner la valeur maximale S au delà de laquelle l'épicycloïde n'est plus définie :

$$S_{MAX} = \rho_0 \sqrt{\frac{\rho_0 + R_0}{R_0}}. \quad (\text{A.18})$$

Annexe B

Étude de la cycloïde

La cycloïde est la trajectoire décrite par un point G appartenant à un cercle générateur de rayon b , roulant sans glisser sur un plan \mathcal{P} . Dans un souci de cohérence avec la section 2.3.2.1, les notations de la figure 2.27 sont reportées sur la génération de la cycloïde illustrée en figure B.1. La position du centre O_1 du cercle générateur est mesurée par la distance a et α mesure la rotation du cercle générateur lors de son roulement sur \mathcal{P} .

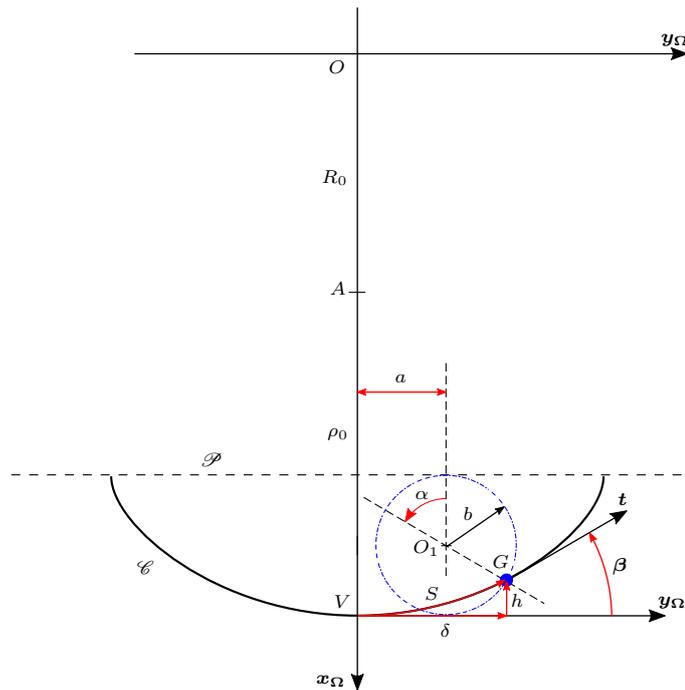


FIGURE B.1 – Génération d'une cycloïde.

La démarche de l'étude menée ici est en fait similaire à celle présentée en annexe A pour l'épicycloïde.

La position du point G dans \mathcal{R}_Ω s'écrit

$$\mathbf{OG} = (R_0 + \rho_0 + b(\cos \alpha - 1))\mathbf{x}_\Omega + (a + b \sin \alpha)\mathbf{y}_\Omega. \quad (\text{B.1})$$

La condition de roulement sans glissement implique que $a = b\alpha$, l'équation B.1 devient

$$\mathbf{OG} = x_G\mathbf{x}_\Omega + y_G\mathbf{y}_\Omega, \quad (\text{B.2})$$

avec

$$x_G = (R_0 + \rho_0 + b(\cos \alpha - 1)) \quad \text{et} \quad y_G = b(\alpha + \sin \alpha). \quad (\text{B.3})$$

Le carré de la distance R , exprimé en fonction de α , est donné par :

$$R^2 = \|\mathbf{OG}\|^2 = (R_0 + \rho_0 - 2b)^2 + b^2\alpha(\alpha + 2\sin \alpha) + 4b(R_0 + \rho_0 - b)\cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (\text{B.4})$$

En substituant ensuite (B.3) dans l'équation (A.7) on détermine l'expression de S en fonction de α telle que

$$S = \int_0^\alpha 2b \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = 4b \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (\text{B.5})$$

On déduit enfin R^2 en fonction de S en substituant l'équation (B.5) dans (B.4) :

$$R^2 = (R_0 + \rho_0)^2 - \frac{R_0 + \rho_0 - b}{4b} S^2 + 4b^2 \operatorname{asin} \frac{S}{4b} \left(\operatorname{asin} \frac{S}{4b} + \frac{S}{2b} \sqrt{1 - \frac{S^2}{16b^2}} \right). \quad (\text{B.6})$$

Afin de déterminer l'expression de b en fonction de R_0 et ρ_0 , il nous faut établir l'expression de la courbure $\kappa(S)$. On utilise alors l'expression (A.11) qui mène à

$$\kappa(S) = \frac{1}{4b\sqrt{1 - \frac{S^2}{16b^2}}}. \quad (\text{B.7})$$

En évaluant cette expression pour $S = 0$ on trouve :

$$\rho_0 = \frac{1}{\kappa(S)} \Big|_{S=0} = 4b. \quad (\text{B.8})$$

L'équation (B.6) se réécrit alors sous la forme

$$R^2 = (R_0 + \rho_0)^2 - \left(\frac{R_0}{\rho_0} + \frac{3}{4} \right) S^2 + \frac{\rho_0^2}{4} \operatorname{asin} \frac{S}{\rho_0} \left(\operatorname{asin} \frac{S}{\rho_0} + 2 \frac{S}{\rho_0} \sqrt{1 - \frac{S^2}{\rho_0^2}} \right). \quad (\text{B.9})$$

Pour finir, l'expression de la fonction β s'obtient en substituant (B.7) dans (2.41) et s'écrit

$$\beta = \int_0^S \kappa(S) dS = \operatorname{asin} \frac{S}{\rho_0}, \quad (\text{B.10})$$

et la valeur maximale de S au delà de laquelle l'arche de cycloïde n'est plus défini est :

$$S_{MAX} = \rho_0. \quad (\text{B.11})$$

Annexe C

Subtilité de la condition libre-libre dans DiaManlab

On apporte ici quelques précisions concernant l'implémentation de l'absorbeur pendulaire centrifuge (*cf.* section 4.4.1) dans le logiciel Diamanlab et plus particulièrement dans le cas purement conservatif. On considère pour cela le modèle linéaire équivalent à deux degrés de liberté illustré en figure C.1.

La masse m_1 , sujette à un effort $f \cos \omega t$, représente le voile support et son déplacement par rapport au repère galiléen est mesuré par $\tilde{\theta}(t)$. La masse m_2 représente un pendule et son déplacement par rapport à la masse m_1 (le voile) est mesuré par $S(t)$. Les masses m_1 et m_2 sont couplées entre elles par un ressort linéaire de raideur k . Le système ne comporte aucun amortisseur visqueux car on s'intéresse aux solutions du système conservatif.

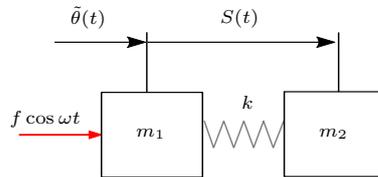


FIGURE C.1 – Modèle équivalent de l'absorbeur pendulaire centrifuge.

Les équations du mouvement de ce système s'écrivent

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{\tilde{\theta}} + m_2\ddot{S} = f \cos \omega t & (C.1) \\ m_2\ddot{\tilde{\theta}} + m_2\ddot{S} + kS = 0 & (C.2) \end{cases}$$

Le système algébro-différentiel du premier ordre se construit facilement en introduisant des variables additionnelles selon la procédure décrite en section 4.4.1.1. Il s'écrit :

$$\begin{array}{rcll} \ddot{\tilde{\theta}} & - & A_{\tilde{\theta}} & = 0 \\ \dot{S} & - & V_S & = 0 \\ V_S & - & A_S & = 0 \\ & - & f \cos \omega t & - 2A_{\tilde{\theta}} + A_S = 0 \\ & - & & + A_{\tilde{\theta}} + A_S + S = 0 \end{array} \quad (C.3)$$

$\underbrace{\quad}_{m(\dot{u})} \quad \underbrace{\quad}_{c} \quad \underbrace{\quad}_{l(u)}$

Où l'on a posé $m_1 = m_2 = k = 1$. Le vecteur des inconnues s'écrit quant à lui :

$$\mathbf{u} = [\dot{\theta}, S, V_S, A_{\bar{\theta}}, A_S]^\top. \quad (\text{C.4})$$

On précise que, dans l'absolu, la première équation différentielle de (C.3) n'est pas nécessaire car $\dot{\theta}$ n'apparaît pas des équations dynamiques (C.1) et (C.2). Ici, on choisit d'implémenter le système algébro-différentiel sous la forme de (C.3) pour se placer dans les mêmes conditions que celles de la section 4.4.1.1. Pour l'exemple, on représente \mathbf{u} par la série de Fourier tronquée à un harmonique suivante :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{x}^{(c)} \cos \omega t + \mathbf{x}^{(s)} \sin \omega t, \quad (\text{C.5})$$

Les termes constants sont affectés de l'exposant (0), les coefficients de $\cos \omega t$ sont eux repérés par l'exposant (c) et enfin les coefficients de $\sin \omega t$ sont désignés par l'exposant (s).

En substituant (C.5) dans (C.3) puis on procédant à l'équilibrage harmonique (*cf.* section 4.1), on construit un système purement algébrique qui s'écrit :

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{U}}) = \left\{ \begin{array}{llll} - & A_{\bar{\theta}}^{(0)} & & = 0 \\ - & A_{\bar{\theta}}^{(c)} & + & \omega \dot{\theta}^{(s)} = 0 \\ - & A_{\bar{\theta}}^{(s)} & - & \omega \dot{\theta}^{(c)} = 0 \\ - & V_S^{(0)} & & = 0 \\ - & V_S^{(c)} & + & \omega S^{(s)} = 0 \\ - & V_S^{(s)} & - & \omega S^{(c)} = 0 \\ - & A_S^{(0)} & & = 0 \\ - & A_S^{(c)} & + & \omega V_S^{(s)} = 0, \\ - & A_S^{(s)} & - & \omega V_S^{(c)} = 0 \\ -f + & 2A_{\bar{\theta}}^{(0)} + A_S^{(0)} + c\dot{\theta}^{(0)} & & = 0 \\ & 2A_{\bar{\theta}}^{(c)} + A_S^{(c)} & & = 0 \\ & 2A_{\bar{\theta}}^{(s)} + A_S^{(s)} & & = 0 \\ & A_{\bar{\theta}}^{(0)} + A_S^{(0)} + S^{(0)} & & = 0 \\ & A_{\bar{\theta}}^{(c)} + A_S^{(c)} + S^{(c)} & & = 0 \\ & A_{\bar{\theta}}^{(s)} + A_S^{(s)} + S^{(s)} & & = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{C}_0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{L}_0(\bar{\mathbf{U}})} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}})}$

et le vecteur des inconnues est :

$$\bar{\mathbf{U}} = [\dot{\theta}^{(0)}, \dot{\theta}^{(c)}, \dot{\theta}^{(s)}, S^{(0)}, S^{(c)}, S^{(s)}, V_S^{(0)}, V_S^{(c)}, V_S^{(s)}, A_{\bar{\theta}}^{(0)}, A_{\bar{\theta}}^{(c)}, A_{\bar{\theta}}^{(s)}, A_S^{(0)}, A_S^{(c)}, A_S^{(s)}, \omega]^\top \quad (\text{C.7})$$

On propose dans un premier temps de ne pas tenir compte du terme $c\dot{\theta}^{(0)}$ surligné en rouge dans le système (C.6). On constate que la première inconnue de $\bar{\mathbf{U}}$, c'est-à-dire $\dot{\theta}^{(0)}$ n'apparaît dans aucune équation. Cela vient de l'opérateur $\mathbf{m}(\dot{\mathbf{u}})$ qui, en dérivant (C.5), a logiquement négligé les termes constants, c'est-à-dire ceux affectés de l'exposant (0). De plus comme nous n'avons pas placé d'amortisseur entre le repère galiléen et la masse m_1 (*cf.* figure C.1), $\dot{\theta}^{(0)}$ n'intervient donc à aucun moment dans le système (C.6). Ceci est très problématique car la matrice jacobienne (*cf.* section 4.2.2) de ce système comporte alors une colonne entière de zéros et est

donc singulière. En l'état il est impossible de résoudre (C.6).

La solution consiste à introduire un terme de dissipation c . Cela semble paradoxale car, pour étudier le système conservatif on propose d'introduire de l'amortissement. C'est cependant ce qui permet de résoudre le système. L'astuce consiste à imaginer qu'un amortisseur est bel et bien présent entre la masse m_1 et le repère galiléen et à n'introduire le terme visqueux (le terme rouge) que dans l'équation algébrique de (C.6) correspondant à l'harmonique 0 de l'équation dynamique (C.1). Ainsi les solutions oscillantes ne sont pas affectées par cet amortissement et l'étude du système conservatif est rendue possible.

Annexe D

Matrices de l'absorbeur pendulaire centrifuge dans la chaîne cinématique

On donne dans cette annexe les expressions des sous matrices qui composent les matrices de masse M (cf. (D.1)), raideur K , amortissement C et le vecteur des effort internes non linéaires f_{nl} (cf. (D.2)) de l'APC en interaction avec la chaîne cinématique abordé. (cf. section 4.4.2, chapitre 4).

$$M = \begin{bmatrix} M_v + M_{vp_i} + M_{vp_{nl}} & M_{pv_{nl}} \\ M_{pv_{nl}}^T & M_{p_i} + M_{p_{nl}} \end{bmatrix}_{(M+N) \times (M+N)} \quad (D.1)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+N) \times (M+N)}, C = \begin{bmatrix} C_v & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix}_{(M+N) \times (M+N)}, f_{nl} = \begin{bmatrix} f_{nl_1} \\ f_{nl_{p2}} \end{bmatrix}_{(M+N) \times 1} \quad (D.2)$$

Les M premières lignes de ces matrices correspondent aux différents termes des M équations dynamiques de la chaîne de transmission alors que les N dernières contiennent les termes des N équations des pendules. Les sous matrices qui les composent sont données ci-après.

$$M_v = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_M \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (D.3)$$

$$M_{vp_i} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & J_c + \sum_{i=1}^N I_i & \\ & & & \ddots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}_{M \times M} \quad \leftarrow m^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad (D.4)$$

↑
 $m^{\text{ème}}$ colonne

$$\mathbf{M}_{vpnl} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & \sum_{i=1}^N m_i X_i & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}_{M \times M} \quad \leftarrow m^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad (\text{D.5})$$

\uparrow
 $m^{\text{ème}} \text{ colonne}$

$$\mathbf{M}_{pvnl} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ m_1 Z_1 + I_1 \Gamma_1 & \cdots & m_N Z_N + I_N \Gamma_N \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{M \times N} \quad \leftarrow m^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ \vdots & -k_3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & k_j + k_{j+1} & -k_{j+1} \\ & & & -k_{j+1} & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \ddots & k_M \end{bmatrix}_{M \times M} \quad \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad (\text{D.7})$$

\uparrow
 $j^{\text{ème}} \text{ colonne}$

$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & & \\ \vdots & -c_3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & c_j + k_{j+1} & -c_{j+1} \\ & & & -c_{j+1} & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \ddots & c_M \end{bmatrix}_{M \times M} \quad \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne} \quad (\text{D.8})$$

\uparrow
 $j^{\text{ème}} \text{ colonne}$

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} C_{p1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{pN} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (\text{D.9})$$

$$\mathbf{f}_{nl1} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \left(m_i \left(\frac{dX_i}{dS_i} \dot{S}_i (\Omega + \dot{\theta}_m) + \frac{dZ_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) + I_i \frac{d\Gamma_i}{dS_i} \dot{S}_i^2 \right) \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \leftarrow m^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]_{M \times 1} \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{f}_{nl_{p2}} = \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \left(m_1 \frac{dX_1}{dS_1} (\Omega + \dot{\theta}_m)^2 - I_1 \frac{d\Gamma_1^2}{dS_1} \dot{S}_1^2 \right) \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} \left(m_N \frac{dX_N}{dS_N} (\Omega + \dot{\theta}_m)^2 - I_N \frac{d\Gamma_N^2}{dS_N} \dot{S}_N^2 \right) \end{array} \right]_{N \times 1} \quad (\text{D.11})$$

Annexe E

Systeme d'equations pour le calcul des geometries fonctionnelles de l'absorbeur pendulaire

Le calcul des geometries fonctionnelles de l'absorbeur pendulaire necessite la resolution d'un systeme d'equations differentielles de la forme :

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (\text{E.1})$$

Les expressions de $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sont ecrites ci-dessous.

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{Z}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha' & 0 & 0 & 0 \\ \alpha' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{Z}_{22} = [\mathbf{W}_1 \ \mathbf{W}_2] \quad (\text{E.4})$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} r_1 (\alpha' - \Omega_1) \sin \varphi_1 - \Omega_1 r_1 \sin (\beta_1 + \varphi_1) & 0 \\ r_1 (\Omega_1 - \alpha') \cos \varphi_1 + \Omega_1 r_1 \cos (\beta_1 + \varphi_1) & 0 \\ 0 & r_2 (\alpha' - \Omega_2) \sin \varphi_2 - \Omega_2 r_2 \sin (\beta_2 + \varphi_2) \\ 0 & r_2 (\Omega_2 - \alpha') \cos \varphi_2 + \Omega_2 r_2 \cos (\beta_2 + \varphi_2) \\ -\Omega_1 r_1 \sin (\beta_1 + \varphi_1) & 0 \\ \Omega_1 r_1 \cos (\beta_1 + \varphi_1) & 0 \\ 0 & -\Omega_2 r_2 \sin (\beta_2 + \varphi_2) \\ 0 & \Omega_2 r_2 \cos (\beta_2 + \varphi_2) \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} r_1 (\cos (\beta_1 + \varphi_1) + \cos \varphi_1) & 0 \\ r_1 (\sin (\beta_1 + \varphi_1) + \sin \varphi_1) & 0 \\ 0 & r_2 (\cos (\beta_2 + \varphi_2) + \cos \varphi_2) \\ 0 & r_2 (\sin (\beta_2 + \varphi_2) + \sin \varphi_2) \\ r_1 \cos (\beta_1 + \varphi_1) & 0 \\ r_1 \sin (\beta_1 + \varphi_1) & 0 \\ 0 & r_2 \cos (\beta_2 + \varphi_2) \\ 0 & r_2 \sin (\beta_2 + \varphi_2) \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -V_{X_1} \\ -V_{X_2} \\ -V_{Y_1} \\ -V_{Y_2} \\ -\alpha'' (Y_1 - Y_{10} + R \cos \varphi + r_1 \cos \varphi_1) - \alpha' (R' \cos \varphi - \varphi' R \sin \varphi) - \beta' \sin \beta \\ -\alpha'' (X_{10} - X_1 + R \sin \varphi + r_1 \sin \varphi_1) - \alpha' (R' \sin \varphi + \varphi' R \cos \varphi) + \beta' \cos \beta \\ -\alpha'' (Y_2 - Y_{20} + R \cos \varphi + r_2 \cos \varphi_2) - \alpha' (R' \cos \varphi - \varphi' R \sin \varphi) - \beta' \sin \beta \\ \alpha'' (X_{20} + X_2 - R \sin \varphi - r_2 \sin \varphi_2) - \alpha' (R' \sin \varphi + \varphi' R \cos \varphi) + \beta' \cos \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

CALCUL ET OPTIMISATION D'ABSORBEURS PENDULAIRES DANS UNE CHAÎNE DE TRACTION AUTOMOBILE

RESUME : Dans le cadre de la réduction des émissions polluantes et de la consommation des véhicules à moteur thermique, les constructeurs cherchent à diminuer la cylindrée et la vitesse de rotation des moteurs de chaînes cinématiques. Ces évolutions conduisent, du fait du principe même du moteur à pistons, à une augmentation significative des irrégularités de rotation de celui-ci. Depuis quelques années, le système à pendule est apparu dans les groupes moto-propulseurs automobiles. Il agit à la manière d'un batteur, accordé sur l'ordre d'allumage du moteur thermique, et permet ainsi une réduction des vibrations. Cependant, les fortes non-linéarités intrinsèques aux pendules provoquent un désaccord du système à grande amplitude synonyme de perte de performances. Cette thèse a pour but d'améliorer la compréhension et le comportement du système en interaction avec la chaîne de traction automobile. En renfort des traditionnelles méthodes d'intégrations temporelles, le système non linéaire est résolu par la méthode asymptotique numérique couplée à la méthode de l'équilibrage harmonique. Une méthode originale de continuation d'antirésonance est également proposée ainsi que des règles de conception issues de développements analytiques. La validation par l'expérience montre une amélioration significative des performances du système.

Mots clés : Pendule centrifuge, continuation d'antirésonance, méthode asymptotique numérique, méthode de l'équilibrage harmonique.

SIMULATION AND OPTIMISATION OF PENDULAR ABSORBERS FOR AUTOMOTIVE POWERTRAIN

ABSTRACT: In the context of the reduction of polluting emissions and fuel consumption of thermal engines of vehicles, automotive manufacturers try to reduce cylinder capacity and engine speed of rotation. These evolutions lead to significant increase of irregularities of rotation. The so-called centrifugal pendulum vibration absorber is a recent solution of mitigation of torsional vibrations in automotive powertrains. It acts as a mass damper tuned on the firing order of the engine and allows reduction of vibrations. However, strong non-linearities intrinsic to pendular systems cause a detuning of the device at large amplitude of motion resulting in a loss of performances. This thesis aims to improve the understanding and the behavior of the system in interaction with an automotive driveline. In support of classic time integration procedures, the nonlinear system is solved through the asymptotic numerical method coupled to the harmonic balance method. In addition, an original continuation of antiresonance method is proposed as well as some design rules derived from analytical developments. Experimental validation shows a significant enhancement of performances of the system.

Keywords : Centrifugal pendulum vibration absorber, continuation of antiresonance, asymptotic numerical method, harmonic balance method.