



**HAL**  
open science

# Sources fibrées de paires de photons : caractérisation et influence de la non-uniformité

Thibault Harlé

► **To cite this version:**

Thibault Harlé. Sources fibrées de paires de photons : caractérisation et influence de la non-uniformité. Optique [physics.optics]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLO009 . tel-02018801

**HAL Id: tel-02018801**

**<https://pastel.hal.science/tel-02018801v1>**

Submitted on 14 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sources fibrées de paires de photons : caractérisation et influence de la non-uniformité

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay  
préparée à l'Institut d'Optique Graduate School

École doctorale n° 572  
Ondes et Matière (EDOM)  
Spécialité de doctorat : Physique

Thèse soutenue à Palaiseau, le 20 décembre 2018, par

**Thibault HARLÉ**

Composition du jury :

Mme Pérola MILMAN	Rapporteuse	MPQ
M. Arnaud MUSSOT	Rapporteur	PhLAM
Mme Margaux BARBIER	Examinatrice	FOTON
M. Antoine GODARD	Examineur	ONERA
Mme Rosa TUALLE BROURI	Présidente du jury	LCF
Mme Isabelle ZAQUINE	Invitée	LTCI
M. Philippe DELAYE	Directeur de thèse	LCF



# Remerciements

Me voici maintenant devant l'occasion de mettre ici mes derniers mots, qui paradoxalement seront les premiers de ce manuscrit. L'occasion de revenir sur mon parcours, et de remercier toutes les entités et personnes qui m'ont accompagnées de près ou de loin durant celui-ci, pendant un temps ou depuis le début.

Mais avant toute chose, j'adresse ici au lecteur un remerciement et un avertissement.

Un remerciement pour exprimer ma gratitude de porter intérêt à mes travaux : j'ai souhaité dans ce manuscrit faire de mon mieux pour transmettre, de la manière la plus claire et compréhensible possible, tout ce que j'ai appris, compris ou découvert sur ce sujet. Puisse ce document vous aider à progresser, vous inspirer de nouvelles voies de recherche, et ainsi me permettre d'apporter ma modeste pierre à l'édifice des connaissances de l'humanité.

Un avertissement à présent, pour vous signaler (comme le nombre de pages de ce manuscrit vous l'aura sans doute fait comprendre) que je ne suis pas avare en mots. Ceux qui ont pu me côtoyer au laboratoire me connaissent sans doute comme une personne plutôt laconique mais il se trouve que, bizarrement, à l'écrit j'ai bien plus tendance à m'épancher. Et vu que ces remerciements sont un peu ma zone carte blanche, pensez bien que je ne vais pas me priver.

De la façon dont je le vois, ma vie de scientifique n'a pas commencé il y a trois ans avec cette thèse, mais bien, bien avant. En effet, j'ai ma propre définition du scientifique, bien plus large et inclusive que celle du sens commun : à mes yeux toute personne voulant comprendre le monde qui l'entoure, même partiellement, et s'y attelant avec rationalité et ouverture d'esprit, tiens là l'essence de l'état d'esprit scientifique. Certes, la rigueur, la méthode, la formation et l'érudition aident grandement, mais c'est bien cette démarche curieuse et volontaire, fondamentale, qui fait pour moi le scientifique. Et suivant cette définition, je peux dire que je l'ai été durant la plus grande part de ma vie, et que je le resterai encore très longtemps (pour ma plus grande joie).

Néanmoins, cette thèse de doctorat marque la fin de toute une période de ma vie. Une période qui m'a beaucoup marqué, beaucoup changé, et qui a largement contribué à faire de moi la personne que je suis aujourd'hui. C'est sur toute cette période, qui dépasse les trois années passées, que je voudrais revenir et pour laquelle je souhaite exprimer ma gratitude.

Je pense pouvoir dire sans me tromper que j'ai par le passé toujours montré une intense curiosité, matinée de fascination, pour les rouages profonds du fonctionnement du monde. Comprendre a toujours été une des mes motivations premières, et je me suis constamment efforcé de poursuivre ce but dans une démarche plutôt rationnelle. De fait, pour ceux qui m'ont connu encore très jeune, me voir plonger dans la science tête baissée dès le début de mon parcours n'aura sans doute pas été très étonnant (je me souviens encore d'un banal test d'orientation au collège qui, sans surprise, m'indiquait que j'aurai de bonnes chances de trouver ma voie dans les filières scientifiques et techniques). Cette appétence, loin de se dissiper, s'est encore renforcée les années du secondaire passant, et c'est suivant une évidence pour moi que je m'engageais sur un chemin de science dans le supérieur.

Je n'avais alors pratiquement aucune idée de la manière dont se passait la recherche, ni n'avait jusqu'alors jamais rencontré de chercheur. Naïvement, je me les figurai comme des puits de science et de sagesse, dont l'étendue du savoir et de maîtrise de leurs domaines respectifs en faisait presque des gourous mystiques à mes yeux, tant un tel niveau me semblait hors de portée. C'est ainsi que j'entraï à l'université et que je me fixait l'objectif, sans trop y croire, d'enchaîner licence, master et doctorat. Cette dernière étape m'apparaissant alors comme le pinacle du scientifique, et comme un but vaguement atteignable, telles les bonnes résolutions de début d'année.

Si je partais avec une grande soif d'apprendre (chaque nouvelle branche de la physique dont je découvrais l'existence me faisait un peu l'effet du dévoilement d'un nouveau cadeau sous le sapin), c'est bien mon parcours qui a donné structure et forme à ma manière d'aborder un problème, de déduire des choses de mes perceptions, ou de se fier à des idées. En un mot, m'inculquer la méthode scientifique. Et, je ne sais si mes pairs le perçoivent de la même manière que moi, mais à mes yeux le changement est radical : il affecte notre manière de penser, notre manière d'être, et surtout notre façon de percevoir le monde. Ce dernier est comme enrichi, sublimé. Un arc-en-ciel ne se résume plus à un dégradé de couleur se dépeignant sur le ciel, mais se dote d'un sens caché, d'un mécanisme à la fois élégant dans sa simplicité et infiniment riche dans sa complexité. Tout change. L'air, les fleurs, les étoiles dans le ciel, la simple réflexion d'un lampadaire sur une flaque d'eau, chaque détail devient un puit vertigineux de profondeur dès lors qu'on peut le *comprendre*. Peut-être suis-je le seul à perpétuellement m'émerveiller de cette richesse infinie de notre univers, mais je suis persuadé que je n'aurais pu autant m'en délecter sans ce que m'a apporté la science.

En ce sens je ne saurais trop exprimer mon infinie gratitude envers l'Université Pierre et Marie Curie, et tous les enseignants que j'ai pu y avoir. Leur motivation, pédagogie, et passion contagieuse pour la physique, seront toujours une source d'inspiration pour moi. Je garderai un précieux souvenir des cinq années que j'y ai passé, des personnes exceptionnelles que j'y ai côtoyé et des cours que j'ai suivi. L'un d'entre eux, qui symbolise, à mon sens, toute l'excellence de l'enseignement prodigué à Jussieu (comme on l'appelle dans le jargon) fut celui d'électro-magnétisme de Brahim Lamine. S'y mêlaient expériences en amphis, questionnaires, débats entre étudiants et explications limpides, le tout en une démarche édifiante de pédagogie. Et, pour tout dire, je me souviens encore me lever le matin pour m'y rendre, le sourire aux lèvres et pressé de découvrir ce que j'y apprendrai ("Sorcellerie!", s'exclameront tous les enseignants qui liront ces lignes).

Au fil de mon parcours, j'ai tenté de suivre la voie la plus généraliste possible, tant il me semble que chaque branche de la physique, et des sciences de manière générale, mérite qu'on s'y intéresse. Mais inévitablement, il m'a fallu me spécialiser. Et pour tout dire, mon choix s'est porté sur l'optique en bonne partie pour mon ignorance sur le sujet : il me restait tout à découvrir. Je dois dire que je n'ai pas été déçu. À peine une année passée à m'ébahir du degré de maîtrise qu'il est possible d'avoir sur la lumière et de tout ce qu'il est possible d'en faire, que je me retrouvais moi-même à la manipuler et à rentrer dans le monde de la recherche.

Et alors que je devenais chercheur, voilà que j'endossais aussi le rôle d'enseignant. Quel saut dans l'inconnu terrifiant et quelle responsabilité. Fébrilement, on tente de faire aussi bien que ceux qui nous ont tant appris, de transmettre le savoir et la passion de comprendre. Et alors qu'on prend progressivement la main, que l'expérience devient grisante et plaisante, on se retrouve soi-même avoir encore plus appris. Je remercie chaleureusement l'équipe d'enseignement de l'Institut, pour leur confiance et leur aide, et particulièrement Julien Villemejeane dont l'enjouement et l'enthousiasme d'enseigner se sont montré contagieux. Je retire beaucoup de cette expérience, qui m'a ouvert tant sur d'autres domaines que sur d'autres perspectives, envers les autres et envers moi-même.

Je souhaite également remercier le CNRS, l'Université Paris-Saclay et l'école doctorale Ondes et Matière qui m'ont donné la chance de pouvoir mener ces travaux. Merci à chaque membre de mon jury de thèse, de s'être intéressé à ces derniers et d'avoir accepté de les évaluer. Merci à Margaux d'avoir posé les bases de ce projet, sur lesquelles je me suis largement appuyé.

Ma gratitude va aussi à l'Institut d'Optique, au Laboratoire Charles Fabry et aux personnes qui en font partie. Et particulièrement aux membres de l'Amicale du Personnel, avec lesquels j'ai connu les joies (et les déboires) de l'organisation d'évènements festifs pour la "grande famille" que constitue l'Institut, dont j'ai eu le plaisir de faire partie. Rentrer dans le monde de la recherche peut se révéler intimidant, et c'est souvent grâce à l'entraide et la bienveillance de nos collègues que l'on peut se sentir intégré, à un laboratoire comme à l'univers de la recherche. En ce sens, je remercie chaleureusement toute l'équipe Manolia, dont les membres m'ont considéré comme l'un des leurs dès les premiers jours, et que j'ai eu le plaisir de côtoyer toutes ces années.

Et merci surtout à Philippe, qui m'a fait toute confiance dès le départ pour reprendre le "bébé". Ces trois années ont assurément été pleines d'obstacles, de frustration, de doutes et questionnements (n'est-ce pas là un peu la marque de fabrique de toutes les thèses?), mais le calme olympien et l'analyse critique de Philippe devant chaque problème ont systématiquement été sources de recul et de patience pour moi. Et de patience, il lui en a fallu aussi devant mes questions, souvent naïves, dont je l'assénais sans cesse. Questions auxquelles j'obtenais toujours, sans faillir, réponses claires, réfléchies et instructives. Merci Philippe pour ta patience, ta confiance, et d'avoir toujours été présent pour m'aider et me guider.

Merci aussi à Isabelle Zaquine et toute son équipe : notre collaboration et nos échanges, en abordant nos problématiques d'un autre angle de vue, se sont montrés sources de nouvelles perspectives et m'ont permis de prendre du recul sur mon travail. Et quelle chance d'ainsi pouvoir partager à la fois l'expérience de vie qu'est la thèse, et mes thématiques de recherche, avec mon ami Martin Cordier.

Merci à ma famille, qui m'a soutenu et laissé libre de choisir ma voie durant toutes ces années. Merci Nicolas pour toutes nos discussions passionnées et passionnantes, à nous questionner sur la nature de la science, de la vie et de l'univers. Merci à lui et à mes deux autres *bros*, Alex et Pierre-Maxime, pour leur soutien indéfectible et pour tout nos moments mémorables. Merci à tous mes amis formidables du laboratoire (l'égrillard Léonard, Stéphane, Aliénior, et tant d'autres...) avec lesquels j'ai eu le bonheur de partager ma passion pour le jeu durant les traditionnels "Jeudi des thésards" qui, je l'espère, perdureront encore longtemps. Et merci à tous mes autres amis, que je ne peux, hélas, tous citer. Merci d'avoir été là, tout simplement.

Une page se ferme sur près d'une décennie où je me suis dédié à la science. Je mesure aujourd'hui toute la chance que j'ai eu, sur l'ensemble de mon parcours, pour toutes ces rencontres et opportunités. Après trois années de recherche, c'est un peu à contre-cœur que je réalise que la vie de chercheur ne me correspond pas. Néanmoins, c'est sans aucun regret que je pars, et avec un profond respect envers la communauté des chercheurs. Envers leur passion, leur patience et leur dévouement pour faire avancer la connaissance.

À moi à présent de chercher ma nouvelle voie. Mais si je suis sûr d'une chose, c'est que, quel que soit le chemin que j'emprunterai, toute cette partie de ma vie ainsi que mon amour de la science ne me quitteront jamais.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Présentation du cadre général de l'étude</b>	<b>19</b>
<b>1 Rappels d'optique non linéaire dans les fibres</b>	<b>21</b>
1.1 Mécanismes non linéaires pour l'émission de paires	21
1.1.1 Conversion paramétrique	22
1.1.2 Mélange à quatre ondes	24
1.1.3 Génération de paires par mélange à quatre ondes spontané	25
1.2 Diffusion Raman spontanée	26
<b>2 Fibre à cristal photonique et de cœur liquide</b>	<b>31</b>
2.1 Propriétés de propagation de la fibre	32
2.1.1 Mesures préliminaires	32
2.1.2 Accord de phase	37
2.2 Accord de phase décalé	40
2.3 Variation des propriétés de propagation de la fibre	42
2.3.1 Invariants de propagation	42
2.3.2 Effet de la variation du pas de la structure	43
2.3.3 Effets du remplissage de la fibre	44
2.3.4 Effet de la variation de température	46
<b>3 Présentation générale de notre expérience</b>	<b>49</b>
3.1 Génération de paires en régime impulsionnel spontané	49
3.2 Description générale du montage	50
<b>4 Trame du modèle de la génération de paires</b>	<b>53</b>
4.1 Probabilité de génération d'une paire de photons	53
4.2 Évolution temporelle et état final des champs	54
4.3 Amplitude et intensité spectrales jointes	57
4.4 Détermination quantitative du taux de génération de paires	58
<b>II Modèle semi-classique de la génération spontanée de paires de photons par mélange à quatre ondes</b>	<b>61</b>
<b>5 Changement du modèle théorique</b>	<b>63</b>
5.1 Rappels d'électromagnétisme	64
5.1.1 Équations de Maxwell et lois de comportement	64
5.1.2 Énergie du champ électromagnétique	65



5.2	Détermination du champ électrique fondamental	67
<b>6</b>	<b>Établissement de l'Hamiltonien de notre système</b>	<b>71</b>
6.1	Milieu non linéaire en absence de dispersion	73
6.1.1	Équations du mouvement en milieu non linéaire non-dispersif	74
6.1.2	Énergie du système	77
6.1.3	Hamiltonien en absence de dispersion	78
6.2	Milieu à dispersion linéaire	79
6.2.1	Équation d'onde pour un champ au spectre fin en fréquence	80
6.2.2	Lagrangien et équation d'onde en régime dispersif	81
6.2.3	Hamiltonien linéaire dispersif	84
6.2.4	Quantification en régime de dispersion	85
6.3	Hamiltonien non linéaire et champs quantifiés	93
6.3.1	Mélange à quatre ondes dans un guide 1D isotrope	95
6.3.2	Champs signal et idler quantifiés	98
<b>7</b>	<b>État des paires et probabilité de génération</b>	<b>101</b>
7.1	Introduction du champ de pompe classique	102
7.1.1	Enveloppe du champ de pompe	102
7.1.2	Intégrations sur le temps et l'espace	104
7.2	Probabilité de génération des paires de photons	105
7.3	Amplitude et intensité spectrale jointe appliquées au cas d'une fibre uniforme	107
7.3.1	Profil de notre impulsion de pompe	108
7.3.2	Terme de profil transverse pour une fibre uniforme	109
7.3.3	Intensité spectrale jointe d'une fibre uniforme	110
7.4	Simulation de la JSI d'une fibre uniforme	111
7.4.1	Spectre attendu d'une fibre uniforme	114
7.4.2	Paramètres d'influence du spectre d'émission	118
<b>III</b>	<b>Montage expérimental et mesure du spectre d'émission</b>	<b>121</b>
<b>8</b>	<b>Expérience et réglages de détection</b>	<b>123</b>
8.1	Description détaillée du montage expérimental	123
8.2	Réglage des filtres de détection	125
<b>9</b>	<b>Mesures de corrélations en régime de faibles comptes de photons</b>	<b>129</b>
9.1	Bruits de mesure en régime de faibles comptes de photons	129
9.2	Mesures de corrélations temporelles	131
9.2.1	Histogrammes de corrélations temporelles	132
9.2.2	Coincidence-to-Accidental Ratio	134
9.2.3	Traitement des histogrammes de corrélations	135
9.2.4	Évolution du CAR vis-à-vis de la puissance dans la fibre	136
<b>10</b>	<b>Balayage du spectre d'émission de la fibre</b>	<b>139</b>
<b>IV</b>	<b>Non-uniformité du guide</b>	<b>143</b>
<b>11</b>	<b>Cas d'une fibre à non-uniformité linéaire</b>	<b>147</b>
11.1	Modèle analytique d'une fibre de profil linéaire	147

11.2	Effets de la non-uniformité des fibres . . . . .	148
11.2.1	Diminution du maximum d'émission . . . . .	148
11.2.2	Élargissement et déformation du spectre d'émission . . . . .	150
11.2.3	Non-réciprocité du spectre d'émission selon le sens de propagation . . . . .	152
<b>12</b>	<b>Intrication en polarisation des paires en présence de non uniformité</b>	<b>155</b>
12.1	Principe de l'intrication en boucle Sagnac . . . . .	155
12.2	Effet de la non-uniformité sur la visibilité des paires . . . . .	158
<b>13</b>	<b>Étude de profils transverses réalistes pour les fibres</b>	<b>163</b>
13.1	Description par morceaux d'une fibre non uniforme . . . . .	163
13.1.1	Intégration par morceaux uniformes de la fibre . . . . .	164
13.1.2	Intégration par morceaux à variation linéaire du désaccord de phase . . . . .	165
13.2	Spectres d'émission pour des profils transverses réalistes . . . . .	166
13.2.1	Modèle de distribution aléatoire du zéro de dispersion . . . . .	167
13.2.2	Variation linéaire du zéro de dispersion . . . . .	168
13.2.3	Simulations de spectres de fibres typiques . . . . .	170
13.3	Émission réciproque dans une fibre de profil transverse symétrique . . . . .	173
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>177</b>
	<b>Annexes</b>	<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Définitions et Notations</b>	<b>185</b>
A.1	Conventions d'écriture . . . . .	185
A.2	Propriété d'intégration et de dérivation des expressions tensorielles . . . . .	186
A.3	Symbole de Levi-Civita . . . . .	187
A.4	Définition de la distribution de Dirac . . . . .	188
A.5	Définitions des Transformées de Fourier . . . . .	188
A.5.1	Propriétés des Transformées de Fourier . . . . .	189
A.6	Définition de normalisation . . . . .	189
A.7	Définition du produit de convolution . . . . .	190
<b>B</b>	<b>Réponse électro-optique des matériaux</b>	<b>191</b>
B.1	Polarisation des matériaux . . . . .	191
B.2	Réponse impulsionnelle du milieu . . . . .	192
B.3	Susceptibilité électrique . . . . .	193
B.4	Permittivité diélectrique . . . . .	194
B.5	Permittivité diélectrique inverse . . . . .	195
B.6	Propriétés de symétrie des tenseurs électro-optique . . . . .	196
B.7	Approximation de la réponse instantanée . . . . .	197
B.7.1	Lien entre permittivités diélectriques dans l'approximation de la réponse instantanée . . . . .	198
<b>C</b>	<b>Propagation linéaire et non linéaire dans une fibre</b>	<b>201</b>
C.1	Énergie d'impulsion, intensité et amplitude de pompe . . . . .	201
C.1.1	Intensité de pompe . . . . .	202
C.1.2	Amplitude de notre champ de pompe . . . . .	204
C.2	Propagation et élargissement d'une impulsion par automodulation de phase . . . . .	205

<b>D</b>	<b>Processus non linéaires d'ordre 3</b>	<b>211</b>
D.1	Cas de deux champs disjoints	212
D.2	Cas de trois champs disjoints	213
D.3	Cas de quatre champs disjoints	216
<b>E</b>	<b>Descriptions en mécanique Lagrangienne, Hamiltonienne et quantification</b>	<b>219</b>
E.1	Fonctionnelles	219
E.2	Équations du mouvement en mécanique Lagrangienne	220
E.3	Description Hamiltonienne et quantification	222
<b>F</b>	<b>Rappels de mécanique quantique</b>	<b>225</b>
F.1	Définitions	225
F.1.1	Espace de Hilbert	225
F.1.2	Fonctions d'onde	225
F.1.3	Opérateurs	226
F.1.4	Observables	226
F.2	Représentations en mécanique quantique	227
F.2.1	Représentation de Schrödinger	227
F.2.2	Représentation de Heisenberg	228
F.2.3	Représentation d'interaction	229
F.3	Approche perturbative en représentation d'interaction	230
F.4	États de Fock	231
<b>G</b>	<b>Non-uniformité dans la littérature scientifique</b>	<b>233</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>237</b>

# Introduction



Depuis les débuts de l'optique guidée, le perfectionnement des méthodes de fabrication des fibres optiques ont permis d'atteindre des pertes de propagation extrêmement basses ( $<0.2$  dB/km) pour ces guides [1]. Leur usage conjoint avec des lasers a alors ouvert la voie à l'observation dans les fibres de phénomènes ayant trait à l'optique dite *non linéaire*.

En effet, lorsque la matière est soumise à d'intenses champs lumineux (tels que ceux atteignables à l'aide de lasers), ses propriétés optiques ne peuvent plus être considérées comme indépendantes de l'intensité de la lumière. De nouveaux effets optiques font alors leur apparition et permettent notamment, via l'interaction de la lumière avec la matière, de générer de nouvelles fréquences optiques. Ces phénomènes voient leur intensité croître avec la longueur d'interaction et, de manière non linéaire, avec l'intensité du champ. Les faibles pertes inhérentes à la fibre optique, sa capacité à concentrer la lumière dans des volumes de très petites dimensions et sur de longues distances en font le support idéal pour y observer des effets non linéaires.

Dans les fibres conventionnelles, la lumière est confinée par réflexion totale interne dans un cœur de matière solide (généralement de la silice), entouré d'une couche d'un matériau d'indice plus faible. Les fibres microstructurées, comme leur nom l'indique, présentent des structures transverses conçues à l'échelle micrométrique [2] et s'étendant sur toute la longueur de la fibre. On parle de fibre à cristal photonique, ou *Photonic Crystal Fiber* (PCF), lorsque cette structure suit une alternance périodique de trous et de matière, notamment au niveau de la gaine de la fibre. Le confinement peut alors s'opérer par différents mécanismes [3] : par réflexion totale interne modifiée (MTIR, pour *Modified Total Internal Reflection*) au sens où la présence de trous dans la gaine permet de moduler son indice effectif ; par inhibition du couplage (IC) entre le mode spatial guidé dans le cœur et les modes associés à la gaine [4, 5, 6] ; ou bien par la formation de bandes spectrales interdites à la propagation (PBG, pour *Photonic Band Gap*) dans la structure constituant la gaine [7, 8], les fréquences ne pouvant s'y propager se retrouvant confinées dans le défaut central de la structure, i.e. le cœur.

Divers phénomènes non linéaires ont déjà pu être observés dans les fibres à cristal photonique [9], tels que la génération de supercontinuum [10, 11], de peignes de fréquences [12] ou de solitons [13]. Par ailleurs, ce type de fibre, par l'ingénierie de leur propriétés de propagation qui sont essentiellement dictées par leur structure, présente un intérêt indéniable pour manipuler et observer les effets non linéaires, dont la réalisation est conditionnée par la dispersion du milieu.

Au sein de la zoologie des phénomènes non linéaires existants, nous nous intéresserons spécifiquement à la génération de paires de photons.

## Sources de paires de photons

Les développements récents dans le domaine de la communication et du traitement de l'information quantique ont fait naître le besoin de dispositifs optiques spécifiques [14], notamment de sources de photons uniques annoncés (*heralded*) ou de photons dans un état intriqué [15]. Or les sources de paires de photons peuvent permettre la génération de photons annoncés dans des états purs indistinguables [16, 17], ce qui demande la production de paires de photons dans un état factorisable (i.e. sans corrélations [18, 19, 20]) ; ou bien la formation de photons dans un état intriqué qui, à l'inverse, tire parti de corrélations quantiques non locales entre les deux photons de la paire [21]. Les sources de paires constituent ainsi une brique de base pour plusieurs protocoles d'information quantique, tels que la distribution de clés quantiques [22], l'usage de portes logiques quantiques [23] ou la téléportation d'états quantiques [24].

Pour la majorité des sources de paires, ces dernières sont obtenues par interactions non linéaires<sup>1</sup> [28]. Par ailleurs, l'étude et la manipulation des propriétés quantiques de ces paires supposent de les générer une par une : dans le cas d'une production simultanée de deux paires (ou plus), il serait impossible de discerner et d'associer les photons provenant d'une même paire. Dans cet ordre d'idée, l'intensité lumineuse utilisée se doit d'être modérée pour minimiser la probabilité de générer deux paires simultanément, de sorte que la génération de paires se place alors dans un régime purement spontané.

Il est possible de distinguer les deux principaux processus menant à la production de paires selon l'ordre de non-linéarité exploitée. D'une part, nous avons la conversion paramétrique spontanée, ou *Spontaneous Parametric Down Conversion* (SPDC), dépendant de la susceptibilité électrique d'ordre 2 :  $\chi^{(2)}$ . Historiquement exploitée dans les cristaux massifs [29, 30] pour la génération de paires, ce mécanisme est aussi usuel pour les guides en semi-conducteurs III-V [31, 32], mais aussi pour les matériaux structurés de type *Periodically Poled Lithium Niobate* (PPLN) [33, 34] ou PPKTP [35], aussi bien massifs qu'en guides d'ondes. D'autre part, nous trouvons le mélange à quatre ondes spontané, ou *Spontaneous Four-Wave Mixing* (SFWM), phénomène du troisième ordre (en  $\chi^{(3)}$ ), pour lequel la génération de paires a été observée par exemple dans des guides d'onde silicium [36, 37, 38, 39, 40, 41], sur puce [15], voire à partir de sources plus atypiques [42, 43].

Dans cette diversité de sources potentielles pour la génération de paires de photons, les sources fibrées présentent l'avantage majeur de pouvoir s'interfacer à faibles pertes avec les réseaux de transmission de l'information quantique, eux-même fibrés [44, 45, 46], puisque les photons sont directement émis dans le mode spatial fondamental de la fibre.

Le matériau de loin le plus utilisé pour la fabrication de fibres optiques reste la silice. Du fait de sa nature amorphe, la susceptibilité électrique  $\chi^{(2)}$  y est nulle, y empêchant la génération de paire par SPDC. Il est alors nécessaire<sup>2</sup> de se tourner vers le mélange à quatre ondes.

## Génération de paires de photons dans les fibres

La production de paires par mélange à quatre ondes consiste en l'annihilation de deux photons, dits de pompe, pour créer de manière *simultanée* deux photons à de nouvelles fréquences, usuellement nommés signal et idler. Ce mécanisme répond à la fois à la conservation de l'énergie totale du système (la somme des énergies des photons de pompe doit être égale à celle des photons émis), et à la conservation de l'impulsion, ou accord de phase. Cette dernière condition dépend en grande part des propriétés optiques du matériau où prend place le mélange à quatre ondes, et sera au cœur de toute notre étude.

Par ailleurs, nous nous intéresserons spécifiquement au cas particulier où les deux photons de pompe sont de fréquences égales ou très proches (nous parlerons alors de photons de pompe dégénérés), et où les photons de paires se montrent spectralement distants de la pompe (écart minimum d'une vingtaine de nanomètres). Toutefois, le modèle théorique que nous développerons pour décrire ce phénomène se montrera très général et applicable à tous types de non-linéarités.

Si le mélange à quatre ondes permet d'éviter la difficulté apportée par les grands écarts spectraux propres à la conversion paramétrique (un même guide doit être apte à guider toutes les fréquences en jeu, s'étalant parfois sur plus d'une octave [50]), le rapprochement des fréquences émises à celle de

---

1. Nous noterons l'existence de processus de génération plus atypiques, tels que les cascades biexciton-exciton dans les *quantum dots* permettant l'émission de photons uniques [25] ou de paires dans un état intriqué [26], ou la recombinaison radiative de paires de Cooper dans un supraconducteur [27].

2. Nous noterons que la fabrication de fibres périodiquement polarisées permet d'obtenir un  $\chi^{(2)}$  effectif non-nul [47, 48, 49], toutefois les difficultés de fabrication de telles fibres limitent leurs tailles à quelques centimètres, perdant par là même l'un des principaux intérêts d'une source fibrée (sa grande longueur d'interaction).

pompe s'accompagne dans les fibres de silice d'un fort bruit de photons aux mêmes fréquences. La source de ce bruit fut identifiée comme de la diffusion Raman spontanée [51].

Comme cela fut identifié par Margaux Barbier dans le cadre de sa thèse [52], qui précéda la présente, plusieurs méthodes furent envisagées pour réduire le bruit Raman. Entre autres, une réduction de la température de la source (l'efficacité Raman dépendant de la température) [53, 54], la génération de paires à forts décalage spectraux où le gain Raman se montre bien plus faible [1, 55], ou directement le changement du matériau par l'usage de guides d'onde cristallins [56, 37, 36, 57] dont le spectre de gain Raman, en raies fines, est moins contraignant.

Toutefois, ces différentes options ne se révélant pas satisfaisantes, du fait de contreparties trop préjudiciables à l'application visée (nous renvoyons ici le lecteur à la référence [52]), il fut opté de prendre une approche encore différente.

## Fibre à cristal photonique à cœur creux rempli de liquide

En définitive, la solution idéale consiste à changer le milieu de propagation (la silice) pour un autre présentant un spectre de gain Raman plus facilitant, *mais* de garder l'architecture fibrée. Une telle possibilité est offerte par les progrès faits durant la dernière décennie dans la fabrication des fibres à cristal photonique, permettant d'en réaliser à cœur creux (on parle alors de *Hollow Core Photonic Crystal Fiber* ou HC-PCF). Il est dès lors possible d'utiliser un fluide (liquide ou gaz) pour remplir le cœur (de même que les trous présents dans la gaine) et qui constituera alors le milieu de l'interaction non linéaire. Si la structure en raies fines des spectres de gain Raman des fluides ouvre la voie à une réduction du bruit Raman dans le cadre de la génération de paires, encore faut-il être en mesure d'ajuster les fréquences d'émissions desdites paires. C'est sur ce point que l'architecture en cristal photonique va montrer tout son intérêt.

Notre source de paires de photons se base sur une fibre de type HC-PCF, confinant la lumière par effet de bandes interdites<sup>3</sup>, et remplie d'un liquide non linéaire.

Dans ce type d'architecture, les propriétés de propagation du guide (bande de transmission, dispersion, biréfringence) peuvent être finement contrôlées lors de sa fabrication par une conception conjointe de la structure et du liquide. Les fibres à cristaux photoniques à cœur liquide prodiguent donc un grand degré de contrôle sur le processus de génération de paires de photons. Ainsi pour notre fibre, initialement développée dans le cadre de la thèse de Margaux Barbier [52], il fut possible de démontrer une réduction du bruit Raman dans l'émission de paires de photons, de trois ordres de grandeur vis-à-vis d'une fibre à cœur de silice [58].

La présente thèse se place dans la continuité de ces premiers développements, pour tendre vers une description et une étude plus approfondie des propriétés de notre source.

## Objectifs et déroulement de la thèse

Comme nous le verrons dans ce manuscrit, les objectifs des travaux de thèse présentés ici se sont adaptés au fil de son déroulement en fonction, d'une part des résultats expérimentaux, d'autre part de récents développements rapportés dans la littérature scientifique. Du fait de limitations intrinsèques à notre source (qui font justement l'objet d'une partie de cette étude), la forte coloration expérimentale initiale a ensuite laissé place à plusieurs développements théoriques autour des effets non linéaires dans les fibres.

---

3. Dans le reste de ce document nous désignerons par abus de langage, sous les termes génériques de fibres microstructurées ou fibres à cristal photonique, les fibres à confinement par bandes interdites, ou *bandgap*.



---

Notre source de paires de photons et le montage expérimental propre à son étude furent préalablement mis en place dans le cadre de [52], menant à une première mise en évidence de l'émission de paires de photons par mélange à quatre ondes dans notre fibre. La principale visée expérimentale de nos travaux consista donc en une caractérisation plus systématique de cette émission, notamment par un balayage du spectre des paires et une exploration de sa dépendance à divers paramètres tels que la température ou la configuration de polarisation des photons. L'objectif étant de tendre vers une source pouvant atteindre de forts taux d'émission de paires, à bas bruit et sur des plages spectrales restreintes. L'accent a été mis sur l'évaluation de l'influence des différents paramètres expérimentaux sur l'émission des paires, ainsi qu'à leur maîtrise, de façon à s'assurer de la fiabilité de nos résultats. Nous ne mettrons en avant dans ce manuscrit que les paramètres les plus critiques, tels que la température ou la largeur spectrale de nos filtres de détection. Le spectre d'émission de notre fibre constituera ainsi le cœur de nos résultats expérimentaux, mais aura nécessité un effort conséquent en amont afin de comprendre et parvenir à contrôler les paramètres de notre montage.

Les photons des paires sont naturellement corrélés en temps et intriqués en fréquence. Toutefois les protocoles de cryptographie quantique tirent plutôt parti de l'intrication en polarisation des paires, cette propriété s'avérant plus aisée à manipuler. Une partie du travail de cette thèse consista donc en la mise en place d'un interféromètre de Sagnac dans lequel incorporer notre fibre pour, *in fine*, intriquer en polarisation nos photons de paires. Néanmoins, ce montage expérimental n'ayant pas été exploité, nous n'exposerons dans ce manuscrit que son principe ainsi que les raisons théoriques (à propos de la faisabilité de l'intrication) qui ont mené à cette mise de côté provisoire.

Comme nous le verrons, durant le déroulement de cette thèse fut remis en cause, par la référence [59], la base théorique sur laquelle se basait le modèle pré-existant, établi en [52]. Une part importante de nos développements théoriques se sont donc concentrés sur la construction d'un nouveau modèle (sans pour autant que ce dernier soit fondamentalement différent du précédent), se basant notamment sur le champ induction électrique  $\vec{D}$  plutôt que le champ électrique  $\vec{E}$ . Nous rapporterons les motivations de ce changement, en particulier la volonté d'établir un modèle *quantitatif* du mélange à quatre ondes, ainsi que les résultats de nos développements théoriques et simulations numériques.

Enfin, d'autres développements théoriques, cette fois-ci motivés par des résultats expérimentaux que nous présenterons, se sont concentrés sur l'écart à l'uniformité des fibres et ses conséquences sur leurs spectres d'émission. Nous mettrons ainsi en évidence comment la non-uniformité du guide induit une non-réciprocité du spectre d'émission selon le sens de propagation, et donc une dégradation de l'intrication des paires dans un montage de type Sagnac.

Il est par ailleurs important de mentionner qu'une part du travail entrant dans le cadre de cette thèse s'est effectué en collaboration avec l'équipe Information Quantique & Applications du Laboratoire de Traitement et Communication de l'Information (LTCI) à Télécom ParisTech, dirigée par Isabelle Zaquine. En parallèle de cette thèse, celle de Martin Cordier s'est ainsi focalisée sur l'usage du même type d'architecture que la nôtre (HC-PCF remplie de liquide) pour la génération de paires de photons dans la bande spectrale télécom [60], ainsi que la génération de triplets de photons et l'étude de l'ingénierie des états intriqués [61].

Le reste de ce manuscrit se concentrera sur le travail développé indépendamment de cette collaboration.

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit s'organisera comme suit :

Dans une première partie (partie **I**) nous poserons le cadre général de notre étude, notamment par des rappels d'optique non linéaire dans les fibres suivis d'une description détaillée de notre source. Cette partie sera également l'occasion d'introduire la structure globale de notre expérience, ainsi que les lignes directrices de notre modèle qui se révéleront utiles pour entamer la partie suivante.

En partie **II** nous développerons la refonte de notre modèle semi-classique décrivant la génération de paires de photons par mélange à quatre ondes. Nous commencerons par expliquer en quoi le modèle déjà établi par [52] se montre quantitativement incorrect et les raisons qui nous ont poussés à repartir de bases plus fondamentales dans notre approche. Dans l'optique de définir l'Hamiltonien de notre système, nous repartirons d'une description en mécanique Lagrangienne, en passant par la quantification des champs correspondant à nos paires de photons, pour finir par déterminer leur état en sortie de fibre et la probabilité de leur génération.

Nous soulignons à nouveau que si notre modèle a pour vue de s'appliquer à notre cas spécifique, il reste très général et applicable à d'autres types d'interactions non linéaires, que celles-ci tiennent du second, troisième ordre ou supérieur.

La partie **III** sera dédiée à l'exposé détaillé de notre montage expérimental, de la nature de nos mesures et de nos méthodes de traitement des données, pour finir par présenter nos résultats expérimentaux que nous confronterons aux simulations numériques. De la forte différence observée entre ces éléments, nous motiverons un dernier développement de notre modèle.

Ainsi, en partie **IV**, nous étudierons les propriétés de non-uniformité des fibres et leurs impacts sur l'émission des paires. À partir du modèle simple d'une non-uniformité linéaire, nous montrerons, du fait d'une non-réciprocité d'émission des paires selon le sens de propagation, la dégradation de la qualité de leur intrication en polarisation dans un montage en boucle Sagnac, pour la première fois mise en évidence. Enfin, nous pousserons plus loin le modèle pour parvenir à la description de profils non uniformes réalistes de fibres, et nous proposerons un moyen de récupérer la réciprocité d'émission et ainsi limiter la dégradation de l'intrication.

Dans une dernière note, nous indiquons au lecteur la présence de six annexes à ce manuscrit qui peuvent se répartir en deux catégories :

- Les annexes servant de support direct au déroulé du corps de ce manuscrit. Il s'agit des précisions sur les définitions et notations que nous utilisons (annexe **A**), de la description de la propagation linéaire et non linéaire de la lumière sur la base du champ  $\vec{D}$  (annexe **C**), et le détail des différents processus non linéaires d'ordre 3 (annexe **D**), ici aussi exprimés selon  $\vec{D}$ .
- Les annexes d'éclaircissement, de rappel ou d'approfondissement (selon la sensibilité du lecteur) à propos de la mécanique Lagrangienne et Hamiltonienne (annexe **E**), de la mécanique quantique (annexe **F**) et de la réponse électro-optique des matériaux (annexe **B**). Nous soulignons l'importance de cette dernière, même pour le lecteur averti en terme d'optique non linéaire, du fait que nous y introduisons la permittivité diélectrique inverse afférente à notre description en  $\vec{D}$ .

Une dernière annexe (annexe **G**) constitue un supplément au manuscrit, rajouté après la soutenance de la présente thèse, pour rendre compte d'une approche théorique de la non-uniformité différente de la nôtre que l'on peut retrouver dans la littérature scientifique.



## Première partie

# Présentation du cadre général de l'étude



# Chapitre 1

## Rappels d'optique non linéaire dans les fibres

Avant de poser le cadre de notre étude, nous introduirons dans ce chapitre ses principaux acteurs, i.e. les phénomènes optiques intervenant dans notre système. La section 1.1 permettra de rappeler les principaux phénomènes non linéaires permettant la génération de paires et de présenter notamment le mélange à quatre ondes. La section 1.2 d'autre part, nous servira à introduire la diffusion Raman, origine majeure du bruit de notre source et ayant motivé le choix d'une architecture à cœur liquide.

### 1.1 Mécanismes non linéaires pour l'émission de paires

Lors de l'illumination d'un milieu diélectrique<sup>1</sup> par un champ électromagnétique, les nuages électroniques<sup>2</sup> vont se déformer par la force de Lorentz, formant ainsi des dipôles microscopiques entre les noyaux et centre de masse des nuages. Cependant, les nuages électroniques sont soumis à une force de rappel électrostatique. Si le champ incident est oscillant, les dipôles induits vont alors se comporter comme des oscillateurs harmoniques forcés, rayonnant à la fréquence incidente. Ce phénomène permet de comprendre la plupart des phénomènes ayant trait à l'optique *linéaire*. Toutefois, lorsque le champ incident devient particulièrement intense, la force de rappel n'est plus linéaire et l'oscillation des dipôles s'effectuera de manière anharmonique. Les dipôles dans la matière deviennent alors sources de nouvelles fréquences dans le champ lumineux. C'est là le domaine de l'optique dite *non linéaire*, l'amplitude des phénomènes associés évoluant selon un ordre de puissance de l'intensité lumineuse incidente supérieur à 1.

Usuellement, pour décrire ce phénomène microscopique à une échelle macroscopique, est introduit le champ de polarisation  $\vec{P}$  de la matière, correspondant à la densité de dipôles induits dans le matériau par l'onde lumineuse. La propension qu'a le milieu à se polariser sous l'effet du champ incident est appelée susceptibilité électrique, notée  $\chi$ . Nous noterons que cette approche se base sur le champ électrique  $\vec{E}$  de la lumière. Une autre vision du problème, qui sera la nôtre, se base sur le champ induction électrique  $\vec{D}$ , englobant à la fois les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$ . Plutôt que la susceptibilité électrique, ce sera alors la permittivité diélectrique inverse  $\eta$  qui traduira la réponse du milieu. Toutefois, pour ce qui est de la présentation des phénomènes non linéaires, nous continuerons d'utiliser

---

1. Un diélectrique se définit comme un milieu globalement neutre et isolant électriquement, mais permettant néanmoins l'exercice des forces électrostatiques : un champ incident induira une séparation des charges liées (typiquement les électrons et noyaux) suffisante pour former des dipôles à un niveau microscopique, mais pas de mouvement de charges à un niveau macroscopique.

2. Les noyaux atomiques, bien plus massifs et dont les charges sont écrantées par les nuages électroniques, ne bougent pratiquement pas.

la susceptibilité électrique, qui est usuelle et plus parlante. Une définition plus formelle des grandeurs électro-optiques  $\chi$  et  $\eta$  est donnée en annexe B.

Les phénomènes non linéaires se classent par ordre de non-linéarité, un ordre  $n$  correspondant à l'interaction entre  $n + 1$  ondes par l'intermédiaire du milieu. La réponse d'ordre  $n$  du milieu est entièrement décrite par le tenseur électro-optique  $\chi^{(n)}$  (ou  $\eta^{(n)}$  dans une description en  $\vec{D}$ ). La propriété tensorielle traduit la dépendance de cette réponse aux polarisations des ondes en présence par rapport aux symétries cristallines du milieu. En négligeant cette dépendance, on peut retrouver le développement usuel de la polarisation<sup>3</sup> [1, 62] :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots \right)$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide. Nous pouvons voir ici apparaître la dépendance quadratique et cubique au champ des termes non linéaires d'ordre 2 et 3, respectivement.

Par ailleurs, de manière générale les tenseurs électro-optique peuvent dépendre de l'espace et du temps. Cependant, dans la plupart des cas quelques approximations usuelles, que nous introduirons plus loin, permettent de simplifier le problème. De plus, nous ne considérerons que des phénomènes non linéaires *élastiques*, c'est-à-dire n'impliquant pas d'échange d'énergie avec le milieu. Les composantes des tenseurs électro-optique seront alors des réels et le milieu sera considéré sans pertes.

En terme d'ordre de grandeur, pour la plupart des matériaux  $\chi^{(1)}$  est proche de l'unité,  $\chi^{(2)}$  de l'ordre de  $10^{-12}$  m.V<sup>-1</sup> et  $\chi^{(3)}$  de l'ordre de  $10^{-24}$  m<sup>2</sup>.V<sup>-2</sup> [63, 62]. On comprend donc que si les phénomènes non linéaires sont en principe toujours présents, ils sont négligeables pour des champs faibles. Afin de faire ressortir ces phénomènes, il est alors judicieux de se placer en régime pulsé. En effet, les non-linéarités dépendent de l'amplitude *instantanée* du champ [62], de manière quadratique ou d'ordre supérieur. En concentrant l'énergie sur des fenêtres temporelles restreintes, nous maximisons la puissance crête de façon à exalter les processus non linéaires. À puissance moyenne équivalente, des phénomènes négligeables en régime continu deviennent observables en régime pulsé.

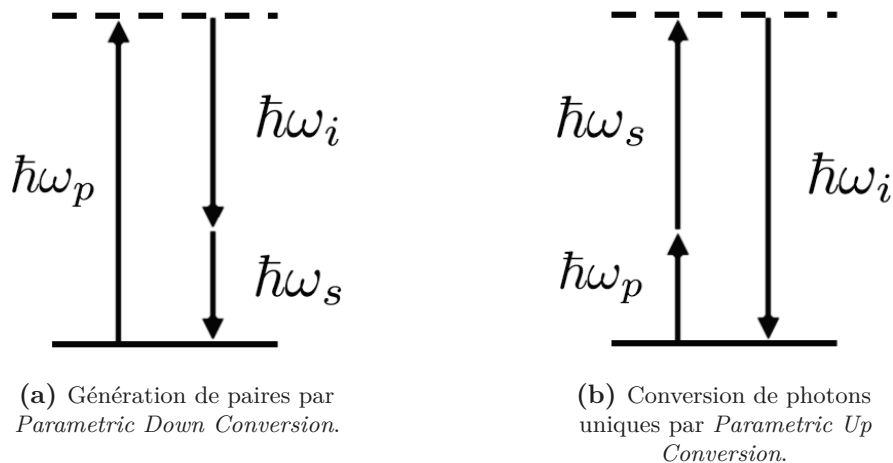
Nous présentons dans la suite les mécanismes non linéaires qui nous intéressent pour notre étude.

### 1.1.1 Conversion paramétrique

Les premiers phénomènes susceptibles d'apparaître à haute puissance sont les interactions non linéaires d'ordre 2. Régies par  $\chi^{(2)}$ , celles-ci font interagir trois ondes de manière élastique de sorte que l'énergie contenue dans le champ électromagnétique est conservée. Outre cette condition de conservation de l'énergie, ce processus doit également conserver l'impulsion<sup>4</sup> [28] (ou le vecteur d'onde, dans une approche ondulatoire). Ces interactions à trois ondes sont appelées conversion paramétrique dans le sens où elles permettent d'obtenir à partir d'un premier photon, une paire de photons de plus faibles énergies, ou bien à partir de deux photons un troisième sommant leurs énergies. Nous présentons en figure 1.1 deux cas de figure qui peuvent se présenter.

3. Nous tenons à mettre en garde le lecteur sur l'usage de cette forme, très usitée dans la littérature, qui implique de lourdes approximations (outre celle portant sur la propriété tensorielle de la susceptibilité). Ces considérations font l'objet de l'annexe B.7.

4. Cette conservation du moment, ou accord de phase, est une condition moins 'stricte' que la conservation de l'énergie dans le sens où dans certains matériaux une contribution supplémentaire doit être prise en compte. Cette dernière correspondant au vecteur d'onde d'une structure périodique appliquée sur le matériau. L'exemple typique est celui des cristaux de Niobate de Lithium Périodiquement Polarisés (PPLN).



**Figure 1.1** – Diagrammes en niveaux d'énergie de processus de conversion paramétrique.

En figure 1.1a, nous représentons le processus par lequel un photon de fréquence<sup>5</sup>  $\omega_p$  est annihilé pour former une paires de photons de plus basses énergies, de fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_i$ . On parle alors dans la littérature de *Difference Frequency Generation* (DFG) ou de *Parametric Down Conversion* (PDC). Dans le cadre de la génération de paires qui nous intéresse, les photons annihilés dans le processus sont par convention dits de pompe. Concernant la paire générée, le photon de plus faible énergie est nommé signal et son complémentaire (d'énergie plus haute) est appelé *idler*. Si seul le champ de pompe est initialement présent dans le milieu, ce phénomène est susceptible de survenir *spontanément*, on parle alors de conversion paramétrique spontanée ou *Spontaneous Parametric Down Conversion* (SPDC). Ce processus fut historiquement le premier mis en place expérimentalement pour permettre la génération de paires [64].

La figure 1.1b, à l'inverse, présente un processus où un photon  $\omega_p$  et un  $\omega_s$  s'annihilent pour générer un photon correspondant à la somme de leurs énergies. Ce phénomène est nommé *Sum Frequency Generation* (SFG) ou *Parametric Up Conversion* (PUC)<sup>6</sup>. Dans le cas de l'injection dans le milieu d'une pompe intense accompagnée d'un photon signal, ce processus de conversion paramétrique permet la conversion de ce dernier en un photon idler, qui en conserve toutes les caractéristiques (fréquence, et éventuellement polarisation, mises à part) [68].

Les processus de PDC et de PUC peuvent tous deux s'observer dans des matériaux présentant une non-linéarité d'ordre 2 [69], et nous pourrions noter que la présence de champs signal et/ou idler intenses exalte ces processus de conversion paramétrique qui se placent alors dans un régime stimulé.

Nous soulignons que dans le cas de la génération de paires par SPDC, l'écart en énergie entre le photon incident et ceux de paires est en général grand : en moyenne les photons produits sont moitié moins énergétiques. Typiquement l'émission se produit de l'ultraviolet vers le visible ou bien du visible vers l'infrarouge [62, 65]. Cette caractéristique rend difficile de trouver un matériau de bande de transmission suffisamment large pour guider toutes les fréquences en jeu. Par ailleurs, le large écart en fréquence entre la pompe et la paire rend l'accord de phase difficile et demande souvent d'exploiter la différence de courbes d'indice entre les axes neutres du guide. L'état de polarisation des photons de paire est alors fixé par celui de la pompe et l'accord de phase. Malgré ces inconvénients, nous pouvons noter que le grand écart spectral entre la pompe et les photons émis permet de les séparer plus aisément.

5. Dans tout ce document, nous ne manipulerons que des pulsations, notées  $\omega$  ( $\omega = 2\pi f$  avec  $f$  la fréquence), que nous désignerons par abus de langage sous le terme de fréquence.

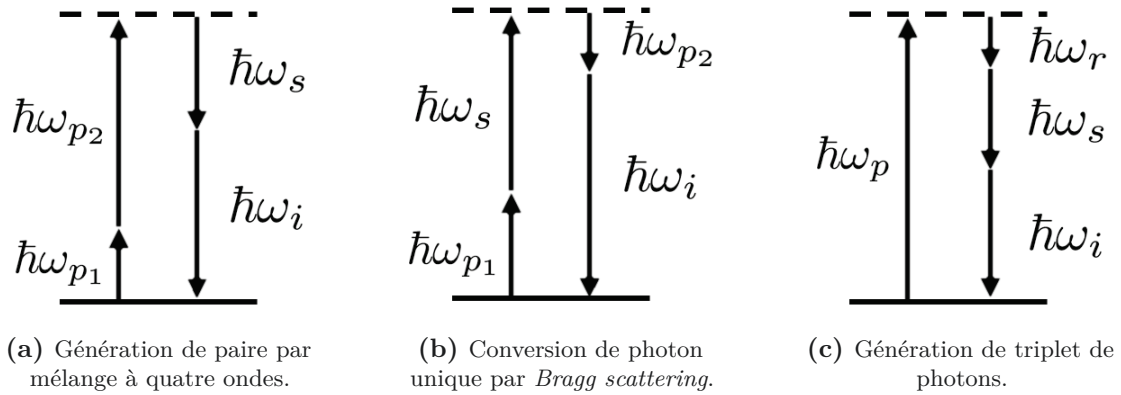
6. Ce processus n'a jusqu'à présent pas été observé en régime purement spontané [65, 66], au sens où les fluctuations du vide quantique en seraient source [67].



Enfin, nous relèverons que les composantes de la susceptibilité non linéaire d'ordre 2 ( $\chi^{(2)}$ ) sont nulles dans un matériau centrosymétrique [62]. Cet attribut se retrouve notamment dans tous les matériaux amorphes, tels la silice ou les fluides. Dans le cas de notre fibre (comme pour les fibres à cœur de silice), la génération de paires ne peut donc pas être obtenue par un phénomène non linéaire du second ordre. Aussi exploiterons-nous un phénomène d'ordre supérieur : le mélange à quatre ondes.

### 1.1.2 Mélange à quatre ondes

À l'image de la conversion paramétrique, le mélange à quatre ondes ou *Four-Wave Mixing* (FWM) désigne les processus non linéaires d'ordre 3, gouvernés par  $\chi^{(3)}$ . Comme son nom l'indique, ce processus met en jeu un échange d'énergie entre quatre ondes. Certaines des configurations possibles, plus diverses que pour le second ordre, sont illustrées en figure 1.2.



**Figure 1.2** – Diagrammes en niveaux d'énergie de processus de mélange à quatre ondes.

De même que les processus d'ordre 2, le mélange à quatre ondes respecte la conservation d'énergie et d'impulsion. Par conséquent, selon la ou les ondes se propageant dans le milieu non linéaire, et selon le milieu lui-même, seuls certains mélanges seront susceptibles d'avoir lieu, et ce pour des bandes fréquentielles déterminées. Le bestiaire de processus se dérivant du mélange à quatre ondes, selon le nombre de champs différents en présence, est approfondi en annexe D. Nous relèverons juste ici que le mélange à quatre ondes comprend, entre autres, la génération de paires (figure 1.2a), de triplets de photons (figure 1.2c) ou la conversion de photon unique par *Bragg scattering* [70].

Ce dernier cas, nécessitant deux pompes de fréquences différentes, consiste en l'annihilation d'un photon de l'une d'elles avec un photon signal présent dans le milieu (le champ signal peut ne contenir qu'un photon), pour générer un photon de la seconde pompe et le complémentaire idler. On retrouve ici l'équivalent de la conversion de photon unique par SPDC, pour une non-linéarité d'ordre 3. À tout point de vue, idler est l'équivalent de signal, converti à une autre longueur d'onde, et il conserve toutes ses caractéristiques quantiques [71, 72]. Cet aspect rend le *Bragg scattering* particulièrement intéressant pour interfacer des dispositifs d'information quantique (mémoires [73], processeurs) fonctionnant à des longueurs d'onde différentes [74, 75, 76] ou combiner plusieurs sources de photons uniques émettant sur de larges bandes fréquentielles [77]. D'autant plus que la conversion de photon unique par *Bragg scattering* est théoriquement exempte de bruit puisqu'elle n'implique aucune amplification du signal [78, 79, 72]. Ce genre de conversion a déjà été démontré dans des guides d'onde silicium [80, 81, 82] ou des fibres à cristal photonique [74], similaires à la nôtre.

La conversion de photons uniques constitue donc une perspective d'application prometteuse pour notre source. Toutefois, le travail de thèse présenté dans ce document s'est focalisé sur l'étude de la génération de paires basée sur la non-linéarité d'ordre 3 de notre fibre, et illustrée en figure 1.2a. Nous relevons que, comparativement à la génération de paires d'ordre 2, ici les photons signal ou idler peuvent être arbitrairement proches en énergie des photons de pompe (tout en respectant la conservation de l'énergie). Les valeurs des indices de réfraction respectifs sont, de même, susceptibles d'être proches, facilitant ainsi l'accord de phase.

Dans une telle génération, l'état de polarisation des photons de paires peut être le même que celui des photons de pompe, ou adopter une configuration perpendiculaire (en considérant des polarisations linéaires). D'autre part, en usant de deux pompes de polarisations différentes, les deux photons d'une même paire seront aussi de polarisations différentes (en milieu isotrope) et présenteront un état directement intriqué en polarisation [83]. L'intrication des paires peut aussi être obtenue, dans le cas de deux photons de pompe de même polarisation, en usant d'architecture de type Sagnac comme nous le montrerons plus loin.

Ainsi la génération de paires se montre plus flexible en mélange à quatre ondes que par conversion paramétrique. Le processus de génération de paires qui nous intéressera dans notre étude se base justement sur ce type de mélange.

### 1.1.3 Génération de paires par mélange à quatre ondes spontané

Dans le cas de notre fibre, la microstructure de gaine permet de confiner et de guider la lumière, de sorte que, dans le mode spatial fondamental de la fibre, l'essentiel du champ se concentre dans le cœur liquide<sup>7</sup>. Ainsi le liquide constitue le milieu non linéaire effectif avec lequel le champ de pompe interagira pour produire nos paires de photons. Nous pourrions donc considérer pour notre fibre les susceptibilités non linéaires effectives :  $\chi_{eff}^{(2)} = 0$  et  $\chi_{eff}^{(3)}$  égale à celle du liquide.

Nous pouvons en déduire directement que la génération de paires par conversion paramétrique dans une telle fibre est impraticable, d'où l'intérêt du mélange à quatre ondes. Néanmoins, le modèle théorique que nous développerons dans la partie II aura vocation à rester très général et applicable à n'importe quel ordre de non-linéarité.

Par souci pratique et à des fins de simplicité, le mélange à quatre ondes que nous étudierons concernera l'annihilation de deux photons d'un même champ de pompe<sup>8</sup> pour générer une paire de photons dans des champs distincts, signal et idler. Nous parlerons de mélange à quatre ondes à partir de photons de pompe dégénéré en fréquence, même si en pratique ceux-ci peuvent être de fréquence légèrement différentes<sup>9</sup>. Toutefois, nous soulignons que notre modèle théorique reste applicable au cas de deux pompes distinctes.

D'autre part, seul le champ de pompe est injecté dans notre fibre d'étude. Le processus de mélange à quatre ondes s'effectue donc exclusivement dans un régime spontané, mentionné dans la littérature sous le terme de *Spontaneous Four-Wave Mixing* (SFWM) [28], et notamment déjà observé dans les fibres [55, 84, 51]. Nous soulignons le caractère *simultané* de l'émission des photons signal et idler, les photons de paires étant donc corrélés en temps [85].

7. Nous considérerons que tous nos champs se trouvent dans le même mode spatial. Par ailleurs, nos fréquences de travail seront suffisamment proches pour considérer que la taille de ce mode ne varie pas entre les différents champs.

8. Ne disposant en pratique que d'une seule source laser impulsionnelle, l'étude du cas à deux pompes différentes nécessiterait l'usage d'oscillateurs paramétriques optiques (OPO). Ce point était une évolution du montage initialement prévue mais fut finalement repoussée du fait de l'apparition de la problématique de l'uniformité, qui occupe une large part de ce travail de thèse.

9. L'émission de notre pompe présente une largeur spectrale non nulle. Les deux photons peuvent donc provenir de composantes fréquentielles distinctes, qui restent néanmoins proches du fait de la finesse du spectre.

Les conditions de conservation d'énergie et d'impulsion typiques pour un tel mélange à quatre ondes sont :

$$\begin{aligned} 2\omega_p - \omega_s - \omega_i &= 0 \\ \Delta k_{brut} = 2\beta(\omega_p) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i) &= 0 \end{aligned}$$

en notant  $\omega_p$ ,  $\omega_s$  et  $\omega_i$  les fréquences respectives des photons de pompe, signal et idler.

Nous avons introduit ici  $\Delta k_{brut}$  le désaccord de phase *brut*<sup>10</sup>, fonction de la constante de propagation  $\beta$  du mode guidé qui est équivalente au nombre d'onde :

$$\beta(\omega) \equiv k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c} \quad (1.1)$$

avec  $n$  l'indice de réfraction du guide et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

Enfin nous notons que la fibre étant à maintien de polarisation, la polarisation linéaire de la pompe, injectée sur un de ses axes neutres, ne change pas au cours de sa propagation<sup>11</sup>. Toutefois, par isotropie de notre milieu liquide les paires émises peuvent l'être sur le même axe neutre que la pompe, ou sur l'axe perpendiculaire<sup>12</sup>. Nous parlerons alors de génération en configuration parallèle ou croisée, respectivement. L'usage d'une pompe unique ne permet pas d'obtenir directement l'intrication en polarisation des paires qui, comme mentionné plus haut, sera obtenue par l'intégration de la fibre dans une architecture de type boucle Sagnac, présentée au chapitre 12.

Les conditions de conservation de l'énergie et d'accord de phase, associées aux propriétés de propagation spécifiques de la fibre ( $\beta$ ) ne permettent, à longueur d'onde de pompe donnée, de ne générer des paires que sur des bandes spectrales signal et idler déterminées. Toutefois, un autre phénomène ayant lieu dans notre fibre est susceptible d'émettre des photons aux mêmes longueurs d'onde. Il s'agit de la diffusion Raman spontanée, source majeure de bruit dans notre expérience, que nous présentons dans la section suivante.

## 1.2 Diffusion Raman spontanée

La diffusion Raman est un processus inélastique isotrope [1] par lequel les ondes lumineuses échangent de l'énergie avec les phonons du matériau, c'est-à-dire les modes de vibration de ses liaisons moléculaires.

Une onde électromagnétique se propageant dans le milieu est susceptible de concéder une partie de son énergie au profit de l'excitation d'un de ces modes vibratoires : un photon de l'onde est annihilé pour en générer un autre de fréquence moindre. On parle de diffusion d'ordre Stokes. À l'inverse, les vibrations de la matière peuvent se désexciter au profit de la lumière, produisant ainsi des fréquences optiques plus grandes, on parle d'ordre anti-Stokes. Ces deux processus sont schématisés dans la figure 1.3.

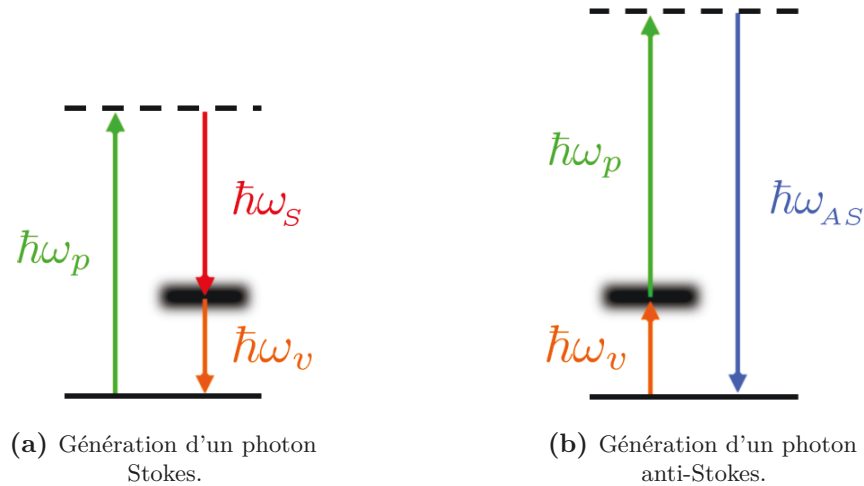
De manière similaire aux processus non linéaires décrit en section 1.1, la diffusion Raman peut s'opérer en régime spontané ou stimulé. Dans notre cas d'étude, le bruit Raman généré dans notre fibre résultera uniquement d'un processus purement spontané<sup>13</sup> et *linéaire* avec l'intensité de pompe.

10. À forte intensité de la pompe (ce qui ne sera pas le cas dans notre étude), s'ajoute un terme  $-2\gamma P$  [1] traduisant la modulation de phase croisée entre les champs (XPM, pour *cross-Phase Modulation*) ou interne à la pompe (SPM, pour *Self-Phase Modulation*). Par ailleurs, le désaccord de phase dans notre étude se verra complété d'un terme issu du fait que l'on considère la propagation d'une impulsion dans le guide, nous parlerons de désaccord de phase *généralisé*.

11. Nous verrons plus loin que le remplissage de la fibre affaiblit ce maintien de la polarisation, de sorte que notre pompe présente une polarisation légèrement elliptique en sortie de fibre.

12. L'annexe B.7.1 rappelle quelles composantes des tenseurs électro-optiques sont non-nulles dans un milieu isotrope, conduisant à cette sélection des polarisations possibles pour les photons de paires.

13. Aucune onde Stokes ou anti-Stokes n'est préalablement injectée dans la fibre, tandis que l'intensité de pompe se trouve sous le seuil du régime spontané amplifié, ce qui exclut tout régime stimulé.



**Figure 1.3** – Diagrammes en niveaux d'énergie des deux sens de diffusion Raman d'un photon de pompe de fréquence  $\omega_p$  avec un mode vibrationnel d'énergie  $\hbar\omega_v$ . La représentation diffuse du niveau de vibration marque la multiplicité des modes de vibration  $\omega_v$  selon les liaisons covalentes existantes dans le matériau.

Nous noterons que cette émission Raman, d'efficacité très faible [62], s'effectue dans toutes les directions de l'espace de manière incohérente. Le reliquat de bruit Raman venant à être guidé par la fibre (émis dans l'ouverture numérique du mode spatial) constitue néanmoins la source de bruit principale de notre système, évoluant linéairement avec l'intensité de pompe.

On différencie la diffusion Raman de la diffusion Brillouin au niveau de l'ordre de grandeur des vibrations de la matière : la diffusion Brillouin concerne les phonons acoustiques, soit les ondes sonores dont les longueurs d'onde sont grandes devant les échelles moléculaires ; tandis que la diffusion Raman concerne les phonons dits optiques, qui correspondent à des vibrations aux échelles inter-atomique et moléculaire<sup>14</sup>. Par conséquent, les énergies vibrationnelles impliquées dans la diffusion Brillouin sont bien plus faibles que celles de la diffusion Raman. De même pour les écarts spectraux, de l'ordre de dizaines de GHz en Brillouin, contre quelques dizaines de THz en Raman [86, 1, 62]. Au vu des écarts spectraux typiques entre photons de pompe et de paires dans notre expérience (de l'ordre de la vingtaine de THz), seule la diffusion Raman constituera une source de bruit gênante. En effet, la diffusion Raman de la pompe va générer des photons aux longueurs d'onde signal (par processus Stokes) ou idler (anti-Stokes), de manière décorrélée. Ces photons constitueront la plus grande source de bruit de notre expérience et leur existence même a motivé le développement de l'architecture que nous utilisons, dont l'intérêt sera mis en lumière plus loin.

Par agitation thermique, les vibrations des liaisons moléculaires sont naturellement excitées. Chaque liaison covalente peut être vue comme un dipôle oscillant au repos à une fréquence propre  $\omega_v$ , définie par le type de liaison<sup>15</sup> et son environnement électronique. Lors de l'illumination par une onde de pompe, ces dipôles se mettent à osciller et émettre de la lumière aux fréquences de pompe<sup>16</sup> ( $\omega_p$ ), Stokes ( $\omega_p - \omega_v$ ) et anti-Stokes ( $\omega_p + \omega_v$ ). L'émission de ces oscillateurs suit une loi lorentzienne, centrée sur la fréquence  $\omega_p - \omega_v$  ou  $\omega_p + \omega_v$  selon que l'on parle d'ordre Stokes ou anti-Stokes.

14. On parle aussi de fluctuation de la polarisabilité des molécules.

15. Selon la nature chimique des atomes liés (et donc la structure de leurs nuages électroniques) et selon que la liaison soit simple, double ou triple.

16. Cette émission correspond à la diffusion élastique Rayleigh, spectralement localisée aux abords de la fréquence de pompe et qui ne nous intéressera pas ici.

Le spectre de gain Raman global, exprimé en décalage spectral ( $\text{cm}^{-1}$ ) d'un milieu est alors la somme de ces raies lorentziennes<sup>17</sup>.

Dans un solide amorphe, tel que la silice, de par son désordre intrinsèque le matériau présente une grande diversité de liaisons légèrement différentes. L'accumulation des raies associées, proches en fréquence, forme alors un spectre de quasi-continuum pouvant s'étendre sur une large étendue du spectre optique. Nous présentons en exemple en figure 1.4 le spectre de gain Raman de la silice.

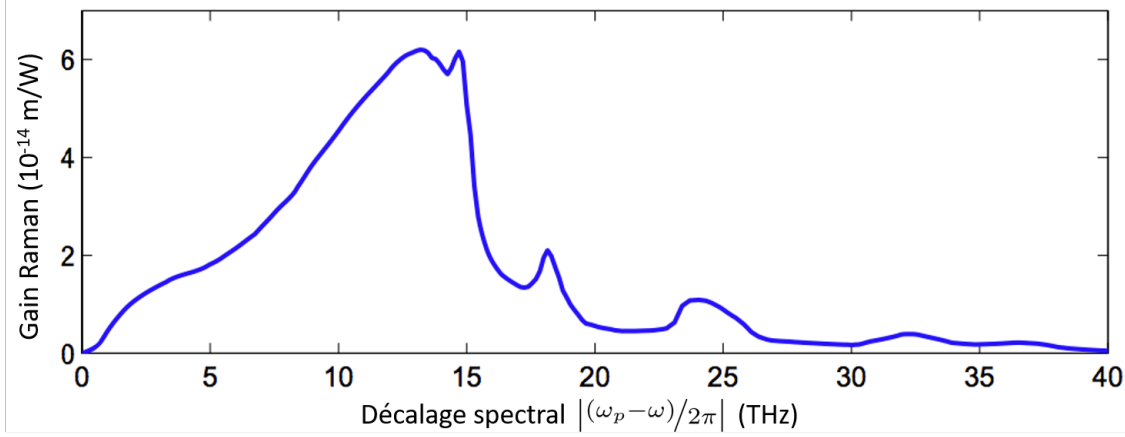


Figure 1.4 – Spectre de gain Raman de la silice, tiré de [1].

Les seules fréquences d'émissions de paires pour lesquelles le bruit Raman reste modéré se trouvent alors à fort décalage spectral vis-à-vis de la pompe, atteignable par SPDC mais impliquant aussi des contraintes pratiques dont nous avons discuté en sous-section 1.1.1.

Une autre solution pour réduire le bruit Raman consiste à abaisser la température de la source [53, 54]. En effet, les phonons étant des bosons, leur distribution en fonction de la température répond à la statistique de Bose-Einstein. À une température  $T$ , le nombre de phonons présents associés à la fréquence  $\omega_v$ , qu'ils soient dans l'état fondamental ou excité, est donné par [83] :

$$N_{\text{phonons}}(\omega_v, T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_v}{k_B T}} - 1} \quad (1.2)$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $\hbar$  la constante de Planck. Selon cette distribution, une température plus basse implique une quantité moindre de phonons et donc une diffusion Raman réduite. Par ailleurs, les phonons se répartissent de sorte que le niveau excité (cf. figure 1.3) soit moins peuplé que le niveau fondamental, le ratio de leur population suivant le facteur de Boltzmann  $e^{-\frac{\hbar\omega_v}{k_B T}}$ . On comprend donc que la diffusion Raman d'ordre anti-Stokes, se basant sur la population du niveau excité, sera d'amplitude plus faible que la diffusion Stokes. Et ce, d'autant plus que l'écart en fréquence  $\omega_v$  est grand (cf. équation (1.2)). En pratique nous mesurerons donc un bruit plus fort côté signal que de côté idler.

Si l'abaissement de la température permet une réduction effective du bruit Raman, ce dernier reste prégnant dans les mesures [83]. Par ailleurs, les températures cryogéniques à atteindre pour observer une réduction efficace du bruit Raman nécessitent un appareillage complexe réduisant de fait l'intérêt pratique de la source<sup>18</sup> [58].

17. Les liaisons se comportent comme des oscillateurs harmoniques forcés amortis. L'onde de pompe force leur oscillation, tandis que la dissipation de l'énergie (principalement sous forme thermique) les amortit. C'est du fait de l'amortissement que les lorentziennes d'émission ne sont pas infiniment fines.

18. L'approche d'un guide fibré à cœur liquide, *intrinsèquement* moins bruyé, nous permet justement de travailler à température ambiante avec un niveau de bruit raisonnable.

Un autre moyen de réduire le bruit de photon induit par la diffusion Raman exploite la biréfringence de la source : par jeu de polariseurs nous pouvons faire en sorte de ne détecter que les paires de photons émises avec une configuration croisée avec la pompe [87]. Toutefois, d'une part l'émission des paires en croisé est trois fois moindre qu'en configuration parallèle avec la pompe, comme nous le verrons plus loin. D'autre part le bruit Raman émis sur l'axe de polarisation perpendiculaire à cette dernière reste un problème [83].

Ainsi, une solution plus radicale pour limiter le bruit Raman dans la détection de paires de photons consiste à changer directement de matériau et donc de spectre de gain Raman. À l'inverse des solides amorphes, présentant de multiples liaisons covalentes différentes, les cristaux ou les fluides n'en portent qu'un nombre limité. Les spectres associés se constituent alors de raies fines, usuellement de décalage spectraux plus forts dans les fluides que dans les solides. La structure en bandes fines nous permet de chercher un point de fonctionnement pour lequel nos fréquences d'émission se trouvent *entre* deux raies Raman secondaires. Nous minimisons ainsi le bruit Raman émis à nos fréquences d'intérêt, comme cela fut démontré par [52].

Notre architecture se base ainsi sur un milieu non linéaire *liquide*, contenu dans un guide fibré dont le guidage est assuré par une structure à cristal photonique. Dans le chapitre qui suit, nous exposerons les spécificités de notre source.



## Chapitre 2

# Fibre à cristal photonique et de cœur liquide

Contrairement aux fibres conventionnelles, où le guidage se base sur un saut d'indice entre le cœur et la gaine permettant la réflexion totale interne de la lumière, le confinement de la lumière dans notre fibre repose sur le cristal photonique que constitue la gaine [2, 3]. En effet, cette dernière se présente comme une structure diélectrique, périodique à l'échelle de la longueur d'onde, venant modifier la propagation de la lumière de manière analogue au potentiel périodique d'un cristal pour des électrons. En résulte la formation de bandes interdites à la propagation dans la gaine [88, 89], pour nos fréquences d'intérêt.

Dès lors que la lumière ne peut se propager dans la gaine, elle se retrouve effectivement confinée dans le cœur, qui peut atteindre des dimensions nanométriques [3]. Cette concentration de la lumière dans un petit volume est particulièrement favorable aux effets non linéaires et améliore la brillance de la source. De plus, l'architecture fibrée permet de faibles pertes de propagation, pouvant être inférieures au dB/km [2]. En outre, le positionnement des bandes interdites dans la gaine définit les bords de la bande de transmission de la fibre, qui peut s'étendre sur de grandes plages spectrales, pouvant même recouvrir plusieurs octaves [3, 89].

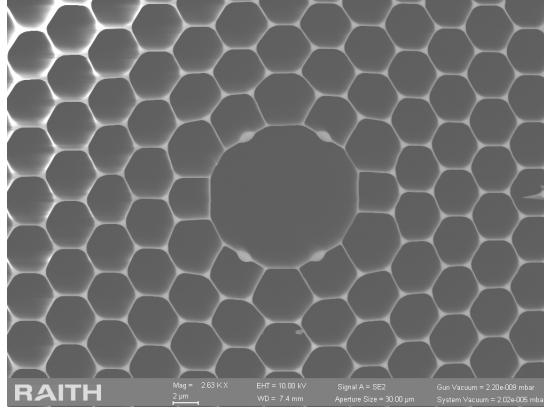
Par ailleurs, l'utilisation d'un cristal photonique présente un autre avantage particulièrement intéressant du fait que l'ingénierie de sa structure permet une maîtrise fine des propriétés de propagation de la lumière dans la fibre [19]. En effet de nombreux paramètres sont ajustables lors de la fabrication de la fibre, tels que la taille du cœur, des trous de la structure, sa période, les proportions relatives entre la silice et le fluide emplissant la fibre ou encore leur contraste d'indice [2]. La combinaison de ce jeu de paramètres permet de changer notamment la taille et la position de la bande de transmission, de la longueur d'onde de dispersion nulle, voire ajuster la biréfringence ou la taille des modes spatiaux de la fibre.

Enfin, la structure de notre fibre comprend la particularité de posséder un cœur creux, pouvant être ainsi rempli d'un fluide qui constituera le milieu de propagation. Comme nous le verrons plus loin, le choix du fluide emplissant la fibre est un levier supplémentaire pour ajuster les propriétés de propagation de cette dernière. Ainsi les fibres microstructurées à cœur liquide (ou gazeux [3, 89]) constituent une plate-forme polyvalente et prometteuse pour les applications d'optique non linéaire [9, 90, 91]. Dans notre cas, cette architecture de source permet notamment de grandes possibilités de longueurs d'onde d'émission des photons de paires selon le choix de structure et de liquide.

Nous utilisons dans toutes nos expériences une fibre initialement développée dans le cadre de [52]. Celle-ci, de type HC-1550-PM-01 de *NKT Photonics*, est constituée d'un cœur creux, d'un diamètre de 12  $\mu\text{m}$ , entouré d'une structure en nids d'abeilles dont le pas est de 4  $\mu\text{m}$ . Nous présentons en figure 2.1 une image d'une coupe de la fibre. On peut relever la présence de quatre plots de silice au



niveau de la bordure du cœur, permettant de briser la symétrie de rotation d'ordre 6 de la structure et d'induire une forte biréfringence<sup>1</sup>. La fibre dispose ainsi de deux axes neutres selon lesquels la polarisation de la lumière entrante est maintenue. Enfin, l'aire effective du mode fondamental de la fibre, dans lequel se trouveront toutes les ondes de notre problème, est de  $A_{eff} \sim 30 \mu\text{m}^2$  pour la fibre remplie [52].



**Figure 2.1** – Photo par microscopie électronique à balayage (MEB) d’une coupe transverse de notre fibre d’étude. Réalisée par Stephan Suffit au Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques (MPQ, CNRS, Université Paris 7).

Le liquide utilisé pour remplir<sup>2</sup> notre fibre est de l’acétone deutérée<sup>3</sup>, historiquement choisi pour faire correspondre la bande de transmission de la fibre au spectre d’émission de notre laser de pompe<sup>4</sup>. Le remplacement d’atomes d’hydrogène par l’isotope deutérium dans la molécule a pour but de s’affranchir des raies d’absorption des liaisons C-H. Si l’indice de réfraction linéaire de notre liquide est indiqué par son fournisseur ( $n_{Ad6} = 1.355$ ), ce n’est pas le cas de son indice non linéaire  $n_2$  qui est un paramètre important dans notre modèle. De manière générale, les propriétés non linéaires de notre fibre, tout comme certaines informations essentielles sur ses propriétés de propagation, ne sont pas connues *a priori*. Avant toute chose, des mesures préliminaires furent donc nécessaires.

## 2.1 Propriétés de propagation de la fibre

### 2.1.1 Mesures préliminaires

La référence [52] rapporte l’essentiel des travaux sur notre source ayant précédé la présente thèse. Ceux-ci incluent notamment des mesures sur la fibre une fois remplie dont les résultats sont nécessaires à notre modèle : d’une part le coefficient non linéaire  $\gamma_p$  de notre fibre, intervenant dans l’efficacité du processus de génération de paires de photons ; d’autre part la constante de propagation  $\beta(\omega)$ , permettant de déterminer la longueur d’onde du zéro de dispersion de notre fibre mais aussi l’accord de phase.

Avant de considérer ces deux paramètres, nous nous pencherons sur l’indice de réfraction de notre liquide, intervenant également dans l’efficacité du processus non linéaire.

- 
1. D’après la documentation de la fibre nous avons  $\Delta n > 2 \cdot 10^{-4}$ , pour une fibre vide.
  2. La méthode de remplissage de la fibre ne sera pas détaillée ici mais peut être retrouvée en annexes de [52].
  3. De formule chimique  $\text{C}_3\text{D}_6\text{O}$ .
  4. La manière dont le remplissage de la fibre décale sa bande de transmission sera expliquée en sous-section 2.3.3.
-

### Indice de réfraction de l'acétone deutérée

Pour déterminer l'indice de réfraction du liquide emplissant notre fibre (l'acétone deutérée), nous nous basons d'une part sur la référence [92] rapportant l'évolution de l'indice de l'acétone  $n_A(\lambda)$  en fonction de la longueur d'onde selon l'équation de Cauchy :

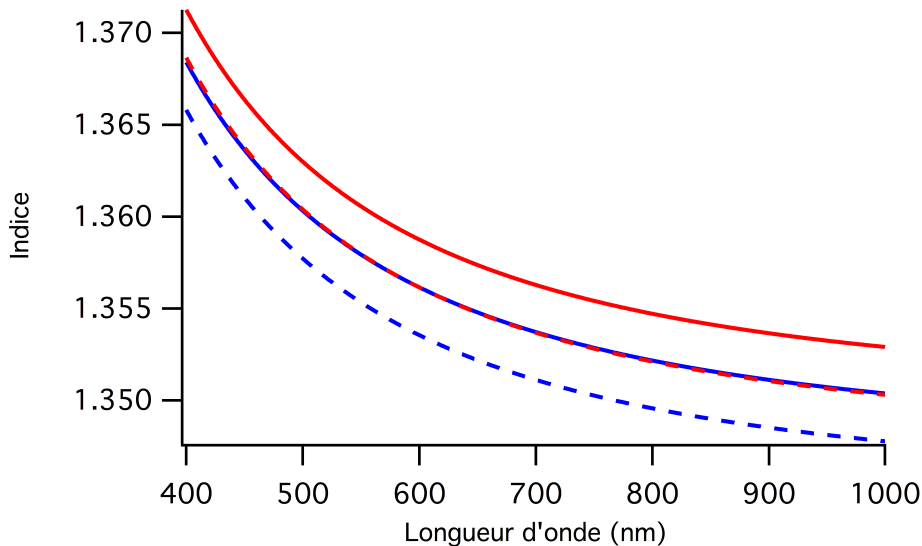
$$n_A(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \quad (2.1)$$

Les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont donnés par [92] pour des températures de 20 et 25°C.

D'autre part, la référence [93] nous donne la différence d'indice entre l'acétone et l'acétone deutérée pour quatre longueurs d'onde dans le visible (qui est de l'ordre de  $2.5 \sim 2.7 \cdot 10^{-3}$ ).

À partir de celles-ci et des valeurs de  $n_A$  aux longueurs d'onde correspondantes, nous disposons donc de quatre points correspondant à l'indice de l'acétone deutérée  $n_{Ad6}(\lambda)$ , sur lesquels nous pouvons ajuster la même loi que (2.1).

Nous traçons les courbes d'indice de l'acétone et de l'acétone deutérée ainsi obtenue en figure 2.2, où on peut observer que l'indice de l'acétone deutérée à 20°C se confond avec celui de l'acétone à 25°C.



**Figure 2.2** – Courbes d'indice de l'acétone (rouge) et de l'acétone deutérée (bleu) à 20°C (traits pleins) et 25°C (pointillés).

Nous noterons que pour nos longueurs d'onde de travail (s'étendant sur la plage 850 ~ 920 nm) l'indice de notre liquide varie très peu. Dans une première approximation, il serait possible d'utiliser un même indice  $n_{Ad6} \approx 1.35$  pour toutes les fréquences que nous utilisons sans changer notablement nos résultats, toutefois nos simulations prendront en compte la dépendance de l'indice à la fréquence.

### Coefficient et indice non linéaires

Il est possible de déterminer l'indice et le coefficient non linéaires  $n_2$  et  $\gamma_p$  de la fibre, à la fréquence centrale de pompe  $\omega_{p_0}$ , en exploitant le phénomène d'automodulation de phase de la pompe [1, 94], décrit formellement dans l'annexe C.2. Pour un champ lumineux suffisamment intense, l'indice du matériau ne peut plus être considéré comme indépendant de l'intensité. L'onde incidente subit un déphasage non linéaire dépendant de la variation temporelle de la puissance instantanée, induisant

ainsi la génération de nouvelles fréquences<sup>5</sup> suivant (C.12). On comprend donc que pour une pompe impulsionnelle ce déphasage non linéaire, accumulé au fil de la propagation, modifie la composition spectrale de l'impulsion tout en laissant son profil temporel inchangé.

Comme indiqué dans l'annexe C.2, la mesure de l'élargissement spectral d'impulsions se propageant dans un matériau permet d'en déduire son  $\gamma_p$  :

$$\gamma_p = \frac{n_2 \omega_{p0}}{c A_{eff}}$$

avec l'indice non linéaire :

$$n_2 = -\frac{3}{4} \eta^{(3)} \frac{(\epsilon_0 n^3(\omega_{p0}))^2}{c} = \frac{3}{4} \frac{\chi^{(3)}}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p0}) c}$$

avec  $\eta^{(3)}$  et  $\chi^{(3)}$  la perméabilité diélectrique inverse et la susceptibilité électrique d'ordre 3, respectivement. L'origine des définitions de  $\gamma_p$  et  $n_2$  peut être retrouvée dans l'annexe C.2.

La valeur de l'indice non linéaire de l'acétone deutérée<sup>6</sup> est fournie par [95]<sup>7</sup> :

$$n_2 = (5.2 \pm 0.8) \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$$

Par ailleurs, la mesure du coefficient non linéaire pour notre source fut également obtenue par automodulation de phase [52]<sup>7</sup> :

$$\gamma_p = (0.012 \pm 0.002) \text{ m}^{-1} \cdot \text{W}^{-1}$$

## Mesures de dispersion

Un autre paramètre essentiel dans notre modèle constitue la constante de propagation, correspondant au nombre d'onde :

$$\beta(\omega) \equiv k(\omega) = \frac{n(\omega) \omega}{c}$$

La mesure de la courbe de la constante de propagation en fonction de la fréquence dans notre milieu fut plus indirecte et passa par une technique d'interférométrie de temps de vol, qui consiste à faire interférer entre eux deux faisceaux issus d'une même source, l'un se propageant dans le milieu mesuré, l'autre sur une voie de référence. Une impulsion de pompe, fine et accordable en fréquence, est séparée en deux, une part se propageant dans la fibre, une autre dans l'espace libre avec une ligne à retard ajustable. Les deux faisceaux sont ensuite recombinaés sur une caméra permettant de mesurer le contraste des interférences entre les deux impulsions, celui-ci étant maximum lorsqu'elles se recouvrent parfaitement. En relevant pour chaque fréquence la longueur relative de la ligne à

5. Si cette description suit l'approche classique du phénomène d'automodulation de phase tel qu'il est décrit dans l'annexe C.2, il est aussi possible de le voir comme un mélange à quatre ondes interne à la bande de fréquence de la pompe. Les termes associés sont spontanément apparus dans notre modèle de la non-linéarité d'ordre 3 (cf. annexe D).

6. On peut noter que celui-ci est plus légèrement plus fort que pour la silice ( $2.7 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ ) mais plus faible que pour des matériaux usuellement utilisés en optique non linéaire, tant solides (par exemple le silicium avec  $n_2 = 3 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ ) que liquides (pour le  $\text{CS}_2$  :  $n_2 \sim 10^{-18} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ ). Cependant, puisque nous cherchons à travailler à faible efficacité non linéaire, ce choix de liquide n'est pas préjudiciable.

7. Nous pouvons noter que la mesure du  $n_2$  fut faite sur la plage spectrale  $920 \sim 960 \text{ nm}$ , et celle de  $\gamma_p$  à  $882 \text{ nm}$ , alors que notre longueur d'onde de pompe typique est de  $885.55 \text{ nm}$ . Cependant les variations de l'indice et du coefficient avec la longueur d'onde sont très faibles, même sur  $100 \text{ nm}$  de décalage. L'écart rentre dans les incertitudes de mesure, de sorte que nous pouvons considérer  $n_2$  et  $\gamma_p$  comme constants dans toute la suite.

retard  $C(\omega)$  satisfaisant cette condition, on peut déduire les expressions de  $\beta(\omega)$  et ses deux premières dérivées [52] :

$$\begin{aligned}\beta(\omega) &= cst_1 + cst_2 \omega + \frac{2}{cL} D(\omega) \\ \beta^{(1)}(\omega) &= cst_2 + \frac{2}{cL} C(\omega) \\ \beta^{(2)}(\omega) &= \frac{2}{cL} \frac{dC(\omega)}{d\omega}\end{aligned}\tag{2.2}$$

avec  $L$  la longueur de notre fibre, la fonction  $D(\omega) = \int C(\omega) d\omega$ , et la notation compacte  $\beta^{(k)} = \frac{\partial^k \beta}{\partial \omega^k}(\omega)$ . On peut immédiatement constater que de telles mesures permettent d'avoir accès de manière exacte à la dispersion de vitesse de groupe  $\beta^{(2)}(\omega)$ .

Les mesures brutes de temps de vol initiales [52] ont été opérées sur la plage spectrale qui nous intéresse (entre 790 et 910 nm), mais sur un autre morceau de fibre que celui que nous utilisons dans notre expérience (provenant toutefois de la même bobine et remplie du même liquide). Comme nous le verrons plus loin quand nous discuterons de la non-uniformité de notre fibre (section 13.2), cet état de fait peut induire des différences de positionnement de la courbe de dispersion pouvant aller de 1 à 3 nm. Par ailleurs, les mesures de dispersion rapportées par [52] sont entachées d'une incertitude inhérente à l'absence d'information sur la température à laquelle elles ont été effectuées. Or même une variation de quelques degrés suffit à décaler les courbes de  $\beta$  et ses dérivées de plusieurs nanomètres, effet dont nous discuterons plus en détails dans la sous-section 2.3.4.

Nous notons que la courbe de la constante de propagation peut aussi être simulée à partir de la connaissance des indices linéaires des matériaux et de mesures de photos MEB. Les résultats de ces simulations étant également entachés d'une imprécision non négligeable<sup>8</sup>, nous préférons les résultats de mesures directes.

Au final, nous avons opéré un décalage *a posteriori* du résultat des mesures brutes de temps de vol, de façon à ce que les longueurs d'onde de pic d'émission des paires, prédites par respect de la conservation d'énergie et de l'accord de phase, correspondent au maximum d'émission observé expérimentalement. Ainsi, après un décalage de +3.5 nm des longueurs d'onde de mesure<sup>9</sup>, nous ajustons un polynôme d'ordre 9 en  $\omega$  pour  $\beta^{(2)}(\omega)$ . Les coefficients ainsi obtenus sont donnés dans le tableau 2.1, et le profil de  $\beta^{(2)}(\omega)$  est tracé en figure 2.3 sur la bande de transmission de notre fibre.

On peut déduire directement de ce profil la longueur d'onde pour laquelle la dispersion est nulle<sup>10</sup> :

$$\lambda_{ZDW} \approx 899.5 \text{ nm}$$

Si les mesures d'interférométrie de temps de vol nous donnent tous les coefficients du polynôme décrivant  $\beta^{(2)}(\omega)$ , la vitesse de groupe  $\beta^{(1)}(\omega)$  n'est déterminée qu'à une constante près, et l'expression de la constante de propagation  $\beta(\omega)$  dépend de deux constantes indéterminées. Cependant dans notre modèle, la constante de propagation n'apparaîtra qu'au sein du désaccord de phase  $\Delta k$ , dont l'expression développée est exempte des constantes inconnues, comme le verrons dans la suite.

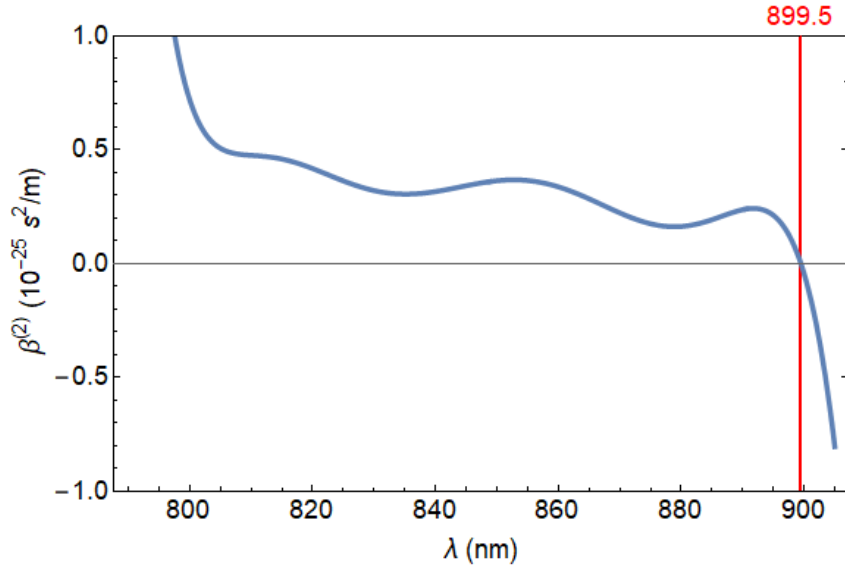
8. Ces simulations, de type *Finite Difference Frequency Domain* (FDFD) considèrent une fibre géométriquement parfaite. Elles prédisent une longueur d'onde de dispersion nulle à 918 nm, soit encore plus éloignée de la réalité que ne le sont les mesures directes. On peut attribuer cette erreur aux incertitudes de mesure sur photo MEB des tailles de la structure (cœur, trous, pas), aux incertitudes sur les indices et aux imperfections de fabrication de la fibre [60].

9. Dans une représentation de  $\beta^{(2)}(\lambda)$  (cf. figure 2.3), nous décalons ici l'*axe des abscisses* et non pas la courbe. Comme nous le verrons en section 2.2, ce sont effectivement les longueurs d'onde caractéristiques qui se décalent, soit le cadre de référence de la courbe de  $\beta(\lambda)$  et ses dérivées.

10. Nous notons que cette valeur est également décalée de 3.5 nm vis-à-vis de celle rapportée par [52].

Longueur de la fibre	$L = 1.05 \text{ m}$
Diamètre de la fibre	$\sim 120 \text{ }\mu\text{m}$
Aire effective du mode fondamental	$A_{eff} = 30 \text{ }\mu\text{m}^2$
Indice de réfraction linéaire du liquide	$n_{Ad6} = 1.34728$
Indice de réfraction non linéaire du liquide	$n_2 = (5.2 \pm 0.8) \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$
Coefficient non linéaire de la fibre	$\gamma_p = 0.012 \pm 0,002 \text{ m}^{-1} \cdot \text{W}^{-1}$
Dispersion de la vitesse de groupe	$\beta^{(2)}(\omega) = \sum_{n=0}^8 K_n \omega^n$ $K_0 = -6.96810532751652 \cdot 10^{-17} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ $K_1 = +1.79517235860928 \cdot 10^{-31} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-1}$ $K_2 = -1.70561214836445 \cdot 10^{-46} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-2}$ $K_3 = +5.27838715192325 \cdot 10^{-62} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-3}$ $K_4 = +2.67836648865228 \cdot 10^{-77} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-4}$ $K_5 = -2.98912150087742 \cdot 10^{-92} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-5}$ $K_6 = +1.12594896132151 \cdot 10^{-107} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-6}$ $K_7 = -2.02728071729561 \cdot 10^{-123} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-7}$ $K_8 = +1.46426945447578 \cdot 10^{-139} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1} \cdot (\text{rad/s})^{-8}$

**Table 2.1** – Valeurs caractéristiques de notre fibre HC-1550-PM (*NKT Photonics*) remplie d'acétone deutérée (Ad6).



**Figure 2.3** – Profil de la dispersion de vitesse de groupe sur la bande de transmission de notre fibre. Le trait rouge marque la position de la longueur d'onde de dispersion nulle.

Ces mesures d'interférométrie de temps de vol suffisent donc à nous apporter toute l'information nécessaire pour déterminer l'accord de phase pour la génération de paire.

### 2.1.2 Accord de phase

Pour notre modèle, la détermination des longueurs d'onde d'émission des paires, pour une pompe de fréquence  $\omega_{p_0}$  donnée, passe par la résolution d'un couple d'équations correspondant aux conditions de conservation d'énergie et d'accord de phase. Nous avons l'expression classique de la conservation de l'énergie<sup>11</sup>  $2\omega_{p_0} - \omega_s - \omega_i = 0$  et le désaccord de phase dit généralisé [96] :

$$\Delta k = 2\beta(\omega_{p_0}) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i) + \frac{\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}}{v_{gp_0}} \quad (2.3)$$

où on reconnaît le désaccord de phase brut  $\Delta k_{brut} = 2\beta(\omega_{p_0}) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i)$  auquel s'ajoute un terme découlant directement du fait que nous considérons la propagation d'une impulsion se propageant dans notre fibre à la vitesse de groupe  $v_{gp_0} \equiv v_g(\omega_{p_0})$ . Nous verrons plus précisément comment ce terme supplémentaire apparaît lors de l'établissement de l'expression de l'intensité spectrale jointe pour notre fibre.

En reprenant les expressions (2.2) de la constante de propagation et ses dérivées, et en notant que  $\frac{1}{v_{gp_0}} = \beta^{(1)}(\omega_{p_0})$ , on peut écrire le désaccord de phase sous la forme :

$$\Delta k = \frac{2}{cL} \left( 2D(\omega_{p_0}) - D(\omega_s) - D(\omega_i) + C(\omega_{p_0}) (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}) \right)$$

On s'aperçoit donc que les mesures interférométriques de temps de vol nous permettent de déterminer entièrement le désaccord de phase et nous suffisent pour prédire les fréquences d'émission des paires.

D'après l'expression (2.3), on s'aperçoit que le terme en fraction est pratiquement nul à la conservation de l'énergie (du fait de la largeur spectrale du spectre de pompe, un écart à la stricte conservation de l'énergie avec la fréquence centrale  $\omega_{p_0}$  est permis). Pour respecter également l'accord de phase<sup>12</sup>, i.e.  $\Delta k = 0$ , il est donc nécessaire que le désaccord de phase brut soit proche de zéro<sup>11</sup>. Pour déterminer la zone spectrale où nous nous retrouvons dans ces conditions, nous opérerons un développement de Taylor de la constante de propagation autour de  $\omega_{p_0}$ . Pour de petits décalages spectraux à la pompe et identiques entre signal et idler<sup>13</sup>, nous notons  $\Omega = \omega_i - \omega_{p_0} = -(\omega_s - \omega_{p_0}) > 0$ . Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta(\omega_s) &= \beta(\omega_{p_0}) - \Omega\beta^{(1)}(\omega_{p_0}) + \frac{\Omega^2}{2!}\beta^{(2)}(\omega_{p_0}) - \frac{\Omega^3}{3!}\beta^{(3)}(\omega_{p_0}) + \frac{\Omega^4}{4!}\beta^{(4)}(\omega_{p_0}) + \sum_{n=5}^N (-1)^n \frac{\Omega^n}{n!}\beta^{(n)}(\omega_{p_0}) \\ \beta(\omega_i) &= \beta(\omega_{p_0}) + \Omega\beta^{(1)}(\omega_{p_0}) + \frac{\Omega^2}{2!}\beta^{(2)}(\omega_{p_0}) + \frac{\Omega^3}{3!}\beta^{(3)}(\omega_{p_0}) + \frac{\Omega^4}{4!}\beta^{(4)}(\omega_{p_0}) + \sum_{n=5}^N \frac{\Omega^n}{n!}\beta^{(n)}(\omega_{p_0}) \end{aligned}$$

En s'arrêtant à l'ordre 4, nous obtenons donc [1] :

$$\Delta k_{brut} \simeq -\Omega^2 \left( \beta^{(2)}(\omega_{p_0}) + \frac{\Omega^2}{12}\beta^{(4)}(\omega_{p_0}) \right) \quad (2.4)$$

11. Nous soulignons que la largeur spectrale non nulle des impulsions de pompe permet une certaine tolérance dans les duos de fréquences  $(\omega_s, \omega_i)$  respectant la conservation de l'énergie et l'accord de phase.

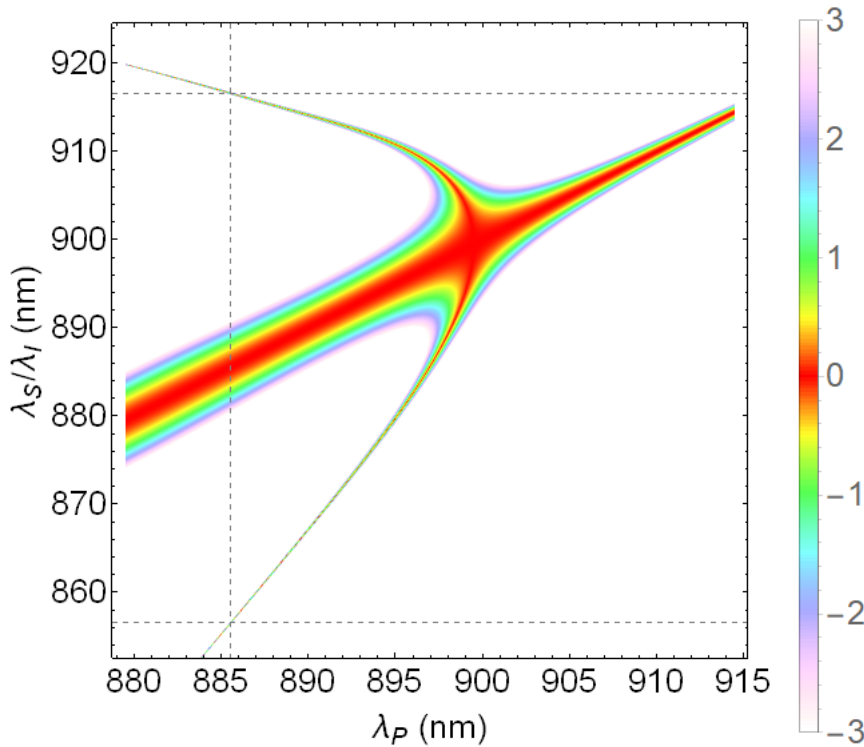
12. Comme nous le verrons plus loin en établissant l'intensité spectrale jointe, la condition d'accord de phase est portée par une fonction de la forme  $\text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)$ , avec  $L$  la longueur de la fibre, de sorte qu'une tolérance sur la condition d'accord de phase  $\Delta k = 0$  est permise (avec toutefois  $\Delta k L < \frac{\pi}{2}$ ).

13. En pratique, les fréquences seront de l'ordre de la centaine de THz quand les écarts entre la pompe et signal ou idler seront de l'ordre du THz.

Pour que  $\Delta k_{brut} \simeq 0$  il est donc nécessaire que  $\beta^{(2)}(\omega_{p_0})$  et  $\beta^{(4)}(\omega_{p_0})$  soient de signes opposés. Pour que le terme d'ordre 4 ne soit pas négligeable devant celui d'ordre 2, il convient de travailler à forts décalages spectraux  $\Omega$ , ou bien de se placer dans une zone du spectre où  $\beta^{(2)}$  est relativement faible. Vu que nous travaillerons à décalages spectraux faibles<sup>13</sup>, nous ferons en sorte de positionner notre longueur d'onde de pompe proche du zéro de dispersion de façon à faciliter l'accord de phase.

Par ailleurs, on peut distinguer deux cas de figure : le régime de dispersion dit normal pour lequel  $\beta^{(2)}(\omega) > 0$  et le régime de dispersion anormal où  $\beta^{(2)}(\omega) < 0$ . Pour notre fibre, au vu du profil de  $\beta^{(2)}$  en figure 2.3, nous retrouvons le régime de dispersion normal pour les longueurs d'onde  $\lambda < \lambda_{zDW}$  et anormal pour  $\lambda > \lambda_{zDW}$ . Nous observons que le  $\beta^{(2)}$  diverge en dispersion anormale lorsqu'on s'éloigne du zéro de dispersion, rendant d'autant plus difficile pour le terme d'ordre 4 de 'compenser' celui d'ordre 2. D'autre part, aux alentours du zéro de dispersion, le  $\beta^{(4)}$  de notre fibre est négatif. Pour ces deux raisons, nous nous placerons toujours en régime de dispersion normale, i.e. avec notre longueur d'onde centrale de pompe  $\lambda_{p_0} < \lambda_{zDW}$ .

Nous représentons en figure 2.4 les zones, dans la bande de transmission de la fibre, pour lesquelles nous obtenons un accord de phase  $\Delta k \approx 0$ .



**Figure 2.4** – Zone d'accord de phase pour notre fibre en fonction des longueurs d'onde des photons de pompe et de paires respectant la conservation de l'énergie. La branche centrale suit la fréquence de pompe, tandis que la branche supérieure correspond à nos photons signal et l'inférieure aux photons idler. Le point de jonction des branches correspond à la position du zéro de dispersion et délimite la zone de dispersion normale (gauche de la figure) de celle anormale (droite de la figure). Les traits pointillés marquent nos longueurs d'onde typiques de travail (ligne verticale pour la pompe et lignes horizontales pour signal et idler).

On peut remarquer tout de suite sur la figure 2.4 la présence d'une branche centrale d'accord de phase pour laquelle  $\omega_s \simeq \omega_p \simeq \omega_i$ . En effet, pour des écarts spectraux  $\Omega$  pratiquement nuls, l'accord de phase est automatiquement respecté, et on se retrouve dans une situation où le mélange à quatre ondes correspond à l'automodulation de phase de la pompe.

Comme attendu, un accord de phase avec des écarts spectraux non-nuls n'est possible qu'en régime de dispersion normale : deux branches secondaires prennent 'racine' au niveau du zéro de dispersion et se déploient pour  $\lambda_p < \lambda_{ZDW}$ . Nous soulignons le fait que ces branches s'affinent en s'éloignant du zéro de dispersion, signe d'une condition d'accord de phase plus stricte : le terme d'ordre 2 de  $\Delta k_{brut}$  étant plus grand, la condition  $\Delta k_{brut} \simeq 0$  s'obtient pour une plage d'écarts spectraux  $\Omega$  plus restreintes.

Puisque nous souhaitons générer de paires de photons présentant un minimum d'écart spectral avec la pompe afin de les distinguer expérimentalement <sup>14</sup>, nous nous intéresserons plutôt à ces branches secondaires. Nous pouvons alors déterminer les longueurs d'onde signal  $\lambda_{s_0}$  et idler  $\lambda_{i_0}$  respectant la conservation de l'énergie et l'accord de phase pour notre longueur d'onde centrale de pompe typique  $\lambda_{p_0} = 885.55$  nm (choisie pour minimiser le bruit Raman à  $\lambda_{s_0}$  et  $\lambda_{i_0}$ , cf. sous-section 2.3.3) :

$$\lambda_{s_0} \approx 916.6 \text{ nm} \qquad \lambda_{i_0} \approx 856.5 \text{ nm}$$

Nous noterons  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  les fréquences centrales d'émission signal et idler associées.

Enfin, il est à noter que la dispersion de la fibre et donc l'accord de phase sont susceptibles de varier sous l'influence de paramètres tels que la température ou la taille transverse de la fibre. L'influence de la température sera introduite en sous-section 2.3.4 tandis que celle de la taille transverse constituera le cœur de toute notre étude sur l'uniformité de la fibre, faite en partie IV.

### Développements de $\beta$ en séries de Taylor

Nous avons pu montrer que les mesures d'interférométrie de temps de vol suffisent pour notre modèle, et il est possible pour déterminer  $\Delta k$  d'injecter directement dans son expression le polynôme d'ordre 9 décrivant  $\beta$ . Cependant, il peut être préférable d'exprimer  $\Delta k$  à partir de développements de Taylor des termes de constante de propagation autour de  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$ .

En effet, une telle forme se montre plus simple pour percevoir l'effet principal de la vitesse de groupe sur l'accord de phase, ce qui nous sera particulièrement utile lors de notre étude sur la non-uniformité du guide. Par ailleurs, la notation en développement de Taylor est une approche usuelle dans la littérature : elle permet notamment une description effective lorsque peu d'informations sont connues sur  $\beta$ , par exemple dans le cas où la vitesse de groupe et sa dispersion ne sont connues qu'aux fréquences d'intérêt. Les développements que nous introduisons ici donnent donc un point de comparaison entre la littérature [97, 98, 96] et notre modèle.

Un développement de  $\beta$  autour de  $\omega_{p_0}$ , tel que fait précédemment, ne serait valide que pour de petits décalages spectraux (proportionnellement à  $\beta(\omega_{p_0})$ ), aussi allons-nous plutôt utiliser des développements autour de  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  <sup>15</sup> :

$$\beta(\omega_{p_0}) = \beta_{p_0}^{(0)}$$

$$\beta(\omega_s) \simeq \beta_{s_0}^{(0)} + (\omega_s - \omega_{s_0}) \beta_{s_0}^{(1)} + \sum_{k=2}^n \frac{(\omega_s - \omega_{s_0})^k}{k!} \beta_{s_0}^{(k)} \quad (2.5)$$

$$\beta(\omega_i) \simeq \beta_{i_0}^{(0)} + (\omega_i - \omega_{i_0}) \beta_{i_0}^{(1)} + \sum_{k=2}^n \frac{(\omega_i - \omega_{i_0})^k}{k!} \beta_{i_0}^{(k)} \quad (2.6)$$

en rappelant que pour  $\beta$  et ses dérivées, les indices  $s_0$ ,  $i_0$  et  $p_0$  indiquent que la fonction est prise à  $\omega_{s_0}$ ,  $\omega_{i_0}$  et  $\omega_{p_0}$  respectivement.

14. En pratique, un écart minimum de  $\sim 20$  nm est nécessaire pour réduire suffisamment le bruit de mesure, comme nous l'exposerons en section 9.1.

15. On rappelle que  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  sont définies tel que  $\omega_{s_0} + \omega_{i_0} - 2\omega_{p_0} = 0$  et  $\beta(\omega_{s_0}) + \beta(\omega_{i_0}) - 2\beta(\omega_{p_0}) = 0$ . En pratique, leurs valeurs exactes sont obtenues par résolution numérique de ce système d'équations.



Naturellement, pour un  $\beta(\omega)$  de forme quelconque, ces développements ne sont valides qu'autour des fréquences  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  respectivement (ce qui s'accorde avec le fait que nous considérons des bandes fréquentielles fines) et ne sont exacts que pour  $n \rightarrow \infty$ .

En pratique cependant, la constante de propagation  $\beta(\omega)$  déduite de nos mesures est un polynôme d'ordre fini. Et en prenant tous les ordres du développement, notre constante de propagation devient mathématiquement exacte mais limitée par la précision de mesure et la qualité de l'ajustement polynomial.

On a donc le désaccord de phase généralisée d'après (2.3) et en utilisant le fait que  $\beta_{p_0}^{(1)} = \frac{1}{v_{gp_0}}$  :

$$\Delta k \simeq \Delta k_0 + \Delta k_1 + \sum_{k=2}^n \Delta k_k \quad (2.7)$$

Avec les termes d'ordre 0, 1 et  $k$  :

$$\begin{aligned} \Delta k_0 &= 2\beta_{p_0}^{(0)} - \beta_{s_0}^{(0)} - \beta_{i_0}^{(0)} \\ \Delta k_1 &= (\omega_s - \omega_{s_0}) \left( \beta_{p_0}^{(1)} - \beta_{s_0}^{(1)} \right) + (\omega_i - \omega_{i_0}) \left( \beta_{p_0}^{(1)} - \beta_{i_0}^{(1)} \right) \\ \Delta k_k &= -\frac{(\omega_s - \omega_{s_0})^k}{k!} \beta_{s_0}^{(k)} - \frac{(\omega_i - \omega_{i_0})^k}{k!} \beta_{i_0}^{(k)} \end{aligned}$$

où  $\Delta k_0 = 0$  par définition de  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$ .

Ce développement du désaccord de phase<sup>16</sup> se montrera notamment utile pour exprimer l'accord de phase décalé (vis-à-vis d'une référence), dans le cadre de notre étude de la non-uniformité du guide que nous développerons en partie IV. Nous nous penchons dans la section suivante sur le décalage de l'accord de phase, quel que soit son origine.

## 2.2 Accord de phase décalé

Comme nous le verrons dans la section suivante, les variations de plusieurs paramètres de la fibre sont susceptibles de modifier ses longueurs d'onde *caractéristiques*. Nous désignons par ce terme, entre autres, les longueurs d'onde définissant les bords de bande de transmission, la longueur d'onde de dispersion nulle et de manière plus générale tout le cadre de référence de la courbe de la constante de propagation.

Ainsi, le décalage des longueurs d'onde caractéristiques impacte  $\beta(\omega)$  ainsi que toutes ses dérivées subsidiaires  $\beta^{(n)}(\omega)$ , dont la dispersion de vitesse de groupe. Ce qui, en définitive, change le désaccord de phase  $\Delta k$  et donc les longueurs d'onde respectant l'accord de phase.

Pour rendre compte de cet effet, nous introduisons dès maintenant le désaccord de phase  $\Delta k_S$  décalé par rapport à une référence  $\Delta k_{ref}$  lors d'un décalage  $\Delta\lambda$  de longueur d'onde caractéristique, quel que soit son origine.

Comme nous le verrons en section 2.3.1, le décalage *relatif*  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  est le même pour toutes les longueurs d'onde caractéristiques. Puisque la constante de propagation s'exprime dans l'espace fréquentiel, nous introduisons le décalage  $\Delta\omega$ , équivalent à  $\Delta\lambda$ . Nous considérerons dans notre étude des décalages relatifs faibles<sup>17</sup>, de sorte que  $\Delta\lambda \ll \lambda$ , soit :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \simeq -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

16. Il est à noter que cette forme approximée de  $\Delta k$  (exacte si  $n \rightarrow \infty$ ) dépend maintenant de  $\omega_{p_0}$ ,  $\omega_{s_0}$ ,  $\omega_{i_0}$ ,  $\omega_s$  et  $\omega_i$ .

17. En longueur d'onde, nous parlons de décalage de quelques nanomètres face à des longueurs d'onde de l'ordre de 800 ~ 900 nm. En fréquentiel, l'écart entre  $\Delta\omega_{ZDW}$  et nos fréquences d'intérêt est alors d'au moins trois ordres de grandeur.

Nous retrouvons donc la même proportion de variation pour les fréquences associées. En absolu, cette variation n'est pas la même partout : les plus hautes fréquences caractéristiques subissent un décalage plus important<sup>18</sup>. Toutefois en première approximation nos fréquences de travail sont suffisamment proches pour considérer qu'elles sont toutes décalées d'une même quantité. Nous prendrons la fréquence de dispersion nulle comme référence, en notant  $\Delta\omega_{ZDW} = \omega_{ZDW} - \omega_{ZDW_{ref}}$  son décalage, où  $\omega_{ZDW_{ref}}$  est le zéro de dispersion avant décalage.

Étant donné que nous considérons de petits décalages<sup>17</sup>, nous pouvons exprimer la constante de propagation suite au décalage  $\beta_S(\omega)$  à partir de son développement limité au premier ordre, de sorte que le décalage du zéro de dispersion induit une translation de  $\beta(\omega)$ <sup>19</sup> :

$$\beta_S(\omega) = \beta(\omega - \Delta\omega_{ZDW}) \simeq \beta(\omega) - \Delta\omega_{ZDW} \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \quad (2.8)$$

où  $\beta(\omega)$  est la constante de propagation avant décalage.

Et de même pour les dérivées  $k$ -ième de  $\beta$  :

$$\frac{\partial^k \beta_S}{\partial\omega^k}(\omega) = \frac{\partial^k \beta}{\partial\omega^k}(\omega - \Delta\omega_{ZDW}) \simeq \beta^{(k)}(\omega) - \Delta\omega_{ZDW} \beta^{(k+1)}(\omega)$$

En rappelant la notation compacte  $\beta^{(k)}(\omega) = \frac{\partial^k \beta}{\partial\omega^k}(\omega)$ .

Nous avons donc bien  $\beta_S^{(2)}(\omega_{ZDW}) = \beta^{(2)}(\omega_{ZDW} - \Delta\omega_{ZDW}) = \beta^{(2)}(\omega_{ZDW_{ref}}) = 0$ .

La constante de propagation se décalant, l'accord de phase en sera directement affecté. Nous rappelons la forme générale (2.3) du désaccord de phase :

$$\Delta k = 2\beta(\omega_{p_0}) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i) + \frac{\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}}{v_{gp_0}} \quad (2.9)$$

Nous notons que dans le terme en fraction, les décalages de chaque fréquence d'une quantité  $\Delta\omega_{ZDW}$  vont se compenser mutuellement.

En notant que  $\frac{1}{v_g(\omega)} = \beta^{(1)}(\omega)$  et utilisant la constante de propagation décalée (2.8), nous définissons le désaccord de phase décalé :

$$\begin{aligned} \Delta k_S(\omega_{p_0}, \omega_s, \omega_i, \Delta\omega_{ZDW}) &= 2\beta_S(\omega_{p_0}) - \beta_S(\omega_s) - \beta_S(\omega_i) + \beta^{(1)}(\omega_{p_0}) (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}) \\ &\simeq 2\beta(\omega_{p_0}) - 2\Delta\omega_{ZDW} \beta^{(1)}(\omega_{p_0}) - \beta(\omega_s) + \Delta\omega_{ZDW} \beta^{(1)}(\omega_s) - \beta(\omega_i) + \Delta\omega_{ZDW} \beta^{(1)}(\omega_i) \\ &\quad + (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}) \left( \beta^{(1)}(\omega_{p_0}) - \Delta\omega_{ZDW} \beta^{(2)}(\omega_{p_0}) \right) \end{aligned}$$

Soit le désaccord de phase décalé, à l'ordre 1 (vis-à-vis du développement de  $\beta(\omega - \Delta\omega_{ZDW})$  en  $\Delta\omega_{ZDW}$ ) :

$$\Delta k_S \simeq \Delta k_{ref} - \underbrace{\Delta\omega_{ZDW} \left( 2\beta^{(1)}(\omega_{p_0}) - \beta^{(1)}(\omega_s) - \beta^{(1)}(\omega_i) + \beta^{(2)}(\omega_{p_0})(\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}) \right)}_{d\Delta k} \quad (2.10)$$

Qui est donc égal à un désaccord de référence  $\Delta k_{ref}$ , correspondant à (2.9), décalé d'une valeur étant le produit de deux termes :

18. Graphiquement, l'axe des fréquences sur un tracé de  $\beta(\omega)$  aura tendance à se dilater pour un décalage  $\Delta\omega$  positif, et à se contracter lorsque celui-ci est négatif.

19. La constante de propagation étant un polynôme d'ordre supérieur à 1 (9 dans notre cas), ce décalage ne se traduit en réalité pas uniquement par une translation de la courbe mais également par sa déformation, que l'on peut décrire en prenant en compte les ordres supérieurs du développement.

- Le décalage du zéro de dispersion  $\Delta\omega_{ZDW}$  par rapport à la référence prise. Comme nous le verrons dans la suite, ce dernier peut être induit par une variation de la température de la fibre, de sa taille transverse, ou par changement du fluide l'emplissant.
- Le terme  $d\Delta k$ , entièrement déterminé par les propriétés de propagation du milieu, qui donne l'influence de la dispersion dans la translation de l'accord de phase.

Comme indiqué en sous-section 2.1.1, il peut s'avérer nécessaire d'approximer la constante de propagation à son développement de Taylor limité à un certain ordre. Dans le même esprit des développements (2.5) et (2.6) pour  $\beta$ , nous avons pour sa dérivée première :

$$\begin{aligned}\beta^{(1)}(\omega_s) &= \beta_{s_0}^{(1)} + \sum_{k=2}^n \frac{(\omega_s - \omega_{s_0})^{k-1}}{(k-1)!} \beta_{s_0}^{(k)} \\ \beta^{(1)}(\omega_i) &= \beta_{i_0}^{(1)} + \sum_{k=2}^n \frac{(\omega_i - \omega_{i_0})^{k-1}}{(k-1)!} \beta_{i_0}^{(k)}\end{aligned}$$

On a alors :

$$d\Delta k = 2\beta_{p_0}^{(1)} - \beta_{s_0}^{(1)} - \beta_{i_0}^{(1)} + \beta_{p_0}^{(2)}(\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}) - \sum_{k=2}^n \frac{(\omega_s - \omega_{s_0})^{k-1}}{(k-1)!} \beta_{s_0}^{(k)} - \sum_{k=2}^n \frac{(\omega_i - \omega_{i_0})^{k-1}}{(k-1)!} \beta_{i_0}^{(k)}$$

Et en se limitant au second ordre en  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  :

$$d\Delta k \simeq 2\beta_{p_0}^{(1)} - \beta_{s_0}^{(1)} - \beta_{i_0}^{(1)} - (\omega_s - \omega_{s_0}) \left( \beta_{s_0}^{(2)} - \beta_{p_0}^{(2)} \right) - (\omega_i - \omega_{i_0}) \left( \beta_{i_0}^{(2)} - \beta_{p_0}^{(2)} \right) \quad (2.11)$$

À présent que le désaccord de phase décalé (2.10), résultant d'un décalage fréquentiel  $\Delta\omega_{ZDW}$  donné, est défini, nous présenterons dans la suite quels paramètres physiques de la fibre, par leur variation, sont susceptibles d'induire un tel décalage.

## 2.3 Variation des propriétés de propagation de la fibre

Afin d'exposer, entre autres, l'effet du remplissage de la fibre par notre liquide, ou la sensibilité de l'accord de phase à la température, nous commencerons par introduire les invariants de propagation pour les fibres à cristal photonique. Ces derniers permettront de relier directement la variation de divers paramètres de la fibre à un décalage de ses longueurs d'onde caractéristiques.

### 2.3.1 Invariants de propagation

Les invariants de propagations constituent des lois d'échelle très utiles pour la description des fibres optiques, notamment lors de leur fabrication pour prédire la position de la bande transmission d'une fibre de diamètre donné. De manière analogue aux invariants  $V^2$  et  $W^2$  pour les fibres conventionnelles<sup>20</sup> [99], nous pouvons définir pour les fibres à cristal photonique les invariants [100, 101] :

$$v^2 = k^2 \Lambda^2 (n_1^2 - n_2^2) \quad w^2 = \Lambda^2 (\beta^2 - k^2 n_2^2)$$

Avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  le vecteur d'onde dans le vide,  $\Lambda$  une taille transverse caractéristique qui détermine les propriétés de la fibre (ici la bande interdite),  $\beta$  la constante de propagation, et  $n_1$  et  $n_2$  les indices

20. On retrouve la même forme, à ceci près que le pas de la structure  $\Lambda$  remplace le rayon du cœur.

des matériaux d'indice élevé et faible, respectivement, composant la structure photonique de la fibre. Seul le premier invariant nous est utile ici :

$$v^2 = \left( \frac{2\pi\Lambda}{\lambda} \right)^2 (n_{Si}^2 - n_{fluide}^2) \quad (2.12)$$

où nous notons que  $\Lambda$  est le pas de la structure à cristal photonique constituant la gaine, tandis que  $\lambda$  représente toute longueur d'onde caractéristique de la fibre<sup>21</sup> (position du zéro de dispersion, bords de bande de transmission,...), et  $n_{Si}$  étant l'indice de réfraction de la silice et  $n_{fluide}$  celui du fluide remplissant la fibre (air ou liquide).

Par définition, pour une même structure de fibre (en terme de forme et non de taille), l'invariant  $v$  ne change pas, quelles que soient les modifications apportées. On peut ainsi considérer la situation où le pas de la structure change sans que les indices ne soient modifiés, ou au contraire celle où la dimension de la structure est inchangée, tandis que la ou les valeurs des indices varient. Par invariance de  $v^2$ , les longueurs d'onde caractéristiques varieront de manière proportionnelle : toutes subissent un même décalage *relatif*  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ , qui induit alors un décalage du désaccord de phase tel que nous l'avons décrit en section 2.2.

Nous nous pencherons brièvement dans la suite sur la variation du pas de la structure par changement de taille de la fibre, et sur la variation des indices, que ce soit par changement du fluide contenu dans la fibre ou par effet thermo-optique.

### 2.3.2 Effet de la variation du pas de la structure

Pour que varie le pas  $\Lambda$  de la structure sans que sa forme globale ne change<sup>22</sup>, c'est toute la fibre qui doit voir sa dimension transverse changer proportionnellement.

Nous pouvons directement déduire de (2.12) que pour toute variation  $\Delta\Lambda$  du pas de la structure, qui accompagne une variation homothétique de la taille transverse de la fibre<sup>23</sup>, les longueurs d'onde caractéristiques suivent une variation  $\Delta\lambda$  proportionnelle :  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda}$ . Par conséquent la proportion de déformation, pour le diamètre de la fibre, le pas de la structure ou une longueur d'onde caractéristique est la même.

De fait, si la taille de la fibre varie de +1% il en sera de même pour les longueurs d'onde caractéristiques, et les fréquences associées changeront de -1%, en se souvenant que  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq -\frac{\Delta\omega}{\omega}$ . La taille transverse de la fibre étant un paramètre ajustable à la fabrication (notamment par jeu de la tension et vitesse de tirage), il est possible d'ajuster par ce biais la position de la bande de transmission [60, 91].

Néanmoins, nous avons considéré jusqu'ici que la taille transverse de la fibre était la même, et modifiée de manière identique, sur tout son long. Autrement dit, la fibre était implicitement prise comme uniforme.

Dans le cas d'une variation de la taille transverse de la fibre tout au long de celle-ci, le décalage du zéro de dispersion  $\Delta\omega_{z_{DW}}$  dépend lui-même de la position dans la fibre. L'expression (2.10) montre qu'alors le désaccord de phase suit la *même* évolution que le décalage en longueur d'onde et donc, de la forme de la fibre.

Ce point nous servira notamment, dans le cadre de nos développements théoriques développés en partie IV ayant trait à la non-uniformité des fibres, à relier les fluctuations du diamètre de la fibre à celles du désaccord de phase pour en étudier l'impact sur le spectre d'émission de paires.

---

21. Puisque dans l'expression (2.12)  $k$  est pris dans le vide, il en sera de même pour toutes les fréquences caractéristiques considérées.

22. Nous rappelons que l'invariant (2.12) n'est applicable que si la forme du cristal photonique reste inchangée.

23. En se basant sur une fibre uniforme se déformant, par conservation de la matière toute variation des dimensions transverses (pas de structure, diamètre de fibre) se fait de manière homothétique.

### 2.3.3 Effets du remplissage de la fibre

Comme son matricule l'indique (HC-1550-PM), notre fibre fut initialement conçue pour guider la lumière autour de 1550 nm, en étant remplie d'air. L'une des principales conséquences du remplissage de la fibre par un liquide est le décalage de sa bande de transmission dans la région du spectre correspondant aux proches infrarouges. L'invariant de propagation va nous permettre, ici aussi, de rendre compte de cet effet.

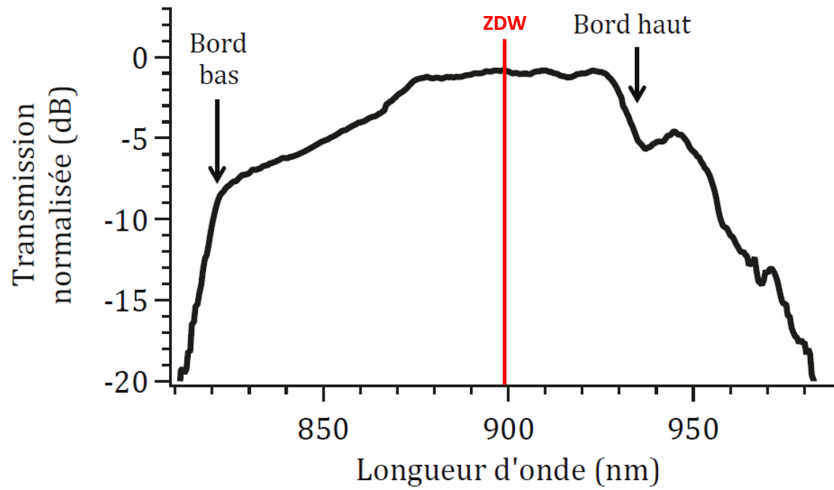
Lors du remplissage de la fibre, ni le pas de la structure  $\Lambda$  ni la courbe d'indice de la silice ne changent. Toutefois, l'indice du fluide est modifié et donc nécessairement, par conservation de l'invariant,  $\lambda$  l'est aussi. Nous obtenons directement de (2.12) :

$$\left(\frac{2\pi\Lambda}{\lambda_{air}}\right)^2 (n_{Si}^2 - n_{air}^2) = v^2 = \left(\frac{2\pi\Lambda}{\lambda_{Ad6}}\right)^2 (n_{Si}^2 - n_{Ad6}^2)$$

Où  $\lambda_{air}$  et  $\lambda_{Ad6}$  sont les valeurs d'une même longueur d'onde caractéristique dans le cas de la fibre pleine d'air ou remplie d'acétone deutérée. Dans une première approximation, nous ignorons ici la dépendance à la longueur d'onde des indices qui peuvent être pris comme constant ( $n_{Si} = 1.45$ ,  $n_{air} = 1$  et  $n_{Ad6} = 1.35$  typiquement). Nous obtenons la relation :

$$\lambda_{Ad6} = \lambda_{air} \sqrt{\frac{n_{Si}^2 - n_{Ad6}^2}{n_{Si}^2 - n_{air}^2}}$$

L'indice de l'air étant plus faible que celui de notre liquide, l'ensemble de la bande de transmission (de même que le zéro de dispersion) de la fibre se décale vers les plus basses longueurs d'onde [101]. La bande de transmission résultante, présentée en figure 2.5, s'étend de 820 à 925 nm. Toutes les longueurs d'onde de notre problème seront donc contenues dans cette plage.



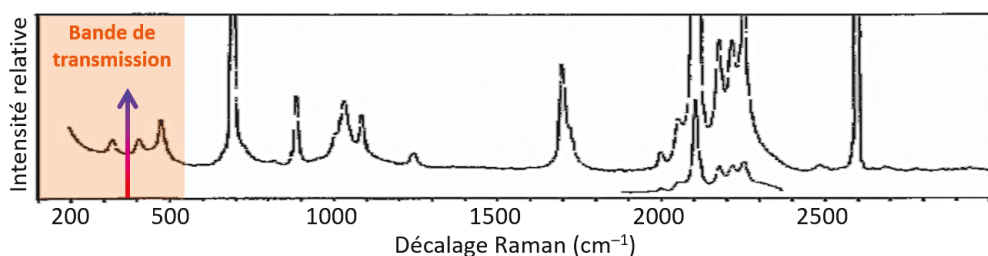
**Figure 2.5** – Bande de transmission pour notre fibre remplie d'acétone deutérée, tirée de [52]. Mesure réalisée à partir d'une source supercontinuum.

Nous soulignons que l'architecture de notre source, d'une part par l'ingénierie de la structure de la gaine, mais aussi plus simplement par le choix de la taille transverse de la fibre et du fluide la remplissant, permet une grande modularité d'émission. À titre d'exemple, le remplissage de notre fibre HC-1550 par un fluorocarbure permettrait de positionner la bande de transmission aux alentours de 1.1  $\mu\text{m}$ , tandis que le même liquide combiné avec une fibre de type HC-2300 (donc de bande de transmission autour de 2.3  $\mu\text{m}$  quand remplie d'air) permet de se positionner au niveau des longueurs d'onde télécom [60], i.e. aux alentours de 1.5  $\mu\text{m}$ .

Nous noterons que le choix du liquide peut aussi être conditionné par des aspects plus pratiques tels que sa toxicité ou sa viscosité<sup>24</sup>.

Le choix de notre liquide (l'acétone deutérée) fut initialement fait pour que la bande de transmission de la fibre corresponde à la plage spectrale accessible par notre laser de pompe. Ce positionnement a également l'avantage de limiter fortement le bruit Raman émis par notre source.

Le spectre de gain Raman de l'acétone deutérée est donné en figure 2.6. Nous pouvons alors noter que pour toute longueur de pompe pouvant se trouver dans la bande de transmission, la raie Raman principale associée (de décalage Raman  $2100\text{ cm}^{-1}$ ) se trouvera *hors* de cette plage, de sorte que l'essentiel du bruit Raman issu de la pompe ne sera pas guidé par la fibre<sup>25</sup>. Le bruit Raman résiduel apparaissant dans nos mesures proviendra essentiellement de raies Raman secondaires présentes dans la bande de transmission et correspondant à des décalages<sup>26</sup> de  $331$ ,  $410$  et  $478\text{ cm}^{-1}$ .



**Figure 2.6** – Spectre de gain Raman de l'acétone deutérée, tiré de [103]. Le cadre orange représente l'étendue de la bande de transmission de la fibre vis-à-vis de nos longueurs d'onde de pompe typiques. La raie Raman principale du spectre à  $2100\text{ cm}^{-1}$  est rejetée hors de la bande. La flèche marque la position typique d'émission de nos paires, qui se placent entre deux raies Raman secondaires à  $331$  et  $410\text{ cm}^{-1}$  de façon à minimiser le bruit Raman.

Afin de minimiser le bruit Raman aux longueurs d'onde d'émission des photons de paires, nous choisirons la fréquence de pompe de façon à les positionner entre deux pics d'émission Raman, comme représenté en figure 2.6, tout en restant proche du zéro de dispersion de la fibre. Nos filtres de détections étant très fins, même si ces pics Raman sont proches des longueurs d'onde d'émission nous serons à même de les filtrer. Une réduction effective de trois ordres de grandeur du bruit de diffusion Raman, vis-à-vis d'une fibre à cœur de silice, fut ainsi démontrée [58, 52]. Ceci permit de valider l'intérêt d'une architecture en fibre à cœur liquide en montrant que celle-ci est viable comme source de paires de photons corrélés<sup>27</sup>.

Une autre conséquence du remplissage de la fibre par notre liquide est la diminution du contraste d'indice entre la silice et le fluide remplissant la fibre. Sa biréfringence s'en trouve alors réduite, de même que le maintien de polarisation. De fait, une polarisation rectiligne en entrée de fibre devient légèrement elliptique en sortie, et ce maintien de la polarisation dépend de l'état d'enroulement de la fibre [52]. Une difficulté expérimentale sera alors de localiser les axes neutres 'moyens' de la fibre pour s'y positionner.

24. Le remplissage de la fibre s'effectuant par capillarité, en connectant chaque extrémité de la fibre à un réservoir, la viscosité du liquide est aussi à prendre en compte puisqu'elle détermine la vitesse de ce remplissage [102].

25. La diffusion Raman étant isotrope, la majeure part du bruit associé est émise hors de l'axe de la fibre et se perd dans l'environnement.

26. Pour une longueur d'onde de pompe typique de  $885.55\text{ nm}$ , ces décalages correspondent à des longueurs d'onde respectives d'environ  $912$ ,  $918$  et  $924\text{ nm}$  en Stokes et  $860$ ,  $854$  et  $849\text{ nm}$  en anti-Stokes.

27. Nous notons que le même type d'architecture peut être utilisée pour exploiter l'effet Raman plutôt que s'en prémunir. En effet, en gardant le premier ordre Stokes de la raie Raman principale d'un liquide dans la bande de transmission, il est possible concevoir un convertisseur Raman efficace qui, par cascade de diffusions Raman stimulées, permet la génération de plusieurs fréquences. Ces dernières étant maîtrisées par la conjonction de l'architecture de la fibre, du choix de liquide et de la fréquence de pompe [90].

Outre le remplissage initial, les indices des matériaux de la fibre peuvent encore, dans une moindre mesure, changer au cours du temps et ce, principalement du fait de variation de la température. Nous montrons dans ce qui suit que les invariants de propagation permettent également de prévoir les effets dus à la température.

### 2.3.4 Effet de la variation de température

Si notre dispositif expérimental nous permet une mesure directe de la température de la fibre, aucun dispositif n'en permet le contrôle direct et dynamique. La salle d'expérience comme la fibre peuvent alors être sujettes à des fluctuations de l'ordre du degré sur l'espace d'une journée. Si ces fluctuations sont *a priori* faibles, nous allons voir que leur effet est néanmoins notable pour nos mesures expérimentales. Le but de cette sous-section est essentiellement de déterminer l'ordre de grandeur des effets de la variation de température, leur simulation numérique passant par l'expression de l'accord de phase décalé qui sera introduit en section 2.2.

À ces échelles de variation de température, les effets de dilatation thermique de la silice (comme du liquide) sont largement négligeables, de sorte que nous considérerons ici que la taille transverse de la fibre (et donc le pas  $\Lambda$ ) reste fixe. Néanmoins, la température peut influencer sur les propriétés de propagation par effet thermo-optique, soit une variation d'indice de réfraction. De l'invariant (2.12), pour deux températures  $T_1$  et  $T_2$  on obtient :

$$\lambda(T_2) = \lambda(T_1) \sqrt{\frac{n_{Si}(T_2)^2 - n_{Ad6}(T_2)^2}{n_{Si}(T_1)^2 - n_{Ad6}(T_1)^2}}$$

Le coefficient thermo-optique de la silice étant plus faible d'un peu plus d'un ordre de grandeur vis-à-vis de celui de l'acétone, nous pouvons en première approximation ne considérer que l'effet thermo-optique du liquide. En dérivant l'équation ci-dessus :

$$\frac{\partial \lambda(T_2)}{\partial n_{Ad6}(T_2)} = - \frac{\lambda(T_1)}{\sqrt{n_{Si}^2(T_1) - n_{Ad6}^2(T_1)}} \frac{n_{Ad6}^2(T_2)}{\sqrt{n_{Si}^2(T_2) - n_{Ad6}^2(T_2)}}$$

Pour évaluer en ordre de grandeur la variation de la longueur d'onde de dispersion nulle, nous prendrons  $\lambda(T_1) = \lambda_{ZDW} = 899.5$  nm et en première approximation des indices fixes ( $n_{Si} \approx 1.45$  et  $n_{Ad6} \approx 1.35$ ). On note ainsi :

$$\frac{\partial \lambda_{ZDW}}{\partial T} \approx - \frac{\partial n_{Ad6}}{\partial T} \frac{\lambda_{ZDW}}{n_{Si}^2 - n_{Ad6}^2}$$

Le coefficient thermo-optique de l'acétone deutérée peut être approximé à celui de l'acétone, qui peut être déduit de [92] :

$$\frac{\partial n_{Ad6}}{\partial T} = -5.2 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \lambda_{ZDW}}{\partial T} \approx 3 \text{ nm} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

Dès lors il nous est possible, par calcul numérique pour une pompe typique à  $\lambda_p = 885.55$  nm, d'évaluer l'influence de la température sur les longueurs d'onde  $\lambda_s$  et  $\lambda_i$  respectant à la fois l'accord de phase et la conservation d'énergie. En première approximation, on estime :

$$\frac{\partial \lambda_{s0}}{\partial T} \approx +4 \text{ nm}/^\circ\text{C} \quad \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial T} \approx -5 \text{ nm}/^\circ\text{C}$$

Ces ordres de grandeur de variation sont à confronter à la largeur typique attendue des spectres d'émission<sup>28</sup>, de l'ordre du nanomètre, et à celle de nos filtres de détection, d'environ 0.5 nm. On comprend alors que la température devient un paramètre expérimental critique : une variation de 0.1 °C ne suffit pas à décaler le spectre d'émission jusqu'à le faire sortir totalement de la plage de nos filtres, mais la fine bande sur laquelle nous mesurons nos comptes de photons est notablement déplacée.

Dans notre expérience, la fibre est mise en contact avec une épaisse plaque métallique avec laquelle elle se thermalise. Nos mesures de températures s'effectuent à l'aide d'un thermocouple en contact à la fois avec la fibre et la plaque, et ce de manière à l'isoler des mouvements d'air pouvant fausser légèrement les mesures. La résolution de cette sonde est de 0.1 °C, tandis que le contrôle en température de la salle d'expérience s'effectue via la climatisation, réglable à 0.5 °C près.

Ces conditions ne permettent pas d'avoir une connaissance ou un contrôle optimal de la position relative entre le spectre d'émission et nos filtres. Néanmoins nous pouvons noter que notre salle d'expérience étant close et climatisée, les variations de températures au cours du temps sont très lentes. Par ailleurs, l'inertie thermique de la plaque métallique réduit nettement la vitesse de variation en température de la fibre. Néanmoins, la température se révélant un paramètre d'influence majeur dans nos expérience, nous la relèverons systématiquement et nous ne retiendrons dans un même set de données que les mesures ne présentant pas d'écart de plus de  $\pm 0.1$  °C entre elles. Il est alors raisonnable de considérer que celles-ci sont prises dans les mêmes conditions.

---

28. Nous montrerons plus loin que les spectres réels se montrent plus larges du fait de la non-uniformité de la fibre. Néanmoins nous considérons ici par précaution le spectre le plus fin possible, correspondant à une fibre uniforme.





## Chapitre 3

# Présentation générale de notre expérience

Notre objectif expérimental est de parvenir à une mesure résolue en fréquence (dans l'espace joint  $(\omega_s, \omega_i)$ ) de la probabilité de génération de paires de notre source fibrée. Par ailleurs notre montage doit nous permettre de balayer cet espace des fréquences de façon à retracer la distribution de cette probabilité, soit le spectre d'émission<sup>1</sup>.

Avant de nous intéresser à la structure concrète de notre montage expérimental, nous apportons dans la suite quelques précisions sur le cadre dans lequel se place ici la génération de paires de photons.

### 3.1 Génération de paires en régime impulsionnel spontané

Comme nous l'avons indiqué en section 1.1, les mécanismes non linéaires voient leur importance décuplée en régime pulsé, vis-à-vis du régime continu à puissance moyenne équivalente. En effet, l'amplitude du mélange à quatre ondes à l'origine de nos paires croît avec le carré de la puissance *instantanée* du champ incident (la pompe). Nous utiliserons donc notre laser de pompe en régime impulsionnel.

Si nous souhaitons maximiser la probabilité qu'une paire soit générée lors du passage d'une impulsion dans la fibre, il nous faut par contre éviter la génération de plus d'une paire par impulsion. En effet, à la mesure, que l'on parle de mesures de corrélations entre signal et idler ou d'*heralding*<sup>2</sup>, il est nécessaire de pouvoir distinguer une paire d'une autre.

En pratique des détecteurs de photons uniques peuvent compter au fil du temps les photons signal et idler. Cependant, leur association en paires ne peut se faire qu'*a posteriori* par relevé des corrélations entre leurs temps d'arrivée respectifs. Or la résolution temporelle de ces détecteurs étant nécessairement limitée, la génération simultanée ou très proche dans le temps de deux paires les rend indistinguables. Aussi est-il essentiel que les paires soient temporellement suffisamment espacées pour pouvoir associer chaque photon à son complémentaire. Concrètement, cela implique qu'au maximum une paire soit générée par impulsion de pompe.

Par cette contrainte de détection (un photon à la fois arrivant sur un détecteur), les régimes stimulés comme spontané amplifié sont proscrits. En effet, dans ces deux régimes chaque paire produite est accompagnée du photon ayant stimulé sa génération, qui est corrélé en temps avec la paire et de

---

1. Puisque nous nous plaçons dans un régime spontané, nous n'utiliserons pas de technique de tomographie par émission stimulée [104, 61] pour retracer la JSI.

2. Détection de l'un des deux photons de paires permettant de déterminer quand son complémentaire arrive. On parle de photon annoncé, ou *heralded photon*.

même longueur d'onde que le photon signal (ou idler). Ce dernier est alors indiscernable du photon supplémentaire : il devient impossible d'identifier et d'associer entre eux les deux photons de la paire.

*In fine*, il est nécessaire de se placer dans un régime de génération purement *spontanée*, c'est-à-dire initialement en l'absence de tout photon dans les champs signal et idler. De plus, le phénomène de mélange à quatre ondes doit s'effectuer avec une efficacité suffisamment faible pour éviter la production de deux paires au sein d'une même impulsion. Dans ce but, d'une part nous tirons profit de la très faible efficacité non linéaire de notre milieu, d'autre part nous choisissons d'injecter une faible puissance de pompe<sup>3</sup> (de l'ordre du milliWatt) dans la fibre. La probabilité de générer une paire par impulsion devient alors très faible (de l'ordre de  $10^{-5}$  paires/impulsion) et la probabilité de générer deux paires au sein d'une même impulsion<sup>4</sup> est négligeable.

L'usage d'une faible puissance de pompe a également pour conséquence de simplifier notre problème dans le sens où la puissance optique présente dans la fibre est trop faible pour induire une modification notable de son indice de réfraction. Ainsi l'automodulation de phase de la pompe<sup>5</sup> de même que son autofocalisation<sup>6</sup> sont négligeables dans notre problème. Nous considérerons donc que nos impulsions de pompe se propagent dans la fibre sans déformation de leurs profils temporel, spectral ou spatial.

Nous noterons que nos impulsions de pompe, d'une durée de l'ordre d'une picoseconde, seront générées à des cadences de 80 MHz et avec une largeur spectrale à mi-hauteur typique de 0.5 nm. Pour notre fibre d'environ un mètre de long, le temps de propagation des impulsions sera de quelques nanosecondes. L'intervalle de temps entre deux impulsions étant de 12.5 ns, n'est présente qu'une impulsion à la fois dans la fibre.

Par ailleurs, l'étendue temporelle de l'impulsion se trouve être très petite devant son temps de parcours. À un instant donné, la zone illuminée par l'impulsion correspond à une portion restreinte de la fibre, de l'ordre du dixième de millimètre, se déplaçant à la vitesse de groupe de l'impulsion. Il est important ici de faire la distinction avec la situation où le matériau non linéaire serait petit devant l'étendue d'une impulsion. Dans un tel cadre, correspondant généralement à la conversion paramétrique de  $\chi^{(2)}$  [105], les modèles développés considèrent une même intensité lumineuse sur l'ensemble du matériau, évoluant lentement au cours du temps. Or dans notre modèle, l'intensité dépendra du temps et de la position dans le guide, avec l'enveloppe de l'impulsion se propageant lentement.

À présent que les propriétés du mélange à quatre ondes en jeu ont été précisées, nous présentons dans la suite les moyens matériels mis en place pour l'observer.

## 3.2 Description générale du montage

Nous présenterons ici de manière générale les conditions requises pour mesurer le taux de génération de paires de photons, ainsi que les principales caractéristiques de notre montage expérimental y répondant. Nous notons que le chapitre 8 apportera une description plus détaillée de l'expérience.

---

3. L'usage d'impulsions peut alors paraître paradoxal, toutefois à puissances moyennes équivalentes le régime pulsé sera toujours plus favorable aux non-linéarités que le régime continu. De plus, la synchronisation d'émission accompagnant le régime pulsé permet de discriminer une partie du bruit (asynchrone) dans nos mesures de corrélations.

4. Les deux générations étant indépendantes, cette probabilité correspond au carré de la probabilité de générer une paire par impulsion.

5. Le processus d'automodulation de phase correspond en régime impulsif à la variation en fonction du temps de l'indice de réfraction. L'annexe C.2 présente un traitement plus formel du phénomène.

6. L'autofocalisation résulte de la variation spatiale de l'indice de réfraction, suivant la distribution transverse d'intensité dans un guide.

En premier lieu, notre laser de pompe doit fonctionner en régime pulsé. Par ailleurs, pour nous permettre de placer la longueur de pompe proche de la longueur d'onde de dispersion nulle de notre fibre (899.5 nm), notre laser de pompe doit également se montrer dans une certaine mesure accordable autour de 900 nm.

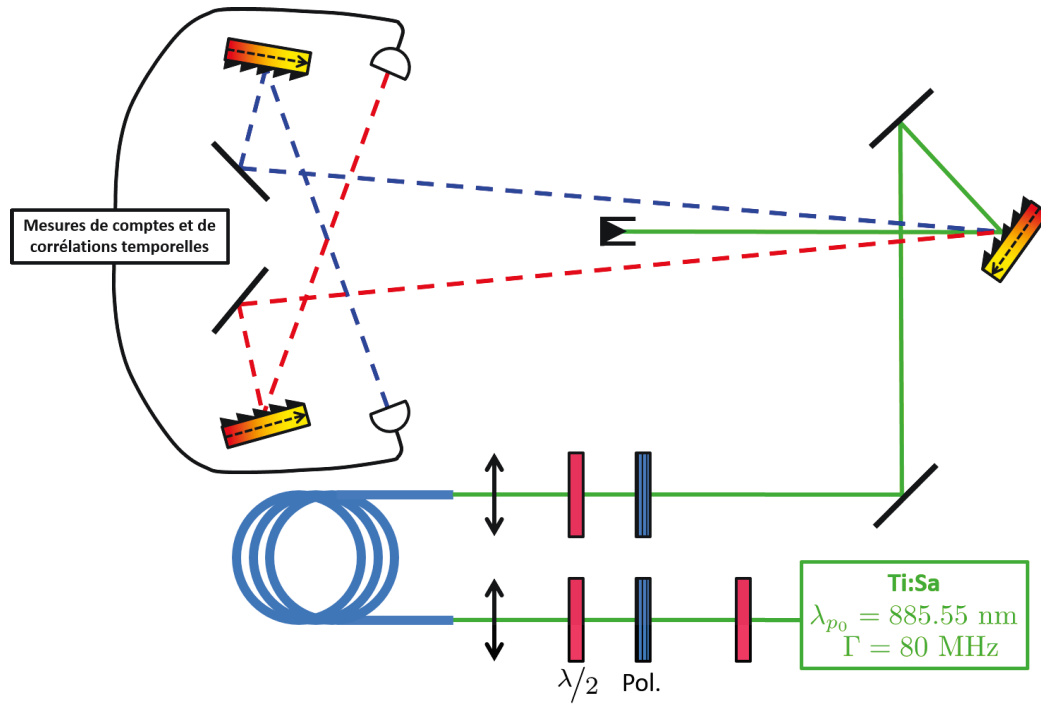
Nous utilisons dans notre expérience un laser impulsif basé sur le pompage continu dans le vert (532 nm) d'un cristal de saphir dopé aux ions titane (Titane-Saphir). La durée des impulsions délivrées est de l'ordre de  $T_0 \sim 1$  ps avec un taux de répétition de  $\Gamma = 80$  MHz, de sorte que vis-à-vis d'un régime continu, et à puissance moyenne équivalente, la puissance crête est  $10^4$  fois supérieure. Ce qui équivaut à une efficacité de mélange à quatre ondes  $10^8$  fois plus grande. L'accordabilité de notre laser nous donne accès à des longueurs d'onde d'émission allant de 700 à 1000 nm. Cette large plage accordable sera un atout notable pour le réglage de notre montage.

Le faisceau de pompe est injecté dans notre fibre par un objectif de microscope, le faisceau de sortie étant récupéré de manière symétrique par le même type d'objectif. Une fois la pompe injectée, la génération de paires de photons se produira spontanément dans notre fibre, et notre objectif final est de parvenir à réaliser des mesures du taux de génération de paires de manière résolue en fréquences signal et idler. Ce genre de mesure implique plusieurs conditions :

- Nous devons être capables de discerner entre elles les paires détectées. À cette fin, comme mentionné en sous-section 3.1, nous nous plaçons en très faible efficacité de génération. Ce régime est aisément atteignable en atténuant la puissance injectée mais implique surtout une très faible proportion de paires en sortie de fibre.
- Nous devons détecter séparément les photons signal et idler, sur des plages spectrales fines et réglables. La seule caractéristique différenciant les photons de paires étant la fréquence, nous opérerons leur séparation par dispersion chromatique sur réseau. Les spectres d'émissions typiques attendus ont une largeur de l'ordre du nanomètre, aussi notre résolution devra-t-elle être inférieure.
- Nous devons relever les corrélations temporelles pour remonter au taux de génération de paires. Les photons effectivement détectés ne provenant pas exclusivement de paires (du fait du bruit inhérent à toute mesure), la mesure de comptes de photons ne suffit pas pour déduire le taux de génération de paires. Ce taux peut être retrouvé en notant que seul le phénomène de mélange à quatre ondes dans notre système est à même de produire des paires de photons corrélés en temps. En relevant les coïncidences entre les deux détecteurs (i.e. deux photons détectés simultanément, respectivement côtés signal et idler) et en mesurant le nombre d'occurrences au fil du temps nous pouvons déduire le taux d'émission de paires de notre fibre.

La séparation des photons de paires de la pompe est réalisée par réflexion sur un réseau de diffraction du faisceau sortant de la fibre, comme nous pouvons le voir sur la figure 3.1. Les photons de pompe sont envoyés dans un piège à lumière, alors que les photons signal et idler suivent des voies dédiées jusqu'à leur injection dans des fibres collectant la lumière. Ces fibres de collection sont directement reliées à leurs détecteurs de photons uniques respectifs, qui nous apportent la mesure du compte de photons incidents au fil du temps ainsi que de corrélations temporelles entre les coups mesurés côté signal et côté idler.

Avant de parvenir aux détecteurs, les faisceaux signal et idler passent chacun sur un miroir puis un second réseau de diffraction. Le miroir ne réfléchit qu'une portion réduite du spectre, diffracté par le premier réseau, tandis que le second réseau disperse davantage avant injection dans la fibre de collection. Du fait de l'ouverture numérique limitée de la fibre, une large part du spectre est effectivement filtrée de sorte que nos détecteurs ne comptent les photons que sur une plage de  $\sim 0.5$  nm. Dans tout ce document, nous parlerons alors de **filtres de détection** pour désigner ce filtrage effectif opéré par la succession d'optiques. Nous notons que la finesse de détection nous prodigue une résolution suffisante pour explorer la structure du spectre d'émission, dont la largeur typique est de l'ordre du nanomètre pour notre fibre.



**Figure 3.1** — Représentation simplifiée de notre montage expérimental. La ligne verte continue correspond au laser de pompe tandis que les traits en pointillés en rouge et bleu correspondent aux trajets des photons signal et idler, respectivement.

Enfin l’usage de deux optiques propres à chaque voie (miroir et réseau) nous donne une totale liberté d’orientation des faisceaux dans l’espace et la possibilité de régler finement la plage spectrale sur laquelle le comptage de photons est effectué. Ceci nous permettra principalement de régler finement la fréquence centrale des filtres de détections. La méthode de réglage sera détaillée plus loin en section 8.2.

Du fait de la faible efficacité de génération, le nombre de paires générées par seconde est très faible (de l’ordre de la centaine par seconde). Dans ces conditions, il est absolument nécessaire de limiter au maximum toute source de bruit dans notre expérience. L’étude systématique de ces sources et les méthodes mises en place pour s’en prémunir seront exposées en section 9.1. Nous noterons que le passage par deux réseaux de diffraction permet une réduction du bruit issu de la diffusion de photons de pompe. D’autre part, après la sortie de la fibre, le nombre d’optiques est réduit au minimum et chacune est choisie pour maximiser la réflectivité à nos longueurs d’onde d’intérêt. Ces précautions permettent de minimiser les pertes de notre montage.

Enfin, nous rappelons que notre fibre est biréfringente et que nous injectons la pompe linéairement polarisée selon l’un de ses axes neutres. Nos paires peuvent alors soit être générées sur le même axe neutre (configuration parallèle) soit sur l’autre (configuration croisée). Afin de garder le contrôle sur la polarisation, soit l’axe de polarisation d’injection et l’axe d’observation, des lames demi-onde<sup>7</sup> ( $\lambda/2$ ) sont insérées en entrée et sortie de fibre.

Le cadre général de l’expérience étant à présent posé, nous présenterons rapidement dans le chapitre suivant la structure de notre modèle théorique décrivant la probabilité de génération de paires par notre fibre.

7. Ces lames sont conçues pour orienter en polarisation la lumière à 850 nm, longueur d’onde assez proche de celles avec lesquelles nous travaillons pour maîtriser la polarisation dans notre expérience.

## Chapitre 4

# Trame du modèle de la génération de paires

Comme précisé en introduction, l'objectif premier de ce travail de thèse est de parvenir à mesurer précisément le spectre d'émission de notre source de paires de photons, mais aussi de développer un modèle analytique pouvant prédire de manière quantitative les résultats de la génération de paires de photons en régime spontané et impulsif dans un guide d'onde. Dans ce chapitre nous introduirons ce modèle, en précisant le cadre dans lequel il s'applique et la procédure selon laquelle il nous permet d'arriver à prédire la probabilité de génération de paires. Enfin nous donnerons l'expression finale de cette probabilité pour le cas de notre fibre.

Notre étude se base sur les travaux de Margaux Barbier [52], cependant une grande part du travail théorique présenté ici consistera à retravailler et compléter le modèle décrivant le mélange à quatre ondes. Tant au niveau de ses prémisses en établissant rigoureusement l'énergie d'interaction lumière-matière, qu'en le prolongeant en étudiant l'influence du profil longitudinal du guide.

Le modèle développé dans ce manuscrit a vocation à rester très général, et applicable tant pour n'importe quel ordre de non-linéarité, que pour n'importe quel type de guide d'onde. Néanmoins, par soucis de simplicité nous nous concentrerons, dans la suite et jusqu'au détail du modèle en partie II, sur notre cas spécifique d'étude de la génération spontanée de paires de photons par mélange à quatre ondes à partir de deux photons d'une même pompe, dans une fibre non linéaire.

### 4.1 Probabilité de génération d'une paire de photons

Dans le cadre de notre modèle, le milieu d'étude<sup>1</sup> sera considéré sans charges ni courants libres, amagnétique et sans pertes à nos fréquences d'intérêt. Sa *réponse* est invariante dans l'espace<sup>2</sup> et dans le temps, ainsi que locale spatialement. La question de la localité dans le temps, équivalent temporel de la dispersion (cf. annexe B.2), est cependant plus sensible. D'une part la réponse non linéaire sera considérée comme instantanée, ce qui équivaut à une dispersion nulle du tenseur de susceptibilité non linéaire<sup>3</sup> (cf. annexe B.3). D'autre part, la réponse linéaire sera non locale dans le temps, ce qui nous permettra de prendre en compte la dispersion linéaire.

---

1. Pour notre cas d'étude, le milieu en question est le liquide remplissant la fibre, dans lequel se concentre la majeure part du champ optique.

2. La réponse du milieu dépend des propriétés *microscopiques* du matériau : à ce niveau le liquide est invariant dans l'espace, i.e. homogène. Cependant la structure de la fibre, inhomogène par nature, fixe les états de polarisations possibles pour les ondes dans le milieu et prodigue une biréfringence de forme.

3. Cette approximation ne serait plus valable dans le cas d'impulsions de durées proches de celle du cycle optique, ou pour la génération de super-continuum, par exemple.

Enfin, pour toute notre étude, nous nous plaçons loin de toute fréquence de résonance du milieu<sup>4</sup>, et le champ incident sera d'intensité bien inférieure à celle des champs atomiques [62].

L'objectif principal du modèle consiste à déterminer la probabilité, notée  $\text{Proba}(\omega, \omega')$ , que, suite à la propagation d'une unique impulsion de pompe dans la fibre<sup>5</sup>, soit générée une paire de photons de fréquences comprises dans des intervalles  $d\omega$  et  $d\omega'$ , centrés en  $\omega$  et  $\omega'$  respectivement.

Puisque les champs signal et idler présentent un nombre très faible de photons, il est nécessaire pour les décrire d'adopter une approche quantique. Tandis que le champ de pompe, intense, pourra être défini classiquement. Ainsi, dans le formalisme de Dirac<sup>6</sup> nous noterons  $|\psi_{s\otimes i}\rangle$  la fonction d'onde décrivant l'association des champs signal et idler. Ces derniers seront décrits par des états de Fock  $|n_\omega\rangle$  caractérisant l'existence de  $n$  photons dans le mode spectral<sup>7</sup> de fréquence centrale  $\omega$  et de largeur  $d\omega$ . En découpant virtuellement ainsi l'espace continu des fréquences en modes distincts, nous pouvons utiliser le formalisme des états de Fock usuellement associé aux variables discrètes (nombre de photons, spins,...).

Une caractéristique importante de notre modèle est qu'il considère les différents champs intervenant dans le phénomène étudié (pompe, signal et idler) comme spectralement *disjoints*. Nous pouvons donc distinguer l'ensemble des modes signal  $\omega_s$  de ceux idler  $\omega_i$ , de sorte que tout état joint des champs signal et idler puisse se décomposer sur une base  $|n_{\omega_s}, m_{\omega_i}\rangle = |n_{\omega_s}\rangle \otimes |m_{\omega_i}\rangle$ . Dès lors, la probabilité qu'existe une paire de photons de fréquences contenues dans les plages  $[\omega_s - \frac{d\omega_s}{2}, \omega_s + \frac{d\omega_s}{2}]$  et  $[\omega_i - \frac{d\omega_i}{2}, \omega_i + \frac{d\omega_i}{2}]$  se note :

$$\text{Proba}(\omega, \omega') = |\langle 1_\omega, 1_{\omega'} | \psi_{s\otimes i} \rangle|^2 d\omega d\omega' \quad (4.1)$$

Cette probabilité dépend du temps  $t$  puisque l'état  $|\psi_{s\otimes i}\rangle$  dépend de l'instant où l'on se place. Or nous souhaitons établir la probabilité qu'une paire de photon ait été générée après passage de l'impulsion dans la fibre. Nous n'avons *a priori* connaissance de l'état des champs qu'avant l'arrivée de l'impulsion (vides de tout photon). Il est donc nécessaire de pouvoir décrire l'évolution dans le temps de cet état.

## 4.2 Évolution temporelle et état final des champs

Afin d'étudier l'évolution temporelle de l'état  $|\psi_{s\otimes i}(t)\rangle$  des champs signal et idler joints, nous nous placerons dans la représentation d'interaction (cf. annexe F.2 concernant les différentes représentations en mécanique quantique), particulièrement adaptée à l'étude d'un système en interaction avec son environnement. Or nous cherchons justement à étudier l'interaction des champs signal-idler avec le milieu que constitue la fibre.

---

4. Dans le cas où l'on se trouve proche de telles fréquences de résonance, l'amplitude et la dispersion des composantes des tenseurs de susceptibilité électrique varient fortement [62, chapitre 3]. Les effets non linéaires d'ordre supérieur ne peuvent plus être négligés, et l'approche perturbative pour l'énergie d'interaction (cf. annexe F.3) que nous allons utiliser n'est plus valide [106].

5. Comme nous l'avons vu en sous-section 3.1, l'intervalle de temps entre le passage d'impulsions successives est de l'ordre de la dizaine de nanosecondes, alors que leur temps de propagation dans la fibre est de l'ordre de la nanoseconde. La réponse du milieu étant invariante dans le temps (homogénéité temporelle), le phénomène de génération d'une paire au passage d'une impulsion est indépendant des autres impulsions.

6. L'annexe F prodigue des rappels du formalisme mathématique de mécanique quantique que nous utilisons dans ce document.

7. Il est à noter que contrairement aux états de Fock  $|n\rangle$  usuels qui sont sans dimension et adressent l'ensemble du champ (de pompe, signal ou idler), ceux-ci concernent un mode spectral spécifique de ce dernier. Nous verrons que puisque nous nous plaçons dans une base continue de modes au sein de chaque champ, les  $|n_\omega\rangle$  portent la dimension de l'inverse d'une fréquence.

En représentation d'interaction, en prenant pour référence temporelle  $t_0 = 0$  l'instant d'entrée de l'impulsion dans la fibre, l'état du système à un instant  $t$  ultérieur est entièrement déterminé par (F.5) [105] :

$$|\psi_{s\otimes i}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \widehat{H}_{int}(t') dt'} |\psi_{s\otimes i}(0)\rangle \quad (4.2)$$

où  $\widehat{H}_{int}(t)$  est l'Hamiltonien d'interaction.

Pour déterminer  $\widehat{H}_{int}(t)$ , il nous faut souligner que l'approche en représentation d'interaction pose une distinction sur l'évolution temporelle du système : d'une part la fonction d'onde du système évolue dans le temps comme le ferait un système isolé, ce qui ici correspond à la propagation libre des photons dans le milieu ; d'autre part l'Hamiltonien  $\widehat{H}_{int}$  traduit l'interaction du système avec son environnement. Dans toute notre étude, nous intégrerons la dispersion chromatique dans la propagation libre des photons, en désignant sous le terme d'interaction tous les effets susceptibles de modifier les champs par échange d'énergie.

Ainsi est-il nécessaire d'établir l'Hamiltonien total du système afin d'y distinguer  $\widehat{H}_{int}$  de la part correspondant à la propagation libre.

Nous verrons en sous-section 6.1.3 que  $\widehat{H}_{int}$  correspond alors à la part non linéaire de l'Hamiltonien total ( $\widehat{H}_{int} = \widehat{H}_{NL}$ ). Or les effets non linéaires que nous allons considérer sont très faibles, de sorte qu'une approche perturbative permet de simplifier (4.2) (cf. annexe F.3) en :

$$|\psi_{s\otimes i}(t)\rangle \simeq \left( \widehat{\mathbf{1}} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \widehat{H}_{int}(t') dt' \right) |\psi_{s\otimes i}(0)\rangle$$

Pour tout  $t \leq 0$ , les champs signal et idler sont vides de tout photon<sup>8</sup>, si bien que l'on peut poser  $|\psi_{s\otimes i}(0)\rangle = |0, 0\rangle$  et remplacer la borne inférieure d'intégration par  $-\infty$ .

Enfin en notant  $T_{prop}$  le temps de propagation de l'impulsion dans la fibre, pour  $t > T_{prop}$  plus aucune interaction non linéaire n'a lieu<sup>9</sup>, et la borne supérieure d'intégration peut être remplacée par  $+\infty$ . Nous définissons ainsi l'état final  $|\psi_{s\otimes i, fin}\rangle$  de la paire pour un temps  $t > T_{prop}$  :

$$|\psi_{s\otimes i, fin}\rangle \equiv |\psi_{s\otimes i}(t \geq T_{prop})\rangle \simeq |0, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{H}_{int}(t') dt' |0, 0\rangle \quad (4.3)$$

L'Hamiltonien d'interaction regroupant tous les phénomènes non linéaires possibles, une simplification est nécessaire pour se centrer sur ceux qui nous intéressent. Pour notre étude, seul l'ordre 3 de non-linéarité est important, l'ordre 2 étant nul de fait de la centrosymétrie du milieu, et les ordres supérieur à 3 restant négligeables. Au sein même des processus d'ordre 3 existants, nous nous concentrerons essentiellement sur le mélange à quatre ondes impliquant l'annihilation de deux photons d'une même pompe (intense et considérée classiquement) pour générer une paire de photons signal et idler (dont les champs font l'objet d'une approche quantique). Par ailleurs, ces trois champs (pompe, signal et idler) seront considérés comme disjoints spectralement, condition qui facilite notre approche théorique mais constitue aussi une nécessité expérimentale si nous voulons pouvoir séparer efficacement les photons des paires produites de ceux de pompe, beaucoup plus nombreux.

8. On peut noter que dans le cas d'une tomographie stimulée [104] l'Hamiltonien d'interaction reste le même mais l'état initial se voit déjà rempli de photons dans l'un des deux champs (le *seed*), qui peut contenir  $N$  photons ( $|0, N\rangle$ ) ou correspondre à un état cohérent ( $|0, \alpha\rangle$ ).

9. Cependant, en pratique, les champs interagissent après le passage dans la fibre : les photons passent par une série d'optiques avant d'être détectés. Toutefois l'étude développée dans [107] nous montre que l'effet global en résultant consiste en une atténuation de la proportion de paires détectées. Cette atténuation est essentiellement dépendante du montage de détection, aussi nous intéresserons-nous ici à l'émissivité intrinsèque de la source. Autrement dit à la quantité de paires présentes à la sortie de la fibre. Bien sûr, la comparaison quantitative entre simulation et expérience impliquera de mesurer et prendre en compte les pertes de notre montage, de la sortie de la fibre à la détection.



Les champs en eux-même seront considérés suffisamment fins spectralement pour négliger la dispersion de vitesse de groupe en leur sein. Autrement dit, nous considérons en première approximation que toutes les composantes spectrales d'un champ (pompe, signal ou idler) se déplacent à une même vitesse de groupe. Ce qui, concernant la pompe, implique que les impulsions se propagent dans la fibre sans subir de déformation temporelle. Nous noterons l'indice et la vitesse de groupe de la pompe  $n_{gp_0} \equiv n_g(\omega_{p_0})$  et  $v_{gp_0} = c/n_{gp_0}$ , cette dernière correspondant à la vitesse de propagation de l'enveloppe des impulsions.

Dans le même ordre d'idée, nous considérerons un même indice de réfraction pour les composantes spectrales d'un même champ (excepté dans l'accord de phase comme nous le verrons dans la suite). Nous noterons  $n_{j_0} \equiv n(\omega_{j_0})$ , les indices associés aux champs de pompe, signal et idler ( $j \in \{p, s, i\}$ ), pris à leur fréquences centrales respectives.

Enfin, la dispersion non linéaire, i.e. la dépendance à la fréquence des tenseurs électro-optiques d'ordre  $n > 1$ , sera entièrement négligée en se plaçant dans l'approximation d'une réponse instantanée de la non-linéarité du milieu<sup>10</sup>.

Notre modèle, dont le développement constituera la partie II, nous permettra d'établir l'expression du Hamiltonien non linéaire propre à notre source, et donc l'état final des champs après passage d'une impulsion de pompe :

$$|\psi_{s \otimes i, fin}\rangle = |0, 0\rangle + iK \gamma_p \mathcal{E}_{imp} L \times \int_{\omega_s} \int_{\omega_i} \sqrt{\omega_s \omega_i} [\tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0}] (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}) \int_L e^{i\Delta k x} dx |1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle d\omega_s d\omega_i \quad (4.4)$$

Où interviennent notamment :

- $\omega_{p_0}$  la fréquence centrale du spectre de pompe.
- $K$  un préfacteur restant à déterminer en établissant la forme complète de l'Hamiltonien non linéaire. Sa détermination, dont nous discuterons en section 4.4, constituera une grande part de notre étude.
- le coefficient  $\gamma_p$  et l'indice  $n_2$  non linéaires, à la fréquence centrale de pompe :

$$\gamma_p = \frac{n_2 \omega_{p_0}}{c A_{eff}} \quad n_2 = -\frac{3}{4} \eta^{(3)} \frac{(\epsilon_0 n_{p_0}^3)^2}{c} = \frac{3}{4} \frac{\chi^{(3)}}{\epsilon_0 n_{p_0}^2 c}$$

avec  $\eta^{(3)}$  la permittivité diélectrique non linéaire inverse<sup>11</sup>,  $\chi^{(3)}$  la susceptibilité non linéaire<sup>11</sup> d'ordre 3 et  $A_{eff}$  l'aire effective du mode spatial fondamental de la fibre, de profil gaussien et dans lequel se trouvent tous nos champs.

- $\mathcal{E}_{imp}$  l'énergie de l'impulsion de pompe.
- $L$  la longueur effective<sup>12</sup> du guide.
- $\tilde{G}_{T_0}(\omega)$  le spectre en amplitude de l'impulsion de pompe de durée  $T_0$ .
- le désaccord de phase généralisé, donné par :

$$\Delta k = 2\beta(\omega_{p_0}) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i) + \frac{\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}}{v_{gp_0}}$$

avec  $\beta(\omega)$  la constante de propagation, correspondant à l'impulsion.

10. Le lien direct entre approximation d'une réponse instantanée et le fait de négliger la dispersion est mis en exergue dans l'annexe B.7.

11. Les définitions des tenseurs électro-optique et leurs relations sont présentées en annexe B. En approximation de la réponse instantanée pour l'ordre 3 (cf. annexe B.7),  $\eta^{(3)}$  et  $\chi^{(3)}$  sont liés par  $\eta^{(3)} = -\epsilon_0 \eta^{(1)} \chi^{(3)} \eta^{(1)} \eta^{(1)} \eta^{(1)}$ , avec  $\eta^{(1)}$  la permittivité diélectrique inverse d'ordre 1, elle-même liée par  $\eta^{(1)} = (\epsilon_0 (1 + \chi^{(1)}))^{-1}$  à la susceptibilité linéaire  $\chi^{(1)}$ .

12. Notre fibre étant considérée sans pertes dans toute notre étude, nous identifierons la longueur effective à la longueur totale de la fibre.

Nous pouvons voir que l'état final (4.4) est la combinaison d'un état  $|0, 0\rangle$  pour lequel aucune paire de photon n'a été produite, et d'un continuum d'états  $|1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle$  traduisant la génération de paires dans des fenêtres spectrales précises. Cette superposition, d'un état où toute paire est absente avec des états où une paire a été générée, nous rappelle que les processus non linéaires à leur origine sont des phénomènes intrinsèquement stochastiques, dont le résultat ne peut être décrit que dans le cadre d'une approche probabiliste.

### 4.3 Amplitude et intensité spectrales jointes

Nous pouvons cependant à partir de l'état final (4.4) des champs calculer la probabilité (4.1) de générer une paire lors du passage d'une impulsion de pompe :

$$\text{Proba}(\omega, \omega') = |\text{JSA}(\omega, \omega')|^2 d\omega d\omega'$$

où on introduit l'amplitude spectrale jointe (JSA) :

$$\text{JSA}(\omega, \omega') = \langle 1_{\omega}, 1_{\omega'} | \psi_{s \otimes i, fin} \rangle = \mathbf{a}(\omega, \omega') \times \mathbf{g}(\omega, \omega') \times \mathbf{f}(\omega, \omega')$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\omega, \omega') &= i K \gamma_p \mathcal{E}_{imp} L \\ \mathbf{g}(\omega, \omega') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0} \right] (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}) \\ \mathbf{f}(\omega, \omega') &= \frac{1}{L} \int_L e^{i\Delta k x} dx \end{aligned}$$

Cette division en trois termes nous permet de séparer l'influence du profil spectral de pompe intervenant dans  $\mathbf{g}$ , celle du profil spatial du guide se traduisant dans  $\mathbf{f}$  et l'amplitude du phénomène contenue dans  $\mathbf{a}$ . En effet, on notera que  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{f}$  sont normalisés et que s'y retranscrivent les conditions de conservation de l'énergie et d'accord de phase :  $\mathbf{g}$  est maximum et égal à 1 pour  $\omega + \omega' - 2\omega_{p_0} = 0$ , et de même  $\mathbf{f}$  est maximum et égal à 1 pour  $\Delta k = 0$ .

Tout au long du développement de notre modèle nous travaillerons sur la JSA qui porte l'information de phase, importante pour l'étude de la non uniformité du guide (qui sera l'objet de la partie IV). Toutefois, dès qu'il sera nécessaire d'établir la probabilité de génération, notamment pour confronter simulations et mesures expérimentales, nous utiliserons l'intensité spectrale jointe (JSI), donnée par :

$$\text{JSI}(\omega, \omega') = |\text{JSA}(\omega, \omega')|^2 = \mathcal{A}(\omega, \omega') \times \mathcal{G}(\omega, \omega') \times \mathcal{F}(\omega, \omega') \quad (4.6)$$

où  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  sont les modules carrés respectifs de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{f}$ .

La JSI constitue la densité de probabilité de génération d'une paire dans l'espace joint (bidimensionnel) des fréquences signal et idler. Ainsi la probabilité de génération se note simplement :

$$\text{Proba}(\omega, \omega') = \text{JSI}(\omega, \omega') d\omega d\omega'$$

L'amplitude et l'intensité spectrales jointes constituent l'épine dorsale de notre modèle, qui détermine entièrement l'état final des champs après propagation et la probabilité de générer une paire de photons. Ainsi, l'ensemble des développements théoriques qui seront présentés dans ce manuscrit auront pour but, d'une part d'établir sous sa forme générale puis spécifique à notre étude la forme de la JSA/JSI, d'autre part d'étudier ses propriétés pour le cas de guides non uniformes.

Comme nous le verrons plus loin, la JSI nous permet de déterminer directement le spectre d'émission de paires attendu, en terme de taux de génération. Toutefois, pour obtenir une prédiction *quantitative* de ce taux, la détermination du préfacteur  $K$  est primordiale.

## 4.4 Détermination quantitative du taux de génération de paires

La détermination de la constante  $K$  intervenant dans l'état final des paires (4.4) dépend entièrement du Hamiltonien non linéaire (qui correspond au Hamiltonien d'interaction) posé pour le système.

Afin d'illustrer notre propos, nous posons cet Hamiltonien sous sa forme très générale<sup>13</sup> la plus usitée :

$$H_I = \int_V C \epsilon_0 \chi^{(n)} E^{n+1} d^3\vec{r} \quad (4.7)$$

avec  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide,  $\chi$  la susceptibilité électrique du matériau,  $E$  le champ électrique et  $V$  le volume de quantification.

Nous voyons ici que tout le problème d'une description quantitative tient à la détermination de la constante  $C$ , dépendant de l'ordre  $n$  de la non-linéarité. Nous relevons dans la littérature qu'un tel préfacteur peut ne pas être mentionné, que ce soit pour une non-linéarité du second [108, 105, 96] ou troisième ordre [55]. Dans d'autres cas, ce paramètre est considéré comme une inconnue, ajustable pour correspondre à l'expérience [51, 109]. Enfin certaines références le déterminent comme égal à  $\frac{n}{n+1}$  [110, 111], ou à  $\frac{1}{n+1}$  [62, p.37].

Si la description qualitative reste la même quel que soit le préfacteur utilisé, il est difficile, devant la "diversité" des Hamiltonien apportée par la littérature, de déterminer quelle approche est correcte pour décrire quantitativement l'émission de notre source. Comme nous le verrons, une erreur d'un facteur  $n$  entraîne une différence d'un facteur  $n^2$  dans la prédiction de la quantité de paires émises. Soit, pour une non-linéarité d'ordre 3, quasiment un ordre de grandeur de différence.

Une première approche quantitative pour notre cadre d'étude fut établie par [52] en se basant sur l'Hamiltonien de [62]. Dans ce modèle, l'énergie d'interaction, qui correspond à l'Hamiltonien d'interaction, est directement posée, tandis que tout le développement théorique se base sur le champ électrique  $\vec{E}$ , sur lequel est opéré la quantification (étape inévitable pour décrire nos champs comportant peu de photons). Nous rapportons ici la forme de la JSI résultante (équation (2.5.3))<sup>14</sup>. En rappelant que la JSI (4.6) est le produit de trois termes, nous avons avec nos notations<sup>15</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega, \omega') &= \left( \frac{n_{g_{p_0}} \sqrt{n_{g_{s_0}} n_{g_{i_0}}} \sqrt{\frac{\omega \omega'}{\omega_{p_0}^2}} \gamma_p \mathcal{E}_{imp} L \right)^2 \\ \mathcal{G}(\omega, \omega') &= \left[ \tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0} \right]^2 (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}) \\ \mathcal{F}_{uni}(\omega, \omega') &= \text{sinc}^2 \left( \Delta k \frac{L}{2} \right) \end{aligned}$$

avec  $n_{s_0}$  et  $n_{i_0}$  les indices de réfraction pris respectivement à  $\omega_{p_0}$  et aux fréquences signal et idler  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  respectant à la fois la conservation de l'énergie et l'accord de phase avec  $\omega_{p_0}$ . De même,  $n_{g_{p_0}}$ ,  $n_{g_{s_0}}$  et  $n_{g_{i_0}}$  correspondent aux indices de groupe, pris respectivement à  $\omega_{p_0}$ ,  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$ .

Au cours du déroulement de la présente thèse, l'article [59] vint mettre en cause ces modèles théoriques déjà établis. Celui établi en [52], bien qu'encore apte à décrire correctement les phénomènes en jeu de manière qualitative, se révèle être incorrect pour en faire une prédiction quantitative,

13. À des fins de simplification, nous posons une forme simplifiée de l'Hamiltonien d'interaction, sans préciser les dépendances de chaque terme ou le caractère tensoriel de la susceptibilité  $\chi$  et sans chercher à distinguer chaque terme de champ.

14. Nous corrigeons au passage une coquille dans le développement de la JSI, lors du passage de l'équation (2.4.13) à (2.4.14) dans [52], impliquant un oubli d'un terme  $n_s n_i$  au dénominateur.

15. Nous noterons par ailleurs que, du fait de définitions de la normalisation différentes entre [52] et la présente thèse, le spectre  $\tilde{G}_{T_0}$  utilisé ici correspond à un facteur  $(2\pi)^{\frac{1}{4}}$  près à celui que nous introduirons en sous-section 7.3.1. Toutefois, le terme  $\mathcal{G}$ , tant dans la version de [52] que dans celle que nous établirons en section 7.2, restera le même.

principalement du fait de l'usage de  $\vec{E}$  comme champ fondamental pour la quantification. En effet, comme nous le verrons en partie suivante, en présence de non-linéarités, le champ correct pour établir la quantification est le champ d'induction électrique  $\vec{D}$ .

Une part importante de ce travail de thèse consista donc en une refonte du modèle théorique décrivant la génération de paires. En se basant sur le champ  $\vec{D}$ , notre Hamiltonien d'interaction, dont l'établissement occupera une grande part de nos développements théoriques, s'écrit :

$$\hat{H}_{NL} = \sum_{n>1} \frac{1}{n+1} \iiint_V \hat{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \hat{D}^{\otimes n} d^3\vec{r} \quad (4.8)$$

Dans cette expression très générale, nous prenons en compte tout les ordres  $n$  de non-linéarité. Les  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$  sont des tenseurs, d'ordre  $n+1$ , correspondant à la permittivité diélectrique inverse, dont l'application sur  $n$  termes de champ donne un vecteur. Leur définition exacte est exposée en annexe B.5.

Ainsi, vis-à-vis de l'expression usuelle du Hamiltonien non linéaire (4.7), le champ  $\vec{D}$  remplace le champ  $\vec{E}$  et la permittivité diélectrique inverse se substitue à la susceptibilité électrique.

Cet Hamiltonien et la quantification sur le champ  $\vec{D}$  nous mèneront à établir une nouvelle formulation de l'amplitude et l'intensité spectrales jointes. Notre JSA finale prendra alors la forme :

$$\text{JSA}(\omega, \omega') = \langle 1_\omega, 1_{\omega'} | \psi_{s \otimes i, fin} \rangle = \mathbf{a}(\omega, \omega') \times \mathbf{g}(\omega, \omega') \times \mathbf{f}(\omega, \omega') \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{a}(\omega, \omega') = -\frac{i}{8\pi} \gamma_p \mathcal{E}_{imp} L \frac{\sqrt{n_{s_0}^3 n_{i_0}^3}}{n_{p_0}^3} \frac{\sqrt{\omega \omega'}}{\omega_{p_0}} \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{g}(\omega, \omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0} \right] (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}) \quad (4.9c)$$

$$\mathbf{f}(\omega, \omega') = \frac{1}{L} \int_L e^{i\Delta k x} dx \quad (4.9d)$$

où nous pouvons souligner que le terme d'amplitude  $\mathbf{a}$  dépend faiblement de la variation des fréquences, ces dernières apparaissant sous la forme d'un rapport dont la valeur reste très proche de 1. De même, la variation des indices de réfraction entre les champs, qui apparaissent aussi dans un rapport proche de 1, n'influe que peu l'amplitude  $\mathbf{a}$ .

À l'inverse, le désaccord de phase dans  $\mathbf{f}$  dépend essentiellement de la différence des constantes de propagation :  $2\beta(\omega_{p_0}) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i)$ . En se souvenant que  $\beta(\omega) \equiv \frac{n(\omega)\omega}{c}$ , on comprend qu'ici la variation d'indice entre les champs, au contraire, sera importante<sup>16</sup>. Par conséquent, de manière générale les indices peuvent être approximés comme identiques *sauf* dans le désaccord de phase. Néanmoins, nous ne simplifierons pas le ratio des indices dans (4.9b) pour garder une forme applicable à tous les cas de figure.

Le cadre général de notre modèle théorique ayant été établi, nous présenterons le détail de son développement dans la partie suivante, en commençant par présenter les arguments ayant motivé le changement de notre modèle.

---

16. On peut le comprendre plus aisément en ré-utilisant le développement (2.2)  $\beta(\omega) = cst_1 + cst_2 \omega + {}^{2D}(\omega)/cL$ , et en l'insérant dans la différence des  $\beta$ . Les termes constants ( $cst_1$ ) s'annulent, de même que le terme linéaire (en  $cst_2$ ) à la conservation de l'énergie ( $2\omega_{p_0} - \omega_s - \omega_i = 0$ ) de sorte que seuls subsistent les termes d'ordres supérieurs. L'accord de phase est donc très sensible à la variation d'indice entre les champs.



## Deuxième partie

# Modèle semi-classique de la génération spontanée de paires de photons par mélange à quatre ondes



## Chapitre 5

# Changement du modèle théorique

L'un des objectifs premiers dans l'établissement de la théorie afférente à notre expérience est de parvenir à une prédiction *quantitative* de l'émission de notre source de paires de photons. Cependant, comme nous l'avons vu en partie précédente, on peut constater dans la littérature une certaine variabilité dans la formulation de l'Hamiltonien, vis-à-vis de son préfacteur. Or cet Hamiltonien sert de base pour établir l'état final des paires et *in fine* leur probabilité et taux de génération. Une erreur, même légère, dans la détermination de ce préfacteur, peut rapidement entraîner d'importants écarts entre prédictions théoriques et résultats expérimentaux.

Par ailleurs, pratiquement toutes les références citées précédemment posent un Hamiltonien d'interaction se basant sur le champ électrique  $\vec{E}$ , considéré comme le champ fondamental au sens où c'est sur lui que doit s'opérer la quantification.

Or, l'idée récemment avancée par la référence [59] est que, lors d'un développement théorique ayant pour objectif de quantifier le champ électromagnétique, et en présence de non-linéarités, le champ à quantifier ne doit pas être le champ électrique  $\vec{E}$  usuel mais le champ induction électrique  $\vec{D}$ . L'argument principal soutenant cette assertion sera présenté plus loin en section 5.2. Ce dernier, bien que simple dans sa formulation, est suffisamment convaincant pour nous avoir conduit à opérer une refonte de notre modèle théorique. En effet, ce changement de champ est lourd en conséquence : tout le modèle développé en [52] s'étant basé sur le champ  $\vec{E}$ , c'est l'ensemble de nos développements théoriques qui doivent être revus.

De plus, cette refonte nous donne l'occasion d'ancrer notre modèle sur des bases plus fondamentales. Ainsi, au lieu de poser la forme de l'Hamiltonien, celle-ci sera déduite en partant d'une description de la dynamique du champ électromagnétique en mécanique Lagrangienne. La dispersion chromatique, point essentiel de notre modèle mais particulièrement complexe à intégrer, fera également l'objet d'un développement à part.

Nous attirons par ailleurs l'attention du lecteur sur les précautions à prendre par rapport à la définition adoptée pour la transformée de Fourier : selon la définition choisie des facteurs  $2\pi$  ou  $\sqrt{2\pi}$  peuvent être introduits, et il devient critique, lors de l'emprunt d'une expression à une référence, de s'assurer d'utiliser la même définition de la transformée de Fourier. Sur tout le long du développement de notre modèle, nous suivrons la même définition de la transformée de Fourier (énoncée en annexe A.5) afin d'éviter cet écueil.

Nous nous baserons en large part sur le modèle développé dans les références <sup>1</sup> [114, 63]. Ce modèle

---

1. On peut noter que les développements portés par ces références reposent sur des bases plus anciennes [112, 113], initialement établies pour étudier la physique de solitons ou le *squeezing* de la lumière. Nous notons cependant que ces dernières sont antérieures aux premières expériences de paires de photons [30, 29] et n'ont, jusqu'à récemment, pas été ré-utilisées pour décrire la génération de paires.



pose de manière assez complète les bases quantiques de l'optique non linéaire en s'appuyant sur le champ  $\vec{D}$ . Néanmoins, il ne traite pas de la génération de paires de photons, pour laquelle cette approche n'a, à notre connaissance, jamais été utilisée. Nous l'adapterons donc à notre cas de figure et nous en profiterons pour détailler davantage les calculs de cette approche, somme toute inhabituelle en optique non linéaire.

Puisque nous repartirons directement du champ  $\vec{D}$ , il est judicieux, avant toute chose, de faire de brefs rappels d'électromagnétisme.

## 5.1 Rappels d'électromagnétisme

Dans l'établissement de notre nouveau modèle basé sur le champ  $\vec{D}$ , nous aurons besoin d'une part des équations du mouvement du système que constitue le champ électromagnétique, mais aussi de l'expression de l'énergie contenue dans ce champ. À cette fin, nous rappelons ici les relations de base de l'électromagnétisme liant les champs, puis nous établirons rapidement l'énergie classique du champ, tant sous sa forme en fonction de  $\vec{E}$  qu'en fonction de  $\vec{D}$ .

### 5.1.1 Équations de Maxwell et lois de comportement

Nous commençons par rappeler les relations fondamentales de l'électromagnétisme que sont les équations de Maxwell. Nous les prendrons ici sous leur forme macroscopique la plus générale :

$$\text{Maxwell-Gauss électrique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \quad (5.1)$$

$$\text{Maxwell-Gauss magnétique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.4)$$

où nous introduisons :

- $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du vide, liés par la relation  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.
- $\vec{E}$  le champ électrique (N.C<sup>-1</sup>).
- $\vec{D}$  l'induction électrique (C.m<sup>-2</sup>), aussi appelé champ déplacement électrique ou densité de flux électrique.
- $\vec{H}$  l'excitation magnétique (A.m<sup>-1</sup>), aussi appelée champ magnétique.
- $\vec{B}$  l'induction magnétique (T), aussi appelée densité de flux magnétique.  
En pratique la plupart des matériaux étant amagnétiques ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ), par abus de langage  $\vec{B}$  est souvent nommée champ magnétique.
- $\rho_l$  la densité de charges libres<sup>2,3</sup>.
- $\vec{J}_l$  la densité de courant libre<sup>2,3</sup>.

Par ailleurs nous relevons que tout les termes introduits ici sont réels et dépendent du temps et de l'espace (propriétés du vide excepté).

---

2. En approche macroscopique sont distinguées les charges électriques liées aux noyaux atomiques (électrons de valence et de cœur) qui ne peuvent se déplacer macroscopiquement, de celles qui le peuvent, dites charges libres. Ces dernières peuvent collectivement induire des densités de charges et des courants au niveau macroscopique, tandis que pour traduire les effets associés aux charges libres on introduit les champs macroscopiques  $\vec{P}$  et  $\vec{M}$ .

3.  $\vec{J}_l$  et  $\rho_l$  sont liés par la conservation de la charge, aussi appelée équation de continuité :  $\partial_t \rho_l = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_l$ .

Les équations de Maxwell constituant un système contenant plus de variables que d'équations, il est nécessaire d'introduire des relations supplémentaires entre les champs. Celles-ci, appelées lois de comportement, caractérisent la réponse d'un milieu de propagation donné. Ces lois peuvent, selon les matériaux, devenir très complexes. Cependant, bon nombre d'approximations raisonnables et valables pour la majorité des matériaux permettent d'en obtenir une version simplifiée.

Ainsi pour le cas d'un matériau **sans pertes, pris dans le cadre de l'approximation dipolaire et dont la réponse est homogène dans l'espace et le temps, ainsi que locale spatialement**, nous retrouvons les lois de comportement usuelles :

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})\end{aligned}\tag{5.5}$$

Ici, les premiers termes des membres de droite traduisent la propagation du champ électromagnétique dans le vide, tandis que la polarisation  $\vec{P}$  et la magnétisation  $\vec{M}$  portent la réponse du matériau.

Pour toute notre étude, nous nous placerons dans une situation de champ fort. C'est-à-dire dans laquelle son intensité devient telle que les différentes ondes se propageant peuvent, via le milieu, interagir entre elles. Les champs  $\vec{P}$  et  $\vec{M}$  peuvent alors être des fonctions d'ordre de puissance supérieur à 1 de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , respectivement<sup>4</sup>. On parle alors de non-linéarité.

Nous soulignons que la réponse du milieu peut ici être non locale dans le temps, i.e.  $\vec{P}$  et  $\vec{M}$  pris à un temps  $t$  peuvent dépendre respectivement de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à des instants antérieurs. Cette non-localité temporelle est la traduction directe, dans l'espace temporel, de la dispersion dans l'espace des fréquences.

Enfin, comme la majorité des matériaux, notre milieu d'étude est considéré comme parfaitement **amagnétique** ( $\vec{M} = \vec{0}$ ). Par ailleurs, il sera aussi pris comme un diélectrique **exempt de charges et courants libres** ( $\rho_l = 0$  et  $\vec{J}_l = \vec{0}$ ). Cette dernière caractéristique sera cependant prise en compte plus tard,  $\vec{J}_l$  nous étant utile pour établir l'énergie du champ comme nous allons voir dans la suite.

### 5.1.2 Énergie du champ électromagnétique

Pour établir l'expression classique de l'énergie contenue dans le champ électromagnétique, nous suivrons l'approche usuelle débutant par l'expression macroscopique du travail du champ électromagnétique sur les charges contenues dans le matériau [116, partie 6.7] :

$$\iiint_V \vec{J}_l \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r}$$

On peut donc écrire, en utilisant successivement l'équation de Maxwell-Ampère (5.4), l'identité vectorielle  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H})$  et l'équation de Maxwell-Faraday (5.3), et en se rappelant que le produit scalaire est commutatif, que :

$$\iiint_V \vec{J}_l \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r} = \iiint_V \left( -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d^3\vec{r}$$

---

4. Nous négligeons ici les couplages croisés entre parts électrique et magnétique, propres aux matériaux bianisotropiques ou bi-isotropiques [115].

Soit le théorème de Poynting décrivant la conservation de l'énergie<sup>5</sup> :

$$-\iiint_V \vec{J}_l \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r} - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \, d^3\vec{r} = \iiint_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d^3\vec{r} \quad (5.6)$$

Cette expression montre que la variation dans le temps de l'énergie contenue dans le champ électromagnétique dans un volume  $V$  est égale au travail effectué par les champs sur la distribution de charge dans ce volume, plus le flux d'énergie entrant ou sortant :

- Le premier terme du membre de gauche correspond au travail effectué par le champ électromagnétique. En l'absence de charges libres, celui-ci est nul.
- Pour le second terme du membre de gauche, on a le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (5.7)$$

qui correspond au flux d'énergie directionnel (dimension d'une énergie par unité de temps par unité de surface) du champ électromagnétique. Sa divergence correspond donc au flux d'énergie quittant (ou entrant) le volume  $V$ .

- Enfin le membre de droite caractérise la variation temporelle de l'énergie du champ dans le volume.

Pour ce dernier terme, la somme sous l'intégrale constitue donc la variation de la densité locale d'énergie du champ. On en tire directement la densité locale d'énergie contenue dans le champ électromagnétique à un instant  $t$  par :

$$U = \int_{-\infty}^t \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] dt'$$

Où on peut directement distinguer la part magnétique et électrique de l'énergie, en posant que les champs et l'énergie sont nuls pour tout instant  $t' < 0$  :

$$U = \underbrace{\int_0^{\vec{B}} \vec{H}(\vec{B}') \cdot d\vec{B}'}_{U_M} + \underbrace{\int_0^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D}') \cdot d\vec{D}'}_{U_E}$$

En considérant un matériau amagnétique tel que le nôtre, on a simplement  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ . D'autre part, pour simplifier le problème, nous négligeons ici la dispersion, tous ordres confondus. Nous nous plaçons ainsi dans l'approximation de la réponse instantanée du milieu, exposée en annexe B.7. Nous pouvons alors utiliser le développement de Taylor (B.20) de  $\vec{E}$  en fonction de  $\vec{D}$  :

$$\vec{E}(t) = \sum_{n>0} \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n}(t) \quad (5.8)$$

où les  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$  constituent les tenseurs permittivité diélectrique inverse<sup>6</sup>.

Nous obtenons ainsi la densité locale d'énergie du champ électromagnétique, exprimée en fonction de  $\vec{B}$  et  $\vec{D}$ , et en usant de la propriété d'intégration démontrée en annexe A.2 :

$$U = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \quad (5.9)$$

5. Une autre forme de (5.6), utilisant les lois de comportement (5.5), permet de visualiser plus clairement les différentes formes sous lesquelles peut être stockée l'énergie [117, partie 3.5.2] :

$$-\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \, d^3\vec{r} = \underbrace{\iiint_V \vec{J}_l \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r}}_{\text{amortissement}} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\iiint_V \left( \frac{\mu_0}{2} \vec{H}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \right) d^3\vec{r}}_{\text{énergie du champ}} + \underbrace{\iiint_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d^3\vec{r}}_{\text{énergie de polarisation}} + \underbrace{\iiint_V \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} d^3\vec{r}}_{\text{énergie de magnétisation}}$$

6. Les définitions des tenseurs électro-optiques sont détaillées en annexe B.

Alternativement, la densité locale d'énergie peut s'écrire en fonction des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ . On fait l'intégration par parties :

$$\int_0^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D}') \cdot d\vec{D}' = \vec{E} \cdot \vec{D} - \int_0^{\vec{E}} \vec{D}(\vec{E}') \cdot d\vec{E}'$$

Et par le développement de Taylor de (B.19) de  $\vec{D}$  en fonction de  $\vec{E}$  :

$$\vec{D}(t) = \sum_{n>0} \epsilon^{(n)} \vec{E}^{\otimes n}(t) \quad (5.10)$$

avec  $\epsilon^{(n)}$  les tenseurs permittivité diélectrique<sup>6</sup>. On a alors la densité locale d'énergie du champ :

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 + \sum_{n>0} \frac{n}{n+1} \vec{E} \cdot \epsilon^{(n)} \vec{E}^{\otimes n}$$

Ce qui, dans un milieu amagnétique, nous donne en utilisant la susceptibilité électrique<sup>6</sup>  $\chi^{(n)}$  :

$$U = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \epsilon_0 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} \vec{E} \cdot \chi^{(n)} \vec{E}^{\otimes n} \quad (5.11)$$

Nous avons ainsi établi deux formulations de l'énergie contenue dans le champ, (5.9) et (5.11), en absence de dispersion, auxquelles nous référer dans la suite pour vérifier que nous retrouvons bien l'énergie classique. Ces expressions vont notamment nous être utiles directement dans la section suivante pour mettre en lumière certaines erreurs apportées par la quantification sur le champ  $\vec{E}$ .

## 5.2 Détermination du champ électrique fondamental

Dans cette section, nous mettrons en avant l'erreur provoquée lors du choix du champ  $\vec{E}$ , mise en évidence par [59], et justifiant notre démarche qui consiste à développer une théorie autour du champ  $\vec{D}$ . Le problème tient essentiellement, lors d'une démarche de quantification en présence d'interactions non linéaires, au choix des champs ( $\vec{B}$  ou  $\vec{H}$  pour la part magnétique,  $\vec{E}$  ou  $\vec{D}$  pour celle électrique) sur lesquels est opérée ladite quantification.

Nous considérerons toujours des matériaux amagnétiques, de sorte que l'excitation magnétique et le champ magnétique soient pratiquement similaires ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ). Le problème ne se pose donc plus pour la part magnétique et nous utiliserons le champ  $\vec{B}$  dans toute la suite. La part électrique ne nous permet pas la même simplicité puisqu'elle est le siège des non-linéarités.

Afin de déterminer le champ correct entre  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  pour la quantification, il est nécessaire de repartir de la méthode de quantification canonique de Dirac [114], que nous détaillerons au chapitre 6. Celle-ci commence par la détermination du champ (potentiel-vecteur  $\vec{A}$  ou potentiel-dual  $\vec{\Lambda}$ ) qui constituera la variable canonique de base pour le Lagrangien du système. L'expression de ce Lagrangien nous permet alors de déduire le moment canoniquement conjugué ( $\vec{E}$  ou  $\vec{D}$ ) à notre variable de base. Le champ résultant peut être dit 'fondamental' puisqu'il s'exprimera, avec la variable qui lui est conjuguée et une fois la quantification effectuée, sous la forme d'une combinaison linéaire d'opérateurs création-annihilation de photons. Or c'est par l'application d'une telle combinaison, sur l'état vide des champs signal et idler, que nous verrons émerger de notre modèle l'état correspondant à une paire de photons. Il est donc essentiel de pouvoir exprimer l'Hamiltonien du système selon une combinaison linéaire de ces opérateurs, un ordre supérieur en opérateur création impliquant des champs signal ou idler à plus d'un photon.

Si le choix de la variable canonique de base semble arbitraire, celle du Lagrangien ne l'est pas : il devra permettre de retrouver d'une part les équations du mouvement (ici les équations de Maxwell), et d'autre part l'énergie classique contenue dans le champ électromagnétique. Si les équations du mouvement ne changent pas en absence ou présence de non-linéarité, ce n'est pas le cas de l'énergie du champ.

Nous posons l'Hamiltonien  $H$  du système :

$$H(t) = \iiint_{\vec{r}} \mathcal{H}(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$$

où nous introduisons l'Hamiltonien densité  $\mathcal{H}$ , dépendant du temps et de l'espace.

Ce dernier, qui peut être vu comme un Hamiltonien local spatialement, correspond à la densité d'énergie du système et son expression doit nous permettre de retrouver la densité locale d'énergie contenue dans le champ électromagnétique, dont les expressions (selon  $\vec{D}$  ou  $\vec{E}$ ) ont été établies<sup>7</sup> dans la sous-section 5.1.2.

En absence de non-linéarité, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont linéairement liés ( $\vec{D} = \epsilon_0 (\mathbf{1} + \chi^{(1)}) \vec{E}$ ). De ce fait, le problème de la détermination du champ fondamental ne se pose même pas.

En présence de non-linéarité cependant, la forme du Lagrangien (et du Hamiltonien) change, de sorte que le champ fondamental pour la part électrique n'est pas évident. La référence [114] met en garde contre la procédure courante consistant à substituer dans (5.11) la forme quantifiée des champs établie pour un champ libre<sup>8</sup> (i.e. dans le vide), en dénotant que seuls les champs canoniques voient leurs commutateurs invariants lors de l'intégration d'interactions. Or la même référence nous montre que le moment canoniquement conjugué au potentiel-vecteur  $\vec{A}$ , déduite du Lagrangien du système, correspond à  $\vec{E}$  en champ libre mais à  $\vec{D}$  dans un diélectrique. La substitution n'est donc plus valide dès que des non-linéarités sont prises en compte, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  n'étant plus liés linéairement. Ce premier point est un indice fort en faveur de l'utilisation du champ  $\vec{D}$  comme champ fondamental. Cependant, on peut s'apercevoir dans la littérature que cette quantification est usuellement opérée sur le champ  $\vec{E}$  [111, 55, 109, 62, 118, 1, 105].

La référence [59] met en avant plusieurs arguments pour démontrer que le champ correct pour la quantification dans un diélectrique est le champ  $\vec{D}$ . Le plus important, que l'on reprend ici, tend à montrer qu'une description passant par une quantification de  $\vec{E}$  ne peut être compatible, à la fois avec les équations de Maxwell, et avec la loi d'Heisenberg donnant l'évolution temporelle d'un opérateur  $\hat{O}$  :

$$\partial_t \hat{O} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{O}, \hat{H}] \quad (5.12)$$

avec  $[\cdot, \cdot]$  marquant le commutateur d'opérateurs (cf. annexe F).

Pour le montrer nous reprenons les notations de [59] posant les opérateurs champs et Hamiltonien comme des polynômes  $\text{poly}_N(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$  d'ordre  $N$  de  $\hat{a}_\sigma$  et  $\hat{a}_\sigma^\dagger$ , opérateurs création et annihilation, respectivement, pour un mode  $\sigma$  donné. Le champ magnétique étant fondamental, il correspond à une combinaison linéaire des opérateurs création-annihilation. On notera simplement  $\hat{B} = \text{poly}_1(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$ . En partant du principe que le champ électrique  $\vec{E}$  est lui aussi fondamental, on a  $\hat{E} = \text{poly}_1(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$ .

7. Nous pourrions noter que ces expressions sont formulées en négligeant toute dispersion. La dispersion linéaire pourra néanmoins être prise en compte en adoptant une approche perturbative des non-linéarités. Ces expressions restent alors valides.

8. La référence [114, partie 3.4.2] rapporte que l'argument avancé pour justifier cette démarche se base sur le fait que les relations de commutations des champs canoniques, en approche *microscopique*, ne changent pas en intégrant les interactions. Or dans une approche *macroscopique*, il est nécessaire d'user de champs moyennés sur le temps et l'espace : les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  macroscopiques ne sont pas les mêmes que les  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  microscopiques et n'ont donc pas nécessairement les mêmes relations de commutation.

Le champ d'induction électrique, quant à lui, est en présence de non-linéarités d'ordre jusqu'à  $N$  lié à  $\vec{E}$  par la loi de comportement (5.5) :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \left( \vec{E} + \sum_{n=1}^N \chi^{(n)} \vec{E}^{\otimes n} \right)$$

en usant de la relation liant la polarisation  $\vec{P}$  à  $\vec{E}$  dans le cadre de l'approximation d'une réponse instantanée pour tout les ordres<sup>9</sup> (cf. annexe B.7). On en déduit directement que  $\hat{D}$  est un polynôme d'ordre  $N$  en  $\hat{a}_\sigma$  et  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  :  $\hat{D} = \text{poly}_N(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$ . De même, d'après l'expression de l'Hamiltonien en fonction de  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  (correspondant à (5.11)), on a l'Hamiltonien  $\hat{H} = \text{poly}_{N+1}(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$ .

Dès lors, la loi d'évolution (5.12), appliquée à  $\vec{B}$ , nous montre que<sup>10</sup> :

$$\partial_t \hat{B} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \text{poly}_1(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger), \text{poly}_{N+1}(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger) \right] = \text{poly}_N(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$$

Or on peut tirer de l'équation de Maxwell-Faraday (5.3) :

$$\partial_t \hat{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \text{poly}_1(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger) = \text{poly}_1(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$$

Nous pouvons constater ici une contradiction flagrante entre deux lois fondamentales (la loi d'Heisenberg gouvernant l'évolution temporelle des opérateurs d'une part, et l'équation de Maxwell-Faraday d'autre part), lorsque la quantification est opérée sur le champ  $\vec{E}$ .

Par ailleurs, on peut montrer [59] qu'en considérant le champ  $\vec{E}$  comme fondamental, on obtient un Hamiltonien de la forme :

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \epsilon_0 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \vec{E} \cdot \chi^{(n)} \vec{E}^{\otimes n} \quad (5.13)$$

où une erreur d'un facteur  $n$  est faite sur les termes d'interaction non linéaire, vis-à-vis de la forme correcte (5.11). Il est à noter que cette erreur, que l'on peut retrouver dans la littérature [62, équation (1.5.15)], n'empêche pas une description qualitative correcte des phénomènes non linéaires [52], mais induit une erreur d'un facteur  $n$  au niveau quantitatif.

À l'inverse en considérant le champ  $\vec{D}$  comme fondamental :  $\hat{D} = \text{poly}_1(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$ . Et en usant de la relation (5.8), exprimant  $\vec{E}$  en fonction de  $\vec{D}$  et établie dans l'approximation instantanée à tous les ordres, nous obtenons :

$$\hat{E} = \sum_{n=1}^N \eta^{(n)} \hat{D}^{\otimes n} = \text{poly}_N(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$$

Dans ce cas-ci, l'Hamiltonien reste un polynôme d'ordre  $N+1$  et la loi d'évolution d'Heisenberg comme l'équation Maxwell-Faraday nous donne  $\partial_t \hat{B} = \text{poly}_N(\hat{a}_\sigma, \hat{a}_\sigma^\dagger)$ . La contradiction précédente disparaît alors immédiatement.

Nous avons ainsi mis en évidence avec un raisonnement très simple le problème de la quantification par le champ  $\vec{E}$ . Il est néanmoins suffisamment flagrant pour mettre à mal les prémisses mêmes du modèle précédemment établi. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons donc décidé d'opérer une refonte complète du modèle. Celui-ci conserve sa forme générale dans le sens où l'Hamiltonien

9. On peut ici se permettre cette approximation dans la mesure où on ne souhaite que mettre en évidence l'ordre du polynôme en  $\hat{a}_\sigma$  et  $\hat{a}_\sigma^\dagger$  de  $\hat{D}$ .

10. Pour une fonction polynomiale  $f(x)$  d'ordre quelconque, on peut montrer que [119, vol.1 p.171] :  $[\hat{a}_\sigma, f(\hat{a}_\sigma^\dagger)] = \frac{\partial f(\hat{a}_\sigma^\dagger)}{\partial \hat{a}_\sigma^\dagger}$  et  $[\hat{a}_\sigma^\dagger, f(\hat{a}_\sigma)] = -\frac{\partial f(\hat{a}_\sigma)}{\partial \hat{a}_\sigma}$ .

d'interaction nous permet de déterminer l'état final des paires et, *in fine* la probabilité de les générer. Cependant, le champ de base de tout notre raisonnement sera le champ d'induction électrique  $\vec{D}$  au lieu de  $\vec{E}$ .

Afin d'établir le modèle sur des bases solides, nous partirons d'une approche Lagrangienne très générale en suivant la méthode de quantification canonique de Dirac préconisée par [114]. Celle-ci nous conduira jusqu'à l'établissement du Hamiltonien total dont nous pourrions tirer l'Hamiltonien d'interaction. Pour notre étude, la prise en compte de la dispersion linéaire du milieu est primordiale puisqu'elle est directement impliquée dans l'accord de phase qui conditionne la génération de paires. La prise en compte de cette dispersion complexifiant notablement le modèle, nous développerons d'abord le raisonnement pour un milieu non linéaire en absence de dispersion avant de nous pencher sur le cas dispersif. Comme nous le verrons, ces deux cheminement pourront être finalement combinés pour nous donner l'Hamiltonien total effectif pour un système non linéaire en présence de dispersion linéaire. Enfin, la quantification des champs signal et idler (le champ de pompe étant considéré classique) sera effectuée, et notre modèle appliqué au cas spécifique de notre fibre, pour aboutir à la probabilité de génération de paires dans notre fibre.

## Chapitre 6

# Établissement de l'Hamiltonien de notre système

L'objectif de ce chapitre est de parvenir à établir l'Hamiltonien complet décrivant le champ électromagnétique dans notre fibre. Cependant, notre description restera intentionnellement aussi générale que possible, afin de la rendre générique et applicable à d'autres types de guides. Néanmoins, pour progresser, plusieurs approximations raisonnables, sur la nature du matériau dans lequel se propage le champ électromagnétique, devront être faites au fur et à mesure. Nous pouvons par avance indiquer que le matériau est considéré comme un milieu amagnétique dénué de charges ou courants libres. Par ailleurs, ses propriétés non linéaires et de dispersion (linéaire) seront prises en compte.

Notre système d'étude sera le champ électromagnétique se propageant dans le milieu. Nous commencerons par une approche classique du champ pour nous diriger vers une description quantique, notre démarche suivant la méthode de quantification canonique de Dirac.

Nous partirons ainsi du Lagrangien de notre système dont nous déduirons un Hamiltonien classique, pour finir par sa quantification. L'Hamiltonien contiendra alors toute l'information sur l'évolution temporelle du système, correspondant ainsi à la représentation d'Heisenberg en mécanique quantique<sup>1</sup>. Dans le dessein de passer à une représentation d'interaction, particulièrement adaptée à notre problème, nous identifierons dans l'Hamiltonien total la part propagative de celle exprimant les interactions du champ avec le milieu. Cette dernière nous permettra de formuler l'état final des champs et enfin la probabilité de génération de paires.

Il est important de spécifier que nous intégrerons la dispersion linéaire dans la part propagative, même si à strictement parler celle-ci résulte d'une interaction avec le milieu. Ce choix est fait d'une part parce que la dispersion n'implique pas de création de nouvelles fréquences dans le champ (contrairement aux non-linéarités), mais induit un retard propagatif dans ce dernier. D'autre part, nous verrons que c'est à partir de la part propagative (linéaire) du Hamiltonien que la forme finale du champ  $\vec{D}$  quantifié est déterminée, or celle-ci intervient directement dans la part d'interaction (non linéaire) du Hamiltonien. On adopte ainsi une approche perturbative de la non-linéarité, dans le sens où les termes de champs du Hamiltonien non linéaire sont substitués par leurs formes prises dans le cas linéaire dispersif.

Avant toute chose il est nécessaire de choisir la variable dynamique de base de notre problème : le potentiel-vecteur  $A = (A_0, \vec{A})$ , usuellement utilisé, ou le potentiel dual  $\Lambda = (\Lambda_0, \vec{\Lambda})$ . Ceux-ci se définissent par :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A_0 & \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{B} &= \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial t} + \vec{\nabla} \Lambda_0 \right) & \vec{D} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}\end{aligned}$$

---

1. Se référer à l'annexe F.2 pour un rappel sur les différentes représentations en mécanique quantique.



Nous notons de suite que le potentiel dual permet un lien plus direct avec le champ  $\vec{D}$ , qui doit être à la base de notre raisonnement. Par ailleurs, la quantification dans un diélectrique se trouve être particulièrement complexe en utilisant le potentiel-vecteur, et n'est en pratique utile que pour un milieu homogène. Tandis que la quantification avec le potentiel dual s'avère plus simple (particulièrement en absence de charges et courants libres) et applicable aux milieux inhomogènes [114, p.93].

Nous choisissons donc d'utiliser le potentiel dual  $\Lambda$  comme variable canonique en fonction de laquelle exprimer le Lagrangien du système.

Nous présentons ici la structure générale de notre raisonnement menant jusqu'à la quantification, ainsi que les principales formules associées. Le détail de cette méthode, que nous appliquerons au champ électromagnétique dans les chapitres suivants, est donné en annexe E.

Le cheminement suivi peut ainsi se résumer comme suit [120] :

- Le Lagrangien  $L$  contenant toute la dynamique du système est posé en fonction des coordonnées  $\phi_\alpha$  et vitesses  $\dot{\phi}_\alpha \equiv \partial_t \phi_\alpha$  généralisées choisies. Notre description portant sur des champs, nous utiliserons préférentiellement le Lagrangien densité  $\mathcal{L}$ , fonction des  $\phi_\alpha$  et  $\dot{\phi}_\alpha$ , et lié à  $L$  par :

$$L = \iiint_{\vec{r}} \mathcal{L} d^3\vec{r}$$

- Par principe de moindre action, la variation  $\delta S$  de l'action  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ , pour toute variation  $\delta\phi_\alpha$  bornée dans le temps et l'espace, doit être nulle :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\vec{r}} \sum_{\alpha} \left( \frac{\delta L}{\delta \phi_\alpha} - \partial_t \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_\alpha} \right) \right) \delta \phi_\alpha d^3\vec{r} dt = 0$$

Cette condition est respectée lorsque le terme sous la somme est nul, ce qui nous donne les équations du mouvement en terme de Lagrangien densité :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi_\alpha)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_\alpha)} + \sum_{j=1}^3 \partial_t \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \phi_\alpha)} \right) = 0 \quad (6.1)$$

avec respectivement  $\partial_t$  et  $\partial_j$  les dérivées partielles temporelle et spatiales (les coordonnées spatiales étant ici labellisée par des chiffres  $j \in \{1, 2, 3\}$ ). Le choix du Lagrangien est validé en retrouvant ainsi les équations du mouvement usuelles (équations de Maxwell pour les champs).

- Le passage d'une description Lagrangienne à Hamiltonienne est effectuée en introduisant les moments canoniques :

$$\Pi_\alpha = \frac{\delta L}{\delta (\partial_t \phi_\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_\alpha)} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \phi_\alpha)} \right) \quad (6.2)$$

On définit ainsi l'Hamiltonien du système :

$$H = \left( \iiint_{\vec{r}} \sum_{\alpha} \Pi_\alpha \partial_t \phi_\alpha d^3\vec{r} \right) - L \quad (6.3)$$

Soit l'Hamiltonien densité :

$$\mathcal{H} = \vec{\Pi} \cdot \partial_t \vec{\Lambda} - \mathcal{L} \quad (6.4)$$

en rappelant que  $\mathcal{H}$  et  $H$  sont liés par :

$$H = \iiint_{\vec{r}} \mathcal{H} d^3\vec{r} \quad (6.5)$$

L'Hamiltonien obtenu doit correspondre à l'énergie du système, soit ici à l'énergie classique contenue dans le champ électromagnétique.

- Enfin, la quantification proprement dite est opérée en passant les coordonnées et moments canoniques en opérateurs. On établit pour cela les commutateurs :

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\phi}_\alpha(\vec{r}, t), \hat{\Pi}_{\alpha'}(\vec{r}', t) \right] &= i\hbar \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{\alpha, \alpha'} \\ \left[ \hat{\phi}_\alpha(\vec{r}, t), \hat{\phi}_{\alpha'}(\vec{r}', t) \right] &= 0 \qquad \left[ \hat{\Pi}_\alpha(\vec{r}, t), \hat{\Pi}_{\alpha'}(\vec{r}', t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Nous appliquerons cette procédure au champ électromagnétique en prenant pour base, suivant [114, 63], le champ d'induction électrique  $\vec{D}$ , et nos coordonnées généralisées seront les composantes du potentiel-dual  $\Lambda$ .

La dispersion linéaire étant difficile à accorder avec la prise en compte des non-linéarités, nous procéderons par étapes :

Dans un premier temps, nous considérerons en section 6.1 un milieu non linéaire non dispersif afin d'en établir la forme générale de l'Hamiltonien. Ce cas simple nous permettra notamment de retrouver les équations du mouvement et l'énergie du champ électromagnétique en absence de dispersion (5.9). Par ailleurs, nous y distinguerons les parts linéaire  $H_L$  et non linéaire  $H_{NL}$  du Hamiltonien.

Puis en section 6.2, nous étudierons le cas d'un milieu purement linéaire en présence de dispersion. Un développement plus poussé sera nécessaire pour prendre en compte cette dernière, pour finalement établir l'Hamiltonien linéaire dispersif. Au passage nous opérerons dans cette section la quantification du champ  $\vec{D}$ , que nous utiliserons plus tard pour décrire les champs signal et idler.

Enfin, les deux approches seront combinées dans la section 6.3. Nous considérerons la part non linéaire du Hamiltonien total comme une perturbation<sup>2</sup> vis-à-vis de celle linéaire. Ainsi, les termes de champs  $\vec{D}$  intervenant dans  $H_{NL}$  pourront se voir substitués par des expressions de champs linéaires : champs quantifiés tels que cela sera fait dans la section 6.2 pour signal et idler, ou champ classique de pompe qui sera détaillé plus loin. Nous parviendrons ainsi à l'Hamiltonien total pour un milieu non linéaire à dispersion linéaire. Sa part non linéaire nous servira par la suite, dans une représentation d'interaction, pour modéliser la génération de paires dans notre fibre.

## 6.1 Milieu non linéaire en absence de dispersion

On considère ici un milieu présentant des non-linéarités électriques et exempt de toute dispersion, y compris linéaire. Comme expliqué au chapitre 5, le champ correct pour opérer la quantification est le champ  $\vec{D}$ . Au lieu du potentiel vecteur, on utilise donc le potentiel dual  $\Lambda = (\Lambda_0, \vec{\Lambda})$  défini par :

$$\vec{B} = \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial t} + \vec{\nabla} \Lambda_0 \right) \quad (6.7a)$$

$$\vec{D} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda} \quad (6.7b)$$

Il est important de noter que d'après cette définition du potentiel-dual, celui-ci n'est valable que dans le cas d'un matériau non-magnétique exempt de charges et courants libres. En effet en prenant le rotationnel de (6.7a), le rotationnel d'un gradient étant nécessairement nul, on ne peut rendre compte du terme de courants libres (terme  $\vec{J}_l$ ) dans l'équation de Maxwell-Ampère (5.4). De même, la divergence du rotationnel d'un quelconque champ vectoriel étant nul, (6.7b) ne permet pas de retrouver le terme de charges libres (terme  $\rho_l$ ) de l'équation de Maxwell-Gauss électrique (5.1). Toutefois cette limitation n'est pas très contraignante puisque la majorité des matériaux utilisés dans le cadre de l'optique quantique non linéaire correspondent ou s'approchent suffisamment des caractéristiques sus-citées pour que notre modèle leur soit applicable.

---

2. Cette approximation n'est naturellement valide que dans le cas d'effets non linéaires faibles.

Le champ électromagnétique est donc défini par les quatres composantes du potentiel-dual ( $\Lambda_0$  et les trois composantes spatiales de  $\vec{\Lambda}$  :  $\Lambda_1 \equiv \Lambda_x$ ,  $\Lambda_2 \equiv \Lambda_y$  et  $\Lambda_3 \equiv \Lambda_z$ ). Chacune d'entre elles est une coordonnée généralisée du système et nous devons donc obtenir en appliquant la méthode présentée plus haut (et détaillée en annexe E) quatre équations du mouvement. Ces quatres équations sont bien évidemment les équations de Maxwell qui gouvernent entièrement la dynamique du champ électromagnétique qui, en absence de charges et courants libres, se notent :

$$\text{Maxwell-Gauss électrique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (6.8)$$

$$\text{Maxwell-Gauss magnétique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.9)$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.10)$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.11)$$

### 6.1.1 Équations du mouvement en milieu non linéaire non-dispersif

On peut voir immédiatement de la définition du potentiel-dual qu'elle vérifie l'équation de Maxwell-Gauss électrique (6.8) ainsi que l'équation de Maxwell-Ampère (6.11) pour un matériau non-magnétique exempt de charges et courants libres :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}) = 0 \quad (6.12)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \Lambda_0 \right) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.13)$$

par propriétés du calcul vectoriel.

Pour les deux équations restantes, il est nécessaire de poser le Lagrangien de notre système. Soit le Lagrangien densité [114, partie 3.5.1] :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 - \sum_{n>0} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \quad (6.14)$$

Où on rappelle que les  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$  sont les tenseurs permittivité diélectrique inverse (cf. annexe B.5) d'ordre  $n+1$ , dont l'application sur  $n$  termes de champ donne un vecteur. Étant donné que l'on néglige dans cette section toute dispersion, on se place dans l'approximation d'une réponse instantanée du matériau et les tenseurs  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$  sont constants dans l'espace des fréquences (cf. annexe B.7).

Le Lagrangien doit permettre de déduire les deux équations de Maxwell restantes. D'après (6.1) on a les équations du mouvement pour :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_\alpha} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Lambda_\alpha)} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \Lambda_\alpha)} = 0 \quad (6.15)$$

avec  $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ , où les indices de 1 à 3 ( $j \in \{1, 2, 3\}$ ) marquent les composantes spatiales de  $\vec{\Lambda}$ . On note, d'après la définition du potentiel-dual (6.7), que notre  $\mathcal{L}$  est une fonction des  $\Lambda_\alpha$ , des  $\partial_t \Lambda_\alpha$  et  $\partial_j \Lambda_\alpha$ , mais pas des  $\partial_j \partial_t \Lambda_\alpha$  d'où la disparition du dernier terme présent dans (6.1) (avec nos coordonnées généralisées  $\phi_\alpha \equiv \Lambda_\alpha$ ).

Pour déduire les deux dernières équations du mouvement, nous allons détailler terme à terme (6.15) pour  $\alpha = 0$  puis  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ . Il est important de garder en tête pour toute la suite que puisque seules des dérivées partielles interviennent dans (6.15), les  $\Lambda_\alpha$ ,  $\partial_t \Lambda_\alpha$  et  $\partial_j \Lambda_\alpha$  peuvent être pris comme des variables *indépendantes*.

### Équation de Maxwell-Gauss magnétique

Nous allons montrer ici que l'équation Maxwell-Gauss magnétique (6.9) se retrouve à partir de (6.15) pour le cas  $\alpha = 0$ .

On note que seul le champ  $\vec{B}$  porte une dépendance en  $\Lambda_0$ , d'après sa définition en (6.7a). On a donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_0} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial \Lambda_0} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial \Lambda_0} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \left( \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} \partial_t \vec{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} \vec{\nabla} \Lambda_0 \right) = 0 \quad (6.16)$$

puisque  $\partial_t \vec{\Lambda}$  et  $\vec{\nabla} \Lambda_0$  sont des variables indépendantes de  $\Lambda_0$ .

Pour le second terme de (6.15), puisque  $\vec{B}$  ne dépend pas de la dérivée temporelle de  $\Lambda_0$ , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Lambda_0)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_t \Lambda_0)} \left( \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = 0 \quad (6.17)$$

Soit :

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Lambda_0)} = 0 \quad (6.18)$$

Enfin pour le dernier terme de (6.15) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Lambda_0)} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial(\partial_j \Lambda_0)} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_0)} \left[ \left( \partial_t \vec{\Lambda} + \begin{pmatrix} \partial_1 \Lambda_0 \\ \partial_2 \Lambda_0 \\ \partial_3 \Lambda_0 \end{pmatrix} \right)^2 \right] = \mu_0 \left( \partial_t \vec{\Lambda} + \vec{\nabla} \Lambda_0 \right)_j = B_j$$

Ce qui nous donne donc :

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Lambda_0)} = \sum_{j=1}^3 \partial_j B_j = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \quad (6.19)$$

Avec  $\alpha = 0$ , (6.15) nous donne donc l'équation de Maxwell-Gauss magnétique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

### Équation de Maxwell-Faraday

Pour obtenir l'équation de Maxwell-Faraday (6.10), nous considérerons ici l'équation (6.15) pour  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ . Son premier terme se simplifie directement en notant que  $\vec{B}$  comme  $\vec{D}$  ne dépendent pas directement de  $\vec{\Lambda}$  mais de ses dérivées partielles, soit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_\alpha} = 0 \quad (6.20)$$

Puisque  $\vec{D}$  ne dépend pas de  $\partial_t \Lambda_\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Lambda_\alpha)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_t \Lambda_\alpha)} \left( \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial(\partial_t \Lambda_\alpha)} \cdot 2\vec{B} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_t \Lambda_\alpha)} \left( \partial_t \vec{\Lambda} + \vec{\nabla} \Lambda_0 \right) \right] \cdot \vec{B} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Lambda_\alpha)} &= B_\alpha \end{aligned} \quad (6.21)$$

car  $\frac{\partial}{\partial(\partial_t \Lambda_\alpha)} \vec{\nabla} \Lambda_0 = 0$ .

Le second terme de (6.15) nous donne donc :

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Lambda_\alpha)} = \partial_t B_\alpha \quad (6.22)$$

Le dernier terme s'avère plus complexe et demande de procéder par étapes. Nous considérons tout d'abord :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \left( \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \left( - \sum_{n>0} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right) \quad (6.23)$$

Le champ magnétique étant indépendant de  $\partial_j \Lambda_\alpha$  dans le cas où  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ , le premier terme est nul. Pour le second, on obtient<sup>3</sup> :

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \left( \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right) = \frac{1}{n+1} \frac{\partial \vec{D}}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{D}} \left( \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \cdot \left( \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right)$$

Pour le terme dérivée de  $\vec{D}$  :

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \begin{pmatrix} \partial_y \Lambda_z - \partial_z \Lambda_y \\ \partial_z \Lambda_x - \partial_x \Lambda_z \\ \partial_x \Lambda_y - \partial_y \Lambda_x \end{pmatrix} = \sum_i \varepsilon_{ij\alpha} \vec{e}_i$$

où on a introduit le symbole de Levi-Civita  $\varepsilon_{ij\alpha}$ , défini en annexe A.3. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \left( \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right) = \sum_i \varepsilon_{ij\alpha} \left( \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right)_i$$

On peut donc reprendre (6.23) et écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} = - \sum_{n>0} \frac{\partial}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} \left( \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right) = - \sum_i \varepsilon_{ij\alpha} \left( \sum_{n>0} \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \right)_i = - \sum_i \varepsilon_{ij\alpha} E_i$$

où on a utilisé la relation  $\vec{E}(t) = \sum_{n>0} \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n}(t)$  établie dans le cadre de l'approximation où l'on néglige la dispersion (cf. annexe B.7).

Le dernier terme que nous cherchons à calculer se note donc :

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} = - \sum_j \partial_j \left( \sum_i \varepsilon_{ij\alpha} E_i \right)$$

En prenant  $\alpha = x$  (et en se rappelant que  $\varepsilon_{xjx} = 0$ ) :

$$- \sum_j \partial_j \left( \sum_i \varepsilon_{ijx} E_i \right) = - \sum_j \partial_j (\varepsilon_{y j x} E_y + \varepsilon_{z j x} E_z) = -\partial_y(-E_z) - \partial_z E_y = \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right)_x$$

et de même pour  $y$  ou  $z$ . On en déduit directement :

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \Lambda_\alpha)} = \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right)_\alpha \quad (6.24)$$

3. En utilisant la propriété  $\frac{d}{d\vec{V}} (\vec{V} \cdot \mathbf{O}^{(n)} : \vec{V}^{\otimes n}) = (n+1) \mathbf{O}^{(n)} : \vec{V}^{\otimes n}$  pour un opérateur  $\mathbf{O}^{(n)}$  symétrique par permutation d'indice (ce qui est le cas ici des  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$ ). La démonstration de cette propriété est donnée en annexe A.2.

Finalement, en ré-injectant (6.20), (6.22) et (6.24) dans (6.15), on a pour  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  :

$$-\partial_t B_\alpha - \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right)_\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

soit l'équation de Maxwell-Faraday.

Nous avons donc démontré que le Lagrangien que nous avons posé en (6.14), associé à la définition du potentiel-dual, permet bien de retrouver les équations du mouvement usuelles que sont les équations de Maxwell. Cette vérification est la première étape de validation de la forme du Lagrangien. La seconde impliquant la détermination de l'énergie du système.

### 6.1.2 Énergie du système

Si nous avons obtenu les bonnes équations du mouvement, il est important de noter que le Lagrangien que nous avons posé n'est pas unique. En effet on peut voir dans (6.15) qu'on peut multiplier le Lagrangien par n'importe quelle constante sans changer les équations du mouvement. Ce facteur d'échelle est alors fixé de manière à retrouver un Hamiltonien redonnant bien l'énergie du champ électromagnétique dans un matériau non linéaire sans dispersion, puisque ce sont les conditions que nous nous sommes imposées. Nous poursuivrons donc ici la méthode présentée en annexe E.3 afin d'établir l'Hamiltonien correspondant à l'énergie du système.

On peut maintenant établir à partir du Lagrangien le moment canoniquement conjugué à  $\Lambda$  d'après (6.2) :

$$\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Lambda_0)} = 0 \quad \Pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Lambda_j)} = B_j \quad (6.25)$$

où on ré-utilise directement les résultats (6.17) et (6.21) établis lors du calcul des équations du mouvement.

L'Hamiltonien densité s'obtient alors en suivant (6.4) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \vec{\Pi} \cdot \partial_t \vec{\Lambda} - \mathcal{L} \\ &= \vec{B} \cdot \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\nabla} \Lambda_0 \right) - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \sum_{n>0} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \sum_{n>0} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \Lambda_0 \quad (6.27)$$

On notera que par la suite, nous manipulerons essentiellement l'Hamiltonien densité que nous pourrions appeler Hamiltonien par abus de langage. Nous rappelons que les deux sont reliés par (6.5).

Dans la description Hamiltonienne, les équations du mouvement peuvent se retrouver de la même manière que nous l'avons fait en description Lagrangienne.

Ainsi les équations du mouvement, d'après (E.9), s'obtiennent par :

$$\partial_t \Pi_\alpha = -\frac{\delta H}{\delta \Lambda_\alpha} \quad (6.28)$$

Cependant, nous pouvons noter que  $\Pi_0 = 0$ , ce qui nous fait perdre l'équation de Maxwell-Gauss magnétique en tant qu'équation du mouvement. Toutefois, en prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Faraday, on peut voir que :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = 0 = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$$

donc en imposant initialement que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , l'équation Maxwell-Gauss reste vraie à tout moment. Ceci sera fait en établissant une définition unique du potentiel-dual par transformation de jauge, fixant ainsi l'énergie du système.

### Transformation de jauge

En se penchant davantage sur la définition du potentiel-dual donnant les champs magnétique (6.7a) et d'induction électrique (6.7b), on peut remarquer que cette définition n'est pas univoque : il existe une infinité de couple  $(\Lambda_0, \vec{\Lambda})$  susceptibles de donner les mêmes champs. On parle alors d'invariance de jauge du système dans le sens où toute transformation du type :

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &\longrightarrow \Lambda'_0 = \Lambda_0 - \frac{\partial \Theta}{\partial t} \\ \vec{\Lambda} &\longrightarrow \vec{\Lambda}' = \vec{\Lambda} + \vec{\nabla} \Theta\end{aligned}\quad (6.29)$$

laisse invariante les équations du mouvement, avec  $\Theta(\vec{r}, t)$  une fonction arbitraire de l'espace et du temps.

La liberté du choix de jauge nous permet de simplifier l'Hamiltonien en éliminant le terme en  $\Lambda_0$  et d'imposer l'équation de Maxwell-Gauss magnétique. En choisissant  $\Theta$  tel que :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Lambda_0$$

on peut voir par la transformation (6.29) que  $\Lambda'_0 = 0$ . Par ailleurs ce choix ne conditionne que la dépendance temporelle de  $\Theta$ . On peut donc définir sa dépendance spatiale par :

$$\vec{\nabla} \Theta = -\vec{\Lambda}$$

amenant ainsi à ce que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Lambda}' = 0$  et donc  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Lambda}') = 0$ .

Avec ce choix de jauge, on redéfinit donc  $(\Lambda_0, \vec{\Lambda})$  tel que  $\Lambda_0 = 0$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  sans changer les équations du mouvement. Ce choix de jauge permet notamment de simplifier l'Hamiltonien densité (6.27) qui s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \sum_{n>0} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} \quad (6.30)$$

On retrouve bien ici la densité locale d'énergie du champ électromagnétique dans un milieu non linéaire et sans dispersion (5.9).

#### 6.1.3 Hamiltonien en absence de dispersion

Nous avons ainsi achevé la procédure de validation de la forme du Lagrangien établie en (6.14), qui permet effectivement de retrouver à la fois les bonnes équations du mouvement et la bonne énergie du système, notamment en fixant le choix de jauge de façon à avoir une unique définition du potentiel-dual et donc du Lagrangien.

Pour la suite, nous distinguerons les parties linéaire et non linéaire de l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(1)} \vec{D}}_{\mathcal{H}_L} + \underbrace{\sum_{n>1} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n}}_{\mathcal{H}_{NL}} \quad (6.31)$$

La partie linéaire  $\mathcal{H}_L$  de l'Hamiltonien densité caractérise la propagation de particules libres (les photons) dans le matériau. Dès l'introduction de non-linéarité,  $\mathcal{H}_{NL}$ , nous mettons en place des interactions entre ces particules (via le matériau). Ce sont ces interactions qui sont à l'origine de la génération de nouvelles fréquences et de divers processus non linéaire (effet Kerr, automodulation de phase, absorption à deux photons, mélange à quatre ondes, etc.).

Concernant la propagation libre, cependant, nous avons considéré jusqu'ici un milieu non-dispersif, or la dispersion linéaire est essentielle puisqu'elle est la base de la condition d'accord de phase dans le cadre du mélange à quatre ondes.

On peut remarquer en observant attentivement l'étape (6.26) du calcul du Hamiltonien, à partir du Lagrangien et des coordonnées canoniques, que la part non linéaire de  $\mathcal{H}$  vient entièrement de  $\mathcal{L}$  : Hamiltonien et Lagrangien ont la même part non linéaire. Par ailleurs, on dénote que l'expression de celle-ci ne dépend que du champ  $\vec{D}$ . Or, par la définition du potentiel-dual (6.7) :  $\vec{D} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}$ . Donc la partie non linéaire ne dépend aucunement de la dérivée temporelle de  $\Lambda$  et n'entre pas en ligne de compte dans la définition du moment conjugué (6.25).

Cet état de fait est très important puisqu'il va nous permettre de compartimenter notre problème en présence de dispersion linéaire. En effet, cela implique que le problème peut être d'abord posé dans le régime linéaire, pour ensuite rajouter la part non linéaire du Hamiltonien sans risquer de modifier sa part linéaire. Autrement dit,  $\mathcal{H}_L$  a la même forme, en présence ou non de non-linéarités. Dans la section suivante nous chercherons donc à déterminer l'Hamiltonien linéaire en présence de dispersion. La méthode générale sera la même que celle employée dans cette section, mais la présence de dispersion demandera un traitement plus complexe. Par ailleurs nous effectuerons la quantification des champs dans ce régime.

## 6.2 Milieu à dispersion linéaire

Nous considérons dans toute notre étude que les effets des dispersions non linéaires sont faibles et négligeables, contrairement à la dispersion linéaire. C'est l'intégration de cette dernière qui fera l'objet de cette section.

Le principal obstacle à l'inclusion de la dispersion dans le modèle établi jusqu'ici tient au fait qu'elle traduit la non-localité dans le temps de la réponse du milieu. En effet, la polarisation du milieu à un temps  $t$  dépend du champ électrique en  $t$  et aux instants précédents, comme on peut le voir dans sa formulation générale (B.3). Une solution proposée dans la référence [114] et qui sera reprise ici, est d'utiliser une approche macroscopique approximative décomposant le champ en bandes fréquentielles restreintes pour lesquelles il est possible d'établir une théorie locale. Cette approche présente l'avantage de pouvoir décrire de manière unifiée un même type de non-linéarité à partir de paramètres diélectriques mesurables. Elle est donc plus phénoménologique qu'une approche microscopique impliquant la nécessité d'établir un modèle pour le matériau, ce qui s'avèrerait extrêmement complexe dans le cas de nos liquides, par nature amorphes. Par ailleurs, la description en bandes fréquentielles étroites s'adapte très bien à notre étude de génération de paires où les photons signal et idler sont émis dans des intervalles de fréquences relativement restreints.

On se place ici dans un cadre purement linéaire pour établir la partie linéaire de l'hamiltonien. En effet, comme nous l'avons vu, sa part non linéaire n'est pas affectée par l'introduction de la dispersion linéaire. Le caractère non-local de celle-ci se traduit par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{\tau} \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \tau) : \vec{D}(\vec{r}, t - \tau) d\tau \quad (6.32)$$

Où  $\boldsymbol{\eta}$  est le tenseur de permittivité diélectrique inverse linéaire ( $\boldsymbol{\eta} \equiv \boldsymbol{\epsilon}^{-1}$ ). Étant donné qu'on se place dans un cadre où l'on néglige les pertes, ce tenseur est réel. On définit son équivalent dans l'espace des fréquences :

$$\boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \omega) = \int_{\tau} \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \sqrt{2\pi} \text{TF}_{\tau} [\boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \tau)]$$

Il est à noter ici que, comme pour la définition des tenseurs de susceptibilité électrique en annexe B.3,  $\boldsymbol{\eta}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\boldsymbol{\eta}(\tau)$  à un facteur  $\sqrt{2\pi}$  près. Ce choix de définition est fait pour



que dans l'approximation de la réponse instantanée (cf. annexe B.7) nous n'ayons qu'une seule et même valeur pour la permittivité diélectrique inverse.

De plus, de par le principe de causalité (cf. annexe B.2), l'intégrale n'est non-nulle que de  $\tau = 0$  à  $+\infty$ . Néanmoins, nous gardons l'intégration sur tout le domaine temporel pour introduire des transformées de Fourier par la suite.

Pour établir l'équation d'onde à laquelle obéit  $\vec{\Lambda}$ , il nous suffit de ré-écrire (6.32) à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday (6.10) et de la définition (6.7) du potentiel-dual, en se souvenant que  $\Lambda_0$  est nul (cf. sous-section 6.1.2) :

$$\vec{\nabla} \wedge \int_{\tau} \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \tau) : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}(\vec{r}, t - \tau) \right) d\tau = -\mu_0 \ddot{\vec{\Lambda}}(\vec{r}, t)$$

Cette équation fait clairement ressortir le problème de la non-localité dans le temps introduite par la dispersion : le terme au temps  $t$  dépendant d'instantants antérieurs.

Afin de parer à cette complication, nous restreindrons le problème au cas d'une onde quasi-monochromatique, ce qui nous permettra de développer le Lagrangien et Hamiltonien dispersif associés. Comme nous le verrons, en considérant un champ large spectralement comme une somme de modes discrets quasi-monochromatiques, cette approche peut être aisément étendue à l'ensemble du champ, le Lagrangien final étant la somme des Lagrangien de chaque mode. Le passage à la limite continue sera effectué par la suite.

Nous introduisons donc un champ complexe  $\vec{\Lambda}^\nu$  aux composantes fréquentielles restreintes autour d'une fréquence  $\omega_\nu$ , donc dont la dépendance temporelle est approximativement en  $e^{-i\omega_\nu t}$ . Pour cette onde, on a le potentiel-dual :

$$\vec{\Lambda}(\vec{r}, t) = \vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t) + \vec{\Lambda}^{-\nu}(\vec{r}, t)$$

avec  $\vec{\Lambda}^{-\nu} = \left( \vec{\Lambda}^\nu \right)^*$ .

### 6.2.1 Équation d'onde pour un champ au spectre fin en fréquence

Le champ  $\vec{\Lambda}^\nu$  satisfait la même équation d'onde que  $\vec{\Lambda}$ . En utilisant le fait que  $e^{i\omega_\nu \tau} e^{-i\omega_\nu \tau} = 1$ , on peut écrire :

$$-\mu_0 \ddot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \wedge \int_{\tau} \left( \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \tau) e^{i\omega_\nu \tau} \right) : \left( \vec{\nabla} \wedge \left( e^{-i\omega_\nu \tau} \vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t - \tau) \right) \right) d\tau$$

Vu que  $\vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t - \tau) \sim e^{-i\omega_\nu(t-\tau)}$ , la quantité  $e^{-i\omega_\nu \tau} \vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t - \tau)$  varie lentement avec  $\tau$ . On peut donc l'approximer par son développement de Taylor à l'ordre 2 en  $\tau = 0$  :

$$e^{-i\omega_\nu \tau} \vec{\Lambda}^\nu(t - \tau) \simeq \vec{\Lambda}^\nu(t) + \tau \left( -i\omega_\nu \vec{\Lambda}^\nu(t) - \dot{\vec{\Lambda}}^\nu(t) \right) + \frac{\tau^2}{2} \left( -\omega_\nu^2 \vec{\Lambda}^\nu(t) + 2i\omega_\nu \dot{\vec{\Lambda}}^\nu(t) + \ddot{\vec{\Lambda}}^\nu(t) \right)$$

en omettant de noter les dépendances spatiales pour simplifier la notation.

En notant que :

$$\int_{\tau} (i\tau)^n \boldsymbol{\eta}(t) e^{i\omega_\nu \tau} d\tau = \frac{\partial^n \boldsymbol{\eta}}{\partial \omega^n}(\omega_\nu)$$

on obtient l'équation d'onde locale :

$$-\mu_0 \ddot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) \simeq \vec{\nabla} \wedge \left[ \begin{array}{l} \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \omega_\nu) : \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t) + i \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \omega}(\vec{r}, \omega_\nu) : \vec{\nabla} \wedge \left( i\omega_\nu \vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t) + \dot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) \right) \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\eta}}{\partial \omega^2}(\vec{r}, \omega_\nu) : \vec{\nabla} \wedge \left( \ddot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) + 2i\omega_\nu \dot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) - \omega_\nu^2 \vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t) \right) \end{array} \right]$$

Cette équation d'onde peut s'écrire sous la forme beaucoup plus compacte :

$$-\mu_0 \ddot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) \simeq \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}_\nu(\vec{r}) : \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t) + i \boldsymbol{\eta}'_\nu(\vec{r}) : \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}''_\nu(\vec{r}) : \vec{\nabla} \wedge \ddot{\vec{\Lambda}}^\nu(\vec{r}, t) \right] \quad (6.33)$$

où les  $\boldsymbol{\eta}_\nu$ ,  $\boldsymbol{\eta}'_\nu$  et  $\boldsymbol{\eta}''_\nu$  sont les facteurs de la décomposition en puissance de  $\omega$  du développement de Taylor de  $\boldsymbol{\eta}$  à l'ordre 2 autour de  $\omega_\nu$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \omega) &\simeq \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \omega_\nu) + \frac{(\omega - \omega_\nu)}{1!} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\omega}(\vec{r}, \omega_\nu) + \frac{(\omega - \omega_\nu)^2}{2!} \frac{d^2\boldsymbol{\eta}}{d\omega^2}(\vec{r}, \omega_\nu) \\ \boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \omega) &\simeq \underbrace{\boldsymbol{\eta}(\vec{r}, \omega_\nu) - \omega_\nu \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\omega}(\vec{r}, \omega_\nu) + \frac{\omega_\nu^2}{2} \frac{d^2\boldsymbol{\eta}}{d\omega^2}(\vec{r}, \omega_\nu)}_{\boldsymbol{\eta}_\nu(\vec{r})} + \omega \underbrace{\left( \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\omega}(\vec{r}, \omega_\nu) - \omega_\nu \frac{d^2\boldsymbol{\eta}}{d\omega^2}(\vec{r}, \omega_\nu) \right)}_{\boldsymbol{\eta}'_\nu(\vec{r})} + \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\frac{d^2\boldsymbol{\eta}}{d\omega^2}(\vec{r}, \omega_\nu)}_{\boldsymbol{\eta}''_\nu(\vec{r})} \end{aligned} \quad (6.34)$$

où il est à noter pour la suite que ces facteurs de la décomposition, puisqu'ils sont pris sur une bande fine de fréquence centrée sur  $\omega_\nu$ , ne dépendent pas de la fréquence et présentent une symétrie de permutation globale de leurs indices (cf. annexe B.6).

Un développement de la permittivité diélectrique inverse au delà du second ordre serait possible [121, 122] mais ne se révèle pas utile pour le cas que nous étudions.

Concernant la dispersion des termes non linéaires, rien n'empêcherait d'employer le même type de développement pour les  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$ . Les termes d'ordre 1 et supérieur dans leurs développements sont cependant très faibles tant que l'on se place loin d'une bande d'absorption, ce qui est généralement le cas dans nos expériences. Cela nous permet de négliger la dispersion non linéaire et donc de simplifier les expressions que nous aurons à manipuler.

### 6.2.2 Lagrangien et équation d'onde en régime dispersif

La première étape sur le chemin du Hamiltonien consiste à formuler le Lagrangien du système qui permet d'obtenir l'équation d'onde (6.33). Nous avons posé  $\vec{\Lambda} = \vec{\Lambda}^\nu + \vec{\Lambda}^{-\nu}$  donc notre système se décrit à présent à l'aide de deux coordonnées généralisées,  $\vec{\Lambda}^\nu$  et  $\vec{\Lambda}^{-\nu}$ , et de leurs moments associés. Afin de faciliter la lecture du Lagrangien et des calculs qui suivront, nous utiliserons dans le reste de la section 6.2 (et cette section *uniquement*) la définition du produit scalaire pour les réels<sup>4</sup> :  $\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi} = \sum_i \Phi_i \Psi_i$ . Dans ce cadre, on pose le Lagrangien densité linéaire [114] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mu_0 \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu - \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu \right) - \frac{i}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \cdot \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) - \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Si le Lagrangien n'est posé ici que pour un champ de fréquences autour de  $\omega_\nu$ , la prise en compte de plusieurs champs avec de telles fréquences discrètes peut se faire simplement en ajoutant une sommation sur tous les modes  $\nu$  dans (6.35).

Les équations du mouvement (6.1) pour  $\vec{\Lambda}^\nu$  s'obtiennent par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_k^\nu} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Lambda_k^\nu)} + \sum_{j=1}^3 \partial_t \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \Lambda_k^\nu)} \right) = 0 \quad (6.36)$$

pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , en rappelant que  $\{1, 2, 3\}$  désignent les trois coordonnées spatiales pour  $\vec{\Lambda}^\nu$ . De même pour  $\vec{\Lambda}^{-\nu}$ .

4. Nous rappelons que dans le reste de ce document, nous utilisons la définition du produit scalaire complexe :  $\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi} = \sum_i \Phi_i^* \Psi_i$ . On pourra noter que  $\vec{\Lambda}^{-\nu} = \left( \vec{\Lambda}^\nu \right)^*$ .

Afin de vérifier que le Lagrangien (6.35) nous permet effectivement de retrouver l'équation d'onde (6.33), nous procéderons étapes par étapes. Par ailleurs, il est important de garder en tête que l'on considère dans (6.36) des dérivées *partielles* : vis-à-vis de la dérivation les composantes  $\Lambda_k^\nu$ , leurs dérivées temporelles  $\partial_t \Lambda_k^\nu$  et spatiales  $\partial_j \Lambda_k^\nu$  sont considérées comme des variables *indépendantes*. Il en va de même pour les  $\Lambda_k^{-\nu}$ . Par ailleurs, les  $\Lambda_k^\nu$  et  $\Lambda_k^{-\nu}$  sont également considérés comme indépendants entre eux.

Pour compartimenter le problème, nous commençons par subdiviser le Lagrangien densité :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \underbrace{\mu_0 \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu}_a - \underbrace{\left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu \right)}_b - \underbrace{\frac{i}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right)}_c \\ & + \underbrace{\frac{i}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \cdot \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right)}_{c^*} - \underbrace{\frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right)}_d \end{aligned} \quad (6.37)$$

Ainsi, nous pouvons plus aisément détailler le résultat de chaque terme de l'équation du mouvement (6.36) dans l'ordre :

**Premier terme**  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda_k^\nu}$

En s'apercevant qu'aucune partie du Lagrangien densité ne dépend directement de  $\Lambda_k^\nu$ , on en déduit que ce terme est nécessairement nul.

**Second terme**  $-\sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)}$

Seuls  $b$  et  $c^*$  présentent des dérivées spatiales des  $\Lambda_k^\nu$ , on a donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} = \frac{\partial (b + c^*)}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)}$$

Pour établir les dérivées de  $b$  et  $c^*$ , on rappelle que pour un vecteur  $\vec{\phi}$  quelconque<sup>5</sup> :

$$\frac{\partial}{\partial (\partial_j \phi_k)} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\phi} \right) = \sum_l \varepsilon_{ljk} \vec{e}_l$$

avec  $l \in \{1, 2, 3\}$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} &= - \sum_{i,l} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right)_i \eta_{\nu il} \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu \right) \right)_l \\ &= - \sum_{i,l} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right)_i \eta_{\nu il} \varepsilon_{ljk} \\ \frac{\partial c^*}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} &= - \sum_l \varepsilon_{ljk} \left( \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \right)_l \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de symétrie par permutation d'indices<sup>6</sup> du tenseur  $\boldsymbol{\eta}_\nu$ .

Et on a directement pour  $c^*$  :

$$\frac{\partial c^*}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} = \frac{i}{2} \sum_l \varepsilon_{ljk} \left( \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right)_l$$

5. Voir l'annexe A.3 pour la définition du symbole de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$ .

6. Les  $\boldsymbol{\eta}_\nu$ ,  $\boldsymbol{\eta}'_\nu$  et  $\boldsymbol{\eta}''_\nu$  se définissent en fonction de  $\boldsymbol{\eta}$ , pris à  $\omega_\nu$ , et partagent la même propriété de symétrie par permutation d'indices (cf. annexe B.6).

On a donc :

$$-\sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} = \sum_{j,l} \varepsilon_{ljk} \partial_j \left( \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) - \frac{i}{2} \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right)_l$$

où le symbole de Levi-Civita<sup>5</sup> va nous permettre de faire apparaître des rotationnels par :

$$\sum_{j,l} \varepsilon_{ljk} \partial_j \phi_l = - \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\phi} \right)_k \quad (6.38)$$

Soit au final :

$$-\sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \Lambda_k^\nu)} = - \left( \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \right] \right)_k + \frac{i}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right] \right)_k$$

**Troisième terme**  $-\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Lambda_k^\nu)}$

Ce terme-ci est assez direct :

$$-\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \Lambda_k^\nu)} = -\partial_t \frac{\partial a}{\partial (\dot{\Lambda}_k^\nu)} = -\mu_0 \ddot{\Lambda}_k^{-\nu}$$

**Quatrième terme**  $\sum_{j=1}^3 \partial_t \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \Lambda_k^\nu)} \right)$

On ne s'intéresse qu'à  $c$  et  $d$  qui sont les seules parties du Lagrangien densité présentant des dérivées spatiales de  $\dot{\vec{\Lambda}}^\nu$ . Par la même procédure de calcul que celle utilisée pour le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial (\partial_j \partial_t \Lambda_k^\nu)} &= -\frac{i}{2} \sum_{i,l} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right)_i \eta'_{\nu il} \varepsilon_{ljk} = -\frac{i}{2} \sum_l \varepsilon_{ljk} \left( \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \right)_l \\ \frac{\partial d}{\partial (\partial_j \partial_t \Lambda_k^\nu)} &= -\frac{1}{2} \sum_{i,l} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right)_i \eta''_{\nu il} \varepsilon_{ljk} = -\frac{1}{2} \sum_l \varepsilon_{ljk} \left( \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right)_l \end{aligned}$$

en utilisant ici aussi la symétrie par permutation d'indices<sup>6</sup> des tenseurs.

Soit par la propriété  $\sum_{j,l} \varepsilon_{ljk} \partial_j V_l = - \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \right)_k$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \Lambda_k^\nu)} \right) &= \frac{i}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \right] \right)_k + \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right] \right)_k \\ \sum_{j=1}^3 \partial_t \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \Lambda_k^\nu)} \right) &= \frac{i}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right] \right)_k + \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \ddot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right] \right)_k \end{aligned}$$

En définitive, l'équation du mouvement complète s'écrit :

$$\left( \vec{\nabla} \wedge \left[ -\boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) + i \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \ddot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right] \right)_k - \mu_0 \ddot{\Lambda}_k^{-\nu} = 0$$

Pour l'écrire en  $\Lambda^\nu$  il suffit alors de prendre le conjugué de l'ensemble en se souvenant que l'on parle de champ réel  $(\vec{\Lambda}^{-\nu})^* = \vec{\Lambda}^\nu$  et que les tenseurs sont réels :

$$\left( \vec{\nabla} \wedge \left[ \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu \right) + i \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \ddot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \right] \right)_k = -\mu_0 \ddot{\Lambda}_k^\nu$$

On retrouve ici l'équation d'onde (6.33) attendue, ce qui vient valider le Lagrangien que nous avons initialement posé.

À partir de celui-ci nous établirons dans la suite l'Hamiltonien en régime de dispersion avant d'opérer la quantification.

### 6.2.3 Hamiltonien linéaire dispersif

Du Lagrangien densité, on peut déduire d'après (6.2) les moments conjugués à nos variables canoniques  $\Lambda_k^\nu$  :

$$\Pi_k^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Lambda}_k^\nu} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \dot{\Lambda}_k^\nu)} \right)$$

soit en utilisant les mêmes principes de calcul que la sous-section précédente :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^\nu &= \mu_0 \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \left( i \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) + \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right) \\ \vec{\Pi}^{-\nu} &= \mu_0 \dot{\vec{\Lambda}}^\nu - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \left( -i \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu \right) + \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \right) \end{aligned} \quad (6.39)$$

Ce qui nous permet d'établir l'Hamiltonien linéaire d'après (6.3) :

$$H_L = \iiint_{\vec{r}} \mathcal{H} d^3 \vec{r} = \iiint_{\vec{r}} \left( \vec{\Pi}^\nu \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu + \vec{\Pi}^{-\nu} \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} - \mathcal{L} \right) d^3 \vec{r}$$

Nous allons adopter la même approche que celle de la sous-section 6.2.2 en ré-utilisant la subdivision du Lagrangien densité (6.37) et en faisant de même sur les produits de variables canoniques :

$$\vec{\Pi}^\nu \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu = \underbrace{\mu_0 \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu}_a - \underbrace{\frac{i}{2} \left[ \vec{\nabla} \wedge \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \right] \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu}_e - \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \wedge \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \right] \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu}_f$$

Et en prenant le conjugué de cette équation  $\vec{\Pi}^{-\nu} \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} = a^* + e^* + f^*$ . Pour simplifier le développement complet de l'Hamiltonien, nous introduisons l'identité :

$$\iiint_{\vec{r}} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_1 \right) \cdot \vec{V}_2 d^3 \vec{r} = \iiint_{\vec{r}} \vec{V}_1 \cdot \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_2 \right) d^3 \vec{r}$$

où  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sont des vecteurs à composantes complexes, fonctions de  $\vec{r}$  tendant vers 0 quand  $\vec{r} \rightarrow \pm\infty$ . Cette identité peut se démontrer assez simplement en notant le rotationnel à l'aide du symbole de Levi-Civita (6.38) et en opérant une intégration par parties.

En gardant en tête que  $\boldsymbol{\eta}'_\nu$  et  $\boldsymbol{\eta}''_\nu$  présentent une symétrie de permutation globale sur leurs indices (cf. annexe B.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \iiint_{\vec{r}} e d^3 \vec{r} &= -\frac{i}{2} \iiint_{\vec{r}} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \cdot \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) d^3 \vec{r} = \iiint_{\vec{r}} c d^3 \vec{r} \\ \iiint_{\vec{r}} f d^3 \vec{r} &= -\frac{1}{2} \iiint_{\vec{r}} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \cdot \boldsymbol{\eta}''_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) d^3 \vec{r} = \iiint_{\vec{r}} d d^3 \vec{r} \end{aligned}$$

Soit au final l'Hamiltonien :

$$\begin{aligned}
 H_L &= \iiint_{\vec{r}} \left( \vec{\Pi}^\nu \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^\nu + \vec{\Pi}^{-\nu} \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} - \mathcal{L} \right) d^3\vec{r} \\
 &= \iiint_{\vec{r}} \left( a + \underbrace{e - c}_{=0} + \underbrace{f - d + a^*}_{=0} + \underbrace{e^* - c^*}_{=0} - a - b + f^* \right) d^3\vec{r} \\
 H_L &= \iiint_{\vec{r}} \left[ \mu_0 \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} + \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu \right) - \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu'' : \left( \vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \right) \right] d^3\vec{r} \quad (6.40)
 \end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $\vec{\Lambda}^\nu$  est une fonction du temps  $t$  et de l'espace  $\vec{r}$ .

L'Hamiltonien que nous venons d'établir caractérise la propagation de rayons lumineux dans un milieu linéaire présentant de la dispersion. Nous avons considéré jusqu'ici un champ  $\vec{\Lambda}^\nu$  fin en fréquence centré autour de  $\omega_\nu$ . Cependant, comme pour le Lagrangien, ce raisonnement peut aisément être étendu au cas d'un champ comprenant plusieurs fréquences discrètes en opérant une sommation sur  $\nu$  dans (6.40).

Jusqu'ici nous sommes resté dans un régime classique, toutefois il est nécessaire pour les champs contenant peu de photons (tels que les champ idler et signal dans notre cadre d'étude) d'adopter une approche quantique.

## 6.2.4 Quantification en régime de dispersion

### Décomposition en ondes planes

Afin d'opérer la quantification, nous allons user d'une méthode courante consistant à considérer notre guide comme une cavité faisant la même longueur  $L$ . Seul un nombre discret de modes peuvent être présents au sein de la cavité. On pourra donc décomposer le champ sur une base discrète de modes  $k$ , chacun occupant un volume  $\Delta k$  dans l'espace des impulsions, dépendant de la géométrie de la cavité (nombre de dimensions et taille). Pour notre cas d'étude, la fibre ne constitue pas réellement une cavité, aussi repasserons-nous en limite continue dans la sous-section 6.3.2.

Jusqu'à présent les intégrations spatiales se faisaient sur tout l'espace mais dans le cas d'un milieu de propagation réel, on considère que les champs sont nuls hors du volume  $V$  du guide, sur lequel ils seront quantifiés.

Nous développons les champs complexes  $\vec{\Lambda}^\nu$  dans le demi-espace des  $\vec{k}$  positifs<sup>7</sup> [114] :

$$\vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \alpha} \lambda_{\vec{k}, \alpha}^\nu(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{e}_{\vec{k}, \alpha} \quad (6.41)$$

où  $\vec{\Lambda}^\nu$  est décomposé sur une base d'ondes planes  $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{e}_{\vec{k}, \alpha}$  de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de polarisation  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Cette base est orthonormée, de sorte que :

$$\iiint_V \left( \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right)^* \left( \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) d^3\vec{r} = \frac{1}{V} \iiint_V d^3\vec{r} = 1$$

Les coefficients de la décomposition  $\lambda_{\vec{k}, \alpha}^\nu$  deviennent nos nouvelles coordonnées canoniques. Ces coefficients portent par ailleurs la dépendance temporelle en  $e^{-i\omega_\nu t}$  des ondes planes. Par la suite nous omettrons de préciser cette dépendance temporelle pour alléger la notation.

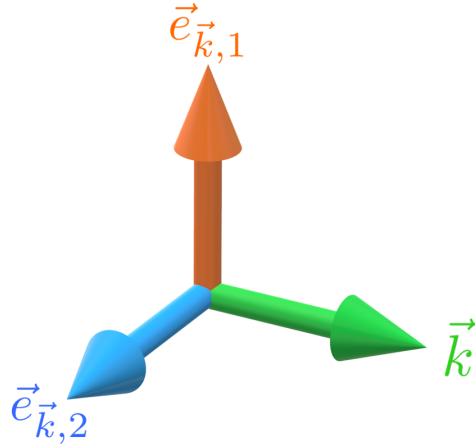
7. On s'accorde ici avec la définition des champs qui sera posée en (6.63).

Dans le même demi-espace aux  $\vec{k}$  positifs, le champ complexe conjugué est donné par :

$$\vec{\Lambda}^{-\nu}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \alpha} \lambda_{-\vec{k}, \alpha}^{-\nu}(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{e}_{-\vec{k}, \alpha} \quad (6.42)$$

On se place ici dans un repère où  $\vec{k}$  donne le sens de propagation et avec  $\vec{e}_{\vec{k}, \alpha}$  les vecteurs unitaires définissant la polarisation tels que :

$$\vec{e}_{\vec{k}, 1} \wedge \vec{e}_{\vec{k}, 2} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$



**Figure 6.1** – Repère cartésien utilisé pour décrire nos champs.

Ce choix de repère implique que  $\vec{e}_{-\vec{k}, \alpha} = -(-1)^\alpha \vec{e}_{\vec{k}, \alpha}$ , et vu que  $(\Lambda^\nu)^* = \Lambda^{-\nu}$ , on a nécessairement  $(\lambda_{\vec{k}, \alpha}^\nu)^* = -(-1)^\alpha \lambda_{-\vec{k}, \alpha}^{-\nu}$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$\vec{\Lambda}^{-\nu}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}', \alpha} \lambda_{\vec{k}', \alpha}^{-\nu}(t) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \vec{e}_{\vec{k}', \alpha}$$

où la somme sur les  $\vec{k}'$  s'effectue donc sur des impulsions négatives. Ce choix étant fait pour alléger la notation par la suite.

À partir de cette décomposition, on peut ré-écrire l'Hamiltonien linéaire dispersif (6.40) en fonction des  $\lambda_{\vec{k}, \alpha}^\nu$ . Pour plus de clarté, on procédera terme par terme.

Le premier terme de (6.40) nous donne :

$$\mu_0 \iiint_V \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} d^3\vec{r} = \mu_0 \sum_{\vec{k}, \alpha} \sum_{\vec{k}', \alpha'} \frac{\dot{\lambda}_{\vec{k}, \alpha}^\nu \dot{\lambda}_{\vec{k}', \alpha'}^{-\nu}}{V} \vec{e}_{\vec{k}, \alpha} \cdot \vec{e}_{\vec{k}', \alpha'} \iiint_V e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$$

Il est nécessaire de s'attarder sur l'intégrale : puisque l'on considère un volume restreint, dans l'espace des impulsions les  $\vec{k}$  sont quantifiés et occupent un volume  $\Delta\vec{k}$  de sorte que  $\vec{k} + \vec{k}' = n\Delta\vec{k}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Nous prenons l'exemple d'une quantification sur une dimension (comme ce sera le cas dans notre étude) illustrée dans la figure 6.2.

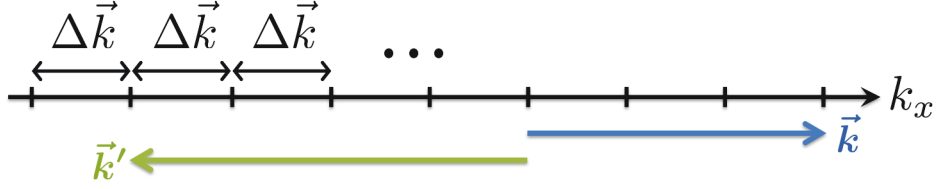


Figure 6.2 – Quantification sur une dimension dans l'espace des impulsions.

Soit un milieu d'aire effective  $A_{eff}$  et de longueur  $L$  (à ne pas confondre avec le Lagrangien). En supposant les  $\vec{k}$  colinéaires à l'axe des  $x$  sur lequel on quantifie, on a  $\Delta\vec{k} = \frac{2\pi}{L}$  en considérant des conditions aux limites périodiques, soit :

$$\iiint_V e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} = A_{eff} \int_L e^{i n \Delta k x} dx = A_{eff} \int_{x=0}^L e^{i 2\pi \frac{x}{L} n} dx$$

On voit ici qu'on intègre sur  $n$  oscillations, si bien que l'intégrale est nulle pour tout  $n \neq 0$ . Pour  $n = 0$ , on a  $\vec{k} = -\vec{k}'$  et le terme d'intégration sur l'espace vaut  $V = A_{eff} \times L$ . On a donc :

$$\iiint_V e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} = V \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \quad (6.43)$$

Ce raisonnement reste valide aux cas de quantification en deux ou trois dimensions<sup>8</sup>.

Par ailleurs, si  $\vec{k} = -\vec{k}'$ , on a :

$$\vec{e}_{\vec{k},\alpha} \cdot \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'} = \vec{e}_{-\vec{k},\alpha} \cdot \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'} = -(-1)^\alpha \vec{e}_{\vec{k},\alpha} \cdot \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'} = -(-1)^\alpha \delta_{\alpha,\alpha'}$$

Soit pour le premier terme de l'Hamiltonien :

$$\mu_0 \iiint_V \dot{\vec{\Lambda}}^\nu \cdot \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu} d^3\vec{r} = \mu_0 \sum_{\vec{k},\alpha} \sum_{\vec{k}',\alpha'} -(-1)^\alpha \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu \dot{\lambda}_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \delta_{\alpha,\alpha'}$$

Pour les deux termes restants de (6.40), on note tout d'abord que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\alpha} \lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} i\vec{k} \wedge \vec{e}_{\vec{k},\alpha} \quad (6.44)$$

et on en déduit directement avec (6.43) :

$$\begin{aligned} \iiint_V (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^{-\nu}) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu : (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu) d^3\vec{r} &= - \sum_{\vec{k},\alpha} \sum_{\vec{k}',\alpha'} \lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu (\vec{k}' \wedge \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'}) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu : (\vec{k} \wedge \vec{e}_{\vec{k},\alpha}) \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \\ -\frac{1}{2} \iiint_V (\vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^{-\nu}) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu'' : (\vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{\Lambda}}^\nu) d^3\vec{r} &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\alpha} \sum_{\vec{k}',\alpha'} \dot{\lambda}_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu (\vec{k}' \wedge \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'}) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu'' : (\vec{k} \wedge \vec{e}_{\vec{k},\alpha}) \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \end{aligned}$$

En définitive, l'Hamiltonien linéaire dispersif s'écrit :

$$H_L = \sum_{\vec{k},\alpha} \sum_{\vec{k}',\alpha'} \left( \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu \dot{\lambda}_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(1)} - \lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(2)} \right) \quad (6.45)$$

8. Chacune des composantes  $i$  de  $\vec{k}$  occupera un intervalle  $\frac{2\pi}{L_i}$  dans l'espace des impulsions. L'intégration sur la direction associée donnera  $L_i \delta_{k_i, -k_i}$ , et le produit de ces termes donnerons  $V \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}$ .



Et par la même logique, on peut exprimer le Lagrangien (6.35) en terme de  $\lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu$  :

$$L = \sum_{\vec{k},\alpha} \sum_{\vec{k}',\alpha'} \left( \begin{aligned} &\dot{\lambda}_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(1)} + \lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(2)} \\ &+ \lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(3)} - \dot{\lambda}_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} \lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(3)} \end{aligned} \right) \quad (6.46)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(1)} &= -(-1)^\alpha \mu_0 \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \delta_{\alpha,\alpha'} + \frac{1}{2} \left( \vec{k}' \wedge \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{k} \wedge \vec{e}_{\vec{k},\alpha} \right) \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \\ M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(2)} &= \left( \vec{k}' \wedge \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}_\nu : \left( \vec{k} \wedge \vec{e}_{\vec{k},\alpha} \right) \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \\ M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(3)} &= \frac{i}{2} \left( \vec{k}' \wedge \vec{e}_{\vec{k}',\alpha'} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}'_\nu : \left( \vec{k} \wedge \vec{e}_{\vec{k},\alpha} \right) \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \end{aligned}$$

On souhaite à présent exprimer l'Hamiltonien du système en fonction des coordonnées et moments canoniques. Nos nouvelles coordonnées canoniques étant les  $\lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu$  et  $\lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu}$ , leurs moments conjugués s'obtiennent d'après (6.2) :

$$\begin{aligned} \pi_{\vec{k},\alpha}^\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu} = \sum_{\vec{k}',\alpha'} \left( \dot{\lambda}_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} m_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(1)} + \lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} m_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(3)} \right) \\ \pi_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu}} = \sum_{\vec{k},\alpha} \left( \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu m_{(\vec{k},\alpha),(\vec{k}',\alpha')}^{(1)} - \lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu m_{(\vec{k},\alpha),(\vec{k}',\alpha')}^{(3)} \right) \end{aligned} \quad (6.47)$$

avec les  $m^{(j)}$  définis tels que  $M^{(j)} = \iiint_V m^{(j)} d^3 \vec{r}$ . On note la disparition du second terme de (6.2) du fait que par définition les  $\lambda_{\vec{k},\alpha}^\nu$  et  $\lambda_{\vec{k}',\alpha'}^{-\nu}$  ne dépendent pas de l'espace.

On a finalement d'après (6.3) l'Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H_L &= \left( \iiint_V \sum_{\vec{k},\alpha} \left( \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu \pi_{\vec{k},\alpha}^\nu + \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^{-\nu} \pi_{\vec{k},\alpha}^{-\nu} \right) d^3 \vec{r} \right) - L \\ H_L &= \sum_{\vec{k},\alpha} \left( \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu \Pi_{\vec{k},\alpha}^\nu + \dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^{-\nu} \Pi_{\vec{k},\alpha}^{-\nu} \right) - L \end{aligned}$$

Où on pose pour plus de praticité les  $\Pi_{\vec{k},\alpha}^{\pm\nu} = \iiint_V \pi_{\vec{k},\alpha}^{\pm\nu} d^3 \vec{r}$ , que nous utiliserons dans toute la suite. Leur expressions sont donc les mêmes que (6.47) en substituant les  $m^{(j)}$  par les  $M^{(j)}$ . Les  $\Pi^{\pm\nu}$  ont l'avantage de ne pas dépendre de l'espace, tout comme les  $\lambda^{\pm\nu}$ , ce qui simplifie notre Hamiltonien, mais permettra aussi de faire disparaître la dépendance spatiale dans les relations de commutation<sup>9</sup> (6.6). On peut noter qu'en injectant les expressions des  $\Pi^{\pm\nu}$  et le Lagrangien (6.46) dans l'expression ci-dessus, on retrouve bien<sup>10</sup> (6.45).

Afin d'exprimer l'Hamiltonien en terme de coordonnées et moments canoniques, il serait nécessaire d'inverser les expressions de ces derniers pour obtenir l'expression des  $\dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^\nu$  et  $\dot{\lambda}_{\vec{k},\alpha}^{-\nu}$  à remplacer dans (6.45). Cependant, on peut voir que cette inversion n'est pas possible dans le cas général du fait que les tenseurs  $\boldsymbol{\eta}_\nu$  dans les expressions des  $M^{(j)}$  peuvent mélanger les polarisations.

9. La réponse de notre milieu étant locale dans l'espace, seules les relations prise à la même position  $\vec{r}$  nous intéressent. La perte d'information sur la position en substituant les  $\Pi^{\pm\nu}$  aux  $\pi^{\pm\nu}$  n'est donc pas préjudiciable.

10. En faisant également intervenir la propriété  $M_{(\vec{k}',\alpha'),(\vec{k},\alpha)}^{(j)} = M_{(\vec{k},\alpha),(\vec{k}',\alpha')}^{(j)}$  découlant directement de la symétrie de permutation globale de  $\boldsymbol{\eta}_\nu$ ,  $\boldsymbol{\eta}'_\nu$  et  $\boldsymbol{\eta}''_\nu$  (cf. sous-section 6.2.1).

Une pratique usuelle pour contourner cette difficulté consiste alors à décomposer les champs du problème sur les modes propres de polarisation du guide. La propagation linéaire peut alors être décrite analytiquement tout en laissant les non-linéarités induire des couplages entre les modes de polarisation.

Il est toutefois à noter que dans nos conditions d'études, chaque onde se propage déjà selon un axe propre du guide, impliquant la conservation de leurs états de polarisation. Dans toute la suite, nous considérerons un modèle simplifié correspondant à nos conditions d'étude, dans lequel le champ de fréquence  $\omega_\nu$  se cantonne à une seule polarisation.

### Hamiltonien en régime dispersif pour un guide d'onde unidimensionnel

On considère un guide d'onde unidimensionnel tel qu'une fibre où la propagation se fait selon l'axe  $x$ , et la polarisation de notre champ de fréquence  $\omega_\nu$  sur l'axe  $z$  (ce qui implique que le potentiel-dual soit selon  $y$ <sup>11</sup>). On a donc :

$$\vec{k} = k \vec{e}_x \qquad \vec{e}_{\vec{k},1} \equiv \vec{e}_y \qquad \vec{e}_{\vec{k},2} \equiv \vec{e}_z$$

et  $\vec{\Lambda}^\nu(\vec{r}, t) = \Lambda^\nu(x, t) \vec{e}_y$ , soit  $\vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}^\nu = \partial_x \Lambda^\nu \vec{e}_z$ .

On ne considère plus qu'une seule polarisation  $\alpha = \alpha' = 1$ , soit  $\vec{e}_{-\vec{k}} = \vec{e}_{\vec{k}} \equiv \vec{e}_y$ . Les  $M^{(j)}$  se simplifient donc en :

$$\begin{aligned} M_{k',k}^{(1)} &= \left( \mu_0 - \frac{k^2}{2} \eta''_{\nu_{zz}} \right) \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \\ M_{k',k}^{(2)} &= -k^2 \eta_{\nu_{zz}} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \\ M_{k',k}^{(3)} &= -\frac{i}{2} k^2 \eta'_{\nu_{zz}} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \end{aligned}$$

Et les  $\Pi^\nu$  :

$$\begin{aligned} \Pi_k^\nu &= \dot{\lambda}_{-k}^{-\nu} \left( \mu_0 - \frac{k^2}{2} \eta''_{\nu_{zz}} \right) - \lambda_{-k}^{-\nu} \frac{i}{2} k^2 \eta'_{\nu_{zz}} \\ \Pi_{-k}^{-\nu} &= \dot{\lambda}_k^\nu \left( \mu_0 - \frac{k^2}{2} \eta''_{\nu_{zz}} \right) + \lambda_k^\nu \frac{i}{2} k^2 \eta'_{\nu_{zz}} \end{aligned} \tag{6.48}$$

On rappelle que  $\lambda_k^\nu$  porte une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega_\nu t}$  donc la dépendance temporelle de  $\Pi_k^\nu$  est en  $e^{i\omega_\nu t}$ .

D'autre part, vu que  $\Lambda$  comme  $\dot{\Lambda}$  sont hermitiens, on a nécessairement  $(\lambda_k^\nu)^\dagger = \lambda_{-k}^{-\nu}$  et  $(\Pi_k^\nu)^\dagger = \Pi_{-k}^{-\nu}$ .

Ces simplifications nous permettent d'établir les expressions dérivées des coordonnées canoniques  $\dot{\lambda}_k^\nu$  et  $\dot{\lambda}_{-k}^{-\nu}$  en fonction des coordonnées et moments canoniques, en inversant (6.48). Nous substituons ces expressions dans l'Hamiltonien (6.45) pour obtenir :

$$H_L = \sum_k \left[ \frac{1}{\mu_0 - \frac{k^2}{2} \eta''_{\nu_{zz}}} \left( \Pi_{-k}^{-\nu} - i \frac{k^2}{2} \eta'_{\nu_{zz}} \lambda_k^\nu \right) \left( \Pi_k^\nu + i \frac{k^2}{2} \eta'_{\nu_{zz}} \lambda_{-k}^{-\nu} \right) + \eta_{\nu_{zz}} k^2 \lambda_{-k}^{-\nu} \lambda_k^\nu \right]$$

où la sommation sur les  $\vec{k}'$  négatifs disparaît du fait des  $\delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}$  dans  $M_{k',k}^{(1)}$  et  $M_{k',k}^{(2)}$ , pour ne laisser que la somme sur les  $\vec{k}$  positifs.

11. Par définition du potentiel-dual  $\vec{D} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda}$ . Avec  $\vec{D}$  et  $\vec{\Lambda}$  dans le plan transverse, si  $\vec{D}$  est selon l'axe  $z$ ,  $\vec{\Lambda}$  est donc nécessairement selon l'axe  $y$ .

### Quantification en régime dispersif

Pour opérer la quantification on promeut en opérateurs<sup>12</sup> les  $\lambda_k^\nu$  et  $\Pi_k^\nu$  et on impose les relations de commutations d'après (6.6) :

$$\left[ \hat{\lambda}_k^\nu, \hat{\lambda}_{k'}^{\nu'} \right] = 0 \quad \left[ \hat{\Pi}_k^\nu, \hat{\Pi}_{k'}^{\nu'} \right] = 0 \quad \left[ \hat{\lambda}_k^\nu, \hat{\Pi}_{k'}^{\nu'} \right] = i\hbar \delta_{k,k'} \quad (6.49)$$

où on notera la disparition de la dépendance spatiale, les  $\lambda_k^\nu$  et  $\Pi_k^\nu$  ne dépendant pas de  $\vec{r}$ .

Nous allons maintenant introduire les deux duos d'opérateurs création-annihilation  $(\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger)$  et  $(\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger)$  à partir desquels nous reformulerons les variables canoniques. La signification physique de ces opérateurs et notamment les champs auxquels ils sont associés seront présentés plus loin, une fois détaillée l'expression du Hamiltonien en fonction de ces derniers. Nous posons donc [114] :

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( A_k \hat{\lambda}_k^\nu + \frac{i}{A_k^*} (\hat{\Pi}_k^\nu)^\dagger \right) \\ \hat{b}_k^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( A_k \hat{\lambda}_k^\nu - \frac{i}{A_k^*} (\hat{\Pi}_k^\nu)^\dagger \right) \end{aligned} \quad (6.50)$$

où nous pouvons noter que, comme  $\hat{\lambda}_k^\nu$  et  $\hat{\Pi}_k^\nu$ , les opérateurs  $\hat{a}_k$  et  $\hat{b}_k$  portent une dépendance temporelle<sup>13</sup>.

Nous déduisons les commutateurs usuels sur les opérateurs création-annihilation d'après les relations de commutation ci-dessus :

$$\left[ \hat{a}_k, \hat{b}_{k'} \right] = 0 \quad \left[ \hat{a}_k^\dagger, \hat{b}_{k'}^\dagger \right] = 0 \quad \left[ \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = \delta_{k,k'} \quad \left[ \hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger \right] = \delta_{k,k'} \quad (6.51)$$

On peut directement inverser les relations (6.50) pour avoir :

$$\hat{\lambda}_k^\nu = \frac{1}{A_k} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger) \quad (6.52a)$$

$$\hat{\Pi}_k^\nu = iA_k \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\hat{a}_k^\dagger - \hat{b}_k) \quad (6.52b)$$

Le nombre complexe  $A_k$  est choisi de façon à ce que l'expression de l'Hamiltonien ne contienne aucun terme croisé<sup>14</sup> entre les deux set d'opérateurs création-annihilation (termes  $\hat{a}_k \hat{b}_k$  ou  $\hat{a}_k^\dagger \hat{b}_k^\dagger$ ). On peut montrer<sup>15</sup> que pour [114] :

$$A_k = \sqrt[4]{\frac{k^4}{4} \eta'_{\nu_{zz}}{}^2 + \left( \mu_0 - \frac{k^2}{2} \eta''_{\nu_{zz}} \right) k^2 \eta_{\nu_{zz}}}$$

12. Il est à noter que jusqu'ici, les  $\lambda_k^\nu$  et  $\Pi_k^\nu$  n'ayant pas été considérés comme des opérateurs, nous aurions été libre de les commuter dans les produits où ils interviennent, et donc potentiellement obtenir un ordre d'opérateurs différent dans l'Hamiltonien. Pour cette raison, nous avons veillé, de la définition de l'Hamiltonien en fonction des variables canoniques jusqu'ici, à éviter une telle inversion.

13. Les  $\hat{\lambda}_k^\nu$  portent toujours une dépendance temporelle implicite en  $e^{-i\omega_\nu t}$ , et de même  $\hat{\Pi}_k^\nu \sim e^{i\omega_\nu t}$ . Les opérateurs création-annihilation portent donc une dépendance temporelle  $\hat{a}_k \sim e^{-i\omega_\nu t}$  et  $\hat{b}_k \sim e^{i\omega_\nu t}$ .

14. Nous verrons plus loin que les opérateurs  $\hat{b}_k$  se rapportent aux phonons, tandis que les  $\hat{a}_k$  correspondent aux photons. De tels termes croisés caractérisent donc des polaritons [114]. Or nous ne nous intéressons dans cette étude qu'aux champs optiques, aussi cherchons nous à séparer les deux contributions pour mettre de côté celle des phonons.

15. La démonstration analytique étant excessivement longue, elle ne sera pas exposée ici. Cependant, ce résultat peut être aisément vérifié en usant d'un logiciel de calcul formel.

on obtient l'Hamiltonien :

$$\hat{H}_L = \hbar \sum_k \left[ \omega_+(k) + \omega_+(k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \omega_-(k) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right] \quad (6.53)$$

où on définit les fréquences :

$$\omega_\pm(k) = \frac{1}{\mu_0 - \eta''_{\nu_{zz}} \frac{k^2}{2}} \left( \pm \frac{k^2 \eta'_{\nu_{zz}}}{2} + A_k^2 \right) \quad (6.54)$$

Cette définition nous permet de simplifier l'expression de  $A_k$ . En effet, on peut noter que les fréquences  $\omega_\pm$  sont solutions de l'équation :

$$\mu_0 \omega_\pm^2 = k^2 \left( \eta_{\nu_{zz}} \pm \omega_\pm \eta'_{\nu_{zz}} + \frac{1}{2} \omega_\pm^2 \eta''_{\nu_{zz}} \right)$$

Pour  $\omega_+$ , on retrouve là le développement de Taylor à l'ordre 2 de la susceptibilité électrique inverse (6.34), on a donc :

$$\mu_0 \omega_+^2 \simeq k^2 \eta_{zz}(\omega_+) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_+}{k} \simeq \sqrt{\frac{\eta_{zz}(\omega_+)}{\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_{zz}(\omega_+)}} \quad (6.55)$$

Qui est la relation classique entre le nombre d'onde et la pulsation pour une onde se propageant dans un diélectrique à une vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega_+}{k}$ .

Par ailleurs, la relation entre  $\omega$  et  $k$  va nous permettre d'introduire la vitesse de groupe  $v_{gk} = \frac{d\omega_+}{dk}$ . En dérivant (6.55) par rapport à  $\omega_+$ , on obtient :

$$2 \mu_0 \omega_+ \simeq 2k \frac{dk}{d\omega_+} \eta_{zz}(\omega_+) + k^2 \frac{d\eta_{zz}(\omega_+)}{d\omega_+} \quad \Leftrightarrow \quad k \eta_{zz}(\omega_+) \simeq v_{gk} \left( \mu_0 \omega_+ - \frac{k^2}{2} \frac{d\eta_{zz}(\omega_+)}{d\omega_+} \right)$$

Or d'après les définitions (6.54) et (6.34) :

$$A_k^2 = \mu_0 \omega_+ - \frac{k^2}{2} (\eta'_{\nu_{zz}} + \omega_+ \eta''_{\nu_{zz}}) = \mu_0 \omega_+ - \frac{k^2}{2} \left( \frac{d\eta_{zz}}{d\omega_+} + (\omega_+ - \omega_\nu) \eta''_{\nu_{zz}} \right)$$

En prenant en compte que la dépendance temporelle<sup>13</sup> des  $\hat{a}_k$  en  $e^{-i\omega_+ t}$  est, d'après (6.52a), proche de celle des  $\lambda_k^\nu$  (on rappelle que  $\lambda_k^\nu \sim e^{-i\omega_\nu t}$ ), on a  $\omega_+ \simeq \omega_\nu$  soit :

$$A_k^2 \simeq \mu_0 \omega_+ - \frac{k^2}{2} \frac{d\eta_{zz}}{d\omega_+} \simeq \frac{k \eta_{zz}(\omega_+(k))}{v_{gk}}$$

Soit en définitive :

$$A_k \simeq \sqrt{\frac{k \eta_{zz}(\omega_+(k))}{v_{gk}}} \quad (6.56)$$

La dernière étape de notre calcul consistera à simplifier l'Hamiltonien (6.53) en ne conservant que les termes pertinents.

L'énergie étant toujours définie à une constante près<sup>16</sup>, on peut retirer le terme constant  $\hbar \sum_k \omega_+(k)$  du Hamiltonien. On retrouve alors l'Hamiltonien typique d'un système d'oscillateurs harmoniques [114, p.110] :

$$\hat{H}_L = \hbar \sum_k \left[ \omega_+(k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \omega_-(k) \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \right]$$

16. En pratique, nous ne pouvons mesurer que des différences en énergie.

Par ailleurs, les termes  $\hbar\omega_+(k)\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$  de l'Hamiltonien caractérisent la propagation de modes d'excitation lumineuse, i.e. de photons, dans la bande de fréquence autour de  $\omega_\nu$ . En effet, en reprenant l'argument précédent, si la dépendance temporelle<sup>13</sup> des  $\hat{a}_k$  est en  $e^{-i\omega_+t}$ , les relations (6.52) montrent qu'elle doit être proche de celle des  $\lambda_k^\nu$  soit  $e^{-i\omega_\nu t}$ .

Les termes  $\hbar\omega_-(k)\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k$ , au contraire, oscillent à une fréquence  $\omega_- \sim -\omega_\nu$ , donc hors de la bande fréquence que nous considérons. Ils correspondent aux modes d'excitation de la matière, i.e. aux phonons. Puisque nous nous sommes placés dans des conditions où nous nous trouvons loin de toute fréquence de résonance du matériau, le couplage lumière-matière est faible, d'où l'apparition des phonons comme oscillateurs indépendants des photons.

Notre modèle macroscopique ne pouvant traiter correctement ces modes d'oscillation de la matière<sup>17</sup>, nous supposons une absence de phonons. Ces modes d'excitation étant dans l'état vide, on peut retirer ces termes de l'Hamiltonien. Nous noterons donc dorénavant  $\omega \equiv \omega_+$ .

L'Hamiltonien linéaire en régime dispersif que nous utiliserons au final s'écrit donc :

$$\hat{H}_L = \sum_k \hbar\omega(k)\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k \quad (6.57)$$

On peut noter que nous avons établi ce Hamiltonien pour un champ de fréquences contenues dans une bande étroite autour de  $\omega_\nu$ , mais qu'il est possible de l'étendre à plusieurs champs en considérant une sommation sur l'ensemble des modes  $k$ .

Outre l'Hamiltonien linéaire dispersif, le travail de quantification que nous venons de réaliser nous permet d'exprimer le champ  $\vec{D}$  quantifié, en présence de dispersion linéaire.

Nous commençons pour cela par les coefficients de la décomposition en ondes planes, qui d'après (6.52a) et (6.56) s'obtiennent par :

$$\hat{\lambda}_k^\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{\hbar v_{gk}}{2k\eta_{zz}\omega(k)}}\hat{a}_k e^{-i\omega(k)t} \quad (6.58)$$

en rappelant que les opérateurs  $\hat{b}_k$ , correspondant aux phonons, sont exclus de notre modèle. Nous avons fait ici ressortir la dépendance temporelle<sup>13</sup> en  $e^{-i\omega t}$  jusqu'ici implicitement contenue dans les  $\hat{a}_k$ . On notera que ce terme de phase et son conjugué se compensent mutuellement dans l'Hamiltonien.

On en déduit le champ complexe  $\hat{\Lambda}^\nu$  d'après la décomposition (6.41) :

$$\hat{\Lambda}^\nu(x,t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \hat{\lambda}_k^\nu(t) e^{ikx} \vec{e}_y \simeq \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar v_{gk}}{2k\eta(\omega_k)}} \hat{a}_k e^{i(kx-\omega_k t)} \vec{e}_y$$

avec la susceptibilité électrique linéaire inverse  $\eta \equiv \eta_{zz}^{(1)}$  pour un champ final selon  $z$ <sup>18</sup>. Nous rappelons que la somme s'effectue ici sur le demi-espace des  $k$  positifs.

Enfin, pour un champ quantifié et s'étendant spectralement sur une bande fine autour d'une fréquence  $\omega_\nu$ , on note l'opérateur induction électrique  $\hat{D}_q$ , donné par :

$$\hat{D}_q = \vec{\nabla} \wedge \hat{\Lambda} = \vec{\nabla} \wedge \left( \hat{\Lambda}^\nu + \hat{\Lambda}^{-\nu} \right)$$

soit :

$$\hat{D}_q = \partial_x (\Lambda^\nu + \Lambda^{-\nu}) \vec{e}_z = \sum_k i \sqrt{\frac{\hbar k v_{gk}}{2V\eta(\omega_k)}} \left( \hat{a}_k e^{i(kx-\omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(kx-\omega_k t)} \right) \vec{e}_z \quad (6.59)$$

17. Il serait pour cela nécessaire d'adopter une approche microscopique et de quantifier la matière [114].

18. On a supposé ici un champ de polarisation selon  $z$  (le potentiel-dual étant donc selon  $\vec{e}_y$ ) mais on peut évidemment écrire l'équivalent pour un champ selon  $y$  en prenant soin de prendre  $\eta = \eta_{yy}^{(1)}$ .

L'expression (6.59) qui décrit un champ quantifié fin en fréquence en régime linéaire dispersif constitue le résultat final de cette section. Elle sera utilisée par la suite pour exprimer les champs signal et idler dans l'Hamiltonien non linéaire. En effet, celui-ci étant considéré comme une perturbation, on substituera en son sein les formes linéaires des champs *en présence* de dispersion. La forme (6.59) est donc valable, que l'on se trouve dans un régime linéaire ou non linéaire, pour peu que la non-linéarité reste assez faible.

On peut noter que nous conservons ici une description discrète des modes du champ, et ce dans le but d'introduire directement la décomposition qui sera faite dans la section suivante. Le passage à la limite continue ne sera alors effectuée qu'une fois l'Hamiltonien non linéaire exprimé en fonction des opérateurs création-annihilation.

### 6.3 Hamiltonien non linéaire et champs quantifiés

Nous rappelons que nous distinguons dans l'Hamiltonien total du système sa part linéaire  $H_L$  de celle non linéaire  $H_{NL}$ . C'est cette dernière qui nous intéressera essentiellement dans cette section et dans la suite pour établir la probabilité de génération de paires puisqu'elle traduit directement l'interaction entre le champ électromagnétique et le matériau qui nous intéresse.

Nous avons pu établir en section 6.1 l'Hamiltonien total du système en absence de toute dispersion. On peut tirer de (6.31) la part non linéaire :

$$H_{NL} = \iiint_V \mathcal{H}_{NL} d^3\vec{r} = \iiint_V \sum_{n>1} \frac{1}{n+1} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(n)} \vec{D}^{\otimes n} d^3\vec{r} \quad (6.60)$$

On note ici que l'intégration se restreint sur le volume  $V$  du guide, puisqu'en dehors de celui-ci il n'y a aucune interaction avec le milieu et l'Hamiltonien non linéaire est donc nul.

Pour notre étude, seuls les processus non linéaires d'ordre 3 sont pertinents : ceux d'ordre 2 (comme tous les ordres pairs) sont nuls pour les milieux centrosymétriques (ce qui est le cas de notre liquide non linéaire), et ceux d'ordre 5 et supérieurs restent largement négligeables. Toutefois, nous soulignons que tous les ordres de non-linéarités sont susceptibles d'être décrits par notre modèle, en suivant la même démarche que celle qui sera présentée ici.

L'Hamiltonien densité non linéaire pour l'ordre 3 uniquement se note donc :

$$\mathcal{H}_{NL} = \frac{1}{4} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D} \vec{D} \vec{D} \quad (6.61)$$

Nous rappelons que les phénomènes non linéaires qui nous intéressent ici restent très faibles, de sorte que la part non linéaire du Hamiltonien peut être vue comme une perturbation à  $H_L$ . Dans une telle approche perturbative, en première approximation nous pouvons substituer dans (6.61) les termes de champ  $\vec{D}$  par leur forme prise dans le cadre d'un milieu *linéaire*. Cette substitution est possible dès lors que l'ajout de non-linéarité ne change pas  $H_L$ , point qui a été démontré en sous-section 6.1.3<sup>19</sup>.

Dans notre étude, nous faisons la distinction dans le champ déplacement électrique total de trois sous-composantes disjointes dans l'espace des fréquences :  $\vec{D} = \vec{D}_{p_r} + \vec{D}_{s_r} + \vec{D}_{i_r}$  avec les champs réels de pompe  $\vec{D}_{p_r}$ , signal  $\vec{D}_{s_r}$  et idler  $\vec{D}_{i_r}$ . Or puisque l'Hamiltonien linéaire  $H_L$  caractérise la propagation

19. L'argument avancé se vérifie pour un champ fin en fréquence ( $\vec{\Lambda} = \vec{\Lambda}^\nu + \vec{\Lambda}^{-\nu}$ ) puisque :

$$\vec{D} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\Lambda} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\Lambda}^\nu + \vec{\Lambda}^{-\nu})$$

et la part non linéaire (du Hamiltonien comme du Lagrangien) ne faisant intervenir que le champ  $\vec{D}$ , elle est indépendante des dérivées temporelles des  $\Lambda^\nu$ . Son ajout ne change donc pas les moments canoniques (cf. leur définition (6.2)), et la part linéaire que nous avons établi reste la même.

*libre et sans interactions* (dispersion mise à part) des champs, il correspond alors à la somme d'Hamiltoniens linéaires propres à chaque champ, indépendants entre eux. En effet, toutes les interactions entre ces champs se faisant via le milieu, leurs propagations respectives sont indépendantes.

Chacun de ces champs est considéré suffisamment fin spectralement pour que la dispersion linéaire reste négligeable en leur sein. Cependant la différence d'indice linéaire *entre* entre ces champs, i.e. entre fréquences appartenant à deux champs différents, n'est pas négligeable et doit être prise en compte dans notre modèle : elle est intégrée à la propagation. Cette prise en compte, particulièrement complexe pour des champs quantifiés, tels que  $\vec{D}_{s_r}$  et  $\vec{D}_{i_r}$  a été faite en sous-section 6.2.4. Dans un même ordre d'idées, la finesse spectrale des champs nous permet, en première approximation, de poser les indices et vitesses de groupe constants *au sein* de chaque champ.

La distinction des trois champs distincts de notre problème va nous permettre de faire ressortir les différents phénomènes non linéaires en développant le terme  $\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}\vec{D}\vec{D}$  de (6.61) :

$$\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3} = \sum \vec{D}_a \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}_b \vec{D}_c \vec{D}_d \quad (6.62)$$

avec les indices  $a, b, c, d \in \{p_r, i_r, s_r\}$  et en sommant sur toutes les combinaisons différentes possibles des champs. Par ailleurs nous décomposons chaque champ réel  $j_r$  de notre problème sur une base de modes fréquentiels  $l_j$  discrets :

$$\vec{D}_{j_r}(\vec{r}, t) = \sum_{l_j} \vec{D}(\vec{r}, \omega_{l_j}) e^{-i\omega_{l_j} t} + \vec{D}^*(\vec{r}, \omega_{l_j}) e^{i\omega_{l_j} t} \quad (6.63)$$

où la somme ne s'effectue que sur les fréquences positives. Pour simplifier les notations on omettra dans ce qui suit la dépendance spatiale des champs complexes  $\vec{D}(\vec{r}, \omega_{l_j})$  ainsi introduits.

Bien sûr, si les champs de pompe, signal et idler sont disjoints spectralement, chacun constitue un continuum de modes, aussi repasserons-nous en limite continue un peu plus loin.

La dépendance temporelle d'un terme de la somme (6.62) sera<sup>20</sup> en  $e^{\pm i(\omega_{l_a} - \omega_\sigma)t}$  où  $\omega_\sigma = \pm\omega_{l_b} \pm \omega_{l_c} \pm \omega_{l_d}$  (les signes dépendant des conjugaisons des champs complexes intervenants dans le terme). On remarque que si  $\omega_{l_a} \neq \omega_\sigma$ , la contribution du terme associé est en moyenne nulle sur l'échelle de quelques cycles optiques. Nos mesures ne pouvant pas résoudre temporellement les oscillations rapides des champs optiques, nous opérons une moyenne à une échelle de temps grande devant l'ordre de grandeur des périodes d'oscillation des champs, mais petite vis-à-vis de la durée d'une impulsion de pompe. Cette moyenne sur le temps de quelques cycles optiques<sup>21</sup> revient à ne conserver que les termes respectant  $\omega_a \approx \omega_\sigma$ , ce qui correspond à la condition de conservation de l'énergie.

Pour une fréquence de pompe donnée, plusieurs paires de fréquences  $(\omega_s, \omega_i)$  sont possibles pour peu que la condition d'accord de phase, que nous introduirons plus loin le permette. De plus, l'impulsion de pompe ayant une largeur spectrale non-nulle, plusieurs fréquences de pompes sont disponibles pour intervenir dans les processus non linéaires, de sorte que le spectre accessible pour l'émission de paires s'en trouve élargi. En définitive, les champs signal et idler possèdent une certaine largeur dans l'espace des fréquences, résultat d'une combinaison de la largeur de pompe et de celle de l'accord de phase. Nous démontrerons plus formellement cet effet une fois l'expression finale de la JSA établie.

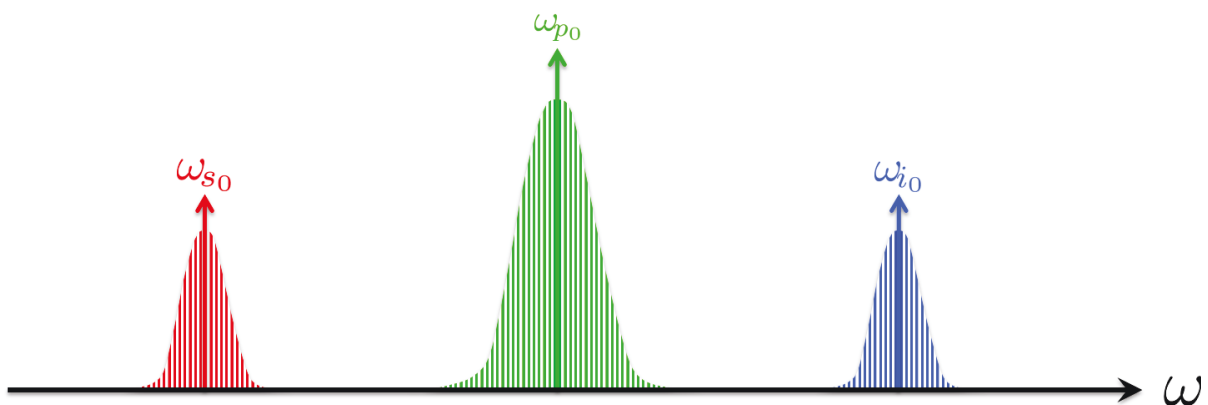
20. Nous nous replaçons à partir d'ici, et contrairement à la section 6.2, dans le cadre de la définition du produit scalaire complexe :  $\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi} = \sum_i \Phi_i^* \Psi_i$ . Ici l'usage de la définition du produit scalaire réel ou complexe ne change rien puisque nous l'appliquons sur des champs réels.

21. Cette approximation atteint ses limites dans la situation où la durée d'impulsion devient si courte que le nombre de cycles optiques au sein d'une même impulsion devient trop faible, soit pour des durées d'impulsions atteignant la centaine de femtosecondes [1].

L'ensemble des processus non linéaires d'ordre 3 possibles sont contenus dans la somme (6.62). Leur détail est donné en annexe D et ce, en présence de deux, trois ou quatre champs distincts. Dans notre cas d'étude, seuls trois sont présents : la pompe, signal et idler. L'Hamiltonien (6.61) peut alors se décomposer en trois sommes :

$$\mathcal{H}_{NL} = \frac{1}{4} \left( \sum_{l_p} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_p}) + \sum_{l_s} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_s}) + \sum_{l_i} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_i}) \right) \quad (6.64)$$

Par convention le champ idler correspond à des fréquences plus élevées que le champ signal, tous deux de part et d'autre du champ de pompe dans l'espace fréquentiel. Soit pour tous modes pris dans ces champs  $\omega_{l_s} < \omega_{l_p} < \omega_{l_i}$ . Cette disposition des champs est schématisée dans la figure 6.3.



**Figure 6.3** – Disposition des champs dans l'espace des fréquences dans notre étude. La largeur non-nulle de la pompe (vert), associée à celle de l'accord de phase, implique un spectre d'émission d'une certaine largeur pour les photons signal (rouge) et idler (bleu). Chacun de ces champs, localisé par sa fréquence centrale ( $\omega_{p_0}$ ,  $\omega_{s_0}$  ou  $\omega_{i_0}$ ) est subdivisé sur un ensemble discret de modes (respectivement  $\omega_{l_p}$ ,  $\omega_{l_s}$ ,  $\omega_{l_i}$ ).

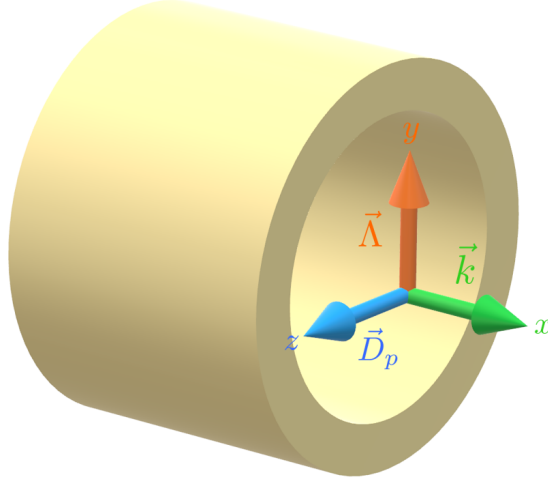
L'expression (6.64) prend encore en compte tous les phénomènes non linéaires d'ordre 3 en présence de trois champs disjoints. Or seul nous intéresse le mélange à quatre ondes dit direct, où deux photons de pompe s'annihilent pour former une paire de photons signal et idler. Dans la suite, nous ne retiendrons donc que les termes de la somme y correspondant de façon à établir l'Hamiltonien non linéaire propre à notre problème.

Toutefois, les différents mécanismes non linéaires d'ordre 3 peuvent être décrits en suivant la même procédure que celle que nous allons présenter. Et ce, en tirant de (6.62) les termes adaptés au phénomène que l'on souhaite décrire. Ces termes sont détaillés en annexe D pour le cas de deux, trois ou quatre champs disjoints. Enfin, le raisonnement suivi dans notre modèle peut également se transposer aux non-linéarités d'ordre 2 ou supérieur à 3.

### 6.3.1 Mélange à quatre ondes dans un guide 1D isotrope

Nous nous replaçons à présent dans la situation simplifiée introduite dans la sous-section 6.2.4, d'un guide d'onde uni-dimensionnel, correspondant à notre fibre. Le repère cartésien est choisi tel que l'axe de propagation soit selon  $x$  et le champ de pompe selon  $z$ .





**Figure 6.4** – Repère cartésien utilisé pour décrire notre fibre : la propagation se fait selon l’axe  $x$ , le potentiel-vecteur de la pompe est selon  $y$  et le champ  $\vec{D}_p$  selon  $z$ .

Par ailleurs, nous rappelons que, l’essentiel du champ se localisant au niveau du liquide, nous assimilons le  $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$  du guide à celui du liquide, qui hérite donc de son caractère isotrope<sup>22</sup>. Par conséquent, les composantes de  $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$  avec trois (et seulement trois) indices identiques sont nulles. Les seuls mélanges à quatre ondes susceptibles de survenir se font alors soit dans une configuration de polarisations parallèles entre le champ de pompe et les champs signal et idler (composante  $\eta_{zzzz}^{(3)}$ ), soit croisées (composante<sup>23</sup>  $\eta_{yyzz}^{(3)}$ ). Dans le cadre d’un milieu non linéaire isotrope, on remarquera que  $\eta_{zzzz}^{(3)} = 3 \times \eta_{yyzz}^{(3)}$  (cf. annexe B.7.1).

Par économie de notation, on notera de manière générale  $\eta^{(3)}$  la composante du tenseur intervenant dans le calcul, en gardant en tête que sa valeur finale dépend de la configuration considérée.

Nous pouvons maintenant nous intéresser aux développements des termes de (6.64), correspondant au cas de trois champs disjoints. Ceux-ci, donnés en annexe D.2 (équations (D.5), (D.6) et (D.7)), ont cependant été établis dans le cas très général de trois champs disjoints ordonnés spectralement, en détaillant tous les processus possibles. Seulement pour notre sujet d’étude, seuls certains sont pertinents.

En premier lieu et comme indiqué en annexe D.2, le mélange à quatre ondes direct qui nous intéresse est incompatible (au sens des écarts spectraux visés) avec tous les phénomènes impliquant la génération ou l’annihilation d’un seul photon. Sont ainsi exclus les conversions paramétriques de troisième ordre (TOSPDC) et les générations de triple harmoniques (THG).

Par ailleurs, nous nous intéressons essentiellement à la génération *spontanée* de photons dans les champs idler et signal. Le champ de pompe étant le seul à être injecté dans la fibre, les champs idler et signal sont initialement vides de tout photon. Au cours de la propagation dans la fibre non linéaire, seul le phénomène de mélange à quatre ondes direct peut créer des photons dans ces champs. Puisque l’on se place dans un régime de très faible efficacité non linéaire, relativement peu de photons signal et idler seront produits lors d’un passage d’une impulsion de pompe dans la fibre. De sorte qu’on peut considérer tout phénomène non linéaire impliquant la pré-existence de photons signal ou idler

22. Si notre liquide est isotrope, la fibre ne l’est pas : sa structure induit une biréfringence de forme, à un niveau macroscopique, contenant les champs au fil de leurs propagation linéaire ( $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ ) dans des polarisations linéaires déterminées. Le processus non linéaire étant gouverné à un niveau microscopique par la composition moléculaire du liquide, nous prendrons donc des champs à polarisations fixes intervenant dans un processus non linéaire isotrope ( $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ ).

23. On rappelle que par symétrie de permutation globale du tenseur de permittivité diélectrique inverse (cf. annexe B.6)  $\eta_{yyzz}^{(3)} = \eta_{zzyy}^{(3)} = \eta_{zyyz}^{(3)} = \dots$  etc. pour toutes les permutations d’indices.

comme négligeable. Sont visés ainsi les phénomènes d'automodulation de phase des champs signal et idler ( $\text{SPM}_s$  &  $\text{SPM}_i$ ), tous les termes de *Bragg scattering* (BS) et le mélange à quatre ondes inverse ( $\text{FWM}_{inv}$ ) mais pas son terme conjugué<sup>24</sup>.

D'autre part, cette considération d'une efficacité non linéaire très faible nous permet aussi d'estimer que le processus d'automodulation de phase de la pompe, s'il existe, sera trop faible pour induire un déphasage non linéaire et un élargissement de la pompe notables. Le terme ( $\text{SPM}_p$ ) pourra donc aussi être négligé.

En définitive, en se référant à l'annexe D.2 nous donnant tout les termes possibles dans (6.64), seuls les termes (sans leurs conjugués) de mélange à quatre ondes direct ( $\text{FWM}_{dir}$ ) dans (D.6) et (D.7), ainsi que le terme conjugué<sup>24</sup> du mélange à quatre ondes inverse ( $\text{FWM}_{inv}$ ) dans (D.5) seront retenus dans l'Hamiltonien non linéaire final. Les trois sommes de (6.64) se résument alors à la somme de ces trois termes, différant uniquement par leurs préfacteurs (respectivement 3, 3 et 6).

Ce qui, avec le préfacteur  $1/4$  dans (6.64), nous donne l'Hamiltonien densité non linéaire pour le mélange à quatre ondes spontané dans notre fibre :

$$\mathcal{H}_{NL} = 3\eta^{(3)} \sum_{\{l_s, l_i, l_p, l'_p\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l'_p})t} D^*(\omega_{l_s}) D^*(\omega_{l_i}) D(\omega_{l_p}) D(\omega_{l'_p}) \quad (6.65)$$

en rappelant que les champs complexes intervenant ici peuvent dépendre de l'espace et du temps. Enfin il est à noter que si nous considérons ici le cas d'une fibre, cet Hamiltonien reste valide pour n'importe quel milieu non linéaire isotrope<sup>22</sup>, et peut se généraliser à des milieux de plus basses symétries en prenant soin de considérer les bonnes composantes de  $\eta^{(3)}$ .

On peut noter que dans la décomposition sur une base discrète des champs (6.63), aucune supposition n'a été faite sur la dépendance *temporelle* des champs  $D(\vec{r}, \omega_{l_j})$  introduits. Notre champ de pompe impulsif, qui sera considéré classique, peut être vu comme l'oscillation d'un seul mode de fréquence  $\omega_{p_0}$  (la fréquence centrale du champ), modulée par une enveloppe temporelle contenue dans le champ complexe  $D(\vec{r}, \omega_{p_0})$ . Le détail de l'enveloppe ne trouvera son utilité que plus tard dans l'expression de l'état final des champs, et sera donc introduite en section 7.1. Pour simplifier l'expression du Hamiltonien dans la suite nous regroupons les termes de pompe sous le champ complexe :

$$D_p(\vec{r}, t) \equiv D(\vec{r}, \omega_{p_0}) e^{-i\omega_{p_0}t} \quad (6.66)$$

À partir duquel il est possible d'exprimer le champ de pompe réel d'après (6.63) :

$$D_{pr}(\vec{r}, t) = D_p(\vec{r}, t) + D_p^*(\vec{r}, t) \quad (6.67)$$

et l'Hamiltonien non linéaire :

$$\mathcal{H}_{NL} = 3\eta^{(3)} D_p^2(\vec{r}, t) \sum_{\{l_s, l_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i})t} D^*(\omega_{l_s}) D^*(\omega_{l_i}) \quad (6.68)$$

Où les indices de sommation sur les modes de pompe disparaissent et la conservation de l'énergie implique nécessairement un mélange à quatre ondes où deux photons de pompe à  $\omega_{p_0}$  s'annihilent pour former une paire signal-idler : la somme s'effectue pour tous modes  $\{l_s, l_i\}$  tels que  $\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - 2\omega_{p_0} = 0$ . Si cette condition de conservation de l'énergie à une fréquence de pompe  $\omega_{p_0}$  unique semble stricte, comme on le verra plus loin la contrainte sera relâchée du fait que le spectre de pompe n'est pas infiniment fin (propriété contenue dans l'enveloppe).

---

24. Le terme conjugué de ( $\text{FWM}_{inv}$ ) correspond au phénomène inverse, soit au mélange à quatre ondes direct. En effet, il fait intervenir deux termes de champ complexe de pompe et les champ conjugué signal et idler.

Pour aller plus loin, il est à présent nécessaire d'explicitier la forme des champs idler et signal que nous traiterons quantiquement. Ce sera également l'occasion d'opérer un passage à la limite continue.

### 6.3.2 Champs signal et idler quantifiés

Contrairement à la pompe, les champs signal et idler sont initialement vides de tout photon. Du fait du nombre relativement faible de paires émises dans la fibre, nous adoptons une approche quantique pour ces champs.

Nous reprenons l'expression d'un champ quantifié établi en (6.59) :

$$\hat{D}_q = \sum_k i \sqrt{\frac{\hbar k v_{gk}}{2V \eta(\omega_k)}} \left( \hat{a}_k e^{i(kx - \omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(kx - \omega_k t)} \right) \vec{e}_z \quad (6.69)$$

avec la permittivité diélectrique inverse linéaire  $\eta \equiv \eta_{zz}^{(1)}$  pour un champ final selon  $z$ <sup>25</sup>. D'autre part, nous avons pris  $\eta(\omega_k) = \eta^*(\omega_k)$ , qui découle directement du fait que nous considérons un matériau sans pertes. On rappelle que la somme s'effectue ici sur le demi-espace des  $k$  positifs, correspondant aux  $k_{l_s}$  ou aux  $k_{l_i}$  selon que l'on considère le champ signal ou idler.

En faisant le parallèle de (6.69) avec la décomposition (6.63), on trouve directement que :

$$D^*(\vec{r}, t, \omega_{l_j}) = -i \sqrt{\frac{\hbar k_{l_j} v_{g_{l_j}}}{2V \eta(\omega_{l_j})}} \hat{a}_{l_j}^\dagger e^{-i(k_{l_j} x)} \quad (6.70)$$

avec  $j = s$  ou  $i$ .

Cette forme pour les champs quantifiés nous permet de développer la forme de l'Hamiltonien (6.68) :

$$\hat{\mathcal{H}}_{NL} = -3\eta^{(3)} \frac{\hbar}{2V} D_p^2(\vec{r}, t) \sum_{\{l_s, l_i\}} \sqrt{\frac{k_{l_s} k_{l_i} v_{g_{l_s}} v_{g_{l_i}}}{\eta(\omega_{l_s}) \eta(\omega_{l_i})}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i})t} \hat{a}_{l_s}^\dagger \hat{a}_{l_i}^\dagger e^{-i(k_{l_s} + k_{l_i})x}$$

La quantification que nous avons utilisée jusqu'ici se place dans le contexte d'une cavité pour décomposer sur un ensemble discret de modes, comme présenté dans la sous-section 6.2.4. Cependant notre fibre d'étude ne constituant pas une cavité, les modes d'un champ, au lieu de constituer un ensemble discret, forment un continuum [118, p.237]. On opère donc un passage à la limite continue [123, 124] :

$$\sum_k \dots \longrightarrow \frac{1}{\Delta k} \int_k \dots dk \quad (6.71)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{k, k'} \longrightarrow [\hat{a}(k), \hat{a}(k')^\dagger] = \delta(k - k')$$

$$\hat{a}_k \longrightarrow \sqrt{\Delta k} \hat{a}(k) \quad (6.72)$$

Nous avons donc :

$$\sum_{k'} [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 1 \longrightarrow \int_{k'} [\hat{a}(k), \hat{a}(k')^\dagger] dk' = 1$$

On peut remarquer que dans (6.72) nous passons d'un opérateur  $\hat{a}_k$  sans dimensions (i.e. dont les valeurs propres sont sans dimensions) à l'opérateur  $\hat{a}(k)$  portant une dimension équivalente à celle de

25. On a supposé ici un champ de polarisation selon  $z$  (le potentiel-dual étant donc selon  $\vec{e}_y$ ) mais on peut évidemment écrire l'équivalent pour un champ selon  $y$  en prenant soin de prendre  $\eta = \eta_{yy}^{(1)}$ .

$k^{-\frac{1}{2}}$ . L'opérateur  $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  donnant le nombre de photons dans un mode  $k$  en description discrète, devient alors un opérateur  $\hat{N}(k) = \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k)$  correspondant à la densité de photons sur une plage spectrale  $\Delta k$  centrée sur  $k$ .

Le passage (6.71) est valide que l'on somme sur l'ensemble de l'espace des impulsions ou juste la moitié (modes de fréquences positives uniquement), pour peu que le domaine soit le même dans les descriptions discrète et continue. Cependant, nous passerons d'une somme discrète sur le demi-espace des impulsions à une intégrale sur son ensemble, ceci afin de simplifier l'intégration sur les Dirac qui apparaîtront lors de l'établissement de l'état final des paires de photons. Ce passage du demi-espace à l'espace entier implique d'introduire un facteur 2 de sorte que le ratio devant l'intégrale devient  $\frac{1}{2\Delta k}$ . Au final le passage à la limite continue nous donne l'Hamiltonien non linéaire :

$$\hat{\mathcal{H}}_{NL} = -\frac{3}{2}\eta^{(3)}\frac{\hbar}{V}D_p^2(\vec{r}, t) \times \frac{1}{(2\Delta k)^2} \int_{k_s} \int_{k_i} \sqrt{\frac{k_s k_i v_{g_s} v_{g_i}}{\eta(\omega(k_s)) \eta(\omega(k_i))}} e^{i(\omega(k_s)+\omega(k_i))t} (\sqrt{\Delta k})^2 \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i) e^{-i(k_s+k_i)x} dk_s dk_i$$

où nous avons simplifié la notation de label des modes ( $l_s \rightarrow s$  et  $l_i \rightarrow i$ ).

On peut noter que la somme discrète  $\sum_{\{l_s, l_i\}}$  s'est transformée en double intégrale  $\int_{k_s} \int_{k_i}$ . Comme indiqué en annexe D, la mise en accolade des indices de la somme discrète traduisaient la sommation sur les combinaisons de modes satisfaisant la conservation de l'énergie. Si celle-ci n'apparaît donc plus de manière explicite, elle reste néanmoins maintenue et ré-apparaîtra spontanément lors de l'intégration temporelle des termes exponentiels contenus dans l'Hamiltonien comme nous le verrons au chapitre 7.

Notre étude se concentrant sur un guide d'onde uni-dimensionnel, la quantification ne se fait que sur la dimension longitudinale. Dans le cadre des conditions aux limites périodiques déjà posées dans la sous-section 6.2.4, l'espace d'un état en description discrète est  $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ , avec  $L$  la longueur du guide d'onde. Soit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{NL} = -\frac{3}{16\pi}\eta^{(3)}\frac{\hbar}{A_{eff}}D_p^2(\vec{r}, t) \times \int_{k_s} \int_{k_i} \sqrt{\frac{k_s k_i v_{g_s} v_{g_i}}{\eta(\omega(k_s)) \eta(\omega(k_i))}} e^{i(\omega(k_s)+\omega(k_i))t} \hat{a}^\dagger(k_s) \hat{a}^\dagger(k_i) e^{-i(k_s+k_i)x} dk_s dk_i$$

en tenant compte du volume du guide  $V = A_{eff} \times L$  où  $A_{eff}$  est l'aire effective du mode fondamental dans lequel se trouve tous nos champs<sup>26</sup>. Enfin nous allons exprimer l'Hamiltonien non linéaire en fonction des pulsations plutôt que des impulsions. Pour cela on note que  $k_j = k(\omega_j) = \frac{n(\omega_j)\omega_j}{c}$  et que, par définition de la vitesse de groupe,  $dk_j = \frac{d\omega_j}{v_{g_j}}$ . Par ailleurs, les opérateurs  $\hat{a}^\dagger(k_j)$  ayant la dimension de  $k_j^{-\frac{1}{2}}$ , le passage du domaine des impulsions à celui des pulsations implique de les remplacer par  $\sqrt{v_{g_j}} \hat{a}^\dagger(\omega_j)$  où les  $\hat{a}^\dagger(\omega_j)$  portent la dimension de  $\omega_j^{-\frac{1}{2}}$ .

26. En cas de recouvrement incomplet des différents modes en jeu, on observe une diminution de l'efficacité du processus non linéaire. Diminution pouvant se retranscrire dans la valeur de  $A_{eff}$  ou de  $\eta^{(3)}$ . Dans notre cas d'étude, nos longueurs d'onde d'intérêt sont suffisamment proches pour considérer que tous nos champs se trouvent dans le même mode, et que ce mode a la même taille pour tous les champs considérés.

Dans le domaine des pulsations, l'Hamiltonien s'écrit donc :

$$\hat{\mathcal{H}}_{NL} = -\frac{3}{16\pi}\eta^{(3)}\frac{\hbar}{c A_{eff}}D_p^2(\vec{r}, t) \times \int_{\omega_s} \int_{\omega_i} \sqrt{\frac{n(\omega_s) n(\omega_i) \omega_s \omega_i}{\eta(\omega_s) \eta(\omega_i)}} e^{i(\omega_s+\omega_i)t} \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) e^{-i(\beta(\omega_s)+\beta(\omega_i))x} d\omega_s d\omega_i$$

où comme pour le champ de pompe on utilise la notation de constante de propagation du mode  $\beta(\omega) \equiv k(\omega)$ .

Par définition, nous avons la susceptibilité électrique linéaire inverse  $\boldsymbol{\eta} \equiv \boldsymbol{\eta}^{(1)} = (\boldsymbol{\epsilon}^{(1)})^{-1}$  (cf. annexe B).

Ce qui pour un milieu isotrope donne simplement  $\eta_{zz}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_{zz}^{(1)}}$ . Or  $\epsilon_{zz}^{(1)} = \epsilon_0 (1 + \chi_{zz}^{(1)}) = \epsilon_0 n^2$  avec  $n$  l'indice de réfraction linéaire vu par une onde polarisée suivant l'axe  $z$ .

Au final la part non linéaire de l'Hamiltonien densité devient :

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}}_{NL} = -\frac{3}{16\pi}\eta^{(3)}\frac{\hbar\epsilon_0}{c A_{eff}}D_p^2(\vec{r}, t) \times \int_{\omega_s} \int_{\omega_i} \sqrt{n^3(\omega_s) n^3(\omega_i) \omega_s \omega_i} e^{i(\omega_s+\omega_i)t} \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) e^{-i(\beta(\omega_s)+\beta(\omega_i))x} d\omega_s d\omega_i} \quad (6.73)$$

Comme nous l'avons vu, la part linéaire du Hamiltonien ne traduit que la propagation sans interaction des champs. L'Hamiltonien non linéaire contient donc toute l'interaction du champ avec le milieu :

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_{NL} = \iiint_V \hat{\mathcal{H}}_{NL} d^3\vec{r}$$

où on rappelle que l'intégration se restreint au volume  $V$  du guide où a lieu l'interaction.

Nous venons donc d'établir l'Hamiltonien d'interaction pour notre problème, à partir duquel nous pourrions expliciter l'état de la paire de photons en sortie de fibre et ainsi quantifier sa probabilité de génération.

## Chapitre 7

# État des paires et probabilité de génération

Les paires de photons émises par notre source sont entièrement décrites par leur état en sortie de fibre. Nous avons établi au chapitre 4 la fonction d'onde finale caractérisant les champs signal-idler dans le cadre d'une faible efficacité non linéaire (4.3) que nous rappelons ici :

$$|\psi_{s \otimes i, fin}\rangle = |0, 0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_t \hat{H}_{int}(t) dt |0, 0\rangle \quad (7.1)$$

D'autre part, l'Hamiltonien d'interaction intervenant ici correspond à la part non linéaire de l'Hamiltonien du système, qui a été déterminée en section 6.3 :

$$\hat{H}_{int} = \iiint_V \hat{\mathcal{H}}_{NL} d^3\vec{r}$$

Son expression appliquée à notre cas d'étude s'obtient de (6.73) :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & -\frac{3}{16\pi} \eta^{(3)} \frac{\hbar \epsilon_0}{c A_{eff}} \\ & \times \int_{\omega_s} \int_{\omega_i} \sqrt{n^3(\omega_s) n^3(\omega_i) \omega_s \omega_i} e^{i(\omega_s + \omega_i)t} \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) \iiint_V D_p^2(\vec{r}, t) e^{-i(\beta(\omega_s) + \beta(\omega_i))x} d^3\vec{r} d\omega_s d\omega_i \quad (7.2) \end{aligned}$$

où on rappelle que l'on considère notre milieu non linéaire comme homogène, isotrope et dont la réponse non linéaire est instantanée (pas de dispersion non linéaire). Par conséquent, la composante  $\eta^{(3)}$  du tenseur électro-optique  $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$  que nous utilisons ici ne dépend ni de l'espace ni du temps : c'est un paramètre constant caractéristique du matériau<sup>1</sup>.

Nous pouvons noter que le spectre de pompe est suffisamment fin pour considérer que l'indice de réfraction varie peu sur son étendue, de sorte qu'on peut approximer l'indice de réfraction pour les fréquences de pompe à  $n_{p_0} \equiv n(\omega_{p_0})$ . Nous pouvons faire exactement le même raisonnement pour les champs signal et idler :  $n(\omega_s) \approx n(\omega_{s_0}) = n_{s_0}$  et  $n(\omega_i) \approx n(\omega_{i_0}) = n_{i_0}$ , en rappelant que  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  sont les fréquences respectant la conservation de l'énergie et la condition d'accord de phase avec  $\omega_{p_0}$ .

---

1. Nous rappelons néanmoins que la composante symbolisée par  $\eta^{(3)}$  dépend de la configuration de polarisation des champs, i.e. selon que les champs signal et idler soient de polarisation parallèle ou perpendiculaire à celle de la pompe. Des paires seront toujours émises dans les deux configurations mais, dans notre montage, la détection ne se fait que selon l'une ou l'autre.

Par application des opérateurs création  $\hat{a}^\dagger$  sur l'état vide de tout photon signal ou idler, on obtient directement :

$$\hat{a}^\dagger(\omega_s)\hat{a}^\dagger(\omega_i) |0, 0\rangle = |1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle$$

où  $|1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle$  marque l'état où deux photons, de fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_i$ , existent dans les champs signal et idler. Nous pouvons donc voir que l'interaction avec le milieu non linéaire d'une impulsion de pompe est à l'origine de la génération spontanée d'une paire de photons.

Nous pouvons noter que l'état  $|1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle$  caractérise l'existence de photons à des fréquences bien précises. Implicitement, nous décomposons ici les états  $|n_s, n_i\rangle$  sur la base continue d'états  $|1_\omega, 1_{\omega'}\rangle$ , états propres du produit d'opérateurs  $\hat{a}^\dagger(\omega)\hat{a}^\dagger(\omega')$  (cf. annexe F). Or comme indiqué en sous-section 6.3.2, chacun de ces opérateurs porte une dimension correspondant à l'inverse de la racine d'une fréquence  $\omega^{-\frac{1}{2}}$ . Les coefficients de cette décomposition ont donc une dimension en  $\omega^{-1}$ . Or cette dimension est effectivement celle attendue pour la JSA, introduite plus loin, qui constitue justement tout le préfacteur de  $|1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle$ .

De (7.2), nous pouvons développer la forme de la fonction d'onde (7.1) :

$$\begin{aligned} |\psi_{s\otimes i, fin}\rangle = & |0, 0\rangle + i\frac{3}{16\pi}\eta^{(3)}\frac{\epsilon_0}{cA_{eff}}\sqrt{n_{s_0}^3 n_{i_0}^3} \\ & \times \int_{\omega_s} \int_{\omega_i} \sqrt{\omega_s \omega_i} \left[ \iiint_V e^{-i(\beta(\omega_s)+\beta(\omega_i))x} \int_t D_p^2(\vec{r}, t) e^{i(\omega_s+\omega_i)t} dt d^3\vec{r} \right] |1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle d\omega_s d\omega_i \quad (7.3) \end{aligned}$$

Afin de déterminer la forme finale que prendra cette fonction d'onde, nous commencerons par nous pencher sur les intégrales sur le temps et l'espace. Celles-ci nécessiteront tout d'abord d'explicitier la forme du champ de pompe contenue dans  $D_p(\vec{r}, t)$ . Ce qui sera l'objet de la section 7.1.

Une fois ces intégrales simplifiées nous pourrions finalement établir en section 7.2 la forme finale de la probabilité de génération de la paire de photons que nous pourrions alors appliquer à notre cas en section 7.3.

En dernier lieu nous simulerons cette probabilité de génération dans le cas classique d'un guide purement uniforme en section 7.4.

## 7.1 Introduction du champ de pompe classique

Toute notre étude se place dans le cadre d'un régime de génération *spontanée* de paires de photons impliquant une faible efficacité de génération. Par conséquent la pompe, initialement intense ( $\sim 10^9$  photons/impulsion), sera très peu déplétée lors de sa propagation dans la fibre et par la création de paires : nous ne générerons au maximum qu'une paire par impulsion, soit deux photons de pompe perdus. On pourra donc traiter la pompe comme un champ impulsionnel classique dans notre modèle. Celui-ci sera considéré comme une onde plane oscillant à une fréquence porteuse  $\omega_{p_0}$ , modulée par une enveloppe d'évolution temporelle lente vis-à-vis des oscillations optiques. Autrement dit, la moyenne de l'enveloppe sur un cycle optique n'est pas nulle.

### 7.1.1 Enveloppe du champ de pompe

Nous rappelons que le champ de pompe réel s'exprime tel que (6.67) :

$$D_{pr}(\vec{r}, t) = D_p(\vec{r}, t) + D_p^*(\vec{r}, t)$$

Où nous pouvons écrire le champ complexe sous la forme :

$$D_p(\vec{r}, t) = \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{i(\beta(\omega_{p_0})x - \omega_{p_0}t)}$$

où  $\mathcal{D}(\vec{r}, t)$  est l'enveloppe du champ de pompe, lentement variable dans le temps et l'espace vis-à-vis des oscillations rapides à la fréquence  $\omega_{p_0}$  du champ optique.

Nous rappelons la constante de propagation du guide à la pulsation  $\omega$  :

$$\beta(\omega) \equiv k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}$$

avec  $n(\omega)$  l'indice de réfraction linéaire.

En introduisant de nouveau la notation condensée  $\beta^{(m)} = \frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m}$ , nous notons la première dérivée de la constante de propagation :

$$\beta^{(1)}(\omega) = \frac{1}{v_g(\omega)} = \frac{n_g(\omega)}{c}$$

définissant la vitesse de groupe  $v_g$  et l'indice de groupe  $n_g$ .

L'enveloppe de pompe se propage dans la fibre à la vitesse de groupe de l'impulsion  $v_{gp_0} \equiv v_g(\omega_{p_0})$ . En supposant que le profil transverse du mode dans la fibre ne change pas au cours de la propagation<sup>2</sup>, nous pouvons opérer une séparation des variables de la forme :

$$\mathcal{D}(\vec{r}, t) = A G_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) G_{T_0} \left( t - \frac{x}{v_{gp_0}} \right) \quad (7.4)$$

avec :

- $A$  l'amplitude du champ, définie par :

$$A = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{imp} n_{p_0}^3 \epsilon_0}{2 (\sqrt{2\pi})^3 c}} \quad (7.5)$$

avec  $\mathcal{E}_{imp}$  l'énergie d'une impulsion et  $n_{p_0}$  l'indice de réfraction linéaire pris à  $\omega_{p_0}$ . La démonstration permettant d'obtenir cette amplitude est donnée en annexe C.1.2.

- $G_{\perp}(\vec{r}_{\perp})$  le profil spatial transverse en amplitude normalisé<sup>3</sup> du champ de pompe, avec  $\vec{r}_{\perp}$  la composante de  $\vec{r}$  dans le plan  $\{yz\}$ .
- $G_{T_0}(t)$  le profil temporel en amplitude normalisé<sup>3</sup> des impulsions de pompe incidente, de durée  $T_0$ . On inclut dans ce terme un éventuel *chirp* temporel ou spectral des impulsions de pompe. On notera le spectre associé  $\tilde{G}_{T_0}(\omega)$  (complexe en présence de *chirp*), centré en 0.

Le champ de pompe décrit ici porte un continuum de modes mais la formulation (7.4) suit le fait que nous négligerons la dispersion de la vitesse de groupe au sein du spectre de pompe. En effet, on a  $\tilde{D}_p$  la transformée de Fourier de  $D_p$  :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_p(\vec{r}, \omega) &= \text{TF}_t [D_p(\vec{r}, t)](\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t A G_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) G_{T_0} \left( t - \frac{x}{v_{gp_0}} \right) e^{i(\beta(\omega_{p_0})x - \omega_{p_0}t)} e^{i\omega t} dt \\ &= A G_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) e^{i\left(\beta(\omega_{p_0}) + \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{gp_0}}\right)x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'} G_{T_0}(t') e^{i(\omega - \omega_{p_0})t'} dt' \\ \tilde{D}_p(\vec{r}, \omega) &= A G_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) \tilde{G}_{T_0}(\omega - \omega_{p_0}) e^{i\left(\beta(\omega_{p_0}) + \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{gp_0}}\right)x} \end{aligned} \quad (7.6)$$

2. Pour une efficacité non linéaire faible et une pompe n'étant pas trop intense, l'autofocalisation de cette dernière dans la fibre reste négligeable et cette approximation est raisonnable.

3. La normalisation suit les définitions établies dans l'annexe A.6.



où on retrouve le spectre de pompe centré en  $\omega_{p_0}$  mais surtout en argument de l'exponentielle le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $\beta(\omega)$  autour de  $\omega_{p_0}$ . L'absence du terme d'ordre 2 soulignant le fait que la dispersion *au sein* du champ de pompe est négligée. Par conséquent, nous considérons que l'impulsion se propage dans la fibre sans déformation temporelle : le profil temporel  $G_{T_0}(t)$  ne change pas au fil de la propagation comme nous pouvons le voir en (7.4).

Par ailleurs, nous notons que l'argument  $t - \frac{x}{v_{gp_0}}$  du terme  $G_{T_0}$  dans 7.4 découle directement du fait que nous considérons la propagation d'une impulsion (l'enveloppe du champ de pompe varie dans le temps et l'espace) spatialement plus courte que l'étendue du guide. Ce point est à mettre en contraste avec des modèles tel que celui de [105], qui considère un cristal petit devant l'étendue spatiale des impulsions, de sorte que l'amplitude du champ de pompe peut être considérée comme constante sur l'étendue du milieu non linéaire, et variant lentement dans le temps.

Pour s'en convaincre, nous notons dans (7.6) que  $e^{i \frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{gp_0}} L} \approx 1$  pour une longueur  $L$  du guide tel que  $\frac{\omega - \omega_{p_0}}{v_{gp_0}} L \ll 1$ . En notant que la largeur spectrale de l'impulsion est inversement proportionnelle à sa durée ( $\omega - \omega_{p_0} \simeq \frac{1}{T_0}$ ), ce terme exponentiel est proche de l'unité pour  $L \ll v_{gp_0} T_0$ , où  $v_{gp_0} T_0$  correspond approximativement à l'étendue spatiale des impulsions. Nous voyons donc que le terme d'ordre 1 du développement de Taylor de  $\beta(\omega)$  traduisant la propagation des impulsions n'est négligeable que pour des guides courts devant l'étendue spatiale de ces dernières.

À présent que le champ de pompe est défini, nous pouvons développer et simplifier les intégrations temporelles et spatiales présentes dans l'expression de l'état des paires (7.3).

### 7.1.2 Intégrations sur le temps et l'espace

En observant l'intégrale temporelle dans (7.3) on reconnaît la transformée de Fourier de  $D_p^2(\vec{r}, t)$  à la fréquence somme  $\omega_s + \omega_i$ . Or, d'après la définition de la convolution (cf. annexe A.7), cette transformée correspond à l'autoconvolution de  $\tilde{D}_p(\vec{r}, \omega)$  au point  $\omega_s + \omega_i$  :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t D_p^2(\vec{r}, t) e^{i(\omega_s + \omega_i)t} dt = \text{TF}_t [D_p(\vec{r}, t) \times D_p(\vec{r}, t)](\omega_s + \omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\tilde{D}_p * \tilde{D}_p](\vec{r}, \omega_s + \omega_i)$$

Ce qui en simplifiant les préfacteurs, nous donne simplement :

$$\int_t D_p^2(\vec{r}, t) e^{i(\omega_s + \omega_i)t} dt = [\tilde{D}_p * \tilde{D}_p](\vec{r}, \omega_s + \omega_i)$$

La forme du champ complexe de pompe dans l'espace des fréquences (7.6) nous permet de développer ce terme d'autoconvolution :

$$\begin{aligned} & [\tilde{D}_p * \tilde{D}_p](\vec{r}, \omega_s + \omega_i) \\ &= \int_{\omega} \tilde{D}_p(\vec{r}, \omega_s + \omega_i - \omega) \tilde{D}_p(\vec{r}, \omega) d\omega \\ &= A^2 G_{\perp}^2(\vec{r}_{\perp}) e^{2i\left(\beta(\omega_{p_0}) - \frac{\omega_{p_0}}{v_{gp_0}}\right)x} \int_{\omega} \tilde{G}_{T_0}(\omega_s + \omega_i - \omega_{p_0} - \omega) e^{i \frac{\omega_s + \omega_i - \omega}{v_{gp_0}} x} \tilde{G}_{T_0}(\vec{r}, \omega - \omega_{p_0}) e^{i \frac{\omega}{v_{gp_0}} x} d\omega \\ &= A^2 G_{\perp}^2(\vec{r}_{\perp}) e^{2i\left(\beta(\omega_{p_0}) - \frac{\omega_{p_0}}{v_{gp_0}}\right)x} \int_{\omega'} \tilde{G}_{T_0}(\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0} - \omega') \tilde{G}_{T_0}(\omega') e^{i \frac{\omega_s + \omega_i}{v_{gp_0}} x} d\omega' \\ &= A^2 G_{\perp}^2(\vec{r}_{\perp}) e^{i\left(2\beta(\omega_{p_0}) + \frac{\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}}{v_{gp_0}}\right)x} [\tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0}](\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}) \end{aligned}$$

Concernant l'intégration spatiale de (7.3), nous ferons la distinction entre l'axe longitudinal (axe  $x$ ) et le plan transverse. Le volume du guide est  $V = L \times A_{eff}$  avec  $L$  sa longueur le long de l'axe longitudinal et  $A_{eff}$  l'aire effective du mode dans le plan transverse. L'intégration sur le plan transverse se simplifie en notant que le profil spatial  $G_{\perp}$  est, par définition, normalisé<sup>4</sup> :

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{A_{eff}} G_{\perp}^2(\vec{r}_{\perp}) d^2\vec{r}_{\perp} \simeq 1$$

en considérant l'essentiel du champ confiné dans la fibre et une propagation sans déformation du mode spatial. La seule intégration spatiale restante sera celle sur l'axe longitudinal de la fibre de longueur  $L$ .

On peut donc simplifier les intégrations sur le temps et l'espace en usant des résultats ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \iiint_V e^{-i(\beta(\omega_s)+\beta(\omega_i))x} \int_t D_p^2(\vec{r}, t) e^{i(\omega_s+\omega_i)t} dt d^3\vec{r} \\ &= \iiint_V e^{-i(\beta(\omega_s)+\beta(\omega_i))x} A^2 G_{\perp}^2(\vec{r}_{\perp}) e^{i\left(2\beta(\omega_{p0})+\frac{\omega_s+\omega_i-2\omega_{p0}}{v_{gp0}}\right)x} [\tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0}] (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p0}) d^3\vec{r} \\ &= 2\pi \int_L e^{-i(\beta(\omega_s)+\beta(\omega_i))x} A^2 e^{i\left(2\beta(\omega_{p0})+\frac{\omega_s+\omega_i-2\omega_{p0}}{v_{gp0}}\right)x} [\tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0}] (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p0}) dx \\ &= 2\pi A^2 [\tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0}] (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p0}) \int_L e^{i\Delta k x} dx \end{aligned} \quad (7.7)$$

où nous introduisons le désaccord de phase *généralisé*<sup>5</sup> :

$$\Delta k = 2\beta(\omega_{p0}) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i) + \frac{\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p0}}{v_{gp0}} \quad (7.8)$$

Comme nous avons pu le voir lors de la définition du spectre de pompe en 7.1, le terme  $\frac{\omega_s+\omega_i-2\omega_{p0}}{v_{gp0}}$  découle directement du fait que l'on considère la propagation d'une impulsion de pompe dans la fibre. Négliger ce terme reviendrait à considérer une impulsion spatialement longue vis-à-vis du guide (cf. sous-section 7.1.1).

## 7.2 Probabilité de génération des paires de photons

Nous pouvons maintenant injecter la forme simplifiée (7.7) des intégrales dans la fonction d'onde (7.3). Ce qui nous donne, en développant l'amplitude (7.5), l'expression finale de la fonction d'onde décrivant les champs signal et idler après propagation d'une impulsion de pompe dans la fibre :

$$\begin{aligned} |\psi_{s\otimes i, fin}\rangle &= |0, 0\rangle + i \frac{3}{16} \frac{\eta^{(3)}}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{\epsilon_0^2 \mathcal{E}_{imp}}{c^2 A_{eff}} n_{p0}^3 \sqrt{n_{s0}^3 n_{i0}^3} \\ &\quad \times \int_{\omega_s} \int_{\omega_i} \sqrt{\omega_s \omega_i} [\tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0}] (\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p0}) \int_L e^{i\Delta k x} dx |1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle d\omega_s d\omega_i \end{aligned} \quad (7.9)$$

4. Voir l'annexe A.6 concernant la définition de la normalisation.

5. Nous notons qu'en présence de guides structurés de manière à ce que la susceptibilité non linéaire à l'origine des paires change périodiquement de signe (tel que c'est le cas dans les guides PPLN), un terme  $2\pi/\Lambda$  doit être ajouté au désaccord de phase [96], où  $\Lambda$  est ici la période d'inversion. Par ailleurs, puisque nous sommes loin de tout régime d'amplification, le terme  $-2\gamma_p P$  associé n'apparaît pas ici [1].

À partir de celle-ci, il est possible de déterminer la probabilité de génération d'une paire de photons pour un couple de longueurs d'onde signal-idler comprises dans les plages spectrales  $[\omega, \omega + d\omega]$  et  $[\omega', \omega' + d\omega']$ . Dans le formalisme de Dirac (cf. annexe F.1.4), cette probabilité est obtenue par :

$$\text{Proba}(\omega, \omega') = |\langle 1_\omega, 1_{\omega'} | \psi_{s \otimes i, fin} \rangle|^2 d\omega d\omega'$$

On définit par ailleurs l'amplitude spectrale jointe JSA( $\omega, \omega'$ ) par :

$$\text{Proba}(\omega, \omega') = |\text{JSA}(\omega, \omega')|^2 d\omega d\omega'$$

en rappelant que la JSA a la dimension de l'inverse d'une fréquence, la probabilité de génération est donc bien adimensionnée.

Puisque  $\langle 1_\omega, 1_{\omega'} | 0, 0 \rangle = 0$  et  $\langle 1_\omega, 1_{\omega'} | 1_{\omega_s}, 1_{\omega_i} \rangle = \delta(\omega_s - \omega) \delta(\omega_i - \omega')$ , on a directement :

$$\langle 1_\omega, 1_{\omega'} | \psi_{s \otimes i, fin} \rangle = \text{JSA}(\omega, \omega') = \mathbf{a}(\omega, \omega') \mathbf{g}(\omega, \omega') \mathbf{f}(\omega, \omega')$$

Avec :

$$\mathbf{a}(\omega, \omega') = i \frac{3}{16} \frac{\eta^{(3)}}{2\pi} \frac{\epsilon_0^2 \mathcal{E}_{imp}}{c^2 A_{eff}} n_{p_0}^3 \sqrt{n_{s_0}^3 n_{i_0}^3} \sqrt{\omega \omega'} L \quad (7.10)$$

$$\mathbf{g}(\omega, \omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0} \right] (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}) \quad (7.11)$$

$$\mathbf{f}(\omega, \omega') = \frac{1}{L} \int_L e^{i\Delta k x} dx \quad (7.12)$$

On sépare de ce fait la dépendance au spectre de pompe contenue dans  $\mathbf{g}$ , et celle au profil longitudinal de la fibre contenue dans  $\mathbf{f}$ .

La fonction  $\mathbf{g}$  porte la condition de conservation de l'énergie. En effet à  $\omega + \omega' - 2\omega_{p_0} = 0$  celle-ci est maximum et sa largeur dans l'espace  $(\omega, \omega')$  est directement liée à celle de la pompe.

L'accord de phase est décrit par la fonction  $\mathbf{f}$ , qui est maximum pour  $\Delta k = 0$ . Sa largeur dans l'espace fréquentiel joint dépend de la longueur du guide, soit ici celle de notre fibre. On pourra s'en convaincre en observant la forme de  $\mathbf{f}$  dans le cas le plus simple d'un guide parfaitement uniforme, présenté en sous-section 7.3.2.

Ces deux fonctions ont été définies de façon à être normalisées, i.e. au maximum égales à 1. Ainsi, l'amplitude de la JSA et donc du taux de génération de paires est contenue dans  $\mathbf{a}$ .

Il est par ailleurs possible de simplifier l'expression de cette amplitude en introduisant l'indice non linéaire  $n_2$  et le coefficient non linéaire  $\gamma_p$  définis dans l'annexe C.2 comme :

$$\gamma_p = \frac{n_2 \omega_{p_0}}{c A_{eff}} \quad n_2 = -\frac{3}{4} \eta^{(3)} \frac{(\epsilon_0 n_{p_0}^3)^2}{c}$$

Ces grandeurs permettent de faire le lien avec les mesures d'automodulation de phase qui permettent d'établir expérimentalement la valeur de  $\gamma_p$ <sup>6</sup> (et donc de  $n_2$ ).

Nous obtenons donc :

$$\mathbf{a}(\omega, \omega') = -\frac{i}{8\pi} \gamma_p \mathcal{E}_{imp} L \frac{\sqrt{n_{s_0}^3 n_{i_0}^3}}{n_{p_0}^3} \frac{\sqrt{\omega \omega'}}{\omega_{p_0}} \quad (7.13)$$

---

6. Nous pouvons relier  $\gamma_p$  au déphasage non linéaire accumulé sur une distance  $x$  [1] :  $\Phi_{NL}(x) = \gamma_p P x$ , où  $P$  est la puissance instantanée (cf. annexe C.2).

Les spectres d'émission mesurés retraçent la probabilité de génération de paires, l'information sur la phase contenue dans la JSA n'étant pas accessible expérimentalement. Aussi utiliserons-nous, à des fins de comparaison avec les mesures, l'intensité spectrale jointe :

$$\text{JSI}(\omega, \omega') = |\text{JSA}(\omega, \omega')|^2 = \mathcal{A}(\omega, \omega') \mathcal{G}(\omega, \omega') \mathcal{F}(\omega, \omega')$$

où  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  sont les modules carrés respectifs des  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{f}$ . L'intensité spectrale jointe correspond à la densité spectrale de probabilité de génération des paires de photons dans l'espace bidimensionnel des fréquences signal et idler :

$$\text{Proba}(\omega, \omega') = \text{JSI}(\omega, \omega') d\omega d\omega'$$

Enfin, il est à noter que  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{f}$  étant, par construction, compris entre 0 et 1, il en sera de même de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$ . Ainsi, la probabilité maximum de génération de paires est entièrement déterminée par  $\mathcal{A}$ . D'après (7.13), on déduit que cette probabilité croît quadratiquement avec l'énergie par impulsion, le coefficient non linéaire ou la longueur de la fibre<sup>7</sup>.

Nous résumons les différents termes de la JSA et JSI :

$$\begin{aligned} \text{JSA}(\omega, \omega') = \mathbf{a}(\omega, \omega') \times \mathbf{g}(\omega, \omega') \times \mathbf{f}(\omega, \omega') & \left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}(\omega, \omega') &= -\frac{i}{8\pi} \gamma_p \mathcal{E}_{imp} L \frac{\sqrt{n_{s_0}^3 n_{i_0}^3}}{n_{p_0}^3} \frac{\sqrt{\omega \omega'}}{\omega_{p_0}} \\ \mathbf{g}(\omega, \omega') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0} \right] (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}) \\ \mathbf{f}(\omega, \omega') &= \frac{1}{L} \int_L e^{i\Delta k x} dx \end{aligned} \right. \\ \text{JSI}(\omega, \omega') = \mathcal{A}(\omega, \omega') \times \mathcal{G}(\omega, \omega') \times \mathcal{F}(\omega, \omega') & \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A}(\omega, \omega') &= \frac{1}{64\pi^2} (\gamma_p \mathcal{E}_{imp} L)^2 \left( \frac{n_{s_0} n_{i_0}}{n_{p_0}^2} \right)^3 \frac{\omega \omega'}{\omega_{p_0}^2} \\ \mathcal{G}(\omega, \omega') &= \frac{1}{2\pi} \left| \left[ \tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0} \right] (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}) \right|^2 \\ \mathcal{F}(\omega, \omega') &= \left| \frac{1}{L} \int_L e^{i\Delta k x} dx \right|^2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

La forme générale de la JSA et de la JSI étant posée, nous l'appliquerons dans la suite au cas spécifique de notre étude pour présenter les résultats de simulation du spectre d'émission de notre fibre.

### 7.3 Amplitude et intensité spectrale jointe appliquées au cas d'une fibre uniforme

Avant d'utiliser de manière effective notre modèle dans nos simulations, encore faut-il nous assurer que tout les paramètres intervenants dans la probabilité de génération nous soient connus. Ceux-ci ont soit déjà été mesurés, soit sont ajustés et fixés dans notre expérience, de sorte que nous sommes en mesure de simuler l'émission de notre source sans aucun recours à un paramètre libre.

Nous observons qu'interviennent dans l'expression de l'amplitude  $\mathbf{a}/\mathcal{A}$  : le coefficient non linéaire  $\gamma_p$ , l'énergie d'une impulsion  $\mathcal{E}_{imp}$ , la longueur  $L$  de la fibre, et les indices de réfraction ( $n_{p_0}$ ,  $n_{s_0}$  et  $n_{i_0}$ ).

7. Nous noterons toutefois que si pour une fibre uniforme, le maximum de  $\mathcal{F}$  est toujours égal à 1, il n'en sera pas de même pour des fibres non uniformes (qui feront l'objet de la partie IV), où la forme du spectre peut dépendre de la longueur. Dès lors, la probabilité de génération ne croît plus nécessairement avec le carré de la longueur.

Le coefficient non linéaire de notre fibre a déjà été mesuré (cf. sous-section 2.1.1). Tandis que l'énergie d'impulsion peut être directement déduite de la puissance moyenne que nous injectons dans la fibre et du taux de répétition  $\Gamma$  des impulsions<sup>8</sup>. La connaissance de  $L$  ne tient qu'à une mesure triviale<sup>9</sup>. Enfin l'essentiel du champ se concentre dans le liquide, de sorte que l'indice effectif du mode spatial fondamental de la fibre est très proche de l'indice de réfraction du liquide, que nous avons déjà déterminé en sous-section 2.1.1.

Le terme  $\mathfrak{g}/\mathcal{G}$  ne dépend pour sa part que du profil spatial de l'impulsion dont tous les paramètres ( $T_0$  et  $\omega_{p_0}$ ) sont réglés et connus. Nous nous intéresserons en sous-section 7.3.1 à sa forme spécifique pour nos impulsions de pompe.

Enfin intervient dans  $\mathfrak{f}/\mathcal{F}$  le désaccord de phase, qui dépend lui-même de la constante de propagation  $\beta(\omega)$ , et de sa dérivée première donnant la vitesse de groupe<sup>10</sup>. Or la constante de propagation a déjà fait l'objet de mesures préliminaires (cf. sous-section 2.1.1). Dans la sous-section 7.3.2 nous décrirons la forme attendue de  $\mathcal{F}$  pour une fibre uniforme.

### 7.3.1 Profil de notre impulsion de pompe

Dans notre expérience, les impulsions de pompe présentent un profil temporel en amplitude de forme sécante hyperbolique<sup>11</sup>, de durée  $T_0$ <sup>12</sup> :

$$G_{T_0}(t) = \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2T_0} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \left( \frac{t}{T_0} \right) \quad (7.14)$$

qui est normalisé d'après nos définitions (cf. annexe A.6) :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t |G_{T_0}(t)|^2 dt = 1 \quad (7.15)$$

Nous noterons, du fait d'une définition différente de la normalisation dans [52], une différence d'un facteur  $(2\pi)^{\frac{1}{4}}$  entre notre définition (7.14) de  $G_{T_0}(t)$  et celle de [52, équation (2.2.1)]. Cependant, notre formulation de  $\mathcal{G}$  comporte un facteur  $\frac{1}{2\pi}$ , absent dans celle de [52, équation (2.5.3b)], de sorte que les termes de pompe  $\mathcal{G}$  sont équivalents entre les deux modèles.

Le spectre de pompe en amplitude s'obtient directement par :

$$\tilde{G}_{T_0}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t G_{T_0}(t) e^{i\omega t} dt = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{4}} \sqrt{T_0} \operatorname{sech} \left( \frac{\pi T_0}{2} \omega \right) \quad (7.16)$$

8. L'énergie d'une impulsion  $\mathcal{E}_{imp}$  correspond au rapport de la puissance moyenne par le taux de répétition, et nous permet notamment de déduire la puissance crête de nos impulsions, qui adoptent une forme temporelle en sécante hyperbolique. Nous avons d'après [52, équation (2.4.18)] :  $P_{crête} = \frac{\mathcal{E}_{imp}}{2T_0}$ .

9. En se rappelant que nous considérons la longueur effective d'interaction égale à celle de la fibre (absence de pertes). D'autre part, puisque nous négligeons la dispersion de vitesse de groupe au sein du spectre de pompe au cours de la propagation, deux fréquences prises dans son spectre ne subissent aucun *walk-off* notable entre elles, qui impliquerait que le mélange à quatre ondes ne s'effectue que sur une portion de fibre (et donc réduise la longueur effective). Ce dernier point n'est plus vrai en présence de deux pompes distinctes entre lesquelles la dispersion n'est plus négligeable.

10. Contrairement au terme  $\mathfrak{a}$  faisant office de constante d'échelle, le terme  $\mathfrak{f}$  doit nous permettre de déterminer les couples de fréquences auxquels la génération est permise. Aussi n'approximerons-nous pas la vitesse de groupe à une constante ici, et la calculerons-nous directement à partir de la constante de propagation.

11. Forme typique des impulsions de lasers à blocage de mode tel que notre Titane-Saphir qui fut vérifié pour notre fibre par ajustement du spectre expérimental en régime d'automodulation de phase de la pompe [94].

12. Il est à noter que pour un profil proportionnel à  $\operatorname{sech} \left( \frac{t}{T_0} \right)$ , la largeur à mi-hauteur en intensité (donc pris au module carré) est  $T_{FWHM} = 2\ln(1 + \sqrt{2})T_0$  tandis que la durée mesurée expérimentalement est la largeur à mi-hauteur du signal d'auto-corrélation  $\tau_{AC} = 1.543 T_{FWHM}$ .

De ce spectre nous déduisons son autoconvolution :

$$\left[ \tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0} \right] (\omega) = \sqrt{2\pi} \frac{\frac{\pi T_0}{2} \omega}{\sinh\left(\frac{\pi T_0}{2} \omega\right)}$$

Soit :

$$\mathbf{g}(\omega, \omega') = \frac{\frac{\pi T_0}{2} (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0})}{\sinh\left(\frac{\pi T_0}{2} (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0})\right)}$$

Nous soulignons ici que  $\mathbf{g}$  est purement réel du fait que notre impulsion de pompe est dénuée de *chirp*. D'autre part,  $\mathbf{g}$  (et donc  $\mathcal{G}$ ) est maximum et égal à 1 quand  $\omega + \omega' - 2\omega_{p_0} = 0$ , soit à la conservation de l'énergie. Le sinus hyperbolique croissant plus rapidement qu'une pente linéaire, plus le terme  $\frac{\pi T_0}{2} (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0})$  est grand, plus  $\mathbf{g}$  est petit. De ce fait, plus la durée d'impulsion  $T_0$  sera grande (et donc plus son spectre sera fin), plus  $\mathbf{g}$  tendra rapidement vers 0. Nous verrons alors un affinement de la courbe  $\mathcal{G}(\omega, \omega')$  dans l'espace spectral joint lorsque la durée d'impulsion augmente.

Concernant la part spatiale du faisceau de pompe, nous considérons qu'il se propage dans le mode spatial fondamental de la fibre, que l'on approximera par une gaussienne [94] de rayon effectif  $w_{eff}$  :

$$G_{\perp}(\vec{r}_{\perp}) = \frac{2}{w_{eff}} e^{-\frac{|\vec{r}_{\perp}|^2}{w_{eff}^2}} \quad (7.17)$$

L'aire effective du mode est alors  $A_{eff} = \pi w_{eff}^2$ . Nous rappelons par ailleurs que les profils temporel, spectral et spatial transverse sont normalisés selon les conventions présentées en annexe A.6.

En supposant une efficacité non linéaire de la fibre très faible et une puissance injectée modérée<sup>13</sup>, des impulsions telles que les nôtres (qui sont par ailleurs dénuées de *chirp*<sup>14</sup>) se propagent sans déformation temporelle ou spectrale dans la fibre, de sorte que nous disposons de toutes les informations pour décrire la pompe.

### 7.3.2 Terme de profil transverse pour une fibre uniforme

Afin d'illustrer l'utilisation de notre modèle théorique pour simuler la génération de paires de photons dans notre fibre, nous présentons le cas classique (et simple) d'une fibre purement uniforme. Celui-ci sera appliqué pour des valeurs typiques de notre expérience, ce qui nous permettra d'effectuer une comparaison avec nos résultats expérimentaux présentés au chapitre 10.

Dans le cas d'une fibre uniforme, c'est-à-dire identique à elle-même tout son long, les dimensions transverses de la fibre et donc la taille du cœur et de la structure ne changent pas. Le désaccord de phase est le même dans toute la fibre :  $\Delta k(x) = cste$ . L'intégration de (7.12) devient très simple et nous permet de retrouver le sinus cardinal usuel :

$$\mathbf{f}_{uni}(\omega, \omega') = \frac{1}{L} \int_0^L e^{i\Delta k x} dx = e^{i\frac{\Delta k L}{2}} \text{sinc}\left(\Delta k \frac{L}{2}\right) \quad (7.18)$$

13. Lors de mesures d'automodulation de phase sur notre fibre [94], le plus petit déphasage non linéaire  $\Phi_{NL}$  mesurable est de l'ordre de  $0.1\pi$ , ce qui correspond dans notre cas à une puissance moyenne de 6 mW. La puissance moyenne typique dans la fibre durant nos expériences est de l'ordre de 3 mW, de sorte que l'automodulation de phase est négligeable.

14. En absence de phase supplémentaire, la transformée de Fourier du profil temporel de l'impulsion, mesuré en *intensité*, nous permet de retrouver son spectre : les impulsions sont dites *Fourier Transform*. Dans le cas contraire, la seule mesure temporelle ne suffit pas pour récupérer l'information sur la phase, et une mesure spectrale simultanée est nécessaire.

Soit :

$$\mathcal{F}_{uni}(\omega, \omega') = |\mathbf{f}_{uni}(\omega, \omega')|^2 = \text{sinc}^2\left(\Delta k \frac{L}{2}\right) \quad (7.19)$$

qui est maximum et égale à l'unité lorsque la condition d'accord de phase  $\Delta k = 0$  est respectée. Nous rappelons la définition du désaccord de phase généralisé (7.8) :

$$\Delta k = 2\beta(\omega_{p_0}) - \beta(\omega) - \beta(\omega') + \frac{\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}}{v_{gp_0}} \quad (7.20)$$

La condition de conservation de l'énergie est stricte mais légèrement relâchée par la largeur de la pompe (la courbe de  $\mathcal{G}$  n'est pas infiniment fine). Ainsi, pour permettre la génération d'une paire le terme  $\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}$  sera proche de 0 mais pas nécessairement nul. Cette tolérance permet elle-même le respect de la condition d'accord de phase dans une certaine marge :  $\Delta k \approx 0$ . Tel que cela fut discuté en sous-section 2.1.2, le désaccord de phase brut  $\Delta k_{brut} = 2\beta(\omega_{p_0}) - \beta(\omega) - \beta(\omega')$  est proche de 0 lorsque la dispersion de vitesse de groupe  $\beta^{(2)}$  à  $\omega_{p_0}$  n'est pas trop forte (d'où notre positionnement de la pompe près du zéro de dispersion). Ainsi, plus le guide présentera une forte dispersion, plus  $\Delta k$  divergera rapidement de ce point de fonctionnement en s'éloignant des fréquences  $(\omega_{s_0}, \omega_{i_0})$ , et donc plus  $\mathcal{F}$  sera fin dans l'espace  $(\omega, \omega')$ . De manière générale, nous constaterons un affinement de la courbe lorsque les fréquences de paires s'éloignent de celle de pompe.

### 7.3.3 Intensité spectrale jointe d'une fibre uniforme

Nous résumons ici la forme générale de la JSI pour une fibre uniforme à des fins de comparaisons avec le modèle de [52] :

$$\text{JSI}(\omega, \omega') = \mathcal{A}(\omega, \omega') \times \mathcal{G}(\omega, \omega') \times \mathcal{F}(\omega, \omega')$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega, \omega') &= \frac{1}{64\pi^2} (\gamma_p \mathcal{E}_{imp} L)^2 \left( \frac{n_{s_0} n_{i_0}}{n_{p_0}^2} \right)^3 \frac{\omega \omega'}{\omega_{p_0}^2} \\ \mathcal{G}(\omega, \omega') &= \frac{1}{2\pi} \left| [\tilde{G}_{T_0} * \tilde{G}_{T_0}] (\omega + \omega' - 2\omega_{p_0}) \right|^2 \\ \mathcal{F}_{uni}(\omega, \omega') &= \text{sinc}^2\left(\Delta k \frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons noter, en comparaison avec le modèle précédemment établi en [52], que nous retrouvons pratiquement la même forme finale pour la JSI (cf. équation (2.5.3) de la référence) : les termes  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  sont identiques<sup>15</sup> et seul diffère le terme d'amplitude  $\mathcal{A}$ . Nous retranscrivons ici sa forme avancée par [52, équation (2.5.3a)]<sup>16</sup>, dans le cadre de nos notations :

$$\mathcal{A}(\omega, \omega') = \left( \frac{n_{gp_0} \sqrt{n_{gs_0} n_{gi_0}}}{2\pi n_{s_0} n_{i_0}} \sqrt{\frac{\omega \omega'}{\omega_{p_0}^2}} \gamma_p \mathcal{E}_{imp} L \right)^2$$

Nous notons que l'amplitude  $\mathcal{A}$  dépend ici aussi des quantités  $(\gamma_p \mathcal{E}_{imp} L)^2$  et  $\frac{\omega \omega'}{\omega_{p_0}^2}$ . Les différences se marquant notamment au niveau des termes d'indices (indices de réfraction dans notre modèle alors qu'interviennent les indices de groupe dans la référence [52]). Toutefois dans les deux formulations, les

15. Nous rappelons (cf. sous-section 7.3.1) que les définitions de la normalisation et donc des profils temporels  $G_{T_0}(t)$  diffèrent entre notre modèle et celui de [52]. D'où la présence d'un facteur  $\frac{1}{2\pi}$  dans notre formulation de  $\mathcal{G}$ , qui reste identique à celle de [52].

16. Nous corrigeons au passage une coquille dans le développement de la JSI, lors du passage de l'équation (2.4.13) à (2.4.14) dans [52], impliquant un oubli d'un terme  $n_s n_i$  au dénominateur.

indices (de réfraction comme de groupe) sont assez proches pour considérer en première approximation que les ratio dans lesquels ils interviennent sont égaux à 1.

La véritable différence porte donc sur le facteur numérique global d'amplitude : ici nous avons un préfacteur global égal à  $\frac{1}{64\pi^2}$ , contre  $\frac{1}{4\pi^2}$  dans [52]. Au final, notre amplitude est donc plus faible d'un peu plus d'un ordre de grandeur.

Ces différences dans les termes d'indices et le changement d'amplitude proviennent en grande part du changement de paradigme, i.e. raisonnement sur le champ  $\vec{D}$  plutôt que  $\vec{E}$ , qui nous a amené à complètement re-définir l'Hamiltonien d'interaction. En effet, la référence [52] se base sur un Hamiltonien non linéaire prodigué par [62], établi en considérant  $\vec{E}$  comme le champ électrique fondamental. Or nous rappelons que la démarche de quantification sur  $\vec{E}$  en présence de non-linéarités est incorrecte, et induit une erreur d'un facteur  $n$  dans l'amplitude,  $n$  étant l'ordre de non-linéarité considéré<sup>17</sup>.

Les changements obtenus peuvent paraître minimes vis-à-vis de l'effort accompli, cependant notre modèle dispose à présent d'une base solide et décrit la génération de paires de façon *quantitative* et correcte.

Nous noterons toutefois que les deux modèles restent très proches puisque ceux-ci suivent, du reste, la même logique. Leurs prédictions respectives se rejoignent par ailleurs qualitativement puisque les termes  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}_{uni}$ , qui structurent la JSI et le spectre d'émission des paires, y sont identiques.

Le modèle théorique complet étant à présent à notre disposition, nous présentons dans la suite les résultats de simulation de la JSI afin de d'étudier son comportement plus en détails.

## 7.4 Simulation de la JSI d'une fibre uniforme

Pour décrire correctement dans nos simulations nos mesures expérimentales, nous nous baserons sur les valeurs caractéristiques de notre fibre, exposées dans le tableau 2.1. Par ailleurs, nous prenons les valeurs expérimentales typiques suivantes : des impulsions de pompe de longueur d'onde centrale  $\lambda_{p_0} = 885.55$  nm, de durée  $T_0 \approx 1.3$  ps, transportant une énergie  $\mathcal{E}_{imp} \approx 30$  pJ et dont le taux de répétition est de  $\Gamma = 80$  MHz de sorte que la puissance moyenne dans la fibre est de l'ordre de 3 mW. Nous rappelons que pour notre expérience les impulsions de pompes ont un profil de sécante hyperbolique, décrit en sous-section 7.3.1.

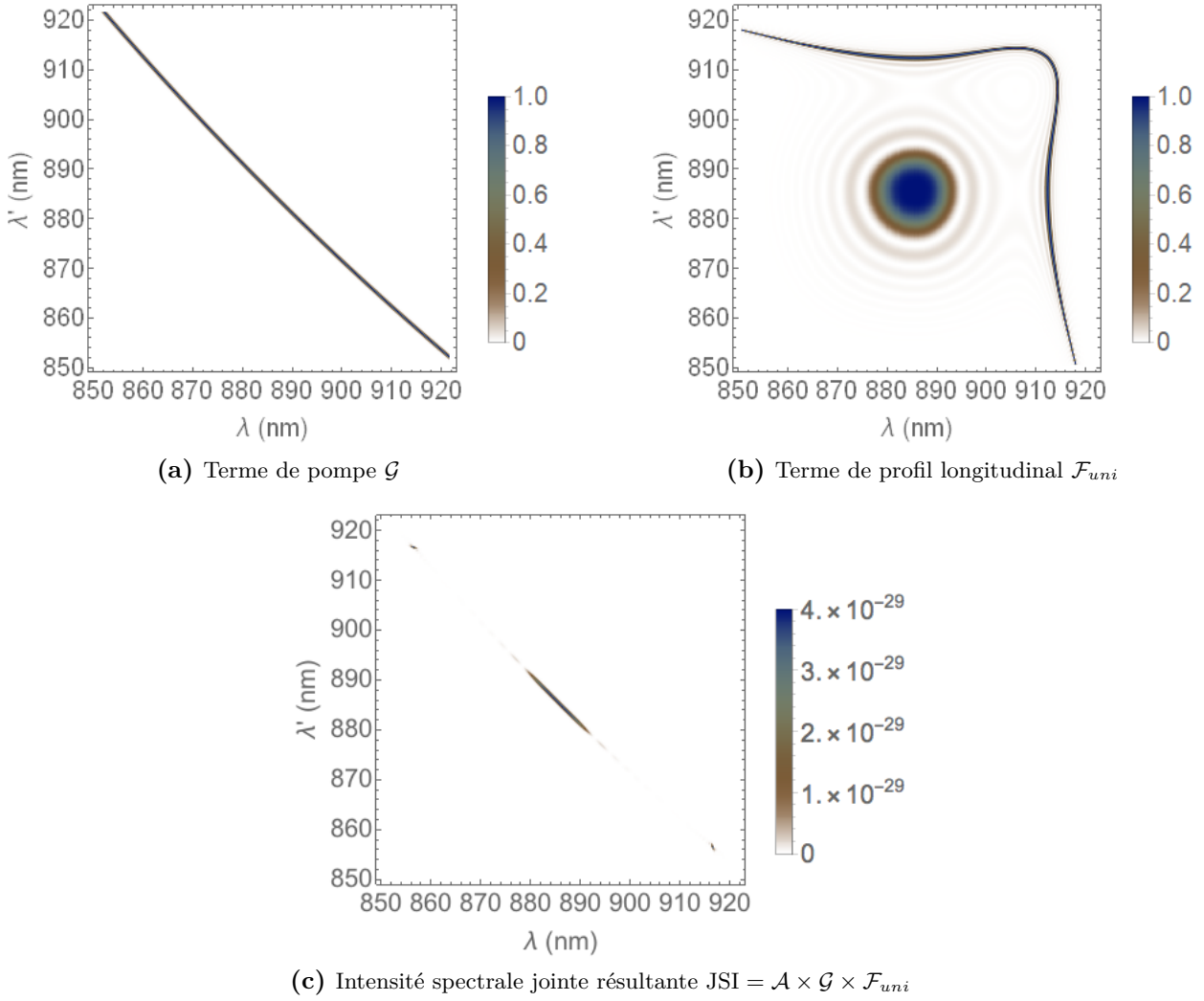
Enfin les fréquences centrales  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  sont obtenues en résolvant numériquement le set d'équations associant conditions de conservation d'énergie et d'accord de phase avec  $\omega_{p_0}$ , de sorte que nous avons  $\lambda_{s_0} \approx 917$  nm et  $\lambda_{i_0} \approx 857$  nm. Les indices de réfraction associés sont directement calculés à partir de la courbe d'indice de l'acétone deutérée (cf. sous-section 2.1.1).

Nous présentons dans les figures 7.1 les résultats de simulation de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}_{uni}$  d'une part, et de la JSI résultante d'autre part, sur l'ensemble de la bande de transmission. Au lieu de représenter ces termes dans l'espace spectral joint  $(\omega, \omega')$ , nous les traçons en fonction des longueurs d'onde associées  $(\lambda, \lambda')$ , qui sont plus parlantes et permettent de repérer plus aisément les valeurs caractéristiques. Nous ne montrons pas ici le profil de  $\mathcal{A}$  qui ne présente que peu d'intérêt puisque ce terme évolue lentement et ne s'annule pas dans l'espace spectral joint. C'est néanmoins lui qui détermine l'échelle de valeurs adoptées par la JSI.

---

17. Le lecteur notera que reste une différence d'un facteur 16 entre nos résultats et ceux de [52], en tenant compte de cette différence de facteur. Nous avons déjà corrigé une coquille dans la référence (cf. note de bas de page 16), mais nous avons également pu relever des incohérences, pouvant être à l'origine de cette différence finale, dans les utilisations de la transformée de Fourier, de la distribution de Dirac et des commutateurs. Ces constatations ont joué dans notre motivation d'établir un modèle consistant, avec les mêmes définitions sur l'ensemble du développement.





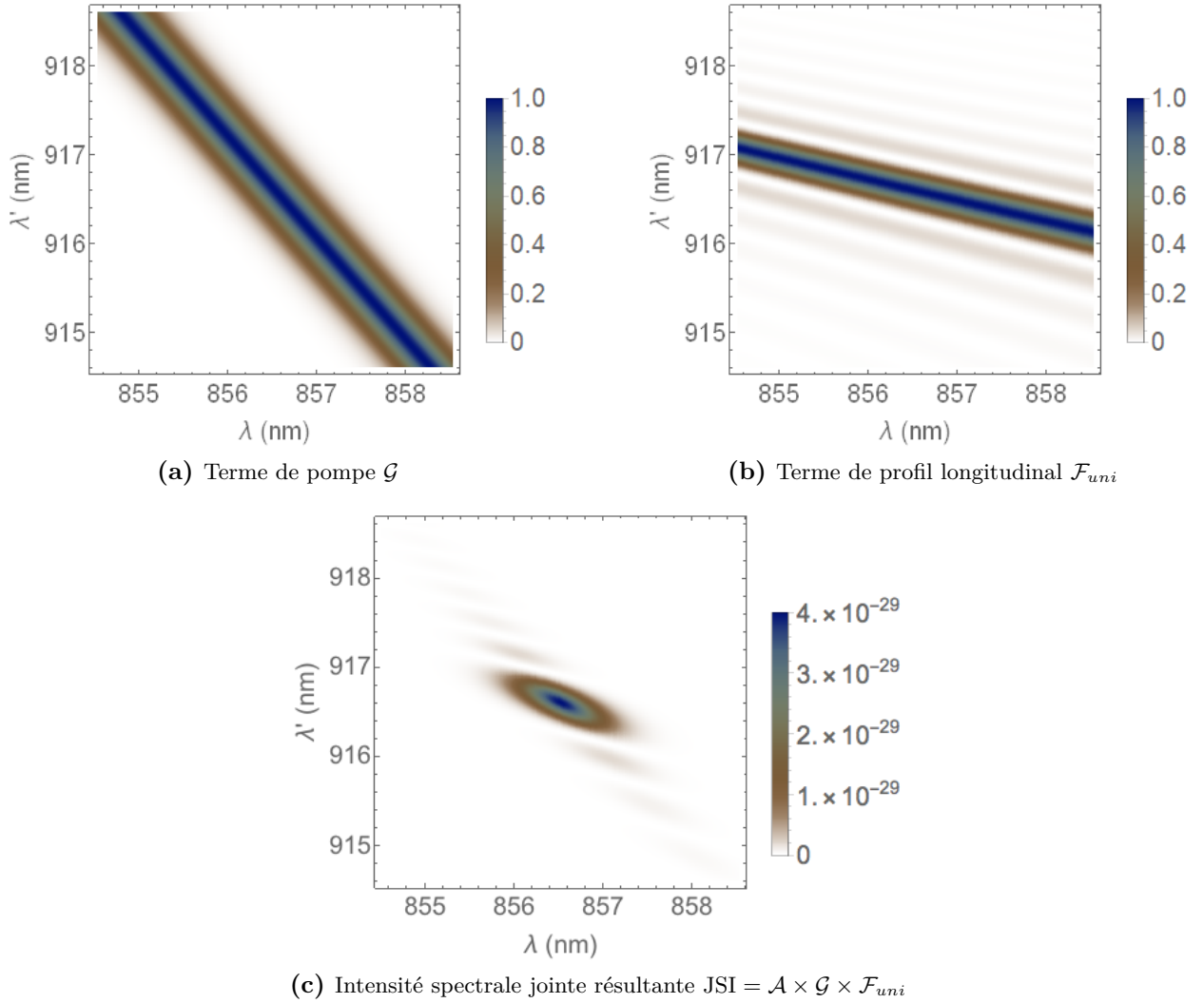
**Figure 7.1** – JSI pour une fibre uniforme.

Nous pouvons noter sur la figure 7.1a que  $\mathcal{G}$  suit quasiment une diagonale dans l'espace  $(\lambda, \lambda')$  correspondant à la ligne de conservation de l'énergie (légèrement courbée puisque nous traçons en fonction de la longueur d'onde plutôt que la fréquence). La largeur de cette ligne est directement liée à la durée d'impulsion (cf. sous-section 7.3.1) : plus celle-ci sera courte (et donc le spectre large), plus la courbe de  $\mathcal{G}$  sera large.

Concernant la figure 7.1b représentant  $\mathcal{F}_{uni}$ , on peut tout de suite remarquer une zone centrale où  $\mathcal{F}_{uni} = 1$  et correspondant aux plages spectrales où  $\omega$  et  $\omega'$  deviennent si proches de  $\omega_{p0}$  que la condition d'accord de phase est automatiquement respectée. Nous nous intéresserons plutôt à l'autre partie du graphe nous donnant les duo de fréquences de paires satisfaisant l'accord de phase. Comme indiqué en sous-section 7.3.2, cette courbe s'affine d'autant plus que l'on s'éloigne de la fréquence de pompe. Par ailleurs, sa courbure est directement reliée au rapport  $\beta^{(4)}/\beta^{(2)}$  en régime de dispersion normale [52] dans lequel nous nous sommes placé (cf. sous-section 2.1.2).

Enfin, le produit de ces termes dans la JSI représentée en figure 7.1c nous montre trois zones pour lesquelles l'émission de paires est possible : la zone centrale qui ne nous intéressera pas car les fréquences y sont trop proches de la pompe, et les deux zones secondaires. Celles-ci sont équivalentes puisque la JSI est symétrique par inversion des fréquences signal et idler.

Les figures 7.2 présentent un zoom sur cette zone de l'espace spectral joint qui nous intéresse.



**Figure 7.2** – Zoom de la JSI pour une fibre uniforme.

Nous pouvons distinguer dans la figure 7.2b les rebonds du sinus cardinal, qui se répercutent dans la JSI en figure 7.2c. Leur présence empêchent d’avoir une JSI parfaitement ronde dans cette zone de l’espace spectral joint. Or une JSI ronde correspond à un état des paires parfaitement factorisable<sup>18</sup>, c’est-à-dire pour lequel la connaissance (par la mesure) de la fréquence d’un des deux photons de la paire ne donne aucune information sur celle de l’autre<sup>19</sup> [19, 20]. La pureté des photons annoncés à partir de cette source se trouve donc réduite du fait de corrélations spectrales entre les deux photons en la présence des rebonds du sinus cardinal [125]. Nous noterons que la méthode usuelle pour faire disparaître de telles corrélations passe par du filtrage [97], tandis que certains protocoles d’information quantique peuvent au contraire tirer parti de ces corrélations, comme la distribution de clés quantiques (QKD) [126].

On peut directement associer la présence de ces rebonds au fait qu’une transition brutale s’effectue aux bords de fibre, entre un milieu neutre (extérieur de la fibre) et le milieu non linéaire qu’est le

18. L’étude de la factorisabilité de la JSI ne fait pas partie des objectifs de la présente thèse, mais constitue, entre autres, l’objet des travaux de thèse de Martin Cordier, dont de premiers résultats sont rapportés en [61]. Cette référence met aussi en lumière comment, en jouant sur les vitesses de groupe de la pompe, signal et idler, l’angle entre les fonctions  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  dans l’espace spectral joint peut être modifié.

19. Nous noterons qu’un état factorisable peut aussi être obtenu pour une JSI horizontale ou verticale dans l’espace joint, i.e. symétrique vis-à-vis d’un axe parallèle à celui des fréquences idler ou signal.

liquide (le terme  $\mathcal{F}_{uni}$  peut être vu comme la transformée de Fourier d'une fonction porte). Une compensation de cet effet peut donc être obtenue en mettant en place une transition 'douce' : par exemple lors d'un mélange à 4 ondes impliquant deux impulsions se croisant progressivement, et se recouvrant de manière transitoire et *progressive* du fait de dispersion de vitesse de groupe [127]. Cependant la longueur effective se réduit alors à la zone spatiale de recouvrement des impulsions, et nous perdons un des avantages d'une source fibrée qui est sa grande longueur d'interaction ajustable.

### 7.4.1 Spectre attendu d'une fibre uniforme

En pratique, le positionnement de nos filtres étant libre, notre montage expérimental nous donne accès à un relevé de la JSI, soit de la probabilité d'émission de paires, pour n'importe quel couple de fréquences de paires. Par réglage de la fréquence de pompe, il nous serait même possible d'explorer la JSI dans l'espace  $(\omega_p, \omega, \omega')$ . Toutefois, pour délimiter notre espace de recherche, nous resterons à une même fréquence de pompe  $\omega_{p0}$  dans toutes nos mesures, et nous ne sonderons expérimentalement que les couples  $\{\omega, \omega'\}$  respectant la conservation de l'énergie avec celle-ci.

Selon que l'on souhaite simuler de manière fidèle la prise de point expérimentaux, au prix de longs temps de calculs, ou au contraire obtenir rapidement la forme générale du spectre attendu, deux méthodes s'offrent à nous.

#### Simulation des points de mesures expérimentales

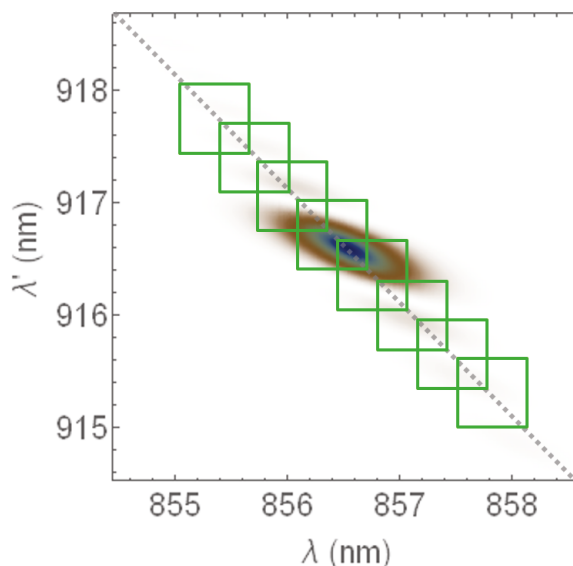
Pour retracer expérimentalement le spectre d'émission, chacun de nos points de mesure consiste en un relevé du taux de génération de paires pour un couple de fréquences de paires  $\{\omega, \omega'\}$  donné (dépendant du réglage de nos filtres de détection), à paramètres de pompe fixés. Nos filtres de mesure n'étant pas infiniment fins, nous relevons des coïncidences entre photons de fréquences comprises dans les intervalles  $[\omega - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega + \frac{\Delta\omega}{2}]$  et  $[\omega' - \frac{\Delta\omega'}{2}, \omega' + \frac{\Delta\omega'}{2}]$ , où  $\Delta\omega$  et  $\Delta\omega'$  correspondent aux largeurs de nos filtres de détection.

Chaque point de mesure correspond donc à l'intégration, dans l'espace spectral joint, de la JSI sur un carré de côtés  $\Delta\omega$  et  $\Delta\omega'$ , centré en  $\{\omega, \omega'\}$ . Les centres de ces carrés suivent la ligne de conservation de l'énergie, puisque nous réglons les centres de nos filtres de mesures selon cette condition.

Ainsi, pour simuler précisément nos mesures expérimentales, nous pouvons intégrer la JSI simulée par carrés successifs, comme l'illustre la figure 7.3, la taille des carrés d'intégration correspondant directement à la largeur de nos filtres.

Par ailleurs, en gardant à l'esprit que la JSI constitue la densité de probabilité de génération d'une paire au passage *d'une impulsion* de pompe, il est nécessaire de multiplier le résultat de chacune de ces intégrations par le taux de répétition ( $\Gamma = 80$  MHz) de nos impulsions pour obtenir le taux de génération de paires par seconde.

Nous soulignons que puisque les carrés d'intégration suivent la diagonale que  $\mathcal{G}$  trace dans l'espace spectral joint (cf. figure 7.2a), un changement de la durée d'impulsion (et donc de sa largeur spectrale) influera sur le niveau du taux de génération de paires, mais n'aura que peu d'incidence sur la structure du spectre. En effet, une durée  $T_0$  plus grande implique un spectre de pompe, et donc une largeur de la fonction  $\mathcal{G}$ , plus fins : cette dernière étant normalisée, la JSI se fait plus dense au sein d'un carré d'intégration donné, résultant en un taux de génération de paires plus grand, au point associé. Toutefois, la différence entre deux points successifs reste essentiellement dictée par la fonction  $\mathcal{F}$  (qui coupe l'axe suivi par les carrés d'intégration), et il en va de même pour la structure globale du spectre résultant de ces intégrations successives.



**Figure 7.3** – Schéma de l’intégration de la JSI sur l’étendue de nos filtres de détection : chaque grand carré vert correspond à la portion de l’espace spectral joint sur lequel est intégré la JSI. En traduisant ce carré dans l’espace spectral joint selon la conservation de l’énergie (trait pointillé) nous pouvons simuler le taux de paires collectées à travers nos filtres en fonction de leurs longueurs d’onde centrales (coordonnées des centres des carrés).

Si l’utilisation de carrés d’intégration se montre visuelle et parlante, elle implique néanmoins que nous modélisons nos filtres par des fonctions porte de largeurs  $\Delta\omega$  et  $\Delta\omega'$ . Une vision plus réaliste vis-à-vis de notre filtrage expérimental passe par une modélisation par des gaussiennes de largeurs à mi-hauteur équivalentes<sup>20</sup>.

En effet, nous rappelons qu’avant d’atteindre les fibres de collection, les faisceaux signal et idler sont diffractés sur deux réseaux successifs. Les différentes longueurs d’onde dans le champ signal (ou idler) parviennent donc à l’optique de collection avec des angles légèrement différents et leur couplage dans la fibre est d’autant plus faible que l’angle fait par le faisceau avec l’axe optique est fort. Autrement dit, le couplage est maximal pour la fréquence centrale du filtre et décroît lorsqu’on s’en éloigne<sup>21</sup>.

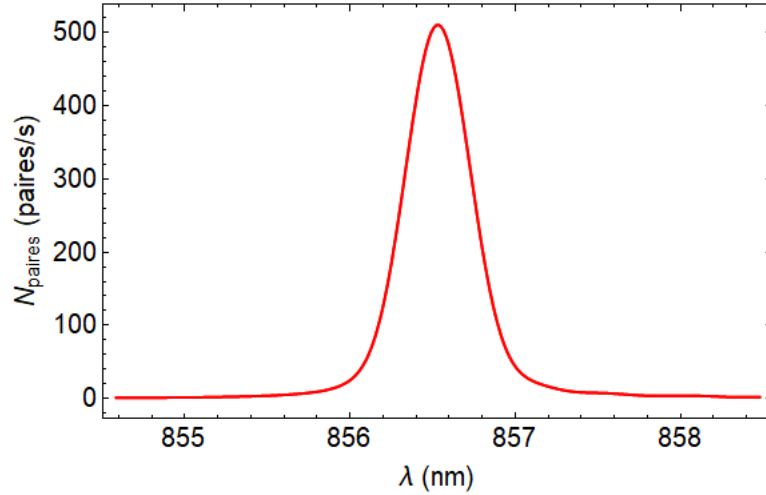
Nous représentons en figure 7.4 le spectre ainsi simulé à partir de la JSI exposée en section 7.4 et de son intégration avec des filtres gaussiens. Les pertes de propagation<sup>22</sup> sur les voies signal et idler (transmission au pic des filtres de 8% et 10% respectivement) ne sont pas prises en compte dans cette simulation puisque celles-ci seront déduites dans les résultats expérimentaux que nous présenterons plus loin. Nous traçons ainsi, tant au niveau des simulations que de nos résultats de mesures, le spectre émis *en sortie* de la fibre microstructurée.

Nous obtenons le spectre classique pour l’émission de paires, constitué d’un pic d’émission unique dont la forme est largement conditionné par  $\mathcal{F}_{uni}$ . Nous noterons cependant que l’intégration sur les filtres gomme complètement les rebonds du sinus cardinal dans le spectre final, ne laissant qu’un pic unique s’étalant sur une plage large d’un nanomètre. De manière générale, nous verrons que l’intégration sur les filtres tend à lisser le spectre et y faire disparaître les oscillations rapides.

20. C’est-à-dire par lesquelles passe la même énergie du spectre, et donc ayant la même valeur d’intégrale que les filtres carrés.

21. Nous pouvons reproduire cet effet en injectant dans une fibre collection un faisceau spectralement fin à la fréquence centrale du filtre associé, puis en désaxant horizontalement le réseau précédant la fibre de collection (cf. figure 3.1) : plus l’orientation du réseau s’éloigne de la position initiale, plus la transmission décroît. La courbe de la transmission suit alors une courbe pouvant en première approximation s’identifier à une gaussienne.

22. Nous incluons dans celles-ci les pertes successives sur les différentes optiques entre la sortie de la fibre et les détecteurs ainsi que de l’efficacité de détection de ces derniers à nos longueurs d’onde (35% et 49% pour signal et idler, respectivement).



**Figure 7.4** – Spectre attendu pour une fibre uniforme dans nos conditions expérimentales. Chaque point correspond à une double intégration, selon les fréquences signal et idler, du produit de la JSI par  $\Gamma$  et deux gaussiennes correspondant à nos filtres. Ces deux gaussiennes normalisées (égales à 1 au pic) ont des largeurs à  $1/e$  égales à 0.6 nm (largeur typique de nos filtres). L'abscisse correspond à la fréquence centrale du filtre idler, celle du filtre signal la suivant par conservation de l'énergie à la longueur d'onde centrale de pompe ( $\lambda_{p_0} = 885.55$  nm).

Nous sommes ainsi en mesure de prédire quantitativement le spectre d'émission auquel nous pouvons nous attendre. Toutefois, cette méthode de simulation des points expérimentaux peut demander beaucoup de temps de calcul<sup>23</sup>, aussi lui préférons-nous souvent une approximation du spectre par coupe de la JSI.

### Coupe de la JSI suivant la conservation de l'énergie

Afin de tracer un spectre comparable à celui obtenu expérimentalement, nous pouvons en première approximation tracer la coupe de la JSI suivant la ligne de conservation de l'énergie à  $\omega_{p_0}$ , soit la ligne dans l'espace joint (cf. figure 7.1a) où  $\mathcal{G}(\omega, \omega')$  est maximum ( $2\omega_{p_0} = \omega + \omega'$ ). Cette coupe diagonale est alors projetée sur l'un des axes pour retracer la probabilité de génération (en prenant en compte le facteur  $\Gamma$  ici aussi) d'une paire selon la fréquence d'un de ses photons (signal ou idler selon le côté du spectre où l'on se place).

En suivant la conservation de l'énergie, le terme  $\mathcal{G}$  est, par définition, toujours égal à 1. Le spectre tracé ne dépend alors plus que de  $\mathcal{F}$  pour sa forme,  $\mathcal{A}$  définissant son amplitude globale. Cette dernière ne changeant pratiquement pas sur les plages spectrales que nous considérons<sup>24</sup>, nous pourrions simplifier nos simulations en ne traçant que le terme  $\mathcal{F}$  suivant la conservation de l'énergie, i.e. pour  $\omega' = 2\omega_{p_0} - \omega$ . Le terme  $\mathcal{F}$  étant toujours compris entre 0 et 1, cette méthode nous permet une comparaison immédiate entre tous les spectres que nous tracerons<sup>25</sup>.

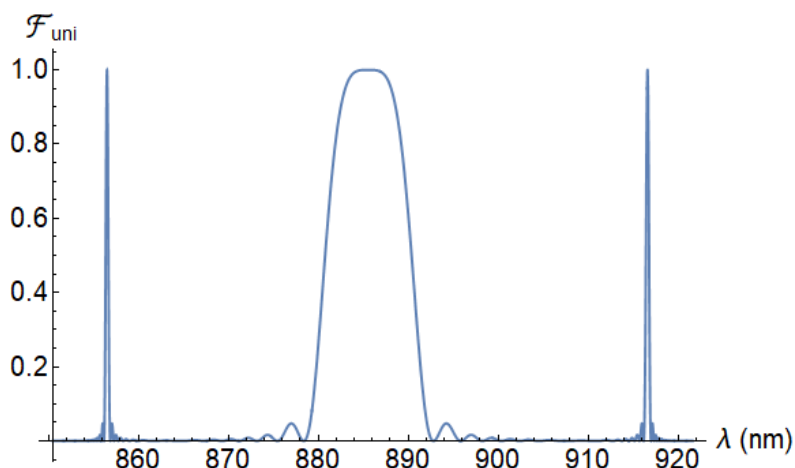
Nous représentons le spectre résultant pour une fibre uniforme, en figure 7.5.

Nous retrouvons sur 7.5a la présence du large pic central au niveau duquel l'accord de phase est automatiquement respecté. Nous nous intéressons plutôt aux pics latéraux pour lesquels l'émission de paires se fait à des fréquences éloignées de la pompe.

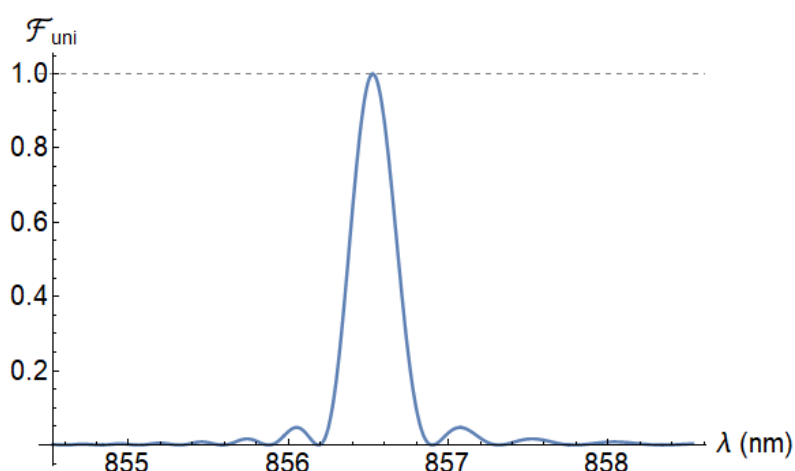
23. De l'ordre de quelques heures pour le cas uniforme, mais pouvant aller jusqu'à plusieurs jours voire une semaine quand nous introduisons les non-uniformités dans le modèle.

24. Nous rappelons que la dépendance aux fréquences de  $\mathcal{A}$  est entièrement contenue dans le rapport  $\frac{\omega\omega'}{\omega_{p_0}^2}$ .

25. Le passage au taux de génération réel peut alors se calculer approximativement en multipliant ce spectre par le taux de génération ( $\Gamma = 80$  MHz), le carré de la largeur des filtres ( $\Delta\omega_{\text{filtre}} \approx 7 \cdot 10^{11}$  rad/s) et l'amplitude  $\mathcal{A} \approx 4 \cdot 10^{-29}$  (rad/s)<sup>-2</sup>.



(a) Spectre sur toute la bande de transmission pour une fibre uniforme.



(b) Zoom sur la plage spectrale associée à l'émission d'un photon idler.

**Figure 7.5** – Tracé du terme  $\mathcal{F}_{uni}$  à la conservation de l'énergie, en fonction de la longueur d'onde d'un de ses photons.

La figure 7.5b nous présente un zoom sur l'un de ces pics latéraux. En la comparant au spectre obtenu par intégrations successives de la JSI, présenté en figure 7.4, nous constatons que la même forme est obtenue, à ceci près que nous distinguons clairement le lissage du spectre et le gommage des oscillations du sinus cardinal, du fait de l'intégration sur les filtres. Néanmoins, le tracé de  $\mathcal{F}$  à la conservation d'énergie, qui correspond à une coupe normalisée de la JSI, reste une bonne première approximation pour évaluer la forme générale du spectre, tant que les filtres utilisés sont fins devant la largeur typique du spectre.

Par nature, la coupe de la JSI ne nous donne qu'une description qualitative du spectre expérimental, mais implique un temps de calcul drastiquement plus faible que la méthode par intégrations successives. De telles coupes nous seront particulièrement utiles pour notre étude de la non-uniformité en partie IV, où tous les spectres simulés, sauf mention contraire, seront obtenus par cette méthode. Dès que nous aurons besoin d'une évaluation quantitative de l'émission et comparable aux mesures expérimentales, nous repasserons sur la méthode par intégrations successives.

Dans la suite, nous étudierons de manière qualitative l'influence de la longueur de la fibre ou de la température sur le spectre d'émission, en présentant des spectres obtenus par coupe de la JSI.

## 7.4.2 Paramètres d'influence du spectre d'émission

### Effet d'un changement de longueur de fibre sur le spectre d'une fibre uniforme

L'effet d'un allongement (ou d'une réduction) de la longueur  $L$  de la fibre sur la spectre d'émission est, dans le cas uniforme, assez simple à prendre en compte.

En effet, ce paramètre n'apparaît dans l'expression de la JSI que dans  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}_{lin}$  :

$$\mathcal{A}(\omega, \omega') = \frac{1}{64\pi^2} (\gamma_p \mathcal{E}_{imp} L)^2 \left( \frac{n_{s0} n_{i0}}{n_{p0}^2} \right)^3 \frac{\omega \omega'}{\omega_{p0}^2}$$

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \text{sinc}^2 \left( \Delta k \frac{L}{2} \right)$$

Nous en déduisons en premier lieu que dans une fibre uniforme le taux de génération de paires va croître avec le carré de la longueur de fibre. Par ailleurs, l'augmentation du nombre de paires émises va s'accompagner d'un affinement du spectre comme nous pouvons le voir en figure 7.6 où nous traçons  $\mathcal{F}_{uni}$  pour différentes longueurs de fibre.

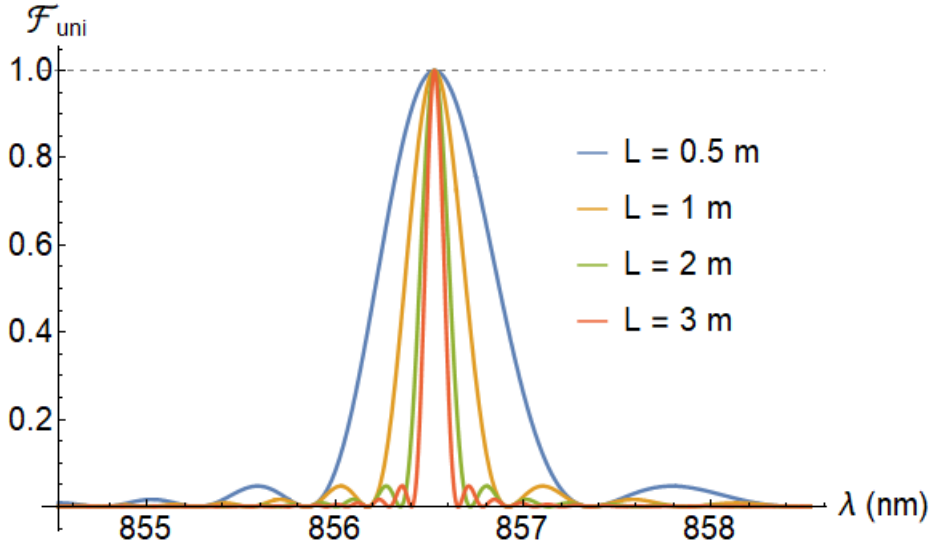


Figure 7.6 – Tracé de  $\mathcal{F}_{uni}$  suivant la conservation de l'énergie pour quatre longueurs  $L$  de fibre différentes.

Ainsi, plus la fibre source sera longue, plus le spectre d'émission des paires sera fin et intense. L'architecture en fibre à cœur liquide permet donc non seulement de positionner les fréquences de paires de photons émises (par ingénierie de la structure et choix du liquide), mais aussi d'ajuster l'intensité et la finesse spectrale d'émission en choisissant la longueur de la fibre.

Cependant, nous verrons en partie IV que l'écart au cas idéal uniforme des fibres réelles modère fortement l'intérêt d'un allongement de la fibre.

### Évolution du spectre d'une fibre uniforme avec la température

Lors d'une variation de la température, le set de fréquences respectant l'accord de phase sera amené à changer. Nous rappelons l'expression du désaccord de phase décalé établi en section 2.2 :

$$\Delta k_S = \Delta k_{ref} - \Delta \omega_{z_{DW}} d\Delta k$$

avec :

$$\Delta k_{ref} = 2\beta(\omega_{p0}) - \beta(\omega_s) - \beta(\omega_i) + \beta^{(1)}(\omega_{p0})(\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p0})$$

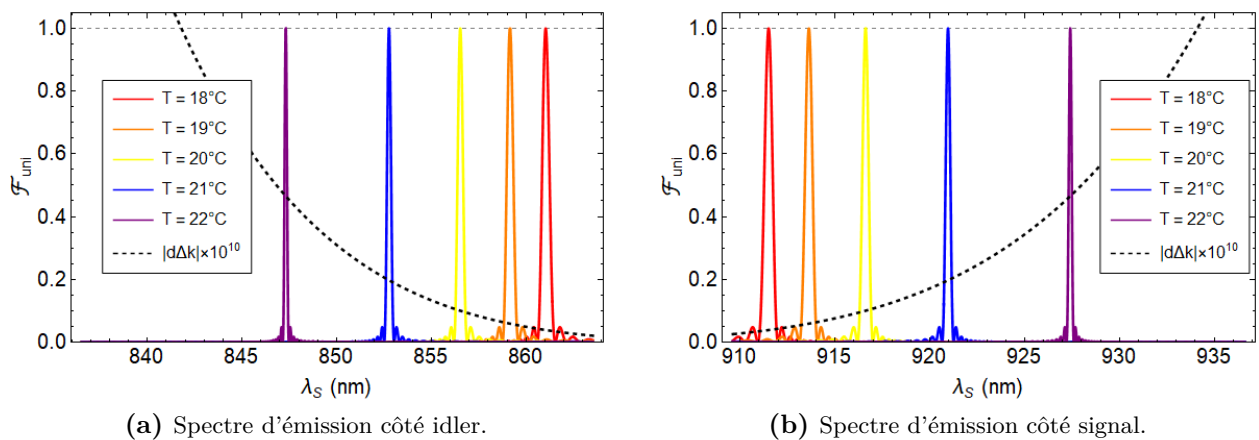
$$d\Delta k = 2\beta^{(1)}(\omega_{p0}) - \beta^{(1)}(\omega_s) - \beta^{(1)}(\omega_i) + \beta^{(2)}(\omega_{p0})(\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p0})$$

En l'absence de changement de température vis-à-vis de notre référence<sup>26</sup>, l'accord de phase s'effectuerait pour  $\Delta k_{ref} = 0$ . Cependant, comme nous l'avons montré en sous-section 2.3.4, la température influe sur l'indice des matériaux constituant la fibre (principalement le liquide), dont la variation induit un décalage  $\Delta\omega_{ZDW}$  du zéro de dispersion.

Dès lors, le désaccord de phase intervenant dans le terme  $\mathcal{F}_{uni}$  de la JSI doit être substitué par le nouveau désaccord  $\Delta k_S$  qui, tout comme  $\Delta\omega_{ZDW}$ , dépend de la température  $T$ . Par ce décalage, les fréquences respectant l'accord de phase sont changées. Le raisonnement préliminaire en sous-section 2.3.4 nous a ainsi permis de prédire que les variations attendues sont de l'ordre de :

$$\frac{\partial\lambda_{i_0}}{\partial T} \approx -5 \text{ nm}/^\circ\text{C} \quad \frac{\partial\lambda_{s_0}}{\partial T} \approx +4 \text{ nm}/^\circ\text{C}$$

Nous représentons en figure 7.7 l'évolution du spectre d'émission de la fibre lorsqu'est changée sa température<sup>27</sup>.



**Figure 7.7** – Évolution de  $\mathcal{F}_{uni}$  lors du changement de température de la fibre. La fibre de référence correspond aux propriétés de dispersion présentées en sous-section 2.1.1, que nous considérerons relevées à une température de 20°C<sup>26</sup>. La courbe en pointillés retrace la quantité  $d\Delta k$ .

Nous retrouvons ici l'ordre de grandeur attendu pour le décalage des longueurs d'onde centrale d'émission (tout du moins tant que le décalage reste inférieur au degré), en notant que notre température de référence<sup>26</sup> (pour laquelle  $\Delta\omega_{ZDW}$  est pris nul ici) est de 20°C. Toutefois nous relevons que ce décalage n'est pas linéaire avec la température, puisque le décalage du  $\Delta k$  correspond au produit du décalage du zéro de dispersion et de la différence  $d\Delta k$  des  $\beta^{(1)}$ , qui évolue aussi en fonction des longueurs d'onde où l'on se place (courbe en pointillés).

Par ailleurs, nous observons que le spectre ne fait pas que se déplacer, mais s'affine en s'éloignant de la longueur d'onde de dispersion nulle ( $\lambda_{ZDW} = 899.5 \text{ nm}$ ). Nous pouvons en effet remarquer que la quantité  $d\Delta k$  (en pointillé sur la figure 7.7), qui pondère l'effet du décalage du zéro de dispersion, est d'autant plus grande que les longueurs d'onde signal et idler sont prises loin du zéro de dispersion (les valeurs prises par  $\beta^{(1)}$  divergent d'autant plus vite qu'on s'en éloigne). Nous avons pu voir en sous-section 2.1.2 que la courbe d'accord de phase s'affine pour des longueurs d'onde signal et idler s'éloignant du zéro de dispersion, correspondant à une condition d'accord de phase plus difficile à respecter. De la même manière ici, la nouvelle condition d'accord de phase  $\Delta k_S = 0$  se montre plus restrictive, d'où un affinement du spectre.

26. Nous évoquons ici la température à laquelle ont été effectuées les mesures de dispersion (cf. sous-section 2.1.1). Or nous rappelons que nous ne disposons pas de cette information, ce qui ne nous empêche pas de considérer l'effet d'une variation relative de la température sur le spectre en fixant la température de référence à 20°C (qui reste la température habituelle de notre salle d'expérience climatisée).

27. La température est tenue pour identique en tout point de la fibre.



La sensibilité du spectre à la température se montre manifestement très forte, une variation de  $1^{\circ}\text{C}$  suffisant à induire un décalage du spectre plus grand que la largeur de nos filtres de détection. Toutefois, dans le cadre de notre expérience, nous sommes en mesure de relever la température de la fibre à  $0.1^{\circ}\text{C}$  près, ce qui correspond approximativement à des décalages de  $\pm 0.3\text{ nm}$ , soit inférieurs à la demi-largeur de nos filtres. Par ailleurs ces fluctuations se montrent, dans l'environnement contrôlé du laboratoire, suffisamment lentes (i.e. n'excédant pas  $\pm 0.1^{\circ}\text{C}$ ) pour être considérées stables sur le temps caractéristique d'une mesure.

Enfin, sur une note subsidiaire, nous soulignons que la température peut aussi être exploitée comme un paramètre d'ajustement de l'accord de phase dans le mélange à quatre ondes, et donc des longueurs d'onde d'émission des paires [128].

Nous disposons à présent d'un modèle complet à même de prédire le spectre d'émission de génération de paires par notre fibre. Avant de confronter les résultats de ce modèle à ceux de nos mesures expérimentales, il nous faudra rentrer plus en détails sur la description de notre expérience ainsi que nos méthodes de mesures.

## Troisième partie

# Montage expérimental et mesure du spectre d'émission

---

Nous rappelons que, pour permettre de retracer la probabilité de génération de paires dans notre fibre en fonction des longueurs d'onde des photons signal et idler, nous les détecterons sur des canaux dédiés résultant d'une séparation spectrale du faisceau sortant de la fibre : chaque détecteur (signal ou idler) ne comptera les photons émis que sur une plage réduite du spectre ( $\sim 0.5$  nm) et réglable. Le chapitre 8 sera le lieu d'une description plus détaillée de notre montage expérimental et de notre méthode de réglage de ces filtres.

La détection nous apporte les comptes bruts de photons, qui sont ensuite confrontés pour établir les corrélations temporelles entre les deux voies de détection. Les deux photons d'une même paire étant nécessairement émis *simultanément*, le pic de coïncidence, qui correspond à un délai nul entre un coup côté signal et un autre côté idler, nous permet de quantifier le taux d'émission de paires et donc leur probabilité de génération.

Nous exposerons au chapitre 9 notre méthode de traitement de l'histogramme de corrélations, en prenant auparavant soin de détailler les différentes sources de bruits dans nos mesures pour comprendre comment ces dernières se retranscrivent dans cet histogramme.

Enfin, le chapitre 10 nous permettra de présenter les résultats de balayage en fréquence du taux de génération de paires. Le spectre obtenu pourra alors être confronté à nos simulations.

# Chapitre 8

## Expérience et réglages de détection

Ce chapitre est dédié à une description détaillée de notre expérience (section 8.1), qui fut montée dans le cadre de la thèse de Margaux Barbier [52], ainsi que de notre méthode de réglage des filtres de détection (section 8.2), développée et utilisée dans le cadre de ce travail de thèse. Nous disposerons ainsi de tous les éléments pour présenter dans la suite nos résultats expérimentaux et la manière dont ils ont été obtenus.

### 8.1 Description détaillée du montage expérimental

Le point de départ du montage, représenté schématiquement en figure 8.1, est la source lumineuse émettrice d'impulsions de pompe : un laser de type Titane-Saphir (modèle Tsunami de *Spectra-Physics*), lui-même pompé par un laser vert continu, délivre des impulsions d'une durée  $T_0 \sim 1$  ps, à une cadence  $\Gamma = 80$  MHz (soit 12.5 ns d'intervalle entre deux impulsions consécutives). L'accordabilité de notre laser de pompe nous permet de balayer la plage 700-1000 nm du spectre<sup>1</sup>. Nous sommes ainsi en mesure d'injecter des impulsions de longueur d'onde centrale proche du zéro de dispersion de notre fibre ( $\lambda_{ZDW} = 899.5$  nm). Le faisceau de sortie du laser est déjà polarisé linéairement, ce qui facilitera son injection sur un axe neutre de notre fibre d'étude.

La puissance moyenne d'émission étant bien trop intense pour notre usage (nous rappelons que nous souhaitons nous placer en régime *spontané*) nous disposons d'un étage de forte atténuation du faisceau<sup>2</sup>, permettant de passer d'une puissance moyenne de 3 W à 300 mW environ. Passé un étage de filtrage de la fluorescence de pompe (cf. section 9.1) par passage sur un réseau de diffraction<sup>3</sup>, le faisceau de pompe traverse un système afocal adaptant la taille de faisceau à l'injection dans le mode spatial fondamental de la fibre, de profil gaussien. À cette fin, un objectif de microscope est disposé en entrée comme en sortie de fibre. Le coefficient de couplage dans la fibre à l'aide de ces objectifs (i.e. la proportion de puissance récupérée en sortie de fibre) est de l'ordre de 30 ~ 40 %.

En outre, le contrôle de la polarisation entrante/sortante est opéré par une association {polariseur + lame  $\lambda/2$ }, de même en entrée comme en sortie. Il nous est ainsi possible de librement sélectionner, en entrée l'axe neutre sur lequel la pompe est injecté, et en sortie l'axe neutre sur lequel l'émission de paires est observée. Nous avons donc accès aux quatre configurations de polarisation possibles pour le mélange à quatre ondes : une émission parallèle ou perpendiculaire à la pompe, et ce pour chacun des deux axes neutres. Nous rappelons que la susceptibilité non linéaire en configuration croisée est trois

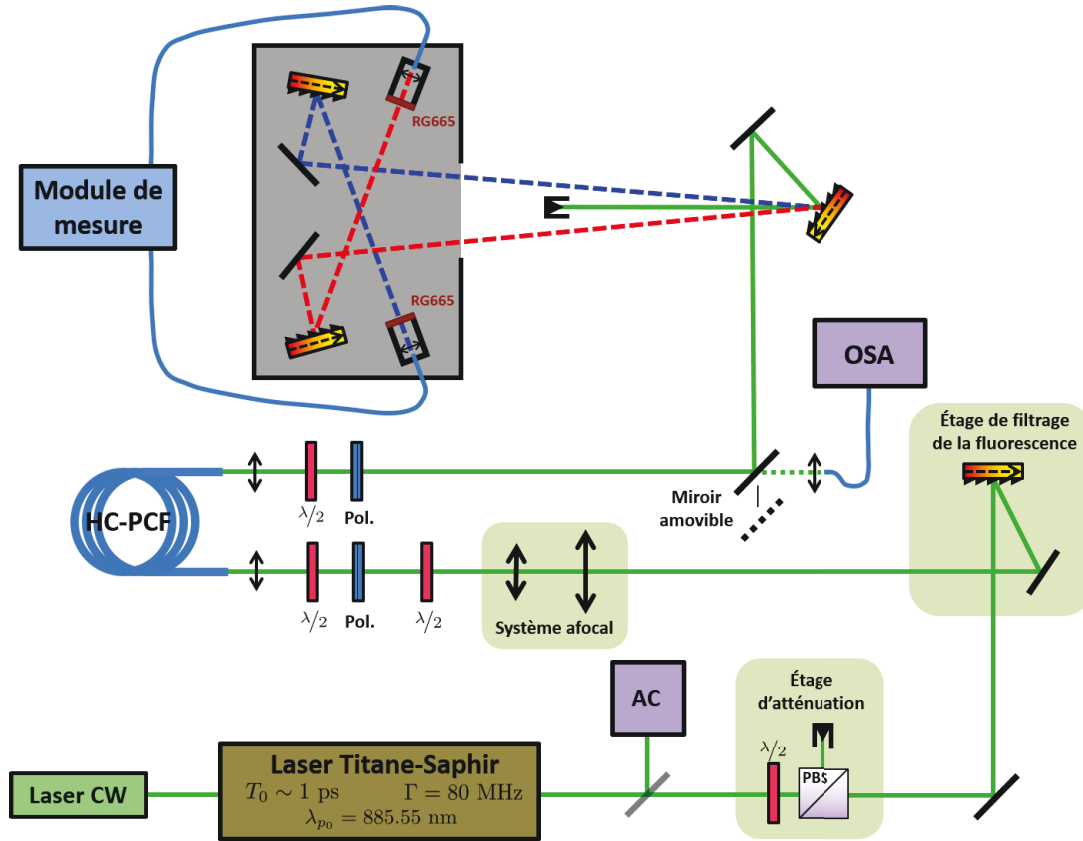
---

1. Nous pouvons cependant noter que le fonctionnement optimal du Titane-Saphir est obtenu pour des longueurs d'onde entre 800 et 900 nm.

2. Cette atténuation est obtenue par la combinaison d'une lame  $\lambda/2$ , d'un cube à séparation de polarisation et d'un piège à lumière. On tire ainsi parti du fait que le faisceau de pompe est déjà polarisé linéairement.

3. Réseau *Edmund Optics* de 300 traits/mm, doré et blazé à l'ordre 1 pour 1000 nm.

fois plus faible qu'en parallèle (cf. sous-section 6.3.1). Cependant, la configuration croisée permet de filtrer plus efficacement la lumière de pompe et de réduire le bruit de mesure associé. Nous noterons l'insertion d'une lame  $\lambda/2$  supplémentaire avant le premier bloc {polariseur + lame  $\lambda/2$ } permettant un contrôle fin de la puissance injectée<sup>4</sup>.



**Figure 8.1** – Représentation schématique de notre montage expérimental. Le faisceau de pompe est tracé en vert, et les voies de détection des photons de paires en pointillés. Les fibres optiques sont tracées en bleu clair. Un autocorrélateur (AC) en sortie du Titane-Saphir et un analyseur de spectre optique (OSA) accessible en sortie de notre fibre (HC-PCF) par un miroir amovible, nous donnent respectivement accès à la durée et au spectre de l'impulsion. Pour limiter le bruit de photons de l'environnement, l'entrée des fibres de collection sont placées sous une boîte de protection (rectangle gris) et des filtres (RG665) filtrent une part du spectre visible.

Puisque le nombre de paires émises par la fibre reste faible, il nous faut limiter au maximum les pertes entre la génération d'une paire et sa détection. Ainsi, le nombre d'optiques suivant la sortie de la fibre sera réduit au minimum et les miroirs utilisés ont une réflectivité de 95 ~ 99% pour nos longueurs d'onde d'intérêt (fenêtre 850 ~ 920 nm).

Afin de séparer photons de pompe et photons de paires, le faisceau de sortie est envoyé sur un réseau de diffraction<sup>5</sup> orienté en position de quasi-Littrow. L'ordre 1 de diffraction de la pompe est récupéré dans un piège à lumière, tandis que les faisceaux signal et idler suivent à présent des chemins indépendants.

4. De manière générale la puissance injectée ne dépassera pas la dizaine de milliWatt. Une puissance trop forte (au delà de 100 mW) risquerait de permettre la vaporisation du liquide localement dans la fibre et la formation de bulles. Celles-ci formeraient autant de points de diffusion faisant chuter l'efficacité du couplage dans la fibre. Par ailleurs l'apparition d'une bulle est susceptible d'endommager la microstructure de la fibre.

5. Réseaux dorés de 1200 traits/mm et blazés à l'ordre 1 pour 750 nm. La réflectivité effective sur les réseaux suivant la fibre est de l'ordre de 70%.

Nous noterons que la réflectivité du réseau dépend de l'état de polarisation incident : elle est maximale pour une polarisation linéaire suivant l'orientation de ses traits. Nous orientons donc le polariseur en sortie de fibre pour nous mettre dans cette configuration.

Du fait de l'imperfection du réseau, une partie de la pompe se diffuse dans toutes les directions, notamment celle des faisceaux signal et idler. Afin de réduire cette diffusion résiduelle, source de bruit dans nos mesures, un second étage de diffraction<sup>5</sup> suivant le même principe est mis en place, sur le trajet signal comme idler (cf. figure 8.1). L'écart entre ces deux étages de diffraction est de 2.2 mètres de façon à réduire au maximum la quantité de lumière de pompe diffusée sur le premier réseau et atteignant le second.

Ces deux filtrages successifs permettent une efficacité de filtrage des photons de pompe de 130 dB, correspondant à un fond de détection d'environ 100 coups par secondes [52]. Il est à noter que ce filtrage est d'autant plus efficace que l'écart spectral entre la pompe et les photons de paires est grand<sup>6</sup>.

Enfin, les faisceaux signal et idler sont injectés dans leurs fibres de collection respectives, elles-mêmes reliées aux détecteurs de photons uniques associés. Ces détecteurs, consistant en des photodiodes à avalanche en silicium<sup>7</sup>, sont intégrés avec le module de mesure de corrélations dans un boîtier commercialisé par *Aurea Technology*.

Nous noterons que le *dead time*, i.e. le temps après une détection pendant lequel tout photon subséquent n'est pas détecté, est pour nos détecteurs de  $\sim 20$  ns. Notre montage de détection est donc incapable de détecter deux paires émises lors d'impulsions consécutives (séparées de 12.5 ns), et encore moins pour deux paires émises durant la même impulsion. Cette limitation n'est dans notre cas pas critique au vu de l'ordre de grandeur du taux de génération de nos paires, de l'ordre de  $10^{-5}$  par impulsion.

En définitive, nous avons accès au taux de comptage de photons sur chaque détecteurs ainsi qu'aux corrélations entre deux coups (un sur chaque détecteur) en fonction du temps les séparant et ce, pour n'importe quel duo de fréquences signal et idler, déterminé par le réglage de nos filtres. Nous présentons dans la suite la méthode que nous suivons pour effectuer ces réglages.

## 8.2 Réglage des filtres de détection

La combinaison de la dispersion chromatique cumulée des deux réseaux sur les trajets optiques signal ou idler, et de l'ouverture numérique limitée de la fibre de collection (cf. figure 8.1) résulte en un filtrage effectif des fréquences détectées. Nous parlons alors de filtres de détection dans le sens où ne sont détectés des photons n'appartenant qu'à une portion réduite du spectre (le reste étant perdu dans l'environnement), large de  $\sim 0.5$  nm.

Pour régler les fréquences centrales  $\{\lambda_{s_0}, \lambda_{i_0}\}$  de ces fenêtres de détection, nous jouerons sur la position et l'orientation du miroir et du réseau de diffraction précédant chaque fibre de collection, ces dernières restant fixes. Les optiques de ces deux duos sont équipées de vis micrométriques graduées, nous permettant de relier un jeu de graduations à une fréquence centrale de filtre donnée. Nous disposons ainsi d'une certaine reproductibilité pour nos réglages<sup>8</sup>.

6. En pratique, un écart minimum de  $\sim 20$  nm est nécessaire pour réduire suffisamment le bruit de mesure, comme nous l'exposerons en section 9.1.

7. Photodiodes SPCM-AQRH-14 de *Excelitas Technologies*, d'efficacité quantique de 35% et de 49% pour nos longueurs d'onde signal et idler (autour de 916 et 856 nm, respectivement).

8. Le changement des orientations du miroir et réseau par le biais des vis micrométriques ne permet de moduler la fréquence centrale d'un filtre que sur une plage restreinte, d'environ deux nanomètres. Pour sonder une plus grande plage de couples de fréquences, nous devons nécessairement bouger le point de fixation des optiques, et donc perdre la reproductibilité de nos réglages.

Si nous sommes libre d'orienter le faisceau injecté dans chaque fibre de collection, encore devons-nous disposer d'une référence de fréquence sur laquelle nous caler. Heureusement, notre source laser présente une grande accordabilité en longueur d'onde.

En effet, la fréquence centrale de pompe  $\omega_{p_0}$  est directement réglable sur notre laser Titane-Saphir, dont la plage d'accordabilité (700 ~ 1000 nm) couvre les longueurs d'onde typiques d'émission de nos paires, aux alentours de 850 et 910 nm. Par ailleurs, le spectre est visualisable à l'aide d'un analyseur de spectre optique (OSA), accessible via un miroir amovible (cf. figure 8.1). On peut noter que cette mesure s'effectue en sortie de fibre, de sorte que le spectre obtenu correspond bien à la composition spectrale de la pompe *dans* la fibre.

Notre procédure de réglage usuelle consiste alors à faire passer par notre fibre microstructurée un faisceau laser à la longueur d'onde visée<sup>9</sup>,  $\lambda_{s_0}$  ou  $\lambda_{i_0}$ . Le faisceau sortant nous sert alors de référence pour le réglage de la voie de détection correspondante : nous ajustons les positions et orientations du miroir et du réseau de façon à maximiser la transmission dans la fibre de collection.

Pour déterminer la forme spectrale du filtre de détection résultant, nous injectons un spectre large (vis-à-vis de la largeur des filtres), centré en  $\lambda_{s_0}$  ou  $\lambda_{i_0}$  selon la voie considérée, dans la fibre microstructurée. Sont relevés à l'analyseur spectre optique le spectre en sortie de cette fibre ainsi que celui récupéré en bout de circuit, à la sortie de la fibre de collection du filtre associé. Ces spectres sont ensuite normalisés à partir des puissances moyennes relevées aux mêmes points. Le rapport du spectre normalisé en sortie de fibre de collection à celui en sortie de la fibre microstructurée nous permet ainsi d'obtenir la forme de nos filtres de détection, sur laquelle nous ajustons une gaussienne. Les paramètres d'ajustement nous donnent la longueur d'onde centrale du filtre, sa demi-largeur à  $1/e$  et sa transmission au pic. Cet étalonnage est systématiquement opéré après chaque réglage d'un filtre.

La méthode de réglage que nous venons de décrire permet de régler les longueurs d'onde centrales des filtres avec une précision de l'ordre de 0.05 nm et ce, de manière reproductible. Toutefois, cette procédure s'avère relativement longue (d'une trentaine de minutes à une heure) et ne permet donc pas de réglages rapprochés dans le temps. Nous verrons alors au chapitre 10 un réglage moins précis mais plus rapide (en décalage du réseau de chaque voie uniquement) que nous avons utilisé pour nos principaux résultats expérimentaux.

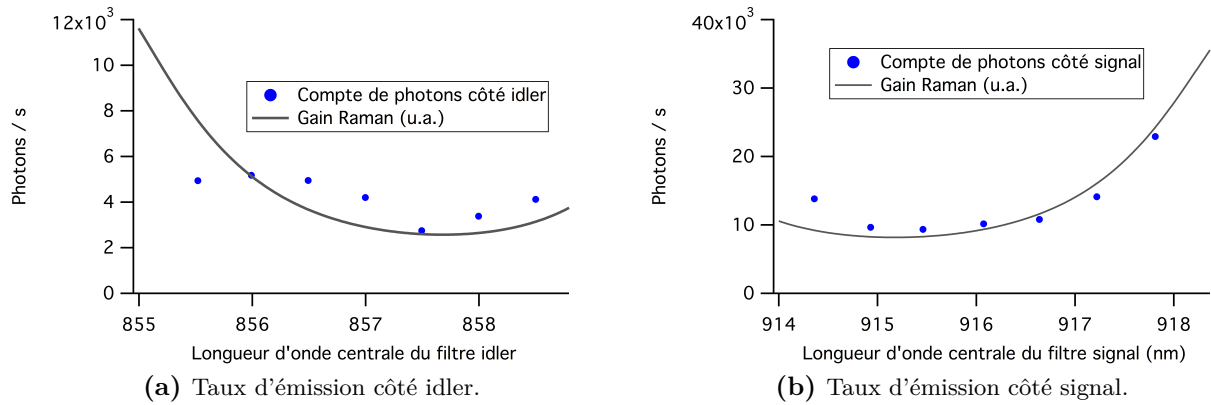
La demi-largeur à  $1/e$  typique de nos filtres est de 0.3 ~ 0.4 nm, soit une fenêtre typique de détection large d'environ ~ 0.5 nm, suffisante pour retracer de manière résolue la structure du spectre d'émission de la fibre (dont la largeur typique est de l'ordre du nanomètre). Les efficacités de détection au pic de ces filtres sont de l'ordre de 8 et 11%, pour signal et idler respectivement, en prenant en compte l'efficacité quantique de nos détecteurs, qui est de 35% à  $\lambda_{s_0} = 916.6$  nm et de 49% à  $\lambda_{i_0} = 856.5$  nm.

Nous rappelons que dans notre expérience nous positionnons les longueurs d'onde d'émission de nos paires, via le choix de la longueur d'onde de pompe et la connaissance de la courbe d'accord de phase (cf. figure 2.4), entre l'émission de deux raies Raman secondaires de l'acétone deutérée [58]. Celles-ci correspondent à des décalages de 331 et 410  $\text{cm}^{-1}$ , soit des pics d'émissions, pour une pompe à  $\lambda_{p_0} = 885.55$  nm, respectivement à 912 et 919 nm côté signal et 860 et 855 nm côté idler. Les longueur d'onde signal et idler  $\lambda_{s_0}$  et  $\lambda_{i_0}$  respectant l'accord de phase avec  $\lambda_{p_0}$  se positionnent donc bien entre les pics Raman.

La figure 8.2 retrace l'évolution des comptes de photons, ainsi que celle du gain Raman, en fonction des longueurs d'onde signal et idler sur notre plage spectrale typique de mesure.

---

9. L'étage de filtrage de la fluorescence est auparavant court-circuité à l'aide de deux miroirs amovibles, afin de pouvoir injecter la longueur d'onde souhaitée dans la fibre.



**Figure 8.2** – Nombre de photons émis par seconde côté signal et idler, pour une puissance moyenne dans la fibre de 3 mW et avec  $\lambda_{p0} = 885.55$  nm. Le nombre de photons émis par la fibre sont déduits des comptes détectés et des transmissions dans notre montage. Les traits pleins représentent l'évolution du gain Raman.

Nous observons que les taux de comptes suivent l'évolution du gain Raman. En effet, la pompe étant largement filtrée, et le nombre de paires émises par secondes étant très faible ( $\sim 800$  paires/s, sans prendre en compte les pertes de notre montage), le bruit Raman domine les comptes de photons.

Toutefois, les comptes bruts de photons ne constituent pas les mesures sur lesquelles nous nous appuyerons le plus. En effet, le taux de génération de paires sera déduit des mesures de corrélations temporelles entre les coups relevés sur nos deux détecteurs. Puisque le bruit Raman se constitue de photons décorrélés en temps, la mesure de corrélations permettra de faire ressortir le signal utile (les paires) du bruit.





## Chapitre 9

# Mesures de corrélations en régime de faibles comptes de photons

### 9.1 Bruits de mesure en régime de faibles comptes de photons

Il est important de garder en tête que le signal d'intérêt dans nos mesures ne constitue qu'un nombre très faible de photons ( $\sim 10^{-5}$  paires/pulses soit  $\sim 800$  paires/s). Dans ces conditions, la moindre source de bruit devient rapidement critique, et de nombreuses précautions doivent être prises pour réduire au maximum toutes les sources potentielles. Ces dernières peuvent être classées selon différents critères :

- Leur synchronisme avec les impulsions de pompe. Toute source de bruit synchrone avec les impulsions de pompe le sera aussi avec les paires de photons. Les bruits asynchrones seront moins problématiques du fait que dans le cadre de relevés de corrélations temporelles (présentés dans la section suivante), ceux-ci se répartissent sur tous les délais possibles.
- Leur dépendance à la puissance de pompe. Nous distinguerons les bruits indépendants de la pompe de ceux évoluant linéairement avec la puissance de pompe.
- Leur sélectivité spectrale, c'est-à-dire leur présence sur une partie du spectre optique seulement ou son ensemble. Le point qui nous intéresse particulièrement est bien évidemment la présence ou non de bruit à nos fréquences d'émission signal et idler. Un photon de bruit émis à même fréquence et au même instant qu'un photon de paires en est, en pratique, indistinguable (sauf différence d'état de polarisation) et donc impossible à filtrer.

En gardant en tête ces caractéristiques, nous pouvons distinguer plusieurs sources de bruit et présenter les moyens mis en œuvre pour les limiter :

**Les *dark counts*** Nos détecteurs n'étant pas parfaits, toute mesure sera entachée de faux positifs, i.e. de comptes mesurés en absence de photons incidents, d'origine thermique. Pour nos détecteurs, le niveau de *dark counts* est d'environ 60 coups par seconde<sup>1</sup>, ce qui constitue une limite basse du bruit de comptage. Par nature, les *dark counts* sont totalement décorrélés du reste de l'expérience : ils sont asynchrones avec la pompe et leur niveau de compte est totalement indépendant de sa puissance. En outre, nous les mesurons quelle que soit les fréquences de réglage de nos filtres.

Par ailleurs, les *dark counts* ne peuvent être réduits sans refroidir nos détecteurs. Or cette contrainte technique ne se justifie pas ici puisque leurs niveaux de comptes associés est suffisamment faible pour que ce bruit ne soit pas la limitation principale dans nos mesures.

---

1. Le niveau de *dark count* étant inhérent aux détecteurs, il peut être relevé en déconnectant les fibres de collection et en bouchant les ergots de connection du boîtier de détection.

**Les photons de l'environnement** Toute source de lumière présente dans la pièce d'expérience (lumières, écrans, voyants) émet des photons susceptibles d'être détectés, qui sont donc indépendants de la pompe et détectables quel que soit la fréquence de réglage (puisqu'ils ne passent pas par le chemin optique du montage).

Néanmoins il est relativement aisé de limiter leur influence : d'une part en effectuant nos expériences dans le noir complet, d'autre part en réduisant matériellement le nombre de photons de l'environnement atteignant les détecteurs. Les photons signal et idler sont séparément collectés dans des fibres reliées au boîtier de détection. C'est donc au niveau de la collection de la lumière (côté signal comme idler) que nous limitons les photons de l'environnement : en interposant un filtre RG665 coupant la lumière de longueur d'onde inférieure à 665 nm, et en plaçant l'ensemble des optiques de collection sous une boîte opaque dont la seule ouverture laisse entrer les faisceaux diffractés (représentée par le rectangle gris dans la figure 8.1). Par ailleurs, les photons de l'environnement sont encore susceptibles de se coupler directement dans les fibres de collection, aussi utilisons-nous des fibres à double gaine de protection. En prenant ces précautions, le bruit issu des photons de l'environnement devient négligeable<sup>2</sup> vis-à-vis des *dark count*.

**Les photons de fluorescence** Notre laser pulsé se base sur le pompage continu d'un cristal de Titane-Saphir. Or les ions  $Ti^{3+}$  peuvent naturellement se désexciter par fluorescence vers leur niveau fondamental. Les photons émis se répartissent sur une plage spectrale allant de 600 à 1000 nm et ne sont pas synchrones avec les impulsions délivrées par le laser. Cependant, ils suivent le même parcours optique et passent par les mêmes étages d'atténuation, de sorte que le signal de fluorescence est proportionnel à la puissance de pompe injectée. Si la fluorescence du laser est faible vis-à-vis de la puissance à longueur d'onde de pompe ( $\sim 80$  dB d'écart), elle constitue néanmoins un niveau de bruit préjudiciable pour nos mesures.

Le filtrage de la fluorescence est exécuté très tôt dans notre montage par passage sur un réseau de diffraction (cf. figure 8.1) en configuration de quasi-Littrow. Nous obtenons ainsi une diminution de 50 dB du fond de fluorescence dont le taux de comptes associé au niveau des détecteurs est négligeable.

**Les photons de pompes diffusés** Les imperfections de nos réseaux impliquent nécessairement qu'une petite partie des photons de pompe soient diffusés suivant le trajet optique de nos photons de paires. Si cette proportion est faible, le nombre initial de photons de pompes est tellement important ( $10^9$  photons de pompes contre  $10^{-5}$  paires par impulsion) que ce bruit de diffusion est un problème majeur dans notre expérience. Les photons diffusés sont naturellement synchrones avec les impulsions et en quantité proportionnelle à la puissance de pompe injectée.

La disposition principale pour réduire le taux de comptes de photons de pompe diffusés, présentée en section 8.1, consiste à utiliser deux réseaux de diffraction en série. Par ailleurs nos fibres de collection seront monomodes : leur cœur de taille réduite ( $9 \mu\text{m}$  de diamètre) limite la collection de photons diffusés hors axe optique. Le taux de comptes dus à la diffusion de la pompe<sup>3</sup> est de l'ordre de  $\sim 100$  coups/s. Enfin, nous noterons qu'en configuration croisée (les paires sont émises sur l'axe neutre perpendiculaire à celui de la pompe) la pompe est efficacement coupée dès la sortie de fibre par le polariseur<sup>4</sup>.

2. En coupant le laser de pompe, nous observons que nos taux de comptes se retrouvent au niveau de ceux des *dark count*. Or les photons de l'environnement constituent la seule autre source de bruit indépendante de la pompe.

3. L'estimation de ce taux peut être réalisée en désaxant le faisceau injecté dans une fibre de collection. En supposant que la diffusion est la même dans toutes les directions de l'espace, nous ne relevons plus que la diffusion de la pompe, à laquelle s'ajoute les *dark count* et photons de l'environnement que nous pouvons retrancher à la mesure.

4. Nous rappelons néanmoins que l'une des conséquences du remplissage de la fibre par notre liquide (cf. sous-section 2.3.3) est un maintien de polarisation partiel par notre fibre : une faible part du faisceau de pompe passera toujours le polariseur de sortie.

**Les photons Raman** Le bruit issu de la diffusion Raman spontanée est généré spontanément au niveau de notre fibre d'étude<sup>5</sup>. Issu de l'interaction entre la pompe et le milieu de propagation, le bruit Raman est proportionnel à la puissance de pompe et donc maximum au niveau des impulsions, de sorte qu'on puisse le considérer synchrone à la pompe.

Sa sélectivité spectrale dépend du milieu, ce qui constitua la motivation principale pour l'élaboration de l'architecture de notre source. Nous rappelons que la raie principale du spectre de gain Raman de l'acétone deutérée se trouve hors de notre bande de transmission, tandis que les fréquences de génération de nos paires se trouvent entre deux raies Raman secondaires. L'intérêt de l'architecture de fibre à cœur liquide fut démontré par la mise en évidence d'une réduction du bruit Raman de trois ordres de grandeur vis-à-vis d'une fibre à cœur de silice [58, 52]. Néanmoins, les raies Raman se modélisant par des lorentziennes, le recouvrement des deux raies Raman adjacentes introduira toujours un bruit Raman résiduel (cf. figures 8.2). Le bruit de fond Raman est de l'ordre de plusieurs milliers de coups/s, et dépend de la fréquence de réglage de nos filtres (d'autant plus fort que nous nous rapprochons du maximum d'une des raies Raman).

**Les photons désappariés** Du fait des pertes dans notre montage, inhérentes aux imperfections des optiques comme aux limites de nos détecteurs, le long d'un canal de collection (signal ou idler), seul un faible pourcentage des photons émis par notre fibre d'étude est effectivement détecté. Ainsi, pour une large part des paires émises, seul un des deux photons de paire sera effectivement décompté. Avec des efficacités totales de détection d'environ 10% sur chaque voie, et un taux de génération de l'ordre de 800 paires par secondes, le nombre de coups sur une voie provenant de photons désappariés est d'approximativement 70 coups par secondes. Si ce bruit reste donc très faible, il n'est toutefois pas filtrable spectralement, et de plus synchrone avec la pompe et évoluant quadratiquement avec la puissance dans la fibre.

Les photons désappariés sont alors distinguables des photons appariés uniquement via des relevés de corrélations temporelles entre les coups sur les voies signal et idler.

L'ensemble de ces bruits se retrouvent dans nos comptes de photons mais, au vu de leurs proportions respectives, la diffusion Raman reste notre source majeure de bruit.

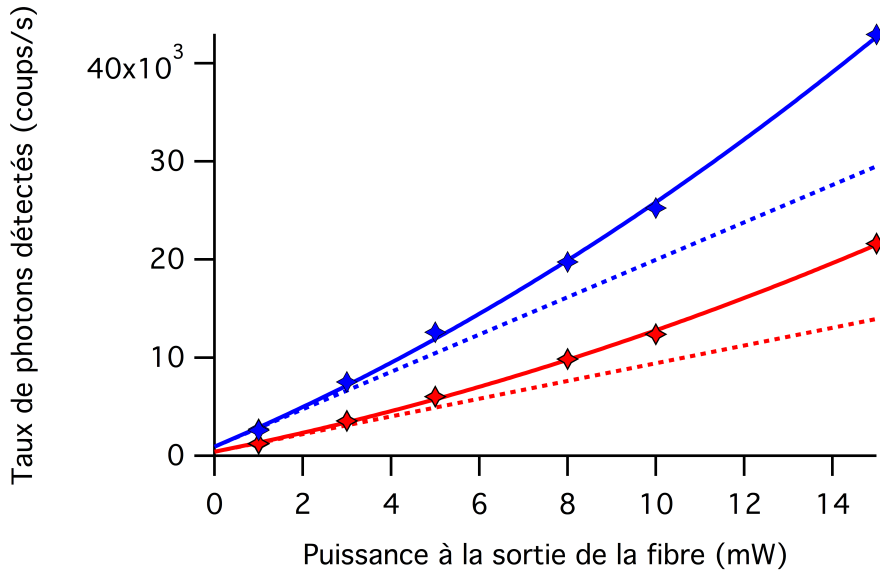
Forts d'une vision complète des sources de bruit potentielles, nous présentons dans la suite le principe de nos mesures de corrélations temporelles et la manière dont les différents bruits s'y traduisent.

## 9.2 Mesures de corrélations temporelles

De tous les phénomènes ayant lieu dans notre expérience, le mélange à quatre ondes est le seul processus permettant de générer des paires de photons corrélées en temps. Par ailleurs, c'est également le seul phénomène dont l'amplitude croît quadratiquement avec la puissance de pompe injectée (nous rappelons que la diffusion Raman spontanée est un phénomène *linéaire*). Ainsi la génération de paires peut être mise en évidence par l'évolution quadratique des comptes de photons sur chaque détecteur en fonction de la puissance de pompe [52]. Nous représentons en figure 9.1 un exemple typique d'évolution des comptes de photons sur chaque détecteur en fonction de la puissance de pompe présente dans la fibre (mesurée en sortie).

---

5. Nous notons que le bruit Raman généré dans les fibres de collection est négligeable vu que la puissance de pompe  $y$  est minime.



**Figure 9.1** – Évolution du nombre des comptes de photons détectés par seconde, sur les voies signal (bleu) et idler (rouge), en fonction de la puissance moyenne sortant de la fibre. Les lignes continues constituent des ajustements polynômiaux d'ordre 2 sur les points, tandis que les traits en pointillés retracent leurs composantes linéaires. Les filtres sont centrés à  $\lambda_{p0} = 916.6$  nm et  $\lambda_{i0} = 856.5$  avec la pompe fixée à  $\lambda_{p0} = 885.55$  nm.

Nous remarquons en premier lieu que le nombre de comptes est toujours plus fort côté signal<sup>6</sup>. Cela s'explique du fait, qu'à température donnée, la diffusion Raman anti-Stokes est plus faible que celle Stokes (cf. section 1.2) : le bruit Raman dominant les comptes de photons, nous obtenons plus de comptes de photons côté signal que côté idler.

La génération de paires étant l'unique processus quadratique avec la puissance de pompe, nous pourrions nous attendre à des évolutions quadratiques identiques pour les deux courbes. Néanmoins, les différences entre les deux voies de propagation (efficacités de détection différentes, imprécisions dans le positionnement des filtres) induisent la différence observée. La différence des pentes linéaires tenant pour sa part essentiellement au fait que les longueurs d'onde signal et idler correspondent à des gains Raman différents.

À l'observation de l'évolution des comptes en figure 9.1, la première réaction pour amplifier le signal de paires serait d'augmenter la puissance de pompe injectée. Cependant, comme nous le verrons en sous-section 9.2.2, une telle manœuvre s'avèrerait en fait préjudiciable au rapport signal à bruit.

De tels relevés de l'évolution quadratique des comptes constituent une preuve de la génération de paires par mélange à quatre ondes spontané dans la fibre. Toutefois, ils ne permettent pas d'obtenir le taux de génération de paires en fonction du duo de fréquence  $\{\omega, \omega'\}$  auquel sont réglés nos filtres. En effet, il nous est impossible à partir des seuls comptes sur chaque détecteur d'associer entre eux les photons détectés. Cette information s'obtiendra à partir de l'histogramme des corrélations temporelles.

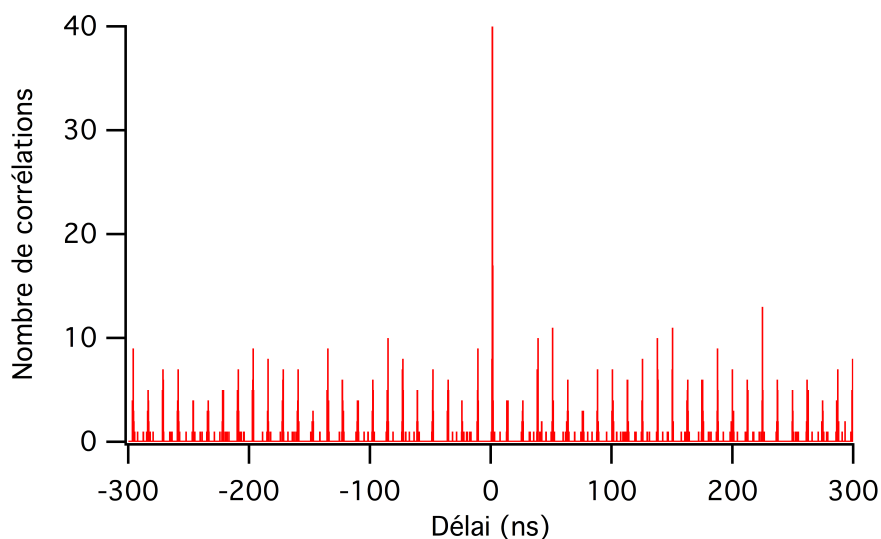
### 9.2.1 Histogrammes de corrélations temporelles

Outre les détecteurs de photons uniques, notre boîtier de détection est équipé d'un module électronique (*Time-to-Digital Converter*) prodiguant une mesure de corrélations temporelle selon une mesure de type *Time-Correlated Single Photon Counting* : les comptes de photons sont accumulés sur

6. Cette affirmation est vraie tant que les filtres sont réglés avec des longueurs d'onde centrales correspondant à un écart spectral avec la pompe d'environ même ampleur. Ce qui sera en pratique toujours le cas dans nos mesures.

des fenêtres de 600 ns se répétant tout les 2.5 MHz de façon à couvrir continûment la durée de mesure. Les temps d'arrivées des photons sont relevés par rapport au début de ces fenêtres<sup>7</sup>, la différence de ces délais permettant de remonter aux corrélations temporelles des coups de détection entre nos deux détecteurs.

Les données brutes des mesures de corrélations est une liste de valeurs : chaque point correspondant à une corrélation entre un coup côté signal et un coup côté idler, dont est relevé l'espacement dans le temps<sup>8</sup>. La représentation usuelle de telles mesures prend la forme d'un histogramme dont nous présentons un exemple en figure 9.2. Chaque colonne donne le compte, accumulé sur toute la durée d'acquisition, du nombre corrélations relevées avec un délai donné entre les coups, mis en abscisse. L'émission de deux photons d'une paire étant simultanée, notre signal d'intérêt se cantonnera au délai nul<sup>9</sup>. Nous soulignons que la résolution du module *Time-to-Digital Converter* pour les corrélations est de 65 ps, qui constitue donc la largeur minimale que peuvent adopter les colonnes de l'historgramme.



**Figure 9.2** – Exemple d'historgramme décomptant le nombre corrélations relevées entre un photon détecté côté signal et un côté idler, en fonction de l'intervalle de temps les séparant. Résultats de mesures accumulées sur 1000 secondes pour une puissance moyenne dans la fibre de 3 mW.

La première chose que nous pouvons dénoter sur la figure 9.2 est la structure qu'adopte l'historgramme : la majorité des corrélations se répartissent sur des pics également espacés de 12.5 ns, avec un pic central (i.e. le plus proche de l'abscisse nulle) plus intense. Ce dernier, que nous appelons pic de coïncidence, est la marque de la génération de paires de photons dans notre fibre. En effet, les photons de paire étant par nature émis au même instant, leur détection respective se fait simultanément<sup>9</sup>. Du reste, le module de corrélation peut associer deux photons ne provenant pas d'une paire. Lorsque cette association entre deux photons décorrélés se produit pour un délai nul (ou proche de zéro et associé au pic central), nous parlons alors de 'fausses' coïncidences, ou coïncidences accidentelles.

7. Nous notons qu'au vu de nos taux de comptes moyens ( $\sim 10000$  coups par secondes), chaque fenêtre n'enregistre au maximum qu'un seul coup. Par ailleurs, pour que le compte d'un photon soit pris en compte dans la mesure de corrélation, celui-ci doit survenir au minimum 6 ns après le début de la fenêtre, correspondant au temps de réponse du *Time-to-Digital Converter*.

8. Ces mesures s'effectuent sur un mode continu : lors de la détection d'un coup sur un des deux canaux (par exemple signal), le prochain coup sur l'autre canal (idler) lui est associé. Un point est alors reporté dans l'historgramme, dont l'abscisse correspond à l'écart temporel entre les deux coups. Les abscisses négatives correspondent à l'ordre inverse (un coup côté idler précédant un coup côté signal).

9. Les parcours signal et idler n'étant en pratique pas parfaitement équivalents, un léger décalage temporel sera toujours présent entre les détections de photons signal et idler émis en même temps. Le pic central de l'historgramme (comme tous les autres pics) s'en retrouve légèrement décalé vis-à-vis de l'abscisse de délai nul.

L'intervalle de temps entre deux pics voisins correspond exactement à l'espacement temporel des impulsions du laser de pompe. Nous le comprenons aisément en nous rappelant que la majeure part du bruit dans nos mesures (cf section 9.1) provient de la diffusion Raman, qui domine nos comptes de photons et dont l'amplitude est proportionnelle à la puissance de pompe. Dans leur grande majorité, les photons incidents sur nos détecteurs arrivent donc en synchronisation avec nos impulsions, synchronisation qui se retrouve alors dans l'histogramme de corrélations. Seuls les photons issus des *dark counts*, de l'environnement ou de la fluorescence de pompe sont par nature asynchrones avec la pompe, et constituent dans leur ensemble une part mineure des comptes. Les corrélations impliquant un photon provenant d'un de ces bruits se répartissent alors sur tous les délais et constituent le bruit de fond que nous observons entre les pics dans la figure 9.2.

### 9.2.2 Coincidence-to-Accidental Ratio

Comme nous l'avons vu, toutes les coïncidences produites par des photons de paires sont décomptées dans le pic central de l'histogramme. Cependant, ce dernier ne contient pas seulement le compte de ce signal qui nous intéresse, mais aussi des associations de photons de bruit concomitants, exceptées celles associant deux photons désappariés. En effet, puisque nous sommes dans un régime où au maximum une paire est produite par impulsion, une coïncidence accidentelle entre deux photons désappariés ne peut se faire avec un délai de détection nul (car cela supposerait que les photons proviennent de deux paires émises lors d'une même impulsion).

Pour évaluer la qualité quantique de notre source vis-à-vis du bruit<sup>10</sup> nous introduisons le *Coincidence-to-Accidental Ratio*, ou CAR, usuellement utilisé dans la littérature [14, 125, 131, 132, 133, 134, 15], qui, comme son nom l'indique, correspond au rapport des coïncidences résultant de véritables paires et des coïncidences accidentelles. Il est ainsi assimilable à un rapport signal à bruit.

En régime de fort taux de génération de paires, nous pouvons en première approximation négliger ce bruit de coïncidences accidentelles et directement considérer le nombre de corrélations dans le pic central, normalisé à la durée d'acquisition, comme le taux de génération de paires. Toutefois, de manière générale, le bruit dans le pic central doit être pris en compte. Pour ce faire nous posons tout d'abord le nombre total de corrélations sur l'ensemble de l'histogramme :

$$N_T = N_V + 51N_{Sec} \quad (9.1)$$

où  $N_V$  est le nombre de 'vraies' coïncidence dans le pic central, soit celles issues de la corrélation entre photons d'une même paire. Et avec  $N_{Sec}$  le nombre moyen de corrélations dans les pics secondaires, en notant que nos histogrammes comportent 51 pics : 50 pics secondaires et un pic central. L'équation (9.1) suppose ainsi que le bruit de corrélation dans le pic central est le même que celui représenté par les pics secondaires. Or le pic central ne peut présenter de corrélations accidentelles associant deux photons de paires désappariés, contrairement aux pics secondaires. Cependant, le taux de génération de photons restant faible devant l'amplitude du bruit Raman, ce genre d'associations ne représente qu'une faible portion des pics secondaires, et nous pouvons en première approximation négliger cette différence.

---

10. Dans les protocoles de cryptographie quantique usant de sources de paires de photons, le bruit est source d'erreurs laissant la possibilité de failles, ou *loopholes*, dans le protocole. Dans l'exemple de *Quantum Key Distribution* (QKD), il existe une limite maximum de bruit au delà de laquelle la correction d'erreur ne permet plus de partager une clé sécurisée [129, 130].

Soit  $1/X$  la portion des corrélations de l'histogramme correspondant au pic central, nous avons, toujours en considérant le bruit du pic central assimilable à l'amplitude des pics secondaires :

$$N_V + N_{Sec} = N_T/X \quad (9.2)$$

Nous avons alors d'après (9.1) et (9.2) :

$$N_{Sec} = \frac{N_T}{50} \left(1 - \frac{1}{X}\right)$$

Ce qui nous permet de définir le CAR comme le rapport entre le nombre de coïncidences dans le pic central et le nombre moyen de corrélations relevées dans les pics secondaires :

$$\text{CAR} = \frac{N_T/X}{N_{Sec}} = \frac{50}{X-1} \quad (9.3)$$

De la même manière que lorsqu'on observe une évolution quadratique avec la puissance des comptes de photons, un CAR dépassant l'unité est une marque de la génération de paires<sup>11</sup> : les coïncidences font ressortir le pic central vis-à-vis du bruit.

Le CAR, tel qu'il est posé en (9.3), constitue un outil rapide de comparaison entre différentes mesures. En effet, le programme d'acquisition associé à notre boîtier de détection nous permet de visualiser en temps réel le taux de comptes de photons sur chaque détecteur, les données brutes de corrélations temporelles ainsi que leur histogramme. Nous pouvons ainsi relever, durant une acquisition, le nombre total de corrélations et leur nombre dans le pic central pour en déduire directement le CAR. Toutefois, l'équation (9.1), sur laquelle nous nous sommes basés ici, suppose que toutes nos corrélations se concentrent dans les 51 pics de l'histogramme. Or, comme nous l'avons vu, un bruit de fond est toujours présent entre les pics (cf. figure 9.2). Pour obtenir une mesure plus précise du CAR, nous passerons donc par un post-traitement de l'histogramme, de façon à relever le nombre de corrélations dans chaque pic.

### 9.2.3 Traitement des histogrammes de corrélations

Du fait du *jitter* électronique des détecteurs, les pics de l'histogramme de corrélation présentent une certaine largeur, et un traitement s'avère nécessaire pour associer à chaque délai le nombre correct de corrélations détectées. La principale valeur qui nous intéresse étant bien sûr le nombre de corrélations détectées pour le pic central, pour en déduire le taux de génération de paires. Mais le nombre moyen de corrélations dans les pics secondaires (tous les autres pics) nous est aussi nécessaire, afin de nous permettre de quantifier le bruit présent dans le pic central et d'en déduire le CAR.

La solution la plus simple serait alors de réduire le nombre de colonnes de l'histogramme jusqu'à n'obtenir qu'une seule colonne pour chaque pic. Cependant, cette méthode, bien que simple dans sa mise en œuvre, implique d'intégrer plus de bruit de fond dans le compte associé à chaque pic.

Une méthode précédemment exploitée pour le traitement des données consistait à tracer l'histogramme de l'histogramme, se présentant alors comme deux forêts de pics : l'une correspondant au bruit de fond, l'autre aux pics secondaires. Le tracé de l'intégrale de ce nouvel histogramme peut alors être ajusté par une sigmoïde, dont les paramètres nous donnent la hauteur et la largeur moyenne des pics secondaires. La hauteur du pic central étant, pour sa part, directement relevé sur l'histogramme initial.

---

11. Par précaution, nous considérerons que 2 est la valeur seuil à partir de laquelle nous pouvons dire que des paires sont effectivement générées. Un CAR légèrement supérieur à 1 peut en effet n'être dû qu'à des fluctuations statistiques dans les pics de l'histogramme.



Devant la complexité quelque peu excessive de cette méthode, une approche plus directe fut développée : chaque pic de l'histogramme obtenu à partir des données brutes est ajusté par une gaussienne<sup>12</sup>. Les paramètres de l'ajustement (hauteurs et largeurs) permettent de déterminer la valeur de l'intégrale, donnant le nombre de compte de corrélations associées au pic. Dans tout nos traitements, le nombre de corrélations mesurées dans le pic central ou leur moyenne dans les pics secondaires sont normalisés par la durée de mesure. Le nombre de coïncidences dans le pic central ainsi normalisé nous donne, en première approximation, le nombre de paires détectées par seconde. Nous noterons que dans les cas de faibles taux de détections, cette approximation n'est plus valide, et nous nous fierons plutôt au CAR pour évaluer la présence ou non de paires.

D'une part en répartissant ces ajustements toutes les 12.5 ns (soit l'écart entre deux pics) nous parvenons à ne prendre en compte qu'un minimum de bruit de fond. D'autre part l'usage de gaussiennes permet de lisser le profil discontinu des pics, qui ne s'étalent souvent que sur quelques points de l'histogramme, pouvant varier rapidement de l'un à l'autre<sup>13</sup>.

Pour opérer ces ajustements, nous traçons l'histogramme des corrélations directement à partir des mesures brutes pour des délais allant de  $-300$  à  $+300$  ns. Aussi, la largeur des colonnes, ou *binwidth*, est un paramètre que nous sommes libres d'ajuster (sans toutefois le faire passer sous la barre des 65 ps). Il détermine le nombre de colonnes (puisque le produit de ce nombre par le *binwidth* doit être égal à l'étendue de la plage de délais, soit 600 ns), et donc le nombre de points sur lesquels nos ajustements gaussiens seront faits.

La détermination de la valeur optimale pour le *binwidth* consiste en un compromis entre un nombre suffisant de points dans l'histogramme pour opérer nos ajustements, et un nombre trop grand qui étalerait excessivement les corrélations d'un pic et risquerait de faire échouer les ajustements<sup>14</sup>. Après étude de ce paramètre, nous avons fixé pour tout nos traitements un *binwidth* optimal de 0.3 ns, ce qui implique de disposer de 2000 points dans l'histogramme.

L'ajustement gaussien de nos pics de corrélations nous donne au final accès au nombre de coïncidences dans le pic central et au nombre moyen de corrélations dans les pics secondaires de l'histogramme. En considérant que ces derniers caractérisent le bruit présent dans le pic central<sup>15</sup>, nous pouvons alors calculer le CAR par (9.3).

#### 9.2.4 Évolution du CAR vis-à-vis de la puissance dans la fibre

Comme mentionné au début de cette section, puisque la génération de paires est le seul phénomène dont l'amplitude croît quadratiquement avec la puissance de pompe, un premier réflexe pour améliorer le ratio signal à bruit serait d'augmenter cette puissance. Si une telle manœuvre résulterait en une augmentation effective du taux de génération de paires, il n'induirait pas nécessairement une amélioration de la qualité de la source, au sens d'un CAR plus grand. Pour comprendre ce phénomène, il nous est nécessaire de revenir sur le détail de la composition de nos compte de photons.

12. Les ajustements s'espacent de 12.5 ns pour se centrer sur la position des pics, et s'effectuent sur 8 ns de large.

13. Dans une telle situation il peut devenir difficile de déterminer si un point de faible amplitude en bord d'un pic en fait partie, ou au contraire provient du bruit de fond. L'ajustement par une fonction continue présente l'avantage de se rapprocher de la forme réelle d'un pic, i.e. tel qu'il se présenterait si nous disposions d'une résolution infinie sur les délais des corrélations.

14. En réduisant le nombre d'échantillon par colonnes, le niveau de chacune devient alors plus sensible au bruit et aux fluctuations statistiques.

15. Comme nous l'avons vu en sous-section 9.2.2, cette affirmation n'est pas vraie dans l'absolu du fait de la présence de photons désappariés mais reste une très bonne approximation.

Nous déploierons ici un raisonnement similaire à ceux des références [135, 136], en prenant cependant en compte ici que le bruit présent dans le pic central n'est pas strictement identique à celui des pics secondaires. Pour ce faire, nous noterons  $\alpha_s$  et  $\alpha_i$  les efficacités de détection effectives de chaque voie (respectivement égales à 8 et 10% dans notre montage),  $\mu_C$  le taux de paires générées par seconde par la fibre,  $\mu_s$  et  $\mu_i$  les taux de génération de photons provenant de sources de bruits proportionnels à la puissance de pompe (photons Raman et photons de pompe diffusés), et enfin  $d_s$  et  $d_i$  les taux de comptes de photons indépendants de la pompe (photons de l'environnement et *dark count*), respectivement pour les voies signal et idler.

Nous avons alors les taux de comptes  $C_s$  et  $C_i$  sur les voies signal et idler :

$$\begin{aligned} C_s &= \alpha_s \alpha_i \mu_C + \alpha_s (1 - \alpha_i) \mu_C + \alpha_s \mu_s + d_s \\ C_i &= \alpha_s \alpha_i \mu_C + \alpha_i (1 - \alpha_s) \mu_C + \alpha_i \mu_i + d_i \end{aligned}$$

Dans chaque expression, les deux premiers termes correspondent aux photons détectés issus de paires, dans le cas où les deux photons de la paire sont détectés d'une part, et dans le cas d'un photon dépareillé d'autre part.

Dans cet esprit, le nombre de corrélations dans un pic secondaire de l'histogramme est susceptible d'associer deux photons de bruit. En notant  $R_{Sec}$  le taux de corrélations associé à un pic secondaire :

$$\begin{aligned} R_{Sec} &= \frac{1}{51} (\alpha_s (1 - \alpha_i) \mu_C + \alpha_s \mu_s + d_s) (\alpha_i (1 - \alpha_s) \mu_C + \alpha_i \mu_i + d_i) \\ R_{Sec} &= \frac{1}{51} (C_s - \alpha_s \alpha_i \mu_C) (C_i - \alpha_s \alpha_i \mu_C) \end{aligned}$$

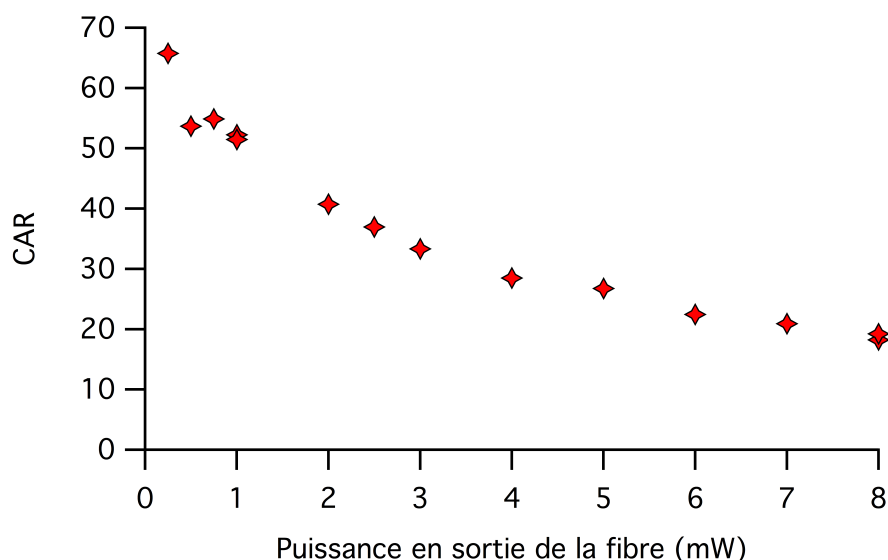
où le facteur  $\frac{1}{51}$  vient ici répartir toutes les corrélations accidentelles sur les 51 pics de l'histogramme. À nouveau, nous faisons ici l'approximation qu'aucune corrélation n'est décomptée entre ces pics, qui reste acceptable pour le raisonnement en terme d'ordre de grandeur que nous souhaitons poser.

Le pic central, pour sa part, a pour taux de corrélations détectées par impulsion :

$$\begin{aligned} R_{Cen} &= \alpha_s \alpha_i \mu_C + \frac{1}{51} ((C_s - \alpha_s \alpha_i \mu_C) (C_i - \alpha_s \alpha_i \mu_C) - \alpha_s (1 - \alpha_i) \mu_C \alpha_i (1 - \alpha_s) \mu_C) \\ R_{Cen} &= \alpha_s \alpha_i \mu_C + R_{Sec} - \frac{1}{51} (\alpha_s (1 - \alpha_i) \alpha_i (1 - \alpha_s) \mu_C^2) \end{aligned}$$

Ce qui revient, par rapport aux pics secondaires, à rajouter le compte de vraies coïncidences et retirer les associations de photons de paires dépareillés, qui ne peuvent pas être décomptés dans le pic central. En effet, s'ils s'y trouvaient le décalage entre la détection des deux photons serait nul ce qui, dans le cas où une paire au maximum peut être générée par impulsion, est impossible.

Nous avons alors, par définition, le *Coincidence-to-Accidental Ratio* :  $CAR = \frac{R_{Cen}}{R_{Sec}}$ . Or, en dénotant les dépendances à la puissance de pompe  $P$  de chaque terme (i.e.  $\mu_C \propto P^2$ ,  $\mu_j \propto P$  et  $d_j$  indépendant de  $P$ , avec  $j \in \{s, i\}$ ) nous remarquons que  $R_{Sec} \propto P^4$  et  $R_{Cen} \propto P^3$ . Autrement dit, le taux de corrélations dans les pics secondaires évolue comme la puissance quatre de la puissance de pompe, tandis que les comptes dans le pic central augmentent comme le cube de cette puissance. Par conséquent, l'augmentation de la puissance de pompe, au lieu de l'augmenter, *diminue* le CAR. Nous illustrons cet effet dans la figure 9.3 qui retrace des mesures du CAR en augmentant la puissance de pompe injectée dans la fibre microstructurée.



**Figure 9.3** – Mesures de l'évolution du CAR avec la puissance de pompe présente dans la fibre (mesurée en sortie). Les temps utilisés pour accumuler suffisamment de statistiques s'étale de une à 30 minutes pour la plus faible puissance.

Au vu de cette tendance à la dégradation du rapport signal à bruit, nous travaillerons à une puissance faible pour limiter cette diminution du CAR, mais suffisamment grande pour que le temps nécessaire à l'accumulation de statistiques de mesures ne soit pas trop long<sup>16</sup>. Ainsi, en choisissant une puissance injectée dans la fibre de l'ordre de 10 mW (3 ~ 4 mW effectivement dans la fibre en tenant compte du coefficient de couplage), nos mesures peuvent s'étaler sur quelques minutes à plusieurs heures selon le taux de génération de paires pour les fréquences auxquelles sont réglés les filtres.

Enfin nous soulignons que cette diminution du CAR lorsque la puissance augmente découle directement de la présence de photons désappariés et donc des pertes de notre montage. Une réduction de ces pertes permettrait, pour un même CAR, de se placer à plus haute puissance et donc de disposer d'un taux de génération de paires plus important.

La nature de nos mesures et leur traitement ayant à présent été définis, nous présenterons dans le chapitre suivant nos principaux résultats expérimentaux, pour les confronter aux prédictions théoriques.

16. Nous noterons par ailleurs qu'à très faible puissance, le bruit Raman devient de l'ordre de grandeur des *dark count* : les pics secondaires de l'histogramme sont alors indifférentiables du fond continu. En diminuant la puissance, le CAR finit donc par stagner puis chuter puisque le bruit de fond constant ne décroît pas avec la puissance injectée.

## Chapitre 10

# Balayage du spectre d'émission de la fibre

À partir des mesures préliminaires (cf. sous-section 2.1.1) de la courbe de dispersion de notre fibre nous pouvons, pour une longueur d'onde de pompe donnée, prédire par respect de la condition de conservation de l'énergie et de l'accord de phase, les longueurs d'onde d'émission attendues des paires. Ainsi, pour une pompe à 885.55 nm, qui est notre longueur d'onde de travail usuelle, nous nous attendons à ce que les photons signal soient émis à 916.6 nm, et ceux idler à 856.5 nm.

Toutefois, il est bon de se souvenir que les mesures préliminaires, initialement entachées d'une imprécision de quelques nanomètres, ont été recalées *a posteriori* des mesures présentées ci-après. En pratique, une première phase de recherche des pics d'émission des paires fut nécessaire : en partant des positions initialement estimées pour signal et idler, nous avons balayé méticuleusement le spectre, par pas de 0.5 nm pour ne pas manquer le pic<sup>1</sup>, jusqu'à détecter un pic de coïncidence indiquant l'émission de paires.

D'autre part, l'indice de la fibre différant selon que l'on se place sur un axe neutre ou l'autre, la position du pic d'émission n'est pas nécessairement la même pour toutes les configurations de polarisation. Un tel balayage fut donc effectué pour les quatre configurations de polarisation possibles entre la pompe et les paires. Nous ne présenterons dans la suite que les résultats les plus concluants en terme de CAR, qui correspondent à une unique configuration croisée (pompe et paires ont des états de polarisation perpendiculaires entre eux).

Dans toutes nos acquisitions, nous relevons les taux de comptes de photons sur chaque détecteur, les mesures brutes de corrélations temporelles entre ces comptes et bien sûr dans quelle configuration de polarisation nous nous plaçons ainsi que la durée totale de l'acquisition. Mais nous mesurons également régulièrement durant une acquisition la température de la fibre, la puissance à sa sortie, le spectre et la durée des impulsions de pompe. Ce suivi nous permet de nous assurer que les points de données que nous accumulons correspondent bien aux mêmes conditions expérimentales. À toutes fins utiles, nous rappelons en effet que la position du pic d'émission est fortement dépendant de la température de la fibre et dépend naturellement de la fréquence centrale de pompe. La proportion de paires mesurées à un duo de fréquences signal et idler donné peut pour sa part changer selon la durée des impulsions<sup>2</sup> (directement reliée à leur largeur spectrale dans notre cas).

---

1. Nous rappelons que la largeur typique du pic d'émission de paires dans une fibre uniforme de même longueur que la nôtre ( $L = 1.05$  m) est de l'ordre du nanomètre (cf. section 7.4).

2. Pour rappel, chaque point de mesure correspond à l'intégration de la JSI sur un carré (cf. figure 7.3). Or le terme  $\mathcal{G}$  de la JSI, diagonal dans l'espace spectral joint, voit sa largeur dépendre de la durée d'impulsion. La proportion de densité de probabilité intégrée dans un carré dépend donc de cette durée.

---

Une fois le pic d'émission localisé de manière approximative, un balayage plus fin de ce dernier, grâce à la finesse de nos filtres, peut être fait pour retracer expérimentalement le spectre d'émission des paires dans notre fibre.

Toutefois, la forte sensibilité de cette émission à l'environnement (la température notamment), fait qu'il s'avère difficile de s'assurer, malgré tous les paramètres que nous surveillons, que chaque point de mesure soit pris dans les mêmes conditions. En effet, le temps nécessaire pour régler et optimiser nos deux filtres (cf. section 8.2) à un duo de fréquences donnée s'avère long (un tel réglage demande en moyenne une à deux heures), et à celui-ci doit s'ajouter le temps d'acquisition de nos données (pouvant prendre plusieurs dizaines de minutes), pour nous permettre d'obtenir au final un point du spectre.

Or nous souhaitons balayer ce spectre avec un écart de 0.1 nm entre chaque points, sur une plage de plusieurs nanomètres. En suivant la procédure habituelle de réglage des filtres, une telle entreprise impliquerait que le premier et le dernier point du spectre seraient pris à plusieurs semaines d'intervalle <sup>3</sup>.

Pour parer à ce problème et rapprocher, autant que faire se peut, dans le temps les points de mesures, nous tirerons parti d'une astuce expérimentale : par dérèglage horizontal des réseaux précédant les fibres de collection sur les voies signal et idler, nous pouvons décaler la fréquence centrale de chaque filtre. En associant préalablement les graduations de la vis de réglage à la proportion de décalage nanométrique associé, nous pouvons ainsi, à partir d'un réglage initial des filtres, balayer rapidement les fréquences avoisinantes (tant pour signal que pour idler). Le gain de temps est considérable : une dizaine de points peuvent être pris en une journée, là où il aurait fallu près d'une semaine par la méthode habituelle.

Toutefois, le décalage des fréquences centrales des filtres par les réseaux seuls est loin d'être parfait : en s'éloignant de leurs positions initiales, pour lesquelles les injections dans les fibres de collection ont été optimisées, les transmissions chutent <sup>4</sup>. Or comme nous l'avons vu, les pertes dans notre montage sont source de photons dépareillés et induisent une dégradation du CAR.

Pour chaque série de mesure, la transmission dans les fibres de collection sera mesurée directement lors du premier réglage des filtres, réalisé en usant de la méthode décrite en section 8.2 (pour chaque voie, usage d'un faisceau de référence à partir duquel sont ajustées les positions et orientations du miroir et réseau). Puis pour chaque autre point (obtenus en dé-réglant les réseaux), elle sera déduite de cette mesure initiale en suivant la chute du niveau de compte de photons <sup>5</sup>. Nous ferons en sorte de nous limiter à des dérèglages des réseaux qui, au maximum, divisent la transmission dans les fibres de collection par deux.

Nous sommes ainsi parvenu à retracer expérimentalement le taux de génération de paires en fonction des longueurs d'onde centrales des filtres (les deux étant corrélées en suivant la conservation de l'énergie), donné en figure 10.1. Ce taux a été normalisé par la transmission globale des voies signal et idler (8 et 10%, respectivement), de sorte que nous retraçons bien le taux de génération intrinsèque à la fibre, toutes pertes propres au montage mises à part.

L'ensemble des points s'étalent sur six séries de mesures, espacées au maximum d'une dizaine de jours.

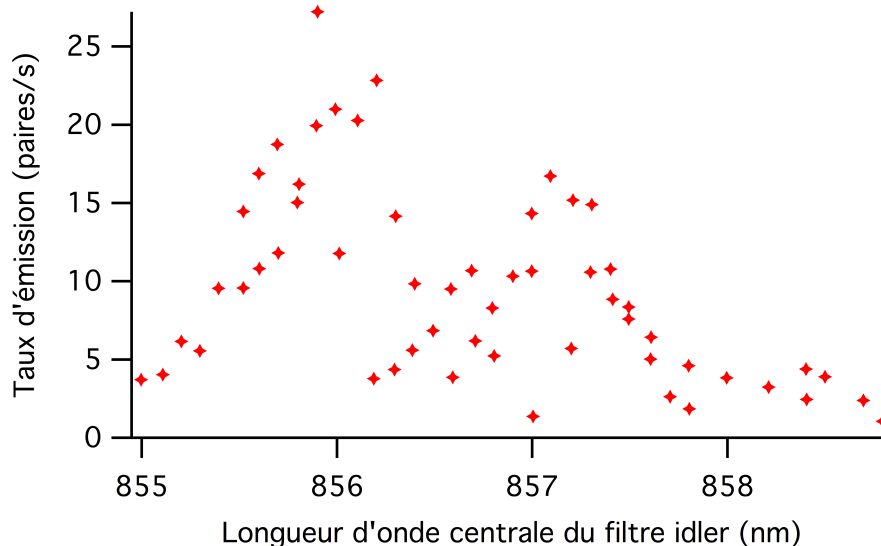
---

3. En prenant en compte le temps de stabilisation du laser de pompe à chaque démarrage, ainsi que le réglage de la fréquence de pompe et de l'injection dans la fibre, qui ont tendance à fluctuer dans le temps.

4. Si le réseau précédant chaque fibre de collection était le seul de la voie, en le tournant, chaque fréquence se verrait injectée avec le même angle et nous n'opérerions qu'une translation spectrale du filtre. Or dans notre montage (cf. figure 8.1), les faisceaux incidents sur ces réseaux ont été préalablement diffractés par le réseau principal, de sorte que chaque fréquence arrive sur ce dernier réseau avec un angle légèrement différent. Plus nous nous éloignons de la fréquence de réglage initiale d'un filtre, plus l'angle d'injection dans la fibre de collection augmente, ce qui induit une transmission réduite.

5. Les fréquences restant proche, en première approximation nous pouvons considérer le niveau de bruit Raman (qui domine les compte) comme constant. La transmission cependant, change d'un point à l'autre. L'évolution du niveau de compte calque donc celle de la transmission.

La pompe utilisée a pour fréquence centrale  $\lambda_{p0} = 885.55 \pm 0.03$  nm, avec une largeur de spectre à mi-hauteur de  $0.4 \pm 0.06$  nm et une durée d'impulsion  $T_0 = 2.5 \pm 0.1$  ps. La pompe et les paires de photons détectées sont en configuration de polarisation croisée<sup>6</sup>. Enfin, la puissance moyenne en sortie de fibre et la température, deux paramètres dont la stabilité entre les points est primordiale, sont respectivement de  $P_{moy} = 3.4 \pm 0.2$  mW et  $T = 23.0 \pm 0.2$  °C.



**Figure 10.1** – Spectre d'émission de paires de photon de notre fibre, mesuré pour  $\lambda_{p0} = 885.55$  nm. Le spectre est tracé en fonction de la longueur d'onde centrale du filtre idler, son homologue le suivant par conservation de l'énergie. Le taux de paires émises par seconde par la fibre est déduit du taux mesuré et de la transmission totale sur chaque voie de détection (en tenant compte des efficacités quantiques des détecteurs à nos longueurs d'onde).

Le spectre expérimental en figure 10.1 est à comparer directement avec la forme attendue pour une fibre uniforme représentée en figure 7.4. Nous pouvons directement noter une différence radicale entre le spectre prévu et celui mesuré : la plage sur laquelle des paires sont émises s'étale sur plusieurs nanomètres, tandis que nous n'observons pas un unique pic d'émission. Par ailleurs, le niveau global du taux d'émission est bien inférieur à celui attendu au pic pour une fibre uniforme : au lieu de plusieurs centaines de paires émises par seconde nous en obtenons au plus une vingtaine.

Pour expliquer un tel étalement, plusieurs hypothèses peuvent être émises.

La première serait de considérer une erreur dans le positionnement des filtres. Un écart par rapport aux longueurs d'ondes centrales  $\lambda_{s0}$  et  $\lambda_{i0}$  visées peut nous faire sortir du pic d'émission, en manquant de respecter à la fois la conservation de l'énergie et l'accord de phase. Nous pouvons donc détecter moins (ou pas du tout) de paires pourtant émises à un duo  $\{\lambda_{s0}, \lambda_{i0}\}$  donné, mais pas davantage que l'émission réelle (en tout cas pas sur autant de points, si espacés spectralement). Ceci n'explique donc pas un tel étalement du spectre, où des paires sont relevées sur une plage de plusieurs nanomètres.

Les fluctuations de la durée d'impulsion (et donc de la largeur spectrale) n'influent que sur le niveau du taux de paires mesuré (cf. sous-section 7.4.1). Elles ne permettent pas d'expliquer la présence de paires hors de la zone spectrale attendue, et sont également trop faibles pour être la cause des variations de taux d'émission observées. Il en va de même pour la puissance de pompe dans la fibre.

6. Le lecteur attentif pourra relever que puisque notre fibre est biréfringente, les courbes d'indices (et donc  $\beta(\omega)$ ) diffèrent légèrement entre ses deux axes neutres. Ne disposant de mesures de la dispersion de la fibre que pour un axe neutre, nous considérons en première approximation un même  $\beta(\omega)$  pour la pompe et les paires. Nous rappelons par ailleurs (cf. sous-section 2.1.1) que la courbe de la constante de propagation a été recalée *a posteriori* d'après nos résultats expérimentaux, du fait d'une incertitude inhérente à la mesure initiale de la courbe de dispersion.

---

Une autre idée pour expliquer l'élargissement apparent serait de l'imputer à une variation de la longueur d'onde centrale de pompe ou de la température, tous deux susceptibles de modifier la condition d'accord de phase. Or  $\lambda_{p0}$  reste entre toutes nos mesures extrêmement stable, tandis les fluctuations de  $\pm 0.1^\circ\text{C}$  relevées ne pourraient rendre compte, d'après ce que nous avons vu en sous-section 7.4.2, que d'un déplacement de  $\pm 0.5$  nm du spectre d'émission (côté idler).

En définitive, peu d'options nous restent pour expliquer ce spectre. À vrai dire une seule. Pour l'exposer, nous rappelons que la JSI se présente comme le produit de trois termes :

$$\text{JSI}(\omega, \omega') = |\text{JSA}(\omega, \omega')|^2 = \mathcal{A}(\omega, \omega') \times \mathcal{G}(\omega, \omega') \times \mathcal{F}(\omega, \omega')$$

où  $\mathcal{A}$  constitue pour l'essentiel un préfacteur variant très peu dans l'espace spectral joint. Le terme  $\mathcal{G}$ , pour sa part, dépend entièrement des impulsions de pompe dont tous les paramètres sont relevés durant nos mesures. Comme nous l'avons vu, ces paramètres varient peu, et  $\mathcal{G}$  reste globalement inchangé. Ne reste alors que le terme  $\mathcal{F}$ , dont nous rappelons la forme générale :

$$\mathcal{F}(\omega, \omega') = |\mathfrak{f}(\omega, \omega')|^2 = \left| \frac{1}{L} \int_{x=0}^L e^{i \Delta k x} dx \right|^2$$

avec  $L$  la longueur de la fibre et  $\Delta k$  le désaccord de phase. Nous pouvons affirmer sans risque que  $L$  ne change pas. La différence entre le spectre prédit par notre modèle théorique et celui effectivement mesuré expérimentalement doit donc nécessairement provenir d'un changement de  $\Delta k$ .

Ce changement ne peut se faire de manière uniforme dans toute la fibre, auquel cas nous retomberions dans le modèle uniforme impliquant un pic d'émission unique. Le désaccord de phase  $\Delta k$  est donc *non uniforme* dans la fibre.

Or, comme nous l'avons introduit en section 2.2, un décalage de l'accord de phase peut découler d'un changement du pas de la structure du cristal photonique de la fibre. Les différences entre spectre expérimental et théorique pourraient alors s'expliquer par une variabilité de la dimension transverse de la fibre le long de celle-ci.

Dans la partie suivante, nous étendrons notre modèle théorique pour prendre en compte de telles non-uniformités des fibres. Nous en étudierons les conséquences sur le spectre d'émission pour enfin conclure quant à l'origine de la structure de spectre observée expérimentalement.

Quatrième partie

**Non-uniformité du guide**





Jusqu'à présent notre modèle théorique a été développé en supposant le désaccord de phase  $\Delta k$  comme constant dans toute la fibre. Or les fibres réelles présentent un certain niveau de non-uniformité provenant directement des imperfections dans leur fabrication : une fibre parfaitement uniforme suppose un tirage à vitesse constante, un chauffage homogène et un contrôle fin de la pression dans les tubes de pré-formes en silice [137]. Ces conditions idéales ne pouvant qu'être approchées en pratique, il subsistera toujours des fluctuations dans la forme de la fibre : dans le plan transverse, la structure peut varier de manière homothétique<sup>7</sup> le long de la fibre. Or les fibres à cristaux photoniques voient leurs propriétés optiques dépendre fortement de leurs structures internes, à la fois complexes et constituées d'éléments de petite dimension. Conséquemment, ce type de fibre se montre bien plus sensible aux imperfections de fabrication que les fibres conventionnelles.

L'hypothèse de l'uniformité implique implicitement de considérer les fluctuations de taille transverse trop faibles pour induire un effet notable sur les mesures. Toutefois nous écartons cette hypothèse dans cette partie afin d'évaluer l'effet de la non-uniformité, et plus précisément l'ampleur des fluctuations du diamètre de la fibre à partir de laquelle un effet notable ressort sur le spectre attendu.

Nous notons que l'étude de l'influence de la non-uniformité est également menée par d'autres groupes pour le mélange à quatre ondes dans les fibres conventionnelles [17] ou dans les cristaux non linéaires [138]. Cependant ces travaux, concomitant à la présente thèse, ne considèrent pas le cas des fibres à cristal photoniques et se concentrent sur des approches purement numériques du problème. Or nous montrerons comment une solution analytique simple pour une non-uniformité linéaire permet, d'une part d'expliquer les principaux effets de la non-uniformité des fibres, d'autre part de mettre en évidence un effet inattendu sur le spectre d'émission : sa non-réciprocité selon le sens d'émission.

Nous avons exposé dans ce cadre en section 2.2 comment une variation  $\Delta\omega_{z_{DW}}$  de la position du zéro de dispersion, amène à un désaccord de phase décalé vis-à-vis d'une référence (2.10) :

$$\Delta k_S = \Delta k_{ref} - \Delta\omega_{z_{DW}} d\Delta k \quad (\text{IV.1})$$

Comme nous l'avons vu en sous-section 2.3.2, dans le cas d'une fibre non uniforme,  $\Delta\omega_{z_{DW}}$  est proportionnel à la variation de la taille transverse de la fibre. Si cette dernière change le long du guide, le  $\Delta\omega_{z_{DW}}$  et donc le désaccord vont dépendre de la position  $x$ . Dès lors, nous avons le terme  $\mathcal{F}$  de la JSI associé à l'accord de phase :

$$\mathcal{F}(\omega, \omega') = |\mathfrak{f}(\omega, \omega')|^2 = \left| \frac{1}{L} \int_{x=0}^L e^{i \Delta k_S(x) x} dx \right|^2 \quad (\text{IV.2})$$

où  $\Delta k_S(x)$  constitue le désaccord de phase, en une position  $x$ , décalé par rapport à celui d'une fibre uniforme de référence, qui correspondra ici aux caractéristiques mesurées initialement pour notre fibre (cf. sous-section 2.1.1).

De manière générale, l'équation (IV.2) n'admet aucune solution analytique. Dans le cas spécifique d'une fibre parfaitement uniforme, on obtient la forme de sinus cardinal (cf. sous-section 7.3.2). La suite logique pour se rapprocher des fibres réelles, non uniformes, est de considérer le cas le plus simple de non-uniformité : une variation purement linéaire du diamètre de la fibre entre ses deux extrémités. Nous verrons dans le chapitre 11 qu'une solution analytique, plus complexe, peut là aussi être obtenue.

---

7. Lors de la fabrication de la fibre, pour des pré-formes uniformes, la conservation de la matière lors du tirage implique que toute variation des dimensions transverses (pas de la structure, diamètre de fibre) se fait de manière homothétique.

---

Ce premier approfondissement de notre modèle nous permettra déjà de montrer comment le spectre d'émission de paires peut se décaler et se déformer sous l'effet d'interférences. Par ailleurs nous démontrerons aussi que la non-uniformité de la fibre induit une non-réciprocité d'émission, i.e. un spectre d'émission différent, selon le sens de propagation dans la fibre.

Or, l'une des perspectives d'évolution de notre montage passe par l'intrication en polarisation des paires par une architecture de type Sagnac, qui repose notamment sur l'indistinguabilité du sens d'émission. Nous présenterons au chapitre 12 l'architecture en boucle Sagnac et pourquoi la non-réciprocité lui est préjudiciable.

Enfin, nous pousserons plus loin notre modèle au chapitre 13 afin de parvenir à une description la plus proche possible des fibres réelles. Nous y exploiterons les formes analytiques établies (uniforme et linéaire) avec une approche de découpage par morceaux d'une fibre.

D'une part, ceci nous permettra de simuler les non-uniformités aléatoires inhérentes à la fabrication de fibres avec des paramètres réalistes pour ces fluctuations dans les fibres à cristal photonique. Les spectres d'émission obtenus seront comparés à nos mesures expérimentales pour déterminer si l'hypothèse d'uniformité peut être tenue pour valide pour ce type de fibres.

D'autre part, ce type de découpage nous aidera à montrer comment le tirage de fibres *volontairement* non uniformes et de profils symétriques constitue une solution possible pour retrouver une réciprocité d'émission.

# Chapitre 11

## Cas d'une fibre à non-uniformité linéaire

Après une fibre uniforme de profil transverse constant, la première forme pour étudier la non uniformité de fibres consiste en une pente linéaire entre chaque bout. Cette première approche, prodiguant une forme simple du désaccord de phase, nous permettra dans un premier temps d'établir en section 11.1 un modèle analytique pour la JSI d'une fibre à non uniformité linéaire. Nous pourrons, à partir de là, étudier en section 11.2 les principaux effets de la non uniformité sur le spectre d'émission de paires.

Par ailleurs, il est à noter qu'une telle forme, loin d'être juste une approche simplifiée de la réalité, correspond à toute une famille de fibre sciemment fabriquées de façon à présenter, localement ou non, une évolution linéaire en taille. Usuellement appelée *taper* dans la littérature [128], celles-ci trouvent leur usage, entre autres, pour la génération de supercontinuum [139] ou la réalisation de nanofibres [140].

De surcroît, notre modèle reste très général et peut s'appliquer à d'autres types de sources que des fibres. Dès lors, la non-uniformité linéaire peut aussi se rapporter à des cristaux de type *chirped* PPLN [141, 142, 143].

### 11.1 Modèle analytique d'une fibre de profil linéaire

Pour présenter la solution analytique au cas linéaire, nous étudierons le cas d'un désaccord de phase variant linéairement entre l'entrée et la sortie de la fibre. Nous rappelons néanmoins que le désaccord de phase suit, au fil de la fibre, la même évolution que le décalage de la longueur d'onde d'onde, lui-même suivant les changements de diamètre de la fibre (cf. sous-section 2.3.2). Un désaccord de phase suivant une évolution linéaire correspond donc bien à une variation linéaire du diamètre.

Soit le désaccord de phase en entrée de la fibre  $\Delta k_0 \equiv \Delta k_S(x=0)$  (à ne pas confondre avec le  $\Delta k_0$  qui a pu être introduit lors du développement de Taylor de  $\beta$ ), qui peut être égal à celui de référence ( $\Delta k_S(x=0) = \Delta k_{ref}$ ) ou déjà décalé par rapport à celui-ci. De même à la sortie de la fibre de longueur  $L$  nous associons le désaccord  $\Delta k_L \equiv \Delta k_S(x=L)$ . L'évolution du désaccord de phase entre ces deux points se fait de manière linéaire :

$$\Delta k_S(x) = \Delta k_0 + \frac{\Delta k_L - \Delta k_0}{L} x \quad (11.1)$$

L'équation (IV.2) devient alors dans le cas linéaire :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = |f_{lin}(\omega, \omega')|^2 = \left| \frac{1}{L} \int_{x=0}^L e^{i \Delta k_0 x + i \frac{\Delta k_L - \Delta k_0}{L} x^2} dx \right|^2 \quad (11.2)$$

La solution à une telle intégrale est obtenue par la primitive de l'exponentielle [144, équation (7.4.32)] :

$$\int e^{-(ax^2+2bx)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{a} x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \quad (11.3)$$

Pour  $a \neq 0$  et avec Erf la fonction erreur (*Error function*) définie par :

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt \quad (11.4)$$

Dans notre cas, par identification nous avons  $a = -i \frac{\Delta k_L - \Delta k_0}{L}$  et  $b = -i \frac{\Delta k_0}{2}$ . Dans ces conditions, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{lin}(\omega, \omega') &= \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\pi L}{-i(\Delta k_L - \Delta k_0)}} e^{\frac{b^2}{a}} \\ &\times \left( \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{-iL} (2\Delta k_L - \Delta k_0)}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}}\right) - \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{-iL} \Delta k_0}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}}\right) \right) \end{aligned} \quad (11.5)$$

où nous remarquerons que :

$$\frac{b^2}{a} = -i \frac{\Delta k_0^2 L}{4(\Delta k_L - \Delta k_0)}$$

Donc l'argument du terme exponentielle de  $f_{lin}$  est un imaginaire pur et disparaîtra lors de la mise au module carré dans  $\mathcal{F}_{lin}$ . En effet, on obtient pour ce terme de la JSI :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \frac{\pi}{4L|\Delta k_L - \Delta k_0|} \left| \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{-iL} (2\Delta k_L - \Delta k_0)}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}}\right) - \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{-iL} \Delta k_0}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}}\right) \right|^2 \quad (11.6)$$

Il est important de noter que le passage à la primitive Erf tel qu'indiqué en (11.3) n'est valable que pour  $a \neq 0$ , c'est-à-dire  $\Delta k_L - \Delta k_0 \neq 0$ . De fait, la formule (11.6) n'est valide que pour une non-uniformité non nulle et ne pourra donc pas servir à décrire une fibre parfaitement uniforme (même s'il est possible de s'en approcher en faisant tendre la différence  $\Delta k_L - \Delta k_0$  vers 0).

D'autre part, un point intéressant à soulever est que (11.6) n'est pas symétrique par transposition de  $\Delta k_L$  et  $\Delta k_0$ . Cette absence de symétrie implique la non-réciprocité de la génération des paires de photons selon que la pompe soit injectée dans un sens ou dans l'autre de la fibre. Ce point sera plus spécifiquement étudié dans la sous-section 11.2.3.

Avant cela, cependant, nous utiliserons le modèle linéaire pour mettre en évidence les principaux effets des non-uniformités sur le spectre de génération de paires, tels que l'affaiblissement du maximum d'émission ou l'élargissement spectral.

## 11.2 Effets de la non-uniformité des fibres

### 11.2.1 Diminution du maximum d'émission

Dans une fibre uniforme, aux longueurs d'onde respectant la conservation de l'énergie et l'accord de phase ( $\Delta k = 0$ ), nous avons  $\mathcal{F}(\omega, \omega') = 1$  et la JSI atteint sa valeur maximum. Un des premiers effets de la non-uniformité sera de diminuer cette valeur maximum.

Pour s'en convaincre, nous reformulons l'équation (11.6) :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \frac{\pi}{4L|\Theta|} \left| \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{-iL} (\Delta k_L + \Theta)}{2\sqrt{\Theta}}\right) - \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{-iL} (\Delta k_L - \Theta)}{2\sqrt{\Theta}}\right) \right|^2$$

Avec  $\Theta = \Delta k_L - \Delta k_0$  la différence de désaccord de phase entre l'entrée et la sortie de la fibre.

Pour mettre en avant l'effet de diminution du maximum, nous restons proche de la situation d'une fibre uniforme et d'accord de phase. Nous posons alors  $\Delta k_L = 0$ , ce qui nous permet de simplifier  $\mathcal{F}_{lin}$  en dénotant que l'*Error Function* est impaire (i.e.  $\text{Erf}(-x) = -\text{Erf}(x)$ ) :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \frac{\pi}{4L|\Theta|} \left| \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL\Theta}}{2\sqrt{\Theta}} \right) + \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL\Theta}}{2\sqrt{\Theta}} \right) \right|^2 = \frac{\pi}{L|\Theta|} \left| \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL\Theta}}{2} \right) \right|^2$$

Puisque nous sommes proche de l'uniformité nous avons  $\Delta k_0 \simeq \Delta k_L$ , soit  $\Theta$  proche de 0. On peut alors utiliser le développement de Taylor :

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right)$$

Ce qui nous donne, en se limitant au cinquième ordre<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') &\simeq \frac{4}{L|\Theta|} \left| \frac{\sqrt{-iL\Theta}}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{-iL\Theta}}{2} \right)^3 + \frac{1}{10} \left( \frac{\sqrt{-iL\Theta}}{2} \right)^5 \right|^2 \\ &\simeq \frac{4}{L|\Theta|} \left| \frac{\sqrt{-iL\Theta}}{2} \left( 1 + \frac{iL\Theta}{12} - \frac{(L\Theta)^2}{160} \right) \right|^2 \\ &\simeq \left| \left( 1 - \frac{(L\Theta)^2}{160} \right) + i \frac{L\Theta}{12} \right|^2 \\ \mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') &\simeq 1 - \frac{(L\Theta)^2}{180} \end{aligned}$$

En ne retenant que jusqu'au second ordre en  $L\Theta$ . En se rappelant que nous manipulons des accords de phase décalés par rapport à une référence (IV.1) :

$$\begin{aligned} \Theta &= \Delta k_L - \Delta k_0 \\ &= -\Delta\omega_{ZDW_L} d\Delta k + \Delta\omega_{ZDW_0} d\Delta k \\ \Theta &\simeq \left( \Delta\omega_{ZDW_0} - \Delta\omega_{ZDW_L} \right) \left( 2\beta_{p_0}^{(1)} - \beta_{s_0}^{(1)} - \beta_{i_0}^{(1)} \right) \end{aligned}$$

En se limitant au premier ordre en  $\omega_{s_0}$  et  $\omega_{i_0}$  dans  $d\Delta k$  (2.10).

Au final, et dans une première approximation :

$$\mathcal{F}_{lin} \simeq 1 - \left( \Delta\omega_{ZDW_0} - \Delta\omega_{ZDW_L} \right)^2 \frac{L^2}{180} \left( 2\beta_{p_0}^{(1)} - \beta_{s_0}^{(1)} - \beta_{i_0}^{(1)} \right)^2$$

Ainsi la non-uniformité de la fibre, quantifiée par la différence  $\Delta\omega_{ZDW_0} - \Delta\omega_{ZDW_L}$ , va induire une diminution de la valeur maximale du terme  $\mathcal{F}$  et donc de la JSI. Plus cette différence sera forte, i.e. plus la pente linéaire dans le profil de la fibre sera importante, plus le maximum d'émission sera réduit. On peut cependant noter que l'influence de la non-uniformité est pondérée par la différence des indices de groupe<sup>2</sup> pris aux longueurs d'onde de pompe, signal et idler. Il est donc possible, en minimisant cette différence, de limiter la dégradation de l'émission de la source du fait de non-uniformités.

1. Le premier ordre nous ramène au cas d'une fibre parfaitement uniforme, tandis que le troisième ordre ne suffit pas à décrire l'effet de la non-uniformité : le fait de manipuler des valeurs complexes dans un module carré implique une contribution du terme de cinquième ordre au terme en  $(L\Theta)^2$  final, comme on peut le voir dans la démonstration.

2. On rappelle que :  $\beta^{(1)}(\omega) = \frac{n_g(\omega)}{c} = \frac{1}{v_g(\omega)}$

Dans notre cas la différence des  $\beta^{(1)}$  est de l'ordre de  $10^{-13}$  s.m<sup>-1</sup>, la fibre longue d'un mètre environ, et  $\omega_{z_{DW}}$  de l'ordre de  $10^{15}$  s<sup>-1</sup>. Nous pouvons donc calculer que pour réduire de 10% le maximum d'émission, il est nécessaire d'avoir une différence dans la longueur d'onde de dispersion nulle (et dans le diamètre de la fibre) d'approximativement 4% entre l'entrée et la sortie de la fibre.

Ce raisonnement rapide sur le maximum d'émission met déjà en évidence une grande sensibilité à la non-uniformité, mais ne prend cependant pas en compte d'autres effets de l'écart à l'uniformité. En effet, outre la diminution du pic d'émission vis-à-vis du cas uniforme, la non-uniformité implique également un étalement de la plage de longueurs d'onde où des paires sont émises. Nous présenterons dans la suite cet aspect, accompagné de résultats de simulations pour une fibre de non-uniformité linéaire.

### 11.2.2 Élargissement et déformation du spectre d'émission

L'effet d'élargissement spectral est plus difficile à voir dans l'expression de  $\mathcal{F}_{lin}$  mais peut se comprendre par un raisonnement physique simple. Dans une fibre uniforme, le désaccord de phase est le même partout, de sorte qu'à pompe fixée, il n'existe qu'un seul doublet  $\{\omega_{s_0}, \omega_{i_0}\}$  pour lequel l'accord de phase est maximum dans toute la fibre<sup>3</sup>. Au contraire, dans le cas d'une non-uniformité linéaire, le désaccord de phase change le long de la fibre, et le doublet de fréquences respectant l'accord de phase diffère entre deux points. Plus la pente linéaire sera forte, plus nous disposerons d'un large spectre d'émission possible.

Cependant, à longueur de fibre fixée, plus la pente du profil transverse est forte, plus la portion de fibre susceptible de permettre l'accord de phase pour un duo de longueurs d'onde donné est petite<sup>4</sup>. Autrement dit, plus la non-uniformité est forte, moins l'émission d'une paire de fréquences données est probable<sup>5</sup>. Nous pouvons donc nous attendre à ce que l'étalement du spectre d'émission s'accompagne également de son aplatissement.

Nous représentons en figure 11.1 les résultats de simulation du spectre d'émission de notre fibre pour des profils transverses linéaires de pentes différentes. Les désaccords de phase d'entrée et de sortie de fibre sont posés en terme de décalage du zéro de dispersion, en usant de l'expression du désaccord de phase décalé (cf. section 2.2) :  $\Delta k_S = \Delta k_{ref} - \Delta\omega_{z_{DW}} d\Delta k$ .

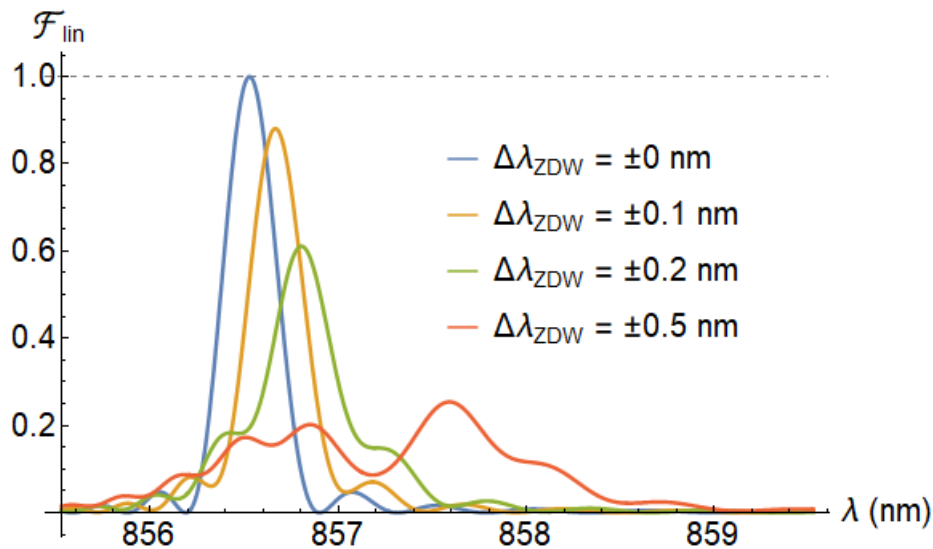
Comme attendu, nous observons que plus la pente linéaire est forte, plus le spectre d'émission a tendance à s'étaler.

Toutefois, nous relevons également que la forme du spectre s'éloigne rapidement de celle usuelle en sinus cardinal du cas uniforme, pour devenir plus chaotique lorsque la non-uniformité se fait plus forte.

3. Nous rappelons qu'il existe une certaine tolérance sur les fréquences d'émission du fait de la largeur spectrale de la pompe.

4. Ce point se comprend d'autant mieux lors d'une approche par découpage en morceaux uniformes de la fibre, dont nous parlerons en section 13.1.

5. Le lecteur attentif pourra avoir noté que dans le cas d'une fibre (ou d'un morceau) uniforme, plus la longueur est courte, plus le spectre s'élargit (cf. sous-section 7.4.2), effet pouvant venir compenser le raisonnement simple exposé ici. Toutefois le spectre est issu de la JSI, dénué d'information sur la phase. Or, comme nous le verrons, la non-uniformité implique un effet d'interférence sur la phase accumulée sur la propagation, de sorte que le spectre final ne résulte pas juste de la somme des spectres de ses morceaux.



**Figure 11.1** – Tracés de  $\mathcal{F}_{lin}$  suivant la conservation de l'énergie, pour des fibres linéairement non uniformes de différentes pentes. Les pentes sont exprimées en fonction du décalage ( $\Delta\lambda_{ZDW} = \pm d$ ) de la longueur d'onde de dispersion nulle à l'entrée (+ $d$ ) et la sortie ( $-d$ ) de la fibre, vis-à-vis de notre fibre uniforme de référence.

Pour expliquer cet effet, il nous faut rappeler la forme de  $f_{lin}$  (11.5) :

$$f_{lin}(\omega, \omega') = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\pi L}{-i(\Delta k_L - \Delta k_0)}} e^{\frac{b^2}{a}} \times \left( \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} (2\Delta k_L - \Delta k_0)}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) - \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \Delta k_0}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) \right)$$

où nous notons que les arguments des fonctions Erf sont *complexes*. Or les fonctions Erf correspondent basiquement en l'intégration d'une exponentielle (11.4) :

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

On comprend donc que les fonctions Erf vont consister en l'intégration de termes de phases, sur une plage dépendant de la non-uniformité : pour la première fonction Erf cette plage est d'autant plus grande que la non-uniformité ( $\Delta k_L - \Delta k_0$ ) est forte, tandis que la seconde fonction Erf voit son argument décroître quand l'écart à l'uniformité augmente.

La différence des fonctions Erf, et donc de ces deux intégrations de termes de phase, nous donne alors la phase de la JSA (à fréquences  $\omega$  et  $\omega'$  données), qui sera d'autant plus grande que la non-uniformité sera forte. Lors du passage au module carré (de  $f_{lin}$  à  $\mathcal{F}_{lin}$ ) l'interférence de ces termes de phase va être source, non seulement d'un étalement du spectre, mais aussi d'une perturbation de sa structure.

D'autre part, il est important de relever que dès un écart supérieur à 0.01% de décalage du zéro de dispersion entre l'entrée et la sortie de la fibre (ce qui correspond à la courbe tracée pour  $\Delta\lambda_{ZDW} = \pm 0.1$  nm sur la figure 11.1) nous observons une modification notable du spectre d'émission<sup>6</sup>. Autrement dit, une variation aussi petite qu'une dizaine de nanomètres dans le diamètre de la fibre (qui est de l'ordre de  $120\mu\text{m}$ ) suffit à induire un effet notable sur le spectre d'émission. Au delà de 0.1% de différence sur le décalage entre les deux extrémités de la fibre, le spectre d'émission s'étale

6. Ce seuil se retrouve également lors de l'intégration du spectre pour simuler nos points (cf. sous-section 7.4.1), avec nos largeurs typiques de filtres.



sur plus de 5 nm avec une intensité d'émission au moins dix fois inférieure à celle attendue d'une fibre uniforme équivalente<sup>7</sup>.

Cette forte sensibilité du spectre à la non-uniformité, mettant clairement en défaut l'hypothèse d'uniformité, montre ici à quel point le contrôle de la dimension transverse de la fibre est crucial pour maîtriser l'émission de paires. Bien sûr, une pente linéaire reste une approximation trop basique pour décrire n'importe quelle fibre, et nous exposerons au chapitre 13 une description par morceaux à même de s'approcher davantage des fibres réelles.

Enfin, nous noterons sur les figures 11.1 que le centre du spectre (que l'on peut voir comme la fréquence moyenne d'émission du photon signal) a tendance à se décaler, alors que le  $\Delta k$  moyen dans la fibre ne change pas. Cet effet préfigure la non-réciprocité d'émission dans une fibre non uniforme, que nous étudions dans la suite.

### 11.2.3 Non-réciprocité du spectre d'émission selon le sens de propagation

Pour une fibre uniforme, le désaccord de phase est le même en tout point de la fibre, contrairement au cas non uniforme. À partir du moment où nous sommes passés à une progression linéaire, l'inversion de l'entrée avec la sortie de la fibre n'est plus triviale. Nous pouvons alors nous demander si cette différenciation se retrouve dans l'émission des paires, autrement dit : l'émission est-elle différente selon le sens de propagation dans la fibre ?

Nous rappelons l'expression (11.6) du cas linéaire :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \frac{\pi}{4L|\Delta k_L - \Delta k_0|} \left| \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} (2\Delta k_L - \Delta k_0)}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) - \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \Delta k_0}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) \right|^2 \quad (11.7)$$

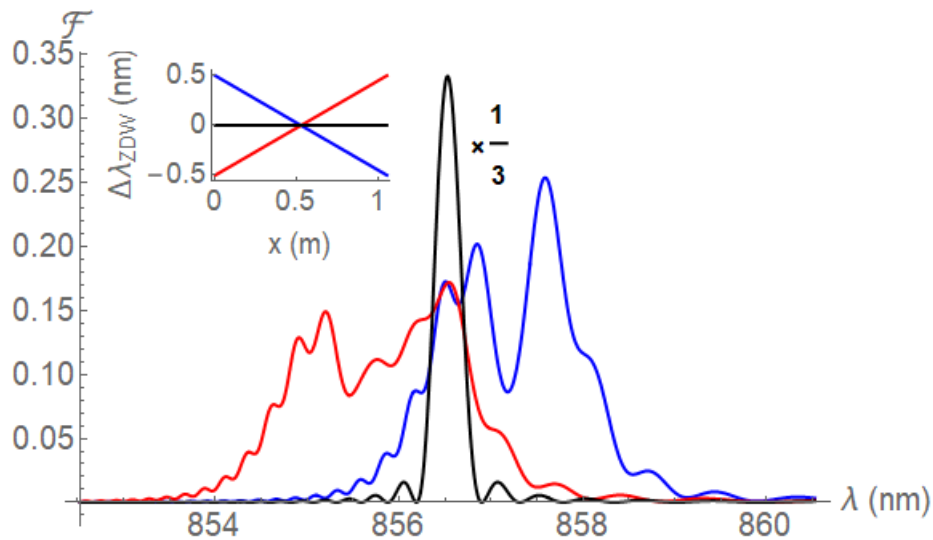
Comme nous l'avons déjà soulevé,  $\mathcal{F}_{lin}$  n'est pas symétrique par interversion de  $\Delta k_0$  avec  $\Delta k_L$ , correspondant respectivement aux désaccords de phase en entrée et sortie de fibre. Nous nous attendons donc à ce que les spectres d'émission pour deux pentes linéaires de signes opposés diffèrent.

La figure 11.2 présente le spectre d'émission simulé pour les deux sens de propagation dans une fibre de non-uniformité linéaire. Nous prenons ici pour l'entrée et la sortie des variations relative d'environ  $\pm 0.5$  nm du zéro de dispersion (soit approximativement  $\pm 0.05\%$  sur le diamètre de la fibre), de façon à percevoir distinctement l'effet de la non-uniformité sans étaler excessivement le spectre d'émission.

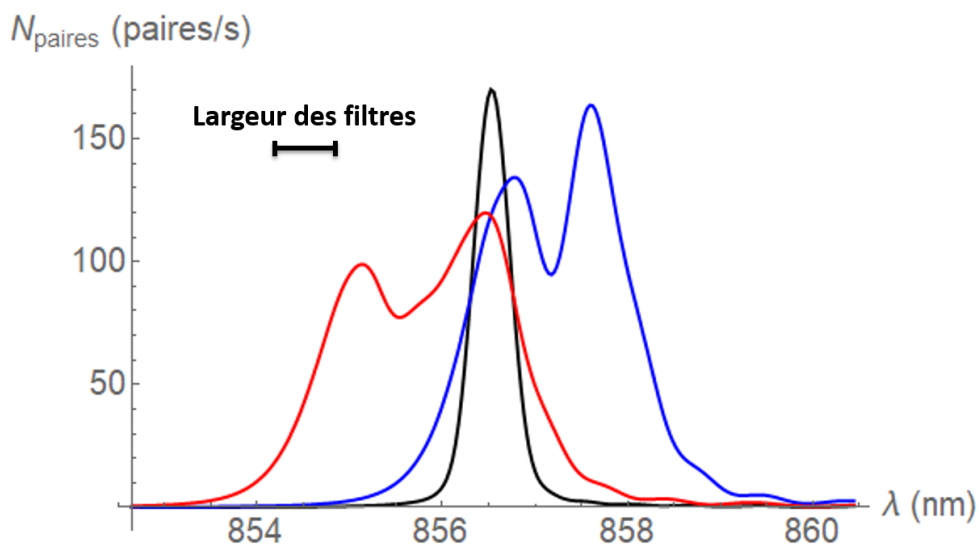
Par ailleurs, pour visualiser comment la non-réciprocité se traduit dans les spectres réellement mesurés, nous calculons le taux de génération en fonction de la fréquence en suivant la méthode de simulation des points expérimentaux (cf. sous-section 7.4.1) et ce, pour les mêmes paramètres que ceux utilisés pour la figure 11.2. Les résultats sont présentés en figure 11.3.

Nous relevons en premier lieu que le maximum du taux d'émission est bien réduit pour une fibre linéaire vis-à-vis du cas uniforme. Cependant les niveaux d'émission restent encore un peu moins d'un ordre de grandeur plus fort que ce que nous pouvons observer expérimentalement (cf. chapitre 10). Comme nous le verrons en section 13.2, le modèle linéaire est encore trop simple pour décrire le profil transverse de fibres réelles.

7. Nous noterons que l'évaluation numérique de la diminution du pic d'émission faite ici vaut pour notre fibre. La sensibilité à la non-uniformité dépend de manière générale du terme  $d\Delta k = (2\beta^{(1)}(\omega_{p_0}) - \beta^{(1)}(\omega_s) - \beta^{(1)}(\omega_i) + \beta^{(2)}(\omega_{p_0})(\omega_s + \omega_i - 2\omega_{p_0}))$  dans le désaccord de phase décalé, de sorte que la chute du pic d'émission serait plus faible dans des fibres présentant une plus faible différence d'indices de groupe [61] ( $\beta^{(1)}(\omega) = \frac{n_g(\omega)}{c}$ ) entre les fréquences en jeu.



**Figure 11.2** – Terme  $\mathcal{F}_{in}$  suivant la conservation de l'énergie, pour les deux sens de propagation (courbes bleue et rouge) dans une fibre de non-uniformité linéaire, avec un décalage de la longueur d'onde de dispersion nulle aux extrémités de la fibre de  $\Delta\lambda_{ZDW} = \pm 0.5$  nm. En noir le spectre uniforme ( $\mathcal{F}_{uni}$ ) pris au désaccord de phase moyen et multiplié par un facteur  $\frac{1}{3}$  pour comparaison.



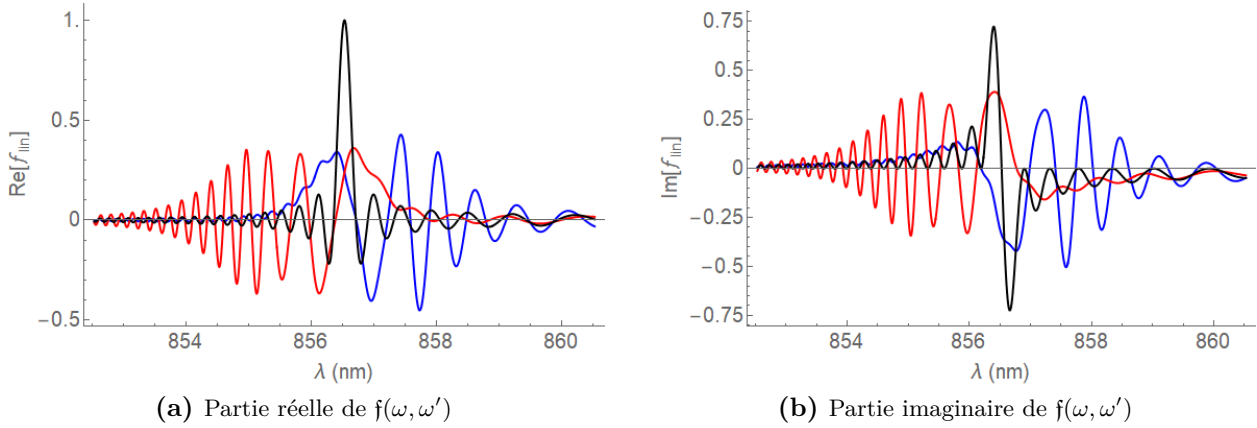
**Figure 11.3** – Taux de génération de paires, pour les deux sens de propagation dans une fibre de non-uniformité linéaire, avec les mêmes paramètres que la figure 11.2. En noir le spectre uniforme ( $\mathcal{F}_{uni}$ ) pris au désaccord de phase moyen, multiplié par  $\frac{1}{3}$ . Les spectres sont obtenus en intégrant sur des filtres de largeurs à  $1/e$  égales à 0.6 nm.

Nous notons qu'ici aussi (cf. cas uniforme en sous-section 7.4.1) un lissage du spectre vis-à-vis de la coupe de la JSI en figure 11.2 s'opère du fait des intégrations sur les filtres de détection, et tempère l'écart d'amplitude (entre uniforme et non uniforme) qu'on pouvait y observer. Toutefois, nous soulignons que la chute du maximum d'émission à  $\lambda_{i_0} = 856.5$  nm, lors du passage uniforme à non uniforme, est ici bien plus forte ( $\frac{1}{3}$  de réduction environ pour un écart de  $\pm 0.1\%$  entre l'entrée et la sortie de la fibre) que ce à quoi le raisonnement rapide exposé en sous-section 11.2.1 nous préparait ( $\frac{1}{10}$  pour un écart de  $\pm 4\%$ ).

On peut observer par ailleurs que les spectres se recouvrent partiellement. Un premier réflexe serait de filtrer la zone correspondante afin de retrouver des spectres identiques pour les deux sens de propagation (au prix d'un taux de paires réduit). Toutefois, le terme  $\mathcal{F}_{in}$ , comme la JSI, ne

porte qu'une partie de l'information : celle sur la phase de la JSA, pourtant responsable des interférences à l'origine de la structure du spectre, est perdue lors du passage au module carré (de  $f_{uni}$  à  $\mathcal{F}_{uni}$ ).

Pour compléter notre description, nous traçons donc en figure 11.4 les parties réelles et imaginaires de  $f_{lin}$  (11.5), pour les deux sens de propagation dans une fibre de non-uniformité linéaire. À des fins de comparaison, nous faisons de même pour une fibre purement uniforme.



**Figure 11.4** – Parties réelles et imaginaires de  $f_{uni}$  et de  $f_{lin}$  pour les deux sens de propagation, suivant la conservation de l'énergie. Les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure 11.2.

Pour le cas uniforme, parts réelles et imaginaires sont identiques pour les deux sens de propagation. L'interférence lors du passage au module carré (de  $f_{uni}$  à  $\mathcal{F}_{uni}$ ) est alors constructive et résulte en un pic unique et intense comme nous avons pu le voir en sous-section 7.4.1.

À l'inverse, nous retrouvons sur la figure 11.4 une différence distincte entre les deux sens de propagation pour une fibre non uniforme. Nous voyons ici qu'un filtrage sur la plage de recouvrement des spectres, que nous pouvions identifier en figure 11.2, ne permet pas de récupérer des parties réelles et imaginaires identiques dans les deux sens de propagation. Autrement dit, le filtrage nous permet de récupérer un taux d'émission de paires identique pour les deux sens, mais pas une même JSA. Ainsi, s'il est possible de récupérer des spectres identiques en filtrant, la réciprocity d'émission alors recouvrée n'est qu'apparente : deux paires émises à un même duo de fréquence  $(\omega, \omega')$ , mais dans des sens de propagation opposés, n'auront pas la même phase en sortie de fibre.

Or, nous verrons dans la suite que la différence de phase selon les deux sens sera lourde de conséquences pour l'intrication des paires, opérée par l'intégration de la fibre dans un interféromètre de Sagnac.

## Chapitre 12

# Intrication en polarisation des paires en présence de non uniformité

L'usage de photons intriqués trouve son intérêt dans de nombreux protocoles de traitement de l'information quantique [15], et si le processus de mélange à quatre ondes dans notre fibre permet la génération de paires de photons intriqués en fréquence, la polarisation s'avère toutefois être un degré de liberté bien plus pratique à manipuler. Une méthode répandue pour opérer l'intrication en polarisation de paires de photons consiste à placer le milieu non linéaire source dans un interféromètre de Sagnac [145, 146], que nous pourrions aussi appeler boucle Sagnac. Cette méthode s'adapte très bien à une source fibrée [147] et sera à la base de l'intrication dans notre étude. Avant de nous pencher sur les implications de la non-réciprocité d'émission lors de l'intrication des paires, nous présenterons d'abord le principe de l'interféromètre de Sagnac et comment son architecture permet l'intrication en polarisation des paires de photons.

### 12.1 Principe de l'intrication en boucle Sagnac

L'architecture d'un interféromètre de Sagnac consiste essentiellement en la recombinaison de faisceaux se propageant sur un même chemin optique en sens contraires : un faisceau initial arrivant sur une lame ou un cube séparateur est divisé en deux faisceaux contra-propageant venant se recombinaison sur l'optique séparatrice et interférer.

L'intrication dans notre montage, dit en boucle Sagnac, reprend la même structure et tire parti du fait que l'émission de paires dans un guide d'onde peut s'effectuer dans les deux sens de propagation, tandis que l'état de polarisation des paires est linéaire et ne peut adopter que deux configurations<sup>1</sup>, perpendiculaires entre elles.

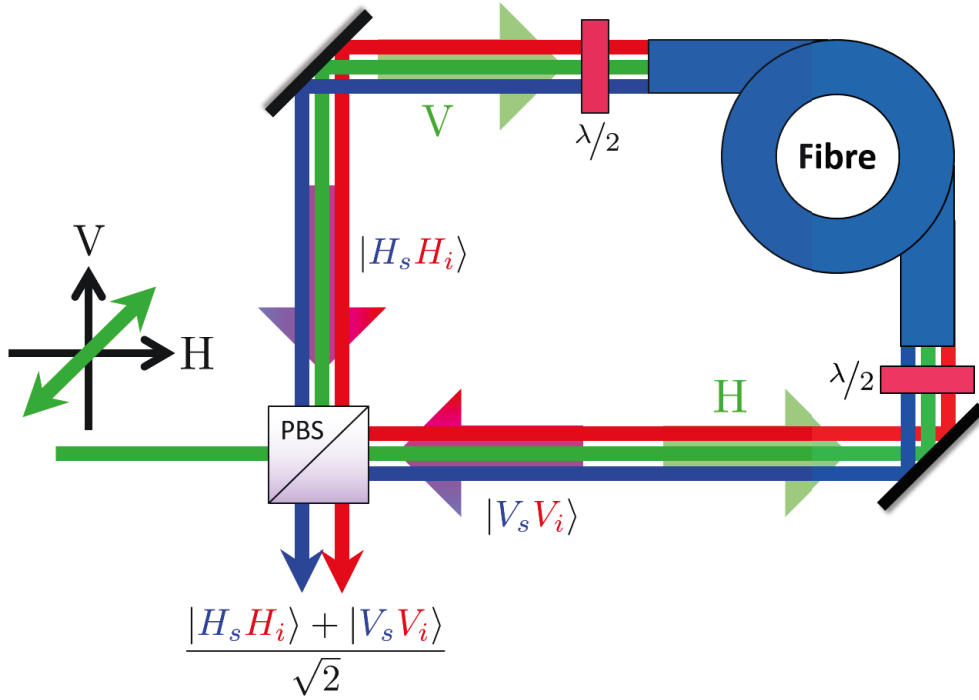
Nous présentons en figure 12.1 notre montage de boucle Sagnac où peut s'intégrer notre fibre.

En entrant dans la boucle, le faisceau de pompe, de polarisation linéaire, est divisé sur un cube séparateur de polarisation en deux faisceaux d'amplitudes égales : un faisceau de polarisation horizontale (H), transmis par le cube et se propageant dans le sens horaire, et un faisceau vertical (V) en anti-horaire, réfléchi par le cube. Deux lames demi-onde permettent d'orienter les deux faisceaux de pompe selon un *même* axe neutre de la fibre<sup>2</sup> avant leur injection. Après propagation dans la fibre et passage par la seconde lame, la pompe se propageant en sens horaire est alors verticale et sera réfléchi par le cube dans la direction d'entrée du faisceau initial de pompe. Les paires associées émises dans une configuration croisée (de polarisation horizontale et dont nous noterons l'état  $|H_s H_i\rangle$ ) seront donc transmises par le cube.

---

1. Nous mettons de côté ici la possibilité d'utiliser deux pompes distinctes permettant notamment d'émettre des photons de paires de polarisations différentes.

2. La courbe d'indice est donc la même pour les pompes dans les deux sens de propagation.



**Figure 12.1** – Schéma du montage en boucle Sagnac permettant l'intrication en polarisation des paires de photons.

De manière symétrique, en sens anti-horaire le faisceau de pompe initialement vertical sera horizontal, après passage par la seconde lame demi-onde en sortie de fibre, et transmis par le cube, tandis que les paires associées, de polarisation verticale  $|V_s V_i\rangle$ , seront réfléchies et sortiront par la même face du cube que les paires de sens horaire.

Puisque dans notre régime de fonctionnement, au maximum une paire est émise par impulsion de pompe, lors du passage dans la boucle Sagnac il est impossible de dire selon quel sens de propagation la paire fut émise. Or chaque sens ne permet ici que l'émission de paires dans une polarisation précise (puisque nous ne les récupérons que via une face du cube). Ainsi, l'état de polarisation d'une paire est indéterminé tant qu'il n'a pas été mesuré, ce qui résulte en une intrication en polarisation effective des paires. L'état final en terme de polarisation peut se noter :

$$|1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle = \frac{|H_s H_i\rangle + |V_s V_i\rangle}{\sqrt{2}}$$

Nous rappelons par ailleurs que si l'intégration en boucle Sagnac permet l'intrication en polarisation des paires, celles-ci sont dès leur génération déjà intriquées en fréquence<sup>3</sup>.

Le choix de considérer la configuration de génération en polarisations croisées n'est ici pas anodin : arrivées sur le cube séparateur, les faisceaux de pompe sortants de la fibre sont renvoyés dans la même direction que le faisceau initial, alors que les paires sortent par la dernière face du cube par laquelle aucun faisceau de pompe ne passe. Cette architecture Sagnac, proposée par [147] permet donc à la fois une extraction directe des paires et le filtrage d'une grande partie du faisceau de pompe<sup>4</sup>.

3. L'état final des paires (7.9) correspond à l'intégration, sur  $\omega_s$  et  $\omega_i$ , des états  $|1_{\omega_s}, 1_{\omega_i}\rangle$ . Par respect de la conservation de l'énergie et de l'accord de phase, le terme sous l'intégrale n'est non-nul que pour certains duo de fréquences  $(\omega_s, \omega_i)$  de sorte que l'état final de la paire n'est pas factorisable, et donc intriqué.

4. Nous rappelons que la diffusion des faisceaux de pompe sur nos réseaux constitue une source de bruit notable (la plus importante après le bruit Raman) dans nos mesures et fut à l'origine du choix de faire passer le faisceau de chaque voie (signal, idler) sur deux réseaux successifs.

La configuration alternative, i.e. celle dans laquelle sont relevés les paires de photons co-polarisés avec la pompe, implique que ces dernières ressortent de la boucle Sagnac par la même face du cube séparateur que les faisceaux de pompe, mais qui est surtout celle par laquelle arrive le faisceau entrant. La séparation de la pompe et des paires demande alors un dispositif à base de réseau par transmission [145]. Cette complexité supplémentaire et l'ajout d'optiques sur le trajet des paires sont autant de facteurs susceptibles d'introduire des pertes additionnelles ou une dissymétrie entre les voies signal et idler.

D'autre part, cette configuration, qui demande l'usage d'une lame demi-onde en moins, implique que les axes neutres de la fibre coïncident avec ceux de transmission/réflexion du cube séparateur. Nous notons que la référence [145] résout ce problème en appliquant une torsion de la fibre sur son axe, qui par ailleurs permet de se passer de toute lame de phase au sein de la boucle<sup>5</sup>. Si cette solution permet de s'assurer un achromatisme dans la boucle Sagnac, elle est toutefois impraticable dans notre cas du fait que le remplissage de notre fibre demande l'usage de cuves de liquide massives présentes à chaque extrémité<sup>6</sup>.

Pour toutes ces raisons, nous choisissons d'utiliser la configuration à polarisations croisées, en notant que le chromatisme des lames demi-onde n'est ici pas très problématique vu la proximité des longueurs d'onde de paires avec celle de pompe. Le principal inconvénient de cette configuration reste que la génération en polarisations croisées est trois fois plus faible que son analogue aux faisceaux co-polarisés<sup>7</sup>.

Enfin, si l'état de Bell  $|H_s H_i\rangle + |V_s V_i\rangle$  est celui ici spontanément produit, les autres peuvent être obtenus en usant de lames d'onde [30, 148] après sortie de la boucle Sagnac et séparation des faisceaux signal et idler par notre premier réseau. En plaçant une lame demi-onde orientée à  $45^\circ$  sur le trajet idler (ou signal), la polarisation du photon correspondant est tournée de  $90^\circ$  et nous pouvons obtenir l'état  $|H_s V_i\rangle + |V_s H_i\rangle$  (ou  $|V_s H_i\rangle + |H_s V_i\rangle$ ).

En ajoutant en plus une seconde lame demi-onde, orientée de façon à ce que son axe rapide coïncide avec la polarisation horizontale, la polarisation verticale accumule un retard de phase de  $\pi/2$  de sorte qu'est obtenu l'état  $|V_s H_i\rangle - |H_s V_i\rangle$  (ou  $|H_s V_i\rangle - |V_s H_i\rangle$ ). Si la première lame est retirée, l'état résultant est alors  $|H_s H_i\rangle - |V_s V_i\rangle$ .

Pour une fibre uniforme générant de manière identique les photons dans un sens de propagation ou dans l'autre, les états des paires lors de leur recombinaison au niveau du cube interfèrent de manière constructive et le contraste de ces interférences est maximale. En dehors de ce cas de figure parfait, si les paires sont émises de manière différenciée entre les deux voies, ce contraste se dégrade.

Pour évaluer la qualité d'intrication des paires, nous introduirons dans la section suivante la visibilité  $V$ , qui quantifie ce contraste. Comme nous l'avons vu, la non-uniformité de la fibre a justement tendance à induire une différence entre les deux sens de propagation dans la fibre. Nous étudierons comment cette influence peut se traduire dans la visibilité et quelles solutions sont envisageables pour prévenir sa dégradation.

---

5. Une solution alternative consiste en l'usage d'un périscope pour induire une rotation de la polarisation [146] mais ne permet pas d'ajustement fin de la polarisation d'injection, qui s'avère ici nécessaire pour se caler sur les axes neutres de la fibre.

6. Des micro-cuves facilitant ce genre de manipulation furent développée en interne. Néanmoins leurs performances, au niveau de leur maintien au cours du temps, ne se révélèrent pas suffisantes (fuite du liquide) pour permettre un usage viable dans nos expériences.

7. En milieu isotrope, on a les composantes du tenseurs permittivité diélectrique inverse :  $\eta_{iii}^{(3)} = 3\eta_{jjk}^{(3)}$  avec  $i, j, k \in \{x, y, z\}$  et  $j \neq k$ , de même pour  $\epsilon^{(3)}$  et  $\chi^{(3)}$  (cf. annexe B.7.1).

## 12.2 Effet de la non-uniformité sur la visibilité des paires

Comme nous avons pu le voir au chapitre 11 pour une fibre à non-uniformité linéaire, l'hypothèse d'uniformité n'est plus valable même pour de très légères variations du diamètre de la fibre. Les deux sens de propagation produisent des spectres d'émissions différents et la visibilité associée va d'autant plus se dégrader.

Nous avons également vu en figure 11.2 que ces spectres peuvent (pour des non-uniformités suffisamment faibles) se recouvrir partiellement, ce qui pourrait pousser à filtrer sur la plage de recouvrement les spectres avant la détection, de façon à récupérer un spectre indifférentiable selon le sens de propagation dans la fibre. Mais ce serait oublier l'importance de la phase respective des paires (tracée en figure 11.4) dans le phénomène d'intrication et le fait que la déformation du spectre d'émission en présence de non-uniformité, vis-à-vis du sinus cardinal du cas uniforme, tiens en large part à un phénomène d'interférence.

Au lieu de la JSI des paires, dont l'information de phase est absente, nous utiliserons donc ici la JSA pour mettre en évidence l'impact de la non-uniformité sur l'intrication.

Dans le cas où les caractéristiques spectrales des paires sont corrélées au chemin de génération, l'état final peut s'écrire sous la forme générale [20] :

$$|\psi_{s \otimes i, fin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\omega} \int_{\omega'} (h(\omega, \omega') |H_s(\omega)H_i(\omega')\rangle + v(\omega, \omega') |V_s(\omega)V_i(\omega')\rangle) d\omega d\omega'$$

où les fonctions  $h$  et  $v$  correspondent aux JSA *normalisées* des états de polarisation  $|H_s(\omega)H_i(\omega')\rangle$  et  $|V_s(\omega)V_i(\omega')\rangle$ , au sens où :

$$\int_{\omega} \int_{\omega'} h(\omega, \omega') d\omega d\omega' = 1 = \int_{\omega} \int_{\omega'} v(\omega, \omega') d\omega d\omega'$$

ce qui suppose que la probabilité de génération est la même dans les deux sens de propagation. Cette hypothèse n'est plus valable dès lors que la puissance de pompe n'est plus équitablement répartie entre les deux chemins.

Par ailleurs, lors d'un filtrage spectral à la détection, tel que c'est le cas dans notre expérience, les fonctions  $h$  et  $v$  intègrent dans leur expression la forme et l'étendue de ce filtrage. Pour lier leur définition à notre modèle, nous notons :

$$h(\omega, \omega') = \frac{\text{JSA}_{\rightarrow}(\omega, \omega')}{\sqrt{\int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega'} |\text{JSA}_{\rightarrow}(\omega, \omega')|^2 d\omega d\omega'}}$$

$$v(\omega, \omega') = \frac{\text{JSA}_{\leftarrow}(\omega, \omega')}{\sqrt{\int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega'} |\text{JSA}_{\leftarrow}(\omega, \omega')|^2 d\omega d\omega'}}$$

où  $\text{JSA}_{\rightarrow}$  est la JSA pour le sens de propagation dans la boucle Sagnac générant des paires en polarisation horizontale (le sens anti-horaire d'après la figure 12.1), et  $\text{JSA}_{\leftarrow}$  celle donnant des paires de polarisation verticale (sens horaire). L'intégration de la JSI, i.e. le module carré de la JSA, est ici effectuée sur les bandes de détection  $\Delta\omega$  et  $\Delta\omega'$  correspondant à la largeur de nos filtres<sup>8</sup>.

La distinguabilité des deux sens de propagation est alors quantifiée par la quantité [20] :

$$G = \int_{\omega} \int_{\omega'} h(\omega, \omega') v^*(\omega, \omega') d\omega d\omega' \quad (12.1)$$

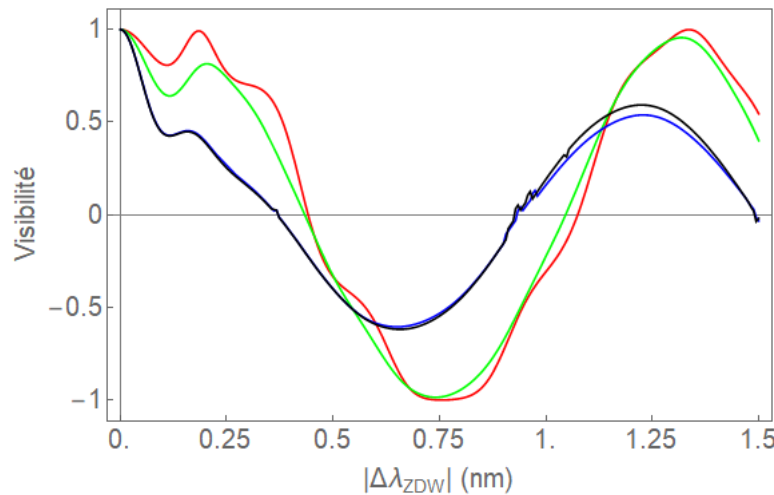
8. Les filtres sont ici pris comme des fonctions portes. Il est possible de considérer une forme de filtre plus proche de la réalité, telle une gaussienne, en incluant la fonction dans la JSA et en intégrant sur tout le spectre.

et la visibilité se définit comme la partie réelle de  $G$  :  $V = \text{Re}(G)$ . Elle correspond au contraste des franges d'interférence entre les deux voies de génération, et est comprise entre 0 et 1 (contraste maximal des franges d'interférence). Autrement dit, une visibilité de 1 indique des JSA et donc des sens de propagation parfaitement indistinguables, tandis que  $V = 0$  implique des chemins complètement différenciés.

La visibilité se note en terme d'amplitudes spectrales jointes, et en opérant les intégrations de (12.1) sur nos filtres de détection :

$$V = \frac{\text{Re}\left(\int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega'} \text{JSA}_{\rightarrow}(\omega, \omega') \text{JSA}_{\leftarrow}^*(\omega, \omega') d\omega d\omega'\right)}{\sqrt{\left(\int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega'} |\text{JSA}_{\rightarrow}(\omega, \omega')|^2 d\omega d\omega'\right) \left(\int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega'} |\text{JSA}_{\leftarrow}(\omega, \omega')|^2 d\omega d\omega'\right)}} \quad (12.2)$$

Nous représentons en figure 12.2 l'évolution de la visibilité pour une non-uniformité croissante, et ce pour différentes largeurs de filtres.



**Figure 12.2** – Évolution de la visibilité pour une non-uniformité linéaire croissante, et pour différentes largeurs de filtres. L'abscisse indique le décalage de la longueur d'onde de dispersion nulle vis-à-vis d'une valeur de référence (fibre uniforme) à l'entrée (+) et à la sortie (-) de la fibre. Les filtres sont modélisés par des gaussiennes de largeurs à  $1/e$  égales à 0.06 (rouge), 0.6 (vert), 6 (bleu) et 12 nm (noir), centrées aux longueurs d'onde respectant la conservation de l'énergie et l'accord de phase pour la fibre uniforme de référence (cf. Table 2.1).

Nous observons que la non-uniformité, même faible, induit rapidement une dégradation de la visibilité des paires par rapport au cas uniforme, jusqu'à l'annuler ou la faire descendre en dessous de 0 (ce qui correspond à une inversion du contraste des franges d'interférences) et ce, quel que soit la largeur de filtre utilisée. Ceci est le résultat direct de l'intégration des termes de phase des JSA, qui diffèrent selon le sens de propagation.

Pour comprendre plus aisément le comportement de la visibilité en fonction de la non-uniformité, nous pouvons considérer le cas limite de filtres infiniment fins. Les intégrales de (12.2) se font alors sur des Dirac et la visibilité prend la forme très simple :

$$V \simeq \cos(\varphi_{\text{JSA}_{\rightarrow}} - \varphi_{\text{JSA}_{\leftarrow}}) \quad (12.3)$$

qui ne dépend que des phases des JSA pour les deux sens de propagation :

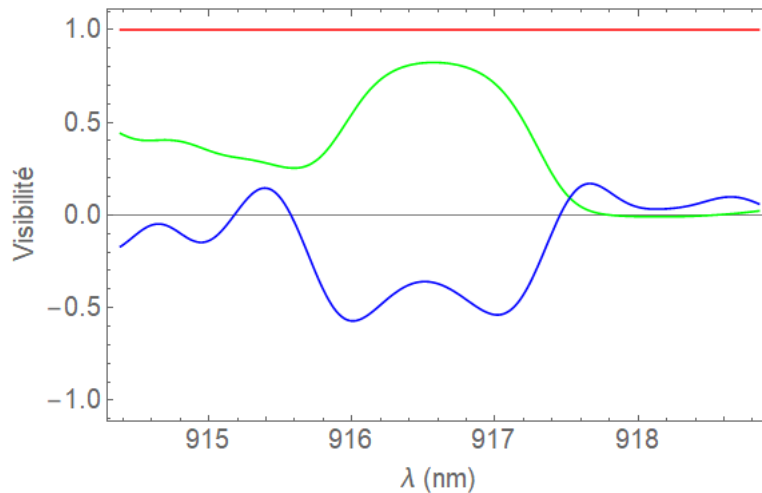
$$\begin{aligned} \text{JSA}_{\rightarrow} &= |\text{JSA}_{\rightarrow}| e^{i\varphi_{\text{JSA}_{\rightarrow}}} \\ \text{JSA}_{\leftarrow} &= |\text{JSA}_{\leftarrow}| e^{i\varphi_{\text{JSA}_{\leftarrow}}} \end{aligned}$$



Pour le cas linéaire que nous considérons, la phase de la JSA est d'autant plus grande que la non-uniformité est forte (cf. sous-section 11.2.2), et diffère selon les deux sens de propagation. La visibilité va alors évoluer entre  $-1$  et  $1$  selon la différence ( $\varphi_{JSA\rightarrow} - \varphi_{JSA\leftarrow}$ ), et suit, comme nous pouvons le voir sur la figure 12.2, le caractère oscillatoire du cosinus quand la non-uniformité augmente.

Pour des filtres plus grands, la visibilité résultante peut en première approximation être vue comme la moyenne du cosinus (12.3) sur la plage spectrale correspondante (la JSA et sa phase dépendent des duos de fréquences des paires). De cet effet de moyenne, nous obtenons une variation de la visibilité sur une plage plus réduite : sur la figure 12.2, nous observons que pour les filtres les plus large la visibilité se restreint entre  $-0.5$  et  $0.5$ . Ainsi en présence de non-uniformité, l'élargissement des filtres vient dégrader la visibilité, qui peut tendre vers  $0$  pour les cas les plus extrêmes (forte non-uniformité et filtres larges).

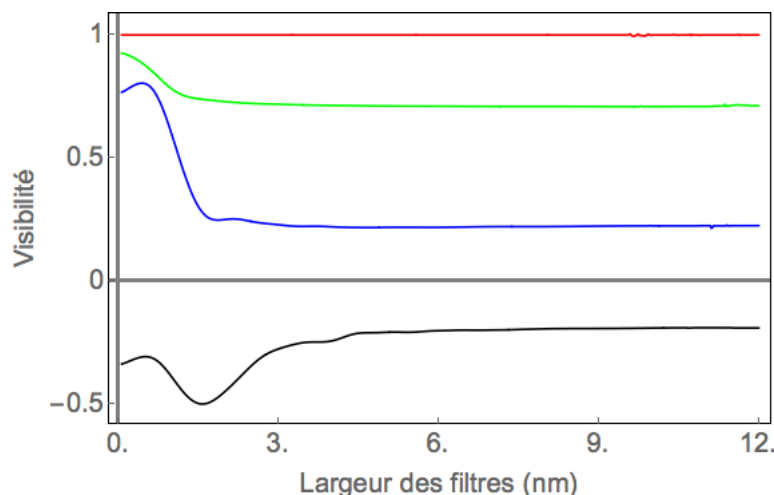
Lorsque nous tendons vers le cas d'une fibre uniforme ( $|\Delta\lambda_{ZDW}| \rightarrow 0$ ), pour des longueurs d'onde ( $\lambda_s, \lambda_i$ ) des paires données, la phase de la JSA reste la même dans les deux sens, et les interférences sont toujours constructives. La variation de la bande spectrale de filtrage au niveau des détecteurs ne vient alors que moduler la quantité de paires détectées, laissant une visibilité toujours égale à  $1$ . À l'inverse, en présence de non-uniformité, le contraste d'interférences entre les deux sens de propagation change selon la longueur d'onde. Pour illustrer cet effet, nous traçons en figure 12.3 l'évolution de la visibilité en faisant varier la position des filtres de détection et ce, pour différents niveaux de non-uniformité.



**Figure 12.3** – Évolution de la visibilité sur la zone spectrale où sont émises nos paires, tracée pour une fibre à non-uniformité linéaire correspondant à un décalage de  $\pm 0.0005$  nm (rouge),  $\pm 0.005$  nm (vert) et  $\pm 0.5$  nm (bleu) de la longueur d'onde de dispersion nulle en entrée (+) et sortie (-) de fibre. Les filtres sont modélisés par des gaussiennes de largeur à  $1/e$  égale à  $0.6$  nm. L'abscisse correspond à la longueur d'onde centrale du filtre signal, tandis que celle du filtre idler suit la conservation de l'énergie pour une pompe à  $885.55$  nm.

Nous constatons ainsi que plus la non-uniformité est forte, plus la visibilité est en moyenne faible sur la zone spectrale d'émission des paires. Par ailleurs la visibilité fluctue d'autant plus rapidement avec la position des filtres, affinant la zone spectrale où elle est maximum. Par conséquent, en présence d'une fibre non uniforme, la première solution pour augmenter la visibilité des paires détectées consiste à filtrer la détection sur des bandes spectrales d'autant plus fines que la non-uniformité est forte, au détriment du taux de détection de paires.

Nous illustrons cette méthode en figure 12.4 où nous traçons la visibilité en fonction du niveau de filtrage à la détection.



**Figure 12.4** – Évolution de la visibilité en fonction de la largeur spectrale à  $1/e$  des filtres (gaussiens) de détection des photons de paires, tracée pour une fibre à non-uniformité linéaire correspondant à un décalage de  $\pm 0.0005$  nm (rouge),  $\pm 0.05$  nm (vert),  $\pm 0.25$  nm (bleu) et  $\pm 0.5$  nm (noir) de la longueur d'onde de dispersion nulle en entrée (+) et sortie (-) de fibre. Les filtres sont centrés aux longueurs d'onde respectant la conservation de l'énergie et l'accord de phase pour la fibre uniforme de référence (cf. Table 2.1).

Nous relevons que la réduction de la taille des filtres a ses limites, comme la visibilité devient très proche de zéro quel que soit cette taille pour une non-uniformité linéaire dépassant une variation de  $\pm 0.25$  nm de la longueur d'onde de dispersion nulle entre l'entrée et la sortie. Ce qui correspond directement à une variation d'environ 0.35 % de la taille transverse de la fibre entre ses deux extrémités.

Une solution plus efficace pour recouvrer une forte visibilité consiste, dès la fabrication de la fibre, à s'assurer que son profil transverse soit symétrique selon son sens de propagation. Dès lors, par construction, les JSA correspondant à chaque sens sont identiques et la visibilité théorique<sup>9</sup> est égale à l'unité. Nous pouvons par exemple imaginer la forme la plus simple pour une fibre de profil non uniforme symétrique, i.e. une évolution de sa taille transverse en triangle dont la pointe se situera en milieu de la fibre.

Cependant, nous arrivons ici à la limite de notre modèle analytique simple d'une fibre linéaire. Pour décrire des formes de profils transverses plus complexes, nous introduirons au chapitre suivant une approche numérique par morceaux. Nous serons ainsi en mesure de simuler le spectre d'émission pour n'importe quel profil de fibre, et nous l'userons notamment pour évaluer l'impact de niveaux réalistes de non-uniformité de fibres telles que la nôtre sur leur spectres.

9. En pratique, des différences entre les deux sens de propagation (pertes sur les différentes optiques) peuvent subsister et réduire la visibilité effective. Une différence selon la polarisation dans les transmissions des optiques entre la boucle Sagnac et les détecteurs, peut également impliquer une réduction de la visibilité.



## Chapitre 13

# Étude de profils transverses réalistes pour les fibres

Pour une fibre à cristal photonique, au vu de la sensibilité du spectre d'émission aux fluctuations de diamètre soulevée au chapitre 11, nous pouvons raisonnablement remettre en question l'approximation du profil transverse par un modèle linéaire. Au niveau de fluctuation pertinent (de l'ordre de 0.01% de la taille transverse ou plus), les fibres réelles présentent des profils dictés par les imperfections dans leur fabrication.

Pour pouvoir en simuler les spectres d'émission, nous présenterons en section 13.1 un modèle simple de découpage par morceaux de la fibre, dans lequel nous pourrions mettre à contribution les solutions analytiques des cas purement uniforme ou linéaire. Nous établirons ainsi une forme approximée du terme  $\mathcal{F}$  de la JSI permettant la simulation numérique de la génération de paires pour n'importe quel profil de fibre donné.

Nous utiliserons ensuite ce modèle, associé à des valeurs caractéristiques des fluctuations typiques de diamètre, afin de simuler des spectres réalistes pour des fibres semblables à la nôtre en section 13.2. Nous montrerons ainsi comment des fibres, initialement voulues uniformes, présentent une non-réciprocité d'émission du fait des imperfections du tirage. Nous exposerons également comment la conception de fibres à profils non uniformes simples, voulus cette fois-ci, permet de retrouver une réciprocité d'émission.

### 13.1 Description par morceaux d'une fibre non uniforme

Pour pallier au manque de solution analytique à l'équation (IV.2) dans un cas général, une méthode simple consiste à tirer parti du fait qu'elle ne constitue qu'une intégrale sur la longueur de la fibre : nous pouvons la subdiviser en une somme d'intégrales sur des morceaux de fibres suffisamment petits pour être descriptibles à l'aide d'une solution analytique [128, 149, 150] :

$$\mathcal{F}(\omega, \omega') = \left| \sum_i^N f_i(\omega, \omega') \right|^2$$

où on découpe virtuellement la fibre en  $N$  morceaux dont les  $f_i$  correspondent à la solution uniforme (7.18) ou linéaire (11.5).

La mise bout à bout de tels morceaux 'élémentaires', ne faisant pas nécessairement la même longueur, permet de retracer virtuellement n'importe quel profil de fibre, sans pour autant le reproduire parfaitement.

La précision de la simulation numérique du  $\mathcal{F}$  dépendra essentiellement du nombre de morceaux simulés et de la complexité de la forme dont nous voulons nous rapprocher<sup>1</sup>.

Nous disposons de deux formes analytiques : nous pouvons soit découper la fibre en morceaux uniformes et exploiter la solution associée présentée en 7.3.2 tel que ce sera fait dans la sous-section 13.1.1, soit en morceaux à variation linéaire et utiliser la solution de la section 11.1 comme on le présentera dans la sous-section 13.1.2.

### 13.1.1 Intégration par morceaux uniformes de la fibre

Pour une fibre de profil spatial transverse donné, nous pouvons augmenter le nombre de morceaux du découpage jusqu'à ce que ceux-ci puissent être raisonnablement approximés comme uniformes. Dès lors, chacun de ces morceaux  $j$  présente une taille transverse constante et donc un  $\Delta k_j$  constant. Chaque tronçon  $j$  sera centré en  $x_j = \frac{L_j + L_{j-1}}{2}$ , avec la position où il débute  $x = L_{j-1}$  et celle où il se termine  $x = L_j$ . De sorte que  $L_0 = 0$ ,  $L_N = L$  et avec la longueur du tronçon  $j$  :  $\Delta L_j = L_j - L_{j-1}$ . Pour discrétiser le désaccord de phase, nous prendrons  $\Delta k_j = \Delta k(L_j)$ . Toutes ces notations sont illustrées par la figure 13.1 :

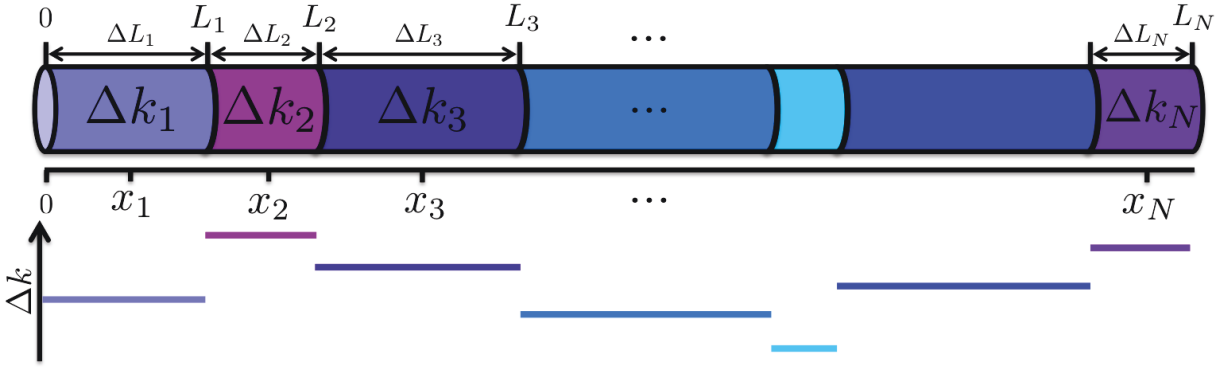


Figure 13.1 – Schéma du découpage virtuel de la fibre en morceaux uniformes.

L'équation (IV.2) devient alors :

$$\mathcal{F}(\omega, \omega') = |\mathfrak{f}(\omega, \omega')|^2 = \left| \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \int_{L_{j-1}}^{L_j} e^{i \Delta k_j x} dx \right|^2 \quad (13.1)$$

Qui par le même raisonnement qu'en (7.19) pour une fibre uniforme, devient :

$$\mathcal{F}(\omega, \omega') = |\mathfrak{f}(\omega, \omega')|^2 = \left| \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \Delta L_j e^{i \Delta k_j x_j} \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta L_j \Delta k_j}{2} \right) \right|^2 \quad (13.2)$$

Le découpage en morceaux uniformes a le mérite de présenter une forme analytique simple permettant des calculs numériques rapides. Néanmoins, nous privilégierons un découpage en morceaux linéaires, tirant parti de la forme analytique introduite précédemment, pour rapprocher notre modèle du profil réel des fibres.

1. Plus le profil aura tendance à fluctuer rapidement avec la position longitudinale  $x$ , plus les morceaux devront être petits pour éviter de trop lisser sa forme.

### 13.1.2 Intégration par morceaux à variation linéaire du désaccord de phase

De la même manière qu'un découpage en morceaux uniformes, il est possible de décrire une fibre à profil arbitraire à l'aide de morceaux dont la taille transverse varie linéairement, et donc en première approximation présentant une variation linéaire du désaccord de phase et du zéro de dispersion (cf. chapitre 11).

L'utilisation de morceaux linéaires au lieu d'uniformes implique une forme analytique plus complexe pour décrire un morceau élémentaire et donc un temps de calcul en simulations plus long. Cependant cette approche a l'avantage de ne pas introduire de discontinuités dans le profil transverse simulé (cf. figure 13.2). Le modèle propose alors une description plus proche des fibres réelles<sup>2</sup>. Ainsi, le nombre de morceaux nécessaires pour décrire convenablement un profil transverse donné est moindre vis-à-vis du découpage en morceaux uniformes.

Nous considérons une fibre virtuellement découpées en  $N$  tronçons de longueurs variables  $\Delta L_j$ , chacun présentant un accord de phase linéaire suivant :

$$\Delta k_j(x) = \Delta k_{L_{j-1}} + \Xi_j \frac{x - L_{j-1}}{\Delta L_j}$$

Où pour alléger la notation, on note  $\Delta k_{L_j} = \Delta k(L_j)$ .

Par ailleurs, nous avons introduit pour un tronçon  $j$ , la différence de désaccord de phase entre ses deux extrémités  $\Xi_j = \Delta k_{L_j} - \Delta k_{L_{j-1}}$ , et sa taille  $\Delta L_j = L_j - L_{j-1}$ .

Ce découpage de la fibre est illustré par la figure 13.2 :

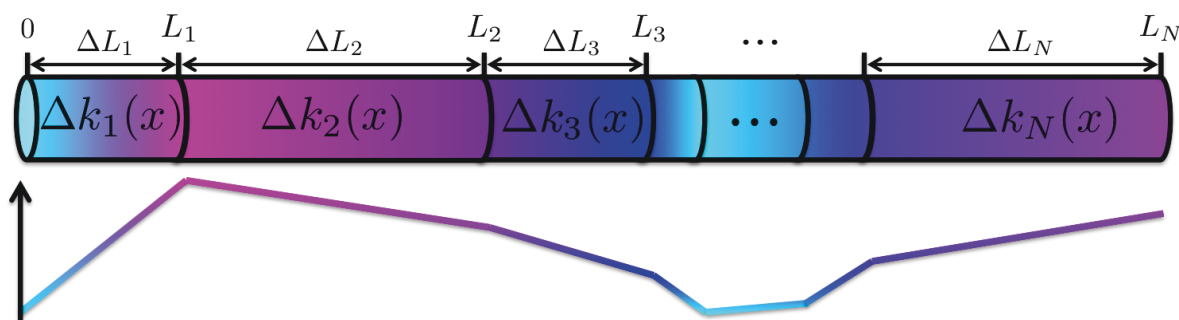


Figure 13.2 – Schéma du découpage virtuel de la fibre en morceaux linéaires.

Ainsi, chaque morceau, linéaire, pourra être décrit en usant de l'expression analytique établie dans la section 11.1.

La forme finale pour une fibre non uniforme de longueur  $L = L_N$  se note :

$$\begin{aligned} f(\omega, \omega') &= \frac{1}{L} \int_{x=0}^L e^{i \Delta k(x) x} dx \\ &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \int_{x=L_{j-1}}^{L_j} e^{i \Delta k_j(x) x} dx \\ f(\omega, \omega') &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \int_{x=L_{j-1}}^{L_j} e^{i \left( \left[ \Delta k_{L_{j-1}} - \frac{\Xi_j L_{j-1}}{\Delta L_j} \right] x + \frac{\Xi_j}{\Delta L_j} x^2 \right)} dx \end{aligned}$$

2. Exception faite de fibres issues de segments de fibres différentes épissés par fusion (*fusion splicing*) tel que décrit dans [149, 151], où chaque segment peut être considéré comme uniforme et où la transition de désaccord de phase est discontinue de l'un à l'autre. Dans ce cas spécifique, le modèle par morceaux uniformes est évidemment plus adapté.

Et cette fois-ci en posant  $a = -i \frac{\Xi_j}{\Delta L_j}$  et  $b = -\frac{i}{2} \left( \Delta k_{L_{j-1}} - \Xi_j \frac{L_{j-1}}{\Delta L_j} \right)$ , et en utilisant la primitive (11.3) :

$$f(\omega, \omega') = \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^N \sqrt{i \frac{\pi \Delta L_j}{\Xi_j}} e^{\frac{b^2}{a}} \begin{pmatrix} \operatorname{Erf} \left( \frac{\Delta k_{L_j} (2L_j - L_{j-1}) - \Delta k_{L_{j-1}} L_j}{2 \sqrt{i \Delta L_j \Xi_j}} \right) \\ - \operatorname{Erf} \left( \frac{\Delta k_{L_j} L_{j-1} + \Delta k_{L_{j-1}} (L_j - 2L_{j-1})}{2 \sqrt{i \Delta L_j \Xi_j}} \right) \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

Avec :

$$\frac{b^2}{a} = -\frac{i}{4} \frac{\left( \Delta k_{L_{j-1}} L_j - \Delta k_{L_j} L_{j-1} \right)^2}{\Delta L_j \Xi_j}$$

Il est important de noter que cette formulation de  $f$ , comme  $f_{lin}$ , n'est valide que pour des tronçons de fibre non uniformes, et ce pour la même raison que celle avancée en section 11.1 : le passage à la primitive Erf (cf. équation (11.3)) n'est valable que pour  $a \neq 0$ , c'est-à-dire  $\Xi_j \neq 0$ . Néanmoins pour nos calculs numériques, si un tronçon s'avère être parfaitement uniforme, il sera possible de le prendre en compte en usant de la forme analytique établie pour le découpage en morceaux uniformes : chaque terme de la somme (13.3) correspondant à un tronçon parfaitement uniforme ( $\Xi_j = 0$ ) sera substitué par son équivalent dans (13.2), qui prend la forme d'un sinus cardinal.

Le modèle de découpage par morceaux que nous venons de présenter<sup>3</sup> nous permet de simuler le spectre d'émission pour n'importe quel profil transverse de fibre. Que ce profil soit appliqué volontairement sur la fibre<sup>4</sup> lors de son tirage [139, 153, 154], ou du fait d'imperfections dans ce même processus [150]. C'est ce dernier cas qui s'applique à notre fibre, dont le profil transverse réel nous est inconnu.

Nous avons pu voir que, pour une fibre de profil purement linéaire (cf. section 11.2), une variation du diamètre aussi faible que de 0.01% entre les deux bouts de la fibre suffit à induire des effets notables sur son spectre d'émission. Faute de disposer des instruments nécessaires pour réaliser une mesure aussi précise sur notre fibre, nous ne pourrions simuler son spectre exact.

Toutefois, notre fibre ayant été initialement fabriquée pour être uniforme sur sa longueur, sa non-uniformité est surtout le fruit d'un tirage imparfait. De telles imperfections ont déjà fait l'objet de mesures que nous pouvons retrouver dans la littérature, et sur lesquelles nous nous appuyerons dans la suite pour disposer d'un modèle statistique les décrivant. À défaut de simuler le spectre d'émission spécifique à notre source, nous pourrions donc étudier des spectres typiques pour le même type de fibre.

## 13.2 Spectres d'émission pour des profils transverses réalistes

Dans la plupart des cas, les variations de taille transverse observées dans les fibres manufacturées [155] sont pour leur plus grande part dues aux imperfections dans le processus de tirage. Les fluctuations de taille résultantes<sup>5</sup> étant stochastiques, il est possible d'en établir un modèle statistique et ainsi de parvenir à simuler des spectres d'émission typiques.

Nous présenterons un tel modèle en sous-section 13.2.1, que nous appliquerons pour des valeurs caractéristiques de fluctuation de taille pour des fibres à cristaux photoniques.

3. Le modèle de découpage par morceaux linéaires fut confronté à celui par morceaux uniformes pour un grand nombre de points (1000 morceaux sur une fibre de 1 mètre). Les spectres résultants (qui ne sont pas présentés ici) se montrent en très bon accord, ce qui valide la consistance de notre modèle.

4. Notre modèle reste très générique sur l'origine de la variation du désaccord de phase, de sorte que ce modèle de découpage par morceaux peut également s'appliquer au cas de *chirped quasi-phase-matching* [152, 141, 143, 142].

5. Nous pouvons noter que des fluctuations, à plus petites échelles que celles qui nous intéressent (inférieur au centimètre), existent du fait d'une variabilité de tension de surface prenant la forme d'ondes capillaires venant imprimer une déformation dans les parois des tubes de pré-forme [156, 157]. Toutefois leur effet reste négligeable vis-à-vis de celui des fluctuations à plus grande échelle que nous considérons.

Ce modèle permettra de décrire l'évolution du diamètre de la fibre, et donc du décalage en chacun de ses points du zéro de dispersion. Nous relierons en sous-section 13.2.2 ce décalage au désaccord de phase en vue d'appliquer la description par morceaux exposée en section 13.1.

Enfin, nous présenterons en sous-section 13.2.3 quelques résultats de fibres simulées de façon à évaluer le degré d'impact sur le spectre d'émission de profils transverses crédibles pour notre fibre. Nous concluons ainsi sur la cohérence de l'hypothèse d'uniformité pour ce type de fibres.

### 13.2.1 Modèle de distribution aléatoire du zéro de dispersion

Les fluctuations de taille transverse des fibres peuvent se modéliser par un modèle [158, 159] dans lequel le zéro de dispersion varie continûment le long du guide de façon aléatoire. Le modèle II<sup>6</sup> de [158] décrit ainsi la distribution de la variable aléatoire  $\delta k$  correspondant à l'écart du désaccord de phase en un point d'une fibre, vis-à-vis de sa valeur moyenne.

Nous rappelons que dans notre modèle, l'accord de phase décalé se définit comme (IV.1) :

$$\Delta k_S = \Delta k_{ref} - \Delta\omega_{z_{DW}} d\Delta k \quad (13.4)$$

En prenant le désaccord de référence  $\Delta k_{ref}$  comme la valeur moyenne du  $\Delta k$  sur la fibre, on en déduit que l'écart  $\delta k$  correspond simplement au produit  $\Delta\omega_{z_{DW}} \times d\Delta k$ .

La loi de distribution proposée par [158] décrit l'écart  $\delta k$  en une position  $x_1$  de la fibre en fonction de sa valeur en une position antérieure  $x_0$  via l'expression :

$$\delta k(x_1) = e^{-\frac{|x_1-x_0|}{L_c}} \delta k(x_0) + \sigma \sqrt{1 - e^{-2\frac{|x_1-x_0|}{L_c}}} \times m$$

avec  $m$  un nombre aléatoire issu d'une distribution normale [0,1].

Ce modèle dépend de deux grandeurs, caractéristiques des fluctuations aléatoires de taille :  $L_c$  la longueur de corrélation et  $\sigma$  l'écart-type des variations du  $\Delta k$ .

Puisque  $\delta k \equiv \Delta\omega_{z_{DW}} d\Delta k$  et que  $d\Delta k$  est indépendant de la position dans la fibre (cf. section 2.2),  $\Delta\omega_{z_{DW}}$  suit nécessairement la même loi de distribution en  $x$  que  $\delta k$ . Pour appliquer cette loi au décalage du zéro de dispersion, nous prenons  $x_1 = L_j$  et  $x_0 = L_{j-1}$ , soit  $x_1 - x_0 = \Delta L_j$ .

Le comportement de  $\Delta\omega_{z_{DW}}$  se décrit alors par :

$$\Delta\omega_{L_j} = e^{-\frac{|\Delta L_j|}{L_c}} \Delta\omega_{L_{j-1}} + \sigma \sqrt{1 - e^{-2\frac{|\Delta L_j|}{L_c}}} \times m \quad (13.5)$$

où nous soulignons que  $L_c$  et  $\sigma$  sont caractéristiques du type de fibre considérée : par exemple la fabrication d'une fibre à cristal photonique ne suit pas strictement le même procédé que celle d'une fibre conventionnelle à saut d'indice [137]. Pour déterminer des valeurs réalistes de  $L_c$  et  $\sigma$  pour nos fibres, nous devons donc nous appuyer sur des résultats de mesures de taille transverse réalisée sur une fibre à cristal photonique à cœur creux tel que la nôtre.

De telles données peuvent être obtenues de la référence [155], ayant notamment mesuré le diamètre externe, durant son tirage, d'une fibre à la structure et aux dimensions caractéristiques relativement proches à la nôtre<sup>7</sup>. Nous pouvons donc raisonnablement penser que les statistiques issues de ces mesures peuvent s'appliquer pour notre fibre d'étude.

L'écart-type des fluctuations de diamètre mesurées sont de 0.15% vis-à-vis de sa dimension moyenne.

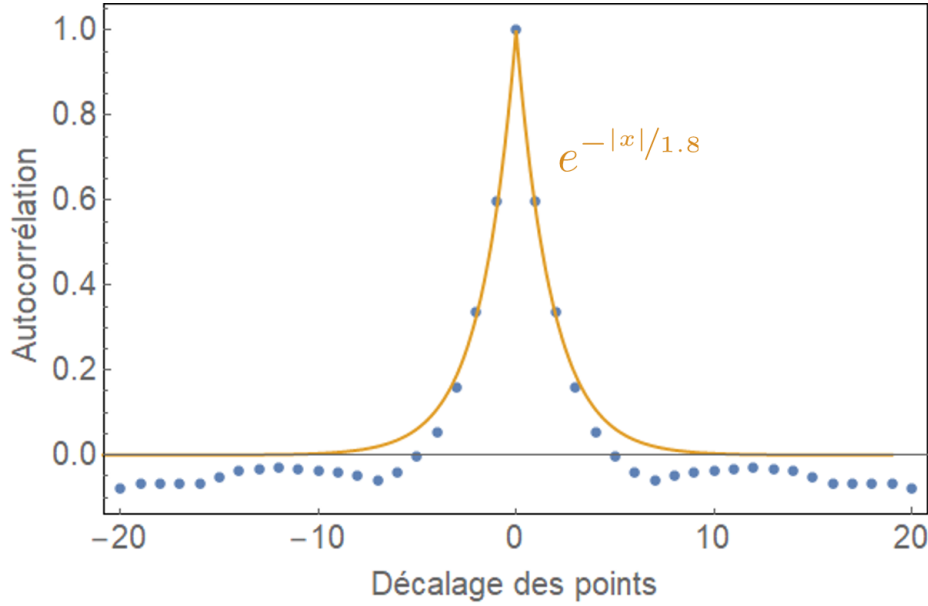
6. La référence [158] présente deux modèles (I et II) pour décrire les fluctuations : le premier considère des segments uniformes, tandis que le second est plus adapté à des segments linéaires. Nous nous appuyerons donc sur ce dernier pour appliquer notre modèle à morceaux linéaires.

7. Taille transverse de 195  $\mu m$  ; diamètre de cœur 38  $\mu m$  ; pas de la structure  $\Lambda = 7.8 \mu m$  et ratio  $d/\Lambda = 0.991$ .



Nous rappelons (cf. sous-section 2.3.2) que la variation relative des longueurs d'onde caractéristiques est la même que celle du pas de la structure de la fibre, et donc identique à celle du diamètre. Par ailleurs, la variation relative des fréquences caractéristiques est, en première approximation, égale à celle des longueurs d'onde<sup>8</sup>. Dans nos simulations, nous pourrions donc utiliser un écart-type  $\sigma$  pour la variation la fréquence de dispersion nulle de notre référence égal à 0.15%.

Outre l'écart-type, les données brutes de [155] nous permettent de déterminer  $L_c$  : en ajustant l'autocorrélation des points du set de mesures les plus resserrées spatialement (0.44 m entre chaque point) par une fonction exponentielle (cf. figure 13.3), nous obtenons une longueur de corrélation égale à 1.8 fois la distance entre points de mesures soit  $L_c \simeq 0.8$  m (cf. figure 13.3).



**Figure 13.3** – Ajustement de l'auto-corrélation des données brutes de la référence [155].

À partir de ce jeu de valeurs réalistes pour décrire les fluctuations aléatoires de diamètres de fibres telles que la nôtre, nous pourrions dans la suite simuler des spectres d'émissions crédibles. Avant cela cependant, nous allons adapter le modèle par morceaux à pentes linéaires du  $\Delta k$  de la section 13.1, en une forme équivalente se basant sur l'évolution de la fréquence de dispersion nulle.

### 13.2.2 Variation linéaire du zéro de dispersion

#### Fibre à variation linéaire du zéro de dispersion

Nous rappelons ici la forme (11.6) du terme  $\mathcal{F}$  de la JSI pour une fibre présentant sur toute sa longueur une variation linéaire du désaccord de phase :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \frac{\pi}{4L|\Delta k_L - \Delta k_0|} \left| \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} (2\Delta k_L - \Delta k_0)}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) - \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \Delta k_0}{2\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) \right|^2 \quad (13.6)$$

Pour lier ce modèle à une variation linéaire du zéro de dispersion, nous rappelons que le désaccord de phase décalé est, en première approximation, linéaire vis-à-vis du décalage  $\Delta\omega_{ZDW}$ . Nous notons donc d'après (IV.1) :

$$\begin{aligned} \Delta k_S(x=0) &= \Delta k_0 \simeq \Delta k_{ref} - \Delta\omega_{ZDW_0} d\Delta k \\ \Delta k_S(x=L) &= \Delta k_L \simeq \Delta k_{ref} - \Delta\omega_{ZDW_L} d\Delta k \end{aligned}$$

8. Mais de signe opposé, ce qui ne change rien ici puisque nous considérons des fluctuations relatives aléatoires centrées en 0.

avec  $\Delta\omega_{z_{DW_0}}$  et  $\Delta\omega_{z_{DW_L}}$  l'écart de la fréquence de dispersion nulle par rapport à sa valeur de référence, au début et au bout de la fibre respectivement. Le long de la fibre, cet écart suit une progression linéaire :

$$\Delta\omega_{z_{DW}}(x) = \Delta\omega_{z_{DW_0}} + \frac{\Delta\omega_{z_{DW_L}} - \Delta\omega_{z_{DW_0}}}{L} x$$

On peut déduire directement de (13.6) la forme analytique de  $\mathcal{F}_{lin}$  en terme de décalage au zéro de dispersion :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \frac{\pi}{4L \left| (\Delta\omega_{z_{DW_0}} - \Delta\omega_{z_{DW_L}}) d\Delta k \right|} \times \left| \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \left( \Delta k_{ref} + (\Delta\omega_{z_{DW_0}} - 2\Delta\omega_{z_{DW_L}}) d\Delta k \right)}{2 \sqrt{(\Delta\omega_{z_{DW_0}} - \Delta\omega_{z_{DW_L}}) d\Delta k}} \right) - \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \left( \Delta k_{ref} - \Delta\omega_{z_{DW_0}} d\Delta k \right)}{2 \sqrt{(\Delta\omega_{z_{DW_0}} - \Delta\omega_{z_{DW_L}}) d\Delta k}} \right) \right|^2 \quad (13.7)$$

Nous rappelons que cette formule n'est valable que pour une non-uniformité non-nulle, c'est-à-dire  $\Delta\omega_{z_{DW_0}} - \Delta\omega_{z_{DW_L}} \neq 0$ .

### Découpage par morceaux à variation linéaire du zéro de dispersion

Pour le découpage de la fibre par morceaux linéaire, en  $\Delta\omega_{z_{DW}}$  cette fois-ci, nous reprenons directement l'équation (13.3) :

$$f(\omega, \omega') = \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^N \sqrt{i \frac{\pi \Delta L_j}{\Xi_j}} e^{\frac{b^2}{a}} \left( \begin{array}{c} \text{Erf} \left( \frac{\Delta k_{L_j} (2L_j - L_{j-1}) - \Delta k_{L_{j-1}} L_j}{2 \sqrt{i \Delta L_j \Xi_j}} \right) \\ - \text{Erf} \left( \frac{\Delta k_{L_j} L_{j-1} + \Delta k_{L_{j-1}} (L_j - 2L_{j-1})}{2 \sqrt{i \Delta L_j \Xi_j}} \right) \end{array} \right)$$

Où :

$$\frac{b^2}{a} = -\frac{i \left( \Delta k_{L_{j-1}} L_j - \Delta k_{L_j} L_{j-1} \right)^2}{4 \Delta L_j \Xi_j}$$

Pour chaque position  $L_j$  séparant le  $j$ -ème tronçon du  $(j+1)$ -ième (cf. figure 13.2), nous avons :

$$\Delta k_{L_j} \simeq \Delta k - \Delta\omega_{L_j} d\Delta k$$

Où pour condenser la notation nous notons  $\Delta\omega_{L_j} \equiv \Delta\omega_{z_{DW}}(L_j)$  le décalage du zéro de dispersion à la position  $L_j$ . Pour un tronçon  $j$  la pente de son décalage sera notée  $\Omega_j \equiv \Delta\omega_{L_j} - \Delta\omega_{L_{j-1}}$ , de sorte que  $\Xi_j = \Delta k_{L_j} - \Delta k_{L_{j-1}} = -\Omega_j d\Delta k$ .

On peut directement en déduire :

$$f(\omega, \omega') = \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^N \sqrt{i \frac{\pi \Delta L_j}{\Xi_j}} e^{\frac{b^2}{a}} \left( \begin{array}{c} \text{Erf} \left( \frac{\Delta k_{ref} \Delta L_j - d\Delta k (\Delta\omega_{L_j} \Delta L_j + \Omega_j L_j)}{2 \sqrt{i \Delta L_j \Xi_j}} \right) \\ - \text{Erf} \left( \frac{\Delta k_{ref} \Delta L_j - d\Delta k (\Delta\omega_{L_{j-1}} \Delta L_j + \Omega_j L_{j-1})}{2 \sqrt{i \Delta L_j \Xi_j}} \right) \end{array} \right) \quad (13.8)$$

Avec :

$$\frac{b^2}{a} = -\frac{i \left( \Delta k_{ref} \Delta L_j - d\Delta k (\Delta L_j \Delta\omega_{L_j} - L_j \Omega_j) \right)^2}{4 \Delta L_j \Xi_j}$$

Enfin nous rappelons que (13.8) n'est valable que pour des tronçons non uniformes ( $\Xi_j \neq 0$ ). Dans le cas contraire on aura  $\Delta k_{L_j} = \Delta k_{L_{j-1}} = \Delta k_j$ , et nous utiliserons alors dans nos calculs numériques la solution présentée en 13.1.1.

À partir de cette formulation, nous pouvons à présent exploiter le modèle de distribution aléatoire exposé en sous-section 13.2.1 pour simuler le spectre d'émission de paires de fibres typiques.

### 13.2.3 Simulations de spectres de fibres typiques

Notre modèle d'une fibre décrite par morceaux à variation linéaire du zéro de dispersion, associé à sa distribution aléatoire suivant des paramètres de fibres réelles, nous donne à présent les moyens de simuler des profils typiques de fibres et leurs spectres d'émission de paires.

Nous commençons par simuler la variation du zéro de dispersion sur une fibre longue de plusieurs centaines de mètres, dont nous extrayons une section de dix mètres<sup>9</sup> de laquelle nous présentons le profil en décalage du zéro de dispersion dans la figure 13.4. La distance entre deux points de la simulation est fixé à un centimètre, de façon à disposer d'une résolution suffisante vis-à-vis de la longueur de corrélation ( $L_c \simeq 0.8$  m), sans trop rallonger nos temps de calcul. Hormis le profil transverse, tout les autres paramètres utilisés dans ces simulations correspondent à notre fibre de référence (cf. Table 2.1).

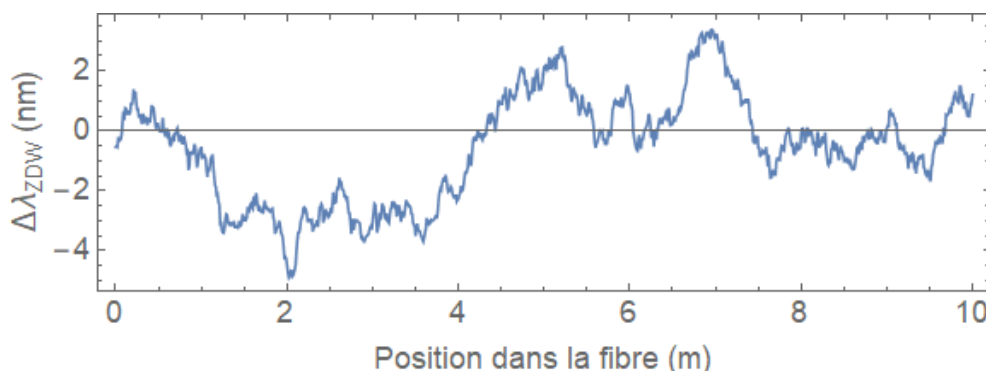


Figure 13.4 – Distribution simulée du décalage du zéro de dispersion sur dix mètres de fibre.

Nous pouvons en premier lieu observer que d'une section de fibre de 1 m à l'autre, le décalage moyen du zéro de dispersion peut varier de quelques nanomètres. Ainsi, même entre des morceaux de fibres tirées d'une même bobine (et donc d'un même tirage de fibre), nous pouvons observer un décalage global de la courbe de dispersion. Nous rappelons que dans notre cas les résultats des mesures de dispersion, initialement faites sur un autre morceau de fibre, ont dû être recalés de +3.5 nm (cf. sous-section 2.1.1) pour correspondre à nos longueurs d'onde moyennes d'émission. Il est donc nécessaire d'être particulièrement prudent lors du passage d'un morceau de fibre à l'autre, et de garder en tête que la courbe de dispersion (et donc la position du zéro de dispersion et des longueurs d'onde d'émission) peut notablement différer entre eux<sup>10</sup>.

Nous noterons sur la figure 13.4 que le décalage du zéro de dispersion ne dépasse pas les 4 nm en absolu (tendance qui se retrouve sur les centaines de mètres de fibre initialement simulés), soit une variation de l'ordre de 0.45 % vis-à-vis de notre référence à 899.5 nm, ce qui correspond à une variation maximale de  $\pm 6.3$  nm et  $\pm 5.6$  nm pour  $\lambda_{s_0}$  et  $\lambda_{i_0}$ , respectivement.

Or comme nous l'avons vu en sous-section 11.2.2, pour une fibre à profil linéaire, un décalage de 0.01 % du zéro de dispersion est le seuil à partir duquel une différence notable s'observe avec le cas uniforme, tandis qu'au delà de 0.1 % le spectre s'étale sur plusieurs nanomètres de large et voit son amplitude au pic décroître de plus d'un ordre de grandeur. L'amplitude des fluctuations que nous observons sur la figure 13.4 indiquent donc clairement que l'approximation de l'uniformité n'est pas applicable pour des longueurs de fibre typiques.

9. Ceci correspond à la longueur typique des bobines de fibres fournies par *NKT Photonics*, notre fibre d'étude (d'environ un mètre) étant issue de l'une d'elles.

10. Nous soulignons toutefois que certaines sections d'un mètre dans la simulation sont pratiquement linéaires (par exemple celle allant de 0 à 1 mètre ou de 4 à 5 mètres dans la figure 13.4), ce qui justifie d'autant plus l'intérêt de notre modèle par morceaux linéaires.

Pour comparer directement nos simulations à notre fibre nous découpons le profil de la figure 13.4 en tronçons d'un mètre de long, correspondant à la longueur de notre fibre d'étude. Nous représentons en figure 13.5 trois profils différents de fibres et leurs spectres d'émission de paires associés.

Nous notons en premier lieu une grande variabilité d'une fibre à l'autre, avec des spectres très chaotiques. La longueur de corrélation des fluctuations de taille transverse étant plus courte que la longueur de la fibre, nous retrouvons des variations rapides de diamètre et donc du zéro de dispersion dans les profils tracés. Celles-ci peuvent être en moyenne proche de 0, comme c'est le cas pour les fibres A ou C (cf. figures 13.5a et 13.5c), toutefois le spectre final résulte de l'interférence de termes de phase qui, de manière générale, ne se compensent pas mutuellement.

L'importance de cet effet d'interférences est souligné, d'une part par l'étalement des spectres sur plus de 10 nanomètres de large, soit plus du double que ce que nous avons pu obtenir dans notre simulation d'une fibre de profil linéaire (cf. figure 11.2); d'autre part par des amplitudes maximum des spectres deux fois plus faibles pour ces fibres aléatoires que pour la linéaire ( $\mathcal{F} = 0.1$  au maximum ici). Cette constatation s'explique du fait que nous observons ici des non-uniformités un ordre de grandeur plus importante (avec  $\Delta\lambda_{ZDW}$  pouvant atteindre plusieurs nanomètres) que pour la non-uniformité de la fibre linéaire simulée ( $\Delta\lambda_{ZDW} = \pm 0.5$  nm).

On peut également relever sur les spectres tracés en figures 13.5 que les oscillations des spectres se montrent plus faibles pour des longueurs d'onde se rapprochant du zéro de dispersion (899.5 nm). On retrouve ici l'effet, dans l'expression du désaccord de phase décalé (13.4), de pondération du terme rendant compte de la non-uniformité ( $\Delta\omega_{ZDW}$ ) par la différence des vitesses de groupe ( $d\Delta k \simeq 2\beta^{(1)}(\omega_{p_0}) - \beta^{(1)}(\omega_s) - \beta^{(1)}(\omega_i)$  en première approximation) :  $\omega_{p_0}$  est proche de  $\omega_{ZDW}$ , et plus  $\omega_s$  et  $\omega_i$  s'en rapprochent, plus  $d\Delta k$  sera faible et l'effet de la non-uniformité moindre.

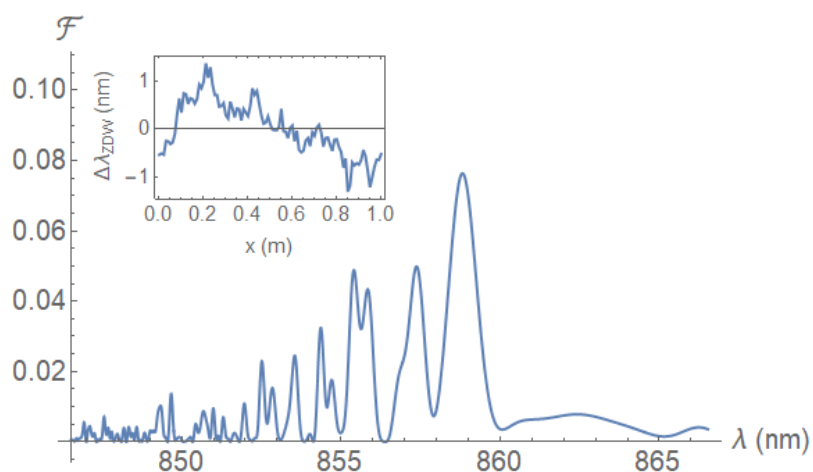
Au vu de l'ordre de grandeur des fluctuations de la position du zéro de dispersion obtenues (0.3%), plus grande d'un ordre de grandeur que ce que nous avons utilisé en sous-section 11.2.3 ( $\Delta\lambda_{ZDW} = \pm 0.5$  nm soit environ  $\pm 0.05\%$ ) pour mettre en évidence la non-réciprocité du spectre induite par la non-uniformité, nous nous attendons ici à une très forte différenciation du spectre selon le sens de propagation.

Nous traçons en figure 13.6 le spectre émis pour une fibre aléatoire, cette fois-ci intégré sur nos filtres de détection suivant la méthode décrite en sous-section 7.4.1, et ce pour les deux sens de propagation.

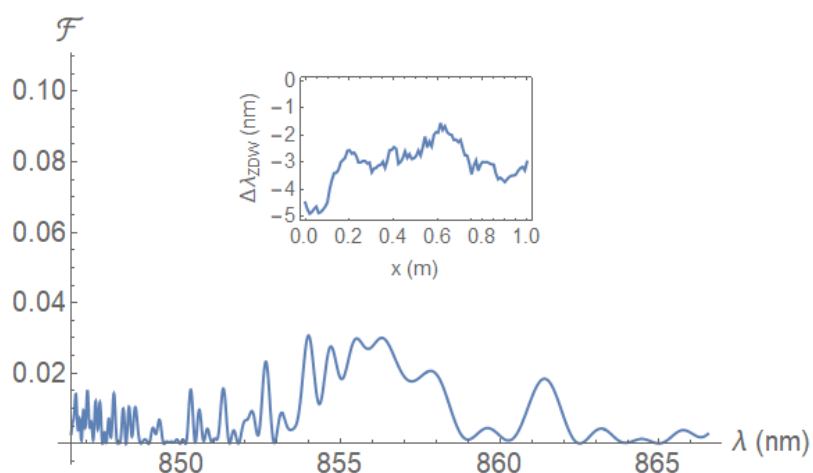
Comme attendu, les spectres se montrent complètement différents entre les deux sens de propagation. Au point que même l'usage de filtres, solution déjà évoquée en section 12.2 pour limiter la dégradation de la visibilité des paires du fait de la non-réciprocité, se révélerait ici pratiquement inutile.

Au vu de ces simulations, pour une fibre à cristal photonique fabriquée de façon à être uniforme, nous voyons que des fluctuations de taille transverse résiduelles, propres aux imperfections du processus de tirage, subsistent. Vis-à-vis de la génération de paires de photons, particulièrement sensible aux fluctuations d'accord de phase et donc de diamètre de la fibre, l'amplitude de ces fluctuations et les distances caractéristiques sur lesquelles elles s'étaient sont extrêmement préjudiciables au spectre d'émission. Non seulement ce dernier voit son amplitude au pic fortement décroître vis-à-vis d'une fibre parfaitement uniforme, mais il s'étale sur des plages de fréquences pouvant atteindre plusieurs nanomètres voire des dizaines de nanomètres.

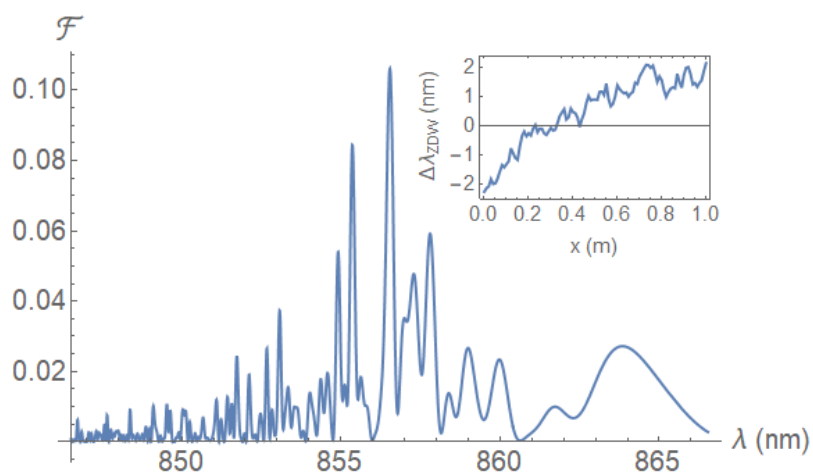
De plus, pour une structure et des paramètres de fibre fixés, il est *a priori* impossible de prédire à l'avance le spectre d'émission d'une section de fibre sans connaître le profil exact suivi par son diamètre sur sa longueur. Puisque nous ne disposons pas de l'information nécessaire sur le profil de notre fibre, nous ne sommes pas en mesure de simuler son spectre associé. Nous noterons toutefois que nous retrouvons le même ordre de grandeur de taux d'émission de paires que pour nos résultats expérimentaux (cf. figure 10.1), soit plusieurs dizaines de paires émises par seconde par la fibre, contre les centaines de paires émises par seconde dans le cas purement uniforme (cf. figure 7.4).



(a) Spectre de la fibre A : premier mètre de la section en figure 13.4.

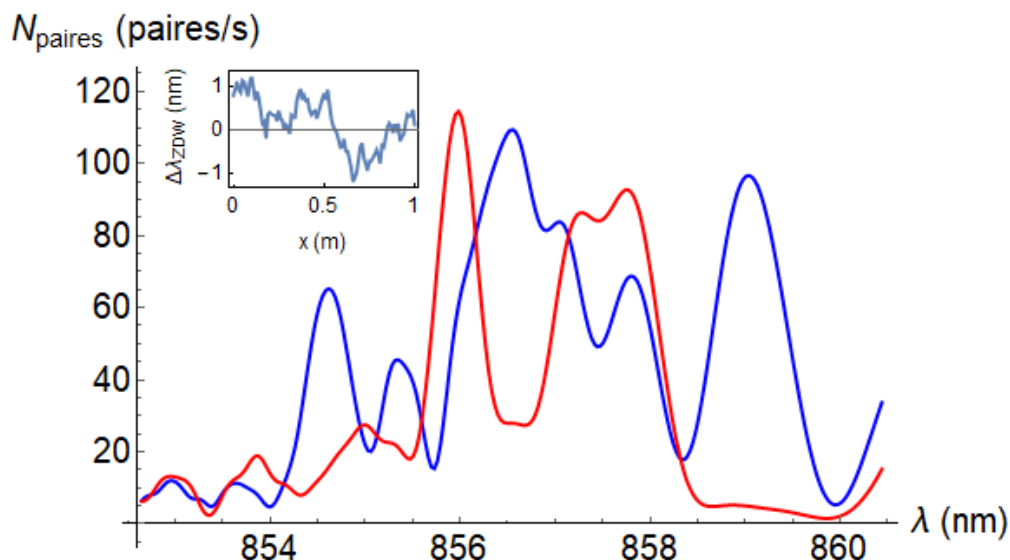


(b) Spectre de la fibre B : morceau entre 2 et 3 mètres de la section en figure 13.4.



(c) Spectre de la fibre C : morceau entre 4 et 5 mètres de la section en figure 13.4.

**Figure 13.5** — Terme  $\mathcal{F}$  suivant la conservation de l'énergie pour des fibres longues d'un mètre. En encarts les profils transverse bruités des fibres, en terme de décalage de la longueur de dispersion nulle.



**Figure 13.6** – Spectre d’émission de paires pour une fibre dont le diamètre est affecté d’un bruit aléatoire, pour les deux sens de propagation.

Enfin, le profil des fibres étant généralement dominé par des fluctuations aléatoires, leurs spectres se montrent nécessairement non-réciproques vis-à-vis de la direction de propagation, comme nous pouvons le voir en figure 13.6. Ceci menant à une forte dégradation de la qualité de l’intrication en polarisation des paires dans une boucle Sagnac.

En définitive, le modèle de la non-uniformité présenté ici rend non seulement compte de l’aspect du spectre d’émission expérimental que nous avons obtenu, en remettant en cause l’hypothèse communément admise de l’uniformité, mais met également en évidence la non-réciprocité résultante du spectre d’émission.

Néanmoins, sur ce dernier point, une solution peut être trouvée. En apposant intentionnellement, dès la fabrication de la fibre, une non-uniformité, symétrique vis-à-vis du sens de propagation, et de plus forte amplitude que les fluctuations aléatoires inhérentes à la fabrication, il est possible de retrouver une réciprocité dans le profil d’émission.

### 13.3 Émission réciproque dans une fibre de profil transverse symétrique

Puisque la non-réciprocité du spectre d’émission de paires de photons est une conséquence directe de la distinguabilité des deux sens de propagation dans la fibre, la solution la plus évidente est de fabriquer une fibre aussi symétrique que possible.

Nous rappelons que pour une fibre initialement voulue uniforme, cette symétrie est perdue du fait d’imperfections inhérentes au processus de tirage, qui impliquent l’apparition des fluctuations dans le diamètre de la fibre, décrites dans la section précédente.

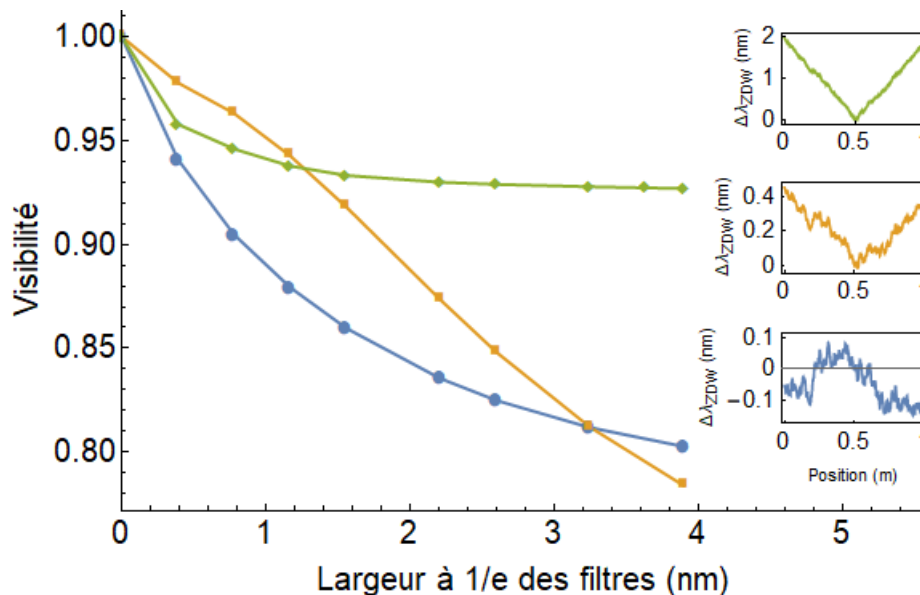
Toutefois, en imposant, lors du tirage, une non-uniformité cette fois-ci contrôlée et de plus forte amplitude que ces fluctuations, nous nous attendons à ce que son effet sur le spectre l’emporte. En nous assurant de plus que cette non-uniformité voulue soit symétrique, nous pouvons alors espérer retrouver une réciprocité d’émission des paires.

Pour tester cette idée, nous utiliserons la forme symétrique la plus simple (hormis la ligne uniforme) pour un profil, soit un triangle. Pour assurer la symétrie, sa pointe se positionne au centre de la fibre, au niveau duquel le décalage du zéro de dispersion est nul. Le décalage du zéro de dispersion, identique aux deux extrémités de la fibre, pourra alors être augmenté dans nos simulations de façon à élever l'amplitude de la non-uniformité triangulaire forcée.

À celle-ci, nous ajoutons des fluctuations aléatoires propres au tirage des fibres à cristaux photoniques (les mêmes pour chaque amplitude de triangle), dont le modèle de distribution a été introduit en sous-section 13.2.1.

Cette fois-ci, au lieu de tracer les spectres dans les deux sens de propagation pour chaque fibre ainsi simulée, nous calculerons directement la visibilité des paires dans un montage de type Sagnac (cf. chapitre 12), qui permet de quantifier directement la non-réciprocité d'émission par son impact sur l'état d'intrication des paires.

Afin de mettre en lumière l'intérêt d'imposer une non-uniformité symétrique de forte amplitude, nous traçons en figure 13.7 la visibilité en fonction de la largeur spectrale des filtres<sup>11</sup>, pour trois amplitudes de triangles croissantes (exprimées en terme de décalage de la longueur d'onde de dispersion nulle aux extrémités de la fibre).



**Figure 13.7** – Visibilité en fonction de la largeur à  $\frac{1}{e}$  des filtres utilisés, pour des profils en triangle d'amplitude croissante, bruités par une même distribution aléatoire. Les filtres sont centrés aux longueurs d'onde respectant la conservation de l'énergie et l'accord de phase pour la fibre uniforme de référence (cf. Table 2.1).

Nous noterons que nous retrouvons pour la fibre bruitée avec un triangle d'amplitude de 0.5 nm (courbe jaune dans la figure 13.7) le même ordre de grandeur de visibilité que pour le cas d'une fibre linéaire avec un décalage total de 0.1 nm du zéro de dispersion entre l'entrée et la sortie de la fibre (courbe verte dans la figure 12.4). Nous obtenons donc un bon accord entre les deux cas de figure. Cependant en augmentant l'amplitude du triangle, au lieu de voir drastiquement chuter la visibilité, comme ce fut le cas d'une plus grande non-uniformité linéaire (cf. figure 12.4), ici au contraire la perte en visibilité reste relativement faible, même lorsque la taille des filtres augmente.

11. Du fait du long temps nécessaire au calcul de la visibilité pour les fibres présentant des fluctuations aléatoires de diamètre (le calcul d'un point pouvant prendre de plusieurs heures à plus d'une journée pour les plus grandes largeurs de filtres), nous nous contenterons ici de tracer quelques points nous donnant l'allure générale des courbes.

Nous voyons donc que plus l'amplitude de la non-uniformité triangulaire est forte, plus la visibilité est robuste vis-à-vis de l'élargissement des filtres. Autrement dit, avec une plus forte amplitude de cette non-uniformité imposée (et symétrique), il est possible d'élargir davantage les filtres, et donc augmenter le taux de paires détectées, sans dégrader notablement la visibilité des paires.

Nous noterons toutefois que cet effet ne se voit pas pour de petites largeurs spectrales de filtres, où la sensibilité à la différence de phase de la JSA entre les deux sens de propagation est forte. Nous rappelons en effet que dans l'approximation de filtres infiniment fins, la visibilité s'obtient simplement par (12.3) :

$$V \simeq \cos(\varphi_{\text{JSA}\rightarrow} - \varphi_{\text{JSA}\leftarrow})$$

Alors qu'à plus grande largeur de filtres cette sensibilité est gommée par un effet de moyenne (intégration du cosinus). Ainsi à filtres fins, les inconvénients de la non-uniformité que nous imposons (étalement du spectre et fluctuation de la phase de la JSA) l'emportent sur ses avantages (symétrisation du spectre et récupération d'une réciprocité d'émission).

Toutefois nous montrons ici qu'une forte visibilité peut être conservée avec de larges filtres (et donc un taux de détection des paires important) grâce à une symétrisation du spectre. En définitive, l'effet négatif de la non-uniformité sur l'intrication des paires peut être compensée par une ingénierie du profil transverse de la fibre à sa fabrication. De plus, l'étalement spectral induit par la non-uniformité n'est plus un problème en soi dès lors que nous pouvons élargir les filtres de détection sans dégrader la visibilité.

La fabrication de guide de profils transverses symétriques constitue donc une solution viable au problème de la non-uniformité que nous avons mis en évidence dans ces travaux.





# Conclusions et perspectives



Les travaux de recherche décrits dans ce manuscrit s'inscrivent dans la continuité des premiers développements (tant théoriques que expérimentaux) autour de notre source de paires de photons à base d'une fibre à cristal photonique de cœur creux et remplie d'acétone deutérée ; développements ayant fait l'objet de la thèse de Margaux Barbier [52]. Ceux-ci ont permis la première démonstration de l'intérêt de ce type d'architecture, par la réduction du bruit de diffusion Raman dans l'émission de paires corrélées en temps par rapport à une fibre de silice, et le développement d'un modèle théorique décrivant l'émission de paires par mélange à quatre ondes dans la fibre.

Si ce dernier permet une description qualitative correcte de ce phénomène, nous avons pu montrer dans le cadre des travaux de la présente thèse que les prédictions de ce modèle, de même que pour la plupart des modèles dépeignant la génération spontanée de paires dans les milieux non linéaires (que ce soit au second ou troisième ordre de non-linéarité), ne permettent pas de rendre compte quantitativement de cette émission.

Nous avons donc opéré une refonte complète de notre modèle théorique en nous basant, en terme de champ fondamental pour la quantification, sur le champ d'induction électrique  $\vec{D}$  plutôt que le champ électrique  $\vec{E}$ , suivant les recommandations de la référence [59]. Ce changement fut également l'occasion d'ancrer notre modèle sur des bases plus fondamentales, notamment en *déduisant* l'Hamiltonien d'interaction de notre système à partir d'une approche en mécanique Lagrangienne, plutôt que de le poser directement.

Outre ces approfondissements théoriques, nos travaux ont comporté une forte part expérimentale, ayant essentiellement consisté en une étude systématique des propriétés d'émission de notre source. Nos principaux résultats expérimentaux ont ainsi consisté à balayer le spectre d'émission de nos paires en fonction de la longueur d'onde des photons générés. Nos filtres de détection présentant une grande précision de réglage et de fines largeurs spectrales, nous avons été en mesure de retracer minutieusement ce spectre.

Ces résultats se sont alors montrés en inconsistance flagrante avec nos prédictions théoriques initiales vis-à-vis de la forme attendue pour le spectre : un pic d'émission unique, d'une largeur de l'ordre du nanomètre. En effet, nous avons été en mesure de relever la génération de paires sur plusieurs nanomètres de large, avec une structure de spectre s'éloignant largement de la forme en sinus cardinal attendue et un taux d'émission plus faible de plus d'un ordre de grandeur.

Ces différences ne pouvant s'expliquer par la variation de paramètres environnementaux de la fibre, nous en sommes venu à nous intéresser à la non-uniformité de la fibre, i.e. la variation de son diamètre sur sa longueur, pour rendre compte de l'effet observé. Nous avons donc entrepris d'étendre notre modèle pour l'adapter à la description de fibres non uniformes. À partir d'une forme analytique pour une non-uniformité de fibre suivant une pente linéaire, nous avons mis en évidence les principales conséquences des non-uniformités sur l'émission des paires : un étalement du spectre, impliquant son élargissement, sa déformation et une diminution de son maximum ; mais aussi et surtout sa non-réciprocité selon le sens de propagation dans la fibre.

Notre fibre (HC-1550-PM-01 de *NKT Photonics*) ayant initialement été conçue pour être uniforme, seules les variations de diamètre dues aux imperfections dans le processus de tirage peuvent être responsables de la forme du spectre observé. Afin de modéliser ces variations, nous avons complété notre modèle par une description par morceaux des fibres, nous permettant de simuler numériquement le spectre de n'importe quel profil transverse.

Toutefois, faute de disposer des moyens techniques pour connaître précisément le profil de notre fibre, nous nous sommes basés, pour simuler les spectres de tronçons typiques, sur un modèle de distribution aléatoire des fluctuations de diamètre, associé à des valeurs caractéristiques de ces fluctuations

---

mesurées pour le même type de fibres que la nôtre (HC-PCF). Nos simulations ont ainsi mis en évidence que même les faibles variations de diamètre des fibres (0.3% au maximum), inhérentes à leur processus de fabrication, suffisent à induire de fortes déformations dans leur spectres d'émission. En outre, les spectres simulés pour des fibres typiques montrent une bonne adéquation avec nos résultats expérimentaux, tant vis-à-vis du taux maximum d'émission de paires que du niveau d'élargissement du spectre. Ces résultats confirment ainsi notre intuition initiale attribuant la déformation du spectre aux non-uniformités de la fibre.

Nous montrons ainsi que l'accord de phase, qui définit en grande part les longueurs d'onde d'émission des paires dans le mélange à quatre onde, est extrêmement sensible au changement du diamètre de la fibre. Dès lors, l'approximation d'uniformité ne peut plus être tenue pour valide.

Par ailleurs, nous avons démontré que, de la non-réciprocité du spectre d'émission induite par la non-uniformité, découle de lourdes conséquences sur l'intrication en polarisation des paires lors de l'intégration de la source dans un montage de type interféromètre de Sagnac. Un tel montage, qui fut réalisé lors de cette thèse pour y incorporer notre fibre, fut mis provisoirement de côté au vu de nos prédictions théoriques. En effet, la distinguabilité des deux sens d'émission réduit le contraste des franges d'interférence entre les amplitudes de probabilité de génération respectives. Nous avons montré que ce contraste, quantifié par la visibilité des paires qui rend compte de la qualité de l'intrication, se dégrade lorsque la non-uniformité se fait plus forte. Le seul filtrage de la zone de recouvrement des spectres, qui par ailleurs réduit le taux de paires détectées, ne suffit pas à récupérer une réciprocité d'émission.

Nous avons alors proposé une solution simple consistant à forcer la symétrisation des deux sens d'émission, en imposant une non-uniformité symétrique sur le profil transverse de la fibre. Nous avons montré que pour un profil triangulaire symétrique qui serait imposé à la fabrication, son effet l'emporte sur les fluctuations de faible amplitude de sorte que la visibilité est beaucoup plus robuste à l'élargissement des filtres de détection. Ainsi il est possible d'englober par ces filtres une large part du spectre d'émission, même si celui-ci est élargi du fait de la non-uniformité, et donc augmenter le taux de paires détectées tout en conservant une bonne qualité d'intrication.

En définitive, notre modèle permet de simuler les spectres de fibres, pour n'importe quel profil transverse, et peut en ce sens tant servir à leur conception pré-fabrication qu'à leur modélisation post-fabrication.

Enfin, nous avons tenu à garder notre modèle théorique aussi général que possible, de sorte qu'il puisse s'appliquer à d'autres phénomènes non linéaires (que ceux-ci soient d'ordre 3 ou non), mais aussi à d'autres types de milieux que les fibres puisque l'approche par morceaux que nous avons mis en avant permet de modéliser toute variation du désaccord de phase, quel que soit son origine.

Nous pouvons constater que l'étude de la non-uniformité des sources non linéaires de paires de photons est une thématique de recherche actuelle [17, 138] dans laquelle s'inscrivent les travaux que nous avons exposé. Nous soulignons néanmoins que notre approche analytique permet de faire ressortir les effets de la non-uniformité, et notamment la non-réciprocité d'émission qui n'a, à notre connaissance, jamais été mise en évidence jusqu'à présent.

## Perspectives d'approfondissements du modèle

Si le refonte de notre modèle sur la base du champ  $\vec{D}$  ne bouleverse pas ses prédictions (qualitativement parlant), la prise en compte de la non-uniformité ouvre la voie à une étude plus poussée de son influence, manifestement majeure, sur le spectre d'émission des paires.

Ainsi, il nous fut possible de mettre en évidence l'effet qualitatif sur le spectre (aplatissement et déformation), néanmoins l'élaboration d'un critère quantitatif pourrait permettre de comparer entre eux les effets de deux non-uniformités différentes. On peut ainsi suggérer de se baser sur une mesure de l'élargissement du spectre, par exemple sur quelle plage spectrale le taux d'émission moyen est atteint. Ou bien d'estimer la vitesse d'évolution du spectre avec le niveau de non-uniformité, par exemple en mesurant la corrélation entre deux spectres de non-uniformités proches.

Par ailleurs, l'étude de l'émission de fibres aux profils transverses bruités n'en est qu'à ses débuts, et il serait sans doute intéressant d'évaluer si, pour un même niveau de bruit, la visibilité reste similaire et stable d'une fibre à l'autre, ou au contraire varie fortement. Il serait ainsi possible de poser une limite basse au niveau de visibilité que nous pouvons espérer atteindre, pour un niveau donné d'une non-uniformité imposée lors de la fabrication de la fibre.

D'autre part, seul le profil symétrique triangulaire fut ici testé pour augmenter la visibilité d'une fibre bruitée. Or d'autres profils plus élaborés peuvent être imaginés. En effet, dans le cadre d'élaboration de fibres dites topologiques, des profils symétriques de fibres ont déjà pu être mis en place expérimentalement, tel qu'une forme sinusoïdale [154]. L'étude de l'influence de la forme utilisée pourrait mener à une ingénierie plus fine du spectre d'émission.

Enfin, comme nous l'avons maintes fois mentionné, notre modèle se veut général et applicable à d'autres types de sources de paires de photons. L'étude et la comparaison de l'influence de la non-uniformité entre différents types de guides constitue donc un nouvel axe de recherche pour évaluer leurs performances d'émission de paires. Nous pouvons ainsi citer [138] s'intéressant au problème de la non-uniformité issue d'imperfections de fabrication pour des guides de type PPLN.

Il est important de souligner que la référence sus-citée use d'une formule légèrement différente de celle que nous utilisons ici pour décrire la non-uniformité. La différence, discutée plus en détail en Annexe G, n'est pas triviale et implique notamment l'absence de non-réciprocité des spectres d'émission dans le cas de la formule avancée par [138]. Cette dissemblance nette de comportement constitue un point vérifiable expérimentalement qui permettra ainsi de déterminer laquelle des deux approches est correcte, l'arbitrage sur leurs validités théoriques n'étant pas nécessairement évident.

## Perspectives d'évolutions expérimentales

Notre architecture de source (fibre à cristal photonique remplie de liquide) permet dans sa conception, par le choix conjoint de la structure de la fibre et du liquide, une ingénierie fine de la position des fréquences d'émission des paires. Ainsi, dans le cadre de notre collaboration avec l'équipe Information Quantique & Applications, une source similaire à la nôtre fut développée par Martin Cordier, cette fois-ci pour les longueurs d'onde télécom [60], et pour laquelle la détection expérimentale des paires reste à réaliser.

Par ailleurs, comme nous l'avons vu notre modèle théorique prévoit une non-réciprocité d'émission dans notre fibre non uniforme. La démonstration expérimentale de l'existence de cette caractéristique reste une étape nécessaire pour la validation de notre modèle et de cette prédiction, et demandera sans doute encore beaucoup de jours de manipulation.

Dans le cas où l'émission de notre fibre se montrerait effectivement non-réciproque selon le sens d'émission, le modèle que nous avons exposé augure une symétrisation du spectre d'émission des paires pour les fibres dont le profil transverse est symétrisé. La suite logique pour tester notre modèle consisterait à mesurer le spectre d'émission d'une telle fibre pour ses deux sens de propagation. En premier lieu, une telle mesure pourra être effectuée sur des nanofibres, dont la fabrication est réalisée en interne du groupe Manolia au Laboratoire Charles Fabry.

---

Une fois la symétrisation du spectre d'émission des paires vérifiée, l'étude de leur intrication en polarisation pourra être accomplie en intégrant la fibre au montage en boucle Sagnac mis en place durant cette thèse.

En outre, plutôt que la détection directe du taux d'émission de paires, comportant son lot de contraintes expérimentales (sensibilité au bruit, faible compte de photons), une mesure de l'intensité spectrale jointe pourra être obtenue par technique de tomographie par émission stimulée [104]. Cette dernière prodigue un signal exploitable plus fort et un balayage de l'intensité spectrale jointe bien plus rapide, mais nécessite une source laser supplémentaire, accordable aux longueurs d'onde signal (ou idler). Cette technique se plaçant, comme son nom l'indique, dans un régime d'émission stimulé, un traitement théorique adapté devra d'autre part être élaboré.

Du reste, un aspect pratique qui n'a pas été évoqué dans ce manuscrit pourra être abordé. En effet, le remplissage de notre fibre passe par la connexion de ses extrémités à des cuves massives contenant le liquide non linéaire. Or la dimension de ces cuves constitue un frein considérable à la praticité d'utilisation de notre source. Pour améliorer sa compacité, des microcuves (dont les dimensions sont de l'ordre du centimètre) ont été développées en interne du groupe Manolia. Le câblage et le test de fibres usant de ces microcuves constitua une part du travail expérimental de ce travail de thèse. Toutefois, les fuites du liquide (l'acétone corrodant la colle faisant tenir la cuve) constituèrent une limite majeure à leur utilisation, les rendant de fait inexploitable sur le long terme. Une piste à explorer pour résoudre ce problème technique serait d'utiliser d'autres types de liquides pour remplir la fibre, moins agressifs, tels des alcools ou des fluorocarbones.

Outre un changement du liquide, un point d'évolution intéressant serait de considérer d'autres structures de fibres, telles que les fibres Kagomé ou tubulaires. En effet, il a pu être montré [61] que les fibres dont le guidage se base sur l'*inhibited coupling* peuvent présenter plusieurs bandes de transmissions, pouvant s'étendre de l'infrarouge à l'ultraviolet, chacune disposant de son propre zéro de dispersion. Les possibilités d'accord de phase s'en trouvent alors d'autant plus élargies, laissant potentiellement accès au mélange à quatre ondes pour la génération de paires de photons très distants en fréquence.

## Vers le *Bragg scattering* et la conversion en fréquence de photons uniques

La génération de paires de photons n'est pas la seule utilisation possible de notre source pour les télécommunications quantiques. En effet, une autre manifestation du mélange à quatre ondes, le *Bragg scattering*, permet potentiellement la conversion en fréquence de photons uniques, sans bruit, et en conservant toutes leurs propriétés quantiques [77, 74, 75, 76].

Pour sa mise en pratique expérimentale, le processus de *Bragg scattering* nécessite l'usage de deux faisceaux de pompe accordables en fréquence et, dans le cadre d'un régime pulsé, synchronisés. Bien que nous ne disposions que d'un laser Titane-Saphir, une telle configuration est accessible par l'usage d'un oscillateur paramétrique optique (OPO), qui serait pompé par notre laser pulsé en extrayant une partie du faisceau en début de chaîne. Ce montage est déjà présent dans notre expérience, même s'il ne fut pas exploité au cours de ces travaux de thèse.

D'autre part, notre modèle, général dans son approche du mélange à quatre ondes, pose déjà les bases de la description de ce phénomène, les termes de l'Hamiltonien associés étant donnés en annexe D.

Tous les éléments de départ nécessaires à l'étude de la conversion de photons uniques par mélange de type *Bragg scattering* sont ainsi déjà posés, laissant ouverte cette piste de recherche dans le futur.

# Annexes





# Annexe A

## Définitions et Notations

On s'appliquera dans cette annexe à définir les notations et les outils mathématiques utilisés dans le reste de ce document, et à détailler leurs propriétés qui nous seront utiles.

### A.1 Conventions d'écriture

Dans tout ce document, les vecteurs sont notés avec une flèche ( $\vec{E}$ ), tandis que les tenseurs sont notés en gras ( $\boldsymbol{\chi}$ ), et les opérateurs dénotés par un chapeau ( $\hat{H}$ ). Pour une grandeur complexe  $A$ , son conjugué sera noté  $A^*$ . Enfin, la transformée de Fourier d'une fonction  $F$  pourra être notée<sup>1</sup>  $\text{TF}_i[F]$ , ou avec la notation compacte  $\tilde{G}$  pour la transformée de Fourier d'une fonction temporelle  $G$ .

Le produit scalaire entre grandeurs vectorielles est représenté<sup>2</sup> par un point  $\cdot$  tandis que leur produit vectoriel se note  $\wedge$ . Le symbole  $\times$  ne représentant que le produit usuel entre grandeurs scalaires. Le produit scalaire est ici défini comme sesquilineaire à gauche, soit la propriété :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i a_i^* \times b_i$$

avec les  $a_i$  et  $b_i$  les composantes de  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , respectivement.

Pour alléger la notation, les raccourcis d'écriture suivants sont faits :

**Intégrales** Les bornes d'une intégrale allant de  $-\infty$  à  $+\infty$  ne sont pas explicitement notées :

$$\int_i \dots di \equiv \int_{i=-\infty}^{+\infty} \dots di$$

avec  $i$  pouvant être n'importe quelle variable.

Par extension, des intégrales multiples la même écriture condensée peut être utilisée dans le cas d'intégrales sur un volume. Par exemple :  $\iiint_{\vec{r}} \equiv \int_x \int_y \int_z$  avec  $\vec{r}$  le vecteur position dans l'espace.

Nous prenons soin de noter les bornes ou le domaine d'intégration si ceux-ci ne sont pas infinis. Par exemple :

$$\int_L \dots dx \equiv \int_{x=0}^L \dots dx$$

De même pour une intégration  $\iiint_V$  sur un volume défini  $V$ .

---

1. Avec  $i = t$  pour considérer l'espace des temps/pulsations et  $i = \vec{r}$  ou  $i \in \{x, y, z\}$  pour l'espace des positions/impulsions.

2. Dans le formalisme de Dirac utilisé dans notre traitement quantique, le produit scalaire entre deux vecteurs d'état  $|A\rangle$  et  $|B\rangle$  sera noté  $\langle A|B\rangle$  (cf. annexe F.1.1).

Enfin un symbole d'intégrale sans aucune précision de bornes constitue une intégrale indéfinie :

$$\int f(x) dx = F(x)$$

où  $F(x)$  est la primitive de  $f(x)$ .

**Dérivées** La dérivée  $\frac{d}{dx}$  sur une variable  $x$  est notée  $d_x$ .

De même, la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x}$  s'écrit  $\partial_x$ .

La dérivée partielle sur le temps d'une fonction  $f$  peut être indiquée de manière condensée  $\dot{f}$ .

De même, la dérivée seconde pourra être notée  $\ddot{f}$ .

**Tenseurs** Soit le tenseur d'ordre  $n$  obtenu à partir d'un vecteur  $\vec{V}$  :

$$\vec{V}^{\otimes n} = \underbrace{\vec{V} \otimes \dots \otimes \vec{V}}_{n \text{ fois}}$$

avec  $\otimes$  symbolisant le produit tensoriel.

Soit un tenseur d'ordre  $n + 1$ , noté  $\mathbf{T}^{(n)}$ . Nous utilisons la notation condensée  $\mathbf{T}^{(n)} : \underbrace{\vec{V} \dots \vec{V}}_{n \text{ fois}}$  ou

$\mathbf{T}^{(n)} \vec{V}^{\otimes n} \equiv \mathbf{T}^{(n)} : \vec{V}^{\otimes n}$  pour décrire l'application qui à  $\vec{V}^{\otimes n}$  associe un vecteur, tel que :

$$\left( \mathbf{T}^{(n)} : \vec{V}^{\otimes n} \right)_i = \sum_j \dots \sum_k T_{ij\dots k}^{(n)} \underbrace{V_j \times \dots \times V_k}_{n \text{ termes}}$$

Enfin, le repère de l'espace communément utilisé dans ce document correspond à un repère orthonormé  $(x, y, z)$  aux vecteurs unitaires  $\vec{e}_i$ ,  $i \in \{x, y, z\}$  tels que :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y &= \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z &= \vec{e}_x \end{aligned}$$

Par convention, l'axe  $x$  correspond à l'axe longitudinal du guide étudié tandis que les axes  $z$  et  $y$  correspondent à ses axes neutres. Le champ incident est orienté de façon à ce que son champ induction électrique soit polarisé selon l'axe  $z$ .

## A.2 Propriété d'intégration et de dérivation des expressions tensorielles

Soit un vecteur  $\vec{A}$  et un tenseur  $\mathbf{O}^{(n)}$  de rang  $n + 1$ . Si  $\mathbf{O}^{(n)}$  est symétrique par permutation d'indices<sup>3</sup>, on a la relation :

$$\frac{d}{d\vec{A}} \left( \vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}^{\otimes n} \right) = (n + 1) \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}^{\otimes n} \Leftrightarrow \int_0^{\vec{A}'} \left( \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}'^{\otimes n} \right) \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{n + 1} \vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}^{\otimes n}$$

Pour démontrer cette propriété d'intégration/dérivation des expressions tensorielles que nous manipulons, nous posons la démonstration pour  $n = 2$ , généralisable à l'ordre 1 et aux ordres supérieurs. Soit :

$$\vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(2)} : \vec{A}\vec{A} = \vec{A} \cdot \left( \sum_i \sum_j \sum_k O_{ijk}^{(2)} A_j A_k \vec{e}_i \right) = \sum_{ijk} O_{ijk}^{(2)} A_j A_k A_i$$

où la somme de chaque indice se fait sur les trois composantes spatiales.

On a la dérivée sur  $\vec{A}$  :

$$\frac{d}{d\vec{A}} = \frac{\partial}{\partial A_x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial A_y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial A_z} \vec{e}_z = \sum_l \frac{\partial}{\partial A_l} \vec{e}_l$$

3. Ici tous les termes de champ (vecteurs  $\vec{A}$ ) sont pris au même temps, donc la symétrie de permutation intrinsèque revient à utiliser la symétrie par permutation d'indice simple (toutes présentées dans l'annexe B.6).

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vec{A}} \left( \vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(2)} : \vec{A}\vec{A} \right) &= \sum_l \sum_{ijk} O_{ijk}^{(2)} \frac{\partial}{\partial A_l} (A_i A_j A_k) \vec{e}_l \\ &= \sum_{ijkl} O_{ijk}^{(2)} \left( \frac{\partial A_i}{\partial A_l} A_j A_k + A_i \frac{\partial A_j}{\partial A_l} A_k + A_i A_j \frac{\partial A_k}{\partial A_l} \right) \vec{e}_l \\ \frac{d}{d\vec{A}} \left( \vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(2)} : \vec{A}\vec{A} \right) &= \sum_{ljk} O_{ljk}^{(2)} A_j A_k \vec{e}_l + \sum_{ilk} O_{ilk}^{(2)} A_i A_k \vec{e}_l + \sum_{ijl} O_{ijl}^{(2)} A_i A_j \vec{e}_l \end{aligned}$$

Or si  $\mathbf{O}^{(2)}$  symétrique par permutation d'indices et puisque l'on somme sur toutes les composantes spatiales, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vec{A}} \left( \vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(2)} : \vec{A}\vec{A} \right) &= 3 \sum_{ijk} O_{ijk}^{(2)} A_j A_k \vec{e}_i \\ \frac{d}{d\vec{A}} \left( \vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(2)} : \vec{A}\vec{A} \right) &= 3 \mathbf{O}^{(2)} : \vec{A}\vec{A} \end{aligned}$$

Cette démonstration se généralise directement à l'ordre 1 et aux ordres supérieurs de sorte que :

$$\frac{d}{d\vec{A}} \left( \vec{A} \cdot \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}^{\otimes n} \right) = (n+1) \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}^{\otimes n}$$

Et en prenant son intégrale :

$$\int_0^{\vec{A}'} \left( \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}'^{\otimes n} \right) \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{n+1} \vec{A}' \cdot \mathbf{O}^{(n)} : \vec{A}'^{\otimes n}$$

### A.3 Symbole de Levi-Civita

À plusieurs reprises dans ce document est utilisé le symbole de Levi-Civita en trois dimensions, noté  $\varepsilon_{ijk}$  où  $i, j$  et  $k$  sont des coordonnées de l'espace. Le symbole de Levi-Civita représente un ensemble de nombres ne pouvant prendre que les valeurs  $-1, 0$  ou  $1$ . Il se définit dans un espace cartésien  $\{x, y, z\}$  comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)\} \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(x, z, y), (y, x, z), (z, y, x)\} \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } i = k \end{cases}$$

Autrement dit,  $\varepsilon_{ijk}$  est nul si deux de ses indices sont les mêmes, égal à 1 si ceux-ci suivent l'ordre  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow \dots$ , et égal à  $-1$  autrement.

Le symbole de Levi-Civita est donc antisymétrique par permutation de deux de ses indices.

Par ailleurs, pour un vecteur  $\vec{\phi}$  quelconque, on a les propriétés suivantes pour son rotationnel :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \partial_j \phi_i &= - \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\phi} \right)_k \\ \frac{\partial}{\partial (\partial_j \phi_k)} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{\phi} \right) &= \sum_i \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \end{aligned}$$

avec  $\vec{e}_i$  le vecteur unitaire associé à la coordonnée  $i$ .

## A.4 Définition de la distribution de Dirac

On utilise la définition de la distribution de Dirac proposée par [119], assimilée à une fonction que l'on notera  $\delta(x)$  :

$$\int_x \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

Une définition alternative peut se faire à partir du sinus ou de sa notation complexe :

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{-X}^{+X} e^{ix(t-\tau)} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sin(X(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} = \delta(t-\tau)$$

On voit ici que quand  $t - \tau \rightarrow 0$  la fonction dont on prend la limite tend vers l'infini et que les oscillations du sinus deviennent plus rapide, resserrant le pic à  $t = \tau$ . Enfin, l'intégrale sur  $t$  de  $-\infty$  à  $\infty$  de la fonction est égale à l'unité. On retrouve donc bien là les caractéristiques de la distribution de Dirac.

## A.5 Définitions des Transformées de Fourier

Contrairement à la définition de la distribution de Dirac, celle de la transformée de Fourier peut varier selon les sources. Le choix de la définition tient essentiellement à sa praticité dans les calculs, le tout étant de rester cohérent de bout en bout<sup>4</sup>. Aussi choisissons-nous d'utiliser la même définition que celle des références [119, 118].

Soit une fonction temporelle  $g$  et une fonction spatiale  $f$ , et  $G$  et  $F$  leurs transformées de Fourier respectives (respectivement dans l'espace des fréquences et des impulsions). On définit les transformées de Fourier<sup>5</sup>  $\text{TF}_i$  et les transformées de Fourier inverse  $\text{TF}_i^{-1}$  :

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \text{TF}_t [g] (\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t g(t) e^{i\omega t} dt \\ g(t) &= \text{TF}_t^{-1} [G] (t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\omega G(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ F(\vec{k}) &= \text{TF}_{\vec{r}} [f] (\vec{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{\vec{r}} f(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \\ f(\vec{r}) &= \text{TF}_{\vec{r}}^{-1} [F] (\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{\vec{k}} F(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k} \end{aligned}$$

Ces définitions de la transformée de Fourier ont l'avantage de traiter de la même manière le domaine des temps/positions que celui des fréquences/impulsions. En résulte des définitions de la norme ou du produit de convolution de formes indépendantes de la variable entrant en jeu. De plus, dans ce cadre de définitions la distribution de Dirac correspond bien au neutre de la convolution.

Il est important de faire la distinction avec les définitions utilisées dans [52], qui sert en large part de base aux considérations théoriques et expérimentales présentées ici. Ce changement a été décidé afin d'apporter clarté et simplifications aux calculs théoriques.

Par ailleurs, il est à noter que toutes les fonctions dont nous aurons l'occasion de faire la transformée de Fourier décrirons des signaux réels et seront donc de carré intégrable (appartiennent à l'espace  $L^2$ ).

4. Pour cette raison il est important d'être particulièrement attentif lors de l'usage d'équations tirées de sources différentes. Dans le cas de ce document, l'ensemble des démonstrations du développement théorique ont été faites en se tenant à nos définitions, ce qui nous permet d'éviter ce problème.

5. Nous rappelons que dans cette notation nous avons  $i = t$  pour considérer l'espace des temps/pulsations et  $i = \vec{r}$  ou  $i \in \{x, y, z\}$  pour l'espace des positions/impulsions.

### A.5.1 Propriétés des Transformées de Fourier

Nous rappelons ici quelques propriétés des transformées de Fourier, valides dans le cadre de nos définitions.

#### Translation

$$\begin{aligned} \text{TF}_t [g(t + t_0)] (\omega) &= e^{-i\omega t_0} \text{TF}_t [g(t)] (\omega) & \text{TF}_{\vec{r}} [f(\vec{r} + \vec{r}_0)] (\vec{k}) &= e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \text{TF}_{\vec{r}} [f(\vec{r})] (\vec{k}) \\ \text{TF}_t^{-1} [G(\omega + \omega_0)] (t) &= e^{i\omega_0 t} \text{TF}_t^{-1} [G(\omega)] (t) & \text{TF}_{\vec{r}}^{-1} [F(\vec{k} + \vec{k}_0)] (\vec{r}) &= e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \text{TF}_{\vec{r}}^{-1} [F(\vec{k})] (\vec{r}) \end{aligned}$$

#### Homothétie

$$\begin{aligned} \text{TF}_t [g(at)] (\omega) &= \frac{1}{|a|} \text{TF}_t [g(t)] \left( \frac{\omega}{a} \right) & \text{TF}_{\vec{r}} [f(a\vec{r})] (\vec{k}) &= \frac{1}{|a|^3} \text{TF}_{\vec{r}} [f(\vec{r})] \left( \frac{\vec{k}}{a} \right) \\ \text{TF}_t^{-1} [G(a\omega)] (t) &= \frac{1}{|a|} \text{TF}_t^{-1} [G(\omega)] \left( \frac{t}{a} \right) & \text{TF}_{\vec{r}}^{-1} [F(a\vec{k})] (\vec{r}) &= \frac{1}{|a|^3} \text{TF}_{\vec{r}}^{-1} [F(\vec{k})] \left( \frac{\vec{r}}{a} \right) \end{aligned}$$

#### Conjugaison

$$\begin{aligned} \text{TF}_t [g^*(t)] (\omega) &= (\text{TF}_t [g(t)] (-\omega))^* & \text{TF}_{\vec{r}} [f^*(\vec{r})] (\vec{k}) &= (\text{TF}_{\vec{r}} [f(\vec{r})] (-\vec{k}))^* \\ \text{TF}_t^{-1} [G^*(\omega)] (t) &= (\text{TF}_t^{-1} [G(\omega)] (-t))^* & \text{TF}_{\vec{r}}^{-1} [F^*(\vec{k})] (\vec{r}) &= (\text{TF}_{\vec{r}}^{-1} [F(\vec{k})] (-\vec{r}))^* \end{aligned}$$

## A.6 Définition de normalisation

En conséquence de nos définitions de la transformée de Fourier, une fonction  $f$  définie sur le domaine temporel, spatial ou sur l'un de leurs espaces réciproques, est normalisée si :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t |f(t)|^2 dt = 1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\omega |f(\omega)|^2 d\omega \\ \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{\vec{r}} |f(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = 1 &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{\vec{k}} |f(\vec{k})|^2 d^3\vec{k} \end{aligned}$$

De même pour une fonction définie uniquement sur un plan (deux coordonnées spatiales) : un facteur  $\frac{1}{2\pi}$  interviendra dans sa normalisation.

**Formule de Parseval-Plancherel** Dans le cas de signaux de carré intégrable et au vu de notre définition de la normalisation, la transformée de Fourier conserve la norme :

$$\int_t |f(t)|^2 dt = \int_\omega |\text{TF}_t [f] (\omega)|^2 d\omega$$

où on s'est passé ici de noter le préfacteur commun aux deux membres de l'équation.

## A.7 Définition du produit de convolution

On définit le produit de convolution entre une fonction  $f$  et  $g$ , agissant sur un même espace  $x$  infini :

$$[f * g](x) = \int_y f(x - y) g(y) dy$$

Qui est commutatif :  $f * g = g * f$ .

Au vu de nos définitions des transformées de Fourier et du produit de convolution, nous avons les propriétés suivantes :

$$\text{TF} [f \times g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [F * G] \qquad F \times G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{TF} [f * g]$$

$$f \times g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{TF}^{-1} [F * G] \qquad \text{TF}^{-1} [F \times G] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f * g]$$

pour des transformées de Fourier sur une seule dimension.

## Annexe B

# Réponse électro-optique des matériaux

On ne parlera ici que de non-linéarité électroniques<sup>1</sup>. Les non-linéarités liées aux ré-orientations moléculaires (portant leurs propres moments dipolaires) impliquent une réponse forte mais lente du matériau (de l'ordre de la nanoseconde), de sorte qu'elles sont négligeables dans notre cas d'étude<sup>2</sup>. Les autres types de non-linéarités [62, table 4.1.1] seront considérées comme trop lentes et seront de même, négligées.

### B.1 Polarisation des matériaux

La polarisation macroscopique  $\vec{P}$  du milieu correspond à la densité de dipôles induits par le champ électrique  $\vec{E}$  incident. Elle dépend de la position  $\vec{r}$  et du temps  $t$  et peut se développer en puissance du champ par :

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{P}^{(n)}(\vec{r}, t) \\ &= \vec{P}^{(0)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \dots \\ \vec{P}(\vec{r}, t) &= \vec{P}^{(0)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{NL}(\vec{r}, t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

Où  $\vec{P}^{(1)}$  dépend linéairement du champ  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}^{(2)}$  quadratiquement, etc. Le terme  $\vec{P}^{(0)}(\vec{r}, t)$ , indépendant du champ, correspond à une polarisation statique que l'on peut trouver dans certains cristaux. Il sera considéré nul pour toute notre étude.

Par ailleurs, on regroupe tous les termes correspondant à une dépendance non linéaire sous  $\vec{P}^{NL}$ , terme qui va nous intéresser tout particulièrement par la suite.

Il est à noter que ce développement en puissances de  $\vec{E}$  n'est valide que dans des conditions où l'on se trouve loin de toute fréquence de résonance du milieu et tant que l'amplitude du champ appliqué n'atteint pas l'ordre de grandeur de celle du champ électrique atomique [62].

---

1. À nos échelles de temps, leur réponse peut être considérée instantanée [106, partie 4.3.3].

2. Dans le  $\text{CS}_2$  et les cristaux liquides par exemple, ces effets ne sont pas négligeables. La lenteur de ces non-linéarités amène une dépendance relative en fréquence : plutôt que de dépendre de la fréquence absolue, elles dépendent de l'écart à la fréquence de pompe.



## B.2 Réponse impulsionnelle du milieu

Sous sa forme la plus générale, la polarisation d'ordre 1 s'écrit [106, partie 2.1] :

$$\vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \iiint_{\vec{r}_1} \int_{t_1} \mathbf{T}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}_1, t, t_1) : \vec{E}(\vec{r}_1, t_1) d\vec{r}_1 dt_1 \quad (\text{B.2})$$

Avec  $\mathbf{T}^{(1)}$  le tenseur de réponse impulsionnelle linéaire du milieu. Celle-ci dépendant de la position et du temps auxquels on considère la polarisation, mais aussi de la position et du temps auxquels est pris le champ électrique.

Cependant, en supposant une invariance dans l'espace (milieu homogène) et dans le temps de *la réponse du milieu*, celle-ci ne dépend plus en absolu de la position et du temps du champ incident, mais du temps depuis lequel il a été appliqué et de la distance à laquelle il est appliqué, vis-à-vis du point que l'on considère :

$$\vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \iiint_{\vec{r}_1} \int_{t_1} \mathbf{R}^{(1)}(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) : \vec{E}(\vec{r}_1, t_1) d\vec{r}_1 dt_1$$

Avec  $\mathbf{T}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}_1, t, t_1) = \mathbf{R}^{(1)}(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1)$ .

Par ailleurs le principe d'invariance nous permet aussi de choisir librement la référence de position ou de temps. On peut donc montrer que  $\mathbf{R}^{(1)}(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) \vec{E}(\vec{r}_1, t_1) = \mathbf{R}^{(1)}(\vec{r}'_1, t'_1) \vec{E}(\vec{r} - \vec{r}'_1, t - t'_1)$  par un simple changement de variable.

De plus, on considère un milieu dont la réponse est locale dans le sens où les termes des tenseurs  $\mathbf{R}^{(n)}$  sont non-nuls uniquement pour des positions  $\vec{r}_i \approx \vec{r}$ . Ce qui revient à dire que les tenseurs de réponse impulsionnelle ont une dépendance spatiale de type fonction de Dirac.

On a donc :

$$\vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{t_1} \mathbf{R}^{(1)}(t - t_1) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) dt_1$$

Dorénavant et dans *tout* le reste ce document, nous considérons la réponse de nos milieux d'études comme invariante dans le temps et l'espace, et locale spatialement.

On peut généraliser la forme (B.2) pour les ordres  $n > 1$  :

$$\vec{P}^{(n)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \times \iiint_{\vec{r}_1} \cdots \iiint_{\vec{r}_n} \int_{t_1} \cdots \int_{t_n} \mathbf{T}^{(n)}(\vec{r}, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t, t_1, \dots, t_n) : \vec{E}(\vec{r}_1, t_1) \dots \vec{E}(\vec{r}_n, t_n) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n dt_1 \dots dt_n$$

Avec  $\mathbf{T}^{(n)}$  la réponse impulsionnelle d'ordre  $n$  du milieu, étant un tenseur de rang  $n + 1$  qui va venir s'appliquer aux  $n$  termes de champ électrique.

Et par les mêmes considérations d'invariance et de localité dans la réponse du milieu, on peut écrire :

$$\vec{P}^{(n)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{t_1} \cdots \int_{t_n} \mathbf{R}^{(n)}(t - t_1, \dots, t - t_n) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \dots \vec{E}(\vec{r}, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{B.3})$$

Il est à noter que le principe de causalité implique que les termes des  $\mathbf{R}^{(n)}$  tombent à zéro pour des  $t_i < 0$  (la réponse du milieu à un instant  $t$  ne peut pas dépendre d'un instant ultérieur). On conservera néanmoins les intégrations sur les temps de  $-\infty$  à  $\infty$  afin de pouvoir faire apparaître aisément des transformées de Fourier dans la suite.

D'autre part,  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  étant des champs réels, les tenseurs  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{R}$  sont nécessairement réels, ce qui ne sera pas forcément le cas des tenseurs susceptibilité électrique introduits dans la suite.

### B.3 Susceptibilité électrique

Il est souvent plus utile de travailler avec les champs complexes et de passer dans l'espace des fréquences, ce qui nous permettra d'introduire les tenseurs de susceptibilité électrique, équivalents fréquentiels des  $\mathbf{R}^{(n)}$ . Afin d'alléger la notation, nous omettrons ici de préciser la dépendance des champs électrique et polarisation en  $\vec{r}$ , que nous rappellerons à la fin.

Avec  $\vec{P}(\omega)$  la transformée de Fourier de  $\vec{P}(t)$ , à partir de la décomposition en somme (B.1) de la polarisation et par la propriété de linéarité de la transformée, on peut aussi exprimer la polarisation dans l'espace des fréquences comme une somme :

$$\vec{P}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{P}^{(n)}(\omega) \quad (\text{B.4})$$

où les  $\vec{P}^{(n)}(\omega)$  sont les transformées de Fourier respectives des  $\vec{P}^{(n)}(t)$ .

À partir de l'équation (B.3), on peut remplacer les termes de champ électrique par leurs transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} & \vec{P}^{(n)}(t) \\ &= \epsilon_0 \int_{t_1} \cdots \int_{t_n} \mathbf{R}^{(n)}(t - t_1, \dots, t - t_n) : \vec{E}(t_1) \dots \vec{E}(t_n) dt_1 \dots dt_n \\ &= \epsilon_0 \int_{t_1} \cdots \int_{t_n} \left( \mathbf{R}^{(n)}(t - t_1, \dots, t - t_n) : \left( \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\omega_1} \vec{E}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t_1} d\omega_1 \dots \int_{\omega_n} \vec{E}(\omega_n) e^{-i\omega_n t_n} d\omega_n \right) \right) dt_1 \dots dt_n \\ &= \frac{\epsilon_0}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \left( \left( \int_{t_1} \cdots \int_{t_n} \mathbf{R}^{(n)}(t - t_1, \dots, t - t_n) e^{i(\omega_1(t-t_1) + \dots + \omega_n(t-t_n))} dt_1 \dots dt_n \right) : \left( \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) e^{-i(\omega_1 + \dots + \omega_n)t} \right) \right) d\omega_1 \dots d\omega_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\vec{P}^{(n)}(t) = \frac{\epsilon_0}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) e^{-i(\omega_1 + \dots + \omega_n)t} d\omega_1 \dots d\omega_n \quad (\text{B.5})$$

Avec le tenseur de susceptibilité électrique d'ordre  $n$  [63, 62] :

$$\begin{aligned} \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \int_{\tau_1} \cdots \int_{\tau_n} \mathbf{R}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \\ \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= (\sqrt{2\pi})^n \text{TF}_{\tau_1, \dots, \tau_n} [\mathbf{R}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)](\omega_1, \dots, \omega_n) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Où l'on note  $\tau_i = t - t_i$  le décalage de temps entre l'instant considéré pour la polarisation et l'instant auquel est pris le  $i$ -ème terme de champ électrique (nous rappelons que la causalité implique que les éléments du tenseur  $\mathbf{R}^{(n)}$  tombent à 0 pour  $\tau_i < 0$ ).

La seconde ligne se déduit de notre définition de la transformée de Fourier (cf. annexe A.5). D'autre part, tout comme les tenseurs  $\mathbf{T}^{(n)}$  et  $\mathbf{R}^{(n)}$ ,  $\chi^{(n)}$  est un tenseur de rang  $n + 1$  a priori complexe.

La polarisation d'ordre  $n$  dans l'espace des fréquences s'écrit d'après notre définition de la transformée de Fourier et à l'aide de (B.5)<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned}\vec{P}^{(n)}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t \vec{P}^{(n)}(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{\epsilon_0}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \int_t \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) e^{i(\omega - \omega_\sigma)t} d\omega_1 \dots d\omega_n dt \\ \vec{P}^{(n)}(\omega) &= \frac{\epsilon_0}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) \int_t e^{i(\omega - \omega_\sigma)t} dt d\omega_1 \dots d\omega_n\end{aligned}$$

Avec  $\omega_\sigma = \omega_1 + \dots + \omega_n$ .

L'intégrale sur le temps correspond à un Dirac dans l'espace des fréquences, on a donc :

$$\vec{P}^{(n)}(\omega) = \frac{2\pi \epsilon_0}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) \delta(\omega - \omega_\sigma) d\omega_1 \dots d\omega_n$$

où le facteur  $2\pi$  a été introduit pour correspondre à la définition de la distribution de Dirac (cf. annexe A.4).

Pour l'ordre 1,  $\omega_\sigma = \omega_1$  et on a directement :

$$\vec{P}^{(1)}(\omega) = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) : \vec{E}(\omega) \quad (\text{B.7})$$

Pour les ordres supérieurs, le Dirac impose que le set de fréquences  $\omega_1, \dots, \omega_n$  soit pris tel que  $\omega_1 + \dots + \omega_n = \omega$ . On a donc pour les polarisations d'ordres  $n > 1$  :

$$\vec{P}^{(n)}(\omega) = \frac{2\pi \epsilon_0}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) d\omega_1 \dots d\omega_n \quad (\text{B.8})$$

avec  $\chi^{(n)}(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) = \delta(\omega - \omega_\sigma) \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , que l'on pourra aussi noter sous la forme  $\chi^{(n)}(\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n)$ .

Nous rappelons que cette forme de la polarisation d'ordre  $n$  suppose un milieu homogène à réponse locale spatialement et invariante temporellement. D'autre part, la susceptibilité associée peut voir ses termes dépendre de la direction dans l'espace des termes de champ  $\vec{E}$  (milieu anisotrope), et être complexes (milieu à pertes<sup>4</sup>).

## B.4 Permittivité diélectrique

La susceptibilité électrique permet de relier la polarisation du matériau au champ électrique. Par la loi de comportement électrique (5.5), on peut aussi introduire les tenseurs de permittivité diélectrique  $\epsilon$ , liant le champ d'induction  $\vec{D}$  et le champ électrique dans le matériau. On se place pour cela dans l'espace des fréquences en prenant la transformée de Fourier de la loi de comportement électrique :

$$\vec{D}(\omega) = \underbrace{\epsilon_0 \vec{E}(\omega) + \vec{P}^{(1)}(\omega)}_{\vec{D}^{(1)}(\omega)} + \underbrace{\vec{P}^{NL}(\omega)}_{\vec{D}^{NL}(\omega)} \quad (\text{B.9})$$

avec les parties linéaire et non linéaire en  $\vec{E}$  :

$$\vec{D}^{(1)}(\omega) = \epsilon^{(1)}(\omega) : \vec{E}(\omega)$$

3. On suit ici le même raisonnement que la référence [106, partie 2.3.1].

4. La partie réelle correspondant à l'indice de réfraction du milieu, et la partie imaginaire aux pertes (ou au gain).

$$\vec{D}^{NL}(\omega) = \sum_{n>1} \frac{2\pi}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \epsilon^{(n)}(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) d\omega_1 \dots d\omega_n$$

où  $\epsilon^{(n)}(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) = \delta(\omega - \omega_\sigma) \epsilon^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  en rappelant que  $\omega_\sigma$  est la somme des  $\omega_n$ . Les tenseurs de permittivité et susceptibilité électrique sont liés par :

$$\begin{aligned} \epsilon^{(1)}(\omega) &= \epsilon_0 \left( \mathbf{1} + \chi^{(1)}(\omega) \right) \\ \epsilon^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \epsilon_0 \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad \text{pour } n > 1 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Ce qui permet par ailleurs de définir l'indice de réfraction *linéaire*  $n(\omega)$  du milieu :

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi^{(1)}(\omega)} \quad (\text{B.11})$$

pour un milieu amagnétique et en prenant la composante du tenseur  $\chi^{(1)}$  correspondant à l'axe de polarisation considéré.

De même que la réponse impulsionnelle  $\mathbf{R}$  est le pendant temporel de la susceptibilité électrique, on peut définir un tenseur de permittivité diélectrique dans le domaine temporel, de manière similaire à (B.3) par :

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \sum_{n>0} \int_{t_1} \cdots \int_{t_n} \epsilon^{(n)}(t - t_1, \dots, t - t_n) : \vec{E}(\vec{r}, t_1) \dots \vec{E}(\vec{r}, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{B.12})$$

Et comme pour la susceptibilité électrique, le lien entre espace temporel et fréquentiel est donné par :

$$\begin{aligned} \epsilon^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \int_{\tau_1} \cdots \int_{\tau_n} \epsilon^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{i(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \\ \epsilon^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= (\sqrt{2\pi})^n \text{TF}_{\tau_1, \dots, \tau_n} \left[ \epsilon^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) \right] (\omega_1, \dots, \omega_n) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Il est par ailleurs intéressant de noter que si la susceptibilité électrique traduisait purement la réponse du matériau, la permittivité diélectrique rend compte de la réponse du matériau *et* du vide. De sorte que la réponse au délai nul soit celle du vide :  $\epsilon^{(1)}(t=0) = \epsilon_0$ . Par contre, il n'existe aucune non-linéarité réellement instantanée, i.e.  $\epsilon^{(n)}(0, \dots, 0) = 0$  pour  $n > 1$ .

## B.5 Permittivité diélectrique inverse

Au lieu de développer le champ d'induction électrique en fonction du champ électrique, on peut au contraire développer le champ  $\vec{E}$  en puissances du champ  $\vec{D}$  en introduisant les tenseurs de permittivité diélectrique inverse  $\eta^{(n)}$  [114] :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{n>0} \int_{t_1} \cdots \int_{t_n} \eta^{(n)}(t - t_1, \dots, t - t_n) : \vec{D}(\vec{r}, t_1) \dots \vec{D}(\vec{r}, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{B.14})$$

On peut par ailleurs définir leurs homologues dans l'espace des fréquences de la même manière que cela a été le cas pour définir la susceptibilité électrique :

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)}(\omega) &= \eta^{(1)}(\omega) : \vec{D}(\omega) \\ \vec{E}^{(n)}(\omega) &= \frac{2\pi}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \int_{\omega_1} \cdots \int_{\omega_n} \eta^{(n)}(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{D}(\omega_1) \dots \vec{D}(\omega_n) d\omega_1 \dots d\omega_n \end{aligned}$$

Avec comme pour la susceptibilité électrique :

$$\boldsymbol{\eta}^{(n)}(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) = \delta(\omega - \omega_\sigma) \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_n} \boldsymbol{\eta}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (\text{B.15})$$

où  $\omega_\sigma = \sum_n \omega_n$ .

## B.6 Propriétés de symétrie des tenseurs électro-optique

Tous les tenseurs jusqu'ici introduits caractérisent la réponse électro-optique du matériau au niveau microscopique, pour un ordre  $n$  donné. Or, que ce soit pour la susceptibilité ( $\boldsymbol{\chi}^{(n)}$ ), la permittivité ( $\boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$ ) ou la permittivité inverse ( $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$ ) diélectrique d'ordre  $n$ , on utilise un tenseur de rang  $n + 1$ , présentant donc  $3^{n+1}$  composantes.

Néanmoins, un certain nombre de symétries permettent de largement réduire le nombre de composantes indépendantes :

- Dans les cristaux, quel que soit sa classe, les propriétés de symétrie vis-à-vis d'une contrainte extérieure impliquent une réduction du nombre de coefficients électro-optiques indépendants [160], de sorte qu'on a une symétrie par permutation d'indices<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}^{(n)} &= \chi_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n}^{(n)} \\ \epsilon_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}^{(n)} &= \epsilon_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n}^{(n)} \\ \eta_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}^{(n)} &= \eta_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n}^{(n)} \end{aligned}$$

Cette relation de symétrie permet par exemple, pour les tenseurs de rang 4 tels que ceux utilisés pour les non-linéarités qui nous intéressent, de passer de 81 à 36 composantes indépendantes.

- Les tenseurs décrivant la réponse électro-optique présentent par ailleurs une symétrie de permutation intrinsèque<sup>6</sup> impliquant que :

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}^{(n)}(\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots, \omega_n) &= \chi_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n}^{(n)}(\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n) \\ \epsilon_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}^{(n)}(\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots, \omega_n) &= \epsilon_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n}^{(n)}(\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n) \\ \eta_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}^{(n)}(\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots, \omega_n) &= \eta_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_n}^{(n)}(\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n) \end{aligned}$$

où ici la symétrie se fait par permutation de couples  $(\alpha_i, \omega_i)$ , le premier indice  $\mu$  et la fréquence somme  $\omega_\sigma$  mis à part.

- Sous certaines conditions, la symétrie de permutation intrinsèque peut être étendue au couple  $(\mu, \omega_\sigma)$ . On parle de symétrie de permutation *globale*<sup>7</sup>, ou symétrie de Kleinman. Elle suppose que l'on se trouve loin de toute fréquence de résonance moléculaire du matériau, et que celui-ci est donc sans pertes. Toutes les fréquences que l'on considère (y compris  $\omega_\sigma$ ) peuvent être interverties dans les expressions analytiques des tenseurs électro-optique, sans en changer notablement la valeur [106, partie 4.3]. En pratique, cela revient à négliger la dispersion du tenseur aux fréquences d'intérêt.

5. Pour l'ordre  $n = 1$ , il n'y a qu'un seul indice  $\alpha$ , la question de la permutation ne se pose donc même pas.

6. Cette propriété, dont on peut retrouver la démonstration dans [106, partie 2.1], est issue des principes de réalisme et causalité, et est universellement valide, contrairement à la symétrie de permutation globale.

7. Pour l'ordre 1, étant donné que la matrice unité porte déjà cette symétrie, cette propriété de  $\boldsymbol{\chi}^{(1)}$  s'étend à  $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = \epsilon_0(\mathbf{1} + \boldsymbol{\chi}^{(1)})$  et  $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ .

## B.7 Approximation de la réponse instantanée

Dans le cadre de notre étude, la dispersion linéaire (dépendance à la fréquence de  $\chi^{(1)}$ ) est essentielle pour rendre compte des effets d'accord de phase conditionnant la génération de paires. Les dispersions non linéaires (dépendances fréquentielles des  $\chi^{(n)}$  à  $n \geq 2$ ), d'influences moindres, seront négligées.

Nous nous plaçons donc dans le cas spécifique où l'on considère une *réponse instantanée* du milieu pour les ordres  $n > 1$ . Les tenseurs de réponse impulsionnelle  $\mathbf{R}^{(n)}$  du milieu se comportent donc comme des Dirac<sup>8</sup>, et on voit alors d'après (B.6) que les tenseurs  $\chi^{(n)}$  sont indépendants de la fréquence. Donc considérer une *réponse instantanée* du milieu pour l'ordre  $n$  revient à *négliger la dispersion de la non-linéarité* d'ordre  $n$ .

La polarisation d'ordre  $n > 1$  dans le domaine temporel s'écrit alors d'après (B.5) :

$$\vec{P}^{(n)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(n)} \vec{E}^{\otimes n}(t) \quad (\text{B.16})$$

où on rappelle que  $\chi^{(n)}$  est un tenseur d'ordre  $n+1$  qui va s'appliquer aux  $n$  termes de champ identiques.

Cette approximation n'est en pratique valide qu'autour de fréquences de travail sur des bandes restreintes où la non-linéarité varie peu. Autrement dit, un  $\chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  peut être considéré comme constant pour des fréquences  $\omega_1, \dots, \omega_n$  prises proches de valeurs de consignes  $\omega_{c_1}, \dots, \omega_{c_n}$  auxquelles est mesuré le  $\chi^{(n)}$  retenu. Par ailleurs, toutes ces fréquences doivent nécessairement rester éloignées de toute fréquence de résonance du milieu pour éviter toute variation locale rapide de la dispersion de la non-linéarité.

On peut donc remplacer les intégrales sur les  $\omega_1, \dots, \omega_n$  dans (B.8) par une somme discrète de termes aux  $\chi^{(n)}$  constant et donc valide sur un set de bandes fréquentielles donné :

$$\vec{P}^{(n)}(\omega) = \frac{2\pi \epsilon_0}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \sum_{(1\dots n)} \chi^{(n)}(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) : \vec{E}(\omega_1) \dots \vec{E}(\omega_n) \quad (\text{B.17})$$

où la notation  $(1\dots n)$  indique que l'on effectue la somme sur tous les sets de fréquences tel que  $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n$ .

Dans le cas extrême où la dispersion d'ordre 1 est, elle aussi, négligée, le champ de polarisation dans l'espace des temps prend la forme très simple d'un développement de Taylor :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \vec{E}(t) + \chi^{(2)} \vec{E}^{\otimes 2}(t) + \chi^{(3)} \vec{E}^{\otimes 3}(t) + \dots \right) \quad (\text{B.18})$$

où on a pris  $\vec{P}^{(0)} = \vec{0}$ .

Il est important de rester très prudent avec cette forme, très présente dans la littérature et parfois posée sans précision des approximations qu'elle sous-entend, à savoir considérer une *réponse instantanée* pour tous les ordres, ce qui revient à *négliger toute dispersion* du matériau.

Suivant la même logique d'approximation d'une réponse instantanée du milieu pour *tous les ordres*, on a :

$$\vec{D}(t) = \sum_{n>0} \epsilon^{(n)} \vec{E}^{\otimes n}(t) \quad (\text{B.19})$$

où là encore  $\epsilon^{(1)} = \epsilon_0(\mathbf{1} + \chi^{(1)})$  et les tenseurs subséquents  $\epsilon^{(n)} = \epsilon_0 \chi^{(n)}$  pour  $n > 1$ .

Et de même avec la permittivité diélectrique inverse :

$$\vec{E}(t) = \sum_{n>0} \eta^{(n)} \vec{D}^{\otimes n}(t) \quad (\text{B.20})$$

---

8. On a alors :  $\mathbf{R}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \chi^{(n)} \delta^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

Enfin nous noterons que dans l'approximation de la réponse instantanée à un ordre  $n$ , les pendents temporels des tenseurs électro-optique ( $\mathbf{R}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$  et  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ) se *confondent* avec leurs équivalents spectraux ( $\boldsymbol{\chi}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  et  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  respectivement), tous ces tenseurs devenant constants. On peut s'en convaincre en faisant apparaître une dépendance temporelle en Dirac des tenseurs dans les équations (B.6), (B.12) et (B.14).

### B.7.1 Lien entre permittivités diélectriques dans l'approximation de la réponse instantanée

Dans le cadre de l'approximation de la réponse instantanée à tous les ordres, les développements (5.10) et (5.8) nous permettent de faire le lien entre les tenseurs  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$  :

$$\vec{E}(t) = \sum_{n>0} \boldsymbol{\eta}^{(n)} \left[ \sum_{m>0} \boldsymbol{\epsilon}^{(m)} \vec{E}^{\otimes m}(t) \right]^{\otimes n}$$

En identifiant par puissance du champ, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \boldsymbol{\eta}^{(1)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \\ \mathbf{0} &= \boldsymbol{\eta}^{(2)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\eta}^{(1)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \\ \mathbf{0} &= \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\eta}^{(2)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\eta}^{(2)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} + \boldsymbol{\eta}^{(1)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(3)} \end{aligned}$$

Et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. Ici chaque  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$  s'applique aux  $n$  termes qui suivent, composés de tenseurs  $\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$  censés eux-même s'appliquer à  $m$  termes de champ.

Cette identification par puissances du champ va nous permettre d'établir, de proche en proche, les expressions des  $\boldsymbol{\eta}^{(n)}$  en fonction des  $\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$ .

Pour l'ordre 1, nous pouvons tout de suite déduire que :

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \right)^{-1} = \left( \epsilon_0 \left( \mathbf{1} + \boldsymbol{\chi}^{(1)} \right) \right)^{-1}$$

Pour l'ordre 2, nous pouvons user du résultat précédent pour noter que :

$$\boldsymbol{\eta}^{(2)} = -\boldsymbol{\eta}^{(1)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} : \boldsymbol{\eta}^{(1)} \boldsymbol{\eta}^{(1)}$$

soit les composantes [114, p.9] :

$$\eta_{ijk}^{(2)} = - \sum_{l,m,n} \eta_{il}^{(1)} \epsilon_{lmn}^{(2)} \eta_{mj}^{(1)} \eta_{nk}^{(1)}$$

Et pour l'ordre 3, nous avons de même :

$$\boldsymbol{\eta}^{(3)} = -\boldsymbol{\eta}^{(2)} : \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} : \boldsymbol{\eta}^{(1)} \boldsymbol{\eta}^{(1)} \right) \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} : \boldsymbol{\eta}^{(1)} \right) - \boldsymbol{\eta}^{(2)} : \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} : \boldsymbol{\eta}^{(1)} \right) \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} : \boldsymbol{\eta}^{(1)} \boldsymbol{\eta}^{(1)} \right) - \boldsymbol{\eta}^{(1)} : \boldsymbol{\epsilon}^{(3)} : \boldsymbol{\eta}^{(1)} \boldsymbol{\eta}^{(1)} \boldsymbol{\eta}^{(1)}$$

Dans le cas particulier d'un milieu centrosymétrique, les composantes des tenseurs  $\boldsymbol{\chi}^{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$  et  $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$  sont nulles, soit en terme de composantes du tenseur d'ordre 3 :

$$\eta_{ijkl}^{(3)} = - \sum_{m,n,o,p} \eta_{ip}^{(1)} \epsilon_{pmno}^{(3)} \eta_{mj}^{(1)} \eta_{nk}^{(1)} \eta_{ol}^{(1)}$$

Enfin, si de plus le milieu est isotrope, seules les composantes diagonales de  $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$  sont non-nulles, ce qui implique qu'il en soit de même pour  $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$  et que  $\eta_{ii}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_{ii}^{(1)}}$ .

La relation entre les tenseurs d'ordre 3 devient :

$$\eta_{ijkl}^{(3)} = -\eta_{ii}^{(1)} \epsilon_{ijkl}^{(3)} \eta_{jj}^{(1)} \eta_{kk}^{(1)} \eta_{ll}^{(1)}$$

En outre, l'isotropie implique d'autres propriétés sur les tenseurs électro-optiques [106, annexe 3], dont nous dressons ici une liste non-exhaustive :

- Les composantes  $\epsilon_{ii}^{(1)}$  sont égales entre elles (de même pour les  $\eta_{ii}^{(1)}$ ). Auquel cas, dans un repère cartésien  $(x, y, z)$ , on pourra noter  $\eta^{(1)} = \eta_{xx}^{(1)} = \eta_{yy}^{(1)} = \eta_{zz}^{(1)}$ . Nous soulignons que si l'isotropie fait référence aux propriétés microscopiques du milieu (dans notre cas, le liquide emplissant la fibre), dans certains cas comme celui des guides, une biréfringence de forme liée aux propriétés du guide peut apparaître. Dans notre cas, les  $\eta_{ii}^{(1)}$  ne seront donc pas égaux et nous prendrons soin d'associer à chaque axe neutre de notre fibre un indice de réfraction  $n_i$  différent :  $\eta_{ii}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_0 n_i^2}$ .
- Les composantes  $\epsilon_{ijkl}^{(3)}$  sont non-nulles si leurs indices sont égaux deux à deux. Et en usant de la propriété de permutation globale des tenseurs (cf. annexe B.6), on note en particulier que :

$$\epsilon_{iii}^{(3)} = 3 \epsilon_{jjkk}^{(3)} \quad \text{avec } j \neq k \quad (\text{B.21})$$

Tous les  $\epsilon_{iii}^{(3)}$  étant égaux entre eux, de même pour les  $\epsilon_{jjkk}^{(3)}$ , les  $\epsilon_{kjjk}^{(3)}$  ou les  $\epsilon_{jkjk}^{(3)}$ . En usant de la symétrie globale par permutation d'indice des tenseurs (cf. annexe B.6), nous avons même  $\epsilon_{jjkk}^{(3)} = \epsilon_{kjjk}^{(3)} = \epsilon_{jkjk}^{(3)}$ .

Nous pouvons donc écrire dans le cas isotrope la relation simple :

$$\eta^{(3)} = -\eta^{(1)} \epsilon^{(3)} \eta^{(1)} \eta^{(1)} \eta^{(1)} \quad (\text{B.22})$$

où selon le cas nous prendrons  $\epsilon^{(3)}$  égal aux  $\epsilon_{iii}^{(3)}$  ou aux  $\epsilon_{jjkk}^{(3)}$ , et donc respectivement  $\eta^{(3)}$  égal aux  $\eta_{iii}^{(3)}$  ou aux  $\eta_{jjkk}^{(3)}$ .

Le lien avec la susceptibilité non linéaire se fait directement :

$$\eta^{(3)} = -\epsilon_0 \eta^{(1)} \chi^{(3)} \eta^{(1)} \eta^{(1)} \eta^{(1)} \quad (\text{B.23})$$

Il est important de noter que nous avons appliqué ici les tenseurs électro-optiques à un même champ  $\vec{E}$  en différenciant ses composantes spatiales. Ceci afin de faire ressortir les propriétés des tenseurs vis-à-vis des directions de l'espace. Ces propriétés restent bien évidemment valides quels que soit les termes de champs auxquels ces tenseurs sont appliqués.



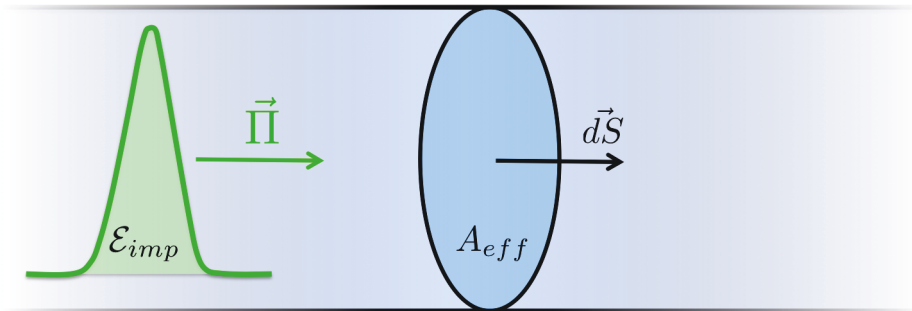


## Annexe C

# Propagation linéaire et non linéaire dans une fibre

### C.1 Énergie d'impulsion, intensité et amplitude de pompe

Dans notre cas d'étude<sup>1</sup> où une impulsion se propage dans une fibre, l'énergie d'une impulsion équivaut à l'intégration sur le temps du flux du vecteur de Poynting à travers une surface correspondant à l'aire effective de notre fibre. Autrement dit, en un point arbitraire de la fibre, l'énergie d'une impulsion est égale à l'ensemble de l'énergie ayant traversé la section de la fibre en ce point durant la propagation (cf. figure C.1). En absence de gain ou de perte sur la pompe, celle-ci reste inchangée au fil de la propagation<sup>2</sup>.



**Figure C.1** – En absence de pertes, l'ensemble de l'énergie de l'impulsion traverse une section de fibre durant la propagation.

On a donc l'énergie d'une impulsion :

$$\mathcal{E}_{imp} = \int \iint_{A_{eff}} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} dt \quad (\text{C.1})$$

avec  $\vec{\Pi}$  le vecteur de Poynting (à ne pas confondre avec les moments canoniques utilisés en partie II) et  $\vec{dS}$  le vecteur associé à une surface infinitésimale, perpendiculaire à celle-ci.

1. Nous rappelons que notre fibre est prise comme un milieu amagnétique, sans charges ni courants libres, sans pertes, à réponse locale et homogène (donc les composantes des tenseurs électro-optique sont indépendantes de la position).

2. La génération de paires que nous étudions ici est un effet trop faible pour dépléter notablement l'impulsion de pompe. En négligeant les pertes linéiques et en absence d'autre champ injecté dans la fibre que celui de pompe, nous n'aurons donc en première approximation ni perte ni gain. Seul l'effet d'élargissement par automodulation de phase, présenté dans l'annexe C.2, peut impacter l'impulsion de pompe, mais n'en change pas l'intensité dans l'espace temporel.

Dans le cas d'ondes planes se propageant dans la direction perpendiculaire à la surface,  $\vec{\Pi}$  et  $d\vec{S}$  sont colinéaires et on intègre la norme du vecteur de Poynting, dont on rappelle la définition (5.7) :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (\text{C.2})$$

### C.1.1 Intensité de pompe

En pratique, nos détecteurs ne sont pas en mesure de résoudre les fluctuations du flux d'énergie du champ à l'échelle d'un cycle optique. Nous ne mesurerons que des variations moyennes du flux. L'intensité mesurée du champ se définit alors comme le module du vecteur de Poynting moyenné sur quelques cycles optiques<sup>3</sup>, moyenne que l'on indiquera par la notation  $\overline{\dots}$  :

$$I = \overline{|\vec{\Pi}|}$$

On notera donc que, comme le vecteur de Poynting, l'intensité correspond à une énergie par unité de surface et de temps, dont l'unité est le  $\text{W.m}^2$ .

Si dans sa définition (C.2),  $\vec{\Pi}$  dépend des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , on souhaite ici l'exprimer uniquement en fonction du champ  $\vec{D}$ , ce qui nous permettra *in fine* de relier l'amplitude de ce dernier avec l'énergie d'une impulsion. L'expression de l'amplitude nous servira dans notre problème lors de la phase de quantification des champs.

Nous reprenons ici la base de l'espace (cf. annexe A.1) dans laquelle la pompe a son champ électrique selon l'axe  $z$ , le champ magnétique selon  $y$  et se propage dans la direction  $x$ . L'impulsion de pompe a pour fréquence centrale  $\omega_{p0}$  et est suffisamment fine spectralement pour considérer que toutes ses composantes sont affectées par un même indice de réfraction  $n(\omega_{p0})$ , ce qui revient à négliger la dispersion linéaire au sein du spectre de pompe (cf. annexe B.7).

Étant donné que nous considérons les effets non linéaires trop faibles pour dépléter notablement la pompe, nous pouvons en première approximation n'utiliser que la part linéaire pour déterminer son intensité. Nous obtenons donc la relation entre les champs électrique et induction électrique de pompe :

$$\vec{E}_p \simeq \eta^{(1)}(\omega_{p0}) \vec{D}_{pr}$$

avec  $\vec{E}_p$  et  $\vec{D}_{pr}$  les champs réels électrique et d'induction électrique de la pompe ; et où du fait de l'isotropie de notre milieu (cf. annexe B.7.1) nous ne retenons que la composante  $\eta^{(1)} \equiv \eta_{zz}^{(1)}$ , en rappelant que :

$$\eta^{(1)}(\omega_{p0}) = \frac{1}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p0})} \quad (\text{C.3})$$

Pour aller plus loin, nous distinguons la part lentement variable dans le temps et l'espace de la pompe, soit son enveloppe, de la partie rapidement oscillante :

$$\begin{aligned} \vec{D}_{pr}(\vec{r}, t) &= \mathcal{D}_p(\vec{r}, t) e^{i(k_{p0}x - \omega_{p0}t)} \vec{e}_z + c.c. \\ \vec{H}_p(\vec{r}, t) &= \mathcal{H}_p(\vec{r}, t) e^{i(k_{p0}x - \omega_{p0}t)} \vec{e}_y + c.c. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

où *c.c.* marque le complexe conjugué, tandis que  $\mathcal{D}_p$  et  $\mathcal{H}_p$  correspondent aux enveloppes lentement variable des champs induction électrique et magnétique. Nous noterons que ces enveloppes dépendent de  $\vec{r}$  et pas uniquement de  $x$  : celles-ci intègrent le profil spatial transverse du mode de pompe. Cependant les dérivées spatiales (dans le plan  $(y, z)$ ) de ce profil sont faibles devant celles de la partie

3. La plupart des détecteurs font une moyenne sur plusieurs cycles optiques et ne perçoivent que les fluctuations 'lentes', ce qui correspond à l'enveloppe du champ.

rapidement oscillante (selon l'axe  $x$ ), qui dominera dans la suite. Par ailleurs, ce profil n'évolue pas au cours de la propagation et pourra être considéré comme un pré-facteur constant dans la suite.

Les enveloppes  $\mathcal{D}_p$  et  $\mathcal{H}_p$  évoluent lentement dans le temps et l'espace, de sorte que leurs dérivées peuvent être en première approximation négligées vis-à-vis de celles sur la part rapidement oscillante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_{pr}}{\partial t} &\simeq -i \omega_{p_0} \mathcal{D}_p(\vec{r}, t) e^{i(k_{p_0} x - \omega_{p_0} t)} + c.c. \\ \frac{\partial H_p}{\partial x} &\simeq i k_{p_0} \mathcal{H}_p(\vec{r}, t) e^{i(k_{p_0} x - \omega_{p_0} t)} + c.c.\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire directement de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_p = \frac{\partial \vec{D}_{pr}}{\partial t} \implies i k_{p_0} \mathcal{H}_p(\vec{r}, t) \vec{e}_z + c.c. = -i \omega_{p_0} \mathcal{D}_p(\vec{r}, t) \vec{e}_z + c.c.$$

En notant que  $k_{p_0} = \frac{n(\omega_{p_0}) \omega_{p_0}}{c}$ , on en déduit directement que  $H_p(\vec{r}, t) = -\frac{c}{n(\omega_{p_0})} D_{pr}(\vec{r}, t)$ . Par conséquent, le vecteur de Poynting est obtenu d'après (C.2) :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \vec{D}_{pr} \wedge \vec{H}_p \\ &= -\eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \frac{c}{n(\omega_{p_0})} D_{pr}^2(\vec{r}, t) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_y \\ \vec{\Pi} &= \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \frac{c}{n(\omega_{p_0})} D_{pr}^2(\vec{r}, t) \vec{e}_x\end{aligned}\tag{C.5}$$

Soit l'intensité du champ de pompe :

$$I = \overline{|\vec{\Pi}|} = \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \frac{c}{n(\omega_{p_0})} \overline{|D_{pr}|^2}\tag{C.6}$$

en considérant  $\eta^{(1)}$  et  $n$  réels du fait de l'absence de pertes dans notre milieu.

Nous noterons que d'après la définition de l'enveloppe de pompe (C.4), le champ réel se note :

$$\vec{D}_{pr}(\vec{r}, t) = 2 |\mathcal{D}_p(\vec{r}, t)| \cos(k_{p_0} x - \omega_{p_0} t) \vec{e}_z\tag{C.7}$$

en négligeant un éventuel terme de phase contenu dans l'enveloppe<sup>4</sup>.

Dès lors la moyenne du module carré du champ sur quelques cycles optiques (de période  $2\pi/\omega_{p_0}$ ) est égale à [161, chapitre 1 - équation (1.9.5)] :

$$\overline{|D_{pr}|^2} = \frac{1}{2} (2 |\mathcal{D}_p(\vec{r}, t)|)^2 = 2 |\mathcal{D}_p(\vec{r}, t)|^2$$

Soit l'intensité en terme d'enveloppe de pompe :

$$I = \overline{|\vec{\Pi}|} = 2 \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \frac{c}{n(\omega_{p_0})} |\mathcal{D}_p(\vec{r}, t)|^2 = 2 \frac{c}{\epsilon_0 n^3(\omega_{p_0})} |\mathcal{D}_p(\vec{r}, t)|^2\tag{C.8}$$

en utilisant le fait que  $\eta^{(1)}(\omega_{p_0}) = \frac{1}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p_0})}$  (cf. annexe B).

4. En présence de *chirp*, cette phase se rajoute dans le terme cosinus.

### C.1.2 Amplitude de notre champ de pompe

Afin d'établir l'expression de l'amplitude de notre champ de pompe, nous repartons de (C.1) dans le cadre où  $\vec{\Pi}$  est orienté selon l'axe longitudinal de la fibre car nous nous trouvons en optique guidée :

$$\mathcal{E}_{imp} = \int_t \iint_{A_{eff}} \overline{|\vec{\Pi}|} d\vec{r}_\perp dt$$

où nous utilisons ici le module du vecteur de Poynting moyenné sur quelques cycles optiques, soit l'intensité, puisque nous allons intégrer sur un temps long devant la durée de l'impulsion, elle-même grande devant la période d'un cycle optique dans nos conditions.

En reprenant la définition (6.67) du champ réel  $D_{pr}(\vec{r}, t)$  de pompe :

$$D_{pr}(\vec{r}, t) = D_p(\vec{r}, t) + D_p^*(\vec{r}, t)$$

avec le champ complexe  $D_p(\vec{r}, t)$  sous la forme d'une quantité harmonique<sup>5</sup> :

$$D_p(\vec{r}, t) = |D_p(\vec{r}, t)| e^{i(\beta(\omega_{p0})x - \omega_{p0}t)}$$

nous reconnaissons l'enveloppe du champ de pompe d'après (C.4) :

$$|D_p(\vec{r}, t)| = |\mathcal{D}_p(\vec{r}, t)|$$

Or, d'après (7.4) nous avons :

$$|D_p|^2 = |A|^2 |G_\perp(\vec{r}_\perp)|^2 \left| G_{T_0} \left( t - \frac{x}{v_{gp0}} \right) \right|^2$$

avec  $A$  l'amplitude du champ que nous cherchons à définir,  $G_\perp$  le profil spatial transverse et  $G_{T_0}$  le profil temporel de l'enveloppe de pompe.

Nous avons donc l'intensité d'après (C.8) :

$$I = \overline{|\vec{\Pi}|} = 2\eta^{(1)}(\omega_{p0}) \frac{c}{n(\omega_{p0})} |D_p(\vec{r}, t)|^2$$

En gardant en tête que  $G_\perp$  et  $G_{T_0}$  sont normalisées d'après les définitions établies en annexe A.6, nous en déduisons l'énergie d'une impulsion :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{imp} &= \int_t \iint_{A_{eff}} \overline{|\vec{\Pi}|} d\vec{r}_\perp dt \\ &= 2\eta^{(1)} \frac{c}{n(\omega_{p0})} |A|^2 \iint_{A_{eff}} |G_\perp(\vec{r}_\perp)|^2 d\vec{r}_\perp \int_t \left| G_{T_0} \left( t - \frac{x}{v_{gp0}} \right) \right|^2 dt \\ &= 2\eta^{(1)} \frac{c}{n(\omega_{p0})} |A|^2 2\pi \int_{t'} |G_{T_0}(t')|^2 dt' \\ \mathcal{E}_{imp} &= 2\eta^{(1)} \frac{c}{n(\omega_{p0})} |A|^2 2\pi \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

5. Nous noterons ici que nous avons négligé ici, à des fins de simplification, les termes de phases autres que ceux propres à l'oscillation harmonique. Comme exposé en sous-section 7.1.1, les impulsions de pompe peuvent être objet de *chirp* temporel ou spectral, auquel cas un terme  $e^{i\theta(t,\omega)}$  est à ajouter dans cette expression. Néanmoins, cette omission ne sera pas problématique pour la suite puisque seul le module carré du champ nous intéresse.

En considérant une amplitude du champ réelle, celle-ci se définit alors comme :

$$A = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{imp} n(\omega_{p_0})}{2 \eta^{(1)} c (\sqrt{2\pi})^3}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{imp} n^3(\omega_{p_0}) \epsilon_0}{2 (\sqrt{2\pi})^3 c}}$$

en utilisant la relation (C.3).

## C.2 Propagation et élargissement d'une impulsion par automodulation de phase

Nous étudions dans cette annexe le processus d'automodulation de phase de la pompe afin d'établir les expressions de l'indice non linéaire  $n_2$  et du coefficient non linéaire  $\gamma_p$ . Celles-ci sont habituellement établies en prenant pour base le champ  $\vec{E}$ , reliant ainsi  $n_2$  et  $\gamma_p$  à la susceptibilité non linéaire  $\chi^{(3)}$  [1]. Cependant, puisque nos raisonnements théoriques utilisent essentiellement le champ  $\vec{D}$  nous reprenons ici l'étude de l'automodulation de phase avec ce dernier, et nous montrerons comment nous retrouvons les mêmes  $n_2$  et  $\gamma_p$ , que nous relierons à la susceptibilité diélectrique inverse  $\eta^{(3)}$ .

Nous nous plaçons pour cela en milieu amagnétique, sans charge ni courant libres, non linéaire, homogène et isotrope. S'y propage, sans dispersion, sans pertes et selon l'axe des  $x$  une impulsion lumineuse correspondant à notre pompe, dont la polarisation est selon l'axe  $z$ .

En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday (6.10), combinée à celle de Maxwell-Ampère (6.11) :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

Par propriété vectorielle on a :  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}$  en notant que, du fait de l'homogénéité, les tenseurs électro-optiques ne dépendent pas de la position et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ .

On a donc :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}^{(1)} + \vec{\nabla}^2 \vec{E}^{NL} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (\text{C.9})$$

où on a décomposé le champ électrique entre sa part linéaire et sa part non linéaire en  $\vec{D}$  :  $\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{NL}$ .

Le spectre de l'impulsion de pompe étant très fin en fréquence, on peut négliger la dispersion linéaire en son sein, de sorte que toutes les fréquences se propagent à  $v_{g_{p_0}}$ , soit la vitesse de groupe prise à  $\omega_{p_0}$ . Cette approximation revient à considérer une réponse linéaire instantanée du milieu (cf. annexe B.7) de sorte que l'on ait :

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) \simeq \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \vec{D}(\vec{r}, t)$$

où par isotropie on a  $\eta^{(1)} \equiv \eta_{zz}^{(1)}$  et usant de la même définition qu'en (C.3). Par ailleurs, l'homogénéité du milieu implique que la permittivité diélectrique inverse ne dépend pas de la position, soit :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}^{(1)} = \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial x^2} \vec{e}_z = \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \vec{e}_z$$

où on peut noter que nous omettons les composantes du Laplacien dans le plan transverse. En effet, le profil du mode spatial transverse, défini dans le plan  $(y, z)$ , varie très lentement vis-à-vis des oscillations optiques sur l'axe longitudinal. Or, de manière générale, nous ne retiendrons ici que les dérivées sur les oscillations optique rapide, tant dans le domaine temporel que spatial.

De plus, nous considérerons que l'effet non linéaire ne modifie pas les paramètres spatiaux du mode de propagation, de sorte que le profil transverse n'évolue pas au cours de la propagation. Ce profil interviendra donc comme un facteur supplémentaire dans l'expression du champ  $\vec{D}(\vec{r}, t)$ , qui peut être vu comme une onde plane évoluant selon  $x$  dans le développement exposé ici.

Pour la part non linéaire, seul l'ordre 3 nous intéresse ici. En se plaçant dans l'approximation d'une réponse non linéaire instantanée (cf. annexe B.7), nous avons :

$$\vec{E}^{NL}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{(3)}(\vec{r}, t) = \eta^{(3)} : \vec{D}\vec{D}\vec{D} = \eta^{(3)} D^3(\vec{r}, t) \vec{e}_z$$

en prenant  $\eta^{(3)} \equiv \eta_{zzzz}^{(3)}$  puisqu'on se place dans le cas d'un milieu isotrope avec tout les champs de polarisation selon l'axe  $z$ .

Afin de faire ressortir l'effet de la non-linéarité sur le profil de l'impulsion de pompe, il est utile de séparer la part rapidement oscillante de l'enveloppe lentement variable. En notant  $\vec{D}_{pr}$  le champ réel de pompe, nous avons :

$$\vec{D}_{pr}(\vec{r}, t) = \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_{p_0} t} \vec{e}_z + c.c. = \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{i(k_{p_0} x - \omega_{p_0} t)} \vec{e}_z + c.c.$$

où  $\mathcal{D}(\vec{r}, t)$  est l'enveloppe du champ variant lentement dans le temps *et* l'espace : d'un point de vue temporel, l'enveloppe varie lentement vis-à-vis d'un cycle optique, et d'un point de vue spatial celle-ci varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde. La fonction  $\mathcal{D}(\vec{r}, t) = \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{ik_{p_0} x}$  n'est pour sa part lentement variable que dans l'espace temporel. On rappelle par ailleurs que  $\omega_{p_0}$  est la fréquence porteuse de pompe,  $k_{p_0} = \beta(\omega_{p_0})$  le nombre d'onde associé, et que *c.c.* marque le terme complexe conjugué.

On en déduit directement que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_{pr}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2} e^{-i\omega_{p_0} t} \\ \frac{\partial^2 D_{pr}}{\partial t^2} &\simeq -\omega_{p_0}^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_{p_0} t} \end{aligned}$$

en négligeant les termes en dérivées temporelles de  $\mathcal{D}$  vis-à-vis de celle sur l'oscillation optique. Par ailleurs, pour le terme non linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned} E^{NL}(\vec{r}, t) &= \eta^{(3)} \left( \mathcal{D}^3(\vec{r}, t) e^{-3i\omega_{p_0} t} + 3 |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_{p_0} t} \right) + c.c. \\ E^{NL}(\vec{r}, t) &\simeq 3 \eta^{(3)} |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_{p_0} t} + c.c. \end{aligned}$$

en écartant le terme générant la fréquence triple se trouvant hors du spectre de pompe et ne correspondant donc pas au processus d'automodulation de phase qui nous intéresse ici.

D'après (C.9), nous obtenons donc :

$$\eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2} + 3 \eta^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) \right) = -\mu_0 \omega_{p_0}^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) \quad (\text{C.10})$$

En rappelant que  $\mathcal{D}(\vec{r}, t) = \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{ik_{p_0} x}$ , nous notons que  $|\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 = |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2$  est une fonction lentement variable dans l'espace vis-à-vis de  $\mathcal{D}(\vec{r}, t)$ , de sorte qu'en première approximation nous pouvons négliger sa dérivée vis-à-vis de celle de  $\mathcal{D}$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) \right) \simeq |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2}$$

Et en développant la dérivée seconde de  $\mathcal{D}$  :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial x^2} \simeq 2ik_{p_0} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} e^{ik_{p_0} x} - k_{p_0}^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{ik_{p_0} x}$$

où nous retenons le premier ordre en dérivée de  $\mathcal{D}$ , le terme d'ordre 0 allant se simplifier avec le second membre de (C.10). En effet,  $\eta^{(1)}(\omega_{p_0}) = \frac{1}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p_0})}$  tandis que  $k_{p_0} = \frac{n(\omega_{p_0}) \omega_{p_0}}{c}$ , soit :

$$-\eta^{(1)}(\omega_{p_0}) k_{p_0}^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{ik_{p_0} x} = -\mu_0 \omega_{p_0}^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t) e^{ik_{p_0} x} = -\mu_0 \omega_{p_0}^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t)$$

Nous obtenons donc de (C.10) :

$$\left( \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) + 3\eta^{(3)} |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 \right) 2ik_{p_0} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} = 3\eta^{(3)} k_{p_0}^2 |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 \mathcal{D}(\vec{r}, t)$$

En notant dans le premier membre de l'équation que le terme non linéaire est faible devant le linéaire ( $\eta^{(1)}(\omega_{p_0}) \gg 3\eta^{(3)} |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2$ ), nous obtenons finalement pour l'enveloppe du champ :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial x} = -i \frac{3\eta^{(3)} k_{p_0} |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2}{2\eta^{(1)}(\omega_{p_0})} \mathcal{D}(\vec{r}, t)$$

soit une solution pour l'évolution de l'enveloppe selon  $x$  suivant la forme classique du phénomène d'automodulation de phase [1, 94] :

$$\mathcal{D}(x, t) = \mathcal{D}(0, t) e^{i\Phi_{NL}(x)}$$

avec le déphasage non linéaire accumulé au cours de la propagation :

$$\Phi_{NL}(x) = -\frac{3}{2} \eta^{(3)} \frac{\epsilon_0 n^3(\omega_{p_0}) \omega_{p_0}}{c} |\mathcal{D}(\vec{r}, t)|^2 x \quad (\text{C.11})$$

en rappelant que  $\eta^{(1)}(\omega_{p_0}) = \frac{1}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p_0})}$ .

Il est à noter qu'ici  $\Phi_{NL}$  est considéré comme un pur terme de phase, ce qui implique implicitement que  $\eta^{(3)}$  est réel. Ce point découle directement du fait que l'on considère une propagation sans pertes non linéaires.

Il est par ailleurs possible de retrouver la forme usuelle du déphasage non linéaire, établie pour le champ  $\vec{E}$ , en y distinguant également enveloppe et oscillation rapide du champ :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}(\vec{r}, t) e^{i(k_{p_0} x - \omega_{p_0} t)}$$

En approximation de la réponse instantanée et dans un milieu isotrope et centrosymétrique, nous avons la relation (B.23)  $\eta^{(3)} = -\epsilon_0 \chi^{(3)} \left( \eta^{(1)} \right)^4$ . En première approximation  $\mathcal{E} \simeq \eta^{(1)} \mathcal{D}$ , et en notant qu'ici  $\eta^{(1)} = \eta^{(1)}(\omega_{p_0}) = \frac{1}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p_0})}$ , nous obtenons au final<sup>6</sup> :

$$\Phi_{NL}(x) = \frac{3}{2} \chi^{(3)} \frac{\omega_{p_0}}{c n(\omega_{p_0})} |\mathcal{E}(\vec{r}, t)|^2 x$$

---

6. Nous notons qu'il aurait été possible de déduire directement nos résultats, dans la description en  $\vec{D}$ , des formules usuelles se basant sur  $\vec{E}$ . Toutefois, il s'agit ici de montrer comment l'automodulation de phase peut se décrire aussi bien en se basant sur le champ  $\vec{D}$  que sur le champ  $\vec{E}$ . Le fait de trouver une consistance avec les formes usuelles constitue alors une validation *a posteriori* de nos développements.



Nous pouvons maintenant lier le déphasage non linéaire (C.11) à l'intensité en usant de la définition (C.8) :

$$|\mathcal{D}_p(\vec{r}, t)|^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 n^3(\omega_{p0})}{c} I$$

soit le déphasage non linéaire :

$$\Phi_{NL}(x) = -\frac{3}{4} \eta^{(3)} \left( \frac{\epsilon_0 n^3(\omega_{p0})}{c} \right)^2 \omega_{p0} I x$$

En reportant ce déphasage dans l'expression du champ réel, nous pouvons voir l'effet de l'automodulation de phase comme une variation de l'indice du milieu relative à l'intensité du champ :

$$\vec{D}_{p_r}(\vec{r}, t) = \mathcal{D}(x=0, \vec{r}_\perp, t) e^{i(k_{p0}x - \omega_{p0}t + \Phi_{NL}(x))} \vec{e}_z + c.c. = \mathcal{D}(x=0, \vec{r}_\perp, t) e^{i(k_{eff}x - \omega_{p0}t)} \vec{e}_z + c.c.$$

avec  $k_{eff} = \frac{n_{eff} \omega_{p0}}{c}$  et l'indice de réfraction effectif du milieu :

$$n_{eff} = n(\omega_{p0}) + n_2 I \quad \text{avec} \quad n_2 = -\frac{3}{4} \eta^{(3)} \frac{(\epsilon_0 n^3(\omega_{p0}))^2}{c}$$

et  $n_2$  l'indice non linéaire du matériau à  $\omega_{p0}$ .

Dès lors, le déphasage non linéaire se note :

$$\Phi_{NL}(x) = \frac{n_2 \omega_{p0}}{c} I x$$

Nous pouvons, ici aussi, faire le lien avec la forme usuelle du  $n_2$ , en fonction de la susceptibilité non linéaire  $\chi^{(3)}$ . En approximation de la réponse instantanée et dans un milieu isotrope et centrosymétrique, nous avons la relation (B.23)  $\eta^{(3)} = -\epsilon_0 \chi^{(3)} (\eta^{(1)})^4$ .

Ce qui nous donne<sup>6</sup>, en notant qu'ici  $\eta^{(1)} = \eta^{(1)}(\omega_{p0}) = \frac{1}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p0})}$  :

$$n_2 = -\frac{3}{4} \eta^{(3)} \frac{(\epsilon_0 n^3(\omega_{p0}))^2}{c} = \frac{3}{4} \frac{\chi^{(3)}}{\epsilon_0 n^2(\omega_{p0}) c}$$

Lorsque l'intensité du champ varie avec le temps, tel que c'est le cas pour nos impulsions de pompe, l'automodulation de phase va générer de nouvelles fréquences dans le spectre. Pour visualiser cet effet, nous notons cette fois-ci le champ sous la forme :

$$\vec{D}_{p_r}(\vec{r}, t) = \mathcal{D}(x=0, \vec{r}_\perp, t) e^{i(k_{p0}x - \Omega t)} \vec{e}_z + c.c.$$

avec la fréquence instantanée [1] :

$$\Omega(x, t) = \omega_{p0} - \frac{\partial \Phi_{NL}}{\partial t} = \omega_{p0} - \frac{n_2 \omega_{p0}}{c} \frac{\partial I}{\partial t} x = \omega_{p0} - \gamma_p \frac{\partial P}{\partial t} x \quad (\text{C.12})$$

en introduisant la puissance lumineuse instantanée (exprimée en W)  $P(t) = I(t) \times A_{eff}$ , l'aire effective  $A_{eff}$ , et le coefficient non linéaire de la fibre à  $\omega_{p0}$  :

$$\gamma_p = \frac{n_2 \omega_{p0}}{c A_{eff}} = -\frac{3}{4} \eta^{(3)} \left( \frac{\epsilon_0 n^3(\omega_{p0})}{c} \right)^2 \frac{\omega_{p0}}{A_{eff}}$$

L'équation (C.12) nous montre que la fréquence instantanée du champ est modifiée en fonction de la variation temporelle de l'intensité ou de la puissance : au niveau du front avant d'une impulsion, l'intensité étant croissante ( $dI/dt > 0$ ) le décalage observé dans la fréquence instantanée est négatif. Celle-ci tend vers les basses fréquences, on parle de *red-shift*. À l'inverse, sur le front arrière de l'impulsion l'intensité décroît et on constate un décalage vers les hautes fréquences, soit un *blue-shift*. Ainsi, de nouvelles fréquences apparaissent dans le spectre de l'impulsion tandis que son profil temporel reste inchangé.

L'élargissement spectral de l'impulsion, mesurable par un analyseur de spectre optique, est proportionnel au déphasage non linéaire maximal accumulé au fil de la propagation :

$$\Phi_{NL,max}(x) = \gamma_p P_{crête} x$$

avec  $P_{crête}$  la puissance crête de l'impulsion, dépendant directement de sa durée et de la puissance moyenne injectée. Connaissant ces paramètres, en mesurant l'élargissement spectral d'impulsions il est possible de déduire le coefficient non linéaire  $\gamma_p$  du matériau traversé [94].



## Annexe D

# Processus non linéaires d'ordre 3

La forme la plus générale du Hamiltonien non linéaire portant l'ensemble des processus d'ordre 3 est :

$$H_{NL} = \iiint_{\vec{r}} \mathcal{H}_{NL} d^3\vec{r} = \iiint_{\vec{r}} \frac{1}{4} \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D} \vec{D} \vec{D} d^3\vec{r}$$

Nous utiliserons par la suite l'Hamiltonien densité  $\mathcal{H}_{NL}$ .

En distinguant plusieurs champs disjoints spectralement, nous pouvons développer :

$$\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3} = \sum \vec{D}_a \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}_b \vec{D}_c \vec{D}_d \quad (\text{D.1})$$

où la somme s'effectue sur toutes les combinaisons différentes possibles des champs, labellisés par une lettre.

Par ailleurs nous considérons chaque champ réel comme fin spectralement et le décomposons sur une base discrète de modes fréquentiels :

$$\vec{D}_{j_r}(\vec{r}, t) = \sum_{l_j} \vec{D}(\vec{r}, \omega_{l_j}) e^{-i\omega_{l_j} t} + \vec{D}^*(\vec{r}, \omega_{l_j}) e^{i\omega_{l_j} t} \quad (\text{D.2})$$

Ainsi le terme  $\vec{D}_a \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}_b \vec{D}_c \vec{D}_d$  de (D.1) devient lui-même une somme sur l'ensemble des modes des champs. Et on note que la dépendance temporelle d'un terme de cette somme sera en  $e^{\pm i(\omega_{l_a} - \omega_\sigma) t}$  où  $\omega_\sigma = \pm\omega_{l_b} \pm \omega_{l_c} \pm \omega_{l_d}$ . Or en opérant une moyenne sur l'échelle de temps de quelques cycles optiques, ce qui revient à poser la conservation de l'énergie, nous ne retiendrons que les termes tels que  $\omega_{l_a} \approx \omega_\sigma$ .

On note dans toute la suite  $(\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3})(\omega_{l_a})$  l'ensemble des termes portant une dépendance temporelle de la forme  $e^{i(\omega_{l_a} - \omega_\sigma) t}$  ainsi que ceux de dépendance  $e^{-i(\omega_{l_a} - \omega_\sigma) t}$  (qui sont alors simplement les complexes conjugués des précédents). Ce regroupement nous permettra de distinguer plus clairement chaque processus non linéaire en terme de photons annihilés et photons générés. On note pour cela que chaque champ complexe conjugué  $\vec{D}^*(\vec{r}, \omega_{l_j})$  implique la création d'un photon à  $\omega_{l_j}$ , tandis que le champ complexe  $\vec{D}(\vec{r}, \omega_{l_j})$  correspond à l'annihilation d'un photon. Cette association apparaît lors de l'identification de notre décomposition (D.2) avec l'expression d'un champ dans une approche quantique (6.59).

Par souci de lisibilité, nous omettrons dans la suite de préciser la dépendance spatiale des champs.

Nous traiterons séparément les cas où sont en présence deux, trois ou quatre champs disjoints intervenant dans les processus non linéaires. Ces champs ne sont pas nécessairement intenses et peuvent même être vides de tout photons : la délimitation en champs disjoints a essentiellement pour but de délimiter le cadre du problème. Ainsi tout photon généré ou annihilé appartiendra à un de ces champs.

## D.1 Cas de deux champs disjoints

Dans le cas où ne sont en présence que deux champs, nous distinguerons un champ, dit de pompe et labellisé par la lettre  $p$ , et un champ signal, labellisé par  $s$ . Ces deux champs sont disjoints spectralement et par convention nous posons l'ordre en fréquence  $\omega_{l_s} < \omega_{l_p}$ , pour tous modes fréquentiels  $\omega_{l_p}$  ou  $\omega_{l_s}$  appartenant respectivement au champ de pompe ou signal.

Le champ induction électrique total se note  $\vec{D} = \vec{D}_{p_r} + \vec{D}_{s_r}$  et l'Hamiltonien densité non linéaire prend la forme :

$$\mathcal{H}_{NL} = \frac{1}{4} \left( \sum_{l_p} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_p}) + \sum_{l_s} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_s}) \right)$$

Avec le premier développement :

$$\begin{aligned} & (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_p}) = \\ & \vec{D}^* (\omega_{l_p}) \cdot \left( \begin{array}{l} 3 \sum_{\{l'_p, l''_p, l'''_p\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l'_p} - \omega_{l''_p} - \omega_{l'''_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^* (\omega_{l'_p}) \vec{D} (\omega_{l''_p}) \vec{D} (\omega_{l'''_p}) \quad (\text{SPM}_p) \\ + 6 \sum_{\{l_s, l'_p, l''_s\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l_s} - \omega_{l'_p} - \omega_{l''_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^* (\omega_{l_s}) \vec{D} (\omega_{l'_p}) \vec{D} (\omega_{l''_s}) \quad (\text{BS}_{p \leftrightarrow s}) \\ + \sum_{\{l_s, l'_s, l''_s\}} e^{i(\omega_{l_p} - \omega_{l_s} - \omega_{l'_s} - \omega_{l''_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D} (\omega_{l_s}) \vec{D} (\omega_{l'_s}) \vec{D} (\omega_{l''_s}) \quad (\text{THG}_{s \rightarrow p}) \end{array} \right) + c.c. \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

avec *c.c.* marquant le complexe conjugué. La mise entre accolades des indices de sommation indique que l'on ne somme que sur les associations de modes respectant la conservation de l'énergie, i.e. pour lesquelles l'argument du terme exponentielle est nul. Les préfacteurs devant chaque somme, qui correspondent aux facteurs de dégénérescence [106], rendent compte de toutes les permutations distinctes possibles des termes de champ<sup>1</sup>, en rappelant que  $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$  est symétrique par permutation d'indices (cf. annexe B.6).

La première somme ( $\text{SPM}_p$ ) ne fait intervenir que des modes du champ de pompe et correspond au processus d'automodulation de phase de la pompe<sup>2</sup>.

Le terme ( $\text{BS}_{p \leftrightarrow s}$ ) implique l'annihilation d'un photon signal et d'un photon de pompe ( $l'_s$  et  $l'_p$ ) pour en créer deux autres dans les mêmes champs ( $l_s$  et  $l_p$ ). Ce terme comme son conjugué font donc intervenir un transfert d'énergie entre deux modes de pompes et deux modes signal, il s'agit là de *Bragg Scattering*. Pour le cas spécifique où  $l'_p = l_p$  et donc par conservation d'énergie que  $l_s = l'_s$ , ce terme revient à un phénomène de modulation de phase croisée entre les champs pompe et signal, qui est donc un cas particulier de *Bragg Scattering*.

1. Pour illustrer cette notion, nous prenons d'abord l'exemple du terme ( $\text{SPM}_p$ ) :  $\omega_{l'_p}$ ,  $\omega_{l''_p}$  et  $\omega_{l'''_p}$  appartenant au même champ, la permutation de leurs champs complexes est indistincte. Mais le champ et son conjugué sont distincts, on a donc les trois permutations distinctes possibles :

$$\vec{D}^* (\omega_{l'_p}) \vec{D} (\omega_{l''_p}) \vec{D} (\omega_{l'''_p}) \quad \vec{D} (\omega_{l''_p}) \vec{D}^* (\omega_{l'_p}) \vec{D} (\omega_{l'''_p}) \quad \vec{D} (\omega_{l'''_p}) \vec{D} (\omega_{l''_p}) \vec{D}^* (\omega_{l'_p})$$

D'où un facteur 3. Pour le terme de *Bragg scattering* ( $\text{BS}_{p \leftrightarrow s}$ ), les deux champs n'étant pas conjugués appartiennent à des ensembles de modes disjoints, dédoublant les permutations possibles soit un facteur 6. Au contraire, pour le terme de génération de troisième harmonique ( $\text{THG}_{s \rightarrow p}$ ) nous avons trois fois le terme de champ complexe signal : toutes permutations entre eux étant indistinctes, le facteur devant la somme est égal à 1.

2. Nous noterons que l'automodulation de phase peut être vue comme un cas particulier de mélange à quatre onde, interne à la pompe et en régime stimulé (les fréquences concernées étant déjà présentes dans le champ).

Enfin, le dernier terme ( $\text{THG}_{s \rightarrow p}$ ) implique l'annihilation de trois photons signal pour en générer un dans le champ de pompe de sorte que  $\omega_{l_p} = \omega_{l_s} + \omega_{l'_s} + \omega_{l''_s}$ . Par définition, nos champs sont fins spectralement, ainsi les modes  $\omega_{l_s}$  sont proches en fréquence et on identifie ici le phénomène de génération de troisième harmonique (*Triple Harmonic Generation*).

Le second développement du Hamiltonien non linéaire pour le cas de deux champs s'écrit dans la même logique :

$$\begin{aligned} & (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_s}) = \\ & \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \cdot \left( \begin{array}{l} 3 \sum_{\{l'_s, l''_s, l'''_s\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l'_s} - \omega_{l''_s} - \omega_{l'''_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l''_s}) \vec{D}(\omega_{l'''_s}) \quad (\text{SPM}_s) \\ + 6 \sum_{\{l_p, l'_s, l''_p\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_p} - \omega_{l'_s} - \omega_{l''_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l''_p}) \quad (\text{BS}_{s \leftrightarrow p}) \\ + 3 \sum_{\{l'_s, l''_s, l_p\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l'_s} + \omega_{l''_s} - \omega_{l_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}^*(\omega_{l''_s}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \quad (\text{TOSPDC}_{p \rightarrow s}) \end{array} \right) + c.c. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Où nous voyons apparaître le phénomène d'automodulation de phase au sein du champ signal ( $\text{SPM}_s$ ). On retrouve le phénomène de *Bragg Scattering* dans ( $\text{BS}_{s \leftrightarrow p}$ ), qui est le conjugué<sup>3</sup> de ( $\text{BS}_{p \leftrightarrow s}$ ). De même apparaît un terme de génération de triplet ( $\text{TOSPDC}_{p \rightarrow s}$ ) (pour *Third-Order Spontaneous Parametric Down Conversion*) où un photon de pompe s'annihile pour générer trois photons signal. Dans le cas où les fréquences de ces trois photons sont égales, on parle de génération de triplets dégénérés en fréquence. On reconnaît là le phénomène inverse à la génération de troisième harmonique : ( $\text{TOSPDC}_{p \rightarrow s}$ ) est identique au terme conjugué de ( $\text{THG}_{s \rightarrow p}$ ) à un facteur près (du fait d'un nombre différent de permutations possibles des termes de champ).

## D.2 Cas de trois champs disjoints

Par rapport au cas précédent, nous considérons un troisième mode idler, labellisé par la lettre  $i$ , tel que  $\omega_{l_s} < \omega_{l_p} < \omega_{l_i}$ . Le champ total est  $\vec{D} = \vec{D}_{p_r} + \vec{D}_{s_r} + \vec{D}_{i_r}$  et l'Hamiltonien densité non linéaire :

$$\mathcal{H}_{NL} = \frac{1}{4} \left( \sum_{l_p} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_p}) + \sum_{l_s} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_s}) + \sum_{l_i} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_i}) \right)$$

3. Nous pouvons noter ici qu'il ne s'agit pas d'une redite : le terme de *Bragg Scattering* apparaît dans  $(\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_p})$  et dans  $(\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_s})$ . De sorte que si nous voulions le prendre en compte nous devrions sommer les deux occurrences, soit un préfacteur 12 au final dans l'Hamiltonien.

On retrouve pour les deux premiers termes du Hamiltonien, les mêmes développements que pour le cas de deux champs disjoints, auxquels s'ajoutent de nouveaux phénomènes :

$$\begin{aligned}
 (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3})(\omega_{l_p}) &= \text{(D.3)} + \\
 \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \cdot & \left( \begin{array}{l}
 6 \sum_{\{l_i, l'_p, l'_i\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l_i} - \omega_{l'_p} - \omega_{l'_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l'_i}) \quad (\text{BS}_{p \leftrightarrow i}) \\
 +3 \sum_{\{l'_p, l'_p, l_i\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l'_p} + \omega_{l'_p} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_p}) \vec{D}^*(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow p}) \\
 +6 \sum_{\{l'_p, l_i, l_s\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l'_p} + \omega_{l_s} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_p}) \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow 2p+s}) \\
 +3 \sum_{\{l_s, l'_s, l_i\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l_s} + \omega_{l'_s} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow p+2s}) \\
 +6 \sum_{\{l'_p, l_s, l_i\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l'_p} - \omega_{l_s} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{FWM}_{\text{inv}})
 \end{array} \right) + c.c.
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3})(\omega_{l_s}) &= \text{(D.4)} + \\
 \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \cdot & \left( \begin{array}{l}
 6 \sum_{\{l_i, l'_s, l'_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_{l'_s} - \omega_{l'_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l'_i}) \quad (\text{BS}_{s \leftrightarrow i}) \\
 +3 \sum_{\{l'_s, l'_s, l_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l'_s} + \omega_{l'_s} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow s}) \\
 +3 \sum_{\{l_p, l'_p, l_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_p} + \omega_{l'_p} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}^*(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow s+2p}) \\
 +6 \sum_{\{l'_s, l_p, l_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l'_s} + \omega_{l_p} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow 2s+p}) \\
 +3 \sum_{\{l_i, l_p, l'_p\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l'_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l'_p}) \quad (\text{FWM}_{\text{dir}})
 \end{array} \right) + c.c.
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Les termes d'automodulation de phase ((SPM<sub>p</sub>) et (SPM<sub>s</sub>)), de *Bragg Scattering* ((BS<sub>p↔s</sub>) et (BS<sub>s↔p</sub>)), de génération de triple harmonique à fréquence de pompe (THG<sub>s→p</sub>) et de triplet (TOSPDC<sub>p→s</sub>) sont ici aussi présents (les termes (D.3) et (D.4) dans ces deux développements indiquant que nous reprenons les équations correspondantes).

D'autre part s'y ajoutent le *Bragg Scattering* entre la pompe et le champ idler (BS<sub>p↔i</sub>), entre signal et idler (BS<sub>s↔i</sub>), mais aussi tous les phénomènes permettant de générer des photons pompe ou signal à partir d'un photon idler, c'est-à-dire la conversion paramétrique spontanée de troisième ordre à partir d'un photon idler (TOSPDC<sub>i→X</sub>).

Enfin, nous citons à part deux mélanges à quatre ondes<sup>4</sup> (*Four Wave Mixing*) : (FWM<sub>inv</sub>) qui implique l'annihilation d'un photon signal et d'un photon idler pour créer deux photons dans le champ de pompe. Nous le qualifierons d'*inverse* vis-à-vis du processus qui nous intéresse, (FWM<sub>dir</sub>), où deux photons de pompe s'annihilent pour générer une paire signal-idler.

4. Nous noterons que le mélange à quatre ondes est un terme générique qui peut englober tout phénomène impliquant l'interaction de quatre champs, donc l'ensemble des phénomènes présentés ici.

Un point important pour notre étude est que le complexe conjugué du terme ( $\text{FWM}_{\text{inv}}$ ) dans (D.5) correspond lui aussi à un mélange à quatre ondes direct. Il doit ainsi être pris en compte dans la somme des termes associés que nous effectuons en sous-section 6.3.1.

Par ailleurs, le dernier développement intervenant dans l'Hamiltonien est :

$$\begin{aligned}
 & \left( \vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3} \right) (\omega_{l_i}) = \\
 & \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \cdot \left( \begin{array}{l}
 3 \sum_{\{l'_i, l''_i, l'''_i\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l'_i} - \omega_{l''_i} - \omega_{l'''_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_i}) \vec{D}(\omega_{l''_i}) \vec{D}(\omega_{l'''_i}) \quad (\text{SPM}_i) \\
 + 6 \sum_{\{l_p, l'_i, l''_p\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_p} - \omega_{l'_i} - \omega_{l''_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l'_i}) \vec{D}(\omega_{l''_p}) \quad (\text{BS}_{i \leftrightarrow p}) \\
 + 6 \sum_{\{l_s, l'_i, l''_s\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_s} - \omega_{l'_i} - \omega_{l''_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l'_i}) \vec{D}(\omega_{l''_s}) \quad (\text{BS}_{i \leftrightarrow s}) \\
 + 3 \sum_{\{l_s, l_p, l''_p\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_s} - \omega_{l_p} - \omega_{l''_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l''_p}) \quad (\text{FWM}_{\text{dir}}) \\
 + 3 \sum_{\{l_s, l_p, l''_p\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_s} - \omega_{l_p} - \omega_{l''_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l''_p}) \quad (\text{FWM}_{2p+s \rightarrow i}) \\
 + 3 \sum_{\{l_p, l_s, l''_s\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l_s} - \omega_{l''_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l''_s}) \quad (\text{FWM}_{2s+p \rightarrow i}) \\
 + \sum_{\{l_s, l'_s, l''_s\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_s} - \omega_{l'_s} - \omega_{l''_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l''_s}) \quad (\text{THG}_{s \rightarrow i}) \\
 + \sum_{\{l_p, l'_p, l''_p\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l'_p} - \omega_{l''_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l''_p}) \quad (\text{THG}_{p \rightarrow i})
 \end{array} \right) + c.c.
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Où l'on retrouve des termes de génération de triple harmonique, ( $\text{THG}_{s \rightarrow i}$ ) et ( $\text{THG}_{p \rightarrow i}$ ), cette fois-ci vers une fréquence idler.

Nous avons ici décrit de manière exhaustive les processus non linéaires d'ordre 3 en posant trois champs disjoints ordonnés. Cependant aucune supposition n'a été faite sur leurs espacements respectifs en fréquence qui, du fait de la condition de conservation de l'énergie et selon les cas considérés, peuvent permettre ou non l'existence de certains des phénomènes non linéaires présentés ici.

Par exemple, nous ne pouvons pas avoir dans une même situation le mélange ( $\text{FWM}_{2s+p \rightarrow i}$ ) et ( $\text{THG}_{s \rightarrow i}$ ) : la conservation de l'énergie implique pour le premier que  $\omega_{l_i} - \omega_{l_s} - \omega_{l'_s} = \omega_{l_p}$  et pour le second  $\omega_{l_i} - \omega_{l_s} - \omega_{l'_s} = \omega_{l''_s}$ . Or par définition, tous nos champs sont disjoints, soit la condition stricte  $\omega_{l_p} \neq \omega_{l''_s}$  pour tous modes  $\omega_{l_p}$  et  $\omega_{l''_s}$  des champs de pompe et signal.

Dans notre cas d'étude le champ de pompe est, dans l'espace des fréquence, pratiquement aussi éloigné du champ signal que celui idler, i.e.  $\omega_{l_p} - \omega_{l_s} \approx \omega_{l_i} - \omega_{l'_p}$ . Ceci permet donc la conservation de l'énergie pour le mélange à quatre ondes direct ( $\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l'_p} = 0$ ). Cependant, si la pompe se trouvait trop proche en fréquence de signal ou idler, un tel équilibre n'existerait pas et le processus de mélange à quatre ondes direct n'aurait pas lieu.

Par ailleurs, dans ces conditions tous les processus impliquant l'annihilation ou la génération d'un seul photon, ne sont pas possibles. On peut aisément s'en convaincre en confrontant leurs conditions de conservation de l'énergie à celle du mélange à quatre ondes direct.



### D.3 Cas de quatre champs disjoints

Alternativement, il est aussi possible de considérer le cas le plus général impliquant quatre champs disjoints au lieu de trois. On prendra l'exemple où interviennent deux pompes<sup>5</sup>  $\vec{D}_{p_r}$  et  $\vec{D}_{q_r}$  distinctes. On a alors  $\vec{D} = \vec{D}_{p_r} + \vec{D}_{q_r} + \vec{D}_{s_r} + \vec{D}_{i_r}$  et :

$$\mathcal{H}_{NL} = \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} & \sum_{l_p} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_p}) + \sum_{l_q} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_q}) \\ & + \sum_{l_s} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_s}) + \sum_{l_i} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_i}) \end{aligned} \right) \quad (\text{D.8})$$

On pose cette fois-ci l'ordre  $\omega_{l_s} < \omega_{l_p} < \omega_{l_q} < \omega_{l_i}$ .

Naturellement, l'introduction d'une pompe supplémentaire par rapport au cas étudié dans ce document fait apparaître de nombreux processus non linéaires supplémentaires. Toutefois on pourra noter que, comme cela a été mentionné précédemment, selon les écarts en fréquence effectifs entre les champs de pompe, signal et idler, certains phénomènes n'auront jamais lieu faute de respecter la conservation de l'énergie.

Nous donnons néanmoins dans la suite et comme nous l'avons fait pour les cas deux et trois champs disjoints, les développements des termes du Hamiltonien sous leur forme la plus générale. Le terme  $(\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_q})$ , cependant, ne sera pas détaillé ici mais peut être obtenu en suivant la même logique (tout en prenant garde à l'ordre des champs).

Les développements sont les mêmes que pour le cas de trois champs disjoints décrit en D.2, à ceci prêt que s'y ajoutent tous les termes impliquant la nouvelle pompe  $q$  :

$$\begin{aligned} (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3}) (\omega_{l_p}) &= (\text{D.5}) + \\ & \left( \begin{aligned} & 6 \sum_{\{l_q, l'_p, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l_q} - \omega_{l'_p} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{BS}_{p \leftrightarrow q}) \\ & + 6 \sum_{\{l'_p, l_s, l_q\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l'_p} - \omega_{l_s} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{FWM}_{s+q \rightarrow 2p}) \\ & + 6 \sum_{\{l_q, l_s, l_i\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l_q} - \omega_{l_s} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{FWM}_{s+i \rightarrow p+q}) \\ & + 6 \sum_{\{l_i, l_q, l_s\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l_i} - \omega_{l_q} - \omega_{l_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \quad (\text{FWM}_{q+s \rightarrow p+i}) \\ & + 3 \sum_{\{l_i, l_q, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_p} + \omega_{l_i} - \omega_{l_q} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{FWM}_{2q \rightarrow p+i}) \\ & + 6 \sum_{\{l_q, l_s, l_i\}} e^{i(\omega_{l_p} - \omega_{l_q} - \omega_{l_s} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{FWM}_{q+s+i \rightarrow p}) \\ & + 3 \sum_{\{l_q, l_s, l'_s\}} e^{i(\omega_{l_p} - \omega_{l_q} - \omega_{l_s} - \omega_{l'_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l'_s}) \quad (\text{FWM}_{q+2s \rightarrow p}) \\ & + 3 \sum_{\{l_q, l'_q, l_s\}} e^{i(\omega_{l_p} - \omega_{l_q} - \omega_{l'_q} - \omega_{l_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \quad (\text{FWM}_{2q+s \rightarrow p}) \end{aligned} \right) + c.c. \end{aligned}$$

5. Nous rappelons que nous ne faisons ici aucune supposition sur l'intensité des champs, aussi la désignation de pompe n'implique pas nécessairement que ces champs soient intenses.

$$\begin{aligned}
& (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3})(\omega_{l_s}) = \text{(D.6)} + \\
& \left( \begin{aligned}
& 6 \sum_{\{l_q, l'_s, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_q} - \omega_{l'_s} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{BS}_{s \leftrightarrow q}) \\
& + 3 \sum_{\{l_i, l_q, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_{l_q} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{FWM}_{2q \rightarrow s+i}) \\
& + 6 \sum_{\{l_i, l_p, l_q\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{FWM}_{p+q \rightarrow s+i}) \\
& + 6 \sum_{\{l_i, l_p, l_q\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_i}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{FWM}_{p+q \rightarrow s+i}) \\
& + 3 \sum_{\{l_q, l_p, l'_p\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_q} - \omega_{l_p} - \omega_{l'_p})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l'_p}) \quad (\text{FWM}_{2p \rightarrow q+s}) \\
& + 3 \sum_{\{l'_s, l'_s, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l'_s} + \omega_{l'_s} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{TOSPDC}_{q \rightarrow 3s}) \\
& + 6 \sum_{\{l'_s, l_p, l_q\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l'_s} + \omega_{l_p} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{TOSPDC}_{q \rightarrow 2s+p}) \\
& + 3 \sum_{\{l_p, l'_p, l_q\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_p} + \omega_{l'_p} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}^*(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{TOSPDC}_{q \rightarrow s+2p}) \\
& + 6 \sum_{\{l_p, l_q, l_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_p} + \omega_{l_q} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow s+p+q}) \\
& + 3 \sum_{\{l_q, l'_q, l_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l_q} + \omega_{l'_q} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}^*(\omega_{l'_q}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow s+2q}) \\
& + 6 \sum_{\{l'_s, l_q, l_i\}} e^{i(\omega_{l_s} + \omega_{l'_s} + \omega_{l_q} - \omega_{l_i})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l'_s}) \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_i}) \quad (\text{TOSPDC}_{i \rightarrow 2s+q})
\end{aligned} \right) + c.c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\vec{D} \cdot \boldsymbol{\eta}^{(3)} \vec{D}^{\otimes 3})(\omega_{l_i}) = \text{(D.7)} + \\
& \left( \begin{aligned}
& 6 \sum_{\{l_q, l'_i, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_q} - \omega_{l'_i} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_i}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{BS}_{i \leftrightarrow q}) \\
& + 3 \sum_{\{l_p, l_q, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_p} - \omega_{l_q} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{FWM}_{2q \rightarrow p+i}) \\
& + 3 \sum_{\{l_s, l_q, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_s} - \omega_{l_q} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{FWM}_{2q \rightarrow s+i}) \\
& + 6 \sum_{\{l_s, l_p, l_q\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_s} - \omega_{l_p} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{FWM}_{p+q \rightarrow s+i}) \\
& + 6 \sum_{\{l_p, l_q, l_s\}} e^{i(\omega_{l_i} + \omega_{l_p} - \omega_{l_q} - \omega_{l_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}^*(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \quad (\text{FWM}_{q+s \rightarrow p+i}) \\
& + 6 \sum_{\{l_p, l_q, l_s\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l_q} - \omega_{l_s})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l_s}) \quad (\text{FWM}_{q+s \rightarrow p+i}) \\
& + 3 \sum_{\{l_s, l_q, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_s} - \omega_{l_q} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{FWM}_{2q+s \rightarrow i}) \\
& + 3 \sum_{\{l_p, l_q, l'_q\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l_q} - \omega_{l'_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \vec{D}(\omega_{l'_q}) \quad (\text{FWM}_{2q+p \rightarrow i}) \\
& + 3 \sum_{\{l_s, l'_s, l_q\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_s} - \omega_{l'_s} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_s}) \vec{D}(\omega_{l'_s}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{FWM}_{2s+q \rightarrow i}) \\
& + 3 \sum_{\{l_p, l'_p, l_q\}} e^{i(\omega_{l_i} - \omega_{l_p} - \omega_{l'_p} - \omega_{l_q})t} \boldsymbol{\eta}^{(3)} : \vec{D}(\omega_{l_p}) \vec{D}(\omega_{l'_p}) \vec{D}(\omega_{l_q}) \quad (\text{FWM}_{2p+q \rightarrow i})
\end{aligned} \right) + c.c.
\end{aligned}$$



## Annexe E

# Descriptions en mécanique Lagrangienne, Hamiltonienne et quantification

Cette annexe détaille de manière générale la procédure tirée de [114] pour établir le Lagrangien du champ électromagnétique, puis son Hamiltonien pour finir par effectuer la quantification.

La mécanique Lagrangienne est une reformulation de la mécanique classique Newtonienne pour laquelle l'ensemble de la dynamique du système étudié est contenue dans une fonctionnelle, le Lagrangien. Ce dernier dépendant de coordonnées généralisées indépendantes, des vitesses généralisées associées et du temps [162]. Une grande force de la mécanique Lagrangienne est de faire abstraction du système étudié via une approche purement analytique, mettant en jeu un nombre réduit d'équations et faisant ressortir les quantités conservées. Les coordonnées généralisées, au même nombre que les degrés de liberté du système, sont usuellement choisies afin de faciliter l'obtention des équations du mouvement, éventuellement en exploitant les symétries du système. Par ailleurs, le Lagrangien, qui a la dimension d'une énergie, n'a pas d'expression générale pour tout système physique, pas plus qu'il n'existe un Lagrangien unique pour un système donné. En effet, toute fonctionnelle générant les bonnes équations du mouvement peut être utilisée comme Lagrangien.

### E.1 Fonctionnelles

Avant de détailler l'approche Lagrangienne du problème, il peut être utile de rappeler le concept mathématique de fonctionnelle s'appliquant au Lagrangien.

Une fonctionnelle est une application d'un espace vectoriel de fonction vers un champ de scalaire, autrement dit la transformation d'une fonction en un scalaire. Soit la fonctionnelle  $J$  transformant la fonction  $y$  en un scalaire :

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

La variation  $\delta J$  de  $J$  quand la fonction d'entrée est légèrement changée de  $\delta y$  est définie par [63] :

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta J}{\delta y} \delta y dx$$

en ne gardant que le premier ordre en  $\delta y$ .

La dérivée fonctionnelle de  $J$  est  $\frac{\delta J}{\delta y}$ , dont la forme peut être déduite en écrivant  $\delta J$  en terme de dérivées partielles grâce au développement de Taylor de  $f$  pour  $y \rightarrow y + \delta y$  :

$$\begin{aligned}\delta J &= J[y + \delta y] - J[y] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( f + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} f dx \\ \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right)}_{\frac{\delta J}{\delta y} \delta y} dx\end{aligned}$$

## E.2 Équations du mouvement en mécanique Lagrangienne

Pour plus de simplicité, on prendra ici pour unique coordonnée généralisée<sup>1</sup> un champ scalaire  $\phi(\vec{r}, t)$  de coordonnées spatiales  $\vec{r}$  et temporelle  $t$ . Néanmoins, le formalisme se généralise pour un champ vectoriel comme on peut le voir en section 6.1.

La détermination des équations du mouvement se fait à partir de l'action  $S$ , définie en fonction du Lagrangien  $L$  :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \qquad L = \iiint_{\vec{r}} \mathcal{L} d^3\vec{r}$$

en introduisant la densité Lagrangienne  $\mathcal{L}$ , fonction de  $\phi$ , de  $\dot{\phi} \equiv \partial_t \phi$  et de leurs dérivées partielles successives sur les coordonnées spatiales.

Toute variation  $\delta\phi(\vec{r}, t)$  du champ, nulle en  $t_1, t_2$  et pour  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ , va induire une variation de l'action :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

Les équations du mouvement sont alors obtenues pour une action stationnaire, soit  $\delta S = 0$ . Et ce, pour tout  $\delta\phi$  obéissant à ces conditions. On fait ici appel au principe de moindre action, ou principe de Fermat pour la propagation de rayons lumineux.

Nous allons donc chercher à déterminer la variation du Lagrangien. Ce dernier étant une fonctionnelle de deux fonctions<sup>2</sup> ( $\phi$  et  $\dot{\phi}$ ), sa variation est :

$$\delta L = \iiint_{\vec{r}} \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) d^3\vec{r} \quad (\text{E.1})$$

Soit la variation de l'action associée :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\vec{r}} \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) d^3\vec{r} dt$$

1. Le cas simplifié impliquant une seule coordonnée généralisée amènera mécaniquement à n'établir qu'une unique équation du mouvement.

2. Une fonctionnelle d'une fonction se définit comme une intégrale sur une ou des variables, dont le contenu dépend de cette fonction et de ses dérivées sur ces variables. Or ici le temps ne fait pas partie de l'intégration. Le Lagrangien dépend donc aussi de la fonction  $\partial_t \phi$  et de ses dérivées spatiales.

Pour regrouper tous les termes sous un même facteur  $\delta\phi$ , on peut opérer une intégration par parties dans le cadre de nos conditions aux limites :

$$\int_{t_1}^{t_2} \partial_t \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta\phi \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) \delta\phi dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta\dot{\phi} dt = 0$$

puisque  $\delta\phi$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $t_1$  ou  $t_2$ .

On a donc la variation de l'action :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\vec{r}} \left( \frac{\delta L}{\delta \phi} - \partial_t \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) \right) \delta\phi d^3\vec{r} dt$$

Par principe de moindre action cette variation est nulle quel que soit  $\delta\phi$ , on a donc nécessairement :

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} - \partial_t \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (\text{E.2})$$

Qui est l'équation du mouvement du système en terme de Lagrangien.

Dans le cas de la description de champ, il peut être plus aisé de raisonner en terme de Lagrangien densité  $\mathcal{L}$ . On l'introduit par la dérivée fonctionnelle du Lagrangien sur  $\phi$  (cf. annexe E.1) :

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} \delta\phi = \sum_{j=1}^3 \partial_j \mathcal{L} dx_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \delta(\partial_j \phi) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j^{(2)} \phi)} \delta(\partial_j^{(2)} \phi) + \dots$$

avec les  $x_j$  correspondant aux trois coordonnées dans l'espace et  $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$  les dérivées partielles associées.

Du fait que le Lagrangien densité ne dépend pas directement de la position dans l'espace  $\vec{r}$ , le premier terme du développement est nul. En notant que  $\delta(\partial_j \phi) = \partial_j(\delta\phi)$ , et en limitant le développement à la dérivée au premier ordre de  $\phi$ , on a :

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} \delta\phi \simeq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \partial_j(\delta\phi)$$

Le terme sous la somme peut se simplifier à l'aide d'une intégration par parties, en effet :

$$\partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \delta\phi \right) = \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \partial_j(\delta\phi)$$

Or :

$$\int_j \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \delta\phi \right) dj = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \delta\phi \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

dans les conditions aux limites posées plus haut.

Donc dans l'intégration (E.1), nous pourrions faire la substitution :

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} \delta\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \sum_{j=1}^3 \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \right) \delta\phi \quad (\text{E.3})$$

On peut par ailleurs faire exactement le même raisonnement pour la dérivée fonctionnelle sur  $\dot{\phi}$ , et donc :

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta\dot{\phi} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \dot{\phi})} \right) \delta\dot{\phi} \quad (\text{E.4})$$

En substituant dans (E.2) les expressions des dérivées fonctionnelles de  $L$  exprimées en fonction de  $\mathcal{L}$ , on obtient l'équation du mouvement en terme de densité Lagrangienne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} + \sum_{j=1}^3 \partial_t \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \phi)} \right) = 0 \quad (\text{E.5})$$

où nous avons rappelé que  $\dot{\phi} \equiv \partial_t \phi$ .

On a considéré ici pour plus de simplicité un champ scalaire  $\phi$ , unique coordonnée généralisée du problème. Cependant, comme nous pouvons le voir en section 6.1, les coordonnées de notre système d'étude seront au nombre de quatre : une pour chaque composante du potentiel dual  $\Lambda = (\Lambda_0, \vec{\Lambda})$ . Pour obtenir toutes les équations du mouvement du système, on écrit alors l'équation E.5 pour chacune d'entre elles.

### E.3 Description Hamiltonienne et quantification

Le passage à une description en mécanique Hamiltonienne nécessite de changer de système de variables indépendantes. Vis-à-vis de l'approche Lagrangienne, on conserve la coordonnée généralisée  $\phi$ , que l'on nommera coordonnée canonique dans le formalisme Hamiltonien. À la place de la vitesse généralisée, on usera du moment canoniquement conjugué à  $\phi$ , noté  $\Pi$ . Celui-ci correspond simplement à la dérivée fonctionnelle du Lagrangien vis-à-vis de la dérivée temporelle de  $\phi$ , déjà établie en (E.4) :

$$\Pi = \frac{\delta L}{\delta (\partial_t \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} - \sum_{j=1}^3 \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \partial_t \phi)} \right) \quad (\text{E.6})$$

L'Hamiltonien densité se définit comme la transformée de Legendre du Lagrangien densité :

$$\mathcal{H} = \left( \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} \partial_t \phi_{\alpha} \right) - \mathcal{L} \quad (\text{E.7})$$

où on a pris soin d'indiquer la forme générale pour un nombre arbitraire de coordonnées canoniques labellisées par  $\alpha$ .

Comme pour le Lagrangien, l'Hamiltonien est alors simplement l'intégrale sur l'espace de l'Hamiltonien densité :

$$H = \iiint_{\vec{r}} \mathcal{H} d^3 \vec{r} = \left( \iiint_{\vec{r}} \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} \partial_t \phi_{\alpha} d^3 \vec{r} \right) - L \quad (\text{E.8})$$

Il est alors possible de reformuler l'équation du mouvement (nous restons dans le cas simplifié à une seule coordonnée) en terme d'Hamiltonien. On pose  $L = \iiint_{\vec{r}} \Pi \partial_t \phi d^3 \vec{r} - H$ , ce qui nous donne :

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = \frac{\delta}{\delta \phi} \left( \iiint_{\vec{r}} \Pi \partial_t \phi d^3 \vec{r} \right) - \frac{\delta H}{\delta \phi} = -\frac{\delta H}{\delta \phi}$$

La première dérivée fonctionnelle est ici nulle puisque le moment conjugué  $\Pi$  et la vitesse généralisée  $\partial_t \phi$  sont des variables indépendantes de la coordonnée généralisée  $\phi$ .

Donc, par la définition de  $\Pi$  (E.6) et l'équation du mouvement (E.2), cette dernière se note en fonction du Hamiltonien :

$$-\frac{\delta H}{\delta \phi} - \partial_t \Pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta H}{\delta \phi} = -\partial_t \Pi \quad (\text{E.9})$$

En mécanique classique les coordonnées canoniques et moments conjugués satisfont les relations :

$$\{\phi_\alpha(\vec{r}, t), \Pi_{\alpha'}(\vec{r}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\delta_{\alpha,\alpha'} \quad \{\phi_\alpha(\vec{r}, t), \phi_{\alpha'}(\vec{r}', t)\} = 0 \quad \{\Pi_\alpha(\vec{r}, t), \Pi_{\alpha'}(\vec{r}', t)\} = 0$$

où  $\{\}$  sont les crochets de Poisson<sup>3</sup> [162].

Pour opérer la quantification, on pose le champ et le moment conjugué comme des opérateurs.

Les crochets de Poisson deviennent alors des commutateurs, en faisant intervenir un facteur  $i\hbar$  :

$$\left[\hat{\phi}_\alpha(\vec{r}, t), \hat{\Pi}_{\alpha'}(\vec{r}', t)\right] = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\delta_{\alpha,\alpha'} \quad \left[\hat{\phi}_\alpha(\vec{r}, t), \hat{\phi}_{\alpha'}(\vec{r}', t)\right] = 0 \quad \left[\hat{\Pi}_\alpha(\vec{r}, t), \hat{\Pi}_{\alpha'}(\vec{r}', t)\right] = 0$$

---

3. Les crochets de Poisson se définissent en mécanique Hamiltonienne par :

$$\{A, B\} = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial A}{\partial \phi_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial \Pi_{\alpha}} - \frac{\partial A}{\partial \Pi_{\alpha}} \frac{\partial B}{\partial \phi_{\alpha}} \right)$$





# Annexe F

## Rappels de mécanique quantique

Cette annexe n'a pour but que de rappeler quelques éléments de base de mécanique quantique que nous utilisons dans nos développements théoriques.

### F.1 Définitions

#### F.1.1 Espace de Hilbert

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire<sup>1</sup>  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  hermitien, où  $|\cdot\rangle$  désigne un vecteur. C'est la généralisation d'un espace euclidien ou hermitien pour une dimension quelconque.

Une application  $f$  d'un espace vectoriel complexe  $E$  dans  $\mathbb{C}$  est dite hermitienne si elle est :

- Sesquilinéaire à gauche<sup>2</sup>, c'est-à-dire linéaire par rapport au second argument et semi-linéaire par rapport au premier :

$$\langle x | \mu y \rangle = \mu \langle x | y \rangle \qquad \langle \mu x | y \rangle = \mu^* \langle x | y \rangle$$

Avec  $(x, y) \in E^2$  et  $\mu \in \mathbb{C}$ .

- Positive :  $\langle x | x \rangle \in \mathbb{R}_+$   $\forall x \in E$
- Définie :  $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
- Symétrique hermitienne :  $\langle y | x \rangle = (\langle x | y \rangle)^*$

Lorsqu'un espace préhilbertien est complet<sup>3</sup> par rapport à la métrique associée à la norme, on parle alors d'espace de Hilbert, que nous noterons ici  $\mathcal{H}$ . La norme s'y définit par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

Qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{\langle x | x \rangle \langle y | y \rangle}$$

où  $|\cdot|$  dénote le module.

#### F.1.2 Fonctions d'onde

En mécanique quantique et en suivant le formalisme de Dirac, utilisé dans tout ce document, un système physique est décrit par une fonction d'onde (ou vecteur d'état)  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  contenant toute l'information sur le système [119], avec  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable<sup>4</sup> de dimension infinie.

---

1. Aussi noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ou  $(\cdot | \cdot)$

2. Convention usuelle des physiciens, les mathématiciens parlent de sesquilinearité à droite pour la même définition.

3. Dans lequel toute suite de Cauchy converge. L'espace n'a pas de "trous".

4. Qui admet une base orthonormée constituée d'une famille dénombrable de vecteurs.

Une base hilbertienne, ou base orthonormée, est un ensemble  $\{|e_n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $\mathcal{H}$  vérifiant les relations d'orthonormalité et de fermeture :

$$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n| = \hat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}$$

Avec  $\hat{\mathbf{1}}_{\mathcal{H}}$  la matrice identité<sup>5</sup> (aussi appelée matrice unité) dans  $\mathcal{H}$ .

On peut alors décomposer n'importe quel état  $|\Psi\rangle$  dans cette base :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n | \Psi \rangle \quad (\text{F.1})$$

### F.1.3 Opérateurs

Nous n'utilisons dans toute notre étude que des opérateurs linéaires sur  $\mathcal{H}$  tels que  $\hat{O}$  :

$$\begin{aligned} \hat{O} : \mathcal{D}(\hat{O}) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ |\Psi\rangle &\longrightarrow \hat{O} |\Psi\rangle \end{aligned}$$

Où le domaine de définition  $\mathcal{D}(\hat{O})$  de  $\hat{O}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ . L'opérateur  $\hat{O}$  fait ainsi correspondre à toute fonction  $|\Psi\rangle$ , une autre fonction  $|\Psi'\rangle$  et ce, de manière linéaire :

$$\hat{O}(\lambda_1 |\Psi\rangle + \lambda_2 |\Phi\rangle) = \lambda_1 \hat{O} |\Psi\rangle + \lambda_2 \hat{O} |\Phi\rangle$$

On dit que  $|\Psi\rangle$  est vecteur propre d'un opérateur  $\hat{O}$  si :

$$\hat{O} |\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle$$

avec  $\lambda$  un nombre complexe appelé valeur propre de  $\hat{O}$ .

On note le vecteur résultant de l'application d'un opérateur  $|\hat{O}\Psi\rangle \equiv \hat{O} |\Psi\rangle$ . On a les différentes notations possibles pour l'élément matriciel résultant du produit scalaire de  $|\Phi\rangle$  et  $\hat{O} |\Psi\rangle$  :

$$\langle \Phi | \hat{O} |\Psi\rangle = \langle \Phi | \hat{O} \Psi \rangle = \langle \hat{O}^\dagger \Phi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{O}^\dagger \Phi \rangle^* = \langle \Psi | \hat{O}^\dagger | \Phi \rangle^*$$

Avec  $*$  marquant le conjugué et  $\dagger$  le conjugué de la transposée.  $\hat{O}^\dagger$  est appelé adjoint, ou conjugué hermitien, de  $\hat{O}$ . Un opérateur est alors dit hermitique s'il est son propre adjoint.

Enfin, le commutateur de deux opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  est lui-même un opérateur, définit par :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

### F.1.4 Observables

À chaque grandeur physique observable  $A$  on associe un opérateur  $\hat{A}$  hermitien dont les valeurs propres sont les seuls résultats possibles d'une mesure de cette grandeur<sup>6</sup> [119].

L'opérateur  $\hat{A}$  étant hermitien, ses valeurs propres  $a_i$  sont par conséquent réelles<sup>7</sup>. Pour deux vecteurs propres  $|a_i\rangle$  et  $|a_j\rangle$  de  $\hat{A}$ , de valeurs propres respectives  $a_i$  et  $a_j$ , si  $a_i \neq a_j$  alors ces deux vecteurs propres sont orthogonaux :  $\langle a_i | a_j \rangle = 0$ .

5. La matrice identité est une matrice carré dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 tandis que tous ses autres éléments sont nuls.

6. Cette assertion fait partie des postulats de la mécanique quantique sur les observables [119].

7. En effet soit  $|u\rangle$  un vecteur propre de  $\hat{A}$ ,  $a_u$  sa valeur propre associée, on a  $a_u \langle u | u \rangle = \langle u | \hat{A} u \rangle = \langle \hat{A}^\dagger u | u \rangle = a_u^* \langle u | u \rangle$  soit  $a_u = a_u^*$  donc  $a_u$  réel.

Soit  $\{|a_i\rangle\}_{i \in [1, N]}$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $\hat{A}$ , on a  $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$  et on peut décomposer n'importe quel état dans cette base suivant (F.1). On a alors la probabilité de mesurer  $a_i$  pour l'observable  $A$  avec cet état<sup>6</sup> :

$$\mathcal{P}(a_i) = |\langle a_i | \Psi \rangle|^2$$

On respecte alors la condition de normalisation :

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{P}(a_i) = 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle$$

Par ailleurs, on note la valeur moyenne de  $A$  :

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^N a_i \mathcal{P}(a_i) = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$$

Après une mesure de  $a_i$ , le système mesuré est dans l'état  $|a_i\rangle$ <sup>6</sup>. Cependant l'évolution temporelle de la valeur moyenne d'un opérateur n'est pas précisée dans cette notation. Cette évolution peut être attribuée soit à une variation de l'état  $|\Psi\rangle$  dans le temps, soit à celle de l'opérateur  $\hat{A}$ , soit à un mélange des deux. Cela mène à la formulation de trois représentations équivalentes en mécanique quantique pour décrire l'évolution temporelle [117].

## F.2 Représentations en mécanique quantique

### F.2.1 Représentation de Schrödinger

Dans la représentation de Schrödinger, la dépendance temporelle est portée par la fonction d'onde  $|\Psi_S(t)\rangle$  décrivant le système, tandis que les opérateurs des observables sont indépendants du temps. Dans cette représentation, l'observateur est stationnaire alors que l'univers évolue. Cette représentation est adaptée lorsque l'on considère des mesures dont le résultat est indépendant du référentiel.

Dans ce cadre, on définit l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(t, t_0)$  décrivant l'évolution temporelle de la fonction d'onde par :

$$\hat{U}(t, t_0) |\Psi_S(t_0)\rangle = |\Psi_S(t)\rangle$$

Où on définira pour plus de praticité la référence de temps  $t_0 = 0$ .

La fonction d'onde satisfait l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H}_S(t) |\Psi_S(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle \quad (\text{F.2})$$

Où nous introduisons l'Hamiltonien  $\hat{H}$ , observable associée à l'énergie totale du système, ici noté  $\hat{H}_S(t)$  pour rendre compte de sa forme la plus générale<sup>8</sup>.

L'équation (F.2) nous donne :

$$\hat{H}_S(t) \hat{U}(t) |\Psi_S(0)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) |\Psi_S(0)\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \hat{H}_S(t) \hat{U}(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t)$$

Dans le cas d'un système isolé, l'énergie est conservée au cours du temps (le système est aussi dit conservatif) [119]. L'hamiltonien est donc indépendant du temps et on peut écrire :

$$\hat{U}(t) = e^{-i \frac{\hat{H}_S}{\hbar} t} \quad (\text{F.3})$$

---

8. Dans un système ouvert, l'énergie peut dépendre du temps et l'expression de l'Hamiltonien diffère entre les représentations de Schrödinger et de Heisenberg.

On décrit alors l'évolution de la valeur moyenne d'un opérateur  $\hat{A}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \middle| \hat{A} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \hat{A} \middle| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi \middle| \frac{\hat{H}}{(-i)\hbar} \hat{A} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \middle| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \middle| \hat{A} \frac{\hat{H}}{i\hbar} \middle| \Psi \right\rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

Du fait que l'hamiltonien est hermitien (observable associée à l'énergie du système).

Nous noterons que, dans la représentation de Schrödinger, les opérateurs sont indépendants du temps, soit  $\left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle = 0$ .

### F.2.2 Représentation de Heisenberg

Dans la représentation de Heisenberg, la dépendance temporelle est portée entièrement par les opérateurs. Ici l'univers est stationnaire tandis que l'observateur évolue. Cette représentation est plus adaptée pour la description de mesures dont le résultat dépend du référentiel.

L'évolution temporelle d'un opérateur  $\hat{A}_H(t)$  dans cette représentation est déterminée par l'équation d'Heisenberg :

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H, \hat{A}_H]$$

Par ailleurs, le passage de la représentation de Schrödinger à celle de Heisenberg peut se faire grâce à l'opérateur d'évolution :

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t) \quad |\Psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi_H\rangle$$

Soit :

$$\langle \hat{A}_S \rangle = \langle \Psi_S(t) | \hat{A}_S | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_H | \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t) | \Psi_H \rangle = \langle \Psi_H | \hat{A}_H(t) | \Psi_H \rangle = \langle \hat{A}_H \rangle$$

Dans le cas d'un système isolé, ce passage se fait facilement grâce à la forme exponentielle (F.3). On peut alors montrer que les hamiltoniens dans les représentations de Schrödinger et Heisenberg sont les mêmes en tenant compte du fait que  $[\hat{U}(t), \hat{H}_S] = 0$  :

$$\hat{H}_H = \hat{U}^\dagger(t) \hat{H}_S \hat{U}(t) = \hat{H}_S \hat{U}^\dagger(t) \hat{U}(t) = \hat{H}_S$$

Le passage de la représentation de Schrödinger à celle de Heisenberg et vice-versa se fait aisément tant que l'hamiltonien du système est indépendant du temps. En se plaçant dans un système isolé  $\left( \hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}_S t}{\hbar}} \right)$  et en partant de  $\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t} \hat{U}(t) - \frac{i}{\hbar} \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{H}_S \hat{U}(t) \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t) - \frac{i}{\hbar} \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t) \hat{H}_S + \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t} \hat{U}(t) \\ \frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S, \hat{A}_H(t)] + \left( \frac{\partial \hat{A}_S}{\partial t} \right)_H \end{aligned}$$

Ce qui, en notant que  $\hat{A}_S$  est indépendant du temps et que en système isolé  $\hat{H}_S = \hat{H}_H$ , nous donne :

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H, \hat{A}_H]$$

### F.2.3 Représentation d'interaction

Dans la représentation d'interaction, la dépendance temporelle est distribuée entre les opérateurs et les fonctions d'onde. Ces dernières portant l'évolution temporelle caractéristique du système s'il était isolé, tandis que les opérateurs portent l'évolution temporelle résultant de l'interaction de ce système avec son environnement.

On pose l'hamiltonien sous la forme :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$$

Où  $\hat{H}_0$  est l'hamiltonien du système isolé, indépendant du temps.

On définit la fonction d'onde en représentation d'interaction  $|\Psi_I(t)\rangle$  à partir de celle en représentation de Schrödinger par :

$$|\Psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi_I(t)\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t}$$

Ici l'opérateur d'évolution correspond à celui défini en (F.3), puisque  $\hat{H}_0$  est l'hamiltonien du système isolé.

En ré-écrivant l'équation de Schrödinger (F.2), on a donc :

$$\begin{aligned} (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) \hat{U}(t) |\Psi_I(t)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t} |\Psi_I(t)\rangle \right) \\ &= i\hbar \left( -i\frac{\hat{H}_0}{\hbar} e^{-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t} |\Psi_I(t)\rangle + e^{-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle \right) \\ (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) \hat{U}(t) |\Psi_I(t)\rangle &= \hat{H}_0 \hat{U}(t) |\Psi_I(t)\rangle + i\hbar \hat{U}(t) \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle \end{aligned}$$

Soit :

$$\hat{V}(t) \hat{U}(t) |\Psi_I(t)\rangle = i\hbar \hat{U}(t) \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle$$

On peut alors définir le potentiel d'interaction  $\hat{V}_I(t)$  en appliquant l'adjoint de l'opérateur d'évolution sur les deux membres de l'équation :

$$\hat{V}_I(t) |\Psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle \quad \text{avec} \quad \hat{V}_I(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{V}(t) \hat{U}(t)$$

On obtient donc une équation semblable à celle de Schrödinger, avec le potentiel d'interaction jouant le rôle d'un hamiltonien. On peut alors l'intégrer pour expliciter la forme de la fonction d'onde en prenant toujours  $t_0 = 0$  comme référence de temps :

$$|\Psi_I(t)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{V}_I(t') |\Psi_I(t')\rangle dt' \quad (\text{F.4})$$

Une autre manière de faire l'intégration nous donne :

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{V}_I(t') dt'} |\Psi_I(0)\rangle \quad (\text{F.5})$$

Pour aller plus loin dans l'analyse, il est nécessaire de poser une hypothèse sur l'intensité des interactions afin d'utiliser la théorie des perturbations dépendantes du temps.

### F.3 Approche perturbative en représentation d'interaction

Dans une approche perturbative l'hamiltonien du système est décomposé en la somme d'un hamiltonien  $\widehat{H}_0$  indépendant du temps et d'un hamiltonien perturbatif  $\widehat{H}_{pert}(t)$ , qui porte la dépendance temporelle et est très petit devant  $\widehat{H}_0$ .

L'hamiltonien  $\widehat{H}_0$  définit la base des états constituant l'espace de Hilbert dans lequel le système va évoluer<sup>9</sup>, tandis que  $\widehat{H}_{pert}(t)$  ne change pas ces états mais induit des transitions entre eux. La probabilité de trouver le système dans un de ces états évolue donc avec le temps.

On voit tout de suite ici l'intérêt de la représentation d'interaction, particulièrement adaptée à l'approche perturbative puisqu'elle opère déjà la séparation de l'hamiltonien entre son terme d'énergie propre au système isolé, et celui d'interaction avec l'environnement. On identifie donc  $\widehat{H}_{pert}(t)$  à  $\widehat{V}_I(t)$  en posant l'hypothèse que  $\widehat{V}_I(t)$  est très petit devant  $\widehat{H}_0$ .

L'ordre 0 s'obtient de (F.4) ou (F.5) en considérant un potentiel d'interaction nul :

$$|\Psi_I(t)\rangle \cong |\Psi_I(0)\rangle$$

On peut par ailleurs remarquer que  $|\Psi_I(0)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle$  puisque  $\widehat{U}(0) = \widehat{\mathbf{1}}$ . La fonction d'onde reste donc stationnaire dans l'espace de Hilbert quel que soit la représentation choisie.

L'ordre 1 s'obtient en considérant alors que l'interaction avec l'environnement va venir perturber cet état stable. Dans (F.4),  $\widehat{V}_I(t)$  va donc agir sur  $|\Psi_I(0)\rangle$  :

$$|\Psi_I(t)\rangle \cong |\Psi_I(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \widehat{V}_I(t_1) |\Psi_I(0)\rangle dt_1$$

Qui peut se ré-écrire :

$$|\Psi_I(t)\rangle \cong \left( \widehat{\mathbf{1}} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_1=0}^t \widehat{V}_I(t_1) dt_1 \right) |\Psi_I(0)\rangle \quad (\text{F.6})$$

Il est à noter que cette forme peut être obtenue en faisant le développement limité au premier ordre de l'exponentielle dans (F.5), toujours en faisant l'hypothèse d'un  $\widehat{V}_I(t)$  faible.

Dans le même esprit, l'ordre 2 s'obtient en remplaçant  $|\Psi_I(t')\rangle$  dans (F.4) par (F.6) :

$$\begin{aligned} |\Psi_I(t)\rangle &\cong |\Psi_I(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_2=0}^t \widehat{V}_I(t_2) \left( \widehat{\mathbf{1}} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_1=0}^{t_2} \widehat{V}_I(t_1) dt_1 \right) |\Psi_I(0)\rangle dt_2 \\ |\Psi_I(t)\rangle &\cong \left( \widehat{\mathbf{1}} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_2=0}^t \widehat{V}_I(t_2) dt_2 + \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_2=0}^t \int_{t_1=0}^{t_2} \widehat{V}_I(t_2) \widehat{V}_I(t_1) dt_1 dt_2 \right) |\Psi_I(0)\rangle \end{aligned}$$

Et ainsi de suite pour les ordres supérieurs<sup>10</sup>.

Dans la pratique, nous nous limiterons dans ce document à l'ordre 1 puisque nous considérerons des efficacités non linéaires très faibles.

9. Dans notre cas d'étude, ce seront les états de Fock des modes des champs signal et idler  $|n_{\omega_s}, m_{\omega_i}\rangle$ .

10. Une forme générale peut être déduite analytiquement, moyennant l'utilisation de l'opérateur  $\widehat{T}$  permettant d'ordonner les opérateurs  $\widehat{V}_I(t_i)$  dans le temps. La forme analytique et sa démonstration peuvent être trouvées dans la référence [117, partie 5.10.4].

## F.4 États de Fock

Nous userons essentiellement du formalisme de la mécanique quantique pour décrire des champs portant un faible nombre de photons. Aussi introduirons-nous rapidement, pour un champ donné, la base hilbertienne  $\{|n\rangle\}$  où pour chaque  $|n\rangle$ ,  $n$  représente le nombre de photons présents dans le champ<sup>11</sup>.

Les  $|n\rangle$  sont appelés états de Fock et représentent des états stationnaires du champ libre, c'est-à-dire se propageant librement dans le milieu sans interactions<sup>12</sup>.

Un état de Fock décrit une assemblée de particules en nombre définis, sans interactions et identiques donc indiscernables. Dès qu'il sera nécessaire de décrire plusieurs types de particules discernables, nous nous placerons dans l'espace de Fock correspondant au produit tensoriel de leurs espaces respectifs. En prenant l'exemple de deux modes fréquentiels distinguables<sup>13</sup>, définis sur les espaces respectifs  $\{|n\rangle\}$  et  $\{|m\rangle\}$ , les états décrivant de manière conjointe ces champs se feront sur la base  $\{|n, m\rangle\}$  où  $|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle$ .

Nous définissons les opérateurs de création  $\hat{a}^\dagger$  et d'annihilation  $\hat{a}$ , adjoints l'un de l'autre, qui agissent sur un état de Fock en, respectivement, ajoutant et retirant une particule à l'état quantique décrit :

$$\begin{aligned}\hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle\end{aligned}$$

Le commutateur des opérateurs création-annihilation est :  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .

L'état du vide  $|0\rangle$  se définit comme l'état annulé par l'opérateur d'annihilation :

$$\hat{a} |0\rangle = 0$$

Par ailleurs, l'observable nombre de particules est  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , avec les  $|n\rangle$  pour états propres :

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

En pratique nous travaillerons sur des bases continues de modes, de sorte que pour un champ  $i$  donné, tout état nombre de photon  $|n_i\rangle$  se décompose sur la base  $\{|n_{\omega_i}\rangle\}$  tel que :

$$\begin{aligned}|n_i\rangle &= \int_{\omega_i} c(\omega_i) |n_{\omega_i}\rangle d\omega_i \\ \langle n_{\omega_i} | n_{\omega'_i} \rangle &= \delta(\omega_i - \omega'_i)\end{aligned}$$

avec  $c(\omega_i) = \langle n_{\omega_i} | n_i \rangle$ .

Autrement dit, un état correspondant à un nombre  $n$  de photons dans le champ  $i$  peut se décomposer sur la base continue des états attribuant  $n$  photons au mode de fréquence  $\omega_i$ . Cela n'est évidemment plus vrai pour  $n \geq 2$  où deux photons (ou plus) dans le champ  $i$  peuvent se répartir dans les différents modes du champ. Toutefois nous nous limiterons dans notre étude à des cas où  $n \leq 1$  pour un champ quantifié donné.

11. En considérant le champ comme un oscillateur harmonique,  $n$  est son niveau d'excitation.

12. La dispersion qui, à proprement parler, est issue de l'interaction du champ avec le milieu, sera néanmoins prise en compte dans la propagation au sein de notre modèle.

13. On peut noter que la distinguabilité est un point subtil mais important dans la définition des systèmes que nous étudierons. Dans le domaine spectral, la résolution maximale que nous sommes capable d'atteindre expérimentalement définira l'étendue des modes au sein desquels les photons nous sont indiscernables les uns des autres.





## Annexe G

# Non-uniformité dans la littérature scientifique

Cette annexe constitue un ajout au présent manuscrit, ayant suivi la soutenance de cette thèse. Elle a pour but de rendre compte d'un développement récent vis-à-vis de l'étude de la non-uniformité. Ce dernier concerne essentiellement la forme adoptée par le terme  $f$  de la JSA dès lors que la non-uniformité du guide doit être prise en compte. Nous rappelons cette forme, posée en (IV.2) :

$$f(\omega, \omega') = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L e^{i \Delta k_S(x) x} dx \quad (\text{G.1})$$

où nous rappelons que  $\Delta k_S$  est le désaccord de phase décalé par rapport à une valeur de référence, qui dépend de la position  $x$  dans le guide du fait de la non-uniformité de ce dernier.

La forme (G.1) sert de base à tous nos développements dans le cadre d'une description de fibres non uniforme (partie IV) et peut se retrouver dans plusieurs références [128, 149]. Toutefois il est possible de trouver une formulation légèrement différente dans la littérature, dont nous avons pris connaissance par la référence [138] :

$$f(\omega, \omega') = \frac{1}{L} \int_{x=0}^L e^{i \int_{x'=0}^x \Delta k_S(x') dx'} dx \quad (\text{G.2})$$

où on peut noter l'introduction d'une intégration sur l'espace supplémentaire dans le terme exponentiel.

Cette forme se retrouve usuellement dans le cas de matériaux faisant intervenir du *chirped quasi-phase matching* [163, 164], i.e. où la période de polarisation du matériau varie le long de celui-ci. Au désaccord de phase brut vient alors s'ajouter un terme dépendant de la période de polarisation (qui du fait du *chirp* dépend de la position dans le guide).

Nous notons que l'argument usuellement avancé, quand il est indiqué, pour expliquer l'intégration du terme de désaccord de phase au sein de l'exponentielle est la prise en compte de la phase accumulée durant la propagation par les champs [165].

La transposition de cette forme du cas de *chirped quasi-phase matching* (modulation du signe de la susceptibilité le long du guide) à celui d'un guide non uniforme (modulation de la dimension du guide sur son long) n'est pas triviale et nécessiterait plutôt une approche plus rigoureuse repartant de l'équation de propagation des champs en prenant en compte que la 'constante' de propagation  $\beta$  dépend de la position dans la fibre, comme cela a pu être fait dans [17].

Nous notons ainsi que les références [17, 166, 167] usent de la forme (G.2) pour rendre compte de l'effet de la non-uniformité dans les fibres sur le mélange à quatre ondes. Nous nous emploierons donc dans la suite de cette annexe à faire état des premières différences de comportement que nous pouvons dégager entre les formes (G.1) et (G.2), afin de disposer de points sur lesquels des mesures expérimentales pourraient permettre de trancher entre les deux.

On peut tout d'abord relever que pour le cas d'un guide uniforme, les formes (G.1) et (G.2) donnent exactement le même résultat.

En présence d'un profil linéaire, toutefois, le résultat se montre légèrement différent.

Nous reprenons (11.1) :

$$\Delta k_S(x) = \Delta k_0 + \frac{\Delta k_L - \Delta k_0}{L} x$$

ce qui nous donne pour l'argument de l'exponentielle de (G.2) :

$$\int_{x'=0}^x \Delta k_S(x') dx' = \Delta k_0 x + \frac{\Delta k_L - \Delta k_0}{L} \frac{x^2}{2}$$

Où on peut relever une différence d'un facteur 2 vis-à-vis de la part quadratique de l'argument de l'exponentielle dans (11.2), obtenue suivant (G.1). Nous pouvons alors réaliser le même développement qu'en 11.1 :

$$a = -i \frac{\Delta k_L - \Delta k_0}{2L} \qquad b = -i \frac{\Delta k_0}{2}$$

soit :

$$\begin{aligned} f_{lin}(\omega, \omega') &= \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{2\pi L}{-i(\Delta k_L - \Delta k_0)}} e^{\frac{b^2}{a}} \\ &\times \left( \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \Delta k_L}{\sqrt{2}\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) - \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \Delta k_0}{\sqrt{2}\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) \right) \quad (\text{G.3}) \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{b^2}{a} = -i \frac{\Delta k_0^2 L}{2(\Delta k_L - \Delta k_0)}$$

Nous obtenons donc au final pour la JSI :

$$\mathcal{F}_{lin}(\omega, \omega') = \frac{\pi}{2L|\Delta k_L - \Delta k_0|} \left| \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \Delta k_L}{\sqrt{2}\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) - \text{Erf} \left( \frac{\sqrt{-iL} \Delta k_0}{\sqrt{2}\sqrt{\Delta k_L - \Delta k_0}} \right) \right|^2 \quad (\text{G.4})$$

En nous penchant sur les effets de la non-uniformité sur le spectre, nous pouvons voir en suivant le même raisonnement qu'en sous-section 11.2.1 que la diminution du maximum d'émission suivant (G.4) est 4 fois moindre qu'avec son homologue (11.6) (obtenu avec (G.1)), à non-uniformité  $\Theta = \Delta k_L - \Delta k_0$  équivalente. Dans un même ordre d'idée, l'élargissement du spectre (déjà discuté en sous-section 11.2.2) se montrera de même moins prononcé d'un facteur 2.

Toutefois le point le plus important à relever est que (G.4) est symétrique par inversion du sens de propagation dans le guide (autrement dit par interversion de  $\Delta k_L$  et  $\Delta k_0$  dans les équations), tandis que (G.3) ne l'est pas du fait du terme exponentiel en  $\frac{b^2}{a}$ . Autrement dit, le spectre mesuré (en intensité) se montrera réciproque entre les deux sens de propagation dans le guide, dès lors que la forme (G.2) est utilisée. Cependant, le terme  $f(\omega, \omega')$  reste non-réciproque de sorte que le phénomène de dégradation de la visibilité de l'intrication en polarisation des paires de photons dans une boucle Sagnac, étudié en section 12.2, reste présent quel que soit la forme utilisée.

Ainsi donc, l'étude de l'impact de la non-réciprocité sur la visibilité exposé dans ce manuscrit reste valable dans les deux cas de figure (même si l'amplitude de cet effet dépendra de la forme utilisée pour décrire la non-uniformité).

D'autre part, le fait que la forme (G.1) montre une non-réciprocité des spectres d'émission mesurés selon le sens de propagation dans le guide tandis que les développements selon (G.2) en sont exempts, constitue un point de différence majeur entre les deux. Une mesure expérimentale montrant la présence ou l'absence d'un tel phénomène permettrait ainsi donc de déterminer directement quelle est la forme correcte pour modéliser un guide non-uniforme.

Nous notons par ailleurs à titre d'information que des résultats préliminaires sur l'étude de profils spécifiques font remonter d'autres différences sur les spectres produits à partir de ces deux formes. Nous pouvons ainsi citer comme exemple le cas de fibres aux profils sinusoidaux où, pour obtenir un même élargissement, l'amplitude de la sinusoïde doit être 100 fois plus grande avec la forme (G.2) qu'avec (G.1). Il existe ainsi des cas spécifiques où nous pouvons à la fois distinguer des différences de comportement entre les deux formes, et tester en pratique le résultat (i.e. mesurer le spectre d'émission effectif d'un guide présentant la non-uniformité correspondante). Ceux-ci nous offrent donc ainsi donc d'autres possibilités pour déterminer la forme valide, et constituerons sans doute de futures pistes de recherche.



# Bibliographie

- [1] G. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 5th ed., Oct 2012.
- [2] P. S. Russell, “Photonic-crystal fibers,” *J. Lightwave Technol.*, vol. 24, pp. 4729–4749, Dec 2006.
- [3] F. Benabid and P. Roberts, “Linear and nonlinear optical properties of hollow core photonic crystal fiber,” *Journal of Modern Optics*, vol. 58, no. 2, pp. 87–124, 2011.
- [4] B. Debord, A. Amsanpally, M. Chafer, A. Baz, M. Maurel, J. M. Blondy, E. Hugonnot, F. Scol, L. Vincetti, F. Gérôme, and F. Benabid, “Ultralow transmission loss in inhibited-coupling guiding hollow fibers,” *Optica*, vol. 4, pp. 209–217, Feb 2017.
- [5] T. Grujic, B. T. Kuhlmeij, A. Argyros, S. Coen, and C. M. de Sterke, “Solid-core fiber with ultra-wide bandwidth transmission window due to inhibited coupling,” *Opt. Express*, vol. 18, pp. 25556–25566, Dec 2010.
- [6] A. Argyros, S. G. Leon-Saval, J. Pla, and A. Docherty, “Antiresonant reflection and inhibited coupling in hollow-core square lattice optical fibres,” *Opt. Express*, vol. 16, pp. 5642–5648, Apr 2008.
- [7] A. R. Bhagwat and A. L. Gaeta, “Nonlinear optics in hollow-core photonic bandgap fibers,” *Opt. Express*, vol. 16, pp. 5035–5047, Mar 2008.
- [8] F. Benabid, “Hollow-core photonic bandgap fibre : new light guidance for new science and technology,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 364, no. 1849, pp. 3439–3462, 2006.
- [9] J. C. Travers, W. Chang, J. Nold, N. Y. Joly, and P. S. J. Russell, “Ultrafast nonlinear optics in gas-filled hollow-core photonic crystal fibers,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 28, pp. A11–A26, Dec 2011.
- [10] J. M. Dudley and J. R. Taylor, “Ten years of nonlinear optics in photonic crystal fibre,” *Nature Photonics*, vol. 3, p. 85, 2009.
- [11] J. M. Dudley, G. Genty, and S. Coen, “Supercontinuum generation in photonic crystal fiber,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 78, pp. 1135–1184, Oct 2006.
- [12] F. Couny, F. Benabid, P. J. Roberts, P. S. Light, and M. G. Raymer, “Generation and photonic guidance of multi-octave optical-frequency combs,” *Science*, vol. 318, no. 5853, pp. 1118–1121, 2007.
- [13] C. Conti, M. A. Schmidt, P. S. J. Russell, and F. Biancalana, “Highly noninstantaneous solitons in liquid-core photonic crystal fibers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 263902, Dec 2010.
- [14] A. Orioux and E. Diamanti, “Recent advances on integrated quantum communications,” *Journal of Optics*, vol. 18, no. 8, p. 083002, 2016.
- [15] L. Caspani, C. Xiong, B. J. Eggleton, D. Bajoni, M. Liscidini, M. Galli, R. Morandotti, and D. J. Moss, “Integrated sources of photon quantum states based on nonlinear optics,” *Light : Science & Applications*, vol. 6, p. e17100, Nov 2017.
- [16] S. Scheel, “Single-photon sources—an introduction,” *Journal of Modern Optics*, vol. 56, no. 2-3, pp. 141–160, 2009.

- 
- [17] J. G. Koefoed, S. M. M. Friis, J. B. Christensen, and K. Rottwitt, “Spectrally pure heralded single photons by spontaneous four-wave mixing in a fiber : reducing impact of dispersion fluctuations,” *Opt. Express*, vol. 25, pp. 20835–20849, Aug 2017.
- [18] R. Rangarajan, L. E. Vicent, A. B. U’Ren, and P. G. Kwiat, “Engineering an ideal indistinguishable photon-pair source for optical quantum information processing,” *Journal of Modern Optics*, vol. 58, no. 3-4, pp. 318–327, 2011.
- [19] K. Garay-Palmett, H. J. McGuinness, O. Cohen, J. S. Lundeen, R. Rangel-Rojo, A. B. U’Ren, M. G. Raymer, C. J. McKinstrie, S. Radic, and I. A. Walmsley, “Photon pair-state preparation with tailored spectral properties by spontaneous four-wave mixing in photonic-crystal fiber,” *Opt. Express*, vol. 15, pp. 14870–14886, Oct 2007.
- [20] T. S. Humble and W. P. Grice, “Spectral effects in quantum teleportation,” *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 022307, Feb 2007.
- [21] K. Edamatsu, “Entangled photons : Generation, observation, and characterization,” *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 46, no. 11R, p. 7175, 2007.
- [22] R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, H. Weier, T. Scheidl, M. Lindenthal, B. Blauensteiner, T. Jennewein, J. Perdigues, P. Trojek, B. Ömer, M. Fürst, M. Meyenburg, J. Rarity, Z. Sodnik, C. Barbieri, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Entanglement-based quantum communication over 144 km,” *Nature Physics*, vol. 3, p. 481, 2007.
- [23] P. Walther, K. J. Resch, T. Rudolph, E. Schenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger, “Experimental one-way quantum computing,” *Nature*, vol. 434, p. 169, 2005.
- [24] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation,” *Nature*, vol. 390, p. 575, 1997.
- [25] P. Senellart, G. Solomon, and A. White, “High-performance semiconductor quantum-dot single-photon sources,” *Nature Nanotechnology*, vol. 12, p. 1026, 2017.
- [26] D. Huber, M. Reindl, Y. Huo, H. Huang, J. S. Wildmann, O. G. Schmidt, A. Rastelli, and R. Trotta, “Highly indistinguishable and strongly entangled photons from symmetric gaas quantum dots,” *Nature Communications*, vol. 8, p. 15506, 2017.
- [27] I. Suemune, H. Sasakura, Y. Asano, H. Kumano, R. Inoue, K. Tanaka, T. Akazaki, and H. Takayanagi, “Photon-pair generation based on superconductivity,” *IEICE Electronics Express*, vol. 9, no. 14, pp. 1184–1200, 2012.
- [28] L. G. Helt, M. Liscidini, and J. E. Sipe, “How does it scale? comparing quantum and classical nonlinear optical processes in integrated devices,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 29, pp. 2199–2212, Aug 2012.
- [29] Y. H. Shih, A. V. Sergienko, M. H. Rubin, T. E. Kiess, and C. O. Alley, “Two-photon entanglement in type-ii parametric down-conversion,” *Phys. Rev. A*, vol. 50, pp. 23–28, Jul 1994.
- [30] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih, “New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 4337–4341, Dec 1995.
- [31] J. Belhassen, F. Baboux, Q. Yao, M. Amanti, I. Favero, A. Lemaître, W. S. Kolthammer, I. A. Walmsley, and S. Ducci, “On-chip iii-v monolithic integration of heralded single photon sources and beamsplitters,” *Applied Physics Letters*, vol. 112, no. 7, p. 071105, 2018.
- [32] C. Autebert, N. Bruno, A. Martin, A. Lemaître, C. G. Carbonell, I. Favero, G. Leo, H. Zbinden, and S. Ducci, “Integrated algaas source of highly indistinguishable and energy-time entangled photons,” *Optica*, vol. 3, pp. 143–146, Feb 2016.
-

- [33] S. Tanzilli, H. D. Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, P. Baldi, M. D. Micheli, D. Ostrowsky, and N. Gisin, “Highly efficient photon-pair source using periodically poled lithium niobate waveguide,” *Electronics Letters*, vol. 37, pp. 26–28(2), January 2001.
- [34] O. Alibart, V. D’Auria, M. D. Micheli, F. Doutre, F. Kaiser, L. Labonté, T. Lunghi, Éric Picholle, and S. Tanzilli, “Quantum photonics at telecom wavelengths based on lithium niobate waveguides,” *Journal of Optics*, vol. 18, no. 10, p. 104001, 2016.
- [35] F. Kaneda, K. Garay-Palmett, A. B. U’Ren, and P. G. Kwiat, “Heralded single-photon source utilizing highly nondegenerate, spectrally factorable spontaneous parametric downconversion,” *Opt. Express*, vol. 24, pp. 10733–10747, May 2016.
- [36] H. Takesue, H. Fukuda, T. Tsuchizawa, T. Watanabe, K. Yamada, Y. Tokura, and S. ichi Itabashi, “Generation of polarization entangled photon pairs using silicon wire waveguide,” *Opt. Express*, vol. 16, pp. 5721–5727, Apr 2008.
- [37] J. E. Sharping, K. F. Lee, M. A. Foster, A. C. Turner, B. S. Schmidt, M. Lipson, A. L. Gaeta, and P. Kumar, “Generation of correlated photons in nanoscale silicon waveguides,” *Opt. Express*, vol. 14, pp. 12388–12393, Dec 2006.
- [38] C. Ma, X. Wang, V. Anant, A. D. Beyer, M. D. Shaw, and S. Mookherjea, “Silicon photonic entangled photon-pair and heralded single photon generation with  $CAR > 12,000$  and  $g(2)(0) < 0.006$ ,” *Opt. Express*, vol. 25, pp. 32995–33006, Dec 2017.
- [39] E. Engin, D. Bonneau, C. M. Natarajan, A. S. Clark, M. G. Tanner, R. H. Hadfield, S. N. Dorenbos, V. Zwiller, K. Ohira, N. Suzuki, H. Yoshida, N. Iizuka, M. Ezaki, J. L. O’Brien, and M. G. Thompson, “Photon pair generation in a silicon micro-ring resonator with reverse bias enhancement,” *Opt. Express*, vol. 21, pp. 27826–27834, Nov 2013.
- [40] R. Kumar, J. R. Ong, J. Recchio, K. Srinivasan, and S. Mookherjea, “Spectrally multiplexed and tunable-wavelength photon pairs at  $1.55 \mu\text{m}$  from a silicon coupled-resonator optical waveguide,” *Opt. Lett.*, vol. 38, pp. 2969–2971, Aug 2013.
- [41] K. ichi Harada, H. Takesue, H. Fukuda, T. Tsuchizawa, T. Watanabe, K. Yamada, Y. Tokura, and S. ichi Itabashi, “Generation of high-purity entangled photon pairs using silicon wire waveguide,” *Opt. Express*, vol. 16, pp. 20368–20373, Dec 2008.
- [42] K. F. Lee, Y. Tian, H. Yang, K. Mustonen, A. Martinez, Q. Dai, E. I. Kauppinen, J. Malowicki, P. Kumar, and Z. Sun, “Photon-pair generation with a 100 nm thick carbon nanotube film,” *Advanced Materials*, vol. 29, no. 24, p. 1605978, 2017.
- [43] S. Shi, P. Kumar, and K. F. Lee, “Generation of photonic entanglement in green fluorescent proteins,” *Nature Communications*, vol. 8, p. 1934, Dec 2017.
- [44] J. Trapateau, J. Ghalbouni, A. Orioux, E. Diamanti, and I. Zaquine, “Multi-user distribution of polarization entangled photon pairs,” *Journal of Applied Physics*, vol. 118, no. 14, p. 143106, 2015.
- [45] M. Peev, C. Pacher, R. Alléaume, C. Barreiro, J. Bouda, W. Boxleitner, T. Debuisschert, E. Diamanti, M. Dianati, J. F. Dynes, S. Fasel, S. Fossier, M. Fürst, J.-D. Gautier, O. Gay, N. Gisin, P. Grangier, A. Happe, Y. Hasani, M. Hentschel, H. Hübel, G. Humer, T. Länger, M. Legré, R. Lieger, J. Lodewyck, T. Lorünser, N. Lütkenhaus, A. Marhold, T. Matyus, O. Maurhart, L. Monat, S. Nauerth, J.-B. Page, A. Poppe, E. Querasser, G. Ribordy, S. Robyr, L. Salvail, A. W. Sharpe, A. J. Shields, D. Stucki, M. Suda, C. Tamas, T. Themel, R. T. Thew, Y. Thoma, A. Treiber, P. Trinkler, R. Tualle-Brouri, F. Vannel, N. Walenta, H. Weier, H. Weinfurter, I. Wimberger, Z. L. Yuan, H. Zbinden, and A. Zeilinger, “The SECOQC quantum key distribution network in vienna,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 7, p. 075001, 2009.
- [46] H. Hübel, M. R. Vanner, T. Lederer, B. Blauensteiner, T. Lorünser, A. Poppe, and A. Zeilinger, “High-fidelity transmission of polarization encoded qubits from an entangled source over 100 km of fiber,” *Opt. Express*, vol. 15, pp. 7853–7862, Jun 2007.



- 
- [47] L. G. Helt, E. Y. Zhu, M. Liscidini, L. Qian, and J. E. Sipe, “Proposal for in-fiber generation of telecom-band polarization-entangled photon pairs using a periodically poled fiber,” *Opt. Lett.*, vol. 34, pp. 2138–2140, Jul 2009.
- [48] G. Bonfrate, V. Pruneri, P. G. Kazansky, P. Tapster, and J. G. Rarity, “Parametric fluorescence in periodically poled silica fibers,” *Applied Physics Letters*, vol. 75, no. 16, pp. 2356–2358, 1999.
- [49] K. Phan Huy, A. T. Nguyen, E. Brainis, M. Haelterman, P. Emplit, C. Corbari, A. Canagasabay, M. Ibsen, P. G. Kazansky, O. Deparis, A. A. Fotiadi, P. Mégret, and S. Massar, “Photon pair source based on parametric fluorescence in periodically poled twin-hole silica fiber,” *Opt. Express*, vol. 15, pp. 4419–4426, Apr 2007.
- [50] J. Li and M. K. Olsen, “Quantum correlations across two octaves from combined up- and down-conversion,” *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 043856, Apr 2018.
- [51] J. Chen, X. Li, and P. Kumar, “Two-photon-state generation via four-wave mixing in optical fibers,” *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 033801, Sep 2005.
- [52] M. Barbier, *Generation of correlated photon pairs by spontaneous four-wave mixing in liquid-filled hollow-core photonic crystal fibres*. Theses, Institut d’Optique Graduate School, Nov. 2014.
- [53] S. D. Dyer, B. Baek, and S. W. Nam, “High-brightness, low-noise, all-fiber photon pair source,” *Opt. Express*, vol. 17, pp. 10290–10297, Jun 2009.
- [54] K. F. Lee, J. Chen, C. Liang, X. Li, P. L. Voss, and P. Kumar, “Generation of high-purity telecom-band entangled photon pairs in dispersion-shifted fiber,” *Opt. Lett.*, vol. 31, pp. 1905–1907, Jun 2006.
- [55] O. Alibart, J. Fulconis, G. K. L. Wong, S. G. Murdoch, W. J. Wadsworth, and J. G. Rarity, “Photon pair generation using four-wave mixing in a microstructured fibre : theory versus experiment,” *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 5, p. 67, 2006.
- [56] Q. Lin and G. P. Agrawal, “Silicon waveguides for creating quantum-correlated photon pairs,” *Opt. Lett.*, vol. 31, pp. 3140–3142, Nov 2006.
- [57] C. Xiong, C. Monat, A. S. Clark, C. Grillet, G. D. Marshall, M. J. Steel, J. Li, L. O’Faolain, T. F. Krauss, J. G. Rarity, and B. J. Eggleton, “Slow-light enhanced correlated photon pair generation in a silicon photonic crystal waveguide,” *Opt. Lett.*, vol. 36, pp. 3413–3415, Sep 2011.
- [58] M. Barbier, I. Zaquine, and P. Delaye, “Spontaneous four-wave mixing in liquid-core fibers : towards fibered raman-free correlated photon sources,” *New Journal of Physics*, vol. 17, no. 5, p. 053031, 2015.
- [59] N. Quesada and J. E. Sipe, “Why you should not use the electric field to quantize in nonlinear optics,” *Opt. Lett.*, vol. 42, pp. 3443–3446, Sep 2017.
- [60] M. Cordier, A. Orioux, R. Gabet, T. Harlé, N. Dubreuil, E. Diamanti, P. Delaye, and I. Zaquine, “Raman-tailored photonic crystal fiber for telecom band photon-pair generation,” *Opt. Lett.*, vol. 42, pp. 2583–2586, Jul 2017.
- [61] M. Cordier, A. Orioux, B. Debord, F. Gérome, A. Gorse, M. Chafer, E. Diamanti, P. Delaye, F. Benabid, and I. Zaquine, “Active engineering of four-wave mixing spectral entanglement in hollow-core fibers,” *ArXiv e-prints*, July 2018. arXiv1807.11402v.
- [62] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*. Academic Press, 3rd ed., Mar 2008.
- [63] M. Hillery, “An introduction to the quantum theory of nonlinear optics,” *Acta Physica Slovaca*, vol. 59, p. 1, 2009.
- [64] E. Jakeman and J. Rarity, “The use of pair production processes to reduce quantum noise in transmission measurements,” *Optics Communications*, vol. 59, no. 3, pp. 219 – 223, 1986.
-

- [65] G. Brida, M. Genovese, M. Gramegna, and C. Novero, “Experimental limit on spontaneous parametric up conversion,” *Journal of Modern Optics*, vol. 50, pp. 1757–1762, Nov. 2003. arXiv :quant-ph/0307094.
- [66] G. Brida, M. Genovese, M. Gramegna, and C. Novero, “Experimental limit on spontaneous parametric up conversion,” *Journal of Modern Optics*, vol. 50, no. 11, pp. 1757–1762, 2003.
- [67] W. H. Louisell, A. Yariv, and A. E. Siegman, “Quantum fluctuations and noise in parametric processes. i.,” *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 1646–1654, Dec 1961.
- [68] J. Huang and P. Kumar, “Observation of quantum frequency conversion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, pp. 2153–2156, Apr 1992.
- [69] J. Sun, S. Zhang, T. Jia, Z. Wang, and Z. Sun, “Femtosecond spontaneous parametric upconversion and downconversion in a quadratic nonlinear medium,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 26, pp. 549–553, Mar 2009.
- [70] S. Lefrancois, A. S. Clark, and B. J. Eggleton, “Optimizing optical bragg scattering for single-photon frequency conversion,” *Phys. Rev. A*, vol. 91, p. 013837, Jan 2015.
- [71] H. J. McGuinness, M. G. Raymer, and C. J. McKinstrie, “Theory of quantum frequency translation of light in optical fiber : application to interference of two photons of different color,” *Opt. Express*, vol. 19, pp. 17876–17907, Sep 2011.
- [72] C. J. McKinstrie, J. D. Harvey, S. Radic, and M. G. Raymer, “Translation of quantum states by four-wave mixing in fibers,” *Opt. Express*, vol. 13, pp. 9131–9142, Oct 2005.
- [73] S. Clemmen, A. Farsi, S. Ramelow, and A. L. Gaeta, “All-optically tunable buffer for single photons,” *Opt. Lett.*, vol. 43, pp. 2138–2141, May 2018.
- [74] H. J. McGuinness, M. G. Raymer, C. J. McKinstrie, and S. Radic, “Quantum frequency translation of single-photon states in a photonic crystal fiber,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 093604, Aug 2010.
- [75] L. Mejling, C. J. McKinstrie, M. G. Raymer, and K. Rottwitt, “Quantum frequency translation by four-wave mixing in a fiber : low-conversion regime,” *Opt. Express*, vol. 20, pp. 8367–8396, Apr 2012.
- [76] C. J. McKinstrie, L. Mejling, M. G. Raymer, and K. Rottwitt, “Quantum-state-preserving optical frequency conversion and pulse reshaping by four-wave mixing,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 053829, May 2012.
- [77] C. Joshi, A. Farsi, S. Clemmen, S. Ramelow, and A. L. Gaeta, “Frequency multiplexing for quasi-deterministic heralded single-photon sources,” *Nature Communications*, vol. 9, p. 847, Feb 2018.
- [78] Q. Li, M. Davanço, and K. Srinivasan, “Efficient and low-noise single-photon-level frequency conversion interfaces using silicon nanophotonics,” *Nature Photonics*, vol. 10, p. 406, Apr 2016.
- [79] K. Krupa, A. Tonello, V. V. Kozlov, V. Couderc, P. D. Bin, S. Wabnitz, A. Barthélémy, L. Labonté, and S. Tanzilli, “Bragg-scattering conversion at telecom wavelengths towards the photon counting regime,” *Opt. Express*, vol. 20, pp. 27220–27225, Nov 2012.
- [80] K. Li, H. Sun, and A. C. Foster, “Four-wave mixing bragg scattering in hydrogenated amorphous silicon waveguides,” *Opt. Lett.*, vol. 42, pp. 1488–1491, Apr 2017.
- [81] B. A. Bell, J. He, C. Xiong, and B. J. Eggleton, “Frequency conversion in silicon in the single photon regime,” *Opt. Express*, vol. 24, pp. 5235–5242, Mar 2016.
- [82] I. Agha, S. Ates, M. Davanço, and K. Srinivasan, “A chip-scale, telecommunications-band frequency conversion interface for quantum emitters,” *Opt. Express*, vol. 21, pp. 21628–21638, Sep 2013.

- [83] Q. Lin, F. Yaman, and G. P. Agrawal, "Photon-pair generation in optical fibers through four-wave mixing : Role of raman scattering and pump polarization," *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 023803, Feb 2007.
- [84] J. Fan, A. Migdall, J. Chen, and E. A. Goldschmidt, "Microstructure-fiber-based source of photonic entanglement," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 15, pp. 1724–1732, Nov 2009.
- [85] L. J. Wang, C. K. Hong, and S. R. Friberg, "Generation of correlated photons via four-wave mixing in optical fibres," *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 3, no. 5, p. 346, 2001.
- [86] J.-C. Beugnot, *Stimulated Brillouin Scattering in Photonic Crystal Fibre*. Theses, Université de Franche-Comté, Dec. 2007.
- [87] X. Li, J. Chen, P. Voss, J. Sharping, and P. Kumar, "All-fiber photon-pair source for quantum communications : Improved generation of correlated photons," *Opt. Express*, vol. 12, pp. 3737–3744, Aug 2004.
- [88] R. F. Cregan, B. J. Mangan, J. C. Knight, T. A. Birks, P. S. J. Russell, P. J. Roberts, and D. C. Allan, "Single-mode photonic band gap guidance of light in air," *Science*, vol. 285, no. 5433, pp. 1537–1539, 1999.
- [89] F. Benabid, P. Roberts, F. Couny, and P. Light, "Light and gas confinement in hollow-core photonic crystal fibre based photonic microcells," *Journal of the European Optical Society - Rapid publications*, vol. 4, no. 0, 2009.
- [90] S. Lebrun, P. Delaye, R. Frey, and G. Roosen, "High-efficiency single-mode raman generation in a liquid-filled photonic bandgap fiber," *Opt. Lett.*, vol. 32, pp. 337–339, Feb 2007.
- [91] S. Lebrun, M.-C. Phan Huy, P. Delaye, and G. Pauliat, "Efficient stimulated raman scattering in hybrid liquid-silica fibers for wavelength conversion," *Proceeding SPIE*, vol. 10021, pp. 10021 – 10021 – 11, 2016.
- [92] J. Rheims, J. Köser, and T. Wriedt, "Refractive-index measurements in the near-ir using an abbe refractometer," *Measurement Science and Technology*, vol. 8, no. 6, p. 601, 1997.
- [93] S. A. Wiczorek, A. Urbanczyk, and W. V. Hook, "Application of interferometric continuous-dilution differential refractometry to some solutions, including isotopomer solutions : isotope effects on polarizability in liquids," *The Journal of Chemical Thermodynamics*, vol. 28, no. 9, pp. 1009 – 1018, 1996.
- [94] M. C. Phan Huy, A. Baron, S. Lebrun, R. Frey, and P. Delaye, "Characterization of self-phase modulation in liquid filled hollow core photonic bandgap fibers," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 27, pp. 1886–1893, Sep 2010.
- [95] M. C. Phan Huy, A. Baron, S. Lebrun, R. Frey, and P. Delaye, "Characterization of self-phase modulation in liquid filled hollow core photonic band gap fibers : erratum," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 30, pp. 1651–1651, Jun 2013.
- [96] J.-L. Smirr, M. Deconinck, R. Frey, I. Agha, E. Diamanti, and I. Zaquine, "Optimal photon-pair single-mode coupling in narrow-band spontaneous parametric downconversion with arbitrary pump profile," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 30, pp. 288–301, Feb 2013.
- [97] W. P. Grice, A. B. U'Ren, and I. A. Walmsley, "Eliminating frequency and space-time correlations in multiphoton states," *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 063815, Nov 2001.
- [98] B. Fang, O. Cohen, J. B. Moreno, and V. O. Lorenz, "State engineering of photon pairs produced through dual-pump spontaneous four-wave mixing," *Opt. Express*, vol. 21, pp. 2707–2717, Feb 2013.
- [99] J. Bures, *Optique Guidée*. Presse Internationale Polytechnique, 2009.

- [100] T. A. Birks, D. M. Bird, T. D. Hedley, J. M. Pottage, and P. S. Russell, “Scaling laws and vector effects in bandgap-guiding fibres,” *Opt. Express*, vol. 12, pp. 69–74, Jan 2004.
- [101] G. Antonopoulos, F. Benabid, T. A. Birks, D. M. Bird, J. C. Knight, and P. S. J. Russell, “Experimental demonstration of the frequency shift of bandgaps in photonic crystal fibers due to refractive index scaling,” *Opt. Express*, vol. 14, pp. 3000–3006, Apr 2006.
- [102] K. Nielsen, D. Noordegraaf, T. Sørensen, A. Bjarklev, and T. P. Hansen, “Selective filling of photonic crystal fibres,” *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, vol. 7, no. 8, p. L13, 2005.
- [103] G. Dellepiane and J. Overend, “Vibrational spectra and assignment of acetone,  $\alpha\alpha\alpha$  acetone-d3 and acetone-d6,” *Spectrochimica Acta*, vol. 22, no. 4, pp. 593 – 614, 1966.
- [104] M. Liscidini and J. E. Sipe, “Stimulated emission tomography,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 193602, Nov 2013.
- [105] W. P. Grice and I. A. Walmsley, “Spectral information and distinguishability in type-ii down-conversion with a broadband pump,” *Phys. Rev. A*, vol. 56, pp. 1627–1634, Aug 1997.
- [106] P. N. Butcher and D. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, 1991.
- [107] J.-L. Smirr, *Towards a narrow-band source of polarisation entangled photon at 1550 nm*. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, Nov. 2010.
- [108] R. Ghosh, C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, “Interference of two photons in parametric down conversion,” *Phys. Rev. A*, vol. 34, pp. 3962–3968, Nov 1986.
- [109] J. Chen, X. Li, and P. Kumar, “Quantum theory for two-photon-state generation by means of four-wave mixing in optical fiber,” *Proceeding SPIE*, vol. 5551, pp. 5551 – 5551 – 8, 2004.
- [110] T. E. Keller and M. H. Rubin, “Theory of two-photon entanglement for spontaneous parametric down-conversion driven by a narrow pump pulse,” *Phys. Rev. A*, vol. 56, pp. 1534–1541, Aug 1997.
- [111] K. Garay-Palmett, A. B. U’Ren, and R. Rangel-Rojo, “Conversion efficiency in the process of copolarized spontaneous four-wave mixing,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 043809, Oct 2010.
- [112] M. Hillery and L. D. Mlodinow, “Quantization of electrodynamics in nonlinear dielectric media,” *Phys. Rev. A*, vol. 30, pp. 1860–1865, Oct 1984.
- [113] M. Hillery and L. D. Mlodinow, “Semiclassical expansion for nonlinear dielectric media,” *Phys. Rev. A*, vol. 31, pp. 797–806, Feb 1985.
- [114] P. D. Drummond and M. Hillery, *The Quantum Theory of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, Mar 2014.
- [115] T. G. Mackay and A. Lakhtakia, *Electromagnetic Anisotropy and Bianisotropy*. Wolrd Scientific, 2009.
- [116] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 3rd ed., Aug 1998.
- [117] M. A. Parker, *Physics of Optoelectronics*. CRC Press, 1st ed., May 2005.
- [118] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, 3rd ed., Nov 2000.
- [119] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique quantique*. Enseignement des sciences, 1973.
- [120] D. Klyshko, *Photons and nonlinear optics*. CRC Press, Jan 1988.
- [121] A. Safaei Bezgabadi and M. Agha Bolorizadeh, “Quantization of Electromagnetic Radiation in Dielectrics with Presence of Third Order Dispersion Term,” *ArXiv e-prints*, Jan. 2018. arXiv :1801.02098.

- 
- [122] A. Safaei, A. Bassi, and M. A. Bolorizadeh, “Quantum treatment of field propagation in a fiber near the zero dispersion wavelength,” *Journal of Optics*, vol. 20, no. 5, p. 055402, 2018.
- [123] J. E. Sipe, N. A. R. Bhat, P. Chak, and S. Pereira, “Effective field theory for the nonlinear optical properties of photonic crystals,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. 016604, Jan 2004.
- [124] K. J. Blow, R. Loudon, S. J. D. Phoenix, and T. J. Shepherd, “Continuum fields in quantum optics,” *Phys. Rev. A*, vol. 42, pp. 4102–4114, Oct 1990.
- [125] J. G. Koefoed, J. B. Christensen, and K. Rottwitt, “Effects of noninstantaneous nonlinear processes on photon-pair generation by spontaneous four-wave mixing,” *Phys. Rev. A*, vol. 95, p. 043842, Apr 2017.
- [126] N. J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson, and N. Gisin, “Security of quantum key distribution using  $d$ -level systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 127902, Mar 2002.
- [127] J. B. Christensen, C. J. McKinstrie, and K. Rottwitt, “Temporally uncorrelated photon-pair generation by dual-pump four-wave mixing,” *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 013819, Jul 2016.
- [128] E. Ortiz-Ricardo, C. Bertoni-Ocampo, Z. Ibarra-Borja, R. Ramirez-Alarcon, D. Cruz-Delgado, H. Cruz-Ramirez, K. Garay-Palmett, and A. B. U’Ren, “Spectral tunability of two-photon states generated by spontaneous four-wave mixing : fibre tapering, temperature variation and longitudinal stress,” *Quantum Science and Technology*, vol. 2, no. 3, p. 034015, 2017.
- [129] R. Renner, N. Gisin, and B. Kraus, “Information-theoretic security proof for quantum-key-distribution protocols,” *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 012332, Jul 2005.
- [130] B. Kraus, N. Gisin, and R. Renner, “Lower and upper bounds on the secret-key rate for quantum key distribution protocols using one-way classical communication,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 080501, Aug 2005.
- [131] N. A. Silva and A. N. Pinto, “Effects of losses and nonlinearities on the generation of polarization entangled photons,” *J. Lightwave Technol.*, vol. 31, pp. 1309–1317, Apr 2013.
- [132] S. D. Dyer, M. J. Stevens, B. Baek, and S. W. Nam, “High-efficiency, ultra low-noise all-fiber photon-pair source,” *Opt. Express*, vol. 16, pp. 9966–9977, Jun 2008.
- [133] E. Y. Zhu, Z. Tang, L. Qian, L. G. Helt, M. Liscidini, J. E. Sipe, C. Corbari, A. Canagasabay, M. Ibsen, and P. G. Kazansky, “Poled-fiber source of broadband polarization-entangled photon pairs,” *Opt. Lett.*, vol. 38, pp. 4397–4400, Nov 2013.
- [134] E. Y. Zhu, Z. Tang, L. Qian, L. G. Helt, M. Liscidini, J. E. Sipe, C. Corbari, A. Canagasabay, M. Ibsen, and P. G. Kazansky, “Direct generation of polarization-entangled photon pairs in a poled fiber,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 213902, May 2012.
- [135] C. Liang, K. F. Lee, M. Medic, P. Kumar, R. H. Hadfield, and S. W. Nam, “Characterization of fiber-generated entangled photon pairs with superconducting single-photon detectors,” *Opt. Express*, vol. 15, pp. 1322–1327, Feb 2007.
- [136] H. Takesue and K. Inoue, “Generation of  $1.5\text{-}\mu\text{m}$  band time-bin entanglement using spontaneous fiber four-wave mixing and planar light-wave circuit interferometers,” *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 041804, Oct 2005.
- [137] F. Poletti, M. N. Petrovich, and D. J. Richardson, “Hollow-core photonic bandgap fibers : technology and applications,” *Nanophotonics*, vol. 2, p. 315, 2013.
- [138] M. Santandrea, M. Stefszky, V. Ansari, and C. Silberhorn, “Fabrication limits of waveguides in nonlinear crystals and their impact on quantum optics applications,” *ArXiv e-prints*, Sept. 2018. arXiv :1809.08802.
- [139] A. Kudlinski, M. Lelek, B. Barviau, L. Audry, and A. Mussot, “Efficient blue conversion from a 1064 nm microchip laser in long photonic crystal fiber tapers for fluorescence microscopy,” *Opt. Express*, vol. 18, pp. 16640–16645, Aug 2010.
-

- [140] G. Brambilla, F. Xu, P. Horak, Y. Jung, F. Koizumi, N. P. Sessions, E. Koukharenko, X. Feng, G. S. Murugan, J. S. Wilkinson, and D. J. Richardson, “Optical fiber nanowires and microwires : fabrication and applications,” *Adv. Opt. Photon.*, vol. 1, pp. 107–161, Jan 2009.
- [141] M. V. Chekhova, S. Germanskiy, D. B. Horoshko, G. K. Kitaeva, M. I. Kolobov, G. Leuchs, C. R. Phillips, and P. A. Prudkovskii, “Broadband bright twin beams and their upconversion,” *Opt. Lett.*, vol. 43, pp. 375–378, Feb 2018.
- [142] S. Sensarn, G. Y. Yin, and S. E. Harris, “Generation and compression of chirped biphotons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 253602, Jun 2010.
- [143] M. B. Nasr, S. Carrasco, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, M. C. Teich, J. P. Torres, L. Torner, D. S. Hum, and M. M. Fejer, “Ultrabroadband biphotons generated via chirped quasi-phase-matched optical parametric down-conversion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 183601, May 2008.
- [144] M. Abramowitz and I. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 9th ed., Nov 1970.
- [145] J. Fan, M. D. Eisaman, and A. Migdall, “Bright phase-stable broadband fiber-based source of polarization-entangled photon pairs,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 043836, Oct 2007.
- [146] M. Hentschel, H. Hübel, A. Poppe, and A. Zeilinger, “Three-color sagnac source of polarization-entangled photon pairs,” *Opt. Express*, vol. 17, pp. 23153–23159, Dec 2009.
- [147] B. Fang, O. Cohen, and V. O. Lorenz, “Polarization-entangled photon-pair generation in commercial-grade polarization-maintaining fiber,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 31, pp. 277–281, Feb 2014.
- [148] D. Dehlinger and M. W. Mitchell, “Entangled photons, nonlocality, and bell inequalities in the undergraduate laboratory,” *American Journal of Physics*, vol. 70, no. 9, pp. 903–910, 2002.
- [149] L. Cui, X. Li, and N. Zhao, “Spectral properties of photon pairs generated by spontaneous four-wave mixing in inhomogeneous photonic crystal fibers,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 023825, Feb 2012.
- [150] R. J. A. Francis-Jones and P. J. Mosley, “Characterisation of longitudinal variation in photonic crystal fibre,” *Opt. Express*, vol. 24, pp. 24836–24845, Oct 2016.
- [151] E. Meyer-Scott, V. Roy, J.-P. Bourgoin, B. L. Higgins, L. K. Shalm, and T. Jennewein, “Generating polarization-entangled photon pairs using cross-spliced birefringent fibers,” *Opt. Express*, vol. 21, pp. 6205–6212, Mar 2013.
- [152] D. Descloux, C. Laporte, J.-B. Dherbecourt, J.-M. Melkonian, M. Raybaut, C. Drag, and A. Godard, “Spectrotemporal dynamics of a picosecond opo based on chirped quasi-phase-matching,” *Opt. Lett.*, vol. 40, pp. 280–283, Jan 2015.
- [153] S. T. Sørensen, A. Judge, C. L. Thomsen, and O. Bang, “Optimum fiber tapers for increasing the power in the blue edge of a supercontinuum—group-acceleration matching,” *Opt. Lett.*, vol. 36, pp. 816–818, Mar 2011.
- [154] A. Mussot, M. Conforti, S. Trillo, F. Copie, and A. Kudlinski, “Modulation instability in dispersion oscillating fibers,” *Adv. Opt. Photon.*, vol. 10, pp. 1–42, Mar 2018.
- [155] Y. Chen, Z. Liu, S. R. Sandoghchi, G. T. Jasion, T. D. Bradley, E. N. Fokoua, J. R. Hayes, N. V. Wheeler, D. R. Gray, B. J. Mangan, R. Slavík, F. Poletti, M. N. Petrovich, and D. J. Richardson, “Multi-kilometer long, longitudinally uniform hollow core photonic bandgap fibers for broadband low latency data transmission,” *J. Lightwave Technol.*, vol. 34, pp. 104–113, Jan 2016.
- [156] E. N. Fokoua, F. Poletti, and D. J. Richardson, “Analysis of light scattering from surface roughness in hollow-core photonic bandgap fibers,” *Opt. Express*, vol. 20, pp. 20980–20991, Sep 2012.

- 
- [157] M.-C. Phan-Huy, J.-M. Moison, J. A. Levenson, S. Richard, G. Mélin, M. Douay, and Y. Quiquempois, “Surface roughness and light scattering in a small effective area microstructured fiber,” *J. Lightwave Technol.*, vol. 27, pp. 1597–1604, Jun 2009.
- [158] M. Farahmand and M. de Sterke, “Parametric amplification in presence of dispersion fluctuations,” *Opt. Express*, vol. 12, pp. 136–142, Jan 2004.
- [159] M. Karlsson, “Four-wave mixing in fibers with randomly varying zero-dispersion wavelength,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 15, pp. 2269–2275, Aug 1998.
- [160] J. F. Nye, *Propriétés physiques des cristaux*. Dunod, 1961. Traduction par Daniel Blanc et Théophile Pujol.
- [161] S. J. Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antennas*.
- [162] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique : Mécanique*. Éditions MIR, 1969.
- [163] G. Brida, M. V. Chekhova, I. P. Degiovanni, M. Genovese, G. K. Kitaeva, A. Meda, and O. A. Shumilkina, “Chirped biphotons and their compression in optical fibers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 193602, Nov 2009.
- [164] M. Charbonneau-Lefort, M. M. Fejer, and B. Afeyan, “Tandem chirped quasi-phase-matching grating optical parametric amplifier design for simultaneous group delay and gain control,” *Opt. Lett.*, vol. 30, pp. 634–636, Mar 2005.
- [165] C. R. Phillips, C. Langrock, D. Chang, Y. W. Lin, L. Gallmann, and M. M. Fejer, “Apodization of chirped quasi-phases matching devices,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 30, pp. 1551–1568, Jun 2013.
- [166] O. Yaakobi and L. Friedland, “Autoresonant four-wave mixing in optical fibers,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 023820, Aug 2010.
- [167] E. Myslivets and S. Radic, “Spatially resolved measurements of the chromatic dispersion in fibers,” *J. Lightwave Technol.*, vol. 33, pp. 597–608, Feb 2015.





**Titre :** Sources fibrées de paires de photons : caractérisation et influence de la non-uniformité

**Mots clés :** Optique non linéaire, Mélange à quatre ondes, Paire de photons, Fibre à cristal photonique, Non-uniformité, Non-réciprocité

**Résumé :** Les sources de paires de photons constituent un bloc de base pour les technologies de traitement et transmission de l'information quantique. Une source consistant en une fibre microstructurée à coeur liquide permet à la fois une réduction du bruit de diffusion Raman, une adaptation simple et efficace aux réseaux de télécommunication quantique, et l'ajustement de ses propriétés d'émission par ingénierie de la microstructure et choix du liquide non linéaire. Ces recherches se concentrent sur l'étude de l'émission de paires de photons d'une telle source, et du mélange à quatre ondes à leur origine. Nous soulignons le manque d'une description quantitative correcte des phénomènes non linéaires à l'origine des paires dans les modèles existants, et en proposons un se basant sur le champ  $\vec{D}$  pour y parvenir. Nous mettons expérimentalement en évidence l'inconsistance avec la forme de spectre usuellement attendue les sources de paires de photons. Pour l'expliquer, nous développons un modèle rendant compte

de la non-uniformité du guide, soit la variation de ses propriétés de propagation sur sa longueur. Par une approche analytique initiale simple de cette caractéristique, nous exposons l'étalement du spectre et la diminution du taux maximum d'émission de paires. Une description numérique par morceaux apporte une description plus proche de la réalité et met en lumière la très forte sensibilité du spectre à la non-uniformité. Un autre effet de cette dernière se traduit par la différenciation du spectre selon le sens de propagation de la lumière dans le guide. Lors de l'intrication en polarisation des paires dans un dispositif de type boucle Sagnac, cette non-réciprocité dégrade la visibilité des paires. Pour compenser cet effet, nous proposons une solution simple de symétrisation du profil des fibres à leur fabrication, appuyée par de premiers résultats encourageants. Cette étude ouvre la voie à la prise en compte des non-uniformités inhérentes aux guides réels, impactant fortement leur émission de paires de photons.

**Title :** Fibered photon-pair sources : characterization and influence of nonuniformity

**Keywords :** Nonlinear optics, Four-wave mixing, Photon pair, Photonic crystal fiber, Nonuniformity, Nonreciprocity

**Abstract :** Photon-pair sources are a basic block for implementation of quantum information and telecommunication. A microstructured fibered source with liquid core induce a Raman scattering noise reduction, and at the same time allows a simple and lossless coupling to telecom network, with an engineering of its emission properties through the structure and liquid choices. This work focus on four-wave mixing leading to photon pairs emission in such a source. As existing models lack a correct quantitative description of nonlinear phenomena for pairs emission, we propose here one based on the  $\vec{D}$  field to do so. We show a mismatch between the spectrum form usually expected and the experimental one. To explain this, we develop a model describing the effects of guide nonuniformity, meaning variation of its propagation properties along itself. Through an initial and simple analytical approach, we demonstrate

the spectrum spreading and the diminution of the maximum of emission pairs rate. With a piece-wise numerical description for real guides, we highlight the very strong sensitivity of the emission spectrum towards nonuniformity. Another effect arising from this feature is the spectrum differentiation depending on the propagation direction within the guide. Upon pairs polarization entanglement by inserting the guide into a Sagnac loop interferometer, such nonreciprocity induces a deterioration of pairs visibility. In order to counteract this effect, we propose, based on first encouraging results, a simple solution involving a symmetrization of fibers profile during their manufacture. This study paves the way for taking into account inherent nonuniformity of real waveguides, which strongly impacts their photon pair emission.

