HAL
open science

Nucléation et propagation de fissures en conditions anisotropes

Thomas Carlioz

To cite this version:

Thomas Carlioz. Nucléation et propagation de fissures en conditions anisotropes. Matériaux. Université Paris-Est, 2017. Français. NNT : 2017PESC1247 . tel-01997730

HAL Id: tel-01997730

https://pastel.hal.science/tel-01997730v1

Submitted on 29 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

École doctorale SIE

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

de l'Université Paris-Est

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Thomas CARLIOZ

intitulée

Nucléation et propagation de fissures en conditions anisotropes

soutenue à Champ sur Marne le 14 décembre 2017
devant le jury composé de

M. Djimédo KONDO,	*Rapporteur*	Université Pierre et Marie Curie
M. Samir MAGHOUS,	*Rapporteur*	Federal University of Rio Grande do Sul
M. Laurent JEANNIN,	*Examinateur*	GDF-Suez E & P
M. Dominique LEGUILLON,	*Examinateur*	Université Pierre et Marie Curie
M. Darius SEYEDI,	*Examinateur*	ANDRA
M. Luc DORMIEUX,	*Directeur*	École Nationale des Ponts et Chaussées

École Nationale des Ponts et Chaussées
Laboratoire Navier
UMR 8205, 6-8 avenue Blaise Pascal Champs sur Marne, France

Résumé

En partant d'une problématique industrielle correspondant à la naissance de fissures lors de l'excavation d'un tunnel dans un matériau argileux, nous proposons de nous intéresser à un sujet plus large qui est celui de la nucléation d'une fissure de dimension macroscopique. Ainsi, des résultats généraux et théoriques sont établis tout au long de ce mémoire. Ces derniers sont toutefois utilisés pour proposer une interprétation aux faciès de fissuration observés lors de l'excavation de galeries de stockage à grande profondeur.

Dans un premier temps, un modèle géométrique idéalisé pour des fissures est justifié. Cette étude préalable permet à la fois d'acter la nature fermée des fissures susceptibles de nucléer ainsi que d'utiliser le critère mixte en statuant sur le bienfondé d'une étude bidimensionnelle équivalente. En précisant la notion de longueur de nucléation stable et en s'inspirant des outils classiques de la mécanique linéaire de la rupture, nous établissons dans un second temps notre propre critère de nucléation. Pour ce faire, nous proposons, grâce à des modélisations micromécaniques, de revisiter l'approche thermodynamique usuelle dans un cadre adiabatique afin d'être davantage en accord avec la brutalité du phénomène étudié. Par la suite, nous mettons aux points différentes méthodes permettant d'utiliser le critère suggéré. Enfin, le critère est mis en œuvre dans le cadre de la problématique industrielle initiale pour essayer de donner une justification à l'anisotropie des géométries des fissures observées, et ce, en prenant en compte les différentes directions de forage de l'ouvrage.

Dans un deuxième temps, nous proposons de nous intéresser, de manière plus prospective, aux problématiques liées aux modèles locaux d'endommagement. Une attention particulière est accordée à la notion de stabilité des états d'équilibre. Ainsi, une adaptation du critère de Hill est proposée et des différences quantitatives sont soulignées lorsqu'un cadre adiabatique, nous paraissant plus justifié, est pris en compte. Enfin, le problème de la localisation de l'endommagement dans un problème unidimensionnel est abordé.

Abstract

Starting from an industrial issue that is cracks onset when excavating a tunnel, this work aims at giving new insights into a more general problematic which is the initiation of macroscopic cracks. Thus, general and theoretical results are established. Nevertheless, they are applied in order to give some explanations to the excavation-induced fractures observed around the deep geological repository.

To begin with, an idealised geometrical model is detailed and justified. Thanks to this preliminary work, we establish that the cracks that should be taken into account are closed ones. In addition we show that it's possible for small cracks length to work on an equivalent bidimensionnal problem. This last result allows us to apply the mixed criteria.

After giving the definition of a stable crack initiation length we define our own criteria to predict cracks onset. In order to do so and in order to be more in adequacy with the caracter brutal of a crack initiation, we offer through a micromecanic modelisation to deploy the usual thermodynamic approach in an adiabatic context. Different methods to compute the key quantity which is the incremental energy released rate are then built. Finally, the criteria is applied to give some justifications to the anisotropic geometry of the excavation-induced fractures.

In a second part of this work, we focuse on the problematics tied to the local damage models. For instance, the notion of stability for an equilibrium state is discussed. Hill's stability critera is adapted to damage problems. Once again, it seems that an adiabatic context is more suited and the differences implied are emphasized. To conclude, we offer to investigate the localisation issue in one dimensionnal problems.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Luc qui m'a fait confiance en me prenant sous son aile pendant trois ans. L'objectif annoncé était ambitieux. Cette thèse n'a pas toujours été un long fleuve tranquille. Luc n'a cependant jamais manqué de me faire rebondir après chaque coup dur et a toujours su trouver les mots justes et me proposer des pistes stimulantes pour m'enthousiasmer à nouveau. Alors que je sortais de deux années relativement pauvres sur le plan scientifique, Luc m'a fait découvrir un monde magnifique où la rigueur des mathématiques s'allie avec la beauté de la physique. Il n'a cessé d'attiser ma curiosité en me proposant des challenges intellectuels et scientifiques qui m'ont passionné de bout en bout. Au-delà bien sûr des sciences, je retiens également nos nombreuses discussions sur ce que j'aime appeler le monde des adultes, lesquelles ont été tout autant enrichissantes. Merci pour tout Luc, et, pour reprendre ton expression, j'espère sincèrement que nous aurons à nouveau l'occasion de noircir des tableaux ensemble.

Je tiens à remercier mes deux rapporteurs, Djimédo Kondo et Samir Maghous, pour leur lecture minutieuse et pour les deux rapports qu'ils ont rédigés. Plus particulièrement, merci à Samir d'avoir fait le déplacement depuis le Brésil et d'avoir accepté cette charge de travail supplémentaire alors qu'il était déjà engagé sur un autre mémoire. Merci à Djimédo pour les nombreux échanges et réunions que nous avons eus tout au long de cette belle aventure scientifique. Merci également à Darius Seyedi et à Laurent Jeannin d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Enfin, un immense remerciement au Professeur Dominique Leguillon pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Ses travaux auront été une source d'inspiration permanente pour moi et je n'aurais pas pu rêver meilleur président.

Je souhaite également remercier les différents membres de l'équipe multi-échelles. Merci à Eric d'avoir été notre compagnon de maux de crâne (causés en partie par les fameux tableaux noircis mais pas seulement...). Merci à Patrick de m'avoir introduit à l'équipe multi-échelles et de m'avoir suggéré d'aller voir Luc lorsque je cherchais un sujet de thèse. Nos discussions vont me manquer et, promis, la prochaine fois, je me renseignerai ! Merci à Ghazi d'avoir été mon compagnon de « galère », de m'avoir proposé de travailler avec lui sur un sujet passionnant, d'avoir toujours répondu présent lorsque j'avais un problème et pour toutes les fois où il m'a offert un tour dans sa « Rolls-Royce ». Un remerciement tout particulier pour la nounou du service, à savoir mon bon Denis, sans lequel cette équipe ne pourrait pas fonctionner. J'ai régulièrement dû venir puiser dans ses excellents conseils et chercher du réconfort lorsque j'étais « blasé ». Tous mes remerciements vont également à Camille, la montagnarde qui me rappelait mes racines. Une bonne discussion sur le matériel de ski ou sur le Pop-plage ça fait du bien ! Courage à elle pour les mois à venir ; je croise les doigts pour qu'elle puisse rechausser les skis la saison prochaine. Merci également à Sébastien : j'espère que nous aurons l'occasion de continuer nos discussions sur les livres de cape et d'épée. Merci à Michel pour avoir été tout d'abord mon professeur et pour avoir soutenu mon dossier ces derniers temps. Merci à Gwendal le quincailler du couloir et le roi des palets bretons. Je ne perds pas espoir qu'on puisse faire notre week-end ski et/ou notre tournoi de beach volley à l'occasion.

Merci à mes co-bureaux : Ababacar, Stein, Ihab et Jean (elle est pour toi Denis celle-là !) qui ont égayé mes journées à des moments différents de mon parcours. Des remerciements plus spécifiques à Jérémy, notre Gummy Bear, membre d'un jour de l'équipe des bikers, qui m'a également orienté vers l'équipe multi-échelles. J'ai toujours extrêmement apprécié sa pédagogie, son humilité, sa rigueur et la profondeur de nos discussions (que je souhaite encore nombreuses). William est donc entre de bonnes mains et dispose d'un bon modèle à prendre en exemple. Merci à Joffrey, le petit dernier de l'équipe, grâce auquel j'ai presque vu la naissance d'un mème. Je croise les doigts pour qu'il puisse garder sa fraicheur encore

pendant 1 an et demi ! Enfin, merci à Hugues, notre rugbyman, notre camarade de super séries (à quand la prochaine ?), bref notre pote de bbs. Je lui souhaite bon courage pour la rédaction de son mémoire. Je n'oublie pas François qui, je l'espère, s'est maintenant amélioré en Tchèque. Je suis persuadé que son nouveau rôle de papa lui va comme un gant.

Mes remerciements vont aussi à ma famille, mon frère Laurent, sa femme Reine et ma mère sur lesquels j'ai pu toujours compter et qui m'ont apporté un soutien inconditionnel. Je chéris profondément le lien particulier qui nous unit. Une pensée à mon père, qui, j'en suis sûr, nous regarde de là où il est. J'espère que le travail accompli l'a rendu fier.

Enfin, un immense merci à ma petite Agata, qui aura été en première ligne pendant ces trois années pour entendre mes jérémiades le soir en rentrant à la maison. Mille fois merci pour ton soutien et ta patience qui auront été essentiels pour moi. J'ai hâte de découvrir cette nouvelle phase de notre vie dont je sais d'avance que la destination sera heureuse.

Table des matières

Table des matières **5**

Liste des symboles **9**

1 Motivations du sujet **11**
1.1 Contextualisation du sujet 12
1.2 Critère mixte 15
1.3 Endommagement local et modèles à gradient d'endommagement 17
1.4 Organisation du manuscrit 20

2 Analyse des contraintes au voisinage du front de taille **23**
2.1 Modélisation géométrique du problème 24
2.2 Justification d'une analyse bidimensionnelle 35
2.3 Singularités de contrainte en anisotrope 46
2.4 Conclusions et modèle de fissure 63

3 Utilisation d'un critère mixte **67**
3.1 Problème bidimensionnel et énergie potentielle 68
3.2 Principe de la zone de raccord 73
3.3 Existence de la zone de raccord en thermique 80
3.4 Existence de la zone de raccord en mécanique 93
3.5 Application de la méthode et détermination de la longueur d'initiation 99

4 Stabilité de la nucléation et conséquences pour les applications **103**
4.1 Longueur de nucléation et description géométrique d'une fissure 105
4.2 Thermodynamique à l'échelle microscopique 107
4.3 Représentation tridimensionnelle d'un objet fissure 108
4.4 Thermodynamique à l'échelle macroscopique 118
4.5 Un critère de nucléation purement énergétique 126
4.6 Taux de restitution de l'énergie en milieu infini 131

5 Nucléation et couplage thermo-poro-élastique **145**
5.1 Introduction 146
5.2 Équations d'état thermo-poro-élastiques 147
5.3 Adiabaticité macroscopique 149
5.4 Représentation tridimensionnelle d'une fissure 152
5.5 Thermodynamique de la nucléation 158
5.6 Autres évolutions 159

6 Analyse duale et taux de restitution d'énergie **163**
6.1 Introduction . . . 164
6.2 Principe de l'analyse duale . . . 164
6.3 Approches éléments finis en contraintes . . . 166
6.4 Méthode basée sur les vecteurs contraintes par arêtes . . . 175
6.5 Bilan des différents procédés et application de la méthode . . . 187

7 Application du critère énergétique à l'excavation d'un tunnel et aux fissures en chevron **193**
7.1 Différentes méthodes permettant de manipuler le critère énergétique . . . 194
7.2 Contexte axisymétrique . . . 195
7.3 Influence de l'anisotropie de contraintes . . . 201
7.4 Une influence de l'anisotropie du matériau . . . 206
7.5 Conclusion . . . 212

8 Endommagement et homogénéisation des milieux quasi-périodique **213**
8.1 Motivation de l'approche . . . 214
8.2 La méthode des développements asymptotiques . . . 214
8.3 Densité volumique macroscopique d'énergie élastique . . . 218
8.4 De l'échelle microscopique vers un modèle macroscopique non local . . . 221
8.5 Le premier ordre de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique . 224
8.6 Un modèle à gradient d'endommagement basé sur la microméchanique . . . 227
8.7 Conclusion . . . 230

9 Stabilité et localisation pour un comportement endommageant **233**
9.1 Introduction . . . 234
9.2 Critère de Hill . . . 234
9.3 Adaptation du critère de Hill à une évolution adiabatique . . . 238
9.4 Considérations générales pour l'endommagement d'un barreau unidimensionnel 243
9.5 Construction d'un exercice académique . . . 247
9.6 Localisation et dynamique . . . 263

Conclusion **265**

A Singularités et analyse complexe **271**
A.1 Racines du polynôme caractéristique P . . . 272
A.2 Degrés de singularité duaux . . . 272
A.3 Critère mixte de Leguillon et longueur interne . . . 274
A.4 Formule d'Irwin anisotrope . . . 275
A.5 Développement asymptotique de la température au voisinage du coin d'un isolant thermique de forme carré . . . 278
A.6 Transformation conforme en mécanique avec des séries de Laurent tronquées . 281
A.7 Taux de restitution d'énergie et potentiels complexes . . . 287

B Thermo-poro-élasticité **291**
B.1 Equations d'état de la thermo-poro-élasticité . . . 292
B.2 Énergie interne en conditions adiabatiques non-drainées . . . 296
B.3 Symétrie des liaisons internes . . . 297

C Endommagement **299**
C.1 Relations d'Euler 300
C.2 Calculs des contraintes macroscopiques et des hypercontraintes 300
C.3 Deux contre-exemples de non-localité 301

D Figures et tableaux **307**
D.1 Existence de la zone de raccord en mécanique 308
D.2 Éléments finis en contraintes 310
D.3 Excavation d'un tunnel et critère énergétique 311

Liste des figures **313**

Liste des tableaux **321**

Glossaire et liste des acronymes **323**

Bibliographie **329**

Liste des symboles

$\boldsymbol{\xi}$ Vecteur déplacements.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ Tenseur des déformations linéarisés.

$\boldsymbol{\sigma}$ Tenseur des contraintes de Cauchy.

T Champ de température.

K Module de compression isotrope.

λ Premier coefficient de Lamé.

μ Module de cisaillement.

E Module d'Young.

ν Coefficient de Poisson.

κ Constante de Kolosov égale à $3-4\nu$ en déformations planes et à $\frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contraintes planes.

ρ Masse volumique d'un matériau.

$\mathbb{C}$ Tenseur d'élasticité du $4^{\text{ème}}$ ordre.

$\mathbb{S}$ Tenseur de souplesse du $4^{\text{ème}}$ ordre.

E_c Énergie complémentaire d'un milieu pour un chargement donné.

E_c^f Énergie complémentaire du milieu fissuré pour un chargement donné.

E_c^0 Énergie complémentaire du milieu sain pour un chargement donné.

E_p Énergie potentielle d'un milieu pour un chargement donné.

E_p^f Énergie potentielle du milieu fissuré pour un chargement donné.

E_p^0 Énergie potentielle du milieu sain pour un chargement donné.

G Taux de restitution d'énergie ie quantité d'énergie potentielle relâchée par unité de longueur (2D) ou surface (3D) de fissure propagée ou nucléée.

G_{inc} Taux de restitution d'énergie incrémental ie quantité moyenne d'énergie potentielle relâchée par unité de longueur (2D) ou surface (3D) de fissure propagée ou nucléée.

G_c Taux critique d'énergie relâchée.

$G_c^\star$ Constante associée à une contribution matériau et à une contribution structure qui joue le rôle de taux critique d'énergie relâchée.

K_c Ténacité.

σ_c Contrainte critique.

N Module de Biot de la phase solide.

$\boldsymbol{B}$ Tenseur des coefficients de Biot.

p Pression de la phase liquide.

D Dissipation par unité de volume.

K Énergie cinétique.

U Énergie interne.

u Densité volumique d'énergie interne.

s Densité volumique d'entropie.

c Le produit de la température T^0 par c s'interprète comme une capacité calorifique à déformation nulle.

$\overset{\circ}{Q}$ Taux de chaleur reçu.

$\overset{\circ}{q}$ Taux de chaleur volumique reçu.

ϕ Fonction d'Airy.

z Affixe complexe associée au vecteur position en 2D et égale à $z = x + iy$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

φ Premier potentiel complexe relié à ϕ et de variable naturelle z.

ψ Second potentiel complexe relié à ϕ et de variable naturelle z.

ω Transformation conforme.

Φ Potentiel complexe antécédent du potentiel φ par le biais d'une transformation conforme ω.

Ψ Potentiel complexe antécédent du potentiel ψ par le biais d'une transformation conforme ω.

d Variable d'endommagement mesurant le niveau de dégradation du matériau pour un volume élémentaire donné.

$\mathbb{P}_k[x, y]$ Éspace des polynômes de deux indéterminés x et y de degré inférieur ou égal à k.

Chapitre 1

Motivations du sujet

Sommaire

1.1 Contextualisation du sujet 12
1.1.1 Industrie nucléaire française et stockage des déchets 12
1.1.2 Problématiques de fissuration des galeries 12
1.1.3 Objectifs du travail de doctorat 14
1.2 Critère mixte 15
1.2.1 Représentation géométrique 15
1.2.2 Le double critère 15
1.2.3 Longueur interne et développements asymptotiques raccordés 17
1.3 Endommagement local et modèles à gradient d'endommagement 17
1.3.1 Fissuration et endommagement 17
1.3.2 Les modèles locaux 17
1.3.3 Les bienfaits des méthodes régularisées 19
1.4 Organisation du manuscrit 20

1.1 Contextualisation du sujet

1.1.1 Industrie nucléaire française et stockage des déchets

L'industrie nucléaire française voit réellement le jour avec l'installation entre les années 1950 et 1970 de neufs réacteurs à uranium naturel graphite gaz. Aujourd'hui, avec plus d'une cinquantaine de réacteurs de différents niveaux de puissance répartis sur l'ensemble du territoire, le nucléaire représente $74,8\%$ de la production d'électricité française, s'inscrivant ainsi comme principale énergie produite et consommée en France. Cette source d'énergie produit des déchets radioactifs qui sont des substances pour lesquelles aucune utilisation ultérieure n'est prévue ou envisagée. Il existe également d'autres sources de production de déchets nucléaires telles que les hôpitaux, les universités et plusieurs activités liées à la défense. La diversité des produits utilisés ainsi que la nature différente des activités listées précédemment conduisent à distinguer plusieurs catégories de déchets. Ces derniers sont classés selon leur activité et leur période radioactive. Le niveau de radioactivité détermine l'importance des protections à mettre en place. Ainsi, un déchet sera qualifié d'une très faible, faible, moyenne ou haute activité. La période radioactive se caractérise en fonction des radionucléides contenus dans le déchet. Ce dernier portera la dénomination de "vie courte" s'il ne contient que des radionucléides de période inférieure à 31 ans et de "vie longue" s'il contient en quantité significative des radionucléides de période supérieure à 31 ans. Il existe, selon la catégorie à laquelle appartient un déchet nucléaire, plusieurs façons de le gérer : le tri, le traitement et le conditionnement, ainsi que l'entreposage et le stockage.

C'est l'Agence Nationale pour la gestion des Déchets Radioactifs (ANDRA) qui s'est vue confier, avec la loi du 28 juin 2006, la mission de rechercher des solutions de stockage pour les déchets radioactifs français de Faible Activité à Vie Longue (FAVL), de Haute Activité Vie Longue (HAVL) et de Moyenne Activité à Vie Longue (MAVL). Ces derniers n'ont en effet pas encore de solutions de gestion établies dans le cadre du Plan National de Gestion des Matières et Déchets Radioactifs. Pourtant, bien que les colis MAVL et HAVL ne représentent qu'une faible part des déchets radioactifs en volume (environ 3.2 % dont 0.2 % pour les Haute-Activité en 2010), ils concentrent la quasi-totalité de la radioactivité (plus de 99.9 % dont 96 % pour les Haute-Activité en 2010). Concernant les colis HAVL, l'ANDRA teste actuellement des ouvrages creusés dans les argiles du Callovo-Oxfordien (époque du Jurassique). Ce programme est désigné, par la loi de programme du 28 juin 2006 relative à la gestion durable des matières et déchets radioactifs, comme la solution de référence pour l'évacuation définitive des déchets MAVL et HAVL. Plus précisément, il s'agit de réaliser des galeries pour le stockage des colis radioactifs. Celles-ci sont forées à l'horizontal et à la perpendiculaire d'une galerie principale située à environ 500 mètres de profondeur. Ces galeries sont construites avec des méthodes d'excavation et soutènement différentes et leur diamètre varie de 0.75 m (pour les alvéoles de stockage) à 10 m (pour les galeries principales). Le matériau dans lequel elles sont creusées est une argilite possédant des caractéristiques physiques et chimiques lui permettant de limiter la migration des radionucléides.

1.1.2 Problématiques de fissuration des galeries

Pour des raisons de stabilité, les galeries sont forées selon l'une des deux directions de contraintes principales horizontales ($N155°E$ pour la direction associée à la contrainte horizontale majeure et $N65°E$ pour la mineure). Cependant, lors des essais préliminaires à échelle réelle, il a été mis en évidence dans le niveau le plus argileux une fracturation induite importante ayant une extension pouvant atteindre un diamètre, et ce, avant tout dépôt de colis radioactifs. Par exemple, les fissures, dites en chevron, apparaissant autour des gale-

ries principales sont très majoritairement des fissures de cisaillement et donc fermées. Cette information provenant d'observations issues d'expériences grandeur nature est primordiale puisque, nous le verrons, il est assez différent de traiter de fissures ouvertes ou de fissures fermées. De manière très documentée, le faciès de fissuration observé au laboratoire de Bure dépend fortement de l'orientation du forage. Une excavation réalisée dans la direction asso-

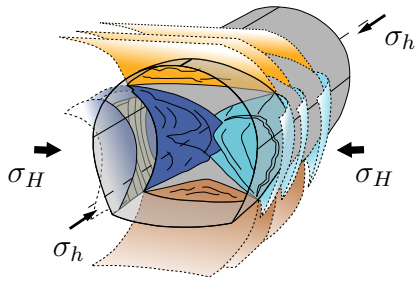

FIGURE 1.1 – Représentation schématique des fissures en chevrons observées lors de l'excavation d'une galerie principale dans la direction de contrainte principale horizontale mineure (figure ANDRA issue de ARMAND et collab. [2012])

ciée à la contrainte principale horizontale mineure conduit à un faciès de fissuration tel que schématisé Figure 1.1 (figure ANDRA issue de ARMAND et collab. [2012]). Celui-ci est fortement anisotrope dans le sens où il ne possède pas, à l'évidence, une propriété d'invariance en rotation par rapport à l'axe de forage. En effet, il est observé verticalement des fissures se développant en direction de l'amont du front de taille alors qu'horizontalement apparaissent plutôt des fissures en aval de la direction d'excavation. Cette différence marquante sous-tend que pour être à même de comprendre l'origine de la formation de ces fissures, il est nécessaire de prendre en compte un ou plusieurs éléments d'anisotropie. La première idée pouvant venir à l'esprit est que l'anisotropie des contraintes en présence initialement avant forage doit jouer un rôle déterminant dans la façon dont se déploient ces chevrons. Cependant, le

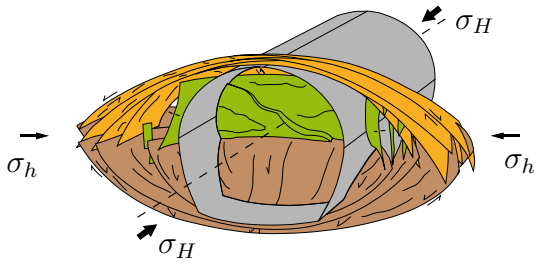

FIGURE 1.2 – Représentation schématique des fissures en chevrons observées lors de l'excavation d'une galerie principale dans la direction de contrainte principale horizontale majeure (figure ANDRA issue de ARMAND et collab. [2012])

cas d'une excavation dans le sens de la contrainte principale horizontale mineure, schématisé Figure 1.2 (figure ANDRA issue de ARMAND et collab. [2012]), réserve également son lot d'interrogations. Tout d'abord, comme annoncé, il s'avère que le faciès de fissuration obtenu est totalement différent de celui représenté Figure 1.1. Bien que la géométrie observée soit également anisotrope, elle se présente sous la forme d'une ellipse de grand axe horizontal tandis que la situation de forage précédente laissait entrevoir un profil s'apparentant davantage à une ellipse de grand axe vertical. De manière plus surprenante, les mesures réalisées *in situ* révèlent que pour la profondeur à laquelle l'excavation est réalisée, la contrainte principale verticale σ_v est sensiblement égale à la contrainte principale horizontale mineure :

$$|\sigma_v| = 12.7\,\text{MPa} \quad , \quad |\sigma_h| = 12.4\,\text{MPa} \quad , \quad |\sigma_H| = 16.2\,\text{MPa} \quad \Rightarrow \quad |\sigma_v| \simeq |\sigma_h| < |\sigma_H| \tag{1.1}$$

avec les notations σ_h et σ_H proposées Figures 1.1 et 1.2. Par conséquent, les contraintes en présence jouissent d'une propriété de symétrie de rotation par rapport à l'axe du forage. La géométrie de fissures observées ne pouvant s'expliquer que par la présence d'un mécanisme venant briser la symétrie en question, seule la nature anisotrope, au sens large, du matériau argileux est susceptible de détenir les clés de compréhension permettant de rendre compte de cette "ovalisation".

Ces fissures en chevron posent un certain nombre de problèmes. Tout d'abord, au delà de questions évidentes de stabilité et de durabilité de l'ouvrage, on peut redouter que la présence d'un réseau de fissuration de cette dimension crée des voies d'écoulements préférentielles. Si de l'eau venait à s'infiltrer dans ces fissures, on pourrait craindre qu'en passant à proximité des colis radioactifs un risque de contamination existe. Au titre de la sûreté, l'Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN) a considéré dans son avis n° 2011-AV-129 du 26 juillet 2011 que, s'agissant de la maîtrise des risques après la fermeture du stockage, l'ANDRA devra compléter ses connaissances relatives à l'endommagement de la roche autour des grands ouvrages et à leur scellement. La présence de ces fissures pose également problème au niveau industriel. En effet, la forte fissuration met à mal la faisabilité technique, pour un coût raisonnable, du tubage des alvéoles afin d'en garantir le soutènement.

1.1.3 Objectifs du travail de doctorat

Les phénomènes de fissuration illustrés précédemment mettent en évidence l'influence de la prise en compte de l'anisotropie du champ de contrainte et du comportement du matériau pour expliquer cette anisotropie induite. Il est important de noter que ces fissures en chevrons apparaissent de manière bien reproductible selon les géométries décrites ci-dessus. En d'autres termes, il ne s'agit à l'évidence pas d'occurrences isolées qui pourraient être attribuées à des défauts très localisés. Également, cela signifie que leur naissance et leur développement est bien le fruit d'un véritable mécanisme physique. De plus, ces fissures apparaissent après la phase d'excavation dans le laboratoire de Bure, et ce, en l'absence de tout dépôt de colis radioactif. Cela signifie que ces causes physiques sont purement mécaniques et ne trouvent donc pas leur origine dans un éventuel couplage avec des phénomènes d'irradiation ou de source de chaleur. Ainsi, il doit être possible de rendre compte de ces faciès de fissuration à partir des outils et des concepts de la mécanique de la rupture. Bien que la caractérisation *in situ* et la compréhension globale des phénomènes ont beaucoup progressé ces dernières années, les mécanismes mis en jeux sont toujours mal connus et un certain nombre de problématiques restent ouvertes. Le phénomène déclencheur à l'origine de l'amorçage de la fissuration est par exemple toujours au cœur des débats actuels. Également, il n'est pas clair si la dissymétrie de la fracturation observée doit être attribuée à l'effet de l'anisotropie de contraintes ou de l'anisotropie des caractéristiques mécaniques du sol argileux, et ce, pris séparément ou de manière couplée.

Si aujourd'hui ces considérations sont modélisées de manière incomplète, c'est que la théorie même de la nucléation en mécanique est encore à l'heure actuelle un sujet ouvert. En effet, si la problématique de la propagation quasi-statique d'une fissure est relativement bien maîtrisée, il en va tout autrement de la naissance d'une fissure macroscopiques qui met en jeu l'apparition brutale d'un objet de mesure finie (au sens non-infinitésimale). Ainsi, la nucléation de fissures occupe grandement la société scientifique. Des travaux majeurs sur le sujet ont vu récemment le jour et seront l'objet de la section suivante. Toutefois, leur adaptation aux conditions anisotropes devra être testée et un vrai travail de modélisation doit être entrepris pour pouvoir les appliquer au problèmes qui nous intéresse.

Ainsi, étant donné l'importance des enjeux sous-jacents, le travail de doctorat proposé

consiste à mener une étude sur la naissance des fissures en chevron. Comme mentionné précédemment, ce travail ne peut se faire sans qu'une réflexion théorique amont ne soit mise en place. Toutefois, le fil conducteur de ce manuscrit restera constamment la naissance de fissures fermées à l'occasion de l'excavation de galeries dans un milieu anisotrope. En d'autres termes, toute considération, aussi théorique soit-elle, n'aura que pour finalité d'être appliqué au cas très concret de la problématique industrielle rencontrée par l'ANDRA. Enfin, un second point d'attention est que le dépôt de colis radioactifs entrainera inéluctablement une élévation de température au sein des galeries de stockage. Ce dégagement de chaleur aura pour effet d'augmenter la pression du liquide interstitiel présent dans le sol. Par conséquent, il est légitime de se demander si, en stockant des déchets radioactifs, les fissures en chevron déjà en place ne pourraient pas de nouveau propager ou même si de nouvelles fissures ne pourraient pas nucléer. Cette problématique très intéressante ne sera malheureusement pas traitée en tant que telle dans ce manuscrit par faute de temps. Cependant, un certain nombre d'outils théoriques indispensables pour aborder ce sujet, comme l'approche thermodynamique de la nucléation dans un milieu poreux, ont été mis en place et seront détaillés dans ce travail.

Comme mentionné précédemment, le domaine de la naissance des fissures fait partie des enjeux majeurs des recherches actuelles. Par conséquent, il existe d'ores et déjà un certain nombre de modèles visant à rendre compte de ce phénomène. Cependant, il reste à les éprouver sur le problème considéré et à voir s'ils sont capables d'incorporer et de rendre compte d'un certain nombre d'éléments anisotropes. En particulier, deux approches majeures retiennent notre attention.

1.2 Critère mixte

1.2.1 Représentation géométrique

Une première façon d'aborder la thématique de la nucléation est celle proposée par Leguillon [2002]. Tout d'abord, dans cette approche, une fissure est représentée comme composée localement de deux surfaces confondues dans la description géométrique mais animées de cinématiques différentes. Des discontinuités de déplacements sont donc permises. Bien entendu, une condition de non pénétration doit être vérifiée. Si $\mathcal{F}$ est la représentation géométrique de la fissure, alors en un point $\boldsymbol{x}$ appartenant à cette surface :

$$[\![\boldsymbol{\xi}]\!].\boldsymbol{n} \geq 0 \tag{1.2}$$

où $[\![\boldsymbol{\xi}]\!]$ est le saut du champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ au travers de la surface de discontinuité $\mathcal{F}$ au point considéré $\boldsymbol{x}$ de normal $\boldsymbol{n}$. Avec ces notations, le saut de déplacement s'exprime comme :

$$[\![\boldsymbol{\xi}]\!] = \lim_{\lambda \to 0^+} \left(\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{n}\right) - \boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{n}\right)\right) \tag{1.3}$$

Cette précision quant à la modélisation d'une fissure est importante puisqu'elle constitue une première différence majeure entre l'approche ici sur le point d'être détaillée et la seconde qui sera présentée dans la prochaine section. Ainsi, la fissure telle que considérée par D. Leguillon est un objet plat de volume nul, analogue aux fissures de Griffith.

1.2.2 Le double critère

Le double critère, ou critère mixte, proposé par D. Leguillon cherche à statuer sur la possibilité de nucléation d'une fissure à partir d'un site préférentiel préalablement identifié. Pour ce faire, deux critères usuels de la mécanique linéaire de la rupture sont combinés afin

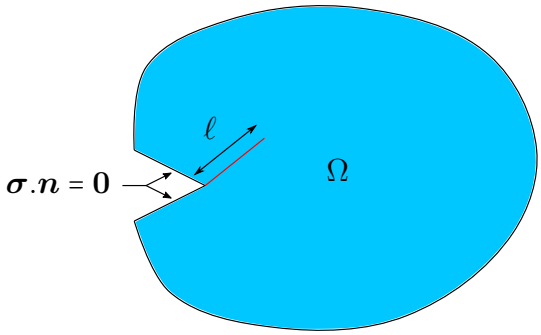

FIGURE 1.3 – Exemple de fissure prenant naissance à partir d'un coin anguleux ouvert libre de contraintes

de palier les défauts de chacun. Supposons pour simplifier qu'il est examiné la possibilité de nucléation d'une fissure paramétrée uniquement par une certaine variable ℓ, caractérisant son extension, à partir par exemple d'un coin anguleux tel que décrit Figure 1.3. Pour pouvoir mettre en œuvre le critère, deux situations doivent être considérées :

— Une situation non fissurée, dite saine, d'énergie potentielle E_p^0

— Une situation où une fissure d'extension ℓ est apparue. L'énergie potentielle correspondante et calculée pour un niveau de chargement identique à celui considéré dans la situation saine est cette fois-ci notée E_p^f.

Une première quantité à considérer est la différence d'énergie potentielle existant entre ces deux situations $\Delta E_p = E_p^f - E_p^0$. Plus précisément, un taux de restitution d'énergie dit "incrémental" et noté G_{inc}, est introduit :

$$G_{inc} = -\frac{\Delta E_p}{\ell} \tag{1.4}$$

La spécification "incrémental" sert à différencier cette quantité de la notion de taux de restitution d'énergie, notée simplement G et égale à $-\frac{\partial E_p}{\partial \ell}$, figurant par exemple dans la formule d'Irwin et utilisée classiquement pour la propagation d'une fissure (voir IRWIN [1957]). Ces deux quantités sont bien entendues reliées l'une à l'autre par certaines propriétés et celles-ci feront entre autres l'objet du Chapitre 4. Enfin, si σ est une quantité caractéristique du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ régnant dans la situation saine, comme par exemple la composante de traction en une facette élémentaire située en un point donné, alors le critère mixte stipule qu'il y aura nucléation à partir du site considéré si et seulement si il existe une certaine longueur ℓ_0 telle que :

$$\begin{cases} \forall \ell \in [0, \ell_0] \quad : \quad \sigma(\ell) \geq \sigma_c \\ G_{inc}(\ell_0) = -\dfrac{\Delta E_p}{\ell_0} \geq G_c \end{cases} \tag{1.5}$$

Il est assez facile de se rendre compte que cette formulation permet à la fois de déterminer la longueur de nucléation ℓ_0 ainsi que le chargement critique permettant l'initiation de cette fissure. Le double critère a été éprouvé sur de nombreux cas expérimentaux avec succès (voir par exemple LEGUILLON et YOSIBASH [2003] ou QUESADA et collab. [2009]). L'un de ses avantages est que l'ensemble des objets auxquels il fait appel sont accessibles via des calculs reposant sur la mécanique linéaire classique. Par conséquent, en plus de rendre sa mise en œuvre, si ce n'est facile, au moins très accessible, il est possible d'expliciter la dépendance de chacune de ces quantités vis à vis des différents paramètres de chargement, limitant ainsi considérablement le nombre de calculs devant être effectués pour déterminer le précieux ℓ_0 ainsi que le chargement critique.

1.2.3 Longueur interne et développements asymptotiques raccordés

Un autre avantage du critère mixte proposé par D. Leguillon est qu'il permet d'établir une longueur interne permettant d'estimer à l'avance l'ordre de grandeur de la fissure qui sera nucléée. En effet, il est montré en Annexe A.3 qu'il est possible d'anticiper une fissure d'extension ℓ caractérisée par :

$$\ell \sim \frac{EG_c}{{\sigma_c}^2} \tag{1.6}$$

où E est le module d'Young du matériau considéré. La démonstration proposée repose sur les développements asymptotiques raccordés introduites par Leguillon [1989]. Cette méthode permet d'expliciter de manière très astucieuse la forme que prend l'objet G_{inc} au voisinage d'une singularité géométrique. A nouveau, l'intérêt d'une telle opération est d'obtenir une formule la plus analytique possible et ainsi de limiter le nombre de calculs devant être menés numériquement. Cette méthode fera l'objet d'une étude détaillée dans le Chapitre 3.

1.3 Endommagement local et modèles à gradient d'endommagement

1.3.1 Fissuration et endommagement

Une démarche visant à prédire le comportement adoucissant macroscopique d'un matériau consiste à considérer que, à une échelle inférieure, des mécanismes microstructuraux opèrent et viennent altérer cette microstructure. Il peut par exemple s'agir de phénomènes de microfissuration ou encore de croissance de microvides. Ces modifications se traduisent au niveau macroscopique par une dégradation des propriétés élastiques apparentes. Cette vision a donné naissance à la théorie classique de l'endommagement, dite locale. Une telle approche est séduisante puisqu'elle permet de s'affranchir de la description *in extenso* des phénomènes microstructuraux entrant en jeux. Pour construire un tel modèle, une variable macroscopique d, dite variable d'endommagement, traduisant le niveau de dégradation de la microsctructure en un point macroscopique est introduite. Cette quantité, dont la nature éventuellement tensorielle reste à préciser, vient argumenter l'élasticité macroscopique. Dans un premier temps Lemaitre et Chaboche ont proposé une approche purement macroscopique (voir Lemaitre et Chaboche [1979]) où la variable d ne repose pas sur un mécanisme microstructurel particulier. Ce n'est que plus tard que des considérations micromécaniques sont tenues pour bâtir effectivement une variable d'endommagement, voir par exemple Budiansky et O'Connell [1976], Horii et Nemat-Nasser [1993] ou Castañeda et Willis [1995]. Les méthodes d'endommagement sont entre autres utilisées pour essayer de simuler la naissance ou la propagation d'une fissure.

1.3.2 Les modèles locaux

La construction de modèles d'endommagement a été l'objet d'études intensives ces dernières décennies. Rappelons quelques équations de base qui serviront à plusieurs reprises dans ce manuscrit. Pour des raisons de simplicité d'écriture, il sera supposé que le paramètre d'endommagement d a une nature scalaire. Au terme d'un processus d'homogénéisation permettant de faire remonter le paramètre d'endommagement d comme la quantification d'un

paramètre physique bien identifié (porosité, densité de micro-fissures, etc.), la densité volumique macroscopique d'énergie libre se met sous la forme :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}(d) : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.7}$$

où, contrairement aux notations usuelles en homogénéisation, $\boldsymbol{\varepsilon}$ représente ici le niveau de déformation macroscopique et $\mathbb{C}$ est l'élasticité homogénéisée. Bien entendu, cette écriture est obtenue en l'absence de précontrainte et dans un contexte isotherme. Notons d'ailleurs qu'une étude attentive et qui ne semble pas superflue, menée au Chapitre 4, permettra d'établir en toute rigueur la forme que doit prendre la fonction d'état énergie libre ψ en présence d'une précontrainte dans le cadre d'un processus d'endommagement. Avec la formulation (1.7), une combinaison bien connue du premier et du second principe de la thermodynamique appliqués dans un cadre isotherme à un volume macroscopique élémentaire permet de conduire à une expression de la dissipation volumique macroscopique D (définie comme le produit de la température constante T par le taux d'entropie volumique macroscopique créée) :

$$D = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} \geq 0 \tag{1.8}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy et où l'opérateur $\dot{\cdot}$ correspond à une dérivée temporelle. En utilisant l'expression (1.7), il vient :

$$D = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi}{\partial d}\dot{d} \tag{1.9}$$

Le raisonnement classique consiste à considérer des taux de déformations $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ correspondant à des évolutions réversibles, c'est à dire associées à $D = 0$ d'une part et $\dot{d} = 0$ d'autre part. L'existence d'une telle évolution conduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C}(d) : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.10}$$

Ainsi, la relation (1.9) prend la forme :

$$D = -\frac{\partial \psi}{\partial d}\dot{d} \geq 0 \tag{1.11}$$

Par conséquent, la force thermodynamique associée à l'augmentation de l'endommagement est simplement égale à $-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'(d) : \boldsymbol{\varepsilon}$. Par analogie avec l'approche thermodynamique d'une fissure macroscopique, on définit une classe de matériaux dits fragiles vérifiant pour tout incrément de d :

$$D = g_c\dot{d} \tag{1.12}$$

où g_c est une constante. Souvent introduite comme une constante caractéristique du matériau considéré, la nature de g_c reste en toute rigueur un sujet de recherche encore ouvert. Finalement, le critère d'endommagement usuellement adopté est :

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'(d) : \boldsymbol{\varepsilon} - g_c \leq 0 \quad , \quad \dot{d} \geq 0 \quad , \quad \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'(d) : \boldsymbol{\varepsilon} - g_c\right)\dot{d} = 0 \tag{1.13}$$

Cette formulation de l'énergie libre et le critère de propagation ci-dessus sont à l'origine des modèles d'endommagements dits locaux. Toutefois, l'ensemble de ces modèles se heurtent à diverses difficultés. Les équations obtenues au terme d'une approche thermodynamique rigoureuse sont mathématiquement mal posées dès que le diagramme contrainte-déformation

présente une pente tangentielle négative. Par exemple, il est possible d'exhiber pour un problème donné une infinité de solutions indépendantes. Également, s'il n'y a pas unicité, il n'y a pas non plus stabilité des solutions obtenues. En effet, il est observé que le champ d'endommagement se localise sur des régions de mesure arbitrairement petite (Bazant [1976], Pham et Marigo [2010a]). Par conséquent, la quantité d'énergie associée au processus endommageant tend vers 0 et le modèle prédit la rupture de structures sans qu'aucune énergie ne soit dissipée. D'un point de vue numérique, ce phénomène de localisation se traduit par une très grande sensibilité au maillage et ainsi par une perte d'objectivité des résultats obtenus.

1.3.3 Les bienfaits des méthodes régularisées

Le fait que le champ d'endommagement tende à se localiser sur des zones de taille infinitésimale pose entre autres la question de la discontinuité de l'endommagement ainsi que de sa vitesse de variation dans l'espace. Afin d'éviter certains écueils inhérents aux modèles locaux traditionnels, il est possible de forcer manuellement la variable d'endommagement à rester continue et de limiter sa vitesse de variation, et ce, durant l'intégralité de l'évolution.

Une première méthode consiste à remplacer la variable d'endommagement par une version non locale de celle-ci. Plus en détail, en utilisant un produit de convolution pour produir une variable d'endommagement non locale, il est possible de contrôler sa régularité ainsi que sa vitesse de variation spatiale par le biais du choix de la fonction de convolution. Il s'agit des travaux entrepris par exemple dans Bazant [1994], Pijaudier-Cabot et P. Bazant [1987] et plus récemment [Berthier et collab., 2017].

Une seconde méthode se base sur le fait qu'un problème d'endommagement peut être mis sous une forme variationnelle (Francfort et Marigo [1998]) visant à exprimer la stationnarité d'une intégrale première appelée énergie totale et faisant intervenir deux champs que sont le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ et le champ d'endommagement d. En notant $\mathcal{P}$ cette quantité énergétique, il vient :

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}, d) = E_p(\boldsymbol{\xi}, d) + \int_\Omega g_c d \, dV \tag{1.14}$$

où E_p correspond à l'énergie potentielle classique se calculant entre autres à partir de l'énergie libre ψ (1.7). J.-J. Marigo propose une définition de la stabilité d'un état d'équilibre, introduisant ainsi un critère qui sera postulé comme étant nécessaire et suffisant. L'usage de ce critère trouve par exemple des applications dans Benallal et Marigo [2007], Pham et collab. [2011] ou encore Pham et Marigo [2013b]. En résumé, un état d'équilibre $(\boldsymbol{\xi}, d)$ sera qualifié de stable si (et seulement si) il existe un voisinage de l'état considéré tel que pour toute variation de déplacement $d\boldsymbol{\xi}$ telle que $\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$ soit cinématiquement admissible et pour toute variation du champ d'endommagement δd partout positive ou nul :

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}, d + \delta d) \geq \mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}, d) \tag{1.15}$$

Ainsi, Francort et Marigo [1993] suggère non seulement de s'intéresser à des évolutions vérifiant à tout instant la stationnarité de l'intégrale première $\mathcal{P}$, mais aussi, de manière plus forte, à en chercher le minimum. Avec ces considérations, une manière mathématique de régulariser un certain nombre des problèmes auxquels se heurtent les modèles locaux consiste à introduire un terme de pénalisation, comme suggéré par Tikhonov [1963], en gradient d'endommagement dans la fonctionnelle $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\xi}, d) = E_p(\boldsymbol{\xi}, d) + \int_\Omega \left(g_c d + \frac{1}{2} E_0 \ell^2 \nabla d \cdot \nabla d \right) dV \tag{1.16}$$

où ∇ correspond à l'opérateur gradient et E_0 et ℓ sont des constantes. En particulier, la quantité ℓ joue le rôle très important de longueur interne du modèle. En ajoutant un terme quadratique vis à vis du gardient d'endommagement, les champs d'endommagement présentant des variations spatiales trop rapides, c'est à dire opérant sur des domaines de mesures petites par rapport à ℓ, seront pénalisés du point de vue de la minimisation et par conséquent automatiquement disqualifiés. Il s'agit de la méthode dite à gradient d'endommagement telle que proposée par Pham et Marigo [2013a]. Malgré l'introduction du terme régularisant dans le cadre d'un argument mathématique plutôt que physique, le formalisme proposé a lui aussi permis de fournir des résultats très intéressants dans des domaines variés et a été confronté avec un certain succès à des observations expérimentales (par exemple Cyron et collab. [2014] et Nguyen et collab. [2016]). Notons toutefois que si l'intégralité du modèle a été bâti dans un cadre quasi-statique, des travaux très récents cherchent à en fournir une adaptation à un contexte dynamique (voir LI et collab. [2016] et Bleyer et collab. [2017]).

1.4 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit se décompose en deux parties distinctes. La première partie s'étend du Chapitre 2 au Chapitre 7 et constitue un ensemble autonome. A partir d'outils de la mécanique linéaire de la rupture, il s'agit de progressivement construire un modèle permettant de rendre compte du phénomène de nucléation dans un cadre général. En trame de fond, il s'agira de tenter d'expliquer les faciès de fissuration observés par l'ANDRA.

Le Chapitre 2 cherche à établir un modèle géométrique pertinent permettant de simuler l'excavation d'un tunnel. Dans un premier temps, l'accent est mis sur la cohérence des géométries idéalisées présentant des coins anguleux par rapport à des géométries plus physiques associées à des coins réguliers en arc de cercle avec de faibles rayons de courbure. Ce travail préalable est une étape nécessaire permettant de répondre aux interrogations portant d'une part sur la cohérence entre ces deux modélisations, mais également sur la pertinence de considérer des géométries introduisant des singularités de contraintes. Une fois la géométrie et le chargement simulant le processus d'excavation d'une passe à partir d'un tunnel pré-existant établis, il sera possible d'examiner quels sont les sites privilégiés pour la nuléation d'une fissure. Une méthode de calcul basée sur les potentiels complexes introduits par Gorgievich Leknitskii [1963] sera détaillée et permettra d'accéder aux singularités de contraintes dans le contexte d'un matériau anisotrope. En examinant la nature des singularités de contraintes existant au voisinage de ces sites privilégiés de nucléation, le type de fissure à considérer (ouverte ou fermée) sera explicité. La cohérence du modèle proposé pourra donc être jugée au regard du caractère fermé des fissures en chevron observées par l'ANDRA au laboratoire de Bure.

Le Chapitre 3 propose une mise en oeuvre de la méthode du double critère formulée par Leguillon [2002], laquelle a été résumée de manière très succincte Section 1.2. A partir de justifications données au Chapitre 2, l'étude menée sera bidimensionnelle. Une attention toute particulière sera accordée à la méthode des développements asymptotiques raccordés. Des limites à l'utilisation de cette dernière seront exposées et son domaine de validité sera précisé. Grâce à la longueur interne du modèle permettant d'anticiper l'ordre de grandeur de la longueur de nucléation, nous montrerons qu'il est alors justifié de calculer la quantité primordiale G_{inc} à partir des développements asymptotiques raccordés. Ainsi, des premiers résultats seront obtenus en appliquant le critère mixte à la situation de l'excavation d'un tunnel.

Le Chapitre 4 constituera quant à lui le véritable point de pivot du manuscrit. En effet,

si les premiers chapitres avaient pour objectif d'appliquer la méthode du critère mixte à l'excavation d'un tunnel, une certaine indépendance sera à partir de ce moment là recherchée. Fortement inspirés par les travaux de D. Leguillon, nous proposerons une démarche alernative débouchant sur un critère de nucléation reposant uniquement sur l'usage de la quantité G_{inc}. Celui-ci se basera sur une analyse thermodynamique du phénomène et sur la notion de longueur de nucléation stable. Ce travail nous permettra de revenir sur une hypothèse forte utilisée de manière systématique, parfois de manière implicite, consistant à ne considérer que des évolutions isothermes. Cette hypothèse, déjà difficilement justifiable dans le cas de la propagation d'une fissure pré-existante (puisque des élévations de température sont mesurées expérimentalement, voir Bui et collab. [1981]), ne présente plus vraiment de sens dans le cadre de la nucléation. En effet, une étude isotherme implique une évolution quasi-statique et donc des phénomènes infiniment lents. La brutalité d'un événement de type nucléation associée à la lenteur des phénomènes de diffusion thermique à une échelle macroscopique poussent davantage à supposer que les échanges thermiques n'ont pas pu se faire pendant l'intervalle de temps correspondant à la nucléation. Par conséquent, le bon cadre à considérer d'un point de vue thermodynamique semble être celui de l'adiabaticité. A notre connaissance, ce travail est original. Par ailleurs, la méthodologie proposée sera l'occasion de revenir sur l'écriture d'une densité énergétique dans le cadre d'un endommagement avec précontrainte. Pour pouvoir utiliser notre critère, une étude poussée des différentes formes que peut prendre G_{inc} sera menée. L'occasion sera également saisie pour établir une première méthode permettant de calculer G_{inc} pour des longueurs de fissure non infinitésimales. Plus généralement, ce travail s'inscrira dans le cadre d'une réflexion sur le calcul du taux de restitution d'énergie pour une structure de taille infinie.

Si le Chapitre 4 aura été l'occasion d'investiguer le couplage thermo-élastique dans le contexte de la propagation d'une fissure, les matériaux considérés posent la question de l'extension de la méthode à des milieux poreux saturés. Ainsi, les équations de la propagation dynamique d'une fissure seront obtenues au Chapitre 5 dans le cadre du couplage thermo-poro-elastique. Malgré un raisonnement parfois technique, la simplicité du résultat se doit d'être soulignée. Notons que si ce dernier est bien entendu utilisable dans le cadre du critère que nous proposons, il est également immédiatement adaptable pour permettre d'étendre le critère mixte au cadre thermo-poro-élastique. Si malheureusement le temps nous a manqué pour pouvoir étudier l'effet du dépôt de colis radioactifs dans un milieu poreux, les équations établies peuvent servir de base à une étude ultérieure.

Le Chapitre 6 propose d'ajouter une approche supplémentaire à la boîte à outils permettant de calculer la quantité cruciale G_{inc}. A partir de codes éléments finis en contraintes, une manière rigoureuse de donner des encadrements précis de celle-ci sera détaillée. Ne s'agissant pas de l'objectif majeur de ce manuscrit, seuls les grands principes de tels codes éléments finis ainsi que quelques fonctions de formes seront donnés. Un exemple simple permettra de montrer l'efficacité de la méthode proposée.

Enfin, le Chapitre 7 constituera l'aboutissement de l'ensemble des chapitres précédents. Il cherchera en effet à appliquer notre critère à la situation de l'excavation d'un tunnel dans un contexte pleinement tridimensionnel. Bien que l'étude menée se veuille davantage qualitative, il sera montré qu'en considérant différents éléments d'anisotropie du problème il est possible effectivement de rendre compte de faciès de fissuration stables ayant des géométries et des extensions cohérentes avec les observations de l'ANDRA.

Si l'ensemble de ces chapitres constituent un tout autonome pouvant se suffire à lui même, les Chapitres 8 et 9 s'intéresseront aux modèles d'endommagements. Malgré le fait que ces modèles n'ont pas pu être appliqués au problème de l'excavation d'un tunnel, quelques résultats établis nous semblent suffisamment intéressants pour figurer dans ce manuscrit. En

effet, le travail que nous avons mené se veut être une réflexion générale sur le phénomène de nucléation. Dans ce cadre, il ne saurait être complet sans que les méthodes d'endommagement, qui prennent de plus en plus de place au sein de la communauté scientifique, soient abordées.

Le Chapitre 8 explorera une piste très naturelle pour essayer de donner une base physique au terme de régularisation proposé dans certains travaux (par exemple Pham et Marigo [2011] ou Lancioni et Royer-Carfagni [2009]). Si la méthode en question permet effectivement de faire rejaillir un terme en gradient d'endommagement au carré en tant que correctif à l'énergie élastique, les hypothèses même sur lesquelles elle repose ne permettront pas de conclure.

Le Chapitre 9 sera l'occasion de revenir sur certaines notions de stabilité d'un état qui ont été avancées dans un contexte endommageant. Dans un premier temps, nous adapterons la condition suffisante de stabilité de Hill concernant les évolutions plastiques (Hill [1958]) aux modèles locaux d'endommagement dans le cadre des petites déformations. En résumé, celui-ci repose sur un examen minutieux des implications énergétiques associées à la fuite d'un état d'équilibre sans apport extérieur d'énergie et via des évolutions isothermes. Le principe même de la méthode laisse pourtant penser que le bon cadre d'analyse est à nouveau celui de l'adiabaticité. Par conséquent, nous montrerons que ces deux approches mènent à des critère sensiblement différents et nous détaillerons la forme de chacun. Fort de ces résultats, nous nous intéresserons à nouveau au problème fondateur de la méthode de régularisation dite à gradient d'endommagement qui est celui d'un barreau unidimensionnel. Nous proposerons un cadre d'analyse très simple et physiquement cohérent permettant de revisiter certains éléments de la littérature consacrée à ce sujet.

Chapitre 2

Analyse des contraintes au voisinage du front de taille

Sommaire

2.1 Modélisation géométrique du problème 24
2.1.1 Coins anguleux et fissures de Griffith 24
2.1.2 Fissures de Griffith 26
2.1.3 Fissures elliptiques 28
2.1.4 Modélisation de l'excavation d'un tunnel 32
2.2 Justification d'une analyse bidimensionnelle 35
2.2.1 Raisonnement par ordre de grandeur 35
2.2.2 Singularités de contrainte bidimensionnelles en condition isotrope . 37
2.2.3 Calcul des facteurs d'intensité de contrainte en présence d'une pré-contrainte 40
2.2.4 Singularités de contrainte en conditions axisymétriques 44
2.3 Singularités de contrainte en anisotrope 46
2.3.1 Fonction d'Airy pour un matériau anisotrope 47
2.3.2 Structure des contraintes au voisinage du fond d'une fissure de Griffith 51
2.3.3 Structure des contraintes au voisinage d'un angle droit 56
2.3.4 Un coin à angle droit dans un matériau orthotrope 59
2.4 Conclusions et modèle de fissure 63

2.1 Modélisation géométrique du problème

Les problèmes rencontrés par l'ANDRA lors de l'excavation de leurs galeries destinées à accueillir des déchets radioactifs HAVL nécessitent une analyse mécanique du problème reposant sur le phénomène de nucléation de fissures. Les deux approches présentées dans le Chapitre 1, Sections 1.2 et 1.3 peuvent toutes deux potentiellement donner des éléments de compréhension des mécanismes entrant en jeux. Cependant, pour l'une comme pour l'autre, il est nécessaire de détailler un peu plus en détails la physique du problème sous-jacent. Dans un premier temps, il s'agit bien évidemment de préciser comment nous allons modéliser l'excavation. Toutefois, la simple définition du problème mécanique considéré n'est pas suffisante. En effet, il est nécessaire de préciser un certain nombre de paramètres, dont l'un des plus importants est la nature de la fissure à considérer. Les deux méthodes proposées ont a priori besoin de cette information pour pouvoir être utilisées. En ce qui concerne une approche reposant sur de l'endommagement, il est nécessaire d'être vigilant puisque le modèle de base n'est pas capable de faire la différence entre des états de compression et des états de traction. Ainsi, si aucune précaution n'est prise, tous deux peuvent être indûment source d'endommagement. Ce phénomène complique la prise en compte de fissures fermées puisque celles-ci s'accompagnent généralement d'états de compression qui ne sont pas moteurs dans les phénomènes de propagation ou de nucléation. Il existe cependant des modèles cherchant à palier ce problème comme celui présenté dans Lancioni et Royer-Carfagni [2009] qui propose de n'endommager que le module de cisaillement de cisaillement μ ou encore Amor et collab. [2009] reposant sur une méthode plus complexe. Il en va de même pour la méthode du double critère proposée par D. Leguillon où la nature de la fissure doit être précisée en amont de la procédure. Une façon de palier ce problème serait cependant de traiter un problème avec conditions de contact unilatéral. Avant de pouvoir se prononcer sur la nature des fissures susceptibles d'apparaître lors de l'excavation d'un tunnel, nous devons d'abord préciser de quelle manière nous souhaitons modéliser la géométrie de ce dernier.

2.1.1 Coins anguleux et fissures de Griffith

Dans le but de proposer la géométrie représentative d'un tunnel que nous avons utilisée, nous souhaitons établir quelques résultats sur les géométries idéalisées. D'un point de vue purement mécanique, la présence dans une structure de coins anguleux, éventuellement fermés pour des fissures, est généralement synonyme de présence de singularités de contraintes. Ce phénomène bien connu est tout à fait acceptable d'un point de vue énergétique. Cependant, considérer des zones où les contraintes deviennent infinies peut sembler, de prime abord, être assez éloigné de la réalité physique des problèmes traités. Puisque ces singularités sont liées à la manière idéalisée dont un problème en particulier a été représenté, il est légitime de se poser la question du bienfondé du modèle utilisé. En effet, en changer aurait l'avantage, tout du moins en apparence, de mieux coller à la réalité tout en s'épargnant la présence des singularités qui peuvent s'avérer délicates à gérer d'un point de vue numérique. Pour autant, adopter des coins arrondis présente également son lot d'inconvénients. Cela conduit par exemple à introduire des nouveaux paramètres, tels que le rayon de courbure du coin, qui peuvent être difficiles à quantifier et dont les effets sur les résultats recherchés devront être *in fine* quantifiés. Au delà du point de vue pratique, l'existence même de deux modélisations pose la question de la cohérence des deux approches entre elles. Avant de préciser les choix que nous avons faits pour bâtir notre modèle géométrique, nous souhaitons réunifier les deux modèles en montrant que les résultats qu'ils donnent sont en parfaite adéquation.

Afin d'illustrer notre propos, nous proposons de nous appuyer sur le cas des modèles

de fissures. En effet, la littérature sur le sujet distingue deux grandes familles de modèles géométriques servant à appréhender un objet de type fissure :

— La première consiste en une représentation de la fissure comme deux faces parallèles confondues (segments pour des problèmes bidimensionnels en déformations ou en contraintes planes ou surfaces planes pour des problèmes tridimensionnel). Il s'agit du modèle historique proposé par Griffith [1921]. En particulier, le fond de la fissure s'apparente à un dièdre d'ouverture nulle et les points appartenant à la lèvre supérieure de la fissure sont géométriquement confondus avec ceux de la lèvre inférieure. Dans cette représentation idéalisée, la fissure plate, dite de Griffith, s'apparente à une ligne ou à une surface présentant une discontinuité du champ de déplacement. Une analyse locale montre classiquement que ce modèle s'accompagne également d'un champ de contrainte présentant une singularité au niveau de la pointe de la fissure. C'est cette structure particulière du champ de contrainte qui a menée à l'introduction des célèbres facteurs d'intensité de contrainte. Ces deux phénomènes tirent bien évidemment leur origine dans le choix de modélisation de la fissure par un objet géométrique de mesure nulle (surface ou volume suivant la dimension du problème considéré).

— La deuxième propose d'appréhender la fissure par une cavité aplatie mais de mesure non nulle. Ce sont notamment une ellipse en deux dimensions ou un ellipsoïde en 3D qui sont utilisés, tous deux étant aplatis et donc caractérisés par de petits rapports d'aspect. Tant que ce dernier n'est pas nul, le modèle permet d'éviter la discontinuité de déplacement mais surtout de s'affranchir des phénomènes de singularités. Nous parlerons dans ce cas de fissures elliptiques ou ellipsoïdales.

La question de la cohérence des deux modèles est précisément posée en terme de singularité. Si, par exemple, en déformations ou en contraintes planes, la fissure elliptique voit son rapport d'aspect tendre vers 0, on retombe sur la description géométrique d'une fissure de type Griffith et l'objet limite présentera lui aussi une discontinuité de déplacement. S'il reste à montrer qu'il s'agit bien de la même discontinuité que pour une fissure de Griffith de même géométrie, le point le plus frappant concerne la structure du champ de contrainte. Pour être plus précis, considérons les problèmes en déformations planes représentés Figures

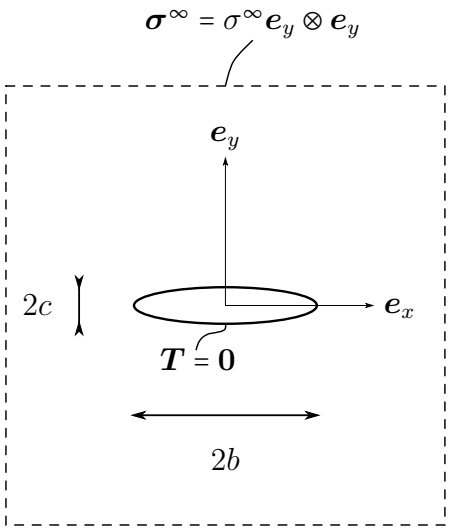

Figure 2.1 – Milieu infini sous pression isotrope avec un trou carré libre de contraintes

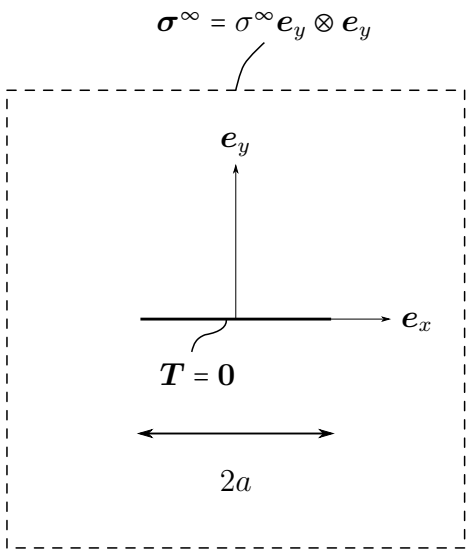

Figure 2.2 – Milieu infini sous un chargement déviateur de contraintes avec un trou carré libre de contraintes

2.1 et 2.2. Au vu du chargement considéré, les lèvres des fissures vont s'écarter pour donner

lieu à des fissures ouvertes. Pour de telles fissures, le vecteur contrainte est nul au niveau de leurs bords. En ce qui concerne la fissure elliptique, il n'y a pas de problèmes de définition de la normale au contour. Par conséquent, au fond de fissure, qui est représenté par le point d'abscisse b, on obtient en coordonnées cartésiennes :

$$\sigma_{xx}(0, b) = 0 \tag{2.1}$$

et ce, quel que soit le rapport d'aspect de l'ellipse. Il est par conséquent tout à fait légitime de penser qu'au passage à la limite permettant à la géométrie elliptique de tendre vers celle de la fissure de Griffith, la nullité de la composante σ_{xx} en pointe de fissure sera préservée. Ce résultat est de prime abord en contradiction avec celui prévu par la théorie de Griffith qui annonce en particulier un comportement divergent de cette composante du champ de contrainte. Pour être plus précis, nous allons revisiter dans les deux sections suivantes les solutions correspondant aux deux modèles de fissure.

2.1.2 Fissures de Griffith

Pour un problème en déformations ou en contraintes planes, l'analyse locale de la structure du champ de contrainte au voisinage de la pointe d'une fissure de Griffith peut se faire par le biais de l'introduction d'une fonction d'Airy ϕ. A partir d'une telle fonction, dans une base cartésienne de coordonnées (x, y), les composantes du champ de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ peuvent s'écrire :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad , \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \tag{2.2}$$

Cet espace vectoriel particulier de champs de contrainte a l'avantage de vérifier automatiquement les conditions d'équilibre local en l'absence de force à distance :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

Pour que celui-ci soit associé, dans un matériau élastique linéaire isotrope, à des déformations géométriquement compatibles, il faut et il suffit que la fonction d'Airy soit biharmonique :

$$\Delta\Delta\phi = 0 \tag{2.4}$$

En cherchant ϕ sous la forme d'une fonction biharmonique à variables séparables, puis en imposant au champ de contrainte en dérivant de vérifier localement les conditions aux limites (correspondant à des conditions de bords libres au niveau des lèvres de la fissure), il est possible d'accéder au comportement asymptotique des différents champs au niveau de la pointe de la fissure. Avec la définition d'un système de coordonnées cylindriques locales

FIGURE 2.3 – Zoom au niveau de la pointe d'une fissure de Griffith et définition de repères locaux

dont l'origine coïncide avec la pointe de la fissure comme représenté sur la Figure 2.3, on

trouve que le champ de contrainte peut se mettre localement sous la forme (cf. Panasyuk et Berezbnitskiy [1965]) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\left(K_I\left(-\cos\frac{3\theta}{2}+5\cos\frac{\theta}{2}\right)+K_{II}\left(3\sin\frac{3\theta}{2}-5\sin\frac{\theta}{2}\right)\right)\\
\sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\left(K_I\left(\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)+K_{II}\left(3\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)\right)\\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}}\left(K_I\left(\cos\frac{3\theta}{2}+3\cos\frac{\theta}{2}\right)-3K_{II}\left(\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

où K_I et K_{II} sont une définition possible des facteurs d'intensité de contrainte associés aux notions de mode I (mode d'ouverture pur) et de mode II (mode de cisaillement pur) respectivement. Ces deux quantités n'ont pas d'expressions générales et dépendent du chargement et de la géométrie de la structure considérée. Il est cependant d'ores et déjà possible, dans ce contexte de fissure plate, de commenter le comportement du champ de contrainte au voisinage du fond de fissure en comparaison avec celui annoncé pour une fissure elliptique. En effet, le pendant de (2.1) peut être évalué comme la limite lorsque r tend vers 0 de la quantité σ_{rr} calculée au point de coordonnées cylindriques locales $(r, 0)$. Sauf nullité des facteurs d'intensité de contrainte, l'expression donnée en (2.5) montre que cette quantité n'est pas finie. Ce constat vient donc se poser en désaccord complet avec la nullité annoncée précédemment.

Pour être plus précis, il est nécessaire d'expliciter la valeur des facteurs d'intensité de contrainte K_I et K_{II} pour un problème particulier. Nous proposons d'aller plus loin en donnant une solution complète du problème illustré Figure 2.2 pour la fissure de Griffith. En effet, la simplicité des expressions est telle qu'il serait dommage de se priver d'expressions ayant un domaine de validité ne se restreignant pas seulement à un voisinage du fond de fissure. Pour y arriver, il est cependant nécessaire d'introduire une partie du formulaire d'analyse complexe qui sera requis à plusieurs reprises tout au long de ce travail. En se reportant à Muskhelishvili [1953], on montre que les fonctions de la variable (x, y) solutions de l'équation (2.4) se mettent sous une forme très particulière. En effet, vérifier cette équation est équivalent à l'existence de deux fonctions φ et ψ de la variable complexe $z = x + iy$ (où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$), holomorphes sur la structure étudiées et telles que :

$$\phi(x, y) = Re\left(\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)\right) \qquad \text{où} \qquad \psi = \chi' \tag{2.6}$$

où Re correspond à la partie réelle, $'$ représente l'opération de dérivation (ici en tant que fonction de la variable complexe) et où l'opérateur $\overline{\cdot}$ désigne le conjugué d'une quantité complexe. Cette relation est fondamentale et est à la base de l'analyse complexe en mécanique des solides. A partir de ces deux potentiels, on obtient les formules de représentation bien connues de Kolosov, Muskhelishvili :

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\left(\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right)\\
&\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\left(\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right)\\
&\xi_x + i\xi_y = \frac{1}{2\mu}\left(\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

où $\boldsymbol{\xi} = \xi_x\boldsymbol{e}_x + \xi_y\boldsymbol{e}_y$ est le vecteur déplacement associé au champ de contrainte géométriquement compatible $\boldsymbol{\sigma}$ (modulo les éventuels déplacements de corps rigide) et où κ est la constante de Kolosov égale à $3 - 4\nu$ en déformations planes et à $\frac{3-\nu}{1+\nu}$ en contraintes planes. Grâce aux propriétés des fonctions holomorphes, le problème d'une fissure de Griffith, en déformations

ou en contraintes planes, dans un milieu infini en traction uniaxiale dans la direction perpendiculaire à la fissure a été résolu de manière directe par H. Bui. Les potentiels φ et ψ décrivant la solution sont donnés dans Bui [1978] et valent dans le cas qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{\sigma^\infty}{2}\left(\frac{z}{(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} - 1\right) \\ \psi'(z) &= \frac{\sigma^\infty}{2}\frac{za^2}{(z^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

L'utilisation de tels potentiels mériterait un éclaircissement sur la notion de puissance non entière de nombres complexes et donc implicitement sur le choix de la détermination du logarithme complexe. Cette notion sera largement commentée dans la Section 2.3 de ce chapitre, ou encore dans le Chapitre 3, Section 3.3. Nous nous contenterons pour le moment de montrer les résultats obtenus à partir de ces potentiels. L'avantage des formules de représentation (2.7) associées à l'expression exacte des potentiels (2.8) sur une forme locale (2.5) est qu'il est désormais possible d'accéder aux valeurs des champs de déplacements et de contrainte en tout point de la structure et pas uniquement au voisinage de la pointe de la fissure. Ainsi, nous sommes désormais en mesure d'illustrer convenablement une partie

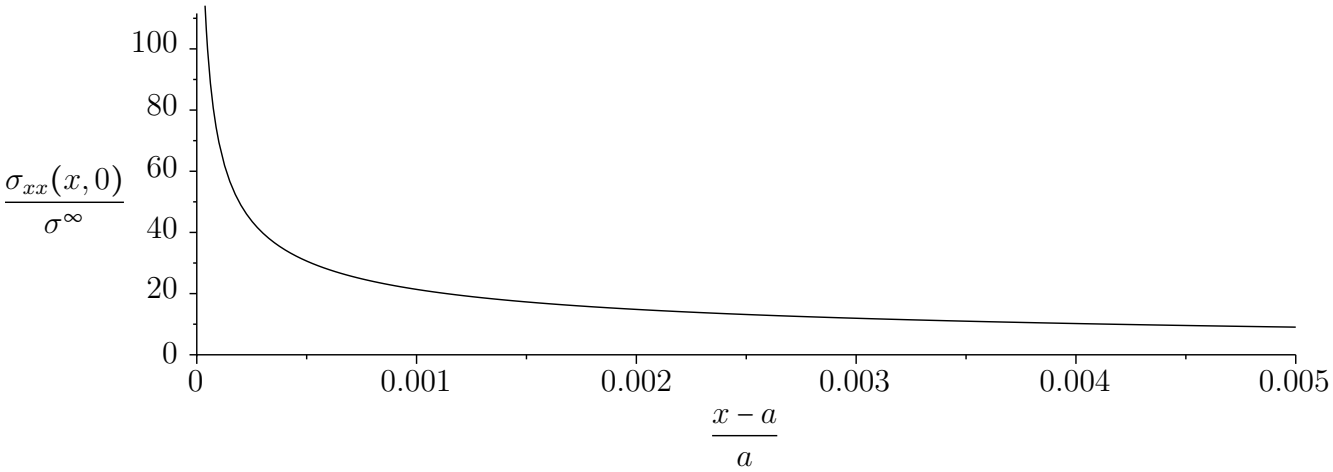

Figure 2.4 – Représentation de la composante σ_{xx} du champ de contrainte pour la fissure de Griffith Figure 2.2 le long de l'axe des abscisses en fonction de la distance au fond de fissure $\frac{x-a}{a}$

du paradoxe que nous avons soulevé plus haut. Sur la Figure 2.4, la composante σ_{xx} en coordonnées cartésiennes du champ de contrainte calculé en un point $(x, 0)$ est représentée en fonction de la distance au fond de fissure $\frac{x-a}{a}$. Le phénomène de singularité est donc bien activé, comme suggéré par la décomposition locale du champ de contrainte (2.5).

2.1.3 Fissures elliptiques

Puisque nous avons à notre disposition la solution exacte du problème de la fissure de Griffith représenté Figure 2.2, nous allons maintenant détailler la solution de la même structure avec cette fois-ci une fissure elliptique en son sein. Une façon de l'établir est de recourir à une technique de transformation conforme comme introduite par Muskhelishvili [1953]. Sans détailler la procédure permettant d'aboutir à la forme des potentiels complexes associés à la fissure elliptique, rappelons seulement la notion de potentiels images et antécédents ainsi que le lien les unissant. Soit ω une transformation conforme, c'est-à-dire une application partant d'un ensemble du plan complexe S, dit « plan antécédent » et arrivant dans

un autre ensemble Σ, dit « plan image », bijective et conservant localement les angles (sauf éventuellement en un nombre fini de points) :

$$\begin{array}{rcccl} \omega & : & \Sigma & \to & S \\ & & Z & \mapsto & z = \omega(Z) \end{array} \tag{2.9}$$

Si le problème mécanique devant être résolu est défini dans le z-plan S (dit plan image) et que φ et ψ les potentiels recherchés, deux autres potentiels Φ et Ψ sont introduits. Ils sont définis sur le Z-plan Σ (dit plan antécédent) par le changement de variable $z = \omega(Z)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & \omega(Z) \\ \varphi(z) & = & \Phi(Z) \\ \psi(z) & = & \Psi(Z) \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Une remarque immédiate est que, tant que $\omega' \neq 0$, les relations (2.10) garantissent un accès rapide aux dérivées des potentiels φ et ψ par rapport à leur variable naturelle z. On aurait par exemple :

$$\varphi'(z) = \frac{\Phi'(Z)}{\omega'(Z)} \qquad \text{pour} \qquad z = \omega(Z) \tag{2.11}$$

Cette propriété est essentielle puisque c'est elle qui va nous permettre d'utiliser les équations de représentation (2.7) dans un contexte de transformation conforme. Ainsi, l'opération (2.10) permet de formuler le problème mécanique du z-plan S sur le Z-plan Σ. Si le changement de variable est adroit, il peut permettre d'accéder à l'expression de Φ et Ψ et donc indirectement aux deux potentiels cherchés. Dans cette optique, il est bien souvent intéressant de se ramener, en ce qui concerne le plan antécédent, soit sur le disque unité (appelé intérieur du cercle unité), soit sur la fermeture du plan complexe privé du disque unité (appelé extérieur du cercle unité) : $\{z/|z| \geq 1\}$ où $|\cdot|$ désigne le module d'un nombre complexe. Dans le cas qui nous intéresse, le plan image est constitué de l'extérieur d'une ellipse. Par conséquent, la transformation conforme souhaitée permettrait de transformer l'extérieur du disque unité en l'extérieur d'une ellipse. Cette transformation est bien connue et porte le nom de transformation de Joukowsky. Elle s'exprime sous la forme :

$$\omega(Z) = R\left(Z + \frac{m}{Z}\right) \tag{2.12}$$

avec $0 < m < 1$. En effet, il est facile de voir que le cercle unité est envoyé sur une ellipse de grand axe horizontal de dimension $2b = 2R(1+m)$ et de petit axe vertical de dimension $2c = 2R(1-m)$ qui est l'ellipse représentée Figure 2.1. Le cas limite $m = 1$ est associé à une fissure plate d'extension $4R$ mais correspond à un cas de perte de conformité, c'est-à-dire de non conservation des angles, puisqu'on aurait alors $\omega'(1) = \omega'(-1) = 0$. La précaution $m < 1$ a d'ailleurs été prise pour éviter ce cas de figure. Il est néanmoins bon de noter que dans les expressions qui vont suivre, le cas d'une géométrie s'apparentant asymptotiquement à une fissure de Griffith s'obtient en considérant des m proches de l'unité par valeurs inférieures. Une illustration de la transformation de Joukowsky (2.12) pour différentes valeurs du paramètre m est donnée Figure 2.5. Pour un jeu de paramètres m et R donné, on trouve, toujours dans Muskhelishvili [1953], que les potentiels antécédents associés à la solution du problème de fissure elliptique Figure 2.1 sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Phi(Z) &= \frac{R\sigma^\infty}{4}\left(Z - \frac{2+m}{Z}\right) \\ \Psi(Z) &= \frac{R\sigma^\infty}{2}\left(Z + \frac{1+(1+m+m^2)\,Z^2}{Z\,(m-Z^2)}\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

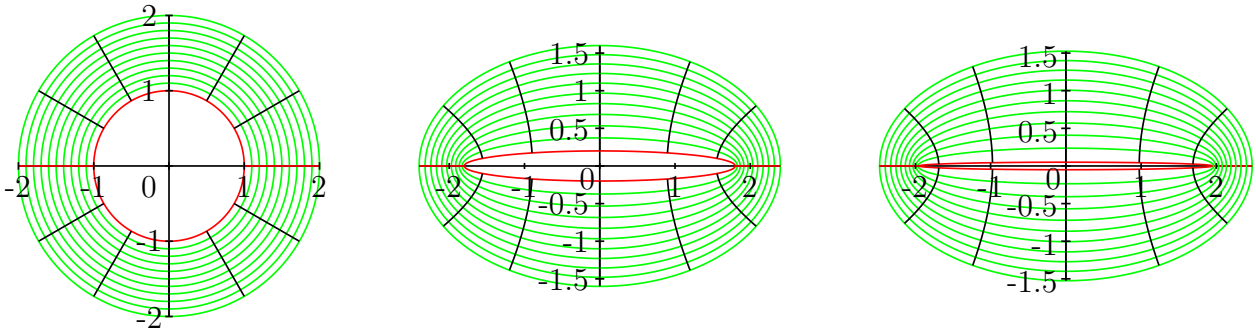

FIGURE 2.5 – Transformation de Joukowsky de l'extérieur du cercle unité (figure de gauche) avec $R = 1$ et pour $m = 0.8$ (figure centrale) ou $m = 0.95$ (figure de droite)

En combinant (2.7), (2.10) et (2.11) il vient :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2\left(\frac{\Phi'(Z)}{\omega'(Z)} + \frac{\overline{\Phi'(Z)}}{\overline{\omega'(Z)}}\right) \\
\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2\left(\overline{\omega(Z)}\left(\frac{\Phi''(Z)\omega'(Z) - \Phi'(Z)\omega''(Z)}{\omega'(Z)^3}\right) + \frac{\Psi'(Z)}{\omega'(Z)}\right) \\
\xi_x + i\xi_y &= \frac{1}{2\mu}\left(\kappa\Phi(Z) - \omega(Z)\frac{\overline{\varphi'(Z)}}{\overline{\omega'(Z)}} - \overline{\Psi(Z)}\right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ces relations permettent d'accéder aux composantes des champs de contrainte et de déplacements solutions du problème réel. Précisons toutefois que ces composantes sont exprimées en un point z de S, image par la transformation conforme ω d'un point Z de Σ. En prenant une combinaison linéaire de (2.14) on est donc capable, à partir des expressions (2.13), de calculer la valeur que prend σ_{xx} en un point $z = \omega(Z)$.

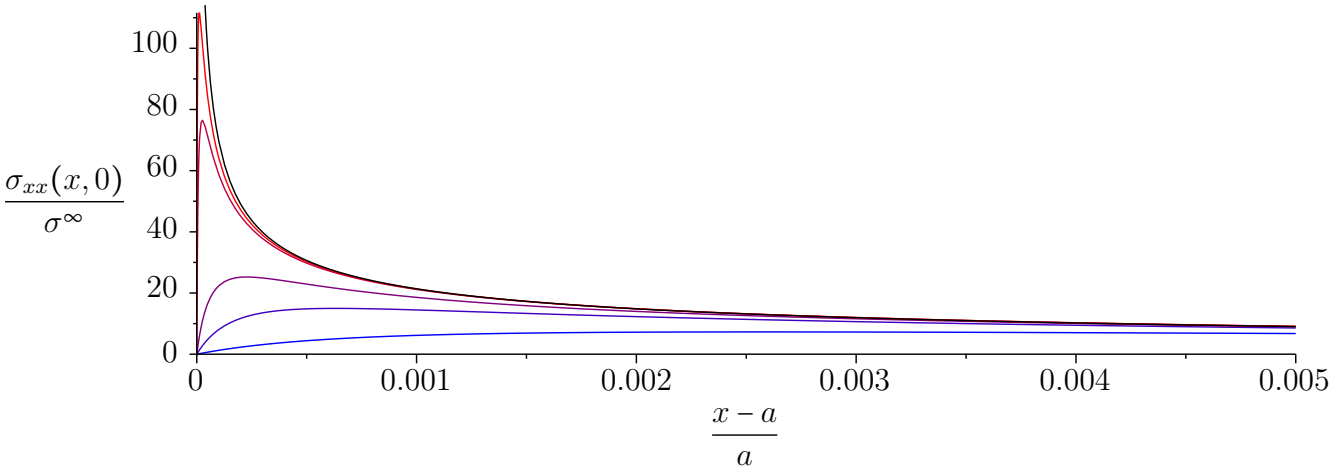

FIGURE 2.6 – Comparaison de la composante σ_{xx} du champ de contrainte entre la configuration fissure de Griffith (courbe noire) et pour différentes ellipses définies par la transformation de Joukowsky tendant asymptotiquement vers la fissure de Griffith.
De la courbe bleue à la courbe rouge : $m = 0.9, 0.95, 0.97, 0.99, 0.995$ où m est le paramètre entrant en jeu dans la transformation de Joukowsky

Dans le but de pouvoir comparer l'évolution du champ de contrainte en des points occupant spatialement la même place dans le cas d'une fissure elliptique ou d'une fissure de Griffith, il est intéressant de mener les calculs en se plaçant systématiquement dans le cas $b = a$ avec les notations des Figures 2.1 et 2.2. Le rapport entre le petit axe vertical et le

grand axe horizontal étant égal à $\frac{1-m}{1+m}$, c'est donc le paramètre m qui contrôle entièrement le rapport d'aspect de l'ellipse. Par conséquent, les calculs seront menés pour différentes valeurs de m se rapprochant de 1 par limite inférieure tout en choisissant R de manière à garantir l'égalité $R(1+m) = a$. Les résultats associés à ces choix de paramètres sont donnés Figure 2.6. Cette figure est essentielle pour clarifier un certain nombre de points.

Le premier est qu'on garde effectivement $\sigma_{xx}(b,0) = 0$ dans le modèle elliptique. Cependant, on observe immédiatement après ce point l'existence d'un pic de contraintes qui devient de plus en plus étroit et intense à mesure que m augmente et qui se rapproche du fond de fissure. Par conséquent, il y a bien convergence du modèle de fissure elliptique vers le modèle de fissure de Griffith hormis en un point. Sans chercher à prouver mathématiquement notre propos, il semblerait qu'on ait convergence simple sur $\mathbb{C}\setminus\{-a,a\}$, voir même convergence uniforme sur tout ouvert de la forme $\mathbb{C} \setminus B(\pm a, \epsilon)$ où $B(a,\epsilon)$ (respectivement $B(-a,\epsilon)$) représente la boule centrée au point a (respectivement $-a$) de rayon ϵ. Ainsi, le paradoxe apparent que nous avions anticipé entre les deux modélisations est désormais levé. Au fond de fissure, un phénomène de concentration de contrainte est bien présent. Celui-ci vient de plus tangenter asymptotiquement la singularité de contrainte existant pour une fissure de Griffith. Par conséquent, le modèle de singularité, qui est totalement licite d'un point de vue énergétique, décrit bien la réalité physique du matériau puisqu'il est la traduction idéalisée du phénomène de concentration de contrainte.

De plus, cette comparaison rend tout à fait justice au modèle de propagation de fissure proposé par Griffith. Puisque les contraintes deviennent infinies dans le cas d'une fissure plate, un critère portant sur le niveau de contraintes n'était pas envisageable. Irwin (voir Irwin [1957]) avait alors proposé de s'intéresser plutôt à la façon dont le champ de contrainte tendait vers l'infini, c'est-à-dire au facteurs d'intensité de contrainte. En lieu et place d'un critère portant sur une contrainte maximum, Irwin a suggéré de fournir une valeur critique des facteurs d'intensité de contrainte. Avec le comparatif que nous mettons en œuvre, la procédure proposée par Irwin apparait comme tout à fait légitime dans le cas d'une modélisation idéalisée. Plus clairement, le problème que nous traitons correspond, de par sa

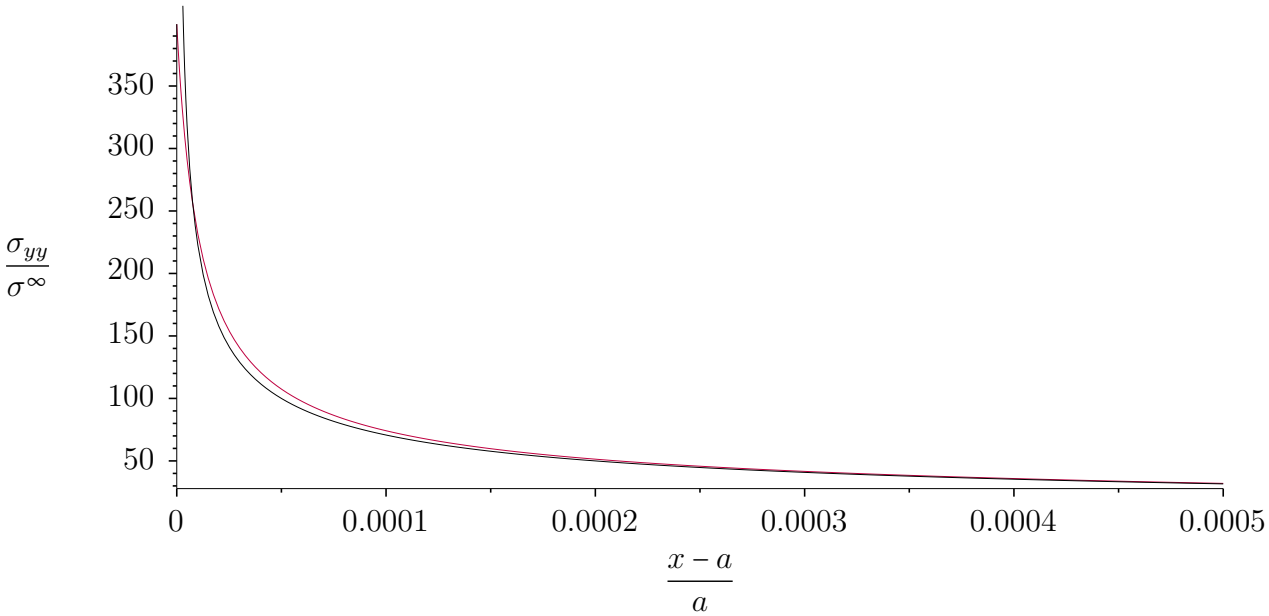

Figure 2.7 – Comparaison de la composante σ_{yy} du champ de contrainte obtenu de manière asymptotique pour la fissure de Griffith de taille $2a$ (courbe noire) et pour une ellipse définie par la transformation de Joukowsky avec les paramètres $m = 0.99$ et $R = \frac{a}{m+1}$ (courbe rouge)

géométrie et de par son chargement, à celui d'une éventuelle propagation en mode I de

la fissure pré-existente. En ce qui concerne la fissure de Griffith, les facteurs d'intensité de contrainte K_I et K_{II} associés au comportement local du champ de contrainte en pointe de fissure (2.5) pour ce problème bien précis sont connus et valent :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{a\pi} \qquad , \qquad K_{II} = 0 \tag{2.15}$$

Ces expressions nous donnent en particulier accès à la décomposition locale, au niveau de la pointe de fissure, le long de l'axe des abscisses, de la composante σ_{yy} du champ de contrainte pour la fissure de Griffith. La Figure 2.7 vise à comparer ce terme avec celui obtenu par le biais d'une fissure elliptique de rapport d'aspect égal à 0.005 et dont la représentation semble plus physique. Cette comparaison permet de bien voir que caractériser la façon dont le champ de contrainte tend vers l'infini revient à se donner une information sur une contrainte critique et une longueur caractéristique du matériau (qui peut par exemple être associée à un rayon de courbure minimum pour la matériau). Le critère écrit sur K_I est donc bien un critère de contrainte et est le bon outil pour analyser les phénomènes de propagation dans des géométries idéalisées. Enfin, la formule d'Irwin, qui permet de relier le taux de restitution d'énergie avec les facteurs d'intensité de contrainte, montre qu'il est équivalent, au moins en ce qui concerne les mécanismes de propagation, de travailler avec une énergie critique ou avec une contrainte critique. Elle sous-entend même qu'il est plus agréable, dans le cadre d'une géométrie idéalisée, de travailler avec un critère énergétique.

Cette section a permis de lever un paradoxe apparent qui existe entre des modèles de fissures plates et des modèles de fissures elliptiques. De manière plus générale, elle nous permet de comprendre qu'une géométrie idéalisée de coin anguleux capture correctement la physique et rend tout à fait justice à la réalité du matériau élastique. Les phénomènes de singularité de contraintes correspondent donc à une représentation idéalisée des phénomènes de concentration de contraintes. Considérer des coins anguleux et postuler qu'ils sont des sites privilégiés de propagation de fissure ou de nucléation devient alors tout à fait légitime puisqu'ils sont la représentation idéalisées de sites de concentration de contraintes, eux mêmes propices à ces mécanismes de propagation ou de nucléation. Ces précisions nous ont semblé être un préalable utile à la présentation de notre modèle géométrique représentant l'excavation d'un tunnel, mais aussi aux hypothèses de mécanismes de fracturation que nous proposerons par la suite.

2.1.4 Modélisation de l'excavation d'un tunnel

Suite à la discussion précédente sur le bienfondé des géométries idéalisées, nous proposons de modéliser l'excavation d'un tunnel de la façon la plus simple possible afin de ne pas nous encombrer de paramètres superflus tels que le rayon de courbure des coins en front de taille. Ainsi, la description géométrique présentée Figure 2.8 nous semble à même de capturer les différents éléments physiques permettant ensuite d'analyser les mécanismes pouvant mener à la formation des fameuses fissures en chevron. Ce que nous nous proposons d'explorer est si, à partir d'une partie de tunnel déjà forée et de longueur L_T, l'excavation d'une nouvelle passe de longueur L_p est susceptible d'amorcer des départs de fissure de géométries similaires à celles présentées Chapitre 1, Section 1.1. En toute rigueur, il faudrait prendre en compte que des fissures en chevrons existent déjà au moment de l'excavation d'une nouvelle passe et voir si de nouvelles fissures peuvent venir se superposer au réseau déjà en place. Nous proposons, pour simplifier un peu l'analyse, de ne pas prendre en compte les fissures déjà existantes et de nous concentrer sur la possibilité de nucléation au moment de l'excavation.

Il reste à préciser le chargement du problème. En effet, il est nécessaire de savoir comment modéliser l'action mécanique du tunnel préexistant sur le sol et surtout comment prendre

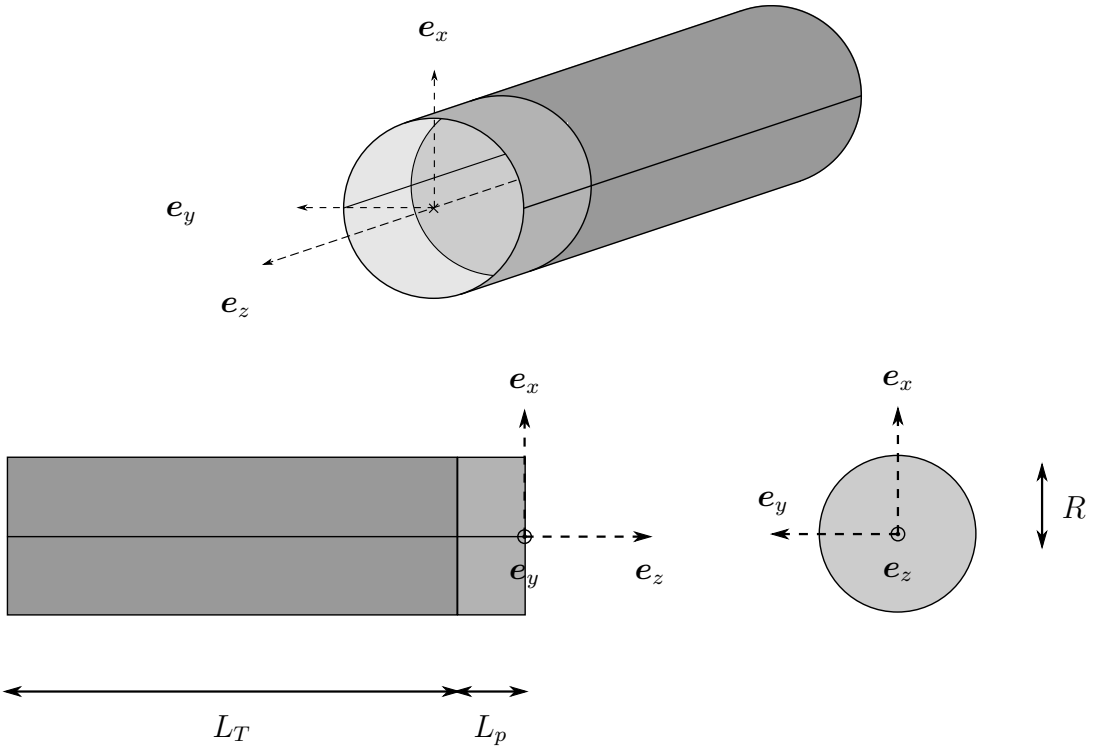

FIGURE 2.8 – Modélisation géométrique de l'excavation d'un tunnel. L_T est la longueur de tunnel déjà foré, L_p la longueur de la passe et R est le rayon du tunnel. L'axe du tunnel $\boldsymbol{e}_z$ correspond à l'une ou l'autre des directions associés aux contraintes principales horizontales

en compte le phénomène de l'excavation. Dans un premier temps, nous devons prendre en compte le fait que la construction du tunnel se fait dans un milieu précontraint. L'état de référence, correspondant au moment où la nouvelle passe est entreprise, n'est donc pas associé à un champ de contrainte nulle puisque la poussée des terres implique l'existence d'un état de compression que nous noterons $\boldsymbol{\sigma}_p$. Cette précontrainte est donc une conséquence directe du caractère pesant du sol considéré. Pour autant, la profondeur à laquelle le tunnel est creusé pousse à négliger, dans la zone d'étude, l'effet du poids sur la variation de $\boldsymbol{\sigma}_p$. En considérant que la masse volumique $\rho_{argilite}$ de l'argilite est de l'ordre du millier de kilogramme par mètre cube, alors, pour un tunnel de l'ordre du mètre et pour un domaine d'étude de l'ordre de la centaine de mètres (de sorte que le domaine d'étude soit grand par rapport au tunnel), il découle une variation du champ de contrainte entre le point le plus haut et le plus bas de la zone considérée l'ordre de $\Delta\boldsymbol{\sigma}_p \sim 1\,\text{MPa}$. Sachant que les contraintes en présence sont plutôt de l'ordre de la dizaine de méga Pascal (cf. Chapitre 1, Section 1.1), il semble légitime de négliger les variations de précontrainte à l'échelle de l'ouvrage. Ainsi, la précontrainte considérée $\boldsymbol{\sigma}_p$ sera prise constante sur l'intégralité du domaine présenté Figure 2.9 et les champs de contrainte statiquement admissibles seront pris à divergence nulle. Etant donné les contraintes en présence avant l'excavation du tunnel ainsi que les directions de forages utilisées, cette précontrainte se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \sigma_I \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \sigma_{II} \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + \sigma_{III} \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z \tag{2.16}$$

Dans ce contexte, l'excavation de la passe du tunnel consiste en un déconfinement des terres. Puisque cette action conduit, une fois achevée, à la création d'un bord libre, nous nous proposons de la modéliser simplement en imposant un vecteur contrainte au niveau des bords extérieurs de la passe passant progressivement de la valeur initiale $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}$ à la

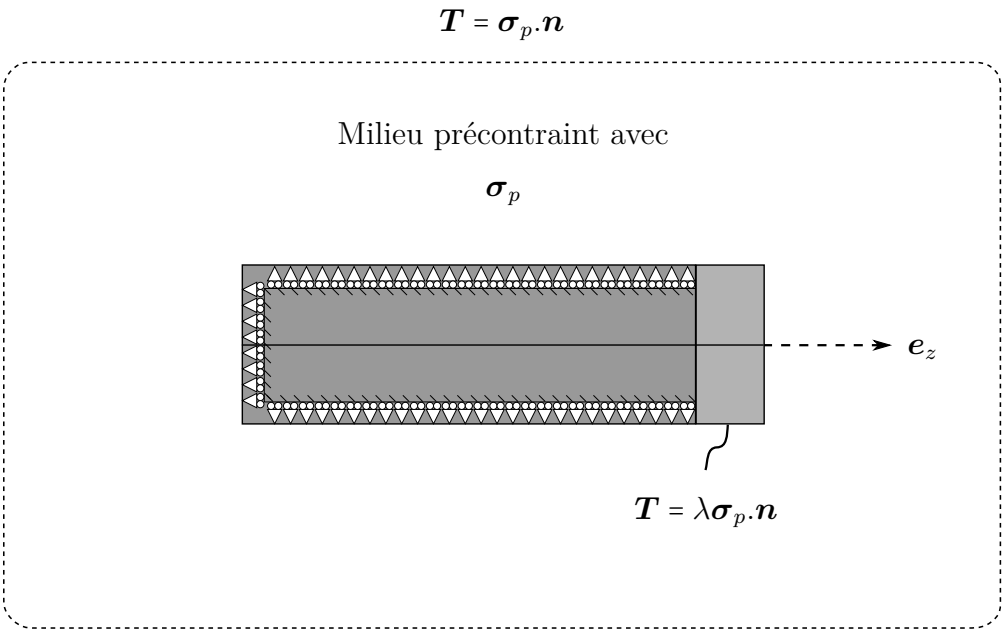

FIGURE 2.9 – Modélisation des contraintes s'exerçant lors de l'excavation du tunnel. Au niveau de la passe, les contraintes passent progressivement de leur valeur initiale à une valeur nulle par le biais du facteur λ décroissant de 1 à 0

valeur finale $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$. Pour ce faire, une fonction du temps $\lambda(t)$ est définie sur un intervalle de temps $\{t_i, t_f\}$ correspondant à la mise en œuvre de la passe et telle que :

$$\lambda(t) \longrightarrow \{t_i, t_f\} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lambda(t_i) & = & 1 \\ \lambda(t_f) & = & 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lambda \searrow \tag{2.17}$$

Enfin, il reste à préciser l'action du tunnel préexistant sur le sol en présence. A ce titre, deux hypothèses de modélisation sont faites : nous supposons que des cintres de soutènement sont présents et nous proposons d'utiliser un contact lisse au niveau des parois du tunnel. L'ensemble de ces actions est représenté Figure 2.9 où le chargement loin du tunnel est également précisé.

Cette modélisation, bien que grossière par certains aspects, nous semble comporter suffisamment d'informations pour être à même de capturer les mécanismes entrant en jeu dans le phénomène de nucléation des fractures en chevrons. La définition du modèle géométrique et du chargement permet d'ailleurs dès à présent de préciser une hypothèse de travail vis à vis de ces mécanismes. En effet, la présence de coin au niveau du front de taille implique nécessairement la présence de contraintes singulières. Nous l'avons vu, cette singularité n'est pas uniquement un artefact dû au choix d'une modélisation par coins anguleux. Il s'agit en fait de la traduction idéalisée d'un phénomène tout à fait physique et réellement en place qui est la concentration de contraintes. Cette dernière pouvant être très élevée, le front de taille devient de fait un site privilégié pour la nucléation du fissures. L'hypothèse de travail que nous adoptons naturellement est que les fissures en chevrons y prennent naissance. Par conséquent, il s'agit maintenant de juger de l'opportunité de la nucléation de fissures en chevron à partir des coins du front de taille. Si cela s'avère possible, il sera nécessaire dans un deuxième temps de vérifier que les faciès de fissuration obtenus peuvent être comparés à ceux observés par l'ANDRA. Pour y parvenir, le modèle étant désormais défini, la nature de l'état de contrainte au voisinage de ces sites privilégiés doit être analysée. Ce n'est qu'à partir de cette analyse qu'il sera possible de déterminer si les fissures à prendre en compte doivent être de type ouvertes ou au contraire de type fermées.

2.2 Justification d'une analyse bidimensionnelle

Dans un premier temps, il est suffisant de s'intéresser à l'état de contrainte régnant localement au niveau des coins anguleux du front de taille. C'est en effet, dans cette région, la singularité de contrainte qui va imposer si la zone est dans un état de compression ou au contraire de traction. Cependant, la structure de ces singularités ne semble pas être connue pour une géométrie de cylindre à base circulaire. Si nous considérons que le chargement et que le matériau considérés possèdent une symétrie cylindrique par rapport à l'axe du tunnel $\boldsymbol{e}_z$, il parait assez intuitif de considérer que sur un ensemble de petite taille par rapport à R le rayon du tunnel, constituant un voisinage d'une partie du coin du front de taille, tout se passe comme si le problème se posait en déformations planes. Si tel était le cas, la question de la structure de la singularité ne se poserait plus puisque celle-ci est bien connue pour une géométrie de coin dans un problème bidimensionnel. Ainsi, nous allons nous attacher à montrer qu'il est possible de postuler localement, au niveau d'un certain nombre de sites qui nous intéressent, un état plan.

2.2.1 Raisonnement par ordre de grandeur

Pour aller un peu au-delà des conditions axisymétriques, il est possible de se placer dans une situation hypothétique où le problème illustré Figures 2.8 et 2.9 possède un plan de symétrie contenant l'axe du tunnel $\boldsymbol{e}_z$. L'angle que forme ce plan avec $\boldsymbol{e}_x$, jouant ici le rôle d'axe vertical, sera noté θ_s comme sur la Figure 2.10. Les champs considérés seront supposés être au moins $\mathcal{C}^1$ par rapport à l'angle θ. Dire que le problème possède un axe de

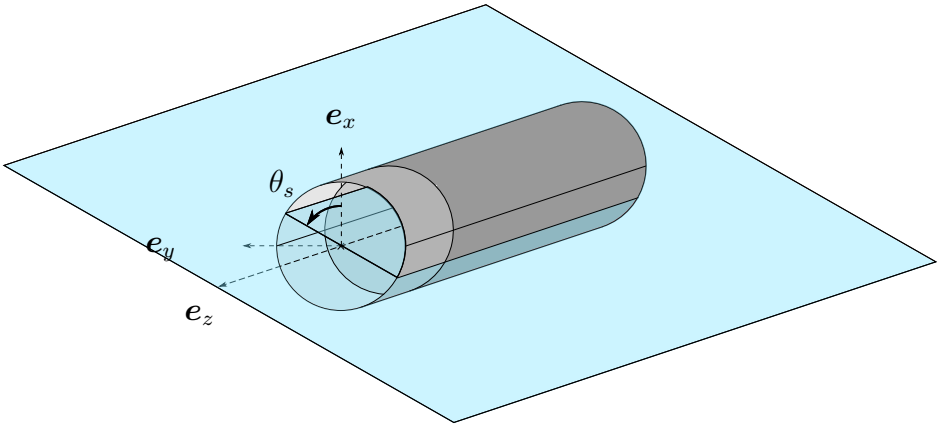

FIGURE 2.10 – Exemple d'un plan de symétrie pour le problème de l'excavation du tunnel contenant l'axe $\boldsymbol{e}_z$ et formant un angle θ_s avec l'axe $\boldsymbol{e}_x$

symétrie signifie que le matériau, le chargement et la géométrie considérés possèdent tous cette propriété de symétrie. Cette hypothèse adjointe à celle de la régularité des champs implique les propriétés suivantes :

$$\xi_\theta\left(r,\theta_s,z\right)=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\,\cdot\,\right)\left(r,\theta_s,z\right)=0 \tag{2.18}$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est le vecteur déplacements solution du problème considéré et où (r,θ,z) est le système de coordonnées cylindriques classique. La condition de régularité peut sembler un peu restrictive puisqu'en toute rigueur le champ de déplacement est seulement assujetti à être $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Cependant, la condition suggérée sera très probablement vérifiée dès que le chargement ne présentera pas de discontinuité et que le matériau considéré sera homogène.

De plus, cette condition a le mérite d'englober le cas axisymétrique qui correspond à une situation où tout plan contenant l'axe $\boldsymbol{e}_z$ est plan de symétrie et où effectivement la condition de régularité exigée est vérifiée. Les composantes en coordonnées cylindriques du champ de déformation associé à un champ de déplacement vérifiant (2.18) et calculé en des points (r, θ_s, z) se mettent sous les formes suivantes :

$$\begin{array}{lllllllll} \varepsilon_{rr} & = & \dfrac{\partial \xi_r}{\partial r} & , & \varepsilon_{zz} & = & \dfrac{\partial \xi_z}{\partial z} & , & \varepsilon_{rz} & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \xi_r}{\partial z} + \dfrac{\partial \xi_z}{\partial r}\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} & = & \dfrac{\xi_r}{r} & , & \varepsilon_{r\theta} & = & 0 & , & \varepsilon_{\theta z} & = & 0 \end{array} \tag{2.19}$$

Ces expressions peuvent évoquer une situation de déformations planes dans le plan $(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_r)$, où $\boldsymbol{e}_\theta$ joue le rôle de direction hors plan pour peu que $\varepsilon_{\theta\theta}$ soit nul ou à défaut petit devant les autres composantes non nulles. Un raisonnement basé sur l'ordre de grandeur de ces différents termes entre eux peut être utilisé afin de légitimement négliger $\varepsilon_{\theta\theta}$. Dans le plan

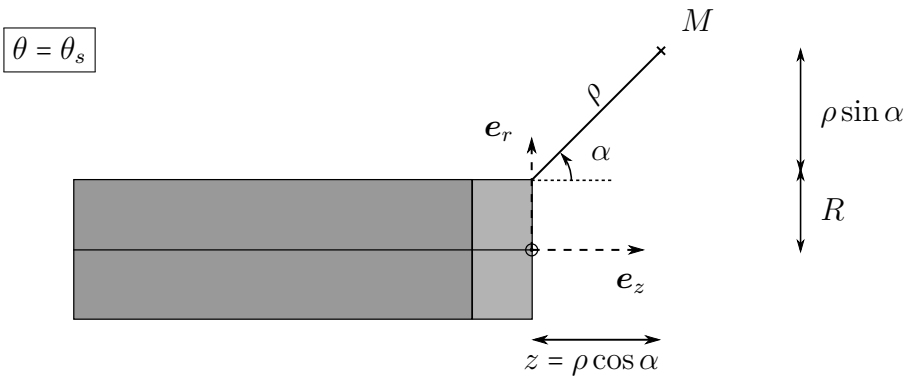

FIGURE 2.11 – Introduction d'une base locale au niveau du coin du tunnel pour un angle $\theta = \theta_s$

d'intérêt, on peut définir une base locale telle que présentée sur la Figure 2.11. En anticipant un peu le résultat justifiant une analyse plane, ce repère local constituera en quelque sorte un repère polaire local dont l'origine se trouve au niveau du coin du front de taille. En supposant qu'on se situe proche de ce coin de sorte que $\rho \ll R$, il apparait que l'ordre de grandeur de dr et dz sera celui de $d\rho$ alors que, au contraire, l'ordre de grandeur de r sera en R. Plus précisément, si nous nous intéressons à la singularité de contrainte, il est légitime, comme nous le verrons par la suite, de chercher le déplacement en variables séparées et plus précisément de la forme $\xi_r \sim \rho^\delta f(\alpha)$ (avec une expression similaire pour ξ_z). Une conséquence immédiate d'une telle écriture est qu'alors $\varepsilon_{rr} \sim \rho^{\delta-1}$ tandis que $\varepsilon_{\theta\theta} \sim \frac{\rho^\delta}{R}$. Cette quantification en terme d'ordre de grandeur conduit donc au fait que localement, au niveau du coin du front de taille, il est complètement légitime d'affirmer que $\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_{\theta\theta}} \sim \frac{R}{\rho} \gg 1$. Ce raisonnement sur les ordres de grandeurs permet de montrer qu'au niveau d'un voisinage d'un plan de symétrie, il est possible, loin de l'axe $\boldsymbol{e}_z$, de se considérer comme étant en déformations planes. La direction $\boldsymbol{e}_\theta$ endosse alors le rôle de la direction hors plan.

Rappelons que l'objectif de cette analyse est de pouvoir qualifier la nature des contraintes au niveau des coins du front de taille. Puisque ces derniers ont été modélisés comme anguleux, une singularité sera nécessairement présente et c'est elle qui dictera l'état de contraintes recherché. Dans un contexte bidimensionnel, il est possible d'exprimer localement, au niveau d'un coin, la structure de la singularité. Or nous venons justement de montrer que si le problème du tunnel possède un plan de symétrie, il est possible localement, au niveau du coin du front de taille appartenant à ce plan, de se considérer en déformations planes. Par conséquent, il semble parfaitement normal de supposer que la structure de la singularité

existante sera identique à celle obtenue en déformations planes et donc facilement accessible. La chance que nous avons est que le problème que nous considérons possède au moins deux plans de symétrie. En effet, le sol dans lequel a lieu l'excavation est de l'argilite. Si l'on souhaite le modéliser comme un matériau élastique anisotrope, il est légitime, dans notre cas de figure, de lui conférer une propriété d'isotropie transverse d'axe $\boldsymbol{e}_x$ qui correspond à l'axe vertical avec les notations introduites Figure 2.8. De plus, les contraintes en présence *in situ* avant l'excavation du tunnel ayant des directions principales correspondant aux axes $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ et $\boldsymbol{e}_z$, le chargement que nous avons considéré, étant engendré à partir de $\boldsymbol{\sigma}_p$ (2.16), possède les trois plans $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$, $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ et $(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x)$ comme plans de symétrie. Enfin, la géométrie du tunnel que nous considérons étant celle d'un cylindre à base circulaire est donc symétrique de révolution par rapport à son axe $\boldsymbol{e}_z$. Tous ces éléments permettent d'affirmer l'existence de deux plans de symétrie pour le problème que nous considérons :

— le plan horizontal engendré par les vecteurs $\boldsymbol{e}_y$ et $\boldsymbol{e}_z$

— le plan vertical comprenant l'axe du tunnel et donc engendré par les vecteurs $\boldsymbol{e}_z$ et $\boldsymbol{e}_x$

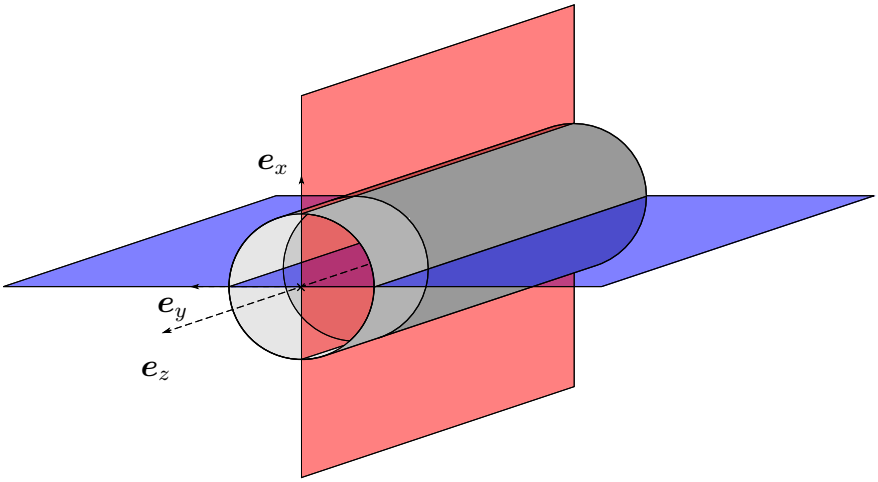

FIGURE 2.12 – Quelle que soit la modélisation du matériau et du chargement, le problème admet au minimum deux plans de symétrie qui sont le plan horizontal et le plan vertical contenant l'axe du tunnel

Avec les considérations précédentes, nous sommes donc a priori en mesure d'accéder de manière simple et immédiate à la structure de la singularité en au moins 4 points caractéristiques qui sont les 4 coins du front de taille appartenant au deux plans de symétrie décrits plus haut et illustrés Figure 2.12. Il suffit en effet de prendre celle associée au problème d'un coin à angle droit dans un milieu en déformations planes. Cette propriété sera confortée un peu plus loin puisqu'une deuxième justification sera apportée Sous-section 2.2.4 dans le cas particulier de conditions axisymétriques. Dans un premier temps, essayons de tirer profit de l'analyse qui vient d'être menée et exhibons la structure de la singularité de contrainte associée à des coins anguleux dans des problèmes bidimensionnels.

2.2.2 Singularités de contrainte bidimensionnelles en condition isotrope

La démonstration précédente a été faite pour montrer qu'il est possible d'utiliser, au niveau d'un plan de symétrie, les solutions singulières des problèmes bidimensionnels en faisant jouer à r et à z le rôle de coordonnées cartésiennes planes $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ respectivement

et en interprétant $\boldsymbol{e}_\theta$ comme la direction hors plan. Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à détailler quelles sont les singularités associées à la géométrie et au chargement (local) proposés. Les méthodes usuelles permettant d'exhiber les solutions singulières reposent sur des coins aux bords libres de contrainte et considèrent des états de référence naturels ainsi que des matériaux isotropes. Ainsi, s'il est possible d'adapter ces méthodes au cas de chargement traité, il sera possible d'accéder aux singularités dans le cas où le sol est assimilé tout entier à un matériau isotrope ou alors pour un plan de symétrie permettant localement de considérer un matériau isotrope (c'est par exemple le cas pour le plan horizontal). Ces deux cas étant déjà très intéressants et instructifs, il apparaît utile de chercher à adapter les méthodes usuelles. Pour pouvoir y recourir presque sans modifications, il suffit de raisonner par superposition afin de considérer un problème où les bords de l'excavation au niveau de la passe sont libres de contrainte. Dans ce but, une décomposition naturelle du problème

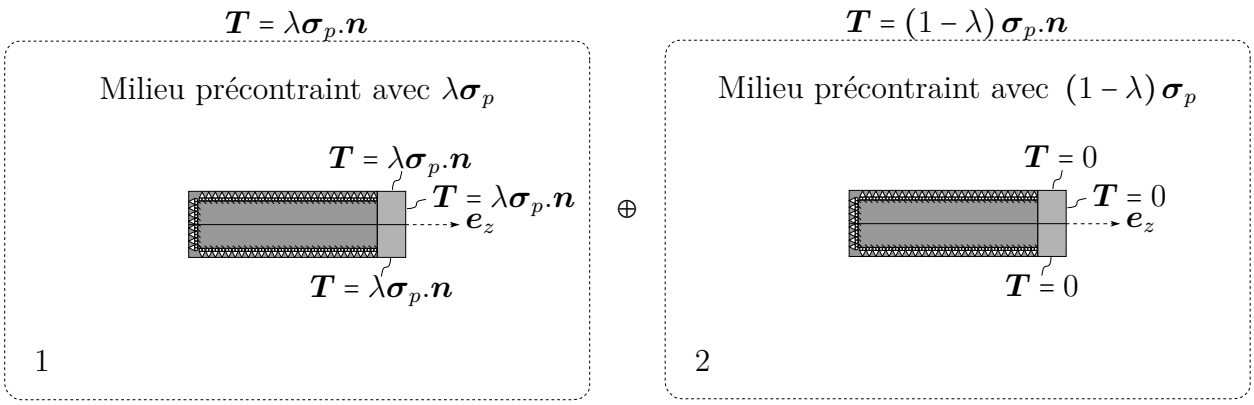

FIGURE 2.13 – Utilisation du principe de superposition pour se ramener dans une situation où les bords de l'excavation sont libre de contraintes au niveau de la passe

initial, associé à la Figure 2.9, est présentée Figure 2.13. L'avantage de cette décomposition est, outre le fait que le problème numéro 2 répond aux attentes en terme de bords libres, que le problème numéro 1 admet pour solution triviale le champ de contrainte constant $\lambda\boldsymbol{\sigma}_p$. Au vu des précontraintes considérées et des conditions aux limites, le champ de déplacement lui étant associé est rigoureusement nul. La solution du problème numéro 1 étant parfaitement régulière, il est clair que si le problème initial admet effectivement des singularités, alors ces dernières sont entièrement caractérisées par le problème numéro 2. Ce dernier jouissant des mêmes propriétés de symétrie que le problème initial, le passage en déformations planes est tout autant justifié.

Par conséquent, le problème équivalent qui doit être traité est celui présenté Figure 2.14. Une approche classique consiste à chercher le champ de contrainte comme dérivant d'une fonction d'Airy ϕ selon les équations (2.2). En l'absence de précontrainte, il a été précisé que les conditions de compatibilité géométriques se résumaient au fait que ϕ devait être biharmonique (2.4). Cependant, la précontrainte ici considérée étant constante, on montre de manière immédiate que les relations de compatibilité géométrique, transportées sur le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, sont inchangées. Par conséquent, le caractère biharmonique de la fonction d'Airy est conservé. Pour poursuivre, l'idée est de chercher la fonction d'Airy comme étant à variable séparable par rapport aux coordonnées locales (ρ, α) introduites Figures 2.11 et 2.14. Plus précisément, ϕ est recherchée sous la forme :

$$\phi(\rho, \alpha) = \rho^{\delta+2} f(\alpha) \tag{2.20}$$

où f est une fonction au moins $\mathcal{C}^2$. Le caractère biharmonique de ϕ se traduit, pour des raisons d'homogénéité, par une équation différentielle d'ordre 4 sur f dont les coefficients

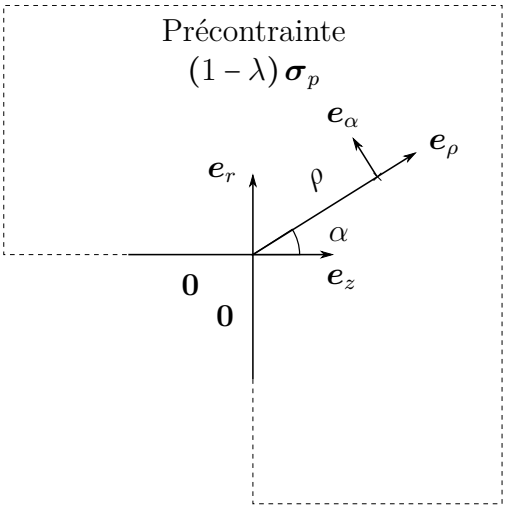

FIGURE 2.14 – Définition du problème plan équivalent

font intervenir δ et dont les solutions se mettent sous la forme :

$$f(\alpha) = A\cos((\delta+2)\alpha) + B\sin((\delta+2)\alpha) + C\cos(\delta\alpha) + D\sin(\delta\alpha) \tag{2.21}$$

En coordonnées polaires, la transposition de (2.2), permettant d'accéder aux composantes du champ de contrainte à partir de la fonction d'Airy ϕ, s'écrit :

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{\rho}\phi_{,\rho} + \frac{1}{\rho^2}\phi_{,\alpha\alpha} \quad , \quad \sigma_{\rho\alpha} = -\frac{1}{\rho}\phi_{,\rho\alpha} + \frac{1}{\rho^2}\phi_{,\alpha} \quad , \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \phi_{,\rho\rho} \tag{2.22}$$

Puisque l'objectif est d'exhiber des objets singuliers, il est suffisant de s'intéresser uniquement à la plage $\delta < 0$. Le champ de déformation, se calculant comme $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_p)$ où $\mathbb{S}$ est le tenseur de souplesse, présente le même degré de singularité que $\boldsymbol{\sigma}$. Par conséquent, la densité volumique d'énergie élastique au voisinage de la fissure comprend deux termes qui se comportent, au voisinage du coin, comme $r^{2\delta}$ en ce qui concerne la partie quadratique en $\boldsymbol{\varepsilon}$, et comme r^{δ} en ce qui concerne la partie linéaire. L'exposant δ étant désormais négatif, il s'ensuit que la densité volumique se comporte au niveau du coin comme $r^{2\delta}$. Puisque l'énergie élastique stockée au voisinage de la fissure est obtenue par intégration de cette densité, une condition portant sur δ est nécessaire afin de garantir la convergence de cette intégrale au voisinage de $r = 0$. En effet, il est immédiat que cet exposant doit vérifier $\delta > -1$. Ces précisions étant établies, il est désormais possible de chercher à caractériser quelles sont les valeurs de δ admissibles par rapport au problème considéré. Grâce aux expressions (2.22), les équations associées au caractère libre de contrainte des bords du coin anguleux peuvent être déduites. Elles se traduisent sur la fonctionnelle f par les conditions suivantes :

$$f'(\pi) = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\pi) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{2.23}$$

Ces dernières conduisent à un système linéaire dont A, B, C et D sont solutions. Celui-ci se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos((\delta+2)\pi) & \sin((\delta+2)\pi) & \cos(\delta\pi) & \sin(\delta\pi) \\ \cos\left((\delta+2)\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left((\delta+2)\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\delta\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\delta\frac{\pi}{2}\right) \\ -(\delta+2)\sin((\delta+2)\pi) & (\delta+2)\cos((\delta+2)\pi) & -\delta\sin(\delta\pi) & \delta\cos(\delta\pi) \\ (\delta+2)\sin\left((\delta+2)\frac{\pi}{2}\right) & (\delta+2)\cos\left((\delta+2)\frac{\pi}{2}\right) & \delta\sin\left(\delta\frac{\pi}{2}\right) & \delta\cos\left(\delta\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Pour que des solutions différentes de la solution triviale associée au vecteur nul puissent exister, il est nécessaire que ce système admette un déterminant égal à zéro. Après simplification, on trouve que cela revient à trouver les solutions de l'équation :

$$\cos(3\pi\delta) = 2\delta^2 + 4\delta + 1 \qquad \text{avec} \qquad \delta \in]-1, 0[\tag{2.25}$$

Une résolution numérique permet de montrer l'existence de deux valeurs de δ dans l'intervalle ouvert $]-1, 0[$ permettant de résoudre l'équation précédente qui sont :

$$\delta_1 = -0.4555 \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = -0.09147 \tag{2.26}$$

Il est à remarquer qu'il n'existe pas de solution à l'équation (2.25) pour des valeurs de δ strictement positives, et ce, contrairement au cas de la fissure plate de Griffith. En effet, les seules solutions à variables séparables de la forme (2.20), avec des exposant δ réels et physiquement admissibles sont les solutions singulières. D'autres solutions à variables séparables existent et font appel à des exposants complexes. Celles-ci ne présentent aucun intérêt dans le cadre de cette étude puisque les champs prédominants au niveau du coin considéré sont les solutions singulières associées à des exposants réels. Pour chacune de ces deux valeurs, la matrice présente dans l'équation (2.24), associée au système linéaire devant être résolu, perd son caractère inversible. Plus précisément, on trouve que son noyau est, dans les deux cas, de dimension égale à 1. Il s'agit donc de choisir deux vecteurs, appartenant respectivement à l'un des deux noyaux, afin de former des familles génératrices. Cependant, le choix de ces vecteurs se faisant à une homothétie près, il est nécessaire de choisir une façon arbitraire de les normaliser. On peut par exemple choisir ces vecteurs de telle sorte que leur premier coefficient soit égal à 1 (si celui-ci n'est pas égal à zero). Ce choix étant arrêté, nous venons de montrer qu'il existe deux solutions singulières, associées à des degrés de singularité différents, sur lesquels le champ de contrainte solution se décompose localement de manière linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = k_1 \rho^{\delta_1} \boldsymbol{\sigma}_1 + k_2 \rho^{\delta_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \tag{2.27}$$

où k_1 et k_2 sont des équivalents des facteurs d'intensité de contrainte. Les composantes en coordonnées polaires de $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ sont données Figure 2.15. Si k_1 et k_2 sont non nuls dans la décomposition (2.27), le fait d'avoir trouvé deux degrés de singularité différents δ_1 et δ_2 implique nécessairement que l'un des deux modes prédomine sur l'autre au voisinage du coin considéré. En effet, le mode le plus singulier, c'est-à-dire celui associé à l'exposant δ le plus faible, dominera l'autre terme lorsque ρ sera considéré suffisamment petit. Dans notre cas, si $k_1 \neq 0$, la structure du champ de contrainte sera localement imposée par $\boldsymbol{\sigma}_1$ qui est un mode symétrique par rapport à la première bissectrice du coin considéré (et donc par rapport à l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$).

Pour pouvoir conclure quant à l'existence localement d'un état de traction ou de compression, il est nécessaire de calculer la valeur de k_1 puis éventuellement de k_2. Une manière de calculer numériquement ces coefficients peut être trouvée dans Leguillon et Sanchez-Palencia [1987]. Il est par contre nécessaire de montrer que celle-ci peut s'étendre au cas où l'état de référence considéré n'est pas l'état naturel.

2.2.3 Calcul des facteurs d'intensité de contrainte en présence d'une précontrainte

La méthode sur le point d'être décrite se base sur l'existence de champs de contrainte singuliers, à divergence nulle, vérifiant les conditions aux limites locales, mais associés à des singularités $\delta < -1$, dits duaux, et donc non physiques. Pour montrer l'existence de ces

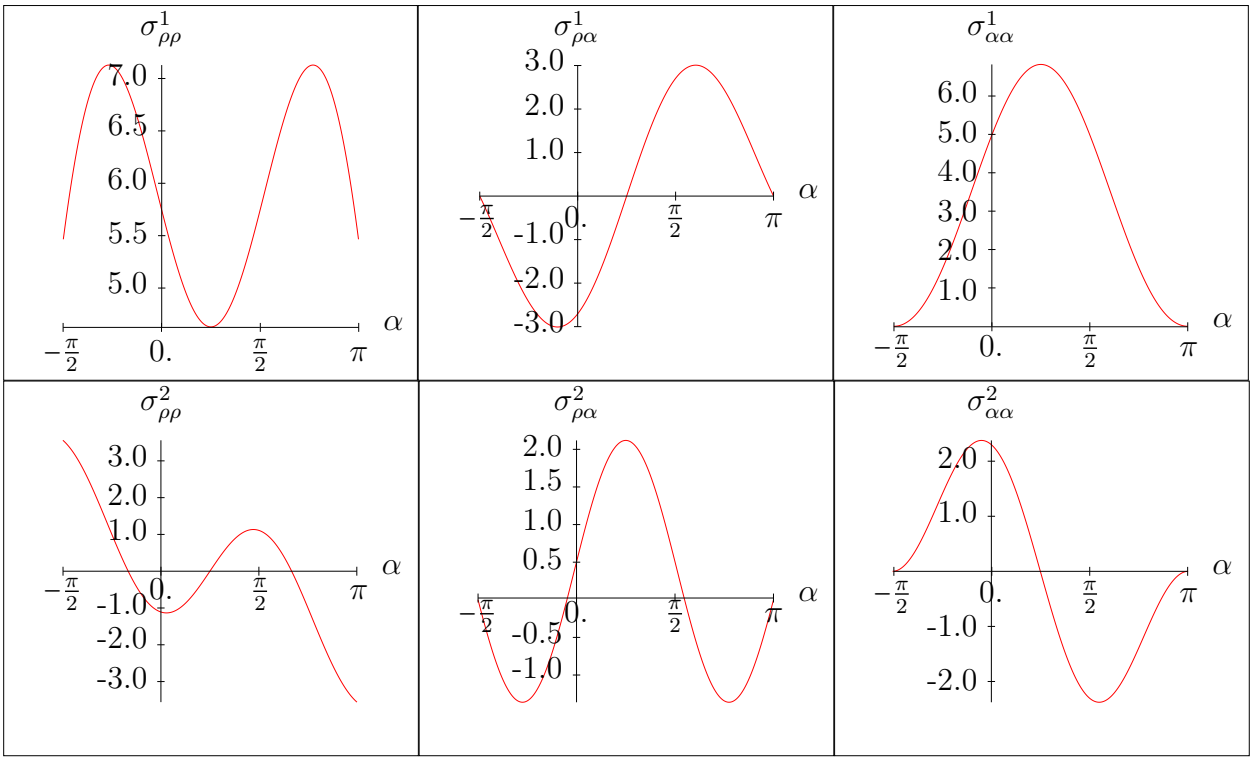

FIGURE 2.15 – Représentation, dans la base polaire locale, en fonction de l'angle α, des composantes des tenseurs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ associés à des singularité de degré $\delta_1 = -0.4555$ et $\delta_2 = -0.09147$ respectivement

champs, on peut par exemple constater que si δ est solution de (2.25), alors $-2-\delta$ l'est également. Par conséquent, si $\delta \in]-1,0[$ alors $-2-\delta \in]-2,-1[$ ce qui implique que la densité d'énergie élastique associée à un tel champ de contrainte n'est pas intégrable en $\rho = 0$. Il existe donc deux champs de contrainte, notés $\boldsymbol{\sigma}_{-1}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{-2}$, de singularité respective $-2-\delta_1$ et $-2-\delta_2$, qui représentent des objets purement mathématiques mais qui sont d'un grand intérêt pour accéder aux valeurs de k_1 et k_2.

Considérons en effet deux contours Γ_1 et Γ_2 s'appuyant tous deux sur des bords libres de contraintes du problème équivalent bidimensionnel et entourant la singularité géométrique comme illustré sur la Figure 2.16. Notons Ω le domaine délimité par ces deux contours et les bords libres. Supposons maintenant que le tenseur d'ordre 2 défini par $\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}_p$ vérifie les conditions de compatibilité géométrique, c'est-à-dire qu'il est possible de lui associer un champ vectoriel $\boldsymbol{\xi}_p$ dont il est le gradient symétrisé. Une telle propriété n'est en effet pas automatiquement vérifiée et doit donc être supposée. Dans le cas qui nous intéresse, la question est réglée puisque le champ de précontrainte a été choisi comme étant constant sur tout l'espace. Le champ tensoriel $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ est en quelque sorte une pseudo-déformation puisque celui-ci ressemble à un objet de type déformation mais n'a pas de réalité physique. Considérons désormais deux champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ pouvant être différents des champs singuliers introduits précédemment, étant statiquement admissibles avec les conditions de bords libres et associés à des déformations géométriquement compatibles $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ par le biais de la loi de comportement élastique en présence de la précontrainte $\boldsymbol{\sigma}_p$. Soient enfin $\boldsymbol{\xi}_1$ et $\boldsymbol{\xi}_2$ deux champs de déplacements étant associées à ces deux champs de déformations. Le fait d'avoir introduit le pseudo champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ permet d'écrire la loi de comportement élastique sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_i) \tag{2.28}$$

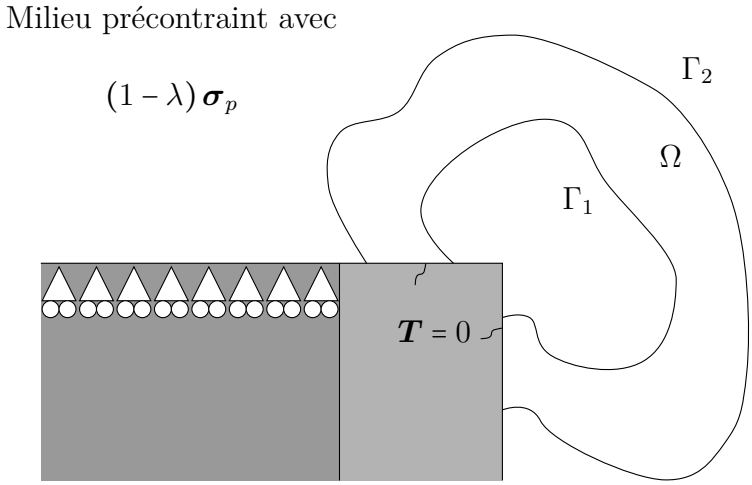

FIGURE 2.16 – Illustration de deux contours Γ_1 et Γ_2 entourant la singularité géométrique et prenant appuis sur des surfaces libres de contraintes.

Le théorème de Maxwell-Betti montre la nullité de la quantité :

$$\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}_1 : (\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_2) - \boldsymbol{\sigma}_2 : (\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_1)\right) dV \tag{2.29}$$

En utilisant le théorème de la divergence dans l'expression précédente ainsi que le fait que $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ sont tous deux à divergence nulle et vérifient $\boldsymbol{\sigma}_i.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ au niveau de la paroi du tunnel (où $\boldsymbol{n}$ est normal à la paroi), on établit la propriété suivante :

$$\int_{\Gamma_1} \left(\left(\boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{\xi}_2\right).\boldsymbol{\sigma}_1.\boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{\xi}_1\right).\boldsymbol{\sigma}_2.\boldsymbol{n}\right) dS = \int_{\Gamma_2} \left(\left(\boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{\xi}_2\right).\boldsymbol{\sigma}_1.\boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{\xi}_1\right).\boldsymbol{\sigma}_2.\boldsymbol{n}\right) dS \tag{2.30}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale au contour considéré pointant vers l'extérieur au domaine incluant le coin. A la suite de D. Leguillon et E. Sanchez-Palencia, définissons maintenant la forme bilinéaire ψ définie sur l'espace des champs de déplacement comme :

$$\psi(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = \int_{\Gamma} \left(\left(\boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{V}\right)\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{U}).\boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{U}\right).\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{V}).\boldsymbol{n}\right) dS \tag{2.31}$$

où Γ est un contour ayant les mêmes propriétés que Γ_1 ou Γ_2 et où $\boldsymbol{n}$ est la normale pointant vers l'extérieur du coin. Le résultat précédent montre que cette fonctionnelle est indépendante du choix du contour Γ pour peu que $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ soient associés à des champs de contrainte statiquement admissibles avec les conditions de bords libres.

A partir de ce stade, le champ $\boldsymbol{\xi}^{sol}$ désignera la solution du problème. Nous avons vu que, localement, le champ de contrainte associé à ce champ de déplacement se décomposait selon deux champs singuliers associés à des degrés de singularité notés δ_1 et δ_2. Il existe dans la littérature des expressions de représentation permettant d'obtenir, à partir de la fonction d'Airy, le champ de déplacement associé à un champ de contrainte dérivant d'une fonction d'Airy biharmonique. Il faut néanmoins faire attention au fait que ces formules sont obtenues dans le cas où le milieu considéré est initialement dans son état naturel. Ces formules peuvent toutefois être facilement adaptée au cas où une précontrainte existe si celle-ci est associée à des pseudo-déformations géométriquement compatibles. En effet, elles permettent dans ce cas d'accéder non pas au champ de déplacement associé $\boldsymbol{\xi}$, mais au champ tensoriel $\boldsymbol{\xi}_p + \boldsymbol{\xi}$. Grâce à cette remarque, l'intérêt de la fonctionnelle ψ introduite précédemment, se différenciant de celle présentée dans LEGUILLON et SANCHEZ-PALENCIA

[1987] par la présence de ce pseudo champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}_p$, apparait clairement. Si $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ sont à nouveau les deux champs de contrainte singuliers introduits en (2.27), il est possible de leur adjoindre, puisqu'ils dérivent d'une fonction d'Airy biharmonique, deux champs de déplacement $\boldsymbol{\xi}_1$ et $\boldsymbol{\xi}_2$. Il en va de même des deux champs de contrainte mathématiques $\boldsymbol{\sigma}_{-1}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{-2}$ auxquels sont associés deux champs de déplacement, notés $\boldsymbol{\xi}_{-1}$ et $\boldsymbol{\xi}_{-2}$ respectivement. Remarquons alors que si le champ $\boldsymbol{\sigma}_k$ (où $k \in \{-2,-1,1,2\}$) est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \rho^{\delta_k} \boldsymbol{g}_k(\alpha) \tag{2.32}$$

où $\boldsymbol{g}_k$ est un certain champ tensoriel d'ordre deux ne dépendant que de la coordonnée α du repère local introduit précédemment, alors, en ne se préoccupant pas des déplacements de corps rigide, le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}_k$ se met nécessairement sous la forme :

$$\boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{\xi}_p = \rho^{\delta_k+1} \boldsymbol{h}_k(\alpha) \tag{2.33}$$

où $\boldsymbol{h}_k$ est un certain champ tensoriel de degré 1 ne dépendant lui aussi que de la coordonnée α. Les champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_k$ vérifiant toutes les conditions fixées pour pouvoir être utilisés comme arguments de la fonctionnelle ψ, on montre facilement que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \psi\left(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_l\right) & = & 0 \quad \text{si} \quad k \neq -l \\ \psi\left(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_{-k}\right) & \neq & 0 \end{array} \right. \tag{2.34}$$

En effet, il suffit pour s'en rendre compte d'utiliser le cas particulier de contours Γ correspondant à des arcs de cercle de rayon R centrés sur l'origine du repère $\rho = 0$. Avec les dépendances (2.32) et (2.33) de $\boldsymbol{\sigma}_k$ et de $\boldsymbol{\xi}_l$, il vient :

$$\psi\left(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_l\right) = R^{\delta_k+1+\delta_l+1} \int_\alpha \left(\boldsymbol{h}_l.\boldsymbol{g}_k.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{h}_k.\boldsymbol{g}_l.\boldsymbol{n}\right) d\alpha \tag{2.35}$$

L'indépendance de cette quantité vis à vis du contour Γ, se traduisant ici par l'invariance vis à vis du rayon R, n'est possible que si $\delta_k + \delta_l + 2 = 0$ ou $\int_\alpha \left(\boldsymbol{h}_l.\boldsymbol{g}_k.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{h}_k.\boldsymbol{g}_l.\boldsymbol{n}\right) d\alpha = 0$. Ceci achève la démonstration de la nullité de $\psi\left(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_l\right)$ si $k \neq -l$.

Au voisinage du coin source de singularité, on montre, en plus de (2.27), le fait que :

$$\boldsymbol{\xi}^{sol} + \boldsymbol{\xi}_p = k_1\left(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_p\right) + k_2\left(\boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_p\right) \tag{2.36}$$

à un mouvement de corps rigide près. En utilisant les relations précédentes et l'indépendance pour le calcul de ψ du choix du contour Γ on montre, en choisissant Γ arbitrairement proche de la singularité géométrique, que :

$$\begin{array}{lclclcl} \psi(\boldsymbol{\xi}^{sol}, \boldsymbol{\xi}_{-1}) & = & k_1\psi(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_{-1}) & + & k_2\psi(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_{-1}) & = & k_1\psi(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_{-1}) \\ \psi(\boldsymbol{\xi}^{sol}, \boldsymbol{\xi}_{-2}) & = & k_1\psi(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_{-2}) & + & k_2\psi(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_{-2}) & = & k_2\psi(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_{-2}) \end{array} \tag{2.37}$$

Ces relations sont très fortes puisqu'elles permettent d'accéder, de manière très élégante, aux deux facteurs d'intensité de contrainte recherchés. Cependant, la difficulté de la détermination de $\boldsymbol{\xi}^{sol}$, qui est nécessaire pour par exemple calculer $\psi(\boldsymbol{\xi}^{sol}, \boldsymbol{\xi}_{-1})$, subsiste. La manière la plus simple d'y arriver est d'utiliser une approximation numérique basée sur la méthode des éléments finis. L'avantage de la fonctionnelle ψ est qu'il est possible de la calculer sur un contour se trouvant loin de la singularité géométrique. Cette propriété peut être salutaire puisqu'on sait que les approximations numériques n'arrivent pas à capturer finement le comportement de la solution au voisinage de ces singularités. Ainsi, le calcul de $\psi(\boldsymbol{\xi}^{sol}, \boldsymbol{\xi}_{-1})$ et de $\psi(\boldsymbol{\xi}^{sol}, \boldsymbol{\xi}_{-2})$ peut se faire loin du coin considéré, là où l'approximation de $\boldsymbol{\xi}^{sol}$ sera meilleure. Cette méthode sera utilisée à la fin de ce chapitre, Section 2.4, ainsi qu'au Chapitre 3.

2.2.4 Singularités de contrainte en conditions axisymétriques

L'objectif de cette partie est de confirmer le fait que le problème que nous traitons puisse, localement, au niveau d'un plan de symétrie, être assimilé à de la déformation plane. Pour y parvenir, nous proposons d'exhiber la structure de la singularité de contrainte au niveau du front de taille lorsque le problème peut être traité en conditions axisymétriques. Par rapport à l'analyse précédente, cela signifie que tout plan incluant l'axe du tunnel $\boldsymbol{e}_z$ est un plan de symétrie. Cela implique que les relations (2.18) sont vraies quel que soit l'angle θ_s. Par conséquent, il est possible de se placer dans un état de déformations planes sur tout voisinage d'un point appartenant au coin formé par le front de taille. Ainsi, la structure de la singularité de contrainte devra, en chacun de ces points, être similaire à celle exhibée en déformations planes dans la partie précédente. Afin de mener à bien cette étude, nous considérerons le problème d'un trou cylindrique d'extension finie, libre de contrainte, dans un milieu initialement dans son état naturel (Figure 2.17).

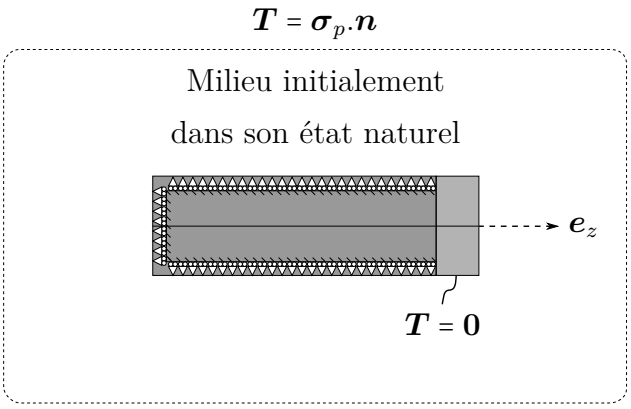

FIGURE 2.17 – Tunnel cylindrique en conditions axisymétriques avec bords libres d'effort et dans un milieu non précontraint

Dans un problème bidimensionnel, il était agréable de se baser sur des potentiels en contraintes afin d'exhiber la structure des singularités. Dans ce qui suit, nous proposons de partir de potentiels en déplacements et plus précisément des potentiels de Papkovich-Neuber. En conditions axisymétriques, il est possible de trouver deux potentiels permettant d'exprimer les composantes du champ de déplacement. L'un de ces potentiels est scalaire et sera noté ψ, l'autre est vectoriel et sera noté $\boldsymbol{\phi}$. Attention toutefois, malgré les notations maladroites, à ne pas confondre ces deux fonctions avec les potentiels complexes introduits précédemment. En conditions axisymétriques, on peut par exemple choisir ces deux fonctions sous la forme (KORSUNSKY [1995]) $\psi(r,z)$ et $\boldsymbol{\phi}(r,z) = \phi(r,z)\boldsymbol{e}_z$. L'expression des déplacements en fonctions de ces deux potentiels devient alors :

$$\begin{aligned} 2\mu\xi_r &= -z\phi_{,r} - \psi_{,r} \\ 2\mu\xi_z &= \kappa\phi - z\phi_{,z} - \psi_{,z} \\ 2\mu\xi_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

où κ est la constante de Kolosov égale à $3-4\nu$. Le tenseur des contraintes dérive alors des deux potentiels de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \tfrac{1}{2}(3-\kappa)\,\phi_{,z} - z\phi_{,rr} - \psi_{,rr} \\ \sigma_{zz} &= \tfrac{1}{2}(\kappa+1)\,\phi_{,z} - z\phi_{,zz} - \psi_{,zz} \\ \sigma_{rz} &= \tfrac{1}{2}(\kappa-1)\,\phi_{,r} - z\phi_{,rz} - \psi_{,rz} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \tfrac{1}{2}(3-\kappa)\,\phi_{,z} + z\left(\phi_{,rr} + \phi_{,zz}\right) + \psi_{,rr} + \psi_{,zz} \end{aligned} \tag{2.39}$$

En l'absence de force de volume, les conditions d'équilibre local transcrites sur les deux potentiels s'écrivent simplement :

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta\psi = 0 \tag{2.40}$$

où Δ est l'opération laplacien, lequel s'écrit en coordonnées cylindriques pour des conditions axisymétriques :

$$f = f_{,rr} + \frac{1}{r} f_{,r} + f_{,zz} \tag{2.41}$$

En ce qui concerne l'approche en déformations planes, l'ingrédient clé a été de chercher une fonction d'Airy à variables séparables dans un système de coordonnées locales au coin ausculté. Par conséquent, il est naturel de procéder à un changement de variable pour se placer dans le système de coordonnées locales (ρ, α) introduit Figure 2.11. Dans ce nouveau système de coordonnées, l'opérateur laplacien devient :

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} f_{,\alpha\alpha} + f_{,\rho\rho} + \frac{\cos\alpha}{\rho\,(R + \rho\sin\alpha)} f_{,\alpha} + \frac{R + 2\rho\sin\alpha}{\rho\,(R + \rho\sin\alpha)} f_{,\rho} \tag{2.42}$$

Puisque l'objectif est de trouver des objets décrivant le champ de contrainte localement, il est légitime de se placer dans le cas $\rho \ll R$. L'opérateur laplacien se simplifie alors et se met sous la forme agréable :

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} f_{,\alpha\alpha} + f_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_{,\rho} \tag{2.43}$$

qui correspond à l'opérateur laplacien en coordonnées polaires. En poursuivant l'analogie avec la méthode plane précédente et en cherchant les solutions $\Delta f = 0$ où f est de la forme $f = \rho^\delta g(\alpha)$, on trouve nécessairement que $g = A\cos(\delta\alpha) + B\sin(\delta\alpha)$. Par conséquent, il s'agit désormais de chercher des solutions particulières singulières dérivant de potentiels de Papkovitch-Neuber de la forme :

$$\begin{aligned} \phi &= \rho^{\delta+1}\left(A\cos\left((\delta+1)\,\alpha\right) + B\sin\left((\delta+1)\,\alpha\right)\right) \\ \psi &= \rho^{\delta+2}\left(C\cos\left((\delta+2)\,\alpha\right) + D\sin\left((\delta+2)\,\alpha\right)\right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

La différence d'exposant entre ϕ et ψ trouve son explication dans les formules (2.39) permettant de calculer le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ associés. On constate en effet que les deux potentiels n'interviennent pas avec le même niveau de dérivation. Par ailleurs, le champ $\boldsymbol{\sigma}$ associé étant linéaire par rapport aux deux potentiels, il est immédiat de conclure quant à son caractère linéaire par rapport aux 4 constantes A, B, C et D. Par conséquent, les 4 équations portant sur σ_{rr} et σ_{rz} et assurant un vecteur contrainte nul sur les bords du tunnels se traduisent par un système linéaire dont les 4 constantes sont solutions.

$$\left.\begin{array}{lcl} \alpha = \pi & : & \sigma_{rr} = 0 \\ & & \sigma_{rz} = 0 \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2} & : & \sigma_{zz} = 0 \\ & & \sigma_{rz} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{M}.\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

La matrice M est a priori dépendante des coefficients d'élasticité par le biais de la constante de Kolosov κ. On trouve après avoir effectué un changement de base :

$$M = 2(\delta+2)\begin{pmatrix} (2\delta+3-\kappa)\cos\pi\delta & (2\delta+3-\kappa)\sin\pi\delta & 2(\delta+2)\cos\pi\delta & 2(\delta+2)\sin\pi\delta \\ (2\delta+1-\kappa)\sin\pi\delta & (\kappa-2\delta-1)\cos\pi\delta & 2(\delta+2)\sin\pi\delta & -2(\delta+2)\cos\pi\delta \\ (\kappa+1)\cos\frac{\delta\pi}{2} & -(\kappa+1)\sin\frac{\delta\pi}{2} & -2(\delta+2)\cos\frac{\delta\pi}{2} & 2(\delta+2)\sin\frac{\delta\pi}{2} \\ (\kappa-1)\sin\frac{\delta\pi}{2} & (\kappa-1)\cos\frac{\delta\pi}{2} & -2(\delta+2)\sin\frac{\delta\pi}{2} & -2(\delta+2)\cos\frac{\delta\pi}{2} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Un calcul immédiat montre cependant que son déterminant lui ne dépend pas des constantes d'élasticité (on peut par exemple dériver le determinant par rapport à κ). Pour que les potentiels ψ et ϕ ne soient pas trivialement égaux à zéro, il est nécessaire que le déterminant de la matrice M soit égal à 0. Tous calculs faits, on retrouve deux valeurs de δ solutions qui sont à nouveau $\delta_1 = -0.4555$ et $\delta_2 = -0.09147$. Par conséquent, il existe également deux modes de singularité en conditions axisymétriques dont le degré est identique à celui exhibé en déformations planes. Il est ensuite possible de calculer les composantes des champs de contrainte singuliers tout comme ce fut le cas pour les problèmes bidimensionnels. Les résultats sont donnés Figure 2.18. En comparaison avec la Figure 2.15, on observe que les modes

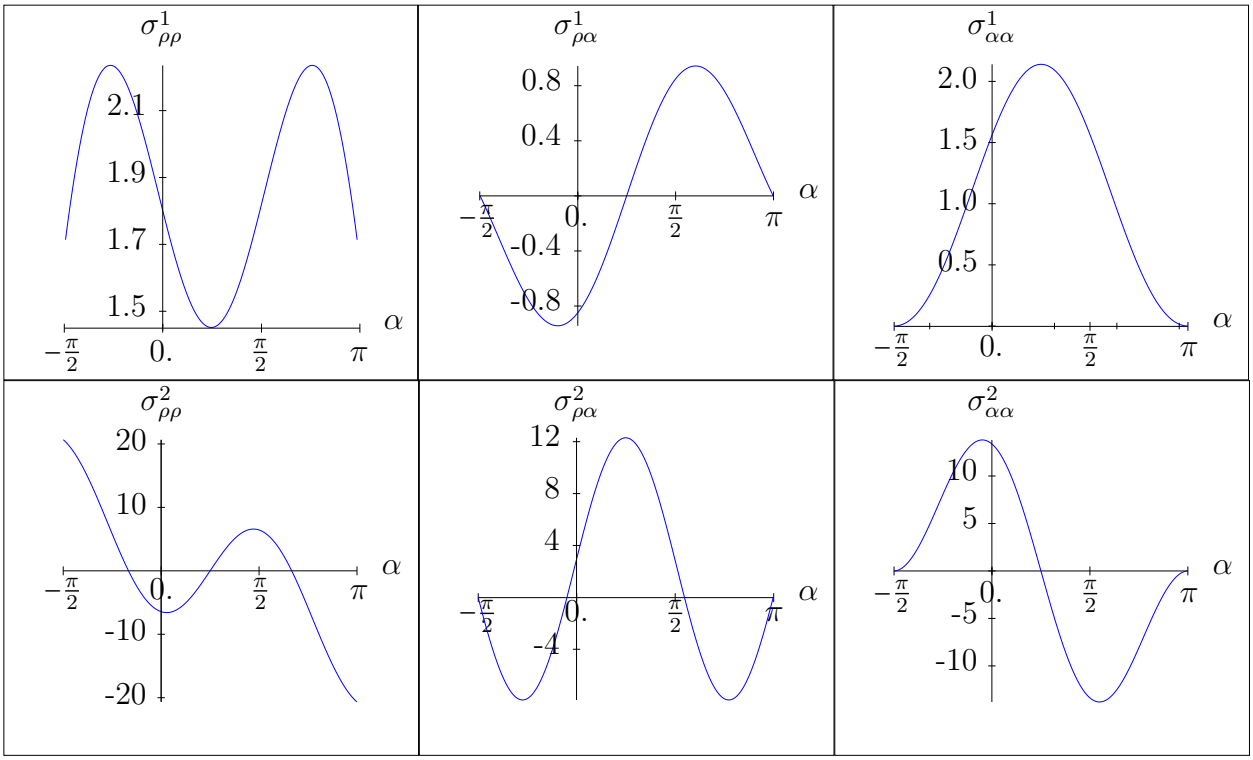

FIGURE 2.18 – Représentation, dans la base locale, en fonction de l'angle α, des composantes des tenseurs de contrainte singuliers en axisymétrique $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ associés à des singularité de degré $\delta_1 = -0.4555$ et $\delta_2 = -0.09147$ respectivement

de singularité sont identiques dans le cas axisymétrique et dans le cas déformations planes. La différence d'intensité vient de la normalisation des vecteurs du noyau de la matrice M qui ne se correspond pas dans le cas déformations planes et dans le cas axisymétrique.

Cette partie permet de montrer à nouveau, mais par le biais d'autres arguments, qu'il est possible en conditions axisymétriques de considérer localement, au niveau du front de taille, un état de déformations planes. Cet argument vient étayer le fait que cette considération reste valable en dehors du cas axisymétrique pour peu qu'il existe des plans de symétrie.

2.3 Singularités de contrainte en anisotrope

Grâce aux parties précédentes, nous avons désormais bien établi le fait que le problème peut être appréhendé en déformations planes au niveau des plans de symétrie. Si le matériau est isotrope ou s'il peut être considéré comme tel localement au niveau du plan de symétrie (comme c'est le cas pour le plan horizontal), nous avons vu qu'il était possible d'accéder simplement aux singularités de contrainte. L'intérêt de ces objets est double, il permet dans

un premier temps de qualifier localement si le matériau se trouve dans un état de traction ou de compression et donc d'orienter le choix de la modélisation des fissures pouvant prendre naissance au coin. Mais aussi, comme nous le verrons plus tard, ils sont indispensables si l'on souhaite utiliser une procédure de type développements asymptotiques raccordés telle que proposée par Leguillon [2002]. La problématique qui survient naturellement est de savoir si le même travail peut-être entrepris dans le cas où le matériau ne peut pas être considéré comme isotrope au niveau du plan de symétrie. Par conséquent, nous nous intéressons désormais aux singularités de contrainte existant au niveau d'un coin à angle droit ou en pointe de fissure dans un matériau anisotrope en conditions de déformations planes. Dans cette optique, une approche différente de celle proposée par Kuo et Bogy [1974] sera utilisée puisqu'elle ne repose pas sur une transformation de Mellin. Les travaux qui seront présentés dans ce qui suit ont été développés indépendamment de ceux de Ting et Chou (voir Ting et Chou [1981]) et trouvent leur originalité dans l'application qui en sera faite au cas du coin à angle droit. De plus, l'existence des modes non physiques permettant d'accéder aux valeurs des facteurs d'intensité de contrainte sera établie.

L'ensemble de l'étude sera mené dans un contexte bidimensionnel pouvant être choisi comme des contraintes planes ou des déformations planes. Les coordonnées cartésiennes du plan considéré seront notées (x, y) et (r, θ) correspondra aux coordonnées polaires associées. L'état de référence du milieu considéré sera, dans ce qui suit, pris comme naturel. En effet, la présence d'une précontrainte $\boldsymbol{\sigma}_p$ ne modifie absolument pas la procédure pour peu que les déformations fictives $\mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}_p$ lui étant associées soient géométriquement compatibles.

2.3.1 Fonction d'Airy pour un matériau anisotrope

Forme générale dans un matériau anisotrope

Avant toute chose, il est essentiel de commencer par définir la notion de matériau anisotrope pour un problème plan. En ce qui concerne cette étude, il s'agira d'un matériau où la relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

où les coefficients A_{ij} se calculent à partir du tenseur de souplesse $\mathbb{S}$ de façons différentes selon le type de problème bidimensionnel considéré. En notant $(A_{ij}) = (a_{ij})$ si celui-ci est en contraintes planes et $(A_{ij}) = (b_{ij})$ si celui-ci est en déformations planes, les relations à considérer s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\bullet\ a_{11} = S_{1111} \quad , \quad a_{22} = S_{2222} \quad , \quad a_{12} = S_{1122} \\ &\qquad a_{16} = 2S_{1112} \quad , \quad a_{26} = 2S_{2212} \quad , \quad a_{66} = 4S_{1212} \\ &\bullet\ b_{ij} = a_{ij} - a_{i3}\frac{a_{3j}}{a_{33}} \quad \text{avec} \quad a_{13} = a_{31} = S_{1133} \quad , \quad a_{23} = a_{32} = S_{2233} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{33} = S_{3333} \quad , \quad a_{63} = a_{36} = 2S_{3312} \end{aligned} \tag{2.48}$$

En cherchant $\boldsymbol{\sigma}$ comme dérivant d'une fonction d'Airy ϕ selon les relations (2.2) et sachant que les relations de compatibilité géométriques pour un problème bidimensionnel se réduisent à la seule équation $\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy}$, on trouve l'équivalent de (2.4) pour les problèmes 2D avec des matériau anisotropes

$$A_{22}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} - 2A_{26}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^3\partial y} + (2A_{12} + A_{66})\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} - 2A_{16}\frac{\partial^4\phi}{\partial x\partial y^3} + A_{11}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \tag{2.49}$$

En remarquant que tous les termes de cette équation font intervenir une dérivée spatiale quatrième, Gorgievich Leknitskii [1963] suggère de chercher des solutions sous la forme $f(x+\mu y)$ où μ est une constante complexe et f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dérivable de la variable complexe $z = x+\mu y$. En effet, pour une telle fonction, l'équation (2.49) devient :

$$(A_{22} - 2A_{26}\mu + (2A_{12} + A_{66})\mu^2 - 2A_{16}\mu^3 + A_{11}\mu^4)f^{(4)} = 0 \tag{2.50}$$

Il est par conséquent naturel de s'intéresser aux racines μ du polynôme du 4ème degré P défini comme :

$$P = A_{22} - 2A_{26}X + (2A_{12} + A_{66})X^2 - 2A_{16}X^3 + A_{11}X^4 \tag{2.51}$$

En admettant que μ soit une racine de P, toute fonction $f(x+\mu y)$ introduite précédemment devient solution (2.49). Lekhnitskii montre dans Gorgievich Leknitskii [1963] que quelles que soient les constantes élastiques choisies, le polynôme P n'admet aucune racine réelle. La démonstration de ce résultat est rappelée en Annexe A.1. Ce polynôme possède donc quatre racines notées μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4 qui appartiennent toutes à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. S'agissant d'un polynôme à coefficients réels, ses racines forment donc deux paires de nombres complexes conjuguées l'une de l'autre. De plus, μ ne pouvant pas être un nombre réel, μ et $\overline{\mu}$ constituent bien deux racines différentes de P. Par exemple, le cas d'un matériau isotrope, qui est englobé par le formalisme mis en place, est associé à un polynôme P admettant deux racines doubles i et $-i$ qui sont bien conjuguées deux à deux. En effet, en notant E le module d'Young et ν le coefficient de poisson d'un matériau isotrope, on trouverait :

$$\begin{array}{l} A_{11} = A_{22} = \frac{1-\nu^2}{E} \quad ; \quad A_{12} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \quad ; \quad A_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E} \\ A_{16} = A_{26} = 0 \end{array} \tag{2.52}$$

Par conséquent, le polynôme P introduit précédemment prend dans ce cas la forme particulière :

$$P_{iso} = A_{11}(1 + 2X^2 + X^4) = A_{11}(X - i)^2(X + i)^2 \tag{2.53}$$

dont les racines sont bien celles annoncées. Dans le cas général, il est possible d'adopter les conventions :

$$Im(\mu_1),\, Im(\mu_2) > 0 \quad ; \quad \mu_3 = \overline{\mu_1},\, \mu_4 = \overline{\mu_2} \tag{2.54}$$

Un résultat d'algèbre classique montre que la fonction d'Airy ϕ se met alors nécessairement sous la forme :

$$\phi = \begin{cases} 2Re(f_1(z_1) + f_2(z_2)) & \text{si} \quad \mu_1 \neq \mu_2 \\ 2Re(f_1(z_1) + \overline{z_1} f_2(z_1)) & \text{si} \quad \mu_1 = \mu_2 \end{cases} \tag{2.55}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions dérivables au sens complexe par rapport à leurs variables respectives $z_1 = x + \mu_1 y$ et $z_2 = x + \mu_2 y$.

Le fait de devoir considérer deux cas de figure pour l'expression de ϕ pose la question de la cohérence de ces formules entre elles. Il s'agit de savoir s'il est possible de retrouver le cas $\mu_1 = \mu_2$ comme passage à la limite du cas $\mu_1 \neq \mu_2$. En se rappelant que le cas isotrope correspond justement au cas $\mu_1 = \mu_2$, la question que sous-tend cette interrogation est de savoir s'il est possible de décrire un matériau faiblement anisotrope par un matériau isotrope. Formulée de cette façon, il semblerait très surprenant que la réponse à cette question soit négative. Cependant la forme (2.55) peut laisser perplexe quant à ce résultat. Formellement, le cas $\mu_1 = \mu_2$ peut-être identifié au cas d'une équation différentielle à coefficients constants classique dont le polynôme caractéristique admet une racine double. Cette identification permet de trouver des éléments de réponse. En effet, si l'on pose $\mu_2 = \mu_1 + \epsilon$ avec $|\epsilon| \ll |\mu_1|$, il vient de manière assez simple :

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) \simeq f_1(z_1) + f_2(z_1) + \epsilon y f_2'(z_1)$$

En définissant $\tilde{f}_1 = f_1 + f_2 + \frac{\epsilon}{\mu_1 - \overline{\mu_1}} z_1 f_2'$ et $\tilde{f}_2 = -\frac{\epsilon}{\mu_1 - \overline{\mu_1}} f_2'$ qui sont bien deux fonctions holomorphes, c'est-à-dire dérivables au sens complexe, on trouve :

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) \simeq \tilde{f}_1 + \overline{z_1}\tilde{f}_2'(z_1)$$

Ainsi, le cas $\mu_1 = \mu_2$ pourra, au moins théoriquement, toujours être retrouvé comme un cas limite de $\mu_1 \neq \mu_2$.

Structure de la fonction d'Airy au voisinage d'une singularité géométrique

Dans le cas d'une fissure plate de Griffith bidimensionnelle dans un milieu anisotrope, on montre que le degré de la singularité existant au voisinage du fond de fissure est identique à celui observé dans le cas isotrope (voir par exemple Savin [1961]). En d'autres termes, le champ de contrainte se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{r}}$ près du fond de fissure si r représente la distance à ce point. Dans le cas isotrope, ce résultat se montre à partir de (2.4) en cherchant des solutions à variables séparables $\phi(r,\theta) = r^{\alpha+2} g(\theta)$ avec $\alpha \in]-1, 0[$. Par conséquent, une bonne manière de résoudre (2.50) semble être de s'intéresser à (2.55) en cherchant à généraliser l'idée mise en place dans le cas isotrope. Cela signifie que f_1 et f_2 devrait être cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} f_1(r,\theta) &= r^{\alpha_1} g_1(\theta) \\ f_2(r,\theta) &= r^{\alpha_2} g_2(\theta) \end{aligned} \tag{2.56}$$

D'après (2.55) f_1 (resp. f_2) est une fonction de la variable z_1 (resp. z_2). Puisque $z_i = x + \mu_i y = r(\cos\theta + \mu_i \sin\theta)$ il est approprié de définir f_i comme $f_i = r^{\alpha_i} \tilde{g}_i(\cos\theta + \mu_i \sin\theta)$. Cependant, f_i doit être dérivable au sens complexe par rapport à la variable z_i. Une façon simple de garantir cette propriété est de considérer f_i comme proportionnelle à un coefficient complexe β_i près à une puissance de z_i. On aurait alors :

$$\begin{aligned} f_1(r,\theta) &= \beta_1 {z_1}^{\alpha_1} = \beta_1 r^{\alpha_1} (cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\alpha_1} \\ f_2(r,\theta) &= \beta_2 {z_2}^{\alpha_2} = \beta_2 r^{\alpha_2} (cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\alpha_2} \\ \phi &= \begin{cases} 2Re(f_1(z_1) + f_2(z_2)) & \text{si} \quad \mu_1 \neq \mu_2 \\ 2Re(f_1(z_1) + \overline{z_1} f_2(z_1)) & \text{si} \quad \mu_1 = \mu_2 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.57}$$

Il est à noter qu'il est possible, en toute rigueur, de considérer α_1 et α_2 comme étant des nombres complexes. Cependant, les solutions les plus singulières sont obtenues à l'aide d'exposants réels. Puisque ce sont ces dernières qui seront prédominantes à proximité d'un coin anguleux et donc déterminantes pour comprendre la nature des contraintes sur ce voisinage, α_1 et α_2 seront considérés comme des nombres réels dans ce qui va suivre. Comme déjà précisé précédemment, élever un nombre complexe à une puissance non entière est loin d'être une opération aussi triviale qu'elle n'en a l'air. Une réflexion nécessaire à ce sujet sera organisée plus loin dans la Sous-section 2.3.2. Pour l'instant, afin de donner du crédit à la forme de ϕ considérée, regardons si celle-ci est en accord avec la forme obtenue classiquement dans un contexte isotrope (2.20) et (2.21).

Cohérence avec la forme générale de la fonction d'Airy en isotrope

Pour confirmer le bien-fondé du choix particulier des fonctions f_1 et f_2, il est intéressant de voir s'il est possible de retrouver la forme proposée en (2.21) qui est celle permettant de trouver les singularités pour des coins anguleux pour des matériaux isotropes. Il a été spécifié plus haut que de tels matériaux correspondent à la situation $\mu_1 = \mu_2 = i$. Par conséquent, il

s'agit du cas particulier où $z_1 = z_2 = x + iy = re^{i\theta}$. De plus, d'après la représentation donnée en (2.57), la fonction d'Airy ϕ_{iso} peut s'écrire sous la forme :

$$\phi_{iso} = 2Re(f_1(z) + \overline{z}f_2(z)) = 2Re(\beta_1 r^{\alpha_1} e^{i\alpha_1\theta} + \beta_2 r e^{-i\theta} r^{\alpha_2} e^{i\alpha_2\theta}) \tag{2.58}$$

Dans le but d'obtenir un préfacteur $r^{\alpha+2}$ comme dans (2.20), le choix naturel est de prendre $\alpha_1 = \alpha + 2$ et $\alpha_2 = \alpha + 1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} &\phi_{iso} = 2r^{\alpha+2}(B_1 cos((\alpha+2)\theta) + B_2 \sin((\alpha+2)\theta) + B_3 cos(\alpha\theta) + B_4 \sin(\alpha\theta)) \\ &\text{où} \quad \begin{cases} \beta_1 = B_1 - iB_2 \\ \beta_2 = B_3 - iB_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Le résultat de l'approche classique est ainsi retrouvé ce qui permet de conforter le choix particulier des fonctions f_1 et f_2. Si tout se passe comme pour un matériau isotrope, les coefficients α, β_1 et β_2 seront en partie obtenus en exprimant les conditions aux limites locales. Pour ce faire, il est nécessaire de donner une expression des composantes du champ de contrainte dérivant d'une fonction d'Airy de la forme (2.57).

Structure des contraintes au voisinage d'une singularité géométrique

L'exemple précédent montre que les solutions singulières pour des matériaux isotropes sont basées sur deux fonctions complexes que sont $z^{\alpha+2}$ et $\overline{z}z^{\alpha+1}$ où $z = x + iy$. Dans une tentative de généralisation de ce résultat au contexte anisotrope, une combinaison linéaire complexe des deux fonctions $\tilde{f}^1 = z_1^{\alpha+2}$ et $\tilde{f}^2 = z_2^{\alpha+2}$ (ou $\tilde{f}^1 = {z_1}^{\alpha+2}$ et $\tilde{f}^2 = \overline{z_1}{z_1}^{\alpha+1}$ si $\mu_1 = \mu_2$) devrait être suffisante pour décrire l'espace des solutions de (2.49) dans son intégralité lorsqu'on s'intéresse uniquement au comportement local. Pour résumer, on aurait alors :

$$\begin{aligned} &\text{Si } \mu_1 \neq \mu_2 \\ &\quad \tilde{f}_1 = (x + \mu_1 y)^{\alpha+2} = r^{\alpha+2}(\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\alpha+2} \\ &\quad \tilde{f}_2 = (x + \mu_2 y)^{\alpha+2} = r^{\alpha+2}(\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\alpha+2} \\ &\text{Si } \mu = \mu_1 = \mu_2 \\ &\quad \tilde{f}_1 = (x + \mu y)^{\alpha+2} = r^{\alpha+2}(\cos\theta + \mu \sin\theta)^{\alpha+2} \\ &\quad \tilde{f}_2 = \overline{(x + \mu y)}(x + \mu y)^{\alpha+1} = r^{\alpha+2}(\cos\theta + \overline{\mu}\sin\theta)(\cos\theta + \mu\sin\theta)^{\alpha+1} \end{aligned} \tag{2.60}$$

de telle sorte que

$$\phi(x, y) = 2Re(\beta_1 \tilde{f}_1(z_1) + \beta_2 \tilde{f}_2(z_2)) \tag{2.61}$$

avec β_1 et β_2 deux constantes complexes. Il est agréable à ce stade d'introduire deux tenseurs du second ordre $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_1}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_2}$ tous deux définis en coordonnées polaires par :

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad : \quad \sigma_{rr}^{\mu_i} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}_i}{\partial \theta^2} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta}^{\mu_i} = \frac{\partial^2 \tilde{f}_i}{\partial r^2} \quad , \quad \sigma_{r\theta}^{\mu_i} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}_i}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \theta} \tag{2.62}$$

Ces deux tenseurs trouvent leur intérêt dans le fait qu'ils permettent d'exprimer $\boldsymbol{\sigma}$. En effet, puisque les opérateurs Re, $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ commutent les uns avec les autres, il découle de (2.22) et (2.61) une nouvelle expression pour le tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2Re(\beta_1 \boldsymbol{\sigma}^{\mu_1} + \beta_2 \boldsymbol{\sigma}^{\mu_2}) \tag{2.63}$$

Ainsi, pour connaître les composantes du champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, il faut et il suffit de connaître les composantes des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_1}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_2}$. Ces dernières se calculent, en coordonnées

polaires, de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\text{Si } \mu_1 \neq \mu_2 \qquad & \sigma_{rr}^{\mu_i} = r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(\cos\theta+\mu_i\sin\theta)^\alpha(-\sin\theta+\mu_i\cos\theta)^2 \\
& \sigma_{\theta\theta}^{\mu_i} = r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(\cos\theta+\mu_i\sin\theta)^{\alpha+2} \\
& \sigma_{r\theta}^{\mu_i} = -r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(-\sin\theta+\mu_i\cos\theta)(\cos\theta+\mu_i\sin\theta)^{\alpha+1} \\
\\
\text{Si } \mu_1 = \mu_2 \qquad & \sigma_{rr}^{\mu_1} = r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(\cos\theta+\mu\sin\theta)^\alpha(-\sin\theta+\mu\cos\theta)^2 \\
& \sigma_{\theta\theta}^{\mu_1} = r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(\cos\theta+\mu\sin\theta)^{\alpha+2} \\
& \sigma_{r\theta}^{\mu_1} = -r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(-\sin\theta+\mu\cos\theta)(\cos\theta+\mu\sin\theta)^{\alpha+1} \\
& \sigma_{rr}^{\mu_2} = r^\alpha(\alpha+1)\,(2(-\sin\theta+\overline{\mu}\cos\theta)(-\sin\theta+\mu\cos\theta)(\cos\theta+\mu\sin\theta)^\alpha \\
& \qquad\qquad +\alpha(\cos\theta+\overline{\mu}\sin\theta)(-\sin\theta+\mu\cos\theta)^2(\cos\theta+\mu\sin\theta)^{\alpha-1}) \\
& \sigma_{\theta\theta}^{\mu_2} = r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(\cos\theta+\overline{\mu}\sin\theta)(\cos\theta+\mu_i\sin\theta)^{\alpha+1} \\
& \sigma_{r\theta}^{\mu_2} = -r^\alpha(\alpha+1)\,((-\sin\theta+\overline{\mu}\cos\theta)(\cos\theta+\mu\sin\theta)^{\alpha+1} \\
& \qquad\qquad +(\alpha+1)(\cos\theta+\overline{\mu}\sin\theta)(-\sin\theta+\mu\cos\theta)(\cos\theta+\mu\sin\theta)^\alpha)
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Maintenant que les composantes du champ de contrainte ont été établies, il est possible, comme dans le cas isotrope, d'exprimer les conditions aux limites locales lorsqu'on considère un coin anguleux dans un milieu élastique. Le premier cas d'application concernera une fissure de Griffith et le deuxième un coin à angle droit qui sont les deux situations d'intérêt étant donné la géométrie de tunnel qui a été choisie. Avant toute chose, rappelons que le paramètre α est assujetti à vérifier deux inégalités qui sont $-1 < \alpha < 0$. En effet, elles permettent de garantir le caractère singulier du champ recherché ainsi que l'intégrabilité de la densité énergétique associée. Une conséquence de ces inégalités est que α ne peut pas être un entier.

2.3.2 Structure des contraintes au voisinage du fond d'une fissure de Griffith

FIGURE 2.19 – Représentation du voisinage du fond d'une fissure de Griffith bidimensionnelle

Le cas particulier d'une fissure bidimensionnelle de Griffith est assez intéressant puisqu'il est possible, dans quelques rares situations, de trouver dans la littérature l'intégralité des potentiels complexes f_1 et f_2. Par exemple, on trouvera dans AZHDARI et collab. [2000] les solutions associées à une fissure libre de contrainte placée dans un solide infini avec des conditions de type efforts à l'infini. La comparaison avec ce travail permettra de valider la méthode avant de s'attaquer au cas du coin à angle droit.

Pour pouvoir traiter cet exemple, il est nécessaire de commencer avec la définition mathématique d'une puissance non-entière d'un nombre complexe. Une telle opération est en fait fortement liée avec le logarithme complexe qui est une fonction multi-valuée. Comme représenté sur la Figure 2.19, la fissure considérée est située sur la partie négative de l'axe des réels. Par conséquent, le choix le plus naturel de branche pour le logarithme complexe est

celle correspondant à sa détermination principale. Celle-ci sera simplement notée log dans la suite. Une manière de justifier l'usage de cette détermination est de remarquer qu'à cause de la convention choisie $Im(\mu_i) > 0$ $(i = 1, 2)$, les deux nombres complexes $z = x+iy$ et $z_i = x+\mu_i y$ sont simultanément dans le demi plan supérieur ou le demi plan inférieur. Cela signifie que l'image par la transformation $z \longmapsto z_i$ de n'importe quel chemin de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ne fait pas le tour de l'origine. D'un point de vue calculatoire, cela signifie qu'il n'y a pas de changement de branche du logarithme complexe. Par conséquent, le choix de la détermination du logarithme peut être arrêté une bonne fois pour toutes en faveur de sa détermination principale. Pour revenir à la notion de puissance non entière de nombres complexes, en utilisant le fait que $z_i = |z_i| e^{i \arg(z_i)}$, l'opération ${z_i}^p$ se définit de la façon suivante :

$$ {z_i}^p = |z_i|^p e^{p \log\left(\frac{z_i}{|z_i|}\right)} \tag{2.65} $$

où la relation $i \arg(Z) = \log\left(\frac{Z}{|Z|}\right)$ a été utilisée. Le choix de la détermination principale du logarithme est équivalent à la définition d'une fonction arg à valeurs dans $-\pi$ à $+\pi$. La relation (2.65) s'avérera très utile dans la détermination du comportement asymptotique du champ de contrainte puisque c'est elle qui permet d'utiliser les relations (2.64).

Un point se trouvant sur l'axe des réels négatifs appartient donc à la fissure telle que décrite Figure 2.19. Pour autant, il est nécessaire de savoir si ce point appartient à la lèvre supérieure ou inférieure de la fissure. A cet effet, un point de la lèvre supérieure (resp. inférieure) sera vu comme étant la limite d'une séquence de points dont les arguments tendent vers $+\pi$ par valeurs inférieures (resp. $-\pi$ par valeurs supérieures), limite qui sera notée $+\pi^-$ (resp. $-\pi^+$). Conséquemment, pour des raisons de continuité et d'après la définition (2.65), il est immédiat que :

$$ \begin{array}{ccc} (\cos\theta + \mu_i \sin\theta)^\delta & \xrightarrow[\theta \to +\pi^-]{} & e^{+i\pi\delta} \\ (\cos\theta + \mu_i \sin\theta)^\delta & \xrightarrow[\theta \to -\pi^+]{} & e^{-i\pi\delta} \end{array} \tag{2.66} $$

Cette règle de calcul permet de manipuler les expressions (2.64) et ainsi donne accès au calcul des composantes du champ de contrainte. Les conditions aux limites de la fissure de Griffith que sont :

$$ \boldsymbol{\sigma}(r, \pm\pi).(\pm \boldsymbol{e_\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r, \pm\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.67} $$

peuvent donc maintenant être explicitées. Puisque les expressions de $\sigma_{\theta\theta}$ et de σ_{rr} dépendent des valeurs respectives de μ_1 et μ_2, les deux cas $\mu_1 \neq \mu_2$ et $\mu_1 = \mu_2$ seront traités séparément.

Cas $\mu_1 \neq \mu_2$

A partir des champs de contrainte complexes (2.64) et de la règle de calcul (2.66) les expressions suivantes sont obtenues :

$$ \begin{array}{rcl} \sigma_{\theta\theta}^{\mu_i}(r, +\pi) & = & r^\alpha (\alpha+2)(\alpha+1) e^{+i(\alpha+2)\pi} \\ \sigma_{r\theta}^{\mu_i}(r, +\pi) & = & r^\alpha (\alpha+2)(\alpha+1) \mu_i e^{+i(\alpha+1)\pi} \\ \sigma_{\theta\theta}^{\mu_i}(r, -\pi) & = & r^\alpha (\alpha+2)(\alpha+1) e^{-i(\alpha+2)\pi} \\ \sigma_{r\theta}^{\mu_i}(r, -\pi) & = & r^\alpha (\alpha+2)(\alpha+1) \mu_i e^{-i(\alpha+1)\pi} \end{array} \tag{2.68} $$

En injectant ces résultats dans les conditions aux limites (2.67) on trouve un système d'équations dont α, β_1 et β_2 doivent être solutions :

$$\begin{cases} Re\left((\beta_1+\beta_2)e^{i(\alpha+2)\pi}\right)=0 \\ Re\left((\beta_1+\beta_2)e^{-i(\alpha+2)\pi}\right)=0 \\ Re\left((\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)e^{i(\alpha+1)\pi}\right)=0 \\ Re\left((\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)e^{-i(\alpha+1)\pi}\right)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Re(\beta_1+\beta_2)\cos\alpha\pi=0 \\ Im(\beta_1+\beta_2)\sin\alpha\pi=0 \\ Re(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)\cos\alpha\pi=0 \\ Im(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)\sin\alpha\pi=0 \end{cases} \tag{2.69}$$

Toujours dans le but d'éviter la solution triviale correspondant $\beta_1=\beta_2=0$, α doit prendre des valeurs bien spécifiques. Comme mentionné précédemment, puisque $\alpha\notin\mathbb{N}$ alors en particulier $\sin\alpha\pi\neq 0$. Cela permet de conclure :

$$Im(\beta_1+\beta_2)=0 \quad \text{et} \quad Im(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)=0 \tag{2.70}$$

Les résultats proposés par Savin [1961] montre que la singularité de contrainte doit être en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ dans le cas d'une fissure de Griffith. Par conséquent, on devrait trouver *in fine* que $\alpha=-\frac{1}{2}$. Pour démontrer ce résultat à partir de l'approche proposée ici, il est agréable d'user d'un raisonnement par l'absurde. En effet, si $\alpha\neq-\frac{1}{2}$ alors $\cos\alpha\pi\neq 0$ et par conséquent $Re(\beta_1+\beta_2)=0$ ainsi que $Re(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)=0$. En combinant ces équations avec (2.70) et en se rappelant que $\mu_1\neq\mu_2$ il vient $\beta_1=\beta_2=0$. Par conséquent, des solutions non triviales ne peuvent être obtenues que si $\alpha=-\frac{1}{2}$. Ainsi, si $\mu_1\neq\mu_2$, cette méthode permet de retrouver que le degré de la singularité au voisinage du fond de fissure est le même que dans le cas isotrope. Avec ce résultat, le système d'équations (2.69) se réduit à :

$$\alpha=-\frac{1}{2} \qquad Im(\beta_1+\beta_2)=0 \qquad Im(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)=0 \tag{2.71}$$

Puisque les inconnues complexes β_1 et β_2 sont représentées par quatre inconnues réelles et sont reliées par deux équations linéaires, seulement deux inconnues réelles subsistent. Il s'agit des équivalents des deux facteurs d'intensité de contrainte qui ne pourront pas être calculés par cette méthode puisque celle-ci a uniquement pour vocation d'être valide localement. En comparaison de la méthode développée par Azhdari et collab. [2000], la démarche proposée ici tire son intérêt de par sa simplicité et sa généralité.

Adéquation avec le cas particulier d'une fissure libre de contrainte dans un solide infini avec contraintes imposées à l'infini

Puisque la valeur de α pour une fissure a été spécifiée égale à $-\frac{1}{2}$, cela signifie que, dans la formulation (2.60), f_i a été choisi de la forme :

$$f_i(z_i)=\beta_i\tilde{f}_i(z_i)=\beta_i z_i^{\frac{3}{2}} \qquad \text{ce qui implique} \quad f_i'(z_i)=\frac{3}{2}\beta_i\sqrt{z_i} \tag{2.72}$$

Nous sommes désormais en mesure de comparer les résultats obtenus à ce stade avec les potentiels complexes complets donnés par Savin [1961] et Azhdari et collab. [2000] dans le cas particulier d'une fissure ouverte dans un milieu infini avec conditions aux limites prescrites en effort à l'infini. Avant d'aller plus loin, examinons les conséquences de (2.71) sur la fonction d'Airy ϕ :

$$\phi(x,y)=2Re(\beta_1 z_1^{\frac{3}{2}}+\beta_2 z_2^{\frac{3}{2}}) \quad \text{avec} \quad Im(\beta_1+\beta_2)=0 \quad \text{et} \quad Im(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)=0 \tag{2.73}$$

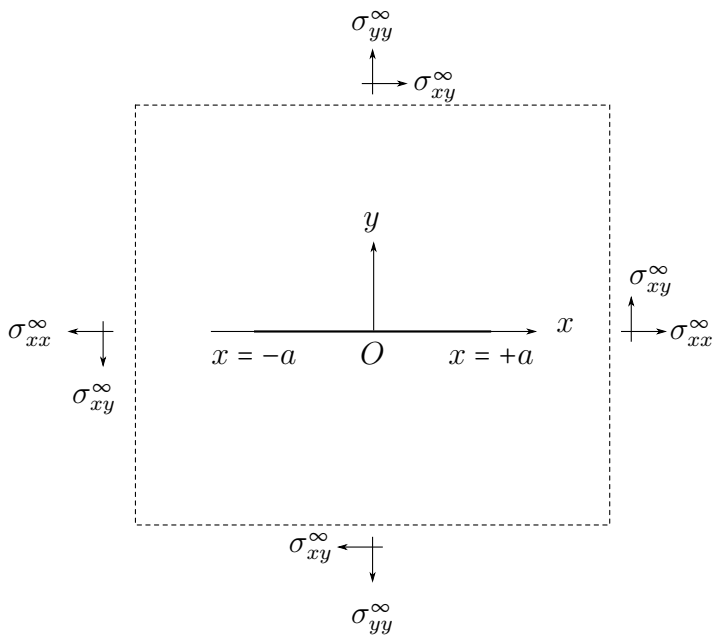

FIGURE 2.20 – Représentation du problème traiter par Azhdari et Nemat-Nasser pour un milieu anisotrope

Rappelons toutefois que cette forme ne peut avoir de validité qu'au voisinage de la pointe de fissure. Cependant, pour le problème correspondant à celui de la fissure de Griffith (voir Figure 2.20) où le champ de contrainte à l'infini est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\infty} = \sigma_{xx}^{\infty}\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \sigma_{yy}^{\infty}\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + \sigma_{xy}^{\infty}\left(\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_x\right)$$

les expressions complètes des fonctions f_1 et f_2, c'est-à-dire valables sur tout l'espace, ont été fournies par AZHDARI et collab. [2000]. Au prix d'une analyse mathématiquement assez lourde, puisque reposant sur les formules de Plemelj (dont une démonstration peut être trouvée dans MUSKHELISHVILI [2013]), des résultats extrêmement élégants et compacts sont obtenus :

$$F_i'(Z_i) = Q_i\left(Z_i - \sqrt{Z_i^2 - a^2}\right) \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} Q_1 = \dfrac{\mu_2\sigma_{yy}^{\infty} + \sigma_{xy}^{\infty}}{2(\mu_1 - \mu_2)} \\ Q_2 = -\dfrac{\mu_1\sigma_{yy}^{\infty} + \sigma_{xy}^{\infty}}{2(\mu_1 - \mu_2)} \end{cases} \tag{2.74}$$

Dans ces expressions, ainsi que sur la Figure 2.20, il est important de noter que le système de coordonnées cartésiennes est centré au point O se trouvant au milieu de la fissure. C'est pour cette raison que des variables Z_i ont été utilisées dans les formules (2.74) puisque celles-ci ne correspondent pas aux variables z_i manipulées jusqu'à présent. Plus précisément, si la pointe de fissure droite (resp. gauche) est considérée, alors les variables z_i et Z_i sont reliées par $z_i = Z_i - a$ (resp. $z_i = -Z_i - a$). Dans ce qui suit, l'attention sera focalisée sur la pointe de fissure se situant à droite. Avec les notations introduites on doit vérifier :

$$F'(Z_i) = f'(z_i) \tag{2.75}$$

au voisinage de la pointe de la fissure. Pour pouvoir s'en assurer, il est nécessaire de réaliser un développement limité en $Z = a + \varepsilon$. Cela nécessite d'introduire une nouvelle notation :

$$z_i = \varepsilon_i = Re(\varepsilon) + \mu_i Im(\varepsilon) \tag{2.76}$$

où $|\varepsilon|$ est petit en comparaison de a. En raison de la différence d'origine explicitée plus haut, il faut comprendre dans ce qui suit ε_i comme l'homologue de z_i dans (2.72).

$$\begin{aligned} f_i'(a+\varepsilon_i) &= Q_i\left(a+\varepsilon_i-\sqrt{2a\varepsilon_i+\varepsilon_i^2}\right) \\ &= Q_i\left(a-\sqrt{2a\varepsilon_i}\right)+O(\epsilon_i) \end{aligned} \tag{2.77}$$

Etant donnée la façon dont les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ dérivent de la fonction d'Airy, les parties constantes des fonctions f_i' peuvent être supprimées. Par conséquent, il vient d'être montré que, au premier ordre, les formules proposées par Azhdari et Nemat-Nasser prédisent le comportement suivant au voisinage de la pointe de fissure :

$$f_i'(a+\epsilon_i) = -\sqrt{2a}Q_i\sqrt{\epsilon_i} \tag{2.78}$$

Cette formule est en adéquation parfaite avec celle issue de la méthode proposée dans ce travail et donnée par (2.73). Elle vient en effet confirmer la validité de la valeur $\alpha = -\frac{1}{2}$ mais permet de plus d'identifier les coefficients β_1 et β_2 comme étant égaux à :

$$\beta_i = -\sqrt{2a}Q_i \tag{2.79}$$

Il est évidemment immédiat de montrer que, définies de cette façon, les constantes β_1 et β_2 vérifient les deux équations stipulées dans (2.71). Il semble par conséquent que la méthode proposée à ce stade, consistant à chercher le champ de contrainte comme dérivant de fonctions f_i associées à des puissances de z_i, est en fait exacte. Il s'agit donc d'une méthode rapide et efficace permettant d'accéder de manière très simple à la singularité de contrainte à proximité de n'importe quelle géométrie en coin dans un problème bidimensionnel associé à un matériau anisotrope. Cette propriété sera utilisée dans ce qui suit dans le cas particulier d'un angle droit. Avant toute chose, il est utile, dans un souci d'être complet, de conclure rapidement sur le cas $\mu_1 = \mu_2$.

Cas $\mu = \mu_1 = \mu_2$

Les expressions des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_1}$ calculées en des points $(r, \pm\pi)$ (avec les notations introduites par (2.64)) sont les mêmes que dans le cas $\mu_1 \neq \mu_2$. Par contre, elles sont un peu différentes en ce qui concerne $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{\mu_2}(r,+\pi) &= -r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(e^{i\pi})^{\alpha+1} \\ \sigma_{r\theta}^{\mu_2}(r,+\pi) &= r^\alpha(\alpha+1)\left(\overline{\mu}(e^{i\pi})^{\alpha+1}-(\alpha+1)\mu(e^{i\pi})^\alpha\right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{\mu_2}(r,-\pi) &= -r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(e^{-i\pi})^{\alpha+1} \\ \sigma_{r\theta}^{\mu_2}(r,-\pi) &= r^\alpha(\alpha+1)\left(\overline{\mu}(e^{-i\pi})^{\alpha+1}-(\alpha+1)\mu(e^{-i\pi})^\alpha\right) \end{aligned} \tag{2.80}$$

Ce qui mène au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} Re\left((\beta_1+\beta_2)e^{i(\alpha+1)\pi}\right)=0 \\ Re\left((\beta_1+\beta_2)e^{-i(\alpha+1)\pi}\right)=0 \\ Re\left(((\alpha+2)\beta_1\mu+\beta_2\overline{\mu}+(\alpha+1)\beta_2\mu)e^{i(\alpha+1)\pi}\right)=0 \\ Re\left(((\alpha+2)\beta_1\mu+\beta_2\overline{\mu}+(\alpha+1)\beta_2\mu)e^{-i(\alpha+1)\pi}\right)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} Re\left(\beta_1+\beta_2\right)\cos\alpha\pi=0 \\ Im\left(\beta_1+\beta_2\right)\sin\alpha\pi=0 \\ Re\left((\alpha+2)\beta_1\mu+\beta_2\overline{\mu}+(\alpha+1)\beta_2\mu\right)\cos\alpha\pi=0 \\ Im\left((\alpha+2)\beta_1\mu+\beta_2\overline{\mu}+(\alpha+1)\beta_2\mu\right)\sin\alpha\pi=0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.81}$$

Une preuve très similaire à celle fournie précédemment dans le cas $\mu_1 \neq \mu_2$ permet de montrer qu'encore une fois $\alpha = -\frac{1}{2}$. De plus :

$$\begin{cases} Im\,(\beta_1 + \beta_2) = 0 \\ Im\,(3\beta_1\mu + \beta_2(2\overline{\mu} + \mu)) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Im(\beta_1) + Im(\beta_2) = 0 \\ 3\,(Re(\beta_1)Im(\mu) + Im(\beta_1)Re(\mu)) - Re(\beta_2)Im(\mu) + 3Im(\beta_2)Re(\mu) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Im(\beta_1) + Im(\beta_2) = 0 \\ 3Re(\beta_1) - Re(\beta_2) = 0 \qquad \text{puisque } Im(\mu) \neq 0 \end{cases}$$

Cela signifie que si $\beta_1 = a + ib$ alors $\beta_2 = 3a - ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction d'Airy se met sous la forme :

$$\phi = 2r^{\frac{3}{2}} Re\left((a+ib)(\cos\theta + \mu\sin\theta)^{\frac{3}{2}} + (3a - ib)(\cos\theta + \overline{\mu}\sin\theta)(\cos\theta + \mu\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2.82}$$

A ce stade, il a été prouvé que le degré de singularité du champ de contrainte existant au voisinage de la pointe d'une fissure bidimensionnelle de Griffith ne dépend pas du matériau considéré et que $\boldsymbol{\sigma}$ se comporte toujours comme $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Ce résultat étant déjà connu par ailleurs, il vient justifier la méthode proposée, consistant à choisir $f_i = z_i^{\alpha+2}$. Ainsi, ce choix particulier permet bien de décrire le comportement asymptotique des solutions. Cette méthode va donc être utilisée dans le contexte d'un coin à angle droit.

Un exercice utile peut être de comparer ces derniers résultats à ceux obtenus par la méthode classique concernant les matériaux isotropes et de s'assurer qu'ils sont bien compatibles entre eux. En effet, il a été vu que le cas isotrope peut être obtenu dans ce contexte anisotrope comme le cas particulier $\mu_1 = \mu_2 = i$. Il vient pour un tel choix :

$$\phi_{iso} = 2r^{3/2}\left(a\left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right) + b\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

Ce qui est bien le résultat obtenu grâce à l'approche classique (2.5).

2.3.3 Structure des contraintes au voisinage d'un angle droit

Maintenant que la méthode proposée a été éprouvée à plusieurs reprises en ce qui concerne les modèles de fissures plates, il est désormais justifié de l'utiliser pour ce qui concerne une géométrie de coin ouvert et formant un angle droit. Cette géométrie est très importante puisqu'elle correspond à celle obtenue en considérant un voisinage du front de taille. C'est par conséquent elle qui permet de déterminer s'il faut choisir ou non un modèle de fissure fermée ou, au contraire, de fissure ouverte.

La définition du repère local ainsi que le positionnement du problème se font de la même façon que dans le cas isotrope où les différents éléments avaient été illustrés Figure 2.14. Toutefois, le caractère précontraint est laissé de côté et le rôle de ρ et α sera ici joué par r et θ. Ainsi, les bords du coin correspondent à des angles $\theta = \pi$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$. A nouveau, une attention toute particulière doit être accordée à la limite suivante :

$$\lim_{\theta \to -\pi/2} (\cos\theta + \mu\sin\theta)^{\alpha}$$

puisqu'elle implique de devoir traiter avec la quantité $(-\mu)^{\alpha}$. Il est agréable de remplacer à ce stade μ par son module et son argument $\mu = \rho e^{i\delta}$ où $\rho > 0$ et $\delta \in]0, \pi[$. Attention cependant de

ne pas confondre ces quantités avec les coordonnées du repère local et le degré de singularité utilisés dans les sections précédentes relatives aux milieux isotropes. En raison du choix qui a été fait de considérer la détermination principale du logarithme log, l'argument de $-\mu$ doit être pris égal à $\delta - \pi$ afin qu'il reste dans l'intervalle ouvert $]-\pi, \pi[$. Cette fois-ci, les conditions aux limites donnent :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(r,\pi).\boldsymbol{e_\theta} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(r,\pi) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r,\pi) = 0 \end{cases} \\ \boldsymbol{\sigma}(r,-\frac{\pi}{2}).\boldsymbol{e_\theta} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(r,-\frac{\pi}{2}) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r,-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.83}$$

A nouveau, deux cas de figure doivent être considérés en fonction des valeurs respectives prises par μ_1 et μ_2.

Cas $\mu_1 \neq \mu_2$

En utilisant les expressions des composantes des tenseurs complexes $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_i}$ données en (2.64) on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu_i}_{\theta\theta}(r,+\pi) &= r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(e^{+i\pi})^{\alpha+2} \\ \sigma^{\mu_i}_{r\theta}(r,+\pi) &= r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)\mu_i(e^{+i\pi})^{\alpha+1} \\ \sigma^{\mu_i}_{\theta\theta}(r,-\frac{\pi}{2}) &= r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(-\mu_i)^{\alpha+2} \\ \sigma^{\mu_i}_{r\theta}(r,-\frac{\pi}{2}) &= -r^\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)(-\mu_i)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

Ces expressions couplées aux conditions aux limites conduisent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} Re\left((\beta_1+\beta_2)e^{i\pi\alpha}\right) = 0 \\ Re\left((\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)e^{i\pi\alpha}\right) = 0 \\ Re\left(\beta_1(-\mu_1)^{\alpha+1}+\beta_2(-\mu_2)^{\alpha+1}\right) = 0 \\ Re\left(\beta_1(-\mu_1)^{\alpha+2}+\beta_2(-\mu_2)^{\alpha+2}\right) = 0 \end{cases}$$

Grâce à la remarque faite précédemment, au début de cette partie, les termes $(-\mu_i)^\alpha$ peuvent être traités en utilisant le fait que la bonne notation pour $-\mu_i$ est $-\mu_i = \rho_i e^{i(\delta_i-\pi)}$. Par conséquent, en posant pour $i \in \{1,2\}$, $\beta_i = a_i + ib_i$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, le système d'équation précédent se met sous la forme :

$$M.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

où la matrice M est définie comme étant égale à

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\pi & \cos\alpha\pi & -\sin\alpha\pi & -\sin\alpha\pi \\ \rho_1\cos(\delta_1+\alpha\pi) & \rho_2\cos(\delta_2+\alpha\pi) & -\rho_1\sin(\delta_1+\alpha\pi) & -\rho_2\sin(\delta_2+\alpha\pi) \\ \rho_1^{\alpha+1}\cos((\alpha+1)\delta_1-\alpha\pi) & \rho_2^{\alpha+1}\cos((\alpha+1)\delta_2-\alpha\pi) & \rho_1^{\alpha+1}\sin(\alpha\pi-(\alpha+1)\delta_1) & \rho_2^{\alpha+1}\sin(\alpha\pi-(\alpha+1)\delta_2) \\ \rho_1^{\alpha+2}\cos((\alpha+2)\delta_1-\alpha\pi) & \rho_2^{\alpha+2}\cos((\alpha+2)\delta_2-\alpha\pi) & \rho_1^{\alpha+2}\sin(\alpha\pi-(\alpha+2)\delta_1) & \rho_2^{\alpha+2}\sin(\alpha\pi-(\alpha+2)\delta_2) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, toujours pour les mêmes raisons, l'équation (2.25) pour un matériau isotrope admet pour équivalent anisotrope :

$$\det(M(\alpha)) = 0 \tag{2.85}$$

qui permet de trouver les valeurs admissibles du degré de singularité α. Dans le cas d'une fissure de Griffith, il a été montré précédemment que le degré de la singularité ne dépend pas des propriétés élastiques du milieu considéré. Cette fois-ci, les propriétés mécaniques du matériaux interviennent explicitement et vont par conséquent influencer la structure locale du champ de contrainte. Pour être complet, le cas $\mu_1 = \mu_2$ va être détaillé dans ce qui suit.

Cas $\mu = \mu_1 = \mu_2$

Comme dans le cas de la fissure, seules les composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{\mu_2}$ dérivant du potentiel $\tilde{f}_1 = \overline{z}z^{\alpha+1}$ doivent être détaillées :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^{\mu_2}(r,+\pi) &= -r^{\alpha}(\alpha+2)(\alpha+1)(e^{i\pi})^{\alpha+1} \\
\sigma_{r\theta}^{\mu_2}(r,+\pi) &= r^{\alpha}(\alpha+1)\left(\overline{\mu}(e^{i\pi})^{\alpha+1} - (\alpha+1)\mu(e^{i\pi})^{\alpha}\right) \\
\sigma_{\theta\theta}^{\mu_2}(r,-\frac{\pi}{2}) &= r^{\alpha}(\alpha+2)(\alpha+1)(-\overline{\mu})(-\mu)^{\alpha+1} \\
\sigma_{r\theta}^{\mu_2}(r,-\frac{\pi}{2}) &= -r^{\alpha}(\alpha+1)\left((-\mu)^{\alpha+1} + (\alpha+1)(-\overline{\mu})(-\mu)^{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

A l'aide des expressions (2.64) et des conditions aux limites (2.84) on trouve le système linéaire suivant :

$$\begin{cases}
Re\left((\beta_1+\beta_2)e^{i\alpha\pi}\right) = 0 \\
Re\left((\beta_1(\alpha+2)\mu + \beta_2(\overline{\mu}+(\alpha+1)\mu))\, e^{i\alpha\pi}\right) = 0 \\
Re\left((\beta_1\mu + \beta_2\overline{\mu})(-\mu)^{\alpha+1}\right) = 0 \\
Re\left((\beta_1(\alpha+2)\mu + \beta_2(\mu+(\alpha+1)\overline{\mu}))\,(-\mu)^{\alpha}\right) = 0
\end{cases}$$

En introduisant à nouveau les notations $\beta_i = a_i + ib_i$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, on trouve la formulation matricielle suivante :

$$M'.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

où la matrice M' est définie comme étant égale à

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\cos\alpha\pi & \cos\alpha\pi & -\sin\alpha\pi & -\sin\alpha\pi \\
\hline
(\alpha{+}2)\cos(\delta{+}\alpha\pi) & \begin{array}{r}(\alpha{+}1)\cos(\delta{+}\alpha\pi)\\ +\cos(-\delta{+}\alpha\pi)\end{array} & -(\alpha{+}2)\sin(\delta{+}\alpha\pi) & \begin{array}{r}-(\alpha{+}1)\sin(\delta{+}\alpha\pi)\\ -\sin(-\delta{+}\alpha\pi)\end{array} \\
\hline
\cos((\alpha{+}2)\delta{-}\alpha\pi) & \cos(\alpha\delta{-}\alpha\pi) & -\sin((\alpha{+}2)\delta{-}\alpha\pi) & -\sin(\alpha\delta{-}\alpha\pi) \\
\hline
(\alpha{+}2)\cos((\alpha{+}1)\delta{-}\alpha\pi) & \begin{array}{r}(\alpha{+}1)\cos((\alpha{-}1)\delta{-}\alpha\pi)\\ +\cos((\alpha{+}1)\delta{-}\alpha\pi)\end{array} & -(\alpha{+}2)\sin((\alpha{+}1)\delta{-}\alpha\pi) & \begin{array}{r}-(\alpha{+}1)\sin((\alpha{-}1)\delta{-}\alpha\pi)\\ -\sin((\alpha{+}1)\delta{-}\alpha\pi)\end{array}
\end{array}\right)$$

Qui, comme précédemment, permet de trouver les valeurs de α autorisées en résolvant l'équation :

$$\det(M'(\alpha)) = 0 \tag{2.87}$$

Les expressions des matrices M et M', bien que très utiles, peuvent sembler sous cette forme un peu formelles. En réalité, étant donné que le matériau qui nous intéresse et dans lequel est excavé le tunnel présente une symétrie d'isotropie transverse par rapport à l'axe vertical, il est possible de simplifier un peu le propos en considérant dans le contexte bidimensionnel un matériau orthotrope.

2.3.4 Un coin à angle droit dans un matériau orthotrope

Les matériaux orthotropes présentent un intérêt tout particulier dans le cadre de l'étude d'excavation de tunnel qui est menée. En effet, l'argilite pouvant être assimilée à un matériau isotrope transverse, l'orthotropie semble être la bonne symétrie à considérer lorsqu'on s'intéresse au problème bidimensionnel équivalent localement au niveau du plan de symétrie vertical (cf. Figure 2.12). Par conséquent, les directions d'orthotropie à considérer sont la direction horizontale $\boldsymbol{e}_x$ et la direction verticale $\boldsymbol{e}_y$ dans la représentation bidimensionnelle que nous nous efforçons de mettre en place. Ainsi, le coin à angle droit utilisé sera supposé avoir ses axes alignés avec les directions d'orthotropie. Une telle hypothèse permet de simplifier les coefficients de la matrice d'élasticité bidimensionnelle A permettant le passage entre les composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et celles du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (2.47). En effet, on trouve dans ce cas que $A_{16} = A_{26} = 0$. Dans le cadre de ces hypothèses, le polynôme caractéristique P se met sous la forme particulière :

$$P_{ortho} = A_{22} + (2A_{12} + A_{66})X^2 + A_{11}X^4 \tag{2.88}$$

Cette expression est beaucoup plus simple puisque sous forme P est un polynôme bicarré. Le polynôme du second degré $Q = A_{22} + (2A_{12} + A_{66})Y + A_{11}Y^2$ intervient alors naturellement. Ce dernier présente l'avantage d'avoir des racines pouvant être calculées analytiquement. Dans ce qui suit, le théorème démontré par Gorgievich Leknitskii [1963] et affirmant que le polynôme P n'admet pas de racines réelles va s'avérer essentiel. Plusieurs cas sont à considérer en fonction du signe du déterminant associé au polynôme Q :

$\Delta = (2A_{12} + A_{66})^2 - 4A_{11}A_{22} \geq 0$

Avec cette hypothèse de signe, les racines du polynôme Q sont deux nombres réels éventuellement égaux s'exprimant comme

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-(2A_{12} + A_{66}) + \sqrt{(2A_{12} + A_{66})^2 - 4A_{11}A_{22}}}{2A_{11}} \\ y_2 &= \frac{-(2A_{12} + A_{66}) - \sqrt{(2A_{12} + A_{66})^2 - 4A_{11}A_{22}}}{2A_{11}} \end{aligned} \quad \text{with } A_{11}, A_{22} > 0 \tag{2.89}$$

Puisque P_{ortho} ne peut pas admettre de racine réelle, il est nécessaire que les deux quantités y_1 et y_2 soient strictement négatives. Afin de pouvoir garantir la stricte négativité de y_1, il est nécessaire que $(2A_{12} + A_{66})$ soit strictement positif. Par conséquent, pour assurer ces conditions sur y_1 et y_2, une condition nécessaire et suffisante est :

$$2A_{12} + A_{66} \geq 2\sqrt{A_{11}A_{22}} \tag{2.90}$$

Si tel est bien le cas, les racines de P_{ortho} deviennent :

$$\begin{array}{rclcrcl} \mu_1 & = & i\sqrt{-y_1} & , & \mu_3 & = & \overline{\mu_1} = -i\sqrt{-y_1} \\ \mu_2 & = & i\sqrt{-y_2} & , & \mu_4 & = & \overline{\mu_2} = -i\sqrt{-y_2} \end{array} \tag{2.91}$$

qui est une écriture en accord avec la convention $Im(\mu_1), Im(\mu_2) > 0$. Remarquons tout de suite que le cas $\mu_1 = \mu_2$ correspond à la situation $\Delta = 0$ (et réciproquement). Avec les notations introduites précédemment sur le module et l'argument de μ_1 et μ_2, il vient $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\pi}{2}$ et $\rho_1 = \sqrt{-y_1}, \rho_2 = \sqrt{-y_2}$. L'équation portant sur la nullité du déterminant (2.85) (ou (2.87) si

$\Delta = 0$) est alors grandement simplifiée puisqu'elle ne fait désormais intervenir plus que de deux paramètres seulement : α and $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Par exemple, l'équation (2.85) devient :

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha\pi) & \cos(\alpha\pi) & -\sin(\alpha\pi) & -\sin(\alpha\pi) \\ -r\sin(\alpha\pi) & -\sin(\alpha\pi) & -r\cos(\alpha\pi) & -r\cos(\alpha\pi) \\ r^{\alpha+1}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) & -r^{\alpha+1}\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \\ -r^{\alpha+2}\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) & -r^{\alpha+2}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Par conséquent, un tracé de la variable α vue comme une fonction de r peut être entrepris. Celui-ci donne les résultats Figures 2.21 et 2.22. Une première remarque à propos de cette

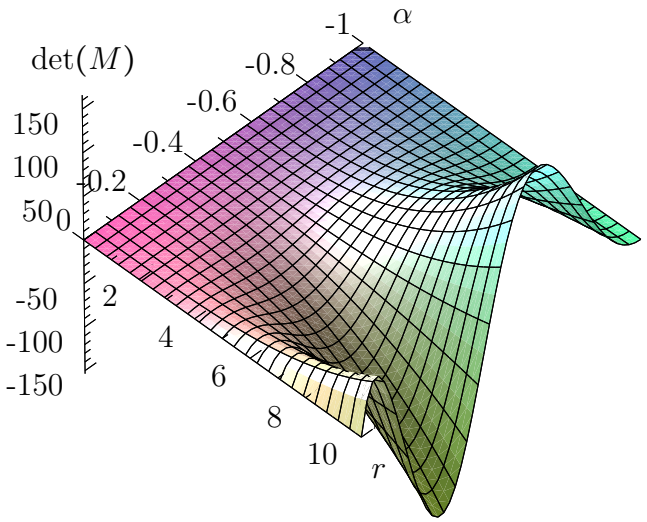

FIGURE 2.21 – Tracé de $det(M)$ comme une fonction de α et $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

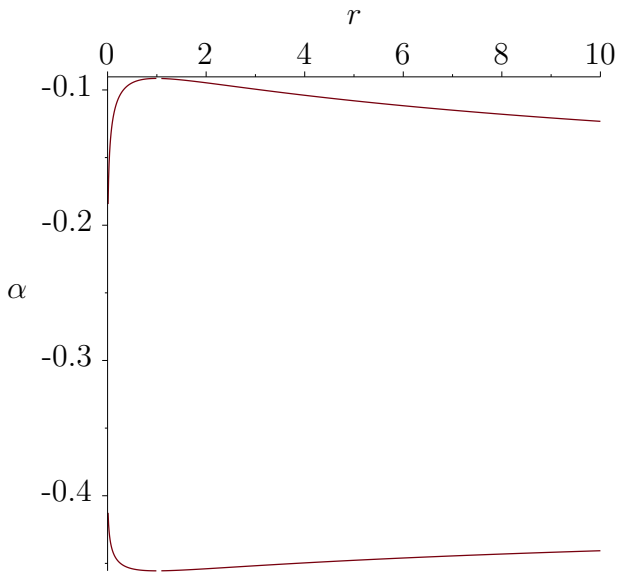

FIGURE 2.22 – Tracé de α comme une fonction de $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

deuxième figure est que le paramètre α varie en fonction de r. Cela signifie que le degré de singularité dépend cette fois-ci du milieu considéré conformément à ce qui a été annoncé précédemment. De plus, le cas $\mu_1 = \mu_2$ correspond au cas limite $r = 1$. Sur la Figure 2.22, on peut voir que la continuité pour $r = 1$ est garantie et que les valeurs classiques -0.0915 et -0.455 correspondant aux degrés de singularité pour un matériau isotrope sont retrouvées.

Intéressons nous désormais à l'autre cas de figure en ce qui concerne le signe du déterminant du polynôme du second degré Q

$\Delta = (2A_{12} + A_{66})^2 - 4A_{11}A_{22} < 0$

Sous cette hypothèse, Q admet deux racines complexes distinctes y avec $Im(y) > 0$ et $\overline{y}$ ce qui conduit donc à quatre racines différentes pour P_{ortho}. En effet, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $Im(\mu) > 0$ et $\mu^2 = y$. Alors les quatre racines de P_{ortho} se mettent sous la forme

$$\mu_1 = \mu \quad , \quad \mu_2 = -\overline{\mu} \quad , \quad \mu_3 = \overline{\mu} \quad \text{et} \quad \mu_4 = -\mu$$

Avec les conventions adoptées précédemment, cela signifie que $\rho_1 = \rho_2$ et que $\delta_2 = \pi - \delta_1$. Une fois encore, ce cas particulier permet de simplifier (2.85) pour pouvoir la considérer comme une expression dépendant uniquement de deux variables que sont α et $\delta = \delta_1$. Il est alors très facile de tracer α comme une fonction δ.

Une fois encore, le point particulier correspond à $\delta = \frac{\pi}{2}$ aurait pu être retrouvé en se servant du cas $\mu_1 = \mu_2$. Avec les commentaires faits sur la Figure 2.22, il est désormais

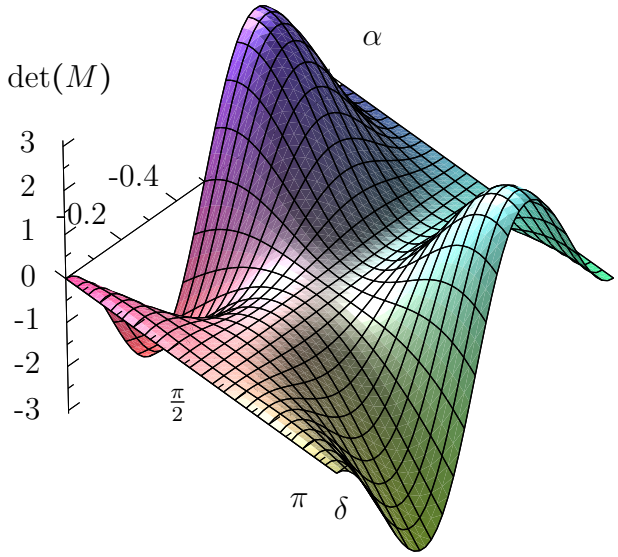

FIGURE 2.23 – Tracé de $det(M)$ comme une fonction de α et δ

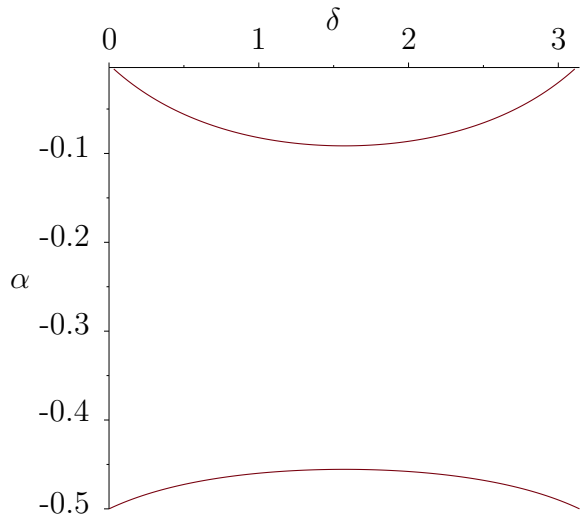

FIGURE 2.24 – Tracé de α comme une fonction de δ

clair que la continuité est garantie entre la situation $\mu_1 \neq \mu_2$ et celle où ces deux nombres complexes sont égaux.

Une façon de représenter sur un même graphique à la fois les résultats de la Figure 2.22 et de la Figure 2.24 est de remarquer que les racines de P_{ortho} ne dépendent dans un cas comme de l'autre que des variables réduites $X_1 = \frac{2A_{12}+A_{66}}{A_{11}}$ et $X_2 = \frac{A_{22}}{A_{11}}$. Par conséquent, α peut être calculé comme une fonction de (X_1, X_2) où $X_1 \geq -2\sqrt{X_2}$. Le point particulier de

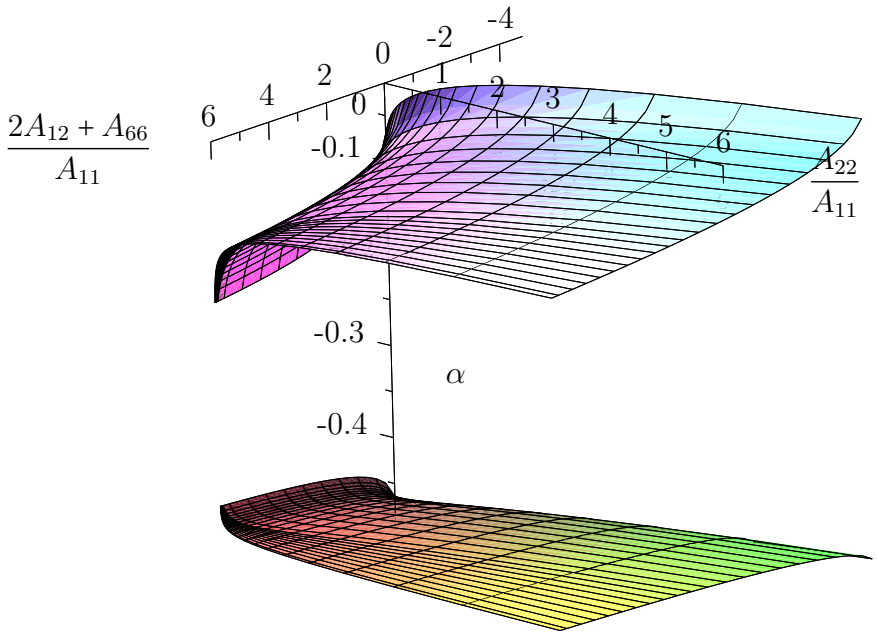

FIGURE 2.25 – Tracé de α comme une fonction de $\frac{2A_{12}+A_{66}}{A_{11}}$ et de $\frac{A_{22}}{A_{11}}$

la continuité entre les deux cas $\mu_1 = \mu_2$ et $\mu_1 \neq \mu_2$ correspond à la continuité au travers de la situation $X_1 = 2\sqrt{X_2}$. L'avantage de la Figure 2.25 est qu'elle met en évidence l'existence deux degrés de singularité associés à deux valeurs de α, et ce, que quel que soit le matériau orthotrope considéré.

Pour finir le travail, il est nécessaire, une fois les deux valeurs admissibles de α déterminées en fonction du matériau considéré, de trouver les vecteurs se trouvant dans le noyau du

système linéaire (2.84) (ou (2.86) selon le cas considéré). Une telle opération permettra de déterminer, à un facteur multiplicatif près, les valeurs des constantes β_1 et β_2. Les deux facteurs multiplicatifs correspondant aux deux valeurs de α sont la généralisation anisotrope des quantités k_1 et k_2 déterminées dans le cadre d'un matériau isotrope. Il a été rappelé et généralisé au cas avec précontrainte une méthode proposée par D. Leguillon pour calculer ces objets. La méthode repose sur l'existence d'objets singuliers non physiques présentant des degrés de singularité couplés aux deux valeurs de α exhibées. L'existence de ces objets ayant été montrée dans le cas isotrope, il s'agit d'en faire autant pour des matériaux anisotropes. La démonstration, étant élégante mais un peu lourde, est donnée en Annexe A.2.

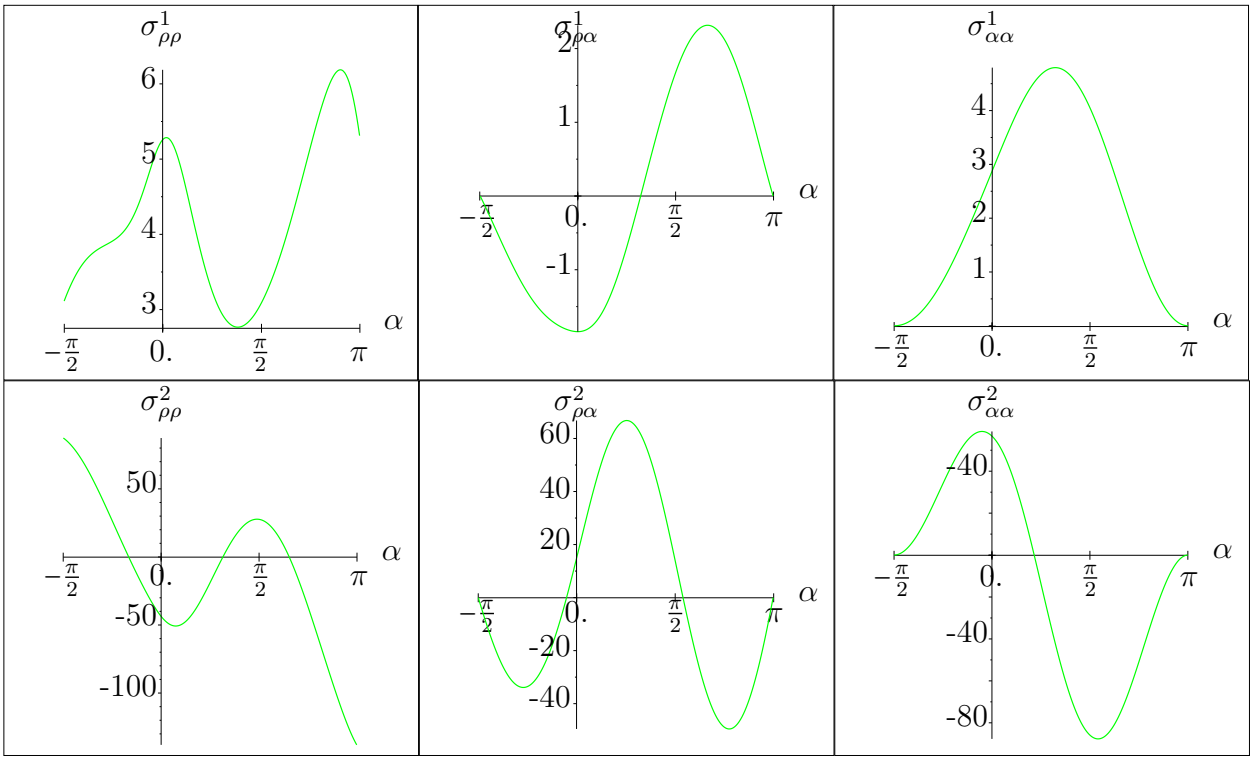

FIGURE 2.26 – Représentation, dans la base locale, en fonction de l'angle θ, des composantes des tenseurs de contrainte singuliers en axisymétrique $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ associés à des singularité de degré $\alpha_1 = -0.4519$ et $\alpha_2 = -0.0991$ respectivement. Le matériau considéré est isotrope transverse défini par $E_1 = 24.19\,\text{GPa}$, $E_2 = 9.27\,\text{GPa}$, $\nu_{21} = 0.2$, $\nu_{13} = 0.15$ et $G_{12} = 3.94\,\text{GPa}$ où 2 est la direction verticale et 1 et 3 sont les deux directions horizontales

Un exemple de contraintes singulières existant dans un coin pour un matériau isotrope transverse et donc orthotrope dans le plan est donné Figure 2.26. Ces résultats ont été obtenus pour des constantes matériaux $E_1 = 24.19\,\text{GPa}$, $E_2 = 9.27\,\text{GPa}$, $\nu_{21} = 0.2$, $\nu_{13} = 0.15$ et $G_{12} = 3.94\,\text{GPa}$ où 2 est la direction verticale et 1 et 3 sont les deux directions horizontales. Avec un tel matériau, les degrés de singularité obtenus sont

$$\alpha_1 = -0.4519 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = -0.0991 \tag{2.92}$$

qui diffèrent de 2.26. Les composantes des tenseurs de contraintes associés aux modes singuliers Figure 2.26 sont à comparer avec celles données Figure 2.15. Bien évidemment, cette comparaison doit être basée sur l'allure des courbes et non sur leur intensité puisque celle-ci dépend du choix de normalisation des vecteurs singuliers. Le point important est que la symétrie ou l'antisymétrie par rapport à la première bissectrice sont brisées par l'anisotropie du matériau. Cette propriété pourrait donc jouer un rôle important dans l'anisotropie des faciès de fissuration.

2.4 Conclusions et modèle de fissure

Dans la première section de ce chapitre, il a été discuté de la géométrie de fissure à adopter. Puisque la cohérence entre les deux modèles que sont les fissures elliptiques ou les fissures de Griffith a été établie, il est légitime de se baser sur une représentation de fissures idéalisées. Cependant, comme précisé en début de chapitre, la donnée du modèle géométrique n'est pas suffisante. Il est en effet nécessaire de spécifier avec soin si les fissures à considérer sont de type ouvert ou de type fermé. Dans ce but, tous les outils nécessaires à l'analyse des contraintes en présence ont été présentés.

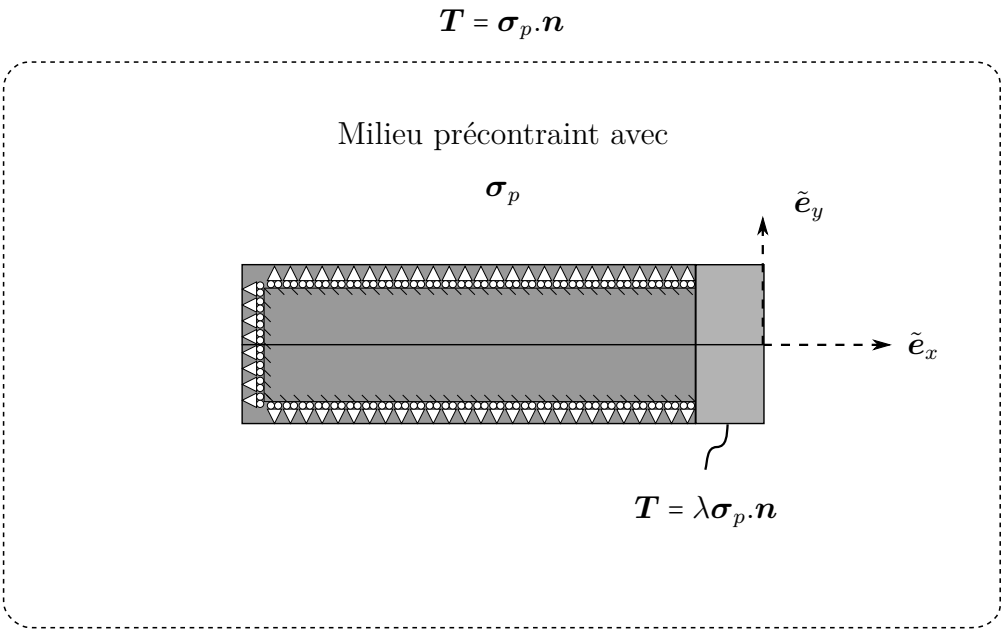

FIGURE 2.27 – Représentation du problème bidimensionnel équivalent

En premier lieu, nous avons vu qu'il était possible de considérer un état de déformations planes au niveau d'un plan de symétrie. Plus précisément, la structure de la singularité du champ de contrainte a été établie dans de telles conditions, et ce, que le matériau soit pris localement comme isotrope ou comme présentant une anisotropie orthotrope. Ainsi, nous nous contenterons donc de caractériser l'état de contrainte au niveau des coins appartenant au plan horizontal et au plan vertical contenant l'axe du tunnel (Figure 2.12). Il n'y a en effet pas de raison pour qu'ait lieu, entre ces points caractéristiques, un passage d'un état de traction vers un état de compression (ou inversement). Par conséquent, établir en ces 4 points le type de fissure à prendre en compte est largement suffisant.

Dans un second temps, nous avons rappelé et étendu à un contexte précontraint un moyen efficace et élégant de calculer les équivalents des facteurs d'intensité de contrainte pour des problèmes bidimensionnels. Par conséquent, l'analogie avec des conditions en déformations planes sera poussée un peu plus loin en considérant un problème bidimensionnel dans son intégralité. Le choix naturel est celui représenté Figure 2.27 où $\tilde{\boldsymbol{e}}_x$ correspond à l'axe du tunnel $\boldsymbol{e}_z$ et $\tilde{\boldsymbol{e}}_y$ correspond soit à la direction plane $\boldsymbol{e}_y$, soit à la direction verticale $\boldsymbol{e}_x$. Dans ce contexte, la projection dans le plan considéré de la précontrainte $\boldsymbol{\sigma}_p$ vaudra par exemple $\sigma_{II}\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + \sigma_{III}\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z$ si $\tilde{\boldsymbol{e}}_y$ a été assimilé à la direction horizontale. Bien sûr, si l'excavation du tunnel est modélisée avec des conditions axisymétriques, $\tilde{\boldsymbol{e}}_y$ pourra correspondre au vecteur $\boldsymbol{e}_r$ pour une valeur quelconque de l'angle θ. Le choix d'utiliser une modélisation bidimensionnelle de type déformations planes tire sa justification de la concordance des états singuliers dans les deux situations au niveau d'un plan de symétrie. Cela signifie que le pro-

blème suggéré est à même de reproduire fidèlement l'état de contrainte au niveau du front de taille. Son étude est donc équivalente à celle du tunnel tridimensionnel si l'objectif est de déterminer la nature des fissures devant être prises en considération.

Une étude numérique du problème bidimensionnel Figure 2.27, avec un matériau isotrope et à l'aide de la méthode proposée Section 2.2.3 (voir équation (2.37)) permet d'obtenir un k_1 négatif ainsi qu'un k_2 positif pour le choix de normalisation ayant conduit à la Figure 2.15, et ce quel que soit le chargement considéré. Puisque le degré de singularité associé aux deux modes n'est pas le même, c'est le mode 1 associé à k_1 qui prédomine au niveau du coin considéré. Cette analyse démontre ainsi qu'il n'est physiquement pas possible de considérer des fissures nucléant en mode I à partir du coin. La bonne modélisation est donc celle associée à des fissures fermées nucléant en cisaillement. Nous supposerons que celles-ci sont non frottantes. Des résultats identiques étant obtenus en considérant un matériau orthotrope, la conclusion précédente s'étend donc au problème de l'excavation du tunnel dans son intégralité et la problématique de la nucléation de fissures devra se faire par le biais d'un modèle de fissures de cisaillement. Ce résultat semble conforme aux analyses menées par l'ANDRA et présentées dans le Chapitre 1, Section 1.1 puisque leurs observations mettent en évidence des fissures fermées. Le choix d'une utilisation de fissures fermées possède désormais une double justification qui est à la fois expérimentale et théorique. C'est donc un résultat fort qui vient d'être établi et celui-ci sera fondateur pour toutes les analyses qui seront menées par la suite.

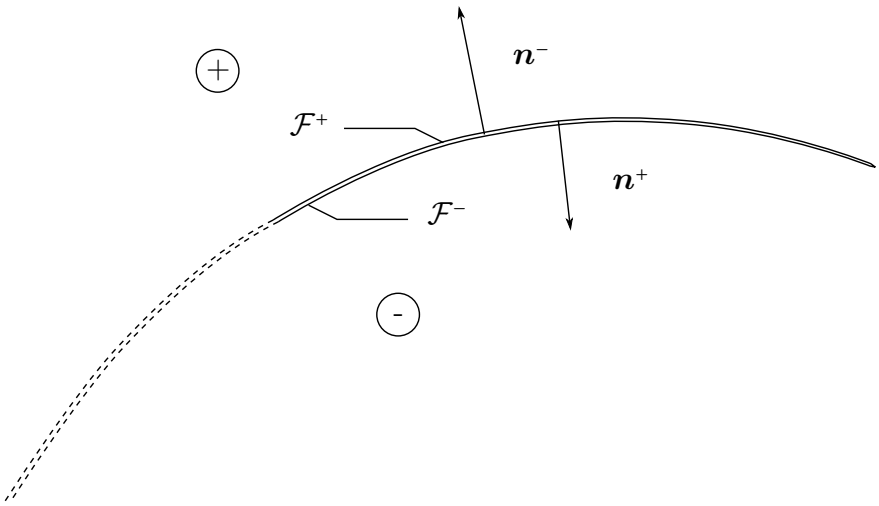

FIGURE 2.28 – Notations pour une fissure fermée

Pour conclure, il ne reste plus qu'à préciser quelles sont les bonnes conditions aux limites à associer à une fissure fermée non frottante. On pourra par exemple les trouver dans LEBLOND [2000] et nous nous contenterons ici de les rappeler. Soit $\mathcal{F}$ la surface formellement associée à une fissure plate fermée. Il est nécessaire de dédoubler les points appartenant à cette surface afin de considérer une surface $\mathcal{F}^+$ formant la lèvre supérieure et $\mathcal{F}^-$ formant la lèvre inférieure. Avec les notations précisées Figure 2.28, les bonnes conditions à considérer au niveau de la fissure $\mathcal{F}$ sont :

$$\begin{aligned} [\![\boldsymbol{\xi}]\!]_{\mathcal{F}}.\boldsymbol{n}^+ &= \left(\boldsymbol{\xi}\left(\mathcal{F}^+\right) - \boldsymbol{\xi}\left(\mathcal{F}^-\right)\right).\boldsymbol{n}^+ = 0 \\ [\![\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}]\!]_{\mathcal{F}} &= \boldsymbol{n}^+.\boldsymbol{\sigma}\left(\mathcal{F}^+\right).\boldsymbol{n}^+ - \boldsymbol{n}^-.\boldsymbol{\sigma}\left(\mathcal{F}^-\right).\boldsymbol{n}^- = 0 \\ \boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.93}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ désigne un vecteur tangent à la surface $\mathcal{F}$ en un point donné. Il peut paraître surprenant au premier abord de considérer des conditions aux limites qui donnent des informations sur

la direction normale à la fissure à la fois en contraintes et en déplacements. Il est cependant tout à fait licite d'utiliser de telles relations puisque, sur la direction normale, seulement la continuité des vecteurs contrainte et déplacement est imposée et non pas leurs valeurs.

Chapitre 3

Utilisation d'un critère mixte

Sommaire

3.1 Problème bidimensionnel et énergie potentielle 68
3.1.1 Déformations planes et longueur interne 68
3.1.2 Energie potentielle en présence d'une précontrainte 69
3.2 Principe de la zone de raccord 73
3.2.1 Zones intérieure, extérieure et de raccord 73
3.2.2 Raccordement de la solution intérieure 74
3.2.3 Retour sur le calcul de la variation d'énergie potentielle 78
3.2.4 Formule d'Irwin anisotrope 79
3.3 Existence de la zone de raccord en thermique 80
3.3.1 Potentiel complexe 81
3.3.2 Problème d'un isolant thermique à forme carrée 82
3.3.3 Transformations conformes 83
3.3.4 Les solutions du problème sain et du problème avec défaut 86
3.3.5 Existence de la zone de raccord 87
3.4 Existence de la zone de raccord en mécanique 93
3.4.1 Approximation de la géométrie d'un trou carré non endommagé . . 94
3.4.2 Approximation de la géométrie d'un trou carré avec présence de fissures ouvertes 96
3.4.3 Caractérisation du domaine de validité de la méthode 97
3.5 Application de la méthode et détermination de la longueur d'initiation 99

3.1 Problème bidimensionnel et énergie potentielle

3.1.1 Déformations planes et longueur interne

Dans ce chapitre, nous nous proposons de mettre en œuvre la méthode du critère mixte proposée par D. Leguillon dans le contexte de l'excavation d'un tunnel exposé précédemment. Ce critère, présenté au Chapitre 1, Sous-Section 1.2, est en effet largement utilisé au sein de la communauté scientifique et a été confronté avec succès à différentes situations expérimentales (voir par exemple Leguillon et collab. [2006] ou Campagnolo et collab. [2016]). Dans la situation qui nous intéresse, ce double critère a l'avantage de pouvoir être mis en place assez rapidement grâce aux différentes propriétés ayant été établies à ce stade. En effet, le chapitre précédant a exhibé la correspondance qu'il pouvait y avoir, localement, entre le problème tridimensionnel de l'excavation d'un tunnel (Figure 2.9) et un problème en déformations planes au niveau d'un plan de symétrie. Le fait de trouver la même structure de singularité dans un cas comme dans l'autre pousse à traiter de la problématique de la nucléation au voisinage d'un coin via un problème bidimensionnel équivalent. Pouvoir se placer dans un contexte de déformations planes est tout de suite très agréable puisqu'une telle hypothèse permet d'utiliser un certain nombre de propriétés efficaces d'un point de vue de la mise en œuvre. Par exemple, la méthode des développements asymptotiques raccordés, présentée dans Leguillon [1989], devient utilisable et permet de tirer parti des structures de singularité établies précédemment. Ainsi, le Chapitre 2 est un chapitre essentiel qui permet non seulement de positionner le problème mais également de justifier toute l'analyse qui va suivre. Il est cependant à noter que l'utilisation d'un problème bidimensionnel pour envisager la nucléation ne peut se justifier que pour des tailles de fissures suffisamment petites pour que celles-ci puissent être considérées comme appartenant à la zone où les singularités de contrainte sont encore suffisantes pour décrire le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ avec précision. En effet, rien ne garantit la pertinence du modèle bidimensionnel au delà de cette zone. De plus, pour des fissures de tailles plus grandes, des effets tridimensionnels ne pourront plus être écartés comme par exemple des effets de voûtes qui sont totalement absents d'un problème en déformations planes. Ainsi, il est important dans un premier temps de se convaincre que la longueur de nucléation fournie par le critère mixte est petite par rapport au rayon du tunnel R et à la longueur de la passe L_p.

Etant donné que le critère mixte fait intervenir deux arguments, l'un portant sur les contraintes et l'autre sur l'énergie, deux constantes du matériau lui sont associées. L'une correspond à une contrainte critique et est notée σ_c, constante homogène à une pression. L'autre, étant un taux de restitution de l'énergie critique critique, peut être obtenue à partir de la formule d'Irwin en introduisant une ténacité K_c qui elle est homogène à des $\mathrm{Pa} \cdot \sqrt{\mathrm{m}}$. On peut alors montrer (voir par exemple l'Annexe A.3) que le double critère renferme une longueur interne qui est un candidat naturel pour la caractérisation de la longueur de nucléation l :

$$l \sim \left(\frac{K_c}{\sigma_c}\right)^2 \tag{3.1}$$

Avec une ténacité de l'ordre de $10\,\mathrm{MPa} \cdot \sqrt{\mathrm{m}}$ et une contrainte critique de l'ordre de $100\,\mathrm{MPa}$, qui sont tout deux en accord avec le matériau considéré et les contraintes en présence, on trouve une longueur de nucléation de l'ordre du centimètre. Avec cette caractérisation, on constate bien que la longueur de nucléation issue du critère mixte sera petite devant les longueurs caractéristiques du tunnel (L_T et L_p sont en effet de l'ordre du mètre). Bien qu'il s'agisse déjà d'un résultat très intéressant, il ne s'agit pour autant que d'une condition nécessaire pour que les hypothèses envisagées soient justifiées. Il reste en effet à documenter plus en détail le domaine de pertinence des solutions singulières. Cela sera entre autres

l'objet de la Section 3.4 et nous proposons d'admettre à ce stade, à partir des différents arguments déjà détaillés, la validité d'une modélisation en déformations planes du phénomène de nucléation. Le problème considéré sera celui représenté Figure 2.27 où la notation $\tilde{\boldsymbol{e}}_x$ et $\tilde{\boldsymbol{e}}_z$ sera abandonnée au profit de simplement $\boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{e}_y$ puisqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, dans ce chapitre, sur le problème considéré. En utilisant le fait que le problème présente une symétrie par rapport à l'axe $\boldsymbol{e}_x$, correspondant dans le contexte bidimensionnel à la direction de forage du tunnel, il est possible de se ramener à l'étude de la moitié du problème seulement. Enfin,

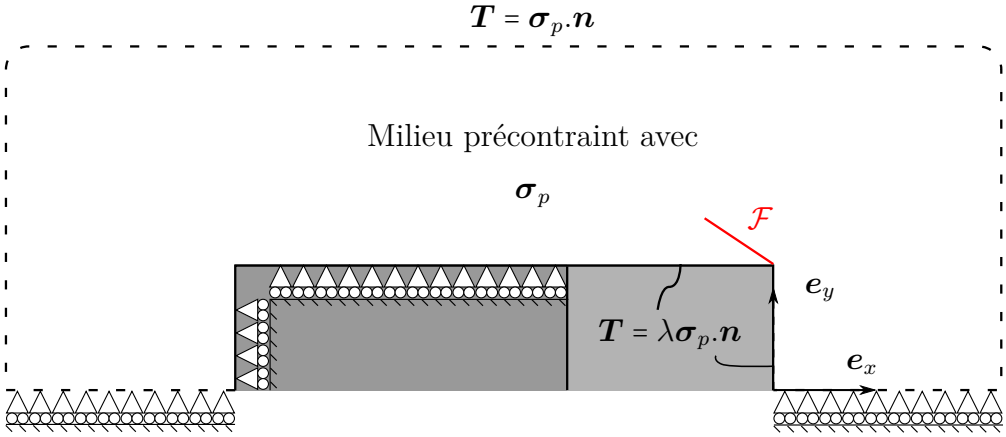

FIGURE 3.1 – Excavation du tunnel en conditions bidimensionnels avec présence éventuelle d'une fissure $\mathcal{F}$ de longueur l

il sera nécessaire pour la suite d'introduire une fissure de longueur l prenant naissance au niveau du coin à angle droit formé par le front de taille, conformément à l'hypothèse de travail formulée au Chapitre 2, Section 2.1. Le lieu des points appartenant à la fissure sera noté $\mathcal{F}$ comme sur la Figure 3.1. Les conditions aux limites à considérer au niveau de la fissure sont celles stipulées en (2.93) et correspondant à une fissure de type fermée.

L'objectif de ce chapitre est donc de juger, à partir du critère mixte de D. Leguillon, de la possibilité de la nucléation d'une fissure de type fermée, de géométrie similaire à celle représentée Figure 3.1, pour un niveau de chargement λ donné.

3.1.2 Energie potentielle en présence d'une précontrainte

Les différents outils mis à disposition par D. Leguillon pour pouvoir utiliser sa méthode sont basés sur des coins anguleux ayant des bords libres de contrainte appartenant à des milieux initialement dans leur état naturel. Ils nécessitent donc d'être adaptés au cas qui nous intéresse puisque celui-ci présente un état initial précontraint. Comme ce fut le cas dans le chapitre précédant, il est utile d'utiliser un principe de superposition pour se ramener au problème présenté Figure 3.2 où les bords de la passe du tunnel sont libres de contraintes. En l'absence de fissure, et en prenant en compte que la précontrainte est à divergence nulle, il est facile de montrer que les solutions en déplacement du problème initial et du problème auxiliaire sont rigoureusement les mêmes. Pour que ce résultat soit transposable dans le cas où le milieu est fissuré, il est nécessaire, dans le problème auxiliaire, de considérer sur $\mathcal{F}$ des conditions aux limites particulières. Avec les notations introduites Figure 3.3, le principe de superposition nous pousse à considérer pour le nouveau problème les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} [\![\boldsymbol{\xi}]\!]_{\mathcal{F}}.\boldsymbol{n}^+ &= \left(\boldsymbol{\xi}\left(\mathcal{F}^+\right) - \boldsymbol{\xi}\left(\mathcal{F}^-\right)\right).\boldsymbol{n}^+ = 0 \\ [\![\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}]\!]_{\mathcal{F}} &= \boldsymbol{n}^+.\boldsymbol{\sigma}\left(\mathcal{F}^+\right).\boldsymbol{n}^+ - \boldsymbol{n}^-.\boldsymbol{\sigma}\left(\mathcal{F}^-\right).\boldsymbol{n}^- = 0 \\ \boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\sigma}\left(\mathcal{F}^+\right).\boldsymbol{n}^+ &= \boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\sigma}\left(\mathcal{F}^-\right).\boldsymbol{n}^+ = -\lambda\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}^+ \end{aligned} \tag{3.2}$$

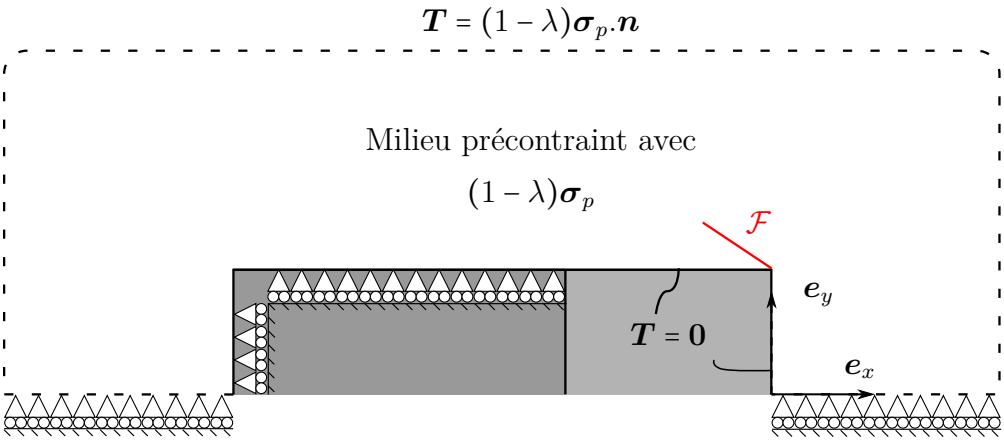

FIGURE 3.2 – Problème auxiliaire permettant de se ramener à des bords libres

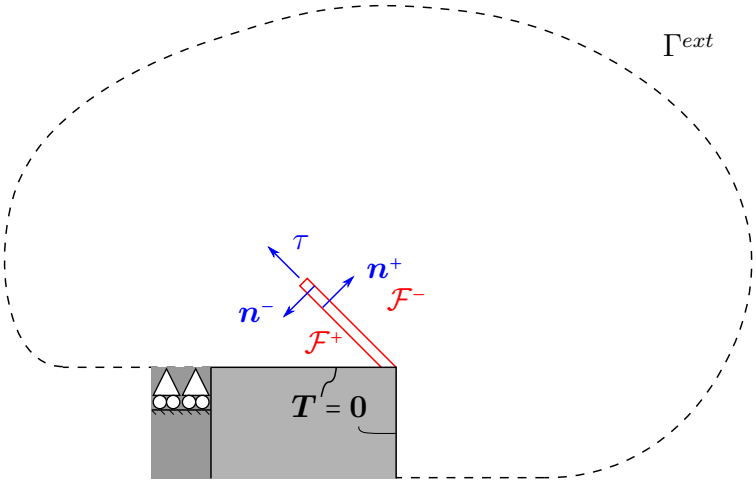

FIGURE 3.3 – Définition de la lèvre supérieure $\mathcal{F}^+$ et inférieure $\mathcal{F}^-$ de la fissure ainsi que du contour extérieur Γ^{ext}

Ainsi, considérer des bords libres au niveau de l'excavation de la passe implique de devoir renoncer à une fissure fermée tangentiellement libre de contrainte. Ce n'est qu'à ce prix que les solutions en déplacement des deux problèmes pourront être toutes deux égales à un même champ tensoriel $\boldsymbol{\xi}$ et donneront donc lieu aux mêmes déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Avec ces considérations, il est immédiat de montrer que l'énergie potentielle du problème initial est identique à celle du problème auxiliaire. En considérant temporairement que le domaine est borné, on note $\partial\Omega^\infty$ la frontière extérieure du domaine. Il vient alors :

$$\begin{aligned} W &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}_p : \boldsymbol{\varepsilon}\right) dV \\ \Phi &= \int_{\mathcal{F}^+\cup\mathcal{F}^-} (\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\tau})\,(\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n})\, dS + \int_{\partial\Omega^\infty} \boldsymbol{\xi}.(1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n} dS \\ &= -\int_{\mathcal{F}^+} [\![\boldsymbol{\xi}]\!].\lambda\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}^+ dS + \int_{\partial\Omega^\infty} \boldsymbol{\xi}.(1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n} dS \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$Ep = W - \Phi$$

Il est agréable à ce stade de séparer le contour du problème dans son intégralité en plusieurs zones. La première subdivision concernera la fissure et sera composée de $\mathcal{F}^+$ ainsi que de $\mathcal{F}^-$. La deuxième partie sera composée des bords libres correspondant à la passe. Enfin, la troisième partie sera le complémentaire des deux premières et sera notée Γ^{ext}, comme sur la Figure 3.3. Cette partie de la frontière correspond à des conditions aux limites mixtes où

sont imposées tantôt des composantes du vecteur déplacement (sur une partie notée $\Gamma_{\xi_i}^{ext}$) et tantôt des composantes du vecteur contrainte (sur une partie notée $\Gamma_{T_i}^{ext}$). De plus, le tenseur du deuxième ordre $\boldsymbol{\sigma}_p$ est associé, dans le cas présent, à des pseudo déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}_p$ dérivant d'un champ de déplacement noté $\boldsymbol{\xi}_p$. Avec ces notations, on remarque que :

$$\begin{aligned} & E_p + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}_p : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_p dV \\ = & \frac{1}{2} \int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon} + (1-\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_p) : \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} + (1-\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_p)\, dV - \int_{\Gamma_{T_i}^{ext}} \xi_i T_i^d dS + \lambda \int_{\mathcal{F}^+} [\![\boldsymbol{\xi}]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}^+ dS \end{aligned} \tag{3.4}$$

En utilisant le fait que le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} + (1-\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_p)$ est à divergence nulle et que $(\boldsymbol{\varepsilon} + (1-\lambda)\boldsymbol{\varepsilon}_p)$ est la partie symétrique du gradient du champ vectoriel $\boldsymbol{\xi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p$, on trouve :

$$\begin{aligned} & E_p + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}_p : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_p dV - (1-\lambda) \int_{\Gamma_{T_i}^{ext}} \boldsymbol{\xi}_{p_i} T_i^d dS \\ = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\xi_i}^{ext}} \left(\xi_i^d + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_{p_i}\right) T_i dS - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{T_i}^{ext}} \left(\xi_i + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_{p_i}\right) T_i^d dS + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{F}^+} [\![\boldsymbol{\xi}]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}^+ dS \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $T_i = \boldsymbol{e}_i.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$ est la composante du vecteur contrainte dans la direction i, où une composante du vecteur déplacement a été imposée. La même définition s'applique à ξ_i sur une surface où une composante du vecteur contrainte a été imposée dans la direction i. Pour arriver à cette relation, il a été utilisé le fait que $[\![\boldsymbol{\xi}_p]\!] = 0$ puisqu'il s'agit d'un champ parfaitement régulier. Cette expression, pouvant sembler un peu lourde à priori, est une étape importante permettant d'aboutir *in fine* à une formule très agréable permettant de donner accès à la différence d'énergie potentielle qui existe entre deux situations, l'une saine et l'autre avec fissure, pour un même chargement. Soient alors $\boldsymbol{\xi}^0$ (resp. $\boldsymbol{\xi}^f$) le champ de déplacement associé au problème Figure 3.2 en l'absence de fissure (resp. avec une fissure $\mathcal{F}$ de longueur ℓ), $\boldsymbol{\sigma}^0$ (resp. $\boldsymbol{\sigma}^f$) le champ de contrainte correspondant et E_p^0 (resp. E_p^f) l'énergie potentielle associée. Etant donné que les deux situations sont envisagées pour les mêmes conditions aux limites, on a simultanément sur la frontière $\Gamma_{\xi_i}^{ext}$ le fait que :

$$\xi_i^0 = \xi_i^f = \xi_i^d \tag{3.6}$$

De même, une propriété équivalente est obtenue en tout point de la frontière $\Gamma_{T_i}^{ext}$:

$$T_i^0 = \boldsymbol{e}_i.\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n} = T_i^d \qquad , \qquad T_i^f = \boldsymbol{e}_i.\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n} = T_i^d \tag{3.7}$$

Par conséquent, l'énergie potentielle associée au cas sain vérifie la relation :

$$\begin{aligned} & E_p^0 + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}_p : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_p dV - (1-\lambda) \int_{\Gamma_{T_i}^{ext}} \boldsymbol{\xi}_{p_i} T_i^d dS \\ = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\xi_i}^{ext}} \left(\xi_i^f + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_{p_i}\right) T_i^0 dS - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{T_i}^{ext}} \left(\xi_i^0 + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_{p_i}\right) T_i^f dS \end{aligned} \tag{3.8}$$

qui est une expression issue de (3.5) où les relations (3.6) et (3.7) ont été injectées et où le terme intégral sur $\mathcal{F}^+$ a été écarté au motif que le milieu considéré est sain. En ce qui concerne l'énergie potentielle du milieu fissuré, une relation similaire est obtenue :

$$\begin{aligned} & E_p^f + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}_p : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_p dV - (1-\lambda) \int_{\Gamma_{T_i}^{ext}} \boldsymbol{\xi}_{p_i} T_i^d dS \\ = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\xi_i}^{ext}} \left(\xi_i^0 + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_{p_i}\right) T_i^f dS - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{T_i}^{ext}} \left(\xi_i^f + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_{p_i}\right) T_i^0 dS + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{F}^+} [\![\boldsymbol{\xi}^f]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}^+ dS \end{aligned} \tag{3.9}$$

En se servant de deux relations (3.8) et (3.9), on obtient une forme compacte permettant d'exprimer la différence des deux énergies potentielles :

$$E_p^0 - E_p^f = \frac{1}{2}\int_{\Gamma^{ext}} \left[\left(\boldsymbol{\xi}^f + (1-\lambda)\,\boldsymbol{\xi}_p\right).\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{\xi}^0 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{\xi}_p\right).\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}\right] dS - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{F}^+} [\![\boldsymbol{\xi}^f]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}^+ dS \tag{3.10}$$

Cette expression très agréable permet d'accéder par la suite au taux de restitution d'énergie G_{inc} qui est l'un des objets essentiels dans la mise en œuvre du critère mixte. Il a été toutefois nécessaire pour l'obtenir de supposer que le milieu considéré était borné afin que la définition de la frontière Γ^{ext} ait un sens. Cependant, il est possible très simplement de pouvoir étendre son domaine de validité dans le cas où le problème serait considéré comme étant infini. En effet, grâce au théorème de Maxwell-Betti, il a été montré dans le Chapitre 2, Sous-Section 2.2.3, que le terme :

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \left[\left(\boldsymbol{\xi}^f + (1-\lambda)\,\boldsymbol{\xi}_p\right).\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{\xi}^0 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{\xi}_p\right).\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}\right] dS \tag{3.11}$$

n'était en fait pas dépendant du choix du contour Γ, pour peu que celui-ci prenne appui sur les bords libres de contraintes de la passe (cf. Figure 2.16). La présence d'une fissure impose ici toutefois une condition supplémentaire devant être vérifiée par le contour Γ qui est que ce dernier doit entourer $\mathcal{F}$ comme sur la Figure 3.4. On constate que le contour Γ^{ext} introduit

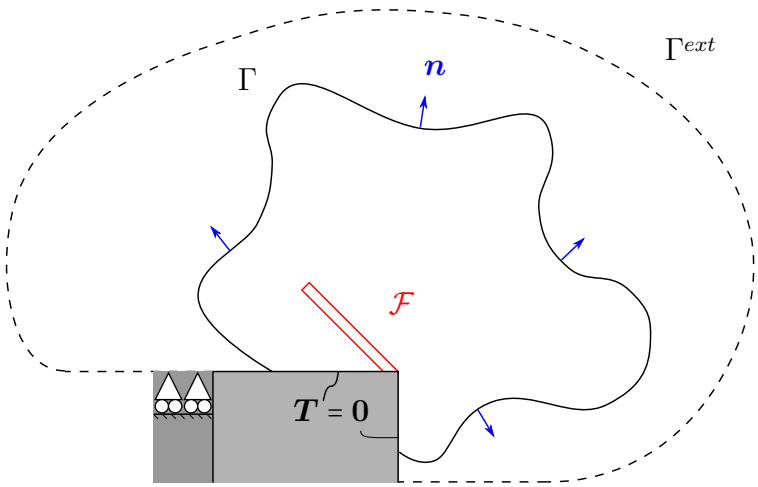

FIGURE 3.4 – Exemple d'un contour Γ prenant appui sur les bords de la passe et entourant la fissure $\mathcal{F}$

précédemment vérifie toutes ces conditions et est donc un choix particulier licite de Γ. Par conséquent, l'intégrale sur Γ^{ext} dans la formule (3.10) est en fait indépendante du choix du contour au sens mentionné précédemment. On trouve donc une nouvelle formulation pour le différentiel d'énergie potentielle qui est :

$$\begin{aligned} E_p^0 - E_p^f \quad = \quad & \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \left[\left(\boldsymbol{\xi}^f + (1-\lambda)\,\boldsymbol{\xi}_p\right).\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{\xi}^0 + (1-\lambda)\,\boldsymbol{\xi}_p\right).\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}\right] dS \\ & -\frac{\lambda}{2}\int_{\mathcal{F}^+} [\![\boldsymbol{\xi}^f + (1-\lambda)\,\boldsymbol{\xi}_p]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}^+ dS \end{aligned} \tag{3.12}$$

où Γ est donc n'importe quel contour prenant appuis sur les bords libres de la passe et entourant la fissure $\mathcal{F}$ et où $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure au contour si l'intérieur est la partie contenant la fissure. L'ajout de $(1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p$ dans le terme de saut est justifié par le caractère continu du champ en question et s'avérera utile par la suite. La formulation (3.12) de la

restitution d'énergie est très agréable puisque, en dehors de $\mathcal{F}^+$, elle ne fait plus intervenir d'éléments de la frontière du système considéré. Par conséquent, en considérant qu'un milieu infini correspond au comportement asymptotique de milieux arbitrairement grands, l'expression considérée reste valable. La différence d'énergie potentielle en milieu infini fera l'objet d'une discussion soigneuse dans le Chapitre 4, Section 4.6.

Dans le but de mettre en œuvre la méthode du double critère, il est nécessaire d'évaluer la quantité restitution d'énergie potentielle. Comme spécifié précédemment, l'étude proposée n'a de validité que si la fissure obtenue au terme du processus de nucléation est suffisamment petite pour être incluse dans la zone où le champ de contrainte peut être décrit avec précision par les solutions singulières. Ainsi, il semble légitime d'utiliser une méthode basée sur les méthodes de développements asymptotiques raccordés.

3.2 Principe de la zone de raccord

Pour pouvoir calculer la restitution d'énergie lors de la nucléation d'une fissure, quantité cruciale s'expimant sous la forme (3.12), une méthode basée sur des développements asymptotiques raccordés semble être toute désignée. Cette procédure, développée par D. Leguillon (voir par exemple Leguillon [1989]), permet d'effectuer un développement asymptotique de la variation d'énergie potentielle au voisinage de $\ell = 0$, ℓ étant la longueur de nucléation. Cependant, comme tout développement asymptotique, son domaine de validité peut être rapidement limité pour des tailles de fissures non infinitésimales. En effet, le mécanisme de nucléation met en jeu des fissures pouvant être de petite taille mais ayant tout de même une extension finie. Comme annoncé dans la Section ci-dessus, c'est la longueur interne au modèle (3.1), qui n'a rien d'infinitésimale, qui imposera l'ordre de grandeur de la longueur de nucléation. Ainsi, la question de la validité de la méthode suggérée se pose étant donné la longueur anticipée par le modèle. Pour pouvoir justifier de l'usage de développements asymptotiques, il est nécessaire dans un premier temps d'en rappeler les principes.

Pour pouvoir ensuite appliquer la démarche sur le point d'être exposée à la configuration considérée dans la la Sous-Section 3.1.2, le milieu sera précontraint avec $(1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}_p$. A nouveau, les pseudo déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}$ seront considérées comme étant la partie symétrique du gradient d'un champ vectoriel $\boldsymbol{\xi}_p$. Enfin, la méthode sera présentée dans le cas d'une fissure fermée où un chargement tangentiel aux lèvres de la fissure sera appliqué.

3.2.1 Zones intérieure, extérieure et de raccord

La démarche du raccordement asymptotique repose sur une hypothèse de séparation d'échelle. Cela consiste à supposer, dans le cas d'un matériau occupant un domaine Ω^ℓ et présentant une fissure de longueur ℓ, l'existence de trois zones de l'espace permettant de décrire différemment les champs de déplacement et de contrainte en place (Figure 3.5) :

* Une zone extérieure suffisamment éloignée de la fissure pour ne pas en percevoir l'effet
* Une zone intérieure qui décrit les modifications apportées par la présence de la fissure
* Une zone de raccord où les solutions des deux domaines décrits ci-dessus sont toutes les deux valables et cohabitent.

Soit L la taille caractéristique du coin qui, dans le cadre de l'excavation du tunnel, correspond au rayon R ou à la taille de la passe L_p. En supposant $\ell \ll L$, on peut distinguer deux échelles d'espace : l'une jaugée par ℓ et l'autre par L. Comme dans le cas classique de la couche limite

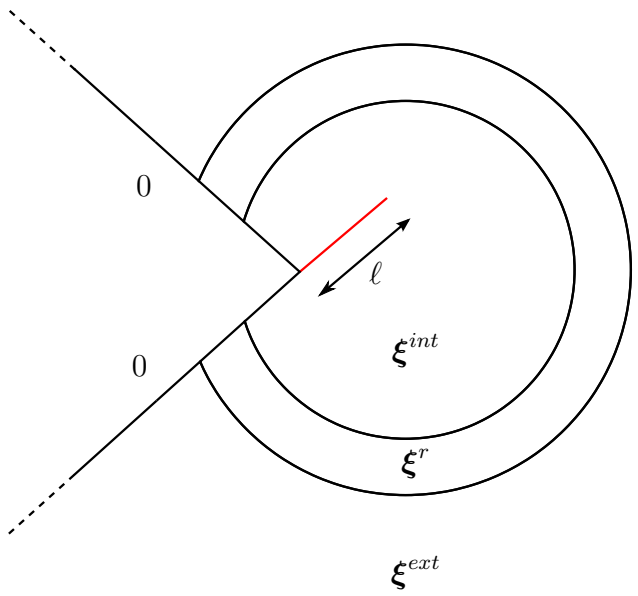

FIGURE 3.5 – Définition des zones intérieure, extérieure et de raccord

en mécanique des fluides, l'hypothèse précédente revient mathématiquement à supposer que le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}^f$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\xi}^f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi}^{ext}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{\xi}^{int}(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{\xi}^r(\boldsymbol{X}) \text{ avec } \boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{x}}{L} \text{ et } \boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\ell} \tag{3.13}$$

où $\boldsymbol{x}$ est le vecteur position. L'égalité considérée, comme celles qui vont suivre, sont à considérer à l'ajout d'un o près, c'est-à-dire d'un champ dont l'ordre de grandeur est négligeable dans la zone considérée. On demande de plus aux champs $\boldsymbol{\xi}^{int}$ et $\boldsymbol{\xi}^{ext}$ de se raccorder dans la zone intermédiaire où $\boldsymbol{\xi}^r$ est leur "limite" commune. Il est donc nécessaire de trouver une partie de l'espace caractérisée par des points $\boldsymbol{x}$ tels que $\ell \ll \|\boldsymbol{x}\| \ll L$. Autrement dit, à l'aide des variables $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, on peut écrire les conditions de raccord suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{\xi}^{ext}(\boldsymbol{X}) & = & \boldsymbol{\xi}^r(\boldsymbol{X}) & \text{lorsque } \frac{\ell}{L} \ll \|\boldsymbol{X}\| \ll 1 \\ \boldsymbol{\xi}^{int}(\boldsymbol{Y}) & = & \boldsymbol{\xi}^r\left(\frac{\ell}{L}\boldsymbol{Y}\right) & \text{lorsque } 1 \ll \|\boldsymbol{Y}\| \ll \frac{L}{\ell} \end{array} \tag{3.14}$$

Cette notation n'est pas sans conséquence. Elle suppose en effet l'existence d'une échelle micro où règne la solution intérieure $\boldsymbol{\xi}^{int}$, d'une échelle macro qui permet de légitimer l'usage $\boldsymbol{\xi}^{ext}$ comme approche de la solution $\boldsymbol{\xi}^{\epsilon}$ mais aussi d'une échelle mesoscopique où la solution peut être décrite à l'aide de $\boldsymbol{\xi}^r$. Il doit donc y avoir deux ordres de grandeur entre ℓ et L pour légitimer l'usage d'une telle approche.

3.2.2 Raccordement de la solution intérieure

La double inégalité $\ell \ll \|\boldsymbol{x}\| \ll L$ permettant de définir la zone de raccord sous-entend qu'il existe une zone suffisamment loin de la fissure pour que l'effet de celle-ci ne soit plus perçu tout en restant proche du coin considéré. Ce faisant, la condition de raccord $\boldsymbol{\xi}^{ext}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\xi}^r(\boldsymbol{X})$ lorsque $\frac{\ell}{L} \ll \|\boldsymbol{X}\| \ll 1$ permet d'expliciter $\boldsymbol{\xi}^r$. En effet, étant donné que $\boldsymbol{\xi}^{ext}$ décrit la solution suffisamment loin de la fissure, ce champ vectoriel correspond en fait à la solution du problème dans la situation saine. En même temps, puisque $\|\boldsymbol{x}\| \ll L$, il s'agit du problème classique d'un coin dont on sait que la solution en contrainte se décompose, localement, sur deux modes singuliers. Cela se traduit, au niveau du champ de déplacements, par une décomposition de

la forme (2.36) à un déplacement de corps rigide près. En d'autres terme, on sait, qu'il existe des réels γ_1 et γ_2 vérifiant $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < 1$, ainsi que des fonctions $\boldsymbol{h}_1(\theta)$, $\boldsymbol{h}_2(\theta)$ tels que :

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\xi}^{ext} + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{0}) + k_1\left(\frac{r}{L}\right)^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1(\theta) + k_2\left(\frac{r}{L}\right)^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2(\theta) + \boldsymbol{g}(r,\theta) \\ \text{avec } \boldsymbol{g}(r,\theta) \to 0 \text{ pour } r = \|x\| \ll L\end{gathered} \tag{3.15}$$

où, par rapport à (2.33) et (2.36), ρ et α ont été remplacées par les variables naturelles intervenant dans le contexte considéré qui sont les coordonnées polaires r et θ. De plus, k_1 et k_2 ont été renormalisés et γ_i correspond à une mesure du degré de singularité égale à $\delta_i + 1$. Par conséquent, sous réserve de vérifier l'hypothèse de séparation des échelles, à savoir qu'il existe au moins deux ordres de grandeurs entre ℓ et L, on peut immédiatement conclure que :

$$\boldsymbol{\xi}^{r} + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{0}) + k_1\left(\frac{r}{L}\right)^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1(\theta) + k_2\left(\frac{r}{L}\right)^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2(\theta)$$

Ce qui revient à exiger de la part de la solution intérieure le raccord suivant :

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\xi}^{int}(\boldsymbol{Y}) + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{0}) + k_1\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_1}\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1(\theta) + k_2\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_2}\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2(\theta) \\ \text{pour } 1 \ll \rho = \|\boldsymbol{Y}\| \ll \frac{L}{\ell}\end{gathered} \tag{3.16}$$

Le fait de demander $1 \ll \rho$ mais aussi $\rho \ll \frac{L}{\ell}$ est essentiel. En effet, alors que la première inégalité demande de fixer des conditions de raccord "loin" du défaut, la deuxième permet de s'assurer de ne pas les fixer arbitrairement loin, de sorte à ce que, dans la relation (3.16), le terme en $k_1\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_1}\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1(\theta)$ ne se fasse pas dominer par la décomposition sur le mode 2. Ce dernier est en effet moins singulier ($\gamma_1 < \gamma_2$) mais prévaut par conséquent à l'infini. Cette double condition sur ρ traduit bien toute la physique sous-jacente, le raccord pour $\boldsymbol{\xi}^{int}$ se fait au niveau du premier infiniment grand rencontré qui correspond à la jauge de l'échelle mésoscopique. Se contenter de demander un raccord à l'infini par la seule condition $1 \ll \rho$ amènerait sans doute à commettre l'erreur de demander à la solution intérieure de se raccorder directement à l'échelle macro où l'usage de $\boldsymbol{\xi}^{r}$ n'est plus justifié. Une attention toute particulière doit cependant être portée aux différentes hypothèses qui ont été mises en place. Comme on l'a compris, la méthode des développements asymptotiques raccordés suppose qu'il est possible d'exhiber une zone suffisamment proche du coin pour que la solution saine puisse être décrite convenablement à l'aide des deux modes de singularité mais en même temps suffisamment éloignée pour que les effets de la fissure y prenant naissance ne se fassent plus ressentir. Si l'existence d'une telle zone est acquise pour des fissures de taille infinitésimale, cela n'est pas forcément le cas lorsque ℓ est certes petit, mais fini. Ainsi, une discussion doit impérativement être menée sur la faisabilité de la méthode en fonction de l'extension de la fissure envisagée. Ce questionnement sera l'objet des Sections 3.3 et 3.4 de ce chapitre. Pour le moment, contentons-nous de faire l'hypothèse de l'existence d'une telle zone pour une taille ℓ donnée et voyons comment, dans le cadre d'un milieu précontraint, cette méthode permet de calculer efficacement l'objet taux de restitution de l'énergie (3.12).

Avec les considérations précédentes, le problème pour le champ intérieur peut s'écrire :

- $\boldsymbol{\sigma}^{int}(\boldsymbol{Y}) = (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}_p + \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{int}(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{\ell}\mathbb{C} : \nabla_Y^S \left(\boldsymbol{\xi}^{int}(\boldsymbol{Y}) + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p(\boldsymbol{Y})\right)$
- $\mathrm{div}_Y\, \boldsymbol{\sigma}^{int}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{\sigma}^{int}(\boldsymbol{Y}).\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ sur les bords du coin appartenant à Ω^{int}
- $[\![\boldsymbol{\xi}^{int} + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p]\!].\boldsymbol{n}^+ = 0$ sur les lèvres de la fissure

  $\boldsymbol{n}^+[\![\boldsymbol{\sigma}^{int}]\!].\boldsymbol{n}^+ = 0$

  $\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\sigma}^{int}.\boldsymbol{n} = -\lambda\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n}$

Conditions de racord :

- $\boldsymbol{\xi}^{int}(\boldsymbol{Y}) + (1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{0}) + k_1\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_1}\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1(\theta) + k_2\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_2}\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2(\theta)$

  pour $1 \ll \rho \ll \frac{L}{\epsilon}$

(3.17)

où div_Y et ∇_Y^S sont les opérateurs de divergence et de gradient symétrisé par rapport à la variable d'espace normalisée $\boldsymbol{Y}$. D'ailleurs, il est à noter que le problème ne fait intervenir que cette variable d'espace. Ainsi, le domaine Ω^{int} à considérer est celui décrit par $\boldsymbol{Y}$. Il s'agit d'un domaine "dilaté" où la longueur de la fissure a été normalisée et vaut par conséquent 1 (cf. Figure 3.6). A ce stade, il est possible de faire appel à un théorème de superposition par rapport à la condition de raccord. Pour un champ vectoriel $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{Y})$ donné, on introduit un champ tensoriel du second ordre $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ définit par :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{U}) = \mathbb{C} : \nabla_Y^S \boldsymbol{U}(\boldsymbol{Y}) \tag{3.18}$$

Trois sous-problèmes apparaissent alors naturellement dont les deux premiers sont définis comme suit :

- $\mathrm{div}_Y\, \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{V}}^j) = \boldsymbol{0}$
- $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{V}}^j).\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ sur les bords du coin appartenant à Ω^{int}
- $[\![\tilde{\boldsymbol{V}}^j]\!].\boldsymbol{n}^+ = 0$ sur les lèvres de la fissure

  $\boldsymbol{n}^+[\![\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{V}}^j)]\!].\boldsymbol{n}^+ = 0$

  $\boldsymbol{\tau}.\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{V}}^j).\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{\tau}.\left(\mathbb{C} : \nabla_Y^S \rho^{\gamma_j}\boldsymbol{h}_j(\theta)\right).\boldsymbol{n}$
- $\tilde{\boldsymbol{V}}^j(\boldsymbol{Y}) = 0$ pour $1 \ll \rho \ll \frac{L}{\epsilon}$

(3.19)

pour $j \in \{1,2\}$. Il est important de noter que la loi de comportement proposée (3.18) ne fait pas intervenir le facteur $\frac{1}{\ell}$ ce qui pose la question de la cohérence d'unité entre $\tilde{\boldsymbol{V}}^j$ et $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^j$. Il s'agit cependant des objets qui sont naturellement manipulés lorsqu'on s'intéresse à un problème intérieur usant d'une variable adimensionnée. A partir de $\tilde{\boldsymbol{V}}^j$, deux nouveaux champs sont introduits :

$$\boldsymbol{V}^j = \rho^{\gamma_j}\boldsymbol{h}_j(\theta) + \tilde{\boldsymbol{V}}^j \tag{3.20}$$

L'avantage des champs $\tilde{\boldsymbol{V}}^j$ par rapport aux $\boldsymbol{V}^j$ réside dans leurs conditions aux limites à l'infini qui ne dépendent pas de la variable d'espace. Les champs $\tilde{\boldsymbol{V}}^j$ ne sont que des champs intermédiaires permettant de définir proprement les $\boldsymbol{V}^j$ qui sont, comme nous le verrons plus tard, les quantités réellement intéressantes. Le troisième et dernier problème consiste à de

définir un champ $\boldsymbol{W}$ solution de :

$$\begin{array}{lll}
\bullet\ \mathrm{div}_Y\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{W}) & = & \boldsymbol{0} \\
\bullet\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{W}).\boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{0} \quad \text{sur les bords du coin appartenant à } \Omega^{int} \\
\bullet\ [\![\boldsymbol{W}]\!].\boldsymbol{n}^+ & = & 0 \quad \text{sur les lèvres de la fissure} \\
\quad \boldsymbol{n}^+[\![\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{W})]\!].\boldsymbol{n}^+ & = & 0 \\
\quad \boldsymbol{\tau}.\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{W}).\boldsymbol{n} & = & -\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n} \\
\bullet\ \boldsymbol{W}(\boldsymbol{Y}) & = & 0 \quad \text{pour } 1 \ll \rho \ll \dfrac{L}{\epsilon}
\end{array} \tag{3.21}$$

Grâce à ces différentes définitions, le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}^{int}+(1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p$ se met simplement sous la forme :

$$\boldsymbol{\xi}^{int}(\boldsymbol{Y})+(1-\lambda)\boldsymbol{\xi}_p(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{0}) + k_1\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_1}\boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{Y}) + k_2\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_2}\boldsymbol{V}^2(\boldsymbol{Y}) + \ell\lambda\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Y}) \tag{3.22}$$

Le très grand avantage que possèdent les différents champs introduits $\boldsymbol{V}^1$, $\boldsymbol{V}^2$ et $\boldsymbol{W}$ est qu'ils ne dépendent ni de la géométrie de la structure ni de la dimension de la fissure. En effet, comme cela a été déjà souligné, l'utilisation de la variable adimensionnée $\boldsymbol{Y}$ revient à se placer dans un domaine "dilaté" où la taille de la fissure a été normalisée et est par conséquent d'extension unitaire (cf. Figure 3.6). Seuls comptent pour les problèmes définissant ces quantités l'angle d'ouvert du coin considéré et l'orientation de la fissure si celle-ci est choisie comme ayant une géométrie de segment. Par conséquent, la dépendance de $\boldsymbol{\xi}^{int}$

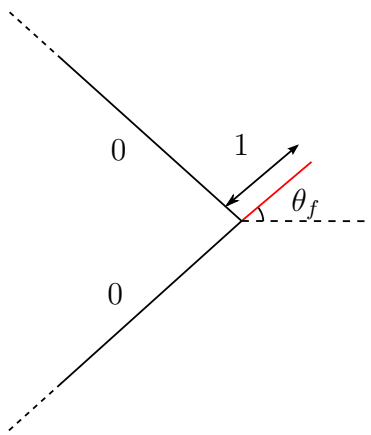

FIGURE 3.6 – Zoom sur la zone intérieure où grâce à l'usage de la variable d'espace adimensionnée $\boldsymbol{Y}$, la fissure est de taille unitaire

par rapport à la taille de la fissure ℓ a été complètement explicitée dans la formule (3.22). De plus, le niveau de chargement λ considéré n'intervient pas dans la définition des problèmes correspondant aux quantités $\boldsymbol{V}^1$, $\boldsymbol{V}^2$ et $\boldsymbol{W}$. Par ailleurs, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte k_1 et k_2 se faisant sur la structure saine, il est aisé de constater que leur dépendance vis à vis du niveau de chargement est en $(1-\lambda)$. Par conséquent, il est possible de calculer deux quantités $\tilde{k}_1$ et $\tilde{k}_2$ telles que :

$$k_1 = (1-\lambda)\tilde{k}_1 \qquad , \qquad k_2 = (1-\lambda)\tilde{k}_2 \tag{3.23}$$

ce qui finit de détailler dans sa totalité la dépendance de $\boldsymbol{\xi}^{int}$ vis à vis de λ.

3.2.3 Retour sur le calcul de la variation d'énergie potentielle

La formule (3.22) permet d'expliciter, au niveau d'un voisinage de la fissure, le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}^f$. Bien qu'étant limitée à la zone intérieure, cette expression tire son intérêt du travail précédant ayant conduit à mettre la variation d'énergie potentielle sous la forme (3.12). Dans cette formule, il a en effet été montré que le terme d'intégration sur Γ ne dépend pas du choix du contour. Par conséquent, il est possible de choisir ce dernier de sorte à se placer arbitrairement proche de la fissure $\mathcal{F}$ et donc de manière à se placer dans la zone intérieure. Ainsi, l'usage de (3.22) pour calculer la variation d'énergie potentielle est justifié. En effectuant un changement de variable pour se placer sur un contour Γ_Y du domaine intérieur "dilaté" et donc paramétré par la variable $\boldsymbol{Y}$, la quantité longueur élémentaire $dS_y = \ell dS$ est introduite. Tous calculs faits, la variation d'énergie potentielle se met sous la forme :

$$
\begin{aligned}
&E_p^0 - E_p^f = \\
&\left(\frac{\ell}{L}\right)^{2\gamma_1} (1-\lambda)^2 \frac{\tilde{k}_1^2}{2} \int_{\Gamma_Y} \left(\boldsymbol{V}^1.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1\right).\boldsymbol{n} - \rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{V}^1\right).\boldsymbol{n}\right) dS_Y \\
&+\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_1+\gamma_2} (1-\lambda)^2 \frac{\tilde{k}_1\tilde{k}_2}{2}\Bigg(\int_{\Gamma_Y} \left(\boldsymbol{V}^1.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2\right).\boldsymbol{n} - \rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{V}^1\right).\boldsymbol{n}\right) dS_Y \\
&\qquad\qquad + \int_{\Gamma_Y} \left(\boldsymbol{V}^1.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2\right).\boldsymbol{n} - \rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{V}^1\right).\boldsymbol{n}\right) dS_Y\Bigg) \\
&+\left(\frac{\ell}{L}\right)^{2\gamma_2} (1-\lambda)^2 \frac{\tilde{k}_2^2}{2} \int_{\Gamma_Y} \left(\boldsymbol{V}^2.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2\right).\boldsymbol{n} - \rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{V}^2\right).\boldsymbol{n}\right) dS_Y \\
&+\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_1+1} (1-\lambda)\lambda\frac{L\tilde{k}_1}{2}\left(\int_{\Gamma_Y} \left(\boldsymbol{W}.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1\right).\boldsymbol{n} - \rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{W}\right).\boldsymbol{n}\right) dS_Y - \int_{\mathcal{F}_Y} [\![\boldsymbol{V}^1]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n} dS_Y\right) \\
&+\left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma_2+1} (1-\lambda)\lambda\frac{L\tilde{k}_2}{2}\left(\int_{\Gamma_Y} \left(\boldsymbol{W}.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2\right).\boldsymbol{n} - \rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2.\hat{\boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{W}\right).\boldsymbol{n}\right) dS_Y - \int_{\mathcal{F}_Y^+} [\![\boldsymbol{V}^2]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n} dS_Y\right) \\
&-\left(\frac{\ell}{L}\right)^{2} \lambda^2 L^2 \int_{\mathcal{F}_Y^+} [\![\boldsymbol{W}]\!].\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n} dS_Y
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

où les différents termes ont été ordonnés par puissances croissantes de $\frac{\ell}{L}$ puisque, dans le cas d'un coin à angle droit dans un matériau isotrope, $0.5 < \gamma_1 = 0.54 < \gamma_2 = 0.909 < 1$ (cf. (2.26)). Cela permet donc de dresser l'ordonnancement suivant :

$$0 < 2\gamma_1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2\gamma_2 < \gamma_1 + 1 < \gamma_2 + 1 < 2 \tag{3.25}$$

Il est d'ailleurs à noter que les trois ou quatre derniers termes sont à considérer avec précautions puisque l'écriture (3.16) est un fait un développement limité conduisant à l'introduction d'un petit o, lequel devrait se retrouver au niveau de (3.24). Cette dernière formule devant être cependant utilisée pour de faibles longueurs ℓ, le problème ne se pose pas vraiment et le terme dominant sera le premier, voire le troisième si $\tilde{k}_1$ est égal à zéro. Il est d'ailleurs possible de simplifier encore cette l'expression (3.24) en montrant que les termes d'intégration sur Γ_Y faisant intervenir le champ $\boldsymbol{W}$ sont en fait nuls. Cette formule a l'avantage de détailler complètement la dépendance de la variation d'énergie potentielle par rapport au niveau de chargement λ et à la longueur de la fissure envisagée ℓ. En effet, cette propriété se déduit du fait que, par construction des différents champs, les intégrales ne dépendent que de la géométrie de la structure saine, de la forme de la fissure (et non de son extension) ainsi que de son orientation. La puissance de cette forme de la variation d'énergie potentielle réside donc dans le faible nombre de simulations à effectuer pour la quantité d'information qu'elle renferme.

Toutefois, comme précisé précédemment, cette expression ne peut être valable que pour des petites longueurs de fissures. D'ailleurs, la notion même de petite taille reste dans ce

cadre entièrement à préciser. Il est néanmoins possible de se convaincre de la puissance de la formule en utilisant cette dernière pour des longueurs de fissures ℓ infinitésimales. En effet, la question du bien-fondé des développements asymptotiques raccordés se pose pour des tailles finies de fissure, ce qui n'est pas le cas pour des longueurs infinitésimales. Par conséquent, malgré la nécessité de précisions quant au domaine de validité de (3.24), il est d'ores et déjà possible d'utiliser cette formule pour ℓ arbitrairement petit.

3.2.4 Formule d'Irwin anisotrope

Un cas de figure intéressant pouvant être traité est de la propagation d'une fissure préexistante dans problème en déformations planes avec un milieu anisotrope. Il s'agit d'expliciter le taux de variation d'énergie potentielle G lorsqu'une fissure de type Griffith se propage d'une longueur infinitésimale ℓ en restant droite. Le cadre mis en place précédemment peut parfaitement s'appliquer au cas d'une propagation de fissure en considérant un coin infiniment aplati. Dans ce cas, il a été vu que $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, et ce, quel que soit le matériau (cf. Chapitre 2, Sous-Section 2.3.2). Enfin, dans un soucis de simplicité, le calcul sera mené en l'absence de précontrainte. Par conséquent, seuls les trois premiers termes subsistent dans l'expression (3.24).

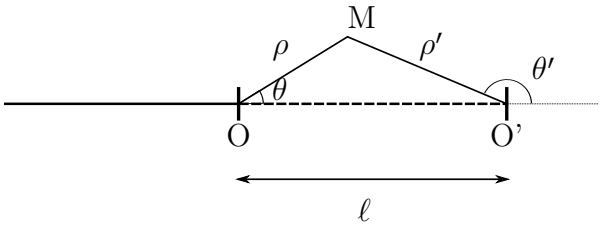

FIGURE 3.7 – Propagation d'une fissure de Griffith dans son axe

Soit P le polynôme caractéristique du milieu considéré et soient μ_1, μ_2 les deux racines complexes avec une partie imaginaire positive (strictement) de P, supposées distinctes (le cas $\mu_1 = \mu_2$ se déduisant par continuité). Les expressions permettant d'obtenir le développement asymptotique de la fonction d'Airy ϕ correspondant à cette situation sont données en (2.73). En particulier, il avait été montré que ϕ était définie à deux constantes complexes près β_1 et β_2. Ces deux dernières devaient satisfaire deux équations réelles indépendantes $Im(\beta_1+\beta_2) = 0$ ainsi que $Im(\beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2) = 0$. Par conséquent, le $\mathbb{R}$ espace vectoriel solution est de dimension 2 et peut être engendré par deux solutions non liées. Il est immédiat de vérifier que $\tilde{\beta}_1 = -\frac{1}{\mu_1-\mu_2}, \tilde{\beta}_2 = \frac{1}{\mu_1-\mu_2}$ et $\hat{\beta}_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, \hat{\beta}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}$ sont deux couples solutions. Par conséquent, il existe deux réels k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_1-\mu_2} \\ \frac{1}{\mu_1-\mu_2} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2} \\ \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Ce choix particulier de famille génératrice permet de préciser les deux fonctions $\boldsymbol{h}_1(\theta)$ et $\boldsymbol{h}_2(\theta)$ utilisées dans le formalisme précédant (3.15).

Pour une propagation de fissure, les sous problèmes pour $\boldsymbol{V}^j$ deviennent triviaux. En effet, il est immédiat que la solution du $j^{ième}$ problème est $\boldsymbol{V}^j = \rho'^{\gamma_j}\boldsymbol{h}_j(\theta')$, avec ρ' et θ' définis comme sur la Figure 3.7. En effet, un tel champ de déplacement $\boldsymbol{V}^j$ vérifie bien toutes les conditions aux limites en contraintes mais aussi $\boldsymbol{V}^j(\boldsymbol{Y}) = \rho^{\gamma_j}\boldsymbol{h}_j(\theta)$ pour $1 \ll \rho \ll \frac{L}{\ell}$. Les conditions pour le contour Γ sont que celui ci doit prendre appui sur les bords du coin, qui est ici la fissure avant propagation, et également entourer le défaut à savoir la portion de

fissure créée lors de la propagation. On peut donc prendre pour Γ le contour noté $\mathcal{F}$ constitué des lèvres supérieure et inférieure de la portion de fissure propagée entre O et O'.

Avec ces différentes considérations et avec les formules de représentation données au Chapitre 2, Section 2.3, il est possible de traiter les différents termes de (3.24). Les détails des calcules sont donnés en Annexe A.4 et le résultat obtenu se met sous la forme compacte :

$$G = \frac{9\pi}{4}\Bigg[\quad k_1^2 A_{11} Im\left(\mu_1+\mu_2\right) - k_2^2 A_{22} Im\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right) + k_1 k_2\left(A_{11} Im\left(\mu_1\mu_2\right) - A_{22} Im\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right)\right)\Bigg] \tag{3.27}$$

qui correspond bien à l'expression obtenue par Azhdari et Nemat-Nasser [1996] grâce à une autre méthode. Il est cependant à noter que la formulation dérivée grâce aux développements asymptotiques raccordés est plus puissante car elle englobe le cas d'une propagation non rectiligne de la fissure. La formule d'Irwin du cas isotrope en déformations planes se déduit immédiatement de (3.27) puisqu'il suffit de se placer dans le cas $\mu_1 = \mu_2 = i$ ainsi que $A_{11} = A_{22} = \frac{1-\nu^2}{E}$.

Puisqu'il a été possible de retrouver la formule d'Irwin, l'usage de (3.24) a été validé lorsqu'il s'agit de traiter de fissures de taille infinitésimale. Par conséquent, il est d'ores et déjà possible de l'utiliser afin de caractériser un équivalent lorsque ℓ tend vers 0 de l'objet G_{inc} pour un problème de naissance de fissure à partir d'un coin ouvert. En effet, grâce à la l'ordonnancement proposé des termes de (3.24), il vient :

$$G_{inc} \underset{\ell\to 0}{\sim} A\ell^{2\gamma_1-1} \tag{3.28}$$

où A est un certain coefficient de proportionnalité dépendant du chargement et de la forme de la fissure envisagée. Or pour un coin à angle droit, il a été vu que $\gamma_1 = 0.54 > 0.5$ et il en serait de même pour n'importe quel coin ouvert. Ainsi, cette analyse montre que :

$$G_{inc} \underset{\ell\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3.29}$$

Ce résultat connu vient donc d'être étendu au cas d'un milieu précontraint. Il est d'une importance capitale et sera fondamental par la suite. A ce niveau, il permet déjà d'affirmer que le critère énergétique ne peut pas être rempli pour une taille de fissure infinitésimale. Le phénomène de nucléation met donc forcément en jeu des longueurs finies pour lesquelles il est justement nécessaire de se prononcer sur la validité de (3.24). La démarche permettant d'aboutir à la formule proposée repose sur l'hypothèse d'existence d'une zone, dite intermédiaire, étant proche du coin source de singularité et où coïncident simultanément la solution du problème sain, la décomposition sur les solutions singulières ainsi que la solution du problème avec fissure. C'est précisément cette hypothèse qu'il est nécessaire d'expliciter et, en particulier, de tester pour une fissure ayant une taille de l'ordre de la longueur interne (3.1). Cependant, traiter cette problématique de manière rigoureuse n'est pas chose aisée puisqu'il s'agit de disposer, de manière analytique, à la fois de la solution saine et de la solution fissurée. Ainsi, nous proposons dans un premier temps de s'intéresser au même problème mais dans un contexte d'équations elliptiques plus simples qui est celui de la thermique.

3.3 Existence de la zone de raccord en thermique

Dans le but de traiter de manière analytique un problème de thermique similaire à celui envisagé en mécanique, c'est-à-dire celui d'une structure bidimensionnelle saine puis fissurée,

il est utile d'introduire un formalisme basé sur des transformations conformes. Ainsi, dans un premier temps, les différents outils nécessaire à appréhender un tel problème seront établis. Une fois ce travail effectué, il sera possible de s'intéresser à la problématique de l'existence de la fameuse zone de raccord.

3.3.1 Potentiel complexe

Soit T la température d'un système Ω en équilibre thermique. Comme T est harmonique ($\Delta T = 0$ sur Ω), il est possible d'exhiber une certaine fonction Q vérifiant :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.30}$$

En effet, une condition nécessaire pour qu'une telle fonction Q puisse exister est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3.31}$$

ce qui automatiquement vérifié si $\Delta T = 0$. Il est possible de montrer que cette condition est en fait également suffisante. Soit alors f, une fonction de la variable complexe $z = x + iy$, définie comme suit :

$$f(z) = T(x, y) + iQ(x, y) \tag{3.32}$$

Par définition, f vérifie $T = Re(f)$. De plus, en notant $dz = dx + idy$, il vient :

$$f(z + dz) = f(z) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} - i\frac{\partial T}{\partial y}\right)(dx + idy) \tag{3.33}$$

Ainsi, f est dérivable au sens complexe, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une fonction holomorphe sur Ω. De plus, le jeu d'écriture ci-dessus permet d'obtenir :

$$f'(z) = \frac{\partial T}{\partial x} - i\frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{et donc} \quad \overline{f'(z)} \equiv \mathbf{grad}T \tag{3.34}$$

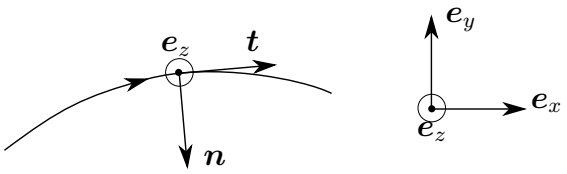

FIGURE 3.8 – Convention permettant de préciser la notion de normale à un arc orienté

Soit désormais $\widehat{AB}$ un arc orienté du plan défini comme sur la Figure 3.8. On oriente $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$ comme $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ où $\boldsymbol{e}_z$ est la direction hors plan et on note s l'abscisse curviligne. Avec ce choix, il vient :

$$\boldsymbol{t} = \frac{\partial x}{\partial s}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial s}\boldsymbol{e}_y \quad \text{et donc} \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{e}_z = \frac{\partial y}{\partial s}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial x}{\partial s}\boldsymbol{e}_y \tag{3.35}$$

Par conséquent, une propriété remarquable est :

$$\mathbf{grad}T.\boldsymbol{n} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dQ}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \widehat{AB}, \quad \int_A^B \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = Q(B) - Q(A) \tag{3.36}$$

C'est cette relation qui est à la base de la méthode de transformations conformes dans un contexte de thermique.

3.3.2 Problème d'un isolant thermique à forme carrée

Pour capturer au mieux les différents éléments relatifs au problème bidimensionnel équivalent à l'excavation d'un tunnel, nous proposons de nous intéresser au problème d'un isolant carré de côté unitaire plongé dans un milieu infini. Les conditions aux limites sont telles que décrites Figure 3.9. Pour mettre en œuvre plus facilement la démarche de transformation

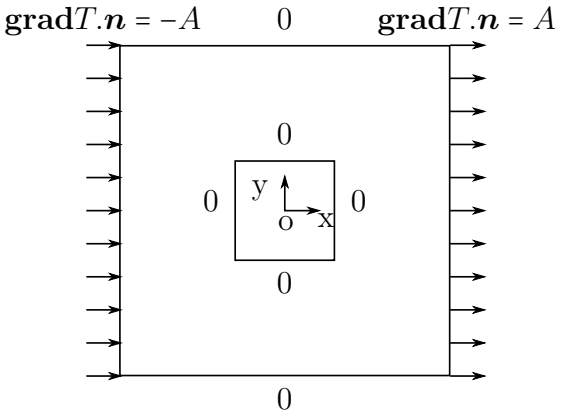

FIGURE 3.9 – Isolant thermique de forme carré, de côté unitaire, plongé dans un milieu infini. Les flèches représentent ici le flux thermique et $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure

conforme, il est utile de travailler par superposition avec la solution d'un problème de flux constant égal à $\mathbf{grad}T = -A\boldsymbol{e}_x$ et donc où $T = -Ax$. Un problème auxiliaire est ainsi défini avec des conditions aux limites de flux nul à l'infini (Figure 3.10).

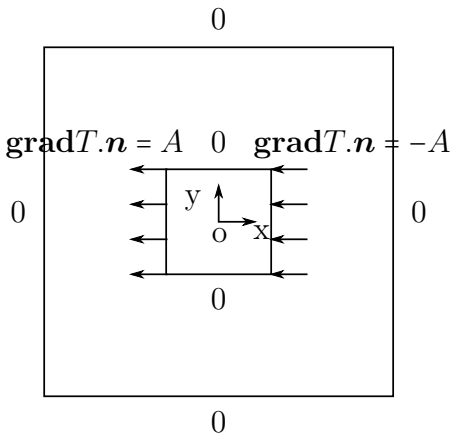

FIGURE 3.10 – Problème de thermique auxiliaire. Les flèches représentent ici le flux thermique et $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure

Soit a le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et $b(x, y)$ un point appartenant au contour du carré intérieur. En orientant ce dernier dans le sens trigonométrique, on obtient les relations simples suivantes :

$$\begin{array}{lll}
x = \frac{1}{2}, \quad y \geq 0 & : & \int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = -Ay \\
y = \frac{1}{2} & : & \int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = -A\dfrac{1}{2} = -Ay \\
x = -\frac{1}{2} & : & \int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = -A\dfrac{1}{2} + A\left(\dfrac{1}{2} - y\right) = -Ay \\
y = -\frac{1}{2} & : & \int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = A\dfrac{1}{2} = -Ay \\
x = \frac{1}{2}, \quad y \leq 0 & : & \int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = A\dfrac{1}{2} - A\left(\dfrac{1}{2} + y\right) = -Ay
\end{array} \tag{3.37}$$

Ainsi, pour tout point b, d'affixe z, appartenant au contour du carré on dispose de la relation très simple :

$$\int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = -Ay = -A\frac{z-\overline{z}}{2i} \tag{3.38}$$

Notons de plus que, Q étant défini à une constante près, il est possible de supposer $Q(a) = 0$. Un tel choix implique :

$$Im(f(z)) = Q(z) = \int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = -A\frac{z-\overline{z}}{2i} \tag{3.39}$$

3.3.3 Transformations conformes

Grâce à la formule de Schwarz-Christoffel, il est possible d'exhiber la dérivée, au sens complexe, de la transformation conforme permettant de transformer l'extérieur du cercle unité en l'extérieur d'un carré centré à l'origine. En notant ω cette transformation, il vient :

$$\omega'(Z) = \gamma_0\left(1+\frac{1}{Z^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.40}$$

où γ_0 est un coefficient de proportionnalité permettant de contrôler la dimension du carré image du cercle unité. Trouver les primitives de cette application n'est pas facile puisqu'elles font appelle à des intégrales elliptiques qui ne sont connues que numériquement. Dans la pratique, un développement en série de Laurent de la fonction $Z \longmapsto \left(1+\frac{1}{Z^4}\right)^{\frac{1}{2}}$ est réalisé, développement qui est ensuite intégré terme à terme pour obtenir un développement en série de Laurent de ω.

$$\begin{aligned}\omega'(Z) &= \gamma_0\left(1+\frac{1}{Z^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \gamma_0\left(1+\frac{1}{2Z^4}-\frac{1}{8Z^8}+O\left(\frac{1}{Z^{12}}\right)\right)\\ \omega(Z) &= \gamma_0\left(Z-\frac{1}{6Z^3}+\frac{1}{56Z^7}+O\left(\frac{1}{Z^{11}}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.41}$$

Des opérations numériques avec un développement en série tronquée pour ω donnent les résultats présentés Figure 3.11. où γ_0 a été choisi pour obtenir un carré de côté unitaire.

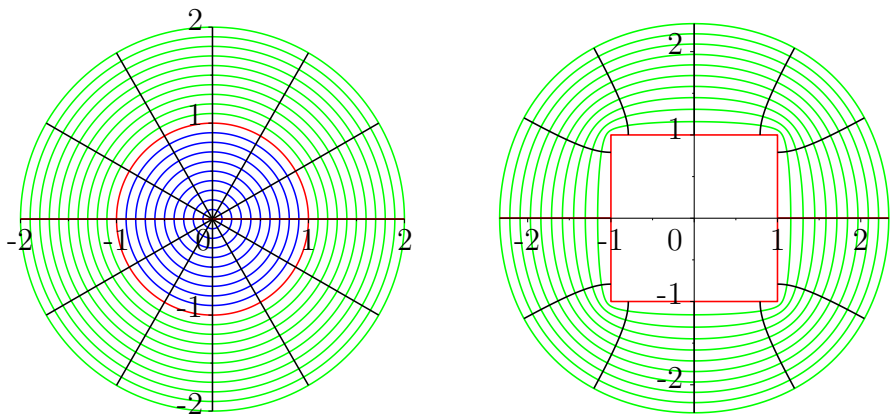

FIGURE 3.11 – Plan antécédent et image par une transformation de type Schwarz-Christoffel avec un développement en série de Laurent à l'ordre 100

Si f, une fonction holomorphe d'argument z, est le potentiel permettant de décrire la solution du problème superposé, c'est-à-dire un trou carré chargé thermiquement avec des "bords libres" à l'infini, on notera alors F la fonction holomorphe d'argument Z correspondant au potentiel du domaine antécédent, à savoir l'extérieur du cercle unité. Exactement

comme dans le cadre des écoulements potentiels de fluides parfaits étudiés sous l'angle des transformations conformes, les deux potentiels f et F doivent être égaux en deux points images reliés entre eux par la transformation conforme. En d'autres termes, on dispose de la relation suivante :

$$\begin{cases} z = \omega(Z) \\ f(z) = F(Z) \end{cases} \tag{3.42}$$

Le développement en série de ω permet d'affirmer que $z \sim \gamma_0 Z$ lorsque $|z| \to \infty$. De plus, comme le chargement à l'infini du problème traité est nul, il est immédiat que f doit être holomorphe à l'infini. D'après la relation précédente, il découle que F doit elle aussi être holomorphe à l'infini. A partir de la relation (3.39) et en se rappelant que $Q = Im(f)$, il vient que pour tout z appartenant à la frontière du carré :

$$-A\frac{\omega(Z) - \overline{\omega(Z)}}{2i} = -A\frac{z - \overline{z}}{2i} = Q(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i} = \frac{F(Z) - \overline{F(Z)}}{2i} \tag{3.43}$$

où Z est l'antécédent de z qui, par conséquent, appartient au cercle unité. Cette relation devant être vérifiée pour tout point z sur la frontière du carré, c'est-à-dire pour tout point Z appartenant au cercle unité. Une manière plus agréable d'écrire cette égalité est :

$$\forall |\zeta| > 1, \quad -A\frac{\omega(Z) - \overline{\omega(Z)}}{Z - \zeta} = \frac{F(Z) - \overline{F(Z)}}{Z - \zeta} \tag{3.44}$$

Puisque cette relation est valable pour tout point Z appartenant au cercle unité $C(0,1)$, il est possible d'intégrer la relation précédente :

$$\forall\, |\zeta| > 1, \qquad \int_{C(0,1)} \frac{F(\sigma) - \overline{F(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = -A \int_{C(0,1)} \frac{\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma \tag{3.45}$$

Cette écriture est l'équivalent thermique de l'équation de Fredholm et tire toute son utilité puisqu'elle permet de faire appelle aux formules de Cauchy. F étant holomorphe à l'infini , ces dernières donnent :

$$\int_{C(0,1)} \frac{F(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = 2i\pi \left(F(\infty) - F(\zeta)\right) \qquad , \qquad \int_{C(0,1)} \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0 \tag{3.46}$$

Dans le problème considéré, la température est définie à une constante près. Par conséquent, il est possible de choisir $F(\infty) = 0$ ce qui revient à se donner un choix particulier de la constante en question. Toutefois, les formules de Cauchy ne peuvent pas, en l'état, s'appliquer au calcul du membre de droite dans l'équation (3.45). En effet, la transformation conforme ω n'est pas une fonction holomorphe à l'infini. Néanmoins, le début de développement en série montre qu'elle se comporte à l'infini comme $\gamma_0 Z$. Par conséquent, $\omega(Z) - \gamma_0 Z$ est holomorphe à l'infini et les formules de Cauchy permettent de déduire que :

$$\int_{C(0,1)} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \int_{C(0,1)} \frac{\omega(\sigma) - \sigma}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_{C(0,1)} \frac{\sigma}{\sigma - \zeta} d\sigma = 2i\pi \left(0 - \omega(\zeta) + \zeta\right) + 0 \tag{3.47}$$

car la fonction de la variable complexe $Z \mapsto \frac{Z}{Z-\zeta}$ n'a pas de pôle à l'intérieur de $C(0,1)$. De la même façon, on montre que :

$$\int_{C(0,1)} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \int_{C(0,1)} \frac{\overline{\omega(\sigma) - \sigma}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \int_{C(0,1)} \frac{1}{\sigma(\sigma - \zeta)} d\sigma = 2i\pi \left(0 - \frac{1}{\zeta}\right) \tag{3.48}$$

puisque $\overline{\sigma} = \sigma^{-1}$ pour σ appartient à $C(0,1)$. Finalement, il vient que pour tout point Z du plan complexe privé du disque unité :

$$\forall |Z| \geq 1, \quad F(Z) = -A\left(\omega(Z) - \gamma_0\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\right) \tag{3.49}$$

F ainsi définie est bien une fonction holomorphe sur l'extérieur du cercle unité, y compris à l'infini. Il n'est cependant pas inutile, pour se rassurer et pour être plus précis sur le choix de la détermination du logarithme complexe qu'au Chapitre 2, de vérifier que le potentiel exhibé fournit bien la solution du problème auxiliaire. En effet, il a été montré que le conjugué de f' permettait d'accéder à la représentation complexe du gradient de température (3.34). Hors, une opération différentielle sur (3.42) donne :

$$dF(Z) = f'(z)d\omega(Z) \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \frac{F'(Z)}{\omega'(Z)} = -A\left(1 - \frac{1 - \frac{1}{Z^2}}{\left(1 + \frac{1}{Z^4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{3.50}$$

Cette expression permet d'ores et déjà de vérifier que les conditions aux limites à l'infini sont bien réalisées. En effet, $f'(z) \longrightarrow 0$ lorsque $|Z| \to \infty$, ce qui permet de conclure que le flux à l'infini est bien nul puisque $z \sim \gamma_0 Z$ pour $|Z| \to \infty$. Tout l'enjeu pour vérifier les conditions aux limites au niveau de la frontière avec le carré est de trouver la bonne détermination de la racine carré qui apparait au dénominateur. En effet, il a été vu dans le chapitre précédent qu'une façon assez agréable de réécrire le dénominateur est $\left(1 + \frac{1}{Z^4}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{Z^4}\right)}$. Cependant, le logarithme complexe log étant multi-valué, le choix de la branche logarithmique devient déterminant en raison du facteur $\frac{1}{2}$. Comme souvent, la bonne méthode consiste à se baser sur des arguments de continuités. En effet, pour un point Z appartenant à un cercle de rayon $R > 1$ il vient :

$$Z = Re^{i\theta} \quad : \quad \left|\frac{1}{Z^4}\right| < 1 \quad \text{et par conséquent} \quad Re\left(1 + \frac{1}{Z^4}\right) > 0 \tag{3.51}$$

En particulier, l'axe de réels négatifs n'est jamais croisé et on ne change pas de valuation. Il est donc légitime de prendre la détermination principale du logarithme. En d'autres termes, on peut écrire :

$$\left(1 + \frac{1}{Z^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left|1 + \frac{1}{Z^4}\right|}e^{i\frac{1}{2}\arg\left(1+\frac{1}{Z^4}\right)} \tag{3.52}$$

à condition de choisir $\arg\left(1 + \frac{1}{Z^4}\right)$ à valeur dans $]-\pi, \pi[$. Par continuité, la formule ci-dessus

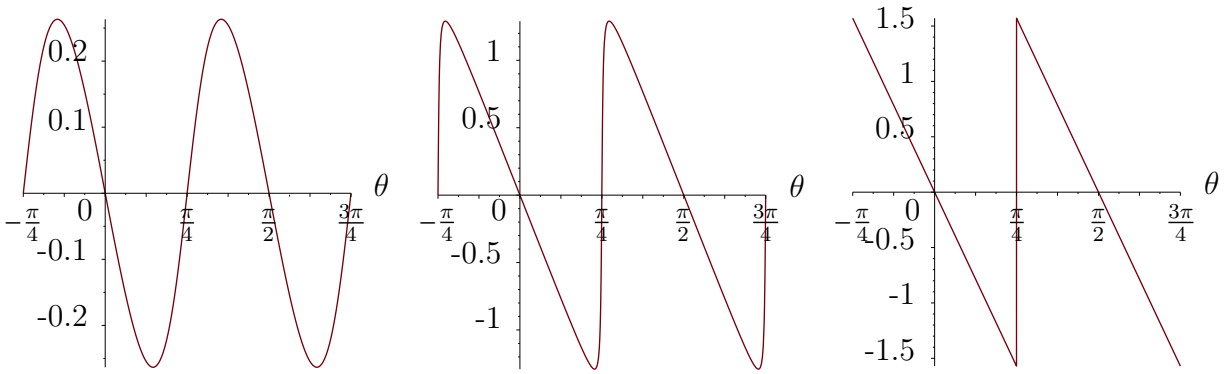

FIGURE 3.12 – Argument de $1 + \frac{1}{Z^4}$ en fonction de $\theta = \arg(Z)$ pour $|Z| = 1.4$, 1.01 et 1

doit rester vraie pour un point d'affixe Z se trouvant sur le cercle unité (cf. Figure 3.12). Pour un tel Z, il existe θ tel que $Z = e^{i\theta}$, d'où :

$$1 + \frac{1}{Z^4} = 1 + e^{-4i\theta} = e^{-2i\theta} 2\cos 2\theta$$

$$\left(1 + \frac{1}{(e^{i\theta})^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{2\cos 2\theta} \quad e^{-i\theta} & \text{si} \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\quad \text{ie} \quad z \in \left]1-i, 1+i\right[\\ \sqrt{|2\cos 2\theta|} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} & \text{si} \quad \theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\quad \text{ie} \quad z \in \left]1+i, -1+i\right[\\ \sqrt{2\cos 2\theta} \quad e^{i(\pi-\theta)} & \text{si} \quad \theta \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\quad \text{ie} \quad z \in \left]-1+i, -1-i\right[\\ \sqrt{|2\cos 2\theta|} e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)} & \text{si} \quad \theta \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[\quad \text{ie} \quad z \in \left]-1-i, 1-i\right[\end{cases} \tag{3.53}$$

De plus, toujours pour Z appartenant au cercle unité et donc de la forme $e^{i\theta}$:

$$Z = e^{i\theta}, \quad 1 - \frac{1}{Z^2} = 1 - e^{-2i\theta} = e^{-i\theta} 2i\sin\theta \tag{3.54}$$

Ce qui conduit au résultat suivant pour tout point d'affixe z appartenant au bord de l'isolant carré :

$$\exists \theta \in \left]-\pi, \pi\right[\text{ tel que } z = \omega(e^{i\theta})$$

$$f'(z) = \begin{cases} -A\left(1 - \dfrac{2i\sin\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\right) & \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\\ -A\left(1 - \dfrac{2i\sin\theta}{i\sqrt{|2\cos 2\theta|}}\right) = -A\left(1 - \dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{|2\cos 2\theta|}}\right) & \theta \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\\ -A\left(1 + \dfrac{2i\sin\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\right) & \theta \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\\ -A\left(1 + \dfrac{2i\sin\theta}{i\sqrt{|2\cos 2\theta|}}\right) = -A\left(1 + \dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{|2\cos 2\theta|}}\right) & \theta \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[\end{cases} \tag{3.55}$$

Une fois cette formule établie et en se rappelant que le gradient thermique se calcule à partir du conjugué de $f'(z)$ selon la relation (3.34), c'est-à-dire $\frac{\partial T}{\partial x} = Re(f')$ et $\frac{\partial T}{\partial y} = -Im(f')$, on obtient les résultats souhaités au niveau des conditions aux limites. Par l'intermédiaire de la transformation conforme ω, le problème auxiliaire a donc été entièrement résolu.

3.3.4 Les solutions du problème sain et du problème avec défaut

Le potentiel qui nous intéressait n'était non pas f, mais f sommé avec le potentiel associé à une température linéaire $T = Ax = Re(Az) = Re(A\omega(Z))$. Par conséquent, pour le problème d'un isolant carré plongé dans un milieu infini avec des conditions de flux thermique imposé sur la frontière comme sur la Figure 3.9, le potentiel f est défini comme suit :

$$\forall |Z| \geq 1, \begin{cases} z = \omega(Z) \\ f(z) = F(Z) = A\gamma_0\left(Z + \dfrac{1}{Z}\right) \end{cases} \tag{3.56}$$

Le même travail peut être mené dans le cas d'un isolant carré présentant des fissures partant à 45 ° depuis ses quatre coins et plongé dans le même milieu infini avec les mêmes conditions aux limites. En étant à la tête de la transformation conforme ω_f, permettant de transformer le cercle en ce carré étoilé, les relations qui découleront seront exactement les mêmes que celles proposées dans le cas sain. En effet, le fait que, dans le problème auxiliaire,

$\int_a^b \mathbf{grad}T.\boldsymbol{n}dl = -Ay$ sera conservé. La transformation conforme est une fois encore exhibée grâce à la formule proposée par Schwarz-Christoffel. La transformation est à nouveau connue au travers de l'expression de sa dérivée :

$$\omega_f'(Z) = \gamma_f \frac{1 + \dfrac{1}{Z^4}}{\left(1 + 2\cos 4\epsilon \dfrac{1}{Z^4} + \dfrac{1}{Z^8}\right)^{\frac{1}{4}}} \tag{3.57}$$

où γ_f est un facteur de dilatation. Grâce à un couplage avec la variable ϵ, ces deux paramètres permettent de contrôler la taille de la fissure ainsi que la dimension du carré. Il est intéressant de noter que pour $\epsilon = 0$ on trouve bien $\omega_f' = \omega$.

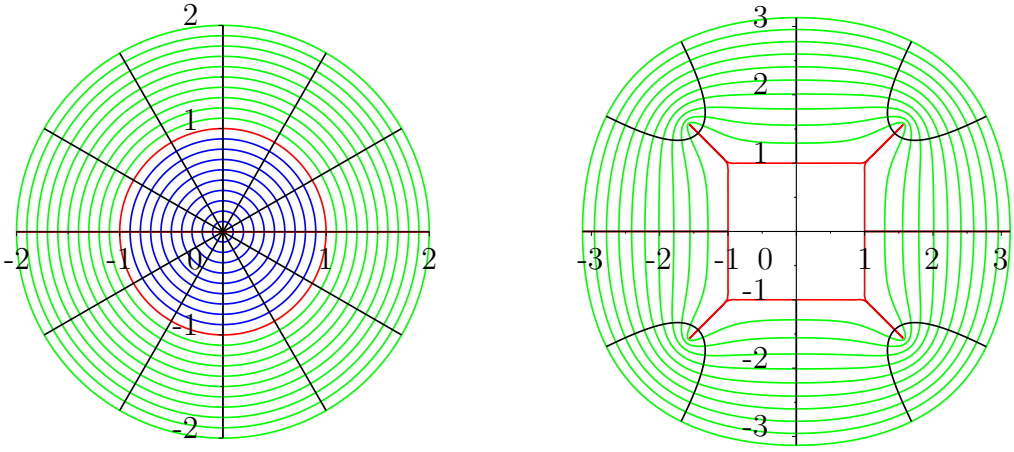

FIGURE 3.13 – Plan antécédent et image par la transformation ω_f avec un développement en série de Laurent à l'ordre 200 et $\epsilon = 0.5$

Un développement limité de type série montre que ω_f n'est pas holomorphe à l'infini, mais que, comme précédemment, $Z \mapsto \omega_f(Z) - \gamma_f Z$ l'est. Le potentiel complexe du problème d'un isolant de type carré étoilé est obtenu par le biais de la relation suivante :

$$\forall |Z| \geq 1, \begin{cases} z = \omega_f(Z) \\ f_f(z) = F_f(Z) = A\gamma_f \left(Z + \dfrac{1}{Z}\right) \end{cases} \tag{3.58}$$

Comme $T(x,y) = Re(f(z)) = Re(F(Z))$, il immédiat de constater que les courbes isothermes sont les courbes telles que $Re(F) = c^{ste}$. Cette propriété agréable rend la réalisation d'un graphique de courbes isothermes très aisée et conduit à la Figure 3.14.

3.3.5 Existence de la zone de raccord

La méthode des développements asymptotiques raccordés proposée par D. Leguillon repose sur l'existence d'une zone de raccord où, tout d'abord, la solution du milieu en présence du défaut se confond avec la solution du milieu sain. La deuxième hypothèse forte caractérisant cette zone est qu'il est possible de substituer à la solution saine son développement asymptotique sur les solutions singulières. Ces hypothèses, qui impliquent la double séparation des échelles évoquée précédemment, sont nécessairement restrictives sur le domaine de validité du développement asymptotique du taux de restitution de l'énergie. En effet, il a été montré que, pour une taille de fissure infiniment petite, il était possible de faire cohabiter les trois solutions : avec défaut, sans défaut et asymptotique. C'est d'ailleurs la raison

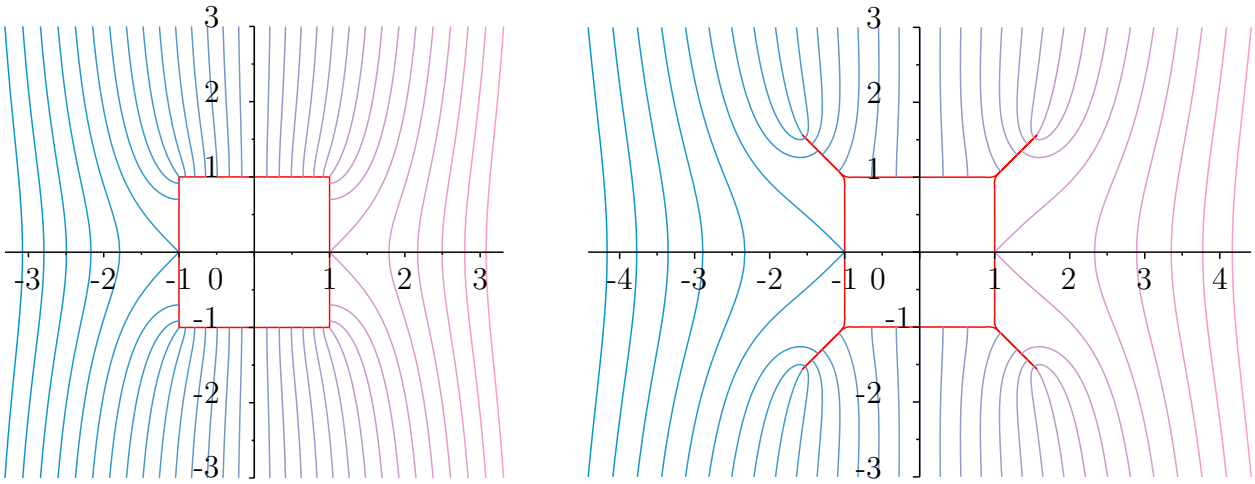

FIGURE 3.14 – Courbes isothermes pour le problème sain et avec défauts

pour laquelle la formule d'Irwin a pu être retrouvée. Cependant, la longueur de nucléation peut certes être petite vis à vis des grandeurs caractéristiques, mais reste finie. Elle n'a pas, par conséquent, le statut d'un infiniment petit. En étant à la tête des solutions exactes et analytiques avec et sans fissure dans un problème physiquement différent mais mathématiquement similaire, puisque reposant également sur des équations elliptiques, il est possible de se prononcer sur l'existence d'une telle zone.

Profils antécédents

La difficulté technique majeure pour pouvoir comparer les différents profils de température est que les potentiels ne sont disponibles, dans un cas comme dans l'autre, qu'au travers d'une transformation conforme. En d'autres termes, il est nécessaire, pour trouver la valeur que prend la température en un point d'affixe z, de connaître le point d'affixe Z, antécédent de z par la transformation conforme, c'est-à-dire tel que $z = \omega(Z)$ ou $\omega_f(Z)$. Bien évidement, pour un même point du domaine antécédent, $\omega(Z) \neq \omega_f(Z)$ ce qui veut dire qu'un point d'affixe z n'admet pas le même antécédent s'il est vu comme appartenant au milieu sain ou fissuré. A priori, il est donc nécessaire d'inverser les transformations, ce qui est loin d'être une opération triviale. La meilleure approche consiste à inverser localement la transformation conforme en utilisant la relation $dz = \omega'(Z)dZ$ et en travaillant, à par exemple, pour le cas où $Z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Grâce à cette démarche, les nombres complexes Z ayant pour image des points z appartenant à la demi-droite prenant origine dans le coin supérieur droit du carré et étant inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontal, sont connus, autant pour la transformation ω que ω_f (cf. Figure 3.15). Les profils de température le long de cette demi-droite sont obtenus directement puisque $T = Re(f(z)) = Re(F(Z))$. Ils sont présentés Figure 3.16.

Solutions singulières

Puisqu'il est désormais possible d'accéder aux solutions saine et fissurée, l'étape suivante consiste à expliciter les solutions singulières correspondant au comportement asymptotique de la solution sans défaut au voisinage du coin supérieur droit. Cette démarche bien connue en mécanique et rappelée dans le cas d'un angle droit au Chapitre 2 est totalement transposable au cadre d'un problème thermique. Un inconvénient de la méthode proposée est qu'elle ne fournit pas les facteurs d'intensité de contrainte. La prochaine approche se fera alors en deux temps : tout d'abord le calcul classique extrêmement simple et puissant permettant d'exhiber

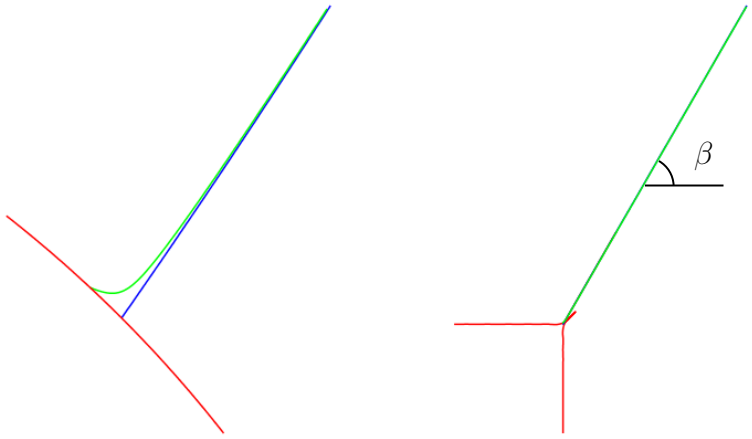

FIGURE 3.15 – Courbes dans le plan antécédent dont l'image par les transformations conformes est la droite partant du coin supérieur droit et étant incliné d'un angle $\beta = \frac{\pi}{3}$ par rapport à l'horizontale pour des fissures de taille 0.01 (bleu : sans défaut, vert : avec défaut)

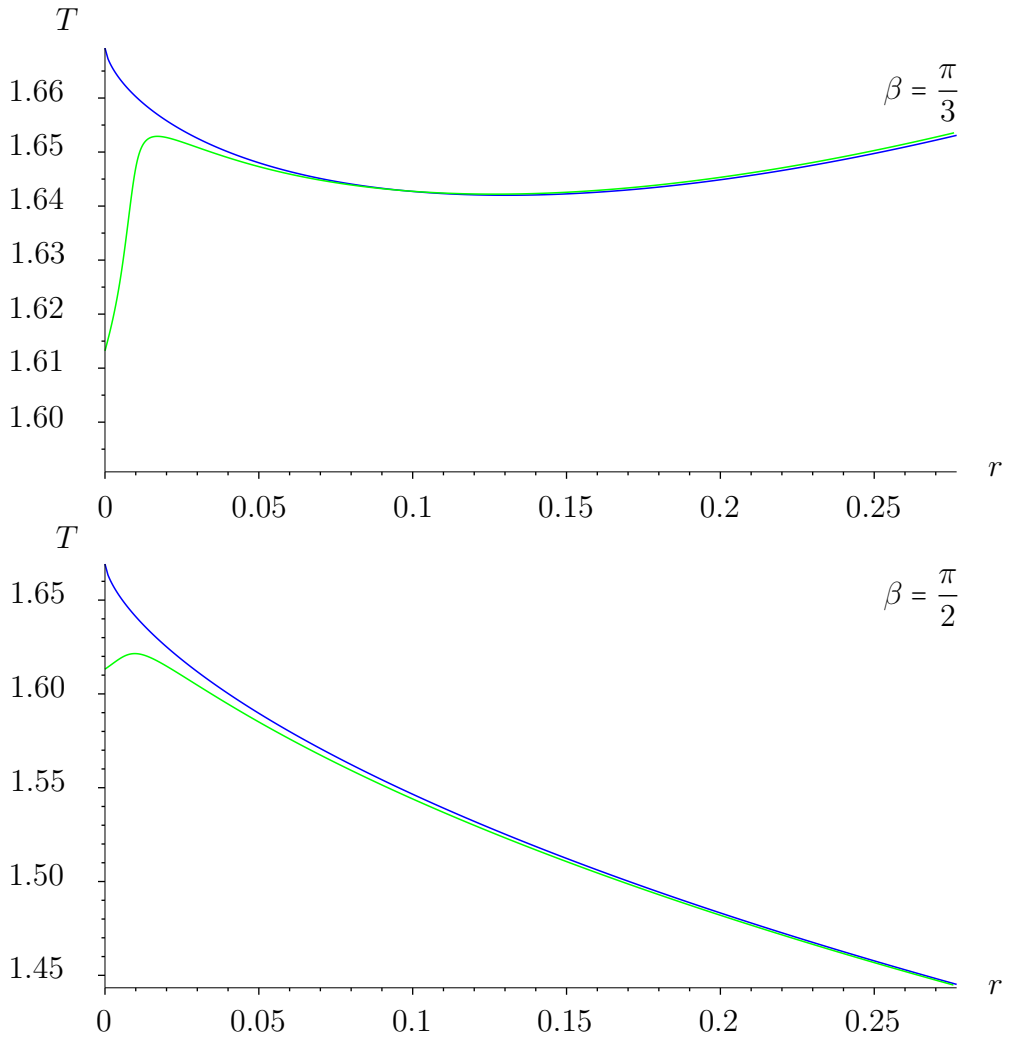

FIGURE 3.16 – Profils de température le long des demi droites d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ en fonction de r, distance au coin, pour des fissures de taille 0.01 et un chargement A=1 $K.m^{-1}$ (bleu : sans défaut, vert : avec défaut)

les singularités au voisinage du coin, suivi du calcul direct du développement asymptotique à partir de la solution exacte obtenue précédemment. Ce deuxième calcul a un intérêt double,

tout d'abord obtenir les FIC, mais aussi se convaincre que la méthode classique donne bien les termes apparaissant dans le développement asymptotique.

La première approche consiste à chercher des solutions en variables séparables de l'équation d'équilibre thermique $\Delta T = 0$. En d'autres termes, T est cherché sous la forme $T = r^{\delta} g(\theta)$. On montre de manière triviale que les solutions à variables séparables de cette équation sont toutes de la forme $T(r,\theta) = r^{\delta}\left(A\cos\delta\theta + B\sin\delta\theta\right)$ où A et B sont deux constantes réelles. Le gradient thermique se met alors sous la forme :

$$\mathbf{grad}T = r^{\delta-1}\left(\left(A\cos\delta\theta + B\sin\delta\theta\right)\boldsymbol{e}_r + \left(-A\sin\delta\theta + B\cos\delta\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta\right) \tag{3.59}$$

Les conditions aux limites sont que le flux doit être nul au niveau de l'isolant, c'est-à-dire au travers des surfaces $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = \pi$:

$$\begin{array}{llllll} \bullet & \theta = \pi & : & \mathbf{grad}T.\boldsymbol{e}_\theta = 0 & \Rightarrow -A\sin\delta\pi + B\cos\delta\pi & = & 0 \\ \bullet & \theta = -\dfrac{\pi}{2} & : & \mathbf{grad}T.\boldsymbol{e}_\theta = 0 & \Rightarrow \quad A\sin\delta\dfrac{\pi}{2} + B\cos\delta\dfrac{\pi}{2} & = & 0 \end{array} \tag{3.60}$$

Le déterminant de ce système à deux équations et deux inconnues homogène doit être nul pour que des solutions non triviales puissent exister. Cela revient à demander $\sin\frac{3\delta\pi}{2} = 0$. Pour satisfaire cette condition, il est nécessaire que δ soit de la forme $\delta = \frac{2}{3}k$ où k est un entier relatif. Le fait d'avoir des solutions singulières est acceptable tant que l'énergie reste finie. La densité volumique thermique est proportionnelle à $\left|\mathbf{grad}T\right|^2$ qui est lui même en $r^{2\delta-2}$. Par conséquent, pour satisfaire la condition énergétique, il est nécessaire d'avoir $\delta > 0$ ce qui implique que l'entier k doit en fait être un entier naturel. Enfin, au delà de la valeur de δ, les conditions aux limites locales imposent une relation entre A et B. En prenant cette dernière en compte, une solution élémentaire à variables séparées et vérifiant les équations locales est obtenue :

$$T(r,\theta) = r^{\frac{2}{3}k}\frac{A}{cos\frac{2}{3}k\pi}\cos\left(\frac{2}{3}k\left(\theta-\pi\right)\right) \tag{3.61}$$

Sous réserve d'un théorème de complétude, la température solution du problème considéré se met sous la forme d'une série de fonction :

$$T = T_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k r^{\frac{2}{3}k}\cos\left(\frac{2}{3}k\left(\theta-\pi\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} Re\left(A_k e^{-\frac{2}{3}k\pi} z^{\frac{2}{3}k}\right) \tag{3.62}$$

où les constantes A_k ont été renormalisées par rapport à la formule (3.61) donnant accès à une solution élémentaire et sont des nombres réels pouvant être négatifs. Cette démarche très simple ne permet pas de donner les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte qui correspondent ici aux différents coefficients A_k. Ces derniers sont primordiaux néanmoins si on veut comparer le développement asymptotique avec les solutions saine et avec fissure.

Facteur d'intensité de contrainte

La deuxième méthode, plus technique, permet de se rassurer sur le fait que, au voisinage du coin, la solution du problème sain se décompose effectivement sur les solutions en variables séparables tel que le prévoit la formule (3.62). Le point de départ de la démarche est la relation permettant d'obtenir la température dans le cas sain :

$$z = \omega(Z) \quad , \quad T = Re(f(z)) = Re(F(Z)) = Re\left(\alpha\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\right) \tag{3.63}$$

Être au voisinage du coin supérieur droit signifie qu'il est possible de trouver dz, de module très petit devant la dimension du carré, tel que :

$$z = 1 + i + dz = \omega\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + dz \tag{3.64}$$

Par conséquent, pour tout dz, il est possible d'exhiber un certain dZ assurant l'égalité :

$$z = 1 + i + dz = \alpha\omega\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + dZ\right) \tag{3.65}$$

S'il était possible de connaître ce dZ en fonction de dz, un accès direct à la température à proximité du coin serait ainsi fourni, et ce, grâce à la relation :

$$T(x, +dx, y + dy) = A\gamma_0 Re\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + dZ + \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}} + dZ}\right) \tag{3.66}$$

Il apparait donc nécessaire de formuler cette relation. La première étape consiste à réaliser un développement asymptotique de ω au voisinage de $e^{i\frac{\pi}{4}}$. Les différents étapes des calculs seront données en Annexe A.5 et seulement les principaux résultats seront présentés ici.

$$\omega\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + dZ\right) = \gamma_0\left(\omega\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{4}{3}e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{3}{2}} - e^{-i\frac{3\pi}{8}}dZ^{\frac{5}{2}} + \frac{55}{56}e^{-i\frac{5\pi}{8}}dZ^{\frac{7}{2}}\right) + O\left(dZ^{\frac{9}{2}}\right) \tag{3.67}$$

En se basant sur la forme (3.65) que prend z au voisinage du coin considéré, le développement limité (3.67) permet de déduire :

$$dz = \frac{4}{3}\gamma_0 e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{3}{2}} - \gamma_0 e^{-i\frac{3\pi}{8}}dZ^{\frac{5}{2}} + \frac{55}{56}\gamma_0 e^{-i\frac{5\pi}{8}}dZ^{\frac{7}{2}} + O\left(dZ^{\frac{9}{2}}\right) \tag{3.68}$$

qui donne donc dz en fonction de dZ. Cette relation doit désormais être inversée puisque, pour obtenir le développement final de la température, c'est l'expression de dZ en fonction de dz qui est requise. Pour se faire, on pose $u^2 = dZ$ et on cherche un développement en série de u comme une fonction de dz. Celui-ci se met sous la forme :

$$u = C_1 dz^{q_1} + C_2 dz^{q_2} + C_3 dz^{q_3} + o\left(dz^{q_3}\right) \quad \text{avec } q_1 < q_2 < q_3 \text{ et } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \tag{3.69}$$

En injectant cette relation dans (3.68) et en identifiant les deux développements limités il est possible de déterminer la valeur des constantes C_k et q_k. Tous calculs faits on trouve :

$$u = dZ^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{24}}dz^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{16\gamma_0}e^{-i\frac{\pi}{8}}dz + \frac{1}{224}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{5}{3}} e^{-i\frac{7\pi}{24}}dz^{\frac{5}{3}} + o(dz^{\frac{5}{3}}) \tag{3.70}$$

Pour revenir à l'expression de dZ, il suffit d'élever la dernière relation au carré, ce qui donne :

$$dZ = \left(\frac{3}{4\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^{\frac{4}{3}} e^{-i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{14}\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}dz^{2} + o(dz^2) \tag{3.71}$$

Pour conclure, un développement asymptotique de $F\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + dZ\right)$ doit être effectué :

$$F\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + dZ\right) = A\gamma_0\left(\sqrt{2} + \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)dZ + e^{-i\frac{3\pi}{4}}dZ^2 - e^{-i\pi}dZ^3 + O\left(dZ^4\right)\right) \tag{3.72}$$

Enfin, la relation $f(1+i+dz) = F(e^{i\frac{\pi}{4}} + dZ)$ couplée avec (3.71) permet d'obtenir le résultat souhaité, à savoir un développement asymptotique de f au voisinage du coin supérieur droit :

$$f(1+i+dz) = A\left(\gamma_0\sqrt{2} + \gamma_0\sqrt{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}dz^{\frac{2}{3}} + \frac{\gamma_0\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}}dz^{\frac{4}{3}} + \frac{\gamma_0}{7\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2} dz^2\right) + o(dz^2) \tag{3.73}$$

Ce résultat est parfaitement en accord avec la forme générale explicitée dans l'équation (3.62) lorsque la série est tronquée au troisième ordre. La différence d'argument des exponentielles

vient du fait que dans cette écriture, les A_k peuvent être des réels négatifs, c'est-à-dire des nombres complexes d'argument $-\pi$. Pour le chargement thermique considéré, il vient :

$$A_0 = A\alpha\sqrt{2} \quad , \quad A_1 = -A\alpha\sqrt{2}\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \quad , \quad A_2 = -A\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^{\frac{4}{3}} \quad , \quad A_3 = A\frac{\alpha}{7\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4\alpha}\right)^{2} \tag{3.74}$$

Les équivalents des facteurs d'intensité de contraintes en thermique ayant été identifiés, il est désormais possible de comparer les trois profils obtenus : les solutions exactes du domaine sain et du domaine fissuré ainsi que le développement asymptotique de la solution saine à l'ordre 1, 2 et 3. Notons que ne développer la température que sur les solutions singulières revient à ne prendre que l'ordre 1 dans le développement précédent. Les résultats sont donnés sur la Figure 3.17 pour deux valeurs de β, qui correspond à l'angle que fait la demi droite support du tracé de température avec l'horizontal (cf. Figure 3.15). La taille du défaut utilisée est de 0.01 unité à comparer avec un carré de côté unitaire.

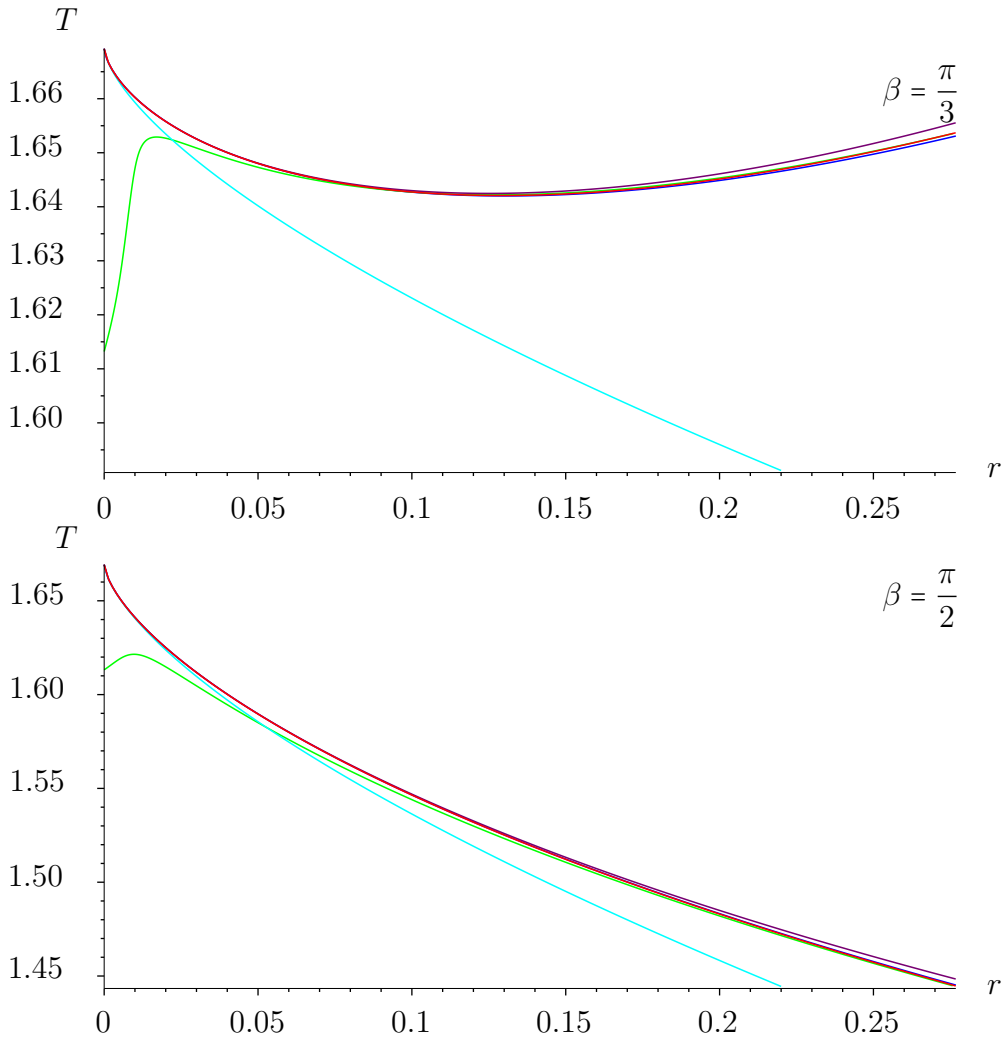

FIGURE 3.17 – Profils de température le long de la demi droite d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ en fonction de r la distance au coin pour des fissures de taille 0.01 et un chargement A=1 $K.m^{-1}$ (bleu : sans défaut, vert : avec défaut, cyan : DA au premier ordre, violet : DA au second ordre, rouge : DA au troisième ordre)

Grâce à cette figure, il apparait clairement que pour des tailles de défaut raisonnable (deux ordres de grandeurs plus petit que le côté du carré) et en ne considérant que les solutions singulières pour le développement asymptotique, il n'est pas possible d'obtenir la

fameuse zone de raccord. En d'autres termes, il n'existe pas de zone de l'espace suffisamment éloignée du défaut pour que la solution saine et la solution sans défaut coexistent, tout en restant suffisamment proche du coin pour que la solution saine puisse être approximée par son développement asymptotique comprenant uniquement les modes singuliers. Néanmoins, un développement poussé à l'ordre 2 seulement permet aisément de définir une telle zone. Ce résultat pourrait être encourageant puisqu'il existe en mécanique deux modes de singularité régissant le champ de contrainte au voisinage d'un coin. Dans tous les cas, cette étude ne permet pas de conclure quant à l'existence d'une zone de raccord mais elle met en évidence qu'il n'est pas possible pour toutes les tailles de fissure ℓ de mettre en œuvre la méthode des développements asymptotiques raccordés. Une étude mécanique propre du problème bidimensionnel considéré est donc nécessaire.

3.4 Existence de la zone de raccord en mécanique

Dans le but de se prononcer sur l'existence de la zone de raccord, une approche sur un problème thermique équivalent a été menée. Les résultats fournis par celle-ci ont été très instructifs puisqu'ils mettent en lumière un résultat intuitif qui est que la méthode des développements asymptotiques raccordés ne peut pas être mise en œuvre pour des longueurs de fissure nucléée arbitrairement grande. Il est donc nécessaire d'être plus précis pour savoir si dans le problème bidimensionnel équivalent, en considérant que les dimensions du coin source de singularité sont caractérisées par la longueur de la passe L_p et le rayon du tunnel R, il est possible de définir une zone de raccord pour une longueur de nucléation dont l'ordre de grandeur est caractérisé par (3.1). Ainsi, une étude mécanique rigoureuse du problème en question, ou tout du moins d'un problème équivalent, est incontournable. Malheureusement, exhiber de manière analytique les solutions de problèmes présentant des coins anguleux s'avère être une opération très délicate, et ce, même par le biais de méthodes basées sur les transformations conformes. En effet, le lien existant entre le chargement et les potentiels complexes associés à la solution (voir les formules de représentation données en (2.7)), c'est-à-dire l'équation de Fredholm, est bien moins trivial que son équivalent thermique (3.45). Dans le contexte précédant, il était effectivement possible, uniquement à partir de la forme générale des transformations conformes ω et ω_f, de déduire formellement les champs de température solutions des problèmes considérés. Une connaissance plus profonde des transformations conformes considérées est toutefois indispensable si l'objectif est de résoudre un problème de mécanique. Cependant, nous l'avons vu, ces dernières ne sont connues que par l'expression de leurs dérivées et il n'est pas possible de connaître explicitement une de leurs primitives puisque celles-ci font appel à des intégrales elliptiques. Par conséquent, la solution que nous proposons de mettre en œuvre consiste à chercher la solution exacte non pas du problème associé à une structure possédant un angle droit, mais d'un problème à géométrie approchée où le coin aura été remplacé par une courbe régulière présentant un petit rayon de courbure. L'étude réalisée en début du second chapitre (voir Chapitre 2, Section 2.1) s'avère encore une fois forte utile. En effet, il a été montré que la solution du problème approché converge bien vers la solution du problème à géométrie idéalisée à mesure que le rayon de courbure diminue. Par conséquent, il faut et il suffit de considérer des géométries approchées avec de très faibles rayons de courbures au niveau des coins. L'intérêt de cette idée est bien évidemment que, pour une certaine famille de géométries approchées, il est possible de résoudre entièrement le problème de mécanique proposé et ainsi de disposer de sa solution de manière analytique.

Dans un souci de clarté, nous proposons de ne pas prendre en compte la présence d'une précontrainte puisque celle-ci n'ajoute rien au sujet débattu. Il a été présenté, dans le cadre de problèmes de thermiques, deux transformations conformes permettant d'envoyer l'exté-

rieur du cercle unité sur l'extérieur d'un trou carré en présence ou non de fissures. Ces deux transformations seront à nouveau utilisées pour traiter, cette fois-ci, un problème de mécanique. Enfin, puisque, pour les tailles de fissure envisagées, seule une zone à proximité uniquement du coin présente un intérêt, il est possible de traiter un problème équivalent où la partie du tunnel présentant du soutènement n'est pas prise en compte. Le carré considéré aura un côté de taille c normé unitaire.

3.4.1 Approximation de la géométrie d'un trou carré non endommagé

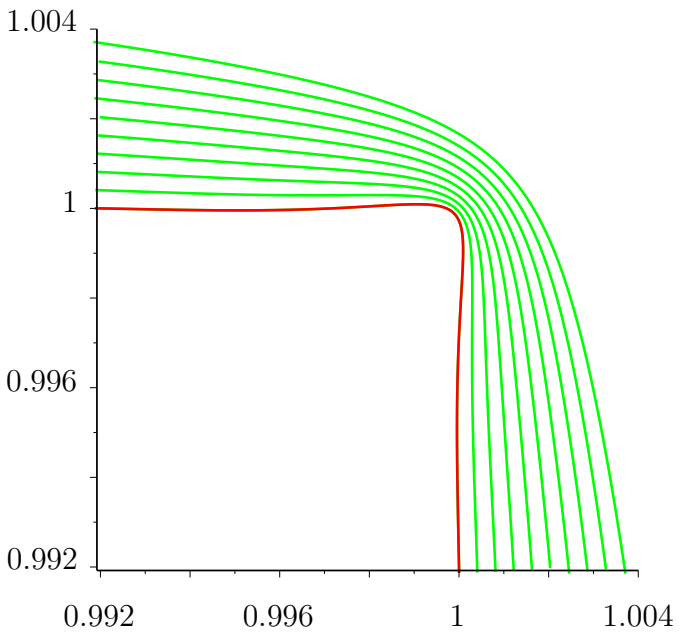

FIGURE 3.18 – Représentation, pour une troncature à l'ordre $n = 150$ de ω, de l'approximation de l'angle droit par une courbe régulière. Le rayon de courbure de cette dernière au niveau du coin approché est de l'ordre de $0.0005c$ où c est la dimension du côté du carré considéré qui ici a été normalisée à 1

La transformation conforme ω permettant d'obtenir le plan complexe privé du trou carré comme étant l'image de l'extérieur du cercle unité a été introduite par le biais de sa dérivée (3.40). Bien que sa primitive ne soit pas connue explicitement, il est possible d'en obtenir un développement en série de Laurent tronqué à un ordre arbitrairement grand. C'est cette approximation qui sera utilisée en lieu et place de ω. En effet, une telle transformation permet d'obtenir une géométrie approchée comme présenté sur la Figure 3.11. Par conséquent, la transformation conforme considérée est de la forme :

$$\omega(\zeta) = c_0\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \ldots + \frac{c_n}{\zeta^n} \tag{3.75}$$

où les coefficients c_i sont tous des nombres réels et où c_0 et c_n sont tous deux non nuls. Par exemple, pour un coefficient γ_0 égal à 1, un développement limité à l'ordre 27 donnerait :

$$\omega(\zeta) = \zeta - \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{56\zeta^7} - \frac{1}{176\zeta^{11}} + \frac{1}{384\zeta^{151}} - \frac{7}{4864\zeta^{19}} + \frac{21}{23552\zeta^{23}} - \frac{11}{18432\zeta^{27}} + O\left(\frac{1}{\zeta^{30}}\right) \tag{3.76}$$

En poussant l'ordre de troncature jusqu'à 150 on obtient une géométrie présentant un coin approché présenté Figure 3.18. Comme annoncé, le cercle unité est effectivement transformé

en une géométrie de carré où les coins anguleux ont été remplacé par des courbes régulières. Ces dernières présentent un rayon de courbure relié à l'ordre de troncature n considéré et tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Dans l'exemple choisi, avec un ordre de troncature $n = 150$, le coin obtenu présente un rayon de courbure étant égal à un millième de la taille du côté du carré considéré ce qui est au moins 10 fois plus petit que la taille des fissures qui seront considérées. Tous les calculs qui seront présentés par la suite seront associés à cet ordre de troncature.

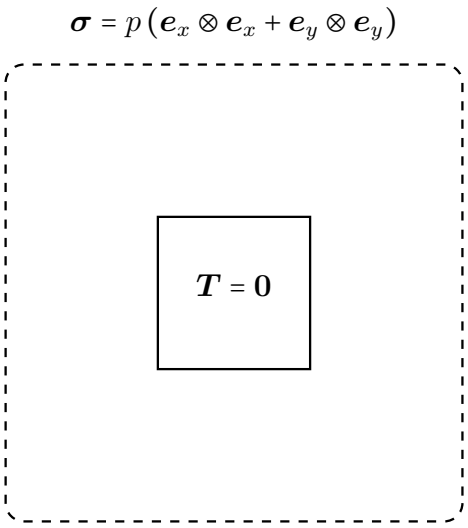

FIGURE 3.19 – Trou carré libre de contrainte dans un milieu chargé à l'infini avec une traction isotrope

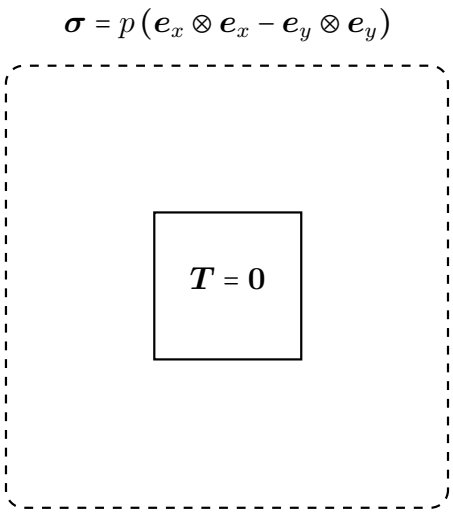

FIGURE 3.20 – Trou carré libre de contrainte dans un milieu chargé à l'infini avec un champ déviateur de contraintes

Afin de pouvoir travailler avec ce genre de transformation conforme, il est possible de se reporter à nouveau à l'ouvrage de référence sur le sujet MUSKHELISHVILI [1953]. Il est en effet possible d'y trouver les solutions générales pour des problèmes dont le domaine a pour antécédent, par une transformation conforme de type polynôme ou fraction rationnelle, l'intérieur du cercle unité. Le cas présenté correspond à la situation où le domaine antécédent est l'extérieur du cercle unité. Par conséquent, quelques modifications très simples doivent être apportées à la procédure initiale. La mise en oeuvre adaptée est fournie en Annexe A.6. Ce faisant, il est donc désormais possible de disposer de manière analytique de solutions à deux problèmes différents présentés Figures 3.19 et 3.20. Attention toutefois au fait qu'à l'infini, uniquement la projection dans le plan d'étude du tenseur des contraintes est prescrite, la composante hors plan dépendant du type de problème bidimensionnel considéré. Ces deux problèmes ont en effet l'avantage de solliciter respectivement de manière symétrique et antisymétrique la structure. Or, il avait été vu que, pour un matériau isotrope, les solutions singulières correspondent justement à un mode symétrique pour la plus singulière des deux ainsi qu'à un mode antisymétrique pour la seconde. Par conséquent, le premier problème présentera un facteur d'intensité de contrainte k_2 nul et sa solution en déplacement sera notée $\boldsymbol{\xi}^{sym}$. Pour ce qui concerne second problème, ce sera, au contraire, la premier facteur d'intensité de contrainte k_1 qui sera égal à zéro. Sa solution en déplacement sera notée $\boldsymbol{\xi}^{dev}$. Dans les deux cas, les facteurs d'intensité de contrainte peuvent être calculés grâce à la méthode proposée par D. Leguillon et présentée en présence de précontrainte Chapitre 2, Sous-Section 2.2.3. Enfin, il est à noter qu'en raison des chargements considérés, il est également possible, grâce à des arguments de symétrie, de s'intéresser formellement uniquement au quart supérieur droit de la structure. Par conséquent, pour s'affranchir de l'influence des fissures entre-elles, la bonne taille caractéristique du problème à considérer est donc $L = \frac{c}{2}$.

3.4.2 Approximation de la géométrie d'un trou carré avec présence de fissures ouvertes

La transformation conforme ω_f, dont la dérivée est détaillée en (3.57), permet d'associer à l'extérieur du cercle unité une géométrie de carré présentant des fissures symétriques orientées selon les bissectrices de chaque coin. Elle constitue donc une bonne base de travail dans le but d'obtenir des géométries approchées d'une structure fissurée. Cependant, les résultats sont cette fois-ci un peu plus compliqués à obtenir. Une troncature "brutale" du développement en série de Laurent de ω_f permet en effet d'obtenir des géométries approchées mais ces dernières présentent des fissures mal définies. En effet, avec un tel procédé, un grossissement au voisinage des coins montre que le domaine obtenu s'interpénètre au niveau des lèvres supérieure et inférieure (voir Figure 3.21).

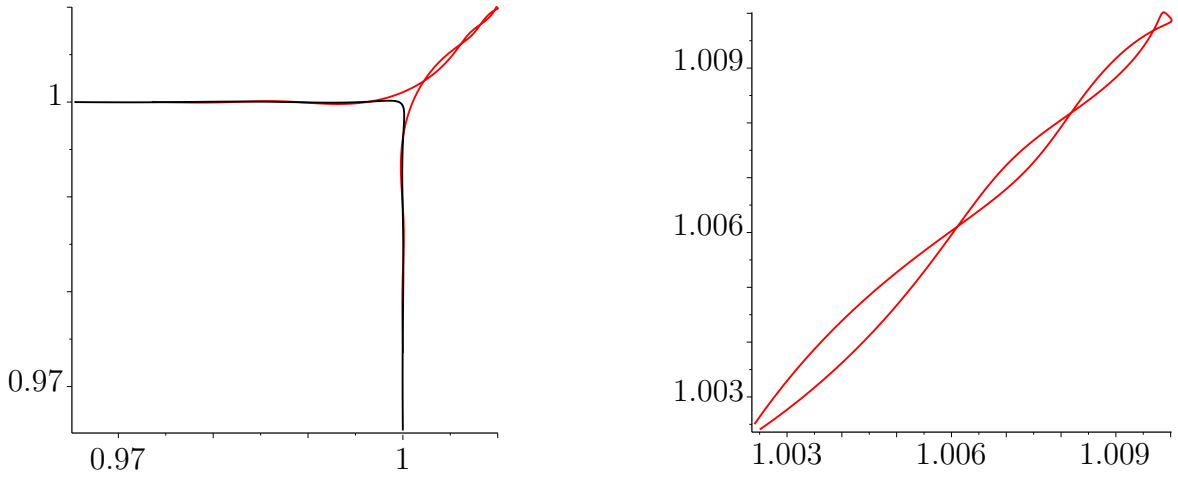

FIGURE 3.21 – Fissure obtenue pour une troncature brutale de la transformation conforme ω_f. Illustration du phénomène d'interpénétration

Dans le but de prévenir ce phénomène, il est par exemple possible de considérer non pas l'image du cercle unité par la troncature de ω_f, mais plutôt l'image d'un cercle de rayon très légèrement supérieur à l'unité. Ce faisant, le contour obtenu est parfaitement régulier et ne présente plus d'interpénétration. Afin de garder le cercle unité comme antécédent, on considère en fait plutôt une troncature de la transformation conforme :

$$Z \longmapsto z = \omega_f(\alpha Z) \tag{3.77}$$

où α est une constante réelle correspondant au rayon du cercle considéré précédemment. Ce choix de redéfinir la transformation conforme plutôt que de changer le domaine antécédent permet en effet de pouvoir continuer à utiliser la méthode présentée en Annexe A.6 et est de fait plus intéressant. En fait, on peut montrer que, s'il est peut être choquant de considérer des domaines présentant des interpénétrations, les solutions obtenues sont bien arbitrairement proches des solutions du problème idéalisé. Par conséquent, il n'y aurait aucun risque à utiliser des troncatures brutales présentant des domaines mal définis.

Néanmoins, il semble tout de même plus satisfaisant de se placer sur des domaines correctement définis. Par conséquent, avec de telles considérations, il est possible de déterminer des transformations conformes permettant d'obtenir par exemple les géométries représentées Figures 3.22 et 3.23. Il est important de noter que, même si la méthode des développements asymptotiques raccordés a été présentée dans le cadre de fissures de Griffith, elle est en fait tout à fait valable pour un défaut de géométrie quelconque. La question de l'existence de la zone de raccord n'est donc pas inhérente à une géométrie de type Griffith et peut être

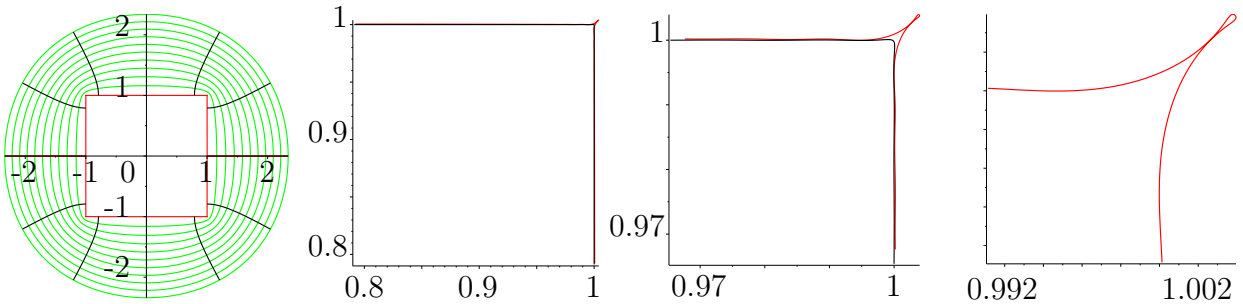

FIGURE 3.22 – Géométrie fissurée approchée avec une fissure de taille $0.0053c$ où c est la taille du côté du carré qui ici a été normalisée à 1. Pour obtenir un tel résultat, l'ordre de troncature considéré est $n = 300$. Trois niveaux de zoom sont représentés pour bien rendre compte de la géométrie du défaut considéré.

étudiée en présence de n'importe quelle morphologie de défaut. Par conséquent, les fissures approchées obtenues sont tout à fait satisfaisantes. Ainsi, les solutions saine et asymptotique seront comparées aux solutions de deux problèmes présentant des défauts. Le premier sera celui de la Figure 3.22 et exprimera l'effet d'une fissure de taille environ égale à $0.005c$, soit deux ordres de grandeur plus petite que la taille caractéristique du problème. Le second quant à lui inclura des fissures de taille $\ell = 0.05c$, c'est-à-dire dix fois plus petite que la taille caractéristique. En utilisant l'Annexe A.6, il est possible d'accéder de manière exacte aux solutions de ces problèmes approchés.

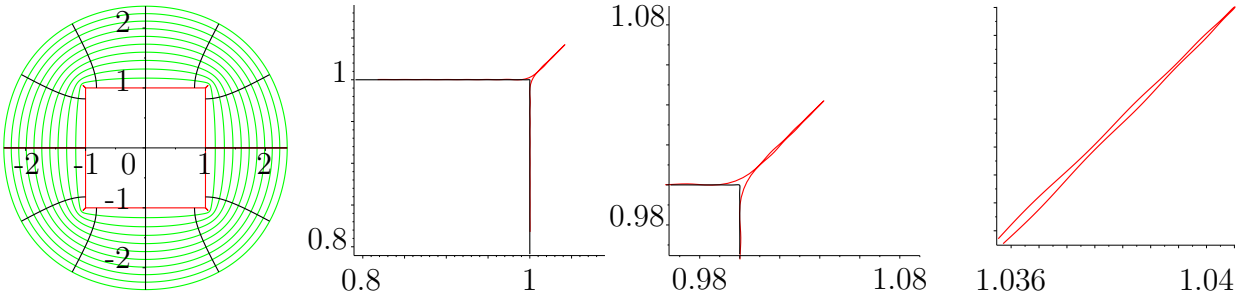

FIGURE 3.23 – Géométrie fissurée approchée avec une fissure de taille $0.059c$ où c est la taille du côté du carré qui ici a été normalisée à 1. Pour obtenir un tel résultat, l'ordre de troncature considéré est $n = 300$. Trois niveau de zoom sont représentés pour bien rendre compte de la géométrie du défaut considéré.

3.4.3 Caractérisation du domaine de validité de la méthode

Dans le même esprit que ce qui a été fait en thermique, il est possible de chercher, de manière approchée, quel est l'antécédent d'un segment prenant appui au niveau, par exemple, du coin supérieur droit du trou carré et formant un angle β avec l'horizontal (voir Figure 3.15). C'est en étudiant les champs de déplacements des différentes solutions sur ces supports géométriques qu'il sera possible de conclure s'il existe une zone où coexistent à la fois les solutions du problème sain, du problème avec défaut et de la décomposition sur les solutions singulières dite solution asymptotique. Pour une taille de fissure donnée il est nécessaire, pour chaque valeur de β, de trouver une portion du segment support se situant à une certaine distance du coin et où les conditions mentionnées précédemment sont remplies. La zone de raccord n'étant pas nécessairement de forme circulaire, il n'est pas nécessaire que cette portion de segment soit située à la même distance quel que soit β. Cependant, pour un

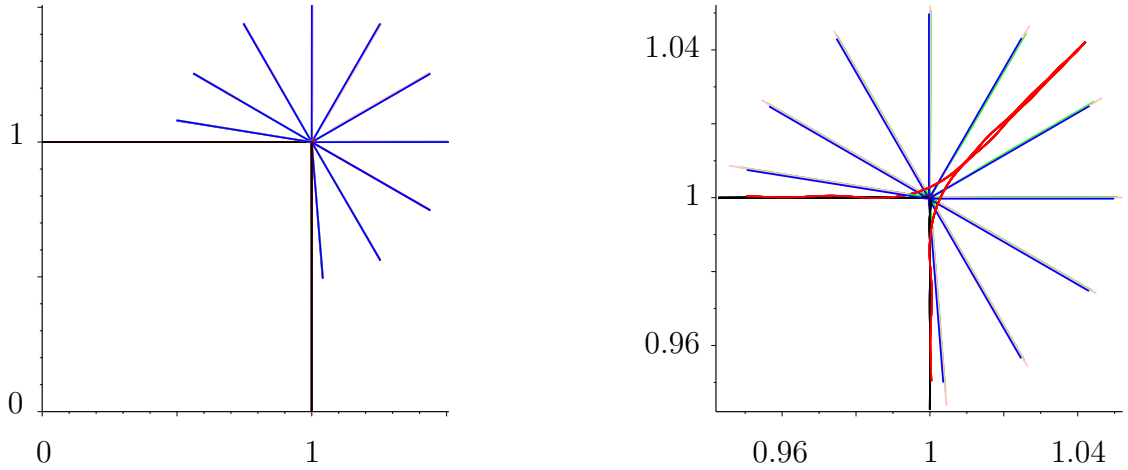

FIGURE 3.24 – Supports géométriques correspondant à des segments prenant naissance au niveau du coin supérieur droit et inclinés d'un angle β par rapport à l'horizontal, avec $\beta \in \left\{-0.95\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, 0.95\pi\right\}$

β donné, la distance en question devra être la même pour un chargement de type traction isotrope ou déviateur de contraintes.

Une analyse approfondie montre qu'il est possible, pour une fissure d'extension cent fois inférieure à la taille caractéristique du problème L, de définir proprement la zone de raccord. En effet, les Figures 3.25 montrent que, pour $\beta = -\frac{\pi}{6}$, il est possible de définir cette dernière comme se situant à une distance $r = 0.05c$ du coin considéré. Pour être plus précis, en demandant à ce que les solutions fissurée et asymptotique correspondent, avec une erreur relative de 3%, à la solution saine sur les 2 composantes du champ de déplacement et pour les deux chargements considérés, on trouve que, pour l'angle β en question, la zone de raccord se situe entre $r = 0.039c$ et $r = 0.069c$. La même étude menée pour les différents angles β confirment l'existence de la zone de raccord (voir par exemples les courbes présentées Figures D.1 et D.2, fournies en Annexe, pour des angles $\beta = -0.95\frac{\pi}{2}$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$), laquelle consiste en un segment ne situant pas forcément toujours à la même distance du coin anguleux. Ainsi, la procédure de développement asymptotique raccordé sera justifiée au moins pour toute longueur de fissure ℓ inférieure ou égale à $0.01L$ soit pour toute fissure d'extension deux ordres de grandeur plus petite que les dimension caractéristiques du problème. Une remarque intéressante venant confirmer des considérations tenues précédemment est que, au niveau de la zone de raccord, les solutions asymptotiques associées à $\boldsymbol{\xi}^{sym}$ et à $\boldsymbol{\xi}^{dev}$ sont du même ordre de grandeur. Puisque seul le mode 1 est activé par le chargement isotrope et qu'uniquement le mode 2 est sélectionné par le chargement déviateur, la remarque précédente signifie qu'il n'est pas possible de négliger l'une des solutions asymptotiques par rapport à l'autre au niveau de la zone de raccord . Par conséquent, pour ce qui concerne les problèmes intérieurs dilatés, les conditions aux limites ne doivent pas être prescrites à l'infini mais bien au niveau du premier infiniment grand rencontré $\frac{L}{\ell}$.

Cependant, la même démarche appliquée cette fois-ci à une fissure de longueur ℓ de l'ordre de $0.1L$ montre que la zone de raccord ne peut pas être définie puisqu'il existe des directions β telles que les trois solutions (saine, fissurée et asymptotique) ne coïncident jamais. En effet, les deux exemples donnés Figure 3.26 illustrent bien le fait qu'au moment où la solution asymptotique ne permet plus de décrire de manière satisfaisante la solution saine, l'influence du défaut se fait toujours ressentir de manière significative. Ainsi, conformément à l'intuition, l'usage de la formule (3.24) est limité et ne permet de calculer G_{inc} que pour une plage elle même limitée de longueur ℓ.

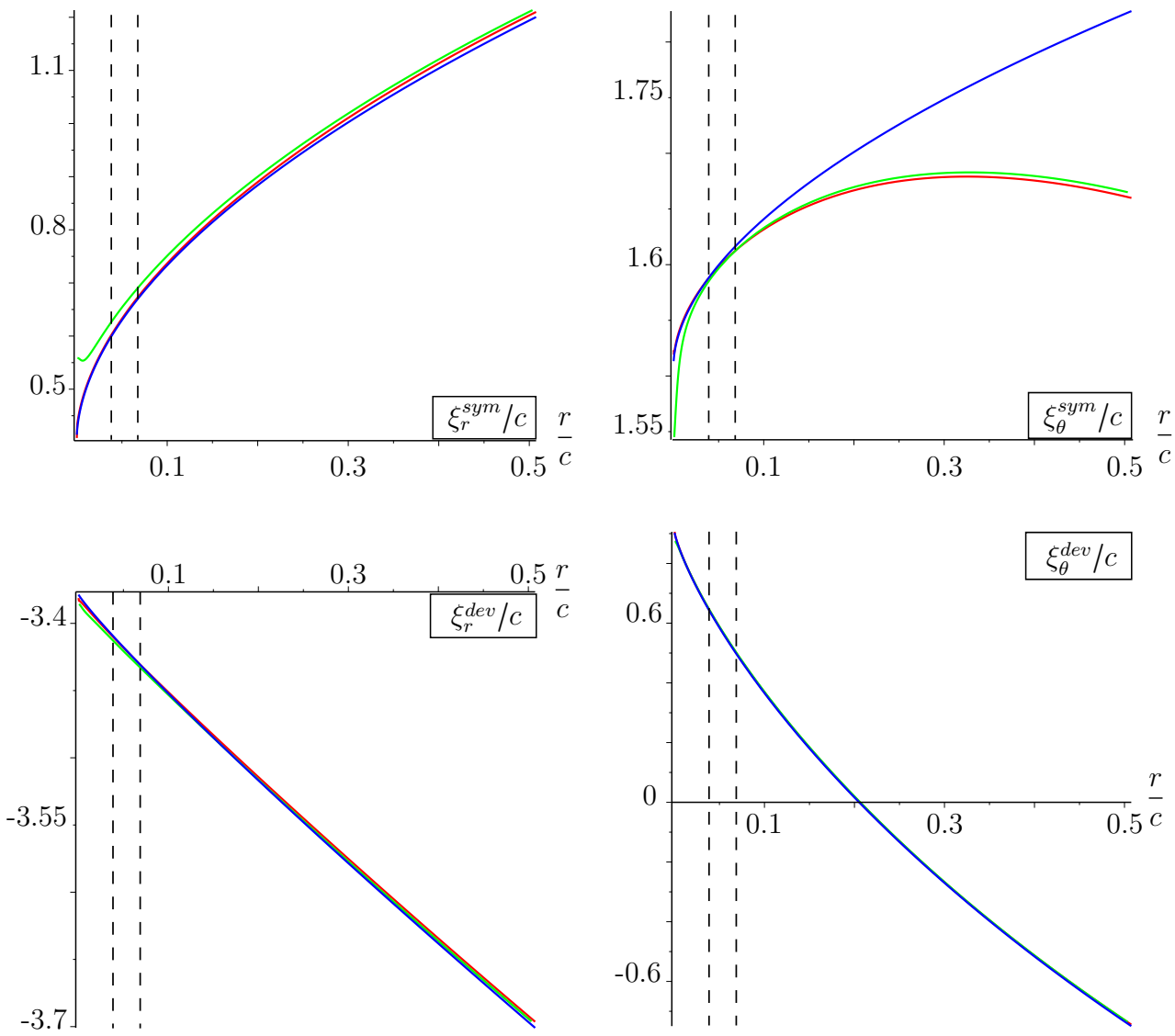

FIGURE 3.25 – Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = -\frac{\pi}{6}$ en fonction de la distance au coin r normalisée par c.
Rouge : solution saine
Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$
Bleu : solution asymptotique
Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord
L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3

3.5 Application de la méthode et détermination de la longueur d'initiation

Il a été montré dans les sections précédentes qu'il était possible d'utiliser la méthode proposée par LEGUILLON [1989], basée sur des développements asymptotiques raccordés pour la longueur interne prévue par le critère (3.1). Cette approche est de première importance puisqu'elle permet d'accéder à l'un des deux items du double critère, à savoir le taux de restitution d'énergie G_{inc}. Pour être plus précis, il a été établi qu'il était possible d'utiliser la formule (3.24) pour des longueurs de fissures ℓ étant plus petites de deux ordres de grandeur que la dimension caractéristique du problème notée formellement L. De plus, le modèle de

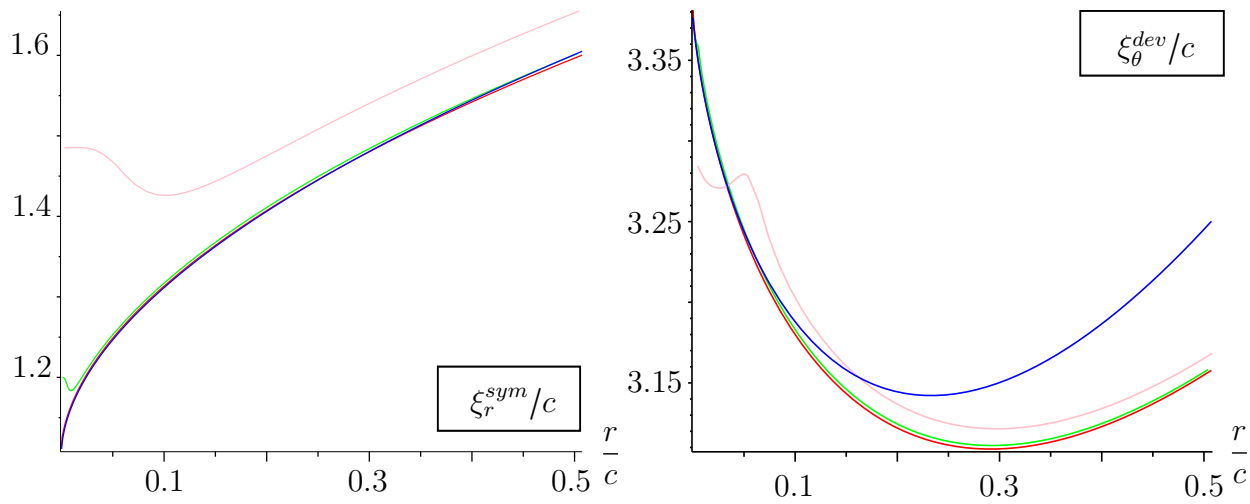

FIGURE 3.26 – Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = \frac{\pi}{2}$ pour la figure de gauche et $\beta = \frac{\pi}{6}$ pour la figure de droite, en fonction de la distance au coin r normalisée par c.
Rouge : solution saine
Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$
Rose : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.059c$
Bleu : solution asymptotique
Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord
L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3

nucléation utilisé correspond à une rupture du matériau par cisaillement. Par conséquent, concernant la partie critère en contraintes, la bonne quantité à minorer semble être $|\sigma_{r\theta}|$ qui correspond justement la contrainte de cisaillement pour la géométrie de fissure envisagée. Ainsi, cet item du critère mixte s'écrira dans notre cas de figure :

$$|\sigma_{r\theta}| \geq \sigma_c \tag{3.78}$$

dans la zone où la nucléation est possible. Ainsi, tous les outils ont été mis en place pour pouvoir traiter du phénomène de nucléation à l'aide du critère mixte. Les calculs ont été menés avec les constantes matériaux suivantes :

— $E = 15\,\text{GPa}$ et $\nu = 0.2$ si le matériau est considéré comme isotrope
— $E_1 = 24.19\,\text{GPa}$, $E_2 = 9.27\,\text{GPa}$, $\nu_{21} = 0.2$, $\nu_{13} = 0.15$ et $G_{12} = 3.94\,\text{GPa}$ si le matériau est considéré comme anisotrope, où 2 est la direction verticale et 1 et 3 sont les deux directions horizontales

Avec des contraintes en présence de l'ordre de la dizaine de MPa et avec la ténacité et la contrainte critique retenues précédemment ($K_c = 10\,\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ et $\sigma_c = 100\,\text{MPa}$), la formule d'Irwin indique que l'énergie restituée critique G_c est caractérisée par :

$$G_c \sim \frac{(K_c)^2}{E} \sim 1 \times 10^4\,\text{Pa}\cdot\text{m} \tag{3.79}$$

Une première analyse Figure 3.27 du taux de restitution de l'énergie G_{inc} et de la composante $\sigma_{r\theta}$ du tenseur des contraintes, en conditions isotropes, montre deux angles privilégiés entre la fissure et l'axe $\boldsymbol{e}_x$ qui sont $\theta = -20°$ et $\theta = 110°$ et qui s'organisent donc symétriquement par rapport à la première bissectrice inclinée à 45°. Ce premier résultat est très

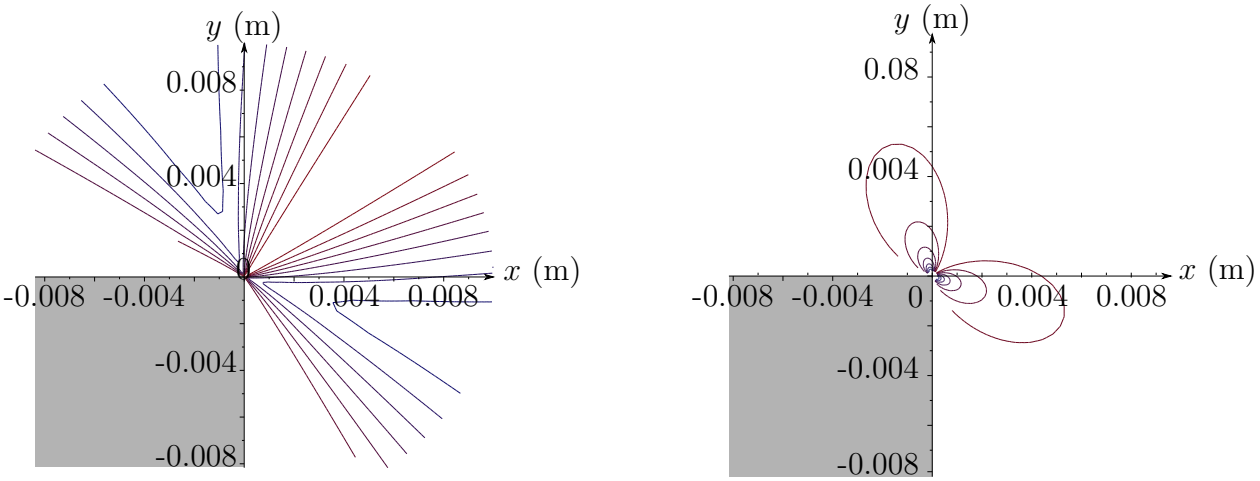

FIGURE 3.27 – Courbes iso-G et iso-$\sigma_{r\theta}$ obtenues pour $\boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_y = 10\,\text{MPa}$ et pour un niveau de chargement $\lambda = 0.3$. G et $\sigma_{r\theta}$ augmente à mesure que les courbes virent du rouge au bleu

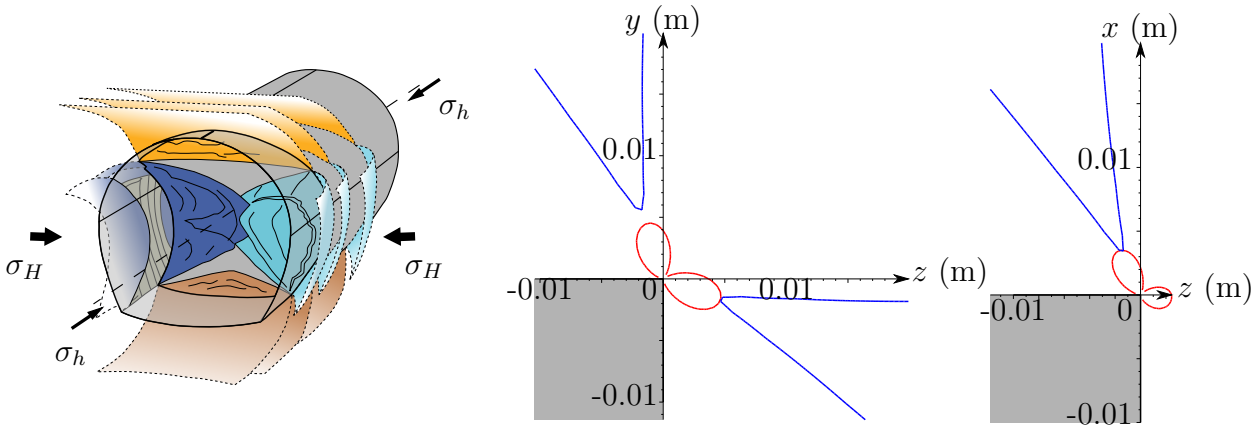

FIGURE 3.28 – Application du double critère à la situation de l'excavation d'un tunnel dans la direction principale horizontale mineure avec $\sigma_h = \sigma_v = 10\,\text{MPa}$ et $\sigma_H = 12\,\text{MPa}$.
Gauche : Fissures observées, Milieu : plan horizontal, Droite : plan vertical
Courbe rouge : iso-$\sigma_{r\theta} = \sigma_c$, courbe bleue : iso-$G_{inc} = G_c$
Niveau de chargement du plan horizontal : $\lambda = 0.145$, vertical : $\lambda = 0.217$

intéressant et laisse présupposer de la possibilité de nucléation de fissures ayant des orientations cohérentes avec celles observées par l'ANDRA.

Le critère mixte peut donc être appliqué sereinement aux situations présentant de l'anisotropie, qu'elle soit de contraintes ou du matériau, voire même des deux. Par exemple, le cas de l'excavation dans la direction principale horizontale mineure donne les résultats Figure 3.28. Une analyse bidimensionnelle a en effet été menée dans les deux plans de symétrie du problème que sont le plan horizontal ainsi que le plan vertical contenant l'axe de forage du tunnel (voir Figure 2.12). Les résultats obtenus sont excellents puisqu'ils sont en accord parfait avec l'expérience. En effet, en ce qui concerne le plan vertical, la méthode met bien en évidence une nucléation de fissures en mode II en amont de la direction de forage, formant un angle de 110° avec cette dernière et pouvant donc s'interpréter comme l'amorce des fissures en chevrons. Par rapport à la situation isotrope, la symétrie par rapport à la première bissectrice a été brisée par l'anisotropie du matériau qui a favorisé la direction $\theta = 110°$. En ce qui concerne le plan horizontal, le matériau peut être localement considéré comme isotrope. Cependant, c'est cette fois l'anisotropie de contrainte qui brise la symétrie et qui favorise l'angle $\theta = -20°$. Ainsi, il se forme horizontalement des fissures en aval du front de taille. Encore une fois, il s'agit là d'un résultat en accord avec les observations faites *in situ*.

De plus, les différentes hypothèses de travail reposaient toutes sur le fait que la longueur de nucléation devait être petite par rapport aux dimensions caractéristiques du problèmes qui elles sont métriques. Ici, la longueur de fissure nucléée est, comme annoncée par la longueur interne (3.1), de l'ordre de 0.005 m, ce qui justifie à posteriori les hypothèses.

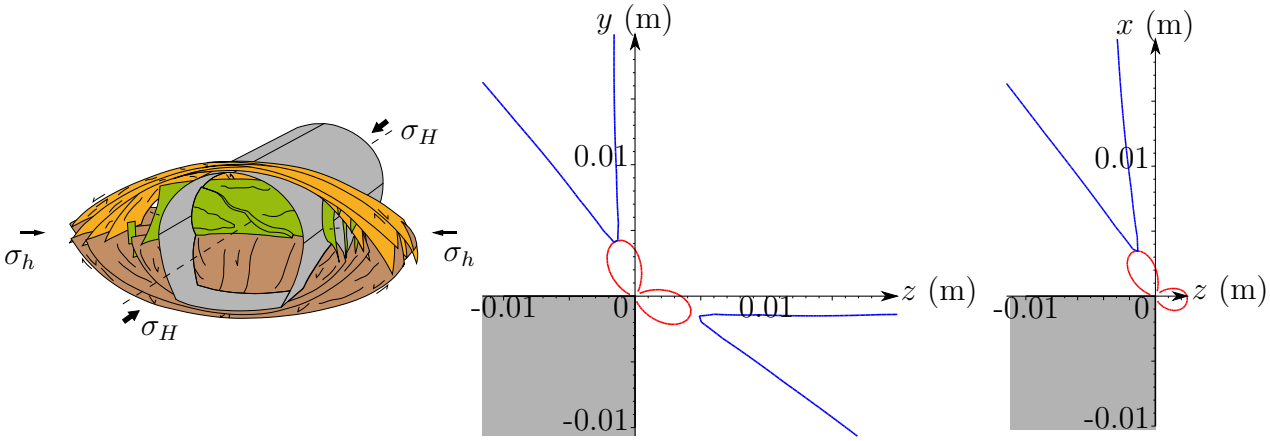

FIGURE 3.29 – Application du double critère à la situation de l'excavation d'un tunnel dans la direction principale horizontale majeure avec $\sigma_h = \sigma_v = 10\,\text{MPa}$ et $\sigma_H = 12\,\text{MPa}$.
Gauche : Fissures observées, Milieu : plan horizontal, Droite : plan vertical
Courbe rouge : iso-$\sigma_{r\theta} = \sigma_c$, courbe bleue : iso-$G_{inc} = G_c$
Niveau de chargement du plan horizontal : $\lambda = 0.14$, vertical : $\lambda = 0.269$

Si les résultats sont excellents en ce qui concerne l'excavation dans la direction principale horizontale mineure, ils le sont moins dans la direction principale majeure. En effet, l'application du double critère à ce cas est illustrée Figure 3.29. Malgré la prise en compte des différentes anisotropies, il n'est pas possible, en l'état, de rendre compte du caractère elliptique du faciès de fissuration.

Si le double critère proposé par D. Leguillon se montre très efficace pour prévoir le phénomène de nucléation et permet de rendre compte d'une grande partie des effets de l'anisotropie en exhibant des angles de fissurations proches de ceux mesurés expérimentalement, il est à noter que l'extension de la fissure obtenue ne correspond en revanche pas à l'observation. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que dans chacune des situations où le double critère est saturé, le processus d'excavation n'est pas entièrement consommé. Par conséquent, il est tout à fait envisageable que lorsque λ aura atteint la valeur de 1, correspondant à la situation finale où des bords libres ont été créés au niveau de la passe, les fissures nucléées auront l'occasion de se propager pour éventuellement atteindre des dimensions métriques. Cependant, une étude plus approfondie montre que le double critère basé sur les développements asymptotiques prédit des longueurs de nucléation instables et ne pouvant donc être observées. A la lumière de ce phénomène, il est nécessaire de clarifier plus en détail les notions de longueur de nucléation et surtout le phénomène de nucléation stable. Ces différentes considérations seront au cœur du chapitre suivant.

Chapitre 4

Stabilité de la nucléation et conséquences pour les applications

Sommaire

4.1 Longueur de nucléation et description géométrique d'une fissure 105

4.1.1 Instabilité d'une fissure issue des développements asymptotiques raccordés . . . 105

4.1.2 Notion de longueur de nucléation . . . 106

4.2 Thermodynamique à l'échelle microscopique . . . 107

4.2.1 Échanges thermiques et dissipation . . . 107

4.2.2 Densité volumique d'énergie interne pour un volume élémentaire sain 108

4.3 Représentation tridimensionnelle d'un objet fissure . . . 108

4.3.1 Modélisation d'une fissure . . . 108

4.3.2 Processus micromécanique à l'origine de la formation d'une fissure . 109

4.3.3 Problème d'homogénéisation et grandeurs macroscopiques . . . 110

4.3.4 Théorème de Levin et première équation d'état macroscopique . . . 112

4.3.5 Seconde équation d'état . . . 113

4.3.6 Densité volumique macroscopique d'énergie interne dans un processus endommageant . . . 114

4.3.7 Densité volumique macroscopique d'énergie interne totalement endommagée . . . 115

4.3.8 Indépendance du chemin suivi . . . 116

4.3.9 Bilan et dissipation . . . 118

4.4 Thermodynamique à l'échelle macroscopique . . . 118

4.4.1 Premier principe de la thermodynamique . . . 119

4.4.2 Énergie interne d'une structure fissurée . . . 121

4.4.3 Simplifications et état de référence . . . 122

4.4.4 Lien avec la notion de dissipation . . . 124

4.4.5 Bilan sur la fissuration adiabatique . . . 126

4.5 Un critère de nucléation purement énergétique . . . 126

4.5.1 Modèle et effets d'échelle . . . 127

4.5.2 Typologie du taux de restitution d'énergie . . . 128

4.5.3 Nucléation et propagation . . . 129

4.5.4 Structures bornées chargées en déplacement . . . 130

4.5.5 Problèmes ne présentant pas de maximum . . . 131

4.6 Taux de restitution de l'énergie en milieu infini 131
4.6.1 Variation d'énergie potentielle dans des structures infinies due à la nucléation de défauts 132
4.6.2 Un exemple simple : Variation d'énergie potentielle pour la nucléation d'un trou circulaire en contraintes planes 135
4.6.3 Potentiels d'Airy complexe 137
4.6.4 Représentation complexe 137
4.6.5 Calcul à l'aide du théorème des résidus 138
4.6.6 Variation d'énergie potentielle et transformations conformes 140
4.6.7 Un exemple de taux de restitution d'énergie obtenu via une transformation conforme 141
4.6.8 Critère purement énergétique et nucléation 144

4.1 Longueur de nucléation et description géométrique d'une fissure

4.1.1 Instabilité d'une fissure issue des développements asymptotiques raccordés

Dans le chapitre précédent, une étude de la nucléation de fissures à partir du front de taille, basée sur la méthode du double critère de Leguillon, a été entreprise. Les résultats établis au terme de cette modélisation ont été très encourageants puisque les orientations de fissuration obtenues correspondent, au moins pour l'une des directions de forage, aux observations faites par l'ANDRA. Cependant, l'extension des fissures nucléées ne sont, quant à elles, pas en accord avec les faits expérimentaux. En effet, les tailles obtenues sont centimétriques alors que les fissures en chevrons sont plutôt métriques. Il n'y a cependant rien d'alarmant à cette différence étant donné que le phénomène de nucléation, tel que décrit par le critère mixte, ne survient pas à la fin du processus d'excavation. En d'autres termes, la situation pour laquelle les fissures apparaissent ne correspond pas à l'état final de la structure où les bords de la passe deviennent libres de contraintes. Par conséquent, une fois ces fissures créées, il est possible que des phénomènes de propagation à partir de fissures préexistantes entrent en jeu entre l'instant de nucléation et la fin du processus d'excavation.

Plusieurs difficultés surviennent lorsque le problème est désormais vu sous l'angle de la propagation. Tout d'abord, les orientations n'ont été données qu'en quatre points caractéristiques du front de taille qui sont les coins appartenant aux deux plans de symétrie que sont le plan horizontal et le plan vertical contenant l'axe de forage. En effet, seuls ces points caractéristiques légitimaient l'usage d'un problème bidimensionnel équivalent. Par conséquent, la situation sur l'ensemble du front de taille n'est pas claire. De plus, pour les longueurs de nucléation envisagées et obtenues, le couplage entre les différents sites possibles de nucléation n'a pas été pris en compte. Lorsque ces fissures se seront déployées, il sera nécessaire de prendre en compte certains effets voûtes obligeant une véritable étude tridimensionnelle. Enfin, les niveaux de chargement conduisant à la création de fissure dans les plans de symétrie sont différents. Cela signifie qu'il ne s'agira pas seulement de traiter un problème de propagation mais, à partir du premier instant de nucléation, d'un problème couplé mêlant à la fois propagation des fissures préexistantes ainsi que nucléation à partir d'autres sites.

Cependant la difficulté majeure survient lorsque le double critère peut être utilisé dans le cadre des développements asymptotiques raccordés. En effet, deux quantités distinctes mais en même temps très proches sont à prendre en considération. La première est le taux de restitution d'énergie fini G_{inc} qui a été manipulé dans tout le chapitre précédent et qui intervient dans l'un des deux items du critère mixte. Pour un chargement donné, si E_p^0 est l'énergie potentielle du milieu sain et $E_p^f(\ell)$ est l'énergie potentielle du même milieu pour le même chargement mais présentant une fissure de longueur ℓ, celui se définit comme :

$$G_{inc}(\ell) = \frac{E_p^0 - E_p^f(\ell)}{\ell} \tag{4.1}$$

La seconde quantité est celle manipulée classiquement pour les problèmes de propagation, à savoir le taux de restitution d'énergie infinitésimal G. Avec les notations précédentes celui-ci se définit comme :

$$G(\ell) = \lim_{d\ell \to 0} \left(\frac{E_p^f(\ell) - E_p^f(\ell + d\ell)}{d\ell} \right) = -\frac{\partial E_p^f}{\partial \ell}(\ell) \tag{4.2}$$

Le critère de propagation quasi-statique classique est le suivant :

$$\begin{cases} \text{si} \quad G(\ell) < G_c \quad \text{alors} \quad \dot{\ell} = 0 \\ \text{si} \quad G(\ell) = G_c \quad \text{alors} \quad \dot{\ell} \geq 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

où G_c est la même constante que celle intervenant dans le double critère et que celle manipulée dans le chapitre précédent. Les deux quantités G et G_{inc} partagent un certain nombre de propriétés, comme par exemple le fait que $G(0^+) = G_{inc}(0^+)$. L'une d'entre elles est cependant particulièrement intéressante :

$$\frac{\partial G_{inc}}{\partial \ell}(\ell) = \frac{G - G_{inc}}{\ell} \tag{4.4}$$

Par conséquent, cela implique le fait que G_{inc}, en tant que fonction de la longueur de fissure ℓ, est croissante (resp. strictement croissante) sur un intervalle donné si et seulement si pour tout ℓ appartenant à cet intervalle $G(\ell) \geq G_{inc}(\ell)$ (resp. $G(\ell) > G_{inc}(\ell)$). Cependant, lorsqu'il est possible de calculer la quantité G_{inc} par le biais des développements asymptotiques raccordés, la formule (3.24) prédit tout d'abord que $G_{inc}(0^+) = 0$, mais aussi que G_{inc} est strictement croissant lorsque la formule est valide. Par conséquent, puisqu'au moment de la nucléation l'égalité $G_{inc} = G_c$ est réalisée, (4.4) implique :

$$G > G_{inc} = G_c \tag{4.5}$$

relation venant violer le critère de propagation (4.3) quasi-statique. Cela signifie qu'au moment où la fissure apparait, celle-ci non seulement se propage immédiatement sans incrément du chargement, mais également de façon dynamique puisqu'il s'agit du seul cadre permettant de considérer un G plus grand que G_c. La longueur de nucléation telle que prédite par le critère mixte dans le cadre décrit ci-dessus correspond donc à une longueur d'initiation et non à une longueur d'arrêt visible.

Avec ces diverses considérations, malgré les excellents résultats fournis par le critère mixte et présenté au chapitre précédent, notre ambition est de définir et de prévoir une longueur de nucléation qui se rapproche davantage de la notion de longueur d'arrêt. Ainsi, dans le même esprit que le travail mené au niveau énergétique par Leguillon, nous proposons de reprendre l'approche thermodynamique concernant la propagation ou la nucléation de fissure.

4.1.2 Notion de longueur de nucléation

A ce stade, efforçons nous de préciser ce que nous mettons derrière la notion de longueur de nucléation. Le phénomène de nucléation correspond à la propagation brutale d'une fissure de manière dynamique et sous chargement constant. La longueur de nucléation correspondra à l'extension de la fissure obtenue au terme de ce processus. Il est importer de noter que cela ne signifie pas que la structure est dépourvue d'énergie cinétique au moment où la fissure finit de se propager, mais simplement que l'énergie cinétique restante n'est plus à même d'amorcer un nouveau processus de propagation. Un trait caractéristique important de la nucléation venant également d'être souligné est son caractère brutal. Cela veut dire que le temps caractéristique de la propagation dynamique de la fissure, entre l'apparition du premier incrément de fissure et la fin de la propagation, est faible devant celui d'autres phénomènes dont par exemple la diffusion thermique. En effet, le temps caractéristique de ce dernier peut être évalué en fonction de l'échelle d'espace considérée et il est tout à fait légitime de considérer que la chaleur n'a pas eu le temps d'être diffusée pendant tout le processus de nucléation. Par conséquent, le bon cadre thermodynamique à adopter est celui de l'adiabaticité. Cette approche est, à notre connaissance, originale dans le sens où

généralement les études sont faites en conditions isothermes. Ces dernières peuvent toutefois se justifier si le caractère faible du couplage thermo-mécanique est invoqué. Néanmoins, il semble plus rigoureux de ne pas négliger ce dernier. Par conséquent, nous proposons dans ce qui suit de revisiter les approches thermodynamiques lorsque l'ensemble du processus auquel sont soumis le matériau et la structure se fait en conditions adiabatiques.

4.2 Thermodynamique à l'échelle microscopique

Nous verrons dans ce qui suit que, sans surprises, la bonne densité énergétique à manipuler en conditions adiabatiques n'est pas l'énergie libre ψ mais plutôt l'énergie interne u. Pour une structure étant le siège d'un processus de nucléation adiabatique, une adaptation du cadre thermodynamique usuel est donc nécessaire. Notamment, il convient d'établir un certain nombre de résultats intermédiaires. Par exemple, il est nécessaire d'établir la forme générale de l'énergie interne stockée dans un volume n'étant pas traversé par la fissure naissante et connaissant par conséquent une évolution réversible. Il est également primordial de connaître comment est stockée l'énergie interne au sein d'une fissure. En effet, une différence fondamentale entre l'approche isotherme et l'approche adiabatique est que dans le premier cas aucune énergie libre n'est conservée dans une fissure. Dans une évolution adiabatique, au contraire, nous montrerons que de l'énergie interne s'y trouve stockée. Pour pouvoir arriver à ces résultats, il sera également nécessaire de se donner une représentation de l'objet fissure.

4.2.1 Échanges thermiques et dissipation

Le raisonnement sur le point d'être tenu ressemble sous beaucoup d'aspects à celui permettant classiquement de déduire en conditions isothermes la force thermodynamique associée à la propagation d'une fissure à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem, à savoir le taux de restitution d'énergie infinitésimal G. Avec les précisions apportées ci-dessus, cela s'explique par le fait que la nucléation peut être vue comme la propagation d'une fissure conduisant à une taille finie et ayant lieu sur un court intervalle de temps. Néanmoins, les conditions adiabatiques rendent plus agréable l'usage de l'énergie interne de densité volumique lagrangienne u en lieu et place de l'énergie libre. L'énergie cinétique sera notée K et s désignera la densité volumique lagrangienne d'entropie. Enfin, en dehors de la fissure créée, le matériau est supposé avoir un comportement élastique linéaire.

En excluant les échanges de chaleur à distance entre les particules du système considéré, des considérations classiques (voir par exemple Salençon [2001]) montrent que le taux de chaleur volumique reçu se met sous la forme :

$$\mathring{q} = r - \operatorname{div} \boldsymbol{q} \tag{4.6}$$

où r est une contribution volumique correspondant au taux de chaleur volumique fourni à distance aux particules du milieu par l'extérieur du système global considéré et $\boldsymbol{q}$ est le vecteur courant de chaleur sortant. De même, la densité volumique d'entropie vérifie entre deux instants t et $t + dt$:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \frac{r}{T} - \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) + \frac{\delta s_{créée}}{dt} = \frac{\mathring{q}}{T} - \frac{1}{T^2}\boldsymbol{q}.\operatorname{grad} T + \mathring{s}_{créée} \tag{4.7}$$

où la notation abusive $\mathring{s}_{créée}dt$ désigne l'entropie volumique élémentaire créée entre les deux instants considérés. L'hypothèse faite sur le temps caractéristique de la nucléation implique

que le comportement est adiabatique sur tout sous-système. Ceci se traduit par le fait que $r = 0$ et $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$. L'inégalité de Clausius-Duhem se met alors sous la forme :

$$D = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{u} + T\dot{s} \geq 0 \tag{4.8}$$

où D est la dissipation par unité de volume et est égale à $T\overset{\circ}{s}_{créée}$.

4.2.2 Densité volumique d'énergie interne pour un volume élémentaire sain

En dehors de la fissure créée, puisque le comportement est élastique linéaire réversible, la densité volumique lagrangienne u dépend des variables d'état $\boldsymbol{\varepsilon}$ et s. Elle se met sous la forme :

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, s) = u^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} + T^0\left(s - s^0\right) + \frac{\left(s - s^0\right)^2}{2c} - \frac{\left(s - s^0\right)}{c}\boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.9}$$

Le comportement étant réversible, la dissipation D dans l'expression (4.8) est égale à 0. Cela permet de déduire les équations permettant d'accéder, à partir la densité volumique d'énergie interne u, au le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi qu'à la température T. Celles-ci se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}_{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} - \dfrac{\left(s - s^0\right)}{c}\boldsymbol{k} \\ T = \dfrac{\partial u}{\partial s} = T^0 + \dfrac{1}{c}\left(\left(s - s^0\right) - \boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon}\right) \end{cases} \tag{4.10}$$

Ces équations d'état permettent d'interpréter les différentes quantités introduites dans (4.9). En effet, si T^0 est la température de référence, T^0c peut s'interpréter comme une capacité calorifique à déformation nulle, $T^0\boldsymbol{k}$ peut s'interpréter comme la chaleur latente de déformation du matériau sain et $\mathbb{C}_{ad}$ est le tenseur d'élasticité adiabatique du matériau sain. Cette quantité est reliée au tenseur d'élasticité isotherme, manipulé usuellement, par la relation :

$$\mathbb{C}_{ad} = \mathbb{C}_{iso} + \frac{1}{c}\boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k} \tag{4.11}$$

Pour être plus précis, l'évolution pour un élément de volume n'appartenant pas à la région correspondant à la fissure créée étant adiabatique réversible, il s'agit en fait d'un processus isentropique. Par conséquent, l'énergie interne pour un tel volume élémentaire se met sous la forme :

$$u = u^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.12}$$

Comme annoncé précédemment, il est nécessaire de connaître quelle forme prend l'énergie interne dans une fissure. La première étape pour pouvoir y arriver est de se donner une modélisation géométrique d'une fissure.

4.3 Représentation tridimensionnelle d'un objet fissure

4.3.1 Modélisation d'une fissure

Dans le Chapitre 2, Section 2.1, une justification a été donnée du fait que les deux représentations d'un même objet, l'une étant idéalisée et l'autre, au contraire, plus proche

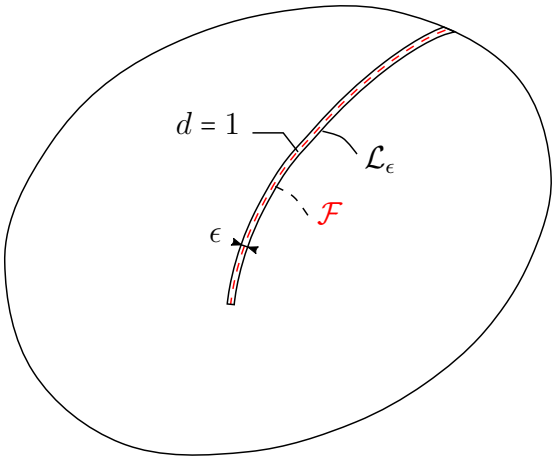

FIGURE 4.1 – Représentation d'une fissure par une zone tridimensionnelle d'épaisseur ϵ

de la réalité physique, donnaient le même résultat par passage à la limite. Cet état de fait est à nouveau utilisé ici pour représenter la création d'une fissure par un processus d'endommagement complet prenant place sur une zone $\mathcal{L}_\epsilon$ tridimensionnelle par nature et de petite épaisseur ϵ (voir Figure 4.1). La représentation idéalisée de $\mathcal{L}_\epsilon$ correspond à une surface $\mathcal{F}$, qui peut être interprétée comme le passage à la limite lorsque $\epsilon \to 0$. Dans les considérations sur le point d'être tenues, ϵ est un paramètre matériau qui n'est pas voué à tendre vers 0 mais qui cependant reste petit.

Avec cette représentation, nous proposons de visualiser la fissure macroscopique comme une zone tridimensionnelle composée de débris n'étant plus reliés les uns aux autres et par conséquent n'étant plus à même de reprendre des efforts mécaniques. Cependant, le point essentiel est que de tels débris sont toujours capable de stocker de l'énergie interne sous forme de chaleur. La création d'une fissure étant associée à une production de chaleur (voir BUI et collab. [1981]), notre intuition est que la rapidité de l'action, se traduisant à l'échelle macroscopique par des échanges de chaleur nuls, impliquera une élévation de température localisée sur la zone fissurée.

4.3.2 Processus micromécanique à l'origine de la formation d'une fissure

Pour pouvoir essayer de caractériser quelle forme prend l'énergie interne dans une zone endommagée, il est nécessaire de détailler par quel processus micromécanique l'endommagement a lieu. Il est naturel de proposer une modélisation où le matériau s'endommage par le biais d'une microfissuration dont la densité augmente au cours du temps (voir Figure 4.2). Avant de nous intéresser plus en détails à ce problème d'homogénéisation, précisons plus finement le modèle suggéré. Nous supposerons qu'à l'échelle du VER, le matériau a un comportement parfaitement fragile et que les fissures ne sont plus composées de débris. Les hypothèses précédentes excluent la notion de process zone autour des microfissures et il n'y a par conséquent pas lieu de considérer une densité surfacique d'entropie créée qui rendrait compte d'un phénomène irréversible localisé au voisinage immédiat des lèvres des microfissures. Une densité surfacique est en effet la traduction mathématique d'un phénomène volumique localisé. En revanche, les hypothèses précédentes ne suffisent pas à écarter la question relative à l'énergie interne. En effet, comme précisé précédemment, la création adiabatique d'une fissure macroscopique se traduit instantanément par une élévation de température qui est accommodée au voisinage immédiat de la fissure sous forme d'énergie calorifique, c'est-

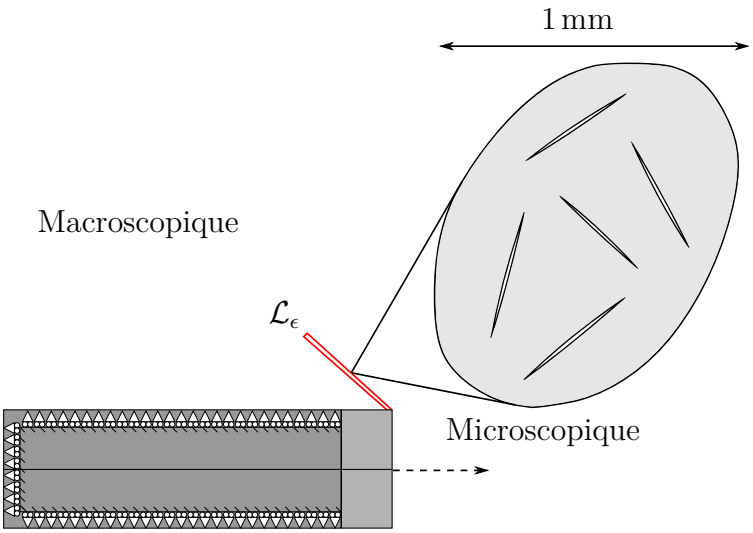

FIGURE 4.2 – Représentation d'une fissure par une zone tridimensionnelle d'épaisseur ϵ

à-dire d'énergie interne. A cet instant, il y a donc lieu de prendre un compte une densité d'énergie interne surfacique sur la fissure. Ce résultat sera même à la base de l'interprétation physique de l'équation de propagation de fissure (4.84). Cependant, à l'échelle du Volume Élémentaire Représentatif (VER), nous considérerons que la température est unique. Une telle hypothèse signifie que l'équilibre thermique s'est réalisé et donc que la température s'est uniformisée. La diffusion thermique a donc effacé la concentration d'énergie interne représentée par cette densité surfacique, au profit d'une élévation de température globale du VER. La variation d'énergie interne au voisinage immédiat de la fissure devient un infiniment petit en comparaison de la variation d'énergie totale du VER.

En résumé, la modélisation qui est adoptée est celle correspondant à un temps caractéristique de nucléation t_{nucl}^{carac} petit devant le temps t_{macro}^{carac} caractéristique des échanges de chaleur à l'échelle macroscopique, mais grand par rapport à celui des échanges de chaleur à l'échelle microscopique t_{micro}^{carac}. Soulignons qu'une telle hypothèse est possible puisqu'une loi d'évolution de la température de type Fourier conduirait à :

$$\frac{{l_{hétérogénéités}}^2}{c_{micro}^{th}} = t_{micro}^{carac} \quad \ll \quad t_{nucl}^{carac} \quad \ll \quad t_{macro}^{carac} = \frac{{l_{VER}}^2}{c_{macro}^{th}} \tag{4.13}$$

où c_{micro}^{th} et c_{macro}^{th} sont les coefficients de diffusion thermique microscopiques et macroscopiques. La différence fondamentale entre l'échelle de la macro fissure et celle de la micro fissure est que la macro fissure n'échange pas de chaleur avec le monde extérieur alors que l'équilibre thermique est réalisé au sein du VER où se situent les micro fissures.

4.3.3 Problème d'homogénéisation et grandeurs macroscopiques

Ainsi, il est nécessaire de s'intéresser à un problème d'homogénéisation correspondant à la représentation donnée Figure 4.3 où $\boldsymbol{E}$ est la déformation macroscopique. Soit alors f la fraction volumique des microfissures dans le VER. Étant donné que des microfissures plates (dans la configuration relâchée) sont considérées, cette fraction volumique est en fait égale à 0. D'ailleurs, il ne peut en être autrement pour préserver la conservation de la masse dans le VER. Pour éviter des singularités du tenseur de localisation, f sera gardé comme une variable pour l'instant, mais aura pour vocation finale d'être pris égal à 0. Les microfissures seront supposées petites de telle sorte à ce que la température soit uniforme à l'échelle du

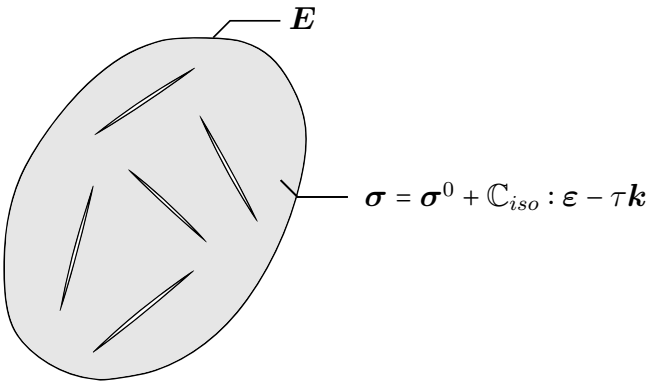

FIGURE 4.3 – Homogenisation d'un VER microfissuré

VER. Le comportement de la matrice solide est celui-d'un milieu thermoélastique dont les lois de comportements sont données en (4.10) et dont la densité volumique microscopique d'énergie interne est (4.41). Lorsque la température a vocation à être une variable d'état commandée, il est plus agréable de considérer les équations d'état sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}_{iso} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{k}\tau \\ s = -\dfrac{\partial \psi}{\partial T} = s^0 + c\tau + \boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \tag{4.14}$$

où τ est la variation de température et où $\mathbb{C}_{iso}$ est relié à $\mathbb{C}_{ad}$ par la relation (4.11). L'énergie libre volumique microscopique de la matrice solide ψ s'écrit :

$$\psi = \psi^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{iso} : \boldsymbol{\varepsilon} - \tau \boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon} - s^0\tau - \frac{c}{2}\tau^2 \tag{4.15}$$

et est définie à partir de l'énergie interne u par le biais d'une transformation de Legendre $u = \psi + Ts$. Les caractéristiques thermo-élastiques du matériau ainsi que la précontrainte dans l'état de référence $\boldsymbol{\sigma}^0$ seront supposées constantes à l'échelle du VER. Soient $\boldsymbol{z}$ le vecteur position microscopique et $\chi_{solide}(\boldsymbol{z})$ la fonction indicatrice de la matrice solide. Soient encore $\boldsymbol{\sigma}^p$ le champ tensoriel d'ordre 2 défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{z}) = \left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{k}\tau\right)\chi_{solide}(\boldsymbol{z}) \tag{4.16}$$

et $\mathbb{C}(\boldsymbol{z})$ le tenseur d'ordre 4 défini par :

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{z}) = \mathbb{C}_{iso}\chi_{solide}(\boldsymbol{z}) \tag{4.17}$$

Alors, la première équation d'état de la matrice solide microscopique peut être étendue à l'ensemble du VER sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{z}) \tag{4.18}$$

Enfin, il est utile à ce stade de définir les différentes quantités macroscopiques. La contrainte macroscopique sera notée $\boldsymbol{\Sigma}$ et correspond, par définition, à la moyenne des contraintes dans le VER. L'entropie volumique macroscopique sera notée S. En raison du caractère extensif de l'entropie, S correspond à la moyenne prise sur le VER, c'est-à-dire la moyenne sur la matrice solide de l'entropie volumique microscopique s pondérée du facteur $1 - f$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad S = (1 - f)\,\overline{s}^s \tag{4.19}$$

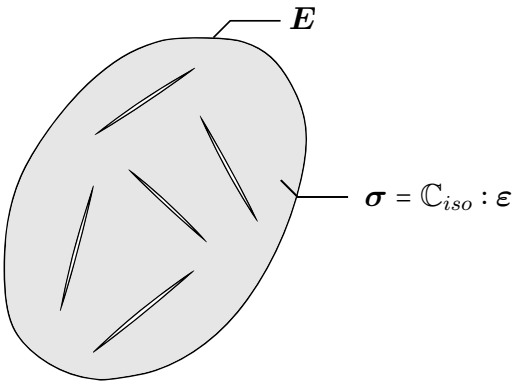

FIGURE 4.4 – Problème d'homogénéisation du VER microfissuré en l'absence de précontrainte

4.3.4 Théorème de Levin et première équation d'état macroscopique

Soit tout d'abord le problème d'homogénéisation auxiliaire défini Figure 4.4 et consistant à considérer le problème Figure 4.3 en l'absence du terme de précontrainte $\boldsymbol{\sigma}^p$ défini par (4.16). C'est d'ailleurs tout l'intérêt de ce problème auxiliaire qui correspond à une situation classique du point de vue de l'homogénéisation. Soit $\mathbb{A}$ le tenseur de localisation associé. Celui-ci vérifie en particulier :

$$\mathbb{I} = \overline{\mathbb{A}} = f\overline{\mathbb{A}}^f + (1-f)\,\overline{\mathbb{A}}^s \tag{4.20}$$

où $\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre 4 symétrique et où les opérateurs $\overline{}$, $\overline{}^f$ et $\overline{}^s$ représentent la moyenne sur le VER, la moyenne sur l'espace fissuré et la moyenne sur la matrice solide respectivement.

L'intérêt du tenseur de localisation $\mathbb{A}$ dépasse le cadre non précontraint puisqu'il permet d'énoncer le théorème de Levin. Celui-ci donne en effet accès à la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ de manière directe comme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}} : \boldsymbol{E} + \overline{\boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{A}} \tag{4.21}$$

quantité se réécrivant donc :

$$\boldsymbol{\Sigma} = (1-f)\,\mathbb{C}_{iso} : \overline{\mathbb{A}}^s : \boldsymbol{E} + (1-f)\left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{k}\tau\right) : \overline{\mathbb{A}}^s \tag{4.22}$$

La quantité $(1-f)\,\mathbb{C}_{iso} : \overline{\mathbb{A}}^s$ liée à la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ est reconnue pour être le tenseur d'élasticité homogénéisé isotherme $\mathbb{C}^{hom}$. Il s'avérera très fertile pour la suite d'exprimer l'intégralité des quantités homogénéisées gérant le couplage thermo-mécanique à partir des grandeurs microscopiques et de $\mathbb{C}^{hom}$. Il est en effet utile de remarquer que si d est une mesure de l'endommagement, comme par exemple la densité de microfissures, alors $\mathbb{C}^{hom}$ devrait en toute rigueur être argumenté par ce paramètre d. Pour alléger un peu la présentation, cette dépendance vis à vis du paramètre d'endommagement est omise. Cependant, le choix d'exprimer les différentes quantités macroscopiques en fonction de $\mathbb{C}^{hom}$ apparait alors comme très intéressant puisque, de fait, leur dépendance vis à vis du paramètre d sera résumée par la contribution de $\mathbb{C}^{hom}$. Par conséquent, il est utile d'établir les relations suivantes :

$$(1-f)\,\overline{\mathbb{A}}^s = \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} \quad , \quad f\overline{\mathbb{A}}^f = \mathbb{I} - \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} \tag{4.23}$$

où la relation (4.20) a été utilisée. Soient de plus les quantités :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{res} = \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} \quad , \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} \tag{4.24}$$

Avec ces différentes notations, la contrainte macroscopique se réécrit finalement :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{res} + \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \boldsymbol{K}\tau \tag{4.25}$$

Cette équation constitue la première équation d'état macroscopique. La notation $\boldsymbol{\Sigma}^{res}$ n'est pas anodine. Cette quantité ne doit en effet pas être confondue avec une précontrainte dans l'état de référence, lequel correspondant à l'état repéré jusqu'ici par un exposant 0 où le matériau était sain. En effet, la précontrainte mobilisée macroscopiquement dans cet état de référence est $\boldsymbol{\sigma}^0$ qui, par conséquent, n'est pas égal à $\boldsymbol{\Sigma}^{res}$. Cette dernière quantité s'interprète plutôt comme le niveau de contrainte résiduel qui resterait dans un état fictif, dit relâché, où les paramètres $\boldsymbol{E}$ et τ seraient pris nuls, et ce, en présence des microfissures. Un tel état est qualifié de fictif puisque $\boldsymbol{E}$ et τ ne correspondent pas, au niveau de la structure, à des paramètres de chargement contrôlés.

4.3.5 Seconde équation d'état

Afin de pouvoir établir la seconde équation d'état macroscopique, il est au préalable nécessaire d'établir un résultat intermédiaire. Le théorème de Levin a permis d'accéder de manière directe à une expression de la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$. Cependant, cette quantité peut également se calculer directement à partir de sa définition (4.19) et de la première équation d'état (4.14) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} = (1-f)\,\mathbb{C}_{iso} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s + (1-f)\left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{k}\tau\right) \tag{4.26}$$

puisque la température et la précontrainte microscopique $\boldsymbol{\sigma}^0$ ont été supposées constantes. Cette seconde écriture de la contrainte macroscopique combinée à la première équation d'état (4.25) et aux définitions (4.24) permet d'aboutir à :

$$(1-f)\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \mathbb{S}_{iso} : \left(\mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} - \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom}\tau - (1-f)\left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{k}\tau\right)\right) \tag{4.27}$$

En introduisant une quantité qui sera récurrente tout au long de cette étude :

$$\mathcal{S} = (1-f)\,\mathbb{S}_{iso} - \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_{iso} \tag{4.28}$$

et en utilisant la symétrie majeure de $\mathbb{S}_{iso}$, une expression plus compacte de la moyenne des déformations microscopiques dans la matrice solide est obtenue :

$$(1-f)\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} + \boldsymbol{k} : \mathcal{S}\tau \tag{4.29}$$

Avec l'expression obtenue (4.29), il est possible de s'intéresser désormais à la seconde équation d'état macroscopique. Celle-ci est obtenue lorsque la définition de l'entropie volumique macroscopique (4.19) est exploitée :

$$S = (1-f)\,\overline{s}^s = (1-f)\,s^0 + (1-f)\,c\tau + (1-f)\,\boldsymbol{k} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s \tag{4.30}$$

où la seconde équation d'état (4.14) a été utilisée. Le terme de moyenne de la déformation microscopique sur la matrice solide ayant été obtenu précédemment et donné en (4.29), il vient :

$$S = (1-f)\,s^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} + \left((1-f)\,c + \boldsymbol{k} : \mathcal{S} : \boldsymbol{k}\right)\tau + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} \tag{4.31}$$

En reconnaissant la quantité macroscopique $\boldsymbol{K}$ définie par (4.24) et en introduisant deux dernières grandeurs également macroscopiques :

$$S^{res} = (1-f)\,s^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} \quad , \quad C = (1-f)\,c + \boldsymbol{k} : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} \tag{4.32}$$

la densité volumique macroscopique d'entropie se met sous la forme agréable :

$$S = S^{res} + C\tau + \boldsymbol{K} : \boldsymbol{E} \tag{4.33}$$

qui correspond à la seconde équation d'état macroscopique. La remarque formulée à propos de $\boldsymbol{\Sigma}^{res}$ s'applique également à S^{res}. Cette dernière quantité ne correspond effectivement pas à la densité d'entropie dans l'état sain puisque celle-ci s'exprimerait simplement s^0. Ainsi, un terme additionnel traduisant à la présence des microfissures dans un milieu précontraint est ajouté pour former S^{res}. Enfin, il est à noter que les deux équations d'état macroscopiques (4.25) et (4.33) possèdent la symétrie de Maxwell ce qui garantit le fait qu'elles dérivent d'un potentiel.

4.3.6 Densité volumique macroscopique d'énergie interne dans un processus endommageant

La dernière étape pour pouvoir s'exprimer sur la densité d'énergie interne contenue dans un élément de volume élémentaire macroscopique totalement endommagé est d'homogénéiser la densité microscopique correspondante. Pour ce faire, le point de départ est l'expression de la densité volumique microscopique d'énergie libre donnée en (4.15). En utilisant les lois de comportement microscopiques (4.14), celle-ci se réécrit sous la forme agréable :

$$\psi = \psi^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}s\tau - \frac{1}{2}s^0\tau \tag{4.34}$$

L'énergie interne est obtenue à partir de l'énergie libre ψ par la transformée de Legendre :

$$u = \psi + Ts = \psi + T^0 s^0 + \tau\left(s - s^0\right) + T^0\left(s - s^0\right) + \tau s^0 \tag{4.35}$$

Par conséquent, l'énergie interne se met sous la forme :

$$u = u^0 + T^0\left(s - s^0\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\tau\left(s - s^0\right) \tag{4.36}$$

Cette expression de l'énergie interne peut être déstabilisante puisqu'elle mélange les jeux de variables thermodynamiques. Cependant, elle reste très agréable pour pouvoir procéder à un processus d'homogénéisation. Soit en effet U la densité volumique macroscopique d'énergie interne définie par :

$$\begin{aligned} U &= (1-f)\,\overline{u}^s \\ &= (1-f)\,u^0 + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) + (1-f)\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s + (1-f)\,\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}^s + \frac{1}{2}\tau\left(S - (1-f)\,s^0\right) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Puisque les contraintes microscopiques $\boldsymbol{\sigma}$ sont à divergence nulles sur l'ensemble du VER et que les déformations microscopiques $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont cinématiquement admissibles avec des déformations uniformes sur le bord, le lemme de Hill permet d'écrire :

$$(1-f)\,\overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}^s = \overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} \tag{4.38}$$

Ainsi, en utilisant la relation (4.29) et la loi de comportement macroscopique (4.25), la densité volumique macroscopique d'énergie interne s'écrit :

$$\begin{aligned} U = \quad & (1-f)\,u^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{res} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} \\ & + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{k} : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{K} : \boldsymbol{E} + S - (1-f)\,s^0\right)\tau + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

En utilisant la seconde équation d'état macroscopique (4.33) ainsi que la définition des quantités $\boldsymbol{\Sigma}^{res}$ et S^{res} (voir (4.24) et (4.32)), la densité d'énergie interne macroscopique se réécrit en fonction de ses variables naturelles $\boldsymbol{E}$ et S :

$$\begin{aligned} U = \quad & (1-f)\,u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) + \frac{1}{2C}\left(S - S^{res} - \boldsymbol{K} : \boldsymbol{E}\right)^2 \\ & + \boldsymbol{\Sigma}^{res} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{4.40}$$

qui peut encore se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} U = \quad & (1-f)\,u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) + \frac{1}{2C}\left(S - S^{res}\right)^2 \\ & + \boldsymbol{\Sigma}^{res} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \left(\mathbb{C}^{hom} + \frac{1}{C}\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{K}\right) : \boldsymbol{E} - \frac{S - S^{res}}{C}\boldsymbol{K} : \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{4.41}$$

pour être plus proche de (4.9). Bien que comparable, l'énergie interne d'un milieu sain et celle d'un milieu endommagé présente des différences notables. Par exemple, il apparait naturellement la différence $S - S^{res}$ qui n'est pas égale à $S - (1-f)\,s^0$. La présence d'une précontrainte $\boldsymbol{\sigma}^0$ dans le milieu microscopique est révélatrice puisque toutes les différences obtenues viennent de la présence de ce terme. L'explication vient de l'introduction de surfaces libres de contraintes dans un milieu précontraint, conduisant donc a priori à un état non statiquement admissible dans son état de référence avec les microfissures. L'expression (4.41) est très intéressante puisqu'elle permet d'établir proprement l'expression de l'énergie interne dans un processus endommageant. Son intérêt est qu'elle permet de détailler quelles sont les quantités qui sont affectées par le processus d'endommagement. Comme précisé plus haut, l'influence du paramètre d'endommagement se cache en fait dans la dépendance de $\mathbb{C}^{hom}$ vis-à-vis de d et qui donc impacte $\boldsymbol{K}$ et $\mathcal{S}$.

Un exercice intéressant consiste à vérifier si cette expression de l'énergie interne U permet de retrouver la densité initiale saine. L'état sain correspond à un état sans microfissure. Par conséquent, l'élasticité macroscopique $\mathbb{C}^{hom}$ doit tout simplement être égale à l'élasticité microscopique $\mathbb{C}_{iso}$. De plus, il ne faut pas oublier que f est en toute rigueur égale à 0. Par conséquent, (4.33) donne de manière immédiate la nullité de $\mathcal{S}$ et les simplifications suivantes sont à considérer :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{res} = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad , \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{k} \quad , \quad S^{res} = s^0 \quad , \quad C = c \tag{4.42}$$

Avec ces remarques, il est immédiat que :

$$U^{sain} = u^0 + T^0\left(S - s^0\right) + \frac{1}{2c}\left(S - s^0\right)^2 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}_{ad} : \boldsymbol{E} - \frac{S - s^0}{c}\boldsymbol{k} : \boldsymbol{E} \tag{4.43}$$

qui correspond bien en tout point à l'énergie interne du milieu sain (4.9).

4.3.7 Densité volumique macroscopique d'énergie interne totalement endommagée

Rappelons que nous avons choisi de représenter la fissure tridimensionnelle comme un milieu initialement élastique totalement endommagé. Pour pouvoir accéder à l'expression de l'énergie interne contenue dans un volume élémentaire macroscopique totalement endommagé, notée U^{FD}, il est nécessaire de définir à quoi correspond un tel état. L'image naturelle associée à un état totalement endommagé correspond à une situation présentant un niveau de micro-fissuration tel que l'élasticité macroscopique est annulée. En d'autre terme, cela

correspond à une situation où $\mathbb{C}^{hom} = 0$. Cette définition d'un état totalement endommagé est bien celle utilisée habituellement. Par conséquent, dans un état totalement endommagé, il vient notamment :

$$\mathbb{C}^{hom} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma}^{res} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{0} \quad , \quad \mathcal{S} = (1-f)\,\mathbb{S}_{iso} \tag{4.44}$$

De même, les expressions de C et S^{res} sont également affectées :

$$S^{res} = (1-f)\,s^0 - (1-f)\,\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k} \qquad , \qquad C = (1-f)\,c + (1-f)\,\boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k} \tag{4.45}$$

Par conséquent, la densité d'énergie interne s'écrit :

$$\begin{aligned} U^{FD} = \quad & (1-f)\,u^0 - (1-f)\,\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) \\ & + \frac{1}{2C}\left(S - (1-f)\,s^0 + (1-f)\,\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

En se rappelant que le paramètre f est en fait égal à zéro puisque les fissures ont une fraction volumique nulle, il vient :

$$U^{FD} = u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\left(S - s^0\right) + \frac{1}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)}\left(S - s^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)^2 \tag{4.47}$$

Comme précisé précédemment, la nucléation est un phénomène brutal qui pousse à considérer que le processus de propagation dynamique de la fissure se fait de manière adiabatique. Par conséquent, les échanges de chaleur étant nuls entre le VER et le monde extérieur, la différence d'entropie volumique macroscopique entre l'état sain et l'état totalement endommagé correspond uniquement à de l'entropie créée $\delta S_{créée}$. Par conséquent, le niveau d'énergie interne dans un volume macroscopique élémentaire totalement endommagé s'écrit :

$$U^{FD} = u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)^2}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} \tag{4.48}$$

4.3.8 Indépendance du chemin suivi

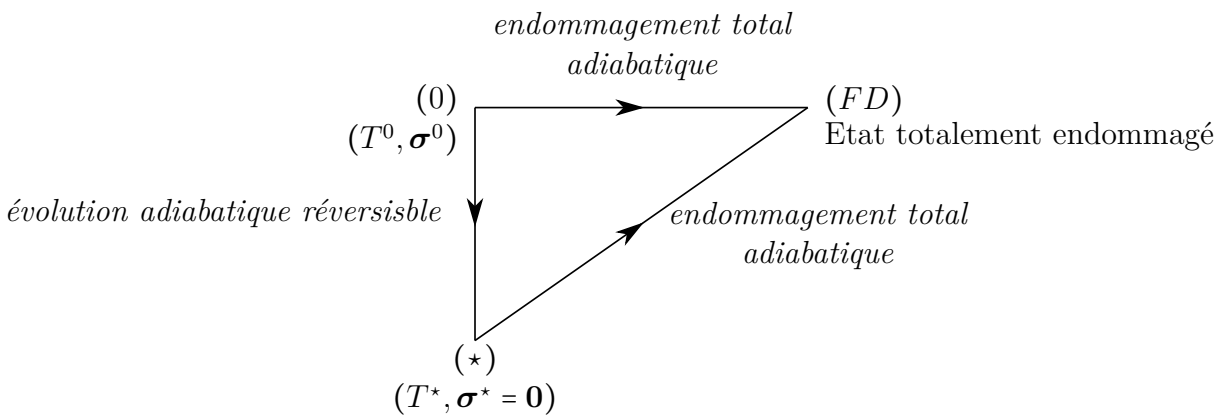

FIGURE 4.5 – Différents chemins permettant d'arriver à un état totalement endommagé

Une vérification intéressante consiste à tester si la formule (4.48) est cohérente avec le statut de fonction d'état de l'énergie interne. En d'autres termes, il est intéressant de tester la robustesse de l'expression proposée à une propriété d'indépendance du chemin emprunté.

Soit l'état (0), dont les quantités seront repérées par l'exposant 0, associé à une température T^0, une contrainte $\boldsymbol{\sigma}^0$, une densité volumique d'entropie s^0 et une densité volumique

d'énergie interne u^0. Une évolution adiabatique et totalement endommageante vers un état (FD) est envisagée. S'agissant d'un chemin purement dissipatif du point de vue de l'entropie, la variation de cette dernière quantité entre l'état (0) et l'état (FD) est notée $\delta S_{créée}$. Le niveau d'énergie interne dans l'état noté (FD) s'exprime simplement par le biais de la relation (4.48).

Soit $(\star)$ un état non précontraint, initialement à la température $T^\star$ et accessible depuis l'état (0) par le biais d'une transformation adiabatique réversible. Une telle évolution étant isentropique, la densité volumique d'entropie initiale présente dans l'état $(\star)$ est donc également s^0. Ainsi, la variation d'entropie entre l'état $(\star)$ et l'état (FD) est égale à celle existant entre l'état (0) et l'état (FD). En d'autres termes, il s'agit rigoureusement de $\delta S_{créée}$. La densité volumique d'énergie interne initialement présente est notée $u^\star$. En empruntant le chemin $(\star)$ vers (FD), l'expression (4.48), étant générale, indique que le niveau d'énergie interne dans l'état (FD) s'écrit :

$$U^{FD} = u^\star + T^\star \left(\delta S_{créée}\right) + \frac{1}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} \left(\delta S_{créée}\right)^2 \tag{4.49}$$

Tout l'enjeu est de montrer que les deux expressions (4.48) et (4.49) sont bien cohérentes entre-elles. L'évolution de (0) vers $(\star)$ se faisant de manière isentropique, il vient :

$$0 = s^\star - s^0 = c\left(T^\star - T^0\right) + \boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star \tag{4.50}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_0^\star$ est le niveau de déformation entre l'état (0) et l'état $(\star)$. Le niveau de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^\star$ étant nul, une seconde relation est :

$$0 = \boldsymbol{\sigma}^\star = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}_{iso} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star - \boldsymbol{k}\left(T^\star - T^0\right) \tag{4.51}$$

En combinant les relations (4.50) et (4.51), l'écart de température ainsi que la déformation s'écrivent :

$$T^\star - T^0 = \frac{\boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0}{c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star = \frac{\boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0}{c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}} \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k} - \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 \tag{4.52}$$

La variation de la densité volumique d'énergie libre entre l'état (0) est $(\star)$ s'exprime comme :

$$\psi^\star = \psi^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_0^\star : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star - \left(T^\star - T^0\right)\boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star - \frac{c}{2}\left(T^\star - T^0\right)^2 - s^0\left(T^\star - T^0\right) \tag{4.53}$$

De plus, la densité volumique d'énergie interne dans l'état $(\star)$ s'obtient par :

$$u^\star = \psi^\star + s^\star T^\star = u^\star + s^0\left(T^\star - T^0\right) \tag{4.54}$$

Par conséquent, la variation de densité volumique d'énergie interne s'écrit :

$$u^\star = u^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^\star : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star - \left(s^\star - s^0\right)\left(T^\star - T^0\right) = u^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0^\star \tag{4.55}$$

Grâce à la relation (4.52), cette densité se reformule comme :

$$u^\star = u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{\left(\boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0\right)^2}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} \tag{4.56}$$

A partir de l'expression (4.49) de U^{FD} et en injectant la relation précédente, il vient :

$$U^{FD} = u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^\star \delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0\right)^2}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} - \frac{\boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0}{c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}} \delta S_{créée} \tag{4.57}$$

Enfin, la relation (4.52) permet de reconnaître le groupement $-(T^\star - T^0)$. Par conséquent, par le biais du chemin partant de l'état (0) et en allant vers l'état (FD) en passant par $(\star)$, la variation d'énergie interne volumique s'écrit :

$$U^{FD} = u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0 \delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0\right)^2}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} \tag{4.58}$$

qui correspond exactement à l'écriture (4.48) de la quantité U^{FD}. Ceci finit de conclure quant à l'indépendance de la formule (4.48) par rapport au chemin choisi, formule permettant d'obtenir le niveau d'énergie interne au terme d'un processus totalement endommageant.

4.3.9 Bilan et dissipation

Le modèle de fissure établi reposant sur un processus d'endommagement traduisant l'apparition de microfissures a permis d'établir au point de vue macroscopique les lois de comportement suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Sigma}^{res}(d) + \left(\mathbb{C}^{hom}(d) + \dfrac{1}{C(d)}\boldsymbol{K}(d) \otimes \boldsymbol{K}(d)\right) : \boldsymbol{E} - \dfrac{(S - S^{res}(d))}{C(d)}\boldsymbol{K}(d) \\ T &= T^0 + \dfrac{S - S^{res}(d)}{C(d)} - \dfrac{1}{C(d)}\boldsymbol{K}(d) : \boldsymbol{E} \end{cases} \tag{4.59}$$

qui est le pendant endommageable de (4.10). Certains éléments de cette formulation méritent d'être soulignés, comme par exemple la dépendance de $\boldsymbol{\Sigma}^{res}$ et de S^{res} vis à vis du paramètre d'endommagement d. Toutefois, le fait que $\boldsymbol{\Sigma}^{res}$ soit nul lorsque l'endommagement est total est rassurant puisque cela conduit bien au fait que le niveau de contrainte est lui même nul, propriété qui n'aurait pas été vérifiée sans la dépendance en d de ce terme. Avec l'expression (4.41) de l'énergie interne U pour un niveau d'endommagement donné, il est possible d'établir les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{E}} \quad , \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \tag{4.60}$$

Par conséquent, l'inégalité de Clausius-Duhem (4.8) exprimée à l'échelle du VER permet de conclure :

$$D = -\frac{\partial U}{\partial d}\dot{d} \geq 0 \tag{4.61}$$

Le raisonnement classique consiste à écrire le critère d'endommagement comme une inégalité sur la force thermodynamique macroscopique liée à l'endommagement, inégalité devant être saturée pour que d puisse augmenter :

$$-\frac{\partial U}{\partial d} = g_c \tag{4.62}$$

4.4 Thermodynamique à l'échelle macroscopique

Nous nous plaçons à présent à l'échelle macroscopique qui est celle de la structure considérée. Pour simplifier un peu le propos, le volume fissurée $\mathcal{L}_\epsilon$ sera supposé pouvoir être paramétré par une longueur $\ell(t)$ dépendant du temps. L'absence de fissure présente initialement dans le milieu considéré se traduit par $\ell(0) = 0$. Avec la représentation tridimensionnelle de la fissure donnée Section 4.3, il est possible de partitionner le domaine total Ω^0 en deux sous-ensembles :

$$\Omega^0 = \Omega(\ell) \cup \mathcal{L}_\epsilon \tag{4.63}$$

La région $\Omega(\ell)$ correspond donc au complémentaire la zone fissurée dans le domaine total Ω^0. La propriété intéressante de $\Omega(\ell)$ est que chacun de ses sous-systèmes connait une évolution parfaitement réversible. Cette région de l'espace sera désignée comme étant le *bulk* en référence au fait qu'il s'agit du cœur de la structure. Si U_{tot} correspond à l'énergie interne totale stockée dans Ω^0, le caractère extensif de cette quantité permet d'écrire :

$$U_{tot} = U_{bulk} + U_{\mathcal{L}_\epsilon} \tag{4.64}$$

Dans ce contexte, U_{bulk} n'est autre que l'énergie interne du milieu macroscopique dans lequel une fissure pré-existe. Les considérations précédentes ont justement permis détailler ces deux termes. En effet, si U_{bulk} se calcule par intégration de la densité volumique d'énergie interne u du milieu sain proposée en (4.12), la quantité $U_{\mathcal{L}_\epsilon}$ se calcule par intégration de U^{FD} proposée en (4.48) :

$$U_{\mathcal{L}_\epsilon} = \int_{\mathcal{L}_\epsilon} U^{FD} dV \tag{4.65}$$

Les notations employées méritent quelques éclaircissements. Si U_{tot} et U_{bluk} correspondent à une énergie interne, U^{FD} désigne lui la densité volumique d'énergie interne dans la région $\mathcal{L}_\epsilon$. Cette densité étant obtenue au terme d'un processus d'homogénéisation, une notation majuscule a été retenue (voir Sous-section 4.3.7).

En pratique, il est plus agréable de manipuler la modélisation surfacique de la fissure $\mathcal{F}$ (elle aussi paramétrée par ℓ) par rapport à la modélisation tridimensionnelle $\mathcal{L}_\epsilon$. En effet, c'est par exemple bien une telle représentation qui est utilisée lors des calculs par éléments finis d'objets de type taux de restitution d'énergie. Par conséquent, il sera préféré à (4.63) et (4.64) les définitions suivantes :

$$\Omega^0 = \Omega(\ell) \cup \mathcal{F} \tag{4.66}$$

ainsi que :

$$U_{tot} = U_{bulk} + U_{\mathcal{F}} \tag{4.67}$$

Pour autant, la représentation idéalisée de la fissure par $\mathcal{F}$ n'a de sens que comme équivalent bidimensionnel de l'objet tridimensionnel $\mathcal{L}_\epsilon$. Par conséquent, la quantité $U_{\mathcal{F}}$ est rigoureusement égale à $U_{\mathcal{L}_\epsilon}$:

$$U_{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{L}_\epsilon} U^{FD} dV \tag{4.68}$$

Il peut paraitre surprenant de calculer une énergie interne correspondant à un objet surfacique par le biais d'une densité volumique. La clé de compréhension se trouve dans la remarque précédente. Une fissure surfacique n'est qu'une traduction mathématique idéalisée d'un objet tridimensionnel dont l'épaisseur est petite à l'échelle macroscopique mais n'est pas pour autant nulle. De manière générale, la notion d'infiniment petit à l'échelle macroscopique correspond en fait à des quantités certes petites mais ne pouvant pas descendre en dessous de la taille caractéristique du VER, c'est à dire devant la taille des hétérogénéités du milieu considéré. Nous verrons tout de même qu'il est possible d'exhiber une densité surfacique permettant de calculer $U_{\mathcal{F}}$ tout en étant cohérente avec (4.68).

Ainsi, l'approche thermodynamique sur le point d'être menée se basera sur les notations (4.66) et (4.67) mais les considérations tenues ci-dessus doivent être gardées en mémoire.

4.4.1 Premier principe de la thermodynamique

Dans ce qui suit, un raisonnement thermodynamique sera tenu sur l'ensemble de la structure correspondant à Ω^0. Le chargement du système sera défini à partir de trois scalaires notés $\mathcal{C}_\xi(t)$, $\mathcal{C}_F(t)$ et $\mathcal{C}_T(t)$ dépendant du temps. Ainsi, la densité massique de forces à distance

s'exerçant sur le système s'écrit $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) = \mathcal{C}_F(t)\boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{x})$ où $\boldsymbol{x}$ est le vecteur position. En scindant la frontière $\partial\Omega(\ell)$ en une partie indépendante de ℓ et du temps notée $\partial\Omega_0 = \partial\Omega^T \cup \partial\Omega^\xi$ et les lèvres de la fissure $\mathcal{F}(\ell) = \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$ évoluant au cours du processus de propagation, les conditions aux limites portant sur le vecteur contrainte $\boldsymbol{T}$ et le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ se mettent sous la forme :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega^T \quad : \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t) = \mathcal{C}_T(t)\boldsymbol{T}^0(\boldsymbol{z}) \qquad , \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega^\xi \quad : \quad \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t) = \mathcal{C}_\xi(t)\boldsymbol{\xi}^0(\boldsymbol{x}) \tag{4.69}$$

Les lèvres de la fissure ne sont pas forcément libres de contraintes afin de pouvoir considérer le mode II. La normale unitaire à la lèvre $\mathcal{F}^+$ (resp. $\mathcal{F}^-$) est noté $\boldsymbol{N}$ (resp. $-\boldsymbol{N}$).

Soit K l'énergie cinétique du système considéré. En conditions adiabatiques, le premier principe se met sous la forme :

$$\dot{U}_{tot} + \dot{K} = \mathcal{P}_e \tag{4.70}$$

où $\mathcal{P}_e$ correspond à la puissance des efforts extérieurs agissant sur Ω^0 et s'écrivant :

$$\mathcal{P}_e = \int_{\Omega^0} \rho \boldsymbol{F}.\dot{\boldsymbol{\xi}} dV + \int_{\partial\Omega(\ell)} \boldsymbol{T}.\dot{\boldsymbol{\xi}} dA \tag{4.71}$$

Avec les notations introduites précédemment, cette quantité se réécrit [1] :

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{C}_F(t) \int_{\Omega(\ell)} \rho \boldsymbol{F}^0.\dot{\boldsymbol{\xi}} dV + \mathcal{C}_T(t) \int_{\partial\Omega^T} \boldsymbol{T}^0.\dot{\boldsymbol{\xi}} dA + \dot{\mathcal{C}}_\xi(t) \int_{\partial\Omega^\xi} \boldsymbol{T}.\boldsymbol{\xi}^0 dA \tag{4.72}$$

Dans le premier principe (4.70), U_{tot} correspond à l'énergie interne stockée dans $\Omega(\ell) \cup \mathcal{F}$ à l'instant t. Le champ de déplacement solution, à ce même instant t, du problème avec une géométrie définie par une fissure de longueur $\ell(t)$ et un chargement $\mathcal{C}(t)$ s'écrit $\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}(\mathcal{C}(t), \ell(t))$. Ainsi, en plus du chargement, un autre paramètre du problème dépendant du temps est la longueur de fissure $\ell(t)$. A ce stade, il est utile d'introduire la notion de dérivée partielle temporelle d'une quantité physique a à géométrie de fissure fixée :

$$\dot{a}_{|\ell} = \frac{\partial a}{\partial \mathcal{C}}_{|\ell} \dot{\mathcal{C}} \tag{4.73}$$

Avec ces définitions, le champ de vitesse $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ intervenant dans les intégrales de (4.72) peut se décomposer comme étant la somme de deux termes :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\boldsymbol{\xi}}_{|\ell} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \ell}_{|\mathcal{C}} \dot{\ell} \tag{4.74}$$

Cette formulation, une fois introduite dans (4.72), conduit à décomposer en deux termes la puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_{e|\ell} + \mathcal{P}_{e|\mathcal{C}} \tag{4.75}$$

Dans (4.75), $\mathcal{P}_{e|\ell}$ correspond à la puissance des efforts extérieurs à géométrie fixée :

$$\mathcal{P}_{e|\ell} = \left(\mathcal{C}_F(t) \int_{\Omega(\ell)} \rho \boldsymbol{F}^0.\dot{\boldsymbol{\xi}}_{|\ell} dV + \mathcal{C}_T(t) \int_{\partial\Omega^T} \boldsymbol{T}^0.\dot{\boldsymbol{\xi}}_\ell dA\right) + \dot{\mathcal{C}}_\xi(t) \left(\int_{\partial\Omega^\xi} \boldsymbol{T}.\boldsymbol{\xi}^0 dA\right) \tag{4.76}$$

La géométrie étant fixée, il est tout à fait légitime de faire appel au principe des puissances virtuel. Ce dernier stipule que la puissance des quantités d'accélération se sépare en deux

1. Dans l'intégrale de volume de (4.72), $\Omega(\ell)$ peut au besoin être remplacé par Ω^0

termes que sont la puissance des efforts intérieurs ainsi que la puissance des efforts extérieurs. Ce principe peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{P}_{e|\ell} - \dot{K}_{|\ell} = \int_{\Omega(\ell)} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{|\ell} dV \tag{4.77}$$

En se basant sur les considérations thermodynamiques locales du milieu élastique linéaire réversible, les équations d'état (4.10) impliquent :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{|\ell} = \dot{u}_{|\ell} - \frac{\partial u}{\partial s} \dot{s}_{|\ell} \tag{4.78}$$

où u correspond à la densité volumique d'énergie interne. L'évolution considérée étant réversible lorsque ℓ est fixé et les conditions étant localement adiabatiques, il s'agit en fait d'une évolution isentropique. Cela se traduit par le fait que $\dot{s}_{|\ell} = 0$. Par conséquent, une intégration de (4.78) couplée avec (4.75) conduit à :

$$\mathcal{P}_{e|\ell} - \dot{\mathcal{K}}_{|\ell} = \dot{U}_{tot|\ell} \tag{4.79}$$

Cette dernière équation permet de simplifier (4.70) qui se met alors sous la forme :

$$\mathcal{P}_{e|\mathcal{C}} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{C}}_{|\mathcal{C}} \dot{\ell} = \frac{\partial U_{tot}}{\partial \ell}_{|\mathcal{C}} \dot{\ell} \tag{4.80}$$

La quantité $\mathcal{P}_{e|\mathcal{C}}$ s'interprète comme la puissance des efforts extérieurs durant la propagation de la fissure à chargement constant :

$$\mathcal{P}_{e|\mathcal{C}} = \left(\mathcal{C}_F(t) \int_{\Omega(\ell)} \rho \boldsymbol{F}^0 . \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \ell}_{|\mathcal{C}} dV + \mathcal{C}_T(t) \int_{\partial\Omega^T} \boldsymbol{T}^0 . \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \ell}_{|\mathcal{C}} dA \right) \dot{\ell} \tag{4.81}$$

En introduisant le travail des efforts extérieurs donnés noté $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ et défini par :

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{C}_F(t) \int_{\Omega(\ell)} \rho \boldsymbol{F}^0 . \boldsymbol{\xi} dV + \mathcal{C}_T(t) \int_{\partial\Omega^T} \boldsymbol{T}^0 . \boldsymbol{\xi} dA \tag{4.82}$$

il vient de manière immédiate :

$$\mathcal{P}_{e|\mathcal{C}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}_{|\ell} \dot{\ell} \tag{4.83}$$

Un combinaison de (4.80) et (4.83) donne une relation :

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left(U_{tot} + K - \Phi \right)_{|\mathcal{C}} = 0 \tag{4.84}$$

qui est une propriété de conservation au cours du processus de nucléation sous chargement constant.

4.4.2 Énergie interne d'une structure fissurée

Toutes les considérations tenues précédemment ont été faites en anticipation de la propriété (4.84), et ce, afin de pouvoir l'exploiter. Rappelons en effet que les expressions (4.67) et (4.68) mènent à :

$$U_{tot} = U_{bulk} + \int_{\mathcal{L}_\epsilon} U^{FD} dV \tag{4.85}$$

Les considérations tenues Section 4.3 ont montré que la densité volumique d'énergie interne au sein de la zone fissurée $\mathcal{L}_\epsilon$ se mettait sous la forme (4.48). En tant que mesure du désordre

créé localement lorsque les liaisons matériau sont rompues, la quantité $\delta S_{créée}$ ne dépend pas du volume élémentaire choisi au sein de $\mathcal{L}_\epsilon$. Ainsi, il apparait naturel dans ce cadre de prendre un modèle où $\delta S_{créée}$ est une constante matériau. Sous réserve de l'homogénéité macroscopique de $\boldsymbol{\sigma}^0$, U^{FD} est également constant ce qui mène à :

$$\begin{aligned} U_{tot} &= U_{bulk} + \epsilon \mathcal{S}(\mathcal{F}) U^{FD} \\ U_{tot} - U^0_{tot} &= \left(U_{bulk} - U^0_{bulk}\right) + \epsilon \mathcal{S}(\mathcal{F}) \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0 \delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)^2}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} \right) \end{aligned} \tag{4.86}$$

où $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ est la surface associée à la fissure limite bidimensionnelle. Par conséquent, il vient :

$$-\frac{\partial}{\partial \ell}\left(U_{bulk} - U^0_{bulk} + K - \Phi\right)_{|\mathcal{C}} = \epsilon \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0 \delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)^2}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} \right) \tag{4.87}$$

Par conséquent, ϵ étant également une constante matériau révélatrice de la taille des hétérogénéités, le groupement $\epsilon \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0 \delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)^2}{2\left(c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}\right)} \right)$ apparait comme une constante dépendant des conditions initiales. Cette constante est notée G_c^{ad} :

$$-\frac{\partial}{\partial \ell}\left(U_{bulk} - U^0_{bulk} + K - \Phi\right)_{|\mathcal{C}} = G_c^{ad} \tag{4.88}$$

Le fait que G_c^{ad} dépende des conditions initiales, via T^0 ainsi que $\boldsymbol{\sigma}^0$ n'a rien de surprenant. Dans le cas isotherme, cette dépendance n'est pas explicitée mais est bien implicite au raisonnement mené puisque les potentiels énergétiques utilisés sont tous des développements limités autour de l'état de référence.

Il est à noter que (4.88) est extrêmement proche de son équivalent isotherme à ceci près que l'énergie libre a été remplacée par l'énergie interne. Puisque le matériau dans le *bulk* connait une évolution adiabatique réversible, celle-ci est donc isentropique. La quantité U_{bulk} se calcule par intégration sur $\Omega(\ell)$ (au sens (4.66)) de la densité volumique d'énergie interne (4.12).

$$U_{bulk} - U^0_{bulk} = W_{ad} = \int_{\Omega(\ell)} \left(\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^0_{ad} : \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV \tag{4.89}$$

qui s'interprète comme un terme d'énergie élastique calculé avec $\mathbb{C}_{ad}$.

Concrètement, il s'agit effectivement donc bien de manipuler un taux de variation d'énergie potentielle et donc un objet de type G ou G_{inc} à la différence près que le terme d'énergie élastique est calculé avec les constantes élastiques adiabatiques $\mathbb{C}_{ad}$ plutôt que celles isothermes $\mathbb{C}_{iso}$. Toutefois, le membre de droite de (4.88) est issu du terme d'énergie interne de la bande $\mathcal{L}_\epsilon$. Il s'agit là d'une différence notable avec le raisonnement usuel isotherme portant sur l'énergie libre. Sur le plan physique, cette différence s'explique par le fait qu'une fissure isotherme est dépourvue d'énergie libre tandis qu'une fissure adiabatique est bien le siège d'une énergie interne qui rend compte de la dissipation associée à l'entropie créée.

4.4.3 Simplifications et état de référence

Rappelons à nouveau que le paramètre ϵ n'est pas destiné, pour le modèle bâti, à tendre vers 0. Cependant, ϵ a tout de même vocation à être petit. Les termes $-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{\sigma}^0$ et $\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}$ étant eux parfaitement bornés sont donc d'un ordre de grandeur inférieur par rapport aux autres termes. Une fois multiplié par ϵ, il se comportent comme des $O(\epsilon)$ et

sont donc évanescents pour des faibles épaisseurs de fissure :

$$\epsilon\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0:\mathbb{S}_{iso}:\boldsymbol{\sigma}^0+T^0\delta S_{créée}+\frac{\left(\delta S_{créée}+\boldsymbol{\sigma}^0:\mathbb{S}_{iso}:\boldsymbol{k}\right)^2}{2\left(c+\boldsymbol{k}:\mathbb{S}_{iso}:\boldsymbol{k}\right)}\right)\simeq\epsilon\left(T^0\delta S_{créée}+\frac{\delta S_{créée}{}^2}{2\left(c+\boldsymbol{k}:\mathbb{S}_{iso}:\boldsymbol{k}\right)}\right) \tag{4.90}$$

Néanmoins, comme déjà précisé plus haut, il est utile de donner une représentation bidimensionnelle à l'objet tridimensionnel $\mathcal{L}_\epsilon$. Pour définir des grandeurs surfaciques cohérentes, il est intéressant de se pencher de plus près sur les quantités $\delta S_{créée}$, qui est l'entropie volumique créée, et $C = c + \boldsymbol{k} : \mathbb{S}_{iso} : \boldsymbol{k}$, qui correspond à une capacité thermique volumique divisée par une température. Si, en l'absence d'échange de chaleur, l'entropie créée est une quantité extensive [2], il en va de même pour la capacité thermique qui correspond à l'énergie qu'il faut apporter à un corps pour augmenter sa température d'1 K. Il s'agit donc bien également d'une grandeur extensive. Si le volume endommagé $\mathcal{L}_\epsilon$ est représenté par une surface

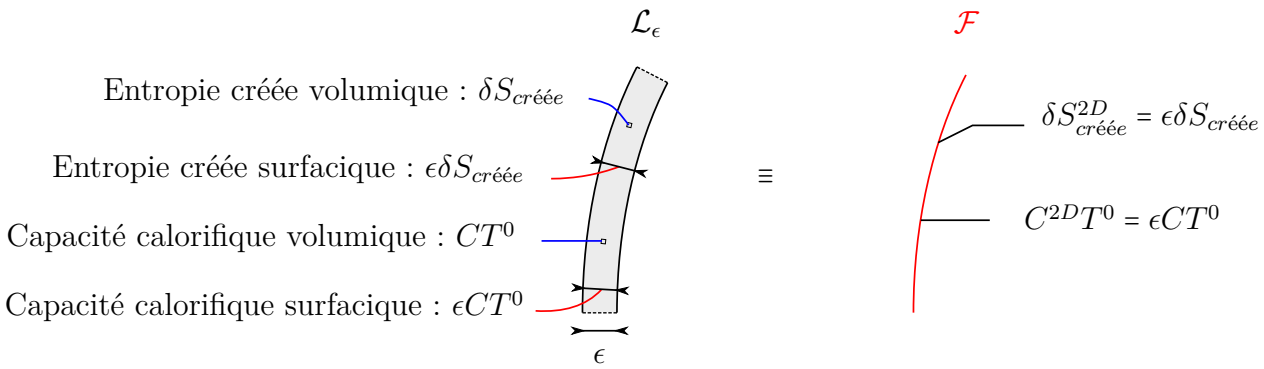

FIGURE 4.6 – Détail de la fissure équivalente surfacique de type Griffith

$\mathcal{F}$, il est possible d'introduire une notion d'entropie créée surfacique $\delta s^{2D}_{créée}$ et d'une capacité thermique surfacique $C^{2D}T^0$. Avec les considérations synthétisées à la Figure 4.6, il apparait que la définition de ces deux quantités implique :

$$\delta S^{2D}_{créée} = \epsilon\delta S_{créée} \qquad , \qquad C^{2D} = \epsilon C \tag{4.91}$$

Par conséquent, il vient :

$$\epsilon\left(T^0\delta S_{créée}+\frac{\delta S_{créée}{}^2}{2C}\right)=T^0\delta S^{2D}_{créée}+\frac{\delta S^{2D}_{créée}{}^2}{2C^{2D}} \tag{4.92}$$

En prenant en compte ces considérations dans (4.84), il vient :

$$-\frac{\partial}{\partial\ell}\left(U_{bulk}-U^0_{bulk}+K-\Phi\right)_{|\mathcal{C}}=\epsilon\left(T^0\delta S_{créée}+\frac{\delta S_{créée}{}^2}{2C}\right)=T_0\delta S^{2D}_{créée}+\frac{\delta S^{2D}_{créée}{}^2}{2C^{2D}} \tag{4.93}$$

En conclusion, il est possible de donner une image bidimensionnelle d'une fissure et aboutissant à une formule cohérente avec celle tridimensionnelle. En particulier, il est possible de définir une densité surfacique d'énergie interne de sorte à ce que $U_\mathcal{F}$ dans (4.67) en soit l'intégrale sur la surface $\mathcal{F}$.

2. En l'absence d'échange de chaleur, l'entropie créée est en effet égale à l'entropie qui est bien une grandeur extensive

4.4.4 Lien avec la notion de dissipation

Classiquement le raisonnement thermodynamique de la propagation d'une fissure (et généralement de la nucléation d'une fissure) se fait en conditions isothermes. Dans ce cadre, l'inversibilité est mesurée non pas par l'entropie créée mais par la dissipation. Cela conduit à un modèle introduisant une constante du matériau allant de paire avec cette quantité [3] qui est g_c et non $\delta S_{créée}$. Cependant, d'un point de vue théorique, à température constante, il est clair qu'il est équivalent de recourir à la dissipation ou à l'entropie créée. En effet, lorsque la fissure se propage de $d\ell$, la dissipation vaut $g_c \times d\ell \times \epsilon \times 1$ où 1 correspond à la direction hors plan (il a été admis que la fissure était paramétrée par ℓ). Étant par définition également égale à $T_0 \delta S_{créée} \times d\ell \times \epsilon \times 1$, il vient :

$$g_c = T_0 \delta S_{créée} \tag{4.94}$$

Par conséquent, en conditions isothermes, il est rigoureusement équivalent de bâtir la modélisation des matériaux endommageables avec l'une ou l'autre des constantes du matériaux que sont $\delta S_{créée}$ et g_c. Cela n'a rien de surprenant étant donné que, dans ce cadre, les notions d'entropie créée et de dissipation sont reliées l'une à l'autre par le biais d'une température T_0, quantité constante par hypothèse.

Il est naturel de se demander comment travailler avec la notion de dissipation en conditions adiabatiques. Pour ce faire, il est nécessaire de remonter à la définition de la dissipation qui est $D = T\mathring{s}_{créée}$ et aux équations d'état dans la zone endommagée (4.59). Afin d'alléger les expressions, il est ici considéré que $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}$. Puisque l'évolution est localement adiabatique, les quantités $\dot{S}$ et $\dot{S}_{créée}$ sont égales et la dissipation peut se mettre sous la forme :

$$D = T\dot{S} = \dot{S}\left(T^0 + \frac{S - s^0 - \boldsymbol{K}(d) : \boldsymbol{E}}{C}\right) \tag{4.95}$$

Pour pouvoir obtenir la dissipation au terme du processus d'endommagement total, cette relation doit être intégrée entre $S = s^0$ et $S = \delta S_{créée} + s^0$. Il est donc nécessaire de se prononcer sur les termes $\boldsymbol{K}(d) : \boldsymbol{E}$ et C. A cet effet, il est intéressant de mener une étude portant sur leurs ordres de grandeur. A ce sujet, une première remarque est que les ordres de grandeur pour les matériaux considérés sont les suivants :

$$c = 1 \times 10^3\,\mathrm{J \cdot K^{-2} \cdot m^{-3}} \quad , \quad \mathcal{S} \sim \mathbb{S} = 1 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa^{-1}} \quad , \quad \boldsymbol{k} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa \cdot K^{-1}} \tag{4.96}$$

puisque le coefficient de dilatation thermique α d'un matériau argileux est de l'ordre de $1 \times 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$ et que $\boldsymbol{k}$ correspond en terme d'ordre de grandeur à α multiplié par un module d'Young. Les applications numériques conduisent donc à légitimer la simplification suivante :

$$\boldsymbol{k} : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} \ll c \tag{4.97}$$

Avec la définition de C donnée en (4.32), il est légitime de remplacer C au profit de c. De plus, il a été vu précédemment qu'une forme de la dissipation dans un contexte endommageant était (4.62). Avec l'expression de l'énergie interne (4.41), cela aboutit à :

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}_{ad}{}'(d) : \boldsymbol{E} + \frac{S - s^0}{c}\boldsymbol{K}'(d) : \boldsymbol{E} = g_c \tag{4.98}$$

où $\mathbb{C}_{ad} = \mathbb{C}^{hom} + \frac{\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{K}}{c}$. Pour mener une réflexion sur les ordres de grandeur, il n'est pas restrictif de supposer que la dépendance par rapport à d est la même pour $\mathbb{C}_{ad}$ et $\boldsymbol{K}$ [4] :

$$\mathbb{C}^{ad}(d) = f(d)\mathbb{C}^0_{ad} \qquad , \qquad \boldsymbol{K}(d) = f(d)\boldsymbol{K}^0 \tag{4.99}$$

3. Le taux de dissipation par unité de volume associé à un taux d'endommagement $\dot{d}$ est $g_c\dot{d}$

4. En toute rigueur, la dépendance de ces deux quantités n'est pas la même en raison de la relation $\mathbb{C}_{ad} = \mathbb{C}^{hom} + \frac{\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{K}}{C}$ et de la définition de $\boldsymbol{K}$ donnée en (4.24)

avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Par conséquent, (4.98) se réécrit :

$$f'(d)\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^0_{ad} : \boldsymbol{E} + \frac{S - s^0}{c}\boldsymbol{K}^0 : \boldsymbol{E}\right) = g_c \tag{4.100}$$

Sachant que $f'(d)$ est $O(1)$, il vient, la relation précédente impose en terme d'ordre de grandeur :

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^0_{ad} : \boldsymbol{E} + \frac{S - s^0}{c}\boldsymbol{K}^0 : \boldsymbol{E} \sim g_c \tag{4.101}$$

qui est un trinôme du second degré en $\boldsymbol{E}$. Toujours en raisonnant sur l'ordre de grandeur, la résolution du dit trinôme conduit à établir :

$$E \sim \frac{1}{\mathbb{C}^0_{ad}}\left(\frac{(S - s^0)\,K^0}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{K(d)E}{(S - s^0)} \sim \frac{(K^0)^2}{\mathbb{C}^0_{ad}c} \tag{4.102}$$

Des considérations basées sur les ordres de grandeurs (4.96) similaires à celles permettant d'aboutir à (4.97) montrent que $\frac{(k^0)^2}{\mathbb{C}^0_{ad}c} \ll 1$ ce qui par conséquent légitime l'écriture de la dissipation comme :

$$g_c\dot{d} = D = \dot{S}\left(T^0 + \frac{(S - s^0)}{c}\right) \tag{4.103}$$

Par intégration entre les instants où $d = 0$ et $d = 1$, on trouve :

$$g_c = T^0\delta S_{créée} + \frac{\delta S_{créée}{}^2}{2c} = U^{FD} \tag{4.104}$$

où U^{FD} est la quantité introduite précédemment en (4.48) en prenant en compte le choix $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{0}$ et la simplification (4.97). Par conséquent, pour les matériaux considérés, la relation (4.93) se réécrit sous la forme usuelle :

$$-\frac{\partial}{\partial \ell}\left(U_{bulk} + K - \Phi\right)_{|\mathcal{C}} = \epsilon g_c \tag{4.105}$$

En toute rigueur, si l'on souhaite renoncer aux simplifications évoquées précédemment, l'équation (4.104) ne sera pas rigoureusement obtenue. Cependant, au prix d'un choix d'un modèle d'endommagement pour $\mathbb{C}_{ad}(d)$, il est possible théoriquement de prévoir la dissipation à partir de l'entropie créée et réciproquement. L'avantage des considérations qui viennent d'être tenues est qu'elles permettent simplement d'accéder à l'élévation de température en fond de fissure lors du phénomène de fissuration. En effet le terme $\boldsymbol{K}(d) : \boldsymbol{E}$ est, pour les matériaux considérés, négligeable devant la variation d'entropie $\delta S_{créée}$. Par conséquent, la relation permettant d'accéder à la température T et formulée en (4.59) se simplifie en :

$$T - T^0 = \frac{\delta S_{créée}}{c} = T^0\left(\sqrt{1 + \frac{2g_c}{cT^{0\,2}}} - 1\right) \tag{4.106}$$

où la deuxième expression provient de la résolution (4.104) vu comme un trinôme du second degré en $\delta S_{créée}$ qui est une quantité positive. Il est cependant à noter que la quantité mesurée expérimentalement n'est pas g_c mais plutôt son correspondant $G_c = \epsilon g_c$. Par conséquent, la variation de température s'écrit :

$$T - T^0 = T^0\left(\sqrt{1 + \frac{2G_c}{\epsilon cT^{0\,2}}} - 1\right) \tag{4.107}$$

qui est une expression où cette fois-ci l'épaisseur de la fissure ϵ intervient explicitement. Cette relation est d'ailleurs en accord avec les commentaires formulés précédemment qui sont que plus la fissure est mince et plus l'élévation de température sera conséquente. Ce phénomène s'explique par le fait que la variation d'énergie interne de la structure est accommodée au sein même de la fissure sous forme d'énergie calorifique. Par conséquent, cette dernière sera d'autant plus concentrée que la fissure est fine.

4.4.5 Bilan sur la fissuration adiabatique

De manière générale, sans considérer les simplifications faites dans cette sous-section, un point essentiel de la théorie de fissuration adiabatique que nous venons de mettre en œuvre est qu'il est désormais possible d'accéder de manière extrêmement simple à la variation de température lors de la propagation d'une fissure, et ce, en tous points du *bulk*. En effet, il suffit pour se faire de se rappeler qu'un volume élémentaire macroscopique appartenant au *bulk* connaît une évolution réversible et donc isentropique (puisque considérée adiabatique). Par conséquent, la seconde équation d'état macroscopique (4.10) devient simplement :

$$\Delta T = -\frac{1}{c}\boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.108}$$

Mais aussi et surtout, il est possible d'accéder à l'élévation de température au sein même de la fissure nouvellement créée par le biais de la relation (4.107). Il s'agit là à notre connaissance d'un point extrêmement novateur. En effet, une élévation de température est constaté expérimentalement lors de la propagation d'une fissure (voir par exemple Bui et collab. [1981]). Cette variation de température est bien la signature qu'une théorie isotherme n'est pas forcément très représentative des conditions où l'expérience est réalisée. Tout l'intérêt de la théorie développée dans ce début de chapitre repose sur la simplicité du critère de propagation obtenu (4.93). Celui-ci stipule qu'il est simplement nécessaire d'utiliser le tenseur d'élasticité adiabatique en lieu et place du tenseur d'élasticité isotherme. Dans les faits, le couplage thermo-élastique étant faible, il peut être argué que le tenseur d'élasticité isotherme et le tenseur adiabatique sont proches l'un de l'autre. Par conséquent, le critère adiabatique donnera en apparence qualitativement, voire même quantitativement, les mêmes résultats que le critère isotherme classique. Toutefois, la différence fondamentale existant entre les deux cadres est qu'il est possible avec une fissuration adiabatique d'accéder à la variation de température. Par conséquent, si le seuil d'initiation d'un phénomène de propagation éventuellement dynamique (et donc de nucléation) est le même en isotherme ou en adiabatique, le cadre proposé garde tout son intérêt et se différencie grandement grâce aux relations (4.107) et (4.108).

4.5 Un critère de nucléation purement énergétique

L'idée maîtresse de ce chapitre est de chercher à s'affranchir de la simulation pas-à-pas de la propagation progressive de la fissure jusqu'à la longueur de nucléation, mais plutôt d'aller chercher directement l'état final où la fissure est apparue. De ce point de vue, ce travail s'inscrit clairement dans la filiation de ceux de D. Leguillon. Un parallèle éclairant pouvant être dressé consiste à comparer l'approche cherchant à être établie et le calcul à la rupture. En effet, ce dernier permet d'accéder aux charges de ruines de la structure en s'affranchissant d'un calcul élasto-plastique qui peut s'avérer fastidieux (voir Salençon [1983]). Une telle approche pour la nucléation semble d'autant plus prometteuse que, dans le cas concret de l'excavation d'un tunnel, le faciès de fissuration est déjà connu. Par conséquent, puisque

l'objectif est de comprendre les raisons susceptibles d'expliquer la géométrie des fissures en chevron, il semble superflu de devoir simuler l'ensemble du processus qui conduit à ces faciès.

4.5.1 Modèle et effets d'échelle

La relation (4.88) est très agréable à utiliser puisqu'elle permet de faire appel à tous les outils développés en conditions isothermes à la différence près que les constantes d'élasticité à utiliser sont celles adiabatiques (voir (4.11)). Par conséquent, il est agréable d'étendre la notion d'énergie potentielle dans le cadre adiabatique comme étant $U_{bulk} - U^0_{bulk} - \Phi$ qui s'écrit exactement comme l'énergie potentielle isotherme à l'exception près du terme d'énergie élastique qui se calcule avec un tenseur d'élasticité pris égal à $\mathbb{C}_{ad}$ (cf. (4.89)). Que les conditions soient isothermes ou adiabatiques, il vient à la fin de l'analyse thermodynamique :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial \ell}_{|\mathcal{C}} = G_c + \frac{\partial K}{\partial \ell}_{|\mathcal{C}} \tag{4.109}$$

qui est valable en conditions isothermes ou adiabatiques avec la précision précédente pour E_p et en utilisant la constante matériau G_c adaptée à la situation. En intégrant cette relation entre l'instant où le matériau est sain et l'instant où le processus de propagation s'est arrêté pour aboutir à la longueur de nucléation ℓ, il vient :

$$G_{inc} = \frac{E^0_p - E^f_p(\ell)}{\ell} = G_c + \frac{K(\ell)}{\ell} \tag{4.110}$$

puisque la situation saine est en équilibre et correspond donc à une énergie cinétique nulle. La présence du terme $\frac{K(\ell)}{\ell}$ est de première importance et provient du fait qu'au terme du processus de nucléation, la structure n'est pas nécessairement au repos. La relation (4.110) se lit comme le fait que la variation d'énergie potentielle a été restituée sous la forme de deux contributions, l'une purement dissipative qui correspond au coût de création de la fissure, l'autre qui est un terme d'énergie cinétique et qui signifie que la structure a été mise en mouvement. Ce qui est très important est que la variation d'énergie potentielle n'a pas été consommée intégralement par un phénomène dissipatif de création de fissure. D'un point de vue pratique, le terme d'énergie cinétique va finir par se faire consommer par d'autres phénomènes dissipatifs tels que des comportements visqueux afin d'aboutir à une structure au repos. Il est alors possible de résumer (4.110) à :

$$G_{inc} = \frac{E^0_p - E^f_p(\ell)}{\ell} = G^{dyn}_c(\ell) \tag{4.111}$$

La quantité G^{dyn}_c est intéressante puisqu'elle est la somme de deux contributions : l'une qui est une constante du matériau G_{inc} et l'autre qui est le résultat d'un effet structurel. Par conséquent, cette quantité a une double nature et n'a a priori aucune raison de ne pas dépendre de ℓ. En toute rigueur, il faudrait également lui ajouter comme dépendance la géométrie et la dimension du problème qui est considéré. Lorsqu'une expérience de propagation de fissure est mise en œuvre, la quantité effectivement mesurée n'est pas G_c mais bien $G^{dyn}_c(\ell)$ puisque le terme d'énergie cinétique est également présent sous la forme non intégrée (4.109). Par conséquent, le modèle proposé renferme un élément d'explication de l'origine des effets d'échelle observés expérimentalement (voir par exemple Bazant et Planas [1998]).

Pour la suite de l'étude, il sera tout de même supposé que la quantité G^{dyn}_c est indépendante de ℓ et donc une constante notée $G^\star_c$ qui, comme précisé ci-dessus, a la particularité de ne pas être uniquement une constante du matériau. Il s'agit là d'une simplification assez forte

qui peut être vue comme un développement limité à l'ordre 0 de G_c^{dyn}. Cela signifie également que le rapport $\frac{K(\ell)}{\ell}$ est constant. Par conséquent la constante $G_c^\star$ se retrouve également dans la version taux d'accroissement infinitésimal (4.109). Ainsi, deux équations sont à considérer. La première qui correspond à un taux d'accroissement infinitésimal et qui est associé à un processus de propagation (qu'il prenne part ou non à un processus de nucléation) :

$$G = -\frac{\partial E_p}{\partial \ell} = G_c^\star \tag{4.112}$$

et une autre qui correspond à un taux d'accroissement fini et qui est associé à un processus de nucléation :

$$G_{inc} = \frac{E_p^0 - E_p^f(\ell)}{\ell} = G_c^\star \tag{4.113}$$

4.5.2 Typologie du taux de restitution d'énergie

Les considérations tenues dans la Sous-section 4.1.1 restent valables en replaçant G_c par $G_c^\star$. En d'autres termes, on dispose de la propriété :

$$G_{inc} \text{ est strictement croissant} \quad \Leftrightarrow \quad G > G_{inc} \tag{4.114}$$

Le point important est que la notion de nucléation stable donnée au début de la Sous-section 4.1.2 est associée à un état où, pour le chargement ayant déclenché le processus, plus aucun mécanisme de propagation n'est activé. Cela signifie entre autre que le taux de restitution d'énergie infinitésimal G doit être inférieur ou égal à $G_c^\star$. Or, le bilan thermodynamique effectué stipule également qu'au moment où la fissure stable est nucléée, il faut avoir $G_{inc} = G_c^\star$. Par conséquent, la relation (4.114) implique que la notion de nucléation stable est nécessairement associée à une longueur ℓ pour laquelle la fonction G_{inc} est décroissante au sens large. Cependant, il est clair au vu des résultats établis dans la Sous-section 3.2.3, et plus précisément avec l'équation (3.24), que la nucléation d'une fissure à partir d'un coin anguleux implique pour des petites longueurs une fonction G_{inc} croissante. Ainsi, si celle-ci ne change pas de sens de variation, le problème n'admettra pas de nucléation stable. Il est important de noter que cette propriété n'est pas tributaire d'une approche en particulier. Si G_{inc} est une fonction strictement croissante de ℓ alors aucune méthode ne sera capable de prédire une longueur de nucléation stable. Puisque bon nombre d'expériences montrent des comportements de nucléation ne conduisant pas immédiatement à la ruine de la structure, il existe forcément une autre typologie de courbe de taux de restitution d'énergie.

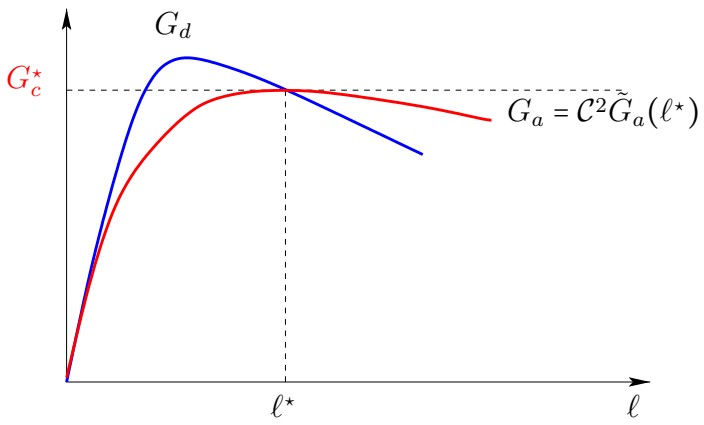

FIGURE 4.7 – Illustration d'un cas où G_{inc} admet un maximum

Ainsi, un problème associé à une nucléation stable telle que définie plus haut à partir d'un coin anguleux est nécessairement associée à un taux de restitution d'énergie G_{inc} dont le sens de variation s'inverse. En d'autres termes, il s'agit exactement de la situation représentée Figure 4.7. Pour simplifier le propos, il est possible de supposer que le chargement est linéaire en un certain paramètre de chargement $\mathcal{C}$, alors G_{inc} est lui même quadratique par rapport à ce même paramètre et peut s'écrire $G_{inc} = \mathcal{C}^2\tilde{G}_{inc}$. De plus, on supposera que G_{inc} ne change pas à nouveau de sens de variation. Ainsi, on notera $\ell^\star$ la longueur pour laquelle le sens de variation de $\tilde{G}_{inc}$ s'inverse. Si le chargement dépend de plusieurs paramètres ou que celui-ci n'est pas linéaire par rapport à une certaine donnée, cela signifiera seulement que la longueur $\ell^\star$ dépend du niveau de chargement. Puisque $\ell^\star$ est associée au passage d'une variation croissante à décroissante, il est immédiat que $\tilde{G}_{inc}(\ell^\star)$ correspond à un maximum de la fonctionnelle. Lorsque le chargement $\mathcal{C}$ augmente progressivement depuis l'instant 0, le premier instant pour lequel la condition (4.113) est remplie, associé à un chargement $\mathcal{C}^\star$, correspondra donc au moment où :

$$G_{inc}(\ell^\star) = \mathcal{C}^{\star 2}\tilde{G}_{inc}(\ell^\star) = G_c^\star \tag{4.115}$$

De plus, cette longueur correspondant à un maximum de G_{inc}, il vient alors de (4.4) que pour le chargement $\mathcal{C}^\star$:

$$G(\ell^\star) = G_{inc}(\ell^\star) = G_c^\star \tag{4.116}$$

Ce qui est compatible avec une fissure ayant arrêté de se propager. Par conséquent, ce point maximum de G_{inc} présente beaucoup de bonnes propriétés : il est associé à la longueur pour laquelle la condition nécessaire (4.113) est réalisée pour la première fois et est compatible avec la définition d'une nucléation stable. Enfin, il permet de déterminer à la fois un chargement critique $\mathcal{C}^\star$ ainsi qu'une longueur de fissure associée $\ell^\star$ comme le montre la Figure 4.7. Puisque tous les bons éléments sont réunis, nous proposons donc de nous servir de cette analyse pour formuler un critère de nucléation purement énergétique. Dans le cas où une nucléation stable est possible, nous proposons d'utiliser le point associé au maximum de G_{inc} pour déterminer à la fois le chargement critique ainsi que la longueur de nucléation. En résumé, deux cas se présentent :

1. soit la fonction $G_{inc}(\ell)$ atteint son maximum et alors la nucléation est stable et les relations (4.115) et (4.116) avec la Figure 4.7 permettent d'en déterminer la longueur ainsi que le niveau de chargement critique
2. soit la fonction $G_{inc}(\ell)$ ne présente pas de maximum **atteint** et alors la notion de longueur de nucléation perd son sens. La méthode de D. Leguillon permet toutefois d'évaluer le chargement critique pour lequel la propagation instable est amorcée.

4.5.3 Nucléation et propagation

Avant de s'intéresser plus en détail aux différentes typologies de la quantité G_{inc}, un mot sur la propagation d'une fissure préexistante. Le critère énergétique introduit précédemment se propose de juger de l'opportunité de la création d'une fissure à partir d'un défaut présent dans une structure qui peut, par exemple, être un coin anguleux. Il est donc normal de se demander s'il est capable de s'appliquer à la propagation d'une fissure qui peut être vue comme la nucléation d'une fissure de taille infinitésimale à partir d'une fissure préexistante. Ainsi, il est ici proposé de juger de la cohérence du critère proposé avec le cadre classique de la propagation. Pour que la situation traitée présente un sens vis à vis de la notion de stabilité proposée, il est nécessaire de s'intéresser à une propagation stable de fissure. La quantité ℓ correspondra à la taille de fissure propagée à partir d'une fissure pré-existante qui

peut être éventuellement non infinitésimale. La théorie de la propagation classique prédit que la longueur propagée sera infinitésimale. Contrairement au phénomène de nucléation à partir d'un coin ouvert, la quantité taux de restitution d'énergie infinitésimal G est non nul pour $\ell = 0$. Cette propriété peut par exemple se voir à partir de la formule (3.24) établie Chapitre 3 par le biais de développements asymptotiques raccordés. En effet, la singularité créée par la fissure préexistante correspond, dans le cadre aboutissant à la formule en question, au cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Ceci implique une limite finie pour G_{inc} lorsque $\ell \to 0^+$, limite étant égale par définition à $G(0)$. La propagation envisagée étant stable, cela signifie que G est une fonction strictement décroissante de ℓ au moins sur un voisinage de $\ell = 0$. Il sera de plus supposé que pour toute longueur ℓ, $G(\ell)$ restera strictement plus petite que $G(0)$. Il ne s'agit pas là d'une hypothèse très forte étant donné que dans le cas d'une propagation stable, G est généralement une fonction strictement décroissante. Il n'existe d'ailleurs pas à notre connaissance de cas où G changerait de sens de variation pour ensuite dépasser $G(0)$ pour un problème de propagation stable. Pour être le plus exhaustif possible, nous prendrons tout de même en compte le cas peu probable où G changerait de sens de variation. Soit alors $\ell > 0$, étant donné que E_p est une fonction dérivable de ℓ, le théorème des accroissements finis implique l'existence d'un certain réel ℓ_1 appartenant à l'intervalle ouvert $]0, \ell[$ tel que :

$$\frac{E_p(\ell) - E_p(0)}{\ell} = \frac{\partial E_p}{\partial \ell}(\ell_1) \quad \Rightarrow \quad G_{inc}(\ell) = G(\ell_1) < G(0) \tag{4.117}$$

Étant donné que $G_{inc}(0^+) = G(0)$, l'inégalité précédente conduit au fait que :

$$\forall \ell > 0 \quad , \quad G_{inc}(\ell) < G_{inc}(0^+) \tag{4.118}$$

En d'autres termes, G_{inc} admet un maximum strict en $\ell = 0^+$. Par conséquent, le critère purement énergétique proposé et basé sur le maximum de la quantité taux de restitution d'énergie fini G_{inc} est en accord total avec la théorie de propagation classique puisqu'il prédit une longueur de nucléation infinitésimale (c'est le sens du maximum obtenu en $\ell = 0^+$), et ce, pour le même niveau de chargement puisque $G_{inc}(0^+) = G(0)$. Ainsi, le critère proposé permet d'unifier les notions de propagation et nucléation.

4.5.4 Structures bornées chargées en déplacement

Avec un tel critère, il est naturel de vouloir un peu plus détailler quelles sont les typologies de problèmes associées à un taux de restitution d'énergie G_{inc} présentant un maximum. Un premier élément de réponse concerne les structures bornées pilotées en déplacements. En effet, pour de tels problèmes, l'énergie potentielle E_p correspond uniquement à l'énergie élastique emmagasinée par le matériau :

$$E_p = \int_\Omega \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \tag{4.119}$$

où, comme il a été montré, $\mathbb{C}$ doit être pris égal à sa version adiabatique $\mathbb{C}_{ad}$. Par conséquent, en raison du caractère défini positif du tenseur $\mathbb{C}$, l'énergie potentielle est une quantité positive qui sera finie si la structure est bornée. Par conséquent, il est possible d'établir l'inégalité suivante :

$$\frac{E_p^0}{\ell} \geq \frac{E_p^0 - E_p^f}{\ell} \tag{4.120}$$

Le terme de gauche étant positif et présentant un numérateur indépendant de ℓ, celui-ci tend vers une limite nulle lorsque ℓ tend vers $+\infty$. Puisque l'analyse basée sur les développements

asymptotiques raccordés montre que G_{inc} est croissant au voisinage de $\ell = 0$, ce résultat montre, par passage à la limite, que nécessairement G_{inc} présente un maximum atteint. Cela signifie que tous les problèmes associés à une structure bornée et chargée en déplacement présenteront, si l'intensité du chargement le permet, une nucléation stable et peuvent donc être traitées par le critère énergétique proposé.

4.5.5 Problèmes ne présentant pas de maximum

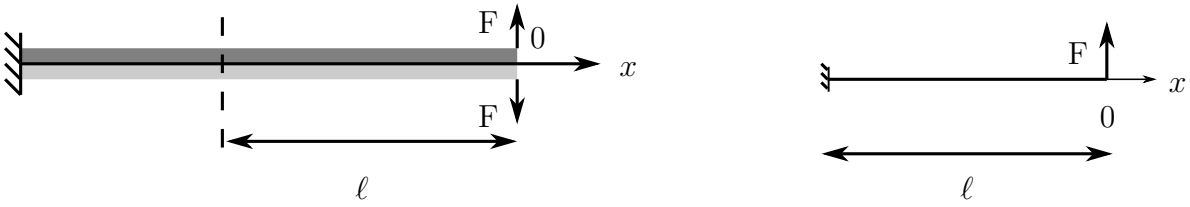

FIGURE 4.8 – Problème du délaminage d'une poutre où ℓ représente la longueur sur laquelle la poutre a été délaminée

Pour illustrer le fait que la situation où le taux de restitution d'énergie fini G_{inc} ne présente pas de maximum peut effectivement exister, le problème du délaminage d'une poutre, chargée par des efforts $\boldsymbol{F}$ en extrémité comme sur la Figure 4.8, va être traité. Dans ce cadre, ℓ désignera la longueur sur laquelle la poutre a été délaminée. La relation de Clapeyron permet d'affirmer que, dans le problème considéré, l'énergie potentielle est exactement l'opposée de l'énergie élastique. Par conséquent, on trouve :

$$E_p(\ell) = -\frac{1}{2EI}\int_{-\ell}^{0} M(s)^2 ds = -\frac{1}{2EI}\left(\frac{l^3}{3}F^2\right) \tag{4.121}$$

Ainsi le taux de restitution d'énergie fini se met sous la forme :

$$G_{inc} = \frac{E_p^0 - E_p^f(\ell)}{\ell} = \frac{1}{2EI}\int_{-\ell}^{0} M(s)^2 ds = \frac{1}{2EI}\left(\frac{l^2}{3}F^2\right) \xrightarrow[\ell\to+\infty]{} +\infty \tag{4.122}$$

qui est une fonction strictement croissante tendant vers l'infini. Par conséquent, il existe bien des problèmes où G_{inc} ne présente pas de maximum. Ces problèmes ne peuvent pas être traités par le biais du critère que nous proposons et il n'est pas possible d'obtenir une nucléation stable.

4.6 Taux de restitution de l'énergie en milieu infini

Une dernière typologie de G_{inc} étant intéressante correspond à une situation où un problème est, comme pour l'exemple de la Sous-section 4.5.5, piloté en efforts mais où, cette fois-ci, une nucléation stable est envisageable. Le problème proposé pour permettre d'illustrer ce type de problème correspond à une structure infinie. Par conséquent, il s'agit là de l'occasion de clarifier la notion de variation d'énergie potentielle en milieu infini.

Il a été vu que la force thermodynamique associée à la propagation ou la nucléation d'une fissure est le taux de restitution d'énergie, qu'il soit infinitésimal pour la propagation (et noté G), ou fini pour la nucléation (et noté G_{inc}). La variation d'énergie potentielle existant entre deux situations est par conséquent une quantité cruciale. Cependant, appréhender cette dernière de manière précise n'est pas chose aisée. En effet, il est à noter que, bien souvent, les

problèmes traités consistent en l'apparition d'objets de petite dimension dans de grandes structures. Par conséquent, les variations apportées par la présence de la fissure peuvent être vues comme une perturbation par rapport à la situation initiale. Cela implique que la variation d'énergie potentielle induite est généralement d'un faible ordre de grandeur par rapport à la quantité énergie potentielle elle-même. Ce phénomène est d'autant plus marquant qu'il est courant de substituer à des structures finies des structures infinies. Se faisant, un accès plus simple à des approches analytiques est souvent obtenu et la dépendance vis à vis de la taille macroscopique de la structure est écartée. Les classiques facteurs d'intensité de contrainte pour une fissure dans un plan en déformations planes sont par exemple obtenus pour un domaine infini. De plus, pour les problèmes bidimensionnels, une approche très efficace et dont la puissance a déjà été illustrée précédemment est basée sur les transformations conformes. Cette dernière permettant d'obtenir des solutions exactes, il serait très agréable de pouvoir l'utiliser afin d'accéder au taux de restitution d'énergie. Cependant, si une telle méthode est envisagée, il est intéressant de traiter ou bien de structures convexes et bornées ou alors de domaines infinis possédant un trou de forme quelconque, l'avantage de ces deux configurations étant que la forme des potentiels complexes associés est alors parfaitement connue. Puisque la présence d'une fissure ou d'un trou hôte le caractère convexe à la structure considérée, il est plus agréable, dans les cas où cela est possible, de se placer dans une situation de domaine infini. Malheureusement, utiliser de telles structures s'accompagne de son lot de complications. En effet, l'énergie potentielle devient alors un concept mal définie. Par exemple, les frontières ne pouvant pas être explicitées, il est impossible de donner une définition claire du travail virtuel des efforts extérieurs donnés. De plus, il est connu que l'énergie potentielle ne reste pas finie lorsque la structure est vue comme la limite d'une suite de domaines dont les frontières extérieures sont repoussées à l'infini. Cela signifie également que plus la structure considérée est grande et plus il devient délicat de quantifier au niveau énergétique la variation liée à la nucléation de la fissure puisque cette dernière sera effectivement une perturbation arbitrairement petite.

Une problématique bien réelle est donc de savoir comment calculer proprement la différence d'énergie potentielle existant entre deux situations, l'une saine et l'autre fissurée, pour une structure infinie. Bien que cette question soit classique et abondamment documentée, nous pensons utile d'en souligner certains aspects peut-être moins connus. Un exemple très simple, permettant de bien fixer les idées, sera traité dans un premier temps. A partir de celui-ci, une méthode permettant d'obtenir la quantité cruciale G_{inc} et se basant sur les potentiels complexes des deux situations considérées sera établie, montrant ainsi une nouvelle fois toute l'efficacité des méthodes de transformations conformes.

4.6.1 Variation d'énergie potentielle dans des structures infinies due à la nucléation de défauts

Comme spécifié en introduction de cette section, la notion même d'énergie potentielle n'a de sens que pour des structures bornées. Lorsque le problème d'intérêt concerne un domaine infini, une façon naturelle de l'appréhender du point de vue énergétique est de le considérer comme la limite d'une suite de domaines bornés où les frontières dites extérieurs (par opposition à des frontières intérieures pouvant correspondre à la présence d'un trou ou d'une fissure) "tendent" vers l'infini. Ce n'est qu'à cette condition qu'il devient possible de manipuler une notion d'énergie potentielle, laquelle tend également vers l'infini. Par conséquent, pour accéder à la variation d'énergie potentielle en milieu non borné, trouvant son origine dans la nucléation d'une fissure ou dans la propagation d'une fissure préexistante, il est nécessaire de travailler avec deux fonctionnelles tendant vers l'infini à mesure que les

frontières extérieures du domaine borné sont repoussées à l'infini. Un résultat très intéressant est que la différence de ces deux quantités possède quant à elle une limite finie. Ainsi, une définition très intuitive du taux de restitution d'énergie en milieu infini correspond à cette quantité limite divisée par la longueur de la fissure créée, qu'elle soit nucléée ou propagée. A partir de cette définition un peu " littéraire ", deux idées venant naturellement à l'esprit et permettant de calculer cette quantité vont être présentées.

L'objectif principal étant d'obtenir une formule basée sur les transformations conformes, le cadre de l'étude sera celui de problèmes bidimensionnels en déformations planes ou en contraintes planes. Comme précisé ci-dessus, pour pouvoir parler d'énergie potentielle, il est nécessaire de partir d'une structure bornée. Le domaine associé sera noté Ω et ses frontières correspondront à $\partial\Omega$. Pour être un peu plus précis, la structure considérée sera semblable à celle représentée Figure 4.9 où un trou carré est présent. Une hypothèse importante, allant dans le sens des transformations conformes, est que les conditions aux limites sont seulement de type contraintes. Une implication immédiate est que, grâce à la relation de Clapeyron, l'énergie potentielle du système peut se mettre sous la forme :

$$E_p = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}dS \tag{4.123}$$

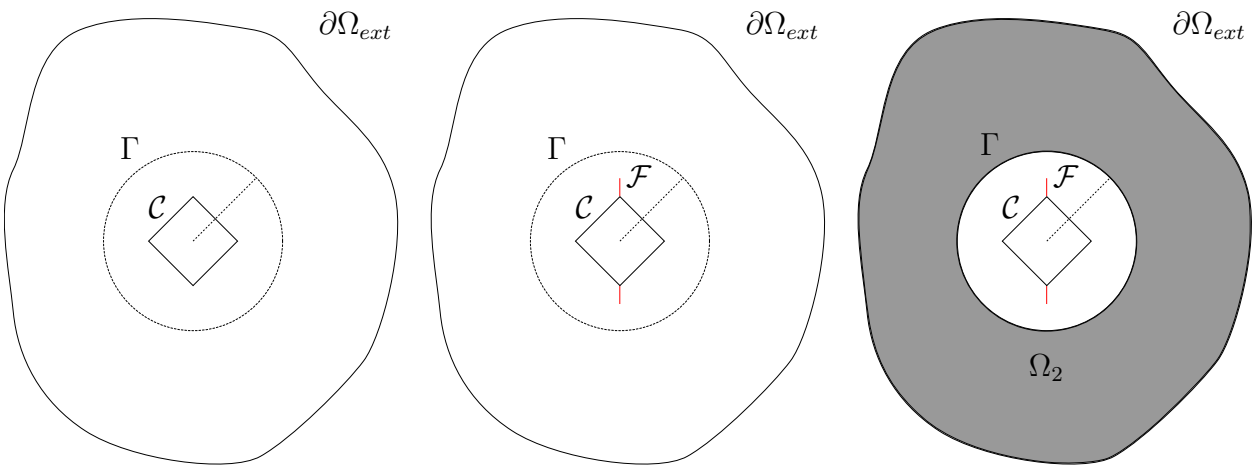

FIGURE 4.9 – Gauche : structure sans défaut Ω^0, Milieu : structure identique avec présence de deux fissures Ω^f, Droite : définition de deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 ayant Γ pour frontière commune

Comme dans les précédents chapitres, les quantités associées à la structure saine (sans fissure ou, plus généralement, sans défaut) seront notées avec un exposant 0. Par exemple, une solution du problème sain sera notée $(\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0)$. De la même façon, les quantités relatives à la structure avec défauts seront notées avec un exposant f. Dans ce qui suit, ℓ sera la taille caractéristique des défauts introduits dans la structure et à l'origine de la variation d'énergie potentielle. Par conséquent, une solution sera notée $(\boldsymbol{\xi}^f, \boldsymbol{\sigma}^f)$. Avec ces notations, la différence d'énergie potentielle entre deux situations (avec ou sans défaut) s'exprime comme :

$$E_p^0 - E_p^f = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{ext}} \boldsymbol{\xi}^f.\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}dS - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{ext}} \boldsymbol{\xi}^0.\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n}dS \tag{4.124}$$

Les intégrales peuvent être prises uniquement sur $\partial\Omega_{ext}$ si il est supposé que le trou et les défauts sont libres de contraintes (cette expression serait encore valide si la fissure était fermée, voir (2.93)). Ainsi, la variation d'énergie potentielle pour une structure infinie peut être interprétée comme le comportement asymptotique de (4.124) lorsque la frontière extérieure $\partial\Omega_{ext}$ est repoussée à l'infini. Malheureusement, cette formule et cette définition ne peuvent

être utilisées que si les solutions des problèmes pour différentes frontières sont connues. Cela demandant la connaissance de beaucoup d'informations, elles ne sont de fait pas vraiment utilisables en pratique. Lorsqu'une approche basée sur des transformations conformes est adoptée, seul un accès aux solutions de la structure infinie équivalente est donné. Toute la problématique réside donc dans le fait de savoir s'il est possible, à partir de la connaissance seule des solutions en domaines infinis, de caractériser le comportement asymptotique de (4.124) qui est connu pour être une quantité finie.

Avec cet objectif en tête, une première idée serait de considérer les couples $(\boldsymbol{\xi}^{\infty,0}, \boldsymbol{\sigma}^{\infty,0})$ et $(\boldsymbol{\xi}^{\infty,f}, \boldsymbol{\sigma}^{\infty,f})$, solutions des problèmes infinis équivalents et de s'en servir pour former le même genre d'intégrales que celles présentes dans (4.124) mais sur une surface bornée donnée. Cette surface sera alors repoussée vers l'infini et le comportement asymptotique de l'objet formé sera étudié. Pour un problème bidimensionnel, cette surface bornée peut par exemple être choisie comme étant un cercle de rayon R, ce qui conduirait à considérer la quantité suivante :

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\int_{r=R} \boldsymbol{\xi}^{\infty,f}.\boldsymbol{\sigma}^{\infty,f}.\boldsymbol{e}_R dS - \frac{1}{2}\int_{r=R} \boldsymbol{\xi}^{\infty,0}.\boldsymbol{\sigma}^{\infty,0}.\boldsymbol{e}_R dS \tag{4.125}$$

L'idée serait donc d'étudier le comportement asymptotique de Δ_1 lorsque R tend vers l'infini. Il s'agit par exemple du choix fait par [Bowie, 1956] pour pouvoir calculer le taux de restitution d'énergie. Cependant, il ne semble pas clair si l'expression (4.125) permet de rendre compte correctement de (4.124) ou non. En effet, étudier le comportement asymptotique de (4.124) implique de devoir prendre la limite lorsque la frontière $\partial\Omega_{ext}$ est repoussée à l'infini. Malheureusement, l'intégrale et l'intégrande dans (4.124) dépendent tous deux de $\partial\Omega_{ext}$. Par conséquent, il n'est pas évident que cette quantité converge vers la même limite que Δ_1 lorsque R tendra vers l'infini. En fait, il sera démontré dans la prochaine sous-section qu'utiliser l'expression Δ_1 pour calculer la variation d'énergie potentielle peut aboutir à une erreur qui est du même ordre de grandeur que la différence d'énergie elle même. Par conséquent, elle ne peut pas être utilisée pour accéder à (4.124).

La méthode que nous proposons pour calculer correctement la différence d'énergie potentielle dans une structure infinie équivalente trouve son origine dans l'expression (3.12) et donc dans les travaux effectués par D. Leguillon. En effet, cette formule permet d'obtenir, pour des domaines bornés, une forme de (4.124) où il n'est pas nécessaire d'intégrer sur $\partial\Omega$. Pour être plus précis, il est possible de démontrer grâce au théorème de Maxwell-Betti que la quantité $I_\Gamma = \int_\Gamma \left(\boldsymbol{\xi}^f.\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\xi}^0.\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}\right) dS$ est en fait indépendante du choix du contour Γ pour peu que celui-ci entoure le trou ainsi que les défauts (comme sur la Figure 4.9). Le vecteur $\boldsymbol{n}$ correspond à la normale au contour considéré, orientée vers l'extérieur du domaine contenant le trou. En particulier, ce contour peut être choisi comme étant égal à $\partial\Omega_{ext}$. En remarquant que pour ce choix particulier de contour $\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n}$ sont égaux (puisque la structure est chargée uniquement en contraintes) on obtient :

$$E_p^0 - E_p^f = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{ext}} \left(\boldsymbol{\xi}^f.\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\xi}^0.\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}\right) dS \tag{4.126}$$

En utilisant alors l'indépendance des quantités I_Γ par rapport au contour Γ, il est possible de s'affranchir du support d'intégration $\partial\Omega$ dans la formule précédente et ainsi obtenir :

$$E_p^0 - E_p^f = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\xi}^f.\boldsymbol{\sigma}^0.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\xi}^0.\boldsymbol{\sigma}^f.\boldsymbol{n}\right) dS \tag{4.127}$$

Cette idée est très prometteuse puisqu'en comparaison de (4.124), la dépendance en $\partial\Omega$ de (4.127) est cette fois-ci seulement due à l'intégrande. Par conséquent, cette dernière forme de

la variation d'énergie potentielle en domaines bornés incite à utiliser une nouvelle expression pour tenter de trouver la variation d'énergie potentielle pour des structures infinies. En se basant sur les notations introduites précédemment, l'expression en question serait :

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\boldsymbol{\xi}^{\infty,f}.\boldsymbol{\sigma}^{\infty,0}.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\xi}^{\infty,0}.\boldsymbol{\sigma}^{\infty,f}.\boldsymbol{n}\right) dS \tag{4.128}$$

Grâce aux considérations précédentes basée sur le théorème de Maxwell-Betty, Δ_2 ne dépend pas du choix du contour Γ tant que celui-ci entoure le trou ainsi que les défauts. En particulier, il peut être choisi comme étant égal au contour $r = \delta$ dès que δ est pris suffisamment grand pour que Γ remplisse les conditions précédentes. L'expression obtenue est agréable puisqu'il n'est pas nécessaire de considérer la limite lorsque δ tend vers l'infini.

La suite de la discussion va s'organiser autour d'un exemple permettant de discréditer l'usage de Δ_1 et, au contraire, de conforter celui de Δ_2 lorsqu'il s'agit de retrouver la limite de (4.127) pour un domaine donc les frontières extérieures sont repoussées à l'infini.

4.6.2 Un exemple simple : Variation d'énergie potentielle pour la nucléation d'un trou circulaire en contraintes planes

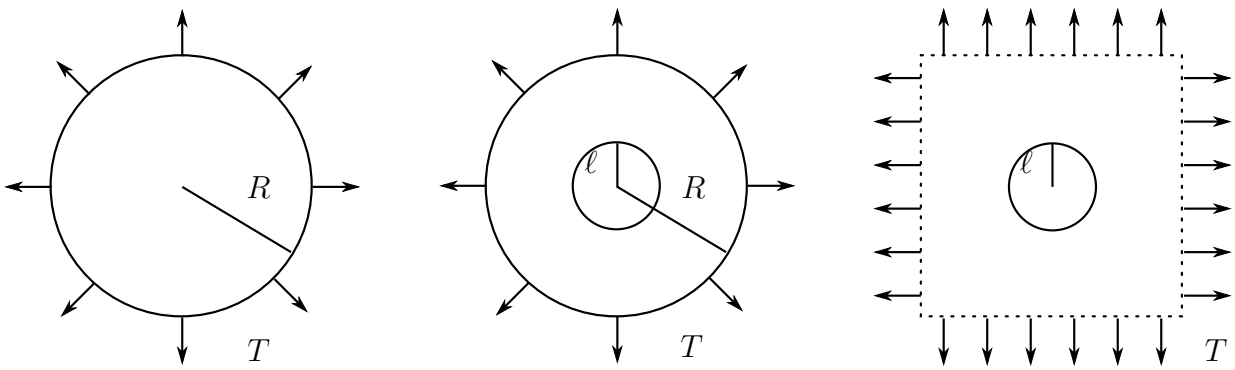

FIGURE 4.10 – Gauche : Structure saine $\left(\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0\right)$, Millieu : Structure bornée avec un défaut $\left(\boldsymbol{\xi}^f, \boldsymbol{\sigma}^f\right)$, Droite : Structure équivalente infinie avec un défaut $\left(\boldsymbol{\xi}^{\infty,f}, \boldsymbol{\sigma}^{\infty,f}\right)$

Dans cette partie il sera discuté si la quantité Δ_1 définie par (4.125) est équivalente à Δ_2 définie par (4.128) lorsque R tend vers l'infini et, plus important, si l'une d'elles permet de rendre compte correctement du comportement asymptotique de (4.124) lorsque la frontière extérieure $\partial\Omega_{ext}$ est rejetée à l'infini. Cette discussion sera tenue sur un exemple très simple d'une structure en contraintes planes où le défaut sera un petit trou circulaire. Le problème en question est représenté Figure 4.10 et consiste en une plaque circulaire de rayon R soumise à une traction uniforme sur sa frontière extérieure.

L'avantage de cet exemple très simple est qu'il contient tous les ingrédients nécessaires afin de mener la discussion annoncée précédemment tout en permettant d'accéder de manière analytique aux solutions des différents problèmes. Une simplification très agréable est que les solutions de la structure saine sont les mêmes que cette dernière soit bornée ou non. Par conséquent, il sera commode dans cet exemple simplifié de regrouper ces deux solutions sous la seule notation $\left(\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0\right)$ puisque le symbole ∞ n'est plus nécessaire pour différentier le cas borné du cas infini. En coordonnées cylindriques, en dehors de $\sigma_{\theta\theta}$, les seules composantes non nulles des différents champs tensoriels sont :

$$\begin{cases} \xi_r^0 &= \dfrac{Tr}{2\left(\lambda+\mu\right)} \\ \sigma_{rr}^0 &= T \end{cases} \tag{4.129}$$

De la même façon, les champs notés précédemment $\left(\boldsymbol{\xi}^f, \boldsymbol{\sigma}^f\right)$, c'est-à-dire associés à une solution du problème borné avec un défaut de taille caractéristique ℓ, peuvent s'exprimer en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} \xi_r^f &= \dfrac{Tr}{1-\eta}\left(\dfrac{1}{2(\lambda+\mu)} + \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\ell^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{rr}^f &= T\dfrac{1-\dfrac{\ell^2}{r^2}}{1-\eta} \end{cases} \tag{4.130}$$

où η est la porosité du problème définie par $\frac{\ell^2}{R^2}$. Finalement, une solution de la structure infinie équivalente présentant le même défaut et notée $\left(\boldsymbol{\xi}^{\infty,f}, \boldsymbol{\sigma}^{\infty,f}\right)$ précédemment peut se déduire facilement de $\left(\boldsymbol{\xi}^f, \boldsymbol{\sigma}^f\right)$ en prenant sa limite lorsque η tend vers 0. Il vient :

$$\begin{cases} \xi_r^{\infty,f} &= Tr\left(\dfrac{1}{2(\lambda+\mu)} + \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\ell^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{rr}^{\infty,f} &= T\left(1-\dfrac{\ell^2}{r^2}\right) \end{cases} \tag{4.131}$$

A partir de ces différentes solutions, il est désormais possible de conclure quant à l'usage de (4.125) et (4.128) pour calculer la variation d'énergie potentielle.

Variation d'énergie potentielle pour les structures infinies

La variation d'énergie potentielle due à la présence du trou circulaire pour les structures bornées peut se calculer grâce à la formule (4.124). Avec les solutions données précédemment, cette variation prend la forme :

$$-\frac{1}{2}\int_{r=R}\sigma_{rr}^0\xi_r^0 dl + \frac{1}{2}\int_{r=R}\sigma_{rr}^f\xi_r^f dl = \pi R^2T^2\frac{\eta}{1-\eta}\left(\frac{1}{2(\lambda+\mu)} + \frac{1}{2\mu}\right) \tag{4.132}$$

La variation d'énergie potentielle entre les problèmes infinis équivalents a été définie comme étant la limite de(4.124) lorsque les frontières extérieures étaient rejetées à l'infini. Dans ce exemple, cela signifie qu'il faut considérer la limite de (4.132) lorsque $R \mapsto \infty$. Une telle opération donne :

$$\Delta E_p^\infty = \pi\ell^2T^2\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\right) \tag{4.133}$$

qui est donc l'expression que doivent permettre de retrouver Δ_1 et/ou Δ_2.

Expression Δ_1

Puisque les solutions saines sont les mêmes, que la structure soit bornée ou non, Δ_1 défini en (4.125) se calcule comme la limite de :

$$-\frac{1}{2}\int_{r=R}\sigma_{rr}^0\xi_r^0 dl + \frac{1}{2}\int_{r=R}\sigma_{rr}^{f,\infty}\xi_r^{f,\infty} dl = \pi R^2T^2\left(-\eta\frac{1}{2(\lambda+\mu)} + \frac{\eta-\eta^2}{2\mu}\right) \tag{4.134}$$

où R tend vers l'infini. Il vient immédiatement que :

$$\Delta_1 = \pi\ell^2T^2\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\right) \tag{4.135}$$

qui ne correspond pas à ΔE_p^∞ calculé en (4.133). Il semble donc que (4.125) ne soit pas capable de calculer proprement la variation d'énergie potentielle liée à la nucléation d'un défaut ou à la propagation d'un défaut préexistant. En fait, utiliser (4.134) introduit une erreur qui est du même ordre de grandeur que ΔE_p^∞ lui-même.

Expression Δ_2

Désormais que (4.125) est disqualifié, le même exemple va montrer cette fois l'efficacité de (4.128). Avec les champs introduits précédemment dans (4.130) et (4.131) la quantité Δ_2 prend la forme :

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\int_{r=\delta}\left(\sigma_{rr}^{0}\xi_r^{f,\infty} - \sigma_{rr}^{f,\infty}\xi_r^{0}\right)dl = \pi\ell^2T^2\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\left(\lambda+\mu\right)}\right) \tag{4.136}$$

Comme attendu, la forme obtenue de Δ_2 est effectivement indépendante du choix de δ. De plus, il s'agit bien là de la même expression que ΔE_p^{∞} obtenue en (4.133). La formulation (4.128) est celle permettant de calculer correctement la variation d'énergie potentielle pour des structures infinies. Ce résultat est de première importance puisqu'il permet de montrer qu'il y a un sens à parler de variation d'énergie potentielle pour des structures infinies alors que le concept même d'énergie potentielle n'est, lui, pas correctement défini. Il incite également à disqualifier la première formulation que l'on trouve dans la littérature. Enfin, il redonne toute son efficacité et son intérêt aux solutions des domaines infinis lorsque le but est d'appréhender un problème de nucléation ou de propagation de fissure.

A la fin de cette discussion, toutes les bases ont été posées pour pouvoir calculer correctement la variation d'énergie potentielle lorsque les deux couples de potentiels complexes associés aux structures infinies saines et fissurées sont accessibles.

4.6.3 Potentiels d'Airy complexe

Dans ce qui précède, une formulation a été établie et éprouvée afin de calculer proprement la variation d'énergie potentielle dans des structures infinies à partir seulement des solutions $\left(\boldsymbol{\xi}^{0,\infty},\boldsymbol{\sigma}^{0,\infty}\right)$ et $\left(\boldsymbol{\xi}^{f,\infty},\boldsymbol{\sigma}^{f,\infty}\right)$. Par conséquent, il est désormais possible de voir comment celle-ci peut être adaptée lorsque les potentiels complexes permettant d'accéder à ces solutions sont disponibles. Dans ce qui va suivre, il n'y a plus d'ambiguïté concernant le fait que les problèmes traités sont tous associés à des domaines infinis. Par conséquent, pour alléger les notations, l'exposant ∞ est abandonné.

Tout d'abord, il a été montré que la quantité Δ_2 définie par (4.128) est en fait indépendante du contour support d'intégration Γ à la seule condition que celui entoure le trou et les défauts (dans la mesure où le problème traité est similaire à celui représenté Figure 4.9). Sous ces conditions, le choix de Γ étant arbitraire, le contour peut être choisi comme étant le cercle de rayon R. Avec ce choix, les différents termes de l'intégrande dans (4.128) prennent la forme particulière :

$$\boldsymbol{\xi}^{\alpha}.\boldsymbol{\sigma}^{\beta}.\boldsymbol{n} = \xi_r^{\alpha}\sigma_{rr}^{\beta} + \xi_\theta^{\alpha}\sigma_{r\theta}^{\beta} \tag{4.137}$$

où α et β sont des exposants pouvant être égaux à 0 ou f. En raison du choix particulier de Γ, les quantités devant être intégrées sont plus précisément de la forme :

$$\left(\xi_r^{\alpha}\sigma_{rr}^{\beta} + \xi_\theta^{\alpha}\sigma_{r\theta}^{\beta}\right)Rd\theta \tag{4.138}$$

L'objectif est d'obtenir une formule de représentation de cette quantité à partir des potentiels complexes associés.

4.6.4 Représentation complexe

Selon [Muskhelishvili, 1953], il est possible d'obtenir ces différentes composantes des champs tensoriels à partir des fonction d'Airy complexes associées au problème sain et au problème avec défauts. Les formules de représentations reliant ces différentes quantités ont

été données en coordonnées cartésiennes par (2.7). Pour un problème donné $\beta \in \{0, f\}$, les mêmes formules de représentation adaptées aux coordonnées polaires deviennet :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\beta} + \sigma_{\theta\theta}^{\beta} &= 2\left(\varphi^{\beta\prime}(z) + \overline{\varphi^{\beta\prime}(z)}\right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{\beta} - \sigma_{rr}^{\beta} + 2i\sigma_{r\theta}^{\beta} &= 2e^{2i\theta}\left(\psi^{\beta\prime}(z) + \overline{z}\varphi^{\beta\prime\prime}(z)\right) \end{aligned} \tag{4.139}$$

en ce qui ce qui concerne les contraintes. Une combinaison de ces deux équations permet d'en établir une troisième qui sera très utile pour la suite :

$$\sigma_{rr}^{\beta} - i\sigma_{r\theta}^{\beta} = \varphi^{\beta\prime}(z) + \overline{\varphi^{\beta\prime}(z)} - e^{2i\theta}\left(\psi^{\beta\prime}(z) + \overline{z}\varphi^{\beta\prime\prime}(z)\right) \tag{4.140}$$

En ce qui concerne les composantes du déplacement (à un mouvement rigidifiant près), il vient, en coordonnées polaires :

$$2\mu\left(\xi_r^{\alpha} + i\xi_{\theta}^{\alpha}\right) = e^{-i\theta}\left(\kappa\varphi^{\alpha}(z) - z\overline{\varphi^{\alpha\prime}(z)} - \overline{\psi^{\alpha}(z)}\right) \tag{4.141}$$

Puisque la variable de position complexe z sera uniquement utilisée sur le contour Γ qui a été choisi comme un cercle, celle-ci peut se mettre sous la forme $Re^{i\theta}$. Il s'ensuit que l'élément différentiel sur le contour est $dz = ie^{i\theta}Rd\theta$. Par conséquent, le produit de cet élément différentiel par les deux quantités complexes (4.140) et (4.141) donne :

$$\left(\xi_r^{\alpha} + i\xi_{\theta}^{\alpha}\right)\left(\sigma_{rr}^{\beta} - i\sigma_{r\theta}^{\beta}\right)dz = \left(\xi_r^{\alpha}\sigma_{rr}^{\beta} + \xi_{\theta}^{\alpha}\sigma_{r\theta}^{\beta} + i\left(\xi_{\theta}^{\alpha}\sigma_{rr}^{\beta} - \xi_r^{\alpha}\sigma_{r\theta}^{\beta}\right)\right)ie^{i\theta}Rd\theta \tag{4.142}$$

A partir de ce résultat, il est possible de donner une représentation complexe de la quantité d'intérêt (4.138) qui est simplement :

$$\left(\xi_r^{\alpha}\sigma_{rr}^{\beta} + \xi_{\theta}^{\alpha}\sigma_{r\theta}^{\beta}\right)Rd\theta = Im\left(\left(\xi_r^{\alpha} + i\xi_{\theta}^{\alpha}\right)\left(\sigma_{rr}^{\beta} - i\sigma_{r\theta}^{\beta}\right)e^{-i\theta}dz\right) \tag{4.143}$$

Finalement, dans le but de calculer (4.128), il est nécessaire de traiter avec les intégrales suivantes :

$$\int_{\Gamma}\left(\xi_r^{\alpha}\sigma_{rr}^{\beta} + \xi_{\theta}^{\alpha}\sigma_{r\theta}^{\beta}\right)ds = Im\left(\int_{\Gamma}\left(\xi_r^{\alpha} + i\xi_{\theta}^{\alpha}\right)\left(\sigma_{rr}^{\beta} - i\sigma_{r\theta}^{\beta}\right)e^{-i\theta}dz\right) \tag{4.144}$$

pour α et β différents et à valeur dans $\{0, f\}$. Au facteur 2μ près, il s'agit donc d'expliciter la partie imaginaire de :

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} e^{-2i\theta}\left(\varphi^{\beta\prime}(z) + \overline{\varphi^{\beta\prime}(z)} - e^{2i\theta}\left(\psi^{\beta\prime}(z) + \overline{z}\varphi^{\beta\prime\prime}(z)\right)\right)\left(\kappa\varphi^{\alpha}(z) - z\overline{\varphi^{\alpha\prime}(z)} - \overline{\psi^{\alpha}(z)}\right)dz = \\ &\int_{\Gamma}\Big(\ \kappa e^{-2i\theta}\varphi^{\alpha}(z)\varphi^{\beta\prime}(z) + \kappa e^{-2i\theta}\varphi^{\alpha}(z)\overline{\varphi^{\beta\prime}(z)} - \kappa\varphi^{\alpha}(z)\psi^{\beta\prime}(z) - \kappa\overline{z}\varphi^{\alpha}(z)\varphi^{\beta\prime\prime}(z) \\ &\quad - e^{-2i\theta}z\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\varphi^{\beta\prime}(z) \quad - e^{-2i\theta}z\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\overline{\varphi^{\beta\prime}(z)} \quad + z\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\psi^{\beta\prime}(z) \quad + |z|^2\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\varphi^{\beta\prime\prime}(z) \\ &\quad - e^{-2i\theta}\overline{\psi^{\alpha}(z)}\varphi^{\beta\prime}(z) \quad - e^{-2i\theta}\overline{\psi^{\alpha}(z)}\overline{\varphi^{\beta\prime}(z)} \quad + \overline{\psi^{\alpha}(z)}\psi^{\beta\prime}(z) \quad + \overline{z}\overline{\psi^{\alpha}(z)}\varphi^{\beta\prime\prime}(z) \quad \Big)dz \end{aligned} \tag{4.145}$$

Eu égard au fait que les deux potentiels φ et ψ sont tous deux des fonctions holomorphes, l'idée est de calculer cette formule un peu lourde par le biais du théorème des résidus.

4.6.5 Calcul à l'aide du théorème des résidus

Pour établir la formule (4.145) l'hypothèse de structure infinie n'a pas été nécessaire. Le seul pré-requis était en effet d'avoir accès aux potentiels complexes des problèmes, que ceux-ci soit bornés ou non. Comme rappelé ci-dessus, une propriété essentielle est que les deux potentiels φ^{α} and ψ^{α} sont holomorphes. Malheureusement, ils apparaissent aussi dans (4.145) sous leur forme conjuguée et il est bien connu que ces dernières, en tant que fonction,

ne jouissent pas de cette propriété. C'est ici que l'hypothèse de milieu infini va jouer un rôle. En effet, elle implique que φ^α et ψ^α sont holomorphes sur le plan complexe privé du trou et des défauts. En particulier, les deux potentiels ne sont pas holomorphes en $z = 0$ en supposant que l'origine du repère se trouve à l'intérieur du trou. Par conséquent, sous de telles hypothèses et en travaillant un peu sur le comportement à l'infini des potentiels (par exemple en procédant par superposition pour se ramener à des conditions de contraintes libres), les théorèmes d'analyse complexes stipulent que la forme générale de ces potentiels est connue, et ce, quel que soit $\alpha \in \{0, f\}$:

$$\begin{aligned} \varphi^\alpha(z) &= a_0^\alpha z + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^\alpha}{z^k} \\ \psi^\alpha(z) &= b_0^\alpha z + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k^\alpha}{z^k} \end{aligned} \tag{4.146}$$

où (a_i^α) et (b_j^α) sont des suites à valeurs complexes. Il est également possible de montrer que les coefficients de proportionnalité des termes linéaires de (4.146) dépendent uniquement du chargement extérieur à l'infini. Par conséquent, il s'agit de constante prenant la même valeur que α soit égal à 0 ou à f. De plus, puisque l'intégrale de (4.145) a lieu sur le cercle de rayon R, le jeu d'équations suivant peut être déduit :

$$z = Re^{i\theta} \quad , \quad |z|^2 = R^2 \quad , \quad \overline{z} = \frac{R^2}{z} \quad , \quad e^{-i\theta} = \frac{R}{z} \tag{4.147}$$

Ces relations vont s'avérer très utiles puisqu'elles vont permettre de supprimer la dépendance vis à vis de $\overline{z}$ pour ne garder que z. Par exemple, sur le contour Γ, on trouve :

$$\overline{\psi^\alpha(z)} = \frac{\overline{b_0^\alpha} R^2}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{b_k^\alpha}}{R^{2k}} z^k \tag{4.148}$$

qui est une formulation pouvant être vue une somme de termes associés à des fonctions holomorphes sur le domaine composé du trou ainsi que des défauts privé de l'origine. Par conséquent, l'intégrande présente dans (4.145) peut s'interpréter comme la trace de fonctions holomorphes. Le contour Γ étant fermé, toutes les précautions ont été prises pour pouvoir user du théorème des résidus et ainsi accéder à une expression de (4.145) plus simple à manipuler. Pour des raisons de clarté, puisque les différents termes de l'intégrande peuvent en fait être traités séparément, seul le calcul de l'un d'eux sera détaillé. Les calculs des autres termes sont donnés en Annexe A.7. Ces derniers sont d'ailleurs loin d'être inintéressants puisque, en raison de considérations ultérieures, il a été montré que la variation d'énergie potentielle était sous la forme (4.128) indépendante du choix de Γ. La traduction de cette propriété sur la formule (4.145) est que celle-ci ne devrait pas, au terme des différents calculs, dépendre de R qui a été choisi arbitrairement. Ces calculs auront donc également un rôle de vérification de la propriété annoncée. A partir de la forme de φ^α et de ψ^α donnée en (4.146), il est par exemple possible de calculer :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \kappa e^{-2i\theta} \varphi^\alpha(z) \overline{\varphi^{\beta\prime}(z)} dz &= \kappa \int_\Gamma \frac{R^2}{z^2} \left(a_0^\alpha z + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^\alpha}{z^k} \right) \left(\overline{a_0^\beta} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \overline{a_k^\beta} z^{k+1}}{R^{2(k+1)}} \right) dz \\ &= 2i\pi\kappa \left(R^2 a_0^\alpha \overline{a_0^\beta} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k a_k^\alpha \overline{a_k^\beta}}{R^{2k}} \right) \end{aligned} \tag{4.149}$$

Grâce à l'ensemble du travail préliminaire qui a été mené, il est désormais clair que, s'il est un peu fastidieux, le travail permettant d'expliciter (4.145) en fonction des coefficients a_i^α,

a_i^β, b_i^α et b_i^β ne présente techniquement aucune difficulté. Cependant, la quantité d'intérêt n'est pas seulement $\int_\Gamma \boldsymbol{\xi}^\alpha.\boldsymbol{\sigma}^\beta.\boldsymbol{n}dS$ mais plutôt :

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma \boldsymbol{\xi}^\alpha.\boldsymbol{\sigma}^\beta.\boldsymbol{n}dS - \frac{1}{2}\int_\Gamma \boldsymbol{\xi}^\beta.\boldsymbol{\sigma}^\alpha.\boldsymbol{n}dS \tag{4.150}$$

qui peut se déduire facilement des résultats donnés par (A.81) en Annexe. Enfin, puisque seule la partie réelle est nécessaire, le résultat est grandement simplifié et peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\int_\Gamma \boldsymbol{\xi}^\alpha.\boldsymbol{\sigma}^\beta.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\xi}^\beta.\boldsymbol{\sigma}^\alpha.\boldsymbol{n}dS\right) = \frac{\pi}{2\mu}Re\Big(\ & \kappa\left(b_0^\alpha a_1^\beta - b_0^\beta a_1^\alpha + a_0^\alpha b_1^\beta - a_0^\beta b_1^\alpha\right) + \overline{a_0^\beta}b_1^\alpha - \overline{a_0^\alpha}b_1^\beta \\ & + \overline{b_1^\beta}a_0^\alpha - \overline{b_1^\alpha}a_0^\beta + \overline{b_1^\beta}\,\overline{a_0^\alpha} - \overline{b_1^\alpha}\,\overline{a_0^\beta} + \overline{b_0^\alpha}\,\overline{a_1^\beta} - \overline{b_0^\beta}\,\overline{a_1^\alpha}\ \Big)\end{aligned} \tag{4.151}$$

qui est bien indépendant de R. Afin de pouvoir déduire la variation d'énergie potentielle il est possible, à partir de (4.128), d'utiliser (4.151) pour $\alpha = f$ et $\beta = 0$. De plus, puisque les coefficients d'indice 0 dans (4.146) ne dépendent que du chargement à l'infini et que celui-ci est le même dans la situation saine et avec défauts, la relation (4.151) se simplifie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}E_p^0 - E_p^f = \frac{\pi}{2\mu}Re\Big(\ & \kappa\left(b_0(a_1^0 - a_1^f) + a_0(b_1^0 - b_1^f)\right) - \overline{a_0}(b_1^0 - b_1^f) \\ & + a_0(\overline{b_1^0} - \overline{b_1^f}) + \overline{a_0}(\overline{b_1^0} - \overline{b_1^f}) + \overline{b_0}(\overline{a_1^0} - \overline{a_1^f})\ \Big)\end{aligned} \tag{4.152}$$

Le recours à cette formule, élégante de par sa compacité, suppose tout de même que les potentiels complexes associés à des structures possédant une géométrie complexe soient connus. Cependant, ces potentiels sont bien souvent connus de manière implicite par le biais de transformation conforme. Il reste donc à savoir si cette formule peut être adaptée au cas où seul un accès direct est donné aux potentiels antécédents.

4.6.6 Variation d'énergie potentielle et transformations conformes

La formule (4.152) est frappante puisqu'elle ne dépend que des premiers coefficients de la décomposition en série de Laurent des potentiels complexes (4.146). Comme le montre Bowie [1956], il est en fait possible d'utiliser des transformations conformes pour accéder aux valeurs des coefficients a_0, a_1, b_0 b_1 dans les deux problèmes sain et fissuré. Ce résultat est très important car il permet d'étendre grandement le domaine d'utilisation de la méthode proposée. En supposant avoir accès à la décomposition en série de Laurent de la transformation conforme considérée, il vient :

$$\omega^\alpha(\zeta) = \gamma^\alpha\left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k^\alpha}{\zeta^k}\right) \tag{4.153}$$

Il s'agit là en effet de la forme générale d'une fonction holomorphe sur l'extérieur du cercle unité dans un problème de mécanique. De manière générale, les deux potentiels antécédents peuvent également se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\Phi^\alpha(\zeta) &= A_0^\alpha\zeta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k^\alpha}{\zeta^k} \\ \Psi^\alpha(\zeta) &= B_0^\alpha\zeta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k^\alpha}{\zeta^k}\end{aligned} \tag{4.154}$$

La démarche de transformation conforme a justement pour finalité de donner, pour un problème donné, les valeurs des A_i^α et des B_j^α. Le lien entre les potentiels du domaine image et les potentiels antécédents est donné par le jeu de relations (2.10) qui est ici rappelé :

$$\begin{cases} z & = & \omega^\alpha(\zeta) \\ \varphi^\alpha(z) & = & \Phi^\alpha(\zeta) \\ \psi^\alpha(z) & = & \Psi^\alpha(\zeta) \end{cases} \tag{4.155}$$

où φ^α et ψ^α peuvent se mettre sous la forme (4.146). Par conséquent, en insérant dans ces relations l'expression de ω^α donnée par (4.153), on obtient au premier ordre en $\frac{1}{\zeta}$:

$$a_0^\alpha \gamma^\alpha \left(\zeta + \frac{c_1^\alpha}{\zeta}\right) + \frac{a_1^\alpha}{\gamma^\alpha \zeta} + 0\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) = A_0^\alpha \zeta + \frac{A_1^\alpha}{\zeta} + 0\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \tag{4.156}$$

Cette égalité devant être vérifiée pour tout ζ appartenant à l'extérieur du cercle unité implique :

$$\begin{aligned} a_0^\alpha &= \frac{A_0^\alpha}{\gamma^\alpha} \\ a_1^\alpha &= \gamma^\alpha \left(A_1^\alpha - A_0^\alpha c_1^\alpha\right) \end{aligned} \tag{4.157}$$

Des relations similaires permettant d'obtenir b_0^α et b_1^α à partir de B_0^α et de B_1^α peuvent être déduites. Par conséquent, tous les outils ont désormais été établis pour pouvoir appliquer cette méthode au calcul de la variation d'énergie potentielle à un problème concret.

4.6.7 Un exemple de taux de restitution d'énergie obtenu via une transformation conforme

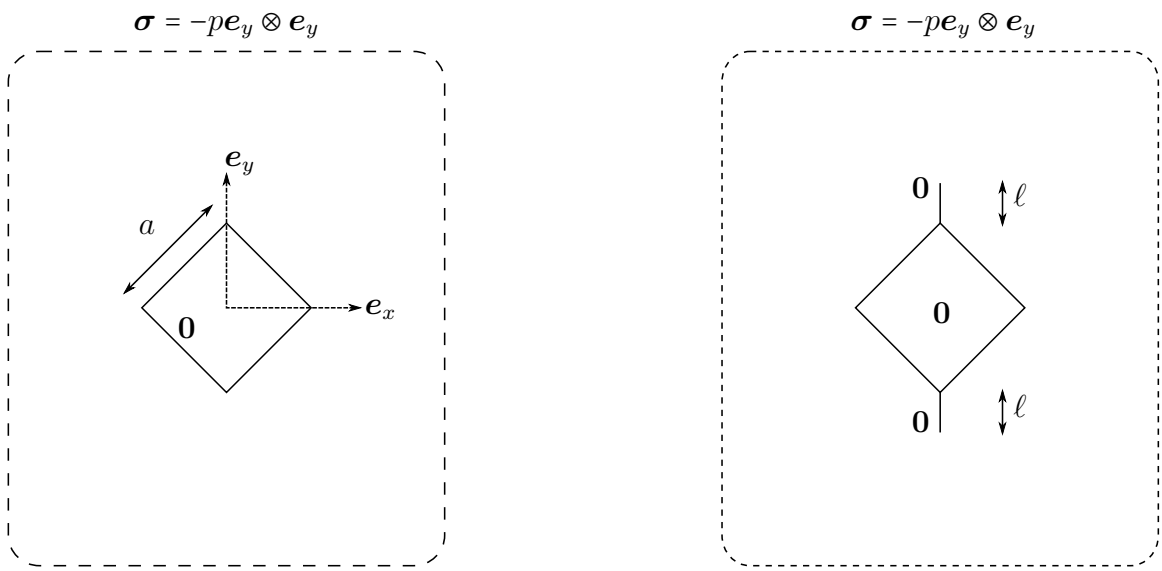

FIGURE 4.11 – Trou carré dans un milieu infini en déformations planes. Gauche : structure saine soumise à un chargement donné. Droite : structure avec deux fissures ouvertes symétriques d'extension ℓ pour le même chargement

Dans le but de montrer l'efficacité de la formule (4.152), il est intéressant de l'utiliser pour calculer effectivement la variation d'énergie potentielle dans un cadre plus concret. Ainsi, nous proposons de traiter du problème de la nucléation de fissures dans une structure présentant un trou carré comme illustré Figure 4.9. Ce sera également l'occasion de voir à

quelle typologie ce problème appartient en examinant si G_{inc} présente bien un maximum ou non.

Il a déjà été vu que cette géométrie de trou carré pouvait être obtenue grâce à une transformation conforme basée sur la formule de Schwartz-Christoffel (cf. (3.40)). Cependant, dans le cas présent, le carré ne possède pas la même orientation. Par conséquent, la transformation conforme en question est légèrement différente. En effet, sa dérivée au sens complexe vaut :

$$w^{0\prime}(\zeta) = \gamma^0 \left(1 - \frac{1}{\zeta^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.158}$$

où γ^0 est un nombre réel qui est ajusté de manière à ce que l'image du cercle unité soit un carré de côté a. Plus précisément, la relation $z = \omega^0(\zeta)$ implique que $dz = w^{0\prime}(\zeta)d\zeta$. Lorsque ζ décrit le cercle unité dans le domaine antécédent, l'élément de longueur du plan image se met sous la forme $dl = |w^{0\prime}(\zeta)|d\Theta$. Dans cette expression, Θ correspond à l'argument de ζ qui est donc l'antécédent de z par ω^0 et, comme à l'accoutumée, $|.|$ correspond au module d'un nombre complexe. Il est alors clair que γ^0 doit vérifier :

$$\gamma^0 \int_{\Theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin(2\Theta)}d\Theta = a \tag{4.159}$$

Dans la même lignée, la formule de Schwarz-Christoffel permet également de donner accès indirect à la transformation conforme permettant de passer de l'extérieur du cercle unité vers l'extérieur du trou carré présentant deux fissures positionnées comme sur la Figure 4.11. La dérivée au sens complexe de cette transformation conforme $\omega^{f\prime}$ vaut :

$$\omega^{f\prime}(\zeta) = \gamma^f \frac{\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{2\cos(2\chi)}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^4}\right)^{\frac{1}{4}}} \tag{4.160}$$

où γ^f et χ contrôle de manière couplée et non triviale à la fois la dimension du carré obtenu ainsi que l'extension des deux fissures. En effet, les points du domaine antécédent ζ appartenant au cercle unité et ayant des arguments Θ compris entre 0 and $\frac{\pi}{2} - \chi$ auront pour image des points figurant sur le côté supérieur droite du trou carré. De même façon, si Θ est compris entre $\frac{\pi}{2} - \chi$ et $\frac{\pi}{2}$ alors l'image de ζ se trouvera sur la lèvre droite de la fissure supérieure. Par des arguments de symétrie, l'ensemble du trou carré et des deux fissures sera bien l'image, par ω^f, du cercle unité. Le choix particulier de $\chi = 0$ permet par exemple bien de retrouver ω^0 tandis que $\chi = \frac{\pi}{2}$ conduit à considérer un cas particulier de transformation de Joukowsky (voir (2.12)) qui permet d'obtenir, à partir du cercle unité, un segment vertical. Avec des considérations similaires à celles exposées précédemment, il vient que l'extension de la fissure ℓ ainsi que la dimension du carré a se déduisent de γ^f et χ de la façon suivante :

$$l = \gamma^f \int_{\Theta=\frac{\pi}{2}-\eta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(\Theta)\sqrt{2\sin(2\Theta)}}{|2\cos(2\Theta) + 2\cos(2\chi)|^{\frac{1}{4}}} d\Theta \quad , \quad a = \gamma^f \int_{\Theta=0}^{\frac{\pi}{2}-\eta} \frac{2\cos(\Theta)\sqrt{2\sin(2\Theta)}}{|2\cos(2\Theta) + 2\cos(2\chi)|^{\frac{1}{4}}} d\Theta \tag{4.161}$$

En ajustant simultanément α^f et χ il est possible d'établir de façon analytique la dérivée au sens complexe de la transformation conforme menant au domaine désiré illustré Figure 4.11, à savoir un domaine infini privé d'un trou carré de côté a avec deux fissures de taille ℓ .

Il a cependant déjà été indiqué, dans le cadre du Chapitre 3, Section 3.4, qu'il n'était pas possible d'accéder de manière directe à ω^0 et ω^f. Il est par contre possible de les représenter par leur développement en série de Laurent, c'est-à-dire de la forme (4.153). A notre connaissance, il n'est pas possible de résoudre l'équation de Fredholm lorsque la série est considérée

dans son intégralité. Encore une fois, nous proposons de ne considérer qu'une troncature à l'ordre N de la série de Laurent :

$$\omega^\alpha(\zeta) = \gamma^a \left(\zeta + \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k^\alpha}{\zeta^k} \right) \tag{4.162}$$

ce qui conduit à une approximation de la géométrie voulue. Dans ce cadre, le problème devient parfaitement solvable puisqu'il suffit de résoudre un système linéaire de taille $2N \times 2N$ (voir Annexe A.38). Les écueils d'une telle opération ont toutefois déjà été présentés. En effet, les côtés du carré ne seront plus tout à fait des segments mais oscilleront légèrement et les valeurs de a_0^α, a_1^α, b_0^α et b_1^α obtenues au terme du procédé ne seront plus exactes mais simplement des approximations. Bien évidemment, plus N sera élevé, meilleure sera l'approximation. Le problème le plus frappant est que la géométrie approchée présente des interpénétrations au niveau de la fissure. Une première façon de palier ce dernier phénomène est celle utilisée dans le Chapitre 3, Section 3.4 qui consiste à ne pas utiliser le cercle unité comme support antécédent, mais un cercle de rayon légèrement supérieur. Malheureusement, cette option invalide les relations (4.161) et rend plus difficile le réglage de γ^f et de χ. Une autre solution consiste à remarquer que les fissures considérées dans ce problème sont ouvertes et sont par conséquent libres de contraintes. Lorsque le problème mécanique sur la géométrie approchée sera résolu, les lèvres de la fissure approchée seront effectivement libres de contrainte. Par conséquent, l'énergie contenue dans les petites parties s'interpénétrant sera négligeable et celles-ci n'auront pas, par conséquent, d'effet structurel. Par conséquent, il est possible de travailler directement sur l'expression (4.162) sans se soucier des interpénétrations. Les deux solutions proposées marchent toutes deux très bien. Puisque la première a déjà utilisée, nous proposons cette fois-ci d'opter pour la seconde qui est la moins intuitive mais également la plus simple à mettre en œuvre. L'approximation obtenue du taux de restitution d'énergie G_{inc} en tant que fonction de la longueur de fissure l est présenté Figure 4.12. Ces résultats ont été obtenus pour les choix de paramètres suivant : $p = E$ et

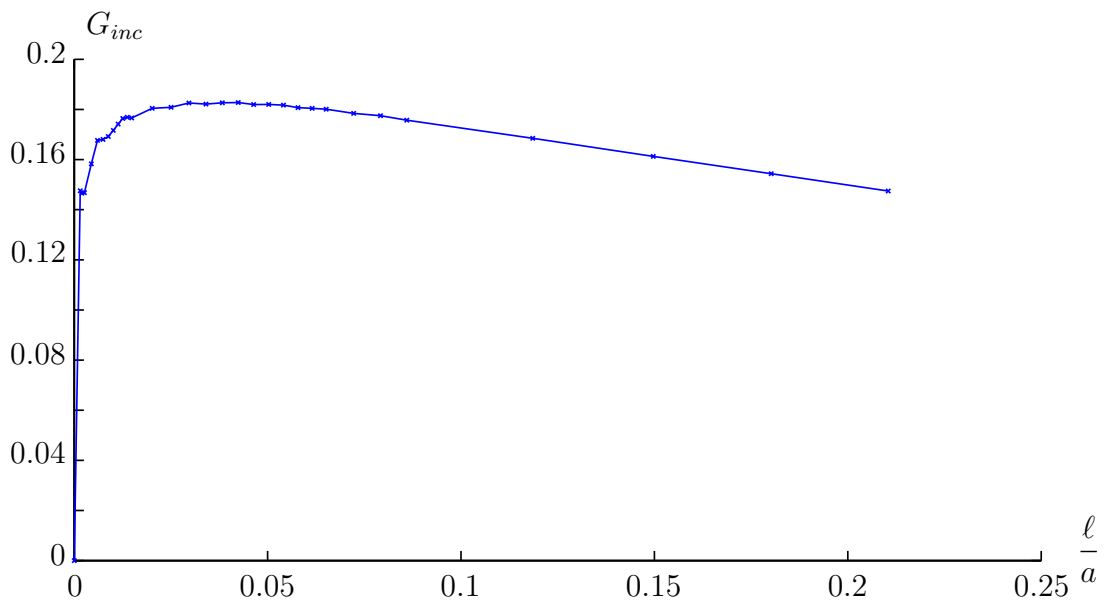

FIGURE 4.12 – Taux de restitution d'énergie G_{inc} obtenu par la formule (4.152) pour une troncature de la série de Laurent à l'ordre $N = 250$ et pour des fissures de taille ℓ variables

$\nu = 0.35$ où p caractérise l'intensité du chargement. Pour cet exemple, un ordre de troncature $N = 250$ a été utilisé, ce qui signifie que le nombre de degrés de liberté est de seulement 500.

Ce problème sera traité plus loin par une autre méthode (voir Chapitre 6, Section 6.5 et plus particulièrement la Figure 6.11) usant de structures bornées. Ce double traitement aura l'avantage de confirmer le degré de précision des résultats obtenus ici, confirmant de fait le caractère inoffensif des zones d'interpénétration, la formulation (4.128) ainsi que le discours tenu sur la variation d'énergie potentielle en milieu infini. Néanmoins, il est d'ores et déjà possible d'affirmer qu'être capable d'obtenir de bons résultats avec si peu d'inconnues est un gage de l'efficacité de la méthode proposée qui, à la lumière de cet exemple, apparait comme tout à fait compétitive avec d'autres méthodes en terme de complexité et de précision.

4.6.8 Critère purement énergétique et nucléation

Par rapport aux différentes considérations tenues lors de l'introduction du critère purement énergétique que nous proposons, l'exemple traité, fournissant un taux de restitution d'énergie G_{inc} illustré Figure 4.12, appartient clairement aux problèmes présentant une nucléation stable au sens donné par REF puisque G_{inc} présente bien un maximum. Ainsi, le critère purement énergétique prédit un phénomène de nucléation survenant pour un niveau de chargement $p = E\sqrt{\frac{G_c}{G_{max}}}$ où $G_{max} = 0.18\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}$ dans ce contexte bidimensionnel et conduisant à une fissure créée d'extension $\ell = 0.04a$.

Au terme de cette étude, plusieurs conclusions peuvent être tirées. Tout d'abord, il a été montré qu'il existait une dernière typologie de taux de restitution d'énergie. Il s'agit d'une situation où une structure, finie ou infinie, est soumise à un chargement piloté en efforts et où G_{inc} admet bien un maximum atteint. Une telle propriété, nous l'avons vue, traduit la possibilité d'une nucléation stable d'une fissure. L'exemple donné Figure 4.12 complète ainsi les considérations tenues Section 4.5 et l'inventaire qui y a été dressé. De plus, une première méthode permettant de calculer efficacement, dans des situations bien précises, la quantité primordiale G_{inc} a été donnée. Avec celle-ci, les méthodes de transformations conformes trouvent un nouveau champ d'application permettant de traiter de problématiques très actuelles. Enfin, le critère purement énergétique que nous proposons a été pour la première fois éprouvé dans une situation de nucléation de fissure. Il a été montré au travers de l'exemple précédant que celui-ci permettait effectivement d'obtenir, à partir du taux de restitution d'énergie incrémental seul, à la fois le chargement critique ainsi que la longueur de nucléation. Par conséquent, nous proposons de l'utiliser pour essayer de rendre compte des faciès de fissuration obtenus par l'ANDRA. Avant toutes choses, il a été vu dans la première partie de ce chapitre qu'il était possible d'adapter de manière immédiate ce critère à la situation plus physique d'une nucléation adiabatique. Nous allons dans le chapitre suivant nous intéresser à la situation de la nucléation d'une fissure dans un milieu poreux saturé.

Chapitre 5

Nucléation et couplage thermo-poro-élastique

Sommaire

5.1 Introduction **146**
5.2 Équations d'état thermo-poro-élastiques **147**
5.3 Adiabaticité macroscopique **149**
5.3.1 Liaisons internes 149
5.3.2 Densités énergétiques volumiques macroscopiques 150
5.4 Représentation tridimensionnelle d'une fissure **152**
5.4.1 Description de la zone endommagée 152
5.4.2 Théorème de Levin et première équation d'état 154
5.4.3 Seconde et troisième équations d'état 155
5.4.4 Densité d'énergie interne pour le squelette solide 155
5.4.5 Évolutions non-drainées à l'échelle du VER 156
5.5 Thermodynamique de la nucléation **158**
5.6 Autres évolutions **159**
5.6.1 Adiabaticité microscopique 160
5.6.2 Fluide incompressible 161

5.1 Introduction

Dans le Chapitre 4, une analyse thermodynamique a permis de revisiter les équations de la nucléation dans le cadre d'un premier couplage intéressant qui est la thermo-élasticité. Envisager le phénomène de la propagation dynamique de fissures sous cet angle était indispensable étant donné que les bonnes conditions à prendre en compte nous ont semblé être davantage celles de l'adiabaticité. Vis-à-vis du raisonnement classique mené dans un cadre isotherme, l'approche proposée se positionne ainsi à l'autre extrémité du spectre des possibles. Cette différence s'explique par le fait que les objectifs visés s'inscrivent dans des contextes différents. En effet, si le formalisme proposé par (Rice [1978]) consistait à modéliser la propagation quasi-statique d'une fissure pré-existante, et donc un processus opérant sur des temps infiniment lents, il n'est pas directement transposable au cadre de la nucléation qui est un évenement brutal. Bien que le raisonnement mené soit différent, il est frappant de constater que le résultat final est, lui, extrêmement proche. En effet, il a été montré au terme de l'analyse proposée que le bon objet à manipuler s'apparente lui aussi à une énergie potentielle mais où le terme d'énergie élastique est calculé avec les constantes d'élasticité adiabatiques en lieu et place des constantes isothermes.

Le fil directeur du travail fourni a été d'essayer de comprendre comment modéliser au mieux les fissures apparaissant autour des ouvrages excavés par l'ANDRA. Il s'agit donc de traiter de la naissance de fissures dans un matériau argileux. Puisque celui-ci est un matériau poreux, un second couplage qu'il peut être intéressant de clarifier est celui de la thermo-poro-élasticité. Plus précisément, si le caractère brutal de la nucléation a permis de justifier de se placer dans le cadre d'une évolution adiabatique, il est également à nouveau invoqué pour tenter de modéliser la nucléation dans un milieu poreux saturé par une évolution à la fois adiabatique, mais aussi non-drainée, et ce, au moins d'un point de vue macroscopique. En effet, si le temps caractéristique associé à la nucléation peut être considéré comme petit par rapport à celui de la diffusion thermique, il est en de même vis à vis du temps caractéristique du transport de masse fluide. Physiquement, cela signifie qu'en raison de l'inertie du fluide et des forces de viscosité s'opposant à son mouvement, aucun echange de masse fluide n'a eu le temps de s'opérer (Coussy [1991]). En notant ϕ la porosité lagrangienne macroscopique et ρ_f la masse volumique du fluide, le caractère non-drainé se traduit par :

$$\rho_f \phi = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}} = \rho_f^0 \phi^0 \tag{5.1}$$

au cours de l'évolution.

Le raisonnement sur le point d'être tenu ressemble par beaucoup d'aspects à celui proposé au Chapitre 4 avec bien entendu toute la complexité apportée par la prise en compte d'un couplage supplémentaire. Fort de l'expérience accumulée précédemment, le résultat naturellement anticipé est qu'il sera nécessaire de manipuler cette fois-ci une énergie potentielle calculée à partir d'une élasticité adiabatique non-drainée. Le raisonnement thermodynamique allant à nouveau se dérouler en conditions adiabatiques, il sera également nécessaire de statuer sur la forme de l'énergie interne du milieu considéré à la fois dans le milieu sain qui appartient au *bulk*, mais aussi l'énergie interne d'un élément de volume totalement endommagé appartenant à la région tridimensionnelle $\mathcal{L}_\epsilon$ décrivant la fissure. Avec ces objectifs en vue, avant toute considération thermodynamique, la première partie de ce chapitre s'attachera à détailler la forme des objets densités volumiques macroscopiques d'énergies. A l'image de la Section 4.4, le raisonnement thermodynamique ne sera tenu que dans un second temps.

5.2 Équations d'état thermo-poro-élastiques

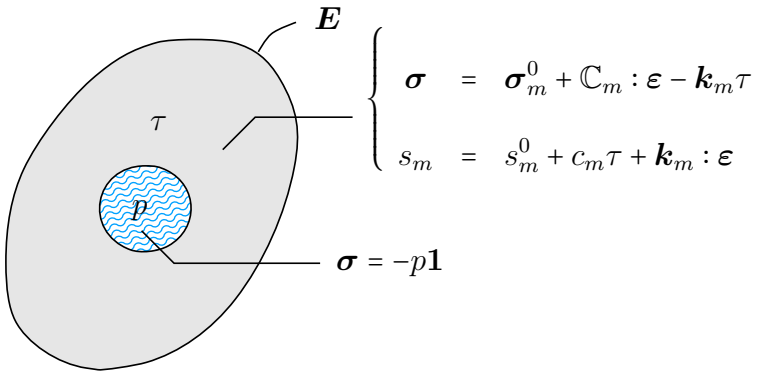

FIGURE 5.1 – Schématisation du problème micromécanique correspondant à un milieu poreux saturé constitué d'une matrice solide thermoélastique et d'un fluide à la pression p

Si l'analyse du Chapitre 4 s'intéressait à l'apparition d'un objet fissure dans un milieu thermoélastique, il s'agira ici de considérer un milieu thermo-poro-élastique. Rappelons dans un premier temps les différentes lois de comportement ainsi que l'expression des différentes densités volumiques macroscopiques énergétiques. Les équations d'état concernant les grandeurs macroscopiques peuvent être obtenue dans le cadre de la poroélasticité via une analyse micromécanique (voir DORMIEUX et collab. [2006]). Le cadre du couplage thermo-poro-élastique est lui fourni en Annexe B.1 et se base sur le problème d'homogénéisation Figure 5.1. Soient $\boldsymbol{\Sigma}$ le tenseur des contraintes macroscopiques, p la pression du fluide au niveau du VER, ϕ le volume des pores contenus dans le VER et s_s la densité volumique macroscopique d'entropie de la phase solide. Soit encore T la température qui est une notion classiquement définie à l'échelle du VER et qui par conséquent est commune au fluide et au solide. Ces quantités se définissent à partir des grandeurs microscopiques comme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \phi - \phi^0 = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega^f} \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} dV = \phi^0 \mathbf{1} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^f \quad , \quad s_s = \left(1-\phi^0\right)\overline{s_m}^s \tag{5.2}$$

Avec ces définitions, les équations d'état se mettent sous la forme suivante (voir (B.14), (B.20) et (B.23)) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Sigma} & = & \boldsymbol{\Sigma}^0 + \mathbb{C}_{iso}^D : \boldsymbol{E} - \left(p-p^0\right)\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\tau \\ \phi - \phi^0 & = & \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \dfrac{p-p^0}{N} + l_s\tau \\ s_s & = & s_s^0 + c_s\tau + \boldsymbol{k} : \boldsymbol{E} + l_s\left(p-p^0\right) \end{array}\right. \tag{5.3}$$

où $\tau = T - T^0$, $\boldsymbol{B}$ est le tenseur des coefficients de Biot, N est le module de Biot et l_s est un coefficient de couplage. Ces différentes quantités ne sont pas indépendantes et l'avantage d'une approche micromécanique est qu'il est possible d'expliciter les relations les unissant. Celles-ci sont obtenues en (B.13), (B.19) et (B.22) et sont ici résumées :

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Sigma}^0 = \left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}^0}_m^s - \phi^0 p^0 \mathbf{1} \quad , \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_m : \mathbb{S}_m : \mathbb{C}_D^{iso} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \mathbf{1} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}_{iso} D\right) \\ \frac{1}{N} = \mathbf{1} : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}_{iso}^D : \mathbb{S}_m\right)\left(p-p^0\right) : \mathbf{1} \\ l_s = -\boldsymbol{k}_m : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}_{iso}^D : \mathbb{S}_m\right) : \mathbf{1} \\ c_s = \left(1-\phi^0\right)c_m + \boldsymbol{k}_m : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}_{iso}^D : \mathbb{S}_m\right) : \boldsymbol{k}_m \end{gathered} \tag{5.4}$$

où $\mathbb{I}$ est le tenseur identité d'ordre 4 symétrisé. En particulier, ces coefficients peuvent être reliés entre-eux via des constantes de la matrice solide microscopique. Une évolution drainée

et isotherme correspondrait à une situation où p et T seraient maintenus constants et donc égaux à p^0 et T^0 respectivement. Par conséquent, le tenseur d'élasticité invoqué dans (5.3) correspond à une élasticité homogénéisée drainée, isotherme, justifiant ainsi la notation employée. Soit ψ_s la densité volumique macroscopique d'énergie libre du squelette solide dont l'expression, donnée en (B.33), est obtenue au terme du processus d'homogénéisation et se met sous la forme :

$$\psi_s\left(\boldsymbol{E}, T, \phi\right) = \psi_s^0 + \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + p^0\left(\phi - \phi^0\right) - s_s^0\tau + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \tau\boldsymbol{k}\boldsymbol{E} + \frac{\left(p - p^0\right)^2}{2N} - \frac{c_s}{2}\tau^2 \quad (5.5)$$

Cette expression peut être déroutante puisqu'elle ne fait pas appel aux variables naturelles de la fonction d'état. Il est intéressant de remarquer que les équations d'état macroscopiques pour le squelette solide uniquement ne dépendent ni de la nature, ni des équations d'état du fluide considéré puisque l'ensemble est en fait intégré dans la pression p.

De façon similaire, les équations d'état du fluide ne dépendent pas de celles du squelette solide. Pour la phase fluide, elles peuvent par exemple être trouvées Coussy [1995] en fonction de l'enthalpie libre massique $g_{f,m}$. Cette fonction d'état ne dépend que des grandeurs p et T et, dans le cadre d'un comportement linéarisé, se met sous la forme :

$$g_{f,m}\left(p, T\right) = g_{f,m}^0 + \frac{p - p^0}{\rho_f^0} + \tau\frac{3\alpha_f}{\rho_f^0}\left(p - p^0\right) - s_{f,m}^0\tau - \frac{c_{f,m}}{2}\tau^2 - \frac{\left(p - p^0\right)^2}{2\rho_f^0 K_f} \quad (5.6)$$

où $s_{f,m}^0$ est l'entropie massique du fluide dans la configuration initiale et où $c_{f,m}T^0$ peut être interprété comme la capacité calorifique massique du fluide. Plus en détails, il est précisé que la masse volumique ρ_f et l'entropie massique du fluide $s_{f,m}$ sont obtenues à partir de $g_{f,m}$ par :

$$\frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial g_{f,m}}{\partial p} \quad , \quad s_{f,m} = -\frac{\partial g_{f,m}}{\partial T} \quad (5.7)$$

Par conséquent, avec l'expression (5.6), elles s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\rho_f} = \dfrac{1}{\rho_f^0} + \dfrac{3\alpha_f}{\rho_f^0}\tau - \dfrac{p - p^0}{\rho_f^0 K_f} \\ s_{f,m} = s_{f,m}^0 + c_{f,m}\tau - \dfrac{3\alpha_f}{\rho_f^0}\left(p - p^0\right) \end{array}\right. \quad (5.8)$$

La densité massique d'énergie libre du fluide $\psi_{f,m}$ s'exprime à partir de $g_{f,m}$ par une transformée de Legendre $\psi_{f,m} = g_{f,m} - \frac{p}{\rho_f}$. Elle s'exprime donc comme :

$$\psi_{f,m} = \psi_{f,m}^0 - s_{f,m}^0\tau - \frac{c_{f,m}}{2}\tau^2 + \tau\frac{3\alpha_f}{\rho_f^0}\left(p - p^0\right) - p\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_f^0}\right) - \frac{\left(p - p^0\right)^2}{2\rho_f^0 K_f} \quad (5.9)$$

Cette quantité n'est pas forcément agréable à manipuler en toutes généralités pour obtenir l'énergie libre volumique macroscopique du fluide ψ_f puisque, en raison du caractère constant de la température et de la pression sur le VER utilisé, il est nécessaire de la multiplier par la masse totale actuelle de fluide contenue dans le VER. Étant donné les hypothèses envisagées, il sera beaucoup plus simple de se placer d'ores et déjà dans les conditions particulières d'une évolution non-drainée pour exprimer la densité d'énergie libre.

5.3 Adiabaticité macroscopique

5.3.1 Liaisons internes

Les expressions de l'énergie libre volumique du squelette solide (5.5) et massique de la phase fluide (5.9) sont complètement générales. Intéressons nous ici à des évolutions non-drainées. Comme précisé précédemment, être non-drainé ne se caractérise pas par une évolution isochore. Ce fait est lourd de conséquence puisque les simplifications associées ne se traduisent pas de manière immédiate sur les différentes densités énergétiques introduites et lois de comportement. En fait, pour exploiter (5.1), il est possible de combiner une équation d'état du squelette solide et une équation d'état de la phase fluide. En effet, une relation utile est que :

$$\rho_f \phi = \rho_f^0 \phi^0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi - \phi^0 = \rho_f^0 \phi^0 \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_f^0} \right) \tag{5.10}$$

Par conséquent, à partir de la première équation d'état du fluide (5.8), la variation de porosité lagrangienne s'écrit :

$$\phi - \phi^0 = 3\alpha_f \phi^0 \tau - \frac{\phi^0}{K_f} \left(p - p^0 \right) \tag{5.11}$$

En introduisant les notations :

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi^0}{K_f} \qquad , \qquad l = l_s - 3\alpha_f \phi^0 \tag{5.12}$$

il est possible de combiner (5.11) avec la seconde équation d'état du squelette solide (5.3) pour aboutir à :

$$0 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p - p^0}{M} + l\tau \tag{5.13}$$

qui correspond à une première liaison traduisant le caractère non-drainé de l'évolution.

L'hypothèse d'adiabaticité nécessite quelques éclaircissements. En effet la justification par les temps caractéristiques utilisés précédemment signifie à ce stade qu'il n'y a pas d'échange de chaleur à l'échelle macroscopique. En d'autres termes, le système composé du VER dans sa globalité, c'est-à-dire l'ensemble solide plus fluide, n'a pas eu le temps d'effectuer des échanges thermiques avec l'extérieur. Cependant, la question se pose quant à la possibilité d'échanges de chaleur de manière interne au VER, c'est-à-dire entre le solide et le fluide, puisque ces phénomènes impliquent un autre temps caractéristique. Une hypothèse forte à la base de (5.3) est que la notion de température est définie à l'échelle du VER et que par conséquent cette dernière est commune à la phase solide et à la phase fluide. Si le solide et le fluide subissent des évolutions réversibles et s'ils n'ont tous deux pas le temps d'échanger de la chaleur, en raison de différences des caractéristiques des matériaux des deux milieux, il s'en suivra inéluctablement une élévation de température différente entre les deux phases. Par conséquent, l'hypothèse de température unique est incompatible avec des évolutions adiabatiques de la part de la phase fluide et de la phase solide prises séparément. Ainsi, seul l'échange de chaleur de la part du système mixte composé à la fois du solide et du fluide sera égal à 0 pendant l'évolution. Pour résumer, la modélisation qui est adoptée est celle correspondant à un temps caractéristique de nucléation t_{nucl}^{carac} petit devant le temps t_{macro}^{carac} caractéristique des échanges de chaleur à l'échelle macroscopique, mais grand par rapport à celui des échanges de chaleur à l'échelle microscopique t_{micro}^{carac} :

$$\frac{{l_{pores}}^2}{c_{micro}^{th}} = t_{micro}^{carac} \quad \ll \quad t_{nucl}^{carac} \quad \ll \quad t_{macro}^{carac} = \frac{{l_{VER}}^2}{c_{macro}^{th}} \tag{5.14}$$

où c^{th}_{micro} et c^{th}_{macro} sont les coefficients de diffusion thermique microscopiques et macroscopiques. Soit s_f la densité volumique macroscopique d'entropie du constituant fluide. Sous une hypothèse d'évolution non-drainée (où donc $\rho_f\phi = \rho_f^0\phi^0$), cette quantité s'exprime simplement comme $s_f = \rho_f^0\phi^0 s_{f,m}$. Pour un volume élémentaire macroscopique appartenant à la masse du système (ici appelée *bluk* et traduisant le caractère disjoint avec la zone fissurée), connaissant donc une évolution réversible, le caractère adiabatique à l'échelle macroscopique se traduit donc par le fait que la somme $s_s + s_f$, et uniquement la somme, reste constante au cours de l'évolution puisque, rappelons le, l'évolution y est réversible. En combinant (5.3), (5.8) et en utilisant le caractère non-drainé, il vient :

$$0 = s - s^0 = \boldsymbol{k} : \boldsymbol{E} + \left(l_s - 3\alpha_f\phi^0\right)\left(p - p^0\right) + \left(c_s + c_f\right)\tau \tag{5.15}$$

où c_f est égal à $\rho_f\phi c_{f,m}$. Soit c la quantité définie comme suit :

$$c = c_s + c_f \tag{5.16}$$

qui, une fois multipliée par la température initiale T^0, s'interprète comme la capacité calorifique volumique macroscopique totale (nous avons déjà eu l'occasion d'insister sur le fait que la capacité calorifique est une quantité extensive). La liaison d'adiabaticité, compte tenu du caractère réversible non-drainé de l'évolution, s'écrit :

$$0 = \boldsymbol{k} : \boldsymbol{E} + l\left(p - p^0\right) + c\tau \tag{5.17}$$

Une combinaison de (5.13) et (5.17) permet d'exprimer τ ainsi que $p - p^0$ en fonction de la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{array}{cccc} \left(c - Ml^2\right) & \left(p - p^0\right) & = & M\left(l\boldsymbol{k} - c\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{E} \\ \left(c - Ml^2\right) & \tau & = & \left(Ml\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right) : \boldsymbol{E} \end{array} \tag{5.18}$$

Ces relations permettent également d'écrire uniquement en fonction de la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ le tenseur des contraintes macroscopiques $\boldsymbol{\Sigma}$ d'un volume élémentaire appartenant au *bulk* :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^0 + \left(\mathbb{C}^D_{iso} + M\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B} + \frac{1}{c - Ml^2}\left(\boldsymbol{k} - Ml\boldsymbol{B}\right)\otimes\left(\boldsymbol{k} - Ml\boldsymbol{B}\right)\right) : \boldsymbol{E} \tag{5.19}$$

Par conséquent, sous cette forme, il apparait que le tenseur d'élasticité adiabatique non-drainé $\mathbb{C}^{ND}_{ad}$ s'exprime à partir de l'élasticité isotherme drainée comme :

$$\mathbb{C}^{ND}_{ad} = \mathbb{C}^D_{iso} + M\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B} + \frac{1}{c - Ml^2}\left(\boldsymbol{k} - Ml\boldsymbol{B}\right)\otimes\left(\boldsymbol{k} - Ml\boldsymbol{B}\right) \tag{5.20}$$

5.3.2 Densités énergétiques volumiques macroscopiques

A ce stade, fort de l'expérience accumulée dans le Chapitre 4 sur la thermodynamique d'un milieu thermo-élastique, nous anticipons un peu le fait qu'il est important de s'intéresser à un objet de type densité volumique d'énergie interne. Il parait naturel de penser que seul le squelette solide contribue au terme d'entropie créée au cours d'un processus de nucléation. Ainsi, une première idée peut être de garder le point de vue naturel allant de pair avec micromécanique des milieux poreux qui consiste à se placer du point de vue du squelette solide uniquement. Avec la notation (5.20) et en utilisant les relations (5.18), il est montré en Annexe B.2 que la densité volumique macroscopique d'énergie interne de la phase solide u_s, qui s'exprime comme $\psi_s + Ts_s$, se met sous la forme :

$$u_s = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{ND}_{ad} : \boldsymbol{E} + p^0\left(\phi - \phi^0\right) + \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\phi - \phi^0\right) + \frac{1}{2}\tau\left(s - s^0\right) + T^0\left(s - s^0\right) \tag{5.21}$$

Il apparait clairement avec cette écriture que la densité en question ne se met pas sous une forme aussi triviale que (4.12). La raison fondamentale à l'origine de cette complexification provient du fait que la quantité énergétique macroscopique considérée est relative à la phase solide uniquement. Par conséquent, les caractères non-drainé ainsi qu'adiabatique ne conduisent pas à établir des liaisons directes sur les variables thermodynamiques naturelles considérées, à savoir des liaisons de type $s = s^0$ et $\phi = \phi^0$. Ainsi, le tenseur $\mathbb{C}_{ad}^{ND}$ ne correspond pas à une situation de cas limite pour le jeu de variables naturels de u_s.

Avec ces considérations, il semble que se placer du point de vue du squelette solide uniquement n'est pas forcément le plus agréable. De plus, le caractère non-drainé des évolutions prises en compte conduit au fait que le système mixte, constitué à la fois du solide et du fluide, peut être considéré macroscopiquement comme fermé, permettant ainsi de mener une étude thermodynamique simple. Par conséquent, il est naturel de chercher à introduire la densité volumique macroscopique d'énergie interne du système mixte fluide et solide. L'avantage d'une évolution non-drainée est que la masse de fluide contenue dans le VER reste constante. Par conséquent, il est facile de donner une expression de l'énergie libre volumique macroscopique du fluide :

$$\psi_f = \rho_f^0 \phi^0 \psi_{f,m} = \psi_f^0 - s_f^0 \tau - \frac{c_f}{2}\tau^2 + \tau 3\alpha_f \phi^0 \left(p - p^0\right) - p\left(\phi - \phi^0\right) - \frac{\phi^0}{2K_f}\left(p - p^0\right)^2 \tag{5.22}$$

où s_f est la densité volumique macroscopique d'entropie du fluide seul et $T^0 c_f$ s'interprète comme la capacité calorifique volumique du fluide et s'exprime comme $\rho_f^0 \phi^0 c_{f,m}$. En utilisant la relation (5.11), cette densité se réécrit :

$$\psi_f = \rho_f^0 \phi^0 \psi_{f,m} = \psi_f^0 - p^0\left(\phi - \phi^0\right) - s_f^0 \tau - \frac{c_f}{2}\tau^2 + \frac{\phi^0}{2K_f}\left(p - p^0\right)^2 \tag{5.23}$$

Il n'est pas inutile d'insister sur le fait que cette expression est uniquement valable si l'évolution considérée est non-drainée à l'échelle du VER. La formule (5.23) peut à nouveau paraître surprenante puisqu'elle utilise à la fois la variable thermodynamique p et son duale ϕ. Cependant, cette écriture s'avérera agréable pour la suite. A partir des deux densités d'énergie libre ψ_s (5.5) et ψ_f (5.23), il est opportun de définir la densité volumique macroscopique du système mixte ψ. Pour ce faire, notons s la densité volumique macroscopique d'entropie qui, étant un grandeur extensives, s'exprime comme $s = s_s + s_f$. En raison du caractère extensif cette fois-ci de la fonction d'état énergie libre, ψ s'exprime simplement comme :

$$\psi = \psi_s + \psi_f = \psi^0 + \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} - s^0\tau + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \tau \boldsymbol{k}\boldsymbol{E} + \frac{\left(p - p^0\right)^2}{2M} - \frac{c}{2}\tau^2 \tag{5.24}$$

Pour bien faire la part des choses, cette formulation de l'énergie libre ne suppose que le caractère non-drainé de l'évolution (et donc ne dépend pas d'une hypothèse d'adabaticité). Enfin, il est désormais possible d'introduire u comme étant la densité volumique macroscopique d'énergie interne de la phase fluide et de la phase fluide. S'agissant à nouveau d'une grandeur extensive, elle s'exprime comme la somme de u_s et de u_f. L'opération permettant de passer de ψ à u est la transformée de Legendre $u = \psi + Ts$:

$$u = u^0 + \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + T^0\left(s - s^0\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} + \frac{\left(p - p^0\right)^2}{2M} + \frac{c}{2}\tau^2 + \tau l\left(p - p^0\right) \tag{5.25}$$

Cette expression mixe les différents couples de variables thermodynamiques mais reste agréable pour pouvoir conclure quant à l'expression de la densité d'énergie interne lorsque l'évolution est à la fois non-drainée et adiabatique dans le *bulk*. En effet, puisqu'un élément de volume

appartenant à cette région de l'espace connaît une évolution réversible, cette dernière est également isentropique. En utilisant les relations (5.18) qui sont issues des liaisons traduisant une évolution non-drainée et isentropique, il vient :

$$u = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}_{ad}^{ND} : \boldsymbol{E} \tag{5.26}$$

Cette densité étant extrêmement proche de celle obtenue en (4.12) dans la cadre d'un couplage thermo-élastique uniquement, il semble donc pertinent d'avoir considéré un élément de volume mixte comprenant à la fois le squelette solide et le fluide. Fort de ce résultat, il ne reste plus, pour pouvoir procéder à l'analyse thermodynamique, qu'à établir l'expression de l'énergie interne dans une élément de volume entièrement endommagé.

5.4 Représentation tridimensionnelle d'une fissure

5.4.1 Description de la zone endommagée

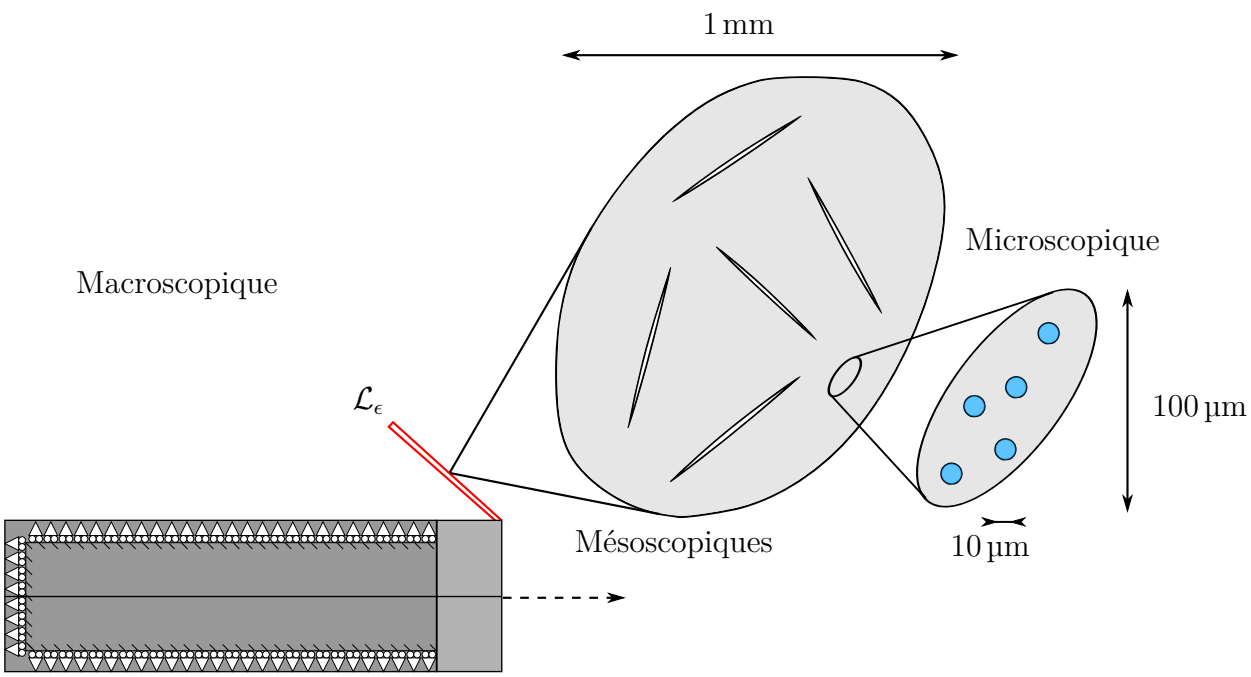

FIGURE 5.2 – Différentes échelles d'espace d'une fissure en chevron

Afin de pouvoir nous intéresser à la problématique de la nucléation dans un milieu poreux, le même chemin que celui détaillé dans le cadre du couplage thermo-élastique seul va être emprunté. Par conséquent, la fissure surfacique $\mathcal{F}$ va être décrite par une région tridimensionnelle $\mathcal{L}_\epsilon$, d'épaisseur ϵ, où le matériau a subi un processus d'endommagement complet, conduisant ainsi à l'annulation de ses propriétés élastiques (cf. Figure 4.1). Pour ce faire, il est nécessaire de détailler le processus d'endommagement ayant lieu et surtout à quelle échelle ce dernier opère. A cet effet, nous proposons à nouveau de décrire l'endommagement par la présence de micro-fissures dont la densité augmente pour finalement aboutir à la formation d'un objet macroscopique. Il est cependant nécessaire de préciser à quelle échelle se forment ces micro-fissures. Une idée naturelle est que celles-ci sont grandes devant la taille des pores du solide considéré. Avec une telle description, trois échelles d'espace sont amenées à être considérées. La première correspond à l'échelle microscopique, caractérisée

par la taille des pores. La seconde est une échelle mésoscopique où les micro-fissures considérées se forment. Enfin, la dernière échelle est naturellement celle macroscopique à laquelle est décrite l'excavation du tunnel (voir Figure 5.2 pour les tailles caractéristiques des différentes échelles).

Il a été utilisé dans les sections précédentes le fait que le milieu connaissait à l'échelle macroscopique une évolution non-drainée et adiabatique. Il est nécessaire d'être ici plus précis pour comprendre quelles sont les bonnes hypothèses à utiliser. Enfin, l'hypothèse d'évolution non-drainée signifie que le fluide n'a pas eu le temps d'être transporté. Par conséquent, il est légitime de considérer que les micro-fissures sont sèches puisque le fluide n'aura pas eu le temps de remplir les cavités créées pendant l'intervalle de temps sur lequel opère le phénomène de nucléation. Toutes ces considérations conduisent à homogénéiser le

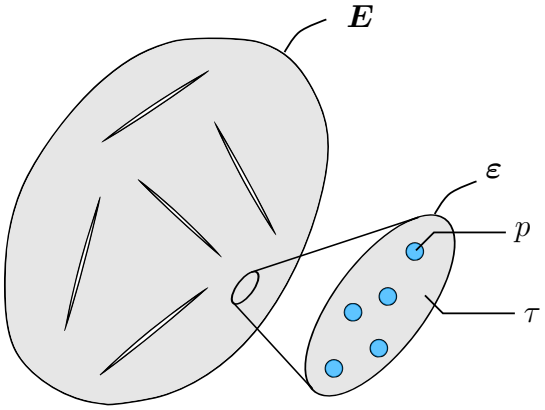

FIGURE 5.3 – Fissures sèches dans un milieu poreux

problème représenté Figure 5.3 où le VER considéré se trouve à une échelle supérieure à celle des fissures. Pour pouvoir réaliser ce travail, nous supposerons que la température τ et la pression p sont constantes à l'échelle du VER ici considéré. Soit alors f la fraction volumique des fissures présentes dans le VER. Les lois de comportement du matériau poreux considéré à l'échelle mésoscopique se mettent sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{\sigma} & = & \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}^p : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{b}\left(p - p^0\right) - \boldsymbol{k}\tau \\ \varphi - \varphi^0 & = & \boldsymbol{b} : \boldsymbol{\varepsilon} + \dfrac{p - p^0}{n} + l_s\tau \\ s_s & = & s_s^0 + c_s\tau + \boldsymbol{k} : \boldsymbol{\varepsilon} + l_s\left(p - p^0\right) \end{array}\right. \tag{5.27}$$

où s_s est la densité volumique mésoscopique d'entropie de la phase solide uniquement et φ est la porosité mésoscopique. Ces équations d'état correspondent simplement à (5.3) où le symbole correspond aux différentes quantités (tenseur de Biot, module de Biot, etc...) a été ici utilisé en caractères minuscules pour bien distinguer les quantités mésoscopiques, obtenues au terme de l'homogénéisation d'un milieu poreux (cf. Annexe B.1), des quantités macroscopiques, obtenues au terme d'un second processus d'homogénéisation de fissures sèches de grande extension devant la taille des pores. Le matériau poreux sera considéré comme homogène à l'échelle du VER.

Les quantités macroscopiques que sont le tenseur des contraintes, la porosité lagrangienne du VER ainsi que la densité volumique d'entropie du squelette solide se définissent à partir des quantités mésoscopiques comme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \phi = (1 - f)\,\overline{\varphi}^p \quad , \quad S = (1 - f)\,\overline{s}^p \tag{5.28}$$

où les opérateurs $\overline{}$, $\overline{}^f$ et $\overline{}^p$ désignent la moyenne sur le VER, la moyenne sur l'espace fissuré et la moyenne sur la matrice constituée d'un matériau poreux respectivement.

5.4.2 Théorème de Levin et première équation d'état

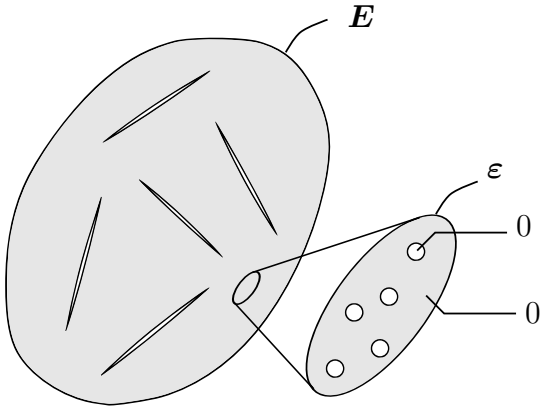

FIGURE 5.4 – Fissures sèches dans un milieu poreux

Soit $\boldsymbol{\sigma}^p$ le champ tensoriel d'ordre 2 défini comme :

$$\boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{z}) = \left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{b}\left(p - p^0\right) - \boldsymbol{k}\tau\right)\chi_{poreux}(\boldsymbol{z}) \tag{5.29}$$

où χ_{poreux} est la fonction caractéristique de la matrice poreuse. Soit également :

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{z}) = \mathbb{C}^p \chi_{poreux}(\boldsymbol{z}) \tag{5.30}$$

le tenseur d'élasticité défini sur tout le VER. Avec ces notations, les contraintes mésoscopiques s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{z}) \tag{5.31}$$

Il est utile à ce stade de définir le problème d'homogénéisation auxiliaire décrit Figure 5.4, qui correspond au problème initial Figure 5.3 en l'absence de précontrainte $\boldsymbol{\sigma}^p$. Il s'agit d'un problème d'homogénéisation classique d'un milieu fissuré dans une matrice purement élastique, de caractéristiques élastiques $\mathbb{C}^p$. Soit $\mathbb{A}$ le tenseur de localisation associé. Celui-ci vérifie :

$$\mathbb{I} = \overline{\mathbb{A}} = f\overline{\mathbb{A}}^f + (1-f)\overline{\mathbb{A}}^s \tag{5.32}$$

Ce tenseur de localisation s'avère très utile puisque, dans le cas général du problème d'homogénisation Figure 5.3, le théorème de Levin stipule :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}} : \boldsymbol{E} + \overline{\boldsymbol{\sigma}^p} \\ &= (1-f)\,\mathbb{C}^p : \overline{\mathbb{A}}^p : \boldsymbol{E} + (1-f)\,\boldsymbol{\sigma}^0 : \overline{\mathbb{A}}^p - (1-f)\,\boldsymbol{b} : \overline{\mathbb{A}}^p\left(p - p^0\right) - (1-f)\,\boldsymbol{k} : \overline{\mathbb{A}}^p \tau\end{aligned} \tag{5.33}$$

En définissant le tenseur d'élasticité homogénéisé $\mathbb{C}^{hom}$ comme :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1-f)\,\mathbb{C}^p : \overline{\mathbb{A}}^p \tag{5.34}$$

il est possible d'établir la relation utile suivante :

$$(1-f)\,\overline{\mathbb{A}}^p = \mathbb{S}^p : \mathbb{C}^{hom} \tag{5.35}$$

En introduisant trois nouvelles quantités que sont :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{res} = \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}^p : \mathbb{C}^{hom} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} : \mathbb{S}^p : \mathbb{C}^{hom} \quad , \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{k} : \mathbb{S}^p : \mathbb{C}^{hom} \tag{5.36}$$

la première équation d'état du milieu homogénéisé s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{res} + \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\left(p - p^0\right) - \boldsymbol{K}\tau \tag{5.37}$$

5.4.3 Seconde et troisième équations d'état

Avant d'établir les deux autres équations d'état, il est utile d'établir un résultat intermédiaire. Le théorème de Levin a permis d'accéder, à partir du tenseur de localisation d'un problème annexe, à la contrainte macroscopique. La définition même de cette quantité, donnée par (5.28), permet d'accéder à une seconde relation :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} = (1-f)\,\mathbb{C}^p : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + (1-f)\left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{b}\left(p-p^0\right) - \boldsymbol{k}\tau\right) \tag{5.38}$$

qui permet d'obtenir une écriture de la moyenne des déformations mésoscopiques dans la matrice poreuse :

$$(1-f)\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbb{S}^p : \left(\boldsymbol{\Sigma} - (1-f)\left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{b}\left(p-p^0\right) - \boldsymbol{k}\tau\right)\right) \tag{5.39}$$

En introduisant le tenseur du quatrième ordre $\mathcal{S}$ comme étant égal à :

$$\mathcal{S} = (1-f)\,\mathbb{S}^p - \mathbb{S}^p : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^p \tag{5.40}$$

la déformation mésoscopique dans l'espace poreux est égale en moyenne à :

$$(1-f)\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbb{S}^p : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} + \boldsymbol{b} : \mathcal{S}\left(p-p^0\right) + \boldsymbol{k} : \mathcal{S}\tau \tag{5.41}$$

La définition de la porosité macroscopique ϕ (voir (5.28)) combinée à la seconde équation d'état mésoscopique (5.27) donne :

$$\phi = (1-f)\,\varphi^0 + (1-f)\,\boldsymbol{b} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + (1-f)\,\frac{p-p^0}{n} + (1-f)\,l_s\tau \tag{5.42}$$

qui, en introduisant les quantités suivantes :

$$\phi^{res} = (1-f)\,\varphi^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} \quad , \quad \frac{1}{N} = \frac{(1-f)}{n} + \boldsymbol{b} : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} \quad , \quad L_s = (1-f)\,l_s + \boldsymbol{b} : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} \tag{5.43}$$

se met sous la forme :

$$\phi = \phi^{res} + \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p-p^0}{N} + L_s\tau \tag{5.44}$$

Enfin, la même opération peut être entreprise avec la densité volumique macroscopique d'entropie du squelette solide. En définissant les grandeurs suivantes :

$$S_s^{res} = (1-f)\,s_s^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} \quad , \quad C_s = (1-f)\,c_s + \boldsymbol{k} : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} \tag{5.45}$$

la dernière équation d'état macroscopique du squelette solide s'écrit :

$$S_s = S_s^{res} + C_s\tau + \boldsymbol{K} : \boldsymbol{E} + L_s\left(p-p^0\right) \tag{5.46}$$

5.4.4 Densité d'énergie interne pour le squelette solide

A l'échelle mésoscopique, la matrice dans laquelle apparaissent les microfissures correspond à un milieu thermo-poro-élastique classique. Pour un tel milieu, il est montré en Annexe B.1 que la densité volumique mésoscopique d'énergie libre du squelette solide se met sous la forme (B.32) :

$$\psi_s = \psi_s^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(p+p^0\right)\left(\varphi-\varphi^0\right) - \frac{1}{2}\tau s_s - \frac{1}{2}\tau s_s^0 \tag{5.47}$$

Par conséquent, la densité volumique mésoscopique d'énergie interne du squelette solide s'écrit :

$$u_s = u_s^0 + T^0\left(s_s - s_s^0\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0\left(\varphi - \varphi^0\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\varphi - \varphi^0\right) + \frac{1}{2}\tau\left(s_s - s_s^0\right) \quad (5.48)$$

La densité volumique cette fois-ci macroscopique d'énergie interne de la phase solide uniquement est définie comme la moyenne sur la matrice poreuse de son correspondant mésoscopique pondérée par un coefficient $(1-f)$:

$$U_s = (1-f)\,\overline{u_s}^p \quad (5.49)$$

Pour pouvoir détailler l'expression ci-dessus, il est nécessaire de s'intéresser quelques instants au terme $(1-f)\,\overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}^p$. Le lemme de Hill donne $\overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E}$. Cependant, comme $\boldsymbol{\sigma}$ est nul sur l'espace fissuré, il vient également $(1-f)\,\overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E}$. Ainsi, en utilisant la relation (5.41), il vient après simplifications :

$$\begin{aligned} U_s = \quad & (1-f)\,u_s^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\left(S_s - (1-f)\,s_s^0\right) + p^0\left(\phi - (1-f)\,\varphi^0\right) + \boldsymbol{\Sigma}^{res} : \boldsymbol{E} \\ & + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\phi - \phi^{res}\right) + \frac{1}{2}\tau\left(S_s - S_s^{res}\right) - \frac{1}{2}\tau\boldsymbol{K} : \boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} \end{aligned} \quad (5.50)$$

5.4.5 Évolutions non-drainées à l'échelle du VER

Liaison non-drainée

Une évolution non-drainée à l'échelle du VER signifie que la masse de fluide contenue dans le VER reste constante. En d'autres termes, une telle évolution implique :

$$\overline{\rho_f\varphi}^p = \frac{1}{|\Omega_p|}\int_{\Omega_p}\rho_f\varphi dV = \frac{1}{|\Omega_p^0|}\int_{\Omega_p^0}\rho_f^0\varphi^0 dV = \rho_f^0\varphi^0 \quad (5.51)$$

Comme la pression et la température sont constantes à l'échelle du VER, l'équation d'état du fluide (5.8) permet de déduire que la masse volumique du fluide ρ_f est également uniforme. La même équation d'état multipliée par $(1-f)\,\rho_f\varphi$ puis prise en moyenne sur la matrice poreuse donne :

$$\phi = (1-f)\,\varphi^0 + (1-f)\,3\alpha_f\varphi^0\tau - \frac{(1-f)\,\varphi^0}{K_f}\left(p - p^0\right) \quad (5.52)$$

Cette relation combinée à la seconde équation d'état macroscopique (5.44) permet d'aboutir à la liaison qui doit traduire le caractère non-drainé du VER :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \left(\frac{1}{N} + \frac{(1-f)\,\varphi^0}{K_f}\right)\left(p - p^0\right) + \left(L_s - (1-f)\,3\alpha_f\varphi^0\right)\tau \quad (5.53)$$

En introduisant les quantités suivantes :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{\varphi^0}{K_f} \quad , \quad l = l_s - 3\alpha_f\varphi^0 \quad , \quad \frac{1}{M} = \frac{(1-f)}{m} + \boldsymbol{b} : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} \quad , \quad L = (1-f)\,l + \boldsymbol{b} : \mathcal{S} : \boldsymbol{k} \quad (5.54)$$

la liaison non-drainée se réécrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p - p^0}{M} + L\tau \quad (5.55)$$

Densité d'énergie interne pour la phase fluide

Il a été vu précédemment que la densité massique d'énergie interne pour la phase fluide était donnée par (5.9), laquelle se réécrit sous la forme plus agréable à manipuler :

$$\psi_{f,m} = \psi^0_{f,m} - s^0_{f,m}\tau - p^0\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho^0_f}\right) - \frac{1}{2}\tau\left(s_{f,m} - s^0_{f,m}\right) - \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho^0_f}\right) \tag{5.56}$$

La densité massique d'énergie interne s'écrit donc :

$$u_{f,m} = u^0_{f,m} + T^0\left(s_{f,m} - s^0_{f,m}\right) - p^0\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho^0_f}\right) + \frac{1}{2}\tau\left(s_{f,m} - s^0_{f,m}\right) - \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho^0_f}\right) \tag{5.57}$$

Pour obtenir l'énergie interne volumique mésoscopique de la phase fluide u_f, il suffit de multiplier $u_{f,m}$ par la masse de fluide présente dans un volume mésoscopique $\rho_f\varphi$:

$$u_f = u^0_f + T^0\left(s_f - s^0_f\right) - p^0\left(\varphi - \frac{\rho_f\varphi}{\rho^0_f}\right) + \frac{1}{2}\tau\left(s_f - s^0_f\right) - \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\varphi - \frac{\rho_f\varphi}{\rho^0_f}\right) \tag{5.58}$$

Enfin, l'énergie interne volumique macroscopique U_f se déduit de l'expression précédente portant sur u_f par la relation :

$$U_f = (1-f)\,\overline{u_f}^p \tag{5.59}$$

En prenant en compte la relation (5.51), il vient finalement :

$$\begin{aligned} U_f = \quad & (1-f)\,u^0_f + T^0\left(S_f - (1-f)\,s^0_f\right) - p^0\left(\phi - (1-f)\,\varphi^0\right) \\ & + \frac{1}{2}\tau\left(S_f - (1-f)\,s^0_f\right) - \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\phi - (1-f)\,\varphi^0\right) \end{aligned} \tag{5.60}$$

où S_f correspond à la densité volumique macroscopique d'entropie de la phase fluide seule et est définie comme $(1-f)\,\overline{s_f}^p$.

Densité d'énergie interne du système mixte

Il a été vu précédemment qu'il était judicieux de travailler avec la densité d'énergie interne du système mixte composé du squelette solide ainsi que du fluide. Cette densité macroscopique est notée simplement U et est égale, grâce au caractère extensif de l'énergie interne, à $U_s + U_f$. Avec les expressions (5.50) et (5.60), il vient :

$$\begin{aligned} U = \quad & (1-f)\,u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) + \boldsymbol{\Sigma}^{res} : \boldsymbol{E} \\ & + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\tau\left(S - S^{res}\right) - \frac{1}{2}\tau\boldsymbol{K} : \boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{5.61}$$

où S et s^0 sont des densités volumiques d'entropie du système mixte et où S^{res} est défini comme $(1-f)\,s^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{k}$. La suite du calcul se fera dans le cadre d'un niveau d'endommagement total conduisant à la nullité du tenseur d'élasticité macroscopique $\mathbb{C}^{hom}$. Le niveau d'énergie interne correspondant sera noté U^{FD} pour insister sur le fait qu'il s'agit d'une expression uniquement valide que lorsque le niveau d'endommagement est à son maximum. Ainsi, les simplifications suivantes sont à considérer :

$$\begin{gathered} \mathbb{C}^{hom} = 0 \quad , \quad \mathcal{S} = (1-f)\,\mathbb{S}^p \quad , \quad S^{res} = (1-f)\,s^0 - \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}^p : \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{\Sigma}^{res} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \quad , \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{0} \end{gathered} \tag{5.62}$$

Avec ces relations, la densité U^{FD} devient :

$$U^{FD} = (1-f)\,u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) + \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\tau\left(S - S^{res}\right) \quad (5.63)$$

Pour pouvoir conclure, il est nécessaire d'éliminer $p - p^0$ et τ au profit de $S - S^{res}$ et de constantes mésoscopiques. A cet effet, deux relations sont à disposition :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} = \dfrac{p - p^0}{M} + L\tau \\ S - S^{res} = C\tau + L\left(p - p^0\right) \end{cases} \quad (5.64)$$

qui correspondent à la liaison non-drainée (5.55) et à la troisième équation d'état (5.46) dans le cas d'un endommagement total (5.62). Les deux relations s'inversent et donnent :

$$\begin{cases} \left(CM - L^2\right)\left(p - p^0\right) = CM\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} - ML\left(S - S^{res}\right) \\ \left(CM - L^2\right)\tau = -ML\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b}C\tau + \left(S - S^{res}\right) \end{cases} \quad (5.65)$$

Avec ces deux expressions, il vient :

$$\left(p - p^0\right)\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b} + \tau\left(S - S^{res}\right) = M\left(\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b}\right)^2 + \frac{1}{CM - L^2}\left(S - S^{res} - ML\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b}\right)^2 \quad (5.66)$$

A partir de l'expression de S^{res}, l'énergie interne contenue dans un volume macroscopique élémentaire totalement endommagé se met sous la forme :

$$\begin{aligned} U^{FD} = \; & (1-f)\,u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2}M\left(\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b}\right)^2 + T^0\left(S - (1-f)\,s^0\right) \\ & + \frac{\left(S - (1-f)\,s^0 + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : (\boldsymbol{k} - ML\boldsymbol{b})\right)^2}{2\left(CM - L^2\right)} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Le paramètre f représentant la fraction volumique des micro-fissures dans le VER est en fait asymptotiquement nul. De plus, l'évolution considérée se faisant de façon adiabatique, la variation d'entropie $S - s^0$ correspond uniquement à de l'entropie créée $\delta S_{créée}$. Par conséquent, la densité U^{FD} s'écrit :

$$U^{FD} = u^0 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2}M\left(\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b}\right)^2 + T^0\delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}^p : (\boldsymbol{k} - ML\boldsymbol{b})\right)^2}{2\left(CM - L^2\right)} \quad (5.68)$$

5.5 Thermodynamique de la nucléation

Tout a été fait à ce stade pour pouvoir traiter de la thermodynamique de la nucléation. Pour ce faire, le formalisme à utiliser est exactement le même que celui présenté Chapitre 4, Section 4.4. Il est tout de même important de remarquer que l'approche thermodynamique sur le point d'être menée concerne un système macroscopique composé d'un squelette solide et d'un fluide. Par conséquent, en toute généralité, il serait nécessaire de procéder à la thermodynamique d'un système ouvert. Cependant, le caractère non drainé permet de passer outre cette difficulté puisqu'alors le système considéré est parfaitement fermé. Par conséquent, pour la structure macroscopique dans son intégralité, la première loi de la thermodynamique énonce que :

$$\dot{U}_{tot} + \dot{K} = \mathcal{P}_e \quad (5.69)$$

où U_{tot} correspond à l'énergie interne de l'intégralité du squelette solide et du fluide, y compris dans la zone fissurée $\mathcal{F}$ (voir (4.66) et (4.67)). Le terme de puissance des efforts extérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{C}_F(t)\int_{\Omega(\ell)} \rho\boldsymbol{F}^0.\dot{\boldsymbol{\xi}}dV + \mathcal{C}_T(t)\int_{\partial\Omega^T} \boldsymbol{T}^0.\dot{\boldsymbol{\xi}}dA + \dot{\mathcal{C}}_\xi(t)\int_{\partial\Omega^\xi} \boldsymbol{T}.\boldsymbol{\xi}^0 dA \quad (5.70)$$

puisque la notion d'extérieur est relative à l'ensemble fluide plus solide. Par conséquent, la puissance développée par la force de pression est un effort intérieur et n'a aucune raison de figurer ici. En utilisant le formalisme introduit précédemment, il est facile de montrer que :

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial \ell}\dot{\ell} + \frac{\partial K}{\partial \ell}\dot{\ell} = \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}\dot{\ell} \tag{5.71}$$

où Φ correspond au travail des efforts extérieurs donnés et s'exprime exactement de la même façon que (4.82). Cette équation se réécrit encore :

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\left(U_{bulk} + \int_{\mathcal{L}_\epsilon} U^{FD} dV + K - \Phi\right) = 0 \tag{5.72}$$

L'expression de U_{bulk} se déduit par intégration de la densité volumique macroscopique d'énergie interne sur la région $\Omega(\ell)$ au sens donné au chapitre précédent à l'équation (4.67). Sachant que dans la région de l'espace $\Omega(\ell)$, correspondant au *bulk*, le matériau ne subit pas d'irréversibilité, la densité en question se met sous la forme (5.26). Ainsi, il vient :

$$U_{bulk} - U^0_{bulk} = W^{ND}_{ad} = \int_{\Omega(\ell)} \left(\boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{ND}_{ad} : \boldsymbol{E}\right) dV \tag{5.73}$$

où W^{ND}_{ad} s'interprète comme un terme d'énergie élastique macroscopique calculé avec le tenseur d'élasticité adiabatique non-drainé. Par conséquent (5.72) se réécrit :

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\left(W^{ND}_{ad} + K - \Phi\right) = -\frac{\partial}{\partial \ell}\left(\int_{\mathcal{L}_\epsilon} U^{FD} dV\right) \tag{5.74}$$

Tout élément de volume macroscopique élémentaire appartenant à $\mathcal{L}_\epsilon$ est associé à une région de l'espace où la densité d'énergie interne s'écrit simplement (5.68). Les mêmes considérations que celles tenues Section 4.4 permettent directement d'écrire :

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial \ell}\left(W^{ND}_{ad} + K - \Phi\right) \\ &= \epsilon\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{\sigma}^0 + M\left(\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathcal{S} : \boldsymbol{b}\right)^2 + T^0 \delta S_{créée} + \frac{\left(\delta S_{créée} + \boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{S}^p : (\boldsymbol{k} - ML\boldsymbol{b})\right)^2}{2\left(CM - L^2\right)}\right) \end{aligned} \tag{5.75}$$

Par conséquent, en considérant que la constante matériau est l'entropie volumique créée, il vient simplement au terme de l'approche thermodynamique mise en place :

$$-\frac{\partial}{\partial \ell}\left(W^{ND}_{ad} + K - \Phi\right) = G^{ad,ND}_c \tag{5.76}$$

où $G^{ad,ND}_c = \epsilon\left(U^{FD} - u^0\right)$. Encore une fois, le résultat obtenu est frappant de par sa simplicité. Tout le formalisme mis en place précédemment peut être transposé au cadre de la nucléation en conditions adiabatiques et non-drainées en utilisant un taux de restitution d'énergie défini à partir d'une énergie élastique se calculant à l'aide du tenseur $\mathbb{C}^{ND}_{ad}$ dont l'expression est donnée en (5.20).

5.6 Autres évolutions

Une nouvelle fois, l'analyse tenue permet d'aboutir à un résultat simple où, pour pouvoir traiter de la nucléation ou, de façon équivalente, de la propagation dynamique de fissures, il faut et il suffit de s'intéresser à un objet de type taux de restitution d'énergie en choisissant

avec soin quelles constantes élastiques utiliser. Il est intéressant cependant de noter que pour aboutir à ce résultat, seules la Section (5.5) ainsi que les considérations permettant d'aboutir à l'expression de l'élasticité adiabatique non drainée (5.20) ainsi qu'à la forme de l'énergie interne dans le *bulk* (5.26) suffisent réellement. En effet, la relation (5.76) suppose seulement de pouvoir prendre U^{FD}, qui correspond à l'énergie interne stockée dans la fissure, comme une constante matériau. La Section 5.4 sert à détailler la forme de U^{FD} en la reliant à la notion d'entropie créée $\delta S_{créée}$ qui est une constante plus naturelle. Par conséquent, il aurait été possible de seulement postuler que pour les matériaux considérés U^{FD} est une constante, au même titre que le raisonnement tenu classiquement postule que la dissipation D est une constante. Pour essayer d'être complet sans être redondant, nous allons seulement nous contenter de donner quelles autres situations auraient pu être envisagées et par conséquent quelles élasticités doivent être considérées sans pour autant expliciter quelle forme prend alors l'énergie interne dans la zone fissurée.

5.6.1 Adiabaticité microscopique

Positionnement du problème

L'ensemble du formalisme établi précédemment repose sur l'hypothèse d'une température unique définie pour la phase solide et la phase fluide à l'échelle du VER Figure 5.1. Il a été notamment vu qu'une telle hypothèse n'était valable que si le temps caractéristique de la nucléation était grand devant le temps caractéristique des échanges thermiques opérant à l'échelle microscopique, permettant ainsi d'obtenir une température homogène au niveau d'un VER, tout en étant très petit devant le temps caractéristique des échanges thermiques macroscopiques (5.14). Il est intéressant de traiter une situation où les temps caractéristiques des différents phénomènes s'organisent de la façon suivante :

$$t_{nucl}^{carac} \quad \ll \quad t_{micro}^{carac} = \frac{{l_{pores}}^2}{c_{micro}^{th}} \quad \ll t_{macro}^{carac} = \frac{{l_{VER}}^2}{c_{macro}^{th}} \tag{5.77}$$

Une telle configuration signifie que les échanges thermiques au niveau de la microsctructure n'ont pas le temps de s'effectuer sur l'intervalle de temps correspondant au processus de nucléation. Par conséquent, il n'est pas possible de considérer que la température T est commune au solide et au fluide au sein du VER puisque celle-ci n'aura pas eu le temps de s'homogénéiser. Si les deux phases sont initialement à la même température T^0, il s'en suivra une variation de température qui peut être supposée uniforme au niveau de la phase solide et qui sera notée τ_s, ainsi qu'une autre variation propre à la phase fluide, toujours uniforme, et qui sera notée τ_f. Comme précisé précédemment, toutes les chances sont pour que les variations de température τ_s et τ_f soient différentes. Par contre, la relation (5.77) traduisant des échanges de chaleurs nuls au niveau de la microstructure, un tel cadre d'étude implique également des évolutions de la phase solide et de la phase liquide séparément isentropiques. Avec ces considérations, une première remarque importante est que les équations d'état (5.3) restent inchangées à l'exception près que la quantité τ doit être remplacée par τ_s. En effet, les considérations micromécaniques conduisant à (5.3) font abstraction de la température de la phase fluide (voir par exemple l'Annexe B.1).

Liaisons internes

La liaison traduisant le caractère non-drainé s'obtient toujours en combinant une équations d'état de la phase solide (5.3) ainsi qu'une équation de la phase fluide (5.11) de la

manière suivante :

$$0 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p - p^0}{M} + l\tau_s - 3\alpha_f \phi^0 \tau_f \tag{5.78}$$

Le fait d'avoir une évolution isentropique pour le fluide et pour le solide séparément conduit à la nullité de $s_s - s_s^0$ ainsi que $s_f - s_f^0$. Ceci se traduit au niveau du fluide par :

$$0 = c_f \tau_f - 3\alpha_f \phi^0 \left(p - p^0\right) \tag{5.79}$$

sachant que la liaison au niveau du solide s'écrit :

$$0 = \boldsymbol{k} : \boldsymbol{E} + l\left(p - p^0\right) + c_s \tau_s \tag{5.80}$$

Par conséquent, une nouvelle relation a été ajoutée mais au pris de l'introduction d'une nouvelle variable τ_f. La relation (5.79) permet d'éliminer directement cette nouvelle variable au profit du groupement $p - p^0$. Avec cette simplification, (5.78) se réécrit comme :

$$0 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p - p^0}{\tilde{M}} + l\tau_s \tag{5.81}$$

où la notation $\frac{1}{\tilde{M}} = \left(\frac{1}{M} - \frac{\left(3\alpha_f \phi^0\right)^2}{c_f}\right)$ a été introduite. Les relations (5.80) et (5.81) ressemblant à celles obtenues dans les cas précédents (5.14) et (5.14), il vient de manière immédiate que :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^0 + \left(\mathbb{C}_{iso}^D + \tilde{M}\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B} + \frac{1}{c - \tilde{M}l^2}\left(\boldsymbol{k} - \tilde{M}l\boldsymbol{B}\right) \otimes \left(\boldsymbol{k} - \tilde{M}l\boldsymbol{B}\right)\right) : \boldsymbol{E} \tag{5.82}$$

relation qui conduit à définir un tenseur d'élasticité apparent :

$$\tilde{\mathbb{C}}_{ad}^{ND} = \mathbb{C}_{iso}^D + \tilde{M}\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B} + \frac{1}{c - \tilde{M}l^2}\left(\boldsymbol{k} - \tilde{M}l\boldsymbol{B}\right) \otimes \left(\boldsymbol{k} - \tilde{M}l\boldsymbol{B}\right) \tag{5.83}$$

La présence d'un symbole $\backsim$ est seulement là pour différencier ce tenseur de $\mathbb{C}_{ad}^{ND}$ introduit en (5.20). De fait, $\tilde{\mathbb{C}}_{ad}^{ND}$ correspond tout autant à une élasticité adiabatique non-drainée.

Par conséquent, avec le positionnement (5.77) des temps caractéristiques, il suffira de considérer un taux de restitution de l'énergie calculé à partir d'une énergie potentielle où la partie élastique utilisera le tenseur adabatique non-drainé (5.83).

5.6.2 Fluide incompressible

Un dernier cas de figure faussement simple pouvant être évoqué est celui d'un fluide incompressible. En effet, étant donné que le fluide interstitielle dans les matériaux considérés est généralement de l'eau, il peut sembler approprié de supposer que celui-ci est incompressible et indilatable, ce qui implique que la masse volumique du fluide ρ_f est constante. Par conséquent, le caractère non-drainé se traduit directement sur l'une des variables thermodynamiques de l'énergie interne volumique du solide qui est $\phi - \phi^0 = 0$. Pour les besoins de l'étude, il est plus intéressant d'inverser en toute généralité une partie des lois de comportements pour considérer le triplet $(\boldsymbol{E}, \phi, s)$ comme variables thermodynamiques principales :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{\Sigma} & = & \boldsymbol{\Sigma}^0 + \left(\mathbb{C}_{iso}^D + N\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B} + \dfrac{1}{c_s - Nl_s{}^2}\left(\boldsymbol{k} - Nl_s\boldsymbol{B}\right) \otimes \left(\boldsymbol{k} - Nl_s\boldsymbol{B}\right)\right) : \boldsymbol{E} \\
 & & + \dfrac{N}{c_s - Nl_s{}^2}\left(l_s\boldsymbol{k} - c_s\boldsymbol{B}\right)\left(\phi - \phi^0\right) + \dfrac{1}{c_s - Nl_s{}^2}\left(Nl_s\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right)\left(s_s - s_s^0\right) \\
p & = & p^0 + \dfrac{Nc_s}{c_s - Nl_s{}^2}\left(\phi - \phi^0\right) + \dfrac{N}{c_s - Nl_s{}^2}\left(l_s\boldsymbol{k} - c_s\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{E} - \dfrac{Nl_s}{c_s - Nl_s{}^2}\left(s_s - s_s^0\right) \\
\tau & = & -\dfrac{Nl_s}{c_s - Nl_s{}^2}\left(\phi - \phi^0\right) + \dfrac{1}{c_s - Nl_s{}^2}\left(Nl_s\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right) : \boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c_s - Nl_s{}^2}\left(s_s - s_s^0\right)
\end{array}\right. \tag{5.84}$$

Le tenseur d'élasticité apparent permettant d'exprimer la dépendance de $\boldsymbol{\Sigma}$ vis à vis de $\boldsymbol{E}$ avec ce jeu de variables thermodynamiques s'interprète comme une élasticité apparente lors d'une expérience adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique, et isochore, c'est-à-dire à porosité ϕ constante. En toute généralité, il ne s'agit donc pas des constantes élastiques adiabatiques et non-drainées. Néanmoins, ce tenseur s'interprétera bien ici comme l'élasticité adiabatique non-drainée en raison du caractère incompressible et indilatable du fluide considéré. Pour bien fixer les idées, il est utile d'introduire la notation suivante :

$$\mathbb{C}_{ad}^{ic} = \mathbb{C}_{iso}^{D} + N\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B} + \frac{1}{c - Nl^2} (\boldsymbol{k} - Nl\boldsymbol{B}) \otimes (\boldsymbol{k} - Nl\boldsymbol{B}) \tag{5.85}$$

Ce cas de figure est faussement simple puisqu'il masque entièrement le comportement de la phase fluide. En d'autres termes, il n'est pas clair au premier abord si cette évolution se place dans le cadre de l'hypothèse d'une température unique pour la phase solide et la phase fluide, et donc dans la configuration (5.14), ou alors dans celle proposée précédemment où les temps caractéristiques s'organisent selon (5.77). La réponse à cette interrogation ne peut être obtenue que si les considérations précédentes ont été formulées. En effet, pour aboutir à (5.85) il a été supposé que le squelette solide connaissait une évolution isentropique, laquelle n'est pas compatible avec une température unique pour le fluide et le solide. Par conséquent, il serait plus rigoureux d'utiliser la notation τ_s dans (5.84) plutôt que τ.

Une nouvelle fois, l'objet obtenu *in fine* sera une énergie potentielle où la partie élastique sera calculée à partir du tenseur d'élasticité (5.85).

Chapitre 6

Analyse duale et taux de restitution d'énergie

Sommaire

6.1 Introduction . . . 164
6.2 Principe de l'analyse duale . . . 164
6.2.1 Les principes énergétiques . . . 164
6.2.2 Application au taux de restitution d'énergie . . . 165
6.3 Approches éléments finis en contraintes . . . 166
6.3.1 Méthode directe . . . 167
6.3.2 Redondance et choix du solver . . . 170
6.3.3 Les fonctions d'Airy . . . 171
6.4 Méthode basée sur les vecteurs contraintes par arêtes . . . 175
6.4.1 Principes fondamentaux . . . 175
6.4.2 Vecteurs contraintes linéaires par arêtes . . . 177
6.4.3 Vecteurs contraintes quadratiques par arêtes . . . 183
6.5 Bilan des différents procédés et application de la méthode . . . 187
6.5.1 Bilan des différents codes éléments finis . . . 187
6.5.2 Analyse duale d'un problème de nucléation . . . 188

6.1 Introduction

Nous avons vu l'importance du taux de restitution d'énergie G ou de son pendant incrémental G_{inc} dans les théories de nucléation et de propagation de fissures. Il est par conséquent crucial d'être capable d'évaluer avec précision cette quantité. Pour une surface ou une longueur infinitésimale de fissure créée, une méthode reposant sur des développements asymptotiques raccordés comme celle proposée par Leguillon [2002] est très efficace. Cependant, cette procédure n'a qu'un domaine de validité restreint et ne permet pas de rendre compte, pour des géométries de fissures n'étant pas très petites (au sens donné Chapitre 3, Section 3.4), du comportement du taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc}. La problématique de la nucléation pouvant mettre en jeu des surfaces ou des longueurs de fissures qui sortent de ce domaine ne permet pas toujours de justifier l'utilisation de cette méthode. Pour ces géométries, une approximation numérique reposant sur des éléments finis (Méthode des Éléments finis, ou *Finite Element Method* (FEM)) est souvent utilisée. Bien que non infinitésimale, la dimension de la fissure créée peut toutefois rester petite par rapport aux dimensions caractéristiques de la structure. Il s'agit donc de juger numériquement de l'impact d'un défaut de petite taille, souvent associé à des singularités de contraintes, dans une structure souvent considérée comme infinie ou tout du moins de grande dimension. La question de la précision du résultat numérique et donc de sa fiabilité se pose donc naturellement. Afin de pouvoir répondre à cette problématique nous proposons une méthode efficace permettant de calculer des approximations de l'objet G_{inc} qui jouissent du statut de minorant et de majorant par rapport à celui-ci. Ces deux bornes vont donc pouvoir quantifier avec exactitude le degré de précision obtenu sur l'approximation du taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc}.

6.2 Principe de l'analyse duale

Nous allons dans un premier temps expliquer le fondement théorique sur lequel repose le statut de borne des objets que nous nous proposons de calculer. Nous allons dans la suite nous placer dans un contexte bidimensionnel qui n'a, pour nos propos, pas d'autre avantage que celui de simplifier les notations. Pour un niveau de chargement donné, l'énergie potentielle du milieu sain sera notée $E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}^{sol}\right)$ tandis que celle du milieu fissuré sera notée $E_p^f\left(\ell, \boldsymbol{\xi}^{sol}\right)$ où ℓ représente la taille de la fissure propagée ou nucléée. Bien évidement, l'argument $\boldsymbol{\xi}^{sol}$ correspond à un champ de déplacement solution tantôt du problème concernant le milieu sain et tantôt de celui présentant une fissure. Cet argument sert à préciser qu'il s'agit de l'énergie potentielle réelle du problème, par opposition à une énergie virtuelle comme il sera introduit plus loin. Nous rappelons qu'alors le taux de restitution d'énergie incrémental se définit de la façon suivante :

$$G_{inc} = \frac{E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}^{sol}\right) - E_p^f\left(\ell, \boldsymbol{\xi}^{sol}\right)}{\ell} \tag{6.1}$$

Afin d'encadrer cette quantité, nous allons nous baser sur les deux principes énergétiques fondateurs des approches variationnelles modernes.

6.2.1 Les principes énergétiques

Le principe du minimum de l'énergie potentiel stipule que parmi l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles $\boldsymbol{\xi}'$, une solution du problème minimise l'énergie potentiel. Autrement dit, en notant $E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}'\right)$ (respectivement $E_p^f\left(\ell, \boldsymbol{\xi}'\right)$) l'énergie potentielle

associée à un champ de déplacement virtuel $\boldsymbol{\xi}'$ cinématiquement admissibles avec le problème sain (respectivement avec celui comportant une fissure d'extension ℓ), on dispose des inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}^{sol}\right) & \leq & E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}'\right) \\ E_p^f\left(\ell,\boldsymbol{\xi}^{sol}\right) & \leq & E_p^f\left(\ell,\boldsymbol{\xi}'\right) \end{array} \tag{6.2}$$

Utiliser uniquement un code élément fini utilisant la Méthode des Éléments finis basée sur les Déplacements, ou *Displacements Finite Element Method* (DFEM) permet, selon ce principe, d'obtenir des majorant des quantités de type énergies potentielles qui nous intéressent mais, en revanche, ne permet pas de donner un encadrement de G_{inc} puisque ce dernier implique une différence entre deux énergies potentielles. Il est cependant possible d'obtenir un minorant des quantités énergies potentielles en considérant le principe énergétique basé sur l'énergie complémentaire. Ce dernier affirme que parmi l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles $\boldsymbol{\sigma}'$, celui solution du problème pour un chargement donné réalise le minimum de l'énergie complémentaire. Comme pour l'énergie potentielle, nous noterons $E_c^0\left(\boldsymbol{\sigma}'\right)$ (respectivement $E_c^f\left(\ell,\boldsymbol{\sigma}'\right)$) l'énergie complémentaire associée à un champ de contraintes virtuel $\boldsymbol{\sigma}'$ statiquement admissibles avec le problème sain (respectivement avec celui comportant une fissure d'extension ℓ). Enfin, sachant que les quantités énergie potentielle et énergie complémentaire calculées à partir des solutions du problème sont opposées l'une à l'autre, on peut également écrire les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} -E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}^{sol}\right) & \leq & E_c^0\left(\boldsymbol{\sigma}'\right) \\ -E_p^f\left(\ell,\boldsymbol{\xi}^{sol}\right) & \leq & E_c^f\left(\ell,\boldsymbol{\sigma}'\right) \end{array} \tag{6.3}$$

6.2.2 Application au taux de restitution d'énergie

Grâce à la définition de G_{inc} donnée en (6.1) et aux inégalités (6.2) et (6.3) on aboutit finalement à un encadrement de la quantité recherchée à savoir :

$$-\frac{E_c^0\left(\boldsymbol{\sigma}'\right)+E_p^f\left(\ell,\boldsymbol{\xi}'\right)}{\ell} \leq G_{inc} \leq \frac{E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}'\right)+E_c^f\left(\ell,\boldsymbol{\sigma}'\right)}{\ell} \tag{6.4}$$

où $\boldsymbol{\xi}'$ et $\boldsymbol{\sigma}'$ sont à lire comme des champs de déplacements et de contraintes respectivement cinématiquement et statiquement admissibles avec le problème correspondant à la fonctionnelle dont ils sont arguments. Par exemple, il ne s'agit bien évidemment pas du même champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}'$ argument de $E_p^f\left(\ell,\boldsymbol{\xi}'\right)$ et de $\left(\boldsymbol{\xi}'\right)$. Cet encadrement formel peut, pour le moment, laisser septique. En effet, il s'agit de sommer les erreurs d'approximations provenant du terme d'énergie potentielle et du terme d'énergie complémentaire. Il est donc impératif d'être, dans un premier temps, capable d'explorer des espaces de champs statiquement admissibles et cinématiquement admissibles suffisamment grands dans le but d'obtenir de petits écarts par rapport aux valeurs solutions afin que ces différences n'interviennent pas dans les chiffres significatifs concernés par l'apparition de la fissure. De plus, la construction de champs de déplacements cinématiquement admissibles pouvant se faire naturellement grâce à une méthode type DFEM, il reste à préciser comment nous allons construire des champs de contraintes statiquement admissibles. A cet effet, nous proposons d'utiliser une Méthode des Éléments finis basée sur les Contraintes, ou *Equilibrium Finite Element Method* (EFEM). Si, grâce à la popularité des méthodes éléments finis reposant sur les déplacements, des codes DFEM performants et bien optimisés sont facilement disponibles, il n'en est rien pour les méthodes EFEM. Ceci s'explique par le degré de complexité supérieur d'une méthode permettant d'imposer à la fois simplement et efficacement le caractère statiquement admissible

d'un champ de contraintes par rapport à une méthode garantissant le caractère cinématiquement admissible d'un champ de déplacement. Ce chapitre s'attachera ainsi à décrire, dans les grandes lignes, les différents méthodes auxquels nous pouvons penser lorsqu'on cherche à construire un code EFEM. Enfin, une dernière remarque rejoignant celle faite précédemment sur l'ordre de grandeur des erreurs, est que, la résolution se faisant numériquement, il faudra vérifier que les erreurs d'approximations liées à l'utilisation de nombres flottants n'engendrent pas un bruit d'un trop grand ordre de grandeur. En effet, l'objectif étant de rendre compte avec précision de la présence d'un défaut, il sera nécessaire d'utiliser des maillages présentant une finesse élevée et donc d'augmenter considérablement le nombre d'opérations entre ces nombres flottants.

6.3 Approches éléments finis en contraintes

Afin de pouvoir tirer parti de l'encadrement (6.4) nous avons vu qu'il serait judicieu de construire un code élément fini en contraintes. Pour ce faire, nous nous sommes concentrés sur des problèmes bidimensionnels. Par conséquent, la plupart des méthodes de construction proposées ci-dessous sont intimement liées au caractère 2D des problèmes traités. Nous supposerons également que les éléments utilisés pour réaliser les maillages sont triangulaires. Nous allons dans ce qui suit donner les grands principes qui permettent de construire des tels codes éléments finis. Pour plus de détails, nous vous invitons à vous reporter à d'excellents travaux sur le sujet tels que Kempeneers et al. [2003] ou encore de Veubeke [2001]. Le problème majeur d'une méthode EFEM repose sur le fait qu'il est nécessaire de garantir au champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ d'être statiquement admissible. Cela signifie, entre autre, que ce champ doit vérifier les conditions d'équilibre locale qui sont :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \tag{6.5}$$

en l'absence de force de volume, mais également que le vecteur contrainte doit être continue à travers toute surface de discontinuité de $\boldsymbol{\sigma}$. c'est-à-dire qu'à travers une telle surface la relation suivante doit être vérifiée :

$$[\![\boldsymbol{\sigma}]\!].\boldsymbol{n} = \mathbf{0} \tag{6.6}$$

en tout point de la surface où $\boldsymbol{n}$ représente la normale à cette dernière et $[\![\,]\!]$ est le saut d'une quantité au travers de la surface tel que représenté sur la Figure 6.1. Dans ce contexte, le saut du champ de contraintes serait tout simplement égal à $\boldsymbol{\sigma}^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}$. Enfin, il est

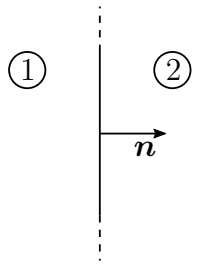

Figure 6.1 – Illustration du saut d'une quantité au travers une surface de discontinuité

nécessaire de demander à $\boldsymbol{\sigma}$ d'être symétrique afin de garantir l'équilibre en moment de chaque sous système. D'un point de vue élément finis, on souhaite pouvoir construire de manière discrétisée le champ de contraintes sur l'ensemble de la structure. Cependant, la condition de continuité (6.6) ne porte pas sur le champ de contraintes mais sur le vecteur contrainte et est de faite beaucoup plus souple. Afin de ne pas être trop restrictif sur le choix

de l'espace d'optimisation, il ne semble pas opportun de travailler avec des inconnues nodales comme dans le cadre des méthodes DFEM. Cela reviendrait en effet à exiger la continuité du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ dans son intégralité.

6.3.1 Méthode directe

La méthode la plus naturelle pour répondre aux problématiques que nous avons exposées précédemment est de chercher à construire un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ par éléments. On peut par exemple choisir de le construire polynomial sur chacun des éléments du maillage. En prenant soin de construire ce tenseur de manière symétrique, on aurait, pour un problème bidimensionnel, 3 coefficients à définir. En coordonnées cartésiennes il s'agirait bien évidemment de σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{xy}. Une fonctionnelle linéaire nécessitant 3 informations pour être définie, on aurait à gérer, dans ce contexte, 9 inconnues par éléments. Pour le $e^{ème}$ élément, ces 9 inconnues serons regroupées symboliquement sous la forme d'un vecteur noté $\{\sigma^{(e)}\}$. La réunion de ces inconnues associées aux différents éléments du maillage donne lieu à un vecteur d'inconnues globales que nous noterons $\{\sigma\}$. Il est alors possible, à partir de l'ensemble de ces inconnues, de calculer l'énergie élastique de contrainte correspondant au champ $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi construit sur chaque élément du maillage, puis d'en déduire l'énergie élastique de contrainte globale du milieux.

$$\mathcal{W}^{\star}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2}{}^{t}\{\sigma\}.[\mathbb{S}].\{\sigma\} \tag{6.7}$$

où $\mathbb{S}$ est la matrice de souplesse géométrique du milieu considéré.

Afin d'effectivement donner le sens d'une énergie élastique de contrainte à (6.7), il est nécessaire de garantir au champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ engendré d'être statiquement admissible. La vérification de l'équilibre local (6.5) revient à exiger pour chaque élément la vérification de 2 équations polynomiales :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & + & \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} & = & 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} & + & \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & = & 0 \end{array} \tag{6.8}$$

Le champs de contraintes étant linéaire sur chaque élément, sa divergence est donc un tenseur d'ordre un constant par élément. Ces deux équations se traduisent alors comme deux uniques équations scalaires faisant intervenir les 9 inconnues $\{\sigma^{(e)}\}$ de l'élément de façon linéaire :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \text{div. lin. (e)} \quad \end{bmatrix}.\left\{\sigma^{(e)}\right\} \tag{6.9}$$

où la matrice [div. lin. (e)] dans l'équation ci-dessus est de dimensions 2x9. Ces conditions peuvent par exemple être imposée via des multiplicateurs de Lagrances. Ces derniers, étant la forme duale d'un point de vue énergétique des deux équations de (6.8), peuvent s'interpréter comme les composantes horizontale et verticale de la translation de corps rigide de l'élément (c.f. de Veubeke [2001]).

Il nous reste à voir comment imposer la continuité du vecteur contrainte au travers des surfaces de discontinuité. L'espace des champs de contraintes choisis étant celui des champs linéaires par éléments, les surfaces de discontinuité sont donc les arêtes communes à deux éléments. A partir de la donnée d'une orientation arbitraire sur une telle arête, il est possible de définir un vecteur tangent $\boldsymbol{t}$ mais aussi une normale $\boldsymbol{n}$ et ainsi de parler de vecteur contrainte. En effet, si $\boldsymbol{e}_z$ est le vecteur hors plan, on garde la convention utilisée lors du

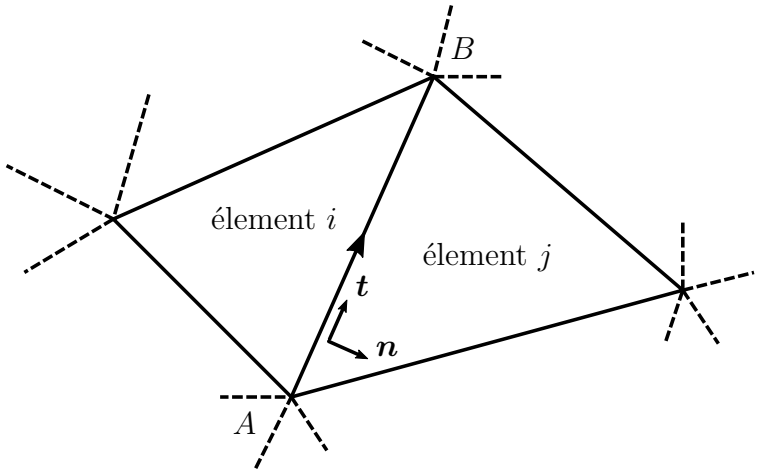

FIGURE 6.2 – Arête commune entre un élément i et un élément j. Orientation de la tangente $\boldsymbol{t}$ et de la normale $\boldsymbol{n}$ à l'arête en fonction d'un sens de parcours.

chapitre sur les transformations conforme (voir Chapitre 3, Section 3.3) consistant à orienter le vecteur tangent selon le sens de parcours de l'arc et de définir la normale $\boldsymbol{n}$ telle que :

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{e}_z \tag{6.10}$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel entre deux vecteurs (cf. Figure 6.2 pour une illustration de ces conventions). Le vecteur contrainte issu d'un $\boldsymbol{\sigma}$ linéaire étant lui aussi linéaire en tant que fonction de l'abscisse curviligne de l'arête commune orientée, il suffit de connaître son expression en deux points (par exemple le point A et le point B sur la Figure 6.2) afin de le définir complètement. Le vecteur contrainte se réduisant à deux composantes dans le plan d'étude, par exemple T_x et T_y, la continuité du vecteur contrainte à la traversé d'une arête commune se résume à exprimer dans la direction horizontale, puis dans la direction verticale, l'égalité entre deux fonctionnelles linéaires. Une telle égalité se traduit par deux équations en exprimant par exemple l'égalité aux nœuds A et B de l'arête. D'un point de vue comptable, il découle de la continuité du vecteur contrainte à la traversé d'une arête partagée par deux élément du maillage 4 équations à vérifier. Ces équations font cette fois-ci intervenir les 9 variables de chacun des deux éléments qui sont notées $\{\sigma^{(i)}\}$ et $\{\sigma^{(j)}\}$ selon la numérotation introduite par la Figure 6.2.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \text{cont. (i)/(j).} \quad \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma^{(i)} \\ \sigma^{(j)} \end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

où [cont. $(i)/(j)$.] est une matrice 4x18 dans le cas considéré. Encore une fois, on peut, pour imposer ces conditions de continuité, recourir à 4 multiplicateurs de Lagrange par arête ayant la propriété d'être commune à deux éléments du maillage. Cette méthode peut également être utilisée pour imposer les conditions aux limites en effort sur la frontière du milieu considéré, aboutissant ainsi à un système linéaire portant sur le vecteur des inconnues $\{\sigma\}$:

$$\left[\text{C.L. } T^d \right] . \{\sigma\} = \left\{ T^d \right\} \tag{6.12}$$

Il n'y a pas de difficulté conceptuelle supplémentaire en ce qui concerne la construction du terme correspondant au travail virtuel des déplacements imposés. Ce dernier se mettant *in fine* sous la forme :

$$\int_{S_{T_i}} u_i^d . T_i dS = {}^t \{\sigma\} . \left\{ U^d \right\} \tag{6.13}$$

Avec ces notations, l'énergie complémentaire associée à un champ $\boldsymbol{\sigma}$ polynomial par éléments s'écrit :

$$E_c(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}{}^t\{\sigma\}.[\mathbb{S}].\{\sigma\} - {}^t\{\sigma\}.\left\{U^d\right\} \tag{6.14}$$

En utilisant des multiplicateurs de Lagrange, la minimisation de cette énergie sous les conditions détaillées précédemment conduit à résoudre un système linéaire pouvant être schématisé de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{S} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \text{divergence} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \text{continuité} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \text{C.L. } T^d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{divergence} \\ \text{continuité} \\ \text{C.L. } T^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} . \begin{Bmatrix} \sigma \\ \text{lagrangiens} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^d \\ 0 \\ 0 \\ T^d \end{Bmatrix} \tag{6.15}$$

où les matrices [divergence], [continuité] et [C.L. T^d] sont obtenues par juxtaposition des matrices élémentaires obtenue par les méthodes décrites précédemment ((6.9) et (6.11)).

Cette description très succincte des principes sur lesquels repose un code EFEM assez simple nous permet de procéder à un bilan comptable concernant la taille du système linéaire à résoudre pour un problème et un maillage donné. Avec les précisions introduites précédemment, en notant N_E le nombre d'éléments du maillage, N_A le nombre d'arêtes et N_{AB} le nombre d'arêtes appartenant au bord du maillage, on peut dénombrer les contributions suivantes afin de calculer la taille du système linéaire à résoudre :

— $9 \cdot N_E$ concernant la taille de la matrice de souplesse géométrique $\mathbb{S}$

— $2 \cdot N_E$ pour les équations assurant l'équilibre local

— $4 \cdot (N_A - N_{AB})$ pour les équations associées à la continuité du vecteur contrainte

— 4 fois le nombre d'arêtes appartenant au bord et où des conditions aux limites en efforts sont imposées.

Le dernier point de cette liste dépendant du problème considéré et étant identique pour chacune des stratégies que nous allons exposer, nous allons nous contenter des trois premières contributions listées ci-dessus afin d'estimer la taille du système linéaire. Afin de simplifier notre propos, il serait préférable de pouvoir effectuer ce dénombrement en fonction d'une seule caractéristique du maillage considéré. Ainsi, il sera par exemple préférable d'obtenir une approximation du nombre d'équations à considérer en fonction du nombre d'éléments du maillage. En ce sens, il est nécessaire d'estimer le troisième item de la liste ci-dessus par une fonction dépendant uniquement de N_E. A cet effet, il est à noter que, comme précisé par l'équation (6.11), chaque équation relative à la continuité du vecteur contrainte fait intervenir les inconnues des deux éléments adjacents à l'arête considérée. Par conséquent, il faut considérer que les 4 équations relatives à la continuité du vecteur contrainte à la traversée d'une arête commune entre deux éléments voisins comptent pour moitié pour chacun de ces éléments. Par conséquent, pour un élément triangulaire donné, en ne se préoccupant pas de ceux se trouvant au bord du maillage, 2 équations sont à prendre en compte pour chacune de ses arêtes afin de garantir la continuité du vecteur contrainte. La contribution $4 \cdot (N_A - N_{AB})$ dans la liste ci-dessus peut donc être approximée par $3 \cdot 2 \cdot N_E$. Ainsi, on peut considérer qu'avec une telle méthode d'élément finis de type EFEM, pour un maillage constitué d'un nombre d'élément N_E, on obtiendra un système linéaire à inverser de taille :

$$(9 + 2 + 3 \cdot 2)N_E = 17 \cdot N_E \tag{6.16}$$

Cette information est assez révélatrice de l'efficacité du code numérique étant donné que la taille du système est intimement liée à son temps de résolution. A ce titre, cette quantité sera le point de départ de notre discussion visant à comparer les différentes méthodes d'éléments finis en contraintes qui s'offrent à nous.

Le même travail de dénombrement peut être mené dans le cas où le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est choisi cette fois quadratique par éléments. Chaque élément sera alors associé à 18 inconnues. Vérifier les équations de la divergence nécessitera 6 équations scalaires et la continuité du vecteur contrainte à la traversée d'une interface sera associée à 6 équations également. Le système linéaire à inverser obtenu dans ce cadre sera de taille :

$$(18 + 6 + 3 \cdot 3) \cdot N_E = 33 \cdot N_E \tag{6.17}$$

6.3.2 Redondance et choix du solver

Avant de passer à la description d'une autre méthode permettant de construire un code EFEM, il reste, afin d'être complet dans notre présentation relativement succincte, un point à éclaircir concernant la faisabilité de la résolution du système linéaire proposé (6.15). Il existe en effet un point d'achoppement majeur lié à l'utilisation d'un code type EFEM qui tire son origine dans la redondance de certaines équations proposées. Il est à noter que cet inconvénient n'est pas imputable à la méthode qui vient d'être présentée et n'est en aucun cas solutionné par les schémas proposés dans les sections suivantes. Une façon très simple de constater la redondance de certaines équations survenant dans le cadre d'une méthode EFEM est d'imaginer un domaine borné chargé uniquement en efforts sur la frontière extérieure du milieu. Le fait d'imposer aux champs de contraintes construits d'être symétriques et de vérifier les équations d'équilibre local (6.5) au sein de chacun des triangles du maillage implique automatiquement la vérification de l'équilibre global de chacun de ces éléments. Cette propriété combinée à la continuité du vecteur contrainte au travers des surfaces de discontinuités implique également l'équilibre global de tout le système considéré. Or, bien évidemment, le chargement auquel ce milieu est soumis aura forcément été choisi de manière à respecter cet équilibre global. L'équilibre global du système aura ainsi été imposé deux fois, une fois par le biais des conditions (6.5) et (6.6) et une fois en ayant imposé la valeur du vecteur contrainte sur le bord du milieu considéré. Afin d'illustrer un peu mieux notre propos,

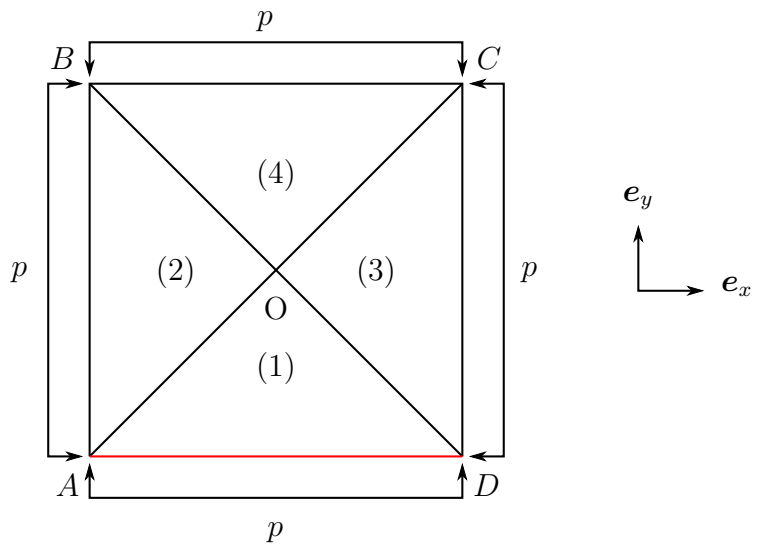

FIGURE 6.3 – Milieu carré de longueur L. Illustration d'une source de redondance parmi les équations

nous pouvons par exemple considérer le problème en déformations planes d'un carré de taille L soumis à une pression isotrope p comme représenté sur la Figure 6.3. On notera $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ le champ de contrainte qui règne dans l'élément (i) qu'on choisira linéaire. Supposons que les conditions concernant la divergence dans tous les éléments et que les conditions de nullité du saut de vecteur contrainte au travers des arêtes AO, BO, CO et DO soient toutes vérifiées. Par conséquent, un tel champ de contrainte vérifie automatiquement l'équilibre global du carré en résultante. Étant donné qu'on considère des champs de contraintes linéaires par éléments, les conditions aux limites sont que sur chaque face du carré, le vecteur contrainte est égale à $-p\boldsymbol{n}$ en deux points de l'arête où $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure à la facette. Par exemple, pour l'arête CD, on aurait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(3)}(C).\boldsymbol{e}_x &= -p\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{\sigma}^{(3)}(D).\boldsymbol{e}_x &= -p\boldsymbol{e}_x \end{aligned} \tag{6.18}$$

Supposons désormais que ces conditions aux limites soient vérifiées sur les facettes AB, BC et CD, mais que, sur la facette AD, on ait seulement imposé $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(A).\boldsymbol{e}_y = -p\boldsymbol{e}_y$. Etant donné l'espace choisi pour $\boldsymbol{\sigma}$, l'équilibre global en résultante nous donnerait :

$$\mathbf{0} = -pL\boldsymbol{e}_y - \frac{L}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(A).\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(D).\boldsymbol{e}_y\right) \tag{6.19}$$

ce qui, eut égard à la condition aux limites imposée en A sur l'arête AD, se traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(D).\boldsymbol{e}_y = -p\boldsymbol{e}_y \tag{6.20}$$

Ainsi, la condition aux limites relative au point D sur l'arête AD est automatiquement vérifiée, sans l'avoir explicitement exigée. Rajouter cette condition dans le jeu des équations à résoudre introduit ainsi une redondance dans le système (6.15) ce qui se traduit par une perte du caractère inversible de ce dernier. Il est cependant intéressant de noter que cela ne signifie pas que le système d'équation n'admet pas de solution mais plutôt que la solution n'est pas unique. Fort heureusement, cette perte d'unicité ne concerne en fait que les multiplicateurs de Lagrange. Les variables d'optimisation $\{\sigma\}$ sont quant à elles déterminées de manière unique. Par conséquent, ce caractère non inversible du système linéaire, bien que fâcheux du point de vue numérique, n'impacte pas la faisabilité au moins théorique du processus proposé puisqu'il s'agit simplement d'exhiber une des solutions possibles. Une fois ce constat établi, plusieurs stratégies peuvent être adoptées. Il est par exemple possible de mener une opération consistant à identifier quelles sont les équations redondantes entre elles puis à en éliminer certaines afin de retrouver un système linéaire de rang égal à sa dimension. C'est par exemple la stratégie adoptée par Kempeneers et al. [2003] dans ses travaux. Pour notre part, nous avons choisi d'utiliser un solveur permettant déjà de gérer ce genre de système linéaire dégénéré se nommant MUMPS (MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver). D'autres phénomènes peuvent être à l'origine du caractère dégénéré du système linéaire à inverser, comme par exemple des configurations géométriques particulières du maillage, mais ils peuvent tous être traités de façon analogue.

Cette remarque vient compléter la description très succincte d'une première méthode EFEM que nous appellerons méthode directe. Cette méthode a l'avantage de pouvoir être facilement adaptée à des contextes rigoureusement 3D et axisymétrique.

6.3.3 Les fonctions d'Airy

Une façon très simple pour améliorer la méthode décrite précédemment est de penser à construire des champs de contraintes qui sont d'ores et déjà à divergence nulle. Pour

un problème bidimensionnel, on peut par exemple penser à recourir à une fonction d'Airy. En effet, les équations (2.2), permettant de calculer le champ de contrainte à partir d'une fonction d'Airy ϕ, ont été spécialement construites dans le but de vérifier automatiquement les conditions d'équilibre local en l'absence de force de volume (6.8). Une question venant légitimement à l'esprit est de savoir si, à l'aide d'une telle fonction, il est possible de construire tous les champs de contraintes polynomiaux à divergence nulle. Procédons pour répondre à cette question à un petit dénombrement se basant sur le nombre de monômes composant un polynôme de deux variables de degré k. A cette fin, le Tableau 6.1 listant les différents monômes composant un polynôme de degré k en tant que polynôme de deux variables x et y est établi. Au vue de la définition des composantes en base cartésienne du champs de

Degré k	Monômes de degré k	Nombre de monôme pour un polynôme de degré k
0	1	1
1	$x \quad y$	3
2	$x^2 \quad xy \quad y^2$	6
3	$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	10
4	$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^3$	15
$\vdots$	$\vdots \qquad \ddots$	$\vdots$
p	$x^p \qquad \ldots\ldots \qquad y^p$	$\frac{(p+1)(p+2)}{2}$

TABLEAU 6.1 – Liste des monômes de degré k pour un polynôme de deux variables x et y

contraintes à partir d'une fonction d'Airy ϕ, il apparait nécessaire de considérer cette dernière comme polynomiale de degré $k+2$ si l'on souhaite travailler avec des champs polynomiaux de degré k. On remarque également que les monômes de degré 0 et 1 du polynôme associé à la fonction d'Airy ϕ ne jouent pas de rôle dans la définition de $\boldsymbol{\sigma}$. Pour assurer le caractère injectif de l'application permettant de définir un champ de contrainte à partir d'une fonction d'Airy polynomiale, il faut et il suffit de fixer par exemple à zéro les coefficients associés à ces trois monômes. Ainsi, en partant d'un espace de polynôme de degré $k+2$ privé des monômes de degré 0 et 1, qui est un espace de dimension

$$\frac{(k+3)(k+4)}{2} - 3 = \frac{(k+1)(k+6)}{2} \tag{6.21}$$

on obtient, via la relation (2.2), un espace de champs de contraintes à divergence nulle, symétriques, polynomiaux de degré k, de même dimension. Réciproquement, dans un contexte bidimensionnel, l'espace des champs de contraintes polynomiaux, symétriques, de degré k est de dimension $\frac{3(k+1)(k+2)}{2}$. La divergence d'un tel tenseur sera un tenseur d'ordre 1 ayant deux composantes polynomiales de degré $k-1$. Imposer sa nullité requière $k(k+1)$ équations qui sont autant de relations linéaires indépendantes à imposer entre les degré de liberté définissant $\boldsymbol{\sigma}$. En deux dimensions, l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques, polynomiaux de degré k et à divergence nulle est donc de dimension :

$$\frac{3(k+1)(k+2)}{2} - k(k+1) = \frac{(k+1)(k+6)}{2} \tag{6.22}$$

qui est donc égale à la dimension de l'espace considéré précédemment. Sachant que l'un de ces deux espaces est trivialement inclus dans l'autre, ce résultat implique donc qu'il s'agit d'un seul et même espace. On en déduit que tous les champs de contraintes polynomiaux à divergence nulle dérivent forcément d'une fonction d'Airy elle même polynomiale.

Ce résultat permet de voir tout de suite l'intérêt qu'il y a à définir des champs de contraintes via une fonction d'Airy. Tout d'abord, il est important de préciser que l'espace d'approximation via des fonctions d'Airy est rigoureusement le même que celui utilisé via une méthode directe comme présenté précédemment. De plus, l'usage des fonctions d'Airy va permettre de diminuer la taille de la matrice de souplesse $[\mathbb{S}]$ puisque, l'espace de travail de base étant de dimension inférieure, le nombre d'inconnues par éléments se verra diminuer. Enfin, le bénéfice en terme de nombre d'équation à considérer est double puisque, dans la représentation (6.15), il sera possible de se passer de la matrice [divergence]. Le gain en terme de taille de système et donc en temps de calcul semble donc être très intéressant et peut se faire dans ce contexte à moindres frais. Avant de calculer plus précisément les pendants de (6.16) et (6.17), assurons nous que les équations de continuité du vecteur contrainte restent facile à établir. Pour ce faire, nous allons à nouveau utiliser une propriété déjà énoncée lors des discussions concernant les fonctions holomorphes. Sur un arc orienté paramétré

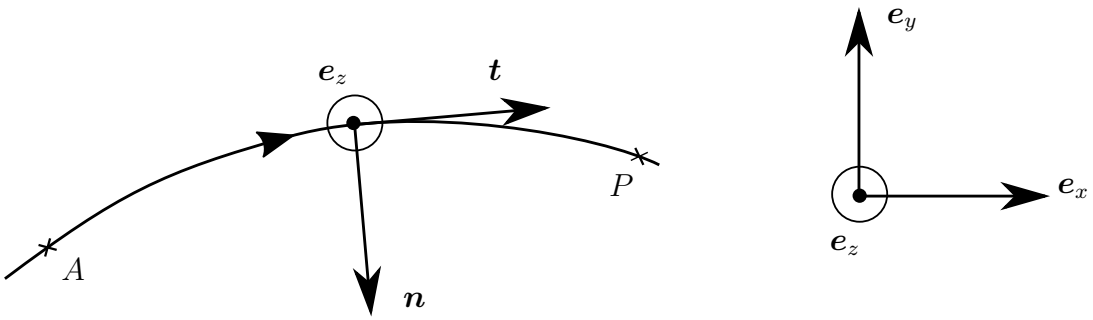

FIGURE 6.4 – Arc orienté et convention d'orientation de la normal

$x(s)\boldsymbol{e}_x + y(s)\boldsymbol{e}_y$, le vecteur tangent vérifie la relation $\boldsymbol{t}ds = dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y$. La convention d'orientation, déjà donnée précédemment, et reprécisée par la Figure 6.4 permet de définir un vecteur normal au contour par la relation (6.10). Plus précisément, avoir convenu d'une orientation permet de définir une notion d'extérieur et d'intérieur au contour. Se faisant, la notion de vecteur contrainte sur un arc orienté perd toute ambiguïté. On peut d'ailleurs quantifier ce dernier de manière très agréable lorsque le champ de contrainte dérive d'une fonction d'Airy tel que défini par (2.2). On trouve en effet :

$$\boldsymbol{T}ds = \boldsymbol{\sigma}.\left(dy\boldsymbol{e}_x - dx\boldsymbol{e}_y\right) = d(\phi_{,y})\boldsymbol{e}_x - d(\phi_{,x})\boldsymbol{e}_y \tag{6.23}$$

Cette expression suggère fortement qu'il serait plus agréable de manipuler, en lieu et place du vecteur contrainte, son intégrale le long d'un arc orienté. Par exemple, la résultante des actions extérieures exercées par l'extérieur au contour sur le dit contour entre deux points A et P, tels que représentés sur la Figure 6.4, s'exprime :

$$\int_A^P \boldsymbol{T}ds = \left(\phi_{,y}(P) - \phi_{,y}(A)\right)\boldsymbol{e}_x - \left(\phi_{,x}(P) - \phi_{,x}(A)\right)\boldsymbol{e}_y \tag{6.24}$$

Il est intéressant de noter que, en fixant par exemple le point A, la connaissance du vecteur contrainte en tout point de l'arc est strictement équivalente à la connaissance de l'objet (6.24) pour tout point P appartenant à l'arc. Ainsi, pour revenir à l'objet de nos préoccupations et en se basant sur la Figure 6.2, exiger que le vecteur contrainte soit continu à la traversée de l'arête AB revient strictement à demander de vérifier le système d'équation suivant :

$$\forall P \in [AB] \quad , \quad \begin{cases} \phi_{,y}^{(j)}(P) - \phi_{,y}^{(j)}(A) & = \phi_{,y}^{(i)}(P) - \phi_{,y}^{(i)}(A) \\ \phi_{,x}^{(j)}(P) - \phi_{,x}^{(j)}(A) & = \phi_{,x}^{(i)}(P) - \phi_{,x}^{(i)}(A) \end{cases} \tag{6.25}$$

où $\phi^{(i)}$ (resp. $\phi^{(j)}$) est la fonction d'Airy associée à l'élément numéro (i) (resp. (j)). Cette notation, peut être un peu lourde, devient très efficace lorsqu'on s'intéresse à des espaces d'approximations polynomiaux. En effet, si l'espace d'approximation choisi est celui des champs de contraintes polynomiaux de degré k, alors pour assurer la propriété (6.6) à la traversé d'une arête AB commune entre deux éléments, il faut et il suffit que (6.25) soit garanti pour $k+1$ point P distincts appartenant tous au segment ouvert à gauche $]AB]$. On retrouve donc, et c'est bien normal, le même nombre d'équation à vérifier que dans le cas des code EFEM directs présentés précédemment (cf. (6.11)). Pour un espace d'approximation de champs linéaires par morceaux, on peut par exemple, toujours selon la représentation associée à la Figure 6.2, choisir d'exprimer les égalités (6.25) pour P positionné d'une part au niveau du point B et d'autre part au niveau du milieu de l'arête. Ainsi, les fonctions d'Airy garantissent un accès très simple aux conditions de continuité du vecteur contrainte.

Ce point technique clarifié, nous pouvons désormais procéder au fameux bilan comptable. En considérant un espace d'approximation correspondant à des champs de contraintes polynomiaux par morceaux on peut récapituler les résultats précédents de la manière suivante :

— $\frac{(k+1)(k+6)}{2}$ variables par éléments correspondant à la construction d'une fonction d'Airy

— $2(k+1)$ équations par arête partagée entre deux éléments afin de garantir la continuité du vecteur contrainte

Si, comme dans la partie précédente, l'objectif est de trouver une estimation de ces quantités en fonction uniquement du nombre d'éléments du maillage N_E, il est alors nécessaire de reformuler le dernier item de cette liste. Une bonne estimation de ce dernier est obtenue, nous l'avons vu, en considérant que ces d'équations comptent pour moitié lorsqu'elles sont rapportées aux éléments. Si les équations liées aux conditions aux limites de type effort sont de plus laissées de côté, la taille du système linéaire à résoudre est caractérisée par :

$$\text{Taille du système linéaire} = \frac{(k+1)(k+12)}{2} N_E \tag{6.26}$$

Un degré d'approximation linéaire aboutit à une taille $13 \cdot N_E$ alors qu'une approximation quadratique donne $21 \cdot N_E$. Ces deux quantités sont bien évidemment à comparer avec (6.16) et (6.17). Ainsi, une méthode EFEM basée sur des champs de contrainte étant d'ores et déjà à divergence nulle permet un gain de l'ordre de 30% en terme de taille du système linéaire à résoudre dans le cas de champs polynomiaux linéaires ou quadratiques par éléments.

L'avantage de cette seconde méthode ayant été établi, il serait dommage de ne pas indiquer quelques pistes pouvant être explorées lorsque l'objectif est de traiter des problèmes en dimensions supérieures. Pour ce qui est des problèmes tridimensionnel généraux, il est possible de recourir aux fonctions de Maxwell ou de Morera. En ce qui concerne les problèmes axisymétriques, nous pouvons toutefois être un peu plus explicite. A cet effet, rappelons que les équations de l'équilibre local en l'absence d'action à distance peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial(r\sigma_{zz})}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.27}$$

où (r, θ, z) sont les coordonnées cylindriques classiques. La seconde équation faisant fortement penser à la seconde de (6.8), il semble naturel de chercher σ_{rz} et σ_{zz} dérivant d'une fonction de contrainte de la façon suivante :

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \quad , \quad \sigma_{rz} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{6.28}$$

Il apparait clairement que par contre le choix de σ_{rr} peut être fait de manière complètement arbitraire puisque celui-ci sera rattrapé intégralement par $\sigma_{\theta\theta}$ dans (6.27). Dans le but d'obtenir des champs de contrainte polynomiaux de degré k, il est nécessaire que ϕ soit également polynomial mais de degré $k+3$. De plus, au vue de la définition (6.28), il apparait que $\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$ doit être divisible par r. Cette propriété, couplée au fait qu'il est possible de choisir nuls les monômes de ϕ de degrés 0 et 1 sans perte de généralité, permet de conclure que 0 est une racine triple de ϕ vue un polynôme d'une seule variable r. Il vient que ϕ doit nécessairement se mettre sous la forme $\phi = r^3\mathbb{P}_k$ où $\mathbb{P}_k$ est un polynôme de deux variables r et z de degré k. Ainsi, la construction d'un tel champ de contrainte axisymétrique à divergence nulle passe par le choix arbitraire de deux polynômes de degré k, l'un définissant $\mathbb{P}_k$ introduit précédemment et l'autre définissant σ_{rr}. L'obtention de σ_{rz} et de σ_{zz} se faisant alors par le biais des relations (6.28) et $\sigma_{\theta\theta}$ se calculant directement à partir de (6.27). De tels champs de contrainte formant un espace vectoriel de dimension $(k+1)(k+2)$, un exercice de dénombrement simple montre qu'il est en fait possible de générer ainsi tous les champs de contrainte axisymétrique polynomiaux à divergence nulle. L'expression du vecteur contrainte ne serait, quant à elle, pas aussi simple à obtenir que dans le cadre bidimensionnel associé aux fonctions d'Airy.

6.4 Méthode basée sur les vecteurs contraintes par arêtes

6.4.1 Principes fondamentaux

Par rapport à la méthode directe, la construction de champs de contraintes satisfaisant par nature la condition de divergence nulle (6.8) a permis de diminuer significativement la taille du système linéaire à résoudre et par conséquent l'efficacité en terme de temps de calcul de la méthode proposée. Cependant, avec une telle approche, le caractère continu du vecteur contrainte restait à garantir. L'idée des sections qui suivent est de chercher cette fois à garantir de manière automatique cette continuité du vecteur contrainte à la traversée des surfaces de discontinuités qui, dans le cas des éléments finis tels que décrits dans ce chapitre, sont les arêtes communes entre deux éléments du maillage (sans chercher cependant à garantir automatiquement l'équilibre local). Une façon d'obtenir cette propriété est de construire notre espace d'approximation non pas à partir des champs de contraintes (ce qui donne *in fine* des variables d'optimisation par élément) mais à partir des vecteurs contraintes par arête du maillage. C'est l'une des approches proposées par de Veubeke [2001] et reprise notamment par Kempeneers et al. [2003].

Pour que cette notion de vecteur contrainte est un sens, il faut se rappeler qu'à partir d'une orientation d'un arc, la convention présentée Figure 6.4 permet de définir une normale et donc précise le sens de la notion de vecteur contrainte. Ainsi, il est nécessaire avant toute chose de conférer une orientation à chaque arête du maillage. Celle-ci pouvant être quelconque, on peut par exemple choisir d'orienter une arête en allant de son extrémité associée au nœud ayant le numéro global le plus petit vers celle associée au numéro global le plus grand. Une fois cette convention fixée, nous pouvons nous attacher à détailler les grands principes de cette méthode. Tout comme nous avions choisi de travailler sur des espaces d'approximation de champs de contrainte polynomiaux par éléments, nous allons désormais raisonner sur des vecteurs contraintes polynomiaux par arêtes. Rappelons toutefois que l'objectif est de pouvoir calculer une énergie élastique de contrainte du système maillé par des éléments triangulaires. La simple donnée du chargement s'exerçant sur un système ne permettant pas d'accéder à cette information, l'enjeu devient donc d'exhiber, pour chaque élément du maillage, un champ de contrainte statiquement admissible avec les

vecteurs contraintes associés aux trois arêtes de l'élément triangulaire. Si une telle opération est théoriquement et pratiquement faisable, il sera alors possible de construire des champs de contraintes vérifiant automatiquement la condition de saut (6.6) et ainsi de faire la précieuse économie de ces nombreuses équations. Nous allons donc nous attacher à décrire une façon d'aboutir à la construction de tels champs de contraintes. Pour un élément du maillage quelconque, une représentation de la situation considérée est donnée sur la Figure 6.5. No-

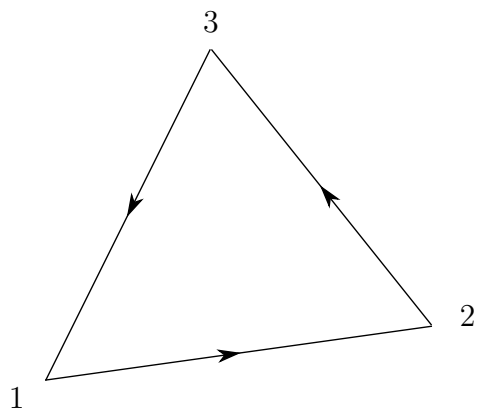

FIGURE 6.5 – Triangle élémentaire et orientation locale des arêtes

tons que l'orientation des arêtes données sur cette figure ne peut pas être en accord avec la convention d'orientation proposée précédemment. En effet, selon la règle proposée, une arête au moins aura une orientation différente que celle proposée Figure 6.5. Cette illustration propose donc une orientation locale des arêtes qui doit par la suite être raccordée à l'orientation globale telle que proposée précédemment. L'avantage de cette orientation locale est que les normales associées aux arêtes correspondent aux normales extérieures au triangle élémentaire. Par conséquent, les vecteurs contraintes associés aux arêtes ainsi orientées correspondent aux efforts de contact que l'extérieur au triangle exerce sur celui-ci. Il est donc légitime de parler d'efforts exercés sur le triangle et par conséquent de chargement. Une remarque fondamentale est que trouver un champ de contrainte statiquement admissible avec un tel chargement nécessite a minima que celui-ci soit équilibré. Les variables d'optimisation du problème considéré étant véritablement des inconnues par arête, il n'y a aucune raison qu'elles constituent des chargements équilibrés pour les éléments. Ainsi, dans l'espoir de pouvoir exhiber un tel champ de contrainte, il est nécessaire d'imposer des relations linéaires entre ces inconnues qui correspondent à l'équilibre en résultante du chargement (selon deux directions pour un problème 2D) ainsi qu'à l'équilibre en moment (dans la direction hors plan). Pour les problèmes plans considérés, ce sont donc trois équations par éléments qu'il est nécessaire de vérifier. Celles-ci étant linéaires par rapport aux variables d'optimisation, il est donc tout à fait envisageable de les imposer grâce à des multiplicateurs de Lagrange. Il est d'ailleurs amusant de remarquer que la méthode précédente basée sur les fonctions d'Airy permettait de satisfaire l'équilibre local mais nécessitait d'imposer la continuité du vecteur contrainte, alors qu'au contrainte, cette procédure permet l'économie des équations de saut (6.6) mais nécessite d'imposer une forme d'équilibre local.

Pour mener à bien la construction de ce type d'éléments finis EFEM, il faut et il suffit d'être capable de construire, pour un triangle donné soumis sur chacune de ses facettes à un chargement de contraintes polynomiales en équilibre global, un champ de contrainte statiquement admissible avec ce chargement. Pour mener à bien cette entreprise, il parait naturel de chercher un tel champ de contrainte lui même polynomial de même degré, mais en tant que fonction de deux variables. Cependant, il ne parait pas clair qu'il soit possible d'équilibrer des vecteurs contraintes polynomiaux de degré k par des champs de contrainte

eux même polynomiaux de degré k. C'est à cette problématique que nous allons traiter dans les deux sous parties suivantes dans le cas de contraintes linéaires puis quadratiques.

6.4.2 Vecteurs contraintes linéaires par arêtes

Nous avons vu précédemment que les champs de contrainte linéaires à divergence nulle formaient un espace vectoriel de dimension 7. Lorsque calculés sur les arêtes d'un triangle, les vecteurs contraintes issus de tels champs sont bien entendu linéaires par rapport à l'abscisse curviligne (avec la convention d'orientation proposée sur la Figure 6.5). En admettant qu'il n'existe pas sur un élément triangulaire de champ de contrainte linéaire non nul, vérifiant l'équilibre local et auto-équilibré, on trouve qu'à partir de l'espace vectoriel susmentionné, il est possible de générer un espace de vecteurs contrainte linéaires par arête du triangle et en équilibre de dimension 7 également. Cependant, construire un vecteur contrainte linéaire sur une arête demande de choisir de façon indépendante 4 inconnues dont dépendra ensuite linéairement le vecteur contrainte (il peut par exemple s'agir de la valeur que prend le vecteur contrainte aux extrémités de la dite arête). Définir donc un chargement en contrainte linéaire et équilibré sur un triangle correspond aux choix de $3 * 4 - 3 = 9$ paramètres indépendants, le -3 provenant des équations d'équilibre global en résultante et en moment selon la direction hors plan. L'espace vectoriel associé à un tel chargement étant par conséquent de dimension 9, il apparaît clairement qu'il n'est pas possible d'équilibrer n'importe quel jeu de vecteurs contrainte linéaires s'exerçant sur un triangle par le biais de champs de contrainte eux-mêmes linéaires ainsi qu'à divergence nulle. En effet, en plus des trois équations d'équilibre global évoqué ci-dessus, il serait nécessaire d'imposer deux équations supplémentaires à ce type chargement si l'on voulait l'équilibrer par un champ de contrainte linéaire. Si les 3 premières équations sont tout à fait physique et sont en dualité d'un mouvement de translation de corps rigide et d'une rotation d'ensemble par rapport à la direction hors plan, les 2 dernières n'ont pas de signification particulière. Une interprétation dualisée ainsi qu'une représentation graphique est fournie par de Veubeke [2001]. Cette interprétation très puissante conduit la recherche de champs de contrainte équilibrant n'importe quel chargement linéaire sur un triangle dans un espace un peu particulier. Si les raisons profondes de l'introduction de cet espace ne seront pas abordées, nous nous contenterons d'en donner la définition. De plus, nous exhiberons les fonctions de forme permettant de déterminer un champ de contrainte statiquement admissible avec un chargement donné. Il ne nous est pas apparu clairement que la littérature donnait accès à ces fonctions de forme et par conséquent nous pensons qu'il est intéressant de les consigner dans ce travail.

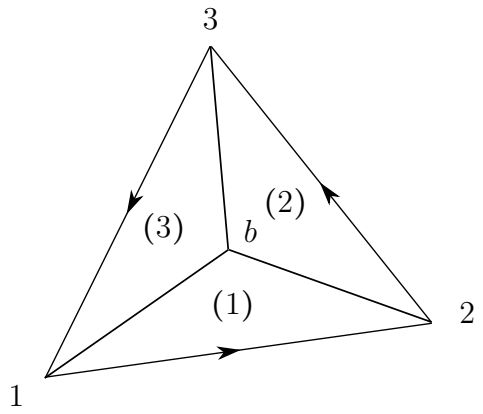

Figure 6.6 – Triangle squelette et décomposition en trois zones notées (1), (2) et (3)

Afin de considérer un espace fonctionnel le plus grand possible, il semble préférable de se

placer dans un espace plus vaste que celui des champs de contrainte linéaire sur tout l'élément triangulaire. Nous avons en effet vu que cet espace n'était pas de dimension suffisante et que, plus précisément, il lui manquait deux vecteurs indépendants pour être complet. Afin de les trouver, l'idée est de subdiviser l'élément triangulaire considéré en trois sous triangles tel que représenté sur la Figure 6.6 et de chercher un champ de contrainte statiquement admissible avec le chargement cette fois-ci linéaire par zones. D'un point de vue terminologique, le triangle élémentaire (connectant les points 123 sur la Figure 6.6) sera appelé triangle principal et sa subdivision portera le nom de triangle squelette. Le point b sur lequel repose la subdivision peut être choisi arbitrairement à l'intérieur strict du triangle principal. Il semble cependant plus agréable et plus naturel de le choisir égal à l'isobarycentre du triangle. Cette idée de travailler dans un espace de champs tensoriels linéaires par zones est en effet salvatrice puisqu'un simple calcul montre que l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles et linéaires sur chacun des sous triangles forme un espace vectoriel de dimension 9 exactement. Les vecteurs contrainte associés à de tels champs de contrainte et calculés sur les arêtes du triangle principal étant eux-aussi linéaires, ce résultat montre que cet espace de travail basé sur les triangles squelettes permet effectivement de décrire l'ensemble des vecteurs contrainte linéaire par arête du triangle principal. Une petite remarque assez agréable est qu'un champ de contrainte linéaire sur tout le triangle principal est en particulier linéaire sur chacun des sous triangles. Étant en particulier continue, il vérifie automatiquement la condition de saut (6.1) à la traversée des arêtes $1b$, $2b$ et $3b$. Par conséquent, l'espace des champs de contrainte linéaires basés sur le triangle squelette inclus naturellement l'espace des champs de contrainte linéaires sur tout le triangle principal. Ce dernier espace étant de dimension 7, il nous donne donc accès très facilement à 7 vecteurs indépendants permettant de donner une bonne base de départ. Celle-ci ne nécessitera que deux vecteurs indépendants supplémentaires pour former une famille génératrice de l'espace vectoriel recherché.

Afin de mener à bien cette entreprise, notons que l'espace de travail considéré est constitué de champs de contrainte en particulier polynomiaux, à divergence nulle et linéaires par sous triangle. Puisque nous avons vu dans la partie précédente qu'il est équivalent de travailler sur des champs de contrainte polynomiaux à divergence nulle et des fonctions d'Airy, le problème revient donc à considérer pour un triangle principal un jeu de trois fonctions d'Airy notées $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ et $\phi^{(3)}$ permettant chacune de décrire le champ de contrainte régnant dans l'un des trois sous triangle. Bien entendu, la réunion de ces trois champs de contrainte devant être statiquement admissible, il sera essentiel de construire des fonctions d'Airy permettant d'assurer la condition de saut du vecteur contrainte (6.6) à la traversé des arêtes $1b$, $2b$ et $3b$. Nous avons vu que les champs de contrainte linéaires sur tout le triangle principal donnaient accès simplement à 7 vecteurs indépendants. Les fonctions d'Airy leur étant associées peuvent par exemple être prises égales à :

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \phi^{(3)} \in \left\{x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\right\} \tag{6.29}$$

Les monômes 1, x et y ne figurent pas dans cette liste puisqu'ils n'interviennent pas dans la définition du champ de contrainte (2.2). En ce sens, il est d'ailleurs intéressant de noter que la fonction d'Airy associée à un champ de contrainte n'est, en toute rigueur, pas unique. Pour palier à ce problème nous nous plaçons dans le sous espace vectoriel des polynômes de deux variables de degré inférieur ou égal à 3 quotienté par le sous-espace vectoriel des polynômes de deux variables de degré inférieur ou égal à 1 : $\mathbb{P}_3[x,y]/\mathbb{P}_1[x,y]$. Il n'y aura alors plus d'ambiguïté quant à la notion de fonction d'Airy associée à un champ de contrainte polynomial et les monômes listés dans (6.29) forment bien une base de cet espace quotient.

Avant de nous lancer dans la recherche des deux derniers vecteurs indépendants venant compléter la famille libre de fonction d'Airy (6.29), nous devons introduire une notation.

Soit une droite orientée allant d'un point $A(x_A, y_A)$ vers un point $B(x_B, y_B)$, nous noterons d_{AB} un polynôme de degré 1 associé à l'équation de la droite de la façon suivante :

$$d_{AB} = (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) \tag{6.30}$$

En choisissant le point b comme barycentre du triangle, la propriété suivante peut-être aisément établie :

$$d_{1b} + d_{2b} + d_{3b} = 0 \tag{6.31}$$

Cette notation et ce résultat établis, nous pouvons donc nous attacher à déterminer les deux vecteurs manquants. Dans une optique de simplification, il n'est pas restrictif de supposer que les champs de contrainte leur étant associés sont authentiquement nuls dans la zone (1). En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit de leur soustraire le champ de contrainte linéaire sur tout le triangle principal coïncidant avec le champ de contrainte régnant dans la zone (1). La fonction d'Airy associée à ce dernier se décomposant nécessairement sur les monômes listés en (6.29), cette opération ne changera pas le caractère indépendant du vecteur recherché et conduit à $\phi^{(1)} = 0$. Cette hypothèse devient très intéressante puisqu'elle permet de de tirer profit de la relation (6.24) qui se traduit par le fait que les quantités $\phi^{(2)}_{,x}$ et $\phi^{(2)}_{,y}$ doivent être constantes sur la droite $2b$ et que de même façon $\phi^{(3)}_{,x}$ et $\phi^{(3)}_{,y}$ doivent être constantes sur la droite $1b$. En ajustant proprement les termes linéaires par rapport à x et à y dans l'expression de $\phi^{(2)}$ et de $\phi^{(3)}$ on peut supposer qu'en fait ces objets sont nuls sur les différentes droites concernées. Ceci implique alors que $\phi^{(2)}$ et $\phi^{(3)}$ sont constants sur la droite $2b$ et sur la droite $1b$ respectivement. En ajustant le terme constant de ces fonctions d'Airy, on peut se placer dans le cas où $\phi^{(2)}$ et $\phi^{(3)}$ sont identiquement nuls sur leur droite respective. Ces deux résultats alliées à des propriétés d'algèbre sur les polynômes conduisent au fait que les deux fonctions d'Airy peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \phi^{(2)} & = & {d_{2b}}^2 \mathbb{Q}_2 \\ \phi^{(3)} & = & {d_{1b}}^2 \mathbb{Q}_3 \end{array} \tag{6.32}$$

où $\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{Q}_3$ sont des polynômes de degré 1. A partir de la propriété (6.31), il n'est pas difficile de montrer que le choix $\mathbb{Q}_2 = d_{1b}$ et $\mathbb{Q}_3 = d_{3b} - d_{2b}$ permet d'obtenir sur le triangle principal un champ de contrainte vérifiant la continuité du vecteur contrainte à la traversée des arêtes intérieures. En effet, avec ces expressions pour $\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{Q}_3$ il vient rapidement :

$$\phi^{(2)} - \phi^{(3)} = d_{1b} {d_{3b}}^2 \tag{6.33}$$

La présence de l'équation de la droite $3b$ au carré dans cette différence permet d'assurer automatiquement la condition de saut (6.25). Le conclusion serait inchangée si les rôles joués par (2) et par (3) étaient intervertis. Ceci nous donne *in fine* accès à :

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = 0 \\ \phi^{(2)} = {d_{2b}}^2 d_{1b} \\ \phi^{(3)} = {d_{1b}}^2 \left(d_{3b} - d_{2b}\right) \end{cases} , \qquad \begin{cases} \phi^{(1)} = 0 \\ \phi^{(2)} = {d_{2b}}^2 \left(d_{3b} - d_{1b}\right) \\ \phi^{(3)} = {d_{1b}}^2 d_{2b} \end{cases} \tag{6.34}$$

qui constituent deux jeux de fonction d'Airy indépendants venant compléter les 7 premiers donnés dans (6.29). Le fait d'avoir pu exhiber ces 9 vecteurs de base est un résultat fort puisqu'il signifie entre autre qu'exiger au chargement linéaire par arête d'être en équilibre global, ce qui est une condition minimale, est suffisant pour permettre de trouver facilement un champ de contrainte simple et statiquement admissible avec celui-ci. C'est ce résultat qui donne toute la puissance à la méthode proposée. Sans lui, il aurait fallu imposer d'autres

équations linéaires à vérifier par les variables d'optimisation ce qui aurait alourdi de manière non négligeable la procédure. Ainsi, tout champ de contrainte linéaire par zones, vérifiant la condition de continuité du vecteur contrainte se met sous la forme d'une combinaison linéaire de ces neufs triplets de fonctions d'Airy. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_9$ les coordonnées associées à un tel champ de contrainte pour ce choix de vecteurs de base. Il est alors possible de calculer formellement l'énergie élastique de contrainte associée au e^{ieme} élément triangulaire et de la mettre sous la forme :

$$W^*_{(e)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\int_{(e)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2}\,{}^t\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_9 \end{Bmatrix} . \begin{bmatrix} & \mathbb{S}^{(e)}_{\lambda} & \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_9 \end{Bmatrix} \tag{6.35}$$

La dernière étape pour mener à bien le projet de construire ce type d'éléments finis consiste à connecter les valeurs des λ_i au variables définissant les vecteurs contraintes. Revenons d'ailleurs sur le choix de ces inconnues. Étant donné la facilité d'accès à l'intégrale du vecteur contrainte entre deux points d'un arc orienté lorsque celle-ci est calculée à partir d'un champ de contrainte issu d'une fonction d'Airy, il peut être judicieux de considérer des variables un peu particulières. En effet, on peut par exemple définir une fonction affine par rapport à l'abscisse curviligne sur un segment par la donnée de l'intégrale de cette fonction affine sur la première moitié du segment, puis sur la seconde moitié. Ainsi, pour une arête donnée, de numéro global i et orientée d'un point A vers un point B, on notera $I^{(i)}_k$ ses inconnues associées définies par :

$$\begin{aligned} I^{(i)}_1 &= \int_A^C T^{(i)}_x ds \quad , \quad I^{(i)}_2 = \int_C^B T^{(i)}_x ds \\ I^{(i)}_3 &= \int_A^C T^{(i)}_y ds \quad , \quad I^{(i)}_4 = \int_C^B T^{(i)}_y ds \end{aligned} \quad \text{où } C = \frac{A+B}{2} \text{ est le milieu du ségment } [AB] \tag{6.36}$$

où $\boldsymbol{T}$ est défini selon la normale issue de la convention d'orientation (6.10). Une fois ce choix arrêté, il devient naturel de considérer sur chaque élément triangulaire des inconnues locales par arête correspondant également à des intégrales de composantes du vecteur contrainte le long des arêtes du triangle principal selon la convention d'orientation proposée par la Figure 6.5. Attention toutefois au fait que le sens de parcours local d'une arête n'est pas toujours le même que son sens de parcours global. Par conséquent, les inconnues locales associées à une arête peuvent avoir un signe différent et ne pas être organisées dans le même ordre que les inconnues globales de l'arête en question. Les inconnues locales seront notées simplement $I_1, ..., I_{12}$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\frac{1+2}{2}} \boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{T}^{(1)} ds \quad , \quad I_2 = \int_{\frac{1+2}{2}}^{2} \boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{T}^{(1)} ds \\ I_3 &= \int_1^{\frac{1+2}{2}} \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{T}^{(1)} ds \quad , \quad I_4 = \int_{\frac{1+2}{2}}^{2} \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{T}^{(1)} ds \\ I_5 &= \int_2^{\frac{2+3}{2}} \boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{T}^{(2)} ds \quad , \quad I_6 = \int_{\frac{2+3}{2}}^{3} \boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{T}^{(2)} ds \\ &\vdots \\ I_{11} &= \int_3^{\frac{3+1}{2}} \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{T}^{(3)} ds \quad , \quad I_{12} = \int_{\frac{3+1}{2}}^{1} \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{T}^{(3)} ds \end{aligned} \tag{6.37}$$

où $\boldsymbol{T}^{(i)}$ correspond au vecteur contrainte que le reste du système exerce sur le triangle principal au niveau de la $i^{ème}$ arête locale. De plus, la notation $\frac{1+2}{2}$ désignera le centre de l'arête 12. Étant donné la construction que nous nous sommes donnés du champ de contrainte dérivant par zones d'une fonction d'Airy, il devient très aisé, à partir de (6.24), d'exprimer formellement et de manière linéaire ces inconnues locales à partir des λ_i pour $i = 1...9$. On

trouverait par exemple :

$$I_1 = \phi_y^{(1)}\left(\tfrac{1+2}{2}\right) - \phi_y^{(1)}(1) \tag{6.38}$$

Puisque $\phi^{(1)}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de base faisant intervenir les coefficients λ_i, l'ensemble de de ces équations conduit à l'expression matricielle formelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_{12} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} \\ M_{12\text{x}9} \\ \\ \end{array}\right] . \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_9 \end{array}\right\} \tag{6.39}$$

Le fait d'aboutir à une matrice rectangulaire et non carrée provient du fait que 3 des 12 équations seront redondantes avec les 9 autres dès que le chargement considéré sera auto-équilibré. Le rang de la matrice $[M_{12\text{x}9}]$ étant tout de même de 9, il est possible d'en extraire une sous matrice 9x9 inversible que nous noterons $[M]$. Quitte à renuméroter les inconnues locales, on peut supposer qu'on peut construire cette matrice à partir des 9 premières équations de sorte que :

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_9 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} \\ M^{-1} \\ \\ \end{array}\right] . \left\{\begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_9 \end{array}\right\} \tag{6.40}$$

Grâce à ce lien formel entre les λ_i et les I_j, il est désormais possible de calculer l'énergie élastique de contrainte associée à un champ de contrainte en équilibre avec les inconnues locales :

$$\frac{1}{2}\int_{(e)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} {}^t\left\{\begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_9 \end{array}\right\} . {}^t\left[\begin{array}{c} \\ M^{-1} \\ \\ \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c} \\ \mathbb{S}_\lambda^{(e)} \\ \\ \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c} \\ M^{-1} \\ \\ \end{array}\right] . \left\{\begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_9 \end{array}\right\} \tag{6.41}$$

Bien entendu cette écriture n'est possible que si les 12 inconnues locales vérifient les conditions d'équilibre global que sont la nullité des composantes horizontale et verticale de la résultante et la nullité du moment hors plan calculé par exemple au niveau de l'isobarycentre du triangle. Avec le choix (6.37) des inconnues locales, ces équations se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 + I_2 + I_5 + I_6 + I_9 + I_{10} \\ 0 &= I_3 + I_4 + I_7 + I_8 + I_{11} + I_{12} \\ 0 &= (y_2 - 3y_1 + 2y_3)\, I_1 + (y_1 - 3y_2 + 2y_3)\, I_2 - (x_2 - 3x_1 + 2x_3)\, I_3 - (x_1 - 3x_2 + 2x_3)\, I_4 \\ &\quad + (y_3 - 3y_2 + 2y_1)\, I_5 + (y_2 - 3y_3 + 2y_1)\, I_6 - (x_3 - 3x_2 + 2x_1)\, I_7 - (x_2 - 3x_3 + 2x_1)\, I_8 \\ &\quad + (y_1 - 3y_3 + 2y_2)\, I_9 + (y_3 - 3y_1 + 2y_2)\, I_{10} - (x_1 - 3x_3 + 2x_2)\, I_{11} - (x_3 - 3x_1 + 2x_2)\, I_{12} \end{aligned} \tag{6.42}$$

Pour conclure sur cette partie, il nous reste à effectuer le bilan comptable permettant d'estimer la taille de la matrice carrée associée au système linéaire à résoudre. En ne se préoccupant toujours pas des conditions aux limites et des arêtes appartenant au bord du maillage, nous pouvons établir le dénombrement suivant :

— $4 \cdot N_A$ équations correspondant à la matrice de souplesse globale

— $3 \cdot N_E$ équations associées à l'équilibre global du chargement sur chaque élément triangulaire du maillage (6.42).

Afin de pouvoir comparer cette méthode avec celles présentées précédemment, nous allons approximer le terme $4 \cdot N_A$ par une quantité ne dépendant que de N_E. Pour ce faire, nous

l'avons déjà vu, nous pouvons considérer qu'une bonne approximation serait $6 \cdot N_E$ étant donné qu'une arête ne faisant pas parti du bord du maillage appartient à deux éléments. Chaque élément étant constitué de 3 arête, la quantité précédente semble être effectivement une bonne candidate pour estimer le terme $4 \cdot N_A$. Finalement, cette méthode permet de travailler avec un système linéaire devant être résolu de taille caractéristique :

$$(3+6)N_E = 9N_E \tag{6.43}$$

Cette quantité est à comparer avec (6.16) et (6.26) pour $k = 1$. L'avantage de cette méthode est double puisque d'une part on obtient une taille de système linéaire à inverser beaucoup plus faible que les deux méthodes. D'autre part, l'espace d'approximation considéré dans cette dernière méthode est en fait plus grand que dans les autres méthodes. En effet, nous avons dû, pour équilibrer des vecteurs contraintes linéaires par arête, considérer des champs de contrainte affine non pas sur tout le triangle principal mais par zone sur le triangle squelette. Par conséquent, l'espace de travail est trois fois plus fin que dans le cas de la méthode directe et de la méthode basée sur les fonctions d'Airy, le tout pour un coût en terme de temps de calcul a priori plus faible.

Une dernière remarque peut être formulée avant de passer à la dernière méthode proposée qui consiste en un code EFEM reposant sur des inconnues quadratiques par arêtes. La détermination des matrices $\left[S_\lambda^{(e)}\right]$ et $\left[M^{-1}\right]$ devant se faire grâce à un logiciel de calcul formel, toute simplification des équations considérées est bonne à prendre. Deux simplifications peuvent en effet être considérées. Étant donné que les champs de contrainte considérés doivent-être à divergence nulle, il n'est pas possible de se placer sur un élément de référence triangulaire rectangle de dimension choisie comme ce qui est fait pour les méthodes DFEM, puis de construire une fonction d'Airy sur cet élément. Cependant, il est possible de se placer sur une sorte d'élément de référence dont il faut préciser la notion. La première simplification qui peut être entreprise est que le calcul énergétique n'est absolument pas dépendent de l'origine du repère choisi. Il n'est donc pas restrictif de supposer que le barycentre du triangle b est confondu avec l'origine. Cette hypothèse permet de lier les coordonnées des trois points du triangle principal puisqu'alors :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad , \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 0 \tag{6.44}$$

De plus, une seconde hypothèse pouvant être formulée est que la surface de l'élément triangulaire considéré est unitaire. En effet, il est facile de montrer que des triangles homothétiques (c'est-à-dire de même forme, pas forcément de même aire mais avec leurs côtés homologues parallèles) ont la même énergie élastique de contrainte lorsqu'ils sont soumis à des chargements tous deux définis par les mêmes inconnues locales $I_1, ..., I_{12}$. En effet, à partir du triangle réel $\mathcal{T}$ dont nous supposerons que l'isobarycentre est confondu avec l'origine, on peut définir un triangle homothétique de rapport λ noté $\mathcal{T}_H$ comme sur la Figure 6.7. Soit $\boldsymbol{\sigma}(x, y)$ un champ de contrainte statiquement admissible avec le chargement du triangle réel, on définit un second champ de contrainte $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ comme :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(x, y) = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\sigma}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) \tag{6.45}$$

Il est immédiat que puisque $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie (6.8) il en va de même pour $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. De plus, lorsque (x, y) parcours le bord du triangle réel $\partial\mathcal{T}$ alors $(\lambda x, \lambda y)$ parcours le bord du triangle homothétique $\partial\mathcal{T}_H$ ce qui permet d'écrire :

$$\int_{\partial\mathcal{T}} \boldsymbol{\sigma}(x, y).\boldsymbol{n} ds = \int_{\partial\mathcal{T}} \lambda\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\lambda x, \lambda y).\boldsymbol{n} ds = \int_{\partial\mathcal{T}_H} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(x', y').\boldsymbol{n} ds' \tag{6.46}$$

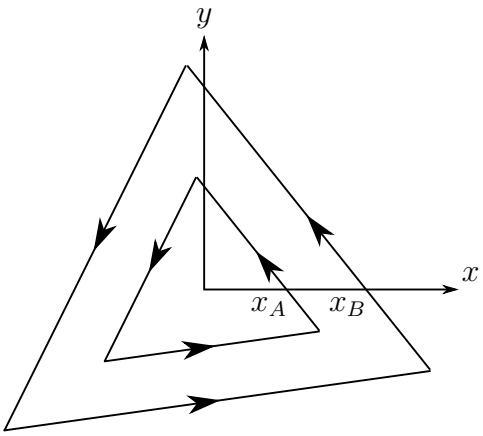

FIGURE 6.7 – Exemple de triangles homothétiques centrés à l'origine. Le rapport d'homothétie est $\frac{x_B}{x_A} = \lambda$

Cette relation étant encore valable sur n'importe quelle partie du bord, on trouve que si $\boldsymbol{\sigma}$ équilibre des inconnues $I_1, .., I_{12}$ sur le bord du triangle réel alors il en sera de même pour $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sur le bord du triangle $\mathcal{T}_H$. Enfin, on trouve de la même façon que :

$$\int_{\mathcal{T}} \boldsymbol{\sigma}(x,y) : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}(x,y) dS = \int_{\mathcal{T}_H} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(x',y') : \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(x',y') dS' \tag{6.47}$$

ce qui permet de conclure que l'énergie élastique de contrainte pour le triangle réel et pour le triangle homothétique sont identiques. Ainsi, en plus de la simplification (6.44), on peut effectuer le calcul des matrices $\left[S_\lambda^{(e)}\right]$ et $[M^{-1}]$ sous la condition :

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 2 \tag{6.48}$$

ce qui signifie qu'on travaille sur un triangle principal d'aire unitaire. Cette dernière simplification montre l'avantage du choix de travailler avec des inconnues locales de type I_j. Ces deux simplifications (6.44) et (6.48) peuvent s'avérer précieuse pour aider le logiciel de calcul formel à simplifier les expressions afin d'obtenir des formes de $\left[S_\lambda^{(e)}\right]$ et $[M^{-1}]$ aussi compacte que possible.

6.4.3 Vecteurs contraintes quadratiques par arêtes

En ce qui concerne la méthode dite directe et celle associée à des fonction d'Airy, nous avons à chaque fois établi une quantité représentant la taille caractéristique du système linéaire à inverser dans le cadre d'espace d'approximation d'abord linéaire puis quadratique. Nous souhaitons faire de même avec la méthode des inconnues par arête en choisissant cette fois des vecteurs contrainte pouvant être quadratique. Les principes fondamentaux de la méthode ne sont pas vraiment différents de ceux exposés précédemment. Définir une fonctionnelle quadratique sur un arc en tant que fonction de l'abscisse curviligne nécessite trois informations. Construire un vecteur contrainte quadratique sur une arête demandera donc 6 informations. Reprenant l'idée des intégrales des vecteurs contraintes (6.36) on peut se donner le jeu suivant de 6 paramètres permettant de définir le vecteur contrainte sur une arête donnée allant d'un point A vers un point B :

$$\begin{aligned} I_1^{(i)} &= \int_A^C T_x^{(i)} ds \quad , \quad I_2^{(i)} = \int_C^D T_x^{(i)} ds \quad , \quad I_3^{(i)} = \int_D^B T_x^{(i)} ds \\ I_4^{(i)} &= \int_A^C T_y^{(i)} ds \quad , \quad I_5^{(i)} = \int_C^B T_y^{(i)} ds \quad , \quad I_6^{(i)} = \int_D^B T_y^{(i)} ds \end{aligned} \tag{6.49}$$

où $\boldsymbol{T}$ est défini selon la normale issue de la convention d'orientation (6.10) et où les points C et D se trouvent respectivement au tiers puis au deux tiers du segment $[A, B]$ selon le sens de parcours. Tout comme dans le cas linéaire, on montre facilement qu'il n'est pas possible d'équilibrer n'importe quel chargement en contrainte quadratique et équilibré sur un élément triangulaire par un champ de contrainte quadratique sur l'élément. En effet, la dimension de l'espace associé à un tel chargement est de 15 alors que la dimension de l'espace associé à de tels champs de contrainte est de 12 ce qui est trop peu pour pouvoir équilibrer tous les chargements possibles. Pour parvenir à ce résultat, l'idée consiste à utiliser de nouveau un espace de champ de contrainte basé sur un triangle squelette. En d'autres termes, il s'agit de chercher à équilibrer ce type de chargement par des champs de contrainte quadratiques sur chaque sous triangle et globalement statiquement admissibles.

Cependant, le cas quadratique présente une différence notable avec le cas linéaire. En effet, si l'on cherchait à calculer la dimension de l'espace vectoriel des champs de contraintes quadratiques par zones, à divergence nulle et vérifiant la condition de saut (6.6) à la traversée des arêtes intérieures $1b$, $2b$, et $3b$ on trouverait 18. Pourtant, les vecteurs contraintes issus de ces champs et exprimés sur les arêtes du triangle principale vérifie par nature l'équilibre global et sont quadratiques. Par conséquent ils forment un espace vectoriel de dimension au plus 15. Puisque nous partons d'un espace de dimension 18 pour arriver dans un espace de dimension au plus 15, cela signifie qu'une telle configuration permet de définir des champs d'autocontrainte, lesquels forment un sous espace vectoriel de dimension au moins 3. Il est possible de montrer, à l'aide par exemple d'un logiciel de calcul formel, qu'ils forment en fait un sous espace vectoriel de dimension exactement 3. Cela implique qu'il est par conséquent possible d'équilibrer n'importe quel chargement quadratique par arête en équilibre global par un champ de contrainte construit sur l'espace associé au triangle squelette. Par contre, l'existence de champs d'autocontrainte vient un petit peu perturber la procédure précédente. En effet, s'ils ne servent pas à équilibrer le chargement, ils contribuent de manière non nulle au terme d'énergie élastique de contrainte et par conséquent participent au processus d'optimisation. Cependant, l'avantage est que cette optimisation peut s'effectuer au niveau de l'élément puisque ces champs d'autocontrainte ne vont pas intervenir de manière couplée avec un élément voisin.

Pour être un peu plus clair, commençons par établir une base de fonction d'Airy permettant de générer l'espace de dimension 18 susmentionné. Comme précédemment, ces fonctions d'Airy seront à considérer dans l'espace vectoriel quotient $\mathbb{P}_4[x, y]/\mathbb{P}_1[x, y]$ où $\mathbb{P}_k[x, y]$ est l'espace des polynômes de deux indéterminés x et y de degré inférieur ou égal à k. Comme dans la partie linéaire, on peut d'ores et déjà lister les vecteurs naturels permettant de construire des champs tensoriel d'ordre 2, à divergence nulle et quadratique sur l'ensemble du triangle principal. Les douze fonctions d'Airy associées sont :

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \phi^{(3)} \in \left\{x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\right\} \tag{6.50}$$

Avant de chercher trois vecteurs indépendants correspondant aux champs d'autocontrainte, nous allons détailler comment chercher trois vecteurs indépendants non auto-équilibrés venant compléter les douze déjà listés ci-dessus. Des considérations similaires à celles déjà évoquées permettent de chercher ces trois vecteurs sous la forme évoquée en (6.32) avec $\phi^{(1)} = 0$ mais où $\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{Q}_3$ sont cette fois-ci des polynômes appartenant $\mathbb{P}_2[x, y]$. En supposant que ces deux polynômes sont tous deux égaux à un même polynôme $\mathbb{Q}$, on aurait grâce à la propriété (6.31) :

$$\phi^{(3)} - \phi^{(2)} = (d_{2b} - d_{1b})\, d_{3b}\mathbb{Q} \tag{6.51}$$

Cette forme est très intéressante car une condition suffisante (mais non nécessaire) pour garantir la continuité du vecteur contrainte à la traversée de l'arête $3b$ est que $\phi^{(3)} - \phi^{(2)}$ soit

divisible par d_{3b}. En effet, une telle propriété permettrait de satisfaire automatiquement les relations (6.25). Ainsi, une façon de garantir la continuité serait de choisir $\mathbb{Q}$ sous la forme particulière $\mathbb{Q} = d_{3b}\mathbb{P}$ où $\mathbb{P} \in \mathbb{P}_1[x, y]$. Ainsi, l'espace $\mathbb{P}_1[x, y]$ étant de dimension 3 et puisque n'importe quel polynôme $\mathbb{P}$ pris dans cet espace convient, on peut espérer avoir ainsi accès à trois nouveaux jeux de fonctions d'Airy indépendants et venant en complément de ceux listés en (6.50). Ce dernier point parait cependant évident puisque nous avons fait le choix d'avoir des contraintes nulles dans la zone (1) alors qu'avec ce choix pour $\phi^{(2)}$ et $\phi^{(3)}$ les champs de contraintes générés sont visiblement non nuls. On peut par exemple prendre :

$$\begin{cases} \phi^{(1)} & = 0 \\ \phi^{(2)} & = {d_{2b}}^2 d_{3b} \\ \phi^{(3)} & = {d_{1b}}^2 d_{3b} \end{cases} , \quad \begin{cases} \phi^{(1)} & = 0 \\ \phi^{(2)} & = {d_{2b}}^2 d_{3b}\ x \\ \phi^{(3)} & = {d_{1b}}^2 d_{3b}\ x \end{cases} , \quad \begin{cases} \phi^{(1)} & = 0 \\ \phi^{(2)} & = {d_{2b}}^2 d_{3b}\ y \\ \phi^{(3)} & = {d_{1b}}^2 d_{3b}\ y \end{cases} \tag{6.52}$$

Il est facile de montrer que ces trois jeux sont effectivement indépendants et n'appartiennent pas au sous espace vectoriel des champs d'autocontrainte. Ainsi, nous disposons désormais des 15 vecteurs de base permettant d'équilibrer n'importe quel chargement en contrainte quadratique par arête et vérifiant l'équilibre global du triangle élémentaire. Le travail pourrait d'ailleurs s'arrêter là puisqu'il n'est absolument pas obligatoire d'aller chercher les champs d'autocontrainte. En effet, la méthode pourrait tout à fait se passer de ces derniers mais, ce faisant, le processus d'optimisation à mener se ferait nécessairement dans un espace d'approximation plus petit que celui offert par la méthode dans sa globalité (c'est à dire incluant ces champs d'autocontrainte). Ainsi, pour être complet, nous nous contenterons de lister trois vecteurs permettant d'engendrer le sous espace des champs de contrainte auto-équilibrés bâtis sur le triangle squelette :

$$\begin{cases} \phi^{(1)} & = {d_{12}}^2 d_{3b} \\ \phi^{(2)} & = {d_{23}}^2 d_{3b} \left(d_{12} - 6d_{2b}\right) \\ \phi^{(3)} & = {d_{31}}^2 d_{3b} \left(d_{12} + 6d_{1b}\right) \end{cases} , \quad \begin{cases} \phi^{(1)} & = {d_{12}}^2 d_{1b} \left(d_{23} + 6d_{2b}\right) \\ \phi^{(2)} & = {d_{23}}^2 d_{1b} \\ \phi^{(3)} & = {d_{31}}^2 d_{1b} \left(d_{23} - 6d_{3b}\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \phi^{(1)} & = {d_{12}}^2 d_{31} \left(3d_{2b} + 2d_{23}\right) \\ \phi^{(2)} & = {d_{23}}^2 d_{31} \left(2d_{12} - 3d_{2b}\right) \\ \phi^{(3)} & = {d_{31}}^2 \left(5{d_{31}}^2 + 6d_{12}d_{23} - 6\mathcal{A}d_{31}\right) \end{cases} \tag{6.53}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle principal. Les expressions ci-dessus n'ont pas été trouvées par une procédure particulière et il se peut que des combinaisons linéaires bien choisies puissent mener à des formes plus agréables à manipuler. De plus, le choix des valeurs des monômes constants et linéaires des fonctions d'Airy ont été choisis de manière à faire apparaître les groupement ${d_{12}}^2$, ${d_{23}}^2$ et ${d_{31}}^2$. Ces groupements permettent de garantir automatiquement le fait que le vecteur contrainte issu de champs de contraintes dérivant de ces fonctions d'Airy et exprimé sur le bord du triangle principal soit égal à zéro. Il n'est pas du tout inenvisageable qu'un autre choix mène à des expressions plus agréables à manipuler.

Les dix-huit vecteurs de base permettant d'engendrer l'espace des champs de contrainte quadratiques par zones définies par le triangle squelette, à divergence nulle et vérifiant la condition de continuité du vecteur contrainte ayant été établis, nous pouvons désormais présenter les idées permettant de mettre au point le code EFEM à proprement parler. Nous considérons désormais un champ de contrainte appartenant à l'espace vectoriel décrit ci-dessus et nous notons $(\lambda_1, ..., \lambda_{18})$ les coordonnées de sa fonction d'Airy dans la base précédemment établie. Nous supposerons d'ailleurs que λ_{16}, λ_{17} et λ_{18} correspondent à la décomposition du champ de contrainte sur les trois autocontrainte listées dans (6.53). De

manière formelle, l'énergie élastique de contrainte associée à ce champ de contrainte se met sous la forme :

$$W^*_{(e)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\int_{(e)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} {}^t\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{18} \end{Bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbb{S}^{(e)}_\lambda \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{18} \end{Bmatrix} \tag{6.54}$$

Cependant, les coefficients associés aux autocontrainte n'ont pas vocation à être exprimés en fonction des inconnues locales du triangle élémentaires $I_1, ..., I_{18}$. Par conséquent, ils jouent le rôle de variable d'optimisation permettant de minimiser l'énergie élastique. Dans la mesure où ils n'interviennent que dans l'énergie élastique de contrainte associé à l'élément (e) (ce qui n'est pas le cas des inconnues I_j qui interviennent généralement dans l'énergie de deux éléments) et qu'ils ne sont soumis à aucune condition particulière, il est possible de mener d'ores et déjà l'optimisation par rapport à ces coefficients.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W^*_{(e)}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \lambda_{16}} & = 0 \\ \dfrac{\partial W^*_{(e)}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \lambda_{17}} & = 0 \\ \dfrac{\partial W^*_{(e)}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \lambda_{18}} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda^{opt}_{16} \\ \lambda^{opt}_{17} \\ \lambda^{opt}_{18} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{3\text{x}15} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{15} \end{Bmatrix} \tag{6.55}$$

A partir de la matrice $[A_{3\text{x}15}]$ on définit une matrice $[P_{opt}]$ permettant le passage d'un vecteur $(\lambda_1, ..., \lambda_{15})$ au vecteur $(\lambda_1, ..., \lambda_{15}, \lambda^{opt}_{16}, \lambda^{opt}_{17}, \lambda^{opt}_{18})$. Son expression est donnée par :

$$[P_{opt}] = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{3\text{x}15} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

Il est alors possible d'obtenir une forme déjà pré-optimisée de l'énergie élastique de contrainte dépendant uniquement de $(\lambda_1, ..., \lambda_{15})$sous la forme :

$$W^*_{(e)}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} {}^t\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{15} \end{Bmatrix} . {}^t\begin{bmatrix} P_{opt} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbb{S}^{(e)}_\lambda \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_{opt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{15} \end{Bmatrix} \tag{6.57}$$

La suite de la procédure est identique à ce qui a été présenté dans le cas linéaire. Il s'agit ensuite de trouver une matrice $[M]$ inversible dont l'inverse permet de faire le lien entre 15 des inconnues locales de l'élément I_j et la valeur que doivent prendre les coordonnées $\lambda_1, ..\lambda_{15}$ afin d'équilibrer le chargement. C'est cette étape qui permettra d'exprimer l'énergie élastique de contrainte comme une forme quadratique faisant intervenir ces 15 inconnues locales. Pour finir, il sera nécessaire d'exprimer les trois équations assurant que le chargement locale soit équilibré. Ces équations seront le pendant quadratique de (6.42). Enfin, les simplifications (6.44) et (6.48) peuvent également être utilisées pour diminuer la complexité des expressions obtenues et ainsi diminuer le nombre d'opérations à effectuer entre nombres flottants qui peut être source d'un bruit venant entacher la précision du résultat.

Ceci vient achever la description de la méthode permettant de construire des éléments finis par arêtes quadratique. Le fait d'avoir pu déterminer quels étaient les champs d'autocontrainte et d'avoir mené l'optimisation au niveau de l'élément nous a paru essentiel. En

effet, si nous avions choisi de ne pas nous y intéresser nous aurions pu tout de même bâtir un code EFEM fournissant des résultats cohérents. Cependant, l'énergie complémentaire qui auraient été dérivée auraient été nécessairement plus grande que l'énergie complémentaire que nous obtenons en prenant en compte les autocontraintes et en ayant utilisé la matrice $[P_{opt}]$. En ce qui nous concerne, l'objectif de ces codes éléments finis en contrainte étant de pouvoir encadrer au plus proche un taux de restitution d'énergie, il est nécessaire de ne négliger aucune piste permettant d'améliorer la qualité de l'encadrement obtenu. Pour conclure, nous allons procéder au dénombrement permettant de caractériser la taille du système linéaire à résoudre. Celui-ci comprendra les contributions suivantes

— $6 \cdot N_A$ équations correspondant à la matrice de souplesse globale

— $3 \cdot N_E$ équations associées à l'équilibre global du chargement sur chaque élément triangulaire du maillage (6.42).

Des considérations menées précédemment nous permettent d'approximer le terme $6 \cdot N_A$ par $9 \cdot N_E$. Ce qui conduit à une taille de système linéaire caractérisée par :

$$(9+3)N_E = 12N_E \tag{6.58}$$

Cette quantité est à comparer à (6.17) ainsi qu'à (6.26) pour $k = 2$.

6.5 Bilan des différents procédés et application de la méthode

6.5.1 Bilan des différents codes éléments finis

Dans les sections précédentes, nous avons vu les principes sur lesquels reposent trois approches différentes permettant de construire des codes éléments finis de type EFEM pour des problèmes en déformations planes ou en contraintes planes. Chacune des méthodes proposées a été déclinée dans le cas d'espace d'approximation correspondant à des champs de contrainte linéaires puis quadratiques. Pour un maillage donné, comportant un nombre N_E d'éléments, nous avons établi dans chacun des cas des quantités permettant de caractériser la taille du système linéaire à résoudre (6.16), (6.17), (6.26), (6.43) et (6.58). Ces résultats peuvent se résumer sous la forme du Tableau 6.2. Il apparait clairement que la méthode basée sur des

Espace d'approximation :	Linéaire	Quadratique
Méthode directe	$17N_E$	$33N_E$
Fonctions d'Airy	$13N_E$	$21N_E$
Vecteurs contraintes par arêtes	$9N_E$	$12N_E$

TABLEAU 6.2 – Comparatif des différentes tailles des systèmes devant être inversés en fonction de la méthode considérée et du degré d'approximation

inconnues par arête surclasse de loin toutes les autres. De plus, comme déjà mentionné précédemment, l'espace fonctionnel d'approximation associé à cette approche est plus riche et correspond à celui qui serait obtenu pour un maillage trois fois plus fin en terme de nombre d'éléments pour la méthode directe et celle reposant sur les fonctions d'Airy. Ainsi, tant d'un point de vue vitesse de calcul de la méthode que d'un point de vue précision du résultat, il semble qu'une méthode reposant sur des inconnues par arête soit préférable lorsqu'on

cherche à bâtir des méthodes EFEM. Cependant, il est à noter que les approches détaillées dans le cas linéaire puis quadratique sont très dépendantes du caractère bidimensionnel et du fait de considérer des maillages constitués d'éléments triangulaires. Bien que généralisables à d'autres cas, elles nécessitent des adaptations fortes et donc un travail conséquent. Même en restant dans un contexte bidimensionnel et sur des éléments triangulaires, travailler sur des espaces polynomiaux de degré supérieur à 2 nécessite d'exhiber des nouvelles fonctions de forme ce qui n'est pas forcément trivial. L'avantage des deux premières méthodes est la facilité qu'elles présentent à pouvoir se généraliser à des degrés d'approximation supérieurs voir même à des problèmes en dimension plus élevée. Dans tous les cas, il semble préférable d'opter pour des méthodes reposant sur des fonctions de type fonctions d'Airy. En effet, il a été mentionné que le principe était généralisable pour des problèmes tridimensionnels et la forme des potentiels a même été un peu précisée dans le cadre axisymétrique (6.28). Il est d'ailleurs intéressant de noter qu'un code de calcul reposant sur des champs de contrainte en conditions axisymétriques ne présente aucune difficulté majeure pour effectuer des intégrations exactes des quantités énergies élastiques de contrainte contrairement à des codes DFEM en raison de la présence d'un facteur $\frac{1}{r}$ dans la déformation. Être capable de calculer de manière exacte ces quantités est en effet primordiale pour préserver le statut de borne associé à l'énergie complémentaire, lequel est indispensable pour mettre en œuvre l'encadrement (6.4). Nous sommes désormais totalement équipé pour traiter un problème de nucléation avec l'approche duale proposée en début de chapitre.

6.5.2 Analyse duale d'un problème de nucléation

L'objectif de ce chapitre est d'établir une méthode permettant de quantifier efficacement un objet de première importance lorsqu'on cherche à parler de nucléation qui est le taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc}. La supériorité d'un code éléments finis en contrainte garantissant automatiquement la continuité du vecteur contrainte sur les autres codes EFEM ayant été établie, c'est donc une procédure basée sur des vecteurs contrainte quadratiques par arêtes que nous avons choisie d'utiliser afin de procéder à un exemple d'utilisation de l'approche duale détaillée précédemment. Pour disposer d'un point de comparaison, nous nous proposons d'analyser le même problème que celui traité grâce à des transformations conformes dans le Chapitre 4, Section 4.6 et représenté Figure 4.11. En effet, analyser de nouveau ce problème de nucléation d'une fissure en mode I prenant naissance au coin d'un trou carré dans un milieu infini sera doublement bénéfique puisque cela permettra de valider en même temps les deux approches. Cependant, s'agissant dans ce chapitre d'approches purement numériques, il ne sera pas possible de traiter un milieu rigoureusement infini. Le mieux que nous pouvons faire est de mailler un problème de grande dimension par rapport à la taille du trou et à la taille de la fissure nucléée. Cet exercice sera d'ailleurs l'occasion de nous prononcer rigoureusement, sur cet exemple particulier, de la taille que doit adopter la structure par rapport aux objets sources de singularité afin de pouvoir considérer le système comme infini.

Commençons tout d'abord par traiter un système de taille 40 fois supérieure à la taille du côté du trou carré. Les résultats obtenus sont données Figure 6.8. Pour une finesse de maillages modeste, ces résultats démontrent clairement la faisabilité technique de la méthode proposée. Il s'avère que les écueils éventuels évoqués en début de chapitre sur la précision des résultats dérivés numériquement sont évités. Seul un doute peu éventuellement subsister quant aux très petites longueurs de fissure. Nous reviendrons sur ce point pour clarifier la situation et montrer qu'il s'agit là d'un comportement parfaitement normal. Mise à part cette petite zone de débat, la précision des résultats obtenus est d'autant plus frappante qu'il n'a

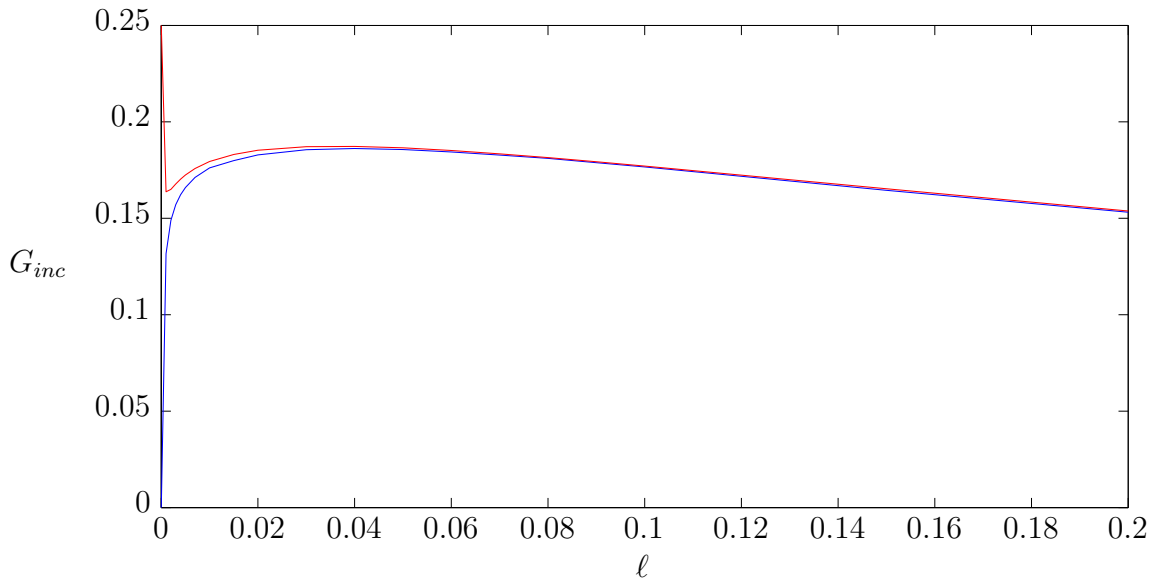

FIGURE 6.8 – Encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental pour une structure de taille globale 40 fois supérieur à la taille du trou carré. La quantité ℓ représente la taille la fissure nucléée normalisée par rapport à la taille du trou.
Courbe bleu : borne inférieure issue du terme de gauche dans l'inégalité (6.4).
Courbe rouge : borne supérieure issue du terme de droite dans l'inégalité (6.4).

nullement été besoin de recourir à des codes éléments finis spéciaux permettant de mieux gérer les singularités créées par les coins anguleux du trou et par la point de la fissure. Afin d'améliorer la méthode, il est cependant possible d'apporter des modifications minimes à un code DFEM afin de mieux capturer ces singularités. Par exemple, BARSOUM [1974] a proposé un procédé dit de l'« élément avec nœud au quart » qui s'illustre par sa simplicité et par le peu de modifications qu'il nécessite pour être mis en place. Son avantage est qu'il permet de considérer sur les éléments voisins d'une pointe d'une fissure des déplacements associés à une singularité de déformations en $O\left(1/\sqrt{r}\right)$. Ces fonctions de forme sont par conséquent plus à même d'interpoler avec précision la solution réelle du problème considéré. Toutefois, un code élément finis DFEM tout à fait classique a en effet été utilisé pour obtenir la Figure 6.8 et l'encadrement obtenu semble plus que satisfaisant. En effet, si nous souhaitons utiliser le critère de nucléation que nous proposons dans le Chapitre 4, Section 4.5, il est surtout important d'être à même de caractériser le maximum de la quantité G_{inc}. Cette opération est plutôt bien faite avec l'encadrement proposé. Ainsi, cette méthode purement numérique que nous proposons vient, au travers de cet exemple, de prouver son efficacité. Elle alimente ainsi la boîte à outil permettant d'utiliser le critère purement énergétique que nous souhaitons mettre en œuvre.

Avant de traiter un maillage de taille plus grande dans le but de pouvoir discuter du régime « milieu infini », il est important de revenir sur le comportement présenté par l'encadrement lorsque la longueur de la fissure envisagée tend vers 0. Une analyse très succincte de la situation montre que ces comportements sont normaux et auraient pu être anticipés. En effet, un résultat analytique rappelé dans le Chapitre 3, Section 3.2 montre que pour une fissure prenant naissance sur un bord ouvert, la quantité G_{inc} tend vers 0 lorsque la taille de la fissure l tend elle même vers 0 :

$$G_{inc}(l) = \frac{E_p^0(\boldsymbol{\xi}^{sol}) - E_p^f(\ell, \boldsymbol{\xi}^{sol})}{\ell} \xrightarrow[\ell \to 0]{} 0 \tag{6.59}$$

Afin de calculer par exemple la borne supérieure, nous utilisons les inégalités (6.4). Le numérateur du terme à droite de l'inégalité peut être reformulé sous la forme :

$$\begin{aligned} E_p^0(\boldsymbol{\xi}') + E_c^f(\ell, \boldsymbol{\sigma}') = \quad & \left(E_p^0(\boldsymbol{\xi}^{sol}) - E_p^f(\ell, \boldsymbol{\xi}^{sol})\right) + \left(E_p^0(\boldsymbol{\xi}') - E_p^0(\boldsymbol{\xi}^{sol})\right) \\ & + \left(E_c^f(\ell, \boldsymbol{\sigma}') - E_c^f(\ell, \boldsymbol{\sigma}^{sol})\right) \end{aligned} \tag{6.60}$$

Grâce aux deux principes énergétiques (6.2) et (6.3), les signes des deux quantités $(E_p^0(\boldsymbol{\xi}') - E_p^0)$ et $(E_c^f(\ell, \boldsymbol{\sigma}') - E_c^f(\ell))$ sont parfaitement déterminés et sont positifs quel que soit le choix des champs virtuels respectivement cinématiquement et statiquement admissibles avec le problème considéré. Nous pouvons même aller plus loin en affirmant que la première des deux ne dépend pas de ℓ et est en fait strictement positive dès que $\boldsymbol{\xi}'$ n'est pas rigoureusement solution du problème. Par conséquent, pour un champ de déplacements virtuel $\boldsymbol{\xi}'$ n'étant pas solution du problème, il vient :

$$\frac{E_p^0(\boldsymbol{\xi}') + E_c^f(\ell, \boldsymbol{\sigma}')}{\ell} \geq G_{inc}(\ell) + \frac{E_p^0(\boldsymbol{\xi}') - E_p^0(\boldsymbol{\xi}^{sol})}{\ell} \xrightarrow[\ell \to 0]{} +\infty \tag{6.61}$$

et ce quel que soit le choix de $\boldsymbol{\sigma}'$. Le même raisonnement peut être tenu en ce qui concerne la borne inférieure pour expliquer le comportement observé pour des taille ℓ petite. Il est à noter que la zone de divergence sera d'autant plus petite que les maillages considérés seront optimisés et fins pour les géométries considérées. Cependant, la méthode que nous proposons est vouée à donner des résultats peu précis pour des longueurs de fissures infinitésimales. Heureusement, il s'agit exactement de la plage pour laquelle une procédure basée sur les développements asymptotiques raccordés devient pertinente. Ainsi, cette méthode d'analyse duale peut venir, si nécessaire, en complément des résultats obtenus par développement asymptotiques raccordés. Néanmoins, elle semble suffisante, au moins dans cet exemple précis, pour caractériser avec précision le point d'intérêt qui est le maximum de G_{inc}. Notons enfin que cette analyse duale ne se limite pas au critère purement énergétique que nous envisageons. Elle peut aussi tout à fait s'intégrer dans une procédure basée sur le double critère de D. Leguillon (Chaptitre 3, Section 3.2) puisque, dans ce cas, la courbe présentée Figure 6.8 sera nécessaire afin de définir la plage caractérisant la longueur d'arrêt.

Dans le but de revenir sur la discussion attrayant au régime "domaine infini", nous proposons d'appliquer notre procédure d'analyse duale de G_{inc} cette fois-ci à une structure ayant une taille 60 fois supérieure à la taille du trou carré. Dans le but d'illustrer le fait que la zone de divergence de l'encadrement se retrouver décalée vers l'origine lorsque l'espace d'approximation choisi est plus grand, nous avons opté pour des maillages plus fins tout en conservant des temps de calcul tout à fait acceptables. Les résultats obtenus sont présentés Figure 6.9. En comparant la Figure 6.8 et la Figure 6.9, il apparait qu'une structure de taille 40 fois supérieure aux objets sources de singularités n'est pas suffisante pour pouvoir affirmer que l'on s'est placé dans un régime proche de celui du domaine infini. Par contre, avec les maillages considérés, la précision de l'encadrement obtenu, déjà très satisfaisante sur la Figure 6.8, a été considérablement améliorée. Pour conclure quant au régime "domaine infini", nous avons fait une dernière série de calcul pour une taille de structure égale à 80 fois la taille du trou carré. Les différents résultats sont donnés Figure 6.10 (les valeurs obtenues sont listées dans le Tableau D.1).

L'écart relativement important observé entre un G_{inc} calculé sur une structure de taille normalisée 40 (par rapport à la taille du trou carré) et sur une structure de taille normalisée 60 s'est considérablement atténué entre une taille de 60 et de 80. Nous considérons ce résultat suffisant pour estimer qu'une structure 80 fois plus grande que les objets sources de singularité est de taille suffisante pour considérer que le problème puisse être vu comme celui d'un trou

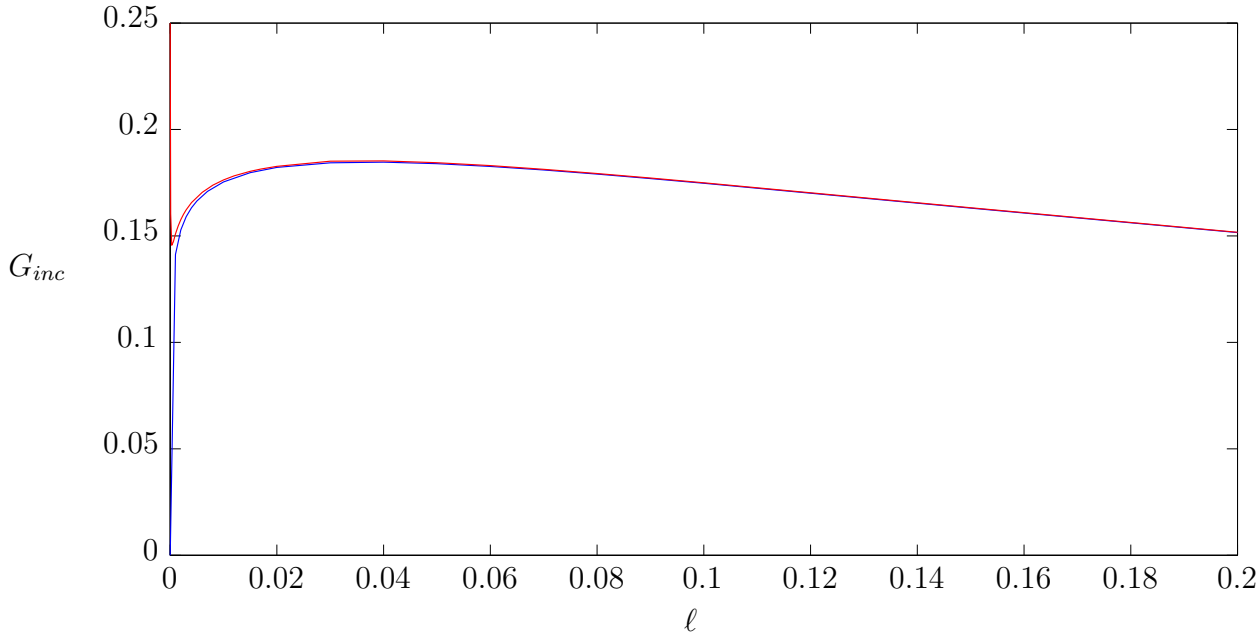

FIGURE 6.9 – Encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental pour une structure de taille globale 60 fois supérieur à la taille du trou carré. La quantité ℓ représente la taille la fissure nucléée normalisée par rapport à la taille du trou.
Courbe bleue : borne inférieure issue du terme de gauche dans l'inégalité (6.4).
Courbe rouge : borne supérieure issue du terme de droite dans l'inégalité (6.4).

carré dans une structure infinie. Fort de ce résultat, nous pouvons désormais comparer les courbes du taux de restitution de l'énergie obtenues par transformation conforme et par analyse duale. La comparaison des deux approches est donnée Figure 6.11. Ces courbes, en se comparant, permettent de valider simultanément les deux méthodes si des doutes subsistaient encore. Les conclusions en terme de nucléation pouvant être déduites de ces résultats ayant déjà été commentées au Chapitre 4, nous ne reviendrons pas dessus ici.

Les conclusions pouvant être tirées au terme de cette étude sont multiples. Tout d'abord, un nouvel outil permettant de calculer la précieuse quantité G_{inc} a été détaillé. Sans chercher des raffinements de type éléments finis étendus, la précision des résultats restent largement suffisante pour pouvoir utiliser le critère de nucléation que nous avons mis en place Chapitre 4, Section 4.5. Si la méthode basée sur l'utilisation d'un codeDFEM couplé à un code EFEM n'a pour l'instant était implémentée que dans un cadre bidimensionnel, un certain nombre de suggestions ont été données pour pouvoir l'étendre, sous ses formes les plus simples, à un cadre tridimensionnel, qui peut être axisymétrique ou pleinement 3D. De plus, l'étude menée à nouveau sur le problème représenté Figure 4.11 a permis d'une part de conforter la méthode basée sur les transformations conformes présentée Chapitre 4, Section 4.6, mais a également permis de confirmer que la restitution d'énergie potentielle pour un milieu infini correspondait bien à une situation limite d'un problème borné. Qualitativement, il a été également montré qu'il était nécessaire de prendre un domaine environ 80 fois (c'est à dire deux ordres de grandeur) supérieur en terme de dimension par rapport à la taille caractéristique de la source de singularité pour pouvoir considérer que le domaine est effectivement infini.

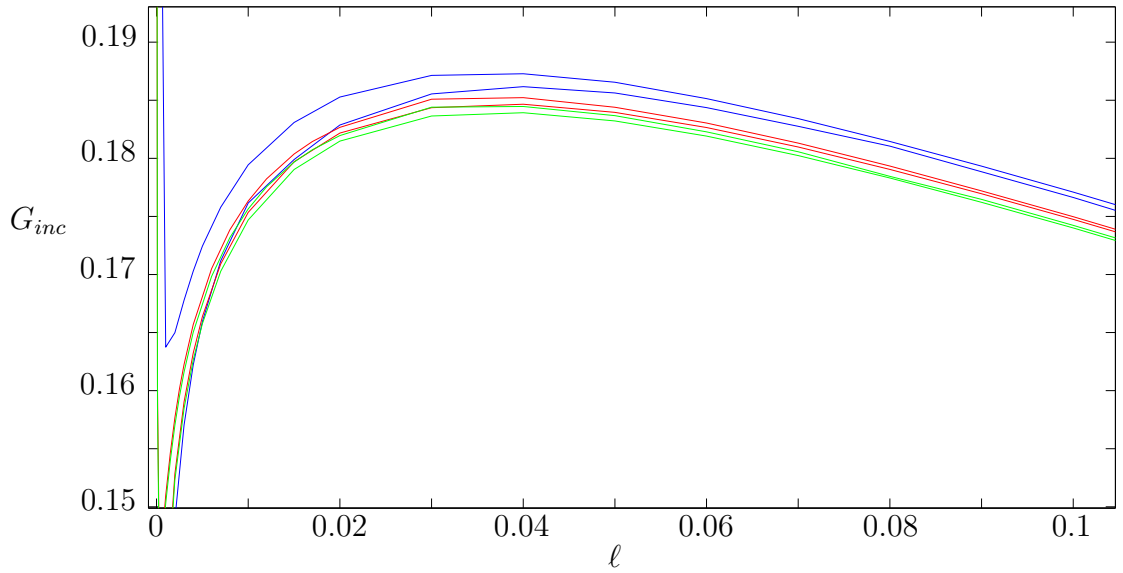

FIGURE 6.10 – Comparaison des différents encadrement pour des tailles de maillage différentes.
Courbes bleues : bornes pour un maillage 40 fois supérieur à la taille du trou.
Courbes rouges :bornes pour un maillage 60 fois supérieur à la taille du trou.
Courbes vertes :bornes pour un maillage 80 fois supérieur à la taille du trou.

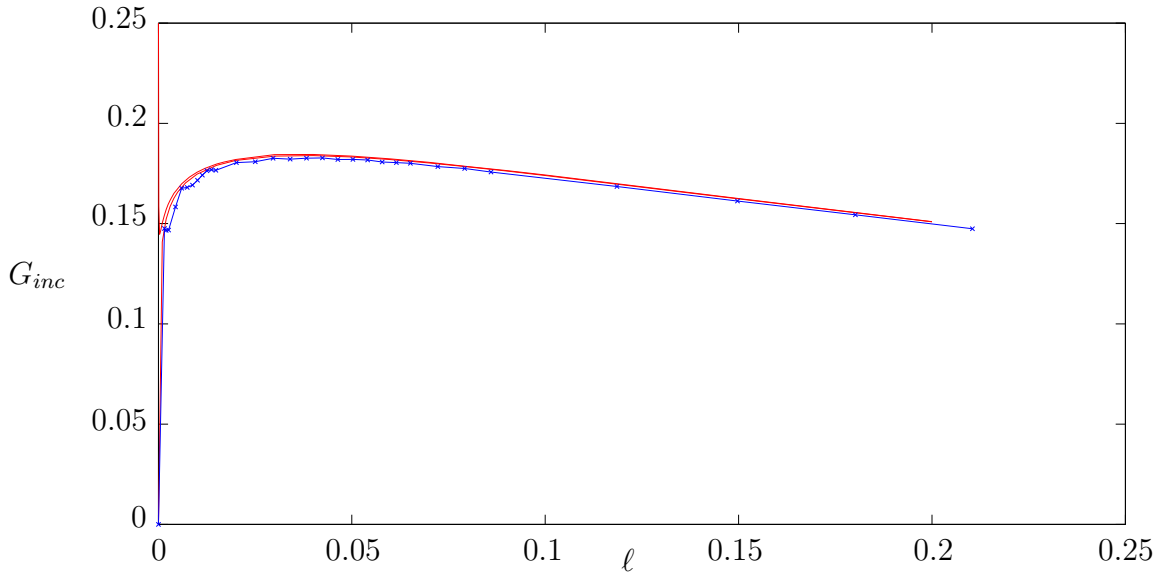

FIGURE 6.11 – Comparaison des courbes de taux de restitution d'énergie obtenus par transformation conforme (courbe blue) et par analyse duale pour une structure de taille normalisée 80 (courbes rouges)

Chapitre 7

Application du critère énergétique à l'excavation d'un tunnel et aux fissures en chevron

Sommaire

7.1 Différentes méthodes permettant de manipuler le critère énergétique . . . 194

7.2 Contexte axisymétrique . . . 195

7.2.1 Notations et conséquences de l'axisymétrie . . . 195

7.2.2 Mécanisme pour la structure saine . . . 196

7.2.3 Faciès de fissuration . . . 198

7.2.4 Variation de déplacement induite par la fracturation . . . 199

7.2.5 Mise en évidence d'une nucléation stable . . . 200

7.3 Influence de l'anisotropie de contraintes . . . 201

7.3.1 Mécanisme de déformation . . . 202

7.3.2 Faciès de fissuration . . . 202

7.3.3 Variation de déplacement induite par la fracturation . . . 204

7.3.4 Taux de restitution d'énergie . . . 205

7.4 Une influence de l'anisotropie du matériau . . . 206

7.4.1 Différentes sources d'anisotropie . . . 206

7.4.2 Un modèle d'homogénéisation pour un coût anisotrope de propagation . . . 207

7.4.3 Faciès de fissuration . . . 209

7.4.4 Mise en évidence d'une géométrie anisotrope . . . 210

7.5 Conclusion . . . 212

7.1 Différentes méthodes permettant de manipuler le critère énergétique

Le Chapitre 4 et plus particulièrement la Section 4.5 ont permis de proposer un critère de nucléation purement énergétique pouvant à la fois caractériser le niveau de chargement pour lequel une nucléation stable a lieu mais aussi l'extension des fissures obtenues. La motivation de ce travail provient de l'observation de la formation des fissures en chevron autour des galeries excavées par l'ANDRA. S'agissant bien d'une nucléation stable, nous proposons d'essayer d'appliquer notre critère à la situation de l'excavation d'un tunnel. La dimension des chevrons observés pose la question de la modélisation du phénomène. Rappelons en effet que la méthode proposée consiste à s'affranchir de la modélisation pas à pas de la naissance dynamique de la fissure pour ne considérer cette dernière que sous sa forme finale, une fois la longueur stabilisée. Si pour des faibles longueurs de fissure, une étude bidimensionnelle était justifiée (voir Chapitres 2 et 3), il n'en sera pas forcément de même pour les fissures en chevron qui, elles, sont de dimension comparable avec le rayon du tunnel. Par conséquent il semble qu'une étude tridimensionnelle soit incontournable.

A ce stade, deux techniques permettant d'utiliser le critère proposé ont été établies. La première concerne uniquement les problèmes bidimensionnels chargés pouvant être traités par le biais de transformations conformes et a été exposée au Chapitre 4, Section 4.6. La faisabilité, la puissance et le faible coût de calcul de la méthode en question ont été illustrés à l'occasion d'un problème de référence. Cependant, cette approche pose des problèmes techniques pour pouvoir être appliquée à des fissures fermées (qui mixe des conditions aux limites en déplacement et en contraintes) et reste de toute façon uniquement bidimensionnelle. Par voie de conséquence, il ne semble pas réaliste de l'envisager pour essayer d'étudier les fissures intéressant l'ANDRA. Une seconde méthode repose sur la minimisation de deux fonctionnelles en dualité. Ce faisant, il est possible d'encadrer de manière rigoureuse le taux de restitution d'énergie. Cette démarche proposée au Chapitre 6 est extrêmement puissante puisqu'elle permet de caractériser quantitativement avec une très grande précision la quantité à la base de la théorie que nous avons cherché à bâtir qui est le taux incrémentai de restitution d'énergie G_{inc}. Son point faible réside dans le fait qu'il n'existe que très peu de logiciels d'éléments finis de type EFEM. De plus, seuls les cas de la déformation plane et des contraintes planes ont été traités. Si une généralisation possible au 3D a été évoquée, il reste à déterminer quelles sont les fonctions de formes permettant d'étendre la méthode des vecteurs contraintes par arêtes aux potentiels de Maxwell ou de Morera dans l'optique d'aboutir à une méthode efficace et beaucoup moins gourmande en terme de temps de calcul. Ainsi, bien que ces deux méthodes constituent déjà une très bonne base pour pouvoir utiliser efficacement le critère de nucléation que nous proposons, elles ne peuvent pas être reconduites dans le cas qui nous intéresse dans ce chapitre. Par conséquent, nous allons mettre en œuvre une troisième méthode qui se veut avant tout qualitative mais qui prétend tout de même à un bon degré de précision. Dans le même esprit que le calcul à la rupture où des mécanismes de ruine sont testés, le critère de nucléation formulé requiert d'imaginer des faciès de fissuration et de comparer la variation d'énergie potentielle induite. Bien évidemment, plus la description est riche, meilleure sera la précision du résultat. L'approche que nous suggérons va un peu plus loin puisque, en plus de considérer une classe de faciès de fissuration, un calcul des variations sera effectué sur une classe "bien choisie" de mécanismes de déformations pour essayer de s'approcher au mieux des déplacements réellement solution du problème considéré. Il s'agit donc de mener un calcul tirant parti du principe du minimum de l'énergie potentielle. Si le mécanisme et le faciès de fissuration sont correctement choisis, le résultat sera qualitativement et quantitativement correct. A nouveau, plus la description proposée

sera riche et plus le résultat sera cette fois-ci quantitativement précis. L'intérêt d'une telle méthode par rapport à une approche éléments finis est le fait que les faciès de fissuration qui seront considérés sont non triviaux et donc difficiles à représenter numériquement avec un algorithme classique de génération de maillage. De plus, ces surfaces font intervenir un certain nombre de paramètres. Sachant qu'il sera nécessaire de mener une optimisation sur ces derniers, ces géométries complexes devront être générées de nombreuses fois. L'approche variationnelle sur le point d'être présentée est en ceci puissante puisqu'elle permet de rendre extrêmement simple et presque analytique ce travail qui peut s'avérer fastidieux.

Afin de bien illustrer les mécanismes de fissuration choisis et ne pas complexifier tout de suite les propos, nous proposons de réaliser dans un premier temps une étude axisymétrique par rapport à l'axe du tunnel excavé. Bien évidemment, ce n'est pas avec une telle modélisation qu'il sera possible de rendre compte des problématiques anisotropes observées dans le laboratoire de Bure. Cependant, ce cadre épuré permet tout d'abord de placer correctement et sans difficultés additionnelles tous les outils qui seront nécessaires pour aborder les fissures en chevron telles que décrites au Chapitre 1, Section 1.1. Également, ce cadre d'étude rend compte d'une problématique industrielle. En effet, des faciès de fissuration similaires, mais cette fois axisymétriques, sont observés par les pétroliers lors du forage de leurs puits. Ce n'est qu'une fois le cadre d'étude bien établi que nous nous attaquerons aux effets des différentes anisotropies offertes par le problème.

Enfin, notons que les considérations tenues au Chapitre 4, mais aussi au Chapitre 5, sur le caractère adiabatique de l'évolution et sur le couplage poro-élastique sont ici implicitement prises en compte. Toutefois, les effets liés à l'élévation des champs de température et de pression ne seront pas explicitement commentés. En effet, il a été vu que pour pouvoir rendre compte de ces différents couplages, il suffisait d'adapter l'élasticité utilisée pour calculer la variation d'énergie potentielle. Le travail qui est sur le point d'être présenté se veut avant tout qualitatif et ne prendra par conséquent que des quantités ayant des ordres de grandeurs cohérents entre eux.

7.2 Contexte axisymétrique

7.2.1 Notations et conséquences de l'axisymétrie

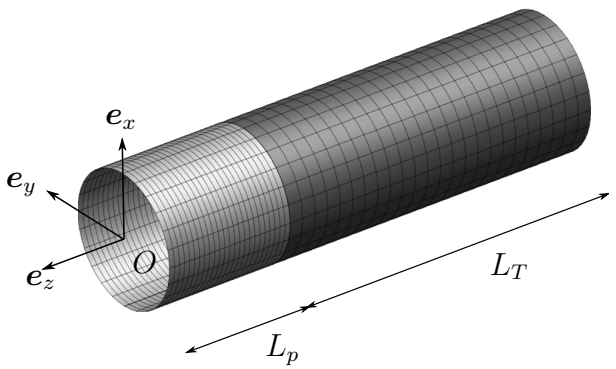

FIGURE 7.1 – Rappel des orientations des axes et des différentes notations

Dans un premier temps, nous nous attacherons à appliquer le critère de nucléation proposé à une situation axisymétrique par rapport à l'axe du tunnel. Rappelons que le matériau considéré est en toute rigueur isotrope transverse par rapport à l'axe vertical. Avec les notations introduites au Chapitre 2 et rappelées Figure 7.1, cela signifie que le matériau jouit

d'une propriété d'invariance par rotation autour de l'axe $\boldsymbol{e}_x$. En ajoutant une condition de symétrie de révolution autour de l'axe du tunnel $\boldsymbol{e}_z$, lequel appartient au plan horizontal, il en résulte que le matériau considéré doit être isotrope. La contrainte initiale $\boldsymbol{\sigma}_p$ a été définie en (2.16) et mise sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \sigma_I \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \sigma_{II} \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y + \sigma_{III} \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_z \tag{7.1}$$

A nouveau, pour pouvoir considérer le problème comme étant axisymétrique, il est nécessaire de considérer une précontrainte $\boldsymbol{\sigma}_p$ telle que $\sigma_I = \sigma_{II} = -p$ avec p positif.

7.2.2 Mécanisme pour la structure saine

Afin de pouvoir utiliser le critère de nucléation proposé, il est nécessaire de quantifier deux quantités énergétiques que sont l'énergie potentielle du milieu sain E_p^0, et donc sans fissure, pour un chargement donné et l'énergie potentielle du milieu fissuré E_p^f pour le même niveau de chargement. Intéressons nous tout d'abord à E_p^0. L'approche que nous souhaitons mettre en œuvre repose sur le choix d'un mécanisme de déformation pour le milieu sain permettant de rendre compte de E_p^0, lequel sera optimisé pour minimiser l'énergie potentielle. Tout d'abord, il est opportun de détailler l'énergie potentielle du milieu sain associée à un mouvement virtuel cinématiquement admissible. En vertu de la modélisation du chargement donnée au Chapitre 2, Sous-section 2.1.4, celle-ci s'écrit :

$$E_p^0(\boldsymbol{\xi}') = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}' : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\sigma}_p : \boldsymbol{\varepsilon}'\right) dV - \lambda \int_{\substack{r=R \\ -L_p \le z \le 0}} \boldsymbol{\xi}'.\boldsymbol{\sigma}_p.(-\boldsymbol{e}_r)\, dS - \lambda \int_{\substack{z=0 \\ r \le R}} \boldsymbol{\xi}'.\boldsymbol{\sigma}_p.(-\boldsymbol{e}_z)\, dS - \int_{\partial\Omega^{ext}} \boldsymbol{\xi}'.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{n} dS \tag{7.2}$$

où $\partial\Omega^{ext}$ représente les frontières extérieures du domaine, lesquelles se trouvent à une distance arbitrairement grande du tunnel. Le mécanisme de déformation que nous considérons correspond à un champ de déplacement cinématiquement admissible n'opérant que sur le domaine $\{r \ge R\} \cup \{-L_p \le z \le 0\}$:

$$\boldsymbol{\xi}^0 = a \frac{z(z+L_p)}{r^2} \boldsymbol{e}_r \tag{7.3}$$

où le paramètre a, caractérisant l'intensité de la cinématique, doit être optimisé. La représen-

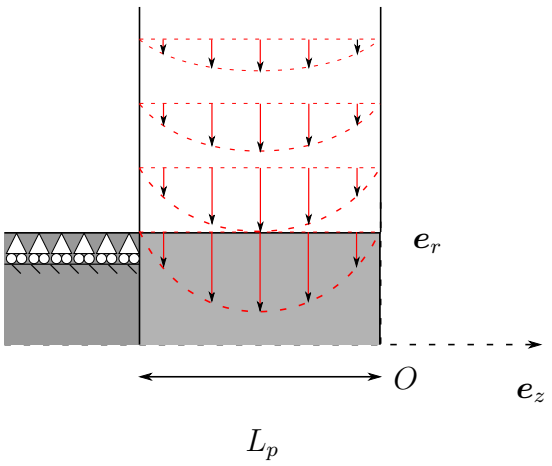

FIGURE 7.2 – Illustration du mécanisme de déformation $\boldsymbol{\xi}^0$ proposé dans le cas sain

tation graphique du mécanisme en question est donnée Figure 7.2. Bien entendu, la vocation

de ce champ de déformation est seulement d'être suffisamment réaliste pour pouvoir capturer les différents effets des problèmes considérés. Le propos n'est absolument pas de prétendre que la solution du problème s'écrira de cette façon. Pour plus de précision, il est tout à fait possible de considérer un autre mécanisme ou d'enrichir celui présenté. Par exemple, la dépendance en z aurait pu être remplacée au profit d'une fonction $f(z)$. La nullité du champ déplacement considéré en dehors de la région $-L_p \leq z \leq 0$ provient de notre intuition qui est que la partie importante de la cinématique consiste en la rentrée des terres au niveau de la nouvelle passe lors de son excavation. En se basant à nouveau sur cette hypothèse, un calcul des variations aboutirait à une équation différentielle à coefficients constants du second ordre devant être vérifiée par f. Par conséquent, la fonction optimale se décomposerait selon deux exponentielles. En ayant choisi un déplacement non nul uniquement sur la zone $-L_p \leq z \leq 0$, le caractère cinématiquement admissible implique de devoir se raccorder continument à $\mathbf{0}$ en $z = -L_p$ et $z = 0$. Ainsi, deux conditions aux limites devant être vérifiées par f sont $f(-Lp) = 0$ ainsi que $f(0) = 0$. Si la première relève bien de l'hypothèse faite lors de la modélisation du problème (voir Chapitre 2) concernant la présence d'un soutènement avant l'excavation de la nouvelle passe du tunnel, la seconde est arbitraire et n'est que la conséquence du choix $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{0}$ en dehors de la bande $-L_p \leq z \leq 0$. Avec ces choix de conditions aux limites, il se trouve que la solution optimale en exponentielles peut être approximée de manière très précise par la fonction $z(z + L_p)$ (à un coefficient de proportionnalité près). En résumé, il est livré dans ce Chapitre 7 une version *a minima* d'un outil qui peut être largement amélioré. Notre objectif est simplement de montrer qu'il est possible de rendre compte d'une nucléation stable, puis, dans un second temps, de montrer que les effets de l'anisotropie sont bien captés par le modèle et permettent d'expliquer les faciès de fissuration observés. Pour ce faire, le mécanisme proposé est parfaitement adapté. En exploitant la nullité en dehors de la région $-L_p \leq z \leq 0$ du champ de déplacement proposé, le caractère constant du champ $\boldsymbol{\sigma}_p$ et en utilisant le théorème de la divergence sur l'intégrale de support $\partial\Omega_{ext}$, l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}^0\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\sigma}_p : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \, dV - (1-\lambda)\int_{\substack{r=R \\ -L_p \leq z \leq 0}} \boldsymbol{\xi}^0 . \boldsymbol{\sigma}_p . \boldsymbol{e}_r dS \tag{7.4}$$

où bien entendu $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ est le champ de déformation associé à $\boldsymbol{\xi}^0$. De manière attendue, cette expression met en exergue le fait que la dépendance de a par rapport au paramètre de chargement est en $1-\lambda$. Un calcul rapide (qui peut être réalisé à la main ou grâce à un logiciel de calcul formel) permet de conclure que l'intensité optimale de $\boldsymbol{\xi}^0$ est :

$$a^{opt} = \frac{20R^3(1-\lambda)p}{\left(K + \frac{28}{3}\mu\right){L_p}^2 + 20R^2\mu} \tag{7.5}$$

où K et μ sont le modules de compression isotrope et le module de cisaillement du matériau considéré. Comme attendu, a^{opt} est une quantité positive ce qui signifie bien que le sol, sous l'effet de la poussée des terres, a tendance à rentrer dans la zone excavée lorsque le processus de décaissement est amorcé, comme illustré Figure 7.2. L'intérêt de la formule (7.5) et plus généralement l'approche proposée est qu'il est possible d'obtenir une expression analytique permettant de se prononcer sur l'influence des paramètres géométriques et du chargement sur le champ de déplacement.

Une remarque intéressante est qu'en toute rigueur il serait nécessaire de considérer que la poussée des terres conduit également à la rentrée du sol dans l'excavation au niveau du front de taille. Cependant, l'ajout de cette cinématique serait totalement transparent étant donné le mécanisme de fissuration qui sera considéré dans la sous-section suivante.

7.2.3 Faciès de fissuration

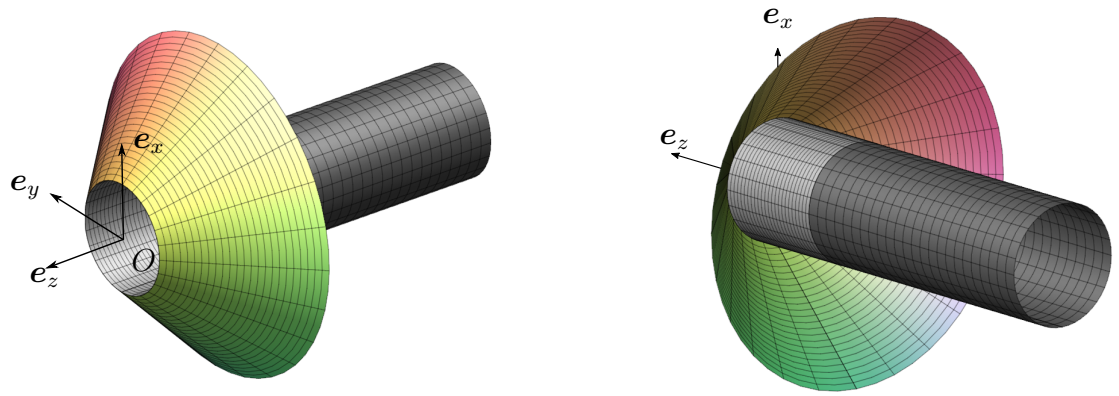

FIGURE 7.3 – Représentation tridimensionnelle du faciès de fissuration proposé

Contrairement au cas simple où la fissure envisagée est paramétrée par un unique scalaire ℓ, comme ce fut le cas dans l'exemple du Chapitre 4, Section 4.6, il faudrait en toute rigueur, dans le cadre tridimensionnel qui nous intéresse, être capable d'explorer toutes les géométries de fissure possibles et de déterminer laquelle est associée au premier instant où le critère (4.113) est vérifié. Il semble impossible d'être capable de parcourir un tel espace. Notre approche, beaucoup moins ambitieuse, consiste à ne considérer qu'une famille donnée de faciès de fissuration et voir si, parmi cette famille, il est possible d'obtenir une nucléation stable. Commençons donc par préciser quelle famille nous allons considérer. Celle-ci doit nécessairement respecter les conditions d'axisymétrie. Par conséquent, les fissures qui viennent naturellement à l'esprit sont celles formant un faciès tronconique à base circulaire dont un exemple est donné Figure 7.3. Pour pouvoir définir un tel objet géométrique, il est nécessaire de considérer deux paramètres qui peuvent être par exemple l'angle α du cône, qui est une quantité appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $L_{\mathcal{F}}$ la hauteur du cône tronqué comme illustré sur la Figure 7.4. Avec ce choix, il est nécessaire pour la suite de caractériser l'aire du faciès

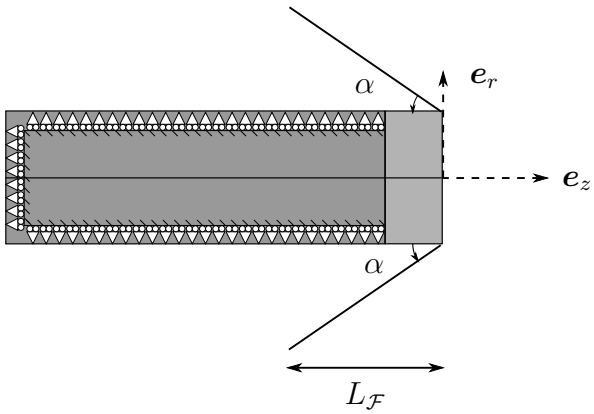

FIGURE 7.4 – Paramètres α et $L_{\mathcal{F}}$ définissant le cône tronqué

de fissuration considéré. Le paramétrage de la surface en question est le suivant :

$$\boldsymbol{x} = (R - z\tan\alpha)\,\boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{e}_z \quad \text{pour} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad z \in [-L_p, 0] \tag{7.6}$$

où $\boldsymbol{x}$ est le vecteur position. Par conséquent, en un point du cône tronqué, l'aire élémentaire dS vue comme fonction de θ et z est obtenue par :

$$\boldsymbol{n}dS = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial z}\right) d\theta dz = (R - z\tan\alpha)\,(\boldsymbol{e}_r + \tan\alpha\boldsymbol{e}_z)\,d\theta dz \tag{7.7}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale à la surface élémentaire considérée extérieure au cône. Par conséquent, pour un angle α et une hauteur $L_{\mathcal{F}}$ donnés, l'aire du cône tronqué est égale :

$$\begin{aligned} S\left(\alpha, L_{\mathcal{F}}\right) &= \int_{z=-L_p}^{0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(R - z\tan\alpha\right) \sqrt{1+\tan^2\alpha}\, d\theta dz \\ &= \pi\sqrt{1+\tan^2\alpha}\left({L_{\mathcal{F}}}^2 \tan\alpha + 2RL_{\mathcal{F}}\right) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Notons tout de suite qu'en toute rigueur, il faudrait considérer que des telles fissures existent déjà dans le milieu en amont du front de taille. Pour simplifier l'étude nous n'examinerons dans ce chapitre que l'opportunité de nucléation d'un seul objet fissure en chevron sans prendre en compte l'interaction entre les différents réseaux pré-existants.

7.2.4 Variation de déplacement induite par la fracturation

Pour pouvoir estimer l'énergie potentielle du milieu fissuré E_p^f, il est à nouveau proposé d'optimiser un mécanisme donné. Cependant, contrairement au cas précédent, ce ne sera pas le déplacement total par rapport à l'état de référence qui sera optimisé, mais seulement la variation de déplacement $\delta\boldsymbol{\xi}$ par rapport à $\boldsymbol{\xi}^0$, induite par la présence de la fissure considérée. Cette variation de déplacement doit être cinématiquement admissible et plus particulièrement être en accord avec le fait que les fissures prises en compte doivent être des fissures fermées. Encore une fois, en cherchant la simplicité afin de pouvoir manipuler de manière quasi-analytique les différents quantités, un déplacement induit cohérent est :

$$\delta\boldsymbol{\xi} = b\left(z + L_{\mathcal{F}}\right)\left(\cos\alpha\boldsymbol{e}_z - \sin\alpha\boldsymbol{e}_r\right) \tag{7.9}$$

dont une illustration est donnée Figure 7.5 et où le paramètre b est à nouveau une quan-

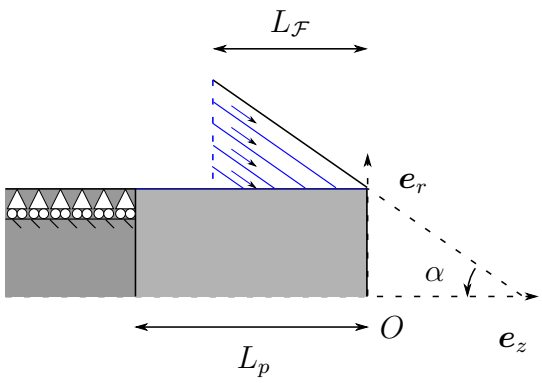

FIGURE 7.5 – Mécanisme de fracturation traduisant la variation de déplacement induite par la fissure

tité caractérisant l'amplitude du mouvement considéré devant être optimisée. Le mécanisme proposé correspond donc à un glissement de cônes tronqués de même angle d'ouverture et n'ayant pas le même sommet. En effet, l'idée de cette cinématique est de rendre justice au fait qu'en offrant à la structure une possibilité de glissement au niveau de la fissure, la matière aura un mouvement rentrant vers l'intérieur du tunnel. Une attention particulière est qu'en raison du caractère cinématiquement admissible du champ $\boldsymbol{\xi}^0 + \delta\boldsymbol{\xi}$, la forme de $\delta\boldsymbol{\xi}$ proposée ne peut être considérée que pour des faciès de fissuration telles que $L_{\mathcal{F}} \leq L_p$.

L'énergie potentielle du milieu fissuré pour un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible $\boldsymbol{\xi}'$ s'écrit exactement comme (7.2) puisqu'une fissure fermée non frottante n'ajoute aucun terme dans le travail des efforts extérieurs donnés. Par conséquent, une

écriture intéressante et immédiate de $E_p^f\left(\boldsymbol{\xi}^0+\delta\boldsymbol{\xi}\right)$ est :

$$E_p^f\left(\boldsymbol{\xi}^0+\delta\boldsymbol{\xi}\right)=E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}^0\right)+\frac{1}{2}\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbb{C}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dV+\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^0:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dV-\int_{\substack{r=R\\-L_p\leq z\leq 0}}\lambda\delta\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{\sigma}_p.\left(-\boldsymbol{e}_r\right)dS \tag{7.10}$$

où $\boldsymbol{\sigma}^0$ est le champ de contrainte associé à $\boldsymbol{\xi}^0$ s'exprimant comme $\mathbb{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^0+\boldsymbol{\sigma}^p$. Cette formulation permet d'une part de calculer la valeur de b optimale, mais aussi d'accéder au taux de restitution d'énergie incrémentale :

$$G_{inc}\left(\alpha,L_{\mathcal{F}}\right)=\frac{E_p^0\left(\boldsymbol{\xi}^0\right)-E_p^f\left(\boldsymbol{\xi}^0+\delta\boldsymbol{\xi}\right)}{S\left(\alpha,L_{\mathcal{F}}\right)} \tag{7.11}$$

7.2.5 Mise en évidence d'une nucléation stable

Les calculs ont été effectués pour des paramètres ayant des ordres de grandeur cohérents entre-eux. Par exemple, pour les choix suivants :

$$\begin{gathered}K=300\,\text{UA}\quad,\quad\mu=200\,\text{UA}\quad,\quad R=1\,\text{UA}\quad,\quad L_p=2\,\text{UA}\\ \sigma_I=\sigma_{II}=\sigma_{III}=-1\,\text{UA}\quad,\quad\lambda=0.125\end{gathered} \tag{7.12}$$

où le symbole UA signifie Unités Arbitraires, les résultats obtenus sont donnés Figure 7.6. L'utilisation d'unités arbitraires est bien légitime étant donné le caractère affine des équations

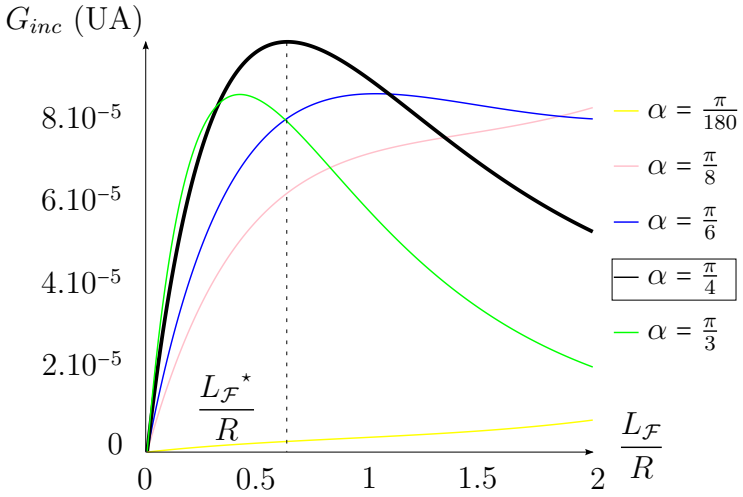

FIGURE 7.6 – Taux de restitution d'énergie pour une situation axisymétrique en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_{\mathcal{F}}$ et de l'angle d'ouverture α

considérées. Par voie de conséquence, seul importe le rapport entre les différentes quantités. La Figure 7.6 permet de mettre en évidence plusieurs résultats. Le premier est que pour les mécanismes de fissurations considérés (c'est à dire le faciès de fissuration ainsi que les cinématiques), le taux de restitution d'énergie présente effectivement un maximum atteint associé à une tangente nulle. Par conséquent, en vertu des considérations tenues au Chapitre 4, nous venons de mettre en évidence l'existence d'une nucléation stable (encore une fois au sein de la classe considérée). De plus, le critère de nucléation proposé annonce une fissuration en géométrie de cône tronqué d'ouverture $\alpha=\frac{\pi}{4}$ et de hauteur $L_{\mathcal{F}}$.

Ainsi, sur la base de calculs variationnels, nous avons montré un résultat fort qui est l'existence d'une nucléation stable, comme observé par exemple autour des puits de forage pétroliers. Il est à noter que l'angle $\alpha=\frac{\pi}{4}$ associé au maximum de G_{inc} se rapproche de

celui annoncé par le critère mixte de D. Leguillon utilisé au Chapitre 3, mais est toutefois plus petit. En effet, avec les notations de ce chapitre, le critère mixte conduisait à un angle $\alpha = 70°$. Cela peut s'expliquer par le fait que la fissure telle que prévue par le critère mixte n'a par contre absolument pas la même dimension et, nous l'avons vu, n'est pas stable au sens où elle n'a pas fini de se déployer. Avec la méthode ici proposée, la fissure considérée est en fait une fissure moyenne et il est fort à parier qu'en se propageant dynamiquement, la fissure envisagée par le critère de D. Leguillon s'incurve pour finalement donner en moyenne une fissure formant un angle plus faible se rapprochant de $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Par ailleurs, il est rassurant de trouver une taille de fissure qui est d'un ordre de grandeur comparable avec le rayon du tunnel. Ce résultat est cohérent avec les observations obtenues au laboratoire de Bure qui annoncent des fissures métriques. Enfin, rappelons que la démarche proposée, très légère sur le plan calculatoire, ne demande qu'à être améliorée en introduisant par exemple d'autres cinématiques et en enrichissant les faciès de fissuration envisagés.

7.3 Influence de l'anisotropie de contraintes

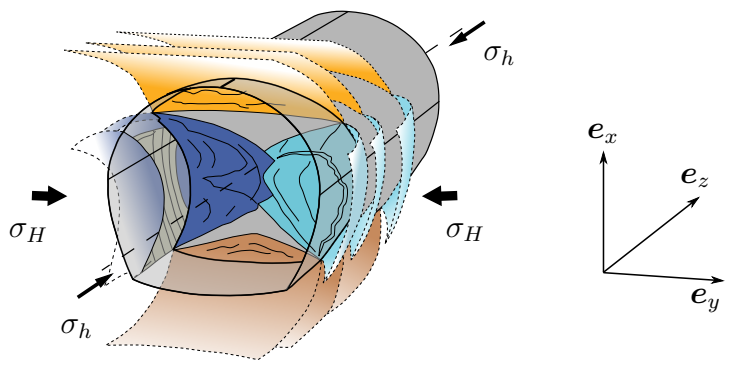

FIGURE 7.7 – Faciès de fissuration observé par l'ANDRA lors de l'excavation d'un tunnel dans la direction de la contrainte principale horizontale mineure (figure ANDRA)

Dans cette section, nous souhaitons nous intéresser au cas de l'excavation d'une galerie dans la direction principale horizontale mineure des contraintes. Pour rappel, un schéma des fissures observées au laboratoire de Bure pour un tunnel ayant cette orientation est donné Figure 7.7. La fissuration n'étant pas symétrique de révolution par rapport à l'axe de forage du tunnel, il est nécessaire d'introduire au niveau de la modélisation des ingrédients traduisant l'anisotropie du problème considéré. Plusieurs facteurs d'anisotropies peuvent venir à l'esprit pour tenter d'expliquer la non symétrie du profil obtenu. Cependant, étant donné que les observations diffèrent selon que le forage se fait dans l'une ou l'autre des directions principales horizontales des contraintes, il est naturel de ne rajouter dans un premier temps que la non-symétrie des contraintes initiales et donc du chargement. Sachant que le trièdre $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ est toujours orienté conformément à la Figure 7.1, l'expression (7.1) de la précontrainte devient pour la situation considérée :

$$\boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_x = \sigma_I \simeq \sigma_h \quad , \quad \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_y = \sigma_{II} = \sigma_H \quad , \quad \boldsymbol{e}_z.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_z = \sigma_{III} = \sigma_h \tag{7.13}$$

avec $\sigma_H \simeq 1.2\sigma_h$. La démarche proposée est exactement la même que celle dans le cas axisymétrique de la Section 7.2. Dans un premier temps, détaillons comment il est possible d'adapter le mécanisme de déformation du milieu sain pour prendre en compte l'anisotropie proposée.

7.3.1 Mécanisme de déformation

La cinématique de déformation proposée à la section précédente pourrait être reprise telle quelle puisqu'elle reste cinématiquement admissible. Pour autant, il est clair que celle-ci n'est pas optimale puisqu'elle ne prend pas un compte un effet de l'angle θ. En effet, il est toujours attendu que, lors du décaissement, la poussée des terres entraine une cinématique proche de celle illustrée Figure 7.2. Cependant, les considérations sur les composantes de la précontrainte (7.13) laissent supposer qu'il n'y a aucune raison que cette cinématique soit invariante par rapport à l'angle θ (angle polaire dans le plan $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ compté classiquement à partir de $\boldsymbol{e}_x$). Physiquement, les terres ne sont pas poussées avec la même intensité et ne rentreront donc pas de la même manière dans le tunnel fraichement excavé. Par conséquent, il est nécessaire de relâcher cette propriété de symétrie. Une façon simple de capturer cet effet est de considérer cette fois-ci une cinématique décrite par :

$$\boldsymbol{\xi}^0 = g(\theta)\frac{z(z+L_p)}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{7.14}$$

où la fonction g définie sur $[0, 2\pi]$ doit être optimisée. Le caractère cinématiquement admissible du champ $\boldsymbol{\xi}^0$ impose la continuité de la fonction g, le caractère C^1 par morceaux, ainsi que la relation :

$$g(0) = g(2\pi) \tag{7.15}$$

Nous choisirons g comme étant de classe au moins C^2. L'expression (7.4) de l'énergie potentielle saine reste valable. Un calcul des variations sur g mène au fait que la fonction optimale est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$3\mu {L_p}^2 g''(\theta) - \left(3K{L_p}^2 + 60R^2\mu + 28\mu{L_p}^2\right) g(\theta) = 60(1-\lambda)\left(\cos^2\theta\sigma_h + \sin^2\theta\sigma_H\right)R^3 \tag{7.16}$$

Les valeurs des deux constantes liées à la solution de l'équation homogène peuvent être déterminées en exploitant d'une part la condition de continuité (7.15) puis en cherchant quelle est la fonction réalisant le minimum en tenant compte de cette liaison. Il est immédiat de montrer que pour ce faire, les deux constantes en question sont en fait nulles. Par conséquent, la fonction optimale est :

$$g^{opt}(\theta) = 10(1-\lambda)R^3\left(\frac{(\sigma_H - \sigma_h)\cos(2\theta)}{\left(K + \frac{40}{3}\mu\right){L_p}^2 + 20R^2\mu} - \frac{(\sigma_h + \sigma_H)}{\left(K + \frac{28}{3}\mu\right){L_p}^2 + 20R^2\mu}\right) \tag{7.17}$$

Le fait d'avoir autorisé une dépendance vis à vis de l'angle θ n'est pas propre au cadre d'étude de cette Section et aurait tout aussi bien pu être considéré dans la section précédente sur l'axisymétrie. La formule ci-dessus resterait alors vraie à condition de prendre $\sigma_h = \sigma_H$. Ce faisant, la dépendance en θ de g^{opt} est bien annulée et, de manière rassurante, la valeur de a^{opt} donnée en (7.5) est bien retrouvée. Cela signifie que choisir g constant dans le cas symétrique revenait bien à se placer sur une sous-famille contenant l'optimum. Ce résultat n'a rien de surprenant puisque bien souvent la solution d'un problème jouit des symétries de ce dernier.

7.3.2 Faciès de fissuration

Plusieurs idées peuvent venir à l'esprit pour essayer de rendre compte de la fissuration observée et schématisée Figure 7.7. Nous ne chercherons pas à caractériser les fissures qui apparaissent en amont du front de taille. Pour ce faire, il serait cette fois-ci nécessaire de

modifier le mécanisme de déformation afin de prendre compte le fait que la poussée des terres fait également rentrer le sol au niveau du front de taille. Afin de libérer le plus de contrainte, il est naturel d'essayer de faire partir les fissures du coin anguleux comme ce fut le cas dans le Chapitre 3. Pour rendre compte du faciès anisotrope, le plus naturel est de considérer une figure elliptique. Par conséquent, une première idée peut être de considérer une surface réglée permettant de passer continument d'un cercle à une ellipse. Un exemple d'une telle

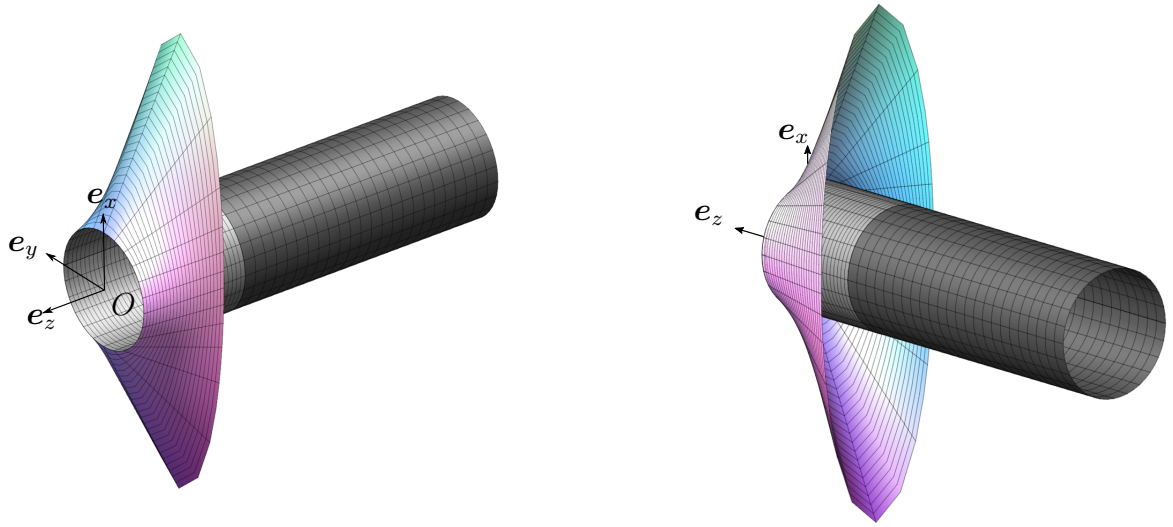

FIGURE 7.8 – Représentation tridimensionnelle d'une surface reglée prenant appui sur un cercle et une ellipse

géométrie est donnée Figure 7.8. Il existe cependant un autre faciès de fissuration permettant d'obtenir de meilleurs résultats. De manière surprenante, celui-ci ne prend pas partout appui sur le bord anguleux formé par le front de taille. A nouveau, l'explication peut se trouver dans le fait que seule une fissure moyenne est considérée. Par conséquent, il est tout à fait possible qu'un tel faciès considéré se rapproche plus de la véritable fissure optimale, et ce, même en considérant des points de départ ne se situant pas sur les singularités géométriques. La géométrie de fissure que nous proposons est un cône à base elliptique. Une illustration

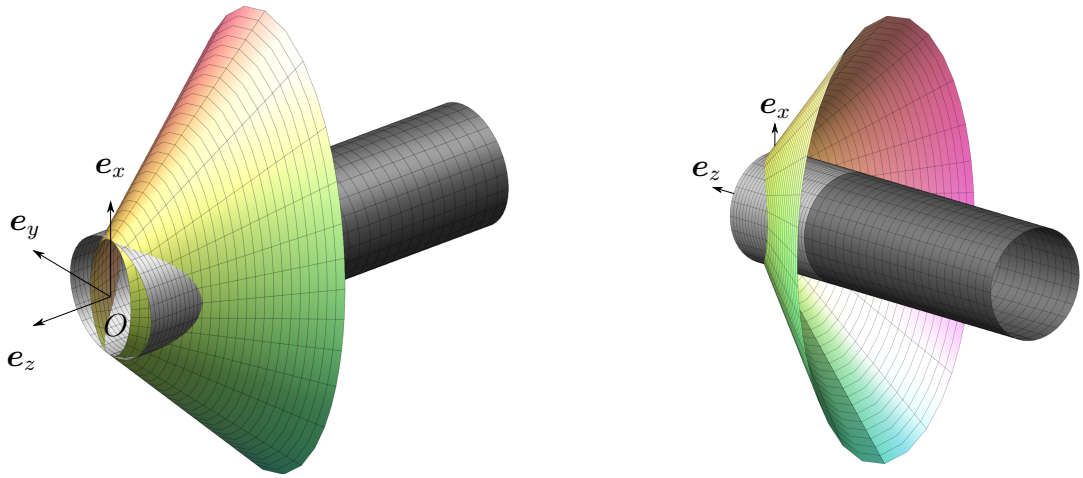

FIGURE 7.9 – Représentation géométrique d'une fissure en forme de cône à base elliptique

d'un tel faciès est donnée[1] Figure 7.9. A partir d'une ellipse de demi-axe vertical (selon $\boldsymbol{e}_x$)

1. La partie de la surface se trouvant à l'intérieur du tunnel n'est pas à considérer et sert uniquement à mieux comprendre comment la surface en question est construite

a et de demi-axe horizontal (selon $\boldsymbol{e}_y$) b venant tangenter intérieurement le cercle de rayon R, il est possible de définir un cône en se donnant un point situer sur l'axe z à une côte $z = h$ et jouant le rôle de sommet (voir Figure 7.10). Pour une telle géométrie, il n'est plus possible

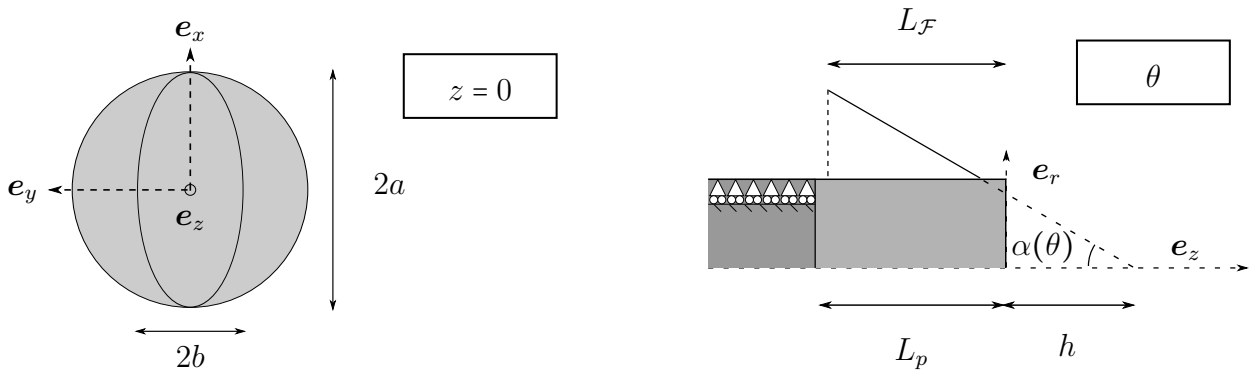

FIGURE 7.10 – Paramètres permettant de définir une géométrie de fissure conique à base elliptique

de définir un angle d'ouverture α du cône puisque celui-ci varie avec l'angle cylindrique θ considéré. Il lui est donc préféré la définition du sommet du cône où le paramètre h permet de régler l'ouverture. Il est intéressant de constater qu'une telle géométrie permet de retrouver les faciès de cône à base circulaire considérés dans la Section 7.2 en prenant $a = b = R$. Il sera donc possible de juger si ces faciès perdent où non leur statut d'optimum en raison de l'anisotropie de contraintes considérée.

7.3.3 Variation de déplacement induite par la fracturation

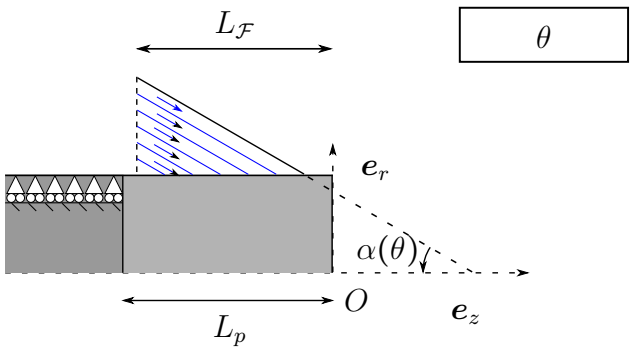

FIGURE 7.11 – Mécanisme de fracturation traduisant la variation de déplacement induite par la fissure

L'avantage de la géométrie de fissure considérée (il en aurait été de même avec la surface réglée) est que le mécanisme de fracturation traduisant la variation de déplacement due à l'apparition d'une fissure peut être repris directement de la Sous-section 7.2.4.

$$\delta\boldsymbol{\xi} = b\,(z + L_{\mathcal{F}})\,(\cos\alpha(\theta)\boldsymbol{e}_z - \sin\alpha(\theta)\boldsymbol{e}_r) \tag{7.18}$$

où b est une constante à optimiser. La différence fondamentale est que ce mécanisme n'est pas forcément actif entre $z = -L_{\mathcal{F}}$ et $z = 0$ puisque, comme illustré sur la Figure 7.11, la fissure considérée n'intersecte pas forcément le coin anguleux formé par le front de taille. Pour être plus précis, il prend effet entre $z = L_{\mathcal{F}}$ est un certain z_{max} défini comme :

$$z_{max} = h\left(1 - R\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{ab}\right) < 0 \tag{7.19}$$

De la même façon, une attention particulière doit être accordée au fait que toutes les valeurs de θ ne peuvent pas forcément être considérées suivant la dimension de $L_{\mathcal{F}}$. Ces quelques points de détails écartés, la procédure est exactement la même que celle présentée dans la section précédente. C'est avec ces géométries anisotropes que la démarche proposée, reposant sur des calculs des variations, trouve tout son intérêt. En effet, une autre procédure serait de procéder par le biais de codes éléments finis DFEM. Il serait alors très délicat de réaliser les maillages correspondant aux différentes géométries proposées sachant qu'il est nécessaire de réaliser un maillage par jeu de paramètres (a, b, h). De plus, un travail est à effectuer pour imposer les bons lagrangiens ou éliminer les bonnes variables dans le processus d'optimisation pour pouvoir effectivement considérer des fissures fermées. De plus, en l'absence d'un code EFEM, aucun statut de borne n'est obtenu et par conséquent l'approche ne présente pas vraiment d'avantage par rapport à la méthode proposée.

7.3.4 Taux de restitution d'énergie

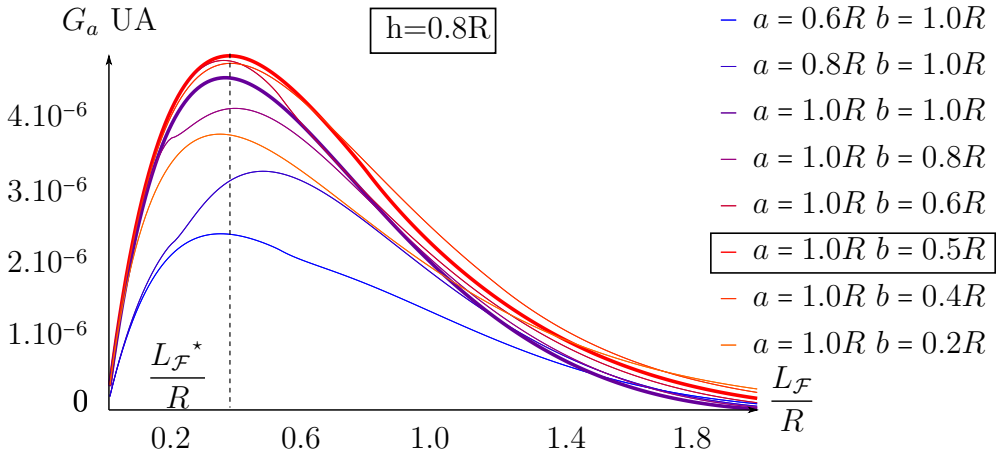

FIGURE 7.12 – Taux de restitution d'énergie pour une situation avec anisotropie de contraintes en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_{\mathcal{F}}$, des différents paramètres de l'ellipse de base a et b. La distance au sommet est $h = 0.8R$

A nouveau, les calculs ont été effectués pour des paramètres ayant des ordres de grandeur cohérents entre-eux. Les choix suivants ont été effectués :

$$\begin{array}{ccccccc} K = 300\,\text{UA} & , & \mu = 200\,\text{UA} & , & R = 1\,\text{UA} & , & L_p = 2\,\text{UA} \\ \sigma_I = \sigma_{III} = -1\,\text{UA} & , & \sigma_{II} = -1.2\,\text{UA} & , & \lambda = 0.125 & & \end{array} \tag{7.20}$$

Pour un niveau de chargement donné, les résultats correspondant à la valeur optimale de G_{inc} sont donnés Figure 7.12. Pour plus de lisibilité, seuls les faciès correspondant à un cône dont le sommet se trouve à une distance $h = 0.8R$ sont représentés. D'autres choix de h sont donnés en Annexe et plus précisément Figure D.3. Il est intéressant d'ailleurs de regarder le cas $h = R$ qui permet de retrouver la géométrie optimale axisymétrique d'un cône à base circulaire d'ouverture $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Pour ce faire, il suffit d'examiner la courbe $a = b = 1.0R$. Il est d'ailleurs clair sur les figures proposées que ce faciès ne correspond plus à la situation optimale. Plusieurs remarques doivent être formulées. La première est qu'il s'agit des optimums pour un niveau de chargement donné. D'autres valeurs de λ conduiraient à une autre organisation relative des courbes. Cependant, l'analyse proposée permet de mettre en valeur le fait que l'anisotropie de contrainte favorise pour certains niveaux de chargement d'autres faciès de fissuration que celui de révolution. Par conséquent, selon la valeur de $G_c^\star$,

il est tout à fait envisageable d'obtenir des géométries de fissures brisant la symétrie de révolution autour de l'axe de forage. En effet, les deux courbes plus épaisses sur la Figure 7.12 correspondent d'une part à la géométrie optimale, qui est une ellipse de demi grand axe vertical $a = R$ et de demi petit axe horizontal $b = 0.5R$, et d'autre part à une géométrie axisymétrique où $a = b = R$. Comme annoncé, il apparait que cette dernière géométrie est moins intéressante que la première pour le niveau de chargement considéré. Notons d'ailleurs que les géométries correspondant à des ellipses de grand axe horizontal sont complètement dominées par celles ayant un grand axe vertical. Une représentation du faciès optimal est

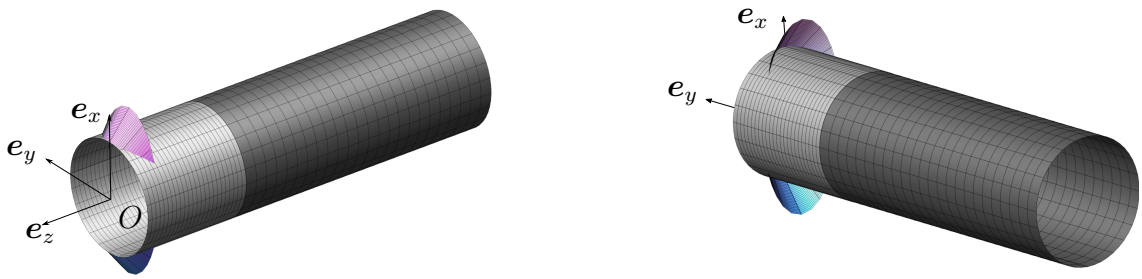

FIGURE 7.13 – Représentation de la surface optimale pour l'anisotropie de contraintes

donnée Figure 7.13 et est à comparer avec la figure schématique 7.7.

Au terme de cette première prise en compte de l'anisotropie dans notre modèle, nous pouvons conclure que les contraintes en présence lors de l'excavation des galeries du laboratoire de Bure influence effectivement significativement le faciès de fissuration et tendent à ovaliser celui-ci dans le sens de la vertical. Ce premier résultat est très intéressant puisqu'il est en parfaite adéquation avec les observations réalisées par l'ANDRA. Encore une fois, le modèle proposé est loin d'être parfait. Il ne demande qu'à être amélioré en proposant d'autres géométries, d'autres mécanismes et même en essayant de prendre en compte des fissures se formant en amont du front de taille (sachant que pour ce dernier point, le mécanisme $\boldsymbol{\xi}^0$ devra nécessairement être adapté).

7.4 Une influence de l'anisotropie du matériau

7.4.1 Différentes sources d'anisotropie

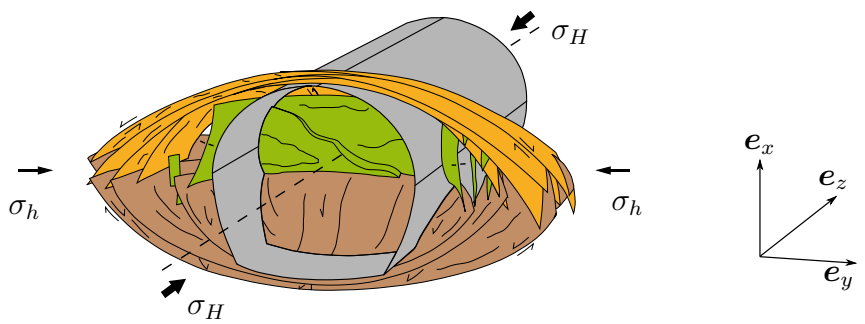

FIGURE 7.14 – Faciès de fissuration observé par l'ANDRA lors de l'excavation d'un tunnel dans la direction de la contrainte principale horizontale mineure (figure ANDRA)

Nous allons maintenant nous intéresser au deuxième faciès de fissuration observé par l'ANDRA lors de l'excavation d'un tunnel au laboratoire souterrain de Bure dans la direction principale horizontale majeure. La géométrie des fissures en chevron observées, schématisée

Figure 7.14, s'organise cette fois-ci davantage selon une ellipse de grand axe horizontal. Étant donné que la contrainte principale horizontale mineure et la contrainte principale verticale sont (presque) égales, il paraît difficile dans ce contexte d'invoquer une anisotropie de contraintes pour essayer de justifier les observations. En effet, notons que les composantes du tenseur de précontrainte $\boldsymbol{\sigma}_p$, dont la forme est précisée en (7.1), s'organisent cette fois-ci de la façon suivante :

$$\boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_x = \sigma_I \simeq \sigma_h \quad , \quad \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_y = \sigma_{II} = \sigma_h \quad , \quad \boldsymbol{e}_z.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_z = \sigma_{III} = \sigma_H \tag{7.21}$$

Par conséquent, construire un modèle à même de reproduire une telle géométrie de fissure n'est possible que si l'anisotropie du matériau est prise en compte. A ce titre, la première idée venant à l'esprit est de calculer l'énergie potentielle saine (7.4) ainsi que l'énergie potentielle fissurée (7.10) en utilisant un tenseur d'élasticité $\mathbb{C}$ anisotrope comme ce fut le cas du Chapitre 3. Pour autant, il existe une forme d'anisotropie du matériau qui semble beaucoup plus prometteuse. En effet, dans le critère de nucléation (4.113), il n'y a aucune raison pour considérer un coût surfacique de propagation $G_c^\star$ qui soit isotrope si le matériau ne l'est pas. Plus précisément, l'argilite est un matériau constitué d'un empilement de feuillets que nous supposerons être horizontaux. Ainsi, étant donné l'hétérogénéité du matériau considéré, il y a fort à parier qu'il sera moins coûteux d'un point de vue énergétique de fissurer horizontalement que verticalement. Par conséquent, puisqu'en l'absence d'anisotropie, il a été vu que la surface optimale était un cône à base circulaire, il est très probable que favoriser les fissures horizontales ovalise horizontalement le faciès optimal de fissure par rapport au cône de révolution.

7.4.2 Un modèle d'homogénéisation pour un coût anisotrope de propagation

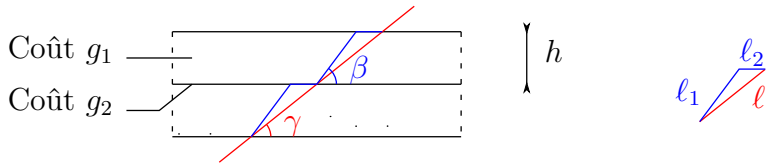

FIGURE 7.15 – Paramètres permettant de définir une géométrie de fissure conique à base elliptique

Commençons par détailler un petit modèle purement qualitatif destiné à rendre compte de l'effet de l'anisotropie dans la dissipation associée à une fissure d'inclinaison donnée. Soit une microstructure constituée d'un multicouche, telle que décrite Figure 7.15, où il est moins coûteux d'un point de vue énergétique de propager une fissure dans l'interface entre les deux couches que dans une couche de matériau en elle-même. Ce modèle ne décrit sans doute que très imparfaitement mais a le mérite de proposer une microstructure ayant des directions de fissuration privilégiées. D'autres modèles peuvent être envisagés, comme par exemple un bicouche, mais les résultats analytiques sont plus difficiles à obtenir tout en étant très similaires à ceux du modèle ici suggéré. Soient g_1 le coût surfacique de propagation au sein d'une couche et g_2 le coût de propagation dans l'interface. Soit également une fissure macroscopique formant un angle γ avec l'horizontal. Au niveau microscopique, cette fissure se décompose en fait en deux fissures, l'une traversant la couche du matériau et l'autre appartenant à l'interface entre deux couches, telles que schématisées Figure 7.15. Si $G_c^\star$ est le prix énergétique macroscopique surfacique, il vient alors :

$$G_c^\star \ell = g_1 \ell_1 + g_2 \ell_2 \tag{7.22}$$

Il sera considéré que les fissures microscopiques s'organisent de façon périodique afin de donner en moyenne la fissure macroscopique, mais également afin de coûter le moins cher possible d'un point de vue énergétique. Par conséquent, pour caractériser le coût surfacique macroscopique $G_c^\star$ de création d'une fissure, il est nécessaire de minimiser la quantité (7.22) sous les conditions $\ell_1 \cos\beta + \ell_2 = \ell \cos\gamma$ et $\ell_1 \sin\beta = \ell \sin\gamma = h$, sachant que β est astreint à être supérieur ou égal à γ. En combinant ces équations, il est possible de reformuler le problème de minimisation en le faisant porter sur la variable β de la façon suivante :

$$g_1 \frac{h}{\sin\beta} + g_2 h \left(\frac{1}{\tan\gamma} - \frac{1}{\tan\beta} \right) = G_c^\star \frac{h}{\sin\gamma} \tag{7.23}$$

où la condition $\gamma \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ doit être respectée. En différenciant cette expression, il vient :

$$\cos\beta = \frac{g_2}{g_1} \tag{7.24}$$

qui est une condition ne pouvant être satisfaite que si $g_2 \leq g_1$. Dans le cas où cette inégalité n'est pas vérifiée, il est clair que le minimum sera réalisé pour $\alpha = \theta$. En effet, cela signifie qu'il est plus coûteux de se propager dans l'interface que dans la couche. Sachant que $\ell_1 + \ell_2 \geq \ell$, il vient de manière immédiate :

$$g_1 \ell_1 + g_2 \ell_2 \geq g_1 \left(\ell_1 + \ell_2 \right) \geq g_1 \ell \tag{7.25}$$

qui est un minimum atteint lorsque $\ell_2 = 0$. Supposons désormais que $g_2 \geq g_1$. Sachant que $\gamma \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, la condition (7.24) ne peut être satisfaite si $\gamma > \arccos\left(\frac{g_2}{g_1}\right)$. Dans ce cas, il vient à nouveau $\ell_2 = 0$. Enfin, si $\gamma \leq \arccos\left(\frac{g_2}{g_1}\right)$, la relation (7.23) devient :

$$G_c^\star = g_2 \cos\gamma + \sqrt{{g_1}^2 - {g_2}^2} \sin\gamma \tag{7.26}$$

En résumé, le modèle micromécanique considéré conduit à un taux critique de restitution d'énergie macroscopique de la forme :

$$G_c^\star = \begin{cases} g_1 & \text{si} \quad g_2 > g_1 \quad \text{ou} \quad \gamma \geq \arccos\left(\dfrac{g_2}{g_1}\right) \\ g_2 \cos\gamma + \sqrt{{g_1}^2 - {g_2}^2} \sin\gamma & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.27}$$

qui est une fonction continue de γ. Le but du modèle est de considérer un cas où g_2 est nettement plus petit que g_1, diminuant ainsi fortement la plage où $G_c^\star$ est égal à g_1. Par conséquent, pour simplifier un peu le critère, il est possible d'approximer (7.27) sans commettre beaucoup d'erreur par $G_c^\star = g_2 + (g_1 - g_2) \sin\gamma$ afin de préserver la tangente horizontale en $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (cf. Figure 7.16). Par conséquent, nous proposons d'utiliser l'écriture

$$G_c^\star = G_H + (G_V - G_H) \sin\gamma \tag{7.28}$$

où $G_H = g_2$ est d'un ordre inférieur à $G_V = g_1$. La notation choisie n'est pas fortuite puisqu'avec ce choix, G_H correspond au taux de restitution d'énergie surfacique macroscopique d'une fissure se propageant horizontalement et G_V celui d'une fissure se propageant verticalement. Avec les remarques précédentes, il est clair qu'avec la formulation (7.28), la géométrie optimale ne sera pas une géométrie de cône à base circulaire. Ce petit modèle illustre bien qualitativement le fait que le coût énergétique de la fissuration va désormais dépendre de son orientation. Il est cependant très vraisemblable qu'il sous-estime néanmoins l'intensité du phénomène. En effet, un des défauts du modèle suggéré est que dès que l'angle d'inclinaison

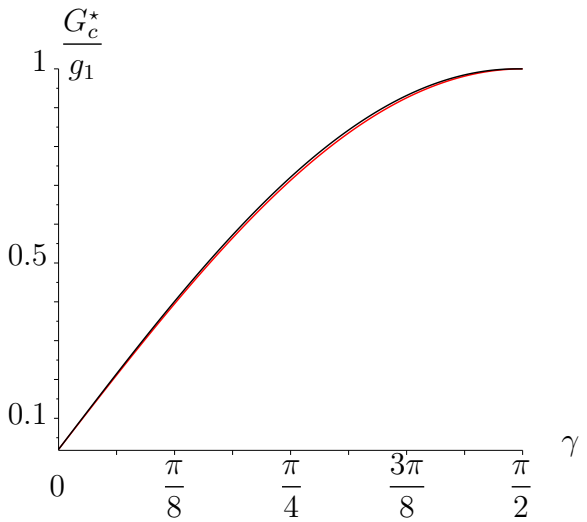

FIGURE 7.16 – Tracé de $\frac{G_c{}^\star}{g_1}$ pour $g_1 = 50g_2$. Courbe noire : formulation exacte (7.27), Courbe rouge : approximation (7.28)

de la fissure macroscopique n'est pas rigoureusement nul, il est nécessaire de traverser intégralement la couche dans toute son épaisseur. Par conséquent, le coût énergétique s'éloigne très rapidement de G_H pour atteindre des valeurs proches de G_V. Ainsi, même si les résultats obtenus vont dans le sens souhaité, ils ne seront pas très marqués. Pour corriger ce défaut du modèle proposé et accentuer le phénomène que nous souhaitons mettre en exergue, c'est à dire rendre compte de manière satisfaisante de la différence de prix à payer lorsqu'une fissure se propage en étant proche de l'horizontal par rapport à une fissure verticale, nous proposons de remplacer (7.28) par la forme suivante :

$$G_c^\star = G_H + (G_V - G_H)\sin^2\gamma = G_V f(\gamma) \tag{7.29}$$

où G_V est le taux de restitution d'énergie critique qu'il y aura dans le cas d'un matériau isotrope et $f(\gamma)$ est une fonction caractérisant l'anisotropie. Ce modèle nous paraît plus à même de traduire le phénomène suggéré et sera donc celui utilisé par la suite.

7.4.3 Faciès de fissuration

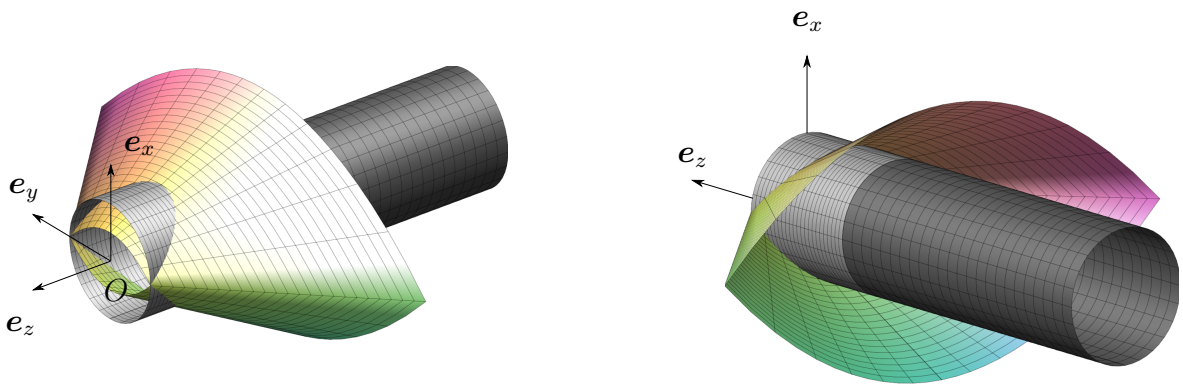

FIGURE 7.17 – Représentation géométrique d'une fissure en forme de cône à base construite à partir de branche de paraboles

Pour pouvoir rentabiliser le modèle pour $G_c^\star$ selon lequel il est moins cher de fissurer horizontalement, il est commode cette fois-ci de considérer une géométrie non régulière présentant des points de rebroussement comme sur la Figure 7.17. En effet, se faisant, la mesure

caractérisant la quantité de facette élémentaire ayant une normale proche de l'horizontal sera diminuée, permettant ainsi de tirer pleinement parti du modèle proposé. Cette géométrie a

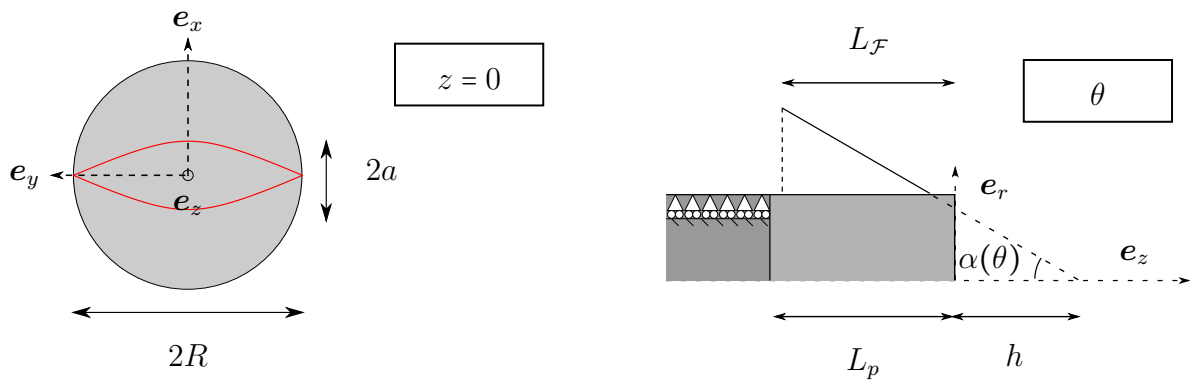

FIGURE 7.18 – Paramètres permettant de définir une géométrie de fissure conique à base construite à partir de branche de paraboles

été construite à partir d'une branche de parabole symétrisée servant de base pour former un cône comme dans les sections précédentes [2]. Dans le détail, dans le plan $z = 0$, la surface considérée peut être paramétrée par l'angle cylindrique θ par $r = \frac{aR}{a+(R-a)|\cos(\theta)|}$. La géométrie de cône entraine que pour une côte z et un angle θ, la distance à l'axe $\boldsymbol{e}_z$ en un point de la surface s'écrive :

$$r(\theta, z) = \frac{aR}{a + (R-a)|\cos(\theta)|}\left(1 - \frac{z}{h}\right) \tag{7.30}$$

où a est un paramètre plus petit que R et h est la hauteur du sommet du cône comme précisé sur la Figure 7.18. Notons que contrairement à la Section 7.3, il n'est pas possible d'examiner des profils s'apparentant à une ellipse de grand axe vertical (c'est à dire un profil similaire à celui de la Figure 7.17 mais tourné de 90°). Cependant, il est clair qu'un tel profil n'a aucune chance d'être optimal puisqu'une grande partie de ses facettes élémentaires seraient verticales, entrainant donc un coût élevé. De manière générale, un tel profil serait plus cher que son homologue tourné de 90° autour de l'axe $\boldsymbol{e}_z$ et par conséquent la paramétrisation proposée est suffisante. A nouveau, il est possible de retrouver un faciès de cône à base circulaire en choisissant $a = R$ et en faisant jouer à h le rôle de paramètre d'ouverture en lieu et place de α. Ce point est essentiel puisqu'il permettra de bien constater que les faciès optimaux dans le cas axisymétrique perdent leur statut lorsqu'une anisotropie du matériau est introduite. Enfin, l'avantage de la géométrie proposées est que les mécanismes de déformation et de fracturation proposés restent valides et peuvent être utilisés sans modification dans le cadre de l'étude qui nous intéresse ici.

7.4.4 Mise en évidence d'une géométrie anisotrope

Avec le modèle considéré (7.29) pour $G_c^\star$, le critère de nucléation pousse à considérer le faciès permettant de vérifier en premier la condition :

$$E_p^0 - E_p^f = G_V \int_{\mathcal{F}} f(\gamma)\, dS \tag{7.31}$$

où $\mathcal{F}$ correspond à la surface de la géométrie de fissure considérée. Cette condition est strictement équivalente à cherche le faciès optimal permettant de satisfaire en premier la

2. A nouveau, la partie de la fissure se trouvant à l'intérieur du tunnel est une simple réminiscence du procédé graphique permettant de tracer les différentes surfaces. Ces portions ont été laissées en l'état pour mieux illustrer la méthode de construction du profil

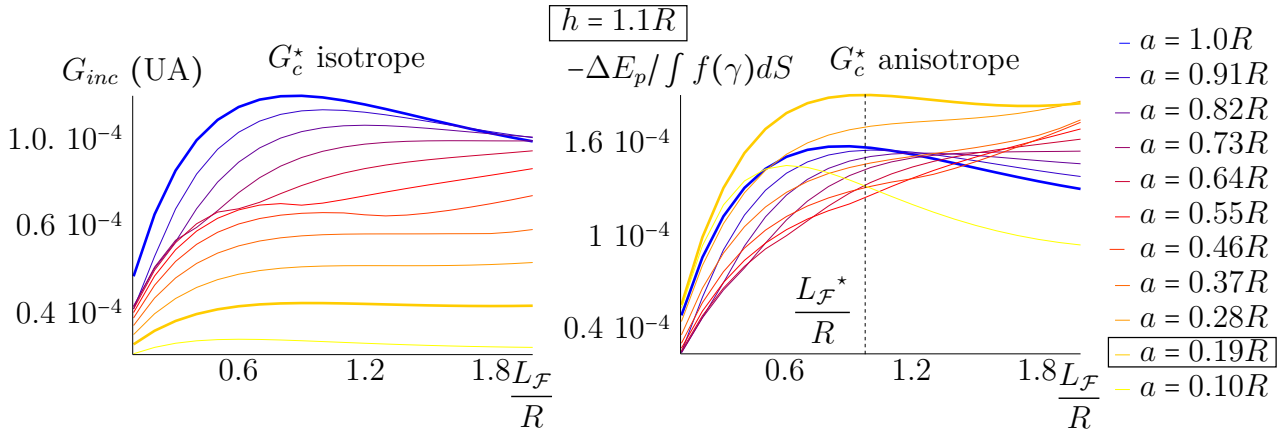

FIGURE 7.19 – Comparaison du taux de restitution d'énergie entre les situations avec $G_c{}^\star$ isotrope et anisotrope en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_\mathcal{F}$, de différentes valeurs du paramètre a. La distance au sommet est $h = 1.1R$

relation :

$$-\frac{\Delta E_p}{\int_\mathcal{F} f(\gamma)\, dS} = G_V \tag{7.32}$$

où $\Delta E_p = E_p^0 - E_p^f$. C'est sous cette forme que le critère sera utilisé. Pour le jeu de valeurs suivant :

$$\begin{gathered} K = 300\,\text{UA} \quad , \quad \mu = 200\,\text{UA} \quad , \quad R = 1\,\text{UA} \quad , \quad L_p = 2\,\text{UA} \\ \sigma_I = \sigma_{II} = -1\,\text{UA} \quad , \quad \sigma_{III} = -1.2\,\text{UA} \quad , \quad \lambda = 0.25 \quad , \quad \frac{G_H}{G_c^{iso}} = 0.1 \quad , \quad \frac{G_V}{G_c^{iso}} = 1. \end{gathered} \tag{7.33}$$

c'est-à-dire en considérant qu'il est 10 fois moins cher énergétiquement parlant de propager une fissure dans le sens horizontal que dans le sens vertical, les résultats Figure 7.19 sont obtenus. Bien sûr, la différence de coût peut sembler élevée mais a été fixée ainsi pour accentuer le phénomène et le rendre plus lisible. La Figure 7.19 compare les résultats obtenus en considérant un $G_c^\star$ isotrope d'une part et avec l'anisotropie proposée d'autre part. Cette comparaison permet de constater que la géométrie de fissure associée à un paramètre a égale à R, et donc optimal pour un situation rigoureusement axisymétrique (où $G_c^\star$ est isotrope), est dépassé par un autre faciès lorsque $G_c^\star$ est pris anisotrope. La géométrie optimale est donnée Figure 7.20. Sachant que, selon les valeurs de $G_c^\star$, le critère prédit une nucléation

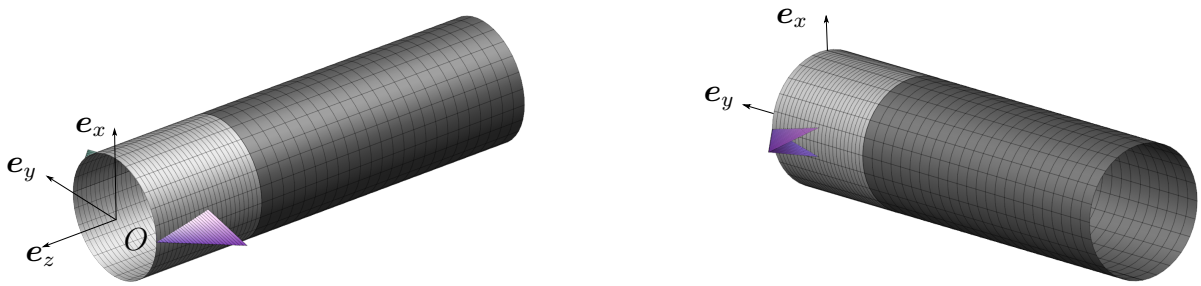

FIGURE 7.20 – Représentation de la surface optimale pour l'anisotropie du matériau considérée

avant que le processus d'excavation ne soit totalement consommé, la fissure en chevron de la Figure 7.20 pourra encore se développer pour finalement atteindre les dimensions de celle représentée sur la figure schématique 7.14.

7.5 Conclusion

Ce chapitre poursuivait plusieurs objectifs. Il s'agissait d'une part de proposer une nouvelle méthode d'utilisation du critère de nucléation proposé au Chapitre 4 qui se rajoute à la procédure basée sur les transformations conformes, présentée Section 4.6, ainsi qu'à l'approche duale éléments finis Chapitre 6. De plus, il a été montré que le critère purement énergétique était à même de capter un certain nombre d'éléments anisotropes du problème considéré. Mieux encore, la façon dont le modèle en rend compte est en accord au moins qualitatif avec les observations faites par l'ANDRA à l'occasion de l'excavation des galeries dans le laboratoire de Bure. Par conséquent, l'intérêt est double puisque ce chapitre prouve à la fois l'efficacité du critère développé mais aussi apporte des éléments d'explication aux phénomènes observés par l'ANDRA. Avec les considérations tenues, il semblerait que l'action même de l'excavation soit à l'origine de la naissance des fissures en chevron et que l'anisotropie de leur faciès s'explique par l'anisotropie des contraintes en présence ou du matériau. Au terme de cette étude, nous avons mis en évidence comment ces différentes anisotropies pouvaient influencer les faciès de fissuration obtenus et confronté avec succès ces résultats avec l'expérience. Bien entendu, il n'est pas inutile d'insister à nouveau sur le fait que, le modèle proposé ici étant variationnel, il ne demande qu'à être amélioré pour passer d'une ambition qualitative à un objectif quantitatif. Par exemple, il serait nécessaire d'enrichir les géométries de fissures envisagées ainsi que des mécanismes variationnels considérés. Toutefois, notons que des niveaux précis de mesure de $G_c^\star$ sont absolument requis pour pouvoir mener à bien cette étude.

Chapitre 8

Endommagement et homogénéisation des milieux quasi-périodique

Sommaire

8.1 Motivation de l'approche 214
8.2 La méthode des développements asymptotiques 214
8.2.1 Sous-problème d'ordre -2 216
8.2.2 Sous-problème d'ordre -1 217
8.2.3 Sous-problème d'ordre 0 217
8.2.4 Sous-problèmes d'ordres supérieurs 218
8.3 Densité volumique macroscopique d'énergie élastique 218
8.3.1 Le point de vue microscopique 218
8.3.2 Troncature à l'ordre zero 219
8.3.3 Troncature au second ordre 219
8.3.4 La densité volumique d'énergie comme une forme quadratique macroscopique 220
8.4 De l'échelle microscopique vers un modèle macroscopique non local 221
8.4.1 Interprétation micromécanique des contraintes macroscopiques et des hypercontraintes 222
8.4.2 Développement en série de l'équation d'équilibre par rapport à α . 223
8.5 Le premier ordre de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique 224
8.5.1 Symétrie par rapport à l'origine 224
8.5.2 Une microstructure non symétrique : le matériau à trois couches . . 225
8.5.3 Conclusion 227
8.6 Un modèle à gradient d'endommagement basé sur la micromécanique 227
8.6.1 Élasticité dépendant d'un paramètre d'endommagement 227
8.6.2 Microstructures symétriques 228
8.6.3 Ordres de grandeurs et simplifications 229
8.7 Conclusion 230

8.1 Motivation de l'approche

Il a été brièvement rappelé un certain nombre de problèmes qui pouvaient être rencontrés lors de l'utilisation du formalisme associé à des matériaux endommageant fragiles. Il a été également énoncé les bienfaits des méthodes dites régularisantes qui consistent à modifier légèrement la formulation des équations via par exemple la modification de la variable endommagement au profit d'une quantité définie à partir d'un produit de convolution (voir par exemple Berthier et collab. [2017]). La méthode semblant fournir les résultats les plus prometteurs est celle proposée par Pham et Marigo [2010a] et Pham et Marigo [2010b] qui consiste à ajouter un terme régularisant en gradient d'endommagement à une intégrale première des équations d'état nommée énergie totale. Ce correctif n'a, à notre connaissance, pas de justification. Cependant, la bonne capacité de cette méthode à fournir des résultats en accord avec l'expérience pousse à essayer de voir si ce terme de gradient d'endommagement n'a pas une origine physique. Une idée naturelle pouvant permettre de capturer l'effet d'un gradient d'endommagement est de regarder comment sa présence affecte une méthode d'homogénéisation. En effet, si l'endommagement est une mesure permettant de rendre compte de mécanismes dégradant le matériau à une échelle inférieure, il est intéressant de se demander comment une microstructure présentant une dérive, dans un premier temps lente, de ses propriétés élastiques peut être homogénéisée. L'idée sous-jacente est que la variable d'endommagement passera forcément avant de se localiser de manière piquée par une phase certes localisée mais avec un faible gradient. Ainsi, une homogénéisation de milieux présentant une dérive lente, qualifiés de quasi-périodiques, permettrait de répondre à nos attentes et de mieux caractériser l'effet d'une localisation de l'endommagement, et ce, au moins au commencement du processus.

L'espoir qu'une telle approche laisse entrevoir est que, contrairement à un cadre d'homogénéisation périodique, où par conséquent il n'est pas possible de décrire autre chose qu'un endommagement uniforme, il sera alors possible de quantifier la façon dont rejaillit un gradient macroscopique d'endommagement sur l'énergie élastique homogénéisée. Nous verrons que malgré des résultats très intéressants et une approche venant étendre celle proposée par Boutin [1996] sur les milieux périodiques, la conclusion reste en demi-teinte à cause des fondements même de la méthode utilisée. Nous choisissons toutefois d'aller jusqu'au bout de l'idée présentée qui semble à première vue extrêmement prometteuse. Dans un premier temps, l'homogénéisation des milieux quasi-périodiques sera traitée d'un point de vue totalement général, sans chercher à relier la dérive des propriétés élastiques à un endommagement. Ce n'est que dans un second temps que ce lien sera exprimé, appliquant ainsi les résultats obtenus au cadre qui nous intéresse plus particulièrement.

8.2 La méthode des développements asymptotiques

A partir du travail de Boutin [1996] et Tran et collab. [2012], l'objectif est d'appliquer la procédure des développements asymptotiques Papanicolau et collab. [1978] aux milieux quasi-périodiques.

Les équations du problème tridimensionnel avec des forces de volume sont :

$$\begin{cases} \nabla_z . \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla_z \boldsymbol{\xi} + {}^t\nabla_z \boldsymbol{\xi}\right) \end{cases} \tag{8.1}$$

où $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)$ est le vecteur position.

Il sera considéré dans cette section une structure macroscopique, de taille caractéristique L, constituée d'un matériau ayant une microsctructure bien identifiée. Pour des raisons de simplicité, cette dernière sera représentée par une cellule élémentaire parallélépipédique Ω_Y de taille caractéristique h et engendrée par trois vecteurs $h\boldsymbol{d}_1$, $h\boldsymbol{d}_2$ et $h\boldsymbol{d}_3$. La présence de deux échelles d'espace conduit à introduire un paramètre adimensionnel $\alpha = \frac{h}{L}$ et deux variables d'espace adimensionnées $\boldsymbol{X} = \frac{1}{L}\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{Y} = \frac{1}{h}\boldsymbol{z}$. Il sera supposé que les structures considérées vérifient une hypothèse de séparation d'échelle qui se traduit par $\alpha \ll 1$. Une telle relation conduit à l'interprétation de $\boldsymbol{X}$ comme une variable de dérive et $\boldsymbol{Y}$ comme une variable de fluctuation rapide. Une fonction quelconque dépendant du vecteur position $\boldsymbol{z}$ peut alors être décrite comme une fonction dépendant à la fois de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$. A partir de ces considérations, il vient une règle de dérivation :

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \\ &\frac{\partial}{\partial z_i}(f(\boldsymbol{z})) = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial f}{\partial X_i} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right) \end{aligned} \tag{8.2}$$

Les systèmes particuliers qui seront ici décrits sont ceux qualifiés de quasi-périodiques. Cela signifie que le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}$ jouit d'une propriété de périodicité par rapport à $\boldsymbol{Y}$ mais garde cependant une dépendance vis à vis de $\boldsymbol{X}$. De telles hypothèses sont justifiées lorsque le matériau considéré n'est pas homogène, et ce, même à l'échelle macroscopique, mais que la variation spatiale de ses propriétés est suffisamment lente pour pouvoir être décrite uniquement par la variable d'oscillation lente $\boldsymbol{X}$. Pour une fonction f, être Y-périodique signifie que pour tout entiers naturels $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ la relation $f(\boldsymbol{Y} + \beta_i \boldsymbol{d}_i) = f(\boldsymbol{Y})$ doit être assurée. D'un point de vue mathématiques, cela signifie que pour tout $\boldsymbol{d} \in \{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3\}$:

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{z} + h\boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{d}, \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{d}, \boldsymbol{Y}) \\ &f(\boldsymbol{z} + h\boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{d}, \boldsymbol{Y}) - f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \nabla_X f.\alpha\boldsymbol{d} + o(\alpha) \end{aligned} \tag{8.3}$$

où ∇_X correspond à l'opérateur gradient où toutes les dérivées sont prises par rapport aux composantes de $\boldsymbol{X}$. De manière similaire, l'opérateur gradient par rapport aux composantes de $\boldsymbol{Y}$ est introduit et est noté ∇_Y.

Le paramètre sans dimension α étant petit, il est possible de développer le champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}$ en série entière constituée de termes en puissances de α :

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{z}) = L\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i \boldsymbol{\xi}^{(i)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \tag{8.4}$$

Puisque $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$ peut-être ajusté, il est possible de supposer, sans aucune restriction, que $\overline{\boldsymbol{\xi}^{(k)}}^Y = 0$ pour tout $k \geq 1$ où la notation $\overline{}^Y$ correspond à l'opération de moyenne sur la cellule de base unitaire Ω_Y. La périodicité par rapport à $\boldsymbol{Y}$ du champ de déplacement $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ implique que tous les $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ sont également Y-périodiques. En notant $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations et en utilisant la règle de dérivation (8.2) il vient :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=-1}^{+\infty} \alpha^i \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(-1)} = \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(k)} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(k+1)} \quad \text{for} \quad k \geq 0 \\ &\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=-1}^{+\infty} \alpha^i \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(k)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \end{aligned} \tag{8.5}$$

Grâce aux expressions des $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ dans (8.5) il est évident que :

$$\forall i \geq 1, \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}}^{Y} = \overline{\nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(i)}}^{Y} = \nabla_X^S \overline{\boldsymbol{\xi}^{(i)}}^{Y} = \mathbf{0} \tag{8.6}$$

Le tenseur des déformations macroscopiques étant égal à la moyenne sur la cellule de base Ω_Y du tenseur des déformations microscopiques $\boldsymbol{\varepsilon}$, les égalités précédentes mènent aux expressions suivantes :

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{Y} = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}}^{Y} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} = \overline{\nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}}^{Y} = \nabla_X^S \overline{\boldsymbol{\xi}^{(0)}}^{Y} \tag{8.7}$$

En raison de l'hypothèse faite sur la valeur moyenne de $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$, une relation directe permettant de calculer la déformation macroscopique est obtenue. Une autre propriété très utile est que, puisque $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$ doit nécessairement être Y-antipériodique, tous les $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}.\boldsymbol{n}$ sont Y-antipériodiques. A partir de maintenant et dans ce qui suit, il sera supposé que les forces volumiques sont d'ordre 0 par rapport au petit paramètre α. De plus, la dépendance de la densité massique de forces dépendra des variables d'espace comme suit : $\rho(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$. En utilisant l'expression (8.5) de $\boldsymbol{\sigma}$ dans l'équation d'équilibre $\nabla_z.\boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ conduit à la formulation des problèmes suivants :

$$\begin{array}{rcl}
(-2) & : & \nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(-1)} = \mathbf{0} \\
(-1) & : & \nabla_X.\boldsymbol{\sigma}^{(-1)} + \nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{0} \\
(0) & : & \nabla_X.\boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \rho \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \\
(1) & : & \nabla_X.\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{0} \\
\dots & & \\
(n) & : & \nabla_X.\boldsymbol{\sigma}^{(n)} + \nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)} = \mathbf{0}
\end{array} \tag{8.8}$$

qui présentent une structure de problèmes en cascade.

8.2.1 Sous-problème d'ordre -2

Le premier problème devant être traité est celui d'ordre (-2) dans (8.8). Afin de pouvoir travailler avec sa version dualisée, un champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ périodique sur la cellule de base Ω_Y est considéré :

$$\begin{array}{rl}
 & \boldsymbol{v}.\nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(-1)} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow & \displaystyle\int_{\Omega_Y} \boldsymbol{v}.\nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(-1)} dV = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow & \displaystyle\int_{\partial\Omega_Y} \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\sigma}^{(-1)}.\boldsymbol{n} dS - \int_{\Omega_Y} \nabla_Y^S \boldsymbol{v} : \boldsymbol{\sigma}^{(-1)} dV = \mathbf{0}
\end{array} \tag{8.9}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure à la frontière $\partial\Omega_Y$ de la cellule de base. En raison du caractère périodique de $\boldsymbol{v}$ et antipériodique de $\boldsymbol{\sigma}^{(-1)}.\boldsymbol{n}$, l'intégrale sur la frontière est nulle. A partir de l'expression de $\boldsymbol{\sigma}^{(-1)}$ et en prenant pour $\boldsymbol{v}$ le choix particulier de $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\xi}^{(0)}$, (8.5) donne :

$$\int_{\Omega_Y} \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} : \mathbb{C} : \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} dV = \mathbf{0} \tag{8.10}$$

Puisque le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}$ est défini positif, cela implique que $\nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} = \mathbf{0}$. Cette dernière égalité signifie que $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$ dépend en fait exclusivement de la variable lente $\boldsymbol{X}$. Ainsi, il vient de manière immédiate que les deux tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}^{(-1)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(-1)}$ sont tous deux égaux au tenseur nul. Il est utile à ce stade d'introduire la notation $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(0)}$. Ce tenseur du second

ordre possède en fait une interprétation macroscopique et est d'une importance capitale. En effet, l'équation (8.7) permet de déduire que le tenseur des déformations macroscopiques est en fait exactement égal au tenseur $\boldsymbol{E}$:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{Y} = \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} = \boldsymbol{E} \tag{8.11}$$

8.2.2 Sous-problème d'ordre -1

Puisque le problème d'ordre -2 a permis de conclure quant à la nullité de $\boldsymbol{\sigma}^{(-1)}$, le problème d'ordre -1 en α de l'équation d'équilibre (8.8) se réduit à :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(1)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbb{C}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ \nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} \ Y\text{-périodique}, \ \overline{\boldsymbol{\xi}^{(1)}}^{Y} = \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^{(0)}.\boldsymbol{n} \text{ antipériodique} \end{cases} \tag{8.12}$$

Ce jeu d'équations peut être vu comme un problème classique impliquant une structure élastique périodique avec un terme de précontrainte $\mathbb{C} : \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(0)} = \mathbb{C} : \boldsymbol{E}$ et sans force de volume. Il est clair que ce problème dépend linéairement du terme de précontrainte et donc linéairement de la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$. Il est donc possible d'introduire un tenseur du troisième ordre noté $\boldsymbol{X}^{(1)}$ tel que :

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) = \boldsymbol{X}^{(1)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) : \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}\right) \tag{8.13}$$

Le fait que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ soit nul en moyenne sur Ω_Y se transcrit directement sur $\boldsymbol{X}^{(1)}$. En d'autres termes, il vient $\overline{\boldsymbol{X}^{(1)}}^{Y} = \mathbf{0}$.

8.2.3 Sous-problème d'ordre 0

Cette fois-ci $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ n'est pas nul et l'intégralité du problème d'ordre 0 donné (8.8) doit être considérée.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(2)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbb{C}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \nabla_X . \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \rho \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} \ Y\text{-périodique}, \ \overline{\boldsymbol{\xi}^{(2)}}^{Y} = \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^{(1)}.\boldsymbol{n} \text{ antipériodique} \end{cases} \tag{8.14}$$

A nouveau, il est possible d'adopter la vision d'un problème concernant une structure élastique périodique avec précontrainte $\mathbb{C} : \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}$. Néanmoins, un terme de force volumique $\nabla_X . \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \rho \boldsymbol{f}$ doit être ici pris en compte. En raison du théorème de la divergence et de l'antipériodicité de $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}.\boldsymbol{n}$, une propriété intéressante est $\overline{\nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^{Y} = \mathbf{0}$. Un premier résultat peut alors être déduit aisément de l'équation d'équilibre provenant de (8.14) :

$$\overline{\nabla_X . \left(\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\right) + \rho \boldsymbol{f}}^{Y} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla_X . \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^{Y}\right) + \overline{\rho}^{Y} \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \tag{8.15}$$

Cette égalité exprime le fait que les termes interprétés comme des efforts extérieurs pour le problème d'ordre (0) en α et agissant sur la cellule de base doivent être en équilibre. Le même raisonnement peut être tenu pour les problèmes suivants, conduisant ainsi à :

$$\forall i \geq 1, \nabla_X . \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(i)}}^{Y}\right) = \mathbf{0} \tag{8.16}$$

Dans un contexte périodique, ces relations sont appelées dans Boutin [1996] les équations de compatibilité. Pour le problème ici considéré, il est possible, grâce à la première équation de compatibilité, d'exprimer les forces de volume $\boldsymbol{f}$ comme une fonction de $\boldsymbol{E}$. Le problème (8.14) peut alors être reformulée sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(2)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbb{C}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \nabla_X . \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - \dfrac{\rho}{\overline{\rho}^Y} \nabla_X . \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^Y + \nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} \ Y\text{-périodique}, \ \overline{\boldsymbol{\xi}^{(2)}}^Y = \boldsymbol{0} \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^{(1)}.\boldsymbol{n} \text{ antipériodique} \end{cases} \tag{8.17}$$

En raison de la relation $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{E} + \nabla_Y^S \left(\boldsymbol{X}^{(1)} : \boldsymbol{E}\right)$, le terme de force de volume dans (8.17) donne lieu à deux termes, le premier étant linéaire par rapport à $\boldsymbol{E}$ et le second étant linéaire par rapport à $\nabla_X \boldsymbol{E}$, ce dernier étant à partir de maintenant uniquement noté $\nabla \boldsymbol{E}$ puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté quant à l'opérateur gradient pouvant être appliqué à $\boldsymbol{E}$. Les déformations macroscopiques $\boldsymbol{E}$ et leur premier gradient $\nabla \boldsymbol{E}$ étant des paramètres de chargement de la cellule de base indépendants, il est possible d'exhiber un premier tenseur de localisation qui sera du quatrième ordre $\boldsymbol{X}^{(2)}$ ainsi qu'un second tenseur qui sera lui du troisième ordre $\tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}$ tels que :

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) = \boldsymbol{X}^{(2)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) : \cdot \nabla \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}\right) + \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) : \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}\right) \tag{8.18}$$

Dans l'approche parfaitement périodique proposée par Boutin [1996], seule l'existence de $\boldsymbol{X}^{(2)}$ est donnée. Pour les matériaux quasi-périodiques, la dérive macroscopique du tenseur d'élasticité entraine l'existence d'un second tenseur noté ici $\tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}$. Bien entendu, la présence de ce tenseur aura des conséquences sur la densité volumique macroscopique d'énergie élastique. Le caractère Y-périodique de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ se transmet directement aux deux tenseurs de localisation. Il en va de même avec la propriété de moyenne nulle sur la cellule de base de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ qui entraine donc les relations suivantes $\overline{\boldsymbol{X}^{(2)}}^Y = 0$ et $\overline{\tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}}^Y = \boldsymbol{0}$.

8.2.4 Sous-problèmes d'ordres supérieurs

Tous les sous problèmes découlant de l'équation d'équilibre (8.8) peuvent être traités de la même manière en raison de leur similitude avec le sous-problème d'ordre 0 sans force de volume. Il viendrait par exemple :

$$\boldsymbol{\xi}^{(3)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) = \boldsymbol{X}^{(3)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) :: \nabla^2 \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}\right) + \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\right) : \cdot \nabla \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}\right) + \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^{(3)} : \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}\right) \tag{8.19}$$

où tous les tenseurs de localisation ci-dessus sont Y-périodiques et nuls en moyenne sur la cellule de base Ω_Y.

8.3 Densité volumique macroscopique d'énergie élastique

8.3.1 Le point de vue microscopique

Après avoir défini tous les problèmes successifs permettant d'expliciter les différents $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, il est possible de passer à l'étape suivante consistant à construire la densité volumique macroscopique d'énergie élastique. La définition correcte de cette dernière quantité étant la

moyenne sur une cellule de base de son pendant microscopique, il est possible de recourir aux développements asymptotiques de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. Ce faisant, le développement selon le petit paramètre α est obtenu :

$$w = \frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}^{Y} = \frac{1}{2}\overline{\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha^i\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\right) : \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha^i\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}\right)}^{Y} = \frac{1}{2}\overline{\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha^i\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}\right) : \mathbb{C} : \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha^i\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}\right)}^{Y} \tag{8.20}$$

8.3.2 Troncature à l'ordre zero

Habituellement, une première bonne approximation de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique consiste à ne considérer que les terme d'ordre 0 en α dans (8.20). Une telle tentative conduit à :

$$w = \frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} \tag{8.21}$$

L'équation d'équilibre du sous-problème (8.12) étant réduite à $\nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{0}$, il est utile de rappeler la version périodique du lemme de Hill :

$$\forall \boldsymbol{v} \text{ champ vectoriel périodique sur } \Omega_y \quad : \quad \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \nabla_Y^S \boldsymbol{v}}^{Y} = 0 \tag{8.22}$$

La déformation d'ordre 0 en α étant égale à $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \boldsymbol{E} + \nabla_Y^S\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ où $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ est un champ Y-périodique, il est possible de recourir au lemme de Hill pour expliciter la troncature de w à l'ordre considéré. Ce faisant, il vient :

$$w = \frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{E} : \overline{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} = \frac{1}{2}\,E_{ij}\overline{C_{ijmn}\left(E_{mn} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X^{(1)}_{mkl}}{\partial Y_n} + \frac{\partial X^{(1)}_{nkl}}{\partial Y_m}\right)E_{kl}\right)}^{Y} \tag{8.23}$$

En notant $\mathbb{C}^{hom}$ le tenseur défini par ses composantes comme :

$$\mathbb{C}^{hom}_{ijkl} = \overline{C_{ijmn}\left(\mathbb{I}_{mnkl} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X^{(1)}_{mkl}}{\partial Y_n} + \frac{\partial X^{(1)}_{nkl}}{\partial Y_m}\right)\right)}^{Y} \tag{8.24}$$

lequel correspond à l'élasticité homogénéisée pour les microstructures périodiques, la troncature à l'ordre 0 de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique se met sous la forme classique :

$$w = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} \tag{8.25}$$

De plus, ce tenseur d'élasticité macroscopique $\mathbb{C}^{hom}$ nouvellement introduit permet également d'écrire la relation $\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^{Y} = \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E}$. Puisque $\boldsymbol{E}$ a été interprété comme les déformations macroscopiques, la première équation de compatibilité (8.15) permet de donner un sens physique à $\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^{Y}$ en l'interprétant comme étant le tenseur des contraintes de Cauchy macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$. Ainsi, la formulation usuelle $w = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E}$ est retrouvée pour les matériaux quasi-périodiques. Néanmoins, cette définition de $\boldsymbol{\Sigma}$ a le même degré de précision que l'usage de (8.21) en lieu et place de l'expression complète de w (8.20).

8.3.3 Troncature au second ordre

Dans le but de bénéficier pleinement de l'approche développée sur les milieux quasi-périodiques, il est plus censé de considérer une seconde approximation de la densité volumique

macroscopique d'énergie élastique où, cette fois-ci, l'ensemble des termes d'ordre inférieur ou égal à 2 en α sont conservés, menant ainsi à une nouvelle expression de densité énergétique tronquée :

$$w = \frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} + \alpha\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} + \alpha^2\left(\frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y}\right) \tag{8.26}$$

Pour pouvoir travailler sur cette expression, la dépendance de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ vis à vis de $\boldsymbol{E}$ et de ses gradients doit être détaillée. Puisqu'il est toujours possible d'écrire l'équation d'équilibre $\nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{0}$, le lemme de Hill peut à nouveau être utilisé. Sachant que $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$, qui est un champ Y-périodique, intervient sous la forme de $\nabla_Y\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ dans (8.26), le lemme de Hill permet de conclure que l'ordre 3 du champ de déplacement en α ne contribue pas à cet ordre de troncature de la densité énergétique. Par conséquent, puisque $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$, $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ dépendent de manière linéaire de $\boldsymbol{E}$ et $\nabla\boldsymbol{E}$, la densité volumique macroscopique d'énergie élastique dépend de manière quadratique de $\boldsymbol{E}$ et de ses gradients $\nabla\boldsymbol{E}$ et $\nabla^2\boldsymbol{E}$. Bien entendu, cette dépendance de w est une fois encore directement liée à l'ordre de la troncature considérée. Dans ce qui suit, c'est d'ailleurs le choix (8.26) comme approximation de w qui sera considéré. Cette fois-ci, le statut de $\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^{Y}$ comme tenseur des contraintes de Cauchy macroscopique est remis en question.

8.3.4 La densité volumique d'énergie comme une forme quadratique macroscopique

Puisque seuls les termes d'ordre inférieur ou égal à 2 par rapport au petit paramètre α ont été conservés dans la densité volumique macroscopique d'énergie élastique, il a été montré que la dépendance de cette dernière était quadratique vis à vis de la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ mais également par rapport à $\nabla\boldsymbol{E}$ et $\nabla^2\boldsymbol{E}$. Par conséquent, ce choix d'approximation conduit à une fonctionnelle w homogène de degré 2. Ce choix étant arrêté, il est utile d'introduire de manière formelle trois tenseurs notés $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ d'ordre deux, trois et quatre respectivement :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{E}} \quad , \quad \boldsymbol{M} = \frac{\partial w}{\partial \nabla\boldsymbol{E}} \quad , \quad \boldsymbol{N} = \frac{\partial w}{\partial \nabla^2\boldsymbol{E}} \tag{8.27}$$

Bien que fortement suggérée, il n'est pas possible à ce stade de conférer une signification physique particulière à ces trois quantités. Néanmoins, eu égard aux propriétés de w, il est d'ores et déjà possible de remarquer que ces trois tenseurs dépendent linéairement de $\boldsymbol{E}$, $\nabla\boldsymbol{E}$ et $\nabla^2\boldsymbol{E}$. Leur intérêt réside dans le fait que, d'un point de vue mathématique, ils permettent d'établir l'expression :

$$dw \quad = \quad \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{dE} + \boldsymbol{M} \odot \boldsymbol{d\nabla E} + \boldsymbol{N} \odot\!\odot\, \boldsymbol{d\nabla^2 E} \tag{8.28}$$

où les opérations de différentiation ont été prises par rapport à $\boldsymbol{E}$ et à ses gradients. Des opérations tensorielles spécifiques $\odot$ et $\odot\!\odot$ ont été utilisées, lesquelles sont définies par $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} = A_{ijk}B_{ijk}$ et $\boldsymbol{F} \odot\!\odot\, \boldsymbol{G} = F_{ijkl}G_{ijkl}$. Puisque $\boldsymbol{E}$ est un tenseur symétrique, il n'est pas utile de définir une opération supplémentaire qui aurait été $\odot$.

Il a été mentionné précédemment que w jouissait de la propriété d'être homogène de degré 2. Grâce à la définition de $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ donnée en (8.27), il est possible, en se basant sur les relations d'Euler données en Annexe (C.1), d'obtenir une nouvelle expression pour w :

$$w = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{M} \odot \nabla\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{N} \odot\!\odot\, \nabla^2\boldsymbol{E} \tag{8.29}$$

8.4 De l'échelle microscopique vers un modèle macroscopique non local

En raison de la forme prise par w en (8.29), il est tentant de conférer à $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ les statuts de contraintes macroscopiques et d'hypercontraintes. En effet, d'un point de vue énergétique macroscopique, la première loi de la thermodynamique combinée à la seconde pour des évolutions quasi-statiques isothermes non dissipatives stipule que la puissance volumique des efforts extérieurs $p^{(e)}$ est égale à la dérivée temporelle de w :

$$p^{(e)} = \dot{w} \tag{8.30}$$

Grâce à (8.28) il vient :

$$p^{(e)} = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{M} \odot \nabla \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{N} \odot\!\!\odot \nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}} \tag{8.31}$$

Grâce à la relation d'équilibre et dans un contexte quasi-statique, il vient que la somme des puissances des efforts extérieurs et intérieurs est nulle. Ainsi, pour une évolution non dissipative, il vient :

$$p^{(i)} = -\left(\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{M} \odot \nabla \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{N} \odot\!\!\odot \nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}}\right) \tag{8.32}$$

qui signifie que la puissance des efforts intérieurs pour une évolution admissible est linéaire par rapport à $\dot{\boldsymbol{E}}$, $\nabla \dot{\boldsymbol{E}}$ et $\nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}}$. Cela implique que le matériau homogénéisé peut être interprété comme un matériau non local.

En suivant la procédure standard basée sur le théorème des puissances virtuelles telle que donnée par Germain [1986] ou Salençon [2001], supposons pour le moment que la relation (8.32) est encore vérifiée pour une évolution virtuelle et regardons quel type de relation d'équilibre serait obtenu. La puissance virtuelle des efforts intérieurs se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(i)}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}\right) &= -\int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} : \hat{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{M} \odot \nabla \hat{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{N} \odot\!\!\odot \nabla^2 \hat{\boldsymbol{E}} \; dV \\
&= -\int_{\partial\Omega} \hat{\boldsymbol{\xi}} . \left(\boldsymbol{\Sigma} - \operatorname{div} \boldsymbol{M} + \operatorname{div}\operatorname{div} \boldsymbol{N}\right) . \boldsymbol{n} + \hat{\boldsymbol{E}} : \left(\boldsymbol{M} - \operatorname{div} \boldsymbol{N}\right) . \boldsymbol{n} + \left(\nabla \hat{\boldsymbol{E}} \odot \boldsymbol{N}\right) . \boldsymbol{n} \; dS \\
&+ \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\xi}} . \left(\operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} - \operatorname{div}\operatorname{div} \boldsymbol{M} + \operatorname{div}\operatorname{div}\operatorname{div} \boldsymbol{N}\right) dV
\end{aligned} \tag{8.33}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure au domaine. En utilisant le fait que la puissance des efforts intérieurs doit équilibrer la puissance des efforts extérieurs, et ce, indépendamment du champ de vitesse virtuel choisi, l'équation d'équilibre local ainsi que les conditions aux limites sont obtenues. Par exemple, en l'absence de forces de volume, l'équation d'équilibre local se met sous la forme :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} - \operatorname{div}\operatorname{div} \boldsymbol{M} + \operatorname{div}\operatorname{div}\operatorname{div} \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \tag{8.34}$$

qui correspond à l'équation d'équilibre classique telle que développée par Green et Rivlin [1964] dans son travail concernant la théorie générale des milieux élastiques à gradient.

Laissons maintenant de côté l'hypothèse concernant la possibilité d'utiliser (8.32) pour des évolutions virtuelles et essayons de retrouver l'équation (8.34) en utilisant seulement des considérations micromécaniques.

8.4.1 Interprétation micromécanique des contraintes macroscopiques et des hypercontraintes

Dans le but d'obtenir l'équation d'équilibre portant sur les quantités $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$, il est tout d'abord nécessaire de connaître leur expressions. Pour ce faire, il est possible de calculer de deux manières différentes la quantité dw. Une première méthode consiste à différentier (8.26) par rapport à $\boldsymbol{E}$ et ses gradients. Une telle opération conduit à :

$$\begin{aligned} dw = & \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} + \alpha \left(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} \right) \\ & + \alpha^2 \left(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} : \mathbb{C} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}}^{Y} \right) \\ = & \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^{Y} : \boldsymbol{dE} + \alpha \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} + \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} \right) \\ & + \alpha^2 \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} + \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} + \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}}^{Y} \right) \end{aligned} \tag{8.35}$$

où le lemme de Hill a été utilisé pour simplifier les termes d'ordre 0. Une deuxième méthode consiste à utiliser la forme (8.28) de dw et de la comparer à sa nouvelle expression (8.35). Ces deux formulations de dw devant être égales quels que soient $\boldsymbol{dE}$, $\boldsymbol{d\nabla E}$ et $\boldsymbol{d\nabla^2 E}$, il est possible d'identifier les trois quantités tensorielles $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$. Une dernière étape nécessaire pour pouvoir conclure est donc d'expliciter la dépendance de $\boldsymbol{d\varepsilon}^{(i)}$ vis à vis de $\boldsymbol{dE}$, $\boldsymbol{d\nabla E}$ et $\boldsymbol{d\nabla^2 E}$. Les différents calculs permettant d'obtenir cette dépendance sont donnés en Annexe (C.2) et seuls les résultats sont ici présentés :

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} &= \overline{\sigma_{ij}^{(1)}}^{Y} dE_{ij} + \overline{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \rho f_i \right) X_{ilk}^{(1)}}^{Y} dE_{kl} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} &= \overline{\sigma_{ij}^{(2)}}^{Y} dE_{ij} + \overline{\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial X_j} X_{ilk}^{(1)}}^{Y} dE_{kl} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} &= \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial X_{ilk}^{(1)}}{\partial X_j}}^{Y} dE_{kl} + \overline{\sigma_{ij}^{(0)} X_{ilk}^{(1)}}^{Y} d\nabla E_{klj} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} &= \overline{\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial X_{ilk}^{(1)}}{\partial X_j}}^{Y} dE_{kl} + \overline{\sigma_{ij}^{(1)} X_{ilk}^{(1)}}^{Y} d\nabla E_{klj} \\ &+ \overline{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \rho f_i \right) X_{imlk}^{(2)}}^{Y} d\nabla E_{klm} + \overline{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \rho f_i \right) \tilde{X}_{ilk}^{(2)}}^{Y} dE_{kl} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}}^{Y} &= \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \tfrac{\partial \tilde{X}_{ilk}^{(2)}}{\partial X_j}}^{Y} dE_{kl} + \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial X_{imlk}^{(2)}}{\partial X_j}}^{Y} d\nabla E_{klm} + \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \tilde{X}_{ilk}^{(2)}}^{Y} d\nabla E_{klj} \\ &+ \overline{\sigma_{ij}^{(0)} X_{imlk}^{(2)}}^{Y} d\nabla^2 E_{klmj} \end{aligned} \tag{8.36}$$

En utilisant ces expressions et en les identifiant avec (8.28), il est aisé de déduire les différentes composantes de $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$. Il est à ce stade agréable de les décomposer de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
\bullet\quad \boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Sigma}^{(0)} + \alpha\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \alpha^2\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \\
\Sigma^{(0)}_{kl} &= \overline{\sigma^{(0)}_{kl}}^{Y} \\
\Sigma^{(1)}_{kl} &= \overline{\sigma^{(1)}_{kl}}^{Y} + \overline{\left(\frac{\partial\sigma^{(0)}_{ij}}{\partial X_j} + \rho f_i\right) X^{(1)}_{ilk}}^{Y} + \overline{\sigma^{(0)}_{ij}\frac{\partial X^{(1)}_{ilk}}{\partial X_j}}^{Y} \\
&= \overline{\sigma^{(1)}_{kl}}^{Y} + \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{\sigma^{(0)}_{ij} X^{(1)}_{ilk}}^{Y}\right) + \overline{\rho f_i X^{(1)}_{ilk}}^{Y} \\
\Sigma^{(2)}_{kl} &= \overline{\sigma^{(2)}_{kl}}^{Y} + \overline{\frac{\partial\sigma^{(1)}_{ij}}{\partial X_j} X^{(1)}_{ilk}}^{Y} + \overline{\sigma^{(1)}_{ij}\frac{\partial X^{(1)}_{ilk}}{\partial X_j}}^{Y} + \overline{\left(\frac{\partial\sigma^{(0)}_{ij}}{\partial X_j} + \rho f_i\right)\tilde{X}^{(2)}_{ilk}}^{Y} + \overline{\sigma^{(0)}_{ij}\frac{\partial \tilde{X}^{(2)}_{ilk}}{\partial X_j}}^{Y} \\
&= \overline{\sigma^{(2)}_{kl}}^{Y} + \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{\sigma^{(1)}_{ij} X^{(1)}_{ilk}}^{Y}\right) + \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{\sigma^{(0)}_{ij}\tilde{X}^{(2)}_{ilk}}^{Y}\right) + \overline{\rho f_i \tilde{X}^{(2)}_{ilk}}^{Y} \\
\bullet\quad \boldsymbol{M} &= \alpha\boldsymbol{M}^{(1)} + \alpha^2\boldsymbol{M}^{(2)} \\
M^{(1)}_{klm} &= \overline{\sigma^{(0)}_{im} X^{(1)}_{ilk}}^{Y} \\
M^{(2)}_{klm} &= \overline{\sigma^{(1)}_{im} X^{(1)}_{ilk}}^{Y} + \overline{\left(\frac{\partial\sigma^{(0)}_{ij}}{\partial X_j} + \rho f_i\right) X^{(2)}_{imlk}}^{Y} + \overline{\sigma^{(0)}_{ij}\frac{\partial X^{(2)}_{imlk}}{\partial X_j}}^{Y} + \overline{\sigma^{(0)}_{im}\tilde{X}^{(2)}_{ilk}}^{Y} \\
&= \overline{\sigma^{(1)}_{im} X^{(1)}_{ilk}}^{Y} + \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{\sigma^{(0)}_{ij} X^{(2)}_{imlk}}^{Y}\right) + \overline{\sigma^{(0)}_{im}\tilde{X}^{(2)}_{ilk}}^{Y} + \overline{\rho f_i X^{(2)}_{imlk}}^{Y} \\
\bullet\quad \boldsymbol{N} &= \alpha^2\boldsymbol{N}^{(2)} \\
N^{(2)}_{klmn} &= \overline{\sigma^{(0)}_{in} X^{(2)}_{imlk}}^{Y}
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

Une remarque intéressante est que $\boldsymbol{\Sigma}^{(0)}$, qui correspondait à la première approximation des contraintes macroscopiques lorsqu'une troncature de la densité d'énergie à l'ordre 0 seulement avait été considérée, est en fait seulement égale à $\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^{Y}$. Ainsi, si cette nouvelle expression de $\boldsymbol{\Sigma}$ peut être interprétée comme les contraintes macroscopiques, cette remarque s'interprète comme le fait que $\boldsymbol{\Sigma}$ contient le terme classique $\boldsymbol{\Sigma}^{(0)}$ auquel a été ajouté des corrections d'ordre 1 et 2 en α. Puisque tout a été préparé, il est maintenant possible de vérifier si $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ peuvent réellement endosser les rôles de contraintes macroscopiques ainsi que d'hypercontraintes, et ce, en accord avec la définition usuelle.

8.4.2 Développement en série de l'équation d'équilibre par rapport à α

Dans le même esprit que Tran et collab. [2012], regardons si, grâce aux expressions de $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ déduites ci-dessus, il est possible de retrouver l'équation d'équilibre (8.34). A partir de (8.37) il est possible de déduire des équations plus fortes qui sont :

$$
\begin{aligned}
&\bullet\quad \operatorname{div}\boldsymbol{\Sigma}^{(0)} = \nabla_X.\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^{Y} = -\overline{\rho}^{Y}\boldsymbol{f} \\
&\bullet\quad \operatorname{div}\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} - \operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{M}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial X_l}\left(\overline{\rho f_i X^{(1)}_{ilk}}^{Y}\right)\boldsymbol{e}_k \\
&\bullet\quad \operatorname{div}\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} - \operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{M}^{(2)} + \operatorname{div}\operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{N}^{(2)} = -\frac{\partial^2}{\partial X_l\partial X_m}\left(\overline{\rho f_i X^{(2)}_{imlk}}^{Y}\right)\boldsymbol{e}_k
\end{aligned}
\tag{8.38}
$$

où les équations de compatibilité (8.15) et (8.16) ont été utilisées et où $(\boldsymbol{e}_k)$ est une base cartésienne de $\mathbb{R}^3$. Le fait d'obtenir trois équations d'équilibre laisse sous entendre que celles-ci sont en fait strictement équivalentes aux trois premières équations d'équilibre. En l'absence de forces de volume, les trois équations d'équilibre obtenues impliquent de manière immédiate (8.34) une fois combinées. En toute généralité, la présence de forces de volume à l'échelle microscopique entraine la présence de forces de volume macroscopiques, mais également à d'autres types de forces volumiques. Les formules (8.38) donnent le moyen de calculer ces actions en les reliant à des tenseurs d'ordre 2 et 3. En raison de l'hypothèse stipulant que les forces de volumes microscopiques doivent être d'ordre 0 en α, il apparait que les forces de volume macroscopiques sont uniquement équilibrées par $\boldsymbol{\Sigma}^{(0)}$ qui correspond à la partie d'ordre 0 des contraintes macroscopiques $\boldsymbol{\Sigma}$. Bien entendu, une hypothèse différente aurait conduit à d'autres résultats.

L'étude menée jusqu'à présent a permis d'étendre les résultats donnés par Boutin [1996] sur les matériaux parfaitement périodiques aux matériaux quasi-périodiques. De plus, il a également été montré que l'équation d'équilibre obtenue par Tran et collab. [2012] peut en fait être décomposée en autant d'équations que l'ordre de troncature en α considéré pour la densité volumique macroscopique d'énergie élastique.

8.5 Le premier ordre de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique

8.5.1 Symétrie par rapport à l'origine

Soit désormais une structure centrée en 0 par rapport à la variable rapide $\boldsymbol{Y}$. En supposant que la cellule de base possède une propriété de symétrie par rapport à l'origine, regardons comment est impacté le terme d'ordre 1 en α dans la décomposition en série de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique (8.26). Puisque le problème (8.12) donne accès à $\nabla_Y.\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = 0$, il est possible d'utiliser le lemme de Hill pour obtenir la simplification suivante :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^Y = \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}}^Y + \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(2)}}^Y = \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}}^Y \tag{8.39}$$

Puisque $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{E} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right)$, en utilisant l'expression (8.13) pour $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ conduit à :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^Y = E_{mn}\overline{\mathbb{C}_{ijkl}\left(\mathbb{I}_{klmn} + \frac{\partial X^{(1)}_{kmn}}{\partial Y_l}\right) X^{(1)}_{ipq}}^Y \frac{\partial E_{pq}}{\partial X_j} + E_{mn}\overline{\mathbb{C}_{ijkl}\left(\mathbb{I}_{klmn} + \frac{\partial X^{(1)}_{kmn}}{\partial Y_l}\right) \frac{\partial X^{(1)}_{ipq}}{\partial X_j}}^Y E_{pq} \tag{8.40}$$

A partir de cette égalité, il est naturel de définir deux nouveaux tenseurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ d'ordre 5 et 4 respectivement tels que :

$$\begin{aligned} B_{mnjpq} &= \mathbb{C}_{ijkl}\left(\mathbb{I}_{klmn} + \frac{\partial X^{(1)}_{kmn}}{\partial Y_l}\right) X^{(1)}_{ipq} \\ D_{mnpq} &= \mathbb{C}_{ijkl}\left(\mathbb{I}_{klmn} + \frac{\partial X^{(1)}_{kmn}}{\partial Y_l}\right) \frac{\partial X^{(1)}_{ipq}}{\partial X_j} \end{aligned} \tag{8.41}$$

Grâce à ces définitions, la partie de la densité énergétique considérée se met sous la forme :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^Y = \boldsymbol{E} : \overline{\boldsymbol{B}}^Y :\cdot \nabla \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} : \overline{\boldsymbol{D}}^Y : \boldsymbol{E} \tag{8.42}$$

Les tenseurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ dépendent tous deux de $\boldsymbol{Y}$. Regardons plus en détails de quelles propriétés jouissent ces deux tenseurs lorsqu'il est possible de considérer la symétrie matérielle par rapport à l'origine. Cette dernière signifie que le tenseur d'élasticité microscopique vérifie :

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \mathbb{C}(\boldsymbol{X},-\boldsymbol{Y}) \tag{8.43}$$

Soit $\boldsymbol{v}$ un champ vectoriel tel que $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{Y}) = -\boldsymbol{\xi}^1(-\boldsymbol{Y})$. Il est clair que $\boldsymbol{v}$ ainsi défini est également solution de (8.13). Un argument d'unicité de la solution implique que $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{v}$, ce qui permet d'écrire les propriétés suivantes pour $\boldsymbol{X}^{(1)}$:

$$\boldsymbol{X}^{(1)}(\boldsymbol{Y}) = -\boldsymbol{X}^{(1)}(-\boldsymbol{Y}) \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}^{(1)}}{\partial Y_k}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\partial \boldsymbol{X}^{(1)}}{\partial Y_k}(-\boldsymbol{Y}) \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}^{(1)}}{\partial X_k}(\boldsymbol{Y}) = -\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(1)}}{\partial X_k}(-\boldsymbol{Y}) \tag{8.44}$$

Cet jeu d'équations permet de conclure que $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ sont tous deux impaire vis-à-vis de $\boldsymbol{Y}$. Une conséquence immédiate est que leur moyenne sur la cellule de base Ω_Y est égale à zéro, ce qui permet de conclure :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^{Y} = 0 \tag{8.45}$$

Ainsi, lorsque le problème considéré est associé à une structure microscopique particulière jouissant d'une propriété de symétrie par rapport à son centre, le terme d'ordre 1 par rapport au petit paramètre α dans (8.26) est égal à zéro.

8.5.2 Une microstructure non symétrique : le matériau à trois couches

Le résultat précédent n'a pas vocation à être plus général puisqu'il est nécessaire dans certains cas de prendre en compte le correction d'ordre 1 dans la densité énergétique. Un exemple simple permettant de s'en convaincre consiste en un matériau multicouches composé de trois différents matériaux comme sur la Figure 8.1. Pour des raisons de simplicités, ce problème sera considéré comme parfaitement périodique qui n'est en fait qu'un cas particulier des matériau quasi-périodique.

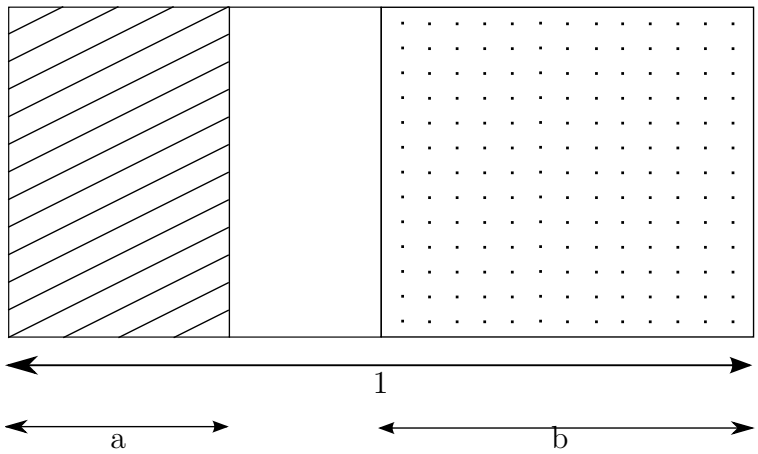

FIGURE 8.1 – Une microstructure multicouches à trois matériaux

Soit Y_1 la composante du vecteur position $\boldsymbol{Y}$ correspondant à la direction perpendiculaire aux couches et soit Y_2 une composante associée à une direction parallèle. En utilisant le fait que le milieu est considéré comme étant infini dans la direction 2, une propriété immédiate est que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ ne dépend pas de Y_2. De plus, puisque le tenseur d'élasticité microscopique $\mathbb{C}$

est pris constant par couche, une analyse rapide montre que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ dépend en fait de Y_1 de manière affine. Une telle remarque permet de résoudre aisément le problème (8.13). En se souvenant que le déplacement microscopique total est en fait égal à :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{E}.\boldsymbol{Y} + \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha^i \boldsymbol{\xi}^{(i)} \tag{8.46}$$

il vient que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ correspond en fait à la première correction apportée à la déformation macroscopique homogène. Avec cette représentation, il est assez intuitif de penser qu'un chargement macroscopique égal à $\boldsymbol{E} = E_{11}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$ ou $\boldsymbol{E} = E_{22}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2$ n'induira que des déplacements dans la direction 1 en ce qui concerne $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. De la même façon, imposer une déformation macroscopique $\boldsymbol{E} = \frac{E_{12}}{2}\left(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1\right)$ ne donnera, au niveau du déplacement, qu'un terme du premier ordre selon la seconde direction. Avec ces remarques, il vient que $\xi_1^{(1)}$ dépend linéairement de E_{11} et E_{22} tandis que $\xi_1^{(1)}$ dépend seulement de E_{12}, et ce, également de manière linéaire. Etant donné la dépendance de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ par rapport à $\boldsymbol{Y}$ et puisque $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{E} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right)$, l'ordre zéro du tenseur des contraintes microscopique est constant par couche. La condition de continuité à l'interface entre chaque couche va en fait renforcer cette propriété en imposant le caractère constant de $\sigma_{11}^{(0)}$ de $\sigma_{12}^{(0)}$ sur l'ensemble de la cellule de base. Il vient par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{\sigma_{11}^{(0)} \dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial X_1}}^Y = \sigma_{11}^{(0)} \overline{\dfrac{\partial u_1^{(1)}}{\partial X_1}}^Y = 0 \\
\overline{\sigma_{12}^{(0)} \dfrac{\partial u^{(2)}}{\partial X_1}}^Y = \sigma_{12}^{(0)} \overline{\dfrac{\partial u_1^{(2)}}{\partial X_1}}^Y = 0 \\
\overline{\sigma_{12}^{(0)} \dfrac{\partial u^{(1)}}{\partial X_2}}^Y = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}}^Y = \overline{\sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial X_2}}^Y \tag{8.47}$$

La discussion précédente concernant la dépendance de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ vis à vis des composants de $\boldsymbol{E}$ permet de conclure que $\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial X_2}$ est linéaire en $(\nabla \boldsymbol{E})_{122}$. De plus, il est possible de montrer que $\sigma_{22}^{(0)}$ dépend linéairement de E_{11} et E_{22} pour des couches élastiques isotropes. A partir de l'ensemble de ces considérations, seules deux composantes du tenseur d'ordre 5 $\overline{\boldsymbol{B}}^Y$ sont potentiellement non-nulles, ce qui permet d'écrire simplement :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^Y = E_{11}\overline{B_{11221}}^Y (\nabla \boldsymbol{E})_{122} + E_{22}\overline{B_{22221}}^Y (\nabla \boldsymbol{E})_{122} \tag{8.48}$$

En fait, le calcule montre que $\overline{B_{11221}}^Y$ et $\overline{B_{11221}}^Y$ sont tous deux non nuls. Par exemple, on trouverait :

$$\overline{B_{11221}}^Y = \frac{2ba\left(1-a-b\right)\left(M_1M_2\mu_3^2\left(\mu_2-\mu_1\right) + M_2M_3\mu_1^2\left(\mu_3-\mu_2\right) + M_3M_1\mu_2^2\left(\mu_1-\mu_3\right)\right)}{\left(\left(1-a-b\right)M_1M_3 + aM_2M_3 + bM_1M_2\right)\left(\left(1-a-b\right)\mu_1\mu_3 + a\mu_2\mu_3 + b\mu_1\mu_2\right)} \tag{8.49}$$

ce qui finit de prouver que le premier ordre dans la décomposition en série de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique n'est pas toujours égale à zéro et doit par conséquent être pris en compte dans certains situations. Une façon de tester la robustesse de ce résultat est de chercher à retrouver une cellule de base possédant la symétrie par rapport à son centre à partir de ce tricouches. Il suffit par exemple de prendre les cas particuliers $a = 0$ ou $b = 0$ ou encore $\mu_1 = \mu_2$ et $M_1 = M_2$. En effet, dans toutes ces situations, (8.49) montre qu'effectivement $\overline{B_{11221}}^Y$ s'annule. Les mêmes conclusions peuvent être tirées pour le coefficient $\overline{B_{11221}}^Y$ dont l'expression ne possède pas grand intérêt et n'est par conséquent pas ici donnée.

8.5.3 Conclusion

Dans le but de pouvoir négliger le premier ordre du correctif apporté à la densité énergétique homogénéisée, il semble que des propriétés de symétrie matériel sont essentielles. Il a été montré qu'une microstructure associée à une cellule de base présentant une symétrie par rapport à son centre permet d'obtenir la nullité du terme en question. Une telle demande de symétrie peut sembler très restrictif de prime abord alors qu'elle permet en fait de décrire un bon nombre de situation. Par exemple, des matrices avec des inclusions, des trous et même des fissures dont la géométrie et l'orientation est aléatoire sont compatibles avec cette hypothèse. Dans toutes ces situations, lorsqu'une description plus fine de la densité volumique macroscopique d'énergie élastique est recherchée par rapport à la description usuelle correspond à l'ordre 0 (8.21), il est nécessaire d'utiliser une troncature au second ordre de (8.20) comme ce qui a été fait précédemment.

8.6 Un modèle à gradient d'endommagement basé sur la micromécanique

L'objet de l'étude qui a précédé a été jusqu'à présent les matériaux quasi-périodiques dans leur généralité. En d'autres termes, la dépendance du tenseur d'élasticité $\mathbb{C}$ vis à vis de la variable d'oscillation lente $\boldsymbol{X}$ n'a été sujet à aucune restriction. Les résultats obtenus précédemment vont être désormais appliqués à la situation où cette dépendance tire son origine dans la présence d'un champ d'endommagement non homogène affectant les propriétés élastiques du matériau.

8.6.1 Élasticité dépendant d'un paramètre d'endommagement

Un exemple simple d'une telle microstructure serait de considérer une cellule de base constituée d'une matrice solide d'élasticité $\mathbb{C}^S$ avec n trous sphériques à l'intérieur. De plus, ces trous seront considérés comme ne s'intersectant pas, comme ayant le même rayon r et comme étant centrés sur des points $\boldsymbol{z}_k$. Soit alors χ la fonction indicatrice de la sphère unité centrée à l'origine. Pour le $k^{ième}$ trou, la fonction indicatrice χ^k correspond à :

$$\chi^k(\boldsymbol{Y}) = \chi\left(\frac{\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{z}_k}{r}\right) \tag{8.50}$$

De plus, il est supposé que le rayon des pores sphériques r dépend de la position macroscopique $\boldsymbol{X}$. Par conséquent, le tenseur d'élasticité microscopique $\mathbb{C}$ possède une expression simple :

$$\mathbb{C} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \chi\left(\frac{\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{z}_k}{r(\boldsymbol{X})}\right)\right)\mathbb{C}^S \tag{8.51}$$

Il est clair que ce tenseur élastique est fonction à la fois de la variable de dérive et de la variable d'oscillations rapides. La dépendance vis-à-vis de la position macroscopique $\boldsymbol{X}$ est exprimée au travers la dépendance du rayon des pores sphériques. Lorsque le matériau considéré est poreux, il est naturel d'interpréter un processus d'endommagement comme des cavités dont le rayon augmente. Dans le modèle simple proposé, cela signifie qu'une façon de définir la variable d'endommagement d est $d = r$. De manière formelle, il est obtenu la dépendance suivante du tenseur d'élasticité microscopique :

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathbb{C}(d(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{Y}) \tag{8.52}$$

Afin de pouvoir appréhender ce problème par le biais de la méthode exposée et basée sur les matériaux quasi-périodiques, il est nécessaire que le champ d'endommagement d, étant ici une mesure du rayon des pores et pouvant donc être pris égal à r, ait une variation suffisamment lente pour pouvoir être entièrement imputée à $\boldsymbol{X}$. Le rayon des cavités sphériques peut donc varier d'une cellule à l'autre, mais de façon suffisamment lente pour que celle-ci ne puisse pas être vue à l'échelle microscopique.

A partir de maintenant, il est supposé que le tenseur d'élasticité microscopique possède ce type de dépendance vis à vis des variables d'oscillation lente et rapide. Concrètement, cela signifie que $\mathbb{C}$ ne dépendra de $\boldsymbol{X}$ que par le biais du paramètre d'endommagement d. Pour des raisons de simplicité, ce paramètre sera supposé comme étant un tenseur d'ordre 0.

8.6.2 Microstructures symétriques

Seuls des matériaux avec des microstructures symétriques par rapport au centre de la cellule de base seront considérés. Il a été montré précédemment qu'une telle propriété impliquait la nullité du terme d'ordre 1 vis à vis du petit paramètre α dans la densité d'énergie. En raison de cette simplification, toutes les contributions d'ordre 1 en α dans les champs de contrainte et de déformation sont nulles, conduisant ainsi à :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{(0)} + \alpha^2 \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \qquad \boldsymbol{M} = \alpha^2 \boldsymbol{M}^{(2)} \qquad \boldsymbol{N} = \alpha^2 \boldsymbol{N}^{(2)} \tag{8.53}$$

La différence fondamentale existant entre l'homogénéisation des milieux quasi-périodiques par rapport à celle concernant les milieux parfaitement périodiques est que toutes les opérations de différentiation vis à vis de la variable d'oscillation lente $\boldsymbol{X}$ peuvent être appliquée à $\boldsymbol{E}$ et ses gradients, mais également aux propriétés élastiques. Par exemple, la relation (8.18) introduit deux tenseurs de localisation $\boldsymbol{X}^{(2)}$ et $\tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}$. Même si $\boldsymbol{X}^{(2)}$ étant déjà présent dans l'homogénéisation parfaitement périodique proposée par **?**, le tenseur $\tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}$ n'existe que parce que $\mathbb{C}$ a pu être différentié par rapport à $\boldsymbol{X}$. Cela signifie également que $\tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}$ est linéaire vis à vis des propriétés élastiques dérivées par rapport à $\boldsymbol{X}$ une seule fois. Le même raisonnement vaut pour $\tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^{(3)}$ qui lui est linéaire par rapport aux propriétés élastiques dérivées deux fois. En raison de la relation (8.52), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}}{\partial X_m} &= \frac{\partial d}{\partial X_m} \frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}}{\partial d} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{C}_{ijkl}}{\partial X_m \partial X_n} &= \frac{\partial^2 d}{\partial X_m \partial X_n} \frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}}{\partial d} + \frac{\partial d}{\partial X_m} \frac{\partial d}{\partial X_n} \frac{\partial^2 \mathbb{C}_{ijkl}}{\partial d^2} \end{aligned} \tag{8.54}$$

En mettant à profit ces relations et en introduisant la notation $d_{,X} = \nabla d$, il est possible d'établir, au moins formellement, la dépendance des contraintes macroscopiques et des hypercontraintes vis à vis du gradient d'endommagement en utilisant (8.37) ainsi que les simplifications (8.53). Une telle opération donne les dépendances linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} &\bullet\ \boldsymbol{\Sigma}^{(0)} \quad \text{linéaire en} \quad \boldsymbol{E} \\ &\bullet\ \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} \quad \text{linéaire en} \quad (d_{,X})^2 \boldsymbol{E} \ , \ d_{,XX} \boldsymbol{E} \ , \ d_{,X} \nabla \boldsymbol{E} \ , \ \nabla^2 \boldsymbol{E} \\ &\bullet\ \boldsymbol{M}^{(2)} \quad \text{linéaire en} \quad d_{,X} \boldsymbol{E} \ , \ \nabla \boldsymbol{E} \\ &\bullet\ \boldsymbol{N}^{(2)} \quad \text{linéaire en} \quad \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{8.55}$$

où les coefficients de linéarité dépendent seulement des composantes de $\mathbb{C}$, ce qui signifie que ces coefficients sont seulement des fonctions de la variable d'endommagement d sans aucune

dérivation. Grâce aux équations (8.29), (8.53) et (8.55), il vient :

$$\begin{aligned} w = \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \left(\mathbb{C}^{hom}(d) + \alpha^2 (d_{,X})^2 \boldsymbol{P}^1(d) + \alpha^2 d_{,XX}\boldsymbol{P}^2(d)\right) : \boldsymbol{E} \\ & + \boldsymbol{E} : \left(\alpha^2 d_{,X}\boldsymbol{Q}(d)\right) : \cdot\nabla\boldsymbol{E} \\ & + \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{E}\cdot : \left(\alpha^2\boldsymbol{R}(d)\right) : \cdot\nabla\boldsymbol{E} \\ & + \boldsymbol{E} :: \left(\alpha^2\boldsymbol{T}(d)\right) :: \nabla^2\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{8.56}$$

où $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{T}$ sont des tenseurs qui restent à détailler.

Ainsi, cette approche micromécanique pour les milieux quasi-périodiques conduit à une formulation d'un problème macroscopique complexe impliquant de devoir traiter non seulement avec le second gradient du déplacement, mais également avec le troisième. L'équation d'équilibre classique donnée par (8.34) peut également être retrouvée à partir de (8.56) en utilisant un argument de stationnarité appliqué à l'énergie potentielle.

8.6.3 Ordres de grandeurs et simplifications

Dans le but d'aboutir à un modèle qui soit plus simple à manipuler, il est possible de considérer un certain nombre de simplifications.

Tout d'abord, examinons de plus près les équations de compatibilité (8.15) et (8.16) en l'absence de forces de volume. La première relation donne un moyen de relier certains coefficients de $\boldsymbol{E}$ et $\nabla\boldsymbol{E}$. La définition de $\mathbb{C}^{hom}$ (8.24) permet d'écrire :

$$\mathbf{0} = \nabla_X.\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^Y = \nabla_X.\left(\mathbb{C}^{hom}(d(\boldsymbol{X})) : \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})\right) = \left(d_{,X_j}\frac{\partial\mathbb{C}^{hom}_{ijkl}}{\partial d}E_{kl} + \mathbb{C}^{hom}_{ijkl}\nabla E_{klj}\right)\boldsymbol{e}_i \tag{8.57}$$

Bien entendu, toutes les composantes de $\nabla\boldsymbol{E}$ ne sont pas concernées par cette relation, mais celle-ci rend légitime de supposer que l'ordre de grandeur de $\nabla\boldsymbol{E}$ soit le même que celui de $d_{,X}\boldsymbol{E}$.

$$\nabla\boldsymbol{E} \sim d_{,X}\boldsymbol{E} \tag{8.58}$$

De façon similaire, l'équation de compatibilité suivante donne :

$$\nabla^2\boldsymbol{E} \sim d_{,XX}\boldsymbol{E} + (d_{,X})^2\boldsymbol{E} \tag{8.59}$$

En mettant à profit ces deux approximations, il est possible de simplifier la densité macroscopique d'énergie élastique w. En partant de (8.56), il vient :

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \left(\mathbb{C}^{hom}(d) + \alpha^2 (d_{,X})^2 \mathbb{Q}(d) + \alpha^2 d_{,XX}\mathbb{P}(d)\right) : \boldsymbol{E} \tag{8.60}$$

La forme obtenue est très intéressante puisqu'elle permet de se libérer de l'usage des hypercontraintes. Il est important de noter qu'une telle écriture ne consiste pas à négliger $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ mais plutôt conduit à considérer toute leur contribution au travers des tenseurs condensés $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$. Néanmoins, cette simplification a un prix. Tout d'abord, ni $\mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E}$ ni $\left(\mathbb{C}^{hom} + \alpha^2 (d_{,X})^2 \mathbb{Q} + \alpha^2 d_{,XX}\mathbb{P}\right) : \boldsymbol{E}$ n'ont le statut de contraintes macroscopiques de Cauchy. La première en est seulement une approximation d'ordre 0 tandis que la seconde inclut également la contribution des deux hypercontraintes. Par conséquent, il est clair qu'utiliser (8.60) pour calculer l'énergie potentielle et ensuite invoquer un principe de minimum d'énergie potentielle ne permettra pas d'obtenir les bonnes équations d'équilibre. Par conséquent, il est bon de garder à l'esprit qu'utiliser cette expression simplifiée de l'énergie élastique n'est

pas adapté lorsque l'objectif est de dériver les équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites. La seule bonne expression dans ce cadre est (8.38).

Une autre simplification qui devra être confirmée à la fin d'un calcul est que, bien qu'il soit très possible d'avoir un champ d'endommagement présentant un gradient $d_{,X}$ significatif par rapport à α, il est par contre très peu probable que son second gradient $d_{,XX}$ soit capable de compenser α^2. Par conséquent, cette dernière simplification conduit à formuler un modèle simplifié où la densité volumique d'énergie élastique se met sous la forme :

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \left(\mathbb{C}^{hom}(d) + \alpha^2 (d_{,X})^2 \mathbb{Q}(d)\right) : \boldsymbol{E} \tag{8.61}$$

Cette expression semble fournir une description plus précise de la densité d'énergie élastique pour des matériaux quasi-périodiques que la formule classique $\frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E}$.

8.7 Conclusion

Au prix d'une approche parfois un peu technique, nous avons été capables de montrer comment une dérive macroscopique des propriétés élastiques microscopiques, que nous avons interprétée comme étant la signature de la présence d'un champ d'endommagement macroscopique non homogène, rejaillissait sur l'énergie élastique. Il semble bien qu'effectivement un terme en gradient d'endommagement au carré apparaisse. Une remarque importante est qu'il ne se situe pas au même endroit que dans le modèle proposé par Pham et Marigo [2010b]. Sous réserve que ce terme de gradient d'endommagement joue effectivement un rôle régularisant, l'analyse menée jette un trouble sur la nature du terme régularisant. En effet, J.-J. Marigo propose de le visualiser comme un correctif au terme de dissipation alors que la formule (8.61) le fait apparaître comme un correctif à l'élasticité.

Cependant, malgré des résultats intéressants, il parait difficile à partir de cette méthode d'aller plus loin. En effet, un point important est que les hypothèses permettant d'obtenir les problèmes en cascade (8.8) suppose que l'ordre de grandeur de chacun des termes considérés a été décidé une bonne fois pour toutes à l'avance et ne peut pas être changé. En effet, les expressions (8.7) supposent implicitement que les $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$ sont tous du même ordre de grandeur (il en va de même pour les $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$). En d'autres termes, puisque l'ordre de grandeur a été fixé, lors d'un développement en série selon le petit paramètre α, il est totalement impossible de considérer qu'un terme puisse être suffisamment grand pour pouvoir compenser un α. Prenons par exemple l'équation d'équilibre généralisée (8.34). Cette forme masque le fait que les hypercontraintes sont elles-même définies à partir de termes associés à différentes puissances par rapport au petit paramètre. Le cadre même du raisonnement conduit au fait que cette équation d'équilibre se décompose en fait selon les différents ordres en α (8.38). Le cadre d'analyse est tel qu'en fait, l'équation d'équilibre classique d'ordre 0 reste valide et doit être impérativement vérifiée. Cela signifie que, certes, nous avons obtenues une équation d'équilibre plus riche dans le sens où il n'y a pas une équation d'équilibre mais plusieurs, mais, quoi qu'il arrive, il sera toujours nécessaire de traiter en priorité l'ordre 0 qui lui méconnait totalement la dérive des propriétés élastiques et donc le gradient d'endommagement. Il n'est donc pas la peine de chercher à établir le critère d'endommagement pour un tel matériau puisque celui-ci conduira inéluctablement au fait que l'ordre 0 sera toujours vérifié. Ainsi, la méthode proposée est intéressante au sens où elle permet de fournir la structure des termes additionnels venant corriger la formulation classique, mais il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit uniquement de perturbations d'un ordre inférieur qui ne pourront jamais venir modifier l'ordre 0. Par conséquent, il semble impossible de faire jouer au gradient d'endommagement

(8.61) un quelconque rôle de régularisation puisqu'il ne pourra pas affecter l'ordre 0 qui lui correspond au modèle classique.

Enfin, un autre point devant être soulevé est qu'il est montré en Annexe (C.3) deux contre exemples de non-localité. En effet, nous montrons par exemple que le problème du barreau unidimensionnel (ainsi que sur un multicouche unidirectionnel) n'admet pas de termes supplémentaires au delà de l'ordre 0. Par conséquent, un tel problème méconnait totalement les effets d'un gradient d'endommagement d'un point de vue de l'énergie élastique. Ce phénomène est très perturbant puisqu'il signifie que si terme régularisant il y a, celui-ci ne provient pas d'un correctif au sens fourni dans l'analyse précédente.

Chapitre 9

Stabilité et localisation pour un comportement endommageant

Sommaire

9.1 Introduction **234**
9.2 Critère de Hill **234**
9.2.1 Équation de Clausius-Duhem pour un état voisin 235
9.2.2 Premier ordre 236
9.2.3 Second ordre 236
9.2.4 Critère de Hill en endommagement isotherme 237
9.3 Adaptation du critère de Hill à une évolution adiabatique **238**
9.3.1 Premier ordre 239
9.3.2 Second ordre 240
9.3.3 Pseudo tenseur tangent 241
9.3.4 Critère de stabilité de Hill pour un comportement endommageant et des évolutions adiabatiques 242
9.4 Considérations générales pour l'endommagement d'un barreau unidimensionnel **243**
9.4.1 Modèle d'endommagement et critère 243
9.4.2 Problématiques associées à un modèle unidimensionnel 244
9.5 Construction d'un exercice académique **247**
9.5.1 Remarque introductive 247
9.5.2 La variable endommagement 249
9.5.3 Évolutions depuis l'état homogène 250
9.5.4 Critères de stabilité 255
9.5.5 Évolutions quasi-statiques depuis une position d'équilibre 261
9.5.6 Conclusion 263
9.6 Localisation et dynamique **263**

9.1 Introduction

Nous souhaitons ici revenir sur deux notions essentielles qui sont au cœur des problématiques liées aux modèles classiques d'endommagement. En effet, il a été vu au Chapitre 1 que ces derniers souffraient d'un certain nombre d'écueils dont à la fois l'origine et la façon de les gérer sont le sujet de recherches actuelles.

La question centrale est celle de la stabiltié des états d'équilibre dans le cadre d'un modèle d'endommagement local. La notion de stabilité d'un état d'équilibre est un concept très important pour de nombreux domaines de la physique dont la mécanique en toute généralité fait partie. Parmi les nombreux travaux qui y sont consacrés, on trouvera notamment Benallal et Comi [2003] ainsi que Nguyen [2000]. Ainsi, la stabilité occupe une place particulièrement cruciale pour la mécanique de l'endommagement. Un travail s'inscrivant dans ce domaine ne saurait donc être complet sans chercher à établir quelques résultats sur la stabilité d'un état d'équilibre. Nous proposons dans un premier temps d'adapter le critère suffisant de stabilité de Hill formulé pour un comportement élasto-plastique à un comportement endommageant.

Ensuite, nous nous intéresserons à des phénomènes intimement liés à la perte de stabilité qui sont les effets de localisation. Ces derniers sont très préoccupants puisqu'ils posent notamment des problèmes d'un point de vue de la résolution numérique mais aussi, et surtout, d'un point de vue conceptuel puisqu'ils autorisent des comportements irréversibles pourtant associés à une dissipation nulle. Nous proposons de revisiter le problème fondateur de la théorie de régularisation par gradient d'endommagement qui est le barreau unidimensionnel, et ce, dans un cadre scolaire extrêmement épuré. Cet exercice sera l'occasion de revenir sur la notion de localisation ainsi que le statut logique des différents critères de stabilité.

9.2 Critère de Hill

L'un des travaux fondateurs traitant de la stabilité d'un état d'équilibre est Hill [1958]. Dans un contexte d'évolutions élasto-plastiques en transformation finie, Hill examine des conditions pour lesquelles il est possible d'établir une propriété d'unicité d'une évolution ainsi que de stabilité d'un état d'équilibre. Nous proposons de voir comment adapter uniquement le critère qu'il propose concernant la stabilité d'un état équilibre pour un comportement élasto-plastique à un comportement endommageant en transformations infinitésimales. Pour pouvoir établir son critère, Hill propose de partir du premier principe de la thermodynamique appliqué à une structure dans un contexte isotherme. Par conséquent, nous proposons dans un premier temps de considérer également un comportement isotherme qui est effectivement plus simple à mettre en œuvre. Le cadre adiabatique, qui est celui que nous avons considéré comme étant le plus adapté pour pouvoir traiter des phénomènes de propagations et de nucléations de fissures, ne sera lui abordé que dans un second temps.

Avant de nous lancer dans l'écriture du premier principe, rappelons que pour un matériau thermo-élastique endommageable en condition isotherme, les seules variables d'état pertinentes sont la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ ainsi que la variable d'endommagement d. Si ψ est la densité volumique d'énergie libre, alors l'unique équation d'état portant sur le niveau de contraintes est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{\varepsilon}, d) \tag{9.1}$$

Le critère d'endommagement pour les matériaux fragiles s'écrit :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial d} (\boldsymbol{\varepsilon}, d) = g_c \tag{9.2}$$

Au sens de Hill, la stabilité est un état qui ne peut pas être modifié sans apport extérieur. Soit alors un état d'équilibre caractérisé par les champs $(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$ et soit une évolution spontanée au sens où la puissance des efforts extérieurs s'appliquant sur la structure et développée dans l'évolution considérée est nulle. Il s'agit donc d'une évolution éventuellement dynamique ne faisant pas varier le déplacement là où celui-ci est imposé et là où les efforts imposés sont non nuls.

9.2.1 Équation de Clausius-Duhem pour un état voisin

Soit U l'énergie interne de la structure, le premier principe stipule :

$$\dot{U} + \dot{K} = \mathcal{P}_{(e)} + \overset{\circ}{Q} \tag{9.3}$$

au cours de l'évolution où K est l'énergie cinétique de la structure, $\mathcal{P}_{(e)}$ est la puissance des efforts extérieurs et $\overset{\circ}{Q}$ est le terme d'échange thermique. Ce dernier étant une grandeur extensive, les deux relations (4.6) et (4.7) introduites précédemment permettent d'obtenir :

$$\overset{\circ}{Q} = \int_\Omega \left(T \left(\dot{s} - \overset{\circ}{s}_{créée} \right) + \frac{1}{T} \boldsymbol{q} . \operatorname{grad} T \right) dV \tag{9.4}$$

où $\boldsymbol{q}$ est le vecteur courant de chaleur sortant, s est l'entropie volumique et $\overset{\circ}{s}_{créée} dt$ est l'entropie volumique créée pendant dt. Soit D la dissipation volumique définie comme :

$$D = T \overset{\circ}{s}_{créée} \tag{9.5}$$

Pour un matériau fragile, celle-ci s'exprime comme $g_c \dot{d}$. Enfin, soit Ψ l'énergie libre totale de la structure. Celle-ci s'exprime à partir de U comme :

$$U = \Psi + \int_\Omega T s \, dV \tag{9.6}$$

La combinaison des équations (9.3) à (9.6) permet d'obtenir :

$$\dot{\Psi} + \dot{K} + \int_\Omega \dot{T} s \, dV + \int_\Omega g_c \dot{d} \, dV - \int_\Omega \frac{1}{T} \boldsymbol{q} . \operatorname{grad} T \, dV = \mathcal{P}_{(e)} \tag{9.7}$$

Le terme $\frac{1}{T} \boldsymbol{q} . \operatorname{grad} T$ correspond à la dissipation thermique que nous considérerons nulle, conformément à l'usage classique, voir Salençon [2001]. Ce sera par exemple le cas si le champ de température est uniforme dans l'état d'équilibre et si l'évolution considérée est isotherme. Par ailleurs, une évolution isotherme implique également la nullité de $\dot{T} s$. De plus, la définition même de l'évolution considérée conduit au fait que la puissance des efforts extérieurs $\mathcal{P}_{(e)}$ est nulle (il s'agit en effet d'une évolution spontanée, c'est à dire sans apport d'énergie extérieure). Par conséquent, en intégrant la relation précédente entre l'instant initial où la structure est dans son état d'équilibre et un instant t, il vient :

$$\Delta \Psi + \Delta K + \int_\Omega g_c \delta d = 0 \tag{9.8}$$

où δd est la variation d'endommagement entre l'état initial et l'état considéré. Sachant que l'état initial est un état d'équilibre, et donc dépourvu d'énergie cinétique, il vient de manière immédiate que $\Delta K \geq 0$. Dans un contexte isotherme, Ψ se calcule par intégration de ψ utilisé dans (9.1) ainsi que (9.2). Soit alors $(\boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}, d + \delta d)$ l'état associé à l'instant t. Avec

la considération de signe de la variation d'énergie cinétique, il est possible d'établir une inégalité devant être nécessairement vérifiée par l'évolution considérée :

$$\int_\Omega \left(\psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}+\delta\boldsymbol{\varepsilon}, d+\delta d\right)-\psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}, d\right)+g_c\delta d\right) dV \leq 0 \tag{9.9}$$

et ce à tout instant. En choisissant t suffisamment proche de l'instant initial t_0, il est possible de considérer que $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ et δd sont petits par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$ et d respectivement. Une telle condition permet d'effectuer un développement limité de l'intégrande précédente. Un développement au second ordre permet d'aboutir à :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{\partial\psi}{\partial d}\delta d+g_c\delta d+\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\varepsilon}:\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\delta d\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial d^2}\delta d^2\right) dV \leq 0 \tag{9.10}$$

où les termes O ne sont pas mentionnés et où les dérivées sont toutes calculées en $(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$.

9.2.2 Premier ordre

Il est facile de montrer que le premier ordre est rigoureusement nul. En effet, le critère (9.2) stipule que δd n'est autorisé à être différent de zéro que là où $-\frac{\partial\psi}{\partial d}=g_c$ et est nul sinon. Par conséquent :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial\psi}{\partial d}+g_c\right)\delta d\, dV = 0 \tag{9.11}$$

Également, l'équation d'état (9.1) permet de substituer à $\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$ le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ régnant dans l'état d'équilibre. Par conséquent, un théorème de la divergence permet de conclure que :

$$\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \int_{t=t_0}^{t} \mathcal{P}_{(e)} dt = 0 \tag{9.12}$$

qui est bien nul par définition de l'évolution considérée. Ainsi, tous les termes d'ordre 1 dans (9.10) sont bien nuls et seuls les termes d'ordre 2 subsistent.

9.2.3 Second ordre

Pour pouvoir poursuivre, il est nécessaire de partitionner le domaine total Ω en deux parties : l'une notée $\Omega^{\delta d>0}$ où l'endommagement augmente effectivement et l'autre notée $\Omega^{\delta d=0}$ où l'endommagement ne varie pas. Par conséquent, la condition devant être nécessairement vérifiée par l'évolution considérée est :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega^{\delta d=0}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}:\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV+\frac{1}{2}\int_{\Omega^{\delta d>0}}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}:\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}+2\delta d\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{\partial^2\psi}{\partial d^2}\delta d^2\right) dV \leq 0 \tag{9.13}$$

Soit $\delta\boldsymbol{\sigma}$ le champ tensoriel d'ordre 2 défini comme étant égal au développement limité au premier ordre de $\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}+\delta\boldsymbol{\varepsilon}, d+\delta d\right)$:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, d\right):\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, d\right)\delta d \tag{9.14}$$

L'équation d'état (9.1) permet de conférer à $\boldsymbol{\sigma}+\delta\boldsymbol{\sigma}$ le statut de développement limité au premier ordre de la contrainte régnant dans la structure à l'instant t. Sur $\Omega^{\delta d=0}$, la variation de contrainte au premier ordre s'écrit simplement :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2}:\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.15}$$

En tous points de $\Omega^{\delta d>0}$, il est nécessaire de travailler avec la relation (9.14) dans son intégralité. Le critère d'endommagement (9.2) qui doit nécessairement être vérifié pour que l'endommagement puisse augmenter s'accompagne également d'une règle de consistance qui stipule qu'une fois atteint le critère ne doit pas être dépassé. En d'autres termes, si $\delta d > 0$ il est nécessaire de vérifier :

$$-\frac{\partial \psi}{\partial d}(\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}, d + \delta d) = g_c \tag{9.16}$$

En prenant un développement limité au premier ordre de cette équation et en la combinant avec (9.2), il vient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2}(\boldsymbol{\varepsilon}, d)\,\delta d = 0 \tag{9.17}$$

Cette relation, dite de consistance, permet d'établir la condition de charge en utilisant le fait que δd doit être nécessairement positif :

$$\boldsymbol{n} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{n} = -\frac{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d}}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial d^2}} \tag{9.18}$$

Avec cette relation dite de condition de charge, il vient :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + 2\delta d \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2}\delta d^2 = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta d \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d}\right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.19}$$

qui est exactement égal à $\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$ d'après la relation (9.14).

Au terme de ces diverses considérations, il vient d'être montré qu'une évolution spontanée depuis une position d'équilibre devait nécessairement vérifier :

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV \leq 0 \tag{9.20}$$

où $\delta\boldsymbol{\sigma}$ se calcule à partir de $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ de la façon suivante :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial d^2}\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}\right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} & \text{si} \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial d}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) + g_c = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{n} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} & \text{sinon} \end{cases} \tag{9.21}$$

9.2.4 Critère de Hill en endommagement isotherme

Pour pouvoir énoncer le critère, commençons par détailler la forme de ψ dans un cadre isotherme et où l'état de référence est naturel :

$$\psi = \psi^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_{iso} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.22}$$

où $\mathbb{C}_{iso}$ est le tenseur d'élasticité isotherme. Avec ce choix de densité énergétique, le tenseur $\boldsymbol{n}$ introduit précédemment devient :

$$\boldsymbol{n} = -\frac{2\mathbb{C}'_{iso}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}''_{iso}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{9.23}$$

La loi de comportement liant $\delta\boldsymbol{\sigma}$ à $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (9.21) se réécrit alors :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \left(\mathbb{C}_{iso} - \dfrac{2\left(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'_{iso}(d)\right) \otimes \left(\mathbb{C}'_{iso}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}\right)}{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}''_{iso}(d) : \boldsymbol{\varepsilon}}\right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} & \text{si} \quad \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}'_{iso}(d) : \boldsymbol{\varepsilon} + g_c = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{n} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ \mathbb{C}_{iso} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} & \text{sinon} \end{cases} \tag{9.24}$$

Etant donné la linéarité de $\delta\boldsymbol{\sigma}$ par rapport à $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, il est possible à ce stade de laisser de côté le caractère petit de ces quantités. Ainsi, une condition suffisante pour qu'un état d'équilibre soit stable est que tout champ vectoriel $\delta\boldsymbol{\xi}$ cinématiquement admissible avec 0 et nul là où des efforts non nuls sont imposés vérifie :

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV > 0 \tag{9.25}$$

où $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ est la partie symétrique du gradient de $\delta\boldsymbol{\xi}$ et où $\delta\boldsymbol{\sigma}$ se calcule à partir de (9.24). Le caractère suffisant provient de fait que le critère a été bâti à partir de la négation d'une condition nécessaire d'existence d'une évolution spontanée. L'énoncé (9.25) correspond à la transposition du critère suffisant de stabilité de Hill au cas de l'endommagement isotherme en transformations infinitésimales et traduit le fait qu'il n'est pas possible d'évoluer spontanément depuis l'état d'équilibre considéré.

9.3 Adaptation du critère de Hill à une évolution adiabatique

Nous avons vu au Chapitre 4 et au Chapitre 5 que le bon cadre à utiliser pour traiter de la nucléation ou, plus généralement, de la propagation rapide et donc dynamique de fissures était celui de l'adiabaticité. Le critère de Hill (9.25) que nous venons d'établir concerne lui seulement des évolutions isothermes pouvant donc seulement intéresser des phénomènes endommageant lents. Cependant, il a été vu que le raisonnement permettant d'établir le critère consistait à considérer une évolution spontanée et à effectuer un développement limité d'une quantité énergétique pour un instant t proche de t_0 correspondant à la situation d'équilibre. Ainsi, si les deux instants sont proches, il semble difficile de justifier que l'évolution est isotherme puisque la température n'aura pas forcément eu le temps de s'équilibrer dans l'intervalle de temps considéré. Par conséquent, il est tout à fait naturel de se demander s'il est possible d'adapter le raisonnement précédent au cas adiabatique qui semble plus cohérent avec la notion d'instant t proche de t_0. Pour ce faire, la relation (4.61) du Chapitre 4 est nécessaire et donne une seconde expression de la dissipation pour un volume élémentaire soumis à un processus d'endommagement :

$$D = -\frac{\partial u}{\partial d}\dot{d} \tag{9.26}$$

où u est la densité volumique d'énergie interne. Il s'agit d'une seconde expression puisque la première définition est :

$$D = T\overset{\circ}{s}_{créée} \tag{9.27}$$

Si l'évolution locale est adiabatique, alors $\overset{\circ}{s}_{créée}$ est tout simplement égal à $\dot{s}$. De plus, les équations d'état établies à partir de l'énergie interne donnent :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, s, d) \quad , \quad T = \frac{\partial u}{\partial s}(\boldsymbol{\varepsilon}, s, d) \tag{9.28}$$

En particulier, l'équation d'état sur la température permet d'établir, à partir de (9.26) et (9.27), les égalités précieuses suivantes pour un matériau fragile :

$$\frac{\partial u}{\partial s}\dot{s} = -\frac{\partial u}{\partial d}\dot{d} = g_c\dot{d} \tag{9.29}$$

Pour être plus précis, la relation :

$$\frac{\partial u}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial u}{\partial d}\dot{d} = 0 \tag{9.30}$$

qui est une relation portant, dans une évolution adiabatique, en fait sur $\mathring{s}_{créée}$ et $\dot{d}$, n'est qu'une conséquence de l'écriture locale du premier principe. Cette relation très intéressante permet de conclure deux choses. La première est que si $\dot{d}$ est nul alors il en va de même pour $\dot{s}$ (et réciproquement). De plus, pour que $\dot{d}$ soit non nul, il est nécessaire de vérifier le critère d'endommagement :

$$-\frac{\partial u}{\partial d} = g_c \tag{9.31}$$

qui donne donc à $\frac{\partial u}{\partial d}$ le statut de quantité négative. Avec la condition d'irréversibilité demandant que $\dot{d}$ soit une quantité strictement positive, la liaison (9.30) permet de garantir que $\dot{s}$ est bien une quantité strictement positive, ce qui est heureux puisque $\dot{s}$ correspond uniquement à de l'entropie créée. En effet, pour aboutir à ce résultat, il est nécessaire de se rappeler que la seconde équation d'état (9.28) stipule que $\frac{\partial u}{\partial s}$ doit être positif puisqu'il s'agit d'une température. Par conséquent, une propriété intéressante pour une évolution adiabatique dans un contexte endommageant est que soit $\dot{d}$ et $\dot{s}$ sont simultanément nuls, soit ils sont simultanément strictement positifs, ce qui, une fois énoncée, semble être une évidence.

Toute la difficulté des évolutions adiabatiques est que les équations de la thermodynamique ne font plus explicitement intervenir la dissipation, celle-ci se cachant en fait dans l'énergie interne. En effet, le premier principe (9.3) se réécrit :

$$\dot{U} + \dot{K} = \mathcal{P}_{(e)} \tag{9.32}$$

qui donc ne permet pas d'introduire la quantité D. Soit à nouveau une évolution spontanée partant d'un état d'équilibre $(\boldsymbol{\varepsilon}, s, d)$ à l'instant t_0 et amenant, de manière éventuellement dynamique, à un état $(\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}, s + \delta s, d + \delta d)$ à un instant t très proche de t_0. Le raisonnement tenu dans la section précédente peut être mené à nouveau pour aboutir au fait qu'une telle évolution doit nécessairement vérifier :

$$\int_\Omega \left(u\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}, s + \delta s, d + \delta d\right) - u\left(\boldsymbol{\varepsilon}, s, d\right)\right) dV \leq 0 \tag{9.33}$$

En effectuant à nouveau un développement limité à l'ordre 2, il vient :

$$\begin{aligned} 0 \geq \quad & \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial u}{\partial s}\delta s + \frac{\partial u}{\partial d}\delta d\right) dV + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\delta s^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial d^2}\delta d^2\right) dV \\ & + \int_\Omega \left(\delta s \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}\partial s} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta d \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}\partial d} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta s \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial d}\delta d\right) dV \end{aligned} \tag{9.34}$$

où toute les dérivées sont calculées dans l'état d'équilibre $(\boldsymbol{\varepsilon}, s, d)$.

9.3.1 Premier ordre

A nouveau, commençons par nous intéresser aux termes du premier ordre dans le membre de droite de l'inégalité (9.34). La clé permettant de les traiter facilement se trouve dans la forme incrémentale de la liaison (9.30) permettant de relier δs et δd :

$$\frac{\partial u}{\partial s}\delta s + \frac{\partial u}{\partial d}\delta d = 0 \tag{9.35}$$

Par conséquent, seul subsiste le terme $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Celui-ci se traite exactement de la même façon que dans le cas isotherme. En effet, la première équation d'état (9.28) permet de réécrire $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ comme $\boldsymbol{\sigma}$ qui est le tenseur des contraintes de l'état d'équilibre. Le théorème de la divergence accompagné du fait que l'évolution considérée est spontanée permet de conclure quant à la nullité du dernier terme restant. Ainsi, seuls les termes d'ordre 2 restent dans (9.34).

9.3.2 Second ordre

Avec les notations précédentes, le premier ordre de la variation des contraintes s'écrit :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial s}\delta s + \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d}\delta d \tag{9.36}$$

De la même façon, il est utile d'introduire δT comme étant l'élévation de température au premier ordre. Avec la seconde équation d'état (9.28), il vient :

$$\delta T = \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial s} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\delta s + \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial d}\delta d \tag{9.37}$$

Enfin, la relation de consistance (9.17) devient dans le contexte adiabatique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial d}\delta s + \frac{\partial^2 u}{\partial d^2}\delta d = 0 \tag{9.38}$$

qui est une équation ne devant être vérifiée que là où $-\frac{\partial u}{\partial d} = g_c$ et $\delta d > 0$. Comme mentionné auparavant, (9.35) signifie que δs est non nul si et seulement si δd est non nul. Il est donc possible à nouveau de partitionner Ω en deux sous ensembles qui sont $\Omega^{d=0}$ et $\Omega^{d>0}$. Avec la remarque précédente, alors en tous points de $\Omega^{d=0}$ non seulement δd est nul, mais c'est également le cas pour δs. Par conséquent, il vient de manière immédiate que (9.34) se réécrit :

$$\begin{aligned} 0 \geq \quad & \frac{1}{2}\int_{\Omega^{d=0}} \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV + \frac{1}{2}\int_{\Omega^{d>0}} \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\delta s^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial d^2}\delta d^2\right) dV \\ & + \int_{\Omega^{d>0}} \left(\delta s\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial s} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta d\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta s\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial d}\delta d\right) dV \end{aligned} \tag{9.39}$$

Avec ces considérations et avec la relation (9.36) il vient de manière immédiate :

$$\int_{\Omega^{d=0}} \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \int_{\Omega^{d=0}} \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV \tag{9.40}$$

puisque sur $\Omega^{d=0}$ la variation de contrainte au premier ordre $\delta\sigma$ est simplement égal à $\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Sur $\Omega^{d>0}$ par contre, les relations (9.36), (9.37) et (9.38), permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\delta s^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial d^2}\delta d^2\right) + \delta s\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial s} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta d\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta s\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial d}\delta d \\ & = \frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T\delta s\right) \end{aligned} \tag{9.41}$$

Par conséquent, la condition nécessaire que doit vérifier une évolution spontanée depuis une position d'équilibre dans un contexte endommageant adiabatique peut se résumer très simplement par :

$$\int_{\Omega} \left(\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T\delta s\right) dV \leq 0 \tag{9.42}$$

Cette formulation est très intéressante puisqu'elle permet de bien insister sur le fait que, contrairement à l'analyse isotherme conduisant à (9.20), l'inégalité (9.42) elle ne fait pas seulement intervenir $\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}$ mais aussi un terme additionnel $\delta T\delta s$. La formulation de la condition nécessaire n'est pas encore tout à fait prête pour pouvoir énoncer l'équivalent du critère suffisant de Hill en conditions adiabatiques. Nous allons montrer que là où l'endommagement est non nul, δs et δd s'expriment en fonction de $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Par conséquent, il est possible d'exhiber un certain tenseur d'ordre $\mathbb{L}$ tel que :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T\delta s = \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{L} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.43}$$

où l'expression de $\mathbb{L}$ dépend de l'état d'équilibre considéré ainsi que d'une condition dite de charge. Cependant, le fait remarquable est que $\mathbb{L}$ ne correspond pas au tenseur d'élasticité tangent, et ce, justement à cause de la présence du terme $\delta T\delta s$ qui est a priori non nul.

9.3.3 Pseudo tenseur tangent

Comme annoncé, nous allons maintenant montrer qu'il est possible d'exprimer en tous points $\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T \delta s$ comme une forme quadratique en $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$.

Tout d'abord, ce fait est trivial sur l'espace $\Omega^{d=0}$ puisqu'alors δs est nul et que par conséquent :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega^{d=0} \quad , \quad \delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T \delta s = \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.44}$$

Notons que la quantité $\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}$ correspond tout simplement au tenseur d'élasticité adiabatique précédemment noté $\mathbb{C}_{ad}$.

Un petit travail supplémentaire est nécessaire pour des points appartenant à $\Omega^{d>0}$. En effet, il a été vu que si δd est non nul, alors δs non plus et les équations (9.35) et (9.38) doivent être vérifiées. S'agissant d'équations linéaires, il est très simple d'exprimer δd et δs en fonction de $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Pour ce faire, introduisons les déterminants suivants [1] :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial d} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial s \partial d} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u^2}{\partial s \partial d} - \frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad , \quad \Delta_d = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial d} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial d} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial d^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial d^2} - \frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial u^2}{\partial s \partial d} \tag{9.45}$$

Introduisons également la quantité $\boldsymbol{\Delta}_\varepsilon$ qui n'est pas un déterminant mais un tenseur d'ordre 2 définit par :

$$\boldsymbol{\Delta}_\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} - \frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial s} \tag{9.46}$$

qui correspond à la troisième quantité naturelle allant de paire avec Δ_s et Δ_d. Les relations (9.35) et (9.38) aboutissent aux expressions suivantes pour δs et δd :

$$\delta s = \frac{1}{\Delta_d}\frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \delta d = -\frac{1}{\Delta_d}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.47}$$

A partir de ces relations, la variation au premier ordre de la température (9.37) s'écrit :

$$\delta T = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial s} - \frac{\Delta_s}{\Delta_d}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} \right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.48}$$

De même, la variation de contraintes au premier ordre (9.36) devient :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} - \frac{1}{\Delta_d}\boldsymbol{\Delta}_\varepsilon \otimes \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} \right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.49}$$

Avec les expressions (9.47), (9.48) et (9.49), il est possible de mettre $\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T \delta s$ sous la forme (9.43) souhaitée :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T \delta s = \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{1}{\Delta_d}\left(\frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial s} - \boldsymbol{\Delta}_\varepsilon - \frac{\partial u}{\partial d}\frac{\Delta_s}{\Delta_d}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} \right) \otimes \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} \right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.50}$$

qui permet d'identifier le tenseur $\mathbb{L}$. En explicitant $\boldsymbol{\Delta}_\varepsilon$ à partir de (9.49), il est possible de fournir une expression un peu plus agréable :

$$\mathbb{L} = \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{1}{\Delta_d}\left(2\frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial s} - \frac{1}{\Delta_d}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial u^2}{\partial d^2} - \frac{\partial u^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial d}\right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} \right) \otimes \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial d} \tag{9.51}$$

1. la notation indicielle Δ_s (réciproquement Δ_d) est là pour insister sur le fait que, formellement, la seconde ligne du déterminant est obtenue en appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial s}$ (réciproquement $\frac{\partial}{\partial d}$) à la première

Il est à noter qu'il est possible de donner une écriture symétrique de $\mathbb{L}$ puisque celui n'intervient qu'au travers d'une double contraction à gauche et à droite par un seul et même tenseur $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$. L'écriture fournie peut éventuellement être un tout petit peu simplifiée en se souvenant que son expression n'est valide que lorsque $-\frac{\partial u}{\partial d} = g_c$. L'expression d'une énergie interne pour un comportement thermo-élastique endommageant à considérer en toutes généralités a été donnée Chapitre 4, Section 4.3. Plus précisément, (4.41) donne l'expression de la densité volumique macroscopique d'énergie interne et la Section en général détaille l'expression des différentes quantités en fonction d'une seule et même grandeur qui est le tenseur d'élasticité homogénéisé isotherme.

9.3.4 Critère de stabilité de Hill pour un comportement endommageant et des évolutions adiabatiques

Soit $\boldsymbol{n}_{ad}$ le tenseur d'ordre 2 définit par :

$$\boldsymbol{n}_{ad} = -\frac{1}{\Delta_d}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d} \tag{9.52}$$

En un point macroscopique vérifiant le critère d'endommagement (9.31), la condition de charge permettant de savoir si en ce point δd sera strictement positif ou nul est simplement $\boldsymbol{n}_{ad} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. Par conséquent, il est possible de donner l'expression de $\mathbb{L}$ suivante :

$$\begin{aligned}
&\text{Si} \quad \frac{\partial u}{\partial d} + g_c = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{n}_{ad} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad : \\
&\quad \mathbb{L} = \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2} + \frac{1}{\Delta_d}\left(2\frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial s} - \frac{1}{\Delta_d}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{\partial u^2}{\partial d^2} - \frac{\partial u^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial d}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d}\right)\otimes\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}\partial d} \\
&\text{Sinon} \quad : \\
&\quad \mathbb{L} = \frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2}
\end{aligned} \tag{9.53}$$

Il a montré que s'il était possible, à partir d'une position d'équilibre $(\boldsymbol{\varepsilon}, s, d)$ atteinte à l'instant t_0, de la quitter de manière spontanée, adiabatique et éventuellement dynamique pour arriver à un instant t proche de t_0 à l'état $(\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}, s + \delta\boldsymbol{\varepsilon}, d + \delta\boldsymbol{\varepsilon})$, alors nécessairement il faudrait vérifier :

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{L} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV \leq 0 \tag{9.54}$$

où $\mathbb{L}$ est défini par (9.53). Tout l'intérêt de cette écriture est que l'inégalité ne fait aucunement appel à δs et δd puisque que leur contribution a été intégrée dans le pseudo tenseur tangent. Par conséquent, un critère suffisant de stabilité est que si pour tout champ $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ cinématiquement admissible avec 0 et nul là où des efforts non nuls sont imposés, l'état d'équilibre vérifie :

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{L} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV > 0 \tag{9.55}$$

alors cet état sera stable.

Au terme de cette étude, il a été montré qu'il était possible d'adapter le critère de Hill non seulement au cadre de l'endommagement isotherme, mais aussi et surtout au cadre de l'endommagement adiabatique. Ce dernier point est important par rapport au point de vue que nous avons adopté au Chapitre 4 et surtout semble plus cohérent avec la démarche elle-même puisque celle-ci consiste à considérer une évolution sur un intervalle de temps très court. Insistons sur le fait que la formulation obtenue (9.55) est très proche de (9.25) à la différence fondamentale près que $\mathbb{L}$ ne correspond pas au tenseur d'élasticité tangent. En

effet, rappelons à nouveau l'un des points marquants mis en lumière au terme de cette étude qui est que le critère (9.55) exige en fait la positivité de :

$$\int_\Omega (\delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta T \delta s)\, dV > 0 \tag{9.56}$$

qui inclut donc un terme d'élévation d'entropie et de température. Il s'agit donc d'être très vigilant au cadre d'analyse utilisé lorsqu'une transposition du critère de Hill est envisagée.

9.4 Considérations générales pour l'endommagement d'un barreau unidimensionnel

Le cas de l'endommagement du barreau unidimensionnel est très instructif et présente un double intérêt. Tout d'abord, il s'agit du problème fondateur des méthodes à gradient d'endommagement telles que proposées par Pham et Marigo [2013a] sur lequel un certain nombre de propriétés relatives à la stabilité et à la localisation des processus d'endommagement ont été établies. D'autre part, il s'agit d'un problème assez troublant puisque l'analyse menée au Chapitre 8 montre qu'il n'y a pas de correctif à apporter à l'homogénéisation classique et que par conséquent l'ordre 0 est exact. Nous proposons donc de ne nous intéresser de plus près à un problème où un déplacement est imposé aux deux extrémités d'un barreau. Nous allons tout d'abord mettre en lumière quelques problématiques accompagnant le modèle classique d'endommagement et pour lesquelles il n'existe pas, à notre connaissance, de réponse claire dans la littérature. Pour ce faire, nous allons préciser quel modèle d'endommagement nous allons utiliser.

9.4.1 Modèle d'endommagement et critère

Plusieurs modèles essayant de capturer l'effet d'un mécanise endommageant sur les constantes élastiques sont disponibles. Puisque le problème ici d'intérêt est unidimensionnel, la seule constante élastique à considérer est le module d'Young, ici noté C. Afin de décrire correctement un matériau fragile, la quantité C, vue comme une fonction du paramètre d'endommagement d, également unidimensionnel dans ce contexte, doit satisfaire un certain nombre de conditions qui sont résumées ci-dessous :

$$C(d) > 0 \quad , \quad C'(d) < 0 \quad , \quad C''(d) > 0 \quad , \quad S''(d) > 0 \tag{9.57}$$

où S est la souplesse macroscopique simplement égale à $\frac{1}{C}$ dans un problème unidimensionnel. La condition portant sur la dérivée seconde de la requise est essentielle pour garantir que l'élasticité tangente C_t, qui est égale à :

$$C_t(d) = C(d) - \frac{2C'(d)^2}{C''(d)} \tag{9.58}$$

soit bien une quantité négative. Puisqu'un modèle doit être choisi pour traduire la dépendance de l'élasticité vis à vis de la variable d'endommagement, nous choisirons le modèle inspiré de Ponte-Castaneda et Willis (PCW) :

$$C(d) = C_0 \frac{1 + Qd}{1 + Q'd} \qquad \text{où} \qquad Q \leq 0 \leq Q' \tag{9.59}$$

Avec ce genre de description, la valeur maximale que peut prendre d est $-\frac{1}{Q}$. Lorsque ce niveau d'endommagement est atteint, l'élasticité tend vers 0 ce qui signifie que le matériau

n'est plus capable de reprendre des efforts. En une dimension, un tel phénomène est interprété comme la ruine de la structure. Le choix du modèle PCW a plusieurs vertus. Celui-ci permet en effet de retrouver facilement un schéma dilué ou un schéma de Mori-Tanaka en prenant $Q' = 0$ ou $Q = 0$ respectivement. Bien évidemment, le modèle PCW est en adéquation avec les relations (9.57) :

$$C'(d) = \frac{Q - Q'}{(1 + Q'd)^2} \quad , \quad C''(d) = -2\frac{Q'(Q - Q')}{(1 + Q'd)^3} \quad , \quad S''(d) = -2\frac{Q(Q' - Q)}{(1 + Qd)^3} \tag{9.60}$$

Une propriété remarquable est que l'élasticité tangente est constante et égale à :

$$C_t(d) = C_0\frac{Q}{Q'} \tag{9.61}$$

qui est bien une quantité négative. Les diverses propriétés obtenues seront illustrées avec un modèle PCW. Enfin, le matériau considéré sera fragile. Cela signifie que la dissipation, associée à la dégradation des propriétés élastiques d'une cellule élémentaire de longueur l et se traduisant par une augmentation de l'état d'endommagement de la valeur d à $d + \delta d$, vaut $d\mathcal{D} = lg_c\delta d$. Pour un tel matériau, le critère d'endommagement s'écrit :

$$-\frac{1}{2}C'(d)\varepsilon^2 \leq g_c \tag{9.62}$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour tous les points de la structure. Bien entendu, un processus d'endommagement ne peut être amorcé que si l'inégalité précédente est saturée.

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad -\frac{1}{2}C'(d)\varepsilon^2 < g_c \quad \text{alors} \quad \dot{d} = 0 \\ &\text{Si} \quad -\frac{1}{2}C'(d)\varepsilon^2 = g_c \quad \text{alors} \quad \dot{d} \geq 0 \end{aligned} \tag{9.63}$$

9.4.2 Problématiques associées à un modèle unidimensionnel

Fort des ces différents considérations, nous sommes à même de mettre en lumière un certain nombre de points devant impérativement être gardés à l'esprit lorsqu'un problème d'endommagement unidimensionnel est abordé de manière quasi-statique puisqu'il s'agit du cadre usuel d'analyse de ce problème dans la littérature. Comme mentionné précédemment, nous allons nous intéresser au problème où le déplacement est imposé aux deux extrémités d'un barreau unidimensionnel de longueur L. L'extrémité repérée par l'abscisse $x = 0$ sera encastrée tandis que celle située en $x = L$ aura un déplacement imposé ξ^d comme illustré sur la Figure 9.1.

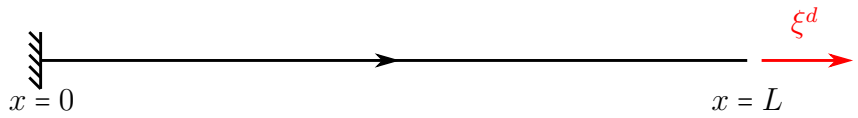

FIGURE 9.1 – Barreau unidimensionnel avec déplacements imposés

Régularité de la variable endommagement

La première remarque est que l'endommagement dans un cadre unidimensionnel doit nécessaire être une quantité présentant des discontinuités, et ce, dès que l'évolution considérée

n'est pas homogène. En effet, avec l'aide de la loi de comportement, le critère (9.63) se réécrit :

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad \frac{1}{2}S'(d)\sigma^2 &< g_c \quad \text{alors} \quad \dot{d} = 0 \\ \text{Si} \quad \frac{1}{2}S'(d)\sigma^2 &= g_c \quad \text{alors} \quad \dot{d} \geq 0 \end{aligned} \tag{9.64}$$

L'équilibre d'un problème unidimensionnel chargé uniquement à ses extrémités se traduit par le faite que la contrainte σ doit être constante. Par conséquent, la quantité $\frac{1}{2}S'(d)\sigma^2$ qui est cruciale pour le critère ne dépend de la position spatiale que par le biais de la variable d'endommagement d. De plus, les considérations de signe sur l'élasticité et ses dérivées (9.57) mènent au fait que la dérivée de la souplesse S' est un fonction strictement croissante de d. Par conséquent, comme il n'est pas possible d'aboutir à une situation où $\frac{1}{2}S'(d)\sigma^2 > g_c$, le critère (9.64) signifie que les seuls endroits où il est possible d'endommager la structure sont les points où d atteint sa valeur maximale, c'est à dire en des points x tels que $d(x) = \max_{[0,L]} d$. Soit alors par exemple une structure pré-endommagée avec un champ d'endommagement d

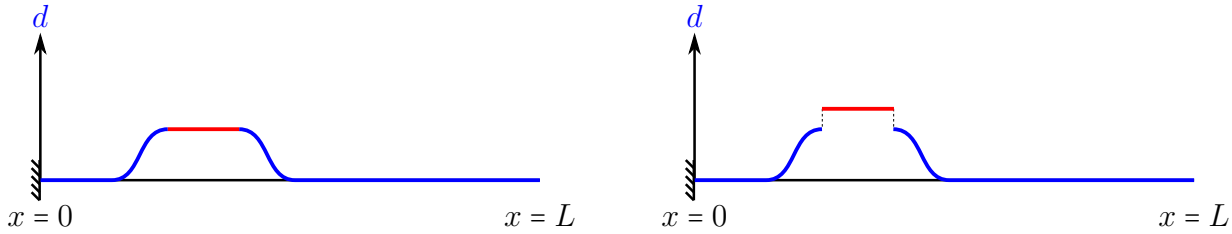

FIGURE 9.2 – Exemple d'un champ d'endommagement initialement C^1 devenant discontinu au cours d'un processus endommageant

initialement régulier comme illustré sur la Figure 9.2. Imaginons que le chargement augmente jusqu'à ce que le critère soit saturé en au moins un point. Étant donné la réflexion précédente, le critère sera en fait saturé pour tous les points où d atteint son maximum sur la structure, correspondant à la zone en rouge sur l'illustration proposée. Par conséquent, si l'endommagement varie, alors seul un sous ensemble de la zone en question pourra être associé à $\dot{d} > 0$ (la Figure 9.2 montre le cas où toute la zone où d est maximum s'endommage, ce qui, notons le, n'est pas nécessairement le cas). Le fait remarquable est que, en ces points, la variation d'endommagement est prescrite et même constante. En effet, la loi de comportement :

$$\sigma = C(d)\,\varepsilon \tag{9.65}$$

indique que puisque le niveau d'endommagement est le même pour tous les points saturant le critère, alors il en va de même pour le niveau de déformation. De plus, là où $\dot{d} > 0$, la relation de consistance, correspondant à la dérivée temporelle de $-\frac{1}{2}C'(d)\varepsilon^2 + g_c = 0$ et imposant le fait que dans le nouvel état endommagé le critère doit encore être vérifié, s'écrit après simplification :

$$C''(d)\,\varepsilon\dot{d} + C'(d)\,\dot{\varepsilon} = 0 \tag{9.66}$$

Enfin, la loi de comportement (9.65) écrite en vitesse combinée à (9.66) devient :

$$\dot{\sigma} = \left(C(d) - \frac{2C'(d)^2}{C''(d)}\right)\dot{\varepsilon} \tag{9.67}$$

qui est une relation justifiant, au passage, le statut de tenseur tangent de la quantité C_t introduite en (9.58). Puisque l'évolution considérée est quasi-statique, $\dot{\sigma}$ est également une constante. Ainsi, là où d augmente, $\dot{\varepsilon}$ a une valeur fixée et donc $\dot{d}$ également en raison de

(9.66). Au terme de ces différentes considérations, nous venons de montrer que le critère d'endommagement ne pouvait être saturé qu'en des points où d atteint sa valeur maximale. Mais également, il a été établi que là où l'endommagement variait, il augmentait en fait uniformément. Par conséquent, un profil initialement continu, par exemple comme celui proposé Figure 9.2, conduit nécessairement à un profil discontinu. Il est donc important de garder à l'esprit pour la suite qu'il est tout à fait normal, et même obligatoire, de considérer des évolutions où d présente des discontinuités.

Mesure de la région où $\dot{d} > 0$

Nous allons maintenant nous attacher à justifier le fait que dans un modèle d'endommagement quasi-statique pour une barre unidimensionnelle constituée d'un matériau fragile, il est obligatoire que la zone où un processus d'endommagement est activé, et où donc $\dot{d} > 0$, soit d'une taille supérieure à une certaine longueur dépendant de L et du modèle considéré. Ce résultat peut paraître extrêmement choquant puisque les phénomènes de localisation sont au cœur même des débats concernant les matériaux endommageables et sont à l'origine des fortes dépendances au maillage observées par la communauté.

Supposons que l'expérience soit pilotée de sorte à imposer un déplacement ξ^d croissant (ie avec $\dot{\xi}^d \geq 0$). Une dernière relation qui n'a pas encore été exploitée à ce stade est la relation de compatibilité géométrique. Celle-ci demande :

$$\xi^d = \int_0^L \varepsilon(x)\ dx \tag{9.68}$$

Étant donné la loi de comportement (9.65) et le caractère constant de σ, l'équation précédente devient :

$$\xi^d = \sigma \int_0^L \frac{dx}{C(d(x))} \tag{9.69}$$

Supposons qu'un certain niveau de chargement soit atteint de manière à ce que le critère d'endommagement soit saturé sur une certain région de l'espace. Supposons de plus qu'en augmentant le déplacement imposé, une zone de longueur l appartenant à la dite région s'endommage. Une propriété intéressante d'un problème unidimensionnel est qu'il est possible d'interchanger des portions du barreau de tailles arbitraires sans aucunement modifier le comportement. Par conséquent, il n'est pas restrictif de supposer que la zone où d augmente correspond au segment $[0, l]$. Sachant que la loi de comportement en vitesse s'écrit alors comme (9.67) sur $[0, l]$ et tout simplement $\dot{\sigma} = C(d)\,\dot{\varepsilon}$ sur $[l, L]$, la relation de compatibilité géométrique écrite en vitesse devient :

$$\dot{\xi}^d = \dot{\sigma}\left(\int_0^l \frac{dx}{C_t(d(x))} + \int_l^L \frac{dx}{C(d(x))}\right) \tag{9.70}$$

Les considérations sur le module élastique ainsi que ses dérivées (9.60) permettent de statuer sur le signe des différentes quantités. Par exemple, une fois associées à la loi de comportement (9.65) et la relation de compatibilité géométrique (9.69), il est constaté de manière immédiate que le signe de ε est partout le même que celui de ξ^d et est donc par conséquent positif. Également, sachant que $\dot{d}$ est une quantité positive, la règle de consistance (9.66) permet d'affirmer que $\dot{\varepsilon}$ est strictement positif là où d augmente. Enfin, sachant que le tenseur tangent est une quantité négative, la loi de comportement écrite en vitesse en un point s'endommageant (9.67) entraîne la négativité de $\dot{\sigma}$. Puisque l'expérience est réalisée de telle sorte à avoir $\dot{\xi}^d > 0$, la relation (9.70) entraîne une condition nécessaire (et suffisante) qui est

l'inégalité suivante :

$$\int_0^l \frac{dx}{C_t\left(d\left(x\right)\right)} + \int_l^L \frac{dx}{C\left(d\left(x\right)\right)} < 0 \tag{9.71}$$

qui implique le tenseur de souplesse tangent de la structure. Les mêmes considérations de signe (9.60) conduisent au fait que la première intégrale figurant dans l'inégalité (9.71) est une quantité strictement négative tandis que la seconde est une quantité strictement positive, et ce quel que soit l. Par conséquent, la somme des deux intégrales est une fonction strictement décroissante de l. Sachant qu'il s'agit d'une quantité strictement positive pour $l = 0$, il est clair que l ne peut pas être choisi arbitrairement petit. Pour mieux illustrer ce propos, prenons par exemple le cas d'un modèle PCW et supposons que le barreau était initialement homogène et sain (ie que $d = 0$ partout). La condition (9.71) devient alors :

$$l\frac{Q'}{Q} + \left(L - l\right) < 0 \Leftrightarrow l > \frac{QL}{Q - Q'} = l_{min} \tag{9.72}$$

Sachant qu'il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour exhiber une solution admissible, une première remarque est qu'il existe effectivement une infinité de solutions au problème posé. Le point par contre très frappant est que l a une taille minimiale et qu'il n'est donc pas possible de localiser. pour être plus précis, puisqu'il est possible d'interchanger des portions de barreaux à loisir, il est effectivement autorisé de considérer des évolutions où l'endommagement des zones où l'endommagement augmente sur des zones de taille arbitrairement petites. Cependant, la somme de la mesure de ces zones doit au final être plus grande que la taille minimale l_{min}. Sans remettre en cause les phénomènes de localisation observés par la communauté scientifique dans des cas divers, l'analyse qui vient d'être présentée questionne toutefois le bienfondé de la notion de localisation dans un problème d'évolution quasi-statique d'une barre unidimensionnelle. Enfin, notons tout de même qu'une évolution où $l = l_{min}$ conduit à considérer un tenseur de souplesse de la structure nul où $\dot{\sigma}$ n'est pas relié à l'incrément de chargement $\dot{\xi}^d$.

Conditions initiales sans solutions

Une dernière remarque, rejoignant celle formulée précédemment, concerne l'évolution d'une structure pré-endommagée. En effet, considérons une structure présentant dans son état de référence un endommagement initial tel que $d = d_0 > 0$ sur un certain intervalle $[0, l']$ et $d = 0$ ailleurs. La relation (9.70) conduit à :

$$\frac{l}{C_t\left(d_0\right)} + \frac{l' - l}{C\left(d_0\right)} + \frac{L - l'}{C\left(0\right)} < 0 \tag{9.73}$$

où cette fois-ci l est astreint à être inférieur ou égal à l'. Par conséquent, si l' est suffisamment petit, il ne sera tout simplement pas possible d'exhiber une évolution solution au problème considéré. Il y a donc ici un petit paradoxe qui est que les problèmes d'endommagement sont connus pour avoir une infinité de solutions et nous tombons ici dans un cas où il ne semble n'y en avoir aucune.

9.5 Construction d'un exercice académique

9.5.1 Remarque introductive

La notion de localisation signifie qu'il est possible de considérer des zones de mesure arbitrairement petite où l'endommagement peut augmenter, conduisant ainsi à une dissipation

nulle. Le principe même d'un endommagement se localisant sur une région arbitrairement petite est dérangeant. En effet, il est nécessaire de se rappeler que la variable d'endommagement est en fait une mesure d'un phénomène microscopique comme par exemple une augmentation de la porosité ou de la densité de microfissures. Par conséquent, une façon naturelle de donner un fondement physique à la variable d'endommagement consiste à la définir à travers un processus d'homogénéisation. Une implication forte d'un tel énoncé est que l'endommagement n'est pas une quantité définie pour toutes les échelles d'espace. Plus être plus précis, elle n'est pas définie à une échelle plus petite que la taille caractéristique d'un VER, soit au moins un ordre de grandeur plus grand que les hétérogénéités. Par conséquent, il est légitime de questionner le sens qui est donné à un phénomène de localisation puisque celui requiert implicitement de pouvoir justifier d'une quantité comme étant locale, et ce, quelle que soit l'échelle considérée. En effet, travailler sur des régions de plus en plus petites revient à zoomer de plus en plus et donc à se rapprocher de l'échelle d'espace inférieure. Par conséquent, à un moment donné, le niveau de zoom sera tel que l'échelle d'espace considérée sera directement celle de la microstructure. Pour autant, un phénomène de localisation demande d'être capable de donner également un sens à la variable endommagement à ce niveau de description et de lui laisser la possibilité de prendre des valeurs différentes en des points distincts à cette échelle d'espace. Ce n'est justement pas le cas de la variable d'endommagement qui, encore une fois, n'est définie qu'à des échelles supérieures à celle des hétérogénéités. En résumé, si l'on descend à l'échelle de la microstructure, la notion d'endommagement n'a plus de sens, de sorte que la localisation, si elle se produit, ne peut impliquer une région de taille caractéristique inféieure à celle du VER. Pour illustrer un peu

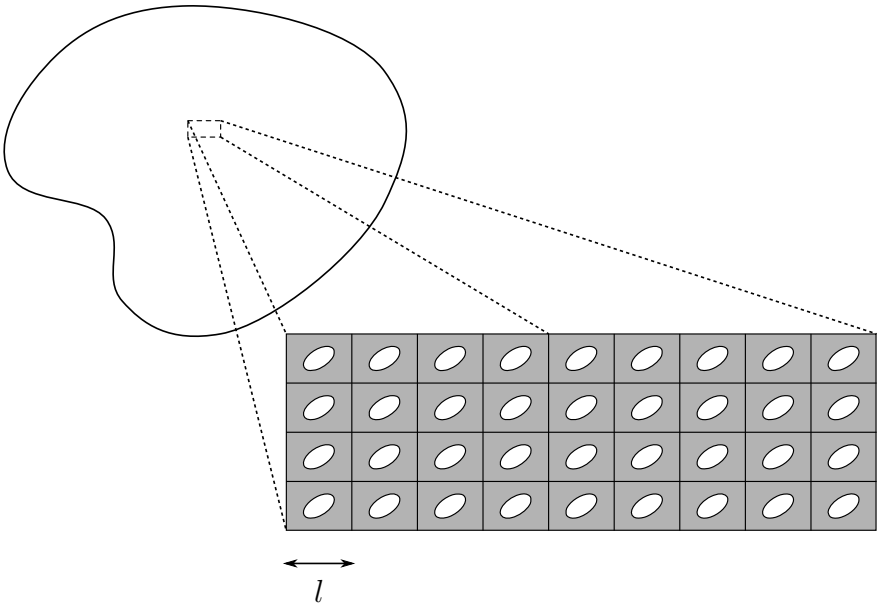

FIGURE 9.3 – Exemple de mécanisme d'endommagement où la porosité dans une cellule de base donnée peut augmenter

mieux notre propos, supposons que la microsctructure soit organisée comme sur la Figure 9.3 et que le sens donné à la variable d'endommagement est la taille du pore contenu dans une cellule de base. Travailler sur une zone arbitrairement petite signifie pouvoir travailler sur un volume plus petit que la cellule de base. Par conséquent, le phénomène de localisation demande d'être capable de donner des valeurs d'endommagement différentes en des points appartenant à la même cellule de base, ce qui bien entendu ne présente pas beaucoup de sens. De manière générale, il est toujours délicat de considérer des volumes, des surfaces ou des courbes macroscopiques dont la mesure tend vers 0 au sens mathématique du terme

puisque la taille minimale pouvant être considérée est bien celle du VER où les différentes quantités ont été définies.

Avec ces considérations, il semble que le cadre mathématique dans lequel est abordé un problème d'endommagement est dès l'origine quelque peu vicié puisqu'il autorise la variable d'endommagement à être locale à toutes les échelles. Pour les autres grandeurs manipulées, telles que par exemple la déformation, un tel cadre mathématique ne pose pas de problème puisque celles-ci ne tendent pas à se concentrer en un point et ont un comportement régulier (dans le cas contraire, la situation peut cependant être gérée facilement mathématiquement). Cependant, dans le cas de l'endommagement, les comportements constatés montrent justement que le cadre mathématique utilisé est insuffisamment contraint.

9.5.2 La variable endommagement

Avec les différentes considérations qui ont été tenues, il existe une autre propriété de la variable d'endommagement qui n'a pas été exploitée. En effet, il semble désormais clair que d n'est pas une quantité locale à toutes les échelles. Mais également, puisqu'il s'agit d'une grandeur définie à l'aide d'un processus d'homogénéisation, elle doit donc prendre une valeur constante en tout point de l'espace appartenant au VER à partir duquel elle a été définie. Cela est illustré parfaitement dans l'exemple proposé Figure 9.3 où l'endommagement correspondant au volume d'un pore dans une cellule de base. Ainsi, l'endommagement est une quantité qui doit être constante sur une région de taille l qui correspond à la dimension d'un VER et est donc reliée à l'emprise spatiale du mécanisme d'endommagement microstructurel considéré. Fort de ces différentes remarques, la bonne description mathématique de l'espace auquel appartient la grandeur d n'est pas une chose aisée. De plus, il est d'ailleurs assez confus de comprendre à quelle échelle d'espace il est nécessaire de décrire la structure.

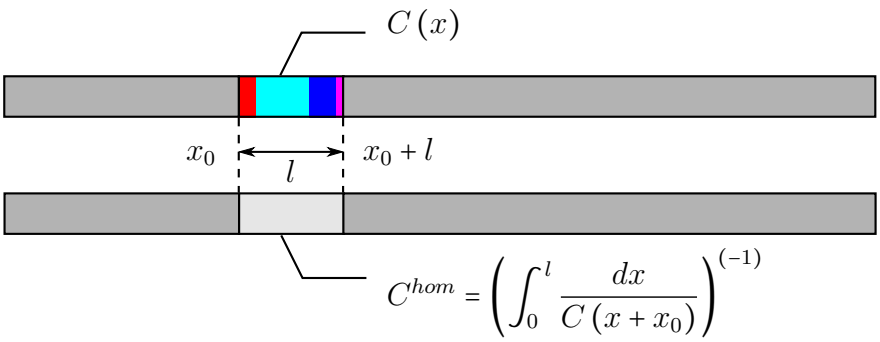

FIGURE 9.4 – Exemple d'une portion hétérogène d'un barreau remplacée par une portion d'élasticité homogène

Toutefois, il est possible de construire un cadre plus en accord avec la nature de l'endommagement que nous venons de décrire dans le cas unidimensionnel. En effet, nous avons vu que dans ce type de problème les contraintes étaient constantes. Par conséquent, en considérant un barreau hétérogène, il est possible de remplacer n'importe quelle région de ce barreau par une partie de même dimension aux propriétés élastiques cette fois-ci homogènes. Pour ce faire, il suffit de considérer une souplesse homogénéisée sur cette région correspondant simplement à la moyenne de la souplesse hétérogène (voir Figure 9.4). En d'autres termes, il est possible d'homogénéiser n'importe quelle portion du barreau sans avoir à recourir à des hypothèses de périodicités ou à des hypothèses de séparation d'échelle. Il s'agit d'ailleurs d'une explication au phénomène observé en Annexe C.3 où il était montré qu'il n'y avait pas de correctif au delà de l'ordre 0 pour un barreau unidimensionnel dans un cadre quasi-périodique. Cela semble tout à fait normal puisque grâce au fait que la contrainte σ est

constante sur le barreau, l'homogénéisation correspondant à l'ordre 0 est rigoureusement exacte et qu'il n'y a, par conséquent, aucune raison d'y ajouter des correctifs. Pour revenir au cas d'intérêt, nous allons maintenant utiliser cette propriété pour essayer de construire un cadre mathématique spécifique, compatible avec la nature de l'endommagement. Supposons que dans le cas unidimensionnel, l'endommagement soit la traduction d'un mécanisme microscopique se déployant sur une région de taille l. Par conséquent, il est possible de remplacer la portion du barreau où ce mécanisme agit par une portion de même dimension l ayant des propriétés élastiques homogènes et dépendant d'une quantité d qui est constante sur l'intervalle considérée. En utilisant ce procédé par portions successives sur l'intégralité du barreau, il est obtenu une variable d'endommagement qui est une fonction en escalier avec des intervalles fixés de taille l. Chaque intervalle correspond en fait à une portion du barreau qui a été remplacée par une brique élémentaire de même taille où l'élasticité est constante. A ce titre, ils porteront le nom de cellule de base. Cet espace fonctionnel pour

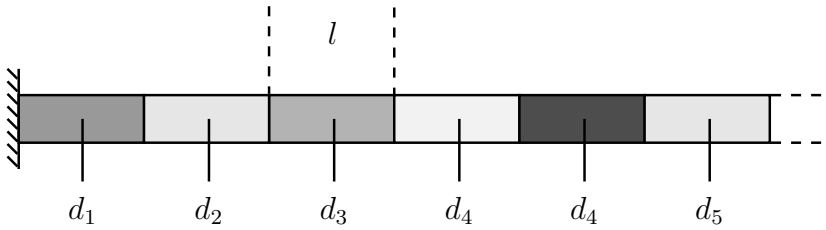

FIGURE 9.5 – Construction d'une variable d'endommagement constante par morceaux avec des intervalles fixés de longueur l

la variable d est effectivement en accord avec la nature de l'endommagement puisqu'il n'est alors pas possible de la considérer comme locale à toutes les échelles. Notons qu'avec cette définition, l'endommagement est par nature une grandeur discontinue. Ceci n'a rien de choquant en raison du commentaire formulé à la Sous-section 9.4.2 qui précise que même dans le cas classique l'endommagement est voué à être, ou à devenir, une quantité discontinue. Cependant, il est clair que le modèle proposé n'est pas entièrement satisfaisant. D'une part il introduit de manière explicite la taille du VER et il serait légitime de se demander quel serait la cohérence d'un VER plus grand. Il s'agit effectivement là d'une critique recevable mais qui aurait pu être déjà formulée dans l'approche quasi-périodique du Chapitre 8 puisque le taille de la cellule de base l figure explicitement dans les correctifs proposés. De plus, il est légitime de se demander quelle est la généralité à donner à cette description puisque celle-ci repose sur la propriété intimement unidimensionnelle qui permet d'homogénéiser toute partie d'un barreau. Toutefois, ce choix d'espace fonctionnel nous a semblé être le plus à même de respecter la nature de l'endommagement comme étant une quantité issue d'un processus d'homogénéisation et qui, dans le contexte 1D, est appelée à être non continue. De plus, le problème que nous sommes sur le point de traitr permet de retrouver, dans un contexte très simple et complètement épuré, des sensations très proches de celles obtenues avec des modèles régularisés. Ainsi, il s'agit d'un exercice académique dans le sens où il ne possède pas de généralité mais possède toute de même un intérêt très fort puisqu'il va permettre de nous positionner vis à vis d'un certain nombre de résultats établis.

9.5.3 Évolutions depuis l'état homogène

Le problème considéré sera à nouveau celui de la Figure 9.1 où un barreau unidimensionnel de longueur L est chargé en déplacement à ses deux extrémités et où des évolutions quasi-statiques sont considérées. Il est cependant cette fois ci supposé que la barre est constituée de N cellules élémentaires sur lesquelles opèrent les mécanismes d'endommagement et

où, par conséquent, l'endommagement prend une valeur constante (voir Figure 9.5). Sachant que la contrainte est constante dans la barre et que l'élasticité est constante sur chaque cellule de base, la loi de comportement (9.65) implique que la déformation ε est également constante sur chaque intervalle considéré. Afin de pouvoir décrire l'état dans lequel se trouve la barre, il est nécessaire et suffisant de considérer une liste de couples (ε_i, d_i) représentant la déformation et le niveau d'endommagement dans la cellule élémentaire i. Si ces cellules sont de taille donnée l, alors la taille totale de la barre est $L = Nl$ et la relation de compatibilité géométrique (9.69) devient :

$$\xi^d = \int_0^L \varepsilon(x)dx = l\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \tag{9.74}$$

Niveau de chargement critique

En partant d'un état où chaque cellule présente un niveau d'endommagement nul, la relation entre la contrainte σ et la déformation est :

$$\forall i \quad : \quad \sigma = C(0)\varepsilon_i \tag{9.75}$$

et l'état considéré est en fait homogène. Une fois introduites dans (9.74), ces relations aboutissent à la relation entre σ et $\frac{\xi^d}{l}$ suivante :

$$\frac{\xi^d}{l} = \frac{N}{C(0)}\sigma \tag{9.76}$$

L'utilisation de (9.76) et du critère d'endommagement (9.63) aboutit au fait que le processus d'endommagement peut démarrer dès lors que le chargement atteint un niveau ξ^{d^*} définit par :

$$\xi^{d^*} = Nl\sqrt{-\frac{2g_c}{C'(0)}} \tag{9.77}$$

Lorsque le niveau de chargement atteint ξ^{d^*}, il est possible pour un certain nombre de cellules élémentaires (voir même pour l'intégralité d'entre elles) d'amorcer un processus d'endommagement.

Évolutions où p cellules s'endommagent

Soit p le nombre de telles cellules, qui par conséquent est un entier naturel inférieur ou égal à N. Sans perte de généralité, il est possible de supposer que les cellules qui s'endommagent lorsque le chargement dépasse ξ^{d^*} sont les p premières. Puisque pour les cellules élémentaires en question, le critère d'endommagement (9.62) est nécessairement atteint et que le niveau de contrainte est constant sur toute la structure, alors, d'après (9.64), le niveau d'endommagement des p premières cellules doit être le même. Sa valeur commune, à un instant donné, est simplement notée d_t. Par conséquent, leur niveau de déformation est également identique et est noté ε_p. La relation contrainte-déformation prise en vitesse, c'est-à-dire dérivée par rapport au temps, donne :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq p & : \quad \dot{\sigma} = C(d_t)\dot{\varepsilon_p} + C'(d_t)\varepsilon_p\dot{d}_t \\ p+1 \leq i \leq N & : \quad \dot{\sigma} = C(0)\dot{\varepsilon}_i \end{cases} \tag{9.78}$$

La relation de consistance (9.66) devient ici :

$$C''(d_t)\varepsilon_p\dot{d}_t + 2C'(d_t)\dot{\varepsilon_p} = 0 \tag{9.79}$$

En se basant sur les propriétés (9.57), il vient de manière immédiate que pour garantir un taux d'accroissement de l'endommagement $\dot{d}_t$ positif, il est nécessaire que le taux de déformation $\dot{\varepsilon_p}$ soit lui négatif. La relation de consistance (9.79) et l'écriture en vitesse de la loi de comportement (9.78) donnent le lien entre le taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ et le taux de contrainte $\dot{\sigma}$:

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq p & : \quad \dot{\sigma} = C_t \dot{\varepsilon}_p \\ p+1 \leq i \leq N & : \quad \dot{\sigma} = C(0)\dot{\varepsilon}_i \end{cases} \qquad \text{où} \qquad C_t(d_t) = C(d_t) - \frac{2C'(d_t)^2}{C''(d_t)} < 0 \tag{9.80}$$

La relation de compatibilité géométrique écrite en vitesse (9.70) devient dans ce cadre :

$$\frac{\dot{\xi}^d}{l} = \dot{\sigma}\left(\frac{p}{C_t} + \frac{N-p}{C(0)}\right) \tag{9.81}$$

Avec les mêmes considération de signe que celles tenues dans la Sous-section 9.4.2, il est immédiat de montrer qu'une évolution quasi-statique où le chargement augmente $\dot{\xi}^d > 0$ n'est acceptable que si la quantité $\frac{p}{C_t} + \frac{N-p}{C(0)}$ est également négative. L'équivalent de la condition obtenue dans le cas classique (9.71) est ici que p doit être suffisamment grand pour pouvoir décrire une évolution endommageante quasi-statique. En d'autres termes, la taille de la structure doit être comparée à la taille microscopique l.

En utilisant le modèle PCW, notons p_{min} le plus petit entier tel que le tenseur de souplesse tangent de la structure donné par (9.81) soit négatif. Un tel entier satisfait donc les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{Q'}{Q} p_{min} + (N - p_{min}) & \leq \quad 0 \\ \dfrac{Q'}{Q}(p_{min} - 1) + (N - p_{min} + 1) & > \quad 0 \end{cases} \tag{9.82}$$

A l'exception de quelques cas pathologiques, il est supposé que cette quantité est en fait strictement négative pour p_{min}.

$$\frac{Q'}{Q} p_{min} + (N - p_{min}) < 0 \tag{9.83}$$

Puisque p_{min} est un entier, être égal à zéro requiert une propriété très particulière sur Q et Q' qui n'a aucune raison a priori d'être vérifiée. Être capable de définir de cette façon p_{min} tout en assurant le caractère stricte de la négativité du tenseur de souplesse de souplesse est fortement lié au fait que la variable d'endommagement n'est pas une quantité locale à toutes les échelles d'espace, ce qui constitue le point essentiel de la démarche proposée. En effet, l'équivalent de p_{min} dans le cas classique est la quantité l_{min} définie en (9.72) pour laquelle la souplesse tangente de la structure est en fait rigoureusement égale à zéro. Par conséquent, les propriétés de l_{min} ne seraient pas aussi remarquables que celles sur le point d'être présentées concernant p_{min}. Une autre remarque intéressante est que p_{min} ne dépend pas du niveau d'endommagement d. Ceci est bien évidement dû au modèle choisi puisque celui-ci fournit un tenseur d'élasticité tangent ne dépendant pas du niveau d'endommagement d.

Pour que l'évolution soit quasi-statique, il a été montré que le nombre de cellule de base p où le processus d'endommagement est activé au delà du chargement critique ξ^{d*} depuis un état homogène doit être supérieur ou égal à p_{min} (9.82). Pour un tel entier p, il est alors possible de considérer une évolution où seule les p premières cellules s'endommagent, et ce, pour tout niveau de chargement ξ^d supérieur à ξ^{d*}. La section précédente a permis de montrer qu'une telle évolution vérifie :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq p & : \quad d_i = d \\ p+1 \leq i \leq N & : \quad d_i = 0 \end{cases} \tag{9.84}$$

Par conséquent, l'évolution homogène (correspondant au cas $p = N$) n'est pas unique dès que la barre est faite de deux cellules de base ou plus. Ainsi, l'unicité n'est obtenue que dans le cas $L = l$. Ce résultat est similaire à celui obtenu par Pham et collab. [2011] avec des modèles d'endommagement à gradient. Grâce aux relations (9.76), (9.79), (9.80) et (9.81), il vient :

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\dfrac{p}{C_t(d)} + \dfrac{N-p}{C(0)}} \frac{\dot{u}}{l} \quad , \quad \dot{d} = -\frac{2C'(d)}{C''(d)} \frac{C(d)\left(\dfrac{p}{C(d)} + \dfrac{N-p}{C(0)}\right)}{C_t(d)\left(\dfrac{p}{C_t(d)} + \dfrac{N-p}{C(0)}\right)} \frac{\dot{u}}{u} \tag{9.85}$$

Les résultats obtenus avec un modèle d'endommagement de type PCW sont donnés Figure 9.6. Ainsi, même si le bon espace mathématique est exploré (qui correspond aux fonctions en escalier avec des intervalles fixés), l'évolution homogène n'est pas la seule possible et il n'y a pas unicité de la réponse du système. Pour des barres suffisamment grandes, il est en effet possible de construire différentes évolutions quasi-statiques où seules p cellules de base s'endommagent. Ces évolutions doivent être comparées aux états localisés obtenus dans les

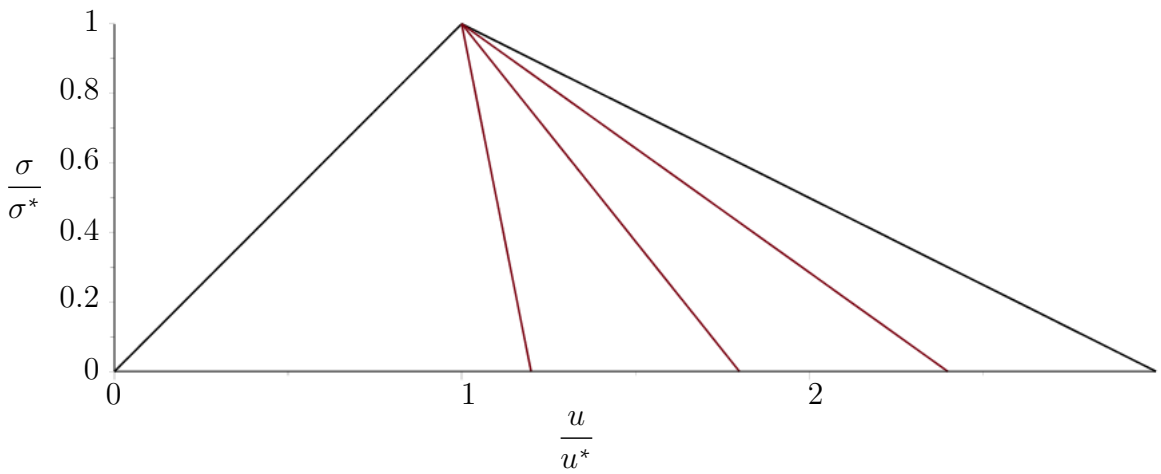

FIGURE 9.6 – Réponse de la structure pour des évolutions quasi-statiques avec $p \geq p_{min}$. $N = 10, Q = -0.2, Q' = 1., g_c = 1.$. Courbe noire : état homogène. Courbe inférieure : $p = 4 = p_{min}$

modèles locaux. Le comportement décrit dans ce travail présente de nombreuses similarités avec celui donné par exemple par Pham et Marigo [2013a] puisque là aussi il est nécessaire de considérer un nombre minimum de zones localisées pour pouvoir considérer une évolution.

Par conséquent, la problématique survenant immédiatement est de savoir quelle sera l'évolution qui décrira correctement un expérience où le niveau de chargement dépasse ξ^{d^*} ? De même, une question rejoignant celle concernant l'absence de solution dans certains cas est de savoir comment considérer une évolution $p < p_{min}$?

Bifurcation depuis une évolution

Dans un premier temps, l'existence d'une bifurcation depuis l'une des évolutions proposées doit être démontrée. Pour une évolution où $p \geq p_{min}$ cellules élémentaires s'endommagent au delà de ξ^{d^*} et atteignent un niveau d_0, regardons s'il est possible de bifurquer vers une autre évolution quasi-statique. Le critère d'endommagement (9.62) étant atteint uniquement

pour les p premières cellules, il n'est possible de bifurquer que vers une évolution où q cellules s'endommagent avec $q < p$. Une nouvelle fois, il est possible de considérer sans perte de généralité que seules les q premières cellules sont concernées. Par conséquent, la relation contrainte déformation prise en vitesse devient :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq q & : \quad \dot{\sigma} = C_t \dot{\varepsilon}_i \\ q+1 \leq i \leq p & : \quad \dot{\sigma} = C(d_0)\dot{\varepsilon}_i \\ p+1 \leq i \leq N & : \quad \dot{\sigma} = C(0)\dot{\varepsilon}_i \end{cases} \tag{9.86}$$

L'équivalent de (9.81) devient :

$$\frac{\dot{u}}{l} = \dot{\sigma}\left(\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d_0)} + \frac{q}{C_t}\right) \tag{9.87}$$

Comme mentionné précédemment, pour que l'évolution considérée soit quasi-statique, il est nécessaire que la quantité $\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d_0)} + \frac{q}{C_t}$ soit négative. Puisque l'élasticité est une fonction décroissante vis à vis du niveau d'endommagement, il vient :

$$\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d_0)} + \frac{q}{C_t} > \frac{N-q}{C(0)} + \frac{q}{C_t} \tag{9.88}$$

Il est clair qu'une telle condition ne peut pas être vérifiée si $q > p_{min}$. Cela signifie également que si l'évolution initialement suivie est celle où p_{min} cellules s'endommagement, alors il n'est pas possible de bifurquer vers une autre évolution, au moins de manière quasi-statique. Également, si p est plus grand que p_{min}, il est donc facile de montrer qu'une bifurcation est possible. La question de la stabilité d'une telle évolution se pose naturellement et sera l'objet de la prochaine Sous-section. Avant de nous y atteler, quelques remarques sur les évolutions où $p < p_{min}$ doivent être formulées.

Un mot sur les évolutions $p < p_{min}$

Il a été montré dans la Sous-section précédente que de telles évolutions ne peuvent pas exister dans un cadre quasi-statique. Cela ne signifie en revanche pas qu'elles ne peuvent pas être considérées sous un angle dynamique. Pour le chargement ξ^{d^*}, il est naturel de se demander s'il est possible d'évoluer de manière dynamique depuis l'état homogène vers d'autres états non nécessairement stables. En travaillant avec un critère de stabilité énergétique, comme ce sera le cas avec le critère de Hill dans la prochaine Sous-section (voir (9.101)), des évolutions où $p < p_{min}$ ne sont pas interdites puisque :

$$\frac{p}{C_t} + \frac{N-p}{C(0)} > 0 \tag{9.89}$$

par définition. Puisque traiter d'évolutions dynamiques ne fait pas partie des ambitions de cette Section, nous examinerons seulement si des états d'équilibres existent avec $p < p_{min}$ à un niveau de chargement ξ^{d^*}. Bien entendu, si de tels états existent, il n'existe aucune garantie que le système s'y stabilisera. En effet, il est important d'insister sur le fait que ces états peuvent être uniquement atteints de manière dynamique. La propriété d'irréversibilité de l'endommagement confère à cette grandeur un statut à part puisque, si d_0 est le niveau d'endommagement dans l'état d'équilibre exhibé, il ne sera pas possible à la variable d d'osciller autour de la valeur d_0 puis de s'y stabiliser. Si la valeur d_0 est dépassée, il ne sera plus possible par la suite du processus de s'y stabiliser. Néanmoins, ces états d'équilibre

sont toujours d'un grand intérêt et par conséquent doivent être caractérisés. Un tel état doit satisfaire aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall i \leq p \quad , \quad \varepsilon_i = \varepsilon_p \quad , \quad d_i = d \quad \text{and} \quad \sigma = C(d)\varepsilon_p \\
&\forall 1+p \leq i \leq N \quad , \quad \varepsilon_i = \varepsilon_N \quad , \quad d_i = 0 \quad \text{and} \quad \sigma = C(0)\varepsilon_N \\
&\frac{1}{2}C'(d)\varepsilon_p^2 + g_c = 0 \\
&\sigma\left(\frac{p}{C(d)} + \frac{N-p}{C(0)}\right) = \frac{\xi^{d*}}{l}
\end{aligned} \tag{9.90}$$

Parce que la souplesse est convexe (9.57), si ces conditions sont vérifiées alors l'inégalité $\frac{1}{2}C'(0)\varepsilon_N^2 + g_c \geq 0$ sera automatiquement satisfaite. Bien sûr, la solution de (9.90) est également soumise à la condition que d doit rester inférieur au niveau d'endommagement maximum admissible correspondant par exemple à $-\frac{1}{Q}$ avec un modèle PCW. La définition (9.77) permet de déduire que si une solution existe, elle doit vérifier :

$$\frac{C'(d)}{C'(0)} = \left(\frac{p}{N} + \left(1 - \frac{p}{N}\right)\frac{C(d)}{C(0)}\right)^2 \tag{9.91}$$

Lorsqu'un modèle PCW est utilisé, l'équation (9.91) devient :

$$1 = \left(1 + \left(\frac{p}{N}Q' + \left(1 - \frac{p}{N}\right)Q\right)d\right)^2 \tag{9.92}$$

qui n'admet pas de solution vérifiant $0 \leq d \leq -\frac{1}{Q}$ puisque :

$$Q < \frac{p}{N}Q' + \left(1 - \frac{p}{N}\right)Q < Q' \tag{9.93}$$

et que cette quantité est différente de 0. Le fait que les équations (9.91) n'admettent pas de solution provient du modèle utilisé. L'explication trouve son origine dans le fait que le modèle PCW prédit un tenseur d'élasticité tangent C_t constant. Plus précisément, pour pouvoir exhiber une solution, il est nécessaire que C_t décroisse vers zéro lorsque d augmente. En choisissant une élasticité dépendant de la variable d'endommagement de la façon suivante :

$$C(d) = C_0\left(\frac{1+Qd}{1+Q'd}\right)^2 \tag{9.94}$$

qui est une expression ne possédant pas à notre connaissance de base micro-mécanique, il serait alors possible de trouver des solutions aux équations (9.91). Pour les niveaux d'endommagement obtenus, il apparait que le tenseur d'élasticité tangent de la structure est négatif. En partant de l'un de ces états d'équilibre nouvellement exhibé, il est possible à nouveau d'évoluer de manière quasi-statique comme montré sur la Figure 9.7. Bien sûr, ces évolutions doivent être considérées avec beaucoup de précautions puisqu'il n'a pas été montré qu'il était possible de les atteindre avec une approche dynamique propre.

9.5.4 Critères de stabilité

Nous avons déjà détaillé en Section 9.2 quelle était la version endommageable du critère de Hill et ce dans le cas isotherme ou dans le cas adiabatique. Il existe d'autres critères de stabilité comme par exemple celui proposé dans Francort et Marigo [1993] qui lui

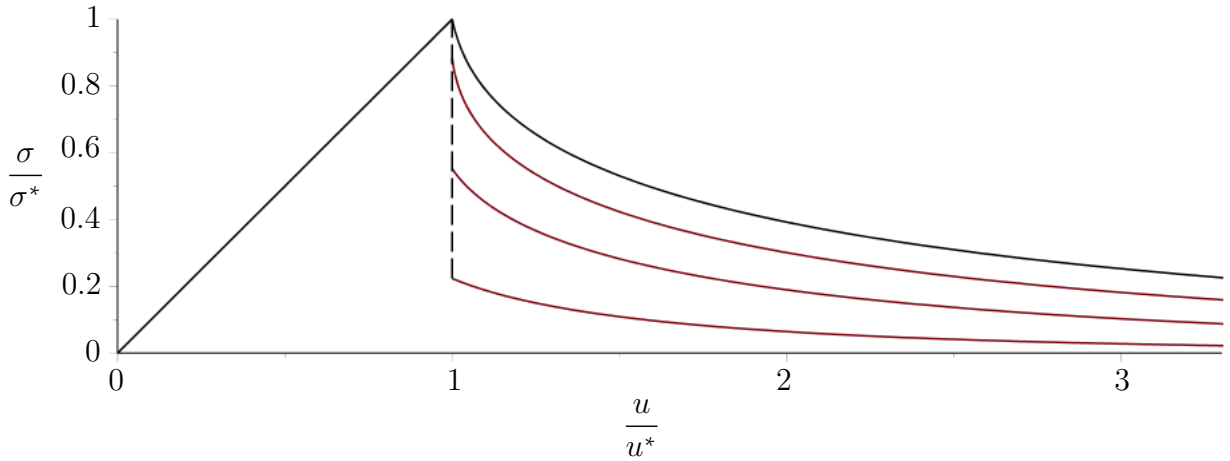

FIGURE 9.7 – Réponse de la structure pour des évolutions avec $p < p_{min}$. $N = 10, Q = -0.2, Q' = 1., g_c = 1.$. Courbe supérieure : $p = p_{min} = 4$. Courbe inférieure : $p = 1 < p_{min}$. $\sigma^\star$ est l'état de contrainte associé avec le chargement $\xi^{d^\star}$

est postulé comme étant une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Il semble donc intéressant de comparer ces deux critères et d'essayer de les ordonnancer d'un point de vue logique puisqu'il a été précisé que celui proposé par Hill n'était qu'une condition suffisante de stabilité. Puisque le critère de Marigo est proposé en isotherme, nous nous utiliserons donc également la version isotherme du critère de Hill, même s'il a été montré qu'en toute rigueur le bon critère à utiliser est la version adiabatique.

Le critère de Hill

Etant donné le chargement utilisé et le cadre mathématiques dans lequel s'inscrit le problème traité, le critère de Hill isotherme (9.25) énonce simplement qu'une condition suffisante pour qu'une position d'équilibre (ε_i, d_i) soit stable est :

$$\forall v_i \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N} v_i = 0 \qquad \text{alors} \qquad l \sum_{i=1}^{N} \delta\sigma_i v_i > 0 \tag{9.95}$$

où la variation de contrainte $\delta\sigma_i$, définie dans le cas général par (9.24), se réécrit ici sur chaque cellule comme :

$$\delta\sigma_i = C(d_i)v_i - \begin{cases} \dfrac{2C'(d_i)^2}{C''(d_i)} v_i & \text{quand} \quad \dfrac{1}{2}C'(d_i){\varepsilon_i}^2 = -g_c \quad \text{et} \quad v_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9.96}$$

Avec cette formulation, il est possible de vérifier si une évolution où p cellules de base s'endommagent vérifie cette condition suffisante de stabilité.

La stabilité d'un endommagement à p cellules

Le critère (9.95) va désormais être appliqué aux évolutions où p cellules connaissent un processus d'endommagement (voir (9.84)). En supposant que les v_i ne sont strictement positifs que sur un nombre q de cellules (nécessairement plus petit ou égal à p), le critère de Hill s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{q} C_t(d){v_i}^2 + \sum_{i=q+1}^{p} C(d){v_i}^2 + \sum_{i=p+1}^{N} C(0){v_i}^2 > 0 \tag{9.97}$$

où v_i est contraint à être positif pour $1 \leq i \leq q$. Nous allons démontrer que la condition suffisante de Hill ne peut pas être vérifiée pour les évolutions considérées. Pour pouvoir le prouver, un choix particulier des v_i est fait :

$$\begin{array}{rcl} 1 \leq i \leq q & : & v_i = \varepsilon_q > 0 \\ q+1 \leq i \leq p & : & v_i = \varepsilon_p \\ p+1 \leq i \leq N & : & v_i = -\dfrac{q\varepsilon_q + (p-q)\varepsilon_p}{N-p} \end{array} \tag{9.98}$$

qui est en effet en accord avec la règle de déformation macroscopique nulle. Une condition nécessaire pour que le critère de Hill soit vérifié est que la forme bilinéaire :

$$B(\varepsilon_p, \varepsilon_q) = qC_t(d)\varepsilon_q^2 + (p-q)C(d)\varepsilon_p^2 + C(0)\frac{(q\varepsilon_q + (p-q)\varepsilon_p)^2}{N-p} \tag{9.99}$$

doit être définie positive. En effet, la condition de signe sur ε_q n'a plus à ce stade aucune espèce d'importance puisqu'elle peut être rattrapée en changeant le signe de ε_p. Une condition nécessaire est que le déterminant de B doit être positif. Un calcul facile donne :

$$\det(B) = C(0)C(d)C_t(d)\frac{q(p-q)}{N-p}\left(\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t(d)}\right) \tag{9.100}$$

Par conséquent, une condition nécessaire pour que le critère de Hill soit vérifié est :

$$\forall q \leq p \quad , \quad \frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t(d)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-1}{C(d)} + \frac{1}{C_t(d)} < 0 \tag{9.101}$$

Avec le modèle PCW où l'élasticité tangente ne dépend pas du niveau d'endommagement d, cette inégalité ne peut pas être vérifiée dès que $p_{min} > 1$. Ainsi, un tel choix de valeurs pour les v_i montre que le critère de Hill n'est vérifié par aucune évolution avec $p \geq 2$. Ceci n'est pas forcément préjudiciable en raison du caractère uniquement suffisant et non nécessaire du critère de Hill. Ne pas respecter ce dernier signifie simplement qu'il n'est pas impossible, d'un point de vue énergétique global, de quitter un état d'équilibre sans apport extérieur d'énergie. Cela n'implique pas l'existence d'une évolution spontanée et celle-ci, si tant est qu'elle existe, reste à être construite. Une telle opération ne peut se faire sans une analyse dynamique propre.

Le critère de stabilité de Francort et Marigo [1993]

L'énergie totale telle que définie par Pham et Marigo [2010b] s'écrit dans le cas présent comme :

$$s\mathcal{P}(\varepsilon_i, d_i) = l\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}C(d_i){\varepsilon_i}^2 + g_c d_i\right) \tag{9.102}$$

où l'intégrale sur l'ensemble de la barre a été remplacée par une somme sur chaque cellule élémentaire puisque toutes les quantités sont constantes à cette échelle. Le critère proposé par Marigo est que, pour pouvoir considérer un état comme stable, il est nécessaire et suffisant de trouver un voisinage dans l'espace des états (pour une norme qui reste à définir) pour lequel toutes les évolutions dites admissibles (signifiant des évolutions vérifiant qu'en tout point le niveau d'endommagement est supérieur ou égal à celui de l'état d'équilibre) ne font qu'augmenter l'énergie totale par rapport à sa valeur dans l'état d'équilibre. Pour pouvoir utiliser un tel critère, il est nécessaire d'expliciter la forme que prend l'énergie totale pour un

état proche de celui dont la stabilité est questionnée. Une telle opération désormais classique donne les résultats suivants :

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon_i + hv_i, d_i + h\beta_i\right) = \mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right) + lh\sum_{i=1}^{N}\left(C(d_i)\varepsilon_i v_i + \left(\frac{1}{2}C'(d_i){\varepsilon_i}^2 + g_c\right)\beta_i\right) + l\frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(C(d_i){v_i}^2 + 2C'(d_i)\varepsilon_i v_i\beta_i + \frac{1}{2}C''(d_i){\varepsilon_i}^2\beta_i^2\right) + o(h^3) \tag{9.103}$$

Le critère requiert que pour tout v_i et β_i vérifiant $\sum_i v_i = 0$ et $\beta_i \geq 0$, l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon_i + hv_i, d_i + h\beta_i\right) > \mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right) \tag{9.104}$$

Cette condition est très proche de l'inégalité utilisée pour pouvoir établir le critère de Hill puisqu'il facile de vérifier dans le cadre isotherme que $\mathcal{P}\left(\varepsilon_i + hv_i, d_i + h\beta_i\right) - \mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right) = -dK$. Cependant, la différence fondamentale vient du fait qu'il n'est pas demandé aux évolutions envisagées de connaître la relation de consistance (9.79). Par conséquent, ce critère est plus restrictif que celui de Hill qui était déjà une condition uniquement nécessaire. Le côté positif est que le critère de stabilité postulé par J.-J. Marigo trouve ici une certaine validité dans le sens où les évolutions le vérifiant seront effectivement stables. Par contre, il ne semble pas correct de le prendre comme une condition nécessaire de stabilité. Avec l'analyse précédente, nous savons déjà que le critère proposé par Francort et Marigo [1993] ne sera pas vérifié pour les évolutions considérées. Essayons cependant de regarder à quel point le critère en question est effectivement plus restrictif. La condition mène au premier ordre en h à :

$$d\mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right)\left(v_i, \beta_i\right) = l\sum_{i=1}^{N}\left(C(d_i)\varepsilon_i v_i + \left(\frac{1}{2}C'(d_i){\varepsilon_i}^2 + g_c\right)\beta_i\right) \geq 0 \tag{9.105}$$

En choisissant $\beta_i = 0$ il viendrait $C(d_i)\varepsilon_i = \sigma$ où σ est une constante qui s'interprète évidemment comme l'état de contrainte. Il vient de manière évidente que :

$$\frac{1}{2}C'(d_i){\varepsilon_i}^2 + g_c \geq 0 \tag{9.106}$$

En utilisant l'item énergétique, il vient :

$$\left(\frac{1}{2}C'(d_i){u_i}^2 + g_c\right)\dot{d}_i = 0 \tag{9.107}$$

Il est clair que l'inégalité stricte :

$$d\mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right)\left(v_i, \beta_i\right) > 0 \tag{9.108}$$

ne peut pas être obtenue pour tous les (v_i, β_i) puisque l'égalité à zéro peut être obtenue si (et seulement si) les β_i sont égaux à zéro là où les cellules vérifie dans l'état d'équilibre $\frac{1}{2}C'(d_i){\varepsilon_i}^2 + g_c > 0$. Pour de tels états infiniment proches, il est nécessaire de considérer une différentielle seconde de l'énergie totale. Il vient d'être établi que les seules évolutions intéressantes à considérer étaient celles où l'endommagement augmentait là où le critère était saturé. Cette condition était triviale, le critère de stabilité proposé par Marigo porte en fait réellement sur la différentielle d'ordre 2 de la fonctionnelle énergie totale. La discussion va

désormais se porter sur une évolution où p cellules s'endommagent. Sans perte de généralité, il est à nouveau possible de supposer qu'il s'agit en fait des p premières cellules, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq p \quad &: \quad \frac{1}{2}C'(d){\varepsilon_p}^2 + g_c = 0 \\ p+1 \leq i \leq N \quad &: \quad \frac{1}{2}C'(0){\varepsilon_q}^2 + g_c > 0 \end{aligned} \tag{9.109}$$

où d et ε_p sont le niveau d'endommagement et de déformation des p cellules et où ε_q est la déformation des $N-p$ autres cellules. Grâce à la discussion précédente concernant les valeurs des β_i, seul une famille où $\beta_i = 0$ sur les $N-p$ dernières cellules est considérée. La différentielle seconde de l'énergie totale s'écrit :

$$d^2\mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right)\left(v_i, \beta_i\right) = l\left(C(d)\sum_{i=1}^{p} {v_i}^2 + 2C'(d)\varepsilon_p \sum_{i=1}^{p} v_i\beta_i + \frac{1}{2}C''(d){\varepsilon_p}^2 \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 + C(0)\sum_{i=p+1}^{N} {v_i}^2\right) \tag{9.110}$$

Pour une famille donnée de β_i, cette quantité tend vers l'infini lorsque la norme des (v_i) tend également vers l'infini. Ainsi, pour des β_i donnés, il existe un choix optimal de v_i qui permettront d'obtenir la valeur minimum de (9.110). En prenant en compte la liaison reliant les différents v_i, il vient :

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq p \quad &: \quad v_i = \frac{C'(d)}{C(d)}\varepsilon_p\left(\frac{C(0)}{C(0)p + C(d)(N-p)}\sum_{k=1}^{p}\beta_k - \beta_i\right) \\ p+1 \leq i \leq N \quad &: \quad v_i = C'(d)\varepsilon_p \frac{1}{C(0)p + C(d)(N-p)}\sum_{k=1}^{p}\beta_k \end{aligned} \tag{9.111}$$

Un tel choix des v_i est remarquable. En effet, en s'intéressant à la variation de l'état de contrainte dans chaque cellules, il vient :

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq p \quad &: \quad \delta\sigma_i = C(d)v_i + C'(d)\varepsilon_p\beta_i \\ p+1 \leq i \leq N \quad &: \quad \delta\sigma_i = C(0)v_i \end{aligned} \tag{9.112}$$

En utilisant les expressions définies par (9.111) pour les v_i, on observe que la variation de contrainte est constante. Ce résultat est très intriguant et trouvera écho à la fin de cette Sous-section. En insérant les expressions (9.111) dans (9.110) donnent :

$$d^2\mathcal{P}\left(u_i, d_i\right)\left(v_i, \beta_i\right) = l\left(\frac{C(0)}{C(d)}\frac{C'(d)^2{\varepsilon_p}^2}{C(0)p + C(d)(N-p)}\left(\sum_{k=1}^{p}\beta_k\right)^2 + \frac{1}{2}\left(C''(d) - \frac{2C'(d)^2}{C(d)}\right){\varepsilon_p}^2\sum_{k=1}^{p}\beta_k^2\right) \tag{9.113}$$

Puisque les β_i sont tous positifs, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^{p}\beta_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p}\beta_k\right)^2 \tag{9.114}$$

Avec cet équivalent du calcul des variations, nous avons désormais à notre disposition une borne inférieure atteinte de la seconde variation de l'énergie totale :

$$d^2\mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right)\left(v_i, \beta_i\right) \geq \frac{l{\varepsilon_p}^2 C(0)C''(d)C_t(d)}{2\left(pC(0) + (N-p)C(d)\right)}\left(\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-1}{C(d)} + \frac{1}{C_t(d)}\right)\left(\sum_{k=1}^{p}\beta_k^2\right) \tag{9.115}$$

Par conséquent, vérifier la positivité du membre de droite est une condition suffisante permettant d'assurer que le critère de stabilité proposé par J.-J. Marigo soit vérifié. Il est possible

de montrer qu'il s'agit en fait d'une condition nécessaire. Cependant, le caractère suffisant est à ce stade suffisant pour pouvoir conclure. Ainsi, une condition suffisante est que :

$$\forall q \leq p \quad , \quad \frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t(d)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-1}{C(d)} + \frac{1}{C_t(d)} < 0 \tag{9.116}$$

Un résultat remarquable est que la condition suffisante obtenue et permettant de vérifier le critère de Francort et Marigo [1993] est la même que la condition nécessaire à la vérification du critère de Hill (9.101). Avec le positionnement logique de chaque critère l'un par rapport à l'autre, il est possible de dresser la suite d'implications suivantes :

$$\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-1}{C(d)} + \frac{1}{C_t(d)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{critère de}\\ \text{Marigo}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{critère de}\\ \text{Hill}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-1}{C(d)} + \frac{1}{C_t(d)} < 0 \tag{9.117}$$

Dans le cas d'une barre où p cellules élémentaire s'endommagent, il vient d'être montré que le critère de et celui de Hill sont rigoureusement équivalents. Ce résultat peut paraître surprenant puisque nous avons spécifié précédemment que le critère de J.-J. Marigo demandait d'être vérifié sur un espace plus grand que celui de Hill et qu'il était en ce sens plus que suffisant. De plus, rappelons que l'optimum pour la fonctionnelle de J.-J. Marigo a été obtenu pour une évolution quasi-statique alors que le contre exemple au critère de Hill a été obtenu pour une évolution résolument dynamique. Cette situation peut être clarifiée en se rappelant que ces deux critères ne s'intéressent qu'au signe de la variation seconde de l'énergie totale et non à sa valeur. Par conséquent, il s'avère que les familles optimales fournissent dans les deux cas des valeurs de la différentielle seconde proportionnelles et donc simultanément négatives. Cependant, ce résultat n'a pas de vocation à être plus général. Par exemple, nous avons vu que pour le critère de J.-J. Marigo, il n'était pas requis que les évolutions considérées vérifient la relation de consistance (9.79). Rappelons que cette dernière exprime simplement le fait que l'évolution considérée doit rester sur le critère d'endommagement et ne pas le dépasser. L'état trouvé en (9.111) et réalisant le minimum de (9.110) pour une famille donnée de β_i est par conséquent seulement accessible s'il vérifie (9.79). Si parmi les p premiers β_i qui sont les seuls pouvant être non nuls, seulement les q premiers le sont effectivement, alors ils vérifient tous :

$$\frac{C_t(d)C''(d)}{2C'(d)^2}\beta_i + \frac{C(0)}{pC(0) + (N-p)C(d)} \sum_{k=1}^{q} \beta_k = 0 \tag{9.118}$$

Par conséquent, ils sont tous égaux à une même valeur β et il vient :

$$\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t(d)} = 0 \tag{9.119}$$

De plus, la différentielle d'ordre 2 de l'énergie totale $d^2\mathcal{P}$ s'écrit :

$$d^2\mathcal{P}\left(\varepsilon_i, d_i\right)\left(v_i, \beta_i\right) = \frac{l{\varepsilon_p}^2 C(0)C''(d)C_t(d)}{2\left(pC(0) + (N-p)C(d)\right)}\left(\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t(d)}\right)q\beta^2 \tag{9.120}$$

et est par conséquent rigoureusement nulle. Par conséquent, si le choix optimal des v_i pour une famille donnée de β_i est réellement accessible, au sens où la règle de consistance (9.79) est vérifiée, alors la famille en question n'entraîne pas de variation au second ordre de l'énergie totale. De manière générale, il est possible de montrer qu'elle n'entraine en fait pas de variation du tout. Pour obtenir une variation négative, il faut donc considérer une famille qui ne vérifie pas la règle de consistance et qui donc n'est pas accessible puisqu'elle viole le critère d'endommagement. Ce résultat est beaucoup plus général et ne se limite pas au cadre simplifié que nous avons mis en place.

Par conséquent, le fait que le critère de Hill et de J.-J. Marigo sont équivalents est totalement fortuit. Le résultat fort que nous avons montré est que le critère postulé par J.-J. Marigo est effectivement un critère suffisant de stabilité au sens donné par Hill. Par contre, il est plus fort que le critère proposé par ce dernier et est à ce titre sur-suffisant dans la mesure où il implique un critère qui lui même est déjà uniquement un condition suffisante de stabilité :

$$\begin{array}{c}\text{critère de}\\ \text{Marigo}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{critère de}\\ \text{Hill}\end{array} \Rightarrow \text{Stabilité} \tag{9.121}$$

9.5.5 Évolutions quasi-statiques depuis une position d'équilibre

Une condition nécessaire et suffisante

Puisque travailler avec une évolution dynamique depuis un état d'équilibre n'est pas pour l'instant à l'ordre de cette Section, regardons si, a minima, il est possible de partir de manière spontanée et quasi-statique d'une position d'équilibre. En partant d'un chargement égal à $\xi^{d\star}$ pour un barreau homogène, une évolution où $p \geq p_{min}$ cellules s'endommage est considérée. Pour un instant donné t, supposons que ces p cellules (qui peuvent être supposée comme étant les p premières) ont atteint un niveau d'endommagement d pour un chargement donné ξ^d. Bien sûr, l'état considéré est tel que le critère d'endommagement est saturé, c'est à dire que l'égalité est atteinte dans (9.62) pour les p cellules. En d'autres termes, l'état d'équilibre dans la stabilité est questionnée ne correspond pas à une situation où le matériau connaît un comportement purement élastique en tous les points du barreau. L'évolution quasi-statique considérée à une situation où q cellules parmi les p premières (et donc avec la condition $q \leq p$) s'endommagent spontanément. Avec cette description, la relation de consistance (9.79) est vérifiée sur les q cellules en question, ce qui implique que $\dot{d}_i$ et $\dot{\varepsilon}_i$ ont le même signes et sont donc tous deux positifs. Ainsi, la loi de comportement écrite en vitesse devient :

$$\begin{array}{rcl} 1 \leq i \leq q & : & \dot{\sigma}_i = C_t(d)\dot{\varepsilon}_i \\ q+1 \leq i \leq p & : & \dot{\sigma}_i = C(d)\dot{\varepsilon}_i \\ p+1 \leq i \leq N & : & \dot{\sigma}_i = C(0)\dot{\varepsilon}_i \end{array} \tag{9.122}$$

Puisque l'évolution considérée est quasi-statique, le taux de contrainte doit être constante constant sur la barre : $\dot{\sigma}_i = \dot{\sigma}$. Ceci implique que le taux de déformation et que le taux d'endommagement sont homogènes sur les q cellules. En raison de l'écriture de la loi de comportement en vitesse sur les q cellules, $\dot{\sigma}$ est nécessairement négatif. La relation de compatibilité géométrique conduit au fait :

$$\dot{\sigma}\left(\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t(d)}\right) = 0 \tag{9.123}$$

Pour que l'évolution considérée soit différentes de zéro, il est nécessaire que $\dot{\sigma} \neq 0$. Ainsi, pour qu'une telle évolution existe, il est nécessaire et suffisant de trouver un entier q plus petit que p tel que :

$$\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t(d)} = 0 \tag{9.124}$$

Cette condition est très exigente et ne peut pas être satisfaite pour n'importe quelle valeur de p et$d$. Ceci est bien sûr fortement lié au caractère discret du problème considéré. En se basant à nouveau sur un modèle de type PCW et en considérant le cas usuel permettant à la variable d'endommagement d'être une quantité locale à toutes les échelles, la condition équivalente à considérer serait identique à (9.124) mais q serait cette fois autorisé à prendre

toutes les valeurs réelles positive inférieures à p. Par conséquent, dès que p serait plus grand que p_{min} la souplesse tangente de la structure (9.124) changerait de signe pour $q = 0$ et $q = p$. En raison du théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un réel q annulant la souplesse tangente de la structure (9.124) est garantie. De plus, puisque une évolution quasi-statique doit vérifier (9.124), il vient de manière immédiate que la variation d'énergie totale $\Delta W + \mathcal{D}$ est égale à zéro au second ordre. Dans les faits, la variation est en fait à tous les ordres rigoureusement égale à zéro pour une évolution spontanée quasi-statique. Par conséquent, il est impossible avec un critère reposant sur l'énergie totale de discriminer une évolution par rapport à une autre.

Perte de stabilité de manière quasi-statique

L'objectif est désormais de déterminer la plus valeur de d permettant l'existence d'un entier q inférieur à p tel que l'égalité (9.124) soit réalisée. Il s'agit en effet bien de la plus petite valeur de d qui est d'intéressante puisqu'elle est associée au premier instant où une évolution spontanée quasi-statique est possible après que le chargement critique $\xi^{d^\star}$ ait été dépassé. A nouveau, l'étude sera faite à partir du modèle PCW. Il vient alors :

$$\frac{N-p}{C(0)} + \frac{p-q}{C(d)} + \frac{q}{C_t} = \frac{q}{C_t} + \frac{N-q}{C(0)} + (p-q)\left(\frac{1}{C(d)} - \frac{1}{C(0)}\right) \tag{9.125}$$

qui est strictement positif dès que $q < p_{min}$. Par conséquent, un fait marquant est qu'un état d'équilibre où où $p = p_{min}$ ne peut pas être quitté de manière spontanée et quasi-statique. Dans le cas contraire, c'est à dire si $p > p_{min}$, alors q doit être supérieur ou égale p_{min}. Les expressions (9.60) et (9.58) conduisent à :

$$d = -\frac{1}{Q}\frac{\left(1-\frac{Q'}{Q}\right)q - N}{\left(1-\frac{Q'}{Q}\right)p - N} \tag{9.126}$$

qui est en effet une quantité strictement positive et inférieure à $-\frac{1}{Q}$ puisque $p \geq q \geq p_{min}$. Comme mentionné précédemment, la première évolution spontanée est associée à la plus petite valeur de d. Puisque la relation (9.126) impose que d soit une fonction croissante de q, le minimum est atteint pour la plus petite valeur de q étant admissible qui est en faitp_{min}. Par conséquent, dès que le niveau d'endommagement sur les p cellules a atteint le niveau :

$$d = -\frac{1}{Q}\frac{\left(1-\frac{Q'}{Q}\right)p_{min} - N}{\left(1-\frac{Q'}{Q}\right)p - N} \tag{9.127}$$

il est possible d'évoluer spontanément et de manière quasi-statique vers un état où p_{min} cellules sont plus endommagées que le reste de la structure et qui par conséquent seront les seules à continuer à s'endommager lorsque le chargement augmentera. Cette analyse confère donc un statut très spécial à l'évolution avec p_{min} cellules de base puisqu'elle apparait comme étant la plus stable parmi l'ensemble des évolutions quasi-statiques. Il doit néanmoins être noté que puisque le modèle PCW conduit à une élasticité tangente constante, une fois que le niveau d'endommagement (9.127) est atteint, il est possible d'atteindre de manière quasi-statique et sans aucun apport énergétique l'état où $d = -\frac{1}{Q}$. En effet, la souplesse tangente de la structure restera égale à zéro une fois que le niveau d'endommagement (9.127) sera atteint. Remarquons néanmoins que prendre une élasticité dépendant d'une façon différente de d conduirait à un résultat différent.

9.5.6 Conclusion

Avec le cadre extrêmement simple considéré, il a été possible de retrouver toutes les sensations associées à un modèle d'endommagement unidimensionnel régularisé. De manière similaire, en travaillant dans un espace mathématique préservant le caractère non local à toutes les échelles de la variable d'endommagement, toutes les problématiques observées par la communauté scientifique n'ont malheureusement pas été sont pas résolues. Néanmoins, il a été possible dans un cadre extrêmement simplifié de revenir sur certains résultats établis comme par exemple le statut logique des critères utilisés ainsi que l'impossibilité d'accéder effectivement à certaines évolutions considérées, puisque celles-ci ne vérifient pas la règle de consistance. Plus frappant encore, le constat proposé établissant que dans un cadre purement quasi-statique aucune évolution n'est stable a été pris en défaut lorsque la nature de l'endommagement a été respectée. Notons que dans la situation ici traitées, les Figures 9.4 et Stabilite-1D-fig-homogeneisation-barreau-endommagement suggère que l'échelle devant être considérée est celle associée au mécanisme d'endommagement considéré qui est donc inférieure à l'échelle macroscopique. Par conséquent, dans le cas général, la question de l'échelle à laquelle la matière doit être décrite se pose.

9.6 Localisation et dynamique

Pour terminer le travail entrepris dans la deuxième partie de ce chapitre sur le modèle unidimensionnel, il est important de revenir sur un certain nombre de points formulés dans la Sous-section 9.4.2. En effet, deux problématiques essentielles ont été présentées et correspondent au fait qu'il n'est pas possible de localiser de manière quasi-statique dans le problème d'un barreau unidimensionnel et également que certaines situations ne présentent pas de solution. Jusqu'à présent, le côté quasi-statique a été mis en avant pour pouvoir se placer dans le même cadre d'étude que celui classiquement considéré et ainsi se positionner par rapport à certains résultats établis. Cependant, il n'y a absolument aucune raison d'écarter les évolutions dynamiques. D'ailleurs, nous allons montrer que la clé de compréhension des problèmes soulevés dans la Sous-section 9.4.2 provient justement du caractère dynamique de certaines évolutions. La difficulté majeure d'un problème dynamique est qu'il est très délicat, même dans le cadre unidimensionnel, d'établir des résultats analytiques. Par conséquent, nous avons opté pour analyser la situation à travers une discrétisation du problème basée sur la méthode des différences finies associée à un schéma explicite par rapport au temps. Les résultats produits sont extrêmement intéressants et doivent être gardés à l'esprit lorsqu'un problème endommageant est abordé.

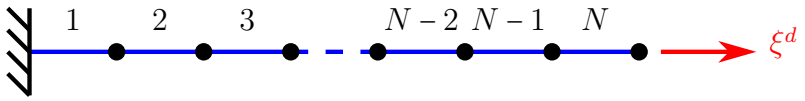

FIGURE 9.8 – Macroscopic behavior for evolutions with $p < p_{min}$. $N = 10, Q = -0.2, Q' = 1., g_c = 1.$. Upper curve : $p = p_{min} = 4$. Lower curve : $p = 1 < p_{min}$. σ^* is the stress associated with u^*

La discrétisation de la Figure 9.8 correspond en fait à un système masse-barre où l'élasticité des barres est endommageable. Elle peut être vue comme le pendant dynamique de la vision développée dans la Section 9.5 ou alors comme la discrétisation éléments finis du problème classique où la taille des éléments doit au final tendre vers 0. Le premier résultat fort concerne une évolution initialement homogène où il est constaté facilement que, quelle que soit la taille des éléments considérés, une fois le chargement critique $\xi^{d\star}$, seul le dernier

élément de barre numéroté N va s'endommager. En effet, de manière qualitative l'inertie des masselottes fait que, immédiatement après $\xi^{d^\star}$, seule la masse à l'extrémité droite du barreau va bouger alors que les autres resteront encore fixes. Par conséquent seul le dernier élément s'endommagera. Pire encore, en s'endommageant, et donc en devenant plus souple, les autres masses, au lieu de se déplacer vers les x croissant, vont au contraire se déplacer vers les x décroissant et ainsi faire en sorte que les autres éléments de barre ne saturent plus jamais le critère d'endommagement. Par conséquent, le fait marquant d'un point de vue dynamique est que, en raison de l'inertie introduite, il n'existe pas une infinité de solution mais bien une seule. Cette solution présente par contre bien une localisation puisque, contrairement au cas quasi-statique, il n'est pas nécessaire qu'une nombre p_{min} de ressorts s'endommagent pour pouvoir vérifier la relation de compatabilité géométrique. En libérant la contrainte $\sigma = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$, il a été possible de donner accès à une nouvelle évolution qui est résolument unique donc stable. Le deuxième fait marquant est qu'en considérant un élément de barre pré-endommagé, il est dynamiquement possible de trouver une solution où seul l'élément en question s'endommagera lorsque le chargement augmente. Le comportement observé est similaire à celui décrit dans le cas homogène puisqu'alors un seul un élément de barre s'endommage tandis que les autres éléments ne saturent plus jamais le critère. De manière générale, il est quelque part illusoire de considérer un barreau où initialement l'endommagement est homogène. La présence de défauts fait que l'endommagent est justement initialement non constant. La localisation de l'endommagement aura alors bien lieu, là où le défaut le plus important est présent. Par conséquent, un certain nombre de questionnement trouvent leur explication dans la nature dynamique des évolutions. Le phénomène de localisation observé par la communauté scientifique a bien lieu sur un problème unidimensionnel mais uniquement dans un cadre dynamique.

Une analyse dynamique montre qu'effectivement le phénomène d'endommagement semble chercher la plus petite taille d'espace qui lui est offerte pour pouvoir s'y localiser. Deux options s'offrent alors à nous pour pouvoir traiter de ce problème. Tout d'abord, il s'agit d'essayer de rendre justice au caractère non local à toutes les échelles de l'endommagement et par conséquent de l'empêcher de se localiser en se plaçant dans un environnement mathématiques plus adapté ou un introduisant un terme de régularisation. C'est le choix fait dans l'étude Section 9.5 ou dans les méthodes régularisées. Le problème majeur est que cette méthode suppose de considérer une description de la structure à une échelle inférieure à l'échelle macroscopique et entame donc un peu le bénéfice d'un modèle d'endommagement qui a été introduit à l'origine pour pouvoir traiter d'un problème de manière macroscopique. Une deuxième solution serait de chercher à rester à une échelle macroscopique où il est alors parfaitement normal et incontournable de considérer un endommagement se concentrant en un point. Une attention toute particulière doit alors être accordée au fait qu'un point macroscopique enrobé d'un volume élémentaire cache en fait à une échelle inférieure un VER. Il est alors nécessaire de mieux comptabiliser la dissipation en se basant sur le même genre de considérations que celles tenues au Chapitre 4, Section 4.4. Il était en effet montré qu'il était possible de donner une représentation surfacique idéalisée d'un objet physiquement tridimensionnel, mais que les densités énergétiques à considérer devaient cependant bien rendre compte de la nature tridimensionnelle. En ce qui concerne la dissipation, il serait tout à fait possible de considérer, au moins théoriquement, un endommagement se localisant en un point, à condition de construire une dissipation qui rend bien compte qu'en fait de l'énergie est dissipée dans un VER de dimension l. Ce travail n'a malheureusement pas été effectué et peut faire l'objet de recherches ultérieures.

Conclusions et perspectives

A partir d'une problématique d'ingénieur très concrète consistant à chercher l'origine des faciès de fissuration en chevron observés par l'ANDRA autour de leurs galeries principales dans le laboratoire souterrain de Bure et de comprendre les mécanismes susceptibles d'expliquer leurs différentes géométries complexes, nous avons proposé de nous intéresser plus largement à la problématique de la nucléation de fissures en conditions anisotropes. Bien sûr, ces fissures en chevron ont largement orienté nos travaux, mais nous nous sommes efforcés de nous placer dans un cadre de réflexion plus large et plus général qui est celui de la naissance d'une fissure de dimension macroscopique.

Ainsi, le Chapitre 2, dédié à la modélisation de l'excavation d'une passe de tunnel à partir d'une partie préexistante de l'ouvrage, intègre des résultats plus généraux. L'accent a été mis sur la détermination des singularités au voisinage de géométries anguleuses. Une méthode efficace et très simple pour exhiber les modes singuliers d'un problème bidimensionnel, avec une élasticité éventuellement anisotrope et en présence d'une précontrainte, a été présentée. Si les cas d'application ont été l'angle droit et la fissure plate, il est à noter que le formalisme proposé peut s'appliquer à un coin d'ouverture quelconque. Cette étude des singularité a permis, dans un premier temps, de réconcilier les modélisations idéalisées et les modélisations, plus réalistes, introduisant un faible rayon de courbure en lieu et place du coin anguleux. Par conséquent, elle constitue une étape primordiale à l'élaboration du modèle mécanique visant à rendre compte de l'excavation d'un tunnel. C'est donc sur les bases de ce travail que la géométrie anguleuse que nous proposons est fondée et que la présence de singularités de contraintes trouve sa justification physique. Dans le même temps, cette démarche préalable a permis de recentrer l'étude en focalisant notre attention sur la possibilité de nucléation d'une fissure à partir du front de taille. En effet, en raison de la géométrie anguleuse de ce dernier, celui-ci devient un site privilégié pour un amorçage de fissures. Enfin, ce site étant identifié, il a été possible de conclure quant à la nature fermée des fissures à considérer en raison de la structure du champ de contrainte local.

Le Chapitre 3 vise à appliquer la méthode du critère mixte. Pour ce faire, une réflexion générale a été menée sur l'utilisation des développements asymptotiques raccordés en présence d'une précontrainte ainsi que sur l'existence de la zone de raccord qui est une condition essentielle à la mise en œuvre de la méthode. Les résultats des chapitres précédents justifiant une étude bidimensionnelle pour de faibles longueurs de fissures, c'est par le biais d'un problème plan équivalent que le critère mixte a été appliqué au cas de l'excavation d'un tunnel. Les résultats obtenus nous ont semblé montrer la pertinence de la méthode proposée par D. Leguillon. En effet, l'usage du double critère a permis de rendre compte, en intégrant des facteurs d'anisotropie apportés par les différentes directions de forage, de la majeure partie des orientations de fissures prenant naissance suite à l'excavation d'un tunnel. Par conséquent, ces premiers résultats nous ont conforté dans le choix de modélisation que nous avons proposés. Cependant, il apparait que le critère mixte, dans le cas qui nous intéresse, permet d'exhiber une longueur d'initiation plutôt qu'une longueur d'arrêt, dans le sens où la fissure nucléée prévue par la méthode n'est pas stabilisée et doit encore se propager sous

chargement constant.

Le sens que nous avons souhaité attacher à la notion de longueur de nucléation correspondant davantage à une longueur d'arrêt, nous avons souhaité proposer une stratégie permettant de déterminer cette longueur tout en s'affranchissant d'un calcul dynamique pas à pas. La mise au point de cette démarche est l'objet du Chapitre 4. Celui-ci constitue un véritable point de pivot du manuscrit dans le sens où il a permis une certaine prise d'indépendance. Fondé sur un raisonnement thermodynamique, le critère de nucléation purement énergétique que nous proposons se base sur le taux de restitution d'énergie incrémental G_{inc}. Une analyse détaillée des différents cas de figure pouvant être rencontrés a abouti au fait que cette démarche pouvait s'appliquer à tous les problèmes présentant effectivement une longueur de nucléation stable. Un résultat majeur de ce chapitre est que nous avons profité du besoin de détailler un raisonnement thermodynamique pour établir un cadre rigoureux permettant de considérer un phénomène de nucléation adiabatique. En effet, compte tenu du caractère brutal du phénomène de nucléation, il semble peu adapté de considérer ce dernier au sein d'une évolution isotherme (qui correspond au cadre d'étude usuel) puisque celle-ci suppose des temps caractéristiques assez longs afin de permettre au phénomène de diffusion thermique d'opérer. Il est important de préciser que la formulation de ce cadre adiabatique est dans la droite ligne de la mise en place d'un critère de nucléation. Une conclusion importante du travail mené est que, malgré une démarche parfois technique reposant sur de l'homogénéisation, la formulation obtenue est de forme similaire à celle issue d'une étude isotherme. Par voie de conséquence, le cadre adiabatique est aussi simple d'utilisation et de mise en œuvre que celui usuellement utilisé. Il est à noter qu'une étape importante du raisonnement a consisté à proposer une vision à plusieurs échelles d'une fissure macroscopique. Pour ce faire, les outils permettant de faire dialoguer l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique ont joué un rôle prépondérant. Les relations entre les différentes grandeurs macroscopiques, essentielles pour le raisonnement, n'auraient pu être obtenues par une approche macroscopique directe. Au passage, il ne nous parait pas superflux d'insister à nouveau sur un résultat intermédiaire à la démarche proposée qui est la forme surprenante, et à notre connaissance originale, que prend la densité volumique macroscopique d'énergie interne pour un matériau endommageant en présence d'une précontrainte. Ainsi, grâce à cette étude, le critère de nucléation énergétique que nous proposons a pu être étendu à la prise en compte d'une nucléation adiabatique, et ce, de façon immédiate. Enfin, étant donné le rôle de premier plan accordé à la quantité G_{inc} dans le critère que nous proposons, il nous a semblé qu'il était impératif de tenir à ce niveau une discussion portant sur la notion de taux de restitution d'énergie en milieu infini. En effet, bien que ce sujet soit largement traité dans la littérature, il nous a semblé que quelques points restaient à éclaircir. Une fois toute ambiguïté levée, nous avons profité de cette discussion pour établir dans le même temps un premier outil permettant de calculer avec une bonne précision et pour un coût faible la quantité G_{inc} dans le cadre d'un milieu infini avec un problème chargé en contraintes.

Etant donné la nature poreuse des milieux argileux considérés, nous avons également souhaité nous intéresser aux équations de la propagation, éventuellement dynamique et donc intégrant le phénomène de nucléation, dans un milieu poreux saturé. A nouveau, sous des conditions d'échelonnement des temps caractéristiques liés aux différents phénomènes en place (diffusion thermique et transport de masse fluide), un modèle d'homogénéisation basé sur des fissures sèches a été exposé au Chapitre 5. La démarche proposée est dans la continuité du travail entrepris dans le Chapitre 4 et ce n'est que pour des raisons de clarté que nous avons choisi de faire l'étude en deux temps, à savoir traiter tout d'abord le couplage thermo-élastique seul avant de rajouter en plus le caractère poreux du matériau. En effet, la première démarche, intégrant un couplage de moins, a l'avantage d'être plus claire et d'in-

téresser une gamme de matériau différente et très vaste par rapport à celle correspondant aux milieux poreux saturés. Le cas thermo-poro-élastique a nécessité d'affiner encore notre vision d'une fissure macroscopique et d'introduire une échelle d'espace supplémentaire qui est celle des pores saturés. A nouveau, la simplicité du formalisme obtenu est remarquable puisqu'aucune complexité supplémentaire n'est requise pour sa mise en œuvre par rapport à une situation isotherme pour un matériau classique. Un point sur lequel nous n'avons peut être pas suffisamment insisté au cours de ce manuscrit est que, certes, la prise en compte de ces différents couplages a permis d'étoffer et d'étendre la porté du critère de nucléation énergétique que nous proposons. Cependant, les études proposées permettent tout autant d'accroître les champs d'application du critère mixte. En effet, notons que si l'objet devant être manipulé d'un point de vue énergétique est un taux de restitution d'énergie faisant appel à une élasticité adiabatique, éventuellement non-drainée suivant le matériau étudié, il en va exactement de même pour la première équation d'état reliant les déformations et les contraintes. Par conséquent, dans l'optique d'utiliser un critère mixte en conditions par exemple adiabatiques, il suffit de remplacer purement et simplement le tenseur d'élasticité usuel (qui lui est isotherme) par son pendant adiabatique $\mathbb{C}^{ad}$.

Conscients cependant de la difficulté que peut présenter une détermination précise de la quantité cruciale G_{inc} et de la restriction à de petites fissures de la méthode des développements asymptotiques raccordés, nous avons souhaité proposer des méthodes efficaces de calcul. Comme énoncé précédemment, une première méthode basée sur les transformations conformes a été détaillée. Malgré de bon résultats, cette méthode trouve sa limite dans la connaissance effective de la transformation conforme permettant d'obtenir la géométrie étudiée ainsi que dans la non-possibilité de considérer des chargements mixtes couplant déplacements et efforts. Ainsi, nous avons décidé dans un chapitre un peu à part d'exposer les grands principes d'une méthode permettant de déterminer de manière rigoureuse un encadrement de la quantité G_{inc}. En effet, le Chapitre 6, en introduisant les grands concepts de codes éléments finis en contraintes, a permis de traiter un problème bidimensionnel avec un degré de précision élevé (majorant et minorant se correspondant avec une précision en dessous du pourcent), aboutissant ainsi à une caractérisation précise à la fois du chargement critique correspondant à l'amorçage de la fissure mais aussi de la longueur stabilisée de la fissure nucléée.

Malgré des pistes de développements dans le cadre tridimensionnel, le manque de temps a empêché de pouvoir mettre à profit la méthode d'encadrement reposant sur deux types d'éléments finis au cas de l'excavation d'un tunnel. En effet, les fissures attendues étant d'extension comparable aux grandeurs caractéristiques de la géométrie du problème, il n'était plus possible, contrairement au Chapitre 3, de négliger les effets tridimensionnels. Par conséquent, pour revenir à la problématique initiale concernant les fissures en chevron se développant autour des galeries principales du laboratoire souterrain de Bure, nous avons proposé dans le Chapitre 7 une approche basée sur des calculs des variations. En proposant des géométries de fissuration et des mécanismes de déformation et de fracturation cohérents et suffisamment riches, nous avons mis au point un outil très analytique permettant de juger qualitativement de la possibilité d'une nucléation stable de fissures. Avec un modèle *a minima*, nous avons montré qu'en utilisant le critère proposé au Chapitre 4 et en intégrant des éléments d'anisotropie que sont l'anisotropie de contraintes en présence et l'anisotropie de la dissipation liée à la propagation de fissures, il était possible de justifier d'une nucléation stable dont les caractéristiques géométriques présentent un bon accord avec les observations de l'ANDRA. Les conclusions de ce chapitre sont donc multiples puisque nous avons d'une part ajouté un autre outil permettant d'utiliser le critère que nous proposons mais aussi nous avons éprouvé ce dernier sur la problématique industrielle ayant, entre autres, motivé ce sujet de

doctorat. Ce chapitre ayant, à nos yeux, permis de donner des éléments de justification pour les phénomènes observés, il endosse le rôle de conclusion à une première partie du manuscrit pouvant former un tout autonome.

Nous avons choisi de consacrer une seconde partie de ce manuscrit à une étude prospective concernant les modèles d'endommagement. En effet, une réflexion théorique sur la naissance de fissures, telle que l'ambitionne ce manuscrit, ne saurait être complète sans que ces modèles ne soient abordés. Dans le but d'essayer de donner une interprétation physique au terme de régularisation intervenant dans les modèles à gradient, nous avons cherché dans le Chapitre 8 à nous intéresser à une approche micromécanique très naturelle pour essayer de capturer les effets d'une dérive des propriétés élastiques. En effet, le terme additionnel des méthodes à gradient a pour conséquence de limiter les vitesses de variations spatiales de la variable endommagement et de conférer à cette dernière des propriétés de régularité. Par conséquent, au moins au début de la phase d'endommagement, il est clair que le matériau présentera une variation lente, puisque régulière, de ses propriétés élastiques. Ainsi, il est très naturel de chercher à homogénéiser un matériau dit quasi-périodique au sens donné au Chapitre 8 pour chercher à caractériser comment cette dérive macroscopique des propriétés élastiques influence les problèmes d'homogénéisation. Au terme d'un raisonnement technique adaptant la méthode des développements asymptotiques formulée pour les matériaux parfaitement périodiques, il est apparu qu'effectivement la présence d'un terme en gradient d'endommagement au carré pouvait être justifiée. Cependant, une différence significative est que, de manière troublante, ce terme apparait non pas comme un correctif de la dissipation, mais comme un correctif à l'énergie élastique. Malheureusement les fondements même de la méthode que nous avons adoptée semblent nous empêcher d'aller plus loin en n'autorisant pas les différents ordre à s'influencer les uns les autres.

Une deuxième grande partie consacrée à l'étude des modèles d'endommagement a consisté à nous intéresser à la notion de stabilité d'un état d'équilibre. Cette problématique est en effet au cœur des débats ayant motivé l'introduction de termes de régularisation. Par conséquent, nous nous sommes proposés d'adapter le critère suffisant de stabilité de Hill au cas d'une transformation infinitésimale pour un comportement endommageant. Ce faisant, nous nous sommes aperçus qu'à nouveau, en raison des principes mis en œuvre, le cadre de raisonnement approprié correspondait davantage à celui d'évolutions spontanées non pas isothermes mais adiabatiques. En déroulant à nouveau le raisonnement thermodynamique permettant d'établir le critère de Hill, nous avons montré qu'une différence significative apparaissait en considérant le problème sous cet angle. En effet, si le critère suffisant de stabilité obtenu est d'une forme similaire à celui isotherme, celui-ci ne fait pas appel au tenseur d'élasticité tangent mais à un tenseur d'ordre 4 rendant compte d'une variation de température et d'entropie. Par manque de temps, nous avons choisi néanmoins de mener la suite de l'étude dans un cadre isotherme afin de pouvoir bâtir des modèles pouvant être comparés à ceux déjà présents dans la littérature. En effet, nous ne souhaitions pas entacher nos propos d'une complexité supplémentaire liée à la mise en œuvre d'un nouveau cadre d'étude puisque celui-ci aurait pu rendre ambiguë l'origine physique des résultats que nous souhaitions mettre en évidence. Sur un problème unidimensionnel classique, nous avons souhaité bâtir un modèle d'endommagement à la fois extrêmement simple tout en étant parfaitement justifié sur le plan physique puisque préservant la nature de la variable d'endommagement comme étant une quantité issue d'un processus d'homogénéisation et par conséquent n'étant pas définie à toutes les échelles d'espace. Sans prétention de généralité, cet exercice académique nous a amené à examiner le statut logique de certains critères de stabilité existants. Un conclusion essentielle de ce chapitre est que les phénomènes de localisation de la variable d'endommagement ne pouvaient avoir lieu, pour un problème unidimensionnel, dans un cadre

quasi-statique. Par conséquent, il semblerait qu'une étude dynamique complète soit essentielle pour statuer sur les éventuels écueils dont souffriraient les modèles d'endommagement locaux unidimensionnels.

Perspectives

Par rapport au travail fourni dans ce mémoire, un certain nombre de points ont été identifiés comme pouvant susciter des travaux de recherche futurs. Tout d'abord, il serait intéressant de pouvoir mener une campagne de mesures expérimentales permettant à la fois de mieux quantifier les temps caractéristiques des phénomènes de nucléation, mais aussi de mieux connaître la variation du champ de température à laquelle est soumis le fond de fissure naissant. De telles mesures permettraient de valider le modèle de fissures adiabatiques que nous avons cherché à bâtir. Également, un travail important pourrait consister à caractériser comment les champs de température et de pression, modifiés par la naissance d'une fissure, reviennent à l'équilibre une fois cette dernière déployée. Bien entendu, d'autres campagnes de mesures seraient extrêmement précieuses pour essayer de valider le critère de nucléation que nous proposons et pour mieux caractériser le paramètre $G_c^\star$.

Par ailleurs, pour revenir à l'étude de la naissance des fissures en chevrons menée au Chapitre 7, insistons à nouveau sur le fait que l'outil que nous avons mis en place ne demande qu'à être enrichi en considérant d'autres faciès de fissuration et d'autres champs de déplacements. Ce n'est effectivement qu'à ce prix que l'étude qualitative que nous avons menée pourra prétendre fournir des résultats quantitatifs. Une solution complémentaire pourrait être d'étendre la méthode d'analyse duale mise au point au Chapitre 6 pour pouvoir être appliquée de manière efficace à des problèmes tridimensionnels et ainsi générer de façon plus automatisées des mécanismes de déformation et de fracturation mais aussi de mieux quantifier la quantité G_{inc}.

A partir du travail effectué sur la nucléation dans un milieux poreux saturé, il serait également intéressant de se pencher sur l'éventuel problème associé au dépôt de colis radioactifs dans des galeries présentant déjà une fissuration. En effet, une étude importante pourrait être de statuer sur la possibilité de nucléation de nouvelles fissures ou de propagation de celles existantes sous l'effet d'un dégagement de chaleur dû à la présence d'un colis HAVL.

De nombreuses perspectives peuvent également être envisagées dans le cadre des modèles d'endommagement. Tout d'abord, il serait nécessaire de juger si la modification que nous avons suggérée pour le critère de Hill, en essayant de préciser le cadre thermodynamique permettant sa mise œuvre, apporte des changements quant aux conclusions de stabilités des états d'équilibres. Si des modifications sont constatées, il serait intéressant de chercher à qualifier les situations étant impactées. Également, nous aurions aimé pouvoir aller plus loin pour préciser la notion de variable d'endommagement ainsi que les conséquences liées à son statut non local à toutes les échelles. Une piste non négligeable pourrait être de mieux caractériser la dissipation lorsque l'endommagement tend à se localiser sur des échelles d'espace arbitrairement petites.

Annexe A

Singularités et analyse complexe

A.1 Racines du polynôme caractéristique P

Nous allons, dans cette annexe, rappeler le résultat fondamental démontré par Letkhnitski dans Gorgievich Leknitskii [1963] concernant le polynôme caractéristique P associé à l'équation différentielle (2.49). Dans le détail, il s'agit de montrer que le polynôme du 4ième degré $P = A_{22} - 2A_{26}X + (2A_{12} + A_{66})X^2 - 2A_{16}X^3 + A_{11}X^4$ n'adment pas de racines réelles.

Démonstration. La densité volumique d'énergie élastique du milieu considéré s'écrit :

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz}) \tag{A.1}$$

Qu'il s'agisse d'un problème en contraintes planes ou en déformations planes, il est toujours vrai d'écrire :

$$\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} = \sigma_{xz}\varepsilon_{xz} = \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} = 0 \tag{A.2}$$

Par conséquent, la densité d'énergie élastique se met sous la forme

$$w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

où A est la matrice d'élasticité plane obéissant à la définition (2.47). Alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ on peut définir un état de contrainte particulier :

$$\begin{aligned} &\sigma^*_{xx} = \beta\mu^2 && \sigma^*_{yz} = \sigma^*_{xz} = 0 \\ &\sigma^*_{yy} = \beta && \sigma^*_{zz} = \begin{cases} 0 \\ \frac{-\beta}{S_{3333}}(S_{1133}\mu^2 + S_{2233} - 2S_{3312}\mu) \end{cases} \\ &\sigma^*_{xy} = -\beta\mu \end{aligned} \tag{A.4}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ est une constante choisie de telle manière à ce que le champ de contrainte défini ci-dessus puisse être traité à l'aide la théorie classique d'élasticité linéaire, et ce, même dans le cas où $|\mu| \to \infty$. On remarque alors que pour un tel champ de contrainte, la densité d'énergie élastique s'exprime comme $w(\boldsymbol{\sigma}^*) = \frac{1}{2}\beta P(\mu)$. Par conséquent, si μ est une racine de P, alors la densité d'énergie élastique associée à $\boldsymbol{\sigma}^*$ est égale à zéro. Ceci ne peut être autorisé pour un champ de contrainte non nul en raison du caractère défini positif de la forme bilinéaire considérée. Ainsi, μ ne peut pas être racine de P, ce qui montre bien que ce dernier n'admet pas de racine réelle. □

A.2 Degrés de singularité duaux

Pour un problème en déformations planes impliquant un matériau orthotrope ainsi qu'une structure présentant un angle droit dont les bords sont alignées selon les directions d'orthotropie, la structure de la singularité de contrainte a été exhibée Chapitre 2, Section 2.3. Il a été en effet montrer que le champ de contrainte pouvait se décomposer localement selon deux champs singuliers comme dans le cas d'un matériau isotrope. Les coefficients de proportionnalité intervenant dans cette décomposition s'apparentent à des facteurs d'intensité de contrainte. La méthode fournie ne permet cependant pas en l'état de fournir la valeur de ces deux paramètres puisque la décomposition obtenue n'a de validité que locale tandis que ces deux coefficients sont influencées par le mode de chargement de la structure dans sa totalité ainsi que par sa géométrie. Les problèmes traités ne possédant pas forcément de

solutions analytiques, il semble obligatoire de recourir à des outils numériques pour déterminer ces deux coefficients. Pour autant, ces outils sont connus pour mal connus capturer ces phénomènes de singularité. Dans un soucis de précision, on trouvera dans Leguillon et Sanchez-Palencia [1987] une méthode élégante permettant de déterminer de manière plus satisfaisante les deux facteurs d'intensité de contrainte. Cette méthode a été étendue au cas où l'état de référence du matériau considéré n'est pas l'état naturel dans le Chapitre 2, Section 2.3. Cette méthode repose sur l'existence, pour un mode de singularité de degré α, d'un mode en dualité n'ayant pas de réalité physique et étant lui aussi singulier mais cette fois de degré $-\alpha-2$. Afin de pouvoir utiliser cette procédure, il reste à montrer que la méthode proposée, permettant de déterminer la structure de singularité pour des problèmes avec des matériaux anisotropes, permet bien de déterminer ces fameux modes duaux. L'objectif annoncé est donc de montrer que si α permet de résoudre (2.85) ou (2.87) alors $-\alpha-2$ est également solution.

Démonstration. Puisqu'il a été montré que le cas $\mu_1 = \mu_2$ pouvait être retrouvé par continuité à partir de cas $\mu_1 \neq \mu_2$, il est suffisant de démontrer la propriété uniquement pour l'équation (2.85). Soit donc α un nombre réel tel que $\det(M(\alpha)) = 0$ pour un jeu de paramètres matériaux δ_1, δ_2, ρ_1 et ρ_2 donné. Cela signifie que que l'équation suivante est vérifiée :

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha\pi & \cos\alpha\pi & -\sin\alpha\pi & -\sin\alpha\pi \\ \rho_1\cos(\delta_1+\alpha\pi) & \rho_2\cos(\delta_2+\alpha\pi) & -\rho_1\sin(\delta_1+\alpha\pi) & -\rho_2\sin(\delta_2+\alpha\pi) \\ \rho_1^{\alpha+1}\cos((\alpha+1)\delta_1-\alpha\pi) & \rho_2^{\alpha+1}\cos((\alpha+1)\delta_2-\alpha\pi) & \rho_1^{\alpha+1}\sin(\alpha\pi-(\alpha+1)\delta_1) & \rho_2^{\alpha+1}\sin(\alpha\pi-(\alpha+1)\delta_2) \\ \rho_1^{\alpha+2}\cos((\alpha+2)\delta_1-\alpha\pi) & \rho_2^{\alpha+2}\cos((\alpha+2)\delta_2-\alpha\pi) & \rho_1^{\alpha+2}\sin(\alpha\pi-(\alpha+2)\delta_1) & \rho_2^{\alpha+2}\sin(\alpha\pi-(\alpha+2)\delta_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{A.5}$$

En introduisant quatre vecteurs colonnes $(C_i(\alpha))_{i\in\{1,2,3,4\}}$ tels que :

$$\det(M(\alpha)) = \det(C_1(\alpha), C_2(\alpha), C_3(\alpha), C_4(\alpha)) \tag{A.6}$$

il est possible de remarquer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} i\in\{1,2\},\quad C_i(-\alpha-2) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\pi \\ \rho_i\cos(\delta_i-\alpha\pi) \\ \rho_i^{-\alpha-1}\cos((\alpha+1)\delta_i-\alpha\pi) \\ \rho_i^{-\alpha}\cos(\alpha\delta_i-\alpha\pi) \end{pmatrix} \\ C_{i+2}(-\alpha-2) &= \begin{pmatrix} \sin\alpha\pi \\ \rho_i\sin(\delta_i-\alpha\pi) \\ \rho_i^{-\alpha-1}\sin((\alpha+1)\delta_i-\alpha\pi) \\ \rho_i^{-\alpha}\sin(\alpha\delta_i-\alpha\pi) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.7}$$

En considérant des combinaisons linéaires entre ces différents vecteurs il vient par exemple :

$$\begin{aligned} i\in\{1,2\},\quad \cos\delta_i C_i(-\alpha-2) - \sin\delta_i C_{i+2}(-\alpha-2) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha\pi+\delta_i) \\ \rho_i\cos\alpha\pi \\ \rho_i^{-\alpha-1}\cos((\alpha+2)\delta_i-\alpha\pi) \\ \rho_i^{-\alpha}\cos((\alpha+1)\delta_i-\alpha\pi) \end{pmatrix} \\ \sin\delta_i C_i(-\alpha-2) + \cos\delta_i C_{i+2}(-\alpha-2) &= \begin{pmatrix} \sin(\alpha\pi+\delta_i) \\ \rho_i\sin\alpha\pi \\ \rho_i^{-\alpha-1}\sin((\alpha+2)\delta_i-\alpha\pi) \\ \rho_i^{-\alpha}\sin((\alpha+1)\delta_i-\alpha\pi) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.8}$$

De plus, puisque le déterminant det est une forme multilinéaire alternée par rapport aux

vecteurs colonnes, il vient :

$$\begin{aligned}
&\det(\cos\delta_1 C_1 - \sin\delta_1 C_3, C_2, -\sin\delta_1 C_1 - \cos\delta_1 C_3, C_4)\\
&\quad = -\cos^2\delta_1 \det(C_1, C_2, C_3, C_4) + \sin^2\delta_1 \det(C_3, C_2, C_1, C_4)\\
&\quad - \cos\delta_1 \sin\delta_1 \det(C_1, C_2, C_1, C_4) + \cos\delta_1 \sin\delta_1 \det(C_3, C_2, C_3, C_4)\\
&\quad = -\det(C_1, C_2, C_3, C_4)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

En répétant ces opérations pour les colonnes C_2 et C_4 on trouve :

$$\begin{aligned}
&\det(C_1, C_2, C_3, C_4)\\
&\quad = \det(\cos\delta_1 C_1 - \sin\delta_1 C_3, \cos\delta_2 C_2 - \sin\delta_2 C_4, -\sin\delta_1 C_1 - \cos\delta_1 C_3, -\sin\delta_2 C_3 - \cos\delta_2 C_4)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Il est donc possible de mettre le déterminant de $M(\alpha - 2)$ sous la forme suivante :

$$\det(M(-\alpha-2)) = \begin{vmatrix}
\cos(\delta_1 + \alpha\pi) & \cos(\delta_2 + \alpha\pi) & -\sin(\delta_1 + \alpha\pi) & -\sin(\delta_2 + \alpha\pi)\\
\rho_1 \cos\alpha\pi & \rho_2 \cos\alpha\pi & -\rho_1 \sin\alpha\pi & -\rho_2 \sin\alpha\pi\\
\frac{1}{\rho_1^{\alpha+1}} \cos((\alpha+2)\delta_1 - \alpha\pi) & \frac{1}{\rho_2^{\alpha+1}} \cos((\alpha+2)\delta_2 - \alpha\pi) & \frac{1}{\rho_2^{\alpha+1}} \sin(\alpha\pi - (\alpha+2)\delta_1) & \frac{1}{\rho_2^{\alpha+1}} \sin(\alpha\pi - (\alpha+2)\delta_2)\\
\frac{1}{\rho_1^{\alpha}} \cos((\alpha+1)\delta_1 - \alpha\pi) & \frac{1}{\rho_2^{\alpha}} \cos((\alpha+1)\delta_2 - \alpha\pi) & \frac{1}{\rho_2^{\alpha}} \sin(\alpha\pi - (\alpha+1)\delta_1)) & \frac{1}{\rho_2^{\alpha}} \sin(\alpha\pi - (\alpha+1)\delta_2)
\end{vmatrix} \tag{A.11}$$

Enfin, en utilisant la multilinéarité par rapport aux vecteurs lignes, il vient finalement :

$$(\rho_1\rho_2)^{2+2\alpha} \det(M(-\alpha-2)) = \begin{vmatrix}
\cos\alpha\pi & \cos\alpha\pi & -\sin\alpha\pi & -\sin\alpha\pi\\
\rho_1 \cos(\delta_1 + \alpha\pi) & \rho_2 \cos(\delta_2 + \alpha\pi) & -\rho_1 \sin(\delta_1 + \alpha\pi) & -\rho_2 \sin(\delta_2 + \alpha\pi)\\
\rho_2^{\alpha+1} \cos((\alpha+1)\delta_1 - \alpha\pi) & \rho_1^{\alpha+1} \cos((\alpha+1)\delta_2 - \alpha\pi) & \rho_2^{\alpha+1} \sin(\alpha\pi - (\alpha+1)\delta_1) & \rho_1^{\alpha+1} \sin(\alpha\pi - (\alpha+1)\delta_2)\\
\rho_2^{\alpha+2} \cos((\alpha+2)\delta_1 - \alpha\pi) & \rho_1^{\alpha+2} \cos((\alpha+2)\delta_2 - \alpha\pi) & \rho_2^{\alpha+2} \sin(\alpha\pi - (\alpha+2)\delta_1) & \rho_1^{\alpha+2} \sin(\alpha\pi - (\alpha+2)\delta_2)
\end{vmatrix} \tag{A.12}$$

Pour conclure, il suffit de se rappeler que pour le cas d'un matériau orthotrope il avait été montré que les racines μ_1, μ_2 étaient telles que les paramètres matériaux δ_1, δ_2, ρ_1 et ρ_2 vérifiaient soit $\delta_1 = \delta_2$ soit $\rho_1 = \rho_2$. Dans les deux cas, cela permet de conclure que pour un matériau orthotrope $\det(M(-\alpha-2)) = \frac{1}{(\rho_1\rho_2)^{2+2\alpha}} \det(M(\alpha))$.

Ce dernier résultat permet de prouver le résultat annoncé, à savoir que, pour un matériau orthotrope, si α est solution de $\det(M(\alpha)) = 0$, alors $-\alpha-2$ vérifie également $\det(M(-\alpha-2)) = 0$. □

A.3 Critère mixte de Leguillon et longueur interne

Dans la zone proche du coin où aura lieu la nucléation, les contraintes sont de l'ordre de $\sigma_\infty \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma-1}$, par conséquent la déformation caractéristique sera en $\frac{\sigma_\infty}{E} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\gamma-1}$. Le volume concerné pour intégrer l'énergie élastique élémentaire correspond à une zone cylindrique de taille ℓ (ce qui se justifie par exemple grâce à l'indépendance du contour Γ sur lequel on doit intégrer), soit un volume en $\ell^2 \times 1$ où 1 est une longueur unitaire dans la direction perpendiculaire au plan de travail. On obtient finalement une énergie potentielle de l'ordre de $\frac{\sigma_\infty^2}{E} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{2(\lambda-1)} \ell^2$. Le critère double proposé par Leguillon consiste à se donner des conditions à la fois sur les contraintes et sur le taux de restitution de l'énergie et n'autoriser la nucléation ou la propagation que lorsque ces deux equations sont vérifiées. Avec un critère en contrainte

de type Tresca et un usant de la formule d'Irwin, on trouverait dans le cadre du problème traité :

$$\begin{cases} G_{inc} &= \frac{\sigma_\infty^2}{E}\left(\frac{\ell}{L}\right)^{2(\lambda-1)}\ell = \frac{K_{1c}^2}{E} \\ \sigma^2 &= \sigma_\infty^2\left(\frac{\ell}{L}\right)^{2(\lambda-1)} = \sigma_c^2 \end{cases} \tag{A.13}$$

Ce qui finalement se traduit par une condition sur la taille de nucléation $\ell \sim \left(\frac{K_{1c}}{\sigma_c}\right)^2$.

A.4 Formule d'Irwin anisotrope

Afin de pouvoir traiter de la propagation d'une fissure dans un problème bidimensionnel avec un matériau anistrope initialement dans son état naturel, on souhaite utiliser la formulation de la restitution d'énergie potentielle établie en (3.24). Dans cette expression, l'absence de terme de précontrainte conduit à $\boldsymbol{W} = \mathbf{0}$ et entraîne la nullité de tous les termes d'intégrale hormis les 3 premiers. L'expression de la fonction d'Airy obtenue asymptotiquement au voisinage du fond de fissure est donnée par (2.73) et est rappelée ci-dessous :

$$\phi = 2Re\left(\beta_1(x+\mu_1 y)^{\frac{3}{2}} + \beta_2(x+\mu_2 y)^{\frac{3}{2}}\right) \quad , \quad Im(\beta_1+\beta_2) = 0 \quad , \quad , Im(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2) = 0 \tag{A.14}$$

Le tenseur des contraintes associé se calcul comme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial\phi}{\partial^2 y} = \frac{3}{2\sqrt{\rho}}Re\left(\beta_1\mu_1^2(cos(\theta)+\mu_1 sin(\theta))^{-\frac{1}{2}} + \beta_2\mu_2^2(cos(\theta)+\mu_2 sin(\theta))^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial\phi}{\partial^2 x} = \frac{3}{2\sqrt{\rho}}Re\left(\beta_1(cos(\theta)+\mu_1 sin(\theta))^{-\frac{1}{2}} + \beta_2(cos(\theta)+\mu_2 sin(\theta))^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x\partial y} = -\frac{3}{2\sqrt{\rho}}Re\left(\beta_1\mu_1(cos(\theta)+\mu_1 sin(\theta))^{-\frac{1}{2}} + \beta_2\mu_2(cos(\theta)+\mu_2 sin(\theta))^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \tag{A.15}$$

Il est de plus possible d'établir le comportement asymptotique du champ de déplacement à partir des formules de représentation établies par Gorgievich Leknitskii [1963]. Avec ce choix particulier de fonction d'Airy, on trouverait :

$$\begin{aligned} \xi_x = 3\sqrt{\rho}Re\Big(& (A_{11}\mu_1^2 + A_{12} - A_{16}\mu_1)\beta_1(cos(\theta)+\mu_1 sin(\theta))^{\frac{1}{2}} \\ & + (A_{11}\mu_2^2 + A_{12} - A_{16}\mu_2)\beta_2(cos(\theta)+\mu_2 sin(\theta))^{\frac{1}{2}}\Big) \\ \xi_y = 3\sqrt{\rho}Re\Big(& (A_{12}\mu_1 + \frac{A_{22}}{\mu_1} - A_{26})\beta_1(cos(\theta)+\mu_1 sin(\theta))^{\frac{1}{2}} \\ & + (A_{12}\mu_2 + \frac{A_{22}}{\mu_2} - A_{26})\beta_2(cos(\theta)+\mu_2 sin(\theta))^{\frac{1}{2}}\Big) \end{aligned} \tag{A.16}$$

Les inconnues de ce problème β_1 et β_2 sont à valeur dans l'espace complexe et sont reliées par 2 équations linéaires indépendantes. Par conséquent, il existe deux solutions non liées engendrant l'espace solution en tant que $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel. Il est immédiat de vérifier que $\tilde{\beta}_1 = -\frac{1}{\mu_1-\mu_2}, \tilde{\beta}_2 = \frac{1}{\mu_1-\mu_2}$ et $\hat{\beta}_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, \hat{\beta}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}$ sont deux couples solutions. Il existe donc deux réelles k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_1-\mu_2} \\ \frac{1}{\mu_1-\mu_2} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2} \\ \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2} \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

Ils vérifient les relations ci-dessous qui seront utiles pour la suite des calculs :

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{\mu_1}\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{\mu_2}\tilde{\beta}_2 & = & \frac{1}{\mu_1\mu_2} \\ \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 & = & 0 \\ \mu_1\tilde{\beta}_1 + \mu_2\tilde{\beta}_2 & = & -1 \\ \mu_1^2\tilde{\beta}_1 + \mu_2^2\tilde{\beta}_2 & = & -(\mu_1+\mu_2) \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \frac{1}{\mu_1}\hat{\beta}_1 + \frac{1}{\mu_2}\hat{\beta}_2 & = & \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \\ \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 & = & 1 \\ \mu_1\hat{\beta}_1 + \mu_2\hat{\beta}_2 & = & 0 \\ \mu_1^2\hat{\beta}_1 + \mu_2^2\hat{\beta}_2 & = & -\mu_1\mu_2 \end{array} \tag{A.18}$$

Enfin, pour une propagation de fissure, les sous problèmes pour $\boldsymbol{V}^j$ deviennent triviaux. En effet, il est immédiat que la solution du $j^{ième}$ problème est $\boldsymbol{V}^j = \rho'^{\gamma_j}\boldsymbol{h}_j(\theta')$, avec ρ' et θ' définis comme sur la Figure 3.7. En effet, un tel champ de déplacement $\boldsymbol{V}^j$ vérifie bien toutes les conditions aux limites en contraintes mais aussi $\boldsymbol{V}^j(\boldsymbol{Y}) = \rho^{\gamma_j}\boldsymbol{h}_j(\theta)$ pour $1 \ll \rho \ll \frac{L}{\ell}$. Les conditions pour le contour Γ sont que celui-ci doit prendre appui sur les bords du coin, qui est ici la fissure avant propagation, et également entourer le défaut à savoir la portion de fissure créée lors de la propagation. On peut donc prendre pour Γ le contour noté $\mathcal{F}$ constitué des lèvres supérieure et inférieure de la portion de fissure propagée entre O et O'.

Pour revenir à la formulation (3.24), il est agréable de remarquer que $\boldsymbol{h}_1$ (resp. $\boldsymbol{h}_2$) s'obtient à partir de (A.16) en remplaçant ρ par 1 et β_1 et β_2 par $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ (resp. $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$). La même substitution de β_1 et β_2 dans (A.15) donne cette fois ci accès aux deux champs $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1)$ et $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2)$. Avec les notations utilisées, il est désormais possible de calculer les différentes intégrales présentes dans (3.24). Sur la lèvre supérieure $\mathcal{F}^+$, les bons angles à considérer sont $\theta = 0$ ainsi que $\theta' = \pi^-$. Cette dernière valeur conduit à considérer la racine carré de -1 qui s'écrit encore, par continuité, sous la forme $(-1)^{\frac{1}{2}} = i$. Enfin, en remarquant que, pour cette lèvre, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y$ et $\rho' = 1-\rho$, il vient pour le terme en ${k_1}^2$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}^+}\left[\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1(\theta).\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}^1).\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}^1.\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{h}_1(\theta)).\boldsymbol{n}\right]dS \\
&= -\int_{\mathcal{F}^+}\boldsymbol{V}^1.\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{u}_1(\theta)).\boldsymbol{n}dS \\
&= -\int_{\mathcal{F}^+}\Big[\Big(3\sqrt{1-\rho}Re\Big((A_{11}\mu_1^2 + A_{12} - A_{16}\mu_1)\tilde{\beta}_1(-1)^{\frac{1}{2}} + (A_{11}\mu_2^2 + A_{12} - A_{16}\mu_2)\tilde{\beta}_2(-1)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big) \\
&\qquad \times\left(-\frac{3}{2\sqrt{\rho}}Re\left(\tilde{\beta}_1\mu_1(1)^{-\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_2\mu_2(1)^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \\
&\qquad + \Big(3\sqrt{1-\rho}Re\Big((A_{12}\mu_1 + \frac{A_{22}}{\mu_1} - A_{26})\tilde{\beta}_1(-1)^{\frac{1}{2}} + (A_{12}\mu_2 + \frac{A_{22}}{\mu_2} - A_{26})\tilde{\beta}_2(-1)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big) \\
&\qquad \times\left(\frac{3}{2\sqrt{\rho}}Re\left(\tilde{\beta}_1(1)^{-\frac{1}{2}} + \tilde{\beta}_2(1)^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\Big]dS \\
&= -\int_{\mathcal{F}^+}\frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\Big[\Big(Im\Big((A_{11}\mu_1^2 + A_{12} - A_{16}\mu_1)\tilde{\beta}_1 + (A_{11}\mu_2^2 + A_{12} - A_{16}\mu_2)\tilde{\beta}_2\Big)\Big)Re\left(\tilde{\beta}_1\mu_1 + \tilde{\beta}_2\mu_2\right) \\
&\qquad - \Big(Im\Big((A_{12}\mu_1 + \frac{A_{22}}{\mu_1} - A_{26})\tilde{\beta}_1 + (A_{12}\mu_2 + \frac{A_{22}}{\mu_2} - A_{26})\tilde{\beta}_2\Big)\Big)Re\left(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2\right)\Big]dS \\
&= -\int_{\mathcal{F}^+}\frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\left[A_{11}Im\left(\mu_1^2\tilde{\beta}_1 + \mu_2^2\tilde{\beta}_2\right)Re\left(\tilde{\beta}_1\mu_1 + \tilde{\beta}_2\mu_2\right) - A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1}\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{\mu_2}\tilde{\beta}_2\right)Re\left(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2\right)\right]dS \\
&= -\left[A_{11}Im\left(\mu_1 + \mu_2\right)\right]\int_{\mathcal{F}^+}\frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}dS \\
&= -\frac{9\pi}{4}A_{11}Im\left(\mu_1 + \mu_2\right)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Sur $\mathcal{F}^-$, le résultat sera la identique avec pour subtilité que cette fois, $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_y$ et que $\theta' = -\pi^+$. Par conséquent, la bonne racine à considérer est $(-1)^{\frac{1}{2}} = -i$ toujours pour des raisons de

continuité. De la même façon, en ce qui concerne les termes en ${k_2}^2$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}^+} \left[\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2(\theta).\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}^2).\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}^2.\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{h}_2(\theta)).\boldsymbol{n}\right] dS \\
&= -\int_{\mathcal{F}^+} \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\left[A_{11}Im\left(\mu_1^2\hat{\beta}_1 + \mu_2^2\hat{\beta}_2\right)Re\left(\hat{\beta}_1\mu_1 + \hat{\beta}_2\mu_2\right) - A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1}\hat{\beta}_1 + \frac{1}{\mu_2}\tilde{\beta}_2\right)Re\left(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\right)\right] dS \\
&= \left[A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)\right]\int_{\mathcal{F}^+} \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} dS \\
&= \frac{9\pi}{4}A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Enfin, en ce qui concerne les termes croisés :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{F}^+} \left[\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{u}_1(\theta).\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}^2).\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}^2.\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\rho^{\gamma_1}\boldsymbol{u}_1(\theta)).\boldsymbol{n}\right] dS \\
&= -\int_{\mathcal{F}^+} \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\left[A_{11}Im\left(\mu_1^2\hat{\beta}_1 + \mu_2^2\hat{\beta}_2\right)Re\left(\tilde{\beta}_1\mu_1 + \tilde{\beta}_2\mu_2\right) - A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1}\hat{\beta}_1 + \frac{1}{\mu_2}\hat{\beta}_2\right)Re\left(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2\right)\right] dS \\
&= -\left[A_{11}Im\left(\mu_1\mu_2\right)\right]\int_{\mathcal{F}^+} \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} dS \\
&= -\frac{9\pi}{4}A_{11}Im\left(\mu_1\mu_2\right) \\
&\int_{\mathcal{F}^+} \left[\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{u}_2(\theta).\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{V}^1).\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}^1.\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\rho^{\gamma_2}\boldsymbol{u}_2(\theta)).\boldsymbol{n}\right] dS \\
&= -\int_{\mathcal{F}^+} \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}\left[A_{11}Im\left(\mu_1^2\tilde{\beta}_1 + \mu_2^2\tilde{\beta}_2\right)Re\left(\hat{\beta}_1\mu_1 + \hat{\beta}_2\mu_2\right) - A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1}\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{\mu_2}\tilde{\beta}_2\right)Re\left(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\right)\right] dS \\
&= \left[A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right)\right]\int_{\mathcal{F}^+} \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} dS \\
&= \frac{9\pi}{4}A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

On trouve finalement, en rassemblant les résultats obtenus jusqu'ici, que le taux de restitution d'énergie G, étant égal à la limite lorsque ℓ tend vers 0 du taux d'accroissement $\frac{E_p^0 - E_p^f(\ell)}{\ell}$, peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
G = \frac{9\pi}{4}\Bigg[\quad & k_1^2 A_{11}Im\left(\mu_1 + \mu_2\right) - k_2^2 A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) \\
& + k_1 k_2\left(A_{11}Im\left(\mu_1\mu_2\right) - A_{22}Im\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right)\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{A.22}$$

A.5 Développement asymptotique de la température au voisinage du coin d'un isolant thermique de forme carré

A.5.1 Développement asymptotique de ω

Le développement asymptotique de la transformation conforme ω au voisinage de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ vaut :

$$\begin{aligned}
&\omega'\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ\right)\\
&\quad=\gamma_0\left(1+\frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ\right)^4}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=\gamma_0\left(1+e^{-i\frac{\pi}{4}\times 4}\frac{1}{\left(1+e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ\right)^4}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=\gamma_0\left(1-\left(1-4e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ+10e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2-20e^{-i\frac{3\pi}{4}}dZ^3+O\left(dZ^4\right)\right)\right)^{1/2}\\
&\quad=\gamma_0\left(4e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ-10e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2+20e^{-i\frac{3\pi}{4}}dZ^3+O\left(dZ^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=\gamma_0 2e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{5}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ+5e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2+O\left(dZ^3\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=\gamma_0 2e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{5}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ+\frac{5}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2-\frac{1}{8}\left(-\frac{5}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ+5e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2\right)^2+O\left(dZ^3\right)\right)\\
&\quad=\gamma_0 2e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{5}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ+\frac{5}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2-\frac{25}{32}e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2+O\left(dZ^3\right)\right)\\
&\quad=\gamma_0 2e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)}dZ^{\frac{3}{2}}+\left(5-\frac{25}{16}\right)e^{-i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)}dZ^{\frac{5}{2}}+O\left(dZ^{\frac{7}{2}}\right)\\
&\omega'\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ\right)=\gamma_0\left(2e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}e^{-i\frac{3\pi}{8}}dZ^{\frac{3}{2}}+\frac{55}{16}e^{-i\frac{5\pi}{8}}dZ^{\frac{5}{2}}\right)+O\left(dZ^{\frac{7}{2}}\right)\\
&\omega\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ\right)=\gamma_0\left(\omega\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)+\frac{4}{3}e^{-i\frac{\pi}{8}}dZ^{\frac{3}{2}}-e^{-i\frac{3\pi}{8}}dZ^{\frac{5}{2}}+\frac{55}{56}e^{-i\frac{5\pi}{8}}dZ^{\frac{7}{2}}\right)+O\left(dZ^{\frac{9}{2}}\right)
\end{aligned}\tag{A.23}$$

Comme $1+i+dz=\omega\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ\right)$ et $z=\omega(\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$, l'égalité précédente fournit une relation permettant d'exprimer dz en fonction de dZ.

A.5.2 Expression de dZ en fonction de dz

Pour obtenir le développement final de la temperature, il est nécessaire d'inverser cette relation, c'est à dire expliciter dZ en fonction de dz. Pour ce faire, on pose $u^2=dZ$ et on cherche une relation de la forme :

$$u=C_1dz^{q_1}+C_2dz^{q_2}+C_3dz^{q_3}+o\left(dz^{q_3}\right)\quad\text{avec } q_1<q_2<q_3 \text{ et } C_1,C_2,C_3\in\mathbb{C}\tag{A.24}$$

En injectant cette expression dans l'a relation entre dz et dZ obtenue précédemment on trouve :

$$\begin{aligned}
dz\;=\;&\tfrac{4}{3}\gamma_0e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(C_1dz^{q_1}+C_2dz^{q_2}+C_3dz^{q_3}+o\left(dz^{q_3}\right)\right)^3\\
-\;&\gamma_0e^{-i\frac{3\pi}{8}}\left(C_1dz^{q_1}+C_2dz^{q_2}+C_3dz^{q_3}+o\left(dz^{q_3}\right)\right)^5\\
+\;&\tfrac{55}{56}\gamma_0e^{-i\frac{5\pi}{8}}\left(C_1dz^{q_1}+C_2dz^{q_2}+C_3dz^{q_3}+o\left(dz^{q_3}\right)\right)^7+O\left(dz^{9q_1}\right)
\end{aligned}\tag{A.25}$$

Les puissances de dz obtenues en développant l'expression ci-dessus peuvent être ordonnées pour le moment de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll} 1^{er} \text{ terme :} & 3q_1 & < & 2q_1+q_2 & < & \begin{cases} q_1+2q_2 \\ 2q_1+q_3 \end{cases} < \text{ autres puissances} \\ 2^{nd} \text{ terme :} & 5q_1 & < & 4q_1+q_2 & < & \text{autres puissances} \\ 3^{\text{ème}} \text{ terme:} & 7q_1 & < & \text{autres puissances} & & \end{array} \tag{A.26}$$

La première puissance de dz obtenues est donc $3q_1$. Par unicité du développement asymptotique il faut que :

$$\begin{cases} 3q_1 = 1 \\ \frac{4}{3}\gamma_0 e^{-i\frac{\pi}{8}} {C_1}^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{1}{3} \\ C_1 = \left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{24}} \end{cases} \tag{A.27}$$

Ce qui permet de mettre à jour le tableau précédent.

$$\begin{array}{llllll} 1^{er} \text{ terme :} & 3q_1 = 1 & < & 2q_1+q_2 = \frac{2}{3}+q_2 & < & \begin{cases} q_1+2q_2 = \frac{1}{3}+2q_2 \\ 2q_1+q_3 = \frac{2}{3}+q_3 \end{cases} < \text{ autres puissances} \\ 2^{nd} \text{ terme :} & 5q_1 = \frac{5}{3} & < & 4q_1+q_2 = \frac{4}{3}+q_2 & < & \text{autres puissances} \\ 3^{\text{ème}} \text{ terme:} & 7q_1 = \frac{7}{3} & < & \text{autres puissances} & & \end{array} \tag{A.28}$$

La seule façon de garantir l'unicité du développement est de compenser le terme de puissance $5q_1$ par celui en $2q_1+q_2$. Par conséquent, on obtient les relations :

$$\begin{cases} 2q_1+q_2 = 5q_1 = \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3}\gamma_0 e^{-i\frac{\pi}{8}} 3{C_1}^2 C_2 - \gamma_0 e^{-i\frac{3\pi}{8}} {C_1}^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 1 \\ C_2 = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} {C_1}^3 = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{3}{4\gamma_0} e^{i\frac{\pi}{8}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = 1 \\ C_2 = \frac{3}{16\gamma_0} e^{-i\frac{\pi}{8}} \end{cases} \tag{A.29}$$

On peut à nouveau affiner le tableau des puissances de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll} 1^{er} \text{ terme :} & 3q_1 = 1 & < & 2q_1+q_2 = \frac{5}{3} & < & \begin{cases} q_1+2q_2 = \frac{7}{3} \\ 2q_1+q_3 = \frac{2}{3}+q_3 \end{cases} < \text{ autres puissances} \\ 2^{nd} \text{ terme :} & 5q_1 = \frac{5}{3} & < & 4q_1+q_2 = \frac{7}{3} & < & \text{autres puissances} \\ 3^{\text{ème}} \text{ terme:} & 7q_1 = \frac{7}{3} & < & \text{autres puissances} & & \end{array} \tag{A.30}$$

Encore une fois, pour assurer l'unicité du développement, les termes en puissance $\frac{7}{3}$ doivent s'annuler à l'aide du terme de puissance $2q_1 + q_3$.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2q_1 + q_3 = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{4}{3}\gamma_0 e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(3C_1{C_2}^2 + 3{C_1}^2C_3\right) - \gamma_0 e^{-i\frac{3\pi}{8}}5{C_1}^4C_2 + \dfrac{55}{56}\gamma_0 e^{-i\frac{5\pi}{8}}{C_1}^7 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} q_3 = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{4}{3}\gamma_0 e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(\dfrac{3}{16}e^{-i\frac{\pi}{2}}{C_1}^7 + 3{C_1}^2C_3\right) - \dfrac{5}{4}\gamma_0 e^{-i\frac{5\pi}{8}}{C_1}^7 + \dfrac{55}{56}\gamma_0 e^{-i\frac{5\pi}{8}}{C_1}^7 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} q_3 = \dfrac{5}{3} \\ 4e^{-i\frac{\pi}{8}}C_3 + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4} + \dfrac{55}{56}\right)e^{-i\frac{5\pi}{8}}{C_1}^5 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} q_3 = \dfrac{5}{3} \\ C_3 = \dfrac{1}{224}e^{-i\frac{4\pi}{8}}{C_1}^5 = \dfrac{1}{224}e^{-i\frac{4\pi}{8}}\left(\dfrac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{5}{3}}e^{i\frac{5\pi}{24}} \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} q_3 = \dfrac{5}{3} \\ C_3 = \dfrac{1}{224}\left(\dfrac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{5}{3}}e^{-i\frac{7\pi}{24}} \end{cases}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Le bon petit o à considérer est $o(dz^{2q_1+q_3}) = o(dz^{\frac{7}{3}})$ ce qui est en conformité avec le calcul. De plus, on avait un $O(dz^{9q_1}) = O(dz^3)$ qui rentre dans le o précédent. Ainsi, on a obtenu jusqu'à présent :

$$u = dZ^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{24}}dz^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{16\gamma_0}e^{-i\frac{\pi}{8}}dz + \frac{1}{224}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{5}{3}}e^{-i\frac{7\pi}{24}}dz^{\frac{5}{3}} + o(dz^{\frac{5}{3}}) \tag{A.32}$$

Il aurait probablement été possible d'être plus précis en montrant que le $o(dz^{\frac{5}{3}})$ est en fait un $O(dz^{\frac{7}{3}})$. Pour revenir à l'expression de dZ, il suffit d'élever la dernière relation au carré, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
dZ &= \left(\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{24}}dz^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{16\gamma_0}e^{-i\frac{\pi}{8}}dz + \frac{1}{224}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{5}{3}}e^{-i\frac{7\pi}{24}}dz^{\frac{5}{3}} + o(dz^{\frac{5}{3}})\right)^2 \\
&= \left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{112}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^2e^{-i\frac{\pi}{4}}dz^2 + \left(\frac{3}{16\gamma_0}\right)^2e^{-i\frac{\pi}{4}}dz^2 + o(dz^2) \\
dZ &= \left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{14}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^2e^{-i\frac{\pi}{4}}dz^2 + o(dz^2)
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Pour conclure, on avait vu que $f(1+i+dz) = F(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ)$. Le développement asymptotique de F donne :

$$\begin{aligned}
F(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ) &= A\gamma_0\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ+\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ}\right)\\
&= A\gamma_0\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ+e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ}\right)\\
&= A\gamma_0\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+dZ+e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(1-e^{-i\frac{\pi}{4}}dZ+e^{-i\frac{\pi}{2}}dZ^2-e^{-i\frac{3\pi}{4}}dZ^3\right)+O\left(dZ^4\right)\right)\\
&= A\gamma_0\left(\sqrt{2}+\left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)dZ+e^{-i\frac{3\pi}{4}}dZ^2-e^{-i\pi}dZ^3+O\left(dZ^4\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Alors que celui de f conduit à :

$$\begin{aligned}
&f(1+i+dz)\\
&= A\left(\gamma_0\sqrt{2}+\gamma_0\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}dZ+\gamma_0e^{-i\frac{3\pi}{4}}dZ^2-\gamma_0e^{-i\pi}dZ^3+O\left(dZ^4\right)\right)\\
&= A\gamma_0\sqrt{2}+A\gamma_0\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{14}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}dz^2\right)\\
&\quad+A\gamma_0e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{14}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}dz^2\right)^2\\
&\quad+A\gamma_0\left(\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}dz^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{14}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}dz^2\right)^3\\
&\quad+o(dz^2)\\
&= A\gamma_0\sqrt{2}+A\gamma_0\sqrt{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}dz^{\frac{2}{3}}\\
&\quad+A\gamma_0\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}+\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right]dz^{\frac{4}{3}}\\
&\quad+A\gamma_0\left[\frac{1}{7\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2}+e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2}+\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right]dz^2+o(dz^2)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Finalement, on trouve l'expression suivante pour le développement asymptotique à l'ordre 3 de f au voisinage du coin supérieur droit :

$$\begin{aligned}
&f(1+i+dz) =\\
&A\left(\gamma_0\sqrt{2}+\gamma_0\sqrt{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}dz^{\frac{2}{3}}+\frac{\gamma_0\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{\frac{4}{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}}dz^{\frac{4}{3}}+\frac{\gamma_0}{7\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4\gamma_0}\right)^{2}dz^2\right)+o(dz^2)
\end{aligned} \tag{A.36}$$

A.6 Transformation conforme en mécanique avec des séries de Laurent tronquées

Les problèmes traités par le biais de transformations conformes auront des domaines infinis pouvant être représentés comme l'image, par une transformation ω, de l'extérieur du cercle du unité Σ. Dans un premier temps, seuls des problèmes présentant un trou chargé et des conditions de contraintes nulles à l'infini seront considérés. Ce n'est que dans un second temps que des trous libres de contraintes seront considérés avec des conditions aux limites en contraintes quelconques à l'infini.

A.6.1 Potentiels complexes et équation de Fredholm

Il est rappelé que pour un problème bidimensionnel, infini, en déformations planes ou en contraintes planes et possédant un trou centré à l'origine, il est possible d'exhiber une transformation conforme ω permettant d'envoyer l'extérieur du cercle unité Σ sur le domaine considéré $S = \omega(\Sigma)$. Ce faisant, en réservant l'usage de la variable z à ce dernier et en utilisant la variable Z pour le domaine antécédent, il est possible de définir deux potentiels complexes sur S dits images et notés φ et ψ, de variable naturelle z, ainsi que deux potentiels complexes sur Σ dits antécédents et notés Φ et Ψ, de variables naturelles Z. La relation permettant de relier ces deux jeux de potentiels a été donnée dans le Chapitre 2 (voir (2.10)) et est rappelée ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{ccc} z & = & \omega(Z) \\ \varphi(z) & = & \Phi(Z) \\ \psi(z) & = & \Psi(Z) \end{array}\right. \tag{A.37}$$

La transformation conforme permet d'exprimer les bords du trous considérés comme étant l'image du cercle unité. Par conséquent, les conditions aux limites du problème mécanique considéré au niveau du trou s'expriment sur les deux potentiels antécédents Φ et Ψ. Une telle opération, détaillée dans Muskhelishvili [1953], conduit à l'équation de Fredholm :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} + \Phi(\zeta) - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma = 0 \tag{A.38}$$

où f est la représentation complexe de la résultante des contraintes s'exerçant sur une partie de la frontière. Plus précisément, f se définit comme :

$$f = i(T_x + iT_y) \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{l} T_x = \displaystyle\int_0^\zeta \boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}dS \\ T_y = \displaystyle\int_0^\zeta \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}dS \end{array} \tag{A.39}$$

pour un point ζ appartenant à la frontière du trou. Attention toutefois que la notion de vecteur contrainte est relative à la notion de normale au contour et que par conséquent celle-ci est héritière de la convention d'orientation usuelle illustrée Figure 3.8. Pour rappel, en notant $\boldsymbol{t}$ le vecteur tangent au contour orienté selon le sens de parcours de l'arc choisi, la convention d'orientation stipule que $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$ doit être orienté comme $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$. Ces points étant éclaircis, l'équation de Fredholm (A.38) devient très puissante puisqu'elle permet, de manière implicite, de calculer Φ. De plus, une seconde équation peut être obtenue par le biais de considérations similaires. Son intérêt réside dans le fait qu'elle permet, quant à elle, d'accéder au second potentiel Ψ :

$$\Psi(\zeta) = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma = 0 \tag{A.40}$$

Ces différentes équations étant valables en toute généralité, il ne sera traité par la suite que des situations où la transformation conforme peut se mettre sous la forme d'un développement en série de Laurent tronqué. En d'autres termes, ω se met sous la forme :

$$\omega(Z) = c_0 Z + \frac{c_1}{Z} + \ldots + \frac{c_n}{Z^{n+1}} \tag{A.41}$$

Cette décomposition est bien compatible avec le fait que le domaine antécédent considéré est l'extérieur du cercle unité et que ω doit être holomorphe sur Σ. On supposera de plus que les coefficients c_k sont des constantes réelles.

A.6.2 État de contrainte nul à l'infini

Par définition de la transformation conforme considérée (A.41), il vient :

$$\omega'(\zeta) = c_0 - \frac{c_1}{\zeta^2} - \ldots - \frac{nc_n}{\zeta^{n+1}} \tag{A.42}$$

qui ne doit jamais être nul pour $|\zeta| > 1$. A ce stade, il est utile d'introduire la notation $\overline{g}$ comme étant la fonction complexe conjuguée d'une fonction holomorphe g. La définition d'une telle fonction est :

$$\overline{g}(\zeta) = \overline{g\left(\overline{\zeta}\right)} \tag{A.43}$$

Étant donné que les coefficients c_k ont été pris comme réels, il vient avec la définition précédente que :

$$\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = c_0 - c_1\zeta^2 - \ldots - nc_n\zeta^{n+1} \tag{A.44}$$

n'est jamais égal à 0 pour $|\zeta| < 1$. Conséquemment, il est immédiat que pour tout ζ non nul à l'intérieur du disque unité, la fonction :

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \frac{c_0\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \ldots + \frac{c_n}{\zeta^n}}{c_0 - c_1\zeta^2 - \ldots - nc_n\zeta^{n+1}} = \frac{1}{\zeta^n}\frac{c_0\zeta^{n+1} + c_1\zeta^{n-1} + \ldots + c_n}{c_0 - c_1\zeta^2 - \ldots - nc_n\zeta^{n+1}} \tag{A.45}$$

est toujours bien définie et est de plus holomorphe sur le domonaie $\Sigma^+ = \{\zeta/|\zeta| < 1\}$ à l'exception d'un pôle d'ordre n en 0. Les théorèmes d'analyse complexe usuels garantissent alors l'existence d'un développement de cette fonction de la forme :

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \frac{b_n}{\zeta^n} + \frac{b_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \ldots + \frac{b_1}{\zeta} + b_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\zeta^k \tag{A.46}$$

Étant donné qu'il a été supposé que le problème considéré avait des conditions aux limites de type contraintes nulles à l'infini, le potentiel Φ doit être holomorphe sur l'ensemble $\Sigma^- = \{\zeta/|\zeta| < 1\}$ y compris à l'infini. Par conséquent, il est possible de chercher une solution à l'équation de Fredholm (A.38) de la forme :

$$\Phi(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \frac{a_n}{\zeta^n} \tag{A.47}$$

où toutefois les coefficients a_i peuvent être des nombre complexes. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \Phi'(\zeta) &= -\frac{a_1}{\zeta^2} - \frac{2a_2}{\zeta^3} - \ldots - \frac{(n-1)a_{n-1}}{\zeta^n} + \frac{na_n}{\zeta^{n+1}} \\ \overline{\Phi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) &= -\overline{a_1}\zeta^2 - 2\overline{a_2}\zeta^3 - \ldots - (n-1)\overline{a_{n-1}}\zeta^n + n\overline{a_n}\zeta^{n+1} \end{aligned} \tag{A.48}$$

Pour un tel potentiel Φ, il est clair que :

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\Phi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = K_0 + \frac{K_1}{\zeta} + \frac{K_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{K_{n-2}}{\zeta^{n-2}} + O(\zeta) \tag{A.49}$$

où derrière la notation $O(\zeta)$ se cache en fait une fonction holomorphe sur Σ^+. Par conséquent, il est obtenu une fonction holomorphe sur Σ^+ à l'exception près du point 0 qui constitue un

pôle d'ordre inférieur ou égal à $n-2$. De plus, il est possible de déduire les coefficients K_i à partir des a_j comme suit :

$$\begin{array}{lcl} K_{n-2} & = & -\overline{a_1}b_n \\ K_{n-3} & = & -\overline{a_1}b_{n-1} - 2\overline{a_2}b_n \\ \dots & & \\ K_1 & = & -\overline{a_1}b_3 - 2\overline{a_2}b_4 - 3\overline{a_3}b_5 - \dots - (n-2)\,\overline{a_{n-2}}b_n \\ K_0 & = & -\overline{a_1}b_2 - 2\overline{a_2}b_3 - 3\overline{a_3}b_4 - \dots - (n-2)\,\overline{a_{n-2}}b_{n-1} - (n-1)\,\overline{a_{n-1}}b_n \end{array} \tag{A.50}$$

Puisque, sur le cercle unité, les fonctions $\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\Phi'(\sigma)}$ and $\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'}(\sigma)}\overline{\Phi'}(\sigma)$ sont égales, il apparait que pour tout $|\zeta| > 1$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma = -\frac{K_1}{\zeta} - \frac{K_2}{\zeta^2} - \dots - \frac{K_{n-2}}{\zeta^{n-2}} \tag{A.51}$$

résultat obtenu grâce à la formule de Cauchy adaptée aux fonctions étant holomorphes sur l'extérieur du cercle unité y compris à l'infini. Finalement, pour tout nombre complexe appartenant à Σ^+ il vient :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma - \Phi(\zeta) = -\frac{a_1+K_1}{\zeta} - \frac{a_2+K_2}{\zeta^2} - \dots - \frac{a_{n-2}+K_{n-2}}{\zeta^{n-2}} - \frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}} - \frac{a_n}{\zeta^n} \tag{A.52}$$

Pour pouvoir terminer la procédure, il est nécessaire de spécifier le chargement considéré et donc de préciser la fonction f

Pression isotrope bidimensionnelle p

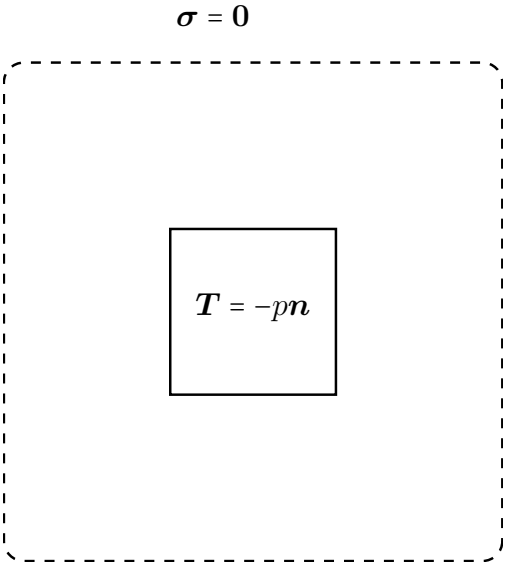

FIGURE A.1 – Trou de forme carré chargé avec une pression isotrope dans un milieu libre de contraintes à l'infini

Pour pouvoir s'exprimer sur la fonction f, il est également nécessaire de préciser le contour du trou considéré. Dans notre cas, il s'agira d'un trou carré de côté c. Soit $z = x + iy$ un point appartenant à la frontière du carré avec x et y deux nombres réels. Alors, pour un chargement

de type pression isotrope p (dans le contexte bidimensionnel choisi), la définition de f donnée en (A.39) permet d'obtenir :

$$\begin{array}{rcll} f & = & -p(z-c) & \text{où } c \text{ est la dimension du côté du carré} \\ f & = & -p(\omega(\sigma)-c) & \text{où } z=\omega(\sigma) \end{array} \tag{A.53}$$

Pour un tel chargement il vient :

$$|\zeta|>1, \quad \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{-p(\omega(\sigma)-c)}{\sigma-\zeta}d\sigma = p\left(\frac{c_1}{\zeta}+\ldots+\frac{c_n}{\zeta^n}\right) \tag{A.54}$$

Il est intéressant de noter que l'expression obtenue ne dépend pas de c. En fait, ce résultat est plus général et correspond à la situation d'un trou de forme quelconque soumis à une pression isotrope. Une fois combiné avec (A.52), ce résultat permet de réécrire l'équation de Fredholm (A.38) sous la forme :

$$|\zeta|>1, \quad p\left(\frac{c_1}{\zeta}+\ldots+\frac{c_n}{\zeta^n}\right) = -\frac{a_1+K_1}{\zeta}-\frac{a_2+K_2}{\zeta^2}-\ldots-\frac{a_{n-2}+K_{n-2}}{\zeta^{n-2}}-\frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}}-\frac{a_n}{\zeta^n} \tag{A.55}$$

Étant donné que cette égalité doit rester vraie quelque soit $|\zeta|>1$, il est obtenu pour des raisons d'unicité que les coefficients apparaissant devant une puissance $\frac{1}{\zeta^k}$ donnée dans chacun des deux développements doivent être égaux, et ce, quelque soit k. Ainsi, un système d'équations à valeurs dans $\mathbb{C}$, dont les inconnues sont les coefficients complexes a_i et inversible est obtenu. Le fait d'être capable d'exhiber une solution à l'équation de Fredholm justifie de fait le choix de forme particulière qui a été faite pour le potentiel Φ. La seconde équation (A.40) permet d'obtenir directement une expression pour Ψ qui est :

$$|\zeta|>1, \quad \Psi(\zeta) = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma \tag{A.56}$$

Cette dernière peut être un peu simplifiée en explicitant les valeurs des différentes intégrales. Par exemple, les deux fonctions :

$$\sigma \longmapsto \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta} \qquad \text{et} \qquad \sigma \longmapsto \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta} \tag{A.57}$$

étant égale sur le cercle unité, il vient, en accord avec (A.49) :

$$|\zeta|>1, \quad \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta} - \left(\overline{K_0}+\overline{K_1}\zeta+\ldots+\overline{K_{n-2}}\zeta^{n-2}\right) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{A.58}$$

où $O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ est également une fonction holomorphe sur Σ^- y compris à l'infini et valant zéro à l'infini. Les formules de Cauchy étendues permettent de trouver :

$$|\zeta|>1, \quad \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma = \overline{K_0}+\overline{K_1}\zeta+\ldots+\overline{K_{n-2}}\zeta^{n-2} - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta) \tag{A.59}$$

Or, puisque :

$$|\zeta|>1, \quad \int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma = p\frac{c_0}{\zeta} \tag{A.60}$$

il est possible de conclure finalement que, pour le choix particulier de chargement :

$$\begin{aligned} |\zeta| > 1, \quad \Phi(\zeta) &= \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \frac{a_n}{\zeta^n} \\ \Psi(\zeta) &= -p\frac{c_0}{\zeta} + \overline{K_0} + \overline{K_1}\zeta + \ldots + \overline{K_{n-2}}\zeta^{n-2} - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta) \end{aligned} \tag{A.61}$$

où les constantes complexes a_i sont les solutions du système linéaires (A.55).

Chargement déviateur de contraintes

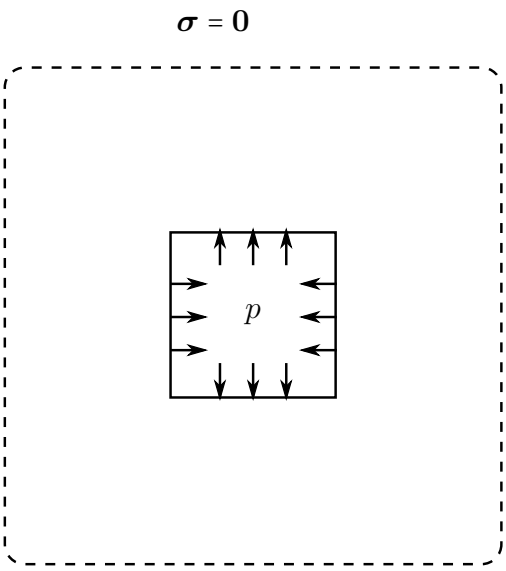

FIGURE A.2 – Trou de forme carré chargé avec un déviateur de contraintes dans un milieu libre de contraintes à l'infini

Pour un choix de chargement correspondant à celui illustré Figure A.2, dit chargement déviateur, on trouverait :

$$f(\sigma) = -p\left(\overline{\omega(\sigma)} - c\right) \tag{A.62}$$

Il est ainsi possible de trouver l'équivalent de (A.55) avec le chargement considéré :

$$p\frac{c_0}{\zeta} = -\frac{a_1 + K_1}{\zeta} - \ldots - \frac{a_{n-2} + K_{n-2}}{\zeta^{n-2}} - \frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}} - \frac{a_n}{\zeta^n} \tag{A.63}$$

qui à nouveau ne dépend pas de c. La remarque faite dans le cas du chargement isotrope est en fait encore valable ici. Il vient finalement :

$$\begin{aligned} |\zeta| > 1, \quad \Phi(\zeta) &= \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \frac{a_n}{\zeta^n} \\ \Psi(\zeta) &= -p\left(\frac{c_1}{\zeta} + \ldots + \frac{c_n}{\zeta^n}\right) + \overline{K_0} + \overline{K_1}\zeta + \ldots + \overline{K_{n-2}}\zeta^{n-2} - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta) \end{aligned} \tag{A.64}$$

où les constantes complexes a_i sont solutions du problème linéaire (A.63) et sont, par conséquent, différentes de celles obtenues dans le cas du chargement isotrope.

A.6.3 Superposition

Les deux méthodes proposées ci-dessus sont mises en œuvre pour des problèmes avec des conditions aux limites à l'infini de type contraintes nulles. Afin d'obtenir les solutions correspondant à des situations où le trou est libre de contrainte mais où un chargement en contraintes existe à l'infini, il est possible de procéder par superposition. Il est immédiat de montrer que la situation où la projection dans le plan du tenseur des contraintes de Cauchy est constante et égale à $p\left(\boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y\right)$ peut se déduire des potentiels complexes image suivant :

$$\varphi(z) = z\frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi(z) = 0 \tag{A.65}$$

Cependant, pour les deux problèmes précédents, les potentiels ne sont disponibles que par le biais des potentiels antécédents leur étant associés. Par conséquent, dans le but de pouvoir superposer les problèmes, il est nécessaire de fournir les potentiels antécédents correspondant aux deux potentiels images venant d'être introduits. Ils s'expriment très simplement sous la forme :

$$\Psi(Z) = \omega(Z)\frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad \Psi(Z) = 0 \tag{A.66}$$

Pour pouvoir obtenir la solution d'un milieu infini chargé à l'infini comprenant un trou (pas nécessairement de forme carré) libre de contrainte, il suffit de sommer les potentiels ci-dessus avec ceux plus haut dans le cas du chargement isotrope (A.55).

De la même manière, un état de contrainte constant dont la projection dans le plan est égale à $p\left(\boldsymbol{e}_y \otimes \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x\right)$ peut être obtenu à partir des deux potentiels complexes suivants :

$$\varphi(z) = 0 \qquad \text{and} \qquad \psi(z) = zp \tag{A.67}$$

qui, à leur tour, sont associés à deux potentiels antécédents :

$$\Phi(Z) = 0 \qquad \text{and} \qquad \Psi(Z) = \omega(Z)p \tag{A.68}$$

Ces deux potentiels sont à sommer avec ceux obtenus en (A.63) afin d'avoir accès à la solution d'un trou libre de contrainte plongé dans un milieu chargé à l'infini avec des conditions aux limites en contraintes déviatoriques.

A.7 Taux de restitution d'énergie et potentiels complexes

Dans le but d'expliciter (4.145), tous les termes de l'intégrande doivent être calculés séparément. A partir de (4.147), il est possible d'interpréter chaque terme comme la trace de fonctions holomorphes. Par conséquent, il est possible d'utiliser les formules de Cauchy sur le contour Γ. Les calculs ne présentent en soi aucune difficulté et se ressemblent beaucoup. Par conséquent, ils seront juste listés ci-dessous :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \kappa e^{-2i\theta}\varphi^\alpha(z)\varphi^{\beta\prime}(z)dz &= \kappa\int_\Gamma \frac{R^2}{z^2}\left(a_0^\alpha z + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k^\alpha}{z^k}\right)\left(a_0^\beta - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k a_k^\beta}{z^{k+1}}\right)dz \\ &= 2i\pi\kappa R^2 a_0^\alpha a_0^\beta\end{aligned} \tag{A.69}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \kappa e^{-2i\theta}\varphi^\alpha(z)\overline{\varphi^{\beta\prime}(z)}dz &= \kappa\int_\Gamma \frac{R^2}{z^2}\left(a_0^\alpha z + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k^\alpha}{z^k}\right)\left(\overline{a_0^\beta} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{a_k^\beta}z^{k+1}}{R^{2(k+1)}}\right)dz \\ &= 2i\pi\kappa\left(R^2 a_0^\alpha\overline{a_0^\beta} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k a_k^\alpha\overline{a_k^\beta}}{R^{2k}}\right)\end{aligned} \tag{A.70}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma -\kappa\varphi^\alpha(z)\psi^{\beta\prime}(z)dz &= -\kappa\int_\Gamma\left(a_0^\alpha z+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k^\alpha}{z^k}\right)\left(b_0^\beta-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{kb_k^\beta}{z^{k+1}}\right)dz\\ &= -2i\pi\kappa\left(b_0^\beta a_1^\alpha-a_0^\alpha b_1^\beta\right)\end{aligned}\tag{A.71}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma -\kappa\overline{z}\varphi^\alpha(z)\varphi^{\beta\prime\prime}(z)dz &= -\kappa\int_\Gamma\frac{R^2}{z}\left(a_0^\alpha z+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k^\alpha}{z^k}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k+1)a_k^\beta}{z^{k+2}}\right)dz\\ &= 0\end{aligned}\tag{A.72}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma -e^{-2i\theta}z\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\varphi^{\beta\prime}(z)dz &= -\int_\Gamma\frac{R^2}{z}\left(\overline{a_0^\alpha}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{a_k^\alpha}z^{k+1}}{R^{2(k+1)}}\right)\left(a_0^\beta-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ka_k^\beta}{z^{k+1}}\right)\\ &= -2i\pi\left(R^2\overline{a_0^\alpha}a_0^\beta+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2\overline{a_k^\alpha}a_k^\beta}{R^{2k}}\right)\end{aligned}\tag{A.73}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma -e^{-2i\theta}z\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\overline{\varphi^{\beta\prime}(z)}dz &= -\int_\Gamma\frac{R^2}{z}\left(\overline{a_0^\alpha}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{a_k^\alpha}z^{k+1}}{R^{2(k+1)}}\right)\left(\overline{a_0^\beta}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{a_k^\beta}z^{k+1}}{R^{2(k+1)}}\right)dz\\ &= -2i\pi R^2\overline{a_0^\alpha}\overline{a_0^\beta}\end{aligned}\tag{A.74}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma z\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\psi^{\beta\prime}(z)dz &= \int_\Gamma z\left(\overline{a_0^\alpha}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{a_k^\alpha}z^{k+1}}{R^{2(k+1)}}\right)\left(b_0^\beta-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{kb_k^\beta}{z^{k+1}}\right)dz\\ &= 2i\pi\left(-\overline{a_0^\alpha}b_1^\beta+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k+2)\overline{a_k^\alpha}b_{k+2}^\beta}{R^{2(k+1)}}\right)\end{aligned}\tag{A.75}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |z|^2\overline{\varphi^{\alpha\prime}}\varphi^{\beta\prime\prime}(z)dz &= \int_\Gamma R^2\left(\overline{a_0^\alpha}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{a_k^\alpha}z^{k+1}}{R^{2(k+1)}}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k+1)a_k^\beta}{z^{k+2}}\right)dz\\ &= -2i\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2(k+1)\overline{a_k^\alpha}a_k^\beta}{R^{2k}}\end{aligned}\tag{A.76}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma -e^{-2i\theta}\overline{\psi^\alpha(z)}\varphi^{\beta\prime}(z)dz &= -\int_\Gamma\frac{R^2}{z^2}\left(\frac{\overline{b_0^\alpha}R^2}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\overline{b_k^\alpha}z^k}{R^{2k}}\right)\left(a_0^\beta-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ka_k^\beta}{z^{k+1}}\right)dz\\ &= -2i\pi\left(\overline{b_1^\alpha}a_0^\beta-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ka_k^\beta\overline{b_{k+2}^\alpha}}{R^{2(k+1)}}\right)\end{aligned}\tag{A.77}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma -e^{-2i\theta}\overline{\psi^\alpha(z)}\overline{\varphi^{\beta\prime}(z)}dz &= -\int_\Gamma\frac{R^2}{z^2}\left(\frac{\overline{b_0^\alpha}R^2}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\overline{b_k^\alpha}z^k}{R^{2k}}\right)\left(\overline{a_0^\beta}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{a_k^\beta}z^{k+1}}{R^{2(k+1)}}\right)dz\\ &= -2i\pi\left(\overline{b_1^\alpha}\overline{a_0^\beta}-\overline{b_0^\alpha}\overline{a_1^\beta}\right)\end{aligned}\tag{A.78}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \overline{\psi^\alpha(z)}\psi^{\beta\prime}(z)dz &= \int_\Gamma\left(\frac{\overline{b_0^\alpha}R^2}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\overline{b_k^\alpha}z^k}{R^{2k}}\right)\left(b_0^\beta-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{kb_k^\beta}{z^{k+1}}\right)dz\\ &= 2i\pi\left(R^2\overline{b_0^\alpha}b_0^\beta-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\overline{b_k^\alpha}b_k^\beta}{R^{2k}}\right)\end{aligned}\tag{A.79}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \overline{z}\overline{\psi^\alpha(z)}\varphi^{\beta\prime\prime}(z)dz &= \int_\Gamma\frac{R^2}{z}\left(\frac{\overline{b_0^\alpha}R^2}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\overline{b_k^\alpha}z^k}{R^{2k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k+1)a_k^\beta}{z^{k+2}}\right)dz\\ &= 2i\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k+1)a_k^\beta\overline{b_{k+2}^\alpha}}{R^{2(k+1)}}\end{aligned}\tag{A.80}$$

Une fois tous ces résultats mis bout à bout, la partie imaginaire (4.145) se met sous la forme :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \boldsymbol{\xi}^{\alpha}.\boldsymbol{\sigma}^{\beta}.\boldsymbol{n}dS \\
&= \frac{\pi}{2\mu} Re\,(\quad \kappa R^2 a_0^{\alpha} a_0^{\beta} + \kappa R^2 a_0^{\alpha}\overline{a_0^{\beta}} + \kappa \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k a_k^{\alpha}\overline{a_k^{\beta}}}{R^{2k}} - \kappa b_0^{\beta} a_1^{\alpha} + \kappa a_0^{\alpha} b_1^{\beta} \\
&\qquad - R^2 \overline{a_0^{\alpha}} a_0^{\beta} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2(k+2)\overline{a_k^{\alpha}} a_k^{\beta}}{R^{2k}} - R^2 \overline{a_0^{\alpha}}\overline{a_0^{\beta}} \\
&\qquad - \overline{a_0^{\alpha}} b_1^{\beta} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+2)\overline{a_k^{\alpha}} b_{k+2}^{\beta}}{R^{2(k+1)}} - \overline{b_1^{\alpha}} a_0^{\beta} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+2) a_k^{\beta}\overline{b_{k+2}^{\alpha}}}{R^{2(k+1)}} \\
&\qquad - \overline{b_1^{\alpha}}\overline{a_0^{\beta}} + \overline{b_0^{\alpha}}\overline{a_1^{\beta}} + R^2 \overline{b_0^{\alpha}} b_0^{\beta} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \overline{b_k^{\alpha}} b_k^{\beta}}{R^{2k}} \;)
\end{aligned}
\tag{A.81}
$$

Annexe B

Thermo-poro-élasticité

Sommaire

A.1 Racines du polynôme caractéristique P 272

A.2 Degrés de singularité duaux 272

A.3 Critère mixte de Leguillon et longueur interne 274

A.4 Formule d'Irwin anisotrope 275

A.5 Développement asymptotique de la température au voisinage du coin d'un isolant thermique de forme carré 278

A.5.1 Développement asymptotique de ω 278

A.5.2 Expression de dZ en fonction de dz 278

A.6 Transformation conforme en mécanique avec des séries de Laurent tronquées 281

A.6.1 Potentiels complexes et équation de Fredholm 282

A.6.2 État de contrainte nul à l'infini 283

A.6.3 Superposition 287

A.7 Taux de restitution d'énergie et potentiels complexes 287

B.1 Equations d'état de la thermo-poro-élasticité

B.1.1 Positionnement du problème thermo-poro-élastique

On considère le problème de thermo-poro-mécanique schématisé par la Figure B.1. Les

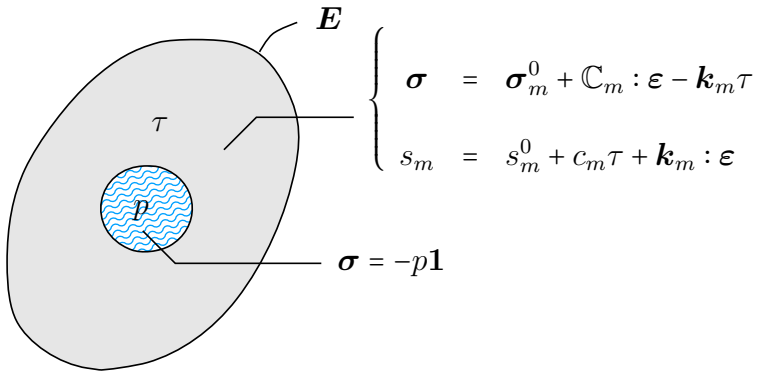

FIGURE B.1 – Schématisation du problème micromécanique correspondant à un milieu poreux saturé constitué d'une matrice solide thermoélastique et d'un fluide à la pression p

caractéristiques thermo-élastiques de la matrice solide $\mathbb{C}_m$, $\boldsymbol{k}_m$ et c_m sont supposées être constantes. Toutefois, une attention toute particulière doit être accordée à la notation utilisée. En effet, celle-ci peut s'avérer maladroite puisque s_m correspond bien à une densité volumique microscopique d'entropie, l'indice m rappelant le caractère microscopique de la quantité en question et non un éventuel caractère massique de celle-ci. Dans l'état de référence, noté avec un exposant 0, les milieux ne seront pas dans leur état naturel. Par conséquent, il est considéré que le fluide est initialement pressurisé à une pression p^0 et que solide est initialement précontraint avec $\boldsymbol{\sigma}_m^0$ qui lui n'est pas forcément uniforme l'espace solide. Pour autant, ces deux quantités ne peuvent pas être choisies arbitrairement l'une par rapport à l'autre. En effet, pour que $\boldsymbol{\sigma}_m^0$ ait réellement le statut de contrainte, il est nécessaire que celle-ci soit en équilibre avec les efforts de pression dans les pores. En somme, $\boldsymbol{\sigma}_m^0$ doit être à divergence nulle mais aussi vérifier, en un point appartenant à une frontière entre un pore et la matrice solide, la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}_m^0.\boldsymbol{n} = -p^0\boldsymbol{n} \tag{B.1}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale à la frontière au point considéré, orientée de la matrice solide vers le fluide. On notera d'ailleurs $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$ le tenseur défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\sigma}_m^0 \chi_{solide}(\boldsymbol{z}) - p^0\mathbf{1}\chi_{pores}(\boldsymbol{z}) \tag{B.2}$$

avec χ_{pores} et χ_{solide} les fonctions indicatrices de l'espace poreux et du solide. Il s'agit d'un tenseur de contraintes à divergence nulle et dont le vecteur contrainte est continu à travers toute surface de discontinuité. Il s'interprète comme le tenseur de précontrainte sur l'intégralité du VER. Soient alors $\boldsymbol{\Sigma}$ la contrainte macroscopique, ϕ la porosité lagrangienne et s_s la densité volumique macroscopique d'entropie de la phase solide. Ces quantités se déduisent des quantités microscopiques par le biais des relations suivantes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad , \quad \phi - \phi^0 = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega^f} \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} dV = \phi^0\mathbf{1} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^f \quad , \quad s_s = \left(1-\phi^0\right)\overline{s_m}^s \tag{B.3}$$

où l'opérateur $\overline{}$ désigne la moyenne sur le VER, $\overline{}^f$ la moyenne sur l'espace poreux et $\overline{}^s$ la moyenne sur la matrice solide. Au niveau des de la microstructure, il est possible de résumer la première équation d'état sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{z}) : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{z}) \tag{B.4}$$

où $\boldsymbol{z}$ est le vecteur position microscopique et $\boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{z})$ est une précontrainte s'exprimant comme :

$$\boldsymbol{\sigma}^p(\boldsymbol{z}) = -\left(p - p^0\right)\mathbf{1}\chi_{pores}(\boldsymbol{z}) - \tau \boldsymbol{k}_m \chi_{solide}(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\sigma}^0 \tag{B.5}$$

De même, le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(\boldsymbol{z})$ s'exprime simplement :

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{z}) = \mathbb{C}_m \chi_{solide}(\boldsymbol{z}) \tag{B.6}$$

B.1.2 Théorème de Levin et première équation d'état

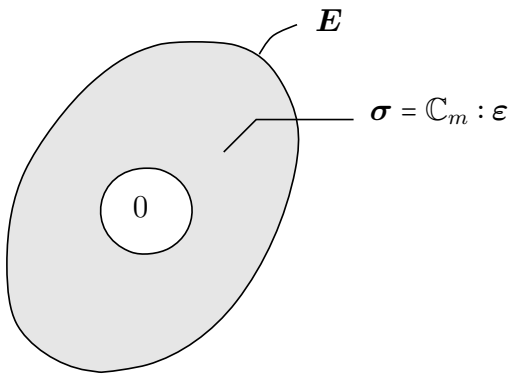

FIGURE B.2 – Schématisation du problème micromécanique sans précontraintes associé au problème initial

Soit désormais le problème d'homogénéisation représenté Figure B.2. Ce problème est fortement lié à celui Figure B.1 puisqu'il s'agit du même VER à homogénéiser mais où cette fois la précontrainte $\boldsymbol{\sigma}^P$ introduite en (B.5) a été prise égale à $\mathbf{0}$. S'agissant d'un problème classique, on note $\mathbb{A}$ son tenseur de localisation. Celui-ci vérifie :

$$\phi^0 \overline{\mathbb{A}}^f + \left(1 - \phi^0\right)\overline{\mathbb{A}}^s = \overline{\mathbb{A}} = \mathbb{I} \tag{B.7}$$

où $\mathbb{I}$ est le tenseur identité symétrique d'ordre 4. Pour revenir au problème initial Figure B.1, la présence de la précontrainte $\boldsymbol{\sigma}^p$ peut être gérée dans un premier temps par le théorème de Levin. Celui-ci donne en effet un accès immédiat à $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}}^s + \overline{\boldsymbol{\sigma}^p : \mathbb{A}}^s \\ &= \overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{A}} + \left(1 - \phi^0\right)\mathbb{C}_m : \overline{\mathbb{A}}^s : \boldsymbol{E} - \left(1 - \phi^0\right)\boldsymbol{k}_m : \overline{\mathbb{A}}^s \tau - \phi^0 \mathbf{1} : \overline{\mathbb{A}}^f \left(p - p^0\right)\end{aligned} \tag{B.8}$$

Grâce au fait que $\boldsymbol{\sigma}^0$ soit à divergence nulle et que le vecteur contrainte associé soit continu au travers de toute surface de discontinuité, il est possible de simplifier astucieusement le terme $\overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{A}}$. Soit en effet un tenseur $\boldsymbol{E}'$ d'ordre 2, symétrique et soit $\boldsymbol{\varepsilon}'$ défini par $\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbb{A} : \boldsymbol{E}'$. Alors, en raison des propriétés de $\boldsymbol{\sigma}^0$ et puisque $\boldsymbol{\varepsilon}'$ est cinématiquement admissible avec une condition aux limite en déformation uniforme, il est possible d'utiliser le lemme de Hill pour obtenir la suite d'égalité suivante :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{A}} : \boldsymbol{E}' = \overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}'} = \overline{\boldsymbol{\sigma}^0} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}'} = \overline{\boldsymbol{\sigma}^0} : \overline{A} : \boldsymbol{E}' = \overline{\boldsymbol{\sigma}^0} : \boldsymbol{E}' \tag{B.9}$$

Ces relations devant être vérifiées pour tout tenseur $\boldsymbol{E}'$ symétrique, il vient :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \mathbb{A}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}^0} = \left(1 - \phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}^0_m}^s - \phi^0 p^0 \mathbf{1} \tag{B.10}$$

où la relation (B.7) a été utilisée. Soit $\mathbb{C}^{hom}$ le tenseur d'élasticité homogénéisé défini par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \left(1 - \phi^0\right)\mathbb{C}_m : \overline{\mathbb{A}}^s \tag{B.11}$$

il est alors possible d'établir les relations utiles suivantes :

$$\left(1-\phi^0\right)\overline{\mathbb{A}}^s = \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} \quad , \quad \phi^0\overline{\mathbb{A}}^f = \mathbb{I} - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} \tag{B.12}$$

où $\mathbb{S}_m$ correspond au tenseur de souplesse de la matrice solide et où la relation (B.7) a été utilisée. Avec ces relations, il est possible de définir d'autres quantités :

$$\boldsymbol{\Sigma}^0 = \left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}^0}^s_m - \phi^0 p^0 \mathbf{1} \quad , \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_m : \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \mathbf{1} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom}\right) \tag{B.13}$$

où $\boldsymbol{B}$ est le tenseur de Biot. En prenant en compte ces notations, il est vient finalement une première équation d'état :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^0 + \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}\tau - \boldsymbol{B}\left(p - p^0\right) \tag{B.14}$$

B.1.3 Seconde et troisième équations d'état

Afin d'établir les deux autres équation d'état, il est nécessaire d'établir dans un premier temps un petit résultat. Le théorème de Levin a permis précédemment d'accéder à une formulation de $\boldsymbol{\Sigma}$ à partir du tenseur de localisation du problème d'homogénéisation sans précontrainte. Cependant, la relation (B.3) donne une seconde manière d'écrire $\boldsymbol{\Sigma}$ qui est :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\sigma}^0}^s_m - \phi^0 p^0 \mathbf{1} + \left(1-\phi^0\right)\mathbb{C}_m : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s - \left(1-\phi^0\right)\boldsymbol{k}_m\tau - \phi^0\left(p-p^0\right)\mathbf{1} \tag{B.15}$$

Par conséquent, avec la première équation d'état (B.14), la quantité $\left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s$ s'écrit :

$$\left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \mathbb{S}_m : \left(\mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \boldsymbol{k}\tau - \boldsymbol{B}\left(p-p^0\right) + \left(1-\phi^0\right)\boldsymbol{k}_m\tau + \phi^0\left(p-p^0\right)\mathbf{1}\right) \tag{B.16}$$

En utilisant les relations (B.13), il vient :

$$\begin{aligned}\left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \quad & \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} + \boldsymbol{k}_m : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right)\tau \\ & - \mathbf{1} : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right)\left(p-p^0\right)\end{aligned} \tag{B.17}$$

Pour établir la deuxième équation d'état qui concerne l'expression de $\phi - \phi^0$, il est nécessaire d'utiliser la définition de cette dernière quantité qui est donnée en (B.3). En utilisant le fait que $\phi^0\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^f + \left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \boldsymbol{E}$ il vient :

$$\phi - \phi^0 = \phi^0\mathbf{1} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^f = \mathbf{1} : \boldsymbol{E} - \left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s : \mathbf{1} \tag{B.18}$$

Par conséquent, en introduisant les quantités :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} &= \mathbf{1} : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right)\left(p-p^0\right) : \mathbf{1} \\ l_s &= -\boldsymbol{k}_m : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right) : \mathbf{1}\end{aligned} \tag{B.19}$$

la seconde équation d'état s'écrit de manière immédiate :

$$\phi - \phi^0 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p-p^0}{N} + l_s\tau \tag{B.20}$$

Enfin, pour la troisième équation d'état, il est à nouveau nécessaire d'utiliser la définition de la densité volumique d'entropie de la phase solide s_s qui est définie par (B.3). Par conséquent il vient :

$$s = \left(1-\phi^0\right)s^0_m + \left(1-\phi^0\right)c_m\tau + \left(1-\phi^0\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s : \boldsymbol{k}_m \tag{B.21}$$

En introduisant une dernière quantité :

$$c_s = \left(1-\phi^0\right)c_m + \boldsymbol{k}_m : \left(\left(1-\phi^0\right)\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right) : \boldsymbol{k}_m \tag{B.22}$$

la dernière équation d'état s'écrit :

$$s_s = s^0_s + c_s\tau + \boldsymbol{k} : \boldsymbol{E} + l_s\left(p-p^0\right) \tag{B.23}$$

B.1.4 Énergie libre

Soit ψ_s l'énergie libre volumique microscopique de la matrice solide. S'agissant d'un matériau élastique, cette quantité est définie classiquement comme :

$$\psi_m = \psi_m^0 + \boldsymbol{\sigma}_m^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\varepsilon} - \tau \boldsymbol{k}_m : \boldsymbol{\varepsilon} - s_m^0 \tau - \frac{c_m}{2}\tau^2 \tag{B.24}$$

En utilisant les équations d'état de la matrice solide, il est possible de réécrire cette densité sous la forme :

$$\psi_m = \psi_m^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_m^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\tau s_m - \frac{1}{2}\tau s_m^0 \tag{B.25}$$

L'énergie libre étant une quantité extensive, la densité volumique macroscopique d'énergie interne associée au squelette solide s'écrit :

$$\psi_s = \left(1 - \phi^0\right) \overline{\psi_m}^s \tag{B.26}$$

Le premier terme devant être traité est $\left(1 - \phi^0\right) \overline{\boldsymbol{\sigma}_m^0 : \boldsymbol{\varepsilon}}^s$. Pour ce faire, il est utile d'utiliser le lemme de Hill sur la quantité $\overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} = \overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}} = \phi^0 \overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}}^f + \left(1 - \phi^0\right) \overline{\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}}^s \tag{B.27}$$

Or d'après la définition la définition de $\boldsymbol{\sigma}^0$, il vient :

$$\left(1 - \phi^0\right) \overline{\boldsymbol{\sigma}_m^0 : \boldsymbol{\varepsilon}}^s = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \phi^0 p^0 \mathbf{1} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^f = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + p^0 \mathbf{1} : \left(\boldsymbol{E} - \left(1 - \phi^0\right) \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^s\right) \tag{B.28}$$

En utilisant la relation (B.17), il vient :

$$\begin{aligned} \left(1 - \phi^0\right) \overline{\boldsymbol{\sigma}_m^0 : \boldsymbol{\varepsilon}}^s = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} &+ p^0 \mathbf{1} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom}\right) \boldsymbol{E} \\ &- p^0 \mathbf{1} : \left(\left(1 - \phi^0\right) \mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right) : \boldsymbol{k}_m \tau \\ &+ p^0 \mathbf{1} : \left(\left(1 - \phi^0\right) \mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right) : \mathbf{1} \left(p - p^0\right) \end{aligned} \tag{B.29}$$

De la même façon, il vient :

$$\begin{aligned} \left(1 - \phi^0\right) \overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}}^s = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} &+ p \mathbf{1} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom}\right) \boldsymbol{E} \\ &- p \mathbf{1} : \left(\left(1 - \phi^0\right) \mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right) : \boldsymbol{k}_m \tau \\ &+ p \mathbf{1} : \left(\left(1 - \phi^0\right) \mathbb{S}_m - \mathbb{S}_m : \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}_m\right) : \mathbf{1} \left(p - p^0\right) \end{aligned} \tag{B.30}$$

En utilisant ces résultats dans l'expression de la densité volumique macroscopique d'énergie libre de la phase solide, il vient :

$$\psi_s = \psi_s^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left(p + p^0\right) \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left(p + p^0\right) l_s \tau + \frac{1}{2}\frac{\left(p + p^0\right)^2}{N} - \frac{1}{2}\tau s_s - \frac{1}{2}\tau s_s^0 \tag{B.31}$$

où les relations (B.13) et (B.19) ont été utilisées. Qui permet d'aboutir à une première expression agréable de cette densité :

$$\psi_s = \psi_s^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\left(p + p^0\right)\left(\phi - \phi^0\right) - \frac{1}{2}\tau s_s - \frac{1}{2}\tau s_s^0 \tag{B.32}$$

En utilisant les équations d'état (B.14), (B.20) et (B.23), il vient :

$$\psi_s = \psi_s^0 + \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + p^0\left(\phi - \phi^0\right) - s_s^s \tau + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{hom} : \boldsymbol{E} - \tau \boldsymbol{k} \boldsymbol{E} + \frac{\left(p - p^0\right)^2}{2N} - \frac{c_s}{2}\tau^2 \tag{B.33}$$

B.2 Énergie interne en conditions adiabatiques non-drainées

Afin d'obtenir l'expression de la densité volumique macroscopique d'énergie interne de la phase solide en conditions adiabatiques non-drainées, il est possible d'établir l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} u = & \left(\boldsymbol{\Sigma}^0 + p^0\boldsymbol{B} + T^0\boldsymbol{k}\right) : \boldsymbol{E} + \left(p^0 l_s + c_s T^0\right)\tau + \left(\frac{p^0}{N} + T^0 l_s\right)\left(p - p^0\right) - p^0\left(\phi - \phi^0\right) + T^0 s_f \\ & + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^D_{iso} : \boldsymbol{E} + \frac{c_a\tau^2}{2} + \frac{\left(p-p^0\right)^2}{2M} + \left(p - p^0\right) l\tau \\ & + p^0\left(\phi - \phi^0\right) - \frac{\phi^0}{2K^f}\left(p - p^0\right)^2 + 3\alpha_f\phi^0\left(p - p^0\right)\tau - \frac{c_f}{2}\tau^2 - T^0 s_f \end{aligned} \tag{B.34}$$

Cette écriture est en effet agréable puisqu'elle permet d'établir des simplifications groupement par groupement. En effet, le premier groupement donne :

$$\begin{aligned} & \left(p^0 l_s + c_s T^0\right)\tau + \left(\frac{p^0}{N} + T^0 l_s\right)\left(p - p^0\right) - p^0\left(\phi - \phi^0\right) + T^0 s_f \\ = & \left(p^0\left(l_s - 3\alpha_f\phi^0\right) + \left(c_s + c_f\right)T^0\right)\tau + \left(p^0\left(\frac{1}{N} + \frac{\phi^0}{K_f}\right) + T^0\left(l_s - 3\alpha_f\phi^0\right)\right)\left(p - p^0\right) \\ = & \frac{1}{c - Ml^2}\left(\left(p^0 l + cT^0\right)\left(Ml\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right) + \left(p^0 + T^0 Ml\right)\left(l\boldsymbol{k} - c\boldsymbol{B}\right)\right) \\ = & -\left(p^0\boldsymbol{B} + T^0\boldsymbol{k}\right) : \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{B.35}$$

Un deuxième groupement intéressant est celui qui permettra *in fine* d'accéder au tenseur d'élasticité introduit en (5.20) :

$$\begin{aligned} & c\tau^2 + \frac{\left(p-p^0\right)^2}{M} + 2\left(p - p^0\right) l\tau \\ = & \frac{1}{\left(c - Ml^2\right)^2}\boldsymbol{E} : \Big(c\left(Ml\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right)\otimes\left(Ml\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right) + M\left(l\boldsymbol{k} - c\boldsymbol{B}\right)\otimes\left(l\boldsymbol{k} - c\boldsymbol{B}\right) \\ & \qquad + 2Ml\left(Ml\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right)\otimes\left(l\boldsymbol{k} - c\boldsymbol{B}\right)\Big) : \boldsymbol{E} \\ = & \frac{1}{\left(c - Ml^2\right)^2}\boldsymbol{E} : \left(\left(Ml^2 - c\right)\boldsymbol{k}\otimes\left(Ml\boldsymbol{B} - \boldsymbol{k}\right) + \left(Ml^2 - c\right)M\boldsymbol{B}\otimes\left(l\boldsymbol{k} - c\boldsymbol{B}\right)\right) : \boldsymbol{E} \\ = & \boldsymbol{E} : \left(M\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B} + \frac{1}{c - Ml^2}\left(\boldsymbol{k} - Ml\boldsymbol{B}\right)\otimes\left(\boldsymbol{k} - Ml\boldsymbol{B}\right)\right) : \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{B.36}$$

Enfin, le dernier groupement donne simplement :

$$\begin{aligned} & p^0\left(\phi - \phi^0\right) - \frac{\phi^0}{2K_f}\left(p - p^0\right)^2 + 3\alpha_f\phi^0\left(p - p^0\right)\tau - \frac{c_f}{2}\tau^2 - T^0 s_f \\ = & p^0\left(\phi - \phi^0\right) + \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\phi - \phi^0\right) - \frac{1}{2}\tau\left(s_f - s_f^0\right) - T^0\left(s_f - s_f^0\right) \end{aligned} \tag{B.37}$$

En regroupant l'ensemble des résultats établis, la densité d'énergie interne pour la phase solide se met sous la forme compacte :

$$u = \boldsymbol{\Sigma}^0 : \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{ND}_{ad} : \boldsymbol{E} + p^0\left(\phi - \phi^0\right) + \frac{1}{2}\left(p - p^0\right)\left(\phi - \phi^0\right) + \frac{1}{2}\tau\left(s_s - s_s^0\right) + T^0\left(s_s - s_s^0\right) \tag{B.38}$$

B.3 Symétrie des liaisons internes

Un résultat intermédiaire intéressant repose sur la symétrie des liaisons imposées par le caractère adiabatique non-drainé de l'évolution. Pour mener à bien la réflexion, prenons l'exemple des deux liaisons imposées entre les variables thermodynamiques $\boldsymbol{E}$, p et T lorsque la notion de température est définie à l'échelle du VER et supposée commune à la matrice solide et au fluide occupant le milieu poreux constituant la microstructure. Au terme de divers considérations, ces liaisons se mettent sous la forme (5.13) et (5.17) dont les expressions sont ici rappelées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \boldsymbol{B}:\boldsymbol{E}+\dfrac{(p-p^0)}{M}+l\tau \\ 0 & = & \boldsymbol{k}:\boldsymbol{E}+l\left(p-p^0\right)+c_s\tau \end{array}\right. \tag{B.39}$$

Par conséquent, il est possible d'écrire ces relations sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{M} & l \\ l & c_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p-p^0 \\ \tau \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}:\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{k}:\boldsymbol{E} \end{pmatrix} \tag{B.40}$$

Le terme l apparaissant dans les deux liaisons et s'apparentant à une symétrie de Maxwell confère un statut de matrice symétrique reliant $p-p^0$ et τ à la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$. Ce caractère symétrique va s'avérer jouer un rôle important pour la suite. En effet, cette matrice étant inversible, il vient :

$$\begin{pmatrix} p-p^0 \\ \tau \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}:\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{k}:\boldsymbol{E} \end{pmatrix} = A\pi \tag{B.41}$$

où A est une matrice symétrique et où la notation :

$$\pi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}:\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{k}:\boldsymbol{E} \end{pmatrix} \tag{B.42}$$

a été introduite. Il est intéressant de noter que cette écriture reste également valable pour le cas où l'évolution est adiabatique à l'échelle microscopique (voir l'ordonnancement des temps caractéristiques (5.77)) puisque les liaisons associées sont données en (5.80) et (5.81). Il suffit alors de remplacer la quantité τ par τ_s. Les équations d'état (5.3) jouissant également des symétries de Maxwell, il est possible d'écrire de manière formelle :

$$\begin{pmatrix} \phi-\phi^0 \\ s_s-s_s^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}:\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{k}:\boldsymbol{E} \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} p-p^0 \\ \tau_s \end{pmatrix} = \left(I_2+BA\right)\pi \tag{B.43}$$

où B est une matrice symétrique et I_2 est la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$. La quantité $(p-p^0)\dot{\phi}+\tau\dot{s}_s$ peut s'interpréter comme le produit scalaire :

$$\left(p-p^0\right)\dot{\phi}+\tau\dot{s}_s = {}^t\begin{pmatrix} p-p^0 \\ \tau \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} \phi-\phi^0 \\ s_s-s_s^0 \end{pmatrix}}^{\cdot} = {}^t\pi\,{}^tA\left(I_2+BA\right)\dot{\pi} = {}^t\pi\left(A+ABA\right)\dot{\pi} \tag{B.44}$$

Il en va de même avec la quantité duale :

$$\left(\phi-\phi^0\right)\dot{p}+\left(s_s-s_s^0\right)\dot{\tau} = {}^t\begin{pmatrix} \phi-\phi^0 \\ s_s-s_s^0 \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} p-p^0 \\ \tau \end{pmatrix}}^{\cdot} = {}^t\pi\left(I_2+{}^tA\,{}^tB\right)A\dot{\pi} = {}^t\pi\left(A+ABA\right)\dot{\pi} \tag{B.45}$$

Au terme de cette analyse, il a été montré que grâce à la symétrie des liaisons internes imposées, il était possible d'écrire la relation suivante :

$$\left(p - p^0\right)\dot{\phi} + \tau \dot{s}_s = \left(\phi - \phi^0\right)\dot{p} + \left(s_s - s_s^0\right)\dot{\tau} \tag{B.46}$$

Bien évidemment, un dérivée temporelle a été choisie mais celle-ci aurait pu être remplacée par n'importe quel élément de différentiation. Par exemple, le relation suivante reste vraie :

$$\left(p - p^0\right)\frac{\partial \phi}{\partial \ell} + \tau \frac{\partial s_s}{\partial \ell} = \left(\phi - \phi^0\right)\frac{\partial p}{\partial \ell} + \left(s_s - s_s^0\right)\frac{\partial \tau}{\partial \ell} \tag{B.47}$$

Annexe C

Endommagement

Sommaire

B.1 Equations d'état de la thermo-poro-élasticité 292
B.1.1 Positionnement du problème thermo-poro-élastique 292
B.1.2 Théorème de Levin et première équation d'état 293
B.1.3 Seconde et troisième équations d'état 294
B.1.4 Énergie libre 295
B.2 Énergie interne en conditions adiabatiques non-drainées 296
B.3 Symétrie des liaisons internes 297

C.1 Relations d'Euler

Soit f une fonction homogène de degré $p \geq 1$. Une telle fonction vérifie donc :

$$f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right) = \lambda^p f\left(x_1, x_2, .., x_n\right)$$

quelque soit le réel λ. Ainsi, une opération de différentiation par rapport à λ donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\left(f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right)\right) &= \sum_i \frac{\partial \lambda x_i}{\partial \lambda}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right) = \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right) \\ &= p\lambda^{p-1} f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right)\end{aligned}$$

En exploitant cette relation dans le cas particulier $\lambda = 1$ il vient la propriété remarquable :

$$f\left(x_1, x_2, .., x_n\right) = \frac{1}{p}\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1, x_2, .., x_n\right) x_i \tag{C.1}$$

C.2 Calculs des contraintes macroscopiques et des hypercontraintes

Afin de pouvoir calculer correctement les quantités macroscopiques $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{N}$ à partir de la comparaison entre (8.28) et (8.35), il est nécessaire de détailler la dépendance de chaque terme de (8.35) vis à vis de $\boldsymbol{dE}$, $\boldsymbol{d\nabla E}$ et $\boldsymbol{d\nabla^2 E}$. Un première remarque utile est l'opération de différentiation d opère uniquement sur $\boldsymbol{E}$ et ses gradients. Par conséquent, les opérateurs d et ∇_Y^S commutent, de sorte que $d\left(\nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(i)}\right) = \nabla_Y^S d\boldsymbol{\xi}^{(i)}$. En effet, ce résultat intermédiaire peut être détaillé de manière très simple sur la quantité $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$. Selon (8.19) la dérivée partielle de cette quantité par rapport à Y_j s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{(3)}}{\partial Y_j} &= \frac{\partial \boldsymbol{X}^{(3)}}{\partial Y_j} :: \nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}}{\partial Y_j} :\cdot \nabla \boldsymbol{E} + \frac{\partial \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^{(3)}}{\partial Y_j} : \boldsymbol{E} \\ \Rightarrow \quad d\left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{(3)}}{\partial Y_j}\right) &= \frac{\partial \boldsymbol{X}^{(3)}}{\partial Y_j} :: \boldsymbol{d}\nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}}{\partial Y_j} :\cdot \boldsymbol{d}\nabla \boldsymbol{E} + \frac{\partial \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^{(3)}}{\partial Y_j} : \boldsymbol{dE}\end{aligned} \tag{C.2}$$

Toujours à partir de (8.19) mais en commençant cette fois ci par l'opération de différentiation pour ensuite passer à la dérivée partiel par rapport à Y_j donne l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}d\left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}\right) &= d\left(\boldsymbol{X}^{(3)} :: \nabla^2 \boldsymbol{E} + \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)} :\cdot \nabla \boldsymbol{E} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^{(3)} : \boldsymbol{E}\right) \\ &= \boldsymbol{X}^{(3)} :: \boldsymbol{d}\nabla^2 \boldsymbol{E} + \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)} :\cdot \boldsymbol{d}\nabla \boldsymbol{E} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^{(3)} : \boldsymbol{dE} \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial d\left(\boldsymbol{\xi}^{(3)}\right)}{\partial Y_j} &= \frac{\partial \boldsymbol{X}^{(3)}}{\partial Y_j} :: \boldsymbol{d}\nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)}}{\partial Y_j} :\cdot \boldsymbol{d}\nabla \boldsymbol{E} + \frac{\partial \tilde{\tilde{\boldsymbol{X}}}^{(3)}}{\partial Y_j} : \boldsymbol{dE}\end{aligned} \tag{C.3}$$

ce qui par conséquent justifie le résultat énoncé. En tirant parti de celui-ci mais également du théorème de la divergence combiné avec toutes les équations d'équilibres (8.8) il vient :

- $$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} &= \boldsymbol{dE} + d\left(\nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right) \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \boldsymbol{X}^{(1)} : \boldsymbol{E} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^Y &= \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^Y : \boldsymbol{dE} - \overline{\nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(1)} . d\boldsymbol{\xi}^{(1)}}^Y \\ &= \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^Y : \boldsymbol{dE} + \overline{\left(\nabla_X . \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \rho \boldsymbol{f}\right) . d\boldsymbol{\xi}^{(1)}}^Y \\ &= \overline{\sigma_{ij}^{(1)}}^Y dE_{ij} + \overline{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \rho f_i\right) X_{ilk}^{(1)} \; dE_{kl}}^Y \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^Y &= \overline{\sigma_{ij}^{(2)}}^Y dE_{ij} + \overline{\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial X_j} X_{ilk}^{(1)} \; dE_{kl}}^Y \end{aligned} \tag{C.4}$$

- $$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} &= d\left(\nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right) + d\left(\nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(2)}\right) \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \boldsymbol{X}^{(2)} : \cdot \nabla \boldsymbol{E} + \tilde{\boldsymbol{X}}^{(2)} : \boldsymbol{E} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}}^Y &= \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\left(\nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right)}^Y = \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\left(\nabla_X \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right)}^Y \\ &= \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial X_{ilk}^{(1)}}{\partial X_j} \; dE_{kl}}^Y + \overline{\sigma_{ij}^{(0)} X_{ilk}^{(1)}}^Y d\nabla E_{klj} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : d\left(\nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(1)}\right)}^Y &= \overline{\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial X_{ilk}^{(1)}}{\partial X_j} \; dE_{kl}}^Y + \overline{\sigma_{ij}^{(1)} X_{ilk}^{(1)}}^Y d\nabla E_{klj} \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : d\left(\nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(2)}\right)}^Y &= \overline{-\nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(1)} . d\boldsymbol{\xi}^{(2)}}^Y \\ &= \overline{\left(\nabla_X . \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \rho \boldsymbol{f}\right) . d\boldsymbol{\xi}^{(2)}}^Y \\ &= \overline{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \rho f_i\right) X_{imlk}^{(2)} \; d\nabla E_{klm}}^Y + \overline{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial X_j} + \rho f_i\right) \tilde{X}_{ilk}^{(2)} \; dE_{kl}}^Y \end{aligned} \tag{C.5}$$

- $$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} &= d\left(\nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(2)}\right) + d\left(\nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(3)}\right) \\ \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}}^Y &= \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\left(\nabla_X^S \boldsymbol{u}^{(2)}\right)}^Y = \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : d\left(\nabla_X \boldsymbol{u}^{(2)}\right)}^Y \\ &= \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial \tilde{X}_{ilk}^{(2)}}{\partial X_j} \; dE_{kl}}^Y + \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial X_{imlk}^{(2)}}{\partial X_j} \; d\nabla E_{klm}}^Y + \overline{\sigma_{ij}^{(0)} \tilde{X}_{ilk}^{(2)}}^Y d\nabla E_{klj} \\ &\quad + \overline{\sigma_{ij}^{(0)} X_{imlk}^{(2)}}^Y d\nabla^2 E_{klmj} \end{aligned} \tag{C.6}$$

Il ne reste plus qu'à injecter ces résultats dans (8.35) afin d'identifier les quantités voulues $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{N}$.

C.3 Deux contre-exemples de non-localité

Par le biais de la méthode des développements asymptotiques appliquée aux milieux quasi-périodiques, il a été montré qu'il était possible d'obtenir des modèles macroscopiques non-locaux. Cependant, l'obtention d'un tel modèle macroscopique est sujette à la condition que la densité d'énergie élastique (8.26) contienne effectivement des termes additionnels au delà de l'ordre zéro. Si ce n'est pas le cas, seul le modèle standard est obtenu (8.21). Pour bien illustrer ce propos, deux contre-exemples sont sur le point d'être exhibés.

Le modèle 1D

L'objectif est ici d'appliquer la méthode présentée à un modèle unidimensionnel. Pour pour y arriver, il est nécessaire de commencer par détailler quel est le problème complet concernant la vraie variable d'espace z :

$$\begin{cases} \sigma = E\dfrac{d\xi}{dz} \\ \dfrac{d\sigma}{dz} = 0 \end{cases} \tag{C.7}$$

Où σ correspond à l'effort intérieur et ξ au déplacement. Un matériau microscopique quasi-périodique signifie que $E(X,Y)$ dépend à la fois de la variable d'espace rapide et de la variable lente tout en étant Y-périodique. Des considérations similaires à celles permettant d'obtenir (8.4) donnent ici :

$$\xi(z) = L\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha^i\xi^{(i)}(X,Y) \tag{C.8}$$

Il est à nouveau possible de décider arbitrairement que la moyenne de $\xi^{(i)}$ sur la cellule unitaire est égal à 0 dès lors que $i \geq 1$. De plus, il est important de se rappeler que toutes ces quantités, $\xi^{(0)}$ inclue, sont Y-périodiques. Grâce à la règle de dérivation (8.2) il vient également :

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\alpha}\xi^{(0)}{}_{,Y} + \left(\xi^{(0)}{}_{,X} + \xi^{(1)}{}_{,Y}\right) + \alpha\left(\xi^{(1)}{}_{,X} + \xi^{(2)}{}_{,Y}\right) + \ldots \tag{C.9}$$

Ainsi, en utilisant non seulement la relation entre ξ et σ mais également l'équation d'équilibre toutes deux données en (C.7) permet d'établir un set d'équations qui sont l'équivalent de (8.8) :

$$\begin{aligned} &\bullet\ \left(E\xi^{(0)}{}_{,Y}\right)_{,Y} = 0 \\ &\bullet\ \left(E\xi^{(0)}{}_{,Y}\right)_{,X} + \left(E\left(\xi^{(0)}{}_{,X} + \xi^{(1)}{}_{,Y}\right)\right)_{,Y} = 0 \\ &\bullet\ \left(E\left(\xi^{(n)}{}_{,X} + \xi^{(n+1)}{}_{,Y}\right)\right)_{,X} + \left(E\left(\xi^{(n+1)}{}_{,X} + \xi^{(n+2)}{}_{,Y}\right)\right)_{,Y} = 0 \qquad \text{for } n \geq 0 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Comme dans le cas général, il est nécessaire de détailler chacune de ces équations en commençant par la première. Une propriété immédiate est que $E\xi^{(0)}{}_{,Y}$ ne dépend que de la variable lente X ce qui implique l'existence d'une fonction F de X uniquement elle que :

$$\xi^{(0)}{}_{,Y} = \frac{F(X)}{E} \qquad \text{ce qui implique} \qquad 0 = \overline{\xi^{(0)}{}_{,Y}}^{Y} = \overline{\left(\frac{1}{E}\right)}^{Y} F(X) \qquad \text{et donc} \qquad F(X) = 0 \tag{C.11}$$

La nullité de F signifie que $\xi^{(0)}$ lui aussi ne dépend que de la variable lente X, autorisant ainsi la notation $\xi^{(0)}(X)$. Ce premier résultat étant établi, la deuxième équation d'équilibre se simplifie de la manière suivante :

$$\left(E\left(\xi^{(0)}{}_{,X} + \xi^{(1)}{}_{,Y}\right)\right)_{,Y} = 0 \tag{C.12}$$

La première équation de compatibilité se déduit en prenant la moyenne sur une cellule de base de l'équation d'équilibre d'ordre 0 :

$$0 = \overline{\left(E\left(\xi^{(0)}{}_{,X} + \xi^{(1)}{}_{,Y}\right)\right)_{,X} + \left(E\left(\xi^{(1)}{}_{,X} + \xi^{(2)}{}_{,Y}\right)\right)_{,Y}}^{Y} = \left(E\left(\xi^{(0)}{}_{,X} + \xi^{(1)}{}_{,Y}\right)\right)_{,X} \tag{C.13}$$

puisqu'il a été montré que le groupement $E\left(u^{(0)}{}_{,X} + u^{(1)}{}_{,Y}\right)$ est en fait indépendant de Y. Il existe donc une constante G telle que :

$$\xi^{(0)}{}_{,X} + \xi^{(1)}{}_{,Y} = \frac{G}{E} \tag{C.14}$$

En prenant la moyenne de cette relation sur la cellule de base Ω_Y et en utilisant le fait que $\xi^{(1)}$ est Y-périodiques et que $\xi^{(0)}$ ne dépend que de X, une relation impliquant $\xi^{(0)}{}_{,X}$ seulement est obtenue :

$$\xi^{(0)}{}_{,X} = \overline{\left(\frac{1}{E}\right)}^{Y} G \tag{C.15}$$

Le cas de $\xi^{(0)}$ ayant été suffisamment détaillé, il est désormais possible de chercher à fournir une expression générale concernant les autres quantités. Pour ce faire, un démonstration par récurrence très simple va être utilisée pour montrer que :

$$\forall i \geq 1 \qquad \xi^{(i)}{}_{,X} + \xi^{(i+1)}{}_{,Y} = 0 \tag{C.16}$$

La troisième équation de (C.10) prise pour $n = 0$ se simplifie grâce à (C.13) :

$$\left(E\left(\xi^{(1)}{}_{,X} + \xi^{(2)}{}_{,Y}\right)\right)_{,Y} = 0 \tag{C.17}$$

En prenant la moyenne sur la cellule de base de l'équation d'équilibre d'ordre 1 donne :

$$\left(\overline{E\left(\xi^{(1)}{}_{,X} + \xi^{(2)}{}_{,Y}\right)}^{Y}\right)_{,X} = 0 \tag{C.18}$$

Ces deux dernières relations impliquent que $E\left(u^{(1)}{}_{,X} + u^{(2)}{}_{,Y}\right)$ ne dépend ni de la variable lente, ni de la variable rapide et est donc une constante qui sera notée C. En utilisant la propriété de moyenne nulle sur la cellule de base de la quantité $\xi^{(i)}$ pour $i \geq 1$ et de leur caractère Y-périodique, il vient :

$$0 = \overline{\xi^{(1)}{}_{,X} + \xi^{(2)}{}_{,Y}}^{Y} = C\overline{\left(\frac{1}{E}\right)}^{Y} \tag{C.19}$$

ce qui bien entendu n'est possible que si la constante C est en fait nulle. Cela implique donc :

$$\left(\xi^{(1)}{}_{,X} + \xi^{(2)}{}_{,Y}\right) = 0 \tag{C.20}$$

qui correspond à la relation de récurrence énoncée (C.16) pour $i = 1$. En admettant que le résultat (C.16) est vérifié pour une entier $i \geq 1$ donné, le même raisonnement que celui qui vient d'être tenu pour $i = 1$ peut être utilisé pour obtenir le résultat à l'ordre $i + 1$. Ceci fini d'achever la démonstration par récurrence. A ce stade, il est utile de se rappeler que les déformations macroscopiques correspondent simplement à la moyenne des déformations microscopiques sur une cellule de base $\overline{\xi(z)_{,z}}^{Y}$, quantité elle même définie par (C.9). Avec le résultat obtenu par récurrence, cette quantité se simplifie grandement :

$$\overline{\xi(z)_{,z}}^{Y} = \xi^{(0)}{}_{,X} = \overline{\left(\frac{1}{E}\right)}^{Y} G \tag{C.21}$$

Les contraintes macroscopiques associées sont donc :

$$\Sigma = \left(\overline{E^{-1}}^{Y}\right)^{-1} \xi^{(0)}{}_{,X} \tag{C.22}$$

Il est clair qu'un champ d'endommagement macroscopique $d(X)$ affectant l'élasticité locale $E(d(X), Y)$ impacterait effectivement les propriétés macroscopiques. Pour autant, il n'y a aucune trace de son gradient $d'(X)$ ni même de son second gradient. Par conséquent, pour un modèle unidimensionnel, il ne semble pas d'y avoir de raison de considérer les effets d'un gradient d'endommagement lorsque la microstructure sous-jacente est quasi-périodique.

Multi-couches généralisé

Les problèmes unidimensionnels ne se sont pas avérés très utiles pour éclairer une démarche visant à construire une théorie macroscopique à gradient d'endommagement pour des matériaux quasi-périodiques. Le besoin de considérer un problème plus adapté mène naturellement à voir considérer un problème tridimensionnel où toutes les quantités ne dépendent que d'une seule direction d'espace. Ainsi, au lieu de considérer les variables d'espaces rapides et lente dans leur totalité, il sera alors possible de les réduire à deux quantités scalaires X_1 et Y_1. De plus, les forces de volume ne seront pas considérées. En utilisant les définitions (8.5) et (8.11) portant sur le déplacement $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$, les relations simplifiées suivantes sont obtenues :

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ \mathbb{C} = \mathbb{C}\left(X_1, Y_1\right) \\
&\bullet\ \boldsymbol{E}\left(X_1\right) &&= \nabla_X^S\left(\boldsymbol{\xi}^{(0)}(X_1)\right) \\
& &&= \frac{1}{2}\frac{\partial \xi_k^{(0)}}{\partial X_1}\left(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_k\right) \\
&\bullet\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}(X_1, Y_1) &&= \nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(n)} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(n+1)} \qquad \forall n \geq 1 \\
& &&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k^{(n)}}{\partial X_1} + \frac{\partial \xi_k^{(n+1)}}{\partial Y_1}\right)\left(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_k\right) \\
&\bullet\ \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(X_1, Y_1) &&= \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} \qquad \forall n \geq 1 \\
& &&= \mathbb{C}_{ijk1}\left(\frac{\partial \xi_k^{(n)}}{\partial X_1} + \frac{\partial \xi_k^{(n+1)}}{\partial Y_1}\right)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j
\end{aligned}
\tag{C.23}
$$

Tout comme ce fut le cas pour un vrai problème unidimensionnel, il est nécessaire de commencer par considérer le sous-problème d'ordre -1 (8.12) ainsi que la première équation de compatibilité (8.15) en l'absence de force de volume. Ce faisant, puisqu'il a été montré que $\boldsymbol{\sigma}^{(-1)} = \mathbf{0}$, il vient :

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(0)} &&= \frac{\partial \sigma_{i1}^{(0)}}{\partial Y_1}\boldsymbol{e}_i \\
\mathbf{0} &= \nabla_X . \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}}^Y &&= \frac{\partial \overline{\sigma_{i1}^{(0)}}^Y}{\partial X_1}\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \qquad \forall i \qquad \sigma_{i1}^{(0)} = \lambda_i^{(0)}
\tag{C.24}
$$

où tous les $\lambda_i^{(0)}$ sont des constantes. Cette première propriété étant établie, il est maintenant possible de montrer qu'elle est également vraie pour tout $\sigma^{(n)}$, c'est à dire :

$$
\forall n \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \quad : \quad \sigma_{i1}^{(n)} = \lambda_i^{(n)}
\tag{C.25}
$$

Puisque cette propriété a été montrée pour $n = 0$, une démonstration par récurrence semble être adaptée. En supposant que la relation (C.25) est vraie à un ordre n donné et en utilisant l'équation d'équilibre d'ordre n de (8.8), il est aisé d'établir que :

$$
\left.
\begin{aligned}
&\nabla_X . \boldsymbol{\sigma}^{(n)} + \nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(n+1)} = \mathbf{0} \\
&\nabla_X . \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \frac{\partial \sigma_{i1}^{(n)}}{\partial X_1}\boldsymbol{e}_i = \mathbf{0}
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \nabla_Y . \boldsymbol{\sigma}^{(n+1)} = \mathbf{0}
\tag{C.26}
$$

La $(n+1)^{\text{ième}}$ relation de compatibilité (8.16) donne quant à elle directement $\nabla_X . \overline{\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)}}^Y = \mathbf{0}$. Ainsi, tous les ingrédients ayant permis d'étabir la propriété (C.25) à l'ordre 0 sont à nouveau réunis. La même procédure peut être suivie pour établir la propriété (C.25) à l'ordre $n+1$, achevant ainsi la démonstration par récurrence.

Maintenant que ces propriétés sur les $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ ont été prouvées, il est possible de s'intéresser au calcul de la densité macroscopique d'énergie définie par (8.20). La double série en α peut être développée grâce à un produit de Cauchy. Une telle opération conduit à se préoccuper de termes de la forme $\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(n)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}}^{Y}$. La quantité étant prise en moyenne peut être explicitée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{(n)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} &= \sigma_{ij}^{(n)}\varepsilon_{ji}^{(m)} = \sigma_{i1}^{(n)}\varepsilon_{i1}^{(m)} = \lambda_1^{(n)}\varepsilon_{11}^{(m)} + 2\lambda_2^{(n)}\varepsilon_{21}^{(m)} + 2\lambda_3^{(n)}\varepsilon_{31}^{(m)} \\ &= \boldsymbol{\sigma}^{(m)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \lambda_1^{(m)}\varepsilon_{11}^{(n)} + 2\lambda_2^{(m)}\varepsilon_{21}^{(n)} + 2\lambda_3^{(m)}\varepsilon_{31}^{(n)}\end{aligned} \tag{C.27}$$

où la symétrie majeure du tenseur d'élasticité microscopique a été valorisée et où les $\lambda_i^{(n)}$ sont des constantes. Sous cette forme, l'opération de moyenne sur la cellule de base s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(n)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}}^{Y} &= \lambda_1^{(n)}\overline{\varepsilon_{11}^{(m)}}^{Y} + 2\lambda_2^{(n)}\overline{\varepsilon_{21}^{(m)}}^{Y} + 2\lambda_3^{(n)}\overline{\varepsilon_{31}^{(m)}}^{Y} \\ &= \lambda_1^{(m)}\overline{\varepsilon_{11}^{(n)}}^{Y} + 2\lambda_2^{(m)}\overline{\varepsilon_{21}^{(n)}}^{Y} + 2\lambda_3^{(m)}\overline{\varepsilon_{31}^{(n)}}^{Y}\end{aligned} \tag{C.28}$$

En raison de l'hypothèse concernant la valeur moyenne de $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ sur la cellule unitaire, il vient, pour $k \geq 1$, la propriété remarquable $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}}^{Y} = \overline{\nabla_X^S \boldsymbol{\xi}^{(k)} + \nabla_Y^S \boldsymbol{\xi}^{(k+1)}}^{Y} = \mathbf{0}$. Par conséquent, dès lors que $m \geq 1$ ou $n \geq 1$, la quantité $\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(n)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}}^{Y}$ est égale à zéro. Afin d'être complet, un tel résultat signifie également que $\lambda_i^{(n)} = 0$ dès que $n \geq 1$, ce qui entraine $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}.\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{0}$. Finallement, la densité d'énergie macroscopique correspond dans ce cas simplement à :

$$w = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{Y} \tag{C.29}$$

qui, à nouveau, est impacté par un champ d'endommagement macroscopique mais pas par son gradient, s'il est décidé que $\mathbb{C}\left(d(X_1), Y_1\right)$ où d est le champ d'endommagement.

Discussion

Le phénomène détecté dans l'exemple précédent tire son origine du fait que la dérive des propriétés élastiques microscopiques est orientée dans le sens normal aux couches. Cette remarque est également cohérente avec l'incapacité du modèle unidimensionnel à incorporer des effets non-locaux. Cependant, il est possible d'éviter de tels résultats en considérant une dérive dans la direction des couches. En effet, ceci peut être démontré par les résultats analytiques fournis par [Tran et collab., 2012] dans le cas parfaitement périodique.

Annexe D

Figures et tableaux

D.1 Existence de la zone de raccord en mécanique

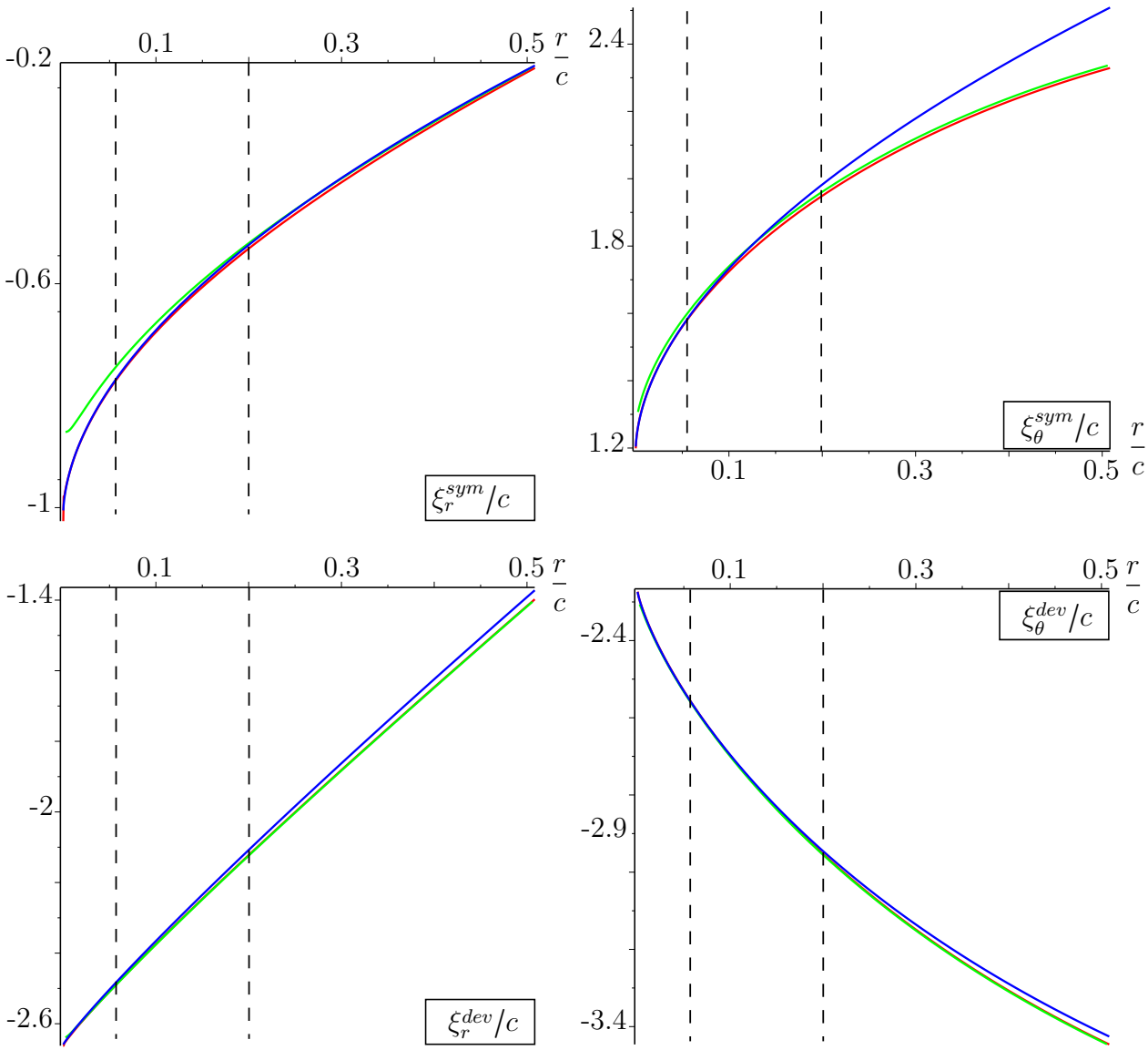

FIGURE D.1 – Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = -0.95\frac{\pi}{2}$ en fonction de la distance au coin r normalisée par c.
Rouge : solution saine
Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$
Bleu : solution asymptotique
Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord
L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3

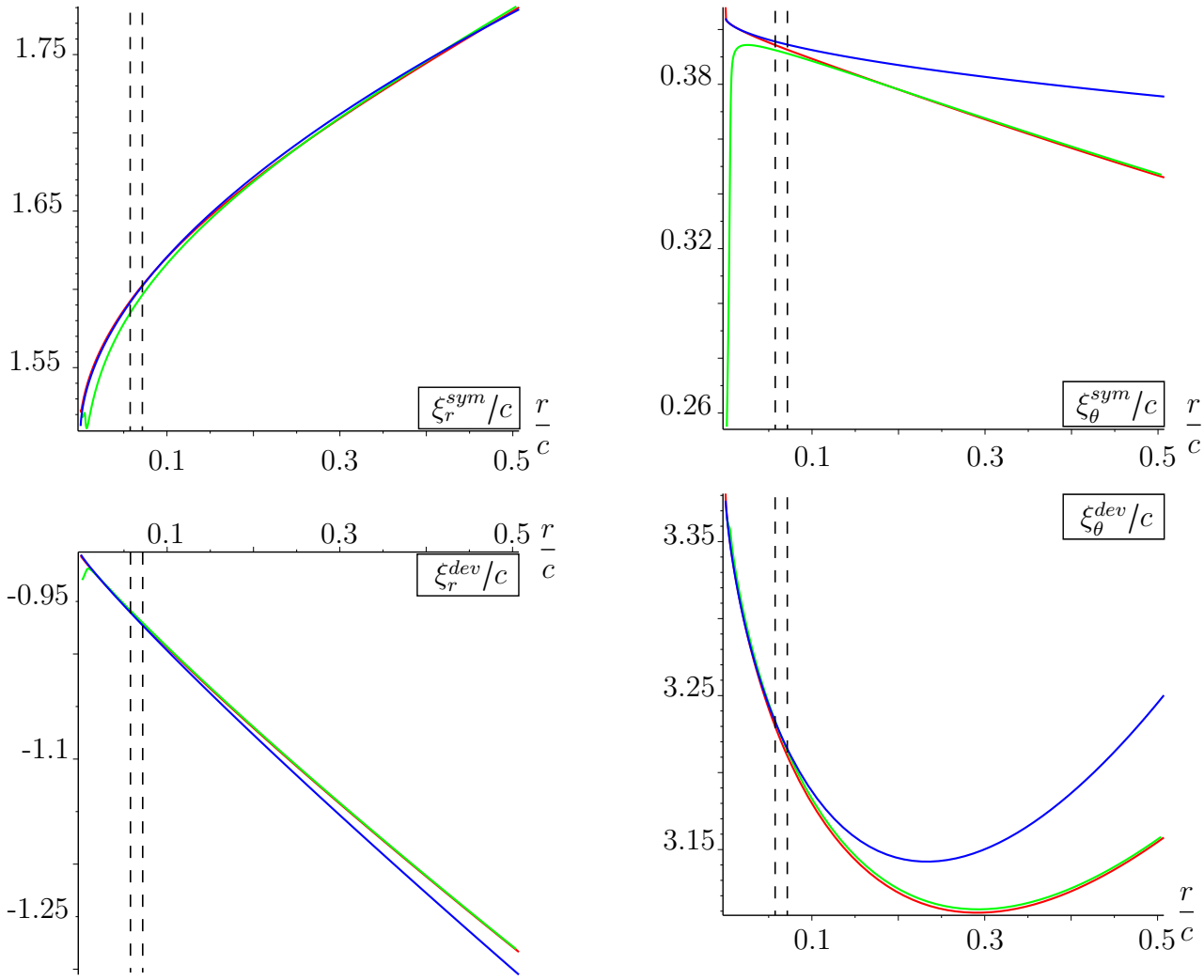

FIGURE D.2 – Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = \frac{\pi}{6}$ en fonction de la distance au coin r normalisée par c.
Rouge : solution saine
Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$
Bleu : solution asymptotique
Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord
L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3

D.2 Éléments finis en contraintes

	$D = 20 \cdot a$		$D = 30 \cdot a$		$D = 40 \cdot a$	
ℓ	$G_{\min}$	$G_{\max}$	$G_{\min}$	$G_{\max}$	$G_{\min}$	$G_{\max}$
0.0001				0.1604		0.1587
0.0003				0.1456		0.1447
0.0006				0.1473		0.1465
0.0010	0.1316	0.1637	0.1413	0.1510	0.1409	0.1503
0.0015				0.1546		0.1540
0.0020	0.1489	0.1650	0.1528	0.1577	0.1523	0.1570
0.0025				0.1602		0.1595
0.0030	0.1570	0.1678	0.1590	0.1623	0.1585	0.1616
0.0040	0.1622	0.1703	0.1632	0.1657	0.1626	0.1650
0.0050	0.1660	0.1724	0.1664		0.1658	
0.0060				0.1705		0.1698
0.0070	0.1712	0.1758	0.1709		0.1703	
0.0080				0.1738		0.1732
0.0100	0.1762	0.1794	0.1754	0.1763	0.1747	0.1756
0.0120				0.1782		0.1775
0.0150	0.1799	0.1831	0.1797	0.1804	0.1790	0.1797
0.0170				0.1814		0.1807
0.0200	0.1829	0.1853	0.1822	0.1827	0.1815	0.1820
0.0300	0.1855	0.1871	0.1844	0.1851	0.1836	0.1844
0.0400	0.1862	0.1873	0.1847	0.1852	0.1839	0.1845
0.0500	0.1856	0.1866	0.1840	0.1844	0.1832	0.1837
0.0600	0.1844	0.1851	0.1827	0.1830	0.1819	0.1823
0.0700	0.1828	0.1834	0.1810	0.1813	0.1802	0.1806
0.0800	0.1810	0.1815	0.1790	0.1793	0.1783	0.1784
0.0900	0.1788	0.1793	0.1770	0.1772	0.1762	0.1765
0.1000	0.1766	0.1771	0.1747	0.1750	0.1740	0.1742
0.1500	0.1645	0.1653	0.1631	0.1632	0.1623	0.1625
0.2000	0.1531	0.1538	0.1516	0.1517	0.1509	0.1510

Tableau D.1 – Minorants et majorants du taux de restitution d'énergie pour le problème Figure 4.11 avec un domaine de taille D comportant un trou carré de côté a unitaire, pour une pression p égale au module d'Young (et prise unitaire) et un coefficient de poisson $\nu = 0.35$.

D.3 Excavation d'un tunnel et critère énergétique

D.3.1 Anisotropie de contraintes

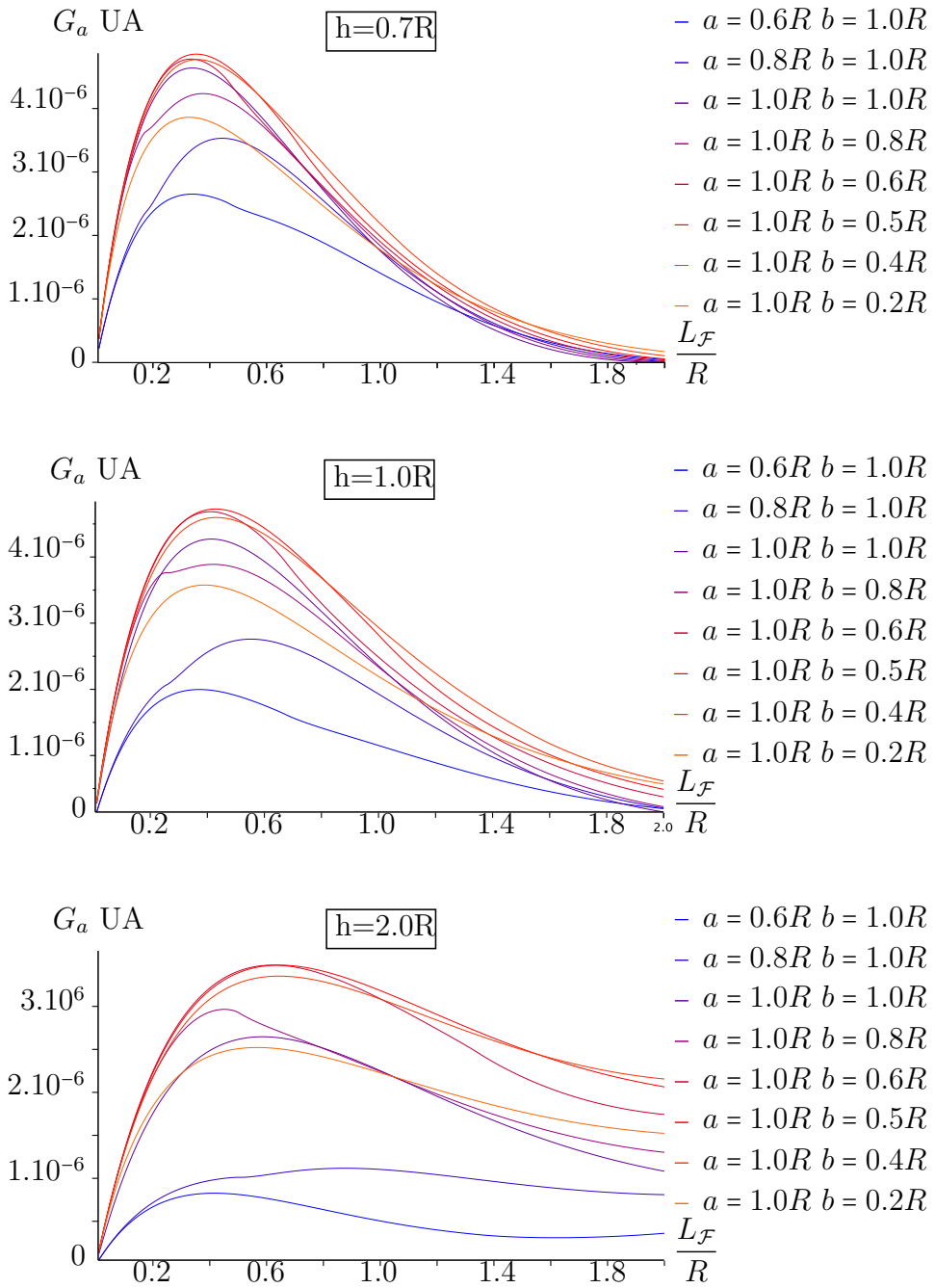

FIGURE D.3 – Taux de restitution d'énergie pour une situation avec anisotropie de contraintes en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_{\mathcal{F}}$, des différents paramètres de l'ellipse de base a et b. Les distance au sommet sont $h = 0.7R$, $h = 1.R$ et $h = 2.R$

Liste des figures

1.1 Représentation schématique des fissures en chevrons observées lors de l'excavation d'une galerie principale dans la direction de contrainte principale horizontale mineure (figure ANDRA issue de Armand et collab. [2012]) . . . 13
1.2 Représentation schématique des fissures en chevrons observées lors de l'excavation d'une galerie principale dans la direction de contrainte principale horizontale majeure (figure ANDRA issue de Armand et collab. [2012]) . . . 13
1.3 Exemple de fissure prenant naissance à partir d'un coin anguleux ouvert libre de contraintes . . . 16

2.1 Milieu infini sous pression isotrope avec un trou carré libre de contraintes . . . 25
2.2 Milieu infini sous un chargement déviateur de contraintes avec un trou carré libre de contraintes . . . 25
2.3 Zoom au niveau de la pointe d'une fissure de Griffith et définition de repères locaux . . . 26
2.4 Représentation de la composante σ_{xx} du champ de contrainte pour la fissure de Griffith Figure 2.2 le long de l'axe des abscisses en fonction de la distance au fond de fissure $\frac{x-a}{a}$ . . . 28
2.5 Transformation de Joukowsky de l'extérieur du cercle unité (figure de gauche) avec $R = 1$ et pour $m = 0.8$ (figure centrale) ou $m = 0.95$ (figure de droite) . . . 30
2.6 Comparaison de la composante σ_{xx} du champ de contrainte entre la configuration fissure de Griffith (courbe noire) et pour différentes ellipses définies par la transformation de Joukowsky tendant asymptotiquement vers la fissure de Griffith. De la courbe bleue à la courbe rouge : $m = 0.9, 0.95, 0.97, 0.99, 0.995$ où m est le paramètre entrant en jeu dans la transformation de Joukowsky . . 30
2.7 Comparaison de la composante σ_{yy} du champ de contrainte obtenu de manière asymptotique pour la fissure de Griffith de taille $2a$ (courbe noire) et pour une ellipse définie par la transformation de Joukowsky avec les paramètres $m = 0.99$ et $R = \frac{a}{m+1}$ (courbe rouge) . . . 31
2.8 Modélisation géométrique de l'excavation d'un tunnel. L_T est la longueur de tunnel déjà foré, L_p la longueur de la passe et R est le rayon du tunnel. L'axe du tunnel $\boldsymbol{e}_z$ correspond à l'une ou l'autre des directions associés aux contraintes principales horizontales . . . 33
2.9 Modélisation des contraintes s'exerçant lors de l'excavation du tunnel. Au niveau de la passe, les contraintes passent progressivement de leur valeur initiale à une valeur nulle par le biais du facteur λ décroissant de 1 à 0 . . . 34
2.10 Exemple d'un plan de symétrie pour le problème de l'excavation du tunnel contenant l'axe $\boldsymbol{e}_z$ et formant un angle θ_s avec l'axe $\boldsymbol{e}_x$ . . . 35
2.11 Introduction d'une base locale au niveau du coin du tunnel pour un angle $\theta = \theta_s$ 36

2.12 Quelle que soit la modélisation du matériau et du chargement, le problème admet au minimum deux plans de symétrie qui sont le plan horizontal et le plan vertical contenant l'axe du tunnel . . . 37
2.13 Utilisation du principe de superposition pour se ramener dans une situation où les bords de l'excavation sont libre de contraintes au niveau de la passe . . 38
2.14 Définition du problème plan équivalent . . . 39
2.15 Représentation, dans la base polaire locale, en fonction de l'angle α, des composantes des tenseurs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ associés à des singularité de degré $\delta_1 = -0.4555$ et $\delta_2 = -0.09147$ respectivement . . . 41
2.16 Illustration de deux contours Γ_1 et Γ_2 entourant la singularité géométrique et prenant appuis sur des surfaces libres de contraintes. . . . 42
2.17 Tunnel cylindrique en conditions axisymétriques avec bords libres d'effort et dans un milieu non précontraint . . . 44
2.18 Représentation, dans la base locale, en fonction de l'angle α, des composantes des tenseurs de contrainte singuliers en axisymétrique $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ associés à des singularité de degré $\delta_1 = -0.4555$ et $\delta_2 = -0.09147$ respectivement . . . 46
2.19 Représentation du voisinage du fond d'une fissure de Griffith bidimensionnelle 51
2.20 Représentation du problème traiter par Azhdari et Nemat-Nasser pour un milieu anisotrope . . . 54
2.21 Tracé de $det(M)$ comme une fonction de α et $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ . . . 60
2.22 Tracé de α comme une fonction de $r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ . . . 60
2.23 Tracé de $det(M)$ comme une fonction de α et δ . . . 61
2.24 Tracé de α comme une fonction de δ . . . 61
2.25 Tracé de α comme une fonction de $\frac{2A_{12}+A_{66}}{A_{11}}$ et de $\frac{A_{22}}{A_{11}}$ . . . 61
2.26 Représentation, dans la base locale, en fonction de l'angle θ, des composantes des tenseurs de contrainte singuliers en axisymétrique $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ associés à des singularité de degré $\alpha_1 = -0.4519$ et $\alpha_2 = -0.0991$ respectivement. Le matériau considéré est isotrope transverse défini par $E_1 = 24.19\,\text{GPa}$, $E_2 = 9.27\,\text{GPa}$, $\nu_{21} = 0.2$, $\nu_{13} = 0.15$ et $G_{12} = 3.94\,\text{GPa}$ où 2 est la direction verticale et 1 et 3 sont les deux directions horizontales . . . 62
2.27 Représentation du problème bidimensionnel équivalent . . . 63
2.28 Notations pour une fissure fermée . . . 64

3.1 Excavation du tunnel en conditions bidimensionnels avec présence éventuelle d'une fissure $\mathcal{F}$ de longueur l . . . 69
3.2 Problème auxiliaire permettant de se ramener à des bords libres . . . 70
3.3 Définition de la lèvre supérieure $\mathcal{F}^+$ et inférieure $\mathcal{F}^-$ de la fissure ainsi que du contour extérieur Γ^{ext} . . . 70
3.4 Exemple d'un contour Γ prenant appui sur les bords de la passe et entourant la fissure $\mathcal{F}$ . . . 72
3.5 Définition des zones intérieure, extérieure et de raccord . . . 74
3.6 Zoom sur la zone intérieure où grâce à l'usage de la variable d'espace adimensionnée $\boldsymbol{Y}$, la fissure est de taille unitaire . . . 77
3.7 Propagation d'une fissure de Griffith dans son axe . . . 79
3.8 Convention permettant de préciser la notion de normale à un arc orienté . . . 81
3.9 Isolant thermique de forme carré, de côté unitaire, plongé dans un milieu infini. Les flèches représentent ici le flux thermique et $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure . . 82
3.10 Problème de thermique auxiliaire. Les flèches représentent ici le flux thermique et $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure . . . 82

3.11 Plan antécédent et image par une transformation de type Schwarz-Christoffel avec un développement en série de Laurent à l'ordre 100 83
3.12 Argument de $1 + \frac{1}{Z^4}$ en fonction de $\theta = \arg(Z)$ pour $|Z| = 1.4$, 1.01 et 1 85
3.13 Plan antécédent et image par la transformation ω_f avec un développement en série de Laurent à l'ordre 200 et $\epsilon = 0.5$ 87
3.14 Courbes isothermes pour le problème sain et avec défauts 88
3.15 Courbes dans le plan antécédent dont l'image par les transformations conformes est la droite partant du coin supérieur droit et étant incliné d'un angle $\beta = \frac{\pi}{3}$ par rapport à l'horizontale pour des fissures de taille 0.01 (bleu : sans défaut, vert : avec défaut) 89
3.16 Profils de température le long des demi droites d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ en fonction de r, distance au coin, pour des fissures de taille 0.01 et un chargement A=1 $K.m^{-1}$ (bleu : sans défaut, vert : avec défaut) 89
3.17 Profils de température le long de la demi droite d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ en fonction de r la distance au coin pour des fissures de taille 0.01 et un chargement A=1 $K.m^{-1}$ (bleu : sans défaut, vert : avec défaut, cyan : DA au premier ordre, violet : DA au second ordre, rouge : DA au troisième ordre) 92
3.18 Représentation, pour une troncature à l'ordre $n = 150$ de ω, de l'approximation de l'angle droit par une courbe régulière. Le rayon de courbure de cette dernière au niveau du coin approché est de l'ordre de $0.0005c$ où c est la dimension du côté du carré considéré qui ici a été normalisée à 1 94
3.19 Trou carré libre de contrainte dans un milieu chargé à l'infini avec une traction isotrope 95
3.20 Trou carré libre de contrainte dans un milieu chargé à l'infini avec un champ déviateur de contraintes 95
3.21 Fissure obtenue pour une troncature brutale de la transformation conforme ω_f. Illustration du phénomène d'interpénétration 96
3.22 Géométrie fissurée approchée avec une fissure de taille $0.0053c$ où c est la taille du côté du carré qui ici a été normalisée à 1. Pour obtenir un tel résultat, l'ordre de troncature considéré est $n = 300$. Trois niveaux de zoom sont représentés pour bien rendre compte de la géométrie du défaut considéré. . . . 97
3.23 Géométrie fissurée approchée avec une fissure de taille $0.059c$ où c est la taille du côté du carré qui ici a été normalisée à 1. Pour obtenir un tel résultat, l'ordre de troncature considéré est $n = 300$. Trois niveau de zoom sont représentés pour bien rendre compte de la géométrie du défaut considéré. 97
3.24 Supports géométriques correspondant à des segments prenant naissance au niveau du coin supérieur droit et inclinés d'un angle β par rapport à l'horizontal, avec $\beta \in \left\{-0.95\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, 0.95\pi\right\}$ 98
3.25 Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = -\frac{\pi}{6}$ en fonction de la distance au coin r normalisée par c. Rouge : solution saine Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$ Bleu : solution asymptotique Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3 99

3.26 Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = \frac{\pi}{2}$ pour la figure de gauche et $\beta = \frac{\pi}{6}$ pour la figure de droite, en fonction de la distance au coin r normalisée par c. Rouge : solution saine Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$ Rose : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.059c$ Bleu : solution asymptotique Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3 100
3.27 Courbes iso-G et iso-$\sigma_{r\theta}$ obtenues pour $\boldsymbol{e}_x.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y.\boldsymbol{\sigma}_p.\boldsymbol{e}_y = 10\,\text{MPa}$ et pour un niveau de chargement $\lambda = 0.3$. G et $\sigma_{r\theta}$ augmente à mesure que les courbes virent du rouge au bleu 101
3.28 Application du double critère à la situation de l'excavation d'un tunnel dans la direction principale horizontale mineure avec $\sigma_h = \sigma_v = 10\,\text{MPa}$ et $\sigma_H = 12\,\text{MPa}$. Gauche : Fissures observées, Milieu : plan horizontal, Droite : plan vertical Courbe rouge : iso-$\sigma_{r\theta} = \sigma_c$, courbe bleue : iso-$G_{inc} = G_c$ Niveau de chargement du plan horizontal : $\lambda = 0.145$, vertical : $\lambda = 0.217$ 101
3.29 Application du double critère à la situation de l'excavation d'un tunnel dans la direction principale horizontale majeure avec $\sigma_h = \sigma_v = 10\,\text{MPa}$ et $\sigma_H = 12\,\text{MPa}$. Gauche : Fissures observées, Milieu : plan horizontal, Droite : plan vertical Courbe rouge : iso-$\sigma_{r\theta} = \sigma_c$, courbe bleue : iso-$G_{inc} = G_c$ Niveau de chargement du plan horizontal : $\lambda = 0.14$, vertical : $\lambda = 0.269$ 102

4.1 Représentation d'une fissure par une zone tridimensionnelle d'épaisseur ϵ . . . 109
4.2 Représentation d'une fissure par une zone tridimensionnelle d'épaisseur ϵ . . . 110
4.3 Homogenisation d'un VER microfissuré 111
4.4 Problème d'homogénéisation du VER microfissuré en l'absence de précontrainte 112
4.5 Différents chemins permettant d'arriver à un état totalement endommagé . . . 116
4.6 Détail de la fissure équivalente surfacique de type Griffith 123
4.7 Illustration d'un cas où G_{inc} admet un maximum 128
4.8 Problème du délaminage d'une poutre où ℓ représente la longueur sur laquelle la poutre a été délaminée 131
4.9 Gauche : structure sans défaut Ω^0, Milieu : structure identique avec présence de deux fissures Ω^f, Droite : définition de deux sous domaines Ω_1 et Ω_2 ayant Γ pour frontière commune 133
4.10 Gauche : Structure saine $\left(\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0\right)$, Millieu : Structure bornée avec un défaut $\left(\boldsymbol{\xi}^f, \boldsymbol{\sigma}^f\right)$, Droite : Structure équivalente infinie avec un défaut $\left(\boldsymbol{\xi}^{\infty,f}, \boldsymbol{\sigma}^{\infty,f}\right)$ . . 135
4.11 Trou carré dans un milieu infini en déformations planes. Gauche : structure saine soumise à un chargement donné. Droite : structure avec deux fissures ouvertes symétriques d'extension ℓ pour le même chargement 141
4.12 Taux de restitution d'énergie G_{inc} obtenu par la formule (4.152) pour une troncature de la série de Laurent à l'ordre $N = 250$ et pour des fissures de taille ℓ variables 143

5.1 Schématisation du problème micromécanique correspondant à un milieu poreux saturé constitué d'une matrice solide thermoélastique et d'un fluide à la pression p 147
5.2 Différentes échelles d'espace d'une fissure en chevron 152
5.3 Fissures sèches dans un milieu poreux 153
5.4 Fissures sèches dans un milieu poreux 154

6.1 Illustration du saut d'une quantité au travers une surface de discontinuité . . 166

6.2 Arête commune entre un élément i et un élément j. Orientation de la tangente $\boldsymbol{t}$ et de la normale $\boldsymbol{n}$ à l'arête en fonction d'un sens de parcours. 168
6.3 Milieu carré de longueur L. Illustration d'une source de redondance parmi les équations 170
6.4 Arc orienté et convention d'orientation de la normal 173
6.5 Triangle élémentaire et orientation locale des arêtes 176
6.6 Triangle squelette et décomposition en trois zones notées (1), (2) et (3) 177
6.7 Exemple de triangles homothétiques centrés à l'origine. Le rapport d'homothétie est $\frac{x_B}{x_A} = \lambda$ 183
6.8 Encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental pour une structure de taille globale 40 fois supérieur à la taille du trou carré. La quantité ℓ représente la taille la fissure nucléée normalisée par rapport à la taille du trou. Courbe bleu : borne inférieure issue du terme de gauche dans l'inégalité (6.4). Courbe rouge : borne supérieure issue du terme de droite dans l'inégalité (6.4). 189
6.9 Encadrement du taux de restitution d'énergie incrémental pour une structure de taille globale 60 fois supérieur à la taille du trou carré. La quantité ℓ représente la taille la fissure nucléée normalisée par rapport à la taille du trou. Courbe bleue : borne inférieure issue du terme de gauche dans l'inégalité (6.4). Courbe rouge : borne supérieure issue du terme de droite dans l'inégalité (6.4). 191
6.10 Comparaison des différents encadrement pour des tailles de maillage différentes. Courbes bleues : bornes pour un maillage 40 fois supérieur à la taille du trou. Courbes rouges :bornes pour un maillage 60 fois supérieur à la taille du trou. Courbes vertes :bornes pour un maillage 80 fois supérieur à la taille du trou. 192
6.11 Comparaison des courbes de taux de restitution d'énergie obtenus par transformation conforme (courbe blue) et par analyse duale pour une structure de taille normalisée 80 (courbes rouges) 192

7.1 Rappel des orientations des axes et des différentes notations 195
7.2 Illustration du mécanisme de déformation $\boldsymbol{\xi}^0$ proposé dans le cas sain 196
7.3 Représentation tridimensionnelle du faciès de fissuration proposé 198
7.4 Paramètres α et $L_{\mathcal{F}}$ définissant le cône tronqué 198
7.5 Mécanisme de fracturation traduisant la variation de déplacement induite par la fissure 199
7.6 Taux de restitution d'énergie pour une situation axisymétrique en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_{\mathcal{F}}$ et de l'angle d'ouverture α 200
7.7 Faciès de fissuration observé par l'ANDRA lors de l'excavation d'un tunnel dans la direction de la contrainte principale horizontale mineure (figure ANDRA) 201
7.8 Représentation tridimensionnelle d'une surface reglée prenant appui sur un cercle et une ellipse 203
7.9 Représentation géométrique d'une fissure en forme de cône à base elliptique . 203
7.10 Paramètres permettant de définir une géométrie de fissure conique à base elliptique 204
7.11 Mécanisme de fracturation traduisant la variation de déplacement induite par la fissure 204
7.12 Taux de restitution d'énergie pour une situation avec anisotropie de contraintes en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_{\mathcal{F}}$, des différents paramètres de l'ellipse de base a et b. La distance au sommet est $h = 0.8R$ 205

7.13 Représentation de la surface optimale pour l'anisotropie de contraintes 206
7.14 Faciès de fissuration observé par l'ANDRA lors de l'excavation d'un tunnel dans la direction de la contrainte principale horizontale mineure (figure ANDRA) 206
7.15 Paramètres permettant de définir une géométrie de fissure conique à base elliptique 207
7.16 Tracé de $\frac{G_c^\star}{g_1}$ pour $g_1 = 50g_2$. Courbe noire : formulation exacte (7.27), Courbe rouge : approximation (7.28) 209
7.17 Représentation géométrique d'une fissure en forme de cône à base construite à partir de branche de paraboles 209
7.18 Paramètres permettant de définir une géométrie de fissure conique à base construite à partir de branche de paraboles 210
7.19 Comparaison du taux de restitution d'énergie entre les situations avec $G_c^\star$ isotrope et anisotrope en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_{\mathcal{F}}$, de différentes valeurs du paramètre a. La distance au sommet est $h = 1.1R$ 211
7.20 Représentation de la surface optimale pour l'anisotropie du matériau considérée 211

8.1 Une microstructure multicouches à trois matériaux 225

9.1 Barreau unidimensionnel avec déplacements imposés 244
9.2 Exemple d'un champ d'endommagement initialement C^1 devenant discontinu au cours d'un processus endommageant 245
9.3 Exemple de mécanisme d'endommagement où la porosité dans une cellule de base donnée peut augmenter 248
9.4 Exemple d'une portion hétérogène d'un barreau remplacée par une portion d'élasticité homogène 249
9.5 Construction d'une variable d'endommagement constante par morceaux avec des intervalles fixés de longueur l 250
9.6 Réponse de la structure pour des évolutions quasi-statiques avec $p \geq p_{min}$. $N = 10, Q = -0.2, Q' = 1., g_c = 1.$. Courbe noire : état homogène. Courbe inférieure : $p = 4 = p_{min}$ 253
9.7 Réponse de la structure pour des évolutions avec $p < p_{min}$. $N = 10, Q = -0.2, Q' = 1., g_c = 1.$. Courbe supérieure : $p = p_{min} = 4$. Courbe inférieure : $p = 1 < p_{min}$. $\sigma^\star$ est l'état de contrainte associé avec le chargement $\xi^{d^\star}$ 256
9.8 Macroscopic behavior for evolutions with $p < p_{min}$. $N = 10, Q = -0.2, Q' = 1., g_c = 1.$. Upper curve : $p = p_{min} = 4$. Lower curve : $p = 1 < p_{min}$. σ^* is the stress associated with u^* 263

A.1 Trou de forme carré chargé avec une pression isotrope dans un milieu libre de contraintes à l'infini 284
A.2 Trou de forme carré chargé avec un déviateur de contraintes dans un milieu libre de contraintes à l'infini 286

B.1 Schématisation du problème micromécanique correspondant à un milieu poreux saturé constitué d'une matrice solide thermoélastique et d'un fluide à la pression p 292
B.2 Schématisation du problème micromécanique sans précontraintes associé au problème initial 293

D.1 Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = -0.95\frac{\pi}{2}$ en fonction de la distance au coin r normalisée par c. Rouge : solution saine Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$ Bleu : solution asymptotique Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3 308
D.2 Tracé, pour les deux problèmes, des trois solutions sur le segment support $\beta = \frac{\pi}{6}$ en fonction de la distance au coin r normalisée par c. Rouge : solution saine Vert : solution avec des fissures d'extension $\ell = 0.0053c$ Bleu : solution asymptotique Pointillés : intervalle correspondant à la zone de raccord L'intensité p du chargement a été prise égale au module d'Young E et le coefficient de poisson ν choisi égal à 0.3 309
D.3 Taux de restitution d'énergie pour une situation avec anisotropie de contraintes en fonction de la hauteur du cône tronqué $L_{\mathcal{F}}$, des différents paramètres de l'ellipse de base a et b. Les distance au sommet sont $h = 0.7R$, $h = 1.R$ et $h = 2.R$ 311

Liste des tableaux

6.1 Liste des monômes de degré k pour un polynôme de deux variables x et y . . 172
6.2 Comparatif des différentes tailles des systèmes devant être inversés en fonction de la méthode considérée et du degré d'approximation 187

D.1 Minorants et majorants du taux de restitution d'énergie pour le problème Figure 4.11 avec un domaine de taille D comportant un trou carré de côté a unitaire, pour une pression p égale au module d'Young (et prise unitaire) et un coefficient de poisson $\nu = 0.35$. 310

Glossaire et liste des acronymes

ANDRA Agence Nationale pour la gestion des Déchets Radioactifs. 12–15, 20, 21, 24, 34, 64, 101, 105, 144, 146, 194, 206, 212, 265, 267

argilite Forme de roche sédimentaire argileuse indurée à grain fin et très peu perméable (quelques nanodarcy). 12, 33, 37, 59, 207

ASN Autorité de Sûreté Nucléaire. 14

DFEM Méthode des Éléments finis basée sur les Déplacements, ou *Displacements Finite Element Method*. 165, 167, 182, 188, 189, 191, 205

EFEM Méthode des Éléments finis basée sur les Contraintes, ou *Equilibrium Finite Element Method*. 165, 166, 169–171, 174, 176, 182, 185, 187, 188, 191, 194, 205

FAVL classification des colis radioactifs présentant une Faible Activité et une Vie Longue. 12

FEM Méthode des Éléments finis, ou *Finite Element Method*. 164

HAVL classification des colis radioactifs présentant une Haute Activité et une Vie Longue. 12, 24, 269

MAVL classification des colis radioactifs présentant une Moyenne Activité et une Vie Longue. 12

MUMPS MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver : Solver permettant entre autre de résoudre des systèmes linéaires dégénérés. 171

VER Volume Élémentaire Représentatif. 110–112, 114, 116, 118, 119, 147–149, 151, 153, 154, 156, 158, 160, 248–250, 264, 292, 293, 297

Bibliographie

Amor, H., J.-J. Marigo et C. Maurini. 2009, «Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 57, n° 8, p. 1209 – 1229, ISSN 0022-5096. (page 24).

Armand, G., F. Leveau, C. Nussbaum, R. de la Vaissiere, A. Noiret, D. Jaeggi, P. Landrein et C. Righini. 2012, «Geometry and properties of the excavation-induced fractures at the meuse/haute-marne url drifts», *Rock Mech Rock Eng.* (pages 13, 313).

Azhdari, A. et S. Nemat-Nasser. 1996, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, n° 14, p. 2023 – 2037, ISSN 0020-7683. (page 80).

Azhdari, A., M. Obata et S. Nemat-Nasser. 2000, «Alternative solution methods for crack problems in plane anisotropic elasticity, with examples», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, n° 44, p. 6433 – 6478, ISSN 0020-7683. (pages 51, 53, 54).

Barsoum, R. S. 1974, «On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics», *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, p. 25–37. (page 189).

Bazant, Z. 1976, «Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete», *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 102, p. 331–344. (page 19).

Bazant, Z. 1994, «Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions», *Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 120, p. 593–617. (page 19).

Bazant, Z. P. et J. Planas. 1998, *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*, CRC Press LLC. (page 127).

Benallal, A. et C. Comi. 2003, «Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 51, n° 5, p. 851 – 899, ISSN 0022-5096. (page 234).

Benallal, A. et J.-J. Marigo. 2007, «Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening», *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, n° 1, p. S283–S295. (page 19).

Berthier, E., V. Démery et L. Ponson. 2017, «Damage spreading in quasi-brittle disordered solids : I. localization and failure», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 102, p. 101 – 124, ISSN 0022-5096. (pages 19, 214).

Bleyer, J., C. Roux-Langlois et J.-F. Molinari. 2017, «Dynamic crack propagation with a variational phase-field model : limiting speed, crack branching and velocity-toughening mechanisms», *International Journal of Fracture*, vol. 204, n° 1, p. 79–100, ISSN 1573-2673. (page 20).

Boutin, C. 1996, «Microstructural effects in elastic composites», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, n° 7, p. 1023 – 1051, ISSN 0020-7683. (pages 214, 218, 224).

Bowie, O. L. 1956, «Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole», *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 35, n° 1-4, p. 60–71, ISSN 1467-9590. (pages 134, 140).

Budiansky, B. et R. O'Connell. 1976, «Elastic moduli of a cracked solid», *International Journal of Solids Structure*, vol. 12, p. 81–97. (page 17).

Bui, H. 1978, *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, ISBN 9782225483127. (page 28).

Bui, H. D., A. Ehrlacher et N. Q. Son. 1981, «Etude expérimentale de la dissipation dans la propagation de fissure par thermographie infrarouge», *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, vol. 293, p. 1015–1019. (pages 21, 109, 126).

Campagnolo, A., F. Berto et D. Leguillon. 2016, «Mode ii loading in sharp v-notched components : a comparison among some recent criteria for brittle fracture assessment», *Procedia Structural Integrity*, vol. 2, p. 1845 – 1852, ISSN 2452-3216. 21st European Conference on Fracture, ECF21, 20-24 June 2016, Catania, Italy. (page 68).

Castañeda, P. et J. Willis. 1995, «The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, n° 12, p. 1919 – 1951, ISSN 0022-5096. (page 17).

Coussy, O. 1991, *Mécanique des milieux poreux*, Editions Technip. (page 146).

Coussy, O. 1995, *Mechanics of porous continua*, Wiley. (page 148).

Cyron, C. J., J.-J. Marigo et P. Sicsic. 2014, «Cohesive model approach to the nucleation and propagation of cracks due to a thermal shock», *International Journal of Fracture*, vol. 187, n° 1, p. 51–75, ISSN 1573-2673. (page 20).

Dormieux, L., D. Kondo et F.-J. Ulm. 2006, *Microporo Mechanics*, Wiley. (page 147).

Francfort, G. et J.-J. Marigo. 1998, «Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem», *Journal of the Mechanics an Physics of Solids*, vol. 46, n° 8, p. 1319 – 1342, ISSN 0022-5096. (page 19).

Francort, G. et J.-J. Marigo. 1993, «Stable damage evolution in a brittle continuous medium», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 12, n° 2, p. 149–189, ISSN 0997-7538. (pages 19, 255, 257, 258, 260).

Germain, P. 1986, *Mécanique*, vol. 1, Ellipses. (page 221).

Gorgievich Leknitskii, S. 1963, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day series in mathematical physics, Holden-Day. (pages 20, 48, 59, 272, 275).

Green, A. E. et R. S. Rivlin. 1964, «Multipolar continuum mechanics», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 17, n° 2, p. 113–147, ISSN 1432-0673. (page 221).

Griffith, A. A. 1921, «The phenomenon of rupture and flow in solids», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 221, p. 163–198. (page 25).

HILL, R. 1958, «A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6, n° 3, p. 236 – 249, ISSN 0022-5096. (pages 22, 234).

HORII, H. et S. NEMAT-NASSER. 1993, «Overall modulii of solids with microcrakcs : load-induced anisotropy», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 31, p. 155–171. (page 17).

IRWIN, G. R. 1957, «Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, p. 351–369. (pages 16, 31).

KEMPENEERS, M. et AL. 2003, «Modèles équilibre pour l'analyse duale», *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 12, p. 737–760. (pages 166, 171, 175).

KORSUNSKY, A. M. 1995, «Fundamental eigenstrain solutions for axisymmetric crack problems», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, n° 8, p. 1221 – 1241, ISSN 0022-5096. (page 44).

KUO, M. C. et D. B. BOGY. 1974, «Plane solutions for traction problems on orthotropic unsymmetrical wedges and symmetrically twinned wedges», *Journal of Applied Mechanics*, p. 203–208. (page 47).

LANCIONI, G. et G. ROYER-CARFAGNI. 2009, «The variational approach to fracture mechanics. a practical application to the french panthéon in paris», *Journal of Elasticity*, vol. 95, p. 1–30. (pages 22, 24).

LEBLOND, J.-B. 2000, «Basic results for elastic fracture mechanics with frictionless contact between the crack lips», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 19, n° 4, p. 633 – 647, ISSN 0997-7538. (page 64).

LEGUILLON, D. 1989, «Calcul du taux de restitution de l'énergie au voisinage d'une singularité», *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, vol. 309, p. 945–950. (pages 17, 68, 73, 99).

LEGUILLON, D. 2002, «Strength or toughness ? a criterion for crack onset at a notch», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 21, n° 1, p. 61 – 72, ISSN 0997-7538. (pages 15, 20, 47, 164).

LEGUILLON, D. et E. SANCHEZ-PALENCIA. 1987, *Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, ISBN 0-471-91757-5. (pages 40, 42, 273).

LEGUILLON, D., S. TARIOLLE, E. MARTIN, T. CHARTIER et J. BESSON. 2006, «Prediction of crack deflection in porous/dense ceramic laminates», *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 26, n° 3, p. 343 – 349, ISSN 0955-2219. (page 68).

LEGUILLON, D. et Z. YOSIBASH. 2003, «Crack onset at a v-notch. influence of the notch tip radius», *International Journal of Fracture*, vol. 122, n° 1, p. 1–21, ISSN 1573-2673. (page 16).

LEMAITRE, J. et J.-L. CHABOCHE. 1979, «Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement», *Journal de Mécanique Appliquée*, vol. 2. (page 17).

LI, T., J.-J. MARIGO, D. GUILBAUD et S. POTAPOV. 2016, «Gradient damage modeling of brittle fracture in an explicit dynamics context», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. (page 20).

MUSKHELISHVILI, N. 1953, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity : Fundamental Equations, Plane Theory of Elasticity, Torsion and Bending*, Springer Netherlands, ISBN 9789401730341. (pages 27, 28, 29, 95, 137, 282).

MUSKHELISHVILI, N. 2013, *Singular Integral Equations : Boundary Problems of Function Theory and Their Application to Mathematical Physics*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, ISBN 9780486145068. (page 54).

NGUYEN, Q. S. 2000, *Stabilité et Mécanique Non linéaire*, Hermès Science Publications. (page 234).

NGUYEN, T., J. YVONNET, M.BORNERT et C. CHATEAU. 2016, «Initiation and propagation of complex 3d networks of cracks in heterogeneous quasi-brittle materials : Direct comparison between in situ testing-microct experiments and phase field simulations», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 95, n° Supplement C, p. 320 – 350, ISSN 0022-5096. (page 20).

PANASYUK, V. et L. BEREZBNITSKIY. 1965, «Propagation of an arbitrarily oriented rectilinear crack during extension of a plate», *Prikladnaya Mekhanika*, vol. 1. (page 27).

PAPANICOLAU, G., A. BENSOUSSAN et J. LIONS. 1978, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Studies in Mathematics and its Applications, Elsevier Science, ISBN 9780080875262. (page 214).

PHAM, K. et J.-J. MARIGO. 2010a, «Approche variationnelle de l'endommagement : I. les concepts fondamentaux», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 338, n° 4, p. 191 – 198, ISSN 1631-0721. (pages 19, 214).

PHAM, K. et J.-J. MARIGO. 2010b, «Approche variationnelle de l'endommagement : Ii. les modèles à gradient», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 338, n° 4, p. 199 – 206, ISSN 1631-0721. (pages 214, 230, 257).

PHAM, K. et J.-J. MARIGO. 2011, «Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture», *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 20, n° 4, p. 618–652. (page 22).

PHAM, K. et J.-J. MARIGO. 2013a, «From the onset of damage to rupture : construction of responses with damage localization for a general class of gradient damage models», *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 25, n° 2, p. 147–171, ISSN 1432-0959. (pages 20, 243, 253).

PHAM, K. et J.-J. MARIGO. 2013b, «Stability of homogeneous states with gradient damage models : Size effects and shape effects in the three-dimensional setting», *Journal of Elasticity*, vol. 110, n° 1, p. 63–93, ISSN 1573-2681. (page 19).

PHAM, K., J.-J. MARIGO et C. MAURINI. 2011, «The issues of the uniqueness and the stability of the homogeneous response in uniaxial tests with gradient damage models», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 59, n° 6, p. 1163 – 1190, ISSN 0022-5096. (pages 19, 253).

Pijaudier-Cabot, G. et Z. P. Bazant. 1987, «Nonlocal damage theory», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, p. 1512–1533. (page 19).

Quesada, D., D. Leguillon et C. Putot. 2009, «Multiple failures in or around a stiff inclusion embedded in a soft matrix under a compressive loading», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 28, n° 4, p. 668 – 679, ISSN 0997-7538. (page 16).

Rice, J. 1978, «Thermodynamics of the quasi-static growth of griffith cracks», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 26, n° 2, p. 61 – 78, ISSN 0022-5096. (page 146).

Salençon, J. 1983, *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presse des Ponts. (page 126).

Salençon, J. 2001, *Handbook of Continuum Mechanics*, Springer. (pages 107, 221, 235).

Savin, G. 1961, *Stress Concentration Around Holes*, International series of monographs in aeronautics and astro, Pergamon Press. (pages 49, 53).

Tikhonov, A. N. 1963, «Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method», *Soviet Math. Dokl.*, vol. 4, p. 1035–1038. (page 19).

Ting, T. et S. Chou. 1981, «Edge singularities in anisotropic composites», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 17, n° 11, p. 1057 – 1068, ISSN 0020-7683. (page 47).

Tran, T.-H., V. Monchiet et G. Bonnet. 2012, «A micromechanics-based approach for the derivation of constitutive elastic coefficients of strain-gradient media», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, n° 5, p. 783 – 792, ISSN 0020-7683. (pages 214, 223, 224, 305).

de Veubeke, B. F. 2001, «Displacement and equilibrium models in the finite element method», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, p. 287–342. (pages 166, 167, 175, 177).